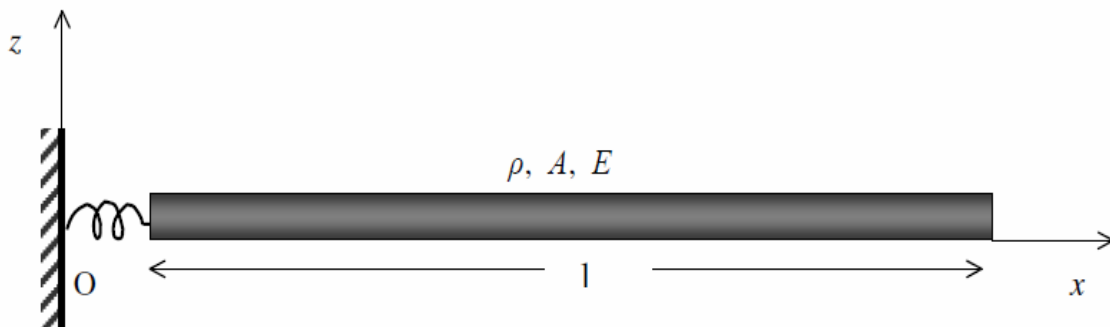


ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΔΟΚΟΥ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ: ΔΕΛΗΓΙΑΝΝΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ (Α.Μ. 5839)
ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ (Α.Μ. 5800)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΜΒΥΣΑΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2014

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Δυτικής Ελλάδας και αναφέρεται στις αξονικές ταλαντώσεις δοκού. Πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα των εφαρμοσμένων μαθηματικών με ιδιαίτερη αξία τόσο σε επίπεδο μαθηματικών μεθόδων και τεχνικών όσο και σε καθαρά πρακτικό επίπεδο στη δυναμική ανάλυση των κατασκευών.

Θέλουμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μας κ. Γρηγόριο Καμβύσα, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. για την ανάθεση του θέματος καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μας προσέφερε για την πραγματοποίηση της εργασίας αυτής.

Δεληγιάννης Αθανάσιος
Παπαδόπουλος Αναστάσιος

Απρίλιος 2014

Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστών: Οι κάτωθι υπογεγραμμένοι σπουδαστές έχουμε επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνουμε υπεύθυνα ότι είμαστε συγγραφείς αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, αναλαμβάνοντας την ευθύνη επί ολοκλήρου του κειμένου εξ ίσου, έχουμε δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μας όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποιήσαμε και λάβαμε ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνουμε επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχουμε ενσωματώσει στην εργασία μας προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχουμε πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχουμε αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Οι σπουδαστές
Δεληγιάννης Αθανάσιος Παπαδόπουλος Αναστάσιος

.....
(Υπογραφή)

.....
(Υπογραφή)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει σαν θέμα τη μελέτη των αξονικών ταλαντώσεων της δοκού. Είναι ένα θέμα με ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά τη μελέτη των καταπονήσεων και της αντοχής των κατασκευών. Για τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιείται η μέθοδος των Ιδιομορφών.

Στο πρώτο κεφάλαιο αποδεικνύεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που περιγράφει τις αξονικές ταλαντώσεις δοκού και παρουσιάζονται οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν ανάλογα με τον τρόπο στήριξης της δοκού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η γενική λύση που περιγράφει τις ελεύθερες ταλαντώσεις και υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές για διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών.

Στο τρίτο κεφάλαιο επιλύεται η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και δίνονται σχετικά παραδείγματα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1. ΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΔΟΚΟΥ	
1.1 Γενικά.....	2
1.2 Η Εξίσωση Κίνησης των Αξονικών Ταλαντώσεων.....	3
1.3 Συνοριακές Συνθήκες.....	9
2. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	
2.1 Χωρισμός των Μεταβλητών.....	13
2.2 Γενική Λύση της Εξίσωσης.....	15
2.3 Αμφίπακτη Δοκός.....	17
2.4 Πρόβολος Δοκός.....	24
2.5 Δοκός με Ελεύθερα και τα δύο Άκρα.....	28
2.6 Δοκός με Πάκτωση και Ελατήριο.....	30
3. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	
3.1 Γενικά.....	37
3.2 Μέθοδος της Επαλληλίας των Κυρίων Τρόπων Ταλάντωσης.....	37
3.3 Εφαρμογή στην Αμφίπακτη Δοκό.....	38

3.4 Πρόβολος με Αρμονική διέγερση στο Ελεύθερο Άκρο.....	43
3.5 Πρόβολος με Εξωτερική Δύναμη στο Ελεύθερο Άκρο.....	45
4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	50
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	51

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία δοκός (ή ράβδος) έχει ελαστικότητα και μπορεί, αν διεγερθεί, να εκτελέσει διαμήκεις ταλαντώσεις κατά μήκος του άξονά της (αξονικές ταλαντώσεις). Σε αυτές η μετατόπιση σε κάθε σημείο της δοκού είναι παράλληλη με τον άξονα της δοκού και έχει την ίδια τιμή για κάθε επίπεδο κάθετο σε αυτόν. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μελετώνται οι αξονικές ταλαντώσεις δοκού. Επειδή θεωρούμε ότι η δοκός διεγείρεται με εξωτερικά φορτία παράλληλα στον άξονά της και άρα καταπονείται μόνο αξονικά ουσιαστικά την αντιμετωπίζουμε ως ράβδο. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον όρο ράβδος ή τον όρο δοκός χωρίς σφάλμα αφού στα όρια της παρούσας ανάλυσης οι δύο όροι είναι ισοδύναμοι.

Οι αξονικές ταλαντώσεις δοκού περιγράφονται από μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Η συνάρτηση που περιγράφει τη μετατόπιση κάθε σημείου της δοκού και προκύπτει από τη λύση αυτής της εξίσωσης εξαρτάται από τη συντεταγμένη x του σημείου και το χρόνο t . Η συμπεριφορά του φορέα περιγράφεται από μία μόνο χωρική μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τη συντεταγμένη κατά μήκος του φορέα. Αυτό συμβαίνει γιατί θεωρούμε ότι το μήκος του φορέα είναι κατά πολύ, δηλαδή τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους, μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής του. Οι φορείς για τους οποίους ισχύει η υπόθεση αυτή ονομάζονται μονοδιάστατοι.

Η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος γίνεται με εφαρμογή της κλασικής μεθόδου Ανάλυσης Ιδιομορφών. Η μέθοδος αυτή παρέχει κομψές λύσεις, γιατί ανάγει τον καθορισμό της απόκρισης συνεχών φορέων σε προσδιορισμό απόκρισης ταλαντωτών ενός βαθμού ελευθερίας με γνωστά τεχνικά χαρακτηριστικά και εξωτερική διέγερση.

Εκτός από την άμεση χρησιμότητά τους, οι λύσεις τέτοιων προβλημάτων παρέχουν ποιοτικές πληροφορίες για την ταλαντωτική συμπεριφορά πολυπλοκότερων φορέων. Συγκεκριμένα, πληροφορίες που προέρχονται από τέτοιες λύσεις παρέχουν χρήσιμα μέτρα σύγκρισης για αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή προσεγγιστικών ή πειραματικών μεθοδολογιών σε συνθετότερες μηχανικές κατασκευές και διατάξεις.

1. ΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΔΟΚΟΥ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Έστω δοκός σταθερής διατομής φτιαγμένη από ομογενές και ισότροπο υλικό που καταπονείται από αξονική δύναμη μόνο. Στην περίπτωση αυτή η δοκός υπόκειται σε μονοαξονική καταπόνηση. Λόγω των παραπάνω υποθέσεων μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εσωτερική αξονική δύναμη N είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στη διατομή της δοκού. Συμπεραίνουμε ότι η ορθή τάση έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της διατομής.

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.1)$$

όπου A είναι το εμβαδόν της διατομής.

Σε ολόκληρη την ανάλυση που θα ακολουθήσει δεν θεωρούμε καμπτική καταπόνηση της δοκού. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα συμπεράσματα θα ισχύουν το ίδιο και για την περίπτωση ράβδου.

Για σχετικά μικρές τιμές της ορθής τάσης ισχύει ο νόμος του Hooke που συσχετίζει την ορθή τάση με την ανηγμένη παραμόρφωση $\frac{\partial u}{\partial x}$, όπου u συμβολίζει την μετατόπιση του σημείου x της δοκού.

Ο νόμος του Hooke εκφράζεται από την εξίσωση:

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του υλικού της δοκού και εκφράζει την αντίσταση που προβάλλει το υλικό στην ελαστική του παραμόρφωση. Ενδεικτικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας για συνηθισμένα δομικά υλικά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1.1 Τυπικές Τιμές του Μέτρου Ελαστικότητας

Υλικό	E (GPa)
Αλουμίνιο	70
Χαλκός	119
Ορείχαλκος	91
Γυαλί	55
Σίδηρος	190
Χάλυβας	200

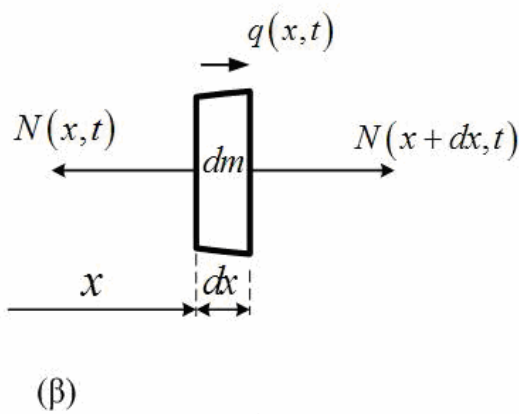
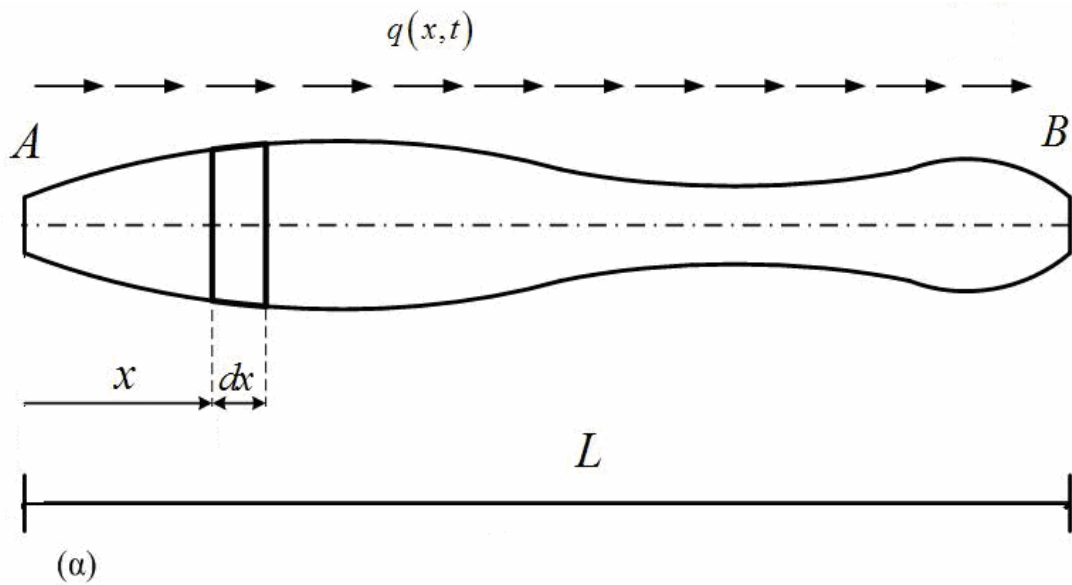
Πρέπει να σημειωθεί ότι στην πιο γενική περίπτωση το εμβαδόν της διατομής, το μέτρο ελαστικότητας όπως και η πυκνότητα είναι συνάρτηση του x , δηλαδή της θέσης του σημείου πάνω στη δοκό.

