

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ  
ΥΠΟΛΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΙΑ  
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.**

ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ: 1) ΤΣΑΤΣΑΝΗ ΑΝΝΑ  
2) ΤΣΟΛΑΚΙΔΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ: 1) ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΜΑΥΡΙΔΗΣ  
2) ΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΠΑΤΡΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

## **ΠΡΟΛΟΓΟΣ**

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολογίας του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Πάτρας και ασχολείται με την ανάλυση και εφαρμογή τυρβωδών μοντέλων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής σε μηχανολογικές εφαρμογές που άπτονται μελέτη ενεργειακών και μαζικών μεταβολών.

Στην αρχή γίνεται μια εισαγωγή σε βασικές ενότητες κατανόησης των αντικειμένων της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και στην συνέχεια περιγράφονται τα μοντέλα που συνήθως χρησιμοποιούνται από τους εμπορικούς κώδικες υπολογιστικής ρευστοδυναμικής για την πρόβλεψη μεταβολών βαθμωτών συνήθως μεγεθών.

Ευχαριστούμε θερμά τους Επιβλέποντες Καθηγητές μου κ. Κων/νο Μαυρίδη, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολογίας και κ. Ιωάννη Γιαννάκη, Συνεργάτη Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολογίας, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μας προσέφεραν για την πραγματοποίηση της πτυχιακής αυτής εργασίας για να ολοκληρωθούν οι σπουδές μας.

**ANNA ΤΣΑΤΣΑΝΗ- ΑΝΤΩΝΗΣ ΤΣΟΛΑΚΙΔΗΣ**

**Φεβρουάριος 2013**

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα Πτυχιακή Εργασία αναφέρεται στην περιγραφή των συνήθων μοντέλων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής που χρησιμοποιούνται από διάφορα προγράμματα υπολογιστικής μελέτης και σχεδιασμού ενεργειακών συστημάτων.

Η ανάπτυξη του θέματος γίνεται σε δύο Κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται α) μια εισαγωγή στην υπολογιστική ρευστοδυναμική με σκοπό την κατανόηση της λειτουργίας ενός εμπορικού λογισμικού, β) μια σύντομη ανάλυση των βασικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται σε κάθε κώδικα που εμπλέκεται, γ) αναλύεται ο τρόπος επιλογής του κατάλληλου τυρβώδους μοντέλου και δ) γίνεται μια σύντομη ανάλυση πως πραγματοποιείται μια υπολογιστική προσομοίωση.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο περιγράφονται τα συνήθη μοντέλα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων κυρίως θερμο-ενεργειακού ενδιαφέροντος.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	2
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 <sup>ο</sup> : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ	4
1.1 Υπολογιστική Ρευστοδυναμική	4
1.2 Πως δουλεύει ένας κώδικας CFD	5
1.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	9
1.4 ΤΥΡΒΗ	16
1.5 Κριτήρια για την αξιολόγηση των μοντέλων	20
1.6 Διαδικασία υπολογιστικής προσομοίωσης	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 <sup>ο</sup> : Μοντέλα υπολ/κής ρευστοδυναμικής	31
2.1 Εισαγωγή	31
2.2 Επιλέγοντας ένα τυρβώδες μοντέλο	32
2.3 Το μοντέλο Spallart – Allmaras	42
2.4 Το κοινό, RNG, και πραγματοποιήσιμο k-ε μοντέλα	47
2.5 Το κοινό και SST k-ω μοντέλα	60
2.6 Το μοντέλο τάσης Reynolds	70
2.7 Το μοντέλο εξομοίωσης μεγάλης δίνης (LES)	78
2.8 Το μοντέλο εξομοίωσης αποσπασμένης δίνης (DES)	85
2.9 Το μοντέλο μήκους ανάμιξης	86
2.10 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα υπολογιστικών μοντέλων	87
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	89

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

## 1.1 Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

Η υπολογιστική ρευστοδυναμική καθιστά μια νέα τρίτη προσέγγιση στην φιλοσοφική μελέτη και εξέλιξη του συνόλου των αρχών της ρευστοδυναμικής. Τον 17<sup>ο</sup> αιώνα οι βάσεις για την πειραματική ρευστοδυναμική μπήκαν στην Γαλλία και την Αγγλία. Κατά τον 18<sup>ο</sup> και 19<sup>ο</sup> αιώνα παρατηρήθηκε μια σταδιακή ανάπτυξη της θεωρητικής ρευστοδυναμικής, κυρίως στην Ευρώπη. Σαν αποτέλεσμα, κυρίως τον 20<sup>ο</sup> αιώνα, η μελέτη και πρακτική εφαρμογή της ρευστοδυναμικής αφορούσε τη χρησιμοποίηση καθαρής θεωρίας από τη μια πλευρά και πειραμάτων από την άλλη. Εάν μαθαίναμε ρευστοδυναμική σχετικά πρόσφατα, ας πούμε το 1960, θα λειτουργούσαμε στον κόσμο δυο προσεγγίσεων της θεωρίας και του πειράματος.

Παρόλα αυτά, η έλευση των ψηφιακών υπολογιστών υψηλής ταχύτητας πέτυχε την συνένωση και με την ανάπτυξη αριθμητικών αλγορίθμων ακριβείας για την λύση φυσικών προβλημάτων σε αυτούς, προκλήθηκε μια επανάσταση στον τρόπο μελέτης και εφαρμογής της ρευστοδυναμικής σήμερα. Έτσι παρουσιάστηκε μια βασικής σημασίας νέα τρίτη προσέγγιση στη ρευστοδυναμική -η προσέγγιση της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Η υπολογιστική ρευστοδυναμική είναι σήμερα μια ισάξια συνάδελφος της καθαρής θεωρίας και του πειράματος στην ανάλυση και λύση των ρευστοδυναμικών προβλημάτων. Αυτό δεν είναι κάτι παροδικό -η υπολογιστική ρευστοδυναμική θα συνεχίσει να παίζει αυτό το ρόλο απεριόριστα, για όσο ο προηγμένος ανθρώπινος πολιτισμός υπάρχει. Κατά συνέπεια, μελετώντας υπολογιστική ρευστοδυναμική σήμερα, συμμετέχει σε μια σπουδαία και ιστορική επανάσταση.

Ωστόσο υιοθετώντας μια άποψη, η υπολογιστική ρευστοδυναμική μας παρέχει μια νέα τρίτη προσέγγιση και τίποτα παραπάνω απ'αυτό. Είναι μια καλή συνεργός που συμπληρώνει τις άλλες δυο προσεγγίσεις της θεωρίας και του πειράματος, αλλά ποτέ δεν θα πάρει τη θέση καμίας από αυτές τις προσεγγίσεις. Πάντα θα υπάρχει η ανάγκη για τη θεωρία και το πείραμα. Το μελλοντικό πλεονέκτημα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής έγκειται στην

κατάλληλη ισορροπία των τριών προσεγγίσεων, με την υπολογιστική ρευστοδυναμική να βοηθά στη μετάφραση και κατανόηση των αποτελεσμάτων της θεωρίας και του πειράματος και αντιστρόφως.

Τα αποτελέσματα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής είναι ανάλογα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από μια αεροσήραγγα στο εργαστήριο, και τα δυο αντιπροσωπεύουν σετ πληροφοριών για γνωστούς σχηματισμούς ροής με διαφορετικούς αριθμούς Mach, αριθμούς Reynolds κτλ. Ωστόσο αντίθετα με μια αεροσήραγγα η οποία είναι μια βαριά και δυσκίνητη συσκευή, ένα πρόγραμμα υπολογιστή είναι κάτι που μπορεί να μεταφερθεί στο χέρι μας, ή ακόμα καλύτερα, ένα πηγαίο πρόγραμμα στη μνήμη ενός γνωστού υπολογιστή στο οποίο μπορεί να έχουμε πρόσβαση από ανθρώπους απομακρυσμένους μέσω τερματικών που μπορεί να βρίσκονται χιλιάδες μίλια μακριά από τον ίδιο τον υπολογιστή. Γι' αυτό ακριβώς το λόγο, ένα πρόγραμμα σε υπολογιστή είναι ένα μεταφερόμενο εργαλείο, μια μεταφερόμενη αεροσήραγγα.

## 1.2 Πως δουλεύει ένας κώδικας CFD

Οι κώδικες CFD είναι κατασκευασμένοι γύρω από τους αριθμητικούς αλγόριθμους που καταπιάνονται με τα προβλήματα ροής ρευστών. Με σκοπό να επιτρέπουν εύκολη πρόσβαση στο χειριστή τους, όλα τα εμπορικά πακέτα κωδικών CFD περιέχουν εκλεπτυσμένο περιβάλλον εργασίας για να εισαγάγουμε τις παραμέτρους του προβλήματος και να εξετάσουμε τα αποτελέσματα. Άρα, όλοι οι κώδικες περιέχουν τρία βασικά στοιχεία:

- i. τον προ-επεξεργαστή
- ii. τον επιλυτή
- iii. τον μεθ-επεξεργαστή

Θα εξετάσουμε περιληπτικά τη λειτουργία του κάθε στοιχείου.

### 1.2.1 Προ-επεξεργαστής (PRE-PROCESSOR)

Ο προ-επεξεργαστής αποτελείται από την είσοδο των δεδομένων ενός προβλήματος ροής σ' ένα CFD πρόγραμμα διαμέσου ενός φιλικού περιβάλλοντος για τον χειριστή και τον επακόλουθο μετασχηματισμό αυτών των δεδομένων σε μια μορφή κατάλληλη για χρήση. Οι ενέργειες του χειριστή στο στάδιο της προ-επεξεργασίας αφορούν:

1. Καθορισμός της γεωμετρίας της περιοχής ενδιαφέροντος, δηλαδή του υπολογιστικού χώρου.
2. Δημιουργία του πλέγματος, δηλαδή η διαίρεση του χώρου σε μικρότερες περιοχές (όγκοι ελέγχου ή κελιά).
3. Επιλογή των φυσικών και χημικών φαινομένων που θα εξομοιωθούν.
4. Καθορισμός των ιδιοτήτων του ρευστού.
5. Καθορισμός των οριακών συνθηκών στα κελιά που είναι στα όρια του υπολογιστικού χώρου.

Η λύση ενός προβλήματος ροής (ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία, κτλ) καθορίζεται σε κόμβους σε κάθε κελί. Η ακρίβεια μιας CFD λύσης εξαρτάται από τον αριθμό των κελιών στο πλέγμα. Γενικά, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των κελιών τόσο ακριβέστερη είναι η λύση. Η ακρίβεια της λύσης και το κόστος αυτής (απαραίτητο computer hardware και χρόνος υπολογισμού) εξαρτώνται από την ποιότητα του πλέγματος. Πάνω από το 50% του χρόνου που ξοδεύεται στη βιομηχανία σ' ένα CFD πρόβλημα αφοσιώνεται στον καθορισμό της γεωμετρίας και την κατασκευή του πλέγματος. Με σκοπό να μεγιστοποιηθεί η παραγωγικότητα του προσωπικού που δουλεύει σ' ένα CFD πρόβλημα, όλοι οι βασικοί κώδικες περιέχουν το δικό τους CAD-style περιβάλλον και/ή ευκολία στην εισαγωγή δεδομένων από διαμορφωτές επιφανειών και κατασκευαστές πλέγματος όπως τους PATRAN και I-DEAS. Ακόμη οι τωρινοί προ-επεξεργαστές δίνουν στο χειριστή πρόσβαση σε βιβλιοθήκες που περιέχουν τις υλικές

ιδιότητες συνηθισμένων ρευστών και την ευκολία να επικαλεστούν ειδικά φυσικά και χημικά μοντέλα (τυρβώδη μοντέλα, μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία, μοντέλα καύσης) μαζί με τις εξισώσεις της κύριας ροής του ρευστού.

### 1.2.2 Επιλύτης (SOLVER)

Υπάρχουν 3 διακεκριμένα ρεύματα αριθμητικών τεχνικών για τη λύση ενός προβλήματος CFD: **πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων και φασματική μέθοδος**. Γενικά οι αριθμητικές μέθοδοι που σχηματίζουν τη βάση του επιλυτή πραγματοποιούν τα παρακάτω βήματα:

1. Προσέγγιση των αγνώστων μεταβλητών της ροής μέσα από απλές διεργασίες.
2. Διακριτοποίηση με αντικατάσταση των προσεγγίσεων στις εξισώσεις της κύριας ροής και τους επακόλουθους μαθηματικούς χειρισμούς.
3. Λύση των αλγεβρικών εξισώσεων.

Οι βασικές διαφορές μεταξύ των 3 ξεχωριστών ρευμάτων σχετίζονται με τον τρόπο με τον οποίο οι μεταβλητές της ροής υπολογίζονται και με τις διαδικασίες διακριτοποίησης.

**Μέθοδοι πεπερασμένων όγκων:** Οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων αρχικά εξελίχθηκαν σαν μια ειδική φόρμουλα των πεπερασμένων διαφορών. Ο αριθμητικός της αλγόριθμος αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. Τυπική ολοκλήρωση των κυρίων εξισώσεων της ροής του ρευστού σε όλους τους (πεπερασμένους) όγκους ελέγχου του χώρου λύσης.
2. Διακριτοποίηση, η οποία περιλαμβάνει την αντικατάσταση αρκετών προσεγγίσεων τύπου πεπερασμένων διαφορών ώστε η ολοκληρωμένη εξίσωση να αναπαριστά διαδικασίες ροής όπως **συναγωγή, διάχυση και πηγές**. Αυτό μετατρέπει τις ακέραιες εξισώσεις σ' ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.
3. Λύση των αλγεβρικών εξισώσεων με μια επαναληπτική μέθοδο.



Το πρώτο βήμα, η ολοκλήρωση του όγκου ελέγχου ξεχωρίζει την μέθοδο πεπερασμένων όγκων από όλες τις άλλες CFD τεχνικές. Τα απορρέοντα στοιχεία δείχνουν την ακριβή διατήρηση των σχετικών ιδιοτήτων του κάθε κελλιού με πεπερασμένο μέγεθος. Αυτή η καθαρή σχέση ανάμεσα στον αριθμητικό αλγόριθμο και τη διατήρηση των αρχών της Φυσικής είναι μια από τις κύριες έλξεις της μεθόδου πεπερασμένων όγκων και κάνει τα περιεχόμενά της πολύ πιο εύκολα κατανοητά από τους μηχανικούς απ' ότι οι άλλες μέθοδοι.

Η διατήρηση μιας γενικής μεταβλητής ροής  $\Phi$ , για παράδειγμα η ταχύτητα των συστατικών μερών ή η ενθαλπία μέσα σ' ένα όγκο ελέγχου μπορεί να εκφραστεί σαν το ισοζύγιο μεταξύ των διαφόρων διαδικασιών που τείνουν να αυξήσουν ή να μειώσουν αυτή. Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned} & \text{Ρυθμός μεταβολής της ποσότητας } \Phi \text{ στον όγκο ελέγχου σε σχέση με το} \\ & \text{χρόνο διάχυσης} \\ & = \text{Αμιγής ροή της ποσότητας } \Phi \text{ στον όγκο ελέγχου} \\ & + \text{Αμιγής ροή της ποσότητας } \Phi \text{ λόγω όγκο ελέγχου} + \text{Αμιγής ρυθμός της} \\ & \text{δημιουργίας } \Phi \text{ του όγκο ελέγχου} \end{aligned}$$

Οι κώδικες CFD περιέχουν τεχνικές διακριτοποίησης κατάλληλες για το χειρισμό του κλειδιού-φαινομένου μεταφοράς, συναγωγής (μεταφορά λόγω της ροής του ρευστού) και διάχυσης (μεταφορά λόγω των διαφορών της ποσότητας  $\Phi$  από σημείο σε σημείο) όπως και όρους πηγής (συνδέεται με τη δημιουργία ή καταστροφή του  $\Phi$ ) και το ρυθμό μεταβολής σε σχέση με το χρόνο. Τα φυσικά φαινόμενα είναι πολύπλοκα και μη-γραμμικά έτσι απαιτείται μια προσέγγιση με επαναληπτική λύση.

### 1.2.3 Μεθ-επεξεργαστής (POST-PROCESSOR)

Λόγω της αυξανόμενης ζήτησης μηχανολογικών πακέτων εργασίας, πολλά εκ των οποίων έχουν εκπληκτικές ικανότητες για γραφική απεικόνιση, τα κύρια CFD πακέτα έχουν εφοδιαστεί με οπτικά εργαλεία πολλών χρήσεων. Αυτά περιλαμβάνουν:

1. Γεωμετρία χώρου και προβολή του πλέγματος.
2. Χάραξη διανυσμάτων.
3. Χάραξη γραμμών και σκιασμένων περιμέτρων.
4. Χάραξη επιφανειών 2D και 3D.
5. Ανίχνευση μορίων.
6. Χειρισμός εικόνας (μετάφραση, περιστροφή κτλ).
7. Έγχρωμη απόδοση στην έξοδο.

Οι παραπάνω υπηρεσίες μπορεί ακόμα να περιέχουν animation για δυναμική προβολή των αποτελεσμάτων και επιπλέον μαζί με τα γραφικά όλοι οι κώδικες παράγουν αξιόπιστα αλφαριθμητικά στοιχεία και υπάρχει η δυνατότητα για εξαγωγή δεδομένων για επεξεργασία αυτών εξωτερικά του κώδικα.

### **1.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

#### **1.3.1 Η εξίσωση συνέχειας**

Ας γράψουμε μια θεμελιώδη φυσική αρχή, να την εφαρμόσουμε σε ένα κατάλληλο μοντέλο ροής και να εξάγουμε μια εξίσωση που αντιπροσωπεύει την θεμελιώδη αυτή αρχή. Για την περίπτωση αυτή :

#### ***θεμελιώδης αρχή : αρχή διατήρησης της μάζας***

Η κυρίαρχη εξίσωση ροής που απορρέει από την εφαρμογή της φυσικής αυτής αρχής ονομάζεται εξίσωση συνέχειας. Η εφαρμογή μπορεί να γίνει για τέσσερα διαφορετικά μοντέλα ροής, στην συγκεκριμένη περίπτωση όμως θα γίνει για ένα, μιας και η εξίσωση δεν αλλάζει ουσιαστικά μορφή είναι δηλαδή η ίδια για όλα τα μοντέλα.

Ας φανταστούμε ένα μοντέλο ροής, δηλαδή ένα απειροελάχιστα μικρό στοιχείο σταθερό στο χώρο, με το ρευστό να διέρχεται μέσα από αυτό. Εδώ για διευκόλυνση υιοθετούμε ένα κατερσιανό σύστημα συντεταγμένων, όπου η ταχύτητα και η πυκνότητα είναι λειτουργίες του χώρου ( $x, y, z$ ) και του χρόνου  $t$ . Το στοιχείο του ρευστού που είναι σταθερό στο χώρο ( $x, y, z$ ) έχει πλευρές  $dx, dy$  και  $dz$ . Η αρχή που εφαρμόζουμε μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{array}{l} \text{καθαρή εκροή ρευστού από} \\ \text{τον όγκο έλεγχου μέσω} \\ \text{επιφάνειας ελέγχου } S \end{array} = \begin{array}{l} \text{ρυθμός μείωσης της} \\ \text{μάζας μέσα στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array}$$

Για το ρευστό στοιχείο που είναι σταθερό στο χώρο υπάρχει ροή μάζας όπως φαίνεται στο σχήμα. Ας σκεφτούμε την αριστερή και δεξιά επιφάνεια του στοιχείου που είναι κάθετες στον x άξονα. Οι επιφάνειες αυτές έχουν εμβαδόν  $dydz$ . Η ροή μάζας από την αριστερή πλευρά είναι  $(\rho u)dydz$ . Από τη στιγμή που η ταχύτητα και η πυκνότητα είναι λειτουργίες του χώρου εξαρτώνται δηλαδή από τον χωρικό προσδιορισμό τους, τα μεγέθη της ροής μάζας από τη δεξιά πλευρά θα είναι διαφορετικά από την αριστερή πλευρά και φυσικά η διαφορά αυτή ανάμεσα στις δυο επιφάνειες θα είναι:

$$\left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dydz .$$

Κατά συνέπεια, η ροή της μάζας από τη δεξιά πλευρά μπορεί να γραφτεί ως:

$$\left[ \rho u + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right] \cdot dydz .$$

Με τον ίδιο τρόπο, η ροή της μάζας διαμέσου της κάτω και πάνω επιφάνειας που είναι κάθετες στον y άξονα θα είναι:

$$\text{και} \quad \left[ \rho v + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \right] \cdot dx dz \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Τέλος, η ροή της μάζας μέσω της εμπρός και πίσω επιφάνειας που είναι κάθετες στον άξονα z θα είναι:

$$(\rho w) \cdot dx dy$$

και 
$$\left[ pw + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \cdot dz \right] \cdot dxdy \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Να σημειωθεί ότι οι συνιστώσες  $u$ ,  $v$  και  $w$  είναι θετικές, κατά συνθήκη, με τις θετικές φορές των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  αντίστοιχα. Ως εκ τούτου τα βέλη του σχήματος αναπαριστούν τις συνεισφορές στην εισροή και εκροή της μάζας μέσω των επιφανειών του στοιχείου. Εάν θεωρήσουμε την εκροή της μάζας ως θετική ποσότητα τότε θα έχουμε :

Καθαρή εκροή στον  $x$  άξονα:

$$\left[ pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \cdot dx \right] \cdot dydz - (pu) \cdot dydz = \frac{\partial(pu)}{\partial x} \cdot dxdydz$$

Καθαρή εκροή στον  $y$  άξονα:

$$\left[ pv + \frac{\partial(pv)}{\partial y} \cdot dy \right] \cdot dxdz - (pv) \cdot dxdz = \frac{\partial(pv)}{\partial y} \cdot dxdydz$$

Καθαρή εκροή στον  $z$  άξονα:

$$\left[ pw + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \cdot dz \right] \cdot dxdy - (pw) \cdot dxdy = \frac{\partial(pw)}{\partial z} \cdot dxdydz$$

Άρα η συνολική καθαρή εκροή μάζας από το στοιχείο είναι:

$$\text{συνολική καθαρή εκροή} = \left[ \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right] \cdot dxdydz$$

Η συνολική μάζα του στοιχείου είναι  $p(dxdydz)$  άρα ο ρυθμός μείωσης αυτής δίνεται από τη σχέση:

$$\text{ρυθμός μείωσης μάζας} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot (dxdydz)$$

Εάν ορίσουμε την μείωση της μάζας μέσα στο στοιχείο σαν μια αρνητική ποσότητα, τότε από όλα τα παραπάνω παίρνουμε:

$$\left[ \frac{\rho(pu)}{\rho} + \frac{\rho(pv)}{\rho} + \frac{\rho(pw)}{\rho} \right] \cdot dx dy dz = - \frac{\rho p}{\rho} \cdot dx dy dz$$

$$\Rightarrow \frac{\rho p}{\rho} + \left[ \frac{\rho(pu)}{\rho} + \frac{\rho(pv)}{\rho} + \frac{\rho(pw)}{\rho} \right] = 0$$

Οι όροι στην αγκύλη είναι το  $\nabla(pv)$  άρα η εξίσωση γράφεται:

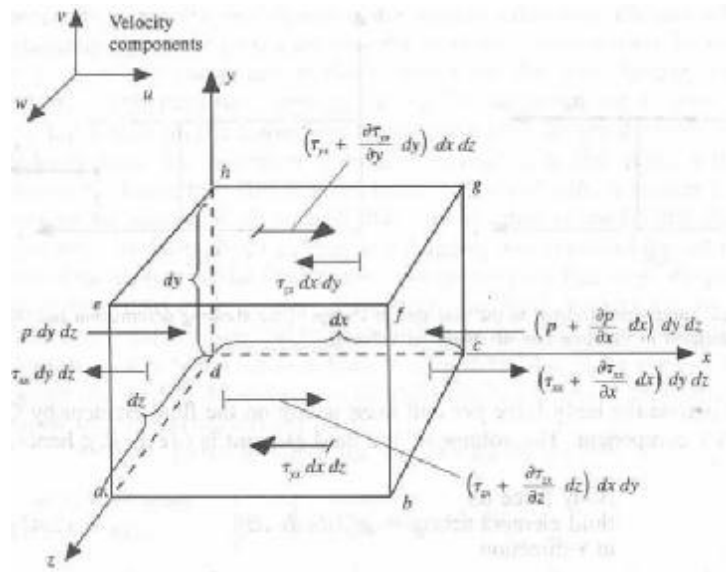
$$\frac{\rho p}{\rho} + \nabla(pv) = 0$$

Αυτή η εξίσωση αποτελεί την μερική διαφορική μορφή της εξίσωσης συνέχειας. Η μορφή αυτή καλείται και συντηρητική γιατί εξήχθη με την εφαρμογή της φυσικής αρχής σε απειροελάχιστο μικρό στοιχείο σταθερό στο χώρο.

### 1.3.2 Εξισώσεις της ορμής

Η φυσική αρχή που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ είναι ο δεύτερος νόμος του Newton:  $F = m \cdot a$ .

Η εξίσωση που θα προκύψει ονομάζεται εξίσωση ορμής. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το μοντέλο ροής που θα αξιοποιηθεί είναι αυτό ενός απειροελάχιστου μικρού ρευστού στοιχείου που κινείται με τη ροή και αυτό γιατί είναι ιδιαίτερα βολικό για τη παραγωγή της εξίσωσης της ορμής καθώς και της εξίσωσης της ενέργειας που θα δούμε παρακάτω. Το ρευστό στοιχείο φαίνεται παρακάτω, παρόλα αυτά όμως δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η εξίσωση της ορμής και της ενέργειας μπορούν να παραχθούν με τη χρησιμοποίηση και των άλλων τριών μοντέλων ροής που θα μας οδηγήσουν σε άλλες μορφές των εξισώσεων.



Σχήμα 1: Κινούμενο ρευστό σημείο. Είναι σχεδιασμένες μόνο οι δυνάμεις στην κατεύθυνση x.

Η έκφραση του δεύτερου νόμου του Newton όταν εφαρμοσθεί σε κινούμενο ρευστό στοιχείο μας λέει ότι η καθαρή δύναμη που ασκείται στο στοιχείο ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση του. Είναι μια σχέση συνιστωσών και κατά συνέπεια μπορεί να χωριστεί σε τρεις κλιμακωτές σχέσεις για τους x, y και z άξονες.

