

**Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ**

Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

**ΘΕΜΑ : ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ
ΔΙΚΤΥΟΥ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ**

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ :

ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ :

ΜΑΤΣΟΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ
ΜΑΤΣΕΛΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΤΣΑΪΚΟΥ ΣΩΤΗΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....Σελ.

ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Εισαγωγή.....1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. Ορισμός Γεωδαισίας.....4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. Ιστορική εξέλιξη.....5

3.1. Στο βάθος των αιώνων.....6

3.2. Κλασσική και ελληνιστική περίοδος.....7

3.3. Ρωμαϊκή περίοδος.....8

3.4. Στην Ευρώπη του Μεσαίωνα.....9

3.5. Κινέζοι και Άραβες.....10

3.6. Στην Ευρώπη της Αναγέννησης.....11

3.7. 17ος αιώνας.....13

3.8. 18ος αιώνας.....14

3.9. 19ος αιώνας.....14

3.10. Στις αρχές του 20ού αιώνα.....15

3.11. Οι Παγκόσμιοι Πόλεμοι.....15

3.12. Μετά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο.....16

3.13. Στη σύγχρονη εποχή.....18

3.14. 21ος αιώνας.....20

3.15. Υπολογιστικές διατάξεις και τοπογραφικοί υπολογισμοί....21

3.16. Όργανα σχεδίασης και τοπογραφικές σχεδιάσεις.....22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. Γεωδαιτικός τριγωνισμός του Ελληνικού χώρου.....25

4.1. Ιδανικά κανονικά πολύγωνα.....25

4.2. Δωδώνη.....27

4.3. Από τον τριγωνισμό της Αττικοβοιωτίας.....29

4.4. Δήλος.....31

4.5. Ελευσίνα (ομόκεντροι κύκλοι).....33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	
5.	Ιστορική ανάπτυξη των γεωδαιτικών εργασιών στην Ελλάδα.....35
5.1.	Περίοδος 1889-1925.....35
5.2.	Περίοδος 1925-1940.....36
5.3.	Περίοδος 1940-1949.....36
5.4.	Περίοδος 1949-1962.....37
5.5.	Περίοδος 1962-1989.....38
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	
6.	Η ίδρυση και η εφαρμογή των ΓΣΑ.....40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	
7.	Τι είναι ένα ολοκληρωμένο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ).....42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	
8.	Το σχήμα και το μέγεθος της γης.....45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9	
9.	Συστήματα αναφοράς.....48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10	
10.	Η γεωμετρία του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.....54
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11	
11.	Τα συστήματα αναφοράς στην Ελλάδα.....65
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12	
12.	Επιλογή ΓΣΑ '87.....68
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13	
13.	Ποιο είναι το ΕΓΣΑ '87.....74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14	
14.	Πως υλοποιείται το ΕΓΣΑ'87 (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ).....80

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15	
15.	Τι σημαίνει στην πράξη το ΕΓΣΑ '87.....82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16	
16.	Πως συνδέεται το ΕΓΣΑ '87 με τα υπάρχοντα συστήματα.....86
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17	
17.	Συμπεράσματα.....87

ΜΕΡΟΣ Β'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.	Αφομοίωση τριγωνομετρικών δικτύων με τη μέθοδο μεταβολής των συντεταγμένων.....91
1.1.	Γενικά.....91

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.	Εξισώσεις παρατηρήσεων.....93
2.1.	Εξωτερικές εξισώσεις.....95
2.2.	Εσωτερικές εξισώσεις.....95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.	Προσδιορισμός των αγνώστων με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.....99
3.1.	Ισοβαρείς παρατηρήσεις.....99
3.2.	Ανισοβαρείς παρατηρήσεις.....101

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.	Αφομοίωση συντεταγμένων ενός σημείου.....103
4.1.	Εξωτερικές εξισώσεις (πολλαπλής εμπροσθοτομίας).....103
4.2.	Εσωτερικές εξισώσεις (πολλαπλή οπισθοτομία).....105
4.3.	Αφομοίωση εσωτερικών κι εξωτερικών εξισώσεων.....110

	ΣΧΟΛΙΑ.....118
--	-----------------------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	
5.	Κριτήρια ακρίβειας για τριγωνομετρικά δίκτυα.....119
5.1.	Περίληψη.....119
5.2.	Γενικά.....120

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	
6.	A-priori ακρίβεια μετρήσεων.....121

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	
7.	Μετάδοση σφαλμάτων σε τυπικά σχήματα τριγωνισμού – κριτήρια ακρίβειας.....122
7.1.	Τρίγωνο.....124
7.2.	Τετράπλευρο.....143
7.3.	Κανονικό πεντάγωνο.....150
7.4.	Κανονικό εξάγωνο.....154

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	
8.	Συμπεράσματα – εφαρμογές.....159

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9	
9.	Το πρόβλημα της αμοιβαίας ορατότητας δύο δεδομένων σημείων της γήινης επιφάνειας.....164

ΜΕΡΟΣ Γ'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
1.	Εξέλιξη της φωτογραμμετρίας.....182
1.1.	Η γέννηση της φωτογραμμετρίας.....182

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
2.	Φωτογραμμετρικές αποτυπώσεις.....209

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
3.	Αεροφωτογραφική μέθοδος αποτυπώσεως.....231

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όλες οι εργασίες που γίνονται στη γεωδαισία, την τοπογραφία, τη φωτογραμμετρία, το κτηματολόγιο, αλλά και γενικότερα σε όλες εκείνες που έχουν να κάνουν με τη μέτρηση, περιγραφή, ανάλυση και επέμβαση στο χώρο μέσα στον οποίο ζούμε, έχουν ανάγκη από εντοπισμό, δηλαδή μια διαδικασία για τον προσδιορισμό της θέσης διαφόρων πραγματικών ή και φανταστικών σημείων του χώρου.

Στις εργασίες μας, όμως, είναι απαραίτητα και ορισμένα μεγέθη γεωμετρικού χαρακτήρα (όπως αποστάσεις, εμβαδά και άλλα), μερικά από τα οποία είναι δυνατόν να μετρηθούν απευθείας, αλλά τα περισσότερα προκύπτουν συνήθως με υπολογισμούς από τις θέσεις στο χώρο που έχουν τα διάφορα σημεία. Ας σημειωθεί ότι η ακρίβεια με την οποία είναι γνωστές ή μας χρειάζονται οι θέσεις και τα άλλα γεωμετρικά μεγέθη, καλύπτουν ένα πολύ μεγάλο εύρος, από χιλιοστά μέχρι μέτρα ή ακόμα και χιλιόμετρα ανάλογα με τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να εκφράσουμε θέσεις στο χώρο, αλλά ο σχεδόν αποκλειστικός τρόπος στη γεωδαισία είναι εκείνος των «συντεταγμένων». Αν και χρησιμοποιούνται αρκετά συστήματα συντεταγμένων στη γεωδαισία, (όπως πολικές κυλινδρικές, σφαιρικές, ελλειψοειδείς συντεταγμένες) η προτίμηση είναι πάντα στις καρτεσιανές συντεταγμένες, επειδή είναι οι απλούστερες και οι βολικότερες.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι συντεταγμένες, εκτός από σπάνιες περιπτώσεις και πάλι μόνο για εκτάσεις μικρότερες από ένα χιλιόμετρο, δεν μπορούν και δεν μετρώνται απευθείας. Αντ' αυτών μετρώνται άλλα γεωμετρικά μεγέθη (στη γεωδαισία γωνίες, μη και διαφορές αποστάσεων) τα οποία συνδέονται με μαθηματικές σχέσεις με τις συντεταγμένες και έτσι οι συντεταγμένες δεν μετρώνται, αλλά προσδιορίζονται «εξ υπολογισμού».

Τέλος, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούμε αναφέρονται σε έναν ευκλείδειο χώρο. Δεδομένου ότι οι μετρήσεις μας γίνονται σχεδόν αποκλειστικά στο φυσικό περιβάλλον με τη βοήθεια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και άρα σε μη ευκλείδειο χώρο, πρέπει απαραίτητα οι μετρήσεις στο πεδίο να υποστούν τις απαραίτητες αναγωγές.

Η επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων επιτρέπει μια αυθαιρεσία που έχει **3** βαθμούς ελευθερίας για ένα δισδιάστατο εντοπισμό και **6** βαθμούς ελευθερίας για έναν τρισδιάστατο. Τούτο είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι όλες οι θέσεις είναι από τη φύση τους σχετικές και, επομένως, υπάρχει η ελευθερία επιλογής της αρχής και του προσανατολισμού. Ας σημειωθεί, επίσης, ότι θεωρούμε τη μονάδα μήκους ορισμένη, διότι σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να δώσουμε και άλλον ένα βαθμό ελευθερίας που ορίζει την κλίμακα του συστήματος συντεταγμένων.

Αν και ο ορισμός ενός συστήματος συντεταγμένων με τους βαθμούς ελευθερίας που έχει (δηλαδή της επιλογής της αρχής του και του προσανατολισμού των αξόνων του) φαίνεται αυτονόητος, το

γεγονός ότι για την υλοποίηση του, που σημαίνει να δοθούν σε πραγματικά σημεία συντεταγμένες στο σύστημα αυτό, απαιτούνται πραγματικές μετρήσεις στο πεδίο, γίνεται φανερό ότι η διαδικασία υλοποίησης περνά μέσα από τις μετρήσεις, με αποτέλεσμα να μεταφέρονται οι αβεβαιότητες των μετρήσεων στις συντεταγμένες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

Κατωτέρα Γεωδαισία, ή Τοπογραφία, είναι η επιστήμη που μελετά τον τρόπο (μεθόδους και όργανα) για αναπαράσταση, ή αποτύπωση, περιοριζόμενων εκτάσεων της γης (ακτίνα εκτάσεως μέχρι **10 km** περίπου).

Τον τρόπο για αποτύπωση ευρύτερων περιοχών, ή και ολόκληρης της επιφανείας της γης, μελετά η Ανωτέρα Γεωδαισία μαζί με την Χαρτογραφία.

Ανωτέρα Γεωδαισία είναι η επιστήμη που μελετά το μέγεθος, το σχήμα και το πεδίο βαρύτητας της γης (θεωρητικό μέρος) καθώς επίσης και τον τρόπο για εγκατάσταση στην επιφάνεια της γης ενός αριθμού τριγωνομετρικών σημείων για την χαρτογραφία και Γεωφυσική (εφηρμοσμένο μέρος).

Η Κατωτέρα και Ανωτέρα Γεωδαισία συνιστούν τον ευρύτερο κλάδο της Γεωδαισίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

Η ανάγκη για μετρήσεις δημιουργήθηκε από τις απαρχές ακόμη της ανθρώπινης ύπαρξης. Η ανάγκη αυτή έγινε μεγαλύτερη από τότε που ο άνθρωπος σταμάτησε τη νομαδική ζωή, δημιούργησε οικισμούς και άρχισε να καλλιεργεί τη γη. Με την εξέλιξη του ανθρώπου ως σκεπτόμενου όντος, ένα από τα κύρια ενδιαφέροντά του ήταν η γνώση σχετικά με τη Γη.

Η συμπεριφορά του ανθρώπου επηρεάστηκε συχνά από τα διάφορα φυσικά φαινόμενα τα οποία ήταν και η αιτία της διαχρονικής γέννησης αρκετών προκαταλήψεων, τελετουργιών, αλλά και θρησκευτικών δοξασιών. Παράλληλα όμως, η αύξηση του ενδιαφέροντος για τη Γη και την καλύτερη κατανόηση των διαφόρων φυσικών φαινομένων έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εμφάνιση και εξέλιξη του πολιτισμού.

Πέρα από τις παρατηρήσεις πλανητών και αστέρων, η τεχνική των μετρήσεων πάνω στην επιφάνεια της Γης ήταν αρκετά αναπτυγμένη κατά την αρχαιότητα. Από τις μετρήσεις αυτές και την ανάγκη της επεξεργασίας τους αναπτύχθηκαν η Γεωμετρία (= μέτρηση της γης) και η Γεωδαισία (Γη + δαίω = διαιρώ, διανέμω και μετρώ τη Γη) ως πρακτική εφαρμογή της Γεωμετρίας σε αντιδιαστολή με τη Θεωρητική Γεωμετρία, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη.

Η Γεωδαισία είναι η επιστήμη που ασχολείται με τη θεωρητική και πρακτική σπουδή οργάνων και μεθόδων για την εκτέλεση μετρήσεων, υπολογισμών και απεικονίσεων που είναι χρήσιμες για τον προσδιορισμό της μορφής και του μεγέθους ολόκληρης της γήινης επιφάνειας ή τμημάτων αυτής. Η Τοπογραφία ως κλάδος της Γεωδαισίας ασχολείται με τη μέτρηση, τον υπολογισμό και την απεικόνιση των μικρών σχετικά τμημάτων της γήινης επιφάνειας.

3.1. ΣΤΟ ΒΑΘΟΣ ΤΩΝ ΑΙΩΝΩΝ

Από τα αρχαία χρόνια η Τοπογραφία αναπτύχθηκε ως μια εφαρμοσμένη επιστήμη. Από την αυγή της Ιστορίας ο άνθρωπος κατανόησε τις πιο στοιχειώδεις γεωμετρικές έννοιες: την οριζόντια και κατακόρυφη ευθεία και το οριζόντιο επίπεδο. Οι πρώτες μονάδες μέτρησης μηκών βασίστηκαν στις διαστάσεις των μελών του ανθρώπινου σώματος. Με την ανάπτυξη του πολιτισμού και για τις ανάγκες κατασκευής οικοδομημάτων και τεχνικών έργων επινοήθηκαν τα πρώτα τοπογραφικά όργανα: Σχοινιά με κόμπους για τη μέτρηση μηκών, ώστε να μετράται το μέγεθος των αγρών για διανομή και φορολόγηση, νήμα της στάθμης για το κτίσιμο κατακόρυφων τοίχων, όργανα χάραξης ορθών γωνιών για την κατασκευή κτιρίων, καθώς και όργανα ελέγχου οριζοντιότητας επιπέδων και μέτρησης υψομετρικών διαφορών για την κατασκευή αρδευτικών δικτύων, καναλιών και αγωγών ύδρευσης

Όλοι οι αρχαίοι λαοί ανέπτυξαν την Τοπογραφία: Βαβυλώνιοι, Σουμέριοι, Ασσύριοι, Αιγύπτιοι, Πέρσες, Ινδοί και Κινέζοι. Σε γραπτά

κείμενα που σώζονται υπάρχουν περιγραφές για τη λειτουργία και τη χρήση τοπογραφικών οργάνων και μεθόδων μέτρησης, ενώ σώζονται και υπολείμματα οργάνων, καθώς και σχέδια σε τοιχογραφίες και μνημεία.

3.2. ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΛΗΝΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Κατά την κλασική και την ελληνιστική περίοδο οι Έλληνες προήγαγαν σημαντικά τη Γεωμετρία, τα Μαθηματικά, την Αστρονομία, τη Χαρτογραφία, αλλά και την εφαρμοσμένη Τοπογραφία, προετοιμάζοντας την εποχή ακμής της Τοπογραφίας που ήταν η Ρωμαϊκή περίοδος.

Οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν διάφορα απλά τοπογραφικά όργανα: Τον αστέρα για τη χάραξη ορθών γωνιών, σχοινιά για τη μέτρηση μηκών και σταδίες για τη διευκόλυνση προσδιορισμού υψομετρικών διαφορών. Χρησιμοποιούσαν επίσης τον αστρολάβο για αστρονομικές μετρήσεις. Την περίοδο αυτή ο Ερατοσθένης, που θεωρείται ο πρώτος Γεωδαίτης και θεμελιωτής της Γεωδαισίας, προσδιόρισε το μήκος της περιμέτρου της Γης με τη μέτρηση του πλάτους μεταξύ Αλεξάνδρειας και Ασσουάν.

Έναν αιώνα περίπου αργότερα, ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς συνέγραψε το κορυφαίο τοπογραφικό σύγγραμμα του αρχαίου κόσμου που περιγράφει διάφορα τοπογραφικά όργανα (μεταξύ των οποίων τη Διόπτρα - πρόδρομο των σημερινών θεοδόλιχων, ένα όργανο προσδιορισμού υψομετρικών διαφορών με βάση τη στάθμη νερού που ηρεμεί, το Οδόμετρο και το Δρομόμετρο για μετρήσεις

μεγάλων αποστάσεων σε ξηρά και θάλασσα αντίστοιχα) και μεθόδους μετρήσεων και υπολογισμών.

Την ίδια περίπου εποχή ο Πτολεμαίος συντάσσει στη Γεωγραφική Υφήγηση τους χάρτες του γνωστού τότε κόσμου.

3.3. ΡΩΜΑΪΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Σε αντίθεση με τους Έλληνες, οι Ρωμαίοι δεν ενδιαφέρονταν για θεωρητικές μελέτες, αλλά για πρακτικές εφαρμογές. Οι Ρωμαίοι δε δημιούργησαν νέα τοπογραφικά όργανα, ούτε πρόσθεσαν σημαντικά στοιχεία στο θεωρητικό υπόβαθρο της Τοπογραφίας.

Όμως κατά τη ρωμαϊκή περίοδο οι τοπογραφικές μετρήσεις συστηματοποιήθηκαν και αποτέλεσαν μέρος της ρωμαϊκής πρακτικής για στρατιωτικούς και πολιτικούς σκοπούς, αλλά και για την καλύτερη οργάνωση της Αυτοκρατορίας. Ουσιαστικά κατά τη ρωμαϊκή περίοδο δημιουργήθηκε το επάγγελμα του Τοπογράφου που απολάμβανε τιμής και υπολήψεως.

Οι Ρωμαίοι χρησιμοποίησαν για τις μετρήσεις τα απλά τοπογραφικά όργανα των Ελλήνων και Αιγυπτίων με κάποιες βελτιώσεις: Σχοινιά, μετρητικές ράβδους και μπρούτζινα διαστημόμετρα για τη μέτρηση μηκών, την “**groma**” για τη χάραξη ορθών γωνιών και το χωροβάτη (**chorobates**) για τη μέτρηση υψομετρικών διαφορών.

Ο καλύτερος μάρτυρας της ακμής της Τοπογραφίας μέχρι τα ελληνικά και τα ρωμαϊκά χρόνια είναι το πλήθος των οικοδομημάτων, των μνημειακών κτιρίων, των δρόμων, των καναλιών, των υδραγωγείων και του πλήθους των τεχνικών έργων που διατηρήθηκαν μέχρι σήμερα ή τμήματά τους ανακαλύφθηκαν από την ανασκαφική σκαπάνη.

3.4. ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ ΤΟΥ ΜΕΣΑΙΩΝΑ

Μετά την πτώση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα, η Γεωδαισία και η Τοπογραφία, όπως και οι άλλες επιστήμες, εκτίθενται στις έντονες επιδράσεις της Θεολογίας.

Κατά το διάστημα από τον 3ο μ.Χ. αιώνα μέχρι τα μέσα του 14ου αιώνα, τίποτε το ιδιαίτερα σημαντικό για την επιστήμη της Τοπογραφίας δε συμβαίνει στην Ευρώπη και το Βυζάντιο. Φαίνεται ότι η μεγάλη άνθηση της ρωμαϊκής κυρίως εποχής είχε φέρει την Τοπογραφία σε πολύ προχωρημένο σημείο.

Ακόμη το φεουδαρχικό σύστημα που ίσχυε στην Ευρώπη δε χρειαζόταν ιδιαίτερες τοπογραφικές μετρήσεις και δεν έδινε κίνητρα για ανάπτυξη της Τοπογραφίας: Οι ιδιοκτησίες της γης ήταν τόσο μεγάλες που για να καθορίσει κανείς τα όριά τους μπορούσε μόνο να χρησιμοποιήσει απλή περιγραφή και τα κατάλληλα τοπωνύμια. Έτσι, τα υπάρχοντα όργανα και οι μέθοδοι μέτρησης και υπολογισμού ήταν επαρκή και κάλυπταν τις ανάγκες για τους επόμενους αιώνες. Δε συνέβαινε το ίδιο όμως στον υπόλοιπο κόσμο.

3.5. ΚΙΝΕΖΟΙ ΚΑΙ ΑΡΑΒΕΣ

Στην Κίνα η ανάπτυξη της Τοπογραφίας ήταν σημαντική. Οι Κινέζοι γνώριζαν τις μεθόδους των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων από την αρχή της δυναστείας των Χαν (202 π.Χ.). Γνώριζαν επίσης αργότερα και τις επιτεύξεις των ελληνιστικών και των ρωμαϊκών χρόνων.

Οι ίδιοι κατασκεύασαν και χρησιμοποιούσαν μαγνητικές πυξίδες για προσδιορισμό διευθύνσεων και γωνιών, κλίμακες ορισμένου μεγέθους για την ακριβή μέτρηση μηκών, σταδίες με διαβαθμίσεις για τον προσδιορισμό υψομετρικών διαφορών και ένα είδος τηλεσκοπίου από τα τέλη του 10ου αιώνα.

Το ίδιο σημαντική ήταν και η ανάπτυξη των Θετικών Επιστημών από τους Άραβες κατά την ίδια χρονική περίοδο. Η εξάπλωση των Αράβων και οι αραβικές μεταφράσεις διέσωσαν και μετέδωσαν τα ελληνικά επιστημονικά επιτεύγματα, ενώ οι αραβικές εκδόσεις μεταφρασμένες στα Λατινικά βοήθησαν στην εισβολή, μέσω της Ισπανίας, επιστημονικών γνώσεων στον ευρωπαϊκό χώρο.

Οι Άραβες χρησιμοποιούσαν απλά τοπογραφικά όργανα που ήταν παραλλαγές των ελληνικών και ρωμαϊκών οργάνων μέτρησης, όπως όργανα χάραξης ορθών γωνιών παρόμοια του ελληνικού αστέρα και της ρωμαϊκής “groma” και όργανα μέτρησης οριζοντιότητας επιπέδων και υψομετρικών διαφορών, ενώ βελτίωσαν και τον αστρολάβο πάντα για αστρονομικές παρατηρήσεις.

3.6. ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ ΤΗΣ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗΣ

Από το τέλος του 14ου αιώνα αρχίζει και στην Ευρώπη η χρησιμοποίηση διαφόρων νέων οργάνων. Μεταξύ αυτών ξαναχρησιμοποιείται ο αστρολάβος, όργανο κυρίως για αστρονομικές παρατηρήσεις κατά την αρχαιότητα, αλλά τώρα πια για τοπογραφικές μετρήσεις, τα ορθόγωνα και οι μαγνητικές πυξίδες.

Τα εξερευνητικά ταξίδια των μεγάλων θαλασσοπόρων, αλλά και τα εμπορικά θαλάσσια ταξίδια μεταξύ Ευρώπης και Ανατολής συνέβαλλαν σημαντικά στη διάδοση των επιστημονικών γνώσεων, στην εξέλιξη των μεθόδων ναυσιπλοΐας, αλλά και στην ανάπτυξη της Χαρτογραφίας.

Η ανάπτυξη όλων των επιστημών άρχισε να γίνεται μεγαλύτερη κατά την περίοδο της Αναγέννησης. Οι βαθιές κοινωνικές, πολιτικές και πολιτισμικές αλλαγές που χαρακτηρίζουν την περίοδο αυτή δημιούργησαν ένα νέο πλαίσιο ανάπτυξης της Τοπογραφίας: Ο περιορισμός της φεουδαρχίας απαιτούσε τη μέτρηση και διανομή της γης στους αγρότες. Η ανακάλυψη νέων τόπων απαιτούσε την επιστημονική καταγραφή τους και τη σύνταξη χαρτών, ενώ παράλληλα ήταν αυξημένες οι ανάγκες για νέες μεθόδους προσανατολισμού και ναυσιπλοΐας.

Για την καλύτερη αξιοποίηση του πυροβολικού στον πόλεμο, ήταν αναγκαία η μέτρηση διευθύνσεων, κατακόρυφων γωνιών και αποστάσεων. Η επιβεβαίωση του ηλιοκεντρικού συστήματος του Κοπέρνικου απαιτούσε όργανα μετρήσεων υψηλής ακριβείας. Έτσι την

περίοδο αυτή κατασκευάστηκε ένα γωνιομετρικό όργανο το οποίο χρησιμοποιείται με τις ίδιες αρχές λειτουργίας μέχρι σήμερα. Πρόκειται για τον θεοδόλιχο (**Theodolitus**) που χρωστά το όνομά του στον Άγγλο **L. Digges** από το **1571**. Ωστόσο γωνιομετρικά όργανα με σκοπευτική διάταξη κάποιας μορφής είχαν ήδη κατασκευαστεί πριν από **500** περίπου χρόνια από Άραβες και Κινέζους, χωρίς να ξεχνούμε και τη Διόπτρα του Ήρωνος.

Εκείνο το πρώτο γωνιομετρικό όργανο, ο θεοδόλιχος, ήταν από τότε το κατεξοχήν τοπογραφικό όργανο μέτρησης γωνιών και είναι χαρακτηριστικό ότι για τους επόμενους πέντε περίπου αιώνες οι αρχές λειτουργίας του θεοδόλιχου παρέμειναν οι ίδιες, παρά την προσθήκη τηλεσκοπίου, τις βελτιώσεις στο σχεδιασμό και την ακρίβεια, την ελάττωση του μεγέθους, του βάρους και την εισαγωγή καλύτερων συστημάτων ανάγνωσης και διαφόρων αυτοματισμών.

3.7. 17^{ΟΣ} ΑΙΩΝΑΣ

Κατά τον 17ο αιώνα η Γεωδαισία, η Τοπογραφία και η κατασκευή τοπογραφικών οργάνων συστηματοποιούνται. Κατασκευάζονται αλυσίδες για τη μέτρηση μηκών, γωνιομετρικά όργανα σε συνδυασμό με μαγνητικές πυξίδες και κλισίμετρα.

Ο 17ος αιώνας είναι σημαντικός για την ανάπτυξη των τοπογραφικών οργάνων, γιατί αυτή την περίοδο γίνεται η εφεύρεση του τηλεσκοπίου, του βερνιέρου ως συστήματος ανάγνωσης ενδείξεων και των σταυρονήματος ως συστήματος σκόπευσης με μεγάλη ακρίβεια.

Ακόμη την ίδια περίοδο κατασκευάζεται ο χωροβάτης του οποίου η οριζοντίωση ελέγχεται με σφαιρική αεροστάθμη.

Υπάρχουν πλέον Γεωδαιίτες και Τοπογράφοι με επιστημονική κατάρτιση και ερευνητικές δραστηριότητες. Πολλά βιβλία με σχετικά θέματα τυπώνονται και κυκλοφορούν. Στα Πανεπιστήμια συστηματοποιείται η διδασκαλία των Μαθηματικών, ενώ η εισαγωγή των λογαρίθμων διευκολύνει και επιταχύνει την εκτέλεση των τοπογραφικών υπολογισμών.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι η χρησιμοποίηση λογαρίθμων για τοπογραφικούς υπολογισμούς σταμάτησε με την εισαγωγή των αριθμομηχανών γύρω στα **1970** και των ηλεκτρονικών υπολογιστών λίγο αργότερα.

3.8. 18^{ΟΣ} ΑΙΩΝΑΣ

Κατά τον **18ο** αιώνα το μαθηματικό υπόβαθρο του Γεωδαιίτη και του Τοπογράφου γίνεται ακόμη καλύτερο. Οι πανεπιστημιακές σχολές εκπαιδεύουν συνεχώς και περισσότερους Τοπογράφους, για τους οποίους υπάρχει ζήτηση λόγω διανομών της γης και αλλαγών στον τρόπο των καλλιεργειών. Σε διάφορα κράτη ιδρύονται τοπογραφικές υπηρεσίες, γίνονται πλέον μετρήσεις τριγωνομετρικών δικτύων και άλλες τοπογραφικές εργασίες μεγάλης κλίμακας.

Οι θεοδόλιχοι με τηλεσκόπιο χρησιμοποιούνται πλέον ευρύτατα και εκτοπίζουν τα παλαιά απλά γωνιομετρικά όργανα. Στα μέσα του

18ου αιώνα οι θεοδόλιχοι ήταν όργανα εύχρηστα, μετρούσαν οριζόντιες και κατακόρυφες γωνίες και χρησιμοποιούσαν αεροστάθμες για την οριζοντίωσή τους. Η χρησιμοποίηση σταδιομετρικών νημάτων και σταδίας οδηγεί στην οπτική μέτρηση αποστάσεων με ικανοποιητική ακρίβεια. Θεοδόλιχοι και χωροβάτες αρχίζουν να παράγονται οργανωμένα σε εργοστάσια που ανοίγουν σε διάφορες χώρες.

3.9. 19^{ος} ΑΙΩΝΑΣ

Από τις αρχές του **19ου** αιώνα οι αλλαγές και οι βελτιώσεις είναι ακόμη πιο ταχείς. Κατασκευάζονται θεοδόλιχοι και χωροβάτες υψηλής ακριβείας, λινές και μεταλλικές μετροταινίες, κανόνες και ειδικά σύρματα για τη μέτρηση μηκών. Όπως είναι αναμενόμενο, η εξέλιξη και η ανάπτυξη των διαφόρων κρατών δημιουργεί συνεχώς και μεγαλύτερες ανάγκες τοπογραφικών σχεδίων, χαρτών και ειδικών μετρήσεων. Η κατάσταση συνεχίζεται με παρόμοιο τρόπο και τον επόμενο αιώνα.

3.10. ΣΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 20ΟΥ ΑΙΩΝΑ

Στις αρχές του **20ού** αιώνα ο **Heinrich Wild** σχεδιάζει και κατασκευάζει θεοδόλιχους με πολλές καινοτομίες συνεργαζόμενος με τα μεγαλύτερα εργοστάσια κατασκευής τοπογραφικών οργάνων της εποχής. Κατασκευάζονται επίσης νέοι τύποι χωροβατών και

γυροσκοπικοί θεοδόλιχοι για τον προσδιορισμό της διεύθυνσης του μαγνητικού βορρά. Χαρακτηριστικό των νέων οργάνων είναι το μικρό μέγεθος και το μικρό βάρος, αλλά και η υψηλή ακρίβεια μετρήσεων.

3.11. ΟΙ ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΙ ΠΟΛΕΜΟΙ

Ο Πρώτος Παγκόσμιος Πόλεμος και οι ανάγκες του έδωσαν ώθηση στην επιστήμη της Γεωδαισίας και της Τοπογραφίας, αλλά και της Φωτογραμμετρίας. Μετά τον πόλεμο πληθαίνουν οι ερευνητικές δραστηριότητες σε σχετικά θέματα. Η έκδοση βιβλίων πληθαίνει, ωστόσο η συνεργασία μεταξύ των διαφόρων κρατών σε γεωδαιτικά και τοπογραφικά θέματα δεν είναι η καλύτερη κατά το διάστημα του μεσοπολέμου.

Παρόλα αυτά τα ευρωπαϊκά κυρίως εργοστάσια κατασκευής τοπογραφικών οργάνων δε σταματούν να βελτιώνουν τα προϊόντα τους και να παράγουν νέους τύπους θεοδόλιχων και χωροβατών, όπως θεοδόλιχους κατάλληλους για αστρονομικούς προσδιορισμούς και χωροβάτες αυτόματης οριζοντίωσης.

Ο Δεύτερος Παγκόσμιος Πόλεμος έδωσε και πάλι μια νέα τεράστια ώθηση σε διάφορες επιστήμες μέσα στην αγωνία των ανθρώπων να αποτρέψουν ή να επιφέρουν την καταστροφή και το θάνατο. Ένα θαυμαστό δημιούργημα που ξεκινάει από την εποχή του πολέμου είναι η ηλεκτρομαγνητική μέτρηση των αποστάσεων, η μέτρηση δηλαδή μηκών με τη βοήθεια οργάνων που εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η ανακάλυψη αυτή έθεσε νέες αρχές

μετρήσεων και υπολογισμών και έδωσε νέες δυνατότητες στην επιστήμη της Γεωδαισίας και της Τοπογραφίας.

Μια από τις πρώτες εφαρμογές της χρήσης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ήταν το **radar**, για τον εντοπισμό πλοίων και αεροπλάνων, μια εφαρμογή στην οποία οφείλεται ένα μεγάλο τμήμα της νίκης των Συμμάχων.

3.12. ΜΕΤΑ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ ΠΟΛΕΜΟ

Μετά τον πόλεμο δημιουργήθηκαν διάφορα συστήματα ναυσιπλοΐας με τη χρήση ραδιοκυμάτων, ενώ στις αρχές της δεκαετίας του **1950** κατασκευάστηκε το πρώτο τοπογραφικό όργανο μέτρησης αποστάσεων με ορατό φως από τον **Bergstrand** στη Σουηδία. Η συνέχεια στην παραγωγή τέτοιων οργάνων ήταν ραγδαία: Κατασκευάζονται ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης μεγάλων αποστάσεων με τη χρήση μικροκυμάτων και ακτινών **laser**, καθώς και ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης μικρών σχετικά αποστάσεων με τη χρήση υπέρυθρης ακτινοβολίας.

Από τα τέλη της δεκαετίας του **1970** κατασκευάζονται ηλεκτρονικοί θεοδόλιχοι, όπου η μέτρηση των οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών γίνεται με ηλεκτρονικό τρόπο. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η Γεωδαισία και η Τοπογραφία είναι επιστήμες που ωφελήθηκαν και ωφελούνται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την ανάπτυξη της Ηλεκτρονικής κατά τα τελευταία πενήντα χρόνια.

Είναι επίσης από τις πρώτες επιστήμες που χρησιμοποίησαν τις δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών, τόσο για τη γρήγορη εκτέλεση υπολογισμών, όσο και για την πλήρως αυτοματοποιημένη παραγωγή σχεδίων και χαρτών με τη βοήθεια κατάλληλων προγραμμάτων (CAD) και περιφερειακών συσκευών.

Η αυτοματοποίηση των εργασιών πεδίου και γραφείου οδήγησε στην κατασκευή καταγραφικών συσκευών υπαίθρου, συσκευών στις οποίες αποθηκεύονται οι μετρήσεις και στη συνέχεια μεταφέρονται στον ηλεκτρονικό υπολογιστή για περαιτέρω επεξεργασία. Οι αποτυπώσεις αρχίζουν να γίνονται με έναν συνδυασμό κλασικού (μηχανικού) ή ηλεκτρονικού θεοδόλιχου και ενός ηλεκτρονικού οργάνου μέτρησης αποστάσεων με καταγραφικό (ηλεκτρονικό ταχύμετρο). Η ταχύτητα μετρήσεων και υπολογισμών είναι πλέον πολύ μεγάλη.

Οι κυριότεροι κατασκευαστές τοπογραφικών οργάνων παραμένουν εργοστάσια στην Ελβετία, στη Γερμανία (Ανατολική και Δυτική) και στην Ιαπωνία που παρουσιάζει μια εξαιρετικά μεγάλη παραγωγή ηλεκτρονικών κυρίως, αλλά και κλασικών τοπογραφικών οργάνων παίρνοντας ένα μεγάλο κομμάτι της διεθνούς αγοράς.

3.13. ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΠΟΧΗ

Από τα μέσα της δεκαετίας του **1980** όλες οι μετρήσεις γωνιών και μηκών γίνονται από ένα και μόνο ολοκληρωμένο ηλεκτρονικό όργανο

που ονομάστηκε Γεωδαιτικός Σταθμός. Το όργανο αυτό είναι το τελευταίο στη σειρά οργάνων μέτρησης για τοπογραφικούς σκοπούς.

Τα εργοστάσια κατασκευάζουν σήμερα σχεδόν αποκλειστικά ηλεκτρονικά όργανα και κυρίως γεωδαιτικούς σταθμούς. Οι γεωδαιτικοί σταθμοί εξελίσσονται συνεχώς μέχρι σήμερα με προσθήκες και καινοτομίες, όπως μικροεπεξεργαστές και λειτουργικό σύστημα παρόμοιο και συμβατό με αυτό των ηλεκτρονικών υπολογιστών (**MS-DOS**), προγράμματα για εκτέλεση υπολογισμών στο πεδίο, αυτόματη κίνηση του οργάνου με σερβοκινητήρες, αυτόματη αναζήτηση στόχου για μέτρηση, ενσωματωμένη αποθήκευση χιλιάδων σημείων μέτρησης κ.ά.

Με την αναφορά μας στους γεωδαιτικούς σταθμούς κλείνει το κεφάλαιο των πιο σύγχρονων τοπογραφικών οργάνων για επίγειες μετρήσεις. Εκείνο όμως που χαρακτηρίζει τη σημερινή Τοπογραφία είναι η χρήση δορυφόρων για τον εντοπισμό θέσης πάνω στη Γη.

Μετά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο οι Η.Π.Α. (και παράλληλα οι Σοβιετικοί) δημιούργησαν συστήματα για τον έλεγχο της ναυσιπλοΐας για στρατιωτικούς σκοπούς. Το τελευταίο σύστημα, το Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού Θέσης (**GPS**), είναι ένα σύστημα που χρησιμοποιεί **24** τεχνητούς δορυφόρους που πετούν γύρω από τη Γη και βρίσκεται σε πλήρη επιχειρησιακή λειτουργία από το **1994**.

Το σύστημα **GPS**, πέρα από τη χρησιμοποίησή του για τον έλεγχο της κίνησης πλοίων, αεροπλάνων και οχημάτων, αποδείχτηκε ένα εξαιρετικό, εύχρηστο και υψηλής ακριβείας σύστημα μετρήσεων για τοπογραφικές και γεωδαιτικές εφαρμογές που κυριολεκτικά θέτει την Τοπογραφία σε νέες βάσεις και αναθεωρεί ένα πλήθος μεθόδων μέτρησης και υπολογισμών. Με τη χρήση ενός μόνο δέκτη **GPS** είναι

δυνατός ο εντοπισμός της θέσης οποιουδήποτε σημείου πάνω στη Γη με ακρίβεια λίγων μέτρων. Με τη συνδυασμένη χρήση δύο ή περισσότερων δεκτών όμως, είναι δυνατός ο προσδιορισμός αποστάσεων στο χώρο μεταξύ των δεκτών με ακρίβεια εκατοστού.

3.14. 21^{ΟΣ} ΑΙΩΝΑΣ

Οι ορίζοντες που έχει ανοίξει η σύγχρονη τεχνολογία στο σχεδιασμό των τοπογραφικών συστημάτων μέτρησης και στη βελτίωση των μεθόδων επεξεργασίας και παρουσίασης των μετρήσεων είναι ευρύτατοι. Οι νέοι τύποι ηλεκτρονικών οργάνων παρουσιάζονται με ταχύτατους ρυθμούς και, σε συνδυασμό με τα σύγχρονα συστήματα ηλεκτρονικών υπολογιστών, έχουν αυτοματοποιήσει την εργασία του Τοπογράφου Μηχανικού, εξασφαλίζοντας ταχύτητα, ακρίβεια και οικονομία.

Ωστόσο, οι Αιγύπτιοι “τεντωτές” σχοινιών, οι Έλληνες μαθηματικοί και μηχανικοί, οι Κινέζοι τοπογράφοι, οι “βηματιστές” του Μεγάλου Αλεξάνδρου, οι Ρωμαίοι “αγρομέτρες”, οι μεγάλοι εξερευνητές, οι μεγάλοι φιλόσοφοι και μηχανικοί της Αναγέννησης, οι κατασκευαστές γωνιομετρικών οργάνων, όλοι εκείνοι που με την εργασία τους και με τις ανακαλύψεις τους τελευταίους αιώνες πρόσφεραν ο καθένας και μια μικρή ή μεγαλύτερη υπηρεσία για να κτισθεί το οικοδόμημα της σύγχρονης Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, θα

ήταν περήφανοι γνωρίζοντας ότι με λίγα μέσα πέτυχαν τόσα πολλά και άνοιξαν το δρόμο για τη σημερινή τεχνολογική άνθηση.

3.15. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Πριν από πολλούς αιώνες, η ανάγκη εκτέλεσης περισσότερο πολύπλοκων υπολογισμών οδήγησε στην επινόηση του Άβακα (το γνωστό μας αριθμητήριο) στην Κίνα του 13ου αιώνα μ.Χ. Το 1614 ο **John Napier** πρώτος εξέδωσε βιβλίο στο οποίο γινόταν περιγραφή και χρήση των λογαρίθμων.

Η χρήση λογαριθμικών πινάκων μετέτρεπε τις πολύπλοκες πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε απλούστερες προσθέσεις και αφαιρέσεις με αποτέλεσμα οι πίνακες του **Napier** να χρησιμοποιούνται μέχρι τη δεκαετία του 1970 σε ολόκληρο τον κόσμο.

Το 1650 κατασκευάστηκε στην Αγγλία από τους **E. Gunter** και **W. Oughtred** ο πρώτος λογαριθμικός κανόνας που τελειοποιήθηκε από τον **A. Mannheim** στη Γαλλία το 1850 και βασισμένος στους λογαρίθμους του **Napier** επέτρεπε την εκτέλεση πράξεων ως μια αναλογική υπολογιστική συσκευή. Οι λογαριθμικοί κανόνες βρισκόνταν σε χρήση μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 1960.

Η πρώτη ολοκληρωμένη μηχανική υπολογιστική διάταξη κατασκευάστηκε το **1642** από τον **B. Pascal**, η πρώτη μαζική παραγωγή αριθμομηχανών έγινε το **1820** στη Γαλλία και από το **1870** περίπου μέχρι τη δεκαετία του **1960** άρχισαν από δεκάδες κατασκευαστές να κατασκευάζονται συστηματικά μηχανικές αριθμομηχανές με τροχίσκους με πρώτο κατασκευαστή και εφευρέτη τον Σουηδό **W. Odhner**. Από το **1900** και συστηματικά από το **1940** κατασκευάζονταν ηλεκτροκίνητες αριθμομηχανές με αποτέλεσμα τη βελτίωση της ταχύτητας πληκτρολόγησης και εκτέλεσης των πράξεων, ενώ από την αρχή της δεκαετίας του **1970** άρχισαν να κατασκευάζονται ηλεκτρονικές αριθμομηχανές με μικρό μέγεθος (τσέπης) και μεγάλες υπολογιστικές δυνατότητες (τριγωνομετρικοί αριθμοί, στατιστικοί υπολογισμοί κ.λπ.), ακόμη και με τη δυνατότητα να προγραμματίζονται με κατάλληλες γλώσσες προγραμματισμού.

Οι ασχολούμενοι με τη Γεωδαισία και την Τοπογραφία χρησιμοποιούσαν πάντοτε όλες τις επιστημονικές και τεχνολογικές επιτεύξεις της εποχής τους.

Στη σημερινή εποχή οι τοπογραφικοί υπολογισμοί γίνονται με τη χρήση κατάλληλων προγραμμάτων σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές, αξιοποιώντας έτσι στο μέγιστο την τεχνολογία της εποχής.

3.16. ΟΡΓΑΝΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΕΙΣ

Ο άνθρωπος από το απώτερο παρελθόν συνήθιζε να ζωγραφίζει και να σχεδιάζει γεωμετρικά σχήματα. Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι έκαναν

σχέδια για τα κτίρια που κατασκεύαζαν πάνω σε πλάκες από άργιλο. Τα περισσότερα σχεδιαστικά όργανα που χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα φαίνεται ότι σε κάποια μορφή τους υπήρχαν και στα αρχαία χρόνια.

Αρχιτεκτονική και σχεδίαση αναπτύχθηκαν παράλληλα. Οι Αρχαίοι Έλληνες και οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν σχεδιαστικά όργανα. Τα παλαιότερα όργανα σχεδίασης έχουν βρεθεί στην Πομπηία και θυμίζουν λίγο - πολύ τα σύγχρονα όργανα. Κατά το Μεσαίωνα οι οικοδόμοι και οι μαραγκοί χρησιμοποιούσαν διαστημόμετρα και διαβήτες.

Σημαντική εξέλιξη παρατηρείται στο σχεδιασμό των σχεδιαστικών οργάνων κατά την Αναγέννηση. Τον 15ο αιώνα κατασκευάζονται βελτιωμένοι τύποι σχεδιαστικών οργάνων, ενώ η ανάπτυξη της μεταλλουργίας κατά τον 16ο και 17ο αιώνα οδήγησε στην κατασκευή ιδιαίτερα κομψών και λειτουργικών σχεδιαστικών οργάνων.

Τέτοια όργανα, περίτεχνα κατασκευασμένα από ορείχαλκο, ασήμι ή χρυσό, μέσα σε πολυτελείς θήκες έφεραν οι άρχοντες ως ένδειξη δύναμης. Παράλληλα λιγότερο πολύτιμα όργανα χρησιμοποιούσαν οι σχεδιαστές, οι μηχανικοί, οι αρχιτέκτονες, οι οπλορρογοί, οι κατασκευαστές κοσμημάτων και οι ωρολογοποιοί.

Τον 18ο αιώνα το Λονδίνο ήταν ξακουστό για την ποιότητα των σχεδιαστικών οργάνων που κατασκευάζονταν εκεί από έναν μεγάλο αριθμό τεχνητών.

Στις αρχές του 19ου αιώνα κατασκευάζονται περισσότερο πολύπλοκα όργανα, όπως μηχανές προοπτικής, παντογράφοι,

καμπυλόγραμμα κ.λπ. Στα επόμενα χρόνια η γοργή ανάπτυξη των τεχνικών επαγγελμάτων και των επιστημών των μηχανικών οδήγησε στην κατασκευή σχεδιαστικών οργάνων ακριβείας, μικρών σε μέγεθος και χωρίς μεγάλο βάρος.

Η χρησιμοποίηση του ατμού στη βιομηχανία βοήθησε στη μαζική παραγωγή σχεδιαστικών εργαλείων, κάτι που επεκτάθηκε ακόμη περισσότερο με τη χρησιμοποίηση του ηλεκτρισμού από τις αρχές του 20ού αιώνα. Κατασκευάζονται κασετίνες ξύλινες ή δερμάτινες, όπου μέσα υπήρχαν διαβήτες, διαστημόμετρα, γραμμοσύρτες μελάνης κ.λπ. Το υλικό κατασκευής ήταν στην αρχή ο ορείχαλκος, για να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια το ανοξείδωτο ατσάλι και το πλαστικό. Κατασκευάζονται οι ραπιντογράφοι για τη σχεδίαση με μελάνι.

Τα τοπογραφικά σχέδια και οι χάρτες παράγονταν με τα μέσα σχεδίασης που προσέφερε κάθε εποχή. Την τελευταία δεκαετία ιδιαίτερα εξελιγμένα προγράμματα και ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν καταστεί το απαραίτητο εργαλείο των μηχανικών και χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για τη σχεδίαση τοπογραφικών διαγραμμάτων.

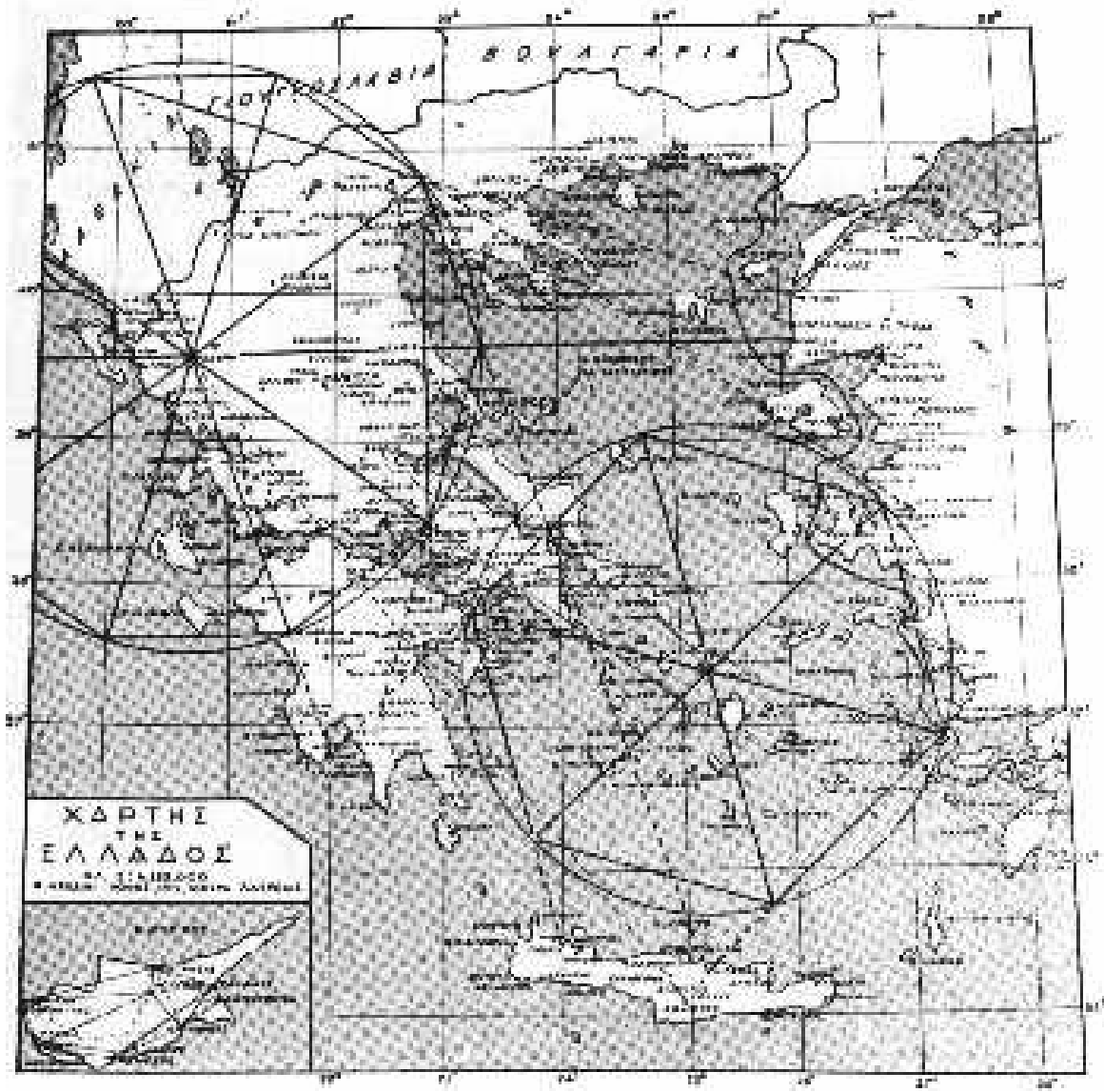
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Αρχαία ιερά , Ναοί , Μαντεία , Πόλεις , Μνημεία και γενικά τόποι ιδιαίτερης σημασίας για τους αρχαίους Έλληνες , βρίσκονται σε άμεση σχέση μεταξύ τους , σχηματίζοντας διάφορα γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα , τετράγωνα , διάφορα πολύγωνα ,κύκλους) ,έχοντας ίσες αποστάσεις μεταξύ τους και άλλα , αποδεικνύοντας ότι έχουν χτιστεί σε επιλεγμένες θέσεις σε ολόκληρο τον τότε γνωστό Ελληνικό χώρο και βάσει σχεδίου.

4.1. ΙΔΑΝΙΚΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Το ισοσκελές τρίγωνο Δωδώνης - Ολυμπίας - Τροφωνίου μαντείου ανήκει σε κανονικό δεκάγωνο του οποίου τα γεωμετρικά στοιχεία προεκτεινόμενα συναντούν το Ίλιον , Σμύρνη , Κνωσό , Λάρισα τρώαδας , Σπάρτη , Πάρο , Φαιστό κ.λ.π.



4.2. ΔΩΔΩΝΗ

Απέχει εξίσου από :

- 1) Δελφούς - Ιωλκό (**1050** στάδια)
- 2) Το τρίγωνο Δωδώνης - Δελφών - Ιωλκού είναι ισοσκελές και ανήκει σε κανονικό δωδεκάγωνο
- 3) Ολυμπία και Τροφώνιο μαντείο [**1240** στάδια ή **2000** ($\Phi-1$) στάδια] .Το ισοσκελές τρίγωνο Δωδώνης - Ολυμπίας - Τροφωνίου μαντείου ανήκει σε κανονικό δεκάγωνο.
- 4) Από τα ανάκτορα του Νέστορος - Ελευσίνα είναι **1600** στάδια .Το ισοσκελές τρίγωνο Δωδώνης - Ανακτόρων Νέστορος - Ελευσίνας με γωνία κορυφής **40°** ανήκει σε κανονικό **9**γωνο
- 5) Από Αθήνα - Σπάρτη (**1700** στάδια) .Το τρίγωνο Δωδώνης - Αθήνας - Σπάρτης ανήκει σε κανονικό **13**γωνο
- 6) Από Δήλο - Αλεξάνδρεια Τρωάδος (**2482** στάδια)
- 7) Από Κνωσό - Μίλητο **3300** στάδια. Τρίγωνο Δωδώνης - Κνωσού - Μιλήτου ανήκει σε κανονικό **12**γωνο με γωνία κορυφής **30°**



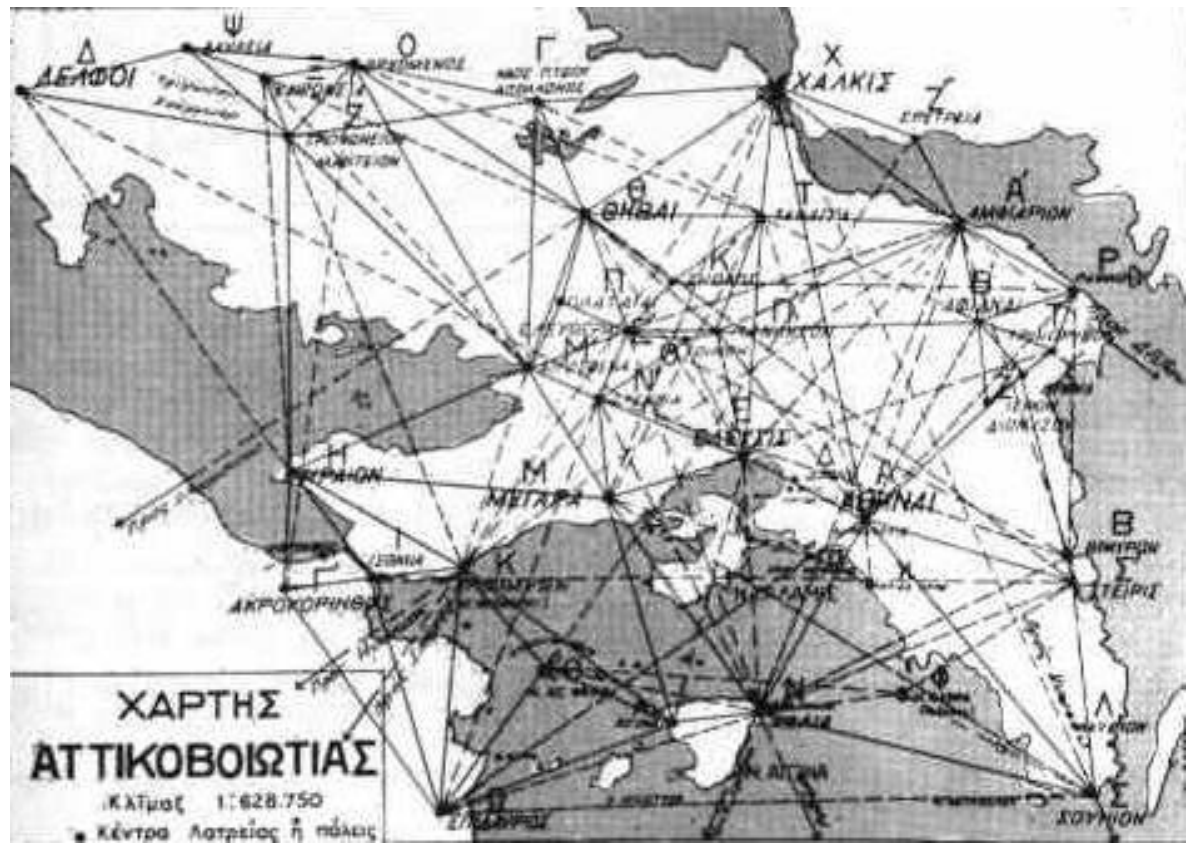
4.3. ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟ ΤΗΣ ΑΤΤΙΚΟΒΟΙΩΤΙΑΣ

Πολλές χαρακτηριστικές ευθείες του τριγωνισμού προεκτεινόμενες συναντούν διάσημα ιερά ή κέντρα λατρείας της Ελλάδας.

- Η ευθεία Χαλκίδας - Θηβών συναντά την Ολυμπία
- Η ευθεία Χαλκίδας - Αμφιαρείου συναντά την Δήλο
- Η ευθεία Χαλκίδας - Κρομμύωνος συναντά την Σπάρτη
- Η ευθεία Χαλκίδας - Σουνίου συναντά την Κνωσό Κρήτης

Η Χαλκίδα ακόμα :

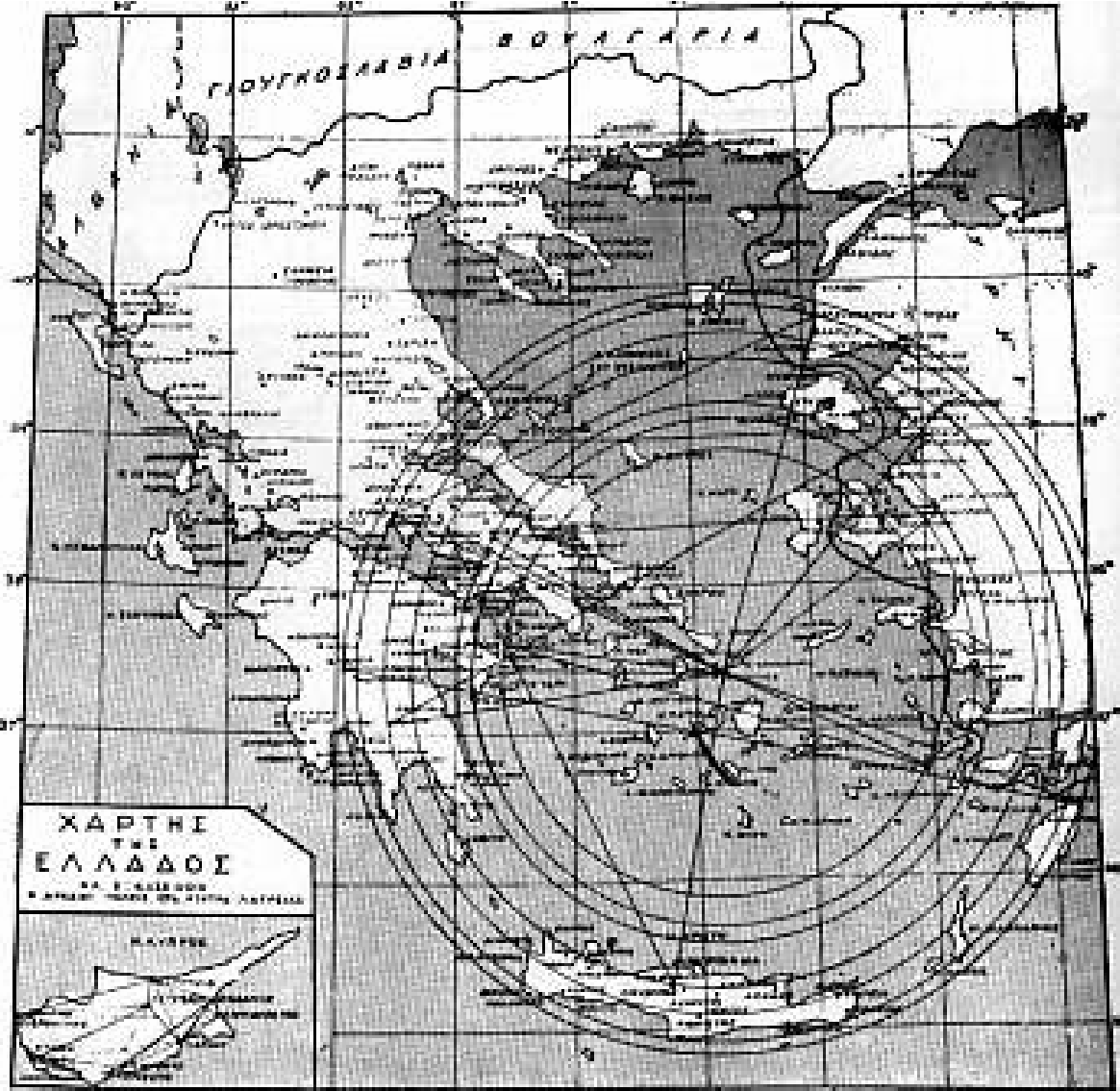
- Ø Απέχει από Θήβα και Αμφιάρειο **162** στάδια (**100Φ**)
- Ø Από Αιγοσθένους και Ελευσίνα **262** στάδια (**100Φ²**)
- Ø Από Αθήνα και Μέγαρα **314** στάδια (**100π**).



4.4. ΔΗΛΟΣ

Απέχει εξ ίσου από :

- 1) Ασκληπιείο της Κω - Ασκληπιείο Επιδαύρου (1020 στάδ.)
- 2) Σμύρνη - Θήβα (1080 στάδ.)
- 3) Ιδαίον Άντρον - Τροφώνιο μαντείο (1296 στάδ.)
- 4) Δελφούς - Αλεξάνδρεια Τρωάδος (1460 στάδ.)
- 5) Σπάρτη - Πέργαμο (1460 στάδ.)
- 6) Ρόδο - Φυγαλεία Πελοπον. (1530 στάδ.)
- 7) Ίλιο (Τρωάδος) - Ιωλκός
- 8) Αθήνα - Καρδαμύλη Χίου (800 στάδ.)
- 9) Ρέθυμνο - Δόκτινα - Κνωσσό (1256 στάδ.)
- 10) Κόρινθο - Μυτιλήνη (1188 στάδ.)
- 11) Σαμοθράκη - Θέρμον (1859 στάδ.)
- 12) Μυκήνες - Άργος (1210 στάδ.)
- 13) Απέχει εξίσου από Φιλλίπους - Θέρμη.

