

Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ

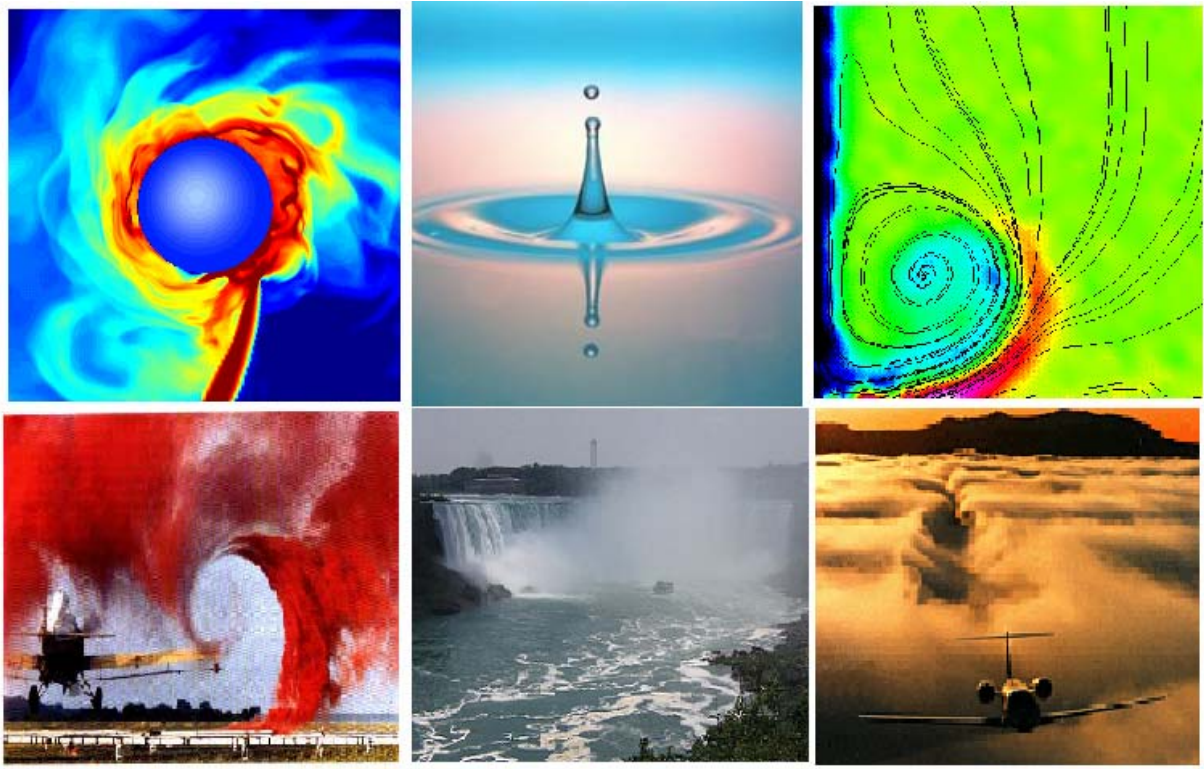
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*ΡΟΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟ ΣΩΛΗΝΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΓΙΑ  
ΙΞΩΔΕΣ ΑΣΥΜΠΤΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ*



Σπουδάστρια: ΖΔΕΤΣΗ ΣΩΤΗΡΙΑ

Εποπτεύων καθηγητής: Δρ. ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ

ΠΑΤΡΑ 2009

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Ευχαριστώ θερμά τον καθ. Δρ. Εμμανουήλ Πετράκη για την πολύτιμη καθοδήγηση και συμβολή του στην διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας καθώς και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και τους καθηγητές του ιδρύματος που μου μετέδωσαν ότι καλύτερο μπορούσαν στα πλαίσια της διδασκαλίας. Πολύτιμη ήταν και η χρήση της εκπληκτικής συλλογής βιβλίων και επιστημονικών περιοδικών που βρίσκονται στη βιβλιοθήκη του ιδρύματος για την άντληση πληροφοριών.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αφορά την μελέτη της ροής σε ευθύγραμμο αγωγό διαφόρων διατομών (τριγωνικής, κυκλικής, κτλ) για ιξώδες ασυμπίεστο ρευστό. Κατ' αρχήν διατυπώνονται οι εξισώσεις του προβλήματος και καθορίζεται ο αριθμός Dean, από τον οποίο εξαρτάται η ροή. Το θέμα προσεγγίζεται θεωρητικά και περιγράφεται η γενική μεθοδολογία επίλυσής του η οποία διακρίνεται σε αριθμητική, όπου οι θεμελιώδεις (συνεχείς) διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε διακριτές εξισώσεις διαφορών, και αναλυτική, στην οποία χρησιμοποιείται η θεωρία διαταραχών μέσω τις οποίας απλοποιούνται οι μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και μετατρέπονται σε ένα σύστημα από ομογενείς γραμμικές εξισώσεις β' τάξης, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν με μια από τις γνωστές μεθόδους. Δίνεται κύρια έμφαση στην αυστηρή μαθηματική περιγραφή μεθοδολογία και φορμαλισμό του προβλήματος(τόσο στην γενικότερη όσο και στην επί μέρους περιγραφή) και στην Φυσική διερεύνηση και κατανόηση των διαφαινομένων λύσεων οι οποίες σκιαγραφούνται.

Εύχομαι και ελπίζω αυτή η ελάχιστη προσπάθεια που έγινε εκ μέρους μου (εξάλλου το θέμα της εργασίας μας έχει μελετηθεί εκτεταμένα από τον εποπτεύων καθηγητή μας Δρ. Πετράκη Μ. στο παρελθόν) να προσθέσει ένα μικρό λιθαράκι, αν όχι εξ ολοκλήρου στην εξέλιξη της επιστήμης της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής αυτής καθεαυτής, αλλά τουλάχιστον στην καλύτερη εξοικείωση των μελλοντικών πολιτικών μηχανικών έργων υποδομής με την μεθοδολογία της και τις εφαρμογές της

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	<u>Σελ.</u>
<u>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</u> .....	<u>2</u>
<u>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</u> .....	<u>3</u>
<u>I. ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u> .....	<u>5</u>
<u>II. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u> .....	<u>18</u>
<u>III. ΡΟΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ</u> .....	<u>25</u>
<u>IV. Ένθετο 1 : Θεμελιώδεις εξισώσεις της Ρευστομηχανικής</u> .....	<u>27</u>
<u>V. Ένθετο 2 : Επισκόπηση της αριθμητικής μεθόδου ολοκλήρωσης των εξισώσεων της Ρευστομηχανικής</u> .....	<u>31</u>
<u>VI. ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΛΗΝΑ</u> .....	<u>39</u>
<u>VII. ΡΟΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟ ΣΩΛΗΝΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ</u> .....	<u>59</u>
<u>VIII. ΕΠΙΛΟΓΟΣ - ΣΥΝΟΨΗ</u> .....	<u>64</u>
<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ</u> .....	<u>65</u>
<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ: ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ</u> .....	<u>67-87</u>

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

### I. Τι είναι και τι σημαίνει η Δυναμική των ρευστών ή Υδροδυναμική

Αυτός ο κλάδος της ρευστομηχανικής ασχολείται με τους νόμους των ρευστών που βρίσκονται σε κίνηση. Αυτοί οι νόμοι είναι σημαντικά πολυπλοκότεροι εξαιτίας της μεγαλύτερης πρακτικής σημασίας, της δυναμικής των ρευστών.

Το ενδιαφέρον για την δυναμική των ρευστών χρονολογείται από την πρώτη μηχανική εφαρμογή στις υδροδυναμικές μηχανές. Ο *Αρχιμήδης* έκανε μία πρόιμη συνεισφορά με την εφεύρεση της αντλίας. Άλλες υδραυλικές μηχανές και συσκευές αναπτύχθηκαν από τους Ρωμαίους οι οποίοι δεν χρησιμοποίησαν μόνο την έλικα του Αρχιμήδη για άρδευση, άντληση σε ορυχεία αλλά επίσης κατασκεύασαν και συστήματα υδραγωγών. Ο Ρωμαίος αρχιτέκτων και μηχανικός *Βιτρούβιος* πρώτος περιέγραψε τον κάθετο υδροστρόβιλο.

Παρόλες τις πρόιμες εφαρμογές της δυναμικής των ρευστών, υπήρχε λίγη ή καθόλου κατανόηση της βασικής θεωρίας και συνεπώς υπήρξε μια αργοπορία στην ανάπτυξή της. Μετά τον Αρχιμήδη περισσότερα από 1800 χρόνια πέρασαν πριν την επόμενη σπουδαία επιστημονική πρόοδο που έγινε από τον Ιταλό μαθηματικό και φυσικό *Evangelista Torricelli* ο οποίος εφηύρε το βαρόμετρο το 1643.

### II. Είδη ροών (και προσεγγίσεων)

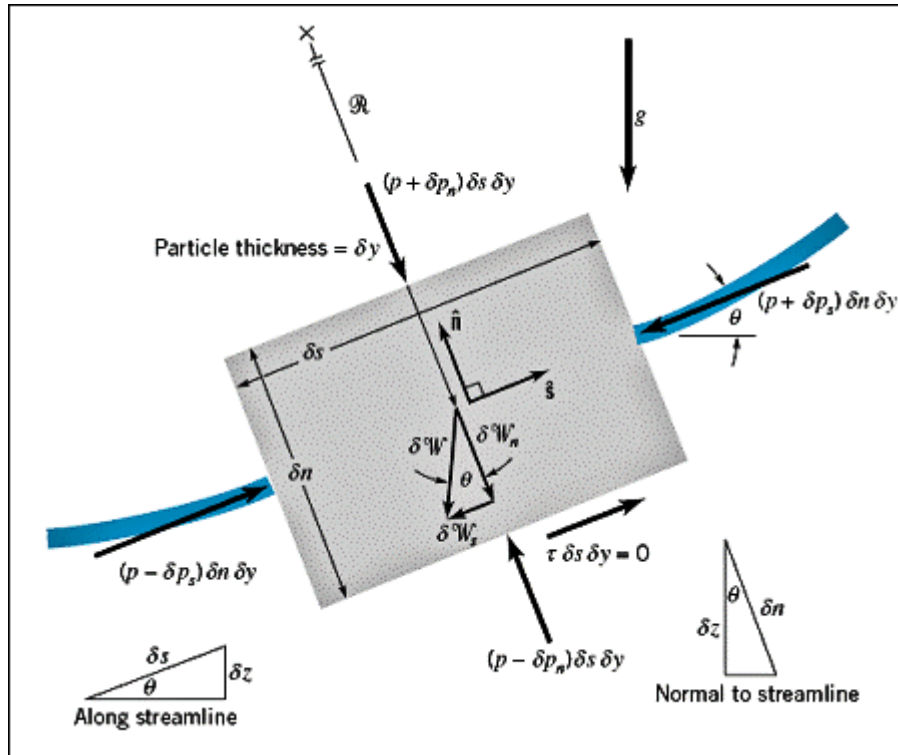
Ο Evangelista Torricelli τυποποίησε τον νόμο που διέπει την ροή ενός υγρού από ένα στόμιο. Η μεγάλη ώθηση όμως στην ανάπτυξη της μηχανικής των ρευστών δόθηκε εξαιτίας της ανακάλυψης τυποποίησης (μέσω διαφορικής εξισώσεως) του νόμου της κίνησης από τον Άγγλο μαθηματικό και φυσικό Isaac Newton. Αυτοί οι νόμοι εφαρμόστηκαν από τον Σουηδό μαθηματικό Leonard Euler στο πρόβλημα της ροής «υπό ιδανικές συνθήκες». Ο Euler παρήγαγε τις βασικές εξισώσεις για ένα ανιζώδες ή ατριβές ρευστό, αναγνωρίζοντας ότι οι δυναμικοί νόμοι για τα ρευστά μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά εάν το υγρό θεωρηθεί ασυμπίεστο και ιδανικό, όταν δηλαδή οι επιδράσεις της τριβής και του ιξώδους μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Επειδή αυτή η περίπτωση δεν ισχύει ποτέ για τα ρευστά σε κίνηση, τα αποτελέσματα μιας τέτοιας ανάλυσης μπορούν να εξυπηρετήσουν εκείνες τις ροές όπου οι επιδράσεις του ιξώδους είναι μικρές.

Διαφορετικά θα πρέπει να ακολουθήσουμε διαφορετική προσέγγιση. Είναι γνωστό πως η Φυσική, και η επιστήμη γενικότερα προχωρεί με μικρά βήματα διαδοχικών προσεγγίσεων για να πλησιάσει με μεγαλύτερη ακρίβεια την «πραγματική λύση». Κάθε βήμα είναι ακριβέστερο από το προηγούμενο αλλά και πολυπλοκότερο. Παρακάτω περιγράφουμε συνοπτικά και τις δύο περιπτώσεις (την «ιδανική» και την πιο ρεαλιστική).

### **1. Ασυμπίεστες και ανιζώδεις ή ατριβείς ροές**

Αυτές οι ροές ακολουθούν την αρχή του Bernoulli που ονομάστηκαν έτσι από το Σουηδό μαθηματικό και επιστήμονα Daniel Bernoulli. Η αρχή υποστηρίζει ότι η ολική μηχανική ενέργεια μιας ασυμπίεστης και ανιζώδους ροής είναι σταθερή κατά μήκος μίας ρευματικής γραμμής.

Οι ρευματικές γραμμές είναι φανταστικές ροϊκές γραμμές οι οποίες είναι πάντα παράλληλες στην τοπική διεύθυνση της ροής. Η αρχή του Bernoulli οδηγεί σε ένα συσχετισμό μεταξύ επιδράσεων της πίεσης, επιδράσεων της ταχύτητας και επιδράσεων της βαρύτητας. Αυτή η αρχή είναι σημαντική στο σχεδιασμό ακροφυσίων και στις μετρήσεις ροής.



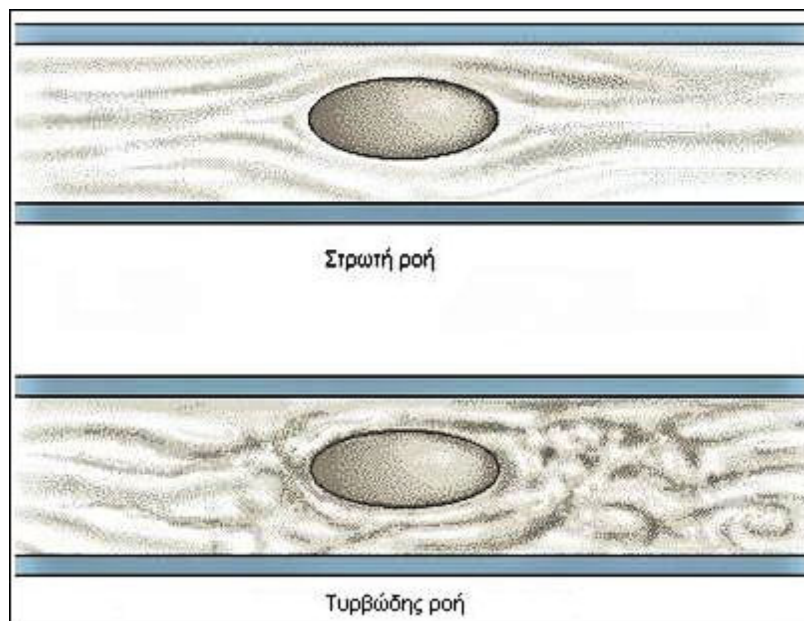
$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = \text{σταθερό κατά μήκος μίας ρευματικής γραμμής}$$

**Σχήμα 1:** διαφορική ανάλυση ρευματικής γραμμής

## **2. Ιξώδεις ροές, στρωτή και τυρβώδης κίνηση**

Τα πρώτα προσεκτικά τεκμηριωμένα πειράματα για την τριβή σε αγωγούς με χαμηλές ταχύτητες ροής διεξήχθησαν το 1839 από το Γάλλο φυσιολόγο Jean Leonard Marie Poiseuille, ο οποίος ενδιαφερόταν για τα χαρακτηριστικά της ροής του αίματος και το 1840 από τον Γερμανό υδραυλικό μηχανικό Gotthief Heinrich Ludwig Hagen. Μια προσπάθεια να συμπεριληφθούν οι επιδράσεις του ιξώδους στις μαθηματικές εξισώσεις έγινε πρώτα το 1827 από το Γάλλο μηχανικό Claude Louis Navier. Ο Βρετανός μαθηματικός Sir George Gabriel Stokes το 1845 τελειοποίησε τις βασικές εξισώσεις για ιξώδη ασυμπύεστα ρευστά. Αυτές είναι γνωστές ως οι εξισώσεις Navier - Stokes και είναι τόσο σύνθετες που μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε απλές ροές. Μια τέτοια ροή είναι εκείνη ενός πραγματικού ρευστού μέσα σε ένα ευθύγραμμο αγωγό. Εδώ η αρχή του

Bernoulli δεν είναι εφαρμόσιμη επειδή μέρος της ολικής μηχανικής ενέργειας εκλύεται ως αποτέλεσμα της τριβής λόγω ιξώδους καταλήγοντας σε μία πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού. Οι συναρτήσεις υποθέτουν ότι αυτή η πτώση πίεσης για ένα δεδομένο αγωγό και ένα δεδομένο ρευστό θα έπρεπε να είναι γραμμική με την ταχύτητα της ροής. Τα πρώτα πειράματα διεξήχθησαν γύρω στα μέσα του 19<sup>ου</sup> αιώνα και έδειξαν ότι αυτό επαληθευόταν μόνο για χαμηλές ταχύτητες. Σε υψηλές ταχύτητες η πτώση πίεσης ήταν σχεδόν ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας. Αυτό το πρόβλημα δεν είχε επιλυθεί μέχρι το 1883 όταν ο Βρετανός μηχανικός Osborne Reynolds έδειξε την ύπαρξη δύο ειδών ιξώδους ροής σε αγωγούς. Σε χαμηλές ταχύτητες τα σωματίδια του ρευστού ακολουθούν τις ρευματικές γραμμές (στρωτή ροή) και τα αποτελέσματα ταιριάζουν με την αναλυτική πρόβλεψη. Σε μεγαλύτερες ταχύτητες η ροή διασπάται σε μια διακύμανση ταχυτήτων ή δινών (τυρβώδης ροή) σε μορφή η οποία δεν μπορεί να προβλεφθεί πλήρως ακόμα και σήμερα.



**Σχήμα 2 :** στρωτή και τυρβώδης ροή



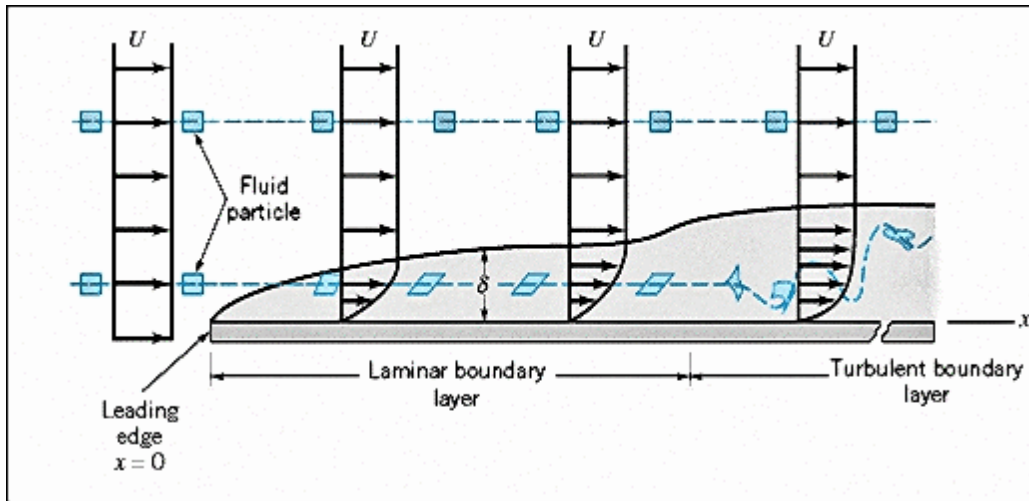
Ο Reynolds καθιέρωσε πως η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή ήταν συνάρτηση μιας μοναδικής παραμέτρου η οποία από τότε έχει γίνει γνωστή ως ο αριθμός Reynolds. Αυτός ορίζεται ως το γινόμενο της ταχύτητας, της πυκνότητας του ρευστού και της διαμέτρου του σωλήνα διαιρεμένο με το ιξώδες του ρευστού  $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$  και εκφράζει το πηλίκο των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις τριβής. Αν είναι μικρότερος του 2100 τότε η ροή θα είναι πάντα στρωτή ενώ για μεγαλύτερες τιμές η ροή κανονικά θα είναι τυρβώδης.

Οι τυρβώδεις ροές δεν μπορούν να αποτιμηθούν μεμονωμένα από υπολογισμένες προβλέψεις και εξαρτώνται από μία ανάμειξη πειραματικών πληροφοριών και μαθηματικών μοντέλων για την ανάλυσή τους.

### **3. Ροές οριακών στρωμάτων**

Πριν από το 1866 το μηχανικό ενδιαφέρον της ρευστομηχανικής ήταν περιορισμένο στις ροές του νερού. Η ανάπτυξη της χημικής βιομηχανίας κατά το τελευταίο μέρος του 19<sup>ου</sup> αιώνα κατεύθυνε την προσοχή σε άλλα ρευστά και αέρια. Το ενδιαφέρον για την αεροδυναμική άρχισε με τις μελέτες του Γερμανού αεροναυπηγού Otto Lilienthal την τελευταία δεκαετία του 18<sup>ου</sup> αιώνα και έγινε μεγάλη πρόοδος με την πρώτη επιτυχημένη πτήση από τους Αμερικανούς εφευρέτες Orville και Wilbur Wright το 1903.

Η πολυπλοκότητα ιξωδών ροών, ειδικά τυρβωδών ροών περιόρισε αυστηρά την πρόοδο στην δυναμική των ρευστών μέχρι που ο Γερμανός μηχανικός Ludwig Prandtl αναγνώρισε το 1904 ότι πολλές ροές μπορούσαν να διαιρεθούν σε δύο κύριες περιοχές. Η περιοχή κοντά στην επιφάνεια αποτελείται από ένα λεπτό οριακό στρώμα όπου οι ιξώδεις επιδράσεις είναι συγκεντρωμένες και έντονες και το μαθηματικό μοντέλο μπορεί να απλουστευθεί. Έξω από το οριακό στρώμα οι ιξώδεις επιδράσεις μπορούν να αμεληθούν και μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι απλούστερες μαθηματικές εξισώσεις για ανιξώδεις ροές.



**Σχήμα 3:** Το οριακό στρώμα

Το μοντέλο του οριακού στρώματος όχι μόνο επέτρεψε μία πολλή απλουστευμένη τυποποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes στην περιοχή κοντά στην επιφάνεια του σώματος αλλά επίσης οδήγησε σε περαιτέρω ανάπτυξη της ροής των ανιζωδών ρευστών που μπορούν να εφαρμοστούν έξω από το οριακό στρώμα. Πολλή από τη σύγχρονη ανάπτυξη της μηχανικής των ρευστών έγινε εφικτή χάρη στην έννοια του οριακού στρώματος και συμπληρώθηκε από διάφορους μελετητές όπως ο γεννημένος στην Ουγγαρία Αμερικανός αεροναυπηγός μηχανικός Theodore Von Karman, ο Γερμανός μαθηματικός Richard Von Mises και ο Βρετανός φυσικός και μετεωρολόγος sir Geoffrey Ingram Taylor.

#### **4. Συμπιεστές ροές**

Το ενδιαφέρον για τις συμπιεστές ροές άρχισε με την ανάπτυξη των ατμοστροβίλων από τον Βρετανό εφευρέτη Charles Algernon Parsons και τον Σουηδό μηχανικό Carl Gustaf Patrik de Laval στη δεκαετία του 1880. Αντιμετώπιστηκε πρώτα η

ροή υψηλής ταχύτητας του ατμού μέσα σε διόδους ροής και η ανάγκη για αποδοτικό σχεδιασμό στροβίλων οδήγησε σε βελτιωμένες αναλύσεις συμπιεστής ροής. Πρόοδοι σημειώθηκαν με την επιτυχή ανάπτυξη των αεροστροβίλων και μηχανών Jet στα 1930. Το ενδιαφέρον σε ροές υψηλών ταχυτήτων πάνω σε επιφάνειες προέκυψε πάνω στη μελέτη της βαλλιστικής επιστήμης. Μεγάλες εξελίξεις ξεκίνησαν κατά το τέλος του 19<sup>ου</sup> αιώνα συμπεριλαμβάνοντας μεταξύ άλλων τον Prandtl και τους μαθητές του και αυξήθηκαν μετά την εισαγωγή των αεροσκαφών υψηλής ταχύτητας και των πυραύλων στο Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο.

Μία από τις βασικές αρχές των συμπιεστών ροών είναι πως η πυκνότητα ενός αερίου αλλάζει όταν το αέριο υφίσταται μεγάλες αλλαγές στην ταχύτητα και την πίεση. Όμως την ίδια στιγμή η θερμοκρασία του αλλάζει οδηγώντας σε πιο πολύπλοκους τρόπους ανάλυσης. Η συμπεριφορά της ροής ενός συμπιεστού αερίου εξαρτάται από το εάν η ταχύτητα της ροής είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου. Η ταχύτητα του ήχου είναι το όνομα που έχει δοθεί στην ταχύτητα διάδοσης μιας πολύ μικρής διαταραχής, η κύματος πίεσης μέσα στο ρευστό. Για ένα αέριο αυτή είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της απόλυτης θερμοκρασίας. Λόγου χάρη ο αέρας στους 20° C ή 293° K έχει μια ταχύτητα ήχου 344,65[m/s] (1130 [ft/s]). Εάν η ταχύτητα της ροής είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου (υποηχητική ροή), κύματα πίεσεως μπορούν να μεταδοθούν μέσα σε όλο το ρευστό για να διαρρυθμίσουν τη ροή που ορμά προς ένα αντικείμενο. Οι συμπιεστές ροές συχνά καθορίζονται από τον αριθμό Mach ο οποίος είναι ο λόγος της ταχύτητας της ροής προς την ταχύτητα του ήχου. Οι υπερηχητικές ροές συνεπώς έχουν έναν αριθμό Mach  $M > 1$ .

### **III. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ**

Το γενικό πεδίο της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (Computational Fluid Dynamics, CFD) στο οποίο υπολογιστές και αριθμητική ανάλυση συνδυάζονται για να λύσουν προβλήματα ροής ρευστών, παριστάνει μια εξαιρετικά σημαντική περιοχή θεμάτων στην εφαρμοσμένη ρευστομηχανική. Σημαντική πρόοδος έχει γίνει στα

περασμένα λίγα σχετικά χρόνια αλλά πολλά απομένουν ακόμα να γίνουν. Στη συνέχεια περιγράφονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σε αυτόν τον τόσο ελκυστικό κλάδο για την προσομοίωση και επίλυση εξειδικευμένων προβλημάτων ροής.

## 1) ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Στην πραγματικότητα υπάρχουν πολύ λίγα πρακτικά προβλήματα τα οποία θα μπορούσαν να λυθούν χρησιμοποιώντας μια ακριβή αναλυτική προσέγγιση. Για παράδειγμα, δεν υπάρχουν γνωστές αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Navier-Stokes για ροή που διαπερνά ένα αντικείμενο όπως μία σφαίρα, έναν κύβο ή ένα αεροπλάνο. Εξαιτίας της δυσκολίας στην επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, μεγάλη προσοχή έχει δοθεί σε διάφορους τύπους προσεγγιστικών λύσεων. Για παράδειγμα, εάν το ιξώδες θεωρηθεί ίσο με 0 τότε οι Navier-Stokes απλοποιούνται στις εξισώσεις του Euler. Έτσι οι λύσεις ανιξώδους ρευστού είναι στην πραγματικότητα προσεγγιστικές λύσεις των εξισώσεων Navier-Stokes. Από την άλλη πλευρά, για προβλήματα που αφορούν ρευστά σε αργή κίνηση, οι επιδράσεις του ιξώδους μπορεί να είναι επικρατέστερες και οι όροι της μη γραμμικής επιτάχυνσης μπορούν να αμεληθούν. Αυτή η θεώρηση απλουστεύει αρκετά την ανάλυση αφού οι εξισώσεις τώρα γίνονται γραμμικές. Υπάρχουν πολυάριθμες αναλυτικές λύσεις σε αυτά τα προβλήματα ‘αργής ροής’. Μια άλλη πλατιά κατηγορία προσεγγιστικών λύσεων αφορά τη ροή στο πολύ λεπτό οριακό στρώμα. Ο L. Prandtl έδειξε το 1904 πως οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούσαν να απλουστευθούν για να μελετηθεί η ροή σε οριακά στρώματα.