1.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Θεωρούμε τη δοκό μήκους L του Σχήματος 1.1α με μεταβαλλόμενες χωρικά ιδιότητες υλικού και γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, στη θέση x το μέτρο ελαστικότητας της δοκού είναι $E(x)$, η πυκνότητα της δοκού είναι $\rho(x)$ ενώ το εμβαδόν της διατομής είναι $A(x)$. Η δοκός στηρίζεται στα άκρα A και B μέσω στηρίξεων οι οποίες προσδιορίζουν τις συνοριακές συνθήκες και θα μελετηθούν με λεπτομέρεια στην συνέχεια. Στη δοκό ασκούνται εξωτερικά φορτία όπως το κατανεμημένο φορτίο $q(x,t)$ κατά μήκος της χωρικής συντεταγμένης x .

Η εξίσωση κίνησης που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη των μετατοπίσεων κατά μήκος της δοκού εξάγεται μελετώντας την ισορροπία ενός στοιχειώδους απειροελάχιστου τμήματος της δοκού, μήκους dx , στην θέση x .

Για το σκοπό αυτό στο Σχήμα 1.1β παρουσιάζεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος στην μετατοπισμένη θέση $u(x,t)$ του απειροελάχιστου τμήματος. Οι δυνάμεις οι οποίες ενεργούν πάνω στο τμήμα αυτό είναι οι εσωτερικές δυνάμεις της δοκού, μεγέθους $N(x,t)$ και $N(x+dx,t)$ στα άκρα x και $x+dx$, αντίστοιχα. Οι φορές των δυνάμεων δίνονται στο Σχήμα 1.1β. Επίσης, στο τμήμα αυτό ενεργεί κατά μήκος του άξονα της δοκού το εξωτερικό κατανεμημένο φορτίο $q(x,t)$ το οποίο κατά μήκος του τμήματος dx μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει σταθερό μέγεθος.



Σχήμα 1.1 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος για τμήμα της δοκού μήκους dx στη θέση x .

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει εφαρμόζοντας τον νόμο του Νεύτωνα στην κατεύθυνση x και παρατηρώντας ότι η μάζα του απειροελάχιστου τμήματος είναι:

$$dm = \rho(x)A(x)dx \quad (1.3)$$

Η επιτάχυνση στην διεύθυνση x είναι:

$$a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Η συγκεντρωμένη δύναμη από το κατανεμημένο φορτίο $q(x,t)$ είναι:

$$F(x, t) = q(x, t)dx \quad (1.5)$$

και οι εσωτερικές δυνάμεις της δοκού στην διεύθυνση x είναι:

$$N(x, t) \text{ και } N(x+dx, t)$$

Με βάση το νόμο του Νεύτωνα, η εξίσωση κίνησης δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} N(x + dx, t) - N(x, t) + q(x, t)dx &= \\ &= \rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Αναπτύσσοντας την συνάρτηση $N(x+dx, t)$ σε σειρά Taylor γύρω από το x , για σταθερό t , παίρνουμε:

$$N(x + dx, t) = N(x, t) + \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} dx + O[(dx)^2] \quad (1.7)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στην (1.6) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} dx + O[(dx)^2] + q(x, t)dx &= \\ &= \rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Διατηρώντας τους όρους τάξης μεγέθους dx και αμελώντας τους όρους τάξης μεγέθους $(dx)^2$, η εξίσωση (1.8) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial x} dx + q(x, t)dx = \rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

Για την περαιτέρω απλοποίηση της εξίσωσης απαιτείται η σχέση που συνδέει τις εσωτερικές αξονικές δυνάμεις $N(x, t)$ με τις αξονικές μετατοπίσεις $u(x, t)$ της δοκού.

Θεωρώντας ότι το υλικό είναι γραμμικό ελαστικό και ότι οι μετατοπίσεις είναι μικρές, η ζητούμενη σχέση, που είναι ο νόμος του Hooke, γράφεται στη μορφή:

$$N(x, t) = E(x)A(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (1.10)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (1.9) προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E(x)A(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + q(x, t) = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Στην πιο απλή περίπτωση θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας, το εμβαδόν της διατομής και η πυκνότητα έχουν σταθερή τιμή σε όλο το μήκος της δοκού. Τότε η εξίσωση κίνησης απλοποιείται σημαντικά και γίνεται:

$$E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x, t) = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τις εξαναγκασμένες αξονικές ταλαντώσεις της δοκού. Για την περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων, δηλαδή, χωρίς της εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων, έχουμε:

$$E \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί και στη μορφή:

$$\beta^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.14)$$

όπου:

$$\beta = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.15)$$

Η εξίσωση (1.14) είναι η εξίσωση διάδοσης των αξονικών ελαστικών κυμάτων στη δοκό. Η ποσότητα β είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα διαμήκη ελαστικά κύματα μέσα στο υλικό της δοκού.

Η ταχύτητα διάδοσης σχετίζεται με τη συχνότητα, f , και το μήκος κύματος, λ , μέσω της λεγόμενης θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής:

$$\beta = \lambda \cdot f \quad (1.16)$$

Δύο φυσικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην περιγραφή των ταλαντώσεων και των κυμάτων είναι η κυκλική συχνότητα, ω , που σχετίζεται με τη συχνότητα μέσω της σχέσης:

$$\omega = 2\pi f \quad (1.17)$$

και ο κυματάριθος, k , που σχετίζεται με το μήκος κύματος μέσω της σχέσης:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.18)$$

Συνδυασμός των (1.16)-(1.18) σχέσεων δίνει την πολύ χρήσιμη σχέση:

$$k = \frac{\omega}{\beta} \quad (1.19)$$

που ονομάζεται και σχέση διασποράς.

Η παραπάνω εξίσωση (1.14) είναι γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και αποτελεί την εξίσωση κίνησης της δοκού. Για την επίλυση της εξίσωσης απαιτούνται δύο συνοριακές συνθήκες στα σύνορα $x=0$ και $x=L$ της δοκού.

Επίσης η επίλυση ολοκληρώνεται με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στο $t=0$ οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (1.20)$$

και

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x) \quad (1.21)$$

Όπου οι συναρτήσεις $u_0(x)$ και $v_0(x)$ είναι δοσμένες συναρτήσεις του x .

Η πρώτη αρχική συνθήκη εκφράζει τις μετατοπίσεις όλων των σημείων της δοκού τη χρονική στιγμή $t=0$, ενώ η δεύτερη εκφράζει τις αξονικές ταχύτητες όλων των σημείων της δοκού τη χρονική στιγμή $t=0$.

Να σημειωθεί ότι την ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση με την (1.14) ικανοποιεί και η ορθή τάση σ . Πράγματι, εάν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1.14) με το x και κάνουμε εναλλαγή στη σειρά των παραγωγίσεων ως προς το χρόνο t και τη συντεταγμένη x στο δεύτερο μέλος προκύπτει, λόγω και της (1.2) ότι:

$$\beta^2 \cdot \frac{\partial^2 \sigma(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.22)$$

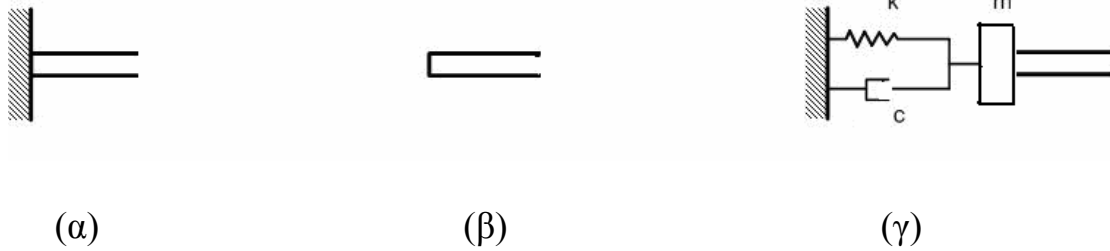
Επιπλέον λόγω της (1.1) είναι πολύ εύκολο να δειχθεί ότι το ίδιο συμβαίνει και με την ορθή δύναμη N . Δηλαδή ισχύει:

$$\beta^2 \cdot \frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.23)$$

Οι σχέσεις (1.22) και (1.23) θεωρητικά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της ορθής τάσης και της ορθής δύναμης αντίστοιχα. Στην πράξη λύνεται πρώτα η εξίσωση (1.14) και υπολογίζεται η $u(x,t)$ και στη συνέχεια η ορθή τάση και η ορθή δύναμη υπολογίζονται από τις σχέσεις (1.2) και (1.1) αντίστοιχα.

1.3 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Η μαθηματική έκφραση των συνοριακών συνθηκών εξαρτάται από τις συνθήκες που επικρατούν στα σύνορα της δοκού. Παρακάτω μελετώνται διάφοροι τύποι συνοριακών συνθηκών στο σύνορο $x=0$ οι οποίες παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 1.2. Παρόμοιες αναλύσεις είναι εφαρμόσιμες και στο σύνορο $x=L$.



Σχήμα 1.2 Συνοριακές συνθήκες στο σύνορο $x=0$. (α) Πακτωμένο σύνορο, (β) ελεύθερο σύνορο, (γ) σύνθετο σύνορο.

