

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΡΕΜΑΣΤΗΣ ΣΙΔΗΡΟΔΡΟ-
ΜΙΚΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ 40 m ΜΕ
ΤΟΞΩΤΟ ΦΟΡΕΑ**



ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΑΛΕΒΡΟΝΤΑΣ ΧΡΗΣΤΟΣ (Α.Μ. 5862)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΑΤΡΑ 2014

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Πτυχιακή Εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Δυτικής Ελλάδας και ασχολείται με την μελέτη της στατικής αντοχής μιας κρεμαστής σιδηροδρομικής γέφυρας ανοίγματος 40 μέτρων με τοξωτό φορέα.

Το κατάστρωμα της γέφυρας στηρίζεται πάνω σε δύο παράλληλες ολόσωμες δοκούς οι οποίες μέσω κατακόρυφων συρματόσχοινων ανάρτησης που φέρουν πάνω τους κοχλίες για την σύσφιξη τους, συνδέονται με το τοξωτό φορέα ο οποίος είναι από ενισχυμένο χάλυβα.

Η στατική μελέτη της κύριας δοκού όσο και του τοξωτού φορέα έγινε με υπολογισμούς με την μέθοδο της επαλληλίας και το θεώρημα Castigliano, αλλά και με ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.

Ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Ανδρέα Γιαννόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. για την πολύτιμη βοήθεια στην εκπόνηση της Πτυχιακής Εργασίας.

Αλέβροντας Χρήστος

Πάτρα

Μάιος 2014

Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστή: Ο κάτωθι υπογεγραμμένος σπουδαστής έχω επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, έχω δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μου όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησα και έλαβα ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνω επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχω ενσωματώσει στην εργασία μου προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχω πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχω αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Ο σπουδαστής

Αλέβροντας Χρήστος

.....

(Υπογραφή)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αυτή η Πτυχιακή Εργασία αναφέρεται στην στατική μελέτη μιας κρεμαστής σιδηροδρομικής γέφυρας ανοίγματος 40 μέτρων. Η κρεμαστή σιδηροδρομική γέφυρα ανοίγματος 40 μέτρων αποτελείται από δύο τοξωτούς φορείς, δύο κύριες δοκούς και επτά αναρτήσεις με συρματόσχοινα που συγκρατούν τις κύριες δοκούς από τους τοξωτούς φορείς. Αρχικά θα μιλήσουμε για κάποια θεωρητικά θέματα πάνω στις γέφυρες και ειδικότερα πάνω στις σιδηροδρομικές γέφυρες και έπειτα θα υπολογίσουμε το συνολικό βάρος που θα έχει η γέφυρα με βάση το βιβλίο Σιδηραί Γέφυραι του Κωστέα, στην συνέχεια θα γίνει η στατική μελέτη στην μια κύρια δοκό καθώς και στον έναν τοξωτό φορέα λόγω συμμετρικής διάταξης της γέφυρας, η στατική μελέτη θα γίνει με δύο τρόπους με αναλυτικούς υπολογισμούς και με επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία στο SAP2000.

Στο πρώτο Κεφάλαιο γίνεται η εισαγωγή στην πτυχιακή εργασία και αναφέρονται οι κατηγορίες που διακρίνονται οι γέφυρες και τα διάφορα είδη γεφυρών που υπάρχουν. Ακόμα αναλύονται τα είδη γεφυρών μαζί με ένα παράδειγμα για κάθε είδος γέφυρας.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική αναδρομή των γεφυρών και η εξέλιξη της γεφυροποιίας από τα αρχαία χρόνια έως και σήμερα. Καθώς και οι πιο ιστορικές γέφυρες που κατασκευάστηκαν και αποτελούν ορόσημο για την εξέλιξη των γεφυρών.

Στο τρίτο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις σιδηροδρομικές γέφυρες ανά τον κόσμο, και αναφέρονται οι πιο σημαντικές σιδηροδρομικές γέφυρες που έχουν κατασκευαστεί. Στην συνέχεια γίνεται μια αναφορά για την ιστορία των σιδηροδρομικών γεφυρών στην Ελλάδα και αναφέρονται κάποιες από τις πιο γνωστές γέφυρες που έχουν κατασκευαστεί στην χώρα μας.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο αναφέρονται γενικά τα φορτία που επιβάλλονται πάνω στην γέφυρα, και έπειτα γίνεται ο υπολογισμός των φορτίων που επιβάλλονται στην γέφυρα με σκοπό να βρούμε το συνολικό βάρος της γέφυρας.

Στο πέμπτο Κεφάλαιο ακολουθεί η στατική μελέτη της κύριας δοκού, η επίλυση του υπερστατικού προβλήματος γίνεται με την μέθοδο της επαλληλίας μετατοπίσεων για να βρούμε της δυνάμεις στήριξης. Τα συρματόσχοινα ανάρτησης φέρουν πάνω τους ειδικούς κοχλίες όπου θα τα συσφίγγουν ώστε να ευθυγραμμίζεται η κύρια δοκός για να έχουμε τελικό βέλος κάμψης μηδέν σε όλα τα σημεία πάνω στην δοκό.

Στο έκτο Κεφάλαιο γίνεται η στατική μελέτη του τοξωτού φορέα της σιδηροδρομικής γέφυρας, λόγω συμμετρίας οι υπολογισμοί γίνονται μόνο στο μισό

τόξο. Υπολογίζονται οι ροπές κάμψης, οι τέμνουσες δυνάμεις και οι αξονικές δυνάμεις του τοξωτού φορέα και στην συνέχεια σχεδιάζονται τα διαγράμματα τους.

Στο έβδομο Κεφάλαιο για να επιβεβαιώσουμε τους υπολογισμούς που έχουμε κάνει αλλά και να συγκρίνουμε τα τελικά αποτελέσματα γίνεται η επίλυση της στατικής μελέτης κύριας δοκού και του τοξωτού φορέα με ανάλυση σε πεπερασμένα στοιχεία με το πρόγραμμα SAP2000.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι ότι γενικά στα αποτελέσματα που υπολογίσαμε έχουμε μια μικρή απόκλιση λόγω διάφορων σφαλμάτων όπως στρογγυλοποιήσεις και από την γεωμετρία των σχημάτων που κάναμε στο SAP2000.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ορισμός της Γέφυρας.....	1
1.2 Διάφορα είδη Γεφυρών.....	2
1.2.1 Κρεμαστή Γέφυρα.....	2
1.2.2 Καλωδιωτή Γέφυρα.....	2
1.2.3 Τοξωτή Γέφυρα.....	3
1.2.4 Γέφυρα σε Δοκούς.....	4
1.2.5 Αμφιπροέχουσα Γέφυρα.....	5
1.2.6 Κινητή Γέφυρα.....	5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΓΕΦΥΡΩΝ

2.1 Γέφυρες στην Αρχαιότητα.....	7
2.2 Εξέλιξη της Γεφυροποιίας.....	9
2.3 Διάφορες Γέφυρες στον Κόσμο.....	10
2.3.1 Γέφυρα Golden Gate (1937).....	10
2.3.2 Γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου (2004).....	11
2.3.3 Γέφυρα Sydney Harbour (1932).....	11
2.3.4 Γέφυρα του Μιγιό (2004).....	12
2.3.5 Γέφυρα Brooklyn (1883).....	12
2.3.6 Γέφυρα Wushan Yangtze (2005).....	13
2.3.7 Γέφυρα Danyang–Kunshan (2011).....	13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ

3.1 Σιδηροδρομικές Γέφυρες.....	14
3.2 Διάφορες Σιδηροδρομικές Γέφυρες στον Κόσμο.....	15
3.2.1 Σιδηροδρομική Γέφυρα Britannia (1850).....	15
3.2.2 Σιδηροδρομική Γέφυρα Landwasser (1901).....	15
3.2.3 Σιδηροδρομική Γέφυρα Forth Rail Bridge (1890).....	16
3.2.4 Σιδηροδρομική Γέφυρα Hohenzollern (1907-1911).....	16
3.2.5 Σιδηροδρομική Γέφυρα Tay (1878).....	17
3.2.6 Σιδηροδρομική Γέφυρα Beipanjiang River Railway Bridge (2001).....	17

3.3 Σιδηροδρομικές Γέφυρες στην Ελλάδα.....	18
3.3.1 Εξέλιξη Σιδηροδρομικών Γεφυρών στην Ελλάδα.....	18
3.3.2 Σιδηροδρομική Γέφυρα του Ποταμού Αλφειού.....	18
3.3.3 Σιδηροδρομική Γέφυρα του Γοργοπόταμου.....	18
3.3.4 Σιδηροδρομική Γέφυρα του Ταξιάρχη.....	19
3.3.5 Σιδηροδρομική Γέφυρα Αχλαδόκαμπου.....	20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΦΟΡΤΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΓΕΦΥΡΑΣ

4.1 Γενικά.....	21
4.2 Υπολογισμός Ίδιου Βάρους.....	22
4.2.1 Κύριες Δοκοί.....	22
4.2.2 Διαδοκίδες.....	23
4.2.3 Μηκίδες.....	23
4.2.4 Σύνδεσμοι Μηκίδων και Αντιανέμιοι Σύνδεσμοι.....	24
4.2.5 Στρωτήρες.....	25
4.2.6 Σιδηροτροχιές και Ανπιτροχιές.....	26
4.3 Υπολογισμός Φορτίων.....	26
4.3.1 Βάρος Τρένου.....	26
4.3.2 Βάρος Πεζοδρομίου.....	27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΥΡΙΑΣ ΔΟΚΟΥ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ

5.1 Διάταξη Γέφυρας.....	29
5.2 Βέλος Κάμψης Αμφιέριστης Δοκού με Συνεχή Φόρτιση.....	30
5.2.1 Υπολογισμός Βέλους Κάμψης σε Διάφορες Θέσεις Χωρίς Ανάρτηση της Δοκού.....	31
5.3 Βέλος Κάμψης Αμφιέριστης Δοκού με Δύναμη F.....	33
5.3.1 Υπολογισμός Βέλους Κάμψης σε Διάφορες Θέσεις με Ανάρτηση της Δοκού.....	34
5.4 Μέθοδος Επαλληλίας Βελών Κάμψης.....	44
5.4.1 Επίλυση του Συστήματος των Τεσσάρων Εξισώσεων.....	46
5.4.2 Υπολογισμός των Δυνάμεων και Αντιδράσεων.....	51
5.5 Υπολογισμός Ροπών Κάμψης Κύριας Δοκού.....	52
5.6 Έλεγχος Αντοχής Κύριας Δοκού της Γέφυρας.....	55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΞΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ

6.1 Στατική Μελέτη Τοξωτού Φορέα.....	56
6.2 Υπολογισμός Αντιδράσεων.....	63
6.3 Ροπές Κάμψης Τοξωτού Φορέα.....	66
6.3.1 Διάγραμμα Ροπών Κάμψης.....	73
6.4 Υπολογισμός Τεμνουσών Δυνάμεων.....	74
6.4.1 Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.....	75
6.5 Υπολογισμός Αξονικών Δυνάμεων.....	76
6.5.1 Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων.....	78

6.6 Υπολογισμός Τάσης Κάμψης Τοξωτού Φορέα.....	79
6.7 Έλεγχος Τοξωτού Φορέα σε Κάμψη και Θλίψη.....	82

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 – ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

7.1 Γενικά	85
7.2 Ανάλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία της Κύριας Δοκού.....	85
7.3 Ανάλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία του Τοξωτού Φορέα.....	87

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ

Η γέφυρα ανακαλύφθηκε και κατασκευάστηκε από τον άνθρωπο με σκοπό να καταφέρει να διασχίσει διάφορα φυσικά εμπόδια όπως ποταμούς, λίμνες, θάλασσες, κοιλάδες ή δρόμους. Υπάρχουν πολλά είδη γεφυρών που έχουν ως σκοπό να μπορούν να εξυπηρετούν και να εφαρμόζονται σε διαφορετικές καταστάσεις. Τα σχέδια των γεφυρών ποικίλουν ανάλογα με την λειτουργία της γέφυρας, την φύση του εδάφους όπου η γέφυρα κατασκευάζεται και αγκυρώνεται, το υλικό κατασκευής και τα διαθέσιμα κεφάλαια για το χτίσιμο της γέφυρας.

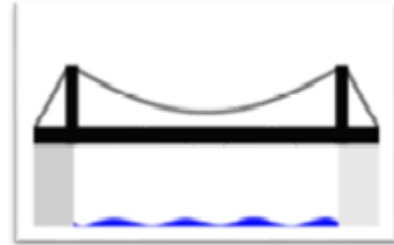
Γενικά οι γέφυρες διακρίνονται:

1. Ανάλογα με τη χρήση ή τον τύπο του φορέα, σε "οδικές", "σιδηροδρομικές", "πεζών" και "πεζών και ποδηλάτων" κ.λπ..
2. Από το υλικό κατασκευής, σε "ξύλινες" (οι αρχαιότερες), "λίθινες" (οι αψιδωτές), "με σχοινιά", "μεταλλικές", "τσιμεντένιες" ή και "μικτές".
3. Από τον τρόπο έδρασης, που είναι και η σημαντικότερη κατηγορία, σε "κινητές" και σε "σταθερές" ή "σταθερώς εδραζόμενες".
 - α) Οι κινητές διακρίνονται επιμέρους σε "αναρτώμενες", "περιστροφικές" και "πτυσσόμενες". Στις κινητές γέφυρες ανήκουν και οι "πλωτές".
 - β) Οι σταθερές διακρίνονται επιμέρους σε:
 - i) Εκ της γωνίας αυτών, κατά διεύθυνση προς τη κοίτη ή εκείνης του εμποδίου σε: "ορθές" ή "ορθογώνιες" και σε "λοξές".
 - ii) Εκ της κατασκευής έδρασης παραλλήλων δοκών, γνωστές ως "δοκογέφυρες".
 - iii) Οι "κρεμαστές" που εδράζονται και ταυτόχρονα αναρτώνται σε πυλώνες.

1.2 ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΓΕΦΥΡΩΝ

1.2.1 Κρεμαστή Γέφυρα

Σε αυτό το είδος γέφυρας τα καλώδια είναι που σηκώνουν το βάρος του καταστρώματος κάθετα ως προς το κατάστρωμα (Σχ. 1). Οι πρώτες γέφυρες έγιναν από σχοινιά από δέντρα μπαμπού. Στις μέρες μας οι σύγχρονες γέφυρες είναι κατασκευασμένες από καλώδια που κρέμονται από τους πύργους όπου είναι συνδεδεμένα με κιβώτια. Οι πύργοι εμφυτεύονται βαθιά στο βυθό μιας λίμνης ή ενός ποταμού. Η κρεμαστή γέφυρα χρησιμοποιείται περισσότερο για τη διάβαση υδάτινων εμποδίων τα οποία διασχίζονται από πλοία. Η μεγαλύτερη κρεμαστή γέφυρα στον κόσμο είναι η Akashi Kaikyo Bridge στην Ιαπωνία με μήκος 3.909 μέτρα (Εικ. 1.1), αλλά η πιο γνωστή κρεμαστή γέφυρα αυτού του τύπου είναι η γέφυρα της Χρυσής Πύλης "Golden Gate Bridge" στο Σαν Φρανσίσκο.



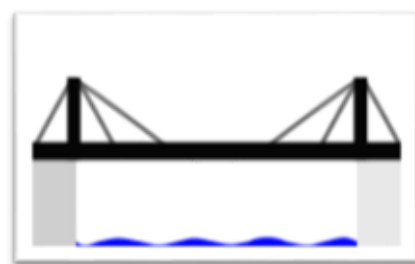
Σχήμα 1: Κρεμαστή Γέφυρα



Εικόνα 1.1: Akashi Kaikyo Bridge (Ιαπωνία)
(wikipedia)

1.2.2 Καλωδιωτή Γέφυρα

Η καλωδιωτή γέφυρα αποτελείται από έναν ή περισσότερους στύλους οι οποίοι στηρίζουν με καλώδια το οδόστρωμα (Σχ. 2), η ιδέα προέρχεται από τις κρεμαστές γέφυρες. Η πρώτη γνωστή καλωδιωτή γέφυρα σχεδιάστηκε το 1784. Οι καλωδιωτές γέφυρες έρχονται για να καλύψουν το κενό μεταξύ των κρεμαστών γεφυρών και των συμβατικά κατασκευασμένων



Σχήμα 2: Καλωδιωτή Γέφυρα

γεφυρών. Τα καλώδια σε αυτό τον τύπο γέφυρας είναι λοξά ως προς το κατάστρωμα.

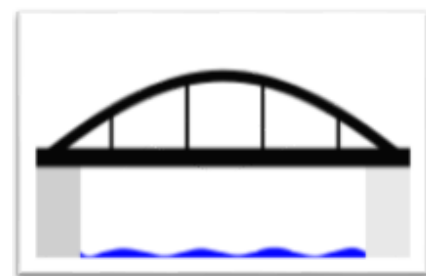
Αυτές οι γέφυρες έχουν αποδειχτεί ιδανικές για μεγάλες αποστάσεις (150 έως 800 μέτρα), τόσο τεχνικά όσο και οικονομικά, αν και οι κρεμαστές είναι ιδανικότερες για ακόμα μεγαλύτερες αποστάσεις (>1500 μέτρων). Συχνά το μήκος μιας γέφυρας τέτοιου τύπου αναφέρεται ότι είναι το σύνολο των καταστρωμάτων της. Μια από τις πιο γνωστές αυτού του τύπου που βρίσκεται στην Ελλάδα είναι η γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου που έχει 4 πυλώνες και η απόσταση μεταξύ των πυλώνων είναι 560 μέτρα και είναι η δεύτερη μεγαλύτερη γέφυρα αυτού του τύπου στο κόσμο. Η μεγαλύτερη καλωδιωτή γέφυρα στον κόσμο πλέον είναι στη Ρωσία και ενώνει το Βλαδιβοστόκ και το νησί Russky (Εικ. 1.2). Έχει μήκος 3,1 χιλιόμετρα και πλάτος 29,5 μέτρα, η γέφυρα έχει 4 λωρίδες και το τμήμα της γέφυρας που βρίσκεται πάνω από το νερό έχει μήκος 1,1 χιλιόμετρα ενώ οι δύο πυλώνες της έχουν ύψος 320,9 μέτρα.



Εικόνα 1.2: Russky Bridge (Ρωσία)
(wikipedia)

1.2.3 Τοξωτή Γέφυρα

Οι τοξωτές γέφυρες είναι από τα παλιότερα είδη γεφυρών που κατασκεύασε ο άνθρωπος. Οι τοξωτές γέφυρες έχουν μεγάλη φυσική αντοχή. Αρχικά τα υλικά που χρησιμοποιούνταν για να τις κατασκευάσουν ήταν πέτρα ή τούβλο, πλέον οι τοξωτές γέφυρες κατασκευάζονται από οπλισμένο σκυρόδεμα ή χάλυβα. Η εισαγωγή αυτών των νέων υλικών μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μεγάλου μήκους τοξωτές γέφυρες με μικρότερα ανοίγματα. Στις τοξωτές γέφυρες έχουμε στηρίγματα σε κάθε άκρο, το βάρος λοιπόν αντί να πιέζει κατ'ευθείαν προς τα κάτω, μεταφέρεται προς τα έξω κατά μήκος της καμπύλης του τόξου στα στηρίγματα σε κάθε άκρο (Σχ. 3). Η μεγαλύτερη τοξωτή γέφυρα στον κόσμο βρίσκεται στην Κίνα πάνω από τον ποταμό Yangtze και κατασκευάστηκε το 2009. Το κεντρικό άνοιγμα του τόξου της έχει μήκος 552 μέτρα και το συνολικό μήκος της είναι 1,7 χιλιόμετρα (Εικ. 1.3).



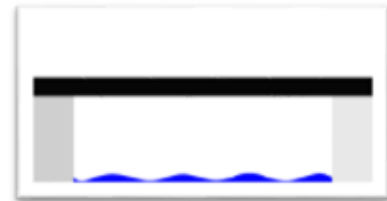
Σχήμα 3: Τοξωτή Γέφυρα



Εικόνα 1.3: Chaotianmen Bridge (Κίνα)
(wikipedia)

1.2.4 Γέφυρα σε Δοκούς

Ο τύπος αυτός είναι ο πιο συνηθής για το λόγο ότι η κατασκευή είναι σχετικά απλή. Αυτός ο τύπος γεφυρών είναι πολύ διαδεδομένος στο σιδηροδρομικό δίκτυο της Ελλάδας. Αποτελείται από οριζόντιες αμφιαρθρωτές δοκούς που υποστηρίζονται στα άκρα τους με στηρίξεις (Σχ. 4). Όταν τα ανοίγματα είναι περισσότερα από ένα οι ενδιάμεσες υποστυλώσεις είναι γνωστές ως πυλώνες.



Σχήμα 4: Γέφυρα με Δοκούς

Οι πρώτες γέφυρες σε δοκούς ήταν απλές κατασκευές που διαπερνούσαν ρέματα και ποτάμια. Στις μέρες μας, οι γέφυρες σε δοκούς είναι μεγάλου μήκους γέφυρες από δοκούς χάλυβα και χαλύβδινα κιβώτια. Το βάρος ασκείται στο πάνω μέρος της δοκού και μεταφέρεται κατευθείαν προς τα άκρα και ωθεί προς τα κάτω τα βάθρα της γέφυρας. Αποτελείται κυρίως από ξύλο ή μέταλλο. Η μεγαλύτερη γέφυρα σε δοκούς του κόσμου είναι η Lake Pontchartrain Causeway στη νότια Λουιζιάνα στις Ηνωμένες Πολιτείες, μήκους 38,4 χιλιόμετρα (Εικ. 1.4).



Εικόνα 1.4: Lake Pontchartrain Causeway (ΗΠΑ)
(wikipedia)

1.2.5 Αμφιπροέχουσα Γέφυρα

Οι αμφιπροέχουσες γέφυρες κατασκευάζονται από προβόλους δηλαδή από οριζόντιες δοκούς που στηρίζονται σε ένα μόνο άκρο. Οι αμφιπροέχουσες γέφυρες κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας τα ίδια υλικά και τεχνικές, όπως στις γέφυρες σε δοκούς (Σχ. 5). Το μεταλλικό δικτύωμα της γέφυρας ήταν μια σημαντική ανακάλυψη στην μηχανική, όταν παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην πράξη, καθώς μπορεί να έχει μήκος πάνω από 460 μέτρα. Η μεγαλύτερη αμφιπροέχουσα γέφυρα είναι η γέφυρα Quebec στον Καναδά, με μήκος 549 μέτρα (Εικ. 1.5).



Σχήμα 5: Αμφιπροέχουσα Γέφυρα



Εικόνα 1.5: Quebec Bridge (Καναδάς)
(wikipedia)

1.2.6 Κινητή Γέφυρα

Οι κινητές γέφυρες κατασκευάζονται συνήθως επάνω από ποτάμια και άλλες υδάτινες οδούς για πλοία. Σχεδιάστηκαν για να διευκολύνουν τη κυκλοφορία των πλοίων που υπό άλλες συνθήκες δεν θα χωρούσαν κάτω από την γέφυρα λόγω του μεγάλου ύψους τους. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα είναι ότι η κυκλοφορία στη γέφυρα θα πρέπει να διακόπτεται για να γίνει η διέλευση των πλοίων. Για οικονομικούς λόγους αυτές οι γέφυρες συνήθως δεν κατασκευάζονται με πολύ ψηλά βάθρα (Σχ. 6). Η κινητή γέφυρα Broadway βρίσκεται στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής και κατασκευάστηκε το 1913. Είναι από τις μεγαλύτερες κινητές γέφυρες στον κόσμο και έχει εισαχθεί στο Εθνικό Αρχείο Ιστορικών Μνημείων (Εικ. 1.6).



Σχήμα 6: Κινητή Γέφυρα



Εικόνα 1.6: Broadway Bridge (ΗΠΑ)
(wikipedia)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΓΕΦΥΡΩΝ

2.1 ΓΕΦΥΡΕΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Οι πρώτες γέφυρες δημιουργήθηκαν από την ίδια την φύση εντελώς τυχαία με το πέσιμο ενός κορμού δέντρου σε ένα ρέμα ή μιας πέτρας σε ένα ποτάμι. Οι πρώτες γέφυρες που κατασκευάστηκαν από τους ανθρώπους ήταν πιθανώς κορμοί δέντρων ή πέτρες που χρησιμοποιήθηκαν για την διέλευση πάνω από έναν ποταμό ή μια χαράδρα, στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν λίθινες πλάκες βυθισμένες μέσα στους ποταμούς ως βάθρα για την στήριξη κορμών δέντρων για γεφύρωση ανοιγμάτων μεγαλύτερου μήκους. Ο άνθρωπος όμως δεν έμεινε μόνο εκεί καθώς έψαχνε συνέχεια τρόπους για να βελτιώσει τις γέφυρες έτσι χρησιμοποίησε κλαδιά, καλάμια, και διάφορες άλλες ίνες για να σχηματίσει ένα συνθετικό σχοινί ικανό να δεσμεύει και να συγκρατεί τα υλικά κατασκευής των γεφυρών.

Η αρχαιότερη γνωστή γέφυρα είναι η γέφυρα του Ευφράτη ποταμού που βρίσκεται στην Μέση Ανατολή και κατασκευάστηκε το 600 π.Χ. περίπου, με ξύλινο κατάστρωμα και με λίθινες πλάκες για βάθρα. Όπως έχουν δείξει οι ανασκαφές από τον R. Koldewey το συνολικό μήκος τις γέφυρας φτάνει τα 123 μέτρα ενώ το πλάτος τα 9,3 μέτρα.

Η γέφυρα του Αρκαδικού είναι μία από τις τέσσερις αψιδωτές γέφυρες της μυκηναϊκής εποχής, η γέφυρα συνδέει ένα πρώην οδικό δίκτυο που είχε σχεδιαστεί για να μεταφέρει άρματα μεταξύ της Τίρυνθας και Επιδαύρου στην Πελοπόννησο. Κατασκευασμένο στην Ελληνική Εποχή του Χαλκού (13ος αιώνας π.Χ.), είναι ένα από τα παλαιότερα τοξωτά γεφύρια που υπάρχει ακόμα και είναι σε χρήση. Αρκετά τοξωτά πέτρινα γεφύρια από την Ελληνιστική εποχή μπορούν να βρεθούν στην Πελοπόννησο (Εικ. 2.1).



Εικόνα 2.1: Γεφύρι του Φούσκαρη (Αρκαδία)
(www.exploring-Greece.gr)

Την κατασκευή κυρτών γεφυρών κατείχαν οι Ρωμαίοι στα προχριστιανικά χρόνια και τα υλικά που χρησιμοποιούνταν ήταν φυσικοί λίθοι και σκυρόδεμα. Οι Ρωμαίοι έχτισαν τοξωτά γεφύρια και υδραγωγεία που στέκονται ακόμα και σήμερα, ένα παράδειγμα είναι η γέφυρα Alcántara που χτίστηκε πάνω από τον ποταμό Τάγο στην Ισπανία το 106 π.Χ (Εικ. 2.2). Οι Ρωμαίοι επίσης χρησιμοποίησαν το τσιμέντο με σκοπό να μειώνεται η διακύμανση της αντοχής που έχει η φυσική πέτρα. Ένας τύπος τσιμέντου, που ονομάζεται ποζολάνη, και αποτελείται από νερό, ασβέστη, άμμο και ηφαιστειακά πετρώματα χρησιμοποιούσαν εκείνη την εποχή οι Ρωμαίοι. Τούβλα και κονίαμα είναι τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή γεφυρών μετά την Ρωμαϊκή εποχή, καθώς είχε χαθεί η τεχνολογία για το τσιμέντο για ένα διάστημα και στην συνέχεια ξανά ανακαλύφθηκε.



Εικόνα 2.2: Γέφυρα Alcántara (Ισπανία)
([wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Alc%C3%A1ntara_Bridge))

Μια σημαντική ανακάλυψη στην γεφυροποιία είναι η κατασκευή της Iron Bridge στο Coalbrookdale στην Αγγλία το 1779, η οποία είναι η πρώτη γέφυρα από χυτοσίδηρο (Εικ. 2.3). Σε αυτή την τοξωτή γέφυρα, που βρίσκεται πάνω από τον ποταμό Severn, χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ο χυτοσίδηρος ως βασικό υλικό στην κατασκευή. Το εντυπωσιακό είναι ότι η γέφυρα αυτή χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα ως πεζογέφυρα αλλά και για ελαφρές μεταφορές.



