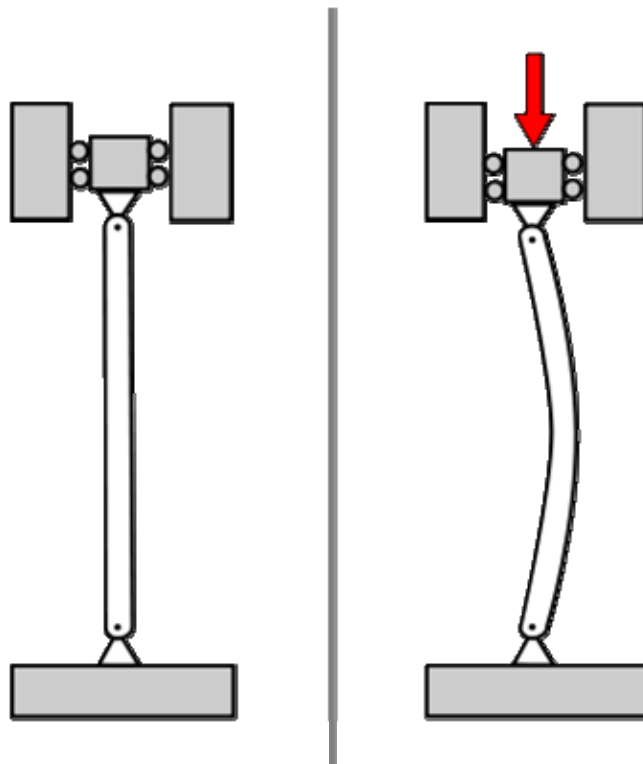


ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ: ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ (Α.Μ. 5759)
ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ (Α.Μ. 5674)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΜΒΥΣΑΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2014

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. του Ανωτάτου Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Δυτικής Ελλάδας. Στόχος της εργασίας είναι η μελέτη του λυγισμού στύλων, πλαισίων και λεπτών πλακών.

Θεωρούμε υποχρέωσή μας να ευχαριστήσουμε θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μας κ. Καμβύσα Γρηγόριο για την εμπιστοσύνη που μας έδειξε καθώς και για την καθοδήγηση και τη βοήθεια που μας προσέφερε ώστε να ολοκληρωθεί η παρούσα πτυχιακή εργασία.

Ζαφειρόπουλος Κωνσταντίνος
Σακελλαρίου Κωνσταντίνος

Σεπτέμβριος 2014

Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστών: Οι κάτωθι υπογεγραμμένοι σπουδαστές έχουμε επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνουμε υπεύθυνα ότι είμαστε συγγραφείς αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, αναλαμβάνοντας την ευθύνη επί ολοκλήρου του κειμένου εξ ίσου, έχουμε δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μας όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποιήσαμε και λάβαμε ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνουμε επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχουμε ενσωματώσει στην εργασία μας προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχουμε πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχουμε αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Οι σπουδαστές
Ζαφειρόπουλος Κωνσταντίνος

Σακελλαρίου Κωνσταντίνος

.....
(Υπογραφή)

.....
(Υπογραφή)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο νόμος του Euler και τα όρια ισχύος του και κατασκευάζεται η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο του λυγισμού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται παραδείγματα λυγισμού στύλων που υπόκεινται σε διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Εξετάζονται οι περιπτώσεις του αμφιαρθρωτού στύλου, του στύλου με πάκτωση στο ένα άκρο και άρθρωση στο άλλο άκρο, καθώς και η περίπτωση της έκκεντρης αξονικής φόρτισης.

Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο λυγισμό ορθογωνικών πλαισίων. Τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου χρησιμοποιούνται για τη μελέτη του λυγισμού των πλαισίων. Εξετάζεται λεπτομερώς η περίπτωση ορθογωνικού συμμετρικού πλαισίου που αποτελείται από τρία μέλη.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάται ο λυγισμός λεπτών πλακών. Διατυπώνεται η εξίσωση κίνησης και χρησιμοποιείται η λύση του Navier για τη μελέτη του λυγισμού ορθογωνικής αρθρωμένης πλάκας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο δίνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Τέλος αναφέρεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την επεξεργασία και συγγραφή της παρούσας εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	
1.1 Νόμος Euler.....	4
1.2 Βασικές Παραδοχές.....	7
1.3 Διαφορική Εξίσωση Λυγισμού.....	8
1.4 Γενική Λύση.....	10
1.5 Ο Λυγισμός ως Πρόβλημα Ιδιοτιμών.....	12
2. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΣΤΥΛΩΝ	
2.1 Αμφιαρθρωτός Στύλος.....	14
2.2 Πάκτωση-Άρθρωση.....	16
2.3 Έκκεντρη Αξονική Φόρτιση.....	22
3. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ	
3.1 Γενικά.....	31
3.2 Ορθογωνικό Συμμετρικό Πλαίσιο από Τρία Μέλη.....	31
4. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ	
4.1 Γενικά.....	44

4.2 Εξίσωση Κίνησης.....	45
4.3 Λυγισμός Ορθογωνικής Αρθρωμένης Πλάκας.....	46
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	53
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	54

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε ορισμένες περιπτώσεις καταπόνησης, η αντοχή ενός μέλους δεν καθορίζεται από την αντοχή της εκάστοτε κρίσιμης διατομής του, αλλά υπάρχει μια στάθμη εξωτερικής φόρτισης για την οποία το μέλος χάνει την ευστάθειά του και αποκτά τη δυνατότητα να ισορροπεί και σε μία γειτονική θέση ισορροπίας πέραν της αρχικής. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται λυγισμός. Η θεωρητική μελέτη του λυγισμού, αναφέρεται ως θεωρία (ελαστικής και ανελαστικής) ευστάθειας ή θεωρία λυγισμού. Θεμελιωτής της θεωρίας ελαστικού λυγισμού υπήρξε ο Leonhard Euler τον 18^ο αιώνα. Από τότε πολλοί μελετητές έχουν ασχοληθεί εκτενώς με την ευστάθεια των κατασκευών.

Από την Αντοχή των Υλικών γνωρίζουμε ότι όταν μία ευθύγραμμη ράβδος πρισματικής διατομής θλίβεται αξονικά, η αύξηση της φόρτισης μέχρι κάποιας ορισμένης (κρίσιμης) τιμής προκαλεί συνεχώς αυξανόμενη αξονική βράχυνση. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι όταν μία ελαστική ράβδος έχει λυγηρότητα μεγαλύτερη κάποιας ελάχιστης τιμής, η ένταση της βρίσκεται εντός της ελαστικής περιοχής και η αξονική βράχυνση είναι ανάλογη της φόρτισης. Εάν η φόρτιση υπερβεί την προαναφερθείσα κρίσιμη τιμή, η ράβδος εγκαταλείπει την ευθύγραμμη μορφή (αξονικής) παραμόρφωσης και λαμβάνει μία ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή λόγω κάμψης. Η συμπεριφορά αυτή της ράβδου ονομάζεται ελαστικός καμπτικός λυγισμός (elastic flexural buckling). Η ράβδος αυτή, υποκειμένη στην παραπάνω στατική φόρτιση, ισορροπεί τόσο σε ευθύγραμμη (για φόρτιση μικρότερη της κρίσιμης) όσο και σε ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή (για φόρτιση ίση ή μεγαλύτερη της κρίσιμης).

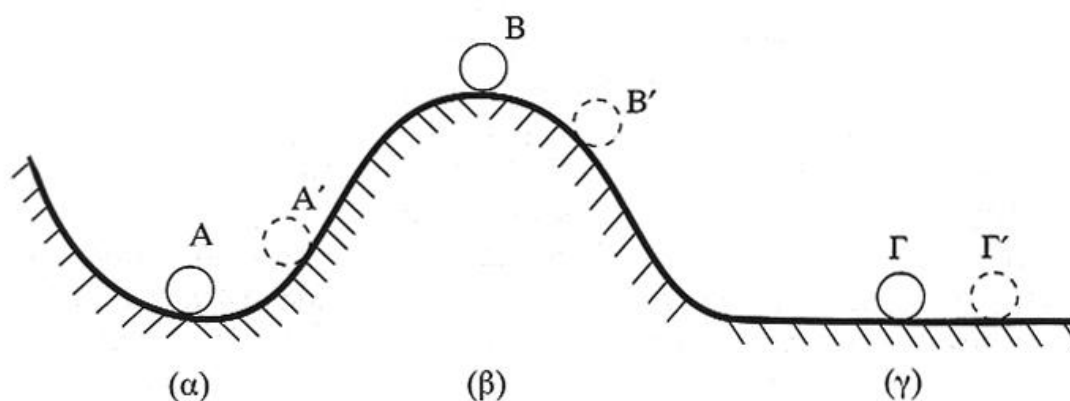
Μικρή αύξηση της φόρτισης πάνω από την κρίσιμη προκαλεί σημαντικά μεγαλύτερη (δυσανάλογη) καμπτική παραμόρφωση. Σε κάποια δε τιμή της φόρτισης αρχίζει η διαρροή (στην ακραία ίνα της περισσότερο εντεινόμενης από κάμψη διατομής), η οποία επεκτείνεται όσο αυξάνεται περαιτέρω η φόρτιση, οδηγώντας σε ανελαστικό (ή πλαστικό) λυγισμό.

Επειδή όμως, για φόρτιση μεγαλύτερη της κρίσιμης τα περιθώρια αντοχής (μεταλυγισμική αντοχή) της ράβδου, είναι πρακτικώς περιορισμένα, θεωρούμε ότι η κρίσιμη φόρτιση συνδέεται με τη μέγιστη φέρουσα ικανότητα αξονικά θλιβόμενων ράβδων και

ως εκ τούτου, η φόρτιση αυτή αποτελεί κριτήριο σχεδιασμού και ονομάζεται φορτίο λυγισμού. Ο προσδιορισμός, λοιπόν, του φορτίου λυγισμού μιας κατασκευής, αποτελεί στοιχείο καθοριστικό για τον δομικό σχεδιασμό. Τέλος, υπογραμμίζεται ότι, η αντιστοιχούσα στο φορτίο λυγισμού, κρίσιμη τάση λυγισμού είναι πολύ μικρότερη της τάσης αναλογίας (ελαστικότητας) του υλικού κατασκευής της ράβδου και μάλιστα, είναι τόσο μικρότερη της τάσης αυτής, όσο μεγαλύτερη είναι η λυγηρότητα της ράβδου.

Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι η αστοχία λόγω ελαστικού λυγισμού, δεν οφείλεται σε υπέρβαση τάσης, αλλά σε αστάθεια ισορροπίας η οποία οδηγεί σε υπερβολική παραμόρφωση και η οποία συμβαίνει αμέσως μετά το λυγισμό. Επομένως η αντοχή του μέλους δεν καθορίζεται από την αντοχή της διατομής, όπως συμβαίνει σε άλλες μορφές καταπόνησης (π.χ. εφελκυσμός ή κάμψη). Το γεγονός αυτό σημαίνει με τη σειρά του ότι αύξηση της φέρουσας ικανότητας του μέλους (δηλαδή αποτροπή του λυγισμού), επιτυγχάνεται με αύξηση της ακαμψίας του, που οδηγεί σε αύξηση της κρίσιμης τάσης λυγισμού και μείωση των βελών κάμψης της παραμόρφωσης.

Η φιλοσοφία της σχεδίασης με κριτήριο την ευστάθεια αποσκοπεί στη μόρφωση μιας κατασκευής ώστε αυτή να βρίσκεται σε ευσταθή κατάσταση ισορροπίας. Μία κατάσταση ισορροπίας μπορεί να είναι ευσταθής, ασταθής ή αδιάφορη (σχήμα 1).



Σχήμα 1 Κύριες μορφές ισορροπίας, (α) ευσταθής, (β) ασταθής, (γ) αδιάφορη [3].

Στη θέση A αν μετακινήσουμε τη σφαίρα από την αρχική θέση ισορροπίας, όταν αφαιρέσουμε τη δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση, αυτή θα ξαναγυρίσει στην ίδια θέση. Τότε έχουμε ευσταθή ισορροπία.

Στη θέση Β αν μετακινηθεί η σφαίρα από την αρχική θέση ισορροπίας τότε μετά την αφαίρεση της δύναμης που προκάλεσε τη μετακίνηση όχι μόνο δεν επιστρέφει, αλλά απομακρύνεται συνεχώς από αυτή. Αυτή η μορφή ονομάζεται ασταθής ισορροπία. Τέλος στη θέση Γ η σφαίρα μετά από μικρή μετακίνηση ούτε επιστρέφει στην αρχική θέση, ούτε απομακρύνεται, αλλά παραμένει στη θέση την οποία μετακινήθηκε. Αυτή η μορφή ισορροπίας ονομάζεται ουδέτερη.