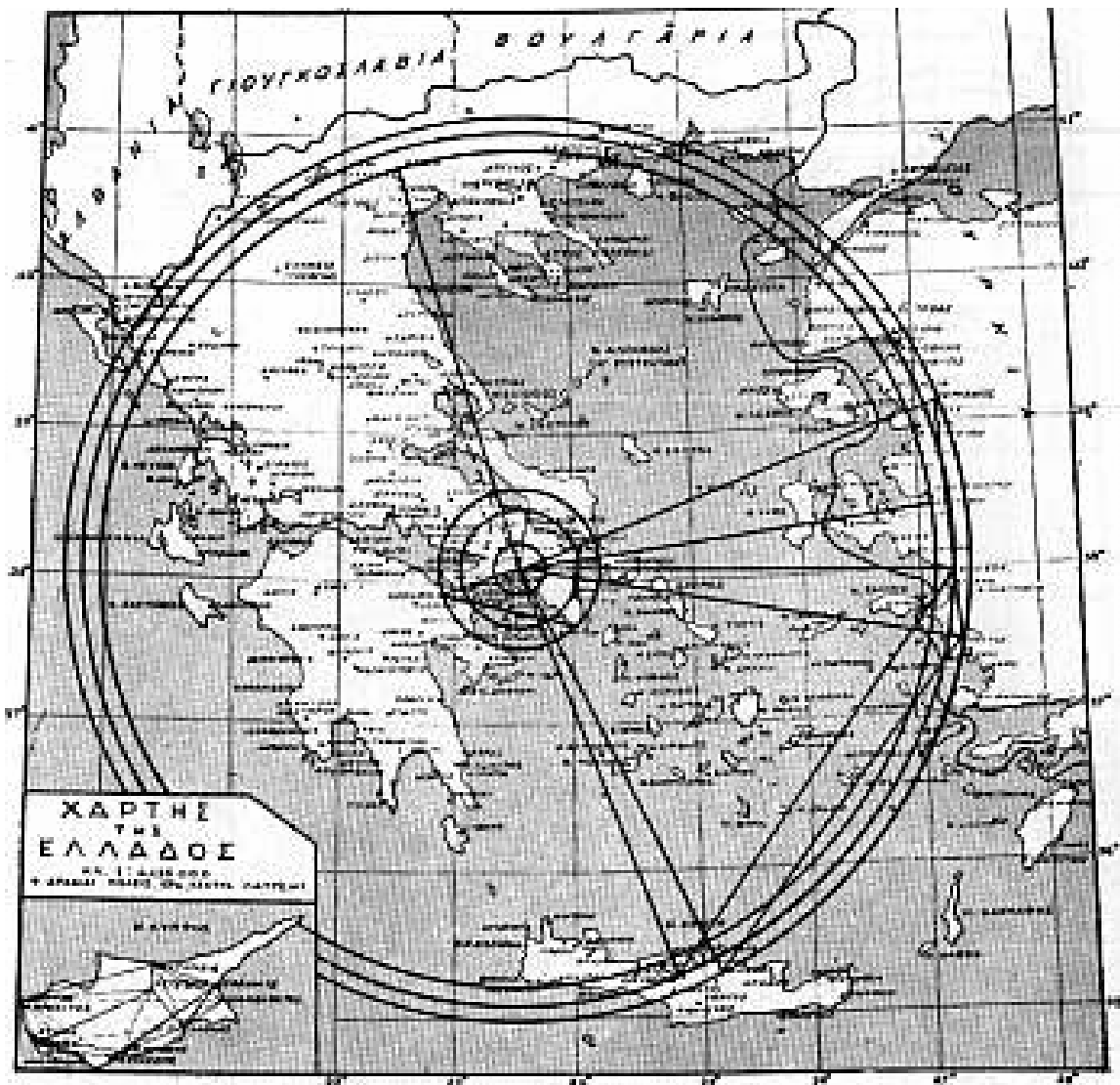


4.5. ΕΛΕΥΣΙΝΑ (ΟΜΟΚΕΝΤΡΟΙ ΚΥΚΛΟΙ)

Απέχει εξ ίσου από :

- 1) Αθήνα - Μέγαρα (**100** στάδια)
- 2) Κόρινθο - Σούνιο (**330** στάδια)
- 3) Αμφιάρειο - Μαραθώνα - τύμβο- (**220** στάδια)
- 4) Πέλλα - Σμύρνη (**1700** στάδια)
- 5) Ιδαίο Άντρο - Έφεσο (**1782** στάδια)
- 6) Πέργαμο - Μίλητο - Κνωσσό (**1815** στάδια)

Όπου $\Phi=1,62$ (χρυσός αριθμός) και $\pi=3,14$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Ιστορικά η ανάπτυξη των γεωδαιτικών εργασιών στην Ελλάδα και ειδικότερα του τριγωνομετρικού δικτύου χωρίζεται σε πέντε περιόδους :

5.1. ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1889-1925

Η αρχή της περιόδου αυτής, συμπίπτει με την ίδρυση της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ) με επωνυμία "Γεωδαιτικό Απόσπασμα", από αποστολή Αυστριακών Αξιωματικών υπό τον Αντισυνταγματάρχη Μηχανικού HARTL.

Μέχρι το **1918** αναπτύχθηκε το πρώτο Ελληνικό τριγωνομετρικό δίκτυο Ιης τάξης, το οποίο κάλυπτε όλη την έκταση της ελεύθερης τότε Ελλάδας. Μετά τους νικηφόρους Βαλκανικούς πολέμους, το δίκτυο αυτό επεκτάθηκε μέχρι τη νέα οροθετική γραμμή.

Συγχρόνως με τον προσδιορισμό του δικτύου Ιης τάξης, γίνονταν εργασίες για το δίκτυο ΙΙας Τάξης και για τα δίκτυα πύκνωσης. Έτσι στο τέλος της περιόδου αυτής προσδιορίστηκαν περί τα **2130** τριγωνομετρικά σημεία διαφόρων τάξεων.

5.2. ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1925-1940

Την περίοδο αυτή έγινε προσπάθεια για την εγκατάσταση μέτρηση και υπολογισμό, της καλύτερου δικτύου.

Χωρίστηκε η χώρα σε τρία τόξα, το Κεντρικό το Ανατολικό και το Δυτικό. Κατά προτεραιότητα οι μετρήσεις έγιναν στο Κεντρικό τόξο, το οποίο αποτελεί τμήμα της αλυσίδας τριγώνων που εκτείνεται από τη Βόρειο Θάλασσα μέχρι το ακρωτήριο της Καλής Ελπίδας και η οποία είχε γίνει υπό την αιγίδα της Διεθνούς Γεωδαιτικής Γεωφυσικής Ένωσης, με σκοπό έναν ακριβέστερο υπολογισμό του γήινου ελλειψοειδούς.

Το κεντρικό τόξο απετέλεσε το βασικό κορμό, στον οποίο Ι στηρίχθηκε η επέκταση της το Ανατολικό και Δυτικό τόξο και δημιουργήθηκε το **1939**, το πρωτεύον τριγωνομετρικό δίκτυο της χώρας.

Συμπληρώθηκε το δίκτυο Ιας τάξης, το οποίο έφθασε να απαριθμεί **320** τριγωνομετρικά σημεία, καθώς και το δίκτυο πόκνωσης. Το πλήθος των τριγωνομετρικών σημείων διαφόρων τάξεων έφθασε τον αριθμό **4500**.

5.3. ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1940-1949

Ουσιαστικά πρόκειται για μια διακοπή των εργασιών λόγω κατοχής από τα Γερμανικά στρατεύματα. Το κύριο χαρακτηριστικό της εποχής αυτής είναι ότι έγιναν σημαντικές ζημιές σε τριγωνομετρικά βάθρα, και σε αρχεία εργασιών μετρήσεων και υπολογισμών.

5.4. ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1949-1962

Από τα τριγωνομετρικά βάθρα Ι ης τάξης μόνο **90** βρέθηκαν σε καλή κατάσταση, τα οποία επισκευάσθηκαν. Αυτά συμπληρώθηκαν με ίδρυση σε νέες θέσεις άλλων **47** βάθρων και έτσι το δίκτυο πήρε τη μορφή που έχει σήμερα με **137** τριγωνομετρικά σημεία.

Μέχρι το **1955**, με όργανα **wild T2 (2°)** μετρήθηκε ένα σημαντικό μέρος του δικτύου Ι ης τάξης στις περιοχές Δωδεκάνησα, Κρήτη, Πελοπόννησο και σε τμήμα των Κυκλάδων χωρίς σύνδεση της Κρήτης με την Ηπειρωτική χώρα.

Από το **1961** με όργανα **Wild T3 (1°)** μετρήθηκε το δίκτυο Ι ης τάξης στις περιοχές Μακεδονίας και Θράκης και απέμεινε το δίκτυο των νήσων του Αρχιπελάγους και ο σύνδεσμος με την Ηπειρωτική χώρα.

Παράλληλα με τις μετρήσεις του δικτύου Ι ης τάξης, γινόταν αναθεώρηση και συμπλήρωση του δικτύου ΙΙ ας τάξης, το οποίο έφθασε τα **475** τριγωνομετρικά σημεία, καθώς και σχετική πύκνωση με τριγωνομετρικά κατώτερης τάξης για τις ανάγκες κυρίως των Ενόπλων Δυνάμεων.

5.5. ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1962-1989

Το **1962** η ΓΥΣ ανέλαβε το έργο "Χαρτογράφηση της Ελλάδος" σε κλίμακα **1:5.000**. Με τις προδιαγραφές του πίνακα **1.1**, άρχισε την αναθεώρηση των τριγωνομετρικών δικτύων Ιης και Ιας Τάξης και την ίδρυση των δικτύων ΙΙης και ΙVης τάξης.

Για την άμεση υλοποίηση του έργου αυτού η ΓΥΣ προχώρησε σε τμηματικό υπολογισμό του δικτύου Ιης τάξης και σε ταυτόχρονο υπολογισμό των δικτύων Ιας, ΙΙης και ΙVης τάξης που περικλείονταν στο αντίστοιχο κάθε φορά υπολογισμένο τμήμα του δικτύου Ιης τάξης. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώθηκαν μαζί το έργο "Χαρτογράφηση της Ελλάδος" και η ίδρυση και ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών δικτύων.

Στόχος όμως της ΓΥΣ ήταν μετά την ολοκλήρωση των μετρήσεων πεδίου να κάνει επανυπολογισμό των τριγωνομετρικών δικτύων, αφού προηγηθεί η ενιαία συνόρθωση του δικτύου Ιης τάξης. Το **1980** άρχισε η Α' φάση υπολογισμών με την πρώτη γεωμετρική συνόρθωση του δικτύου Ιης τάξης (**1981**) με μία μόνο πλευρά-βάση (Κτυπάς-Πάρνηθα), με σκοπό τον έλεγχο της κλίμακας και του προσανατολισμού του δικτύου, συγκρίνοντας τα εξ υπολογισμού μήκη και αζιμούθια με τα αντίστοιχα μετρηθέντα. Μέχρι το **1984** έγινε πλήρης συνόρθωση του δικτύου Ιης τάξης με **17** πλευρές-βάσεις και **14** αζιμούθια **Laplace**, καθώς και η συνόρθωση του δικτύου Ιας τάξης. Δεν έγινε υπολογισμός των δικτύων ΙΙης και ΙVης τάξης διότι είχε ήδη αρχίσει από το **1982** η εκ νέου μέτρηση του δικτύου Ιας τάξης.

Η προηγούμενη λύση του δικτύου Ιης τάξης, αναθεωρήθηκε το **1986** με νεώτερη λύση, καλύτερα θεωρητικά τεκμηριωμένη, οπότε

άρχισε νέα φάση υπολογισμών. Στην Β' αυτή φάση, με σταθερή πλέον την λύση του δικτύου Ιης τάξης, έγινε ο υπολογισμός όλων των δικτύων Πας, ΙΙης και ΙVης τάξης ο οποίος ολοκληρώθηκε τον Φεβρουάριο του **1989**.

Οι δύο αυτές φάσεις υπολογισμών θα παρουσιασθούν κατά κύριο λόγο στο εθνικό σύστημα αναφοράς (ελλειψοειδές **Bessel**), αλλά θα γίνει περιληπτική αναφορά και στο Ευρωπαϊκό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (**E.0.50**) και στο νέο Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς του **1987 (E.Γ.Σ.Α.8)**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6. Η ΙΔΡΥΣΗ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΓΣΑ

Τα περισσότερα ΓΣΑ που έχουν ιδρυθεί και χρησιμοποιηθεί εδώ και περισσότερο από έναν αιώνα έχουν στηριχθεί κυρίως στην κλασική (επίγεια) γεωδαισία τον ορισμό ενός **datum** και χρήση τριγωνομετρικών δικτύων.

Τα συστήματα αυτά μπορούμε να τα κατατάξουμε σε τοπικά, εθνικά, ηπειρωτικά, και παγκόσμια.

Τα ηπειρωτικά, που συνήθως συνένωναν ανεξάρτητα εθνικά συστήματα, άρχισαν από τα μέσα αυτού του αιώνα με αποκορύφωμα το ευρωπαϊκό **datum ED 50**.

Τα παγκόσμια είχαν πάντα τη δυσκολία της κάλυψης πολύ μεγάλων διηπειρωτικών αποστάσεων και στην αρχή αντιμετωπίστηκαν με τη βοήθεια της φυσικής γεωδαισίας . Από τη δεκαετία, όμως, του **60** η χρήση των τεχνητών δορυφόρων στη γεωδαισία επέτρεψε την απευθείας ίδρυση παγκόσμιων γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς.

Το σύστημα **ED 50** υπήρξε το αποτέλεσμα μιας ενιαίας συνόρθωσης το **1950** όλων των ευρωπαϊκών τριγωνισμών, με μετρήσεις, όμως, της προπολεμικής και πολεμικής περιόδου. Τους ευρωπαϊκούς τριγωνισμούς συνέχισε μια επιτροπή να συνορθώνει με νεώτερες, (επίγειες πάντα), παρατηρήσεις και καλύτερες υπολογιστικές τεχνικές. Η τελευταία του έκδοση είναι το **ED 89**, αλλά το σύστημα αυτό ποτέ δεν χρησιμοποιήθηκε επειδή οι δορυφορικές μέθοδοι το είχαν ήδη ξεπεράσει.

Τα νεώτερα συστήματα αναφοράς, ιδιαίτερα μάλιστα τα παγκόσμια, στηρίζονται κυρίως ή σχεδόν αποκλειστικά σε μεθόδους δορυφορικής γεωδαισίας. Τέτοια νέα συστήματα έχουν ιδρυθεί αρκετά και χρησιμεύουν περισσότερο σε επιστημονικές εργασίες παρά σε άμεσες εφαρμογές. Σε επίπεδο Ευρώπης υπάρχει μία σειρά από τέτοια δορυφορικά συστήματα γνωστά με το όνομα **EUREF** (το γνωστότερο είναι το **EUREF 89**) τα οποία, όμως, δεν έχουν τουλάχιστον προς το παρόν γίνει αποδεκτά για καθημερινή χρήση.

Σε παγκοσμία κλίμακα υπάρχει μια σειρά από «επιστημονικά» συστήματα αναφοράς γνωστά ως **ITRF** τα οποία στηρίζονται κατά βάση σε διαστημικές μεθόδους. Το παγκόσμιο σύστημα το οποίο έχει επικρατήσει και χρησιμοποιείται ιδιαίτερα μάλιστα στη ναυσιπλοΐα, είναι το **WGS 84**, ένα σύστημα που ιδρύθηκε από τις ένοπλες δυνάμεις των ΗΠΑ. Το σύστημα αυτό υλοποιείται μέσω των τροχιών των δορυφόρων του συστήματος **GPS**, αλλά έχει το μειονέκτημα να μην μπορεί να δώσει μεγάλες ακρίβειες. Για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο ως διαφορικό σύστημα που επιτρέπει ιδιαίτερα υψηλές ακρίβειες, όταν συνδυάζεται με τα συστήματα **ITRF**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

7. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ (ΓΣΑ)

Ένα γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς ορίζεται στην κλασική γεωδαισία με το γεωδαιτικό **datum** (εκλογή ενός ελλειψοειδούς αναφοράς και αρχικές συντεταγμένες φ_0 , λ_0 και αξιμούθιο A_0 σε κάποιο υλοποιήσιμο σημείο). Η εκλογή του **datum** πρέπει να είναι τέτοια, ώστε το ελλειψοειδές να προσαρμόζεται το καλύτερο δυνατόν στο γεωειδές, για την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων από την απόκλιση της κατακόρυφου.

Ο ορισμός αυτός έχει μόνο θεωρητικό χαρακτήρα και για να είναι χρησιμοποιήσιμος θα πρέπει να υλοποιηθεί με τη βοήθεια ενός γεωδαιτικού δικτύου (τουλάχιστον I και II τάξης) που θα δώσει γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ , λ) σε έναν αριθμό φασικών (βάθρων) σε αποστάσεις μερικών δεκάδων χιλιομέτρων. Η εργασία αυτή, που είναι κοπιαστικότερη αλλά και βασική, περιλαμβάνει μετρήσεις υπαίθρου και υπολογισμούς. Το γεωδαιτικό αυτό δίκτυο με κατάλληλη πύκνωση χρησιμεύει ως πλαίσιο-σκελετός για τον προσδιορισμό της θέσης κάθε άλλου σημείου.

Στην πράξη οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται δεν είναι οι γεωδαιτικές (φ , λ) που αναφέρονται σε ένα ελλειψοειδές, αλλά προτιμώνται οι επίπεδες (χ , ψ) που προκύπτουν από μια απεικόνιση (συνήθως αποκαλείται προβολή) του ελλειψοειδούς σε επίπεδο. Η επιλογή του συστήματος απεικόνισης, που εισάγει αναπόφευκτες

παραμορφώσεις, πρέπει να θεωρηθεί μέρος του συστήματος αναφοράς.

Τέλος, η υψομετρία, δηλαδή η τρίτη διάσταση που αντιμετωπίζεται στην κλασική γεωδαισία ανεξάρτητα από την οριζοντιογραφία, ορίζει στην κλασική γεωδαισία ένα δικό της και ανεξάρτητο σύστημα αναφοράς με το υψόμετρο (από τη μέση στάθμη της θάλασσας) σε ένα σημείο και με την υλοποίηση χωροσταθμικού δικτύου. Η σύνδεση της υψομετρίας με το ελλειψοειδές αναφοράς γίνεται με τη χαρτογράφηση του γεωειδούς.

Επομένως, για ένα γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ) πρέπει:

α. Να επιλεγεί ένα **datum** που το ορίζει.

β. Να ιδρυθεί, μετρηθεί και υπολογιστεί στο **datum** ένα γεωδαιτικό δίκτυο, που το υλοποιεί.

γ. Να επιλεγεί ένα σύστημα απεικόνισης (προβολής) και να μετατραπούν σε αυτό οι συντεταγμένες.

δ. Να οριστεί μια υψομετρική αφετηρία, να βρεθεί το υψόμετρο της από τη μέση στάθμη της θάλασσας, να ιδρυθεί, μετρηθεί και υπολογισθεί ένα χωροσταθμικό δίκτυο.

Είναι προφανές ότι ένα ΓΣΑ είναι τόσο καλύτερο (**optimum**) όσο καλύτερη είναι η επιλογή του **datum**, όσο καλύτερο είναι το δίκτυο που το υλοποιεί και όσο καλύτερο σύστημα απεικόνισης έχει καθιερωθεί. (Αντίστοιχα και για την υψομετρία). Δεν πρέπει πάντως να παραγνωρίζεται το γεγονός ότι ένα ΓΣΑ καθιερώνεται για να εξυπηρετήσει χρήστες (και αυτοί είναι πολλοί) και, επομένως, πρέπει να είναι απλό στη χρήση, ευκολοκατανόητο και να καλύπτει όλες τις ανάγκες.

Όλα τα προηγούμενα αναφέρονται στη κλασική γεωδαισία.. Σε

περίπτωση που χρησιμοποιηθούν διαστημικές μέθοδοι, τα συστήματα γίνονται γεωκεντρικά, ή μάλλον ψευτογεωκεντρικά, και ο ορισμός του συστήματος γίνεται με τις συντεταγμένες της αρχής ως προς το γεώκεντρο και με τον προσανατολισμό των αξόνων του ως προς ένα δρανιακό αστρονομικό σύστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

8. ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

Επειδή η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της, έχει πάρει ένα σχήμα σφαιροειδές, πεπλατυσμένο στους πόλους που με ικανοποιητική προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Είναι άλλωστε απ' τη μηχανική γνωστό ότι:

"Ένας πλανήτης από ομοιογενές υλικό, που περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του, θα πάρει το σχήμα ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής".

Η γη βέβαια δεν αποτελείται από ομοιογενές υλικό, αλλά η απόκλιση από μια τέτοια παραδοχή δεν είναι τόσο μεγάλη, ώστε τελικά και το σχήμα της να αποκλίνει κατά πολύ από το ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Η επιφάνεια που ζητάμε να προσδιορίσουμε είναι η τοπογραφική επιφάνεια της γης. Επειδή, όμως, η επιφάνεια αυτή είναι πολύ ανώμαλη και μπορεί να εκφραστεί μόνο με αριθμητικές μεθόδους, η Γεωδαισία χρησιμοποιεί μερικές άλλες επιφάνειες "μοντέλα" και αντικαθιστά την πραγματική γη με αυτές, όπου δεν χρειάζεται μεγάλη ακρίβεια.

Τα μοντέλα αυτά, κατά τη σειρά που προσεγγίζουν προς την πραγματική γη, είναι:

α. Σφαίρα ομοιογενείς, με ακτίνα τη μέση ακτίνα της

πραγματικής γης και μάζας ίση προς τη μάζα αυτής. Είναι η πιο απλή επιφάνεια που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για μια πρώτη προσέγγιση της πραγματικής γης, όπου λαμβάνουμε **R= 6.370 km**.

β. Ελλειψοειδές εκ περιστροφής με κατάλληλες διαστάσεις, με το κέντρο του στο κέντρο μάζας της γης και τον άξονα συμμετρίας του παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής της γης. Ο προσδιορισμός του πιο κατάλληλου ελλειψοειδούς, του γήινου ελλειψοειδούς όπως λέγεται, είναι ένα από τα κλασσικά προβλήματα της Γεωδαισίας και απασχόλησε τους γεωδαίτες από τον **18ο** αιώνα, επειδή οι διαστάσεις του και το κέντρο μάζας της γης δεν είναι γνωστά με απόλυτη ακρίβεια. Έτσι η Γεωδαισία χρησιμοποιεί διάφορα ελλειψοειδή, με διαφόρους διαστάσεις και θέσεις των κέντρων τους. Μερικά από τα εν χρήση ελλειψοειδή αναφοράς φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

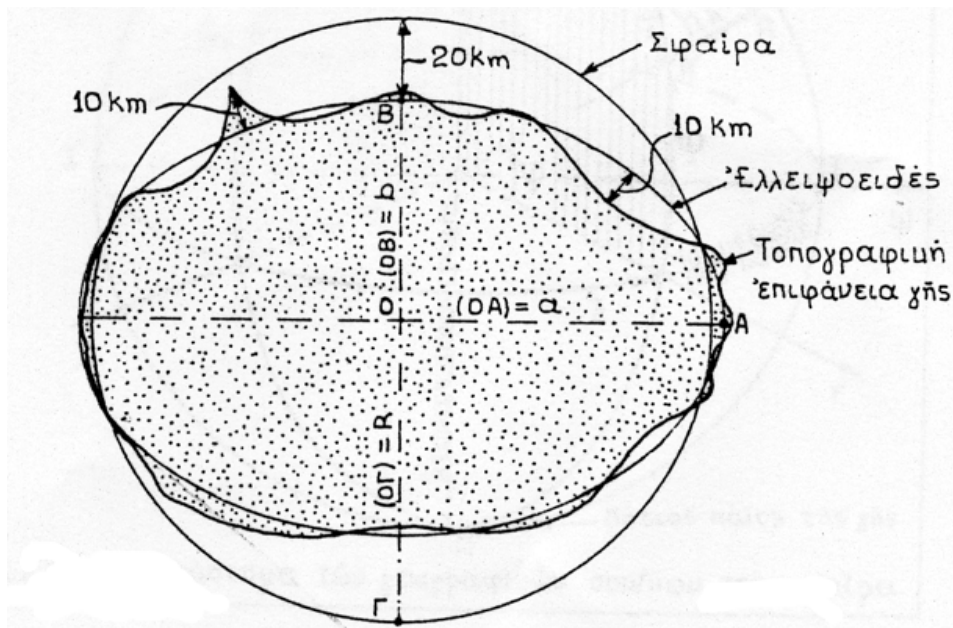
	ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΗΜΙΑΞΟΝΕΣ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1	BESSEL (1840)	a = 6377397,155 m b = 6356078,963 m	Χρησιμοποιήθηκε στον παλιό τριγωνισμό της Ελλάδος
2	ΔΙΕΘΝΕΣ Η HAYFORR (1924)	a = 6378388,000 m b = 6356911,946 m	Χρησιμοποιήθηκε στον ευρωπαϊκό τριγωνισμό του 1950
3	G.R.S. 1967	a = 6378160,000 m b = 6356774,516 m	Προτάθηκε από την Διεθνή Γεωδαιτική και Γεωφυσική Ένωση (I. U. G. G.) το 1967

γ. Το γεωειδές, που είναι η χοροσταθμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της γης που προσαρμόζεται καλύτερα στη μέση στάθμη της

θάλασσας. Χωροσταθμικές ή ισοσταθμικές επιφάνειες, ονομάζονται οι επιφάνειες που σε κάθε του σημείο είναι κάθετες στην κατακόρυφο του σημείου αυτού. Οι επιφάνειες αυτές είναι ισοδυναμικές επιφάνειες του πεδίου βαρύτητας της γης.

Παρατηρήσεις:

1. Η μέση στάθμη της θάλασσας διαφέρει από το γεωειδές λιγότερο από **1m**.
2. Το γεωειδές πλησιάζει πολύ το ελλειψοειδές και διαφέρει από αυτό κατά μέσω όρο **+/- 30m**.
3. Η διαφορά των ημιαξόνων της γης είναι **20km** περίπου, ενώ οι τοπογραφικές ανωμαλίες του φλοιού της **+/- 10km** περίπου.



(σχ.1)

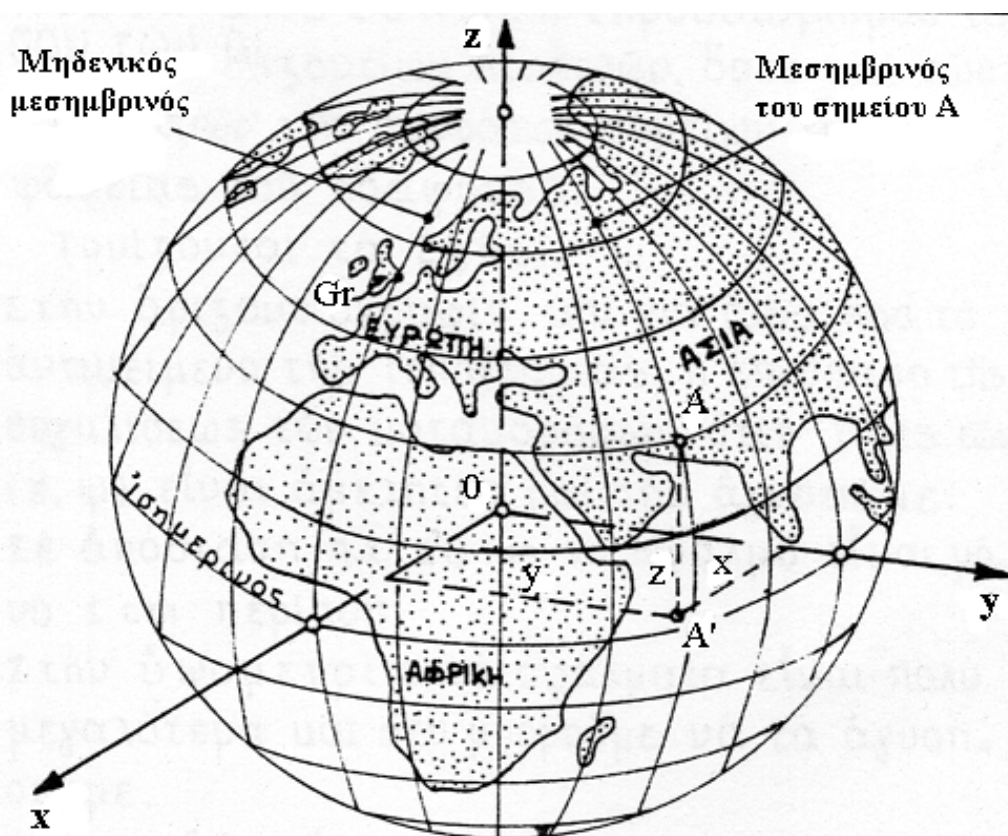
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

9. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Μερικά από τα συστήματα που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία, είναι:

α. Το σύστημα των καρτεσιανών γεωκεντρικών συντεταγμένων $O(x,y,z)$.

Η αρχή του συστήματος O ταυτίζεται με το κέντρο βάρους της γης και ο άξονας z λαμβάνεται παράλληλος προς τον άξονα περιστροφής της (σχ.1).

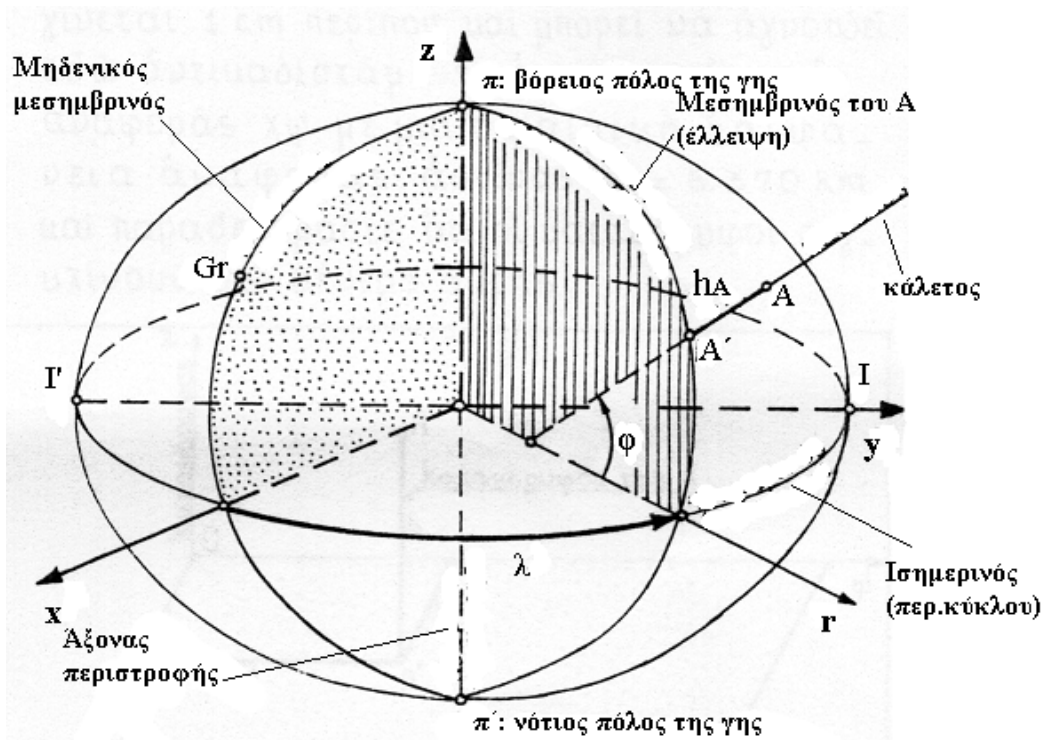


(σχ.1) Το σύστημα των καρτεσιανών γεωκεντρικών συντεταγμένων

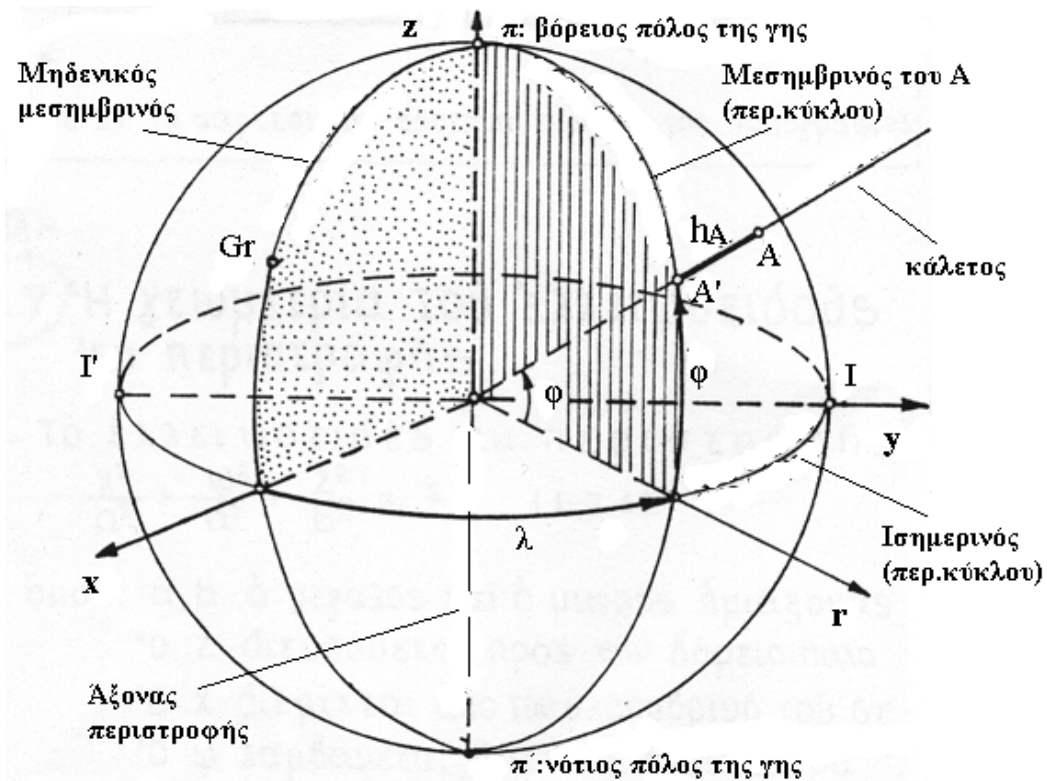
Χρησιμοποιείται μόνο στη Σύγχρονη Ουράνια Γεωδαισία.

β. Το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων (φ, λ).

Αναφέρεται πάντα σε κάποιο ελλειψοειδές σύστημα αναφοράς, ή σφαίρα (σχ.2,σχ.3)



(σχ.2) Το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων στο ελλειψοειδές



(σχ.3) Το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων στη σφαίρα

Ένα σημείο A , που θέλουμε να ορίσουμε τη θέση του, προβάλλεται πρώτα στο ελλειψοειδές, ή σφαίρα, κατά τη διεύθυνση της καθέτου. Η απόφαση αυτή ονομάζεται γεωμετρικό υψόμετρο ή απλά υψόμετρο του σημείου (h). Η θέση τώρα της προβολής του σημείου στο ελλειψοειδές, ή σφαίρα, ορίζεται με τη βοήθεια των γωνιών φ και λ , όπου:

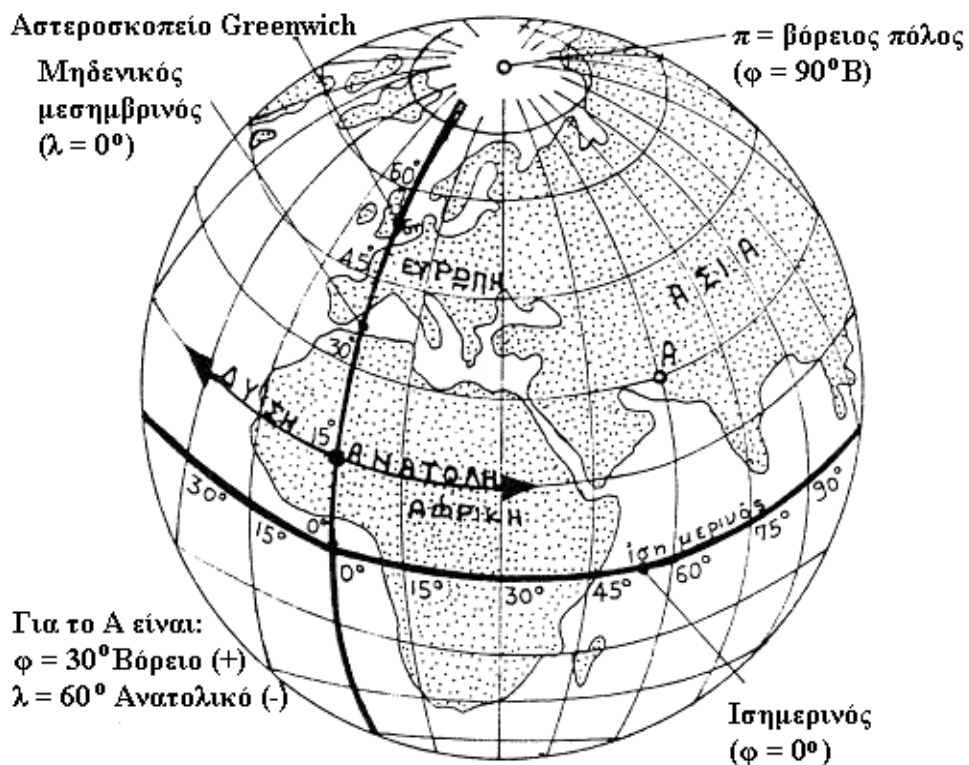
φ : γεωγραφικό πλάτος ή απλά πλάτος και είναι η γωνία που σχηματίζει η πιο πάνω κάθετος με το επίπεδο του Ισημερινού. Μετράται επί του Μεσημβρινού του σημείου με αρχή τον Ισημερινό, από 0° έως $+90^\circ$ για το βόρειο ημισφαίριο και από 0° έως -90° για το νότιο ημισφαίριο.

λ : γεωγραφικό μήκος ή απλά μήκος και είναι η διεδρη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του μεσημβρινού επιπέδου του σημείου και του

μηδενικού ή πρώτου μεσημβρινού (μεσημβρινού του **Greenwich**). Μετράται επί του Ισημερινού με αρχή τον Μεσημβρινό του **Greenwich**, από **0ο** έως **-180ο** ανατολικά και από **0ο** έως **+180ο** δυτικά.

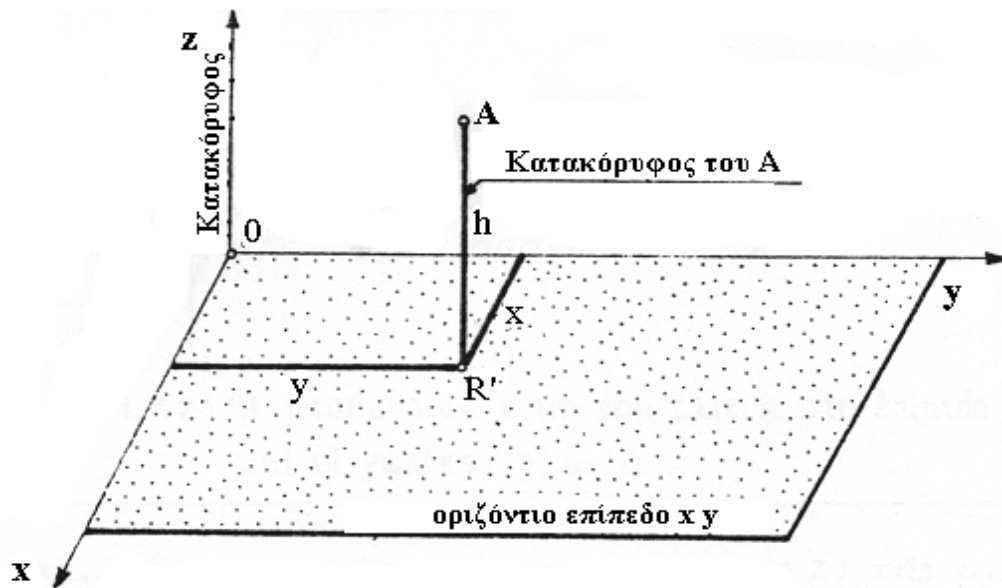
Η Ελλάδα έχει βόρεια πλάτη και ανατολικά μήκη.

γ. Το σύστημα των επιφανειακών συντεταγμένων (φ, λ) (σχ.4)



(σχ.4) Το σύστημα των επιφανειακών συντεταγμένων

Στη περιοχή τώρα της τοπογραφίας που έχουμε να αποτυπώσουμε μια περιορισμένη έκταση (μέγιστη ακτίνα εκτάσεως **10km**), χρησιμοποιούμε ένα τοπικό καρτεσιανό τριδιάστατο σύστημα συντεταγμένων $O(x,y,z)$ με αρχή το σημείο O τυχαίο ή όχι. (σχ.5)



(σχ.5) Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων της τοπογραφίας

Βασικός άξονας του συστήματος αυτού είναι η κατακόρυφος (διεύθυνση ελεύθερας πτώσεως των σωμάτων) και το επίπεδο $x y$ λαμβάνεται κάθετο προς αυτή, δηλαδή οριζόντιο. Ο άξονας y διευθύνεται κατά κανόνα προς το βορρά.

Η τρίτη διάσταση z ονομάζεται υψόμετρο του σημείου (h ή H).

Η κατακόρυφος όμως, (άξονας z του συστήματος) μπορεί να θεωρηθεί παράλληλη προς τον εαυτό της μόνο σε μια πολύ μικρή έκταση. Λόγω της συγκλύσεως των κατακόρυφων, το σύστημα παραμορφώνεται. Έτσι η κατάσταση AA' παύει να είναι κάθετος επί το επίπεδο αναφοράς $x y$ και το σφάλμα αυξάνεται όσο το A απομακρύνεται από την αρχή O .

Η τοπογραφία διαιρείται σε τρία μεγάλα μέρη, που είναι τα εξής:

1. Οριζοντιογραφία (προσδιορισμός μόνο των οριζοντιών προβολών των σημείων).

2. Υψομετρία (προσδιορισμός μόνο των υψομετρικών των σημείων).
3. Μικτή αποτύπωση (προσδιορισμός τόσο των οριζόντιων προβολών, όσο και των υψομετρικών των διαφόρων σημείων της επιφάνειας του εδάφους).

Τονίζονται τα εξής:

α. Στην οριζοντιογραφία και για ολόκληρο το αντικείμενο της Τοπογραφίας, η επίδραση της συγκλύσεως των κατακόρυφων στις τιμές των (x,y) είναι αμελητέα και την αγνοούμε. Σε απόσταση π.χ. **10km** το σφάλμα είναι μόνο **1 cm** περίπου.

β. Στην υψομετρία τα σφάλματα είναι πολύ μεγαλύτερα και δεν μπορούμε να τα αγνοήσουμε.

Για την ίδια απόσταση των **10km** το σφάλμα είναι **7m** περίπου , ενώ για απόσταση **350m** γίνεται **1cm** περίπου και μπορεί να αγνοηθεί. Εδώ αντικαθιστούμε το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς $x y$ με μια σφαιρική επιφάνεια αναφοράς ακτίνας **$R=6.370km$** και παραδεχόμαστε ότι οι κατακόρυφοι συγκλίνουν στο κέντρο αυτής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

10. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

α. Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής:

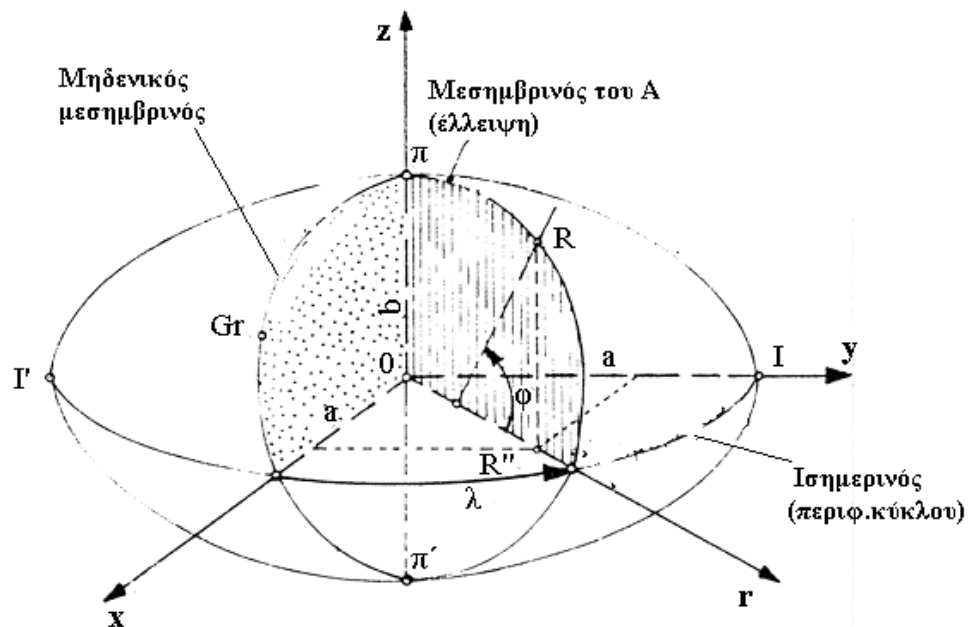
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

όπου: a , b ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας

Oz διευθύνεται προς το βόρειο πόλο

Ox διέρχεται από τον μεσημβρινό του **Greenwich**

Oy λαμβάνεται ώστε το σύστημα να είναι δεξιόστροφο



σχ.1 Η μεσημβρινή τομή του ελλειψοειδούς

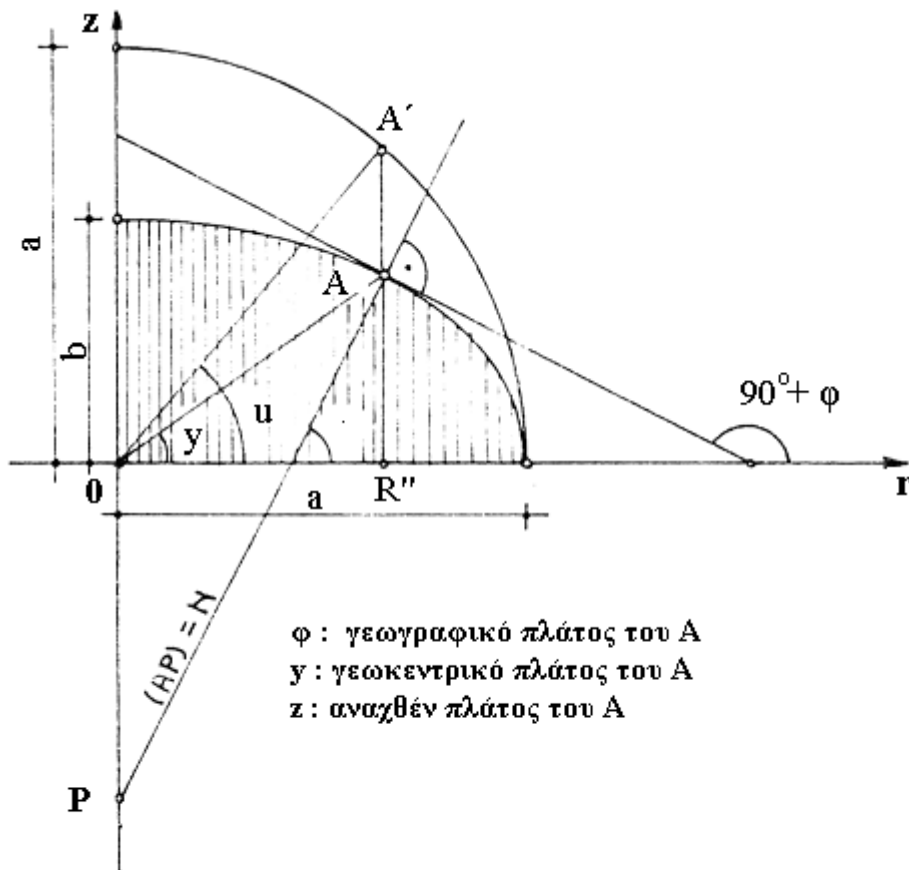
β. Μεσημβρινή τομή:

Η εξίσωση μιας μεσημβρινής τομής είναι η έλλειψη:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

όπου:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

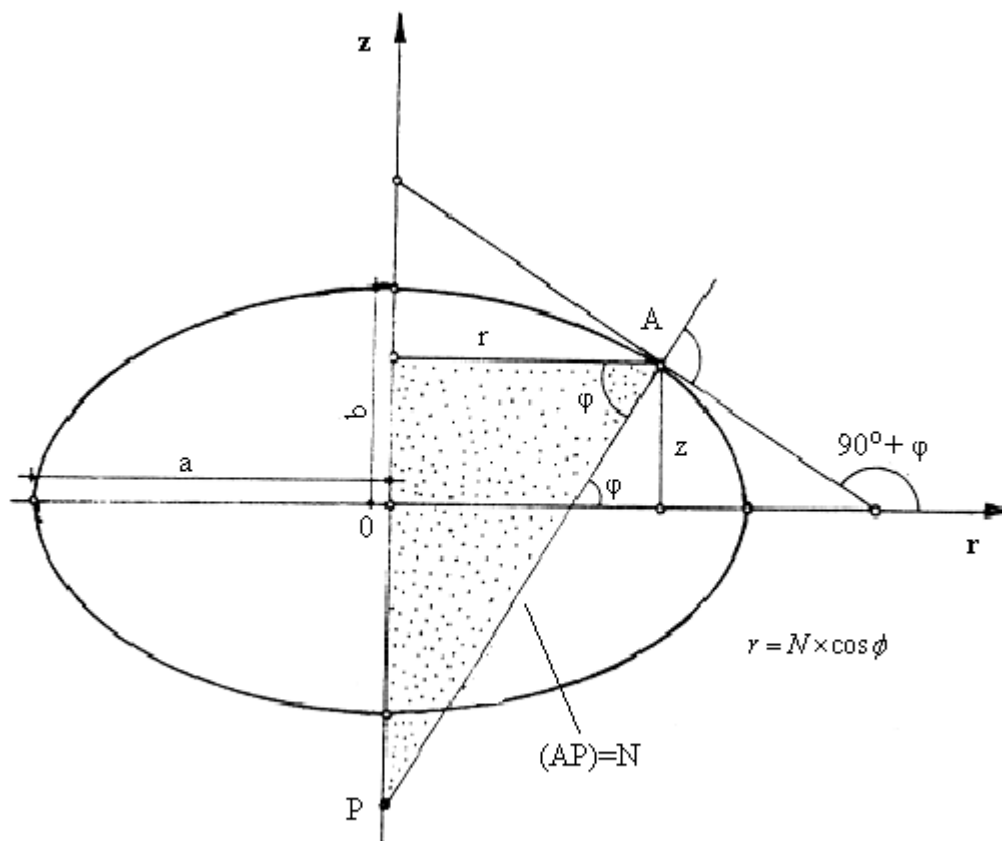


(σχ.2) Η μεσημβρινή τομή του ελλειψοειδούς στο επίπεδο rz και οι γωνίες φ , y , u

γ. Ισημερινός

Ο Ισημερινός είναι ο κύκλος:

$$x^2 + y^2 = a^2$$



(σχ.3) Ακτίνα καμπυλότητας του ελλειψοειδούς

δ. Μεγέθη e , e' , f :

Είναι:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

που είναι η κύρια εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b},$$

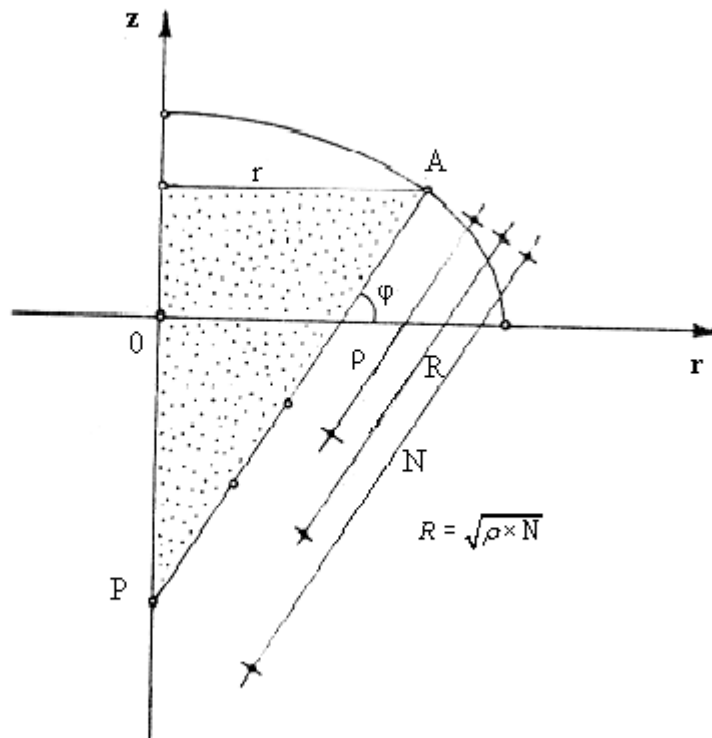
που είναι η δευτερεύουσα εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

$$f = \frac{a - b}{a},$$

που είναι η επιπλάτωση του ελλειψοειδούς.

Είναι, επίσης:

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}, 1 + e'^2 = \frac{a^2}{b^2}, (1 - e^2) \times (1 + e'^2) = 1$$



(σχ.4) Ακτίνα καμπυλότητας του ελλειψοειδούς

ε. Γωνίες φ , y , u :

Στη μεσημβρινή τομή μήκους λ , ένα σημείο A του ελλειψοειδούς ορίζεται με μια από τις γωνίες φ , y , u

(σχ.4), όπου:

φ = γεωγραφικό πλάτος

y = γεωκεντρικό πλάτος

u = αναχθέν πλάτος

Στη συνέχεια δίνονται οι σχέσεις που συνδέουν τις γωνίες αυτές μεταξύ τους.

Είναι:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

οπότε:

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{r}{z}$$

$$r = a \times \cos u, z = b \times \sin u$$

$$dr = -a \times \sin u du, dz = b \times \cos u du$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{b}{a} \times \cot u$$

$$\tan(90^\circ + f) = \frac{dz}{dr} = -\cos f$$

$$\frac{z}{r} = \tan y$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\tan y = \frac{b^2}{a^2} \times \tan f = (1 - e^2) \times \tan f$$

και

$$\tan u = \frac{b}{a} \times \tan f = \sqrt{1 - e^2} \times \tan f$$

Οπότε:

$$\tan y = \frac{b}{a} \times \tan u = \sqrt{1-e^2} \times \tan u$$

Άρα:

$$\frac{\tan y}{\tan u} = \frac{\tan u}{\tan f} = \sqrt{1-e^2}$$

στ. Καρτεσιανές συντεταγμένες (r,z) της μεσημβρινής ελλείψεως συναρτήσει του πλάτους φ:

Προκύπτει:

$$\cos f = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{r}{z}$$

ή

$$\frac{r}{z} = \frac{a^2}{p^2} \times \cos f$$

Τελικά προκύπτει:

$$r = \frac{a \times \cos f}{(1-e^2 \times \sin^2 f)^{1/2}},$$

$$z = \frac{a \times (1-e^2) \sin f}{(1-e^2 \times \sin^2 f)^{1/2}}$$

ζ. Οι ακτίνες καμπυλότητας ρ , N , R και r και έκφραση αυτών συναρτήσει του φ :

Κάθε σημείο A του ελλειψοειδούς χαρακτηρίζεται από τις δύο κύριες ακτίνες καμπυλότητας ρ , N όπου:

ρ = ακτίνα καμπυλότητας της μεσημβρινής τομής

N = ακτίνα καμπυλότητας της καθέτου τομής προς τη μεσημβρινή δια του A

Αν φ είναι το γεωγραφικό πλάτος του A , θα έχουμε:

$$r = \frac{[1 + (dz/dr)^2]^{3/2}}{d^2z/dr^2}$$

(γενική σχέση της διαφορικής γεωμετρίας που δίνει την ακτίνα καμπυλότητας σε τυχαίο σημείο).

Αλλά:

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} &= 1 \text{ και } \frac{dz}{dr} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{r}{z} \\ \frac{d^2z}{dr^2} &= -\frac{b^2}{a^2} \times \left[\frac{z - (r \times dz/dr)}{z^2} \right] = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{z + [(b^2/a^2) \times (r^2/z)]}{z^2} = \\ &= -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{z^2 + [(b^2/a^2) \times r^2]}{z^3} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{b^2}{z^3} = -\frac{b^4}{a^2 \times z^3} \end{aligned}$$

Οπότε, με αντικατάσταση έχουμε:

$$r = -\frac{[1 + (b^4/a^4) \times (r^2/z^2)]^{3/2}}{b^4/(a^2 \times z^2)} = -\frac{[(a^4 \times z^2) + (b^4 \times r^2)]^{3/2}}{a^4 \times b^4}$$

Αν αντικαταστήσουμε στη τελευταία σχέση τα R, z βρίσκουμε τελικά:

$$r = -\frac{a \times (1 - e^2)}{(1 - e^2 \times \sin^2 f)^{3/2}}$$

όπου το αρνητικό σημείο δείχνει μόνο τη διεύθυνση της κλίσεως.

Επίσης, έχουμε:

$$r = N \times \cos f$$

ή

$$N = r / \cos f$$

και με αντικατάσταση της r , έχουμε:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \times \sin^2 f)^{1/2}}$$

Τέλος ορίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας R του **Gauss** με τη σχέση:

$$R = \sqrt{r \times N}$$

ή με αντικατάσταση των r και N

$$R = \frac{a \times (1 - e^2)^{1/2}}{1 - e^2 \times \sin^2 f}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας του **Gauss**, μέση ακτίνα καμπυλότητας, δίνει την ακτίνα της σφαίρας που προσεγγίζει το ελλειψοειδές γύρω από το A καλύτερα από οποιαδήποτε άλλη (εγγυτάτη σφαίρα) και λέγεται ακόμα και ακτίνα της εγγυτάτης σφαίρας. (σχ.9)

η. Μήκη τόξων:

Το μήκος τόξου μεσημβρινού δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$M = \int r \times df$$

ή

$$M = a \times (1 - e^2) \times \int_0^f \frac{df}{(1 - e^2 \times \sin^2 f)^{3/2}}$$

Είναι φανερό ότι το μήκος του μεσημβρινού που αντιστοιχεί σε 1 μοίρα, αυξάνει από τον Ισημερινό προς τους πόλους.

Το μήκος τόξου παράλληλου κύκλου δίνεται από τη σχέση:

$$\Lambda = r \times \Delta I$$

ή

$$\Lambda = \frac{a \times \cos f}{(1 - e^2 \times \sin^2 f)^{1/2}} \times \Delta I$$

Όλες οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για τη σφαίρα, αν θέσουμε $a=b=R$ =ακτίνα της σφαίρας. Έτσι για τη σφαίρα θα έχουμε:

α. Εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

β. Μεσημβρινή τομή:

$$r^2 + z^2 = R^2,$$

όπου

$$r^2 = x^2 + y^2$$

γ. Ισημερινός:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

δ.

$$e = e' = f = 0$$

ε.

$$f \equiv y \equiv u$$

στ.

$$r = R \times \cos f, \quad z = R \times \sin f$$

ζ.

$$r \equiv N \equiv R$$

η.

$$M = R \times f, \quad \Lambda = r \times \Delta l = R \times \cos f \times \Delta l$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

11. ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Διάφορα συστήματα αναφοράς (**datum**) συνδυαζόμενα με διάφορα δίκτυα και συστήματα απεικόνισης έχουν χρησιμοποιηθεί στην Ελλάδα.

α. Από πλευράς **datum** χρησιμοποιείται (αλλά και χρησιμοποιείται ακόμα) κυρίως το «ελληνικό **datum**» που ορίστηκε στα τέλη του περασμένου αιώνα για τις πρώτες γεωδαιτικές εργασίες. Χρησιμοποιεί το ελλειψοειδές του **Bessel** με αρχή το βάθρο του Αστεροσκοπείου και συντεταγμένες το (τότε) αστρονομικό πλάτος και μηδέν μήκος. Από τη δεκαετία του '50 άρχισε να χρησιμοποιείται (κυρίως σε στρατιωτικές εργασίες) και το ευρωπαϊκό (**E.D. 50**) με ελλειψοειδές αναφοράς το διεθνές και αρχή το **Potsdam**.

Την τελευταία δεκαετία, έχουν χρησιμοποιηθεί τα παγκόσμια συστήματα **ITRF** για μεμονωμένες ερευνητικές δραστηριότητες της γεωδυναμικής, ενώ σε θέματα ναυσιπλοΐας έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται και το σύστημα **WGS 84**. Ήδη, η Υδρογραφική Υπηρεσία στους ναυτιλιακούς της χάρτες δίνει τις απαραίτητες αναγωγές για τις μετατροπές των συντεταγμένων του χάρτη στο σύστημα **WGS 84**.

β. Από πλευράς εργασιών τριγωνισμού υπάρχει μια συνεχής αναθεώρηση από το τέλος του προηγούμενου αιώνα. Μέχρι το **1950** χρησιμοποιείται ο παλιός (προπολεμικός) τριγωνισμός αναφερόμενος στο ελληνικό **datum** που αποτέλεσε τον κύριο σκελετό με συνεχείς

βελτιώσεις. Οι συντεταγμένες όλων των σημείων (μέχρι και **IV** τάξης) δόθηκαν, επίσης, και στο **ED 50**, όπως προέκυψαν από την, για πρώτη φορά, ενιαία συνόρθωση, στηριζόμενη όμως στις προπολεμικές μετρήσεις. Από πολλά τώρα χρόνια οι υπολογισμοί από τη ΓΥΣ γίνονταν και στα δύο **datums** με συνεχείς συμπληρωματικές εργασίες και βελτιώσεις.

