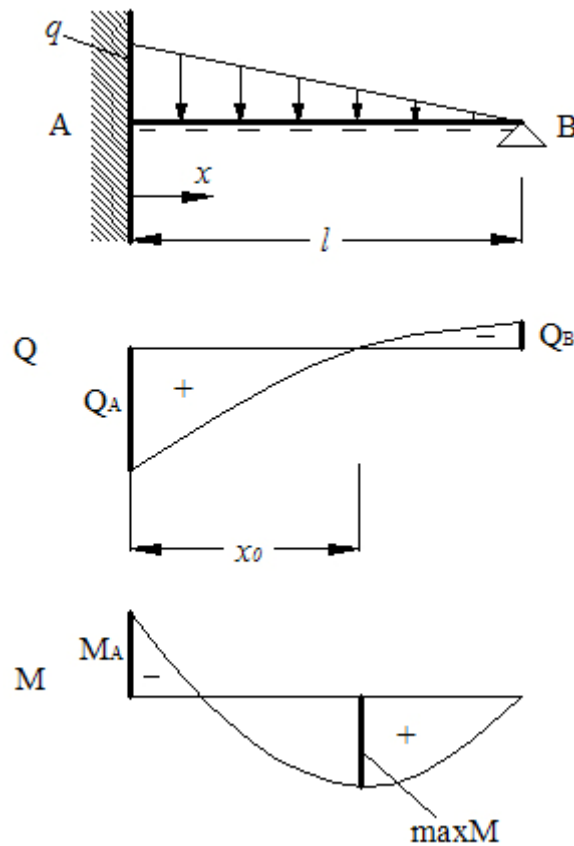


ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ  
ΔΟΚΟΥ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ:  
ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΥΡΟΣ Α.Μ. 5024  
ΡΑΜΙΩΤΗΣ ΛΟΥΚΑΣ Α.Μ. 4956

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΜΒΥΣΑΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2013

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολογίας του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Πάτρας και αναφέρεται στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού. Η μελέτη της καταπόνησης μιας δοκού σε κάμψη και οι καμπτικές ταλαντώσεις κατέχουν κεντρική θέση στην ανάλυση της ευστάθειας των κατασκευών και απασχολούν Μηχανικούς διαφόρων ειδικοτήτων.

Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές παραδοχές για τη δοκό στις οποίες στηρίζεται η μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί. Στη συνέχεια αποδεικνύεται η εξίσωση που περιγράφει τις καμπτικές ταλαντώσεις και υπολογίζεται η γενική της λύση. Τέλος υπολογίζονται οι ιδιομορφές των ταλαντώσεων για διάφορες περιπτώσεις στήριξης της δοκού.

Ευχαριστούμε θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μας κ. Γρηγόριο Καμβύσα, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολογίας, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μας προσέφερε για την πραγματοποίηση της Εργασίας.

Παναγιωτόπουλος Σταύρος  
Ραμιώτης Λουκάς

Φεβρουάριος 2013

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αναφέρεται στη μελέτη των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. Η μελέτη των καμπτικών ταλαντώσεων παρουσιάζει ενδιαφέρον αφενός από τη θεωρητική σκοπιά γιατί αποτελεί μία σημαντική εφαρμογή των μεθόδων επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Αφετέρου οι καμπτικές ταλαντώσεις δοκού παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον και από την πλευρά των εφαρμογών αφού παίζουν σημαντικό ρόλο στη δυναμική ανάλυση των διαφόρων κατασκευών, τον αντισεισμικό σχεδιασμό κ.τ.λ.

Η ανάπτυξη του θέματος γίνεται σε τέσσερα κεφάλαια. Πριν το κυρίως κείμενο τοποθετήθηκε μία μικρή εισαγωγή όπου παρουσιάζονται συνοπτικά ο σκοπός και οι μέθοδοι της ταλαντωτικής ανάλυσης μηχανικών συστημάτων και κατασκευών και γίνεται η περιγραφή του προβλήματος, του οποίου η μελέτη αποτελεί τον σκοπό της παρούσας εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι τρόποι στήριξης μιας δοκού, τα εντατικά μεγέθη και μία συνοπτική θεωρία για την κάμψη και το βέλος κάμψης, τα βασικά σημεία της οποίας είναι απαραίτητα για την περαιτέρω ανάλυση που θα γίνει στα επόμενα κεφάλαια. Έμφαση δίνεται στις παραδοχές που γίνονται κατά τη μελέτη της κάμψης δοκού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύεται η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού. Παρουσιάζονται οι συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση στήριξης της δοκού και τέλος περιγράφεται συνοπτικά η διαδικασία επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης.

Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την αναλυτική επίλυση της εξίσωσης των καμπτικών ταλαντώσεων με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Βρίσκεται η γενική λύση ως γινόμενο δύο συναρτήσεων από τις οποίες η μία εξαρτάται μόνο από το χρόνο και η άλλη μόνο από τη χωρική μεταβλητή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο υπολογίζονται οι ιδιομορφές των ταλαντώσεων για διάφορες περιπτώσεις στήριξης, δηλαδή υπολογίζονται οι ειδικές λύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης των καμπτικών ταλαντώσεων για διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών. Εξετάζεται η περίπτωση της πάκτωσης, της άρθρωσης, του ελεύθερου άκρου, της ελαστικής στήριξης, της στήριξης με αποσβεστήρα και του

άκρου με σημειακή μάζα. Σε κάθε περίπτωση υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες της ταλάντωσης και οι ιδιοσυναρτήσεις δηλαδή οι συναρτήσεις εκείνες που δίνουν το σχήμα που παίρνει η δοκός κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων	1
2. Ταλαντωτική Ανάλυση	1
3. Περιγραφή του Προβλήματος	2

### 1. Η ΔΟΚΟΣ

1.1 Γενικά.....	4
1.2 Στηρίξεις.....	5
1.3 Εντατικά Μεγέθη.....	6
1.4 Κάμψη.....	7

### 2. ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

2.1 Γενικά.....	13
2.2 Η Εξίσωση των Καμπτικών Ταλαντώσεων. ....	13
2.3 Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες.....	17
2.4 Διαδικασία Επίλυσης.....	21
2.4.1 Η Μέθοδος του Χωρισμού των Μεταβλητών.....	21
2.4.2 Η Αρχή της Υπέρθεσης.....	22
2.4.3 Η Μέθοδος των Ιδιοσυναρτήσεων.....	28

### 3. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

3.1 Χωρισμός των Μεταβλητών.....	30
3.2 Γενική Λύση της Χωρικής Εξίσωσης.....	32
3.3 Γενική Λύση της Χρονικής Εξίσωσης.....	35

<b>4. ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ</b>	
4.1 Γενικά.....	38
4.2 Αμφιέριστη Δοκός.....	39
4.3 Αμφίπακτη Δοκός.....	44
4.4 Πρόβολος.....	48
4.5 Δοκός με Ελαστική Στήριξη.....	52
4.6 Δοκός με Σημειακή Μάζα.....	54
4.7 Δοκός με Αποσβεστήρα.....	57
<b>5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ</b>	62
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	63

# **ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

## **1. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

Οι ταλαντώσεις που συμβαίνουν σε πολλές μηχανές, κατασκευές και μηχανικά συστήματα είναι ανεπιθύμητες λόγω των ανεπιθύμητων κινήσεων που προκύπτουν, του θορύβου, της δυναμικής καταπόνησης που προκαλούν στα διάφορα μέρη του μηχανικού συστήματος προκαλώντας δυσλειτουργίες και αστοχίες των διαφόρων τμημάτων του συστήματος και των ενεργειακών απωλειών που τις συνοδεύουν. Επομένως είναι πάντα απαραίτητο να γίνεται ταλαντωτική ανάλυση οποιουδήποτε μηχανικού συστήματος που προτείνεται για κάποια εφαρμογή. Η ταλαντωτική ανάλυση αποτελεί βασικό κομμάτι της διαδικασίας σχεδιασμού του μηχανικού συστήματος με σκοπό την εύρεση των απαραίτητων τροποποιήσεων που μπορεί να γίνουν στο σύστημα ώστε να εξαλειφθούν ή τουλάχιστον να μειωθούν όσο γίνεται οι ταλαντώσεις.

Υπάρχουν δύο παράγοντες που καθορίζουν το πλάτος και τη συχνότητα των ταλαντώσεων. Η εφαρμοζόμενη διέγερση και η απόκριση του συστήματος σε δεδομένη διέγερση. Η διέγερση προκύπτει από εξωτερικά αίτια όπως ανέμους, κύματα, σεισμούς κ.α. αλλά και από εσωτερικά αίτια όπως κινούμενα φορτία ή περιστρεφόμενες μηχανές. Οι διεγείρουσες δυνάμεις μπορεί να είναι περιοδικές, κρουστικές ή και εντελώς τυχαίες συναρτήσεις του χρόνου. Η απόκριση του συστήματος καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τα δυναμικά χαρακτηριστικά συστήματος όπως τις φυσικές του συχνότητες και το επίπεδο της ενδογενούς του απόσβεσης.

## **2. ΤΑΛΑΝΤΩΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

Η μελέτη των ταλαντώσεων ενός μηχανικού συστήματος έχει κυρίως σκοπό τον υπολογισμό των φυσικών συχνοτήτων του συστήματος και συνεπώς και την απόκριση του συστήματος στις αναμενόμενες διεγέρσεις. Οι φυσικές συχνότητες είναι απαραίτητο να υπολογιστούν γιατί αν το σύστημα διεγερθεί σε μία από αυτές τις συχνότητες θα έχουμε

την εμφάνιση του φαινομένου του συντονισμού με αποτέλεσμα μεγάλο πλάτος ταλάντωσης, μηχανική καταπόνηση και υψηλά επίπεδα θορύβου. Συνήθως το σύστημα μελετάται μόνο στο εύρος συχνοτήτων στο οποίο αναμένονται διεγέρσεις κατά τη λειτουργία του. Δηλαδή δεν είναι ανάγκη να βρεθούν όλες οι φυσικές συχνότητες του συστήματος.

Αν και συνήθως είναι δυνατή η μελέτη ολόκληρου του συστήματος αυτό συχνά οδηγεί σε πολύ περίπλοκες αναλύσεις και εξαγωγή πολλών όχι ιδιαίτερα χρήσιμων αποτελεσμάτων. Έτσι, στην πράξη περιοριζόμαστε στη μελέτη ενός απλοποιημένου μαθηματικού μοντέλου του συστήματος. Από τη μελέτη του μοντέλου αυτού παίρνουμε την επιθυμητή πληροφορία με τον πιο οικονομικό τρόπο και με ακρίβεια που είναι μέσα στα αποδεκτά όρια. Η παραγωγή ενός τέτοιου μοντέλου δεν είναι εύκολη υπόθεση. Ένα καλό μοντέλο ταλαντωτικής ανάλυσης πρέπει να προβλέπει με ακρίβεια τη θέση των κόμβων του συστήματος, δηλαδή των σημείων εκείνων που έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης και άρα παραμένουν συνεχώς ακίνητα.

Η ταλαντωτική ανάλυση είναι μία διαδικασία που συνήθως γίνεται σε τρία στάδια:

- Παραγωγή του μαθηματικού ή φυσικού μοντέλου που προσομοιώνει το υπό μελέτη μηχανικό σύστημα.
- Εξαγωγή από το μοντέλο των εξισώσεων κίνησης.
- Υπολογισμός της απόκρισης του συστήματος σε δεδομένη διέγερση μέσω της επίλυσης των εξισώσεων κίνησης.

Φυσικά όσο πιο πολύπλοκο είναι το σύστημα τόσο πιο πολύπλοκες είναι και οι εξισώσεις κίνησης με αποτέλεσμα να μειώνεται η πιθανότητα εύρεσης αναλυτικής λύσης. Σε αυτήν την περίπτωση καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους.

### **3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ**

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει σαν στόχο τη μελέτη των ελεύθερων, δηλαδή χωρίς εξωτερική διέγερση, καμπτικών ταλαντώσεων της απλής δοκού. Στην καμπτική ταλάντωση η παλινδρομική κίνηση των σημείων πραγματοποιείται εγκάρσια προς τον κύριο άξονα της δοκού.

Η κατάστρωση της εξίσωσης κίνησης της δοκού, όπως και κάθε συνεχούς συστήματος γίνεται με αφετηρία το απειροστό στοιχείο της. Αντίστοιχα στα διακριτά συστήματα η κατάστρωση των εξισώσεων γίνεται με αφετηρία τις πεπερασμένες σε αριθμό μοναχικές μάζες τους. Σε αντίθεση με τα διακριτά συστήματα τα οποία περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, τα συνεχή συστήματα περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις.



Κάθε απειροστό στοιχείο μπορεί να έχει πολλές ανεξάρτητες δυνατότητες παραμόρφωσης, επομένως ολόκληρο το σύστημα με τα άπειρα στο πλήθος στοιχεία θα διαθέτει και απειρία βαθμών ελευθερίας κίνησης. Για το λόγο αυτό τα συνεχή συστήματα ονομάζονται και απειροβάθμια. Επιπλέον, τα απειροβάθμια συστήματα θα διαθέτουν και άπειρες φυσικές συχνότητες οι τιμές των οποίων εξαρτώνται από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά τους. Σκοπός της εργασίας είναι ο υπολογισμός των φυσικών συχνοτήτων ταλάντωσης της δοκού για διάφορες περιπτώσεις στήριξης των άκρων αυτής.

Οι καμπτικές ταλαντώσεις της απλής δοκού αποτελούν τη βάση για τη μελέτη πιο πολύπλοκων συστημάτων όπως συστήματα δοκών, πλαίσια κ.τ.λ. Όλα αυτά αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο της δυναμικής των κατασκευών με τη μελέτη της οποίας ασχολούνται οι μηχανολόγοι και οι πολιτικοί μηχανικοί. Επιπρόσθετα οι καμπτικές ταλαντώσεις των δοκών έχουν πολύ μεγάλη σημασία για την αντισεισμική σχεδίαση των κατασκευών κάτι που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη χώρα μας.