Έτσι, στην περίπτωση του λυγισμού, αν συμβολίσουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μιας ράβδου με P_{cr} , μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $P < P_{cr}$ τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ευσταθής. Δηλαδή αν η ράβδος ωθηθεί προς τα πλάγια και μετά αφεθεί ελεύθερη, αυτή θα επανέλθει στην αρχική της απαραμόρφωτη κατάσταση.
- Αν $P = P_{cr}$ τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται αδιάφορη (ή ουδέτερη). Αν ασκηθεί ώθηση προς τα πλάγια στη ράβδο και μετά αφεθεί ελεύθερη, αυτή θα διατηρήσει μια μικρή απόκλιση (παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας).
- Αν $P > P_{cr}$ τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ασταθής. Αν ασκηθεί στη ράβδο μια οποιαδήποτε μικρή ώθηση θα έχει ως συνέπεια την απροσδιόριστη αύξηση της απόκλισης, το φαινόμενο θα εξελιχθεί δυναμικά και πολύ γρήγορα θα έχουμε το φαινόμενο της θραύσης.

Στα κεφάλαια θα αναπτύξουμε μέσα από παραδείγματα την μεθοδολογία που εφαρμόζεται για τον υπολογισμό των κρίσιμων φορτίων λυγισμού ράβδων, πλαισίων και λεπτών πλακών

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 ΝΟΜΟΣ EULER

Το 18^ο αιώνα ο Ελβετός μαθηματικός Euler έλυσε το πρόβλημα του λυγισμού των ράβδων και παρουσίασε μια μεθοδολογία για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου. Το φορτίο αυτό καλύπτει τον καμπτικό λυγισμό, δεδομένου ότι οι παραμορφώσεις των διατομών της ράβδου θεωρήθηκαν από τον Euler ότι αποτελούνται μόνο από μετατοπίσεις και όχι από στροφές. Οι βασικές παραδοχές στις οποίες στηρίζεται η θεωρία του Euler παρουσιάζονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Euler το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μιας ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_k^2} \quad (1.1)$$

όπου:

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού





I_{\min} η ελάχιστη ροπή αδράνειας

L_k είναι το ελεύθερο ή ανηγμένο μήκος λυγισμού που εξαρτάται από το μήκος της ράβδου και τον τρόπο στήριξής της. Στο σχήμα 1.1 φαίνεται το ανηγμένο μήκος λυγισμού για διάφορες περιπτώσεις στηρίξεων.

Το γινόμενο EI ονομάζεται και μέτρο δυσκαμψίας ή καμπτική αντίσταση της διατομής.

Με την παραδοχή της ομοιόμορφης κατανομής των τάσεων μπορούμε να υπολογίσουμε την κρίσιμη τάση:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{AL_k^2} \quad (1.2)$$

α/α	Σχήμα	Είδος στηρίξεως	Ελεύθερο ή ανηγμένο μήκος λυγισμού	Κρίσιμο φορτίο λυγισμού
i		δύο αρθρώσεις	$\ell_k = \ell$	$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\ell^2}$
ii		πάκτωση κάτω ελεύθερο άκρο επάνω	$\ell_k = 2\ell$	$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4\ell^2}$
iii		δύο πακτώσεις	$\ell_k = \ell/2$	$P_{κρ} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{\ell^2}$
iv		πάκτωση κάτω άρθρωση επάνω	$\ell_k = 0.7\ell$	$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0.7\ell)^2}$

Σχήμα 1.1 Ανηγμένο μήκος λυγισμού και κρίσιμο φορτίο Euler για διάφορες περιπτώσεις στηρίξεων [6].

Αν στη θέση της μικρότερης ροπής αδράνειας, I_{min} , θέσουμε την αντίστοιχη ελάχιστη ακτίνα αδράνειας, i_{min} , η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \quad (1.3)$$

η σχέση (1.2) γίνεται:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{L_k^2} \quad (1.4)$$

Επίσης ορίζεται ο βαθμός λυγηρότητας (slenderness ratio), ή απλά λυγηρότητα, λ , που μας παρέχει ένα μέτρο της ευαισθησίας της ράβδου στο λυγισμό:

$$\lambda = \frac{L_k}{i_{\min}} \quad (1.5)$$

Η χρήση του λ απλοποιεί τον τύπο της κρίσιμης τάσης ως εξής:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (1.6)$$

Είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του λ τόσο μικρότερη είναι η τιμή της κρίσιμης τάσης, συνεπώς τόσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος αστοχίας λόγω λυγισμού.

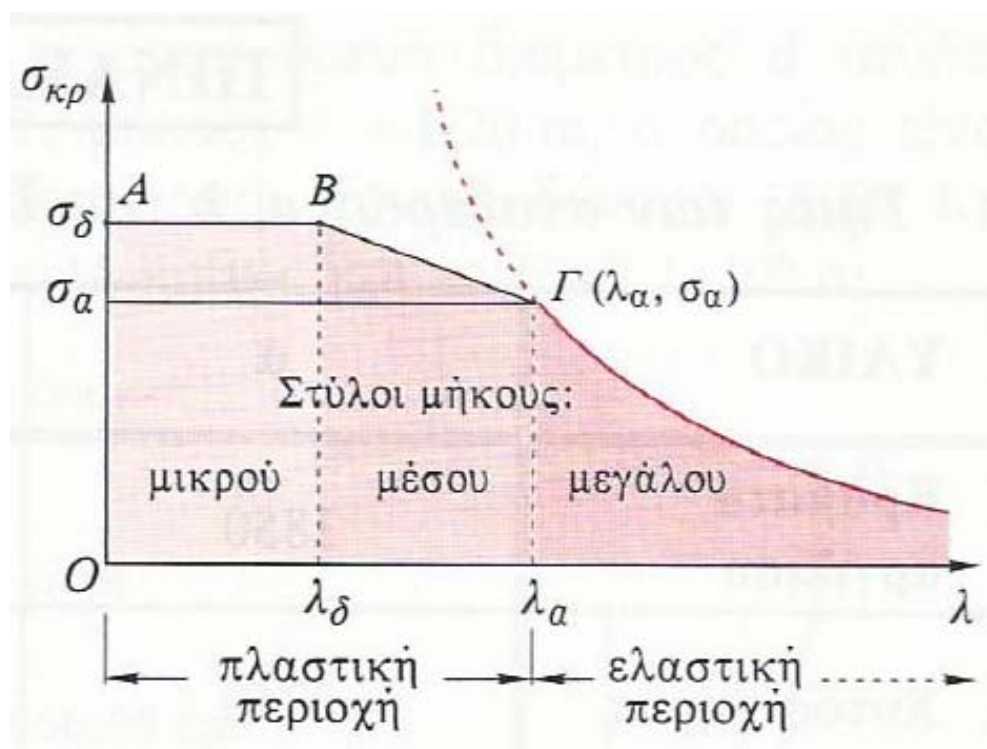
Πρέπει να σημειωθεί ότι ο νόμος του Euler ισχύει όσο ισχύει και ο νόμος του Hooke, δηλαδή όσο η κρίσιμη τάση είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού. Έτσι στο σχήμα 1.2 που απεικονίζεται η κρίσιμη τάση συναρτήσεως της λυγηρότητας ενός στύλου, το όριο της ελαστικής περιοχής στην οποία ισχύει ο νόμος του Euler καθορίζεται από την τάση αναλογίας σ_a (σημείο Γ). Για λυγηρότητα μικρότερη της τιμής λ_s , που αντιστοιχεί στο όριο διαρροής σ_s η κρίσιμη τάση είναι η σ_s . Για τιμές του συντελεστή λ μεταξύ των ορίων:

$$\lambda_s < \lambda < \lambda_a$$

είμαστε στην πλαστική περιοχή και η κρίσιμη τάση υπολογίζεται από τον τύπο του Tetmajer:

$$\sigma_{cr} = a - \beta\lambda + \gamma\lambda^2 \quad (1.7)$$

όπου οι σταθερές α , β , γ εξαρτώνται από το υλικό και προσδιορίζονται πειραματικά.



Σχήμα 1.2 Κρίσιμη τάση συναρτήσει της λυγηρότητας [6].

1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Η μελέτη του λυγισμού ευθύγραμμων φορέων θα γίνει στα πλαίσια της θεωρίας γραμμικού λυγισμού (ή αλλιώς θεωρία ελαστικής ευστάθειας). Οι βασικές παραδοχές στις οποίες στηρίζεται η θεωρία αυτή είναι:

1. Ο υπό μελέτη φορέας είναι κατασκευασμένος από ομογενές, ισότροπο, γραμμικά ελαστικό υλικό που ακολουθεί το νόμο του Hooke.
2. Το διάγραμμα σ - ϵ θεωρείται το ίδιο τόσο για εφελκυσμό όσο και για θλίψη.
3. Επίπεδες διατομές κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα πριν από την κάμψη παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα μετά την κάμψη (παραδοχή Bernoulli-Navier).
4. Τα εξωτερικά εγκάρσια φορτία διέρχονται από το κέντρο διάτμησης και είναι παράλληλα ως προς έναν από τους κύριους άξονες αδράνειας.

Αυτό αποκλείει οποιαδήποτε στροφή της διατομής η οποία κατά συνέπεια υπόκειται μόνο σε κάμψη σε ένα από τα κύρια επίπεδά της.

5. Η αξονική μετατόπιση και η εγκάρσια μετατόπιση (βέλος κάμψης) οποιουδήποτε σημείου είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τις διαστάσεις της διατομής του μέλους.

6. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού υπολογίζονται θεωρώντας ότι η ελαστική παραμόρφωση οφείλεται μόνο σε κάμψη, δηλαδή αμελείται η αξονική παραμόρφωση που ενδεχομένως προηγήθηκε.

1.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Από την Αντοχή των Υλικών είναι γνωστή η σχέση που συνδέει το βέλος κάμψης $w(x)$ στη θέση x ενός ευθύγραμμου φορέα με τη ροπή κάμψης $M(x)$:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.8)$$

όπου:

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο στύλος

I είναι η ροπή αδράνειας της διατομής του στύλου.

Κύριο χαρακτηριστικό της ανάλυσης σε λυγισμό (ανάλυση σε ευστάθεια) ενός φορέα είναι ότι οι εξισώσεις ισορροπίας λαμβάνονται στην παραμορφωμένη λόγω κάμψης κατάσταση σε αντίθεση με τη λεγόμενη στατική ανάλυση. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος εμφανίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας μία πρόσθετη ροπή κάμψης που οφείλεται στο θλιπτικό φορτίο και ονομάζεται δευτερεύουσα ροπή κάμψης σε αντίθεση με τη ροπή κάμψης που οφείλεται στην εγκάρσια φόρτιση και ονομάζεται κύρια ροπή κάμψης. Στους διάφορους κανονισμούς η δευτερεύουσα αυτή ροπή κάμψης ονομάζεται επιρροή P-Δ.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις αυτές για δοκό που υπόκειται σε εγκάρσια φόρτιση και αξονική θλίψη. Συμβολίζουμε με $V(x)$ την τέμνουσα δύναμη που είναι κάθετη στον απαραμόρφωτο άξονα και με $Q(x)$ την τέμνουσα δύναμη που είναι κάθετη στον παραμορφωμένο άξονα. Λόγω του βέλους κάμψης οι δύο αυτές δυνάμεις συνδέονται με τη σχέση [1]:

$$V(x) = Q(x) - P \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.9)$$

όπου P είναι η θλιπτική δύναμη.

Αντικαθιστώντας τη γνωστή σχέση:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (1.10)$$

παίρνουμε:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} - P \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.11)$$

Παραγωγίζοντας την (1.11) ως προς x φτάνουμε στο αποτέλεσμα:

$$-q(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} - P \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (1.12)$$

Για να φτάσουμε στην (1.12) χρησιμοποιήσαμε και τη σχέση:

$$-q(x) = \frac{dV(x)}{dx} \quad (1.13)$$

όπου $q(x)$ η κατανομημένη φόρτιση η οποία θεωρήθηκε ότι έχει την αρνητική κατεύθυνση όπως συνήθως.

