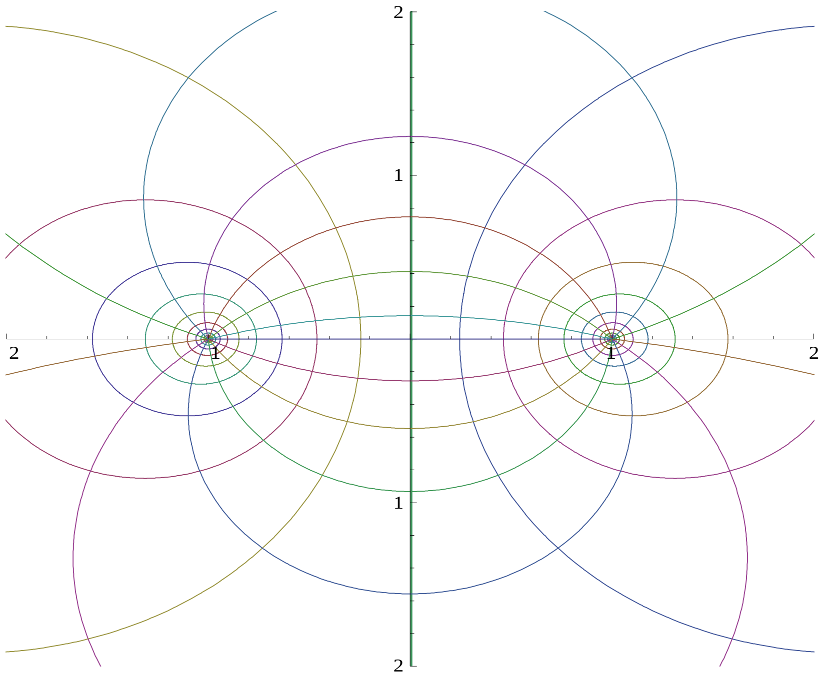
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΕ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΧΩΡΙΑ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ:ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ ΣΟΦΙΑ-ΚΑΡΟΛΙΝΑ
ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΜΒΥΣΑΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΑΤΡΑ 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολογίας του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Πάτρας και αναφέρεται στην καταγραφή γνωστών προβλημάτων της μόνιμης αγωγής θερμότητας στις δύο διαστάσεις και στην χρήση της μεθόδου Fourier για τη αναλυτική επίλυση του προβλήματος σε μη συμβατικές γεωμετρίες.

Αρχικά υπολογίζουμε την εξίσωση Laplace στις καρτεσιανές, στις πολικές και στις διπολικές συντεταγμένες αφού ήδη έχουμε περιγράψει κάθε ένα από αυτά τα συστήματα συντεταγμένων και θέτουμε προβλήματα με διαφορετικές γεωμετρίες για την εύρεση της θερμοκρασιακής κατανομής και του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας καθώς και του συντελεστή σχήματος.

Ευχαριστούμε θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μας κ. Καμβύσα Γρηγόριο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολογίας, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μας προσέφερε για την πραγματοποίηση της εργασίας.

Παπαγεωργίου Σοφία-Καρολίνα
Φωτοπούλου Παναγιώτα
Δεκέμβριος 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα Πτυχιακή Εργασία αναφέρεται στον υπολογισμό του τελεστή της κλίσης και κατά συνέπεια της εξίσωσης Laplace στο καρτεσιανό, στο πολικό και στο διπολικό σύστημα συντεταγμένων, στις δύο διαστάσεις. Ο υπολογισμός του τελεστή της κλίσης μας βοηθά στην επίλυση προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας στη μόνιμη κατάσταση με την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών.

Η ανάπτυξη του θέματος γίνεται σε τρία Κεφάλαια. Στο εισαγωγικό μέρος αναφέρουμε τους τρόπους με τους οποίους μεταδίδεται η θερμότητα, τις συνοριακές συνθήκες όπου θέτουμε σε κάθε πρόβλημα και δίνεται μία σύντομη περιγραφή των συστημάτων συντεταγμένων.

Στο πρώτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε την εξίσωση Laplace στις καρτεσιανές συντεταγμένες μελετώντας την θερμοκρασιακή κατανομή σε μία ορθογώνια πλάκα, χωρίζοντας το πρόβλημα σε τέσσερα υποπροβλήματα στα οποία κάθε φορά η μια πλευρά της πλάκας έχει σταθερή θερμοκρασία ενώ οι υπόλοιπες πλευρές έχουν θερμοκρασία $0^{o}C$.

Στο δεύτερο κεφάλαιο υπολογίζουμε τον τελεστή της κλίσης στις πολικές συντεταγμένες με δύο τρόπους. Στη συνέχεια, μελετάμε την θερμοκρασιακή κατανομή και υπολογίζουμε τον ρυθμό μεταφοράς θερμότητας στο εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου, ενός κυλινδρικού αγωγού με ισοθερμικές επιφάνειες καθώς και σε έναν κυλινδρικό αγωγό με συνθήκη συναγωγής.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε τη γεωμετρική ερμηνεία των διπολικών συντεταγμένων και υπολογίζουμε τον τελεστή της κλίσης. Έπειτα, επιλύουμε προβλήματα με διαφορετικές γεωμετρίες για την εύρεση του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας και του συντελεστή μορφής.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Με τον όρο θερμότητα ορίζουμε την ποσότητα θερμικής ενέργειας που ακτινοβολεί κάθε υλικό σώμα με συνέπεια να μεταφέρεται μεταξύ γειτονικών σωμάτων ή μορίων λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας αυτών.

Μετάδοση θερμότητας έχουμε όταν μεταφέρεται ενέργεια από ένα σύστημα προς το περιβάλλον του η οποία είναι συνέπεια της διαφοράς θερμοκρασίας. Η μεταφορά αυτή γίνεται από τα θερμότερα στρώματα αέρα στα ψυχρότερα στρώματα.

Μονάδα μέτρησης της θερμότητας είναι η θερμίδα (cal) η οποία ορίζεται σαν το ποσό θερμότητας που πρέπει να δώσουμε σε ένα λίτρο νερού το οποίο βρίσκεται σε ατμοσφαιρική πίεση έτσι ώστε να αυξηθεί η θερμοκρασία του κατά ένα βαθμό. Στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων μονάδα μέτρησης είναι το Joule.

Η θερμότητα μεταδίδεται με τους τρεις παρακάτω τρόπους:

1. Αγωγή
2. Συναγωγή
3. Ακτινοβολία

Παρακάτω θα περιγράψουμε κάθε έναν από αυτούς τους τρεις τρόπους ξεχωριστά:

Αγωγή. Στην περίπτωση μετάδοσης θερμότητας με Αγωγή έχουμε μεταφορά ενέργειας από τα πιο ενεργά σωματίδια μιας ουσίας προς τα λιγότερο ενεργά σωματίδια εξαιτίας των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων.

Σύμφωνα με το νόμο Fourier,ο ρυθμός Αγωγής θερμότητας Q εκφράζει τη ροή θερμότητας που μεταφέρεται από ένα σώμα στο άλλο μέσω επαφής και είναι ανάλογος με τη διαφορά θερμοκρασίας αυτών:

$$Q = -\, kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Οι παράμετροι από τους οποίους εξαρτάται η τιμή του Q είναι οι παρακάτω:

- Από τη γεωμετρία του υλικού A (m^2)
- Από το πάχος του υλικού x (m)
- Από τη διαφορά θερμοκρασίας των δύο σωμάτων ΔT (°C)

- Από τη σταθερά αναλογίας k (W/m°C) όπου εκφράζει τη θερμική αγωγιμότητα του υλικού η οποία αποτελεί το μέτρο της ικανότητας του υλικού να άγει τη θερμότητα.

Συναγωγή. Στην περίπτωση μετάδοσης θερμότητας με Συναγωγή έχουμε μεταφορά ενέργειας ανάμεσα σε μια στερεά επιφάνεια και ένα υγρό ή αέριο το οποίο βρίσκεται σε κίνηση.
Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας με Συναγωγή εκφράζεται από τον Ψυχρομετρικό νόμο του Νεύτωνα:

$$Q = hA(T_s - T_\infty)$$

και εξαρτάται από τις εξής παραμέτρους:

- Την θερμοκρασία της επιφάνειας T_s (°C)
- Την θερμοκρασία του ρευστού T_∞(°C)
- Το εμβαδόν της επιφάνειας A (m^2) μέσω της οποίας πραγματοποιείται η μεταφορά θερμότητας
- Τον συντελεστή μεταφοράς θερμότητας h (W/m^2C) ο οποίος είναι μία παράμετρος που προσδιορίζεται πειραματικά και η τιμή του εξαρτάται από το ίδιο το ρευστό και την ταχύτητα αυτού.

Εξαναγκασμένη Συναγωγή έχουμε όταν το ρευστό αναγκάζεται να ρέει πάνω από μία επιφάνεια με τη βοήθεια εξωτερικών μέσων.
Φυσικη Συναγωγή έχουμε όταν η κίνηση του ρευστού οφείλεται σε ανωστικές δυνάμεις οι οποίες δημιουργούνται λόγω διαφοράς στην πυκνότητα του ρευστού από την αύξηση ή τη μείωση της θερμοκρασίας του.

Ακτινοβολία. Η θερμική ακτινοβολία είναι μία μορφή ενέργειας που εκπέμπουν τα σώματα λόγω της θερμοκρασίας τους. Στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται η ύπαρξη κάποιου υλικού μέσου. Παρ' όλα αυτά, η μεταφορά ενέργειας είναι πιο γρήγορη(ίση με την ταχύτητα του φωτός) και δεν υφίσταται απώλειες στο κενό.
Ο μέγιστος ρυθμός ακτινοβολίας που μπορεί να εκπέμπει ένα σώμα σε απόλυτη θερμοκρασία T_s δίνεται από τον νόμο των Stefan-Boltzmann για τη θερμική ακτινοβολία:

$$Q_{max} = \sigma A T_s^4$$

Όπου σ (W/m^2K^4) είναι η σταθερά των Stefan-Boltzmann.
Ακτινοβολία του μέλανος σώματος ονομάζεται η ακτινοβολία που εκπέμπεται από μία επιφάνεια με το μέγιστο αυτό ρυθμό. Οι πραγματικές επιφάνειες εκπέμπουν ακτινοβολία μικρότερη από αυτήν του μέλανος σώματος:

$$Q = \varepsilon \sigma A T_s^4$$

Όπου ε είναι ο συντελεστής αφετικότητας δηλαδή η ικανότητα εκπομπής της επιφάνειας και εξαρτάται από τη θερμοκρασία του σώματος και το μήκος κύματος.

2. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα μόνιμης αγωγής θερμότητας το οποίο διέπεται από τις παρακάτω σχέσεις τριών διαστάσεων:

$$\vec{q} = -k \, \nabla u \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 u(x,y,z) = 0 \tag{1.2}$$

Όπου $\vec{q}(x,y,z)$ είναι το διάνυσμα της θερμικής ροής και $u(x,y,z)$ η θερμοκρασία τότε για ένα μέσο με δεδομένο όγκο V οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο, μπορεί να είναι:

Συνοριακή Συνθήκη Dirichlet. Σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S η θερμοκρασία u είναι γνωστή συνάρτηση, δηλαδή:

$$u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

όπου $f(x,y,z)$ είναι γνωστή συνάρτηση της θέσης (x,y,z) στην επιφάνεια S.

Συνοριακή Συνθήκη Newmann. Σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S η θερμική ροή $\vec{q} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = -k \frac{\partial u}{\partial n}$ είναι γνωστή συνάρτηση, δηλαδή:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y,z)$$

Όπου $g(x,y,z)$ είναι γνωστή συνάρτηση της θέσης (x,y,z) στην επιφάνεια S και $\hat{\boldsymbol{n}}$ το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια.

Στην περίπτωση όπου το υλικό είναι μονωμένο θα ισχύει $\partial u/\partial n = 0$ ενώ στην περίπτωση όπου έχουμε θερμική επαφή μεταξύ δύο σωμάτων 1 και 2 τότε κατά μήκος της επιφάνειας επαφής θα ισχύει:

$u_1 = u_2$ (συνέχεια της θερμοκρασίας)

$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}$ (συνέχεια της κάθετης συνιστώσας του διανύσματος θερμικής ροής)

Συνοριακή Συνθήκη Robin. Σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S η θερμοκρασία και η θερμική ροή συνδέονται με μία σχέση της μορφής:

$$u + \alpha \frac{\partial u}{\partial n} = h(x,y,z)$$

Όπου $h(x,y,z)$ είναι γνωστή συνάρτηση της θέσης (x,y,z) στην επιφάνεια S και α είναι γνωστός συντελεστής (συνθήκη συναγωγής).
Γενικότερα, για να θεωρηθεί ένα πρόβλημα «καλώς ορισμένο» δεδομένου ότι διέπεται από τις εξ. (1.1) και (1.2) και παράλληλα έχουμε θέσει τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να πληρεί τα παρακάτω κριτήρια:

1. Το πρόβλημα να έχει λύση.
2. Η λύση του προβλήματος να είναι μοναδική.
3. Η λύση να είναι ευσταθής, δηλαδή να εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα του προβλήματος και μία μικρή μεταβολή αυτών να προκαλεί μικρή μεταβολή και στη λύση.

3. ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ως σύστημα συντεταγμένων ορίζουμε το σύνολο των παραδοχών και ορισμών που οριοθετούν ένα χώρο και έχουν ως σκοπό να περιγράψουν τη θέση ενός αντικειμένου στο χώρο αυτό, με αριθμητικές τιμές.

Ουσιαστικά, είναι ένα σύνολο αξόνων οι οποίοι τέμνονται σε ένα σημείο (την αρχή O) που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου σε έναν η-διάστατο χώρο (χρησιμοποιούνται γωνίες και αποστάσεις).

Στα συστήματα συντεταγμένων υπάρχει πάντα ένα σημείο αναφοράς ως προς το οποίο γίνεται ο προσδιορισμός. Αυτό το σημείο αναφοράς θεωρείται ακίνητο και το διάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή το διάνυσμα του οποίου όλοι οι αριθμοί που το περιγράφουν ισούται με μηδέν.

Τα είδη συντεταγμένων όπου θα μελετήσουμε είναι τα εξής:

1. Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων
2. Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων
3. Διπολικό Σύστημα Συντεταγμένων

Παρακάτω θα δώσουμε μία σύντομη περιγραφή των συστημάτων αυτών:

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων. Το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει ένα σημείο στο επίπεδο ή στο χώρο.

Το σύστημα αυτό αποτελείται από δύο προσανατολισμένες ευθείες, κάθετες μεταξύ τους τις οποίες ονομάζουμε άξονας τετμημένων (οριζόντιος άξονας x) και άξονας τεταγμένων (κατακόρυφος άξονας y). Το σημείο όπου τέμνονται αυτές οι δύο ευθείες λέγεται αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Κάθε σημείο πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο προσδιορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών, την τετμημένη (απόσταση του σημείου από τον άξονα y) και την τεταγμένη (απόσταση του σημείου από τον άξονα x). Η τετμημένη και η τεταγμένη αποτελούν τις συντεταγμένες του συστήματος. Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων ορίζουμε και έναν τρίτο άξονα z, κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν οι άξονες x και y. Έτσι, κάθε σημείο στο χώρο παριστάνεται από μία μοναδική τριάδα αριθμών (x,y,z) όπου κάθε συντεταγμένη αντιστοιχεί στην κάθετη απόσταση του σημείου από κάθε έναν από τους τρεις άξονες αντίστοιχα.

Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων. Το Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων είναι ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η θέση οποιουδήποτε σημείου σε ένα επίπεδο καθορίζεται από την απόσταση του σημείου αυτού σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς όπου αυθαίρετα έχουμε επιλέξει και τη γωνία από μία κατεύθυνση αυθαίρετα επιλεγμένη.

Η απόσταση ενός σημείου από το σημείο αναφοράς όπου αυθαίρετα έχουμε επιλέξει ονομάζεται ακτινική συντεταγμένη ή ακτίνα ενώ η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα του σημείου σε σχέση με την αυθαίρετα επιλεγμένη διεύθυνση ονομάζεται γωνιακή συντεταγμένη ή αζιμούθιο.

Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων κάθε σημείο καθορίζεται από την τομή ενός κύκλου σταθερής ακτίνας ρ και μιας ευθείας που καθορίζεται από μία σταθερή τιμή γωνίας θ. Οι καμπύλες σταθερής ακτίνας ρ και γωνίας θ ορίζουν το λεγόμενο «πολικό πλέγμα».

Διπολικό Σύστημα Συντεταγμένων. Οι Διπολικές Συντεταγμένες είναι ένα δισδιάστατο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Υπάρχουν δύο γενικοί χαρακτηριστικοί τύποι διπολικών συντεταγμένων.