# 1. Η ΔΟΚΟΣ

## 1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η έννοια του φορέα, σαν κατασκευή που φέρει εξωτερικά φορτία και τα μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις του, είναι γενική και αναφέρεται σε όλα τα στερεά σώματα που ισορροπούν κάτω από την επίδραση φορτίων. Οι φορείς ανάλογα με τη μορφή τους μπορεί να είναι:

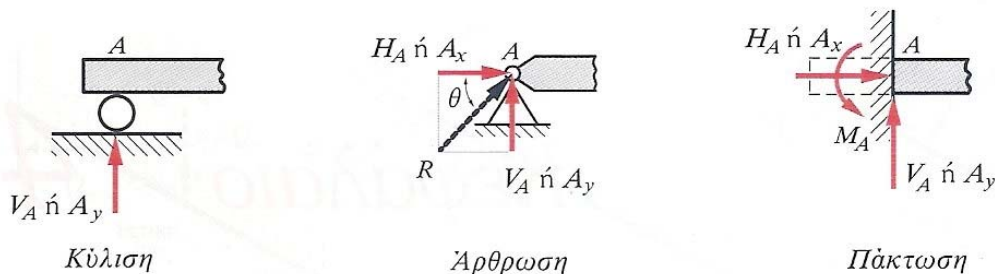
- Επίπεδοι, που είναι σώματα σταθερού ή μεταβλητού, μικρού πάντα πάχους, και απλώνονται σε επίπεδη επιφάνεια. Ανάλογα με τη διεύθυνση των φορτίων που δρουν εξωτερικά, οι επίπεδοι φορείς διακρίνονται:
  1. Στους δίσκους όπου τα εξωτερικά φορτία κείνται στο επίπεδο του φορέα
  2. Στις πλάκες όπου τα εξωτερικά φορτία είναι κάθετα στο επίπεδο του φορέα.
- Γραμμικοί, που είναι σώματα σταθερής ή μεταβλητής διατομής, της οποίας το κεντροειδές γράφει οποιαδήποτε επίπεδη γραμμή που ονομάζεται άξονας. Οι γραμμικοί φορείς ανάλογα με τη μορφή που έχει ο άξονάς τους διακρίνονται:
  1. Στους ευθύγραμμους, όταν ο άξονας είναι ευθεία γραμμή.
  2. Στους τοξωτούς, όταν ο άξονας είναι κυκλικό, παραβολικό ή γενικά καμπύλο τόξο.
  3. Στους πλαισιωτούς, όταν ο άξονας είναι τεθλασμένη γραμμή.
  4. Στους σύνθετους όταν ο άξονας έχει σύνθετη μορφή με περισσότερες από μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Η δοκός ταυτίζεται με τους ευθύγραμμους γραμμικούς φορείς και είναι κατασκευαστικό στοιχείο που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία οποιασδήποτε μορφής. Στη δοκό το ύψος της διατομής της πρέπει να είναι μικρότερο από το μισό του μήκους της, διαφορετικά ο φορέας θεωρείται δίσκος. Η απλούστερη δοκός αποτελείται από μία πρισματική ράβδο που τα άκρα της στηρίζονται πάνω σε δύο στηρίγματα.

## 1.2 ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ

Για τη στήριξη μιας δοκού είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω είδη στηρίξεων:

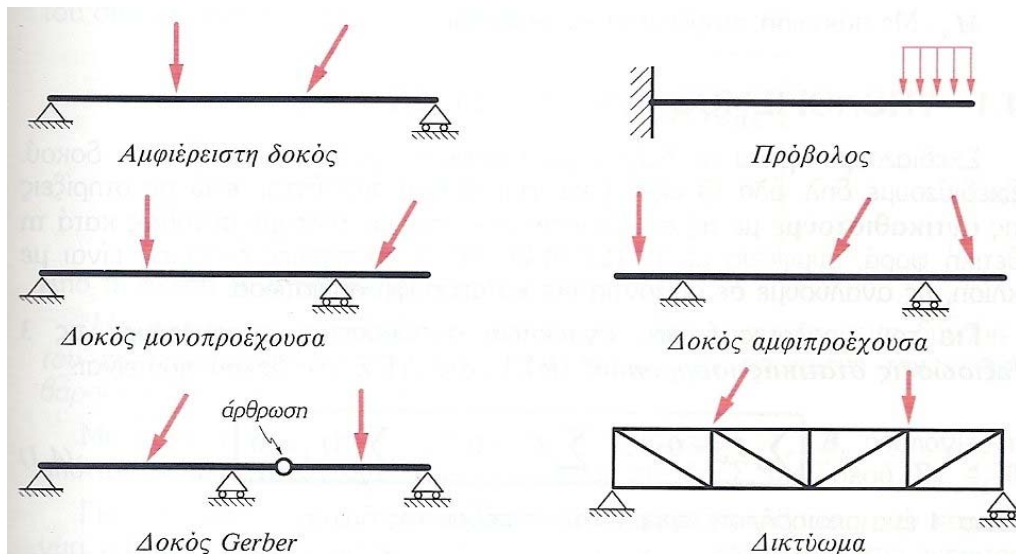
- Ελεύθερη έδραση ή κύλιση. Το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να κινείται σε επίπεδη ή άλλη επιφάνεια χωρίς τριβές επιτρέποντας την περιστροφή του φορέα στο επίπεδο φόρτισης. Η αντίδραση της κύλισης στη δοκό είναι μία δύναμη που διέρχεται από το σημείο στήριξης και είναι κάθετη στην κύλιση.
- Άρθρωση. Το σημείο στήριξης συνδέεται μόνιμα αποκλείοντας κάθε μετατόπιση και επιτρέποντας μόνο την περιστροφή της δοκού στο επίπεδο φόρτισης. Η αντίδραση της άρθρωσης έχει οποιαδήποτε διεύθυνση. Την αναλύουμε συνήθως σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη.
- Πάκτωση. Η στήριξη αυτού του είδους δεν επιτρέπει καμία στροφή ή μετατόπιση στο άκρο της δοκού. Οι αντιδράσεις είναι τρεις. Αφενός οι δύο συνιστώσες της δύναμης όπως και στην άρθρωση, αφετέρου δε και μία ροπή που αποκλείει την περιστροφή της δοκού και ονομάζεται ροπή πάκτωσης.



Σχήμα 1.1 Τρόποι στήριξης δοκού [2].

Η δοκός ονομάζεται αμφιέρειστη αν τα δύο άκρα της είναι στερεωμένα είτε με κύλιση είτε με άρθρωση. Αν το ένα άκρο της δοκού είναι πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο αυτή ονομάζεται πρόβολος ενώ αν και τα δύο άκρα είναι πακτωμένα ονομάζεται αμφίπακτη. Η αμφιέρειστη δοκός μπορεί να φέρει προέκταση προς τη μία ή και τις δύο κατευθύνσεις οπότε ονομάζεται μονοπροέχουσα και αμφιπροέχουσα αντίστοιχα. Αν η δοκός περιέχει έναν αριθμό ενδιάμεσων αρθρώσεων ονομάζεται αρθρωτή ή δοκός Gerber. Τέλος, το σώμα των δοκών άλλοτε είναι συμπαγές, όπως π.χ. το σώμα μιας δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα, και άλλοτε είναι δικτυωτό, δηλαδή αποτελείται από πολλές ράβδους στο ίδιο επίπεδο που συνδέονται

αρθρωτά μεταξύ τους. Γι' αυτό οι πρώτες ονομάζονται ολόσωμοι δοκοί ενώ οι δεύτερες δικτυωτές. Στο σχήμα 2.2 φαίνονται διάφορες περιπτώσεις δοκών.



Σχήμα 1.2 Διάφορα είδη δοκών [2].

### 1.3 ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Η παρουσία των εξωτερικών φορτίων έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση σε τυχούσα διατομή της δοκού, τριών γενικά εντατικών μεγεθών που ονομάζονται και φορτία διατομής. Τα εντατικά αυτά μεγέθη είναι:

- Η αξονική ή ορθή δύναμη (N)
- Η τέμνουσα δύναμη (Q)
- Η ροπή κάμψης (M)

Όταν θεωρούμε καθαρά εγκάρσια κίνηση των σημείων της δοκού τότε από την ισορροπία οποιουδήποτε τμήματος της δοκού προκύπτει ότι η τέμνουσα δύναμη είναι ίση με την κλίση της καμπτικής ροπής:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \tag{1.1}$$

όπου ο άξονας x ταυτίζεται με τον άξονα της δοκού. Δηλαδή, η καμπτική ροπή παίρνει ακρότατη τιμή στα σημεία που η τέμνουσα δύναμη μηδενίζεται.

Ακόμη, η παράγωγος της τέμνουσας δύναμης είναι ίση με το καταναμημένο φορτίο στη δοκό:

$$q(x) = \frac{dQ(x)}{dx} \quad (1.2)$$

## 1.4 ΚΑΜΨΗ

Κάμψη ονομάζεται η καταπόνηση που προέρχεται από την επίδραση μιας ροπής κάμψης πάνω σε ένα στερεό. Η ροπή κάμψης μπορεί να προέρχεται από κάποια διατμητική δύναμη ή να έχουμε επενέργεια κάποιας συγκεντρωμένης ροπής κάμψης.

Διακρίνουμε δύο είδη κάμψης:

- Την καθαρή κάμψη κατά την οποία στη δοκό ή σε τμήμα της εμφανίζεται μόνο καμπτική ροπή
- Την γενική κάμψη κατά την οποία εκτός της καμπτικής ροπής εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη.

Οι βασικές παραδοχές που γίνονται κατά τη μελέτη της κάμψης μιας δοκού είναι:

1. Όλα τα φορτία, δυνάμεις ή ροπές, που προκαλούν την κάμψη κείνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον αρχικά ευθύγραμμο άξονα της δοκού και λέγεται επίπεδο κάμψης.
2. Η αρχή του Bernoulli, η οποία διατυπώθηκε το 1700 αλλά καθιερώθηκε οριστικά στη θεωρία της κάμψης με τις εργασίες του Navier (1820) και ορίζει ότι: Διατομές επίπεδες και κάθετες στον άξονα της δοκού πριν από την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα και μετά από αυτήν. Με την παραδοχή αυτή δεν λαμβάνονται υπόψη οι παραμορφώσεις εξαιτίας των διατμητικών τάσεων.
3. Οι παραμορφώσεις που εμφανίζονται είναι μικρές, δηλαδή ισχύει ο νόμος του Hooke.
4. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι το ίδιο σε εφελκυσμό και θλίψη.
5. Το επίπεδο της κάμψης, που αναφέρθηκε στην πρώτη παραδοχή, περιέχει έναν από τους κύριους άξονες αδράνειας της διατομής του, που είναι άξονες κάθετοι μεταξύ τους, ως προς τους οποίους η ροπή αδράνειας της διατομής είναι μέγιστη για τον έναν και ελάχιστη για τον άλλο.

Το μαθηματικό μοντέλο της δοκού που κατασκευάζεται με βάση τις παραπάνω υποθέσεις ονομάζεται δοκός Bernoulli-Euler. Όταν το μήκος της δοκού είναι συγκρίσιμο με το πάχος (ή με την ακτίνα αδράνειας) της εγκάρσιας διατομής της, η διατμητική παραμόρφωση της

γίνεται σημαντική. Σε αυτήν την περίπτωση η απόκριση της δοκού εμπεριέχει ταυτόχρονα καμπτικές και διατμητικές συνιστώσες. Το μοντέλο για τη δοκό που λαμβάνει υπόψη και τις διατμητικές παραμορφώσεις παρουσιάστηκε αρχικά από τον Timoshenko. Για τη δοκό Timoshenko ισχύουν όλες οι παραπάνω υποθέσεις που ισχύουν και στη δοκό Bernoulli-Euler εκτός από την αρχή του Bernoulli (υπόθεση 2).

Στη συνέχεια καθώς και στα αμέσως επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε με τη δοκό Bernoulli-Euler. Θεωρώντας απλή κάμψη ως προς τον άξονα  $z$ , δηλαδή:

$$M_y = 0 \text{ και } M_z \neq 0$$

η ορθή τάση που αναπτύσσεται στη δοκό κατά τον άξονα  $x$  είναι:

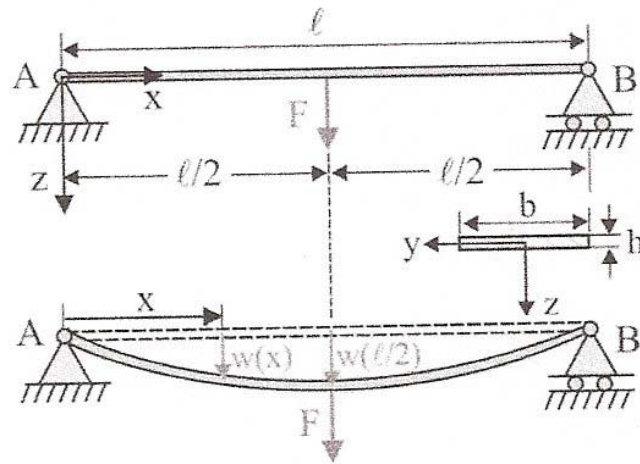
$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y \quad (1.3)$$

όπου  $I$  η ροπή αδράνειας της διατομής της δοκού ως προς τον άξονα  $z$  και ακόμη παραλείψαμε για λόγους απλοποίησης των συμβολισμών το δείκτη  $z$  από την καμπτική ροπή. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται νόμος κάμψης και οι ορθές τάσεις χαρακτηρίζονται αντίστοιχα ως τάσεις κάμψης. Σύμφωνα με το νόμο της κάμψης η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε τυχαίο σημείο της διατομής μιας καμπτόμενης δοκού είναι ανάλογη της απόστασης του σημείου αυτού από την ουδέτερη γραμμή. Στην ουδέτερη γραμμή η ορθή τάση είναι μηδέν ενώ οι ακρότατες ίνες μιας καμπτόμενης δοκού υφίστανται τις μεγαλύτερες ορθές τάσεις.

Η δοκός υπό την επίδραση της ροπής κάμψης παραμορφώνεται και ο άξονας της δοκού μετατρέπεται σε καμπύλη που ονομάζεται ελαστική γραμμή. Η μετατόπιση κάθε σημείου της δοκού στη διεύθυνση  $y$  ονομάζεται βέλος κάμψης και συμβολίζεται με  $w(x)$ . Η γωνία κλίσης  $\varphi(x)$  της ελαστικής γραμμής στη θέση  $x$  είναι:

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.4)$$

όπου έχουμε κάνει την προσέγγιση:  $\tan \varphi \approx \varphi$  θεωρώντας πολύ μικρές παραμορφώσεις.



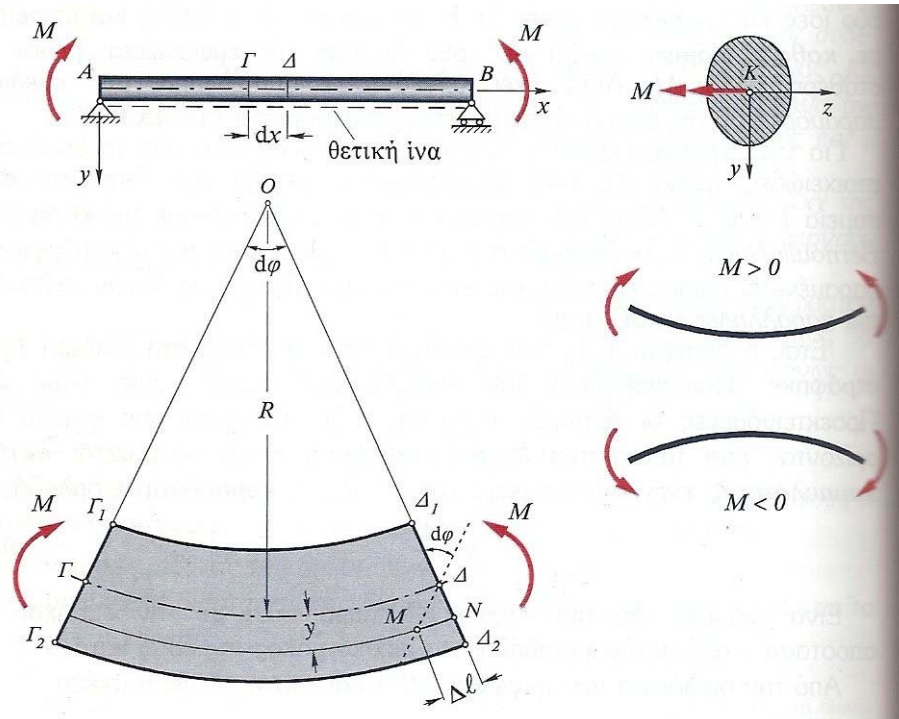
Σχήμα 1.3 Ελαστική γραμμή καμπτόμενης αμφιέρειστης δοκού που καταπονείται από μία συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσο της [5].