## 2) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Οι αριθμητικές μέθοδοι με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών χρησιμοποιούνται κοινώς για την επίλυση μιας ευρείας ποικιλίας προβλημάτων. Αν και οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή Νευτωνικών ρευστών (οι εξισώσεις Navier – Stokes) είχαν παραγωγησθεί πολλά χρόνια πριν, υπάρχουν λίγες γνωστές αναλυτικές λύσεις γι’ αυτές. Με την έλευση των ψηφιακών υπολογιστών υψηλής ταχύτητας έχει

καταστεί δυνατό να λαμβάνουμε προσεγγιστικές αριθμητικές λύσεις σε αυτές (και άλλα προβλήματα ρευστομηχανικής) τις εξισώσεις για μια ευρεία ποικιλία περιπτώσεων.

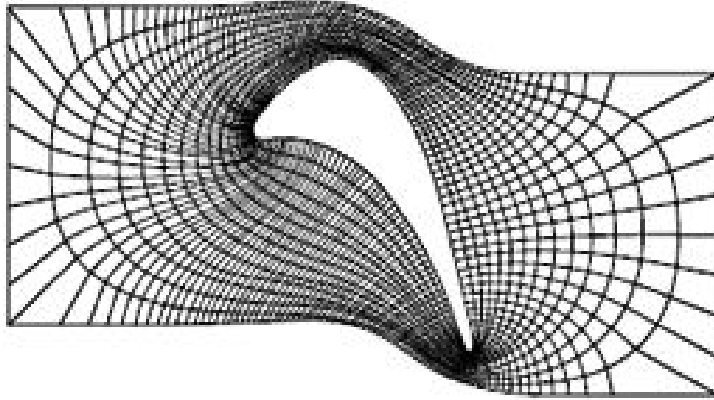
Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής ενός ρευστού, οι ακόλουθες τρεις μέθοδοι είναι οι πιο κοινές:

- i) **η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών** (*the finite difference method*)
- ii) **η μέθοδος του πεπερασμένου στοιχείου ή πεπερασμένου όγκου** (*the finite element or finite volume method*)
- iii) **η μέθοδος του οριακού στοιχείου** (*the boundary element method*)

Σε κάθε μία από αυτές τις μεθόδους το συνεχές πεδίο ροής (η ταχύτητα ή η πίεση σαν συνάρτηση του χώρου και του χρόνου) περιγράφεται σε όρους διακριτοποιημένων (αντί συνεχών) τιμών σε προκαθορισμένα σημεία. Με αυτή την τεχνική οι διαφορικές εξισώσεις αντικαθίστανται από μία ομάδα αλγεβρικών εξισώσεων που μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια του υπολογιστή.

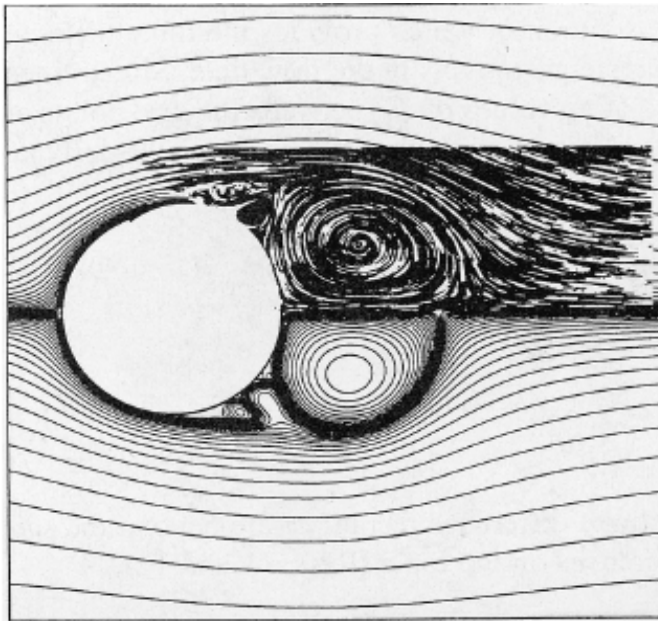
Αναλυτικότερα για τις τρεις μεθόδους μπορούμε να πούμε:

- i) Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών για την υπολογιστική ρευστομηχανική (computational fluid dynamics ή CFD) είναι ίσως η πιο εύκολα κατανοητή μέθοδος και ευρέως χρησιμοποιούμενη από τις τρεις παραπάνω μεθόδους. Σε αυτήν την μέθοδο το πεδίο ροής διαμελίζεται σε μία ομάδα σημείων πλέγματος και οι συνεχείς συναρτήσεις (ταχύτητας, πίεσης κλπ.) προσεγγίζονται από διακριτές τιμές αυτών των συναρτήσεων υπολογισμένες στα σημεία του πλέγματος.



Σχήμα 4: Πλέγμα πεπερασμένων διαφορών για ροή γύρω από πτερύγιο στροβίλου (CFD-22, College of Engineering, Iowa State University, 1990.)

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας διαφορές μεταξύ των τιμών της συνάρτησης στο γειτονικό σημείο του πλέγματος.

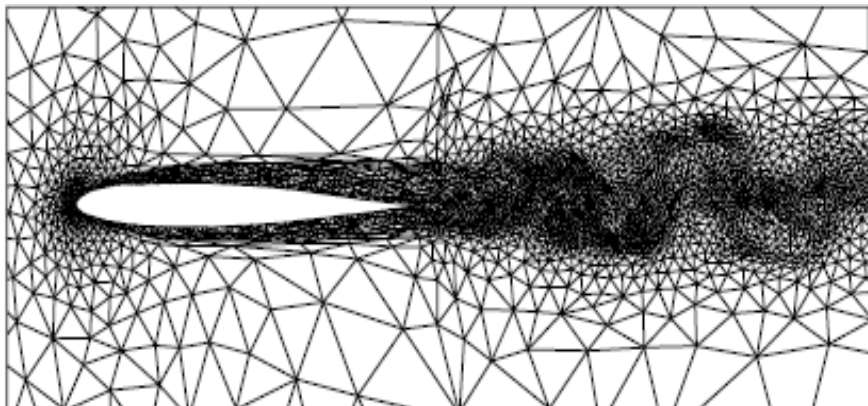


Σχήμα 5: Ρευματικές γραμμές σε ροή γύρω από κύλινδρο σε μικρό χρονικό διάστημα μετά από την παρορμητική εκκίνησή της. Το πάνω μισό είναι φωτογραφία από ένα πείραμα οπτικοποίησης

ροής. Το κάτω μισό είναι από υπολογισμό με πεπερασμένες διαφορές. (CFD-22, College of Engineering, Iowa State University, 1990.)

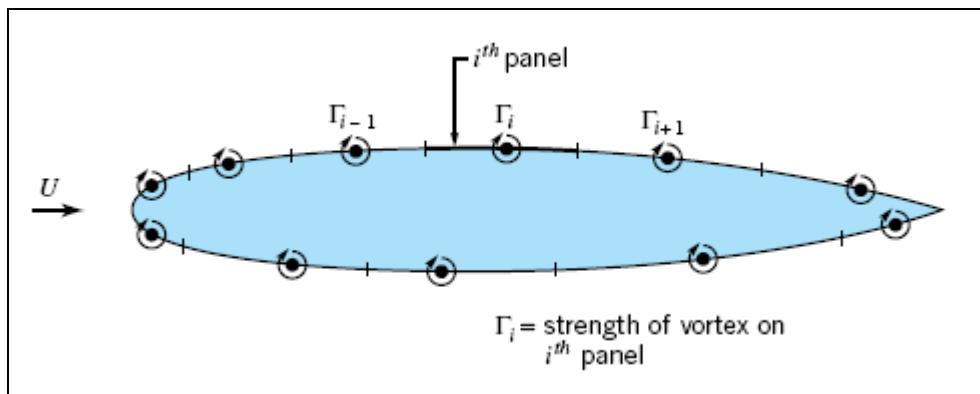
Όσο πιο μεγάλος ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος που χρησιμοποιείται, τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των εξισώσεων που πρέπει να λυθούν. Είναι συνήθως απαραίτητο ν' αυξήσουμε τον αριθμό των κόμβων (που σημαίνει δημιουργία ενός λεπτότερου πλέγματος) όπου αναμένονται μεγάλες μεταβολές όπως στο οριακό στρώμα κοντά σε μια στερεή επιφάνεια.

- ii) Για τη μέθοδο του πεπερασμένου στοιχείου (ή πεπερασμένου όγκου) η ροή διασπάται σε μία ομάδα μικρών στοιχείων ρευστού (συνήθως τριγωνικές περιοχές εάν η ροή είναι διδιάστατη ή μικρά στοιχεία όγκου αν η ροή είναι τρισδιάστατη. Οι εξισώσεις διατήρησης (διατήρηση της μάζας, ορμής και ενέργειας) γράφονται σε μία ειδική μορφή για κάθε στοιχείο και η ομάδα των συνεπακόλουθων αλγεβρικών εξισώσεων λύνεται αριθμητικά για το πεδίο ροής. Ο αριθμός, το σχήμα και το μέγεθος των στοιχείων διατάσσονται μερικά από την ιδιαίτερη γεωμετρία της ροής και τις συνθήκες ροής για το περιορισμένο (σε χώρο και χρόνο) πρόβλημα. Καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται (όπως είναι απαραίτητο για ροές με πολύπλοκα περιοριστικά όρια), ο αριθμός των ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων που πρέπει να λυθούν αυξάνεται γρήγορα. Προβλήματα που περιλαμβάνουν 1000 έως 10000 στοιχεία και 50000 εξισώσεις δεν είναι καθόλου αξιοπερίεργα. Ένα πλέγμα για την πρόβλεψη της ροής γύρω από πτερύγιο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



**Σχήμα 6:** Ανισοτροπικό προσαρμόσιμο πλέγμα για την πρόβλεψη ιξώδους ροής γύρω από ένα πτερύγιο NACA 0012 σε αριθμό Reynolds 10000, αριθμό Mach 0.075 και γωνία πρόσπτωσης  $1,5^\circ$ . (Από το εργαστήριο CFD, Πανεπιστήμιο της Concordia, Μόντρεαλ, Καναδάς)

- iii) Για τη μέθοδο του οριακού στοιχείου, τα περιοριστικά όρια του πεδίου ροής (όχι ολόκληρο το πεδίο ροής όπως στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων) διασπώνται σε ξεχωριστά ευθύγραμμα τμήματα και ειδικές ιδιομορφίες όπως πηγές, καταβόθρες, δίπολα και στροβιλισμούς που κατανέμονται σε αυτά τα οριακά στοιχεία.



**Σχήμα 7:** Μέθοδος πλαισίου για ροή γύρω από πτερύγιο.

Η ισχύς και ο τύπος των ιδιομορφιών επιλέγονται έτσι ώστε οι κατάλληλες οριακές συνθήκες της ροής να λαμβάνονται στα οριακά στοιχεία. Για σημεία στο πεδίο ροής που δεν ανήκουν στα περιοριστικά όρια, η ροή προσδιορίζεται προσθέτοντας τις διάφορες συνεισφορές των ιδιομορφιών του ορίου. Αν και οι λεπτομέρειες αυτής της μεθόδου είναι κατά κάποιο τρόπο μαθηματικά εξεζητημένες, μπορεί (εξαρτώμενες από το ίδιο το πρόβλημα) να απαιτούν



λιγότερο υπολογιστικό χρόνο και χώρο απ' ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

Οποιαδήποτε αριθμητική τεχνική, ανεξάρτητα από το πόσο απλή είναι στην ιδέα, εμπεριέχει πολλές κρυφές λεπτότητες και ενδεχόμενα προβλήματα. Για παράδειγμα, μπορεί να φαίνεται λογικό ότι μια πιο λεπτή διακριτοποίηση (μικρότερα στοιχεία πλέγματος λεπτότερων διαστάσεων) θα διασφάλιζε μια πιο ακριβή επίλυση. Ενώ σε μερικές περιπτώσεις αυτό θα ήταν σωστό σε άλλες περιπτώσεις θα μπορούσαν να εμφανιστούν προβλήματα ευστάθειας ή σύγκλισης. Σε τέτοιες περιπτώσεις η αριθμητική επίλυση που λαμβάνεται μπορεί να εκφράσει αδικαιολόγητες ταλαντώσεις ή το αριθμητικό αποτέλεσμα μπορεί να αποκλίνει σε ένα μη λογικό ή και λανθασμένο αποτέλεσμα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

### Ιστορική Αναδρομή πάνω στην ερευνητική εργασία

Παρόλο που η συστηματική θεωρητική και πειραματική εξερεύνηση της ροής σε καμπύλες σωληνώσεις είναι σαφώς πρόσφατης προέλευσης, έχει επί μακράν εκτιμηθεί ότι η ροή αυτή είναι σημαντικά πολυπλοκότερη από αυτή σε ευθύγραμμους αγωγούς.

Η πρώτη αυτή παρατήρηση συνέβη στην πραγματικότητα σε ανοικτούς αγωγούς όπου οι επιδράσεις της καμπύλωσης είναι πιο προφανείς και αξιοσημείωτες (Thomson 1876, 1877). Τον προηγούμενο αιώνα οι Grindley & Gibson (1908) αντιλήφθηκαν την επίδραση της καμπύλωσης στη ροή μέσα σε ένα ελικοειδή σωλήνα σε πειράματα που διεξήγαγαν για το ιξώδες του αέρα. Ο Williams (1902) παρατήρησε ότι η θέση της μέγιστης αξονικής ταχύτητας μετατοπίζεται προς το εξωτερικό τοίχωμα ενός καμπύλου αγωγού. Αργότερα ο Eustice (1910,1911) επέδειξε την ύπαρξη μιας δευτερογενούς ροής με την έγχυση μελανιού σε νερό που έρεε μέσα σε σπειροειδή σωλήνα.

Δευτερογενείς ροές εμφανίζονται οποτεδήποτε ένα ρευστό ρέει σε καμπύλους σωλήνες ή ανοικτούς αγωγούς. Τέτοιες δευτερογενείς κινήσεις μπορούν να προκύψουν σε ένα ιδανικό (ανιξώδες) ρευστό σαν αποτέλεσμα μιας ανομοιόμορφης κατανομής της ταχύτητας από την είσοδο ως την καμπύλωση (Squire & Winter 1949, Hawthorne 1951). Στα πραγματικά όμως ρευστά, η δευτερεύουσα ροή μπορεί να αποδοθεί κυρίως στην επίδραση της φυγοκεντρικής βαθμίδας της πίεσης στην κύρια ροή που δρα πάνω στο στάσιμο συγκριτικά ρευστό στο οριακό στρώμα του τοιχώματος.

Η ευσταθής στρωτή ροή ενός ιξώδους ασυμπίεστου ρευστού διαμέσου ενός καμπύλου σωλήνα έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον από τις πρώιμες επιστημονικές ανακοινώσεις του Dean ο οποίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε την διαταραχή από τη ροπή Poiseuille σε έναν ευθύγραμμο αγωγό κυκλικής διατομής που ήταν τυλιγμένος γύρω από ένα κύκλο δεδομένης ακτίνας. Στην πρώτη θεωρητική προσέγγισή του (Dean 1927), βρήκε πως η σχέση μεταξύ της βαθμίδας πίεσης και του ποσοστού ροής δεν εξαρτάται από την καμπυλότητα. Με σκοπό να αποδείξει την εξάρτησή της, τροποποίησε την ανάλυσή του περικλείοντας όρους ανώτερης τάξεως και κατέστη ικανός να δείξει (Dean 1928) ότι η ελάττωση στο ποσοστό ροής εξαιτίας της καμπυλότητας εξαρτάται από μία μοναδική μεταβλητή  $K$  ίση με  $K = 2 \cdot R^2 \cdot \frac{a}{L}$  όπου:  $R$ : ο αριθμός Reynolds

$a$ : η ακτίνα του σωλήνα και

$L$ : η ακτίνα καμπυλότητας του καμπύλου αγωγού

Αυτός έδειξε ότι η ανάλυσή του ήταν πρακτικά αξιόπιστη για τιμές του  $K$  έως και 576. Το 1927 σκιαγράφησε τις ρευματικές γραμμές στο επίπεδο της διατομής σύμφωνα με την πρώτη προσέγγισή του η οποία ήταν ακριβής μόνο για τιμές του  $K$  σημαντικά μικρότερες από 576.

Πειράματα από τους White (1929), Taylor (1929), Adler (1934) έχουν επιβεβαιώσει πως η ροή σε ένα καμπύλο σωλήνα ή αγωγό είναι πολύ περισσότερο σταθερή απ' ότι η ροή σε ένα ευθύγραμμο. Έτσι, ενώ για τον ευθύγραμμο σωλήνα ο κρίσιμος αριθμός Reynolds είναι περίπου 2000, σε ένα καμπύλο σωλήνα μπορεί να είναι μεγαλύτερος κατά ένα συντελεστή 2 ή μεγαλύτερο. Συγκεκριμένα ο Taylor βρήκε πως για λόγο καμπυλότητας  $a/R = 1 / 31.9$  ο κρίσιμος αριθμός Reynolds ήταν περίπου 5000. Αυτός αντιστοιχεί σε  $K \approx 1,6 \times 10^6$  και συνεπώς προσεγγιστικά σκιαγραφεί την στρωτή κατάσταση πάνω στην οποία έχουν ενδιαφέρον τα υπολογισμένα αποτελέσματα. Έμφαση δόθηκε πάνω σε μετρήσεις του λόγου τριβής ή του λόγου  $\lambda_c / \lambda_s$  όπως ορίστηκε από τον White (1929) ως ο λόγος των αντιστάσεων σε ένα καμπύλο σωλήνα. Αυτός επέκτεινε την μελέτη του Dean για την στρωτή ροή νερού και ελαίου διαφορετικού ιξώδους μέσα σε καμπύλους σωλήνες με λόγους καμπυλότητας 1/15, 1/50 και 1/2050. έδειξε πως η έφοδος της τύρβης δεν εξαρτάται μόνο από την τιμή του αριθμού Reynolds ούτε του

κριτηρίου του Dean  $De = R \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^{1/2}$ . Για ένα λόγο καμπυλότητας 1/15 ένας αριθμός Reynolds 9000 χρειάστηκε για να προκληθεί τύρβη. Από την άλλη για ένα λόγο καμπυλότητας 1/2050 δεν σημειώθηκε αξιοσημείωτη διαφορά στην κρίσιμη ταχύτητα σε σύγκριση με έναν ευθύγραμμο σωλήνα για την επίτευξη τύρβης. Ο Adler πήρε λεπτομερείς μετρήσεις των κατανομών αξονικής ταχύτητας σε πλήρως ανεπτυγμένη μόνιμη στρωτή ροή σε καμπύλους σωλήνες κυκλικής διατομής και παρατήρησε την γνωστή μετατόπιση της μέγιστης αξονικής ταχύτητας προς το εξωτερικό τοίχωμα της καμπύλωσης.

Οι Karim et al (1964) διεξήγαγαν θεωρητικούς υπολογισμούς για την σταθερή στρωτή ροή ενός Νευτώνιου ρευστού διαμέσου ενός καμπύλου δακτυλίου για περιπτώσεις με ελαφρά καμπυλότητα. Έδειξαν γραφικές απεικονίσεις των προβαλλόμενων ρευματικών γραμμών στην διατομή. Η εργασία τους έδειξε δύο δίνες πολύ όμοιες με αυτές της ροής ενός κανονικού καμπύλου σωλήνα αλλά οι δίνες ήταν καμπυλωμένες ώστε να ταιριάζουν με τον δακτύλιο.

Ο Topakoglu (1967) έλαβε μια προσεγγιστική λύση χρησιμοποιώντας εξισώσεις ροής για να καθορίσει το πρότυπο ροής για σταθερή ροή ενός ασυμπίεστου ιξώδους ρευστού σε καμπύλους σωλήνες. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως το ποσοστό ροής ήταν εξαρτώμενο από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, τον αριθμό Reynolds και την καμπυλότητα του σωλήνα.

Ο Topakoglu (1967) χρησιμοποίησε μια προσεγγιστική λύση για να καθορίσει τις ρευματικές γραμμές της δευτερεύουσας ροής, για ροή ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους «τοροειδείς» (κυλινδρικούς) σωλήνες. Στις περιπτώσεις που μελετήθηκαν υπήρχαν 4 δευτερεύουσες ροές με συμμετρικές δίνες στο επίπεδο που κόβει τον κυλινδρικό δακτύλιο («τόρο») μέσα από το κέντρο. Με δύο δίνες σε κάθε πλευρά του κεντρικού επιπέδου, η διεύθυνση των δευτερευουσών ροών ήταν αντίθετη.

Οι Mc Conalogue & Srivastava (1968) διεξήγαγαν αριθμητικές μελέτες για να καθορίσουν τα χαρακτηριστικά της δευτερεύουσας ροής για πλήρως ανεπτυγμένη στρωτή ροή. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν πως καθώς η αξονική ταχύτητα αυξανόταν, η μέγιστη τιμή της αξονικής ταχύτητας μετακινείται προς το εξωτερικό τοίχωμα και οι δευτερεύουσες δίνες επίσης ‘μετανάστευαν’ πιο κοντά στο εξωτερικό τοίχωμα.

Αριθμητικές μελέτες της στρωτής ροής διεξήχθησαν από τους Truesdell & Adler (1970) χρησιμοποιώντας ένα τετραγωνικό πλέγμα. Αυτοί βρήκαν πως η αριθμητική διαδικασία μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για αριθμούς Dean έως 200. παραπάνω αύξησή του προκαλούσε απόκλιση των τιμών που προέκυπταν από τη μέθοδο επίλυσής τους. Η αριθμητική διαδικασία ήταν βασισμένη σε τοροειδή γεωμετρία. Τα αποτελέσματά τους συγκρίθηκαν με πειραματικά από τη βιβλιογραφία.

Ο Smith (1976) μελέτησε αναλυτικά την στρωτή ροή σε καμπύλους σωλήνες για μεγάλους αριθμούς Dean. Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν για σωλήνες κυκλικής διατομής όπως επίσης και για αγωγούς με τριγωνική ή ορθογωνική διατομή.

Ο Masliyah (1980) μελέτησε την δευτερεύουσα ροή μιας στρωτής ροής σε ένα καμπύλο ημικυκλικό σωλήνα χρησιμοποιώντας αριθμητικές και πειραματικές μεθόδους. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν πως για αριθμούς Dean πάνω από 105, η δευτερογενής ροή μπορούσε να έχει δύο λύσεις, είτε το μοντέλο των δύο δινών είτε αυτό των τεσσάρων εξαρτώμενη από την αρχική πρόβλεψη του πεδίου ροής.

Οι Dennis & Ng (1982) μελέτησαν αριθμητικά τη στρωτή ροή μέσα σε καμπύλο σωλήνα χρησιμοποιώντας μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών με έμφαση στους τέσσερις στροβίλους που εμφανίστηκαν αντί για δύο. Έτρεξαν προσομοιώσεις στο εύρος του αριθμού Dean 96–5000 και βρήκαν τις δύο επιπρόσθετες συμμετρικές δίνες για αριθμό Dean > 956 που έδιναν δύο δίδυμα μέγιστα της αξονικής ταχύτητας. Οι δύο αυτές λύσεις για τους δύο και τέσσερις στροβίλους επαληθεύτηκαν πειραματικά από μια διαδικασία οπτικοποίησης.

Ο Καραχάλιος (1990) μελέτησε την μετάδοση θερμότητας ενός ρευστού που έρεε μέσα σε καμπύλο σωλήνα με στερεό πυρήνα. Ο πυρήνας και η επιφάνεια του καμπύλου σωλήνα είχαν σταθερή μεταβολή θερμοκρασίας κατά μήκος της αξονικής διεύθυνσης. Μια αντιστροφή της ροής εξαρτώμενη από τον αριθμό Dean εντοπίστηκε στο εσωτερικό τμήμα της καμπύλωσης για σημαντικά μεγάλους πυρήνες.

Οι Nandakumar & Masliyah (1982) μελέτησαν περαιτέρω αυτό το φαινόμενο και ανέφεραν πως χρησιμοποιώντας ένα διπολικό-κυλινδρικό («τοροειδές») σύστημα συντεταγμένων ήταν καλύτερο για την πρόβλεψη της λύσης των τεσσάρων στροβίλων και πως ήταν ευκολότερο να παραχθούν λύσεις των τεσσάρων στροβίλων για καμπύλους ημικυκλικούς σωλήνες απ' ότι για καμπύλους κυκλικούς. Ωστόσο χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα ενός ημικυκλικού σωλήνα σαν αρχικές συνθήκες για σωλήνες με αυξανόμενη κυκλικότητα έκανε εφικτή την πρόβλεψη των λύσεων τεσσάρων στροβίλων, όπου μια άμεση λύση θα αποτύγχανε.

Οι Dennis & Riley (1991) ανέπτυξαν μια αναλυτική λύση για την πλήρως ανεπτυγμένη στρωτή ροή για μεγάλους αριθμούς Dean. Αν και δεν μπορούσαν να βρουν μια ολοκληρωμένη λύση στο πρόβλημα, ισχυρίστηκαν πως υπάρχει απόδειξη για το ότι σε μεγάλους αριθμούς Dean η ροή αναπτύσσεται σε ένα ανιζώδες πυρήνα με ένα ιζώδες οριακό στρώμα στο τοίχωμα του σωλήνα.

Η ροή εισόδου μέσα σε ένα καμπύλο δακτύλιο μελετήθηκε αριθμητικά από τους Choi & Park (1992) για την περίπτωση της ασυμπίεστης σταθερής στρωτής ροής. Αυτοί εξέφρασαν πως αντίθετα από την περίπτωση ενός ευθύγραμμου δακτυλιοειδούς σωλήνα, η πλήρως ανεπτυγμένη ροή δεν αναπτύσσεται απαραίτητα νωρίτερα όταν ο λόγος των ακτινών είναι μεγαλύτερος.

Οι Choi & Park (1994) δημοσίευσαν μία επιστημονική ανακοίνωση πάνω στην μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε ένα καμπύλο δακτύλιο. Αυτοί επίσης επικαλέστηκαν την προσέγγιση Boussinesq για να λάβουν υπ' όψη τις επιδράσεις της άνωσης.

Σύγκριναν τον αριθμό Nusselt και τον παράγοντα τριβής της ροής με αυτούς ενός ευθύγραμμου δακτυλίου. Βρήκαν πως ο λόγος του αριθμού Nusselt (καμπυλωμένου προς ευθύγραμμου) επηρεάζεται σημαντικά από τον λόγο ακτινών και τον αριθμό Dean για μικρούς αριθμούς Grashof χωρίς να αλλάζουν πολύ σε μεγάλους αριθμούς Grashof.

Οι Πετράκης και Καραχάλιος (1996) μελέτησαν την ευσταθή ροή ενός ασυμπίεστου ιξώδους ρευστού μέσα σε ένα καμπύλο σωλήνα με ομοαξονικό πυρήνα. Τα πορίσματά τους δείχνουν πως η παρουσία ενός πυρήνα επηρεάζει τις ιδιότητες της ροής, ειδικά σε μεγάλους αριθμούς Dean. Οι ίδιοι συγγραφείς (1997) ανέπτυξαν αναλυτικές εκφράσεις για την αξονική ταχύτητα και για την συνάρτηση της ροής για εκθετικά εξασθενούμενη ροή σε ένα καμπύλο δακτυλιοειδή σωλήνα. Στις παραπάνω μελέτες δείχθηκε πως σε μερικές περιπτώσεις δύο επιπρόσθετα μοντέλα δευτερευουσών ροών αναπτύσσονται καταλήγοντας σε ένα σύστημα τεσσάρων στροβίλων. Οι ίδιοι το 1999 χρησιμοποίησαν μια αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για τη ροή ενός ιξώδους ασυμπίεστου ρευστού σε ένα καμπύλο δακτυλιοειδή σωλήνα κυκλικής διατομής. Το εύρος του αριθμού Dean ήταν από 96 έως 8000. Διάφορα μεγέθη πυρήνα χρησιμοποιήθηκαν και κατέληξαν στο ότι για μικρά μεγέθη πυρήνα οι αλλαγές στον αριθμό Dean επηρεάζουν σημαντικά τις ιδιότητες της ροής αν και αυτό δεν υφίσταται για μεγάλους πυρήνες. Για τα μικρότερα μεγέθη πυρήνα το προφίλ των ταχυτήτων διαστρεβλώνεται προς το εξωτερικό τοίχωμα ενώ για μεγάλους πυρήνες οι ταχύτητες της ροής προσεγγίζουν παραβολική μορφή.

