

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Μέτρηση Δισδιάστατου Οριακού Στρώματος  
Επίπεδης Επιφάνειας με Ανεμομετρία Θερμού  
Σύρματος (Hot Wire Anemometry)**

**ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ:**

**ΣΤΑΥΡΟΣ ΧΡΟΝΗΣ**

**ΚΑΝΕΛΛΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ**

**ΕΠΟΠΤΕΥΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΡΩΜΑΙΟΣ**

**ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2014**

## **ΠΡΟΛΟΓΟΣ**

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει την Πτυχιακή μας Εργασία αισθανόμαστε την ανάγκη να ευχαριστήσουμε τον Εισηγητή και Επιβλέπων της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας τον κύριο Ρωμαίος Αλέξανδρος, Καθηγητή Τ.Ε.Ι., για την πολύτιμη βοήθεια, την παροχή πληροφοριών και την τεχνογνωσία που μας προσέφερε κατά την διάρκεια εκπόνησης της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, τη συνεχή καθοδήγησή του και την υπομονή του.

*Πάτρα, Ιούνιος 2014*

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας είναι η παρουσίαση και η ανάλυση της μεθόδου «HOT WIRE» με ειδίκευση στον τομέα της Ανεμομετρίας.

Στην παρούσα Πτυχιακή εργασία αναλύουμε την μέθοδο «HOT WIRE» και περιγράφουμε και άλλα πεδία εφαρμογής της. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αναφερόμαστε στην ιστορική εξέλιξη της μεθόδου, αναφέρουμε παραδείγματα εφαρμογής της και περιγράφουμε τις αρχές της μεθόδου περιληπτικά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας αναφερόμαστε σε θεωρητικό επίπεδο στις ιδιότητες και τους ορισμούς των «Ρευστών», στην αντιμετώπιση τους και στα οριακά στρώματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας περιγράφουμε την πειραματική τεχνική της μεθόδου, αναλύουμε την ανεμομετρία θερμού σύρματος καθώς την μέθοδο «HOT WIRE» .

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφουμε αναλυτικά το πρόγραμμα διαχείρισης της μεθόδου, την διαδικασία επεξεργασίας των δεδομένων και του τρόπου έκδοσης αποτελεσμάτων .

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύουμε πειραματικά δεδομένα που μας παρείχε ο επόπτης καθηγητής μας με σκοπό την απόκτηση εμπειρίας και εξαγωγής αποτελεσμάτων.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1. ....	11
Εικόνα 2. ....	15
Εικόνα 3. ....	16
Εικόνα 4. Δημιουργία οριακού στρώματος σε επίπεδη πλάκα.....	20
Εικόνα 5. Κατανομή προφίλ ταχυτήτων.....	20
Εικόνα 6. Σχηματική παράσταση δημιουργίας αποκόλλησης ροής.....	27
Εικόνα 7. Δημιουργία φαινομένου αποκόλλησης σε αεροτομή.....	28
Εικόνα 8. Κατανομή ροϊκού πεδίου σε φορηγάκι και δημιουργία αποκόλλησης ροής .....	29
Εικόνα 9. Διάφοροι τύποι θερμού νήματος.....	32
Εικόνα 10. Διάφοροι τύποι θερμού φιλμ.....	32
Εικόνα 11. Διάταξη θερμού νήματος σταθερού ρεύματος.....	33
Εικόνα 12. α) Απόκριση διάταξης σταθερού ρεύματος, β) δράση διάταξης αντιστάθμισης, γ) απόκριση διάταξης θερμού νήματος με διάταξη αντιστάθμισης .....	35
Εικόνα 13. Διάγραμμα εξόδου-ταχύτητας διάταξης σταθερού ρεύματος.....	35
Εικόνα 14. Διάταξη νήματος σταθερής θερμοκρασίας.....	36
Εικόνα 15. Καμπύλη βαθμονόμησης θερμού νήματος σταθερής θερμοκρασίας.....	37
Εικόνα 16. Σχήμα 2.8: Εμφάνιση σφάλματος μετρήσεων σε νερό.....	38
Εικόνα 17. Συνιστώσες της ταχύτητας στο σύστημα συντεταγμένων του αισθητήρα (x,y,z) και στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων των νημάτων (xw, yw, zw) για κλίση του ανεμομέτρου 45° ως προς την επικείμενη ροή. ....	40
Εικόνα 18. Χαρακτηριστικά εξόδου αισθητήρα.....	43
Εικόνα 19. α) Ολίσθηση μηδενός, b) Ολίσθηση ευαισθησίας, c) Συνδυασμένη επίδραση των δυο ολισθήσεων (Morris A.S., 1993).....	45
Εικόνα 20. Χαρακτηριστικά εξόδου αισθητήρα με υστέρηση (Morris A.S., 1993)....	46
Εικόνα 21. Χαρακτηριστικά εξόδου αισθητήρα με νεκρό εύρος (Morris A.S., 1993). .....	47
Εικόνα 22. Χαρακτηριστικά αισθητήρα πρώτης τάξεως (Morris A.S., 1993).....	50
Εικόνα 23. Απόκριση αισθητήρα δευτέρας τάξεως (Morris A.S., 1993). ....	51
Εικόνα 24. Γενικό σύστημα DAQ.....	52
Εικόνα 25. <b>α:</b> Κάρτα DAQ που τοποθετείται στον δίαυλο PCI ( <a href="http://www.ni.com">http://www.ni.com</a> ) 53	
Εικόνα 26. <b>β:</b> Κάρτα DAQ που τοποθετείται στη θύρα USB ( <a href="http://www.ni.com">http://www.ni.com</a> ) ....	53

Εικόνα 27. Διαδικασία απόκτησης και επεξεργασίας πληροφορίας .....	56
Εικόνα 28. Άποψη signal conditioner ( <a href="http://www.ni.com">http://www.ni.com</a> ).....	56
Εικόνα 29. ....	<b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>
Εικόνα 30. Επιφάνεια εργασίας. ....	<b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>
Εικόνα 31. Εικονίδια εντολών βασικής γραμμής εργαλείων. <b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>	
Εικόνα 32. Εικονίδια εντολών διαχείρισης του αρχείου. <b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>	
Εικόνα 33. Επεξήγηση συμβόλων. ....	<b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>
Εικόνα 34. ....	<b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>
Εικόνα 35. ....	<b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>
Εικόνα 36. Μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή σε σωλήνα.....	64
Εικόνα 37. Περιγραφή ροϊκής παραμέτρου σε όρους χρονικής μέσης τιμής, $\bar{u}$ , και διακύμανσης, $u'$ .....	65
Εικόνα 38. Μέση τιμή των διακυμάνσεων και μέση τιμή του τετραγώνου των διακυμάνσεων. ....	67
Εικόνα 39.(α) Στρωτή ροή όπου η διατμητική τάση προκαλείται από την τυχαία κίνηση των μορίων. (β) Τυρβώδης ροή που συνίσταται από ένα σύνολο τυχαίων τρισδιάστατων δινών.....	68
Εικόνα 40. Δομή της τυρβώδους ροής σε σωλήνα. (α) Διατμητική τάση. (β) Μέση ταχύτητα.....	70
Εικόνα 41. Τυπική μορφή του τυρβώδους προφίλ ταχύτητας σε σωλήνα. ....	72
Εικόνα 42. Εκθέτης, $n$ , για τον εκθετικό νόμο του προφίλ ταχύτητας. ....	73
Εικόνα 43. Τυπικά προφίλ ταχύτητας στρωτής και τυρβώδους ροής. ....	74
Εικόνα 44. Τυπικά αδιάστατα προφίλ της μέσης διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας μετρημένα με αισθητήρες μονού και διπλού σύρματος ( $h=21$ mm, $U_0=12.129$ m/s, $u+(\text{αισθητήρας μονού σύρματος})=0.5387$ m/s, $u+(\text{αισθητήρας διπλού σύρματος})=0.556$ m/s) .....	75
Εικόνα 45. Τυπικά αδιάστατα προφίλ των διακυμάνσεων της διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας μετρημένα με αισθητήρες μονού και διπλού σύρματος.....	76
Εικόνα 46. Τυπικό αδιάστατο προφίλ των διατμητικών τάσεων Reynolds, μετρημένο με αισθητήρα διπλού σύρματος .....	76
Εικόνα 47. Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων με τη θεωρία ( $n=7$ ) .....	77
Εικόνα 48. Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων με τη θεωρία .....	77

## ***ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ***

<b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ</b> .....	6
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ</b> .....	7
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΘΕΜΑΤΟΣ.....	7
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥ HOT WIRE .....	7
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΕΥΣΤΩΝ</b> .....	9
2.1 ΡΕΥΣΤΑ .....	9
2.2 ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ.....	17
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΤΕΧΝΙΚΗ</b> .....	31
3.1 ΑΝΕΜΟΜΕΤΡΙΑ ΘΕΡΜΟΥ ΣΥΡΜΑΤΟΣ.....	31
3.2 ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ «HOT WIRE».....	38
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ</b> .....	42
4.1 ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ ΣΥΣΚΕΥΩΝ .....	42
4.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΣΥΣΚΕΥΗ .....	58
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ – ΑΝΑΛΥΣΗ</b> <b>ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ</b> .....	63
5.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	63
5.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ - ΣΧΟΛΙΑ .....	72
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	78

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

## 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΘΕΜΑΤΟΣ

Η πτυχιακή εργασία στοχεύει στην καταγραφή της ανάπτυξης δισδιάστατου οριακού στρώματος ροής αέρα σε επίπεδη επιφάνεια με χρήση της τεχνικής Ανεμομετρίας Θερμού Σύρματος (Hotwire Anemometry). Η μελέτη οριακών στρωμάτων ροών αποτελεί σημαντικό πεδίο έρευνας με ποικίλες βιομηχανικές εφαρμογές (συστήματα καύσης, αεροναυπηγική, κλπ.). Τα αποτελέσματα της μελέτης θα συγκριθούν με κλασσικές θεωρήσεις και αναλυτικές σχέσεις και θα χρησιμοποιηθούν και για την ανάπτυξη εργαστηριακής άσκησης του μαθήματος Μετρολογίας Ενεργειακών Συστημάτων.

Στη συνέχεια, περιγράφονται αναλυτικά οι βασικές έννοιες των ρευστών και οι βασικές κατηγορίες των οριακών στρωμάτων. Μέσα από Ελληνική και Ξένη βιβλιογραφία αναλύουμε τη μέθοδο της ανεμομετρίας θερμού σύρματος «HOT WIRE ANEMOMETRY» τόσο σε επίπεδο αρχής λειτουργίας όσο και των βασικών στοιχείων (hardware, software) που την αποτελούν.

Οι πειραματικές μετρήσεις διεξήχθησαν στην υποηχητική αεροσήραγγα ανοικτού κυκλώματος που είναι εγκατεστημένη στο εργαστήριο Μετρολογίας του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ. Η διατομή του καναλιού ήταν ορθογωνική με διαστάσεις  $0.40 \times 0.07 \text{ cm}^2$ . Η κύρια ταχύτητα της ελεύθερης ροής ήταν  $U_0=12 \text{ m/s}$  που αντιστοιχεί σε αριθμό Reynolds,  $Re = \frac{U_0 H}{\nu} = 56000$ .

## 1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥ HOT WIRE

Τις τελευταίες δεκαετίες με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι και πειραματικές τεχνικές που μπορούν να δώσουν αρκετά αξιόπιστες μετρήσεις σε πειράματα που αφορούν ροές ρευστών. Οι κυριότερες δυσκολίες μέτρησης των τυρβώδων ροών είναι οφείλονται κατά πολύ στο γεγονός ότι καλύπτουν ένα πολύ μεγάλο εύρος οι τυρβώδεις κλίμακες μήκους. Μεγάλη προσπάθεια γίνεται στην ανάπτυξη νέων μεθόδων που να μας δίνουν την δυνατότητα να μετράμε μία ή περισσότερες συνιστώσες της στροβιλότητας.

Η μέθοδος της ανεμομετρίας θερμού σύρματος είναι ένα βασικό πειραματικό εργαλείο που συνεισφέρει και αυτό με την σειρά του στην εξέλιξη της κατανόησης των πτυχών της ρευστομηχανικής.

Η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιείται για μετρήσεις που αφορούν ροές αέρα. Το πεδίο εφαρμογής και ο λόγος εξέλιξης της εν λόγω μεθόδου βρίσκει εφαρμογή σε πολλά επίπεδα τόσο σε επιστημονικό όσο και σε πρακτικό. Τα προβλήματα που δημιουργούνται σε μια κατασκευή λόγω των στροβιλισμών είναι μεγάλα και σημαντικά, οι ακριβείς μετρήσεις και η παροχή επιπλέον γνώσεις μέσω αυτών οδηγούν στην εξεύρεση λύσεων που έχουν ως στόχο οικονομικά οφέλη και ασφάλεια στη κατασκευή.

Οι αρχές της ανεμομετρίας θερμού σύρματος αναπτύχθηκαν στις αρχές της προηγούμενης δεκαετίας (1914). Σύγχρονα συστήματα, οι δυνατότητές τους και οι περιορισμοί τους περιγράφονται από τους Hinze 1975, Perry 1982 και Lomas 1986.

Το ανιχνευτικό στοιχείο της ανεμομετρίας θερμού σύρματος είναι ένα πολύ λεπτό μεταλλικό σύρμα, το οποίο θερμαίνεται από το ηλεκτρικό ρεύμα. Το ανεμόμετρο θερμού σύρματος συνδέεται με το ένα σκέλος μίας γέφυρας Wheatstone και η τάση ρυθμίζεται σε τέτοια τιμή ώστε η θερμοκρασία του σύρματος να είναι υψηλότερη από αυτήν της ροής του ρευστού. Το σύρμα ψύχεται από το ρέον ρευστό, ελαττώνεται έτσι η θερμοκρασία του και συνεπώς μειώνεται η τιμή της ηλεκτρικής του αντίστασης. Δύο βασικές διαφορετικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν, η μία ονομάζεται μέθοδος σταθερής θερμοκρασίας (CTA) ενώ η δεύτερη καλείται μέθοδος σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος (CCA). Στην πρώτη περίπτωση η θερμοκρασία του σύρματος και άρα και η ηλεκτρική του αντίσταση διατηρείται σταθερή ενώ η τάση μεταβάλλεται με την ταχύτητα. Η μεταβολή αυτή είναι και το αντικείμενο μέτρησης. Η μέθοδος ανεμομετρίας σταθερής θερμοκρασίας παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα και είναι ευρέως αποδεκτή. Στη μέθοδο CCA, που χρησιμοποιείται κυρίως για μετρήσεις της θερμοκρασίας, μεταβάλλεται η ηλεκτρική αντίσταση καθώς το ρεύμα διατηρείται σταθερό.

Η σχέση μεταξύ της τάσης της γέφυρας του ανεμομέτρου και της ταχύτητας του ρευστού ανακαλύφθηκε από τον King (νόμος του King)

$$E^2 = A + B \cdot U^n.$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

### 2.1 ΡΕΥΣΤΑ

Όπως κάθε επιστήμη, έτσι και η Δυναμική των Ρευστών βασίζεται σε ορισμένες θεμελιώδεις αρχές που έχουν διατυπωθεί ως συμπέρασμα φυσικών παρατηρήσεων και εμπειρίας. Οι αρχές αυτές είναι ότι και τα αξιώματα για ένα κλάδο της Μαθηματικής επιστήμης και αποτελούν την βάση πάνω στην οποία οικοδομείται η επιστήμη της Δυναμικής των Ρευστών. Οι αρχές αυτές και η αντίστοιχη μαθηματική τους διατύπωση ή έκφραση είναι:

- (i) Αρχή διατήρησης της μάζας- Εξίσωση συνεχείας.
- (ii) Αρχή διατήρησης (μεταβολής) της ορμής- Εξίσωση κίνησης.
- (iii) Αρχή διατήρησης της Ενέργειας ή πρώτο Θερμοδυναμικό αξίωμα- Εξίσωση ενέργειας.

Οι αρχές αυτές αναφέρονται σ' ένα σύστημα μάζας (όγκος ελέγχου (control volume)), δηλαδή σ' ένα σύνολο ύλης καθορισμένης οντότητας, και ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι ένα ρευστό σωματίδιο ή ένα ποσό ύλης που περικλείεται μέσα σ' ένα όγκο  $V$  που ορίζεται από μία απλή κλειστή επιφάνεια  $S$ .

- (i) Αρχή διατήρησης της μάζας- Εξίσωση συνεχείας.

Η μάζα, που αποτελεί ένα μέτρο της ύλης, σύμφωνα με τις απόψεις της Κλασσικής Μηχανικής, δεν μπορεί να δημιουργηθεί εκ του μηδενός ούτε όμως και να εξαφανισθεί. Με την κίνηση του ρευστού η μάζα μεταφέρεται, με την πάροδο του χρόνου, από την μία θέση του πεδίου ροής σε άλλη, παραμένει όμως αμετάβλητη.

Στα ομογενή ρευστά η αρχή διατηρήσεως της μάζας οδηγεί στην εξίσωση συνέχειας η οποία συνδέει τις μεταβολές, ως προς τον χώρο και τον χρόνο, της πυκνότητας  $\rho$  και του διανυσματικού πεδίου της ταχύτητας  $\underline{v} = (u, v, w)$  τού ρευστού. Υπενθυμίζεται ότι κάθε θερμοδυναμική ιδιότητα του ρευστού, πίεση  $P$ , πυκνότητα  $\rho$ , θερμοκρασία  $T$ , ή κινηματική ιδιότητα, ταχύτητα  $\underline{v} = (u, v, w)$ , ορμή  $\underline{P}$ , κ.λπ., είναι, γενικά, συνάρτηση θέσης και χρόνου. Π.χ.  $T = T(x, y, z, t)$ .

Για τις συναρτήσεις αυτές, σύμφωνα με την παραδοχή ότι τα ρευστά θεωρούνται συνεχή μέσα, υποθέτουμε ότι είναι «καλά συμπεριφερόμενες», από μαθηματική άποψη, συναρτήσεις. Δηλαδή είναι ορισμένες σε ένα χωρίο  $\in \subset \square^3$ , ο χώρος που πραγματοποιείται η ροή, είναι συνεχείς στο  $\in \subset \square^3$  και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης.

Η Μαθηματική διατύπωση της αρχής αυτής είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Εξίσωση 1

Η ανωτέρω εξίσωση μπορεί επίσης να γραφεί και ως

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Εξίσωση 2

Στην ανωτέρω σχέση,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{r} \cdot \nabla$

Εξίσωση 3

, ή

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Εξίσωση 4

, είναι ο τελεστής του Stokes.

Στην περίπτωση που η ροή είναι μόνιμη (χρονοανεξάρτητη) και το ρευστό ομογενές και ασυμπίεστο, η Εξίσωση συνεχείας έχει την απλούστερη μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Εξίσωση 5

ή σε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Εξίσωση 6

Η απόδειξη της εξίσωσης συνέχειας (1) γίνεται με εφαρμογή της έννοιας της ροής διανυσματικού πεδίου  $\dot{F}$  (εν προκειμένου του  $\mathbf{v}$  ή του  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ ) δια μέσου μιας απλής κλειστής επιφάνειας  $S$  που ορίζει όγκο  $V$ .

Σε πολλά προβλήματα εφαρμογών ροής σε κλειστούς ή ανοικτούς αγωγούς, και για την περίπτωση που το ρευστό είναι ομογενές και ασυμπίεστο (π.χ. νερό), οπότε  $\mathbf{r} = c$ , η εξίσωση συνέχειας έχει την απλούστερη μορφή

Παροχή  $Q = c$

Εξίσωση 7

ή  $S \cdot \mathbf{v} = c$

Όπου  $S$  η διατομή του αγωγού και  $v$  η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο της τομής θεωρούμενης σταθερής (της ταχύτητας).

Σε «σύστημα» ροής με πολλές «εισροές» και «εκροές» η ανωτέρω σχέση παίρνει την μορφή

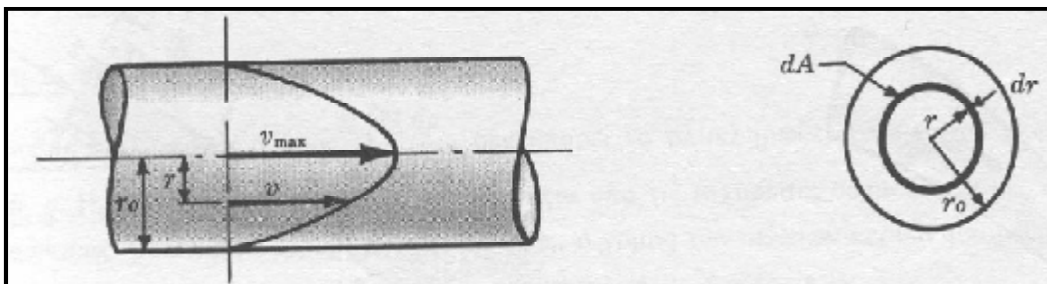
$$\sum_1^n Q_i = 0$$

Εξίσωση 8

Για την περίπτωση στρωτής ροής ρευστού σε αγωγό π.χ. κυκλικής διατομής ακτίνας  $R_0$ , όπου η ταχύτητα του ρευστού είναι συνάρτηση της ακτινικής απόστασης  $r$ , από τον άξονα του αγωγού, (βλέπε εικόνα 1.) η παροχή  $Q$  δίνεται από την έκφραση

$$Q = \int_0^{R_0} u(r) 2\pi r dr$$

Εξίσωση 9



Εικόνα 1.

όπου 
$$u(r) = u_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right]$$

Εξίσωση 10

και  $u_{\max}$  η (μέγιστη) τιμή της ταχύτητας πάνω στον άξονα του αγωγού.

(ii) Αρχή μεταβολής της ορμής- Εξίσωση κίνησης

Η αρχή της μεταβολής της ορμής είναι το γνωστό αξίωμα της κίνησης του Newton κατά το οποίο η ως προς τον χρόνο παράγωγος της ποσότητας κίνησης (ορμής) ενός συστήματος μάζας, ισούται με την συνισταμένη όλων των δυνάμεων που εξασκούνται σ' αυτό. Η αρχή αυτή στα ρευστά, οδηγεί στις εξισώσεις κίνησης οι οποίες συνδέουν τα κινηματικά χαρακτηριστικά της ροής (επιτάχυνση) με τα αντίστοιχα δυναμικά (δυνάμεις).

Οι εξισώσεις αυτές, σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων  $Oxyz$  (αναλυτική μορφή) και για την περίπτωση που το ρευστό είναι ομογενές και ασυμπίεστο, γράφονται:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Εξίσωση 11

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

Εξίσωση 12

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Εξίσωση 13

Στις ανωτέρω εξισώσεις  $P$  είναι η πίεση,  $m$  είναι ο συντελεστής της μοριακής δυναμικής συνεκτικότητας τού ρευστού ή ιξώδες ( $Kg \cdot m^{-1} \cdot sec^{-1}$ ) και  $g_x, g_y, g_z$  είναι οι συνιστώσες της έντασης (δύναμης ανά μονάδα όγκου) τού πεδίου δυνάμεων βαρύτητας.

Το πρώτο μέλος των εξισώσεων (11) ~ (13) αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις (ανά μονάδα όγκου) αδράνειας (επιτάχυνσης) του ρευστού σωματιδίου, κατά τούς άξονες  $x, y$  και  $z$ ,

αντίστοιχα, οι όροι  $-\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $-\frac{\partial P}{\partial y}$  και  $-\frac{\partial P}{\partial z}$  τις δυνάμεις (ανά μονάδα όγκου) πίεσης και τέλος οι όροι με τις παρενθέσεις και το εξώδες  $m$  έμπροσθέν τους, τις δυνάμεις τριβής που αναπτύσσονται από τις διατμητικές τάσεις.

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως εξισώσεις Navier-Stokes. Σε διανυσματική δε μορφή γράφονται ως

$$r \frac{D\dot{\mathbf{v}}}{Dt} = - \dot{\mathbf{r}} \nabla P + m \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{v}} + r \dot{\mathbf{f}}$$

Εξίσωση 14

ή

$$\frac{D\dot{\mathbf{v}}}{Dt} = - \frac{1}{r} \dot{\mathbf{r}} \nabla P + n \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{f}}$$

Εξίσωση 15

Όπου  $n = m/r$  και καλείται κινηματικό ιξώδες.

Στην περίπτωση που ένα ρευστό θεωρείται ιδανικό ( $m=n=0$ ), η ανωτέρω εξίσωση απλοποιείται στην

$$\frac{D\dot{\mathbf{v}}}{Dt} = - \frac{1}{r} \dot{\mathbf{r}} \nabla P + \dot{\mathbf{f}}$$

Εξίσωση 16

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως εξίσωση τού Euler.

Η εξίσωση τού Euler με εφαρμογή τής διανυσματικής ταυτότητας  $\dot{\mathbf{v}}(\dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{B}}) = (\dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{A}} + (\dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{B}} \times (\dot{\mathbf{v}} \times \dot{\mathbf{A}}) + \dot{\mathbf{A}} \times (\dot{\mathbf{v}} \times \dot{\mathbf{B}})$ , για το πεδίο ταχυτήτων ( $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{v}}$ ), παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} + \dot{\mathbf{v}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}^2 \right) + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \dot{\mathbf{v}} = - \frac{1}{r} \dot{\mathbf{r}} \nabla P + \dot{\mathbf{f}}$$

Εξίσωση 17

όπου

$$\dot{\Omega} = \dot{\nabla} \times \mathbf{r}$$

Εξίσωση 18

είναι ο στροβιλισμός του δ. π. ταχυτήτων. Η εξίσωση (17) είναι γνωστή ως Υδροδυναμική Εξίσωση τού Lamb. Η εξίσωση αυτή, με ορισμένες προϋποθέσεις, οδηγεί στην γνωστή εξίσωση Bernoulli για ιδανικά ρευστά

$$\frac{1}{2} r v^2 + P + r g h =$$

σταθ.

Εξίσωση 19

η οποία εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας κατά την κίνηση των ιδανικών ρευστών (κινητικής ενέργειας (ανά μονάδα όγκου), εσωτερικής ενέργειας και δυναμικής ενέργειας).

(iii) Αρχή διατήρησης της Ενέργειας - Εξίσωση ενέργειας

Το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενεργείας με οποιαδήποτε μορφή νοείται αυτή (κινητική, δυναμική, έργο, θερμότητα, κλπ). Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα μάζας τού οποίου η ενέργεια είναι E και προσφέρουμε σ' αυτό ένα ποσό θερμότητας dQ, τότε η προσφορά αυτή της ενέργειας στο σύστημα έχει σαν αποτέλεσμα, γενικά, την παραγωγή ενός έργου dW από το σύστημα και την μεταβολή της ενέργειας κατά dE, που είναι η διαφορά της τελικής και της αρχικής κατάστασης τού συστήματος. Δηλαδή

$$dQ = dW + dE$$

Εξίσωση 20

Εάν οι απειροστές αυτές μεταβολές πραγματοποιούνται σε απειροστό χρονικό διάστημα dt, τότε η (1) γράφεται και ως

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{DW}{Dt} + \frac{DE}{Dt}$$

Εξίσωση 21

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι:

$$\frac{DQ}{Dt}$$

α) Η θερμότητα (ή η θερμική ισχύς  $\frac{DQ}{Dt}$ ) που προσδίδεται στο «σύστημα», λόγω ανομοιόμορφου κατανομής της θερμοκρασίας T τού ρευστού, πραγματοποιείται βάση τού νόμου αγωγής τού Fourier

$$\dot{Q} = -k \dot{\nabla} T$$

Εξίσωση 22

όπου k είναι ο συντελεστής της θερμικής αγωγιμότητας τού ρευστού ( $Joule / m \cdot sec \cdot ^0 K$ ).

