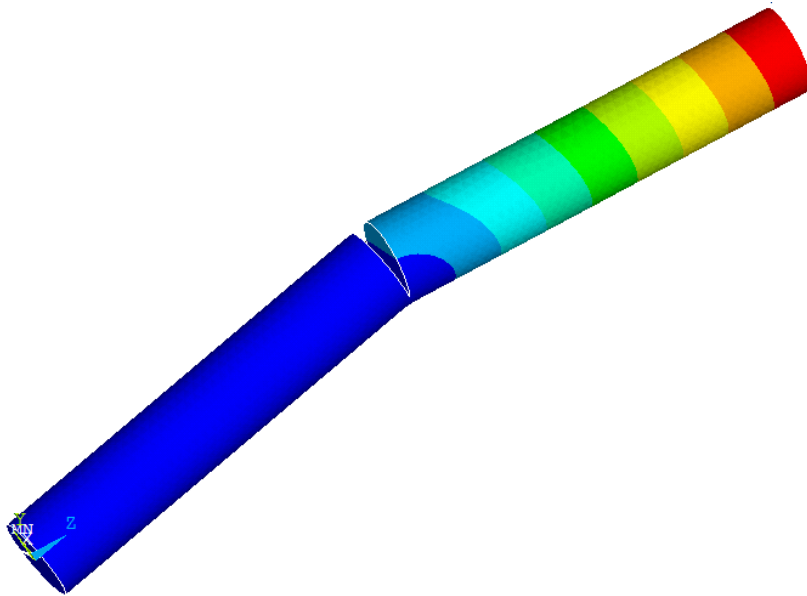


ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΕΛΕΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ
ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ
ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**



ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ:
ΚΑΡΡΕΛΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ (Α.Μ. 4913)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Ι. ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2013

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολογίας του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Πάτρας και αναφέρεται στην αριθμητική πρόβλεψη της στατικής και δυναμικής μηχανικής συμπεριφοράς ρηγματωμένων αξόνων με τη βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή Δρ Γιαννόπουλο Γεώργιο, επιστημονικό συνεργάτη του Τμήματος Μηχανολογίας, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση και ιδέες που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μια μεγάλη προσπάθεια να κατανοηθεί τρόπος συμπεριφοράς ρωγμών σε δομικά στοιχεία και ιδιαίτερα σε δυναμικά φορτιζόμενες κατασκευές, όπως οι άξονες, καθώς και να εκτιμηθεί η επιρροή τους στη δομική ακεραιότητα και ασφάλεια αυτών. Οικονομικοί, ενεργειακοί και περιβαλλοντολογικοί λόγοι επιτάσσουν, σήμερα, τον σχεδιασμό με βάση την «ανοχή στη βλάβη». Τη δημιουργία δηλαδή μηχανών που θα μπορούν παρότι φέρουν κάποιου είδους βλάβη, όπως παραδείγματος χάρη μια ρωγμή, να συνεχίσουν να λειτουργούν χωρίς να δημιουργούνται κίνδυνοι αστοχίας και ασφάλειας. Έτσι, έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ανακάλυψη μη καταστροφικών μεθόδων ανίχνευσης όχι μόνο της ύπαρξης ρωγμής, αλλά και εξακρίβωσης της θέσης της και του μεγέθους της, ούτως ώστε η αντικατάσταση των ρηγματωμένων δομικών στοιχείων να γίνεται την ώρα που πρέπει, δηλαδή λίγο πριν την αστοχία.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου η επιβαλλόμενη εναλλασσόμενη φόρτιση στην ρηγματωμένη κατασκευή προκαλεί άλλοτε το άνοιγμα και άλλοτε το τμηματικό ή και πλήρες κλείσιμο των επιφανειών της ρωγμής. Η αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων σε θεωρητικό επίπεδο παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες λόγω της έμφυτης μη-γραμμικότητας γενικότερα της επαφής και ειδικότερα της τριβής. Η πειραματική οδός από την άλλη αποτελεί μια χρονοβόρα και ακριβή λύση ιδιαίτερα όταν το πρόβλημα παρουσιάζει πολύπλοκο γεωμετρικό ορισμό.

Στην παρούσα πτυχιακή χρησιμοποιείται η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για την προσομοίωση της δυναμικής, κυρίως, συμπεριφοράς ρηγματωμένων αξόνων κάτω από εναλλασσόμενα φορτία που οδηγούν στο κλείσιμο της ρωγμής, κατά το οποίο τόσο η έκταση όσο και το είδος της επαφής μεταξύ των επιφανειών της ρωγμής μεταβάλλονται με το χρόνο. Η ανάλυση των αξόνων επικεντρώθηκε κυρίως στην απόκριση μετατόπισης και στροφής των φορτιζόμενων άκρων των αξόνων. Μελετήθηκε ιδιαίτερος η ευκαμψία, η αντίστροφη δηλαδή ιδιότητα της δυσκαμψίας των αξόνων. Η ευκαμψία ενός δομικού στοιχείου συνηθίζεται να αποκαλείται ενδοτικότητα. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στον καθορισμό της χρονικά μεταβαλλόμενης τοπικής ενδοτικότητας που παρουσιάζει μια ρωγμή σε έναν άξονα, ανάλογα με το μέγεθος της και το είδος του φορτίου. Αυτή η πληροφορία

κρίθηκε βαρύνουσας σημασίας καθώς η ενδοτικότητα είναι άμεσα συνδεδεμένη με την δυσκαμψία και άρα τις, εύκολα ανιχνεύσιμες, ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές μιας κατασκευής.

Κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος αποτυπώθηκε η τρισδιάστατη μορφολογία των ρηγματωμένων αξόνων. Ως βασικό υλικό της κατασκευής χρησιμοποιήθηκε ο κοινός χάλυβας. Η διακριτοποίηση του άξονα έγινε με πεπερασμένα στοιχεία όγκου. Για την ανάλυση της επαφής χρησιμοποιήθηκαν επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία που αποτρέπουν την διείσδυση υλικού κατά την επαφή αλλά και επιτρέπουν τη δημιουργία επαπτομενικών δυνάμεων τριβής. Για την αξιόπιστη προσομοίωση της επαφής των επιφανειών της ρωγμής χρησιμοποιήθηκε επίσης, ο στατικός και ο κινητικός συντελεστής τριβής που παρέχει ο κοινός χάλυβας. Λόγω της μη γραμμικότητας του προβλήματος, χρησιμοποιήθηκαν επαναληπτικές διαδικασίες σύγκλισης βασισμένες στο αλγόριθμο Newton Raphson σε συνδυασμό με τη χρήση μικρών χρονικών βημάτων επίλυσης.

Η παρούσα πτυχιακή είναι οργανωμένη σε κεφάλαια όπως αναλύεται παρακάτω.

Στην πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια γενική και σύντομη παρουσίαση των βασικών αστοχιών που παρατηρούνται στους άξονες. Γίνεται λόγος για την κόπωση, και την εξέλιξη θραύσης που παρατηρείται κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης καταπόνησης. Γίνεται ειδική μνεία στη ιδιόμορφη συμπεριφορά που παρατηρείται γύρω από άκρο μιας ρωγμής αλλά και τους συντελεστές έντασης τάσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποσαφηνίζεται η έννοια της ενδοτικότητας, της τοπικής ενδοτικότητας ρωγμής αλλά και των μεθόδων υπολογισμού αυτών με ή χωρίς την γνώση των συντελεστών έντασης τάσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά γενικά στο πρόβλημα της επαφής αλλά και ειδικά στις συνθήκες που επικρατούν κατά το κλείσιμο μια ρωγμής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και ο τρόπος που αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται στον υπολογιστή. Επίσης αναλύεται λεπτομερώς ο τρόπος μοντελοποίησης όλων των προβλημάτων που αντιμετωπίστηκαν στα πλαίσια της παρούσας πτυχιακής εργασίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αποσαφηνίζεται ο τρόπος υπολογισμού των αποτελεσμάτων ενώ παρουσιάζονται ομαδοποιημένα τα αποτελέσματα που αφορούν την στατική και δυναμική απόκριση ρηγματωμένων ή μη αξόνων.

Τέλος στο έκτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συνολικά συμπεράσματα αυτής της προσπάθειας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ/ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ</u>	<u>Σελ.</u>
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	iii
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	v
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	ix
1. ΑΣΤΟΧΙΕΣ ΑΞΟΝΩΝ	1
1.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	1
1.2 ΚΟΠΩΣΗ.....	2
1.3 ΘΡΑΥΣΗ.....	6
1.4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	9
2. ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΩΝ	13
2.1 ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΤΩΝ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ – ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ.....	13
2.2 ΤΟΠΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΡΩΓΜΗΣ.....	16
2.3 ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΟΠΙΚΗΣ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΑΠΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΑΣΗΣ.....	19
2.4 ΜΗΤΡΩΟ ΤΟΠΙΚΗΣ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	24
2.5 ΑΔΥΝΑΜΙΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΟΠΙΚΗΣ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΑΠΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΑΣΗΣ.....	28
3. ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΡΩΓΜΗΣ	31
3.1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΕΠΑΦΗΣ.....	31
3.2 ΕΠΑΦΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΡΩΓΜΗΣ.....	34
4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	39
4.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	39
4.1.1 Προεπεξεργασία.....	41
4.1.2 Επίλυση του προβλήματος.....	44
4.1.3 Μετεπεξεργασία.....	46
4.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.....	48
4.2.1 Γεωμετρία.....	49
4.2.2 Διακριτοποίηση.....	49
4.2.3 Υλικά.....	53

4.2.4 Συνοριακές συνθήκες.....	53
5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	55
5.1 ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ ΑΞΟΝΑ.....	56
5.2 ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΠΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΑΝΟΙΓΟΥΣΑΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	59
5.3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΑΞΟΝΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΠΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΡΩΓΜΗΣ.....	67
5.3.1 Αρμονικά μεταβαλλόμενη αξονική φόρτιση.....	67
5.3.2 Αρμονικά μεταβαλλόμενη κατακόρυφη καμπτική φόρτιση.....	73
5.3.3 Αρμονικά μεταβαλλόμενη οριζόντια καμπτική φόρτιση.....	78
5.3.4 Αρμονικά μεταβαλλόμενη στεπτική φόρτιση.....	83
5.3.5 Ομαλά περιστρεφόμενη και σταθερή σε μέτρο κάμψη.....	88
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	95
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	97

1. ΑΣΤΟΧΙΕΣ ΑΞΟΝΩΝ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

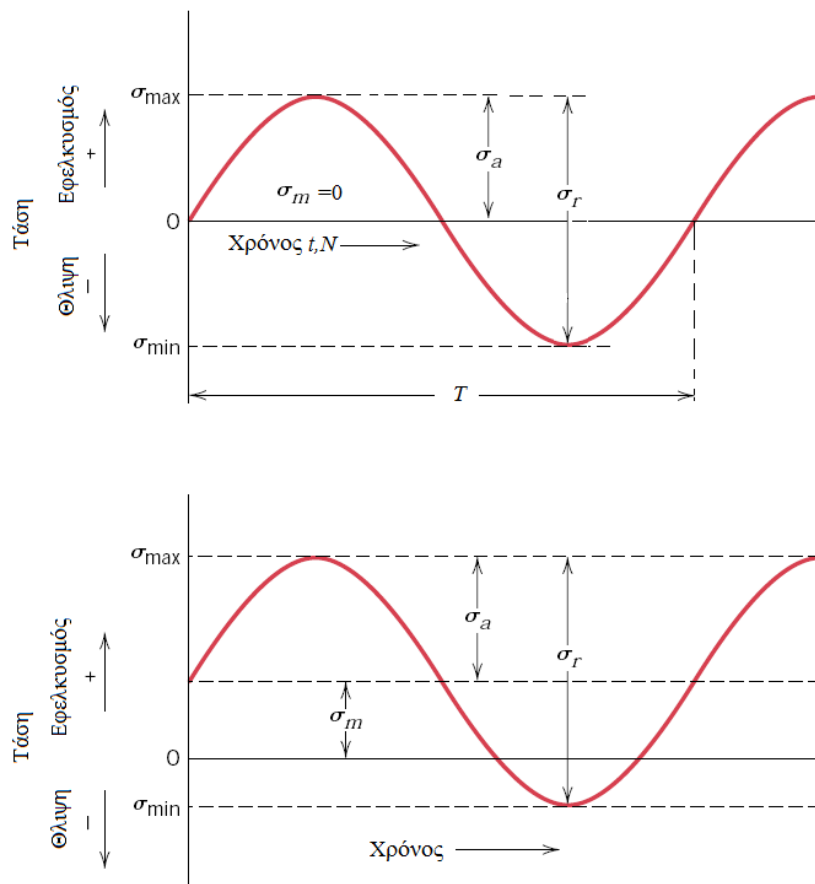
Οι άξονες αποτελούν ένα βασικό στοιχείο μηχανών με ευρύτατη χρήση σε πάρα πολλές κατασκευές και μηχανές. Οι αυξανόμενες απαιτήσεις για εξοικονόμηση ενέργειας και υλικών, οδηγούν στον σχεδιασμό των αξόνων με μικρότερους συντελεστές ασφάλειας. Ένας άξονας θα πρέπει να είναι ίσως το τελευταίο στοιχείο μηχανών που θα αστοχήσει διότι είναι πολύ πιθανό να έχουμε παράπλευρες αστοχίες, έως και την ολοκληρωτική καταστροφή της κατασκευής. Παρ' όλα αυτά, η ύπαρξη, η δημιουργία και η διάδοση ρωγμών είναι ένα φαινόμενο που δεν μπορεί να αποφευχθεί σε καμία μηχανολογική κατασκευή. Λιτές διαδικασίες σχεδιασμού που απέφευγαν μεγάλες συγκεντρώσεις τάσεων σε συνδυασμό με άμεση επισκευή ή απόσυρση αξόνων που παρουσίαζαν ρωγμές, έχουν αποβεί αποτελεσματικές μέθοδοι στην πρόληψη καταστροφικών αστοχιών. Εντούτοις, δύο σημαντικοί παράγοντες έχουν εμφανιστεί για να αναιρέσουν την παραδοσιακή αυτή στρατηγική:

Πρώτον, οι βελτιωμένες μη καταστροφικές μέθοδοι εκτίμησης έχουν κάνει ατέλειες που πρωτίτερα πέρναγαν απαρατήρητες, να μπορούν πλέον να ανιχνευθούν. Δεύτερον, η παρουσία ατελειών με τη μορφή ρωγμών σε ένα άξονα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αυτός είναι στο τέλος της λειτουργικής του ζωής. Το κόστος επισκευής ή αντικατάστασης ενός ελαττωματικού εξαρτήματος, μπορεί να εξισορροπηθεί με την πιθανότητα ότι η παράταση της λειτουργίας του θα μπορούσε να οδηγήσει σε αστοχία. Η νέα μηχανολογική ιδέα γνωστή ως *ανοχή βλάβης*, έχει αναπτυχθεί ώστε να παρέχει ποσοτική καθοδήγηση για αυτό το σκοπό. Είναι βασισμένη με τη σειρά της στην τεχνολογία της θραυστομηχανικής. Παρόλο που δεν είναι ο μοναδικός παράγοντας στην αποτίμηση ακεραιότητας μιας κατασκευής, παίζει σημαντικό ρόλο.

1.2 ΚΟΠΩΣΗ

Τα φορτία που δέχεται ένας άξονας, είναι στην πλειοψηφία τους δυναμικά. Το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο άξονας, κάτω από τέτοια φορτία, υφίσταται κόπωση και καταστρέφεται μετά από ένα χρονικό διάστημα ακόμη και αν οι τάσεις που το καταπονούν, είναι κάτω από το όριο διαρροής. Το φαινόμενο της θραύσης από κόπωση οφείλεται κατά κύριο λόγο στην εσωτερική δομή του υλικού και ιδιαίτερα στην ύπαρξη γραμμικών, επιφανειακών και χωρικών ατελειών ή μικρορωγμών. Σημαντικό ρόλο στην κόπωση ενός άξονα, παίζει επιπλέον η γεωμετρία, η κατεργασία, η στήριξη και οι συνθήκες λειτουργίας στις οποίες υποβάλλεται.

Το όριο αντοχής σε κόπωση, προσδιορίζεται με εργαστηριακά πειράματα. Επειδή τα φορτία που καταπονούν μια κατασκευή είναι τυχαία τόσο σε ένταση όσο και σε συχνότητα, η μελέτη στο εργαστήριο γίνεται με απλά εναλλασσόμενα φορτία όπως αυτά του Σχήματος 1.1:



Σχήμα 1.1: Ημιτονοειδής εναλλασσόμενη φόρτιση.

Όπου, N ο κύκλος φόρτισης, T η περίοδος, σ_a το πλάτος της τάσης, σ_m η μέση τάση, σ_{\max} η μέγιστη τάση σε ένα κύκλο φόρτισης, σ_{\min} η ελάχιστη τάση σε ένα κύκλο φόρτισης και:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (1.1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1.2)$$

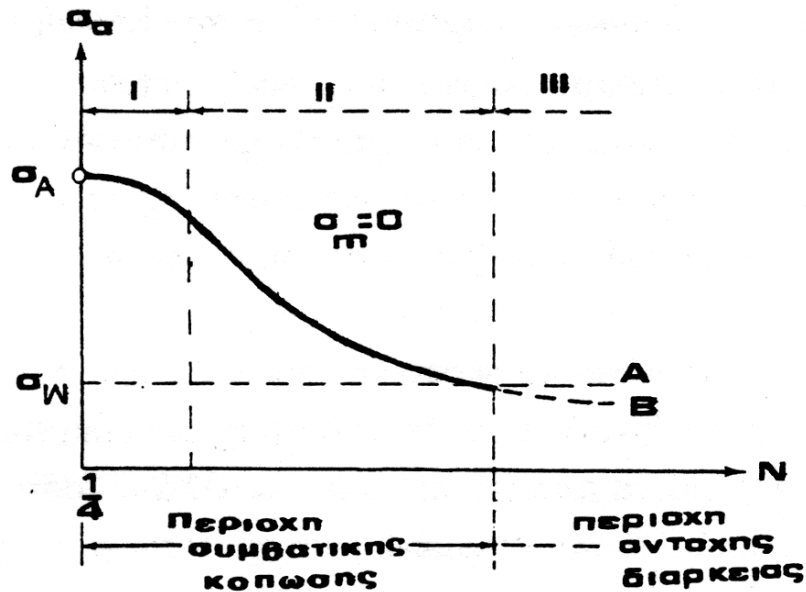
Στο πείραμα κόπωσης, το δοκίμιο υποβάλλεται σε εναλλασσόμενα αξονικά φορτία με σταθερή τάση σ_m και πλάτος σ_a και προσδιορίζεται ο αριθμός των κύκλων φόρτισης N κάτω από τον οποίο επέρχεται θραύση. Το πείραμα επαναλαμβάνεται διατηρώντας τη μέση τάση σταθερή και μεταβάλλοντας το πλάτος. Τα αποτελέσματα γράφονται σε ένα διάγραμμα $\sigma_a(N)$, που ονομάζεται διάγραμμα *Wöhler* (Σχήμα 1.2):



Σχήμα 1.2: Καμπύλη *Wöhler*.

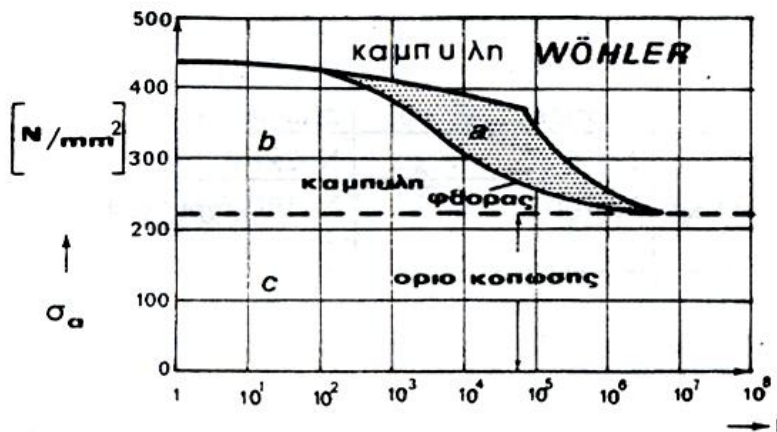
Όριο αντοχής σε κόπωση σ_e ονομάζεται η τιμή της τάσης σ_a για ορισμένη μέση τάση σ_m κάτω από την οποία το υλικό δεν αστοχεί για άπειρο αριθμό κύκλων φόρτισης. Σε ένα διάγραμμα Wöhler διακρίνουμε τρεις περιοχές [1] (Σχήμα 1.3):

- I) Την περιοχή ολιγοκυκλικής κόπωσης
- II) Την περιοχή πολυκυκλικής κόπωσης
- III) Την περιοχή αντοχής διάρκειας



Σχήμα 1.3: Καμπύλη περιοχές Wöhler.

Μαζί με την καμπύλη Wöhler, προσδιορίζεται συγχρόνως και η καμπύλη φθοράς του υλικού. Η καμπύλη αυτή δείχνει σε ποια εναλλασσόμενη τάση $\sigma_a(N)$ παρουσιάζονται οι πρώτες ρωγμές στο δοκίμιο.

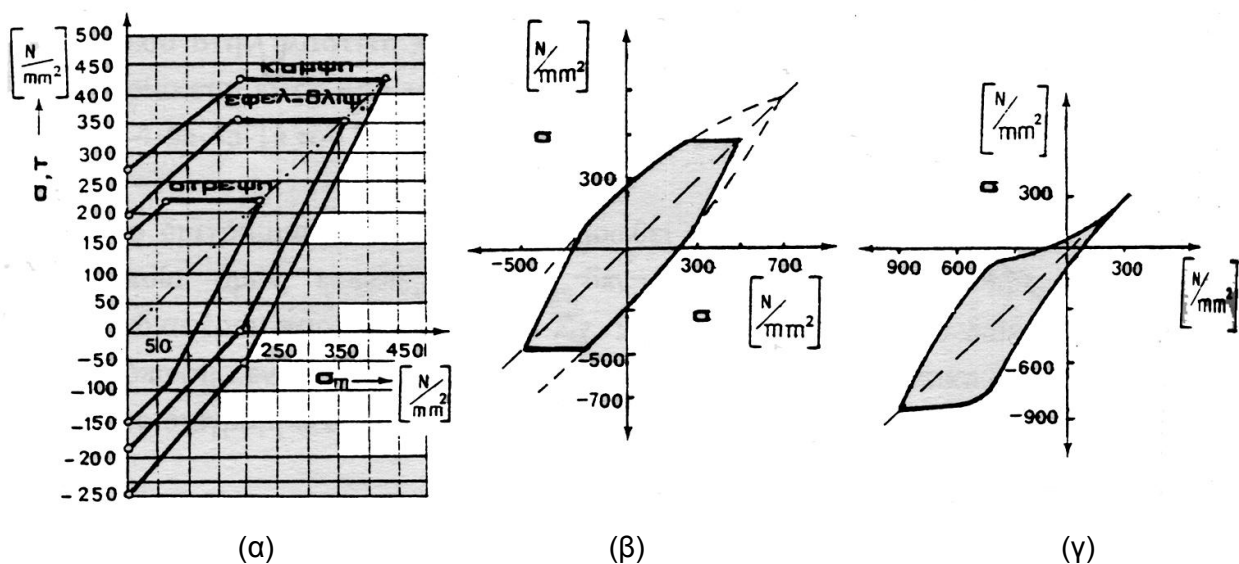


Σχήμα 1.4: Καμπύλη Wöhler και καμπύλη φθοράς

Διακρίνουμε τρεις περιοχές:

- α) Την περιοχή όπου παρατηρούνται ρωγμές λόγω αυξημένης καταπόνησης.
- β) Την περιοχή που η καταπόνηση του δοκιμίου είναι μεγαλύτερη από την αντοχή του σε κόπωση χωρίς όμως να παρουσιάζονται ρωγμές στο δοκίμιο.
- γ) Την περιοχή καταπόνησης κάτω από την αντοχή κόπωσης του υλικού.