Το πρώτο σύστημα βασίζεται στους Απολλώνιους κύκλους. Οι καμπύλες των σταθερών ξ και η είναι κύκλοι όπου τέμνονται κάθετα. Οι συντεταγμένες έχουν δύο εστίες F_1 και F_2 οι οποίες αντιστοιχούν στα σημεία $(-c,0)$ και $(c,0)$,αντίστοιχα, στον άξονα x των καρτεσιανών συντεταγμένων.

Οι διπολικές κυλινδρικές συντεταγμένες προέρχονται σχηματίζοντας την z-κατεύθυνση. Οι δισφαιρικές συντεταγμένες προέρχονται περιστρέφοντας τις διπολικές συντεταγμένες ως προς τον άξονα x (ο άξονας που συνδέεται με τους πόλους). Οι τοροειδείς συντεταγμένες προέρχονται περιστρέφοντας τις διπολικές συντεταγμένες ως προς τον άξονα y (ο κάθετος άξονας στον άξονα των πόλων).

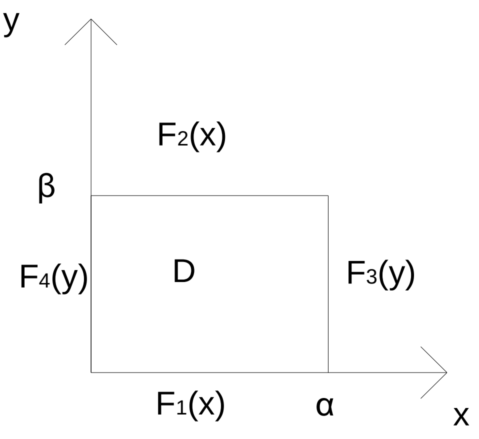
Η κλασική εφαρμογή των διπολικών συντεταγμένων είναι στη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων όπως η *εξίσωση* Laplace, όπου έχουμε χωρισμό των μεταβλητών.

Ο όρος «διπολικές» μερικές φορές χρησιμοποιείται για να περιγράψει καμπύλες οι οποίες έχουν δύο μοναδικές εστίες όπως η έλλειψη, η υπερβολή. Όμως, ο όρος «διπολικές συντεταγμένες» εξασφαλίζεται για τις συντεταγμένες που περιγράψαμε και δεν χρησιμοποιείται για συντεταγμένες που συνδέονται με άλλες καμπύλες όπως οι ελλειπτικές συντεταγμένες.

1. Η ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΤΙΣ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ-ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

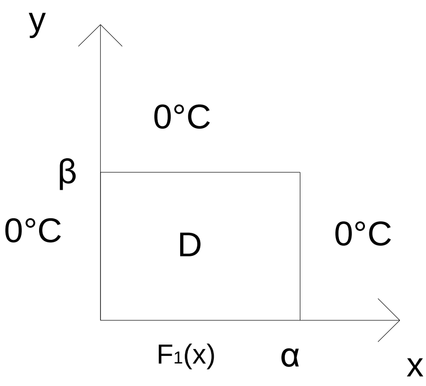
1.1 Η ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΧΩΡΙΟ

Έστω ότι οι πλευρές της ορθογώνιας πλάκας του σχ. (1.1) έχουν γνωστές θερμοκρασίες $F_1(x)$,$F_2(x)$,$F_3(y)$ και $F_4(y)$. Για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος πρέπει να το χωρίσουμε σε τέσσερα επιμέρους όπου μη μηδενική θερμοκρασία θα έχει μόνο η μία πλευρά της πλάκας ενώ οι υπόλοιπες θα χαρακτηρίζονται από την τιμή μηδέν. Επομένως, η λύση του προβλήματος θα είναι το άθροισμα των λύσεων των τεσσάρων επιμέρους προβλημάτων.



Σχήμα 1.1

1.1.1 Πρόβλημα 1. Στο πρόβλημα 1 υποθέτουμε ότι οι τρεις πλευρές της πλάκας του σχ. (1.2) διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία $0°C$ ενώ η τέταρτη πλευρά έχει θερμοκρασία $F_1(x)$. Ζητάμε να βρούμε τη θερμοκρασία της πλάκας σε ένα τυχαίο σημείο στη μόνιμη κατάσταση.



Σχήμα 1.2

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \beta \end{cases}$$

Η θερμοκρασία $u(x,y)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad ή \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ όταν } (x,y) \in D \tag{1.1}$$

Για την επίλυση της εξ. (1.1) υποθέτω ότι έχω λύσεις της μορφής $X(x)Y(y)$, οι οποίες εξαρτώνται από τις δύο συναρτήσεις $X(x)$ και $Y(y)$, δηλαδή:

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Οπότε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξ. (1.1), έχουμε:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Leftrightarrow X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) \Leftrightarrow$$

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \tag{1.2}$$

Όπου λ = σταθερά διαχωρισμού.
Άρα από την εξ. (1.2), έχουμε:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{1.3}$$

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \tag{1.4}$$

<u>Περίπτωση Ι</u>

Με $\lambda = 0$ και αντικαθιστώντας στις εξ. (1.3) και (1.4), έχουμε:

$$X''(x) = 0 \tag{1.5}$$

$$Y''(y) = 0 \tag{1.6}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.5), παίρνουμε:

$$X''(x) = 0 \Leftrightarrow X'(x) = c_1 \Leftrightarrow X(x) = \int c_1 dx + c_2 = c_1 x + c_2$$

Όπου $c_1, c_2 \epsilon R$.

Ομοίως για τη σχ. (1.6), έχουμε:

$$Y''(y) = 0 \Leftrightarrow Y'(y) = c_3 \Leftrightarrow Y(y) = \int c_3 dy + c_4 = c_3 y + c_4$$

Όπου $c_3, c_4 \epsilon R$.

Οπότε για $\lambda = 0$, η γενική λύση είναι της μορφής:

$$u(x,y) = (c_1 x + c_2)(c_3 y + c_4)$$

Όπου c_1, c_2, c_3 και c_4 είναι αυθαίρετες σταθερές.

<u>Περίπτωση ΙΙ</u>

Θέτοντας $\lambda = \omega^2$ αντικαθιστούμε στις σχ. (1.3) και (1.4) και έχουμε:

Από τη σχέση (1.3):

$$X''(x) - \omega^2 X(x) = 0 \tag{1.7}$$

Η λύση της εξ. (1.7) είναι εκθετικής μορφής:

$$X(x) = e^{\rho x}$$
$$X'(x) = \rho\, e^{\rho x}$$
$$X''(x) = \rho^2\, e^{\rho x}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξ. (1.7), έχουμε:

$$(\rho^2 - \omega^2)\, e^{\rho x} = 0\,,\ \forall x$$

$$\rho^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 = \omega^2 \Leftrightarrow \rho_1 = \omega \text{ και } \rho_2 = -\,\omega$$

Η περίπτωση αυτή δίνει:

$$X(x) = A\, e^{\omega x} + B\, e^{-\omega x}$$

Από τη σχέση (1.4):

$$Y''(y) + \omega^2\, Y(y) = 0 \tag{1.8}$$

Θέτουμε:

$$Y(y) = e^{\rho y}$$
$$Y'(y) = \rho\, e^{\rho y}$$
$$Y''(y) = \rho^2\, e^{\rho y}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην εξ. (1.8), έχουμε:

$$(\rho^2 + \omega^2)\, e^{\rho y} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 = -\,\omega^2 \Leftrightarrow \rho^2 = i^2\omega^2 \Leftrightarrow \rho^2 = (i\omega)^2$$

$$\Leftrightarrow\ \rho_1 = i\omega \text{ και } \rho_2 = -\,i\omega$$

Η περίπτωση αυτή δίνει:

$$Y(y) = C\cos\omega y + D\sin\omega y$$

Οπότε για $\lambda > 0$, η γενική λύση είναι της μορφής:

$$u(x,y) = (A\, e^{\omega x} + B\, e^{-\omega x})(C\cos\omega y + D\sin\omega y)$$

Όπου A,B,C και D είναι αυθαίρετες σταθερές.

<u>Περίπτωση ΙΙΙ</u>

Θέτοντας $\lambda = -\,\omega^2$ και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (1.3) και (1.4), έχουμε:

$$X''(x) + \omega^2\, X(x) = 0$$
$$Y''(y) - \omega^2\, Y(y) = 0$$

Ομοίως με περίπτωση ΙΙ προκύπτει ότι:

$$X(x) = E\cos \omega x + F\sin \omega x$$

$$Y(y) = G\,e^{\omega y} + H\,e^{-\omega y}$$

Οπότε για $\lambda < 0$, η γενική λύση είναι της μορφής:

$$u(x,y) = (E\cos \omega x + F\sin \omega x)(G\,e^{\omega y} + H\,e^{-\omega y})$$

Όπου E,F,G,H είναι αυθαίρετες σταθερές.
Για τη λύση του προβλήματος πρέπει να ικανοποιούνται και οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

$$u(0,y) = 0 \quad (1.9)$$
$$u(\alpha,y) = 0 \quad (1.10)$$
$$u(x,\beta) = 0 ,\forall x \quad (1.11)$$
$$u(x,0) = F_1(x) \quad (1.12)$$

Η περίπτωση που ικανοποιεί και τις τέσσερις συνθήκες είναι η περίπτωση ΙΙΙ, δηλαδή όταν $\lambda < 0$. Από τις ταυτότητες των υπερβολικών συναρτήσεων:

$sinhx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ και $coshx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$, και για Ε = 0, η λύση που βρήκαμε στην Περίπτωση ΙΙΙ, παίρνει την εξής μορφή:

$$u(x,y) = (G\sin h\omega y + H\cos h\omega y)\,F\sin \omega x \quad (1.13)$$

Έτσι ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη (1.9).
Για $x = \alpha$, η εξ. (1.13) γίνεται:

$$0 = F\sin \omega\alpha\,(G\sin h\omega y + H\cos h\omega y) \;, \forall y \quad (1.14)$$

Για να ισχύει η παραπάνω εξίσωση πρέπει:

$$\sin \omega\alpha = 0 \Leftrightarrow \omega\alpha = n\pi \Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{\alpha} \;, n = 1,2,3,\ldots$$

Αντικαθιστώντας το ω_n στην εξ. (1.13), παίρνουμε:

$$u(x,y) = F_n \sin\frac{n\pi x}{\alpha}\,[G_n \sinh\frac{n\pi y}{a} + H_n \cosh\frac{n\pi y}{a}] \tag{1.15}$$

Ετσι ικανοποιείται και η συνθήκη (1.10).
Για $y = \beta$, η εξ. (1.15) γίνεται:

$$0 = \sin\frac{n\pi x}{a}\,(G_n \sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha} + H_n \cosh\frac{n\pi\beta}{\alpha}) \Leftrightarrow$$

$$G_n \sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha} + H_n \cosh\frac{n\pi\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$H_n = - G_n \tanh\frac{n\pi\beta}{\alpha} \tag{1.16}$$

Αντικαθιστώ την εξ. (1.16) στην σχ. (1.15) και έχουμε:

$$u(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\,[G_n \sinh\frac{n\pi y}{a} - G_n \tanh\frac{n\pi\beta}{\alpha} \cosh\frac{n\pi y}{a}] \Leftrightarrow$$

$$u(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\,[G_n \sinh\frac{n\pi y}{a} - G_n \frac{\sinh\frac{n\pi\beta}{a}}{\cosh\frac{n\pi\beta}{\alpha}} \cosh\frac{n\pi y}{a}]$$

Από την ταυτότητα των υπερβολικών συναρτήσεων:

$\sinh(A - B) = \sinh A \cosh B - \cosh A \sinh B$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$u(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\,\frac{Gn}{\cosh\frac{n\pi\beta}{\alpha}}\,[\cosh\frac{n\pi\beta}{\alpha} \sinh\frac{n\pi y}{a} - \sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha} \cosh\frac{n\pi y}{a}] \Leftrightarrow$$

$$u(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\,G_n\,(\sinh\frac{n\pi(y-\beta)}{\alpha}) \tag{1.17}$$

Έτσι ικανοποιείται και η συνθήκη (1.11).
Από την εξ. (1.17) προκύπτει:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi(\beta-y)}{a}$$

Για να εφαρμόσουμε τη συνθήκη (1.12), δηλαδή για $y = 0$, χρειάστηκε να αντιστρέψουμε τον όρο $(y - \beta)$, έτσι ώστε να μην έχουμε αρνητικούς όρους μέσα στην εξίσωση, επομένως:

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{1.18}$$

Θεωρώ την περιττή επέκταση της $F_1(x)$ στο διάστημα $-\alpha \leq x \leq \alpha$, η οποία έχει ένα ανάπτυγμα ημιτόνων Fourier το οποίο είναι:

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_1} \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{1.19}$$

Από το Παράρτημα Α, ο συντελεστής Fourier όταν έχω περιττή επέκταση είναι:

$$b_{n_1} = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} F_1 \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a F_1(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

Άρα από τις εξ. (1.18) και (1.19), παίρνουμε:

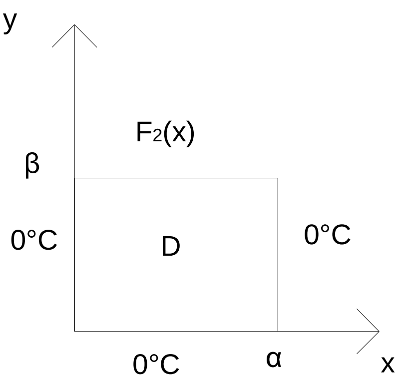
$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n \sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin\frac{n\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_1} \sin\frac{n\pi x}{a} \Leftrightarrow$$

$$G_n \sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha} = b_{n_1} \Leftrightarrow G_n = \frac{bn_1}{\sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha}}$$

Η ζητούμενη λύση, αντικαθιστώντας το b_{n_1} που υπολογίσαμε παραπάνω είναι:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn_1}{\sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha}} \sinh\frac{n\pi(\beta-y)}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}, \text{ όταν } n = 1,2,3,\ldots \tag{1.20}$$

1.1.2 Πρόβλημα 2. Στο Πρόβλημα 2 υποθέτουμε ότι οι τρεις πλευρές της ορθογώνιας πλάκας του σχ. (1.3) διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία 0°C ενώ η τέταρτη πλευρά βρίσκεται σε θερμοκρασία $F_2(x)$, οπότε:



Σχήμα 1.3

Στην περίπτωση αυτή οι συνοριακές συνθήκες διαμορφώνονται ως εξής:

$$u(0,y) = 0 \tag{1.21}$$
$$u(\alpha,y) = 0 \tag{1.22}$$
$$u(x,0) = 0 \tag{1.23}$$
$$u(x,\beta) = F_2(x) \tag{1.24}$$

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα επιλύουμε την εξίσωση Laplace και έχουμε τις εξής λύσεις:

Από την περίπτωση I:

$$u(x,y) = (c_1 x + c_2)(c_3 y + c_4) \text{ , όπου } c_1,c_2,c_3,c_4 \in R$$

Από την περίπτωση II:

$$u(x,y) = (A\,e^{\omega x} + B\,e^{-\omega x})(C\cos\omega y + D\sin\omega y) \text{ , όπου } A,B,C,D \in R$$

Από την περίπτωση III:

$$u(x,y) = (E\cos\omega x + F\sin\omega x)(G\,e^{\omega y} + H\,e^{-\omega y}) \text{ , όπου } E,F,G,H \in R$$

Η περίπτωση που ικανοποιεί και τις τέσσερις συνθήκες είναι η III.
Για $E = 0$, παίρνουμε:

$$u(x,y) = F\sin\omega x\,(G\sinh\omega y + H\cosh\omega y) \tag{1.25}$$

Οπότε η συνθήκη (1.21) ικανοποιείται.
Για $x = \alpha$, η εξ. (1.25) γίνεται:

$$F\sin\omega\alpha\,(G\sinh\omega y + H\cosh\omega y) = 0$$

Για να ικανοποιείται αυτή η σχέση πρέπει:

$$\sin\omega\alpha = 0 \Leftrightarrow \omega\alpha = n\pi \Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{\alpha} \text{ , } n = 1,2,3,..$$

Αντικαθιστώντας το ω_n στην εξ. (1.25), έχουμε:

$$u(x,y) = F_n \sin\frac{n\pi x}{a}\left(G_n \sinh\frac{n\pi y}{a} + H_n \cosh\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Έτσι, ικανοποιείται και η συνθήκη (1.22).
Για $y = 0$:

$$\sin\frac{n\pi x}{a}\,(G_n \sinh\frac{n\pi}{\alpha}\,0) = 0$$

Άρα ικανοποιείται και η συνθήκη (1.23).
Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (1.24), παίρνουμε:

$$F_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{1.26}$$

Θεωρώ την περιττή επέκταση της $F_2(x)$ στο διάστημα $-\alpha \leq x \leq \alpha$ η οποία έχει ένα ανάπτυγμα ημιτόνων Fourier το οποίο είναι:

$$F_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_2}\sin\frac{n\pi x}{a} \Leftrightarrow b_{n_2} = \frac{2}{a}\int_0^a F_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{1.27}$$