Πακτωμένο Σύνορο

Στο πακτωμένο σύνορο δεν επιτρέπεται η κίνηση της δοκού στο άκρο $x=0$ στην κατεύθυνση x για οποιοδήποτε χρόνο t . Στην περίπτωση αυτή η συνοριακή συνθήκη παίρνει τη μορφή:

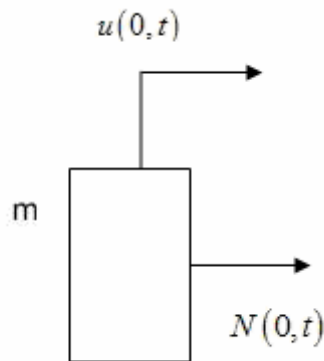
$$u(0, t) = 0 \quad (1.24)$$

Ελεύθερο Σύνορο

Στο ελεύθερο σύνορο, το οποίο δείχνεται στο Σχήμα 1.2β, είναι ελεύθερη η κίνηση της δοκού στο άκρο $x=0$ στην κατεύθυνση x για οποιοδήποτε χρόνο t . Στην περίπτωση αυτή η εξαγωγή της μαθηματικής έκφρασης της συνοριακής συνθήκης επιτυγχάνεται αναλύοντας το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ενός απειροελάχιστου τμήματος dx στο άκρο $x=0$.

Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος μαζί με τις ενεργές δυνάμεις παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Νεύτωνα στην διεύθυνση x προκύπτει η εξίσωση κίνησης του άκρου $x=0$:

$$N(0, t) + q(0, t)dx = \rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} \quad (1.25)$$



Σχήμα 1.3 Διάγραμμα ελεύθερου σώματος απειροελάχιστου τμήματος dx στο άκρο $x=0$.

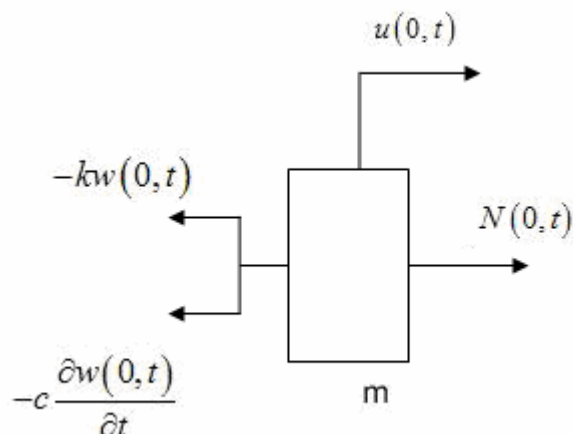
Διατηρώντας όρους τάξης μεγέθους $O(1)$ και αμελώντας όρους τάξης μεγέθους (dx) , προκύπτει η συνοριακή συνθήκη $N(0,t)=0$, η οποία με αντικατάσταση της σχέσης (1.10) καταλήγει τελικά η συνοριακή συνθήκη:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.26)$$

Σύνθετο Σύνορο

Στο σύνθετο σύνορο, το οποίο δείχνεται στο Σχήμα 1.2γ, η κίνηση της χορδής στο άκρο $x=0$ στην κατεύθυνση x για οποιοδήποτε χρόνο t παρεμποδίζεται από το ελατήριο σταθεράς k τον αποσβεστήρα σταθεράς c , ενώ η κίνηση επηρεάζεται από ένα σώμα μάζας m το οποίο προσαρμόζεται στο σύνορο.

Στην περίπτωση αυτή η εξαγωγή της μαθηματικής έκφρασης της συνοριακής συνθήκης επιτυγχάνεται αναλύοντας το διάγραμμα ελεύθερου σώματος που περιλαμβάνει το συγκεντρωμένο σώμα μάζας m στο άκρο $x=0$. Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος μαζί με τις ενεργές δυνάμεις παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4 Διάγραμμα ελεύθερου σώματος απειροελάχιστου τμήματος dx στο άκρο $x = 0$.

Παρατηρώντας ότι:

$$-k \cdot u(0,t) \tag{1.27}$$

και

$$-c \cdot \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \tag{1.28}$$

είναι οι δυνάμεις αντίστασης που προέρχονται από το ελατήριο και τον αποσβεστήρα, αντίστοιχα, στην κίνηση του άκρου κατά την διεύθυνση x και εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην διεύθυνση x , προκύπτει η εξίσωση κίνησης του άκρου $x=0$:

$$N(0,t) - ku(0,t) - c \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} \tag{1.29}$$

η οποία αποτελεί την ζητούμενη συνοριακή συνθήκη.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.10), προκύπτει η τελική μορφή:

$$E(0) \cdot A(0) \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} - ku(0,t) - c \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} \tag{1.30}$$

Γενική Μορφή Συνοριακής Συνθήκης

Παρατηρώντας τις συνοριακές συνθήκες (1.24), (1.26) και (1.30), μια σχετικά γενική και σημαντική μορφή συνοριακής συνθήκης στο άκρο $x=0$ αποτελεί η παρακάτω σχέση:

$$a_0 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + b_0 u(0,t) = 0 \quad (1.31)$$

Να σημειωθεί ότι οι συνοριακές συνθήκες (1.24), (1.26) είναι υποπεριπτώσεις της πιο γενικής συνοριακής συνθήκης (1.31). Συγκεκριμένα, η συνοριακή συνθήκη (1.24) προκύπτει από την συνοριακή συνθήκη (1.31) κάνοντας την επιλογή:

$$a_0 = 0 \text{ και } b_0 = 1$$

Αντίστοιχα, η συνοριακή συνθήκη (1.30) με $m=c=0$ προκύπτει από την συνοριακή συνθήκη (1.31) κάνοντας την επιλογή:

$$a_0 = E(0) \cdot A(0) \text{ και } b_0 = -k$$

Εντελώς ανάλογα, στο άκρο $x=L$ μια σημαντική μορφή συνοριακής συνθήκης αποτελεί η παρακάτω σχέση:

$$a_L \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} + b_L u(L,t) = 0 \quad (1.32)$$

2. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

2.1 ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Θα υπολογίσουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους που περιγράφει τις αξονικές ταλαντώσεις της δοκού. Η εξίσωση αυτή, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι η εξής:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (μέθοδος Fourier). Συνεπώς υποθέτουμε ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων από τις οποίες η μία εξαρτάται μόνο από τη θέση x και η άλλη μόνο από το χρόνο t . Δηλαδή:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (2.2)$$

όπου $X(x)$ είναι μία συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x και $T(t)$ είναι μία συνάρτηση του χρόνου t . Αντικαθιστώντας τη (2.2) στη διαφορική εξίσωση (2.1) παίρνουμε:

$$\beta^2 X''(x)T(t) = X(x)\ddot{T}(t) \quad (2.3)$$

Με τόνο συμβολίζουμε την παραγωγή ως προς x και με τελεία την παραγωγή ως προς t .

Οι παραγωγίσεις έγιναν ως εξής:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \quad (2.4)$$

και

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x)\ddot{T}(t) \quad (2.5)$$

αφού η συνάρτηση $T(t)$ είναι σταθερή όταν παραγωγίζουμε ως προς x και η συνάρτηση $X(x)$ είναι σταθερή όταν παραγωγίζουμε ως προς t .

Στη συνέχεια διαιρούμε και τα δύο μέλη της (2.3) με $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ και παίρνουμε:

$$\beta^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad (2.6)$$

Τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.6) περιέχουν διαφορετικές ανεξάρτητες μεταβλητές. Το πρώτο μέλος είναι συνάρτηση μόνο του x και το δεύτερο μέλος είναι συνάρτηση μόνο του t . Αυτός ο διαχωρισμός των μεταβλητών είναι ακριβώς ο στόχος της μεθόδου Fourier.

Για να ισχύει η ισότητα (2.6) για κάθε τιμή των x και t πρέπει απαραίτητα και τα δύο μέλη είναι ίσα με μια σταθερά ανεξάρτητη των x και t . Αποδεικνύεται ότι μόνο αρνητικές σταθερές δίνουν λύσεις που περιγράφουν ταλάντωση, κάτι που θα φανεί καλύτερα στη συνέχεια.

Συνεπώς θέτουμε κάθε μέλος της (2.6) ίσο με $-\omega^2$ και φτάνουμε στο αποτέλεσμα:

$$\beta^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2 \quad (2.7)$$

Με τη μεθοδολογία αυτή πετύχαμε η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους να αναλυθεί σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές είναι δευτέρας τάξεως και είναι οι παρακάτω:

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{\beta^2} X(x) = 0 \quad (2.8)$$

και

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2.9)$$

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης είναι ομογενείς και γραμμικές με σταθερούς συντελεστές. Οι γενικές λύσεις τους δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$X(x) = a \cos\left(\frac{\omega}{\beta} x\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\beta} x\right) \quad (2.10)$$

$$T(t) = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t) \quad (2.11)$$

Οι σταθερές a , b θα υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες και οι σταθερές c , d από τις αρχικές συνθήκες.

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Είναι φανερό από την (2.11) ότι η παράμετρος ω είναι η κυκλική συχνότητα. Όπως αναφέρθηκε ήδη στο πρώτο κεφάλαιο, από τη φυσική των κυμάτων γνωρίζουμε ότι η κυκλική συχνότητα συνδέεται με τον κυματάριθμο (ή κυματικό αριθμό), k , με τη σχέση:

$$k = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.12)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.12), η (2.10) γίνεται:

$$X(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx) \quad (2.13)$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.11) και (2.13), η γενική λύση της εξίσωσης (2.1) θα είναι:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

ή

$$u(x,t) = [a \cos(kx) + b \sin(kx)] \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (2.14)$$

Η γενική λύση (2.14) είναι φανερό ότι περιγράφει μια απλή αρμονική ταλάντωση. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις σταθερές a , b που υπεισέρχονται στη γενική λύση άρα και την ειδική λύση $u(x,t)$ για διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών. Οι σταθερές c , d προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Ακόμη σε κάθε περίπτωση θα υπολογίσουμε τις δυνατές τιμές της κυκλικής συχνότητας, ω , δηλαδή τις ιδιοσυχνότητες του υπό μελέτη συστήματος.

Κάθε ζευγάρι τιμών των σταθερών a, b , ορίζει μία ειδική λύση της εξίσωσης που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή ω . Κάθε τέτοια ειδική λύση ονομάζεται ιδιομορφή του συστήματος και περιγράφει το σχήμα που παίρνει η δοκός αν διεγερθεί στη συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα.

Στη γενική περίπτωση η συμπεριφορά της δοκού εκφράζεται από τον γραμμικό συνδυασμό των ιδιομορφών. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης.