Η ολική συμπεριφορά του υλικού σε κόπωση, παριστάνεται συνήθως με διαγράμματα *Smith* τόσο για αξονικά, όσο και για καμπτικά ή στρεπτικά φορτία (Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5: Διαγράμματα *Smith* του (α) *St60* σε κάμψη, εφελκυσμό, θλίψη στρέψη (β) του *St70*, (γ) του χυτοσίδηρου.

Έτσι λοιπόν λόγω του φαινομένου της κόπωσης, παρουσιάζονται κάποιες ρωγμές των οποίων η διάδοση, μπορεί να οδηγήσει σε θραύση. Παράγοντες που επηρεάζουν την κόπωση είναι επιπλέον οι διαστάσεις του άξονα, η ποιότητα της επιφάνειας, η θερμοκρασία, η οξείδωση και η προϊστορία του υλικού.

1.3 ΘΡΑΥΣΗ

Ως θραύση ονομάζουμε τον μακροσκοπικό αποχωρισμό τμήματος ενός σώματος, που υποβάλλεται σε εξωτερικές καταπονήσεις. Προέρχεται από ορθές ή διατμητικές τάσεις, όταν αυτές υπερβούν μια κρίσιμη τιμή. Η θραύση λόγω κόπωσης, οφείλεται στο γεγονός ότι οι τάσεις στα άκρα των ρωγμών έχουν πολύ μεγαλύτερες τιμές από άλλες περιοχές του υλικού. Επιπλέον, περιοχές γύρω από άκρα ρωγμών, παρουσιάζουν μεγάλη πυκνότητα ενέργειας. Αν η τάση στα άκρα της ρωγμής ξεπεράσει το όριο αντοχής του υλικού, η ρωγμή διαδίδεται.

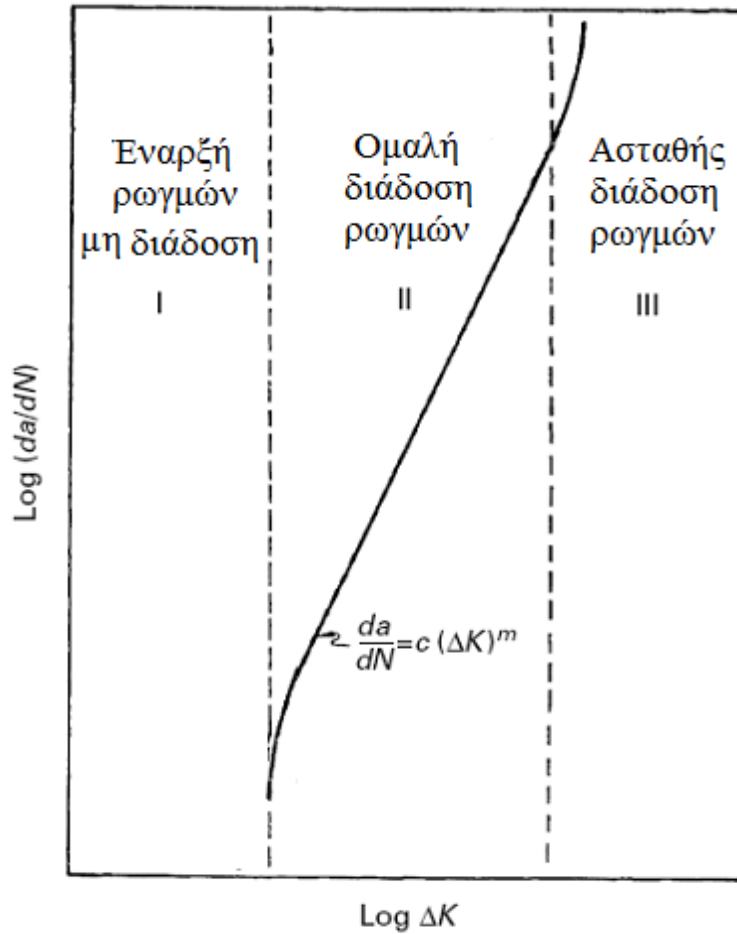
Ως θραύση κόπωσης ονομάζουμε την θραύση ενός υλικού, που οφείλεται σε κόπωση, λόγω εναλλασσόμενων φορτίων που το καταπονούν. Η θραύση κόπωσης χαρακτηρίζει κυρίως άξονες που περιστρέφονται με μεγάλη ταχύτητα. Η θραύση κόπωσης ξεκινά από την επιφάνεια του άξονα και διαδίδεται στο εσωτερικό του, μέχρι που η επιφάνεια διατομής γίνεται τόσο μικρή, ώστε να μην αντέχει τις εξωτερικές καταπονήσεις και σπάει βίαια. Οι πρώτες ρωγμές εμφανίζονται μεταξύ 0.1 - 10 % της ολικής διάρκειας ζωής.

Οι διαδικασίες που παίρνουν μέρος στην κόπωση του υλικού, μπορούν να χωριστούν μακροσκοπικά στα εξής τρία στάδια:

- α) Στο στάδιο ενδοτράχυνσης.
- β) Στο στάδιο δημιουργίας ρωγμών.
- γ) Στο στάδιο διάδοσης ρωγμών.

Μεγάλη τεχνική σημασία έχει και η ταχύτητα διάδοσης της ρωγμής (Σχήμα 1.6). Από το διάγραμμα ρυθμού διάδοσης της ρωγμής σε σχέση με τον συντελεστή έντασης τάσης N , προκύπτει η παρακάτω σχέση που ονομάζεται Νόμος του *Paris*:

$$\frac{da}{dN} = c(\Delta K)^m \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.6: Διάγραμμα ρυθμού διάδοσης ρωγμής-Συντελεστή έντασης τάσης.

Όπου da η αύξηση της ρωγμής, dN η αύξηση των κύκλων φόρτισης, c μία σταθερά που λαμβάνεται υπόψη όταν το μέγεθος της ρωγμής δεν είναι πια μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του δοκιμίου και είναι συνάρτηση του μήκους της ρωγμής και m η κλίση του διαγράμματος. Τέλος, ΔK είναι η μεταβολή του συντελεστή έντασης τάσης.

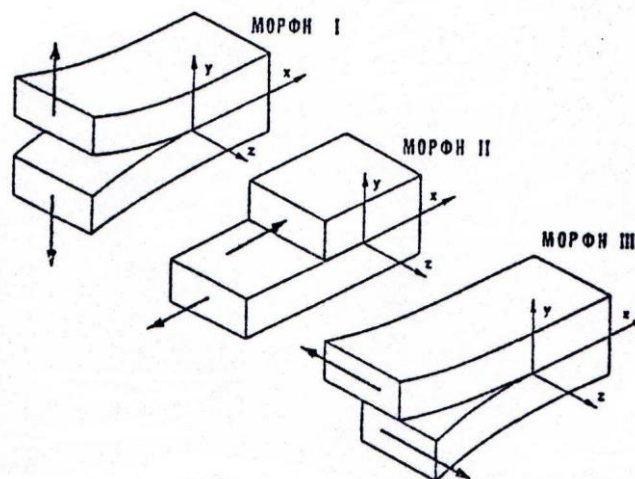
Στο Σχήμα 1.7, παριστάνεται η μακροσκοπική εικόνα του είδους θραύσης σε σχέση με το είδος καταπόνησης ενός άξονα.

Μεγάλες ορθές τρύπες			Μικρές ορθές τρύπες		
λείο	ομαλή εγκοπή	επίτομη εγκοπή	λείο	ομαλή εγκοπή	επίτομη εγκοπή
Αξονες					
Ελαστικά με εξωτερ. εγκοπή					
Ελαστικά με εσωτ. εγκοπή					
Ευελκυστός & Ευελκυστός-Βλάβη					
Επιπλαστική κλίση					
Αντελαστούμενη κλίση					
Προλαστούμενη κλίση					
Αντελαστούμενη στρόφιλη					

Σχήμα 1.7: Σχηματική παράσταση της μορφής θραύσης σε σχέση με το είδος της καταπόνησης.

1.4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΡΩΓΜΗΣ

Η γραμμική ελαστική θραυστομηχανική συσχετίζει το μέγεθος και κατανομή του τασικού πεδίου στη γειτνιάζουσα περιοχή του άκρου της ρωγμής με τη φόρτιση και γεωμετρία του ρηγματωμένου σώματος αγνοώντας την ανελαστικότητα στο άκρο της ρωγμής. Οι ανελαστικές επιδράσεις περιορίζονται σε μια πολύ μικρή περιοχή και έτσι μπορούν να θεωρηθούν ως αμελητέες. Στις τρεις διαστάσεις, έχει γενικά παρατηρηθεί ότι υπάρχουν τρεις βασικές μορφές παραμόρφωσης της ρωγμής (Σχήμα 1.8) που είναι απαραίτητες και επαρκείς για να περιγράψουν την γενικότερη συμπεριφορά της στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων και είναι η ανοίγουσα μορφή (μορφή I), η ολισθαίνουσα μορφή (μορφή II) και η μορφή απόσχισης (μορφή III).



Σχήμα 1.8: Οι τρεις βασικές μορφές ρωγμής: Ανοίγουσα μορφή, ολισθαίνουσα μορφή και μορφή απόσχισης.

Ο *Irwin* [2] συμπέρανε ότι οι τάσεις και οι μετατοπίσεις κοντά και γύρω από το άκρο της ρωγμής, μέσα σε ένα ομογενές ελαστικό μέσο παρουσιάζουν ιδιόμορφη συμπεριφορά αναφορικά με την απόσταση r από το άκρο της ρωγμής. Κατόρθωσε να συσχετίσει κάποιους παραμέτρους γνωστές ως συντελεστές έντασης τάσης με το πεδίο των τάσεων και των μετατοπίσεων στην περιοχή γύρω από το άκρο μιας ρωγμής. Χρησιμοποιώντας ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων (r, γ) τοποθετημένο στο άκρο της ρωγμής η συμπεριφορά των τάσεων μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\sigma_{11} = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{3\gamma}{2} \right) - \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\gamma}{2} \left(2 + \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{3\gamma}{2} \right) \quad (1.4)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\gamma}{2} \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{3\gamma}{2} \right) + \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{3\gamma}{2} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{3\gamma}{2} + \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{3\gamma}{2} \right) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0, \text{ \acute{e}\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\eta \text{ \epsilon}\lambda\alpha\sigma\tau\acute{\iota}\kappa\omicron\tau\eta\tau\alpha} \\ \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \text{ \acute{e}\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\eta \text{ \pi}\alpha\alpha\mu\omicron\rho\phi\omega\sigma\eta} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\sigma_{13} = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\gamma}{2} \quad (1.8)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\gamma}{2} \quad (1.9)$$

$$u_1 = \frac{K_{\text{I}}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{3\gamma}{2} \right] - \frac{K_{\text{II}}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{3\gamma}{2} \right] \quad (1.10)$$

$$u_2 = \frac{K_{\text{I}}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{3\gamma}{2} \right] - \frac{K_{\text{II}}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{3\gamma}{2} \right] \quad (1.11)$$

$$u_3 = \frac{K_{\text{III}}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\gamma}{2} \quad (1.12)$$

όπου ν η σταθερά *Poisson*, G είναι το μέτρο διάτμησης και αποτελεί μία από τις ισοθερμικές ελαστικές σταθερές *Lame* ενώ $\kappa = 3 - 4\nu$ για επίπεδη κατάσταση παραμόρφωσης ή $\kappa = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$ για επίπεδη εντατική κατάσταση. Οι παράμετροι

K_I , K_{II} και K_{III} ονομάζονται Συντελεστές Έντασης Τάσης (ΣΕΤ) ανοίγουσα μορφής ρωγμής, ολισθαίνουσας μορφής ρωγμής και μορφής απόσχισης, αντίστοιχα.

Από τις παραπάνω εξισώσεις γίνεται εμφανής η ασυμπτωτική συμπεριφορά αναφορικά με την απόσταση r της μορφής $r^{-1/2}$ και $r^{1/2}$ που παρουσιάζουν οι τάσεις και οι μετατοπίσεις κοντά και γύρω από το άκρο της ρωγμής, αντίστοιχα.

Η διαφορά μεταξύ ενός ρηγματωμένου δοκιμίου και ενός άλλου χωρίς ρωγμή, βρίσκεται στο μέγεθος του ΣΕΤ K_i με $i = I, II, III$ του πεδίου της. Με αυτή την έννοια ο συντελεστής K_i βοηθά σαν μια κλίμακα για να καθορισθεί το μέγεθος των τάσεων στο άκρο της ρωγμής. Προφανώς :

$$K_i = f(\sigma, a) \quad (1.13)$$

Όπου η εξάρτηση βασίζεται στη διαμόρφωση της κατασκευής, στη γεωμετρία και θέση της ρωγμής και στον τρόπο και μέγεθος της φόρτισης. Ο K_i επομένως είναι ιδιότητα της κάθε συγκεκριμένης κατασκευής και έχει μονάδες $P\sqrt{m}$. Για πολλές απλές και χρήσιμες στην πράξη περιπτώσεις δίνεται σε διαγράμματα ή σε αναλυτική μορφή.

Αν ο ΣΕΤ για μια δεδομένη κατασκευή ή ένα δοκίμιο είναι γνωστός, τότε είναι δυνατό να καθορίσουμε τον μέγιστο ΣΕΤ ο οποίος θα μπορούσε να προκαλέσει αστοχία. Αυτή η κρίσιμη τιμή του K_i συμβολίζεται με K_{icr} και λέγεται αντοχή σε θραύση του υλικού.

Η ολική ελαστική ενέργεια που απελευθερώνεται ανά μονάδα αύξησης της επιφάνειας της ρωγμής (από τη μια πλευρά της) συμβολίζεται με J . Η φυσική έννοια του J , μπορεί να θεωρηθεί σαν την ενέργεια που προκύπτει από τη διάδοση της ρωγμής, σαν αποτέλεσμα του έργου των μετατοπίσεων των φορτίσεων και της μείωσης της ενέργειας παραμόρφωσης που συνοδεύεται από μία μοναδιαία αύξηση της επιφάνειας της ρωγμής. Για ένα απομονωμένο σύστημα ρωγμής, αποδεικνύεται ότι:

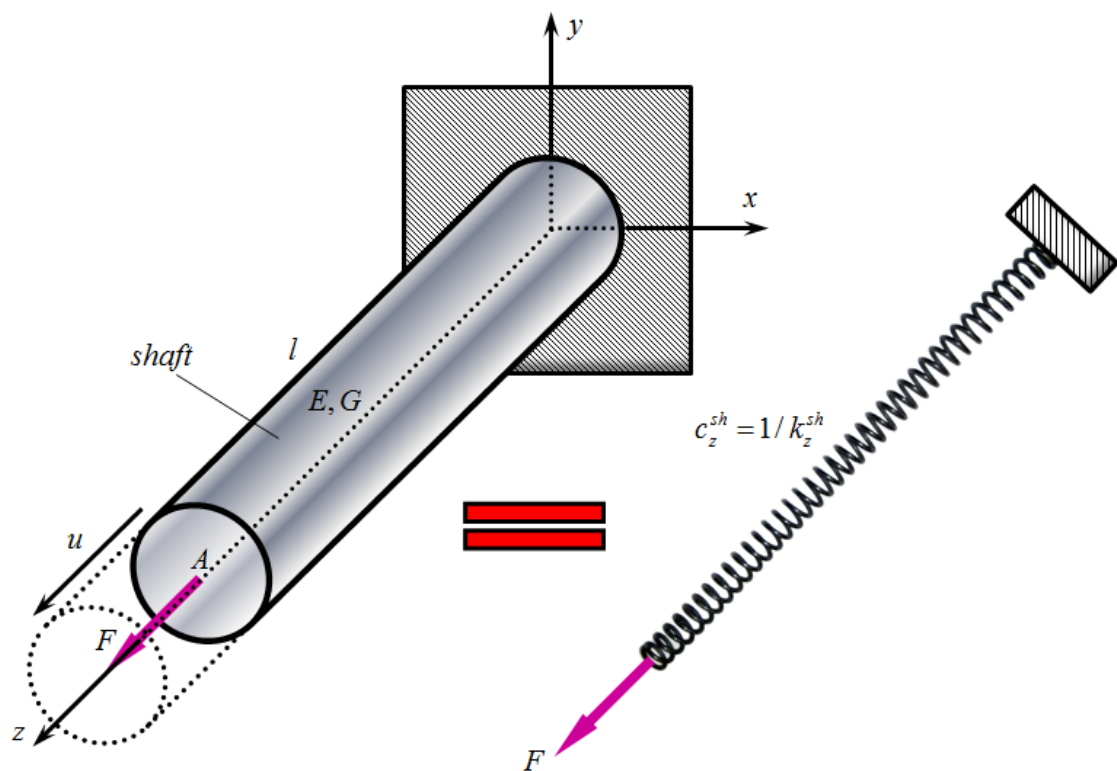
$$J = \frac{1-\nu}{2G} K_I^2 + \frac{1-\nu}{2G} K_{II}^2 + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (1.14)$$

Όλες οι προηγούμενες σχέσεις που αναφέρθηκαν, βασίζονται στη γραμμική θεωρία της ελαστικότητας και εμπίπτουν στη γραμμική θραυστομηχανική.

2. ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

2.1 ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΤΩΝ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ – ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ας θεωρηθεί ο συμπαγής άξονας (*shaft*) μήκους l διατομής A του Σχήματος 2.1 υπό την επίδραση μικρής εφελκυστικής δύναμης F_z η οποία οδηγεί σε ελαστική μονοαξονική παραμόρφωση u_z .



Σχήμα 2.1: Άξονας υπό εφελκυσμό και μηχανικό ισοδύναμο ελατηρίου.

Σύμφωνα με τη θεωρία ελαστικότητας η παραμόρφωση του φορτιζόμενου άκρου συνδέεται με τη τάση σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (2.1)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η μετατόπιση του άκρου u_z συνδέεται με την επιβαλλόμενη δύναμη με τη σχέση:

$$u_z = \frac{l}{AE} F_z \quad (2.2)$$

Ας θεωρηθεί τώρα ως μηχανικό ισοδύναμο του άξονα ένα ελατήριο σταθεράς k_z^{sh} . Το ελατήριο για να θεωρηθεί ισοδύναμο με τον άξονα θα πρέπει να μετατοπισθεί κατά u_z εφόσον φορτισθεί στο ελεύθερο άκρο του με δύναμη F_z . Επομένως, σύμφωνα με το νόμο του Hooke για το ελατήριο αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$F_z = k_z^{sh} u_z \Rightarrow u_z = \frac{1}{k_z^{sh}} F_z \quad (2.3)$$

ή αν τεθεί:

$$c_z^{sh} = \frac{1}{k_z^{sh}} \quad (2.4)$$

προκύπτει:

$$u_z = c_z^{sh} F_z \quad (2.5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.2) έως (2.5) προκύπτει ότι για τη περίπτωση του εφελκυσμού ένα ελατήριο μπορεί να δράσει ως μηχανικό ανάλογο του συμπαγούς άξονα αν έχει αντίστροφη δυσκαμψία ίση με :

$$c_z^{sh} = \frac{1}{k_z^{sh}} = \frac{u_z}{F_z} = \frac{l}{AE} \quad (2.6)$$

Η παράμετρος c_z^{sh} ονομάζεται ενδοτικότητα σε εφελκυσμό του συμπαγούς άξονα, έχει μονάδες N/m και ουσιαστικά εκφράζει την ευκαμψία του άξονα. Πιο

πρακτικά, ισοδυναμεί με τη μετατόπιση του ελεύθερου άκρου του άξονα αν εφαρμοστεί σε αυτό μοναδιαία δύναμη.

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι με τον ίδιο τρόπο δύναται να αναπαρασταθεί και η φόρτιση καθαρής κάμψης γύρω από τον άξονα x χρησιμοποιώντας ένα στρεπτικό ελατήριο με ενδοτικότητα ίση με:

$$c_{\theta x}^{sh} = \frac{\theta_x}{M_x} = \frac{l}{EI_x} \quad (2.7)$$

όπου θ_x η προκαλούμενη γωνία κάμψης στο φορτιζόμενο άκρο, γύρω από τον άξονα x , εξαιτίας της δράσης της ροπής κάμψης M_x ενώ I_x η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x .

Για κάμψη γύρω από τον άξονα y απαιτείται προφανώς ένα στρεπτικό ελατήριο με ενδοτικότητα ίση με:

$$c_{\theta y}^{sh} = \frac{\theta_y}{M_y} = \frac{l}{EI_y} \quad (2.8)$$

όπου θ_y η προκαλούμενη γωνία κάμψης στο φορτιζόμενο άκρο γύρω από τον άξονα y , εξαιτίας της δράσης της ροπής κάμψης M_y ενώ I_y η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y .