Εικόνα 2.3: Iron Bridge (Αγγλία)
(www.mathsinthecity.com)

Μέχρι το 1840 το κύριο υλικό που χρησιμοποιούνταν στην κατασκευή των γεφυρών ήταν ο χυτοσίδηρος ενώ σιγά σιγά άρχισαν κάποια τμήματα των γεφυρών να κατασκευάζονται από σφυρήλατο σίδηρο. Έτσι ο χυτοσίδηρος αντικαταστάθηκε από τον σφυρήλατο σίδηρο ο οποίος αποτέλεσε το βασικό υλικό κατασκευής των πρώτων σιδηροδρομικών γεφυρών. Στα τέλη του 1800 ο χάλυβας άρχισε σταδιακά να αντικαθιστά με τη σειρά του τον σφυρήλατο σίδηρο με αποτέλεσμα στις αρχές του εικοστού αιώνα να τον εκτοπίσει πλήρως από την κατασκευή των γεφυρών. Σε όλο τον κόσμο οι χαλυβουργίες είχαν στραφεί στην παραγωγή χάλυβα, ενός πολύ πιο αξιόπιστου υλικού.

2.2 ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΟΠΟΙΙΑΣ

Η εξέλιξη της γεφυροποιίας εν συντομία χωρίζεται σε 3 χαρακτηριστικές περιόδους:

Η πρώτη περίοδος αρχίζει με τα πρώτα τεχνικά επιτεύγματα του ανθρώπου που προσπαθούσε για την συνεχή βελτίωση των μέσων συγκοινωνίας και φτάνει μέχρι την ρωμαϊκή εποχή, ο αριθμός των γεφυρών ήταν μικρός και οι κατασκευές μικρής σημασίας σε σχέση με τα σημερινά δεδομένα.

Από την ρωμαϊκή εποχή και έπειτα έρχεται η δεύτερη περίοδος της γεφυροποιίας η οποία φτάνει μέχρι και τον 18^ο αιώνα (δηλαδή μέχρι και την

χρησιμοποίηση του σιδήρου στις κατασκευές). Κατά την δεύτερη περίοδο τα μοναδικά υλικά που χρησιμοποιούνταν στην γεφυροποιία ήταν το ξύλο και οι πέτρες. Υπήρξε όμως σημαντική εξέλιξη της τεχνικής στην κατασκευή των γεφυρών κυρίως λόγω της χρησιμοποίησης του θόλου στα λίθινα γεφύρια και του δικτυώματος στις ξύλινες γέφυρες. Σε αυτήν την περίοδο κατασκευάστηκαν αρκετές σημαντικές γέφυρες πολλές από αυτές σώζονται ακόμα και σήμερα και διακρίνονται για την επιμέλεια της κατασκευής τους και την αισθητική τους εμφάνιση.

Η Τρίτη περίοδος της γεφυροποιίας είναι κατά τον 19^ο και 20^ο αιώνα δηλαδή κατά την σύγχρονη εποχή και είναι η πιο αξιόλογη περίοδος. Τα αρχικά υλικά ξύλο και πέτρες εξαντλούν τα όρια απόδοσης τους και έτσι ο άνθρωπος αρχίζει και χρησιμοποιεί τεχνικά υλικά όπως: χυτοσίδηρο, σίδηρο, χάλυβα υψηλής αντοχής, απλό σκυρόδεμα και ενισχυμένο σκυρόδεμα. Τα υλικά αυτά προσφέρουν καταπληκτικές δυνατότητες. Σημαντικότερη επίδραση στη γεφυροποιία άσκησε η ανάπτυξη του σιδηροδρόμου. Είναι βέβαιο ότι η ανάπτυξη της γεφυροποιίας και του σιδηροδρόμου αλληλοστηρίχθηκαν και συμβάδισαν χρονικά. Στις κατασκευές πλέον δίνεται ιδιαίτερη σημασία στους ασφαλείς υπολογισμούς πριν την κατασκευή του έργου παρά στον εμπειρισμό. Η πρόοδος της γεφυροποιίας κατά την τρίτη περίοδο είναι εξαιρετική ιδίως λόγω της ευρείας χρησιμοποίησής των μεταλλικών γεφυρών.

2.3 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ ΣΤΟΝ ΚΟΣΜΟ

2.3.1 Γέφυρα Golden Gate (1937)

Είναι μια κρεμαστή γέφυρα που βρίσκεται στο άνοιγμα του κόλπου του Σαν Φρανσίσκο στον Ειρηνικό Ωκεανό. Πρόκειται για μια οδική γέφυρα με μήκος 2,7 χιλιόμετρα, πλάτος 27,4 μέτρα και ύψος 227,4 μέτρα. Είναι κατασκευασμένη από ατσάλι και έχει χαρακτηριστεί ως ένα από τα σύγχρονα θαύματα του κόσμου από την Αμερικανική Εταιρεία Πολιτικών Μηχανικών (ASCE), (Εικ. 2.4).



Εικόνα 2.4: Γέφυρα Golden Gate (ΗΠΑ)
(wikipedia)

2.3.2 Γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου (2004)

Η γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου είναι μια από τις μεγαλύτερες καλωδιωτές γέφυρες στον κόσμο. Η γέφυρα συνδέει την Πελοπόννησο με την Ηπειρωτική Ελλάδα. Κατασκευάστηκε και σχεδιάστηκε από την γαλλική εταιρία Vinci. Το μήκος της γέφυρας που στηρίζεται σε τέσσερις πυλώνες είναι 2,252 χιλιόμετρα, ενώ μαζί με τις προσβάσεις φτάνει γύρω στα 2,883 χιλιόμετρα. Η γέφυρα περιλαμβάνει 6 λωρίδες κυκλοφορίας οχημάτων και ακόμα ένα πεζόδρομο και ποδηλατόδρομο (Εικ. 2.5).



Εικόνα 2.5: Γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου (Ελλάδα)
(wikipedia)

2.3.3 Γέφυρα Sydney Harbour (1932)

Είναι μια τοξωτή γέφυρα στο Σύδνεϋ της Αυστραλίας η οποία κατασκευάστηκε το 1932. Επίσης είναι η έκτη μεγαλύτερη τοξωτή γέφυρα στον κόσμο και αποτελείται από δύο τόξα που το καθένα έχει μήκος 503 μέτρα και μέγιστο ύψος 134 μέτρα από τη στάθμη της θάλασσας. Περιλαμβάνει σιδηροδρομικές γραμμές, λωρίδες οχημάτων και πεζόδρομο (Εικ. 2.6).



Εικόνα 2.6: Γέφυρα Sydney Harbour (Αυστραλία)
(www.culturextourism.com)

2.3.4 Γέφυρα του Μιγιό (2004)

Είναι μια καλωδιωτή γέφυρα που εκτείνεται σε όλη την κοιλάδα του ποταμού Tarn κοντά στο Μιγιό στη νότια Γαλλία. Η γέφυρα Μιγιό κατασκευάστηκε το 2004 από τον όμιλο Eiffage, είναι η ψηλότερη γέφυρα στον κόσμο με ύψος 343 μέτρα και με μήκος 2,46 χιλιόμετρα (Εικ. 2.7).



Εικόνα 2.7: The Millau Bridge (Γαλλία)
(wikipedia)

2.3.5 Γέφυρα Brooklyn (1883)

Η Γέφυρα Brooklyn είναι μια από τις παλαιότερες κρεμαστές γέφυρες στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Ολοκληρώθηκε το 1883 και συνδέει το Μανχάταν με το Μπρούκλιν περνώντας πάνω από τον ποταμό East River. Με κύριο άνοιγμα 486,3 μέτρα ήταν η μεγαλύτερη κρεμαστή γέφυρα στον κόσμο μέχρι το 1903 και η πρώτη κρεμαστή γέφυρα με χαλύβδινα σύρματα (Εικ. 2.8).



Εικόνα 2.8: Γέφυρα Brooklyn (ΗΠΑ)
(wikipedia)

2.3.6 Γέφυρα Wushan Yangtze (2005)

Η Wushan Yangtze Bridge είναι μια τοξωτή γέφυρα η οποία κατασκευάστηκε το 2005. Διασχίζει το ποταμό Yangtze στην Κίνα και το τόξο της έχει ύψος 130 μέτρα και συνολικό μήκος 460 μέτρα (Εικ. 2.9). Η γέφυρα αυτή κατατάσσεται στην πρώτη δεκάδα με τις μεγαλύτερες τοξωτές γέφυρες στον κόσμο.



Εικόνα 2.9: Γέφυρα Wushan Yangtze (Κίνα)
(wikipedia)

2.3.7 Γέφυρα Danyang–Kunshan (2011)

Η γέφυρα Danyang-Kunshan που βρίσκεται στην επαρχία Jiangsu στην Κίνα είναι η μεγαλύτερη γέφυρα στον κόσμο με μήκος 164,8 χιλιόμετρα. Η γέφυρα Danyang–Kunshan κατέχει μέχρι σήμερα το παγκόσμιο ρεκόρ Γκίνες για την μεγαλύτερη γέφυρα στον κόσμο σε οποιαδήποτε κατηγορία. Η κατασκευή της ολοκληρώθηκε το 2010 και άνοιξε το 2011 (Εικ. 2.10).



Εικόνα 2.10: Γέφυρα Danyang–Kunshan (Κίνα)
(www.glamgrid.com)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ

3.1 ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ

Η γέφυρες χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες, μια από αυτές είναι οι σιδηροδρομικές γέφυρες, αυτές δηλαδή που εξυπηρετούν αποκλειστικά τις ανάγκες του σιδηροδρομικού δικτύου. Η σιδηροδρομική γραμμή αποτελείται από δύο χαλύβδινες σιδηροτροχιές τοποθετημένες σε στρωτήρες. Για να κατανεμηθεί το φορτίο των συρμών στο έδαφος οι σιδηροτροχιές στερεώνονται πάνω στους στρωτήρες. Οι στρωτήρες είναι συνήθως από ξύλο βελανιδιάς ή οξιάς, εμβαπτισμένο σε αντισηπτικές ουσίες. Το πλάτος του σιδηρόδρομου είναι η απόσταση μεταξύ των σιδηροτροχιών. Υπάρχουν διάφορα πλάτη που χρησιμοποιούν τα σιδηροδρομικά δίκτυα, περίπου 30 διαφορετικά πλάτη από 0,600 μέτρα μέχρι 1,676 μέτρα.

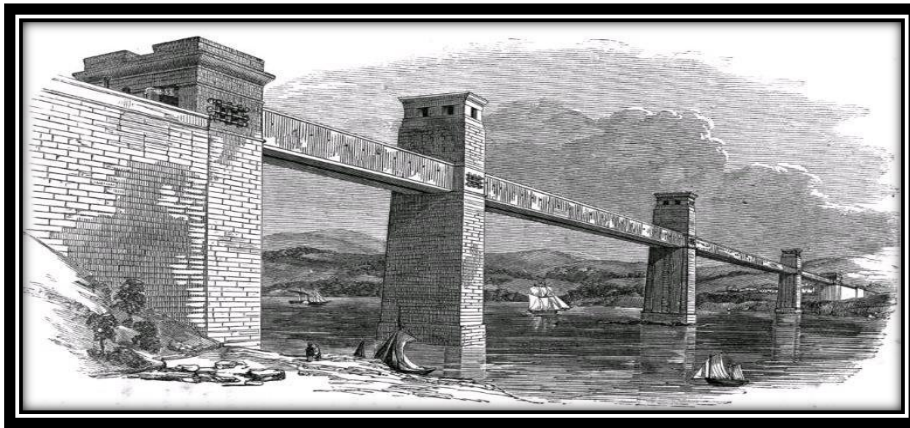
Για να διατηρηθεί η μεγάλη ταχύτητα και στις στροφές επιβάλλεται η εξωτερική γραμμή να βρίσκεται πιο ψηλά από την εσωτερική για να εξουδετερωθούν τα αποτελέσματα της φυγόκεντρης δύναμης. Η μέγιστη υπερύψωση όμως δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 22 εκατοστά. Πολλές φορές στις γέφυρες τοποθετούνται και αντιτροχιές οι οποίες χρησιμοποιούνται για την προστασία της γέφυρας σε περίπτωση εκτροχιασμού του τρένου, καθώς η γέφυρα μπορεί να υποστεί μεγάλες ζημιές ή ακόμα και να καταστραφεί ολόκληρη.

Η πρώτη μεταλλική σιδηροδρομική γέφυρα στον κόσμο κατασκευάστηκε το 1824 στην Αγγλία από τον G. Stephenson και ένωνε το σιδηροδρομικό δίκτυο Stockton-Darlington. Η γέφυρα αποτελούταν από 4 ανοίγματα των 3 μέτρων. Η προαναφερθείσα γέφυρα είχε ακόμα μια καινοτομία, χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην ιστορία της γεφυροποιίας αμφίκυρτη κύρια δοκός. Το υλικό κατασκευής της ήταν χυτοσίδηρος. Παρέμεινε σε χρήση μέχρι το 1842 και το 1901 μεταφέρθηκε στο μουσείο του εργοστασίου οχημάτων του Darlington στην Αγγλία.

3.2 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ ΣΤΟΝ ΚΟΣΜΟ

3.2.1 Σιδηροδρομική Γέφυρα Britannia (1850)

Η γέφυρα Britannia ήταν η πρώτη επιτυχής προσπάθεια γεφύρωσης μεγάλων ανοιγμάτων με δοκούς και αποτελεί σταθμό για την εξέλιξη της γεφυροποιίας. Κατασκευάστηκε το 1850 από τον R. Stephenson, ήταν σωληνοειδής γέφυρα με συνολικό μήκος 461 μέτρα και πλάτος 16 μέτρα. Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν σφυρήλατος χάλυβας. Το 1970 μετά από μια πυρκαγιά που ξέσπασε η γέφυρα καταστράφηκε και ξαναχτίστηκε το 1972 (Εικ. 3.1).



Εικόνα 3.1: Britannia Bridge (Ηνωμένο Βασίλειο)
(wikipedia)

3.2.2 Σιδηροδρομική Γέφυρα Landwasser (1901)

Η σιδηροδρομική γέφυρα του Landwasser σχεδιάστηκε από τον Alexander Acatos και κατασκευάστηκε το 1901 στην Ελβετία από τους Müller και Zeerleder για λογαριασμό της Rhaetian Railway. Αποτελείται από 6 πέτρινες αψίδες και έχει μήκος 136 μέτρα και πλάτος 20 μέτρα (Εικ. 3.2). Η γέφυρα αυτή χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα.



Εικόνα 3.2: Γέφυρα Landwasser (Ελβετία)
(wikipedia)

3.2.3 Σιδηροδρομική Γέφυρα Forth Rail Bridge (1890)

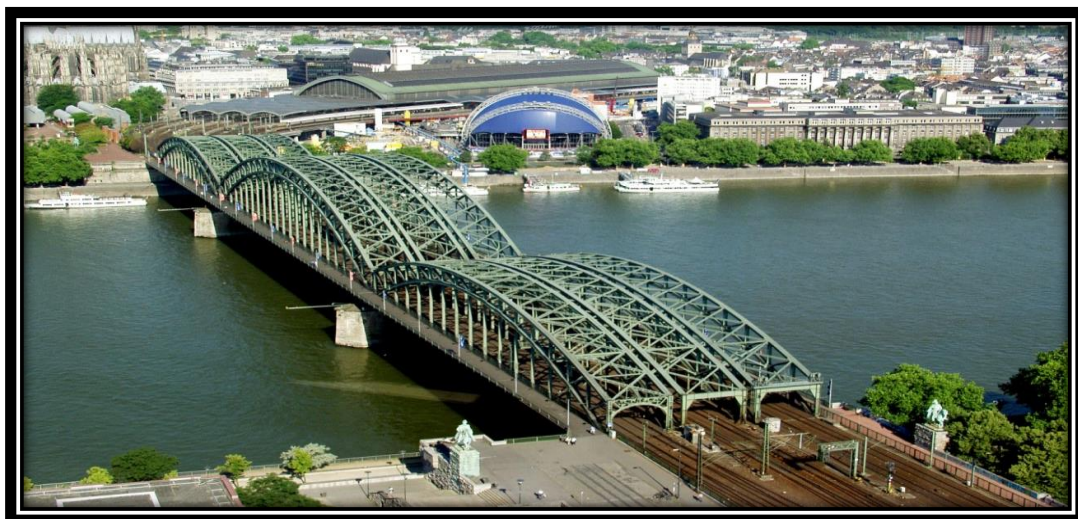
Η γέφυρα Forth Rail Bridge είναι μία αμφιπροέχουσα σιδηροδρομική γέφυρα που κατασκευάστηκε εξ ολοκλήρου από χάλυβα το 1890 πάνω από τον ποταμό Forth στην ανατολική Σκωτία και έχει συνολικό μήκος 2,528 χιλιόμετρα (Εικ. 3.3).



Εικόνα 3.3: Forth Bridge (Σκωτία)
(www.freeimageslive.co.uk)

3.2.4 Σιδηροδρομική Γέφυρα Hohenzollern (1907-1911)

Η σιδηροδρομική γέφυρα Hohenzollern βρίσκεται πάνω από τον ποταμό Ρήνο στην Κολωνία της Γερμανίας. Η γέφυρα κατασκευάστηκε μεταξύ 1907 και 1911 και το συνολικό μήκος της είναι 409,19 μέτρα και πλάτος 26,2 μέτρα (Εικ. 3.4).



Εικόνα 3.4: Hohenzollern Bridge (Γερμανία)
([wikipedia](https://www.wikipedia.org))

3.2.5 Σιδηροδρομική Γέφυρα Tay (1878)

Η γέφυρα Tay είναι μια σιδηροδρομική γέφυρα που εκτείνεται μεταξύ της πόλης Dundee και του προαστίου της Wormit στην Σκωτία. Κατασκευάστηκε το 1878 και έχει μήκος 3,264 χιλιόμετρα. Το 1879 καταστράφηκε από έναν πολύ ισχυρό άνεμο και το 1887 η γέφυρα ξανακατασκευάστηκε και συνεχίζει να είναι μέχρι και σήμερα σε λειτουργία (Εικ. 3.5).



Εικόνα 3.5: Tay Rail Bridge (Σκωτία)
(wikipedia)

3.2.6 Σιδηροδρομική Γέφυρα Beipanjiang River Railway Bridge (2001)

Η σιδηροδρομική γέφυρα Beipanjiang είναι η υψηλότερη σιδηροδρομική γέφυρα στον κόσμο. Η γέφυρα εκτείνεται σε ένα βαθύ φαράγγι στον Βείραν ποταμό κοντά στην πόλη Liuranshui στην Κίνα (Εικ. 3.6). Η τοξωτή γέφυρα με συνολικό μήκος 486 μέτρα, μέγιστο ύψος 275 μέτρα και πλάτος 236 μέτρα κατασκευάστηκε το 2001.



Εικόνα 3.6: Beipanjiang River Railway Bridge (Κίνα)
(www.knowzzle.com)

3.3 ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

3.3.1 Εξέλιξη Σιδηροδρομικών Γεφυρών στην Ελλάδα

Η κατασκευή σιδηροδρομικών γεφυρών σε μια χώρα συνδέεται άμεσα με την εξέλιξη των σιδηροδρομικών συγκοινωνιών. Οι πρώτες μεταλλικές γέφυρες στην Ελλάδα κατασκευάστηκαν μετά το 1884 για να εξυπηρετήσουν τις ανάγκες του σιδηροδρομικού δικτύου. Στην Ελλάδα ο πιο διαδεδομένος τύπος σιδηροδρομικής γέφυρας είναι με δοκούς, διότι η κατασκευή είναι σχετικά απλή.

3.3.2 Σιδηροδρομική Γέφυρα του Ποταμού Αλφειού

Η μεγαλύτερη μεταλλική σιδηροδρομική γέφυρα που κατασκευάστηκε στην Ελλάδα είναι η γέφυρα του ποταμού Αλφειού (Εικ. 3.7). Η μελέτη και η κατασκευή της γέφυρας άρχισε το 1900. Η γέφυρα αυτή έχει 6 ανοίγματα με μήκος 50 μέτρα το καθένα, έτσι το συνολικό μήκος της γέφυρας είναι 313 μέτρα. Το συνολικό ύψος των βάθρων, που είναι κατασκευασμένα από σκυρόδεμα, είναι 11,65 μέτρα από το οποίο το τμήμα των 6 μέτρων βρίσκεται κάτω από τον πυθμένα του ποταμού. Η γέφυρα κατασκευάστηκε καθαρά για την διέλευση μόνο αμαξοστοιχιών και γι' αυτό δεν έχει δάπεδο στο επίπεδο των στρωτήρων της.



Εικόνα 3.7: Γέφυρα του ποταμού Αλφειού
(wikipedia)

3.3.3 Σιδηροδρομική Γέφυρα του Γοργοπόταμου

Η γέφυρα του Γοργοπόταμου είναι μια από τις πρώτες σιδηροδρομικές γέφυρες στην Ελλάδα που κατασκευάστηκε μετά από πολλές δυσκολίες το 1905. Η

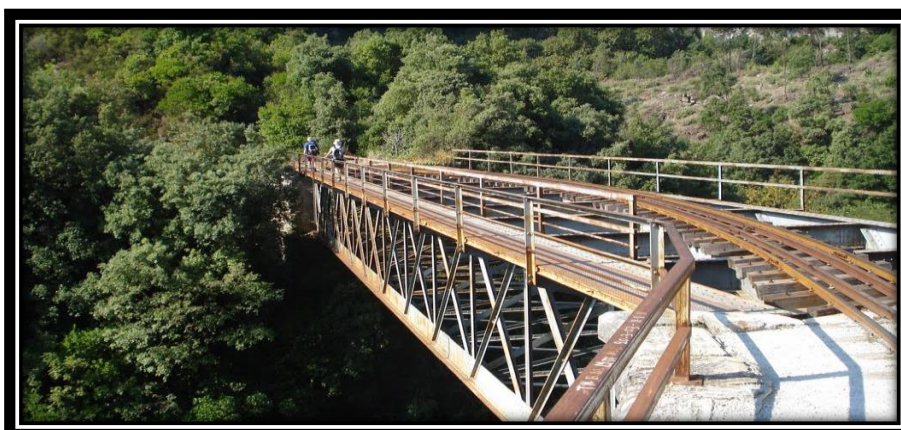
γέφυρα ανατινάχτηκε δύο φορές και ανακατασκευάστηκε με την σημερινή της μορφή το 1948 και έχει μήκος 211 μέτρα και ύψος 30 μέτρα (Εικ. 3.8).



Εικόνα 3.8: Γέφυρα του Γοργοποτάμου
(www.ethnos.gr)

3.3.4 Σιδηροδρομική Γέφυρα του Ταξιάρχη

Στα τέλη του 19ου αιώνα κατά την εξέλιξη των σιδηροδρόμων κατασκευάστηκε το Θεσσαλικό δίκτυο. Εκείνη την περίοδο κατασκευάστηκαν εννέα γέφυρες (οκτώ λίθινες και μια μεταλλική). Στο δίκτυο αυτό το ενδιαφέρον κεντρίζει η μεταλλική γέφυρα πάνω από τον χείμαρρο Ταξιάρχη, όπου οι γραμμές σχηματίζουν καμπύλη επάνω στον ευθύγραμμο φορέα της γέφυρας. Σήμερα η γέφυρα είναι γνωστή ως γέφυρα του ταξιάρχη ή αλλιώς γέφυρα Ντε Κίρικο προς τιμήν του Ιταλού σχεδιαστή της (Εικ. 3.9).



Εικόνα 3.9: Γέφυρα του ταξιάρχη
(www.enjoythessaly.com)

3.3.5 Σιδηροδρομική Γέφυρα Αχλαδόκαμπου

Η γέφυρα σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε αποκλειστικά από Έλληνες τεχνικούς το 1974. Έχει μήκος 279 μέτρα, πλάτος 5,5 μέτρα και στηρίζεται σε δώδεκα βάθρα (Εικ. 3.10).



Εικόνα 3.10: Γέφυρα Αχλαδόκαμπου
(www.panoramio.com)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΦΟΡΤΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΓΕΦΥΡΑΣ

4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Για τον υπολογισμό μιας μεταλλικής γέφυρας θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι φορτίσεις οι οποίες μπορούν να ενεργήσουν πάνω της και να προκαλέσουν στα διάφορα τμήματα της κατασκευής τις μεγαλύτερες δυνατές τάσεις. Έτσι χωρίζουμε τα φορτία σε κατηγορίες ανάλογα με την σπουδαιότητα και την συχνότητα εφαρμογής τους.

Τα φορτία χωρίζονται σε:

- Κύρια φορτία (τα βασικά φορτία που εφαρμόζονται στην γέφυρα)
- Πρόσθετα φορτία (τα φορτία που έχουν μικρότερη σημασία)
- Ειδικά φορτία (τα φορτία που εμφανίζονται σπάνια και μόνο κάτω από ειδικές συνθήκες)

Με βάση τους γερμανικούς κανονισμούς τα φορτία που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη για τον υπολογισμό μιας μεταλλικής σιδηροδρομικής γέφυρας χωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες:

- Κύρια φορτία:** ίδιο βάρος κατασκευής
κινητά φορτία (φορτία από τους συρμούς)
- Πρόσθετα** φορτία από ανέμους
φορτία φρεναρίσματος
χιόνι
σεισμός
θερμικές επιδράσεις
άτομα στα πεζοδρόμια
- Ειδικά φορτία:** θραύσεις καλωδίων
φορτίσεις κατά την συναρμολόγηση
απρόβλεπτες μεταβολές συνθηκών στηρίξεως

Τα φορτία χωρίζονται ανάλογα με την διεύθυνση τους σε :

1. Κατακόρυφα φορτία (ίδιο βάρος, φορτία από συρμούς, φορτία πεζοδρομίων, φορτία χιονιού)
2. Οριζόντια κατά μήκος φορτία (φρενάρισμα, τριβές εδράνων)
3. Οριζόντια πλευρικά φορτία (φυγόκεντρος δύναμη, πλευρική κρούση, άνεμος)

Επίσης όσο αφορά τον στατικό υπολογισμό, τα φορτία διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- 1) Σταθερά φορτία (ίδιο βάρος, δυνάμεις φρεναρίσματος ή εκκινήσεως, φορτίο χιονιού, τριβές εδράνων)
- 2) Κινητά φορτία (φορτία από συρμούς, φυγόκεντρος δύναμη, πίεση ανέμου)

Ανάλογα με τον τρόπο εφαρμογής τους τα φορτία διακρίνονται σε:

- 1) Ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία (ίδιο βάρος, φορτίο χιονιού, πίεση ανέμου)
- 2) Συγκεντρωμένα φορτία (φορτία από συρμούς, τα οποία για λόγους απλοποίησης των υπολογισμών συνήθως τα εισάγουμε ως ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία, φυγόκεντρος δύναμη, δύναμη φρεναρίσματος)

Εμείς για τους υπολογισμούς της μεταλλικής γέφυρας θα λάβουμε υπόψη μόνο τα κατακόρυφα φορτία που εφαρμόζονται πάνω στην γέφυρα.

4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

Για τον υπολογισμό μιας μεταλλικής σιδηροδρομικής γέφυρας όπως και για πολλές άλλες κατασκευές απαιτείται η γνώση του βάρους της, πριν την μελέτη κατασκευής.

Ο προκαταβολικός υπολογισμός του ίδιου βάρους της γέφυρας γίνεται συνήθως πρόχειρα με θεωρητικούς υπολογισμούς ή με την βοήθεια τύπων υπολογισμού βάρους. Η επίδραση του ίδιου βάρους έχει μεγάλη σημασία ειδικά στα μεγάλα ανοίγματα γέφυρας. Οι γερμανικοί κανονισμοί επιβάλλουν την διόρθωση του υπολογισμού εάν λόγω λάθους εκτίμησης του ίδιου βάρους προκύπτει υπέρβαση των μέγιστων επιτρεπόμενων τάσεων κατά 3% και πάνω.

4.2.1 Κύριες Δοκοί

Οι κύριες δοκοί θα είναι από χάλυβα St 52, από πίνακες επιλέγουμε: τύπο γέφυρας II (ολόσωμες κύριες δοκοί), με απόσταση κύριων δοκών $b = 4,5[m]$.

Δύο ολόσωμοι πλατύπελμοι δοκοί IPB 650 με μήκος 40 μέτρα η κάθε δοκός, όπου θα είναι οι κύριες δοκοί της γέφυρας, με βάρος $0,30[tn/m]$.

Άρα το συνολικό βάρος των κύριων δοκών είναι:

$$B_1 = 80[m] * 0,30[tn] = 24[tn]$$

4.2.2 Διαδοκίδες

Η απόσταση μεταξύ των διαδοκίδων καθορίζεται από αναλυτική μελέτη για την οικονομικότερη δυνατή λύση. Για την επιλογή της πιο συμφέρουσας απόστασης λαμβάνουμε υπόψη τα παρακάτω στοιχεία:

- 1) Διατομή της διαδοκίδας
- 2) Αριθμός διαδοκίδων
- 3) Διατομή μηκίδων
- 4) Σύνδεσμος μηκίδων
- 5) Αντιανέμιοι σύνδεσμοι
- 6) Κύρια δοκός
- 7) Ύψος κατασκευής

Οι διαδοκίδες συνήθως συνδέονται σταθερά με τις κύριες δοκούς και υπολογίζονται ως αμφιέριστοι δοκοί. Οι διαδοκίδες φορτίζονται με τις αντιδράσεις των μηκίδων.