Η ΓΥΣ ανέλαβε από τα μέσα της δεκαετίας του '60 μια μεγάλη εκστρατεία αναθεώρησης όλου του δικτύου (περιλαμβάνει περίπου **26000** σημεία) με νέες μετρήσεις κλασικής επίγειας γεωδαισίας. Η εργασία αυτή ολοκληρώθηκε στα μέσα της δεκαετίας του '80 με ιδιαίτερα ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Το αναθεωρημένο δίκτυο συνορθώθηκε με αυστηρά ελαχιστοτετραγωνικά κριτήρια και οι συντεταγμένες εκφράστηκαν, αφ' ενός μεν στο ελλειψοειδές του **Bessel** με αρχή το σημείο «Κτυπιάς» και αφ' ετέρου στο ελλειψοειδές **GRS 80** που χρησιμοποιείται σήμερα διεθνώς ως ελλειψοειδές αναφοράς με αρχή το σημείο «Διόνυσος». Πρέπει να τονισθεί ότι το νέο δίκτυο είναι ιδιαίτερα υψηλής ποιότητας.

γ. Από πλευράς «προβολικού συστήματος» (δηλαδή συστήματος απεικόνισης) υπάρχουν σε χρήση:

1. Το σύστημα **Hatt** με πολλά κέντρα (ανά **30'**) και αμελητέες παραμορφώσεις. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται με το ελληνικό **datum** και έχει ευρεία χρήση στις πολιτικές υπηρεσίες. Το Υπουργείο Γεωργίας έχει χρησιμοποιήσει πολλές φορές το σύστημα **Hatt**, αλλά με διαφορετικά κέντρα.

2. Το σύστημα **UTM** Εγκάρσια Μερκατορική **6°**) με δύο

κεντρικούς μεσημβρινούς (21° και 27°) και με παραμορφώσεις που φθάνουν το **0.5%**. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται με το ευρωπαϊκό **datum**.

3. Το σύστημα ΕΜΠ (Εγκάρσια Μερκατορική 3°) με τρεις κεντρικούς μεσημβρινούς και παραμορφώσεις που φθάνουν το **0.1%**. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται με το ελληνικό **datum**.

δ. Από πλευράς υψομετρίας ως αφετηρία ορίστηκε η μέση στάθμη της θάλασσας στον Πειραιά, όπως προσδιορίστηκε το **1918**. Η υλοποίηση των υψομέτρων γίνεται με χωροσταθμικά δίκτυα που μερικές φορές δεν είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους και έχουν ανεξάρτητες αφετηρίες (αυτό φυσικά συμβαίνει σ' όλα τα νησιά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

12. ΕΠΙΛΟΓΗ ΓΣΑ ‘ 87

Για το **datum** επελέγη καταρχήν το ελλειψοειδές **GRS 80** για ελλειψοειδές αναφοράς και τοποθετήθηκε με παράλληλη μετάθεση ως προς το **BTS** έτσι ώστε να προσαρμοστεί κατά τον καλύτερο τρόπο ($\Sigma\xi=\Sigma\eta=\Sigma\zeta=0$) στο γεωειδές που καλύπτει την ηπειρωτική Ελλάδα. Σ (ομαλοποιημένο) γεωειδές χρησιμοποιήθηκε ένα (**6X3**) που προέκυψε από συνδυασμό δυναμικού δορυφορικού γεωειδούς, της μέσης στάθμης της θάλασσας από τον ωκεανογραφικό δορυφόρο **SEASAT**, της τοπογραφίας της μέσης στάθμης της θάλασσας από ωκεανογραφικά δεδομένα και των γεωκεντρικών συντεταγμένων στο σύστημα **BTS** για το Κεντρικό Βάθρο (**CP**) του Κέντρου του Διονύσου.

Οι συντεταγμένες αυτές προκύψαν από παρατηρήσεις δορυφόρων πολλών ετών με συστήματα φωτογραφικά **doppler** και **laser**.

Η αναγκαία για την προσαρμογή μετάθεση $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, δίνει τις συντεταγμένες του κέντρου του ελλειψοειδούς ως προς το σύστημα **BTS** και επομένως τις καρτεσιανές συντεταγμένες του **CP** στο νέο σύστημα. Οι συντεταγμένες αυτές μετατρέπόμενες σε ελλειψοειδείς δίνουν ουσιαστικά τις συμβατικές συντεταγμένες της αφετηρίας.

Οι τιμές αυτές είναι:

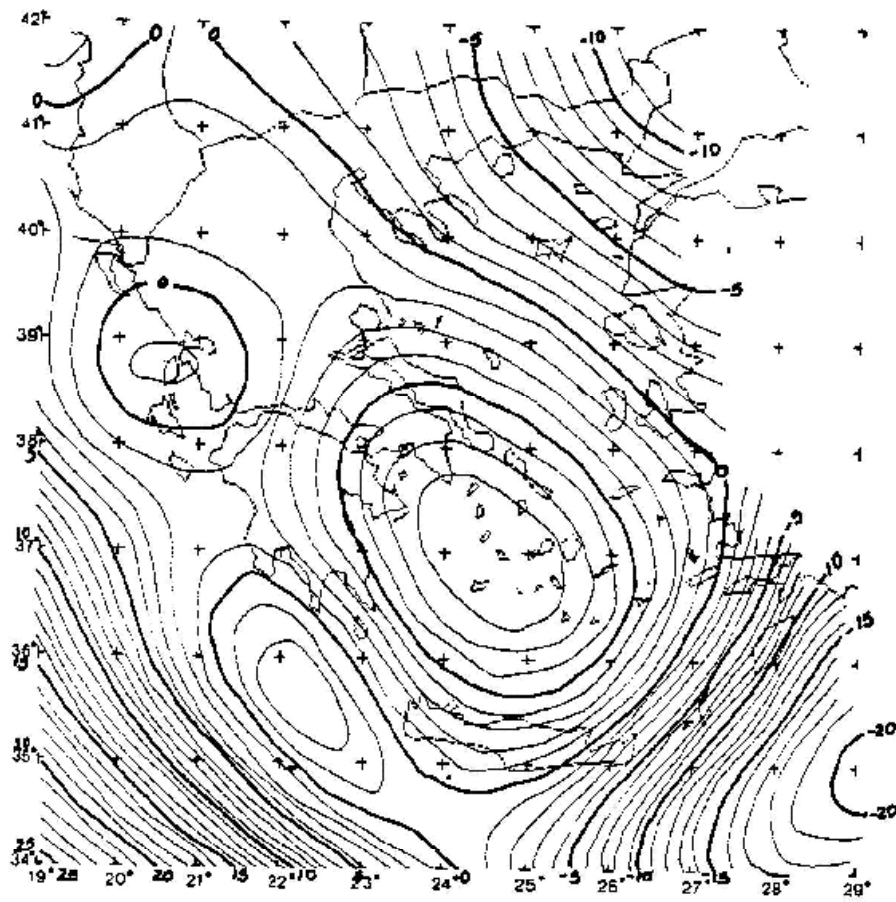
$$\varphi = 38 \quad ^\circ 04' 33'' 8/07$$

$$\lambda = 23 \quad ^\circ 55' 51'' 0095$$

$$N = 7.000 \text{ m}$$

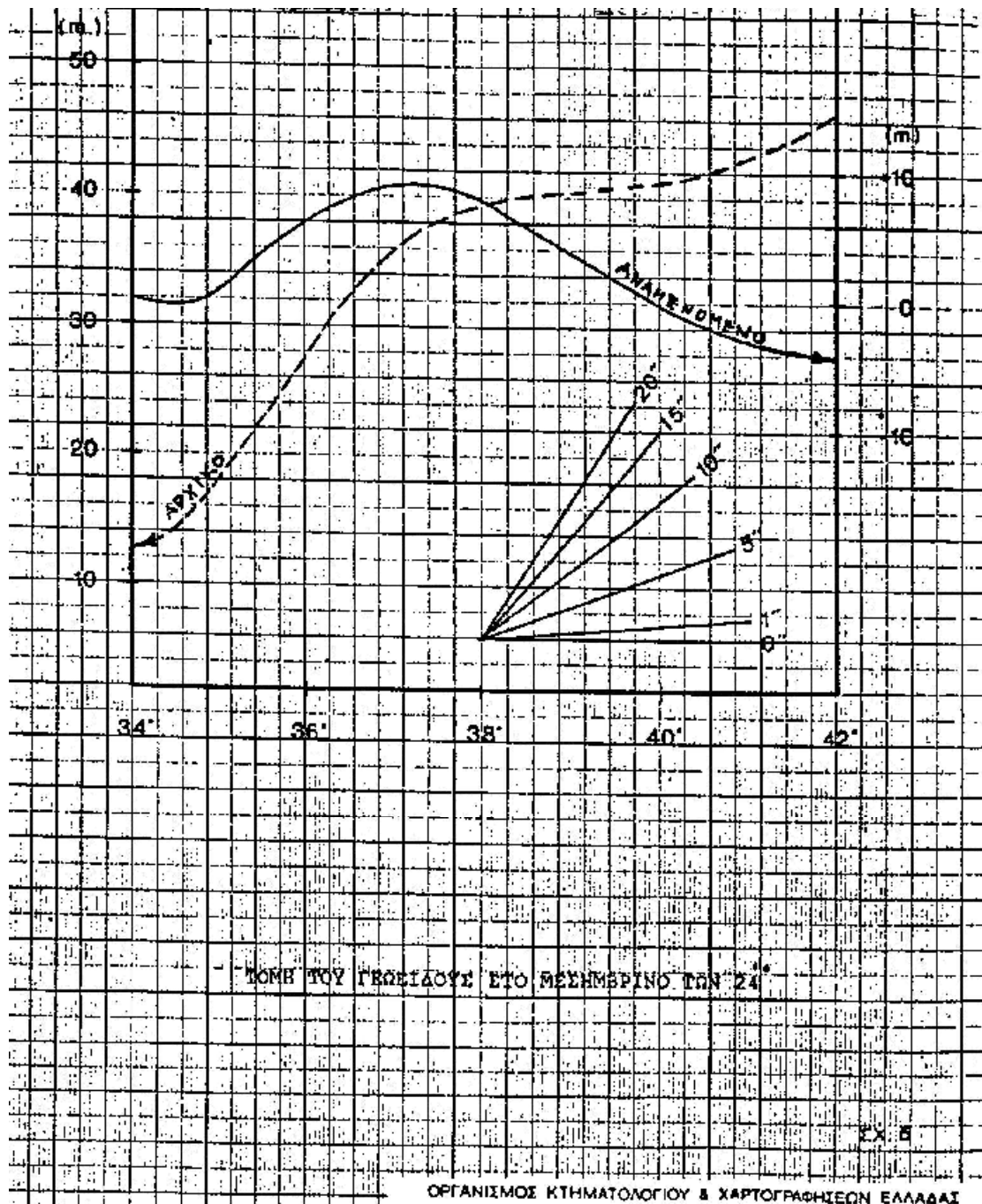
Στο νέο αυτό **datum** το γεωειδές (ομαλοποιημένο) δίνεται στο (σχ.1) όπως αναμένεται από το μετασχηματισμό.

Δίνεται επίσης στο (σχ.2) μία τομή του γεωειδούς στο **BTS** και στο νέο **datum**. Η αναμενόμενη ολική απόκλιση στο νέο **datum** δίνεται στο (σχ.3).



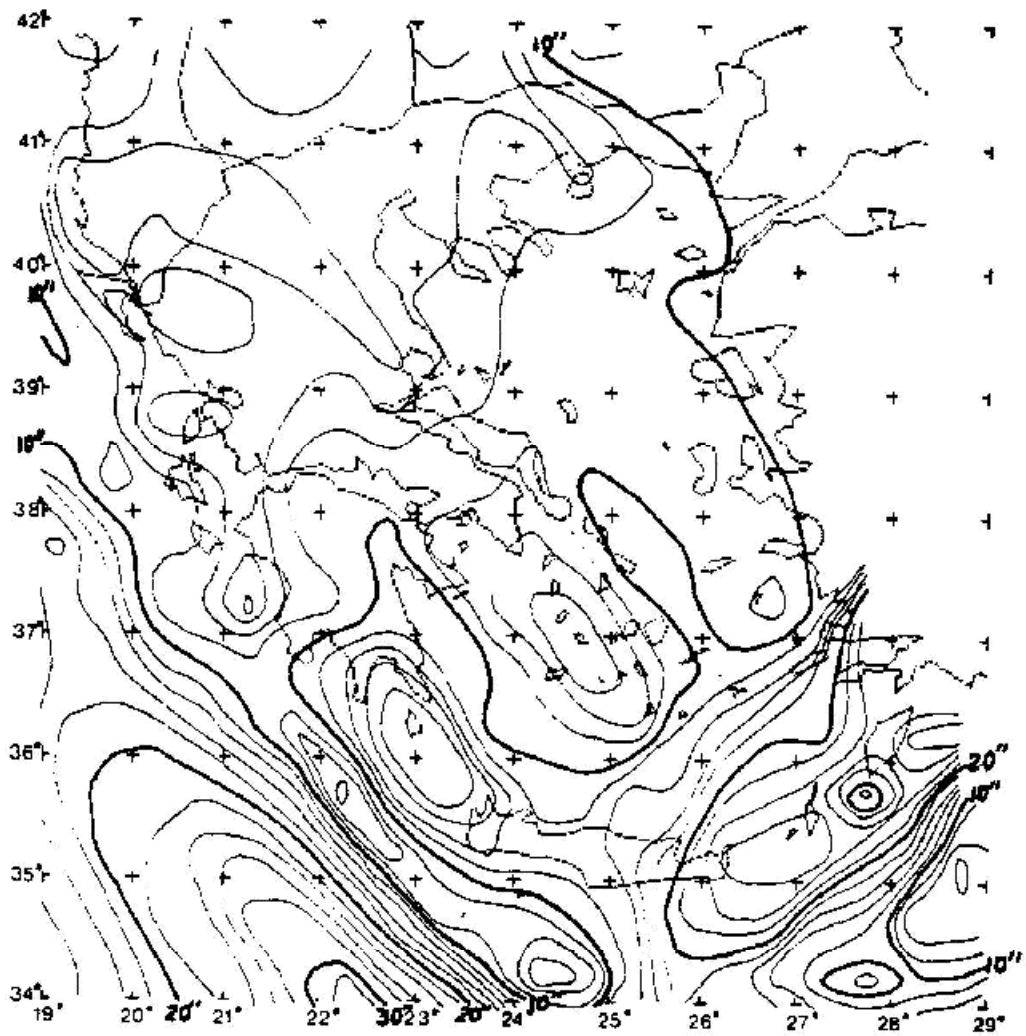
ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ (ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΜΕΝΟ) ΓΕΦΕΙΑΔΕΣ ΕΤΟ ΕΓΕΑ '87

(σχ.1)



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΚΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ & ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΗΣΕΩΝ ΕΛΛΑΔΑΣ

(σχ.2)



ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ Θ ΕΤΟΣ ΕΓΕΑ ' 87

(σχ.3)

Για δίκτυο χρησιμοποιήθηκε το δίκτυο Ιης τάξεως της Γ.Υ.Σ. στο οποίο προστέθηκαν 19 σταθμοί doppler, από τους οποίους οι 17

ταυτίζονται με το δίκτυο Ιης και **6** σταθμοί **laser** που συνδέθηκαν με το δίκτυο Ιης (ή Πας) με το δορυφορικό σύστημα **GPS**.

Στο Διόνυσο υπήρχε και **doppler** και **laser**. Οι σταθμοί **doppler** δίνουν ακρίβεια ± 20 cm και οι σταθμοί **laser** ± 2 cm. (Η σύγκριση τους το επιβεβαίωσε). Επομένως η κλίμακα και ο προσανατολισμός δίδονται στο δίκτυο από το σύστημα **laser** που εξασφαλίζει μία ακρίβεια τουλάχιστον 10^{-7} ή **0,1 ppm**.

Τίτο δίκτυο Ιης παίρνει επομένως κλίμακα και προσανατολισμό από το σύστημα **laser** και **doppler**.

Η ένταξη των δορυφορικών δικτύων (**doppler + laser**) έχει το προσόν να "παγώσει" το δίκτυο σε μία ορισμένη εποχή, αφού στα **20** χρόνια που διήρκεσαν οι μετρήσεις του επίγειου τριγωνισμού αναμένουμε τεκτονικές μετακινήσεις που φτάνουν το ένα μέτρο στην έκταση της Ελλάδας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

13. ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ '87

Το ΕΓΣΑ 87 ορίζεται με το ελλειψοειδές του **GRS 80** ($a=6\ 378\ 137$, $f=1/298.2572236$) προσανατολισμένο παράλληλα με το διεθνές σύστημα του **BTS**, και με τις συντεταγμένες στο βάθρο του Διονύσου:

$$\varphi = 38^{\circ} 04' 33'' 8.107$$

$$\lambda = 23^{\circ} 55' 51'' 0095$$

$$N = 7.000\ m$$

Τούτο αντιστοιχεί σε μία εκκεντρότητα ως προς το **BTS**:

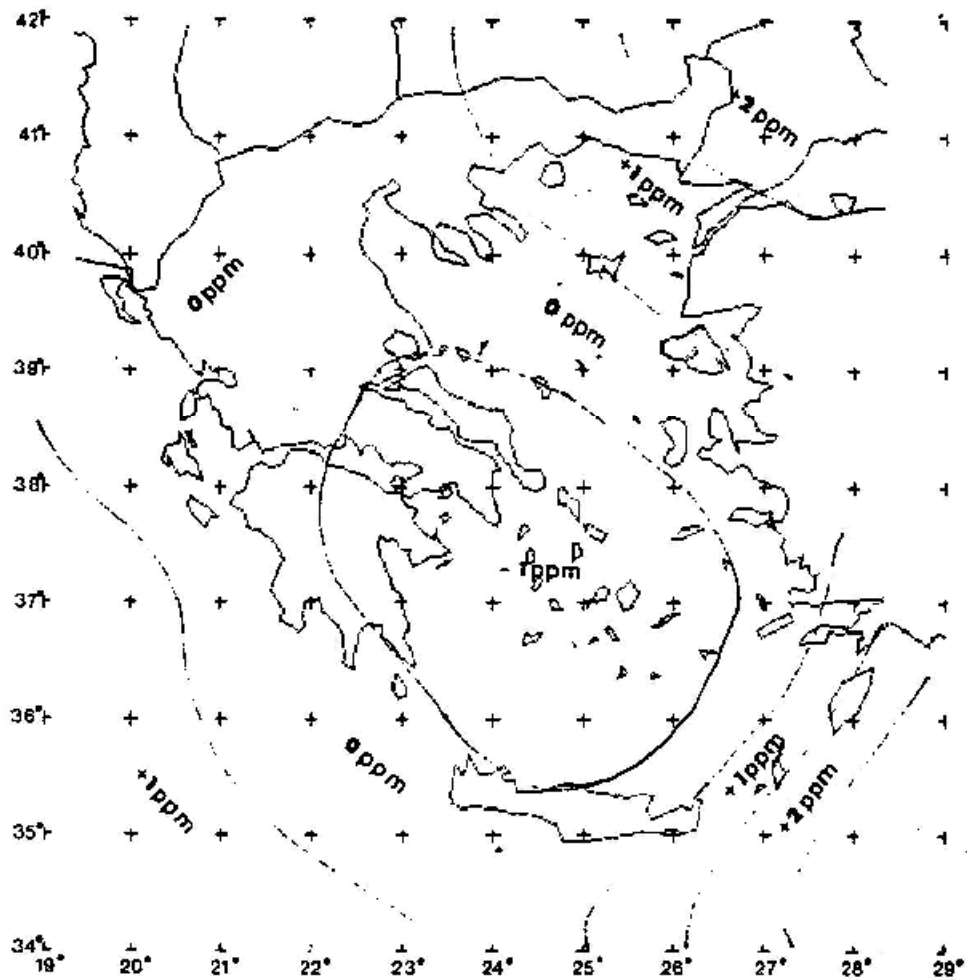
$$\Delta X = -199.87, \Delta Y = +74.79, \Delta Z = +246.62$$

(Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε μία από τις τελευταίες λύσεις (Νοε. 1987) του **BTS**. Οι τιμές αυτές θα μεταβάλλονται από έτος σε έτος κατά μερικά εκατοστά.)

Οι τιμές αυτές αν προστεθούν στις καρτεσιανές συντεταγμένες του ΕΓΣΑ 87 μας δίνουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο σύστημα του **BTS**. Τα δύο αυτά συστήματα είναι παράλληλα και έχουν την ίδια κλίμακα με μία αβεβαιότητα +/- 5.10^8 .

Το ΕΓΣΑ 87 υλοποιείται με το δίκτυο που έχει προέλθει από τη συγχώνευση των δικτύων **laser, doppler** και **Iης** και που θα πυκνωθεί με δίκτυα κατώτερης τάξεως. Για την αναγωγή των πλευρών στο

ελλειψοειδές εκτός από το υψόμετρο της πλευράς πρέπει να προστεθεί και η αναγωγή λόγω γεωειδούς (σχ.1).



ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΑΝΑΓΩΓΗ ΚΑΙΜΑΚΑΣ ΑΠΟ ΤΟ Ν ΕΤΟΣ ΕΓΣΑ ' 87

(σχ.1

)

Το ΓΣΑ **87** χρησιμοποιεί την Εγκάρσια Μερκατόρικη Προβολή με:

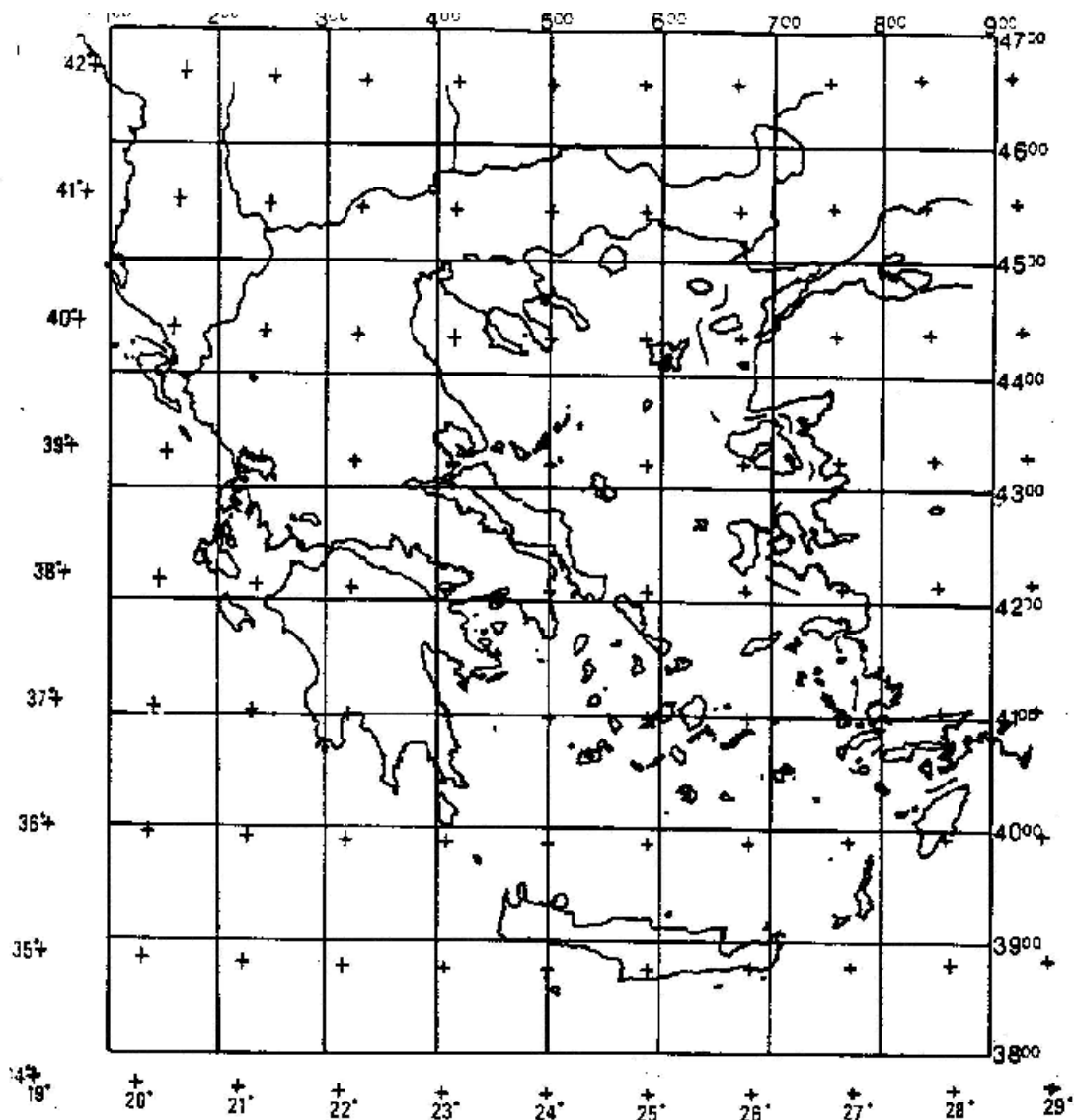
$$\lambda_0 = 24^\circ$$

$$K = 0.999600$$

για προβολικό σύστημα, αναφερόμενη φυσικά στο **GRS 80**.

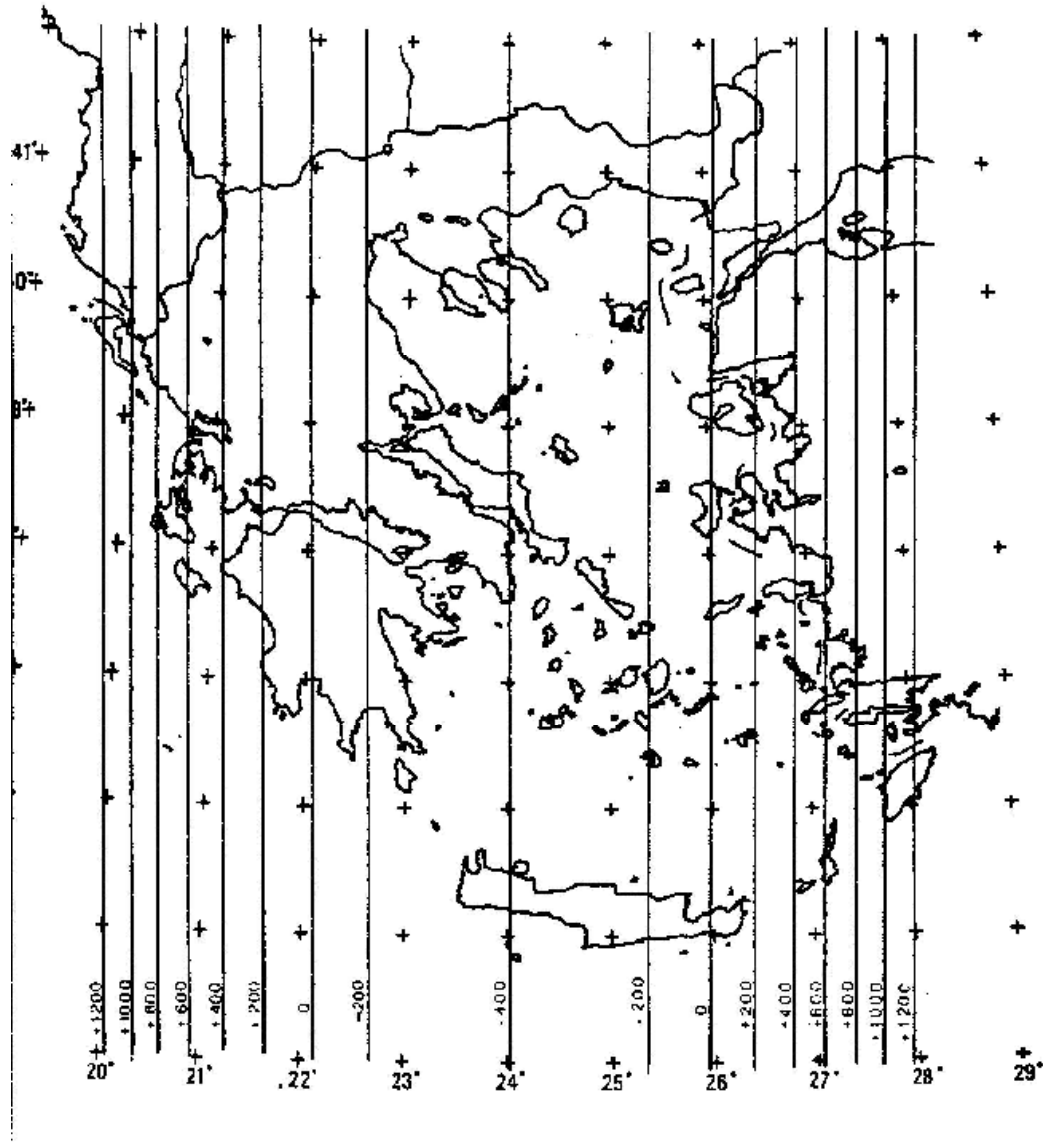
Το (σχ.2) δίνει το χάρτη της Ελλάδας στην προβολή αυτή, το (σχ.3) την παραμόρφωση κλίμακας και το (σχ.4) την κατανομή της κλίμακας στην έκταση της χώρας που φαίνεται ότι στο **99%** της χώρας η παραμόρφωση είναι λιγότερη από **670 ppm**.

Το νέο αυτό ΓΣΑ το ονομάζουμε " Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς **1987** " ή ΕΓΣΑ' **87** και για διεθνή χρήση **GR' 87**.



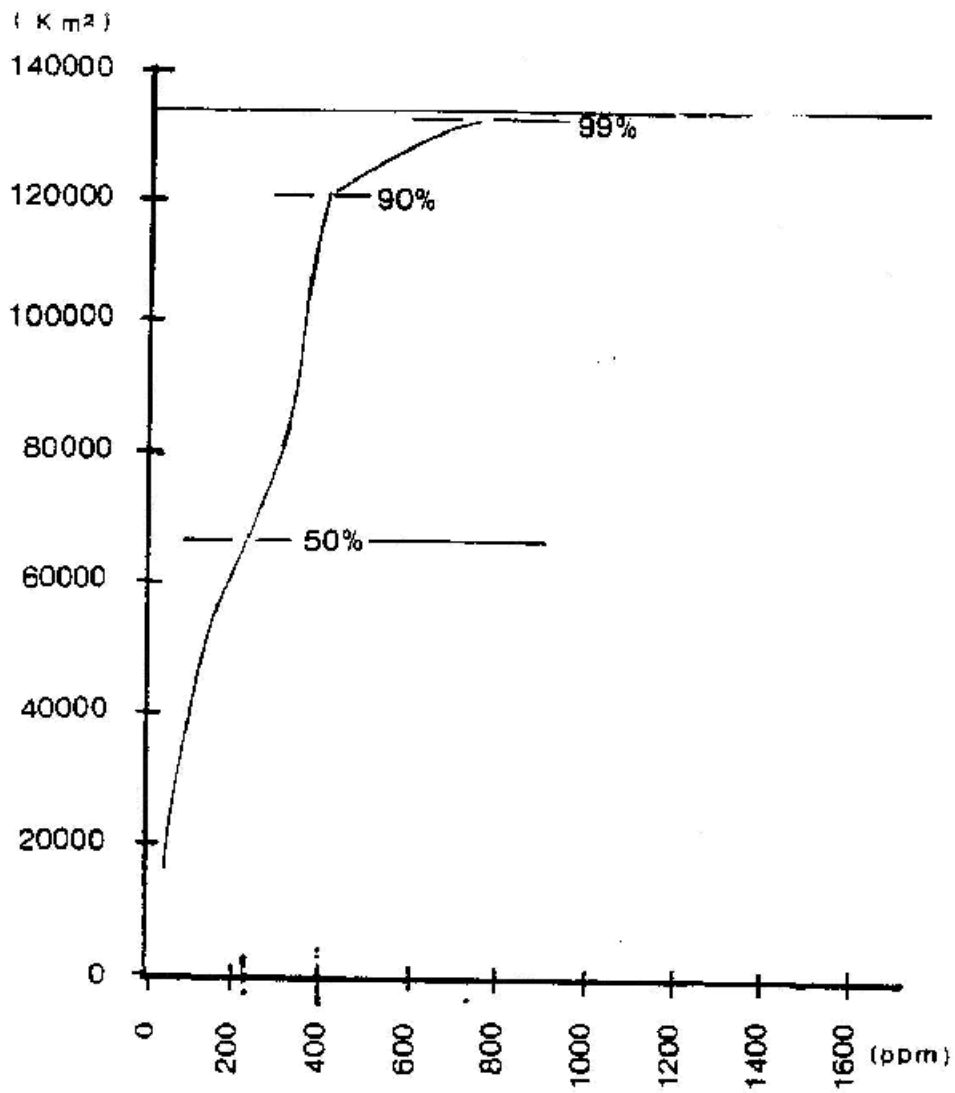
ΔΙΚΤΥΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΚΑΝΑΒΟΥ
 ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ
 $\lambda_0 = 24^\circ$ $K_0 = 0.999600$
 ΚΑΙΜΑΚΑ 1:5M

(σχ.2)



ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΑΙΜΑΚΑΣ (ΣΕ ppm)
 ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ
 $\lambda_0 = 24^\circ$ $K_0 = 0.999600$

(σχ.3)



ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (κ)
ΕΤΗΝ ΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΧΩΡΑΣ

(σχ.4)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

14. ΠΩΣ ΥΛΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ ' 87 (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ)

Για να υλοποιηθεί πλήρως το ΕΓΣΑ ' 87 θα πρέπει να προσδιορισθούν και να δοθούν σε πίνακες οι συντεταγμένες όλων των σημείων Ιης, Ιας, ΙΙης και ΙVνης στο νέο **datum** και νέα συνόρθωση. Επίσης να δοθούν και οι επίπεδες συντεταγμένες στην καινούργια Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή. (Πίνακας ΙΙ)

Σήμερα (Δεκ. 1987) το δίκτυο Ιης που έχει επανασυνορθωθεί στο νέο **datum** από τη Γ.Υ.Σ, έχει ενταχθεί στο ΕΓΣΑ'87. Η ένταξη αυτή έδειξε μία συμβατότητα της τάξης των **1-3 ppm** που αν του δοθεί στροφή και κλίμακα θα κατέβει κάτω από το **1 ppm** (δηλαδή **3 cm** στα **30 Km**). Θα μπορούσε (και προβλέπεται) να γίνει μία νέα ακόμα ενιαία συνόρθωση μαζί με τα δεδομένα **laser** και **doppler**.

Το επόμενο βήμα είναι να ενταχθούν διαδοχικά στο νέο δίκτυο Ιης τα δίκτυα Ιας, ΙΙης και ΙVνης χρησιμοποιώντας το αρχείο των αρχικών παρατηρήσεων που έχει η Γ.Υ.Σ.

Είναι δυνατόν για αποφυγή νέων μεγάλων συνορθώσεων (όλα τα τριγωνομετρικά σημεία της χώρας είναι περίπου **30.000**) να χρησιμοποιηθούν υπάρχοντα συνορθωμένα μέρη του δικτύου (π.χ. από το λεγόμενο Νέο **Bessel**) και να ενταχθούν στο ΕΓΣΑ'87, με προσαρμογή τύπου **Helmert**, χρησιμοποιώντας ένα μικρότερο αριθμό σημείων για σημεία εξάρτησης. Η ακρίβεια μιας τέτοιας διαδικασίας εξαρτάται κατά πόσο υπάρχουν σημαντικές παραμορφώσεις στα

παλαιά δίκτυα. Κατά πάσα πιθανότητα το δίκτυο IVης θα μπορεί να ενταχθεί με τη μέθοδο αυτή, αλλά θα πρέπει να προηγηθεί ένας έλεγχος.

Η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας θα απαιτήσει περίπου ένα τρίμηνο.

ΠΙΝΑΚΑΣ II

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

$$Y = Y_0 + A_2 \times \Delta I^2 + A_4 \times \Delta I^4 + A_6 \times \Delta I^6 \quad (Y_0 = K_0 M)$$

$$X = X_0 + B_1 \times \Delta I + B_3 \times \Delta I^3 + B_5 \times \Delta I^5 \quad (X_0 = 0.5 M m)$$

$$f = f_0 + D_2 \Delta X^2 + D_4 \Delta X^4 + D_6 \Delta X^6$$

$$I = I_0 + E_1 \Delta X + E_3 \Delta X^3 + E_5 \Delta X^5 \quad (I_0 = 24^\circ)$$

$$g = C_1 \Delta I + C_3 \Delta I^3 + C_5 \Delta I^5$$

$$= F_1 \Delta X + F_3 \Delta X^3 + F_5 \Delta X^5$$

$$d_{12} = G_1 (Y_2 - Y_1) \frac{\Delta X}{3} + G_3 (Y_2 - Y_1) \frac{\Delta X^3}{3}$$

$$K = K_0 + K_2 \Delta X^2 + K_4 \Delta X^4$$

$$= K_0 + L_2 \Delta I^2 + L_4 \Delta I^4$$

$$(K_0 = 0,999600)$$

Οι συντελεστές A, B, C, D, E, F, G, K, L είναι συναρτήσεις του πλάτους και των παραμέτρων του ελλειψοειδούς αναφοράς.

M είναι το μήκος του μεσημβρινού από τον Ισημερινό μέχρι το πλάτος φ

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0, \quad \Delta X = X - X_0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

15. ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΤΟ ΕΓΣΑ ' 87

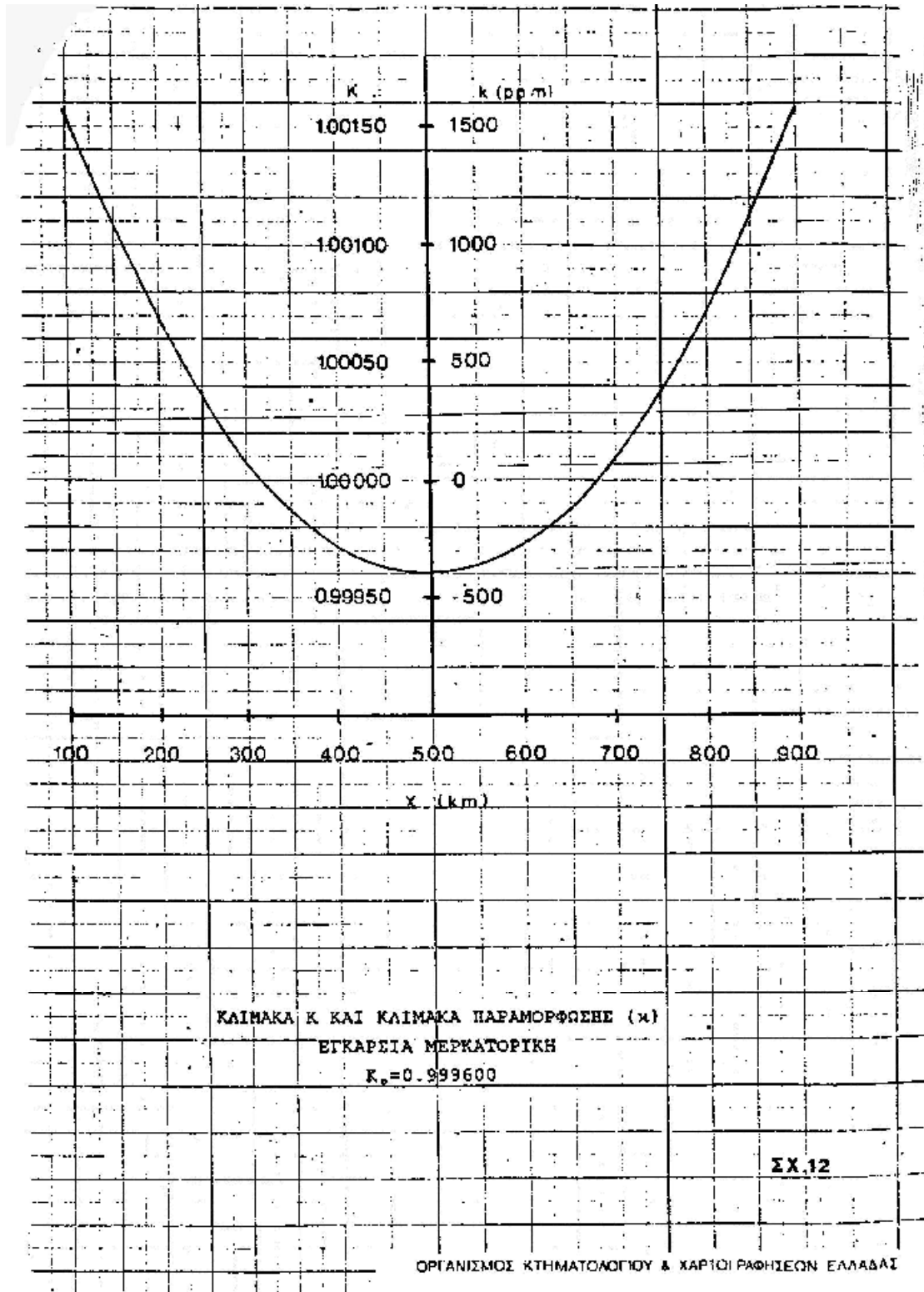
Από τη στιγμή που έχουν δοθεί οι συντεταγμένες των τριγωνομετρικών σημείων στο ΕΓΣΑ '87, οι συνήθεις γεωδαιτικές και τοπογραφικές εργασίες διαφέρουν

Βέβαια με τη χρήση της Ε.Μ.Π επιβάλλεται να γίνονται αναγωγές που στην προβολή **Hatt 30 ' x 30'** δεν γίνονται επειδή είναι αμελητέες (**max** περίπου **5 ppm**). Οι αναγωγές αυτές γίνονται στα μετρούμενα μήκη λόγω κλίμακας, που είναι διαφορετική από σημείο σε σημείο, αλλά η ίδια σε κάθε διεύθυνση από το σημείο, και στις μετρούμενες γωνίες, δεδομένου ότι η σκόπευση μας, που είναι ευθεία στο χώρο, προβάλλεται σε καμπύλη, ενώ στην προβολή θέλουμε να χρησιμοποιούμε ευθείες (δηλ. τη χορδή). Αυτή η αναγωγή είναι γνωστή σαν "αναγωγή εφαπτομένης σε χορδή". Φυσικά για να κάνουμε την αναγωγή μιας γωνίας πρέπει να βρούμε την διαφορά των αναγωγών εφαπτομένης σε χορδή που αντιστοιχεί στην κάθε πλευρά της γωνίας.

Όμως για συνήθεις εργασίες με πλευρές μέχρι **20 - 25 Km.** και για όλη την έκταση της χώρας οι τύποι που δίνουν την κλίμακα K ή την κλίμακα παραμόρφωσης $k=K-1$ και την αναγωγή εφαπτομένης σε χορδή δ είναι ιδιαίτερα απλοί. Έχουμε :

$$k = 12311 (X-0.5)^2 - 400 \quad (\text{σε ppm})$$

όπου το X εκφρασμένο σε Mm (Μεγάμετρα ή εκατομμύρια μέτρα). Το (σχ.1) δίνει την τιμή του k στην έκταση της χώρας.



(σχ.1)

)

Σε περίπτωση που έχουμε πεπερασμένο μήκος στο έδαφος και θέλουμε να πάρουμε το μήκος στην προβολή (ή το αντίστροφο) υπολογίζουμε το κ με τιμή του Χ στο μέσο του μήκους δηλαδή:

$$X = (1/2)(X_1 + X_2).$$

Για την αναγωγή εφαπτομένης σε χορδή έχουμε:

$$\delta = 7.833(Y_2 - Y_1)(X - 0.5)$$

όπου τα Y σε **Km** και το X σε **Mm**. Το (Σχ.13) δίνει σε εύχρηστο νομογράφημα την αναγωγή δ.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην προβολή **Hatt** οι παραμορφώσεις είναι αμελητέες μόνο επειδή έχουμε περιορίσει σε **30'** την έκταση εφαρμογής της. Αν χρησιμοποιήσουμε Ε.Μ.Π. σε ζώνες **30'** θα έχουμε πάλι αμελητέες παραμορφώσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

Αναγωγή από συντεταγμένες **Hatt** του παλαιού Ελληνικού **datum (X,Y)** σε
συντεταγμένες ΕΜΠ του ΕΓΣΑ ' 87 **(X,Y)**.

Για το κέντρο φύλλου $\varphi_0 = 38^\circ 15'$, $\lambda_0 = -2^\circ 15'$

$$x = x_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$$

$$y = y_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2$$

όπου:

$$x_0 = 278324.179$$

$$a_1 = +0.9998292E + 00$$

$$a_2 = +0.2738916E - 01$$

$$a_3 = -0.2961E - 09$$

$$a_4 = -0.2727E - 08$$

$$a_5 = +0.2727E - 08$$

$$y_0 = 4326404.475$$

$$b_1 = -0.2738902E - 01$$

$$b_2 = +0.9998311E + 00$$

$$b_3 = -0.5454E - 08$$

$$b_4 = +0.1467E - 09$$

$$b_5 = -0.1480E - 09$$

Ακρίβεια του μετασχηματισμού: +/- 2,5 cm

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

16. ΠΩΣ ΣΥΝΔΕΕΤΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ '87 ΜΕ ΤΑ ΥΠΑΡΧΟΝΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για να μεταβούμε από ένα σύστημα ΓΣΑ (1) σε ένα άλλο ΓΣΑ (2) θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας:

1. την αλλαγή του **datum**
2. την αλλαγή του δικτύου
3. την αλλαγή της προβολής

ή οποιοδήποτε συνδυασμό τους έχει εφαρμογή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17

17. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι μια σωστή επιλογή μεταξύ των διαφόρων ΓΣΑ που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να στηρίζεται:

Όσον αφορά το **datum**:

- α. Στην καλή προσαρμογή του στο τοπικό γεωειδές.
- β. Στην εύκολη σύνδεση του με τα παγκόσμια συστήματα.
- γ. Στην κατά προτίμηση χρήση του **GRS 80**.

Όσον αφορά το δίκτυο που υλοποιεί το σύστημα:

- α. Στη σωστή κλίμακα και σωστό προσανατολισμό.
- β. Στην υψηλή ποιότητα των μετρήσεων και των υπολογισμών.
- γ. Στην καλή τοπική (<20km) και στο σύνολο της χώρας ακρίβεια θέσεως.

Όσον αφορά το προβολικό σύστημα:

α. Στο μικρό αριθμό «κέντρων».

β. Στη συμμορφία της απεικόνισης και στις μικρές παραμορφώσεις.

γ. Στην απλότητα των υπολογισμών και αναγωγών.

Με τα προηγούμενα κριτήρια έχουμε:

1. Ελληνικό datum (Bessel)

Καλή προσαρμογή στο γεωειδές, δύσκολη σύνδεση με παγκόσμια συστήματα, ελλειψοειδές που δεν χρησιμοποιείται σήμερα. Μεγάλα σφάλματα σε κλίμακα και προσανατολισμό, μέτριας ποιότητας μετρήσεις και υπολογισμοί, σχεδόν ικανοποιητική τοπική ακρίβεια, αλλά απαράδεκτη στο σύνολο της χώρας. Πολλά κέντρα προβολών, μη σύμμορφη απεικόνιση, αλλά ελάχιστες παραμορφώσεις, δεν υπάρχει ανάγκη για αναγωγές.

2. ED 50

Μέτρια προσαρμογή στο γεωειδές, δύσκολη σύνδεση με παγκόσμια συστήματα, ξεπερασμένο ελλειψοειδές. Σημαντικά σφάλματα σε κλίμακα και προσανατολισμό, μέτριας ποιότητας μετρήσεις, αλλά ανεκτή ποιότητα υπολογισμών, ικανοποιητική τοπική ακρίβεια και οριακά ανεκτή για το σύνολο της χώρας. Δύο κέντρα

(μεσημβρινοί) προβολών, σύμμορφη απεικόνιση με λογικές παραμορφώσεις, εύκολες αναγωγές στις μετρήσεις πεδίου.

3. Νέο Bessel

Καλή προσαρμογή στο γεωειδές, σύνθετη σύνδεση με παγκόσμια δορυφορικά συστήματα, ελλειψοειδές που δεν χρησιμοποιείται σήμερα. Μικρά σφάλματα σε κλίμακα και προσανατολισμό, υψηλής ποιότητας μετρήσεις και υπολογισμοί, πολύ ικανοποιητική τοπική ακρίβεια και ικανοποιητική για το σύνολο της χώρας. Πολλά κέντρα προβολών, μη σύμμορφη απεικόνιση, αλλά ελάχιστες παραμορφώσεις, δεν χρειάζονται αναγωγές.

4. ΕΓΣΑ '87

Πολύ καλή προσαρμογή στο ηπειρωτικό γεωειδές, πολύ εύκολη σύνδεση με τα παγκόσμια δορυφορικά συστήματα, ελλειψοειδές το διεθνώς παραδεκτό **GRS 80**. Αμελητέα σφάλματα σε κλίμακα και προσανατολισμό, υψηλής ποιότητας μετρήσεις και υπολογισμοί, πολύ ικανοποιητική τοπική, αλλά και στο σύνολο της χώρας ακρίβεια. Ένα μόνο κέντρο (μεσημβρινός) προβολής, σύμμορφη απεικόνιση με κάπως αυξημένες παραμορφώσεις, εύκολες αναγωγές στις μετρήσεις πεδίου.

5. WGS84

Το σύστημα αυτό είναι καθαρά δορυφορικό και είναι το «**standard**» για την παγκόσμια ναυσιπλοΐα. Δεν έχει καλή προσαρμογή (στην Ελλάδα) στο γεωειδές, δεν έχει σταθερότητα (και άρα μικρή ακρίβεια $\pm 30\text{m}$), όπως υλοποιείται με το **GPS**. Πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο μέσω του διαφορικού **GPS** και προς τούτο συνδέεται άμεσα και απλούστατα με το **EGSA '87** αφού έχουν την ίδια κλίμακα και προσανατολισμό.

6. ITRF – EUREF

Αυτά είναι επίσης καθαρά διαστημικά παγκόσμια συστήματα και θεωρούνται τα ακριβέστερα σήμερα. Χρησιμεύουν, κυρίως, για ερευνητικούς σκοπούς στη γεωδυναμική και βελτιώνονται (άρα μεταβάλλονται), από έτος σε έτος λόγω νέων στοιχείων. Η σχέση τους με το ΕΓΣΑ '87 είναι ιδιαίτερα απλή.

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. ΑΦΟΜΟΙΩΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

1.1. ΓΕΝΙΚΑ

Τα τριγωνομετρικά σημεία διακρίνονται σε A' , B' , Γ' , Δ' και κατώτερας τάξεως. Οι γεωδαιτικές τους συντεταγμένες (φ, λ) , επί του ελλειψοειδούς αναφοράς, υλοποιούν το γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς. Οι καρτεσιανές τους συντεταγμένες (χ, ψ) υλοποιούν το επίπεδο απεικονίσεως του ελλειψοειδούς αναφοράς. Τα τριγωνομετρικά σημεία μέχρι και Γ' τάξης υπολογίζονται συνήθως επί του ελλειψοειδούς αναφοράς και προσδιορίζονται οι γεωδαιτικές τους συντεταγμένες. Τα Δ' και κατώτερας τάξεως υπολογίζονται επί του επιπέδου απεικονίσεως και προσδιορίζονται οι καρτεσιανές τους συντεταγμένες. Με τις εξισώσεις απεικονίσεως $\chi = \chi(\varphi, \lambda)$, $\psi = \psi(\varphi, \lambda)$ και τις αντιστροφές τους $\varphi = \varphi(\chi, \psi)$, $\lambda = \lambda(\chi, \psi)$ υπολογίζονται οι καρτεσιανές (γνωστές φ, λ) και οι γεωδαιτικές (γνωστές χ, ψ) κάθε τριγωνομετρικού σημείου. Για την αφομοίωση των δικτύων χρησιμοποιείται, είτε η μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών είτε η μέθοδος της μεταβολής των συντεταγμένων. Η τελευταία δεν απαιτεί απλά γεωμετρικά σχήματα και έτσι μας δίνει μεγάλη ελευθερία σχεδιασμού του δικτύου. Αντίθετα η μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών απαιτεί απλά και καθορισμένα γεωμετρικά σχήματα για να μπορεί να

εφαρμοστεί και γι' αυτό αρχίζει να μη χρησιμοποιείται. Στην πιο κάτω εργασία θα αναπτύξουμε τη μέθοδο μεταβολής των καρτεσιανών συντεταγμένων (χ, ψ) προς προσδιορισμό των τριγωνομετρικών σημείων από τις παρατηρήσεις των γωνιών διεύθυνσεως των πλευρών του δικτύου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

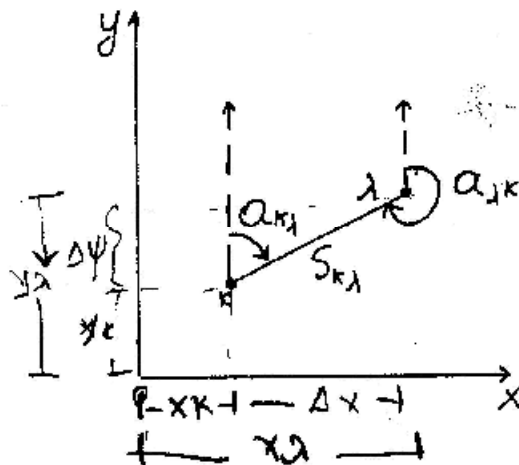
2. ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Το σύστημα αναφοράς είναι υλοποιημένο με τις καρτεσιανές συντεταγμένες των γνωστών τριγωνομετρικών σημείων. Έτσι είναι δυνατό να μετρηθούν επί του εδάφους, εκτός από τα μήκη και οι γωνίες διευθύνσεων των πλευρών του δικτύου. Αν $\alpha_{κλ}$ είναι η γωνία διεύθυνσεως της πλευράς $κλ$ και $s_{κλ}$ το μήκος της, οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες $(x_κ, \psi_κ)$ του σημείου Κ και $(x_λ, \psi_λ)$ του σημείου Λ είναι:

$$X_λ = X_κ + S_{κλ} \sin \alpha_{κλ}$$

(2-1)

$$\Psi_λ = \Psi_κ + S_{κλ} \sin \alpha_{κλ}$$



Οι σχέσεις (2-1) δεν συνδέουν γραμμικά τις προς προσδιορισμό συντεταγμένες των σημείων Κ,Λ με τα μετρηθέντα μεγέθη $S_{κλ}$ και $\alpha_{κλ}$.

Έστω (X_K, Ψ_K) και $(X_\Lambda, \Psi_\Lambda)$ αρκετά προσεγγιστικές συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ. Οι (2-1) γίνονται γραμμικές ως προς τις διαφορές:

$$\Delta x = x - x \quad \Delta \psi = \psi - \psi$$

με διαφορίση στα σημεία (X_K, Ψ_K) , $(X_\Lambda, \Psi_\Lambda)$.

$$d\chi_\lambda = d\chi_K + \sin\alpha_{K\lambda} * dS_{K\lambda} + S_{K\lambda} * \cos\alpha_{K\lambda} * d\alpha_{K\lambda} \quad \rightarrow \quad (2-1)$$

$$d\psi_\lambda = d\psi_K + \cos\alpha_{K\lambda} * dS_{K\lambda} - S_{K\lambda} * \sin\alpha_{K\lambda} * d\alpha_{K\lambda} \quad \rightarrow$$

$$\cos\alpha_{K\lambda} / S_{K\lambda} * (dx_\lambda - dx_K) - \sin\alpha_{K\lambda} / S_{K\lambda} * (d\psi_\lambda - d\psi_K) = d\alpha_{K\lambda} \quad \rightarrow$$

$$\sin\alpha_{K\lambda} (d\chi_\lambda - d\chi_K) + \cos\alpha_{K\lambda} (d\psi_\lambda - d\psi_K) = dS_{K\lambda} \quad \rightarrow (2-2)$$

Στις (2-2) τα dx και $d\psi$ εκφράζουν τις διαφορές των γνωστών προσεγγιστικών συντεταγμένων x, ψ από τις x, ψ που υπολογίζονται με τις (2-1) από τα παρατηρούμενα μεγέθη a, s . Τα $d\alpha_{K\lambda} = (\alpha_{K\lambda} - \alpha_{K\lambda})$, $dS_{K\lambda} = (S_{K\lambda} - S_{K\lambda})$ εκφράζουν τις διαφορές από τα παρατηρούμενα μεγέθη των αντιστοιχών μεγεθών υπολογισμένων από τις προσεγγιστικές συντεταγμένες των Κ, Λ με τις σχέσεις :

$$\alpha_{K\lambda} = \arctan * \chi_\lambda - \chi_K / \psi_K - \psi_\lambda \text{ και } S_{K\lambda} = [(\chi_\lambda - \chi_K)^2 + (\psi_\lambda - \psi_K)^2]^{1/2}$$

Η πρώτη από τις (2-2) είναι η εξίσωση παρατηρήσεως της γωνίας διευθύνσεως, εκφρασμένη φυσικά ως προς τη διαφορά της με τη υπολογισμένη και η δεύτερη είναι η εξίσωση παρατηρήσεως της πλευράς $S_{K\lambda}$ εκφρασμένη ως προς την διαφορά της με την υπολογισμένη. Όταν οι παρατηρήσεις των γωνιών διευθύνσεως

γίνονται από γνωστά σημεία οι εξισώσεις θα λέγονται «εξωτερικές» και όταν γίνονται από γνωστά θα λέγονται «εσωτερικές».