Για την φόρτιση καθαρής στρέψης θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα στρεπτικό ελατήριο με ενδοτικότητα ίση με:

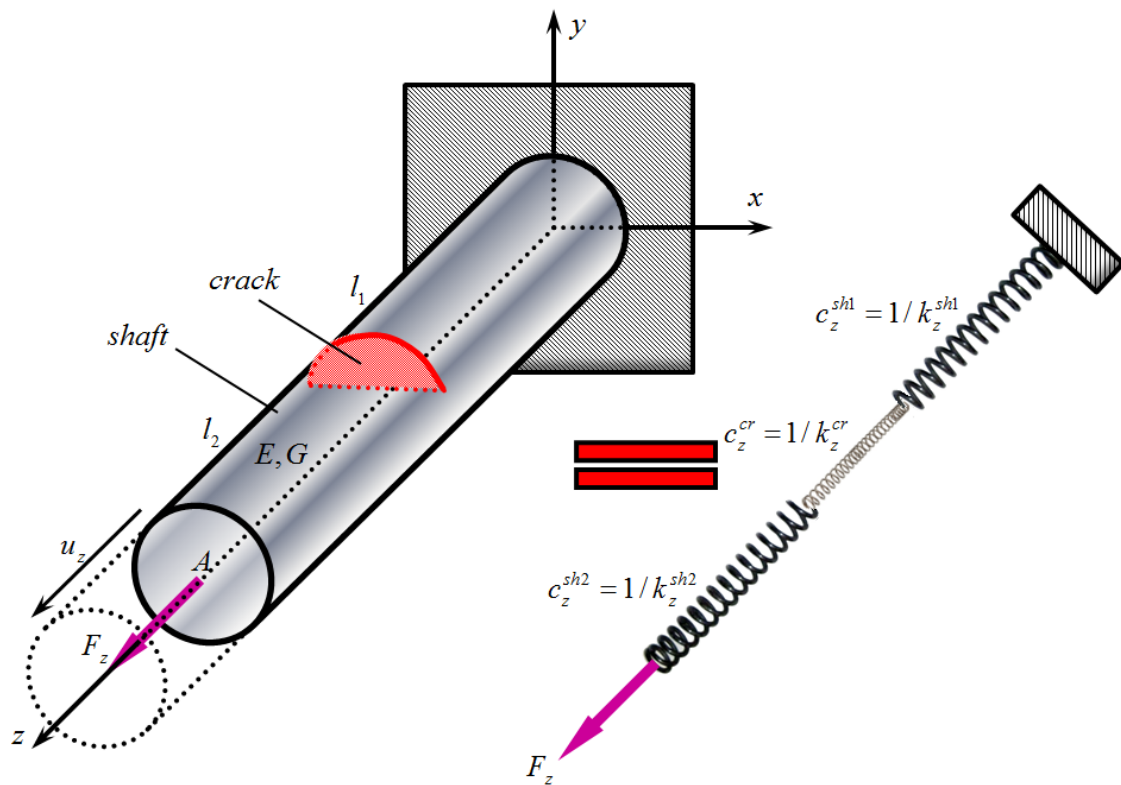
$$c_{\theta z}^{sh} = \frac{\theta_z}{M_z} = \frac{l}{GI_p} \quad (2.9)$$

όπου θ_z η προκαλούμενη γωνία στρέψης στο φορτιζόμενο άκρο γύρω από τον άξονα z , εξαιτίας της δράσης της ροπής στρέψης M_z . Τέλος, I_p είναι η πολική ροπή αδράνειας του άξονα και G το μέτρο διάτμησης του άξονα. Οι ενδοτικότητες $c_{\theta x}^{sh}$, $c_{\theta y}^{sh}$ και $c_{\theta z}^{sh}$ ισοδυναμούν με τις γωνίες θ_x , θ_y και θ_z που θα λάβει το φορτιζόμενο άκρο

του άξονα εξαιτίας της επίδρασης σε αυτό, μοναδιαίων ροπών γύρω από του άξονες x , y και z , αντίστοιχα. Οι συγκεκριμένες ενδοτικότητατες έχουν μονάδες $(Nm)^{-1}$.

2.2 ΤΟΠΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΡΩΓΜΗΣ

Με την ίδια λογική ένας άξονας που περιέχει μία ρωγή κατά το μήκος του (*cracked shaft*) μπορεί να προσομοιωθεί με τη βοήθεια τριών ελατηρίων σε σειρά. Το Σχήμα 2.2 απεικονίζει έναν ρηγματωμένο άξονα στη θέση $z = l_1$ υπό την επίδραση εφελκυστικής δύναμης F_z .



Σχήμα 2.2: Ρηγματωμένος άξονας υπό εφελκυσμό και μηχανικό ισοδύναμο ελατηρίων.

Το πρόβλημα αυτό σύμφωνα με τη μέθοδο που προαναφέρθηκε μπορεί να αναπαρασταθεί με δύο ελατήρια που παριστάνουν τα συμπαγή τμήματα του άξονα δοκού, συνδεδεμένα σε σειρά με ένα τρίτο που απεικονίζει την δυσκαμψία που παρέχει η ρωγή. Σε αυτή τη περίπτωση δύναται να θεωρηθεί ότι η συνολική μετατόπιση του άκρου του ρηγματωμένου άξονα είναι:

$$u_z^{cs} = u_z^{sh1} + u_z^{cr} + u_z^{sh2} \quad (2.10)$$

όπου δείκτες cs και cr παραπέμπουν στον ρηγματωμένο άξονα και την ρωγμή, αντίστοιχα. Οι δείκτες $sh1$ και $sh2$ παραπέμπουν στα συμπαγή τμήματα l_1 και l_2 του ρηγματωμένου άξονα, αντίστοιχα. Από την σχέση (2.10) με τη βοήθεια της (2.6) προκύπτει:

$$F_z c_z^{cs} = F_z c_z^{sh1} + F_z c_z^{cr} + F_z c_z^{sh2} \quad (2.11)$$

ή

$$c_z^{cs} = c_z^{sh1} + c_z^{cr} + c_z^{sh2} \quad (2.12)$$

ή

$$c_z^{cs} = \frac{l_1 + l_2}{AE} + c_z^{cr} \quad (2.13)$$

ή

$$c_z^{cs} = c_z^{sh} + c_z^{cr} \quad (2.14)$$

Από την τελευταία σχέση λύνοντας ως προς την επονομαζόμενη τοπική ενδοτικότητα της ρωγμής c_z^{cr} σε εφελκυσμό, προκύπτει:

$$c_z^{cr} = c_z^{cs} - c_z^{sh} \quad (2.15)$$

όπου c_z^{cs} και c_z^{sh} είναι οι ενδοτικότητες του ρηγματωμένου και συμπαγούς άξονα υπό εφελκυσμό, αντίστοιχα.

Παρόμοιες σχέσεις είναι εύκολο να αποδειχθούν με ανάλογες μεθόδους και για άλλα είδη φόρτισης. Για την περίπτωση κάμψης γύρω από τον άξονα x είναι:

$$c_{\theta x}^{cr} = c_{\theta x}^{cs} - c_{\theta x}^{sh} \quad (2.16)$$

όπου $c_{\theta x}^{cs}$ και $c_{\theta x}^{sh}$ είναι οι ενδοτικότητες του ρηγματωμένου και συμπαγούς άξονα υπό κάμψη γύρω από τον άξονα x , αντίστοιχα.

Για την περίπτωση κάμψης γύρω από τον άξονα y είναι:

$$c_{\theta y}^{cr} = c_{\theta y}^{cs} - c_{\theta y}^{sh} \quad (2.17)$$

όπου $c_{\theta y}^{cs}$ και $c_{\theta y}^{sh}$ είναι οι ενδοτικότητες του ρηγματωμένου και συμπαγούς άξονα υπό κάμψη γύρω από τον άξονα y , αντίστοιχα.

Για την περίπτωση στρέψης γύρω από τον άξονα z είναι:

$$c_{\theta z}^{cr} = c_{\theta z}^{cs} - c_{\theta z}^{sh} \quad (2.18)$$

όπου $c_{\theta z}^{cs}$ και $c_{\theta z}^{sh}$ είναι οι ενδοτικότητες του ρηγματωμένου και συμπαγούς άξονα υπό στρέψη γύρω από τον άξονα z , αντίστοιχα.

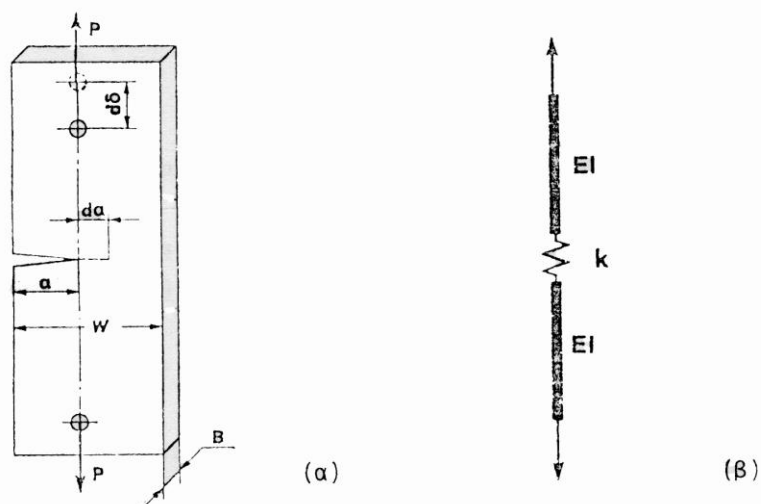
Οι σχέσεις (2.15) έως (2.18) υποδηλώνουν ότι η τοπική ενδοτικότητα μιας ρωγμής μπορεί να καθοριστεί πλήρως εφόσον οι ενδοτικότητες ρηγματωμένων και συμπαγών αξόνων είναι προηγούμενα γνωστές από πειρατικές, αναλυτικές ή αριθμητικές προσεγγίσεις.

Να τονισθεί σε αυτό το σημείο ότι η τοπική ενδοτικότητα μιας ρωγμής είναι ένα πολύ κρίσιμο χαρακτηριστικό στο σχεδιασμό αξόνων, διότι εκτός του ότι είναι ικανή να αναπαραστήσει πιστά τη συμπεριφορά της σε μια ανάλυση, μπορεί επιπλέον να συμβάλει στη πρόβλεψη μιας αστοχίας δεδομένου ότι οι ιδιοσυχνότητες ενός άξονα είναι συνάρτηση της δυσκαμψίας του και συνεπώς και της ενδοτικότητας του. Συνεπώς η γνώση εκ των προτέρων των τοπικών ενδοτικοτήτων μιας ρωγμής μπορεί να επιτρέψει την έγκαιρη διάγνωση της παρουσίας, της θέσης και του μεγέθους μιας ρωγμής μέσα από την ανάλυση ιδιοσυχνοτήτων [3,4,5].

2.3 ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΟΠΙΚΗΣ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΑΠΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΑΣΗΣ

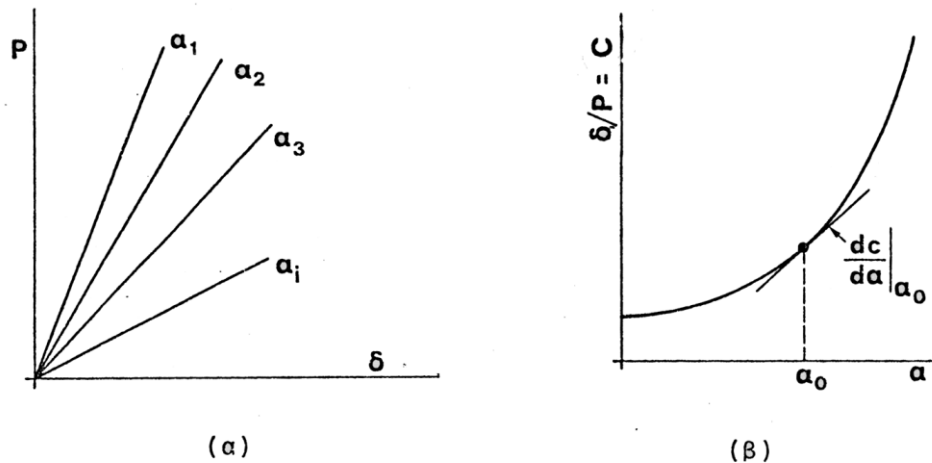
Μια πολύ γνωστή και διαδεδομένη μέθοδος υπολογισμού του ΣΕΤ για διάφορα δοκίμια και υλικά είναι η μέθοδος της συμμόρφωσης (*compliance*). Η παρουσία μιας ρωγμής σε μια κατασκευή αναμένεται να μεταβάλλει τα τοπικά δυναμικά της χαρακτηριστικά. Αφού γενικά η ρωγμή δεν μεταβάλλει τη μάζα του συστήματος, πρέπει να μεταβάλλει, σε πρώτη προσέγγιση, μόνο τη δυσκαμψία του συστήματος. Σε γενικότερη θεώρηση, πρέπει να μεταβάλλει και τα χαρακτηριστικά απόσβεσης του υλικού.

Τα πειράματα δοκιμών με ρωγμές, δείχνουν γραμμική σχέση φορτίων-μετατοπίσεων, σχέση που εξαρτάται από το δοκίμιο και το βάθος της ρωγμής. Επομένως, η ρωγμή θα πρέπει να παρουσιάζει τοπική ενδοτικότητα (ευκαμψία) που η μορφή της (διαμήκης, στροφική ή κάποιος συνδυασμός τους) εξαρτάται από τη μορφή της φόρτισης. Για παράδειγμα, ένα δοκίμιο πλάτους W και πάχους B που καταπονείται σε εφελκυσμό με δύναμη P και έχει μια ρωγμή βάθους a , μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα τοπικό διάμηκες ελατήριο σταθεράς $1/c$, σε μια στενή ζώνη στην περιοχή της ρωγμής και εκατέρωθεν αυτού δύο ελαστικοί φορείς, που παρουσιάζουν τα ίδια φυσικά χαρακτηριστικά με το αρχικό δοκίμιο όπως στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: (α) Δοκίμιο με ρωγμή και (β) ισοδύναμο στατικό μοντέλο του.

Τότε η πειραματική μέθοδος υπολογισμού του ΣΕΤ για το δοκίμιο αυτό σε γενικές γραμμές είναι η εξής: Για διάφορα βάθη ρωγμής a_i το δοκίμιο εφελκύεται και κατασκευάζονται τα διαγράμματα φορτίου P - μετατόπισης δ , που είναι γραμμικά (Σχήμα 2.3α)



Σχήμα 2.4: (α) Καμπύλες φορτίου-μετατόπισης και (β) Καμπύλη συμμόρφωσης.

Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί ότι η επιφανειακή ενέργεια για το δοκίμιο αυτό ισούται με:

$$J = \frac{P^2}{2B} \frac{dc}{da} \quad (2.19)$$

Όπως προκύπτει όμως από την εξίσωση (1.14), η σχέση μεταξύ του ΣΕΤ, για την ανοίγουσα μορφή θραύσης, και της επιφανειακής ενέργειας είναι:

$$K_I = \sqrt{\frac{JE}{1-\nu^2}} \quad (2.20)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{G}{2(1+\nu)} \quad (2.21)$$

Δηλαδή για να βρεθεί ο ΣΕΤ αρκεί να βρεθεί η J . Για να βρεθεί η J με βάση τα δεδομένα του Σχήματος 2.4α, φτιάχνεται το διάγραμμα $\delta/P - a$ όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4β, δηλαδή η ενδοτικότητα σε συνάρτηση με το βάθος της ρωγμής. Υπολογίζονται οι κλίσεις της καμπύλης $c = c(a)$ για διάφορες τιμές του a και στη συνέχεια εισάγονται στην εξίσωση (2.19). Έτσι υπολογίζεται η:

$$J = J(a) \quad (2.22)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην εξίσωση (2.20) βρίσκεται ο ΣΕΤ στη μορφή:

$$K_I = K_I(a) \quad (2.23)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, η ρωγμή συμπεριφέρεται σαν διάμηκες ελατήριο του οποίου τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από το βάθος της ρωγμής.

Η βασική ιδέα υπολογισμού του ελατηρίου αυτού βασίζεται στην αντιστροφή της προηγούμενης πειραματικής διαδικασίας. Δηλαδή αν είναι γνωστός ο K_I , από προγενέστερη πειραματική [6], αναλυτική [3] ή αριθμητική εργασία [7], η επιφανειακή ενέργεια μπορεί να βρεθεί από τη σχέση (1.14). Άρα αν ολοκληρωθεί η εξίσωση (2.19), τότε:

$$c = \int_0^c dc = \frac{2B}{P^2} \int_0^a J(a) da \quad (2.24)$$

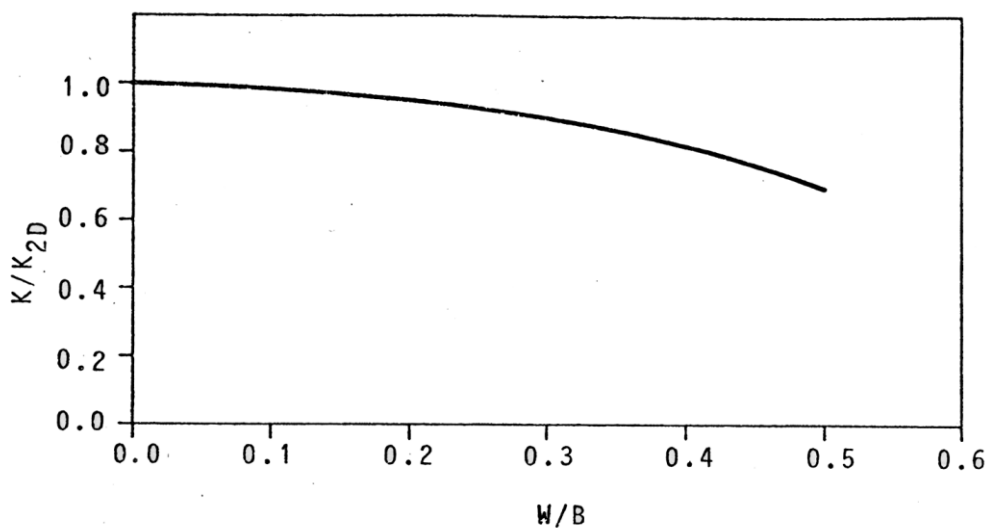
Η εξίσωση (2.24) δίνει την τοπική ευκαμψία c σε μια απλή ολοκλήρωση [3,4]. Επομένως, η τοπική ευκαμψία είναι γενικά ένα ολοκλήρωμα της επιφανειακής ενέργειας. Η μέθοδος προϋποθέτει γνωστό τον ΣΕΤ εκ των προτέρων και η ακρίβεια υπολογισμού υπόκειται σε μερικούς παράγοντες όπως:

α. Διατμητικές τάσεις

Για λεπτές κατασκευές, όπως π.χ. ελάσματα, πλάκες, κελύφη κλπ, στην περιοχή της ρωγμής οι διατμητικές τάσεις κατά τη διεύθυνση του πάχους είναι αμελητέες (επίπεδη εντατική κατάσταση). Όταν όμως το πάχος παίρνει ικανές τιμές,

οι διατμητικές τάσεις μπορεί να πάρουν σημαντικές τιμές, οπότε επηρεάζουν και το ΣΕΤ κατά μήκος του άκρου της ρωγμής, όπως δείχνει και το Σχήμα 2.5. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα των διατμητικών τάσεων υπάρχουν διάφορες μέθοδοι.

Στην πιο απλή, επαληθεύονται πειραματικά τα αποτελέσματα για την τοπική ευκαμψία και γίνονται οι κατάλληλες διορθώσεις. Ένας άλλος τρόπος είναι να γίνει διόρθωση του ΣΕΤ ώστε να ληφθεί υπόψη η επίδραση των διατμητικών τάσεων ή να γίνει διόρθωση του βήματος ολοκλήρωσης.



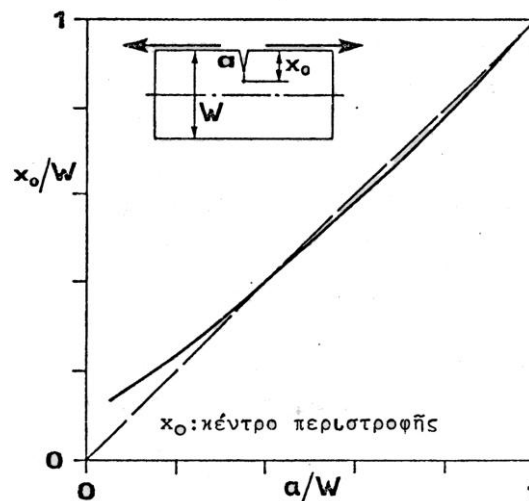
Σχήμα 2.5: Μεταβολή του ΣΕΤ κατά το μήκος του άκρου της ρωγμής, σε ένα παχύ δοκίμιο.

β. Πλαστική παραμόρφωση

Είναι προφανές ότι λόγω των υψηλών τάσεων, στο άκρο της ρωγμής και γύρω από αυτό αναπτύσσεται μια ζώνη πλαστικών παραμορφώσεων. Συνήθως τα κατασκευαστικά υλικά δεν παρουσιάζουν μόνο ελαστική συμπεριφορά, αλλά και πλαστική. Οι πλαστικές παραμορφώσεις εισάγουν μη γραμμικότητες ανώτερης τάξης στην έκφραση που δίνει την επιφανειακή ενέργεια και έτσι επηρεάζεται η ακρίβεια υπολογισμού της τοπικής ευκαμψίας. Βασικά έχουν αναπτυχθεί δύο μέθοδοι για να ληφθεί υπόψη η επίδραση της πλαστικής ζώνης: Κατά την πρώτη γίνεται διόρθωση του μήκους της ρωγμής. Δηλαδή, επαυξάνεται το μήκος της ρωγμής γιατί θεωρείται ότι η πλαστική περιοχή επιδρά στη ρωγμή σαν να ήταν αυτή πιο εύκαμπτη, απ' ότι αν το υλικό ήταν καθαρά ελαστικό. Η δεύτερη μέθοδος γίνεται «πλαστική διόρθωση του ΣΕΤ.

γ. Εκκεντρότητα περιστροφής

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό της τοπικής ευκαμψίας, περιλαμβάνει την υπόθεση ότι ο άξονας του φορτίου βρίσκεται πολύ κοντά ή περνάει από το άκρο της ρωγμής. Συνήθως όμως στις κατασκευές η γραμμή επιρροής των φορτίων είναι ο ουδέτερος άξονας. Η παρουσία της ρωγμής επιφέρει μια τοπική ασυνέχεια στον ουδέτερο άξονα. Είναι όμως γνωστό ότι κατά την παραμόρφωση, π.χ. σε κάμψη, μια κάθετη διατομή περιστρέφεται με κέντρο περιστροφής τον ουδέτερο άξονα. Σαν αποτέλεσμα, ο συνδυασμός των προηγούμενων φαινομένων θα επιφέρει μία τοπική εκκεντρότητα του κέντρου της διατομής στην οποία ανήκει η ρωγή. Οποσδήποτε, η εκκεντρότητα αυτή εγείρει τοπικά ελατήρια ανώτερης τάξης.



Σχήμα 2.6: Σχέση μεταξύ κέντρου περιστροφής και βάθους ρωγμής για ένα δοκίμιο.

Στο σχήμα 2.6 παρουσιάζεται η μεταβολή της εκκεντρότητας αυτής, για μία απλή περίπτωση, σε συνάρτηση με το βάθος της ρωγμής. Για κατασκευές που μοιάζουν με δοκάρια, το φαινόμενο μπορεί να αγνοηθεί λόγω των διαστάσεων.