Έτσι για τον υπολογισμό των διαδοκίδων επιλέγουμε τα εξής:

- 1) Το άνοιγμα των διαδοκίδων θα είναι ίδιο με το άνοιγμα των κύριων δοκών της γέφυρας δηλαδή 4,5 μέτρα.
- 2) Η στήριξη των μηκίδων πάνω στις διαδοκίδες θεωρείται ως αρθρωτή, επομένως οι αντιδράσεις των μηκίδων πάνω στις διαδοκίδες υπολογίζονται ως αντιδράσεις αμφιέριστης δοκού.
- 3) Οι δυνάμεις τροχοπέδησης και η επιρροή του ανέμου δεν λαμβάνονται υπόψη.

Άρα με άνοιγμα 4,5 μέτρα και με μεταξύ τους απόσταση 2,5 μέτρα επιλέγουμε δοκούς IPB300 με βάρος 0,180 [tn/m].

$$\text{Αριθμός διαδοκίδων} : n = \frac{40}{2,5} + 1 = 17 \text{ διαδοκίδες}$$

Οπότε το συνολικό μήκος των διαδοκίδων είναι: $17 * 4,5[m] = 76,5[m]$

$$\text{Άρα το βάρος των διαδοκίδων είναι: } B_2 = 76,5[m] * 0,18[tn/m] = 13,77[tn]$$

4.2.3 Μηκίδες

Οι μηκίδες είναι συνεχείς δοκοί πάνω σε ελαστικά υποστηρίγματα, αναλαμβάνουν τα φορτία από τις σιδηροτροχιές μέσω των στρωτήρων. Δεδομένου ότι η απόσταση των σιδηροτροχιών μεταξύ τους είναι 1,5 μέτρο προκύπτει ότι η ελάχιστη απόσταση μηκίδων που μπορούμε να βάλουμε είναι αυτή. Για αποστάσεις μεγαλύτερες από 2 μέτρα έχουμε το πλεονέκτημα της ελαστικότερης κυλίσεως των συρμών λόγω του προκαλούμενου βέλους κάμψης στους στρωτήρες. Οι μηκίδες

κατά κανόνα συνδέονται σταθερά πάνω στις διαδοκίδες ανάλογα με τον τρόπο συνδέσεως, εάν δηλαδή εξασφαλίζεται ή όχι η μεταβίβαση των αρνητικών ροπών στήριξης.

Για τις μηκίδες επιλέξαμε υψίκορμο δοκό λόγω του ότι είναι ελαφρύτεροι και κοστίζουν λιγότερο από τους πλατύπελμους δοκούς, ακόμα έχουν και αρκετό ύψος ώστε να διευκολύνεται η ήλωση στις γωνιακές συνδέσεις.

Για τον υπολογισμό των μηκίδων σε σιδηροδρομική γέφυρα:

- 1) Ως άνοιγμα μηκίδων λαμβάνουμε την θεωρητική απόσταση των διαδοκίδων της γέφυρας.
- 2) Η φόρτιση θεωρείται ως άμεσα εφαρμοζόμενη και δεν λαμβάνεται υπόψη λόγω της παρεμβολής των στρωτήρων μετάβασης. Τα φορτία μεταβιβάζονται σε ορισμένα σημεία, δεδομένου ότι κατά την διάρκεια ζωής της γέφυρας δεν αποκλείεται η μεταβολή των θέσεων των στρωτήρων.
- 3) Οι πλευρικές ωθήσεις δεν λαμβάνονται υπόψη. Για μικρά ανοίγματα η επιρροή είναι ελάχιστη.
- 4) Οι πιέσεις από τον άνεμο δεν λαμβάνονται υπόψη στην παρούσα μελέτη.

Για τον υπολογισμό των μηκίδων χρησιμοποιούμε:

- i) Απόσταση μηκίδων: 2,1 μέτρα
- ii) Συρμός επιφορτίσεως: Σ.Ε.Κ. 1945
- iii) Αριθμός μηκίδων: 32 μηκίδες
- iv) Μήκος μηκίδων: (2,5 μέτρα η κάθε μία) και συνολικού μήκους 80 μέτρα
- v) Υψίκορμο δοκό I380 με βάρος $0,15 [tn / m]$

Άρα βάρος μηκίδων: $B_3 = 80[m] * 0,15 [tn / m] = 12 [tn]$

4.2.4 Σύνδεσμοι Μηκίδων και Αντιανέμιοι Σύνδεσμοι

Οι σύνδεσμοι χρησιμοποιούνται για την παραλαβή και την μεταφορά στα εφάδρανα των εφαρμοζόμενων οριζόντιων δυνάμεων, δεδομένου ότι τα βασικά στοιχεία (μηκίδες, διαδοκίδες, κύριες δοκοί) χρησιμοποιούνται για να μεταφέρουν κυρίως τα κατακόρυφα φορτία. Από κατασκευαστικής άποψης χρησιμεύουν για την σταθεροποίηση της γέφυρας.

Οι σύνδεσμοι των μηκίδων αναλαμβάνουν τα οριζόντια φορτία, την πλευρική ώθηση ή την φυγόκεντρη δύναμη για γέφυρα σε καμπύλη, και την πίεση του ανέμου. Επίσης εξασφαλίζουν την πλευρική ακαμψία των μηκίδων και επιτρέπει την κανονική μεταφορά των οριζόντιων φορτίων προς τις διαδοκίδες. Οι σύνδεσμοι των μηκίδων μορφοποιούνται κατά δύο βασικούς τρόπους, με δικτύωμα μεταξύ των μηκίδων ή με την σταθερή σύνδεση του μέσου των μηκίδων προς τους αντιανέμιους συνδέσμους όπου τα φορτία μεταφέρονται απευθείας στις κύριες δοκούς.

Για τον υπολογισμό των συνδέσμων μηκίδων επιλέγουμε την μορφοποίηση με δικτύωμα μεταξύ των μηκίδων. Το βάρος μαζί με τα κομβοελάσματα είναι $0,15 \text{ [tn/m]}$.

Σύνδεσμοι μηκίδων: 32 διαγώνιοι σύνδεσμοι με μήκος 2,19 μέτρα και 16 κάθετοι σύνδεσμοι με μήκος 1,80 μέτρα.

Μήκος Συνδέσμων: $32 * 2,19 \text{ [m]} = 70,08 \text{ [m]}$ και $16 * 1,80 \text{ [m]} = 28,8 \text{ [m]}$

Άρα συνολικό μήκος: $70,08 \text{ [m]} + 28,8 \text{ [m]} = 98,88 \text{ [m]}$

Βάρος συνδέσμων μηκίδων: $B_{4,1} = 98,88 \text{ [m]} * 0,15 \text{ [tn/m]} = 14,83 \text{ [tn]}$

Οι αντιανέμιοι σύνδεσμοι είναι οι κύριοι σύνδεσμοι στην γέφυρα και χρησιμεύουν για την παραλαβή των δυνάμεων του ανέμου (οριζόντιες δυνάμεις, κάθετες προς την γέφυρα). Διακρίνονται σε άνω αντιανέμιοι σύνδεσμοι και σε κάτω αντιανέμιοι σύνδεσμοι ανάλογα με το αν τοποθετούνται στο άνω ή στο κάτω πέλμα της κύριας δοκού της γέφυρας.

Για να υπολογίσουμε τους αντιανέμιους συνδέσμους, τους τοποθετούμε δικτυωτά στο κάτω πέλμα της κύριας δοκού. Θα τοποθετήσουμε 32 αντιανέμιους συνδέσμους με μήκος 5,15 μέτρα ο καθένας και με βάρος δοκού $0,15 \text{ [tn/m]}$.

Άρα το μήκος τους είναι: $32 * 5,15 \text{ [m]} = 164,8 \text{ [m]}$

Βάρος αντιανέμιων συνδέσμων: $B_{4,2} = 164,8 \text{ [m]} * 0,15 \text{ [tn/m]} = 24,72 \text{ [tn]}$

Συνολικό βάρος από συνδέσμους μηκίδων και αντιανέμιους συνδέσμους:

$$B_4 = B_{4,1} + B_{4,2} \Rightarrow B_4 = 14,83 + 24,72 = 39,55 \text{ [tn]}$$

4.2.5 Στρωτήρες

Συνήθως χρησιμοποιούνται ξύλινοι στρωτήρες οι οποίοι παρεμβάλλονται μεταξύ των μηκίδων και των σιδηροτροχιών. Οι στρωτήρες χρησιμεύουν λόγω της ελαστικότητας του ξύλου στην απόσβεση των κραδασμών και στην μείωση της δυναμικής επιρροής των κινητών φορτίων. Οι μεταλλικοί στρωτήρες, παρόλο που παρέχουν ασφάλεια από πυρκαγιά, συνήθως δεν χρησιμοποιούνται γιατί αυξάνουν τους κραδασμούς και τον θόρυβο κατά την κυκλοφορία των συρμών πάνω στην γέφυρα.

Η απόσταση των στρωτήρων μεταξύ τους καθορίζεται όχι μόνο από την αντοχή τους στα φορτία αλλά και από την ελάχιστη διάμετρο των τροχών του συρμού, ώστε σε περίπτωση εκτροχιασμού να μην χωράει ο τροχός να περάσει ανάμεσα από το κενό των στρωτήρων.

Ο υπολογισμός για το βάρος των στρωτήρων έγινε με βάση τους Γερμανικούς κανονισμούς. Το υλικό για τους στρωτήρες είναι ξύλο οξιάς, η απόσταση των

στρωτήρων είναι 0,40 μέτρα και ο κάθε στρωτήρας έχει διαστάσεις 24x24 εκατοστά και μήκος 2,60 μέτρα, το ειδικό βάρος των στρωτήρων είναι $1,00[tn/m^3]$.

Αριθμός στρωτήρων: $n = 1 + \left(\frac{40[m]}{0,40[m]} \right) = 101$

Βάρος ενός στρωτήρα: $g = 0,24[m] * 0,24[m] * 2,60[m] * 1,00[tn/m^3] = 0,15[tn]$

Άρα το βάρος όλων των στρωτήρων είναι: $B_5 = n * g = 101 * 0,15 \Rightarrow B_5 = 15,15[tn]$

4.2.6 Σιδηροτροχιές και Αντιτροχιές

Στις γέφυρες κατά κανόνα συνεχίζονται οι ίδιες σιδηροτροχιές που χρησιμοποιούνται και στο υπόλοιπο τμήμα του σιδηρόδρομου. Υπάρχει όμως μια διαφορά, στις γέφυρες αποφεύγονται οι αρμοί των σιδηροτροχιών με σκοπό την ελάττωση της δυναμικής επιρροής των κυλιόμενων φορτίων.

Οι αντιτροχιές χρησιμοποιούνται με σκοπό την προστασία της γέφυρας από εκτροχιασμό του τρένου, καθώς η γέφυρα μπορεί να υποστεί μεγάλες ζημιές ή ακόμα και να καταστραφεί ολόκληρη. Οι κανονισμοί των σιδηροδρομικών δικτύων προβλέπουν αν είναι αναγκαία η τοποθέτηση αντιτροχιών καθώς η δαπάνη για την κατασκευή τους είναι αρκετά μεγάλη και εκτός αυτού κάνει ακόμα πιο δύσκολη την αλλαγή των στρωτήρων κατά την συντήρηση της γέφυρας.

Υπολογισμός σιδηροτροχιών:

Το βάρος των σιδηροτροχιών για συρμό L είναι: $g = 0,12[tn./m]$

Άρα το συνολικό βάρος είναι: $G = 2 * 40[m] * 0,12[tn./m] = 9,6[tn]$

Υπολογισμός αντιτροχιών:

Θα τοποθετήσουμε τις αντιτροχιές σε απόσταση 160 χιλιοστά και το βάρος τους θα είναι ίδιο με των σιδηροτροχιών.

Άρα διπλασιάζουμε το βάρος και έχουμε: $B_6 = 9,6[tn] * 2 = 19,2[tn]$

4.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΦΟΡΤΙΩΝ

4.3.1 Βάρος Τρένου

Βασική προϋπόθεση για τον υπολογισμό του βάρους σε μια γέφυρα είναι ο καθορισμός των κινητών φορτίων τα οποία αναλαμβάνει.

Στα πρώτα χρόνια της γεφυροποιίας ο υπολογισμός των φορτίων των συρμών γινόταν με το φορτίο καταπόνησης να είναι ομοιόμορφο σε όλο το μήκος της γέφυρας καθώς τότε ήταν ο μοναδικός τρόπος, ανακριβείς μεν αλλά πολύ απλός στους

υπολογισμούς. Αυτόν τον τρόπο θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς για διευκόλυνση στους υπολογισμούς.

Άρα για ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο σε όλο το μήκος της γέφυρας και για συρμό L:

Έχουμε 18 τόνους ανά τροχό και ανά 3 μέτρα περίπου βρίσκεται ο κάθε τροχός σε όλο το μήκος της γέφυρας, οπότε στα 40 μέτρα θα τοποθετήσουμε 13 φορές το παραπάνω φορτίο των 18 τόνων: $B_7 = 13 * 18[tn] \Rightarrow B_7 = 235[tn]$

4.3.2 Βάρος Πεζοδρομίου

Γενικά τα πεζοδρόμια των σιδηροδρομικών γεφυρών δεν χρησιμοποιούνται για την ελεύθερη κυκλοφορία των πεζών, αλλά μόνο για την κυκλοφορία του προσωπικού των σιδηρόδρομων για την επιθεώρηση της γέφυρας και την εκτέλεση διάφορων εργασιών συντήρησης. Εμείς θα θεωρήσουμε πεζοδρόμιο όπου θα είναι δυνατή η ελεύθερη διέλευση των πεζών.

Στο πεζοδρόμιο διακρίνονται το επίστρωμα και οι μηκίδες του πεζοδρομίου. Οι μηκίδες του πεζοδρομίου στηρίζονται στις διαδοκίδες της γέφυρας όταν το πεζοδρόμιο βρίσκεται μεταξύ των κύριων δοκών της γέφυρας ή πάνω σε ειδικούς προβόλους πεζοδρομίου οι οποίοι τοποθετούνται συνήθως ως προέκταση σε κάθε διαδοκίδα.

Άρα θα χρησιμοποιήσουμε 2 πεζοδρόμια με πλάτος 1 μέτρο το καθένα και με πυκνότητα 1,5 άτομο/m² και βάρος 75 Kg/άτομο.

Βάρος πεζών:

$$B_{\pi.} = 2 * 40[m] * 1[m] * 1,5[\alpha\tau./m^2] * 0,075[tn/\alpha\tau.] \Rightarrow B_{\pi.} = 9[tn]$$

Βάρος κιγκλιδωμάτων και επιστρώματος:

Για το επίστρωμα χρησιμοποιήσαμε μεταλλικές σχάρες δαπέδου ΗΚΠ-Α γαλβανιζέ εν θερμό, με διαστάσεις (1 × 1)m και 22,7 Kg/τεμάχιο

$$\text{Άρα: } B_{\varepsilon\pi.} = 80[\tau\epsilon\mu.] * 22,7[Kg] \Rightarrow B_{\varepsilon\pi.} = 1,8tn$$

Τα κιγκλιδώματα θα έχουν ύψος 1 μέτρο και κατά προσέγγιση το βάρος τους είναι B = 40 [Kg/m] , τοποθετήσαμε στύλους I120 και 3 οριζόντιες σειρές με δοκούς I80.

$$\text{Το βάρος των κιγκλιδωμάτων είναι: } B_{\kappa.} = 40[Kg/m] * 80[m] \Rightarrow B_{\kappa.} = 3,2[tn]$$

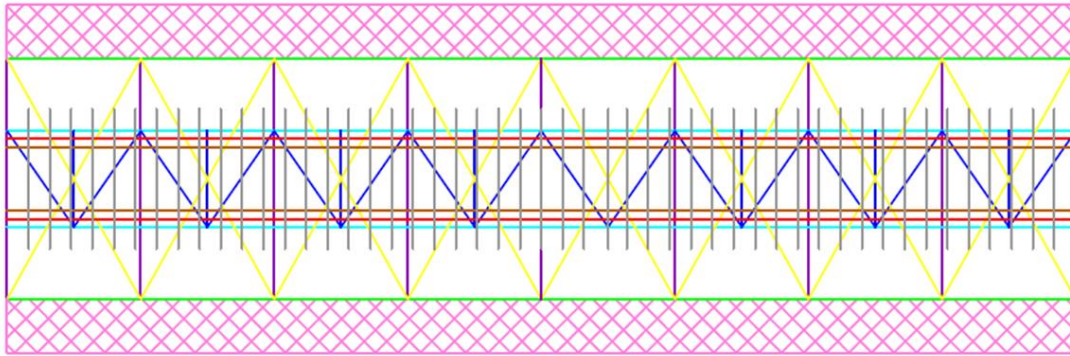
$$\text{Το συνολικό βάρος του πεζοδρομίου είναι: } B_8 = 9[tn] + 1,8[tn] + 3,2[tn] \Rightarrow B_8 = 14[tn]$$

Άρα το συνολικό Βάρος της γέφυρας είναι:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 \Rightarrow$$

$$B = 24 + 13,77 + 12 + 39,55 + 15,15 + 19,2 + 235 + 14 = 370[tn]$$

Παρακάτω στο σχήμα 4.1 έχουμε σχεδιάσει την κάτοψη του καταστρώματος της γέφυρας.



Σχήμα 4.1: Κάτοψη καταστρώματος γέφυρας

- Πράσινο \Rightarrow Κύριες δοκοί
- Μοβ \Rightarrow Διαδοκίδες
- Τιρκουάζ \Rightarrow Μηκίδες
- Κόκκινο \Rightarrow Σιδηροτροχίες
- Καφε \Rightarrow Αντιτροχιές
- Μπλε \Rightarrow Σύνδεσμοι μηκίδων
- Κίτρινο \Rightarrow Αντιανέμιοι σύνδεσμοι
- Ροζ \Rightarrow Πεζοδρόμιο
- Γκρι \Rightarrow Στρωτήρες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΥΡΙΑΣ ΔΟΚΟΥ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ

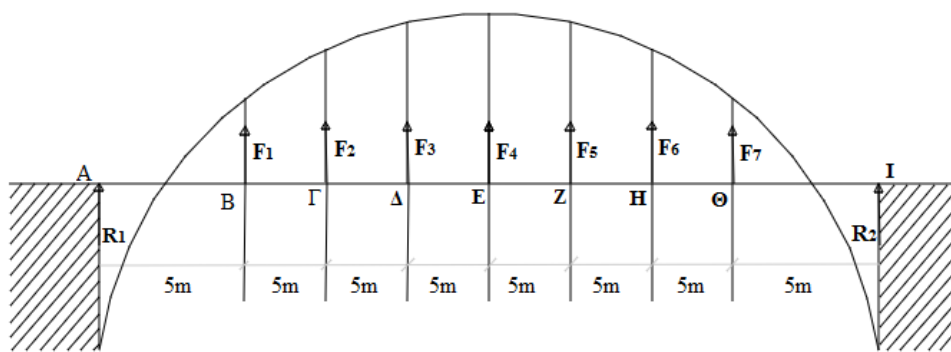
5.1 ΔΙΑΤΑΞΗ ΓΕΦΥΡΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στην κύρια δοκό και θα βρούμε το βέλος κάμψης της δοκού. Πρέπει το βέλος κάμψης να είναι μηδέν, επομένως θα το υπολογίσουμε στα σημεία που η κύρια δοκός ενώνεται με συρματόσχοινα με τον τοξωτό φορέα. Με την μέθοδο της επαλληλίας μετατοπίσεων θα βρούμε το βέλος κάμψης στα σημεία που θέλουμε.

Τα συρματόσχοινα ανάρτησης θα φέρουν κοχλίες οι οποίοι θα συσφίγγονται ώστε η δοκός A-I να ευθυγραμμίζεται σε όλα τα σημεία ανάρτησης, δηλαδή το τελικό βέλος κάμψης σε κάθε ένα από τα σημεία (B,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η και Θ) να είναι μηδέν. Παρακάτω φαίνεται η Διάταξη της Γέφυρας (Σχ. 5.1).

Οι υπολογισμοί θα γίνουν στην μια κύρια δοκό λόγω συμμετρίας.

Κύρια δοκός A-I:



Σχήμα 5.1: Διάταξη Γέφυρας

$$R_1 + R_2 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 = \frac{B}{2} \quad (5.1)$$

$R_1 \rightarrow$ αντίδραση στο σημείο A

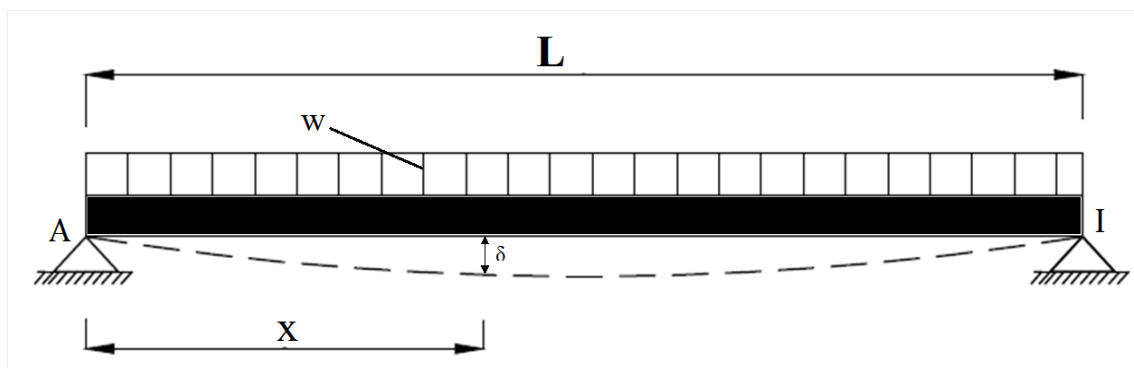
$R_2 \rightarrow$ αντίδραση στο σημείο I

$F_1 \rightarrow$ δύναμη αντίδρασης στο σημείο B
 $F_2 \rightarrow$ δύναμη αντίδρασης στο σημείο Γ
 $F_3 \rightarrow$ δύναμη αντίδρασης στο σημείο Δ
 $F_4 \rightarrow$ δύναμη αντίδρασης στο σημείο E
 $F_5 \rightarrow$ δύναμη αντίδρασης στο σημείο Z
 $F_6 \rightarrow$ δύναμη αντίδρασης στο σημείο H
 $F_7 \rightarrow$ δύναμη αντίδρασης στο σημείο Θ
 $B \rightarrow$ το βάρος της γέφυρας

Λόγω συμμετρίας: $R_1 = R_2$, $F_1 = F_7$, $F_2 = F_6$, $F_3 = F_5$

5.2 ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΣΥΝΕΧΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Γενικά για βέλος κάμψης αμφιέρειστης δοκού με συνεχή φόρτιση ισχύει:



Σχήμα 5.2: Βέλος Κάμψης (χωρίς ανάρτηση)

$$\delta = \frac{W \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (L^3 - 2 \cdot L \cdot x^2 + x^3) \quad (5.2)$$

$$W = \frac{B}{2 \cdot L} \quad (5.3)$$

$\delta \rightarrow$ Βέλος κάμψης χωρίς ανάρτηση της δοκού

$w \rightarrow$ Ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο

$E \rightarrow$ Μέτρο ελαστικότητας

$I \rightarrow$ Ροπή αδράνειας

$x \rightarrow$ Η απόσταση του κάθε σημείου από το αριστερό άκρο της δοκού

$L =$ Το μήκος της δοκού

5.2.1 Υπολογισμός Βέλους Κάμψης σε Διάφορες Θέσεις Χωρίς Ανάρτηση της Δοκού

Θέση Β

Στην θέση Β θα υπολογίσουμε αρχικά την απόσταση x του σημείου από το αριστερό άκρο της δοκού και στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε την σχέση (5.2) για να υπολογίσουμε το βέλος κάμψης χωρίς ανάρτηση της δοκού. Η ίδια διαδικασία θα ακολουθηθεί και για τις θέσεις Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

$$x = \frac{L}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ m}$$

$$\delta_B = \frac{W}{24 * E * I} * \frac{L}{8} * \left[L^3 - 2 * L * \left(\frac{L}{8} \right)^2 + \left(\frac{L}{8} \right)^3 \right] = \frac{W}{24 * E * I} * \frac{L}{8} * \left(L^3 - 2 * \frac{L^3}{64} + \frac{L^3}{512} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_B = \frac{W}{24 * E * I} * \frac{L}{8} * \left(\frac{512}{512} * L^3 - \frac{16}{512} * L^3 + \frac{1}{512} * L^3 \right) = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{497}{24 * 8 * 512} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_B = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{497}{98.304} \quad (5.4)$$

Θέση Γ

$$x = \frac{2 * L}{8} = \frac{2 * 40}{8} = 10 \text{ m}$$

$$\delta_\Gamma = \frac{W}{24 * E * I} * \frac{2 * L}{8} * \left[L^3 - \left(2 * L * \frac{L^2}{16} \right) + \frac{L^3}{64} \right] = \frac{W}{24 * E * I} * \frac{2 * L}{8} * \left(L^3 - 2 * \frac{L^3}{16} + \frac{L^3}{64} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_\Gamma = \frac{W}{24 * E * I} * \frac{2 * L}{8} * \left(\frac{64}{64} * L^3 - \frac{8}{64} * L^3 + \frac{1}{64} * L^3 \right) = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{2 * 57}{24 * 8 * 64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_\Gamma = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{57}{6.144} \quad (5.5)$$

Θέση Δ

$$x = \frac{3 * L}{8} = \frac{3 * 40}{8} = 15 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\Delta} &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{3 * L}{8} * \left[L^3 - 2 * L * \left(\frac{3 * L}{8} \right)^2 + \left(\frac{3 * L}{8} \right)^3 \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_{\Delta} &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{3 * L}{8} * \left(L^3 - \frac{18}{64} * L^3 + \frac{27}{512} * L^3 \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_{\Delta} &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{3 * L}{8} * \left(\frac{512}{512} * L^3 - \frac{144}{512} * L^3 + \frac{27}{512} * L^3 \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_{\Delta} &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{3 * L}{8} * \frac{395}{512} * L^3 = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{395}{32.768} \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_{\Delta} &= \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{395}{32.768}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Θέση Ε

$$x = \frac{4 * L}{8} = \frac{40}{2} = 20 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
\delta_E &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{L}{2} * \left[L^3 - 2 * L * \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_E &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{L}{2} * \left(L^3 - \frac{2}{4} * L^3 + \frac{L^3}{8} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_E &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{L}{2} * \left(\frac{8}{8} * L^3 - \frac{4}{8} * L^3 + \frac{L^3}{8} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_E &= \frac{W}{24 * E * I} * \frac{L}{2} * \frac{5}{8} * L^3 \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_E &= \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{5}{384}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Θέση Ζ

Λόγω συμμετρίας:

$$x = \frac{5 * L}{8} = \frac{5 * 40}{8} = 25 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta_Z = \delta_{\Delta} = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{395}{32.768} \tag{5.8}$$

Θέση Η

Λόγω συμμετρίας:

$$x = \frac{6 * L}{8} = \frac{6 * 40}{8} = 30 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta_H = \delta_\Gamma = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{57}{6.144} \quad (5.9)$$

Θέση Θ

Λόγω συμμετρίας:

$$x = \frac{7 * L}{8} = \frac{7 * 40}{8} = 35 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta_\Theta = \delta_B = \frac{W * L^4}{E * I} * \frac{497}{98.304} \quad (5.10)$$

5.3 ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΜΙΑ ΔΥΝΑΜΗ F

Γενικά ισχύει:

$$- \text{ Αριστερά της } F: \delta' = \frac{F * b * x}{6 * L * E * I} * (L^2 - b^2 - x^2) \quad (5.11)$$

$$- \text{ Δεξιά της } F: \delta' = \frac{F * a * x_1}{6 * L * E * I} * (L^2 - a^2 - x_1^2) \quad (5.12)$$

δ' → Βέλος κάμψης με ανάρτηση της δοκού

F → Δύναμη ανάρτησης

a → Η απόσταση της δύναμης F από το αριστερό άκρο της δοκού

b → Η απόσταση της δύναμης F από το δεξί άκρο της δοκού

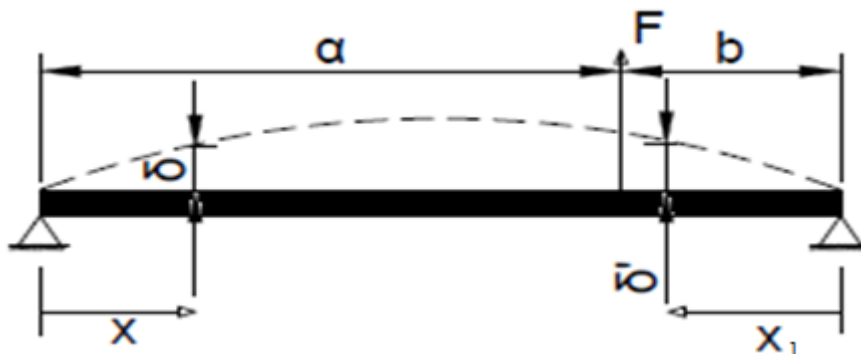
x → Η απόσταση του κάθε σημείου από το αριστερό άκρο της δοκού

x_1 → Η απόσταση του κάθε σημείου από το δεξιό άκρο

E → Μέτρο ελαστικότητας

I → Ροπή αδράνειας

L → Το μήκος της δοκού



Σχήμα 5.3: Βέλος Κάμψης (με ανάρτηση)