2.1. ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Από την (2-2) παίρνουμε τη γενική μορφή της εξίσωσης παρατηρήσεως της γωνίας διεύθυνσεως $\alpha_{κλ}$,

$$\begin{aligned} & \cos\alpha_{κλ}/S_{κλ}*(d\chi_{λ}-d\chi_{κ}) \\ & -\sin\alpha_{κλ}/S_{κλ}*(d\psi_{λ}-d\psi_{κ})=\alpha_{κλ}-\alpha_{κλ}. \end{aligned}$$

Αν το σημείο K είναι γνωστό, τότε $d\chi_{κ}=d\psi_{κ}=0$ και η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\cos\alpha_{κλ}/S_{κλ}*d\chi_{λ}-\sin\alpha_{κλ}/S_{κλ}*d\psi_{λ}=\alpha_{κλ}-\alpha_{κλ} \quad (2-3)$$

2.2. ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

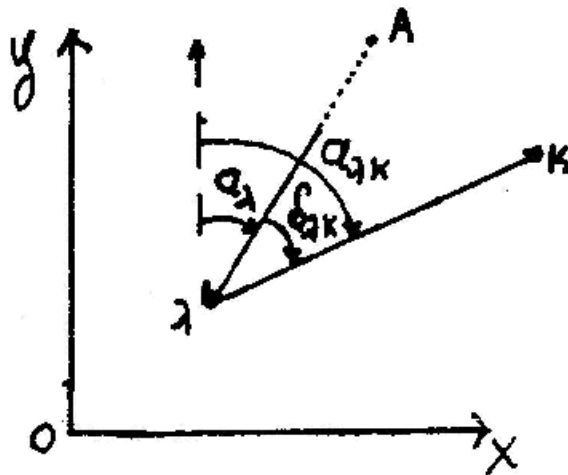
Έστω ότι η παρατηρηθείς διεύθυνση είναι η $\alpha_{κλ}$, τότε η γενική εξίσωση παρατηρήσεως σύμφωνα με την (2-2) θα είναι :

$$\cos\alpha_{λκ}/s_{λκ}*(d\chi_{κ}-d\chi_{λ})-\sin\alpha_{λκ}/S_{λκ}*(d\psi_{κ}-d\psi_{λ})=\alpha_{λκ}-\alpha_{λκ}$$

Έφ' όσον το σημείο λ είναι άγνωστο και το Κ γνωστό ($d\chi_K=d\psi_K=0$) η προηγούμενη εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$-\cos\alpha_{\kappa\lambda}/S_{\lambda\kappa} * d\chi_{\lambda} + \sin\alpha_{\lambda\kappa}/\lambda_{\kappa} * d\psi_{\lambda} = \alpha_{\lambda\kappa}-\alpha_{\lambda\kappa}.$$

Εδώ παρουσιάζεται η δυσκολία μετρήσεως της $\alpha_{\lambda\kappa}$ επειδή το λ είναι άγνωστο σημείο και δεν υπάρχει επί του εδάφους πλευρά με αρχή το λ γνωστής διευθύνσεως. Μπορούμε όμως με υπολογισμό να προσδιορίσουμε τη γωνία διευθύνσεως της αφετερίας λ_A μετρήσεως των γωνιών $\delta_{\lambda\kappa}$, με προσέγγιση μιας αγνώστου παραμέτρου ΔZ_{λ} . Αν η προσεγγιστική γωνία διευθύνσεως της καφετερίας λ_A , τότε $\alpha_{\lambda}=\alpha_{\lambda}+\Delta Z_{\lambda}$ και η παρατηρούμενη γωνία διευθύνσεως $\alpha_{\lambda\kappa}$ θα λαμβάνεται από τη σχέση :



$$\alpha_{\lambda\kappa} = \alpha_{\lambda} + \delta_{\lambda\kappa} = \alpha_{\lambda} + \delta_{\lambda\kappa} + \Delta Z_{\lambda}$$

Έτσι η εξίσωση παρατήρησης από το άγνωστο σημείο λ προς το γνωστό Κ είναι :

$$\begin{aligned}
 & - \cos\alpha_{\lambda\kappa}/S_{\lambda\kappa} * d\chi_{\lambda} + \sin\alpha_{\lambda\kappa}/S_{\lambda\kappa} * d\psi_{\lambda} - \Delta Z_{\lambda} = \\
 & = \alpha_{\lambda} + \delta_{\lambda\kappa} - \alpha_{\lambda\kappa}
 \end{aligned}
 \tag{2-4}$$

Στη (2-4) έχουμε τρεις αγνώστους παραμέτρους , τις $d\chi_{\lambda}$, $d\psi_{\lambda}$, και ΔZ_{λ} που αντιστοιχούν στις άγνωστες συντεταγμένες X_{λ} , Ψ_{λ} , του σημείου λ και στον άγνωστο προσανατολισμό α_{λ} του δικτύου, από το λ . Όταν τα σημεία κ και λ είναι άγνωστα τότε αν παρατηρηθεί η $\alpha_{\kappa\lambda}$ η εξίσωση παρατήρησης είναι :

$$\begin{aligned}
 & \cos\alpha_{\kappa\lambda}/S_{\kappa\lambda} *(d\chi_{\lambda}-d\chi_{\kappa})-\sin\alpha_{\kappa\lambda}/S_{\kappa\lambda} * (d\psi_{\lambda}-d\psi_{\kappa})-\Delta Z_{\kappa} = \\
 & =\alpha_{\kappa}+\delta_{\kappa\lambda}-\alpha_{\kappa\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{2-5}$$

αν παρατηρηθεί η $\alpha_{\lambda\kappa}$ η εξίσωση παρατήρησης είναι :

$$\begin{aligned}
 & \cos\alpha_{\lambda\kappa}/S_{\lambda\kappa} *(d\chi_{\kappa}-d\chi_{\lambda})-\sin\alpha_{\lambda\kappa}/S_{\lambda\kappa} *(d\psi_{\kappa}-d\psi_{\lambda})-\Delta Z_{\lambda} \\
 & =\alpha_{\lambda}+\delta_{\lambda\kappa}-\alpha_{\lambda\kappa}
 \end{aligned}
 \tag{2-6}$$

Τυποποίηση των εξισώσεων

Στην (2-3) εάν θέσουμε :

$$\mathbf{a} = \cos\alpha_{\kappa\lambda}/S_{\kappa\lambda} , \quad \mathbf{b} = \sin\alpha_{\kappa\lambda}/S_{\kappa\lambda} , \quad \mathbf{f}^{\epsilon\delta} = -(\alpha_{\kappa\lambda}-\alpha_{\kappa\lambda}) \text{ γράφεται}$$

$$\mathbf{a}d\chi_{\lambda} + \mathbf{b}d\psi_{\lambda} = -\mathbf{f}^{\epsilon\delta}
 \tag{2-3 \alpha}$$

Επειδή $\alpha_{\lambda\kappa} = \alpha_{\kappa\lambda} + 180^\circ \rightarrow (\cos\alpha_{\lambda\kappa} = -\cos\alpha_{\kappa\lambda}$ και $\sin\alpha_{\lambda\kappa} = -\sin\alpha_{\kappa\lambda}$ η
(2-4) γίνεται :

$$a d\chi_\lambda + b d\psi_\lambda - \Delta Z_\lambda = -f^{\varepsilon\delta} \quad (2-4\alpha)$$

όπου $F^{\varepsilon\sigma} = (a\lambda + \delta\lambda\kappa + a\lambda\kappa)$

Η **(2-3 α)** εκφράζει την εξωτερική εξίσωση από το γνωστό Κ προς το άγνωστο λ και η **(2-4α)** την εσωτερική εξίσωση από το λ προς το Κ. Οι συντελεστές των $d\chi_\lambda$ και στις δύο εξισώσεις είναι οι αυτοί Όταν το λ συνδέεται και με ένα άλλο άγνωστο σημείο V τότε αν θέσουμε :

$$\cos\alpha_{\lambda\nu}/S_{\lambda\nu} = C, \quad -\sin\alpha_{\lambda\nu}/S_{\lambda\nu} = d, \quad (a_\lambda + \delta_{\lambda\nu} - a_{\lambda\nu}) = -f\lambda^{\varepsilon\sigma}$$

σύμφωνα με την **(2-6)** η εξίσωση παρατηρήσεως από το λ προς το ν είναι :

$$c(d\chi_\nu - d\chi_\lambda) + \Delta(d\psi_\nu - d\psi_\lambda) - \Delta Z_\nu = -F_\nu \quad (2-6\alpha)$$

Η **(2-5α)** και η **(2-6α)** εκφράζουν τις εξισώσεις παρατηρήσεως των διευθύνσεων μεταξύ δύο άγνωστων σημείων. Οι συντελεστές των $(d\psi_\nu - d\psi_\lambda)$ και στις δύο εξισώσεις είναι οι αυτοί .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Κατά κανόνα στις γεωδαιτικές εφαρμογές για την εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων χρησιμοποιείται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (μ. ε. τ.). Για την εφαρμογή της μ. ε. τ., πρέπει οι παρατηρούμενες ποσότητες F να συνδέονται γραμμικά με τις προς προσδιορισμό X . Αν δεν συνδέονται γραμμικά τότε με διαφόριση σε μια αρκετά προσεγγιστική τιμή X των αγνώστων, η σχέση που συνδέει το X και F , γίνεται γραμμική ως προς τη διαφορά $x-\chi$.

3.1. ΙΣΟΒΑΡΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Έστω οι αουσχέτιστες παρατηρήσεις (f_1, f_2, \dots, f_m) έτσι ώστε:

$$E(f_i) = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n$$

$$i = 1, 2, \dots, m > n$$

$$\text{Var}(f_i) = \sigma^2$$

Όπου (X_1, X_2, \dots, X_n) και σ^2 άγνωστοι και $(a_{ij}) = \mathbf{m}A_n$ πίνακας γνωστών στοιχείων. Εάν \mathbf{F} και X είναι τα διανύσματα στήλες των παρατηρήσεων και των αγνώστων, η προηγούμενη εξίσωση σε μορφή πινάκων γράφεται :

$$AX = \mathbf{E}(\mathbf{F}), \quad \mathbf{D}(\mathbf{F}) = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3-1)$$

Όπου $\mathbf{D}(\mathbf{F})$ ο πίνακας διασποράς (μεταβλητότητες και συμμεταβλητότητες) των παρατηρήσεων. Στην πράξη οι παρατηρήσεις \mathbf{F} δεν επαληθεύουν τη σχέση $AX = \mathbf{F}$, δηλαδή το υπερκανονικό αυτό σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Θα είχε κοινή λύση εάν οι \mathbf{F} ήταν οι μέσες θεωρητικές τιμές $\mathbf{E}(\mathbf{F})$. Μπορούμε όμως με άπειρους τρόπους να διορθώσουμε τις παρατηρήσεις \mathbf{F} κατά \mathbf{V} ώστε το σύστημα των παρατηρήσεων :

$$AX = \mathbf{F} + \mathbf{V}$$

για μια λύση να είναι συμβιβαστό. Με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων παίρνουμε τη λύση X που κάνει το άθροισμα των τετραγώνων των διορθώσεων,

$$\mathbf{V}' \mathbf{V} = (\mathbf{AX} - \mathbf{F})' (\mathbf{AX} - \mathbf{F}) \quad \text{ελάχιστο}$$

Η λύση ελαχίστων τετραγώνων προκύπτει από το σύστημα των κανονικών εξισώσεων (\mathbf{K}, \mathbf{E})

$$\mathbf{A}' \mathbf{A} X = \mathbf{A}' \mathbf{F},$$

Τον πίνακα \mathbf{A} είναι μεγίστου βαθμού τότε η λύση ελαχίστων τετραγώνων (λ.ε.τ.) δίδεται από την

$$X=(A' A)^{-1} A' F ,$$

και είναι μοναδική . Η εκτίμηση σ^2 του τυπικού σφάλματος δίδεται από τη σχέση ,

$$\sigma_o^2[YY]/r=(AX-F)/r=(F'F-FAX)/r ,$$

όπου r οι πλεονάζουσες εξισώσεις παρατηρήσεως. Ο πίνακας διασποράς του X δίδεται από τη σχέση ,

$$D(X)=\sigma_o^2(A' A)^{-1} \tag{3-4}$$

Και οι διορθώσεις V από τη σχέση ,

$$V=AX-F=(A' A)^{-1} A' F-F. \tag{3-5}$$

3.2. ΑΝΙΣΟΒΑΡΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στη περίπτωση αυτή οι παρατηρήσεις F δεν είναι του αυτού βαθμού ακριβείας και ο πίνακας διασποράς δεν θα είναι μοναδιαίος(I) όπως στο μοντέλο (3-1). Ακόμη οι παρατηρήσεις μπορεί να είναι και συσχετισμένες.. Στην γενική αυτή περίπτωση το μοντέλο των παρατηρήσεων θα είναι ,

$$E(F)=AX, \quad D(F)=\sigma_o^2 P^{-1} , \tag{3-6}$$

Όπου P_0 πίνακας βαρών όχι αναγκαστικά διαγώνιος. Με τον μετασχηματισμό $L=P^{1/2}F$, όπου $P^{1/2}$ συμμετρική τετραγωνική ρίζα του P , μεταπίπτουμε στο μοντέλο (3-1) διότι :

$$\begin{aligned} E(L) &= E(P^{1/2}F) = P^{1/2} E(F) = P^{1/2} AX \\ D(L) &= D(P^{1/2}F) = P^{1/2} D(F) P^{1/2} = \sigma_0^2 I \end{aligned} \quad (3-7)$$

και η μέθοδος που ακολουθήθηκε για το μοντέλο (3-1) εφαρμόζεται και στο (3-7)

Οι κανονικές εξισώσεις είναι ,

$$\begin{aligned} A' P^{1/2} P^{1/2} P^{1/2} AX &= A' P^{1/2} P^{1/2} F \quad \eta \\ A' PAX &= A' PF, \end{aligned} \quad (3-8)$$

με τις οποίες ελαχιστοποιείται το $(F-AX)' P (F-AX)$.

Η λύση της (3-8) είναι ,

$$X = (AP' A)^{-1} A' PF \quad (3-9)$$

και είναι μοναδική όταν $\text{RanK}(A) = \max$.

Το τοπικό σφάλμα σ^2 της μονάδος βάρους είναι ,

$$\sigma_0^2 = V' PV / r = (AX-F)' P (AX-F) / r = (F' PF - F' PAX) / r ,$$

όπου $r = m - n = m - \text{RanK}(A)$ οι πλεονάζουσες παρατηρήσεις .

Ο πίνακας διασποράς του X είναι

$$D(X) = \sigma_0^2 (AP' A)^{-1}$$

Και οι διορθώσεις δίδονται από την σχέση

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{F} - \mathbf{F}.$$

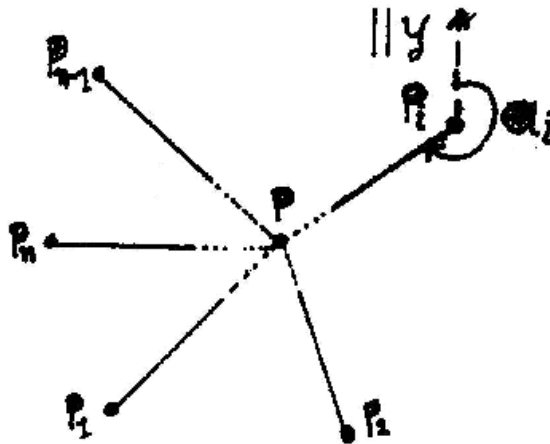
Κατά κανόνα ο πίνακας \mathbf{P} είναι *διαγώνιος* και έτσι θα θεωρείται στο εξής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. ΑΦΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

4.1. ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΜΠΡΟΣΘΟΤΟΜΙΑΣ)

Ένα άγνωστο σημείο P έχει παρατηρηθεί από τα γνωστά σημεία $(P_i(X_i, \Psi_i))$ και έχουν μετρηθεί οι γωνίες διεύθυνσεως α_i των πλευρών P_iP .



Επιλύοντας μια εμπροσθοτομίας βρίσκουμε τις προσεγγιστικές συντεταγμένες X, Ψ του P .

Σύμφωνα με την (2-3α) οι εξισώσεις παρατηρήσεων είναι :

$$\Theta_i \Delta \chi + b_i \Delta \psi = -f_i^{\epsilon} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

όπου ,

$$a_i = \cos \alpha_i / s_i, \quad b_i = -\sin \alpha_i / s_i, \quad -f_i^{\epsilon} = (a_i - a_i'),$$

$$\alpha_i = \arctan \frac{x-x_i}{\psi-\psi_i},$$

$$s_i = [(x-x_i)^2 + (\psi-\psi_i)^2]^{1/2}$$

ενάν θέσουμε, $A' = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)'$, $B' = (b_1 b_2 \dots b_n)'$

και $F_{1n}^{\varepsilon\xi} = (f_1^{\varepsilon\xi} f_2^{\varepsilon\xi} \dots f_n^{\varepsilon\xi})'$ το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων με μορφή γράφεται :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ n_1 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = - F_{n1}^{\varepsilon\xi} + V_{n1}^{\varepsilon\xi}$$

(3-2) το σύστημα των κ. ε. είναι ,

$$\begin{pmatrix} A' \\ 1n \\ B' \\ n1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ n1 & n1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A' \\ 1n \\ B' \end{pmatrix} F^{\varepsilon\xi} \rightarrow \begin{pmatrix} A'A & A'B \\ 1n & 1n \\ B'A & B'B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A' F^{\varepsilon\xi} \\ 1n \\ B' F^{\varepsilon\xi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [\partial a] & [\partial b] \\ \partial b & [bb] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\partial f^{\varepsilon\xi}] \\ [bf^{\varepsilon\xi}] \end{pmatrix} \text{ όπου } [] \text{ δηλώνει άθροισμα δηλαδή,}$$

$$[\partial a] = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2,$$

$$[\partial b] = \partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \dots + \partial_n b_n,$$

κ.τ.λ.

Από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνεται η λ ε.τ. σύμφωνα με τη (3-3).

Οι αφομοιωμένες συντεταγμένες χ, ψ , του P, οι αφομοιωμένες γωνίες διευθύνσεως α_i των πλευρών P_iP , οι διορθωμένες $v_i^{\varepsilon\xi}$, το σ^2 και ο πίνακας διασποράς D των $\Delta\chi, \Delta\psi$ θα δίνονται από τις σχέσεις ,

$$(\chi = \chi + \Delta\chi, \psi = \psi + \Delta\psi), \quad \alpha_i = \partial_i \Delta\chi + b_i \Delta\psi + \alpha_i = \alpha_i + U_i^{\varepsilon\xi},$$

$$U_i^{\varepsilon\xi} = \partial_i \Delta\chi + \mathbf{b}_i \Delta\psi + \mathbf{f}_i^{\varepsilon\xi},$$

$$\sigma^2 = [\mathbf{U}\mathbf{U}] / (\mathbf{n}-2) \text{ και } \mathbf{D} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} [\partial\mathbf{a}] & [\partial\mathbf{b}] \\ [\partial\mathbf{b}] & [\mathbf{b}\mathbf{b}] \end{pmatrix}^{-1}$$

Εάν οι παρατηρήσεις είναι ανισοβαρείς με πίνακα βαρών \mathbf{nPn} σύμφωνα με την (3-8) οι κ.ε είναι :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{1n} \\ \mathbf{B}' \\ \mathbf{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho_2 \dots \mathbf{0} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{0} \dots \dots & \rho_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{1n} \\ \mathbf{B}' \\ \mathbf{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{0} \dots \dots & \rho_n \end{pmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{n}1}^{\varepsilon\xi} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} [\rho\partial\mathbf{a}] & [\rho\partial\mathbf{b}] \\ [\rho\partial\mathbf{b}] & [\rho\mathbf{b}\mathbf{b}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\rho\mathbf{a}^{\varepsilon\xi}] \\ [\rho\mathbf{b}\mathbf{f}^{\varepsilon\xi}] \end{pmatrix}.$$

Μετά την λύση τω κ.ε. κατ' αντιστοιχία με τις ισοβαρείς παρατηρήσεις ευρίσκουμε :

$$(\chi = \chi + \Delta\chi, \psi = \psi + \Delta\psi), \alpha_i = \partial_i \Delta\chi + \mathbf{b}_i \Delta\psi + \alpha_i = \alpha_i + U_i^{\varepsilon\xi}$$

$$U_i^{\varepsilon\xi} = \partial_i \Delta\chi + \mathbf{b}_i \Delta\psi + \mathbf{f}_i^{\varepsilon\xi}, \sigma^2 = [\rho\mathbf{u}\mathbf{u}] / (\mathbf{n}-2) \text{ και}$$

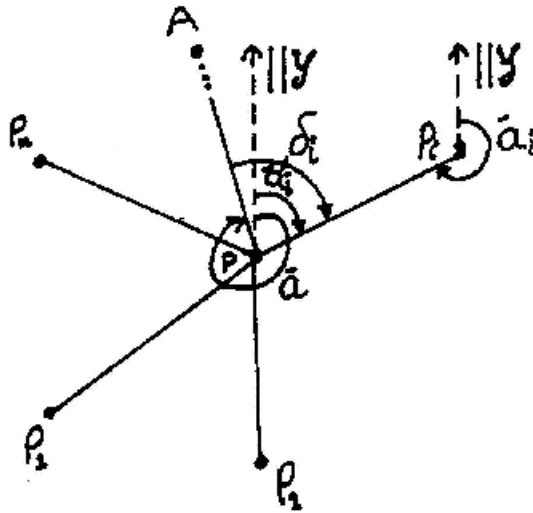
$$\mathbf{D} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} [\rho\partial\mathbf{a}] & [\rho\partial\mathbf{b}] \\ [\rho\partial\mathbf{b}] & [\rho\mathbf{b}\mathbf{b}] \end{pmatrix}$$

4.2. ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΟΠΙΣΘΟΤΟΜΙΑ)

Συνήθως, γωνιομετρήσεις εκτελούνται και από το άγνωστο σημείο P προς τα γνωστά P_i. Σύμφωνα με την (2-4^α) οι εξισώσεις παρατηρήσεως είναι :

$$\partial i \Delta \chi + b_i \Delta \psi - \Delta \zeta = - f_i^{e_0} = \alpha + \delta i - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Η παρατηρηθείσα διεύθυνση από το P προς το P_i είναι : $\alpha + \delta i + \Delta Z = \alpha + \Delta Z$ και από το P_i είναι α_i . Η προσεγγιστική γωνία διεύθυνσης από το P → P_i είναι α και από το P_i → P είναι $\alpha_i = \alpha' \pm 180^\circ$



n

Το $\alpha = \sum (\alpha_i - \delta i) / n$ είναι η προσεγγιστική γωνία διεύθυνσεως της

1

αφετηρίας γωνιομετρήσεων PA. Στην πράξη παρουσιάζεται το πρόβλημα της πολλαπλής οπισθοτομίας γι' αυτό θα εξετασθεί χωριστά. Προσεγγιστικές συντεταγμένες χ, ψ , του P λαμβάνουμε με την επίλυση μιας οπισθοτομίας. Εάν θέσουμε $e' = (1..1..1)'$ σε μορφή πινάκων, οι εξισώσεις σφαλμάτων γράφονται :

$$\begin{pmatrix} A & B & -e \\ n_1 & n_1 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = - \begin{matrix} \mathbf{F}^{\varepsilon\sigma} + \mathbf{V}^{\varepsilon\sigma} \\ n_1 & n_1 \end{matrix}$$

Το σύστημα των κ. ε. είναι :

$$\begin{pmatrix} A' \\ 1n \\ B' \\ 1n \\ -e' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & -e \\ n_1 & n_1 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A \\ 1n \\ B' \\ 1n \end{pmatrix} \mathbf{F}_{n_1}^{\varepsilon\sigma} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} [\partial a] & [\partial b] & -[a] \\ [\partial b] & [bb] & -[b] \\ -[a] & -[b] & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\partial f^{\varepsilon\sigma}] \\ [bf^{\varepsilon\sigma}] \\ [F^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

από το οποίο παίρνουμε τα $\Delta\chi$, $\Delta\psi$, ΔZ .

Για μείωση των αγνώστων το ΔZ εύκολα απαλείφεται :

$$\begin{pmatrix} [\partial a] & [\partial b] \\ [\partial b] & [bb] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [a] \\ [b] \end{pmatrix} \Delta Z = - \begin{pmatrix} [\partial f^{\varepsilon\sigma}] \\ [bf^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \quad (4-1\alpha)$$

(4-1) \rightarrow

$$\begin{pmatrix} [a] & [b] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + n\Delta Z = [f^{\varepsilon\sigma}] \quad (4-1\beta)$$

$$(4-1\beta) \rightarrow \Delta Z = 1/n([a] [b] \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + 1/n [f^{\varepsilon\sigma}]) \quad (4-1\gamma)$$

(4-1α) ^ (4-1γ) →

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} [\partial a] & [\partial b] \\ [\partial b] & [bb] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a] \\ [b] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a] & [b] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} [a] \\ [b] \end{pmatrix} [f^{\varepsilon\sigma}] = \rightarrow \\
 & = - \begin{pmatrix} [a f^{\varepsilon\sigma}] \\ [b f^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} [\partial a] - 1/n [a]^2 & [\partial b] - 1/n [a] [b] \\ [\partial b] - 1/n [a] [b] & [bb] - 1/n [b]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = - \\
 & = - \begin{pmatrix} [a f^{\varepsilon\sigma}] - 1/n [a] [f^{\varepsilon\sigma}] \\ [b f^{\varepsilon\sigma}] - 1/n [b] [f^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \tag{4-2}
 \end{aligned}$$

Από τη λύση του (4-2) παίρνουμε τα Δχ , Δψ και από την (4-1γ) το ΔZ. Εάν οι παρατηρήσεις είναι ανισοβαρείς με πίνακα βαρών P_{mn} τότε το σύστημα των κ.ε. είναι:

$$\begin{pmatrix} 1n \\ B' \\ 1n \\ -e' \\ 1n \end{pmatrix} \begin{matrix} A' \\ P \\ n & n & n \\ n & n & n \\ n & n & n \end{matrix} \begin{pmatrix} A & B & -e \\ n & n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1n \\ B' \\ 1n \\ -e' \\ 1n \end{pmatrix} \begin{matrix} A' \\ P \\ n & n & n \\ n & n & n \end{matrix} f^{\varepsilon\sigma} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} [\rho \partial a] & [\rho \partial b] & -[\rho \partial] \\ [\rho \partial b] & [\rho bb] & -[\rho b] \\ -[\rho \partial] & -[\rho b] & [\rho] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\rho \partial f^{\varepsilon\sigma}] \\ [\rho b f^{\varepsilon\sigma}] \\ -[\rho f^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \tag{4-3}$$

$$\begin{pmatrix} [\rho \partial a] & [\rho ab] \\ [\rho \partial b] & [\rho bb] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [\rho \partial] \\ [\rho b] \end{pmatrix} \Delta Z = - \begin{pmatrix} [\rho \partial f^{\varepsilon\sigma}] \\ [\rho b f^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \tag{4-3α}$$

(4-3) →

$$\begin{pmatrix} -[\rho \partial] & -[\rho b] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + [\rho] \Delta Z = [\rho f^{\varepsilon\sigma}] \tag{4-3β}$$

$$(4-3\beta) \rightarrow \Delta Z = 1/[\rho] ([\rho\partial] [\rho b]) \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + 1/[\rho] [\rho f^{\varepsilon\sigma}] \quad (4-3\gamma)$$

(4-3α) ^ (4-3γ) →

$$\rightarrow \begin{pmatrix} [\rho\partial a] - 1/[\rho] [\rho\partial]^2 \\ [\rho\partial b] - 1/[\rho] [\rho\partial] [\rho b] \quad [\rho b b] - 1/[\rho] [\rho b]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\rho f^{\varepsilon\sigma}] - 1/[\rho] [\rho\partial] [\rho f^{\varepsilon\sigma}] \\ [\rho b f^{\varepsilon\sigma}] - 1/[\rho] [\rho b] [\rho f^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

Από την (4-4) παίρνουμε τα $\Delta\chi$, $\Delta\psi$ και από την (4-3γ) το ΔZ .

$$\begin{aligned} \text{Εκ της (4-1}\beta) \rightarrow -([\mathbf{a}] \Delta\chi + [\mathbf{b}] \Delta\psi) + n \Delta Z &= [\rho f^{\varepsilon\sigma}] \rightarrow \\ \rightarrow -[\mathbf{a}] \Delta\chi + [\mathbf{b}] \Delta\psi + [\mathbf{f}^{\varepsilon\sigma}] - n \Delta Z &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4-5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις σφαλμάτων

$$\begin{aligned} \partial_i \Delta\chi + \mathbf{b}_i \Delta\psi - \Delta Z &= -\mathbf{f}_i^{\varepsilon\sigma} + \mathbf{U}_i^{\varepsilon\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{παίρνουμε} \\ [\mathbf{a}] \Delta\chi + [\mathbf{b}] \Delta\psi + [\mathbf{f}^{\varepsilon\sigma}] - n \Delta Z &= [\mathbf{U}^{\varepsilon\sigma}] \end{aligned} \quad (4-5\alpha)$$

Από τις (4-5) και (4-5α) $\rightarrow [\mathbf{U}^{\varepsilon\sigma}] = \mathbf{0}$

Έτσι προκύπτει η πρόταση ότι όταν στις εξισώσεις σφαλμάτων των έμμεσων παρατηρήσεων υπάρχει μια άγνωστος παράμετρος με συντελεστή +1 ή -1 τότε το άθροισμα των σφαλμάτων είναι μηδέν.

Τα αφομοιωμένα στοιχεία θα είναι, $(\chi = \chi + \Delta\chi, \psi = \psi + \Delta\psi)$,

$$\mathbf{U}i^{\varepsilon\sigma} = \partial i \Delta\chi + \mathbf{b}i \Delta\psi + \mathbf{f}i^{\varepsilon\sigma} - \Delta Z, \quad \alpha'_{i} =$$

$$\alpha'_{i} + \mathbf{U}i^{\varepsilon\sigma} + \Delta Z = \partial i \Delta\chi + \mathbf{b}i \Delta\psi + \alpha'_{i}$$

Απομένει πλέον να επεξεργαστούμε μαζί τις εσωτερικές και εξωτερικές εξισώσεις .

4.3. ΑΦΟΜΟΙΩΣΗ ΕΣΩΤ. ΚΑΙ ΕΞΩΤ. ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

(πολλαπλής εμπροσθοτομία και οπισθοτομία)

Οι εξισώσεις σφαλμάτων των εξωτ. και εσωτ. εξισώσεις είναι,

$$\mathbf{V}^{\varepsilon\xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{n}1 & \mathbf{n}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + \mathbf{F}^{\varepsilon\xi} \quad \text{και} \quad \mathbf{V}^{\varepsilon\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & -\mathbf{e} \\ \mathbf{n}1 & \mathbf{n}1 & \mathbf{n}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}$$

αντιστοίχως.

Η γενική εξίσωση σφαλμάτων θα είναι ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^{\varepsilon\xi} \\ \mathbf{n}1 \\ \mathbf{V}^{\varepsilon\sigma} \\ \mathbf{n}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{n}1 & \mathbf{n}1 & \mathbf{n}1 \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & -\mathbf{e} \\ \mathbf{n}1 & \mathbf{n}1 & \mathbf{n}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\varepsilon\xi} \\ + \\ \mathbf{F}^{\varepsilon\sigma} \\ \mathbf{n}1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}1$$

από την οποία παίρνουμε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων,

$$\begin{pmatrix} 2[\partial\mathbf{a}] & 2[\partial\mathbf{b}] & -[\mathbf{a}] \\ 2[\partial\mathbf{b}] & 2[\mathbf{b}\mathbf{b}] & -[\mathbf{b}] \\ 2[\mathbf{a}] & -[\mathbf{b}] & \mathbf{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\partial\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}] + [\partial\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \\ [\mathbf{b}\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}] + [\mathbf{b}\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \\ -[\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

Από την (4-6) παίρνουμε τα $\Delta\chi$, $\Delta\psi$, ΔZ και υπολογίζουμε τις αφομοιωμένες συντεταγμένες $\chi = \chi + \Delta\chi$, $\psi = \psi + \Delta\psi$ του σημείου P. Από την (4-6) θα απαλείψουμε το ΔZ για να μειώσουμε την τάξη του συστήματος σε 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 2[\partial\mathbf{a}] & 2[\partial\mathbf{b}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\partial\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}] + [\partial\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \\ [\mathbf{b}\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}] + [\mathbf{b}\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix}$$

$$2[\partial b] \quad 2[bb] \quad \Delta\psi \quad - \quad [b] \quad \Delta Z = - \quad [bF^{\varepsilon\xi}] + [bF^{\varepsilon\sigma}] \quad (4-6\alpha)$$

(4-6) →

$$- ([a] \quad [b]) \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + n\Delta Z = [F^{\varepsilon\sigma}] \quad (4-6\beta)$$

$$(4-6\beta) \rightarrow \Delta Z = 1/n ([a]\Delta\chi + [b]\Delta\psi + [F^{\varepsilon\sigma}]) \quad (4-6\gamma)$$

Από τις (4-6α) και (4-6γ) →

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2[\partial a] - 1/n [a]^2 \\ 2[\partial b] - 1/n [a][b] \quad 2[bb] - 1/n [b]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \\ &= - \begin{pmatrix} [\partial F^{\varepsilon\xi}] + [\partial F^{\varepsilon\sigma}] - 1/n [a][F^{\varepsilon\sigma}] \\ [bF^{\varepsilon\xi}] + [bF^{\varepsilon\sigma}] - 1/n [b][F^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \quad (4-7) \end{aligned}$$

Από το (4-7) παίρνουμε πιο εύκολα τα $\Delta\chi, \Delta\psi$. Μπορούμε το ΔZ να το απαλείψουμε πριν την αφομοίωση από τις εσωτ. εξισώσεις σφαλμάτων, παρ' ότι γενικά στις εξισώσεις σφαλμάτων δεν επιτρέπονται αλγεβρικοί μετασχηματισμοί. Επειδή όμως θα διαμορφωθεί πάλι το ίδιο σύστημα η πιο κάτω μέθοδος που θα εφαρμοστεί δεν μεταβάλλει τα βάρη των εξισώσεων. Προσθέτουμε τις εσωτ. εξισώσεις σφαλμάτων,

$$U_i^{\varepsilon\sigma} = a_i \Delta\chi + b_i \Delta\psi + f_i^{\varepsilon\sigma} - \Delta Z \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-7\alpha)$$

Κατά μέλη, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $[U^{\varepsilon\sigma}] = \mathbf{0}$ και διαιρούμε αμφότερα τα μέλη δια του n , παίρνουμε,

$$\mathbf{0} = 1/n [a]\Delta\chi + 1/n [b]\Delta\psi + 1/n [f^{\varepsilon\sigma}] - \Delta Z \quad (4-7\beta)$$

Αφαιρούμε την (4-7β) από κάθε μια των (4-7α) και λαμβάνουμε n νέες εξισώσεις

$$\begin{aligned}
nU_k^{\varepsilon\sigma} &= \{(n-1)\partial_k - \partial_1 - \dots - \partial_{k-1} - \partial_{k+1} - \dots - \partial_n\} \Delta\chi + \\
&+ \{(n-1)b_k - b_1 - \dots - b_{k-1} - b_{k+1} - \dots - b_n\} \Delta\psi + \\
&+ \{(n-1)f_k^{\varepsilon\sigma} - f_1^{\varepsilon\sigma} - \dots - f_{k-1}^{\varepsilon\sigma} - f_{k+1}^{\varepsilon\sigma} - \dots - f_n^{\varepsilon\sigma}\}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Σε μορφή πινάκων οι προηγούμενες εξισώσεις γράφονται:

$$nV^{\varepsilon\sigma} = \begin{pmatrix} A^\circ & A & A^\circ B \\ mn & n1 & mn & n1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^\circ F^{\varepsilon\sigma} \\ mn & n1 \end{pmatrix} \quad (4-8)$$

όπου

$$A^\circ = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & n-1 \end{pmatrix} .$$

Ο πίνακας A° έχει τις ιδιότητες, $A^{\circ'} = A^\circ$, $A^\circ A = n A^\circ$ και

$$\begin{aligned}
\text{RanK}(A^\circ) &= \\
&= n-1 \rightarrow (A^\circ) = 0
\end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε την τελευταία ιδιότητα.

$$\text{Δια } n=1, \begin{matrix} A^\circ = (0) \\ 11 \end{matrix} \rightarrow \text{RanK}(A^\circ) = 1-1=0, \quad A = \begin{matrix} (1) \\ 11 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\text{RanK}(A^\circ) = 1 \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned}
\text{Δια } n=2, \begin{matrix} A^\circ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ 22 \end{matrix} \rightarrow \text{R}(A^\circ) = 2-1=1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\
\text{R}(A^\circ) = 2 \quad (4-10)
\end{aligned}$$

Έστω ότι οι (4-9) και (4-10) ισχύουν δια $n = \kappa$, δηλ. ισχύει,

$$A^\circ = \begin{pmatrix} \kappa-1 & -1 & -1 \\ -1 & \kappa-1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \kappa-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{R}(A^\circ) = \kappa \quad A = \begin{pmatrix} \kappa & -1 & -1 \\ -1 & \kappa & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \kappa \end{pmatrix} \rightarrow$$

θα αποδείξουμε ότι ισχύει η $\mathbf{R}(A^0) = \kappa - 1$ και δια $\mathbf{n} = \kappa + 1 = 5$

είναι,
$$A^0 = \begin{pmatrix} \kappa-1 & -1 & -1 \\ -1 & \kappa-1 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ -1 & -1 & \kappa-1 \end{pmatrix}$$
. Εάν $\mathbf{R}(A^0) < \kappa$, τότε όλες οι ορίζουσες

κ τάξεως πρέπει να είναι μηδέν. Κατά την υπόθεση της επαγωγής είναι,

$$|A| = \begin{vmatrix} \kappa & -1 & -1 \\ -1 & \kappa & -1 \\ \dots\dots\dots \\ -1 & -1 & \kappa \end{vmatrix} \quad \text{και επομένως } \mathbf{R}(A^0) > \kappa \quad (4-11)$$

Έστω ότι $\mathbf{R}(A^0) = \kappa + 1$, τότε υπάρχει ο $A^0 \cdot^{-1}$ έτσι ώστε, $A^0 A^0 \cdot^{-1} = I \rightarrow$

$$A^0 A^0 A^0 \cdot^{-1} = A^0 \rightarrow \mathbf{s} A^0 A^0 \cdot^{-1} = A^0 \rightarrow \mathbf{s} I = A^0 \text{ που δεν ισχύει και}$$

επομένως $\mathbf{R}(A^0) < \kappa + 1$. από αυτή την τελευταία σχέση και την (4-11) $\rightarrow \mathbf{R}(A^0) = \kappa - 1 = \kappa$

Από τις ιδιότητες του A^0 και ειδικά επειδή $\mathbf{R}(A^0) = \mathbf{n} - 1$ έχουμε μια ακόμη

απόδειξη ότι στις έμμεσες παρατηρήσεις όταν ένας άγνωστος έχει συντελεστή +1 ή -1 τότε $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $[\mathbf{u}^{\varepsilon\varsigma}] \neq \mathbf{0}$ τότε η (4-8) παίρνει τη μορφή

$$(A^0) \mathbf{V}^{\varepsilon\varsigma} = (A^0 \mathbf{A} \quad A^0 \mathbf{B}) \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + A^0 \mathbf{F}^{\varepsilon\varsigma}$$

μόνιμη λύση, διότι δια κάθε ζεύγος $\Delta\chi, \Delta\psi$ ή έχει άπειρες λύσεις ως προς $\mathbf{V}^{\varepsilon\varsigma}$ ή δεν έχει διότι $\mathbf{R}(A^0) = \mathbf{n} - 1$. Αυτό δεν είναι σωστό διότι η αφομοίωση των εσωτ. $\mathbf{n}1$ εξισώσεων είναι πάντοτε δυνατή και για τα $\Delta\chi, \Delta\psi$ το $\mathbf{V}^{\varepsilon\varsigma}$ ορίζεται μονότιμα.

Στην (4-8) εφαρμόζοντας την μ.ε.τ. έχουμε το σύστημα των κ.ε. ,

$$\begin{pmatrix} A' A^o \\ 1n \quad nn \\ B' A^o \\ 1n \quad nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^o A \\ nn \quad 1n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^o B \\ nn \quad 1n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A' A^o \\ 1n \quad nn \\ B' A^o \\ 1n \quad nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^o F^{\varepsilon o} \\ nn \quad 1n \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} nA' A^o A & nA' A^o B \\ 1n \quad nn \quad 1n & 1n \quad nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} nA' A^o F^{\varepsilon o} \\ 1n \quad nn \\ nB' A^o F^{\varepsilon o} \\ 1n \quad nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1n \\ 1n \end{pmatrix} \cdot \text{Λαμβάνοντας} \\ \text{υπ' όψιν ότι}$$

$$\begin{aligned} A' A^o A &= n[\partial a] - [a]^2, & B' A^o B &= n[bb] - [b]^2, & A' A^o B &= B' A^o A = \\ 1n \quad nn \quad 1n & & 1n \quad nn \quad 1n & & 1n \quad nn \quad 1n \quad 1n \quad nn \quad 1n & \\ &= n[ab] - [a] [b], & & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' A^o F^{\varepsilon o} &= n[af^{\varepsilon o}] - [a] [f^{\varepsilon o}], & B' A^o F^{\varepsilon o} &= n[bf^{\varepsilon o}] - [b] [f^{\varepsilon o}], \\ 1n \quad nn \quad 1n & & 1n \quad nn \quad 1n & \end{aligned}$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\begin{pmatrix} [\partial a] - 1/n[a]^2 & \\ [ab] - 1/n[a] [b] & [bb] - 1/n [b]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [af^{\varepsilon o}] - 1/n[a] [f^{\varepsilon o}] \\ [bf^{\varepsilon o}] - 1/n[b] [f^{\varepsilon o}] \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

Η (4-12) είναι το σύστημα των κ.ε. της πολλαπλής οπισθοτομίας και συμπίπτει με την (4-2) που έχει προκύψει με απαλοιφή του ΔZ από σύστημα των κ.ε. (4-1).

Η γενική εξίσωση σφαλμάτων εσωτ. και εξωτ. μαζί είναι ,

$$\begin{pmatrix} V^{\varepsilon \xi} \\ n1 \\ V^{\varepsilon o} \\ n1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ n1 & n1 \\ 1' A^o A & 1 A^o B \\ n \quad nn \quad n1 & n \quad nn \quad n1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^{\varepsilon \xi} \\ n1 \\ 1 A^o B \\ n \quad nn \quad n1 \end{pmatrix} .$$

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων είναι ,

$$\begin{pmatrix} A' & 1 & A' & A^o \\ 1n & n & 1n & nn \\ B' & 1B' & A^o \\ 1n & n & 1n & nn \\ n1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ n1 \\ 1A^o & A & 1 & A^oB \\ n & nn & n1 & n & nn & n1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ n1 \end{pmatrix} \Delta\psi = - \begin{pmatrix} A' & 1 & A' & A^o \\ 1n & n & 1n & nn \\ B' & 1 & B' & A^o \\ 1n & n & 1n & nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\epsilon\xi} \\ 1A^oF^{\epsilon\sigma} \\ n1 \\ n & nn \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 [aa] - 1/n [a]^2 & . \\ 2 [ab] - 1/n [a] [b] & 2[bb]-1/n [b] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = -$$

$$\begin{pmatrix} [\partial F^{\epsilon\xi}] + [\partial F^{\epsilon\sigma}] - 1/n[a] [F^{\epsilon\sigma}] \\ [bF^{\epsilon\xi}] + [[bF^{\epsilon\sigma}] - 1/n[b] [F^{\epsilon\sigma}] \end{pmatrix} , \quad (4-13)$$

Η (4-13) αποτελείτο σύστημα των κ.ε. για αμοιβαίες σκοπεύσεις μεταξύ αγνώστου σημείου P και γνωστών P_i και συμπίπτει με την (4-7) που περιμέναμε.

Αν οι παρατηρήσεις είναι ανισοβαρείς και P^{εξ}, P^{εσ}

nn nn

οι πίνακες βαρών των εξωτ. και εσωτ. εξισώσεων τότε το σύστημα των κ.ε. είναι :

$$\begin{pmatrix} A' & A' \\ 1n & 1n \\ B' & B' \\ 1n & 1n \\ 0 & -e \\ n & 1n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^{\epsilon\xi} & 0 \\ nn & nn \\ 0 & \rho^{\epsilon\sigma} \\ nn & nn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ n1 & n1 & n1 \\ A & B & -e \\ n1 & n1 & n1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ n1 \\ \Delta Z \end{pmatrix} \Delta\psi = - \begin{pmatrix} A' & A' \\ 1n & 1n \\ B' & B' \\ 1n & 1n \\ 0 & -e \\ 1n & 1n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \rho^{\varepsilon\xi} & \mathbf{0} & \mathbf{F}^{\varepsilon\xi} \\ \mathbf{nn} & \mathbf{nn} & \mathbf{n1} \\ \mathbf{0} & \rho^{\varepsilon\varsigma} & \mathbf{F}^{\varepsilon\varsigma} \rightarrow \\ \mathbf{nn} & \mathbf{nn} & \mathbf{n1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} [\rho^{\varepsilon\xi}\partial\mathbf{a}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\partial\mathbf{a}] & \cdot & \cdot \\ [\rho^{\varepsilon\xi}\partial\mathbf{b}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\partial\mathbf{b}] & [\rho^{\varepsilon\xi}\mathbf{bb}] & [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{bb}] \\ -[\rho^{\varepsilon\sigma}\partial] & -[\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{b}] & [\rho^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = -$$

$$\begin{pmatrix} [\rho^{\varepsilon\xi}\partial\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\partial\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \\ \rho^{\varepsilon\xi}\mathbf{bF}^{\varepsilon\xi} + [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{bF}^{\varepsilon\sigma}] \\ -[\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{f}^{\varepsilon\varsigma}] \end{pmatrix} \quad (4-14)$$

Από την (4-14) παίρνουμε ,

$$-([\rho^{\varepsilon\sigma}\partial] [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{b}]) \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + [\rho^{\varepsilon\sigma}] \Delta Z = +[\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{f}^{\varepsilon\sigma}] \text{ και} \quad (4-14\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} [\rho^{\varepsilon\xi}\partial\mathbf{a}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\partial\mathbf{a}] - 1/[\rho^{\varepsilon\sigma}] [\rho^{\varepsilon\sigma}\partial]^2 & \cdot \\ [\rho^{\varepsilon\xi}\partial\mathbf{b}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\partial\mathbf{b}] - 1/[\rho^{\varepsilon\sigma}] [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{b}]^2 & [\rho^{\varepsilon\xi}\mathbf{bb}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{bb}] - 1/[\rho^{\varepsilon\sigma}] [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{b}]^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\rho^{\varepsilon\xi}\partial\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] - 1/[\rho^{\varepsilon\sigma}] [\rho^{\varepsilon\sigma}\partial][\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \\ [\rho^{\varepsilon\xi}\mathbf{bF}^{\varepsilon\xi}] + [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{bF}^{\varepsilon\sigma}] - 1/[\rho^{\varepsilon\sigma}] [\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{b}][\rho^{\varepsilon\sigma}\mathbf{F}^{\varepsilon\sigma}] \end{pmatrix} \quad (4-14\beta)$$

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση που έχουμε n εξωτερικές σκοπεύσεις και k εσωτερικές. Οι k εσωτερικές σκοπεύσεις δεν είναι αναγκαίο να έχουν γίνει σε k εκ των n γνωστών που έχουν γίνει οι εξωτερικές σκοπεύσεις .

Η γενική εξίσωση σφαλμάτων θα είναι ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^{\varepsilon\xi} \\ \mathbf{n1} \\ \mathbf{V}^{\varepsilon\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{n1} & \mathbf{n1} & \mathbf{n1} \\ \mathbf{A1} & \mathbf{B1} & -\mathbf{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\varepsilon\xi} \\ -\mathbf{n1} \\ \mathbf{F}^{\varepsilon\sigma} \end{pmatrix} .$$

$$\begin{matrix} n1 & & κ1 & κ1 & κ1 & & κ1 \end{matrix}$$

Εάν $P^{εξ}$ και $P^{εσ}$ οι πίνακες βαρών τότε το σύστημα των κ.ε. είναι ,

$$\begin{pmatrix} A' & A'_1 \\ 1n & 1κ \\ B' & B'_1 \\ 1n & 1κ \\ \mathbf{0} & -\mathbf{e}' \\ 1n & 1κ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^{εξ} A & \rho^{εξ} B & \mathbf{0} \\ mn & n1 & mn & n1 & n1 \\ \rho^{εσ} A_1 & \rho^{εξ} B_1 & -\rho^{εσ} \mathbf{e} \\ κκ & κ1 & κκ & κ1 & κκ & κ1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \\ \Delta Z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A' & A'_1 \\ 1n & 1κ \\ B' & B'_1 \\ 1n & 1κ \\ \mathbf{0} & -\mathbf{e}' \\ 1n & 1κ \end{pmatrix} \quad (4-15)$$

Με απαλοιφή του ΔZ λαμβάνουμε ακριβώς τις ίδιες σχέσεις (4-14α) για το $\Delta\chi$ και (4-14β) για τα $\Delta\chi, \Delta\psi$. Αν οι παρατηρήσεις είναι ισοβαρείς, $P^{εξ} = I, P^{εσ} = I$, οι αντίστοιχες σχέσεις είναι ,

$$\begin{matrix} nn & nn & κκ & κκ \end{matrix} - ([\mathbf{a}]_κ \ [\mathbf{b}]_κ) \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + κ\Delta Z = +[\mathbf{f}^{εξ}]_κ \quad \text{και} \quad (4-15\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} [\partial\mathbf{a}] + [\partial\mathbf{a}]_κ - 1/κ [\mathbf{a}]_κ^2 \\ [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ab}]_κ - 1/κ [\mathbf{a}]_κ [\mathbf{b}]_κ \quad [\mathbf{bb}] + [\mathbf{bb}]_κ - 1/[\mathbf{b}]_κ^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\mathbf{af}^{εξ}] + [\mathbf{af}^{εξ}]_κ - 1/κ [\mathbf{a}]_κ [\mathbf{f}^{εσ}]_κ \\ [\mathbf{bf}^{εξ}] + [\mathbf{bf}^{εσ}]_κ - 1/κ [\mathbf{b}]_κ [\mathbf{f}^{εσ}]_κ \end{pmatrix}, \quad (4-15\beta)$$

όπου το $[\]_κ$ δηλώνει άθροισμα $κ$ όρων που έχουν προκύψει από $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}^{εξ}$ των εσωτερικών εξισώσεων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αν έχουμε n εξωτερικές σκοπεύσεις στο σημείο P και από το P η εσωτερικές σκοπεύσεις σε γνωστά τριγωνομετρικά που δεν είναι εκείνα από τα οποία έγιναν οι εξωτερικές σκοπεύσεις τότε οι συντελεστές \mathbf{a}, \mathbf{b} δεν

έχουν καμία σχέση μεταξύ τους . Οι **a,b** ταυτίζονται μόνο για αμοιβαίες σκοπεύσεις. Γι' αυτό από εδώ και στο εξής θα ξεχωρίζουμε τους πίνακες των **a,b** των εξωτ. και εσωτ. εξισώσεων όταν είναι αναγκαίων. Στη περίπτωση ανισοβαρών παρατηρήσεων ο διαχωρισμός αυτός υπάρχει π.χ. σχέση (4-14β)

ΣΧΟΛΙΑ

Η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε και οι σχετικές απόδειξης είναι αποτέλεσμα προσπάθειας συντάξεως προγράμματος για ηλεκτρονικό υπολογιστή (H/Y) που να καλύπτει οποιαδήποτε περίπτωση. Στην όλη διαδικασία επιδιώχθηκε η ανάλυση του αλγορίθμου να είναι λεπτομερής και ελεγχόμενη, διότι έτσι μόνο βεβαιωνόμαστε ότι τα αποτελέσματα του είναι σωστά. Δεν πρέπει ένας αλγόριθμος που έγινε πρόγραμμα για H/Y, να ελέγχεται από τα αποτελέσματα της λύσεως κάποιου σχετικού προβλήματος μόνο.

Στην συγκεκριμένη μέθοδο, της μεταβολής των συντεταγμένων, η εφαρμογή ενός αλγορίθμου εμπειρικά μόνο, μετά από μερικά “περάσματα” στον H/Y ενδεχομένως να δώσει αποτελέσματα συμβατικά. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η λύση που πήραμε είναι η λύση ελαχίστων τετράγωνων. Αρκεί μόνο να σκεφτούμε ότι με απείρους τρόπους μπορούμε να κάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων παρατηρήσεων συμβιβαστό και με παραδεχτά αποτελέσματα.

Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι η προηγηθείσα ανάλυση εφαρμόζεται, επακριβώς και όταν αντί για καρτεσιανές συντεταγμένες (χ, ψ) χρησιμοποιούμε γεωδαιτικές (φ, λ) . Αρκεί όταν υπάρχει $\Delta\chi$ να τεθεί $\Delta\lambda$, $\Delta\psi$ να τεθεί $\Delta\varphi$ και με το ΔZ να εννοούμε τη διόρθωση του προσεγγιστικού γεωδαιτικού αζιμουθίου στα άγνωστα σημεία. Φυσικά οι συντελεστές **a,b,c,d** και **f** θα παίρνονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις παρατηρήσεως γεωδαιτικού αζιμουθίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΓΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

5.1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή γίνεται μια λεπτομερής ανάλυση της μετάδοσης σφαλμάτων στις πλευρές των τυπικών σχημάτων τριγωνισμού. Πέρα απ' αυτό όμως αποδείχτηκε ότι στις κλειστές αλυσίδες, η "αδύνατη" από πλευράς ακρίβειας περιοχή είναι η μεσαία, όπως και σε μια κλειστή όδευση [I], το "αδύνατο" σημείο είναι η μεσαία κορυφή της . ακόμη αποδείχτηκε ότι μετά ότι μετά την αφομοίωση, τα τυπικά σφάλματα των στοιχείων του δικτύου ορίζονται μόνιμα. Δηλαδή με οποιοδήποτε "δρόμο" κι αν υπολογιστούν είναι τα ίδια, ενώ πριν την αφομοίωση ο ευνοϊκότερος δρόμος, δίνει και μικρότερο τυπικό σφάλμα .

Δίδονται αναλυτικές σχέσεις προσδιορισμού των σφαλμάτων κλεισίματος των τριγώνων συναρτήσει του πλήθους των τυπικών σχημάτων που αποτελούν το δίκτυο και της *a-priori* ακριβείας των σταθερών (γνωστών) πλευρών.

Οι σχέσεις αυτές γενικεύονται και για τυχαίας μορφής σχήματα, προσεγγίζονται τα κανονικά.

Με το συνδυασμό των σχέσεων προσδιορισμού ακριβείας των βασικών σχημάτων τριγωνισμού, που δίδονται με αυτή την εργασία,

μπορεί να προσδιορισθεί η **a-priori** ακρίβεια των μετρήσεων για να επιτευχθεί μετά την αφομοίωση η επιθυμητή η **a-priori** ακρίβεια .

Είναι δυνατό, παράλληλη χρησιμοποίηση των σχέσεων προσδιορισμού ακριβείας, να απαντήσει κανείς σε παρόμοια ερωτήματα, όπως γίνεται στο τέλος της εργασίας με δύο εφαρμογές.

5.2. ΓΕΝΙΚΑ

Οι βασικές μέθοδοι υπολογισμού της θέσης των τριγωνομετρικών σημείων, είναι ο τριγωνισμός-τριπλευρισμός και οι οδεύσεις .

Για τον προσδιορισμό των θέσεων των τριγωνομετρικών σημείων, εκτελούνται δύο βασικές εργασίες : 1) Οι μετρήσεις πλευρών και γωνιών και οι υπολογισμοί για τον προσδιορισμό των συντελεστών, ως προς ένα καθορισμένο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς .

Οι γεωδαιτικές συντεταγμένες συμπληρώνονται και με το υψόμετρο του κάθε τριγωνομετρικού, από την μέση στάθμη της θάλασσας.

Η πιο πρακτική μέθοδος προσδιορισμού των υψομέτρων των τριγωνομετρικών σημείων, είναι η “Τριγωνομετρική Υψομετρία”.

Πριν την εκτέλεση των μετρήσεων στο έδαφος, πρέπει να έχει καθοριστεί η επιθυμητή επιπεδομετρική και υψομετρική ακρίβεια, της θέσεως των τριγωνομετρικών σημείων, ώστε να εκλεγούν τα κατάλληλα όργανα και οι μέθοδοι μετρήσεων .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6. A-PRIORI ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια στην κλίμακα και στον προσανατολισμό ενός δικτύου, πρέπει να έχουν προκαθοριστεί η ακρίβεια μετρήσεων στο έδαφος με τα κατάλληλα όργανα . Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους . Πιο σωστό όμως είναι, να προσδιορισθεί η **a-posteriori** μεταβλητότητα-συμμεταβλητότητα των στοιχείων του δικτύου και μετά, με το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων, να υπολογιστεί το σφάλμα θέσεως σε οποιαδήποτε κορυφή του δικτύου. Οπότε, αν δεν ικανοποιείται η επιθυμητή ακρίβεια, πρέπει να βελτιωθεί η **a-priori** ακρίβεια των μετρήσεων . Αυτό είναι και αντιοικονομικό και πρακτικά δύσκολο, διότι οι μετρήσεις στο έδαφος απαιτούν πολύ χρόνο. Γι'αυτό ο σχεδιασμός ενός δικτύου πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή, **a-posteriori** διασπορά των στοιχείων του, να είναι "μικρή". Πρέπει, στις εξισώσεις παρατηρήσεων, να αντιστοιχεί πίνακας **(disine matrix)** που να δίνει πίνακα των κανονικών εξισώσεων, τέτοιο ώστε, τα στοιχεία του αντιστρόφου πίνακος του, να τείνουν στο μηδέν . Το μοντέλο δικτύου με την καλύτερη γεωμετρική μορφή βρίσκεται **a-priori**. Είναι μάλιστα καθαρά πρόβλημα μαθηματικό : "Ποιά σχέση πρέπει να υπάρχει μεταξύ των στηλών ενός μη τετραγωνικού πίνακα A , ώστε ο $A A'$ να έχει αντίστροφο, που τα στοιχεία του να τείνουν στο μηδέν."

Σε δίκτυο με προκαθορισμένη γεωμετρική μορφή η βελτιστοποίηση του μπορεί να γίνει μόνο με επιπρόσθετες μετρήσεις και κυρίως πλευρών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

7. ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΣΕ ΤΥΠΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΥ – ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ

Οι καθιερωμένες τυπικές μορφές σχημάτων τριγωνισμού, είναι το τρίγωνο, το τετράπλευρο και το κεντρικό δίκτυο .

Το κάθε σχήμα θα εξετασθεί από απόψεως σφαλμάτων χωριστά, αλλά και υπό μορφής ανοικτής η' κλειστής αλυσίδας, έτσι ώστε να δοθούν αναλυτικές σχέσεις προσδιορισμού **a-priori**, των γωνιακών σφαλμάτων κλεισίματος των τριγώνων των δικτύων, συναρτήσει της δοσμένης ακρίβειας του δικτύου εξαρτήσεως και της επιθυμητής του νέου δικτύου.

Η ανάλυση σφαλμάτων θα γίνει με τη μέθοδο εξισώσεων συνθηκών διότι είναι “ελεύθερη” του σχήματος αναφοράς. Θα υποτίθεται ότι για κάθε σχήμα υπάρχει μια πλευρά γνωστή (βάση) και οι γωνίες έχουν μετρηθεί με την ίδια **a-priori** ακρίβεια. Οπότε, θα προσδιορίζεται σε κάθε περίπτωση ο πίνακας διασποράς και με το νόμο μεταδόσεως των σφαλμάτων, θα υπολογίζεται το σφάλμα κλίμακας και αζιμουθίου της ποιο απομακρυσμένης από τη βάση πλευράς . Πολύ περιληπτικά καταχωρούνται ποιο κάτω, οι σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των σφαλμάτων.

Στη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών, αν $X' = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ είναι το διάνυσμα των αφομοιωμένων μεγεθών, τότε ο πίνακας διασποράς $COV(X)$ αυτών είναι :

$$(i) \quad \text{COV}(\mathbf{X}) = \sigma_0^2(\mathbf{I} - \mathbf{C}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}),$$

Όπου ο πίνακας των συντελεστών των εξισώσεων συνθηκών $\mathbf{CV} = \mathbf{W}$, \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας και $\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1}$ ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων. Το σ_0^2 είναι η **a-posteriori** μεταβλητότητα της μονάδος βάρους και δίδεται από τη σχέση :

$$(ii) \quad \sigma_0^2 = (\lambda' * \mathbf{W}) / \mathbf{r}$$

όπου $\lambda' = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]'$ λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων $(\mathbf{C}\mathbf{C}')\lambda = \mathbf{W}$ και το \mathbf{r} το πλήθος τους.

Η μεταβλητότητα $\text{Var}(\mathbf{X})$, των αφομοιωμένων μεγεθών, δίνεται από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\text{COV}(\mathbf{X})$, ή κατ' ευθείαν από την σχέση :

$$(iii) \quad \sigma^2_{\chi_i} = \text{Var}(\mathbf{X}_i) = \sigma_0^2 (\mathbf{1} - \mathbf{C}_i'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_i),$$

όπου \mathbf{C}_i το διάνυσμα στήλη του πίνακα \mathbf{C} .

Αν $\mathbf{u} = \mathbf{f}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{f}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{F}\mathbf{X}$ είναι μια γραμμική συνάρτηση των χ_i , $i = 1(1)n$, η μεταβλητότητα $\text{Var}(\mathbf{u}) = \sigma\mathbf{u}^2$ αυτής δίνεται από τη σχέση :

$$(iv) \quad \sigma^2_{\mathbf{u}} / \sigma_0^2 = [\mathbf{f}\mathbf{f}] - [\mathbf{c}^1\mathbf{f}] \mu_1 - [\mathbf{c}^2\mathbf{f}] \mu_2 - \dots - [\mathbf{c}^s\mathbf{f}] \mu_s$$

$$[\mathbf{f}\mathbf{f}] = \mathbf{f}_1^2 + \mathbf{f}_2^2 + \dots + \mathbf{f}_n^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}'$$

$$[\mathbf{C}^1\mathbf{f}] = \mathbf{C}_{11}\mathbf{f}_1 + \mathbf{c}_{12}\mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{c}_{1n}\mathbf{f}_n = \mathbf{C}^1\mathbf{F}'$$

$$[\mathbf{C}^2\mathbf{f}] = \mathbf{C}_{21}\mathbf{f}_1 + \mathbf{c}_{22}\mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{c}_{2n}\mathbf{f}_n = \mathbf{C}^2\mathbf{F}'$$

$$[\mathbf{C}^s\mathbf{f}] = \mathbf{C}_{s1}\mathbf{f}_1 + \mathbf{C}_{s2}\mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{C}_{sn}\mathbf{f}_n = \mathbf{C}^s\mathbf{F}'$$

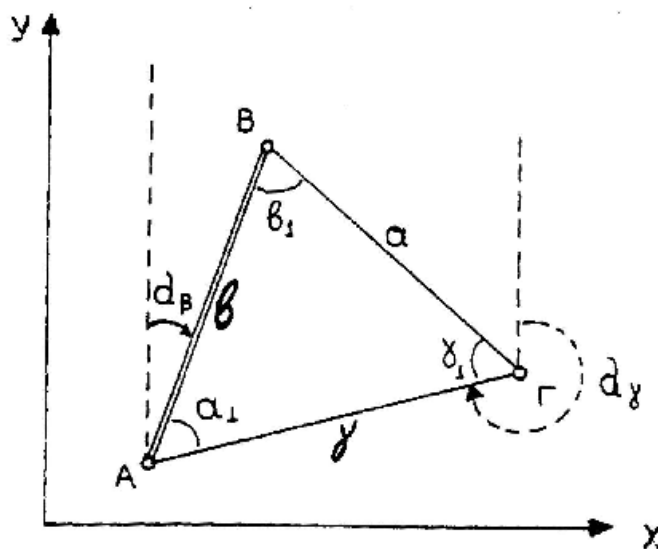
και το $\mu' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s]'$ είναι λύση του συστήματος $\mathbf{M}\mu = \mathbf{C}\mathbf{f}'$.

Τα $\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{C}^s$ είναι τα διανύσματα γραμμές του \mathbf{C} .