δ. Παραμένουσες τάσεις

Η συχνή φόρτιση και αποφόρτιση μιας ρηγματωμένης κατασκευής εκτός των άλλων θα είναι αιτία να δημιουργηθούν παραμένουσες τάσεις στην περιοχή της ρωγμής, ενώ το εξωτερικό φορτίο είναι μηδέν. Η κατανομή των τάσεων αυτών είναι γενικά ακανόνιστη και για το λόγο αυτό είναι δύσκολο να γενικευθεί κατάλληλα το μοντέλο που παρουσιάστηκε, ώστε να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους φορτίσεις

στον υπολογισμό. Για μια συγκεκριμένη όμως κατανομή παραμένουσας τάσης, με τη μέθοδο της επαλληλίας, μπορεί να υπολογιστεί η τοπική ευκαμψία.

ε. Ακανόνιστο γεωμετρικό σχήμα της ρωγμής

Στην πράξη, οι ρωγμές δεν έχουν πάντα επίπεδο σχήμα, ούτε το άκρο τους είναι ευθύγραμμο. Στην πιο γενική περίπτωση, η ρωγμή είναι μια επιφάνεια στο χώρο, οπότε είναι δύσκολο να γενικευθεί η παραπάνω θεωρία.

2.4 ΜΗΤΡΩΟ ΤΟΠΙΚΗΣ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΩΓΜΗΣ

Για απλά προφίλ ρωγμών και για κάθε μορφή φόρτισης, μπορεί πολύ εύκολα να υπολογισθεί ένας συντελεστής τοπικής ενδοτικότητας. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να γενικευθούν έτσι ώστε να υπολογισθούν όλες οι τοπικές ενδοτικότητες για συνδυασμένη επενέργεια φορτίων σε μια ρηγματωμένη κατασκευή. Στην απλή περίπτωση που παρουσιάστηκε προηγούμενα αν c , η τοπική ενδοτικότητα για εφελκυστικό φορτίο P και δ η αντίστοιχη μετατόπιση, τότε ισχύει η σχέση:

$$\delta = cP \quad (2.25)$$

Όταν η κατασκευή καταπονείται ταυτόχρονα από τα γενικευμένα φορτία P_i , οι αντίστοιχες γενικευμένες μετατοπίσεις είναι u_i και η τοπική ενδοτικότητα για κάθε περίπτωση είναι c_{ij} , τότε σε μορφή μητρώων η εξίσωση (2.25) γράφεται:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{c}]\{\mathbf{P}\} \quad (2.26)$$

όπου το διάνυσμα $\{\mathbf{u}\}$ περιέχει όλες τις γενικευμένες μετατοπίσεις στην περιοχή της ρωγμής και το διάνυσμα $\{\mathbf{P}\}$ περιέχει τις γενικευμένες δυνάμεις. Το μητρώο $[\mathbf{c}]$ περιλαμβάνει τις δυνατές τοπικές ενδοτικότητες στην περιοχή της ρωγμής.

Από τη σκοπιά της δυναμικής, οι συντελεστές c_{ij} αναγνωρίζεται εύκολα ότι είναι οι συντελεστές επιρροής της ρωγμής. Έτσι, γενικεύοντας, c_{ij} είναι η

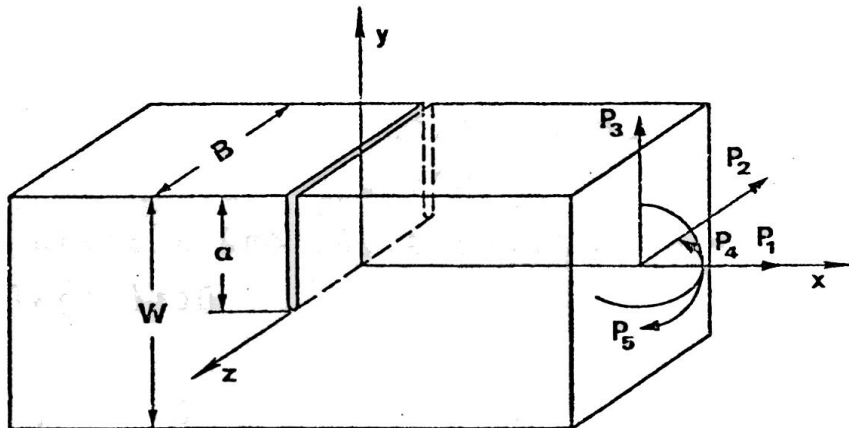
μετατόπιση κατά τη διεύθυνση i λόγω μιας μοναδιαίας δύναμης που εφαρμόζεται κατά τη διεύθυνση j . Αφού αναφερόμαστε σε γραμμικά συστήματα, η αρχή της υπέρθεσης ισχύει, δηλαδή η ολική μετατόπιση στη διεύθυνση i είναι το άθροισμα των μερικών μετατοπίσεων κατά τη διεύθυνση αυτή για κάθε δύναμη, οπότε η εξίσωση (2.26) είναι προφανής. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\{\mathbf{P}\}[\mathbf{k}] = \{\mathbf{u}\} \quad (2.27)$$

όπου:

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{c}]^{-1} \quad (2.28)$$

είναι το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας και προφανώς είναι το αντίστροφο του μητρώου $[\mathbf{c}]$. Τα στοιχεία του $[\mathbf{k}]$ προφανώς είναι τα γραμμικά ελατήρια με τα οποία μοντελοποιείται η ρωγμή.



Σχήμα 2.7: Η γεωμετρία μιας ρηγματωμένης δοκού με γενικευμένη τρισδιάστατη φόρτιση.

Για την περίπτωση μιας κατασκευής που μοιάζει με δοκό και καταπονείται ταυτόχρονα από ένα συνδυασμό φορτίων P_i , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7, το μητρώο τοπικής ενδοτικότητας έχει τη μορφή:

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

όπου τα στοιχεία του μητρώου c_{ij} , δύνανται να υπολογισθούν αναλυτικά από τους αντίστοιχους ΣΕΤ από την εξίσωση:

$$c_{ij} = \frac{1}{EB^2} \int_0^a \left[\frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \sum_m \int_0^B \left(e_m \sum_n K_{mn} \right)^2 dy \right] da \quad (2.30)$$

Όπου, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ενώ:

$$e_m = \begin{cases} \kappa & \text{για } m = \text{III} \\ 1 & \text{για } m = \text{I, II} \end{cases} \quad (2.31)$$

Ο δείκτης $m = \text{I, II, III}$ εκφράζει τη μορφή θραύσης και K_{mn} είναι ο ΣΕΤ για τη μορφή θραύσης m που προέρχεται από το φορτίο n . Σημειώνεται ότι στην εξίσωση (2.30) περιλαμβάνονται όλες οι μορφές θραύσης που διεγείρει ένα φορτίο, με την αρχή της επαλληλίας. Αν οι συντελεστές K_{mn} είναι γνωστές συναρτήσεις, με μια σειρά απλών ολοκληρώσεων υπολογίζεται το μητρώο $[\mathbf{c}]$.

Το μητρώο $[\mathbf{c}]$ όπως δίνεται από τη σχέση (2.29), παρουσιάζει χρήσιμες ιδιότητες που το καθιστούν πολύ σημαντικό και ενδιαφέρον για πρακτικές εφαρμογές. Το $[\mathbf{c}]$ είναι ομαλό μητρώο (non-singular), αφού $[\mathbf{c}] \neq 0$, έχει όμως και υπομητρώα μη ανώμαλα που αντιστοιχούν σε απλούστερους συνδυασμούς φορτίων, όπως το:

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{14} \\ c_{41} & c_{44} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

πού αντιστοιχεί σε συνδυασμένο εφελκυσμό και κάμψη, και το:

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{14} \\ 0 & c_{22} & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

που αντιστοιχεί σε εφελκυσμό, διάτμηση και κάμψη.

Το μητρώο $[\mathbf{c}]$ είναι συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο:

$$c_{ij} = c_{ji}, i \neq j \quad (2.34)$$

Η σχέση αυτή είναι προφανής αφού:

$$\frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_j \partial P_i} \quad (2.35)$$

Γενικότερα, η συνάρτηση J είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη, οπότε και το μητρώο $[\mathbf{c}]$ είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο. Στη μη γραμμική θεωρία η J δεν έχει αυτές τις ιδιότητες οπότε θα πρέπει γενικά:

$$c_{ij} \neq c_{ji}, i \neq j \quad (2.36)$$

Το $[\mathbf{c}]$ είναι τετραγωνικό μητρώο και η διάστασή του ισούται με το μέγιστο αριθμό φορτίσεων. Για παράδειγμα, στην κατασκευή του Σχήματος 2.7 ενεργούν 5 φορτία, οπότε οι διαστάσεις του $[\mathbf{c}]$ είναι 5x5.

Γενικά, δεν ισχύει η σχέση:

$$k_{ij} = 1/c_{ji} \quad (2.37)$$

όταν στην κατασκευή ενεργούν πολλά φορτία.

Από τα παραπάνω εξάγονται τα εξής συμπεράσματα: Αφού το $[\mathbf{c}]$ δεν είναι ανώμαλο, μπορεί να βρεθεί το αντίστροφο του $[\mathbf{k}]$ και άρα να βρεθούν τα ελατήρια k_{ij} με τα οποία δεχόμαστε ότι μοντελοποιείται η ρωγμή. Εξάλλου, αφού το $[\mathbf{c}]$ είναι

συμμετρικό, μπορεί με ένα κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό να γίνει διαγώνιο, ώστε να αποσυζευχθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν την τοπική δυναμική συμπεριφορά της ρωγμής. Έτσι αν από το σύστημα μετατοπίσεων $\{\mathbf{u}\}$ μεταφερθούμε σε ένα άλλο $\{\boldsymbol{\eta}\}$ με το γραμμικό μετασχηματισμό:

$$\{\mathbf{u}\} = [\boldsymbol{\beta}]\{\boldsymbol{\eta}\} \quad (2.38)$$

το μητρώο $[\mathbf{c}]$ μετασχηματίζεται στο διαγώνιο μητρώο $[\mathbf{c}^*]$:

$$[\mathbf{c}^*] = [\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \quad (2.39)$$

όπου οι συντελεστές β_{ij} είναι τέτοιοι ώστε:

$$c_{rs} = 0 \text{ για } r \neq s \quad (2.40)$$

Αφού το $[\mathbf{c}]$ είναι διαγώνιο μητρώο, οι συνοριακές συνθήκες στην περιοχή της ρωγμής αποσυζευγνύονται. Βεβαίως, ο μετασχηματισμός που περιγράφει η εξίσωση (2.21) είναι δυνατός εφόσον οι νέες συντεταγμένες $\{\boldsymbol{\eta}\}$ απλοποιούν το πρόβλημα.

2.5 ΑΔΥΝΑΜΙΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΟΠΙΚΗΣ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΑΠΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΑΣΗΣ

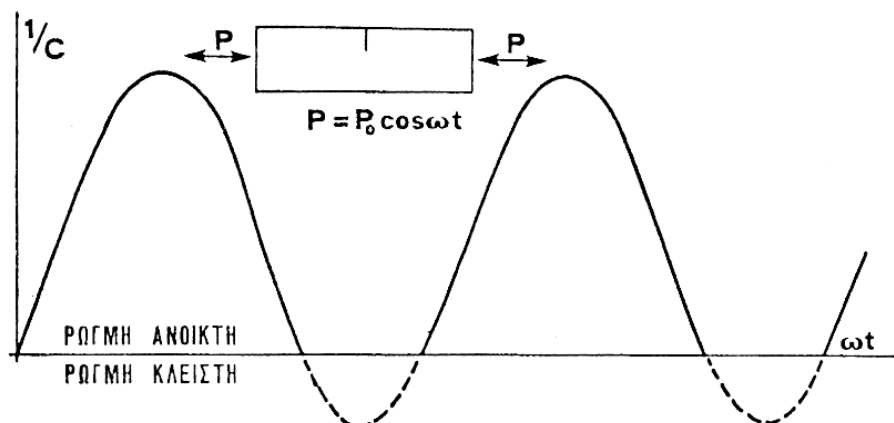
Τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν για τον προσδιορισμό της τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής με βάσει τους ΣΕΤ εξαρτώνται από τη γεωμετρία της ρηγματωμένης επιφάνειας, είναι ανεξάρτητα από το χρόνο, αφού υποτίθεται ότι τα εξωτερικά φορτία είναι στατικά ή σαν στατικά, ενώ οι τάσεις στο άκρο της ρωγμής δεν ξεπερνούν την αντοχή σε θραύση του υλικού, ώστε να προκαλούν διάδοση της ρωγμής. Έτσι, στις εκφράσεις που περιγράφουν την ενέργεια σε μία ρηγματωμένη κατασκευή, οι όροι που εκφράζουν κινητική ενέργεια δεν υπάρχουν.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως τα φορτία δεν είναι στατικά αλλά μεταβάλλονται με το χρόνο οπότε η μετατόπιση του ανοίγματος της ρωγμής (*Crack Opening*

Displacement ή *COD*) μεταβάλλεται με το χρόνο. Τότε οι υπολογισμοί ενδοτικότητας με βάση τους ΣΕΤ που δόθηκαν παραπάνω, είναι μια χονδροειδής προσέγγιση της ελαστοδυναμικής συμπεριφοράς της ρωγμής. Έτσι πρέπει τα μοντέλα να επεκταθούν και στην περίπτωση των δυναμικών φορτίων που παρουσιάζουν ευρείες εφαρμογές όπως είναι για παράδειγμα ρηγματωμένα στοιχεία μηχανών που καταπονούνται με εναλλασσόμενες δυνάμεις, ρηγματωμένες κατασκευές που καταπονούνται με κρουστικά ή σεισμικά φορτία κλπ.

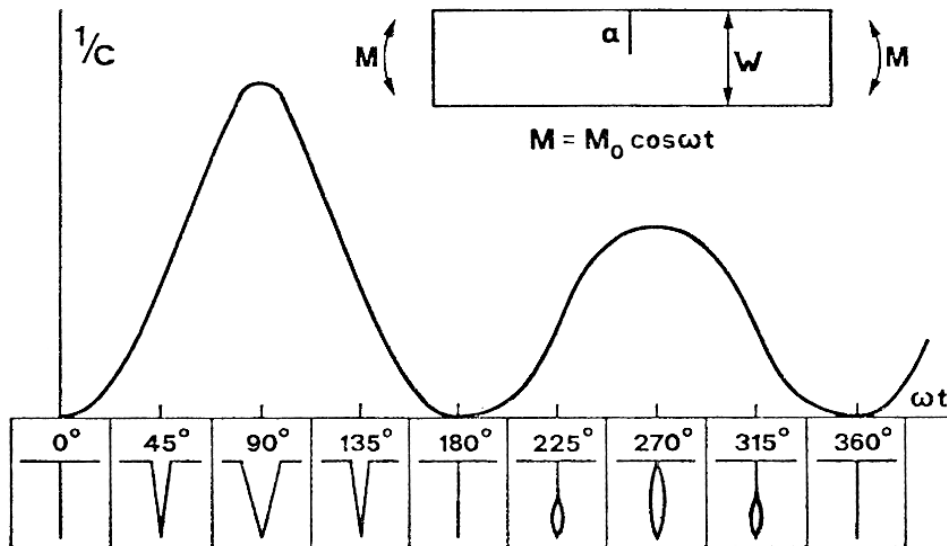
Για να καταστρωθεί ένα δυναμικό μοντέλο μιας ρωγμής, προφανώς στην έκφραση που δίνει τη συνάρτηση της επιφανειακής ενέργειας πρέπει να προστεθεί ο όρος που περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια του συστήματος. Είναι γνωστό από τη θεωρία της θραυστομηχανικής ότι οι όροι της κινητικής ενέργειας στην περιοχή της ρωγμής εισάγονται εύκολα, αλλά οδηγούν σε πολύπλοκες και δύσχρηστες σχέσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά της ρωγμής.

Το Σχήμα 2.8, παρουσιάζει μία εγκάρσια ρηγματωμένη δοκό η οποία καταπονείται με μια κάθετη αρμονική δύναμη P συχνότητας ω . Στην αρχή ($\omega t = 0$), όπου θεωρείται ότι η ρωγμή είναι κλειστή, η δύναμη είναι εφελκυστική και η ρωγμή αρχίζει να ανοίγει μέχρι που η COD να φθάσει τη μέγιστη τιμή της, όταν και η P πάρει τη μέγιστη τιμή P_0 , ($\omega t = 0^\circ$) μετά η δύναμη πέφτει, οπότε η COD μικραίνει μέχρι που μηδενίζεται όταν κλείσει πάλι η ρωγμή. Μετά η δύναμη P γίνεται θλιπτική, οπότε η ρωγμή παραμένει συνέχεια κλειστή και προφανώς ο ΣΕΤ K μηδενίζεται. Έτσι το τοπικό διάμηκες ελατήριο όσο χρόνο η ρωγμή είναι ανοικτή μεταβάλλεται, ενώ όσο χρόνο η ρωγμή είναι κλειστή μηδενίζεται.



Σχήμα 2.8: Επίδραση του κλεισίματος της ρωγμής στην ελαστοδυναμική τοπική ευκαμψία.

Στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζεται ένα άλλο φαινόμενο. Μία εγκάρσια ρηγματωμένη δοκός καταπονείται με αρμονικά μεταβαλλόμενη κάμψη. Στο κάτω μέρος του σχήματος είναι σχεδιασμένες οι μεταβολές της COD για διάφορες χρονικές στιγμές. Στο διάστημα $0^\circ - 180^\circ$ η ρωγμή ανοίγει εξωτερικά και κλείνει, ενώ στο διάστημα $180^\circ - 360^\circ$, η ρωγμή ανοίγει εσωτερικά λόγω αναστροφής των τάσεων. Έτσι η $1/c$ μπορεί να είναι μηδέν στο διάστημα $180^\circ - 360^\circ$, αν $a/W < 0.5$.



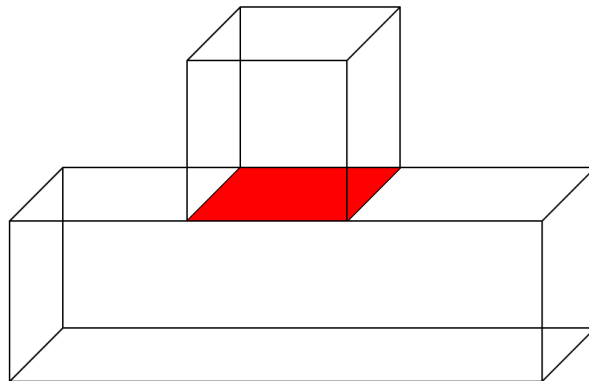
Σχήμα 2.9: Μεταβολή της τοπικής ευκαμψίας λόγω αρμονικά μεταβαλλόμενης κάμψης.

Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι η τοπική ενδοτικότητα ευκαμψία δεν είναι συνάρτηση μόνο της γεωμετρίας της ρωγμής και του τρόπου φόρτισης, αλλά εξαρτάται και από τη COD, ιδιαίτερα σε ανώτερες μορφές θραύσης.

3. ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

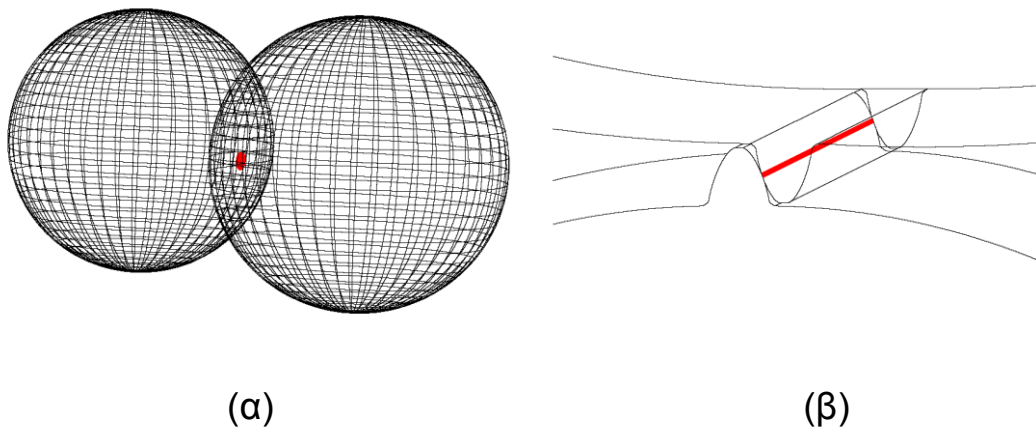
3.1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΕΠΑΦΗΣ

Όταν δύο ή περισσότερα συνεργαζόμενα σώματα, τα οποία δεν είναι συνενωμένα μηχανικά, ασκούν πίεση μεταξύ τους τότε λέγεται ότι αυτά βρίσκονται σε επαφή. Η επαφή είναι δυνατό να λαμβάνει χώρα σε ένα σημείο, κατά μήκος μιας γραμμής, σε μια μεγάλη επιφάνεια ή και υπό τον συνδυασμό όλων αυτών. Οι επιφάνειες που έρχονται σε επαφή μπορεί να χαρακτηριστούν είτε ως σύμμορφες είτε ως μη σύμμορφες. Σύμμορφες επιφάνειες αποκαλούνται οι επιφάνειες των οποίων η γεωμετρία επιτρέπει να υπάρχει μεγάλη επιφάνεια επαφής μεταξύ τους όπως όταν π.χ. ένα ογκώδες σώμα πιέζει μία θεμελίωση (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1: Σύμμορφες επιφάνειες σε επαφή.

Ασύμμορφες επιφάνειες λέγονται οι επιφάνειες των οποίων η γεωμετρία απαγορεύει τη μεγάλη επιφάνεια επαφής μεταξύ τους. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί να υπάρξει σημειακή επαφή μεταξύ των σωμάτων όπως π.χ. μεταξύ δύο σφαιρών (Σχήμα 3.2α) ή γραμμική επαφή όπως π.χ. μεταξύ δύο όμοιων δοντιών κατά τη συμπλοκή δύο γραναζιών (Σχήμα 3.2β).



Σχήμα 3.2: Ασύμμορφες επιφάνειες σε (α) σημειακή επαφή και (β) γραμμική επαφή.

Στην επιφάνεια επαφής μεταβιβάζονται δυνάμεις από το ένα σώμα στο άλλο και αναπτύσσονται έτσι κάθετες θλιπτικές δυνάμεις ή και εφαπτομενικές διατμητικές δυνάμεις υπό τη παρουσία τριβής στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Τριβή ονομάζεται η αντίσταση στην κίνηση που αναπτύσσεται όταν ένα σώμα κινείται ή τείνει να κινηθεί πάνω σε ένα άλλο. Καθώς τα σώματα παραμορφώνονται υπό την επίδραση της φόρτισης η έκταση της επαφής γενικά μεταβάλλεται. Η έκταση της επαφής μπορεί να αυξάνει να παραμένει σταθερή αλλά και να μειώνεται με την επιβολή του φορτίου. Αυτό γεγονός δηλώνει μια έμφυτη μη γραμμικότητα που συνοδεύει ένα πρόβλημα επαφής διότι η έκταση της επαφής και η εξέλιξη της δεν δύναται να είναι γνωστή εκ των προτέρων.