Λόγω της (1.8), η (1.12) γράφεται και ως:

$$-q(x) = -EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} - P \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (1.14)$$

ή πιο απλά:

$$EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} + P \frac{d^2w(x)}{dx^2} = q(x) \quad (1.15)$$

Όπως προκύπτει από τον τρόπο παραγωγής της, η εξίσωση (1.15) είναι ανεξάρτητη από το είδος του υλικού καθώς και από τις συνθήκες στήριξης.

Αν η εγκάρσια φόρτιση είναι μηδέν η (1.15) γίνεται:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + P_{cr} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \quad (1.16)$$

Στην (1.16) αντικαταστήσαμε την P με το κρίσιμο θλιπτικό φορτίο για την εμφάνιση λυγισμού, P_{cr} , γιατί απουσία εγκάρσιας φόρτισης αν $P < P_{cr}$ η δοκός παραμένει ευθύγραμμη, δηλαδή $w(x)=0$. Η (1.16) είναι μία γραμμική μη-ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

Η (1.16) συνήθως γράφεται στη μορφή:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \quad (1.17)$$

όπου:

$$k^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \quad (1.18\alpha)$$

Φυσικά αν υπήρχε εγκάρσια φόρτιση θα είχαμε αντίστοιχα:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (1.18\beta)$$

Η (1.17) είναι μία γραμμική ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

Πρέπει να τονιστεί ότι η ροπή αδράνειας I είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον κύριο άξονα με τη μικρότερη ροπή αδράνειας γιατί ως προς αυτόν τον άξονα θα συμβεί λυγισμός.

1.4 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ

Η (1.17) μετά από δύο ολοκληρώσεις γίνεται:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k^2 w(x) = \Gamma x + \Delta \quad (1.19)$$

όπου Γ και Δ είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

Η εξίσωση (1.19) είναι γραμμική, μη-ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση της είναι το άθροισμα της γενικής λύσης, $w_h(x)$, της αντίστοιχης ομογενούς και μιας μερικής λύσης, $w_p(x)$, της μη-ομογενούς. Δηλαδή:

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x) \quad (1.20)$$

Για την εύρεση της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς σχηματίζουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \quad (1.21)$$

Οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$$\lambda = \pm ik \quad (1.22)$$

και η γενική λύση είναι:

$$w_h(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (1.23)$$

Λόγω της μορφής του δευτέρου μέλους της (1.19) και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών βρίσκουμε ότι η ζητούμενη ειδική λύση της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$$w_p(x) = Cx + D \quad (1.24)$$

Τελικά, η γενική λύση της (1.19) θα είναι:

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D \quad (1.25)$$

όπου: A, B, C, D τέσσερις σταθερές ολοκλήρωσης που προσδιορίζονται από ισάριθμες συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες στήριξης μπορεί να συνδέονται είτε με κινηματικά μεγέθη (w και w') είτε με εντατικά μεγέθη ($M(x)$ και $V(x)$).

Η τέμνουσα δύναμη δίνεται από την (1.11). Αν χρησιμοποιήσουμε και την (1.8) γράφεται ως:

$$V(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} - P_{cr} \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.26)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την έκφραση (1.25) παίρνουμε:

$$V(x) = -EI[-Ak^3 \cos kx + Bk^3 \sin kx] - P_{cr}[Ak \cos kx - Bk \sin kx + C] \quad (1.27)$$

Όμως λόγω της (1.18) έχουμε ότι:

$$k^2 EI = P_{cr} \quad (1.28)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.27) και κάνοντας μερικές απλές πράξεις βρίσκουμε το αποτέλεσμα:

$$V(x) = -P_{cr} \cdot C \quad (1.29)$$

1.5 Ο ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΩΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια που θα εξετάσουμε γραμμικούς φορείς κάτω από διάφορες συνθήκες στήριξης το πρόβλημα της αξονικής θλίψης χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι μη-τετριμμένες (δηλαδή μη-μηδενικές) λύσεις $w(x)$ της διαφορικής εξίσωσης προκύπτουν για ορισμένες μόνο τιμές της παραμέτρου k ή ισοδύναμα (σχέση (1.18)) της P_{cr} . Οι τιμές αυτές της παραμέτρου k , που είναι άπειρες στο πλήθος, ονομάζονται ιδιοτιμές (eigenvalues) ή χαρακτηριστικές τιμές. Οι αντίστοιχες λύσεις $w(x)$ ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) ή κανονικές μορφές λυγισμού (normal buckling modes). Χαρακτηριστικό των ιδιοσυναρτήσεων είναι ότι μέσω αυτών καθορίζεται μόνο το σχήμα της ελαστικής γραμμής. Προβλήματα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι γνωστά ως προβλήματα ιδιοτιμών.

Συνεπώς το γραμμικό πρόβλημα λυγισμού είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών σύμφωνα με το οποίο είναι δυνατός ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών, δηλαδή των κρίσιμων φορτίων, P_{cr} , ή φορτίων Euler όπως είναι γνωστά, καθώς και των αντίστοιχων κανονικών μορφών λυγισμού χωρίς όμως να είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα μεγέθη των βελών κάμψης $w(x)$ και όλων των εξαρτημένων ποσοτήτων ($M(x)$, $V(x)$ κ.τ.λ.).

Η μικρότερη ιδιοτιμή αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού και η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση είναι η θεμελιώδης κανονική μορφή λυγισμού. Είναι φανερό ότι στην πράξη ενδιαφέρει μόνο το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και όχι οι μεγαλύτερες ιδιοτιμές.

Τα φορτία Euler και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις εξαρτώνται από τις συνοριακές συνθήκες γι' αυτό και τα προβλήματα αυτά

ονομάζονται επίσης προβλήματα συνοριακών τιμών. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα φορτία Euler και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις για διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών.

2. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΣΤΥΛΩΝ

2.1 ΑΜΦΙΑΡΘΡΩΤΟΣ ΣΤΥΛΟΣ

Στην περίπτωση που η δοκός που εξετάζουμε στηρίζεται σε δύο αρθρώσεις στο $x=0$ και στο $x=L$ έχουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες.

Κινηματικές συνθήκες:

$$w(0)=0 \quad (2.1)$$

$$w(L)=0 \quad (2.2)$$

Οι φυσικές συνθήκες που αναφέρεται στη ροπή κάμψης στο $x=0$ και στο $x=L$ (λόγω της (1.8)) είναι:

$$-EIw''(0)=0 \text{ ή } w''(0)=0 \quad (2.3)$$

και ομοίως:

$$w''(L)=0 \quad (2.4)$$

Από την εφαρμογή της (2.1) παίρνουμε:

$$B=-D \quad (2.5)$$

Η συνθήκη (2.3) δίνει:

$$B=0 \quad (2.6)$$

Συνεπώς και

$$D=0 \quad (2.7)$$

Μετά την εφαρμογή των δύο αυτών συνθηκών η γενική λύση (1.25) έχει γίνει:

$$w(x) = A \sin kx + Cx \quad (2.8)$$

Με εφαρμογή των συνθηκών (2.2) και (2.4) παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$A \sin kL + CL = 0 \quad (2.9)$$

και

$$- Ak^2 \sin kL = 0 \quad (2.10)$$

Από την (2.10) συμπεραίνουμε ότι:

$$\sin kL = 0 \quad (2.11)$$

γιατί αν $A=0$ τότε από την (2.9) και $C=0$ και οδηγούμαστε στην τετριμμένη λύση. Συνεπώς ισχύει η (2.11) και επιπλέον:

$$C=0 \quad (2.12)$$

για να ισχύει και η (2.9).

Η λύση του προβλήματος είναι τελικά:

$$w(x) = A \sin kx \quad (2.13)$$

με τις ιδιοτιμές k του προβλήματος να δίνονται από την (2.11). Η λύση της (2.11) δίνει για το k τις τιμές:

$$kL = n\pi \quad \text{ή} \quad k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{με } n=1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Η (2.14) μέσω και της (1.18) δίνει άπειρο αριθμό διακεκριμένων αξονικών φορτίων Euler για τα οποία ο φορέας μπορεί να ισορροπήσει σε παραμορφωμένη κατάσταση. Τα φορτία αυτά δίνονται από τον γενικό τύπο:

$$P_{cr} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{με } n=1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Οι κανονικές μορφές λυγισμού που αντιστοιχούν σε αυτά τα φορτία Euler, σύμφωνα με την (2.13), είναι:

$$w_n(x) = A_n \sin n \frac{\pi x}{L} \quad \text{με } n=1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Τα A_n είναι αυθαίρετες άγνωστες σταθερές. Επομένως όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι τιμές των βελών κάμψης που αντιστοιχούν στα διάφορα φορτία Euler δεν είναι γνωστές. Γνωστές είναι μόνο οι συναρτήσεις σχήματος (shape functions) της ελαστικής γραμμής πολλαπλασιασμένες, κάθε μία από αυτές, με κάποια αυθαίρετη αλλά διάφορη του μηδενός σταθερά.

Το φορτίο Euler για $n=1$ (κρίσιμο φορτίο λυγισμού):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.17)$$

είναι φυσικά αποδεκτό και καθορίζει στην πράξη τη φέρουσα ικανότητα σε αξονικό φορτίο του αμφιέρειστου υποστυλώματος.

2.2 ΠΑΚΤΩΣΗ-ΑΡΘΡΩΣΗ

Έστω θλιβόμενη δοκός μήκους L και καμπτικής αντίστασης EI , που στηρίζεται σε πάκτωση στο $x=0$ και σε άρθρωση στο $x=L$.

Οι κινηματικές συνθήκες είναι:

$$w(0)=0 \quad (2.18)$$

$$w'(0)=0 \quad (2.19)$$

$$w(L)=0 \quad (2.20)$$

Η φυσική συνθήκη που αναφέρεται στη ροπή κάμψης στο $x=L$ (λόγω της (1.8)) είναι:

$$-EIw''(L) = 0 \quad \text{ή} \quad w''(L) = 0 \quad (2.21)$$

Εφαρμόζουμε τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες στη γενική λύση (1.25). Από την εφαρμογή της (2.18) παίρνουμε:

$$B=-D \quad (2.22)$$

και από την εφαρμογή της (2.19) στην παράγωγο του $w(x)$ που δίνεται από την (1.25) παίρνουμε:

$$C = -Ak \quad (2.23)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα η (1.25) γράφεται πιο απλά ως:

$$w(x) = A(\sin kx - kx) + B(\cos kx - 1) \quad (2.24)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη (2.20). Έχουμε:

$$A(\sin kL - kL) + B(\cos kL - 1) = 0 \quad (2.25)$$

Για να εφαρμόσουμε τη συνοριακή συνθήκη (2.21) πρέπει πρώτα να παραγωγίσουμε δύο φορές την (2.24):

$$w''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx \quad (2.26)$$

Οπότε από την (2.21) παίρνουμε:

$$-Ak^2 \sin kL - Bk^2 \cos kL = 0$$

ή

$$A \sin kL + B \cos kL = 0 \quad (2.27)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.25) και (2.27) με αγνώστους τα A , B γράφεται σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sin kL - kL & \cos kL - 1 \\ \sin kL & \cos kL \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Το σύστημα (2.28) είναι ένα ομογενές σύστημα που για να έχει λύση εκτός της τετριμμένης πρέπει η ορίζουσά του να είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \sin kL - kL & \cos kL - 1 \\ \sin kL & \cos kL \end{vmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

Αναλύοντας την ορίζουσα κατά τα γνωστά παίρνουμε:

$$(\sin kL - kL) \cos kL - (\cos kL - 1) \sin kL = 0 \quad (2.30)$$

που μετά από πράξεις γίνεται:

$$\tan kL = kL \quad (2.31)$$

Η (2.31) ονομάζεται εξίσωση λυγισμού και οι τιμές του k που την ικανοποιούν είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

Η μικρότερη μη μηδενική ρίζα της (2.31) είναι:

$$kL = 4.493 \quad (2.32)$$

Συνεπώς το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, μέσω της (1.28) προκύπτει ότι είναι:

$$P_{cr} = \frac{4.493^2 EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \quad (2.33)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει επίσης και το ισοδύναμο μήκος λυγισμού. Δηλαδή η θλιβόμενη δοκός που εξετάζουμε είναι ισοδύναμη από πλευράς λυγισμού με αμφιέριστη δοκό μήκους $L' = 0.7L$.