Έτσι συνολικά σχηματίζουμε την εξίσωση:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

που είναι το μέρος της εξίσωσης ορμής για την διεύθυνση x, για τυρβώδη ροή.

Κατά τον ίδιο τρόπο προσδιορίζουμε τα μέρη της εξίσωσης για την διεύθυνση y και z.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι σε μερική διαφορική μορφή παρήχθησαν από την απευθείας εφαρμογή της φυσικής αρχής σε ένα απειροελάχιστα μικρό στοιχείο, επίσης καθώς πρόκειται για στοιχείο κινούμενο με τη ροή οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τη μη συντηρητική μορφή τους. Είναι κλιμακωτές εξισώσεις και ονομάζονται εξισώσεις **Navier-Stokes**.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να γραφούν σε συντηρητική μορφή με τον ακόλουθο τρόπο, γράφοντας το αριστερό μέλος της κάθε εξίσωσης με τη βοήθεια του ορισμού της ουσιαστικής παραγώγου:

$$p \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + pf_z$$

ξέρουμε επίσης ότι:

$$p \frac{Du}{Dt} = p \frac{\partial u}{\partial t} + pV \cdot \nabla u$$

Επίσης από την ταυτότητα για την απόκλιση μεγέθους επί ένα κλιμακωτό δείκτη, έχουμε:

$$\frac{\partial(pu)}{\partial t} = p \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(pu)}{\partial t} - u \frac{\partial p}{\partial t}$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε:

Ο όρος στην αγκύλη είναι το αριστερό μέλος της εξίσωσης της συνέχειας και κατά συνέπεια είναι μηδέν. Άρα η προηγούμενη γίνεται:

$$p \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(pu)}{\partial t} + \nabla \cdot (puV)$$

Άρα με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{\partial(pu)}{\partial t} + \nabla \cdot (puV) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + pf_x$$

$$\frac{\partial(pv)}{\partial t} + \nabla \cdot (pvV) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + pf_y$$

$$\frac{\partial(pw)}{\partial t} + \nabla \cdot (pwV) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + pf_z$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι σε συντηρητική μορφή. Για τα νευτώνεια ρευστά για τα οποία οι διατμητικές τάσεις είναι ανάλογες με το ρυθμό μεταβολής της κλίσης της ταχύτητας τους, ο Stokes μας έδωσε τα εξής :

$$t_{xx} = I(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$t_{yy} = I(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$t_{zz} = I(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$t_{xy} = t_{yx} = m \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$t_{xz} = t_{zx} = m \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$t_{yz} = t_{zy} = m \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

### 1.3.3 Εξίσωση ενέργειας

Η φυσική αρχή που θα χρησιμοποιηθεί εδώ είναι η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Επίσης εδώ θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο μοντέλο ροής όπως με την εξίσωση ορμής, δηλαδή ένα απειροελάχιστα μικρό στοιχείο ρευστού που κινείται με τη ροή. Η φυσική αυτή αρχή δεν είναι τίποτα παραπάνω



από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο. Με εφαρμογή στο μοντέλο ροής που έχουμε μας δίνει :

$$\begin{array}{l} \text{ρυθμός μεταβολής} \\ \text{της ενέργειας} \\ \text{μέσα στο στοιχείο} \end{array} = \begin{array}{l} \text{καθαρή εκροή} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{από το στοιχείο} \end{array} + \begin{array}{l} \text{ρυθμός του παραγόμενου} \\ \text{έργου οφειλόμενου σε} \\ \text{επιφανειακές και} \\ \text{σωματιδιακές δυνάμεις} \end{array}$$

Το σύνολο της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, στηρίζεται στις βασικές (κυρίαρχες) εξισώσεις της ρευστοδυναμικής - εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας. Είναι οι μαθηματικές εκφράσεις των τριών θεμελιωδών φυσικών αρχών πάνω στις οποίες στηρίζεται όλη η ρευστοδυναμική:

$$\begin{array}{l} \text{αρχή διατήρησης ενέργειας} \\ \text{δεύτερος νόμος του Newton } F = m a \\ \text{αρχή διατήρησης μάζας.} \end{array}$$

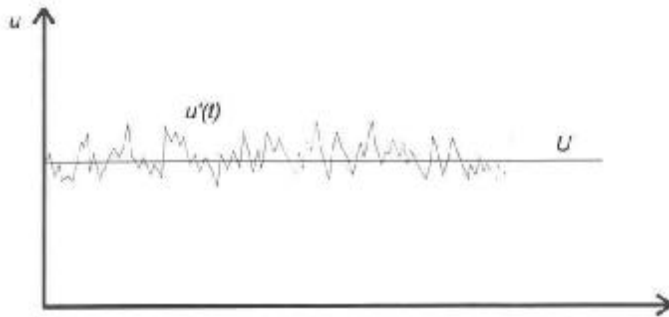
## 1.4 ΤΥΡΒΗ

### 1.4.1 Τι είναι η τύρβη;

Ο αριθμός Reynolds δίδει μια ένδειξη της σχέσης των δυνάμεων αδράνειας (που σχετίζονται με φαινόμενα συναγωγής) και των δυνάμεων τριβής (που σχετίζονται με φαινόμενα διάχυσης). Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι για τιμές κάτω του λεγόμενου κρίσιμου αριθμού Reynolds  $Re_{crit}$  η ροή είναι ομαλή και γειτονικά στρώματα του ρευστού μετακινούνται το ένα 'παράλληλα' με το άλλο. Εάν οι εφαρμοζόμενες οριακές συνθήκες δεν μεταβληθούν με το χρόνο η ροή είναι μόνιμη. Αυτό το είδος της ροής καλείται **στρωτή**.

Όταν ο αριθμός Reynolds υπερβαίνει την τιμή  $Re_{crit}$  λαμβάνει χώρα μια πολύπλοκη σειρά γεγονότων που σταδιακά οδηγεί στη μεταβολή του χαρακτήρα της ροής. Εν τέλει η ροή γίνεται τυχαία και χαοτική. Η κίνηση του ρευστού γίνεται ιδιαίτερα ασταθής ακόμα και με αμετάβλητες οριακές συνθήκες. Η ταχύτητα και άλλες ροικές ιδιότητες μεταβάλλονται επίσης

συνεχώς. Αυτό το είδος της ροής καλείται **τυρβώδης**. Η μέτρηση της ταχύτητας σε ένα συγκεκριμένο σημείο θα παρουσιάσει την μορφή του παρακάτω διαγράμματος :



#### 1.4.2 Ορισμός τύρβης

Ένας πληρέστερος αλλά πιο εκτενής ορισμός δίνεται από τον Bradshaw κατά τον οποίο: **‘Τύρβη είναι μια τρισδιάστατη χρονικά μεταβαλλόμενη ροή στην οποία η έκταση των δινοσωλήνων προκαλεί διαταραχές ταχύτητας σε όλες τις συχνότητες μεταξύ ελαχίστης που καθορίζεται από τις οριακές συνθήκες και μέγιστης που καθορίζεται από τη συνεκτικότητα του ρευστού’**.

Ο παραπάνω ορισμός προκύπτει από τον μηχανισμό μετάπτωσης της διαταραχής από ορισμένη συχνότητα (οριακή συνθήκη) στις συχνότητες του φάσματος κατά τη διαδικασία του ‘σπασίματος’ της αρχικής διαταραχής και μεταφοράς της ενέργειας της διαταραχής στις υψηλές συχνότητες όπου δι’ απορροφήσεως (λόγω συνεκτικότητας του ρευστού) μετατρέπεται σε θερμότητα.

#### 1.4.3 Το πρόβλημα της τύρβης

Ίσως αναρωτηθεί κανείς για ποιο λόγο χρειάζεται να επιλύσουμε το πρόβλημα της τύρβης. Η απάντηση είναι εύκολο να δοθεί αν αναλογισθεί κανείς ότι όλα τα πεδία ροής πρακτικού ενδιαφέροντος είναι τυρβώδη. Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα θα αναφερόμαστε σε ασυμπίεστο ρευστό

και ισοθερμοκρασιακά πεδία ροής. Οι εξισώσεις που ακολουθούν είναι οι γνωστές εξισώσεις **Navier-Stokes** που εκφράζουν τη διατήρηση της ορμής του ρευστού στις τρεις κατευθύνσεις  $x_i$  με αντίστοιχες ταχύτητες  $u_i$ .

**Εξίσωση συνέχειας:** 
$$\frac{\nabla u_i}{\nabla x_i} = 0$$

**Εξίσωση ορμής:**

$$\frac{\nabla u_i}{\nabla A} + u_j \frac{\nabla u_i}{\nabla x_j} = \frac{1}{r} \frac{\nabla}{\nabla x_j} (-r d_{ij} + s_{ij}) + f_i = -\frac{1}{r} + \frac{\nabla r}{\nabla x_i} + \frac{1}{r} \frac{\nabla s_{ij}}{\nabla x_j} + f_i$$

Ας εντοπίσουμε πρώτα τους κυριότερους όρους στην παραπάνω σχέση και συγκεκριμένα τους όρους 2, 4 και 5. Ο όρος 2 εκφράζει τη συνεισφορά δια μεταφοράς στη διατήρηση της ορμής μάζας ρευστού, ο όρος 4 τη συνεισφορά δια διαχύσεως και ο όρος 5 το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων. Ο όρος  $s_{ij}$  εκφράζει τις διαμητικές τάσεις που αναπτύσσονται πάνω σε μια επιφάνεια (υλική ή νοητή) μέσα στο πεδίο ροής και που οφείλονται στη συνεκτικότητα του ρευστού. Για Νευτώνια ρευστά οι τάσεις συνδέονται με το ρυθμό παραμόρφωσης στοιχείου ρευστού με την παρακάτω βασική σχέση :

$$s_{ij} = \mu \left( \frac{\nabla u_i}{\nabla x_j} + \frac{\nabla u_j}{\nabla x_i} \right) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \cdot d_{ij} \cdot \frac{\nabla u_m}{\nabla x_m} = 2\mu \cdot e_{ij} + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \cdot d_{ij} \cdot \frac{\nabla u_m}{\nabla x_m}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\nabla u_i}{\nabla x_j} + \frac{\nabla u_j}{\nabla x_i} \right)$$

Η παραπάνω σχέση μεταξύ **τάσης και ρυθμού παραμόρφωσης** είναι η απλούστερη σχέση που μπορεί να συσχετίσει δυο ισότροπους τανυστές δευτέρου βαθμού. Στη βασική αυτή σχέση  $\mu$  είναι ο γνωστός συντελεστής δυναμικής συνεκτικότητας του ρευστού (αποτελεί φυσική ιδιότητα του ρευστού, είναι συνάρτηση θερμοκρασίας και πίεσεως και είναι ανεξάρτητος της εντατικής κατάστασης του ρευστού) και  $\lambda$  είναι ο δεύτερος συντελεστής συνεκτικότητας του **Stokes**. Ο Stokes βασιζόμενος σε διάφορες

πειραματικές παρατηρήσεις καθώς και στη διερεύνηση του προσήμου της συνάρτησης απορρόφησης  $\Phi$

$$\Phi = \lambda e_{ss}^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij}$$

συμπέρανε ότι:

$$\lambda = -2/3\mu$$

οπότε η σχέση τάσης-ρυθμού παραμόρφωσης απλοποιείται στην:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}$$

Με τις παρατηρήσεις αυτές οι εξισώσεις Navier-Stokes απλοποιούνται στις:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + f_i$$

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής είναι μια μερική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς τις χωρικές συντεταγμένες και πρώτου βαθμού ως προς τη χρονική συντεταγμένη. Για τη μελέτη του πεδίου ροής απαιτείται η επίλυση του συστήματος των τριών αυτών εξισώσεων μαζί με την εξίσωση της συνέχειας.

Η επίλυση του συστήματος αυτού με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες είναι αδύνατη. Το μαθηματικό πρόβλημα απόδειξης ύπαρξης μοναδικής λύσης στο σύστημα παραμένει άλυτο.

Παρ' όλο που η αναλυτική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων είναι αδύνατη η ύπαρξη ηλεκτρονικών υπολογιστών μεγάλης ταχύτητας και χωρητικότητας μνήμης μας επιτρέπει να εξετάσουμε αυτή τη δυνατότητα. Η αριθμητική επίλυση του συστήματος απαιτεί την αντικατάσταση των μερικών παραγώγων με αλγεβρικές διαφορές σε αριθμητικά σημεία που βάζουμε μέσα στο πεδίο ροής. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προς μελέτη ένα πεδίο ροής τυπικής διάστασης  $d$ .

Είναι πειραματικά γνωστό ότι μέσα στο πεδίο ροής υπάρχουν δίνες (μια απ' αυτές είναι η αιτία ύπαρξης του όρου  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ ) τυπικής διάστασης  $10^{-3}d$ . Για να αντιπροσωπευθεί η δίνη αυτή αριθμητικά πρέπει να τοποθετήσουμε στη διάσταση  $10^{-3}d$  τουλάχιστον 1 αριθμητικό σημείο. Άρα σε όγκο  $d^3$  χρειάζεται να βάλουμε  $10^9$  τουλάχιστον αριθμητικά στοιχεία. Έχουμε δε τέσσερις

αγνώστους ( $u_i$ ,  $\rho$ ) άρα χρειαζόμαστε μνήμη υπολογιστού τουλάχιστον  $4 \cdot 10^9$ . Οι υπολογιστές που υπάρχουν σήμερα έχουν χωρητικότητα μνήμης της τάξης του  $10^6$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes είναι αδύνατη και θα παραμένει αδύνατη για τουλάχιστον μερικά χρόνια.

### **1.5 Κριτήρια για την αξιολόγηση των μοντέλων**

Ο σκοπός αυτής των επόμενων παραγράφων αυτής της ενότητας του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου είναι να δώσει μια γενική εικόνα για τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση των μοντέλων. Ιστορικά, πολλά μοντέλα έχουν προταθεί και πολλά είναι αυτά που χρησιμοποιούνται σήμερα. Είναι σημαντικό να εκτιμήσουμε ότι υπάρχει ένα ευρύ φάσμα τυρβωδών ροών, όπως επίσης και ένα ευρύ φάσμα ερωτήσεων που πρέπει να αντιμετωπιστούν. Κατά συνέπεια είναι χρήσιμο και κατάλληλο να έχουμε ένα ευρύ φάσμα μοντέλων τα οποία ποικίλουν σε περιπλοκότητα, ακρίβεια και άλλα χαρακτηριστικά.

Τα κύρια κριτήρια που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αξιολογήσουμε διάφορα μοντέλα είναι

- i) επίπεδο περιγραφής
- ii) πληρότητα
- iii) κόστος και ευκολία στη χρήση
- iv) εύρος εφαρμοσιμότητας
- v) ακρίβεια

- **Πληρότητα**

Ένα μοντέλο θεωρείται πλήρες όταν οι εξισώσεις που το αποτελούν είναι απαλλαγμένες από ορισμούς εξαρτημένους από τη ροή. Τα χαρακτηριστικά που κάνουν μια ροή να διαφέρει από μια άλλη είναι μόνο οι ιδιότητες της μάζας και οι οριακές αρχικές συνθήκες. Ημιτελή μοντέλα μπορούν να φανούν χρήσιμα για ροές μέσα σε μια στενή κατηγορία (πχ προσαρτημένα οριακά στρώματα πάνω σε αεροτομές) για τα οποία υπάρχει ένας κορμός από ημι-εμπειρική γνώση πάνω στους κατάλληλους ορισμούς που

εξαρτώνται από τη ροή. Παρ' όλα αυτά, η πληρότητα εννοείται πως είναι επιθυμητή.

- **Κόστος και ευκολία στη χρήση**

Για όλες τις ροές, οι αριθμητικές μέθοδοι απαιτούνται για τη λύση των πρότυπων εξισώσεων. Η δυσκολία να αποδοθεί ένας υπολογισμός μοντέλου τύρβης εξαρτάται και από τη ροή αλλά και από το μοντέλο. Η υπολογιστική δυσκολία αυξάνεται με την στατιστική διάσταση της ροής, η οποία μειώνεται αν η ροή είναι στατιστικά αμετάβλητη ενώ μειώνεται περισσότερο αν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις οριακών στρωμάτων. Σε ορισμένες μεθόδους (π.χ. DNS) το υπολογιστικό κόστος είναι μια αυξανόμενη συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής, ενώ σε άλλες (δηλ. στο μοντέλο μίξης μήκους) η αύξηση του κόστους με τον αριθμό Reynolds είναι αμελητέα ή μηδενική.

Για να εκτελεστεί ένας υπολογισμός τυρβώδους ροής, για μια συγκεκριμένη ροή, γίνεται σε δύο μέρη. Αρχικά, το πρόγραμμα (λογισμικό) για να λύσει τις πρότυπες εξισώσεις πρέπει να ληφθεί ή να κατασκευαστεί και να ρυθμιστεί για τη ροή από κοντά (δηλ. καθορίζοντας κατάλληλες οριακές συνθήκες). Δεύτερον, το πρόγραμμα (λογισμικό) εκτελείται για να πραγματοποιήσει τον υπολογισμό, από τον οποίο εξάγονται τα απαιτούμενα αποτελέσματα. Το κόστος και η δυσκολία του πρώτου μέρους εξαρτάται από το διαθέσιμο λογισμικό και τους αλγόριθμους, αλλά και από την πολυπλοκότητα του μοντέλου.

Η προσπάθεια που χρειάζεται για να κατασκευαστεί ένα πρόγραμμα υπολογιστή για μια συγκεκριμένη κλάση ροών και μοντέλων είναι πολύ μεγάλη, και ως εκ τούτου αυτό είναι ένα σημαντικό εμπόδιο στην αξιολόγηση και χρήση νέων μοντέλων τα οποία χρειάζονται νέα προγράμματα. Είναι όμως δαπάνες που θα γίνουν μια φορά.

Το κόστος και η δυσκολία του δεύτερου μέρους -εκτέλεση του υπολογισμού- εξαρτάται από το εύρος του υπολογιστή που θα χρησιμοποιηθεί (δηλ. ένας πάγκος εργασίας ή ένας υπερ-υπολογιστής), από τις εργατοώρες και την δεξιότητα για να γίνει ο υπολογισμός, και στην

κατανάλωση 'πόρων' υπολογιστή (πχ μνήμη, επεξεργαστής). Αυτές είναι επαναλαμβανόμενες δαπάνες.

Όσον αφορά το χρόνο υπολογιστή που καταναλώνεται, υπάρχει το ερώτημα 'ποια υπολογιστική δαπάνη είναι αποδεκτή ;. Η απάντηση ποικίλει ανάλογα με την περίπτωση. Το ποσό των υπολογισμών, το οποίο μετράται σε flops (floating-point operations=λειτουργίες κινητής υποδιαστολής), που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ορισμένο χρόνο καθορίζεται από την ταχύτητα του υπολογιστή, που μετράται σε megaflops, gigaflops, ή teraflops δηλ.  $10^6$ ,  $10^9$ , ή  $10^{12}$  flops ανά δευτερόλεπτο<sup>1</sup>.

Μπορεί να θεωρηθεί ότι η ταχύτητα έχει αυξηθεί εκθετικά, από ένα συντελεστή 30 ανά δεκαετία. Αυτό είναι ένα αξιοσημείωτο ποσό αύξησης, ένας συντελεστής 100 σε 20 χρόνια και ένα εκατομμύριο σε 40 χρόνια. Αν και για το μέλλον δεν υπάρχει καμία στερεή βάση για υπολογισμό κατά προσέγγιση, ωστόσο θεωρείται πως αυτή η τάση θα συνεχιστεί. Συμπερασματικά, σημερινές ερευνητικές προσεγγίσεις μπορεί να είναι εφικτές για 'εφαρμογές' σε 20 χρόνια και για επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς σε 40 χρόνια. Από την άλλη μεριά, το διάστημα των 40 ετών μεταξύ μεγάλης κλίμακας έρευνα και επαναλαμβανόμενων υπολογισμών απεικονίζει την ανάγκη για ένα εύρος μοντέλων, τα οποία να διαφέρουν στις υπολογιστικές τους απαιτήσεις.

- **Εύρος εφαρμοσιμότητας**

Δεν είναι όλα τα μοντέλα εφαρμόσιμα σε όλες τις ροές. Για παράδειγμα, υπάρχουν πολλά μοντέλα βασισμένα στο φάσμα της ταχύτητας ή σε συσχετισμούς δύο σημείων τα οποία εφαρμόζονται μόνο σε ομοιογενή τύρβη . Ως δεύτερο παράδειγμα, κάποια συγκεκριμένα μοντέλα μίξης μήκους συνήθως υποθέτουν τη γεωμετρία της ροής στον προσδιορισμό της μίξης μήκους κι έτσι μπορούν να εφαρμοστούν μονάχα σε ροή τέτοιας γεωμετρίας. Οι ανάγκες υπολογισμού θέτουν έναν ακόμη ρεαλιστικό περιορισμό όσον αφορά στην εφαρμοσιμότητα κάποιων μοντέλων. Ωστόσο πρέπει να σημειωθεί πως σε αρκετές ροές στις οποίες εφαρμόζονται τα μοντέλα τύρβης υπάρχουν επιπρόσθετα φαινόμενα 'όπως η μεταφορά θερμότητας και μάζας, χημικές αντιδράσεις, η άνωση, η συμπίεστικότητα

καθώς και η ροή πολλαπλών φάσεων. Έτσι αποτελεί σημαντικό ζήτημα το μέτρο στο οποίο οι προσεγγίσεις που μελετώνται μπορούν να εφαρμοστούν ή και να επεκταθούν σ' αυτές τις πιο περίπλοκες ροές. Στα ζητήματα αυτά είναι σημαντικό να γίνει σαφές πως διαχωρίζονται η έννοια της εφαρμοσιμότητας από αυτήν της ακρίβειας. Ένα μοντέλο είναι εφαρμόσιμο σε μια ροή εάν οι εξισώσεις του τίθενται σωστά και μπορούν να λυθούν, ανεξάρτητα από το αν οι λύσεις είναι σωστές.

- **Ακρίβεια**

Είναι προφανές πως η ακρίβεια αποτελεί ένα επιθυμητό στοιχείο κάθε μοντέλου. Στην εφαρμογή μιας συγκεκριμένης ροής, η ακρίβεια ενός μοντέλου μπορεί να καθοριστεί συγκρίνοντας υπολογισμούς ενός μοντέλου με πειραματικές μετρήσεις. Αυτή η διαδικασία εξέτασης ενός μοντέλου είναι θεμελιώδους σημασίας και χρήζει ιδιαίτερης μελέτης.

Η αριθμητική λύση της εξίσωσης μοντέλου αναπόφευκτα εμπεριέχει αριθμητικό λάθος. Αυτό οφείλεται σε διάφορες πηγές αλλά το συχνότερο είναι το χωρικό σφάλμα αποκοπής. Σε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών ή στοιχείων, για παράδειγμα, αυτό το σφάλμα κλιμακώνεται, ενώ το υπολογιστικό κόστος αυξάνει.

Συνοπτικά, η ασυμφωνία μεταξύ των μετρημένων και των υπολογισμένων ιδιοτήτων της ροής προκύπτει από:

- i) ανακρίβειες του μοντέλου
- ii) αριθμητικό λάθος
- iii) λάθος μέτρησης
- iv) ασυμφωνίες στις οριακές συνθήκες

Το σημαντικό συμπέρασμα είναι πως μια σύγκριση μεταξύ των μετρημένων και των υπολογισμένων ιδιοτήτων ροής καθορίζει την ακρίβεια του μοντέλου μόνο εφόσον τα λάθη που ανακύπτουν από το ii) έως και το iv) είναι σχετικά μικρά. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει κίνδυνος να βγούν εσφαλμένα συμπεράσματα όσον αφορά στην ακρίβεια ενός μοντέλου από υπολογισμούς που περιέχουν μεγάλα ή μη ποσοστιαία αριθμητικά λάθη.

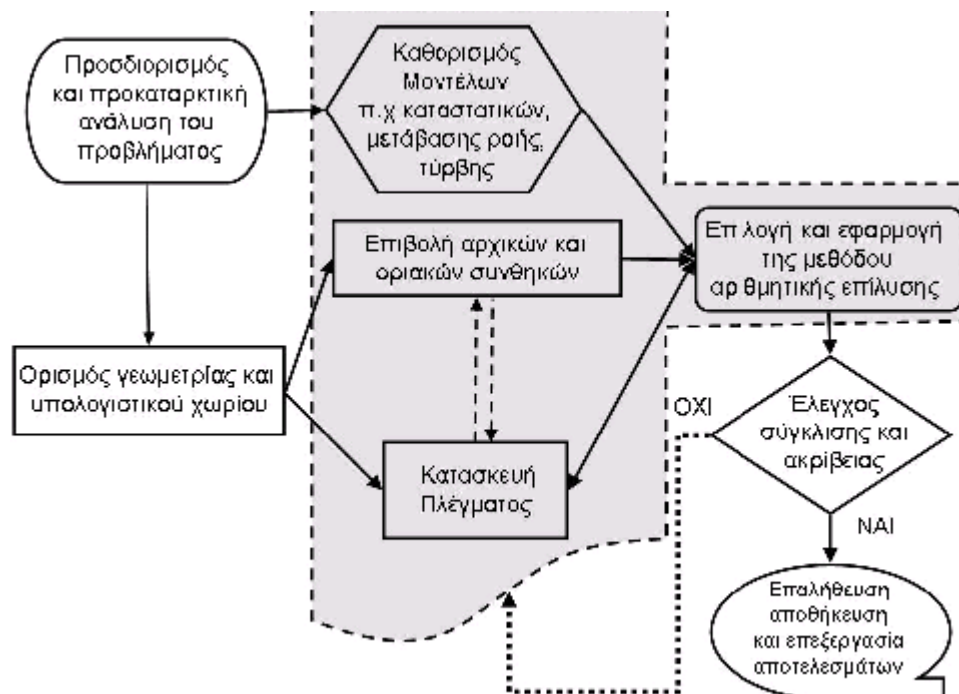


- **Τελικές παρατηρήσεις**

Η καταλληλότητα ενός συγκεκριμένου μοντέλου για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα τυρβώδους ροής εξαρτάται από ένα σταθμισμένο συνδυασμό όλων των προηγούμενων κριτηρίων. Και αυτή η στάθμιση της σπουδαιότητας των διάφορων κριτηρίων εξαρτάται ιδιαιτέρως από το πρόβλημα. Συνεπώς όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, τώρα αλλά και στο μέλλον, δεν υπάρχει ένα μοντέλο καλύτερο από τα άλλα παρά μόνο μια σειρά από μοντέλα που μπορούν να εφαρμοστούν επωφελώς στην ευρεία σειρά των προβλημάτων τυρβώδους ροής.