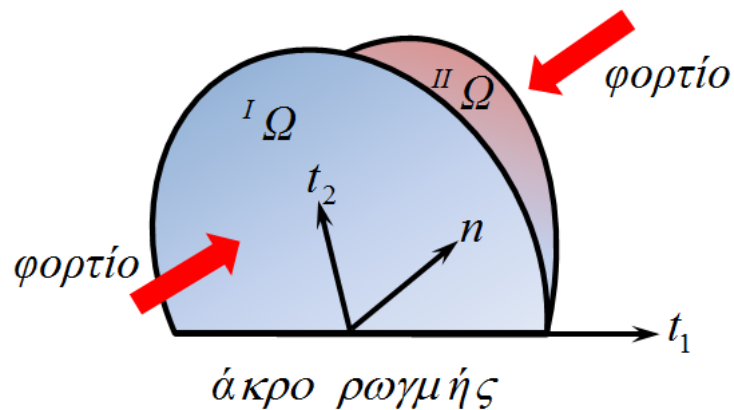
Η επαφή των σωμάτων διακρίνεται σε επαφή με τριβή και σε επαφή χωρίς τριβή. Στην επαφή χωρίς τριβή κατά μήκος της επαφής τα σύνορα των σωμάτων δέχονται μόνο κάθετες θλιπτικές δυνάμεις ενώ η σχετική μετατόπιση μεταξύ των επιφανειών κατά μήκος της εφαπτομενικής διεύθυνσης παραμένει εντελώς ελεύθερη. Ως εκ τούτου, οι εφαπτομενικές διατμητικές δυνάμεις παραμένουν μηδενικές και οι μεταβιβάσεις των δυνάμεων πραγματοποιούνται εξολοκλήρου μέσω των θλιπτικών δυνάμεων. Στη περίπτωση αυτή διατηρείται η συνέχεια των μετατοπίσεων μονάχα στη κάθετη διεύθυνση. Η επαφή σωμάτων μεταξύ των οποίων έχει εφαρμοστεί υψηλής ποιότητας λίπανση μπορεί να χαρακτηριστεί ως επαφή χωρίς τριβή. Είναι προφανές ότι η μη γραμμικότητα ενός προβλήματος επαφής χωρίς τριβή περιορίζεται στην εύρεση της έκτασης της επαφής κατά την φόρτιση. Η επαφή με τριβή είναι αυτή που αντιμετωπίζεται περισσότερο στη πράξη. Η παρουσία τριβής

οδηγεί επιπλέον στην ανάπτυξη διατμητικών δυνάμεων. Σε αυτού του είδους την επαφή μπορούν να δημιουργηθούν περιοχές προσκόλλησης ή διολίσθησης ή και συνδυασμός αυτών των δύο. Μπορεί να υπάρξει η μετάβαση από συνθήκη προσκόλλησης σε διολίσθηση αν το μέγεθος των διατμητικών δυνάμεων υπερβεί κάποια τιμή ή και αντίστροφα. Η έκταση των περιοχών προσκόλλησης και διολίσθησης είναι εξαρτώμενες του φορτίου και έτσι δεν είναι δυνατό να είναι εξαρχής γνωστές. Το γεγονός αυτό προσδίδει στο πρόβλημα της επαφής μια επιπλέον μη γραμμικότητα. Στις περιοχές προσκόλλησης τα σημεία των επιφανειών παραμένουν ενωμένα και η συνέχεια των μετατοπίσεων διατηρείται και στην κάθετη αλλά και στην εφαπτομενική διεύθυνση. Οι περιοχές διολίσθησης χαρακτηρίζονται από την εμφάνιση δυνάμεων τριβής. Εφόσον ο κλασσικός νόμος τριβής του *Coulomb* χρησιμοποιηθεί, η τιμή της δύναμη τριβής ισούται με τη κάθετη θλιπτική δύναμη πολλαπλασιασμένη με το συντελεστή τριβής του *Coulomb*. Στην περίπτωση που αυτός είναι μηδενικός τότε προφανώς η επαφή είναι χωρίς τριβή. Στις περιοχές διολίσθησης, υπό την παρουσία δυνάμεων τριβής, η σχετική μετακίνηση των επιφανειών μειώνεται με την αύξηση του συντελεστή τριβής και η συνέχεια των μετατοπίσεων διατηρείται μόνο κατά τη κάθετη στην επιφάνεια επαφής διεύθυνση.

Τέλος, η επαφή λέγεται ότι είναι τύπου *Hertz* στην ειδική περίπτωση κατά την οποία ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες: 1) Η επαφή είναι χωρίς τριβή, 2) τα σώματα είναι ομογενή, ιστροπικά, ελαστικά και υποβάλλονται σε μικρές παραμορφώσεις και στροφές, 3) η επιφάνεια επαφής είναι μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις των απαραμόρφωτων σωμάτων, 4) οι παραμορφώσεις συσχετίζονται με τις τάσεις στην επιφάνεια επαφής σύμφωνα με τις προβλέψεις της θεωρίας της ελαστικότητας και 5) οι επιφάνειες επαφής είναι συνεχείς και δύναται να περιγραφούν από πολυώνυμα δευτέρου βαθμού πριν την παραμόρφωση τους.

3.2 ΕΠΑΦΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΡΩΓΜΗΣ

Ας θεωρηθεί η ρωγμή του Σχήματος 3.3, οι επιφάνειες της οποίας δηλώνονται με $I\Omega$ και $II\Omega$. Οι δύο αυτές επιφάνειες υπόκεινται σε μηχανικές επιδράσεις από το περιβάλλον λόγω εξωτερικών φορτίσεων.



Σχήμα 3.3: Ρωγμή και επιφάνειες αυτής υποψήφιας για επαφή.

Οι επιφάνειες $I\Omega$ και $II\Omega$ είναι ικανές υπό προϋποθέσεις να έλθουν σε επαφή μεταξύ τους. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια ζώνη επαφής (*contact zone*) η οποία δηλώνεται ως c . Η ζώνη επαφής δύναται να χωρίζεται σε τριών ειδών υποζώνες στις οποίες τα σύνορα των δύο σωμάτων βρίσκονται σε κατάσταση 1) προσκόλλησης (*adhesion*), 2) διολίσθησης (*slip*) και 3) ανοίγματος (*open*). Αν οι υποζώνες προσκόλλησης, διολίσθησης και ανοίγματος δηλωθούν ως a , s και o , αντίστοιχα τότε προφανώς ισχύει $c = a \cup s \cup o$.

Για να προσομοιωθεί η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων γίνεται η παραδοχή ότι η διολίσθηση των επιφανειών ακολουθεί τον κλασικό νόμο τριβής του Coulomb ενώ παράλληλα θεωρείται ότι δεν επιτρέπεται η διείσδυση της μίας επιφάνειας μέσα στην άλλη κατά τη μεταξύ τους επαφή.

Στη ζώνη επαφής, οι μηχανικές συνοριακές συνθήκες εκφράζονται σε ένα ξεχωριστό τοπικό σύστημα συντεταγμένων (t_1, t_2, n) κατά τη κατεύθυνση του μέσου κάθετου μοναδιαίου διανύσματος ως προς τις επιφάνειες της ρωγμής. Με τον τρόπο αυτό ειδικά οι συνοριακές συνθήκες διολίσθησης μπορούν πλέον να ορισθούν

απλοϊκά καθώς η επαπτομενικές διευθύνσεις έτσι όπως ορίζονται από το σύστημα συντεταγμένων (t_1, t_2, n) είναι παράλληλες με τις επιφάνειες επαφής.

Θεωρώντας ότι ισχύει ο νόμος του *Coulomb* για την τριβή, για να προκύψει διολίσθηση σε ένα σημείο της επαφής θα πρέπει ο λόγος του μέτρου της επαπτομενικής δύναμης προσκόλλησης προς το μέτρο της κάθετης δύναμης προσκόλλησης να υπερβεί στον στατικό συντελεστή τριβής μ_s . Στη περίπτωση που υπάρξει διολίσθηση στο σημείο αυτό, τότε το μέτρο της δύναμης τριβής διολίσθησης υπολογίζονται από το γινόμενο του κινητικού συντελεστή τριβής μ_k επί το μέτρο της κάθετης δύναμης στο σημείο αυτό.

Στην υποζώνη προσκόλλησης a , οι επιφάνειες δεν μπορούν να έχουν σχετική μετατόπιση κατά τη επαπτομενική διεύθυνση. Επιπλέον η μία επιφάνεια δεν μπορεί να εισχωρήσει μέσα στην άλλη. Επομένως, ισχύει η συνέχεια των μετατοπίσεων αλλά και ισοροπία των δυνάμεων βάσει του τρίτου νόμου του Νεύτωνα:

$${}^I u_{t1} = {}^{II} u_{t2} \quad (3.1)$$

$${}^I u_{t2} = {}^{II} u_{t2} \quad (3.2)$$

$${}^I u_n = {}^{II} u_n \quad (3.3)$$

$${}^I f_{t1} = -{}^{II} f_{t1} \quad (3.4)$$

$${}^I f_{t2} = -{}^{II} f_{t2} \quad (3.5)$$

$${}^I f_n = -{}^{II} f_n \quad (3.6)$$

Όπου οι παράμετροι u και f δηλώνουν μετατόπιση και δύναμη, αντίστοιχα. Στην υποζώνη διολίσθησης s , οι επιφάνειες έχουν σχετική μετατόπιση κατά τη επαπτομενική διεύθυνση. Επομένως η συνέχεια των μετατοπίσεων ισχύει μόνο κατά

την κάθετη διεύθυνση αφού δεν υφίσταται διείσδυση μεταξύ των επιφανειών. Προφανώς και σε αυτή τη περίπτωση ισχύει ισορροπία των δυνάμεων με τη διαφορά ότι οι διαμητικές δυνάμεις επαφής που αναπτύσσονται τώρα είναι ανάλογες του συντελεστή κινητικής τριβής του *Coulomb* μ_k . Οι μηχανικές συνοριακές συνθήκες δίδονται από τις παρακάτω εξισώσεις

$${}^I u_n = {}^II u_n \quad (3.7)$$

$${}^I f_t = \pm \mu_k {}^I f_n \quad (3.8)$$

$${}^I f_t = -{}^II f_t \quad (3.9)$$

$${}^I f_n = -{}^II f_n \quad (3.10)$$

Όπου f_t είναι η συνισταμένη εφαπτομενική δύναμη. Τέλος στην υποζώνη ανοίγματος ο, οι επιφάνειες παραμένουν ανοιχτές και επομένως και ελεύθερες δυνάμεων. Οι μηχανικές συνοριακές συνθήκες είναι:

$${}^I f_{t1} = {}^I f_{t2} = 0 \quad (3.11)$$

$${}^I f_n = 0 \quad (3.12)$$

$${}^I f_{t1} = -{}^II f_{t1} \quad (3.13)$$

$${}^I f_{t2} = -{}^II f_{t2} \quad (3.14)$$

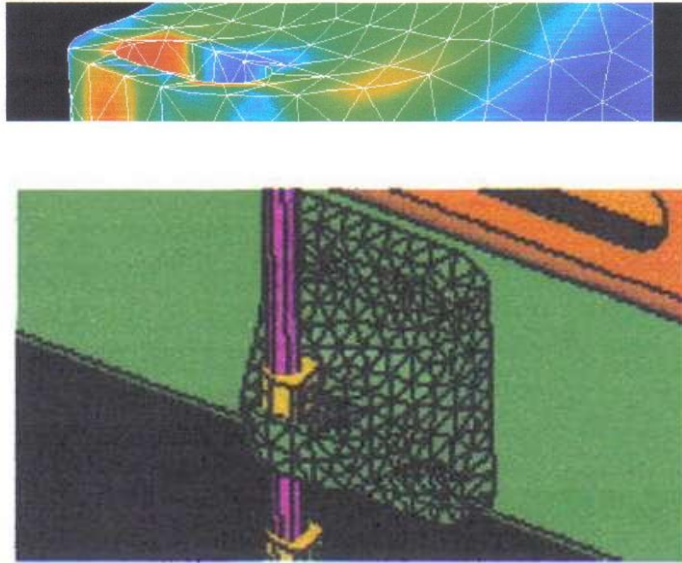
$${}^I f_n = -{}^II f_n \quad (3.15)$$

Επαφή χωρίς τριβή εμφανίζεται σε εκείνη η περίπτωση κατά την οποία ο στατικός συντελεστής τριβής μ_s είναι μηδενικός. Στην επαφή χωρίς τριβή προφανώς δεν εμφανίζονται υποζώνες προσκόλλησης λόγω της έλλειψης επαπτομενικής αντίστασης στη σχετική μετατόπιση των επιφανειών. Επιπλέον στις υποζώνες διολίσθησης οι διατμητικές δυνάμεις επαφής είναι μηδενικές.

4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

4.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Τα τελευταία σαράντα περίπου χρόνια η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (*FEM*) [8], με την χρήση των μαθηματικών, της φυσικής, της εφαρμοσμένης μηχανικής και της πληροφορικής έχει ευρέως εφαρμοστεί στην οικοδομική, σε θερμικά προβλήματα καθώς και στη μελέτη διάδοσης ροής σε ρευστά και προβλήματα διάχυσης. Η διαδικασία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων συνίσταται σε τρεις σημαντικές φάσεις: (1) την *προεπεξεργασία* (*pre-processing*), στην οποία ορίζεται η γεωμετρία του προς επίλυση προβλήματος καθώς οι ιδιότητες των υλικών από τα οποία αποτελείται η υπό ανάλυση κατασκευή, επίσης δημιουργείται το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (2) το στάδιο *επίλυσης* (*solution*), κατά τη διάρκεια του οποίου το πρόγραμμα επιλύει τις εξισώσεις του πεδίου των πεπερασμένων στοιχείων, και (3) την *μετεπεξεργασία* (*post-processing*), στην οποία ο αναλυτής έχει την δυνατότητα επεξεργασίας των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια διαγραμμάτων και/ή ισοεπιφανειών και επιπλέον ελέγχει την ακρίβεια της λύσης με μεθόδους στατιστικής ανάλυσης, μελετάει τις τιμές των αρχικών ποσοτήτων (όπως οι μετατοπίσεις και οι τάσεις), και παράγει και εξετάζει τις πρόσθετες ποσότητες (όπως τις εξειδικευμένες τάσεις και τους δείκτες σφαλμάτων). Το Σχήμα 4.1 δείχνει τυπικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε μηχανολογικά εξαρτήματα. Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι πολυάριθμα και σημαντικά. Με τη βοήθεια της μεθόδου αυτής καθορίζεται η πραγματική συμπεριφορά ενός μηχανολογικού εξαρτήματος υπό την επίδραση διαφόρων συνθηκών φόρτισης, και μπορεί επομένως να βελτιωθεί κατασκευαστικά πριν από την κατασκευή του τελικού εξαρτήματος.



Σχήμα 4.1. Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην ανάλυση μηχανολογικών κατασκευών.

Μετά την ανάπτυξη ενός λεπτομερειακού πρότυπου σχεδίου *CAD* το πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να διαχωρίσει το πρότυπο σε πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. Μια υπάρχουσα κατασκευή η οποία απαιτείται να βελτιωθεί κατασκευαστικά, μπορεί να αναλυθεί με τη μέθοδο αυτή, ώστε να επιταχυνθεί η διαδικασία εξέλιξης της και να επέλθει βελτίωση των μηχανικών της ιδιοτήτων με σύγχρονη μείωση του κόστους παραγωγής. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων *FEM* εφαρμόζεται σήμερα με επιτυχία σε μεγάλους τερματικούς σταθμούς υπολογιστών για την επίλυση πολύπλοκων κατασκευαστικών προβλημάτων.

Επίσης σημαντικό είναι να αναφερθούν οι περιορισμοί εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε πρακτικά προβλήματα. Παρόλο που η τιμή των εμπορικών πακέτων λογισμικού και του απαραίτητου υλικού (*hardware*) μειώνεται, αποτελούν ακόμη μια σημαντική επένδυση για την αριθμητική επίλυση μεγάλων κατασκευαστικών προβλημάτων π.χ. εφαρμογές στην αεροναυπηγική, οικοδομική κλπ. Η μέθοδος μπορεί να μειώσει την ανάγκη πειραματικής δοκιμής των προϊόντων, αλλά δεν μπορεί να την αντικαταστήσει εντελώς. Πιθανώς το σπουδαιότερο είναι ότι ένας άπειρος χρήστης μπορεί να καταλήξει σε ανακριβή αποτελέσματα, στα οποία και θα βασιστούν οι τελικές αποφάσεις ανάπτυξης της τελικής μορφής ενός προϊόντος. Τα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων είναι απαιτητικά εργαλεία,

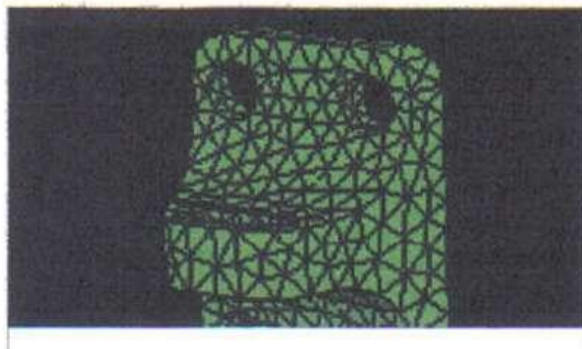
δεδομένου ότι ο αναλυτής που χρησιμοποιεί τέτοια προγράμματα πρέπει να είναι γνώστης όχι μόνο της θεωρίας ελαστικότητας ή της μηχανικής ρευστών, αλλά επίσης να χειρίζεται με ευελιξία τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, την πληροφορική, και να έχει πλήρη γνώση της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων.

Ποιο όμως λογισμικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων πρέπει να χρησιμοποιήσει ο αναλυτής λεπτομερώς για την επίλυση ενός καθορισμένου προβλήματος; Η απάντηση του ερωτήματος έγκειται στον τύπο επίλυσης του υπό επίλυση προβλήματος και όχι στην προσωπική προτίμηση του, καθ' όσον τα υπάρχοντα εμπορικά λογιστικά προγράμματα είναι προορισμένα για την επίλυση ορισμένης κατηγορίας προβλημάτων, δηλαδή κάθε πρόγραμμα επιλύει με ακρίβεια μια ορισμένη ομάδα προβλημάτων π.χ. μερικά προγράμματα λύνουν προβλήματα ρευστομηχανικής, άλλα δε επιτυγχάνουν με ακρίβεια την στατική μελέτη των κτιρίων. Ο υπολογιστής ο οποίος θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από τον τύπο της ανάλυσης. Ένα τυπικό πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί ένα γρήγορο, σύγχρονο υποσύστημα δίσκων για την επίτευξη της επιθυμητής απόδοσης. Οι απαιτήσεις μνήμης εξαρτώνται από το πρόγραμμα που χρησιμοποιείται κατά περίπτωση, αλλά προκειμένου να επιτευχθεί επαρκής απόδοση, ένας υπολογιστής με 128 έως 512 Mbytes μνήμης ανά χρήστη είναι μια αποδεκτή λύση. Καθ' όσον η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων επιλύει ένα πολύ μεγάλο αριθμό γραμμικών εξισώσεων πρέπει ο υπολογιστής να διαθέτει μεγάλη χωρητικότητα μνήμης για να μπορεί να αποθηκεύσει όλα τα δεδομένα του προβλήματος κατά το στάδιο της επεξεργασίας και ανάλυσης των αποτελεσμάτων. Εφ' όσον οι αριθμητικές αναλύσεις προβλημάτων με πεπερασμένα στοιχεία μπορεί να διαρκούν αρκετές ώρες στα γρηγορότερα συστήματα, έτσι η υπολογιστική ισχύς είναι παράγοντας ουσιαστικής σημασίας.

4.1.1 Προεπεξεργασία

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία αποτελείται από τις φάσεις της προεπεξεργασίας, της επίλυσης και της μετεπεξεργασίας. Οι στόχοι είναι να αναπτυχθεί ένα κατάλληλο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων, να οριστούν οι κατάλληλες ιδιότητες υλικού, και να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες υπό μορφή περιορισμών και φορτίων.

Το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων υποδιαιρεί τη γεωμετρία σε στοιχεία τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους. Οι κόμβοι που είναι στην πραγματικότητα σημειακές θέσεις στο χώρο, βρίσκονται γενικά στα κορυφές των στοιχείων. Για μια δισδιάστατη (2D) ανάλυση, ή μια τρισδιάστατη (3D) ανάλυση λεπτού κελύφους, τα στοιχεία είναι ουσιαστικά 2D, αλλά μπορούν να στρεβλωθούν ελαφρώς για να προσαρμοστούν σε μια τρισδιάστατη επιφάνεια. Ένα παράδειγμα είναι το -γραμμικό τετράπλευρο στοιχείο επίπεδου λεπτού κελύφους. Ο όρος επίπεδο λεπτό κέλυφος αναφέρεται ουσιαστικά στην κλασική θεωρία των επίπεδων κελυφών, ο όρος γραμμικός καθορίζει την παρεμβολή των μαθηματικών ποσοτήτων δηλαδή γεωμετρικών συνιστωσών, μετατοπίσεων, παραμορφώσεων και τάσεων, κατά μήκος του στοιχείου, και ο όρος τετράπλευρος περιγράφει τη γεωμετρία του στοιχείου. Το Σχήμα 4.2 δείχνει τον διαχωρισμό ενός προτύπου σε πλέγμα τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 4.2: πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων

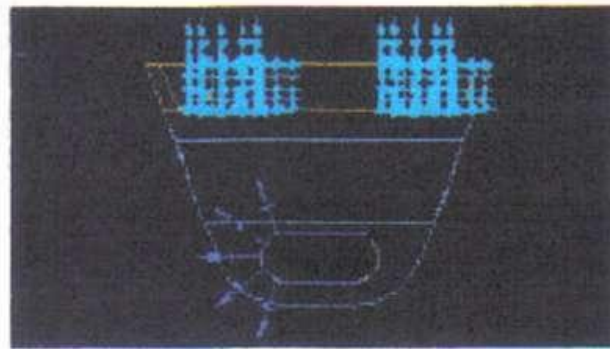
Για μια τρισδιάστατη στερεά ανάλυση, τα στοιχεία έχουν φυσικό πάχος στις τρεις διαστάσεις τους. Τα κοινά παραδείγματα περιλαμβάνουν το στερεό γραμμικό παραλληλεπίπεδο και τα στερεά παραβολικά τετραεδρικά στοιχεία. Επιπλέον, υπάρχουν πολλά ειδικά στοιχεία, όπως τα άξονο-συμμετρικά για τις περιπτώσεις όπου η γεωμετρία, οι ιδιότητες του υλικού και οι οριακές συνθήκες είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα. Οι βαθμοί ελευθερίας του προτύπου ορίζονται στους κόμβους. Τα στερεά στοιχεία έχουν γενικά τρεις βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (δηλ. τρεις μετατοπίσεις). Οι περιστροφές ολοκληρώνονται μέσω των μετατοπίσεων ομάδων κόμβων σχετικά με άλλους κόμβους. Τα στοιχεία κελυφών, έχουν έξι βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο: τρεις μετατοπίσεις και τρεις περιστροφές. Η προσθήκη περιστροφικού βαθμού ελευθερίας επιτρέπει την αξιολόγηση των ποσοτήτων μέσω του επίπεδου κελύφους, όπως οι καμπτικές τάσεις λόγω της περιστροφής ενός

κόμβου σχετικά με άλλο. Κατά συνέπεια, για τις δομές στις οποίες η κλασική θεωρία λεππών κελυφών είναι μια έγκυρη προσέγγιση, η πρόσθεση ενός επιπλέον βαθμού ελευθερίας σε κάθε κόμβο, παρακάμπτει την ανάγκη της προτυποποίησης του φυσικού πάχους. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο εξαρτάται επίσης από τον τύπο της ανάλυσης. Για μια θερμική ανάλυση, παραδείγματος χάριν, μόνο η θερμοκρασία υπάρχει σε κάθε κόμβο, επομένως έχουμε ένα και μοναδικό βαθμό ελευθερίας για κάθε κόμβο.