Γενικότερα, ο τύπος υπολογισμού του τοπικού σφάλματος είναι :

$$\begin{aligned}
 (10)' \quad \sigma_u^2 &= \sum_{i=1}^n (\partial u / \partial x_i)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j=1}^n [(\partial u / \partial x_i) * (\partial u / \partial x_j)] \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} = \\
 &= (\partial u / \partial x_1)^2 \sigma_{x_1}^2 + 2(\partial u / \partial x_1) * (\partial u / \partial x_2) \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} + \dots + 2 \\
 &(\partial u / \partial x_1) (\partial u / \partial x_n) \sigma_{x_1} \sigma_{x_n} + (\partial u / \partial x_2)^2 \sigma_{x_2}^2 + 2(\partial u / \partial x_2) * (\partial u / \\
 &\partial x_3) \sigma_{x_2} \sigma_{x_3} + \dots + (\partial u / \partial x_1) (\partial u / \partial x_n) \sigma_{x_1} \sigma_{x_n}
 \end{aligned}$$

7.1. ΤΡΙΓΩΝΟ



Στο τρίγωνο ABΓ, η πλευρά AB είναι γνωστή μήκους β έχουν μετρηθεί $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ με την ίδια ακρίβεια. Αν $d\alpha_1, d\beta_1, d\gamma_1$, για να γίνει το άθροισμα τους 180° , θα ισχύει :

$$\alpha_1 + d\alpha_1 + \beta_1 + d\beta_1 + \gamma_1 + d\gamma_1 = 180^\circ \rightarrow$$

$$d\alpha_1 + d\beta_1 + d\gamma_1 = 180 - \alpha - \beta - \gamma$$

$$d\alpha_1 + d\beta_1 + d\gamma_1 = w \leftrightarrow [111] [d\alpha_1 + d\beta_1 + d\gamma_1] = w \rightarrow C \cdot V = W \quad (1)$$

$$(1) \rightarrow M = CC' = [111][111]' = 3 \rightarrow$$

$$M^{-1} = 1/3 \quad (2)$$

$$M \lambda = W \rightarrow \lambda = M^{-1} W \rightarrow \lambda = W / 3 \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \lambda' W / 1 = (W/3) W \rightarrow \sigma^2 = W^2 / 3 \quad (4)$$

Ο πίνακας διασποράς των $X' = [d\alpha_1 + d\beta_1 + d\gamma_1]'$ είναι :

$$\text{COV}(X) = \sigma_0^2 (I - C' M^{-1} C) = \sigma_0^2 / 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Σφάλμα κλίμακας :

$$\text{Είναι, } \gamma / \sin\beta_1 = \beta / \sin\gamma_1 \rightarrow \gamma = \beta (\sin\beta_1 / \sin\gamma_1)$$

$$\ln\gamma = \ln\beta + \ln\sin\beta_1 - \ln\sin\gamma_1$$

Από την προηγούμενη σχέση σύμφωνα με την (u)' είναι :

$$\sigma_{\gamma^2} / \gamma^2 = \sigma_{\beta^2} / \beta^2 + \cot^2\beta_1 \sigma_{\beta_1^2} + \cot^2\gamma_1 \sigma_{\gamma_1^2} - 2 \cot\beta_1 \cot\gamma_1 \sigma_{\beta_1\gamma_1}$$

Από την (5) $\rightarrow \sigma_{\beta_1^2} = \sigma_{\gamma_1^2} = 2\sigma_0^2 / 3$ και $\sigma_{\beta_1\gamma_1} = -\sigma_0^2 / 3$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$\sigma_{\gamma^2} / \gamma^2 = \sigma_{\beta^2} / \beta^2 + 2\sigma_0^2 (\cot^2\beta_1 + \cot^2\gamma_1) / 3 + 2\sigma_0^2 \cot\beta_1 \cot\gamma_1 / 3 \quad (1-1)$$

Αν το τρίγωνο υποτεθεί ισόπλευρο ($\cot 60^\circ = \lambda = 1/\sqrt{3}$), τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$\sigma\gamma^2/\gamma^2 = \sigma\beta^2/\beta^2 + 2\lambda^2\sigma\sigma^2 = \sigma\beta^2/\beta^2 + (2/3)\sigma\sigma^2 \quad (1-1')$$

Με αντικατάσταση του $\sigma\sigma^2$ στην (1-1') από την (4), λαμβάνεται μια χρήσιμη σχέση, μεταξύ του σφάλματος κλίμακος και του γωνιακού σφάλματος κλεισίματος W του τριγώνου :

$$\begin{aligned} \sigma\gamma^2/\gamma^2 &= \sigma\beta^2/\beta^2 + (2/3)(W^2/3) = \sigma\beta^2/\beta^2 + (2/9)(W''/\rho'')^2 \rightarrow \\ W'' &= \rho''(3/\sqrt{2}) \sqrt{\sigma\gamma^2/\gamma^2 - \sigma\beta^2/\beta^2}, \rho'' = 206265 \end{aligned} \quad (1-2)$$

Η (1-2), με γνωστά το σχετικό σφάλμα σ_β/β της βάσεως β και το επιθυμητό σ_γ/γ της γ , δίνει το **a-priori** γωνιακό σφάλμα (W) κλεισίματος του τριγώνου, με επίπεδο εμπιστοσύνης **68%** ($W = \sigma W$) και **95%** ($W = 2\sigma W$)

ΠΙΝΑΚΑΣ (Ι)

(Ένα ισόπλευρο τρίγωνο)

Σχετικό σφάλμα βάσεως : σ_{β} / β	Επιθυμητό σχετικό σφάλμα πλευράς: σ_{γ} / γ	Ανεκτό σφάλμα τριγώνου	
		σW	$2 \sigma W$
I : 250.000	I : 100.000	4.'01	8''.02
I : 250.000	I : 50.000	8.57	17.15
I : 100.000	I : 50.000	7.58	15.16
I : 50.000	I : 25.000	15.16	30.31
I : 50.000	I : 10.000	42.87	85.74
I : 25.000	I : 10.000	40.10	80.20
–	I : 10.000	43.75	87.51

Αν στη σχέση (I-2), δεν ληφθεί υπ' όψη το σχετικό σφάλμα της βάσεως, τότε αυτή γίνεται :

$$w'' = \rho'' (3/\sqrt{2}) \sqrt{\sigma_{\gamma} / \gamma} \quad (I-2)$$

Δηλαδή η βάση θεωρείται χωρίς σφάλμα, ή με σ_{β} / β σημαντικά μικρότερο («) του σ_{γ} / γ .

Σφάλμα αζιμουθίου

Αν αγ είναι το αζιμούθιο της πλευράς γ με τυπικό σφάλμα σαγ και σαβ είναι το τυπικό σφάλμα του αζιμουθίου αβ της βάσεως β, τότε ισχύουν:

$$\alpha\gamma = \alpha\beta + \alpha_1 + 180^\circ \rightarrow \sigma^2\alpha\gamma = \sigma^2\alpha\beta + \sigma^2\alpha_1 \rightarrow$$

$$\sigma^2\alpha\gamma = \sigma^2\alpha\beta + (2/3) \sigma\alpha^2 = \sigma^2\alpha\beta + (2/9) w^2$$

$$w'' = (3/\sqrt{2}) \sqrt{\sigma^2\alpha\gamma - \sigma^2\alpha\beta} \quad (I-3)$$

Με την σχέση (I-3) γίνεται ο ποιο κάτω πίνακας :

ΠΙΝΑΚΑΣ (I') (Ένα ισόπλευρο τρίγωνο)

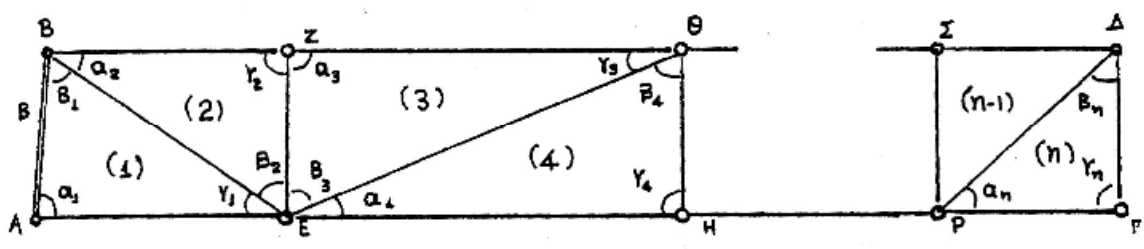
Σφάλμα αζιμουθίου της βάσεως : $\sigma'(\alpha_\beta)$	Επιθυμητό σφάλμα αζιμουθίου της: $\sigma''(\alpha_\gamma)$	Ανεκτό σφάλμα τριγώνου	
		$\sigma W''$	$2 \sigma W''$
1'' (1 / 206.265)	2'' (2 / 206.265)	3.''67	7.''35
0''.83 (1 / 250.000)	4'' 13 (1 / 50.000)	8.57	17.14
2''.06 (1 / 100.000)	4''.13 (1 / 50.000)	7.58	15.16
4''.13 (1 / 50.000)	20''.63 (1 / 10.000)	42.87	85.75

Από τους πίνακες (I) και (I'), φαίνεται ότι το σφάλμα κλεισίματος του τριγώνου, είναι το ίδιο, όταν το σφάλμα αζιμουθίου της βάσεως β και

το επιθυμητό της γ , εκφρασμένα σε ακτίνα (σα'' .1/203265) είναι ίσα με τα αντίστοιχα σχετικά σφάλματα σ_β/β και σ_γ/γ .

Αλυσίδα τριγώνων ανοικτή .

Στην κατωτέρω αλυσίδα τριγώνων ,



υπολογίζεται εύκολα ο πίνακας διασποράς $COV(X) = D(X)$. Αν $D(X_1)$, $D(X_2)$,..... $D(X_n)$, είναι οι πίνακες διασποράς κάθε τριγώνου της αλυσίδας, τότε ισχύει :

$$\begin{bmatrix} D(X_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(X_2) & & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & D(X_n) \end{bmatrix} , \quad D(X_i) = 1/3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} , \quad i=1(1)n$$

διότι οι γωνίες μεταξύ των τριγώνων είναι και μετά την αφομοίωση ασυσχέτιστες. Το σ_0^2 υπολογίζεται ως ακολούθως :

$$M = CC' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & & 3 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = (1/3) I$$

$$M\lambda = W \rightarrow \lambda = M^{-1}W = (1/3)I = \begin{bmatrix} W1 \\ W2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Wn \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda1 \\ \lambda2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda n \end{bmatrix} = (1/3) \begin{bmatrix} W1 \\ W2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Wn \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2 = (\lambda' W) / n = (1/3)\{[W1, W2, \dots, Wn] \cdot [W1, W2, \dots, Wn]'\} / n = \\ = (W1^2, W2^2, \dots, Wn^2) / 3n \rightarrow \sigma^2 = [W W] / 3n \quad (6)$$

Η σχέση (6) που δίνει τι σ^2 είναι ο τύπος του **Ferrero**. Αν η αφομοίωση είχε γίνει με τις διευθύνσεις, τότε επειδή σε κάθε εξίσωση τριγώνου είναι 6 οι μη μηδενικοί συντελεστές, ο τύπος **Ferrero** γίνεται :

$$\sigma^2 = [W W] / 6n$$

Από τον πίνακα **D(X)**, λαμβάνονται τα τυπικά σφάλματα των γωνιών $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\sigma_{\alpha_i}^2 = \sigma_{\beta_i}^2 = \sigma_{\gamma_i}^2 = (2/3) \sigma^2 \quad (7)$$

και οι συμμεταβλητότητες μεταξύ των γωνιών κάθε τριγώνου :

$$\sigma_{\alpha_1} \gamma_1 = \sigma_{\alpha_2} \gamma_2 = \dots \sigma_{\alpha_n} \gamma_n = (-1/3) \sigma^2 \quad (8)$$

Σφάλμα κλίμακος

Είναι :

$$\gamma = (\sin \alpha_n / \sin \gamma_n) (\sin \alpha_{n-1} / \sin \gamma_{n-1}) \dots (\sin \alpha_2 / \sin \gamma_2) (\sin \alpha_1 / \sin \gamma_1) \beta \rightarrow$$

$$\ln \gamma = \ln \beta + \sum_{\iota=1}^n \ln \sin(\alpha_{\iota}) - \sum_{\iota=1}^n \ln \sin(\gamma_{\iota})$$

Από την προηγούμενη σχέση σύμφωνα με την (ω)' είναι :

$$\sigma \gamma^2 / \gamma^2 = \sigma \beta^2 / \beta^2 + \sum_{\iota=1}^n \cot^2 \alpha_{\iota} \sigma \alpha_{\iota}^2 + \sum_{\iota=1}^n \cot^2 \gamma_{\iota} \sigma \gamma_{\iota}^2 - 2 \sum_{\iota=1}^n (\cot \alpha_{\iota} \cot \gamma_{\iota} \sigma \alpha_{\iota} \gamma_{\iota}) \rightarrow$$

$$\sigma \gamma^2 / \gamma^2 = \sigma \beta^2 / \beta^2 + (2/3) \sigma \sigma^2 \sum_{\iota=1}^n (\cot^2 \alpha_{\iota} + \cot^2 \gamma_{\iota}) + (2/3) \sigma \sigma^2 \sum_{\iota=1}^n (\cot \alpha_{\iota} + \cot \gamma_{\iota}) \quad (1-4)$$

Αν είναι $\alpha_{\iota} = \beta_{\iota} = \gamma_{\iota} = 60^{\circ}$ τότε $\cot \alpha_{\iota} = \cot \gamma_{\iota} = 1/\sqrt{3} = \lambda$

Και η (1-4) γίνεται :

$$\begin{aligned} \sigma \gamma^2 / \gamma^2 &= \sigma \beta^2 / \beta^2 + (2/3) \sigma \sigma^2 2n\lambda^2 + (2/3) \sigma \sigma^2 2n\lambda^2 = \\ &= \sigma \beta^2 / \beta^2 + 2\lambda^2 \sigma \sigma^2 n \rightarrow \end{aligned}$$

$$\sigma \gamma^2 / \gamma^2 = \sigma \beta^2 / \beta^2 + (2/3) n \sigma \sigma^2 = \sigma \beta^2 / \beta^2 + (n(2/3) [W W] / 3n) \quad (1-5)$$

$$(1-5) \rightarrow \sqrt{[W W]} / \sqrt{3} = \rho \cdot \sqrt{(3/2)} \cdot \sqrt{\sigma \gamma^2 / \gamma^2 - \sigma \beta^2 / \beta^2} \quad (1-6)$$

Με την (1-6) γίνεται ο ποιο κάτω πίνακας :

ΠΙΝΑΚΑΣ (I I)

(Τυπικό σφάλμα μονάδα βάρους)

Τάξη Δικτ.	Σχετικό σφάλμα βάσεως : $\sigma\beta / \beta$	Επιθυμητό σχετικό σφάλμα πλευράς : $\sigma\gamma / \gamma$	$\sqrt{[W W] / 3} = \rho'' \sqrt{3 / 2} \cdot \sqrt{\sigma\gamma^2 / \gamma^2 - \sigma\beta^2 / \beta^2}$
I	I :1.000.000	I :500.000	0'' .44
II	I :500.000	I :250.000	0'' .88
III	I :250.000	I :100.000	2'' .32
IV	I :100.000	I :50.000	4'' .38

Αν υποθεθεί ότι $W_1 = W_2 = \dots = W_n$ τότε από την (1-6) \rightarrow

$$\sqrt{n} = W^2 / \sqrt{3} = \rho'' (\sqrt{3/2}) \cdot \sqrt{\sigma\gamma^2 / \gamma^2 - \sigma\beta^2 / \beta^2} \rightarrow$$

$$W'' = \sqrt{3/n} \cdot \rho'' \sqrt{3/2} \cdot \sqrt{\sigma\gamma^2 / \gamma^2 - \sigma\beta^2 / \beta^2} =$$

$$= \rho'' \sqrt{3/2n} W'' \cdot \sqrt{\sigma\gamma^2 / \gamma^2 - \sigma\beta^2 / \beta^2} \quad (1-7)$$

Με τη σχέση (1-7) και με τον πίνακα (II) κατασκευάζεται ο ποιο κάτω πίνακας που δίνει και το σφάλμα κλεισίματος σε τριγωνομετρικά δίκτυα συναρτήσεως του πλήθους ή των τριγώνων της ανοικτής αλυσίδας .

ΠΙΝΑΚΑΣ (Ι Γ')

Ανοικτή αλυσίδα ισοπλ. τριγώνων

Τάξη Δικτ.	Σφάλμα βάσεως : σβ / β	Επιθυμητό σχετικό σφάλμα στο τέλος της αλυσίδας : σγ/γ	Σφάλμα κλεισίματος : $\sigma_w = \sqrt{3/n} \cdot \sqrt{ww}/3$ για πλήθος τριγώνων : n								
			$\sqrt{ww}/\sqrt{3}$	n=1 σ_w 2σw		n=3 σ_w 2σw		n=10 σ_w 2σw		n=20	
	I:I.000.000	I :500.000	0'' .44	0.76	1.52	0.44	0.88	0.24	0.48	0.17	0.34
II	I :500.000	I :250.000	0.88	1.52	3.05	0.88	1.76	0.48	0.96	0.34	0.68
III	I :250.000	I :100.000	2.32	4.04	8.07	2.32	4.64	1.27	2.54	0.90	1.80
IV	I :100.000	I :50.000	4.38	7,59	15.17	4.38	8.76	2.40	4.80	1.70	3.39

Από το πίνακα (II)' , φαίνεται πόσο πολύ μικραίνει το σφάλμα κλεισίματος των τριγώνων, ανάλογα με το πλήθος τους n .

Γι' αυτό, μεταξύ των τριγώνων, πρέπει να μετριόνται βάσεις, για τη διατήρηση της επιθυμητής κλίμακας .

Σφάλμα αζιμουθίου

Είναι :

$$\partial_{\Delta\Gamma} = \partial_{AB} = B_1 + B_2 + \dots + B_n \pm 180^\circ$$

$$\sigma^2(\partial_{\Delta\Gamma}) = \sigma^2(\partial_{AB}) + \sigma_{B_1}^2 + \sigma_{B_2}^2 + \dots + \sigma_{B_n}^2 = \sigma^2(\partial_{AB}) + n \cdot \sigma_B^2$$

$$\sigma^2(\partial_{\Delta\Gamma}) = \sigma^2(\partial_{AB}) + n(2/3)\sigma_0^2 = \sigma^2(\partial_{AB}) + n(2/3)([WW]/3n)$$

$$= \sigma^2(\partial_{AB}) + n(2/3)(nW^2/3n) = \sigma^2(\partial_{AB}) + n(2/9)W^2 \rightarrow$$

$$W'' = (3/\sqrt{2n}) \cdot \sqrt{\sigma^2(\partial_{\Delta\Gamma}) - \sigma^2(\partial_{AB})} \quad (1-8)$$

Από την (1-7) και (1-8), συνάγεται ότι το σφάλμα κλεισίματος W'' των τριγώνων, είναι το ίδιο αν το σφάλμα αζιμουθίου σ(θβ) στην βάση

$$M = CC' = \left[\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ & \cdot & \cdot \\ & 0 & 1 \\ \hline 0 \dots 0 & 2n\lambda^2 & 0 \\ 1 \dots 1 & 0 & n \end{array} \right]$$

Σφάλμα κλίμακας

Θα υπολογιστεί το σφάλμα της πλευράς $MN=C$ από την βάση a
 $a \rightarrow c : c = a (\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_k) / (\sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin\gamma^k) \rightarrow$

$$\ln c = \ln a + \sum_{\iota=1}^k \ln \sin \alpha_{\iota} - \sum_{\iota=1}^k \ln \sin \gamma_{\iota} \rightarrow$$

$$dc / c = da / a + \sum_{\iota=1}^k \cot \alpha_{\iota} d\alpha_{\iota} - \sum_{\iota=1}^k \cot \gamma_{\iota} d\gamma_{\iota} \rightarrow$$

$$\sigma_c^2 / c^2 = \sigma_a^2 / a^2 + \sigma^2 df \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha^1} \\ \sigma_{\gamma^1} \\ \sigma_{\alpha^2} \\ \sigma_{\gamma^2} \end{bmatrix}$$

Έχοντας υπ' όψη τις (11) , (12) και (13) η (10) γίνεται :

$$\begin{aligned} \sigma^2 df / \sigma^2 &= 2\kappa\lambda^2 + 2\kappa\lambda^2 (-\kappa / n) = 2\lambda^2\kappa (1 - \kappa / n) \rightarrow \\ \sigma^2 df &= \sigma^2 2\lambda^2\kappa (n - \kappa) / n \rightarrow \end{aligned} \quad (14)$$

Από την (9) και (14) \rightarrow

$$\sigma c^2 / c^2 = \sigma a^2 / a^2 + \sigma^2 2\lambda^2\kappa (n - \kappa) / n \quad (15)$$

Το μέρος του σχετικού σφάλματος $\sigma c^2 / c^2$ που οφείλεται στις γωνίες, των K το πλήθος τριγώνων, είναι :

$$\sigma^2 2\lambda^2\kappa (n - \kappa) / n$$

Αν υπολογισθεί από την βάση $b \rightarrow c$ και αν υποτεθεί ότι τα τρίγωνα (n) , $(n-1)$,... $(k-1)$

είναι τ το πλήθος, έτσι ώστε να είναι $\tau + \kappa = n$, τότε σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο, θα είναι :

$$\sigma^2 2\lambda^2 \tau (n - \tau) / n = \sigma^2 2\lambda^2 (n - \kappa) [n - (n - \kappa)] / n = \sigma^2 2\lambda^2 \kappa (n - \kappa) / n ,$$

δηλαδή ίσο με το υπολογιζόμενο από $a \rightarrow c$

Αυτό αναμένονταν , διότι τα σχετικά σφάλματα, μετά την αφομοίωση, με οποιονδήποτε τρόπο κι αν υπολογισθούν ορίζονται μονότιμα .

Ακολουθώντας τον τρόπο όπως και στις οδεύσεις [1], βρίσκουμε ότι για $\kappa = n/2$ έχουμε το μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα που οφείλεται στα σφάλματα των γωνιών των τριγώνων. Ακόμη αν το K θεωρηθεί ως συνεχής μεταβλητή, τότε η συνάρτηση :

$$\varphi(\kappa) = 2\lambda^2 \kappa (n - \kappa) / n$$

έχει μέγιστα για $\kappa = n/2$

Πράγματι :

$$\varphi'(\kappa) = (2\lambda^2 / n) (n - \kappa - \kappa) \rightarrow \varphi'(\kappa) = 0 \text{ για } \kappa = n/2$$

$$\varphi''(\kappa) = (2\lambda^2 / n) (-2) < 0 \text{ άρα η } \varphi(\kappa) \text{ έχει μέγιστο}$$

Επομένως, σε μια κλειστή κι από τα δύο άκρα αλυσίδα, τα ''αδύνατα'' σημεία της είναι τα μεσαία .

Επειδή κάθε βάση συμμετέχει στο σφάλμα κλίμακος ανεξαρτήτως, συνάγεται ότι το σχετικό σφάλμα σε μια οποιαδήποτε πλευρά C θα είναι:

$$\sigma c^2 / c^2 = \sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2 + \sigma \omega^2 (2/3) \kappa (n - \kappa) / n \quad (16)$$

Αν το $\sigma \omega^2$ ληφθεί από τον τύπο του Ferrero : $\sigma \omega^2 = [w w] / 3n$

η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$\begin{aligned} \sigma c^2 / c^2 &= \sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2 + [(n w^2) / (3n)] (2/3) \kappa (n - \kappa) / n = \\ &= \sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2 + w^2 (2/9) \kappa (n - \kappa) / n \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (17) \rightarrow w'' &= \rho'' [3\sqrt{n} / \sqrt{2\kappa(n - \kappa)}] \cdot \sqrt{(\sigma c^2 / c^2) - (\sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2)} \rightarrow \\ &\rightarrow w'' = \rho'' [3\sqrt{n} / \sqrt{2\kappa(n - \kappa)}] \cdot \sqrt{(\sigma c^2 / c^2) - 2\sigma b^2 / b^2}, \quad \sigma \alpha^2 / \alpha^2 = \\ &\sigma b^2 / b^2 (1-9) \end{aligned}$$

$$\text{Για } \kappa = n/2 \text{ είναι } w'' = \rho'' 3\sqrt{2n} \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - 2\sigma b^2 / b^2} \quad (1-9)'$$

Με τη σχέση (1-9) ή (1-9)' κατασκευάζεται ο πιο κάτω πίνακας, που δ'9νει το επιτρεπτό σφάλμα κλεισίματος των τριγώνων εξαρτημένης αλυσίδας και από τα δύο άκρα με επίπεδο εμπιστοσύνης 68% (σw) και 95% ($2 \sigma w$)

ΠΙΝΑΚΑΣ (I I I)

(Κλειστή αλυσίδα ισοιπλ. Τριγώνων)

Τάξη Δικ.	Σχετικό σφάλμα βάσεων	Επιθυμητό σχετικό σφάλμα στο μέσο της αλυσίδας :	Σφάλμα κλεισίματος W'' Τριγώνων					
			n=10→K=5		n=20→K=10		n=30→K=15	
			σw	2σw	σw	2σw	σw	2σw
I	I:1.000.000	I:500.000	0''.39	0''.78	0''.28	0''.55	0''.23	0''.45
II	I:500.000	I:250.000	0.78	1.57	0.55	1.11	0.45	0.90
III	I:250.000	I:100.000	2.28	4.56	1.61	3.23	1.32	2.64
IV	I:100.000	I:50.000	3.91	7.83	2.77	5.53	2.26	4.52

Από τη σχέση (16), επειδή το τυπικό σφάλμα $\sigma\omega^2$ της μονάδας βάρους χαρακτηρίζει την "εσωτερική ακρίβεια" της αλυσίδας, έχοντας υπόψη και τον πιο κάτω πίνακα (III)', βγαίνει το συμπέρασμα :

ΠΙΝΑΚΑΣ (III)'

A/A	Πλήθος τριγώνων n=8			K = 4	K = I
	σα / α	σb / b	σο	σc / c	σc / c

1	I /50.000	I /50.000	5''/206265	I/25130	I/29582
2	I /50.000	I /40.000	5''/206265	I/23514	I/27039
3	I /50.000	I /40.000	I''/206265	I/30768	I/31028

Μετά την αφομοίωση της αλυσίδας, όσο και μεγάλη και να είναι η ακρίβεια των μετρήσεων ($\sigma/206265$), η σχετική ακρίβεια, σ / c δεν μπορεί να είναι καλύτερη από τη σχετική ακρίβεια των βάσεων και στη δυσμενέστερη περίπτωση ($\kappa = n/2$) και στην ευμενέστερη ($\kappa = 1$) .Οι συνθήκες εξαρτήσεως, εφ' όσον η εσωτερική ακρίβεια του νέου δικτύου είναι μεγαλύτερη, μειώνουν την ακρίβεια του δικτύου, όχι βέβαια και οι συνθήκες αξιώματα που προκύπτουν από τη γεωμετρία του δικτύου . Έτσι, θα ήταν ίσως προτιμότερο, στην αφομοίωση νέων δικτύων με μεγαλύτερη ακρίβεια μετρήσεων από τη ακρίβεια του δικτύου εξάρτησης, να μην χρησιμοποιούνται οι συνθήκες εξάρτησης (δεσμοί) στην μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών, ή να χρησιμοποιείται μόνο έναν τριγωνομετρικό, κατά τη μέθοδο μεταβολής των συντεταγμένων. Αυτό βέβαια στην περίπτωση τοπικών δικτύων μεγάλης ακρίβειας γίνεται οπωσδήποτε .

Σφάλμα αζιμουθίου

Αν θα είναι γνωστό αζιμούθιο της βάσεως a και θc της πλευράς MN της αλυσίδας τότε :

$$\begin{aligned}
\partial c &= \partial \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_k \pm 180^\circ \rightarrow \\
d \partial c &= d \partial \alpha + v^1_\beta + v^2_\beta + \dots + v^k_\beta \rightarrow \\
\sigma^2 \partial c &= \sigma^2 \partial \alpha + \sigma^2 df, \text{ όπου } d f = [1 \dots 1] [v^1_\beta \ v^2_\beta \ v^k_\beta] \quad (18) \\
\sigma^2 df / \sigma^2 &= [f f] - [c_1 f] \mu_1 - [c_2 f] \mu_2 \dots [c_{n+2} f] \mu_{n+2} \\
[f f] &= K, \quad [c_1 f] = 0, \quad [c_2 f] = 1, \dots, [c_k f] = 1 \\
[c_{k+1} f] &= 0, \dots, [c_n f] = 0, \quad [c_{n+2} f] = K
\end{aligned}$$

$$M. \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [c_1 f] \\ [c_2 f] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [c_{n+2} f] \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ \hline 0 \dots 0 & & 2n\lambda^2 & 0 \\ 1 \dots 1 & & 0 & n \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
3\mu_1 + \mu_{n+2} &= 1 \\
\cdot & \\
\cdot & \\
3\mu_k + \mu_{n+2} &= 1 \\
3\mu_{k+1} + \mu_{n+2} &= 0 \\
3\mu_{n-1} + \mu_{n+2} &= 0 \\
3\mu_n + \mu_{n+2} &= 0 \\
2n\lambda^2 \mu_{n+1} &= 0 \\
\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + n\mu_{n+2} &= K
\end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned}
\mu_1 + \mu_2 = \dots = \mu_k &= (n-k)/3n \\
\mu_{k+1} = \dots = \mu_n &= -k/3n \\
\mu_{n+1} &= 0 \\
\mu_{n+1} &= K/n
\end{aligned} \right.$$

H (18) γίνεται :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \partial c &= \sigma^2 \partial \alpha + \sigma^2 o((K-K(n-K)/3n - K^2/n)) \\
&= \sigma^2 \partial \alpha + \sigma^2 o((3Kn - K(n-K)/3K^2)/3n) \\
&= \sigma^2 \partial \alpha + \sigma^2 o(K(2n-2K)/3n) .
\end{aligned}$$

Επομένως είναι :

$$\sigma^2\partial c = \sigma^2\partial a + \sigma^2 o (2/3) \kappa (n-\kappa) / n \quad (19)$$

Αν υπολογισθεί από την βάση $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$, θα βρεθεί με τον ίδιο τρόπο :

$$\sigma^2\partial c = \sigma^2\partial \mathbf{b} + \sigma^2 o (2/3) \kappa (n-\kappa) / n \quad (20)$$

Δηλαδή το μέρος του σφάλματος του αζιμουθίου ∂c που οφείλεται στα σφάλματα των γωνιών των τριγώνων είναι το ίδιο, είτε υπολογισθεί από τη βάση $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{c}$ είτε από $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$.

Τέλος το σφάλμα αζιμουθίου σε οποιανδήποτε πλευρά \mathbf{C} της αλυσίδας είναι :

$$\sigma^2\partial c = \sigma^2\partial a + \sigma^2\partial \mathbf{b} + \sigma^2 o (2/3) \kappa (n-\kappa) / n \quad (21)$$

$$\sigma^2\partial c = \sigma^2\partial a + \sigma^2\partial \mathbf{b} + (nw^2/3n) \kappa (n-\kappa) / n$$

$$= \sigma^2\partial a + \sigma^2\partial \mathbf{b} + w^2(2/9) \kappa (n-\kappa) / n \rightarrow$$

$$w'' = [3\sqrt{n} / \sqrt{2}(\kappa) (n-\kappa)] \sqrt{\sigma^2\partial c - (\sigma^2\partial a + \sigma^2\partial \mathbf{b})} \quad (1-10)$$

Για $\sigma^2\partial a = \sigma^2\partial \mathbf{b}$ και $n=\kappa/2$ η (1-10) γίνεται :

$$w'' = 3\sqrt{2} \sqrt{\sigma^2\partial c - 2\sigma^2\partial \mathbf{b}} \quad (1-10)'$$

Η(1-10)' δίνει το επιτρεπόμενο γωνιακό σφάλμα κλεισίματος των τριγώνων της αλυσίδας συναρτήσει του πλήθους n των τριγώνων, του σφάλματος $\sigma_{\mathbf{b}}$ των δύο βάσεων και του επιθυμητού σφάλματος $\sigma_{\partial c}$ αζιμουθίου στο μέσον αυτής. Με την (1-9)' γίνεται ο πίνακας

ΠΙΝΑΚΑΣ (Ι Ι Ι)'
(Κλειστή αλυσίδα ισοπλ. Τριγώνου)

Σφάλμα αζιμουθίου στις δύο βάσεις : σ_b	Επιθυμητό σφάλμα αζιμουθίου στο μέσο: σ_c	Ανεκτό γωνιακό σφάλμα τριγώνων : $n=10 \rightarrow \kappa=5$	
		σ_w'	$2\sigma_w'$
0'' .21(1/1.000.000)	0'' .41(1/500.000)	0'' .39	0'' .78
0'' .41(1/500.000)	0'' .83(1/250.000)	0'' .78	1'' .57
2'' (1/103132)	4'' (1/51566)	3'' .79	7'' .59

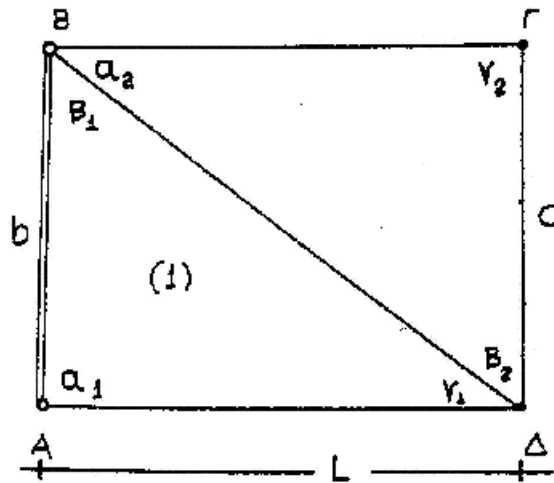
Με σύγκριση των πινάκων (III) και (III)' βγαίνει το συμπέρασμα ότι όταν στην κλίμακα και το αζιμουθίου απαιτείται η ίδια σχετική ακρίβεια, τότε το επιτρεπτό γωνιακό σφάλμα κλεισίματος των τριγώνων είναι το ίδιο .

7.2 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Θα εξετασθεί η περίπτωση ορθογωνίου τετραπλεύρου με μια διαγώνιο και η περίπτωση ορθογωνίου τετραπλεύρου με δύο διαγωνίους .

Το τετράπλευρο με μια διαγώνιο-αλυσίδα

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η $AB=b$ είναι γνωστή (βάση) και οι γωνίες α, β, γ έχουν μετρηθεί με την ίδια ακρίβεια.



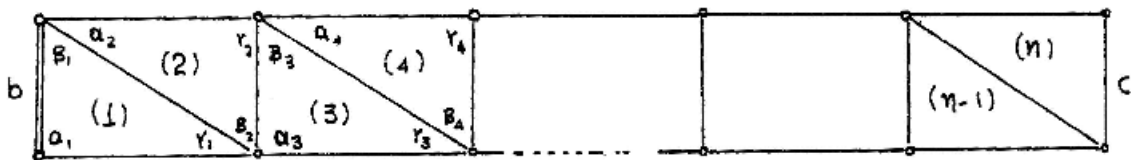
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$M = (1/3)I_2, \quad \lambda = M^{-1} W = (1/3) \cdot [w_1 + w_2]$$

$$\sigma^2 = (\lambda' W / 2) = (w_1^2 + w_2^2) / 2.3$$

Σφάλμα κλίμακος

Αν θεωρηθεί αλυσίδα με $K(n=2K)$ το πλήθος ορθογώνια όμοια, τότε το σφάλμα κλίμακος,



θα είναι :

$$W' = \rho'' \left(\frac{3b}{21\sqrt{\kappa}} \right) \sqrt{\sigma^2 / c^2 - ob^2 / b^2} \quad (2-1)$$

Η (2-3) δίνει το επιτρεπτό γωνιακό σφάλμα κλεισίματος για ανοικτή αλυσίδα με Κ το πλήθος ορθογώνια μιας διαγωνίου, όπου b/L είναι ο λόγος της βάσεως προς τη πλευρά του ορθογωνίου κατά την διεύθυνση αναπτύξεως της αλυσίδας.

Σφάλμα αζιμουθίου

$$W'' = (3/2) (1/\sqrt{\kappa}) \sqrt{\sigma^2 \partial c - \sigma^2 \partial b} \quad (2-2)$$

Με τις σχέσεις (2-3) και (2-4) κατασκευάζεται ο πίνακας :

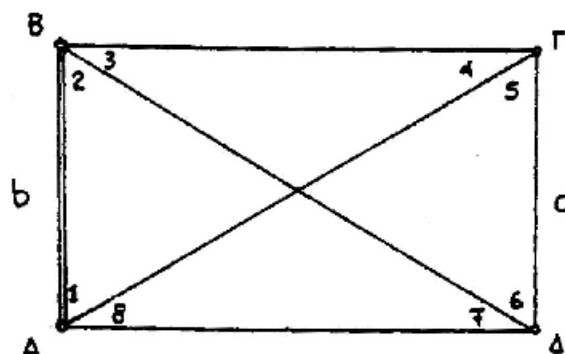
ΠΙΝΑΚΑΣ (IV)

(Ανοικτή αλυσίδα ορθογ. Τετραπλεύρου)

Πλήθος ορθ:Κ	Σφάλμα Βάσεως: $\sigma b/b =$ $\sigma \partial b/\rho''$	Επιθυμητό σφάλμα στο άκρο της αλυσίδας $\sigma c/c = \sigma \partial c/\rho''$	b/L	W'' από σχέσεις:			
				(2-1)		(2-2)	
				σw	$2\sigma w$	σw	$2\sigma w$
1	1:250.000	1:100.000	1/2	1''.42	2''.84	2''.84	5''.67
5	1:100.000	1:50.000	1/2	1.20	2.40	2.40	4.79
10	1:10.000	1:10.000	1/2	4.79	9.59	9.59	19.17

Από τον προηγούμενο πίνακα , φαίνεται ότι υπολογίζοντας το w για τη διατήρηση της κλίμακας σε επιθυμητό επίπεδο, διατηρείται και το αζιμούθιο οπωσδήποτε σε καλύτερη ακρίβεια από την κλίμακα με την προϋπόθεση βέβαια ότι $b/L < 1$

Τετράπλευρο με δύο διαγωνίους - αλυσίδα



Επειδή το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο έχουμε :

$$\cot 1 = \cot 2 = \cot 5 = \cot 6 = b/L = \lambda^{-1}$$

$$\cot 3 = \cot 4 = \cot 7 = \cot 8 = b/L = \lambda$$

Οι εξισώσεις συνθηκών και ο πίνακας είναι :

$$CV = W \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1/\lambda & 1/\lambda & -\lambda & \lambda & -1/\lambda & 1/\lambda & -\lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \cdot \\ \vartheta_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ WS \end{bmatrix}$$

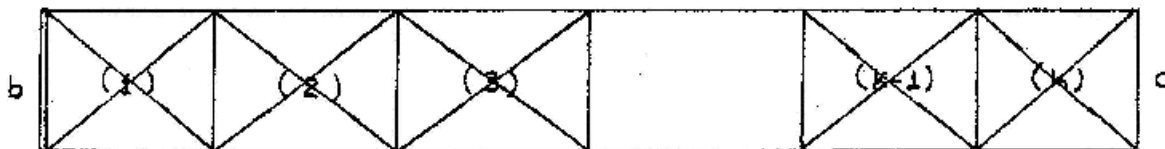
$$M = CC' \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = 1/8 \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r/8 \end{bmatrix}, \quad r = 4(\lambda^2 + 1/\lambda^2)$$

Το σ^2 λαμβάνεται με προσέγγιση από τον τύπο του Ferrero :

$$\sigma^2 = [ww]/3n = [ww]/12$$

Σφάλμα κλίμακος

Αν θεωρηθεί αλυσίδα με K το πλήθος ορθογώνια τετράπλευρα με δύο διαγωνίους, τότε το σχετικό σφάλμα σ_c/c στο τέλος της αλυσίδας θα



είναι :

$$W'' = \rho'' \sqrt{3}/\kappa (b/L) \sqrt{\sigma_c^2 / c^2 - \sigma_b^2 / b^2} \quad (2-3)$$

Σφάλμα αζιμουθίου

Για K συνεχόμενα (αλυσίδα) τετράπλευρα, επειδή το κάθε επόμενο τετράπλευρο, παίρνει το σφάλμα και του προηγούμενου τετραπλεύρου, όπως αποδείχτηκε στην αλυσίδα τριγώνων, η (2-6) γίνεται :

$$W'' = \sqrt{3}/\kappa \sqrt{\sigma^2 \partial c - \sigma^2 \partial b} \quad (2-4)$$

Με τις σχέσεις (2-3) και (2-4) κατασκευάζεται ο πίνακας (V)

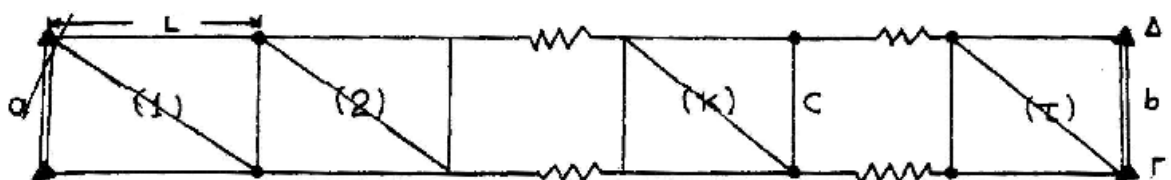
ΠΙΝΑΚΑΣ (V)

(Αλυσίδα ανοικτή ορθ. Τετραπλ. με δύο διαγωνίους)

Πλήθος ορθογ. Τετραπλ.Κ	Σφάλμα Βάσεως: $\sigma b/b =$ $\sigma \delta b/\rho''$	Επιθυμητό σφάλμα στο άκρο της αλυσίδας $\sigma c/c = \sigma \delta c/\rho''$	b/L	W'' από σχέσεις:			
				(2-3) σw $2\sigma w$		(2-4) σw $2\sigma w$	
1	1:250.000	1:100.000	1/2	1''.64	3''.27	3''.27	6''.5
5	1:100.000	1:50.000	1/2	1.38	2.77	2.77	5.53
10	1:10.000	1:10.000	1/2	5.53	11.07	11.07	19.14

Με σύγκριση των πινάκων (IV) και (V) φαίνεται ότι το τετράπλευρο με δύο διαγωνίους, είναι "ισχυρότερο" σχήμα από το αντίστοιχο του με μια διαγώνιο. Αλλά και από τις σχέσεις (2-3) και (2-4) δια διαιρέσεως προκύπτει ο συντελεστής $2\sqrt{3}/3$, που δίνει το μέτρο "ποιότητας" μεταξύ των δύο τετραπλεύρων. Δηλαδή τα αποτελέσματα του πίνακα(V) προκύπτουν από τα αντίστοιχα του(IV) με πολλαπλασιασμό επί $2\sqrt{3}/3$. βέβαια αυτό αναμενόταν, διότι το τετράπλευρο με δύο διαγωνίους έχει μια συνθήκη (αξίωμα), την ημιτονική, παραπάνω .

Αλυσίδα ορθογωνίων τετραπλεύρων μιας διαγωνίου, κλειστή



Εφαρμόζεται η σχέση (16), έχοντας υπ' όψη την (2-2), λαμβάνεται το σφάλμα κλίμακος στην πλευρά C.

$$\sigma c^2 / c^2 = \sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2 + 2(L^2 / b^2) (2/3) \kappa (\tau - \kappa) \sigma \tau / \tau \quad (2-5)$$

$$\sigma^2 \partial c = \sigma^2 \partial \alpha + \sigma^2 \partial b + 2(2/3) \kappa (\tau - \kappa) \sigma \tau / \tau \quad (2-6)$$

$$W'' = \rho'' (b/L) (3/2) \sqrt{\tau} \kappa (\tau - \kappa) \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - (\sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2)} \quad (2-7)$$

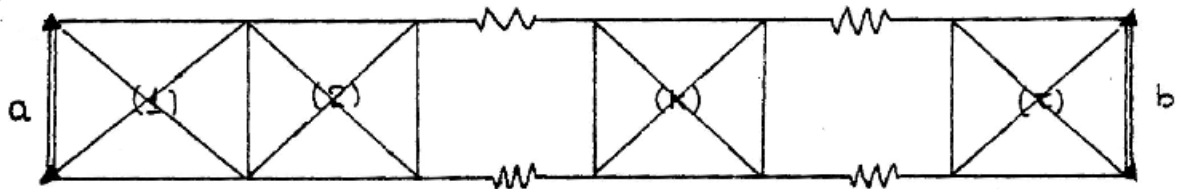
Με τον ίδιο τρόπο λαμβάνεται και το σφάλμα αζιμουθίου της πλευράς c έχοντας υπ' όψη τις σχέσεις (21) και (2-4) :

$$W'' = \rho'' (b/L) (3/\sqrt{\tau}) \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - (\sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2)} \quad (2-8)$$

$$W'' = (3 / \sqrt{\tau}) \sqrt{\sigma^2 \partial c - (\sigma^2 \partial \alpha + \sigma^2 \partial b)} \quad (2-9)$$

Οι σχέσεις (2-8) και (2-9) δίνουν το επιτρεπτό σφάλμα κλεισίματος στο μέσον κλειστής κι από τα δύο άκρα αλυσίδας, συναρτήσει του πλήθους των ορθογωνίων τετραπλεύρων .

Αλυσίδα ορθογωνίων τετραπλεύρων, δύο διαγωνίων, κλειστή



Έχοντας υπ' όψη τις (2-6) και (2-7) το σφάλμα κλίμακας της πλευράς C είναι:

$$W'' = \rho'' (b/L) \sqrt{3\tau / \kappa (\tau - \kappa)} \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - (\sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2)} \quad (2-10)$$

Για $K = \tau / 2$ η (2-11) γίνεται :

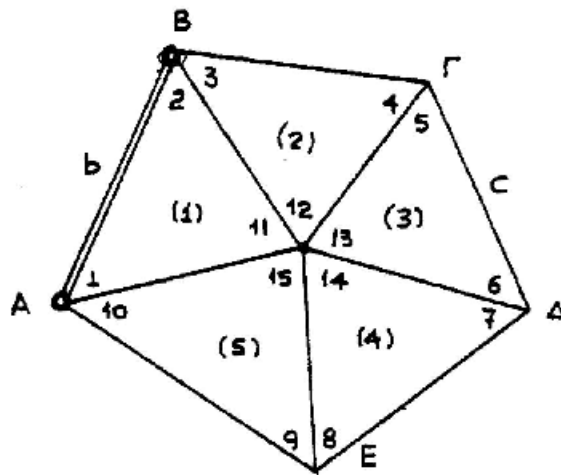
$$W'' = \rho'' (b/L) 2\sqrt{3/\tau} \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - (\sigma \alpha^2 / \alpha^2 + \sigma b^2 / b^2)} \quad (2-10)'$$

$$W'' = \sqrt{3\tau / \kappa (\tau - \kappa)} \sqrt{\sigma^2 \partial c - (\sigma^2 \partial \alpha + \sigma^2 \partial b)} \quad (2-11)$$

Για $K = \tau / 2$ η (2-12) γίνεται :

$$W'' = 2\sqrt{3}/\tau \sqrt{\sigma^2 \partial_c - (\sigma^2 \partial_a + \sigma^2 \partial_b)} \quad (2-11)'$$

7.3. ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΕΝΤΑΓΩΝΟ



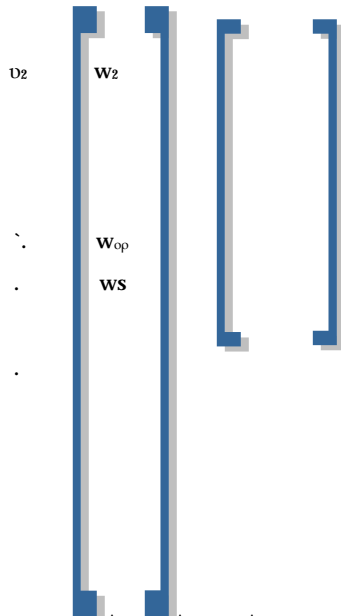
Στο κανονικό πεντάγωνο είναι: $I=2=3=\dots =10=54^\circ$ και

$\Pi=12=\dots=15=72^\circ$. Εάν W_1, W_2, \dots, W_5

Είναι το σφάλμα κλεισίματος των τριγώνων (1), (2), ..., (5), W_{or} το σφάλμα οριζοντος περι το κέντρο του πενταγώνου και W_s το σφάλμα της ημιτονικής συνθήκης, το σύστημα εξισώσεων συνθηκών είναι:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

στ 45°



Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων είναι :

0
0
0
0
0
0
0
0λ²

Σχετικό σφάλμα κλίμακας

Το σχετικό σφάλμα της πλευράς $\Gamma \Delta = C$, είναι ανεξάρτητο του δρόμου υπολογισμού. Δηλαδή είτε υπολογισθεί από τα τρίγωνα 1,2,3 είτε από τα 1,5,4,3 είναι το ίδιο :

$$\text{Άρα είναι : } \sigma_c^2 / c^2 = \sigma_b^2 / b^2 + 1,37\sigma_o^2$$

Από τη προηγούμενη σχέση, συνάγεται ότι πράγματι το σχετικό σφάλμα

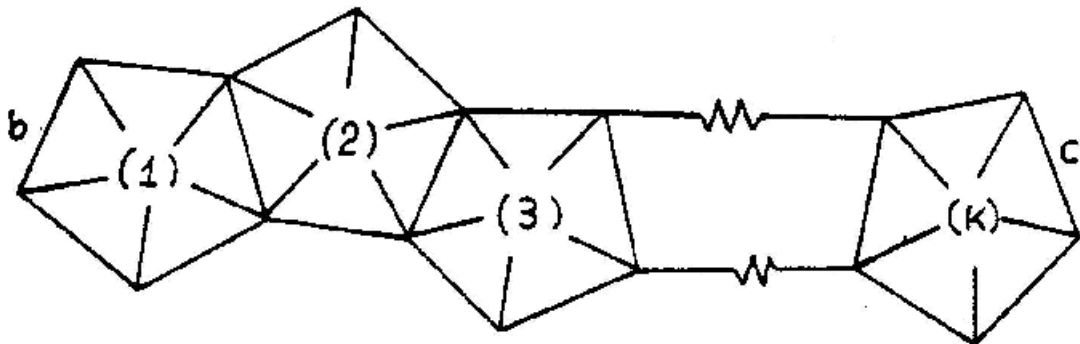
σ_c / c , είναι ανεξάρτητο του δρόμου υπολογισμού μετά την αφομοίωση και επομένως, οι πλευρές που είναι κοντά στις βάσεις, έχουν μικρότερο σφάλμα.

$$W'' = \rho'' \sqrt{3/1,37} \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - \sigma b^2 / b^2} \quad (3-1)$$

Σφάλμα αζιμουθίου

$$\text{Είναι: } W = \sqrt{3/1,47} \sqrt{\sigma^2 \partial_c - \sigma^2 \partial_b} \quad (3-2)$$

Αν έχουμε μια ανοικτή αλυσίδα από κανονικών πενταγώνων τότε είναι :



$$W'' = \rho'' \sqrt{3/ (\kappa \cdot 1,37)} \sqrt{\sigma^2 c / c^2 - \sigma^2 b - b^2} \quad (3-3)$$

$$W'' = \sqrt{3/ (\kappa \cdot 1,47)} \sqrt{\sigma^2 \partial_c + \sigma^2 \partial_b} \quad (3-4)$$

Με τις σχέσεις (3-3) και (3-4) κατασκευάζεται ο πίνακας (VI) που δίνει το επιτρεπόμενο σφάλμα κλεισίματος των τριγώνων.

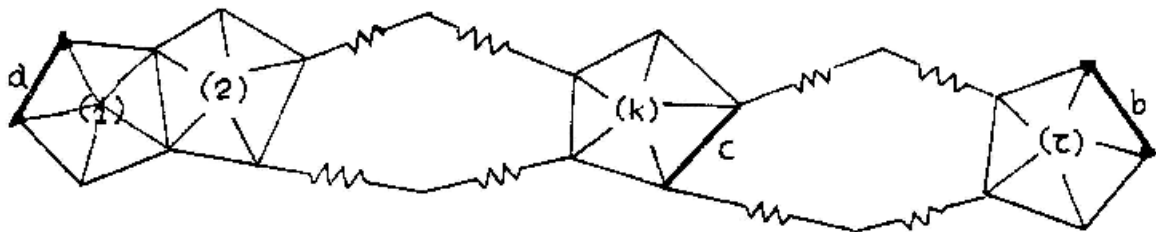
ΠΙΝΑΚΑΣ(VI)

(Ανοικτή αλυσίδα κανονικών πενταγώνων)

Πλήθος πενταγ	Σφάλμα Βάσεων	Επιθυμητό σφάλμα στο	W'' από σχέσεις :
------------------	------------------	-------------------------	---------------------

ώνων Κ	$\sigma_b/b = \sigma\partial_b/\rho''$	άκρο της αλυσίδας $\sigma_c/c = \sigma\partial_c/\rho''$	(3-3) $\sigma_w \quad 2\sigma_w$		(3-4) $\sigma_w \quad 2\sigma_w$	
1	$I:100.000 = 2''.06/\rho''$	$I:50.000 = 4''.13/\rho''$	5''.29	10''.57	5''.10	10''.21
5			2.35	4.73	2.28	4.56
10			1.67	3.34	1.61	3.23

Αν έχουμε μια κλειστή αλυσίδα από τ το πλήθος κανονικά πεντάγωνα τότε είναι :



$$W'' = \rho'' \sqrt{3/1,37(2/\sqrt{\tau})} \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - (\sigma a^2 - \sigma b^2)} \quad (3-3)'$$

$$W'' = \sqrt{3/1,47(2/\sqrt{\tau})} \sqrt{\sigma^2 \partial c - (\sigma^2 \partial a + \sigma^2 \partial b)} \quad (3-4)'$$

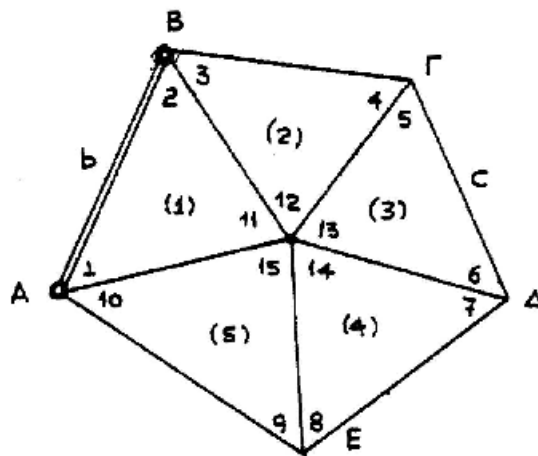
Με τις σχέσεις (3-3) και (3-4) κατασκευάζεται ο πίνακας (VII) που δίνει το επιτρεπόμενο σφάλμα κλεισίματος W για επιθυμητή ακρίβεια κλίμακος και αζιμουθίου στο μέσον της αλυσίδας .

ΠΙΝΑΚΑΣ(VII)

(Κλειστή αλυσίδα πενταγώνων)

Πλήθος πενταγ ώνων	Σφάλμα Βάσεων $\sigma_a/a = \sigma_b/b =$ $\sigma\delta_a/\rho'' =$ $\sigma\delta_b/\rho''$	Επιθυμητό σφάλμα στο μέσον $\sigma_c/c =$ $\sigma\delta_c/\rho''$	W'' από σχέσεις :			
			(3-3)' σw 2σw		(3-4)' σw 2σw	
1	I:100.000= =2''.06/ρ''	I:50.000= =4''.13/ρ''	8''.63	17''.27	8''.33	16''.67
5			3.86	7.72	3.73	7.45
10			2.73	5.46	2.64	5.27

7.4. ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΞΑΓΩΝΟ



Είναι : $I=2=3\dots=18=60^\circ$

Εάν w_1, w_2, w_6 , είναι τα σφάλματα κλεισίματος των τριγώνων του εξαγώνου w_{op} το σφάλμα οριζοντος στο κέντρο του και w_s το σφάλμα κλεισίματος της ημιτονικής συνθήκης το σύστημα τω εξισώσεων είναι :

$$CV=W \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

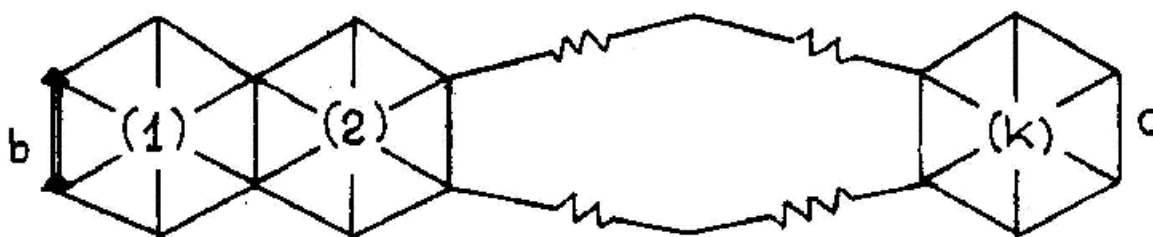
Σχετικό σφάλμα κλίμακος

$$\text{Είναι: } W'' = \rho'' \sqrt{3/1,67} \sqrt{\sigma_c^2 / c^2 - \sigma_b^2 / b^2} \quad (4-1)$$

Σφάλμα αζιμουθίου

$$W'' = \sqrt{3/1,67} \sqrt{\sigma^2 \partial_c + \sigma^2 \partial_b} \quad (4-2)$$

Αν έχουμε μια ανοικτή αλυσίδα Κ πλήθους



κανονικών εξαγώνων τότε είναι:

$$W'' = \rho'' \sqrt{3/(K \cdot 1,67)} \sqrt{\sigma_c^2 / c^2 - (\sigma_a^2 - \sigma_b^2)} \quad (4-3)$$

$$W'' = \sqrt{3/(K \cdot 1,67)} \sqrt{\sigma^2 \partial_c - \sigma^2 \partial_b} \quad (4-4)$$

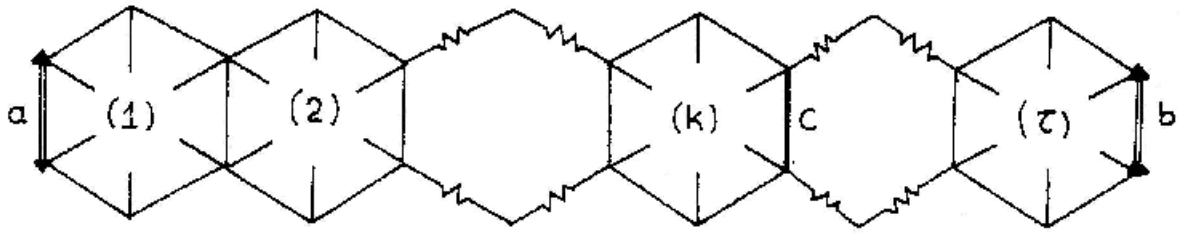
Με τις (4-3) και (4-4), κατασκευάζεται πίνακας(VIII), που δίνει το επιτρεπτό σφάλμα κλεισίματος W'' σε ανοικτή αλυσίδα κανονικών εξαγώνων :

ΠΙΝΑΚΑΣ(VIII)

(Ανοικτή αλυσίδα κανονικών εξαγώνων)

Πλήθος εξαγώνων ν Κ	Σφάλμα Βάσεως: $\sigma_b/b = \sigma \partial_b / \rho'$	Επιθυμητό σφάλμα στο άκρο της αλυσίδας: $\sigma_c/c = \sigma \partial_c / \rho''$	W'' από σχέσεις :			
			(4-3) σ_w $2\sigma_w$		(4-4) σ_w $2\sigma_w$	
1	$I:100.000 =$ $= 2'' .06 / \rho''$	$I:50.000 =$ $= 4'' .13 / \rho''$	4'' .79	9'' .58	4'' .79	9'' .58
5			2.14	4.28	2.14	4.28
10			1.51	3.03	1.51	3.03

Αν έχουμε μια κλειστή αλυσίδα από τ το πλήθος



κανονικά εξάγωνα τότε είναι :

$$W'' = \rho'' \sqrt{3/1,67} (2/\sqrt{\tau}) \sqrt{\sigma c^2 / c^2 - (\sigma a^2 / a^2 - \sigma b^2 / b^2)} \quad (4-3)'$$

$$W'' = \sqrt{3/1,67} (2/\sqrt{\tau}) \sqrt{\sigma^2 \partial c - (\sigma^2 \partial a + \sigma^2 \partial b)} \quad (4-4)'$$

Με τις σχέσεις (4-3)' και (4-4)' κατασκευάζεται ο πίνακας (ΙΧ) που δίνει το επιτρεπόμενο σφάλμα κλεισίματος, κάθε τριγώνου, της κλειστής τ πλήθους κανονικών εξαγώνων αλυσίδας, για επιθυμητό σφάλμα κλίμακος σ_c / c και αζιμουθίου $\sigma \partial_c$ στο μέσον αυτής.

ΠΙΝΑΚΑΣ(ΙΧ)

(Κλειστή αλυσίδα κανονικών εξαγώνων)

Πλήθος εξαγώνω ν τ	Σφάλμα Βάσεως: $\sigma_a/a = \sigma_b/b =$ $\sigma_{\theta_a} / \rho'' =$ σ_{θ_b} / ρ	Επιθυμητό σφάλμα στο μέσον: $\sigma_c/c =$ $\sigma_{\theta_c} / \rho''$	W'' από σχέσεις :			
			(4-3)' σ_w $2\sigma_w$		(4-4)' σ_w $2\sigma_w$	
1	I:100.000= =2''.06/ ρ''	I:50.000= =4''.13/ ρ''	7''.82	15''.64	7''.82	15''.64
5			3.50	6.99	3.50	6.99
10			2.47	4.59	2.47	4.59

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Τα κυριότερα συμπεράσματα περιληπτικά είναι :

1. Η *a-priori* ακρίβεια των μετρήσεων, πρέπει να υπολογίζεται συναρτήσει της ακρίβειας του δικτύου εξάρτησης (ανωτέρας τάξεως), της επιθυμητής ακρίβειας στην κλίμακα και το αζιμουθίο και του πλήθους των τυπικών σχημάτων τριγωνισμού, στο νέο τριγωνομετρικό δίκτυο.

2. Σε ανοικτά δίκτυα (μια βάση), το σφάλμα κλίμακας και αζιμουθίου είναι μεγαλύτερο στις τελευταίες πλευρές προς τις κατευθύνσεις αναπτύξεως του δικτύου. Όταν τα δίκτυα είναι κλειστά (δύο ή περισσότερες βάσεις γνωστών ή όχι αζιμουθίων) τότε η συσσώρευση των σφαλμάτων γίνεται στις μεσαίες πλευρές μεταξύ των βάσεων .