β) Το έργο W που παράγει το σύστημα οφείλεται στις δυνάμεις των καθέτων τάσεων  $S_{ii}$ , των διατμητικών τάσεων  $t_{ij}$  και στις δυνάμεις τού εξωτερικού πεδίου δυνάμεων  $\dot{f}$ , και ότι

γ) Η ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα της εσωτερικής του ενέργειας και της κινητικής του, αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (21) παίρνει, τελικά την μορφή

$$r \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \mathbf{r} \cdot \nabla (k \nabla T) + m \cdot \Phi$$

**Εξίσωση 23**

Στην ανωτέρω εξίσωση, γνωστή ως Εξίσωση Ενέργειας (ή θερμοκρασίας)  $\mathbf{r}$  είναι η πυκνότητα του ρευστού,  $c_p$  η ειδική θερμότητά του, υπό σταθερή πίεση ( $\text{Joule} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $k$  ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, εξαρτώμενος, γενικά, από την θερμοκρασία  $T$ ,  $m$  το ιξώδες του ρευστού και  $\Phi$  η συνάρτηση «αναντιστρέπτων απωλειών τριβής» (dissipation function) που δίνεται από την σχέση

$$\Phi = 2 \cdot \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$$

**Εξίσωση 24**

και η οποία εκφράζει την ποσότητα της κινητικής ενέργειας του ρευστού που μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβής από το ιξώδες του.

Στην περίπτωση ομογενούς και ασυμπίεστου ρευστού όπου το  $k$  θεωρείται ανεξάρτητο της θερμοκρασίας και η ολική μεταβολή, ανά μονάδα χρόνου, της πίεσης είναι μηδενική, η εξίσωση ενέργειας απλοποιείται στην μορφή

$$r \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + m \cdot \Phi$$

**Εξίσωση 25**

όπου  $\mathbf{r} \cdot \nabla^2 = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  είναι η Λαπλασιανή και ο τελευταίος όρος της  $\Phi$  στην εξίσωση (24), να είναι προφανώς μηδενικός.

Ανακεφαλαιώνοντας, τονίζουμε ότι τα προβλήματα της Μηχανικής των Ρευστών περιγράφονται από το σύστημα των εξισώσεων Συνέχειας, Ορμής και Ενέργειας, αντίστοιχα,

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{r} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{r} \mathbf{v}) = 0$$

$$r \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = - \mathbf{r} \nabla P + m \mathbf{r} \nabla v + \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}$$

$$r \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \mathbf{r} \cdot \nabla (k \nabla T) + m \cdot \Phi$$

Οι εξισώσεις αυτές, μαζί με την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων, αποτελούν ένα σύστημα έξι μη γραμμικών, συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων με έξι, γενικά, αγνώστους  $u, v, w, P, \mathbf{r}$  και  $T$ .

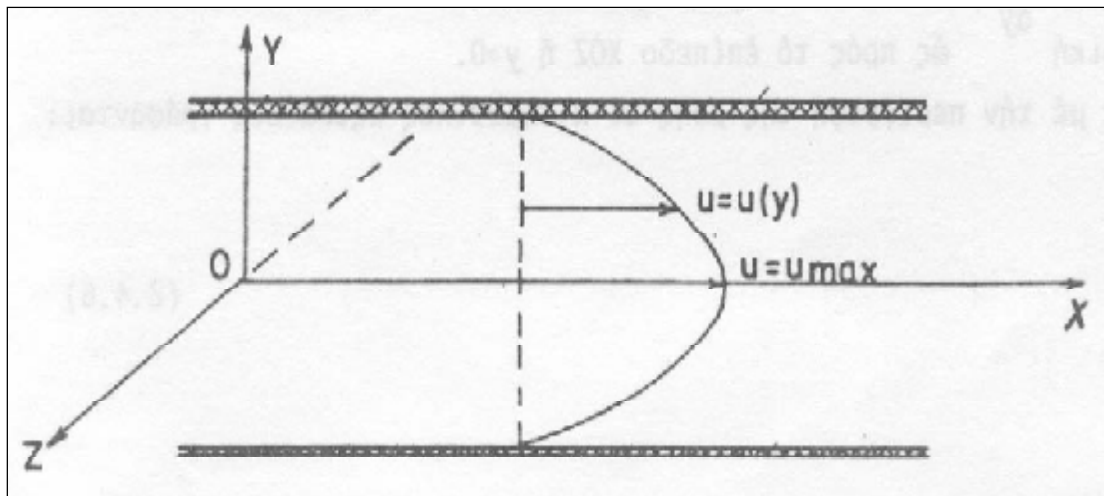
Για κάθε συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα, το σύστημα αυτό των εξισώσεων θα συνοδεύεται, προφανώς, και από τις αντίστοιχες αρχικές και συνοριακές του συνθήκες. Η λύση του δε, εφ' όσον είναι δυνατόν να ευρεθεί, θα μας δώσει τα θερμοδυναμικά και τα κινηματικά χαρακτηριστικά της ροής σε κάθε σημείο  $(x, y, z)$  αυτής και για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Δηλαδή την ταχύτητα  $\vec{V} = (u, v, w)$ , την πυκνότητα  $\rho$ , την πίεση  $P$  και την θερμοκρασία  $T$  ως συναρτήσεις θέσης και χρόνου.

Σε πολλά πρακτικά προβλήματα φυσικού ή και τεχνολογικού ενδιαφέροντος είναι δυνατόν να εφαρμοστούν ορισμένες παραδοχές για το ρευστό ή και για την ροή οι οποίες απλοποιούν σημαντικά την μαθηματική αντιμετώπιση τού προβλήματος αφού το μαθηματικό μοντέλο που το περιγράφει γίνεται απλούστερο.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε:

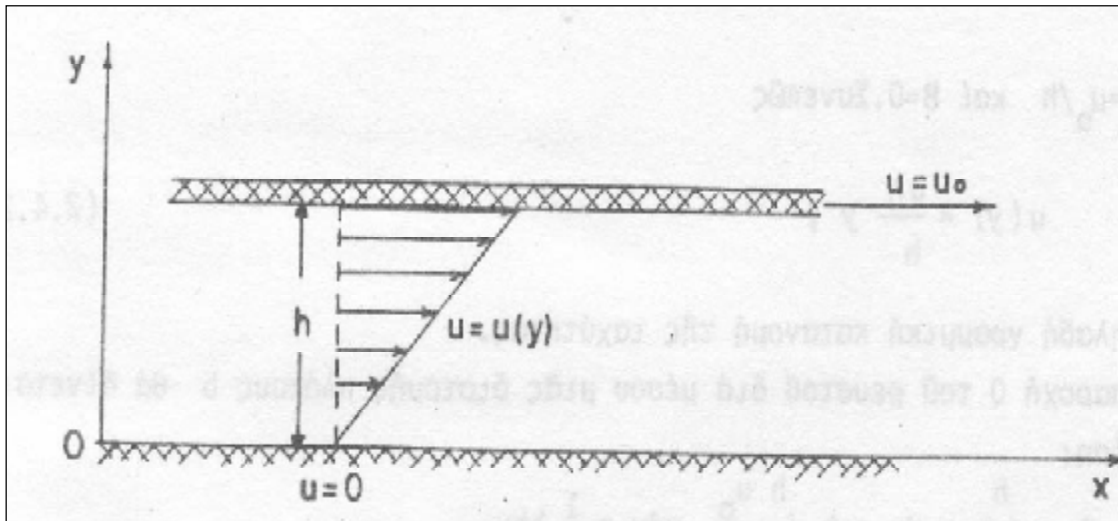
α) Την μόνιμη στρωτή ροή ομογενούς και ασυμπίεστου ρευστού μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων επιφανειών (πλακών) που απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $h$  και διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία  $T_w$  (βλέπε εικόνα 2). Η ροή πραγματοποιείται μέσω μιας βαθμίδας

πίεσης  $-\frac{\partial P}{\partial x} = \text{σταθ.}$  και είναι γνωστή ως ροή τύπου Poiseuille (Γάλλος Φυσικός και Φυσιολόγος, 1799-1869).



Εικόνα 2.

β) Την μόνιμη στρωτή ροή ομογενούς και ασυμπίεστου ρευστού, μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων επιφανειών (πλακών), εκ των οποίων η κάτω είναι ακίνητη και διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία  $T_a$  ενώ η επάνω κινείται με σταθερή ταχύτητα  $u = u_0 = \text{σταθ.}$  και διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία  $T_k$  (βλέπε εικόνα 3). Η ροή σ' αυτή την περίπτωση πραγματοποιείται χωρίς βαθμίδα πίεσης αλλά με την κίνηση της επάνω πλάκας. Η ροή αυτού του τύπου χαρακτηρίζεται ως ροή Couette (Γάλλος Φυσικός, 1858-1943).



Εικόνα 3.

Στις περιπτώσεις αυτές οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν τα φυσικά αυτά προβλήματα είναι οι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

$$\rho \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} ,$$

$$\rho \left\{ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} ,$$

$$\rho c_p \left\{ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right\} = k \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right\} + \mu \Phi ,$$

$$y = \pm h : \quad u = 0 \quad T = T_w = \text{σταθερό}$$

$$y = 0 : \quad \frac{du}{dy} = 0$$

Για την ροή Poiseuille, και



$$0 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$y = 0: \begin{cases} u = 0 \\ T = T_a \end{cases}, \quad y = h: \begin{cases} u = u_0 \\ T = T_k \end{cases}$$

Για την ροή Couette.

Τα παραδείγματα αυτά, αν και πολύ απλοποιημένα, έχουν ιστορική σημασία και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην μελέτη πολλών και σημαντικών φυσικών και τεχνολογικών προβλημάτων της Μηχανικής των Ρευστών.

## 2.2 ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

Η θεωρία του οριακού στρώματος αποτελεί τα τελευταία εκατό χρόνια ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα της Δυναμικής των Ρευστών, η οποία παραμένει ένα ζωντανό και διαρκώς εξελισσόμενο κομμάτι της επιστήμης αυτής. Η σημαντικότητά της έγκειται στο γεγονός ότι παρέχει απαντήσεις σε ερωτήματα που αφορούν ροές ρευστών μικρού ιξώδους όπως είναι ο αέρας και το νερό, τα δύο σημαντικότερα ρευστά, σε συνθήκες που παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον από την άποψη των πρακτικών εφαρμογών. Συνδυάζοντας με αυτόν τον τρόπο την πρακτική χρησιμότητα και τη μαθηματική ακρίβεια, η θεωρία του οριακού στρώματος κατάφερε να γεφυρώσει ένα πολυετές χάσμα μεταξύ της Υδραυλικής και της Θεωρητικής Υδροδυναμικής.

Στα τέλη του δεκάτου ενάτου αιώνα ο κλάδος της Δυναμικής των Ρευστών παρουσιαζόταν διαιρεμένος. Οι θεωρητικοί του κλάδου, βασιζόμενοι στις εξισώσεις κίνησης του Euler ανέπτυξαν την επιστήμη της Θεωρητικής Υδροδυναμικής. Η επιστήμη αυτή, από θεωρητικής απόψεως, ήταν πλήρης και αυστηρά θεμελιωμένη. Όσον αφορά όμως τις πρακτικές εφαρμογές, η θεώρηση των ρευστών ως ιδανικά οδηγούσε σε αποτελέσματα που έρχονταν σε αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα και καθιστούσαν τη Θεωρητική Υδροδυναμική επιστήμη πολύ μικρής πρακτικής χρησιμότητας. Στον αντίποδα της Θεωρητικής Υδροδυναμικής δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε η επιστήμη της Υδραυλικής,

μια καθαρά εμπειρική επιστήμη που αντιμετώπιζε τα προβλήματα που δημιουργούσε η ανεπάρκεια της θεωρίας, βασιζόμενη σε ένα μεγάλο αριθμό πειραματικών δεδομένων.

Η διαμάχη μεταξύ Θεωρητικής Υδροδυναμικής και Υδραυλικής έλαβε τέλος οριστικά στις αρχές του εικοστού αιώνα. Το 1904, στο Τρίτο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο στη Χαϊδελβέργη, ο L. Prandtl, παρουσιάζοντας την ξακουστή εργασία του “Fluid Motion with Very Small Friction” [L. Prandtl, 1904], κατάφερε να ενοποιήσει τους δύο αντιμαχόμενους κλάδους της Ρευστοδυναμικής, δημιουργώντας ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο η θεωρία συμβάδιζε σε σημαντικά μεγάλο βαθμό με τα πειραματικά δεδομένα.

Οι εξισώσεις Navier – Stokes για πραγματικά ρευστά ήταν γνωστές ήδη από τις αρχές του δεκάτου ενάτου αιώνα αλλά η δυσκολία επίλυσής τους, στη συντριπτική πλειοψηφία των πρακτικών προβλημάτων, καταδίκαιζε κάθε προσπάθεια αντιμετώπισης των ιξωδικών ροών με τη βοήθεια των εξισώσεων αυτών. Επιπροσθέτως, το ιξώδες του νερού καθώς και αυτό του αέρα, που αποτελούν τα συχνότερα απαντώμενα ρευστά στη φύση και τις εφαρμογές, είναι πολύ μικρό, με αποτέλεσμα η παράλειψη των δυνάμεων τριβής, ως αμελητέων σε σχέση με τις υπόλοιπες δυνάμεις, να φαίνεται λογική και “ανώδυνη”.

Ο Prandtl, με τη βοήθεια θεωρητικών υποθέσεων και απλών πειραμάτων, τα οποία εκτέλεσε με τη βοήθεια πειραματικών διατάξεων που ο ίδιος είχε κατασκευάσει, έδειξε ότι είναι δυνατόν να αναλυθούν επακριβώς ιξωδικές ροές σε περιπτώσεις με μεγάλη πρακτική σημασία. Απέδειξε, λοιπόν, ότι η ροή γύρω από ένα στερεό σώμα μπορεί να αναλυθεί σε δύο περιοχές. Ένα πολύ λεπτό στρώμα στην άμεση περιοχή του στερεού ορίου, που καλείται οριακό στρώμα (boundary layer) και που μέσα σε αυτό οι δυνάμεις τριβής παίζουν σημαντικό ρόλο και στην υπόλοιπη περιοχή, έξω από αυτό το στρώμα, όπου οι δυνάμεις τριβής μπορούν να αγνοηθούν και η ροή να θεωρηθεί ιδανική (potential flow). Με τον τρόπο αυτό ο Prandtl κατάφερε να ερμηνεύσει θεωρητικά τα αποτελέσματα των πειραματικών δεδομένων, πετυχαίνοντας ταυτόχρονα τη μέγιστη δυνατή απλοποίηση των μαθηματικών δυσκολιών.

Οι εφαρμογές της Θεωρίας του Οριακού Στρώματος είναι πολλές και σημαντικές. Ενδεικτικά, η Θεωρία του Οριακού Στρώματος βρίσκει εφαρμογή στον υπολογισμό της αντίστασης της επιδερμικής τριβής που αναπτύσσεται πάνω σε ένα σώμα που κινείται μέσα σε ένα ρευστό, αντίσταση που παρατηρείται όταν για παράδειγμα ένα πλοίο κινείται μέσα στη θάλασσα. Η αντίσταση σχήματος που δημιουργείται κατά τη ροή ενός ρευστού γύρω από ένα στερεό σώμα υπολογίζεται και αυτή με τη βοήθεια της Θεωρίας του Οριακού Στρώματος. Σημαντικές απαντήσεις δίνει η θεωρία και σε προβλήματα που σχετίζονται με την επίτευξη μέγιστης άντωσης της πτέρυγας ενός αεροσκάφους ή με το πρόβλημα της απώλειας στήριξης. Τέλος, η Θεωρία του Οριακού Στρώματος βοηθάει στην ανάπτυξη μεθόδων καθυστέρησης ή και αποφυγής ενός εξαιρετικά ανεπιθύμητου φαινομένου στην εξέλιξη της ροής ενός ρευστού γύρω από ένα στερεό σώμα, που είναι γνωστό ως αποκόλληση του οριακού στρώματος (boundary layer separation).

Αρχικά, η Θεωρία του Οριακού Στρώματος αναπτύχθηκε κατά κύριο λόγο για στρωτές ροές. Σήμερα το πρόβλημα της στρωτής ροής έχει αναπτυχθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να θεωρείται πλήρως λυμένο. Όταν επιδιώχθηκε η θεωρία να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει και τυρβώδεις ροές, οι οποίες κατά κανόνα επικρατούν στα διάφορα ροϊκά φαινόμενα, παρουσιάστηκαν σημαντικές δυσκολίες. Πολλές από αυτές ξεπεράστηκαν χάρη στην εισαγωγή της “Mixing-length theory” από τον Prandtl το 1925. Παρ’ όλα αυτά όμως, το

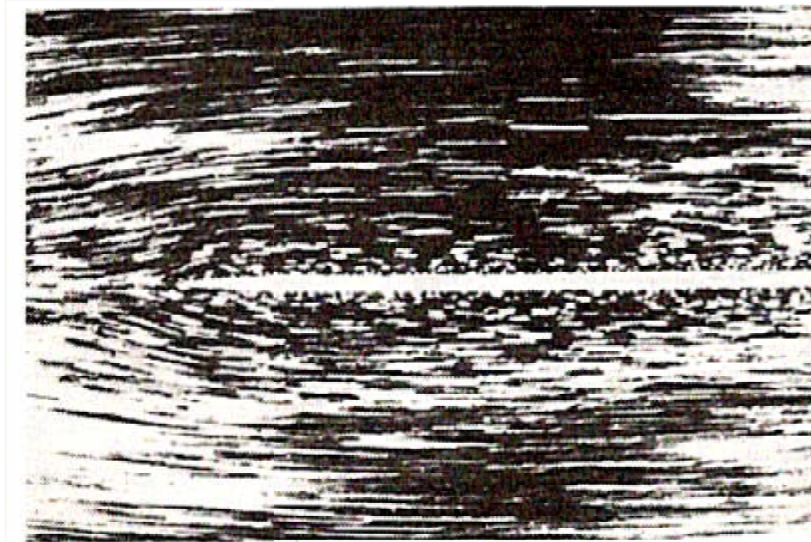
πρόβλημα της τυρβώδους ροής απέχει πολύ από το να θεωρηθεί λυμένο και οι πιθανότητες ανάπτυξης μιας γενικής θεωρίας στην κατεύθυνση αυτή είναι εξαιρετικά περιορισμένες.

Η Θεωρία του Οριακού Στρώματος, από τη γέννησή της και για περίπου είκοσι χρόνια, αναπτύχθηκε σχεδόν αποκλειστικά στο Ινστιτούτο του Prandtl στο Goettingen. Το γεγονός αυτό οφείλεται εν μέρει και στη δυσκολία κατανόησης της Θεωρίας του Οριακού Στρώματος, όπως αυτή πρωτοπαρουσιάστηκε το 1904. Η περίοδος αυτή έληξε με μια διάλεξη που έδωσε ο Prandtl το 1927, σε μια συνάντηση της “Royal Aeronautical Society” στο Λονδίνο. Στα αμέσως επόμενα χρόνια, ερευνητές κυρίως από τη Μεγάλη Βρετανία και τις Ηνωμένες Πολιτείες, έπαιξαν αποφασιστικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας. Σήμερα, η μελέτη της Θεωρίας του Οριακού Στρώματος έχει επεκταθεί σε όλο τον κόσμο και ο ρυθμός ανάπτυξης της θεωρίας και των εφαρμογών της είναι τόσο μεγάλος που είναι δύσκολο ακόμα και για τους ειδικούς να παρακολουθήσουν την εξέλιξη αυτή.

### **Χαρακτηριστικά μεγέθη οριακού στρώματος**

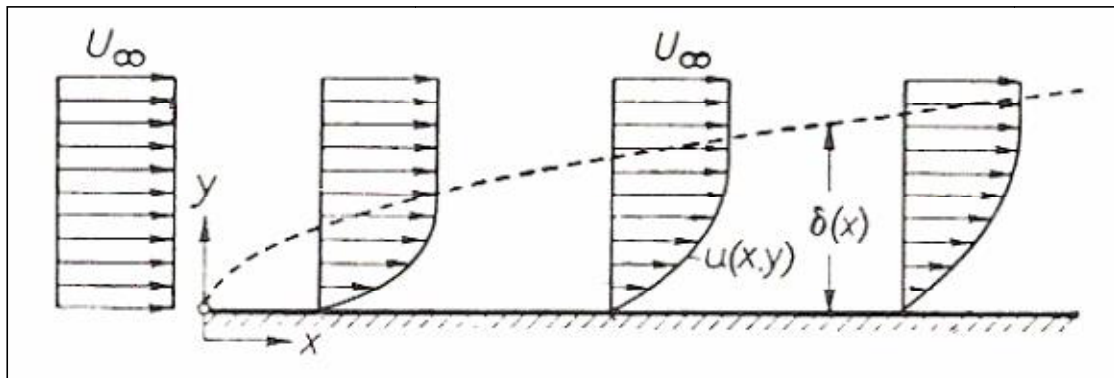
Κατά τη μελέτη της ροής πραγματικών ρευστών, συναντάμε περιπτώσεις στις οποίες η κατανομή της πίεσης, όπως αυτή προκύπτει από τις μετρήσεις, προσεγγίζει την κατανομή που προβλέπει η θεωρία των ιδανικών ρευστών. Παραδείγματα τέτοιων ροών είναι η ροή ρευστού γύρω από επίπεδη πλάκα τοποθετημένη παράλληλα στο ελεύθερο ρεύμα και η ροή αέρα γύρω από αεροτομή. Στις περιπτώσεις αυτές η επίδραση του ιξώδους περιορίζεται σε μια μικρή περιοχή του στερεού ορίου. Η συνθήκη μη ολίσθησης στα τοιχώματα του στερεού ορίου επιβάλλει μηδενική ταχύτητα κατά μήκος τους (τα ρευστά σωματίδια που έρχονται σε επαφή με το στερεό όριο προσκολλώνται σε αυτό) και είναι υπεύθυνη για τη δημιουργία βαθμίδας ταχύτητας κατά διεύθυνση κάθετη προς την επιφάνεια του στερεού ορίου. Η λεπτή αυτή περιοχή γύρω από το στερεό όριο, μέσα στην οποία η ταχύτητα του ρευστού αυξάνει από την τιμή μηδέν έως την τιμή  $U_\infty$ , που είναι η ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος, ονομάζεται οριακό στρώμα (boundary layer).

Στη παρακάτω εικόνα φαίνεται το οριακό στρώμα που δημιουργείται κατά την κίνηση νερού γύρω από μια λεπτή, επίπεδη πλάκα. Οι ρευματικές γραμμές γίνονται ορατές με τη βοήθεια σωματιδίων (συνήθως ρινίσματα αλουμινίου) τα οποία φωτίζονται κατάλληλα κατά τη διάρκεια της φωτογράφισης.



Εικόνα 4. Δημιουργία οριακού στρώματος σε επίπεδη πλάκα

Το προφίλ της ταχύτητας καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αυξάνεται το πάχος του οριακού στρώματος κατά τη διεύθυνση της ροής από την επιβράδυνση όλο και μεγαλύτερης ποσότητας ρευστού, φαίνονται στην παρακάτω εικόνα :



Εικόνα 5. Κατανομή προφίλ ταχυτήτων

Η διατμητική τάση δίνεται από τον πειραματικό νόμο της τριβής του Νεύτωνα και ορίζεται ως :

$$t = m \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Εξίσωση 26

Προκύπτει ότι ακόμα και αν το ιξώδες του ρευστού είναι μικρό, η διατμητική τάση παίρνει μεγάλες τιμές εντός του οριακού στρώματος, εξαιτίας της μεγάλης βαθμίδας ταχύτητας μέσα σε αυτό. Το γεγονός αυτό υπαγορεύει ότι και για το σκοπό της μαθηματικής αντιμετώπισης του προβλήματος, η ροή γύρω από το στερεό σώμα πρέπει να χωριστεί σε δύο περιοχές. Το οριακό στρώμα, μέσα στο οποίο η τριβή παίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της ροής (shear flow) και στην υπόλοιπη περιοχή, έξω από το οριακό στρώμα, στην οποία η τριβή παίρνει τόσο μικρές τιμές ώστε να μπορεί να αγνοηθεί και η ροή στην περιοχή αυτή να προσεγγιστεί με τη βοήθεια της θεωρίας των ιδανικών ρευστών (potential flow).

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη ροών γύρω από στερεά σώματα παίζουν και τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος. Αυτά είναι το πάχος του οριακού στρώματος (boundary layer thickness), που συνήθως συμβολίζεται με  $\delta$ , το πάχος μετατόπισης (displacement thickness), που συμβολίζεται με  $\delta_1$  και το πάχος ορμής (momentum thickness) που συμβολίζεται με  $\delta_2$ .

Για την καλύτερη κατανόηση των μεγεθών αυτών θεωρούμε το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται γύρω από μια ακίνητη, επίπεδη, λεπτή πλάκα που είναι τοποθετημένη παράλληλα σε ένα ομοιόμορφο ρεύμα ρευστού ταχύτητας  $u_\infty$ .

Ως πάχος  $\delta$  του οριακού στρώματος ορίζεται η απόσταση εκείνη, κάθετη προς την επιφάνεια της πλάκας, για την οποία η ταχύτητα  $u$  του ρευστού γίνεται ίση με το 99% της ελεύθερης ρευματικής ταχύτητας  $u_\infty$ . Το πάχος  $\delta$  θα αυξάνει με την απόσταση από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, εφ' όσον κατά μήκος αυτής όλο και περισσότερο ρευστό θα επιβραδύνεται. Το πάχος  $\delta$  του οριακού στρώματος, για την τυχούσα απόσταση  $x$  από την ακμή της πλάκας, μπορεί να εκτιμηθεί με τη βοήθεια του τύπου :

$$d \approx \sqrt{\frac{n \cdot c}{u_\infty}}$$

**Εξίσωση 27**

όπου :  $n = \frac{m}{r}$  κινηματικό ιξώδες

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω τύπο, το πάχος του οριακού στρώματος γύρω από μια επίπεδη πλάκα εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του ρευστού (ιξώδες, πυκνότητα), από την κινηματική κατάσταση του ελευθέρου ρεύματος (ελεύθερη ρευματική ταχύτητα  $u_\infty$ ) αλλά και από την απόσταση από την οδηγούσα ακμή της πλάκας κατά τη διεύθυνση της ροής.

Έχει αποδειχθεί, από τον H. Blasius, ότι για την περίπτωση στρωτής ροής, ομογενούς και ασυμπέστου ρευστού, γύρω από λεπτή, επίπεδη πλάκα μήκους  $l$  (πρόβλημα του Blasius), ο συντελεστής αναλογίας για τη εξίσωση 27 είναι 5. Δηλαδή το (μέγιστο) πάχος  $\delta$ , του οριακού στρώματος που δημιουργείται, δίνεται από την έκφραση :

$$d = 5 \cdot \sqrt{\frac{n \cdot l}{u_\infty}} \quad \text{Εξίσωση 28} \quad (2.3)$$

Αντίστοιχα το αδιάστατο πάχος  $\frac{d}{l}$  του οριακού στρώματος, θα δίνεται από τον τύπο :

$$\frac{d}{l} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_l}} \quad \text{Εξίσωση 29 (2.4)}$$

όπου  $\text{Re}$  είναι ο αριθμός Reynolds της ροής που, ως γνωστόν, για ρευστό ιξώδους  $\mu$ , πυκνότητας  $\rho$  και ελεύθερης ρευματικής ταχύτητας  $u_\infty$  και για πλάκα μήκος  $l$ , δίνεται από τον τύπο :

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u_\infty \cdot l}{\mu} = \frac{u_\infty l}{\nu} \quad \text{Εξίσωση 30(2.5)}$$

Έχοντας εκτιμήσει το πάχος  $\delta$  του οριακού στρώματος, είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε και τη διατμητική τάση  $t_0$  στην επιφάνεια της πλάκας και κατ' επέκταση και τη συνολική αντίσταση που δέχεται η πλάκα. Με βάση τον πειραματικό νόμο της τριβής του Νεύτωνα (Εξίσωση 26) η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας θα δίνεται από τον τύπο :

$$t_0 = \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{Εξίσωση 31 (2.6)}$$

Ωστόσο η εκτίμηση

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \sim \frac{u_\infty}{d} \quad \text{Εξίσωση 32 (2.7)}$$

δίνει

$$t_0 \sim \frac{\mu \cdot u_\infty}{d} \quad \text{Εξίσωση 33(2.8)}$$

Οπότε αντικαθιστώντας το  $\delta$  με την εκτίμησή του από τη εξίσωση 27 παίρνουμε :

$$t_0 \sim m \cdot u_\infty \sqrt{\frac{r \cdot u_\infty}{m \cdot l}} \text{ Εξίσωση 34 (2.9)}$$

δηλαδή

$$t_0 \sim \sqrt{\frac{m \cdot r \cdot u_\infty^3}{l}} \text{ Εξίσωση 35 (2.10)}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας είναι η ανάλογη του  $u_\infty^{3/2}$ . Δημιουργώντας τώρα το πηλίκο  $\frac{t_0}{r \cdot u_\infty^2}$  προκύπτει η αναλογία :

$$\frac{t_0}{r \cdot u_\infty^2} \sim \sqrt{\frac{m}{r \cdot u_\infty \cdot l}} \text{ Εξίσωση 36 (2.11)}$$

δηλαδή

$$\frac{t_0}{r \cdot u_\infty^2} \sim \sqrt{\frac{l}{\text{Re}_l}} \text{ Εξίσωση 37 (2.12)}$$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι η αδιάστατη διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds της ροής και μόνο.