5.3.1 Υπολογισμός Βέλους Κάμψης σε Διάφορες Θέσεις με Ανάρτηση της Δοκού

- Δύναμη F_1 στο B:

Βάζουμε μια δύναμη F_1 στο σημείο B και εφαρμόζοντας τις σχέσεις (5.11) και (5.12) υπολογίζουμε σε όλες τις θέσεις το βέλος κάμψης, αφού πρώτα έχουμε βρει την απόσταση που απέχει η δύναμη F_1 από το δεξί και το αριστερό άκρο της δοκού καθώς και την απόσταση x που απέχει το κάθε σημείο από το αριστερό άκρο της. Η ίδια διαδικασία θα ακολουθηθεί για τον υπολογισμό του βέλους κάμψης και για τις θέσεις Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

$$\left(\alpha = \frac{L}{8}, b = \frac{7}{8} * L \right)$$

Θέση Β:

$$x = \frac{L}{8}$$

$$\begin{aligned} \delta_{IB} &= \frac{F_1 * \frac{7}{8} * L * \frac{L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{7}{8} * L \right)^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{IB} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{7}{6 * 8 * 8} * \frac{14}{64} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_{IB} &= \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{49}{12.288} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Θέση Γ:

$$x_1 = \frac{6 * L}{8}$$

$$\begin{aligned} \delta_{IG} &= \frac{F_1 * \frac{L}{8} * \frac{6}{8} * L}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 - \left(\frac{6}{8} * L \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{IG} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{6}{6 * 8 * 8} * \frac{27}{64} \Rightarrow \\ \delta_{IG} &= \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Θέση Δ:

$$x_1 = \frac{5 * L}{8}$$

$$\delta_{1\Delta} = \frac{F_1 * \frac{L}{8} * \frac{5*L}{8}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 - \left(\frac{5*L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{1\Delta} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{5}{6*8*8} * \frac{38}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{1\Delta} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{190}{24.576}$$

$$\delta_{1\Delta} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{95}{12.288} \quad (5.15)$$

Θέση Ε:

$$x_1 = \frac{4*L}{8} = \frac{L}{2}$$

$$\delta_{1E} = \frac{F_1 * \frac{L}{8} * \frac{L}{2}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{1E} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6*16} * \frac{47}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{1E} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{47}{6.144} \quad (5.16)$$

Θέση Ζ:

$$x_1 = \frac{3*L}{8}$$

$$\delta_{1Z} = \frac{F_1 * \frac{L}{8} * \frac{3*L}{8}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 - \left(\frac{3*L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{1Z} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{3}{6*8*8} * \frac{54}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{1Z} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} \quad (5.17)$$

Θέση Η:

$$x_1 = \frac{2*L}{8} = \frac{L}{4}$$

$$\delta_{1H} = \frac{F_1 * \frac{L}{8} * \frac{L}{4}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{1H} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6*8*4} * \frac{59}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{1H} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{59}{12.288} \quad (5.18)$$

Θέση Θ:

$$x_1 = \frac{L}{8}$$

$$\delta_{1\Theta} = \frac{F_1 * \frac{L}{8} * \frac{L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{1\Theta} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6 * 8 * 8} * \frac{62}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{1\Theta} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{31}{12.288} \quad (5.19)$$

• Δύναμη F_2 στο Γ :

$$\left(\alpha = \frac{L}{4}, b = \frac{3*L}{4} \right)$$

Θέση Β:

$$x = \frac{L}{8}$$

$$\delta_{2B} = \frac{F_2 * \frac{3*L}{4} * \frac{L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{3*L}{4} \right)^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{2B} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{3}{6 * 4 * 8} * \frac{27}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{2B} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} \quad (5.20)$$

Θέση Γ :

$$x = \frac{2*L}{8} = \frac{L}{4}$$

$$\delta_{2\Gamma} = \frac{F_2 * \frac{3*L}{4} * \frac{L}{4}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{3*L}{4} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{2\Gamma} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{3}{6 * 4 * 4} * \frac{6}{16} \Rightarrow$$

$$\delta_{2\Gamma} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{3}{256} \quad (5.21)$$

Θέση Δ :

$$x_1 = \frac{5*L}{8}$$

$$\delta_{2\Delta} = \frac{F_2 * \frac{L}{4} * \frac{5*L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 - \left(\frac{5*L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{2\Delta} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{5}{6 * 4 * 8} * \frac{35}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{2\Delta} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{175}{12.288} \quad (5.22)$$

Θέση E:

$$x_1 = \frac{4 * L}{8} = \frac{L}{2}$$

$$\delta_{2E} = \frac{F_2 * \frac{L}{4} * \frac{L}{2}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{2E} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6 * 8} * \frac{11}{16} \Rightarrow$$

$$\delta_{2E} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{11}{768} \quad (5.23)$$

Θέση Z:

$$x_1 = \frac{3 * L}{8}$$

$$\delta_{2Z} = \frac{F_2 * \frac{L}{4} * \frac{3 * L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 - \left(\frac{3 * L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{2Z} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{3}{6 * 4 * 8} * \frac{51}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{2Z} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{51}{4.096} \quad (5.24)$$

Θέση H:

$$x_1 = \frac{2 * L}{8} = \frac{L}{4}$$

$$\delta_{2H} = \frac{F_2 * \frac{L}{4} * \frac{L}{4}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{2H} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6 * 16} * \frac{14}{16} \Rightarrow$$

$$\delta_{2H} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{7}{768} \quad (5.25)$$

Θέση Θ:

$$x_1 = \frac{L}{8}$$

$$\delta_{2\Theta} = \frac{F_2 * \frac{L}{4} * \frac{L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{2\Theta} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6 * 4 * 8} * \frac{59}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{2\theta} = \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{59}{12.288} \quad (5.26)$$

• Δύναμη F_3 στο Δ :

$$\left(\alpha = \frac{3*L}{8} , b = \frac{5*L}{8} \right)$$

Θέση Β:

$$x = \frac{L}{8}$$

$$\delta_{3B} = \frac{F_3 * \frac{5*L}{8} * \frac{L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{5*L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{3B} = \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{5}{6 * 8 * 8} * \frac{38}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{3B} = \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{95}{12.288} \quad (5.27)$$

Θέση Γ:

$$x = \frac{2*L}{8} = \frac{L}{4}$$

$$\delta_{3\Gamma} = \frac{F_3 * \frac{5*L}{8} * \frac{L}{4}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{5*L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{3\Gamma} = \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{5}{6 * 8 * 4} * \frac{35}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{3\Gamma} = \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{175}{12.288} \quad (5.28)$$

Θέση Δ:

$$x = \frac{3*L}{8}$$

$$\delta_{3\Delta} = \frac{F_3 * \frac{5*L}{8} * \frac{3*L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{5*L}{8} \right)^2 - \left(\frac{3*L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{3\Delta} = \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{15}{6 * 8 * 8} * \frac{30}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{3\Delta} = \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{75}{4.096} \quad (5.29)$$

Θέση Ε:

$$x_1 = \frac{4*L}{8} = \frac{L}{2}$$

$$\delta_{3E} = \frac{F_3 * \frac{3*L}{8} * \frac{L}{2}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{3*L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{3E} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{3}{6*16} * \frac{39}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{3E} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{39}{2.048} \quad (5.30)$$

Θέση Ζ:

$$x_1 = \frac{3*L}{8}$$

$$\delta_{3Z} = \frac{F_3 * \frac{3*L}{8} * \frac{3*L}{8}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{3*L}{8} \right)^2 - \left(\frac{3*L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{3Z} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{9}{6*8*8} * \frac{46}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{3Z} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{69}{4.096} \quad (5.31)$$

Θέση Η:

$$x_1 = \frac{2*L}{8} = \frac{L}{4}$$

$$\delta_{3H} = \frac{F_3 * \frac{3*L}{8} * \frac{L}{4}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{3*L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{3H} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{3}{6*8*4} * \frac{51}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{3H} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{51}{4.096} \quad (5.32)$$

Θέση Θ:

$$x_1 = \frac{L}{8}$$

$$\delta_{3\Theta} = \frac{F_3 * \frac{3*L}{8} * \frac{L}{8}}{6*L*E*I} * \left[L^2 - \left(\frac{3*L}{8} \right)^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{3\Theta} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{3}{8*8*6} * \frac{54}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{3\Theta} = \frac{F_3 * L^3}{E*I} * \frac{27}{4.096} \quad (5.33)$$

- Δύναμη F_4 στο Ε:

$$\left(\alpha = \frac{L}{2}, b = \frac{L}{2} \right)$$

Θέση Β:

$$x = \frac{L}{8}$$

$$\delta_{4B} = \frac{F_4 * \frac{L}{2} * \frac{L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{4B} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6 * 16} * \frac{47}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{4B} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{47}{6.144} \quad (5.34)$$

Θέση Γ:

$$x = \frac{2 * L}{8} = \frac{L}{4}$$

$$\delta_{4\Gamma} = \frac{F_4 * \frac{L}{2} * \frac{L}{4}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{4\Gamma} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{1}{6 * 8} * \frac{11}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{4\Gamma} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{11}{768} \quad (5.35)$$

Θέση Δ:

$$x = \frac{3 * L}{8}$$

$$\delta_{4\Delta} = \frac{F_4 * \frac{L}{2} * \frac{3 * L}{8}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{3 * L}{8} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{4\Delta} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{3}{6 * 16} * \frac{39}{64} \Rightarrow$$

$$\delta_{4\Delta} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{39}{2.048} \quad (5.36)$$

Θέση Ε:

$$x = \frac{L}{2}$$

$$\delta_{4E} = \frac{F_4 * \frac{L}{2} * \frac{L}{2}}{6 * L * E * I} * \left[L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \Rightarrow \delta_{4E} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{1}{24} * \frac{2}{4} \Rightarrow$$

$$\delta_{4E} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{1}{48} \quad (5.37)$$

Θέση Ζ:

$$x_1 = \frac{3*L}{8}$$

Λόγω συμμετρίας: $\delta_{4Z} = \delta_{4\Delta}$

Άρα

$$\delta_{4Z} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{39}{2.048} \quad (5.38)$$

Θέση Η:

$$x_1 = \frac{2*L}{8} = \frac{L}{4}$$

Λόγω συμμετρίας: $\delta_{4H} = \delta_{4\Gamma}$

Άρα

$$\delta_{4H} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{11}{768} \quad (5.39)$$

Θέση Θ:

$$x_1 = \frac{L}{8}$$

Λόγω συμμετρίας: $\delta_{4\Theta} = \delta_{4B}$

$$\delta_{4\Theta} = \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{47}{6.144} \quad (5.40)$$

- Δύναμη F_5 στο Ζ:

$$\left(\alpha = \frac{5*L}{8} , b = \frac{3*L}{8} \right)$$

Όλες οι παρακάτω θέσεις προκύπτουν λόγω συμμετρίας.

Θέση Β:

$$x = \frac{L}{8} \quad \delta_{5B} = \delta_{3\Theta} = \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} \quad (5.41)$$

Θέση Γ:

$$x = \frac{2*L}{8} \quad \delta_{5\Gamma} = \delta_{3H} = \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{51}{4.096} \quad (5.42)$$

Θέση Δ:

$$x = \frac{3*L}{8} \quad \delta_{5\Delta} = \delta_{3Z} = \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{69}{4.096} \quad (5.43)$$

Θέση Ε:

$$x = \frac{L}{2} \quad \delta_{5E} = \delta_{3E} = \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{39}{2.048} \quad (5.44)$$

Θέση Ζ:

$$x = \frac{5*L}{8} \quad \delta_{5Z} = \delta_{3\Delta} = \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{75}{4.096} \quad (5.45)$$

Θέση Η:

$$x_1 = \frac{2*L}{8} \quad \delta_{5H} = \delta_{3\Gamma} = \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{175}{12.288} \quad (5.46)$$

Θέση Θ:

$$x = \frac{L}{8} \quad \delta_{5\Theta} = \delta_{3B} = \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{95}{12.288} \quad (5.47)$$

- Δύναμη F₆ στο Η:

$$\left(\alpha = \frac{6*L}{8} , b = \frac{2*L}{8} \right)$$

Όλες οι παρακάτω θέσεις προκύπτουν λόγω συμμετρίας:

Θέση Β:

$$x = \frac{L}{8} \quad \delta_{6B} = \delta_{2\Theta} = \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{59}{12.288} \quad (5.48)$$

Θέση Γ:

$$x = \frac{2*L}{8} \quad \delta_{6\Gamma} = \delta_{2H} = \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{7}{768} \quad (5.49)$$

Θέση Δ:

$$x = \frac{3*L}{8} \quad \delta_{6\Delta} = \delta_{2Z} = \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{51}{4.096} \quad (5.50)$$

Θέση Ε:

$$x = \frac{4*L}{8} = \frac{L}{2} \qquad \delta_{6E} = \delta_{2E} = \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{11}{768} \qquad (5.51)$$

Θέση Ζ:

$$x = \frac{5*L}{8} \qquad \delta_{6Z} = \delta_{2\Delta} = \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{175}{12.288} \qquad (5.52)$$

Θέση Η:

$$x = \frac{6*L}{8} \qquad \delta_{6H} = \delta_{2\Gamma} = \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{3}{256} \qquad (5.53)$$

Θέση Θ:

$$x_1 = \frac{L}{8} \qquad \delta_{6\Theta} = \delta_{2B} = \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} \qquad (5.54)$$

- Δύναμη F_Z στο Θ:

$$\left(\alpha = \frac{7*L}{8} \quad , \quad b = \frac{L}{8} \right)$$

Όλες οι παρακάτω θέσεις προκύπτουν λόγω συμμετρίας.

Θέση Β:

$$x = \frac{L}{8} \qquad \delta_{7B} = \delta_{1\Theta} = \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{31}{12.288} \qquad (5.55)$$

Θέση Γ:

$$x = \frac{2*L}{8} = \frac{L}{4} \qquad \delta_{7\Gamma} = \delta_{1H} = \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{59}{12.288} \qquad (5.56)$$

Θέση Δ:

$$x = \frac{3*L}{8} \qquad \delta_{7\Delta} = \delta_{1Z} = \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} \qquad (5.57)$$

Θέση Ε:

$$x = \frac{4*L}{8} = \frac{L}{2} \quad \delta_{7E} = \delta_{1E} = \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{47}{6.144} \quad (5.58)$$

Θέση Z:

$$x = \frac{5*L}{8} \quad \delta_{7Z} = \delta_{1\Delta} = \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{95}{12.288} \quad (5.59)$$

Θέση H:

$$x = \frac{6*L}{8} \quad \delta_{7H} = \delta_{1\Gamma} = \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} \quad (5.60)$$

Θέση Θ:

$$x = \frac{7*L}{8} \quad \delta_{7\Theta} = \delta_{1B} = \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{49}{12.288} \quad (5.61)$$

5.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΒΕΛΩΝ ΚΑΜΨΗΣ

Η δοκός A-I θα πρέπει να ευθυγραμμίζεται σε όλα τα σημεία ανάρτησης, δηλαδή το τελικό βέλος κάμψης σε κάθε ένα από τα σημεία B,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η και Θ να είναι μηδέν. Αυτό το πετυχαίνουμε τοποθετώντας στα συρματόσχοινα ανάρτησης κοχλίες ώστε να τα συσφίγγουν. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την μέθοδο της επαλληλίας θα βρούμε 4 εξισώσεις και θα υπολογίσουμε από τις εξισώσεις αυτές τις δυνάμεις F_1, F_2, F_3 και F_4 .

Με βάση λοιπόν την μέθοδο επαλληλίας ισχύουν οι εξής σχέσεις:

Για το σημείο B:

$$\delta_B = \delta_{1B} + \delta_{2B} + \delta_{3B} + \delta_{4B} + \delta_{5B} + \delta_{6B} + \delta_{7B} \quad (5.61)$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\frac{W * L^4}{E * I} * \frac{497}{98304} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{49}{12.288} + \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} + \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{95}{12.288} + \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{47}{6.144} + \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4.096} + \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{59}{12.288} + \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{31}{12.288} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W * L * \frac{1 * 497}{1 * 98304} = F_1 * \frac{8 * 49}{8 * 12.288} + F_2 * \frac{24 * 27}{24 * 4.096} + F_3 * \frac{8 * 95}{8 * 12.288} + F_4 * \frac{16 * 47}{16 * 6.144} +$$

$$+ F_5 * \frac{24 * 27}{24 * 4.096} + F_6 * \frac{8 * 59}{8 * 12.288} + F_7 * \frac{8 * 31}{8 * 12.288} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 497 * W * L = 392 * F_1 + 648 * F_2 + 760 * F_3 + 752 * F_4 + 648 * F_5 + 472 * F_6 + 248 * F_7$$

Λόγω συμμετρίας από την σχέση (5.1) έχουμε: ($F_1 = F_7, F_2 = F_6, F_3 = F_5$)

$$\text{Άρα: } 497 * W * L = 640 * F_1 + 1120 * F_2 + 1408 * F_3 + 752 * F_4 \quad (5.62)$$

Για το σημείο Γ:

$$\delta_{\Gamma} = \delta_{1\Gamma} + \delta_{2\Gamma} + \delta_{3\Gamma} + \delta_{4\Gamma} + \delta_{5\Gamma} + \delta_{6\Gamma} + \delta_{7\Gamma}$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\frac{W * L^4}{E * I} * \frac{457}{6144} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{27}{4096} + \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{3}{256} + \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{175}{12.288} + \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{11}{768} +$$

$$+ \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{51}{4096} + \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{7}{768} + \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{59}{12.288} \Rightarrow$$

$$W * L * \frac{2 * 457}{2 * 6.144} = F_1 * \frac{3 * 27}{3 * 4.096} + F_2 * \frac{48 * 3}{48 * 256} + F_3 * \frac{1 * 175}{1 * 12.288} + F_4 * \frac{16 * 11}{16 * 768} +$$

$$+ F_5 * \frac{3 * 51}{3 * 4.096} + F_6 * \frac{16 * 7}{16 * 768} + F_7 * \frac{1 * 59}{1 * 12.288} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 114 * W * L = 81 * F_1 + 144 * F_2 + 175 * F_3 + 176 * F_4 + 153 * F_5 + 112 * F_6 + 59 * F_7$$

Λόγω συμμετρίας από την σχέση (5.1) έχουμε: ($F_1 = F_7, F_2 = F_6, F_3 = F_5$)

$$\text{Άρα: } 114 * W * L = 140 * F_1 + 256 * F_2 + 328 * F_3 + 176 * F_4 \quad (5.63)$$

Για το σημείο Δ:

$$\delta_{\Delta} = \delta_{1\Delta} + \delta_{2\Delta} + \delta_{3\Delta} + \delta_{4\Delta} + \delta_{5\Delta} + \delta_{6\Delta} + \delta_{7\Delta}$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\frac{W * L^4}{E * I} * \frac{395}{32.768} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{95}{12.288} + \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{175}{12.288} + \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{75}{4.096} + \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{39}{2.048} +$$

$$+ \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{69}{4.096} + \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{51}{4.096} + \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{47}{4.096} \Rightarrow$$

$$W * L * \frac{3 * 395}{3 * 32.768} = F_1 * \frac{8 * 95}{8 * 12.288} + F_2 * \frac{8 * 175}{8 * 12.288} + F_3 * \frac{24 * 75}{24 * 4.096} + F_4 * \frac{48 * 39}{48 * 2.048} +$$

$$+ F_5 * \frac{24 * 69}{24 * 4.096} + F_6 * \frac{24 * 51}{24 * 4.096} + F_7 * \frac{24 * 27}{24 * 4.096} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.185 * W * L = 760 * F_1 + 1.400 * F_2 + 1.800 * F_3 + 1.872 * F_4 + 1.656 * F_5 +$$

$$+ 1.224 * F_6 + 648 * F_7$$

Λόγω συμμετρίας από την σχέση (5.1) έχουμε: ($F_1 = F_7, F_2 = F_6, F_3 = F_5$)

$$\text{Άρα: } 1.185 * W * L = 1.408 * F_1 + 2.624 * F_2 + 3.456 * F_3 + 1.872 * F_4 \quad (5.64)$$

Για το σημείο E:

$$\delta_E = \delta_{1E} + \delta_{2E} + \delta_{3E} + \delta_{4E} + \delta_{5E} + \delta_{6E} + \delta_{7E}$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\frac{W * L^4}{E * I} * \frac{5}{384} = \frac{F_1 * L^3}{E * I} * \frac{47}{6.144} + \frac{F_2 * L^3}{E * I} * \frac{11}{768} + \frac{F_3 * L^3}{E * I} * \frac{39}{2.048} + \frac{F_4 * L^3}{E * I} * \frac{1}{48} +$$

$$+ \frac{F_5 * L^3}{E * I} * \frac{39}{2.048} + \frac{F_6 * L^3}{E * I} * \frac{11}{768} + \frac{F_7 * L^3}{E * I} * \frac{47}{6.144} \Rightarrow$$

$$W * L * \frac{16 * 5}{16 * 384} = F_1 * \frac{1 * 47}{1 * 6.144} + F_2 * \frac{8 * 11}{8 * 768} + F_3 * \frac{3 * 39}{3 * 2.048} + F_4 * \frac{128 * 1}{128 * 48} +$$

$$+ F_5 * \frac{3 * 39}{3 * 2.048} + F_6 * \frac{8 * 11}{8 * 768} + F_7 * \frac{1 * 47}{1 * 6.144} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80 * W * L = 47 * F_1 + 88 * F_2 + 117 * F_3 + 128 * F_4 + 117 * F_5 +$$

$$+ 88 * F_6 + 47 * F_7$$

Λόγω συμμετρίας από την σχέση (5.1) έχουμε: ($F_1 = F_7, F_2 = F_6, F_3 = F_5$)

$$\text{Άρα: } 80 * W * L = 94 * F_1 + 176 * F_2 + 234 * F_3 + 128 * F_4 \quad (5.65)$$

Λόγω συμμετρίας τα υπόλοιπα σημεία είναι:

$$\text{Σημείο Z} = \text{Σημείο Δ: } 1.185 * W * L = 1.408 * F_1 + 2.624 * F_2 + 3.456 * F_3 + 1.872 * F_4$$

$$\text{Σημείο Η} = \text{Σημείο Γ: } 114 * W * L = 140 * F_1 + 256 * F_2 + 328 * F_3 + 176 * F_4$$

$$\text{Σημείο Θ} = \text{Σημείο Β: } 497 * W * L = 640 * F_1 + 1.120 * F_2 + 1.408 * F_3 + 752 * F_4$$

5.4.1 Επίλυση του Συστήματος των Τεσσάρων Εξισώσεων

Έχοντας ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων (5.62), (5.63), (5.64) και (5.65) το λύνουμε και υπολογίζουμε τις δυνάμεις F_1, F_2, F_3 και F_4 , ως εξής:

Αρχικά λύνουμε την εξίσωση (5.62) ως προς F_4 και την αντικαθιστούμε στην (5.65):

$$(5.62) \Rightarrow F_4 = \frac{497*W * L - 640* F_1 - 1.120* F_2 - 1.408* F_3}{752} \quad (5.65\alpha)$$

$$(5.65) \Rightarrow \frac{752*80*W * L}{752} = \frac{752*94* F_1}{752} + \frac{752*176* F_2}{752} + \frac{752*234* F_3}{752} +$$

$$+ 128* \frac{497*W * L - 640* F_1 - 1.120* F_2 - 1.408* F_3}{752} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60.160*W * L = 70.688* F_1 + 132352* F_2 + 175.968* F_3 + 63.616*W * L -$$

$$- 81.920* F_1 - 143.360* F_2 - 180.224* F_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3.456*W * L}{32} = \frac{11.232* F_1}{32} + \frac{11.008* F_2}{32} + \frac{4.256* F_3}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 108*W * L = 351* F_1 + 344* F_2 + 133* F_3 \quad (5.66)$$

Αντικαθιστώ την F_4 (5.65α) στην (5.63) και έχω:

$$(63) \Rightarrow 114*W * L = 140* F_1 + 256* F_2 + 328* F_3 +$$

$$+ 176* \frac{497*W * L - 640* F_1 - 1.120* F_2 - 1.408* F_3}{752} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{752*114*W * L}{752} = \frac{752*140* F_1}{752} + \frac{752*256* F_2}{752} + \frac{752*328* F_3}{752} +$$

$$+ 176* \frac{497*W * L - 640* F_1 - 1.120* F_2 - 1.408* F_3}{752} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 85.728*W * L = 105.280* F_1 + 192.512* F_2 + 246.656* F_3 + 87.472*W * L -$$

$$- 112.640* F_1 - 197.120* F_2 - 247.808* F_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1.744*W * L}{16} = \frac{7.360* F_1}{16} + \frac{4.608* F_2}{16} + \frac{1.152* F_3}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 109*W * L = 460* F_1 + 288* F_2 + 72* F_3 \quad (5.67)$$

Αντικαθιστώ την F_4 (5.65α) στην (5.64) και έχω:

$$\begin{aligned}
(5.64) &\Rightarrow 1.185*W * L = 1408*F_1 + 2624*F_2 + 3456*F_3 + \\
&+ 1872*\frac{497*W * L - 640*F_1 - 1.120*F_2 - 1.408*F_3}{752} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{752*1.185*W * L}{752} = \frac{752*1.408*F_1}{752} + \frac{752*2.624*F_2}{752} + \frac{752*3.456*F_3}{752} + \\
&+ 1872*\frac{497*W * L - 640*F_1 - 1.120*F_2 - 1.408*F_3}{752} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 891.120*W * L = 1.058816*F_1 + 1.973248*F_2 + 2.598912*F_3 + \\
&+ 930.384*W * L - 1.198080*F_1 - 2.096640*F_2 - 2.635776*F_3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{39.264*W * L}{32} = \frac{139.264*F_1}{32} + \frac{123.392*F_2}{32} + \frac{36.864*F_3}{32} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1.227*W * L = 4.352*F_1 + 3.856*F_2 + 1.152*F_3 \tag{5.68}
\end{aligned}$$

Οι σχέσεις (5.66), (5.67) και (5.68) αποτελούν σύστημα τριών εξισώσεων με 3 άγνωστους F_1, F_2, F_3 .