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την εξίσωση της ελαστικής γραμμής στην απλούστερη περίπτωση που θεωρούμε μόνο εγκάρσιες μετατοπίσεις των σημείων της δοκού, δηλαδή όταν ισχύει η υπόθεση του Bernoulli. Θεωρούμε αμφιέρειστη δοκό μήκους  $l$  στα άκρα της οποίας ενεργούν δύο ίσες και αντίρροπες ροπές  $M$ . Είναι φανερό ότι η δοκός καταπονείται σε καθαρή κάμψη επειδή σε κάθε διατομή της εμφανίζεται μόνο η σταθερή ροπή  $M$ . Αυτό έχει τελικά σαν αποτέλεσμα την κυκλική παραμόρφωση της δοκού όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4 σε μεγέθυνση. Θεωρούμε ότι αποκόπτουμε από τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα  $dx$ , που περιλαμβάνεται μεταξύ των διατομών στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ . Λόγω της παραδοχής του Bernoulli, οι διατομές στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  μετά την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα της δοκού αλλά όχι πια παράλληλες μεταξύ τους.

Έτσι η διατομή  $\Delta_1\Delta_2$  που αρχικά ήταν παράλληλη στη διατομή  $\Gamma_1\Gamma_2$  στράφηκε ολόκληρη μετά την παραμόρφωση κατά γωνία έστω  $d\phi$ . Προεκτεινόμενες οι διατομές  $\Gamma_1\Gamma_2$  και  $\Delta_1\Delta_2$  τέμνονται στο σημείο  $O$ , ορίζοντας έτσι την ακτίνα  $R=(O\Gamma)=(O\Delta)$ , η οποία ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας, ενώ το αντίστροφό της,  $\kappa$ , ονομάζεται καμπυλότητα, δηλαδή:

$$\kappa = \frac{1}{R} \quad (1.5)$$

Είναι φανερό ότι μια τυχαία ίνα παράλληλη με τη  $\Gamma\Delta$  και σε απόσταση  $y$  από αυτήν, μεταβάλλει το αρχικό μήκος της έστω κατά  $\Delta l$ .



Σχήμα 1.4 Μεγέθυνση καμπύλωσης στοιχειώδους τμήματος καμπτόμενης δοκού [3].

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΓΔ και ΔΜΝ, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\Delta l}{dx} = \frac{y}{R} \quad (1.6)$$

Ο λόγος  $\frac{\Delta l}{dx}$ , όπως είναι γνωστό, είναι η ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon$ , η οποία εκφράζεται επίσης και από το νόμο του Hooke, μέσω της σχέσης:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1.7)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένη η δοκός. Από τις σχέσεις (1.6) και (1.7) εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

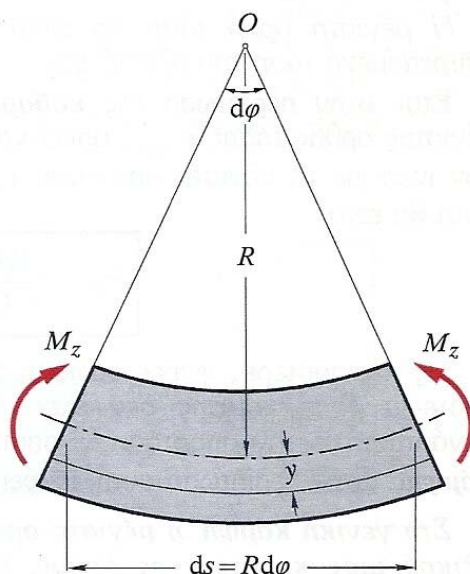
$$\sigma = \frac{E}{R} y \quad (1.8)$$



Συγκρίνοντας την (1.3) με την (1.8) παίρνουμε:

$$\frac{E}{R} y = \frac{M}{I} y \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (1.9)$$

Το γινόμενο  $EI$  εκφράζει την αντίσταση που προβάλλει η διατομή της δοκού στην κάμψη και ονομάζεται μέτρο δυσκαμψίας της δοκού. Η σχέση (1.9) αποτελεί τη θεμελιώδη σχέση της θεωρίας της ελαστικής παραμόρφωσης της δοκού. Από αυτήν υπολογίζεται η καμπυλότητα και η ακτίνα καμπυλότητας της ελαστικής γραμμής σε τυχαία θέση συναρτήσει της ροπής κάμψης και του μέτρου δυσκαμψίας της δοκού. Στην περίπτωση της καθαρής κάμψης η καμπυλότητα παραμένει σταθερή διότι η ροπή κάμψης έχει σταθερή τιμή σε όλο το μήκος της δοκού. Επομένως στην καθαρή κάμψη, η ελαστική γραμμή είναι τόξο κύκλου. Σε άλλη περίπτωση η ελαστική γραμμή μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή.



Σχήμα 1.5 Καμπύλωση καμπτόμενης δοκού [3].

Η σχετική γωνία στροφής  $d\varphi$  μεταξύ δύο διαδοχικών διατομών της δοκού που απέχουν μεταξύ τους στοιχειώδη απόσταση  $ds$ , όπου το στοιχειώδες τόξο είναι (σχήμα 1.5):

$$ds = R \cdot d\varphi \quad (1.10)$$

Σύμφωνα με την (1.9) έχουμε:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \Rightarrow d\varphi = \frac{M}{EI} ds \quad (1.11)$$

Θεωρώντας ότι οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση:  $ds \approx dx$ , οπότε η (1.11) γράφεται:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (1.12)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την (1.4) καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (1.13)$$

Στη σχέση (1.13) το αρνητικό πρόσημο έχει προκύψει από την παραδοχή ότι το βέλος κάμψης  $w(x)$  ενός σημείου της δοκού είναι θετικό όταν το σημείο βυθίζεται προς την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα  $y$ .

## 2. ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

### 2.1 ΓΕΝΙΚΑ

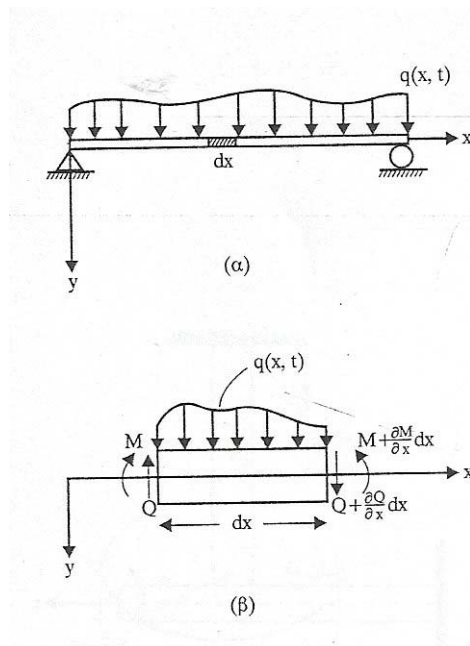
Στην καμπτική ταλάντωση δοκού η παλινδρομική κίνηση των υλικών σημείων που την αποτελούν πραγματοποιείται εγκάρσια προς τον άξονα της δοκού. Ελεύθερη ταλάντωση έχουμε όταν στη δοκό δεν ασκούνται εξωτερικά φορτία ενώ εξαναγκασμένη ταλάντωση έχουμε όταν η δοκός ταλαντώνεται υπό την επήρεια εξωτερικών φορτίων. Σε κάθε περίπτωση μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει απόσβεση. Στη συνέχεια θα κατασκευαστεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις, γενικά εξαναγκασμένες, καμπτικές ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση και θα περιγραφεί η μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης αυτής στην ειδική περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων.

### 2.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Θεωρούμε ότι η εγκάρσια κίνηση της δοκού γίνεται σύμφωνα με τις παραδοχές της απλής θεωρίας Bernoulli-Euler. Θεωρούμε μία αμφιέριστη δοκό μήκους  $L$  η οποία τη χρονική στιγμή  $t=0$  διεγείρεται από ένα συνεχώς κατανεμημένο φορτίο  $q(x,t)$  όπως στο σχήμα 2.1.

Η κίνηση της δοκού που θα ακολουθήσει αναπαρίσταται από τη συνάρτηση  $w(x,t)$  η οποία μας παρέχει τη θέση κάθε σημείου της δοκού ανά πάσα χρονική στιγμή  $t$ . Εάν θεωρήσουμε τις απομακρύνσεις των σημείων της δοκού αρκετά μικρές και τις διατομές της να παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον κύριο άξονά της, τότε σύμφωνα με τη θεωρία Bernoulli-Euler η ροπή που αναπτύσσεται σε κάθε διατομή όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο είναι:

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$



Σχήμα 2.1 (α) Καταπόνηση δοκού με συνεχές καμπτικό φορτίο.  
 (β) Διάγραμμα ελευθέρου σώματος στοιχειώδους τμήματος της δοκού [5].

Σχεδιάζοντας το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για ένα στοιχειώδες τμήμα της δοκού, το οποίο προέκυψε από μία αριστερή και μία δεξιά τομή στις θέσεις  $x$  και  $x+dx$  αντίστοιχα και θεωρώντας ως θετικές φορές των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών  $M$  αυτές που αναφέρονται στο σχήμα 2.1β τότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι:

$$Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx - Q(x, t) + q(x, t) dx = dm \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

ή

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx + q(x, t) dx = dm \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

όπου  $\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$  είναι η επιτάχυνση του στοιχειώδους τμήματος της δοκού μήκους  $dx$  και μάζας  $dm$ . Αντικαθιστούμε τη μάζα με το γινόμενο της πυκνότητας επί τον όγκο:

$$dm = \rho A dx \quad (2.4)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένη η δοκός και  $A$  το εμβαδόν της διατομής της.

Η εξίσωση κίνησης (2.3) γίνεται:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx + q(x,t)dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

ή

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + q(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Επειδή όμως θεωρούμε καθαρά εγκάρσια κίνηση του τμήματος μήκους  $dx$ , δεν υπάρχουν γωνιακές επιταχύνσεις και άρα η συνισταμένη ροπή πρέπει να είναι μηδέν:

$$\begin{aligned} \sum M = 0 \Rightarrow M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \cdot dx - M(x,t) - \\ - Q(x,t) \cdot dx - q(x,t) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

ή

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = Q(x,t) \quad (2.7)$$

όπου θεωρήσαμε αμελητέα την ποσότητα  $(dx)^2$ .

Στη συνέχεια θα εισάγουμε τις σχέσεις (2.1) και (2.7) στην (2.6). Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να παραγωγίσουμε την (2.7) ως προς  $x$ :

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \quad (2.8)$$

και στη συνέχεια να παραγωγίσουμε την (2.1) δύο φορές ως προς  $x$ :

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \quad (2.9)$$

Συγκρίνοντας τις (2.8) και (2.9) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας την (2.10) στη (2.6) παίρνουμε:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + q(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Αν θεωρήσουμε ομοιόμορφη διατομή, δηλαδή ότι το εμβαδόν και η ροπή αδράνειας είναι ίδια σε όλες τις διατομές της δοκού η εξίσωση (2.11) απλοποιείται σημαντικά:

$$-EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + q(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

Με αναδιάταξη των όρων γράφεται στην πιο συνηθισμένη μορφή:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (2.13)$$

Αν και η παραπάνω εξίσωση παράχθηκε για να περιγράψει το πρόβλημα των καμπτικών ταλαντώσεων της αμφιέρειστης δοκού του σχήματος 2.1 που καταπονείται από ένα κατανεμημένο φορτίο ισχύει γενικά για δοκό ανεξάρτητα από το είδος των στηρίξεων και το είδος των φορτίσεων.

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι για την παραγωγή της εξίσωσης (2.13) δεν λάβαμε καθόλου υπόψη τυχόν αποσβέσεις. Η εξίσωση (2.13), συνεπώς, περιγράφει τις εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού χωρίς απόσβεση. Στην περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση, δηλαδή χωρίς εξωτερική διέγερση ή  $q(x,t) = 0$ , η εξίσωση (2.13) γίνεται:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.14)$$

Η μελέτη των λύσεων της εξίσωσης αυτής αποτελεί και τον κύριο σκοπό της παρούσας εργασίας.

### 2.3 ΑΡΧΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Η εξίσωση (2.14) είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Η άγνωστη συνάρτηση  $w(x,t)$  είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, της χωρικής συντεταγμένης  $x$  (μονοδιάστατο πρόβλημα) και του χρόνου  $t$ . Η (2.14) περιέχει μερικές παραγώγους της συνάρτησης  $w(x,t)$  ως προς το  $x$  και το  $t$ . Ακόμη, η (2.14) είναι ομογενής γραμμική μερική διαφορική εξίσωση. Γραμμική γιατί οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης  $w(x,t)$  εμφανίζονται όλες στην πρώτη δύναμη και ομογενής γιατί δεν περιέχει όρο που είναι συνάρτηση του  $x$  ή του  $t$  ή και των δύο. Δηλαδή το δεύτερο μέλος της είναι μηδέν. Για παράδειγμα, η εξίσωση (2.13) που περιγράφει τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις είναι μη-ομογενής λόγω του όρου  $q(x,t)$  στο δεύτερο μέλος.

Για τον πλήρη προσδιορισμό του προβλήματος των καμπτικών ταλαντώσεων, όπως και κάθε προβλήματος που περιγράφεται από μία ή περισσότερες μερικές διαφορικές εξισώσεις, απαιτείται ένας αριθμός συνθηκών τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Οι συνθήκες αυτές πρέπει να είναι τόσες όσες και οι αυθαίρετες σταθερές που θα περιέχει η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Διακρίνονται σε αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Οι αρχικές συνθήκες αναφέρονται συνήθως στη χρονική στιγμή  $t=0$  και δίνουν ως πληροφορία τη θέση και την ταχύτητα κάθε σημείου της δοκού τη χρονική στιγμή  $t=0$ . Οι αρχικές συνθήκες δηλαδή είναι της μορφής:

$$w(x,0) = f(x) \quad (2.15)$$

$$\left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (2.16)$$

Η συνάρτηση  $f(x)$  δίνει για κάθε σημείο  $x$  της δοκού το βέλος κάμψης του τη χρονική στιγμή  $t=0$ , ενώ η συνάρτηση  $g(x)$  δίνει την ταχύτητα κάθε σημείου της δοκού. Οι αρχικές συνθήκες είναι δύο ακριβώς γιατί η μερική διαφορική εξίσωση (2.14) είναι δευτέρας τάξης ως προς το χρόνο. Φυσικά αυτό είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

Οι συνοριακές συνθήκες καθορίζονται από το είδος των στηρίξεων στα άκρα της δοκού και αναφέρονται σε παραγώγους έως μίας τάξης

μικρότερες από τη μεγαλύτερη τάξη της χωρικής παραγώγου που περιέχεται στη διαφορική εξίσωση. Δηλαδή στην περίπτωση μας αναφέρονται σε παραγώγους έως και τρίτης τάξης ως προς το  $x$ . Επιπλέον, στο πρόβλημα που εξετάζουμε απαιτούνται τέσσερις συνοριακές συνθήκες επειδή η (2.14) είναι τετάρτης τάξης ως προς τη συντεταγμένη  $x$ .

Για την καλύτερη κατανόηση των συνοριακών συνθηκών είναι χρήσιμο να θυμηθούμε τα εξής:

➤ Η συνάρτηση  $w(x,t)$  εκφράζει την εγκάρσια μετατόπιση (βέλος κάμψης) στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$ .