Η συνολική αντίσταση  $D$ , για την κάθε πλευρά της πλάκας, ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της πλάκας επί τη διατμητική τάση στην επιφάνεια αυτής. Εάν δηλαδή η πλάκα έχει μήκος  $l$  και πλάτος  $b$ , ισχύει :

$$D \sim b \cdot l \cdot t_0 \text{ Εξίσωση 38 (2.13)}$$

οπότε, αντικαθιστώντας το  $t_0$  με την εκτίμησή του από την Εξίσωση (36), παίρνουμε:

$$D \sim b \cdot l \sqrt{\frac{m \cdot r \cdot u_\infty^3}{l}} \text{ Εξίσωση 39(2.14)}$$

δηλαδή ,

$$D \sim b \sqrt{m \cdot r \cdot l \cdot u_\infty^3} \text{ Εξίσωση 40(2.15)}$$

Η συνολική, δηλαδή, αντίσταση για την πλάκα είναι ανάλογη του  $u_\infty^3$  και του  $l^{1/2}$ .

Με βάση όλα τα παραπάνω, μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε και τον αδιάστατο συντελεστή αντίστασης  $C_D$ . Ο τύπος που δίνει το  $C_D$  στη γενική περίπτωση είναι :

$$C_D = \frac{D}{r \cdot u_\infty^2 \cdot A} \text{ Εξίσωση 41 (2.16)}$$

όπου A το εμβαδόν του στερεού ορίου. Στην υπό μελέτη περίπτωση είναι  $A = b \cdot l$ , οπότε η εξίσωση (41) δίνει :

$$C_D = \frac{D}{r \cdot u_\infty^2 \cdot b \cdot l} \text{ Εξίσωση 42 (2.17)}$$

και αντικαθιστώντας την συνολική αντίσταση D από την εκτίμησή της εξίσωσης (40) παίρνουμε :

$$C_D \sim \frac{b \sqrt{m \cdot r \cdot u_\infty^3 \cdot l}}{r \cdot u_\infty^2 \cdot b \cdot l} \text{ Εξίσωση 43 (2.18)}$$

δηλαδή ,



$$C_D \sim \sqrt{\frac{m}{r \cdot u_\infty \cdot l}} \text{ Εξίσωση 44 (2.19)}$$

ή τελικά ,

$$C_D \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_l}} \text{ Εξίσωση 45 (2.20)}$$

Ο συντελεστής αναλογίας για την εξίσωση (45) έχει υπολογιστεί από τον Blasius και είναι 1.328. Για το πρόβλημα του Blasius δηλαδή ισχύει :

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_l}} \text{ Εξίσωση 46 (2.21)}$$

Ενδεικτικά, το πάχος του οριακού στρώματος, που δημιουργείται κατά τη ροή αέρα ( $n = 0,144 \cdot 10^{-3} \text{ ft}^2/\text{sec}$  ή  $0,0000134 \text{ m}^2/\text{sec}$ ), ελεύθερης ρευματικής ταχύτητας  $u_\infty = 48 \text{ ft}/\text{sec}$  ή ( $52,67 \text{ km}/\text{h}$ ), γύρω από λεπτή, επίπεδη πλάκα μήκους  $l = 3 \text{ ft}$  ή  $0,914 \text{ m}$ , στο τέλος αυτής, είναι  $d = 0,18 \text{ in}$ , ή περίπου  $5 \text{ mm}$ . Ο συντελεστής αντίστασης που προκύπτει είναι  $C_D = 0,0013$ .

Ως πάχος μετατόπισης ή πάχος μετάθεσης  $d_1$  ορίζεται το πάχος ενός ιδεατού στρώματος ρευστού, ταχύτητας ίσης με την ελεύθερη ρευματική, μέσα στο οποίο η παροχή του ρευστού είναι ίση με τη μείωση της παροχής μέσα στο οριακό στρώμα, λόγω επιβράδυνσης της ροής. Ο ορισμός του πάχους μετατόπισης προκύπτει από την ανάγκη ικανοποίησης της αρχής διατήρησης της μάζας. Η επιβράδυνση του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα έχει σαν συνέπεια τη μείωση της παροχής σε σχέση με την παροχή που θα υπήρχε εάν η πλάκα δεν βρισκόταν στην πορεία του ελεύθερου ρεύματος. Η αρχή διατήρησης της μάζας επιβάλλει μία προς τα άνω μετατόπιση των ρευματικών γραμμών, ώστε να αυξάνονται οι διατομές και να διατηρείται σταθερή η παροχή. Το πάχος μετατόπισης  $d_1$  δίνεται, ως συνάρτηση της απόστασης  $x$  από την οδηγούσα ακμή, από τον τύπο :

$$d_1 = d_1(x) = \int_0^d \left( 1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy \text{ Εξίσωση 47 (2.22)}$$

Τέλος, η ανάγκη ικανοποίησης της αρχής διατήρησης της ορμής οδηγεί στον ορισμό του πάχους ορμής κατ' αναλογία με τον ορισμό του πάχους μετατόπισης. Ως πάχος ορμής, λοιπόν, ορίζεται το πάχος  $d_2$  ενός ιδεατού στρώματος ρευστού, ταχύτητας ίσης με την ελεύθερη ρευματική, για το οποίο η εισροή ορμής είναι ίση με την αντίστοιχη μείωση αυτής δια μέσου του οριακού στρώματος, λόγω επιβράδυνσης της ροής. Το πάχος ορμής  $d_2$  δίνεται, πάλι ως συνάρτηση της απόστασης  $x$  από την οδηγούσα ακμή, από τον τύπο :

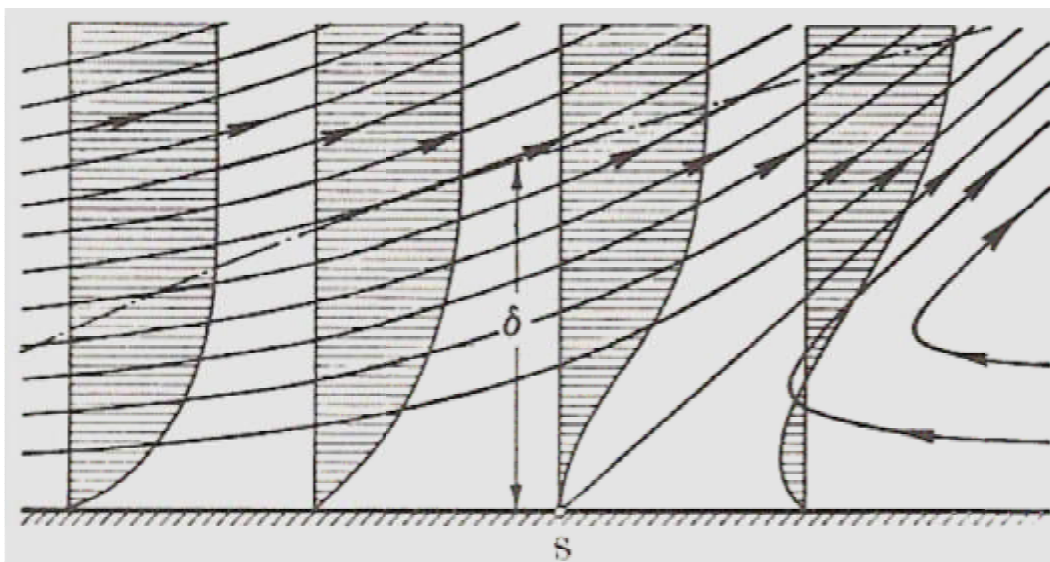
$$d_2 = d_2(x) = \int_0^d \frac{u}{u_\infty} \left( 1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy \quad \text{Εξίσωση 48} \quad (2.23)$$

### Αποκόλληση οριακού στρώματος

Πολλές φορές και κατά κύριο λόγο σε περιπτώσεις ροής γύρω από σώματα που δεν έχουν αεροδυναμικό σχήμα, όπως για παράδειγμα η σφαίρα και ο κύλινδρος, είναι δυνατόν τα επιβραδυνθέντα ρευστά σωματίδια να μην παραμένουν εντός του οριακού στρώματος καθ' όλο το μήκος του στερεού ορίου. Είναι δηλαδή πιθανό να παρουσιαστεί μεγάλη αύξηση του πάχους του οριακού στρώματος κατά την κατεύθυνση της ροής και να παρατηρηθεί εντός αυτού αναστροφή της ταχύτητας. Κάτω από αυτές τις συνθήκες είναι δυνατό ρευστά σωματίδια στην άμεση περιοχή του στερεού ορίου να κινηθούν έξω από το οριακό στρώμα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διαχωρισμός ή αποκόλληση του οριακού στρώματος (boundary layer separation).

Η κύρια αιτία που οδηγεί στο ανεπιθύμητο αυτό φαινόμενο είναι η εμφάνιση αντίξοσης βαθμίδας πίεσης (adverse pressure gradient,  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ). Κατά τη διεύθυνση της ροής δηλαδή, αντί η πίεση να ελαττώνεται, υποβοηθώντας τη ροή, αυξάνεται, επιβραδύνοντάς την αρχικά και αντιστρέφοντάς την στη συνέχεια. Τότε τα ρευστά σωματίδια που βρίσκονται μέσα στο οριακό στρώμα, λόγω της επιβράδυνσης και της μικρής τιμής της κινητικής τους ενέργειας, δεν μπορούν να προχωρήσουν πολύ μέσα στην περιοχή υψηλής πίεσης του οριακού στρώματος. Έτσι, το οριακό στρώμα αποκλίνει πλαγίως από το στερεό όριο, αποκολλούμενο από αυτό, ενώ τα ρευστά σωματίδια που βρίσκονταν εντός του ακολουθούν κατά κανόνα τη φορά της βαθμίδας πίεσης, κινούμενα κατά φορά αντίθετη αυτής του κυρίου ρεύματος.

Μια σχηματική αναπαράσταση των ρευματικών γραμμών σε περιπτώσεις αποκόλλησης καθώς και η εξέλιξη του προφίλ της ταχύτητας που συνδέεται με το φαινόμενο αυτό, φαίνονται στη παρακάτω εικόνα.



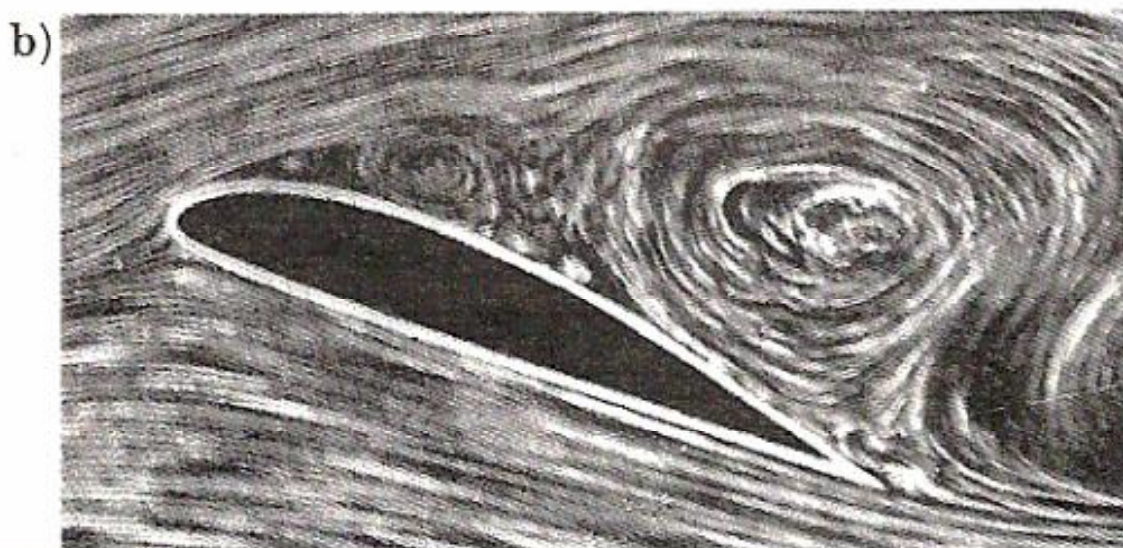
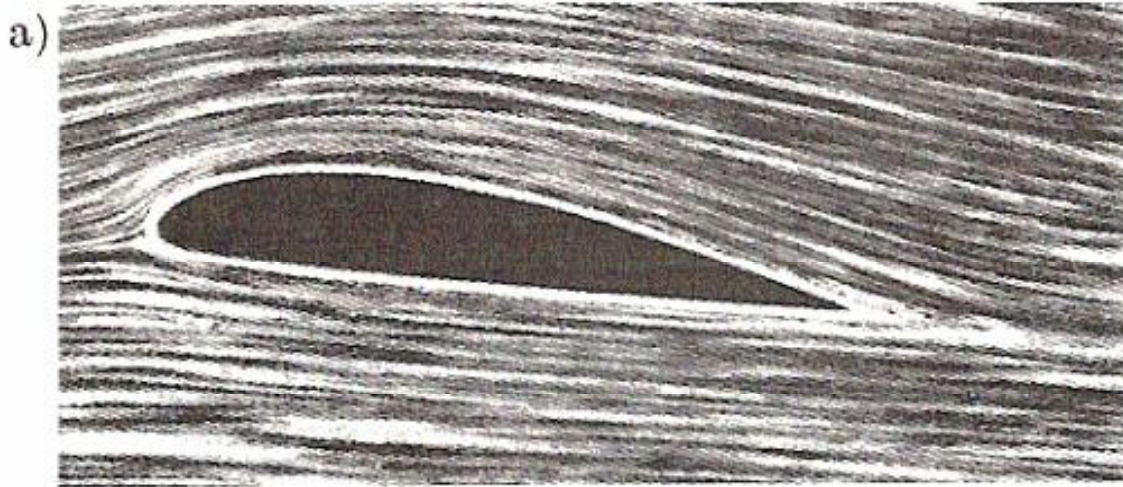
Εικόνα 6. Σχηματική παράσταση δημιουργίας αποκόλλησης ροής

Με βάση όλα τα παραπάνω, ως σημείο διαχωρισμού ορίζεται το σημείο εκείνο που αποτελεί το όριο αλλαγής διεύθυνσης της ροής μέσα στο οριακό στρώμα (σημείο S στο σχήμα). Το σημείο εκείνο, δηλαδή, στο οποίο η ταχύτητα του ρευστού αντιστρέφεται και αποκτά φορά αντίθετη αυτής του κυρίου ρεύματος. Όπως φαίνεται λοιπόν και από την εικόνα της εξέλιξης του προφίλ της ταχύτητας κατά μήκος του στερεού ορίου, για την περίπτωση αποκόλλησης, το σημείο διαχωρισμού S μπορεί να προσδιοριστεί από τον τύπο :

$$S: \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{Εξίσωση 49} \quad (2.24)$$

Το φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος χαρακτηρίζεται ως ανεπιθύμητο εξαιτίας των συνεπειών που η αποκόλληση αυτή επιφέρει στη ροή. Μερικές από τις σπουδαιότερες είναι η διαταραχή της ροής, η δημιουργία δινών, η μεγάλη απώλεια κινητικής ενέργειας και η αύξηση της αντίστασης σχήματος (form drag) εξαιτίας της διαφοροποίησης της κατανομής της πίεσης, η οποία μετά την αποκόλληση παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση από την κατανομή πίεσης που προβλέπει η θεωρία των ιδανικών ρευστών. Για τους λόγους αυτούς είναι πολύ σημαντικό να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες παρατηρείται το φαινόμενο της αποκόλλησης. Η γνώση των συνθηκών αυτών μπορεί να μας βοηθήσει να αναπτύξουμε μεθόδους ώστε να καθυστερήσουμε ή και να αποφύγουμε πλήρως το φαινόμενο αυτό, διατηρώντας έτσι όλα τα πλεονεκτήματα μιας στρωτής ροής (χαμηλές τιμές αντίστασης – υψηλές τιμές κινητικής ενέργειας), κάτι που είναι πολύ σημαντικό από την άποψη των πρακτικών εφαρμογών.

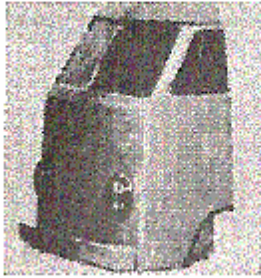
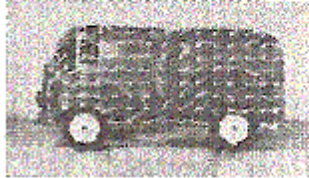




Η σπουδαιότητα του φαινομένου της αποκόλλησης του οριακού στρώματος στο σχεδιασμό αεροτομών των πτερυγίων των αεροπλάνων φαίνεται στις παρακάτω εικόνες, όπου παρίσταται το πεδίο ροής ρευστού γύρω από μία αεροτομή, υπό διαφορετικές γωνίες προσβολής. Στην περίπτωση που η γωνία προσβολής είναι μικρή, μέχρι  $10^\circ$ , το πεδίο ροής γύρω από την αεροτομή έχει την εικόνα ροής ιδανικού ρευστού. Όταν η γωνία προσβολής αυξάνει, η ροή μέσα στο οριακό στρώμα μεταπίπτει σε τυρβώδη με έντονα σημάδια έναρξης αποκόλλησης. Η αποκόλληση τελικά πραγματοποιείται όταν η γωνία προσβολής γίνει  $15^\circ$ , οπότε και η πτέρυγα χάνει την αντωτική της ικανότητα και λέμε ότι το αεροσκάφος υπέστη απώλεια στήριξης (stall).



Εικόνα 7. Δημιουργία φαινομένου αποκόλλησης σε αεροτομή



Ένα άλλο παράδειγμα, στο οποίο το φαινόμενο της αποκόλλησης παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, λόγω των συνεπειών που επιφέρει στη ροή, φαίνεται στη παρακάτω εικόνα. Εδώ, το πεδίο ροής του αέρα γύρω από ένα φορτηγό διανομής, έχει οπτικοποιηθεί με τη βοήθεια λεπτών κλωστών, κατάλληλα τοποθετημένων στις πλαϊνές όψεις του. Στην πρώτη περίπτωση, που η πρόσοψη του φορτηγού στερείται αεροδυναμικού σχεδιασμού, παρουσιάζοντας πολλές γωνίες και εξογκώματα, το φαινόμενο της αποκόλλησης παρατηρείται σε όλο το μήκος της πλαϊνής όψης του φορτηγού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μεγάλου συντελεστή αντίστασης, που έχει ως συνέπεια την υψηλή κατανάλωση καυσίμου. Στη δεύτερη περίπτωση, που η πρόσοψη του φορτηγού είναι στρογγυλεμένη, το οριακό στρώμα παραμένει προσκολλημένο στην πλαϊνή όψη του φορτηγού, καθ' όλο το μήκος αυτής. Ως συνέπεια αυτού, ο συντελεστής αντίστασης παραμένει μικρός και η κατανάλωση καυσίμου χαμηλή.

	<p>(a) <i>Angular nose</i></p>   <p><i>separation</i></p>	<p><math>C_D =</math> <math>0,75</math></p>
	<p>(b) <i>Round nose</i></p>   <p><i>no separation</i></p>	<p><math>0,42</math></p>

Εικόνα 8. Κατανομή ροϊκού πεδίου σε φορτηγάκι και δημιουργία αποκόλλησης ροής

Το γεγονός ότι, όπως αναφέρθηκε, το φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος είναι ανεπιθύμητο, καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη μεθόδων πρόληψης ή και αποφυγής του. Στο επόμενο κεφάλαιο, περιγράφονται περιληπτικά διάφορες τεχνικές ελέγχου του οριακού στρώματος που έχουν αναπτυχθεί κατά το παρελθόν και που σε πολλές περιπτώσεις εφαρμόζονται μέχρι και σήμερα.

Η σημαντικότερη όμως μέθοδος ελέγχου του οριακού στρώματος, τόσο από άποψη αποτελεσματικότητας όσο και από άποψη πρακτικής χρησιμότητας, είναι η μέθοδος της απορρόφησης (boundary layer suction). Η μέθοδος αυτή συνίσταται στην απομάκρυνση των επιβραδυνομένων ρευστών σωματιδίων από το οριακό στρώμα με τη βοήθεια σχισμών ή οπών στην επιφάνεια του στερεού που απορροφούν τα σωματίδια αυτά στο εσωτερικό του.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΤΕΧΝΙΚΗ

### 3.1 ANEMOMETRIA ΘΕΡΜΟΥ ΣΥΡΜΑΤΟΣ

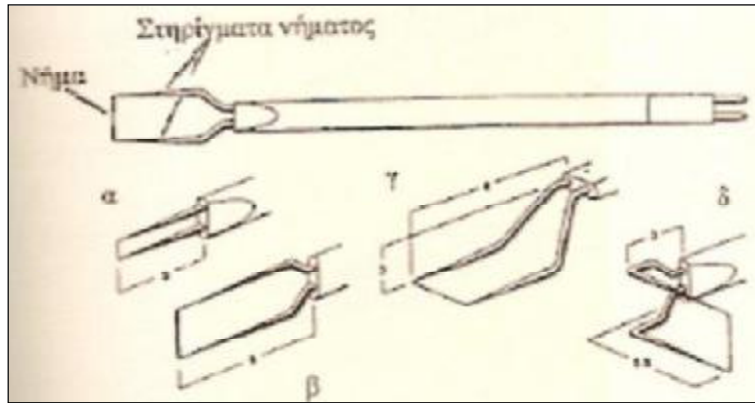
Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για τη μέτρηση ταχυτήτων ρευστού και βασίζεται στην σχέση που συνδέει την απαγόμενη θερμότητα ενός θερμαινόμενου σώματος εκτιθεμένου σε ρεύμα ρευστού, με τη ταχύτητα του ρευστού.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι θερμού νήματος, όπως φαίνεται και στη εικόνα 9. Ο τύπος που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από την εφαρμογή. Επί παραδείγματι υπάρχουν νήματα με κατάλληλα στηρίγματα τα οποία μπορούν να προσεγγίσουν δύσκολα σημεία και δεν επηρεάζουν τη μέτρηση. Τέτοια χρησιμοποιούνται για μετρήσεις κοντά σε στερεά όρια, δηλαδή μέσα σε οριακά στρώματα (τα νήματα γ,δ της εικόνας 10).

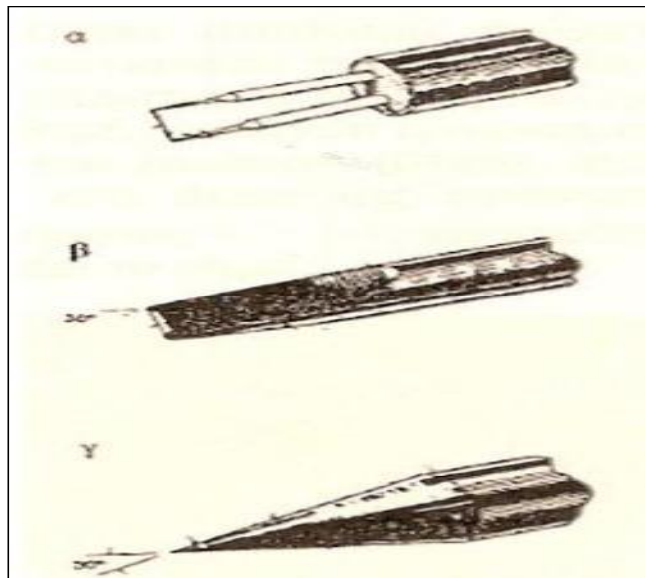
Τα υλικά κατασκευής των νημάτων είναι κυρίως τρία: το βολφράμιο, η πλατίνα και το κράμα πλατίνας-ιριδίου σε αναλογία 80-20 %. Από τα υλικά αυτά:

1. Το βολφράμιο έχει υψηλό θερμοκρασιακό συντελεστή ωμικής αντίστασης και υψηλή αντοχή. Παρουσιάζει όμως γρήγορη οξειδωση σε θερμοκρασίες άνω των 300 βαθμών Κελσίου. Η μικρότερη διάμετρος νήματος βολφραμίου που έχει κατασκευαστεί είναι 2,5  $\mu\text{m}$ .
2. Η πλατίνα έχει καλό θερμοκρασιακό συντελεστή ωμικής αντίστασης και δεν οξειδώνεται εύκολα. Παρουσιάζει όμως μικρή μηχανική αντοχή σε υψηλές θερμοκρασίες. Η μικρότερη διάμετρος νήματος από πλατίνα που έχει κατασκευαστεί είναι 0.5  $\mu\text{m}$ .
3. Νήματα από κράμα πλατίνας-ιριδίου αποτελούν μια μέση λύση, δεδομένου ότι δεν οξειδώνονται εύκολα και παρουσιάζουν καλή μηχανική αντοχή. Τέτοια νήματα χρησιμοποιούνται σε θερμοκρασίες απαγορευτικές για τα άλλα δύο είδη.

Κατά τη σχεδίαση ενός θερμού νήματος, η επιλογή της διαμέτρου και του μήκους του προκύπτει από την ικανοποίηση διαφόρων αντιφατικών απαιτήσεων, όπως:



Εικόνα 9. Διάφοροι τύποι θερμού νήματος



Εικόνα 10. Διάφοροι τύποι θερμού φίλμ

1. Το μήκος πρέπει να είναι μικρό για να υπάρχει καλύτερη χωρική διακριτότητα και μικρότερα αεροδυναμικά φορτία.
2. Το μήκος πρέπει να είναι μεγάλο ώστε οι θερμικές απώλειες προς τα στηρίγματα του νήματος να είναι περιορισμένες, η θερμοκρασιακή κατανομή κατά μήκος του νήματος πιο ομοιόμορφη και η επίδραση των στηριγμάτων μικρή.
3. Η διάμετρος πρέπει να είναι μικρή για να αποφευχθεί η έκλυση δινών που προκαλεί θόρυβο στις μετρήσεις, ο χρόνος απόκρισης να είναι μικρός λόγω της μικρότερης θερμικής αδράνειας και η χωρική διακριτότητα πρέπει να είναι καλή.
4. Η διάμετρος πρέπει να είναι μεγάλη για λόγους αντοχής και για την αποφυγή επικάθησης σκόνης.



Τα νήματα σήμερα κατασκευάζονται σε διαμέτρους από 2.5-5  $\mu\text{m}$  και με μήκος έως 1 mm. Ειδικότερα σε μετρήσεις σε νερό, για λόγους αντοχής, χρησιμοποιούνται διατάξεις μεγαλύτερης διαμέτρου (έως και 50  $\mu\text{m}$ ), στις οποίες όμως το ηλεκτρικά αγωγίμο υλικό αποτελεί ένα πολύ λεπτό στρώμα (hot-film) για τη μείωση της θερμικής αδράνειας. Στο σχήμα 2.2 παρουσιάζονται τρεις τύποι hot-film: κυλινδρικός, σφηνοειδής και κωνικός.