### 1.6 Διαδικασία υπολογιστικής προσομοίωσης

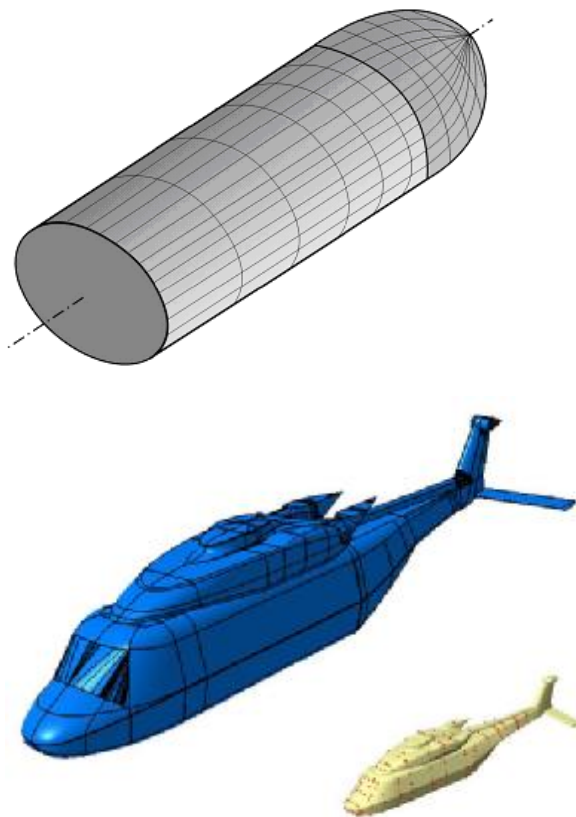
Η διαδικασία της υπολογιστικής προσομοίωσης για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων με εμπορικό λογισμικό περιλαμβάνει τα στάδια που φαίνονται στο διάγραμμα του Σχ. 1. Τα στάδια αυτά επεξηγούνται αναλυτικά παρακάτω:



**Στάδια υπολογιστικής προσομοίωσης**

### Ορισμός γεωμετρίας και υπολογιστικού χωρίου

Ο ορισμός της γεωμετρίας είναι ένα σημαντικό αρχικό στάδιο προετοιμασίας της υπολογιστικής διαδικασίας. Υπάρχουν απλές δυσδιάστατες γεωμετρίες που υπολογίζονται από αναλυτικές εκφράσεις όπως π.χ. κύλινδρος, αεροτομή NACA και άλλες απλές γεωμετρίες που ορίζονται από ευθύγραμμα τμήματα. Υπάρχουν ακόμη και τρισδιάστατα σώματα όπως π.χ. κύλινδρος με ημισφαιρικό άκρο όπου η γεωμετρία μπορεί να κατασκευαστεί αναλυτικά. Οι απλές αυτές γεωμετρίες αντιπροσωπεύουν συχνά μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνται για μετρήσεις σε αεροσήραγγες και δεν απαιτούν ειδικά εργαλεία για την κατασκευή τους.



Ο καθαρισμός κατάλληλης γεωμετρίας είναι το πρώτο σημαντικό στάδιο για την κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος. Εξαιρουμένης της περίπτωσης εσωτερικών ροών, όπως η ροή σε αγωγούς, οι εξωτερικές ροές όπως η ροή γύρω από το ελικόπτερο ή μια πτέρυγα απαιτούν τον προσδιορισμό του χωρίου ροής. Στην περίπτωση που η γεωμετρία

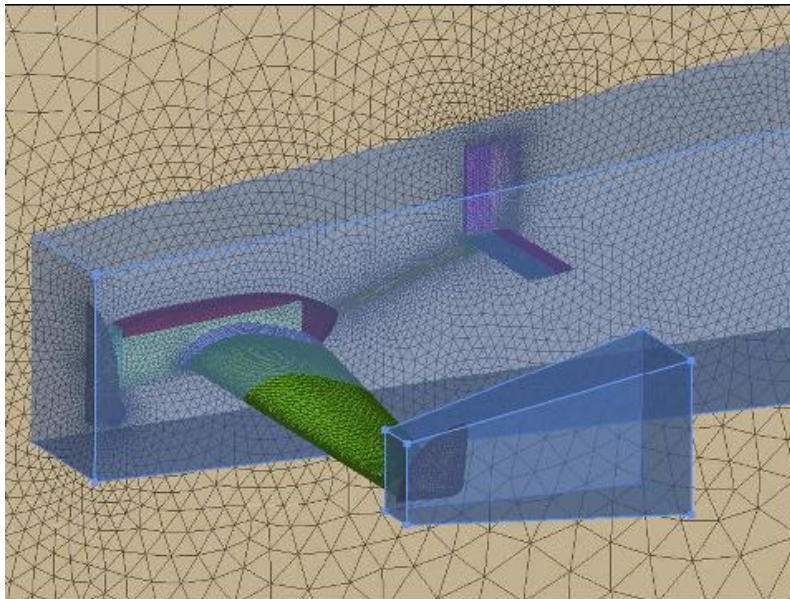
βρίσκεται στην αεροσύραγγα τα τοιχώματά της καθορίζουν το υπολογιστικό χωρίο.

### **Κατασκευή πλέγματος**

Η κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος πραγματοποιείται είτε με λογισμικό το οποίο έχουμε προγραμματίσει ή συνήθως με την χρήση εμπορικών λογισμικών τα οποία δίνουν την δυνατότητα κατασκευής πλεγμάτων για βιομηχανικές εφαρμογές με ιδιαίτερη περιπλοκότητα. Τα υπολογιστικά πλέγματα πρέπει να πληρούν τις απαιτήσεις της ομαλότητας ομοιογένειας και να παρέχουν την απαραίτητη ακρίβεια για τον υπολογισμό της ροής. Είναι προφανές ότι πριν την κατασκευή του πλέγματος απαιτείται προεργασία και εντοπισμός των περιοχών όπου απαιτείται πύκνωση του υπολογιστικού πλέγματος. Πολλές φορές δεν είναι αναγκαίο να γίνει μια προκαταρκτική προσομοίωση σε ένα σχετικά αραιό υπολογιστικό πλέγμα ώστε να εντοπισθούν καλύτερα οι περιοχές όπου απαιτείται επιπλέον ακρίβεια στον υπολογισμό. Τέτοιες περιοχές είναι οι γωνίες αποκολλημένης ροής, τα ωστικά κύματα, οι στροβιλισμοί κ. λ. π. Παραδείγματα πλεγμάτων δίνονται παρακάτω:



**Πλέγμα ανεμογεννήτριας**



**Επιφανειακό πλέγμα και χωρία καθορισμού μήκους πλέγματος που επιτρέπουν τον ακριβέστερο υπολογισμό των απορευμάτων.**

### **Επιβολή αρχικών και οριακών συνθηκών**

Στην υπολογιστική ρευστομηχανική χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντοτε την χρονομεταβλητή μορφή των εξισώσεων ροής που εκφράζουν τους νόμους διατήρησης. Οι αρχικές συνθήκες για την περίπτωση που αναζητούμε την σταθερά λύση είναι σχετικά απλές και συνήθως είναι η ομοιόμορφη ροή. Στην περίπτωση ασταθών ροών ο προσδιορισμός των αρχικών συνθηκών είναι πιο περίπλοκος.

Οι οριακές συνθήκες ουσιαστικά προσδιορίζουν την λύση του προβλήματος και ο προσδιορισμός που πρέπει, να γίνεται με μεγάλη προσοχή. Τα περισσότερα εμπορικά και ερευνητικά λογισμικά παρέχουν μεγάλο αριθμό οριακών συνθηκών όπως στερεό τοίχωμα, συμμετρίας, καθορισμένη πίεση εισόδου, έξοδος με μηδενική κλίση κ. λ. π. Οι οριακές συνθήκες που επιβάλουμε πρέπει να είναι εφικτές και συμβατές με την ροή. Σε ένα αγωγό π. χ. δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ταυτόχρονα τις πίεσης εισόδου και εξόδου και την παροχή. Παρόμοια ο αριθμός των μεταβλητών που προσδιορίζουμε στα όρια εισόδου και εξόδου για συμπιεστή ροή δεν είναι

αυθαίρετος και εξαρτάται από την ταχύτητα της ροής (υποηχητική ή υπερηχητική) όπως επιβάλλει η θεωρία των χαρακτηριστικών για την συμπιεστή ροή.

### **Καθορισμός μοντέλων**

Οι εξισώσεις ροής, ασυμπίεστης ή συμπιεστής, περιγράφουν με ακρίβεια όλα τα περίπλοκα φαινόμενα ροής όπως την μετάβαση ροής, τύρβη, ωστικά κύματα κ. λ. π. Ο ακριβής υπολογισμός της και της μετάβασης ροής απαιτεί μεγάλη ακρίβεια για να καταστεί δυνατός ο υπολογισμός των μικρών κλιμάκων που τις χαρακτηρίζουν. Οι διαθέσιμες προσεγγίσεις είναι η χρήση πυκνού υπολογιστικού πλέγματος, μεγάλη τάξη ακρίβειας ή συνδυασμός των δυο. Η προσομοίωση τυρβωδών ροών βιομηχανικού ενδιαφέροντος απαιτεί πολύ μεγάλο αριθμό υπολογιστικών κελιών και είναι αδύνατη με την διαθέσιμη υπολογιστική δύναμη ακόμη και για σχετικά περιορισμένου μεγέθους υπολογισμούς όπως μεμονωμένες πτέρυγες αεροσκάφους ή στροβιλοκινητήρα. Οι υπολογισμοί τυρβωδών ροών πραγματοποιούνται σήμερα με την χρήση μοντέλων τύρβης που αναπτύχθηκαν τα τελευταία χρόνια και επιτρέπουν την προσομοίωση τύρβης με ικανοποιητική ακρίβεια και εφικτό υπολογιστικό κόστος ακόμα και για πλήρες αεροσκάφος ή στροβιλοκινητήρα.

Στις σύγχρονες βιομηχανικές εφαρμογές πλην της τύρβης υπάρχουν και άλλα φαινόμενα όπως ο βρασμός (διφασική ροή), η καύση, η επήρεια ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε ιονισμένα υγρά και αέρια κ. λ. π. η ακριβής προσομοίωση των οποίων επίσης απαιτεί υπολογιστική ισχύ πέραν της διαθέσιμης. Τα φαινόμενα αυτά προσομοιώνονται επίσης με την χρήση μοντέλων τα οποία υπάρχουν στα περισσότερα εμπορικά αλλά και σε πολλά λογισμικά ερευνητικού χαρακτήρα. Η αριθμητική επίλυση εξαρτάται από την ορθή επιλογή του μοντέλου και σε πολλές περιπτώσεις είναι αναγκαίο να γίνουν προσομοιώσεις με διαφορετικά μοντέλα για να διαπιστωθεί πιο από αυτά προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια το υπό μελέτη φαινόμενο.

## **Επιλογή και εφαρμογή της μεθόδου**

Η επιλογή της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης είναι το πιο σημαντικό στάδιο της προσομοίωσης για το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει. Η αριθμητική μέθοδος καθορίζει το σφάλμα αποκοπής και κατά συνέπεια την ακρίβεια των αποτελεσμάτων, τα όρια ευστάθειας και κατά συνέπεια το μέγεθος του χρονικού βήματος το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την προσομοίωση. Η επιλογή της αριθμητικής μεθόδου ακόμη εξαρτάται και από τον τρόπο κατασκευής του πλέγματος, π. χ. πεπερασμένες διαφορές έχουν εφαρμογή μόνο σε δομημένα πλέγματα ενώ η εφαρμογή μεθόδων πεπερασμένων όγκων ή πεπερασμένων στοιχείων για αδόμητα πλέγματα παρουσιάζει διαφοροποιήσεις.

Η προσομοίωση πραγματοποιείται με το συγκεκριμένο πλέγμα που κατασκευάστηκε το μοντέλο και την μέθοδο αριθμητικής επίλυσης που επιλέχθηκαν. Αρχικά πραγματοποιείται έλεγχος σύγκλισης και εάν διαπιστωθεί ότι η σύγκλιση δεν είναι δυνατή για τις επιλογές που έγιναν και το συγκεκριμένο υπολογιστικό πλέγμα τότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται και γίνονται κατάλληλες διορθώσεις. Η επίτευξη σύγκλισης είναι το πρώτη στάδιο περάτωσης της διαδικασίας προσομοίωσης. Το επόμενο σημαντικό στάδιο είναι η επαλήθευση των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Ο πλέον αποτελεσματικός και αποδεκτός τρόπος πιστοποίησης της αριθμητικών προσομοίωσης είναι η σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν αριθμητικές μετρήσεις είναι αναγκαίο να γίνουν τουλάχιστον μια ή και δυο προσομοιώσεις με πυκνότερο πλέγμα.

## **Επεξεργασία αποτελεσμάτων**

Τα αριθμητικά αποτελέσματα αφορούν μόνο τις εξαρτημένες μεταβλητές οι οποίες για μεν την ασυμπύεστη ροή είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και η πίεση σε κάθε σημείο υπολογισμού. Τα σημεία υπολογισμού μπορεί να είναι οι κόμβοι του πλέγματος για πεπερασμένες διαφορές, το κέντρο βάρους των στοιχείων ή κόμβοι του πλέγματος για cell centered και vertex based μεθόδους πεπερασμένων όγκων αντίστοιχα, ενώ σημεία υπολογισμού για μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων είναι τα κομβικά σημεία (quadrature points) τα οποία δεν συμπίπτουν κατ' ανάγκη με τους κόμβους του πλέγματος. Για συμπιεστή ροή οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι

η πυκνότητα το διάνυσμα της ορμής και η ολική ενέργεια. Οι ποσότητες που ενδιαφέρουν τον περαιτέρω σχεδιασμό όπως ολική άντωση και οπισθέλκουσα μπορούν να εξαχθούν από τις τιμές των ανεξαρτήτων μεταβλητών. Άλλες ποσότητες όπως ο τοπικός αριθμός Mach της ροής πρέπει να βρεθούν μετά από επεξεργασία των δεδομένων η οποία γίνεται συνήθως σε ξεχωριστό λογισμικό (π.χ. techplot) το οποίο παρέχει την δυνατότητα οπτικοποίησης του πεδίου ροής και τον υπολογισμό ποσοτήτων όπως ο τοπικός αριθμός Mach και η κατανομή της πίεσης.

Ο σχεδιασμός λογισμικού για υπολογιστική μηχανική ρευστών είναι σημαντικά περίπλοκος. Τα βασικά στάδια είναι η επιλογή της μεθόδου χωρικής διακριτοποίησης και η εκλογή της μεθόδου ολοκλήρωσης στον χρόνο. Το τελικό στάδιο πιστοποίησης είναι επίσης πολύ σημαντικό και η απουσία πιστοποίησης και επιθυμητού επίπεδου ακρίβειας συχνά μπορεί να οδηγήσει στην αναθεώρηση της μεθόδου. Η προσθήκη μοντέλων οριακών συνθηκών και άλλων αναγκαίων εργαλείων τα οποία καθιστούν το λογισμικό κατάλληλο για πρακτικά προβλήματα γίνεται σε επόμενα στάδια τα οποία είναι επίσης χρονοβόρα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: Μοντέλα υπολ/κής ρευστοδυναμικής

### 2.1 Εισαγωγή

Οι τυρβώδεις ροές χαρακτηρίζονται από πεδία κυμαινόμενης ταχύτητας. Αυτές οι διακυμάνσεις αναμειγνύουν μεταφερόμενες ποσότητες όπως η ορμή, η ενέργεια και η συγκέντρωση ειδών, και προκαλούν επίσης την διακύμανση και των μεταφερόμενων ποσοτήτων. Καθώς αυτές οι διακυμάνσεις μπορούν να είναι μικρής κλίμακας και υψηλής συχνότητας, είναι πολύ περίπλοκες για να εξομοιωθούν απευθείας με πρακτικούς υπολογισμούς της μηχανικής. Αντί αυτού, οι στιγμιαίες (ακριβείς) εξισώσεις που τις διέπουν μπορούν να είναι χρονομεταβαλλόμενες, να υπολογίζουν τους μέσους όρους συνόλων ποσοτήτων (όπως χρόνους, τις συγκεντρώσεις, ταχύτητες, πιέσεις) ή να χειριστούν με άλλους τρόπους για να απομακρυνθούν οι μικρές κλίμακες, έχοντας σαν αποτέλεσμα ένα τροποποιημένο σύνολο εξισώσεων, των οποίων η λύση είναι υπολογιστικά λιγότερο περίπλοκη. Εντούτοις, οι τροποποιημένες αυτές εξισώσεις περιέχουν επιπλέον, άγνωστες μεταβλητές και τα τυρβώδη μοντέλα χρειάζονται για να τον προσδιορισμό αυτών των μεταβλητών σε όρους ποσοτήτων που μας είναι γνωστές. Τα συνήθη εμπορικά λογισμικά αλλά ακόμα και αυτά που έχουν δημιουργηθεί για την επίλυση συγκεκριμένων εφαρμογών παρέχουν τις ακόλουθες επιλογές τυρβωδών μοντέλων:

- Μοντέλο Spallart – Allmaras
  
- Μοντέλα  $k - \epsilon$ 
  - Απλό μοντέλο  $k - \epsilon$
  - Μοντέλο  $k - \epsilon$  ανακανονικοποίησης (RNG)
  - Πραγματοποιήσιμο μοντέλο  $k - \epsilon$
  
- Μοντέλα  $k - \omega$ 
  - Κοινό μοντέλο  $k - \omega$
  - Μοντέλο  $k - \omega$  μεταφοράς διατμητικής τάσης (SST)
  
- Μοντέλο  $u^2 - f$
- Μοντέλο τάσης Reynolds (RSM)
- Μοντέλο εξομοίωσης αποσπώμενης δίνης (DES)
- Μοντέλο εξομοίωσης μεγάλης δίνης (LES)



## 2.2 Επιλέγοντας ένα τυρβώδες μοντέλο

Είναι ατυχές το γεγονός ότι κανένα μεμονωμένο τυρβώδες μοντέλο δεν είναι καθολικά αποδεκτό ως ανώτερο για όλες τις τάξεις προβλημάτων. Η επιλογή του μοντέλου θα εξαρτηθεί από ζητήματα όπως οι φυσικοί νόμοι που συμπεριλαμβάνονται στη ροή, η συνήθης τακτική για την λύση μιας συγκεκριμένης τάξης προβλημάτων, το απαιτούμενο επίπεδο ακρίβειας, οι διαθέσιμοι υπολογιστικοί πόροι, και το διαθέσιμο ποσό χρόνου για την εξομοίωση. Για να γίνει η επιλογή του πιο κατάλληλου μοντέλου για την εκάστοτε εφαρμογή, χρειάζεται να καταλάβει κανείς τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των διαφόρων επιλογών.

Ο σκοπός αυτού του μέρους είναι να δώσει μια περίληψη θεμάτων που σχετίζονται με τα τυρβώδη μοντέλα που εμπεριέχονται στα συνήθη λογισμικά υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και μεταφοράς θερμότητας (CFD & HT). Το υπολογιστικό κόστος και προσπάθεια σε όρους χρόνου του κεντρικού επεξεργαστή (CPU) και μνήμης του εκάστοτε μοντέλου εξετάζονται. Ενώ είναι αδύνατο να δηλώσει κανείς κατηγορηματικά ποιο μοντέλο είναι το καλύτερο για μια εφαρμογή, γενικές οδηγίες παρουσιάζονται για να βοηθήσουν στη επιλογή του κατάλληλου τυρβώδους μοντέλου για το εκάστοτε μοντέλο ροής που θέλουμε να μελετήσουμε.

### 2.2.1 Σύγκριση προσεγγίσεων RANS και LES

Οι χρονοεξαρτώμενες λύσεις των εξισώσεων Navier – Stokes για τυρβώδεις ροές μεγάλου αριθμού Reynolds σε περίπλοκες γεωμετρίες, οι οποίες σκοπεύουν στο να επιλύσουν εξ ολοκλήρου έως τις μικρότερες κλίμακες των κινήσεων είναι απίθανο να είναι εφικτές για αρκετό καιρό ακόμα. Δυο εναλλακτικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κάνουν τις εξισώσεις Navier – Stokes να συμφωνούν ώστε οι μικρής κλίμακας τυρβώδεις διακυμάνσεις να μην χρειάζεται να εξομοιωθούν ευθέως: Η μέθοδος μέσω των όρων Reynolds (ή μέσω των όρων ποσοτήτων) και το φιλτράρισμα. Και οι δυο μέθοδοι εισάγουν επιπρόσθετους όρους στις διέπουσες εξισώσεις, για τις οποίες χρειάζεται να κατασκευαστούν μοντέλα για να επιτευχθεί ένα «πλησίασμα-κλείσιμο» προς τους αγνώστους.

Οι εξισώσεις Navier – Stokes μέσω των όρων Reynolds (RANS) διέπουν τη μεταφορά των μέσω των όρων των ποσοτήτων ροής με το πλήρες εύρος των κλιμάκων της τύρβης να

μοντελοποιούνται. Η βασισμένη στο RANS προσέγγιση μοντελοποίησης, λοιπόν μειώνει κατά πολύ τους απαιτούμενους υπολογιστικούς πόρους και προσπάθεια και υιοθετείται ευρέως για εφαρμογές πρακτικής μηχανικής. Μια ολόκληρη ιεραρχία μοντέλων κλεισίματος (closure) είναι διαθέσιμα στα πακέτα CFD συμπεριλαμβανομένων των Spalart – Allmaras,  $k - \epsilon$  και των παραλλαγών του, του  $k - \omega$  και των παραλλαγών του και του RSM. Οι εξισώσεις RANS συχνά χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε χρόνο-εξαρτώμενες ροές, των οποίων η αστάθεια μπορεί να επιβάλλεται εξωτερικά (π.χ. χρόνο-εξαρτώμενες οριακές συνθήκες ή πηγές) ή να αυτό-διατηρείται (π.χ. αστάθειες ροής, απόρριψης δίνης).

Το μοντέλο LES παρέχει μια εναλλακτική προσέγγιση στην οποία μεγάλες δίνες υπολογίζονται αναλυτικά (επιλύονται) σε μια χρονο-εξαρτώμενη προσομοίωση χρησιμοποιώντας τις «φιλτραρισμένες» εξισώσεις Navier – Stokes. Η λογική πίσω από το LES είναι ότι με το να μοντελοποιείς λιγότερη τύρβη (και να επιλύεις περισσότερη) το ποσοστό λάθους που εισάγεται από την μοντελοποίηση της τύρβης μπορεί να μειωθεί. Θεωρείται επίσης ευκολότερο το να βρει κανείς ένα «συνολικό» μοντέλο για τις μικρές κλίμακες, αφού αυτές τείνουν να είναι περισσότερο ιστροπικές και λιγότερο επηρεασμένες από τα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά (όπως οι οριακές συνθήκες) από τις μεγάλες δίνες. Το φιλτράρισμα είναι βασικά ένας μαθηματικός χειρισμός των εξισώσεων Navier – Stokes για να αφαιρεθούν οι δίνες που είναι μικρότερες από το φίλτρο, το οποίο συνήθως λαμβάνεται υπ' όψη ως το μέγεθος του πλέγματος όταν χρησιμοποιείται συνήθως χωρικό φιλτράρισμα. Όπως και στη μέθοδο RANS, η διαδικασία του φιλτραρίσματος δημιουργεί επιπρόσθετους άγνωστους όρους για τους οποίους πρέπει να γίνει μοντελοποίηση για να επιτευχθεί το «κλείσιμο» των εξισώσεων. Στατιστικά στοιχεία των χρονο-μεταβαλλόμενων πεδίων ροής όπως οι χρονικές μεταβλητές και οι μέσες τιμές των μεταβλητών της λύσης, οι οποίες έχουν γενικά μεγαλύτερο μηχανικό ενδιαφέρον, μπορούν να συλλεχθούν κατά τη διάρκεια της χρονο-εξαρτώμενης προσομοίωσης.

Το μοντέλο LES για βιομηχανικές ροές υψηλού αριθμού Reynolds, απαιτεί σημαντικό ποσό υπολογιστικών πόρων. Αυτό κυρίως λόγω της ανάγκης για την επακριβώς επίλυση των τυρβωδών δινών οι οποίες εμπεριέχουν ενέργεια στις περιοχές του χώρου και του χρόνου, γεγονός οποίο γίνεται πιο κρίσιμο σε περιοχές κοντά σε τοίχο όπου οι κλίμακες που πρέπει να επιλυθούν γίνονται ολοένα και πιο μικρές. Οι συναρτήσεις τοίχου (wall functions) σε συνδυασμό με ένα πυκνό τραχύ πλέγμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν, συχνά με αρκετή επιτυχία, για να μειωθεί το κόστος του LES για ροές δεσμευμένες από τα τοιχώματα (walls). Παρόλα αυτά κανείς θα πρέπει να σκεφτεί σοβαρά τις συνέπειες της

χρήσης των συναρτήσεων τοίχου για την μελετώμενη ροή. Για τον ίδιο λόγο (για ακριβή επίλυση των δινών) το LES επίσης απαιτεί εξαιρετικά ακριβείς χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις των εμπλεκόμενων ολοκληρωματικών και διανυσματικών εξισώσεων.

### **Σύνδεση LES/RANS: Μοντέλο εξομοίωσης αποσπασμένης δίνης (DES)**

Το μοντέλο εξομοίωσης αποσπασμένης δίνης είναι βασισμένο σε μια τροποποιημένη έκδοση του μοντέλου Spallart – Allmaras και μπορεί να θεωρηθεί μια πιο πρακτική εναλλακτική του LES για να προβλέπεται η ροή γύρω από υψηλού αριθμού Reynolds αεροτομές υψηλής άντωσης. Η προσέγγιση DES συνδυάζει μια ασταθή RANS έκδοση του μοντέλου Spallart – Allmaras με μια φιλτραρισμένη έκδοση του ίδιου μοντέλου για να δημιουργήσει δυο ξεχωριστούς τομείς μέσα στην περιοχή της ροής: μια βασισμένη στο RANS και μια άλλη που είναι κοντά στον τοίχο όπου το μοντέλο διέπεται από την βασισμένη στην RANS προσέγγιση. Η περιοχή LES είναι συσχετισμένη με την τυρβώδη περιοχή υψηλού Re όπου μεγάλες κλίμακες τύρβης παίζουν πρωτεύοντα ρόλο. Σε αυτό τον τομέα, το μοντέλο DES ανακτά το καθαρό μοντέλο LES βασισμένο σε ένα υπό-πλεγματοειδές μοντέλο μιας εξίσωσης. Κοντά στον τοίχο, όπου ιξώδεις επιδράσεις επικρατούν, το κοινό μοντέλο RANS λαμβάνεται ξανά υπ'όψιν.