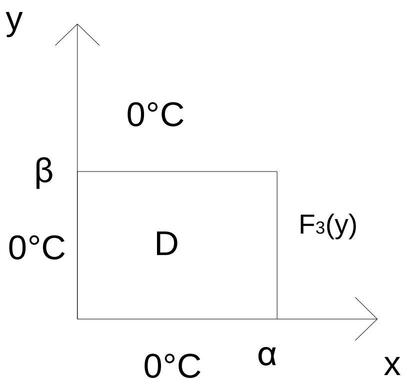
Επομένως, από τις εξ. (1.26) και (1.27) προκύπτει ότι:

$$G_n = \frac{bn_2}{\sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha}}$$

Η ζητούμενη λύση, αντικαθιστώντας το b_{n_2} είναι:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{bn_2}{\sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a},\ n = 1,2,3,.. \tag{1.28}$$

1.1.3 Πρόβλημα 3. Στο Πρόβλημα 3 θεωρούμε ότι η μία πλευρά της πλάκας βρίσκεται σε θερμοκρασία $F_3(y)$ ενώ οι υπόλοιπες έχουν μηδενικη θερμοκρασία όπως δείχνει το σχ. (1.4):



Σχήμα 1.4

Στην περίπτωση αυτή, οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής:

$$u(0,y) = 0 \quad (1.29)$$
$$u(x,0) = 0 \quad (1.30)$$
$$u(x,\beta) = 0 \quad (1.31)$$
$$u(\alpha,y) = F_3(y) \quad (1.32)$$

Από τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών κρατάμε τη λύση της μορφή ΙΙ και έχουμε:

$$u(x,y) = (A \sinh \omega x + B \cosh \omega x)(C \cos \omega y + D \sin \omega y)$$

Για $B = 0$ έχουμε:

$$u(x,y) = A \sinh \omega x \,(C \cos \omega y + D \sin \omega y) \quad (1.33)$$

Έτσι ικανοποιείται η συνθήκη (1.29).
Για $C = 0$, η σχέση (1.33) γίνεται:

$$u(x,y) = A \sinh \omega x \sin \omega y \quad (1.34)$$

Έτσι ικανοποιείται και η συνθήκη (1.30).
Για $y = \beta$, η εξ. (1.34) γίνεται:

$$A \sinh \omega x \sin \omega\beta = 0 \Leftrightarrow \omega\beta = 0 \Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{\beta}$$

Αντικαθιστώντας το ω_n στην εξ. (1.34), έχουμε:

$$u(x,y) = A_n \sinh\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{\beta} \tag{1.35}$$

Έτσι ικανοποιείται και η συνθήκη (1.31).
Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (1.32) στην εξ. (1.35) έχουμε:

$$F_3(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}\sin\frac{n\pi y}{\beta} \tag{1.36}$$

Θεωρώ την περιττή επέκταση της $F_3(y)$ στο διάστημα $-\beta \leq y \leq \beta$ και έχουμε:

$$F_3(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_3}\sin\frac{n\pi y}{\beta} \Leftrightarrow b_{n_3} = \frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} F_3(y)\sin\frac{n\pi y}{\beta}\,dy \tag{1.37}$$

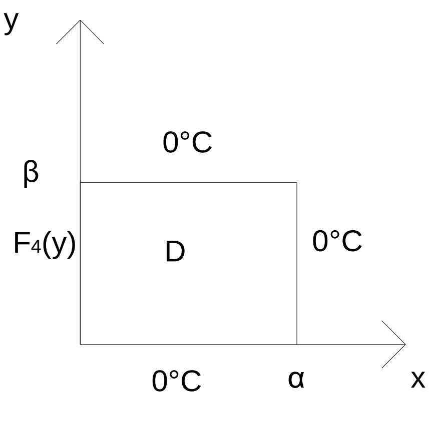
Εξισώνοντας τις σχέσεις (1.36) και (1.37) έχουμε:

$$A_n = \frac{bn_3}{\sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}}$$

Η ζητούμενη λύση, αντικαθιστώντας το b_{n_3} είναι:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{bn_3}{\sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}}\sinh\frac{n\pi x}{\beta}\sin\frac{n\pi y}{\beta}, \; n = 1,2,3,.. \tag{1.38}$$

1.1.4 Πρόβλημα 4. Στο Πρόβλημα 4 θεωρούμε ότι η μία πλευρά της πλάκας βρίσκεται σε θερμοκρασία $F_4(y)$ ενώ οι υπόλοιπες έχουν μηδενική θερμοκρασία όπως δείχνει και το σχ. (1.5):



Σχήμα 1.5

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής:

$$u(x,\beta) = 0 \quad (1.39)$$
$$u(x,0) = 0 \quad (1.40)$$
$$u(\alpha,y) = 0 \quad (1.41)$$
$$u(0,y) = F_4(y) \quad (1.42)$$

Στην περίπτωση αυτή κρατάμε λύσεις της μορφής II:

$$u(x,y) = (A \sinh \omega x + B \cosh \omega x)(C \cos \omega y + D \sin \omega y)$$

Για $C = 0$ έχουμε:

$$u(x,y) = (A \sinh \omega x + B \cosh \omega x)\, D \sin \omega y \quad (1.43)$$

Έτσι ικανοποιείται η συνθήκη (1.39).
Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη συνθήκη (1.40):

$$(A \sinh \omega x + B \cosh \omega x)\, D \sin \omega\beta = 0$$

$$\omega\beta = 0 \Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{\beta}$$

Αντικαθιστώντας το ω_n στην εξ. (1.43) ικανοποιείται και η συνθήκη (1.40).

$$(A_n \sinh \frac{n\pi\alpha}{\beta} + B_n \cosh \frac{n\pi\alpha}{\beta})\, D_n \sin \frac{n\pi y}{\beta} = 0 \Leftrightarrow A_n \sinh \frac{n\pi\alpha}{\beta} + B_n \cosh \frac{n\pi\alpha}{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow B_n = - A_n \tanh \frac{n\pi\alpha}{\beta}$$

Αντικαθιστώντας το B_n στην εξ. (1.43) έχουμε:

$$u(x,y) = (A_n \sinh \frac{n\pi x}{\beta} - A_n \tanh \frac{n\pi\alpha}{\beta} \cosh \frac{n\pi x}{\beta})\, D_n \sin \frac{n\pi y}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$u(x,y) = (A_n \sinh \frac{n\pi x}{\beta} - A_n \frac{\sinh \frac{n\pi\alpha}{\beta}}{\cosh \frac{n\pi\alpha}{\beta}} \cosh \frac{n\pi x}{\beta})\, D_n \sin \frac{n\pi y}{\beta}$$

Από την ταυτότητα των υπερβολικών συναρτήσεων:

$sinh(A\text{-}B) = sinhA\, coshB - coshA\, sinhB$, προκύπτει:

$$u(x,y) = A_n \frac{sin\frac{n\pi y}{\beta}}{cosh\frac{n\pi\alpha}{\beta}} (sinh\frac{n\pi x}{\beta}\, cosh\frac{n\pi\alpha}{\beta} - sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}\, cosh\frac{n\pi x}{\beta}) \Leftrightarrow$$

$$u(x,y) = A_n\, sin\frac{n\pi y}{\beta}\, sinh\frac{n\pi(x-\alpha)}{\beta}$$

Έτσι ικανοποιείται και η συνθήκη (1.41).
Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (1.42) έχουμε:

$$F_4(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_2\, sin\frac{n\pi y}{\beta}\, sinh\frac{n\pi a}{\beta} \tag{1.44}$$

Θεωρώ την περιττή επέκταση της $F_4(y)$ στο διάστημα $-\beta \le y \le \beta$. Οπότε:

$$F_4(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_4}\, sin\frac{n\pi y}{\beta} \Leftrightarrow b_{n_4} = \frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} F_4(y)\, sin\frac{n\pi y}{\beta}\, dy \tag{1.45}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (1.44) και (1.45) έχουμε:

$$A_n = \frac{bn_4}{sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}}$$

Η ζητούμενη λύση, αντικαθιστώντας το b_{n_4} είναι:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn_4}{sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}}\, sinh\frac{n\pi(x-a)}{\beta}\, sin\frac{n\pi y}{\beta},\ n = 1,2,3,.. \tag{1.46}$$

Η λύση του αρχικού προβλήματος προκύπτει από το άθροισμα των σχ. (1.20),(1.28),(1.38) και (1.46), δηλαδή:

$$u(x,y) = [\sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn_1}{sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha}}\, sinh\frac{n\pi(\beta-y)}{a}\, sin\frac{n\pi x}{a}]$$

$$+\ [\sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn_2}{sinh\frac{n\pi\beta}{\alpha}}\, sin\frac{n\pi x}{a}\, sinh\frac{n\pi y}{a}]$$

$$+\ [\sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn_3}{sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}}\, sinh\frac{n\pi x}{\beta}\, sin\frac{n\pi y}{\beta}]$$

$$+ \ [\sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn_4}{sinh\frac{n\pi\alpha}{\beta}} sinh\,\frac{n\pi(x-a)}{\beta}\, sin\,\frac{n\pi y}{\beta}]$$

2.Η ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΤΙΣ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LAPLACE ΣΤΟ ΠΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) στις πολικές συντεταγμένες (ρ,θ) είναι οι παρακάτω :

$$x = \rho cos\theta \tag{2.1}$$
$$y = \rho sin\theta \tag{2.2}$$

Ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.3}$$
$$\theta = tan^{-1}(y/x) \tag{2.4}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξ. (2.1) και (2.2) παραγωγίζουμε την $u(x,y)$ ως προς ρ και ως προς θ. Επομένως:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial u}{\partial y} = cos\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} + sin\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial y} = -\,\rho\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.6}$$

Θεωρώντας τις εξ. (2.5) και (2.6) σαν σύστημα με αγνώστους τα $\partial/\partial x$ και $\partial/\partial y$ σε μορφή πινάκων γράφονται ως εξής :

$$\begin{bmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ -\rho\,sin\,\theta & \rho\,cos\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial \rho \\ \partial/\partial \theta \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Υπολογίζουμε την (2 × 2) ορίζουσα του πίνακα, οπότε :

$$|A(\rho,\theta)| = \rho cos^2\theta + \rho sin^2\theta = \rho$$

Στην συνέχεια, βρίσκουμε τον αντίστροφο του πίνακα:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A(\rho,\theta)|}\begin{bmatrix} \rho cos\theta & -sin\theta \\ \rho sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\,\theta/\rho \\ sin\theta & cos\,\theta/\rho \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο πίνακα τον (2.7) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\,\theta/\rho \\ sin\theta & cos\,\theta/\rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial/\partial \rho \\ \partial/\partial \theta \end{bmatrix}$$

Έτσι, καταλήγουμε στις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial x} = cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2.8}$$

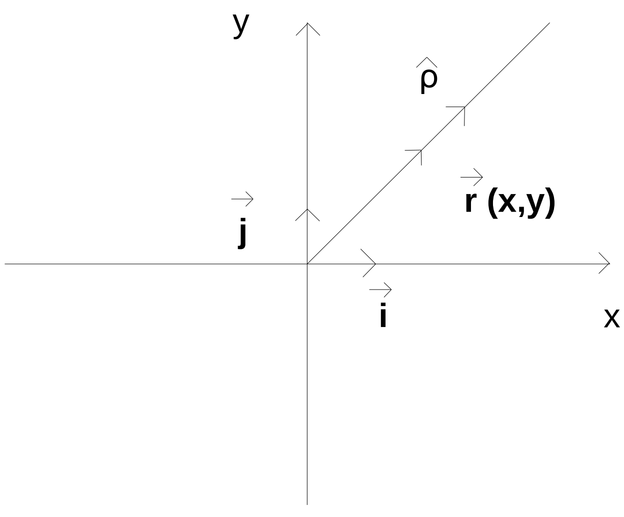
$$\frac{\partial}{\partial y} = sin\theta\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{cos\,\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2.9}$$

Έστω ότι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου είναι $\vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Τα μοναδιαία διανύσματα θέσης ρ και θ των πολικών συντεταγμένων σχετίζονται με τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα x και y των καρτεσιανών. Οπότε:

$$\vec{r}(\rho,\theta\,) = \rho\,cos\,\theta\vec{\imath} + \rho\,sin\,\theta\vec{\jmath} \tag{2.10}$$

Στο σημείο αυτό, έχουμε δύο περιπτώσεις:

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι:</u>



Σχήμα 2.1

Όταν η γωνία θ είναι σταθερή, τότε η μερική παράγωγος ως προς ρ και το μέτρο του διανύσματος θα είναι:

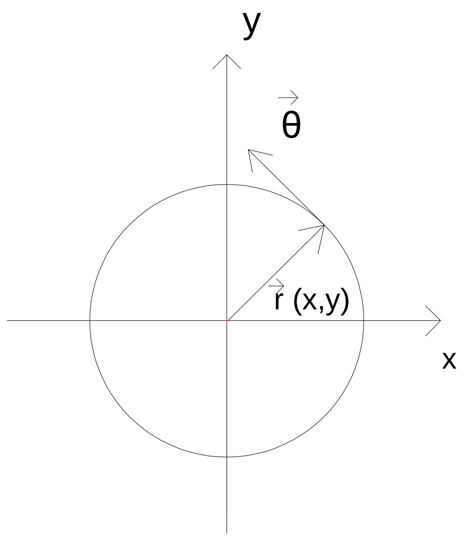
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j}$$

$$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right\| = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = 1$$

Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\rho}$ προκύπτει ότι είναι:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right\|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} \qquad (2.11)$$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ:</u>



Σχήμα 2.2

Όταν η ακτίνα ρ είναι σταθερή, τότε η μερική παράγωγος ως προς θ και το μέτρο του διανύσματος θα είναι :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\rho sin\theta\,\vec{i} + \rho cos\theta\,\vec{j}$$

$$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right\| = \sqrt{(\rho sin\theta)^2 + (\rho cos\theta)^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\theta}$ προκύπτει ότι είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right\|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\,sin\theta\,\vec{\imath} + cos\theta\,\vec{\jmath} \tag{2.12}$$

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσουμε ότι τα διανύσματα $\hat{\rho}$ και $\hat{\theta}$ είναι ορθομοναδιαία, δηλαδή έχουν μέτρο μονάδα και είναι κάθετα μεταξύ τους. Οπότε ισχύει :

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = 0$$

Θεωρούμε τις εξ. (2.11) και (2.12) σαν γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\theta} \end{bmatrix}$$

Η (2 × 2) ορίζουσα του πίνακα Α του συστήματος είναι:

$$|A(\rho,\theta)| = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix}$$

Οπότε, προκύπτει ότι:

$$\vec{\imath} = cos\theta\,\hat{\rho} - sin\theta\,\hat{\theta} \tag{2.13}$$

$$\vec{\jmath} = sin\theta\,\hat{\rho} + cos\theta\,\hat{\theta} \tag{2.14}$$

Από τις εξ. (2.8) , (2.9) , (2.13) και (2.14) υπολογίζεται ο τελεστής της κλίσης:

$$\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} =$$

$$= (\, cos\theta\,\hat{\rho} - sin\theta\,\hat{\theta}\,)\,(cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\,) + (sin\theta\,\hat{\rho} + cos\theta\,\hat{\theta})\,(sin\theta\frac{\partial}{\partial \rho} +$$

$$\frac{cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\,) = \hat{\rho}\,(\, cos^2\theta\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{sin\theta\; cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + sin^2\theta\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{sin\theta\; cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\,) +$$

$$\hat{\theta}\ (-\ sin\theta\, cos\theta \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + sin\theta\, cos\theta \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{cos^2\theta}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ ) =$$

$$\hat{\rho}\ [\ (cos^2\theta + sin^2\theta) \frac{\partial}{\partial\rho}\ ] + \hat{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} =$$

$$\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\theta}\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τις παρακάτω σχέσεις που προκύπτουν από τις εξ. (2.11) και (2.12):

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\rho} = \vec{0}\ ,\ \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\theta} = \hat{\theta}\ ,\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\rho} = \vec{0}\ ,\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\ \hat{\rho}$$

Καταλήγουμε στην εξίσωση Laplace ως εξής:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla =$$

$$(\ \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\theta}\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ )\cdot(\ \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\theta}\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ )\ = (\ \hat{\rho}\cdot\ \hat{\rho})\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (\ \hat{\rho}\cdot\ \hat{\theta})\frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}) +$$

$$(\ \hat{\theta}\cdot\ \hat{\rho})\frac{\partial}{\partial\rho}\ (\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ ) + (\ \hat{\theta}\cdot\hat{\theta})\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho} + (\ \hat{\theta}\cdot\ \hat{\theta})\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ (\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ ) - (\ \hat{\theta}\cdot\ \hat{\rho})$$