➤ Η παράγωγος  $\frac{\partial w}{\partial x}$  εκφράζει την κλίση της ελαστικής γραμμής στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$ .

➤ Η παράγωγος  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  ουσιαστικά εκφράζει τη ροπή κάμψης στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$  λόγω της σχέσης (2.1)

➤ Η παράγωγος  $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$  ουσιαστικά εκφράζει την τέμνουσα δύναμη στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$  λόγω των σχέσεων (2.1) και (2.7).

Στη συνέχεια δίνονται οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλει κάθε είδος στήριξης με σύντομη επεξήγηση. Οι συνοριακές συνθήκες που ακολουθούν αναφέρονται βασικά στο άκρο  $x=0$ . Όταν η τροποποίηση που πρέπει να γίνει για την περίπτωση του άκρου  $x=L$  είναι προφανής δεν αναφέρεται καθόλου.

➤ Άρθρωση ή κύλιση (με το επίπεδο κύλισης παράλληλο στον άξονα της δοκού):

$$w(0,t) = 0 \quad (2.17\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.17\beta)$$

Οι στηρίξεις αυτές δεν επιτρέπουν την εγκάρσια μετατόπιση του άκρου της ράβδου και συγχρόνως δεν φέρουν ροπή κάμψης.

➤ Πάκτωση:

$$w(0,t) = 0 \quad (2.18\alpha)$$



$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.18\beta)$$

Η πάκτωση δεν επιτρέπει ούτε την εγκάρσια μετατόπιση ούτε τη στροφή του άκρου της ράβδου.

➤ Ελεύθερο άκρο:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.19\alpha)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.19\beta)$$

Στο ελεύθερο άκρο μηδενίζεται και η τέμνουσα δύναμη και η ροπή κάμψης.

➤ Κύλιση με το επίπεδο κύλισης κάθετο στον άξονα της δοκού (κυλιόμενο άκρο):

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.20\alpha)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.20\beta)$$

Σε αυτό το είδος στήριξης μηδενίζεται η κλίση της ελαστικής γραμμής και η τέμνουσα δύναμη.

➤ Άκρο με γραμμικό ελατήριο σταθεράς  $k$  κάθετο στον άξονα της δοκού:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.21\alpha)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} + k \cdot w(0, t) = 0 \quad (2.21\beta)$$

Στην περίπτωση του δεξιού άκρου η δεύτερη συνθήκη γράφεται:

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=L} - k \cdot w(L, t) = 0 \quad (2.21\gamma)$$

Η καμπτική ροπή είναι μηδέν ενώ η τέμνουσα δύναμη είναι ίση με τη δύναμη του ελατηρίου.

➤ Άκρο με αποσβεστήρα:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.22\alpha)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} + c \cdot \dot{w}(0, t) = 0 \quad (2.22\beta)$$

Στην περίπτωση του δεξιού άκρου η δεύτερη συνθήκη γράφεται:

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=L} - c \cdot \dot{w}(L, t) = 0 \quad (2.22\gamma)$$

Η καμπτική ροπή είναι μηδέν ενώ η τέμνουσα δύναμη είναι ίση με τη δύναμη του αποσβεστήρα.

➤ Άκρο με προσκολλημένη σημειακή μάζα m:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.23\alpha)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} + m \cdot \ddot{w}(0, t) = 0 \quad (2.23\beta)$$

Στην περίπτωση του δεξιού άκρου η δεύτερη συνθήκη γράφεται:

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=L} - m \cdot \ddot{w}(L, t) = 0 \quad (2.23\gamma)$$

Η καμπτική ροπή είναι μηδέν ενώ η τέμνουσα δύναμη είναι ίση με τη συνισταμένη δύναμη που δρα στη σημειακή μάζα.

## 2.4 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

### 2.4.1 Η Μέθοδος του Χωρισμού των Μεταβλητών

Η μόνη γενική μέθοδος ακριβούς επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων που διαθέτουμε είναι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Στην περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιέχουν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως η εξίσωση (2.14) που περιέχει τη συντεταγμένη  $x$  και το χρόνο  $t$ , γράφουμε την άγνωστη συνάρτηση που αποτελεί λύση της εξίσωσης ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, μίας συνάρτησης του  $x$  και μιας συνάρτησης του  $t$ . Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών μπορεί να εφαρμοστεί στις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες αφού κάνουμε την παραπάνω αντικατάσταση και με κατάλληλη ανακατάταξη των όρων μπορούμε να έχουμε στο ένα μέλος της εξίσωσης μόνο τη μία ανεξάρτητη μεταβλητή και στο άλλο μέρος την άλλη.

Στη συνέχεια είναι εύκολη η μετατροπή της μερικής διαφορικής εξίσωσης σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, μία για τη συνάρτηση του  $x$  και μία για τη συνάρτηση του  $t$  οι οποίες λύνονται σύμφωνα με τη σχετική θεωρία. Είναι σχεδόν φανερό και θα αποδειχθεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο ότι η (2.14) επιδέχεται χωρισμό των μεταβλητών.

Στις μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών εφαρμόζεται διαδοχικά περισσότερες από μία φορές ώστε τελικά να καταλήξουμε σε περισσότερες από δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Στη συνέχεια με χρήση των αρχικών συνθηκών υπολογίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές που περιέχονται στη γενική λύση της χρονικής διαφορικής εξίσωσης και αντίστοιχα εκμεταλλευόμενοι τις συνοριακές συνθήκες υπολογίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές που περιέχονται στη γενική λύση της χωρικής διαφορικής εξίσωσης. Πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι εφαρμόσιμη όταν οι συνοριακές συνθήκες είναι γραμμικές ως προς την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της και συγχρόνως ομογενείς, δηλαδή ο όρος που δεν περιέχει την άγνωστη συνάρτηση ή παραγώγους αυτής είναι μηδενικός. Πραγματικά, όλες οι συνοριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.3 είναι γραμμικές και ομογενείς οπότε η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι εφαρμόσιμη. Λόγω ακριβώς της

ιδιότητας αυτής των συνοριακών συνθηκών, η οποία είναι πολύ σημαντική, το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε ονομάζεται ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Ο υπολογισμός των αυθαίρετων σταθερών με την ενσωμάτωση στη γενική λύση των αρχικών και συνοριακών συνθηκών οδηγεί στον υπολογισμό της ειδικής ή αλλιώς μερικής λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Μερικές φορές εμφανίζονται και ιδιαίζουσες λύσεις, δηλαδή λύσεις που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση.

## 2.4.2 Η Αρχή της Υπέρθεσης

Επιπλέον, επειδή η μερική διαφορική εξίσωση (2.14) είναι γραμμική και ομογενής ισχύει για τις λύσεις της η αρχή της υπέρθεσης ή αλλιώς αρχή της επαλληλίας. Η αρχή της υπέρθεσης διατυπώνεται ως εξής:

*Θεωρούμε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση είτε συνήθη είτε με μερικές παραγώγους, επίσης είτε με σταθερούς είτε με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές και οποιασδήποτε τάξεως. Εάν οι  $n$  διαφορετικές συναρτήσεις  $u_1, u_2, \dots, u_n$  είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης αυτής, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους:*

$$u = \sum_{k=1}^n c_k u_k \quad (2.24)$$

(με τα  $c_1, c_2, \dots, c_n$  αυθαίρετες σταθερές) είναι επίσης λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ισχύ της αρχής της υπέρθεσης των λύσεων στη διαφορική εξίσωση (2.14) που περιγράφει τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού μήκους  $L$ . Έστω δύο λύσεις  $w_1(x,t)$  και  $w_2(x,t)$  της εξίσωσης (2.14). Θα αποδείξουμε ότι και ο γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^2 c_k w_k(x,t) = c_1 w_1(x,t) + c_2 w_2(x,t) \quad (2.25)$$

είναι και αυτός λύση της ίδιας εξίσωσης.

Αφού η συνάρτηση  $w_1(x,t)$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.14) θα ισχύει:

$$EI \frac{\partial^4 w_1(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.26)$$

και ομοίως για την  $w_2(x,t)$  θα ισχύει:

$$EI \frac{\partial^4 w_2(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.27)$$

Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι κάτω από αυτές τις συνθήκες και η συνάρτηση  $w(x,t)$  που δίνεται από την (2.25) είναι λύση της ίδιας εξίσωσης. Για τον σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.26) με  $c_1$  και αντίστοιχα τα δύο μέλη της (2.27) με  $c_2$ . Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν και εκμεταλλευόμενοι τους γνωστούς κανόνες παραγωγίσης έχουμε διαδοχικά:

$$c_1 EI \frac{\partial^4 w_1(x,t)}{\partial x^4} + c_1 \rho A \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial t^2} +$$

$$c_2 EI \frac{\partial^4 w_2(x,t)}{\partial x^4} + c_2 \rho A \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$EI \frac{\partial^4 [c_1 w_1(x,t) + c_2 w_2(x,t)]}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 [c_1 w_1(x,t) + c_2 w_2(x,t)]}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Άρα η  $w(x,t)$  είναι λύση της (2.14).

Η γενίκευση της παραπάνω απόδειξης σε περισσότερες, γενικά σε  $n$  (όχι μόνο σε δύο), συναρτήσεις-λύσεις στο γραμμικό συνδυασμό (2.25) είναι άμεση (θέτοντας  $n$  αντί του 2). Δεν παρουσιάζει καμία επιπλέον ουσιαστική δυσκολία. Με όμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί η αρχή της υπέρθεσης λύσεων και σε οποιαδήποτε άλλη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση οποιασδήποτε τάξεως με σταθερούς ή και με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές. Είναι φανερό ότι η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει σε μη-ομογενείς εξισώσεις.

Η τόσο χρήσιμη αρχή της υπέρθεσης λύσεων γενικεύεται και σε σειρές της μορφής:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \quad (2.28)$$

δηλαδή με άπειρους όρους. Φυσικά υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις  $u_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που εξετάζεται κάθε φορά. Στην περίπτωση όμως αυτή πρέπει να αποδειχθεί πρώτα η σύγκλιση της σειράς σε συγκεκριμένη συνάρτηση  $u$ . Πρέπει επίσης να αποδειχθεί και η δυνατότητα μερικών παραγωγίσεων αυτής της συνάρτησης  $u$  μέσω των αντίστοιχων παραγωγίσεων των συναρτήσεων  $u_k$  μία προς μία στη σειρά (2.28). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αποδειχθεί και η δυνατότητα εναλλαγής των συμβόλων της μερικής παραγωγίσης και του αθροίσματος απείρων όρων στις αναγκαίες μερικές παραγωγίσεις της σειράς.

Γενικά πάντως δεχόμαστε, ότι οι σειρές της μορφής (2.28) που θα συναντήσουμε συγκλίνουν σε συνάρτηση  $u$  και μάλιστα μπορούν να παραγωγισθούν μερικά όρο προς όρο. Παραδείγματος χάρη, για την τέταρτη μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή  $x$  (που παρουσιάζεται στην εξίσωση των ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού) δεχόμαστε ότι ισχύει:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial^4 u_k}{\partial x^4} \quad (2.29)$$

και ανάλογα και για τη δεύτερη παράγωγο ως προς το χρόνο. Η γενίκευση της ισχύος της αρχής της επαλληλίας στην περίπτωση της σειράς απείρων όρων ισχύει στην περίπτωση που εξετάζουμε αλλά δεν ισχύει γενικά για κάθε πρόβλημα. Αντίθετα, όπως είδαμε η αρχή της επαλληλίας στην περίπτωση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων-λύσεων ισχύει πάντοτε για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, είτε συνήθεις είτε με μερικές παραγώγους.

Μία πολύ σημαντική εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας είναι η αναγωγή των μη ομογενών συνοριακών συνθηκών σε ομογενείς συνθήκες. Θα δείξουμε πως γίνεται αυτή η αναγωγή με ένα παράδειγμα. Έστω το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με } 0 < x < L \text{ και } t > 0 \quad (2.30)$$

$$\text{Αρχικές συνθήκες: } w(x,0) = f(x) \text{ και } \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (2.31)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$w(0,t) = A, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = B \quad (2.32\alpha)$$

$$w(L,t) = \Gamma, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=L} = \Delta \quad (2.32\beta)$$

όπου στη γενική περίπτωση οι σταθερές  $A, B, \Gamma, \Delta$  είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

Έστω:

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t) \quad (2.33)$$

Οι συναρτήσεις  $u(x,t)$  και  $v(x,t)$  υποτίθεται ότι ικανοποιούν τη μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος, άρα από την αρχή της υπέρθεσης και η  $w(x,t)$  είναι λύση της ίδιας εξίσωσης. Είναι προφανές ότι αν μπορούσαμε να βρούμε μία συνάρτηση  $u(x,t)$  που να ικανοποιεί και τις μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες (2.32), τότε η συνάρτηση  $v(x,t)$  θα έπρεπε να ικανοποιεί την ομογενή εκδοχή των συνθηκών (2.32), δηλαδή τις:

$$v(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.34)$$

$$v(L,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

Αναζητάμε λοιπόν μία συνάρτηση  $u(x,t)$  που να ικανοποιεί την εξίσωση (2.30) και τις συνοριακές συνθήκες (2.32) αλλά με ελεύθερες τις αρχικές συνθήκες (2.31). Δηλαδή, είναι λύση του προβλήματος:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με } 0 < x < L \text{ και } t > 0 \quad (2.35)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$u(0, t) = A, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = B, \quad (2.36)$$

$$u(L, t) = \Gamma, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = \Delta$$

Η απλούστερη που μπορούμε να σκεφτούμε (γιατί προφανώς υπάρχουν άπειρες τέτοιες συναρτήσεις) είναι μία που δεν εξαρτάται από το χρόνο. Άρα ισχύει για αυτήν ότι:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.37)$$

Από τις (2.35) και (2.37) συμπεραίνουμε άμεσα ότι:

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.38)$$

Η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (2.38) είναι προφανώς:

$$u(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad (2.38)$$

Οι σταθερές  $a, \beta, \gamma, \delta$  θα εκλεγούν έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι συνθήκες (2.36). Η εφαρμογή των συνθηκών αυτών δίνει τις εξισώσεις:

$$\delta = A, \quad \gamma = B \quad (2.39)$$

$$aL^3 + \beta L^2 + \gamma L + \delta = \Gamma, \quad 3aL^2 + 2\beta L + \gamma = \Delta$$

Η λύση του παραπάνω αλγεβρικού συστήματος είναι:

$$a = \frac{2A + BL - 2\Gamma + \Delta L}{L^3}$$

$$\beta = \frac{-3A - 2BL + 3\Gamma - \Delta L}{L^2}$$

$$\gamma = B$$

$$\delta = A \quad (2.40)$$



Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.40), η (2.38) γίνεται:

$$u(x) = \frac{2A + BL - 2\Gamma + \Delta L}{L^3} x^3 + \frac{-3A - 2BL + 3\Gamma - \Delta L}{L^2} x^2 + Bx + A \quad (2.41)$$

Η  $u(x)$  που δίνεται από την (2.41) ικανοποιεί τις μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες και είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή έχει την ίδια τιμή (που δίνεται από την (2.41) και για  $t=0$ , ενώ η παράγωγός της ως προς το χρόνο είναι μηδέν. Άρα, σε συνδυασμό και με τις αρχικές συνθήκες (2.31) που πρέπει να ικανοποιεί η  $w(x, t)$  συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $v(x, t)$  πρέπει να είναι λύση του προβλήματος:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με } 0 < x < L \text{ και } t > 0 \quad (2.42)$$

Αρχικές συνθήκες:

$$v(x, 0) = f(x) - u(x) \text{ και } \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (2.43)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$v(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.44)$$

$$v(L, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

Είναι φανερό ότι αν η  $u(x, t)$  δίνεται από την (2.41) και η  $v(x, t)$  είναι λύση του προβλήματος (2.42)-(2.44) τότε η συνάρτηση  $w(x, t)$  που είναι ίση με το άθροισμα αυτών (σχέση (2.33)) θα είναι λύση του προβλήματος (2.30)-(2.32).