Το επόμενο λογικό βήμα στην παρατήρηση των μοντέλων ροής ήταν να μελετηθούν αυτά τα μοντέλα στις εφαρμογές μετάδοσης θερμότητας. Εντατικές μελέτες έχουν γίνει περί μετάδοσης θερμότητας σε σωλήνες ελικοειδούς μορφής εξ' αιτίας της παραπάνω εφαρμογής τους σε εναλλάκτες θερμότητας. Μια ποικιλία μοντέλων ροής καθώς και πλήρεις αριθμητικές προσεγγίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί για να προβλέψουν το ποσοστό μεταφοράς θερμότητας. Έτσι προτάθηκε η κατασκευή ενός εναλλάκτη θερμότητας διπλού σωλήνα σε ελικοειδή μορφή για εξοικονόμηση χώρου και ροή δύο ρευστών (ομορροή ή αντιρροή).

Τα πλεονεκτήματα αυτής της διάταξης είναι:

- i) όλη η επιφάνεια του ελικοειδούς εναλλάκτη θα εκμεταλλεύεται από το κινούμενο ρευστό με αποτέλεσμα να αποκλείονται οι νεκρές ζώνες
- ii) η ροή στον εξωτερικό σωλήνα θα παρουσιάσει δευτερογενείς ροές πράγμα που ενισχύει τον συντελεστή μετάδοσης θερμότητας.

Ο Ahn (2000) μελέτησε την μετάδοση θερμότητας σε ένα ρευστό μέσα στους δακτυλίους για ένα ευθύγραμμο σωλήνα με δύο καταστάσεις: είτε με μονωμένο εξωτερικό σωλήνα είτε μονωμένο πυρήνα και αγωγή θερμότητας προς το αντίστοιχο τοίχωμα. Το πείραμά του έγινε για τυρβώδεις ροές και το εξωτερικό τοίχωμα είχε μια τραχεία επιφάνεια. Επίσης χρησιμοποίησε διάφορους λόγους διαμέτρων και διάφορες τραχύτητες επιφάνειας.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

## ΡΟΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και η συστηματική θεωρητική και πειραματική μελέτη της ροής σε ένα καμπύλο αγωγό είναι σχετικά πρόσφατη, έχει από πολύ χρόνο πριν γίνει κατανοητό ότι αυτού του είδους η ροή είναι κατά πολύ συνθετότερη (και περιπλοκότερη) από την ροή σε ευθύγραμμους αγωγούς. Η πρώτη παρατήρηση αυτής της ροής ήταν στην πραγματικότητα για μία ροή ανοικτού καναλιού όπου τα φαινόμενα της καμπυλότητας είναι πιο προφανή και εντυπωσιακά. Ο Thomson το 1876 ήταν ο πρώτος που παρατήρησε και κατέγραψε τέτοια φαινόμενα. Στον εικοστό αιώνα οι Grindley και Gibson το 1908 παρατήρησαν προσεκτικά το φαινόμενο της καμπυλότητας κατά την ροή σε καμπυλωμένο σωλήνα κατά την διάρκεια πειραμάτων για την μελέτη του ιξώδους του αέρα. Ο Williams και οι συνεργάτες του το 1902 παρατήρησαν ότι η θέση του μεγίστου της «αξονικής» ταχύτητας (της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα του σωλήνα) έχει μετακινηθεί προς το εξωτερικό τοίχωμα του καμπύλου σωλήνα. Αργότερα (1910-11) ο Eustice απέδειξε την ύπαρξη μιας δευτερεύουσας ροής με ένεση μελάνης σε νερό που έρεε σε καμπυλωμένο σωλήνα.

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία περιοχών στις οποίες τέτοιες ροές έχουν μεγάλη πρακτική σπουδαιότητα και από τις οποίες πηγάζουν πολλά ερωτήματα σχετικά με αυτές τις ροές. Για παράδειγμα, επειδή καμπυλωμένα τμήματα πολύ συχνά απαντώνται στα συστήματα σωληνώσεων, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την βαθμίδα πίεσης στα αναπτυσσόμενα και στα πλήρως ανεπτυγμένα μέρη ροής εάν θα πρέπει να προβλέψουμε την ισχύ άντλησης που χρειάζεται για να υπερνικήσουμε τις απώλειες πίεσης που προκαλούνται από την καμπύλωση. Επειδή οι δευτερεύουσες κινήσεις αναμένεται να αυξήσουν την ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ του υγρού και του περιβάλλοντος του, η γνώση του μεγέθους αυτού του φαινομένου είναι σπουδαία για τον σχεδιασμό «ανταλλακτών» θερμότητας. Η ροή του αίματος στο σύστημα των ανθρώπινων αρτηριών έχει αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη ρευστομηχανική τα τελευταία 20-30 χρόνια. Το μεγαλύτερο αγγείο σ' αυτό το σύστημα είναι η αορτή, η οποία είναι

εξαιρετικά καμπυλωμένη. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον σ' αυτό το αγγείο παρουσιάζει το λεγόμενο μήκος «εισόδου» ή μήκος «κατωφλίου» (το οποίο είναι η απόσταση η οποία απαιτείται για αναπτυχθεί πλήρως η ροή) καθώς και ο εντοπισμός των σημείων στα οποία έχουμε τις μέγιστες και ελάχιστες διατμητικές τάσεις. Το μήκος εισόδου είναι σχετικό προς τη ροή σε άλλους καμπύλους αγωγούς αίματος από τη στιγμή που υπάρχει μερική αμφιβολία για το εάν υπάρχει αρκετή απόσταση μεταξύ των διακλαδώσεων ώστε η ροή στις αρτηρίες να γίνει πλήρως ανεπτυγμένη. Οι δευτερογενείς κινήσεις σε καμπυλωμένες ροές θα ήταν αναμενόμενο να είναι σημαντικές σε αυτό το πλαίσιο. Οι θέσεις των ακρότατων τιμών (μεγίστων και ελαχίστων) της διατμητικής τάσης στα τοιχώματα της αορτής και άλλων μεγάλων καμπυλωμένων αγγείων (αρτηριών) είναι εξαιρετικά σπουδαίες, επειδή αυτές μπορεί να είναι οι θέσεις στις οποίες συγκεντρώνεται η χοληστερόλη, και κατά συνέπεια μπορεί να παίζουν μεγάλο ρόλο στην αθηρογένεση (ανάπτυξη αθηρωματικών πλακών).

Σ' αυτή την εργασία θα περιγράψουμε συνοπτικά και με ευκολοκατανοητό τρόπο τις γενικές αρχές που διέπουν την ροή σε καμπύλους αγωγούς και σωλήνες. Ιδιαίτερα θα περιγράψουμε αναπτυσσόμενες και πλήρως αναπτυγμένες ροές, στρωτές και μη, σε στερεούς απείρως καμπυλωμένους σωλήνες. Όπως επίσης την ροή σε πεπερασμένες καμπυλώσεις και τα θερμικά φαινόμενα. Θα αναφέρουμε επιπλέον πιο συνοπτικά την ροή πολλαπλών φάσεων, την ροή μη-Νευτώνειων ρευστών, καθώς και το φαινόμενο των μαλακών (ελαστικών) τοιχωμάτων. Οι στρωτές ασυμπίεστες ροές θα είναι το πρωταρχικό μας μέλημα. Δεν θα εξετάσουμε καμπυλωμένες ροές ανοικτού καναλιού, επειδή η περιγραφή τους (καθώς και οι εφαρμογές τους) διαφέρει σημαντικά, οπότε χρειάζονται (και αξίζουν) ξεχωριστή μελέτη.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι δευτερογενείς ροές εμφανίζονται κάθε φορά που ένα ρευστό ρέει σε καμπύλους αγωγούς. Αν και τέτοιες δευτερογενείς κινήσεις μπορούν να εμφανισθούν και σε τέλεια ρευστά χωρίς ιξώδες, σαν αποτέλεσμα της ανομοιογενούς κατανομής της ταχύτητας κατά την είσοδο στην καμπύλωση, σ' αυτή την εργασία θα εξετάσουμε πραγματικά ρευστά με ιξώδες. Σε τέτοια «ρεαλιστικά» ρευστά η δευτερογενής ροή θα πρέπει κυρίως να αποδοθεί στο φαινόμενο κεντρόφυγης βαθμίδας πίεσης της κυρίας ροής, η οποία επιδρά στο σχετικά αδρανές στρώμα του ρευστού στα τοιχώματα του σωλήνα.

Πέρα από την κλασσική περίπτωση καμπύλου σωλήνα με κυκλική διατομή, που αποτελεί το μεγαλύτερο ίσως κομμάτι αυτής της εργασίας, θα περιγράψουμε μαθηματικά και αγωγούς και σωλήνες τριγωνικής διατομής, επειδή αυτού του τύπου η διατομή δεν είναι αρκετά γνωστή. Αυτό θα μας δώσει επιπλέον την δυνατότητα να περιγράψουμε την διαφορά στον μαθηματικό φορμαλισμό (διαφορετική επιλογή συστήματος συντεταγμένων) για δύο διαφορετικές γεωμετρίες. Η γενική μορφή των εξισώσεων ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη γεωμετρία και συμμετρία περιγράφεται επιγραμματικά, αλλά σε βάθος στο ένθετο 1, που ακολουθεί.

Σαν ειδικά παραδείγματα θα εξετάσουμε: 1<sup>ov</sup>) την συνεχή στρωτή ασυμπίεστη ροή σε ένα στερεό κυκλικό αγωγό ομοιογενούς (σταθερής) καμπυλότητας, και 2<sup>ov</sup>) την ροή σε καμπύλο σωλήνα τριγωνικής διατομής.

Στην πρώτη περίπτωση η γεωμετρία είναι γεωμετρία κυλινδρικού δακτυλίου, και θα εισάγουμε «τοροειδείς» κυλινδρικές συντεταγμένες (συντεταγμένες κυλινδρικού δακτυλίου), ενώ στην δεύτερη με τριγωνική διατομή θα εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες.

---

---

## Ένθετο 1

### Θεμελιώδεις εξισώσεις της Ρευστομηχανικής

Όλοι οι θεμελιώδεις (και μη) νόμοι της Φυσικής (και προφανώς της Μηχανικής και της Ρευστομηχανικής, οι οποίες αποτελούν τμήματα της Φυσικής) εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις και μάλιστα διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, εφόσον ο χώρος είναι τρισδιάστατος και έχουμε συνήθως τρεις χωρικές μεταβλητές (έστω  $x, y, z$ ) και μία χρονική μεταβλητή,  $t$ . Η Φυσική ασχολείται με τα φυσικά φαινόμενα, τα οποία εξ ορισμού είναι φυσικές μεταβολές, δηλαδή διαφορές, εξ ου και η περιγραφή των φυσικών φαινομένων με διαφορικές εξισώσεις και «διαφορικούς τελεστές», όπως  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\vec{\nabla}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{d}{dx}$  κτλ. Οι διαφορικές εξισώσεις χαρακτηρίζουν μια μεγάλη ποικιλία («οικογένεια») λύσεων, οι οποίες προσδιορίζονται με τις συνοριακές ή/και αρχικές συνθήκες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την επίλυση (ή ολοκλήρωση) των διαφορικών εξισώσεων. Για μια διαφορική εξίσωση  $N$  βαθμού απαιτούνται  $N$  οριακές (ή συνοριακές) συνθήκες (για κάθε μία μεταβλητή).

Για την Ρευστομηχανική οι γενικές σχέσεις (εξισώσεις) οι οποίες εκφράζουν τους γενικούς θεμελιώδεις νόμους είναι κατά σειρά:

**1) Η έκφραση των υλικών παραγώγων του (ρευστού) μέσου:**

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

, η οποία δηλώνει ότι ο παρατηρούμενος ρυθμός

μεταβολής, μέσα σ' ένα ρευστό ενός στοιχειώδους όγκου κινούμενου με ταχύτητα  $\mathbf{u}$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής σ' ένα σταθερό σημείο συν τον ρυθμό μεταβολής που οφείλεται στην κίνηση σε μια διαφορετική θέση.

**2) Διατήρηση της μάζας (εξίσωση συνεχείας):**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Όταν κάθε στοιχειώδης όγκος του ρευστού διατηρεί την ίδια πυκνότητα , τότε το ρευστό λέγεται ασυμπίεστο και ισχύει:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

**3)** Διατήρηση της ορμής:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{F}$$

η οποία δηλώνει ότι η επιτάχυνση ενός στοιχειώδους όγκου του ρευστού ισούται με την

(«σωματική») δύναμη  $\mathbf{F}$  ανά μονάδα όγκου η οποία δρα επί του στοιχειώδους αυτού όγκου και στην διαφορά πίεσεως στα δύο αντίθετα άκρα του στοιχειώδους όγκου του ρευστού.

**4) Οριακές συνθήκες, κατάλληλες (για 2 και 3)**

α) Η *κινηματική συνθήκη*:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \text{η κάθετη ταχύτητα του ρευστού ισούται με την κάθετη ταχύτητα της συνοριακής επιφάνειας.}$$

β) Η *δυναμική συνθήκη*: Η πίεση του ρευστού ισούται με την δύναμη ανά μονάδα συνοριακής επιφάνειας..

Για μια ελεύθερη επιφάνεια στη θέση  $z = \zeta(x, y, t)$  η κινηματική οριακή συνθήκη (α) γράφεται:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w \quad , \quad \text{ή} \quad \frac{D}{Dt}(z - \zeta) = 0$$

**5)** Η έκφραση των *υλικών στοιχειωδών μηκών του (ρευστού) μέσου*:

$$\frac{d}{dt} \delta l = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{Η σχέση αυτή δηλώνει ότι το μήκος και ο προσανατολισμός ενός στοιχειώδους υλικού μήκους } \delta l \text{ μεταβάλλεται λόγω της μεταβολής του } \mathbf{u} \text{ κατά μήκος του } \delta l.$$

**6)** Ολοκληρωτική μορφή της διαφορικής έκφρασης διατήρησης της ορμής (3)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = - \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{F} dV$$

7) Θεώρημα του Bernoulli σαν συνέπεια της διατήρησης της ορμής.

Εάν η ροή είναι συνεχής, και ,  $\mathbf{F} = -\nabla\chi$  τότε από την (3) βρίσκουμε:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \chi \right) = 0$$

8) Εάν η ροή είναι «αστρόβιλη», στρωτή και το ρευστό ασυμπίεστο, τότε:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad \text{και} \quad \nabla^2 \phi = 0$$

Η ροή βρίσκεται λύνοντας την εξίσωση του Laplace, ενώ η πίεση και οι δυνάμεις βρίσκονται από την:

$$\nabla \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \chi \right) = 0$$

Τέλος , ο στροβιλισμός μιας γενικής ροής ορίζεται από την σχέση:

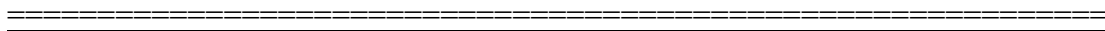
$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$

Η εξίσωση στροβιλισμού όταν  $\mathbf{F} = -\nabla\chi$  , βρίσκεται παίρνοντας το *curl* της εξισώσεως διατηρήσεως της ορμής (3):

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

Για αστρόβιλη ροή έχουμε  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ .

Αυτές είναι γενικές αρχές και νόμοι, εκπερασμένες στην πιο γενική μορφή, η οποία είναι ανεξάρτητη από την μορφή και το σύστημα συντεταγμένων. Σε κάθε ειδική περίπτωση, όπως αυτές που θα εξετάσουμε παρακάτω, χρειάζεται η σωστή επιλογή του συστήματος συντεταγμένων (ανάλογα με την συμμετρία του προβλήματος) και των (συν)οριακών συνθηκών.



---

---

## Ένθετο 2

### Επισκόπηση της αριθμητικής μεθόδου ολοκλήρωσης των εξισώσεων της Ρευστομηχανικής

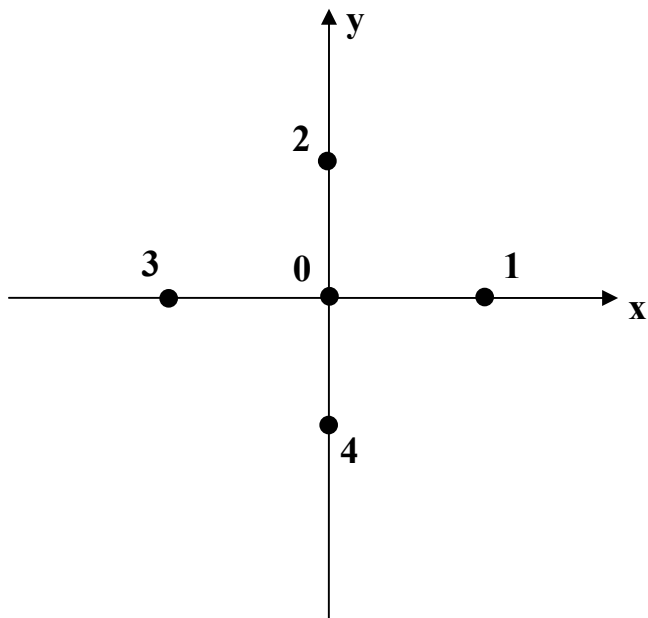
Στο παρόν ένθετο περιγράφεται η μέθοδος των Allen και Southwell [26], η οποία εφαρμόστηκε στην επίλυση της εξίσωσης της στροβιλότητας σε δισδιάστατη ή και σε ροή συμμετρική ως προς άξονα. Ακολούθως περιγράφεται η βελτιωμένη εκδοχή της μεθόδου, η οποία διατυπώθηκε από τον Dennis [24-25] και από τον Petrakis [5].

#### **E2.E2.1.1 Η μέθοδος των Allen και Southwell**

Η προσέγγιση των διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως με πεπερασμένες διαφορές δεν είναι γενικά ικανοποιητική όταν οι εξισώσεις περιλαμβάνουν όρους με πρώτες παραγώγους. Τούτο δεικνύεται στην εργασία των Allen και Southwell [1], όπου περιγράφεται μια νέα μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης της στροβιλότητας ενός ιξώδους και ασυμπίεστου ρευστού,

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - Re \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (\text{E2.1.1})$$

όπου  $\zeta$  είναι η στροβιλότητα,  $\psi$  η ρευματική συνάρτηση ικανοποιούσα εκ ταυτότητος την εξίσωση της συνεχείας  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  με τον ορισμό  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $Re$  είναι ο αριθμός Reynolds της ροής και  $x, y$  ορθογώνιες συντεταγμένες. Κατά την αριθμητική επίλυση της (E2.1.1) οι Allen και Southwell θεώρησαν την ρευματική συνάρτηση  $\psi$  γνωστή



Σχήμα E2.1.1 Συμβολισμός των σημείων του πλέγματος στις δύο διαστάσεις

συνάρτηση των  $x, y$  και έθεσαν  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = f(x, y)$  και  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = g(x, y)$ . Ακολούθως προσέγγισαν την (E2.1.1) με κεντρικές διαφορές χρησιμοποιώντας την ονοματολογία του σχήματος E2.1.1, όπου οι αριθμοί 0,1,2,3,4 αντιστοιχούν στα σημεία  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0 + h, y_0)$ ,  $(x_0, y_0 + h)$ ,  $(x_0 - h, y_0)$ , και  $(x_0, y_0 - h)$ . Στον συμβολισμό αυτόν,  $h$  είναι το βήμα του πλέγματος, σταθερό και στις δύο διαστάσεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} & \zeta_1 \left( \frac{1}{Re} - \frac{1}{2} g_0 h \right) + \zeta_2 \left( 1 + \frac{1}{2} f_0 h \right) + \zeta_3 \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{2} g_0 h \right) \\ & + \zeta_4 \left( 1 - \frac{1}{2} f_0 h \right) = 2\phi_0 \left( 1 + \frac{1}{Re} \right) + O(h^4). \end{aligned} \quad (E2.1.2)$$

Γράφοντας εν συνεχεία τις αντίστοιχες εξισώσεις σε όλα τα σημεία του πλέγματος λαμβάνεται σύστημα εκ  $N$  εξισώσεων ως προς  $N$  αγνώστους, το οποίο επιλύεται με κάποια εκ των μεθόδων χαλαρώσεως. Το σφάλμα της μεθόδου (σφάλμα υπολοίπου) είναι δυνατόν να γίνει οσοδήποτε μικρό για δοθέν μέγεθος πλέγματος, η λύση όμως δεν είναι απαλλαγμένη από σφάλμα αποκοπής, το οποίο είναι εγγενές σε οποιοδήποτε σχήμα



πεπερασμένων διαφορών, και το οποίο στην παρούσα περίπτωση είναι της τάξεως  $O(h^4)$ .

Στην ανάπτυξη της μεθόδου οι Allen και Southwell υποστηρίζουν ότι αν οι συναρτήσεις  $f(x,y)$  και  $g(x,y)$  λαμβάνουν μεγάλες τιμές ή μεταβάλλονται ταχέως, το σφάλμα εκ των πεπερασμένων διαφορών είναι δυνατόν να καταστεί σημαντικό. Για να υπερπηδήσουν αυτό το εμπόδιο οι Allen και Southwell επενόησαν την ακόλουθη προσέγγιση στην (E2.1.1). Στην γειτονία του σημείου  $(x_0, y_0)$  αντικατέστησαν τις συναρτήσεις  $f(x,y)$  και  $g(x,y)$  με τις κομβικές τιμές τους  $f_0$  και  $g_0$  αντίστοιχα και χώρισαν την (E2.1.1) σε δύο εξισώσεις ως εξής:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - Re g_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -Re A, \quad (E2.1.3\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + f_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = A, \quad (E2.1.3\beta)$$

όπου  $A$  βοηθητική σταθερά, η οποία θα απαλειφθεί. Η λύση της (E2.1.3α) είναι

$$g_0 \zeta = Ax + P + Qe^{Re g_0 x}, \quad (E2.1.4)$$

όπου  $P, Q$  είναι σταθερές της ολοκληρώσεως. Εφ' όσον η (E2.1.4) επαληθεύεται σε όλα τα σημεία της ευθείας 103, λαμβάνεται εξ αυτής

$$g_0 \zeta_0 = Ax_0 + P + Qe^{Re g_0 x_0},$$

$$g_0 \zeta_1 = Ax_1 + P + Qe^{Re g_0 x_1},$$

$$g_0 \zeta_3 = Ax_3 + P + Qe^{Re g_0 x_3},$$

εκφράζεται δηλαδή την σταθερά  $A$  συναρτήσει των κομβικών τιμών του  $\zeta$ .

Απαλείφοντας από τις εξισώσεις αυτές τις σταθερές  $P$  και  $Q$  εξάγεται τελικά η σχέση

$$g_0 \left[ (\zeta_1 - \zeta_0) e^{-Re g_0 h} + \zeta_3 - \zeta_0 \right] = Ah \left( e^{-Re g_0 h} - 1 \right). \quad (E2.1.5)$$

Με όμοιο τρόπο, η λύση της (E2.1.3β) είναι

$$f_0 \zeta = Ay + N - Me^{-f_0 y}. \quad (E2.1.6)$$

όπου  $M, N$  είναι σταθερές της ολοκληρώσεως.

Όπως και προηγουμένως, προκειμένου να απαλειφθούν οι σταθερές της ολοκληρώσεως, αναπτύσσεται η (E2.1.6) στα κομβικά σημεία της ευθείας 204 και τελικά λαμβάνεται η σχέση

$$f_0 \left[ (\zeta_2 - \zeta_0) e^{f_0 h} + \zeta_4 - \zeta_0 \right] = Ah \left( e^{f_0 h} - 1 \right). \quad (\text{E2.1.7})$$

Το τελευταίο βήμα της μεθόδου των Allen και Southwell είναι η απαλοιφή της σταθεράς  $A$  από τις (E2.1.5) και (E2.1.7). Έτσι προκύπτει η σχέση

$$g_0 h \left[ (\zeta_1 - \zeta_0) e^{-Re g_0 h} + \zeta_3 - \zeta_0 \right] / \left( 1 - e^{-Re g_0 h} \right) - f_0 h \left[ (\zeta_2 - \zeta_0) e^{f_0 h} + \zeta_4 - \zeta_0 \right] / \left( 1 - e^{f_0 h} \right) = 0. \quad (\text{E2.1.8})$$

Για την εξίσωση αυτή οι Allen και Southwell ισχυρίζονται ότι συνιστά καλύτερη προσέγγιση της (E2.1.1) από την (E2.1.2). Τούτο απέδειξε ο Dennis [2] μελετώντας τη σύγκλιση των σειρών στις οποίες αναπτύσσονται η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της  $\zeta_0$  στην γειτονία του σημείου  $(x_0, y_0)$ . Ο Dennis διαπίστωσε ότι η σειρά της πρώτης παραγώγου συγκλίνει με πολύ βραδύτερο ρυθμό εν σχέσει προς την αντίστοιχη σειρά της δεύτερης παραγώγου. Κατόπιν τούτου διατύπωσε το συμπέρασμα ότι η υπεροχή της (E2.1.8) έναντι της (E2.1.2) οφείλεται πιθανώς στον τρόπο με τον οποίο έγιναν οι προσεγγίσεις των πρώτων παραγώγων στην (E2.1.1). Ο Dennis ακολούθως χρησιμοποίησε την μέθοδο των Allen και Southwell σε προβλήματα συμμετρικών ροών ως προς άξονα και από την μελέτη των προβλημάτων αυτών συνήγαγε ότι η ακρίβεια της μεθόδου εξαρτάται και από την συμπεριφορά των συντελεστών των όρων που περιέχουν πρώτες παραγώγους στις αντίστοιχες εξισώσεις. Τούτο απέδωσε σε δύο παράγοντες: Στο μέγεθος των συντελεστών των πρώτων παραγώγων και στην ταχύτητα μεταβολής των συντελεστών αυτών. Επομένως η απαλοιφή των πρώτων παραγώγων θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την καλύτερη προσεγγιστική στα πλαίσια της μεθόδου αριθμητική λύση των εξισώσεων. Ένας τρόπος δια του οποίου απαλλασσόμεθα από την παρουσία των όρων αυτών περιγράφεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

## 1.2 Η βελτιωμένη μέθοδος του Dennis

Δίδεται η εξίσωση

$$\zeta'' + p(x)\zeta' + q(x)\zeta = r(x), \quad (\text{E2.1.9})$$

στην οποία οι τόνοι δηλώνουν παραγωγή ως προς  $x$  και  $q(x) \neq 0$ . Σύμφωνα με την μέθοδο των Allen και Southwell η προηγούμενη διαδικασία εκτελείται μόνο επί της γραμμής 103, οπότε η (E2.1.9) αντικαθίσταται από την προσεγγιστική μορφή

$$\zeta'' + p_0 \zeta' + q_0 \zeta = r_0, \quad (\text{E2.1.10})$$

στην οποία τα  $p_0, q_0, r_0$  είναι οι τιμές αντιστοίχως των  $p(x), q(x), r(x)$  στο σημείο  $x_0$ . Η λύση της (E2.1.10) είναι

$$\zeta = \frac{r_0}{q_0} + (P \cosh k_0 x + Q \sinh k_0 x) e^{-\frac{1}{2} p_0 x}, \quad (\text{E2.1.11})$$

όπου  $k_0 = \left( \frac{1}{2} p_0^2 - q_0 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Εν συνεχεία η  $\zeta$  στην (E2.1.11) εκφράζεται συναρτήσει των τιμών, τις οποίες λαμβάνει στα κομβικά σημεία 0,1,3 ( όπου  $x = x_0, x = x_0 + h$  και  $x = x_0 - h$  αντιστοίχως ) και από τις προκύπτουσες εξισώσεις ακολούθως απαλείφονται οι σταθερές  $x_0, P$  και  $Q$ . Επομένως η (E2.1.11) δίδει

$$\zeta_1 e^{\frac{1}{2} p_0 h} + \zeta_3 e^{-\frac{1}{2} p_0 h} - 2 \zeta_0 \cosh k_0 h - 2 \frac{r_0}{q_0} \left( \cosh \frac{1}{2} p_0 h - \cosh k_0 h \right) = 0. \quad (\text{E2.1.12})$$

Αν χρησιμοποιηθούν κεντρικές διαφορές, όπου  $\zeta' = \frac{\zeta_1 - \zeta_3}{2h}$  και  $\zeta'' = \frac{\zeta_1 - 2\zeta_0 + \zeta_3}{h^2}$  η

(E2.1.10) διακριτοποιείται ως εξής

$$\left( 1 + \frac{1}{2} p_0 h \right) \zeta_1 + \left( 1 - \frac{1}{2} p_0 h \right) \zeta_3 - (2 - h^2 q_0) \zeta_0 = h^2 r_0 \quad (\text{E2.1.13})$$

και το σφάλμα αποκοπής είναι της τάξεως  $O(h^4)$ .