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{2.15}$$

Ένας δεύτερος τρόπος να καταλήξουμε στην εξίσωση Laplace είναι να βρούμε τις δεύτερες παραγώγους των σχ. (2.8) και (2.9):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{sin\theta\ cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{sin\theta\ cos\theta}{\rho}\ \frac{\partial^2}{\partial\rho\ \partial\theta}$$

$$+\ \frac{sin^2\theta}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{sin\theta\ cos\theta}{\rho}\ \frac{\partial^2}{\partial\rho\ \partial\theta} \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2sin\theta\ cos\theta}{\rho}\ \frac{\partial^2}{\partial\rho\ \partial\theta} + \frac{cos^2\theta}{\rho^2}\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$+\ \frac{\cos^2\theta}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{2\sin\theta\ \cos\theta}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (2.17)$$

Προσθέτοντας τις σχ. (2.16) και (2.17) καταλήγουμε στην εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \qquad ή \qquad \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0$$

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Για την επίλυση της εξ. (2.15) υποθέτω ότι έχω λύσεις της μορφής $P(\rho)\Theta(\theta)$, οι οποίες εξαρτώνται από τις δύο συναρτήσεις $P(\rho)$ και $\Theta(\theta)$, δηλαδή:

$$u(\rho,\theta) = P(\rho)\ \Theta(\theta) \qquad (2.18)$$

Οπότε αντικαθιστώντας την εξ. (2.18) στην (2.15) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{\rho}P'(\rho)\Theta(\theta) + P''(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Theta''(\theta) = 0 \qquad (2.19)$$

Προκείμενου να απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση διαιρούμε με $P(\rho)\Theta(\theta)$, πολλαπλασιάζουμε με ρ^2 και έχουμε :

$$\rho\ \frac{P'(\rho)}{P(\rho)} + \ \rho^{2}\ \frac{P''(\rho)}{P(\rho)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \qquad ή$$

$$\rho\frac{P'(\rho)}{P(\rho)} + \rho^2\ \frac{P''(\rho)}{P(\rho)} = -\ \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

όπου λ = σταθερά διαχωρισμού.
Άρα:

$$\rho\frac{P'(\rho)}{P(\rho)} + \rho^2\ \frac{P''(\rho)}{P(\rho)} = \lambda \Leftrightarrow \rho^2\ P(\rho) + \rho\ P(\rho) - \lambda\ P(\rho) = 0 \qquad (2.20)$$

$$-\ \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \Leftrightarrow \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \qquad (2.21)$$

Από την εξ. (2.21) έχουμε τις τρείς παρακάτω περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι:
Θέτω όπου λ = - ω^2 . Επομένως:

$$\Theta''(\theta) - \omega^2\, \Theta(\theta) = 0$$

Υποθέτω ότι η λύση είναι εκθετικής μορφής:

$$\Theta(\theta) = e^{\rho\theta}$$
$$\Theta'(\theta) = \rho\, e^{\rho\theta}$$
$$\Theta''(\theta) = \rho^2\, e^{\rho\theta}$$

Άρα, η περίπτωση αυτή δίνει την παρακάτω λύση:

$$\Theta(\theta) = c_1\, e^{\omega\theta} + c_2\, e^{-\omega\theta}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ:
Θέτω όπου λ είναι ίσο με το μηδέν και έχουμε:

$$\Theta''(\theta) = 0$$
$$\Theta'(\theta) = c_3\, \theta$$
$$\Theta''(\theta) = c_3\theta + c_4$$

Οι λύσεις από τις περιπτώσεις Ι και ΙΙ δεν μας ικανοποιούν επειδή το $\theta\, \epsilon[0{,}2\pi)$. Κατά συνέπεια χρειαζόμαστε περιοδικότητα η οποία στις συγκεκριμένες περιπτώσεις δεν υπάρχει.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙΙ:
Θέτω όπου $\lambda = \omega^2$. Επομένως, έχουμε:

$$\Theta''(\theta) + \omega^2\Theta(\theta) = 0 \tag{2.22}$$

$$\Theta(\theta) = e^{\rho\theta}$$
$$\Theta'(\theta) = \rho\, e^{\rho\theta}$$
$$\Theta''(\theta) = \rho^2\, e^{\rho\theta}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξ. (2.22), έχουμε:

$$(\rho^2+\omega^2)\, e^{\rho\theta} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 = -\,\omega^2 \Leftrightarrow \rho^2 = i^2\, \omega^2 = (i\omega)^2 \Leftrightarrow$$

$\rho_1 = i\omega$ και $\rho_2 = -i\omega$

Η περίπτωση αυτή δίνει:

$$\Theta(\theta) = c_5 \cos\omega\theta + c_6 \sin\omega\theta$$

Ζητάμε λύσεις στο θ με περίοδο 2π, άρα:

$$\sin\omega(\theta+2\pi) = \sin\omega\theta \Leftrightarrow \sin(\omega\theta+2\pi\omega) = \sin\omega\theta$$

Άρα $\omega = n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$
Άρα το λ ισούται με n^2.

Από την εξ. (2.20) έχουμε τις δύο εξής περιπτώσεις:

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) - n^2 P(\rho) = 0 \qquad (2.23)$$

Η εξ. (2.23) είναι τύπου Euler, δηλαδή:

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - n^2 y(x) = 0$$

Και δέχεται λύσεις της μορφής:

$$y(x) = x^{\lambda}$$
$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$$
$$y''(x) = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην εξ. (2.23):

$$x^2 \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2} + x \lambda x^{\lambda-1} - n^2 x^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x^{\lambda}[\lambda(\lambda-1) + \lambda - n^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - n^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = n^2 \Leftrightarrow \lambda = n \quad ή \quad \lambda = -n$$

Οπότε για n διαφορετικό από μηδέν, οι λύσεις που προκύπτουν είναι: $\{ x^n, x^{-n} \}$.
Ενώ όταν n = 0, η εξ. (2.23) γίνεται:

$$x^2 y''(x) + x y'(x) = 0$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, έχουμε $y'(x) = F(x)$:

$$x^2 F'(x) + x F(x) = 0 \Leftrightarrow x F'(x) + F(x) = 0 \Leftrightarrow x F'(x) + x' F(x) = 0 \Leftrightarrow$$

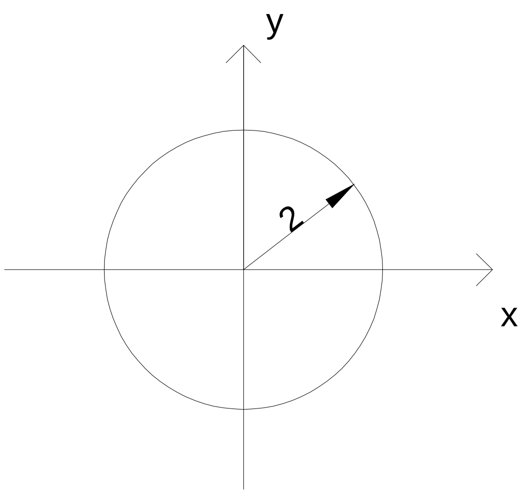
$$(x F(x))' = 0 \Leftrightarrow x F(x) = c_1 \Leftrightarrow F(x) = \frac{x}{c1} \Leftrightarrow y'(x) = \frac{x}{c1} \Leftrightarrow$$

$$y = c_1 \int \frac{1}{x} \partial x + c_2 = c_1 \ln x + c_2$$

Επομένως, η γενική λύση είναι η εξής:

$$u(\rho,\theta) = \alpha_0 + \beta_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \rho^{n} + b_n \rho^{-n}) (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta)$$

2.2.1 Η θερμοκρασία στο εσωτερικό κυκλικού δίσκου. Το πρόβλημα Dirichlet απαιτεί την επίλυση της εξίσωση Laplace $\nabla^2 u = 0$ μέσα σε ένα πεπερασμένο χωρίο D με δοσμένες τις τιμές της θερμοκρασίας u πάνω στο σύνορο R.



Σχήμα 2.3

Έστω:

$$\nabla^2 u = 0 \ , \rho < 2$$
$$u(2,\theta) = f(\theta)$$

όπου $f(\theta) = \begin{cases} 0 \, , 0 < \theta < \pi \\ 10 \, , -\pi < \theta < 0 \end{cases}$

Από τη γενική λύση που βρήκαμε στην ενότητα (2.2) για να ικανοποιείται το εσωτερικό πρόβλημα κρατάμε μόνο τις λύσεις που είναι φραγμένες:

$$u(\rho,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \rho^{n} \cos n\theta + b_n \rho^{n} \sin n\theta) \qquad (2.24)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στην λύση, έχουμε:

$$f(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((c_n 2^n)\, cosn\theta + (d_n 2^n)\, sinn\theta)$$

Οι συντελεστές c_0 , c_n , d_n υπολογίζονται ως εξής:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 10d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 0\, d\theta = \frac{10}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 1d\theta \Leftrightarrow c_0 = 5$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)cosn\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 10cosn\theta\, d\theta + \int_{0}^{\pi} 0cosn\theta\, d\theta\right) =$$

$$\frac{10}{n\pi}(sinn0 - sinn(-\pi)) \Leftrightarrow c_n = 0$$

$$d_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sinn\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 10\, sinn\theta\, d\theta + \int_{0}^{\pi} 0sinn\theta\, d\theta\right) =$$

$$\frac{10}{n\pi}(cosn(-\pi) - cosn0) = \frac{10}{n\pi}[(-1)^n - 1]$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές που υπολογίσαμε στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε:

$$f(\theta) = 5 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{10}{n\pi}[(-1)^n - 1]\right] 2^n\, sinn\theta \qquad (2.25)$$

Ενώ για $\rho = 2$, η εξ. (2.24) γίνεται:

$$u(2,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n 2^n\, cosn\theta + b_n 2^n\, sinn\theta) \qquad (2.26)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των εξ.(2.25) και (2.26) βρίσκουμε ότι:

$$\alpha_0 = 5$$

$$\alpha_n 2^n = 0$$

$$b_n 2^n = \frac{10}{n\pi}[(-1)^n - 1]\, 2^n \Leftrightarrow b_n = \frac{10}{n\pi}((-1)^n - 1),\ n=1,2,3,\ldots$$

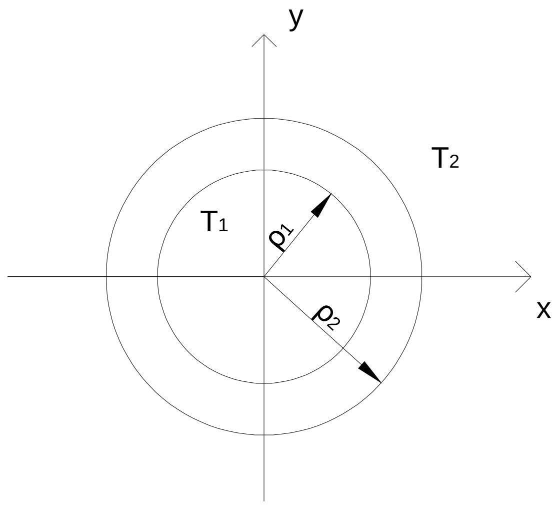
Άρα, η λύση είναι:

$$u(\rho,\theta) = 5 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{10}{n\pi} \left[(-1)^n - 1 \right] \rho^{n} \right] \sin n\theta \ , n=1,2,3,\ldots$$

Επειδή η λύση μας έχει ανάπτυγμα μόνο σε ημίτονα χρειαζόμαστε μόνο τους περιττούς όρους γιατί οι άρτιοι μηδενίζονται. Κατά συνέπεια χωρίζουμε τους περιττούς από τους άρτιους όρους, ξεκινώντας τη σειρά από $n=0$ και βάζοντας όπου n $\tau o\ 2n+1$, έχουμε:

$$u(\rho,\theta) = 5 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{10}{4n\pi(2n+1)}\rho^{2n+1} \right] \sin(2n+1)\theta$$

2.2.2 Η θερμοκρασία κυλινδρικού αγωγού με ισοθερμικές επιφάνειες. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σωλήνα με εσωτερική ακτίνα ρ_1, εξωτερική ακτίνα ρ_2 και συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k. Η εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα βρίσκεται σε θερμοκρασία T_1 και η εξωτερική σε T_2 (όπου $T_1 > T_2$). Ζητάμε την κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του τοιχώματος του σωλήνα στη μόνιμη κατάσταση καθώς και τον ρυθμό απώλειας θερμότητας.



Σχήμα 2.4

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$u(\rho_1,\theta) = T_1 \tag{2.27}$$

$$u(\rho_2,\theta) = T_2 \tag{2.28}$$

Λόγω των συνοριακών, η λύση θα είναι ανεξάρτητη του θ , άρα οι λύσεις που κρατάμε είναι οι εξής:

$$u(\rho,\theta) = \alpha_0 + \beta_0 \, ln\rho \qquad (2.29)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες (2.27) και (2.28) στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$T_1 = \alpha_0 + \beta_0 \, ln\rho_1$$

$$T_2 = \alpha_0 + \beta_0 \, ln\rho_2$$

Όπου άγνωστοι είναι οι σταθερές α_0 και β_0. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε:

$$\beta_0 = \frac{T_1 - T_2}{ln\,(\rho 2/\rho 1)}$$

$$\alpha_0 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\,(\rho 2/\rho 1)} ln\rho_1$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές α_0 και β_0 στην εξ. (2.29) βρίσκουμε την μεταβολή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του τοιχώματος του σωλήνα:

$$u(\rho,\theta) = \frac{\ln\,(\rho/\rho_1)}{\ln\,(\rho_2/\rho_1)}\,(T_1 - T_2) + T_1$$

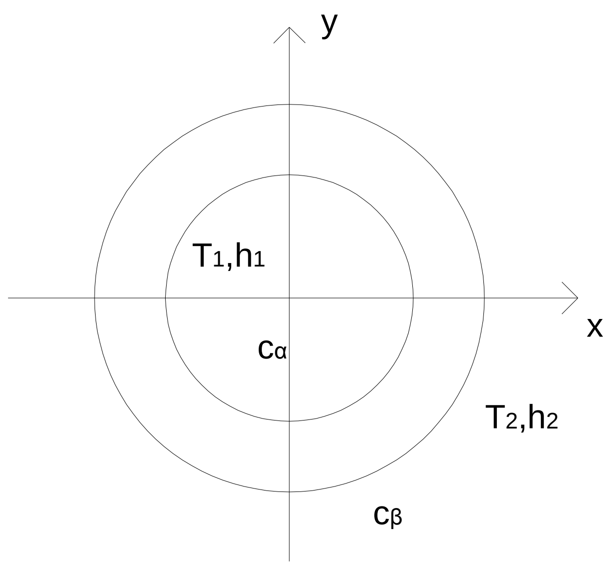
Ο ρυθμός απώλειας θερμότητας είναι ο ολικός ρυθμός αγωγής της θερμότητας διαμέσου του σωλήνα και προσδιορίζεται από το νόμο του Fourier:

$$\dot{Q} = -\,k\,A\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

Γνωρίζοντας ότι το εμβαδό της κυλινδρικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $A=2\pi\rho L$ και παραγωγίζοντας την εξ. (2.29) ως προς ρ, έχουμε:

$$\dot{Q} = -\,k\,2\pi\rho L\frac{\beta_0}{\rho} = k\,2\pi L\frac{T_2 - T_1}{ln\,(\rho_2/\rho_1)}$$

2.3.3 Η θερμοκρασία κυλινδρικού αγωγού με συνθήκες συναγωγής. Θεωρούμε ότι έχουμε έναν κυλινδρικό αγωγό με εσωτερική ακτίνα α και εξωτερική ακτίνα β. Στο εσωτερικό του ρέει θερμό ρευστό με θερμοκρασία T_1, με συντελεστή μεταφοράς θερμότητας h_1, ενώ η εξωτερική του επιφάνεια είναι εκτεθιμένη σε ρευστό με θερμοκρασία T_2 ($<T_1$) και ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας είναι h_2. Η θερμοκρασία u είναι η λύση της εξίσωσης Laplace στο χωρίο:



Σχήμα 2.5

$$D = \begin{cases} \alpha \leq \rho \leq \beta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι παρακάτω:

$$-k\frac{\partial u(\alpha,\theta)}{\partial \rho} = h_1(T_1 - u(\alpha,\theta)) \tag{2.30}$$

$$-k\frac{\partial u(\beta,\theta)}{\partial \rho} = h_2(u(\beta,\theta) - T_2) \quad \text{όταν } \theta \in [0,2\pi) \tag{2.31}$$

Από τη γενική λύση που βρήκαμε στην ενότητα 2.2,η λύση η οποία είναι ανεξάρτητη του θ θα είναι της μορφής:

$$u(\rho) = \alpha_0 + \beta_0 ln\rho \ , \ \text{όταν } \alpha \leq \rho \leq \beta$$

Εφαρμόζοντας στη λύση αυτή τις συνοριακές συνθήκες (2.30) και (2.31) βρίσκουμε ότι:

$$-k\frac{1}{\alpha}\beta_0 = h_1(T_1 - \alpha_0 - \beta_0 ln\alpha) \tag{2.32}$$

$$-k\frac{1}{\beta}\beta_0 = h_2(\alpha_0 + \beta_0 ln\beta - T_2) \tag{2.33}$$

Διαιρώντας την εξ.(2.32) με h_1 , την εξ.(2.33) με h_2 και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε τον συντελεστή β_0 :

$$\beta_0 = -\frac{T_1 - T_2}{k\left(\frac{1}{\alpha h_1} + \frac{1}{\beta h_2}\right) + ln\frac{\beta}{\alpha}}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην εξ. (2.32) και βρίσκουμε τον συντελεστή α_0:

$$\alpha_0 = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)\left(\frac{k}{\alpha h_1} - ln\alpha\right)}{k\left(\frac{1}{\alpha h_1} + \frac{1}{\beta h_2}\right) + ln\frac{\beta}{\alpha}}$$

Επομένως η λύση θα είναι:

$$u(\rho) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{k\left(\frac{1}{\alpha h_1} + \frac{1}{\beta h_2}\right) + ln\frac{\beta}{\alpha}}\left(\frac{k}{a h_1} + ln\frac{\rho}{\alpha}\right) \ , \ \alpha \leq \rho \leq \beta$$

Στην περίπτωση αυτή η θερμοκρασία στην επιφάνεια του εσωτερικού αγωγού με ακτίνα α θα είναι:

$$u(\alpha,\theta) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{k\left(\frac{1}{\alpha h_1} + \frac{1}{\beta h_2}\right) + ln\frac{\beta}{\alpha}}\left(\frac{k}{a h_1}\right)$$

δηλαδή μικρότερη από T_1, ενώ στην επιφάνεια του εξωτερικού αγωγού με ακτίνα β:

$$u(\beta,\theta) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{k\left(\frac{1}{\alpha h_1} + \frac{1}{\beta h_2}\right) + ln\frac{\beta}{\alpha}}\left(\frac{k}{\beta h_2}\right)$$

δηλαδή μεγαλύτερη από T_2.

Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}$ από τη συνθήκη (2.32) υπολογίζεται ως εξής:

$$\dot{Q} = \int_{Ca} -k\frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\alpha} \ ds = \int_0^{2\pi} -k\frac{\partial u\,(\alpha,\theta)}{\partial \rho}\,\alpha\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} h_1\,(\,T_1 - u(\alpha,\theta)\,)\alpha\, d\theta = h_1(T_1 - u(\alpha,\theta))\int_0^{2\pi} \alpha d\theta$$

$$= h_1 \cdot \frac{(T_1 - T_2)\,k/a h_1}{k\left(\frac{1}{a h_1} + \frac{1}{\beta h_2}\right) + ln\beta/\alpha}\, 2\pi\alpha \ \Leftrightarrow$$

$$\dot{Q} = \frac{k\,(T_1 - T_2)\,2\pi}{k\left(\frac{1}{a h_1} + \frac{1}{\beta h_2}\right) + ln\beta/\alpha}$$

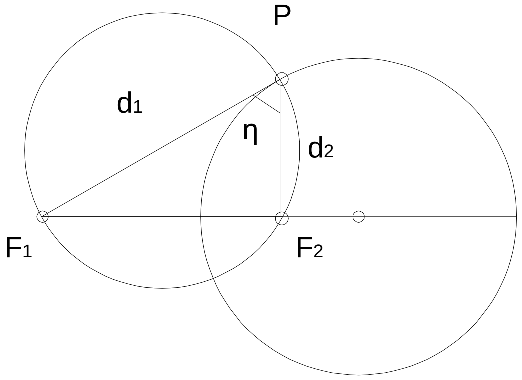
Εάν υποθέσουμε ότι ο κυλινδρικός αγωγός έχει μήκος L, τότε ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας θα είναι:

$$\dot{Q} = \frac{k\ (T_1 - T_2)\ 2\pi L}{\left(\frac{k}{a h_1} + \frac{k}{\beta h_2}\right) + ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

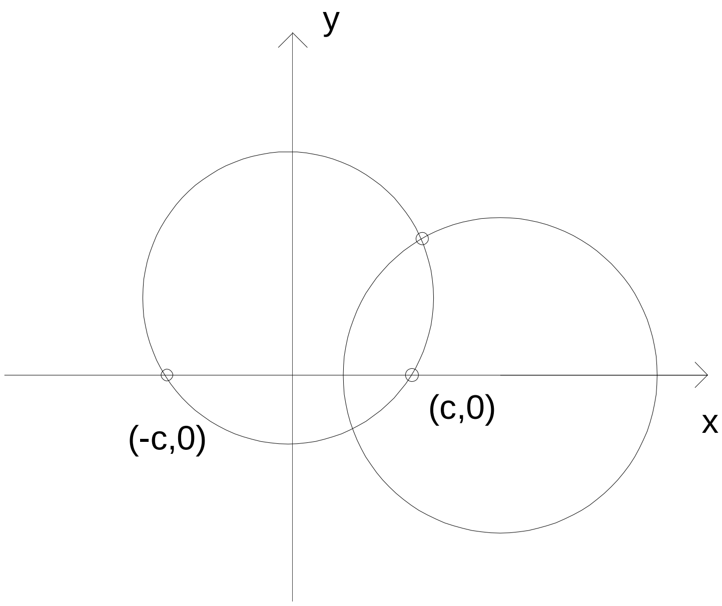
3.Η ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΤΙΣ ΔΙΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η γεωμετρική ερμηνεία των διπολικών συντεταγμένων δίνεται με τα δύο παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.2

Όπου η συντεταγμένη η ενός σημείου P ισούται με τη γωνία F_1PF_2 και η συντεταγμένη ξ ισούται με το φυσικό λογάριθμο του λόγου των αποστάσεων d_1 και d_2 :

$$\xi = ln\frac{d_1}{d_2}$$

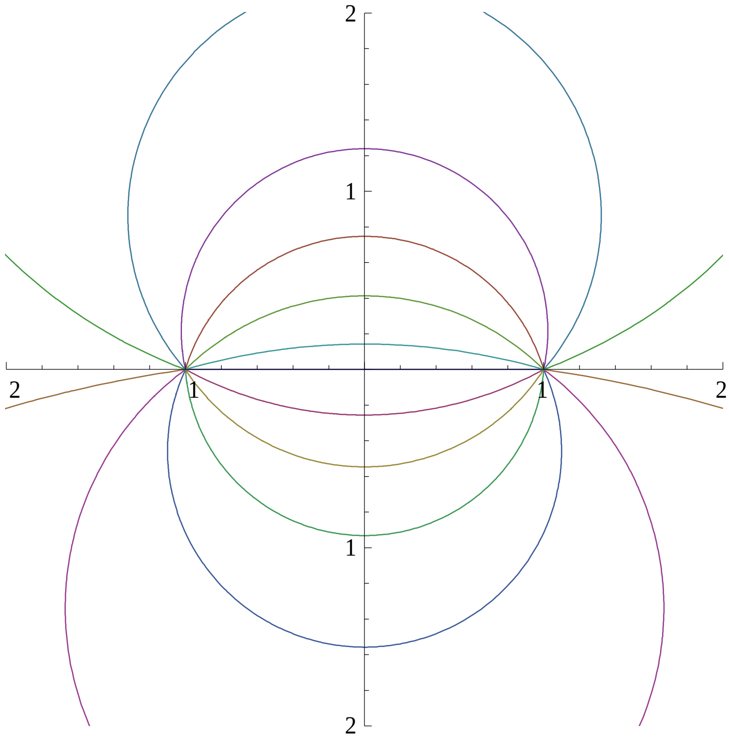
Οι εστίες F_1 και F_2 αντιστοιχούν στα σημεία $(-c,0)$ και $(c,0)$ στον άξονα x, η παράμετρος $2c$ είναι η απόσταση των δύο πόλων (εστιών) ενώ οι εξισώσεις μετασχηματισμού από τις καρτεσιανές στις διπολικές συντεταγμένες είναι:

$$x = \frac{c\ sinh\xi}{cosh\xi - cos\eta} \quad \text{και} \quad y = \frac{c\ sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}$$

Οι καμπύλες της σταθεράς η αντιστοιχούν σε μη ομόκεντρους κύκλους που διέρχονται από τις δύο εστίες.

$$(y - c\ cot\,\eta)^2 + x^2 = \left[\frac{c}{sin\eta}\right]^2$$

Όταν το η είναι σταθερό τότε ο κύκλος έχει κέντρο $(0, c\cot\eta)$ και ακτίνα $(c/\sin\eta)$. Τα κέντρα των κύκλων της σταθεράς η ανήκουν στον άξονα y. Οι κύκλοι των θετικών η έχουν τα κέντρα τους πάνω από τον άξονα x αλλά μερικά από τα αρνητικά η απλώνονται κάτω από τον άξονα. Καθώς η τιμή η αυξάνει οι ακτίνες των κύκλων μειώνονται και το κέντρο πλησιάζει την αρχή (0,0) το οποίο φτάνει όταν $|\eta| = \pi/2$,στην μέγιστη τιμή του. Στο σχ. (3.3) φαίνονται οι καμπύλες της σταθεράς η που περιγράψαμε παραπάνω:

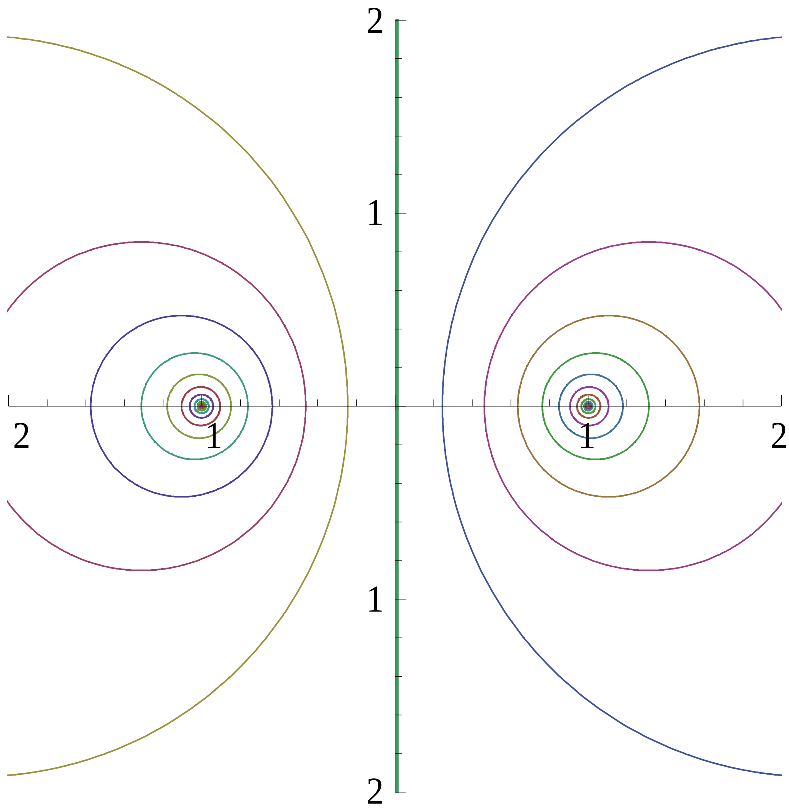


Σχήμα 3.3

Οι καμπύλες της σταθεράς ξ είναι μη-τεμνόμενοι κύκλοι με διαφορετικές ακτίνες όπου περιβάλλουν τις εστίες αλλά δεν είναι ομόκεντροι.

$$(x - c\coth\xi)^2 + y^2 = \left[\frac{c}{\sinh\xi}\right]^2$$

Όταν το ξ είναι σταθερό τότε ο κύκλος έχει κέντρο ($c\coth\xi$,0) και ακτίνα ($c/\sinh\xi$). Τα κέντρα των κύκλων της σταθεράς ξ ανήκουν στον άξονα x. Οι κύκλοι των θετικών ξ τείνουν προς τη δεξιά πλευρά του σχεδίου ($x > 0$) αλλά οι κύκλοι των αρνητικών ξ τείνουν προς την αριστερή πλευρά του σχεδίου ($x < 0$).
Η καμπύλη $\xi = 0$ αντιστοιχεί στον άξονα y ($x = 0$). Καθώς η τιμή ξ αυξάνει η ακτίνα των κύκλων μειώνεται αλλά τα κέντρα τους προσεγγίζουν τις εστίες. Στο σχ. (3.4) φαίνονται οι καμπύλες της σταθεράς ξ:



Σχήμα 3.4

3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LAPLACE ΣΤΟ ΔΙΠΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Στην περίπτωση του διπολικού συστήματος,οι εξισώσεις μετασχηματισμού δίνονται από τους δύο παρακάτω τύπους:

$$x = \frac{c\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta} \tag{3.1}$$

$$y = \frac{c\sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta} \tag{3.2}$$

Αρχικά παραγωγίζουμε την x και y ως προς ξ κρατώντας σταθερό το η και ως προς η κρατώντας σταθερό το ξ:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{c\cosh\xi(\cosh\xi - \cos\eta) - \sinh\xi \; c\sinh\xi}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2} = \frac{c\cosh^2\xi - c\cosh\xi\cos\eta - c\sinh^2\xi}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2} =$$

$$\frac{c\,(1-\cosh\xi\,\cos\eta)}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{c\,\sinh\xi(-\sin\eta)}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{c\,\sin\eta(-\sinh\xi)}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{c\,\cos\eta(\cosh\xi-\cos\eta)-\sin^2\eta}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2} = \frac{c\,\cos\eta\cosh\xi-1}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2} \tag{3.6}$$

Στη συνέχεια από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{c\,(1-\cosh\xi\cos\eta)}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-c\,\sinh\xi\,\sin\eta)}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2}\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{(-c\,\sinh\xi\sin\eta)}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{c\,\cosh\xi\cos\eta-1}{(\cosh\xi-\cos\eta)^2}\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.8}$$

Θεωρώντας τις εξ. (3.7) και (3.8) σαν ένα σύστημα με αγνώστους τα $\partial/\partial x$ και $\partial/\partial y$ τότε σε μορφή πινάκων γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχ. (3.3),(3.4),(3.5) και (3.6) υπολογίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος:

$$J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{-c^2(1-\cosh\xi\cos\eta)^2}{(\cosh\xi-\cos\eta)^4} - \frac{c^2\sinh^2\xi\,\sin^2\eta}{(\cosh\xi-\cos\eta)^4} \tag{3.10}$$

Θέλοντας να απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση απομονώνουμε τον αριθμητή και κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$(1 - \cosh\xi\,\cos\eta)^2 + \sinh^2\xi\,\sin^2\eta = 1 - 2\cosh\xi\,\cos\eta + \cosh^2\xi\,\cos^2\eta +$$

$$(\cosh^2\xi - 1)\,\sin^2\eta = 1 - 2\cosh\xi\,\cos\eta + \cosh^2\xi\,(\cos^2\eta + \sin^2\eta) -$$

$$sin^2\eta = cos^2\eta - 2\ cosh\,\xi\ cos\,\eta + cosh^2\xi = (cosh\,\xi - cos\,\eta)^2$$

Οπότε αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην σχ. (3.10) έχουμε:

$$J(\xi,\eta) = \frac{-c^2(cosh\xi - cos\eta)^2}{(cosh\xi - cos\eta)^4} = -\left(\frac{c}{cosh\xi - cos\eta}\right)^2$$

Ο αντίστροφος πίνακας του συστήματος θα είναι:

$$J^{-1} = \frac{1}{J(\xi,\eta)}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} =$$

$$-\left(\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\right)^2 \begin{bmatrix} c\,\frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{(cosh\xi - cos\eta)^2} & c\,\frac{sinh\xi\ sin\eta}{(cosh\xi - cos\eta)^2} \\ c\,\frac{sinh\xi\ cos\eta - 1}{(cosh\xi - cos\eta)^2} & c\,\frac{1 - cosh\xi\ cos\eta}{(cosh\xi - cos\eta)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1 - cosh\xi\ cos\eta}{c} & \frac{-sinh\xi\ sin\eta}{c} \\ \frac{-sinh\xi\ sin\eta}{c} & \frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{c} \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

Αντικαθιστώντας τον αντίστροφο πίνακα (3.11) στον πίνακα (3.9) προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - cosh\xi\ cos\eta}{c} & \frac{-sinh\xi\ sin\eta}{c} \\ \frac{-sinh\xi\ sin\eta}{c} & \frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Έτσι, καταλήγουμε στις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1 - cosh\xi\ cos\eta}{c}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{sinh\xi\ sin\eta}{c}\frac{\partial}{\partial \eta} \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{-sinh\xi\ sin\eta}{c}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{c}\frac{\partial}{\partial \eta} \qquad (3.13)$$