Από την (2.27) αν χρησιμοποιήσουμε και την (2.31) παίρνουμε:

$$B = -AkL \quad (2.34)$$

Αντικαθιστώντας την (2.34) στην (2.24) παίρνουμε τη θεμελιώδη κανονική μορφή λυγισμού:

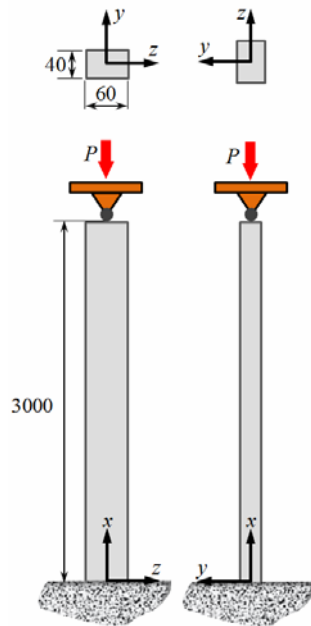
$$w(x) = A(\sin kx - kx) - AkL(\cos kx - 1) \quad (2.35)$$

με $kL = 4.493$.

Αριθμητική Εφαρμογή

Η παρακάτω κολώνα είναι κατασκευασμένη από αλουμίνιο με μέτρο ελαστικότητας $E=70\text{GPa}$, έχει μήκος $L=3000\text{mm}$ και ορθογωνική διατομή $a \times b = 40\text{mm} \times 60\text{mm}$. Το κάτω άκρο της κολώνας είναι πακτωμένο ενώ στο άνω αρθρωμένο άκρο της δρα θλιπτικό φορτίο P .

Να υπολογιστούν τα κρίσιμα φορτία λυγισμού $P_{κρ}$ για τις 10 πρώτες ιδιομορφές, καθώς και το αδιαστατοποιημένο βέλος κάμψης κατά το μήκος της δοκού για την πρώτη ιδιομορφή.



Θα υπολογίσουμε τις 10 πρώτες ρίζες της εξίσωσης (2.31). Θέτουμε $x=kL$ και την γράφουμε στην πιο βολική μορφή:

$$\tan x = x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = x \Rightarrow x \cos x - \sin x = 0$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x \cos x - \sin x$$

με παράγωγο:

$$f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

Θα βρούμε τις ρίζες της $f(x)$ με τη μέθοδο Newton-Raphson. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το παρακάτω πρόγραμμα.

Program lig2a

implicit none

integer i

Real x0,x1,f1,f2,ac

!ac=i zitoumeni akriveia


```

Do i=1,10
x0=(4*i+1)*3.14159/4

ac=10

do while (ac>1.e-3)

f1=x0*cos(x0)-sin(x0)

f2=-x0*sin(x0)

x1=x0-f1/f2

ac=abs(x1-x0)/x0

x0=x1

enddo

write(*,*) x1

enddo
end
*****

```

Η $f(x)$ έχει μία ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \dots$$

Στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η ρίζα της $f(x)$ είναι το μηδέν που δεν μας ενδιαφέρει, συνεπώς αρχίζουμε από το δεύτερο διάστημα. Σε κάθε εκτέλεση του προγράμματος χρησιμοποιούμε ως αρχική επιλογή για τη ζητούμενη ρίζα το μέσο του αντίστοιχου διαστήματος.

Βρίσκουμε τις τιμές που φαίνονται στη δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα. Στην τρίτη στήλη του πίνακα φαίνονται οι αντίστοιχες τιμές του κρίσιμου φορτίου που υπολογίζονται μέσω της σχέσης (1.28). Η ελάχιστη ροπή αδράνειας είναι:

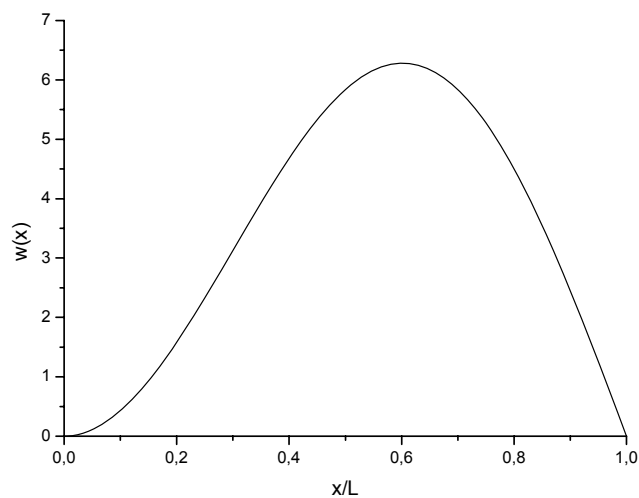
$$I_{\min} = \frac{60 \cdot 10^{-3} \cdot (40 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 32 \cdot 10^{-8} m^4$$

α/α	$x=kL$	P_{cr} (N)
1	4.493	33549
2	7.725	57683
3	10.904	81420
4	14.066	105031
5	17.221	128589
6	20.371	152110
7	23.519	175616
8	26.666	199115
9	29.812	222606
10	32.956	246082

Το αδιαστατοποιημένο βέλος κάμψης κατά το μήκος της δοκού για την πρώτη ιδιομορφή από την (2.35) θα είναι:

$$w(x) = \left(\sin 4.493 \frac{x}{L} - 4.493 \frac{x}{L} \right) - 4.493 \left(\cos 4.493 \frac{x}{L} - 1 \right)$$

και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



2.3 ΕΚΚΕΝΤΡΗ ΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Έστω αμφιαρθρωτός στύλος που θλίβεται με δύναμη P που όμως δρα έκκεντρα με εκκεντρότητα e όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 που ακολουθεί. Για τη λύση του προβλήματος μπορούμε να αντικαταστήσουμε το φορτίο που δρα έκκεντρα με ένα κεντρικό φορτίο και την αντίστοιχη ροπή κάμψης



Σχήμα 2.1 Έκκεντρη αξονική φόρτιση σε αμφιαρθρωτό στύλο.

Το πρόβλημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση (1.17) με γενική λύση την (1.25). Οι συνθήκες που θα χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των αυθαίρετων σταθερών είναι:

$$w(0)=0 \quad (2.36)$$

$$w(L)=0 \quad (2.37)$$

$$-EIw''(0)=Pe \quad (2.38)$$

και ομοίως:

$$-EIw''(L)=Pe \quad (2.39)$$

Η δεύτερη παράγωγος της γενικής λύσης (1.25) είναι:

$$w''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx \quad (2.40)$$

Από τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες παίρνουμε για τις σταθερές A, B, C, D τις παρακάτω σχέσεις:

$$D = -B \quad (2.41)$$

$$A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0 \quad (2.42)$$

$$EIBk^2 = Pe \quad (2.43)$$

$$EIAk^2 \sin kL + EIBk^2 \cos kL = Pe \quad (2.44)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.28) οι δύο τελευταίες γίνονται:

$$B = e \quad (2.45)$$

και

$$A \sin kL + B \cos kL = e \quad (2.46)$$

Από την (2.46) βρίσκουμε τη σταθερά A:

$$A = \frac{e - B \cos kL}{\sin kL} \quad (2.47)$$

η οποία λόγω της (2.45) γράφεται:

$$A = e \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \quad (2.48)$$

Στη συνέχεια αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (2.41), (2.45) και (2.47) στην (2.42) μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά C. Πράγματι, αρχικά παίρνουμε τη σχέση:

$$e(1 - \cos kL) + e \cos kL + CL - e = 0 \quad (2.49)$$

Συνεπώς:

$$C = 0 \quad (2.50)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών A, B C, D στη γενική λύση (1.25) φτάνουμε στη λύση του προβλήματος:

$$w(x) = e \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin kx + e \cos kx - e \quad (2.51)$$

Κάνοντας χρήση των γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

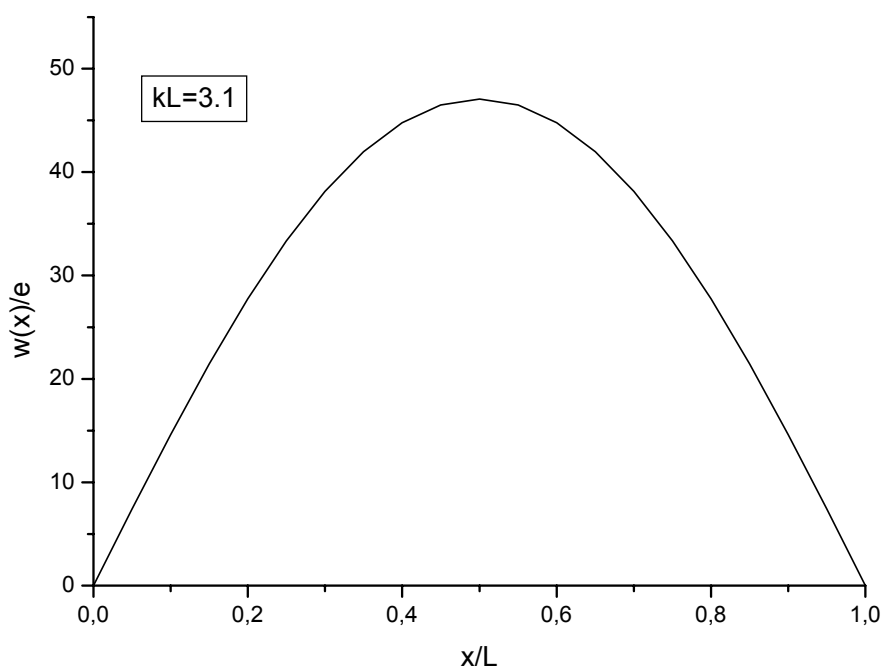
$$1 - \cos kL = 2 \sin^2 \frac{kL}{2} \quad (2.52)$$

και

$$\sin kL = 2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \quad (2.53)$$

η λύση (2.51) γράφεται στη μορφή:

$$w(x) = e \tan \frac{kL}{2} \sin kx + e \cos kx - e \quad (2.54)$$



Σχήμα 2.2 Το βέλος κάμψης συναρτήσει του x για $kL=3.1$.

Από τη συμμετρία του προβλήματος (βλέπε και σχήμα 2.2) είναι φανερό ότι το μέγιστο βέλος κάμψης επιτυγχάνεται στο μέσο του φορέα. Φυσικά αυτό που μπορεί να επαληθευθεί και με παραγωγή της (2.54).

Αντικαθιστώντας $x = \frac{L}{2}$ στην (2.54) παίρνουμε:

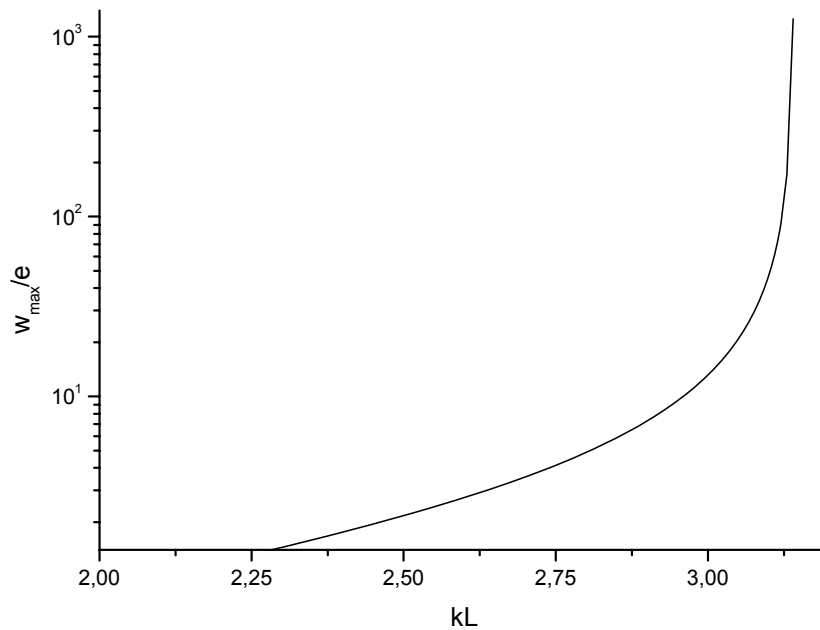
$$w_{\max} = e \tan \frac{kL}{2} \sin \frac{kL}{2} + e \cos \frac{kL}{2} - e \quad (2.55)$$

Η (2.55) απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= e \left(\frac{\sin^2 \frac{kL}{2}}{\cos \frac{kL}{2}} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right) = \\ &= e \left(\frac{\sin^2 \frac{kL}{2} + \cos^2 \frac{kL}{2}}{\cos \frac{kL}{2}} - 1 \right) = e \left(\frac{1}{\cos \frac{kL}{2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

και τελικά:

$$w_{\max} = e \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (2.57)$$



Σχήμα 2.3 Εξάρτηση του μέγιστου βέλους κάμψης από την εφαρμοζόμενη αξονική δύναμη.

Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνεται η εξάρτηση του μέγιστου βέλους κάμψης από το γινόμενο kL , δηλαδή ουσιαστικά από την αξονική δύναμη P .

Το μέγιστο βέλος κάμψης απειρίζεται όταν:

$$kL = \pi \quad (2.58)$$

Από την (2.58) χρησιμοποιώντας και την (1.28) υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.59)$$

Ο τύπος (2.59) είναι ίδιος με αυτόν που βρήκαμε για τον αμφιαρθρωτό στύλο κάτι που ήταν αναμενόμενο αφού το κρίσιμο φορτίο εξαρτάται μόνο από το είδος των στηρίξεων.

Στην πραγματικότητα το μέγιστο βέλος κάμψης δεν είναι δυνατό να γίνει άπειρο στην πράξη. Η εφαρμοζόμενη δύναμη μπορεί να πλησιάσει την τιμή (2.59) αλλά όχι να πάρει ακριβώς αυτήν την τιμή.

Αντικαθιστώντας στην (2.57) το k από την (1.18β) παίρνουμε τη σχέση:

$$w_{\max} = e \left(\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right) \quad (2.60)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το γινόμενο EI από την (2.59) και παίρνουμε τη σχέση:

$$w_{\max} = e \left(\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right) \quad (2.61)$$

Η ροπή κάμψης θα είναι μέγιστη στο μέσο του στύλου γιατί εκεί θα είναι μέγιστο το βέλος κάμψης. Η μέγιστη αυτή ροπή κάμψης θα είναι:

$$M_{\max} = P \cdot (w_{\max} + e) \quad (2.62)$$

Αντίστοιχα η μέγιστη ορθή τάση θα αναπτύσσεται επίσης στο μέσο του στύλου και θα είναι το άθροισμα των ορθών τάσεων λόγω της αξονικής δύναμης και λόγω της ροπής κάμψης:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} \cdot c}{I} \quad (2.63)$$

όπου με το γράμμα c συμβολίζεται η μέγιστη απόσταση από τον ουδέτερο άξονα.

Αντικαθιστώντας την (2.62) στην (2.63) και χρησιμοποιώντας την ακτίνα αδράνειας παίρνουμε τη σχέση:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{w_{\max} + e}{i^2} \cdot c \right) \quad (2.64)$$

Στη συνέχεια αν αντικαταστήσουμε το μέγιστο βέλος κάμψης από την (2.61) στην (2.64), η τελευταία γίνεται:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{ec}{i^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right) \quad (2.65)$$

Προφανώς η σχέση (2.65) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε στύλους με οποιεσδήποτε στηρίξεις αρκεί να αντικατασταθεί κατάλληλα το κρίσιμο φορτίο.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην (2.65) την τιμή του κρίσιμου φορτίου Euler από την (2.59) και λύνουμε ως προς το πηλίκo P/A :

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{\left(1 + \frac{ec}{i^2} \sec\left(\frac{L}{2i} \sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right)} \quad (2.66)$$

Η σχέση (2.66) είναι γνωστή ως τύπος της τέμνουσας (secant formula). Ισχύει για οποιαδήποτε περίπτωση στηρίξεων αρκεί το μήκος του στύλου να αντικατασταθεί με το κατάλληλο ανηγμένο μήκος λυγισμού.

Παρατηρούμε ότι το πηλίκo P/A εμφανίζεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης (2.66). Με τη μέθοδο δοκιμής-σφάλματος μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς P/A για δεδομένο σ_{\max} . Δηλαδή να υπολογίσουμε τη δύναμη ανά μονάδα εμβαδού που απαιτείται για τη διαρροή του υλικού.

Εφαρμογή

Έστω ότι ο στύλος είναι κατασκευασμένος από υλικό με:

$$\sigma_{\max} = 280\text{MPa} \text{ και } E = 220\text{GPa}$$

Με το παρακάτω πρόγραμμα εφαρμόζοντας τη μέθοδο δοκιμής-σφάλματος υπολογίζουμε την απαιτούμενη δύναμη ανά μονάδα επιφανείας συναρτήσει του λ για διάφορες τιμές της παραμέτρου ec/i^2 που ονομάζεται λόγος εκκεντρότητας (eccentricity ratio).

```
program ligismos3
implicit none
```

```
Real s,E,ec,x,y,er
Integer L
```

```
open(1,file="lig3.txt")
```

```
print*,"ec="
Read*,ec
```

```
s=280e6
E=220e9
```

```
Do L=0,150,5
er=1.
x=10e6
```

```
do while (er>1.e-2)
```

```
x=x+0.1e6
y=s/(1+ec/cos(sqrt(x/E)*L/2))
er=abs(x-y)/x
enddo
print*,L,x
write(1,*) L,x
```

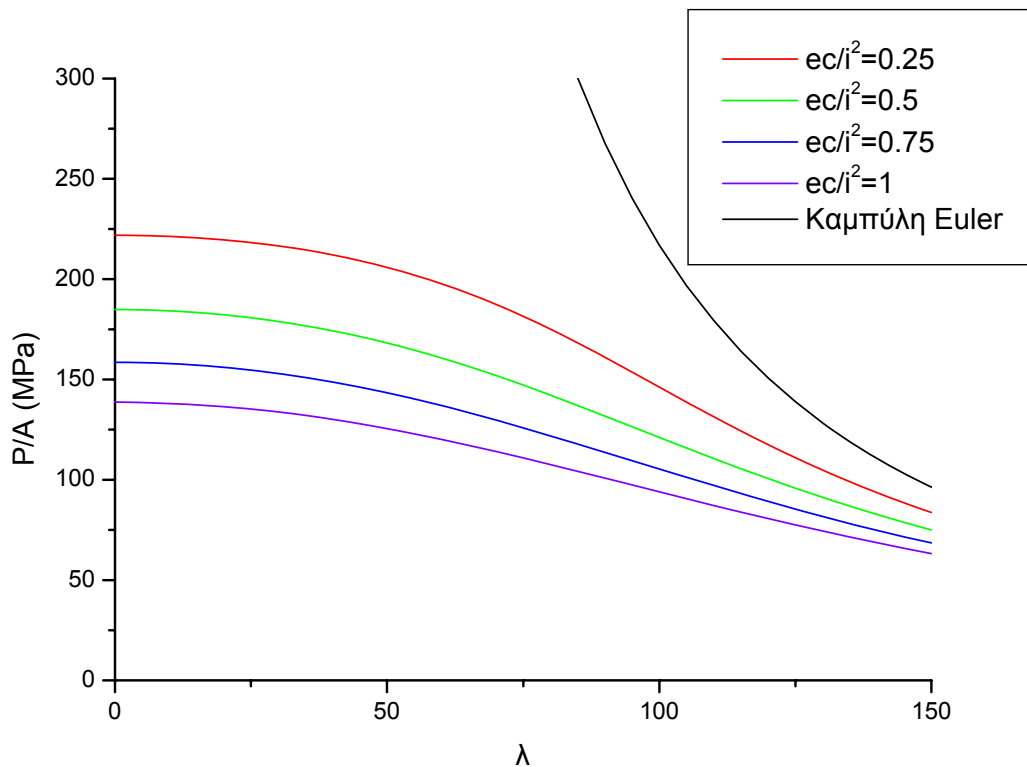
```
enddo
```

```
close(1)
end
```

```
*****
```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 2.4 όπου έχει χαραχθεί επίσης και η αντίστοιχη καμπύλη Euler (σχέση 1.6)
Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι για μικρές τιμές του λ η τέμνουσα είναι περίπου ίση με 1, συνεπώς μπορούμε προσεγγιστικά να γράψουμε:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{\left(1 + \frac{ec}{i^2}\right)} \quad (2.67)$$



Σχήμα 2.4 Απαιτούμενο φορτίο ανά μονάδα εμβαδού για πρόκληση διαρροής στο στύλο συναρτήσει της λυγηρότητας για διάφορες τιμές του πηλίκου $\frac{ec}{i^2}$.

Στην (2.67) θα καταλήγαμε αν αγνοούσαμε το βέλος κάμψης στην (2.62) όπως συνήθως γίνεται σε προβλήματα κάμψης. Για μεγάλες τιμές του συντελεστή λ οι καμπύλες του σχήματος 2.4 που προκύπτουν για διάφορες τιμές του λόγου $\frac{ec}{i^2}$ πλησιάζουν πολύ την καμπύλη του Euler.

Ουσιαστικά σε αυτήν την περιοχή η επίδραση της εκκεντρότητας της εφαρμοζόμενης δύναμης γίνεται αμελητέα. Σε αυτήν την περιοχή, κατά το σχεδιασμό πρέπει απαραίτητα να ληφθεί υπόψη ο λυγισμός. Ο τύπος της τέμνουσας είναι γενικά χρήσιμος στις ενδιάμεσες τιμές του συντελεστή λ .

3. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

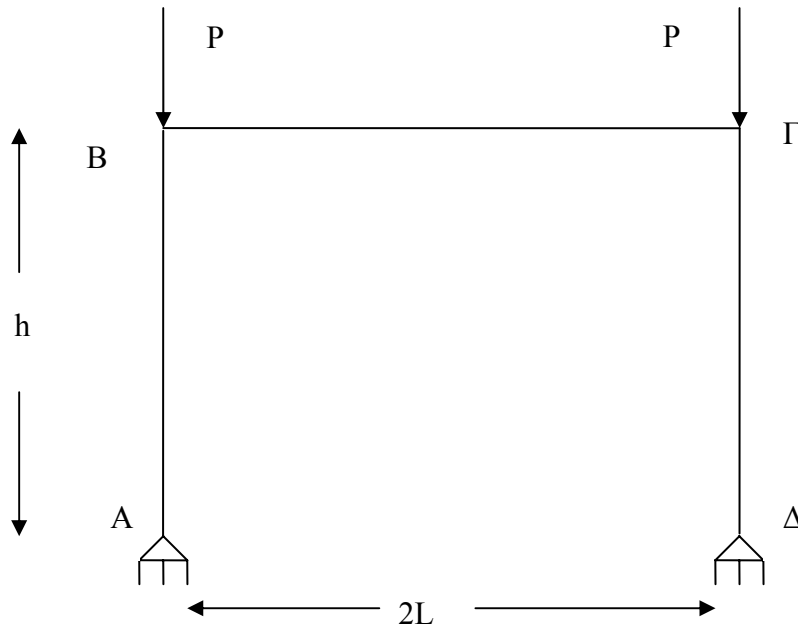
Με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση και τις σχετικές παραδοχές και αρχές που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια μπορεί κανείς να προχωρήσει σε υπολογισμό σε ευστάθεια απλών φορέων όπως πλαισίων που αποτελούνται από δύο ή περισσότερα μέλη. Οι φορείς αυτοί αποτελούνται από ευθύγραμμα μέλη τα οποία φορτίζονται αξονικά από επικόμβια φορτία ή φορτία που δρουν αξονικά στα άκρα των μελών. Δηλαδή, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει ενδιάμεση εγκάρσια εξωτερική φόρτιση (από συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες δυνάμεις ή ροπές) ούτε εξωτερικές ροπές στα άκρα των μελών.

3.2 ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΠΟ ΤΡΙΑ ΜΕΛΗ

Το ορθογωνικό και συμμετρικό πλαίσιο του σχήματος 3.1 φορτίζεται από δύο ίσα κατακόρυφα θλιπτικά φορτία P που δρουν κατά τις διευθύνσεις των αξόνων των υποστυλωμάτων AB και $\Gamma\Delta$. Το μέτρο δυσκαμψίας των υποστυλωμάτων AB και $\Gamma\Delta$ είναι EI_1 ενώ του ζυγώματος $B\Gamma$ είναι EI_2 .

Σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία λυγισμού η βράχυνση του άξονα της θλιβόμενης ράβδου δεν λαμβάνεται υπόψη. Συνεπώς, αν αγνοήσουμε τη βράχυνση των υποστυλωμάτων AB και $\Gamma\Delta$, οι κόμβοι B και Γ είναι αμετάθετοι κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.