Η βελτίωση την οποία επέφερε ο Dennis στις προηγούμενες εκφράσεις (E2.1.12) και (E2.1.13) οφείλεται στην απαλοιφή της πρώτης παραγώγου από την αρχική εξίσωση (E2.1.9). Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\zeta = F e^{-\frac{1}{2} \int p dx}, \quad (\text{E2.1.14})$$

στην (E2.1.9), η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος αντικαθίστανται από τις σχέσεις

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left( \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} F p \right) e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \quad \text{και} \quad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = \left( \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{1}{2} F \frac{dp}{dx} - p \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} F p^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \int p dx}.$$

Επομένως η (E2.1.9) γράφεται

$$\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} F - \frac{1}{4} p^2 F + qF = re^{\frac{1}{2} \int p dx} .$$

Αν δε τεθεί στην τελευταία

$$\lambda(x) = q(x) - \frac{1}{2} p'(x) - \frac{1}{4} p^2(x) . \quad (E2.1.15)$$

η (E2.1.9) ανάγεται στην

$$F'' + \lambda(x)F = re^{\frac{1}{2} \int p dx} , \quad (E2.1.16)$$

Οι πιθανές αντιρρήσεις που εγείρονται από την εν λόγω αντικατάσταση είναι: Η νέα μεταβλητή  $\zeta$  δεν είναι γνωστό αν συμπεριφέρεται ομαλά στο πεδίο της ολοκλήρωσης. Επίσης η  $p(x)$  είναι δυνατόν να υφίσταται μεγάλες μεταβολές με αποτέλεσμα το δεξιό μέλος της (E2.1.16) να μεταβάλλεται ταχέως, οπότε τα αριθμητικά αποτελέσματα δεν θα είναι ικανοποιητικά. Ο Dennis προλαμβάνει τις αντιρρήσεις αυτές χρησιμοποιώντας την (E2.1.14) μόνον τοπικά στο διάστημα  $10^3$  και επί πλέον μόνον προσωρινά, δηλαδή αφού εφαρμοστεί η αντικατάσταση επαναφέρει αμέσως την όλη διαδικασία ως προς την μεταβλητή  $\zeta$ . Τούτο γίνεται ως εξής:

Εφ' όσον η μελέτη γίνεται στο διάστημα  $(x_0 - h, x_0 + h)$ , θεωρεί αυθαίρετα ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μηδενίζεται στην θέση  $x = x_0$  και θέτει

$$f = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(x) dx \quad (E2.1.17)$$

Κατά συνέπεια η (E2.1.16) γράφεται

$$F'' + \lambda(x)F = re^{f} . \quad (E2.1.18)$$

Διακριτοποιεί ακολούθως την (E2.1.18) χρησιμοποιώντας πεπερασμένες κεντρικές διαφορές και λαμβάνει

$$F_1 + F_3 - (2 - h^2 \lambda_0) F_0 = h^2 r_0 . \quad (E2.1.19)$$

Στην (E2.1.19) το σφάλμα αποκοπής είναι  $O(h^4)$ . Κατόπιν επιστρέφει στην αρχική μεταβλητή  $\zeta$  αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό (E2.1.14), θέτοντας δηλαδή  $F = \zeta e^f$ .

Επομένως  $F_0 = \zeta_0 e^{f_0} = \zeta_0$ ,  $F_1 = \zeta_1 e^{f_1}$  και  $F_3 = \zeta_3 e^{f_3}$ . Κατόπιν τούτου η (E2.1.19) γράφεται

$$\zeta_1 e^{f_1} + \zeta_3 e^{f_3} - (2 - h^2 \lambda_0) \zeta_0 = h^2 r_0 . \quad (E2.1.20)$$

Η (E2.1.20) είναι η τελική έκφραση στην οποία κατέληξε ο Dennis και η οποία αποτελεί, όπως κατέδειξε με σειρά παραδειγμάτων, βελτίωση της αντιστοίχου εκφράσεως (1,13) των Allen και Southwell.

### 1.3 Η τεχνική του Petrakis

Η μέθοδος των Allen και Southwell και η τροποποιημένη μέθοδος του Dennis εφαρμοζομένη στην εξίσωση

$$\zeta'' + p(x)\zeta' + q(x)\zeta = r(x)$$

οδηγεί τελικά στην επίλυση συστήματος εκ Ν εξισώσεων ως προς Ν αγνώστους, της μορφής

$$m_1\zeta_1 + m_3\zeta_3 + m_0\zeta_0 = s_0. \quad (\text{E2.1.21})$$

Οι συντελεστές  $m_i$  των αγνώστων έχουν εκθετική μορφή και ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων δεν είναι δυνατόν να ελεγχθεί αν είναι διαγωνίως υπέρτερος για όλες τις σειρές του πίνακα. Ως γνωστόν ένας πίνακας είναι διαγωνίως υπέρτερος αν ισχύει

$$\sum_{i=1}^N |m_i| \leq |m_0|$$

και αυτή είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για την σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου χαλαρώσεως, η οποία χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση του συστήματος. Για την μετατροπή του πίνακα σε διαγωνίως υπέρτερο ο Loukopoulos εφάρμοσε την ακόλουθη τεχνική. Ανέπτυξε την  $p(x)$  στο ολοκλήρωμα (E2.1.17) σε σειρά κατά Taylor ως προς τον κόμβο  $x_0$  και ακολούθως υπολόγισε την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος στα σημεία  $x_1 = x_0 + h$  και  $x_3 = x_0 - h$ . Κατόπιν ανέπτυξε σε σειρά κατά Taylor ως προς το σημείο μηδέν τις εκθετικές συναρτήσεις  $e^{f_1}$  και  $e^{f_3}$  και από την εκάστοτε σειρά κράτησε ικανό αριθμό όρων ούτως, ώστε το σφάλμα αποκοπής να παραμείνει της τάξεως  $O(h^4)$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο κατέληξε σε σύστημα παρόμοιο με το (E2.1.21) με την διαφορά ότι ο πίνακας είναι πλέον διαγωνίως υπέρτερος. Ο Petrakis εφάρμοσε την τροποποιημένη αυτή τεχνική α) στην επίλυση της εξισώσεως της

στροβιλότητας , προκειμένου περί αξονικά συμμετρικών ροών σε σύστημα ορθογωνίων τοροειδών συντεταγμένων και ακολούθως επεξεύτεινε την μεθοδολογία σε χρονοεξαρτώμενες ροές και συγκεκριμένα στην παραγωγή στροβίλων Taylor μεταξύ δύο ομοαξονικών σφαιρών, στρεφομένων περί τον κοινό τους άξονα και β) στην μελέτη μαγνητικών ρευστών.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

## ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΛΗΝΑ

**Σημείωση-Παρένθεση:** Αυτή η ροή χαρακτηρίζεται από «απουσία στροβιλισμού» και παριστάνεται μαθηματικά από την σχέση:  $\bar{\nabla} \times \bar{v} = 0$ , όπου ο τελεστής  $\bar{\nabla} \times ( )$  ονομάζεται **στροβιλισμός** και μπορεί να ορισθεί με τη βοήθεια της έννοιας της **κυκλοφορίας**. Η κυκλοφορία ενός διανυσματικού πεδίου, εδώ  $\bar{v}$  (ταχύτητα ροής), ορίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\bar{v}$  σε μία κλειστή καμπύλη  $C$ . Ο στροβιλισμός παριστάνει την κυκλοφορία ανά μονάδα περικλυόμενης επιφάνειας  $\Delta S$ :

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{v} \times d\bar{\ell}}{\Delta S} = 0 \quad \text{\underline{\underline{Ορισμός αστρόβιλης (στρωτής) ροής}}}$$

Ας θεωρήσουμε κυκλικό σωλήνα με κυκλική διατομή ακτίνας  $a$ , ο οποίος έχει καμφθεί σε κυκλικό σχήμα, ακτίνας  $R$ . Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος εισάγουμε σύστημα κυλινδρικών (όχι καρτεσιανών) συντεταγμένων  $(r', \alpha, \theta)$  όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Σ' αυτό το σχήμα,  $r'$  δηλώνει την απόσταση από το κέντρο της (κυκλικής) διατομής του σωλήνα,  $\alpha$  είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ακτίνας και του επιπέδου συμμετρίας και, τέλος,  $\theta$  δηλώνει την γωνιακή απόσταση από την είσοδο του σωλήνα. Οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας συμβολίζονται με  $(u', v', w')$ . Ορίζουμε επιπλέον τις παρακάτω αδιάστατες ποσότητες:

$$r = \frac{r'}{a}, \quad s = \frac{R\theta}{a}, \quad t = \frac{\bar{W}_0 t'}{a}$$

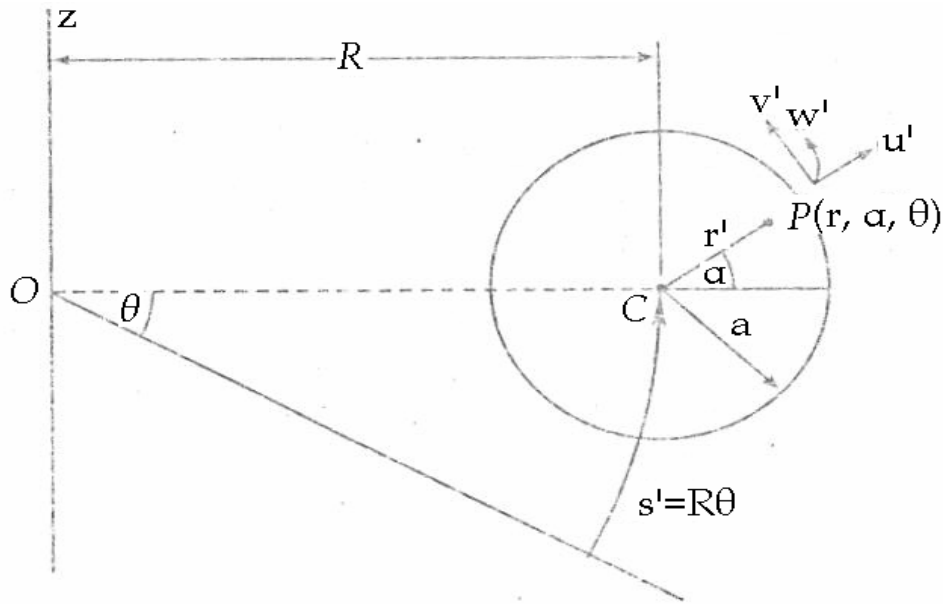
(1)

$$q = \frac{q'}{W_0}, \quad p = \frac{p'}{\rho W_0^2}$$

(τονούμενες ποσότητες έχουν φυσικές διαστάσεις, ενώ οι ποσότητες χωρίς τόνο είναι αδιάστατες) όπου  $t \ q = (u, v, w)$ ,  $p$  είναι η πίεση,  $\rho$  η πυκνότητα και  $\bar{W}_0$  είναι η μέση

αξονική ταχύτητα μέσα στο σωλήνα. Για ευκολία ξεκινάμε γράφοντας τις πλήρεις εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο της ιξώδους ροής σε τέτοιου είδους σωλήνα, χωρίς ακόμα να θέσουμε τους περιορισμούς της στρωτής ροής.

Ουσιαστικά, γράφουμε τις γενικές εξισώσεις των παραγράφων 2 και 3 στο ένθετο 1 στην συγκεκριμένη περίπτωση (γεωμετρία, συμμετρία) και το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Αυτές οι εξισώσεις είναι διαδοχικά:



Σχήμα 1

Σύστημα «τοροειδών» συντεταγμένων (ή συντεταγμένων κυλινδρικού δακτυλίου)

$$u_r + \frac{u}{r} \frac{2\delta r \cos a}{1 + \delta r \cos a} + \frac{v_a}{r} - \frac{\delta v \sin a}{1 + \delta r \cos a} + \frac{w_s}{1 + \delta r \cos a} = 0 \quad (2.a)$$

$$u_t + u W_r + \frac{v u_a}{r} + \frac{w u_s}{1 + \delta r \cos a} - \frac{v^2}{r} - \frac{\delta w^2 \sin a}{1 + \delta r \cos a} = -p_r - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\delta \sin a}{1 + \delta r \cos a} \right) \left( v_r + \frac{v}{r} - \frac{u_a}{r} \right) \right]$$



$$-\frac{u_{ss}}{1+\delta r \cos a} + \frac{1}{1+\delta r \cos a} \left( w_{rs} + \frac{\delta w_s \cos a}{1+\delta r \cos a} \right) \quad (2\beta)$$

$$w_r + uw_r + \frac{v w_a}{r} + \frac{\delta u w \cos a}{1+\delta r \cos a} - \frac{\delta v w \sin a}{1+\delta r \cos a} + \frac{w w_s}{1+\delta r \cos a} =$$

$$\frac{p_s}{1+\delta r \cos a} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( w_r + \frac{\delta w \cos a}{1+\delta r \cos a} \right) + \frac{w_{aa}}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\delta w \sin a}{1+\delta r \cos a} \right) \right.$$

$$\left. - \left( \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\delta \cos a}{1+\delta r \cos a} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{u_s}{\delta r \cos a} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{v_s}{1+\delta r \cos a} \right) \right] \quad (2.\delta),$$

όπου οι δείκτες δηλώνουν τις αντίστοιχες παραγώγους και:

$$\delta = \frac{a}{R} \quad \text{και} \quad \text{Re} = \frac{a \bar{W}_0}{\nu}. \quad (3)$$

Όπως ήδη προαναφέρθηκε, οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζουν την εξίσωση συνέχειας (η (2α) και διατήρησης της ορμής (2β και 2γ). Προφανώς χρειάζονται και οι αναγκαίες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις αντιμετώπισεως αυτού του προβλήματος (με τις εξισώσεις που βρήκαμε) χρησιμοποιούνται σαν αρχικές συνθήκες, είτε (α) συνθήκη σταθερής ολικής πίεσης κατά μήκος της διατομής εις την «είσοδο». Δηλαδή:

$$u = v = 0$$

$$w = \frac{w'}{W_0} = \frac{1}{1+\delta r \cos a} \left. \vphantom{w} \right\} \text{για } \theta = 0 \quad (4\alpha)$$

είτε (β) σταθερής ταχύτητας διείδυσης: Δηλαδή:

$$u = v = 0$$

$$w = \frac{w'}{W_0} = 1 \left. \vphantom{w} \right\} \text{για } \theta = 0 \quad (4\beta)$$

Ως (συν)οριακές συνθήκες χρησιμοποιούνται οι συνθήκες που εκφράζουν ότι δεν υπάρχει «γλίστρημα» ή ασυνέχεια στα τοιχώματα του σωλήνα. Δηλαδή:

$$u=v=w=0 \quad \text{στο } r = \frac{r'}{a} = 1. \quad (5)$$

Οι εξισώσεις (2) έως (5) συνιστούν την πλήρη μαθηματική περιγραφή (φορμαλισμό) του προβλήματος. Ο λεπτομερής τρόπος λύσης τους (με μια από τις μεθόδους που αναφέραμε στην εισαγωγή, όπως η αριθμητική λύση) δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.

Στην συνέχεια της περιγραφής μας θα θεωρήσουμε μόνο σταθερή ροή, οπότε οι χρονικές παράγωγοι στα αριστερά μέρη των εξισώσεων (2β)–(2δ) εξισώνονται με μηδέν.

## **2.1 Πλήρως Ανεπτυγμένη Ροή**

Σ' αυτό το σημείο σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις αντιμετώπισης τέτοιου προβλήματος υποθέτουμε ότι ο σωλήνας είναι μόνο «ελαφρά» καμπυλωμένος .. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως  $\delta = a / R \ll 1$ . Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να αγνοήσουμε (και να τους θέσουμε ίσους με μηδέν) όρους τάξεως  $\delta$ ,  $O(\delta)$  σε σχέση με όρους τάξεως 1,  $O(1)$  στις σχέσεις (2α) έως 2(δ). Πριν κάνουμε κάτι τέτοιο χρειάζεται να «νορμαλίσουμε» (να διαβαθμίσουμε) τις ταχύτητες ώστε να κάνουμε τους όρους της φυγόκεντρης δύναμης της ίδιας τάξης μεγέθους με τους όρους τριβής και αδρανείας. Και αυτό γιατί η φυγόκεντρος δύναμη είναι αυτή που οδηγεί την δευτερογενή (δευτερεύουσα) κίνηση. Αυτή την διαβάθμιση την επιτυγχάνουμε με τον μετασχηματισμό (6):

$$(u, v, w) \rightarrow (\delta^{1/2} \hat{u}, \delta^{1/2} \hat{v}, \hat{w}). \quad (6)$$

Τα «καπελάκια» πάνω από τις ταχύτητες  $u, v$  και  $w$  τα παραλείπουμε από εδώ και στο εξής κάνοντας την συμφωνία ότι οι ταχύτητες που εμφανίζονται από εδώ και κάτω είναι αυτές που αντιστοιχούν στο δεξί μέρος της (6). Είναι επίσης βολικό να «νορμαλίσουμε» και την αξονική απόσταση χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (7) και να ξαναγράψουμε τις αντίστοιχες των (2α)–(2δ), νορμαλισμένες σχέσεις (8α)–(8δ) διαδοχικά:

$$s = \frac{R\theta}{a} = \delta^{-1/2} z. \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \left( \frac{1+2\delta r \cos a}{1+\delta r \cos a} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\delta v \sin a}{1+\delta r \cos a} + \frac{1}{1+\delta \cos a} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8\alpha)$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{w}{1 + \delta r \cos a} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - \frac{w^2 \cos a}{1 + \delta r \cos a} \\
&= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2}{\kappa} \left\{ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\delta \sin a}{1 + \delta r \cos a} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial a} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta}{(1 + \delta r \cos a)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + \delta r \cos a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{\delta \cos a}{1 + \delta r \cos a} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}, \tag{8\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{w}{1 + \delta r \cos a} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + \frac{w^2 \sin a}{1 + \delta r \cos a} \\
&= -\frac{1}{r\delta} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{2}{\kappa} \left\{ \frac{\delta}{(1 + \delta r \cos a)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{1 + \delta r \cos a} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial z} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta \sin a}{(1 + \delta r \cos a)^2} \frac{\partial \kappa}{\partial z} + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\delta \cos a}{1 + \delta r \cos a} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial a} \right) \right\}, \tag{8\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\delta u w \cos a}{1 + \delta r \cos a} + \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\delta \sin a}{1 + \delta r \cos a} u w + \frac{w}{1 + \delta r \cos a} \frac{\partial w}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{1 + \delta r \cos a} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{\kappa} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\delta w \cos a}{1 + \delta r \cos a} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\delta w \sin a}{1 + \delta r \cos a} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\delta}{1 + \delta r \cos a} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\delta}{1 + \delta r \cos a} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right\}, \tag{8\delta}
\end{aligned}$$

όπου  $\kappa$ , ο αριθμός Dean, ορίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = 2\delta^{1/2} \text{Re} = \left( \frac{a}{R} \right)^{1/2} \frac{2a\bar{W}_0}{\nu} \tag{9}$$

Από αυτές τις εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν πλήρως την ροή στον καμπυλωμένο σωλήνα βλέπουμε ότι δύο παράμετροι  $\kappa$  και  $\delta$  χαρακτηρίζουν πλήρως την ροή.

Η παράμετρος  $\kappa$  (ο αριθμός Dean) χαρακτηρίζει την δευτερογενή (δευτερεύουσα) κίνηση η οποία επάγεται από την φυγόκεντρο δύναμη και την αλληλεπίδρασή της με τις ιξώδεις δυνάμεις (τριβής). Ο αριθμός Dean αποτελεί μέτρο της δευτερογενούς κινήσεως.

Η παράμετρος  $\delta$  είναι μια γεωμετρική παράμετρος, η οποία χαρακτηρίζει εκτός από την γεωμετρία και το μέγεθος της μεταβολής της φυγόκεντρης δύναμης κατά μήκος της διατομής.

Παρατηρούμε ότι οι (8β) και (8γ) είναι της τάξεως:

$$O(1) = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad O(1) = -\frac{1}{r\delta} \frac{\partial p}{\partial a}, \quad (10)$$

Έτσι, όταν  $\delta \ll 1$  μπορούμε να γράψουμε:

$$p = p_0(z) + \delta p_1(r, a, z) + \dots, \quad (11)$$

Δηλαδή, η κύρια συνεισφορά στην αξονική βαθμίδα πίεσης μπορεί να διαχωριστεί από την εγκάρσια συνιστώσα.

Μπορούμε επίσης τώρα να θεωρήσουμε το όριο «χαλαρής» καμπύλωσης σωλήνα με το να θέσουμε  $\delta=0$  στις εξισώσεις (8). Τότε, χρησιμοποιώντας την (11) βρίσκουμε τις παρακάτω ανηγμένες εξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (12\alpha)$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial a} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - w^2 \cos a \\
& = \frac{-\partial p_1}{\partial r} - \frac{2}{\kappa} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial a} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right\}, \tag{12\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial a} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + w^2 \sin a \\
& = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial a} + \frac{2}{\kappa} \left\{ \frac{-\partial^2 w}{r \partial a \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial a} \right) \right\}, \tag{12\gamma}
\end{aligned}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial a} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-\partial p_0}{\partial z} + \frac{2}{\kappa} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right\}. \tag{12\delta}$$

Η μόνη αδιάστατη παράμετρος που εμφανίζεται σ' αυτές τις εξισώσεις είναι ο αριθμός Dean, ο οποίος παίζει το ρόλο του αριθμού Reynolds της ροής και οδηγεί στην επονομαζόμενη «ομοιότητα αριθμού Dean», η οποία επισημάνθηκε για πρώτη φορά από τον Dean (1928). Να σημειωθεί ότι αυτό δεν ισχύει γενικά για ροές σε καμπύλους σωλήνες, παρά μόνο όταν  $\delta \ll 1$ .

Η ροή χαρακτηρίζεται ως πλήρως ανεπτυγμένη όταν δεν μεταβάλλεται παραπέρα με την αξονική θέση. Οι εξισώσεις που καθορίζουν την πλήρως ανεπτυγμένη ροή λαμβάνονται από τις εξισώσεις (12α)-(12δ), θέτοντας όλες (εκτός της πίεσης) τις χωρικές παραγώγους ως προς z ίσες προς μηδέν. Αυτές είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial a} = 0, \tag{13\alpha}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial a} - \frac{v^2}{r} - w^2 \cos a = -\frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{2}{\kappa} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial a} \right), \tag{13\beta}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{uv}{r} + w^2 \sin a = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial a} + \frac{2}{\kappa} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial a} \right) , \quad (13\gamma)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial a} = -\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{2}{\kappa} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right\} . \quad (13\delta)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι τώρα συναρτήσεις μόνο του  $r$  και  $a$ .

Η εξίσωση (13α) μπορεί να ικανοποιηθεί αυτόματα εισάγοντας μια «ρευματική συνάρτηση  $\psi$  τέτοια ώστε:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial a} , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} . \quad (14)$$

Αντικατάσταση στην (13δ) δίνει:

$$\nabla_1^2 w - \frac{\kappa}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} = \frac{\kappa}{2r} (\psi_a w_r - \psi_r w_a) , \quad (15)$$

ενώ διαφορίση των (13β) και (13γ) και απαλοιφή της πίεσης δίνει:

$$\frac{2}{\kappa} \nabla_1^4 \psi + \frac{1}{r} \left( \psi_r \frac{\partial}{\partial a} - \psi_a \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla_1^2 \psi = -2w \left( \sin a w_r + \frac{\cos a}{r} w_a \right) , \quad (16)$$

όπου:

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} . \quad (17)$$

είναι ο τελεστής του Laplace σ' αυτό το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Οι (συν)οριακές συνθήκες είναι:

$$\psi = \psi_1 = w = 0 \quad \text{στο} \quad r = 1 \quad . \quad (18)$$

Οι εξισώσεις (15) και (16) μαζί με τις οριακές συνθήκες (18) καθορίζουν πλήρως το πρόβλημα της πλήρως ανεπτυγμένης ροής στο όριο της χαλαρής καμπύλωσης.

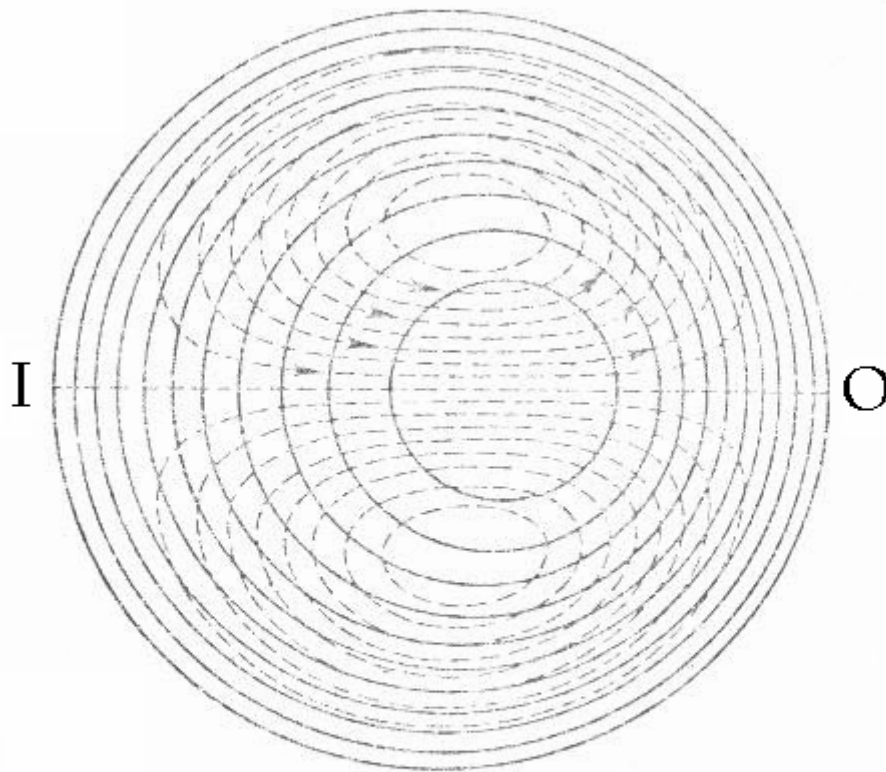
### Περίπτωση μικρού αριθμού Dean

Για μικρές τιμές του αριθμού Dean,  $\kappa$ , το παραπάνω πρόβλημα απλοποιείται και αντιμετωπίζεται εύκολα με την ανάπτυξη της λύσης  $w$  σε σειρά Taylor ως προς τον αριθμό Dean της μορφής:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{2n} w_n(r, a) \quad , \quad \psi = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{2n} \psi_n(r, a) \quad . \quad (19)$$

Στην δυναμοσειρά αυτή προφανώς θα διατηρήσουμε μόνο τους σημαντικούς όρους.

Ο σημαντικότερος όρος σ' αυτή την έκφραση για την λύση  $w$  (δηλαδή ο όρος για  $n=0$ ),  $w_0$ , περιγράφει την **ροή Poiseuille** σε ευθύγραμμο σωλήνα. Ο σημαντικότερος όρος στην έκφραση του  $\psi$  είναι  $O(\kappa)$ . Θα πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά ως προς  $\kappa$  είναι ισοδύναμο με σειρά προσεγγίσεων με βάση την θεωρία διαταραχών. Ξεκινώντας από την **ροή Poiseuille** υπολογίζουμε με διαδοχικές προσεγγίσεις την επίδραση των όρων αδρανείας. Προφανώς μια τέτοια προσέγγιση είναι κατάλληλη μόνο για ελαφρά ή χαλαρά καμπυλωμένους σωλήνες. Στο σχήμα 2 φαίνεται μια τυπική περίπτωση δευτερογενών γραμμών ροής στην (κυκλική) διατομή του σωλήνα σε μορφή ισοϋψών καμπυλών σταθερής αξονικής ταχύτητας.



————— Ισοϋψείς Σταθεράς Αξονικής ταχύτητας  
 - - - - - Δευτερεύουσες Γραμμές Ροής

Σχήμα 2

**Σχήμα 2:** Δευτερογενείς γραμμές ροής και ισοϋψείς σταθερής αξονικής ταχύτητας για μικρό αριθμό Dean. *I* συμβολίζει εσωτερική (Internal) καμπύλωση, και *O* εξωτερική (Outer) καμπύλωση.