Η ανάπτυξη του πλέγματος είναι συνήθως η πιο χρονοβόρα διαδικασία στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Στο παρελθόν, οι θέσεις των κόμβων καθορίζονταν χειροκίνητα ώστε να προσεγγιστεί η γεωμετρία. Η πιο σύγχρονη προσέγγιση είναι να αναπτυχθεί το πλέγμα άμεσα στη γεωμετρία *CAD*, η οποία μπορεί να είναι (1) δικτύωμα, με σημεία και καμπύλες να αντιπροσωπεύουν τα όρια της γεωμετρίας, (2) επιφανειακή, με επιφάνειες οι οποίες καθορίζουν τα όρια της γεωμετρίας, ή (3) στερεά, καθορίζοντας έναν όγκο ο οποίος συνθέτει τη γεωμετρία. Η στερεά γεωμετρία προτιμάται, αλλά συχνά η επιφανειακή γεωμετρία μπορεί να δημιουργήσει ένα σύνθετο μίγμα το οποίο δεν θα μπορέσει να αποδοθεί από τη στερεά γεωμετρία. Συγχρόνως με την ακριβή απόδοση της γεωμετρίας, θα πρέπει να εφαρμοστεί και μια απλούστευση της σε σημεία μη σημαντικά για τα τελικά αποτελέσματα, ώστε να εξοικονομηθεί χρόνος κατά την επίλυση του προβλήματος. Η εμπειρία των αναλυτών εδώ είναι ουσιαστική.

Η γεωμετρία διαχωρίζεται με έναν αλγόριθμο ταξινόμησης ή έναν αυτόματο αλγόριθμο ελεύθερου διαχωρισμού. Ο πρώτος ταξινομεί ένα ορθογώνιο πλέγμα επάνω σε μια γεωμετρική περιοχή, η οποία πρέπει να έχει το σωστό αριθμό πλευρών. Τα ταξινομημένα πλέγματα μπορούν να χρησιμοποιήσουν το ακριβές στερεό γραμμικό τρισδιάστατο στοιχείο παραλληλεπιπέδου, αλλά μπορούν να είναι πολύ χρονοβόρο, εάν όχι αδύνατο, να εφαρμοστούν για μια σύνθετη γεωμετρία. Ο ελεύθερος διαχωρισμός υποδιαιρεί αυτόματα τις περιοχές σε επιμέρους στοιχεία, με τα πλεονεκτήματα του γρήγορου διαχωρισμού, της εύκολης μεταβίβασης του μεγέθους του πλέγματος (για ένα πυκνότερο πλέγμα στις περιοχές μεγάλης κλίσης), και των προσαρμοστικών ικανοτήτων. Τα μειονεκτήματα περιλαμβάνουν την παραγωγή τεράστιων προτύπων και την παραγωγή διαστρεβλωμένων στοιχείων. Είναι πάντα σημαντικό να ελεγχθεί η στοιχειώδης διαστρέβλωση πριν από την επίλυση. Τα αποδεκτά επίπεδα διαστρέβλωσης εξαρτώνται από τον επιλυτή που

χρησιμοποιείται. Μια από τις πολλές εφαρμογές των οριακών συνθηκών σε πρακτικά προβλήματα δείχνεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Εφαρμογή των οριακών συνθηκών.

Οι ιδιότητες των υλικών που απαιτούνται ποικίλλουν με τον τύπο επίλυσης. Μια γραμμική στατική ανάλυση, παραδείγματος χάριν, θα απαιτήσει το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, το λόγο *Poisson* και ίσως και την πυκνότητα υλικού. Κάποια παραδείγματα των περιορισμών δηλώνουν μια κομβική μετατόπιση ή μια θερμοκρασία. Τα φορτία περιλαμβάνουν τις δυνάμεις, τις πιέσεις και τη ροή θερμότητας. Είναι προτιμητέο να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες στη γεωμετρία *CAD*, με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων να τις μεταφέρει στο πρότυπο, για να επιτρέψει την απλούστερη εφαρμογή των προσαρμοστικών αλγορίθμων και των αλγορίθμων βελτιστοποίησης.

4.1.2 Επίλυση του προβλήματος

Ενώ οι φάσεις προεπεξεργασίας και μετεπεξεργασίας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι χρονοβόρες για τον αναλυτή, η λύση είναι συνήθως μια μαζική επεξεργασία, και είναι απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους. Οι κύριες εξισώσεις συγκεντρώνονται και λύνονται αριθμητικά π.χ. με την μέθοδο (*Gauss*, *Seidel*, *Jacobi* κτλ) Η διαδικασία εξαρτάται όχι μόνο από τον τύπο ανάλυσης (π.χ. στατική ή δυναμική), αλλά και από τον τύπο και τις ιδιότητες των στοιχείων του προτύπου, τις ιδιότητες του υλικού και τις οριακές συνθήκες. Στην περίπτωση μιας γραμμικής στατικής και μιας δυναμικής χωρίς απόσβεση ανάλυσης, οι αντίστοιχες εξισώσεις των πεπερασμένων στοιχείων είναι της μορφής:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.1)$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.2)$$

όπου το $[\mathbf{K}]$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος, όπου το $[\mathbf{M}]$ είναι το μητρώο μάζας του συστήματος, $\{\mathbf{u}\}$ το διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων, $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$ το διάνυσμα επικόμβιων επιταχύνσεων και το διάνυσμα $\{\mathbf{f}\}$ περιέχει επικόμβιες δυνάμεις. Η σχέση παραμόρφωσης-μετατόπισης μπορεί να εισαχθεί στην σχέση τάσης-παραμόρφωσης για να εκφράσει την τάση σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων. Στις περιπτώσεις συμβατότητας των τάσεων και παραμορφώσεων, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες, καθορίζουν την μοναδική λύση των άγνωστων μετατοπίσεων, η οποία καθορίζει τις παραμορφώσεις και τάσεις μέσα στο υλικό. Οι πιθανότητες της αναλυτικής επίλυσης των εξισώσεων της μηχανικής είναι μικρές ακόμη και για την πιο απλή γεωμετρία της κατασκευής, ως εκ τούτου παρουσιάζεται η ανάγκη της κατά προσέγγιση αριθμητικής επίλυσης των.

Ένα πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων είναι μια σχέση μετατόπισης-κομβικής μετατόπισης, η οποία, μέσω της μεθόδου της παρεμβολής καθορίζει τη μετατόπιση οπουδήποτε σε ένα στοιχείο όταν δίδονται οι τιμές των κομβικών βαθμών ελευθερίας. Εισάγοντας αυτήν την σχέση στη σχέση παραμορφώσεων-μετατοπίσεων, μπορούμε να εκφράσουμε την παραμόρφωση σε συνάρτηση των κομβικών μετατοπίσεων, με βάση τη μέθοδο της παρεμβολής. Υπενθυμίζοντας ότι η έκφραση για την δυναμική ενέργεια ενός ελαστικού σώματος περιλαμβάνει ένα ολοκλήρωμα για την αποθηκευμένη ενέργεια παραμόρφωσης (εξαρτώμενη από το πεδίο των παραμορφώσεων) και τα ολοκληρώματα για το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις (εξαρτώμενα από τα πεδία των μετατοπίσεων), μπορούμε επομένως να εκφράσουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος σε συνάρτηση των κομβικών μετατοπίσεων.

Εφαρμόζοντας την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, θέτουμε με το μηδέν τη μερική παράγωγο της δυναμικής ενέργειας, αναφορικά με το διάνυσμα των κομβικών βαθμών ελευθερίας, οπότε προκύπτει ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων ακαμψίας για κάθε στοιχείο, που πολλαπλασιάζεται με το κομβικό διάνυσμα μετατοπίσεων, είναι ίσο με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων φόρτισης. Το κάθε ολοκλήρωμα ακαμψίας αποδίδει ένα μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, που

αθροίζονται για να παραγάγουν το μητρώο ακαμψίας του συστήματος, και το άθροισμα των ολοκληρωμάτων των φορτίων παράγουν το εφαρμοσμένο διάνυσμα φόρτισης με αποτέλεσμα την σχέση (4.1). Στην πράξη, οι κανόνες ολοκλήρωσης εφαρμόζονται στα στοιχεία, τα φορτία εμφανίζονται στο διάνυσμα $\{f\}$, και οι κομβικοί βαθμοί ελευθερίας εμφανίζονται στο διάνυσμα $\{f\}$.

Οι μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι άφθονες. Στην περίπτωση του γραμμικής στατικής εξίσωσης, η αντιστροφή του $[K]$ είναι υπολογιστικά δαπανηρή και αριθμητικά ασταθής. Μια καλύτερη τεχνική είναι η απαλοιφή *Cholesky*, μια μορφή της τεχνικής *Gauss*, και μια δευτερεύουσα παραλλαγή της απαλοιφής *LDU*.

Η δυναμική ανάλυση για πάρα πολλούς αναλυτές σημαίνει ανάλυση ιδιοσυχνοτήτων. Η γνώση των φυσικών ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών μιας κατασκευής μπορεί να είναι αρκετή στην περίπτωση μιας απλής δόνησης. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται για να ερευνήσει τις επιδράσεις της μάζας, ακαμψίας και απόσβεσης. Όταν ερευνάται ένα μελλοντικό προϊόν, ή ένα υπάρχον σχεδιασμένο υλικό με πολλαπλούς τρόπους διέγερσης, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η προσομοίωση μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης ώστε να εφαρμόσει την προσδοκούμετα μεταφορά ή την συχνότητα για να υπολογίσει τη μετατόπιση και ακόμη και τη δυναμική ενέργεια σε κάθε βήμα.

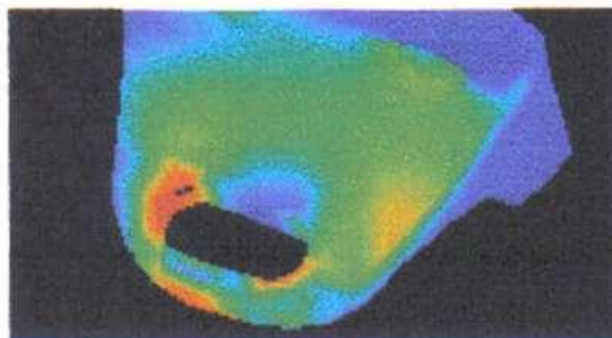
4.1.3 Μετεπεξεργασία

Αφότου έχει προετοιμαστεί ένα πρότυπο πεπερασμένων στοιχείων και έχει ελεγχθεί, αφότου έχουν εφαρμοστεί οι φορτίσεις και οι οριακές συνθήκες, και το πρόβλημα έχει επιλυθεί, το επόμενο βήμα είναι να ερευνηθούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Αυτή η δραστηριότητα είναι γνωστή ως φάση μετεπεξεργασία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Η μετεπεξεργασία αρχίζει με έναν λεπτομερή έλεγχο για τα προβλήματα που μπορεί να είχαν εμφανιστεί κατά τη διάρκεια της λύσης. Τα περισσότερα προγράμματα επίλυσης (*solvers*) παρέχουν ένα αρχείο το γνωστό *log file*, στο οποίο πρέπει να αναζητηθούν προειδοποιήσεις ή λάθη, και το οποίο θα παράσχει επίσης ένα ποσοτικό μέτρο για το πόσο σωστά έγιναν οι διαδικασίες κατά τη διάρκεια της λύσης. Έπειτα, τα φορτία αντίδρασης στους περιορισμένους κόμβους πρέπει να

αθροιστούν και να εξεταστούν ως «έλεγχος λογικότητας». Τα φορτία αντίδρασης που δεν ισορροπούν την συνισταμένη των εφαρμοσμένων φορτίων για μια γραμμική στατική ανάλυση πρέπει να δημιουργήσουν αμφιβολία για την ισχύ άλλων αποτελεσμάτων.

Μόλις ελεγχθεί η λύση ώστε να εξαλειφθούν τα αριθμητικά προβλήματα, μπορούν πλέον να εξεταστούν οι ποσότητες που παρέχουν ενδιαφέρον. Υπάρχουν διαθέσιμες πολλές επιλογές απεικόνισης, η επιλογή των οποίων εξαρτάται από τη μαθηματική μορφή της ποσότητας καθώς επίσης και φυσικής έννοιάς της. Παραδείγματος χάριν, η μετατόπιση του κόμβου ενός στερεού γραμμικού παραλληλεπιπέδου στοιχείου είναι ένα χωρικό διάνυσμα 3-συνιστωσών, και η ολική μετατόπιση του προτύπου απεικονίζεται συχνά με την ταυτόχρονη επίδειξη του παραμορφωμένου προτύπου πάνω στο αρχικό πρότυπο. Ένα παράδειγμα απεικόνισης των αποτελεσμάτων μιας ανάλυσης, φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Οι δυναμικές ικανότητες απεικόνισης και οι ικανότητες απεικόνισης με κίνηση βοηθούν πολύ στην κατανόηση του σχεδίου παραμόρφωσης. Τα κύρια διανύσματα τάσεων μπορούν να απεικονιστούν ως χρωματικά κωδικοποιημένα βέλη, απεικονίζοντας τόσο την κατεύθυνση όσο και το μέγεθος. Το μέγεθος της κύριων τάσεων ή το μέγεθος μιας τάσεως αστοχίας, όπως η τάση *Von Mises*, μπορεί να απεικονιστεί στο πρότυπο ως χρωματικές ζώνες. Όταν αυτός ο τύπος επίδειξης αντιμετωπίζεται ως τρισδιάστατο αντικείμενο που υποβάλλεται σε πηγές φωτός, η προκύπτουσα εικόνα είναι γνωστή ως σκιασμένη απεικόνιση τάσεων. Το μέγεθος μετατοπίσεων μπορεί επίσης να απεικονιστεί από τις χρωματικές ζώνες, αλλά αυτό ενδεχομένως να οδηγήσει στην παρερμηνεία του ως απεικόνιση τάσεων.



Σχήμα 4.4: Απεικόνιση αποτελεσμάτων ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία.

Ένας τομέας της μετεπεξεργασίας που κερδίζει γρήγορα έδαφος είναι αυτός της προσαρμοστικής ανακατανομής του πλέγματος. Οι κανόνες λάθους όπως η ενεργειακή πυκνότητα παραμόρφωσης χρησιμοποιούνται ώστε να ανακατανεύουν το πλέγμα του προτύπου, τοποθετώντας ένα πυκνότερο πλέγμα στις περιοχές που χρειάζονται τη βελτίωση και ένα πιο αραιό πλέγμα στους τομείς όπου δεν χρειάζεται. Η προσαρμοστικότητα απαιτεί μια συνειρμική σύνδεση μεταξύ του προτύπου και της γεωμετρίας *CAD*, και λειτουργεί καλύτερα εάν οι οριακές συνθήκες μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα στη γεωμετρία.

Η βελτιστοποίηση είναι ένας άλλος τομέας ο οποίος απολαμβάνει την πρόσφατη πρόοδο. Με βάση τις τιμές των διάφορων αποτελεσμάτων, το πρότυπο τροποποιείται αυτόματα σε μία προσπάθεια να ικανοποιηθούν ορισμένα κριτήρια απόδοσης και επιλύεται πάλι. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου ικανοποιείται κάποιο κριτήριο σύγκλισης. Η βελτιστοποίηση μορφής είναι πιο σύνθετη, με τα όρια της γεωμετρίας του προτύπου να τροποποιούνται. Αυτό επιτυγχάνεται καλύτερα με τη χρησιμοποίηση των οδηγών διαστάσεων ως παραμέτρους βελτιστοποίησης, αλλά η ποιότητα πλέγματος σε κάθε επανάληψη μπορεί να μην είναι η ενδεικνυόμενη.

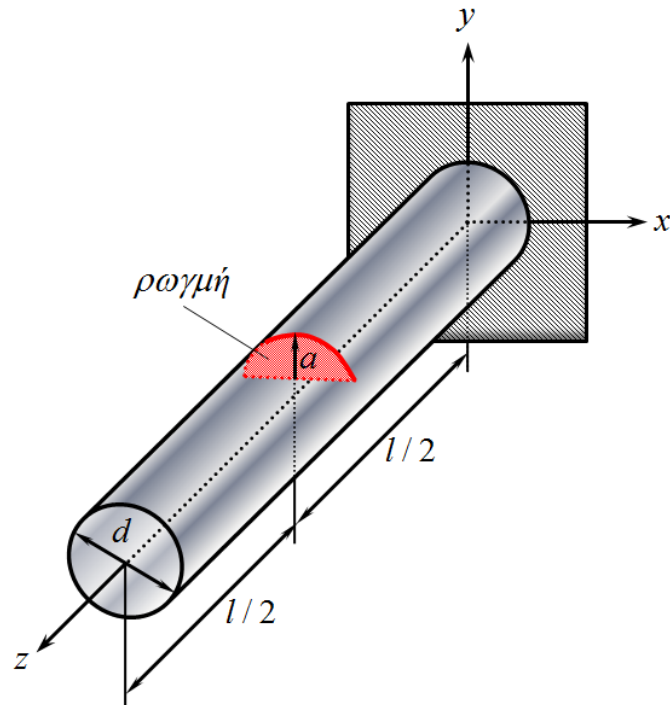
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια σχετικά πρόσφατη μέθοδος η οποία στις μέρες μας έχει εξελιχθεί αρκετά, ειδικά για τη δομική και θερμική ανάλυση. Οι δαπάνες για την εφαρμογή της τεχνολογίας αυτής στις καθημερινές μελέτες των εταιριών έχουν μειωθεί, ενώ οι ικανότητες των προγραμμάτων αυτών επεκτείνονται συνεχώς. Η μέθοδος δίνει τη δυνατότητα παραγωγής προϊόντων υψηλότερης ποιότητας σε μικρότερο χρονικό διάστημα και με μικρότερη πιθανότητα αστοχίας.

4.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζεται η μοντελοποίηση των εξεταζόμενων ρηγματωμένων αξόνων με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων. Για την στατική και δυναμική ανάλυση των ρηγματωμένων αξόνων χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό λογισμικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *ANSYS* [8].

4.2.1 Γεωμετρία

Η γεωμετρία των ρηγματωμένων αξόνων που εξετάσθηκαν απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5.



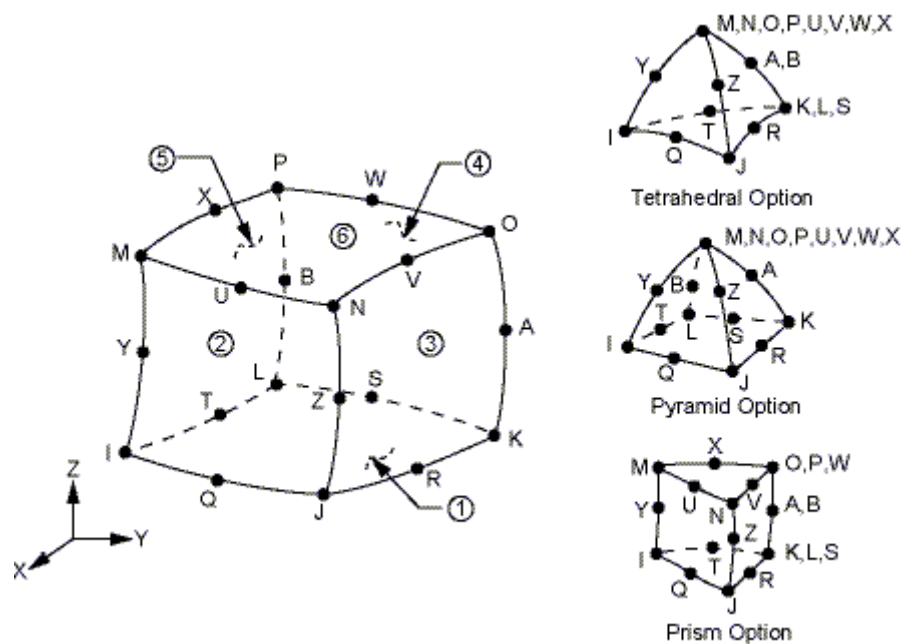
Σχήμα 4.5: Γεωμετρία του προς μελέτη ρηγματωμένου άξονα.

Για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης λήφθηκε η διάμετρος του άξονα ίση με $d = 0.1\text{m}$ ενώ το συνολικό μήκος του άξονα ίσο με $l = 1\text{m}$. Τέλος, θεωρήθηκε ότι μια ρωγμή, βάθους a , παράλληλη με το επίπεδο xy βρίσκεται στο μέσο του άξονα. Το άκρο της δε, θεωρήθηκε παράλληλο με τον άξονα x . Το πρόβλημα εξετάσθηκε για τα εξής βάθη ρωγμής: $a = 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08\text{m}$. Να τονισθεί στο σημείο αυτό ότι για να γενικευθούν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιούνται κατάλληλες αδιαστατοποιήσεις τόσο ως προς τη γεωμετρία όσο και προς τα υλικά.