Η εφαρμογή του DES παρόλα αυτά μπορεί να απαιτεί σημαντικούς υπολογιστικούς πόρους και εκ τούτοις, ως γενική οδηγία, προτείνεται η χρήση συμβατικών μοντέλων τύρβης που χρησιμοποιούν την προσέγγιση Reynolds μέσω των όρων για πρακτικούς υπολογισμούς.

#### **2.2.2 Reynolds μέσω των όρων**

Στην συγκεκριμένη μέθοδο οι μεταβλητές της λύσης των στιγμιαίων (ακριβών) εξισώσεων Navier–Stokes αποδομούνται στα μέσα στοιχεία (χρήση μέσω των όρων ή χρόνου) και των διακυμάνσεων των συστατικών της ροής. Για τα συστατικά της ταχύτητας ισχύει:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (1)$$

όπου  $\bar{u}_i$  και  $u_i'$  είναι τα μέσα και διακυμαινόμενα συστατικά της ταχύτητας ( $i = 1, 2, 3$ ).

Παρομοίως, για την πίεση και άλλες βαθμωτές ποσότητες:

$$f_i = \bar{f}_i + f_i' \quad (2)$$

όπου το  $\phi$  δηλώνει ένα βαθμωτό μέγεθος όπως πίεση, ενέργεια ή συγκέντρωση είδους.

Υποκαθιστώντας εκφράσεις αυτής της μορφής για τις μεταβλητές ροής στις στιγμιαίες εξισώσεις συνέχειας και ορμής, και παίρνοντας μια μέση τιμή χρόνου (ή του συνόλου), προκύπτουν οι εξισώσεις μέσων όρων ορμής.

Αυτές μπορούν να γραφτούν στην μορφή καρτεσιανού τανυστή ως:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (ru_i) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (ru_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (ru_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-r\bar{u}'_i \bar{u}'_j) \quad (4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται RANS εξισώσεις. Έχουν την ίδια γενική μορφή όπως οι στιγμιαίες εξισώσεις Navier–Stokes, με τις ταχύτητας και τις άλλες μεταβλητές της λύσης να αναπαριστούν τιμές μέσου όρου χρόνου ή συγκέντρωσης. Επιπρόσθετοι όροι εμφανίζονται που αναπαριστούν τα αποτελέσματα της τύρβης. Για αυτές τις τάσεις Reynolds  $r\bar{u}'_i \bar{u}'_j$  θα πρέπει να μοντελοποιηθούν για να κλείσει η εξίσωση 4.

Για ροές μεταβλητής πυκνότητας, οι εξισώσεις 3 και 4 μπορούν να εφαρμοστούν.

### 2.2.3 Σύγκριση προσέγγισης Boussinesq και Μοντέλων μεταφοράς τάσεων Reynolds.

Η προσέγγιση μέσων όρων Reynolds στη μοντελοποίηση τύρβης απαιτούν την πρόποσα μοντελοποίηση των τάσεων Reynolds στην εξίσωση 4. Μια κοινή μέθοδος χρησιμοποιεί τη συσχέτιση της υπόθεσης Boussinesq με τις τάσεις Reynolds στις βαθμίδες της μέσης ταχύτητας:

$$-r\bar{u}'_i \bar{u}'_j = m_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( rk + m_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) d_{ij} \quad (5)$$

Η υπόθεση Boussinesq χρησιμοποιείται στα μοντέλα Spalart – Allmaras, k–ε και k–ω. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι το σχετικά χαμηλό υπολογιστικό κόστος που σχετίζεται με τον υπολογισμό του τυρβώδους ιξώδους  $\mu_t$ . Στην περίπτωση του μοντέλου

Spallart–Allmaras μόνο μια εξίσωση μεταφοράς (που αναπαριστά το τυρβώδες ιξώδες) λύνεται. Στις περιπτώσεις των μοντέλων  $k-\epsilon$  και  $k-\omega$ , δυο επιπρόσθετες εξισώσεις (για την τυρβώδη κινητική ενέργεια,  $k$ , και είτε το ρυθμό τυρβώδους σκέδασης,  $\epsilon$ , ή το ρυθμό ειδικής σκέδασης,  $\omega$ ) λύνονται, και το  $\mu_t$  υπολογίζεται ως συνάρτηση των  $k$  και  $\epsilon$ . Το μειονέκτημα της υπόθεσης Boussinesq όπως παρουσιάζεται είναι το ότι υποθέτει ότι το  $\mu_t$  είναι μια ιστροπική βαθμωτή ποσότητα, κάτι που δεν είναι επακριβώς αληθές.

Η εναλλακτική προσέγγιση, που ενσωματώνεται στο RSM, είναι να λύσουμε εξισώσεις μεταφοράς για κάθε έναν από τους όρους των τανυστών των τάσεων Reynolds. Μια επιπρόσθετη εξίσωση που καθορίζει την κλίμακα (συνήθως για το  $\epsilon$ ) επίσης απαιτείται. Αυτό σημαίνει ότι 5 ακόμα εξισώσεις μεταφοράς απαιτούνται στις διδιάστατες ροές και επτά επιπρόσθετες εξισώσεις μεταφοράς πρέπει να λυθούν στις τρισδιάστατες ροές.

Σε πολλές περιπτώσεις τα μοντέλα που είναι βασισμένα στην υπόθεση Boussinesq λειτουργούν πολύ καλά και το επιπρόσθετο υπολογιστικό κόστος του μοντέλου τάσης Reynolds δεν δικαιολογείται.

Παρόλα αυτά, το RSM είναι ξεκάθαρα ανώτερο σε περιπτώσεις που η ανισοτροπία του στροβιλισμού έχει βασικό ρόλο στην μέση ροή. Τέτοιες περιπτώσεις αποτελούν οι ροές υψηλού στροβιλισμού και οι οδηγούμενες από τάσεις δευτερεύουσες ροές.

#### 2.2.4 Το μοντέλο Spallart – Allmaras

Το Spallart – Allmaras είναι ένα σχετικά εύκολο μοντέλο μίας εξίσωσης που λύνει μια εξίσωση μεταφοράς για το κινηματικό τυρβώδες ιξώδες. Αυτό ενσωματώνει μία τάξη μοντέλων μίας εξίσωσης στα οποία δεν είναι απαραίτητο να υπολογιστεί μια μεγάλη κλίμακα που σχετίζεται με το τοπικό πάχος του διατμητικού στρώματος (επιπέδου). Το μοντέλο Spallart–Allmaras είχε σχεδιαστεί ειδικά για εφαρμογές αεροδιαστημικής, συμπεριλαμβανομένων των δεσμευμένων από τοίχο ροών και έχει δείξει πολύ καλά αποτελέσματα σε οριακά στρώματα που υπόκεινται σε αντίθετες κλίσεις πίεσης. Γίνεται επίσης όλο και πιο δημοφιλές σε εφαρμογές στροβιλομηχανικής.

Στην αυθεντική του μορφή το μοντέλο Spallart–Allmaras είναι στην πράξη ένα μοντέλο χαμηλού αριθμού Reynolds που απαιτεί την περιοχή ιξώδους επηρεασμού του οριακού στρώματος να έχει επιλυθεί σωστά. Στα συνήθη λογισμικά, το μοντέλο Spallart – Allmaras έχει εφαρμοστεί να χρησιμοποιεί συναρτήσεις τοίχου όταν η ανάλυση του πλέγματος δεν είναι επαρκώς λεπτή. Αυτό μπορεί να το καθιστά την καλύτερη επιλογή για σχετικά

πρόχειρες εξομοιώσεις σε τραχιά πλέγματα, όπου οι ακριβείς υπολογισμοί της ροής δεν είναι κρίσιμοι. Επιπροσθέτως, οι βαθμίδες κοντά σε τοίχους της μεταφερόμενης μεταβλητής στο μοντέλο είναι πολύ μικρότερες από αυτές των μεταφερόμενων μεταβλητών στα μοντέλα  $k-\epsilon$  ή  $k-\omega$ . Αυτό μπορεί να κάνει το μοντέλο λιγότερο ευαίσθητο σε αριθμητικά λάθη όταν πλέγματα όχι τοποθετημένα σε στρώσεις χρησιμοποιούνται κοντά σε τοίχους.

Παρόλα αυτά συστήνεται προσοχή διότι το μοντέλο Spallart–Allmaras δεν είναι κατάλληλο για όλους τους τύπους περίπλοκων μηχανικών ροών και θα πρέπει όπως και σε όλα σχεδόν τα μοντέλα να υπάρχει μια συγκριτική μελέτη των επιδόσεων του για πλήρως επιλυμένα προβλήματα που γνωρίζουμε επακριβώς τα αποτελέσματα της λύσης τους. Για παράδειγμα, δεν μπορεί να προβλέψει επαρκώς την μείωση των ομογενούς ισοτροπικής τύρβης. Επιπροσθέτως, τα μοντέλα μιας εξίσωσης συχνά δέχονται κριτική για την ανικανότητά τους να ενσωματώσουν γρήγορα αλλαγές στην κλίμακα του μήκους, τόσο όσο χρειάζεται όταν η ροή αλλάζει ξαφνικά από δεσμευμένη από τοίχο σε ελεύθερη, διατμητική ροή.

### 2.2.5 Το κοινό μοντέλο $k - \epsilon$

Τα απλούστερα «ολοκληρωμένα μοντέλα» τύρβης είναι τα μοντέλα δύο εξισώσεων στα οποία η λύση των δύο ξεχωριστών εξισώσεων μεταφοράς επιτρέπουν την τυρβώδη ταχύτητα και κλίμακες μήκους να προσδιοριστούν ανεξάρτητα. Το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$  είναι σε αυτή την κατηγορία τυρβώδους μοντέλου και έχει γίνει το βασικό εργαλείο για τους υπολογισμούς των ροών της πρακτικής μηχανικής από τότε που προτάθηκε από τους Launder και Spalding. Η στιβαρότητα, η οικονομία, και η λογική ακρίβεια για ένα μεγάλο εύρος τυρβωδών ροών εξηγεί την πολύ συχνή χρήση του σε εξομοιώσεις βιομηχανικής ροής και μεταφοράς θερμότητας. Είναι ένα ημί-εμπειρικό μοντέλο και η λύση των εξισώσεων του στηρίζεται στις φαινομενολογικούς συλλογισμούς (θεωρήσεις-παραδοχές) και τον εμπειρισμό.

Καθώς τα προτερήματα και οι αδυναμίες του κοινού μοντέλου  $k-\epsilon$  έχουν γίνει γνωστές, βελτιώσεις έχουν γίνει σε αυτό για να βελτιστοποιηθεί η απόδοση του. Δύο από αυτές τις παραλλαγές είναι συχνά διαθέσιμες στα CFD λογισμικά: το RNG  $k-\epsilon$  μοντέλο και το πραγματοποιήσιμο  $k-\epsilon$  μοντέλο.

### 2.2.6 RNG k-ε μοντέλο

Το RNG μοντέλο k-ε είναι απόρροια μιας αυστηρής στατιστικής τεχνικής (που ονομάζεται θεωρία ομαδικής ανακανονικοποίησης). Είναι παρόμοιο σε μορφή με το κοινό μοντέλο k-ε αλλά περιλαμβάνει τις παρακάτω βελτιώσεις:

- Το μοντέλο RNG έχει έναν επιπλέον όρο στην εξίσωση ε που βελτιώνει σημαντικά την ακρίβεια για ραγδαία εντεινόμενες ροές.
- Η επίδραση της δίνης στην τύρβη συμπεριλαμβάνεται στο μοντέλο RNG, ενισχύοντας την ακρίβεια για τις ροές με παρουσία στροβίλων.
- Η θεωρία RNG παρέχει μια αναλυτική φόρμουλα για τυρβώδεις αριθμούς Prandl, ενώ το κοινό μοντέλο k-ε χρησιμοποιεί σταθερές τιμές παρεχόμενες από το χρήστη.
- Ενώ το κοινό μοντέλο k-ε είναι ένα μοντέλο υψηλών αριθμών Reynolds, η θεωρία RNG παρέχει μια διαφορική φόρμουλα προερχόμενη από ανάλυση για πιο αποδοτικό ιξώδες το οποία αντιστοιχεί στα αποτελέσματα των χαμηλών αριθμών Reynolds. Η αποδοτική χρήση αυτού του χαρακτηριστικού παράλα αυτά, εξαρτάται από την πρέπουσα αντιμετώπιση του χώρου κοντά στον τοίχο.

Αυτά τα χαρακτηριστικά κάνουν το μοντέλο RNG πιο ακριβές και αξιόπιστο για μεγαλύτερο εύρος ροών από το κοινό μοντέλο k-ε.

### 2.2.7 Το πραγματοποιήσιμο (realizable) μοντέλο k-ε

Το πραγματοποιήσιμο μοντέλο k-ε αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα και διαφοροποιείται σε σχέση με το κοινό μοντέλο k-ε σε δυο σημαντικά σημεία:

- Το πραγματοποιήσιμο μοντέλο k-ε περιέχει μια νέα φόρμουλα για το τυρβώδες ιξώδες.
- Μια νέα εξίσωση μεταφοράς για το ρυθμό διασκορπισμού, ε, προήλθε από μια ακριβή εξίσωση για τη μεταφορά του μέσου – τετράγωνου διακύμανσης της ταχύτητας.

Ο όρος «πραγματοποιήσιμο» σημαίνει ότι το μοντέλο ικανοποιεί συγκεκριμένους μαθηματικούς περιορισμούς στις τάσεις Reynolds, σταθερό με τη φυσική των τυρβωδών ροών. Ούτε το κοινό μοντέλο k-ε ούτε το RNG μοντέλο k-ε είναι πραγματοποιήσιμα.

Ένα άμεσο πλεονέκτημα του πραγματοποιήσιμου μοντέλου k-ε είναι ότι προβλέπει ακριβώς το ρυθμό διασποράς των επίπεδων των κυκλικών δεσμών (τζέτ) ρευστών. Είναι επίσης πιθανό να παρέχει ανώτερες επιδόσεις για ροές που περιλαμβάνουν κυκλική κίνηση, οριακά στρώματα υπό δυνατές αντίθετες κλίσης πίεσης, διαχωρισμό και ανακυκλοφορία.

Το πραγματοποιήσιμο μοντέλο  $k-\epsilon$  και το RNG μοντέλο  $k-\epsilon$  εξίσου έχουν υποστεί σημαντικές βελτιώσεις σε σχέση με το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$  όπου τα χαρακτηριστικά της ροής περιλαμβάνουν έντονη καμπύλωση των ροικών γραμμών, δίνες, και περιστροφή. Πολλές φορές, δεν είναι ξεκάθαρο σε ποιες περιπτώσεις το πραγματοποιήσιμο μοντέλο  $k-\epsilon$  σταθερά αποδίδει καλύτερα από το μοντέλο RNG. Παρόλα αυτά, μελέτες έδειξαν ότι το πραγματοποιήσιμο μοντέλο παρέχει την καλύτερη απόδοση από όλα τα μοντέλα  $k-\epsilon$  για διάφορες επικυρώσεις διαχωρισμένων ροών και ροών με περίπλοκα δευτερεύοντα χαρακτηριστικά ροής.

Ένας περιορισμός του πραγματοποιήσιμου μοντέλου  $k-\epsilon$  είναι ότι παράγει μη-φυσικά τυρβώδη ιξώδη, εκεί όπου ο υπολογιστικός χώρος περιέχει περιστρεφόμενες και στατικές ζώνες υγρών (π.χ. πολλαπλά πλαίσια αναφοράς, περιστρεφόμενα κυλιόμενα πλέγματα). Αυτό συμβαίνει διότι το πραγματοποιήσιμο μοντέλο  $k-\epsilon$  περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της μέσης περιστροφής στον ορισμό του τυρβώδους ιξώδους αναταραχής.

### **2.2.8 Το κοινό μοντέλο $k-\omega$**

Το κοινό μοντέλο  $k-\omega$  είναι βασισμένο στο μοντέλο  $k-\omega$  του Wilcox, το οποίο ενσωματώνει αλλαγές για τα αποτελέσματα των χαμηλών αριθμών Reynolds, την συμπίεστικότητα, και τη διασπορά της απλής ροής. Το μοντέλο Wilcox προβλέπει τους ρυθμούς διασποράς των ελεύθερων διατμητικών ροών που σχετίζονται με τις μετρήσεις για τα μακρινά απορρέυματα, τα αναμεμιγμένα στρώματα και τις επίπεδες και ακτινικές δέσμες ρευστού, κάνοντάς το κατάλληλο για περιπτώσεις διατμητικών ροών και δεσμευμένων από τον τοίχο. Μια παραλλαγή του κοινού μοντέλου  $k-\omega$  που ονομάζεται SST (Shear Stress Transport = Μεταφορά διατμητικής ροής)  $k-\omega$  είναι επίσης διαθέσιμη και βελτιώνει τα χαρακτηριστικά του κλασσικού μοντέλου  $k-\omega$ .

### **2.2.9 Το μοντέλο SST $k-\omega$ .**

Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε από τον Menter για να σχετίσει το σθεναρό και ακριβές μοντέλο  $k-\omega$  στην περιοχή κοντά στον τοίχο με την ανεξαρτησία του μοντέλου  $k-\epsilon$  στην μακρινή περιοχή. Για να επιτευχθεί αυτό, το μοντέλο  $k-\epsilon$  μετατρέπεται στην φόρμουλα του μοντέλου  $k-\omega$ . Το SST  $k-\omega$  μοντέλο είναι παρόμοιο με το απλό μοντέλο  $k-\omega$ , αλλά συμπεριλαμβάνει τις παρακάτω βελτιώσεις:

- Το απλό μοντέλο  $k-\omega$  και το μεταλλαγμένο μοντέλο  $k-\epsilon$  πολλαπλασιάζονται με την συνάρτηση ανάμειξης και τα δύο μοντέλα προσθέτονται μαζί. Η συνάρτηση ανάμειξης



είναι σχεδιασμένη να είναι 1 στην περιοχή πλησίον του τοίχου, το οποίο ενεργοποιεί το κοινό μοντέλο  $k-\omega$  και 0 μακριά από την επιφάνεια, το οποίο ενεργοποιεί το μεταλλαγμένο μοντέλο  $k-\epsilon$ .

- Το SST μοντέλο ενσωματώνει τον όρο διασταυρούμενης διάχυσης στην εξίσωση  $\omega$ .
- Ο ορισμός του τυρβώδους ιξώδους τροποποιείται για να αντιστοιχιστεί στην μεταφορά της τυρβώδους διατμητικής τάσης.
- Οι σταθερές του μοντέλου είναι διαφορετικές.

Αυτά τα χαρακτηριστικά κάνουν το μοντέλο SST  $k-\omega$  πιο ακριβές και αξιόπιστο για μια πιο ευρεία τάξη ροών (π.χ. αντίθετες κλίσεις πιέσεων ροών, σε αεροτομές, ηχητικά κρουστικά κύματα) από το κοινό μοντέλο  $k-\omega$ .

### 2.2.10 Το μοντέλο $u^2 - f$

Το μοντέλο  $u^2-f$  είναι παρόμοιο με το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$ , αλλά ενσωματώνει την ανισοτροπία σε περιοχές κοντά σε τοίχο και μη τοπικές επιδράσεις των περιορισμών της πίεσης. Ένας περιορισμός για το μοντέλο  $u^2-f$  είναι ότι δεν μπορεί να λύσει Eulerian προβλήματα πολλαπλών φάσεων, όπου χρησιμοποιείται το μοντέλο  $k-\epsilon$ . Το μοντέλο  $u^2-f$  είναι ένα γενικό τυρβώδες μοντέλο χαμηλού αριθμού Reynolds το οποίο ισχύει μέχρι και σε συμπαγείς τοίχους, και δεν χρειάζεται να βάλει σε χρήση τις συναρτήσεις τοίχου. Παρόλο που το μοντέλο αρχικά αναπτύχθηκε για να χρησιμοποιείται σε προσαρτημένα ή εν μέρει αποχωρισμένα οριακά στρώματα, εξομοιώνει επίσης ροές οι οποίες κυριαρχούνται από διαχωρισμό.

Το χαρακτηριστικό γνώρισμα του μοντέλου  $u^2-f$ , είναι η χρήση της κλίμακας ταχύτητας  $\bar{u}^2$ , αντί της τυρβώδους κινητικής ενέργειας της αναταραχής  $k$ , για την εκτίμηση του τυρβώδους ιξώδους. Το  $\bar{u}^2$ , που μπορεί να αναλογιστεί σαν την διακύμανση της ταχύτητας ακολουθώντας τις ροικές γραμμές, έχει αποδειχθεί ότι αποδίδει την σωστή κλιμάκωση σε παραστάσεις της τυρβώδους μεταφοράς κοντά σε τοίχο, ένα χαρακτηριστικό που το  $k$  δεν παρέχει.

### **2.2.11 Το μοντέλο τάσης Reynolds (RSM)**

Το μοντέλο τάσης Reynolds είναι ένα πιο περίπλοκο τυρβώδες τυρβώδες μοντέλο που παρέχεται από αρκετά λογισμικά υπολ/κής ρευστοδυναμικής. Εγκαταλείποντας την υπόθεση του ιστροπικού ιξώδους, το RSM κλείνει τις εξισώσεις RANS με το να λύσει την εξίσωση μεταφοράς για τις τάσεις Reynolds, μαζί με μια εξίσωση για το ρυθμό σκέδασης. Αυτό σημαίνει ότι 5 επιπρόσθετες εξισώσεις μεταφοράς απαιτούνται στις διδιάστατες ροές και 7 στις τρισδιάστατες.

Από τη στιγμή που το RSM δίνει καλύτερα αποτελέσματα για τον εξορθολογισμό της καμπυλότητας των ροικών γραμμών, τη δίνη, την περιστροφή και τις απότομες αλλαγές στο ρυθμό της τάσης από τα μοντέλα μίας και δύο εξισώσεων, έχει μεγαλύτερες πιθανότητες να δώσει πιο ακριβείς προβλέψεις για τις σύνθετες ροές. Παρόλα αυτά η πιστότητα των προβλέψεων του RSM περιορίζεται ακόμα από τις υποθέσεις κλεισίματος που χρησιμοποιούνται στους διάφορους όρους των μοντέλων στις ακριβείς εξισώσεις μεταφοράς για τις τάσεις Reynolds. Τα μοντέλα της έντασης της πίεσης και οι όροι του ρυθμού σκέδασης είναι πολύ δύσκολα στην κατασκευή, και συχνά κατηγορούνται για το ότι θέτουν την ακρίβεια του RSM σε κίνδυνο.

Το RSM μπορεί να μην εξάγει πάντα αποτελέσματα ανώτερα από τα απλούστερα μοντέλα σε όλες τις τάξεις των ροών σε σχέση με τον απαιτούμενο υπολογιστικό όγκο. Παρόλα αυτά η χρήση του RSM είναι απαραίτητη όταν τα υπό εξέταση χαρακτηριστικά της ροής είναι αποτελέσματα ανισοτροπίας στις τάσεις Reynolds. Μεταξύ των παραδειγμάτων είναι οι κυκλωνικές ροές, οι ροές υψηλής ανάμιξης σε καυστήρες, τα περάσματα περιστροφικών ροών και οι δευτερεύουσες ροές που προκαλούνται από τάσεις στους αγωγούς.

### **2.2.12 Υπολογιστική προσπάθεια**

Σε όρους υπολογισμού το μοντέλο Spallart–Allmaras είναι το λιγότερο ακριβό μοντέλο τύρβης από όσα συνήθως παρέχονται, αφού λύνεται μόνο με μία εξίσωση μεταφοράς της τύρβης.

Το κοινό μοντέλο k-ε σαφώς χρειάζεται παραπάνω υπολογιστική προσπάθεια από το Spallart–Allmaras αφού λύνεται μια επιπρόσθετη εξίσωση μεταφοράς. Το πραγματοποιήσιμο μοντέλο k-ε απαιτεί ελάχιστα μεγαλύτερη υπολογιστική προσπάθεια

από το κοινό μοντέλο k-ε. Παρόλα αυτά, λόγω των παραπάνω όρων και των λειτουργιών στις εξισώσεις που το διέπουν και το μεγαλύτερο βαθμό μη-γραμμικότητας, οι υπολογισμοί με το μοντέλο RNG k-ε τείνουν να καταλαμβάνουν 10% - 15% περισσότερο χρόνο του επεξεργαστή από ότι με το κοινό μοντέλο k-ε. Όπως τα μοντέλα k-ε, έτσι και τα μοντέλα k-ω είναι μοντέλα 2 εξισώσεων και απαιτούν περίπου την ίδια υπολογιστική προσπάθεια.

Συγκρινόμενο με τα μοντέλα k-ε και k-ω, το RSM απαιτεί επιπρόσθετη μνήμη και χρόνο επεξεργαστή λόγω του αυξημένου αριθμού εξισώσεων μεταφοράς για τις τάσεις Reynolds. Εντούτοις, ο αποτελεσματικός προγραμματισμός έχει μειώσει τον χρόνο επεξεργαστή ανά επανάληψη σημαντικά. Κατά μέσο όρο, το RSM απαιτεί 50% - 60% περισσότερο χρόνο επεξεργαστή ανά επανάληψη σε σχέση με τα μοντέλα k-ε και k-ω. Επιπροσθέτως, 15% - 20% παραπάνω μνήμη απαιτείται.

Εκτός του χρόνου ανά επανάληψη, η επιλογή του τυρβώδους μοντέλου μπορεί να επηρεάσει την ικανότητα του λογισμικού να αποκτήσει μια συγκλίνουσα λύση. Για παράδειγμα, το κοινό μοντέλο k-ε είναι σχεδιασμένο ώστε να είναι ελαφρώς υπερ-διαχυτικό σε συγκεκριμένες καταστάσεις, ενώ το μοντέλο RNG k-ε είναι σχεδιασμένο ώστε το τυρβώδες ιξώδες να μειώνεται σε υψηλούς ρυθμούς τάσης. Αφού η διάχυση έχει σταθεροποιητικό ρόλο στις αριθμητικές πράξεις, το μοντέλο RNG είναι πιο ασταθές σε σταθερές καταστάσεις. Παρόλα αυτά, αυτό δεν θα πρέπει να αντιμετωπιστεί απαραίτητα ως μειονέκτημα του μοντέλου RNG, αφού αυτά τα χαρακτηριστικά το κάνουν πιο ευαίσθητο σε σημαντικές φυσικές αστάθειες όπως η χρονο-εξαρτώμενη, τυρβώδης απόρριψη δίνης.