Η μέτρηση της ταχύτητας του ρευστού σε ένα συγκεκριμένο σημείο γίνεται τοποθετώντας το νήμα στο σημείο αυτό. Αν θεωρήσουμε ότι η παραγόμενη θερμότητα λόγω του φαινομένου Joule απάγεται όλη προς το ρέον ρευστό τότε θα ισχύει η σχέση:

$$R_w I^2 = \alpha d l h (T_w - T_f)$$

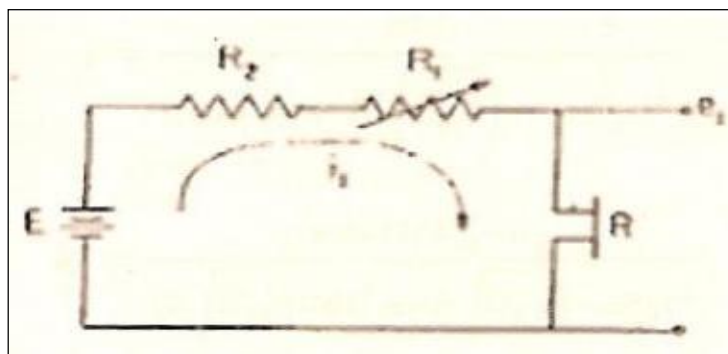
, όπου  $R_w$ ;  $I$ ;  $d$ ;  $l$ ;  $h$ ;  $T_w$ ;  $T_f$  είναι αντιστοίχως η ωμική αντίσταση του νήματος, η ένταση του ρεύματος που διέρχεται από το νήμα, η διάμετρος του νήματος, το μήκος του, ο συντελεστής συναγωγής, η θερμοκρασία του νήματος και η θερμοκρασία του ρευστού. Η ταχύτητα του ρευστού υπεισέρχεται εμμέσως στην παραπάνω εξίσωση μέσω του συντελεστή συναγωγής, με αποτέλεσμα να προκύπτει μια σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα του ρευστού και τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος στο οποίο είναι συνδεδεμένο το νήμα. Πρέπει να αναφερθεί ότι στην ψύξη του νήματος συνεισφέρουν μόνο οι κάθετες προς το νήμα συνιστώσες της ταχύτητας.

Τέλος πρέπει να αναφερθεί επίσης ότι ο προσδιορισμός του διανύσματος της ταχύτητας σε δισδιάστατο και τρισδιάστατο πεδίο ροής γίνεται με τη χρήση δύο και τριών νημάτων αντίστοιχα.

## Ηλεκτρικές διατάξεις θερμού νήματος

Οι διατάξεις που έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι σήμερα είναι κυρίως δύο:

1. Διάταξη σταθερού ρεύματος, όπου η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το νήμα είναι σταθερή.
2. Διάταξη σταθερής θερμοκρασίας, όπου η μέση θερμοκρασία του νήματος διατηρείται σταθερή.



Εικόνα 11. Διάταξη θερμού νήματος σταθερού ρεύματος

## Ανεμόμετρο σταθερού ρεύματος

Η διάταξη αυτή χρησιμοποιήθηκε πρώτη, ενώ αργότερα καθιερώθηκε η διάταξη σταθερής θερμοκρασίας, λόγω των πλεονεκτημάτων που διαθέτει έναντι της πρώτης.

Στη διάταξη του ανεμόμετρου σταθερού ρεύματος το θερμό νήμα είναι συνδεδεμένο εν σειρά με ωμική αντίσταση πολύ μεγαλύτερη από τη δική του (π.χ. 1000 φορές μεγαλύτερη), με αποτέλεσμα η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαρρέει να είναι ουσιαστικά σταθερή, μολονότι η ωμική αντίστασή του μεταβάλλεται με την ταχύτητα του ρευστού, βλ. εικόνα. Έξοδος του οργάνου είναι η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης του νήματος, ε. Η μεταβλητή αντίσταση  $R_1$  χρησιμοποιείται για τη ρύθμιση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το νήμα.

Αν η ταχύτητα του ρευστού αυξηθεί, τότε ο συντελεστής συναγωγής  $h$  θα αυξηθεί με αποτέλεσμα να απάγεται θερμότητα από το νήμα με μεγαλύτερο ρυθμό και έτσι η θερμοκρασία και η ωμική του αντίσταση του να μειωθούν. Επομένως μειώνεται και η πτώση τάσης στα άκρα του. Η ευαισθησία του οργάνου είναι λοιπόν αρνητική.

Μειούμενης της θερμοκρασίας του νήματος η θερμοκρασιακή διαφορά του από το ρευστό μειώνεται (εφόσον η θερμοκρασία του ρευστού παραμένει σταθερή) έως ότου επέλθει ισορροπία μεταξύ της παραγόμενης θερμότητας και της απαγόμενης από το ρευστό. Ένα μέρος της παραγόμενης θερμότητας από την ηλεκτρική αντίσταση του θερμού νήματος, λόγω του φαινομένου Joule, αποθηκεύεται στο νήμα και ένα άλλο απάγεται προς το ρευστό (αμελώντας μια μικρή ποσότητα θερμότητας η οποία διοχετεύεται προς τα στηρίγματα του νήματος και είναι της τάξης του 15% συνήθως).

Η βασική εξίσωση που αφορά στη λειτουργία του θερμού νήματος σταθερού ρεύματος γράφεται στη μορφή

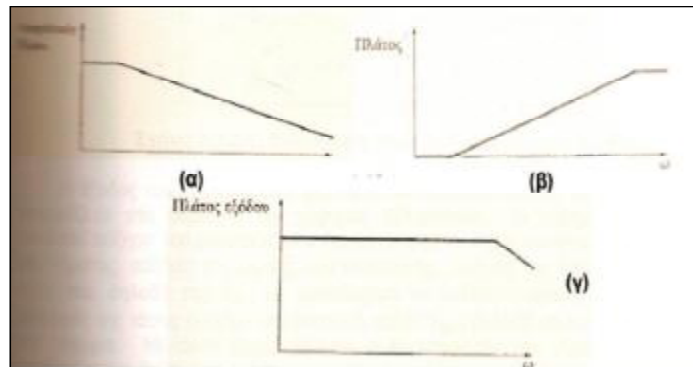
$$de dt + e = \_uef$$

,όπου  $\_:$   $\_$  οι σταθερά χρόνου (sec) και η ευαισθησία (  $V \text{ olt} * m \text{ sec}$  ) αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το θερμό νήμα σταθερού ρεύματος συμπεριφέρεται ως όργανο πρώτης τάξης. Οι σταθερές χρόνου και ευαισθησίας είναι αντιστρόφως ανάλογες του μέτρου της ταχύτητας.

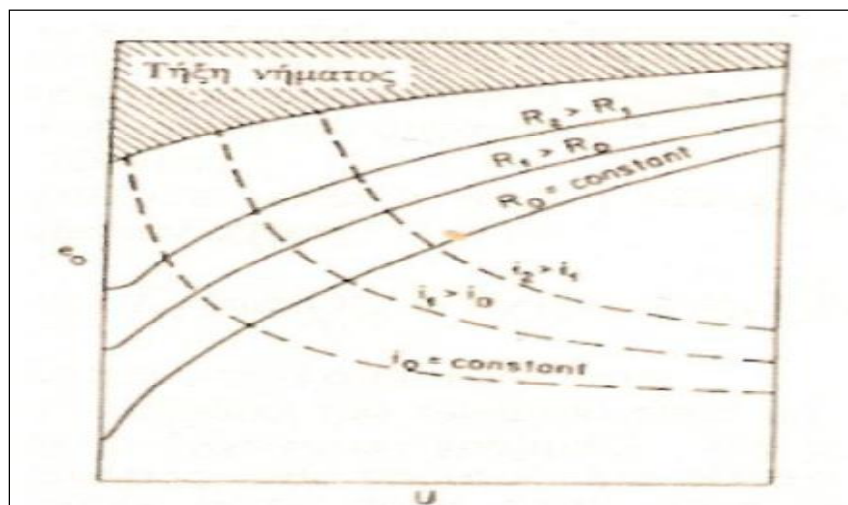
Όσο αυξάνει η συχνότητα μεταβολής της ταχύτητας του ρευστού (π.χ. όπως ένα τυρβώδες πεδίο ροής) τόσο μειώνεται το πλάτος της μετρούμενης ταχύτητας από το όργανο, ακόμα και αν το πραγματικό πλάτος παραμένει αμετάβλητο, βλ. εικ. 12 το α. Η σταθερά χρόνου αυτών των οργάνων δεν μπορεί να μειωθεί πολύ κάτω από 1 ms και επομένως η απόκρισή τους είναι καλή για συχνότητες το πολύ μέχρι 160 Hz. Επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση πεδίων ροής υψηλών συχνοτήτων. Το σφάλμα αυτό μπορεί να μετριασθεί χρησιμοποιώντας ηλεκτρονική διάταξη αντιστάθμισης, η οποία συνδεδεμένη στην έξοδο της διάταξης της εικόνας 11 προκαλεί τέτοια αύξηση του πλάτους (βλ. εικ. 12 το β), ώστε μεταβαλλόμενης της συχνότητας της ταχύτητας του ρευστού, να διατηρείται σταθερό το πλάτος της τάσης εξόδου του οργάνου (βλ. εικ. 12 το γ). Παρόλα αυτά επειδή η σταθερά χρόνου του οργάνου εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητας του ρευστού, βάσει της οποίας πρέπει να γίνει αντίστοιχα η ρύθμιση της διάταξης αντιστάθμισης, η παραπάνω λύση δεν είναι πάντα εφικτή, όταν λ.χ. το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται κατά τυχαίο τρόπο με

το χρόνο. Ένα επιπλέον μειονέκτημα που παρουσιάζει η διάταξη αυτή είναι ότι εάν η ταχύτητα του ρευστού ξαφνικά μειωθεί, τότε επειδή η ένταση του ρεύματος θα παραμείνει η ίδια, η παραγόμενη ενέργεια Joule δεν θα απορροφηθεί από το ρευστό, προκαλώντας τήξη του νήματος.

Για τους παραπάνω λόγους το θερμό νήμα σταθερού ρεύματος αντικαταστάθηκε από το θερμό νήμα σταθερής θερμοκρασίας, του οποίου η σταθερά χρόνου είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του ρευστού και πολύ μικρότερη της αντίστοιχης της διάταξης σταθερού ρεύματος. Στη εικόνα 13 παρουσιάζεται ένα τυπικό διάγραμμα τάσης εξόδου-ταχύτητας ρευστού μιας διάταξης σταθερού ρεύματος για τρεις εντάσεις ρεύματος. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή του διαγράμματος αντιστοιχεί σε καταστάσεις τήξης του νήματος, λόγω υψηλών θερμοκρασιών.



Εικόνα 12. α) Απόκριση διάταξης σταθερού ρεύματος, β) δράση διάταξης αντιστάθμισης, γ) απόκριση διάταξης θερμού νήματος με διάταξη αντιστάθμισης



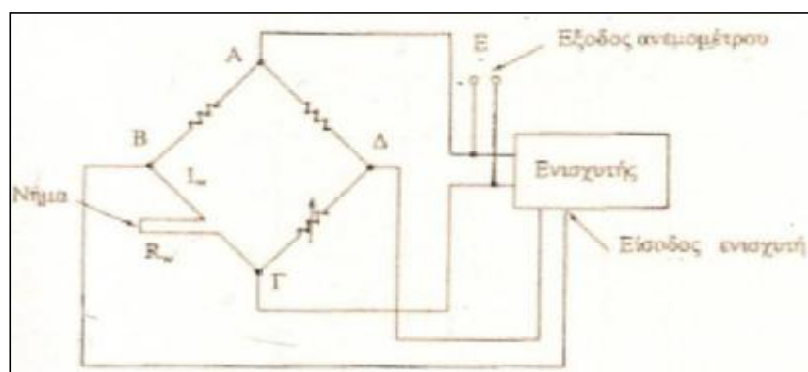
Εικόνα 13. Διάγραμμα εξόδου-ταχύτητας διάταξης σταθερού ρεύματος

Στο ίδιο διάγραμμα παρουσιάζονται αντίστοιχες καμπύλες όταν η αντίσταση του νήματος είναι σταθερή, το οποίο επιτυγχάνεται με τη διάταξη σταθερής θερμοκρασίας που θα παρουσιαστεί πιο κάτω.

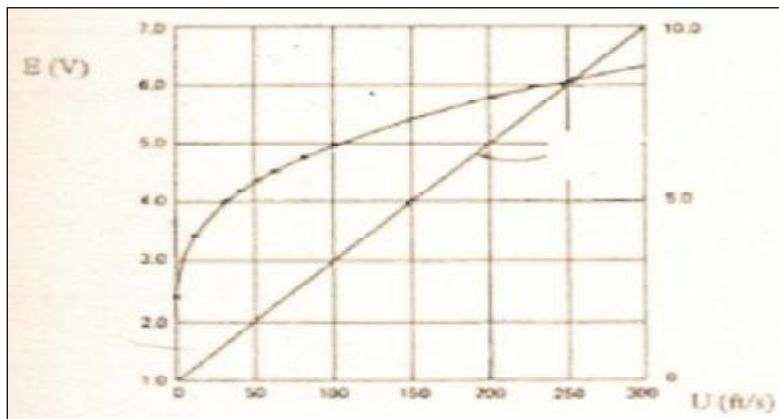
### Ανεμόμετρο σταθερής θερμοκρασίας

Στη διάταξη σταθερής θερμοκρασίας, η θερμοκρασία του νήματος διατηρείται σταθερή μέσω ενός ηλεκτρονικού συστήματος ανάδρασης. Συγκεκριμένα το θερμό νήμα αποτελεί έναν από τους τέσσερις κλάδους μιας γέφυρας Wheatstone, όπως φαίνεται στη εικόνα 14, στην οποία ένας ενισχυτής τάσης αναλαμβάνει την ισορροπία της γέφυρας όταν η ωμική αντίσταση του νήματος μεταβάλλεται στιγμιαία λόγω της μεταβαλλόμενης ταχύτητας του ρευστού. Δηλαδή εάν υποθεθεί ότι η ταχύτητα του ρευστού αυξάνει, η ωμική αντίσταση του νήματος θα μειωθεί λόγω της ψύξης του, η πτώση τάσης  $V_{B\Gamma}$  στα άκρα του θα μειωθεί και επομένως η πτώση τάσης  $V_{\Delta B}$  στα άκρα του ενισχυτή τάσης θα αυξηθεί, καθώς ισχύει  $V_{\Delta B} = V_{\Delta\Gamma} - V_{B\Gamma}$ .

Η έξοδος του ενισχυτή είναι μια τάση πολλαπλάσια της εισόδου του, η οποία εφαρμόζεται στα άκρα ΑΓ της γέφυρας Wheatstone. Η αυξημένη αυτή τάση προκαλεί αύξηση του ρεύματος που διέρχεται από το νήμα, άρα και θέρμανση του νήματος, αύξηση της ωμικής αντίστασης του, αύξηση της πτώσης τάσης στα άκρα του, δηλαδή της  $V_{B\Gamma}$ , με αποτέλεσμα να επέλθει τελικώς μηδενισμός της διαφοράς τάσης εισόδου του ενισχυτή ( $V_{B\Delta}$ ) και ισορροπία στη γέφυρα. Με άλλα λόγια, εφόσον η θερμοκρασία του νήματος διατηρείται σταθερή, εάν αυξηθεί η ταχύτητα του ρευστού, πρέπει η παραγόμενη θερμότητα από το νήμα να αυξηθεί, λόγω αύξησης της απαγόμενης θερμότητας από το ρευστό. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω αύξησης της έντασης του ρεύματος, η οποία γίνεται σχεδόν ακαριαία από τον ενισχυτή τάσης. Αντίστοιχα, αν μειωθεί η ταχύτητα του ρευστού πρέπει η ένταση του ρεύματος να μειωθεί κ.ο.κ. Μέσω της ηλεκτρονικής διάταξης του ενισχυτή τάσης αποδεικνύεται ότι η σταθερά χρόνου του οργάνου είναι πολύ μικρότερη από εκείνη του ανεμόμετρου σταθερού ρεύματος, γεγονός που επιτρέπει την ανεπιφύλακτη χρήση του οργάνου για μετρήσεις γρήγορων μεταβολών ταχύτητας της τάξης των 100 kHz.



Εικόνα 14. Διάταξη νήματος σταθερής θερμοκρασίας



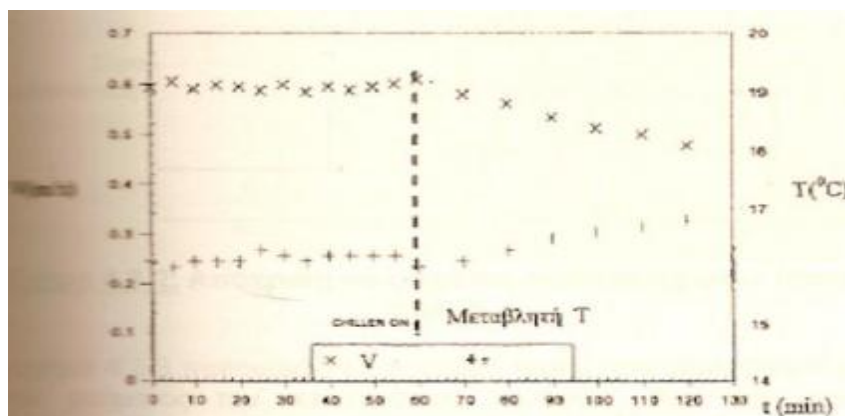
Εικόνα 15. Καμπύλη βαθμονόμησης θερμού νήματος σταθερής θερμοκρασίας

Η έξοδος του οργάνου  $E$ , είναι η πτώση τάσης  $V_{AG}$ . Εφόσον η γέφυρα τελικά ισορροπεί ισχύει η σχέση:

$$E = (A + B\sqrt{U_{ef}}) \frac{dI(R_w - R_f)}{(R_1 + R_w)^2 R_w R_0 a}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτουν τρία βασικά συμπεράσματα:

1. Η σχέση εισόδου-εξόδου του οργάνου είναι μη γραμμική, δηλαδή το θερμό νήμα σταθερής θερμοκρασίας είναι μη γραμμικό όργανο. Στη εικόνα 15 φαίνεται η καμπύλη βαθμονόμησης ενός νήματος, για έξι διαφορετικές θερμοκρασίες ρευστού, δηλαδή 283 K, 293 K, 303 K, 313 K, 333 K και 353 K, με θερμοκρασία νήματος 473 K. Αυξανόμενης της θερμοκρασίας του ρευστού, δηλαδή μειούμενης της θερμοκρασιακής διαφοράς νήματος-ρευστού, η τάση εξόδου μειώνεται, δεδομένου ότι η απαγόμενη θερμότητα είναι μικρότερη και επομένως η ένταση του ρεύματος που διέρχεται από το θερμό νήμα είναι μικρότερη.
2. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση του οργάνου ως προς τη δρώσα ταχύτητα  $U_{ef}$ , προκύπτει ότι η μερική παράγωγος  $@E/@U_{ef}$ , δηλαδή η ευαισθησία του οργάνου, μειώνεται μειούμενης της θερμοκρασιακής διαφοράς θερμού νήματος-ρευστού. Για αυτό το λόγο η θερμοκρασιακή διαφορά πρέπει να είναι μεγάλη, της τάξης των 200 βαθμών Κελσίου, για μετρήσεις σε αέρα. Η θερμοκρασία του νήματος μπορεί να ρυθμιστεί μέσω της μεταβλητής αντίστασης της γέφυρας Wheatstone.
3. Παραγωγίζοντας τη σχέση του οργάνου ως προς τη θερμοκρασία του ρευστού  $T_f$ , προκύπτει ότι η μερική παράγωγος  $@E/@T_f$ , δηλαδή η ευαισθησία του οργάνου σε μεταβολή της θερμοκρασίας του ρευστού, αυξάνει όταν η θερμοκρασιακή διαφορά θερμού νήματος-ρευστού μειώνεται. Συνέπεια αυτού είναι ότι εάν το θερμό νήμα χρησιμοποιείται ως μέσο μέτρησης της θερμοκρασίας του ρευστού και όχι της ταχύτητάς του, πρέπει η θερμοκρασία ρευστού και νήματος να μη διαφέρουν πολύ.



Εικόνα 16. Σχήμα 2.8: Εμφάνιση σφάλματος μετρήσεων σε νερό

Μια συνέπεια της διαπίστωσης (2) είναι η εμφάνιση σφάλματος στις μετρήσεις ταχυτήτων σε νερό. Αυτό συμβαίνει γιατί η θερμοκρασία του νήματος διατηρείται σχετικά χαμηλή (περίπου στους 60 βαθμούς Κελσίου) για αποφυγή εμφάνισης φυσαλίδων στο νερό λόγω βρασμού και έτσι η θερμοκρασιακή διαφορά νήματος-ρευστού είμαι μικρή. Επομένως εάν η ταχύτητα του ρευστού είναι π.χ. σταθερή, μικρή μεταβολή της θερμοκρασίας του ρευστού προκαλεί μεταβολή της εξόδου του οργάνου, η οποία εσφαλμένα μεταφράζεται ως αλλαγή της ταχύτητας του ρευστού. Συνεπώς στην περίπτωση αυτή είναι αναγκαία η χρήση διάταξης διατήρησης σταθερής θερμοκρασίας του ρευστού. Στην εικόνα 16 φαίνεται η έξοδος ενός θερμού νήματος όταν η θερμοκρασία του ρευστού είναι σταθερή, καθώς και όταν αυξάνει. Στη δεύτερη περίπτωση, για αύξηση της θερμοκρασίας του ρευστού από 16 σε 17 βαθμούς Κελσίου, η ταχύτητα φαίνεται να μειώνεται από 0.6 σε 0.46 ms , δηλαδή μια μείωση της τάξης του 20%.

### 3.2 ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ «HOT WIRE»

Οι αρχές της ανεμομετρίας θερμού νήματος αναπτύχθηκαν στις αρχές της προηγούμενης δεκαετίας (1914). Σύγχρονα συστήματα, οι δυνατότητές τους και οι περιορισμοί τους περιγράφονται από τους Hinze 1975, Perry 1982 και Lomas 1986. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν μερικές επεξηγητικές έννοιες. Η αναφορά θα περιοριστεί σε μεθόδους ανεμομετρίας σταθερής θερμοκρασίας (CTA).

Το αισθητήριο της ανεμομετρίας θερμού νήματος είναι ένα πολύ λεπτό μεταλλικό νήμα, το οποίο θερμαίνεται από το ηλεκτρικό ρεύμα. Το ανεμόμετρο θερμού νήματος συνδέεται με το ένα σκέλος μίας γέφυρας Wheatstone και η τάση ρυθμίζεται σε τέτοια τιμή ώστε η θερμοκρασία του νήματος να είναι υψηλότερη από αυτήν της ροής του ρευστού. Το νήμα ψύχεται από το ρέον ρευστό, ελαττώνεται έτσι η θερμοκρασία του και συνεπώς μειώνεται η τιμή της ηλεκτρικής του αντίστασης. Δύο βασικές διαφορετικές μέθοδοι μπορούν

να εφαρμοστούν: η μία ονομάζεται μέθοδος σταθερής θερμοκρασίας (CTA) ενώ η δεύτερη καλείται μέθοδος σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος (CCA).

Στην πρώτη περίπτωση η θερμοκρασία του νήματος και άρα και η ηλεκτρική του αντίσταση διατηρείται σταθερή ενώ η τάση μεταβάλλεται με την ταχύτητα. Η μεταβολή αυτή είναι και το αντικείμενο μέτρησης. Η μέθοδος ανεμομετρίας σταθερής θερμοκρασίας παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα και είναι ευρέως αποδεκτή. Στη μέθοδο CCA, που χρησιμοποιείται κυρίως για μετρήσεις της θερμοκρασίας, μεταβάλλεται η ηλεκτρική αντίσταση καθώς το ρεύμα διατηρείται σταθερό.

Η σχέση μεταξύ της τάσης της γέφυρας του ανεμομέτρου και της ταχύτητας του ρευστού προσδιορίστηκε από τον King (νόμος του King).

$$E^2 = A + B \cdot U^n$$

#### Εξίσωση 50

Ο εκθέτης μπορεί να υπολογιστεί μόνο πειραματικά και η τιμή του είναι συνήθως 0.5.

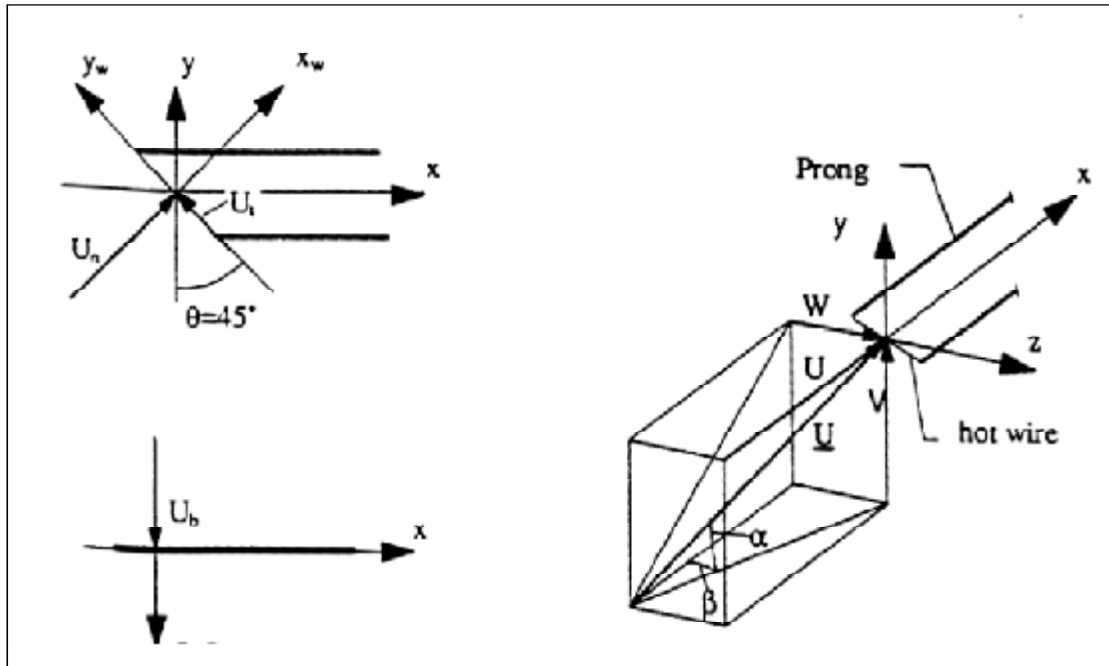
Ο Jorgensen (1971), θέλοντας να καθορίσει τη διεύθυνση της ροής, εισήγαγε την έννοια της «ενεργής» ταχύτητας ψύξης (effective cooling velocity), η οποία δίνεται από τη σχέση :

$$U_{\text{eff}}^2 = U_n^2 + k_b \cdot U_b^2 + k_t \cdot U_t^2$$

#### Εξίσωση 51

όπου  $U_n$ ,  $U_t$ ,  $U_b$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας σε σχέση με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του νήματος ( $x_w$ ,  $y_w$ ,  $z_w$ ), με το  $x_w$  άξονα να βρίσκεται στο επίπεδο που διαμορφώνεται από το νήμα και το στήριγμά του. Ο άξονας  $y_w$  είναι σύμφωνος με τη διεύθυνση του νήματος (σχήμα 4.1). Οι ταχύτητες  $U_n$ ,  $U_b$  και  $U_t$  ονομάζονται κάθετη, εγκάρσια και εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας και οι συντελεστές  $k_b$  και  $k_t$  ονομάζονται εγκάρσιος και εφαπτομενικός συντελεστής ευαισθησίας διεύθυνσης αντίστοιχα (directional sensitivity factors).





Εικόνα 17. Συνιστώσες της ταχύτητας στο σύστημα συντεταγμένων του αισθητήρα (x,y,z) και στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων των νημάτων (x<sub>w</sub>, y<sub>w</sub>, z<sub>w</sub>) για κλίση του ανεμομέτρου 45° ως προς την επικείμενη ροή.

Η διαφορά μεταξύ της ταχύτητας της ροής U [οπού U είναι το άνυσμα της ταχύτητας  $U = (U, V, W)$ ] και της «ενεργής ταχύτητας ψύξης»  $U_{eff}$  είναι σημαντική εξαιτίας της διαφορετικής συνεισφοράς των συνιστωσών  $U_n$ ,  $U_t$ , και  $U_b$  στο ρυθμό μεταφοράς θερμότητας από το νήμα προς την επικείμενη ροή. Οι συντελεστές  $k_b$  και  $k_t$  υπολογίζονται πειραματικά κυρίως από τη γωνιακή βαθμονόμηση του αισθητήρα σε ομοιόμορφη ροή. Τυπικές τιμές των κατευθυντικών συντελεστών ευαισθησίας είναι  $k_b = 1.0 - 2.0$  και  $k_t = 0.02 - 0.2$ .