3. Η τελική ακρίβεια ενός δικτύου, δεν μπορεί να υπερβεί την ακρίβεια του δικτύου εξάρτησης, όσο και μεγάλης ακρίβειας μετρήσεως και αν είναι. Γι' αυτό, όταν πρόκειται να εξαρτηθεί δίκτυο μεγάλης "εσωτερικής ακρίβειας" από δίκτυο μικρότερης ακρίβειας, πρέπει η σύνδεση να γίνεται μόνο με ένα σημείο (μέθοδος εμμέσων), ή να καταστρωθεί καμία εξίσωση συνθήκης που απορρέει από το δίκτυο εξάρτησης. Οι συνθήκες αυτές είναι οι ημιτονικές και οι αζιμουθιακές μεταξύ των πλευρών του δικτύου εξάρτησης .

4. Κατά την ίδρυση δικτύου κατώτερης τάξεως, π.χ. 3ης που θα εξαρτηθεί από τον σχεδιασμό των πολυγώνων επιλύσεως σε ομάδες των

τριγωνομετρικών Πης, εφ' όσον το Πας είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερας ακρίβειας, να επιδιώκεται να χρησιμοποιούνται όσο το δυνατόν περισσότερα τριγωνομετρικά ανωτέρας τάξεως. Δηλαδή πρέπει να σχηματίζονται μικρά πολύγωνα ώστε τα Πης να προσδιορίζονται με τον "συντομότερο δρόμο" από τα ανωτέρας, διότι όσο πιο συντομότερος είναι ο δρόμος υπολογισμού τόσο πιο μικρά θα είναι τα σφάλματα κλίμακας και αζιμουθίου μεταξύ των νέων τριγωνομετρικών.

5. Κατά τον υπολογισμό δικτύων Πας, Πης και γενικά κατώτερας τάξεως, πρέπει να χρησιμοποιείται η μέθοδος μεταβολής των συντεταγμένων διότι έχει το βασικό πλεονέκτημα ως προς την μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών, ότι χρησιμοποιεί όλα τα γνωστά τριγωνομετρικά ανωτέρας τάξεως και βελτιώνει την ακρίβεια του δικτύου μετά τον υπολογισμό του. Στη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών, δεν χρησιμοποιούνται όλα τα τριγωνομετρικά ανωτέρας τάξεως που μπορούν να συνδεθούν με τα νέα τριγωνομετρικά, διότι, η κατάστρωση των εξισώσεων συνθηκών εξάρτησης είναι πολύ δύσκολη .

6. Μετά την αφομοίωση ενός δικτύου το σφάλμα κλίμακας και αζιμουθίου κάθε πλευράς ορίζεται μονότιμα και μπορεί να υπολογιστεί από οποιοδήποτε, δρόμο. Άρα για ευκολία πρέπει να υπολογίζεται από το συντομότερο δρόμο.

Οι εφαρμογές των σχετικών τύπων έχουν γίνει φανερές από την όλη ανάπτυξη της εργασίας και από τους καταχωρημένους ενδιάμεσα πίνακες (I) , (II),.....,(IX).

Είναι εύκολο με την κατάλληλη χρησιμοποίηση των τύπων, να προσδιοριστούν **a-priori** τα ανεκτά γωνιακά σφάλματα μετρήσεων για κάθε νέο τριγωνομετρικό δίκτυο, ώστε σε συσχετισμό με την ακρίβεια

εξάρτησης να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια στις πιο "δυσμενείς θέσεις" του δικτύου. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, διότι πλέον η διαδικασία ιδρύσεως ενός δικτύου, μετρήσεων και υπολογισμού του, μπαίνει σε μια επαγωγική διαδικασία της μορφής "τι επιθυμώ, τι έχω πώς θα το πετύχω".

Πιο κάτω θα καταχωρηθούν δύο εφαρμογές που δίνουν ένα τρόπο υπολογισμού κριτηρίων ακριβείας των τριγωνομετρικών δικτύων.

I. Αν είναι **a-priori** γνωστά, τα επιτρεπτά σφάλματα κλεισίματος των δικτύων I,II,III και VI τάξεως, καθώς και η σχετική ακρίβεια των πλευρών τους,

$$(I) \quad W'' = \rho'' (3\sqrt{2n}) \sqrt{\sigma_c^2 / c^2 - \sigma_b^2 / b^2} \quad \text{και}$$

$$(II) \quad W'' = \rho'' 3 \sqrt{2} / n \cdot \sqrt{\sigma_c^2 / c^2 - (\sigma_\alpha^2 / \alpha^2 - \sigma_b^2 / b^2)}$$

που δίνουν αντιστοίχως το ανεκτό γωνιακό σφάλμα κλεισίματος ανοικτής και κλειστής αλυσίδας ισοπλεύρων τριγώνων .

$$(I) \rightarrow W''^2 = \rho''^2 (9/2n) (\sigma_c^2 / c^2 - \sigma_b^2 / b^2) \rightarrow$$

$$n = (\rho'' / W'')^2 (9/2) (\sigma_c^2 / c^2 - \sigma_b^2 / b^2) \quad (I)'$$

$$(II)' \rightarrow W''^2 = \rho''^2 9(2/n) (\sigma_c^2 / c^2 - (\sigma_\alpha^2 / \alpha^2 + \sigma_b^2 / b^2)) \rightarrow$$

$$n = (\rho'' / W'')^2 \cdot 18 \cdot (\sigma_c^2 / c^2 - (\sigma_\alpha^2 / \alpha^2 + \sigma_b^2 / b^2)) \quad (II)'$$

Δίκτυο	Ανοικτή αλυσίδα (I)'				Κλειστή αλυσίδα (II)'			
	W _{cc}	σ _b /b	σ _c /c	n	σ _α /α	σ _b /b	σ _c /c	n
I	3 _{cc}	1:1.000.000 0	1:500.000	1	1:1.000.000	1:1.000.000	1:500.000	2

II	4.5	I:500.000	I:250.000	1	I:500.000	I:500.000	I:250.000	3
III	12	I:250.000	I:1.00.000	1	I:250.000	I:250.000	I:1.00.000	3-4
IV	24	I:100.000	I:50.000	1	I:100.000	I:100.000	I:50.000	2-3

Από το παραπάνω πίνακα φαίνεται πως τα δίκτυα Ιης, για να έχει οποιαδήποτε πλευρά του ακρίβεια τουλάχιστον I:500.000 πρέπει να υπολογίζεται απ' ευθείας από βάση, ακριβείας I:1.000.000.

Για τα δίκτυα II, III, VI, τα αποτελέσματα του πίνακα για κλειστά δίκτυα, είναι συμβιβαστά με τη πράξη, διότι η πύκνωση ενός δικτύου ανωτέρας τάξεως με τριγωνομετρικά κατωτέρας τάξεως, είναι περίπου όπως ο αριθμός της τελευταίας στήλης του πίνακα . Αρκεί βέβαια τα πολύγωνα υπολογισμού να έχουν αυτό το πλήθος τριγώνων. Όταν ο υπολογισμός γίνεται με τη μέθοδο μεταβολής των συντεταγμένων, αυτή η προϋπόθεση τηρείται, διότι χρησιμοποιούνται όλα τα ανωτέρας που συνδέονται με μετρήσεις με τα νέα κατωτέρας τάξεως τριγωνομετρικά .

2. Ποια πρέπει να είναι τα ανεκτά όρια κλεισίματος των τριγώνων όλων των δικτύων όπου είναι γνωστά ο αριθμός τριγώνων (n) κατωτέρας τάξεως που περιλαμβάνει εντός ενός τριγώνου ανωτέρας τάξεως γνωστής ακριβείας'

Για το δίκτυο Ιης θα υποθεθεί ότι ανά 15 τρίγωνα έχουν μετρηθεί βάσεις ακριβείας : I:1.000.000 και ότι η επιθυμητή ακρίβεια στα μεσαία τρίγωνα μεταξύ των βάσεων είναι I:500.000. Ακόμη στον πίνακα θα καταχωρηθεί και το τυπικό σφάλμα σγ κάθε γωνίας .

ΔΙΚΤΥΟ		I	II	III	IV
Σχετικό σφάλμα	σα/α σbb	I:1.000.00 0	I:500.000 I:500.000	I:250.000 I:250.000	I:100.000 I:100.000



βάσεων	1.000.000			
Επιθυμητό σφάλμα του μέσου μεταξύ των βάσεων : σ_c/c	1:500.000	1:250.000	1:100.000	1:50.000
Πλήθος τριγώνων: n	15	3	4	4
Σφάλμα κλεισίματος τριγώνων : W^{cc}	1^{cc}	4,5^{cc}	4,5^{cc}	
Τυπικό σφάλμα μιας γωνίας : σ_γ	0.4^{cc}	2^{cc}	5^{cc}	9^{cc}
<p>Τύποι που χρησιμοποιήθηκαν $W^{cc} = \rho^{cc} (3\sqrt{2/n}) \sqrt{\sigma_c^2/c^2 - (\sigma_a^2/a^2 + \sigma_b^2/b^2)}$</p> <p>$\sigma_o^{cc} = W^{cc}/\sqrt{3}, \sigma_\gamma = \sqrt{2/3}\sigma_o, \rho^{cc} = 636620$</p>				

Εάν το πλήθος των τριγώνων είναι διαφορετικό από του προηγούμενου πίνακος και έστω ότι είναι τ , τότε τα ανεκτά σφάλματα W και σ_γ πρέπει να πολλαπλασιάζονται επί \sqrt{n}/τ π.χ. εάν στο **IV** είναι $\tau=6$, τότε,

$$W^{cc} = 19^{cc} \sqrt{n/\tau} = 19 \sqrt{4/6} = 15,5^{cc} \text{ και } \sigma_\gamma^{cc} = 9^{cc} \sqrt{4/6} = 7^{cc}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

9. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΜΟΙΒΑΙΑΣ ΟΡΑΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΗΣ ΓΗΙΝΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Είναι πολλάκις αναγκαίο εν τη πράξη να δυνάμεθα να γνωρίσουμε μετά βεβαιότητας, αν δύο δεδομένα σημεία A και B της Γήινης επιφάνειας είναι αμοιβαίως ορατά, ως επί παραδείγματι δια την εγκατάσταση οπτικού τηλεγράφου, αναγνώριση επί του χάρτου των θέσεων τριγωνομετρικών σημείων ανωτέρων τάξεων κ.λπ.

Η γνωστή μέθοδος των κατατομών δεν είναι επαρκής, όταν η μεταξύ των στοιχείων αποστάσεις είναι αρκούντως μεγάλη, οπότε η διόρθωση εκ της σφαιρικότητας της Γης και της διαθλάσεως (η καλούμενη συνήθως δεύτερος όρος του τύπου της τριγωνομετρικής υψομετρίας) είναι σημαντική. Επί πλέον οι γραφικές κατασκευές, της οποίες χρησιμοποιούμε στην μέθοδο των κατατομών, υπόκεινται σε σφάλματα, τα οποία δύνανται να οδηγήσουν σε συμπεράσματα αντίθετων της πραγματικότητας.

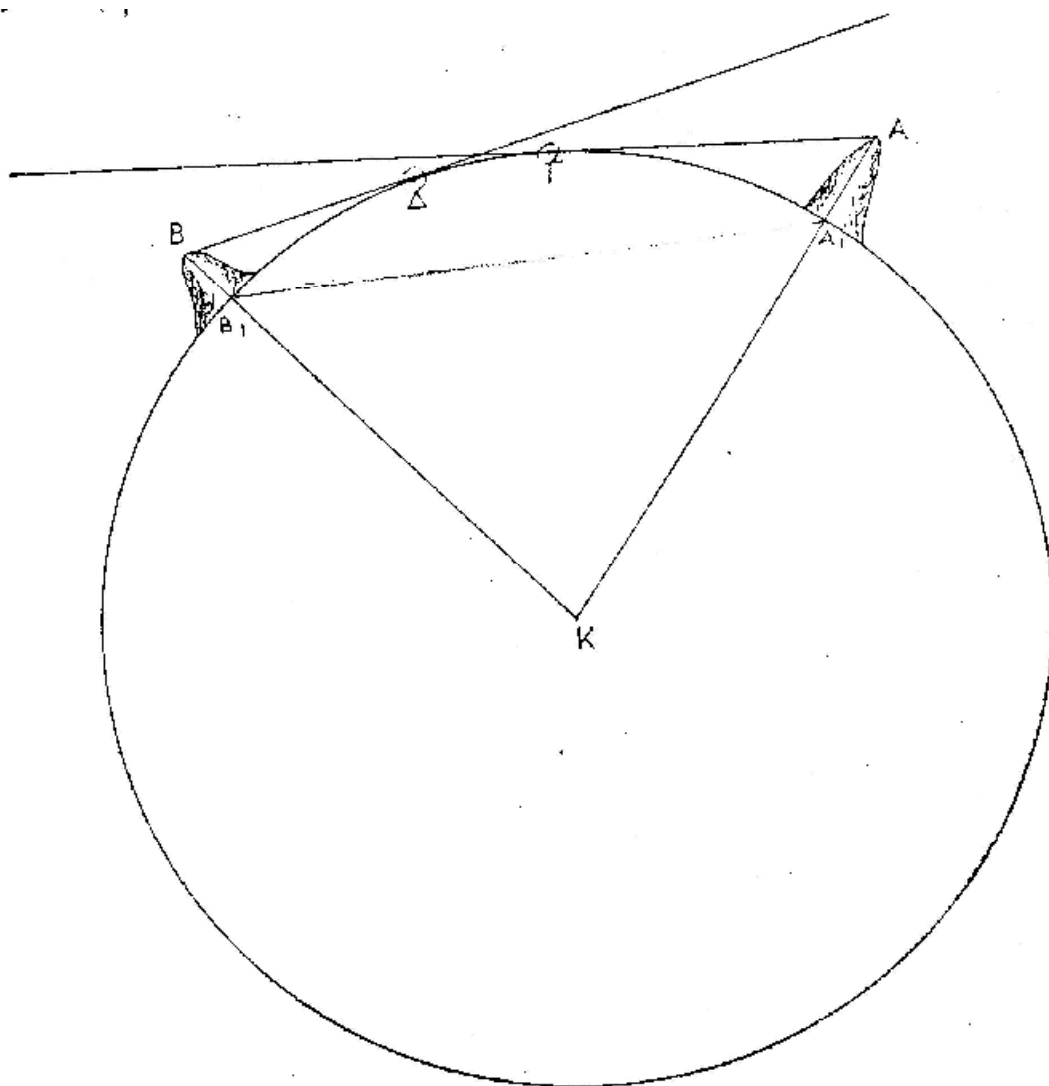
Κατωτέρω παραθέτουμε απλούν τρόπο δι' υπολογισμού επιλύσεως του υπ' όψιν προβλήματος. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

1. Μεταξύ δύο σημείων A και B ουδέν εμποδίων παρεμβάλλεται. Η περίπτωσης αυτή συναντάται όταν εκάτερον των σημείων είναι σε παραλίαν ή σε νήσο.

2. Μεταξύ των δύο σημείων A και B υπάρχει εμπόδιον Γ .

1η Περίπτωσης

Έστω σαν (σχ.1) τα σημεία A και B.



(σχ.1)

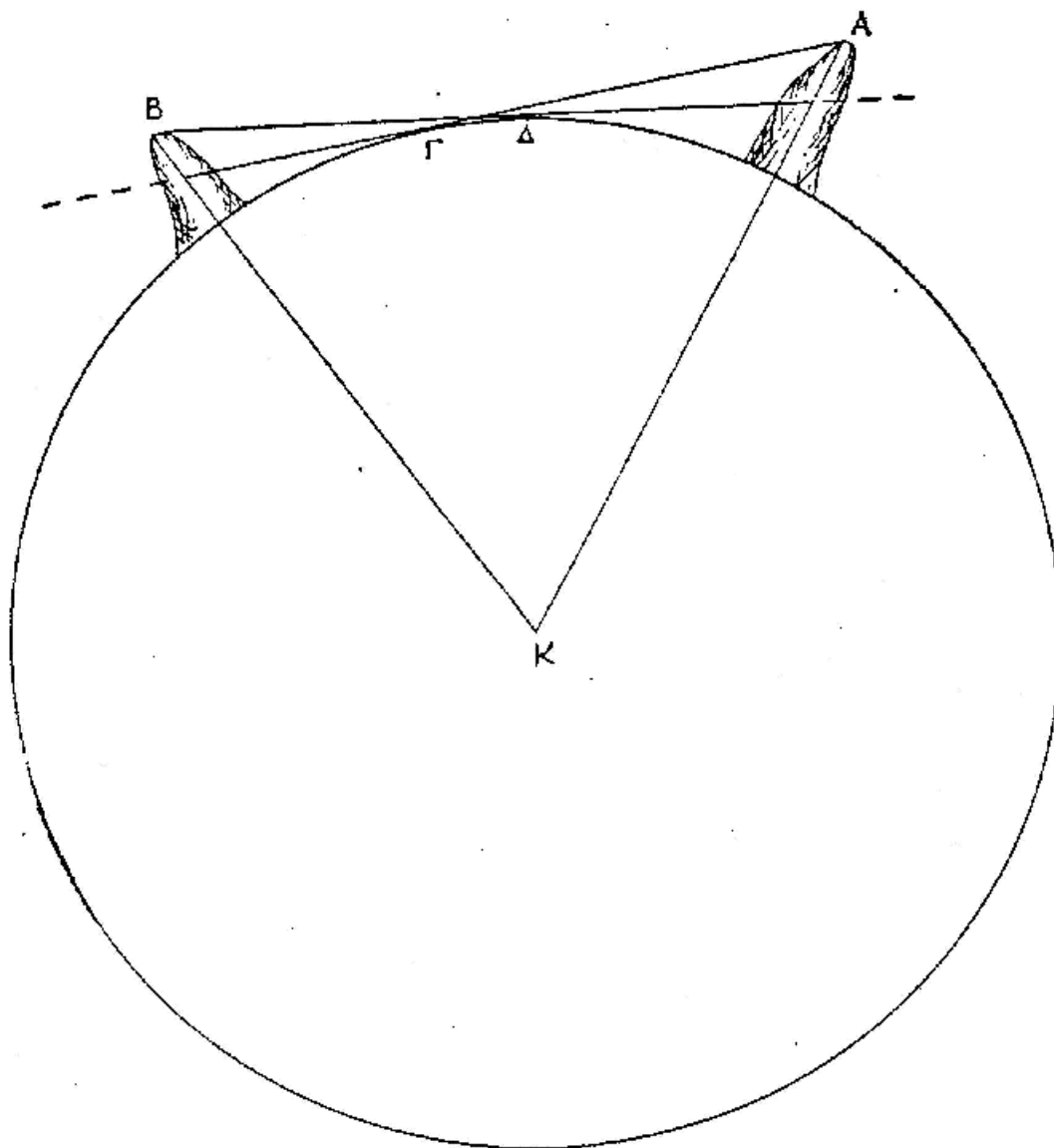
Ο κύκλος παριστά τον δια των σημείων τούτων διερχόμενων μέγιστων κύκλων της Γης, ή με μεγάλη προσέγγισιν λαμβάνουμε ως σφαίρα. Φέρουμε εκ του A την εφαπτομένη, έστω αυτή η AG. Εάν η AG διέρχεται κάτωθεν της κορυφής B, θα έχουμε ορατότητα, αλλιώς δε θα έχουμε. Τα αυτά δυνάμεθα να πούμε φέροντες εκ του B την εφαπτομένη BD. Έστω $A_1B_1 = S$ η οριζόντια απόσταση των σημείων A και B. Λόγω της μικρότητας των υψομέτρων των διαφορών

σημείων της Γης εν σχέση με την ακτίνα της δυνάμεθα να θεωρούμε ότι $ΑΓ=Α1Γ$ και $ΒΔ= Β1Δ$. Θέτουμε $ΑΓ=S1$ και $ΒΔ=S2$. Εάν δεν έχουμε ορατότητα θα είναι (σχ.1)

$$S1 + S2 < S \quad (1)$$

ενώ αν έχουμε ορατότητα θα είναι (σχ.2)

$$S1 + S2 > S \quad (2)$$



(σχ.2)

Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται να βρούμε τις αποστάσεις S_1 και S_2 .

Έστω h_1 το γνωστό υψόμετρο του σημείου A και h_2 το του B.

Επειδή τα σημεία A1 και Γ καθώς και τα B1 και Δ έχουν υψόμετρο μηδέν, το h_1 , υψόμετρων του σημείου A, εκφράζει την υψομετρική διαφορά μεταξύ αυτού και του Γ.

Επειδή δε η ΓΑ είναι η οριζόντια σκόπευση του Γ προς το Α, η υψομετρική διαφορά θα οφείλεται εξ ολοκλήρου εις τον δεύτερον όρον του γενικού τύπου της τριγωνομ. υψομ. δηλ.

$$\Delta H = S \cdot \sigma \varphi Z + (1-K) / 2 \cdot R \cdot S^2 + v_o - v_\sigma$$

εν χάρη συντομίας θα παριστώμεν με (II) ήτοι θα είναι ενταύθα

$$h_1 = (II)_1 = (1-K) / 2R \cdot S_1^2 \quad (3)$$

ένθα $K=0,13$ συντελεστής διαθλάσεως και R η μέση ακτίνα της Γης.

Καθ'ομοίον τρόπον θα έχουμε διά το h_2

$$h_2 = (II)_2 = (1-K) / 2R \cdot S_2^2 \quad (4)$$

Επιλύοντες του άνω τύπου ως προς S_1 και S_2 αντιστοίχως έχουμε:

$$S_1 = \sqrt{h_1} \cdot \sqrt{2R / 1-K} \quad , \quad S_2 = \sqrt{h_2} \cdot \sqrt{2R / 1-K} \quad (5)$$

Οπότε :

$$S_1 + S_2 = (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \cdot \sqrt{2R / 1-K} \quad (6)$$

Υπολογιζόμενου ούτω του αθροίσματος $S1 + S2$ θα έχουμε:

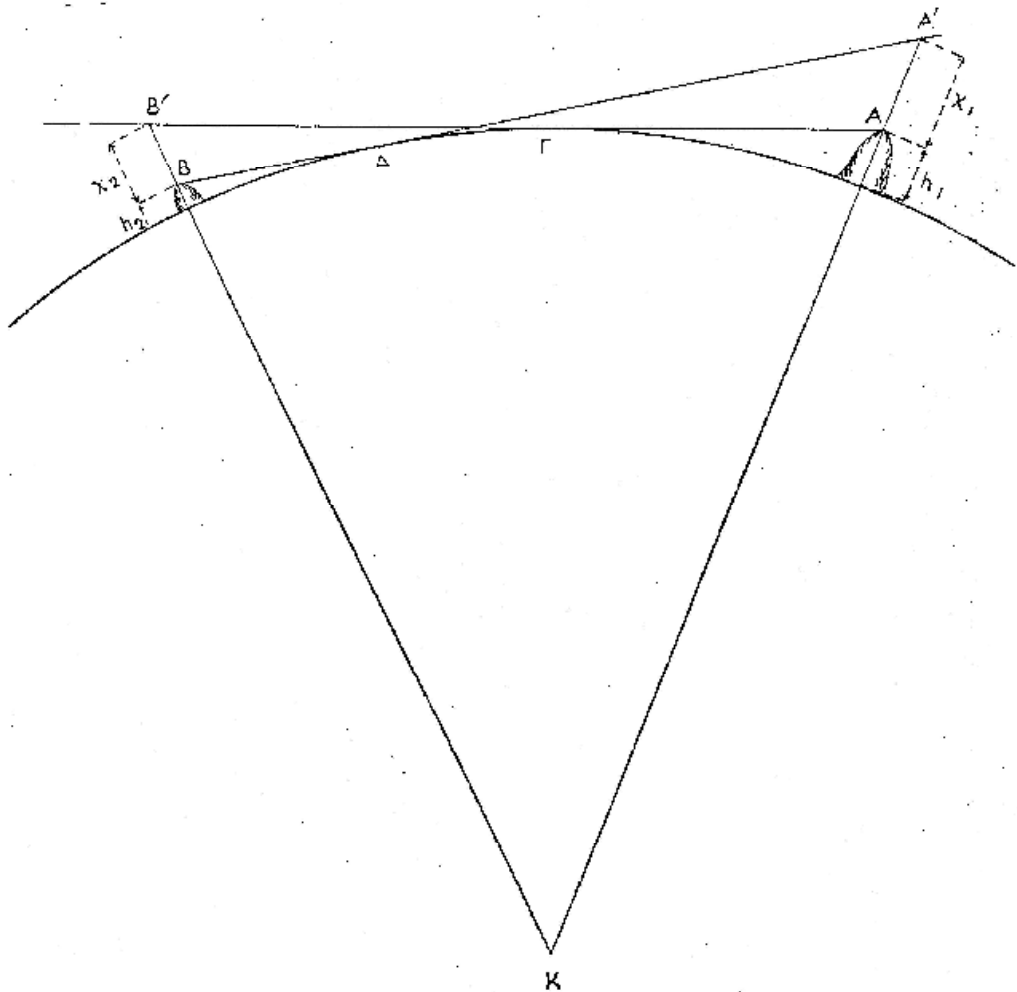
- Ορατότητα αν: $S1 + S2 > S$
- Μη ορατότητα αν $S1 + S2 < S$ (7)
- Αμφιβολία αν $S1 + S2 = S$

Αντί να υπολογίσουμε το άθροισμα $S1+S2$ εκ των ανωτέρω τύπων (6), ευρίσκομε χωριστά το $S1$ και $S2$ εκ του εις το τέλος πίνακος (I) και (II). Ήδη γεννάται το ερώτημα :Σε περίπτωση μη ορατότητας, πόσο πρέπει να ανυψώσουμε το A και το B δια να έχουμε ορατότητα

Έστω σαν (σχ.3) τα σημεία A και B μη ορατά μεταξύ τους.

Ζητείται πόσον πρέπει να ανυψώσουμε το A δια να είναι ορατό εξ αυτού το B, ή πόσο πρέπει να ανυψώσουμε το B δια να είναι εξ αυτού ορατό το A.

Εάν προεκτείνουμε την εκ του B εφαπτωμένην ΒΔ, αυτή θα συναντά εις το A την προέκτασιν της δια του A διερχόμενης Γήινης ακτίνας.



(σχ.3)

Έστω χ' το υψόμετρο του σημείου A' . Το υψόμετρον τούτο θα υπολογισθεί εκ του τύπου:

$$\chi' = (1-K) / 2R * S^2$$

Ένθα αντί του S θα ληφθεί η απόσταση $A'\Delta$. Αλλά $A'\Delta$ είναι αισθητώς ίση με $S - S^2$.

Συνεπώς θα έχουμε:

$$\chi' = (1-K) / 2R * (S - S^2)^2 \quad (8)$$

Αντί υπολογισμού δυνάμεθα να εύρωμεν ευχερώς το χ' εκ των πινάκων δι' απόστασιν ίσην με $S - S_2$.

Ευρεθέντος του χ' , η διαφορά $\chi' - h_1$ δίδει την απαιτούμενη ανύψωσιν εις το Α.

Καθ' όμοιον τρόπο υπολογίζουμε την ανύψωσιν εις το Β θα έχωμεν εν πρώτοις:

$$\chi'' = (1-K) / 2R * (S - S_1)^2 \quad (9)$$

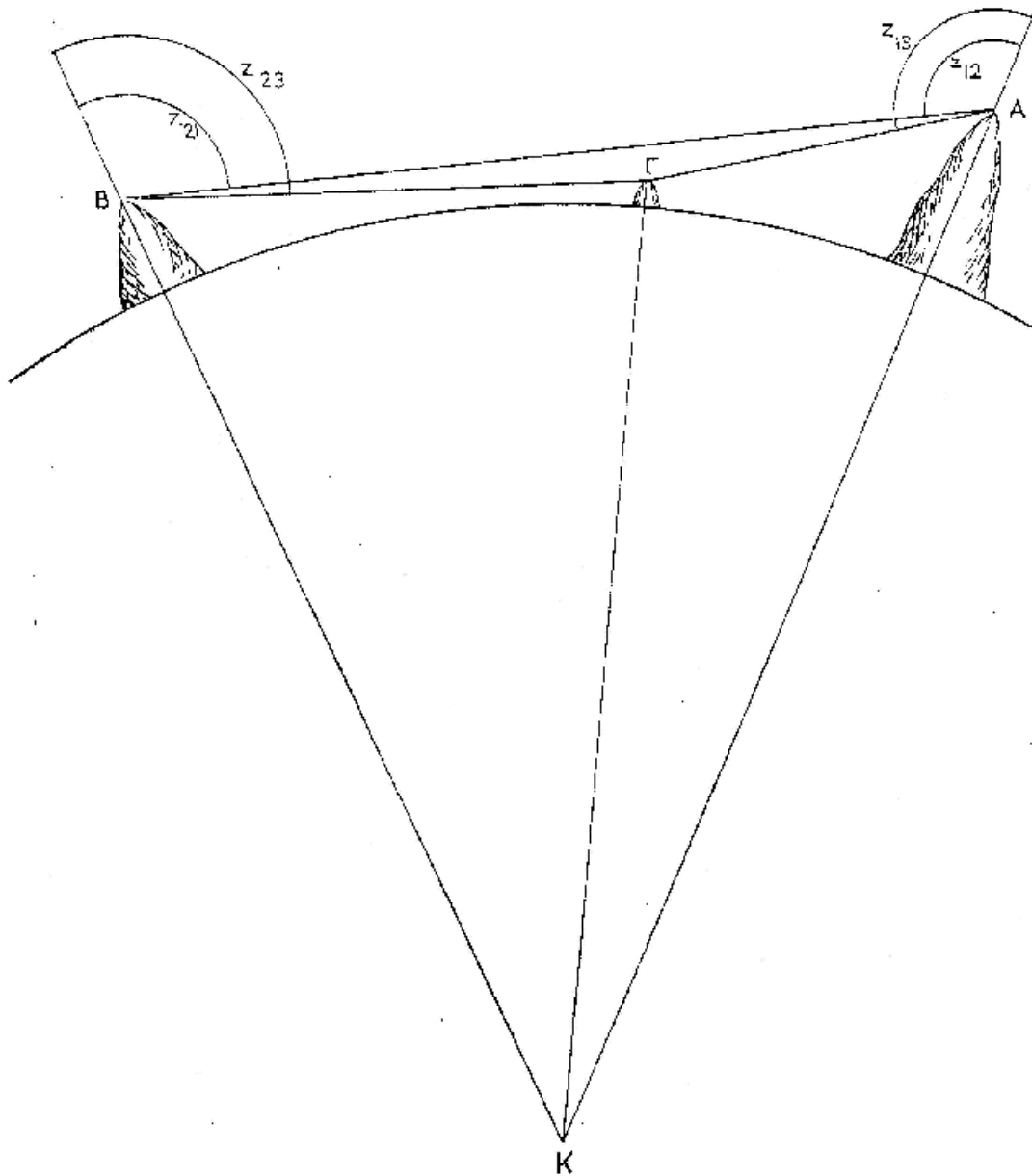
οπότε η απαιτούμενη εις το Β ανύψωσιν θα είναι $\chi'' - h_2$.

Ήδη εξεταστέων εις ποίον εκ των δύο σημείων συμφέρει να δώσωμεν την απαιτούμενη ανύψωσιν (υποτίθεται ότι τα σημεία Α και Β έχουν διαφορετικά υψόμετρα).

Χωρίς περαιτέρω διερεύνηση των τύπων, εκ των πινάκων (I) και (II) βλέπουμε αμέσως ότι η απαιτούμενη ανύψωσιν θα είναι μικρότερα, όταν δοθεί εις το χαμηλότερων σημείων. Ούτος εκ του πίνακος (I) βλέπουμε ότι εις σημείων έχον υψόμετρο **170,4m.**δια να αυξησωμεν την ορατότητα κατά **1** χιλιομέτρων πρέπει να δώσουμε ανύψωσιν **14μ.**

2^α Περίπτωσης

Έστωσαν (σχ.4) τα δύο σημεία Α και Β, ων θέλομεν να εξακριβώσουμε την αμοιβαία ορατότητα, με υψόμετρα **h₁** και **h₂** αντιστοίχως, και μεταξύ τούτων το σημείο Γ, με υψόμετρο **h₃**.



σχ.

4)

Εν πρώτοις παρατηρούμε ότι, αν το υψόμετρο του παρεμβαλλόμενου σημείου Γ είναι μεγαλύτερων και από τα δύο άλλα υψόμετρα, τότε προφανώς δεν υπάρχει ορατότης μεταξύ των σημείων A και B . Αν όμως το h_3 είναι μικρότερο από το ένα ή από αμφότερα τα δύο άλλα υψόμετρα, τότε είναι δυνατόν να υπάρχει ορατότητα. Προς εξακρίβωσιν τούτου εργαζόμεθα ως εξής :

Κατ' αρχάς εξετάζουμε αν υπάρχει ορατότητα μεταξύ των Α και Β, μη υπάρχοντος του Γ. (1η περίπτωση, ανωτέρω εξετασθήσα). Υφισταμένης τοιαύτης ορατότητας, εκ του σχήματος (4) παρατηρούμε αμέσως, ότι, ίνα μη το Γ εμποδίζει την αμοιβαία ορατότητα των Α και Β, πρέπει και αρκεί η ζενιθιαία γωνία Z_{13} ην μετρούμενων επί του Α παρατηρούντες το Γ, να είναι μεγαλύτερα της ζενιθιαίας γωνίας Z_{12} ην μετρούμεν επίσης επί του Α παρατηρούντες του Β. Η καθ'ομοίον τρόπον, η ζενιθιαία γωνία Z_{23} , ην μετρούμεν επί του Β παρατηρούντες το Γ, να είναι μικρότερα της ζενιθιαίας γωνίας Z_{21} , ην μετρούμεν επί του Β παρατηρούντες το Α. Όστε το πρόβλημα ανήχθη εις τον υπολογισμό και σύγκρισιν των ζενιθιαίων γωνιών Z_{13} και Z_{12} ή των Z_{23} και Z_{21} . Αι ανωτέρω γωνίαι δύνανται να υπολογιστούν εκ των γνωστών υψομέτρων των σημείων Α, Β, Γ και των μεταξύ των αποστάσεων .

Λαμβάνομε των γνωστών τύπον:

$$\Delta H = S \sigma \varphi Z + (II)$$

(ενταύθα παραλείψαμε τα ύψη οργάνου και σήματος)

και επιλύοντες ως προς $\sigma \varphi Z$ λαμβάνομε:

$$\sigma \varphi Z = \frac{\Delta H - (II)}{S} \quad (10)$$

ένθα ΔH η υψομ. Διαφορά μεταξύ δύο σημείων και (II), αι εις την απόστασιν των αντιστοιχούσα διόρθωση εκ της σφαιρικότητας και διαθλάσεως.

Ούτος ενταύθα αν θέσωμεν :

$$\text{απόστασης } AB = S_{12},$$

$$\text{απόστασης } A\Gamma = S_{13}$$

$$\text{και απόστασης } B\Gamma = S_{23} \quad \text{θα έχουμε :}$$

$$\sigma\varphi Z_{12} = (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) - (\mathbf{II})_1 / \mathbf{S}_{12}$$

$$\sigma\varphi Z_{13} = (\mathbf{h}_3 - \mathbf{S}_1) - (\mathbf{II})_{13} / \mathbf{S}_{13}$$

$$\sigma\varphi Z_{21} = (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2) - (\mathbf{II})_{12} / \mathbf{S}_{12}$$

$$\sigma\varphi Z_{23} = (\mathbf{h}_3 - \mathbf{h}_2) - (\mathbf{II})_{12} / \mathbf{S}_{23}$$

Και συμφώνως προς τα ανωτέρω λεχθέντα :

Αν $Z_{13} > Z_{12}$ υπάρχει ορατότητα

Αν $Z_{13} < Z_{12}$ δεν υπάρχει ορατότητα

Αν $Z_{23} > Z_{21}$ υπάρχει ορατότητα

Αν $Z_{23} < Z_{21}$ δεν υπάρχει ορατότητα

Και ενταύθα θα εξετάσουμε πάλι, σε περίπτωση μη ορατότητας, πόσο θα χρειαστεί να ανυψώσουμε το Α ή το Β δια να έχουμε ορατότητα .

Έστωσαν (σχ.5) τα σημεία Α και Β μη αμοιβαίως ορατά, λόγω της υπάρξεως μεταξύ των του υψώματος Γ. Εις την περίπτωσιν ταύτην θα είναι $Z_{12} > Z_{13}$.

Ένθα η γωνία (Z12 - Z13) θα εκφράζεται σε δεύτερα λεπτά .

Ομοίως θα έχουμε :

$$X_A = S_{12} (Z_{21} - Z_{23}) \eta \mu 1'' \quad (14)$$

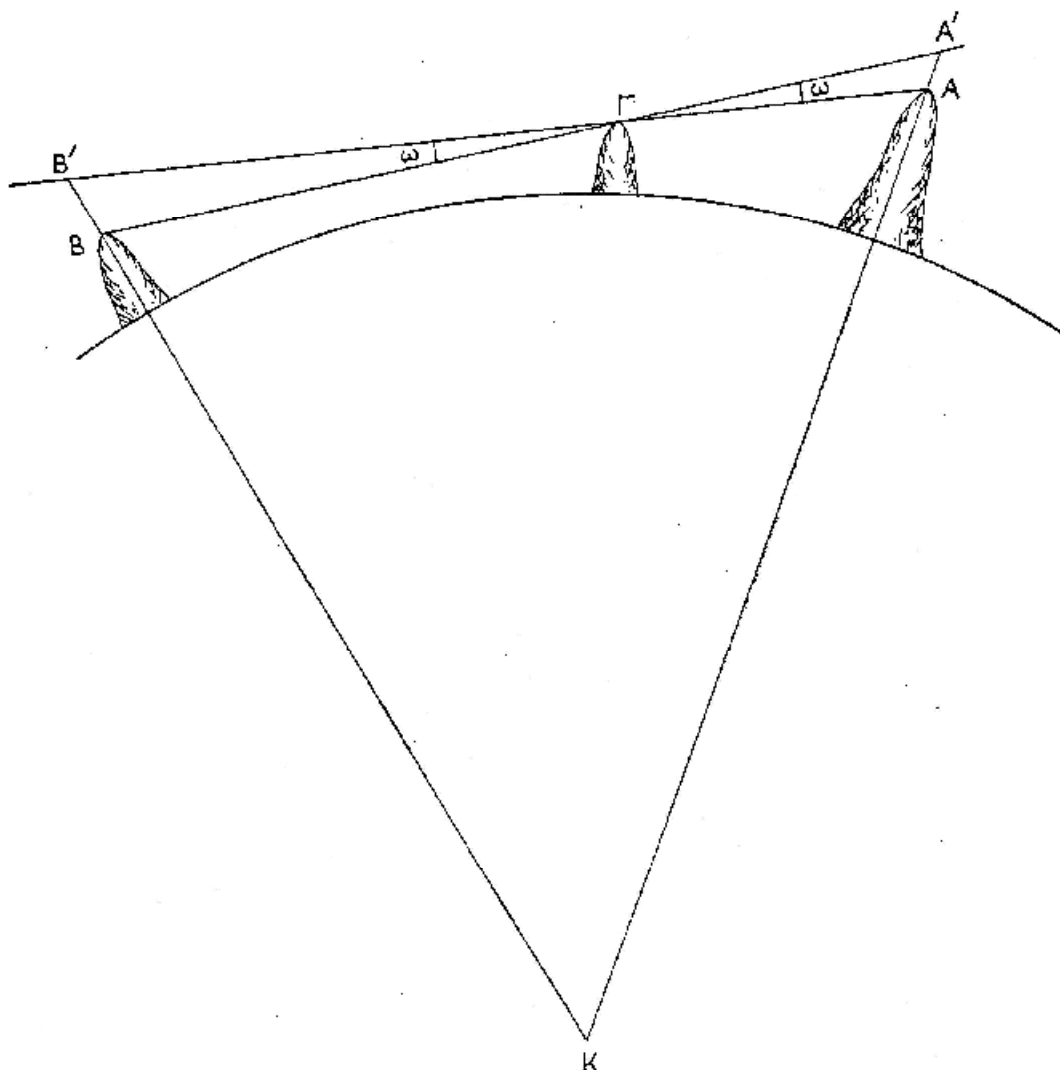
Ένθα X_A παριστά την ανύψωση που θα πρέπει να δώσουμε εις το Α. Ήδη θα εξετάσουμε ποια από τας δύο ανυψώσεις δηλ. τας $X_B = BB'$ και $X_A = AA'$ θα είναι μικρότερα . Εκ του σχήματος (6) παρατηρούμε ότι :

$$X_A = S_{13} * W * \eta \mu 1''$$

$$X_B = S_{23} * W * \eta \mu 1'' \quad (15)$$

$$\text{εξ ου } X_A / X_B = S_{13} / S_{23} \quad (16)$$

Ήτοι εκάστη ανύψωσης είναι ανάλογος της αποστάσεως του αντιστοιχου σημείου από του Γ. Συνεπώς η ανύψωσης θα είναι μικρότερα εις εκείνο εκ των δύο σημείων Α και Β, το οποίον είναι πλησιέστερων προς το Γ



(σχ.6)

Παράδειγμα 1^{ον} : Να εξακριβωθεί αν υπάρχει ορατότητα μεταξύ της κορυφής της νησίδος «Σειρήνα»(υψόμετρων $h_1 = 322\mu.$) και της νησίδος «Χαμηλής» (υψόμετρων = $h_2 = 10\mu.$). Απόστασης $S = 68$ χιλιόμετρα .

Εκ του πίνακος (I) ευρίσκομεν δια $(II)_1 = 315,2m . S_1 = 68Km .$ και δια $(II)_2 = 9,28m . S_2 = 12Km.$

Συνεπώς $S_1 + S_2 > S$. Άρα υπάρχει ορατότητα .

Παράδειγμα 2^{ov} : Να εξακριβωθεί αν υπάρχει ορατότητα μεταξύ (Α) της κορυφής του επί της νήσου Κω όρους «Δικαίως»(υψόμετρων $h_1 = 846\mu$.) και (Β) της κορυφής του επί της νήσου Σύμης όρους «Βίγλας» (υψόμετρων $h_2 = 616\mu$) ενώ παρεμβάλλεται ύψωμα (Γ) με υψόμετρων $h_3 = 700\mu$.

Αποστάσεις $AB = S_{12} = 60.000\text{m}$. $ΑΓ = S_{13} = 28.000\text{ m}$. $ΒΓ = S_{23} = 32.000\text{ m}$.

Εκ του πίνακος (I) ευρίσκομεν δια απόστασιν $S_{12} = 60.000$, (II) $_{12} = 245,6\text{ m}$.

$$S_{13} = 28.000, (II)_{13} = 53,5\text{ m} .$$

$$S_{23} = 32.000, (II)_{23} = 70,0\text{ m} .$$

Θα έχουμε $\sigma\phi Z_{12} = (h_2 - h_1) - (II)_{12} / S_{12} = (616 - 846) - 245,6 / 60000 = - 475,6 / 60000$

$$\log \sigma\phi Z_{12} = 7,8990905 \text{ και } Z_{12} = 90^\circ 27' 14'',6$$

ομοίως έχουμε:

$\sigma\phi Z_{13} = (h_3 - h_1) - (II)_{13} / S_{13} = (700 - 846) - 53,5 / 28000 = - 199,5 / 28000$

$$\log \sigma\phi Z_{13} = 7,8527849 \text{ και } Z_{13} = 90^\circ 24' 29'',6$$

Επειδή $Z_{12} > Z_{13}$ δεν έχουμε ορατότητα .

Ομοίως δυνάμεθα να υπολογίσουμε τας Z_{21} και Z_{23} .

θα έχουμε $\sigma\phi Z_{21} = (h_1 - h_2) - (II)_{23} / S_{12} = (846 - 616) - 245,6 / 60000 = - 15,6 / 60000$

$$\log \sigma\phi Z_{21} = 6,4419733 \text{ και } Z_{21} = 90^\circ 00' 53'',6$$

ομοίως $Z_{23} = (h_3 - h_2) - (II)_{23} / S_{23} = (700 - 616) - 70,00 / 32000 = - 14 / 32000$

$$\log \sigma\phi Z_{23} = 6,6409780 \text{ και } Z_{23} = 89^\circ 58' 29'',8 .$$

Και ενταύθα βλέπουμε ότι $Z_{21} > Z_{23}$. Άρα δεν υπάρχει ορατότητα

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την αναγκαιούσα προς ορατότητα ανύψωσης, παρατηρούμε εν πρώτης ότι αυτή θα είναι μικρότερα αν δοθεί εις το Α, διότι η απόστασης ΑΓ είναι μικρότερη της ΒΓ. Κατά τον τύπον (14) θα έχουμε

$$X_A = S_{12} * (Z_{21} - Z_{23}) \eta\mu 1''$$

Ενταύθα είναι:

$$(Z_{21} - Z_{23}) = 00^\circ 02' 23'',8 = 143'',8$$

$$\log S_{12} = 4,7781513$$

$$\log 143,8 = 2,1577589$$

$$\underline{\log \eta\mu 1'' = 4,6855749}$$

$$\log X_A = 1,6214851$$

$$X_A = 41,83\mu.$$

Ήτοι η ανύψωσης, που θα χρειαστεί να δώσουμε εις το Α πρέπει να είναι μεγαλύτερα των **42** μέτρων δια να έχουμε μετά βεβαιότητας ορατότητα.

Αν υπολογίσουμε καθ' ομοίων τρόπο την ανύψωση που θα χρειασθεί να δώσουμε εις το Β ευρίσκομεν $X_B = 48 \mu$.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Παρέχων την τιμή του I I όρου (διορθώσεις λόγω της σφαιρικότητας και διαθλάσεως) συναρτήσει της αποστάσεως d εις χιλιόμετρα .

d	II	d	II	d	II	d	II	d	II
1 Km	0,07 m	25K m	42,6 m	49K m	163,8 m	73K m	363,4 m	97K m	642,0 m
2	0,07 m	26	46,1	50	170,4	74	373,2	98	655,2
3	0,27	27	49,7	51	177,4	75	383,4	99	668,4
4	0,61	28	53,5	52	184,4	76	393,6	100	681,6
5	1,09	29	57,3	53	191,6	77	404,2	101	695,6
6	1,70	30	61,4	54	198,8	78	414,8	102	709,6
7	2,45	31	65,5	55	206,2	79	425,6	103	723,6
8	4,36	32	69,8	56	231,6	80	436,4	104	737,6
9	5,52	33	74,2	57	221,2	81	447,5	105	752,0
10	6,82	34	78,8	58	228,8	82	458,6	106	766,4
11	8,25	35	83,5	59	237,2	83	470,1	107	780,8
12	9,82	36	88,4	60	245,6	84	481,6	108	795,2

13	11,52	37	93,3	61	253,8	85	493,2	109	810,0
14	13,36	38	92,4	62	262,0	86	504,8	110	824,8
15	15,34	39	103, 7	63	270,6	87	516,4	111	839,6
16	17,45	40	109, 1	64	279,2	88	528,0	112	854,4
17	19,70	41	114, 9	65	288,5	89	540,2	113	869,6
18	22,09	42	120, 4	66	296,8	90	552,4	114	884,8
19	24,61	43	126, 2	67	306,0	91	565,0	115	900,0
20	27,67	44	132, 0	68	315,2	92	577,6	116	915,2
21	30,10	45	138, 1	69	324,6	93	590,4	117	932,0
22	33,00	46	144, 4	70	334,0	94	603,2	118	948,8
23	36,10	47	150, 8	71	343,8	95	616,0	119	965,6
24	39,30	48	157, 2	72	353,6	96	628,8	120	982,4

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

παρέχων το βάθος του οριζοντος και την απόστασιν εις ναυτικά μίλια
συναρτήσει του ύψους οφθαλμού

ΒΑΘΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΟΡΑΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΟΣ											
Υψος οφθαλμού	Βάθος οριζοντος	Απόσταση εις μίλια	Υψος οφθαλμού	Βάθος οριζοντος	Απόσταση εις μίλια	Υψος οφθαλμού	Βάθος οριζοντος	Απόσταση εις μίλια	Υψος οφθαλμού	Βάθος οριζοντος	Απόσταση εις μίλια
1μ	1' .8	2.1	26μ	9' .2	10.7	115μ	19.0	22.5	550μ	41' .4	49.3
2	2.6	3.0	28	9.5	11.1	120	19.4	23.0	600	43.3	51.5
3	3.1	3.6	30	9.8	11.5	125	19.8	23.5	650	45.0	53.6
4	3.6	4.2	32	10.1	11.9	130	20.1	24.0	700	46.7	55.6
5	4.0	4.7	34	10.4	12.3	135	20.5	24.4	750	48.4	57.5
6	4.4	5.2	36	10.7	12.6	140	20.9	24.9	800	50.0	59.4
7	4.7	5.6	38	11.0	13.0	145	21.3	25.3	850	51.5	61.3
8	5.1	5.9	40	11.3	13.3	150	21.6	25.7	900	53.0	63.1
9	5.4	6.3	42	11.5	13.6	160	22.3	26.6	950	54.4	64.8
10	5.7	6.7	44	11.8	14.0	170	23.0	27.4	1000	55.8	66.5
11	5.9	7.0	46	12.1	14.3	180	23.7	28.2	1100	58.6	69.7
12	6.2	7.3	48	12.3	14.6	190	24.3	29.0	1200	61.2	72.8
13	6.5	7.6	50	12.5	14.9	200	25.0	29.7	1300	1°03.7	75.8
14	6.7	7.9	55	13.1	15.6	225	26.5	31.5	1400	06.1	78.7
15	6.9	8.1	60	13.7	16.3	250	27.9	33.2	1500	08.4	81.4
16	7.2	8.4	65	14.2	17.0	275	29.3	34.9	1600	1°10.6	84.1
17	7.4	8.7	70	14.8	17.6	300	30.6	36.4	1700	12.8	86.7
18	7.6	8.9	75	15.3	18.3	325	31.8	37.8	1800	14.9	89.2
19	7.8	9.2	80	15.8	18.8	350	33.0	39.3	1900	1°17.0	91.6
20	8.0	9.4	85	16.3	19.4	375	34.2	40.7	2000	19.0	94.0
21	8.2	9.6	90	16.8	19.9	400	35.3	42.0	2100	20.9	96.3
22	8.4	9.9	95	17.2	20.5	425	36.4	43.3	2200	1°22.8	98.6
23	8.6	10.1	100	17.7	21.0	450	37.5	44.6	2300	24.7	100.8
24	8.8	10.3	105	18.1	21.5	475	38.5	45.8	2400	26.5	103.0
25	9.0	10.5	110	18.5	22.0	500	39.5	47.0	2500	28.3	105.1

Θεωρούμε :

$A_1B_1 = S$ (η οριζόντια απόσταση) $A - B$

$A\Gamma = A, \Gamma \kappa' \quad B\Delta = B, \Delta$

$A\Gamma = S_1 \quad \kappa' \quad B\Delta = S_2$

Αν δεν έχουμε ορατότητα : $S_1 + S_2 < S$

Αν έχουμε ορατότητα : $S_1 + S_2 > S$

Έστω h_1 το H_A και h_2 το H_B .

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑΣ

1.1. Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΗΣ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑΣ

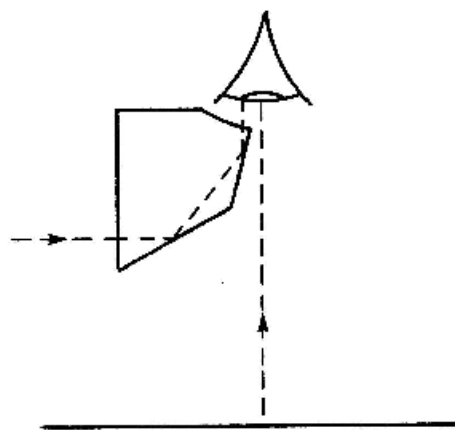
Η διατύπωση των μαθηματικών μοντέλων, ιδίως αυτών του **Lambert**, η ανάπτυξη και οι συνεχείς βελτιώσεις του σκοτεινού θαλάμου (**camera obscura**), η εισαγωγή του φωτεινού θαλάμου (**camera lucida**), αλλά, κύρια, η ανακάλυψη της φωτογραφίας έκαναν δυνατή τη γέννηση της φωτογραμμετρίας. Είναι γενικά παραδεκτό ότι ο **Aime Laussedat** έθεσε τα θεμέλια της φωτογραμμετρίας και κοινώς αναφέρεται σαν «πατέρας της φωτογραμμετρίας» (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Aime Laussedat

Το **1846**, ο νεαρός λοχαγός ο **Laussedat** εργαζόταν στα Πυρηναία για το νέο χάρτη της Γαλλίας. Προσπαθώντας να βελτιώσει τις κοπιαστικές εργασίες υπαίθρου της εποχής εκείνης για χαρτογραφική αποτύπωση, μελέτησε τη χρήση για το σκοπό αυτό των με ελεύθερο χέρι, σχεδιασμένων προοπτικών, όπως αυτά είχαν παρουσιαστεί το δέκατο όγδοο αιώνα από τον **Cappeler (1725)** και αργότερα, από τον Γάλλο επιστήμονα και υδρογράφο **Beautemps-Beaupre (1791)**.

Λόγω των εμφανών μειονεκτημάτων των με ελεύθερο χέρι σχεδιασμένων προοπτικών, ο **Laussedat** αποφάσισε να χρησιμοποιήσει τον φωτεινό θάλαμο (**camera lucida**) του **Wollaston** για τη δημιουργία προοπτικών σχεδίων και, μετά από επιτυχή δοκιμή αυτής της τεχνικής στην ανάπλαση της όψης του “**Hotel des Invalides**” στο Παρίσι (**1849**), πραγματοποίησε την πρώτη τοπογραφική αποτύπωση, χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική, στο φρούριο του **Vincennes**, το **1850**. Η διάταξη που χρησιμοποιήθηκε από τον **Laussedat** αποτελούνταν από ένα τετράπλευρο πρίσμα το οποίο, λόγω της διπλής ανάκλισης, παρήγαγε εικόνες στο σωστό τους προσανατολισμό (Εικόνα 2).



Εικόνα 2:Χρήση του τροποποιημένου πρίσματος του **Wollaston** σαν φωτεινού θαλάμου (**camera lucida**)

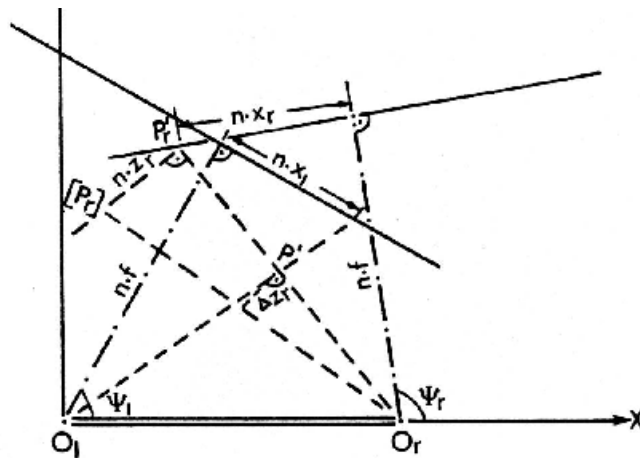
Το πρίσμα τοποθετήθηκε πάνω από μετροτράπεζα και ο χειριστής (τοποθετώντας το μάτι του κοντά στην άκρη του πρίσματος) μπορούσε να δει την εικόνα του τοπίου μέσα από το πρίσμα και ταυτόχρονα (με το ελεύθερο μέρος του ματιού) την κορυφή του μολυβιού που άγγιζε την επιφάνεια της μετροτράπεζας. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας το αρχικό πρίσμα του **Wollaston**, η εικόνα ενός μακρινού τοπίου εμφανιζόταν επίσης σε μεγάλη απόσταση από την μετροτράπεζα. Αποτέλεσμα ήταν η εικόνα του τοπίου και η μύτη του μολυβιού να μη μπορούν να εστιαστούν ταυτόχρονα.

Ακόμη, καθώς η μύτη του μολυβιού και η εικόνα του τοπίου ήταν σε διαφορετικά επίπεδα, κάθε αλλαγή θέσης του ματιού μετατόπιζε την εικόνα σε σχέση με το μολύβι. Το σοβαρό αυτό μειονέκτημα, καθώς και η δυσκολία του ματιού να παρατηρεί ταυτόχρονα δύο εικόνες σε δύο σημαντικά διαφορετικές αποστάσεις, εξαλείφθηκαν από τον **Laussedat**, με κατάλληλη αλλαγή του σχήματος της άνω επιφάνειας του πρίσματος **Wollaston**, κατά τρόπο ώστε να προβάλλεται η εικόνα του τοπίου πάνω στη μετροτράπεζα. Αυτό έκανε τη χρήση του φωτεινού θαλάμου (**camera lucida**), προσαρμοσμένου σε μια ελαφριά μετροτράπεζα, μια απλή και σχετικά αποτελεσματική εργασία.

Κατά τα άλλα ακολουθούσαν η διαδικασία της τεχνικής της μετροτράπεζας που χρησιμοποιούνταν γενικά για τοπογραφικές αποτυπώσεις την εποχή εκείνη. Δηλαδή ορίζοντας γραφικά με εμπροσθοτομία σημεία του εδάφους, από δύο ή περισσότερες στάσεις με γνωστές συντεταγμένες, προσδιορίζονταν οι θέσεις των σημείων

αυτών στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων. Όμως, στη μέθοδο **Laussedat** οι τεμνόμενες διευθύνσεις δεν σχεδιάζονται στο πεδίο αλλά στο γραφείο από τα σχέδια κεντρικής προβολής που λαμβάνονταν από τις στάσεις.

Ο φωτεινός θάλαμος (**camera lucida**) όπως τροποποιήθηκε για το σκοπό αυτό και χρησιμοποιήθηκε από τον **Laussedat**, πρόσφερε σημαντικές βελτιώσεις όσον αφορά την ποιότητα της γεωμετρίας και την ταχύτητα σχεδιασμού των προοπτικών. Οι σχετικές εργασίες γραφείου παρουσιάζονται σχηματικά στην Εικόνα 3.

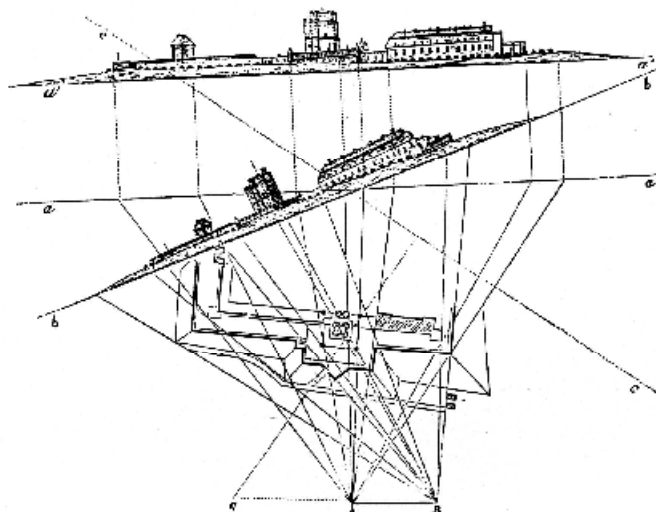


Εικόνα 3: Σχεδίαση κάτοψης από κεντρικές προβολές ή φωτογραφίες

Τα σημεία O_i , O_r παριστάνουν τις στάσεις από τις οποίες κατασκευάζονται τα προοπτικά προς τις διευθύνσεις ψ (\mathbf{l} και \mathbf{r}). Από τα σημεία O_i και O_r χαράσσονται οι διευθύνσεις ψ_i και ψ_r . οι κάθετες ευθείες γραμμές προς τις διευθύνσεις αυτές και σε απόσταση $n \cdot f$ από τα O_i και O_r αντιπροσωπεύουν τις οριζόντιες προβολές των αντίστοιχων εικόνων \mathbf{l} και \mathbf{r} , όπου n είναι ο συντελεστής κλίμακας. Ενώνοντας τις οριζόντιες προβολές P_i και P_r των αντίστοιχων σημείων

στις δυο εικόνες με τα προβολικά κέντρα O_i και O_r προσδιορίζεται η οριζόντια θέση του σημείου P που σχετίζεται με τις στάσεις O_i και O_r . Για τον προσδιορισμό επιπλέον, της υψομετρικής διαφοράς του σημείου P ως προς κάθε μια από τις στάσεις, π.χ. ενώνονται το σημείο P_r , που βρίσκεται στην κάθετο στο P'_r προς την $P'_r O_r$ και σε απόσταση $n z_r$ από το P'_r με το O_r . Η γραμμή $[P_r] O_r$ παριστάνει την προβολή της ακτίνας $O_r P$ στο οριζόντιο επίπεδο και η ποσότητα Δz_r , στην κλίμακα του σχεδίου, είναι η υψομετρική διάφορα μεταξύ του σημείου P και της στάσης Δz_r . Δz_i πρέπει να είναι ίση με την υψομετρική διαφορά των δυο σημείων στάσεων, γνωστή από τη χωροστάθμησή, η οποία μας δίνει και τον έλεγχο.

Εφαρμόζοντας αυτή τη γενική μέθοδο ο **Laussedat** χαρτογράφησε το φρούριο του **Vincennes** όπως φαίνεται στην Εικόνα 4 το **1850**. η αρχική κλίμακα του χάρτη ήταν **1:2000**.