Παρομοίως το RSM μπορεί να χρειάζεται περισσότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει από ότι τα μοντέλα k-ε και k-ω, λόγω της ισχυρής σύνδεσης μεταξύ των τάσεων Reynolds και της μέσης ροής.

### **2.3 Το μοντέλο Spallart – Allmaras**

Στα τυρβώδη μοντέλα που χρησιμοποιούν την προσέγγιση Boussinesq, το κυρίως θέμα είναι πώς υπολογίζεται το ιξώδες της δίνης. Το μοντέλο που προτάθηκε από τους Spallart – Allmaras λύνει μια εξίσωση μεταφοράς για μια ποσότητα που είναι μια τροποποιημένη μορφή του τυρβώδους κινηματικού ιξώδους.

### 2.3.1 Εξίσωση μεταφοράς για το μοντέλο Spallart – Allmaras.

Η μεταβλητή μεταφοράς  $\bar{\nu}$  στο μοντέλο Spallart – Allmaras είναι πανομοιότυπη με το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες, εκτός από τις περιοχές κοντά σε τοίχο (εξαρτώμενες από το ιξώδες). Η εξίσωση μεταφοράς για το  $\bar{\nu}$  είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\bar{\nu}u_i) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\bar{\nu}) \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2}\rho \left( \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu + S_\nu \quad (6)$$

Όπου:  $G_\nu$  η παραγωγή τυρβώδους ιξώδους, και όπου  $Y_\nu$  η καταστροφή του τυρβώδους ιξώδους που συμβαίνει κοντά σε περιοχές κοντά σε τοίχο εξαιτίας του μπλοκαρίσματος του τοίχου και της απόρριψης του ιξώδους. Οι  $S_\nu$  και  $C_{b2}$  είναι σταθερές και το  $\nu$  είναι το μοριακό κινηματικό ιξώδες. Το  $S_\nu$  είναι ένας πηγαίος όρος που ορίζεται από το χρήστη.

Σημειώστε ότι από τη στιγμή που η κινητική ενέργεια της τύρβης δεν υπολογίζεται στο μοντέλο Spallart – Allmaras, ο τελευταίος όρος στην εξίσωση 5 δεν λαμβάνεται υπ'οψιν όταν υπολογίζουμε τις τάσεις Reynolds.

### 2.3.2 Μοντελοποίηση τυρβώδους ιξώδους.

Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$  υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\mu_t = \rho\bar{\nu}f_{v1} \quad (7)$$

Όπου η συνάρτηση  $f_{v1}$  δίνεται από:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad \chi \equiv \frac{\bar{\nu}}{\nu} \quad (8)$$

### 2.3.3 Μοντελοποίηση τυρβώδους παραγωγής.

Ο όρος παραγωγής  $G_\nu$  μοντελοποιείται ως:

$$G_\nu = C_{b1}\rho\bar{S}\bar{\nu} \quad (9)$$

Όπου:

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad (10)$$

Και:

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (11)$$

Οι  $C_{b1}$  και  $\kappa$  είναι σταθερές, το  $d$  είναι η απόσταση από τον τοίχο, και το  $S$  είναι μια μέτρηση του βαθμωτού του τανυστή παραμόρφωσης. Ως κανόνας, όπως στο αυθεντικό μοντέλο που προτάθηκε από τους Spallart – Allmaras , το  $S$  βασίζεται στο μέγεθος του στροβιλισμού:

$$S \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad (12)$$

Όπου το  $\Omega_{ij}$  είναι ο μέσος ρυθμός περιστροφής του τανυστή και ορίζεται από:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

Η αιτιολόγηση της προεπιλεγμένης έκφρασης του  $S$  είναι ότι, για τις ροές που οριοθετούνται από τοίχο που ήταν μεγαλύτερου ενδιαφέροντος όταν σχηματίστηκε το μοντέλο, η αναταραχή βρίσκεται μόνο εκεί που το ιξώδες παράγεται κοντά σε τοίχους. Παρόλα αυτά έχει γίνει κοινώς αποδεκτό ότι κανείς θα πρέπει να λάβει υπ'όψιν του το αποτέλεσμα της μέσης τάσης στην παραγωγή της τύρβης, και τροποποιήσεις στο μοντέλο πραγματοποιούνται συνεχώς με σκοπό όπως βελτιωθεί η δυνατότητα πρόβλεψής του.

Αυτή η τροποποίηση συνδυάζει μετρήσεις μαζί και της περιστροφής και των τανυστών τάσης στον ορισμό του  $S$ :

$$S \equiv |\Omega_{ij}| + C_{prod} \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|) \quad (14)$$

Όπου:

$$C_{prod} = 2.0, \quad |\Omega_{ij}| \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad |S_{ij}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

Με τον μέσο ρυθμό τάσης  $S_{ij}$  να ορίζεται ως:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (15)$$

Συμπεριλαμβάνοντας την περιστροφή και τους τανυστές τάσης μειώνουμε την παραγωγή ιξώδους της δίνης και συνεπώς μειώνεται το ίδιο το ιξώδες της δίνης σε περιοχές που το μέτρο του ιξώδους ξεπερνά αυτό του ρυθμού τάσης. Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορεί να βρεθεί στις τυρβώδεις ροές π.χ. η ροή κοντά στον πυρήνα μιας δίνης υπόκειται σε καθαρή περιστροφή εκεί όπου η τύρβη είναι γνωστό ότι καταστέλλεται. Συμπεριλαμβάνοντας την περιστροφή και τους τανυστές τάσης βγάζουμε πιο σωστό αποτέλεσμα για τα αποτελέσματα της περιστροφής στην τύρβη.

### 2.3.4 Μοντελοποίηση της τυρβώδους καταστροφής.

Ο όρος της καταστροφής υπολογίζεται ως:

$$Y_\nu = C_{w1} \rho f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \quad (16)$$

Όπου:

$$f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r)$$

$$r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}$$

(17)

Οι  $C_{w1}$ ,  $C_{w2}$ , και  $C_{w3}$  είναι σταθερές, και το  $\tilde{S}$  δίνεται από την εξίσωση 10. Η τροποποίηση που περιγράφεται παραπάνω για να συμπεριλάβει τα αποτελέσματα της μέσης τάσης στο  $S$ , θα επηρεάσουν επίσης την τιμή του  $\tilde{S}$  που χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το  $r$ .

### 2.3.5 Σταθερές μοντέλου

Οι μεταβλητές  $C_{b1}, C_{b2}, \sigma_p, C_{w1}, C_{w2}, C_{w3}, C_{w3}$ , και  $\kappa$  έχουν τις παρακάτω εξ ορισμού τιμές:

$$C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 1.022, \sigma_p = \frac{2}{3}, C_{w1} = 7.1$$
$$C_{w2} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_p}, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2.0, \kappa = 0.4187$$

### 2.3.6 Οριακές Συνθήκες σε τοίχο

Σε τοίχους, το τροποποιημένο, κινηματικό τυρβώδες ιξώδες,  $\bar{\nu}$  είναι ίσο με μηδέν.

Όταν το πλέγμα είναι αρκετά λεπτό για να λύσει το στρωτό υπόστρωμα, η διατμητική τάση του τοίχου λαμβάνεται από την στρωτή stress – strain σχέση στρωτής τάσης-έντασης:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}$$

(18)

Αν το πλέγμα είναι πολύ τραχύ για να λυθεί το στρωτό υπόστρωμα, θεωρείται ότι το κεντροειδές του επαπτόμενου στον τοίχο κελιού βρίσκεται στο λογαριθμικό πεδίο του οριακού στρώματος, και ο νόμος του τοίχου εφαρμόζεται:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln E \left( \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \right)$$

(19)

Όπου  $u$  είναι η ταχύτητα παράλληλα στον τοίχο,  $u_\tau$  είναι η διατμητική ταχύτητα,  $y$  είναι η απόσταση από τον τοίχο,  $\kappa$  είναι η σταθερά von Karman (0.4187) και  $E=9,793$ .

### 2.3.7 Μοντελοποίηση επαγωγής θερμότητας και μαζικής μεταφοράς

Η τυρβώδης μεταφορά θερμότητας, μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας την έννοια της αναλογίας του Reynolds στην μεταφορά ορμής της τύρβης. Η «μοντελοποιημένη» εξίσωση ενέργειας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i}[u_i(\rho E + p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( k + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_i(\tau_{ij})_{\text{eff}} \right] + S_h \quad (20)$$

Όπου,  $k$ , σε αυτή την περίπτωση, είναι η θερμική αγωγιμότητα,  $E$ , είναι η συνολική ενέργεια, και  $(\tau_{ij})_{\text{eff}}$  είναι τανυστής απόκλισης τάσης, ο οποίος ορίζεται ως:

$$(\tau_{ij})_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij}$$

Ο όρος που περιλαμβάνει το  $(\tau_{ij})$  αναπαριστά το θερμικό ιξώδες, και υπολογίζεται στους συζευγμένους επιλύτες. Η αρχική αξία του τυρβώδους αριθμού Prandl είναι 0,85.

Η τυρβώδης μεταφορά της μάζας αντιμετωπίζεται ανάλογα, με αρχικό αριθμό αναταραχής Schmidt 0,7.

Οι οριακές συνθήκες σε τοίχο για μεταφορά βαθμωτού αντιμετωπίζονται ανάλογα με την ορμή, χρησιμοποιώντας τον ανάλογο νόμο του τοίχου.

#### 2.4 Το κοινό, RNG, και πραγματοποιήσιμο k-ε μοντέλα.

Αυτή η ενότητα παρουσιάζει το κοινό, RNG, πραγματοποιήσιμο k-ε μοντέλα. Όλα έχουν παρόμοιες μορφές, με εξισώσεις μεταφοράς για τα  $k$  και  $\epsilon$ . Οι κυριότερες διαφορές στα μοντέλα είναι οι ακόλουθες:

- Η μέθοδος υπολογισμού του τυρβώδους ιξώδους.
- Οι τυρβώδεις αριθμοί Prandl που ορίζουν την τυρβώδη διάχυση των  $k$  και  $\epsilon$ .
- Οι όροι δημιουργίας και καταστροφής στην εξίσωση  $\epsilon$ .

Οι εξισώσεις μεταφοράς, οι μέθοδοι υπολογισμού του τυρβώδους ιξώδους, και οι σταθερές των μοντέλων παρουσιάζονται ξεχωριστά στο κάθε μοντέλο. Ακολουθούν τα χαρακτηριστικά που είναι αναγκαία κοινά σε όλα τα μοντέλα, συμπεριλαμβανομένων της παραγωγής τύρβης, της παραγωγή λόγω άνωσης, υπολογισμοί για τις επιδράσεις της συμπιεστότητας, και μοντελοποίηση των μεταφορών θερμότητας και μάζας,



### 2.4.1 Το κοινό μοντέλο k-ε

Το κοινό μοντέλο k-ε είναι ένα ημι-εμπειρικό μοντέλο, βασισμένο στις εξισώσεις μεταφοράς για την κινητική ενέργεια k και το ρυθμό διασκορπισμού (σκέδασης) ε. Οι εξισώσεις μεταφοράς για το k απορρέουν από την ακριβή εξίσωση, ενώ η εξίσωση μεταφοράς για το ε ανακτάται χρησιμοποιώντας φυσική λογική και έχει πολύ λίγη ομοιότητα με το μαθηματικό του ομόλογο.

Στην χρήση του μοντέλου k-ε, θεωρείται ότι η ροή είναι πλήρως τυρβώδης, και τα αποτελέσματα του μοριακού ιξώδους είναι αμελητέα. Συμπερασματικά το κοινό μοντέλο k-ε είναι έγκυρο μόνο σε πλήρως τυρβώδεις ροές.

#### Εξισώσεις μεταφοράς για το κοινό μοντέλο k-ε.

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια, k, και ο ρυθμός διασποράς της, ε, ανακτώνται από τις ακόλουθες εξισώσεις μεταφοράς:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (21)$$

και,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon \quad (22)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις το  $G_k$  αναπαριστά την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των μέσων κλίσεων ταχύτητας. Το  $Y_M$  αναπαριστά την συμβολή της διακύμανσης της διαστολής στη συμπιεστή τύρβη προς τον συνολικό ρυθμό διασποράς.  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$  και  $C_{3\epsilon}$  είναι σταθερές.  $\sigma_k$  και  $\sigma_\epsilon$  είναι οι τυρβώδεις αριθμοί Prandl για τα k και ε αντίστοιχα.  $S_k$  και  $S_\epsilon$  είναι οι πηγαίοι όροι που ορίζονται από το χρήστη σε κάθε διαφορετική περίπτωση επίλυσης προβλήματος υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.

#### Μοντελοποιώντας το τυρβώδες ιξώδες.

Το τυρβώδες ιξώδες αναταραχής,  $\mu_t$ , υπολογίζεται συνδυάζοντας τα k και ε ως ακολούθως:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (23)$$

Όπου  $C_\mu$  είναι μια σταθερά.

### Σταθερές μοντέλου

Οι σταθερές του μοντέλου  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$  και  $\sigma_\varepsilon$  έχουν τις ακόλουθες εξ ορισμού τιμές:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, \quad C_{2\varepsilon} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Αυτές οι τιμές έχουν καθοριστεί μέσω πειραμάτων με αέρα και νερό για θεμελιώδεις τυρβώδεις διατμητικές ροές, συμπεριλαμβανομένων των ομογενών διατμητικών ροών και ισοτροπικών τυρβωδών πλεγμάτων. Έχουν βρεθεί ότι λειτουργούν πολύ καλά σε ελεύθερες διατμητικές ροές ή και σε μεγάλη ποικιλία οριοθετημένων από τοίχο ροών.

#### 2.4.2 Το μοντέλο RNG k-ε

Το μοντέλο αυτό προέρχεται από τις στιγμιαίες Navier-Stokes εξισώσεις χρησιμοποιώντας τη μαθηματική τεχνική που ονομάζεται μέθοδοι επανακανονικοποίησης (RNG methods). Η ανάλυσή του οδηγεί σε ένα μοντέλο με σταθερές διαφορετικές από αυτές του κανονικού k-ε μοντέλου και υπάρχουν επιπλέον όροι και συναρτήσεις στις εξισώσεις μεταφοράς για τα k και ε.

#### Εξισώσεις μεταφοράς για το μοντέλο RNG k-ε.

Το μοντέλο RNG k-ε έχει παρόμοια μορφή με το κοινό μοντέλο k-ε:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_k \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (24)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\epsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} - R_\epsilon + S_\epsilon \quad (25)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις, το  $G_k$  αναπαριστά την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των κλίσεων μέσης ταχύτητας, το  $G_b$  είναι η παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας της αναταραχής λόγω άνωσης, το  $Y_M$  αναπαριστά την συμβολή της κυμαινόμενης διαστολής στην συμπιεστή τύρβη στον συνολικό ρυθμό διασποράς. Οι ποσότητες  $\alpha_k$  και  $\alpha_\epsilon$  είναι αντίστροφα αποτελεσματικοί αριθμοί Prandl για τα  $k$  και  $\epsilon$ , αντίστοιχα. Τα  $S_k$  και  $S_\epsilon$  είναι πηγαίοι όροι που ορίζονται από το χρήστη.

### Μοντελοποιώντας το αποτελεσματικό ιξώδες.

Η διαδικασία της εξάλειψης βαθμωτού στη θεωρία RNG καταλήγει σε μια διαφορική εξίσωση για το τυρβώδες ιξώδες:

$$d\left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right) = 1.72 \frac{\hat{\nu}}{\sqrt{\hat{\nu}^3 - 1 + C_\nu}} d\hat{\nu} \quad (26)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= \mu_{e\Pi} / \mu \\ C_\nu &\approx 100 \end{aligned}$$

Η εξίσωση 26 ενσωματώνεται για να έχουμε μια ακριβή περιγραφή του πώς η αποτελεσματική μεταφορά τύρβης ποικίλει με τον αποτελεσματικό αριθμό Reynolds (ή την κλίμακα δίνης), επιτρέποντας στο μοντέλο να διαχειριστεί καλύτερα χαμηλούς αριθμούς Reynolds και ροές κοντινές σε τοίχο.

Στο όριο του υψηλού αριθμού Reynolds, η εξίσωση 26 δίνει:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (27)$$

με το  $C_\mu = 0,0845$ , από τη θεωρία RNG. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι αυτή η τιμή του  $C_\mu$  είναι πολύ κοντά στην εμπειρική τιμή του 0,09 που χρησιμοποιείται στο κοινό μοντέλο  $k - \epsilon$ .

### Ρύθμιση Στροβιλισμού RNG.

Η τύρβη, γενικά, επηρεάζεται από την περιστροφή ή το στροβιλισμό στη μέση ροή. Το μοντέλο RNG παρέχει μια επιλογή για λογαριασμό των αποτελεσμάτων του στροβιλισμού ή της περιστροφής τροποποιώντας το τυρβώδες ιξώδες ανάλογα. Η τροποποίηση λαμβάνει την παρακάτω λειτουργική μορφή:

$$\mu_t = \mu_{t0} f\left(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\epsilon}\right) \quad (28)$$

Όπου το  $\mu_{t0}$  είναι η αξία του τυρβώδους ιξώδους, υπολογισμένη χωρίς την τροποποίηση του στροβιλισμού, χρησιμοποιώντας είτε την εξίσωση 26 ή την εξίσωση 27. Το  $\Omega$  είναι ένας χαρακτηριστικός αριθμός στροβιλισμού, και το  $\alpha_s$  είναι μια σταθερά στροβιλισμού που παίρνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με το αν η ροή διέπεται από στροβιλισμό ή αν είναι ηπίως στροβιλιζόμενη. Αυτή η τροποποίηση πάντα τίθεται σε ισχύ για συμμετρικές προς τους άξονες, στροβιλιζόμενες ροές και τρισδιάστατες ροές όταν το μοντέλο RNG επιλέγεται. Για ηπίως στροβιλιζόμενες ροές, το  $\alpha_s$  θέτεται στο 0,05. Για ισχυρά στροβιλιζόμενες ροές, εντούτοις, μια πιο υψηλή τιμή για το  $\alpha$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

### Υπολογίζοντας τους αντίστροφα αποτελεσματικούς αριθμούς Prandtl

Οι αντίστροφα αποτελεσματικοί αριθμοί Prandtl  $\alpha_k$  και  $\alpha_\epsilon$ , υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την ακόλουθη φόρμουλα που πηγάζει αναλυτικά από τη θεωρία RNG:

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha + 2.3929}{\alpha_0 + 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \quad (29)$$

Όπου το  $\alpha_0 = 1,0$ . Στο όριο υψηλού αριθμού Reynolds:

$$(\mu_{mol}/\mu_{eff} \ll 1), \alpha_k - \alpha_\epsilon \approx 1.393.$$

### Ο όρος $R_\epsilon$ στην εξίσωση $\epsilon$ .

Η κύρια διαφορά μεταξύ των μοντέλων k- $\epsilon$  και RNG βρίσκεται στον επιπρόσθετο όρο στην εξίσωση  $\epsilon$  που δίνεται από:

$$R_\epsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \epsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (30)$$

Όπου:

$$\eta = Sk/\epsilon, \eta_0 = 4.38, \beta = 0.012.$$

Τα αποτελέσματα αυτού του όρου στην RNG εξίσωση  $\epsilon$  μπορεί να φανεί πιο ξεκάθαρα αν γίνει αναδιάταξη της εξίσωσης 25. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 30, ο τρίτος και ο τέταρτος όρος της εξίσωσης 25 μπορούν να συγχωνευτούν και η εξίσωση  $\epsilon$  μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\epsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon}^* \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (31)$$

Όπου το  $C_{2\epsilon}^*$  δίνεται από:

$$C_{2\epsilon}^* \equiv C_{2\epsilon} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (32)$$

Σε περιοχές όπου  $\eta < \eta_0$  ο όρος  $R$  συνεισφέρει θετικά, και το  $C_{2\epsilon}^*$  γίνεται μεγαλύτερο από το  $C_{2\epsilon}$ . Στο λογαριθμικό στρώμα για παράδειγμα, μπορεί να δειχθεί ότι,  $n \approx 3.0$  δίνοντας  $C_{2\epsilon}^* = 2.0$ , το οποίο είναι κοντινό σε μέγεθος με την αξία του  $C_{2\epsilon}$  στο κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$ . Ως αποτέλεσμα, για αδύνατης ή μέτριας έντασης ροές, το μοντέλο RNG τείνει να δίνει αποτελέσματα πολύ κοντινά με αυτά του κοινού μοντέλου  $k-\epsilon$ .

Σε περιοχές με μεγάλο λόγο έντασης, παρόλα αυτά, ο όρος  $R$  συνεισφέρει αρνητικά, κάνοντας την αξία του  $C_{2\epsilon}^*$  μικρότερη από αυτή του  $C_{2\epsilon}$ . Συγκρινόμενο με το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$  η μικρότερη καταστροφή του  $\epsilon$  αυξάνει το  $\epsilon$ , μειώνοντας το  $k$ , και εν τέλει, το αποτελεσματικό ιξώδες. Ως αποτέλεσμα, σε ραγδαία εντεινόμενες ροές, το μοντέλο RNG αποδίδει ένα μικρότερο τυρβώδες ιξώδες από το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$ .

Έτσι το μοντέλο RNG είναι πιο ευαίσθητο στα αποτελέσματα της ραγδαίας έντασης και του εξορθολογισμού της καμπυλότητας των ροικών γραμμών από το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$ , γεγονός το οποίο εξηγεί την εξαιρετική απόδοση του μοντέλου RNG σε συγκεκριμένες τάξεις ροών.

### Σταθερές μοντέλου.

Οι σταθερές του μοντέλου προέρχονται από την αναλυτική λύση μέσω της θεωρίας RNG. Οι συνήθεις τιμές για διάφορα λογισμικά υπολ. Ρευστοδυναμικής είναι:

$$C_{1\varepsilon} = 1.42, \quad C_{2\varepsilon} = 1.68$$

### 2.4.3 Πραγματοποιήσιμο k-ε μοντέλο

Επιπρόσθετα στα βασικά και RNG k-ε μοντέλα τα περισσότερα λογισμικά υπολκής ρευστοδυναμικής προσφέρουν επίσης το αποκαλούμενο πραγματοποιήσιμο μοντέλο k-ε. Ο όρος «πραγματοποιήσιμο» σημαίνει ότι το μοντέλο ικανοποιεί συγκεκριμένους μαθηματικούς περιορισμούς στις κοινές τάσεις, που συμφωνούν με τη φυσική των τυρβωδών ροών. Για να το καταλάβει κανείς αυτό, συνδέει την σχέση Boussinesq και τον ορισμό του ιξώδους δίνης, για να αποκτήσει την ακόλουθη έκφραση για τις κανονικές τάσεις Reynolds σε ασυμπίεστες μέσες ροές:

$$\overline{u^2} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} \quad (33)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 33 για  $\nu_t = \mu_t/\rho$ , κανείς παίρνει το αποτέλεσμα ότι η κανονική τάση,  $\overline{u^2}$ , η οποία εξ ορισμού είναι μια θετική ποσότητα, γίνεται αρνητική π.χ. «όχι πραγματοποιήσιμη» όταν η ένταση είναι αρκετά μεγάλη για να ικανοποιήσει:

$$\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial x} > \frac{1}{3C_\mu} \approx 3.7 \quad (34)$$

Η έννοια του μεταβλητού  $C_\mu$  προτείνεται από πολλούς κατασκευαστές μοντέλων συμπεριλαμβανομένου και του Reynolds, και υποστηρίζεται από τα πειραματικά δεδομένα. Για παράδειγμα, το  $C_\mu$  έχει βρεθεί ότι βρίσκεται γύρω στο 0,09 στο εσωτερικό υπόστρωμα του οριακού στρώματος, και 0,05 σε μια δυνατή ομοιογενή διατμητική ροή. Μια άλλη αδυναμία του κοινού μοντέλου k-ε ή άλλων παραδοσιακών μοντέλων k-ε βρίσκεται στην μοντελοποιημένη εξίσωση για το ρυθμό διασκορπισμού ( $\varepsilon$ ). Η πολύ γνωστή ανωμαλία του κυκλικού τζέτ ρευστού (ονομασμένη βάση του ευρήματος ότι ο

ρυθμός εξάπλωσης στους επίπεδους πίδακες προβλέπεται πολύ καλά, αλλά η πρόβλεψη του ρυθμού εξάπλωσης για τις συμμετρικούς προς τους άξονες πίδακες είναι μη αναμενόμενα κακή) θεωρείται ότι είναι κυρίως εξαιτίας της μοντελοποιημένης εξίσωσης διασκορπισμού.

Το πραγματοποιήσιμο μοντέλο k-ε που προτάθηκε από τον Shih et al. είχε σκοπό να διορθώσει αυτές τις ελλείψεις των παραδοσιακών μοντέλων k-ε υιοθετώντας τα παρακάτω:

- Μια καινούρια φόρμουλα για το ιξώδες δίνης που συμπεριλαμβάνει την μεταβλητή  $C_\mu$  που προτάθηκε αρχικά από τον Reynolds,
- Μια καινούρια εξίσωση μοντέλου για τον διασκορπισμό ( $\epsilon$ ) βασισμένη στη δυναμική εξίσωση των μέσων τετραγώνων της διακύμανσης της στροβιλότητας.

### Εξισώσεις μεταφοράς για το πραγματοποιήσιμο μοντέλο k-ε

Οι μοντελοποιημένες εξισώσεις μεταφοράς για τα k και ε στο πραγματοποιήσιμο μοντέλο είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (35)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \epsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S_\epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu \epsilon}} + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} C_{3\epsilon} G_b + S_\epsilon \quad (36)$$

όπου

$$C_1 = \max \left[ 0.45, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = S \frac{k}{\epsilon}, \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$$

Σε αυτές τις εξισώσεις το  $G_k$  αναπαριστά την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των μέσων κλίσεων της ταχύτητας, το  $G_b$  είναι η παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας αναταραχής λόγω άνωσης, το  $Y_M$  αναπαριστά την συνεισφορά της κυμαινόμενης διαστολής της συμπιεστής τύρβης στον συνολικό ρυθμό διασποράς.