Εάν υποθέσουμε ότι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου στο επίπεδο είναι $\vec{r}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$,τότε χρησιμοποιώντας τις εξ. (3.1) και (3.2), η μερική παράγωγος του διανύσματος αυτού ως προς ξ και το μέτρο του διανύσματος υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\vec{\imath} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\vec{\jmath} = \frac{c}{(cosh\xi - cos\eta)^2}\left[(1 - cosh\xi\ cos\eta)\vec{\imath} - sinh\xi\ sin\eta\ \vec{\jmath}\right]$$

$$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\right\| = \frac{c}{(cosh\xi - cos\eta)^2}\sqrt{(1 - cosh\xi\ cos\eta)^2 + sinh^2\xi\ sin^2\eta} =$$

$$\frac{c}{(cosh\xi - cos\eta)^2}\sqrt{(cosh\xi - cos\eta)^2} = \frac{c}{(cosh\xi - cos\eta)} = h_\xi$$

Ο συντελεστής h_ξ που θέσαμε παραπάνω ονομάζεται μετρητικός συντελεστής του συστήματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα δίνεται από την εξής σχέση:

$$\hat{\xi} = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\right\|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \frac{1 - cosh\xi\ cos\eta}{cosh\xi\ cos\eta}\vec{\imath} - \frac{sinh\xi\ sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\vec{\jmath} \qquad (3.14)$$

Αντίστοιχα, η μερική παράγωγος του διανύσματος $\vec{r}$ ως προς η και το μέτρο του διανύσματος θα είναι:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\vec{\imath} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\vec{\jmath} = \frac{c}{(cosh\xi - cos\eta)^2}\left[-sinh\xi\ sin\eta\ \vec{\imath} + (cosh\xi\ cos\eta - 1)\vec{\jmath}\right]$$

Στην περίπτωση αυτή, οι μετρητικοί συντελεστές του συστήματος είναι ίσοι:

$$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right\| = h_\xi = h_\eta$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα θα είναι:

$$\hat{\eta} = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right\|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{-sinh\xi\ sin\eta}{cosh\xi\ cos\eta}\vec{\imath} + \frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{cosh\xi - cos\eta}\vec{\jmath} \qquad (3.15)$$

Από τις σχ. (3.14) και (3.15) συμπεραίνουμε ότι το σύστημα των διπολικών συντεταγμένων είναι ορθογώνιο επειδή $\hat{\xi} \cdot \hat{\eta} = 0$.
Στη συνέχεια θεωρούμε τις εξ. (3.14) και (3.15) σαν γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα $\vec{\imath}$ και $\vec{\jmath}$.

$$\frac{1}{cosh\xi - cos\eta}\begin{bmatrix} 1 - cosh\xi\ cos\eta & -sinh\xi\ sin\eta \\ -sinh\xi\ sin\eta & cosh\xi\ cos\eta - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα Α είναι:

$$|A(\xi,\eta)| = \frac{(1-cosh\xi\ cos\eta)^2 + sinh^2\xi\ sin^2\eta}{(cosh\xi - cos\eta)^2} = -1$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο πίνακα, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{bmatrix} = \frac{1}{cosh\xi - cos\eta}\begin{bmatrix} 1 - cosh\xi\ cos\eta & sinh\xi\ sin\eta \\ sinh\xi\ sin\eta & cosh\xi\ cos\eta - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$$

Οπότε προκύπτει ότι:

$$\vec{i} = \frac{1-cosh\xi\ cos\eta}{cosh\xi - cos\eta}\hat{\xi} - \frac{sinh\xi\ sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\hat{\eta} \qquad (3.16)$$

$$\vec{j} = \frac{-sinh\xi\ sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\hat{\xi} + \frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{cosh\xi - cos\eta}\hat{\eta} \qquad (3.17)$$

Από τις εξ. (3.12),(3.13),(3.16) και (3.17) ο τελεστής της κλίσης θα είναι:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{1-cosh\xi\ cos\eta}{cosh\xi - cos\eta}\ \hat{\xi} - \frac{sinh\xi\ sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\ \hat{\eta}\right)$$

$$\left(\frac{1-cosh\xi\ cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{sinh\xi\ sin\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{-sinh\xi\ sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\ \hat{\xi} + \frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{cosh\xi - cos\eta}\ \hat{\eta}\right)$$

$$\left(\frac{-sinh\xi\ sin\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{cosh\xi\ cos\eta - 1}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right) =$$

$$\hat{\xi}\left[\frac{(1-cosh\xi\ cos\eta)^2 + sinh^2\xi\ sin^2\eta}{c\ (cosh\xi - cos\eta)}\ \frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \hat{\eta}\left[\frac{sinh^2\xi\ sin^2\eta + (cosh\xi\ cos\eta - 1)^2}{c\ (cosh\xi - cos\eta)}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right] \Leftrightarrow$$

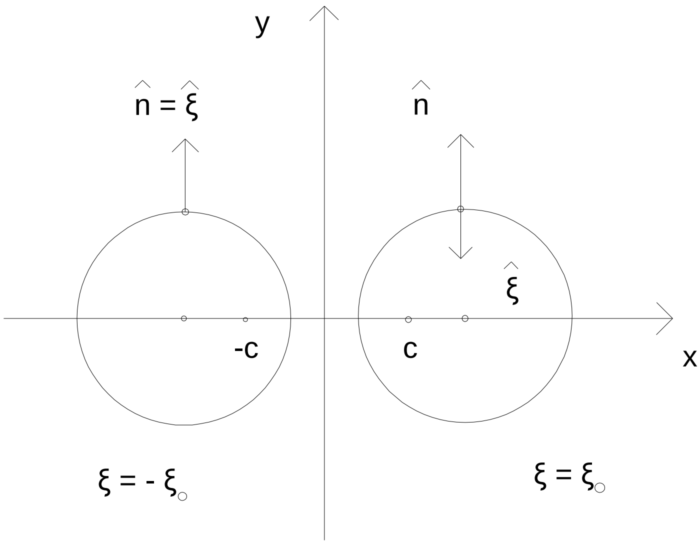
$$\nabla = \hat{\xi}\left[\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \hat{\eta}\left[\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right] \qquad (3.18)$$

Από την εξ. (3.18) προκύπτει ότι ο τελεστής της εξωτερικής κάθετης παραγώγου όπως φαίνεται στο σχ. (3.5) στον κύκλο $\xi = -\xi_0 < 0$ είναι:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot \nabla = \hat{\xi}\cdot \nabla = \frac{cosh\xi_0 - cos\eta}{c}\frac{\partial}{\partial \xi}\bigg]_{\xi = -\xi_0} \quad (3.19)$$

Ενώ στον κύκλο $\xi = \xi_0 > o$, ο τελεστής θα είναι:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot \nabla = -\hat{\xi}\cdot \nabla = -\frac{cosh\xi_0 - cos\eta}{c}\frac{\partial}{\partial \xi}\bigg]_{\xi = \xi_0} \quad (3.20)$$



Σχήμα 3.5

Από τις εξ. (3.14) και (3.15) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \xi} = \frac{sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\,\hat{\eta}$$

$$\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \eta} = \frac{-sinh\xi}{cosh\xi - cos\eta}\,\hat{\eta}$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \xi} = \frac{-sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\,\hat{\xi}$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \eta} = \frac{sinh\xi}{cosh\xi - cos\eta}\,\hat{\xi}$$

Επομένως από τη σχ. (3.18) ο τελεστής του Laplace θα είναι:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla =$$

$$\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\left[\hat{\xi}\ \frac{\partial}{\partial\xi} + \ \hat{\eta}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right]\cdot\left[\hat{\xi}\ \frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\xi} + \ \hat{\eta}\ \frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right] =$$
$$\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ \left(\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\right)\ \frac{\partial}{\partial\xi} + \ \frac{-sin\eta}{cosh\xi - cos\eta}\ \frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta} + \right.$$
$$\left.\frac{-sinh\xi}{cosh\xi - cos\eta}\ \frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\xi} + \ \frac{\partial}{\partial\eta}\ \left(\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]$$

$$= \frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\left[\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \ \frac{sinh\xi}{c}\ \frac{\partial}{\partial\xi} + \ \frac{-sin\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta} + \ \frac{-sinh\xi}{c}\ \frac{\partial}{\partial\xi} + \right.$$
$$\left.\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\ \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \ \frac{sin\eta}{c}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right] =$$

$$\left[\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\right]^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \ \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right] \tag{3.21}$$

Άρα, από την εξ. (3.21) θέτοντας την ίση με μηδέν και γνωρίζοντας ότι ο σταθερός όρος είναι $\left[\frac{cosh\xi - cos\eta}{c}\right]^2$,προέκυψε η εξίσωση Laplace, η οποία είναι:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0\ ,\begin{cases}-\infty < \xi < +\infty \\ -\pi < \eta \leq +\pi\end{cases} \tag{3.22}$$

3.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Υποθέτω ότι έχω λύσεις της μορφής $\Xi(\xi)H(\eta)$, οι οποίες εξαρτώνται από τις δύο συναρτήσεις $\Xi(\xi),H(\eta)$, δηλαδή:

$$u(\xi,\eta) = \Xi(\xi)\ H(\eta) \tag{3.23}$$

Οπότε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} = \Xi''(\xi)\ H(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \Xi(\xi)\ H''(\eta)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξ. (3.22), έχουμε:

$$\Xi''(\xi)\ H(\eta) + \Xi(\xi)\ H''(\eta) = 0 \Leftrightarrow \Xi''(\xi)\ H(\eta) = -\ \Xi(\xi)\ H''(\eta) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Xi''(\xi)}{\Xi(\xi)} = -\frac{H''(\eta)}{H(\eta)} = \lambda$$

Όπου λ = σταθερά διαχωρισμού.Άρα:

$$\Xi''(\xi) - \lambda\, \Xi(\xi) = 0 \tag{3.24}$$

$$H''(\eta) + \lambda\, H(\eta) = 0 \tag{3.25}$$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι</u>

Όταν το λ είναι ίσο με μηδέν από τις σχ. (3.3) και (3.4), παίρνουμε:

$$\Xi''(\xi) = 0 \Leftrightarrow \Xi'(\xi) = c_1 \Leftrightarrow \Xi(\xi) = \int c_1 d\xi + c_2 \ , \ c_1,c_2 \in \mathrm{R}$$

$$H''(\eta) = 0 \Leftrightarrow H'(\eta) = c_3 \Leftrightarrow H(\eta) = \int c_3 d\eta + c_4 \ , \ c_3,c_4 \in \mathrm{R}$$

Η λύση : $H(\eta) = c_3\eta + c_4$ δε μας εξασφαλίζει περιοδικότητα στο η οπότε κρατάμε μόνο τη λύση:

$$u(\xi,\eta) = c_1\xi + c_2$$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ</u>

Θέτουμε όπου $\lambda = \omega^2$ και από τις σχ. (3.24) και (3.25) έχουμε:
Από τη σχ. (4.22):

$$\Xi''(\xi) - \omega^2\, \Xi(\xi) = 0 \tag{3.26}$$

Η λύση της εξίσωσης είναι εκθετικής μορφής:

$$\Xi(\xi) = e^{\rho\xi} \Leftrightarrow \Xi'(\xi) = \rho\, e^{\rho\xi} \Leftrightarrow \Xi''(\xi) = \rho^2 e^{\rho\xi}$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (3.26):

$$(\rho^2 - \omega^2)\, e^{\rho\xi} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 = \omega^2 \Leftrightarrow \rho_1 = \omega \text{ και } \rho_2 = -\omega$$

Η περίπτωση αυτή δίνει:

$$\Xi(\xi) = A\, e^{\omega\xi} + B\, e^{-\omega\xi}$$

Από τη σχ. (3.25):

$$H''(\eta) + \omega^2 H(\eta) = 0 \qquad (3.27)$$

$$H(\eta) = e^{\rho\eta} \Leftrightarrow H'(\eta) = \rho\, e^{\rho\eta} \Leftrightarrow H''(\eta) = \rho^2\, e^{\rho\eta}$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (3.27):

$$(\rho^2 + \omega^2)\, e^{\rho\eta} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 = -\omega^2 \Leftrightarrow \rho^2 = i^2\omega^2 \Leftrightarrow \rho^2 = (i\omega)^2 \Leftrightarrow$$

$\rho_1 = i\omega$ και $\rho_2 = -i\omega$

Η περίπτωση αυτή δίνει:

$$H(\eta) = C\cos\omega\eta + D\sin\omega\eta$$

Επειδή θέλουμε περιοδικότητα στο η με 2π θα πρέπει:

$$\sin\omega\,(\eta + 2\pi) = \sin\omega\eta \Leftrightarrow \sin(\omega\eta + 2\pi\omega) = \sin\omega\eta$$

Άρα: $\omega = n \in \{1,2,3,\ldots\}$

Επομένως η λύση είναι της μορφής:

$$u_n(\xi,\eta) = (A_n e^{n\xi} + B_n e^{-n\xi})\,(C_n\cos n\eta + D_n\sin n\eta) \quad \text{ή}$$

$$u_n(\xi,\eta) = A_n'\, e^{n\xi}\cos n\eta + B_n'\, e^{n\xi}\sin n\eta$$

$$+ C_n'\, e^{-n\xi}\cos n\eta + D_n'\, e^{-n\xi}\sin n\eta$$

Όπου A_n', B_n', C_n', D_n' είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙΙ

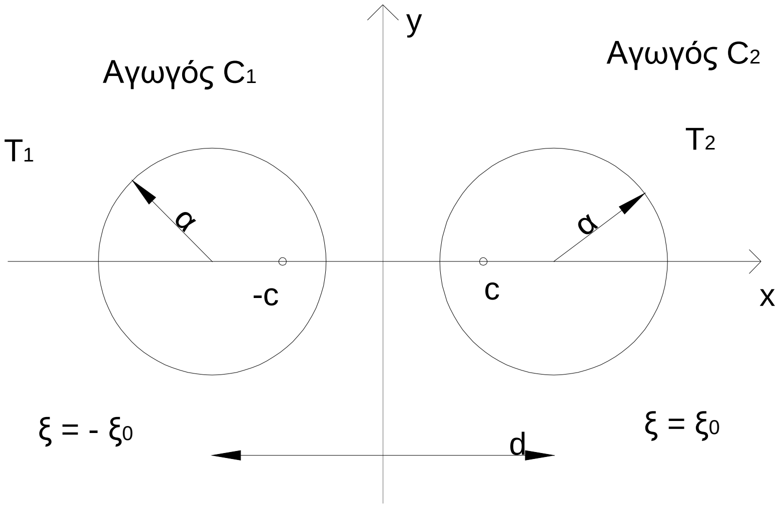
Θέτουμε όπου $\lambda = -\omega^2$ και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την περίπτωση ΙΙ και προκύπτει ότι:

$$u(\xi,\eta) = (E\cos\omega\xi + F\sin\omega\xi)\,(G\,e^{\omega\eta} + H\,e^{-\omega\eta})$$

Επομένως, οι λύσεις όπου εξασφαλίζουν περιοδικότητα στο η και είναι δεκτές είναι:

$$\left\{1, \xi, e^{n\xi}\cos n\eta, e^{n\xi}\sin n\eta, e^{-n\xi}\cos n\eta, e^{-n\xi}\sin n\eta\right\}$$

3.3.1 Αγωγή μεταξύ δύο κυλινδρικών αγωγών ίδιας ακτίνας. Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο κυκλικούς αγωγούς με ίδια ακτίνα α, η απόσταση των κέντρων τους είναι $d > 2\alpha$ ενώ για τους πόλους ισχύει $c < \frac{d}{2}$. Θεωρώντας μία κάθετη διατομή, θα υπολογίσουμε τις τιμές των σταθερών ξ_0 και c , τη μεταβολή της θερμοκρασίας που περιβάλλει τους δύο αυτούς αγωγούς γνωρίζοντας ότι $T_1 > T_2$, το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας καθώς επίσης και το συντελεστή μορφής.