Λύνουμε την (5.66) ως προς F_3 και την αντικαθιστούμε στην (5.67) και (5.68):

$$(5.66) \Rightarrow F_3 = \frac{108*W * L - 351*F_1 - 344*F_2}{133} \tag{5.68α}$$

$$\begin{aligned}
(5.67) &\Rightarrow 109*W * L = 460*F_1 + 288*F_2 + 72*\frac{108*W * L - 351*F_1 - 344*F_2}{133} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{133*109*W * L}{133} = \frac{133*460*F_1}{133} + \frac{133*288*F_2}{133} + 72*\frac{108*W * L - 351*F_1 - 344*F_2}{133} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 14.497*W * L = 61.180*F_1 + 38.304*F_2 + 7.776*W * L - 25.272*F_1 - 24.768*F_2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 6.721*W * L = 35.908*F_1 + 13.536*F_2 \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώ επίσης την F_3 στην (5.68) και έχω:

$$\begin{aligned}
(5.68) &\Rightarrow 1.227*W * L = 4.352*F_1 + 3.856*F_2 + \\
&+ 1152*\frac{108*W * L - 351*F_1 - 344*F_2}{133} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{133*1.227*W * L}{133} = \frac{133*4.352*F_1}{133} + \frac{133*3.856*F_2}{133} + \\
&+ 1152*\frac{108*W * L - 351*F_1 - 344*F_2}{133} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 163.191 * W * L = 578816 * F_1 + 512848 * F_2 + 124.416 * W * L - 404.352 * F_1 - 396.288 * F_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 38.775 * W * L = 174.464 * F_1 + 116.560 * F_2 \quad (5.70)$$

Στην συνέχεια λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων (5.69) και (5.70) με δύο αγνώστους F_1 και F_2 ως εξής:

Λύνουμε την (5.69) ως προς F_2 και την αντικαθιστούμε (5.70).

$$(69) \Rightarrow F_2 = \frac{6.721 * W * L - 35.908 * F_1}{13.536} \quad (5.70\alpha)$$

$$(70) \Rightarrow 38.775 * W * L = 174.464 * F_1 + 116.560 * \frac{6.721 * W * L - 35.908 * F_1}{13.536} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13.536 * 38.775 * W * L}{13.536} = \frac{13.536 * 174.464 * F_1}{13.536} + 116.560 * \frac{6.721 * W * L - 35.908 * F_1}{13.536} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 524.858.400 * W * L = 2.361.544.704 * F_1 + 783.399.760 * W * L - 4.185.436.480 * F_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 258.541.360 * W * L = 1.823.891.776 * F_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{(258.541.360 * W * L) / 4.700.752}{1.823.891.776 / 4.700.752} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{55}{388} * W * L \quad (5.71)$$

Αντικαθιστώ την F_1 (5.71) στην (5.70α) και βρίσκω την F_2 :

$$(5.70\alpha) \Rightarrow F_2 = \frac{6.721 * W * L - 35.908 * F_1}{13.536} = \frac{6.721 * W * L - 35.908 * \frac{55}{388} * W * L}{13.536} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{(632.808 * W * L) / 3.384}{5.251.968 / 3.384} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{187}{1.552} * W * L \quad (5.72)$$

Αντικαθιστώ την F_1 και F_2 στην (5.68α) και βρίσκω την F_3 :

$$(5.68\alpha) \Rightarrow F_3 = \frac{108 * W * L - 351 * \frac{55}{388} * W * L - 344 * \frac{187}{1.552} * W * L}{133} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F_3 &= \frac{108*W*L}{133} - 351*\frac{55}{388*133}*W*L - 344*\frac{187}{1.552*133}*W*L \Rightarrow \\
\Rightarrow F_3 &= \frac{108*W*L}{133} - 351*\frac{55}{388*133}*W*L - 344*\frac{187}{1.552*133}*W*L \Rightarrow \\
\Rightarrow F_3 &= \frac{167.616*W*L}{133*1.552} - \frac{77.220}{1.552*133}*W*L - \frac{64.328}{1.552*133}*W*L \Rightarrow \\
\Rightarrow F_3 &= \frac{26.068}{206416}*W*L \Rightarrow F_3 = \frac{26.068/532}{206416/532}*W*L \\
\Rightarrow F_3 &= \frac{49}{388}*W*L \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώ την F_1, F_2 και F_3 στην (5.65α) και βρίσκω την F_4 :

$$\begin{aligned}
(5.65\alpha) \Rightarrow F_4 &= \frac{497*W*L - 640*\frac{55}{388}*W*L - 1.120*\frac{187}{1.552}*W*L - 1.408*\frac{49}{388}*W*L}{752} \Rightarrow \\
\Rightarrow F_4 &= \frac{1.552*497*W*L}{1.552*752} - 640*\frac{4*55}{4*388*752}*W*L - 1.120*\frac{1*187}{1*752*1.552}*W*L - \\
&- 1.408*\frac{4*49}{4*388*752}*W*L \Rightarrow \\
\Rightarrow F_4 &= \frac{771.344*W*L}{1.552*752} - \frac{140.800*W*L}{1.552*752} - \frac{209.440*W*L}{1.552*752} - \frac{275.968*W*L}{1.552*752} \Rightarrow \\
\Rightarrow F_4 &= \frac{771.344*W*L - 140.800*W*L - 209.440*W*L - 275.968*W*L}{1.552*752} \Rightarrow \\
\Rightarrow F_4 &= \frac{145.136*W*L}{1.167.104} \Rightarrow F_4 = \frac{(145.136*W*L)/752}{1.167.104/752} \Rightarrow \\
\Rightarrow F_4 &= \frac{193}{1.552}*W*L \tag{5.74}
\end{aligned}$$

Από την (5.1) έχω την παρακάτω σχέση λόγω συμμετρίας:

$$(1) \Rightarrow 2*R_1 + 2*F_1 + 2*F_2 + 2*F_3 + F_4 = \frac{B}{2} \tag{5.75}$$

Αντικαθιστώ τις F_1, F_2, F_3 και F_4 στην (5.75) και βρίσκω την R_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{1.552*2*R_1}{1.552} + 2*\frac{4*55*W*L}{4*388} + 2*\frac{1*187*W*L}{1*1.552} + 2*\frac{4*49*W*L}{4*388} + \frac{1*193*W*L}{1*1.552} &= \frac{776*B}{776*2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{3.104*R_1}{1.552} + \frac{440*W*L}{1.552} + \frac{374*W*L}{1.552} + \frac{392*W*L}{1.552} + \frac{193*W*L}{1.552} &= \frac{776*B}{1.552} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3.104 * R_1 + 440 * W * L + 374 * W * L + 392 * W * L + 193 * W * L = 776 * B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.104 * R_1 + 1.399 * W * L = 776 * B \quad (5.76)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την τρίτη σχέση (5.3):

$$W = \frac{B}{2 * L} \Rightarrow W * L = \frac{B}{2} \quad (5.77)$$

Προκύπτει η R_1 από την (5.76) ως εξής:

$$(5.76) \Rightarrow 3.104 * R_1 + 1.399 * \frac{B}{2} = 776 * B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{776 * B - (1.399 * \frac{B}{2})}{3.104} \Rightarrow R_1 = \frac{153 * B}{3.104 * 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{153 * B}{6.208} \quad (5.78)$$

5.4.2 Υπολογισμός των Δυνάμεων και Αντιδράσεων

Από την παραπάνω σχέση πάμε στην (5.1) και έχουμε όλες τις δυνάμεις ως εξής:

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 &= \frac{153}{6.208} * B \\ F_1 &= \frac{55}{388} * \frac{B}{2} \Rightarrow F_1 = \frac{55}{776} * B \\ F_2 &= \frac{187}{1.552} * \frac{B}{2} \Rightarrow F_2 = \frac{187}{3.104} * B \\ F_3 &= \frac{49}{388} * \frac{B}{2} \Rightarrow F_3 = \frac{49}{776} * B \\ F_4 &= \frac{193}{1.552} * \frac{B}{2} \Rightarrow F_4 = \frac{193}{3.104} * B \\ F_5 &= F_3 = \frac{49}{776} * B \\ F_6 &= F_2 = \frac{187}{3.107} * B \\ F_7 &= F_1 = \frac{55}{776} * B \end{aligned} \quad (5.79)$$

Από τις σχέσεις (5.79) κάνουμε αντικατάσταση και υπολογίζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στην γέφυρα:

(για βάρος γέφυρας: $B = 370[tn]$)

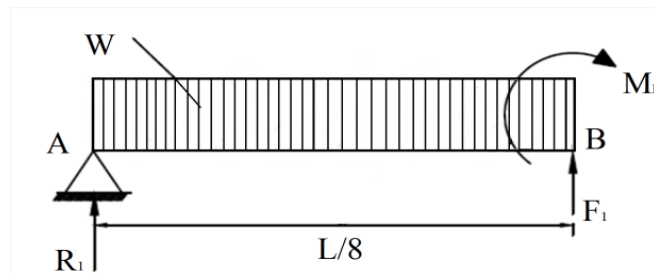
$$\begin{aligned}
 R_1 = R_2 &= \frac{153}{6.208} * 370 \Rightarrow R_1 = R_2 = 9.118[Kp] \\
 F_1 &= \frac{55}{388} * \frac{370}{2} \Rightarrow F_1 = 26.224[Kp] \\
 F_2 &= \frac{187}{1.552} * \frac{370}{2} \Rightarrow F_2 = 22.290[Kp] \\
 F_3 &= \frac{49}{388} * \frac{370}{2} \Rightarrow F_3 = 23.363[Kp] \\
 F_4 &= \frac{193}{1.552} * \frac{370}{2} \Rightarrow F_4 = 23.005[Kp] \\
 F_5 &= F_3 \Rightarrow F_5 = 23.363[Kp] \\
 F_6 &= F_2 \Rightarrow F_6 = 22.290[Kp] \\
 F_7 &= F_1 \Rightarrow F_7 = 26.224[Kp]
 \end{aligned}
 \tag{5.79\alpha}$$

5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΩΝ ΚΑΜΨΗΣ ΚΥΡΙΑΣ ΔΟΚΟΥ

Παρακάτω γίνεται ο υπολογισμός των ροπών κάμψης της κύριας δοκού στις θέσεις Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ. Με σκοπό να βρούμε σε ποια θέση προκύπτει η μέγιστη ροπή κάμψης.

Θέση Β:

Για να υπολογίσουμε την ροπή κάμψης στη θέση Β κάνουμε τομή λίγο μετά από το σημείο Β και παίρνουμε το κομμάτι από τα αριστερά της κύριας δοκού, έπειτα σχεδιάζουμε το ΔΕΣ της δοκού (Σχ. 5.4) και στην συνέχεια λύνουμε την εξίσωση των ροπών. Ομοίως και για τις θέσεις Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ.



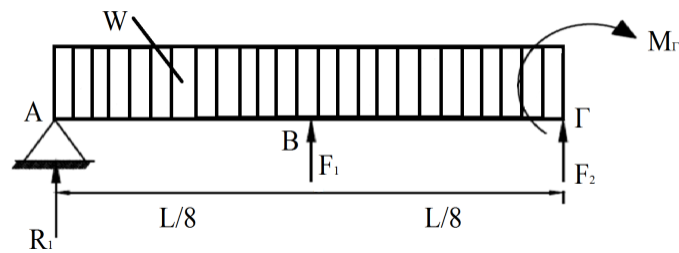
Σχήμα 5.4: ΔΕΣ κύριας δοκού από Α-Β (από αριστερά)

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow M_B = R_1 * \frac{L}{8} - \frac{W * L}{8} * \frac{L}{16} = \frac{153}{6.208} * B * \frac{L}{8} - \frac{B * L * 194}{16 * 16 * 194} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_B = \frac{153 * B * L}{49.664} - \frac{194 * B * L}{49.664} \Rightarrow M_B = -\frac{41}{49.664} * B * L \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M_B = -12,21 [tn \cdot m]$$

Θέση Γ:

(από αριστερά)



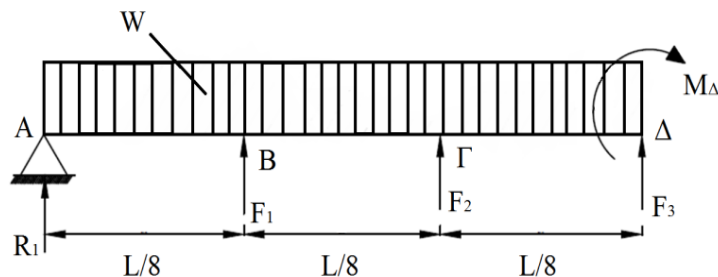
Σχήμα 5.5: ΔΕΣ κύριας δοκού από Α-Γ (από αριστερά)

$$\begin{aligned} \Sigma M_\Gamma = 0 &\Rightarrow M_\Gamma = R_1 * \frac{2 * L}{8} - W * \frac{2 * L}{8} * \frac{L}{8} + F_1 * \frac{L}{8} = \\ &= \frac{153}{6.208} * B * \frac{2 * L}{8} - \frac{B * 2}{2} * \frac{L}{8} * \frac{L}{8} + \frac{55}{776} * B * \frac{L}{8} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_\Gamma = \frac{306 * B * L}{49.664} - \frac{B * 2}{2} * \frac{L}{8} * \frac{L}{8} * \frac{388}{388} + \frac{55}{776} * B * \frac{L}{8} * \frac{8}{8} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_\Gamma = \frac{306 * B * L}{49.664} - \frac{776 * B * L}{49.664} + \frac{440 * B * L}{49.664} \\ &\Rightarrow M_\Gamma = -\frac{30}{49.664} * B * L \Rightarrow M_\Gamma = -\frac{15}{24.832} * B * L \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_\Gamma = -8,94 [tn \cdot m]$$

Θέση Δ:

(από αριστερά)

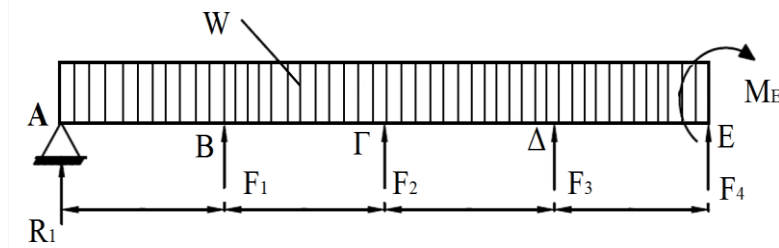


Σχήμα 5.6: ΔΕΣ κύριας δοκού από Α-Δ (από αριστερά)

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 &\Rightarrow M_A = -R_1 * \frac{3*L}{8} - F_1 * \frac{2*L}{8} + W * \frac{3*L}{8} * \frac{3*L}{16} + F_2 * \frac{L}{8} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_A = -\frac{153*B}{6.208} * \frac{3*L}{8} - \frac{55*B}{776} * \frac{2*L}{8} * \frac{8}{8} + \frac{B}{2} * \frac{3}{8} * \frac{3*L}{16} * \frac{194}{194} - \frac{187*B}{3.104} * \frac{L}{8} * \frac{2}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_A = -\frac{459}{49.664} * B * L - \frac{880}{49.664} * B * L + \frac{1.764}{49.664} * B * L - \frac{374}{49.664} * B * L \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_A = \frac{-459*B*L - 880*B*L + 1.764*B*L - 374*B*L}{49.664} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_A = -\frac{33}{49.664} * B * L \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_A = -9,834 [tn \cdot m] \end{aligned}$$

Θέση Ε:

(από αριστερά)



Σχήμα 5.6: ΔΕΣ κύριας δοκού από Α-Ε (από αριστερά)

$$\begin{aligned} \Sigma M_E = 0 &\Rightarrow M_E = R_1 * \frac{4*L}{8} + F_1 * \frac{3*L}{8} + F_2 * \frac{2*L}{8} - W * \frac{4*L}{8} * \frac{2*L}{8} + F_3 * \frac{L}{8} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_E = \frac{153*B}{6.208} * \frac{4*L}{8} + \frac{55*B}{776} * \frac{3*L}{8} + \frac{187*B}{3.104} * \frac{2*L}{8} - \frac{B}{2} * \frac{4}{8} * \frac{2*L}{8} + \frac{49*B}{776} * \frac{L}{8} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_E = \frac{153*B*L}{12.416} + \frac{330*B*L}{12.416} + \frac{187*B*L}{12.416} - \frac{776*B*L}{12.416} + \frac{98*B*L}{12.416} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_E = \frac{153*B*L + 330*B*L + 187*B*L - 776*B*L + 98*B*L}{12.416} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_E = -\frac{8}{12.416} * B * L \Rightarrow \\ &M_E = -9,53 [tn \cdot m] \end{aligned}$$

Στις υπόλοιπες θέσεις λόγω συμμετρίας είναι:

$$\begin{aligned} M_Z = M_A &\Rightarrow M_Z = -9,834 [tn \cdot m] \\ M_H = M_\Gamma &\Rightarrow M_H = -8,940 [tn \cdot m] \\ M_\Theta = M_B &\Rightarrow M_\Theta = -12,210 [tn \cdot m] \end{aligned}$$

- Η μέγιστη ροπή κάμψης προκύπτει στην θέση Β και στην θέση Θ με τιμή:
 $M_{\max} = M_B = -12,21 [tn \cdot m]$

5.6 ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΥΡΙΑΣ ΔΟΚΟΥ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ

Στο υποκεφάλαιο 4.2.1 έχουμε επιλέξει κύριες δοκούς από ελάσματα IPB 650 και από υλικό St 52. Η επιτρεπόμενη τάση σε θλίψη από κάμψη για κύρια φορτία είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = 2.100 [Kp/cm^2]$$

Η ροπή αντοχής της δοκού IPB 650 είναι $W_x = 6.480 [cm^3]$.

Η υπάρχουσα τάση θλίψης από κάμψη στην θέση Β, όπου υπάρχει η μέγιστη ροπή κάμψης $M_{\max} = 12,21 [tn \cdot m] = 1.221.000 [Kp * cm]$ είναι:

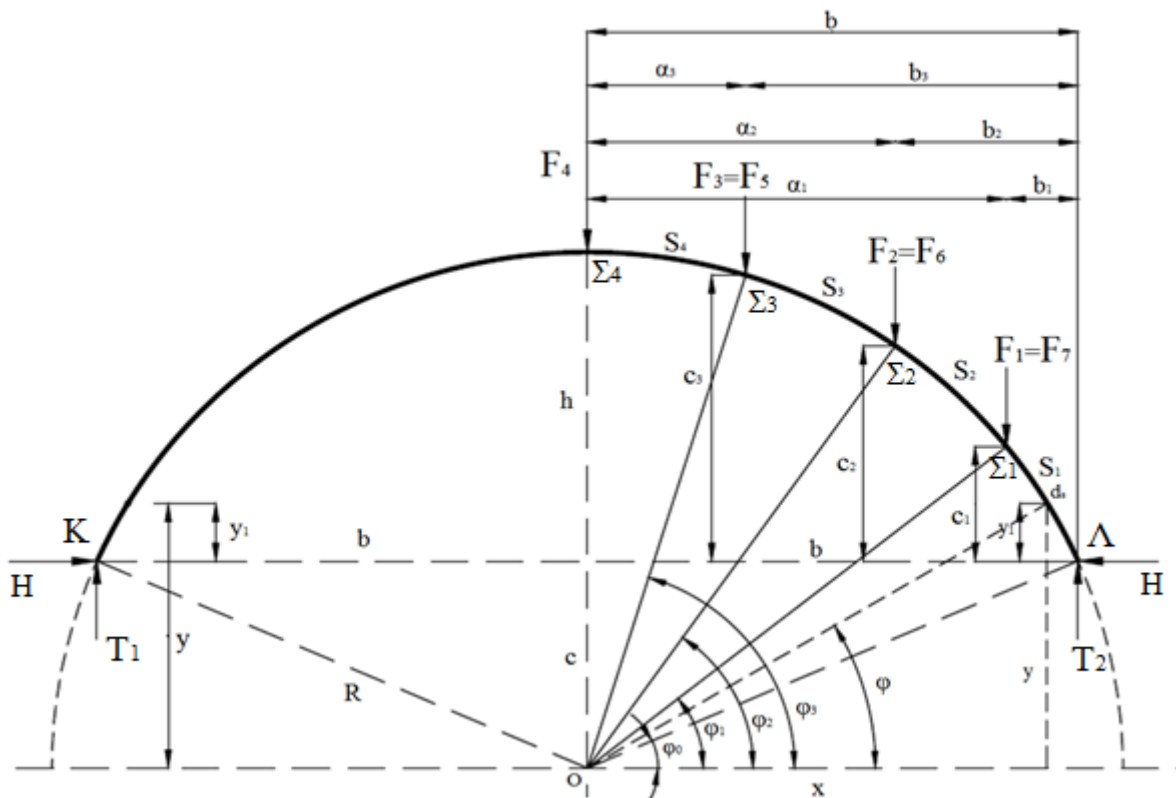
$$\sigma_{\nu\tau} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1.221.000 [Kp * cm]}{6.480 [cm^3]} = 188 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] \leq \sigma_{\varepsilon\pi} = 2.100 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$$

Άρα η δοκός αντέχει σε κάμψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΞΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ

6.1 ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΞΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Η στατική μελέτη του τοξωτού φορέα θα γίνει στο μισό τόξο λόγω συμμετρίας, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Castigliano για την επίλυση του τόξου θεωρώντας ότι αυτό είναι τμήμα από ένα πλήρες ημικόκλιο (Σχ. 6.1).



Σχήμα 6.1: ΔΕΣ τοξωτού φορέα γέφυρας

Αρχικά γράφουμε την εξίσωση για τις κάθετες δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο φορέα.

Λόγω συμμετρίας: i) $T_1 = T_2 = F_1 + F_2 + F_3 + \frac{F_4}{2}$

$T_1 \rightarrow H$ κάθετη αντίδραση στο σημείο K

$T_2 \rightarrow H$ κάθετη αντίδραση στο σημείο Λ

$F_1, F_2, F_3, F_4 \rightarrow$ Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στον τοξωτό φορέα

Σημείωση: Η δύναμη F_4 είναι δια δύο γιατί οι υπολογισμοί γίνονται μόνο στο δεξί μέρος, λόγω συμμετρίας του τοξωτού φορέα.

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$H = \frac{\int M_0 * y_1 * ds}{\int y_1^2 * ds} \quad (6.1\alpha)$$

ii) $y = y_1 + c$

iii) $x = R * \cos\phi$

iv) $y = R * \sin\phi$

v) $ds = R * d\phi$

vi) $b = R * \cos\phi_0$

vii) $c = R * \sin\phi_0$

viii) $R = c + h$

$H \rightarrow H$ οριζόντια αντίδραση στο σημείο K και Λ (είναι ίδια λόγω συμμετρίας)

$y \rightarrow$ Το ύψος που βρίσκεται το σημείο ds από το κέντρο του ημικυκλίου (Σχ. 6.1)

$y_1 \rightarrow H$ απόσταση του σημείου ds από το ύψος των στηρίξεων (Σχ. 6.1)

$R \rightarrow H$ ακτίνα του ημικυκλίου (Σχ. 6.1)

$c \rightarrow$ Το ύψος των στηρίξεων από το κέντρο του ημικυκλίου (Σχ. 6.1)

$h \rightarrow$ Το ύψος του τοξωτού φορέα (Σχ. 6.1)

Γράφουμε τις εξισώσεις για την ροπή M_0 σε κάθε ένα από τα μήκη τόξου:

Στο S_1 : $M_0 = T_2 * (b - x)$

Στο S_2 : $M_0 = T_2 * (b - x) - F_1 * (a_1 - x)$

Στο S_3 : $M_0 = T_2 * (b - x) - F_1 * (a_1 - x) - F_2 * (a_2 * x)$

Στο S_4 : $M_0 = T_2 * (b - x) - F_1 * (a_1 - x) - F_2 * (a_2 * x) - F_3 * (a_3 * x)$

Το μισό τόξο του φορέα (Σχ. 6.1) το χωρίζουμε σε τόξα S_1, S_2, S_3 και S_4 . Για τις μοίρες ϕ των τόξων αυτών θα ισχύει $\phi_0 \leq \phi \leq \pi/2$. Έστω I_1 το ολοκλήρωμα στον παρανομαστή της σχέσης (6.1α):

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} y_1^2 * ds = \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} (R * \sin \phi - c)^2 * R * d\phi = \\
 &= \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} R^3 * \sin^2 \phi * d\phi - 2 * R^2 * c * \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} \sin \phi * d\phi + c^2 * R * \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} d\phi = \\
 &= R^3 \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} * d\phi - 2 * R^2 * c * \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} \sin \phi * d\phi + c^2 * R * \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} d\phi = \\
 &= R^3 * \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_{\phi_0}^{\pi/2} - 2 * R^2 * c * [-\cos \phi]_{\phi_0}^{\pi/2} + c^2 * R * [\phi]_{\phi_0}^{\pi/2} = \\
 &= R^3 * \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi * \cos \phi}{2} \right]_{\phi_0}^{\pi/2} - 2 * R^2 * c * [-\cos \phi]_{\phi_0}^{\pi/2} + c^2 * R * [\phi]_{\phi_0}^{\pi/2} = \\
 &= R^3 * \left[\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\phi_0}{2} + \frac{\sin \phi * \cos \phi}{2} \right] - 2 * R^2 * c * [-0 + \cos \phi_0] + \left[c^2 * R * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow I_1 &= R * \left[\frac{R^2}{2} * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) + \frac{1}{2} * R * \sin \phi_0 * R * \cos \phi_0 \right] - \\
 &- 2 * R * c * R * \cos \phi_0 + c^2 * R * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right)
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (vi) και (vii) και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= R * \left[\left(\frac{R^2}{2} + c^2 \right) * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) + \frac{b * c}{2} - 2 * b * c \right] = \left[\left(\frac{b^2 * c^2}{2} + c^2 \right) * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - \frac{3}{2} * b * c \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow I_1 &= \frac{R}{2} * \left[(b^2 + 3 * c^2) * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - 3 * b * c \right] \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

Έστω I_2 το ολοκλήρωμα στον αριθμητή της σχέσης (6.1α):

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} M_0 * y_1 * ds = \int_{S_1} T_2 * (b-x) * y_1 * ds + \\
&+ \int_{S_2} [T_2 * (b-x) - F_1 * (a_1-x)] * y_1 * ds + \\
&+ \int_{S_3} [T_2 * (b-x) - F_1 * (a_1-x) - F_2 * (a_2-x)] * y_1 * ds + \\
&+ \int_{S_4} [T_2 * (b-x) - F_1 * (a_1-x) - F_2 * (a_2-x) - F_3 * (a_3-x)] * y_1 * ds \Rightarrow \\
\Rightarrow I_2 &= \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} T_2 * (b-x) * y_1 * ds - \int_{S_2+S_3+S_4} F_1 * (a_1-x) * y_1 * ds - \int_{S_3+S_4} F_2 * (a_2-x) * y_1 * ds - \\
&- \int_{S_4} F_3 * (a_3-x) * y_1 * ds \Rightarrow \\
\Rightarrow I_2 &= \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} T_2 * (b-R * \cos \phi) * (R * \sin \phi - c) * R * d\phi - \\
&- \int_{S_2+S_3+S_4} F_1 * (a_1-R * \cos \phi) * (R * \sin \phi - c) * R * d\phi - \\
&- \int_{S_3+S_4} F_2 * (a_2-R * \cos \phi) * (R * \sin \phi - c) * R * d\phi - \\
&- \int_{S_4} F_3 * (a_3-R * \cos \phi) * (R * \sin \phi - c) * R * d\phi \Rightarrow
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Έστω I_3 το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (6.2):

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int T_2 * (b-R * \cos \phi) * (R * \sin \phi - c) * R * d\phi = \\
&= T_2 * R * \left[\int b * R * \sin \phi * d\phi - \int R^2 * \sin \phi * \cos \phi * d\phi - \int b * c * d\phi + \int c * R * \cos \phi * d\phi \right] = \\
&= T_2 * R * \left[b * R * (-\cos \phi) - \frac{R^2}{2} * \int \sin 2\phi * d\phi - b * c * \phi + c * R * \sin \phi \right] = \\
&= T_2 * R * \left[c * R * \sin \phi - b * R * \cos \phi - b * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos 2\phi \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow I_3 &= T_2 * R * \left[c * R * \sin \phi - b * R * \cos \phi - b * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right]
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Έστω I_4 , I_5 , I_6 τα υπόλοιπα ολοκληρώματα της σχέσης (6.2), προκύπτει η αντιστοιχία με το I_3 :

$$I_4 = F_1 * R * \left[c * R * \sin \phi - a_1 * R * \cos \phi - a_1 * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right] \tag{6.4}$$

$$I_5 = F_2 * R * \left[c * R * \sin \phi - a_2 * R * \cos \phi - a_2 * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right] \tag{6.5}$$

$$I_6 = F_3 * R * \left[c * R * \sin \phi - a_3 * R * \cos \phi - \alpha_3 * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right] \quad (6.6)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.3), (6.4), (6.5) και (6.6) στην εξίσωση (6.2) τότε έχουμε τον παρακάτω τύπο:

$$I_2 = I_3 - I_4 - I_5 - I_6$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα όρια ολοκλήρωσης σε καθένα από τα ολοκληρώματα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} I_2 &= T_2 * R * \left[c * R * \sin \phi - b * R * \cos \phi - b * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right]_{\phi_0}^{\pi/2} - \\ &- F_1 * R * \left[c * R * \sin \phi - a_1 * R * \cos \phi - \alpha_1 * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right]_{\phi_1}^{\pi/2} - \\ &- F_2 * R * \left[c * R * \sin \phi - a_2 * R * \cos \phi - \alpha_2 * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right]_{\phi_2}^{\pi/2} - \\ &- F_3 * R * \left[c * R * \sin \phi - a_3 * R * \cos \phi - \alpha_3 * c * \phi + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi \right]_{\phi_3}^{\pi/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow I_2 &= T_2 * R * \left[c * R * \sin \frac{\pi}{2} - b * R * \cos \frac{\pi}{2} - b * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \frac{\pi}{2} - \right. \\ &- c * R * \sin \phi_0 - b * R * \cos \phi_0 - b * c * \phi_0 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_0 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_0 \left. \right] - \\ &- F_1 * R * \left[c * R * \sin \frac{\pi}{2} - a_1 * R * \cos \frac{\pi}{2} - \alpha_1 * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \frac{\pi}{2} - \right. \\ &- c * R * \sin \phi_1 - a_1 * R * \cos \phi_1 - \alpha_1 * c * \phi_1 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_1 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_1 \left. \right] - \\ &- F_2 * R * \left[c * R * \sin \frac{\pi}{2} - a_2 * R * \cos \frac{\pi}{2} - \alpha_2 * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \frac{\pi}{2} - \right. \\ &- c * R * \sin \phi_2 - a_2 * R * \cos \phi_2 - \alpha_2 * c * \phi_2 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_2 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_2 \left. \right] - \\ &- F_3 * R * \left[c * R * \sin \frac{\pi}{2} - a_3 * R * \cos \frac{\pi}{2} - \alpha_3 * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \frac{\pi}{2} - \right. \\ &- c * R * \sin \phi_3 - a_3 * R * \cos \phi_3 - \alpha_3 * c * \phi_3 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_3 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_3 \left. \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_2 = & T_2 * R * \left[c * R * 1 - b * R * 0 - b * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * 0 - \frac{R^2}{4} * 1 - \right. \\
& \left. - c * R * \sin \phi_0 - b * R * \cos \phi_0 - b * c * \phi_0 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_0 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_0 \right] - \\
& - F_1 * R * \left[c * R * 1 - a_1 * R * 0 - \alpha_1 * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * 0 - \frac{R^2}{4} * 1 - \right. \\
& \left. - c * R * \sin \phi_1 - a_1 * R * \cos \phi_1 - \alpha_1 * c * \phi_1 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_1 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_1 \right] - \\
& - F_2 * R * \left[c * R * 1 - a_2 * R * 0 - \alpha_2 * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * 0 - \frac{R^2}{4} * 1 - \right. \\
& \left. - c * R * \sin \phi_2 - a_2 * R * \cos \phi_2 - \alpha_2 * c * \phi_2 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_2 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_2 \right] - \\
& - F_3 * R * \left[c * R * 1 - a_3 * R * 0 - \alpha_3 * c * \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{4} * 0 - \frac{R^2}{4} * 1 - \right. \\
& \left. - c * R * \sin \phi_3 - a_3 * R * \cos \phi_3 - \alpha_3 * c * \phi_3 + \frac{R^2}{4} * \cos^2 \phi_3 - \frac{R^2}{4} * \sin^2 \phi_3 \right] \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_2 = & c * R^2 (T_2 - F_1 - F_2 - F_3) - c * R * \frac{\pi}{2} * (T_2 * b - \alpha_1 * F_1 - a_2 * F_2 - a_3 * F_3) - \\
& - \frac{R^3}{4} * (T_2 - F_1 - F_2 - F_3) - c * R * (T_2 * R * \sin \phi_0 - F_1 * R * \sin \phi_1 - F_2 * R * \sin \phi_2 - F_3 * R * \sin \phi_3) + \\
& + R * (T_2 * b * R * \cos \phi_0 - F_1 * a_1 * R * \cos \phi_1 - F_2 * a_2 * R * \cos \phi_2 - F_3 * a_3 * R * \cos \phi_3) + \\
& + c * R * (T_2 * b * \phi_0 - F_1 * a_1 * \phi_1 - F_2 * a_2 * \phi_2 - F_3 * a_3 * \phi_3) - \\
& - \frac{R}{4} * (T_2 * R^2 * \cos^2 \phi_0 - F_1 * R^2 * \cos^2 \phi_1 - F_2 * R^2 * \cos^2 \phi_2 - F_3 * R^2 * \cos^2 \phi_3) + \\
& + \frac{R}{4} * (T_2 * R^2 * \sin^2 \phi_0 - F_1 * R^2 * \sin^2 \phi_1 - F_2 * R^2 * \sin^2 \phi_2 - F_3 * R^2 * \sin^2 \phi_3)
\end{aligned}$$