Οι  $C_2$  και  $C_{1\epsilon}$  είναι σταθερές.  $\sigma_k$  και  $\sigma_\epsilon$  είναι οι τυρβώδεις αριθμοί Prandtl για τα k και ε αντίστοιχα. Τα  $S_k$  και  $S_\epsilon$  είναι πηγαίοι όροι που ορίζονται από το χρήστη.

Η εξίσωση  $k$  είναι η ίδια με αυτή στο κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$  και στο RNG  $k-\epsilon$ , εκτός των σταθερών των μοντέλων. Παρόλα αυτά η μορφή της εξίσωσης  $\epsilon$  είναι αρκετά διαφορετική από αυτές στο κοινό  $k-\epsilon$  και RNG  $k-\epsilon$ . Ένα από τα αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά είναι το ότι ο όρος της παραγωγής στην εξίσωση  $\epsilon$  δεν περιλαμβάνει την παραγωγή του  $k$ . Π.χ. δεν περιλαμβάνει τον ίδιο όρο  $G$  όπως τα άλλα μοντέλα  $k-\epsilon$ . Πιστεύεται ότι η παρούσα μορφή αναπαριστά καλύτερα την φασματική μεταφορά ενέργειας. Ένα άλλο επιθυμητό χαρακτηριστικό είναι ότι ο όρος καταστροφής δεν έχει καμιά μοναδικότητα. Π.χ. ο παρονομαστής δεν εξαφανίζεται ποτέ, ακόμα και όταν το  $G_k$  χάνεται ή γίνεται μικρότερο από το μηδέν. Αυτό το χαρακτηριστικό αντιτίθεται στα παραδοσιακά μοντέλα  $k-\epsilon$ , τα οποία έχουν μοναδικότητα λόγω του  $k$  στον παρονομαστή.

Αυτό το μοντέλο έχει επικυρωθεί εκτενώς για ένα ευρύ φάσμα ροών, συμπεριλαμβανομένων και των ομογενοποιημένων διατμητικών ροών, των ελεύθερων ροών όπως οι πίδακες και τα αναμιγμένα στρώματα, των ροών καναλιού και οριακού στρώματος και των διαχωρισμένων ροών. Για όλες αυτές τις περιπτώσεις, η απόδοση του μοντέλου είναι σημαντικά καλύτερη από αυτή του κοινού μοντέλου  $k-\epsilon$ . Ειδικά αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το πραγματοποιήσιμο μοντέλο  $k-\epsilon$  επιλύει την ανωμαλία του κυκλικού τζέτ. Π.χ. προβλέπει το ρυθμό διασποράς για τους αξονοσυμμετρικούς τόσο καλά όσο καθώς και για τα επίπεδα τζέτ.

### Μοντελοποιώντας το τυρβώδες ιξώδες.

Όπως και στα άλλα μοντέλα  $k-\epsilon$  το ιξώδες δίνης υπολογίζεται από:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (37)$$

Η διαφορά μεταξύ του πραγματοποιήσιμου μοντέλου  $k-\epsilon$  και των υπολοίπων είναι ότι το  $C_\mu$  δεν είναι πλέον σταθερά. Υπολογίζεται από:

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\epsilon}} \quad (38)$$

Όπου:

$$U^* \equiv \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij}} \quad (39)$$



και

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{ij} &= \Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk}\omega_k \\ \Omega_{ij} &= \bar{\Omega}_{ij} - \epsilon_{ijk}\omega_k\end{aligned}$$

Όπου το  $\bar{\Omega}_{ij}$  είναι ο ταχυστής του μέσου ρυθμού περιστροφής που απαντάται σε ένα περιστρεφόμενο πλαίσιο αναφοράς μαζί με την γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Οι μεταβλητές του μοντέλου  $A_0$  και  $A_s$  δίνονται από:

$$A_0 = 4.04, \quad A_s = \sqrt{6} \cos \phi$$

όπου

$$\phi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6}W), \quad W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\xi^3}, \quad \xi = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Φαίνεται ότι το  $C_\mu$  είναι μια συνάρτηση των ρυθμών της μέσης έντασης και περιστροφής, της γωνιακής ταχύτητας της περιστροφής του συστήματος, και των τυρβωδών πεδίων ( $k$  και  $\epsilon$ ). Το  $C_\mu$  στην εξίσωση 37 παίρνει την αρχική αξία 0,09 για ένα εσωτερικό υπόστρωμα σε ένα ισοζυγισμένο οριακό στρώμα.

### Σταθερές μοντέλου.

Οι σταθερές του μοντέλου  $C_2$ ,  $\sigma_k$  και  $\sigma_\epsilon$  έχουν εισαχθεί για την διασφάλιση της καλής απόδοσης του μοντέλου για κάποιες κανονικές ροές. Οι σταθερές του μοντέλου είναι:

$$C_{1\epsilon} = 1.44, \quad C_2 = 1.9, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.2$$

#### 2.4.4 Μοντελοποιώντας την τυρβώδη παραγωγή στα μοντέλα k-ε.

Ο όρος  $G_k$ , που αναπαριστά την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας, μοντελοποιείται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο στα μοντέλα κοινό, RNG και στο πραγματοποιήσιμο k-ε. Από την ακριβή εξίσωση για τη μεταφορά του  $k$ , αυτός ο όρος μπορεί να οριστεί ως:

$$G_k = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (40)$$

Για να αξιολογήσουμε το  $G_k$  με ένα τρόπο που να συμφωνεί με την υπόθεση Boussinesq

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (41)$$

Όπου το  $S$  είναι το μέτρο του τανυστή της μέσης έντασης, που ορίζεται ως:

$$S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (42)$$

#### 2.4.5 Επίδραση της άνωσης στην τύρβη στα μοντέλα k-ε.

Όταν ένα μη μηδενικό βαρυτικό πεδίο και μια κλίση θερμοκρασίας είναι παρόντα ταυτόχρονα, τα μοντέλα k-ε λογαριάζουν την παραγωγή του k λόγω άνωσης.

Η παραγωγή τύρβης λόγω άνωσης δίνεται από:

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (43)$$

Όπου το  $Pr_t$  είναι ο τυρβώδης αριθμός Prandtl για την ενέργεια και το  $g_i$ , είναι το συστατικό του βαρυτικού διανύσματος στην  $i$  κατεύθυνση. Για το κοινό και το πραγματοποιήσιμο k-ε μοντέλο RNG η εξ' ορισμού τιμή για το  $Pr_t$  είναι 0,85. Στην περίπτωση του μοντέλου RNG k-ε μοντέλου, ,  $Pr_t=1/\alpha$ , όπου  $\alpha$  δίνεται από την εξίσωση 29, αλλά με  $\alpha_0=1/Pr_t=k/\mu c_p$ . Ο συντελεστής της θερμικής διαστολής,  $\beta$ , ορίζεται ως:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (44)$$

Για ιδανικά αέρια, η εξίσωση 43 γίνεται:

$$G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho Pr_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (45)$$

Είναι εμφανές από τις εξισώσεις μεταφοράς για το  $k$  ότι η τυρβώδης κινητική ενέργεια τείνει να αυξάνεται ( $G_b > 0$ ) σε ασταθή διαστρωμάτωση. Για σταθερή διαστρωμάτωση, η άνωση τείνει να καταστέλλει την τύρβη ( $G_b < 0$ ). Στα συνήθη λογισμικά η επίδραση της άνωσης στην παραγωγή του  $k$  πάντα περιλαμβάνεται όταν έχεις και ένα πεδίο μηδενικής βαρύτητας και μια κλίση μη μηδενικής θερμοκρασίας (ή πυκνότητας).

Ενώ τα αποτελέσματα της άνωσης στην παραγωγή του  $k$  είναι σχετικά κατανοητά, το αποτέλεσμα στο  $\epsilon$  είναι λιγότερο ξεκάθαρο. Στα εμπορικά λογισμικά, εξ ορισμού, τα αποτελέσματα της άνωσης στο  $\epsilon$  παραμελούνται απλώς με το να θέσεις το  $G_b = 0$  στην εξίσωση μεταφοράς για το  $\epsilon$ .

Ο βαθμός με τον οποίο επηρεάζεται το  $\epsilon$  από την πλευστότητα, προσδιορίζεται από την σταθερά  $C_{3\epsilon}$ . Το  $C_{3\epsilon}$  δεν καθορίζεται, αλλά υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$C_{3\epsilon} = \tanh \left| \frac{v}{u} \right| \quad (46)$$

Όπου το  $u$  είναι το συστατικό της ταχύτητας της ροής κάθετα στο διάνυσμα της βαρύτητας. Με αυτό τον τρόπο το  $C_{3\epsilon}$  θα γίνει 1 για ανωστικά διατμητικά στρώματα, για τα οποία η κατεύθυνση της κύριας ροής ευθυγραμμίζεται με την κατεύθυνση της βαρύτητας. Για ανωστικά διατμητικά στρώματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα της βαρύτητας, το  $C_{3\epsilon}$  γίνεται 0.

#### 2.4.6 Επίδραση της συμπιεστότητας στη τύρβη στα μοντέλα $k-\epsilon$ .

Για ροές υψηλού αριθμού Mach, η συμπιεστότητα επηρεάζει την τύρβη μέσω της αποκαλούμενης «διαστολής της διασποράς», η οποία κανονικά δεν λαμβάνεται υπ όψιν στην κατασκευή μοντέλων ασυμπίεστων ροών. Μη λαμβάνοντας υπ όψιν την διαστολή της διασποράς αποτυγχάνει να προβλέψει την μείωση που παρατηρείται στο ρυθμό εξάπλωσης με το να αυξάνουμε τον αριθμό Mach για τη συμπιεστή ανάμιξη και τα άλλα ελεύθερα διατμητικά στρώματα. Για να διορθωθούν αυτά τα αποτελέσματα στα μοντέλα  $k-\epsilon$ , ο όρος της διαστολής της διασποράς,  $Y_M$ , συμπεριλαμβάνεται στην εξίσωση του  $k$ . Αυτός ο όρος μοντελοποιείται ανάλογα με μια πρόταση από τον Sarkar:

$$Y_M = 2\rho\epsilon M_t^2 \quad (47)$$

Όπου το  $M_t$  είναι ο τυρβώδης αριθμός Mach ,που ορίζεται ως:

$$M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}} \quad (48)$$

Όπου :

$$a (\equiv \sqrt{\gamma RT})$$

είναι η ταχύτητα του ήχου.

Αυτή η ρύθμιση της συμπιεστότητας πάντα λαμβάνει χώρα όταν χρησιμοποιείται η συμπιεστή μορφή του ιδανικού αερίου.

#### 2.4.7 Μοντελοποιώντας την επαγωγική θερμότητα και τη μαζική μεταφορά στα μοντέλα k-ε.

Η τυρβώδης μεταφορά θερμότητας μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας την έννοια της αναλογίας Reynolds στην τυρβώδη μεταφορά ορμής. Η «μοντελοποιημένη» ενεργειακή εξίσωση δίνεται από τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i}[u_i(\rho E + p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_i(\tau_{ij})_{\text{eff}} \right) + S_h \quad (49)$$

Όπου το  $E$  είναι η συνολική ενέργεια,  $k$  είναι η αποτελεσματική, θερμική αγωγιμότητα, και  $(\tau_{ij})_{\text{eff}}$  είναι ο τανυστής τάσης της απόκλισης, που ορίζεται ως:

$$(\tau_{ij})_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Ο όρος που περιλαμβάνει το  $(\tau_{ij})_{\text{eff}}$  αναπαριστά την τυρβώδη θέρμανση, και πάντα υπολογίζεται μέσα στους πεπλεγμένους επιλύτες.

Για τα κοινό και πραγματοποιήσιμο μοντέλα k-ε, η αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα δίνεται από:

$$k_{\text{eff}} = k + \frac{\rho \sum_i Y_i D_i}{Pr_i}$$

Όπου το k σε αυτή την περίπτωση είναι η θερμική αγωγιμότητα. Η εξ' ορισμού τιμή του αριθμού Prandtl στην αναταραχή είναι 0,85. Για το μοντέλο RNG k-ε η αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα είναι:

$$k_{\text{eff}} = \alpha C_p \mu_{\text{eff}}$$

Όπου το α υπολογίζεται από την εξίσωση 29, αλλά με  $\alpha_0 = 1/Pr = k/\mu c_p$ .

Το γεγονός ότι το α ποικίλει με  $\mu_{\text{mol}}/\mu_{\text{eff}}$  είναι πλεονέκτημα για το μοντέλο RNG k-ε. Έρχεται σε συμφωνία με τα πειραματικά στοιχεία που υποδεικνύουν ότι ο τυρβώδης αριθμός αναταραχής Prandtl ποικίλει με τον μοριακό αριθμό Prandtl και την τύρβη. Η εξίσωση 29 δουλεύει πολύ καλά με ένα μεγάλο εύρος μοριακών αριθμών Prandtl από υγρά μέταλλα ( $Pr=10^{-2}$ ) έως παραφινέλαια ( $Pr=10^3$ ), γεγονός που επιτρέπει τον υπολογισμό της μεταφοράς θερμότητας σε περιοχές χαμηλού αριθμού Reynolds. Η εξίσωση 29 προβλέπει ομαλά την μεταβολή των μοριακών αριθμών Prandtl από μια μοριακή αξία ( $\alpha=1/Pr$ ) στην περιοχή που κυριαρχείται από το ιξώδες, έως την τιμή πλήρους τύρβης ( $\alpha=1,939$ ) σε περιοχές πλήρους τυρβώδους ροής. Η μεταφορά μάζας στην τύρβη αντιμετωπίζεται ανάλογα. Για τα κοινό και πραγματοποιήσιμο μοντέλα, ο αρχικός αριθμός Schmidt αναταραχής είναι 0,7. Για το μοντέλο RNG, η αποτελεσματική διάχυση της τύρβης για τη μεταφορά της μάζας υπολογίζεται με τρόπο ανάλογο της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για τη μεταφορά θερμότητας. Η αξία του α στην εξίσωση 29 είναι  $\alpha_0 = 1/Sc$ , όπου Sc ο μοριακός αριθμός Schmidt.

## 2.5 Το κοινό και SST k-ω μοντέλα

Αυτή η ενότητα παρουσιάζει το κοινό και το SST k-ω μοντέλα. Και τα δύο μοντέλα έχουν παρόμοια μορφή, με εξισώσεις μεταφοράς για τα k και ω. Οι κυριότερες διαφορές των δύο μοντέλων είναι οι ακόλουθες:

- Βαθμιαία αλλαγή από το κοινό μοντέλο k-ω στην εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος σε μια έκδοση του μοντέλου k-ε υψηλού αριθμού Reynolds στο εξωτερικό μέρος του οριακού στρώματος.

- Τροποποιημένος σχηματισμός του τυρβώδους ιξώδους για να αντισταθμίσει τα αποτελέσματα της μεταφοράς της κυρίας τυρβώδους διατμητικής τάσης.

Οι εξισώσεις μεταφοράς, οι μέθοδοι υπολογισμού του τυρβώδους ιξώδους και οι μέθοδοι υπολογισμού των σταθερών του μοντέλου και άλλων όρων, παρουσιάζονται ξεχωριστά για το κάθε μοντέλο.

### 2.5.1 Το κοινό μοντέλο k-ω.

Το κοινό μοντέλο k-ω είναι ένα εμπειρικό μοντέλο, βασισμένο στις εξισώσεις μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας (k) και του ειδικού ρυθμού διάχυσης (ω), οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν και ως ο λόγος του ε προς το k.

Καθώς το μοντέλο k-ω τροποποιείται με την πάροδο των ετών, όροι παραγωγής έχουν προστεθεί και στις δύο εξισώσεις, οι οποίοι έχουν βελτιώσει την ακρίβεια του μοντέλου στον υπολογισμό των ελεύθερων διατμητικών ροών.

#### Εξισώσεις μεταφοράς για το κοινό μοντέλο k-ω.

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια, k, και ο ειδικός ρυθμός διάχυσης, ω, δίνονται από:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (50)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega \quad (51)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις, το  $G_k$  αναπαριστά την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας εξ αιτίας των διαβαθμίσεων της μέσης ταχύτητας. Το  $G_\omega$  αναπαριστά την παραγωγή του ω.  $\Gamma_k$  και  $\Gamma_\omega$  αναπαριστούν την αποτελεσματική διασπορά του k και του ω αντίστοιχα. Τα  $Y_k$  και  $Y_\omega$  αναπαριστούν την διάχυση του k και ω λόγω της τύρβης. Όλοι οι παραπάνω όροι υπολογίζονται όπως περιγράφεται παρακάτω. Τα  $S_k$  και  $S_\omega$  είναι πηγαίοι όροι που ορίζονται από το χρήστη.

#### Μοντελοποιώντας την αποτελεσματική διασπορά.

Οι αποτελεσματικές διασπορές για το μοντέλο k-ω δίνονται από:

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \\ \Gamma_\omega &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega}\end{aligned}\tag{52}$$

Όπου  $\sigma_k$  και  $\sigma_\omega$  είναι τυρβώδεις αριθμοί Prandtl για τα  $k$  και  $\omega$  αντίστοιχα. Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$ , υπολογίζεται συνδυάζοντας τα  $k$  και  $\omega$  όπως παρακάτω:

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}\tag{53}$$

### Διόρθωση χαμηλού αριθμού Reynolds.

Ο συντελεστής  $\alpha^*$  αποσβένει το τυρβώδες ιξώδες προκαλώντας μια διόρθωση του χαμηλού αριθμού Reynolds. Αυτή δίνεται από:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left( \frac{\alpha_0^* + Re_t/R_k}{1 + Re_t/R_k} \right)\tag{54}$$

Όπου:

$$\begin{aligned}Re_t &= \frac{\rho k}{\mu\omega} \\ R_k &= 6 \\ \alpha_0^* &= \frac{\beta_i}{3} \\ \beta_i &= 0.072\end{aligned}\tag{55}$$

Στην υψηλού αριθμού Reynolds μορφή του μοντέλου  $k - \omega$ ,  $\alpha^* = \alpha_\infty^* = 1$ .

### Μοντελοποιώντας την τυρβώδη παραγωγή.

- Παραγωγή του  $k$

Ο όρος  $G_k$  αναπαριστά την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Από την ακριβή εξίσωση για την μεταφορά του  $k$ , αυτός ο όρος μπορεί να οριστεί ως:

$$G_k = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (56)$$

Για να αξιολογήσουμε το  $G_k$  με τρόπο που συμβαδίζει με την υπόθεση Boussinesq:

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (57)$$

Όπου το  $S$  είναι ο συντελεστής του τανυστής του μέσου ρυθμού έντασης, που προσδιορίζεται με τον ίδιο τρόπο με το μοντέλο  $k-\epsilon$ .

- **Παραγωγή του  $\omega$**

Η παραγωγή του  $\omega$  δίνεται από:

$$G_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} G_k \quad (58)$$

Όπου το  $G_k$  δίνεται από την εξίσωση 56. Ο συντελεστής  $\alpha$  δίνεται από:

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + Re_t/R_\omega}{1 + Re_t/R_\omega} \right) \quad (59)$$

Όπου το  $R_\omega=2,95$ . Τα  $\alpha^*$  και  $Re_t$  δίνονται από τις εξισώσεις 54 και 55, αντίστοιχα. Σημειώστε ότι, στην υψηλού αριθμού Reynolds μορφή του μοντέλου  $k-\omega$ ,  $\alpha=\alpha_\infty=1$ .

### Μοντελοποιώντας την τυρβώδη διασπορά.

- **Διασπορά του  $k$**

Η διασπορά του  $k$  δίνεται από:

$$Y_k = \rho \beta^* f_{\beta^*} k \omega \quad (60)$$



Όπου:

$$f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \chi_k \leq 0 \\ \frac{1+680\chi_k^2}{1+400\chi_k^2} & \chi_k > 0 \end{cases} \quad (61)$$

Όπου:

$$\chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (62)$$

και

$$\begin{aligned} \beta^* &= \beta_i^* [1 + \zeta^* F(M_t)] \\ \beta_i^* &= \beta_\infty^* \left( \frac{4/15 + (Re_t/R_\beta)^4}{1 + (Re_t/R_\beta)^4} \right) \\ \zeta^* &= 1.5 \\ R_\beta &= 8 \\ \beta_\infty^* &= 0.09 \end{aligned} \quad (63)$$

Όπου το  $Re_t$  δίνεται από την εξίσωση 55.

- **Διασπορά του  $\omega$**

Η διασπορά του  $\omega$  δίνεται από:

$$Y_\omega = \rho \beta f_\beta \omega^2 \quad (64)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} f_\beta &= \frac{1 + 70\chi_\omega}{1 + 80\chi_\omega} \\ \chi_\omega &= \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_\infty^*\omega)^3} \right| \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

Ο ταυστής του ρυθμού έντασης,  $S_{ij}$ , ορίζεται στην εξίσωση 15. Επίσης,

$$\beta = \beta_i \left[ 1 - \frac{\beta_i^*}{\beta_i} \zeta^* F(M_t) \right] \quad (66)$$

Τα  $\beta_i^*$  και  $F(M_t)$  ορίζονται από τις εξισώσεις 63 και 67, αντίστοιχα.

- **Διόρθωση συμπίεστικότητας.**

Η συνάρτηση της συμπίεστικότητας,  $F(M_t)$ , δίνεται από:

$$F(M_t) = \begin{cases} 0 & M_t \leq M_{t0} \\ M_t^2 - M_{t0}^2 & M_t > M_{t0} \end{cases} \quad (67)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} M_t^2 &\equiv \frac{2K}{a^2} \\ M_{t0} &= 0.25 \\ a &= \sqrt{\gamma RT} \end{aligned} \quad (68)$$

Στην υψηλού αριθμού Reynolds μορφή του μοντέλου k- $\omega$ ,  $\beta_i^* = \beta_\infty^*$ . Στην ασυμπίεστη μορφή,  $\beta^* = \beta_i^*$ .

**Σταθερές μοντέλου.**

$$\begin{aligned} \alpha_\infty^* &= 1, \quad \alpha_{k,0} = 0.52, \quad \alpha_0 = \frac{1}{9}, \quad \beta_\infty^* = 0.09, \quad \beta_k = 0.072, \quad R_\beta = 8 \\ R_\xi &= 6, \quad R_\omega = 2.95, \quad C^* = 1.5, \quad M_{t0} = 0.25, \quad \sigma_k = 2.0, \quad \sigma_\omega = 2.0 \end{aligned}$$

**Οριακές Συνθήκες σε τοίχο.**

Οι οριακές συνθήκες σε τοίχο για την εξίσωση k στα μοντέλα k- $\omega$  αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως η εξίσωση k, όταν ενισχυμένοι τρόποι αντιμετώπισης τοίχων χρησιμοποιούνται με τα μοντέλα k- $\epsilon$ . Αυτό σημαίνει ότι όλες οι οριακές συνθήκες για τα πλέγματα συναρτήσεων τοίχου θα αντιστοιχούν στην προσέγγιση συνάρτησης τοίχου, ενώ για τα λεπτά πλέγματα, οι χαμηλού αριθμού Reynolds οριακές συνθήκες θα χρησιμοποιηθούν.

Στα εμπορικά λογισμικά η τιμή του  $\omega$  στον τοίχο δίνεται από:

$$\omega_w = \frac{\rho (u^*)^2}{\mu} \omega^+ \quad (69)$$

Η ασυμπτωτική τιμή του  $\omega^+$  στο στρωτό υπόστρωμα δίνεται από:

$$\omega^+ = \min \left( \omega_w^+, \frac{6}{\beta_i (y^+)^2} \right) \quad (70)$$

Όπου:

$$\omega_w^+ = \begin{cases} \left( \frac{50}{k_s^+} \right)^2 & k_s^+ < 25 \\ \frac{100}{k_s^+} & k_s^+ \geq 25 \end{cases} \quad (71)$$

Όπου:

$$k_s^+ = \max \left( 1.0, \frac{\rho k_s u^*}{\mu} \right) \quad (72)$$

Και το  $k_s$  είναι το ύψος της τραχύτητας.

Στην λογαριθμική (ή τυρβώδη) περιοχή, η τιμή του  $\omega^+$  είναι:

$$\omega^+ = \frac{1}{\sqrt{\beta_\infty^*}} \frac{du_{\text{turb}}^+}{dy^+} \quad (73)$$

Το οποίο οδηγεί στην αξία του  $\omega$  στο κελί του τοίχου ως:

$$\omega = \frac{u^*}{\sqrt{\beta_\infty^*} \kappa y} \quad (74)$$

### 2.5.2 Το SST μοντέλο k- $\omega$ μοντέλο.

Σε αντίθεση με το κοινό μοντέλο k- $\omega$  που περιγράφεται στην παράγραφο 2.5.1, υπάρχει και μια παραλλαγή που αποκαλείται SST k- $\omega$  μοντέλο, διότι ο ορισμός του τυρβώδους ιξώδους τροποποιείται για να ληφθεί υπόψη για την μεταφορά της κυρίας τυρβώδους διαμητρικής τάσης. Είναι αυτό το χαρακτηριστικό που δίνει στο μοντέλο SST k- $\omega$  ένα πλεονέκτημα σε όρους απόδοσης σε σχέση με τα κοινά μοντέλα k- $\epsilon$  και k- $\omega$ . Άλλες μετατροπές περιλαμβάνουν την προσθήκη ενός όρου διάχυσης στην εξίσωση  $\omega$  και μια συνάρτηση ανάμειξης για τη διασφάλιση της σωστής λειτουργίας των εξισώσεων του μοντέλου στα πεδία κοντά και μακριά από τον τοίχο.

### Εξισώσεις μεταφοράς για το μοντέλο SST k-ω.

Το μοντέλο SST k-ω έχει παρόμοια μορφή με το κοινό μοντέλο k – ω:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \bar{G}_k - Y_k + S_k \quad (75)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega \quad (76)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις το  $\bar{G}_k$  αναπαριστά την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των κλίσεων της μέσης ταχύτητας, το  $G_\omega$  αναπαριστά την παραγωγή του  $\omega$ , τα  $\Gamma_k$  και  $\Gamma_\omega$  αναπαριστούν την ενεργή διάχυση των  $k$  και  $\omega$ , αντίστοιχα. Τα  $Y_k$  και  $Y_\omega$  αναπαριστούν τη διασπορά των  $k$  και  $\omega$  λόγω της τύρβης. Το  $D_\omega$  αναπαριστά τον όρο της διασποράς που υπολογίζεται κατά τις περιγραφές παρακάτω. Τα  $S_k$  και  $S_\omega$  είναι πηγαίοι όροι που ορίζονται από το χρήστη.