Έτσι, η επίλυση του προβλήματος (2.30)-(2.32) για την συνάρτηση  $w(x, t)$  ανάχθηκε στην επίλυση του προβλήματος (2.42)-(2.44) για τη συνάρτηση  $v(x, t)$  το οποίο είναι ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Η δυνατότητα αναγωγής των μη-ομογενών συνοριακών συνθηκών σε ομογενείς συνθήκες όταν ισχύει η αρχή της επαλληλίας έχει πολύ μεγάλη σημασία. Σημαίνει ότι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι πάντα εφαρμόσιμη στο πρόβλημα των ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων.

### 2.4.3 Η Μέθοδος των Ιδιοσυναρτήσεων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών προκύπτουν οι ειδικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Οι λύσεις αυτές προκύπτουν ως γραμμικός συνδυασμός απείρου πλήθους βασικών συναρτήσεων που λέγονται ιδιοσυναρτήσεις του υπό μελέτη συστήματος. Στην περίπτωση της μελέτης των ταλαντώσεων ενός φυσικού συστήματος οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται και κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ή ιδιομορφές γιατί περιγράφουν τη μορφή του φυσικού συστήματος που ταλαντώνεται.

Η μορφή της ταλάντωσης χαρακτηρίζεται από τους λόγους των πλατών ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου του υπό μελέτη συστήματος. Σε κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλα τα υλικά σημεία διέρχονται ταυτόχρονα από τις θέσεις ισοροπίας τους, δηλαδή ταλαντώνονται με την ίδια σταθερά φάσης. Υπάρχει λοιπόν μία μοναδική σταθερά φάσης για ολόκληρο τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης που καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Κάθε τρόπος ταλάντωσης αντιστοιχεί σε μία τιμή συχνότητας που είναι μία από τις πολλές ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Όπως το γνωστό μας σύστημα μιας σημειακής μάζας που είναι δεμένη στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου έχει μία συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα που δίνεται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος (μάζα και σταθερά ελατηρίου) έτσι και ένα στερεό σώμα όπως η δοκός που θεωρητικά αποτελείται από άπειρο αριθμό υλικών σημείων έχει άπειρο πλήθος ιδιοσυχνοτήτων άρα και ιδιομορφών. Αν και αυτό το επιχείρημα στην κυριολεξία δεν είναι σωστό για κανένα πραγματικό υλικό σύστημα αφού κανένα σύστημα δεν αποτελείται από άπειρο αριθμό κινουμένων μερών, άρα κανένα πραγματικό σύστημα δεν είναι στην κυριολεξία «συνεχές» με την μαθηματική σημασία του όρου, είναι γενικά καλή προσέγγιση να θεωρούμε σώματα όπως η δοκός ως συνεχή μέσα ειδικά αν ενδιαφερόμαστε για τους χαμηλότερους (σε τιμή ιδιοσυχνότητας) τρόπους ταλάντωσης.

Οι ιδιοσυναρτήσεις ενός τέτοιου προβλήματος αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής πολύ σημαντικές ιδιότητες:

- Οι συχνότητες των ιδιομορφών παίρνουν τιμές από μία διακριτή ακολουθία πραγματικών τιμών. (φαινόμενο κβάντωσης).

- Το ολοκλήρωμα του γινομένου δύο διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων  $y_n$  και  $y_m$  στο διάστημα  $[0,L]$  του προβλήματος είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή:

$$\int_0^L y_n(x)y_m(x)dx = 0, \quad n \neq m \quad (2.45)$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων και εκφράζει το γεγονός ότι οποιαδήποτε ιδιοσυνάρτηση δεν μπορεί να προκύψει από γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων ιδιοσυναρτήσεων όπως ακριβώς π.χ. το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα  $z'z$  δεν μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  σε ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων.

- Κάθε συνάρτηση  $f(x)$  ορισμένη στο  $[0,L]$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων της μορφής:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (2.46)$$

όπου  $c_n$  κατάλληλοι συντελεστές.

Η τελευταία ιδιότητα ονομάζεται πληρότητα του συστήματος των ιδιοσυναρτήσεων γιατί εκφράζει το γεγονός ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος αποτελούν ένα πλήρες σύνολο συναρτήσεων υπό την έννοια ότι οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως, γενικά άπειρος, γραμμικός συνδυασμός αυτών.

### 3. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

#### 3.1 ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στην παρούσα ενότητα θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών στην εξίσωση των ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

με  $0 < x < L$  και  $t > 0$ .

Η συνάρτηση  $w = w(x, t)$  είναι το βέλος κάμψης στη θέση  $x$  της δοκού τη χρονική στιγμή  $t$ . Υποθέτουμε ότι οι παράμετροι:  $E$ ,  $I$ ,  $\rho$ ,  $A$  είναι σταθερές.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως στην παρουσίαση της μεθόδου θέτουμε:

$$w(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (3.2)$$

Εκτελώντας τις μερικές παραγωγίσεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι παραγωγίσεις ως προς  $x$  δρουν μόνο πάνω στη συνάρτηση  $X(x)$  και οι παραγωγίσεις ως προς  $t$  δρουν μόνο πάνω στη συνάρτηση  $T(t)$  βρίσκουμε την τέταρτη παράγωγο ως προς το  $x$ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = X^{(4)}(x) \cdot T(t) \quad (3.3)$$

όπου με τον εκθέτη (4) δηλώνουμε την τέταρτη παράγωγο. Η δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο θα είναι:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = X(x) \cdot \ddot{T}(t) \quad (3.4)$$

όπου οι τελείες δηλώνουν παράγωγο ως προς το χρόνο. Στην προκειμένη περίπτωση οι δύο τελείες δηλώνουν τη δεύτερη χρονική παράγωγο.

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους (3.3) και (3.4) στην εξίσωση (3.1) παίρνουμε:

$$EI \cdot X^{(4)}(x) \cdot T(t) + \rho A \cdot X(x) \cdot \ddot{T}(t) = 0 \quad (3.5)$$

Στη συνέχεια διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το γινόμενο  $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ . Προφανώς, υποθέτουμε ότι το γινόμενο αυτό είναι συνεχώς διάφορο του μηδενός. Μετά τη διαίρεση παίρνουμε:

$$EI \cdot \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} + \rho A \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0 \quad (3.6)$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται και ως:

$$\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad (3.7)$$

Η εξίσωση (3.7) είναι μία ισότητα στην οποία το ένα μέλος είναι συνάρτηση μόνο του  $x$  και το άλλο μέρος είναι συνάρτηση μόνο του  $t$ . Όμως ο μοναδικός τρόπος για να είναι ίσες δύο συναρτήσεις άσχετων μεταβλητών είναι και οι δύο να είναι ίσες με μία κοινή σταθερά. Έτσι εισάγουμε τη λεγόμενη σταθερά διαχωρισμού,  $\lambda$ . Οπότε η εξίσωση (3.8) γίνεται:

$$\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \quad (3.8)$$

Για λόγους που θα φανούν αργότερα επιλέγουμε η σταθερά  $\lambda$  να είναι θετική και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda = \omega^2 \quad (3.9)$$

Είναι προφανές ότι η (3.8) είναι ισοδύναμη με δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν μετά την εκτέλεση λίγων απλών πράξεων:

$$\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = \omega^2 \Rightarrow X^{(4)}(x) = \frac{\omega^2 \rho A}{EI} X(x) \Rightarrow$$

$$X^{(4)}(x) - \frac{\omega^2 \rho A}{EI} X(x) = 0 \quad (3.10)$$

και  $-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \Rightarrow \ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \Rightarrow$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.11)$$

Η εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών είχε λοιπόν σαν αποτέλεσμα τη μετατροπή της αρχικής μερικής διαφορικής εξίσωσης σε δύο γραμμικές ομογενείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν επιπλέον και τη σταθερά  $\omega$  ως ελεύθερη παράμετρο. Συνεπώς, το ζητούμενο τώρα είναι η επίλυση των δύο αυτών διαφορικών εξισώσεων.

### 3.2 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΧΩΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (3.10) τη γράφουμε καταρχήν στην πιο βολική μορφή:

$$X^{(4)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (3.12)$$

με  $\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EI}}$  (3.13)

Ακολουθώντας τη γενική μέθοδο επίλυσης των συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων κάνουμε την εκθετική αντικατάσταση:

$$X(x) = e^{\mu x} \quad (3.14)$$

Μετά από 4 παραγωγίσεις βρίσκουμε:

$$X^{(4)}(x) = \mu^4 \cdot e^{\mu x} \Rightarrow X^{(4)}(x) = \mu^4 \cdot X(x) \quad (3.15)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.12) έχουμε:

$$\mu^4 \cdot X(x) - \beta^4 \cdot X(x) = 0 \quad (3.16)$$

Η συνάρτηση  $X(x) = e^{\mu x}$  δεν είναι μηδέν (τείνει στο μηδέν μόνο όταν  $x \rightarrow -\infty$ ), συνεπώς:

$$\mu^4 - \beta^4 = 0 \quad (3.17)$$

που είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της (3.12).

Η χαρακτηριστική εξίσωση (3.17) γράφεται και ως:

$$(\mu^2 - \beta^2) \cdot (\mu + \beta^2) = 0 \quad (3.18)$$

και έχει προφανώς τέσσερις ρίζες, τις:

$$\mu_1 = \beta, \quad \mu_2 = -\beta, \quad \mu_3 = i\beta \quad \text{και} \quad \mu_4 = -i\beta$$

όπου  $i = \sqrt{-1}$  είναι η φανταστική μονάδα.

Πρόκειται για τέσσερις απλές (διαφορετικές) ρίζες. Οι δύο πρώτες είναι πραγματικές ενώ οι άλλες δύο είναι συζυγείς μιγαδικές όπως αναμενόταν αφού η χαρακτηριστική εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές. Στη συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση είναι συζυγείς φανταστικές.

Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.12) θα είναι της μορφής:

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (3.19)$$

Η παραπάνω γενική λύση περιέχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές, τις  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Η γενική λύση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης  $n$  τάξης περιέχει πάντα  $n$  το πλήθος αυθαίρετες σταθερές.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα των καμπτικών ταλαντώσεων της δοκού οι σταθερές αυτές υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται από τις στηρίξεις στα άκρα της δοκού. Αν και η λύση (3.19) είναι μαθηματικά σωστή και αποδεκτή, στην πράξη προτιμάται η χρήση τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων αντί των μιγαδικών ή πραγματικών εκθετικών συναρτήσεων. Η μετατροπή είναι εύκολη και γίνεται με τη χρήση των παρακάτω τύπων για τις υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad (3.20\alpha)$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \quad (3.20\beta)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.20\gamma)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (3.20\delta)$$

Οι δύο πρώτοι τύποι προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3.21\alpha)$$

και  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3.21\beta)$

και οι δύο τελευταίοι είναι οι γνωστοί τύποι του Euler για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$ .

Αντικαθιστώντας στην (3.19) τις σχέσεις (3.20α-δ) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} X(x) = & C_1(\cosh(\beta x) + \sinh(\beta x)) + C_2(\cosh(\beta x) - \sinh(\beta x)) + \\ & + C_3(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + C_4(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Εισάγοντας τώρα τέσσερις νέες αυθαίρετες σταθερές μέσω των σχέσεων:

$$A = C_1 + C_2, \quad B = C_1 - C_2$$

$$C = C_3 + C_4, \quad D = i(C_3 - C_4)$$

Διαπιστώνουμε ότι η γενική λύση (3.19) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$X(x) = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \quad (3.23)$$

Η έκφραση της γενικής λύσης με τριγωνομετρικές συναρτήσεις γενικά διευκολύνει τη διαδικασία εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών με σκοπό τον προσδιορισμό των αυθαίρετων σταθερών.



### 3.3 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Η χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση (3.11) είναι η γνωστή εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Όπως προηγουμένως στη χωρική εξίσωση, κάνουμε την εκθετική αντικατάσταση:

$$T(t) = e^{\mu t} \quad (3.24)$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\ddot{T}(t) = \mu^2 e^{\mu t} \quad (3.25)$$

Με αντικατάσταση στην (3.11) παίρνουμε:

$$\mu^2 e^{\mu t} + \omega^2 e^{\mu t} = 0 \quad (3.26)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\mu^2 + \omega^2 = 0 \quad (3.27)$$

με ρίζες:  $\mu_1 = i\omega$ ,  $\mu_2 = -i\omega$

Συνεπώς, η γενική λύση της χρονικής διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$T(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (3.28)$$

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω γενική λύση συναρτήσει των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Πιο αναλυτικά αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.20γ) και (3.20δ), η (3.28) γράφεται:

$$T(t) = C_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + C_2 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \quad (3.29)$$

Εισάγοντας τις αυθαίρετες σταθερές E και F μέσω των σχέσεων:

$$E = C_1 + C_2, \quad F = i(C_1 - C_2) \quad (3.30)$$

η γενική λύση  $T(t)$  γίνεται:

$$T(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t) \quad (3.31)$$

Το αποτέλεσμα αυτό όπως είναι γνωστό περιγράφει την απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα  $\omega$ . Εναλλακτικά η  $T(t)$  μπορεί να γραφεί έτσι ώστε να περιέχει έναν τριγωνομετρικό όρο αλλά με αρχική φάση, έστω  $a$ . Για το σκοπό αυτό, αρχικά πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε το δεξί μέλος της (3.31) με την ποσότητα:

$$G = \sqrt{E^2 + F^2} \quad (3.32)$$

Η (3.31) γίνεται:

$$T(t) = G \cdot \left[ \frac{E}{\sqrt{E^2 + F^2}} \cos(\omega t) + \frac{F}{\sqrt{E^2 + F^2}} \sin(\omega t) \right] \quad (3.33)$$

Ορίζουμε τώρα την αρχική φάση  $a$  μέσω των σχέσεων:

$$\cos a = \frac{E}{\sqrt{E^2 + F^2}} \quad (3.34)$$

και

$$\sin a = \frac{F}{\sqrt{E^2 + F^2}} \quad (3.35)$$

Αυτό είναι φανερό ότι είναι αποδεκτό αφού από τις (3.34) και (3.35) άμεσα βγαίνει το συμπέρασμα ότι:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad (3.36)$$

Τώρα, η (3.33) γίνεται:

$$T(t) = G \cdot [\cos a \cdot \cos(\omega t) + \sin a \cdot \sin(\omega t)] \quad (3.37)$$

Από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \quad (3.38)$$

καταλήγουμε άμεσα στη σχέση:

$$T(t) = G \cdot \cos(\omega t - a) \quad (3.39)$$

Είναι προφανές ότι οι σταθερές  $G$  και  $a$  είναι το πλάτος και η αρχική φάση της ταλάντωσης. Οι παράμετροι αυτές εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος και όχι από τα χαρακτηριστικά του υπό μελέτη συστήματος.