Κάνουμε αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο για το I_2 τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left. \begin{cases} c = R * \sin \phi_0 \\ c_1 + c = R * \sin \phi_1 \\ c_2 + c = R * \sin \phi_2 \\ c_3 + c = R * \sin \phi_3 \\ b = R * \cos \phi_0 \end{cases} \right\} \text{ και } \left. \begin{cases} a_1 = R * \cos \phi_1 \\ a_2 = R * \cos \phi_2 \\ a_3 = R * \cos \phi_3 \\ h = R - c \end{cases} \right\}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_2 &= c * R^2 * \frac{F_4}{2} - c * R * \frac{\pi}{2} * (T_2 * b - a_1 * F_1 - a_2 * F_2 - a_3 * F_3) - \frac{R^3}{4} * \frac{F_4}{2} - \\
&- c * R * [T_2 * c - F_1 * (c_1 + c) - F_2 * (c_2 + c) - F_3 * (c_3 + c)] + \\
&+ R * (T_2 * b^2 - F_1 * a_1^2 - F_2 * a_2^2 - F_3 * a_3^2) + \\
&+ c * R * (T_2 * b * \phi_0 - F_1 * a_1 * \phi_1 - F_2 * a_2 * \phi_2 - F_3 * a_3 * \phi_3) - \\
&- \frac{R}{4} * (T_2 * b^2 - F_1 * a_1^2 - F_2 * a_2^2 - F_3 * a_3^2) + \\
&+ \frac{R}{4} * [T_2 * c^2 - F_1 * (c_1 + c)^2 - F_2 * (c_2 + c)^2 - F_3 * (c_3 + c)^2] \Rightarrow \\
\Rightarrow I_2 &= \frac{F_4}{2} * \left(c * R^2 - \frac{R^3}{4} \right) - \frac{\pi}{2} * c * R * (T_2 * b - a_1 * F_1 - a_2 * F_2 - a_3 * F_3) - \\
&- c^2 * R * (T_2 - F_1 - F_2 - F_3) + c * R * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) + \\
&+ R * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) + \\
&+ c * R * (T_2 * b * \phi_0 - F_1 * a_1 * \phi_1 - F_2 * a_2 * \phi_2 - F_3 * a_3 * \phi_3) - \\
&- \frac{R}{4} * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) + \\
&+ \frac{R}{4} * [T_2 * c^2 - F_1 * (c_1^2 + 2 * c * c_1 + c^2) - F_2 * (c_2^2 + c * c_2 + c^2) - F_3 * (c_3^2 + c * c_3 + c^2)] \Rightarrow \\
\Rightarrow I_2 &= \frac{F_4}{2} * \left(c * R^2 - \frac{R^3}{4} \right) - \frac{\pi}{2} * c * R * (T_2 * b - a_1 * F_1 - a_2 * F_2 - a_3 * F_3) - \\
&- c^2 * R * \frac{F_4}{2} + c * R * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) + \\
&+ \frac{3}{4} * R * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) + \\
&+ c * R * (T_2 * b * \phi_0 - F_1 * a_1 * \phi_1 - F_2 * a_2 * \phi_2 - F_3 * a_3 * \phi_3) + \\
&+ \frac{R}{4} * c^2 * (T_2 - F_1 - F_2 - F_3) - \frac{R}{4} * (c_1^2 * F_1 + c_2^2 * F_2 + c_3^2 * F_3) - \\
&- \frac{R}{2} * c * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) \Rightarrow \\
\Rightarrow I_2 &= \frac{F_4}{2} * \left(c * R^2 - \frac{R^3}{4} - c^2 * R + \frac{R * c^2}{4} \right) - \frac{\pi}{2} * c * R * (T_2 * b - a_1 * F_1 - a_2 * F_2 - a_3 * F_3) + \\
&+ \frac{3}{4} * R * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) + \\
&+ c * R * (T_2 * b * \phi_0 - a_1 * F_1 * \phi_1 - a_2 * F_2 * \phi_2 - a_3 * F_3 * \phi_3) + \\
&+ \frac{c * R}{2} * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) - \frac{R}{4} * (c_1^2 * F_1 + c_2^2 * F_2 + c_3^2 * F_3)
\end{aligned}$$

Επειδή $R = h + c$ η παράσταση μέσα στην παρένθεση του πρώτου όρου της προηγούμενης σχέσης απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \left(c * R^2 - \frac{R^3}{4} - c^2 * R + \frac{R * c^2}{4} \right) = R * \left(c * R - \frac{R^2}{4} - \frac{3}{4} * c^2 \right) = \\
& = R * \left[(R-h) * R - \frac{R^2}{4} - \frac{3}{4} * (R-h)^2 \right] = \\
& = \frac{R}{4} * [4 * R^2 - 4 * h * R - R^2 - 3 * R^2 + 6 * R * h - 3 * h^2] = \\
& = \frac{R}{4} * [2 * h * R - 3 * h^2] = \frac{R * h}{4} * (2 * R - 3 * h)
\end{aligned}$$

Κατόπιν αυτού το I_2 θα γίνει:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_2 &= \frac{F_4}{8} * R * h * (2 * R - 3 * h) + \frac{3}{4} * R * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) - \\
& - c * R * \left[T_2 * b * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - a_1 * F_1 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 \right) - a_2 * F_2 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_2 \right) - a_3 * F_3 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_3 \right) \right] + \quad (6.7) \\
& + \frac{c * R}{2} * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) - \frac{R}{4} * (c_1^2 * F_1 + c_2^2 * F_2 + c_3^2 * F_3)
\end{aligned}$$

6.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των αντιδράσεων του τοξωτού φορέα μπορούμε να ελέγξουμε τους προηγούμενους υπολογισμούς για την περίπτωση που ο τοξωτός φορέας αποτελείται από ένα πλήρες ημικύκλιο φορτιζόμενο με μόνο μια δύναμη F_4 στο άνω μέρος. Σ' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίδραση H του τοξωτού φορέα, η τιμή της οποίας είναι γνωστή από την βιβλιογραφία, ήτοι: $H = \frac{F_4}{\pi}$.

Υπολογίζουμε αρχικά τα ολοκληρώματα I_1 , I_2 και στην συνέχεια τα εφαρμόζουμε στην σχέση (6.1α).

Για την περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= 0 & F_1 &= F_2 = F_3 = 0 \\
b &= R \\
c &= 0 & T_2 &= \frac{F_4}{2} \\
h &= R
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα I_1 και I_2 με βάση τα παραπάνω:

$$I_1 = \frac{R}{2} * \left[(R^2 + 0) * \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 0 \right] \Rightarrow I_1 = \frac{\pi * R^3}{4}$$

$$I_2 = \frac{F_4}{8} * R^2 * (2 * R - 3 * R) + \frac{3}{4} * R * (T_2 * b^2 - 0 - 0 - 0) - 0 + 0 - \frac{R}{4} * (0 + 0 + 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{F_4 * R^3}{8} + \frac{3}{4} * R^3 * \frac{F_4}{2} = \frac{2}{8} * R^3 * F_4 \Rightarrow I_2 = \frac{R^3 * F_4}{4}$$

Εφαρμόζοντας τα I_1 και I_2 προκύπτει:

$$H = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{R^3 * F_4}{4}}{\frac{\pi * R^3}{4}} \Rightarrow H = \frac{F_4}{\pi} \quad (6.8)$$

Παρατηρούμε ότι επαληθεύτηκε η τιμή της αντίδρασης H .

Κατόπιν των ανωτέρω θα υπολογίσουμε την αντίδραση H για τον τοξωτό φορέα του θέματος, οποίος είναι τμήμα ημικυκλίου και φορτίζεται με τις δυνάμεις $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$. Εφαρμόζουμε στην παρακάτω σχέση τα I_1 και I_2 που έχουμε βρει από την σχέση (6.1) και (6.7) αντίστοιχα:

$$H = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} * \left[(b^2 + 3 * c^2) * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - 3 * b * c \right]} * \left[\frac{h * F_4}{4} * (2 * R - 3 * h) + \frac{3}{2} * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) - \right. \\ &- 2 * c * \left[T_2 * b * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - a_1 * F_1 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 \right) - a_2 * F_2 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_2 \right) - a_3 * F_3 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_3 \right) \right] + \\ &\left. + c * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) - \frac{1}{2} * (c_1^2 * F_1 + c_2^2 * F_2 + c_3^2 * F_3) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow H &= \frac{1}{(b^2 + 3 * c^2) * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - 3 * b * c} * \left[\frac{h * F_4}{4} * (2 * R - 3 * h) + \frac{3}{2} * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) - \right. \\ &- 2 * c * \left[T_2 * b * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - a_1 * F_1 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 \right) - a_2 * F_2 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_2 \right) - a_3 * F_3 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_3 \right) \right] + \\ &\left. + c * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) - \frac{1}{2} * (c_1^2 * F_1 + c_2^2 * F_2 + c_3^2 * F_3) \right] \quad (6.9) \end{aligned}$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τις τιμές των δυνάμεων F_1, F_2, F_3, F_4 από την σχέση (5.79α).

Υπολογίζουμε την αντίδραση T_2 από την σχέση (i):

$$T_2 = F_1 + F_2 + F_3 + \frac{F_4}{2} \Rightarrow$$

$$T_2 = 26.224 + 22.290 + 23.363 + \frac{23.005}{2} \Rightarrow T_2 = 83.381[\text{Kp}]$$

Υπολογίζουμε την ακτίνα R του τοξωτού φορέα λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος b είναι: $b = \frac{L}{2} = \frac{40}{2} = 20[m]$ και για καλαίσθητο τόξο ο λόγος $\frac{R}{b}$ λαμβάνεται ως εξής:

$$\frac{R}{b} = 1,10 \quad (6.10)$$

Κατόπιν αυτού υπολογίζουμε την ακτίνα του ημικυκλίου R , την γωνία ϕ_0 , το C και το h ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} R &= 1,10 * 20 \Rightarrow R = 22[m] \\ \cos \phi_0 &= \frac{b}{R} = \frac{20}{22} \Rightarrow \phi_0 = 24,62^\circ \\ c &= R * \sin \phi_0 = 22 * \sin 24,62^\circ \Rightarrow c = 9,17[m] \\ h &= R - c = 22 - 9,17 \Rightarrow h = 12,83[m] \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζουμε τις αποστάσεις c_1, c_2, c_3 και τις γωνίες ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 :

$$a_1 = 15[m] \rightarrow c_1 = \sqrt{R^2 - a_1^2} - c \Rightarrow c_1 = 6,92[m]$$

$$a_2 = 10[m] \rightarrow c_2 = \sqrt{R^2 - a_2^2} - c \Rightarrow c_2 = 10,43[m]$$

$$a_3 = 5[m] \rightarrow c_3 = \sqrt{R^2 - a_3^2} - c \Rightarrow c_3 = 12,25[m]$$

$$\phi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{22}\right) \Rightarrow \phi_1 = 47,014^\circ$$

$$\phi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{a_2}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{22}\right) \Rightarrow \phi_2 = 62,964^\circ$$

$$\phi_3 = \cos^{-1}\left(\frac{a_3}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{22}\right) \Rightarrow \phi_3 = 76,863^\circ$$

Έπειτα αντικαθιστούμε στην σχέση (6.9) τις δυνάμεις F_1, F_2, F_3, F_4 , την αντίδραση T_2 , τις αποστάσεις c_1, c_2, c_3 , τις γωνίες $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$, το C , το h , το R και το b .

i) Αρχικά θα υπολογίσουμε τον αριθμητή της H , με βάση την σχέση (6.9):

$$\begin{aligned}
& \frac{h * F_4}{4} * (2 * R - 3 * h) + \frac{3}{2} * (T_2 * b^2 - a_1^2 * F_1 - a_2^2 * F_2 - a_3^2 * F_3) - \\
& 2 * c * \left[T_2 * b * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) - a_1 * F_1 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 \right) - a_2 * F_2 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_2 \right) - a_3 * F_3 * \left(\frac{\pi}{2} - \phi_3 \right) \right] \\
& + c * (c_1 * F_1 + c_2 * F_2 + c_3 * F_3) - \frac{1}{2} * (c_1^2 * F_1 + c_2^2 * F_2 + c_3^2 * F_3) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{12,83 * 23,005}{4} * (2 * 22 - 3 * 12,38) + \frac{3}{2} * (83,381 * 20^2 - 26,224 * 15^2 - \\
& - 22,290 * 10^2 - 23,363 * 5^2) - 2 * 9,17 * \left[83,381 * 20 * \left(1,57 - \frac{3,14 * 24,26^\circ}{180} \right) - \right. \\
& - 26,224 * 15 * \left(1,57 - \frac{3,14 * 47,014^\circ}{180} \right) - 22,290 * 10 * \left(1,57 - \frac{3,14 * 62,964^\circ}{180} \right) - \\
& \left. - 23,363 * 5 * \left(1,57 - \frac{3,14 * 76,863^\circ}{180} \right) \right] + 9,17 * (26,224 * 6,92 + 22,290 * 10,43 + \\
& + 23,363 * 12,25) - \frac{1}{2} * (26,224 * 6,92^2 + 22,290 * 10,43^2 + 23,363 * 12,25^2) \Rightarrow \\
& \Rightarrow 406,582 + 36,958,290 - 27,245,106 + 6,420,506 - 3,593,317 \Rightarrow \\
& = 12,946,954,11
\end{aligned}$$

- ii) Στην συνέχεια υπολογίζουμε και τον παρονομαστή της H , με βάση την σχέση (6.9):

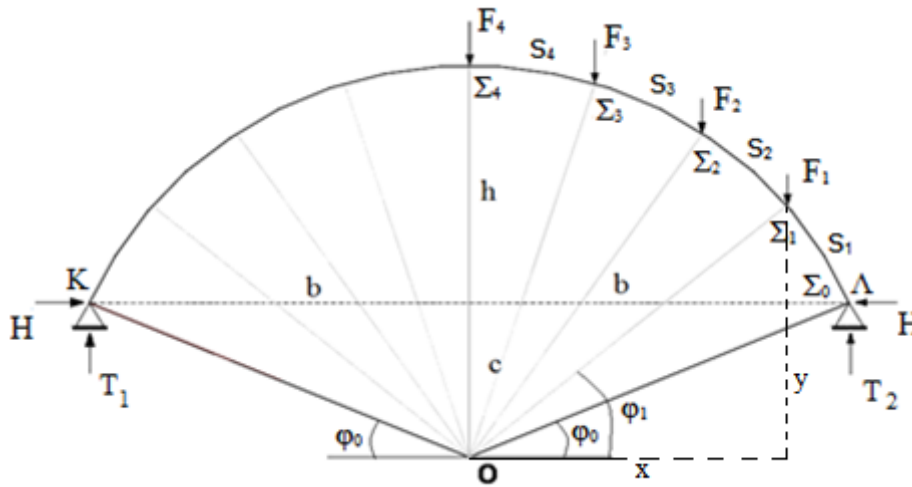
$$\begin{aligned}
& (20^2 + 3 * 9,17^2) * \left(\frac{3,14}{2} - \frac{3,14 * 24,62}{180} \right) - 3 * 20 * 9,17 \Rightarrow \\
& \Rightarrow 652,2667 * 1,140517778 - 550,2 \Rightarrow 193,72
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } H = \frac{12,946,954,11}{193,72} \Rightarrow H = 66,840 [Kp]$$

6.3 ΡΟΠΕΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΟΞΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Παρακάτω γίνεται ο υπολογισμός των ροπών κάμψης του τοξωτού φορέα. Χωρίζουμε τον τοξωτό φορέα σε S_1, S_2, S_3, S_4 (Σχ. 6.2) και θα βρούμε σε καθένα από τα τόξα τις ροπές. Αρχικά για κάθε τόξο υπολογίζονται οι ροπές κάμψης στις δύο

θέσεις στα άκρα του. Περισσότερες λεπτομέρειες και διαστάσεις φαίνονται στο προηγούμενο Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.2: Τοξωτός φορέας με όλες τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις (δεξί μέρος)

Τόξο S_1 :
(από δεξιά)

$$M = M_0 - H * (y - c) = T_2 * (b - x) - H * (y - c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = T_2 * (b - R * \cos \phi) - H * (R * \sin \phi - c) \quad (6.12)$$

Θέση Σ_0 :
Για $x = b$ και $y = c$ είναι:

$$M_{\Sigma_0} = 0 \quad (6.13)$$

Θέση Σ_1 :
Για $x = a_1$ και $\phi = \phi_1$ είναι:

$$M_{\Sigma_1} = T_2 * (b - a_1) - H * (R * \sin \phi_1 - c) \quad (6.14)$$

Τόξο S_2 :
(από δεξιά)

$$M = T_2 * (b - x) - F_1 * (a_1 - x) - H * (y - c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = T_2 * (b - R * \cos \phi) - F_1 * (a_1 - R * \cos \phi) - H * (R * \sin \phi - c) \quad (6.15)$$

Θέση Σ_1 :
Για $x = a_1$ και $\phi = \phi_1$ είναι:

$$M_{\Sigma_1} = T_2 * (b - a_1) - F_1 * (a_1 - a_1) - H * (R * \sin \phi_1 - c) \quad (6.16)$$

Θέση Σ_2 :
Για $x = a_2$ και $\phi = \phi_2$ είναι:

$$M_{\Sigma_2} = T_2 * (b - a_2) - F_1 * (a_1 - a_2) - H * (R * \sin \phi_2 - c) \quad (6.17)$$

Τόξο S_3 :
(από δεξιά)

$$\begin{aligned} M &= T_2 * (b - x) - F_1 * (a_1 - x) - F_2 * (a_2 - x) - H * (y - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= T_2 * (b - R * \cos \phi) - F_1 * (a_1 - R * \cos \phi) - \\ &- F_2 * (a_2 - R * \cos \phi) - H * (R * \sin \phi - c) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Θέση Σ_2 :

Για $x = a_2$ και $\varphi = \varphi_2$ είναι:

$$M_{\Sigma_2} = T_2 * (b - a_2) - F_1 * (a_1 - a_2) - H * (R * \sin \phi_2 - c) \quad (6.19)$$

Θέση Σ_3 :

Για $x = a_3$ και $\varphi = \varphi_3$ είναι:

$$M_{\Sigma_3} = T_2 * (b - a_3) - F_1 * (a_1 - a_3) - F_2 * (a_2 - a_3) - H * (R * \sin \phi_3 - c) \quad (6.20)$$

Τόξο S_4 :

(από δεξιά)

$$\begin{aligned} M &= T_2 * (b - x) - F_1 * (a_1 - x) - F_2 * (a_2 - x) - F_3 * (a_3 - x) - H * (y - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= T_2 * (b - R * \cos \phi) - F_1 * (a_1 - R * \cos \phi) - F_2 * (a_2 - R * \cos \phi) - \\ &- F_3 * (a_3 - R * \cos \phi) - H * (R * \sin \phi - c) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Θέση Σ_3 :

Για $x = a_3$ και $\varphi = \varphi_3$ είναι:

$$M_{\Sigma_3} = T_2 * (b - a_3) - F_1 * (a_1 - a_3) - F_2 * (a_2 - a_3) - H * (R * \sin \phi_3 - c) \quad (6.22)$$

Θέση Σ_4 :

Για $x = 0$ και $\varphi = \pi/2$ είναι:

$$\begin{aligned} M_{\Sigma_4} &= T_2 * b - F_1 * a_1 - F_2 * a_2 - F_3 * a_3 - H * \left(R * \sin \frac{\pi}{2} - c \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_4} &= T_2 * b - F_1 * a_1 - F_2 * a_2 - F_3 * a_3 - H * (R - c) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Αντικαθιστούμε τις παρακάτω τιμές στις εξισώσεις (6.14), (6.17), (6.20), (6.23):

$$\phi_0 = 24,62^\circ$$

$$\phi_1 = 47,014^\circ$$

$$\phi_2 = 62,964^\circ$$

$$\phi_3 = 76,863^\circ$$

Άρα έχουμε:

$$M_{\Sigma_0} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{\Sigma_1} &= T_2 * (b - a_1) - H * (R * \sin \phi_1 - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_1} &= 83.381 * (20 - 15) - 66.840 * (22 * \sin 47,014^\circ - 9,17) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_1} &= 416905 - 462765 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_1} &= -45.859 [Kp * m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\Sigma_2} &= T_2 * (b - a_2) - F_1 * (a_1 - a_2) - H * (R * \sin \phi_2 - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_2} &= 83.381 * (20 - 10) - 26.224 * (15 - 10) - 66.840 * (22 * \sin 62,964^\circ - 9,17) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_2} &= 833811 - 131.121 - 696867 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_2} &= 5.823 [Kp * m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\Sigma_3} &= T_2 * (b - a_3) - F_1 * (a_1 - a_3) - F_2 * (a_2 - a_3) - H * (R * \sin \phi_3 - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_3} &= 83.381 * (20 - 5) - 26.224 * (15 - 5) - 22.290 * (10 - 5) - \\ &- 66.840 * (22 * \sin 76,863^\circ - 9,17) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_3} &= 1.250717 - 262242 - 111.453 - 819.077 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_3} &= 57.945 [Kp * m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\Sigma_4} &= T_2 * b - F_1 * a_1 - F_2 * a_2 - F_3 * a_3 - H * (R - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_4} &= T_2 * b - F_1 * a_1 - F_2 * a_2 - F_3 * a_3 - \Lambda * h \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_4} &= 20 * 83.381 - 26.224 * 15 - 22.290 * 10 - 23.363 * 5 - 66.840 * 12,83 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\Sigma_4} &= 76.987 [Kp * m] \end{aligned}$$

Υπολογισμός ροπών σε περισσότερες θέσεις:

Τόξο S_1 :

(από δεξιά)

$$\begin{aligned} M &= T_2 * (b - R * \cos \phi) - H * (R * \sin \phi - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= 83.381 * (20 - 22 * \cos \phi) - 66.840 * (22 * \sin \phi - 9,17) \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= 1.667.622 - 1.834.385 * \cos \phi - 1.470.485 * \sin \phi + 612925 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M = 2.280.547 - 1.834.385 * \cos \phi - 1.470.485 * \sin \phi \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned}\phi = \phi_0 = 24,26^\circ &\rightarrow M = 0 \\ \phi = 30^\circ &\rightarrow M = -43.319 [Kp * m] \\ \phi = 40^\circ &\rightarrow M = -69.882 [Kp * m] \\ \phi = \phi_1 = 47,014^\circ &\rightarrow M = -45.862 [Kp * m]\end{aligned}$$

Η μεταβολή των τιμών της M στο τόξο S_1 , δηλαδή στο διάστημα ϕ_0 έως ϕ_1 , δείχνει ότι η M έχει αρνητικό μέγιστο. Θέτουμε την παράγωγο της εξίσωσης (6.25) ίση με το μηδέν για να βρούμε στο τόξο S_1 σε ποιές μοίρες έχουμε την μέγιστη ροπή κατά απόλυτη τιμή.

$$\begin{aligned}\frac{dM}{d\phi} = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 2.280.547' - (1.834.385 * \cos\phi)' - (1.470.485 * \sin\phi)' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1.834.385 * \sin\phi - 1.470.485 * \cos\phi &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1.834.385 * \sin\phi = 1.470.485 * \cos\phi &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{1.470.485}{1.834.385} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1.470.485}{1.834.385}\right) & \\ \Rightarrow \phi = 38,72^\circ &\end{aligned}$$

$$\text{Για } \phi = 38,72^\circ \text{ έχουμε: } M = -70.472 [Kp * m]$$

Τόξο S_2 :
(από δεξιά)

$$\begin{aligned}M &= T_2 * (b - R * \cos\phi) - F_1 * (a_1 - R * \cos\phi) - H * (R * \sin\phi - c) \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= 83.381 * (20 - 22 * \cos\phi) - 26.224 * (15 - 22 * \cos\phi) - \\ &- 66.840 * (22 * \sin\phi - 9.17) \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= 1.667.622 - 1.834.385 * \cos\phi - 393.636 + 576.933 * \cos\phi - \\ &- 1.470.485 * \sin\phi + 612.924 \Rightarrow \\ M &= 1.887.184 - 1.257.452 * \cos\phi - 1.470.485 * \sin\phi \quad (6.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi = \phi_1 = 47,014^\circ &\rightarrow M = -45.861 [Kp * m] \\ \phi = 50^\circ &\rightarrow M = -47.547 [Kp * m] \\ \phi = 60^\circ &\rightarrow M = -15.019 [Kp * m] \\ \phi = \phi_2 = 62,964^\circ &\rightarrow M = -5.817 [Kp * m]\end{aligned}$$

Η μεταβολή των τιμών της M στο τόξο S_2 , δηλαδή στο διάστημα ϕ_1 έως ϕ_2 , δείχνει ότι η M έχει αρνητικό μέγιστο. Θέτουμε την παράγωγο της εξίσωσης (6.26) ίση με το μηδέν για να βρούμε στο τόξο S_2 σε ποιές μοίρες έχουμε την μέγιστη ροπή κατά απόλυτη τιμή.

$$\frac{dM}{d\phi} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.887.184' - (1.257.452 * \cos\phi)' - (1.470.485 * \sin\phi)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.257.452 * \sin\phi - 1.470.485 * \cos\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.257.452 * \sin\phi = 1.470.485 * \cos\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{1.470.485}{1.257.452} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1.470.485}{1.257.452}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = 49,47^\circ$$

Για $\phi = 49,47^\circ$ έχουμε: $M = -47.63 \text{ [Kp * m]}$

Τόξο S_3 :

(από δεξιά)

$$M = T_2 * (b - R * \cos\phi) - F_1 * (a_1 - R * \cos\phi) - F_2 * (a_2 - R * \cos\phi) - H * (R * \sin\phi - c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 83.381 * (20 - 22 * \cos\phi) - 26.224 * (15 - 22 * \cos\phi) -$$

$$- 22.290 * (10 - 22 * \cos\phi) - 66.840 * (22 * \sin\phi - 9.17) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 1.667.622 - 1.834.385 * \cos\phi - 393.636 + 576.933 * \cos\phi - 222.905 +$$

$$+ 490.393 * \cos\phi - 1.470.485 * \sin\phi + 612.925 \Rightarrow$$

$$M = 1.664.278 - 767.059 * \cos\phi - 1.470.485 * \sin\phi \quad (6.27)$$

$$\phi = \phi_2 = 62,964^\circ \rightarrow M = +5.819 \text{ [Kp * m]}$$

$$\phi = 65^\circ \rightarrow M = +7.393 \text{ [Kp * m]}$$

$$\phi = 70^\circ \rightarrow M = +20.125 \text{ [Kp * m]}$$

$$\phi = \phi_3 = 76,863^\circ \rightarrow M = +57.943 \text{ [Kp * m]}$$

Παρατηρούμε ότι στο τόξο S_3 , δηλαδή στο διάστημα ϕ_2 έως ϕ_3 , η ροπή M είναι αύξουσα. Άρα δεν απαιτείται να βρούμε κάποιο μέγιστο ή ελάχιστο αυτής.

$$M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.664.278 - 767.059 * \cos \phi - 1.470.485 * \sin \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1.664.278}{1.470.485} - \frac{767.059}{1.470.485} * \cos \phi - \sin \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1318 - 0,5216 * \cos \phi - \sin \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1318 = \sin \phi + 0,5216 * \cos \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1318 = \sin \phi + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} * \cos \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1318 * \cos \theta = \sin \phi * \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} * \cos \phi * \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1318 * \cos \theta = \sin \phi * \cos \theta + \sin \theta * \cos \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1318 * \cos \theta = \sin(\phi + \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,9998 = \sin(\phi + \theta) = \sin 88,85^\circ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \rightarrow \phi + \theta = 88,85^\circ \\ \rightarrow \pi - (\phi + \theta) = 88,85^\circ \end{array} \right]$$

$$(\tan \theta = 0,5216 \text{ \acute{a}\rho\alpha \text{ \textit{kai} } } \theta = 27,54^\circ)$$

$$\text{Για } \phi + \theta = 88,85^\circ \Rightarrow \phi = 88,85^\circ - 27,54 = 61,31^\circ$$

Απορρίπτεται διότι είναι εκτός του διαστήματος $62,964^\circ \leq \phi \leq 76,863^\circ$

$$\text{Για } \pi - (\phi + \theta) = 88,85^\circ \Rightarrow \phi = \pi - 88,85^\circ - 27,54 \Rightarrow \phi = 180^\circ - 88,85^\circ - 27,54^\circ = 63,61^\circ$$

Αποδεκτή διότι είναι εντός του ανωτέρου διαστήματος. Άρα $M=0$ για $\phi=63,61^\circ$.