### Μοντελοποιώντας την ενεργή διάχυση.

Οι ενεργές διαχύσεις για το μοντέλο SST δίνονται από:

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \\ \Gamma_\omega &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \end{aligned} \quad (77)$$

Όπου τα  $\sigma_k$  και  $\sigma_\omega$  είναι οι τυρβώδεις αριθμοί Prandtl για τα  $k$  και  $\omega$ , αντίστοιχα. Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$  υπολογίζεται κατά το:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left[ \frac{1}{\alpha^*}, \frac{S F_k}{\alpha_1 \omega} \right]} \quad (78)$$

Όπου το  $S$  είναι το μέγεθος του ρυθμός έντασης και:

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \frac{1}{F_1/\sigma_{k,1} + (1 - F_1)/\sigma_{k,2}} \\ \sigma_\omega &= \frac{1}{F_1/\sigma_{\omega,1} + (1 - F_1)/\sigma_{\omega,2}}\end{aligned}\quad (79)$$

Οι συναρτήσεις ανάμειξης,  $F_1$  και  $F_2$ , δίνονται από:

$$\begin{aligned}F_1 &= \tanh(\Phi_1^4) \\ \Phi_1 &= \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2} \right] \\ D_\omega^+ &= \max \left[ 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2} \omega} \frac{1}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}, 10^{-10} \right] \\ F_2 &= \tanh(\Phi_2^2) \\ \Phi_2 &= \max \left[ 2 \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right]\end{aligned}$$

(80)

Όπου το  $y$  είναι η απόσταση μέχρι την επόμενη επιφάνεια και το  $D_\omega^+$  είναι το θετικό μέρος του όρου διασποράς.

### Μοντελοποιώντας την τυρβώδη παραγωγή.

- **Παραγωγή του  $k$**

Ο όρος  $\bar{G}_k$  παριστάνει την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και προσδιορίζεται σαν:

$$\bar{G}_k = \min(G_k, 10\rho\beta^* k\omega) \quad (81)$$

Όπου το  $G_k$  προσδιορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο κανονικό  $k$ - $\omega$  μοντέλο.

- **Παραγωγή του  $\omega$ .**

Ο όρος  $G_\omega$  αναπαριστά την παραγωγή του  $\omega$  και δίνεται από:

$$G_\omega = \frac{\alpha}{\nu_t} G_k \quad (82)$$

Αυτή η διατύπωση διαφέρει από το κοινό μοντέλο  $k-\omega$ . Η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων επίσης βρίσκεται στον τρόπο που ο όρος  $a_\infty$  αξιολογείται. Στο κοινό μοντέλο  $k-\omega$ , το  $a_\infty$  ορίζεται ως σταθερά (= 0,52). Για το μοντέλο SST  $k-\omega$ , το  $a_\infty$  δίνεται από:

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty,1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty,2} \quad (83)$$

Όπου:

$$\alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{w,1} \sqrt{\beta_\infty^*}}$$

$$\alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{w,2} \sqrt{\beta_\infty^*}} \quad (84)$$

Όπου το  $\kappa$  είναι 0,41.

### Μοντελοποιώντας την τυρβώδη διασπορά.

- **Διασπορά του  $k$**

Ο όρος  $Y_k$  αναπαριστά την διασπορά της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, και ορίζεται με ένα παρόμοιο με το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$  τρόπο. Η διαφορά βρίσκεται στον τρόπο που ο όρος  $f_{\beta^*}$  αξιολογείται. Στο κοινό μοντέλο  $k-\omega$ , ο όρος  $f_{\beta^*}$  ορίζεται ως μια συνάρτηση. Για το μοντέλο SST  $k-\omega$ , το  $f_{\beta^*}$  είναι μια σταθερά ίση με 1, άρα:

$$Y_k = \rho \beta^* k \omega \quad (85)$$

- **Διασπορά του  $\omega$**

Ο όρος  $Y_\omega$  αναπαριστά τη διασπορά του  $\omega$ , και ορίζεται με ένα παρόμοιο με το κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$  τρόπο. Η διαφορά είναι ο τρόπος που οι όροι  $\beta_i$  και  $f_\beta$  αξιολογούνται. Στο κοινό μοντέλο  $k-\omega$ , το  $\beta_i$  ορίζεται ως σταθερά (= 0,072) και το  $f_\beta$  ορίζεται από σχετική προηγούμενη εξίσωση. Για το μοντέλο SST  $k-\omega$ , το  $f$  είναι σταθερά ίση με 1. Έτσι:

$$Y_k = \rho \beta \omega^2 \quad (86)$$

Αντί να έχουμε μια σταθερή τιμή, το  $\beta_i$  δίνεται από:

$$\beta_i = F_1 \beta_{i,1} + (1 - F_1) \beta_{i,2} \quad (87)$$

Και το  $F_1$  λαμβάνεται από την σχετική εξίσωση.

### Διαμόρφωση διασταυρούμενης διάχυσης.

Το μοντέλο SST k- $\omega$  βασίζεται και στο κοινό μοντέλο k –  $\omega$  και στο κοινό μοντέλο k–  $\epsilon$ . Για να αναμειχθούν αυτά τα δυο μοντέλα, το κοινό μοντέλο k –  $\epsilon$  έχει μετατραπεί σε εξισώσεις βασισμένες στα k και  $\omega$ , το οποίο οδηγεί στην εισαγωγή ενός όρου διασταυρούμενης διάχυσης  $D_\omega$ . Το  $D_\omega$  ορίζεται ως:

$$D_\omega = 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (88)$$

### Σταθερές μοντέλου.

$$\sigma_{k,1} = 1.176, \quad \sigma_{\omega,1} = 2.0, \quad \sigma_{k,2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega,2} = 1.168$$

$$\alpha_1 = 0.31, \quad \beta_{k,1} = 0.075, \quad \beta_{k,2} = 0.0828$$

Όλες οι επιπρόσθετες σταθερές μοντέλου έχουν τις ίδιες τιμές όπως στο κοινό μοντέλο k-  $\omega$ .

### 2-6 Το μοντέλο τάσης Reynolds.

Το μοντέλο έντασης Reynolds περιλαμβάνει τον υπολογισμό των μεμονωμένων τάσεων Reynolds,  $\overline{u_i' u_j'}$  χρησιμοποιώντας διαφορικές εξισώσεις μεταφοράς. Οι μεμονωμένες τάσεις Reynolds χρησιμοποιούνται για να εξασφαλίσουμε κλείσιμο των εξισώσεων ορμής των μέσων Reynolds.

Η ακριβής μορφή των εξισώσεων μεταφοράς τάσεων Reynolds μπορεί να αναδειχθεί παίρνοντας στιγμές από τις ακριβείς εξισώσεις ορμής. Αυτή είναι μια διαδικασία κατά την οποία οι ακριβείς εξισώσεις ορμής πολλαπλασιάζονται με μια κυμαινόμενη ιδιότητα, έπειτα το προϊόν υπολογίζεται κατά μέσο όρο Reynolds. Δυστυχώς αρκετοί από τους όρους στην ακριβή εξίσωση είναι άγνωστοι και οι υποθέσεις μοντελοποίησης απαιτούνται για να κλείσουν οι εξισώσεις.

Σε αυτόν τον τομέα, οι εξισώσεις μεταφοράς τάσης Reynolds παρουσιάζονται μαζί με τις υποθέσεις μοντελοποίησης που απαιτούνται για να εξασφαλιστεί το κλείσιμο.

### 2.6.1 Οι εξισώσεις μεταφοράς τάσης Reynolds.

Οι ακριβείς εξισώσεις μεταφοράς για τη μεταφορά των τάσεων Reynolds, μπορούν να γραφτούν ως:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{u'_i u'_j})}_{\text{Local Time Derivative}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k \overline{u'_i u'_j})}_{C_{ij} \equiv \text{Convection}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'_i u'_j u'_k} + p (\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j) \right]}_{D_{T,ij} \equiv \text{Turbulent Diffusion}} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right]}_{D_{L,ij} \equiv \text{Molecular Diffusion}} - \underbrace{\rho \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij} \equiv \text{Stress Production}} - \underbrace{\rho \beta (g_i \overline{u'_j \theta} + g_j \overline{u'_i \theta})}_{G_{ij} \equiv \text{Buoyancy Production}} \\
 & + \underbrace{p \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij} \equiv \text{Pressure Strain}} - \underbrace{2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}_{\epsilon_{ij} \equiv \text{Dissipation}} \\
 & + \underbrace{-2\rho \Omega_k (\overline{u'_j u'_m} \epsilon_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} \epsilon_{jkm})}_{F_{ij} \equiv \text{Production by System Rotation}} + \underbrace{S_{user}}_{\text{User-Defined Source Term}}
 \end{aligned} \tag{89}$$

Από τους διάφορους όρους σε αυτές τις εξισώσεις, οι  $C_{ij}, D_{L,ij}, P_{ij}$  και  $F_{ij}$  δεν απαιτούν μοντελοποίηση. Παρόλα αυτά οι  $D_{T,ij}, \phi_{ij}$ , και  $\epsilon_{ij}$  χρειάζεται να μοντελοποιηθούν για να κλείσει η ομάδα εξισώσεων.

### 2.6.2 Μοντελοποιώντας την μεταφορά τυρβώδους διάχυσης.

Το  $D_{T,ij}$  μπορεί να μοντελοποιηθεί από το γενικευμένο μοντέλο κλίσης της διάχυσης των Daly και Harlow:

$$D_{T,ij} = C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{k \overline{u'_k u'_\ell} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_\ell}}{\epsilon} \right) \tag{90}$$



Παρόλα αυτά, αυτή η εξίσωση μπορεί να οδηγήσει σε αριθμητικές αστάθειες, οπότε έχει απλοποιηθεί για να χρησιμοποιήσει μια βαθμωτή τυρβώδη διάχυση όπως στο ακόλουθο:

$$D_{T,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) \quad (91)$$

Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$ , υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την σχετική εξίσωση.

Το  $\sigma_k$  παίρνει την τιμή 0,82 στην περίπτωση μιας επίπεδης ομογενοποιημένης διατμητικής ροής. Η τιμή του  $\sigma$  είναι διαφορετική από αυτή στο κοινό και το πραγματοποιήσιμο μοντέλο, στα οποία  $\sigma_k=1,0$ .

### 2.6.3 Μοντελοποιώντας τον όρο πίεσης - έντασης.

#### Μοντέλο γραμμικής πίεσης - έντασης.

Ο όρος έντασης πίεσης,  $\phi_{ij}$ , στην εξίσωση 89 μοντελοποιείται σύμφωνα με τις προτάσεις των Gibson και Launder, Fu et al, και Launder.

Η κλασική προσέγγιση της μοντελοποίησης του  $\phi_{ij}$  χρησιμοποιεί την ακόλουθη αποσύνθεση:

$$\phi_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w} \quad (92)$$

Όπου το  $\phi_{ij,1}$  είναι ο όρος της αργής έντασης πίεσης, επίσης γνωστός και ως όρος επιστροφής στην ισοτροπία, το  $\phi_{ij,2}$ , ονομάζεται όρος της ραγδαίας έντασης πίεσης, και το  $\phi_{ij,w}$  είναι ο όρος της αντανάκλασης τοίχου.

Ο όρος αργής έντασης πίεσης  $\phi_{ij,1}$ , μοντελοποιείται ως:

$$\phi_{ij,1} \equiv -C_1 \rho \frac{\epsilon}{k} \left[ \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \quad (93)$$

με  $C_1=1.8$ .

Ο όρος ραγδαίας έντασης πίεσης,  $\phi_{ij,2}$ , μοντελοποιείται ως:

$$\phi_{ij,2} \equiv -C_2 \left[ (P_{ij} + F_{ij} + G_{ij} - C_{ij}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (P + G - C) \right] \quad (94)$$

Όπου  $C_2=0.60$ , τα  $P_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $C_{ij}$  και  $C_{ij}$  ορίζονται όπως στην εξίσωση 89, το  $P=1/2P_{kk}$ ,  $G=1/2G_{kk}$  και  $C=1/2C_{kk}$ .

Ο όρος αντανάκλασης τοίχου,  $\phi_{ij,\omega}$ , είναι υπεύθυνος για την αναδιανομή των κανονικών εντάσεων κοντά στον τοίχο. Τείνει να μετριάξει την ένταση κάθετα στον τοίχο, ενώ την εντείνει παράλληλα στον τοίχο. Αυτός ο όρος μοντελοποιείται ως:

$$\begin{aligned} \phi_{ij,\omega} \equiv & C_1' \frac{\epsilon}{k} \left( \overline{u_k' u_m'} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_i' u_k'} n_j n_k - \frac{3}{2} \overline{u_j' u_k'} n_i n_k \right) \frac{k^{3/2}}{C_t \epsilon d} \\ & + C_2' \left( \phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_j n_k - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_i n_k \right) \frac{k^{3/2}}{C_t \epsilon d} \end{aligned} \quad (95)$$

Όπου  $C_1'=0.5$ ,  $C_2'=0.3$ ,  $n_k$  είναι το συστατικό  $x$  της μονάδας κανονικής στον τοίχο, το  $d$  είναι η κανονική απόσταση προς τον τοίχο, και  $C_1=C_\mu^{3/4}/k$  όπου  $C_\mu=0.09$  και το  $k$  είναι η σταθερά von Karman ( $=0.4187$ ).

### Τροποποιήσεις χαμηλού Re στο μοντέλο γραμμικής έντασης πίεσης.

Όταν το RSM χρησιμοποιείται σε ροές κοντά σε τοίχο χρησιμοποιώντας την ενισχυμένη αντιμετώπιση τοίχου, το μοντέλο έντασης πίεσης χρειάζεται να τροποποιηθεί. Η τροποποίηση που χρησιμοποιείται προσδιορίζει τις τιμές των  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_1'$ , και  $C_2'$  ως συναρτήσεις των σταθερών τάσης Reynolds και του τυρβώδους αριθμού Reynolds σύμφωνα με την πρόταση των Launder και Shima:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 + 2.58A\sqrt{A_2} \{1 - \exp[-(0.0067Re_t)^2]\} \\ C_2 &= 0.75\sqrt{A} \\ C_1' &= -\frac{2}{3}C_1 + 1.67 \\ C_2' &= \max\left[\frac{\frac{2}{3}C_2 - \frac{1}{6}}{C_2}, 0\right] \end{aligned} \quad (96)$$

Με τον τυρβώδη αριθμό Reynolds να ορίζεται ως  $Re_t=(\rho k^2/\mu\epsilon)$ . Η παράμετρος  $A$  και οι σταθερές τανυστή,  $A_2$  και  $A_3$  ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} A &\equiv \left[1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)\right] \\ A_2 &\equiv a_{ik}a_{ki} \\ A_3 &\equiv a_{ik}a_{kj}a_{ji} \end{aligned} \quad (97)$$

Το  $a_{ij}$  είναι ο τανυστής ανισοτροπίας τάσης Reynolds, που ορίζεται ως:

$$a_{ij} = - \left( \frac{-\rho \overline{u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}}{\rho k} \right) \quad (98)$$

### Μοντέλο τετραγωνικής έντασης- πίεσης.

Ένα μοντέλο έντασης πίεσης που προτάθηκε από τους Speziale, Sarkar, και Gatski, παρέχεται στα περισσότερα εμπορικά λογισμικά υπολ/κής ρευστοδυναμικής. Αυτό το μοντέλο έχει δειχθεί ότι δίνει ανώτερη απόδοση σε ένα εύρος βασικών διατμητικών ροών. Αυτή η βελτιωμένη ακρίβεια ευνοεί μεγαλύτερη τάξη περίπλοκων, βιομηχανικών ροών, ειδικά εκείνες με καμπυλότητα ροικών γραμμών.

Αυτό το μοντέλο είναι γραμμένο ως:

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & - (C_1 \rho \epsilon + C_1^* P) b_{ij} + C_2 \rho \epsilon \left( b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{mn} \delta_{ij} \right) + (C_3 - C_3^* \sqrt{b_{ij} b_{ij}}) \rho k S_{ij} \\ & + C_4 \rho k \left( b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) + C_5 \rho k (b_{ik} \Omega_{jk} + b_{jk} \Omega_{ik}) \end{aligned} \quad (99)$$

Όπου το  $b_{ij}$  είναι ο τανυστής ανισοτροπίας τάσης Reynolds ορισμένο ως:

$$b_{ij} = - \left( \frac{-\rho \overline{u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}}{2 \rho k} \right) \quad (100)$$

Ο ρυθμός μέσης έντασης,  $S_{ij}$ , ορίζεται ως:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (101)$$

Ο μέσος τανυστής ρυθμού περιστροφής,  $\Omega_{ij}$ , ορίζεται ως:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (102)$$

Οι σταθερές είναι:

$$C_1 = 3.4, C_1^* = 1.8, C_2 = 4.2, C_3 = 0.8, C_3^* = 1.3, C_4 = 1.25, C_5 = 0.4 .$$

Το μοντέλο τετραγωνικής έντασης-πίεσης δεν απαιτεί διόρθωση για να αντισταθμίσει το αποτέλεσμα της αντανάκλασης τοίχου για να δώσει μια ικανοποιητική λύση στη λογαριθμική περιοχή του τυρβώδους οριακού στρώματος.

#### 2.6.4 Επίδραση της άνωσης στην τύρβη.

Οι όροι παραγωγής λόγω άνωσης μοντελοποιούνται ως:

$$G_{ij} = \beta \frac{\mu_t}{Pr_t} \left( g_i \frac{\partial T}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (103)$$

Όπου το  $Pr_t$ , είναι ο τυρβώδης αριθμός Prandtl για την ενέργεια, με αρχική τιμή 0.85.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συντελεστή της θερμικής διαστολής,  $\beta$ , βγαίνει η ακόλουθη έκφραση του  $G_{ij}$  για ιδανικά αέρια:

$$G_{ij} = -\frac{\mu_t}{\rho Pr_t} \left( g_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \quad (104)$$

#### 2.6.5 Μοντελοποιώντας την τυρβώδη κινητική ενέργεια.

Γενικά, όταν η τυρβώδης κινητική ενέργεια απαιτείται για την μοντελοποίηση ενός συγκεκριμένου όρου, ανακτάται από το ίχνος του τανυστή τάσης Reynolds:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (105)$$

Σε αυτή την περίπτωση, το ακόλουθο μοντέλο εξίσωσης ακολουθείται:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{2} (P_{kk} + G_{kk}) - \rho \epsilon (1 + 2M_t^2) + S_k \quad (106)$$

Όπου το  $\sigma_k=0.82$  και το  $S_k$  είναι ένας πηγαίος όρος που ορίζεται από το χρήστη. Όπως περιμένει κανείς τελικά ισοδυναμεί με την εξίσωση που χρησιμοποιείται στο κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$ .

Παρότι η εξίσωση 106 λύνεται συνολικά διαμέσου του πεδίου ροής, οι τιμές που παίρνουμε για το  $k$  χρησιμοποιούνται μόνο για τις οριακές συνθήκες. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το  $k$  ανακτάται από την εξίσωση 105. Αυτό είναι ένα ελάχιστο πρόβλημα βέβαια, αφού οι αξίες του  $k$  που παίρνουμε με την κάθε μέθοδο θα πρέπει να είναι κατά πολύ όμοιες.

### 2.6.6 Μοντελοποιώντας τον ρυθμό διασκορπισμού.

Ο τανυστής διασκορπισμού,  $\epsilon_{ij}$ , μοντελοποιείται ως:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} (\rho \epsilon + Y_M) \quad (107)$$

Όπου το  $Y_M = 2\rho \epsilon M_t^2$  είναι ένας επιπρόσθετος όρος «διαστολής του διασκορπισμού» σύμφωνα με το μοντέλο από τον Sarkar. Ο τυρβώδης αριθμός Mach σε αυτόν τον όρο ορίζεται ως:

$$M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}} \quad (108)$$

Όπου το  $a$  είναι η ταχύτητα του ήχου. Αυτή η τροποποίηση συμπιεστότητας πάντα λαμβάνει χώρα όταν χρησιμοποιείται η συμπιεστή μορφή του νόμου του ιδανικού αερίου.

Ο ρυθμός διασκορπισμού βαθμωτού,  $\epsilon$ , υπολογίζεται με μια εξίσωση μεταφοράς μοντέλου, παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιείται στο κοινό μοντέλο  $k-\epsilon$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] C_{\epsilon 1} \frac{1}{2} [P_{ii} + C_{\epsilon 3} G_{ii}] \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon \quad (109)$$

Όπου  $\sigma_\epsilon = 1.0$ ,  $C_{\epsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\epsilon 2} = 1.92$ , το  $C_{\epsilon 3}$  αξιολογείται ως συνάρτηση της κατεύθυνσης της τοπικής ροής σχετικά με το βαρυτικό διάνυσμα.

### 2.6.7 Μοντελοποιώντας το τυρβώδες ιξώδες.

Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$ , υπολογίζεται παρομοίως με τα μοντέλα  $k - \epsilon$ :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

(110)

Όπου  $C_\mu=0.09$ .

### 2.6.8 Οριακές συνθήκες για τις τάσεις Reynolds.

Όποτε η ροή εισέρχεται στο πεδίο ορισμού, τα λογισμικά απαιτούν τιμές για τις μεμονωμένες τάσεις Reynolds, και για το ρυθμό διασκορπισμού της τύρβης  $\epsilon$ . Αυτές οι ποσότητες μπορούν να εισαχθούν απευθείας ή να παραχθούν απόρροια της έντασης της και του χαρακτηριστικού μήκους της τύρβης.

Χρησιμοποιώντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, όπου το  $\tau$  είναι η εφαπτόμενη συντεταγμένη, το  $\eta$  είναι η κανονική συντεταγμένη και το  $\lambda$  είναι η δικανονική συντεταγμένη, οι τάσεις Reynolds στα κελιά που εφάπτονται στον τοίχο υπολογίζονται από:

$$\frac{\overline{u_\tau'^2}}{k} = 1.098, \quad \frac{\overline{u_\eta'^2}}{k} = 0.247, \quad \frac{\overline{u_\lambda'^2}}{k} = 0.655, \quad -\frac{\overline{u_\tau' u_\eta'}}{k} = 0.255$$

(111)

Εναλλακτικά, οι τάσεις Reynolds μπορούν να προσδιοριστούν εμφανώς σε όρους διάτμησης έντασης τοίχου, αντί για  $k$ :

$$\frac{\overline{u_\tau'^2}}{u_\tau^2} = 5.1, \quad \frac{\overline{u_\eta'^2}}{u_\tau^2} = 1.0, \quad \frac{\overline{u_\lambda'^2}}{u_\tau^2} = 2.3, \quad -\frac{\overline{u_\tau' u_\eta'}}{u_\tau^2} = 1.0$$

(112)

Όπου το  $u_\tau$  είναι η ταχύτητα τριβής που ορίζεται από  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  όπου  $\tau_w$  είναι οι διατμητική τάση τοίχου.

### 2.6.9 Μοντελοποιώντας την επαγωγική θερμότητα και την μαζική μεταφορά.

Με το μοντέλο τάσης Reynolds, η τυρβώδης μεταφορά θερμότητας μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας την έννοια της αναλογίας Reynolds στην μεταφορά της ορμής της τύρβης. Η «μοντελοποιημένη» εξίσωση ενέργειας δίνεται από τα παρακάτω:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i}[u_i(\rho E + p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( k + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_i(\tau_{ij})_{\text{eff}} \right] + S_h$$

(113)

όπου το  $E$  είναι η συνολική ενέργεια και το  $(\tau_{ij})_{\text{eff}}$  είναι ο τανυστής τάσης, οριζόμενος από:

$$(\tau_{ij})_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Ο όρος που περιλαμβάνει το  $(\tau_{ij})_{\text{eff}}$  αναπαριστά την τυρβώδη θέρμανση, και πάντα υπολογίζεται στους πεπλεγμένους επιλύτες. Η αρχική τιμή του τυρβώδους αριθμού Prandtl είναι 0.85. Η τυρβώδης μεταφορά μάζας αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο, με εξ' ορισμού τυρβώδη αριθμό Schmidt 0.7.

## 2.7 Το μοντέλο εξομοίωσης μεγάλης δίνης (LES)

Οι τυρβώδεις ροές χαρακτηρίζονται από δίνες με ευρύ φάσμα μήκους και χρονικής κλίμακας. Οι μεγαλύτερες δίνες συγκρίνονται, τυπικά, σε μέγεθος με το χαρακτηριστικό μήκος της μέσης ροής. Οι μικρότερες κλίμακες είναι υπεύθυνες για την διασπορά της τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

Είναι δυνατόν, στη θεωρία, να λυθεί απευθείας ολόκληρο το φάσμα των τυρβωδών κλιμάκων χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση γνωστή και ως απευθείας αριθμητική εξομοίωση (DNS). Δεν απαιτείται μοντελοποίηση στο DNS. Παρόλα αυτά, το DNS δεν είναι εφικτό για προβλήματα πρακτικής μηχανικής που περιλαμβάνουν ροές υψηλού αριθμού Reynolds. Το κόστος που απαιτείται για να επιλύσει το DNS ολόκληρο το φάσμα των κλιμάκων είναι ανάλογο του  $Re_t^3$ , όπου  $Re_t$  ο τυρβώδης αριθμός Reynolds. Ξεκάθαρα, για υψηλούς αριθμούς Reynolds, το κόστος γίνεται απαγορευτικό.

Στο LES, οι μεγάλες δίνες λύνονται απευθείας, ενώ οι μικρές μοντελοποιούνται. Το LES, λοιπόν, εμπίπτει ανάμεσα του DNS και του RANS σε όρους του κλάσματος των λυμένων κλιμάκων. Η λογική πίσω από το LES μπορεί να γραφτεί εν συντομία όπως ακολούθως:

- Η ορμή, μάζα, ενέργεια και άλλα παθητικά βαθμωτά μεγέθη μεταφέρονται κυρίως από μεγάλες δίνες.
- Οι μεγάλες δίνες είναι περισσότερο εξαρτώμενες από τα επιλυόμενα προβλήματα. Εξαρτώνται από τις γεωμετρίες και τις οριακές συνθήκες της εμπλεκόμενης ροής.
- Οι μικρές δίνες είναι λιγότερο εξαρτώμενες από τη γεωμετρία, τείνουν να είναι πιο ιστροπικές, και είναι λοιπόν πιο γενικές.
- Οι πιθανότητες να βρεθεί ένα παγκόσμιο τυρβώδες μοντέλο είναι πολύ μεγαλύτερες για τις μικρές κλίμακες.