Όπως βλέπουμε στο σχήμα 2, η ροή συνίσταται σε ένα ζευγάρι ελικοειδών στροβίλων αντιθέτου φοράς περιστροφής, συμμετρικά σε σχέση με το επίπεδο συμμετρίας. Αυτή η δευτερογενής διάταξη ρευματικών γραμμών (διάταξη ροής) εμφανίζεται επειδή η βαθμίδα πίεσης, η οποία δημιουργείται λόγω της φυγοκέντρου δύναμews, και η οποία είναι περίπου ομοιογενής κατά μήκος της διατομής, οδηγεί το βραδέως κινούμενο ρευστό προς το εσωτερικό τοίχωμα (το εσωτερικά καμπυλωμένο τοίχωμα). Απ' την άλλη μεριά, το ταχέως κινούμενο ρευστό στον πυρήνα του σωλήνα σπρώχνεται προς το εξωτερικά καμπυλωμένο τοίχωμα. Οι στρόβιλοι είναι σχεδόν



συμμετρικά τοποθετημένοι σε σχέση με τις θέσεις  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ . Τα κέντρα των στροβίλων

(τα στάσιμα σημεία) βρίσκονται στις θέσεις  $r \approx 0.43$ , ενώ η θέση της μέγιστης αξονικής ταχύτητας είναι μετατοπισμένη πιο έξω στη θέση  $r \approx 4.2 \times 10^{-4} K$ ,  $\alpha=0$ .

Ο αδιάστατος όγκος ροής στον σωλήνα εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Dean και δίνεται από την σχέση (20):

$$\frac{Q}{\pi a^2 \bar{W}} = 1 - 0,0306 \left( \frac{K}{576} \right)^2 + 0,0120 \left( \frac{K}{576} \right)^4 + O \left[ \left( \frac{K}{576} \right)^6 \right], \quad (20)$$

όπου:

$$K = (2a/R)(W_{\max} a/\nu)^2,$$

και  $W_{\max}$  είναι η μέγιστη ταχύτητα σε ένα «ισοδύναμο» ευθύγραμμο σωλήνα της ίδιας ακτίνας και της ίδιας βαθμίδας πίεσεως. Εάν  $\bar{W}$  είναι η μέση ταχύτητα στον ίδιο σωλήνα

, τότε  $\bar{W} = \frac{W_{\max}}{2}$ . Στην σχέση (20) η παράμετρος  $K$  είναι μια διαφορετική έκφραση που

βασίζεται σε ελαφρά διαφορετικό ορισμό (που θα δούμε παρακάτω) του αριθμού Dean  $K$ .

Βλέπουμε επίσης από την έκφραση (20), ο πρώτος όρος της οποίας αντιστοιχεί στην ροή Poiseuille, ότι, όπως θα ήταν αναμενόμενο, η επίδραση της καμπυλότητας συνίσταται στον περιορισμό της ροής (flux).

Ένα αξιοσημείωτο και πολύ ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της λύσης μέσω της (δυναμο)σειράς Dean είναι ότι η αντίσταση Παροχής (ροής) δεν επηρεάζεται από τον πρώτο όρο της σειράς και αυξάνεται μόνο μέσω του δεύτερου όρου. Η αντίσταση παροχής (ροής) παριστάνεται γενικά αδιάστατα δια του παράγοντα (ή λόγου) τριβής  $\lambda$ .

Αυτός ο παράγοντας εκφράζεται από τον λόγο της αντίστασης στον καμπύλο σωλήνα ( $\lambda_c$ ) προς την αντίσταση σε ένα ευθύγραμμο σωλήνα της ίδιας ροής ( $\lambda_s$ ). Επειδή αυτός ο λόγος ισούται προς  $\left(\frac{Q_c}{Q_s}\right)^{-1}$ , όπου  $Q_c$  και  $Q_s$  είναι οι αντίστοιχες παροχές στον καμπύλο και ευθύγραμμο σωλήνα, από την (20) βλέπουμε ότι:

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{\lambda_s} = \left(\frac{Q_c}{Q_s}\right)^{-1} = 1 + 0,0306\left(\frac{K}{576}\right)^2 - 0,0110\left(\frac{K}{576}\right)^4 + \dots \quad (21)$$

Ο Dean βασιζόμενος σε διάφορες υποθέσεις κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το ανάπτυγμα του σε σειρά ισχύει για  $K \leq 576$ , κάτι το οποίο αργότερα επιβεβαιώθηκε πειραματικά.

Πειράματα επίσης επιβεβαίωσαν ότι η ροή σε ένα καμπύλο σωλήνα ή αγωγό είναι πολύ περισσότερο σταθερή από την αντίστοιχη ροή σε ευθύγραμμο αγωγό ή σωλήνα. Έτσι, ενώ ο κρίσιμος αριθμός Reynolds στην δεύτερη περίπτωση (ευθύγραμμος αγωγός) είναι τυπικά γύρω στις 2000, σε ένα καμπύλο σωλήνα, ακόμα και πολύ μικρής καμπυλότητας, μπορεί κάλλιστα να είναι μεγαλύτερος κατά ένα παράγοντα του δύο ή και περισσότερο. Για παράδειγμα για  $a/R \approx 1/32$ , ο κρίσιμος αριθμός Reynolds είναι περίπου 5000. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί σε  $K \approx 1.6 \times 10^6$ , κάτι που ακυρώνει την περιοχή της στρωτής ροής, και, επί πλέον, ακυρώνει την αντιμετώπιση μέσω της δυναμοσειράς Dean, αφού αυτό το ανάπτυγμα ισχύει το πολύ μέχρι  $K = 576$ . Απαιτείται λοιπόν άλλου είδους αντιμετώπιση, την οποία (μόνο) θα σκιαγραφήσουμε παρακάτω. Πριν όμως θα πρέπει να κάνουμε μια παρένθεση για να συζητήσουμε τον καταλληλότερο ορισμό του αριθμού Dean.

### Ορισμός (επανορισμός) του αριθμού Dean.

Στην σχέση (9) είχαμε ορίσει τον αριθμό Dean ως:

$$\kappa = 2\delta^{1/2} \text{Re} = \left(\frac{a}{R}\right)^{1/2} \left(\frac{2a\bar{W}_0}{\nu}\right), \text{ όπου } \bar{W}_0 \text{ είναι η μέση αξονική ταχύτητα, ενώ ο}$$

αρχικός ορισμός του Dean ήταν :

$$K = 2\left(\frac{a}{R}\right)\left(\frac{aW_0}{\nu}\right)^2 = \frac{2W_0^2 a^3}{\nu^2 R}, \quad (22)$$

όπου  $W_0$  είναι απλά μια σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας. Εάν πάρουμε  $W_0 = \bar{W}_0$  τότε  $\kappa$  και  $K$  συνδέονται με την σχέση  $\kappa = (2K)^{1/2}$ . Για μια πλήρως ανεπτυγμένη ροή, από τις (2β)-(2δ) έπεται ότι η βαθμίδα της αξονικής πίεσης είναι σταθερά. Μπορούμε λοιπόν να εισάγουμε μια αδιάστατη σταθερά  $C \equiv \frac{Ga^2}{\mu W_0}$ , και να ξαναγράψουμε την (22)

ως:

$$K = \frac{2a^3}{\nu^2 R} \left(\frac{Ga^2}{\mu C}\right)^2. \quad (23)$$

Εάν, ακολουθώντας τον Dean, προσδιορίσουμε  $W_0$  ως την μέγιστη ταχύτητα ( $W_{max}$ ) σε ένα ευθύ σωλήνα της ίδιας ακτίνας και της ίδιας βαθμίδας πίεσης, τότε  $C = 4$  και η (22) ξαναγράφεται ως:

$$K = \frac{2a^3}{\nu^2 R} \left(\frac{Ga^2}{4\mu}\right)^2 = 2\left(\frac{a}{R}\right)\left(\frac{Ga^3}{4\mu\nu}\right)^2 = \frac{G^2 a^7}{8\mu^2 \nu^2 R} \quad (24)$$

Αντιθέτως, εάν απλά θέσουμε  $C = 1$ , τότε η (23) γίνεται:

$$K = \frac{2a^3}{\nu^2 R} \left( \frac{Ga^2}{\mu} \right)^2 \quad (25)$$

Μετά την αρχική δουλειά του Dean πολλοί ερευνητές χρησιμοποίησαν όχι μόνο έναν, αλλά όλους τους εναλλακτικούς ορισμούς περιπλέκοντας τα πράγματα. Και σαν να μην έφτανε μόνο αυτό, πολλές φορές χρησιμοποιήθηκε  $2a$  αντί για  $a$  στην σχέση  $\delta = a/R$  και στον ορισμό του αριθμού Reynolds. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί  $\kappa^2$  ή  $K^{1/2}$  αντί για  $\kappa$  και  $K$ , επιτείνοντας ακόμη περισσότερο την σύγχυση.

Σε ειδικές περιπτώσεις ροών έχει επίσης χρησιμοποιηθεί ο ορισμός του αριθμού Dean, με το σύμβολο  $D$ :

$$D = \left( \frac{2a^3}{\nu^2 R} \right)^{1/2} \frac{Ga^2}{\mu} = 4 \left( \frac{2a}{R} \right)^{1/2} \frac{Ga^3}{4\mu\nu} \quad (26)$$

ο οποίος συνδέεται με τον αριθμό  $K$  στην (24) με την σχέση:  $D = 4K^{1/2}_{Dean}$ .

Η σχέση μεταξύ  $D$  και  $\kappa$ ,  $K$  είναι ακόμη πιο πολύπλοκη:

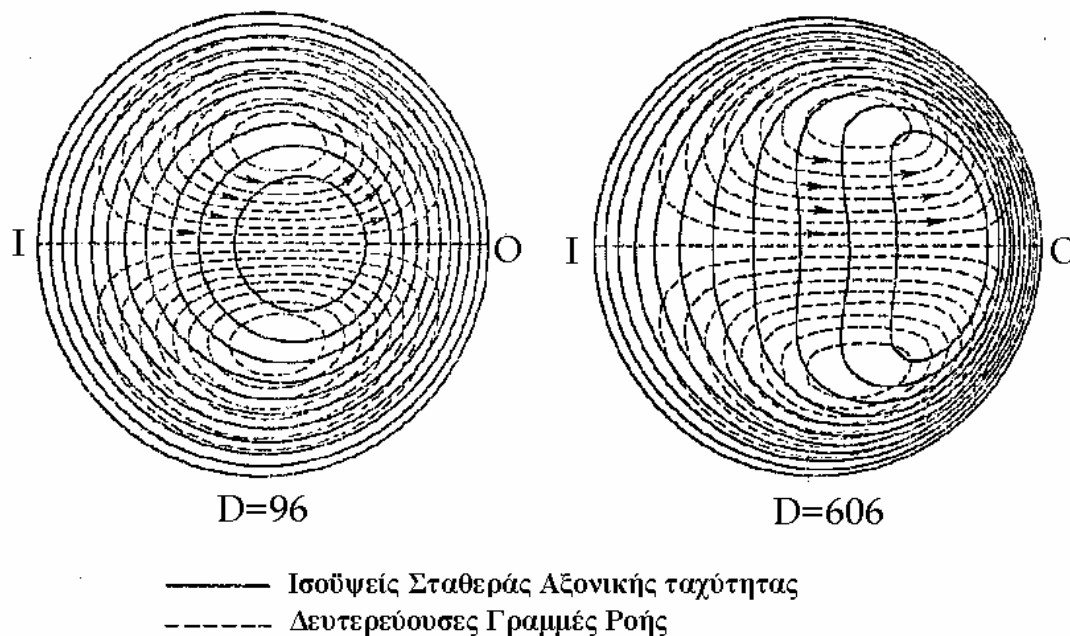
$$\frac{Q_c}{Q_s} = \frac{\kappa}{\left( \frac{1}{2}K \right)^{1/2}} = 2^{5/2} \frac{\kappa}{D} \quad (27)$$

Θα πρέπει λοιπόν κανείς να είναι προσεκτικός και σαφής ως προς τον ακριβή ορισμό του αριθμού Dean που χρησιμοποιείται, ιδιαίτερα όταν αναφερόμαστε σε οριακές τιμές για τις οποίες ισχύουν κάποιες εξισώσεις και λύσεις. Για παράδειγμα, το άνω όριο ισχύος του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά Dean, το οποίο αντιστοιχεί σε  $K=576$ , είναι  $D = 96$ , ενώ το πάνω όριο για την περιοχή της στρωτής ροής είναι  $D = 5000$ .

### Περιπτώσεις ενδιάμεσου αριθμού Dean.

Έχουμε ήδη εξετάσει την περιοχή μικρού αριθμού Dean, η οποία αντιστοιχεί σε  $K \leq 476$  ή  $D \leq 96$ . Η περιοχή των μεγάλων αριθμών Dean, την οποία θα σκιαγραφήσουμε παρακάτω, αντιμετωπίζεται μέσω της εννοίας και μεθοδολογίας του **οριακού στρώματος**. Η ενδιάμεση περιοχή, ας πούμε χοντρικά η περιοχή μεταξύ:  $96 < D \leq 600$ , έχει εγγενή δυσκολία γιατί θα πρέπει κανείς πλήρως να επιλύσει αριθμητικά τις μη γραμμικές εξισώσεις (15) και (16). Γι αυτό τον λόγο λύσεις σ' αυτή την περιοχή επιτεύχθηκαν αρκετά αργότερα από τις λύσεις στις μεγάλες περιοχές  $K$  και  $D$ . Οι McConalogue & Srivastava (1968) αντιμετώπισαν την περιοχή  $96 < D \leq 600$  χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα σε σειρές Fourier, και περαιτέρω επίλυση (ολοκλήρωση) των διαφορικών εξισώσεων που προέκυψαν με αριθμητικές μεθόδους. Το σχήμα 3 δείχνει τις δευτερογενείς γραμμές ροής και ισούψεις σταθερής αξονικής ταχύτητας για  $D=96$  και  $606$  με βάση την εργασία των McConalogue & Srivastava (1968).

Στο σχήμα 3 είναι εμφανής η προς τα έξω μετακίνηση της θέσης της μεγίστης αξονικής ταχύτητας, και ενώ οι δευτερογενείς γραμμές ροής εξακολουθούν να δείχνουν στροβιλώδη δομή για  $D=606$ , η απαρχή των δευτερογενών και αξονικών στρωμάτων είναι καθαρά ορατή στην περίπτωση μεγάλου  $D$ . Αυτό φαίνεται πιο emphaticά στο σχήμα 4, που έχουμε πάρει από την εργασία των Collins & Dennis (1975) οι οποίοι έχουν επεκταθεί μέχρι την περιοχή  $D=5000$ , για  $D=5000$ , όπου φαίνεται η πολύ μεγαλύτερη παραμόρφωση των δευτερογενών γραμμών ροής.

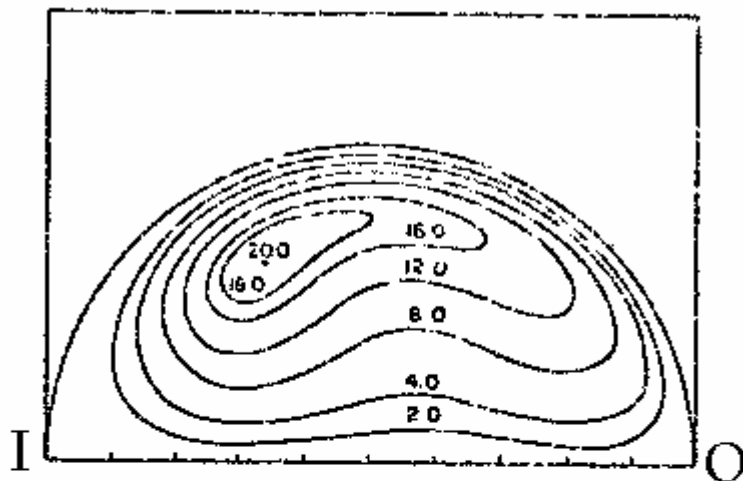


**Σχήμα 3**

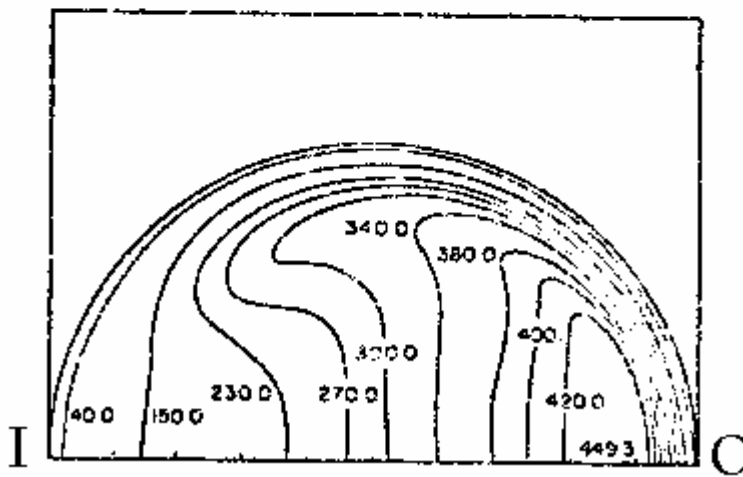
Δευτερογενείς γραμμές ροής και ισοϋψείς σταθεράς αξονικής ταχύτητας για μικρό και ενδιάμεσο αριθμό Dean. *I* συμβολίζει εσωτερική (Internal) καμπύλωση, και *O* εξωτερική (Outer) καμπύλωση.

Από όλες τις γνωστές εργασίες σ' αυτή την περιοχή αριθμών Dean η πιο γνωστή (και βέβαια ανάμεσα στις πιο αντιπροσωπευτικές δουλειές που μπορεί να εμπιστευθεί κανείς) εργασία είναι των Collins & Dennis (1975) οι οποίοι έχουν επεκταθεί μέχρι  $D=5000$ .

Μια ακόμη πολύ γνωστή εργασία είναι του Van Dyke (1978) ο οποίος επέκτεινε την σειρά Dean με υπολογιστή μέχρι τον 24<sup>ο</sup> όρο και απέδειξε ότι η σειρά συγκλίνει μέχρι  $D < 96.8$ . Χρησιμοποιώντας κατόπιν ένα διάγραμμα Domb-Sykes και τον μετασχηματισμό Euler επέκτεινε την σειρά ως προς τον λόγο  $\lambda_c / \lambda_s$  μέχρι  $D = \infty$ . Η σειρά αυτή συμφωνεί καλά με όλες τις αριθμητικές λύσεις και τα πειραματικά δεδομένα μέχρι και  $\kappa \approx 100$ . Επιπλέον αυτή η ανάλυση προβλέπει ότι ο λόγος  $\lambda_c / \lambda_s$  αυξάνει ασυμπτωτικά ως  $\lambda_c / \lambda_s \sim 0.47136x^{1/4}$ , κάτι, που όπως δείχθηκε αργότερα, έρχεται σε αντίθεση με όλες τις άλλες γνωστές λύσεις για μεγάλους αριθμούς Dean (βλέπετε πίνακα 1).



(α)



(β)

**Σχήμα 4**

*Δευτερογενείς γραμμές ροής και ισοϋψείς σταθερής αξονικής ταχύτητας για μεγάλο αριθμό Dean,  $D=5000$ . I συμβολίζει εσωτερική (Internal) καμπύλωση, και O εξωτερική (Outer) καμπύλωση.*

Θα αναπτύξουμε τώρα εν συντομία την περιοχή των μεγάλων αριθμών Dean με τις ιδιαιτερότητές της και τους τρόπους αντιμετώπισέως τους μαθηματικά (αναλυτικά και αριθμητικά).

**Πίνακας 1:** Ασυμπτωτικός λόγος τριβής για μεγάλους αριθμούς Dean.

$\lambda_c/\lambda_s$	Παραπομπή
0.1064 $\kappa^{1/2}$	Adler (1934)
0.09185 $\kappa^{1/2}$	Barua (1963)
0.1080 $\kappa^{1/2}$	Mori & Nakayama (1965)
0.1033 $\kappa^{1/2}$	Itō (1969)
0.47136 $\kappa^{1/4}$	Van Dyke (1978)

### Περιογή μεγάλων αριθμών Dean.

Καθώς ο αριθμός Dean αυξάνει, τα κέντρα των στροβίλων μετατοπίζονται προς την εξωτερική καμπύλωση,  $\alpha = 0^\circ$ . Εκεί γίνεται ένας σημαντικός περιορισμός της ροής στον καμπύλο αγωγό σε σχέση με το ευθύγραμμο. Θα ήταν πολύ χρήσιμο και ενδιαφέρον να εξετάσουμε με κάποια λεπτομέρεια πως εξελίσσεται η μορφή της ροής καθώς ο αριθμός Dean αυξάνει. Για ροές με μικρούς αριθμούς Dean η περιφερειακή ταχύτητα προσεγγίζει την μέγιστη τιμή της στη θέση  $\alpha = \pm 90^\circ$  και οι δύο στρόβιλοι είναι συμμετρικοί σε σχέση με αυτή την τιμή της γωνίας  $\alpha$ . Καθώς ο αριθμός Dean αυξάνει, (δευτερογενή) οριακά στρώματα αναπτύσσονται στα τοιχώματα με το ρευστό να εισέρχεται σ' αυτά τα στρώματα κοντά στην εξωτερική καμπύλωση και να εξέρχεται πλησίον της εσωτερικής καμπύλωσης.

Περαιτέρω αύξηση του αριθμού Dean, και κατά συνέπεια της φυγόκεντρου δύναμης, οδηγεί σε αύξηση της περιφερειακής ταχύτητας και σε αύξηση της ποσότητας ρευστού που αντλείται μέσα στα δευτερογενή οριακά στρώματα κοντά στην εξωτερική καμπύλωση. Τα δευτερογενή οριακά στρώματα αυτορυθμίζονται και διαμορφώνονται με λέπτυνση κοντά στην εξωτερική καμπύλωση και διεύρυνση κοντά στην εσωτερική καμπύλωση. Ταυτόχρονα, οι θέσεις των μεγίστων της περιφερειακής ταχύτητας μετακινούνται προς την εξωτερική καμπύλωση. Με ακόμα μεγαλύτερη αύξηση του αριθμού Dean τα δευτερογενή οριακά στρώματα κοντά στην εσωτερική καμπύλωση λεπτύνονται ακόμα περισσότερο και, σύμφωνα με ορισμένες εργασίες, τελικά διαχωρίζονται. Το εύρος της περιοχής «διαχωρισμού» βαθμιαία μεγαλώνει καθώς μεγαλώνει περαιτέρω ο αριθμός Dean. Δεν υπάρχει δυστυχώς αναλυτικό μοντέλο ακόμα



το οποίο να περιγράφει ή να περιλαμβάνει αυτό τον διαχωρισμό και, ακόμα πιο σημαντικό, η ύπαρξη αυτού του διαχωρισμού σε πολλές εργασίες είναι υπό αμφισβήτηση.

Αν και το ενδιαφέρον για ροές μεγάλου αριθμού Dean εξακολουθεί να υπάρχει, εντούτοις τα τελευταία χρόνια υπάρχει περισσότερο ενδιαφέρον για να βρεθούν κατάλληλες και συνεπείς κλίμακες για κάθε μία από τις υποπεριοχές του πεδίου ροής, όπως επί παραδείγματι της περιοχής του οριακού στρώματος, με μεγαλύτερη ακρίβεια. Τέτοιου είδους θεωρία είναι η θεωρία ομάδας επανακανονικοποίησης (Renormalization group theory) η οποία είναι κατάλληλη για μελέτη πολλών φαινομένων στην κρίσιμη περιοχή \*

Αν κανείς αναζητά κλίμακες τέτοιες ώστε στον πυρήνα οι δυνάμεις αδρανείας να εξισορροπούν την βαθμίδα πίεσης, και στο οριακό στρώμα να υπάρχει μια ισορροπία μεταξύ αδράνειας, τριβής και φυγοκέντρου δύναμης, τότε βρίσκει ότι  $w_{core} = O(D^{2/3})$ , και  $\psi = O(D^{1/3})$ . Το πάχος του οριακού στρώματος βρίσκεται ότι είναι της τάξεως  $O(D^{-1/3})$ . Με βάσει αυτές τις κλίμακες μπορεί κανείς να βρει από τις (15) και (16) τις καταστατικές εξισώσεις για τις περιοχές του πυρήνα και του οριακού στρώματος. Αυτό έχει ήδη γίνει στην βιβλιογραφία.

Εντούτοις για την περιοχή των μεγάλων αριθμών Dean εξακολουθούν να υπάρχουν ακόμα ανοικτά προβλήματα κυρίως για την έκταση και την αλληλεπίδραση μεταξύ του οριακού στρώματος και του πυρήνα καθώς και για την τοπική δομή κάθε μιας περιοχής. Απ' την άλλη μεριά, για την περιγραφή και αλληλοσυσχέτιση της αντίστασης ροής, οι διαθέσιμες αριθμητικές λύσεις και τα μοντέλα οριακών στρωμάτων είναι μάλλον ικανοποιητικά και έχουν «επικυρωθεί» από τα πειραματικά δεδομένα.

Να σημειώσουμε σ' αυτό το σημείο ότι ενώ η ροή σε καμπύλο σωλήνα εξαρτάται από δύο παραμέτρους ( $\kappa$  και  $\delta$ ), τον αριθμό Dean και τον λόγο καμπυλότητας, η επίδραση της Καμπυλότητας δεν έχει μελετηθεί τόσο πολύ όσο η επίδραση του αριθμού Dean. Πάντως είναι γνωστό ότι ο ρόλος της παραμέτρου  $\delta$  είναι πολύ καθοριστικός για μικρές τιμές του αριθμού Dean.

---

\* Η θεωρία αυτή απαιτεί πολύ προχωρημένες και εξειδικευμένες γνώσεις μαθηματικών (θεωρία ομάδων, ειδικές «άλγεβρες», κτλ.) μεταπτυχιακού επιπέδου, σαφώς έξω από τα όρια της παρούσης εργασίας. Είναι όμως πολύ διαδεδομένη σε πολλές περιοχές της θεωρητικής και μαθηματικής Φυσικής, από την Φυσική συμπεκνωμένης ύλης ως την Πυρηνική Φυσική και την Φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων.

Εδώ δεν θα εξετάσουμε περισσότερα παραδείγματα και περιπτώσεις ανάλογα με τις παραμέτρους  $K$  (ή  $D$ ) και  $\delta$ , αλλά θα περιοριστούμε στην μέχρι τώρα συζήτηση και απλά θα παραθέσουμε εν συντομία στο κεφάλαιο VI, για πληρότητα, ένα παράδειγμα με διαφορετική γεωμετρία διατομής και συμμετρία, οπότε θα αλλάξει και η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

### Ροή σε καμπύλο σωλήνα τριγωνικής διατομής

Όπως έχουμε δει και στην εξίσωση (16) η καταστατική εξίσωση για την συνάρτηση ροής  $\psi$  περιλαμβάνει πέραν του τελεστή Laplace  $\nabla^2$ , και τον τελεστή  $\nabla^4$ . Ο Mosfatti (1964) εξέτασε λεπτομερώς την δισδιάστατη ροή ενός ιξώδους ρευστού στην περιοχή μιας (αιχμηρής) οξείας γωνίας και διαπίστωσε ότι η συνάρτηση ροής  $\psi$  ικανοποιεί την *διαρμονική* (σε αναλογία με την (μονο) αρμονική εξίσωση  $\nabla^2\psi = 0$ ) εξίσωση  $\nabla^4\psi = 0$ .