Τόξο S_4 :

(από δεξιά)

$$M = T_2 * (b - R * \cos \phi) - F_1 * (a_1 - R * \cos \phi) - F_2 * (a_2 - R * \cos \phi) -$$

$$- F_3 * (a_3 - R * \cos \phi) - H * (R * \sin \phi - c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 83.381 * (20 - 22 * \cos \phi) - 26.224 * (15 - 22 * \cos \phi) -$$

$$- 22.290 * (10 - 22 * \cos \phi) - 23.363 * (5 - 22 * \cos \phi) - 66.840 * (22 * \sin \phi - 9.17) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 1.667.623 - 1.834.385 * \cos \phi - 393.636 + 576.933 * \cos \phi - 222.905 +$$

$$+ 490.393 * \cos \phi - 116.817 + 513.995 * \cos \phi - 1.470.485 * \sin \phi + 612.925 \Rightarrow$$

$$M = 1.547.461 - 253.064 * \cos \phi - 1.470.485 * \sin \phi \quad (6.28)$$

$$\phi = \phi_3 = 76,863^\circ \rightarrow M = 57.943 [Kp * m]$$

$$\phi = 80^\circ \rightarrow M = 55.372 [Kp * m]$$

$$\phi = 85^\circ \rightarrow M = 60.515 [Kp * m]$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \rightarrow M = 76.976 [Kp * m]$$

Η μεταβολή των τιμών της M στο τόξο S_4 , δηλαδή στο διάστημα φ_3 έως $\pi/2$, δείχνει ότι η M έχει ελάχιστο.

Θέτουμε την παράγωγο της σχέσης (6.28) ίση με το μηδέν και βρίσκουμε την γωνία φ για την οποία η M γίνεται ελάχιστη.

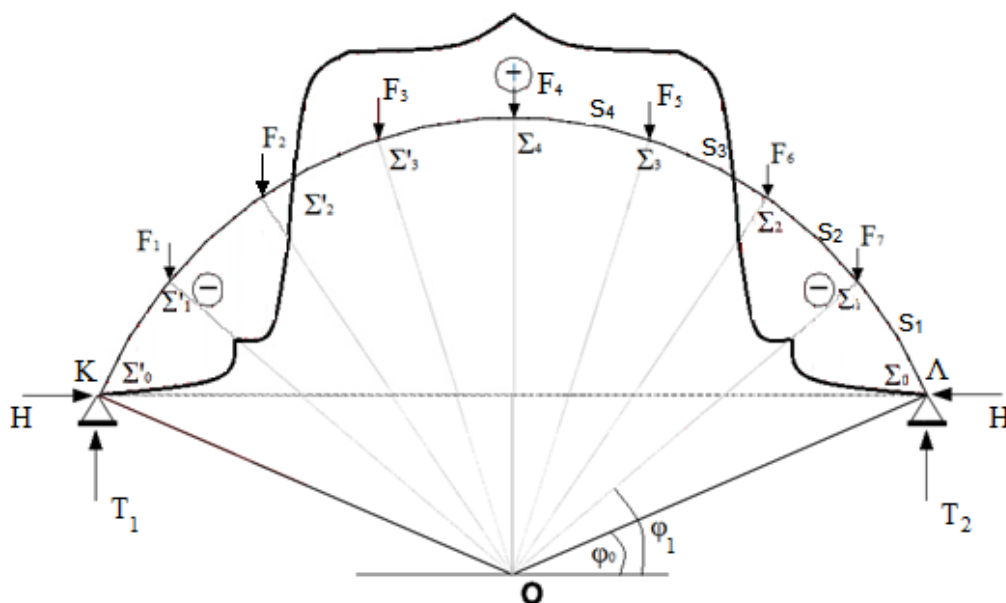
$$\begin{aligned} M = 0 &\Rightarrow 1.547.461 - 253.064 \cdot \cos\phi - 1.470.485 \cdot \sin\phi = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1.547.461 - (253.064 \cdot \cos\phi)' - (1.470.485 \cdot \sin\phi)' = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 253.064 \cdot \sin\phi - 1.470.485 \cdot \cos\phi = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 253.064 \cdot \sin\phi = 1.470.485 \cdot \cos\phi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\sin\phi}{\cos\phi} &= \frac{1.470.485}{253.064} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1.470.485}{253.064}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi = 80,24^\circ \end{aligned}$$

Για $\phi = 80,24^\circ$ έχουμε: $M_{\min} = 55.359,54 [Kp \cdot m]$

6.3.1 Διάγραμμα ροπών κάμψης

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ροπών κάμψης με βάση τους υπολογισμούς που κάναμε πιο πάνω, το αριστερό διάγραμμα σχεδιάζεται συμμετρικό ως προς το αντίστοιχο διάγραμμα από δεξιά.



Σχήμα 6.3: Διάγραμμα ροπών κάμψης

Η μέγιστη ροπή κάμψης είναι για $\phi = 90^\circ$ και έχει απόλυτη τιμή:

$$M_{\max} = 76.976 [Kp * m] \text{ ή } M_{\max} = 77 [tn * m]$$

6.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΕΜΝΟΥΣΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Για να προκύψουν οι τέμνουσες δυνάμεις θα πρέπει να αναλύσουμε τις δυνάμεις, που εφαρμόζονται πάνω στα τόξα S_1, S_2, S_3, S_4 , σε κάθετη και εφαπτομενική συνιστώσα στα τόξα αυτά.

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες ως προς το κάθε τόξο που εφαρμόζεται η κάθε μια:

Η δύναμη F_1 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο F_{11} και ως εφαπτομενική F_{12}

Η δύναμη F_2 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο F_{21} και ως εφαπτομενική F_{22}

Η δύναμη F_3 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο F_{31} και ως εφαπτομενική F_{32}

Η αντίδραση T_2 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο T_{21} και ως εφαπτομενική T_{22}

Η αντίδραση H αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο H_1 και ως εφαπτομενική H_2

Με βάση τα παραπάνω σε κάθε τόξο υπολογίζονται οι τέμνουσες δυνάμεις, από την εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην κάθετη διεύθυνση ως προς το τόξο:

Τόξο S_1 :
(από δεξιά)

$$Q = -T_{2,1} + H_1 \Rightarrow Q = -T_2 * \sin \phi + H * \cos \phi \Rightarrow$$

$$Q = 83.381 * \sin \phi + 66.840 * \cos \phi \quad (6.29)$$

$$\phi = \phi_0 = 24,62^\circ \rightarrow Q = +26.027 [Kp]$$

$$\phi = 30^\circ \rightarrow Q = +16.194 [Kp]$$

$$\phi = 40^\circ \rightarrow Q = -2.393 [Kp]$$

$$\phi = \phi_1 = 47,014^\circ \rightarrow Q = -15.422 [Kp]$$

Τόξο S_2 :
(από δεξιά)

$$Q = -T_{2,1} + H_1 + F_{11} \Rightarrow Q = -T_2 * \sin \phi + H * \cos \phi + F_1 * \sin \phi \Rightarrow$$

$$Q = -83.381 \sin \phi + 66.840 * \cos \phi + 26.224 * \sin \phi \quad (6.30)$$

$$\phi = \phi_1 = 47,014^\circ \rightarrow Q = +3.761 [Kp]$$

$$\phi = 50^\circ \rightarrow Q = -820 [Kp]$$

$$\phi = 60^\circ \rightarrow Q = -16.079 [Kp]$$

$$\phi = \phi_2 = 62,964^\circ \rightarrow Q = -20.528 [Kp]$$

Τόξο S_3 :

(από δεξιά)

$$Q = -T_{2,1} + H_1 + F_{11} + F_{21} \Rightarrow Q = -T_2 * \sin \phi + H * \cos \phi + F_1 * \sin \phi + F_2 * \sin \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = (-T_2 + F_1 + F_2) * \sin \phi + H * \cos \phi \Rightarrow$$

$$Q = (-83.381 + 26.224 + 22.290) \sin \phi + 66.840 * \cos \phi \quad (6.31)$$

$$\phi = \phi_2 = 62,964^\circ \rightarrow Q = -673 [Kp]$$

$$\phi = 65^\circ \rightarrow Q = -3.351 [Kp]$$

$$\phi = 70^\circ \rightarrow Q = -9.902 [Kp]$$

$$\phi = \phi_3 = 76,863^\circ \rightarrow Q = -18.762 [Kp]$$

Τόξο S_4 :

(από δεξιά)

$$Q = -T_{2,1} + H_1 + F_{11} + F_{21} + F_{31} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = -T_2 * \sin \phi + H * \cos \phi + F_1 * \sin \phi + F_2 * \sin \phi + F_3 * \sin \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = (-T_2 + F_1 + F_2 + F_3) * \sin \phi + H * \cos \phi \Rightarrow$$

$$Q = (-83.381 + 26.224 + 22.290 + 23.363) * \sin \phi + 66.840 * \cos \phi \quad (6.32)$$

$$\phi = \phi_3 = 76,863^\circ \rightarrow Q = +3.989 [Kp]$$

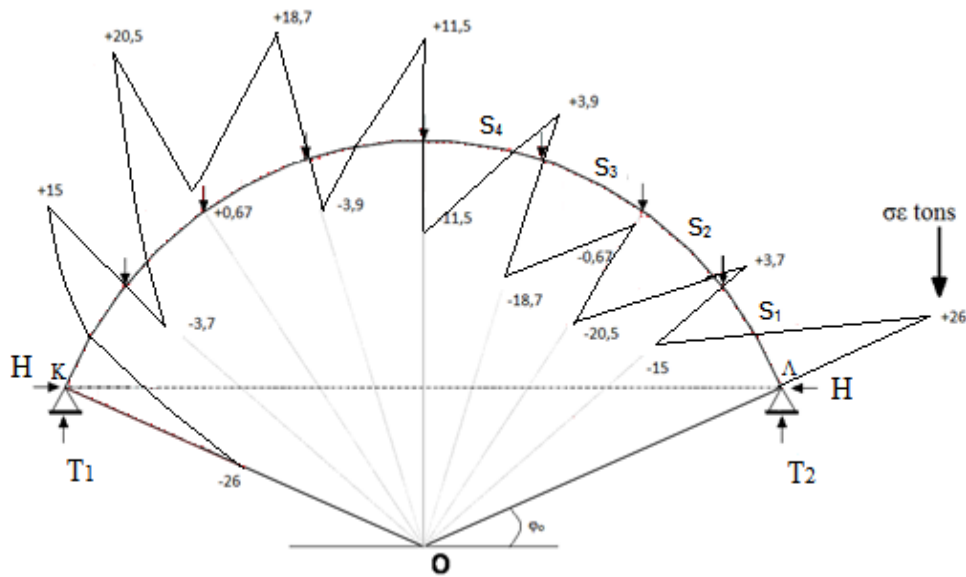
$$\phi = 80^\circ \rightarrow Q = +278 [Kp]$$

$$\phi = 85^\circ \rightarrow Q = -5.633 [Kp]$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \rightarrow Q = -11.502 [Kp]$$

6.4.1 Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

Με βάση τους προηγούμενους υπολογισμούς σχεδιάστηκε το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων. Το αριστερό διάγραμμα σχεδιάστηκε αντισυμμετρικό σε σχέση με το δεξιό.



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα τενουσών δυνάμεων

Η μέγιστη τέμνουσα δύναμη είναι στη θέση Κ και Λ και έχει τιμή:

$$Q_{\max} = \pm 26.027 [Kp]$$

6.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Για τον υπολογισμό των αξονικών δυνάμεων ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με τις τέμνουσες δυνάμεις. Στις αξονικές δυνάμεις όμως ο υπολογισμός θα γίνει από την εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων κατά την εφαπτομενική διεύθυνση, εφαπτομενικά ως προς το τόξο.

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες ως προς το κάθε τόξο που εφαρμόζεται η κάθε μια:

Η δύναμη F_1 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο F_{11} και ως εφαπτομενική F_{12}

Η δύναμη F_2 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο F_{21} και ως εφαπτομενική F_{22}

Η δύναμη F_3 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο F_{31} και ως εφαπτομενική F_{32}

Η αντίδραση T_2 αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο T_{21} και ως εφαπτομενική T_{22}

Η αντίδραση H αναλύεται σε κάθετη ως προς το τόξο H_1 και ως εφαπτομενική H_2

Τόξο S_1 :
(από δεξιά)

$$N = -T_{2,2} - H_2 = -T_2 * \cos\phi - H * \sin\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = -83.381 * \cos\phi - 66.840 * \sin\phi \quad (6.33)$$

$$\phi = \phi_0 = 24,62^\circ \rightarrow N = -103.646 [Kp]$$

$$\phi = 30^\circ \rightarrow N = -105.630 [Kp]$$

$$\phi = 40^\circ \rightarrow N = -106.837 [Kp]$$

$$\phi = \phi_1 = 47,014^\circ \rightarrow N = -105.745 [Kp]$$

Τόξο S_2 :
(από δεξιά)

$$N = -T_{2,2} - H_2 + F_{12} = -T_2 * \cos\phi - H * \sin\phi + F_1 * \cos\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = -83.381 * \cos\phi - 66.840 * \sin\phi + 26.224 * \cos\phi \Rightarrow$$

$$N = -57.156 * \cos\phi - 66.840 * \sin\phi \quad (6.34)$$

$$\phi = \phi_1 = 47,014^\circ \rightarrow N = -87.865 [Kp]$$

$$\phi = 50^\circ \rightarrow N = -87.942 [Kp]$$

$$\phi = 60^\circ \rightarrow N = -86.463 [Kp]$$

$$\phi = \phi_2 = 62,964^\circ \rightarrow N = -85.516 [Kp]$$

Τόξο S_3 :
(από δεξιά)

$$N = -T_{2,2} - H_2 + F_{12} + F_{22} = -T_2 * \cos\phi - H * \sin\phi + F_1 * \cos\phi + F_2 * \cos\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = -83.381 * \cos\phi - 66.840 * \sin\phi + 26.224 * \cos\phi + 22.290 * \cos\phi \Rightarrow$$

$$N = -34.866 * \cos\phi - 66.840 * \sin\phi \quad (6.35)$$

$$\phi = \phi_2 = 62,964^\circ \rightarrow N = -75.384 [Kp]$$

$$\phi = 65^\circ \rightarrow N = -75.312 [Kp]$$

$$\phi = 70^\circ \rightarrow N = -74.734 [Kp]$$

$$\phi = \phi_3 = 76,863^\circ \rightarrow N = -73.015 [Kp]$$

Τόξο S_4 :
(από δεξιά)

$$N = -T_{2,2} - H_2 + F_{12} + F_{22} + F_{33} = -T_2 * \cos\phi - H * \sin\phi + F_1 * \cos\phi + F_2 * \cos\phi + F_3 * \cos\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = (-83.381,14 + 26.224,23 + 22.290,59 + 23.363,41) * \cos\phi - 66.840,23 * \sin\phi \Rightarrow$$

$$N = -11.502 * \cos\phi - 66.840 * \sin\phi \quad (6.36)$$

$$\phi = \phi_3 = 76,863^\circ \rightarrow N = -67.705 [Kp]$$

$$\phi = 80^\circ \rightarrow N = -67.822 [Kp]$$

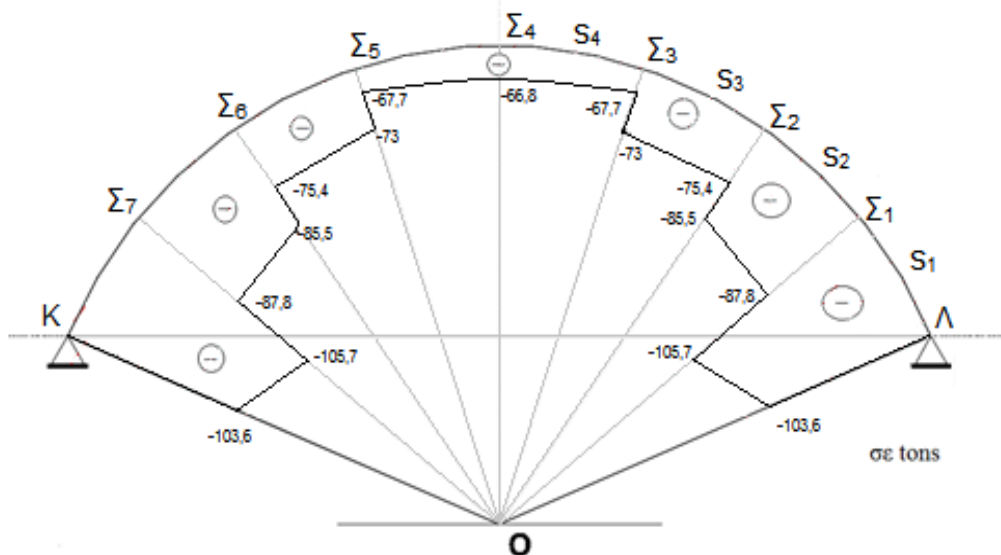
$$\phi = 85^\circ \rightarrow N = -67.588 [Kp]$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \rightarrow N = -66.840 [Kp]$$

Παρατηρούμε ότι η αξονική δύναμη στην θέση $\phi = \frac{\pi}{2}$ έχει ίση απόλυτη τιμή με την αντίδραση H στις στηρίξεις του τοξωτού φορέα. Αυτό είναι αναμενόμενο επειδή όλα τα φορτία είναι κατακόρυφα και από την εξέταση της ισορροπίας των οριζοντίων δυνάμεων στον μισό φορέα προκύπτει η παραπάνω ιδιότητα.

6.5.1 Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων

Αρχίζουμε από δεξιά (σημείο H). Το διάγραμμα από αριστερά σχεδιάζεται συμμετρικό ως προς το αντίστοιχο διάγραμμα από δεξιά.



Σχήμα 6.5: Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων

- Οι αξονικές δυνάμεις είναι παντού θλιπτικές.

- Η μέγιστη αξονική δύναμη είναι στο τόξο S_1 και υπολογίζεται θέτοντας την παράγωγο της σχέσης (6.33) ίση με μηδέν, οπότε βρίσκουμε την γωνία στην οποία η N γίνεται μέγιστη, ως εξής:

$$\frac{dN}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\phi} * [-83.381 * \cos\phi - 66.840 * \sin\phi] = 0 \Rightarrow 83.381 * \sin\phi - 66.840 * \cos\phi = 0 \Rightarrow$$

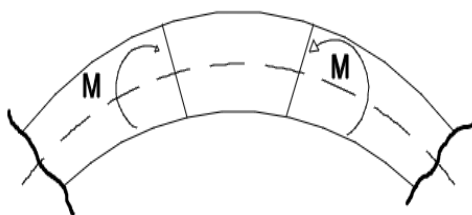
$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{66.840}{83.381} = 38,72^\circ$$

$$\text{Άρα: } N_{\max} = -83.381 * \cos(38,72) - 66.840 * \sin(38,72) = -106864 [Kp]$$

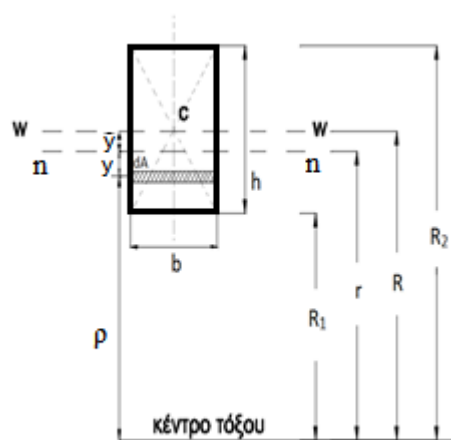
6.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΟΞΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

- Έστω ότι ο τοξωτός φορέας έχει συμπαγή ορθογωνική διατομή από μπετόν με διαστάσεις b και h .
- Η κεντροβαρική γραμμή της διατομής είναι $w - w$ στο μέσον.
- Η ουδέτερη γραμμή σε καμπυλωμένη δοκό μετατοπίζεται προς το κέντρο καμπυλότητας και είναι η γραμμή $n - n$ πιο κάτω από την $w - w$.
- Έστω R η μέση ακτίνα καμπυλότητας στην κεντροβαρική γραμμή, R_1 η εσωτερική ακτίνα καμπυλότητας, R_2 η εξωτερική ακτίνα καμπυλότητας και r η ακτίνα καμπυλότητας στην ουδέτερη γραμμή. Επίσης ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας ενός τυχαίου στοιχείου dA της διατομής.
- Η απόσταση \bar{y} μεταξύ της κεντροβαρικής και της ουδέτερης γραμμής υπολογίζεται με την σχέση:

$$\bar{y} = R - \frac{A}{\int \frac{dA}{\rho}} \quad (6.37)$$



Σχήμα 6.7: Η κεντροβαρική γραμμή στο μέσον της διατομής

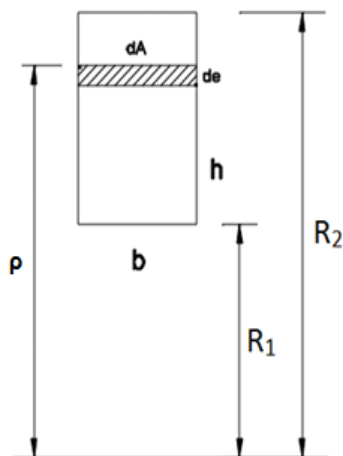


Σχήμα 6.8: Ορθογωνική διατομή τοξωτού φορέα

Σημείωση: Σε καμπυλωμένες δοκούς η κεντροβαρική γραμμή και η ουδέτερη γραμμή δεν συμπίπτουν.

Όπου A η επιφάνεια της διατομής, δηλαδή:

$$A = b * h \quad (6.38)$$



Σχήμα 6.9: Διατομή του τοξωτού φορέα

Θεωρούμε ότι ο τοξωτός φορέας έχει δεδομένη την μέση ακτίνα καμπυλότητας R στην κεντροβαρική γραμμή.

Έτσι το ολοκλήρωμα της σχέσης (6.37) υπολογίζεται σε όλη την επιφάνεια A ως εξής:

$$I_1 = \int_A \frac{dA}{\rho} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b * d\rho}{\rho} = b * [\ln \rho]_{R_1}^{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = b * \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (6.39)$$

Άρα η απόσταση \bar{y} είναι με βάση την σχέση (6.37):

$$\bar{y} = R - \frac{A}{I_1} = R - \frac{b * h}{b * \ln \frac{R_2}{R_1}} \Rightarrow \bar{y} = R - \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (6.40)$$

Έστω ότι η διατομή είναι: $b = 60[cm]$, $h = 100[cm]$

Ο τοξωτός φορέας έχει $R = 22[m]$, άρα $R_1 = R - \frac{h}{2} = 21,5[m]$ και

$$R_2 = R + \frac{h}{2} = 22,5[m]$$

Κατόπιν αυτού έχουμε από την (6.40):

$$\bar{y} = 22[m] - \frac{1[m]}{\ln \frac{22,5}{21,5}} = 3,8 * 10^{-3}[m] \Rightarrow \bar{y} = 3,8[mm]$$

Οι μέγιστες τάσεις καμπυλωμένης δοκού είναι στις ακραίες θέσεις της διατομής και έχουν τιμές:

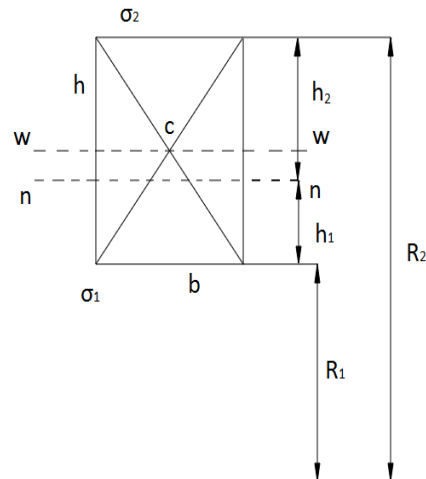
$$\sigma_1 = \frac{M * h_1}{A * \bar{y} * R_1} \quad (6.41)$$

$$\sigma_2 = -\frac{M * h_2}{A * \bar{y} * R_2} \quad (6.42)$$

Όπου:

$h_1 \rightarrow$ απόσταση άκρου κοίλης επιφάνειας από ουδέτερη γραμμή

$h_2 \rightarrow$ απόσταση άκρου κυρτής επιφάνειας από ουδέτερη γραμμή



Σχήμα 6.10: Τομή του τοξωτού φορέα

Σημείωση:

Στις σχέσεις (6.41) και (6.42) η ροπή M τίθεται θετική όταν τείνει να μειώσει την αρχική καμπυλότητα της δοκού, δηλαδή τείνει να την κάνει ευθύγραμμη, αλλιώς είναι αρνητική. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι εφελκυστικές (+) και οι θλιπτικές (-) τάσεις.

Υπολογίζουμε τις αποστάσεις h_1 και h_2 για να τις αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (6.41) και (6.42):

$$h_1 = \frac{h}{2} - \bar{y} = 500[mm] - 3,8[mm] = 496,2[mm]$$

$$h_2 = \frac{h}{2} + \bar{y} = 500[mm] + 3,8[mm] = 503,8[mm]$$

Για μέγιστη ροπή $M = 76.976[Kp * m]$ που υπολογίσαμε με την σχέση 6.28 στην θέση

$\phi = \frac{\pi}{2}$, έχουμε:

$$\sigma_1 = \frac{M * h_1}{A * \bar{y} * R_1} = \frac{76.976[Kp * m] * 0,4962[m]}{0.60[m] * 1[m] * 3,8 * 10^{-3}[m] * 21,5[m]} = 77,9 * 10^4 \left[\frac{Kp}{m^2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = 77,9 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] \text{ (εφελκυσμός πάνω)}$$

$$\sigma_2 = -\frac{M * h_2}{A * \bar{y} * R_2} = -\frac{76.976[Kp * m] * 0,5038[m]}{0.60[m] * 1[m] * 3,8 * 10^{-3}[m] * 22,5[m]} = -75,6 * 10^4 \left[\frac{Kp}{m^2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_2 = -75,6 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] \text{ (θλίψη κάτω)}$$

Εάν υπολογίζαμε την δοκό ως ευθεία και όχι καμπυλωμένη η τάση που θα βρίσκαμε θα ήταν:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{M}{b * \frac{h^2}{6}} = \frac{6 * M}{b * h^2} = \frac{6 * 76.976 [Kp * m]}{0,60[m] * 1^2 [m^2]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = 76,98 * 10^4 \left[\frac{Kp}{m^2} \right] \Rightarrow \sigma = 77 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$$

Άρα:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = 77 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] \\ \sigma_2 = -77 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] \end{array} \right\} \text{ Παρατηρούμε πολύ μικρή απόκλιση από τις} \\ \text{πραγματικές τιμές.}$$

6.7 ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΞΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΕ ΚΑΜΨΗ ΚΑΙ ΘΛΙΨΗ

Θα ελέγξουμε την αντοχή του τοξωτού φορέα σε κάμψη λόγω της ροπής κάμψης και σε θλίψη λόγω των αξονικών δυνάμεων. Θα εξετάσουμε τις παρακάτω δύο δυσμενέστερες περιπτώσεις:

α) Στην γωνία $\varphi = 38,72^\circ$ όπου έχουμε μεγάλη ροπή και την μέγιστη αξονική δύναμη με τιμές :

$$M = -70.472 [Kp * m]$$

$$N = -106864 [Kp]$$

- Η συνολική τάση θλίψης είναι:

$$\sigma_{\omega l} = \frac{N}{A} + \sigma_1 = \frac{N}{b \cdot h} + \frac{M \cdot h_1}{A \cdot \bar{y} \cdot R_1} = -\frac{106864[Kp]}{60 \cdot 100[cm^2]} +$$

$$+ \frac{-70.472[Kp \cdot m] \cdot 0,4962[m] \cdot 10^{-4}}{0,6[m] \cdot 1[m] \cdot 3,8 \cdot 10^{-3}[m] \cdot 21,5[m]} = -17,81 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] - 71,33 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\omega l} = -89,14 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$$

Άρα η μέγιστη θλιπτική τάση στην θέση αυτή έχει απόλυτη τιμή $\sigma_{\omega l} = 89,14 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$.