4.2.2 Διακριτοποίηση

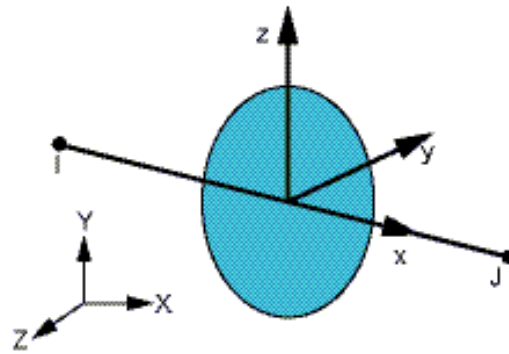
Στο αυτή τη παράγραφο παρατίθενται κάποιες πληροφορίες σχετικά με το πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε για κάθε μοντέλο.

Το πεδίο ορισμού του Σχήματος 4.5 διαχωρίζεται σε πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. Ο όγκος του άξονα διακριτοποιείται με πλέγμα δευτεροβάθμιων, πεπερασμένων στοιχείων όγκου SOLID175 [9]. Τα στοιχεία αυτά διαθέτουν 3 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (3 μετατοπίσεις) και η μορφή τους απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6.



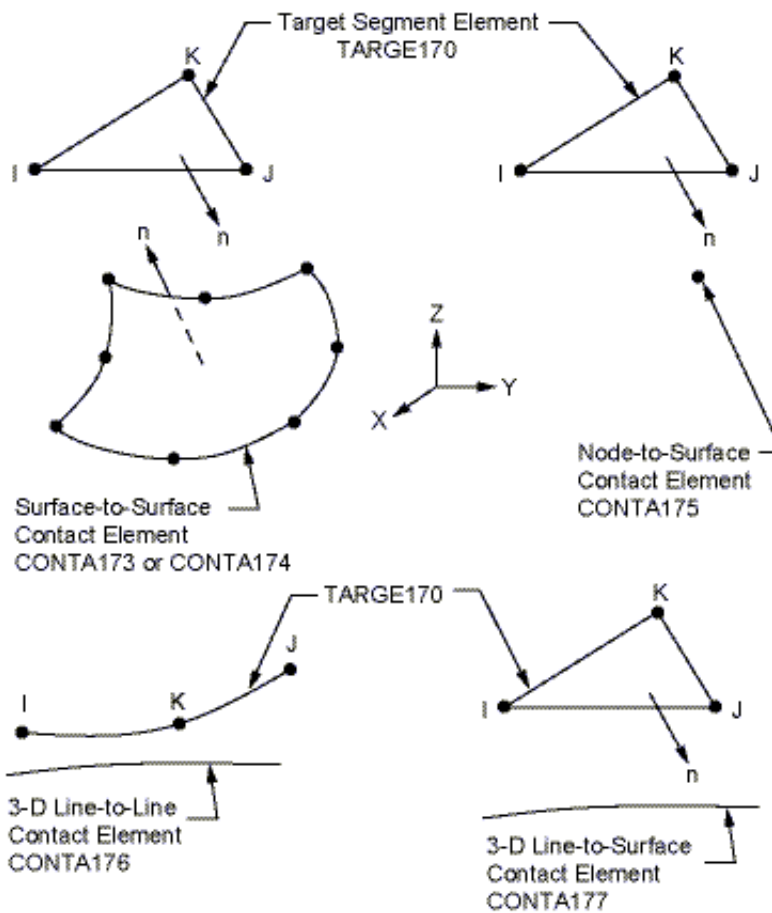
Σχήμα 4.6: Υιοθετούμενα πεπερασμένα στοιχεία όγκου SOLID175.

Επειδή τα στοιχεία αυτά δεν διαθέτουν στρεπτικούς βαθμούς ελευθερίας, κρίθηκε απαραίτητο για την εύκολη επιβολή ροπών στο φορτιζόμενο άκρο του άξονα να χρησιμοποιηθεί βοηθητικά το δίκομβο πεπερασμένο στοιχείο δοκού MPC184 [9] (Σχήμα 4.7), το οποίο έχει άπειρη δυσκαμψία και διαθέτει 6 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (3 μετατοπίσεις και 3 στροφές). Το μήκος του στοιχείου αυτού λήφθηκε ίσο με 0.1m, χωρίς αυτό να παίζει ιδιαίτερο ρόλο. Τοποθετήθηκε δε έτσι ώστε να είναι παράλληλο με τον z άξονα και έτσι ώστε ο πρώτος του κόμβος I να συμπίπτει με το κέντρο του φορτιζόμενου άκρου του άξονα. Κατόπιν όλα οι κόμβοι που ανήκουν στο φορτιζόμενο άκρο του άξονα δεσμεύθηκαν να ακολουθούν τις μετατοπίσεις του πρώτου κόμβου του στοιχείου I. Στον δεύτερο κόμβο J του στοιχείου επιβλήθηκαν οι φορτίσεις.

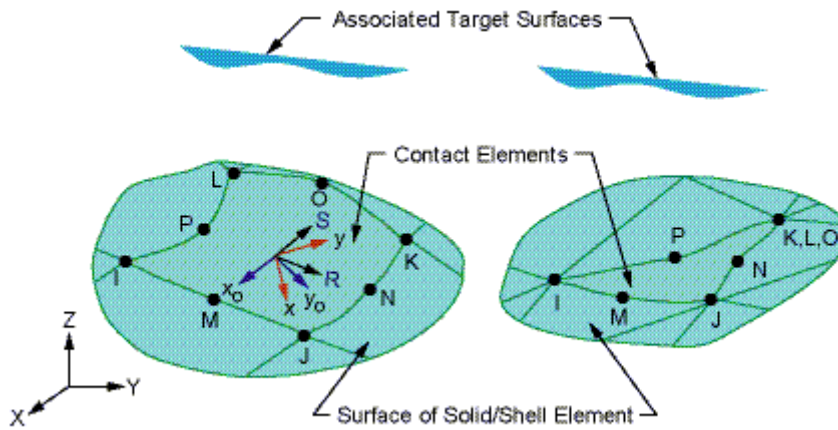


Σχήμα 4.7: Υιοθετούμενο βοηθητικό πεπερασμένο στοιχείο δοκού.

Για την προσομοίωση της επαφής των επιφανειών της ρωγμής χρησιμοποιήθηκαν στη μία επιφάνεια της ρωγμής τα επιφανειακά στοιχεία TARGET170 [9] (Σχήμα 4.8) ενώ στην άλλη τα στοιχεία CONTA174 [9] (Σχήμα 4.9).

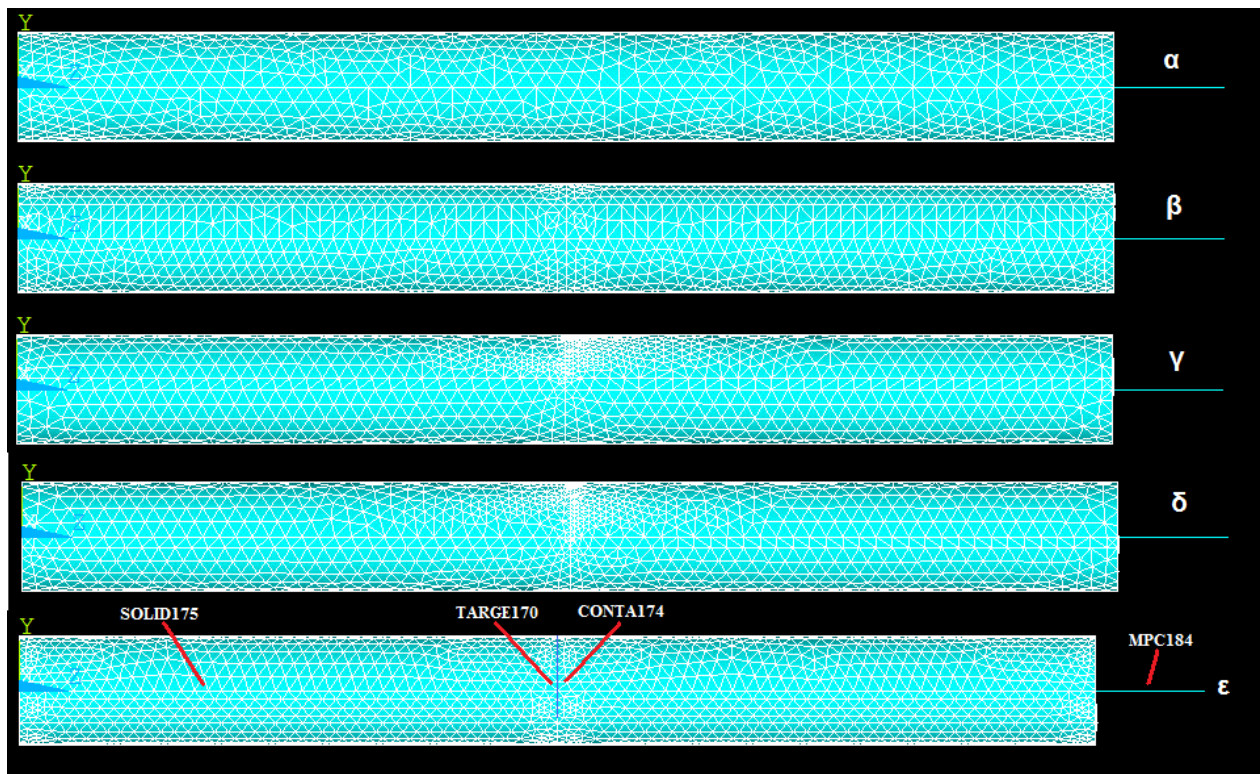


Σχήμα 4.8: Υιοθετούμενα πεπερασμένα στοιχεία TARGET170 για τη πρώτη επιφάνεια της ρωγμής.



Σχήμα 4.9: Υιοθετούμενα πεπερασμένα στοιχεία CONTACT174 για τη δεύτερη επιφάνεια της ρωγμής.

Τα Σχήματα 4.10α, β, γ, δ και ε απεικονίζουν τα πλέγματα στοιχείων για την περίπτωση επικάλυψης πάχους βάθους ρωγμής 0, 0.02, 0.04, 0.06 και 0.08m, αντίστοιχα.



Σχήμα 4.10 : Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων για βάθος ρωγμής: (α) 0, (β) 0.02, (γ) 0.04, (δ) 0.06 και (ε) 0.08m.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, η ρωγμή κοντά και γύρω από το άκρο της παρουσιάζει ιδιόμορφη συμπεριφορά. Στη συγκεκριμένη μελέτη αυτή η ιδιόμορφη συμπεριφορά προσεγγίστηκε με τοπικό πύκνωμα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων όγκου γύρω από το άκρο της ρωγμής. Μια πιο αξιόπιστη θεώρηση θα ήταν η χρήση ειδικών στοιχείων ενός τετάρτου στο άκρο της ρωγμής, κάτι που όμως δεν υποστηρίζεται από τον χρησιμοποιούμενο επαγγελματικό κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για τρισδιάστατα προβλήματα. Σε κάθε περίπτωση καθώς η μέθοδος υπολογισμού των τοπικών ενδοτικωτήτων, στην οποία επικεντρώνεται παρούσα πτυχιακή, δεν βασίζεται στον υπολογισμό των ΣΕΤ, αναμένεται ο τρόπος αναπαράστασης του τασικού πεδίου γύρω από το άκρο της ρωγμής με τοπικό πύκνωμα της διακριτοποίησης να είναι αρκετό.

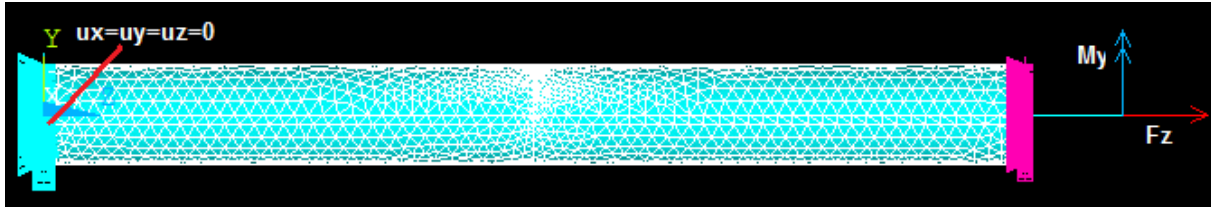
4.2.3 Υλικά

Το βασικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε είναι χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$, λόγο Poisson $\nu = 0.3$ και πυκνότητα $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. Επίσης ο στατικός και ο κινητικός συντελεστής τριβής για το εν λόγω υλικό ελήφθησαν ίσοι με $\mu_s = 0.7$ και $\mu_k = 0.6$, αντίστοιχα [9].

4.2.4 Συνοριακές συνθήκες

Στο ένα το άκρο του άξονα ($z = 0$) εφαρμόζεται πάκτωση δηλαδή δεσμεύονται και οι τρεις βαθμοί ελευθερίας των κόμβων που βρίσκονται στη συγκεκριμένη επιφάνεια ($u_x = u_y = u_z = 0$). Οι βαθμοί ελευθερίας όλων των κόμβων που ανήκουν στο άλλο άκρο του άξονα ($z = 1 \text{ m}$) δεσμεύονται με κατάλληλες εξισώσεις περιορισμού ούτως ώστε να μετακινούνται ταυτόσημα με τον πρώτο κόμβο του βοηθητικού στοιχείου MPC184 ($z = 1 \text{ m}$). Τέλος, στο δεύτερο κόμβο του βοηθητικού στοιχείου MPC184 ($z = 1.1 \text{ m}$) επιβάλλεται το φορτίο, είτε αν πρόκειται για δύναμη είτε αν πρόκειται για ροπή μιας και το συγκεκριμένο στοιχείο διαθέτει 6 βαθμούς ελευθερίας στους δύο κόμβους του. Το Σχήμα 4.11 δείχνει έναν άξονα με μια ρωγμή βάθους $a = 0.6 \text{ m}$ να φορτίζεται ταυτόχρονα σε εφελκυσμό και κάμψη. Στο

συγκεκριμένο σχήμα φαίνεται η πάκτωση στο αριστερό άκρο του άξονα καθώς και η δέσμευση του δεξιού άκρου του άξονα να κινείται ταυτόσημα με τον πρώτο κόμβο του βοηθητικού γραμμικού στοιχείου δοκού.

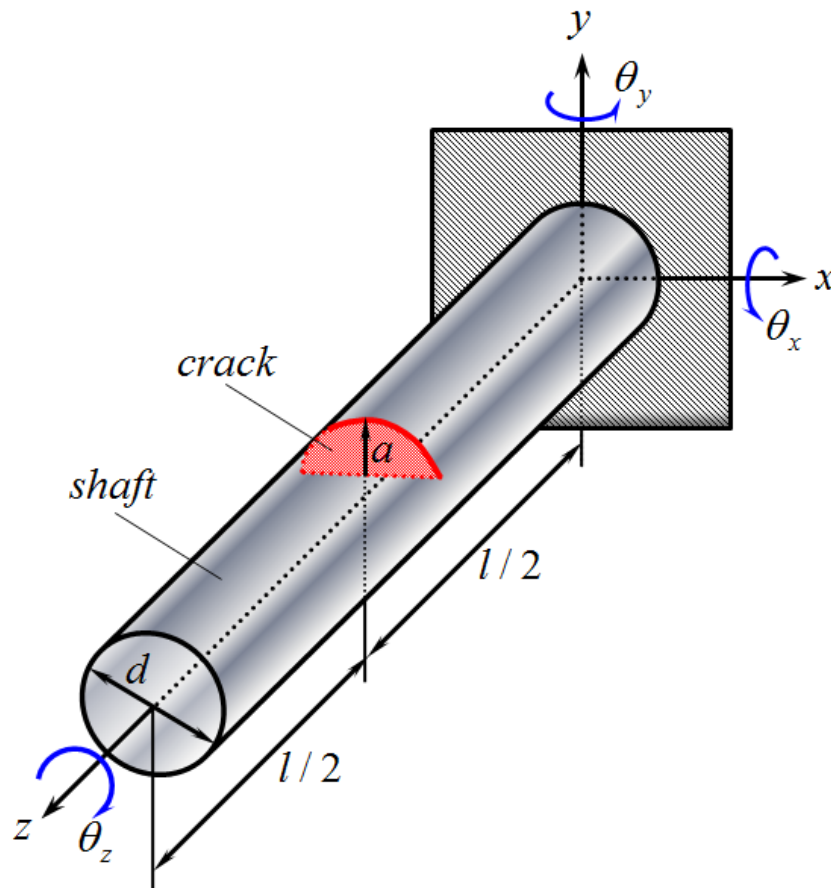


Σχήμα 4.11 : Διάφορες συνοριακές συνθήκες.

Στη παρούσα εργασία εξετάζονται τόσο στατικές φορτίσεις όσο και αρμονικά μεταβαλλόμενες δυναμικές φορτίσεις του δεξιού άκρου του άξονα.

5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μηχανική συμπεριφορά ρηγματωμένων αξόνων υπό την επίδραση τόσο στατικών όσο και χρονικά μεταβαλλόμενων αξονικών, καμπτικών και στρεπτικών φορτίων. Η γεωμετρία του γενικού προβλήματος περιγράφεται από το σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1 : Γεωμετρία του γενικού προβλήματος.

Τα φορτία θεωρήθηκαν μικρά σε μέτρο ώστε να μην προκύψουν φαινόμενα πλαστικότητας. Τα αποτελέσματα αφορούν την απόκριση μετατοπίσεων και στροφών του φορτιζόμενου άκρου, την ενδοτικότητα συμπαγούς άξονα και την τοπική ενδοτικότητα ρωγμής. Όλες οι τιμές ενδοτικότητας που θα παρουσιασθούν παρακάτω είναι αδιαστατοποιημένες με βάση τη σχέση:

$$C = \frac{\pi E (d/2)}{(1-\nu^2)} c \quad (5.1)$$

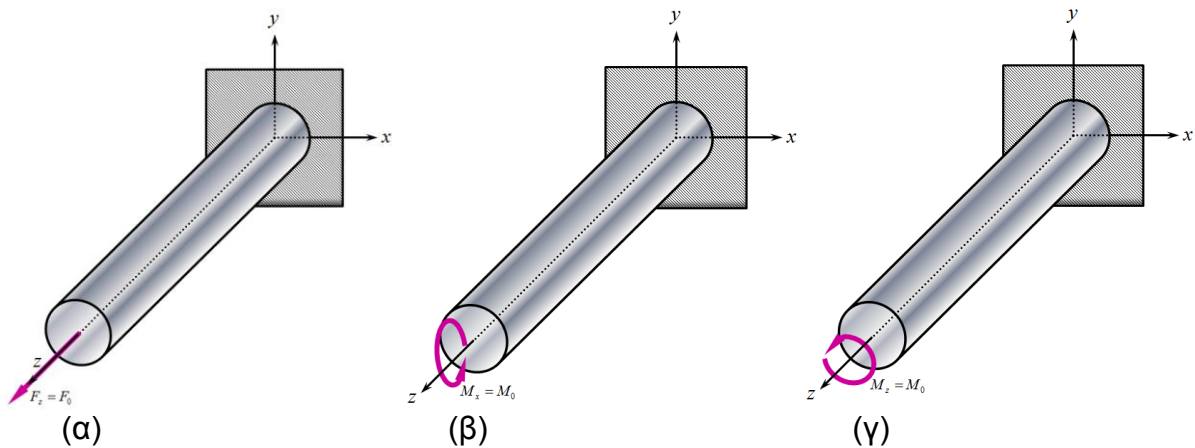
αν αφορούν φορτίο δύναμης ή την:

$$C_\theta = \frac{\pi E (d/2)^3}{(1-\nu^2)} c_\theta \quad (5.2)$$

αν αφορούν φορτίο ροπής.

5.1 ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ ΑΞΟΝΑ

Αρχικά θεωρήθηκαν άξονες χωρίς την παρουσία κάποιας ρωγμής για να πιστοποιηθεί η εγκυρότητα της ακολουθούμενης μεθόδου διαμέσου συγκρίσεων με αναλυτικές εκτιμήσεις.



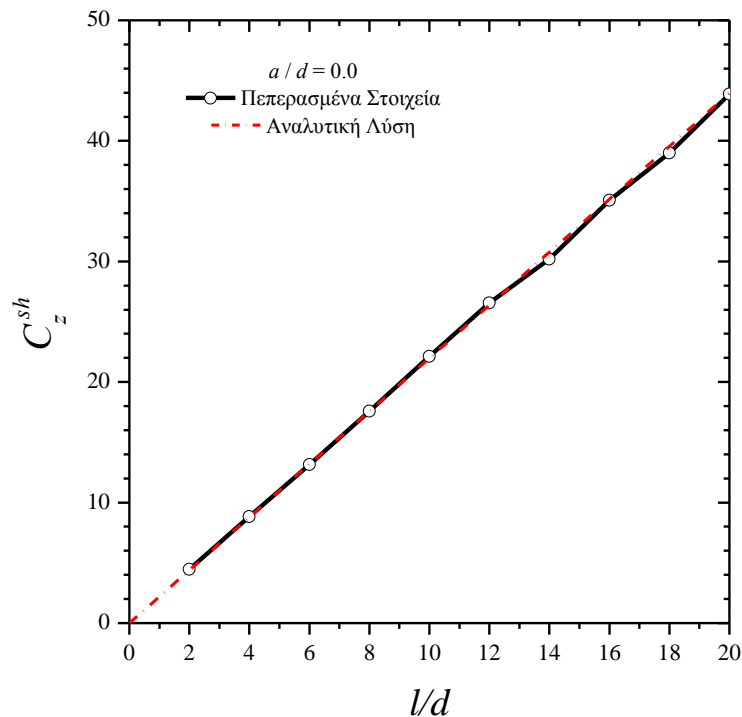
Σχήμα 5.2: Συμπαγείς άξονες υπό την επίδραση (α) εφελκυσμού, (β) κάμψης και (γ) στρέψης.

Αρχικά επιβάλλεται ένα σταθερό εφελκυστικό φορτίο $F_x = F_0$ (Σχήμα 5.2α). Η τιμή της εφελκυστικής δύναμης λαμβάνεται ίση με $F_0 = 1\text{N}$ έτσι ώστε η μετατόπιση u_z που θα λάβει το άκρο του άξονα να ταυτίζεται ποσοτικά με την τιμή της ενδοτικότητας του άξονα:

$$c_z^{sh} = \frac{u_z^{sh}}{F_0} = \frac{u_z^{sh}}{1\text{N}} = u_z^{sh} \cdot (\text{N})^{-1} \quad (5.3)$$

όπου το σύμβολο sh δηλώνει συμπαγές άξονα (shaft).

Το Σχήμα 5.3 παρουσιάζει τη μεταβολή της αδιάστατης ενδοτικότητας σε σχέση με το μήκος του άξονα και σε σύγκριση με την αναλυτική λύση που δίνεται από την εξίσωση (2.6). Η μεγάλη αξιοπιστία στην πρόβλεψη είναι εμφανής για όλα τα μήκη άξονα.