Παρατηρούμε ακόμη ότι το συμμετρικό αυτό πλαίσιο υπό συμμετρική φόρτιση θα πρέπει να έχει και συμμετρική παραμόρφωση. Το πλαίσιο λυγίζει με παράλληλη οριζόντια μετάθεση (είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά) του ζυγώματος $B\Gamma$ λόγω αστάθειας της απαραμόρφωτης κατάστασης ισορροπίας για κάποια τιμή του φορτίου.



Σχήμα 3.1 Ορθογωνικό συμμετρικό πλαίσιο από τρία μέλη υπό αξονική φόρτιση.

Στο σχήμα 3.2 βλέπουμε τις δύο αυτές πολύ κοντινές θέσεις ισορροπίας που αντιστοιχούν στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Την απαραμόρφωτη και την παραμορφωμένη κατάσταση. Παρατηρούμε επίσης ότι το μέσο του ζυγώματος ΒΓ κινείται μόνο οριζόντια και η ροπή κάμψης στο σημείο αυτό είναι μηδενική. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τη λύση του προβλήματος το εντατικά ισοδύναμο πλαίσιο του ΑΒΕΔ. Είναι το πλαίσιο ΑΒΕ που φαίνεται στο σχήμα 3.3 του οποίου όπως είναι προφανές η ανάλυση σε ευστάθεια θα είναι πιο εύκολη.

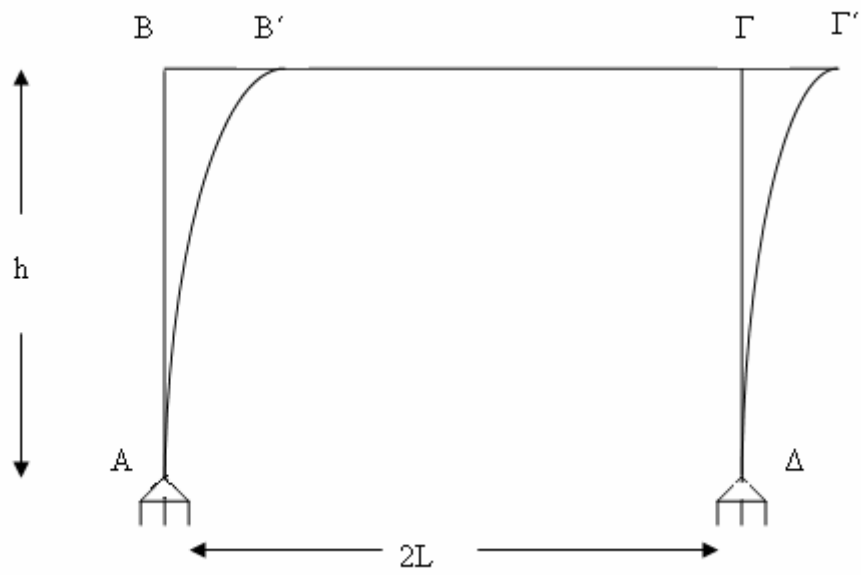
Για το υποστύλωμα ΑΒ έχουμε λόγω της (1.25):

$$w_1(x_1) = A \sin kx_1 + B \cos kx_1 + Cx_1 + D \quad (3.1)$$

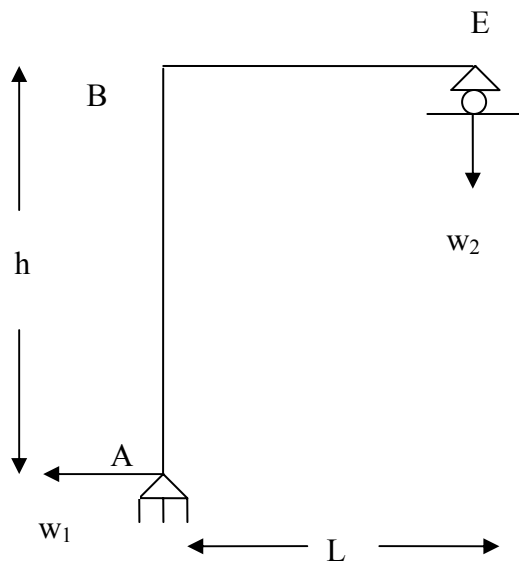
με

$$k^2 = \frac{P}{EI_1} \quad (3.2)$$

λόγω της (1.18β).



Σχήμα 3.2 Η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη κατάσταση ισοροπίας με πλευρική μετάθεση του ζυγώματος ΒΓ.



Σχήμα 3.3 Ορθογωνικό πλαίσιο ABE από δύο μέλη εντατικά ισοδύναμο με το αμφιαρθρωτό πλαίσιο ABΓΔ.

Το ζύγωμα BE δεν καταπονείται από αξονικό φορτίο συνεπώς για αυτό η παράμετρος k είναι μηδέν. Συνεπώς η διαφορική εξίσωση (1.17) για το BE γράφεται:

$$\frac{d^4 w_2(x)}{dx_2^4} = 0 \quad (3.3)$$

με γενική λύση:

$$w_2(x_2) = Fx_2^3 + Gx_2^2 + Hx_2 + J \quad (3.4)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$w_1(0) = 0 \quad (3.5)$$

$$w_2(0) = 0 \quad (3.6)$$

$$w_1''(0) = 0 \quad (3.7)$$

$$w_2''(0) = 0 \quad (3.8)$$

Αφού ο κόμβος B είναι αμετάθετος στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$w_2(L) = 0 \quad (3.9)$$

Η τέμνουσα δύναμη στο υποστύλωμα AB είναι μηδέν. Συνεπώς αξιοποιώντας την (1.29) βρίσκουμε ότι:

$$C = 0 \quad (3.10)$$

Επιπλέον, λόγω συνέχειας έχουμε και τις εξής συνοριακές συνθήκες:

$$w_1'(h) = w_2'(L) \quad (3.11)$$

$$EI_1 w_1''(h) + EI_2 w_2''(L) = 0 \quad (3.12)$$

Η (3.11) προκύπτει από την ισότητα στροφών στον κόμβο B ενώ η (3.12) από την ισορροπία των ροπών στον κόμβο B.

Από την εφαρμογή των συνθηκών (3.5)-(3.8) παίρνουμε ότι μηδενίζονται οι σταθερές B, D, G και J.

Οπότε καταρχάς, αν λάβουμε υπόψη και την (3.10), οι λύσεις (3.1) και (3.4) γίνονται:

$$w_1(x_1) = A \sin kx_1 \quad (3.13)$$

και

$$w_2(x_2) = Fx_2^3 + Hx_2 \quad (3.14)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.9) στην (3.14) παίρνουμε ότι:

$$H = -FL^2 \quad (3.15)$$

Συνεπώς η (3.14) γίνεται:

$$w_2(x_2) = F(x_2^3 - x_2L^2) \quad (3.16)$$

Τέλος εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες συνέχειας (3.11) και (3.12) και παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$Ak \sin kh = 2FL^2 \quad (3.17)$$

και

$$-I_1 Ak^2 \sin kh = 6I_2 FL \quad (3.18)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.17) και (3.18) σε μητρική μορφή γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} k \cos kh & -2L^2 \\ -I_1 k^2 \sin kh & 6I_2 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Το σύστημα (3.19) είναι ένα ομογενές σύστημα. Για την ύπαρξη ισορροπίας στην ελαφρώς παραμορφωμένη κατάσταση, δηλαδή όχι συγχρόνως μηδέν οι συντελεστές A και F, πρέπει η ορίζουσα του συστήματος να είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} k \cos kh & -2L^2 \\ -I_1 k^2 \sin kh & 6I_2 L \end{vmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

Αναλύοντας την ορίζουσα, η εξίσωση (3.20) γίνεται:

$$k \tan kh = 3 \frac{I_2}{I_1 L} \quad (3.21)$$

Η (3.21) γράφεται συνήθως στην πιο εύχρηστη μορφή:

$$kh \tan kh = 3 \frac{I_2 h}{I_1 L} \quad (3.22)$$

που είναι η εξίσωση λυγισμού, από την οποία μέσω και της (3.2) υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορες τιμές του λόγου $\frac{I_2 h}{I_1 L}$.

Για ευκολία θέτουμε:

$$m = \frac{I_2 h}{I_1 L} \quad (3.23)$$

και

$$x = kh \quad (3.24)$$

Η εξίσωση (3.22) γράφεται ως εξής:

$$\tan x - 3 \frac{m}{x} = 0 \quad (3.25)$$

Να σημειωθεί ότι λόγω και της (3.2) έχουμε:

$$x^2 = \frac{P_{cr}}{EI_1/h^2} \quad \text{ή} \quad P_{cr} = x^2 \cdot \frac{EI_1}{h^2} \quad (3.26)$$

Δηλαδή αν γνωρίζουμε την εξάρτηση του x από το λόγο m , τότε γνωρίζουμε και την εξάρτηση του κρίσιμου φορτίου P_{cr} από το m . Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)$ ως εξής:

$$f(x) = \tan x - 3\frac{m}{x} \quad (3.27)$$

και θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Newton-Raphson για την εύρεση των ριζών της $f(x)$ για διάφορες τιμές του λόγου m . Αρχικά παραγωγίζουμε την $f(x)$ και παίρνουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 3\frac{m}{x^2} \quad (3.28)$$

Ο αναδρομικός τύπος της μεθόδου είναι:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.29)$$

Είναι φανερό ότι η εξίσωση (3.25) έχει άπειρες λύσεις λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης $\tan x$. Επειδή ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, άρα και για τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης θα περιοριστούμε στο διάστημα: $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Σε κάθε περίπτωση ως αρχική εκτίμηση θα θέτουμε το μέσο του διαστήματος, δηλαδή:

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \quad (3.29)$$

Με το παρακάτω πρόγραμμα εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης (3.25) και υπολογίζουμε την εξάρτηση του κρίσιμου φορτίου Euler από το λόγο m .

Program lig2

implicit none

Integer i

```

Real x0,x1,f1,f2,ac,m

!ac=i zitoumeni akriveia

open(1,file="ligismos2.txt")

do i=1,100

m=i*0.1

x0=3.14/4

ac=10

do while (ac>1.e-3)

f1=tan(x0)-3*m/x0

f2=1/cos(x0)**2+3*m/x0**2

x1=x0-f1/f2

ac=abs(x1-x0)/x0

x0=x1

enddo

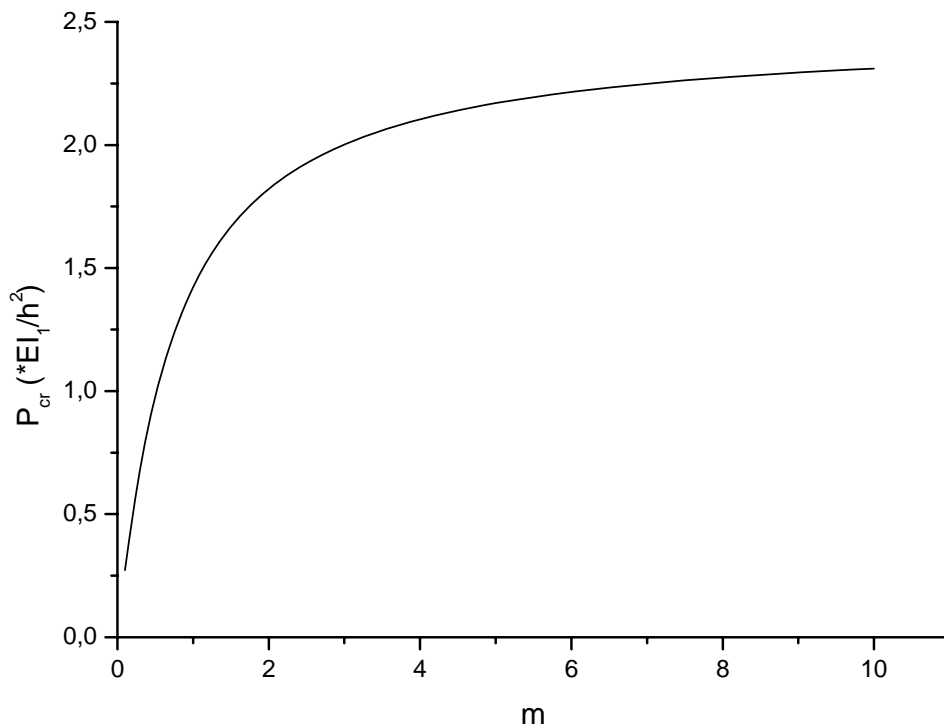
write(1,*) m,x1**2

enddo

close(1)
end

```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διάγραμμα του σχήματος 3.4. Το κρίσιμο φορτίο υπολογίστηκε για 100 τιμές του λόγου m , από το 1 έως το 10 με βήμα 0.1. Το κρίσιμο φορτίο αυξάνεται αρχικά με αύξηση του λόγου m . Για μεγάλες τιμές του m το κρίσιμο φορτίο Euler τείνει να σταθεροποιηθεί.