Σύμφωνα με την ορολογία των εφαρμοσμένων μαθηματικών, η διαφορική εξίσωση (2.8) μαζί με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες αποτελούν το λεγόμενο ιδιοπρόβλημα Sturm-Liouville δευτέρας τάξεως. Το ιδιοπρόβλημα αυτό δέχεται άπειρες λύσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς ω^2 . Οι τιμές αυτές καλούνται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες τιμές της ω καλούνται ιδιοσυχνότητες. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις $X_n(x)$ οι οποίες ικανοποιούν το ιδιοπρόβλημα για τις διάφορες τιμές της ω^2 ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις ή ιδιομορφές.

Είναι πάντα δυνατό, και γίνεται πολύ συχνά για ευκολία, η συνάρτηση $T(t)$ να γράφεται στη μορφή:

$$T(t) = P \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.15)$$

Τότε η γενική λύση (2.14) γίνεται:

$$u(x, t) = [a \cos(kx) + b \sin(kx)] \cdot P \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.16)$$

Οι σταθερές P και φ_0 αντικαθιστούν τις σταθερές c και d και υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Στην παραπάνω έκφραση της γενικής λύσης είναι φανερό ότι η ποσότητα:

$$u_0 = [a \cos(kx) + b \sin(kx)] \cdot P \quad (2.17)$$

είναι το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου με συντεταγμένη x . Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται άμεσα από την ολική ενέργεια της ταλάντωσης η οποία θεωρείται σταθερή αφού δεν έχουμε θεωρήσει κανενός είδους αποσβέσεις. Η ποσότητα φ_0 είναι η αρχική φάση της ταλάντωσης.

2.3 ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟΣ

Διατύπωση του Προβλήματος

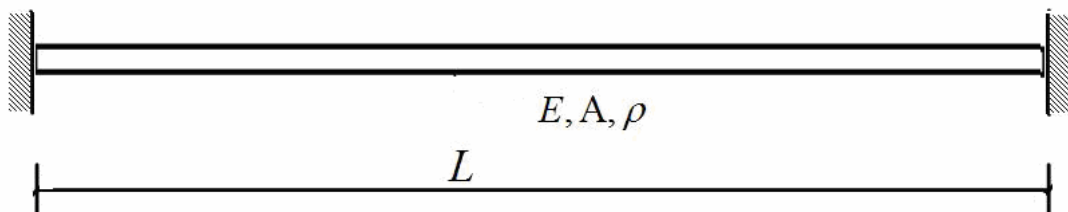
Έστω ομογενής δοκός μήκους L της οποίας και τα δύο άκρα είναι πακτωμένα όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Λόγω των πακτώσεων και τα δύο άκρα της δοκού πρέπει να παραμένουν συνεχώς ακίνητα. Συνεπώς οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής:

Στο αριστερό σύνορο:

$$u(0, t) = 0 \quad (2.18)$$

Στο δεξιό σύνορο:

$$u(L, t) = 0 \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.1 Δοκός πακτωμένη και στα δύο άκρα.

Ιδιομορφές

Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες στη γενική λύση (2.14) με σκοπό την εύρεση των σταθερών. Η εφαρμογή της πρώτης συνθήκης δίνει:

$$[a \cos(k \cdot 0) + b \sin(k \cdot 0)] \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] = 0$$

ή

$$a \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] = 0 \Rightarrow a = 0 \quad (2.20)$$

Αν επιλέγαμε $c=d=0$ τότε θα βρίσκαμε ως λύση $u(x,t)=0$ που αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες και σημαίνει φυσικά ότι δεν έχουμε ταλάντωση. Άρα πρέπει $a=0$. Μετά την εφαρμογή της πρώτης συνθήκης η $u(x,t)$ γράφεται:

$$u(x,t) = b \sin(kx) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (2.21)$$

Η σταθερά b μπορεί να ενσωματωθεί για ευκολία στις σταθερές c και d , δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε νέες σταθερές e, f μέσω των σχέσεων:

$$e = b \cdot c \quad (2.22)$$

και

$$f = b \cdot d \quad (2.23)$$

Τότε η (2.21) γράφεται στην πιο απλή μορφή:

$$u(x,t) = \sin(kx) [e \cos(\omega t) + f \sin(\omega t)] \quad (2.24)$$

Η εφαρμογή της δεύτερης συνοριακής συνθήκης δίνει:

$$\sin(kL) \cdot [e \cos(\omega t) + f \sin(\omega t)] = 0 \quad (2.25)$$

Όπως προηγουμένως δεν μπορεί να είναι και οι δύο σταθερές, e, f , ίσες με μηδέν. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει:

$$\sin(kL) = 0 \quad (2.26)$$

Άρα το γινόμενο kL πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π . Δηλαδή παίρνουμε:

$$kL = n\pi \quad n=1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Από την (2.27) βλέπουμε ότι ο κυματικός αριθμός επιτρέπεται να πάρει συγκεκριμένες τιμές οι οποίες καθορίζονται από τη σχέση:

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad n=1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Η περίπτωση $n=0$ δεν μας ενδιαφέρει γιατί δίνει $k=0$ και άρα $u(x,t)=0$.

Από την (2.12) έχουμε:

$$\omega_n = \beta \cdot k_n \quad (2.29)$$

Συνεπώς η (2.24) γίνεται:

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left[e_n \cos\left(\frac{n\pi\beta}{L}t\right) + f_n \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L}t\right) \right] \quad (2.30)$$

Όλες οι συναρτήσεις $u_n(x,t)$ με $n=1, 2, \dots$ αποτελούν λύσεις του προβλήματος. Είναι οι λεγόμενες ιδιομορφές ή κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.

Ιδιοσυχνότητες

Αν στην (2.29) αντικαταστήσουμε τη γνωστή σχέση:

$$\omega_n = 2\pi f_n \quad (2.31)$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.28) καταλήγουμε για τις ιδιοσυχνότητες της αμφίπακτης δοκού στο αποτέλεσμα:

$$f_n = n \frac{\beta}{2L} \quad n=1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Αν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε $n=1$ παίρνουμε τη συχνότητα της θεμελιώδους κατάστασης των αξονικών ταλαντώσεων της δοκού. Για τις μεγαλύτερες τιμές του n παίρνουμε τις συχνότητες των διεγερμένων καταστάσεων.

Δεσμοί και Κοιλίες

Αν χρησιμοποιήσουμε τη (2.15), η (2.30) γράφεται:

$$u_n(x,t) = P_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_{0n}) \quad (2.33)$$

Από την παραπάνω έκφραση της λύσης είναι φανερό ότι το πλάτος κάθε ιδομορφής είναι:

$$u_{0n}(x) = P_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.34)$$

Είναι φανερό ότι το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου της δοκού σε κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης είναι συνάρτηση της θέσης του σημείου αυτού πάνω στη δοκό. Υπάρχουν θέσεις στις οποίες το πλάτος είναι μέγιστο και θέσεις στις οποίες το πλάτος μηδενίζεται.

Οι θέσεις μέγιστου πλάτους ονομάζονται κοιλίες ή αντιδεσμοί ενώ τα σημεία στα οποία μηδενίζεται το πλάτος καλούνται κόμβοι ή δεσμοί. Οι κοιλίες βρίσκονται στο μέσον της αποστάσεως δύο διαδοχικών κόμβων. Παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν ενός κόμβου τα σημεία της δοκού κινούνται πάντα με αντίθετη φορά. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση $\sin x$ σε κάθε μηδενισμό της αλλάζει πρόσημο. Αντίθετα, όλα τα σημεία του τμήματος της δοκού που περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων κινούνται κατά την ίδια φορά και λέμε ότι είναι σε φάση.

Οι θέσεις των κόμβων βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης:

$$\sin(k_n x) = 0 \quad (2.35)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.28) βρίσκουμε:

$$n \frac{\pi}{L} x = m\pi \Rightarrow x = m \frac{L}{n} \quad (2.36)$$

όπου ο m είναι ακέραιος αριθμός.

Για τη θεμελιώδη συχνότητα (δηλαδή $n=1$) το m μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1. Αυτό γιατί προφανώς πρέπει να ισχύει:

$$0 \leq x \leq L$$

Συνεπώς οι δυνατές τιμές του x είναι:

$$x=0 \text{ και } x=L \quad (2.37)$$

δηλαδή δεσμοί είναι μόνο τα άκρα της δοκού. Το αποτέλεσμα αυτό αναμενόταν αφού τα άκρα της δοκού είναι πακτωμένα.

Για $n=2$ ο ακέραιος m μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1 και 2, συνεπώς οι δεσμοί είναι στις θέσεις:

$$x = 0, \quad x = \frac{L}{2} \text{ και } x = L \quad (2.38)$$

Για $n=3$ ο ακέραιος m μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1, 2 και 3, συνεπώς οι δεσμοί είναι στις θέσεις:

$$x = 0, \quad x = \frac{L}{3}, \quad x = \frac{2L}{3} \text{ και } x = L \quad (2.39)$$

Άρα η θέση των κόμβων εξαρτάται από την συγκεκριμένη ιδιομορφή και ακόμη παρατηρούμε ότι το πλήθος των κόμβων αυξάνεται κατά ένα καθώς ανεβαίνουμε στην επόμενη ιδιοσυχνότητα. Από την

(2.36) φαίνεται ότι η απόσταση δύο διαδοχικών κόμβων είναι ίση με $\frac{L}{n}$.

Αν αντικαταστήσουμε την (2.32) στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής βρίσκουμε για τις επιτρεπόμενες τιμές του μήκους κύματος τη σχέση:

$$\lambda_n = \frac{\beta}{f_n} = \frac{2L}{n} \quad (2.40)$$

Δηλαδή δύο διαδοχικοί κόμβοι απέχουν πάντα απόσταση που είναι ίση με το μισό του μήκους κύματος του συγκεκριμένου κανονικού τρόπου ταλάντωσης.

Αντίστοιχα για τον καθορισμό των θέσεων που βρίσκονται οι κοιλίες λύνουμε την εξίσωση:

$$\sin(k_n x) = \pm 1 \quad (2.41)$$

Δηλαδή το γινόμενο $k_n x$ πρέπει να είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\frac{\pi}{2}$.

Χρησιμοποιώντας και τη σχέση (2.28) παίρνουμε:

$$n \frac{\pi}{L} x = m \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = m \frac{L}{2n} \quad (2.42)$$

όπου ο m είναι περιττός ακέραιος.