Εικόνα 4: Χάρτης του φρουρίου του **Vincennes** που σχεδιάστηκε από τον **Laussedat** το **1850**, χρησιμοποιώντας φωτεινό θάλαμο (**camera lucida**)

Ακολούθως ο **Laussedat** ονόμασε την τεχνική αυτή εικονομετρία (από την ελληνική λέξη εικόνα) με σκοπό να την ορίσει και να της δώσει ξεχωριστή θέση στην πρωτοποριακή εργασία του. Συνδυάζοντας τον φωτεινό θάλαμο (**camera lucida**) με ένα τηλεσκόπιο, ο **Laussedat** επέκτεινε την χρήση της εικονομετρίας και μέχρι αποστάσεις 15 χιλιομέτρων, ιδιαίτερα για στρατιωτικές εφαρμογές.

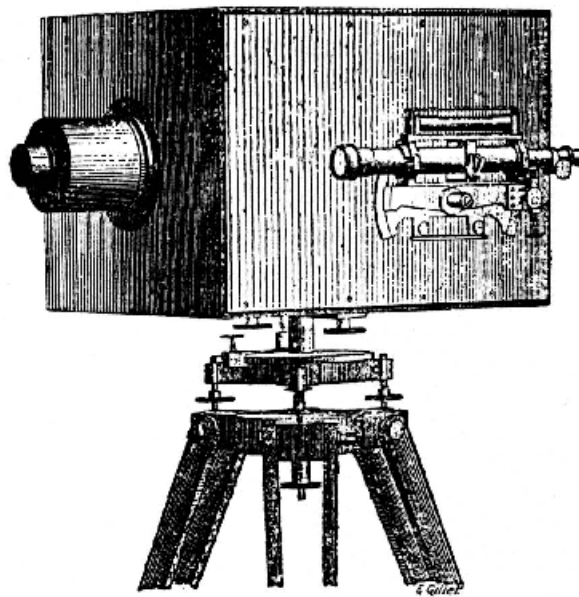
Το γεγονός ότι ο **Laussedat** χρησιμοποίησε το φωτεινό θάλαμο (**camera lucida**) αντί για το σκοτεινό θάλαμο (**camera obscura**) καθώς και τη φωτογραφική επεξεργασία την εποχή που αυτή ήδη χρησιμοποιούνταν εμπορικά, δε σημαίνει ότι δεν γνώριζε ή δεν ενδιαφερόταν για τη δυνατότητα φωτογραφικής καταγραφής του τοπίου με σκοπό τη χαρτογραφική αποτύπωση.

Όμως θα πρέπει κανείς να γνωρίζει ότι, εκείνη την εποχή, η εφαρμογή της τεχνικής της φωτογραφίας στο πεδίο ήταν εξαιρετικά πολύπλοκη. Οι υγρές φωτογραφικές πλάκες έπρεπε να προετοιμαστούν επί τόπου από τον χρήστη, πράγμα που απαιτούσε τη μεταφορά στο πεδίο όλων των αναγκαίων υλικών και μέσων. Επιπρόσθετα το οπτικό πεδίο των φωτογραφικών μηχανών εκείνης της εποχής ήταν μόνο περίπου 25^ο ενώ εκείνο του φωτεινού θαλάμου (**camera lucida**) ήταν 60^ο.

Επιπλέον, οι διαθέσιμες τότε φωτογραφικές μηχανές στερούσαν των μετρητικών χαρακτηριστικών και της σταθερότητας που απαιτούνταν για τοπογραφικές εφαρμογές.

Ωστόσο ο **Laussedat** δεν είχε καμία αμφιβολία για τα μοναδικά πλεονεκτήματα και τις δυνατότητες της χρήσης των φωτογραφιών σε

τοπογραφικές εφαρμογές. Έτσι το **1852**, άρχισε να εργάζεται για την αντικατάσταση του φωτεινού θαλάμου (**camera lucida**) με φωτογραφίες, μια διαδικασία που ονόμασε "μετροφωτογραφία". Μετά από τα πρώτα πειράματα με μία απλή φωτογραφική μηχανή που περιλάμβανε πυξίδα και μια μικρή αεροστάθμη διαμόρφωσε τις προδιαγραφές για ένα πιο προηγμένο όργανο το οποίο αργότερα κατασκευάστηκε από ένα πολύ γνωστό κατασκευαστή οργάνων τον **Brunner** σε συνεργασία με τον οπτικό **Bertaud**, το **1859** (Εικόνα 5).



Εικόνα 5: Το πρωτότυπο της τοπογραφικής φωτογραφικής μηχανής του **Laussedat** που κατασκευάστηκε το **1859** από τον **Brunner** στο Παρίσι

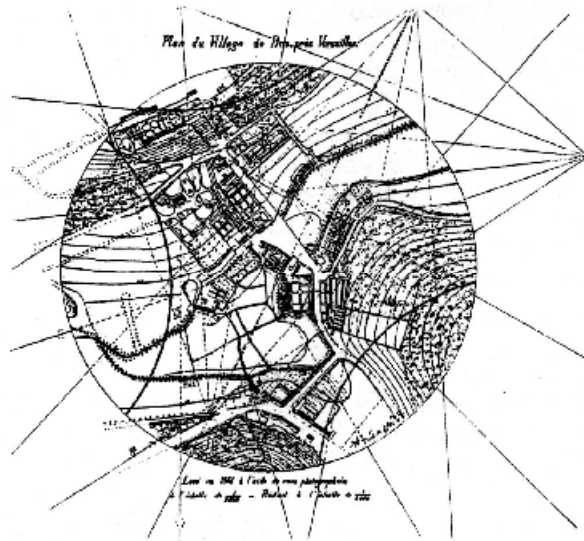
Το όργανο αυτό, το πρωτότυπο του μελλοντικού φωτοθεοδόλιχου, ήταν ένα ξύλινο κουτί μήκους **46εκ.** και διατομή **36 x 42εκ²**. ο αντικειμενικός φακός του **Bertaud** με $f = 50$ εκ. τοποθετήθηκε σε

κινητό σωλήνα ώστε να είναι δυνατή η κατάλληλη εστίαση. Το μέγεθος της γυάλινης πλάκας ήταν **27 εκ. X 33 εκ.**

Τέσσερα σταθερά εικονοσημεία (**fiducial marks**) απεικονιζόμενα στις πλάκες προσδιόριζαν την κύρια οριζόντια και κάθετη γραμμή της εικόνας και το πρωτεύον σημείο της. Ο τοπογραφικός σκοτεινός θάλαμος προσαρμοζόταν πάνω σε ένα οριζόντιο κύκλο όπου μπορούσαν να αναγνώσουν διευθύνσεις με τη βοήθεια βερνιέρου.

Ένας σφιγκτήρας και ένας κοχλίας επέτρεπαν τη γρήγορη ή αργή περιστροφική κίνηση παρόμοια με εκείνη των τοπογραφικών οργάνων που διέθεταν τηλεσκόπιο. Για τη σκόπευση χρησιμοποιούνταν τηλεσκόπιο προσαρμοσμένο στο πλαϊνό τοίχωμα της μηχανής. Μια αεροστάθμη, στο πάνω μέρος του τηλεσκοπίου, χρησιμοποιούνταν για την οριζοντίωση του ενώ η γωνία κλίσης του τηλεσκοπίου διαβάζονταν σε δύο απέναντι τοποθετημένους βερνιέρους.

Οι πρώτες δοκιμές έγιναν το **1859** στο Παρίσι και διερευνήθηκαν από αντιπροσώπους της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών, που επιβεβαίωσαν την πεποίθηση του **Laussedat** ότι η χαρτογραφική αποτύπωση στο μέλλον θα μπορούσε να βασιστεί στη χρήση φωτογραφιών. Ακολούθως, την άνοιξη του **1861**, κατ'εντολή του Υπουργείου Πολέμου ο **Laussedat** πραγματοποίησε την πρώτη ολοκληρωμένη τοπογραφική αποτύπωση του χωριού **Buc**, κοντά στις Βερσαλλίες, χρησιμοποιώντας την τοπογραφική του μηχανή, Εικόνα **6**.



Εικόνα 6: Χάρτης του **Buc** σε κλίμακα **1 : 2.000** που παράχθηκε από φωτογραφίες του **1861**. Αυτός ο χάρτης κέρδισε χρυσό μετάλλιο του **1863** στη Μαδρίτη.

Η εργασία υπαίθρου περιλάμβανε την ίδρυση μιας βάσης **200** μ., τον προσδιορισμό τεσσάρων σημείων τριγωνισμού και τη λήψη οκτώ φωτογραφιών σε υγρές πλάκες κολλωδίου. Ο χάρτης κάλυπτε περίπου **200** εκτάρια και ολοκληρώθηκε σε δύο ημέρες. Το φθινόπωρο του ίδιου έτους το Σώμα Μηχανικού του Γαλλικού στρατού χαρτογράφησε το φρούριο **Mont – Valerien** κάτω από την καθοδήγηση του **Laussedat**. Ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία, όπως και προηγούμενα, με τη διαφορά ότι το στεγνό επικυρωμένο χαρτί αντικατέστησε τις υγρές πλάκες κολλωδίου.

Με δεδομένα αυτά τα πρώτα επιτυχημένα πειράματα, ο λοχαγός του Γαλλικού Σώματος Μηχανικών **Javary** πήρε εντολή να δημιουργήσει μια ειδική μονάδα στρατού με σκοπό να πραγματοποιήσει έναν αριθμό χαρτογραφικών προγραμμάτων από το **1863** μέχρι το **1870**, χρησιμοποιώντας την τεχνική του **Laussedat**, σε περιοχές γύρω από το Παρίσι στις Άλπεις, γύρω από την Τουλώνη, στη

Vosges και στην Αλσατία. Η συνολική έκταση που χαρτογραφήθηκε ήταν περίπου **72.000** εκτάρια και τα τοπογραφικά διαγράμματα ήταν σε κλίμακα **1:5000** με ισοδιάσταση **5** μέτρων στις υψομετρικές καμπύλες.

Η ολοκλήρωση των προγραμμάτων επιβεβαίωσε τα την ορθότητα των θεωρητικών μαθηματικών μοντέλων, καθιέρωσε τη χρήση των σχετικών οργάνων και την εφαρμογή των πρακτικών εργασιών πεδίου. Όλα αυτά καθόρισαν και την κατεύθυνση της περαιτέρω εξέλιξης στη Φωτογραμμετρία. Ο **laussedat** που το **1856** έγινε καθηγητής Γεωδαισίας στη γνωστή **Ecole Polytechnique** του Παρισιού και, ακολούθως, διευθυντής του **Conservatoire National des Arts et Metiers**, το **1881**, δημοσίευσε τα αποτελέσματα της εργασίας του λεπτομερώς σε πολλά άρθρα και γραπτές εκθέσεις. Οι χάρτες που προέκυψαν από τις εργασίες που παρουσιάστηκαν σε έκθεση στο Παρίσι, το **1867**, και αργότερα στο Σικάγο. Σε αναγνώριση των επιτευγμάτων του ο **Laussedat** εκλέχτηκε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Γαλλίας, το **1894**.

Το μικρό οπτικό πεδίο των πρώτων οξυγόνιων μηχανών δημιούργησε την ανάγκη και οδήγησε στην ανάπτυξη πανοραμικών μηχανών, από τον **Martens (1844)** στις οποίες αρχικά η εικόνα καταγραφόταν πάνω σε μια κυρτή πλάκα «Νταγκεροτυπίας».

Πολλοί ερευνητές στην Γαλλία και σε άλλες χώρες υιοθέτησαν την ιδέα αυτή πειραματιζόμενοι σε διάφορες εφαρμογές. Θα μπορούσε κανείς εδώ να αναφέρει τη Φωτογραφική Μετροτράπεζα του **Chevallier (1858)**, τον «Περιγράφο» του **Mangin (1878)**, τον

«Κυλινδρογράφο» του **Moessard (1884)** στη Γαλλία και την πανοραμική μηχανή του **Porro (1858)** στην Ιταλία.

Οι περισσότερες αποτελεσματικές προσπάθειες για φωτογράφιση από αερόστατο για τοπογραφικούς σκοπούς έγιναν στην Γαλλία το **1858** από τον **Felix Tournachon** γνωστό σαν **Nadar**. Η χρήση υγρών πλακών κολλωδίου παρουσίαζε τρομερές δυσκολίες στη διαδικασία της λήψη φωτογραφιών από τον αέρα η οποία ουσιαστικά θα μπορούσε να δώσει μια πλήρη εικόνα του εδάφους. Ο **Laussedat** συμβούλεψε τον **Nadar** και τον βοήθησε ώστε να οργανώσει περαιτέρω πειράματα τα οποία αποδείχτηκαν αρκετά επιτυχημένα ώστε, το **1866**, οι στρατιωτικές αρχές της Γαλλίας να πειστούν να χρησιμοποιήσουν τις αεροφωτογραφίες για αναγνωριστικούς στρατιωτικούς σκοπούς.

Ωστόσο ο **Laussedat** εξακολουθούσε να χρησιμοποιεί λήψεις και συνέχιζε τη βελτίωση των οργάνων του και τις δημοσιεύσεις της τεχνικής του σε πολλά άρθρα. Παρά τις αδιαμφισβήτητες δυνατότητες της νέας τεχνικής, οι στρατιωτικές αρχές της Γαλλίας αποφάσισαν να διακόψουν της φωτοτοπογραφικής μονάδας του **Javary** μετά το Γάλλο-Πρωσικό πόλεμο του **1870-71**. αυτό ήταν ένα γεγονός που έδειχνε καθαρά τη κοντόφθαλμη αντίληψη που επηρέασε ιστορικά τις επιστημονικές και τεχνικές εξελίξεις. Ωστόσο, η βασική ιδέα και τα αποτελέσματα που είχαν επιτευχθεί μέχρι τότε προσέλκυσαν την προσοχή άλλων χωρών οι οποίες ακολούθησαν το δρόμο που είχε ανοίξει ο **Laussedat** και έκαναν προόδους στον τομέα αυτό.

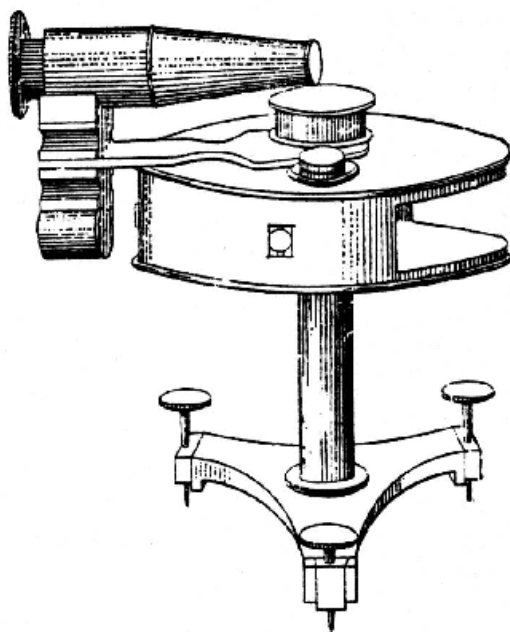
1.2. ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΙΑ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΥΣ ΣΚΟΠΟΥΣ

Ένας από αυτούς που γνώριζε την εργασία του **Laussedat** από προσωπική επαφή αλλά που ακολούθησε τις δικές του ιδέες ήταν ο ιταλός επιστήμονας **Ignazio Porro (1801-75)**, (Εικόνα 7).



Εικόνα 7: Ignazio Porro

Εφευρέτης του τηλεφακού, ανέπτυξε γύρω στο **1858** μία φωτογραφική μηχανή με σφαιρικές φωτογραφικές πλάκες στο κέντρο των οποίων τοποθέτησε σφαιρικό φακό. Σκοπός της μηχανής ήταν η δυνατότητα λήψης πανοραμικών εικόνων, (Εικόνα 8).



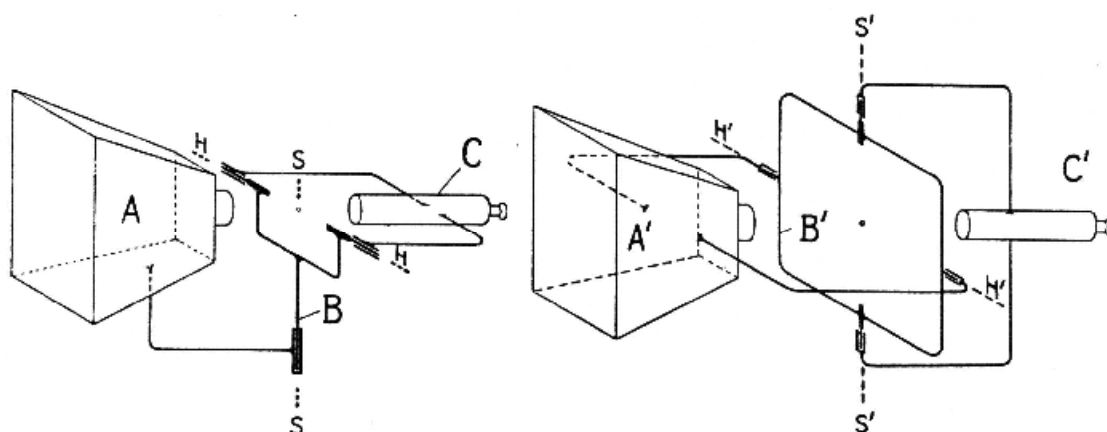
Εικόνα 8: Η πανοραμική μηχανή του **Porro**, 1858

Όπως αναφέρει ο **Poivilliers** το οπτικό πεδίο της μηχανής του **Porro** περιοριζόταν μόνο από τα μηχανικά μέρη και όχι από τον τρόπο λειτουργίας των φακών. Η οπτική διαστρόφη εξαλείφθηκε και η υψηλή ακρίβεια και ποιότητα της εικόνας επέτρεψε την μείωση της εστιακής απόστασης στα **6** εκ. περίπου, σε σύγκριση με τα **50** εκ. της φωτογραφικής μηχανής του **Laysse**.

Αν και η πανοραμική μηχανή του **Porro** από μόνη της δεν έπαιξε κάποιο σημαντικό ρόλο, στη επίλυση του προβλήματος χρήσης πανοραμικών εικόνων για χαρτογραφήσει και για μετρήσεις. Οι φωτογραφικές εικόνες, αποτυπωμένες σε κυρτή επιφάνεια, δεν ήταν κατάλληλες για τον προσδιορισμό σημείων με απλές γραφικές τομές και, ως εκ τούτου, ο **Porro** συνέστησε ώστε οι γωνίες των τεμνόμενων διευθύνσεων να μετριοούνται χρησιμοποιώντας ένα τηλεσκόπιο κατάλληλα τοποθετημένο στο κέντρο της κυρτής επιφάνειας της

φωτογραφικής εικόνας. Πριν από το **1856** ο **Porro** είχε κατασκευάσει δυο τέτοια συστήματα, τα ονομαζόμενα Φωτογωνιόμετρα, με κινητό και σταθερό τηλεσκόπιο αντίστοιχα.

Ο **W. Sander** διακρίνει τρεις περιπτώσεις, οι οποίες θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη. Η ερμηνεία του παρατίθεται σε αυτό το βιβλίο συνοδευόμενη από τις σχετικές εικόνες (εικόνα **9α** και εικόνα **9β**).



Εικόνα **9α**
Φωτογωνιόμετρο με τον εξωτερικό
άξονα του συστήματος
καρντάν κατακόρυφο

Εικόνα **9β**
Φωτογωνιόμετρο με τον εξωτερικό
άξονα του συστήματος
καρντάν οριζόντιο

Εάν **A** είναι το σώμα της φωτογραφικής μηχανής, **B** το ενδιάμεσο τμήμα, **C**, το τηλεσκόπιο του γωνιομέτρου, **H-H** ο οριζόντιος άξονας και **S-S** ο κατακόρυφος άξονας, μπορούν να διακριθούν τρεις τρόποι λειτουργίας του συστήματος καρντάν συμφωνά με την εικόνα **9α**.

Περίπτωση 1:

A: σταθερό

B: περιστρεφόμενο γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα **S-S**, και

Γ: περιστρεφόμενο σε ένα οριζόντιο επίπεδο γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα **S-S** και γύρω από κινητό οριζόντιο άξονα **H-H**.

Περίπτωση 2

A: περιστρεφόμενο σε ένα κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα **H-H** και γύρω από κινητό άξονα **S-S**.

B: περιστρεφόμενο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα **H-H** και

Γ: σταθερό

Περίπτωση 3

A: περιστρεφόμενο γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα **S-S**,

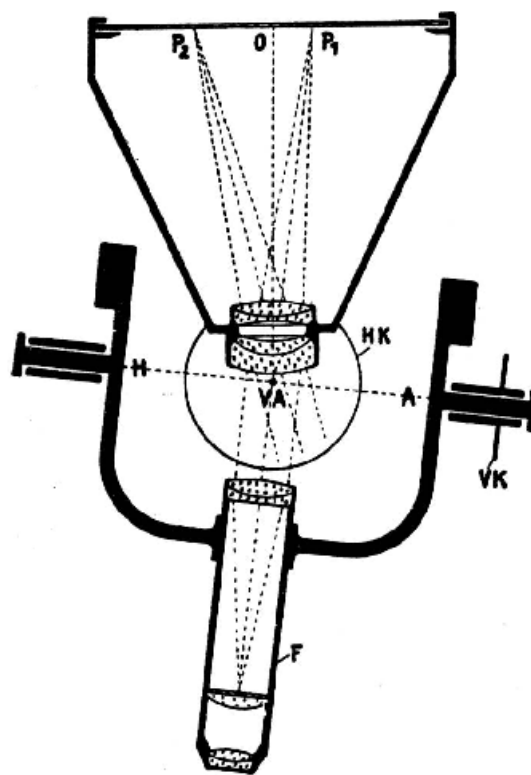
B: σταθερό, και

Γ: περιστρεφόμενο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα **H-H**.

Η θέση του άξονα στην εικόνα **9β** δεν αντιπροσωπεύει την κοινή περίπτωση και δεν δίνει συνηθισμένες γωνίες.

Αυτή η λύση, γνωστή σαν αρχή του **Porro**, αργότερα έτυχε ευρείας εφαρμογής στα φωτογραμμετρικά όργανα στερεοσκοπικής απόδοσης. Συγκεκριμένα, αν η φωτογραφική πλάκα της μηχανής λήψης παρατηρείται μέσα από ένα τηλεσκόπιο, σύμφωνα με την αρχή του **Porro**, η γεωμετρία της φωτογραφικής διαδικασίας αντιστρέφεται

και α γωνίες παρατήρησης των σημείων στο χώρο του αντικειμένου είναι απαλλαγμένες από την οπτική διαστροφή του φακού της μηχανής. Αυτό ήταν μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδέα που υλοποιήθηκε κατά το σχεδιασμό φωτογραμμετρικών οργάνων απόδοσης έως ότου, πολύ αργότερα, βρέθηκαν άλλοι τρόποι εξάλειψης των επιπτώσεων της οπτικής διαστροφής. Η αρχή του **Porro** παριστάνεται σχηματικά στην Εικόνα 10.



Εικόνα 10: Σχηματική παράσταση της παρατήρησης της φωτογραφικής εικόνας με τον φακό της μηχανής, σύμφωνα με την αρχή του **Porro** ή των **Porro-Koppe**

Ενώ είχε φανεί ότι η μέθοδος του **Porro** λησμονήθηκε, επαναδιατυπώθηκε ανεξάρτητα, από τον **Koppe**, στη Γερμανία, όπου, στη συνέχεια εφαρμόστηκε σε φωτογραμμετρικά όργανα απόδοσης. Έτσι, στη Φωτογραμμετρική βιβλιογραφία συχνά συναντά κανείς αναφορές στην αρχή των **Porro-Koppe**.

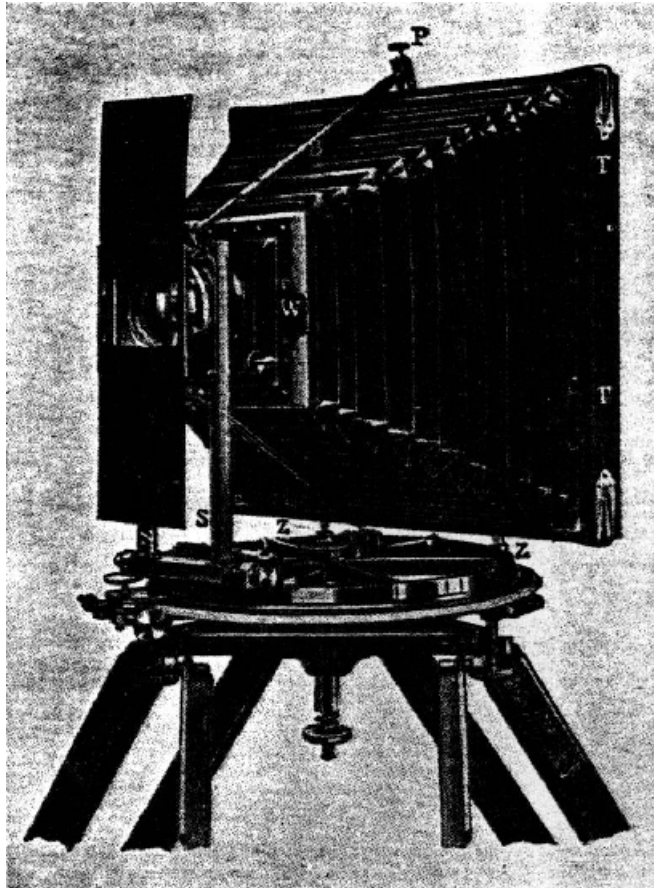
Ο **Porro** πέθανε πριν να μπορέσει να επιδείξει τη χρήση του οργάνου του στις τοπογραφικές εργασίες και, μόνο μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, το Στρατιωτικό Γεωγραφικό Ινστιτούτο της Ιταλίας πραγματοποίησε σημαντικά πειράματα σε χαρτογραφικές αποτυπώσεις με χρήση φωτογραφιών.

Στη Γερμανία η διαδοχή των γεγονότων που εισήγαγαν τη χρήση της φωτογραφίας στις μετρήσεις και τη χαρτογραφική αποτύπωση του φυσικού χώρου ήταν διαφορετική. Όπως παρατηρεί ο **M. Weiss** στην εμπειριστατωμένη δημοσίευση του η τοπογραφία της Γερμανίας δεν παρουσίαζε ιδιαίτερες δυσκολίες στην αποτύπωση χρησιμοποιώντας την τεχνική της μετροτράπεζας και έτσι δεν υπήρχε ισχυρό κίνητρο αναζήτησης νέων περισσότερο αποτελεσματικών τεχνικών χαρτογραφικής αποτύπωσης. Ωστόσο, το **1858**, ο αρχιτέκτονας **A. Meydenbauer** (Εικόνα 11) χρησιμοποίησε φωτογραφίες για την εργασία αναπαλαίωσης του Καθεδρικού Ναού στην **Wetzlar**



Εικόνα 11: A. Meydenbauer

Με αυτή την ευκαιρία παρουσίασε τις δυνατότητες της χρήσης της φωτογραφίας σε αρχιτεκτονικές εφαρμογές. Ωστόσο, μετά από τη δημοσίευση στη Γερμανία (Απρίλιος του **1863**) ενός μεταφρασμένου άρθρου του **Laussedat** εκδηλώθηκε ενδιαφέρον για τη χρήση της φωτογραφίας σε τοπογραφικές εφαρμογές. Το **1867** έγιναν τα πρώτα πειράματα από τον **Meydenbauer**, με την υποστήριξη των Στρατιωτικών αρχών της Πρωσίας, στην περιοχή **Freiburg**. Το πείραμα αφορούσε τη χαρτογραφική αποτύπωση περιοχής **0,5 χλμ²** σε κλίμακα **1:1000** μαζί με υψομετρικές καμπύλες με ισοδιάσταση **10 μ.** Ο **Meydenbauer** χρησιμοποίησε στην εργασία του μια μεταλλική φωτογραφική μηχανή τοποθετημένη στο κάτω μέρος ενός θεοδολιχου που το ονόμασε "**Photograpischer Theodolit**" (Εικόνα 12), από όπου και προέκυψε η ονομασία "φωτοθεοδολιχο".



Εικόνα 13: Το Φωτοθεοδόλιχο του **Meydenbauer**

Το όργανο αυτό, που ονομάστηκε Παντοσκόπιο, εφοδιάστηκε με ευρυγώνιο φακό ανοίγματος 105° , που κατασκευάστηκε από την εταιρεία E Busch, και ήταν πολύ χρήσιμο για όλες τις φωτογραμμετρικές εφαρμογές. Ο Meydenbauer ήταν αυτός που αργότερα, το 1893, εισήγαγε τον όρο "Φωτογραμμετρία" ο οποίος και υιοθετήθηκε από τότε σ' όλες τις γλώσσες για να ορίσει την τεχνική πραγματοποίησης έμμεσων μετρήσεων του φυσικού χώρου με τη χρήση της φωτογραφίας.

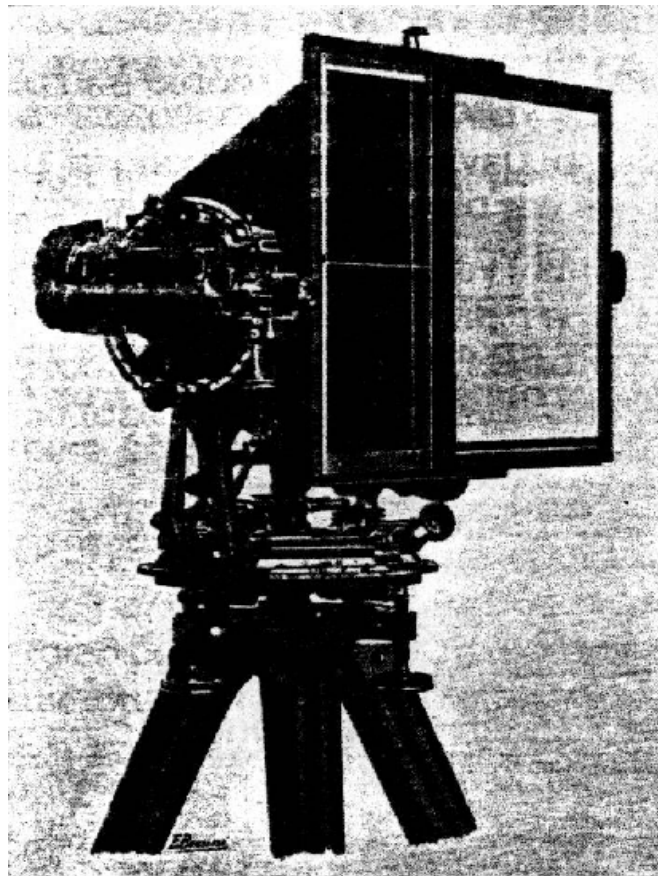
Η συνεχής προσπάθεια του **Dr. Meydenbauer**, που αφορούσε κυρίως στην εφαρμογή της φωτογραμμετρίας στην αρχιτεκτονική, οδήγησε στην ίδρυση του Βασιλικού Ινστιτούτου Φωτογραμμετρίας της Πρωσίας το **1885** στο Βερολίνο, κάτω από τη δική του διεύθυνση. Στο Ινστιτούτο αυτό, το οποίο παρέμεινε ενεργό μέχρι το **1945**, αποδόθηκαν

φωτογραμμετρικά χιλιάδες κτηρίων και μνημείων της Γερμανίας και άλλων χωρών.

Με τις παροτρύνσεις του **Meydenbauer**, οι στρατιωτικές αρχές της Πρωσίας ίδρυσαν (όπως και στη Γαλλία) ένα ειδικό απόσπασμα υπό την καθοδήγηση του **Dr. F. Stolze**, συνεργάτη του **Meydenbauer**, για να εφαρμόσει και να βελτιώσει περαιτέρω την τεχνική χαρτογράφησης του **Laussedat**. Ωστόσο, τα νέα όργανα που κατασκευάστηκαν για να χρησιμοποιηθούν στον πόλεμο του **1870-71** μεταξύ Γαλλίας και Πρωσίας δεν ικανοποίησαν τις στρατιωτικές απαιτήσεις και, μετά από αυτή την απογοητευτική εμπειρία, το απόσπασμα διαλύθηκε σύντομα, και μέχρι το **1885**, εγκαταλείφθηκαν από τις Γερμανικές στρατιωτικές αρχές οι περαιτέρω προσπάθειες στον τομέα των φωτογραμμετρικών αποτυπώσεων.

Όταν ο θάνατος του **Porro (1875)** έθεσε τέλος στην πολλά υποσχόμενη καριέρα του μεγαλοφυούς αυτού Ιταλού επιστήμονα, το Γεωγραφικό Στρατιωτικό Ινστιτούτο της Φλωρεντίας άρχισε τον ίδιο χρόνο πειράματα χαρτογραφικής αποτύπωσης με χρήση φωτογραφιών. Χρησιμοποιώντας φωτογραφική μηχανή του εμπορίου και υγρές πλάκες κολλωδίου, ο λοχαγός **Michele Manzi** αποτύπωσε, το **1876**, τον παγετώνα **Bart** στο **Mont Cenis** σε κλίμακα **1:10.000**. Παρά τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα, η εργασία αυτή διακόπηκε προσωρινά. Μόλις το **1878** δόθηκε εντολή στον **P. Paganini**, ένα μηχανικό από το ίδιο Ινστιτούτο, να πραγματοποιήσει συστηματικές μελέτες και να πειραματιστεί με τη νέα τεχνική. Για το σκοπό αυτό ο **Paganini** παράγγειλε ένα ειδικό όργανο, που ήταν συνδυασμός ενός θεοδόλιχου και μιας φωτογραφικής μηχανής, και χαρτογράφησε μια περιοχή των Άλπεων σε κλίμακα **1 : 25.000** χρησιμοποιώντας **110** φωτογραφίες. Με

την εμπειρία που απόκτησε, τροποποίησε τα όργανα και, το **1879**, χρησιμοποιώντας τις διαθέσιμες ξηρές φωτογραφίες πλάκες ζελατίνης αποτύπωσε περίπου **73 χλμ²** μιας περιοχής των Άλπεων (**Maritime Alps**) σε κλίμακα **1: 25.000**. Τον επόμενο χρόνο (**1880**), άρχισε το δεύτερο και πολύ μεγαλύτερο πρόγραμμα χαρτογραφικής αποτύπωσης **1000 χλμ²** των υψηλότερων Ιταλικών Άλπεων σε κλίμακα **1: 50.000** (Εικόνα 14).

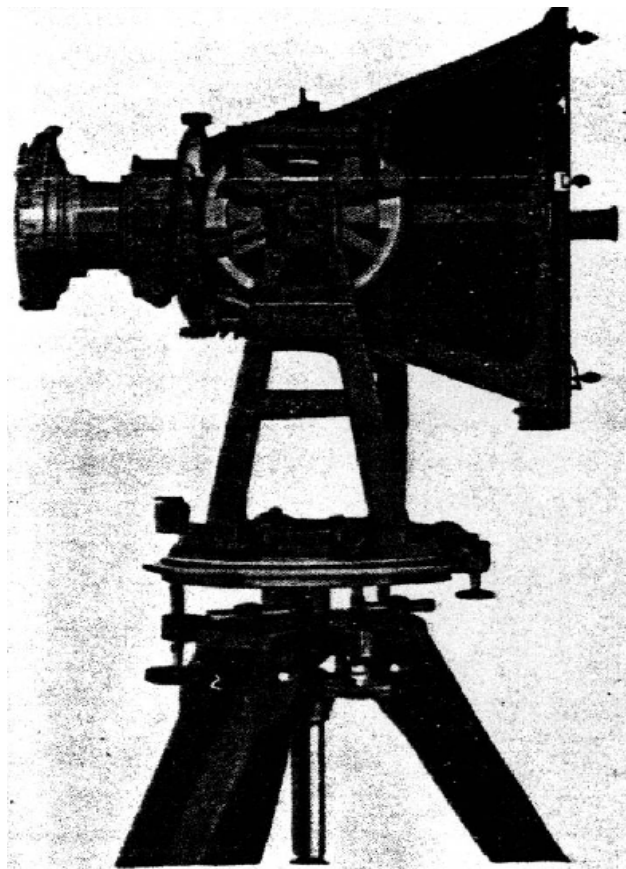


Εικόνα 14: Το φωτοθεοδόλιχο του **Paganini, 1884**

Ο **Paganini** βελτίωσε περαιτέρω το φωτοθεοδόλιχο που κατασκευάστηκε από την εταιρεία **Galileo** σύμφωνα με τις προδιαγραφές του. Χρησιμοποιήθηκαν *κεκλιμένες φωτογραφίες* για να επιτευχθεί η κατάλληλη κάλυψη των υψηλών κορυφογραμμών και το

βαθιών χαραδρών. Για να απλοποιήσει το φωτοθεοδόλιχο ο **Paganini** εισήγαγε μια άλλη καινοτομία : αφαίρεσε το τηλεσκόπιο που ήταν προσαρμοσμένο στη φωτογραφική μηχανή (Εικόνα 5).

Η σκόπευση με τη φωτογραφική μηχανή γινόταν με παρατήρηση της εικόνας που σχηματιζόταν από το φακό της μηχανής μέσα από ένα προσοφθάλμιο φακό προσαρμοσμένο στο πίσω μέρος της μηχανής και κεντρωμένο στον οπτικό της άξονα (1890). Είναι φανερό ότι ο σχεδιασμός ενός τόσο κομψού οργάνου δεν ήταν μόνο αποτέλεσμα των απαιτήσεων ακρίβειας των φωτογραμμετριών τεχνικών αλλά, επί πλέον, βασίστηκε και στις απαιτήσεις και την εμπειρία που είχε αποκτηθεί από τις εργασίες πεδίου, συμπεριλαμβανομένων και των εργασιών σε πολύ ορεινές περιοχές (Εικόνα 15).



Εικόνα 15 : Το φωτοθεοδόλιχο του **Paganini** με κεντρικό τηλεσκόπιο, 1890

Ο **Paganini**, επί πλέον, επινόησε όργανα απόδοσης από φωτογραφίες. Οι εξελίξεις αυτές συντέλεσαν πολύ στην αποδοχή της Φωτογραμμετρίας σαν τεχνικής χαρτογραφικής αποτύπωσης και η επιτυχία αυτή οδήγησε και σε άλλα χαρτογραφικά προγράμματα. Ένα από αυτά τα προγράμματα ήταν και η χαρτογράφηση σε κλίμακα **1:100.000** περιοχής των Άλπεων χρησιμοποιώντας συνδυασμό των τεχνικών της Φωτογραμμετρίας και της Μετροτράπεζας, όπου η ιδιαίτερα δύσκολη περιοχή των βουνών, με υψόμετρο πάνω από **2.000μ**, αποτυπώθηκε φωτογραμμετρικά ενώ οι πιο προσιτές περιοχές, υψομέτρου κάτω των **2.000 μ**, αποτυπώθηκαν με μετροτράπεζα.

Ο καθηγητής **E Doiezal**, ιδρυτής της Διεθνούς Εταιρείας Φωτογραμμετρίας, έγραψε στον επικήδειο τον αφιερωμένο στον **Paganini** : "Αναμφισβήτητα, η Ιταλία ήταν η χώρα που, χάρις στο φωτογραμμετρικό έργο του **Paganini**, κέρδισε την πρωτοπορία στη Φωτογραμμετρία και την διατήρησε για μεγάλο χρονικό διάστημα" .

Η μέχρι εδώ παρουσίαση περιορίστηκε σε λίγα ονόματα και στα όργανα που αναπτύχθηκαν αντίστοιχα. Αυτό δεν σημαίνει ότι το ίδιο χρονικό διάστημα δεν πραγματοποιήθηκαν και άλλες αξιόλογες πρωτότυπες εργασίες.

Αντίθετα, η αλήθεια είναι ότι ο αριθμός των νέων ιδεών και των λύσεων που προτάθηκαν ήταν εκπληκτικά μεγάλος, ακόμη και μόνο στη Γαλλία παρόλο που πολλές από αυτές δεν άντεξαν στο πέρασμα του χρόνου, συνεισέφεραν σημαντικά στη γενικότερη ανάπτυξη της Φωτογραμμετρίας.

Παρόμοιες εξελίξεις έλαβαν χώρα και σε άλλες χώρες και, με τον χρόνο, γεννήθηκαν νέες ιδέες και επιτεύχθηκαν σημαντικά αποτελέσματα. Οι νέες εφαρμογές ήταν εξ ίσου σημαντικές διότι έδειχναν το ευρύ πεδίο εφαρμογών της Φωτογραμμετρίας που, σαν ιδέα και μόνο, είχε γενικότερη εφαρμογή από οποιαδήποτε άλλη τεχνική τοπογραφικής αποτύπωσης. Ο **Laussedat**, από τις πρώτες ήδη παρουσιάσεις και δημοσιεύσεις του (**1860, 1872/1874**), περιέγραψε τη χρήση της Φωτογραμμετρίας στην Αστρονομία και επίσης αναφερόταν στην εργασία του **Gustave Le Bon** ο οποίος είχε σταλεί από τη Γαλλική Κυβέρνηση στην Ινδία σε μια αρχαιολογική αποστολή.

Ο **Laussedat**, σε συνεργασία με άλλους επιστήμονες, οπτικούς, κατασκευαστές οργάνων και μηχανικούς (κυρίως τον λοχαγό **Javary** που ο **Laussedat** εκτιμούσε πολύ), θεμελίωσαν τη Φωτογραμμετρία και έδειξαν τον τρόπο αξιοποίησης της. Ωστόσο, το Στρατιωτικό Γεωγραφικό Ινστιτούτο της Ιταλίας ήταν αυτό που από το **1875** (**Michete Manzi**) εισήγαγε και προώθησε, στη συνέχεια, με τις ακούραστες προσπάθειες και ευφυείς ιδέες του **Paganini**, τη Φωτογραμμετρία στις εργασίες παραγωγής χαρτών. Η εργασία και η ανάπτυξη των οργάνων από τον **Paganini** συντέλεσε στη διάδοση της ανακάλυψης του **Laussedat** σε άλλες χώρες και επιτάχυνε την γενική εξέλιξη της νέας τεχνικής.

1.3. ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΑΕΡΟΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ

Ενώ για ορεινό έδαφος, η χρήση φωτογραφιών που είχαν ληφθεί από επίγειες στάσεις αποτελούσε μια πολύ αποτελεσματική και πρωτότυπη για την εποχή μέθοδο χαρτογράφησης δεν ίσχυε το ίδιο για επίπεδο έδαφος.

Μια προφανής λύση, την οποία συνέλαβαν πολύ νωρίς α πρωτοπόροι της Φωτογραμμετρίας, θα ήταν η χρήση φωτογραφιών που θα είχαν ληφθεί "από τον αέρα" με φωτογραφικές μηχανές των οποίων οι οπτικοί άξονες θα κατευθύνονταν κατακόρυφα προς τα κάτω, με την προϋπόθεση βέβαια ότι θα ήταν δυνατό α φωτογραφικές αυτές μηχανές να εγκατασταθούν σε εξέδρες για λήψεις "από τον αέρα".

Μια πιθανή λύση θα μπορούσε να αποτελέσει η χρήση αερόστατων, που είχαν ήδη εξελιχθεί σε αρκετό βαθμό περί τα μέσα του δέκατου ένατου αιώνα, όταν ανακαλύφθηκε η Φωτογραμμετρία.

A. Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΑΕΡΟΣΤΑΤΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΠΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΕΡΟΣΤΑΤΟ

B. ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΑΠΟ ΑΕΡΟΣΤΑΤΟ ΚΑΙ Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΗΣΗ

C. ΧΡΗΣΗ ΑΕΡΟΣΤΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΛΗΨΗ ΑΕΡΟΦΩΤΟΓΡΑΦΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΠΟΤΥΠΩΣΕΙΣ

Η φωτογραμμετρία είναι η επιστήμη που πραγματεύεται τις μεθόδους με τις οποίες οι μετρήσεις τοπογραφικών στοιχείων γίνονται επάνω σε φωτογραφίες. Ανάλογα με το εάν το σημείο λήψης της φωτογραφίας βρίσκεται στο έδαφος ή στον αέρα διακρίνεται σε επίγεια και εναέρια.

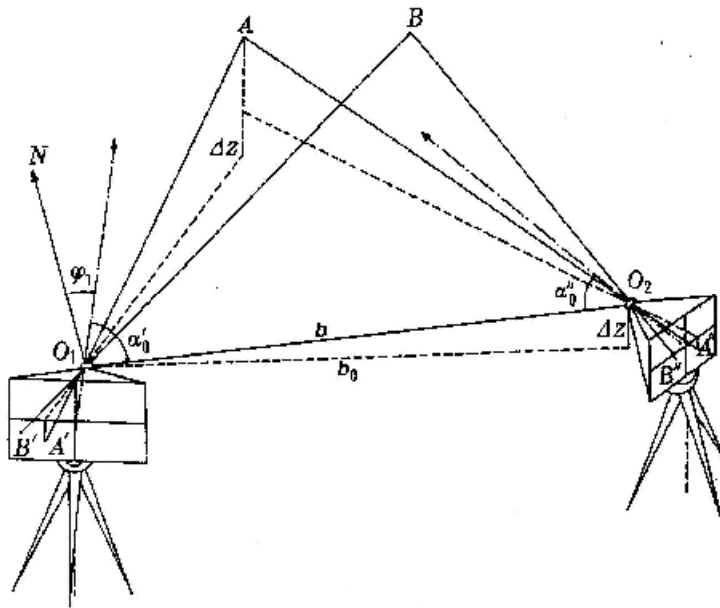
Στην επίγεια φωτογραμμετρία εκτελούνται μετρήσεις επάνω σε φωτογραφίες που έχουν ληφθεί από σημείο του εδάφους το οποίο είναι γνωστό ή μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί. Στην εναέρια φωτογραμμετρία εκτελούνται μετρήσεις με τη βοήθεια αεροφωτογραφιών.

Η εξέλιξη της φωτογραμμετρίας επιτρέπει τη γρήγορη και οικονομική άντληση κάθε είδους αξιόπιστων μετρητικών πληροφοριών από φωτογραφίες. Μεταξύ αυτών αναφέρεται η μέτρηση οριζοντίων αποστάσεων και υψομετρικών διαφορών, η σύνταξη οριζοντιογραφικών διαγραμμάτων και τοπογραφικών χαρτών, η παραγωγή φωτομωσαϊκών και ορθοφωτοχαρτών κλπ. Η φωτοερμηνεία εξάλλου επιτρέπει τη συλλογή πληροφοριών ποιοτικού χαρακτήρα με πλήθος εφαρμογών στη Γεωλογία, στη Γεωργία, στη Δασολογία, στην προστασία του περιβάλλοντος, στην Αρχαιολογία, στην έρευνα αντοχής των υλικών και σε πολλά άλλα αντικείμενα εφαρμοσμένων επιστημών.

Η πυκνότητα της πληροφορίας που περιέχεται στη φωτογραφία προφανώς είναι πολύ μεγάλη. Κατά συνέπεια η ταχύτητα με την οποία συλλέγονται μέσω της φωτογραφίας οι μετρητικές πληροφορίες, που είναι απαραίτητες για τη σύνταξη ενός τοπογραφικού χάρτη, είναι επίσης πολύ μεγάλη. Γι' αυτό η απόδοση των φωτογραμμετρικών μεθόδων αποτύπωσης υπολογίζεται ότι θα μπορούσε να συγκριθεί με εκείνη που θα προέκυπτε εάν εφαρμοζόταν η ταχυμετρική μέθοδος και ο σταδιοφόρος έτρεχε με ταχύτητα **80 Km/h**.

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΠΟΤΥΠΩΣΗΣ

Πρώτος ο Γάλλος **Laussedat** το **1850** σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει δύο φωτογραφίες που έχουν ληφθεί από τα άκρα μιας γνωστής βάσης **b**, προκειμένου να προσδιορίσει τη θέση ενός σημείου **Σ** του εδάφους μέσω «οπτικής εμπροσθοτομίας» (σχ. 1).



(σχ.1) Αρχή της επίγειας φωτογραμμετρίας

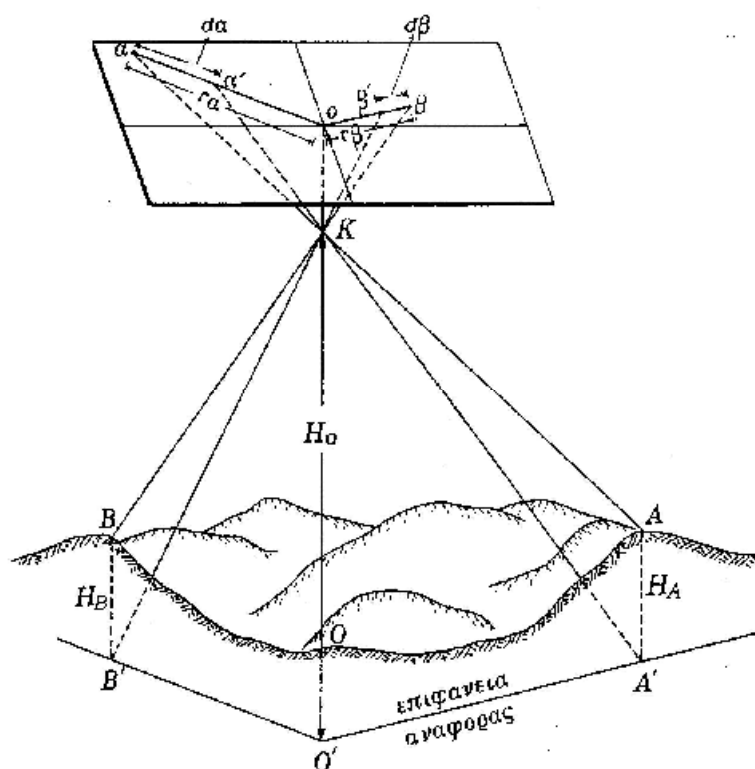
Πράγματι με τα στοιχεία της φωτομηχανής και τις θέσεις των σημείων λήψεων, είναι δυνατό να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του σημείου Σ, που απεικονίζεται και στις δύο φωτογραφίες, με τύπους της μορφής:

$$X = \frac{bf}{x_1 - x_2}$$

$$Y = \frac{bx_1}{x_1 - x_2}$$

Τα x_1 , x_2 είναι συντεταγμένες που μετρούνται επάνω στις δύο φωτογραφίες, το b είναι η βάση, δηλαδή η απόσταση μεταξύ των σημείων λήψεων και το f είναι η εστιακή απόσταση της μηχανής.

Έστω τώρα ότι η φυσική επιφάνεια του εδάφους απεικονίζεται επάνω σε μια κατακόρυφη αεροφωτογραφία, η οποία έχει ληφθεί από σημείο K που απέχει απόσταση H_0 από την επιφάνεια αναφοράς. (σχ. 2).



(σχ.2) Οι μετατοπίσεις των εικόνων των σημείων του εδάφους λόγω αναγλύφου είναι ανάλογες του υψόμετρου

Οι εικόνες α , β των φυσικών σημείων A , B του εδάφους και οι εικόνες α' , β' των κατακόρυφων προβολών τους A' , B' επάνω στην επιφάνεια αναφοράς, που είναι κατά κανόνα η μέση στάθμη της θάλασσας, δε συμπίπτουν. Το ανάγλυφο επομένως του εδάφους προκαλεί μετατοπίσεις των εικόνων των σημείων του, οι οποίες αυξάνονται όσο μεγαλώνουν τα υψόμετρα.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η μετατόπιση d λόγω ανάγλυφου ενός σημείου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$d = \frac{rH}{H_0}$$

όπου r είναι η απόσταση της εικόνας του σημείου από το κέντρο O της φωτογραφίας, H είναι το υψόμετρο του σημείου και H_0 το ύψος πτήσης του αεροπλάνου από την επιφάνεια αναφοράς.

Από τον παραπάνω τύπο φαίνεται ότι η μετατόπιση λόγω ανάγλυφου ανάλογη του υψομέτρου και της απόστασης της εικόνας του σημείου από το κέντρο της φωτογραφίας.

Εξάλλου η κλίμακα S κατακόρυφης αεροφωτογραφίας σε ορισμένο υψόμετρο H υπολογίζεται από τον τύπο:

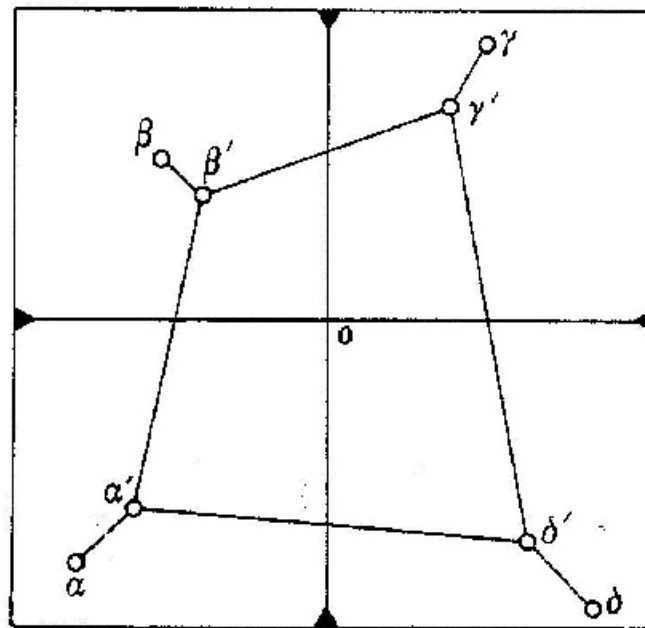
$$S = \frac{f}{H_0 - H}$$

όπου f είναι η εστιακή απόσταση της μηχανής.

Από τον τύπο αυτό φαίνεται ότι η κλίμακα μεταβάλλεται με το υψόμετρο, δηλαδή από σημείο σε σημείο της φωτογραφίας, γεγονός που απαγορεύει ουσιαστικά τη μέτρηση αποστάσεων επάνω στη φωτογραφία. Όταν το έδαφος δεν είναι πολύ ανώμαλο μπορεί για προσεγγιστικές μετρήσεις να χρησιμοποιείται η μέση κλίμακα, η οποία

υπολογίζεται από τον παραπάνω τύπο, όπου ως H λαμβάνεται ένα μέσο υψόμετρο του εδάφους.

Έστω ότι μια φωτογραφία περιέχει τις εικόνες a, β, γ, δ των κορυφών A, B, Γ, Δ μιας επιφάνειας του εδάφους και ότι τα υψόμετρα $H_A, H_B, H_\Gamma, H_\Delta$ των κορυφών αυτών είναι γνωστά (σχ.3).



(σχ.3) Αναγωγή σημείων στην επιφάνεια αναφοράς

Προφανώς δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί η κλίμακα με την οποία θα μπορούσαν να μετρηθούν επάνω στη φωτογραφία οι πλευρές της επιφάνειας αυτής, εκτός βέβαια από την περίπτωση κατά την οποία είναι:

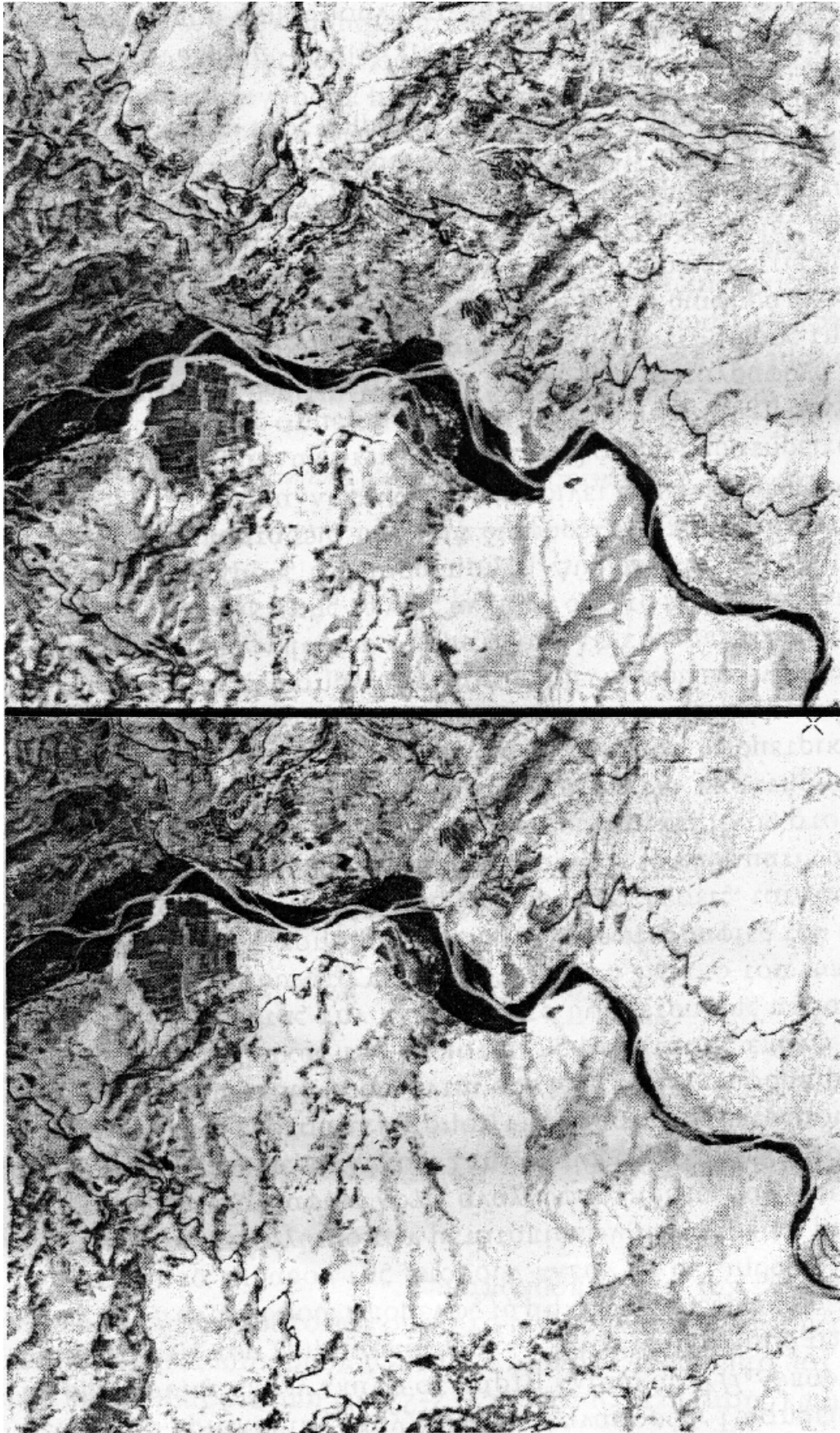
$$H_A = H_B = H_\Gamma = H_\Delta$$

Αντίθετα είναι δυνατό να υπολογιστούν οι διορθώσεις λόγω ανάγλυφου και να οριστούν οι θέσεις $a', \beta', \gamma', \delta'$, που αντιστοιχούν σε

εικόνες σημείων που βρίσκονται στην επιφάνεια αναφοράς. Τα σημεία $a', \beta', \gamma', \delta'$ βρίσκονται πλέον επάνω σε χάρτη κλίμακας f/H_0 , όπου H_0 είναι το ύψος πτήσης που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων λόγω ανάγλυφου. Επομένως τα μήκη των πλευρών της έκτασης, οι γωνίες και το εμβαδόν της μπορούν πλέον να μετρηθούν.

Για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων των σημείων μιας κατακόρυφης αεροφωτογραφίας λόγω ανάγλυφου, πρέπει να είναι γνωστό το ύψος πτήσης του αεροπλάνου. Στην αντίθετη περίπτωση το ύψος αυτό προσδιορίζεται έμμεσα με μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων του εδάφους, α οποία βρίσκονται στο ίδιο περίπου υψόμετρο, και υπολογισμό της κλίμακας της αντίστοιχης απόστασης επάνω στη φωτογραφία. Γνωρίζοντας την κλίμακα στο υψόμετρο της απόστασης που μετρήθηκε, είναι δυνατό να υπολογιστεί το H_0 από τον τύπο (2-5).

Εάν αντί μιας χρησιμοποιηθούν δύο φωτογραφίες του ίδιου αντικειμένου που έχουν λήξει από διαφορετικές θέσεις, τότε οι φωτογραφίες αυτές, παρατηρούμενες στεροσκοπικά (το κάθε μάτι να βλέπει τη δική φωτογραφία), δίνουν εικόνα του αντικειμένου στο χώρο των τριών διαστάσεων (σχ. 4).