Η τοπική λύση της διαρμονικής εξισώσεως έχει την μορφή:

$$\psi(r, \theta) = r^\lambda f_\lambda(\theta) \quad (28)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\psi = \partial\psi / \partial\theta = 0 \quad \text{όταν} \quad \theta = \pm a \quad , \quad (29)$$

Στο παρόν παράδειγμα αντί απλά για μια οξεία (αιχμηρή) γωνία θα εξετάσουμε έναν αγωγό με τριγωνική διατομή, όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Οι εξισώσεις κινήσεως έχουν δοθεί από τον Dean (1928). Με την υπόθεση ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) στην διεύθυνση όπου αυξάνονται οι συντεταγμένες ( $x'$ ,  $y'$ ,  $\varphi$ ) είναι ανεξάρτητες της γωνίας  $\varphi$ . Εάν  $x' = ax$ ,  $y' = ay$  και  $v$  είναι ο συντελεστής κινηματικής τριβής (κινηματικού ιξώδους) μπορούμε να γράψουμε:

$$u' = \frac{v\partial\psi}{a\partial y}, \quad v' = -\frac{v\partial\psi}{a\partial x}, \quad w' = \frac{v}{a} \left( \frac{2a}{L} \right)^{-\frac{1}{2}} w \quad , \quad (30)$$

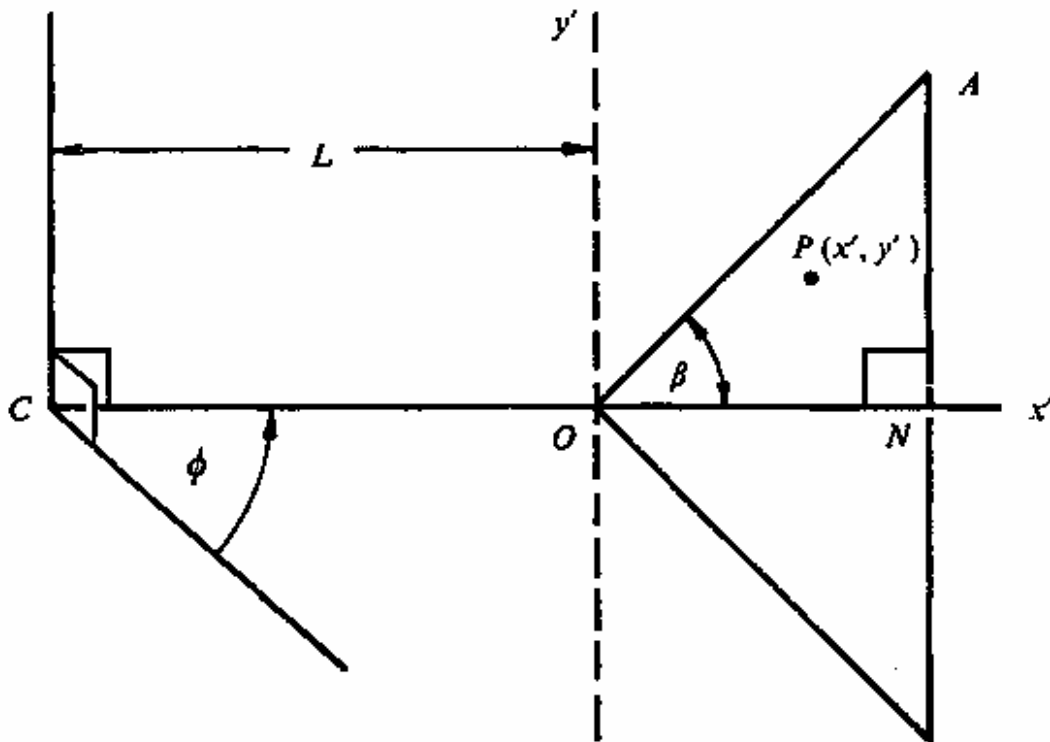
όπου  $\psi(x,y)$  είναι η αδιάστατη συνάρτηση ροής της δευτερογενούς ροής στην διατομή.

Μπορούμε τότε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης για τις  $\psi(x,y)$  και  $w(x,y)$ :

$$\nabla^2 w + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} = -D \quad , \quad (31)$$

$$\nabla^4 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) + w \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad , \quad (32)$$

όπου, κατά τα γνωστά  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  είναι ο τελεστής Laplace στις δύο διαστάσεις σε καρτεσιανές (αυτή την φορά, λόγω της τριγωνικής συμμετρίας) συντεταγμένες.



**Σχήμα 5**

*Σύστημα συντεταγμένων και γεωμετρία της τριγωνική διατομής του αγωγού.*

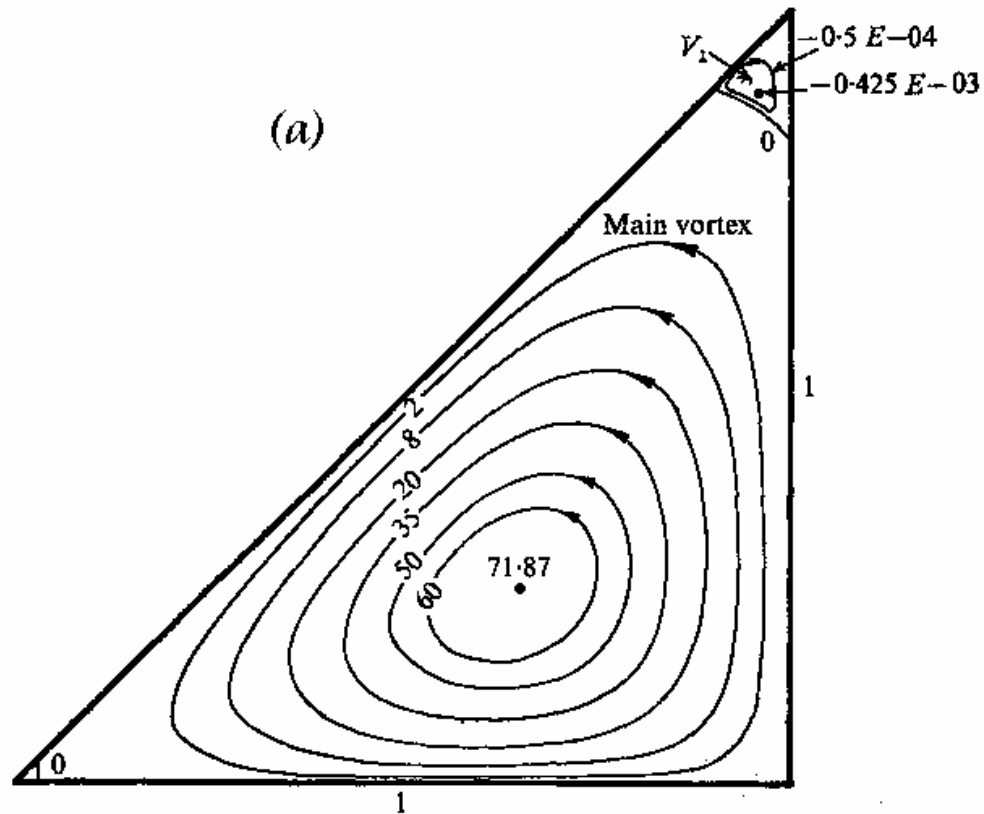
Η σταθερά  $D$  είναι ο αριθμός Dean, όπως ορίστηκε στην (26). Εάν συμβολίσουμε με  $\Delta$  την τριγωνική περιοχή (διατομή) του σχήματος 5, τότε οι (συν)οριακές συνθήκες γράφονται:

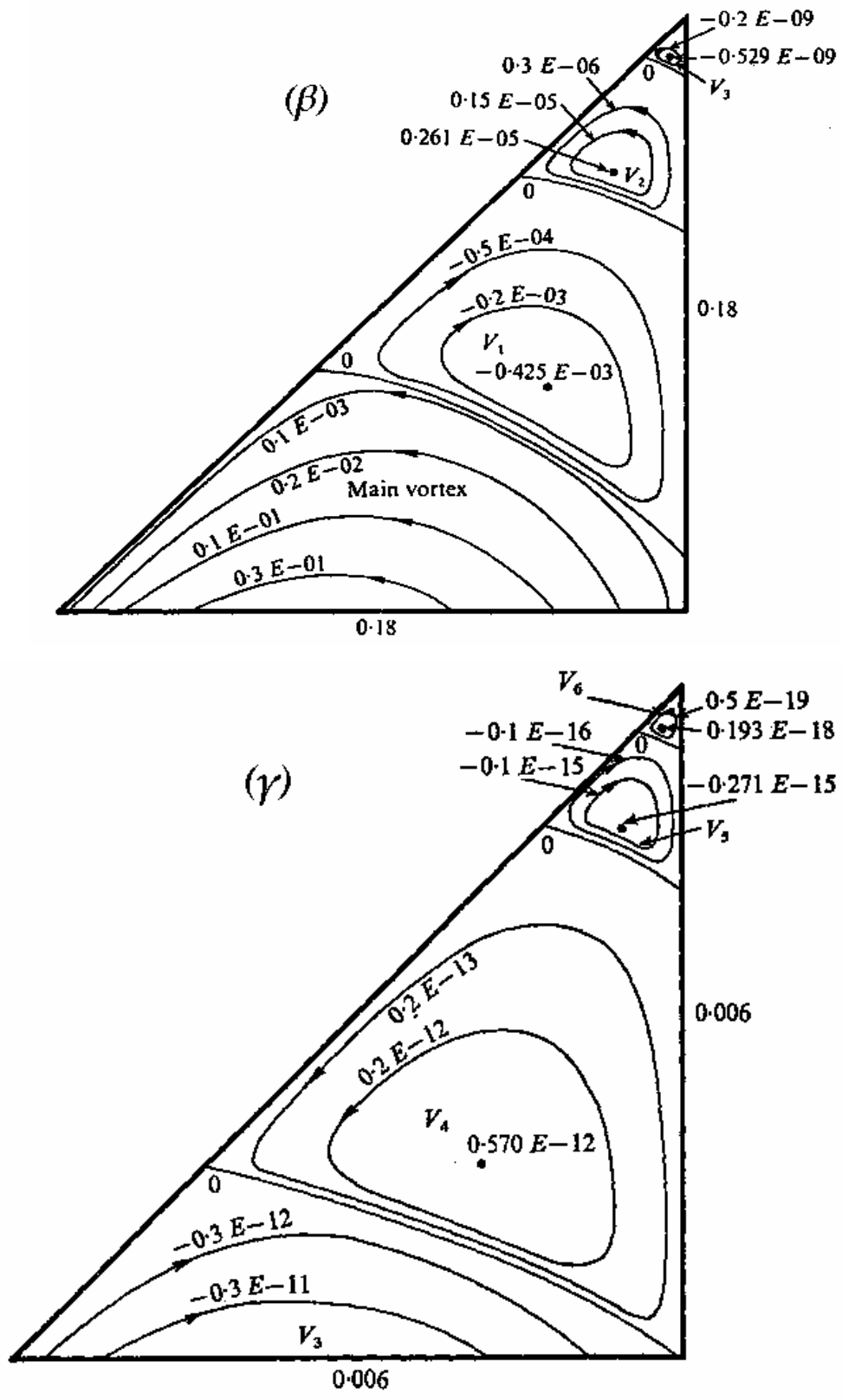
$$w = 0, \quad \partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0 \quad \text{στο } \Delta \quad (33)$$

απ' όπου έπεται ότι μπορούμε να πάρουμε:

$$\psi = 0 \quad \text{στο } \Delta \quad (34)$$

Έχοντας τις (διαφορικές) εξισώσεις που περιγράφουν την ροή καθώς και τις συνοριακές συνθήκες, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα έχει κατ' αρχάς λυθεί και να σταματήσουμε εδώ. Εντούτοις, θα περιλάβουμε συνοπτικά κάποια χαρακτηριστικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική λύση αυτών των εξισώσεων, τα οποία συνοψίζουμε στο τρίπτυχο του σχήματος 6 ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ).





Σχήμα 6.

**Κυρία δευτερογενής ροή και οι γωνιακοί στρόβιλοι πλησίον της γωνίας A:** (α) Κυρία δευτερογενής ροή και ο στρόβιλος  $V_1$ , (β) Στρόβιλοι  $V_1, \dots, V_2$ , (γ) Στρόβιλοι  $V_4, \dots, V_6$ . Οι τιμές της συναρτήσεως ροής  $\Psi$  δίνονται πάνω στις γραμμές ροής.

Προφανώς, το θέμα είναι πλούσιο και σύνθετο και είναι φυσικό να απαιτεί πολύ περισσότερη μελέτη και ανάλυση, τόσο γενική, όσο και ειδική σε πολλά ενδιαφέροντα θέματα που εδώ αναφέρθηκαν μόνο συνοπτικά. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν εμπίπτει στους στόχους της παρούσης μελέτης και ενδεχομένως θα αποτελέσει αντικείμενο άλλων σχετικών εργασιών (κατάλληλα εστιασμένων ή εξειδικευμένων). Προσεκτική μελέτη των αναφορών και παραπομπών μπορεί εν μέρει να γεφυρώσει αυτή την ανάγκη.

Κλείνοντας αυτή την εργασία θα ήθελα εδώ να αναφέρω, ότι παρόλο που ρευστομηχανική είναι ένας μακρόχρονος και εδραιωμένος κλάδος της επιστήμης με πολλές και παλιές εφαρμογές μερικές από τις οποίες ήδη σκιαγραφήσαμε (βλέπετε και εξώφυλλο), εντούτοις η έρευνα σ' αυτή την περιοχή συνεχίζει να είναι ενεργός και εντατική με ολοένα και περισσότερες νέες περιοχές με μεγάλη τεχνολογική σημασία.

Για παράδειγμα, ο τομέας των «νανορευστών» είναι ένας νέος πολλά υποσχόμενος κλάδος στην αιχμή της επιστημονικής έρευνας και τεχνολογίας (βλέπετε παραπομπές 26-27).

## VIII. ΕΠΙΛΟΓΟΣ - ΣΥΝΟΨΗ

Έχουμε μελετήσει και περιγράψει από Μαθηματική, Φυσική, μεθοδολογική και ιστορική σκοπιά την ροή σε καμπύλο σωλήνα ή αγωγό διαφόρων διατομών για ιξώδες ασυμπίεστο ρευστό. Η μαθηματική ανάλυση βασίζεται στην ανάπτυξη περιγραφή και κατανόηση των γενικών μαθηματικών διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες εκφράζουν τους βαθύτερους Φυσικούς νόμους, και την εφαρμογή τους σε συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις. Οι ειδικές περιπτώσεις αναφέρονται σε συγκεκριμένη γεωμετρία της ροής (των αγωγών) και σε συγκεκριμένες ιδιότητες του ρευστού (π.χ. ασυμπίεστο, με ή χωρίς ιξώδες, κτλ. ).

Η γεωμετρία της ροής (των αγωγών) καθορίζει την μορφή των γενικών διαφορικών εξισώσεων στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων που είναι συμβατό με την γεωμετρία της ροής (π.χ. καρτεσιανό, σφαιρικό, κυλινδρικό, κτλ) καθώς και τις κατάλληλες συνοριακές και αρχικές συνθήκες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την ολοκλήρωση (επίλυση) αυτών των διαφορικών εξισώσεων.

Το «είδος» του ρευστού (πέρα από τα χαρακτηριστικά καταστατικά μεγέθη) καθορίζει, τις απλουστεύσεις, εξιδανικεύσεις και προϋποθέσεις για την επίλυση των εξισώσεων καθώς και τα φυσικά (και μαθηματικά) όρια μέσα στα οποία είναι αυτές οι λύσεις αποδεκτές. Χωρίς τις απλουστεύσεις και εξιδανικεύσεις η επίλυση των εξισώσεων καθίσταται από δύσκολη μέχρι πρακτικά αδύνατη. Σ' αυτές τις περιπτώσεις καταφεύγουμε στην αριθμητική επίλυση. Πολλές φορές μπορούμε, ανάλογα με την περίπτωση, να δεχτούμε χονδρικά κάποιες παραδοχές και να αναπτύξουμε προσεγγίσεις, (συνήθως ελεγχόμενης ακρίβειας) χρησιμοποιώντας τις ίδιες ή τροποποιημένες «εξιδανικευμένες» εξισώσεις (π.χ ιδανικά αέρια, Νευτώνεια ρευστά, κτλ) τις οποίες μπορούμε εάν επιθυμούμε να διορθώσουμε εκ των υστέρων με κάποια από τις γνωστές μεθόδους, όπως η θεωρία διαταραχών. Άλλες φορές πάλι μπορούμε να εισάγουμε εμπειρικές παραμέτρους και μεθόδους και να ακολουθήσουμε ένα συνδυασμό, «ακριβών» μεθόδων από πρώτες αρχές (*ab initio*) και εμπειρικών μεθόδων.

Σε όλες τις περιπτώσεις ανακαλύπτει κανείς όλο το μεγαλείο (και αποτελεσματικότητα) της επιστημονικής μεθοδολογίας και περιγραφής από το γενικό στο ειδικό (και αντίστροφα) σ' αυτό το θαυμάσιο ταξίδι στον κόσμο της Φυσικής και της τεχνολογίας (και των υποδιαίρέσεων τους).



## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ**

- 1) W. M. Collins and S. C. R. Dennis, *J. Fluid. Mech.* , **76**, 417 (1976)
- 2) H. K. Moffatt *J. Fluid. Mech.* **18**, 1 (1964)
- 3) H. K. Moffatt *Arch. Mech. Stosowanej*, **14**, 365 (1964)
- 4) S. A. Berger and L. Talbot, L. S. Yao, *Ann. Rev. Fluid Mech.* , **15** 461 (1983)
- 5) Ε. Πετράκης, «Μελέτη της Ροής Ασυμπίεστου Ρευστού σε Σωλήνα», Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Φυσικής Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα (1993)
- 6) G. T., Karahalios, M. A. Petrakis, *Acta Mechanica*, **88**,1 (1991)
- 7) G. T. Karahalios, *Phys. Fluids A* **1** , 1104 (1990)
- 8) M. A. Petrakis, G. T., Karahalios, *Int. J. Num. Meth. In Fluids* , **22**,1231 (1996)
- 9) Μ. Α. Πετράκης «Αναστροφή της ροής σε καμπύλο σωλήνα με καθετήρα», Ε΄ Πανελλήνιο Συνέδριο Φυσικής (1989)
- 10) Ν. Δ. Νανούσης «Ρευστομηχανική» Α Τόμος, Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα (2003)
- 11) Ν. Δ. Νανούσης «Ρευστομηχανική» Β Τόμος, Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα (2003)
- 12) J. Eustice *Proc. Roy. Soc. A* **84**, 107 (1910)
- 13) J. Eustice *Proc. Roy. Soc. A* **85**, 119 (1911)
- 14) H. Schlichting , “Boundary-Layer Theory”, 7<sup>th</sup> edition, McGraw-Hill, New York (1979)
- 15) R. Binder “Fluid Mechanics” Prentice Hall, London (1962)
- 16) W. R. Dean, *Phil. Mag.* **4** , 208 (1927)
- 17) W. R. Dean, *Phil. Mag.* **5** , 673 (1928)
- 18) F. T. Smith *Proc. Roy. Soc. A* **347**, 345 (1976)
- 19) J. Thomson, *Proc. Roy. Soc. A* **25**, 5 (1876)
- 20) J. Thomson, *Proc. Roy. Soc. A* **26**, 355 (1877)
- 21) G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. A* **124**, 243 (1929)
- 22) G. I. Taylor, *Aeronautics and Astronautics* (ed. Hoff & Vincenti), p. 12, Pergamon (1960)
- 23) R. G. Zalosh, W. G. Nelson, *J. Fluid. Mech.* **59**, 693 (1973)
- 24) S. C. R. Dennis, *J. Fluid. Mech.* **99**, 449 (1980)
- 25) S. C. R. Dennis, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **3**, 487 (1960)

- 26) D. N. Allen , R. V. Southwell, “Relaxation Methods Applied to Determine the Motion in Two Dimensions, of a Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 8: 129-145 (1955)
- 27) S. Fohanno, C.T. Nguyen, G. Polidori, “*Newtonian Nanofluids in Convection*”, Handbook of Nanophysics , (ed. K. Sattler) Taylor and Francis, in press (2009)
- 28) J. Avsec, M. Oblak, “The calculation of thermal conductivity, viscosity and thermodynamic properties for nanofluids on the basis of statistical nanomechanics”. *Int. J. Heat Mass Transfer* **50** , 4331 (2007)

Παράρτημα 1:

Μεθοδολογία της Κλασικής Φυσικής: Φυσική και Μαθηματική Περιγραφή

Διασκευασμένο από κεφάλαιο του βιβλίου

«ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

του Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών Αριστείδη ΖΑΕΤΣΗ

**ΤΟ ΘΑΥΜΑΣΤΟ ΟΙΚΟΔΟΜΗΜΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



*Ο νους του ανθρώπου φαινόμενα μονάχα μπορεί να συλλάβει , ποτέ την ουσία · κι όχι όλα τα φαινόμενα , παρά μονάχα τα φαινόμενα της ύλης · κι ακόμα στενότερα : όχι κόν τα φαινόμενα τούτα της ύλης , παρά μονάχα τούς μεταξύ τους συνειρμούς · κι οι συνειρμοί τούτοι δεν είναι πραγματικοί , ανεξάρτητοι από τον άνθρωπο · είναι κι αυτοί γεννήματα του ανθρώπου · και δεν είναι οι μόνοι δυνατοί ανθρώπινοι · παρά μονάχα οι πιο βολικοί για τις πραχτικές και νοητικές του ανάγκες .*

*( Ν. Καζαντζάκης , « ΑΣΚΗΤΙΚΗ » )*

## Οι Θεμελιώδεις Νόμοι



$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad , \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$	<b>(α)</b>
$dQ = d\bar{E} + PdV \quad , \quad \bar{E} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$	<b>(β)</b>
$S = -k \ln \Omega \quad , \quad \frac{dS}{dt} \geq 0$	<b>(γ)</b>
$\vec{F} = - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	<b>(δ)</b>
$\nabla^2 F(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$	<b>(ε)</b>
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$	<b>(στ)</b>
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	<b>(ζ)</b>
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	<b>(η)</b>
$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} / \epsilon_0 + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	<b>(θ)</b>
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	<b>(ι)</b>

**Διάγραμμα [1.1 ]**

**Ο «Δεκάλογος» της Κλασικής Φυσικής .**

Στο ερώτημα για το ποιος είναι ο συντομότερος και συνοπτικότερος τρόπος για μια, όσο το δυνατόν πληρέστερη, επισκόπηση της Κλασικής Φυσικής, ίσως μια ακραία αλλά πιθανή απάντηση θα μπορούσε να ήταν κάποιος πίνακας με διαφορικές εξισώσεις, σαν αυτόν του διαγράμματος [1.1], που περιέχει «Θεμελιώδεις Νόμους». Κάτι τέτοιο όμως, όπως είναι φυσικό, θα μπορούσε να δημιουργήσει μια νέα σειρά από ερωτήματα, όπως :

- Είναι επαρκείς αυτές οι διαφορικές εξισώσεις του «δεκαλόγου» για μια ικανοποιητική ( συνοπτική ) περιγραφή ;
- Τι είναι οι **Θεμελιώδεις Νόμοι** ;
- Γιατί αυτοί οι **Θεμελιώδεις Νόμοι** έχουν την μορφή διαφορικών εξισώσεων ;

Θα προσπαθήσουμε σ' αυτό το εδάφιο να προλάβουμε ερωτήσεις αυτού του τύπου, αρχίζοντας από ... το τέλος .

Ξεκινώντας από το ερώτημα για την διαφορική μορφή των Φυσικών νόμων και ανατρέχοντας στο απόσπασμα από την ΑΣΚΗΤΙΚΗ του Καζαντζάκη με το οποίο αρχίσαμε αυτό το κεφάλαιο, βλέπουμε ότι ο Καζαντζάκης έχει ήδη την σωστή απάντηση .

Η φυσική επιστήμη εξετάζει **ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ**, δηλαδή **μεταβολές**, και τους μεταξύ των συσχετισμούς : όχι απόλυτες ποσότητες και καταστάσεις . Έτσι επόμενο είναι πως οι θεμελιώδεις νόμοι της φυσικής θα έχουν την μορφή Διαφορικών Εξισώσεων .

Επειδή οι εξισώσεις είναι διαφορικές χρειάζεται να γνωρίζουμε ή να μαντεύουμε κάποιες αρχικές ή οριακές συνθήκες για να μπορεί να καθοριστεί η λύση μονοσήμαντα . Βέβαια πάντα μπορεί να παρασυρθούμε και να εκλάβουμε μια διαφορική εξίσωση σαν απλή αλγεβρική, παραβλέποντας ενδιάμεσες ποσότητες οι οποίες μπορεί να κρύβουν την διαφορική εξάρτηση. Σαν παράδειγμα η σχέση ( ι ) που παριστάνει την δύναμη Lorentz, μπορεί να δώσει την εσφαλμένη εντύπωση απλής διανυσματικής σχέσεως, αν ξεχάσουμε τις σχέσεις ( α ) και ( ε ) έως ( θ ) . Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με τον νόμο της βαρύτητας ( σχέση δ ) .

Θα πρέπει, όμως να αντιμετωπίσουμε και το δεύτερο ερώτημα για το τι σημαίνει η φράση « θεμελιώδης νόμος » . Σε αναλογία με τον αφορισμό του Αγίου Αυγουστίνου για τον χρόνο, ίσως μια ικανοποιητική δήλωση να ήταν « Αν κανείς δεν με ρωτήσει ,

τότε γνωρίζω τι είναι θεμελιώδης νόμος , αν όμως κάποιος με ρωτήσει , δεν έχω ικανοποιητική απάντηση » . Σε γενικές γραμμές , μπορούμε να πούμε για τους **θεμελιώδεις** νόμους ότι είναι γενικοί , έχουν καθολική ισχύ και δεν παράγονται από άλλους νόμους .

Σε αντίθεση με τους θεμελιώδεις , **οι παράγωγοι νόμοι** προκύπτουν μέσω παραγωγικών συλλογισμών από κάποιον άλλο νόμο ή σύνολο ( θεμελιωδών ) νόμων . Επιπλέον , οι θεμελιώδεις νόμοι , αφορούν άπειρα αντικείμενα και δεν περιέχουν αναφορές σε κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο<sup>1</sup> . Για παράδειγμα οι νόμοι οι τρεις νόμοι του Kepler , που αφορούν την κίνηση των πλανητών <sup>2</sup> δεν είναι θεμελιώδεις νόμοι , αφού εύκολα μπορούν να παραχθούν από την εξίσωση κίνησης ( σχέση α ) και τον νόμο της παγκοσμίου έλξεως ( σχέση δ ) του Νεύτωνος .

Στην Επιστημολογία , οι θεμελιώδεις νόμοι ορίζονται και σαν **αληθείς καθολικές γενικεύσεις** . Στο εδάφιο 1.1.3 , το οποίο ασχολείται με την μεθοδολογία της (κλασικής) Φυσικής , συζητάμε την διαδικασία «παραγωγής» τέτοιων καθολικών γενικεύσεων .

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα , το οποίον θέσαμε στην αρχή αυτού του εδαφίου , σε αντίθεση με τα άλλα δυο ερωτήματα , στα οποία ήδη αναφερθήκαμε , απαιτεί πολύ περισσότερο χώρο και χρόνο , αν θέλουμε να δώσουμε μια διαφωτιστική και ουσιαστική απάντηση .

Αυτό πάντως που φαίνεται με μια πρώτη ματιά στο διάγραμμα [1.1] , πριν καν μπούμε στην ουσία του ερωτήματος , είναι ότι οπωσδήποτε χρειάζονται επιπλέον , τουλάχιστον , οι **ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ** , τόσο των συμβόλων των φυσικών μεγεθών , όσο και των μαθηματικών συμβόλων των διαφορικών τελεστών .

Χωρίς τους κατάλληλους ορισμούς , και επεξηγήσεις , το διάγραμμα [1.1] παίζει περισσότερο διακοσμητικό ρόλο αφηρημένης τέχνης παρά σύνοψη επιστημονικών νόμων . - Μήπως τελικά υπάρχει και κάποια αισθητική κομψότητα στους φυσικούς νόμους και την μαθηματική διατύπωσή τους<sup>3</sup> ; - Ας δεχθούμε λοιπόν προς στιγμήν ότι

---

<sup>1</sup> Βλέπε κεφάλαιο 3 της « φιλοσοφίας της Επιστήμης » από Αναπολιτάνο κ.α. , της σειράς του ανοικτού πανεπιστημίου .

<sup>2</sup> Τους τρεις νόμους του Kepler μπορεί να βρει ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στην Μηχανική Γ. Καραγάλιου , σελίδα 222 , εκδόσεις Ε.Α.Π. (1999) , και στον πρώτο τόμο του Serway ( γενική παραπομπή 1 ) σελίδα 353 , της ελληνικής εκδόσεως .