Επιλύοντας μόνο τις μεγάλες δίνες επιτρέπει σε κάποιον να χρησιμοποιήσει πιο τραχύ πλέγμα και μεγαλύτερα χρονικά μεγέθη στο LES από ότι στο DNS. Παρόλα αυτά, το LES ακόμα απαιτεί σημαντικά λεπτότερα πλέγματα από αυτά που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς του RANS. Επιπρόσθετα, το LES πρέπει να τρέξει για επαρκή χρόνο για να λάβει σταθερά στατιστικά δεδομένα της ροής που μοντελοποιούμε. Ως αποτέλεσμα, το υπολογιστικό κόστος που συνεπάγεται το LES, είναι μεγέθη μεγαλύτερο από αυτό για τους σταθερούς υπολογισμούς RANS σε όρους μνήμης (RAM) και χρόνου επεξεργασίας. Γι' αυτό υψηλής απόδοσης υπολογισμοί (π.χ. παράλληλη επεξεργασία) είναι μια αναγκαιότητα για το LES, ειδικότερα για βιομηχανικές εφαρμογές. Οι ενότητες που ακολουθούν, δίνουν λεπτομέρειες για τις διέπουσες εξισώσεις για το LES, τα τυρβώδη μοντέλα κλίμακας υποπλέγματος, και τις οριακές συνθήκες.

### 2.7.1 Φιλτραρισμένες εξισώσεις Navier – Stokes.

Οι διέπουσες εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο LES λαμβάνονται μέσω φιλτραρίσματος των χρόνο-εξαρτώμενων εξισώσεων Navier–Stokes είτε χώρο Fourier (αριθμό κυμάτων), ή χωρική (φυσική) διαμόρφωση. Η διαδικασία του φιλτραρίσματος, φιλτράρει αποτελεσματικά τις δίνες των οποίων οι κλίμακες είναι μικρότερες από το πλάτος του φίλτρου ή το χωρισμό του πλέγματος που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς. Οι εξισώσεις που απορρέουν λοιπόν, διέπουν τη δυναμική των μεγάλων δινών.

Μια φιλτραρισμένη μεταβλητή (που συμβολίζεται από μια παύλα από πάνω) ορίζεται ως:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \int_D \phi(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (114)$$

Όπου το D είναι η περιοχή του ρευστού, και το G είναι η συνάρτηση φίλτρου που καθορίζει την κλίμακα των επιλυμένων δινών. Στα συνήθη εμπορικά λογισμικά, η διακριτοποίηση πεπερασμένου όγκου, αυτή κάθε αυτή, παρέχει την συνάρτηση φιλτραρίσματος:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' \in V \quad (115)$$



Όπου  $V$  είναι ο όγκος ενός υπολογιστικού κελιού. Η συνάρτηση φίλτρου  $G(x, x')$ , γίνεται τότε:

$$G(x, x') \begin{cases} 1/V, & x' \in V \\ 0, & x' \text{ άλλο} \end{cases} \quad (116)$$

Φιλτράροντας κανείς τις εξισώσεις Navier – Stokes λαμβάνει:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i) = 0 \quad (117)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (118)$$

Όπου  $\sigma_{ij}$  είναι ο τανυστής της τάσης λόγω του μοριακού ιξώδους οριζόμενο από:

$$\sigma_{ij} \equiv \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \quad (119)$$

Και  $\tau_{ij}$  είναι η τάση κλίμακας υποπλέγματος οριζόμενη από:

$$\tau_{ij} \equiv \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (120)$$

### 2.7.2 Μοντέλα υπό-πλεγματικής κλίμακας.

Οι τάσεις υπό-πλεγματικής κλίμακας που προέρχονται από τη λειτουργία φιλτραρίσματος είναι άγνωστες, και απαιτούν μοντελοποίηση. Τα τυρβώδη μοντέλα υπό-πλεγματικής κλίμακας χρησιμοποιούν συνήθως την υπόθεση Boussinesq και όπως και στα μοντέλα RANS, υπολογίζουν τις τάσεις υπό-πλεγματικής κλίμακας από:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\mu_t \bar{S}_{ij} \quad (121)$$

Όπου  $\mu_t$  είναι το τυρβώδες ιξώδες της υπό-πλεγματικής κλίμακας, και  $\bar{S}_{ij}$  είναι ο τανυστής του ρυθμού έντασης για την επιλυμένη κλίμακα, οριζόμενο ως:

$$\overline{S}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (122)$$

Υπάρχουν τέσσερα μοντέλα για το  $\mu_t$ : το Smagorinsky-Lilly, δυναμικό Smagorinsky-Lilly, το WALE, και το δυναμικής κινητικής ενέργειας υπό-πλεγματικής κλίμακας.

### **Το μοντέλο Smagorinsky-Lilly.**

Αυτό το απλό μοντέλο προτάθηκε αρχικά από τον Smagorinsky. Σε αυτό, το ιξώδες της δίνης μοντελοποιείται από:

$$\mu_t = \rho L_s^2 |\overline{S}| \quad (123)$$

Όπου  $L_s$  είναι το μήκος ανάμειξης για τις υπό-πλεγματικές κλίμακες και

$$|\overline{S}| \equiv \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}$$

Το  $L_s$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας:

$$L_s = \min(\kappa d, C_s V^{1/3}) \quad (124)$$

Όπου  $\kappa$  η σταθερά von Karman,  $d$  η απόσταση από τον κοντινότερο τοίχο,  $C_s$  η σταθερά Smagorinsky, και  $V$  ο όγκος του υπολογιστικού κελιού. Ο Lilly όρισε την τιμή 0.17 για το  $C_s$  για την ομογενοποιημένη ισοτροπική τύρβη στο εσωτερικό υπό-πεδίο. Παρόλα αυτά, αυτή η τιμή προκαλούσε υπερβολική απόσβεση για διακυμάνσεις μεγάλης κλίμακας με παρουσία μέσης διάτμησης και σε μεταβατικές ροές, και πρέπει να μειώνεται σε τέτοιες περιοχές. Εν συντομία, το  $C_s$  δεν είναι μια παγκόσμια σταθερά, γεγονός το οποίο είναι η μεγαλύτερη αδυναμία αυτού του απλού μοντέλου. Όπως και να έχει, η αξία του  $C_s$  περίπου στο 0.1 αποφέρει τα καλύτερα αποτελέσματα για ένα μεγάλο εύρος ροών.

### **Το δυναμικό μοντέλο Smagorinsky – Lilly.**

Ο Germano et al. και ακολούθως ο Lilly ανέπτυξαν μια διαδικασία στην οποία η σταθερά του μοντέλου Smagorinsky,  $C_s$ , υπολογίζεται δυναμικά βάσει των πληροφοριών που παρέχονται από τις επιλυμένες κλίμακες της κίνησης. Η δυναμική διαδικασία λοιπόν

προλαμβάνει την ανάγκη του προσδιορισμού από το χρήστη της μεταβλητής  $C_s$  εκ των προτέρων.

Το  $C_s$  που λαμβάνεται χρησιμοποιώντας το δυναμικό μοντέλο Smagorinsky–Lilly ποικίλει στο χρόνο και το χώρο σε ένα αρκετά ευρύ φάσμα. Για να αποφευχθεί η αριθμητική αστάθεια το  $C_s$  έχει πεδίο τιμών 0 έως 0.23.

### Το μοντέλο (WALE).

Στο μοντέλο WALE (Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity ή τοπικό ιξώδες δίνης προσαρμογής τοιχώματος), το ιξώδες δίνης μοντελοποιείται ως:

$$\mu_t = \rho L_s^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}} \quad (125)$$

Όπου  $L_s$  και  $S_{ij}^d$  στο μοντέλο WALE ορίζονται αντίστοιχα ως:

$$L_s = \min(\kappa d, C_w V^{1/3})$$

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij}^2 + \bar{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{g}_{kk}^2, \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (126)$$

Η εξ' ορισμού τιμή της σταθεράς WALE,  $C_w$ , είναι 0.325 και έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα για ένα μεγάλο εύρος ροών. Η υπόλοιπη σημειογραφία είναι η ίδια όπως για το μοντέλο Smagorinsky–Lilly. Με αυτό το χωρικό ρυθμιστή, το μοντέλο WALE είναι σχεδιασμένο να βγάζει την σωστή ασυμπτωτική ( $y^3$ ) συμπεριφορά τοίχου για ροές οριοθετημένες από τοίχο.

### Το μοντέλο δυναμικής κινητικής ενέργειας υπό-πλεγματικής κλίμακας.

Το κανονικό και το δυναμικό μοντέλο Smagorinsky–Lilly είναι ουσιαδώς αλγεβρικά μοντέλα στα οποία οι υπό-πλεγματικές εντάσεις παραμετροποιούνται χρησιμοποιώντας τις επιλυμένες κλίμακες ταχύτητας. Η υποβόσκουσα υπόθεση είναι το τοπικό ισοζύγιο μεταξύ της μεταφερόμενης ενέργειας μέσω της κλίμακας του πλέγματος – φίλτρου και της

διασποράς της κινητικής ενέργειας σε μικρές υπό-πλεγματικές κλίμακες. Η υπό-πλεγματικής κλίμακας τύρβη μπορεί να μοντελοποιηθεί υπολογίζοντας την μεταφορά της τυρβώδους κινητικής ενέργειας της υπό-πλεγματικής κλίμακας.

Η κινητική ενέργεια υπό-πλεγματικής κλίμακας ορίζεται ως:

$$k_{sgs} = \frac{1}{2} (\overline{u_k^2} - \overline{u_k}^2) \quad (127)$$

Το ιξώδες δίνης υπό-πλεγματικής κλίμακας,  $\mu_t$ , υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το  $k_{sgs}$  ως:

$$\mu_t = C_k k_{sgs}^{1/2} \Delta_f \quad (128)$$

Όπου  $\Delta_f$  είναι το μέγεθος του φίλτρου υπολογιζόμενο από  $\Delta_f \equiv V^{1/3}$

Η τάση υπό-πλεγματικής κλίμακας μπορεί μετά να γραφτεί ως:

$$\tau_{ij} - \frac{2}{3} k_{sgs} \delta_{ij} = -2C_k k_{sgs}^{1/2} \Delta_f \overline{S}_{ij} \quad (129)$$

Το  $k_{sgs}$  λαμβάνεται από τη λύση της εξίσωσης μεταφοράς :

$$\frac{\partial \overline{k}_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j \overline{k}_{sgs}}}{\partial x_j} = -\tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_\epsilon \frac{k_{sgs}^{3/2}}{\Delta_f} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j} \right) \quad (130)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι σταθερές μοντέλου,  $C_k$  και  $C_\epsilon$ , καθορίζονται δυναμικά. Το  $\sigma_k$  είναι ίσο με 1.0.

### 2.7.3 Οριακές συνθήκες εισόδου για το μοντέλο LES.

Αυτή η ενότητα περιγράφει τρεις αλγορίθμους που είναι διαθέσιμοι για τη μοντελοποίηση της διακυμαινόμενης ταχύτητας στα όρια εισαγωγής.

#### Όχι διαταραχές.

Τα στοχαστικά συστατικά της ροής στα οριζόμενα από την ταχύτητα, όρια εισαγωγής δεν λαμβάνονται υπόψη αν δεν υπάρχουν διαταραχές. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μεμονωμένα, άμεσα συστατικά ταχύτητας απλώς θέτονται ως ίσα προς τα μέσης ταχύτητας ομολογά

τους. Αυτή η επιλογή είναι κατάλληλη μόνο όταν το επίπεδο της τύρβης στα όρια εντός ροής είναι αμελητέο ή δεν παίζει σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια της συνολικής λύσης.

### Μέθοδος δίνης.

Για να δημιουργηθεί μια χρόνο-εξαρτώμενη προϋπόθεση εισαγωγής, εξετάζεται μια τυχαία διδιάστατη μέθοδος δίνης. Με αυτή την προσέγγιση, μια διαταραχή προστίθεται σε ένα συγκεκριμένο προφίλ μέσης ταχύτητας μέσω ενός πεδίου κυμαινόμενου ιξώδους (π.χ. διδιάστατο στο επίπεδο κανονικά στην κατεύθυνση του ρεύματος). Η μέθοδος δίνης βασίζεται στην Lagrangian μορφή της διδιάστατης εξίσωσης της εξέλιξης του ιξώδους και του νόμου Biot-Savart. Μία διακριτοποίηση σωματιδίου χρησιμοποιείται για τη λύση αυτής της εξίσωσης. Αυτά τα σωματίδια, ή «σημεία δίνης» μεταδίδονται τυχαία και μεταφέρουν πληροφορίες για το πεδίο στροβιλισμού. Εάν το  $N$  είναι ο αριθμός των σημείων δίνης και το  $A$  είναι η περιοχή της επιλογής εισόδου, το ποσό στροβιλισμού που μεταφέρεται από ένα σωματίδιο  $i$  αναπαριστάται από την κυκλοφορία  $\Gamma_i$  και μία υποτιθέμενη χωρική διανομή,  $\eta$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_i(x, y) &= 4\sqrt{\frac{\pi Ak(x, y)}{3N[2\ln(3) - 3\ln(2)]}} \\ \eta(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left( 2e^{-|\vec{x}|^2/2\sigma^2} - 1 \right) 2e^{-|\vec{x}|^2/2\sigma^2}\end{aligned}\tag{131}$$

Όπου  $k$  η τυρβώδης κινητική ενέργεια. Η παράμετρος  $\sigma$  παρέχει έλεγχο πάνω στο μέγεθος ενός σωματιδίου δίνης. Η διακριτοποίηση που παίρνουμε ως αποτέλεσμα για το πεδίο της ταχύτητας δίνεται από:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{((\vec{x}_i - \vec{x}) \times \vec{z})(1 - e^{|\vec{x} - \vec{x}_i|^2/2\sigma^2})}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^2}\tag{132}$$

Πρωταρχικά, το μέγεθος της δίνης ήταν σταθερό από μία δοσμένη τιμή του  $\sigma$ . Για να κάνουμε την μέθοδο δίνης γενικά εφαρμόσιμη, ένα τοπικό μέγεθος δίνης προσδιορίζεται μέσω μιας υπόθεσης μήκους ανάμειξης της τύρβης. Το  $\sigma$  υπολογίζεται από ένα γνωστό προφίλ της μέσης τυρβώδους κινητικής ενέργειας και του μέσου ρυθμού διασποράς στη είσοδο, σύμφωνα με το:

$$\sigma = \frac{ck^{3/2}}{2\varepsilon}$$

(133)

Όπου  $c=0.16$ . Για να διασφαλιστεί ότι η δίνη θα ανήκει πάντα σε επιλυμένες κλίμακες, η μικρότερη τιμή του  $\sigma$  οριοθετείται από το μέγεθος του τοπικού πλέγματος. Το σύμβολο της κυκλοφορίας της κάθε δίνης αλλάζει τυχαία κάθε χαρακτηριστική χρονική κλίμακα  $\tau$ . Στην γενική εφαρμογή της μεθόδου δίνης, αυτή η χρονική κλίμακα αναπαριστά τον απαραίτητο χρόνο για μια δυσδιάστατη δίνη που επάγεται από την κύρια ταχύτητα στην οριακή κανονική κατεύθυνση να ταξιδέψει κατά μήκος  $n$  φορές το χαρακτηριστικό της δυσδιάστατο μήκος ( $\sigma_m$ ), όπου το  $n$  είναι σταθερά ίσο με 100 από αριθμητική δοκιμή. Η μέθοδος δίνης μελετά μόνο διακυμάνσεις στο χώρο κανονικές προς την κατεύθυνση του ρεύματος. Με την αλληλεπίδρασή τους με το μέσο πεδίο ορισμού της ταχύτητας, αυτές οι διακυμάνσεις επιδρούν στις διακυμάνσεις του ρεύματος κάτω από το πεδίο εισόδου επίσης.

### **Φασματικός συνθέτης.**

Ο φασματικός συνθέτης παρέχει μια εναλλακτική μέθοδο παραγωγής κυμαινόμενων συστατικών ταχύτητας. Βασίζεται σε μια τεχνική παραγωγής τυχαίας ροής που προτάθηκε αρχικά από τον Kraichnan και τροποποιήθηκε από τον Smirnov et al. Σε αυτή τη μέθοδο, τα συστατικά της κυμαινόμενης ταχύτητας υπολογίζονται μέσω της σύνθεσης ενός πεδίου διανύσματος ταχύτητας, χωρίς απόκλιση, από την άθροιση των αρμονικών Fourier.

### **2.8 Το μοντέλο εξομοίωσης αποσπασμένης δίνης (DES).**

Το μοντέλο DES ανήκει στην κλάση των μοντέλων που αναφέρονται συνήθως ως προσέγγιση LES/RANS σύζευξης μοντελοποίησης. Η κύρια ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι να συνδυάσει τη μοντελοποίηση RANS με το LES για εφαρμογές στις οποίες το κλασσικό LES δεν είναι προσιτό (π.χ. εξομοιώσεις εξωτερικών αεροδυναμικών υψηλού  $Re$ ). Το κοινό μοντέλο Spallart – Allmaras χρησιμοποιεί την απόσταση από τον κοντινότερο τοίχο ως ορισμό για την κλίμακα μήκους,  $d$ , η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό του επιπέδου παραγωγής και καταστροφής του τυρβώδους ιξώδους .

Το μοντέλο DES, όπως προτάθηκε από τον Shur et al., αντικαθιστά το  $d$  παντού με μια καινούρια κλίμακα μήκους  $\bar{d}$ , που ορίζεται ως:

$$\bar{d} = \min(d, C_{des}\Delta) \quad (134)$$

Όπου ο χωρισμός του πλέγματος  $\Delta$  βασίζεται στο μεγαλύτερο διάστημα πλέγματος στις κατευθύνσεις  $x, y, z$ , σχηματίζοντας το υπολογιστικό κελί. Η εμπειρική σταθερά  $C_{des}$  έχει τιμή 0.65.

## 2.9 Το μοντέλο μήκους ανάμιξης

Όταν εφαρμόζεται σε δισδιάστατες ροές οριακού στρώματος, το μήκος μίξης  $\ell_m(x,y)$  ορίζεται ως μια λειτουργία θέσης και τότε η ιξώδης τύρβη προκύπτει από

$$V_T = \ell_m^2 \left| \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|.$$

Ο κατάλληλος προσδιορισμός του μήκους μίξης είναι  $\ell_m = ky$  και τότε η ιξώδης τύρβη είναι  $V_T = u_T ky$ . Πολλές γενικεύσεις της εξίσωσης έχουν προταθεί έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η υπόθεση μήκους μίξης σε όλες τις ροές. Με βάση την τιμή της έντασης  $\overline{S_{ij}}$ , ο Smagorinsky πρότεινε

$$V_T = \ell_m^2 (2\overline{S_{ij}S_{ij}})^{1/2} = \ell_m s$$

Ενώ με βάση την μέση τιμή περιστροφής  $\overline{\Omega_{ij}}$ , οι Baldwin και Lomax (1978) πρότειναν

$$V_T = \ell_m^2 (2\overline{\Omega_{ij}\Omega_{ij}})^{1/2} = \ell_m \Omega$$

Στη γενικευμένη του μορφή, το μοντέλο μήκους μίξης είναι εφαρμόσιμο σε όλες τις τυρβώδεις ροές και αποτελεί το απλούστερο μοντέλο τύρβης. Το βασικό του μειονέκτημα, ωστόσο, είναι η ατέλειά του: το μήκος μίξης  $\ell_m(x)$  πρέπει να προσδιοριστεί και ο κατάλληλος προσδιορισμός είναι αναπόφευκτα εξαρτώμενος από τη γεωμετρία της ροής. Για μια σύνθετη ροή που δεν έχει μελετηθεί προηγουμένως, ο προσδιορισμός του  $\ell_m(x)$  απαιτεί ένα μεγάλο βαθμό εικασιών και, κατά συνέπεια δεν θα πρέπει κάποιος να εμπιστεύεται την ακρίβεια του πεδίου μέσης ταχύτητας που προκύπτει. Από την άλλη μεριά, υπάρχουν κατηγορίες τεχνολογικά σημαντικών ροών που έχουν μελετηθεί εκτενώς, κι έτσι οι κατάλληλοι προσδιορισμοί του  $\ell_m(x)$  έχουν καθιερωθεί. Το χαρακτηριστικότερο

παράδειγμα είναι οι ροές οριακού στρώματος σε αεροναυτικές εφαρμογές. Το μοντέλο μήκους μίξης μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε ροές ελεύθερης διάτμησης. Το προφίλ της προβλεπόμενης μέσης ταχύτητας συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα.

## 2.10 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα υπολογιστικών μοντέλων

### 1. Μοντέλο μήκους ανάμιξης

#### **Πλεονεκτήματα:**

- εύκολο στην εφαρμογή και φθινό σε υπολογιστικούς όρους επεξεργασίας
- καλές προβλέψεις για λεπτά διατμητικά στρώματα: δέσμες ρευστού, επίπεδα ανάμιξης, απορρεύματα και οριακά στρώματα.
- Καλά εδραιωμένο.

#### **Μειονεκτήματα:**

- παντελώς ανίκανο περιγραφής ροών με διαχωρισμό και ανακυκλοφορία.
- υπολογίζει μόνο τις ιδιότητες της μέσης ροής και τυρβώδεις διατμητικές τάσεις.

### 2. Μοντέλο k-ε

#### **Πλεονεκτήματα:**

- το απλούστερο τυρβώδες μοντέλο για το οποίο μόνο αρχικές οριακές συνθήκες χρειάζεται να δοθούν.
- εξαιρετική απόδοση για πολλές βιομηχανικά σχετιζόμενες ροές.
- καλά εδραιωμένο, το πλέον ευρέως αξιοποιήσιμο τυρβώδες μοντέλο.

#### **Μειονεκτήματα:**

- ακριβότερο για εκτέλεση από το μοντέλο μήκους πρόσμιξης
- φτωχή απόδοση σε πλήθος σημαντικών περιπτώσεων όπως:
  - i) ακαθόριστες ροές
  - ii) ροές με επιπλέον μεγάλες εντάσεις



### 3. RSM μοντέλα

#### **Πλεονεκτήματα:**

- πιθανόν το πιο γενικό από όλα τα κλασσικά τυρβώδη μοντέλα
- μόνο αρχικές και/ή οριακές συνθήκες χρειάζεται να δοθούν.
- Πολύ ακριβές στον υπολογισμό των ιδιοτήτων της μέσης ροής και όλων των τάσεων Reynolds για πολλές απλές και πιο σύνθετες ροές συμπεριλαμβανομένων δεσμών τοίχου, ασύμμετρα κανάλια και μη κυκλικές ροές σε αγωγούς και κυκλικές ροές.

#### **Μειονεκτήματα:**

- πολύ μεγάλα υπολογιστικά κόστη (7 επιπλέον μερικές διαφορικές εξισώσεις)
- όχι τόσο καλή εδραίωση σε κάθε περίπτωση όπως τα μοντέλα μήκους ανάμιξης και k-ε.
- αποδίδει τόσο φτωχά όσο και το k-ε μοντέλο σε μερικές ροές εξαιτίας παρομοίων προβλημάτων με τη μοντελοποίηση της εξίσωσης  $\epsilon$  (π.χ. αξονοσυμμετρικές δέσμες ρευστού και ανακυκλοφορούσες ροές).

### 4. Spalart-Allmaras μοντέλο

**Πλεονεκτήματα:** Εφαρμόζεται σε εξωτερικές αεροδυναμικές ροές και δίνει καλά αποτελέσματα σε οριακά στρώματα και κλίσεις αντίθετης πίεσης. Επίσης χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές στροβιλομηχανικής.

**Μειονεκτήματα:** Σε σύνθετες γεωμετρίες είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η κλίμακα μήκους και έτσι το μοντέλο είναι ακατάλληλο να εφαρμοστεί στις πιο πολλές εσωτερικές ροές. Επίσης δεν έχει ευαισθησία σε διαδικασίες μεταφοράς σε ταχέως μεταβαλλόμενες ροές.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Σημειώσεις εργαστηρίου «Εξομοίωσης Ενεργειακών συστημάτων», ΤΕΙ Πάτρας, 2012.
2. Μαυρίδης Κωνσταντίνος, «Υπολογιστική μεταφορά Θερμότητας και Μάζας», Εκδόσεις ΙΩΝ, 2008.
3. Σημειώσεις εταιρίας SimTec, Software & Services, Θεσσαλονίκη, 2012.
4. Thierry Poinsot, "Theoretical and Numerical Combustion", 2<sup>nd</sup> edition, Edwards Publishing, 2005.
5. K.K. Kuo, "Principles of combustion", Wiley, 1986
6. S. Turns, "Introduction to combustion", McGraw-Hill, 1996
7. R.A. Strehlow, "Fundamentals of Combustion ", Int. Textbook Company, 1968
8. D.B. Spalding, " Combustion and Mass Transfer", Pergamon, New York, 1965
9. R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, New York, 1960
10. J.O. Hinze, "Turbulence", McGraw-Hill Book Company, New York, 1975
11. H. Tennekes and J.C. Lunmeijer, "A First Course in Turbulence", MIT Press, Cambridge, Mass., 1972
12. P. Bradshaw, "Turbulence", Topics in Applied Physics, Vol. 12, Springer-Verlag, New York, 1976
13. E.R. Eckert and R.M. Drake, "Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, 1989
14. D. B. Spalding, "Combustion and Mass Transfer", Pergamon Press, 1979
15. Peters, N. "Lectures on laminar and Turbulent combustion", Ercoftac Summer School, September 1992, Aachen, Germany.
16. Κούτμος Παναγιώτης, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Καύση & Ρύποι, Παν. Πατρών, 2007.
17. Pope, S.B., "Turbulent Flows", Cup, 2006.
18. Μαρκάτος Νικόλαος, Υπολογιστική ρευστοδυναμική, Εκδ. Παπασωτηρίου, 1995.
19. Geurts, B.J. and Leonard, A. (2005), Is LES ready for complex flows ?
20. Hanjalic, K. (2004), Closure models for Incompressible turbulent Flows, VKI Lecture Series.