Έχοντας βρει τις λύσεις και της χωρικής και της χρονικής διαφορικής εξίσωσης είμαστε σε θέση να γράψουμε τη γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (3.1) που περιγράφει τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού. Αυτή προκύπτει από το συνδυασμό των εξισώσεων (3.2), (3.23) και (3.31) και είναι:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= X(x) \cdot T(t) \Rightarrow \\ w(x,t) &= [A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)] \cdot \\ &\quad \cdot [E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ήταν απόλυτα αναγκαίο να υποθέσουμε ότι η σταθερά διαχωρισμού  $\lambda$  είναι θετική και συνεπώς να τη θέσουμε ίση με  $\omega^2$ . Έτσι κατορθώσαμε να καταλήξουμε στη γενική λύση της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης με παράμετρο την κυκλική συχνότητα  $\omega$  των ταλαντώσεων πέρα από τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $E$  και  $F$  (ή  $G$  και  $a$ ). Αφού έχουμε υποθέσει αφόρτιση δοκού (δηλαδή ελεύθερες ταλαντώσεις) λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας το πλάτος θα πρέπει να διατηρείται σταθερό κάτι που εξασφαλίζεται από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Αν είχαμε θέσει  $\lambda = -\omega^2$  ή  $\lambda = 0$  θα είχαμε καταλήξει σε λύση με υπερβολικές συναρτήσεις ή σε γραμμική λύση (πολυώνυμο πρώτου βαθμού) αντίστοιχα και θα είχαμε έτσι παραβιάσει κατάφωρα την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Έτσι μόνο η τριγωνομετρική λύση είναι αποδεκτή από φυσικής απόψεως και επομένως υιοθετείται. Η ίδια λύση θα είναι ουσιαστικά αυτή που θα μας επιτρέψει να λάβουμε παρακάτω σωστά υπόψη μας και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x=0$  και  $x=L$  της δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις.

## 4. ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ

### 4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε την ελεύθερη καμπτική ταλάντωση δοκού για διάφορες περιπτώσεις στηρίξεων, άρα και συνοριακών συνθηκών. Οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν σε κάθε περίπτωση στήριξης έχουν αναφερθεί στην ενότητα 2.3. Θα επικεντρωθούμε στη λύση της χωρικής εξίσωσης και θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις  $X(x)$  που είναι λύσεις αυτής της εξίσωσης και περιγράφουν τους διάφορους δυνατούς τρόπους ταλάντωσης της δοκού σε κάθε περίπτωση. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις ή ιδιομορφές της δοκού.

Είναι βέβαια προφανές ότι το ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών για την ταλαντούμενη δοκό έχει την τετριμμένη λύση  $X(x)=0$ . Αυτή όμως δεν παριστάνει ταλαντώσεις της δοκού, αντίθετα αφορά σε πλήρη έλλειψη ταλαντώσεων, και επομένως απορρίπτεται. Αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή στην περίπτωση που για  $t=0$  όλα τα σημεία της δοκού βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους με μηδενική ταχύτητα.

Παράλληλα, θα υπολογίσουμε το φάσμα των συχνοτήτων με τις οποίες μπορεί να ταλαντώνεται η δοκός σε κάθε περίπτωση. Οι συχνότητες αυτές ονομάζονται ιδιοσυχνότητες. Επιπλέον, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας που ισχύει για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις για να δείξουμε ότι η γενική ταλάντωση της δοκού μπορεί να προκύψει ως γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω συναρτήσεων. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε ονομάζεται μέθοδος των ιδιοσυναρτήσεων ή μέθοδος Fourier.

Σε αυτό το σημείο ξαναγράφουμε τη γενική λύση της χωρικής εξίσωσης η οποία βρέθηκε στην ενότητα 3.2:

$$X(x) = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \quad (4.1)$$

$$\text{με} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EI}} \quad (4.2)$$

όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

Οι ειδικές λύσεις  $X(x)$  που θα βρεθούν με την εφαρμογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών στην παραπάνω γενική λύση ονομάζονται συναρτήσεις σχήματος. Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών θα χρειαστούμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης  $X(x)$ . Αυτές είναι:

$$\frac{dX}{dx} = A\beta \sinh(\beta x) + B\beta \cosh(\beta x) - C\beta \sin(\beta x) + D\beta \cos(\beta x) \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = A\beta^2 \cosh(\beta x) + B\beta^2 \sinh(\beta x) - C\beta^2 \cos(\beta x) - D\beta^2 \sin(\beta x) \quad (4.4)$$

Επιπλέον, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι:

$$\sin 0 = 0 \text{ και } \cos 0 = 1$$

$$\sinh 0 = 0 \text{ και } \cosh 0 = 1$$

και ακόμη στους παρακάτω υπολογισμούς παντού θεωρούμε ότι  $\beta \neq 0$ . Αν  $\beta=0$  τότε από την (4.2) και  $\omega=0$  κάτι που αποκλείει την ταλάντωση.

## 4.2 ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ

Οι συνοριακές συνθήκες για αμφιέρειστη δοκό μήκους  $L$  είναι:

$$w(0, t) = 0 \quad (4.5\alpha)$$

$$w(L, t) = 0 \quad (4.5\beta)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.5\gamma)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.5\delta)$$

Οι οποίες λόγω της σχέσης (3.2) μετατρέπονται σε συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση  $X(x)$ :

$$X(0) = 0 \quad (4.6\alpha)$$

$$X(L) = 0 \quad (4.6\beta)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.6\gamma)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (4.6\delta)$$

Για παράδειγμα  $w(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$  και  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} \Big|_{x=0} \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$  γιατί η συνάρτηση  $T(t)$  δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν αφού τότε θα ήταν και  $w(x, t) = 0$  ταυτοτικά.

Η διαδοχική εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (4.6α-β) στην (4.1) και των συνοριακών συνθηκών (4.6γ-δ) στην (4.4) δίνει για τις σταθερές  $A, B, C, D$  τις εξισώσεις:

$$A + C = 0 \quad (4.7\alpha)$$

$$A \cosh(\beta L) + B \sinh(\beta L) + C \cos(\beta L) + D \sin(\beta L) = 0 \quad (4.7\beta)$$

$$A\beta^2 - C\beta^2 = 0 \quad (4.7\gamma)$$

$$A\beta^2 \cosh(\beta L) + B\beta^2 \sinh(\beta L) - C\beta^2 \cos(\beta L) - D\beta^2 \sin(\beta L) = 0 \quad (4.7\delta)$$

Από τις (4.7α) και (4.7γ) συμπεραίνουμε άμεσα ότι:

$$A = C = 0 \quad (4.8)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας και το ότι  $\beta \neq 0$ , το παραπάνω σύστημα γίνεται:

$$B \sinh(\beta L) + D \sin(\beta L) = 0 \quad (4.9\alpha)$$

$$B \sinh(\beta L) - D \sin(\beta L) = 0 \quad (4.9\beta)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα ομογενές σύστημα και για να έχει λύση εκτός της μηδενικής πρέπει η ορίζουσά του να είναι μηδέν:

$$\begin{vmatrix} \sinh(\beta L) & \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) & -\sin(\beta L) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sinh(\beta L) \cdot \sin(\beta L) = 0 \quad (4.10)$$

Για να ισχύει η (4.10) θα πρέπει:

$$\sinh(\beta L) = 0 \quad \text{ή} \quad \sin(\beta L) = 0$$

Αν είναι  $\sinh(\beta L) = 0$  τότε απαραίτητα  $\beta = 0$  κάτι που σε συνδυασμό με την (4.2) σημαίνει  $\omega = 0$  και η λύση αυτή απορρίπτεται. Συνεπώς πρέπει να είναι:

$$\sin(\beta L) = 0 \quad (4.11)$$

Οι λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης (4.11) είναι:

$$\beta L = n\pi \Rightarrow \beta_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{με } n=1,2,\dots \quad (4.12)$$

Η τιμή  $n=0$  εξαιρείται γιατί δίνει  $\beta=0$ . Χρησιμοποιώντας και την εξίσωση (4.2) βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες των ελεύθερων ταλαντώσεων του συστήματος:

$$\sqrt[4]{\frac{\omega_n^2 \rho A}{EI}} L = n\pi \Rightarrow \omega_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{με } n=1,2,\dots \quad (4.13)$$

Γι' αυτόν το λόγο η σχέση (4.11) ονομάζεται και εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος.

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (4.9α) και (4.9β) παίρνουμε:

$$2B \sinh(\beta L) = 0 \quad (4.14)$$

και επειδή  $\sinh(\beta L) \neq 0$

συμπεραίνουμε ότι  $B=0$ . Οπότε οι ιδιοσυναρτήσεις που περιγράφουν τις ελεύθερες ταλαντώσεις της δοκού έχουν τη μορφή:

$$X(x) = D_n \sin(\beta_n x) \quad (4.15)$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε τιμή  $\beta_n$  αντιστοιχεί μία συνάρτηση σχήματος ή χρησιμοποιώντας διαφορετική ορολογία σε κάθε ιδιοτιμή (eigenvalue)  $\beta_n$  (ή  $\omega_n$ ) του προβλήματος αντιστοιχεί μία ιδιοσυνάρτηση (eigenfunction) που καθορίζει τον n-οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης (normal mode) ή ιδιομορφή του συστήματος. Η αυθαίρετη μη μηδενική σταθερά  $D_n$  μπορεί να ενσωματωθεί στις σταθερές της συνάρτησης  $T(t)$  που είναι λύση της χρονικής εξίσωσης, οπότε η ιδιοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X(x) = \sin(\beta_n x) \quad (4.16)$$

Σε κάθε ιδιοτιμή  $\omega_n$  αντιστοιχεί και μία ιδιοσυνάρτηση του χρόνου  $T_n(t)$  που συνήθως ονομάζεται εύρος του n-οστού κανονικού τρόπου ταλάντωσης (modal amplitude) και σύμφωνα με την (3.31) είναι:

$$T_n(t) = E_n \cos(\omega_n t) + F_n \sin(\omega_n t) \quad (4.17)$$

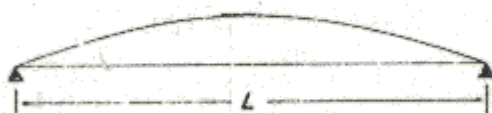
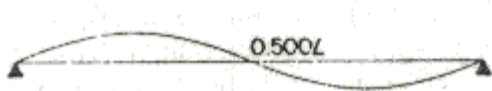
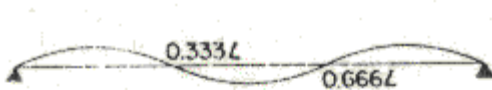


Τελικά το βέλος κάμψης που αντιστοιχεί στον n-οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης είναι:

$$w_n(x, t) = \sin(\beta_n x) \cdot [E'_n \cos(\omega_n t) + F'_n \sin(\omega_n t)] \quad (4.18)$$

όπου  $E'_n = D_n \cdot E_n$  και  $F'_n = D_n \cdot F_n$ .

Οι σταθερές αυτές υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες και εκφράζουν το πλάτος και την αρχική φάση της ταλάντωσης. Ο κανονικός τρόπος ταλάντωσης που αντιστοιχεί σε  $n=1$  ονομάζεται θεμελιώδης ενώ οι κανονικές ταλαντώσεις που αντιστοιχούν σε  $n>1$  ονομάζονται αρμονικές. Στο σχήμα 4.1 φαίνονται οι πέντε πρώτοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης για την αμφιέρειστη δοκό. Παρατηρούμε ότι ο τρόπος  $n=1$  δεν έχει κανένα κόμβο στο εσωτερικό της δοκού, ο τρόπος  $n=2$  έχει 1 κόμβο κ.ο.κ.



Natural Frequencies			Normal Modes
$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}}$			$\Phi_n = \sin \frac{n\pi x}{L}$
$n$	$C_n$	$I_n^*$	Shapes
1	$\pi^2$	$4/\pi$	
2	$4\pi^2$	0	
3	$9\pi^2$	$4/3\pi$	
4	$16\pi^2$	0	
5	$25\pi^2$	$4/5\pi$	

$*I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx.$

Σχήμα 4.1 Η μορφή των πέντε πρώτων κανονικών τρόπων ταλάντωσης της αμφιέρειστης δοκού. Με το σύμβολο  $\bar{m}$  δηλώνεται η γραμμική πυκνότητα της δοκού, δηλαδή  $\bar{m} = \rho A$  [5].

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης που δίνονται από τη σχέση (4.18) αποτελούν ειδικές λύσεις της εξίσωσης των ελεύθερων ταλαντώσεων για αμφιέρειστη δοκό. Η γενική λύση δίνεται από το άθροισμα:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\beta_n x) \cdot [E'_n \cos(\omega_n t) + F'_n \sin(\omega_n t)] \quad (4.19)$$

Η έκφραση αυτή αποτελεί τη γενική λύση οποιασδήποτε δυνατής μορφής ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης αμφιέρειστης δοκού. Η ειδική μορφή ταλάντωσης που θα λάβει χώρα εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος από τις οποίες και θα προσδιοριστούν οι σταθερές  $E'_n$  και  $F'_n$ .