Για $n=1$ ο m μπορεί να πάρει μόνο την τιμή 1, άρα υπάρχει μόνο μία κοιλία η οποία βρίσκεται στη θέση:

$$x = \frac{L}{2} \quad (2.43)$$

Για $n=2$ ο m μπορεί να πάρει τις τιμές 1 και 3, άρα κοιλίες έχουμε στις θέσεις:

$$x = \frac{L}{4} \text{ και } x = \frac{3L}{4} \quad (2.44)$$

Ο τρόπος με τον οποίο εργαζόμαστε για να βρούμε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες ιδιοσυχνότητες είναι ακριβώς ο ίδιος. Σε κάθε περίπτωση οι κοιλίες βρίσκονται στο μέσον της απόστασης δύο διαδοχικών κόμβων και οι κόμβοι στο μέσον της απόστασης δύο διαδοχικών κοιλιών.

Αρχή της Επαλληλίας

Από την αρχή της επαλληλίας έχουμε ότι η πιο γενική λύση του προβλήματος που εξετάζουμε θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των $u_n(x, t)$. Η αρχή της επαλληλίας εφαρμόζεται λόγω της γραμμικότητας της μερικής διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα αλλά και λόγω του ότι οι συνοριακές συνθήκες (2.18) και (2.19) είναι ομογενείς, δηλαδή, έχουν μηδενικό δεύτερο μέλος.

Τελικά παίρνουμε:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \left[e_n \cos\left(\frac{n\pi\beta}{L} t\right) + f_n \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L} t\right) \right] \quad (2.45)$$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα προβλήματος αρχικών τιμών με σκοπό τον υπολογισμό των σταθερών e_n και f_n .

Έστω ότι έχουμε τις αρχικές συνθήκες:

$$u(x,0) = f(x) \quad (2.46)$$

και

$$\dot{u}(x,0) = g(x) \quad (2.47)$$

Η συνάρτηση $f(x)$ δίνει το τη μετατόπιση κάθε σημείου της δοκού τη χρονική στιγμή $t=0$, ενώ η συνάρτηση $g(x)$ δίνει την ταχύτητα κάθε σημείου της δοκού τη χρονική στιγμή $t=0$.

Με την εφαρμογή της αρχικής συνθήκης (2.46) παίρνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.48)$$

Για να εφαρμόσουμε την δεύτερη συνοριακή συνθήκη (2.47) πρέπει πρώτα να παραγωγίσουμε την $u(x,t)$ που δίνεται από το άθροισμα (2.45) ως προς το χρόνο.

Με παραγωγή της σειράς αυτής παίρνουμε την εξίσωση:

$$\dot{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left[-e_n \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L}t\right) + f_n \cos\left(\frac{n\pi\beta}{L}t\right)\right] \quad (2.49)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε την αρχική συνθήκη (2.47). Καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\beta}{L} f_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.50)$$

Οι σχέσεις (2.48) και (2.50) είναι οι σειρές Fourier των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Από τη σχετική θεωρία έχουμε ότι οι συντελεστές των σειρών αυτών δίνονται από τους τύπους:

$$e_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (2.51)$$

και αντίστοιχα:

$$\frac{n\pi\beta}{L} f_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (2.52)$$

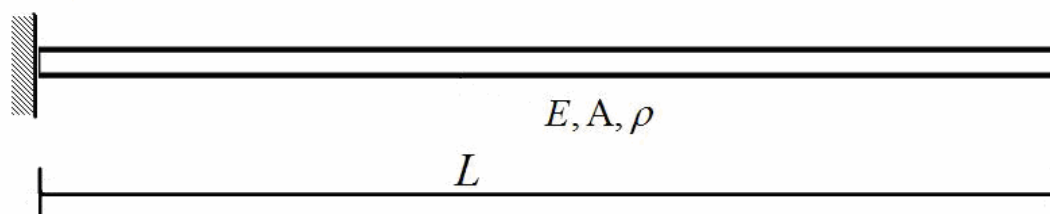
ή

$$f_n = \frac{2}{n\pi\beta} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (2.53)$$

Δηλαδή αν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές e_n και f_n και συνεπώς να προσδιορίσουμε πλήρως τη γενική λύση που δίνεται από την (2.45).

2.4 ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΔΟΚΟΣ

Ας θεωρήσουμε τώρα μία δοκό της οποίας το αριστερό άκρο είναι πακτωμένο ενώ το δεξί άκρο είναι ελεύθερο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 Δοκός μήκους L με το αριστερό άκρο πακτωμένο και το δεξιό άκρο ελεύθερο.

Οι συνοριακές συνθήκες θα είναι οι παρακάτω.
Στο αριστερό σύνορο:

$$u(0, t) = 0 \quad (2.54)$$

Στο δεξιό σύνορο:

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.55)$$

Η εφαρμογή της πρώτης συνθήκης στη γενική λύση δίνει όπως και στην προηγούμενη ενότητα $a=0$ και οδηγεί στη σχέση (2.21) για τη λύση. Για να εφαρμόσουμε τη δεύτερη συνθήκη πρέπει να παραγωγίσουμε την $u(x, t)$ που δίνεται από την (2.21) ως προς x . Η παράγωγος είναι:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = bk \cos(kx) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (2.56)$$

Τώρα η εφαρμογή της δεύτερης συνοριακής συνθήκης θα δώσει:

$$\cos(kL) = 0 \quad (2.57)$$

Η λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης δίνει ότι το γινόμενο kL πρέπει να είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$. Αυτό γράφεται ως εξής:

$$kL = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad n=0, 1, \dots \quad (2.58)$$

Συνεπώς ο κυματάρηθος μπορεί να πάρει συγκεκριμένες τιμές που δίνονται από τη σχέση:

$$k_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L} \quad n=0, 1, \dots \quad (2.59)$$

Τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος είναι:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{2n + 1} \quad n=0, 1, \dots \quad (2.60)$$

και οι επιτρεπόμενες συχνότητες (ιδιοσυχνότητες):

$$f_n = \frac{\beta}{\lambda_n} = (2n + 1) \frac{\beta}{4L} \quad n=0, 1, \dots \quad (2.61)$$

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης θα δίνονται από μία σχέση ανάλογη της (2.33):

$$u_n(x, t) = P_n \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_{0n}) \quad (2.62)$$

με τα k_n να δίνονται από τη σχέση (2.59) και τις κυκλικές συχνότητες $\omega_n = 2\pi f_n$ όπου οι συχνότητες f_n των κανονικών τρόπων ταλάντωσης δίνονται από την (2.61).

Οι θέσεις των κόμβων βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης:

$$\sin(k_n x) = 0 \quad (2.63)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.59) βρίσκουμε:

$$(2n + 1) \frac{\pi}{2L} x = m\pi \Rightarrow x = m \frac{2L}{2n + 1} \quad (2.64)$$

όπου ο m είναι ακέραιος.

Για τη θεμελιώδη συχνότητα ($n=0$) το m μπορεί να πάρει μόνο την τιμή 0, συνεπώς:

$$x=0 \quad (2.65)$$

δηλαδή δεσμός είναι μόνο το αριστερό άκρο της δοκού.

Για $n=1$ ο ακέραιος m μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1, συνεπώς οι δεσμοί είναι στις θέσεις:

$$x = 0 \text{ και } x = \frac{2L}{3} \quad (2.66)$$

Αντίστοιχα για τον καθορισμό των θέσεων που βρίσκονται οι κοιλίες λύνουμε την εξίσωση:

$$\sin(k_n x) = \pm 1 \quad (2.67)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (2.59) βρίσκουμε:

$$(2n+1)\frac{\pi}{2L}x = m\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = m\frac{L}{2n+1} \quad (2.68)$$

όπου ο m είναι περιττός.

Για $n=0$ ο m μπορεί να πάρει μόνο την τιμή 1, άρα υπάρχει μόνο μία κοιλία στη θέση:

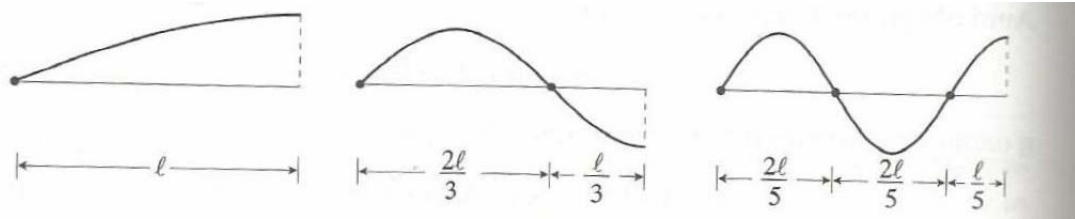
$$x = L \quad (2.69)$$

Για $n=1$ ο m μπορεί να πάρει τις τιμές 1 και 3, άρα κοιλίες έχουμε στις θέσεις:

$$x = \frac{L}{3} \text{ και } x = L \quad (2.70)$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζονται οι θέσεις των κόμβων και των κοιλιών στις επόμενες ιδιομορφές που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες ιδιοσυχνότητες.

$$f_0 = \frac{\beta}{4L} \quad f_1 = 3f_0 \quad f_2 = 5f_0$$



Σχήμα 2.3 Οι τρεις πρώτες ιδιομορφές των αξονικών ταλαντώσεων της μονόπακτης δοκού [4].

Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζονται οι τρεις πρώτες ιδιομορφές του συστήματος με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση του σημαντικού ρόλου που έχουν οι συνοριακές συνθήκες στον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιοταλαντώσεων.

2.5 ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΑΚΡΑ

Η περίπτωση δοκού χωρίς καθόλου στηρίξεις είναι η λιγότερο συνηθισμένη και περιλαμβάνει και κίνηση στερεού σώματος όπως θα δούμε στη συνέχεια. Οι συνοριακές συνθήκες θα είναι οι παρακάτω.

Στο αριστερό σύνορο:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.71)$$

Στο δεξιό σύνορο:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.72)$$

Η εφαρμογή της πρώτης συνοριακής συνθήκης στην παράγωγο της γενικής λύσης:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = [-a \sin(kx) + bk \cos(kx)] \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)]$$

δίνει την εξίσωση:

$$-a \sin(k \cdot 0) + bk \cos(k \cdot 0) = 0 \quad (2.73)$$

Από την εξίσωση αυτή συμπεραίνουμε άμεσα ότι:

$$b=0 \quad (2.74)$$

Συνεπώς η $u(x,t)$ γίνεται:

$$u(x,t) = a \cos(kx) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (2.75)$$

Η παράγωγός αυτής ως προς x είναι:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -a \sin(kx) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (2.76)$$

Η εφαρμογή της δεύτερης συνθήκης δίνει:

$$-a \sin(kL) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] = 0 \quad (2.77)$$

Δηλαδή:

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.78)$$

Οι ιδιοσυχνότητες θα είναι αντίστοιχα:

$$\omega_n = \beta \cdot k_n \Rightarrow \omega_n = n \frac{\pi \beta}{L} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

Για $n=0$ παίρνουμε τη μηδενική ιδιοσυχνότητα $\omega_0=0$ η οποία δεν είναι ιδιοσυχνότητα αξονικής ταλάντωσης της δοκού αλλά δηλώνει απλά την κίνηση της δοκού σαν στερεό σώμα. Η κίνηση αυτή είναι δυνατή όπως αναφέρθηκε προηγουμένως λόγω της πλήρους έλλειψης στηρίξεων στη δοκό. Δηλαδή η δοκός μπορεί ταυτόχρονα να κάνει μεταφορική κίνηση και αξονική ταλάντωση.