β) Στο άνω μέρος ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) όπου έχουμε την μέγιστη ροπή κάμψης και μεγάλη αξονική δύναμη, με τιμές:

$$M_{\max} = +76.976[Kp \cdot m]$$

$$N = -66.840[Kp]$$

$$\sigma_{\omega l} = \frac{N}{A} + \sigma_2 = \frac{N}{b \cdot h} + \frac{M \cdot h_2}{b \cdot h \cdot \bar{y} \cdot R_2} = -\frac{66,840[Kp]}{60 \cdot 100[cm^2]} -$$

$$- \frac{76,976[Kp \cdot m] \cdot 0,5038[m]}{60 \cdot 100[cm^2] \cdot 3,8 \cdot 10^{-3}[m] \cdot 22,5[m]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\omega l} = -11,14 - 75,59 \Rightarrow \sigma_{\omega l} = -86,73 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$$

Άρα η μέγιστη θλιπτική τάση στην θέση αυτή έχει απόλυτη τιμή $\sigma_{\omega l} = 86,73 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$.

Σημείωση: Στην σχέση της συνολικής τάσης βάζουμε σ_2 γιατί η ροπή είναι θετική ($M = +76.976,25$), έχουμε θλίψη λόγω ροπής κάμψης στο πάνω μέρος της διατομής, γι' αυτό χρειαζόμαστε την σ_2 που είναι αρνητική για να προστεθεί με την αρνητική τάση λόγω θλίψης από την αξονική δύναμη.

Μεταξύ των δύο θέσεων που εξετάσαμε η μέγιστη θλιπτική τάση εμφανίζεται στην θέση $\phi = 38,72^\circ$ του τόξου S_1 και είναι: $\sigma_{\max} = 89,14 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$.

Για μπετόν υψηλής αντοχής (π.χ. οπλισμένο σκυρόδεμα c30) η επιτρεπόμενη τάση θλίψης είναι τουλάχιστον:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = 0,6 \cdot f_{ck} = 0,6 \cdot 30[MPa] = 18[MPa] = 180 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$$

όπου $f_{ck} = 30 [MPa]$, η χαρακτηριστική θλιπτική αντοχή κυλινδρικού δοκιμίου σκυροδέματος.

Παρατηρούμε ότι ο τοξωτός φορέας από μπετόν με διατομή 60x100 cm αντέχει την υπάρχουσα μέγιστη θλιπτική τάση και είναι:

$$\sigma_{\max} = 89,14 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right] \leq \sigma_{\varepsilon\pi} = 180 \left[\frac{Kp}{cm^2} \right]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 - ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

7.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία θα γίνει με το πρόγραμμα SAP2000. Το SAP2000 όπως και σε όλα τα προγράμματα ανάλυσης ο μόνος υπεύθυνος για να έχουμε σωστά αποτελέσματα είναι ο χρήστης που εισάγει τα δεδομένα σε αυτό.

Γενικά για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τέτοιο πρόγραμμα θα πρέπει να έχουμε διαβάσει τα εγχειρίδια χρήσης, να ξέρουμε τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του προγράμματος και να έχουμε άριστη γνώση στατικής ανάλυσης.

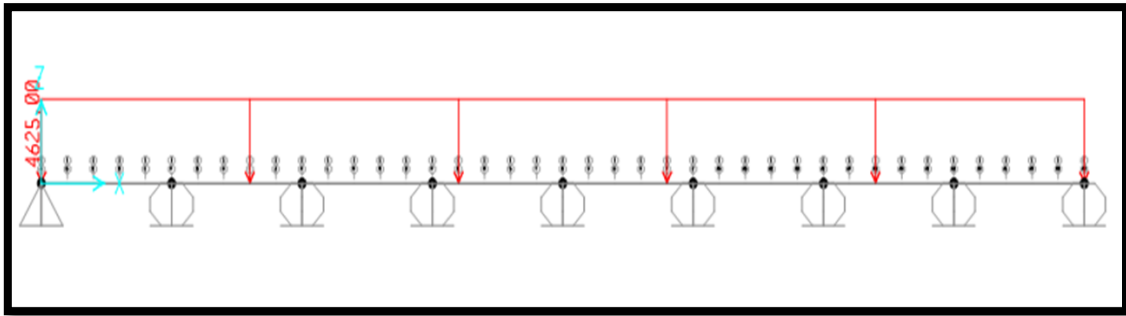
7.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΣ ΔΟΚΟΥ

Η ανάλυση της κύριας δοκού θα γίνει με το SAP2000, θα εισάγουμε σε αυτό όλους τους κόμβους θα τους ενώσουμε με γραμμές και θα τοποθετήσουμε στηρίξεις σε κάθε κόμβο και στην συνέχεια θα βάλουμε και το ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο πάνω στην δοκό.

Αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθήσαμε για να κατασκευάσουμε την κύρια δοκό είναι η εξής:

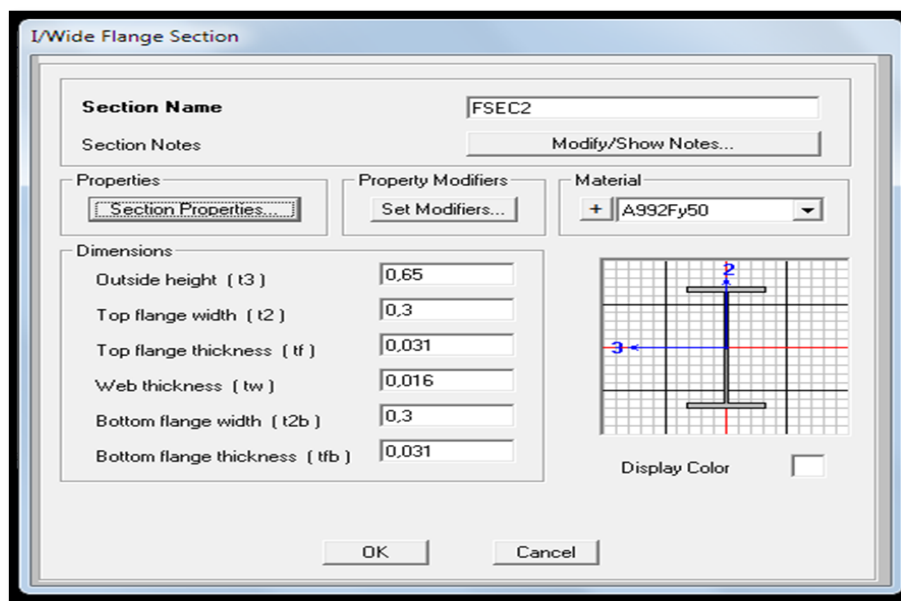
1. Τοποθετήσαμε 9 κόμβους στις συντεταγμένες που θέλουμε. Τους ενώσαμε με μια δοκό και τοποθετήσαμε σε αυτούς στηρίξεις, στο ένα άκρο βάλουμε άρθρωση και στο άλλο κύλιση όπως και στις υπόλοιπες θέσεις (εκεί που θα τοποθετηθούν συρματόσχοινα).
2. Έπειτα βάλουμε το ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο των 4.625 Kp/m πάνω στην επιφάνεια της δοκού (σχήμα 7.1). Η τιμή του φορτίου υπολογίστηκε με βάση το συνολικό βάρος της γέφυρας $B=370 \text{ tn}$ και το μήκος $L=40 \text{ m}$, ως εξής:

$$q = \frac{B}{2 * L} = \frac{370[tn]}{2 * 40[m]} = \frac{370[tn]}{80[m]} = 4625 [Kp / m]$$



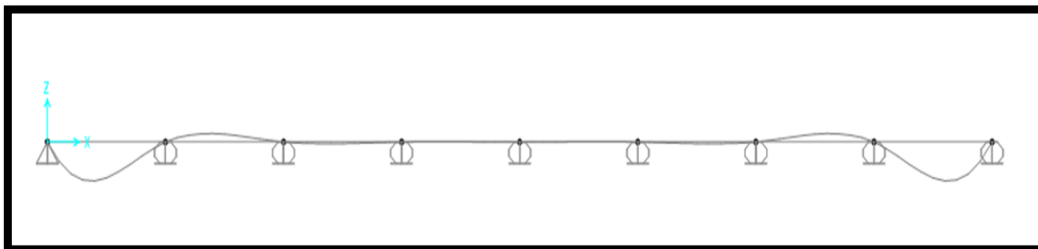
Σχήμα 7.1: Κύρια δοκός γέφυρας σχεδιασμένη με SAP2000

3. Στην συνέχεια βάλουμε το υλικό και την γεωμετρία της δοκού IPB650.



Σχήμα 7.2: Εισαγωγή γεωμετρίας δοκού IPB650

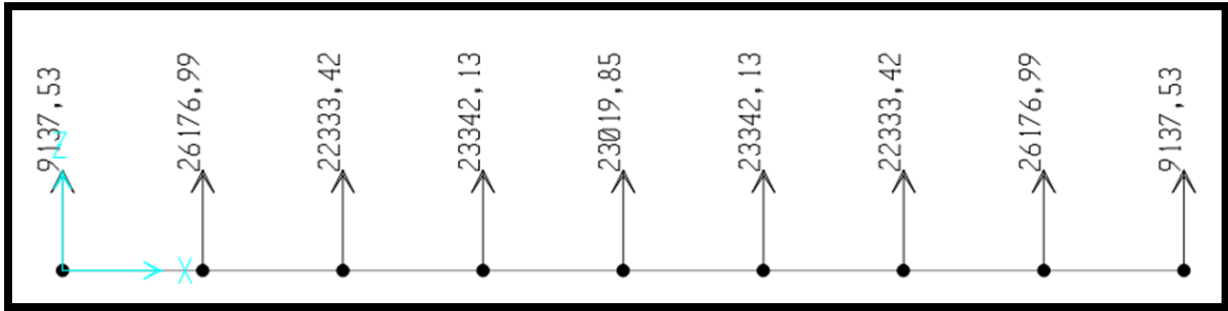
4. Τρέχουμε το πρόγραμμα και βλέπουμε ότι η δοκός παίρνει την παρακάτω παραμόρφωση:



Σχήμα 7.3: Παραμορφωμένη δοκός

5. Παρακάτω έχουμε τις αντιδράσεις στους κόμβους, βλέπουμε ότι έχουμε μια μικρή απόκλιση σε σχέση με τα αποτελέσματα που υπολογίσαμε με πράξεις,

αυτό οφείλεται σε στρογγυλοποιήσεις αλλά και σε κάποια λάθη στον ορισμό των ιδιοτήτων της δοκού.



Σχήμα 7.4: Δυνάμεις αντιδράσεως από τους κόμβους

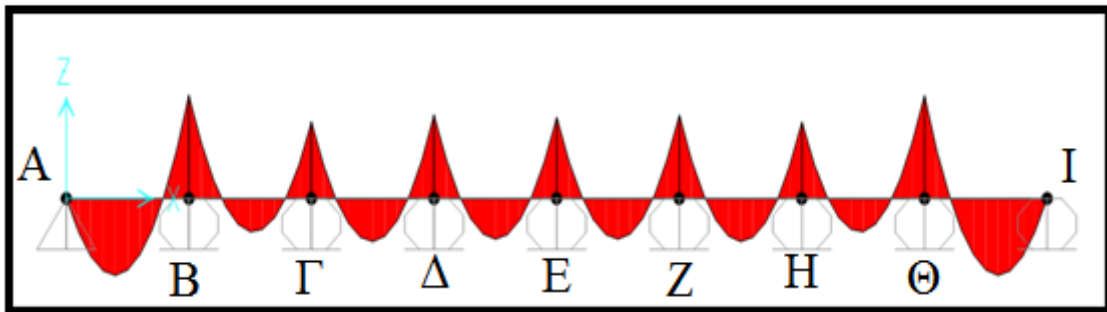
6. Το διάγραμμα ροπών κάμψης της κύριας δοκού φαίνεται στο σχήμα 7.5, οι τιμές είναι οι εξής:

Σημείο Β και Σημείο Θ: $M_1 = -12.124,85 [Kp * m]$

Σημείο Γ και Σημείο Η: $M_2 = -8.989,43 [Kp * m]$

Σημείο Δ και Σημείο Ζ: $M_3 = -9.814,37 [Kp * m]$

Σημείο Ε: $M_4 = -9.549,65 [Kp * m]$



Σχήμα 7.5: Ροπές κάμψης της δοκού

Οι ροπές κάμψης που υπολογίσαμε στα σημεία Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ, μέσω του προγράμματος για πεπερασμένα στοιχεία SAP2000, έχουν μια μικρή απόκλιση σε σχέση με τις ροπές κάμψης που υπολογίσαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 5.5.

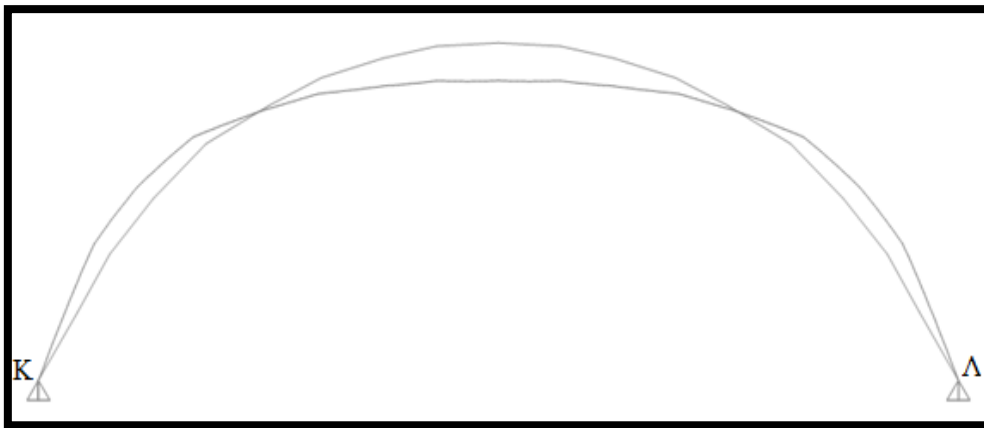
7.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΟΞΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Η ανάλυση του τοξωτού φορέα θα γίνει με το πρόγραμμα SAP2000. Η γεωμετρία του τοξωτού φορέα της γέφυρας θα σχεδιαστεί με μικρά ευθύγραμμα τμήματα επειδή το SAP2000 δεν έχει την δυνατότητα να σχεδιάσει καμπυλωτές

δοκού. Έτσι τα αποτελέσματα που θα πάρουμε θα έχουν μια απόκλιση σε σχέση με τα αποτελέσματα που έχουμε από τους προηγούμενους υπολογισμούς μας.

Αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθήσαμε για να κατασκευάσουμε τον τοξωτό φορέα είναι η εξής:

1. Αρχικά βάζουμε τις δύο αρθρώσεις σε απόσταση 40 μέτρων και στην συνέχεια θα συνδέσουμε αυτά τα δύο σημεία με μικρά ευθύγραμμα τμήματα με σκοπό να σχηματίσουμε ένα τόξο.
2. Στην συνέχεια θα τοποθετήσουμε τις δυνάμεις από τις αντιδράσεις που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πάνω στο τόξο.
3. Ορίζουμε ορθογωνική διατομή στον τοξωτό φορέα και το υλικό του.
4. Τρέχουμε το πρόγραμμα και βλέπουμε την παραμόρφωση που έχει πάρει ο τοξωτός φορέας σε σχέση με τον μη παραμορφωμένο.

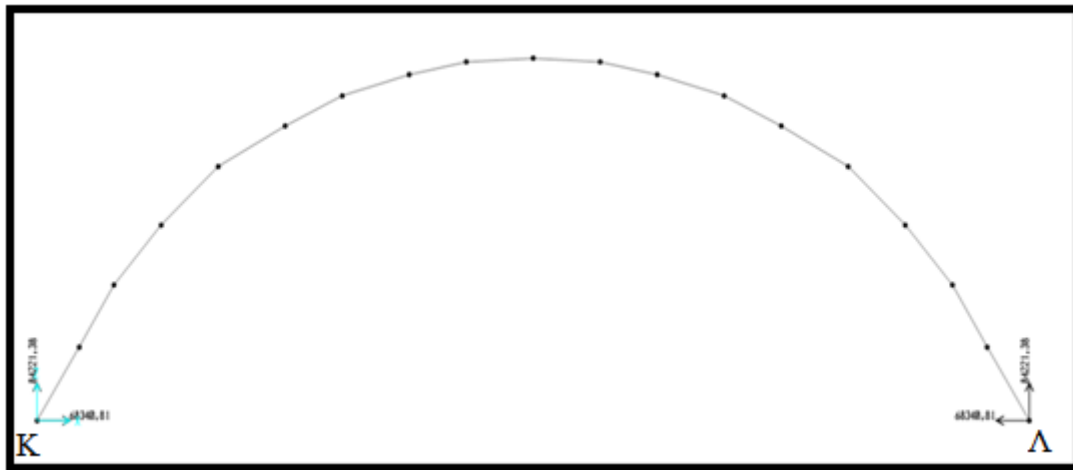


Σχήμα 7.6: Παραμορφωμένος τοξωτός φορέας

5. Βρίσκουμε τις δυνάμεις αντίδρασης της δοκού, οι οποίες είναι ίδιες και για τις δύο στηρίξεις λόγω συμμετρίας (σχήμα 7.7).

$$\text{Κάθετη αντίδραση στο σημείο Κ, Λ: } T_2 = 84.221,38 [Kp]$$

$$\text{Οριζόντια αντίδραση στο σημείο Κ, Λ: } H = 68.340,81 [Kp]$$



Σχήμα 7.7: Δυνάμεις αντίδρασης

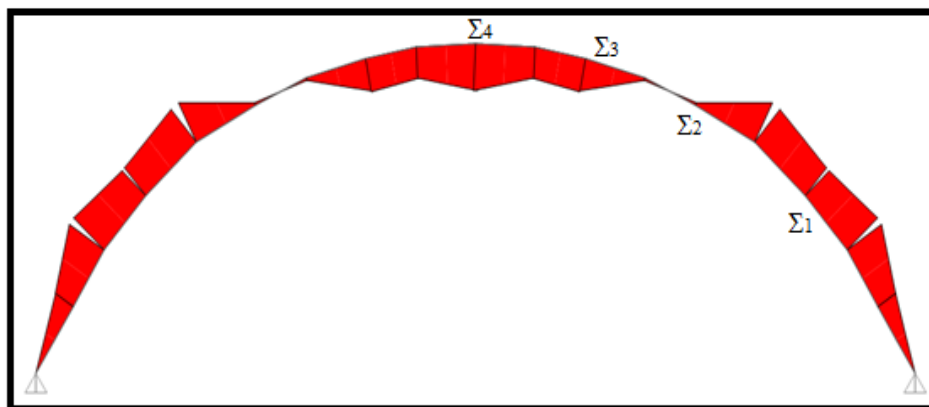
6. Στο επόμενο βήμα σχεδιάζουμε το διάγραμμα των ροπών κάμψης του τοξωτού φορέα (σχήμα 7.8). Οι τιμές έχουν μια απόκλιση σε σχέση με τις τιμές που υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο με αναλυτικές μεθόδους.

$$M_{\Sigma_1} = -45.485,08 [Kp * m]$$

$$M_{\Sigma_2} = +6.054,78 [Kp * m]$$

$$M_{\Sigma_3} = +56.671,41 [Kp * m]$$

$$M_{\Sigma_4} = +74.846,22 [Kp * m]$$



Σχήμα 7.8 Διάγραμμα ροπών κάμψης

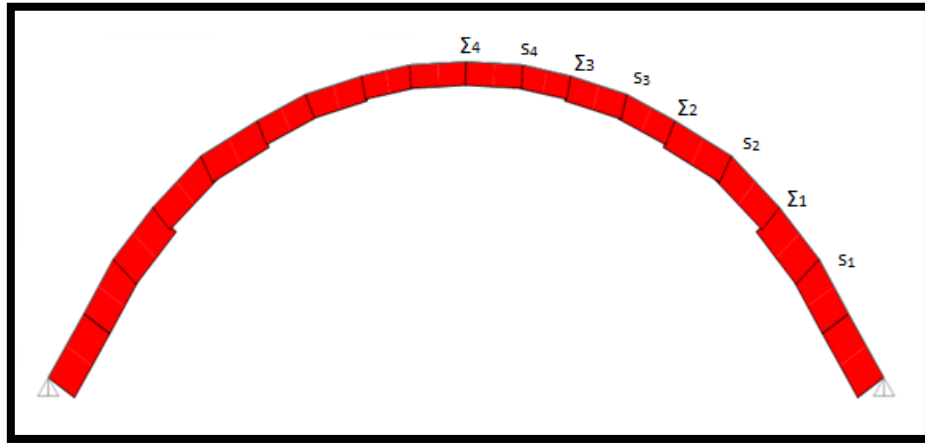
7. Παρακάτω βλέπουμε το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων που εφαρμόζονται πάνω στον τοξωτό φορέα, έχει και αυτό μια μικρή απόκλιση (σχήμα 7.9).

$$\text{Τόξο} - S_1 \rightarrow N = -107.890,20 [Kp]$$

$$\text{Τόξο} - S_2 \rightarrow N = -89.327,03 [Kp]$$

$$\text{Τόξο} - S_3 \rightarrow N = -76.781,94 [Kp]$$

$$\text{Τόξο} - S_4 \rightarrow N = -68.814,94 [Kp]$$



Σχήμα 7.9: Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων

8. Στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων η μεγάλη απόκλιση οφείλεται στο ότι στην σχεδίαση του τοξωτού φορέα χρησιμοποιήσαμε μικρά ευθύγραμμα τμήματα και η κάθε τιμή υπολογίζεται στο άκρο κάθε τμήματος προς την πλευρά των στηρίξεων οπότε η κλίση του τμήματος είναι διαφορετική και επηρεάζει σημαντικά την τιμή των τεμνουσών δυνάμεων (σχήμα 7.10).

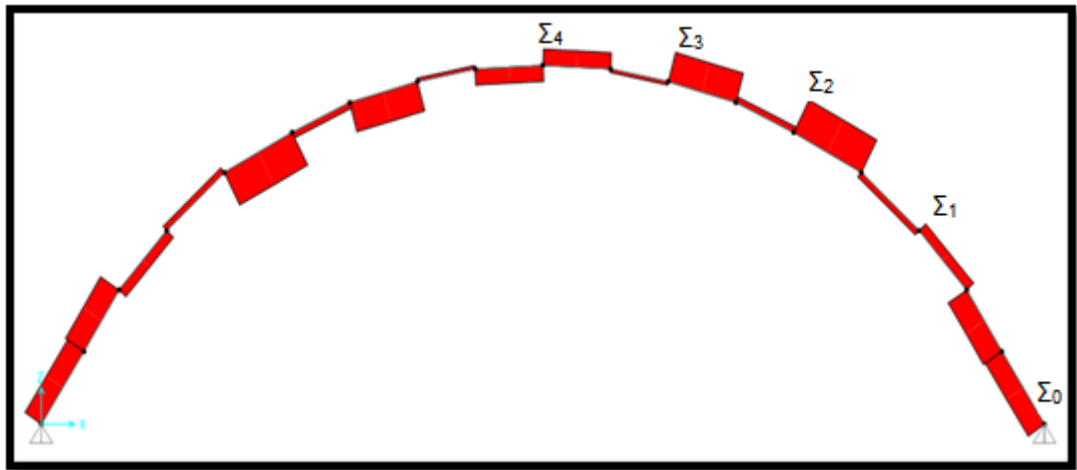
$$\Thetaέση - \Sigma_1 : Q_1 = +11.066 [Kp]$$

$$\Thetaέση - \Sigma_2 : Q_2 = -5.203 [Kp]$$

$$\Thetaέση - \Sigma_3 : Q_3 = -18.804 [Kp]$$

$$\Thetaέση - \Sigma_4 : Q_4 = -15.463 [Kp]$$

$$\Thetaέση - \Sigma_5 : Q_5 = -8.23 [Kp]$$



Σχήμα 7.10: Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία έγινε η στατική μελέτη μιας σιδηροδρομικής γέφυρας με τοξωτό φορέα ανοίγματος 40 μέτρων. Η μελέτη αυτή χωρίστηκε σε δύο μέρη, το ένα είναι η στατική μελέτη της κύριας δοκού της γέφυρας και το άλλο είναι η στατική μελέτη του τοξωτού φορέα.

Στο πρώτο μέρος η στατική μελέτη της κύριας δοκού, λόγω του ότι το πρόβλημα ήταν υπερστατικό, έγινε με το θεώρημα της επαλληλίας αρχικά. Στην συνέχεια έγινε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία με το πρόγραμμα SAP2000, ώστε να ελέγξουμε και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από αυτούς τους δύο τρόπους. Γενικά τα αποτελέσματα είχαν μια μικρή απόκλιση μεταξύ τους, λόγω στρογγυλοποιήσεων αλλά και κάποιων σφαλμάτων στον ορισμό των ιδιοτήτων της δοκού στο SAP2000.

Στο Δεύτερο μέρος η στατική μελέτη του τοξωτού φορέα έγινε με βάση το θεώρημα του Castigliano. Στην συνέχεια έγινε επίλυση του προβλήματος και με πεπερασμένα στοιχεία ώστε να ελέγξουμε τα αποτελέσματα μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα και εδώ είχαν μια μικρή απόκλιση λόγω της γεωμετρίας του τοξωτού φορέα καθώς το SAP2000 δεν δίνει την δυνατότητα να σχεδιαστεί τόξο, έτσι ο σχεδιασμός έγινε με μικρά ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζοντας όσο καλύτερα γινόταν τον τοξωτό φορέα.

Κατά την εκπόνηση της πτυχιακής εργασίας αποκτήθηκε σημαντική εμπειρία στην στατική μελέτη μιας τοξωτής σιδηροδρομικής γέφυρας καθώς και σημαντικές γνώσεις σχετικά με τον σχεδιασμό και την ανάλυση του προγράμματος SAP2000. Επίσης αποκτήθηκε εμπειρία στην αναζήτηση πληροφοριών στη βιβλιογραφία, την συγγραφή και την παρουσίαση μιας μελέτης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γιαννόπουλος Ανδρέας, “Μεταλλικές Κατασκευές”, Εκδόσεις ΙΩΝ, Πάτρα 2005.
- Ερμόπουλος Ι., “Σιδηρές γέφυρες”, Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2005.
- Ερμόπουλος Ι., “Σιδηρές και σύμμικτες γέφυρες”, Κλειδάριθμος 2000.
- Κωστέας, Αντώνιος Δ., “Σιδηραί γέφυραι”, Έκδοση 5^η, Αθήνα, 1972.
- Κωστέας, Αντώνιος Δ., “Σιδηρά δομικά έργα”, Έκδοση 6^η, Αθήνα, 1972.
- Λυμπέρης Κ., “Σιδηροδρομική θεωρία και εφαρμογές”, Συμμετρία, 2007.
- Charles S. Whitney, “Bridges of the world: Their design and construction”, 2003.
- G. Parke and N. Hewson, “ICE Manual of Bridge Engineering, 2nd edition”, Thomas Telford Ltd, 2008.

Ιστοσελίδες στο Διαδίκτυο

- <http://www.in2life.gr>
- <http://www3.aegean.gr>
- <http://www.gefyra.gr>
- <http://www.ioannispadiotis.com>
- <http://www.bestfreewebresources.com>