Σχήμα 3.6

$$D = \begin{cases} -\xi_0 < \xi < \xi_0 \\ -\pi < \eta < \pi \end{cases} \qquad \text{και κέντρο : } \left(\frac{d}{2}, 0 \right)$$

Από την εξίσωση του κύκλου που δίνεται από τον παρακάτω τύπο, για $\xi = \xi_0$, έχουμε:

$$(x - c \coth \xi_0)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{\sinh \xi_0} \right)^2$$

Οπότε το κέντρο του κύκλου και η ακτίνα δίνονται ως εξής:

$$c \coth \xi_0 = \frac{d}{2} \tag{3.28}$$

$$\frac{c}{\sinh \xi_0} = \alpha \tag{3.29}$$

Από την εξ. (3.29), έχουμε:

$$\sinh \xi_0 = \frac{c}{a} \quad \text{ή} \quad \cosh \xi_0 = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}}$$

Γνωρίζοντας ότι $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ και αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις, η εξ. (3.28) γίνεται:

$$\frac{c\,cosh\xi_0}{sinh\xi_0} = \frac{d}{2} \Leftrightarrow c\;\frac{a}{c}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}} = \frac{d}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 + c^2 = \frac{d^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2}$$

Η εξ. (3.28) λόγω της εξ. (3.29) γίνεται:

$$\frac{c}{sinh\xi_0} cosh\xi_0 = \frac{d}{2} \Leftrightarrow \alpha\, cosh\xi_0 = d \Leftrightarrow \xi_0 = cosh^{-1} \frac{d}{2a}$$

Για την εύρεση της θερμοκρασίας ακολουθούμε την εξής διαδικασία γνωρίζοντας ότι η θερμοκρασία στο σύνορο του αγωγού 1 είναι:

$$u(-\xi_0,\eta) = T_1 \tag{3.30}$$

ενώ στο σύνορο του αγωγού 2 είναι:

$$u(\xi_0,\eta) = T_2 \tag{3.31}$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών, η λύση θα είναι ανεξάρτητη του η. Επομένως, κρατάμε λύση της μορφής:

$$u(\xi,\eta)=A_0+B_0\xi \tag{3.32}$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.30), για $\xi = -\xi_0$ έχουμε:

$$T_1 = A_0 - B_0\xi_0 \tag{3.33}$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.31), για $\xi = \xi_0$, έχουμε:

$$T_2 = A_0 + B_0\xi_0 \tag{3.34}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχ. (3.33) και (3.34):

$$T_1 + T_2 = A_0 - B_0\xi_0 + A_0 + B_0\xi_0 \Leftrightarrow A_0 = \frac{(T_1 + T_2)}{2}$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε κατά μέλη τις σχ. (3.33) και (3.34):

$$B_0 = \frac{(T_1 - T_2)}{2\xi_0}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές A_0 και B_0 στην εξ. (3.32) προκύπτει ότι η λύση είναι:

$$u(\xi,\eta) = \frac{(T_1+T_2)}{2} + \frac{(T_1-T_2)}{2\xi_0}\,\xi \tag{3.35}$$

Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}$ δίνεται ολοκληρώνοντας τον κύκλο c_1 αφού εκεί έχουμε μεγαλύτερη θερμοκρασία, οπότε:

$$\dot{Q} = \int_{c_1} -k\,\nabla u \cdot \hat{n}\, ds = -\, k \int_{c_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \tag{3.36}$$

Ο κύκλος c_1 έχει παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = c\,\frac{-sinh\xi_0}{cosh\xi_0 - cos\eta} \quad \text{και} \quad y = c\,\frac{sin\eta}{cosh\xi_0 - cos\eta} \qquad \text{όταν το } \eta \in (-\pi,\pi]$$

Το στοιχειώδες μήκος ds , χρησιμοποιώντας τις εξ. (3.4) και (3.5) υπολογίζεται ως εξής:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\, d\eta = \frac{c}{cosh\xi_0 - cos\eta} d\eta$$

Από την εξ. (3.19) για τον κύκλο $\xi = -\,\xi_0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{cosh\xi_0 - cos\eta}{c} \cdot \frac{\partial u(-\xi_0,\eta)}{\partial \xi}$$

Επομένως αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην εξ. (3.36) και λαμβάνοντας υπόψιν την εξ. (3.35) προκύπτει ότι:

$$\dot{Q} = -\,\mathrm{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_1 - T_2}{2\xi_0}\, d\eta = \frac{T_2 - T_1}{2\xi_0}\, 2\pi k$$

Εάν υποθέσουμε ότι οι αγωγοί έχουν μήκος L ,τότε ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας μεταξύ των δύο κυλινδρικών ισοθερμικών επιφανειών θα είναι:

$$\dot{Q} = 2\pi k L\, \frac{T_2 - T_1}{2\xi_0} \tag{3.37}$$

Απλοποιώντας την (3.37) έχουμε:

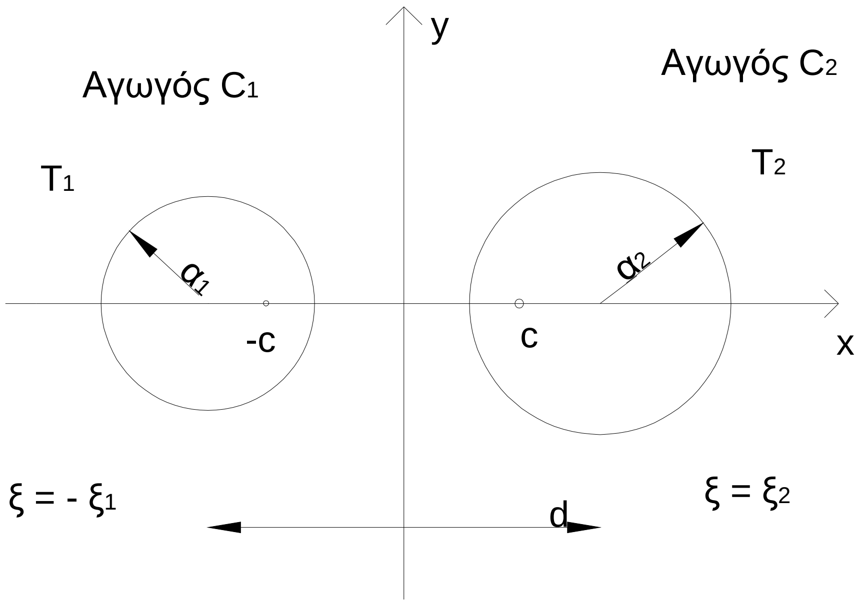
$$\dot{Q} = \mathrm{S\,k\,(T_2 - T_1)}$$

Όπου S είναι ο συντελεστής μορφής και εξαρτάται μόνο από το γεωμετρικό σχήμα του συστήματος, συνεπώς:

$$S = \frac{2\pi L}{2\xi_0} = \frac{\pi L}{cos^{-1}\frac{d}{D}}$$

Όπου $D = 2\alpha$.

3.3.2 Αγωγή μεταξύ κυλινδρικών αγωγών διαφορετικής ακτίνας. Στο Πρόβλημα αυτό υποθέτουμε ότι έχουμε δύο κυκλικούς αγωγούς με ακτίνες α_1 και α_2 όπου $\alpha_1 < \alpha_2$ και η απόσταση των κέντρων τους είναι $d > \alpha_1 + \alpha_2$. Ζητάμε να βρούμε τις τιμές των σταθερών ξ_1 , ξ_2 και c , τη μεταβολή της θερμοκρασίας που περιβάλλει τους δύο αυτούς αγωγούς, το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας και το συντελεστή μορφής.



Σχήμα 3.6

$$D = \begin{cases} -\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ -\pi < \eta \leq \pi \end{cases}$$

Από την εξίσωση του κύκλου την οποία έχουμε αναφέρει στην ενότητα 3.2 προκύπτουν οι ακτίνες των κύκλων:

$$\alpha_1 = \frac{c}{sinh\xi_1} \tag{3.38}$$

$$\alpha_2 = \frac{c}{sinh\xi_2} \tag{3.39}$$

Ενώ η απόσταση d , δίνεται από το άθροισμα των κέντρων των δύο κύκλων:

$$d = \frac{c}{tanh\xi_2} + \frac{c}{tanh\xi_1} \tag{3.40}$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα τριών αγνώστων ως εξής.
Από την εξ. (3.38) και γνωρίζοντας ότι $cosh^2x - sinh^2x = 1$ προκύπτει ότι:

$$sinh\xi_1 = \frac{c}{a_1} \Leftrightarrow cosh\xi_1 = \sqrt{\frac{c^2}{a_1{}^2} + 1} \quad (3.41)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχ. (3.38) και (3.39) και από την ταυτότητα των υπερβολικών συναρτήσεων $tanhx = \frac{sinhx}{coshx}$ βρίσκουμε ότι:

$$\frac{c}{tanh\xi_1} = \frac{c\, cosh\xi_1}{sinh\xi_1} = \alpha_1 \sqrt{\frac{c^2}{a_1{}^2} + 1} = \sqrt{a_1{}^2 + \left(\frac{c^2}{a_1{}^2} + 1\right)} = \sqrt{c^2 + a_1{}^2} \quad (3.42)$$

Ακριβώς την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και βρίσκουμε ότι:

$$\frac{c}{tanh\xi_2} = \sqrt{c^2 + a_2{}^2} \quad (3.43)$$

Αντικαθιστώντας τις εξ. (3.42) και (3.43) στην σχ. (3.40) και κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις υπολογίζουμε τη σταθερά c ως εξής:

$$d = \sqrt{c^2 + a_2{}^2} + \sqrt{c^2 + a_1{}^2} \Leftrightarrow d^2 = c^2 + \alpha_2^2 + c^2 + \alpha_1^2 + 2\sqrt{c^2 + a_2{}^2}$$

$$\sqrt{c^2 + a_1{}^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{c^2 + a_2{}^2}\sqrt{c^2 + a_1{}^2} = d^2 - c^2 - \alpha_2^2 - c^2 - \alpha_1^2$$

$$\Leftrightarrow 2^2\left(\sqrt{c^2 + a_2{}^2}\right)^2\left(\sqrt{c^2 + a_1{}^2}\right)^2 = (d^2 - c^2 - \alpha_2^2 - c^2 - \alpha_1^2)^2 \Leftrightarrow 4\,(c^2$$

$$+ \alpha_2^2)\,(c^2 + \alpha_1^2) = (d^2 - 2c^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2)^2 \Leftrightarrow 4c^4 + 4c^2\,(\alpha_2^2 + \alpha_1^2)$$

$$+ 4\alpha_1^2\,\alpha_2^2 = 4c^4 + (d^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2)^2 + 2\,(d^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2)\,(-2c^2)$$

$$\Leftrightarrow 4c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4c^2(d^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2) = (d^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2) - 4\alpha_1^2\alpha_2^2$$

$$\Leftrightarrow 4d^2c^2 = (d^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2 - 2\,\alpha_2\alpha_1)\,(d^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2 + 2\,\alpha_1\alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{d^2-(a_2+a_1)^2}\,\sqrt{d^2-(a_2-a_1)^2}}{2d} \quad (3.44)$$

Αντικαθιστώντας στις εξ. (3.38) και (3.39) τη σταθερά c υπολογίζουμε τα ξ_1 και ξ_2, αντίστοιχα:

$$\xi_1 = sinh^{-1}\left(\frac{c}{a_1}\right) = sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{d^2-(a_2+a_1)^2}\sqrt{d^2-(a_2-a_1)^2}}{2da_1}\right)$$

$$\xi_2 = sinh^{-1}\left(\frac{c}{a_2}\right) = sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{d^2-(a_2+a_1)^2}\sqrt{d^2-(a_2-a_1)^2}}{2da_2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα των υπερβολικών συναρτήσεων:

$sinh^{-1}x = ln\,(x + \sqrt{x^2 + 1}\,)$, έχουμε:

$$\xi_1 = ln\,\frac{\sqrt{d^2-(a_2+a_1)^2}\,\sqrt{d^2-(a_2-a_1)^2}+a_1{}^2-a_2{}^2+d^2}{2da_1} \qquad (3.45)$$

$$\xi_2 = ln\,\frac{\sqrt{d^2-(a_2+a_1)^2}\sqrt{d^2-(a_2-a_1)^2}+a_2{}^2-a_1{}^2+d^2}{2da_2} \qquad (3.46)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$\nabla^2 u(\xi,\eta) = 0\,,\ -\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$

$u(-\xi_1,\eta) = T_1$

$u(\xi_2,\eta) = T_2\,,\ T_1 > T_2$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών, η λύση θα είναι ανεξάρτητη του η , οπότε:

$$u(\xi,\eta) = A + B\xi \qquad (3.47)$$

Οπότε για $\xi = -\xi_1$, η εξ. (3.47) γίνεται:

$A - B\xi_1 = T_1$

Ενώ για $\xi = \xi_2$:

$A + B\xi_2 = T_2$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι συντελεστές A και B :

$A = \frac{T_1\xi_2+T_2\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$ και $B = \frac{T_2-T_1}{\xi_1+\xi_2}$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω συντελεστές στην εξ. (3.47) έχουμε:

$$u(\xi,\eta) = \frac{T_1\xi_2+T_2\xi_1}{\xi_1+\xi_2} + \frac{T_2-T_1}{\xi_1+\xi_2}\,\xi$$

Για τον υπόλογισμό του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}$ χρησιμοποιούμε την σχ. (3.36). Στην περίπτωση αυτή, ο κύκλος c_1 έχει παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = c\frac{-sinh\xi_1}{cosh\xi_1 - cos\eta} \quad \text{και} \quad y = c\frac{sin\eta}{cosh\xi_1 - cos\eta} \quad \text{όταν το } \eta \epsilon \text{ (-π,π]}$$

Το στοιχειώδες μήκος ds και και η μερική παράγωγος ως προς n για τον κύκλο ξ = - ξ_1 είναι:

$$ds = \frac{c}{cosh\xi_1 - cos\eta} d\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{cosh\xi_1 - cos\eta}{c} \frac{\partial u(-\xi_1,\eta)}{\partial \xi}$$

Οπότε ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}$ από την σχ. (3.36) προκύπτει ότι είναι:

$$\dot{Q} = -k\int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_2 - T_1}{\xi_1 + \xi_2} d\eta = \frac{T_1 - T_2}{\xi_1 + \xi_2} 2\pi k$$

Υποθέτοντας και σε αυτήν την περίπτωση ότι οι αγωγοί έχουν μήκος L, τότε:

$$\dot{Q} = 2\pi kL\frac{T_1 - T_2}{\xi_1 + \xi_2}$$

Στο σημείο αυτό, θα υπολογίσουμε τον συντελεστή μορφής S ως εξής:
Από την εξ. (3.42) λύνοντας ως προς ξ_1 βρίσκουμε ότι:

$$\xi_1 = ln\frac{c + \sqrt{c^2 + a_1{}^2}}{a_1} \tag{3.48}$$

Ενώ, από την εξ. (3.43) λύνοντας ως προς ξ_2 βρίσκουμε ότι:

$$\xi_2 = ln\frac{c + \sqrt{c^2 + a_2{}^2}}{a_2} \tag{3.49}$$

Επομένως:

$$\xi_1 + \xi_2 = ln\frac{\left(c + \sqrt{c^2 + a_1{}^2}\right)\left(c + \sqrt{c^2 + a_2{}^2}\right)}{a_1 a_2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τη σταθερά c την οποία έχουμε υπολογίσει παραπάνω, βρίσκουμε:

$$\xi_1 + \xi_2 = ln\left(\frac{d^2 - a_1{}^2 - a_2{}^2}{2a_1 a_2} + \sqrt{\left(\frac{d^2 - a_1{}^2 - a_2{}^2}{2a_1 a_2}\right)^2 - 1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα των υπερβολικών συναρτήσεων:

$cosh^{-1}\, x = ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ όταν x ≥ 1 , τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

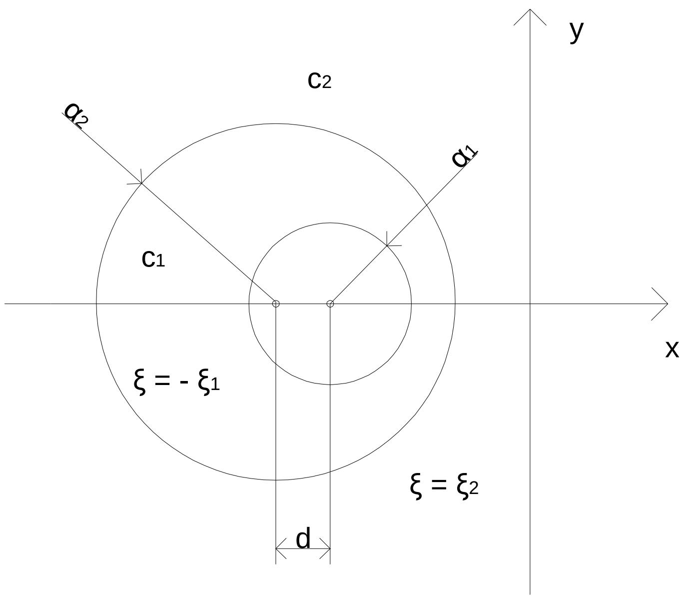
$$\xi_1 + \xi_2 = cosh^{-1}\left(\frac{d^2 - a_1{}^2 - a_2{}^2}{2a_1a_2}\right) = cosh^{-1}\left(\frac{d^2 - a_1{}^2 - a_2{}^2}{2a_1a_2}\right) = cosh^{-1}\left(\frac{4d^2 - D_1{}^2 - D_2{}^2}{2D_1D_2}\right)$$

Άρα ο συντελεστής μορφής θα είναι:

$$S = \frac{2\pi L}{\xi_1 + \xi_2} = \frac{2\pi L}{cosh^{-1}\left(\frac{4d^2 - D_1{}^2 - D_2{}^2}{2D_1D_2}\right)}$$

Όπου $D_1 = 2\alpha_1$ και $D_2 = 2\alpha_2$.
Συνεπώς, επαληθεύεται το αποτέλεσμα του πίνακα 3.8 της σελίδας 273 του βιβλίου: Cengel Y., Μεταφορά Θερμότητας (Μια πρακτική προσέγγιση), εκδόσεις Τζιόλα, 2005.