Εκτός της μηδενικής όλες οι άλλες ιδιοσυχνότητες της ελεύθερης δοκού ταυτίζονται με τις ιδιοσυχνότητες της αμφίπακτης δοκού. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τις αντίστοιχες ιδιομορφές. Στην περίπτωση της ελεύθερης δοκού λόγω του μηδενισμού της σταθεράς b οι ιδιοταλαντώσεις είναι της μορφής:

$$u_n(x,t) = a_n \cos(k_n x) \cdot [c_n \cos(\omega_n t) + d \sin(\omega_n t)] \quad (2.80)$$

$n=0, 1, 2, \dots$

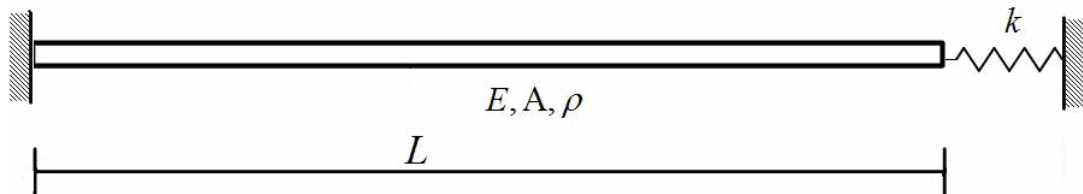
Για $n=0$ έχουμε την ιδιομορφή:

$$u_0(x,t) = a_0 \quad (2.81)$$

που ονομάζεται στερεά ιδιομορφή και περιγράφει την μεταφορική κίνηση της δοκού. Η γενική λύση θα προκύπτει με επαλληλία των παραπάνω ιδιοσυναρτήσεων.

2.6 ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΗ ΚΑΙ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο με σκοπό την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων των αξονικών ταλαντώσεων δοκού της οποίας το αριστερό άκρο είναι πακτωμένο και το δεξιό άκρο είναι στερεωμένο σε ελατήριο σταθεράς K , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Η σταθερά K ονομάζεται συντελεστής στιβαρότητας του ελατηρίου.



Σχήμα 2.4 Δοκός μήκους L με το αριστερό άκρο πακτωμένο και το δεξιό άκρο στερεωμένο σε ελατήριο με συντελεστή στιβαρότητας K .

Το άκρο $x=0$ είναι πακτωμένο οπότε ισχύει:

$$u(0,t)=0 \quad (2.82)$$

Το άκρο $x=L$ στηρίζεται στο ελατήριο, άρα ισχύει:

$$EA \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} + Ku(L,t) = 0 \quad (2.83)$$

Στη συνέχεια δίνουμε την απόδειξη της παραπάνω συνοριακής συνθήκης (2.83).

Απόδειξη

Έστω ότι στο άκρο $x=L$ υπάρχει σώμα μάζας M . Όταν η δοκός συσπειρώνεται κατά $u(L,t)$ τότε στο σώμα ασκείται μια ελκτική δύναμη από το ελατήριο:

$$F_{ελ} = Ku(L,t) \quad (2.84)$$

και μια απωστική δύναμη από τη δοκό:

$$N(L,t) = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (2.85)$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} &= -F_{ελ} - N(L,t) \\ \Rightarrow M \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} &= -Ku(L,t) - EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Αν η μάζα είναι πολύ μικρή, δηλαδή:

$$M \rightarrow 0$$

τότε παίρνουμε τη συνοριακή συνθήκη (2.83).

Η εφαρμογή της πρώτης συνοριακής συνθήκης στη γενική λύση δίνει όπως και προηγουμένως $\alpha=0$ και συνεπώς η γενική λύση (2.16) γίνεται:

$$u(x,t) = b \sin(kx) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (2.87)$$

Η παράγωγος ως προς x είναι:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = bk \cos(kx) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (2.88)$$

Η εφαρμογή της δεύτερης συνοριακής συνθήκης δίνει τη σχέση:

$$EAbk \cos(kL) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] + \\ + Kb \sin(kL) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] = 0 \quad (2.89)$$

Η σχέση αυτή καταλήγει στη χαρακτηριστική εξίσωση ή αλλιώς εξίσωση ιδιοτιμών του συστήματος:

$$\tan(kL) = -\frac{EAk}{K} \quad (2.90)$$

Από τις λύσεις k_n της εξίσωσης αυτής υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Να σημειωθεί ότι η παραπάνω εξίσωση δεν λύνεται αναλυτικά αλλά μόνο γραφικά ή αριθμητικά.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα υπολογισμού των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων.

Παράδειγμα

Θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές:

Μέτρο ελαστικότητας: $E = 200 \cdot 10^9 Pa$

Εμβαδόν διατομής: $A = 3 \cdot 10^{-6} m^2$

Σταθερά ελατηρίου: $K = 4 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$

Πυκνότητα υλικού της δοκού: $\rho = 8000 \frac{Kg}{m^3}$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές η χαρακτηριστική εξίσωση γίνεται:

$$\tan k = -1.5k \quad (2.91)$$

Η εξίσωση αυτή είναι φανερό ότι έχει άπειρες λύσεις, μία σε κάθε υποδιάστημα της μορφής:

$$m\frac{\pi}{2} < k < (m+1)\frac{\pi}{2} \quad m=1, 3, 5, \dots \quad (2.92)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής θα χρησιμοποιήσουμε την επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή αρχικά θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$f(k) = \tan k + 1.5k \quad (2.93)$$

Ουσιαστικά το πρόβλημα μετασχηματίζεται στην εύρεση των ριζών της $f(k)$. Η παράγωγος της $f(k)$ είναι:

$$f'(k) = \frac{1}{\cos^2 k} + 1.5 \quad (2.94)$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε μία αρχική εκτίμηση της λύσης. Οι επόμενες εκτιμήσεις θα προκύψουν από τον αναδρομικό τύπο:

$$k_{i+1} = k_i - \frac{f(k_i)}{f'(k_i)} \quad (2.95)$$

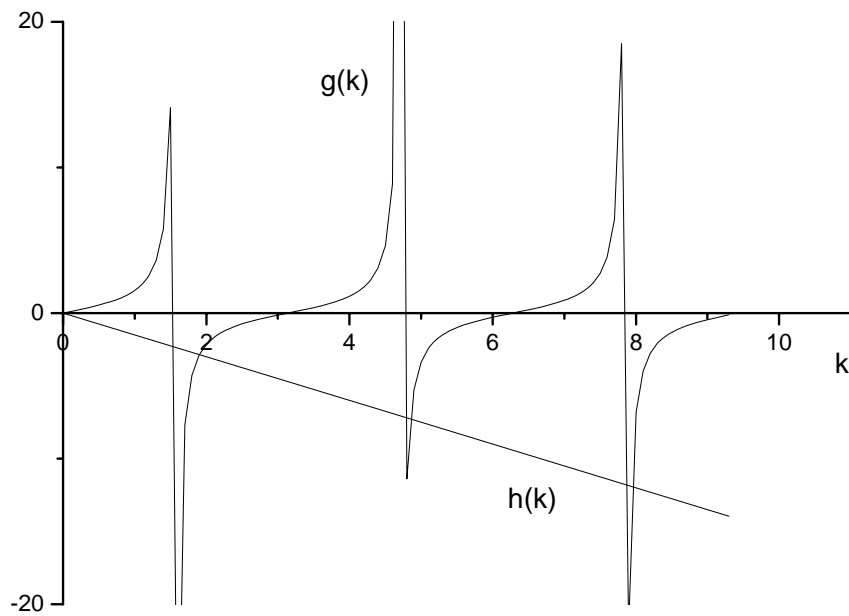
Για την επιλογή της αρχικής εκτίμησης της ρίζας σε κάθε υποδιάστημα χρησιμοποιήσαμε τη γραφική μέθοδο. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(k) = \tan k \quad (2.96)$$

και

$$h(k) = -1.5k \quad (2.97)$$

Η απλή παρατήρηση των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων έδωσε τις αρχικές εκτιμήσεις που φαίνονται στον Πίνακα 2.1 για κάθε υποδιάστημα.



Σχήμα 2.5 Γραφική παράσταση των συναρτήσεων $g(k)$ και $h(k)$ με σκοπό την αρχική εκτίμηση των σημείων τομής τους.

Για την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω πρόγραμμα γραμμένο σε γλώσσα Fortran 90. Για τον τερματισμό του υπολογισμού επιλέχθηκε η συνθήκη, η σχετική διαφορά δύο διαδοχικών προσεγγίσεων να γίνει μικρότερη του 10^{-6} . Η ακρίβεια αυτή κρίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητική για το σκοπό του παραδείγματος αυτού.

! Program NR

Implicit None

Double Precision xa,xb,er,f,ff,x
Integer it,i

!er=sxetiko sfalma

!it=iteration (epanalipsi)

!xa, xb=diadoxikes ektimiseis

!f=synartisi

!ff=paragwgos

!eisagwgi twn arxikwn ektimisewn apo ti grafiki parastasi

```
print*, 'Dwse arxiki ektimisi'
```

```
read*, xa
```

```
it=0
```

```
er=1.
```

```
Do while (er>1.e-6)
```

```
it=it+1
```

```
f=tan(xa)+1.5*xa
```

```
ff=1/cos(xa)**2+1.5
```

```
xb=xa-f/ff
```

```
er=abs(xb-xa)/xa
```

```
xa=xb
```

```
enddo
```

```
Print*,xb,er,it
```

```
stop
```

```
end
```

Στον πίνακα 2.1 που ακολουθεί για τα τρία πρώτα υποδιαστήματα φαίνεται η αρχική εκτίμηση που χρησιμοποιήθηκε, η τιμή του k που υπολογίστηκε από την επαναληπτική μέθοδο, το σχετικό σφάλμα και ο αριθμός των επαναλήψεων που έγιναν. Τέλος στην τελευταία στήλη φαίνονται οι ιδιοσυχνότητες που υπολογίστηκαν από τον τύπο:

$$\omega = \frac{k}{\beta} \quad (2.98)$$

όπου για το συγκεκριμένο παράδειγμα η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι:

$$\beta = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}}{8000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}}} = 5000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.99)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

Αποτελέσματα της μεθόδου Newton-Raphson

α/α	Υποδιάστημα	Αρχική εκτίμηση	k (m ⁻¹)	Σχετικό σφάλμα x10 ⁻⁸	Πλήθος επαναλήψεων	ω (x 10 ⁻³ rad/s)
1	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	1.85	1.907	4.088	4	0.381
2	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	4.8	4.849	0.155	5	0.970
3	$\left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$	7.9	7.938	2.778	5	1.588

Η μέθοδος συγκλίνει πολύ γρήγορα όπως φαίνεται από τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για την ικανοποίηση της συνθήκης τερματισμού.

3. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Οι εξαναγκασμένες αξονικές ταλαντώσεις της δοκού σε γενική διέγερση $q(x,t)$ χωρίς απόσβεση δίνονται, σύμφωνα με την (1.12), από τη λύση της εξίσωσης:

$$E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t) = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

σε συνδυασμό με τις κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Η δύναμη $q(x,t)$ είναι το εξωτερικό αίτιο εξαναγκασμού και μπορεί να είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου ή μία οποιαδήποτε τυχαία εξωτερική διέγερση. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση που η εξωτερική διέγερση είναι αρμονική και ομοιόμορφα κατανεμημένη στο σώμα της δοκού. Επιπλέον, θα μελετήσουμε και την περίπτωση όπου το εξαναγκαστικό αίτιο δεν δρα στο σώμα της δοκού αλλά στις στηρίξεις της.

3.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Έστω μία αμφίπακτη δοκός στην οποία εφαρμόζεται αρμονικός εξωτερικός εξαναγκασμός που δίνεται από τη σχέση:

$$q(x,t) = Q \sin(\Omega t) \quad (3.2)$$

Για λόγους ευκολίας υποθέσαμε ότι η δύναμη είναι σταθερή και ανεξάρτητη της θέσης x .

Η (3.1) γράφεται:

$$E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + Q \sin(\Omega t) = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της επαλληλίας των κύριων τρόπων ταλάντωσης. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή αναζητούμε λύση υπό μορφή σειράς απείρων όρων της μορφής

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) q_n(t) \quad (3.4)$$

όπου $X_n(x)$ είναι οι ιδιομορφές της εξεταζόμενης δοκού και $q_n(t)$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν. Οι συναρτήσεις $q_n(t)$ ονομάζονται κύριες συντεταγμένες της κίνησης u .

3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟ

Στην περίπτωση της αμφίπακτης δοκού οι ιδιομορφές έχουν προσδιοριστεί στο κεφάλαιο 2 και σύμφωνα με την (2.26) είναι:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n=1, 2, \dots \quad (3.5)$$

ή

$$X_n(x) = \sin(k_n x) \quad (3.6)$$

με

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n=1, 2, \dots$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση αυτή της λύσης στην εξίσωση (3.3) και αφού κάνουμε τις παραγωγίσεις ως προς x και t παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned}
E \cdot A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} -k_n^2 q_n(t) \sin(k_n x) + Q \sin(\Omega t) &= \\
= \rho \cdot A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \sin(k_n x) & \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε τις σχέσεις ορθογωνιότητας των ημιτονικών συναρτήσεων:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\kappa\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \kappa \neq n \\ L/2 & \kappa = n \end{cases} \quad (3.8)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (3.7) με τη συνάρτηση:

$$\sin(k_\kappa x)$$

και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε από 0 έως L. Συνεπώς η εξίσωση (3.7) γίνεται:

$$\begin{aligned}
E \cdot A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} -k_n^2 q_n(t) \int_0^L \sin(k_\kappa x) \sin(k_n x) dx + \\
+ Q \sin(\Omega t) \int_0^L \sin(k_\kappa x) dx = \\
= \rho \cdot A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \int_0^L \sin(k_\kappa x) \sin(k_n x) dx & \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Από τα αθροίσματα που περιέχονται στην προηγούμενη εξίσωση ο μοναδικός μη μηδενικός όρος είναι αυτός για $n=\kappa$ λόγω των παραπάνω σχέσεων ορθογωνιότητας. Οπότε αν κάνουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε τιμή του κ καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
& -EA \frac{L}{2} k_n^2 q_n(t) + \frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n] Q \sin(\Omega t) = \\
& = \rho A \frac{L}{2} \ddot{q}_n(t) \quad n=1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

όπου προηγουμένως υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα $\int_0^L \sin(k_n x) dx$ και το αντικαταστήσαμε με:

$$\int_0^L \sin(k_n x) dx = \frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n] \tag{3.11}$$

Επιπλέον αντικαταστήσαμε στις τελικές εξισώσεις το δείκτη k με το δείκτη n .

Είναι φανερό ότι ο δεύτερος όρος του πρώτου μέλους της (3.10) μηδενίζεται για άρτιο n . Συνεπώς η (3.10) γράφεται πιο απλά ως:

$$\begin{aligned}
& -EA \frac{1}{2} k_n^2 q_n(t) + \frac{2}{n\pi} Q \sin(\Omega t) = \\
& = \rho A \frac{1}{2} \ddot{q}_n(t) \quad n=1, 3, 5, \dots
\end{aligned} \tag{3.12}$$

όπου επιπλέον κάναμε απαλοιφή του L .

Οι εξισώσεις (3.12) είναι μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Τις γράφουμε στην πιο βολική μορφή:

$$\frac{1}{2} \rho A \ddot{q}_n(t) + \frac{1}{2} E A k_n^2 q_n(t) = \frac{2}{n\pi} Q \sin(\Omega t) \tag{3.13}$$

Οι αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις είναι:

$$\rho \ddot{q}_n(t) + E k_n^2 q_n(t) = 0 \quad n=1, 3, 5, \dots \tag{3.14}$$

ή

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = 0 \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (3.15)$$

Η γενική λύση είναι:

$$q_{n1}(t) = e_n \cos(\omega_n t) + f_n \sin(\omega_n t) \quad (3.16)$$

Στη συνέχεια αναζητούμε μερική λύση των μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων (3.13) με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Η μερική λύση θα έχει τη μορφή:

$$q_{n2}(t) = c_n \sin(\Omega t) \quad (3.17)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.13) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho A c_n \Omega^2 \sin(\Omega t) + \frac{1}{2} E A k_n^2 c_n \sin(\Omega t) = \\ = \frac{2}{n\pi} Q \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$-\frac{1}{2} \rho A c_n \Omega^2 + \frac{1}{2} E A k_n^2 c_n = \frac{2}{n\pi} Q \quad (3.19)$$

Συνεπώς οι άγνωστοι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$c_n = \frac{\frac{2Q}{n\pi}}{\frac{1}{2} E A k_n^2 - \frac{1}{2} \rho A \Omega^2} \quad (3.20)$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι:

$$q_{n2}(t) = \frac{\frac{2Q}{n\pi}}{\frac{1}{2}EAk_n^2 - \frac{1}{2}\rho A\Omega^2} \sin(\Omega t) \quad (3.21)$$

Τελικά οι συντελεστές q_n του αναπτύγματος (3.4) είναι:

$$q_n(t) = q_{n1}(t) + q_{n2}(t) \quad (3.22)$$

και αντικαθιστώντας στην (3.4) βρίσκουμε τη ζητούμενη απόκριση του συστήματος:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [e_n \cos(\omega_n t) + f_n \sin(\omega_n t) + \frac{\frac{2Q}{n\pi}}{\frac{1}{2}EAk_n^2 - \frac{1}{2}\rho A\Omega^2} \sin(\Omega t)] \cdot \sin(k_n x) \quad (3.23)$$

Όπου οι συντελεστές e_n και f_n υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τις αρχικές συνθήκες. Έχει ενδιαφέρον να δούμε πότε μηδενίζεται ο παρονομαστής του τρίτου όρου της έκφρασης μέσα στις αγκύλες. Θυμίζουμε ότι ισχύει:

$$E = \rho \cdot \beta^2 \quad (3.24)$$

Ο παρονομαστής γράφεται:

$$\frac{1}{2}EAk_n^2 - \frac{1}{2}\rho A\Omega^2 = \frac{\rho A}{2}(\beta^2 k_n^2 - \Omega^2) = \frac{\rho A}{2}(\omega_n^2 - \Omega^2) \quad (3.25)$$

Αν η Ω συμπίπτει με μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος τότε ο μηδενισμός της παραπάνω έκφρασης οδηγεί στον απειρισμό του συντελεστή της ιδιομορφής που αντιστοιχεί σε αυτήν την ιδιοσυχνότητα. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε συντονισμό δηλαδή διεγείρεται μόνο ο συγκεκριμένος τρόπος ταλάντωσης.

Αν η εφαρμοζόμενη εξωτερική δύναμη είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου αλλά δεν περιγράφεται απλά από μία ημιτονική ή συνημιτονική συνάρτηση, όπως στην ανάλυση που προηγήθηκε, το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στην επίλυση ενός πλήθους αντίστοιχων προβλημάτων με αρμονική διέγερση. Αυτό οφείλεται φυσικά στην ανάλυση μιας περιοδικής συνάρτησης σε σειρά συναρτήσεων ημιτόνων και συνημιτόνων (σειρά Fourier).

3.4 ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΣΤΟ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΑΚΡΟ

Έστω δοκός το αριστερό άκρο της οποίας είναι πακτωμένο ενώ το άλλο άκρο της είναι αναγκασμένο λόγω εξωτερικού εξαναγκασμού να ταλαντώνεται οριζόντια σύμφωνα με τη συνάρτηση $U \sin(\Omega t)$. Συνεπώς το πρόβλημα συνοριακών τιμών που προκύπτει αποτελείται από την μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις ελεύθερες ταλαντώσεις της δοκού:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

με τις συνοριακές συνθήκες:

$$u(0, t) = 0 \quad (3.27)$$

και

$$u(L, t) = U \sin(\Omega t) \quad (3.28)$$

Ακολουθώντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών όπως και στο κεφάλαιο 2 βρίσκουμε ότι η λύση της (3.26) μετά την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (3.27) είναι:

$$u(x, t) = b \sin(kx) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] \quad (3.29)$$

Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη δίνει την εξίσωση:

$$b \sin(kL) \cdot [c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)] = U \sin(\Omega t) \quad (3.30)$$

Από το γεγονός ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι ανεξάρτητες, δηλαδή το ημίτονο δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα συνημιτόνων και το αντίστροφο, συμπεραίνουμε ότι η (3.30) ικανοποιείται μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$c = 0 \quad (3.31)$$

$$bd \sin(kL) = U \quad (3.32)$$

$$\omega = \Omega \quad (3.33)$$

Άρα η λύση του προβλήματος είναι:

$$u(x,t) = U \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} \sin(\Omega t) \quad (3.34)$$

όπου τώρα ο κυματικός αριθμός εξαρτάται από τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης μέσω της σχέσης:

$$k = \frac{\Omega}{\beta} \quad (3.35)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος αν και αφορά τη λύση της ομογενούς μερικής διαφορικής εξίσωσης των αξονικών ταλαντώσεων της δοκού δεν περιέχει άπειρες ιδιοσυχνότητες όπως στην περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης της δοκού αλλά μόνο αυτή που επιβάλλει ο εξαναγκασμός.