Ο νόμος του King με όρους της ταχύτητας  $U_{eff}$  γίνεται:

$$E^2 = A + B \cdot U_{eff}^2.$$

**Εξίσωση 52**

Από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις είναι δυνατό να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό μοντέλο για την απόκριση του νήματος. Το μοντέλο αυτό είναι του τύπου:

$$E = f(|\underline{U}|, \alpha, \beta)$$

**Εξίσωση 53**



Οι γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  αντιστοιχούν στο οριζόντιο πρόνευσης (pitch) και κατακόρυφο εκτροπής (yaw) επίπεδο σάρωσης. Οι γωνίες αυτές καθορίζουν το διάνυσμα της ταχύτητας στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του αισθητήρα (σχήμα 4.1). Θεωρητικά, χρησιμοποιώντας αισθητήρες που αποτελούνται από τρία νήματα που έχουν γνωστές συναρτήσεις απόκρισης, είναι δυνατή η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου τριών εξισώσεων. Το μοντέλο αυτό θα εκτιμά την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας από τις τρεις μετρούμενες τάσεις του ανεμομέτρου E1, E2, E3 .

Ο νόμος του King και οι εξισώσεις του Jorgensen είναι κατάλληλες για αισθητήρες με ιδεατή γεωμετρία και ικανότητα μεταφοράς θερμότητας. Η εφαρμογή των σχέσεων αυτών σε πραγματικούς αισθητήρες μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα. Επιπρόσθετα, όπως φαίνεται και σε προηγούμενες μελέτες (Bruun και Tropea, 1985, Muller, 1987, Chew και Ha, 1988, Wagner και Kent, 1988), οι κατευθυντικοί συντελεστές ευαισθησίας  $k_b$  και  $k_t$ , οι οποίοι θεωρούνται σταθεροί στις εξισώσεις του Jorgensen, εξαρτώνται από το μέγεθος της ταχύτητας καθώς και από τη γωνία προσβολής. Οι συντελεστές αυτοί μπορεί να αποκλίνουν σημαντικά από τις μέσες τιμές τους.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

### 4.1 ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ ΣΥΣΚΕΥΩΝ

#### *Στατικά χαρακτηριστικά αισθητήρων*

Τα στατικά χαρακτηριστικά των αισθητήρων αναφέρονται στην κατάσταση κατά την οποία έχει επέλθει ισορροπία μεταξύ αισθητήρα και μετρούμενου μεγέθους (Αθανασίου Α., 2004). Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο πρέπει το μετρούμενο μέγεθος είτε να είναι σταθερό, είτε να μεταβάλλεται πολύ αργά σε σχέση με τη δυνατότητα του αισθητήρα να αντιληφθεί τη μεταβολή αυτή.

#### *Πιστότητα*

Με τον όρο πιστότητα αποδίδεται ο αγγλικός όρος accuracy. Η πιστότητα δε σχετίζεται με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων με τον οποίο μπορεί να γίνει η μέτρηση, αλλά με το κατά πόσο το αποτέλεσμα που δίνει ο αισθητήρας πλησιάζει την φυσική πραγματικότητα, μέσα σε ένα λογικό εύρος τιμών (Nicholas J.V., 1998). Η πιστότητα δίνεται συνήθως ως ποσοστό επί του εύρους λειτουργίας του αισθητήρα.

#### *Ακρίβεια, Επαναληψιμότητα, Αναπαραγωγιμότητα*

Ο όρος ακρίβεια (precision) εκφράζει τον βαθμό ελευθερίας του αισθητήρα από τυχαία σφάλματα. Αν πάρουμε μεγάλο αριθμό μετρήσεων από ένα ακριβή αισθητήρα, τότε η μεταξύ τους διασπορά θα είναι μικρή. Η ακρίβεια συγγέεται συχνά με την πιστότητα. Η μεγάλη ακρίβεια δεν σημαίνει κατ' ανάγκη και μεγάλη πιστότητα. Ένας ακριβής αισθητήρας μπορεί να έχει κακή πιστότητα. Κακής πιστότητας μετρήσεις από ένα ακριβή αισθητήρα, σημαίνει ότι οι μετρήσεις έχουν συστηματικό σφάλμα (bias), γεγονός το οποίο μπορεί να διορθωθεί με βαθμονόμηση (διακρίβωση) του αισθητήρα. Οι όροι επαναληψιμότητα και αναπαραγωγιμότητα είναι ταυτόσημοι, χρησιμοποιούνται όμως ο καθένας σε διαφορετικές περιπτώσεις. Και οι δύο αναφέρονται στο πόσο κοντά είναι τα αποτελέσματα ενός αισθητήρα που μετρά το ίδιο σταθερό μέγεθος, η μεν επαναληψιμότητα όταν οι συνθήκες μέτρησης είναι σταθερές, η δε αναπαραγωγιμότητα όταν οι συνθήκες μέτρησης μεταβάλλονται.

### *Εύρος*

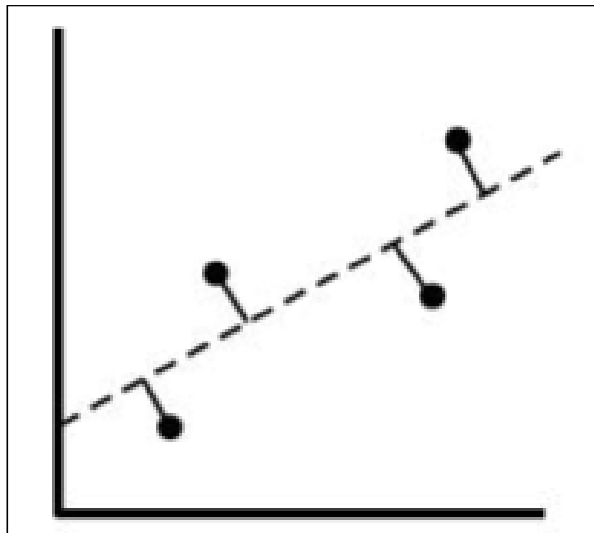
Με τον όρο εύρος αναφερόμαστε στην ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του φυσικού μεγέθους που μπορεί να μετρήσει ένας αισθητήρας.

### *Συστηματικό σφάλμα*

Ως συστηματικό σφάλμα (bias) είναι ένα σταθερό σφάλμα. το ίδιο για όλο το εύρος του αισθητήρα, το οποίο συνήθως μπορεί να μηδενιστεί μέσω βαθμονόμησης.

### *Γραμμική απόκριση*

Είναι γενικά επιθυμητό η απόκριση ενός αισθητήρα να μεταβάλλεται γραμμικά με το μετρούμενο μέγεθος. Τα σημεία της εικόνας 18, απεικονίζουν την σχέση μεταξύ σήματος εισόδου (οριζόντιος άξονας) ενός αισθητήρα. Η γραμμή μεταξύ των σημείων χαράσσεται εφαρμόζοντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Η μη γραμμικότητα εκφράζεται ως η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των σημείων και της γραμμής. Η μη γραμμικότητα εκφράζεται συνήθως ως η απόκλιση του εύρους του αισθητήρα.



Εικόνα 18. Χαρακτηριστικά εξόδου αισθητήρα

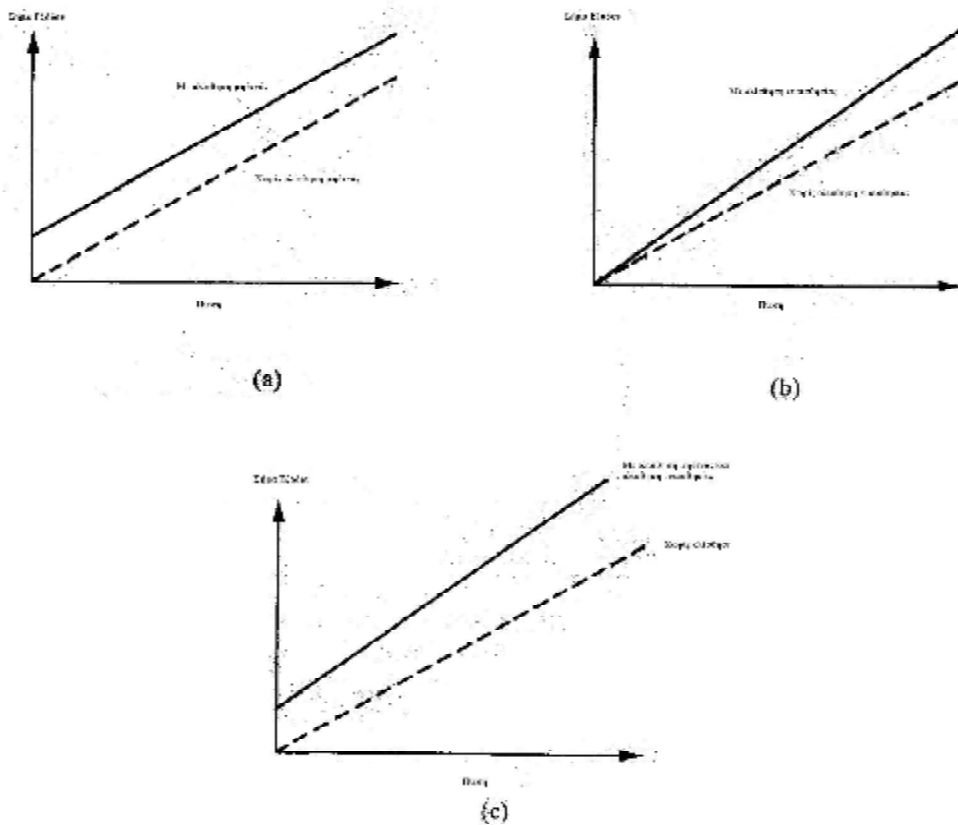
### ***Ευαισθησία στη μέτρηση***

Πρόκειται για το λόγο της μεταβολής στην ένδειξη του αισθητήρα, προς τη μεταβολή το φυσικού μεγέθους που την προκάλεσε. Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η ευαισθησία ισούται με την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της εικόνας 18.

### ***Ευαισθησία στη διαταραχή***

Η βαθμονόμηση και τα χαρακτηριστικά ενός αισθητήρα ισχύουν όταν αυτό λειτουργεί εντός συγκεκριμένου εύρους περιβαλλοντικών συνθηκών παραμέτρων όπως η θερμοκρασία, η πίεση, η σχετική υγρασία κλπ. Το εύρος καθορίζεται από τον κατασκευαστή του αισθητήρα. Μεταβολή κάποιας από τις παραμέτρους αυτές ενδέχεται να μεταβάλλει κάποιο από τα στατικά χαρακτηριστικά του αισθητήρα. Η μεταβολή αυτή ορίζεται ως η ευαισθησία στη διαταραχή. Τα χαρακτηριστικά του αισθητήρα που μεταβάλλονται είναι κυρίως δυο και είναι γνωστά ως ολίσθηση του μηδενός (zero drift) και ολίσθηση ευαισθησίας (sensitivity drift). Η ολίσθηση του μηδενός είναι το μη μηδενικό σήμα εξόδου του αισθητήρα όταν το σήμα εισόδου είναι μηδέν, λόγω μεταβολής των περιβαλλοντικών συνθηκών. Μετράται συνήθως σε  $V^{\circ}C^{-1}$  στην περίπτωση π.χ. ενός βολτόμετρου το οποίο έχει επηρεαστεί από τη μεταβολή της θερμοκρασίας. Αν ένας αισθητήρας επηρεάζεται από περισσότερες από μια περιβαλλοντικές παραμέτρους, τότε αυτός χαρακτηρίζεται από αντίστοιχες σε αριθμό ολισθήσεις του μηδενός, μια για κάθε επηρεάζουσα παράμετρο του αισθητήρα. Χαρακτηριστική ολίσθηση μηδενός αισθητήρα πίεσης, φαίνεται στην εικόνα 19 α.

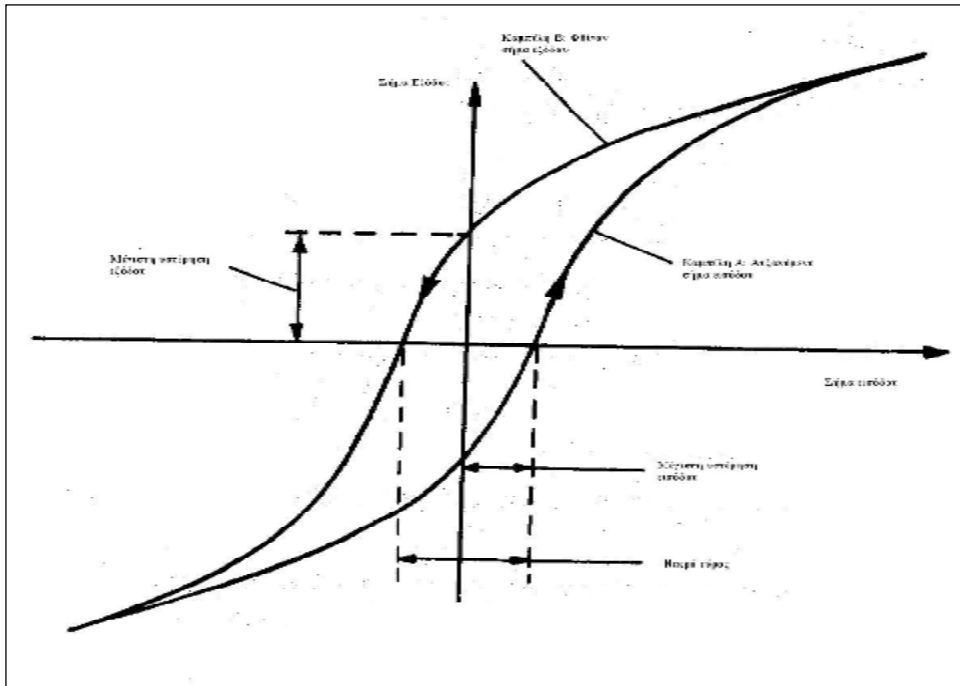
Η ολίσθηση ευαισθησίας ορίζεται ως το ποσό μεταβολής της ευαισθησίας ενός αισθητήρα λόγω μεταβολής των περιβαλλοντικών συνθηκών. Εκφράζεται μέσω συντελεστών ολίσθησης ευαισθησίας, οι οποίοι εκφράζουν το μέγεθος της ολίσθησης ανά μονάδα μεταβολής της περιβαλλοντικής παραμέτρου που την προκάλεσε. Η εικόνα 19 β δείχνει την επίδραση της ολίσθησης ευαισθησίας στα χαρακτηριστικά εξόδου ενός αισθητήρα. Η συνδυασμένη επίδραση των ολισθήσεων μηδενός και ευαισθησίας στα χαρακτηριστικά εξόδου ενός αισθητήρα, φαίνεται στην εικόνα 19 c.



Εικόνα 19. α) Ολίσθηση μηδενός, β) Ολίσθηση ευαισθησίας, γ) Συνδυασμένη επίδραση των δυο ολισθήσεων (Morris A.S., 1993).

## Υστέρηση

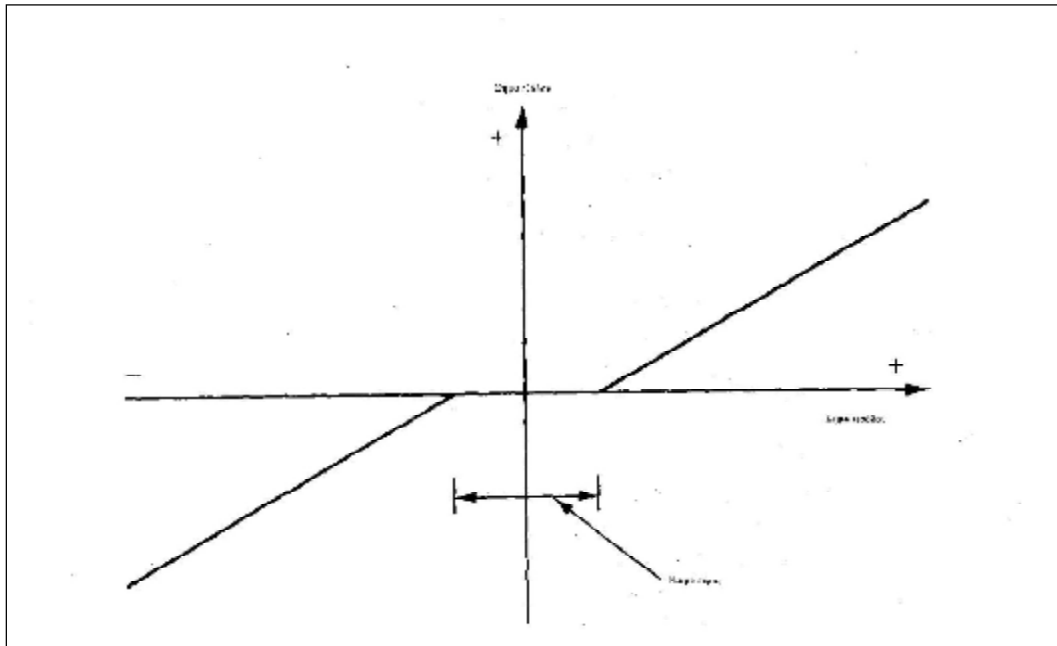
Στη εικόνα 20, φαίνεται το σήμα εξόδου ενός αισθητήρα ο οποίος παρουσιάζει υστέρηση. Αν η τιμή του σήματος εισόδου μεταβάλλεται σταθερά, ξεκινώντας από αρνητικές, το σήμα εξόδου περιγράφεται από την καμπύλη Α. Αν κατόπιν το σήμα εξόδου μειώνεται σταδιακά, τότε το σήμα εξόδου περιγράφεται από την καμπύλη Β. Η μη ταύτιση των δυο καμπυλών <<φορτίσεως – εκφορτίσεως>> είναι γνωστή ως υστέρηση. Η υστέρηση εκφράζεται μέσω της μέγιστης υστέρησης εισόδου και της μέγιστης υστέρησης εξόδου, οι οποίες ορίζονται στην εικόνα 20.



Εικόνα 20. Χαρακτηριστικά εξόδου αισθητήρα με υστέρηση (Morris A.S., 1993).

### Νεκρό εύρος

Ως νεκρό εύρος (dead space) ορίζεται το εύρος του σήματος εισόδου, για το οποίο το σήμα εξόδου είναι μηδενικό, όπως φαίνεται και στην εικόνα 21. Όπως βλέπουμε και στη εικόνα, κάθε αισθητήρας ο οποίος εμφανίζει υστέρηση, εμφανίζει και νεκρό εύρος. Παρ' όλα αυτά ακόμη και αισθητήρες οι οποίοι δεν εμφανίζουν σημαντική υστέρηση, μπορεί να εμφανίζουν νεκρό εύρος.



Εικόνα 21. Χαρακτηριστικά εξόδου αισθητήρα με νεκρό εύρος (Morris A.S., 1993).

### Διακριτική ικανότητα

Ως διακριτική ικανότητα ενός αισθητήρα ορίζεται η απαιτούμενη ελάχιστη μεταβολή του σήματος εισόδου, ώστε να προκληθεί μεταβολή στο σήμα εξόδου του αισθητήρα.

### Δυναμικά χαρακτηριστικά

Εκτός από τα στατικά χαρακτηριστικά τα οποία αναφέρονται στην περίπτωση όπου έχει επέλθει ισορροπία μεταξύ σήματος εισόδου και αισθητήρα (δηλαδή όταν πλέον τα σήματα εισόδου-εξόδου δεν μεταβάλλονται με το χρόνο), κάθε αισθητήρας διαθέτει και δυναμικά χαρακτηριστικά (Αργυρίου Α., 2004). Τα δυναμικά χαρακτηριστικά περιγράφουν τη συμπεριφορά του αισθητήρα μεταξύ της στιγμής κατά την οποία το σήμα εισόδου μεταβάλλεται έως τη στιγμή κατά την οποία το σήμα εξόδου θα σταθεροποιηθεί εκ νέου. Τα δυναμικά χαρακτηριστικά ισχύουν, όπως και τα στατικά, εντός συγκεκριμένου εύρους συνθηκών λειτουργίας του αισθητήρα. Αν ο αισθητήρας βρεθεί να λειτουργεί εκτός αυτού του εύρους, τότε τα δυναμικά χαρακτηριστικά αναμένεται να μεταβληθούν.

Υποθέτοντας ένα γραμμικό αισθητήρα του οποίου οι ιδιότητες δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, η σχέση μεταξύ σήματος εισόδου-εξόδου περιγράφεται από την εξίσωση :

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \mathbf{K} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \mathbf{K} + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

Εξίσωση 54

όπου :  $q_i$  και  $q_o$  το σήμα εισόδου και εξόδου αντίστοιχα,

$a_0 \mathbf{K} a_n$  και  $b_0 \mathbf{K} b_n$  σταθερές

Αν περιοριστούμε στην περίπτωση κατά την οποία το σήμα εξόδου είναι κλιμακωτή συνάρτηση ή αλλιώς συνάρτηση Heaviside, που ισχύει ότι :

$$f(x) = H(x - a)$$

**Εξίσωση 55**

$$\text{όπου : } H(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1/2, & x = a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

Η τιμή της συνάρτησης κάνει άλμα από την τιμή 0 στην τιμή 1 για  $x = a$ . Τότε η εξίσωση λαμβάνει την ακόλουθη απλούστερη μορφή :

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \mathbf{K} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

**Εξίσωση 56**

### Αισθητήρας Μηδενικής Τάξεως

Αισθητήρας μηδενικής τάξεως είναι εκείνος του οποίου οι συντελεστές  $a_1 \mathbf{K} a_n$  είναι μηδέν και μόνο ο συντελεστής  $a_0$  είναι διάφορος του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (56) γράφεται :

$$a_0 q_o = b_0 q_i \Rightarrow q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i = k \cdot q_i$$

**Εξίσωση 57**

όπου:  $k$  σταθερά, γνωστή και ως ευαισθησία του αισθητήρα

### Αισθητήρας Πρώτης Τάξεως

Πρόκειται για τον αισθητήρα, η συμπεριφορά του οποίου περιγράφεται από εξίσωση της μορφής :

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

**Εξίσωση 58**



Ορίζοντας τον συντελεστή  $D = d/dt$ , η εξίσωση 58 γράφεται ως :

$$a_1 D q_0 + a_0 q_0 = b_0 q_i$$

**Εξίσωση 59**

από την οποία προκύπτει :

$$q_0 = \frac{\frac{b_0}{a_0} \cdot q_i}{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot D}$$

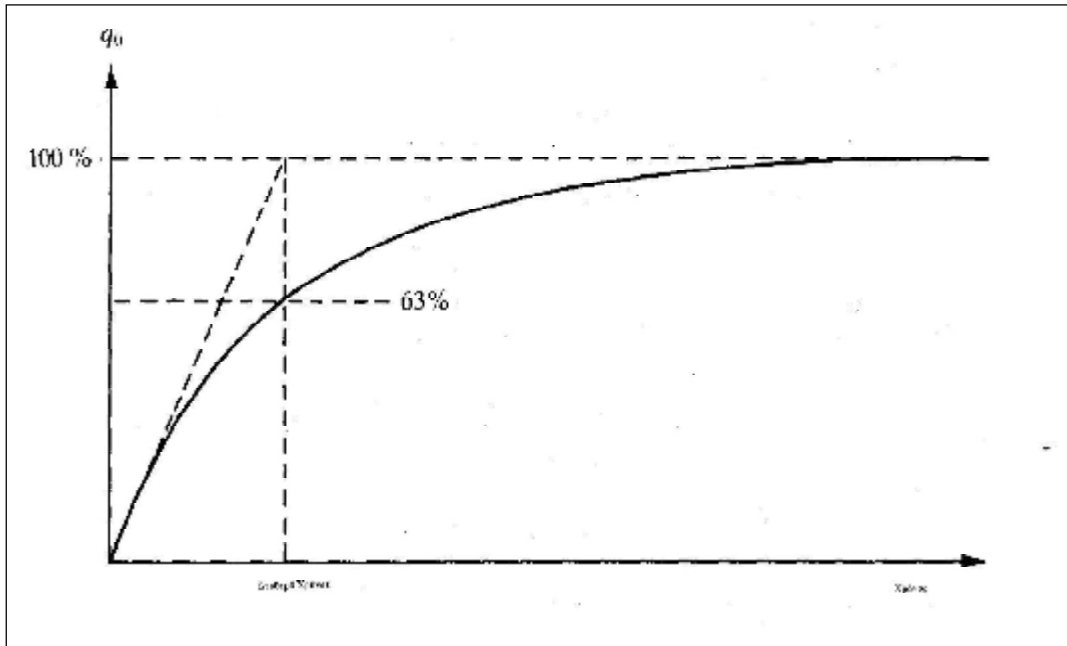
**Εξίσωση 60**

Αν ορίσουμε ως  $k = b_0/a_0$  τη στατική ευαισθησία και  $t = a_1/a_0$  τη σταθερά χρόνου του αισθητήρα, εξίσωση (60) γράφεται ως :

$$q_0 = \frac{k \cdot q_i}{1 + t \cdot D}$$

**Εξίσωση 61**

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης (61) φαίνεται στο διάγραμμα της εικόνας 22. Η σταθερά χρόνου τα της απόκρισης του αισθητήρα στην κλιμακωτή μεταβολή του σήματος εισόδου, είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σήμα εξόδου να γίνει ίσο με το 63% της τελικής τιμής του. Παράδειγμα αισθητήρα πρώτης τάξεως είναι το θερμοζεύγος.



Εικόνα 22. Χαρακτηριστικά αισθητήρα πρώτης τάξεως (Morris A.S., 1993)

### Αισθητήρας Δευτέρας Τάξεως

Πρόκειται για τον αισθητήρα η συμπεριφορά του οποίου περιγράφεται από εξίσωση της μορφής :

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

**Εξίσωση 62**

Χρησιμοποιώντας ξανά το συμβολισμό του τελεστή D, η εξίσωση 62 γίνεται :

$$a_2 D^2 q_o + a_1 D q_o + a_0 q_o = b_0 q_i$$

**Εξίσωση 63**

από την οποία καταλήγουμε στην

$$\frac{b_0 q_i}{a_0 + a_1 D + a_2 D^2} \Rightarrow \frac{q_o}{q_i} = \frac{k}{\frac{D^2}{w^2} + \frac{2eD}{w} + 1}$$

**Εξίσωση 64**

Η εξίσωση (64) αποτελεί την τυπική εξίσωση αισθητήρα δευτέρας τάξεως. Οι όροι στατικής ευαισθησίας  $k$ , μη αποσβεσθείσες φυσικής συχνότητας  $\omega$  και λόγος απόσβεσης  $\epsilon$  ορίζονται ως εξής :

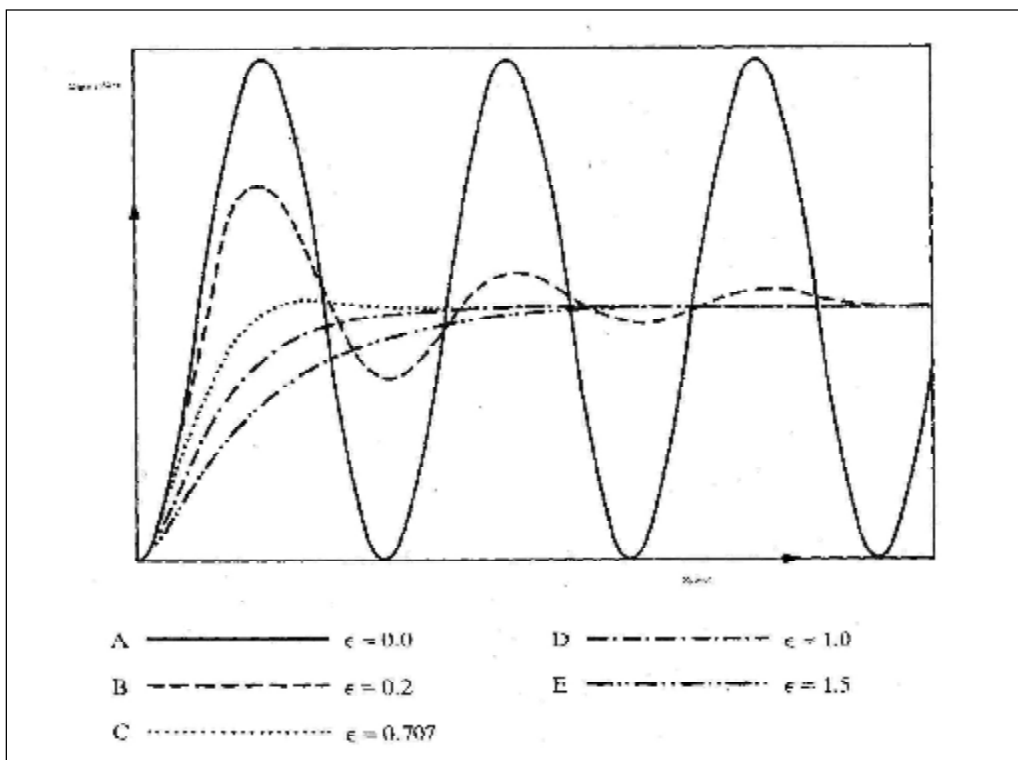
$$k = \frac{b_0}{a_0}$$

$$\omega = \frac{a_0}{a_2}$$

$$\epsilon = \frac{a_1}{2a_0a_2}$$

Η μορφή του σήματος εξόδου του αισθητήρα, το οποίο θα προκύψει ως η αναλυτική λύση της (64), εξαρτάται από την τιμή του λόγου απόσβεσης  $\epsilon$ , όπως φαίνεται και στη εικόνα 23.