3.3.3 Αγωγή μεταξύ έκκεντρων κυλίνδρων. Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο κυλινδρικούς αγωγούς έκκεντρα τοποθετημένους με ακτίνες α_1 και α_2 όπου $\alpha_2 > \alpha_1$ όπως φαίνεται και στο σχ. (3.7). Η απόσταση των κέντρων τους είναι $d < \alpha_2 - \alpha_1$. Ο εσωτερικός αγωγός διατηρείται σε θερμοκρασία T_1 ενώ ο εξωτερικός αγωγός σε θερμοκρασία T_2 όπου $T_1 > T_2$.



Σχήμα 3.7

$$D = \begin{cases} -\xi_1 \le \xi \le -\xi_2 \\ -\pi < \eta \le \pi \end{cases}$$

Οι ακτίνες των κύκλων δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\alpha_1 = \frac{c}{\sinh\xi_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{c}{\sinh\xi_2}$$

Ενώ η απόσταση d , δίνεται από τη διαφορά των κέντρων των δύο κύκλων:

$$d = \frac{c}{\tanh\xi_2} - \frac{c}{\tanh\xi_1}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα τριών αγνώστων όπως ακριβώς κάναμε και στο Πρόβλημα 3.3.2 καταλήγουμε στα εξής:

$$c = \frac{\sqrt{(a_2+a_1)^2-d^2}\sqrt{(a_2-a_1)^2-d^2}}{2d}$$

$$\xi_1 = \ln\frac{\sqrt{(a_2+a_1)^2-d^2}\sqrt{(a_2{}^2-a_1{}^2)-d^2}+\alpha_2{}^2-a_1{}^2-d^2}{2da_1}$$

$$\xi_2 = \ln\frac{\sqrt{(a_2+a_1)^2-d^2}\sqrt{(a_2{}^2-a_1{}^2)-d^2}+\alpha_2{}^2-a_1{}^2+d^2}{2da_2}$$

Οι συνοριακές συνθήκες τις οποίες έχουμε θέσει είναι οι παρακάτω:

$$\nabla^2 u(\xi,\eta) = 0$$

$$u(-\xi_1,\eta) = T_1$$

$$u(-\xi_2,\eta) = T_2$$

Επομένως ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το Πρόβλημα 3.3.2 βρίσκουμε ότι:

$$u(\xi,\eta) = T_1 - \frac{T_1-T_2}{\xi_1-\xi_2}(\xi_1 + \xi)$$

Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}$ υπολογίζεται από τη σχ. (3.36). Η περίπτωση αυτή είναι ίδια με την περίπτωση του παραδείγματος 3.3.2. Οπότε:

$$\dot{Q} = -k\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{T_1-T_2}{\xi_1-\xi_2}\,d\eta = 2\pi k\frac{T_1-T_2}{\xi_1-\xi_2}$$

Εάν υποθέσουμε ότι οι αγωγοί έχουν μήκος L , τότε ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας μεταξύ των δύο κυλινδρικών ισοθερμικών επιφανειών θα είναι:

$$\dot{Q} = 2\pi kL\frac{T_1-T_2}{\xi_1-\xi_2}$$

Στην περίπτωση αυτή, αφαιρούμε κατά μέλη τις σχ. (3.48) και (3.49) γνωρίζοντας ότι οι ακτίνες των κύκλων είναι ίδιες με αυτές του Προβλήματος 3.3.2, επομένως οι σταθερές ξ_1 και ξ_2 υπολογίζονται από τον ίδιο τύπο. Άρα:

$$\xi_1 - \xi_2 = ln\left(\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{c+\sqrt{c^2+a_1{}^2}}{c+\sqrt{c^2+a_2{}^2}}\right) = ln\left[\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\left(c+\sqrt{c^2+a_1{}^2}\right)\left(-c+\sqrt{c^2+a_2{}^2}\right)}{-c^2+(c^2+a_2{}^2)}\right] =$$

$$ln\left[\frac{\left(c+\sqrt{c^2+a_1{}^2}\right)\left(-c+\sqrt{c^2+a_2{}^2}\right)}{a_1 a_2}\right]$$

Αντικαθιστώντας το c που υπολογίσαμε παραπάνω, έχουμε:

$$\xi_1 - \xi_2 = ln\left[\frac{a_2{}^2+a_1{}^2-d^2}{2a_1a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_2{}^2+a_1{}^2-d^2}{2a_1a_2} - 1\right)}\right]$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα των υπερβολικών συναρτήσεων:

$cosh^{-1}\, x = ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ όταν $x \geq 1$, τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\xi_1 - \xi_2 = cosh^{-1}\left(\frac{a_2{}^2+a_1{}^2-d^2}{2a_1a_2}\right) = cosh^{-1}\left(\frac{(2a_2)^2+(2a_1)^2-4d^2}{2(2a_1)(2a_2)}\right)$$

$$= cosh^{-1}\left(\frac{D_2{}^2+D_1{}^2-4d^2}{2D_1D_2}\right)$$

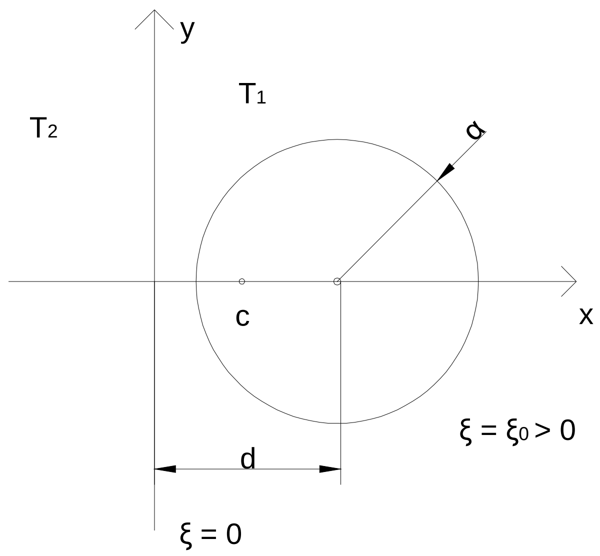
Οπότε ο συντελεστής μορφής θα είναι:

$$S = \frac{2\pi L}{\xi_1-\xi_2} = \frac{2\pi L}{\cos^{-1}\left(\frac{D_2{}^2+D_1{}^2-4d^2}{2D_1D_2}\right)}$$

Θέτοντας $D_1 = 2\alpha_1$ και $D_2 = 2\alpha_2$

Συνεπώς, επαληθεύεται το αποτέλεσμα του πίνακα 3.8 της σελίδας 273 του βιβλίου: Cengel Y., Μεταφορά Θερμότητας (Μια πρακτική προσέγγιση), εκδώσεις Τζιόλα, 2005.

3.3.4 Αγωγή μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου. Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν κυλινδρικό αγωγό με ακτίνα α ο οποίος βρίσκεται σε θερμοκρασία T_1 και σε απόσταση d (όπου $d > \alpha$) από μία επίπεδη επιφάνεια με θερμοκρασία $T_2 (T_1 > T_2)$. Ζητάμε να βρούμε τις τιμές των σταθερών ξ_0 και c, τη μεταβολή της θερμοκρασίας, το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}$ και τον συντελεστή μορφής S.



Σχήμα 3.8

$$D = \begin{cases} 0 \ \leq \xi \ \ \leq \xi_0 \\ -\pi \ \ \leq \eta \ \ \leq \pi \end{cases}$$

Για $\xi = \xi_0 > 0$, η ακτίνα του κύκλου α και η απόσταση d θα είναι:

$$\frac{c}{sinh\xi_0} = \alpha \tag{3.50}$$

$$\frac{c}{tanh\xi_0} = d \tag{3.51}$$

Από την εξ. (3.50) έχουμε:

$$sinh\xi_0 = \frac{c}{a} \quad \text{ή} \quad cosh\xi_0 = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}} \tag{3.52}$$

Αντικαθιστώντας τις εξ. (3.50) και (3.52) στην εξ. (3.51) έχουμε:

$$c\,\frac{cosh\xi_0}{sinh\xi_0} = d \Leftrightarrow c\,\frac{a}{c} \cdot \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}} = d \Leftrightarrow c = \sqrt{d^2 - a^2}$$

Η εξ. (3.51) λόγω της εξ. (3.50) γίνεται:

$$\frac{c}{sinh\xi_0}cosh\xi_0 = d \Leftrightarrow \alpha \cdot cosh\xi_0 = d \Leftrightarrow \xi_0 = cosh^{-1}\left(\frac{d}{a}\right)$$

Στο σημείο αυτό, θέτουμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος:

$$u(\xi_0,\eta) = T_1$$

$$u(0,\eta) = T_2$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών, η λύση θα είναι ανεξάρτητη του η , οπότε:

$$u(\xi,\eta) = A + B\xi$$

Οπότε αντικαθιστώντας τις συνοριακές συνθήκες στην λύση βρίσκουμε τους συντελεστές A και B:

$$A = T_2$$

$$B = \frac{T_1 - T_2}{\xi_0}$$

Άρα:

$$u(\xi,\eta) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\xi_0}\,\xi$$

Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}$ δίνεται από τη σχ.(3.36). Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε την εξ. (3.20) για τον κύκλο $\xi = \xi_0$. Οπότε:

$$\dot{Q} = -\, k \int_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cosh\xi_0 - \cos\eta}{c} \cdot \frac{\partial u(\xi_0,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{c}{\cosh\xi_0 - \cos\eta}\, d\eta = k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u(\xi_0,\eta)}{\partial \xi}\, d\eta$$

$$= k\, \frac{T_1 - T_2}{\xi_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta = k\, \frac{T_1 - T_2}{\xi_0}\, 2\pi$$

Υποθέτοντας ότι ο αγωγός έχει μήκος L, τότε:

$$\dot{Q} = k\,(T_1 - T_2)\,\frac{2\pi L}{\xi_0}$$

Ο συντελεστής μορφής προκύπτει ότι είναι:

$$S = \frac{2\pi L}{\xi_0} = \frac{2\pi L}{\cos^{-1}\frac{d}{a}} = \frac{2\pi L}{\cos^{-1}\left(\frac{2d}{D}\right)}$$

Όπου $D = 2\alpha$, η διάμετρος του κυλινδρικού αγωγου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Η ανάλυση Fourier είναι ένα πεδίο εφαρμοσμένων μαθηματικών το οποίο αναπαριστά μια τυχαία συνάρτηση ως άθροισμα απλούστερων περιοδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η κεντρική ιδέα είναι η μελέτη των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης μέσω της διάσπασης της σε γνωστά μέρη. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται αποσύνθεση.

Μετασχηματισμός Fourier : Με τον όρο αυτό αναφερόμαστε σε μια μαθηματική διεργασία η οποία αποσυνθέτει μία συνάρτηση σε άθροισμα απείρων περιοδικών ημιτονοειδών συναρτήσεων .

Μια περίπτωση του μετασχηματισμού Fourier αποτελεί η σειρά Fourier,η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο όταν η υπό μελέτη συνάρτηση είναι περιοδική και δίνει ως αποτέλεσμα μια νέα συνάρτηση με διακριτό πεδίο τιμών αντί για συνεχές.
Κατά την διαδικασία ανάπτυξης συναρτήσεων σε σειρές Fourier η υπό μελέτη συναρτήσεις προσεγγίζονται από απεικονίσεις τις μορφής:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

Αυτή η παράσταση αντιπροσωπεύει ένα άθροισμα άπειρων όρων. Περιορίζοντας την παράσταση αυτή σε πεπερασμένο πλήθος όρων τότε παίρνουμε το πολυώνυμο Fourier, που είναι της μορφής:

$$f(x) = \alpha_0 + (\ \alpha_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \ldots + \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\ )$$

όπου α_1, b_1 συντελεστές , n = 1,2,3,…
Ολοκληρώνοντας την σχέση (1) από (-π,π) έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx + 0 + 0 + \ldots \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \alpha_0\, 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Έτσι βρίσκω το α_0 όπου είναι και η μέση τιμή της συνάρτησης. Από τη σχέση (1) πολλαπλασιάζοντας με $\cos nx$ και ολοκληρώνοντας από (-π,π) υπολογίζουμε τον συντελεστή α_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\ dx = \alpha_n \pi \Leftrightarrow$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnx\ dx$$

Ομοίως και για b_n , έχουμε:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnx\ dx$$

ΑΡΤΙΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Εάν έχουμε μία συνάρτηση $y = f(x)$, η οποία ορίζεται στο διάστημα 0 < x < L ορίζουμε την άρτια επέκταση της απαιτώντας ότι:

$$f(-x) = f(x)\ , \quad -L < x < L$$

Η οποία είναι συμμετρική με τον εαυτό της ως προς τον άξονα y΄y. Στην περίπτωση αυτή, οι συντελεστές Fourier διαφοροποιούνται ως εξής:

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

Η σειρά Fourier διαμορφώνεται ως εξής:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n cos\frac{n\pi x}{L}$$

ΠΕΡΙΤΤΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Εάν έχουμε μία συνάρτηση $y = f(x)$, η οποία ορίζεται στο διάστημα 0 < x < L ορίζουμε την περιττή επέκταση της απαιτώντας ότι:

$$f(-x) = -f(x)\ , \quad -L < x < L$$

Η οποία είναι συμμετρική με τον εαυτό της ως προς την αρχή των αξόνων O. Στην περίπτωση αυτή, οι συντελεστές Fourier διαφοροποιούνται ως εξής:

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

Η σειρά Fourier διαμορφώνεται ως εξής:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι ανάλογες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται υπερβολικές γιατί η γεωμετρική τους σχέση με μια υπερβολή είναι σχεδόν ίδια με την σχέση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με την περιφέρεια.

Το υπερβολικό ημίτονο εκφράζεται ως εξής:

$$sinhx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -i\ sinix$$

Το υπερβολικό συνημίτονο εκφράζεται ως εξής:

$$coshx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = cosix$$

Η υπερβολική εφαπτομένη και η υπερβολική συνεφαπτομένη προκύπτουν από το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο και εκφράζονται ως εξής:

$$tanhx = \frac{sinhx}{coshx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -i\ tanix$$

$$cothx = \frac{coshx}{sinhx} = i\ cotix$$

Όπου i είναι η φανταστική μονάδα $i^2 = -1$.
Ισχύει ότι:

$$sinh(-x) = -sinhx$$

$$cosh(-x) = coshx$$

Η τριγωνομετρική σχέση που ικανοποιούν τα ημίτονα και τα συνημίτονα είναι:

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Η αντίστοιχη σχέση των υπερβολικών είναι:

$$cosh^2x - sinh^2x = 1$$

Κάποιοι βασικοί παράγωγοι των υπερβολικών συναρτήσεων είναι:

$$\frac{d}{dx} sinhx = coshx$$

$$\frac{d}{dx} coshx = sinhx$$

$$\frac{d}{dx} tanhx = 1\text{-}tanh^2x = 1/cosh^2x$$

$$\frac{d}{dx} cothx = 1\text{-}coth^2x = \text{-}1/sinh^2x$$

Κάποια συνήθη ολοκληρώματα των υπερβολικών συναρτήσεων είναι:

$$\int sinhax\ dx = \frac{1}{a} coshax + c$$

$$\int coshax\ dx = \frac{1}{a} sinhax + c$$

$$\int tanhax\ dx = \frac{1}{a} ln(coshax) + c$$

$$\int cothax\ dx = \frac{1}{a} ln(sinhax) + c$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Δάσιος Γ. και Κυριακή Κ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα, 1994.

2. Τραχανάς Στέφανος, Μερικές *Διαφορικές Εξισώσεις (Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2007.

3. Boyce W. and Diprima R., *Στοιχειώδης Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.

4. Carslaw H. S. and Jaeger J. C., *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, 1959.

5. Cengel Y., *Μεταφορά Θερμότητας (Μία Πρακτική Προσέγγιση)*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2005.

6. Chen JT, Tsai MH, Liu CS., *Conformal mapping and bipolar coordinate for eccentric Laplace problems*, Comput Appl Eng Educ, 2009.

7. Spiegel Murray, *Ανάλυση Fourier*, McGraw-Hill, New York, 1974.

8. Stephenson G., *Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 1987.

9. http:// www.wikipedia.gr