Από την άλλη πλευρά για τιμές του Ω οι οποίες μηδενίζουν τον παρονομαστή $\sin(kL)$ το πλάτος της ταλάντωσης της δοκού απειρίζεται. Οι συχνότητες αυτές που μηδενίζουν τη συνάρτηση $\sin(kL)$ δεν είναι άλλες από τις ιδιοσυχνότητες ελεύθερης ταλάντωσης της αμφίπακτης δοκού, όπως βρέθηκαν στο κεφάλαιο 2. Δηλαδή έχουμε συντονισμό και άρα μεγιστοποίηση του πλάτους όταν η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης συμπίπτει με μία από τις ιδιοσυχνότητες της αντίστοιχης αμφίπακτης δοκού.

3.5 ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΟ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΑΚΡΟ

Έστω δοκός το αριστερό άκρο της οποίας είναι πακτωμένο ενώ στο άλλο άκρο της ασκείται εξωτερική οριζόντια δύναμη $F(t)$. Συνεπώς το πρόβλημα συνοριακών τιμών που προκύπτει αποτελείται από την μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις ελεύθερες ταλαντώσεις της δοκού:

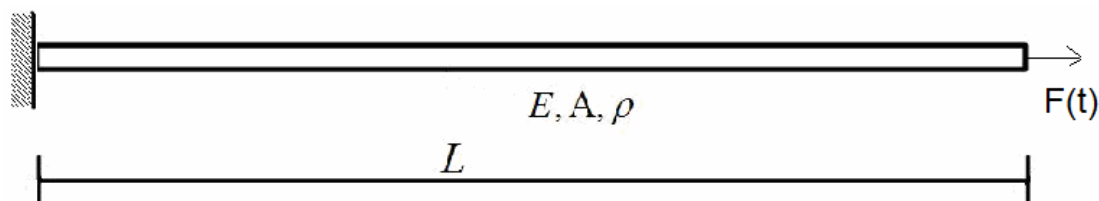
$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.36)$$

με τις συνοριακές συνθήκες:

$$u(0, t) = 0 \quad (3.37)$$

και

$$EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = F(t) \quad (3.38)$$



Σχήμα 3.1 Πρόβολος στο ελεύθερο άκρο του οποίου ενεργεί εξωτερική δύναμη.

Το γεγονός ότι η δεύτερη συνοριακή δεν είναι ομογενής δημιουργεί προβλήματα στην άμεση εφαρμογή της μεθόδου ανάλυσης ιδιομορφών. Για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο μετασχηματίζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών που αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση (3.36) και τις συνοριακές συνθήκες (3.37)-(3.38) στο παρακάτω πρόβλημα:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.39)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (3.40)$$

και

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.41)$$

Η εξωτερική δύναμη που εισέρχεται στην (3.39) είναι:

$$f(x, t) = F(t) \cdot \delta(x - L) \quad (3.42)$$

όπου $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac. Η συνάρτηση αυτή (ή πιο σωστά κατανομή) ορίζεται μέσω των σχέσεων:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{για } x \neq 0 \quad (3.43)$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (3.44)$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $\delta(x)$ παίρνει την τιμή 0 για $x \neq 0$ και απειρίζεται για $x=0$. Ουσιαστικά η παρουσία της $\delta(x-L)$ στο δεξί μέλος της (3.42) εκφράζει την βεβαιότητα ότι η εξωτερική δύναμη είναι μηδέν οπουδήποτε αλλού εκτός από το άκρο $x=L$.

Μία πολύ σημαντική και χρήσιμη ιδιότητα της συνάρτησης δ είναι η παρακάτω:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) g(x) dx = g(a) \quad (3.45)$$

όπου $g(x)$ τυχούσα συνάρτηση.

Τώρα και οι δύο συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς και μπορούμε να προχωρήσουμε κατά τα γνωστά. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.39)-(3.41) είναι αυτό της μονόπακτης δοκού. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ενότητας 2.3 οι ιδιομορφές είναι:

$$X_n(x) = \sin(k_n x) \quad (3.46)$$

με

$$k_n = (2n+1) \frac{\pi}{2L} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της επαλληλίας των κύριων τρόπων ταλάντωσης. Άρα γράφουμε τη λύση ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιομορφών:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) q_n(t) \quad (3.47)$$

Στη συνέχεια ακολουθούμε ακριβώς τη διαδικασία που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.3. Αντικαθιστούμε την έκφραση (3.47) της λύσης στην εξίσωση (3.39) αφού κάνουμε τις παραγωγίσεις ως προς x και t και παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} E \cdot A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} -k_n^2 q_n(t) \sin(k_n x) + F(t) \cdot \delta(x-L) = \\ = \rho \cdot A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \sin(k_n x) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (3.48) με $\sin(k_n x)$ και ολοκληρώνουμε από 0 έως L , εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις ορθογωνιότητας (3.8) και την ιδιότητα (3.45) της συνάρτησης δέλτα. Μετά από πράξεις καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} -EA \frac{L}{2} k_n^2 q_n(t) + F(t) \sin(k_n L) = \\ = \rho A \frac{L}{2} \ddot{q}_n(t) \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.49)$$

Οι εξισώσεις γράφονται στην πιο βολική μορφή:

$$\frac{1}{2} \rho A \ddot{q}_n(t) + \frac{1}{2} E A k_n^2 q_n(t) = F(t) \sin(k_n L) \quad (3.50)$$

Το δεύτερο μέλος της (3.50) απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} \sin(k_n L) &= \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2L}L\right] = \\ &= \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{n+1} \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.51)$$

Συνεπώς η (3.50) γίνεται:

$$\frac{1}{2} \rho A \ddot{q}_n(t) + \frac{1}{2} E A k_n^2 q_n(t) = (-1)^{n+1} F(t) \quad (3.52)$$

Η γενική λύση των αντίστοιχων ομογενών διαφορικών εξισώσεων είναι όπως στην (3.16):

$$q_{n1}(t) = e_n \cos(\omega_n t) + f_n \sin(\omega_n t) \quad (3.53)$$

Η μερική λύση της μη-ομογενούς προφανώς καθορίζεται από τη μορφή της συνάρτησης $F(t)$. Για παράδειγμα για σταθερή δύναμη:

$$F(t) = F_0 \quad (3.54)$$

στο ελεύθερο άκρο της δοκού το δεξιό μέλος της (3.52) είναι μία σταθερά, οπότε η μερική λύση θα έχει τη μορφή:

$$q_{n2}(t) = c_n \quad (3.55)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (3.55) στην εξίσωση (3.52) υπολογίζουμε εύκολα τις άγνωστες σταθερές:

$$c_n = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} F_0}{E A k_n^2} \quad (3.56)$$

Τελικά οι συντελεστές $q_n(t)$ είναι:

$$q_n(t) = e_n \cos(\omega_n t) + f_n \sin(\omega_n t) + \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} F_0}{EAk_n^2} \quad (3.57)$$

Η λύση $u(x,t)$ δίνεται από την (3.47) αν χρησιμοποιήσουμε την (3.46) και την (3.57):

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \left\{ e_n \cos(\omega_n t) + f_n \sin(\omega_n t) + \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} F_0}{EAk_n^2} \right\} \quad (3.58)$$

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μέθοδος Ανάλυσης Ιδιομορφών (μέθοδος Fourier) είναι μία τεχνική επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους ιδιαίτερα χρήσιμη και αποτελεσματική και κατά συνέπεια έχει ένα τεράστιο εύρος εφαρμογών σε πάρα πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Εκτός από ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο δίνει τη δυνατότητα εμβάθυνσης στη φυσική του υπό μελέτη συστήματος. Για παράδειγμα, φαινόμενα όπως ο συντονισμός κατά την ταλάντωση ενός συνεχούς συστήματος, προκύπτουν απλά και κατανοητά μέσα από την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Επινοήθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό και φυσικό J. Fourier (1768-1830) το 1822 και χρησιμοποιήθηκε αρχικά για τη μελέτη προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας.

Στην παρούσα εργασία η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των ελεύθερων και εξαναγκασμένων αξονικών ταλαντώσεων δοκού. Υπολογίστηκαν οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές για αρκετές περιπτώσεις συννοριακών συνθηκών. Είναι ένα πρόβλημα, η μελέτη του οποίου αποτελεί τη βάση για τη μελέτη πιο σύνθετων προβλημάτων της μηχανικής των κατασκευών.

Κατά την εκπόνηση της πτυχιακής εργασίας αποκτήθηκε σημαντική εμπειρία στην εφαρμογή της Ανάλυσης Ιδιομορφών στην πράξη και ειδικότερα σε ένα πρόβλημα τεχνικής μηχανικής που αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της επιστήμης του Μηχανολόγου Μηχανικού. Επίσης αποκτήθηκε εμπειρία στην αναζήτηση πληροφοριών στη βιβλιογραφία και συγγραφής και παρουσίασης ενός επιστημονικού θέματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αναστασιάδης Κ. *Δυναμική των Κατασκευών*, τόμος II Συνεχή Συστήματα, εκδόσεις Ζήτη (1983).
2. Βουθούνης Π. *Μηχανική του Απαραμόρφωτου Σώματος-Στατική*, Αθήνα 2008.
3. Ιωακειμίδης Ν. *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς*, εκδόσεις Gotsis (2008).
4. Νατσιάβας Σ. *Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων*, εκδόσεις Ζήτη (2001).
5. www.mie.uth.gr/ekp_yliko/chapter5.doc
6. *Ταλάντωση Συνεχών Συστημάτων*, σημειώσεις σε ηλεκτρονική μορφή, ανακτήθηκαν από την ιστοσελίδα: <http://www.teiserron.gr>