Στη πρώτη περίπτωση όπου δεν υπάρχει απόσβεση ( $\epsilon=0$ ) το σήμα εξόδου είναι περιοδικό, αποκρινόμενο στη μεταβολή του σήματος εισόδου. Για  $\epsilon=0,2$  το σήμα εξόδου εξακολουθεί να είναι περιοδικό αλλά οι ταλαντώσεις σταδιακά μηδενίζονται. Περαιτέρω αύξηση του  $\epsilon$  προκαλεί πλήρη εξαφάνιση των ταλαντώσεων. Γενικά οι αισθητήρες θα πρέπει να επιλέγονται έτσι το  $\epsilon$  να κυμαίνεται μεταξύ 0,6 – 0,8.



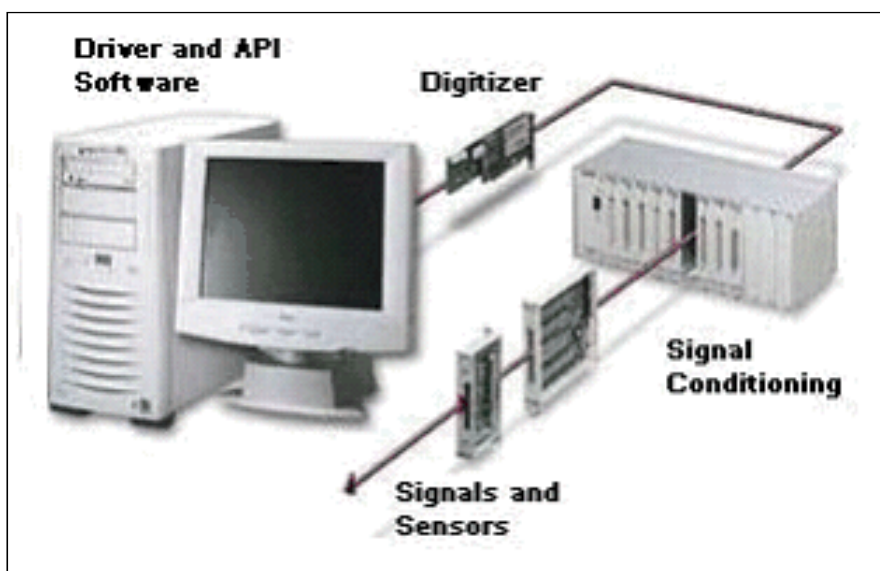
Εικόνα 23. Απόκριση αισθητήρα δευτέρας τάξεως (Morris A.S., 1993).

## Συστήματα καταγραφής δεδομένων

Με τον όρο απόκτηση (Acquisition) περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μεγέθη όπως η πίεση, η θερμοκρασία, το ρεύμα μετατρέπονται σε ψηφιακά δεδομένα και απεικονίζονται στην οθόνη ενός υπολογιστή. Ως συστήματα DAQ (Data Acquisition) θεωρούνται οι σύγχρονες συσκευές μέτρησης, όπως οι διάφορες κάρτες DAQ, που συνδέονται στον δίαυλο PCI, τα όργανα που είναι εφοδιασμένα με πρωτόκολλο RS-232 ή GPIB καθώς και τα βιομηχανικά συστήματα μετρήσεων τύπου PXI και VXI. Όλα αυτά σχεδιάζονται σύμφωνα με την αρχιτεκτονική της απόκτησης, της ανάλυσης και της επεξεργασίας των σημάτων μετρήσεων που λαμβάνονται στην είσοδο.

### Συσκευές DAQ εργαστηριακών εφαρμογών

Οι συσκευές DAQ εργαστηριακών εφαρμογών είναι κάρτες που συνδέονται με τον υπολογιστή για την απόκτηση δεδομένων. Οι συσκευές DAQ μπορούν είτε να συνδεθούν στο εσωτερικό του υπολογιστή μέσω ενός συνδέσμου είτε εξωτερικά με τον υπολογιστή μέσω τερματικών συνδέσμων, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι μέσω της παράλληλης ή της σειριακής θύρας. Ο ρόλος των συσκευών DAQ είναι η μετατροπή του εισερχόμενου σήματος σε ψηφιακό δεδομένο που στέλνεται στον υπολογιστή και όχι η επεξεργασία της μέτρησης, την οποία αναλαμβάνει το λογισμικό. Προτού όμως ο υπολογιστής μετρήσει αυτό το φυσικό σήμα θα πρέπει ένας αισθητήρας να το μετατρέψει σε ηλεκτρικό μέγεθος όπως τάση ή ρεύμα. Η περιγραφόμενη διαδικασία παρουσιάζεται στη ακόλουθη εικόνα 24 :



Εικόνα 24. Γενικό σύστημα DAQ

Χρησιμοποιώντας τις κάρτες DAQ υψηλής απόδοσης και γρήγορους υπολογιστές μαζί με λογισμικό μετρήσεων, όπως το LabView, μπορεί να επιτευχθεί υψηλή ακρίβεια μέτρησης και έλεγχο της πληροφορίας του σήματος σε μια εργαστηριακή ή βιομηχανική εφαρμογή. Για τη σωστή λειτουργία του, ένα σύστημα DAQ θα πρέπει να αποτελείται από κάποια στοιχεία. Ένα από αυτά τα στοιχεία είναι ο υπολογιστής, ο οποίος επηρεάζει σημαντικά τις ταχύτητες με τις οποίες μπορούμε να αποκτήσουμε δεδομένα. Η συλλογή δεδομένων γίνεται με μεγάλες ταχύτητες στα σημερινά συστήματα, με τη βοήθεια γρήγορων επεξεργαστών και διαύλων υψηλής απόδοσης. Συγκεκριμένα ο δίαυλος PCI και η θύρα USB είναι οι δημοφιλέστεροι και οι επικρατέστεροι δίαυλοι των σημερινών επιτραπέζιων υπολογιστών.



Εικόνα 25. α: Κάρτα DAQ που τοποθετείται στον δίαυλο PCI (<http://www.ni.com>)



Εικόνα 26.β: Κάρτα DAQ που τοποθετείται στη θύρα USB (<http://www.ni.com>)

Η επιλογή μιας συσκευής DAQ και μιας αρχιτεκτονικής διαύλων θα πρέπει να γίνεται λαμβάνοντας υπόψη και τις μεθόδους μεταφοράς δεδομένων που υποστηρίζονται από τη συσκευή και από το δίαυλο προς επιλογή. Διαφορετικά μπορεί να επηρεαστεί σημαντικά η απόδοση του συστήματος DAQ. Για την απόκτηση δεδομένων υπάρχουν κάποιοι περιοριστικοί παράγοντες. Ένας από αυτούς είναι ο σκληρός δίσκος, ο οποίος μειώνει σημαντικά το χρόνο απόκτησης και κατανομής δεδομένων σε αυτόν.

Ο αισθητήρας είναι το επόμενο στοιχείο από το οποίο θα πρέπει να αποτελείται ένα σύστημα DAQ. Ο αισθητήρας ορίζεται ως το βασικό στοιχείο σε μια μετρητική αλυσίδα, που

μετατρέπει τη μεταβολή εισόδου σε μετρήσιμο σήμα. Το σήμα εισόδου του αισθητήρα μπορεί να είναι κάθε μορφής, ενώ το σήμα εξόδου έχει αποκλειστικά ηλεκτρικές ιδιότητες αναλογικής ή ψηφιακής μορφής. Η θέση ενός αισθητήρα μπορεί να είναι εξωτερική ούτως ώστε να δέχεται τα εξωτερικά ερεθίσματα όπως επίσης και εσωτερική παρακολουθώντας τη συμπεριφορά του συστήματος.

Τέλος τα ηλεκτρικά σήματα των αισθητήρων οδηγούνται σε ένα πολυπλέκτη, όπου σκοπός του είναι να συνδέει τους αισθητήρες με τον μετατροπέα αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (A/D) ή απευθείας με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή στη περίπτωση που οι αποκρίσεις των αισθητηρίων είναι σε ψηφιακή μορφή.

### **Λειτουργικά χαρακτηριστικά καρτών**

Οι κάρτες DAQ είναι πολυλειτουργικές κάρτες αναλογικών και ψηφιακών εισόδων/εξόδων που διαθέτουν ενσωματωμένους μετρητές, ξεκινούν από ένα 12 bit και άνω μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακού σήματος (A/D) ή ψηφιακού σε αναλογικού (D/A) σήματος με είσοδο 8 ή άνω καναλιών, και ψηφιακές εισόδους σημάτων TTL (Transistor – transistor logic).

Τα αναλογικά σήματα που εισέρχονται στις κάρτες DAQ ομαδοποιούνται σε τρία πεδία ως προς το χρόνο απόκτησης των τιμών τους :

Συνεχές Μεταβλητού Πεδίου

Πεδίο Χρόνου

Πεδίο Συχνοτήτων

Επίσης τα σήματα διακρίνονται και ως προς τη στάθμη αναφοράς του δυναμικού τους, σε δυο κατηγορίες :

Γειωμένα τα οποία έχουν στάθμη αναφοράς ως προς τη γη

Επιπλέοντα σε αντίθετη περίπτωση

Τέλος στις συσκευές DAQ υπάρχουν τρεις διαφορετικοί σύνδεσης των σημάτων εισόδου προς μέτρηση :

Διαφορική σύνδεση (Differential – DIFF)

Σύνδεση με αναφορά μοναδικά τερματισμένη (Referenced Single – Ended – RSE)

Σύνδεση χωρίς αναφορά μοναδικά τερματισμένη (Non Referenced Single – Ended – NRSE)

Οι αναλογικές εισοδοί των καρτών DAQ έχουν κάποια χαρακτηριστικά, τα οποία είναι :

Αριθμός καναλιών : Ο αριθμός των αναλογικών εισόδων, όπου μπορούν να συνδεθούν σήματα μετρήσεων.

Συχνότητα δειγματοληψίας : Όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα δειγματοληψίας τόσο περισσότερα δεδομένα συλλέγονται μέσα σε συγκεκριμένο χρόνο, με αποτέλεσμα τη καλύτερη αναπαράσταση του αρχικού σήματος.

Ανάλυση : Ο αριθμός των bit που χρησιμοποιεί ο μετατροπέας A/D για να αναπαραστήσει το αναλογικό σήμα. Όσο μεγαλύτερη είναι η ανάλυση τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός υποδιαϊρέσεων του εύρους και τόσο μικρότερη είναι η αλλαγή τάσης στην είσοδό του.

Εύρος : Είναι το ανώτατο και το κατώτατο επίπεδο τάσης που ο μετατροπέας A/D μπορεί να κβαντίσει. Οι συσκευές DAQ πρέπει να προσφέρουν δυνατότητα επιλογής εύρους, έτσι ώστε να μπορεί να προσαρμοστεί το εύρος του σήματος σε εκείνο του μετατροπέα A/D.

Πλάτος κώδικα : Είναι η μικρότερη ανιχνεύσιμη αλλαγή στο σήμα εισόδου, η οποία καθορίζεται από την ανάλυση και το εύρος μιας συσκευής DAQ. Ο τύπος που υπολογίζουμε το πλάτος κώδικα είναι ο εξής :

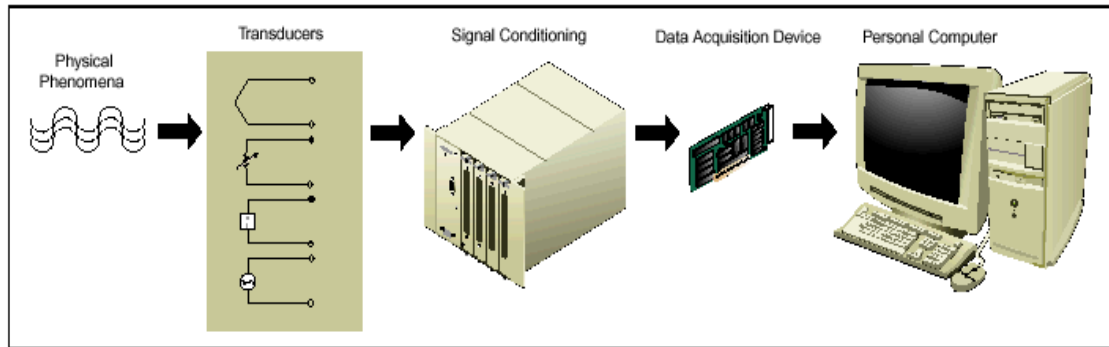
$$\text{Πλάτος Κώδικα} = \frac{\text{Εύρος}}{2^{\text{Ανάλυση}}}$$

Όσο μικρότερο είναι το πλάτος του κώδικα τόσο ακριβέστερες είναι οι μετρήσεις.

Αντίσταση εισόδου : Οι συσκευές DAQ έχουν υψηλή αντίσταση εισόδου έτσι ώστε να μην προκαλείται σφάλμα μέτρησης.

## Signal conditioning

Όταν ληφθεί το ηλεκτρικό σήμα των αισθητηρίων, που στη περίπτωση μας είναι το θερμοζεύγος και ο μετρητής διαφορικής πίεσης, πριν αυτό φτάσει σε μετατροπέα αναλογικού σήματος σε ψηφιακού παρεμβάλλεται το στάδιο της προσαρμογής του σήματος (signal conditioning), Εικόνα 3.4. Πρόκειται για μια συσκευή, που ονομάζεται signal conditioner, Εικόνα 3.5, και χρησιμοποιείται για τη μετατροπή ενός τύπου ηλεκτρικού σήματος σε ένα διαφορετικού τύπου. Η κύρια λειτουργία του είναι η μετατροπή ενός σήματος, που μπορεί να είναι δύσκολο να διαβαστεί από μια συμβατική διάταξη μετατροπής, σε μια πιο εύκολη μορφή (format) διαβάσματος.



Εικόνα 27. Διαδικασία απόκτησης και επεξεργασίας πληροφορίας



Εικόνα 28. Άποψη signal conditioner (<http://www.ni.com>).

Για να γίνει η παραπάνω μετατροπή πρέπει να λάβουν χώρα αρκετές λειτουργίες, αυτές είναι :

### **Ενίσχυση (Amplification)**

Όταν ένα σήμα ενισχύεται, τότε το γενικό μέγεθος του αυξάνεται. Ένα παράδειγμα ενίσχυσης, είναι η μετατροπή ενός σήματος 0-10 mV σε 0-10 V.

### **Γραμμικότητα (Linearization)**

Ο κάθε αισθητήρας διαθέτει ένα χαρακτηριστικό ή ιδιότητα, του οποίου η τιμή μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η φυσική ποσότητα που μετρά ο αισθητήρας. Είναι επιθυμητό οι



μεταβολές της φυσικής ποσότητας να προκαλούν αυστηρά ανάλογες μεταβολές της ιδιότητας του αισθητήρα. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται γραμμικότητα (linearity) και είναι ιδιαίτερης σημασίας. Εάν ο αισθητήρας δεν είναι γραμμικός, τότε η αντιστοίχιση των τιμών του μετρούμενου μεγέθους με τις τιμές εξόδου του αισθητήρα γίνεται με βάση τη καμπύλη βαθμονόμησης. Η μη-γραμμικότητα είναι συχνά εγγενής ιδιότητα του υλικού, από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο αισθητήρας και εν γένει είναι αδύνατο να μηδενιστεί.

### ***Απομόνωση (Isolation)***

Η ηλεκτρική απομόνωση σπάει τη γαλβανική διαδρομή μεταξύ του σήματος εισόδου και σήματος εξόδου. Δηλαδή, δεν υπάρχει φυσική καλωδίωση μεταξύ της εισόδου και εξόδου. Συνήθως το σήμα εισόδου μεταφέρεται στην έξοδο, υπο μορφή οπτικού ή μαγνητικού σήματος, και αναδομείται στην έξοδό του. Με το σπάσιμο της γαλβανικής διαδρομής μεταξύ εισόδου και εξόδου, τυχόν ανεπιθύμητα σήματα που δημιουργούνται στην είσοδο εμποδίζονται από το να περάσουν στην έξοδο.

### ***Φιλτράρισμα (Filtering)***

Τα φίλτρα απορρίπτουν τον ανεπιθύμητο θόρυβο μέσα σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων. Τα φίλτρα διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (low pass filters) χρησιμοποιούνται προκειμένου να αποκλειστούν οι υψηλής συχνότητας θόρυβοι σε ηλεκτρικές μετρήσεις, όπως αυτές των 60 Hz.

### ***Αντιστάθμιση Κρύας Επαφής (Cold Junction Compensation)***

Πρόκειται για μια τεχνολογία που απαιτείται για ακριβείς μετρήσεις με θερμοζεύγη. Μια τάση δημιουργείται στο σημείο σύνδεσης μεταξύ του θερμοζεύγους και του τερματικού της συσκευής DAQ. Έτσι η τεχνολογία CJC βελτιώνει την ακρίβεια των μετρήσεων, παρέχοντας τη θερμοκρασία σε αυτή την ένωση και εφαρμόζει τη κατάλληλη διόρθωση για την απαλοιφή της.

### ***Διέγερση (Excitation)***

Πολλοί αισθητήρες χρειάζονται κάποιο ρεύμα διέγερσης προκειμένου να αποδώσουν τη μετρούμενη επιθυμητή τάση. Προσοχή πρέπει να δοθεί στο ρεύμα διέγερσης γιατί προκαλεί στο αισθητήριο αύξηση της θερμοκρασίας του φαινομένου που οδηγεί σε εσφαλμένες μετρήσεις. Για την αποφυγή του παραπάνω φαινομένου πρέπει να παρέχεται ρεύμα χαμηλότερης διέγερσης.

## 4.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΣΥΣΚΕΥΗ

Στη συνέχεια παρουσιάζονται χαρακτηριστικές φωτογραφίες των επιμέρους τμημάτων της πειραματικής διάταξης καθώς και της πειραματικής τεχνικής που χρησιμοποιήθηκε για την πραγματοποίηση των μετρήσεων.



Εικόνα 29: Αεροσήραγα ανοικτού κυκλώματος



Εικόνα 30: Βασική μονάδα Ανεμομετρία Θερμού Σύρματος



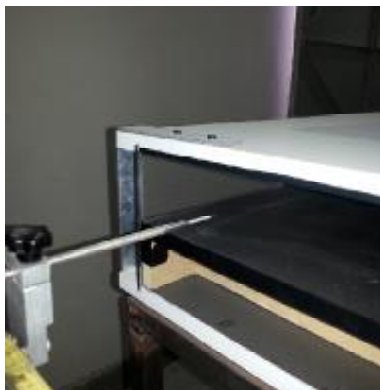
Εικόνα 31: Αισθητήρες θερμού σύρματος, για τη μέτρηση οριακού στρώματος



Εικόνα 32: Αισθητήρες θερμού σύρματος τύπου X, για τη μέτρηση δισδιάστατου πεδίου ροής

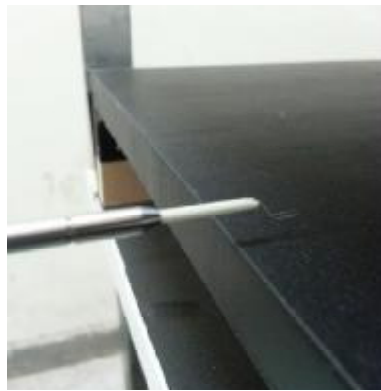


Εικόνα 33: Μηχανισμοί στήριξης και μετακίνησης των αισθητηρίων μέτρησης





Εικόνα 34: Αισθητήρας ανεμομετρίας θερμού σύρματος τύπου X, τοποθετημένος στην έξοδο του καναλιού, για τη μέτρηση του δισδιάστατου πεδίου ταχύτητας



Εικόνα 35: Αισθητήρας ανεμομετρίας μονού θερμού σύρματος, τοποθετημένος στην έξοδο του καναλιού, για τη μέτρηση του οριακού στρώματος

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

### 5.1 ΓΕΝΙΚΑ

#### Πλήρως Ανεπτυγμένη Τυρβώδης Ροή σε Σωλήνες και Αγωγούς

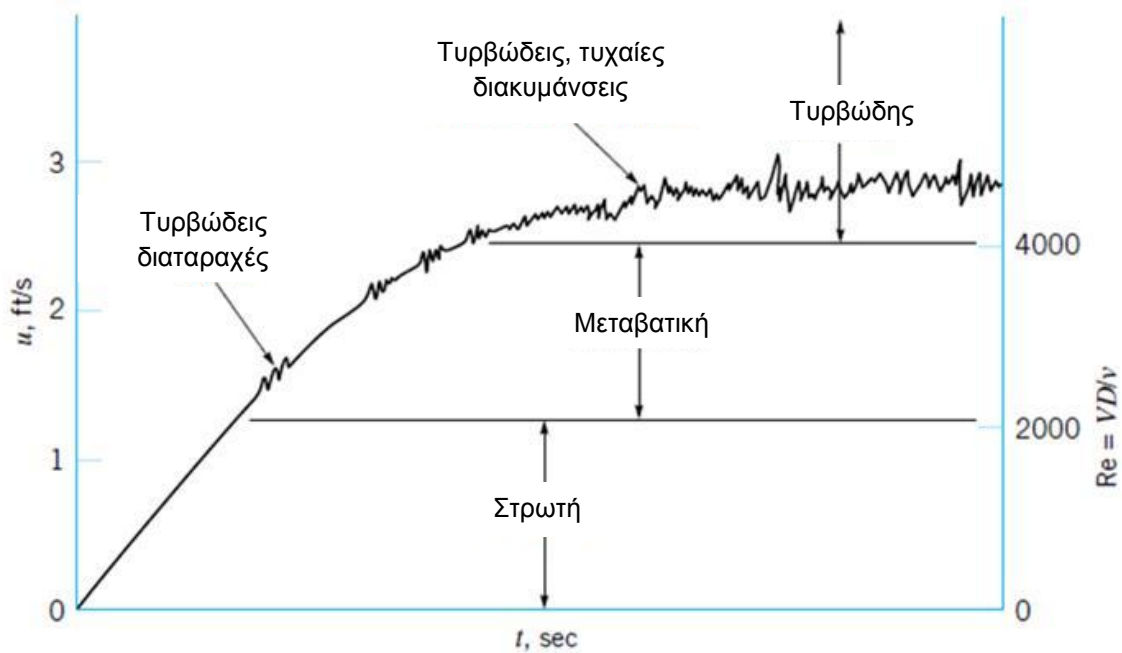
Η τυρβώδης ροή σε σωλήνες είναι πολύ πιο συχνή από τη στρωτή στην πράξη. Αποτελεί ιδιαίτερα πολύπλοκη ροϊκή περίπτωση και παρά τη συσσωρευμένη γνώση που έχει αναπτυχθεί, παραμένει η περιοχή της ρευστομηχανικής που έχει κατανοηθεί λιγότερο.

Θεωρούμε ευθύγραμμο σωλήνα αρχικά γεμάτο με ρευστό σε ηρεμία. Καθώς μια βαλβίδα ανοίγει προοδευτικά και αργά κάθε φορά για να απαλειφθούν μη μόνιμες επιδράσεις, ο αριθμός Reynolds αυξάνει και προκύπτει η εικόνα του Σχήματος 10.

Όπως φαίνεται παρακάτω, για αριθμούς Reynolds μικρότερους από περίπου 2100 η ροή είναι στρωτή, στη ζώνη 2100-4000 μεταβατική όπου η ροή εμφανίζει διακοπτόμενες διαταραχές και για μεγαλύτερες τιμές από περίπου 4000, τυρβώδης.

Ένα τυπικό ίχνος της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας που μετρήθηκε σε δεδομένο σημείο της ροής,  $u=u(t)$ , φαίνεται στην εικόνα 36. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της τυρβώδους ροής είναι ακανόνιστη, τυχαία φύση της χρονοσειράς του ίχνους αυτού. Πολλές σημαντικές ιδιότητες της ροής (πτώση πίεσης, μεταφορά θερμότητας κλπ) εξαρτώνται ισχυρά από την ύπαρξη και φύση των τυρβωδών διακυμάνσεων ή της τυχειότητας όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Σε πολλές περιπτώσεις, απλοποιημένες ανιξώδεις αναλύσεις με χρήση της εξίσωσης Bernoulli δίνουν λογικά αποτελέσματα. Ο λόγος γι αυτό είναι διότι στις περιπτώσεις αυτές οι ιξώδεις επιδράσεις ήταν αμελητέες και η ταχύτητα που χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς ήταν η χρονική μέση τιμή της ταχύτητας,  $\bar{u}$ , η οποία φαίνεται στην εικόνα.





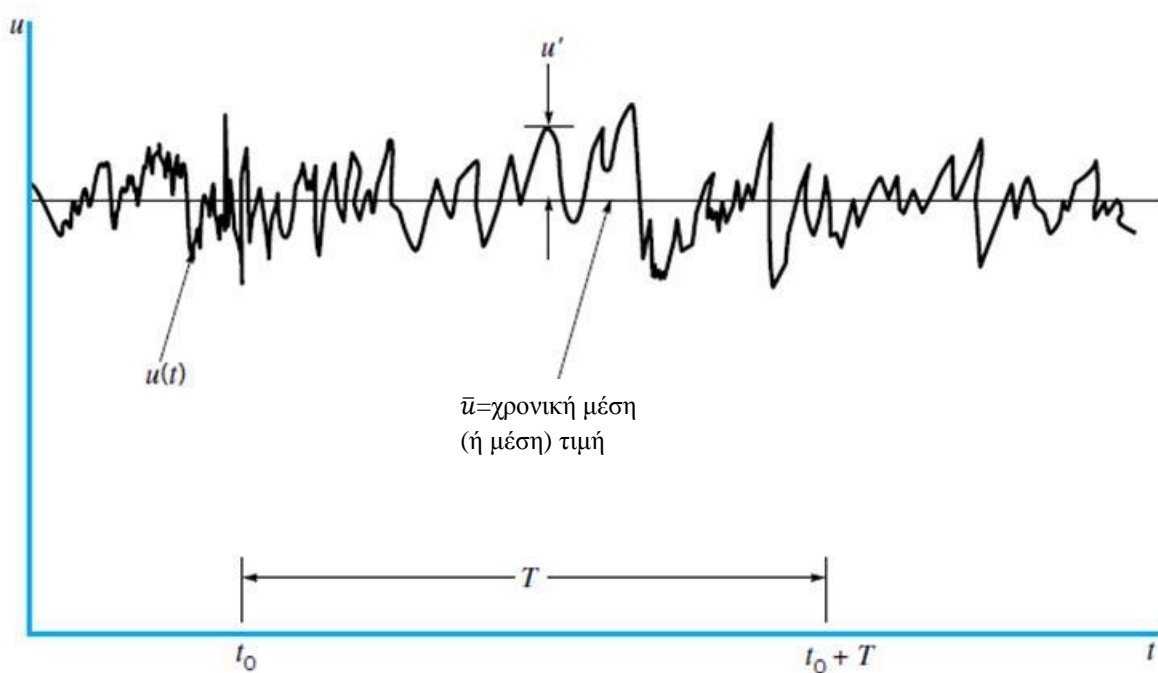
Εικόνα 29. Μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή σε σωλήνα.