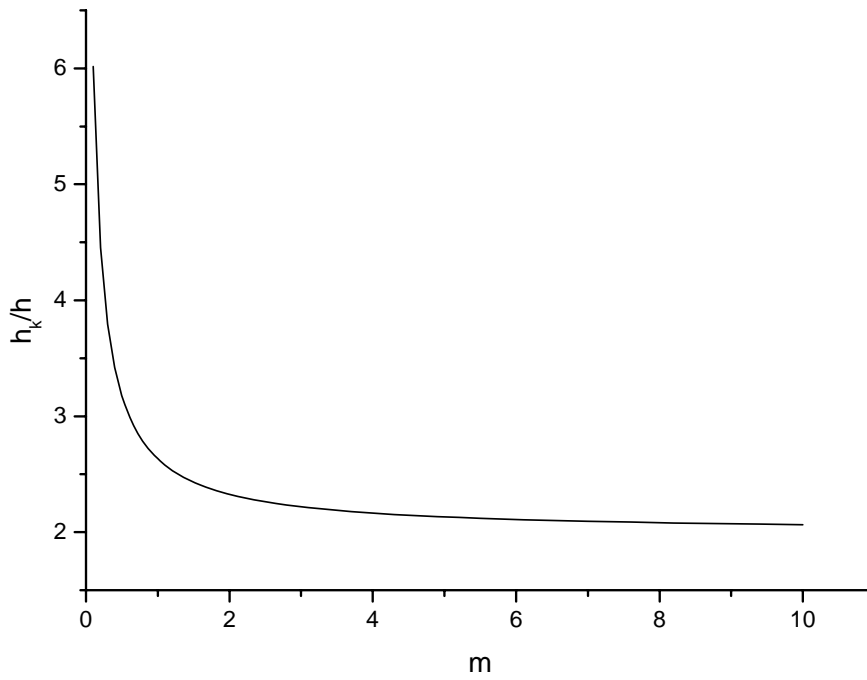
Σχήμα 3.4 Εξάρτηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού από το λόγο m .

Αν συγκρίνουμε τη σχέση (3.26) με το νόμο του Euler καταλήγουμε για το ανηγμένο μήκος λυγισμού, h_k , στη σχέση:

$$\frac{h_k}{h} = \frac{\pi}{x} \quad (3.30)$$

Συνεπώς γνωρίζοντας την τιμή του x για κάθε m μπορούμε εύκολα να βρούμε το ανηγμένο μήκος λυγισμού συναρτήσει του λόγου m . Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διάγραμμα του σχήματος 3.5.

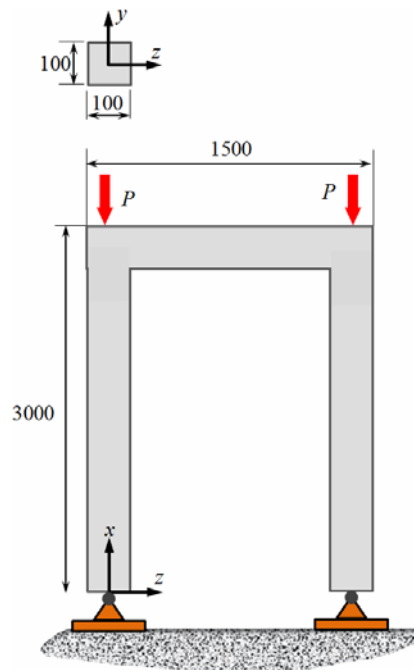
Παρατηρούμε ότι το ανηγμένο μήκος λυγισμού μειώνεται καθώς ο λόγος m αυξάνεται και για μεγάλες τιμές του m σταθεροποιείται σε μία τιμή περίπου ίση με $2h$.



Σχήμα 3.5 Εξάρτηση του ανηγμένου μήκους λυγισμού από το λόγο m .

Αριθμητική Εφαρμογή

Το παρακάτω πλαίσιο είναι κατασκευασμένο από χάλυβα με μέτρο ελαστικότητας $E=200\text{GPa}$, έχει ύψος $h=3000\text{mm}$ και μήκος $2l=1500\text{mm}$.



Όλοι οι δοκοί του πλαισίου είναι τετραγωνικής διατομής $a \times a = 100\text{mm} \times 100\text{mm}$. Τα κάτω άκρα του πλαισίου είναι αρθρωμένα ενώ στα δύο άνω άκρα δρα θλιπτικό φορτίο P .

Να υπολογιστούν τα κρίσιμα φορτία λυγισμού $P_{κρ}$ για τις 10 πρώτες ιδιομορφές.

Θα υπολογίσουμε τις 10 πρώτες ρίζες της εξίσωσης (3.25). Οι διατομές όλων των δοκών είναι ίδιες συνεπώς έχουμε: $I_1 = I_2$ και από την (3.23) η τιμή του m είναι:

$$m = \frac{I_2 h}{I_1 L} = \frac{h}{L} = \frac{3000}{750} = 4$$

Η σχέση (3.25) γίνεται:

$$\tan x - \frac{12}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{12}{x} \Rightarrow x \sin x - 12 \cos x = 0$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x \sin x - 12 \cos x$$

με παράγωγο:

$$f'(x) = \sin x + x \cos x + 12 \sin x = 13 \sin x + x \cos x$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton-Raphson για να βρούμε τις 10 πρώτες ρίζες της $f(x)$. Η $f(x)$ έχει μία ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \dots$$

Για την επίλυση του προβλήματος εκτελούμε το παρακάτω πρόγραμμα.

Program lig3a

implicit none

integer i

```

Real x0,x1,f1,f2,ac

!ac=i zitoumeni akriveia

Do i=1,10
x0=(4*i-3)*3.14159/4

ac=10

do while (ac>1.e-3)

f1=x0*sin(x0)-12*cos(x0)

f2=13*sin(x0)+x0*cos(x0)

x1=x0-f1/f2

ac=abs(x1-x0)/x0

x0=x1

enddo

write(*,*) x1

enddo

end
*****

```

Σε κάθε εκτέλεση του προγράμματος χρησιμοποιούμε ως αρχική επιλογή για τη ζητούμενη ρίζα το μέσο του αντίστοιχου διαστήματος.

Βρίσκουμε τις τιμές που φαίνονται στη δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα. Στην τρίτη στήλη του πίνακα φαίνονται οι αντίστοιχες τιμές του κρίσιμου φορτίου που υπολογίζονται μέσω της σχέσης (3.26). Η ροπή αδράνειας της διατομής είναι:

$$I = \frac{0.1 \cdot 0.1^3}{12} = \frac{10^{-4}}{12} m^4$$

α/α	$x=kh$	$P_{cr} (10^5 \text{ N})$
1	1.451	3.895
2	4.364	35.232
3	7.307	98.776
4	10.287	195.771
5	13.300	327.247
6	16.341	494.002
7	19.403	696.481
8	22.481	934.981
9	25.572	1209.765
10	28.671	1520.749

4. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ

4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Αν η μεσοεπιφάνεια ενός λεπτού φορέα είναι επίπεδη και παραλαμβάνει εγκάρσιες δυνάμεις και καμπτικές ροπές, ο φορέας ονομάζεται πλάκα. Η πλάκα αποτελεί το δισδιάστατο ανάλογο της δοκού και η εξίσωση κίνησης αναπτύσσεται με βάση παρόμοιες υποθέσεις. Η κατασκευή της εξίσωσης κίνησης της πλάκας στηρίζεται στην υπόθεση Kirchhoff: επειδή το πάχος της πλάκας είναι μικρό ως προς τις άλλες δύο διαστάσεις της, οι υλικές ίνες της πλάκας που είναι κάθετες στο μεσοεπίπεδό της πριν την παραμόρφωση παραμένουν ευθείες και κάθετες στην παραμορφωμένη μεσοεπιφάνεια της πλάκας. Αυτό σημαίνει ότι οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις είναι αμελητέες. Η υπόθεση Kirchhoff για τις πλάκες είναι ανάλογη της υπόθεσης Bernoulli-Euler για τις δοκούς.

Η μετάβαση μίας πλάκας από την ευσταθή κατάσταση ισορροπίας στην ασταθή ονομάζεται λυγισμός ή δομική αστάθεια. Αν το φορτίο ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή για λυγισμό τότε εμφανίζονται πολύ γρήγορα πολύ μεγάλες παραμορφώσεις. Αυτό οδηγεί στην εμφάνιση πολύ μεγάλων τάσεων και στη συνέχεια στην πλήρη αστοχία της πλάκας.

Η μελέτη του λυγισμού των πλακών έχει πολύ μεγάλη πρακτική σημασία και οδηγεί στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου και της μορφής της λυγισμένης πλάκας. Παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με τη μελέτη του λυγισμού των γραμμικών φορέων. Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας λυγισμού των πλακών γίνονται οι παρακάτω βασικές παραδοχές:

- Πριν την επιβολή του φορτίου η πλάκα είναι τελείως επίπεδη και όλα τα εξωτερικά φορτία δρουν στη μεσοεπιφάνεια της πλάκας
- Η εντατική κατάσταση περιγράφεται από τις εξισώσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας στο επίπεδο
- Όλα τα φορτία είναι σταθερά σε μέτρο και κατεύθυνση καθώς η πλάκα παραμορφώνεται
- Η κάμψη των πλακών περιγράφεται από τη θεωρία του Kirchhoff (σύμφωνα με την υπόθεση που διατυπώθηκε παραπάνω)

4.2 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ας θεωρήσουμε την αρχική κατάσταση ισορροπίας μίας πλάκας που υπόκειται σε εξωτερικά φορτία και ότι οι συνισταμένες αξονικές και εγκάρσιες δυνάμεις ανά μονάδα μήκους στην κατεύθυνση των αξόνων Ox και Oy είναι:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (4.1)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad (4.2)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (4.3)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το λυγισμό της πλάκας είναι [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.5)$$

είναι η καμπτική στιβαρότητα της διατομής ανάλογη της δυσκαμψίας EI της δοκού,

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της πλάκας

ν είναι ο λόγος Poisson

h είναι το πάχος της πλάκας (πολύ μικρότερο σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις)

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του διαρμονικού τελεστή:

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (4.6)$$

η (4.4) γράφεται πιο απλά ως:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.7)$$

Η λεγόμενη μέθοδος της ισορροπίας χρησιμοποιεί την εξίσωση (4.4) για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Η εξίσωση (4.4) είναι μία ομογενής γραμμική μερική διαφορική εξίσωση με γενικά μεταβλητούς συντελεστές. Είναι αδύνατο να βρεθεί η γενική της λύση αλλά σε κάποιες ειδικές αλλά σημαντικές περιπτώσεις είναι δυνατό να λυθεί αναλυτικά. Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση αυτή για ένα σχετικά απλό πρόβλημα.

4.3 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΑΡΘΡΩΜΕΝΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

Έστω μία ορθογωνική αρθρωμένη πλάκα που υπόκειται σε ένα ομοιόμορφα καταμεμημένο θλιπτικό φορτίο q_x όπως φαίνεται στο σχήμα

4.1. Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$w = 0 \Big|_{x=0,a} \quad (4.8)$$

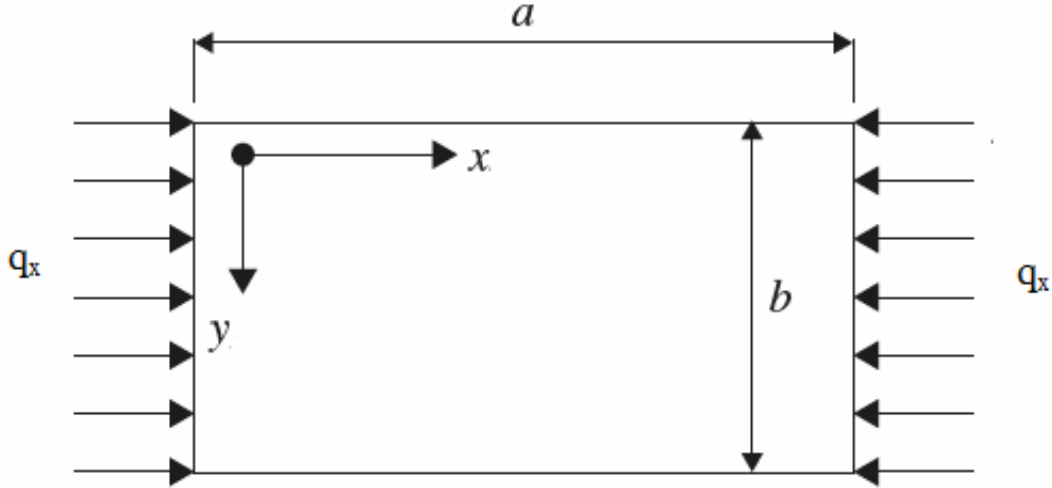
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=0,a} \quad (4.9)$$

$$w = 0 \Big|_{y=0,b} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \Big|_{y=0,b} \quad (4.11)$$

Με αυτές τις συνοριακές συνθήκες ο Navier το 1820 έδειξε ότι η λύση της (4.4) μπορεί να παρασταθεί από μία διπλή σειρά Fourier:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.12)$$



Σχήμα 4.1 Ορθογωνική αρθρωμένη πλάκα που καταπονείται από ομοιόμορφα κατανεμημένο θλιπτικό φορτίο.