#### Παράδειγμα 4.1

Έστω ότι στην περίπτωση αμφιέρειστης δοκού δίνονται οι αρχικές συνθήκες:

$$w(x,0) = w_0 \sin\left(\frac{4\pi}{L}\right) \text{ και } \dot{w}(x,0) = v_0 \sin\left(\frac{4\pi}{L}\right)$$

Η εφαρμογή της πρώτης αρχικής συνθήκης στη γενική λύση (4.19) δίνει απευθείας:

$$E'_4 = w_0, \quad E'_n = 0 \text{ για } n \neq 4$$

Η εφαρμογή της δεύτερης αρχικής συνθήκης στη χρονική παράγωγο της (4.19) δίνει:

$$F'_4 = \frac{v_0}{\omega_4}, \quad F'_n = 0 \text{ για } n \neq 4$$

Άρα η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι:

$$w(x,t) = \sin(\beta_4 x) \cdot \left[ w_0 \cos(\omega_4 t) + \frac{v_0}{\omega_4} \sin(\omega_4 t) \right]$$

### **4.3 ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟΣ**

Οι συνοριακές συνθήκες για αμφίπακτη δοκό μήκους  $L$  είναι:

$$w(0,t) = 0 \tag{4.20\alpha}$$

$$w(L,t) = 0 \tag{4.20\beta}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \tag{4.20\gamma}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.20\delta)$$

Οι αντίστοιχες συνθήκες για τη συνάρτηση  $X(x)$  είναι:

$$X(0) = 0 \quad (4.21\alpha)$$

$$X(L) = 0 \quad (4.21\beta)$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.21\gamma)$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.21\delta)$$

Η εφαρμογή των συνθηκών αυτών στην (4.1) και στην (4.3) μας οδηγεί στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων για τις σταθερές A, B, C, D:

$$A + C = 0 \quad (4.22\alpha)$$

$$A \cosh(\beta L) + B \sinh(\beta L) + C \cos(\beta L) + D \sin(\beta L) = 0 \quad (4.22\beta)$$

$$B\beta + D\beta = 0 \quad (4.22\gamma)$$

$$A\beta \sinh(\beta L) + B\beta \cosh(\beta L) - C\beta \sin(\beta L) + D\beta \cos(\beta L) = 0 \quad (4.22\delta)$$

Επειδή  $\beta \neq 0$  το σύστημα γράφεται:

$$A + C = 0 \quad (4.23\alpha)$$

$$A \cosh(\beta L) + B \sinh(\beta L) + C \cos(\beta L) + D \sin(\beta L) = 0 \quad (4.23\beta)$$

$$B + D = 0 \quad (4.23\gamma)$$

$$A \sinh(\beta L) + B \cosh(\beta L) - C \sin(\beta L) + D \cos(\beta L) = 0 \quad (4.23\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.23α) και (4.23γ) που δίνουν:

$$C = -A \quad (4.24\alpha)$$

$$\begin{aligned} &\text{και} \\ &D = -B \end{aligned} \quad (4.24\beta)$$

οι άλλες δύο εξισώσεις γράφονται:

$$A(\cosh(\beta L) - \cos(\beta L)) + B(\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)) = 0 \quad (4.25\alpha)$$

$$A(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)) + B(\cosh(\beta L) - \cos(\beta L)) = 0 \quad (4.25\beta)$$

Για να έχει μη μηδενική λύση το σύστημα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.26)$$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$[\cosh(\beta L) - \cos(\beta L)]^2 - [\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)] \cdot [\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)] = 0 \quad (4.27)$$

Κάνοντας τις πράξεις η (4.27) γίνεται:

$$\cosh^2(\beta L) + \cos^2(\beta L) - 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) - \sinh^2(\beta L) + \sin^2(\beta L) = 0 \quad (4.28)$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες:

$$\cos^2(\beta L) + \sin^2(\beta L) = 1 \quad (4.29)$$

και

$$\cosh^2(\beta L) - \sinh^2(\beta L) = 1 \quad (4.30)$$

καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} &-2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) = -2 \\ &\text{ή} \\ &\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

που είναι η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων για τις ελεύθερες ταλαντώσεις της αμφίπακτης δοκού. Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί γραφικά αν χαραχθούν οι καμπύλες  $y_1 = \cos(\beta L)$  και  $y_2 = 1/\cosh(\beta L)$  και βρεθούν τα σημεία τομής τους. Οι ρίζες της εξίσωσης (4.31) μπορούν ακόμη με πολύ καλή προσέγγιση να υπολογιστούν από τον τύπο:

$$\beta_n L \approx \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \text{με } n=1,2,\dots \quad (4.32)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.2) βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος:

$$\sqrt[4]{\frac{\omega_n^2 \rho A}{EI}} L = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \Rightarrow \omega_n = \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{με } n=1,2,\dots \quad (4.33)$$

Να σημειωθεί ότι η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της αμφίπακτης δοκού είναι 2,25 φορές μεγαλύτερη από τη θεμελιώδη συχνότητα της αμφιέρειστης δοκού. Αυτό σημαίνει ότι η θεμελιώδης ιδιοπερίοδος της αμφίπακτης είναι 2,25 φορές μικρότερη από τη θεμελιώδη ιδιοπερίοδο της αμφιέρειστης δοκού. Αυτό συμβαίνει γιατί η αμφιέρειστη δοκός είναι πιο εύκαμπτη από την αμφίπακτη. Γενικά, όσο πιο εύκαμπτο είναι ένα ελαστικό σύστημα τόσο μεγαλύτερες ιδιοπεριόδους και μικρότερες ιδιοσυχνότητες έχει.

Όσον αφορά τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος χρησιμοποιώντας την (4.25α) βρίσκουμε:

$$B_n = -A_n \frac{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)} \quad (4.34)$$

Η εξίσωση (4.24α) μας δίνει τη σταθερά C συναρτήσει του A. Συνδυάζοντας τις (4.24β) και (4.34) μπορούμε να εκφράσουμε και τη σταθερά D συναρτήσει του A:

$$D_n = A_n \frac{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)} \quad (4.35)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.1) βρίσκουμε τις ειδικές λύσεις για τις ελεύθερες ταλαντώσεις της αμφίπακτης δοκού. Αυτές θα περιέχουν μία αυθαίρετη σταθερά η οποία όπως και στην περίπτωση της αμφιέρειστης μπορεί να ενσωματωθεί στις σταθερές των χρονικών συναρτήσεων. Τελικά οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος είναι:

$$X_n(x) = A_n \cosh(\beta_n x) + B_n \sinh(\beta_n x) + C_n \cos(\beta_n x) + D_n \sin(\beta_n x) \quad (4.36)$$

όπου οι ποσότητες  $\beta_n, B_n, C_n, D_n$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (4.32), (4.34), (4.24α) και (4.35).

Αν για ευκολία ονομάσουμε  $K_n$  το κλάσμα που εμφανίζεται στις σχέσεις (4.34) και (4.35) και εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας η γενική λύση των καμπτικών ταλαντώσεων της αμφίπακτης δοκού είναι:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\cosh(\beta_n x) - K_n \sinh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) + K_n \sin(\beta_n x)] \cdot [E'_n \cos(\omega_n t) + F'_n \sin(\omega_n t)]$$

όπου  $E'_n = E_n \cdot A_n$  και  $F'_n = F_n \cdot A_n$

#### Παράδειγμα 4.2

Έστω αμφίπακτη δοκός η οποία τίθεται σε ταλάντωση στον κανονικό τρόπο  $n=2$  με:

$$w(x,0) = w_0 \cdot [\cosh(\beta_2 x) - K_2 \sinh(\beta_2 x) - \cos(\beta_2 x) + K_2 \sin(\beta_2 x)]$$

και

$$\dot{w}(x,0) = 0$$

Από την εφαρμογή της πρώτης συνθήκης στη γενική λύση παίρνουμε:

$$E'_2 = w_0 \text{ και } E'_n = 0 \text{ για } n \neq 2$$

Από την εφαρμογή της δεύτερης συνθήκης στην παράγωγο της γενικής λύσης παίρνουμε:

$$F'_n = 0 \text{ για } n=1,2,\dots$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος είναι:

$$w(x,t) = \cosh(\beta_2 x) - K_2 \sinh(\beta_2 x) - \cos(\beta_2 x) + K_2 \sin(\beta_2 x)] \cdot w_0 \cos(\omega_2 t)$$

#### **4.4 ΠΡΟΒΟΛΟΣ**

Οι συνοριακές συνθήκες για πρόβολο με πακτωμένο το άκρο  $x=0$  και ελεύθερο το άκρο  $x=L$  είναι:

$$w(0,t) = 0 \tag{4.37α}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.37\beta)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.37\gamma)$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.37\delta)$$

Οι αντίστοιχες συνθήκες για τη συνάρτηση  $X(x)$  είναι:

$$X(0) = 0 \quad (4.38\alpha)$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.38\beta)$$

$$\left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.38\gamma)$$

$$\left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.38\delta)$$

Εδώ θα χρειαστούμε και την τρίτη παράγωγο της συνάρτησης  $X(x)$  που είναι:

$$\frac{d^3 X}{dx^3} = A\beta^3 \sinh(\beta x) + B\beta^3 \cosh(\beta x) + C\beta^3 \sin(\beta x) - D\beta^3 \cos(\beta x) \quad (4.39)$$

Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών δίνει το σύστημα των εξισώσεων:

$$A + C = 0 \quad (4.40\alpha)$$

$$B\beta + D\beta = 0 \quad (4.40\beta)$$

$$A\beta^2 \cosh(\beta L) + B\beta^2 \sinh(\beta L) - C\beta^2 \cos(\beta L) - D\beta^2 \sin(\beta L) = 0 \quad (4.40\gamma)$$

$$A\beta^3 \sinh(\beta L) + B\beta^3 \cosh(\beta L) + C\beta^3 \sin(\beta L) - D\beta^3 \cos(\beta L) = 0 \quad (4.40\delta)$$

Εργαζόμενοι όπως και στις προηγούμενες ενότητες έχουμε:

$$C = -A \quad (4.41\alpha)$$

$$D = -B \quad (4.41\beta)$$

$$A(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) + B(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)) = 0 \quad (4.41\gamma)$$

$$A(\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)) + B(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) = 0 \quad (4.41\delta)$$

Για να έχει μη μηδενική λύση το σύστημα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.42)$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα καταλήγουμε στην εξίσωση ιδιοσυχνότητας:

$$\cosh(\beta L)\cos(\beta L) = -1 \quad (4.43)$$

Η πρώτη ρίζα της εξίσωσης αυτής είναι:

$$\beta_1 L = 1,875 \quad (4.44\alpha)$$

Οι επόμενες ρίζες δίνονται με ικανοποιητική προσέγγιση από τον τύπο:

$$\beta_n L \approx \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{με } n=2,3,\dots \quad (4.44\beta)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.2) βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος:

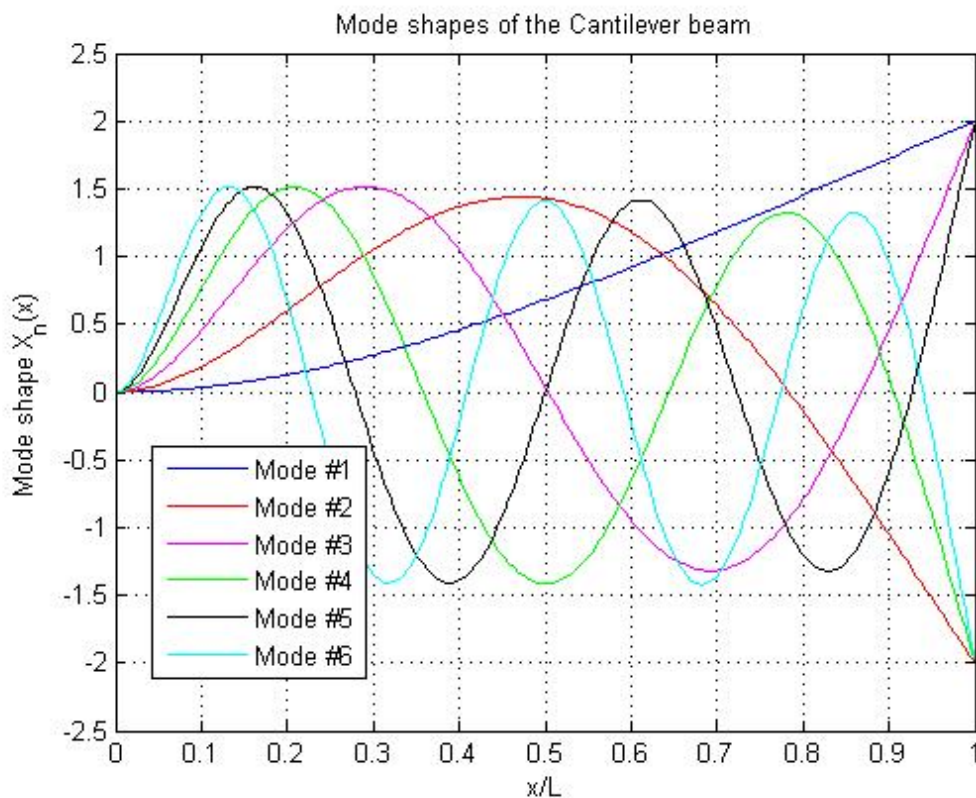
$$\sqrt[4]{\frac{\omega_1^2 \rho A}{EI}} L = 1,875 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1,875^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.45\alpha)$$



$$\sqrt[4]{\frac{\omega_n^2 \rho A}{EI}} L = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow \omega_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \mu\epsilon \ n=2,3,\dots \quad (4.45\beta)$$

Από την (4.41γ) βρίσκουμε:

$$B_n = -A_n \frac{\cosh(\beta_n L) + \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)} \quad (4.46\alpha)$$



Σχήμα 4.2 Οι έξι πρώτοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του προβόλου [9].

και από τις (4.41α) και (4.41β) έχουμε επίσης:

$$C_n = -A_n \quad (4.46\beta)$$

$$D_n = A_n \frac{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)} \quad (4.46\gamma)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος είναι:

$$X_n(x) = A_n \cosh(\beta_n x) + B_n \sinh(\beta_n x) + C_n \cos(\beta_n x) + D_n \sin(\beta_n x) \quad (4.47)$$

όπου οι ποσότητες  $\beta_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (4.44α) και (4.44β), (4.46α), (4.46β) και (4.46γ).

#### 4.5 ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε μία δοκό πακτωμένη στο ένα άκρο της ( $x=0$ ) που το άλλο άκρο της ( $x=L$ ) στηρίζεται σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς  $k$ . Οι συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση  $w(x)$  είναι:

$$w(0, t) = 0 \quad (4.48\alpha)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.48\beta)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (4.48\gamma)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=L} - k \cdot w(L, t) = 0 \quad (4.48\delta)$$

Οι αντίστοιχες συνθήκες για τη συνάρτηση  $X(x)$  είναι:

$$X(0) = 0 \quad (4.49\alpha)$$

$$\frac{dX}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.49\beta)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (4.49\gamma)$$

$$EI \frac{d^3 X}{dx^3} \Big|_{x=L} - k \cdot X(L) = 0 \quad (4.49\delta)$$

Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών δίνει το σύστημα των εξισώσεων:

$$A + C = 0 \quad (4.50\alpha)$$

$$B\beta + D\beta = 0 \quad (4.50\beta)$$

$$A\beta^2 \cosh(\beta L) + B\beta^2 \sinh(\beta L) - C\beta^2 \cos(\beta L) - D\beta^2 \sin(\beta L) = 0 \quad (4.50\gamma)$$

$$A\beta^3 \sinh(\beta L) + B\beta^3 \cosh(\beta L) + C\beta^3 \sin(\beta L) - D\beta^3 \cos(\beta L) = \frac{k}{EI} \cdot \{A \cosh(\beta L) + B \sinh(\beta L) + C \cos(\beta L) + D \sin(\beta L)\} \quad (4.50\delta)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δίνουν:

$$C = -A \quad (4.51\alpha)$$

$$D = -B \quad (4.51\beta)$$

Αντικαθιστώντας στις δύο τελευταίες παίρνουμε:

$$A(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) + B(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)) = 0 \quad (4.51\gamma)$$

$$A \left( \beta^3 \sinh(\beta L) - \beta^3 \sin(\beta L) - \frac{k}{EI} \cosh(\beta L) + \frac{k}{EI} \cos(\beta L) \right) + B \left( \beta^3 \cosh(\beta L) + \beta^3 \cos(\beta L) - \frac{k}{EI} \sinh(\beta L) + \frac{k}{EI} \sin(\beta L) \right) = 0 \quad (4.51\delta)$$

Οι εξισώσεις (4.51γ) και (4.51δ) είναι ένα ομογενές σύστημα με αγνώστους τα A και B. Η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων είναι:

$$\begin{vmatrix} \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \\ \beta^3 \{ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \} - \frac{k}{EI} \{ \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \} & \beta^3 \{ \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \} - \frac{k}{EI} \{ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.52)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μία πολύπλοκη υπερβατική εξίσωση που λύνεται μόνο αριθμητικά και έχει άπειρες λύσεις. Οι λύσεις αυτές είναι οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  του συστήματος.