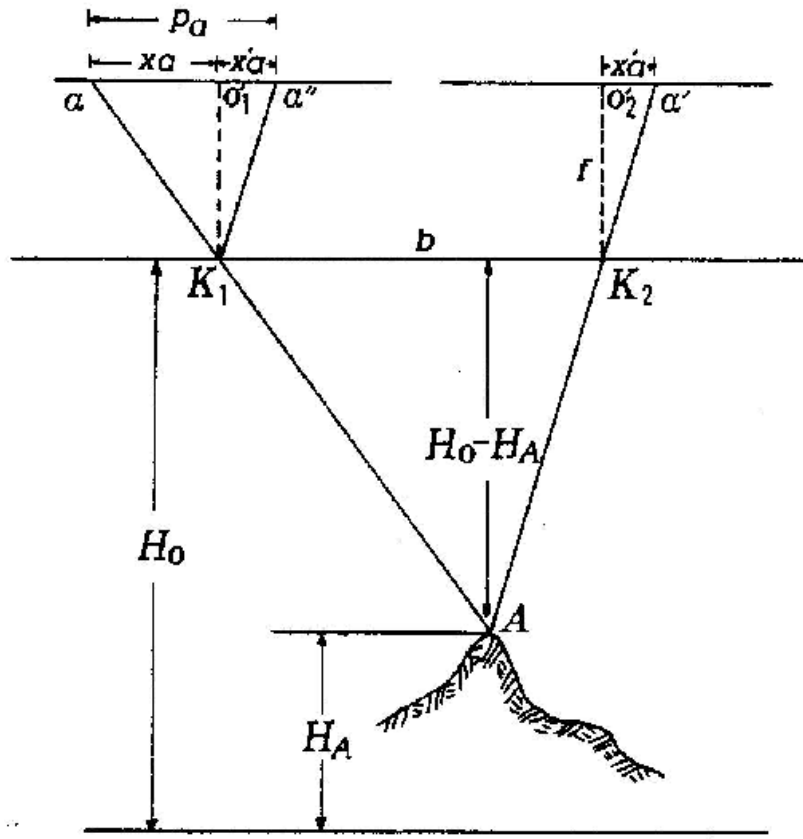
(σχ.4) Στερεοζεύγος αεροφωτογραφιών

Αυτό επιτρέπει την παρατήρηση του βάθους του αντικειμένου και επομένως τη μέτρηση υψομετρικών διαφορών. Οι οπτικοί άξονες των οφθαλμών του παρατηρητή συγκλίνουν καθώς παρατηρούν ένα σημείο του αντικειμένου που εικονίζεται στις δύο φωτογραφίες. Η γωνία που σχηματίζουν λέγεται παραλλακτική γωνία. Η τιμή της παραλλακτικής γωνίας αυξάνει όσο το αντικείμενο πλησιάζει προς τους οφθαλμούς του παρατηρητή. Δύο σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις, θα έχουν διαφορετικές παραλλακτικές γωνίες. Η διαφορά στις παραλλακτικές γωνίες δίνει την αντίληψη του βάθους.

Αντί της παραλλακτικής γωνίας ευκολότερα παρατηρείται η λεγόμενη παράλλαξη ενός σημείου, η οποία αντιπροσωπεύει τη συνολική μετατόπιση των εικόνων του στις δύο διαδοχικές φωτογραφίες. Η παράλλαξη αυξάνει όσο μεγαλώνει το υψόμετρο του. Η διαφορά ανάμεσα στις παραλλάξεις των διαφόρων σημείων του αντικειμένου στις διαδοχικές φωτογραφίες, δίνει τη διαφορά στις παραλλακτικές γωνίες που σχηματίζουν οι οπτικοί άξονες του παρατηρητή, με αποτέλεσμα τη συνεχή στερεοσκοπική εικόνα.

Επομένως η παράλλαξη αποτελεί έμμεση ένδειξη του υψομέτρου ενός σημείου που απεικονίζεται σε δύο διαδοχικές φωτογραφίες.

Έστω ότι a και a' είναι οι εικόνες ενός σημείου A σε δύο διαδοχικές φωτογραφίες που ελήφθησαν από τα σημεία K_1, K_2 τα οποία απέχουν απόσταση b (βάση) μεταξύ τους (σχ.5).



(σχ.5) Σχέση μεταξύ παράλλαξης και υψομέτρου σημείου

Η απόσταση p_α είναι η παράλλαξη του σημείου A, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί με μέτρηση των αποστάσεων x_α και x'_α επάνω στις δύο φωτογραφίες.

Από τα όμοια τρίγωνα AK_1K_2 και $K_1\alpha\alpha'$ προκύπτει:

$$H_0 - H_A = f \frac{b}{p_\alpha} \quad (1)$$

Ο απλός αυτός τύπος εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στην παράλλαξη και στον υψόμετρο ενός σημείου του εδάφους που απεικονίζεται σε δύο διαδοχικές φωτογραφίες και αποτελεί τη βάση

στην οποία στηρίζονται οι τοπογραφικές αποτυπώσεις με τη βοήθεια αυστηρά κατακόρυφων αεροφωτογραφιών.

Το ύψος πτήσης μπορεί να προσδιοριστεί με τον τρόπο που αναφέρθηκε προηγουμένως. Επίσης μπορεί να προσδιοριστεί η απόσταση μεταξύ των κέντρων των φωτογραφιών. Επομένως για ένα σημείο που έχει γνωστό υψόμετρο, μπορεί να υπολογιστεί η παράλλαξη p από την (1).

Με μετρήσεις τώρα επάνω στις φωτογραφίες προσδιορίζεται η διαφορά παραλλάξεων μεταξύ του παραπάνω σημείου που έχει γνωστό υψόμετρο και ενός άλλου σημείου του οποίου ζητείται το υψόμετρο. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ των δύο αυτών σημείων και κατά συνέπεια το υψόμετρο του νέου σημείου υπολογίζεται με τον τύπο (1).

Η απόδειξη του τύπου (1) γίνεται με την υπόθεση ότι οι φωτογραφίες είναι αυστηρά κατακόρυφες και ότι έχουν ληφθεί από το ίδιο ύψος H_0 . Κάθε απόκλιση από τις παραδοχές αυτές επηρεάζει τις παραλλάξεις και επομένως τις τιμές των υψομέτρων των σημείων. Τα σφάλματα στα υψόμετρα των σημείων που εισάγονται από τις παραπάνω αιτίες περιορίζονται εάν χρησιμοποιηθούν αρκετά σημεία γνωστού υψομέτρου και διορθωθούν οι παραλλάξεις των ενδιαμέσων σημείων. Σφάλματα εισάγονται επίσης κατά τον προσδιορισμό των παραλλάξεων επάνω στις φωτογραφίες εξαιτίας της συρρίκνωσης των φωτογραφιών κατά τη χρήση τους και των παραμορφώσεων των φακών της φωτομηχανής.

Η ακρίβεια των υψομέτρων που προσδιορίζονται με την παραπάνω μέθοδο είναι το $1/300$ του ύψους πτήσης περίπου και εξαρτάται από την επιμέλεια με την οποία μετρούνται οι παραλλάξεις

και το πλήθος των σημείων ελέγχου που βρίσκονται στην αλληλοεπικαλυπτόμενη επιφάνεια των αεροφωτογραφιών.

Επομένως η μέθοδος επιτρέπει την κατασκευή χαρτών κατά πολύ χονδρική προσέγγιση που χρησιμεύουν σε αναγνωριστικές εργασίες. Τα πλεονεκτήματα της βρίσκονται στο γεγονός ότι απαιτεί απλά και επομένως φθηνά όργανα παρατήρησης των φωτογραφιών (στερεοσκόπιο, παραλλακτική ράβδος).

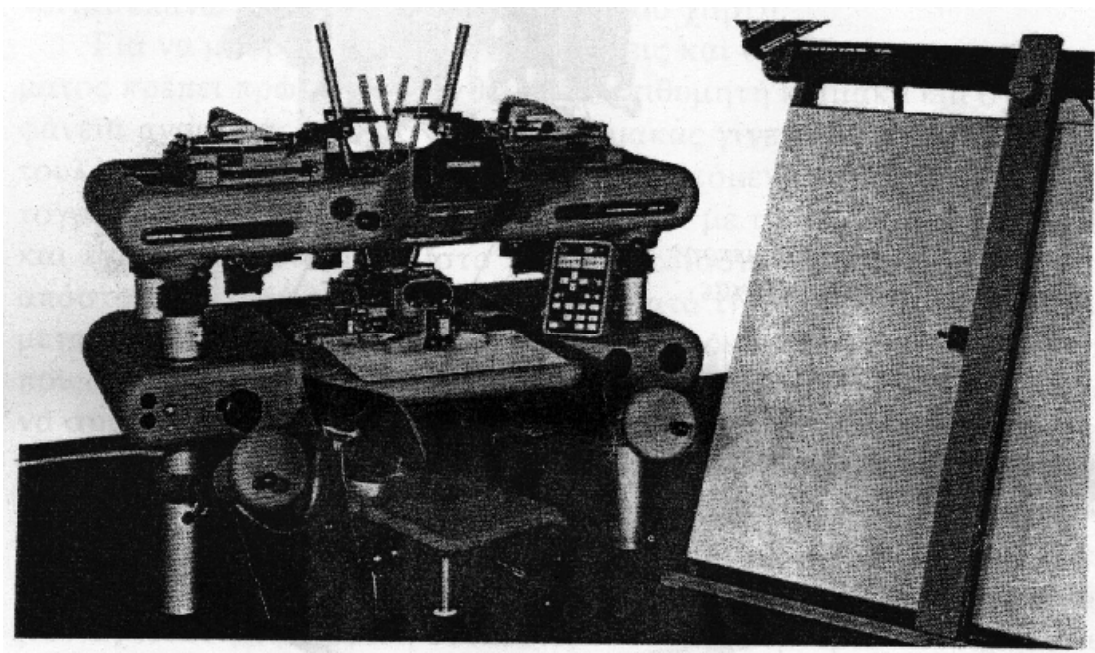
Η διόρθωση των φωτογραφιών λόγω της κλίσης του φωτογραφικού άξονα και της διαφοράς στο ύψος πτήσης κατά τις διαδοχικές λήψεις, επιτρέπει την ανάγωγή τους στην ίδια κλίμακα.

Η σύνθεση ανοιγμένων φωτογραφιών δίνει το λεγόμενο δεσμευμένο φωτομωσαϊκό, το οποίο συνδυάζει τη μετρητική ακρίβεια με την υψηλή ποιότητα στην απεικόνιση των λεπτομερειών. Οι απαιτήσεις σε ακρίβεια από το φωτομωσαϊκό καθορίζουν την πυκνότητα και την ακρίβεια προσδιορισμού των σημείων ελέγχου. Το δεσμευμένο φωτομωσαϊκό δεν είναι βέβαια τοπογραφικός χάρτης, διότι οπωσδήποτε παραμένουν μετατοπίσεις των εικόνων των σημείων του εδάφους λόγω ανάγλυφου. Εντούτοις όμως είναι ένα άριστο υποκατάστατο του τοπογραφικού χάρτη, που παράγεται εύκολα και με μικρό κόστος, το οποίο αποδεικνύεται πολύ χρήσιμο κατά τη σύνταξη μελετών τεχνικών έργων.

2.2 ΣΤΕΡΕΟΑΝΑΓΩΓΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ

Η εκμετάλλευση των μετρητικών πληροφοριών που περιέχονται στα ζευγάρια αλληλοεπικαλυπτομένων φωτογραφιών γίνεται με τη

βοήθεια πολύπλοκων οργάνων που ονομάζονται στερεοαναγωγείς (σχ. 6).



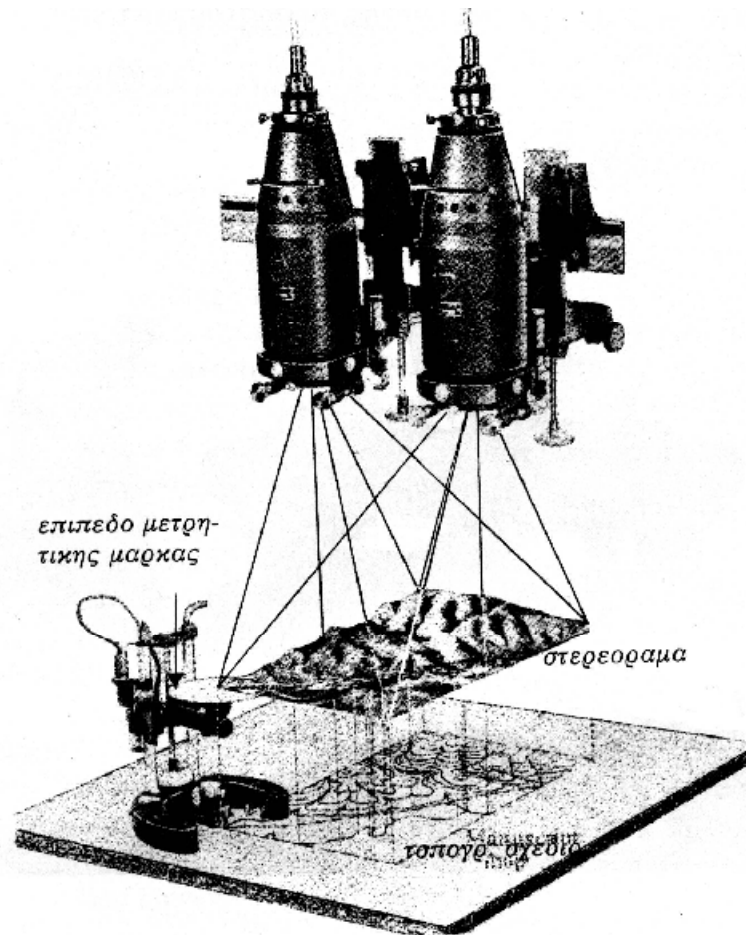
(σχ.6) Ο στερεοαναγωγέας τύπου **Wild A8** (έντυπο υλικό **wild Heerbrugg**)

Με τα όργανα αυτά σχεδιάζονται τελικά οι οριζόντιογραφικές και υψομετρικές λεπτομέρειες με μεγάλη ταχύτητα και ακρίβεια.

Ανάλογα με τον στερεοαναγωγέα η ακρίβεια των υψομέτρων μεμονωμένων σημείων του εδάφους κυμαίνεται από $1/1000$ μέχρι $1/10000$ του ύψους πτήσης. Η ακρίβεια των ισοϋψών καμπύλων, που χαράσσονται με τον αναγωγέα, ποικίλει από $1/500$ μέχρι $1/2500$ του ύψους πτήσης και εξαρτάται από την ακρίβεια του οργάνου και τη μορφή του εδάφους.

Κάθε στερεοαναγωγέας μπορεί στην ουσία να θεωρηθεί ότι αποτελείται από τέσσερα επιμέρους συστήματα. Αυτά είναι το σύστημα προβολής, το σύστημα παρατήρησης, το σύστημα μέτρησης και το σύστημα σχεδίασης.

Για λόγους απλότητας η περιγραφή των βασικών λειτουργιών του στερεοαναγωγέα που ακολουθεί, αναφέρεται στα παλιά όργανα διχρωμικής προβολής (σχ. 7).



(σχ.7) Αρχή λειτουργίας του στερεοαναγωγέα (U.S. Geological Survey)

Οι φωτογραφίες, εκτυπωμένες επάνω σε γυάλινες πλάκες ή σε φιλμ, τοποθετούνται ανά μια στους δύο προβολείς του οργάνου. Οι γυάλινες πλάκες αν και δύσχρηστες είναι προτιμότερες διότι εξασφαλίζουν μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα. Οι εικόνες προβάλλονται μέσω των δύο φωτεινών κώνων διαφορετικού χρώματος, πράγμα που επιτυγχάνεται με τη βοήθεια φίλτρων που

παρεμβάλλονται μεταξύ φωτογραφίας και φωτεινής πηγής του κάθε προβολέα.

Εξαιτίας των κλίσεων των φωτογραφιών και της διαφοράς στο ύψος πτήσης κατά την ώρα της λήψης, η φωτεινή ακτίνα που αντιστοιχεί σε ένα σημείο του εδάφους και προέρχεται από τον ένα προβολέα δεν τέμνει τη φωτεινή ακτίνα που αντιστοιχεί στο ίδιο σημείο του εδάφους και προέρχεται από τον άλλο προβολέα (ομόλογες ακτίνες).

Το ίδιο ασφαλώς συμβαίνει και με άλλα ζεύγη ομόλογων ακτινών με αποτέλεσμα να μη δημιουργείται το λεγόμενο στερεόγραμμα, δηλαδή η στερεοσκοπική εικόνα του εδάφους (σχ.7).

Για την απαλοιφή των παραμορφώσεων αυτών και την επίτευξη του στερεοράματος, κάθε προβολέας έχει τη δυνατότητα στροφής περί τρεις ορθογώνιους άξονες και μετακίνησης κατά μήκος του κάθε άξονα. Η διαδικασία με την οποία οι προβολείς ρυθμίζονται σε τέτοια θέση ώστε οι ομόλογες ακτίνες των σημείων του εδάφους να τέμνονται, λέγεται σχετικός προσανατολισμός του στερεοζεύγους. Ο σχετικός προσανατολισμός επομένως συνίσταται στο να λάβουν οι δύο εικόνες την ίδια σχετική θέση την οποία είχαν κατά τη στιγμή της λήψης.

Ο χειριστής του οργάνου παρατηρεί το στερεόγραμμα με γυαλιά των οποίων οι δύο φακοί έχουν χρώματα αντίστοιχα με τα χρώματα των προβολέων. Έτσι με το ένα μάτι βλέπει την εικόνα που δίνει ο άλλος προβολέας (αναγλυφική μέθοδος παρατήρησης του στερεοράματος). Μαζί με το στερεόγραμμα στο οπτικό πεδίο του χειριστή φαίνεται και η λεγόμενη μετρητική ή ιπτάμενη μάρκα, δηλαδή ένα φωτεινό σημείο που μπορεί να κινείται από το χειριστή επάνω σε επίπεδο το οποίο αντιστοιχεί σε δεδομένο υψόμετρο. Η κίνηση της

μετρητικής μάρκας μεταδίδεται σε γραφίδα που κινείται επάνω στο τραπέζι σχεδίασης του χάρτη.

Για να μπορούν να γίνουν μετρήσεις και σχεδίαση του στερεοράματος πρέπει πρώτα να αναχθεί στην επιθυμητή κλίμακα και στην επιφάνεια αναφοράς. Ο έλεγχος της κλίμακας γίνεται με τη βοήθεια δύο τουλάχιστον σημείων της αλληλοεπικαλυπτόμενης επιφάνειας των φωτογραφιών, τα οποία έχουν προσδιοριστεί με τοπογραφικές μεθόδους και έχουν ραπορταριστεί στο χαρτί σχεδίασης.

Μεταβάλλοντας την απόσταση μεταξύ των δύο προβολέων κατά τη διεύθυνση της πτήσης, μεταβάλλεται η κλίμακα μέχρις ότου οι εικόνες των σημείων ελέγχου που δίνει η μετρητική μάρκα συμπίσουν ακριβώς με τα ραπορταρισμένα σημεία. Για την αναγωγή του στερεοράματος στην επιφάνεια αναφοράς χρειάζονται θεωρητικά μεν τρία στην πράξη δε τέσσερα ή περισσότερα σημεία της αλληλοεπικαλυπτόμενης επιφάνειας των φωτογραφιών, των οποίων τα υψόμετρα να έχουν προσδιοριστεί με τοπογραφικές μεθόδους. Οι κλίσεις των δύο προβολέων ως ενιαίας μονάδας ή του τραπεζιού σχεδίασης, μεταβάλλονται έως ότου τα υψόμετρα των σημείων ελέγχου που καταγράφονται από τη μετρητική μάρκα συμπίσουν με τα υψόμετρα που έχουν προσδιοριστεί τοπογραφικά. Η αναγωγή του στερεοράματος στην κλίμακα και στην επιφάνεια αναφοράς ονομάζεται απόλυτος προσανατολισμός.

Μετά την αποκατάσταση του εξωτερικού προσανατολισμού η απόσταση ανάμεσα στους δύο προβολείς αντιπροσωπεύει τη βάση, δηλαδή την απόσταση μεταξύ των δύο διαδοχικών λήψεων στην κλίμακα του σχεδίου. Η απόσταση του κάθε προβολέα από το τραπέζι σχεδίασης είναι το υψόμετρο του σημείου λήψης στην κλίμακα του

σχεδίου επάνω από την επιφάνεια αναφοράς, μπορεί να είναι η μέση στάθμη της θάλασσας ή άλλη παράλληλη προς αυτήν επιφάνεια.

Οι κατακόρυφες αποστάσεις μεταξύ σημείων του στερεοράματος και της επιφάνειας του τραπεζίου σχεδίασης είναι τα υψόμετρα των σημείων αυτών από την επιφάνεια αναφοράς. Επομένως επάνω στο στερεόγραμμα, το οποίο αποτελεί πλέον πιστή αναπαραγωγή της πραγματικότητας κατά την ώρα των λήψεων υπό κλίμακα, είναι δυνατό να εκτελούνται μετρήσεις και κατά τις τρεις διαστάσεις, με τη βοήθεια της μετρητικής μάρκας. Επιπλέον είναι δυνατή η σχεδίαση οριζοντιογραφικών λεπτομερειών επάνω στο χαρτί σχεδίασης μέσω της γραφίδας που κατευθύνεται από τις κινήσεις της μετρητικής μάρκας. Ο χειριστής παρακολουθεί τα όρια της λεπτομέρειας μετακινώντας τη μετρητική μάρκα κατά τρόπο ώστε αυτή να βρίσκεται σε συνεχή επαφή με το έδαφος. Για τη σχεδίαση ισοϋψούς καμπύλης ο χειριστής τοποθετεί τη μετρητική μάρκα σε σημείο που αντιστοιχεί στο επιθυμητό υψόμετρο της καμπύλης και τη μετατοπίζει, έτσι ώστε να διατηρείται η επαφή της με την στερεοσκοπική εικόνα της επιφανείας του εδάφους.

Με βάση τις παραπάνω γενικές αρχές, που χρησιμοποιούνται με διάφορες παραλλαγές, και ανάλογα με το είδος των χαρτών ή διαγραμμάτων που πρόκειται να παραχθούν, έχουν σχεδιαστεί και κατασκευαστεί οι στερεοαναγωγείς των διαφόρων εργοστασίων. Γενικά πρόκειται για πολύπλοκα όργανα, που κατά τα τελευταία χρόνια συνδυάζονται με ηλεκτρονικούς υπολογιστές με αποτέλεσμα την βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων τους και την αύξηση της παραγωγικότητάς τους.

Σημειώνεται ακόμη ότι ορισμένοι σύγχρονοι στερεοαναγωγείς έχουν τη δυνατότητα ψηφιακής καταγραφής των σημείων του στερεοράματος με τις συντεταγμένες και τα υψόμετρα τους.

Το στερεόγραμμα μπορεί να ψηφιοποιηθεί πλήρως σε κανονικό κάναβο κατά δύο διευθύνσεις X και Y , το μέγεθος της πλευράς του οποίου εξαρτάται από τις ανωμαλίες του εδάφους και το σκοπό που πρόκειται να εξυπηρετήσει το ψηφιακό μοντέλο. Σε τέτοια μοντέλα εδάφους μπορούν να εκτελούνται προμελέτες τεχνικών έργων και υπολογισμοί χωματουργικών εργασιών με μεγάλη ταχύτητα και ακρίβεια, γεγονός που διευκολύνει την αναζήτηση βέλτιστων λύσεων.

Τέλος αναφέρεται ότι με κατάλληλη οπτικομηχανική ή οπτικοηλεκτρονική επεξεργασία των εικόνων των αλληλοεπικαλυπτόμενων αεροφωτογραφιών, είναι δυνατή η παραγωγή φωτογραφίας, η οποία συνδυάζει την ακρίβεια χάρτη υπό κλίμακα με την πληρότητα της φωτογραφίας ως προς την απεικόνιση των λεπτομερειών. Το αποτέλεσμα είναι η ορθοφωτογραφία. Για την παραγωγή της έχουν αναπτυχθεί και εξακολουθούν να αναπτύσσονται διάφορες τεχνικές που εκφράζουν τις σύγχρονες τάσεις στη φωτογραμμετρία.

Ανάμεσα στα πλεονεκτήματα των φωτογραμμετρικών μεθόδων παραγωγής τοπογραφικών χαρτών και διαγραμμάτων αναφέρονται η ταχύτητα, διεκπεραίωση της εργασίας, η ακρίβεια ορισμού των οριζοντιογραφικών λεπτομερειών, η πιστή απόδοση της μορφής του εδάφους μέσω ισοϋψών καμπύλων και η ανεξαρτησία της πρόσβασης στο έδαφος από τις καιρικές συνθήκες.

Επίσης σημειώνεται ότι με κατάλληλες επιλογές του ύψους πτήσης, της εστιακής απόστασης της φωτομηχανής, των σημείων

ελέγχου και του οργάνου απόδοσης, η φωτογραμμετρία μπορεί να δώσει χάρτες και διαγράμματα υπό οποιεσδήποτε κλίμακες.

Μειονεκτήματα των φωτογραμμετρικών μεθόδων είναι οι δυσκολίες στην αποτύπωση περιοχών που καλύπτονται από βλάστηση, η δυσκολία χάραξης ισοϋψών καμπύλων σε επίπεδα εδάφη και το μεγάλο κόστος των εργασιών λήψης αφενός και των οργάνων απόδοσης αφετέρου.

Πέρα από αυτά απαραίτητη είναι η συμπλήρωση των φωτογραμμετρικών διαγραμμάτων με επιτόπου μετάβαση των τοπογραφικών συνεργείων προκειμένου να απεικονιστούν λεπτομέρειες που δεν φαίνονται στις φωτογραφίες (π.χ. δρόμοι και μονοπάτια σε δασωμένες περιοχές, όρια ιδιοκτησιών, οικοδομικές γραμμές, υπόγειοι αγωγοί κοινωφελών οργανισμών κ.λ.π.), να καταταγούν σε κατηγορίες οι δρόμοι και να συλλεγεί η ονοματολογία των λεπτομερειών.

Παρά το μεγάλο κόστος του εξοπλισμού, οι φωτογραμμετρικές μέθοδοι αποτύπωσης είναι οικονομικότερες από τις τοπογραφικές όταν το αντικείμενο είναι μεγάλο. Γι ' αυτό έχουν καθιερωθεί για την εκτέλεση τοπογραφικών χαρτογραφήσεων ιδιαίτερα υπό τις μικρές τοπογραφικές κλίμακες (**1: 500** και μικρότερες). Συνδυαζόμενες με τις μεθόδους της κλασικής τοπογραφίας δίνουν άριστα διαγράμματα σε μεσαίες κλίμακες καθώς και σε ειδικές περιπτώσεις κατά τις οποίες η εφαρμογή των τοπογραφικών μεθόδων είναι αδύνατη ή αντιοικονομική.

2.3 ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΩΝ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΛΗΨΕΙΣ

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα για τον ορισμό της κλίμακας και της επιφάνειας αναφοράς των υψομέτρων στις φωτογραφίες, στους χάρτες και στα φωτομωσαϊκά, είναι απαραίτητα τα σημεία ελέγχου των φωτογραφιών. Για τα σημεία αυτά, που ονομάζονται και φωτοσταθερά, προσδιορίζονται οι οριζόντιες συντεταγμένες και τα υψόμετρα με τοπογραφικές μεθόδους ή με μεθόδους αεροτριγωνισμού.

Θεωρητικά ο έλεγχος της κλίμακας των φωτογραφιών θα μπορούσε να εξασφαλιστεί με μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων του εδάφους τα οποία φαίνονται επάνω στις φωτογραφίες. Στην πράξη είναι αναγκαία η χρήση ενός τριγωνομετρικού και ενός χωροσταθμικού δικτύου, μέσω των οποίων προσδιορίζονται οι οριζοντιογραφικές θέσεις και τα υψόμετρα σημείων που ορίζονται με σαφήνεια στο έδαφος και μπορούν να αναγνωριστούν στις φωτογραφίες.

Οι συνήθεις σημάνσεις των τριγωνομετρικών ή πολυγωνικών σημείων και των χωροσταθμικών αφετηριών δεν φαίνονται στις φωτογραφίες, εκτός εάν επισημανθούν με κατάλληλα σήματα πριν από της λήψη των φωτογραφιών. Κατά συνέπεια, αφού αναγνωριστούν στις φωτογραφίες και στο έδαφος τα σημεία που θα χρησιμοποιηθούν ως φωτοσταθερά, προσδιορίζονται οι θέσεις τους με τη βοήθεια πολυγωνικών και χωροσταθμικών οδεύσεων που εξαρτώνται από το τριγωνομετρικό και το χωροσταθμικό δίκτυο.

Η ακρίβεια των φωτοσταθερών και επομένως η εκλογή της μεθόδου που θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό τους, εξαρτάται από την ακρίβεια που επιδιώκεται στα αποτελέσματα, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από την κλίμακα των χαρτών ή των φωτομωσαϊκών και την ισοδιάσταση των ισοϋψών καμπύλων.

Τα σημεία που θα χρησιμοποιηθούν ως φωτοσταθερά πρέπει να είναι καλά κατανεμημένα στην αλληλοεπικαλυπτόμενη περιοχή των φωτογραφιών και να αναγνωρίζονται με βεβαιότητα στις φωτογραφίες και στο έδαφος. Συνήθως χρησιμοποιούνται τέσσερα τουλάχιστον φωτοσταθερά ανά ζεύγος φωτογραφιών.

Όταν απαιτούνται πολύ μεγάλες ακρίβειες στα αποτελέσματα, δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται φυσικές λεπτομέρειες του εδάφους ως φωτοσταθερά. Στις περιπτώσεις αυτές τα φωτοσταθερά εκλέγονται στο έδαφος πριν από τη λήψη των φωτογραφιών και επισημαίνονται με σήματα καταλλήλου σχήματος και μεγέθους που εξαρτάται από την κλίμακα των φωτογραφιών.

Η λήψη των αεροφωτογραφιών γίνεται από αεροπλάνο που κινείται με μικρή ταχύτητα περίπου **300Km/h** και σε ύψος συνήθως μεταξύ **1 000** και **6 000** μέτρων, ανάλογα με την κλίμακα των φωτογραφιών που πρόκειται να ληφθούν. Η πτήση σχεδιάζεται επάνω σε χάρτη και οι διαδοχικές φωτογραφίες κάθε ζώνης προγραμματίζονται και λαμβάνονται κατά τρόπο ώστε να αλληλεπικαλύπτονται τουλάχιστον κατά **60%**. Οι διαδοχικές ζώνες αλληλεπικαλύπτονται επίσης κατά **25%**.

Οι μεγάλες αυτές αλληλοεπικαλύψεις των διαδοχικών φωτογραφιών είναι απαραίτητες για δύο τουλάχιστον λόγους. Ο πρώτος είναι ότι έτσι εξασφαλίζεται η φωτογράφιση όλων των

περιοχών του εδάφους από δύο σημεία, πράγμα αναγκαίο για στερεοσκοπική απόδοση. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι κατά την κατασκευή φωτομωσαϊκών χρησιμοποιείται η κεντρική μόνο περιοχή των φωτογραφιών, στην οποία οι μετατοπίσεις λόγω ανάγλυφου είναι μικρές. Η φωτογράφιση γίνεται με αίθριο καιρό και κατά τις μεσημβρινές ώρες ώστε να περιορίζονται κατά το δυνατόν οι σκιές που ρίχνουν τα αντικείμενα όταν φωτίζονται από τον ήλιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. ΑΕΡΟΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΤΥΠΩΣΕΩΣ

Η κυρίως εφαρμοζόμενη σήμερα μέθοδος αποτυπώσεως, εκτεταμένων κατά προτίμηση περιοχών, είναι η αεροτοπογραφική.

Αυτή συνδυάζει μεγάλη ταχύτητα εκτελέσεως, ικανοποιητική ακρίβεια και πιστότητα αποτυπώσεως, και σημαντική οικονομία.

Ειδικότερα πλεονεκτεί από τις κλασικές μεθόδους αποτυπώσεως, γιατί δίνει τη δυνατότητα απεικονίσεως του εδάφους σε ορισμένη χρονική στιγμή και μπορεί να εφαρμοσθεί σε περιοχές δύσκολες ή απρόσιτες στον τοπογράφο.

Η αεροτοπογραφική μέθοδος ξεκινά από δύο κυρίως απόψεις: Από την προβολή και τη στερεοσκοπική παρατήρηση.

Ως «πρώτη ύλη» χρησιμοποιεί τη μετρητική αεροφωτογραφία κατακόρυφης κατά κανόνα λήψεως.

Η πλήρης ανάπτυξη της μεθόδου και η τεχνική της εφαρμογής της αποτελεί κεφάλαιο πολύ εκτεταμένο, που είναι έξω από τους σκοπούς του βιβλίου αυτού.

Εδώ θα γνωρίσουμε σε αδρές γραμμές τη σειρά των εργασιών, που απαιτούνται για τη σύνταξη του διαγράμματος της υψομετρικής οριζοντιογραφίας.

Βασικά στάδια για να ολοκληρωθεί μια αποτύπωση είναι:

- α) Η προετοιμασία της πτήσεως.
- β) Η εκτέλεση της πτήσεως.

- γ) Η φωτογραφική επεξεργασία.
- δ) Οι φωτοπροσδιορισμοί.
- ε) Η απόδοση των αεροφωτογραφιών.
- στ) Οι σχεδιαστικές εργασίες και εκτυπώσεις.

Παρακάτω θα αναπτύξουμε κάθε στάδιο χωριστά.

3.1 ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΤΗΣΕΩΣ

Η προετοιμασία ή μελέτη της πτήσεως αφορά τις τεχνικές απαιτήσεις, τις οποίες πρέπει να πληρούν οι αεροφωτογραφίες και τους οικονομικούς όρους.

Απαραίτητα στοιχεία για να γίνει η προετοιμασία της πτήσεως είναι:

- Το περίγραμμα της περιοχής (ή ζώνης) που πρέπει να αποτυπωθεί πάνω σε χάρτη με γνωστή κλίμακα.
- Η επιθυμητή κλίμακα αποτυπώσεως.

Όταν πρόκειται να γίνει αποτύπωση εδαφικής λωρίδας κατά μήκος οδού, το μεν περίγραμμα της περιοχής που πρέπει να αποτυπωθεί καθορίζεται εύκολα πάνω στο χάρτη της αναγνωρίσεως, και η κλίμακα αποτυπώσεως ορίζεται συνήθως **1:1000**, **1:2000** ή **1:5000** ανάλογα με τη μορφολογία του εδάφους και την απαιτούμενη ακρίβεια.

Αφού καθορίσουμε αυτά, συνεχίζουμε την προετοιμασία της πτήσεως, η οποία σε σειρά περιλαμβάνει τις παρακάτω εργασίες:

α) Εκλογή της κατάλληλης φωτομηχανής λήψεως

Οι φωτομηχανές μετρητικών αεροφωτογραφιών είναι σήμερα αυτόματες λήψεως, και διακρίνονται σε κανονικές, ευρυγώνιες και υπερευρυγώνιες.

Χαρακτηριστική διαφορά μεταξύ τους είναι ότι οι αεροφωτογραφίες που λαμβάνονται με τις υπερευρυγώνιες, για το ίδιο ύψος πτήσεως, απεικονίζουν μεγαλύτερη εδαφική έκταση. Αυτό εξασφαλίζει οικονομία και ταχύτητα εκτελέσεως της εργασίας, γενικά.

Σε περιπτώσεις όμως αεροφωτογραφήσεως πόλεων ή ανωμάτων εδαφών και ιδίως από μικρό ύψος, δεν ενδείκνυται η χρήση των υπερευρυγωνίων και ευρυγωνίων φωτομηχανών, γιατί παρουσιάζουν μεγάλες εκτροπές. Τότε γίνεται χρήση των κανονικών. Από τη Δ/νση Ζ, Αεροφωτογραφήσεων του Υ.Δ.Ε. χρησιμοποιούνται οι παρακάτω δύο τύποι φωτομηχανών:

- Ευρυγώνια (**Zeiss**) εστιακής αποστάσεως $f = 152,72/24 \times 24$
- Κανονική (**Wild**) εστιακής αποστάσεως $f = 210,02/18 \times 18$

β) Υπολογισμός της κλίμακας των αεροφωτογραφιών που ελήφθησαν

Για να είναι δυνατή η εκμετάλλευση των αεροφωτογραφιών προς απόδοση διαγράμματος υψομετρικής οριζοντιογραφίας με

καθορισμένη κλίμακα $1 : m_k$ πρέπει η κλίμακα των αεροφωτογραφιών $1 : m_b$ να βρίσκεται σε σχέση με την κλίμακα $1 : m_k$ του διαγράμματος.

Η σχέση, που συνδέει τις δύο αυτές κλίμακες, είναι:

$$m_b = c \cdot (m_k)^{1/2}$$

όπου: c είναι συντελεστής με τιμές μεταξύ των ορίων $100 < c < 300$.

Όσο ακριβέστερο διάγραμμα ενδιαφερόμαστε να συντάξουμε, τόσο πλησιέστερο προς το κατώτερο όριο **100** εκλέγουμε τις τιμές του συντελεστή c .

Αντίθετα, οι τιμές του c εκλέγονται πλησιέστερα προς το ανώτερο όριο **300**, όταν μας ενδιαφέρει περισσότερο η οικονομία εκτέλεσης της όλης εργασίας και όχι η ακρίβεια συντάξεως του διαγράμματος.

Αν λοιπόν γνωρίζουμε την κλίμακα m_k του διαγράμματος της εδαφικής εκτάσεως που θα αποτυπωθεί εύκολα, με βάση τα παραπάνω καθορίζουμε την κλίμακα m_b των αεροφωτογραφιών.

Π.χ. για κανονική αποτύπωση υπό κλίμακα **1: 2000** εδαφικής λωρίδας κατά μήκος οδού θα απαιτηθούν αεροφωτογραφίες υπό κλίμακα **1:9000**, γιατί:

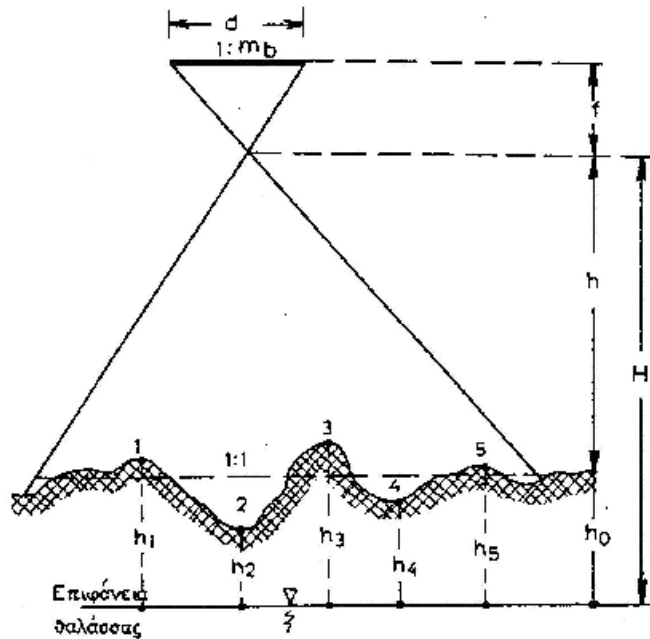
$$m_b = 200 \cdot (2000)^{1/2} = 9000$$

γ) Υπολογισμός του απαιτούμενου ύψους πτήσεως

Όταν εκλεγεί σύμφωνα με τα παραπάνω, η κατάλληλη φωτομηχανή λήψεως και καθορισθεί η κλίμακα m_b των αεροφωτογραφιών, εύκολα καθορίζεται το απαιτούμενο ύψος πτήσεως h του αεροσκάφους πάνω από την προς αποτύπωση περιοχή (σχ. 1), από τη σχέση:

$$1/m_b = f/h \quad \eta$$

$$h = f \cdot m_b$$



σχ.1

Όπως είναι φυσικό, λόγω της υψομετρικής ανομοιομορφίας του εδάφους και της μη απόλυτης κανονικής πτήσεως του αεροσκάφους, οι αεροφωτογραφίες δεν έχουν την ίδια κλίμακα όχι μόνο μεταξύ τους, αλλά και μεταξύ των επί μέρους τμημάτων τους.

Το ύψος **h** καλείται σχετικό ύψος του αεροσκάφους πάνω από τη φωτογραφιζόμενη περιοχή.

Το απόλυτο ύψος πτήσεως από την επιφάνεια της θάλασσας θα είναι:

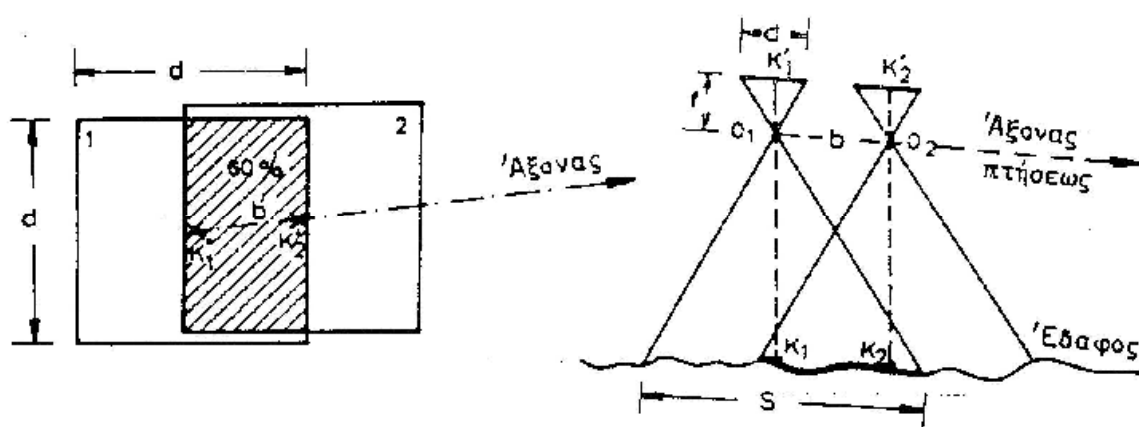
$$H = h_0 + h$$

όπου:

$$h_0 = (h_1 + h_2 + \dots + h_v) / v$$

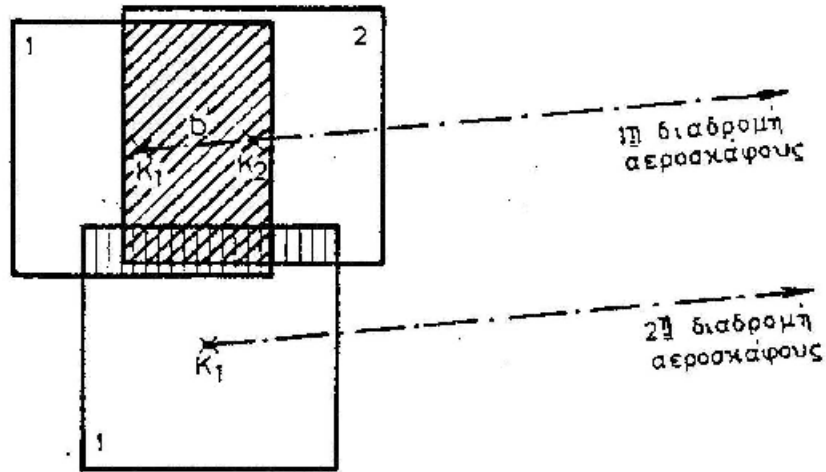
δ) Διάταξη και σχεδίαση διαδρομών αεροφωτογράφισης

Επειδή, όπως είπαμε, η αεροφωτογραφική μέθοδος βασίζεται στη στερεοσκοπική παρατήρηση, πρέπει να υπάρχει κατά μήκος επικάλυψη μεταξύ των αεροφωτογραφιών, όταν λαμβάνονται ανά δύο, η οποία να φθάνει σε **60%** περίπου (σχ. 2).



σχ.2

Για λόγους ασφάλειας, αλλά και οικονομίας, όπως θα δούμε, επιβάλλεται και πλάγια επικάλυψη των αεροφωτογραφιών ανερχόμενη σε **20%** ως **30%** περίπου. Αυτό συμβαίνει φυσικά, όταν οι πτήσεις γίνονται παράλληλα (σχ. 3).



σχ.3

Ύστερα από αυτά η απόσταση $0,02 = b$ μεταξύ δύο διαδοχικών λήψεων, για κατά μήκος επικάλυψη **60%** δίνεται από τη σχέση:

$$b = S \cdot [1 - (60/100)]$$

αλλά $S = d \cdot m_b$

οπότε:

$$b = d \cdot m_b \cdot [1 - (60/100)]$$

Αυτό σημαίνει ότι για να ληφθούν αεροφωτογραφίες κλίμακας m_b με κοινή κατά μήκος επικάλυψη **60%** με φωτομηχανή διαστάσεων πλάκας $d \times d$, πρέπει ο αεροφωτογράφος να λαμβάνει κάθε αεροφωτογραφία σε απόσταση b από την προηγούμενη.

Είναι όμως:

$$b = u \cdot t \quad \text{και} \quad t = b/u$$

όπου: u η ταχύτητα του αεροσκάφους.

Αφού λοιπόν είναι γνωστή η ταχύτητα του αεροσκάφους, πρέπει ο αεροφωτογράφος να λαμβάνει κάθε αεροφωτογραφία σε ισόχρονα κατά t διαστήματα.

Σήμερα χρησιμοποιούνται φωτομηχανές αυτόματης ρυθμίσεως, για να επιτυγχάνεται με ικανοποιητική ακρίβεια το επιθυμητό ποσοστό της κατά μήκος επικάλυψεως.

Μετά τον υπολογισμό των απαιτούμενων στοιχείων ακολουθεί η σχεδίαση των διαδρομών πτήσεως. Χαράσσονται δηλαδή πάνω στο φύλλο **1:50.000** οι απαιτούμενες για να ολοκληρωθεί η αεροφωτογράφιση διαδρομές πτήσεως του αεροσκάφους.

Η σύνταξη του διαγράμματος πτήσεων πρέπει να ακολουθεί τους εξής κανόνες:

α) Κάθε διαδρομή να είναι ευθύγραμμη και να ακολουθεί όσο μπορεί τον άξονα της χαράξεως.

β) Το πλάτος S της ζώνης που φωτογραφίζεται να μη είναι σε καμιά περίπτωση μικρότερο από το απαιτούμενο πλάτος αποτυπώσεως και από τις δύο πλευρές του άξονα της οδού.

Παράδειγμα.

Να συνταχθεί αεροτοπογραφικό διάγραμμα υψομετρικής οριζοντιογραφίας με κλίμακα **1 : 2000** εδαφικής ζώνης κατά μήκος οδού προς μελέτη των απαιτούμενων παραλλαγών της.

Λύση.

Κατ' αρχήν παίρνομε το αντίστοιχο φύλλο χάρτη **1:50 000** κάνουμε αναγνώριση της οδού και μελετούμε πάνω στο χάρτη τη μορφολογία της εδαφικής ζώνης κατά μήκος της.

Αν το έδαφος κατά μήκος της ζώνης παρουσιάζει πολλές πτυχώσεις ή η οδός περνά μέσα από χαραδρώσεις κλπ., εκλέγεται η οξυγώνια φωτομηχανή **Wild (210, 02/18 x 18)** για να αποφύγουμε τις κατακόρυφες παραλλάξεις.

Από την εκλογή αυτή προκύπτει το πρώτο στοιχείο:

$$f = 210,02$$

Η κλίμακα των αεροφωτογραφιών καθορίζεται από τη γνωστή σχέση:

$$m_b = c \cdot (m_k)^{1/2}$$

από την οποία για $c = 200$, έχουμε:

$$m_b = 200 \cdot (2000) = 9000$$

Το απαιτούμενο τότε σχετικό ύψος πτήσεως θα είναι:

$$h = f \cdot m_b = 0,210 \cdot 9000 = 1900 \text{ m}$$

Αν η οδός, κατά τη μελέτη πάνω στο χάρτη **1:50 000**, διαπιστωθεί ότι βρίσκεται σε μέσο ύψος $h_0 = 150 \text{ m}$ από τη θάλασσα, τότε το απόλυτο ύψος πτήσεως θα είναι:

$$H = h_0 + h = 150 + 1900 = 2050 \text{ m}$$

Από τα παραπάνω στοιχεία εξασφαλίζεται πλάτος φωτογράφησε
ως:

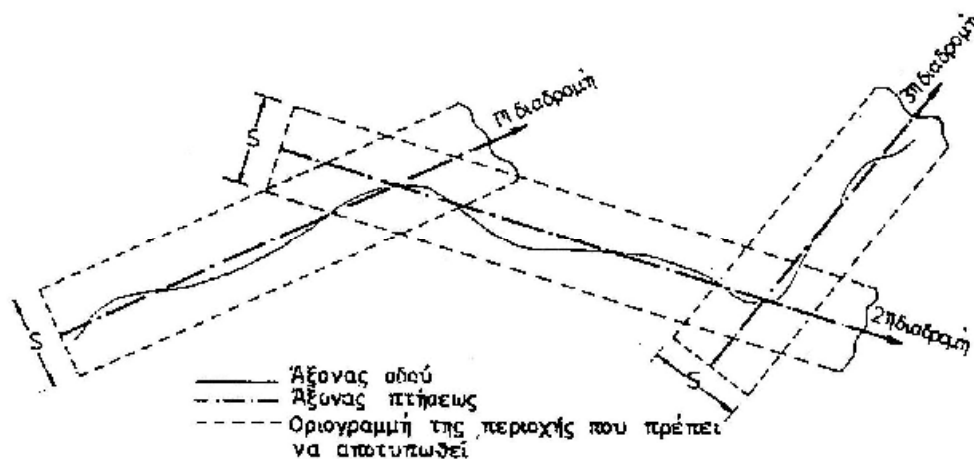
$$S = d \cdot m_b = 0,18 \cdot 9000 = 1\ 620 \text{ m}$$

Τέλος η απόσταση **b** μεταξύ δύο διαδοχικών λήψεων θα είναι:

$$b = 0,40 \cdot S = 650 \text{ m}$$

Επομένως για ταχύτητα του αεροσκάφους $v = 250 \text{ km/h}$ θα πρέπει ο αεροφωτογράφος να παίρνει μία αεροφωτογραφία ανά **9,4"**, για να εξασφαλισθεί επικάλυψη **60%**. Αυτό, όπως είπαμε, ρυθμίζεται αυτόματα.

Με βάση τέλος το παραπάνω ύψος H και πλάτος S που βρήκαμε ως και την οριζοντιογραφική μορφή της οδού, χαράσσονται πάνω στο φύλλο χάρτη οι διαδρομές πτήσεως του αεροσκάφους (σχ. 4).



σχ.4

3.2. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΗΣ ΠΤΗΣΕΩΣ

Μετά την προετοιμασία της πτήσεως, η φωτοαποστολή είναι έτοιμη για την εκτέλεση της αποστολής της.

Στην επιτυχία της αεροφωτογραφήσεως επιδρούν πάρα πολύ οι παρακάτω παράγοντες, ιδίως από την άποψη λεπτομερειών και σαφήνειας:

- Η νέφωση.
- Η ατμοσφαιρική διαύγεια.
- Η εποχή.

Καταλληλότερη είναι η εποχή, όταν η βλάστηση ελαττώνεται στο ελάχιστο, ενώ καταλληλότερη ώρα, όταν οι σκιές περιορίζονται και ο φωτισμός είναι ισχυρότερος.

Στην Ελλάδα καταλληλότερη εποχή είναι το καλοκαίρι και καταλληλότερη ώρα το μεσημέρι.

Η αεροφωτογράφιση πρέπει να πραγματοποιείται με ειδικό αεροφωτογραφικό αεροσκάφος με βασικές ιδιότητες:

- α) Ευστάθεια και ασφάλεια.
- β) Μικρή ταχύτητα.
- γ) Ευρύ πεδίο οράσεως από τη θέση του αεροναυτίλου.
- δ) Κατάλληλη τοποθέτηση φωτομηχανής και αεροφωτογράφου.
- ε) Πλήρες σύστημα εσωτερικής επικοινωνίας.

Εμείς χρησιμοποιούμε ειδικά διασκευασμένα αεροσκάφη της Πολεμικής Αεροπορίας.

Τη φωτοαποστολή απαρτίζουν ο αεροναυτίλος, ο οποίος επωμίζεται και την ευθύνη της όλης εργασίας, ο αεροφωτογράφος και το απαραίτητο πλήρωμα του αεροσκάφους.

Όταν το αεροσκάφος πετά πάνω από τη περιοχή που πρόκειται να γίνει αεροφωτογράφιση, ο αεροναυτίλος αναγνωρίζει στο έδαφος την κατεύθυνση της πρώτης διαδρομής και καθοδηγεί σχετικά τον πιλότο για να πάρει το αεροπλάνο την κατάλληλη διεύθυνση και το κατάλληλο ύψος.

Ο αεροφωτογράφος ρυθμίζει τη φωτομηχανή με βάση την ταχύτητα του αεροσκάφους, ώστε να εξασφαλίζει την κανονική κατά μήκος επικάλυψη. Ο αεροναυτίλος τον ειδοποιεί σε κατάλληλο χρόνο, πότε θα αρχίσει και πότε θα τελειώσει η αεροφωτογράφιση.

Το ίδιο συμβαίνει σε κάθε διαδρομή μέχρι να ολοκληρωθεί η αεροφωτογράφιση.

3.3. ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Για τη φωτογραφική επεξεργασία του αεροφίλμ επιδιώκεται η παραγωγή τριών, βασικών για την παραπέρα εργασία, φωτογραφικών «προϊόντων»:

- α) Του αρνητικού αεροφίλμ.
- β) Των διαφανών διαθετικών πλακών (διαποζιτίφ).
- γ) Των κοινών φωτογραφικών αντιτύπων (κόπιες).

3.4. ΦΩΤΟΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΙ

Η χρησιμοποίηση της αεροφωτογραφίας για την αποτύπωση εδαφικής εκτάσεως δεν μας απαλλάσσει εντελώς από την υποχρέωση να κάνουμε εργασίες υπαίθρου* οπωσδήποτε όμως αυτές είναι περιορισμένες συγκριτικά με τις απαιτούμενες, όταν εργαζόμαστε με τις κλασικές τοπογραφικές μεθόδους.

Οι εργασίες αυτές είναι απαραίτητες και για την απόδοση του διαγράμματος και για την επαλήθευση στη συνέχεια και συμπλήρωση των οριζοντιογραφικών στοιχείων του.

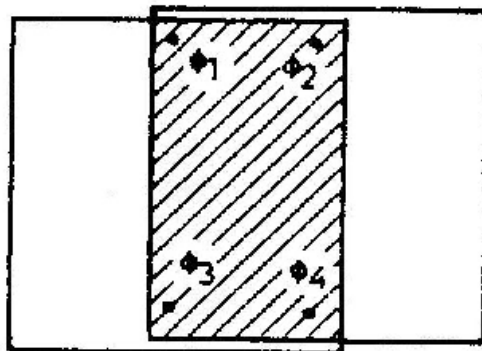
Για την απόδοση του διαγράμματος απαραίτητος είναι ο προσδιορισμός των καλουμένων φωτοσταθερών σημείων.

Αυτά είναι χαρακτηριστικά σημεία του εδάφους (π.χ. γωνίες οικιών, μανδρότοιχοι, μεμονωμένα δένδρα κλπ), τα οποία εικονίζονται καθαρά στις αεροφωτογραφίες.

Ο υπολογισμός των συντεταγμένων τους επιτυγχάνεται με τη μέθοδο των τομών (εμπροσθοτομίες, οπισθοτομίες), σε εξάρτηση βεβαία από ιδρυόμενο τριγωνομετρικό δίκτυο.

Κάθε ζεύγος διαδοχικών αεροφωτογραφιών απαιτεί τρία τουλάχιστο φωτοσταθερά σημεία και ένα τέταρτο σημείο για έλεγχο.

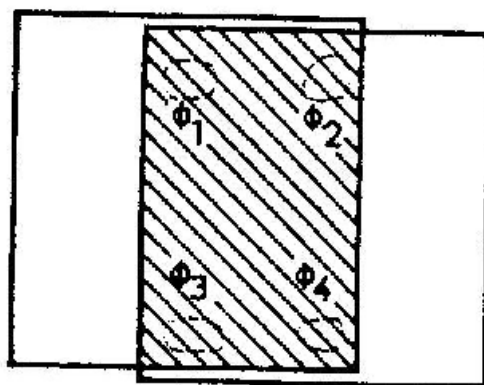
Οι θέσεις των σημείων αυτών εκλέγονται πάνω στην κοινή επιφάνεια των δύο αεροφωτογραφιών και κατά προτίμηση στις τέσσερις γωνίες της (σχ. 5).



σχ.5

Η διαδοχική σειρά των εργασιών προς λήψη των απαιτούμενων φωτοσταθερών σημείων είναι η εξής:

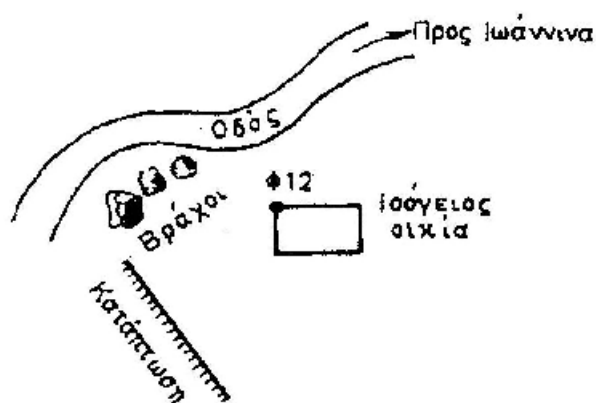
α) Σημειώνουμε πάνω στις αεροφωτογραφίες με κόκκινη μελάνη το περίγραμμα της περιοχής, μέσα στη οποία επιβάλλεται η κατάλληλη εκλογή κάθε φωτοσταθερού σημείου, φροντίζοντας ώστε σε κάθε ζεύγος διαδοχικών αεροφωτογραφιών να αντιστοιχούν **4** τουλάχιστον φωτοσταθερά σημεία (σχ. 6).



σχ.6

β) Εκλέγεται και επισημαίνεται από το μελετητή - τοπογράφο, ένα χαρακτηριστικό σημείο, το οποίο περιέχεται μέσα στον αντίστοιχο κυκλίσκο και το οποίο εύκολα αναγνωρίζεται στη φωτογραφία και στο εδάφος.

γ) Περιγράφεται η θέση του φωτοσταθερού, που εκλέξαμε, η σύνταξη σκαριφήματος της περιοχής του, καθώς και το **τιμήπημα** του με βελόνα πάνω στην αεροφωτογραφία (σχ. 7).



σχ.7

δ) Εκτελούνται οι απαιτούμενες γωνιομετρήσεις για να εξασφαλισθούν οι τομές.

ε) Ακολουθεί, με τις εργασίες γραφείου, ο προσδιορισμός των συντεταγμένων X_i Ψ_i και των υψομέτρων H_j των φωτοσταθερών σημείων.

Εύκολα υπολογίζεται ότι, σε περίπτωση μιας διαδρομής του αεροσκάφους, στην οποία θα ληφθούν N διαδοχικές αεροφωτογραφίες, θα είναι $N-1$ ζεύγη προς απόδοση και απαιτούνται $2N$ φωτοσταθερά σημεία.

Επειδή επιδιώκουμε την όσο το δυνατό μείωση του χρόνου παραμονής στο ύπαιθρο και την οικονομία, στην αεροτοπογραφία εφαρμόζεται πολύ ο **αεροτριγωνισμός**, γραφικός ή αναλυτικός.

Υπάρχουν περιπτώσεις, στις οποίες δεν μπορούμε να εργασθούμε στο ύπαιθρο, όπως π.χ. σε ορεινές ή απρόσιτες γενικά περιοχές.

Με τον αεροτριγωνισμό επιτυγχάνουμε τον επιπεδομετρικό και υψομετρικό προσδιορισμό μερικών σημείων, τα οποία κατάλληλα εκλέγονται στις αεροφωτογραφίες με τη βοήθεια άλλων γνωστών σημείων στην αρχή και στο τέλος κάθε διαδρομής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *"Νέα Συνόρθωση των Τριγωνομετρικών Δικτύων στην Ελλάδα"*
Ι. Κ. ΤΑΚΟΣ
(Διάλεξη που έγινε στη Γ .Υ. Σ . την **13/ 10/ 1989** στα πλαίσια του εορτασμού των **100** χρόνων της Γ. Υ. Σ. **1889 – 1989**)
- *"Τα συστήματα αναφοράς και η εφαρμογή του Ε. Γ. Σ. Α. '87"*
Εισηγητής : Γ . ΒΕΗΣ , καθηγητής του Ε. Μ. Π.
(Εισήγηση του καθηγητού Γ. Βέη σε συνεδρίαση τοπογράφων μηχανικών)
- ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΧΙΖΑΣ (Βιβλιοθήκη Τ. Ε. Ι. Πατρών)
- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ
Από τον Ήρωνα στους γεωδαιτικούς δορυφόρους
Η ιστορική εξέλιξη των τοπογραφικών οργάνων
(Ιστορική αναδρομή και έκθεση που οργανώθηκε το Μάιο του **1997** στα πλαίσια των εκδηλώσεων της Πολιτιστικής Πρωτεύουσας της Ευρώπης **1997**)

- ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΛΛΑΔΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ
"Τα άγνωστα μεγαλουργήματα των αρχαίων Ελλήνων"
"ΠΑΡΘΕΝΩΝ"
 εκδόσεις ΠΥΡΙΝΟΣ ΚΟΣΜΟΣ
- ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
 ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ
 ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
"Το Ελληνικό Σύστημα « ΕΓΣΑ '87 » "
 (Στοιχεία από έκδοση του Ο . Κ . Χ . Ε . (Νοέμβριος **1989**))
- *"Ιστορική Εξέλιξη των Φωτογραμμετρικών Μεθόδων και Οργάνων"*
 (Βιβλιοθήκη Τ . Ε . Ε . Δυτικής Ελλάδος)
- Ι . ΒΛΑΧΟΣ - ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑ
- ΕΥΓΕΝΙΔΗΣ ΚΩΤΣΟΒΟΛΟΥ
- Δασαρχείο Πατρών (Αεροφωτογραφίες)
- *"Αφομοίωση σε δύο στάδια εξαρτημένης όδευσης- κριτήρια ακριβείας "*.
 Ι.ΤΑΚΟΣ
 (Δελτίο ΓΥΣ.Αριθ.**122** έτους **1982**.ΑΘΗΝΑ)

- **BOMFORD C: Geodesy, fourth edition, Oxford 1980**
- *"Συσσώρευση Σφάλματος σε τριγωνομετρική αλυσίδα .
Πρακτική μέθοδος υπολογισμού του σφάλματος κλίμακος
αζιμουθίου και θέσεως"*
Σ. Γ. ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ
Διπλωμ. Εργασίας ΕΜΠ 1972. ΑΘΗΝΑ
- **METHOD OF LEAST SQUARES VARIATION OF
COORDINATES**
(by I . K. TAKOS, Major of Hellenique Army Geographical
Service, Mathematician)