<sup>3</sup> Αυτό είναι ένα άλλο ενδιαφέρον ερώτημα του οποίου η απάντηση , αν και καταφατική κατά την γνώμη μου , είναι έξω από τα πλαίσια αυτού του μαθήματος . Ανεξάρτητα απ' αυτό , εδώ έχουμε ένα παράδειγμα «Σωστού» ερωτήματος που οδηγεί σε άλλα ενδιαφέροντα ερωτήματα . Ο κύκλος ερωτήσεων

όλα τα σύμβολα είναι τελείως καθορισμένα ( κάτι που έτσι κι αλλιώς θα κάνουμε αργότερα στο υπόλοιπο του κεφαλαίου ) . Ας δεχθούμε ακόμη ότι « ποιητική τη αδεία» οι εξισώσεις είναι δέκα<sup>4</sup> και ότι η επιλογή των εξισώσεων είναι μονοσήμαντη αλλά όχι κατ' ανάγκην μοναδική ( π.χ. η εξίσωση (δ) θα μπορούσε να αντικατασταθεί από την κατανομή Maxwell-Boltzmann ) . Τέλος ας δεχθούμε πως , πέρα από τα σύμβολα και τις φυσικές ποσότητες που παριστάνουν , οι MONADEΣ<sup>5</sup> και οι τιμές των θεμελιωδών φυσικών σταθερών , όπως η ταχύτητα  $c$  του φωτός , έχουν καθοριστεί . Ποια θα ήταν η απάντηση τότε ;

Εκ των πραγμάτων ( αφού αφιερώνουμε ένα εκτενές κεφάλαιο προς τον σκοπό αυτό ) είναι προφανές πως η απάντηση μας είναι σαφώς αρνητική . Είναι σχετικά απλό να δείξουμε πόσο άτοπο θα ήταν το αντίθετο :

Μια συγκεκριμένη λύση κάποιας από τις διαφορικές εξισώσεις του διαγράμματος [1.1] , προϋποθέτει εκτός των άλλων και συγκεκριμένες οριακές συνθήκες , οι οποίες καθορίζονται από την «φυσική» του συγκεκριμένου προβλήματος . Έτσι σε διαφορετικές περιπτώσεις , η ίδια διαφορική εξίσωση μπορεί να παρουσιάζει τελείως διαφορετικές λύσεις . Για παράδειγμα , όπως θα δούμε παρακάτω , η ίδια κυματική εξίσωση (  $\epsilon$  ) περιγράφει την αρμονία μια κλασικής μελωδίας καθώς και τον εκνευριστικό θόρυβο ενός πολυσύχναστου δρόμου . Κάτι τέτοιο δεν γίνεται αμέσως αντιληπτό , μόνο από την μορφή της διαφορικής εξίσωσης (  $\epsilon$  ) .

Μόνο κάποια υπεράνθρωπη «μαθηματική διάνοια» θα μπορούσε ενδεχομένως να συλλάβει όλο τον πλούτο και την ποικιλία των φαινομένων και των φυσικών συνθηκών που κρύβονται πίσω από τις διαφορικές εξισώσεις του διαγράμματος [1.1] . Μια τέτοια υποθετική διάνοια , που θα μπορούσε να αντικαταστήσει μερικούς τόμους κλασικής

---

απαντήσεων σταματάει μόνο εκεί που ο χρόνος και η διάθεση ( για παραπέρα ψάξιμο ) του ερωτώντος επιτρέπει .

<sup>4</sup> Ας παραβλέψουμε επίσης το γεγονός ότι οι εξισώσεις δεν είναι ακριβώς 10 , αφού σε μερικές γραμμές περιλαμβάνονται δύο ισοδύναμες ή σχετιζόμενες εξισώσεις . Για τη συζήτηση και τα επιχειρήματα που αναπτύσσονται εδώ , ο ακριβής αριθμός των εξισώσεων έχει μόνο φιλολογική σημασία . Επί της ουσίας όμως , όλες οι θεμελιώδεις εξισώσεις στο διάγραμμα [1.1] δεν είναι ισοδύναμες . Για παράδειγμα η κυματική εξίσωση (  $\epsilon$  ) δεν αποτελεί ανεξάρτητο νόμο της Φύσεως , όπως οι (στ)-(θ) , αλλά προκύπτει από εφαρμογή τέτοιων νόμων . Ομοίως ο νόμος του Lorentz που περιγράφει η σχέση ( ι ) αποτελεί ουσιαστικά ορισμό του μαγνητικού πεδίου  $B$  , όταν η έννοια του ηλεκτρικού πεδίου  $E$  είναι ορισμένη .

<sup>5</sup> Οι εξισώσεις του Maxwell και η δύναμη Lorentz ( στ ) - ( ι ) είναι γραμμένες στο σύστημα μονάδων MKSA .

φυσικής με κάτι λιγότερο από μια σελίδα , μόνο στο χώρο της επιστημονικής ( και μη ) φαντασίας θα έπρεπε να την αναζητήσουμε .

Θα ήταν ίσως χρήσιμο σ' αυτό το σημείο να κάνουμε μια παρένθεση για να γενικεύσουμε κάπως τα επιχειρήματα ( και τα ερωτήματα ) μας σε σχέση με το διάγραμμα [ 1.1 ] , προσδίδοντάς τους παράλληλα μια νέα διάσταση .

### Παρένθεση 1.1

*Αν το διάγραμμα [1.1] μπορούσε να συνοψίσει ολόκληρη την κλασική φυσική , τότε θα μπορούσαμε να διευρύνουμε τον κατάλογο των θεμελιωδών νόμων προσθέτοντας μερικές θεμελιώδεις εξισώσεις από την ειδική και γενική θεωρία της σχετικότητας , καθώς και από όλη την «γκάμα» της κβαντικής θεωρίας , που είδαμε στο διάγραμμα [0.1] . Έτσι , θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε ολόκληρη την Σύγχρονη Φυσική σε μία ή δύο ,το πολύ , σελίδες . Μάλιστα , ακολουθώντας την ιδέα της **μεγάλης ενοποίησης** , η οποία επιδιώκει την ενοποίηση όλων των γνωστών **θεμελιωδών δυνάμεων** ( κατά το πρότυπο της ενοποίησης των ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων , που εκφράζουν οι εξισώσεις του Maxwell ( σχέσεις (στ) έως ( θ ) ) θα μπορούσαμε ίσως κάποτε να περιορίσουμε σημαντικά τον αριθμό των θεμελιωδών διαφορικών εξισώσεων . Ίσως μάλιστα να φτάναμε σε μια μόνη εξίσωση , που θα αντιστοιχούσε στην μαθηματική έκφραση της **Θεωρίας των Πάντων** .*

*Σε μια τέτοια εξίσωση , ενδεχομένως και οι τιμές των **θεμελιωδών σταθερών** , όπως η ταχύτητα του φωτός  $c$  , η σταθερά του Planck  $h$  και η σταθερά του νόμου της παγκοσμίου έλξης  $G$  ,θα προέκυπταν φυσιολογικά και δεν θα ήταν «δοσμένες» και ανεξήγητες .*

*Δεν χρειάζεται να καταφεύγουμε σε τέτοιες ακραίες περιπτώσεις για να δείξουμε το άτοπο στο οποίο οδηγούμαστε . Υπάρχουν όμως «μαθήματα» , που μπορεί να μάθουμε συνεχίζοντας μια τέτοια συζήτηση .Έτσι , ανεξάρτητα του εάν θα έχουμε μια ή μερικές εξισώσεις που θα περιγράφουν τα «πάντα» . ένα είναι σχεδόν βέβαιο : Δεν θα πρόκειται για μια απλή διαφορική εξίσωση ( ή εξισώσεις ) με την έννοια που συνήθως δίνουμε στη λέξη «απλή» . Η εξίσωση ( ή εξισώσεις ) θα περιέχει πολυδιάστατες μεταβλητές και παραμέτρους σε πολύ πυκνό μαθηματικό φορμαλισμό . Η Πείρα δείχνει ότι όσο «λιγοστεύουν» οι εξισώσεις τόσο πιο σύνθετες εμφανίζονται στον αδαή , ενώ φαίνονται πιο απλές και κομψές στον μαθηματικώς μνημένο . Για παράδειγμα , οι τέσσερις εξισώσεις*



του Maxwell ( σχέσεις (στ) έως (θ) ) με την κατάλληλη εισαγωγή γενικευμένων τετραδιανυσμάτων περιορίζονται σε μια μόνο εξίσωση .

Πάντως , ανεξάρτητα από την «απλότητα» των εξισώσεων , την οποία ο συγγραφέας αυτού του βιβλίου θεωρεί σε μεγάλο βαθμό υποκειμενική<sup>6</sup> , υπάρχει κάτι άλλο πολύ σημαντικό που πρέπει να μας απασχολήσει , έστω και για λίγο : και αυτό είναι :

### **Η αναγκαιότητα και καταλληλότητα των μαθηματικών για την ακριβή περιγραφή του Φυσικού Κόσμου .**

Το γεγονός ότι ο φυσικός κόσμος και οι νόμοι που τον διέπουν υπόκεινται σε μαθηματική περιγραφή δεν είναι ούτε αυτονόητο ούτε προφανές . Πέρα από τον περίφημο αφορισμό του Einstein : « Το πιο ακατανόητο πράγμα στον κόσμο είναι ότι ο κόσμος είναι κατανοητός » , πολλοί μεγάλοι επιστήμονες έχουν εκφράσει τον θαυμασμό τους για την δυνατότητα και την ακρίβεια της μαθηματικής περιγραφής του Κόσμου .Ο Wigner , για παράδειγμα , σε μια ομιλία του στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης , το 1959, έλεγε «Το θαύμα της καταλληλότητας της μαθηματικής γλώσσας για την διατύπωση των φυσικών νόμων είναι ένα θαυμάσιο δώρο το οποίο ούτε καταλαβαίνουμε , ούτε μας αξίζει».

Είναι αξιοθαύμαστο το πόσο συνδεδεμένη είναι η συμπεριφορά του φυσικού κόσμου και των συγκεκριμένων φαινομένων και νόμων του , με τα «αφηρημένα» μαθηματικά . Όσο περισσότερο καταλαβαίνουμε τον φυσικό κόσμο και όσο βαθύτερα ερευνούμε τους θεμελιώδεις νόμους της φύσεως , τόσο βαθύτερα οδηγούμαστε στον κόσμο των Μαθηματικών και των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών . Έτσι , στο τέλος μιας τέτοιας αφαιρετικής διαδικασίας που θα οδηγούσε σε μια ή περισσότερες «γενικευμένου τύπου » διαφορικές εξισώσεις , υπάρχει πάντα ο κίνδυνος για κάποιον , που θα ήταν περισσότερο μαθηματικός και λιγότερο φυσικός , να θεωρούσε την μαθηματική περιγραφή του κόσμου σαν πιο πρωταρχικό στοιχείο από τη φυσική του υπόσταση .<sup>7</sup>

Αντίθετα , για τους περισσότερους φυσικούς , οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες δεν τίποτα περισσότερο από εξιδανικεύσεις του πραγματικού φυσικού κόσμου . Μάλιστα μερικοί μεγάλοι Φυσικοί , όπως ο Richard Feynman<sup>8</sup> βρίσκουν ενοχλητικό ότι για την

<sup>6</sup> Αλήθεια : Είναι απλές οι εξισώσεις του διαγράμματος [1.1] ;

<sup>7</sup>Περισσότερα γι αυτό το θέμα μπορεί να βρει κανείς και στο “The Large the Small and the Human Mind” του Roger Penrose , Cambridge University Press ( 1997 ).

<sup>8</sup> Βλέπε και Richard Feynmann , ελληνική μετάφραση «Ο χαρακτήρας του Φυσικού Νόμου» , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (1990) .

περιγραφή «απλών» και συνηθισμένων φυσικών φαινομένων απαιτείται τόσο σύνθετος και πολύπλοκος μαθηματικός φορμαλισμός .

Ας κλίσουμε αυτή την παρένθεση ( την οποία θα μπορούσαμε να είχαμε ονομάσει «Σχέση Φυσικής και Μαθηματικών» ) με τα λόγια του Richard Feynman <sup>8</sup> :

« Η Φυσική δεν είναι Μαθηματικά και τα Μαθηματικά δεν είναι Φυσική . Ο ένας κλάδος βοηθά τον άλλο».

«Οι μαθηματικοί ενδιαφέρονται κυρίως για την δομή της λογικής και σχεδόν καθόλου για το αντικείμενο στο οποίο αναφέρονται . Ο φυσικός ( συνήθως)<sup>9</sup> ενδιαφέρεται για την ειδική περίπτωση και όχι τη γενική . Μιλά πάντα για κάτι και όχι για το κάθε τι» .

Όμως , παρακάτω : «Ο Dirac ανακάλυψε τους σωστούς νόμους της σχετικότητας στην Κβαντομηχανική μαντεύοντας απλώς την εξίσωση . Η μέθοδος να μαντεύει κανείς την εξίσωση φαίνεται πολύ αποτελεσματική όταν αναζητούνται νέοι νόμοι . Αυτό δείχνει ότι με τα μαθηματικά επιτυγχάνεται η θεμελιώδης περιγραφή της φύσης , και ότι οποιαδήποτε προσπάθεια να εκφράσει κανείς τη φύση μέσα από φιλοσοφικές αρχές ή μηχανικά πρότυπα , δεν είναι τελικά αποτελεσματική» .

---

Επανερχόμενοι στο διάγραμμα [1.1 ] μπορούμε να πούμε ότι , μόνο μετά από αρκετά διεξοδική συζήτηση , μπορεί να χρησιμεύσει σαν σύνοψη του κεφαλαίου .

Έτσι , μια ουσιαστική απάντηση στα ερωτήματα που θέσαμε στην αρχή αποτελεί ολόκληρο το κεφάλαιο 1 .

Θα πρέπει ομολογήσουμε ότι στη φυσική , και ακόμη περισσότερο στην διδασκαλία της φυσικής , η διατύπωση της κατάλληλης ερώτησης είναι πολλές φορές πιο σημαντική από την απάντηση αυτή καθαυτή . Άλλωστε σε μια επισκόπηση , όπως τουλάχιστον περιγράφεται εδώ , σπάνια επιδιώκονται «απόλυτες απαντήσεις» του τύπου ΝΑΙ ή ΟΧΙ . Αντίθετα στα πιο πολλά ερωτήματα αντί για απάντηση υπάρχει Συζήτηση , παρά τον ελλοχεύοντα κίνδυνο φλυαρίας .

Συνοψίζοντας, μετά την μελέτη ολόκληρου αυτού του κεφαλαίου η απάντηση σε όλα τα ερωτήματα ( ακόμη και σ' αυτά που δεν διατυπώθηκαν ευθέως ) θα πρέπει να θεωρείται δεδομένη .

---

<sup>9</sup> Η Παρένθεση είναι δική μου

## Αρχές , Μέθοδοι

Μερικές από τις σπουδαιότερες αρχές της φυσικής , όπως π.χ. ότι όλα τα φαινόμενα εξελίσσονται μέσα στο χώρο και τον χρόνο , ή ότι οι νόμοι της Φυσικής ισχύουν αναλλοίωτοι σε όλες της περιοχές χώρου και χρόνου ( πίνακες 1.1.1 , 1.1.2 ) έχουμε ήδη αναφέρει νωρίτερα . Εδώ θα συμπληρώσουμε , χωρίς να εξαντλήσουμε τον κατάλογο με τρεις ακόμη θεμελιώδεις αρχές :

**α )** Μια προφανής αρχή , που όμως έχει μεγάλη σημασία όπως θα δούμε αργότερα , περιγράφει την αυτονόητη απαίτηση να έχουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα από δύο καθ' όλα όμοια πειράματα ανεξάρτητα από τον χρόνο κατά τον ποίο πραγματοποιήθηκαν τα πειράματα αυτά .

Μια παραπλήσια αρχή είναι ότι : Αν εκτελέσουμε την ίδια χρονική στιγμή δύο καθ' όλα όμοια πειράματα σε διαφορετικές θέσεις του χώρου θα πάρουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα . Δηλαδή , ισοδύναμα είτε :

**β)** μεταφέρουμε την συσκευή του πειράματος κατά μήκος του άξονα των  $x$  , για παράδειγμα , είτε

**γ)** στρέψουμε την συσκευή του πειράματος κατά μια γωνία  $\phi$  , έστω , περί τον άξονα  $z$  ,

εφόσον όλες οι άλλες συνθήκες του πειράματος παραμένουν οι ίδιες θα πάρουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα .

Η διπλή αυτή αρχή (  $\beta$  και  $\gamma$  ) , η οποία εκφράζει την **ομοιογένεια του χώρου** (  $\beta$  , όλα τα σημεία του χώρου είναι ισοδύναμα ) και την **ισοτροπία του χώρου** (  $\gamma$  , όλες οι διευθύνσεις είναι ισοδύναμες ) οδηγεί , όπως θα δούμε στο εδάφιο 1.2.4 , στους **νόμους διατηρήσεως της ορμής και της στροφορμής** , αντίστοιχα .

Στο εδάφιο 1.2.4 , θα δούμε επίσης ότι η αρχή (  $\alpha$  ) , η οποία εκφράζει την **ισοτροπία του χρόνου** ( όλες οι χρονικές στιγμές είναι ισοδύναμες ) συνδέεται με την **διατήρηση της ενέργειας** .

Βέβαια η σύνδεση αυτών των αρχών με τους «μεγαλειώδεις» νόμους διατήρησης ( οι οποίοι μας βοηθούν να βγάλουμε συγκεκριμένα γενικά συμπεράσματα , χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε πολλές λεπτομέρειες ) δεν είναι προφανής ούτε αποδεικνύεται εύκολα . Στο εδάφιο 1.2.4 θα δούμε ότι η σύνδεση αυτή επιτυγχάνεται

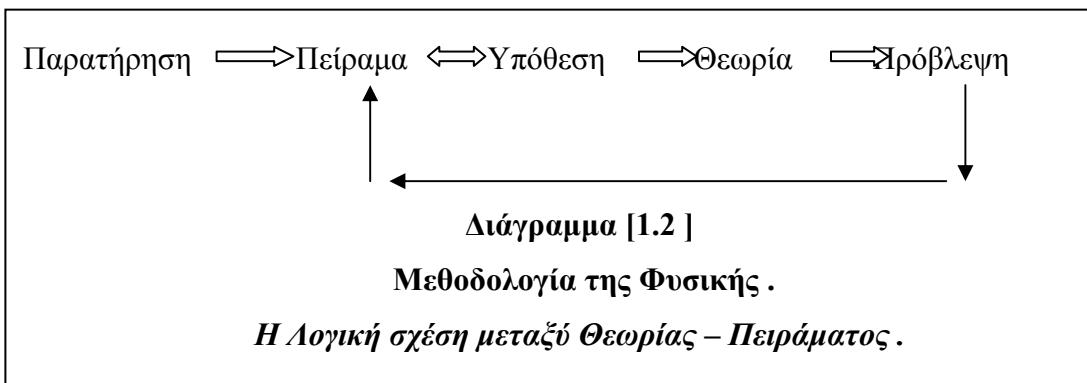
εύκολα όταν στηριχθεί στο κομψό μαθηματικό οικοδόμημα που βρίσκεται πίσω από την **αρχή της ελαχίστης δράσεως** ( βλέπε εδάφιο 1.2.3 ) και είναι συνήθως γνωστό ως «Αναλυτική Μηχανική» .

Μια τελευταία , διαφορετικού τύπου , αρχή είναι αυτή που υποστηρίζει ότι :

**Το απόλυτο κριτήριο για οποιονδήποτε νόμο ή συμπέρασμα είναι το ΠΕΙΡΑΜΑ .**

Η αρχή αυτή ( η οποία θα ήταν και η μοναδική , αν ήμασταν αναγκασμένοι να συνοψίσουμε όλη τη φυσική σε μια μόνο αρχή ) αποτελεί την βάση της **Επιστημονικής Μεθόδου** και είναι αυτονόητη για μια πειραματική επιστήμη , όπως η Φυσική . Η μεθοδολογία της φυσικής , ως γνωστόν , βασίζεται σε μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ θεωρίας και πειράματος , η οποία συνοψίζεται στο διάγραμμα [ 1.2 ]

Με την παρατήρηση και το πείραμα προκύπτουν οι πειραματικοί νόμοι , οι οποίοι στη συνέχεια με την κατάλληλη ερμηνεία και τις κατάλληλες υποθέσεις γενικεύονται σε μαθηματικά διατυπωμένους νόμους αφού ελεγχθούν με αλληπάλληλους κύκλους προβλέψεων και πειραματικών επαληθεύσεων .



Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί αρκετές φορές και να οδηγήσει σε μια σειρά από νόμους ( θεμελιώδης και μη ) οι οποίοι αποτελούν το εννοιολογικό και επιστημονικό πλαίσιο μιας επιστημονικής θεωρίας . Μια επιτυχημένη θεωρία πρέπει όχι μόνο να ερμηνεύει όλα τα υπάρχοντα μέχρι στιγμής γεγονότα , αλλά παράλληλα να προβλέπει νέα φαινόμενα και να υποδεικνύει ταυτόχρονα τρόπους για παραπέρα έλεγχό της . Αν κάποιο από τα νέα φαινόμενα – ελέγχους δεν συμφωνεί με τις

προβλέψεις της θεωρίας , τότε η θεωρία θα πρέπει να αντικατασταθεί με άλλη , η οποία βεβαίως θα πρέπει να εξηγεί τόσο τα νέα , όσο και όλα τα παλαιότερα φαινόμενα .

Έτσι , ουσιαστικά , κάθε νέα θεωρία θα πρέπει με κάποιο τρόπο , σε κάποιο όριο να προσεγγίζει την παλαιά . Η γενική αυτή απαίτηση , όπως είδαμε και στο εισαγωγικό κεφάλαιο 0 , είναι γνωστή σε μια ειδικότερη μορφή της , ως **αρχή της Αντιστοιχίας** . Σαν παράδειγμα , η ειδική θεωρία της σχετικότητας για πολύ μικρές ταχύτητες ( σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός , δηλαδή για  $v \ll c$  ) προσεγγίζει την κλασική μηχανική .

Συνοψίζοντας , λοιπόν , βλέπουμε πως ανεξάρτητα από το πόσο ωραίοι , λογικοί ή «κομψοί» , μας φαίνονται οι νόμοι που ανακαλύπτουμε , θα πρέπει αμέσως να τους εγκαταλείψουμε εάν υπάρχει , έστω και ένα πείραμα , που έρχεται σε αντίθεση μαζί τους . Αυτό είναι και το αναγκαίο τίμημα στο οποίο οδηγεί η απαίτηση μας για καθολική ισχύ των νόμων , όπως αυτοί προκύπτουν σαν «αληθείς καθολικές γενικεύσεις» , μέσω της διαδικασίας του διαγράμματος [1.2] .

### **Προσεγγίσεις – Εξιδανικεύσεις –Εκτιμήσεις Τάξης Μεγέθους**

Όπως θα πρέπει να έχει γίνει αντιληπτό , ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο δεν μπορεί το σχεδιάγραμμα [1.1] να αντικαταστήσει τους τόμους των συγγραμμάτων της κλασικής φυσικής ( εκτός από τον προφανή λόγο ότι δεν είναι δυνατόν μια περίληψη να αντικαταστήσει πλήρως το αρχικό κείμενο ) είναι η **πολυπλοκότητα** των πραγματικών «φυσικών συστημάτων» και η μεγάλη **ποικιλία** των φαινομένων .

Η προέλευση της πολυπλοκότητας και της μεγάλης ποικιλίας των φαινομένων θα πρέπει να αναζητηθεί στο εξαιρετικά μεγάλο πλήθος των ατόμων και μορίων που υπάρχουν σε συνηθισμένα φαινόμενα καθώς και στην ποικιλία των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων . Το τεράστιο πλήθος των ατόμων που υπάρχει σε συνηθισμένα «μακροσκοπικά» φαινόμενα ( της τάξεως των  $10^{23}$  ατόμων ) καθιστούν πρακτικά αδύνατη , όχι μόνο την ακριβή λύση των θεμελιωδών ( και μη ) εξισώσεων , αλλά τις πιο πολλές φορές δεν επιτρέπουν ούτε καν την απλή καταγραφή τους ,καθώς και των οριακών συνθηκών ( βλέπε πρόβλημα πολλών σωμάτων στο εδάφιο 1.2.5 ) . Μάλιστα

φτάνουμε εύκολα σ' αυτό το συμπέρασμα , χωρίς να χρειασθεί να περιγράψουμε τα διάφορα επίπεδα οργάνωσης της ύλης και χωρίς να αναφερθούμε στην μεγάλη ποικιλία και πολυπλοκότητα των ζωντανών οργανισμών .

Αρκεί ίσως μια ματιά στους πίνακες 1.1 –1.4 για να συνειδητοποιήσουμε πόσο ουτοπιστικό θα ήταν να θέλουμε να περιγράψουμε ακριβώς ( με απειροελάχιστη ακρίβεια ) όλη τη γκάμα των φαινομένων σ' αυτές τις πελώριες κλίμακες μεγεθών , χρησιμοποιώντας τους **θεμελιώδεις νόμους** , ξεκινώντας από την **συμπεριφορά των στοιχειωδών ( ή θεμελιωδών ) υλικών δομικών μονάδων** , των ατόμων ή των στοιχειωδών υποατομικών σωματιδίων και τις μεταξύ τους **θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις**<sup>10</sup> . Βέβαια , από φιλοσοφική ,και μόνο, άποψη θα ήταν κατ' αρχήν δυνατόν, σύμφωνα με την Κλασική Φυσική , να προβλέψουμε τις τροχιές και τις θέσεις όλων των θεμελιωδών δομικών λίθων ( άρα και των σύνθετων ) σε κάθε χρονική στιγμή γνωρίζοντας :

- 1 ) Τους θεμελιώδεις νόμους , όπως η εξίσωση κινήσεως ( α ) ,
- 1 ) τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις , όπως η ( δ ) και η ( ι ) , και
- 2 ) την αρχική θέση και ταχύτητα ( οριακές συνθήκες ) .

Ένα τέτοιο πλάνο είναι πρακτικά αδύνατο για περισσότερα από δύο σώματα <sup>11</sup> , ακόμη και με τις απλούστερες αλληλεπιδράσεις , σαν αυτές της βαρύτητας ( σχέση δ στο διάγραμμα [1.1] )

Έτσι , στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων , αντί για την λεπτομερή και ακριβή περιγραφή των πάντων , βασισμένη στην ακριβή λύση των διαφορικών εξισώσεων των θεμελιωδών νόμων , που περιγράφουν την συμπεριφορά των θεμελιωδών ( στοιχειωδών ) σωματιδίων κάτω από τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις , η φυσική προχωρά με ειδικότερους ή παράγωγους νόμους που περιγράφουν ένα

---

<sup>10</sup> Θα πρέπει να αναφέρουμε παρενθετικά , ότι οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις , δηλαδή οι αλληλεπιδράσεις από τις οποίες μπορούν να παραχθούν όλες οι γνωστές αλληλεπιδράσεις , είναι τέσσερις και ανάμεσα τους βρίσκονται οι γνωστές βαρυτικές και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις . Η ιδέα της μεγάλης ενοποίησης είναι να αναχθούν και οι τέσσερις αλληλεπιδράσεις σε μια . Όλες οι άλλες αλληλεπιδράσεις , είναι «παράγωγοι αλληλεπιδράσεις» . Για παράδειγμα , οι συνήθεις χημικές αλληλεπιδράσεις σε Οργανική και Ανόργανο χημεία , που περιλαμβάνουν όλα τα είδη χημικών δεσμών , δεν είναι τίποτα άλλο παρά ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις .

<sup>11</sup> Το πρόβλημα των τριών σωμάτων είναι αποδεδειγμένα γνωστό ότι δεν λύνεται ακριβώς . Βλέπε και συζήτηση στο εδάφιο 1.2.5

συγκεκριμένο φαινόμενο , ή κατηγορία φαινομένων , χρησιμοποιώντας : Απλούστευσεις , Προσεγγίσεις και Εξιδανικεύσεις .

Μ' αυτή την έννοια , όλοι οι νόμοι είναι προσεγγιστικοί .

Αυτό βέβαια δεν είναι πρόβλημα , αφού και όλες οι πειραματικές μετρήσεις έχουν γίνει με κάποια προσέγγιση , αρκεί η θεωρητική προσέγγιση να είναι εφάμιλλη ή καλύτερη από την πειραματική .

Μια συνηθισμένη και βασική απλούστευση , που χρησιμοποιεί η Φυσική για να εξετάζει κάθε φορά ένα συγκεκριμένο φαινόμενο και να απομονώνει προς μελέτη ένα ή περισσότερα σώματα , τα οποία θεωρεί σαν ενιαίο σύνολο , είναι ο διαχωρισμός ανάμεσα στο προς μελέτη **φυσικό σύστημα** και το **περιβάλλον** του , το οποίο αποτελείται από το «υπόλοιπο σύμπαν» . Το φυσικό σύστημα μπορεί να είναι μικρό ή μεγάλο και ανοικτό , κλειστό ή απομονωμένο , ανάλογα με το εάν ανταλλάσσει ή όχι ύλη και ενέργεια με το περιβάλλον .