Από την (4.51γ) βρίσκουμε:

$$B_n = -A_n \frac{\cosh(\beta_n L) + \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)} \quad (4.53\alpha)$$

και από τις (4.51α) και (4.51β) έχουμε επίσης:

$$C_n = -A_n \quad (4.53\beta)$$

$$D_n = A_n \frac{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)} \quad (4.53\gamma)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος είναι:

$$X_n(x) = A_n \cosh(\beta_n x) + B_n \sinh(\beta_n x) + C_n \cos(\beta_n x) + D_n \sin(\beta_n x) \quad (4.54)$$

όπου οι ποσότητες  $\beta_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (4.52), (4.53α), (4.53β) και (4.53γ).

#### 4.6 ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΜΑΖΑ

Έστω δοκός πακτωμένη στο αριστερό άκρο ( $x=0$ ) της οποίας το δεξί άκρο ( $x=L$ ) είναι ελεύθερο και έχει προσκολληθεί σε αυτό σημειακή μάζα  $m$ . Οι συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση  $w(x)$  είναι:

$$w(0, t) = 0 \quad (4.55\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.55\beta)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.55\gamma)$$

$$EI \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x=L} - m \cdot \ddot{w}(L, t) = 0 \quad (4.55\delta)$$

Οι αντίστοιχες συνθήκες για τη συνάρτηση  $X(x)$  είναι:

$$X(0) = 0 \quad (4.56\alpha)$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.56\beta)$$

$$\left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.56\gamma)$$

$$EI \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=L} + m \cdot \omega^2 X(L) = 0 \quad (4.56\delta)$$

Η αλλαγή του προσήμου στην (4.56δ) σε σχέση με την (4.55δ) οφείλεται στο γεγονός ότι για το χρονικό κομμάτι της γενικής λύσης ισχύει:

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \quad (4.57)$$

σύμφωνα με την (3.31).

Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών δίνει το σύστημα των εξισώσεων:

$$A + C = 0 \quad (4.58\alpha)$$

$$B\beta + D\beta = 0 \quad (4.58\beta)$$

$$A\beta^2 \cosh(\beta L) + B\beta^2 \sinh(\beta L) - C\beta^2 \cos(\beta L) - D\beta^2 \sin(\beta L) = 0 \quad (4.58\gamma)$$

$$A\beta^3 \sinh(\beta L) + B\beta^3 \cosh(\beta L) + C\beta^3 \sin(\beta L) - D\beta^3 \cos(\beta L) = -\frac{m\omega^2}{EI} \cdot \{A \cosh(\beta L) + B \sinh(\beta L) + C \cos(\beta L) + D \sin(\beta L)\} \quad (4.58\delta)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δίνουν:

$$C = -A \quad (4.59\alpha)$$

$$D = -B \quad (4.59\beta)$$

Αντικαθιστώντας στις δύο τελευταίες παίρνουμε:

$$A(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) + B(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)) = 0 \quad (4.59\gamma)$$

$$A \left( \beta \sinh(\beta L) - \beta \sin(\beta L) + \frac{m\omega^2}{EI} \cosh(\beta L) - \frac{m\omega^2}{EI} \cos(\beta L) \right) +$$

$$B \left( \beta^3 \cosh(\beta L) + \beta^3 \cos(\beta L) + \frac{m\omega^2}{EI} \sinh(\beta L) - \frac{m\omega^2}{EI} \sin(\beta L) \right) = 0 \quad (4.59\delta)$$

Οι εξισώσεις (4.59γ) και (4.59δ) αποτελούν ένα ομογενές σύστημα με αγνώστους τα A και B. Η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων είναι:

$$\begin{vmatrix} \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \\ \beta^3 \{ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \} + \frac{m\omega^2}{EI} \{ \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \} & \beta^3 \{ \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \} + \frac{m\omega^2}{EI} \{ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.60)$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας καταλήγει στην εξίσωση ιδιοτιμών Η εξίσωση αυτή είναι μία πολύπλοκη υπερβατική εξίσωση που λύνεται μόνο αριθμητικά και έχει άπειρες λύσεις. Οι λύσεις αυτές είναι οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  του συστήματος.

Από την (4.59γ) βρίσκουμε:

$$B_n = -A_n \frac{\cosh(\beta_n L) + \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)} \quad (4.61\alpha)$$

και από τις (4.59α) και (4.59β) έχουμε επίσης:

$$C_n = -A_n \quad (4.61\beta)$$

$$D_n = A_n \frac{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)} \quad (4.61\gamma)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος είναι:

$$X_n(x) = A_n \cosh(\beta_n x) + B_n \sinh(\beta_n x) + C_n \cos(\beta_n x) + D_n \sin(\beta_n x) \quad (4.62)$$

όπου οι ποσότητες  $\beta_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (4.60), (4.61α), (4.61β) και (4.61γ). Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ίδιες με αυτές για την περίπτωση της ελαστικής στήριξης που μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

#### 4.7 ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ

Ας θεωρήσουμε μία δοκό πακτωμένη στο ένα άκρο της ( $x=0$ ) που το άλλο άκρο της ( $x=L$ ) στηρίζεται σε αποσβεστήρα σταθεράς  $c$ . Οι συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση  $w(x)$  είναι:

$$w(0, t) = 0 \quad (4.63\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.63\beta)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.63\gamma)$$

$$EI \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x=L} - c \cdot \dot{w}(L, t) = 0 \quad (4.63\delta)$$

Στην τέταρτη συνοριακή συνθήκη περιέχεται η παράγωγος της λύσης της χρονικής εξίσωσης  $\dot{T}(t)$  η οποία δεν είναι ανάλογη της  $T(t)$  όπως συμβαίνει με την  $\ddot{T}(t)$  (εξίσωση (4.57)). Αυτό δημιουργεί σοβαρό πρόβλημα στην επίλυση του προβλήματος. Στην πραγματικότητα πρόκειται για ένα πρόβλημα που αποτελεί σήμερα αντικείμενο έρευνας και μελέτης από τους ερευνητές.

Ειδικά για την περίπτωση απαιτείται σημαντική τροποποίηση της μεθόδου που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει. Έτσι, ο χωρισμός των μεταβλητών γίνεται με την υπόθεση ότι ισχύει:

$$w(x, t) = X(x) \cdot e^{\lambda t} \quad (4.64)$$

όπου όμως και η συνάρτηση  $X(x)$  και η παράμετρος  $\lambda$  είναι γενικά μιγαδικές. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων βρίσκουμε:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow EIX^{(4)}(x)e^{\lambda t} + \rho AX(x) \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow$$

$$EIX^{(4)}(x) + \rho A \lambda^2 X(x) = 0 \quad (4.65)$$

Παραγωγίζοντας της (4.64) ως προς το χρόνο παίρνουμε:

$$\dot{w}(x,t) = X(x) \cdot \lambda e^{\lambda t} \quad (4.66)$$

Οι τρεις πρώτες συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση  $X(x)$  προκύπτουν άμεσα και είναι οι εξής:

$$X(0) = 0 \quad (4.67\alpha)$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.67\beta)$$

$$\left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.67\gamma)$$

Για την τέταρτη συνθήκη χρησιμοποιούμε τις (4.63δ), (4.64) και (4.66):

$$EI \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=L} \cdot e^{\lambda t} - c \lambda X(L) \cdot e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow$$

$$EI \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=L} = c \lambda X(L) \quad (4.67\delta)$$

Η διαφορική εξίσωση (4.65) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (4.67α-δ) αποτελούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών που πρέπει να επιλύσουμε. Θέτουμε:

$$\gamma^4 = -\frac{\rho A \lambda^2}{EI} \quad (4.68)$$



Το αρνητικό πρόσημο στην (4.68) δικαιολογείται αφού το  $\lambda$  μπορεί να είναι φανταστικός αριθμός.

Τώρα είμαστε σε θέση να γράψουμε την (4.65) στη μορφή:

$$X^{(4)}(x) - \gamma^4 X(x) = 0 \quad (4.69)$$

η οποία είναι παρόμοια με την χωρική εξίσωση (3.12). Οπότε η γενική λύση της (4.69) θα είναι:

$$X(x) = A \cosh(\gamma x) + B \sinh(\gamma x) + C \cos(\gamma x) + D \sin(\gamma x) \quad (4.70)$$

Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (4.67α-δ) στην (4.70) αν χρησιμοποιήσουμε και τις (4.3), (4.4) και (4.39) δίνει το σύστημα των εξισώσεων:

$$A + C = 0 \quad (4.71\alpha)$$

$$B\gamma + D\gamma = 0 \quad (4.71\beta)$$

$$A\gamma^2 \cosh(\gamma L) + B\gamma^2 \sinh(\gamma L) - C\gamma^2 \cos(\gamma L) - D\gamma^2 \sin(\gamma L) = 0 \quad (4.71\gamma)$$

$$A\gamma^3 \sinh(\gamma L) + B\gamma^3 \cosh(\gamma L) + C\gamma^3 \sin(\gamma L) - D\gamma^3 \cos(\gamma L) =$$

$$\frac{c\lambda}{EI} \cdot \{A \cosh(\gamma L) + B \sinh(\gamma L) + C \cos(\gamma L) + D \sin(\gamma L)\} \quad (4.71\delta)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δίνουν:

$$C = -A \quad (4.72\alpha)$$

$$D = -B \quad (4.72\beta)$$

Αντικαθιστώντας στις δύο τελευταίες παίρνουμε:

$$A(\cosh(\gamma L) + \cos(\gamma L)) + B(\sinh(\gamma L) + \sin(\gamma L)) = 0 \quad (4.72\gamma)$$

$$A \left( \gamma^3 \sinh(\gamma L) - \gamma^3 \sin(\gamma L) - \frac{c\lambda}{EI} \cosh(\gamma L) + \frac{c\lambda}{EI} \cos(\gamma L) \right) +$$

$$B \left( \gamma^3 \cosh(\gamma L) + \gamma^3 \cos(\lambda L) - \frac{c\lambda}{EI} \sinh(\gamma L) + \frac{c\lambda}{EI} \sin(\gamma L) \right) = 0 \quad (4.72\delta)$$

Οι εξισώσεις (4.72γ) και (4.72δ) αποτελούν ένα ομογενές σύστημα με αγνώστους τα Α και Β. Η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων είναι:

$$\begin{vmatrix} \cosh(\gamma L) + \cos(\gamma L) & \sinh(\gamma L) + \sin(\gamma L) \\ \gamma^3 \{ \sinh(\gamma L) - \sin(\gamma L) \} - \frac{c\lambda}{EI} \{ \cosh(\gamma L) - \cos(\gamma L) \} & \gamma^3 \{ \cosh(\gamma L) + \cos(\gamma L) \} - \frac{c\lambda}{EI} \{ \sinh(\gamma L) - \sin(\gamma L) \} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.73)$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας καταλήγει στην εξίσωση ιδιοτιμών Η εξίσωση αυτή είναι μία πολύπλοκη υπερβατική εξίσωση που λύνεται μόνο αριθμητικά και έχει άπειρες λύσεις. Οι λύσεις αυτές είναι οι ιδιοτιμές  $\lambda_n$  του συστήματος. Οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  του συστήματος συνδέονται με τα  $\lambda_n$  με τη σχέση:

$$\lambda_n = i\omega_n \quad (4.74)$$

Από την (4.72γ) βρίσκουμε:

$$B_n = -A_n \frac{\cosh(\gamma_n L) + \cos(\gamma_n L)}{\sinh(\gamma_n L) + \sin(\gamma_n L)} \quad (4.75\alpha)$$

και από τις (4.72α) και (4.72β) έχουμε επίσης:

$$C_n = -A_n \quad (4.75\beta)$$

$$D_n = A_n \frac{\cosh(\gamma_n L) + \cos(\gamma_n L)}{\sinh(\gamma_n L) + \sin(\gamma_n L)} \quad (4.75\gamma)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος είναι:

$$X_n(x) = A_n \cosh(\gamma_n x) + B_n \sinh(\gamma_n x) + C_n \cos(\gamma_n x) + D_n \sin(\gamma_n x) \quad (4.76)$$

όπου οι ποσότητες  $\beta_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (4.68), (4.75α), (4.75β) και (4.75γ).

Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές είναι όμως μιγαδικές συναρτήσεις και αυτό δημιουργεί σημαντικά μαθηματικά προβλήματα που όμως

ξεφεύγουν από το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Περισσότερες πληροφορίες για αυτά περιέχονται στις σχετικές επιστημονικές εργασίες που παρατίθενται στη βιβλιογραφία. Στις εργασίες αυτές αποδεικνύεται επίσης ότι το οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος της δοκού με αποσβεστήρα στο ένα άκρο που μελετήσαμε στην ενότητα αυτή τείνουν να γίνουν ίσες με τις ιδιοσυχνότητες του προβόλου όταν  $c \rightarrow 0$  (ελεύθερο άκρο) και με τις ιδιοσυχνότητες της δοκού με πάκτωση και άρθρωση καθώς  $c \rightarrow \infty$ .

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Η μελέτη των καμπτικών ταλαντώσεων μιας δοκού αποτελεί μία πολύ καλή εισαγωγή στις μεθόδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την εκπόνηση της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι:

- Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών αποτελεί ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την αντιμετώπιση προβλημάτων όπου εμπλέκονται διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.
- Με χρήση του χωρισμού των μεταβλητών και της αρχής της επαλληλίας καταλήγουμε στη γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης.
- Με την εφαρμογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών είναι στη συνέχεια δυνατός ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών του ταλαντούμενου συστήματος.

Στην εργασία αυτή μελετήθηκαν μόνο οι ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού χωρίς απόσβεση. Η μελέτη αυτή μπορεί να επεκταθεί συμπεριλαμβάνοντας φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις για διάφορες περιπτώσεις εξωτερικής διέγερσης. Η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία μπορεί επίσης πολύ εύκολα να εφαρμοστεί είτε στη μελέτη άλλων καταπονήσεων της δοκού όπως στρεπτικές ή αξονικές ταλαντώσεις αλλά και προς την πλευρά των καμπτικών ταλαντώσεων συστημάτων δοκών με σημαντικές εφαρμογές στη δυναμική των κατασκευών και στην αντισεισμική μηχανική. Τέλος, να αναφέρουμε ότι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλούς ακόμη τομείς της μηχανολογίας όπως μετάδοση θερμότητας, μηχανική ρευστών κ.α.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1] Κ. Αναστασιάδης, Δυναμική των Κατασκευών, τόμος ΙΙ Συνεχή Συστήματα, εκδ. Ζήτη (1983).
- 2] Π. Βουθούνης, Μηχανική του Απαραμόρφωτου Σώματος-Στατική, Αθήνα 2008.
- 3] Π. Βουθούνης, Τεχνική Μηχανική-Αντοχή των Υλικών, Αθήνα 1993.
- 4] Ν. Ιωακειμίδης, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς, εκδ. Gotsis (2008).
- 5] Α. Κουνάδης, Δυναμική των Συνεχών Ελαστικών Συστημάτων, τόμος Ι Γραμμικοί Φορείς, εκδ. Συμεών (1989).
- 6] Σ. Νατσιάβας, Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων, εκδ. Ζήτη (2001).
- 7] R. D. Copetti<sup>1</sup>, J. R. Claeysen, T. Tsukazan, Dynamical Response of a Forced Viscous Append Cantilever Beam, 9<sup>th</sup> Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications June 07-11, 2010.
- 8] V. Jovanovic, A Fourier series solution for the transverse vibration response of a beam with a viscous boundary, Journal of Sound and Vibration 330 (2011) 1504-1515.
- 9] <http://www.mathworks.com>