Όσον αφορά τις δυνάμεις στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε:

$$N_x = -q_x \quad (4.13)$$

$$N_y = N_{xy} = 0 \quad (4.14)$$

Συνεπώς η (4.4) γίνεται:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας τη λύση (4.12) στην εξίσωση (4.15) και αφού κάνουμε τις παραγωγίσεις παίρνουμε:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - q_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (4.16)$$

Η λύση $w_{,mn} = 0$ οδηγεί στην τετριμμένη λύση $w(x,y)=0$ που αντιστοιχεί στην ισορροπία στην επίπεδη κατάσταση της πλάκας και δεν έχει ενδιαφέρον. Μία άλλη δυνατή λύση εξάγεται αν θέσουμε την ποσότητα μέσα στην αγκύλη ίση με το μηδέν:

$$D\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - q_x\pi^2\frac{m^2}{a^2} = 0 \quad (4.17)$$

Από την (4.17) παίρνουμε για το φορτίο:

$$q_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (4.18)$$

Η (4.18) δίνει όλες τις δυνατές τιμές του q_x για τις διάφορες τιμές των ακεραίων m και n . Η κρίσιμη τιμή του q_x θα είναι η μικρότερη τιμή που προκύπτει από την (4.18). Είναι φανερό ότι η μικρότερη τιμή αντιστοιχεί σε $n=1$. Για $n=1$ η (4.18) δίνει:

$$q_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (4.19)$$

Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε την τιμή του m ώστε η (4.19) να δίνει την ελάχιστη τιμή του q_x .

Ορίζουμε την παράμετρο φορτίου λυγισμού (buckling load parameter) K μέσω της σχέσης:

$$K = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (4.20)$$

Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της ελάχιστης τιμής του K . Παραγωγίζοντας το K ως προς m και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν παίρνουμε:

$$\frac{dK}{dm} = 2 \cdot \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{m^2 b} \right) = 0 \quad (4.21)$$

Επειδή η ποσότητα στην πρώτη παρένθεση είναι θετική συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει:

$$\frac{b}{a} - \frac{a}{m^2 b} = 0 \Rightarrow m = \frac{a}{b} \quad (4.22)$$

Δηλαδή:

$$K = 4 \quad (4.23)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.19) βρίσκουμε το κρίσιμο φορτίο:

$$q_{x,cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (4.24)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι με τη μέθοδο που ακολουθήσαμε σε αυτήν την ενότητα καταφέραμε να υπολογίσουμε το κρίσιμο φορτίο χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές W_{mn} της διπλής σειράς, δηλαδή χωρίς να προσδιορίσουμε τη μορφή της λυγισμένης πλάκας.

Η κρίσιμη τάση βρίσκεται αν διαιρέσουμε το κρίσιμο φορτίο ανά μονάδα μήκους με το πάχος της πλάκας h :

$$\sigma_{x,cr} = \frac{4\pi^2 D}{hb^2} \quad (4.25)$$

Φυσικά ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου με τον παραπάνω τρόπο μπορεί να γίνει μόνο εφόσον ο λόγος διαστάσεων (aspect ratio) $\frac{a}{b}$ είναι

ακέραιος αριθμός. Γιατί μόνο σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να ισχύει η εξίσωση (4.22) αφού ο m είναι υποχρεωτικά ακέραιος.

Για να λύσουμε το πρόβλημα στη γενική περίπτωση κάνουμε το διάγραμμα του K ως συνάρτηση του $\frac{a}{b}$ με παράμετρο το m .

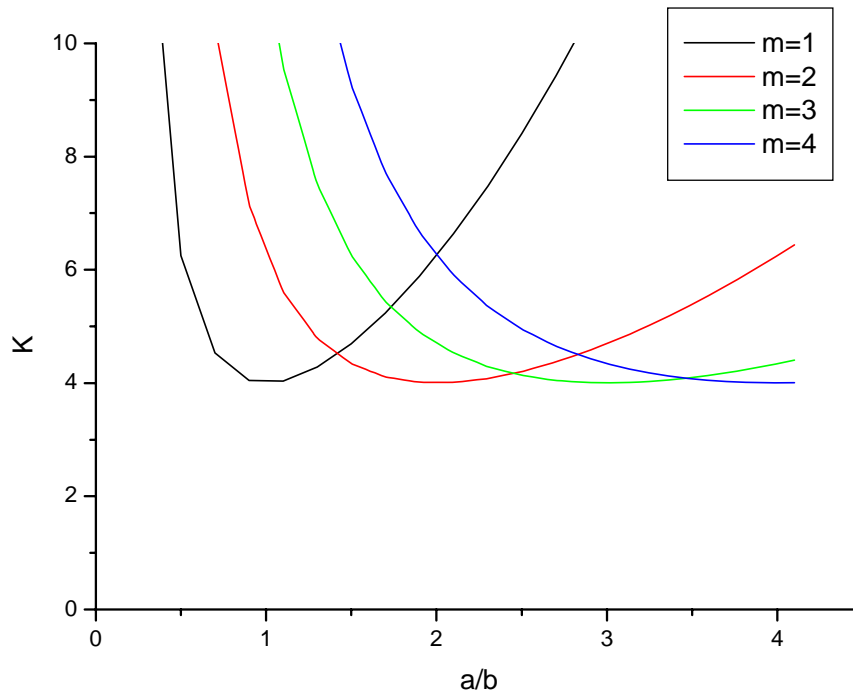
Γράφουμε την (4.20) στην πιο βολική μορφή:

$$K = \left(\frac{m}{a/b} + \frac{a/b}{m} \right)^2 \quad (4.26)$$

και αφού υπολογίσουμε τις τιμές που φαίνονται στον πίνακα 4.1, κατασκευάζουμε το διάγραμμα του σχήματος 4.2.

Πίνακας 4.1 Τιμές της παραμέτρου K

$\frac{a}{b}$	m=1	m=2	m=3	m=4
0,1	102,01	402,0025	902,00111	1602,00062
0,3	13,20111	46,46694	102,01	179,7834
0,5	6,25	18,0625	38,02778	66,01563
0,7	4,53082	10,28577	20,42179	34,68369
0,9	4,04457	7,14077	13,20111	21,80371
1,1	4,03645	5,60829	9,57246	15,29877
1,3	4,28172	4,78936	7,51322	11,57308
1,5	4,69444	4,34028	6,25	9,25174
1,7	5,23602	4,10658	5,4353	7,71696
1,9	5,88701	4,01053	4,89419	6,65776
2,1	6,63676	4,00953	4,53082	5,90374
2,3	7,47904	4,07864	4,2891	5,3552
2,5	8,41	4,2025	4,13444	4,95063
2,7	9,42717	4,3712	4,04457	4,65041
2,9	10,52891	4,57812	4,0046	4,42812
3,1	11,71406	4,81873	4,0043	4,26556
3,3	12,98183	5,08981	4,03645	4,14986
3,5	14,33163	5,38903	4,0958	4,07175
3,7	15,76305	5,71468	4,17853	4,02436
3,9	17,27575	6,06548	4,28172	4,00256
4,1	18,86949	6,44045	4,40317	4,00244



Σχήμα 4.2 Μεταβολή της παραμέτρου K με το λόγο $\frac{a}{b}$ για διάφορες τιμές του m.

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται το διάγραμμα 4.2 για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου.

Έστω ότι $\frac{a}{b} = 2.5$. Από το διάγραμμα (ή ακόμη καλύτερα από τον πίνακα) βλέπουμε ότι η ελάχιστη τιμή του K είναι 4,13444 για m=3. Συνεπώς το κρίσιμο φορτίο από την (4.19) είναι:

$$q_{x,cr} = 4.13444 \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (4.27)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι για $\frac{a}{b} \ll 1$ ο δεύτερος όρος μέσα στην παρένθεση της (4.26) είναι πολύ μικρότερος του πρώτου όρου και μπορεί να αμεληθεί. Σε αυτήν την περίπτωση η παράμετρος K δίνεται από τη σχέση:

$$K \approx \frac{m^2 b^2}{a^2} \quad (4.28)$$

και η ελάχιστη τιμή του K θα είναι (για m=1):

$$K_{\min} = \frac{b^2}{a^2} \quad (4.29)$$

Από την (4.19) το κρίσιμο φορτίο θα είναι:

$$q_{x,cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (4.30)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση το κρίσιμο φορτίο εξαρτάται από το μήκος a και όχι από το πλάτος b (όπως π.χ. στην (4.27)) και ακόμη ότι πρόκειται ακριβώς για το κρίσιμο φορτίο Euler αν αντικαταστήσουμε την καμπτική δυσκαμψία EI της δοκού με την καμπτική δυσκαμψία D της πλάκας.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μιας αξονικά θλιβόμενης ράβδου γίνεται μέσω της ελαφρά καμπυλωμένης μορφής ισορροπίας, υποθέτοντας ότι είναι δυνατή μία τέτοια μορφή ισορροπίας όταν $P=P_{cr}$.

Στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικής ευστάθειας η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης οδηγεί στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Για ευθύγραμμους φορείς το κρίσιμο φορτίο δίνεται από τον τύπο του Euler και εξαρτάται από τον τρόπο στήριξης του φορέα.

Για το πρόβλημα της έκκεντρης αξονικής φόρτισης υπολογίσαμε το βέλος κάμψης σε κάθε σημείο του φορέα καθώς και την εξάρτηση του μέγιστου βέλους κάμψης από το εφαρμοζόμενο θλιπτικό φορτίο.

Κατά τη μελέτη του λυγισμού των πλαισίων βασιζόμαστε στις ίδιες παραδοχές και ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία με τους απλούς γραμμικούς φορείς. Επιλύθηκε ως παράδειγμα ένα συμμετρικό ορθογωνικό πλαίσιο από τρία μέλη και βρέθηκε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Η εξίσωση κίνησης λεπτής πλάκας είναι μια ομογενής μερική διαφορική εξίσωση η οποία δεν λύνεται αναλυτικά. Χρησιμοποιήσαμε τη λύση Navier για μία ορθογωνική αρθρωμένη πλάκα και υπολογίσαμε το κρίσιμο φορτίο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ιωακειμίδης Ν. *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς*, εκδόσεις Gotsis 2008.
2. Α. Κουνάδης, *Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*, εκδόσεις Συμεών 1997.
3. Σ. Σωτηρόπουλος, *Μελέτη Ευστάθειας Δίστυλων Πλαισίων με Τμηματικά Θλιπτικά Φορτία στους Στύλους*, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ 2012.
4. Α. Σταθόπουλος, *Αυγισμός Άνω Θλιβόμενου Πέλματος Δικτυωτής Γέφυρας*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ 2011.
5. Α. Στασινόπουλος, *Πλαστικός Αυγισμός Σιδηρών Υποστυλωμάτων Διατομής Διπλού Ταυ*, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ 2012.
6. Βουθούνης Π. *Τεχνική Μηχανική-Αντοχή των Υλικών*, 1993.
7. F. Beer, *Mechanics of Materials*, McGraw Hill 2009.
8. E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications*, CRC Press 2001.
9. Σ. Νατσιάβας, *Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων*, εκδόσεις Ζήτη 2001.
10. Ζ. Φασουλάκης, *Μη Γραμμική Ανάλυση Ευστάθειας Πλαισίων με Μέλη Μεταβλητής Δυσκαμψίας*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ 2012.