Μια θεμελιώδης προσέγγιση στην Κλασική Φυσική , που χρησιμοποιείται για να υποκαταστήσει την έννοια του θεμελιώδους ( ή στοιχειώδους ) δομικού λίθου είναι η **προσέγγιση του υλικού σημείου** . Ένα σώμα μάζας  $m$  , του οποίου οι διαστάσεις είναι πρακτικά αμελητέες , σε σχέση με τα υπόλοιπες διαστάσεις (μήκη ) που υπεισέρχονται στο φαινόμενο , μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα αδιάστατο μαθηματικό ( γεωμετρικό ) σημείο , δηλαδή σαν ένα *υλικό σημείο μάζας*  $m$  .

Ένα ηλεκτρόνιο είναι για κάθε σκοπό υλικό σημείο και το ίδιο μπορεί να ισχύει για ένα μόριο αερίου ( διάμετρος μορίου  $\approx 10^{-10}$  m ) κατά την κίνηση του μέσα σ' ένα δοχείο ( διάμετρος δοχείου  $\approx 10^{-1}$  m ) . Το ίδιο μόριο όμως , όταν εξετάζουμε την ταλαντωτική κίνηση των ατόμων από τα οποία αποτελείται ( διάμετρος ατόμων  $\approx 10^{-10}$  m ) δεν μπορεί με κανένα τρόπο να θεωρηθεί υλικό σημείο. Το ίδιο ισχύει και για ένα διαστημικό λεωφορείο , μήκους αρκετών μέτρων , που βρίσκεται στο κέντρο εκτόξευσης . Όμως , το ίδιο διαστημικό λεωφορείο κατά την κίνηση του στο διάστημα ή σε τροχιά γύρω από την Γη ( με μήκος της τάξεως των  $10^8$  m ) μπορεί άνετα να θεωρηθεί σαν υλικό σημείο , εάν μας ενδιαφέρει μόνο η κίνηση του και όχι το εσωτερικό του . Η Γη ή ίδια μπορεί να θεωρηθεί σαν υλικό σημείο , όταν εξετάζουμε την κίνηση της γύρω από τον Ήλιο ( βλέπε πίνακα 1.1 για σχετικό μέγεθος ακτίνας της Γης , ως προς την απόσταση Γης - Ηλίου ) .

Το πραγματικό , λοιπόν , πλάνο της Κλασικής Φυσικής ξεκινάει , όπως φαίνεται και στο διάγραμμα [ 1.3 ] , με τον καθορισμό του φυσικού συστήματος και των αντίστοιχων «υλικών σημείων» του , και καταλήγει στην πλήρη περιγραφή του συστήματος σε οποιαδήποτε μετέπειτα χρονική στιγμή . Εάν έχουμε ένα Μηχανικό Σύστημα <sup>12</sup> , τότε η περιγραφή του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή είναι ισοδύναμη με την περιγραφή της κίνησης , δηλαδή της τροχιάς , της ορμής (ταχύτητας ) και της θέσης όλων των υλικών σημείων του (σε κάθε χρονική στιγμή ) . Μια συναφής και εξ ίσου σπουδαία προσέγγιση της Κλασικής Φυσικής είναι η **προσέγγιση του συνεχούς μέσου** <sup>13</sup> , που μας οδηγεί από τα αδιάστατα υλικά σημεία στα τρισδιάστατα υλικά (στερεά , υγρά και αέρια ) σώματα .

<b>Καθορισμός του Φυσικού Συστήματος σε χρόνο <u>T=0</u></b>	<b>Καθορισμός των «υλικών σημείων» του συστήματος</b>	<b>Εισαγωγή των αλληλεπιδράσεων</b>	<b>Οριακές ή αρχικές Συνθήκες</b>	<b>→</b>	<b>«Κίνηση» ( Τροχιές Ορμές Θέσεις ) <u>Σύστημα σε t &gt; 0</u></b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>→</b>	<input type="text"/>

### Διάγραμμα [1.3]

*Το πρόγραμμα της Κλασικής Φυσικής*

Σύμφωνα μ' αυτή την προσέγγιση , κάθε υλικό σώμα , στερεό , υγρό ή αέριο είναι «συνεχές» . Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε τμήμα του όγκου του σώματος , «οσονδήποτε μικρό» , είναι κατειλημμένο από ύλη . Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά καλή , ακόμα και για αέρια σώματα , παρά τον κενό χώρο που υπάρχει μεταξύ μορίων , εφόσον το «οσονδήποτε μικρό» τμήμα του όγκου του σώματος δεν είναι της τάξεως

<sup>12</sup> Ο όρος «Μηχανικό» , σε αντιδιαστολή με το θερμοδυναμικό , χημικό ή ηλεκτρικό σύστημα , υπονοεί ότι περιγράφεται πλήρως από την Μηχανική και δεν υπάρχουν θερμικές , ηλεκτρικές ή άλλου τύπου αλληλεπιδράσεις .

<sup>13</sup> Η λέξη «μέσο» χρησιμοποιείται με την έννοια ότι διαμέσου του σώματος μπορούν να διαδοθούν κύματα ή να μεταφερθούν δυνάμεις από ένα σημείο στο άλλο . Βλέπε και Χ. Γεωργαλά , Πανεπιστήμιο Πατρών , «Σημειώσεις Ρευστομηχανικής» , 1998 .



των ατομικών ή μοριακών διαστάσεων ( δηλαδή  $10^{-10}\text{ m} \times 10^{-10}\text{ m} \times 10^{-10}\text{ m}$  ) . Σε όλα τα συνηθισμένα στερεά , ακόμη και ένας πάρα πολύ μικρός όγκος , ενός κύβου με ακμή  $1\ \mu$  ( $10^{-6}\text{ m}$  ) είναι κατά πολύ μεγαλύτερος (  $10^{12}$  φορές ) από τον ατομικό ( ή μοριακό ) όγκο , με αποτέλεσμα να περιέχει ένα τεράστιο πλήθος μορίων ( περίπου  $10^{12}$  μόρια ) . Για να έχουμε το ίδιο πλήθος μορίων (  $\approx 10^{12}$  ) σε ένα αέριο , υπό κανονικές συνθήκες , θα πρέπει θεωρήσουμε ένα κύβο με ακμή  $0.1\text{ mm}$  . Για ένα τόσο μεγάλο πλήθος μορίων, όλα τα μακροσκοπικά μεγέθη , όπως η πυκνότητα , η θερμοκρασία κ.λ.π. , έχουν έννοια . Έτσι , για κάθε τμήμα του σώματος , τόσο μικρό , θα έχουμε όλες τις μακροσκοπικές εκδηλώσεις της παρουσίας ύλης και τότε προφανώς μπορούμε να παραβλέψουμε την μοριακή της υφή και να θεωρήσουμε ότι κάθε τμήμα όγκου είναι γεμάτο ύλη . Αυτή η προσέγγιση μας επιτρέπει να θεωρούμε στο εσωτερικό των υλικών σωμάτων στοιχειώδεις όγκους  $dV$  , στοιχειώδεις μάζες  $dm$  , κ.τ.λ. και να υπολογίζουμε τις αντίστοιχες μακροσκοπικές ποσότητες των σωμάτων , αθροίζοντας τις στοιχειώδεις ποσότητες , δηλαδή ολοκληρώνοντας . Σ' αυτή την περίπτωση τα «υλικά σημεία» αντιστοιχούν στα στοιχεία μάζας  $dm$  .

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε , πως στη συζήτηση μας για την προσέγγιση του συνεχούς μέσου χρησιμοποιήσαμε μια **εκτίμηση της τάξεως μεγέθους** του πλήθους των μορίων . Μπορούμε , σαν παράδειγμα , να κάνουμε και την αντίστροφη εκτίμηση, δηλαδή την εκτίμηση της τάξεως μεγέθους της ακτίνας ενός ατόμου . Ας θεωρήσουμε το άτομο του υδρογόνου και ας χρησιμοποιήσουμε την τάξη μεγέθους του αριθμού του Avocadro  $N_0 \approx 10^{24}$  , υποθέτοντας μια πυκνότητα της τάξεως του  $1\text{ gr/cm}^3$  . Τότε ένα  $\text{cm}^3$  θα αντιστοιχεί σε 1 γραμοάτομο και θα περιέχει  $N_0$  άτομα . Άρα  $1\text{ cm}$  θα περιέχει  $N_0^{1/3} \approx 10^8$  άτομα και , κατά συνέπεια , ένα άτομο «θα αντιστοιχεί» σε μήκος  $10^{-8}\text{ cm}$  ή  $10^{-10}\text{ m}$  . Αυτή θα είναι και η εκτίμηση της ακτίνας του ατόμου . Ευνόητο είναι ότι θα πάρουμε την ίδια τάξη μεγέθους και για την ακτίνα του μορίου του υδρογόνου , χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα . Τέτοιου είδους εκτιμήσεις και επιχειρήματα τάξης μεγέθους είχαμε συζητήσει και χρησιμοποιήσει και νωρίτερα στο εδάφιο 1.1.2 . Για την ακρίβεια το μεγαλύτερο μέρος των περιεχομένων των πινάκων 1.1 έως 1.4 βασίζεται σε τέτοιου είδους εκτιμήσεις , και αναφέρεται σε τυπικές ή μέσες τιμές .

Μια μέθοδος , η οποία είναι χρήσιμη για εκτιμήσεις τάξεις μεγέθους είναι η **διαστατική ανάλυση** , που θα αναπτύξουμε εκτενέστερα στο εδάφιο 1.1.6 .

Πέρα από απλουστεύσεις προσεγγίσεις και εκτιμήσεις τάξης μεγέθους , η κλασική φυσική χρησιμοποιεί και **εξιδανικεύσεις** πραγματικών συστημάτων συγκεντρώνοντας την προσοχή στα ουσιώδη χαρακτηριστικά και προσπερνώντας τις λιγότερο σημαντικές λεπτομέρειες . Έτσι , μπορεί να απλουστευθεί σημαντικά η μαθηματική επεξεργασία και να αναδειχθεί , πολλές φορές , η κριμένη απλότητα , η διαφάνεια και η γενικότητα των συγκεκριμένων νόμων .

Εάν χρειάζεται , πάντα μπορούμε εκ των υστέρων να διορθώσουμε ( και ταυτόχρονα να περιπλέξουμε ή να «διαταράξουμε» ) τα αποτελέσματα μας για να πετύχουμε ακριβέστερη περιγραφή. Μια από τις πιο συνηθισμένες και πιο γνωστές μεθόδους για τον σκοπό αυτό είναι η **θεωρία διαταραχών** , η οποία εισάγει τις διορθώσεις σαν μια «μικρή διαταραχή» της αρχικής «εξιδανικευμένης» λύσεως .

Κλασικά παραδείγματα εξιδανικευμένων συστημάτων από την Θερμοδυναμική αποτελούν το **ιδανικό αέριο** και το **μέλαν σώμα** . Οι χαρακτηριστικοί νόμοι και για τα δύο αυτά συστήματα είναι γενικοί και δεν εξαρτώνται από ειδικά χαρακτηριστικά , όπως το είδος των μορίων ή άλλες φυσικές και γεωμετρικές λεπτομέρειες των σωμάτων .

Επίσης το **μαθηματικό εκκρεμές** και οι **τελειώς λείες επιφάνειες** είναι άλλα δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα εξιδανίκευσης από την Μηχανική .

Τα πραγματικά συστήματα προσεγγίζουν πολύ καλά τα ιδανικά (ή εξιδανικευμένα) συστήματα κάτω από κατάλληλες συνθήκες .

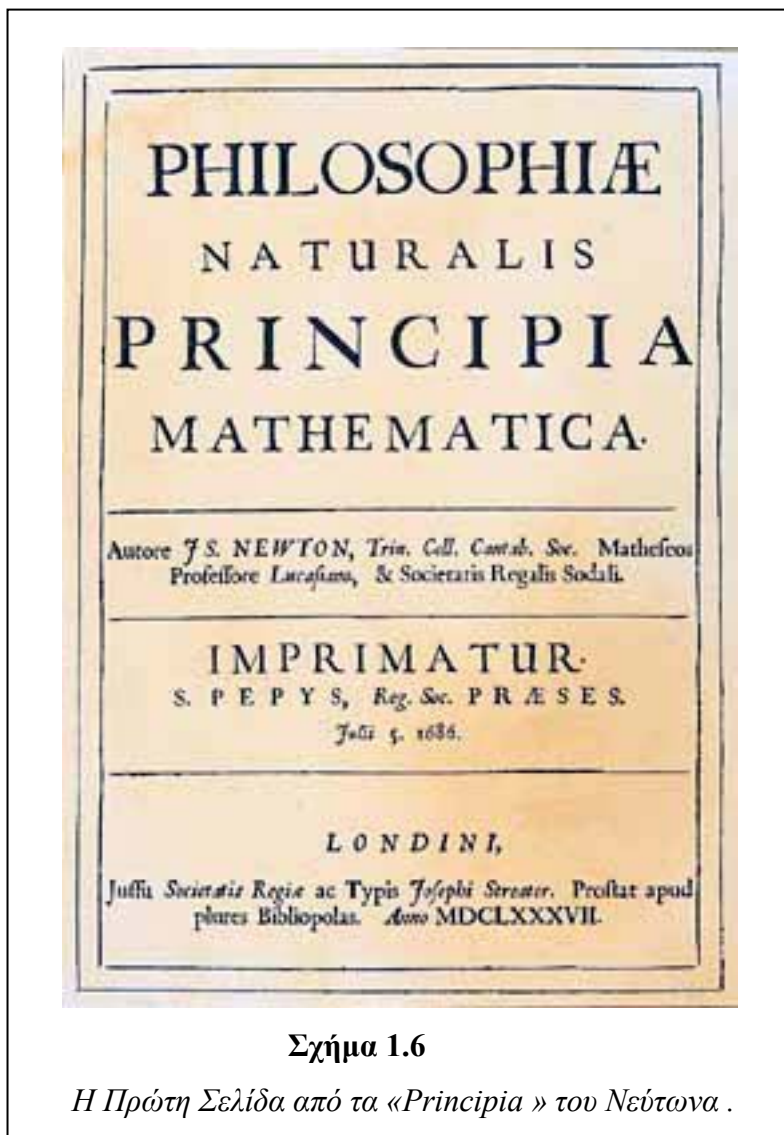
### **Σχέση της Φυσικής με άλλες επιστήμες**

Την σχέση της Φυσικής με τα Μαθηματικά την έχουμε ήδη συζητήσει , στο εδάφιο 1.1.1 , και δεν χρειάζεται να την ξανασυζητήσουμε εδώ , αν και τα Μαθηματικά δεν είναι ακριβώς επιστήμη , με την έννοια της πειραματικής επιστήμης , της οποίας η αλήθεια ελέγχεται με το πείραμα .

Σε σχέση με τις άλλες επιστήμες , η Φυσική , όπως πρέπει να έγινε αντιληπτό από την μέχρι τώρα παρουσίαση , κατέχει δεσπόζουσα και θεμελιώδη θέση αφού , κατ' αρχήν τουλάχιστον , τις περιλαμβάνει , μιας και το πεδίο εφαρμογής της

εκτείνεται από το απείρως μικρό μέχρι το απείρως μεγάλο . Υπ' αυτήν την έννοια , η Φυσική σήμερα εξακολουθεί να έχει τον ρόλο της **Φυσικής Φιλοσοφίας**<sup>14</sup> από την οποία γεννήθηκαν όλες οι **Φυσικές Επιστήμες** .

Θα πρέπει εδώ , παρενθετικά , να σημειώσουμε πως το κλασικό βιβλίο του Νεύτωνα ( βλέπε σχήμα 1.5 ) με τίτλο «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* » , που εμφανίσθηκε το 1687 , θα πρέπει να θεωρείται ως ένα από τα σημαντικότερα , αν όχι το σημαντικότερο , βιβλίο της χιλιετίας που πέρασε . Τα « *Principia* » , όπως είναι πιο συνοπτικά γνωστό το βιβλίο του Νεύτωνα , είχαν αναμφισβήτητα την μεγαλύτερη επιρροή από κάθε άλλο βιβλίο , σ' ολόκληρη την επιστήμη και την Φιλοσοφία .



**Σχήμα 1.6**

*Η Πρώτη Σελίδα από τα «Principia» του Νεύτωνα .*

<sup>14</sup> Ως γνωστόν , η λέξη Φυσική είναι ( ουσιαστικοποιηθέν ) επίθετο και το πραγματικό ουσιαστικό δεν είναι επιστήμη , αλλά φιλοσοφία : “ *Philosophiæ Naturalis* ” .

Είναι λοιπόν λίγο-πολύ προφανές , ότι η σχέση της Φυσικής με τις άλλες Φυσικές επιστήμες , όπως η **Χημεία** , η **Βιολογία** , η **Αστρονομία** , η **Γεωλογία** , η **Επιστήμη Υλικών** , η **Μετεωρολογία** , η **Φυσιολογία** , κ.λ.π. , με τις οποίες μοιράζεται την επιστημονική μέθοδο και την πειραματική επαλήθευση , είναι σχέσεις « μητέρας – παιδίων » .

Όπως βέβαια συμβαίνει σχεδόν πάντα σε τέτοιες περιπτώσεις , οι θυγατρικές επιστήμες έχουν πάρει τον δικό τους δρόμο με τα δικά τους συστήματα , τα δικά τους «στοιχειώδη σωμάτια» ή «υλικά σημεία» ( τα κύτταρα , σαν ένα παράδειγμα από την βιολογία ) και με τις δικές τους προσεγγίσεις και προβλήματα .

Η Στατιστική Φυσική μαζί με την ατομική δομή της ύλης και τους νόμους που την διέπουν αποτελούν δύο από τους βασικούς συνδετικούς κρίκους με τις άλλες Φυσικές Επιστήμες . Μια τέτοια σύνδεση γίνεται φανερή και από τα ονόματα των ειδικότερων διεπιστημονικών κλάδων των Φυσικών Επιστημών , όπως **Φυσικοχημεία** , **Βιοφυσική** , **Γεωφυσική** κ.α. .

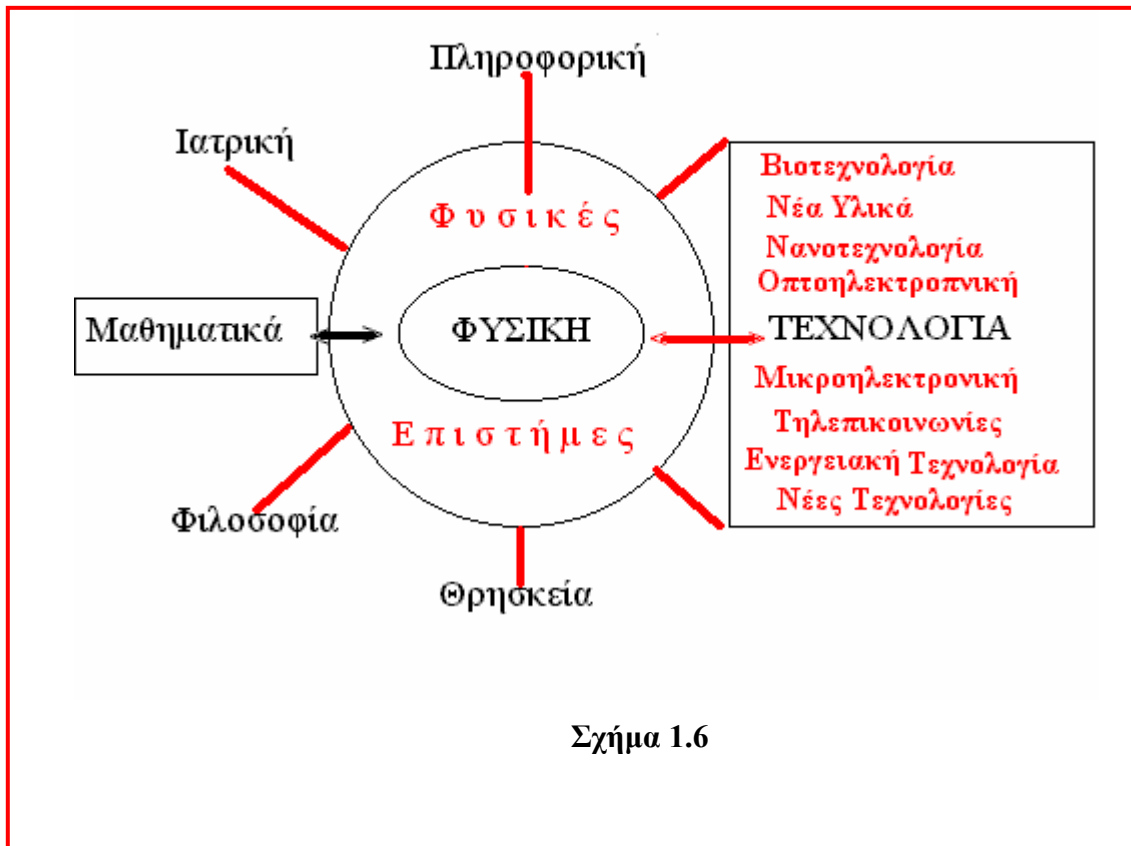
Απ' την άλλη μεριά , η ουσιαστική διαφοροποίηση των άλλων Φυσικών επιστημών από την Φυσική εκφράζεται εύκολα από το γεγονός ότι , εκτός από τους νόμους που σχετίζονται άμεσα με την υλική υπόσταση των αντικειμένων μελέτης τους , υπάρχουν πολλοί νέοι νόμοι , θεμελιώδεις και μη , οι οποίοι δεν είναι εύκολο να συνδεθούν με τους νόμους της Φυσικής με κάποιο, ευθύ ή έστω και έμμεσο, τρόπο . Κλασικό παράδειγμα τέτοιου νόμου αποτελεί ο **νόμος της Φυσικής Επιλογής** στην Βιολογία .

Υπάρχουν πολλά και εξαιρετικά ενδιαφέροντα προβλήματα στις Φυσικές επιστήμες , τα οποία έχουν άμεσο αντίκτυπο στην τεχνολογία και τον κοινωνικό περίγυρο . Ενδεικτικά παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων αποτελούν η **αποκρυπτογράφηση του γενετικού κώδικα** , η **κλωνοποίηση** , η αξιόπιστη **πρόγνωση σεισμών** , και η **λειτουργία του εγκεφάλου** .

Οι Φυσικές επιστήμες και ειδικότερα η Φυσική , με την στενότερη έννοια του όρου , είχαν και έχουν καθοριστική συμβολή στην ανάπτυξη και την διαρκή εξέλιξη της **Τεχνολογίας** . Μάλιστα στις περισσότερες επιστήμες υπάρχουν συγγενέστεροι προς την Τεχνολογία κλάδοι , όπως **Εφαρμοσμένη Φυσική** , **Βιομηχανική Χημεία** , **Βιοτεχνολογία** , κ.α. .

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας , με τη σειρά της , βοήθησε την έρευνα , ιδιαίτερα την πειραματική , στις Φυσικές επιστήμες , γι αυτό και το βέλος που τις συνδέει με την Τεχνολογία στο διάγραμμα του σχήματος [1.6 ] , είναι αμφίδρομο . Ειδικά για την τεχνολογία ηλεκτρονικών υπολογιστών , είναι εμφανής η αμφίδρομη αλληλεπίδραση της με την Φυσική ( ιδιαίτερα τη **Φυσική Στερεάς Κατάστασης** ) και την Επιστήμη Υλικών , αφού η βελτίωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και η δραματική αύξηση της ισχύος τους , βοηθά αποτελεσματικά την θεωρητική και πειραματική έρευνα της Φυσικής ( και ιδιαίτερα της **Υπολογιστικής Φυσικής** ) προς νέα υλικά και διατάξεις . Τα νέα υλικά και οι διατάξεις βελτιώνουν με τη σειρά τους την ισχύ των ηλεκτρονικών υπολογιστών , και έτσι συνεχίζεται ένας γόνιμος κύκλος .

Πέρα από την Τεχνολογία και τις άλλες επιστήμες είναι ιστορικά γνωστή η σχέση της Φυσικής και των άλλων Φυσικών επιστημών με την Θρησκεία ( Δίκη του Γαλιλαίου ) και την Φιλοσοφία. Και πως αλλιώς θα ήταν δυνατόν η «Φυσική Φιλοσοφία» να μη είναι σε στενή σχέση με την Φιλοσοφία και την Μεταφυσική ;



## Θέση της Φυσικής στη Σύγχρονη επιστήμη και Τεχνολογία

Η σχέση της Φυσικής με την Φιλοσοφία ήταν από παλιά αμφίδρομη :

Και η Φυσική επηρεάστηκε κατά καιρούς από διάφορα φιλοσοφικά ρεύματα , όπως για παράδειγμα ο θετικισμός , αλλά και η ίδια είχε μεγάλη επιρροή στη φιλοσοφική σκέψη .

Ιδιαίτερα στη σύγχρονη εποχή , με τις νέες ριζοσπαστικές ιδέες της «Σύγχρονης Φυσικής» ( Θεωρία της Σχετικότητας και την Κβαντική Θεωρία ) , η επιρροή της Φυσικής στη Φιλοσοφία αυξήθηκε δραματικά , τόσο που έφτασε «μέχρι παρεξήγησης» . Η παρεξήγηση ανάγεται σε μια κρυφή ( και στείρα ) διαμάχη , που υπήρχε από παλιά «ανάμεσα σε δύο τύπους κουλτούρας »<sup>15</sup> , της Φυσικής , και γενικότερα των θετικών επιστημών , απ' τη μια μεριά και της τέχνης και των ανθρωπιστικών επιστημών απ' την άλλη .

Πρόσφατα , μια μερίδα επιστημόνων άσκησε ( δικαίως ) κριτική για την αλόγιστη και αδόκιμη χρήση ( και κατάχρηση ) επιστημονικών όρων και εννοιών , στα έργα μερικών από τους σύγχρονους φιλοσόφους και «Σημειολόγους» .

Σαν αποκορύφωμα αυτής της κριτικής , φτάνοντας στα άκρα , ο Alan Sokal , καθηγητής της φυσικής στο πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης , έστειλε προς δημοσίευση το 1966 ένα άρθρο-φάρσα<sup>16</sup> στο καθ' όλα έγκυρο επιστημονικό περιοδικό « Social Text » . Το περιοδικό αυτό , το οποίο είναι γνωστό για τις «μεταμοντέρνες» απόψεις που εκφράζει στον χώρο των ανθρωπιστικών σπουδών , έκανε δεκτό αβασάνιστα το άρθρο του Sokal , το οποίον είχε τον τίτλο «Transgressing Boundaries : Toward a Transmutative Hermeneutics of Quantum Gravity»<sup>17</sup> . Αργότερα , ο ίδιος ο Sokal απεκάλυψε ότι ολόκληρο το άρθρο , αποτελούμενο από 35 σελίδες , ήταν γεμάτο ανοησίες και δεν είχε ούτε νόημα ούτε περιεχόμενο .

Ανεξάρτητα του κατά πόσο επικροτεί κανείς τέτοιου είδους ενέργειες , δηλαδή αν γελάει ή θυμώνει , ένα χρήσιμο και εποικοδομητικό σχόλιο σαν επίλογος σ' αυτή την

---

<sup>15</sup> Βλέπε «The Abacus and the Rose : A New Dialogue on Two World Systems » στο « Science and Human Values » , J. Bronowski , Harper Torchbook edition , Harper & Row , N. York ( 1965 ) .

<sup>16</sup> Όπως θα λέγαμε στην «σύγχρονη» γλώσσα των Μ.Μ.Ε. , «άρθρο-μαϊμού»

<sup>17</sup> Σε ελεύθερη μετάφραση ( σύμφωνα με το περιοδικό « Αντί » της 21-11-1997 , στο οποίο μπορεί να αναφερθεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης για περισσότερα επί του θέματος ) «*Υπερβαίνοντας τα όρια : προς μια μετασχηματιστική ερμηνευτική της κβαντικής βαρύτητας*»

απίστευτη ιστορία θα ήταν ότι : Η χρήση όρων , εννοιών και παραδειγμάτων από άλλους τομείς (ιδιαίτερα εάν αυτοί οι τομείς είναι κατά τεκμήριο πιο σύνθετοι ) θα πρέπει να γίνεται με φειδώ , πολύ προσεκτικά και χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν απλές και καθαρές έννοιες με στόχο την καλύτερη κατανόηση , και όχι τον εύκολο εντυπωσιασμό (που μπορεί να θολώνει αντί να ξεκαθαρίζει τις έννοιες ) .