Ο υπολογισμός της πτώσης πίεσης, της μετάδοσης θερμότητας και άλλων παραμέτρων δεν θα είναι δυνατός αν δεν συμπεριληφθούν οι φαινομενικά μικρές, αλλά στην πραγματικότητα πολύ σημαντικές επιδράσεις, που σχετίζονται με την τυχαιότητα της ροής.

Οι διαδικασίες μίξης καθώς και οι διαδικασίες μεταφοράς θερμότητας και μάζας είναι σημαντικά πιο ενισχυμένες στην τυρβώδη από ότι στη στρωτή ροή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η τυχαιότητα της τύρβης συμβαίνει σε μακροσκοπική κλίμακα. Παράδειγμα, η έντονη εμφάνιση δινών στο νερό που θερμαίνεται σε κάποιο σκεύος (ακόμα και αν δεν βράζει). Αυτή η πεπερασμένου μεγέθους τυχαία ανάμιξη είναι πολύ αποτελεσματική για τη μεταφορά μάζας και θερμότητας μέσα στο ρευστό και αυξάνει σημαντικά τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταφοράς. Η στρωτή ροή από την άλλη μεριά, μπορεί να ειπωθεί σαν πολύ μικρά αλλά πεπερασμένου μεγέθους σωματίδια τα οποία ρέουν σε στρώματα, το ένα πάνω στο άλλο. Η μόνη τυχαιότητα και ανάμιξη συμβαίνουν στο μοριακό επίπεδο και έχουν σαν αποτέλεσμα πολύ μικρούς ρυθμούς μεταφοράς μάζας, θερμότητας και ορμής.

Σε πολλές περιπτώσεις η τύρβη είναι επιθυμητή. Για τη μεταφορά θερμότητας ανάμεσα στις σπείρες ενός ψυκτικού στοιχείου και στο περιβάλλον ρευστό (συνήθως αέρα) σε μια εγκατάσταση κλιματισμού, ή ανάμεσα στα καυσαέρια και στο νερό σε ένα λέβητα, θα απαιτούνταν τεράστιου μεγέθους εναλλάκτες θερμότητας αν η ροή ήταν στρωτή. Ο καπνός από μια καπνοδόχο θα συνέχιζε για χιλιόμετρα με τη μορφή μιας φλέβας ροής απαρτιζόμενης από ρυπαντές χωρίς να συμβεί γρήγορη διασπορά αυτών στον περιβάλλοντα αέρα αν η ροή του ήταν στρωτή αντί για τυρβώδης. Αν και υπάρχει ανάμιξη σε μοριακό επίπεδο (στρωτή ροή), αυτή είναι αρκετές τάξεις μεγέθους βραδύτερη από την ανάμιξη σε μακροσκοπική κλίμακα (τυρβώδης ροή).





Εικόνα 30. Περιγραφή ροϊκής παραμέτρου σε όρους χρονικής μέσης τιμής,  $\bar{u}$ , και διακύμανσης,  $u'$ .

Σε άλλες περιπτώσεις η στρωτή ροή είναι επιθυμητή. Η πτώση πίεσης σε σωλήνες (και συνεπώς η απαιτούμενη ενέργεια για την κίνηση του ρευστού) θα είναι πολύ μικρότερη για στρωτή ροή. Η αεροδυναμική αντίσταση ενός φτερού αεροπλάνου θα ήταν πολύ μικρότερη αν η ροή του διερχόμενου από αυτό αέρα ήταν στρωτή παρά τυρβώδης.

Οι τυχαίες, χαοτικές διακυμάνσεις που χαρακτηρίζουν την τύρβη συμβαίνουν στις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας, στην πίεση, στη διατμητική τάση, στη θερμοκρασία και σε οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή χαρακτηρίζει το ροϊκό πεδίο. Όπως φαίνεται στη εικόνα 37, αυτές οι ροές περιγράφονται σε όρους των μέσων τιμών των ροϊκών μεταβλητών, πάνω στις οποίες υπερτίθενται οι διακυμάνσεις. Έτσι, αν  $u = u(x, y, z, t)$  η  $x$  συνιστώσα της στιγμιαίας ταχύτητας, τότε η χρονική μέση τιμή αυτής είναι :

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x, y, z, t) dt$$

Εξίσωση 65

όπου το χρονικό διάστημα,  $T$ , είναι πολύ μεγαλύτερο από την περίοδο των πιο αργών διακυμάνσεων και μικρότερο από οποιαδήποτε μη μονιμότητα της μέσης ταχύτητας.

Το κυμαινόμενο μέρος της ταχύτητας,  $u'$ , είναι το χρονικά μεταβαλλόμενο τμήμα το οποίο διαφέρει από τη μέση τιμή

ή

$$u = \bar{u} + u' \quad \text{ογ} \quad u' = u - \bar{u}$$

Εξίσωση 66

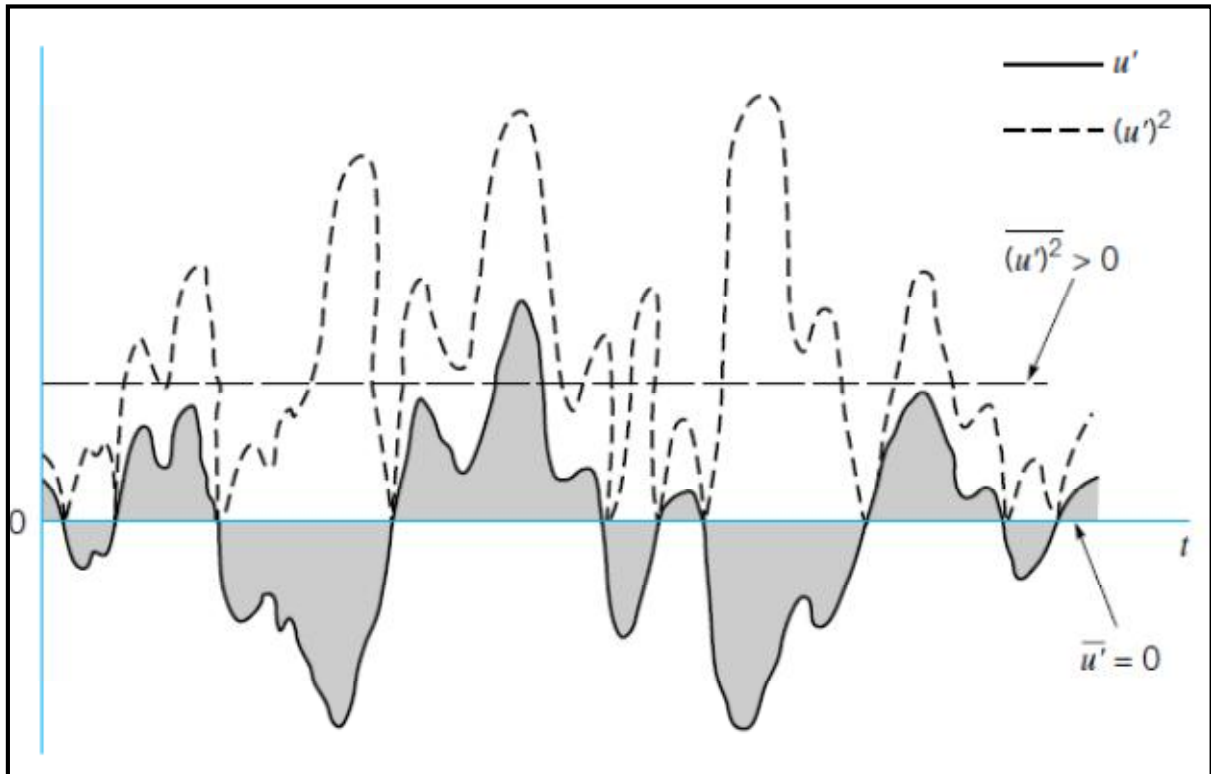
Προφανώς, ο χρονικός μέσος όρος των διακυμάνσεων είναι μηδέν, διότι

$$\begin{aligned} \overline{u'} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} u dt - \bar{u} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \right) \\ &= \frac{1}{T} (T\bar{u} - T\bar{u}) = 0 \end{aligned}$$

Οι διακυμάνσεις κατανέμονται εξ ίσου πάνω και κάτω από τη μέση τιμή. Είναι επίσης φανερό, όπως φαίνεται στη εικόνα 38, ότι εφόσον το τετράγωνο μιας κυμαινόμενης ποσότητας δεν μπορεί να είναι αρνητικό  $[(u')^2 \geq 0]$ , η μέση τιμή του (μέση τετραγωνική τιμή) είναι θετική

$$\overline{(u')^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2 dt > 0$$

Από την άλλη, ο μέσος όρος των γινομένων των διακυμάνσεων, όπως  $\overline{u'v'}$ , μπορεί να είναι μηδέν ή όχι μηδέν (είτε θετικός, είτε αρνητικός).

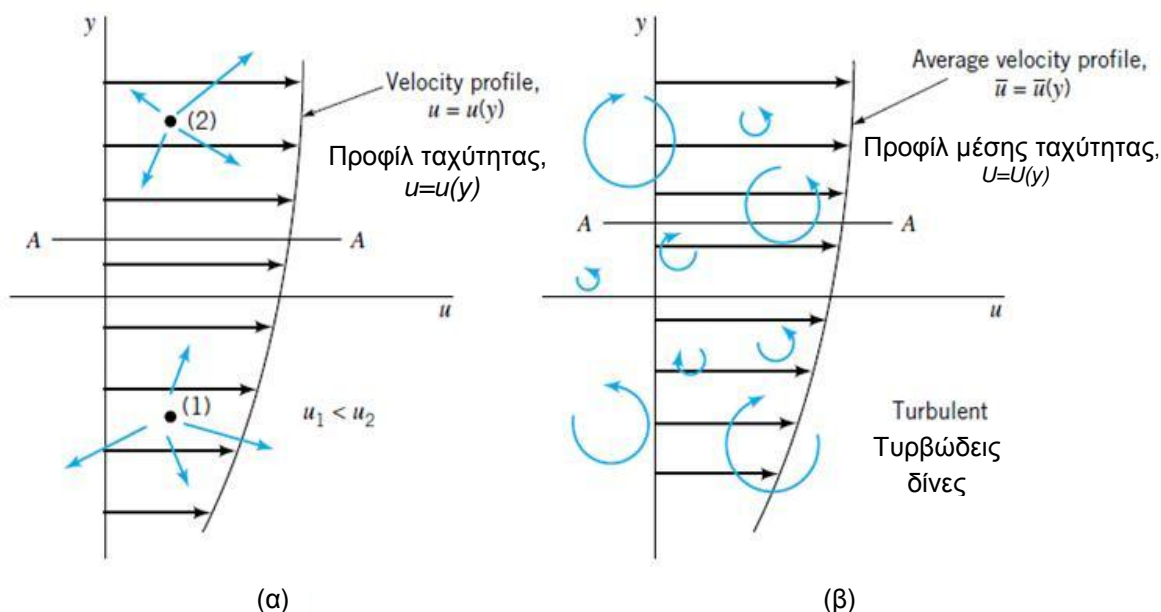


Εικόνα 31. Μέση τιμή των διακυμάνσεων και μέση τιμή του τετραγώνου των διακυμάνσεων.

Η δομή και τα χαρακτηριστικά της τύρβης μπορούν να διαφέρουν από ροή σε ροή. Μια χαρακτηριστική τυρβώδης ιδιότητα που σχετίζεται με το μέγεθος των διακυμάνσεων της ταχύτητας είναι η ένταση της τύρβης (ή το επίπεδο τύρβης), που ορίζεται σαν η τετραγωνική ρίζα της μέσης τετραγωνικής τιμής δια τη μέση ταχύτητα,

$$\mathcal{J} = \frac{\sqrt{\overline{(u')^2}}}{\bar{u}} = \frac{\left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2 dt \right]^{1/2}}{\bar{u}}$$

Καλά σχεδιασμένες αεροσήραγγες έχουν τυπικές τιμές  $\approx 0.01$ , ενώ σε ροές στην ατμόσφαιρα και σε ποταμούς  $\geq 0.1$ . Μια άλλη τυρβώδης παράμετρος που διαφέρει από ροή σε ροή είναι η περίοδος των διακυμάνσεων – η χρονική κλίμακα των διακυμάνσεων. Για ροές όπως ροή νερού από μια βρύση, τυπικές συχνότητες είναι της τάξης των 10, 100 και 1000 Hz, ενώ για άλλες όπως το Ρεύμα του Κόλπου στον Ατλαντικό Ωκεανό ή η ροή στην ατμόσφαιρα του Δία, οι χαρακτηριστικές τυχαίες ταλαντώσεις μπορεί να έχουν περιόδους της τάξης των ωρών, ημερών, ή και περισσότερο.



Εικόνα 32.(α) Στρωτή ροή όπου η διατμητική τάση προκαλείται από την τυχαία κίνηση των μορίων. (β) Τυρβώδης ροή που συνίσταται από ένα σύνολο τυχαίων τρισδιάστατων δινών.

Για τη διατμητική τάση στη στρωτή ροή ισχύει  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ , αλλά κάτι ανάλογο δεν ισχύει για την τυρβώδη διατμητική τάση όπως έχουν δείξει πολλές θεωρητικές και πειραματικές μελέτες. Δηλ για τυρβώδη ροή,  $\tau \neq \mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ . Η εξήγηση βρίσκεται στην αιτία που προκαλεί τη διάτμηση στη μια και στην άλλη περίπτωση.

Στη στρωτή ροή τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σε στρώματα. Κάθε στρώμα περιβάλλεται από γειτονικά, που το ένα κινείται ελαφρώς γρηγορότερα και το άλλο ελαφρώς αργότερα από αυτό. Τα μόρια του ρευστού εκτελούν σχεδόν τυχαία, [διότι υπάρχει μια ελαφρά προτίμηση προς τη διεύθυνση της ροής, βλ εικόνα 39(α)], κίνηση σε όλες τις διευθύνσεις. Έτσι καθώς τα μόρια διαπηδούν από ένα στρώμα σε άλλο μέσω ενός επιπέδου (πχ επίπεδο  $A - A$ ) κατευθύνονται σε περιοχές υψηλότερης ταχύτητας όσα κινούνται προς τα πάνω ή χαμηλότερης όσα κινούνται προς τα κάτω. Έτσι τα μεν ανοδικά κινούμενα επιταχύνονται και επιβραδύνονται τα κινούμενα προς τα κάτω. Αυτή η ανταλλαγή ορμής, προερχόμενη από μοριακή κίνηση, προκαλεί (μακροσκοπικά) διατμητική τάση. Η διατμητική τάση υπάρχει όταν υπάρχει κλίση της ταχύτητας,  $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ , αλλιώς η  $x$  συνιστώσα της ορμής είναι ακριβώς η ίδια και για τα ανοδικά και για τα καθοδικά κινούμενα μόρια. Επίσης, υπάρχουν και ελκτικές δυνάμεις ανάμεσα στα μόρια.

Ο συνδυασμός των δυο παραπάνω επιδράσεων δίνει το γνωστό νόμο του Newton:  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ , όπου σε μοριακό επίπεδο η σταθερά ιξώδους  $\mu$  σχετίζεται με τη μάζα και την ταχύτητα (θερμοκρασία) των τυχαία κινούμενων μορίων.

Αν και η τυχαία κίνηση των μορίων συμβαίνει και στην τυρβώδη ροή, υπάρχει ένας άλλος παράγοντας που είναι πιο σημαντικός εδώ. Ένας απλοποιημένος τρόπος περιγραφής της τυρβώδους ροής είναι να θεωρήσουμε ότι αυτή συνίσταται από ένα σύνολο τυχαίων, τρισδιάστατων περιδινούμενων κινήσεων (δινών) όπως φαίνεται (σε μια διάσταση μόνο) στη

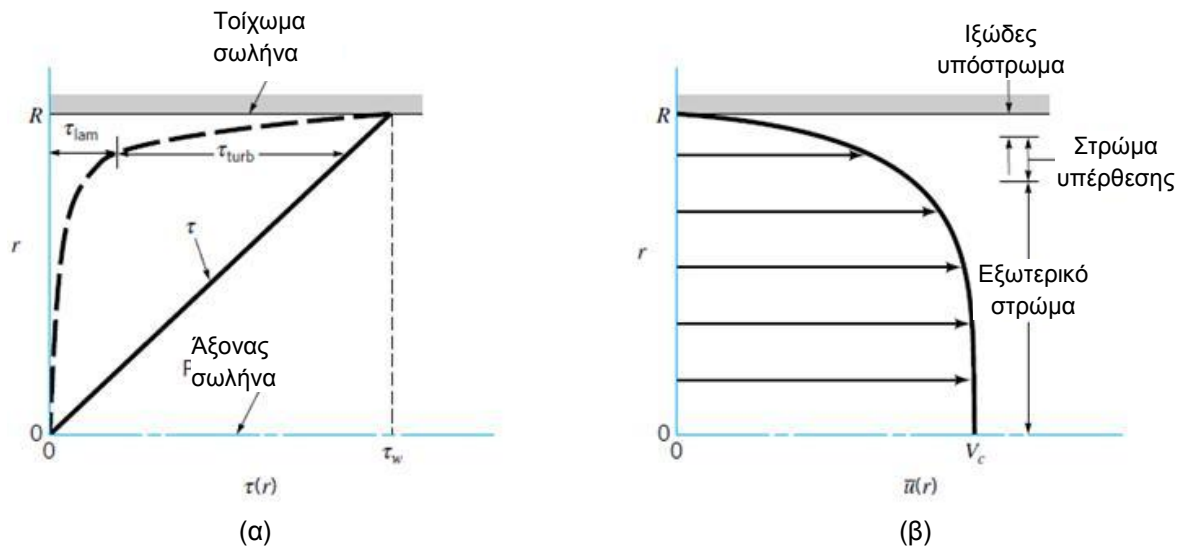
εικόνα 39 (β). Το μέγεθος των δινών εκτείνεται από πολύ μικρές διαμέτρους (τάξης μεγέθους ενός σωματιδίου ρευστού) σε πολύ μεγάλες διαμέτρους (τάξης μεγέθους του συνολικού ροϊκού πεδίου). Αυτές μετακινούνται τυχαία, ακανόνιστα μεταφέροντας μάζα με ταχύτητα  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ . Αυτή η δομή δινών προάγει σε μεγάλο βαθμό την ανάμιξη μέσα στο ρευστό. Επίσης αυξάνει τη μεταφορά της  $x$  συνιστώσας της ορμής διαμέσου του επιπέδου  $A - A$ . Δηλαδή, πεπερασμένου μεγέθους τμήματα ρευστού (και όχι απλά μεμονωμένα μόρια όπως στη στρωτή ροή) μεταφέρονται με τυχαίο τρόπο διαμέσου αυτού του επιπέδου, έχοντας σαν αποτέλεσμα μεγάλη (σε σύγκριση με τη στρωτή ροή) διατμητική δύναμη.

Οι τυχαίες συνιστώσες της ταχύτητας που συνεισφέρουν σε αυτή τη μεταφορά ορμής (και επακόλουθα στη διατμητική δύναμη) είναι η  $u'$  (για τη  $x$  συνιστώσα της ταχύτητας) και η  $v'$  (για το ρυθμό μεταφοράς μάζας που διασχίζει το επίπεδο). Τελικά, η διατμητική τάση στο επίπεδο  $A - A$  είναι:

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u' v'} = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}}$$

**Εξίσωση 67**

Αν η ροή είναι στρωτή,  $u' = v' = 0$ , οπότε  $\overline{u' v'} = 0$  και η (16) καταλήγει στη γνωστή *στρωτή διατμητική τάση*,  $\tau_{\text{lam}} = \mu d\bar{u}/dy$  που προκαλείται από την τυχαία κίνηση μορίων. Στην τυρβώδη ροή, η *τυρβώδης διατμητική τάση*,  $\tau_{\text{turb}} = -\overline{\rho u' v'}$ , είναι θετική. Έτσι, η διατμητική τάση είναι μεγαλύτερη στην τυρβώδη απ' ό,τι στη στρωτή ροή. Όροι της μορφής  $-\overline{\rho u' v'}$  (ή  $-\overline{\rho v' w'}$  κλπ) ονομάζονται *τάσεις Reynolds*. Αν και το σχετικό μέγεθος των όρων  $\tau_{\text{lam}}$  και  $\tau_{\text{turb}}$  διαφέρει από ροή σε ροή, μια τυπική εικόνα φαίνεται στο Σχήμα 14(α). Υπενθυμίζεται [βλ εξίσωση (4)] ότι η διατμητική τάση είναι ανάλογη της απόστασης από τον άξονα του σωλήνα. Σε μια πολύ στενή ζώνη κοντά στο τοίχωμα (το *ιξώδες υπόστρωμα*), η στρωτή διατμητική τάση κυριαρχεί. Μακριά από το τοίχωμα (στο *εξωτερικό στρώμα*) το τυρβώδες μέρος της διατμητικής τάσης κυριαρχεί. Η μετάβαση ανάμεσα στις δυο αυτές περιοχές γίνεται στο *στρώμα υπέρθεσης*. Το αντίστοιχο προφίλ ταχύτητας φαίνεται στο Σχήμα 14(β). Τυπικά η τιμή της  $\tau_{\text{turb}}$  είναι 100 με 1000 φορές μεγαλύτερη της  $\tau_{\text{lam}}$  στην εξωτερική περιοχή, ενώ το αντίστροφο συμβαίνει στο ιξώδες υπόστρωμα. Η σωστή μοντελοποίηση (και άρα γνώση) ενός τυρβώδους πεδίου εξαρτάται από τη γνώση της  $\tau_{\text{turb}}$ , η οποία με τη σειρά της απαιτεί γνώση των διακυμάνσεων  $u'$  και  $v'$ , ή του όρου  $\overline{\rho u' v'}$ . Παρά τον όγκο των πειραματικών και υπολογιστικών προσπαθειών που έχουν γίνει σ' αυτή την κατεύθυνση και την οπωσδήποτε σημαντική ενόραση που έχει ήδη επιτευχθεί, πολλά απομένουν ακόμα να φωτισθούν.



Εικόνα 33. Δομή της τυρβώδους ροής σε σωλήνα. (α) Διατμητική τάση. (β) Μέση ταχύτητα.

Μια εναλλακτική έκφραση για την τυρβώδη διατμητική τάση δίνεται σε όρους του ιξώδους δίνης,  $\eta$ , που προτάθηκε από τον Boussinesq:

$$\tau = \eta \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Εξίσωση 68

Κατ' αναλογία με τη στρωτή περίπτωση. Το ιξώδες δίνης, αντίθετα με το απόλυτο ιξώδες,  $\mu$ , το οποίο έχει γνωστή τιμή για δεδομένο ρευστό, είναι συνάρτηση και του ρευστού και των ροϊκών συνθηκών. Η τιμή του αλλάζει από μια τυρβώδη ροή σε μια άλλη και από ένα σημείο μιας τυρβώδους ροής σε ένα άλλο. Μια από τις ημιεμπειρικές θεωρίες που έχουν προταθεί για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του ιξώδους δίνης προέρχεται από τον Prandtl. Αυτός πρότεινε ότι μια τυρβώδης διεργασία μπορεί να ειπωθεί σαν τυχαία μετακίνηση τμημάτων ρευστού σε μια συγκεκριμένη απόσταση,  $\ell_m$ , το μήκος μίξης από μια περιοχή με κάποια ταχύτητα σε μια άλλη με διαφορετική ταχύτητα. Με βάση κάποιες υποθέσεις, το μήκος μίξης δίνεται από

$$\eta = \rho \ell_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

Έτσι, η τυρβώδης διατμητική τάση είναι

$$\tau_{\text{turb}} = \rho \ell_m^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

Εξίσωση 69

Το πρόβλημα δηλαδή μετατίθεται στην εύρεση του μήκους μίξης το οποίο δεν είναι σταθερό σε όλη την έκταση της ροής.

Το αποτέλεσμα όλων αυτών είναι ότι δεν υπάρχει ένα γενικό μοντέλο που να μπορεί να προβλέψει με ακρίβεια τη διατμητική τάση σε τυρβώδη ροή. Χωρίς αυτή την πληροφορία είναι αδύνατο να ολοκληρωθεί η εξίσωση της ορμής για να ληφθεί το προφίλ ταχύτητας ή κάποια άλλη ροϊκή παράμετρος, όπως έγινε με τη στρωτή ροή.

Στην εικόνα 40 είδαμε τις τρεις περιοχές που χωρίζεται το πεδίο ταχύτητας για πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνα, στις οποίες ο χαρακτήρας της ροής είναι πολύ διαφορετικός. Με διαστατική ανάλυση σε κάθε στρώμα της ροής και ταίριασμα των αποτελεσμάτων στο στρώμα υπέρθεσης μπορούμε να λάβουμε το τυρβώδες προφίλ ταχύτητας σε λείο σωλήνα.

Στο ιξώδες υπόστρωμα το προφίλ ταχύτητας γράφεται σε αδιάστατη μορφή

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{yu^*}{\nu}$$

**Εξίσωση 70**

όπου  $y = R - r$  η απόσταση από το τοίχωμα του σωλήνα,  $\bar{u}$  η μέση χυονιστώσα της ταχύτητας,  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες ( $= \mu/\rho$ ) και  $u^* = (\tau_w / \rho)^{1/2}$  η ταχύτητα τριβής. Η  $u^*$  δεν είναι κάποια ταχύτητα της ροής – είναι μια ποσότητα χρήσιμη για την ανάλυση της ροής σε οριακά στρώματα και έχει διαστάσεις ταχύτητας. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 15, η (19) – η οποία συχνά αναφέρεται σαν νόμος του τοιχώματος - ισχύει για πολύ μικρές αποστάσεις από το λείο τοίχωμα, για  $0 \leq yu^*/\nu \lesssim 5$ .

Διαστατική ανάλυση δείχνει ότι στο στρώμα υπέρθεσης η ταχύτητα μεταβάλλεται σαν λογάριθμος του  $y$ :

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.5 \ln \left( \frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.0$$

**Εξίσωση 71**

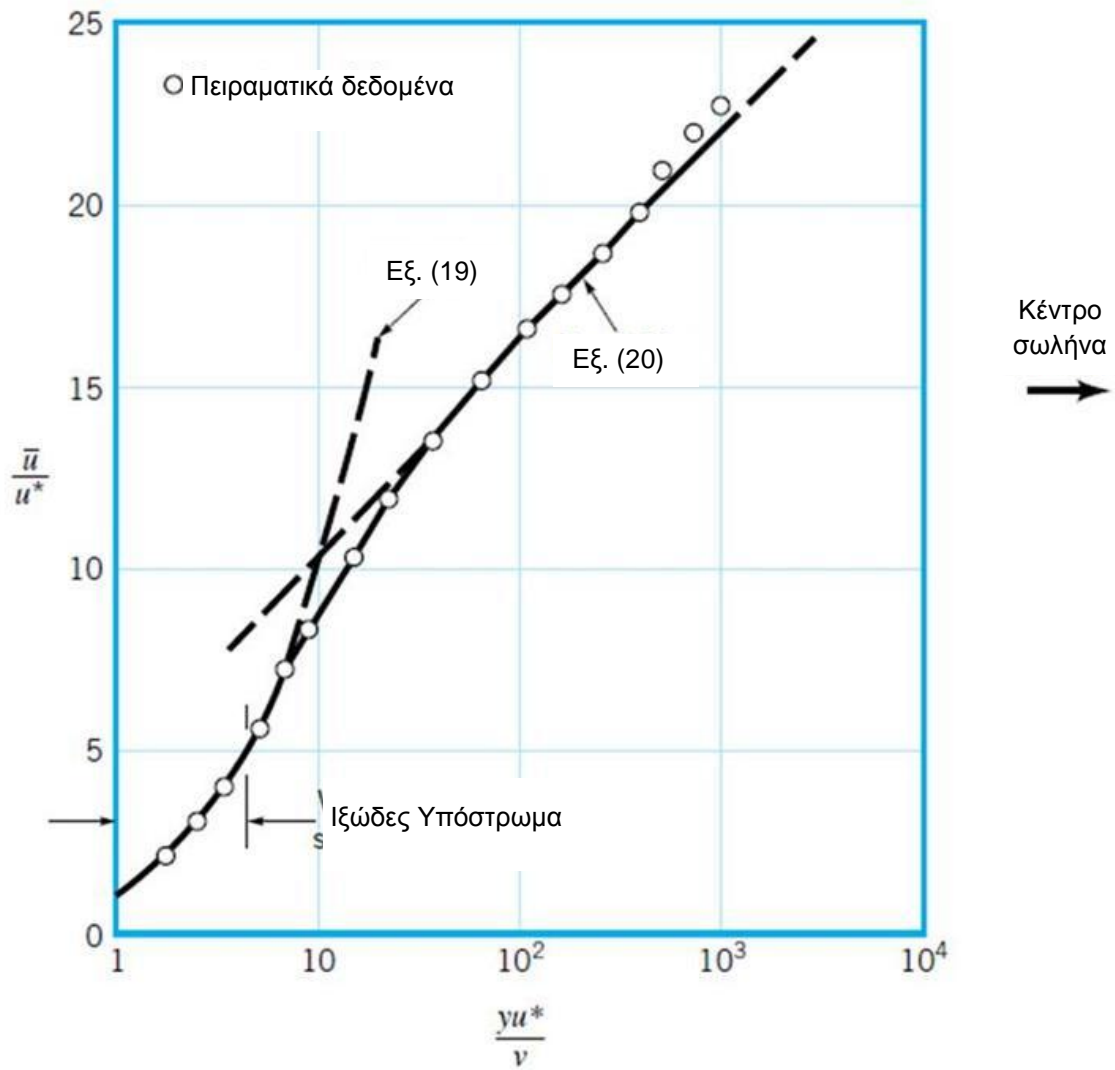
όπου οι σταθερές 2.5 και 5.0 έχουν βρεθεί πειραματικά. Όπως φαίνεται στην εικόνα 41, για περιοχές όχι πολύ κοντά στο τοίχωμα αλλά και ούτε πολύ κοντά στο κέντρο του σωλήνα, η (71) προσεγγίζει ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα. Να σημειωθεί ότι η οριζόντια κλίμακα είναι λογαριθμική, έτσι το μέγεθος του ιξώδους υποστρώματος φαίνεται υπερβολικά μεγάλο σε σχέση με το υπόλοιπο της ροής. Στην πραγματικότητα είναι εξαιρετικά λεπτό.

Στην κεντρική περιοχή της ροής (εξωτερικό στρώμα) μια ικανοποιητική προσέγγιση των πειραματικών αποτελεσμάτων για τη μέση ταχύτητα είναι η  $(V_c - \bar{u})/u^* = 2.5 \ln(R/y)$ , όπου  $V_c$  η ταχύτητα στο κέντρο του σωλήνα. Μια άλλη συχνά χρησιμοποιούμενη έκφραση είναι ο εμπειρικός εκθετικός νόμος της ταχύτητας

$$\frac{\bar{u}}{V_c} = \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n}$$

**Εξίσωση 72**

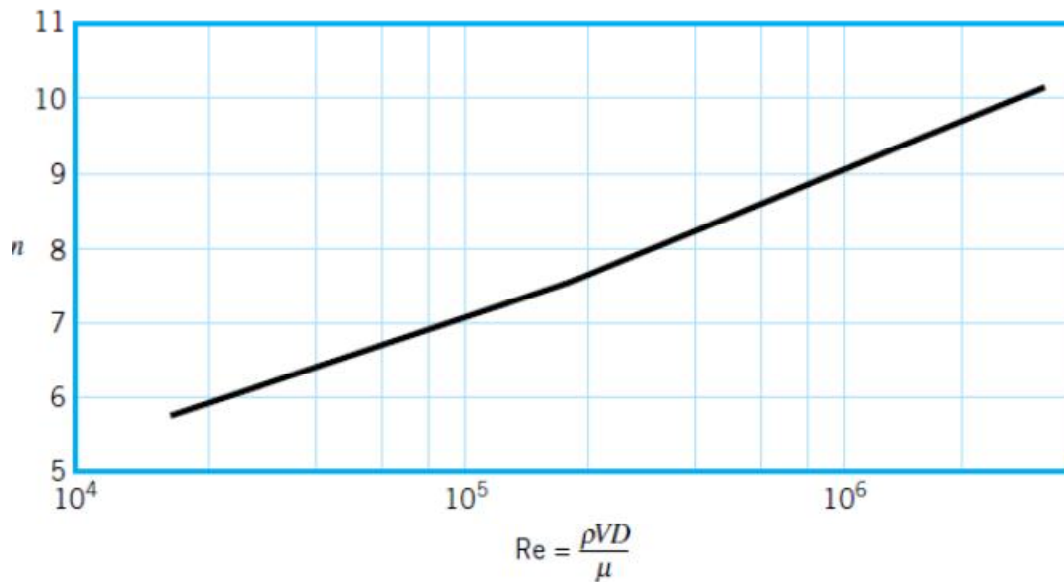
## 5.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ - ΣΧΟΛΙΑ



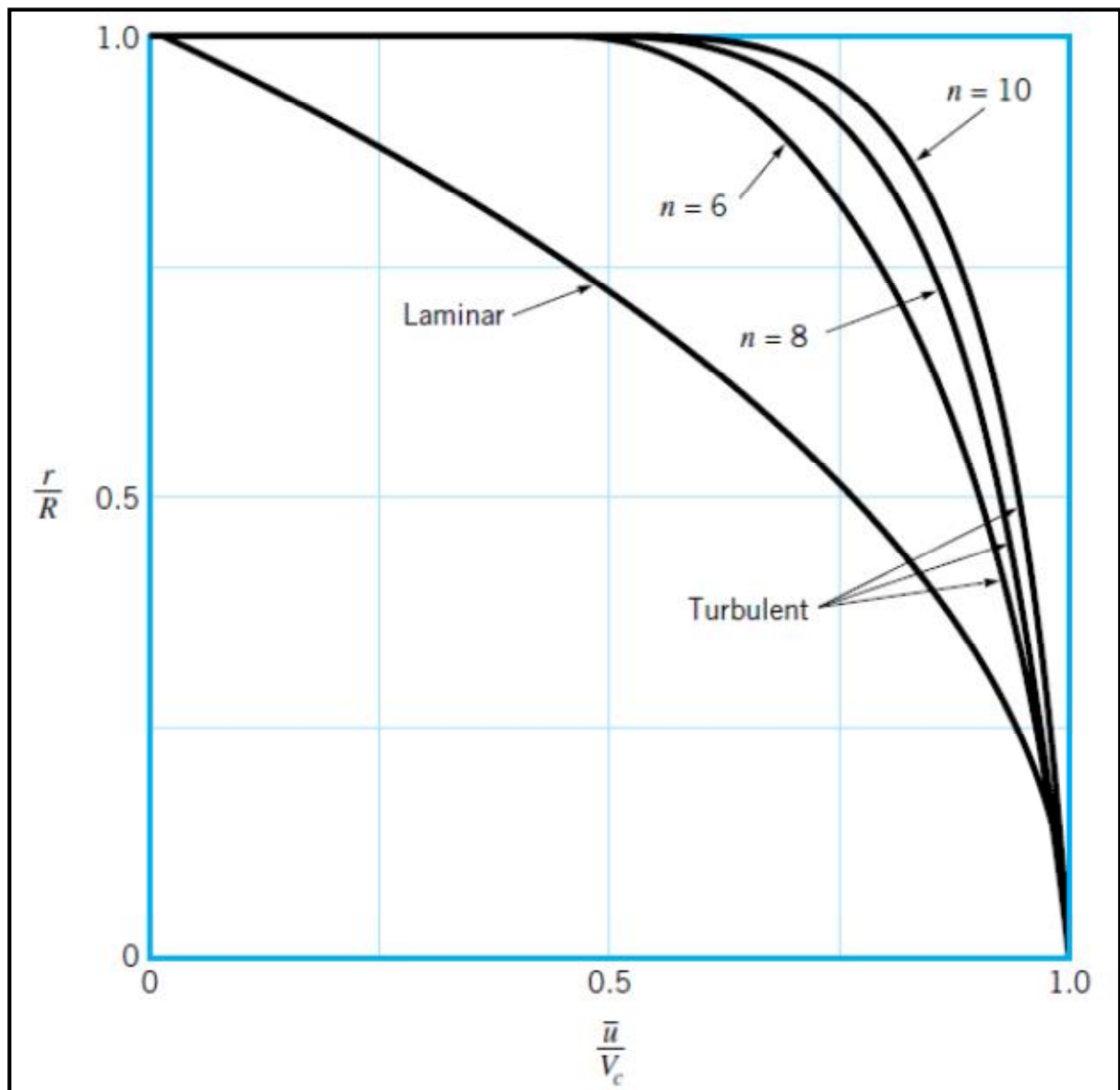
Εικόνα 34. Τυπική μορφή του τυρβώδους προφίλ ταχύτητας σε σωλήνα.



Όπως φαίνεται στην εικόνα 42, ο εκθέτης  $n$  μεταβάλλεται με τον  $Re$  με την τιμή  $n = 7$  να χρησιμοποιείται συχνότερα σε πρακτικές εφαρμογές. Τυπικά προφίλ ταχύτητας σύμφωνα με τον εκθετικό νόμο φαίνονται στην εικόνα 43. Η (21) δεν μπορεί να είναι έγκυρη κοντά στο τοίχωμα διότι σύμφωνα με αυτήν η κλίση της ταχύτητας είναι άπειρη εκεί. Επίσης δεν είναι έγκυρη ακριβώς στο κέντρο διότι δεν δίνει  $d\bar{u}/dr = 0$  για  $r = 0$ . Ωστόσο, έχει καλή συμφωνία με τις μετρήσεις ταχύτητας στο μεγαλύτερο εγκάρσιο μήκος του σωλήνα. Από την εικόνα 43 προκύπτει ότι τα τυρβώδη προφίλ είναι περισσότερο «επίπεδα» από το στρωτό προφίλ και αυτή η επιπεδότητα αυξάνει με τον  $Re$  (δηλ με το  $n$ ). Αυτό είναι αποτέλεσμα του αυξημένου ρυθμού ανάμιξης των τυρβωδών ροών ο οποίος τείνει να ομογενοποιήσει το προφίλ ταχύτητας.

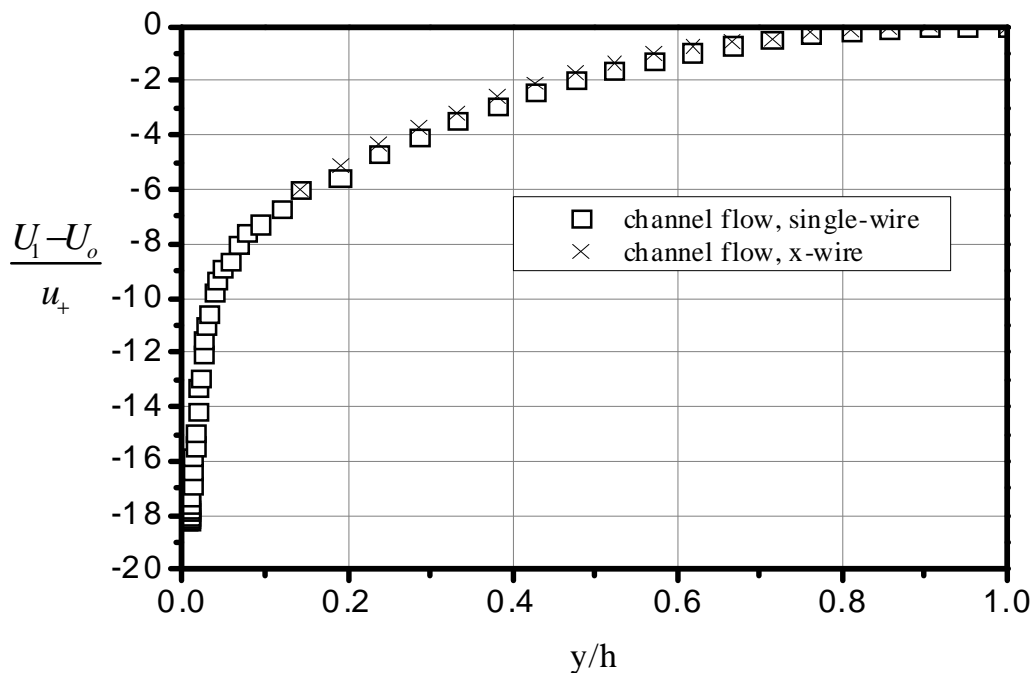


Εικόνα 35. Εκθέτης,  $n$ , για τον εκθετικό νόμο του προφίλ ταχύτητας.

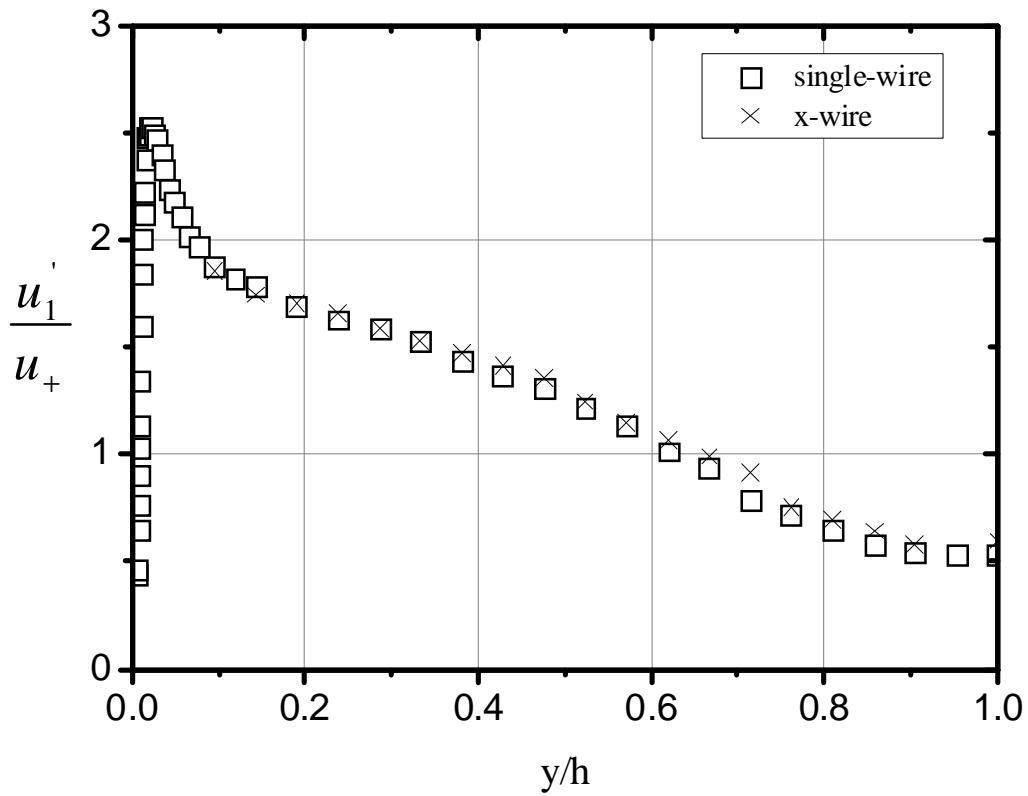


Εικόνα 36. Τυπικά προφίλ ταχύτητας στρωτής και τυρβώδους ροής.

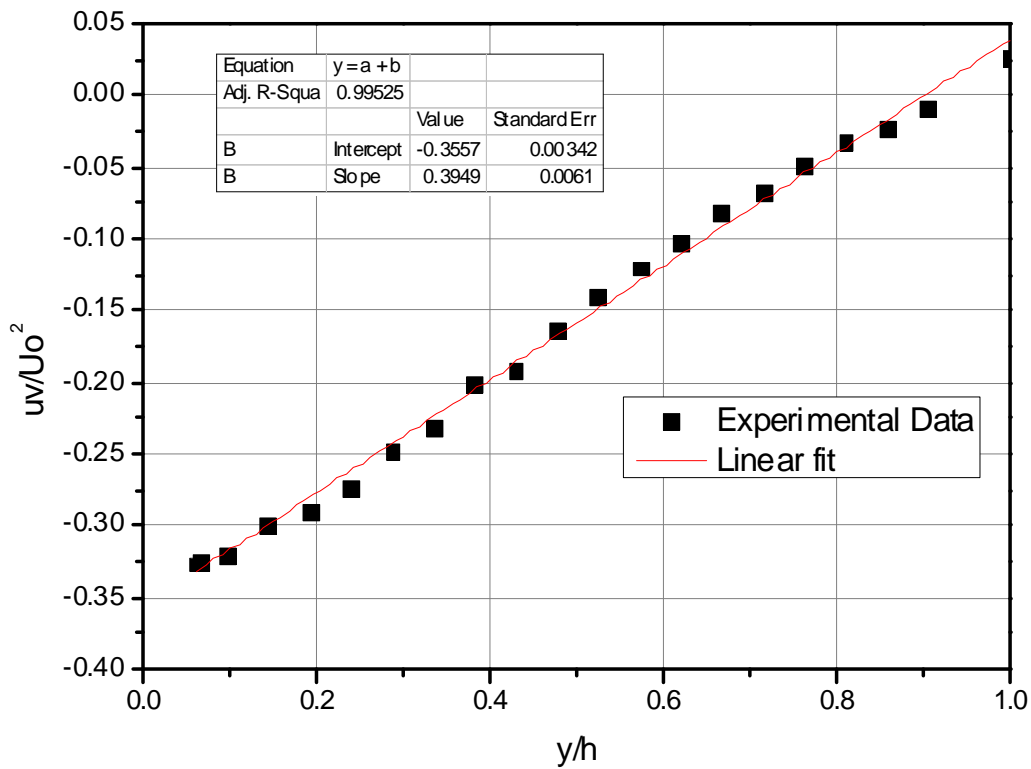
Πρέπει να σημειωθεί ότι όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως δεν αφορούν μόνο ροές σε σωλήνες. Η ανάλυση που παρατέθηκε νωρίτερα καθώς και οι εξισώσεις περιγραφής ισχύουν και στην περίπτωση σωλήνων ορθογωνικής διατομής (που αποκαλούνται συνήθως αγωγοί ή κανάλια). Στις εξισώσεις περιγραφής που δόθηκαν προηγουμένα, η ακτίνα,  $R$ , αντικαθίσταται με το μισό του ύψους,  $h$ , του αγωγού. Στις εικόνες 44 έως 48 παρουσιάζονται αδιάστατα αποτελέσματα μετρήσεων σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε ορθογωνικό αγωγό με χρήση Ανεμομετρίας Θερμού Νήματος. Χρησιμοποιήθηκαν απλοί αισθητήρες και αισθητήρες τύπου X. Η ταχύτητα τριβής (χρήσιμη για την αδιαστατοποίηση και σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με αντίστοιχα θεωρητικά) υπολογίσθηκε άμεσα, με μέτρηση της πίεσης κατά μήκος του αγωγού και τον υπολογισμό της κλίσης  $dp/dx$  από τα πειραματικά δεδομένα. Τα αποτελέσματα για τη μέση ταχύτητα (Σχήματα 18, 21 και 22) δείχνουν πολύ καλή συμφωνία ανάμεσα στον απλό αισθητήρα και τον αισθητήρα X, καθώς και με τις θεωρητικές καμπύλες περιγραφής. Το Σχήμα 19 δείχνει ότι οι μετρήσεις των διακυμάνσεων της αξονικής ταχύτητας είναι ταυτόσημες και για τους δυο αισθητήρες. Στο Σχήμα 20 φαίνεται ότι τα πειραματικά αποτελέσματα για την τυρβώδη διατμητική τάση ακολουθούν την αναμενόμενη γραμμική μεταβολή.



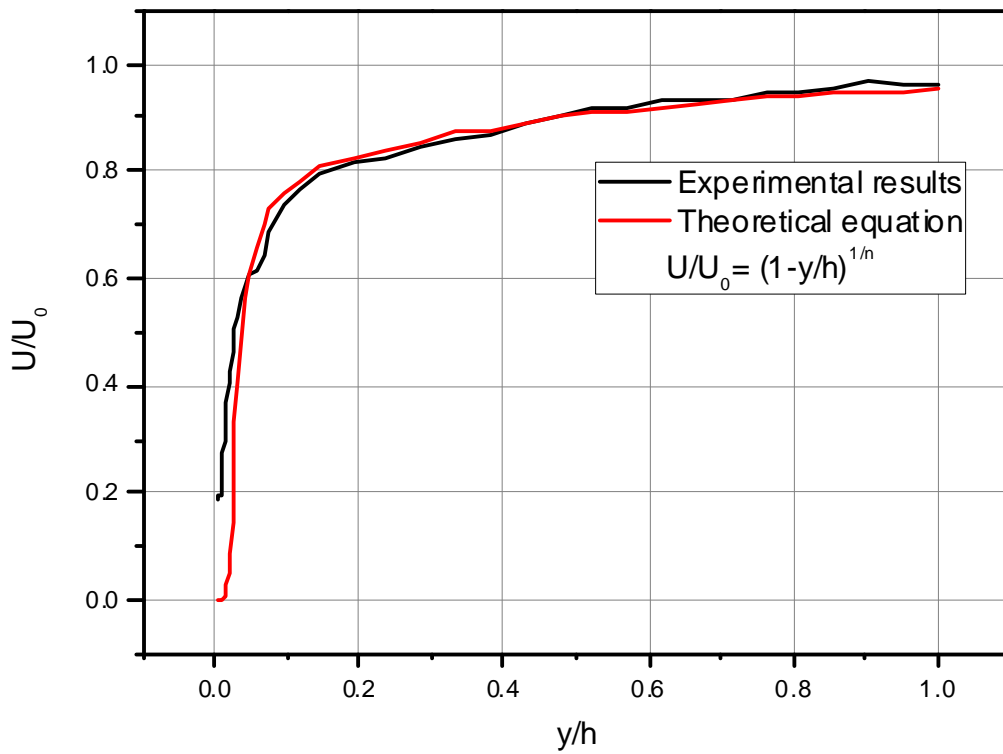
Εικόνα 37. Τυπικά αδιάστατα προφίλ της μέσης διαμήκους συνιστώσας της ταχύτητας μετρημένα με αισθητήρες μονού και διπλού σύρματος ( $h=21$  mm,  $U_o=12.129$  m/s,  $u_+($  αισθητήρας μονού σύρματος) $=0.5387$  m/s,  $u_+($  αισθητήρας διπλού σύρματος) $=0.556$  m/s)



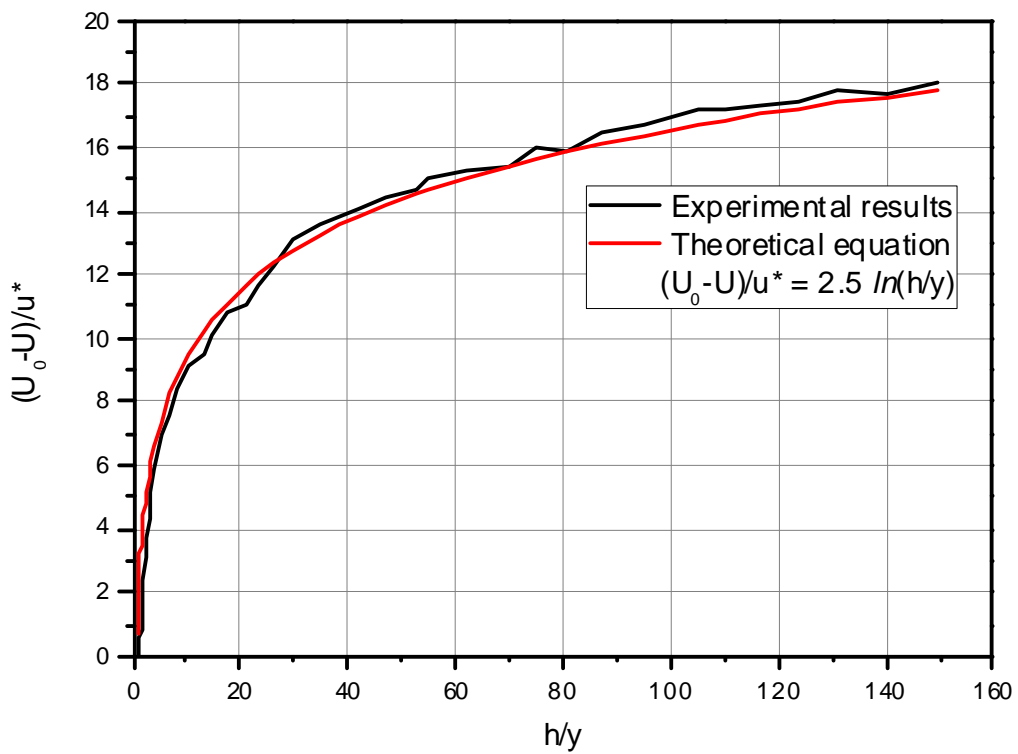
Εικόνα 38. Τυπικά αδιάστατα προφίλ των διακυμάνσεων της διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας μετρημένα με αισθητήρες μονού και διπλού σύρματος



Εικόνα 39. Τυπικό αδιάστατο προφίλ των διατμητικών τάσεων Reynolds, μετρημένο με αισθητήρα διπλού σύρματος



Εικόνα 40. Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων με τη θεωρία ( $n=7$ )



Εικόνα 41. Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων με τη θεωρία

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Bicking R.E. Fundamentals of Pressure Sensor Technology. [www.sensormag.com](http://www.sensormag.com),1998
2. National Instruments. Strain gauge measurements – A tutorial, Application Note 078. [www.ni.com](http://www.ni.com), 1998.
3. Cavo, A., Lemonis, G., Panidis, Th. (2007). Performance of a 12-sensor vorticity probe in the near field of a rectangular turbulent jet. Exp. in Fluids 43, 17-30.
4. Flika Aj. Apistolou. Majāmata MetewrologĐac kai KlimatologĐac. Ekdiseic Zāth, JessalonĐkh, 1992.
5. Hinze J.O., 1975, Turbulence, 2nd edition (New York: McGraw-Hill)
6. Lemonis G. C. (1995). An experimental study of the vector fields of velocity and vorticity in turbulent flows. PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.
7. Levich E., Tsinober A. (1983). On the role of helical structures in three-dimensional turbulent flow, Phys. Lett. A 99, 321.
8. Levich E., Tsinober A. (1983). On the role of helical structures in three-dimensional turbulent flow, Phys. Lett. A 99, 321.
9. Lomas C.G., 1986, Fundamentals of Hot-wire Anemometry, (Cambridge: Cambridge University Press)
10. Perry A.E., 1982, Hot-wire Anemometry, (Oxford: Clarendon)
11. <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/982/1/PHD.pdf>
12. StreamWare Manual
13. [my.math.upatras.gr/attachment.php?attachmentid=411](http://my.math.upatras.gr/attachment.php?attachmentid=411)
14. Έλεγχος του οριακού στρώματος : η μέθοδος απορρόφησης – έγχυσης, Κορμανιώτης Ευάγγελος, 2006, <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/handle/10889/884#sthash.oR19Qm67.dpuf>
15. Διερεύνηση τυρβώδους ορθογωνικής δέσμης εκροής, Τσάβος Αλέξανδρος, 2008-06-03, <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/handle/10889/982#sthash.mbTvGmLY.dpuf>

16. [http://www.hep.upatras.gr/class/download/ais\\_mik\\_sis\\_sil\\_ded/sensornotes.pdf](http://www.hep.upatras.gr/class/download/ais_mik_sis_sil_ded/sensornotes.pdf)
17. CAPGO Data Acquisition and Data Logging Web Page:  
<http://www.capgo.com/Resources/Sensors/Temperature/TempHome/TempMeasurement.html>.
18. Omegadyne, Pressure Transducers – Installation and Use:<http://www.omegadyne.com>.
19. Omegadyne, Waterhammer - A complex phenomenon with a simple solution:  
<http://www.omegadyne.com>.