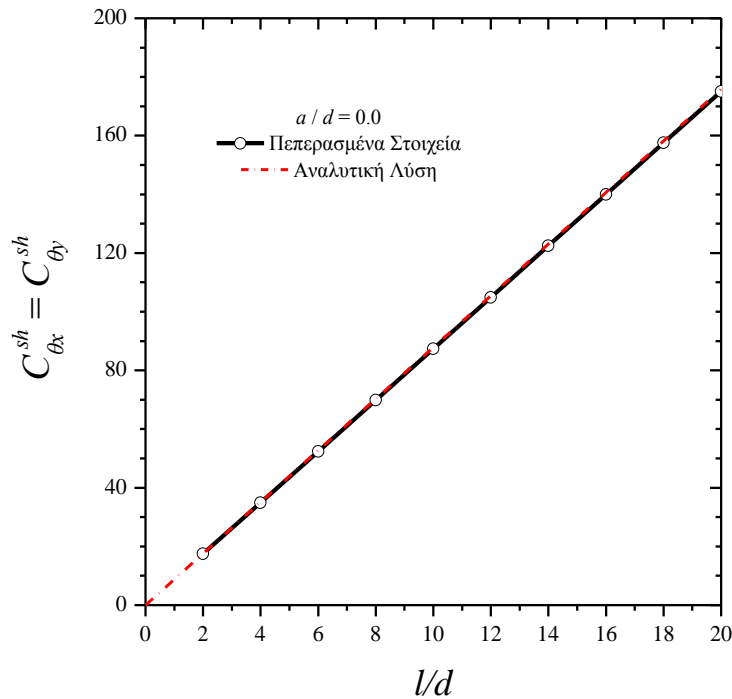
Σχήμα 5.3: Αδιάστατη ενδοτικότητα συμπαγούς άξονα υπό εφελκυσμό σε σχέση με το μήκος του.

Στη συνέχεια επιβάλλεται μία σταθερή ροπή κάμψης $M_x = M_0$ (Σχήμα 5.2β). Η τιμή της ροπής κάμψης λαμβάνεται ίση με $M_0 = 1\text{Nm}$ έτσι ώστε η γωνία κάμψης θ_x που λάβει το άκρο του άξονα να ταυτίζεται ποσοτικά με την τιμή της ενδοτικότητας του άξονα:

$$c_{\theta x}^{sh} = \frac{\theta_x^{sh}}{M_0} = \frac{\theta_x^{sh}}{1\text{Nm}} = \theta_x^{sh} \cdot (\text{Nm})^{-1} \quad (5.4)$$

Το Σχήμα 5.4 παρουσιάζει τη μεταβολή της αδιάστατης ενδοτικότητας σε σχέση με το μήκος του άξονα και σε σύγκριση με την αναλυτική λύση που δίνεται

από την εξίσωση (2.7). Προφανώς λόγω συμμετρίας είναι $c_{\theta x}^{sh} = c_{\theta y}^{sh}$. Η ακρίβεια της μεθόδου είναι και εδώ εμφανής για όλα τα μήκη άξονα.

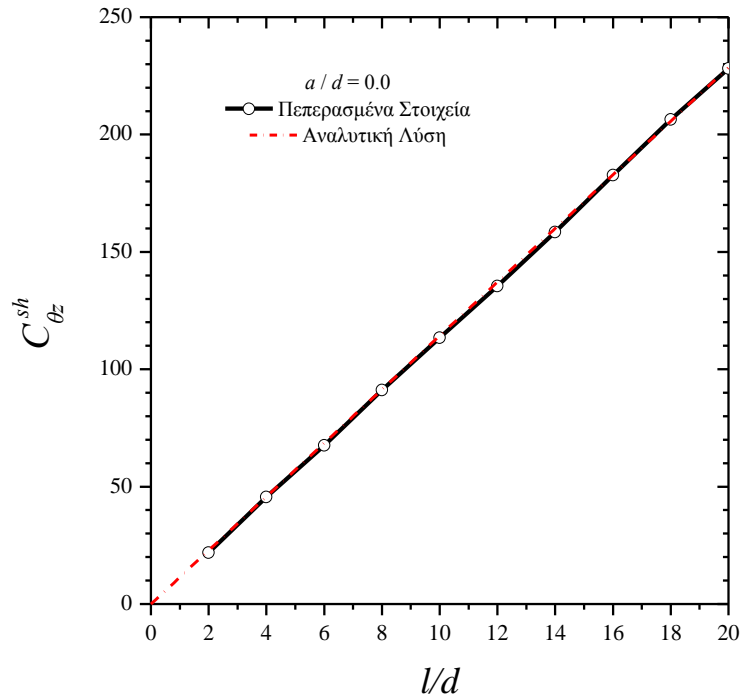


Σχήμα 5.4: Αδιάστατη ενδοτικότητα συμπαγούς άξονα υπό κάμψη σε σχέση με το μήκος του.

Τέλος, επιβάλλεται μία σταθερή ροπή στρέψης $M_z = M_0$ (Σχήμα 5.2β). Και εδώ η τιμή της ροπής κάμψης λαμβάνεται ίση με $M_0 = 1 \text{ Nm}$ έτσι ώστε η γωνία στρέψης θ_z που λάβει το άκρο του άξονα να ταυτίζεται ποσοτικά με την τιμή της ενδοτικότητας του άξονα:

$$c_{\theta z}^{sh} = \frac{\theta_z^{sh}}{M_0} = \frac{\theta_z^{sh}}{1 \text{ Nm}} = \theta_z^{sh} \cdot (\text{Nm})^{-1} \quad (5.5)$$

Το Σχήμα 5.5 παρουσιάζει τη μεταβολή της εν λόγω αδιάστατης ενδοτικότητας σε σχέση με το μήκος του άξονα και σε σύγκριση με την αναλυτική λύση που δίνεται από την εξίσωση (2.9).

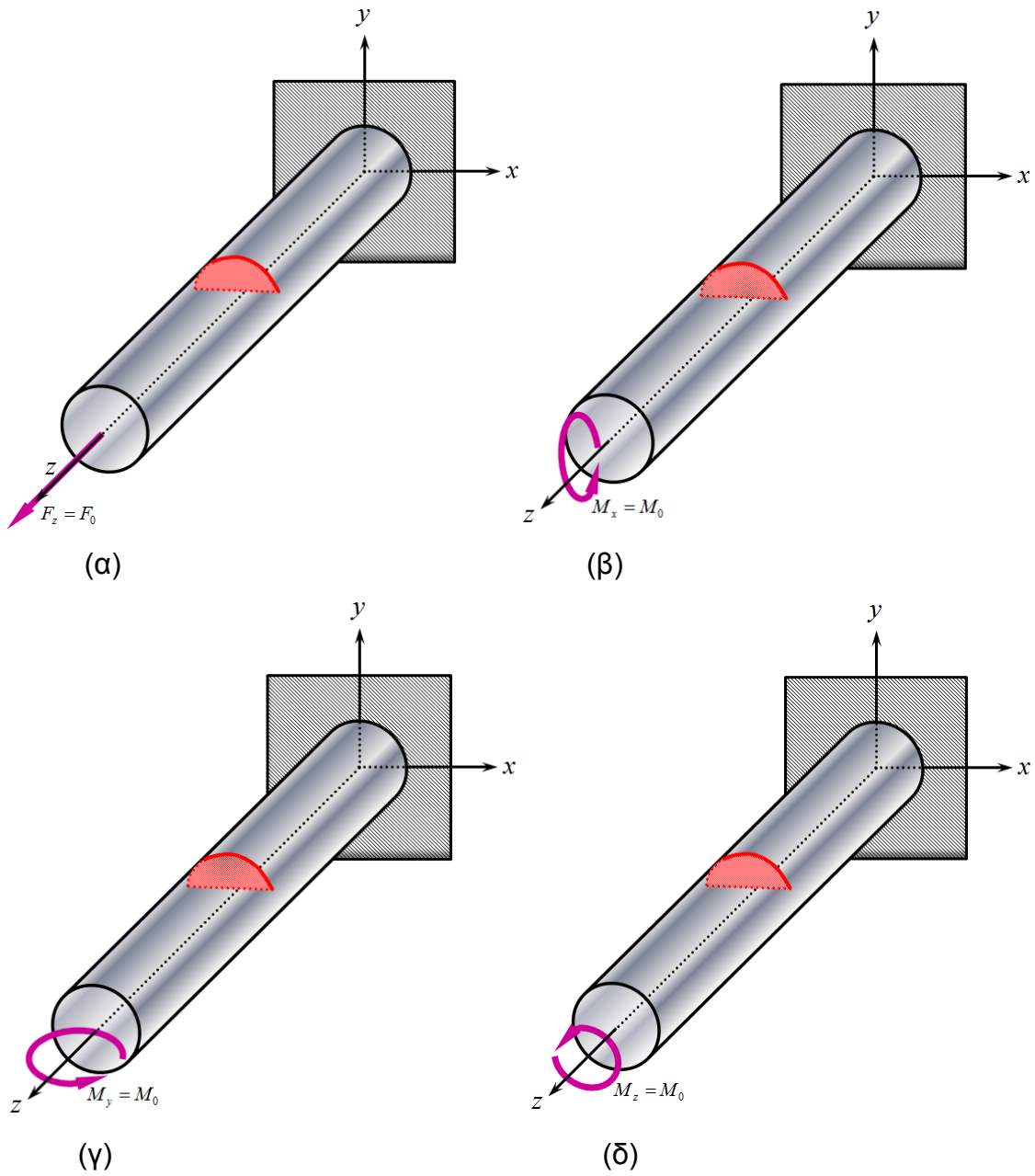


Σχήμα 5.5: Αδιάστατη ενδοτικότητα συμπαγούς άξονα υπό στρέψη σε σχέση με το μήκος του.

5.2 ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΠΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΑΝΟΙΓΟΥΣΑΣ ΡΩΓΜΗΣ

Σε αυτή την παράγραφο υπολογίζονται, με βάση την προτεινόμενη μέθοδο, η τοπική ενδοτικότητα μιας ρωγμής που βρίσκεται στο μέσο του άξονα ο οποίος έχει συνολικό μήκος $l = 1\text{m}$. Προκειμένου γίνουν συγκρίσεις των αποτελεσμάτων με τη βιβλιογραφία γίνεται η θεώρηση ότι η ρωγμή παραμένει πλήρως ανοιχτή κατά την επιβολή φορτίων.

Επιβλήθηκαν κατά σειρά μοναδιαίες φορτίσεις εφελκυσμού, κατακόρυφης κάμψης, οριζόντιας κάμψης και στρέψης όπως ακριβώς απεικονίζεται στο Σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6: Ρηγματωμένοι άξονες υπό την επίδραση (α) εφελκυσμού, (β) κατακόρυφης κάμψης, (β) οριζόντιας κάμψης και (γ) στρέψης.

Οι αντίστοιχες τιμές ενδοτικότητας υπολογίστηκαν από τη σχέση (δες παράγραφο 2.2):

$$\begin{Bmatrix} c_z^{cr} \\ c_{\theta x}^{cr} \\ c_{\theta y}^{cr} \\ c_{\theta z}^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_z^{cs} - c_z^{sh} \\ c_{\theta x}^{cs} - c_{\theta x}^{sh} \\ c_{\theta y}^{cs} - c_{\theta y}^{sh} \\ c_{\theta z}^{cs} - c_{\theta z}^{sh} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (u_z^{cs} - u_z^{sh}) / F_0 \\ (\theta_x^{cs} - \theta_x^{sh}) / M_0 \\ (\theta_y^{cs} - \theta_y^{sh}) / M_0 \\ (\theta_z^{cs} - \theta_z^{sh}) / M_0 \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

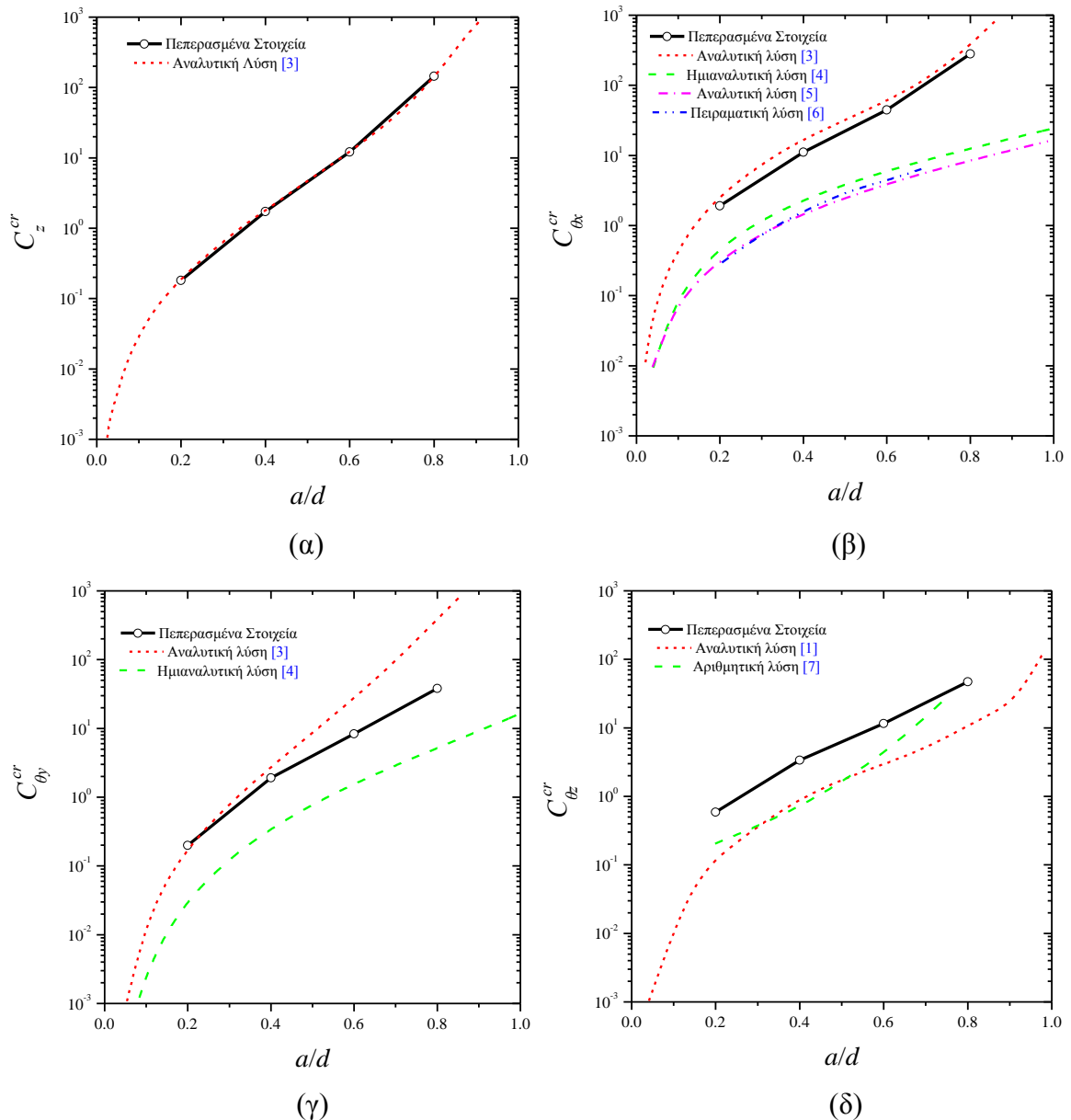
ή εφόσον όλα τα φορτία είναι μοναδιαία:

$$\begin{Bmatrix} c_z^{cr} \\ c_{\theta x}^{cr} \\ c_{\theta y}^{cr} \\ c_{\theta z}^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (u_z^{cs} - u_z^{sh}) \cdot N \\ (\theta_x^{cs} - \theta_x^{sh}) \cdot (Nm)^{-1} \\ (\theta_y^{cs} - \theta_y^{sh}) \cdot (Nm)^{-1} \\ (\theta_z^{cs} - \theta_z^{sh}) \cdot (Nm)^{-1} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

όπου το σύμβολο *sh* δηλώνει συμπαγές άξονα (*shaft*), το σύμβολο *cs* δηλώνει ρηγματωμένο άξονα (*cracked shaft*) και το σύμβολο *cr* δηλώνει ρωγμή (*crack*).

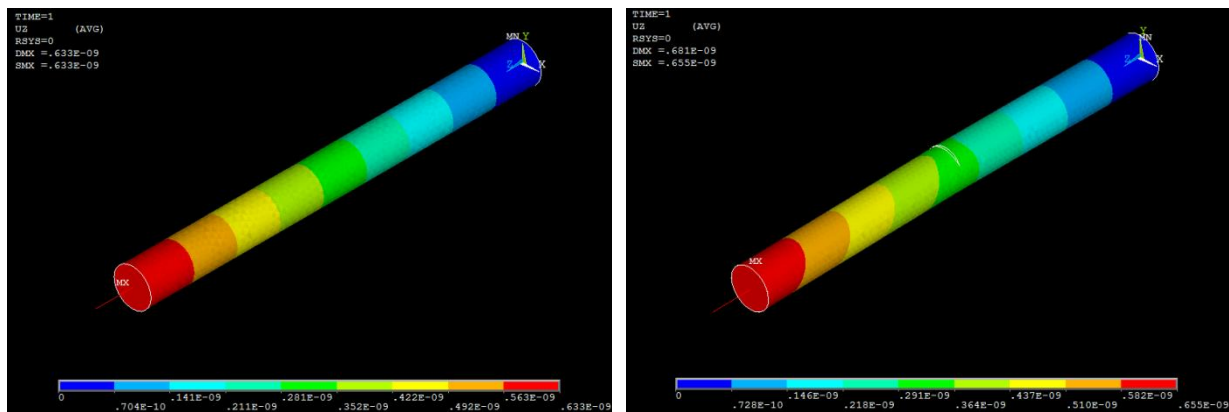
Η τελευταία σχέση υπονοεί ότι σε κάθε περίπτωση απαιτείται μια ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων αρχικά με το άξονα συμπαγή και κατόπιν μια ανάλυση με τον άξονα ρηγματωμένο και ταυτόσημη φόρτιση για να εξαχθεί η αντίστοιχη τοπική ενδοτικότητα ρωγμής.

Στο Σχήμα 5.7α, β, γ και δ παρουσιάζεται η αδιάστατη τοπική ενδοτικότητα ανοίγουσας ρωγμής σε σχέση με το αδιάστατο βάθος ρωγμής a/d υπό συνθήκες εφελκυσμού, κατακόρυφης κάμψης, οριζόντιας κάμψης και στρέψης, αντίστοιχα.



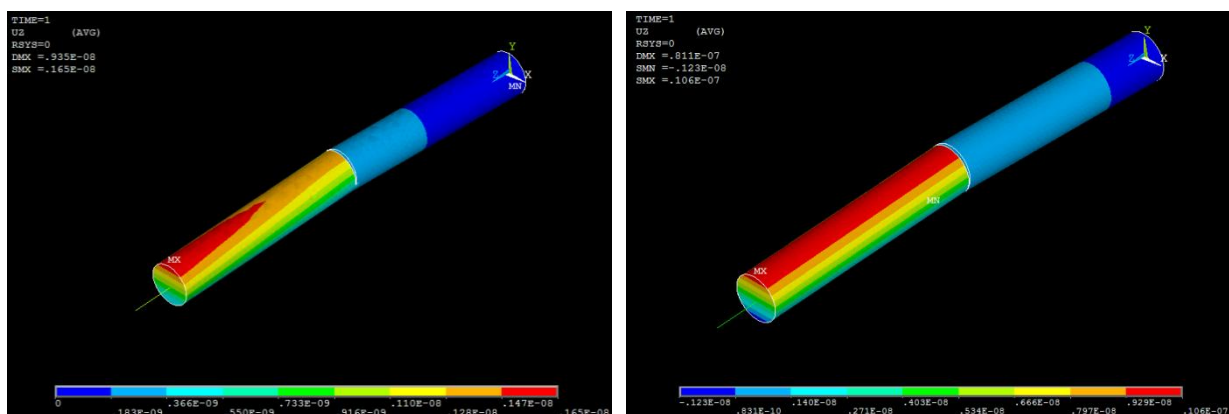
Σχήμα 5.7 : Αδιάστατη τοπική ενδοτικότητα ανοίγουσας ρωγμής σε σχέση με το μέγεθος της ρωγμής υπό (α) εφελκυσμό, (β) κατακόρυφη κάμψη, (γ) οριζόντια κάμψη και (δ) στρέψη.

Καλή συμφωνία μπορεί να διαφανεί μεταξύ των παρόντων αριθμητικών αποτελεσμάτων και αυτών που παρέχονται στη βιβλιογραφία. Ως γενικό συμπέρασμα, καθώς το βάθος της ρωγμής αυξάνει γραμμικά, η τοπική ενδοτικότητα της αυξάνει σχεδόν λογαριθμικά. Τα Σχήματα 5.8, 5.9, 5.10 και 5.11 περιέχουν περιγράμματα του μέτρου της συνισταμένης των επικόμβιων μετατοπίσεων του ρηγματωμένου άξονα υπό εφελκυσμό, κατακόρυφη κάμψη, οριζόντια κάμψη και στρέψη, αντίστοιχα.



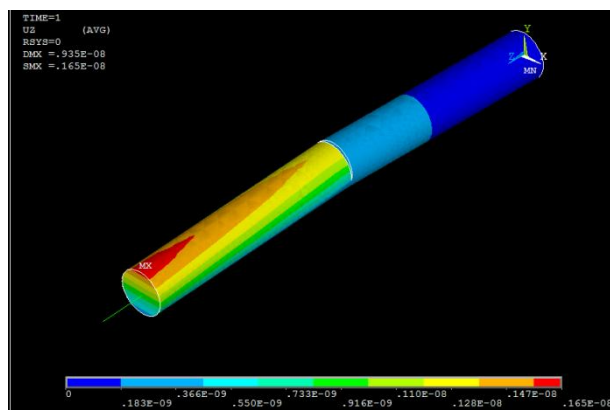
(α)

(β)



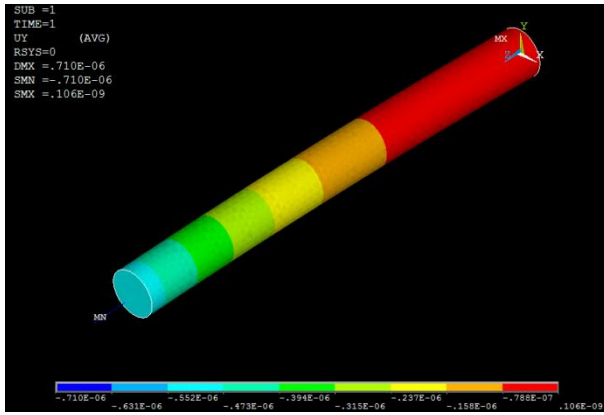
(γ)

(δ)

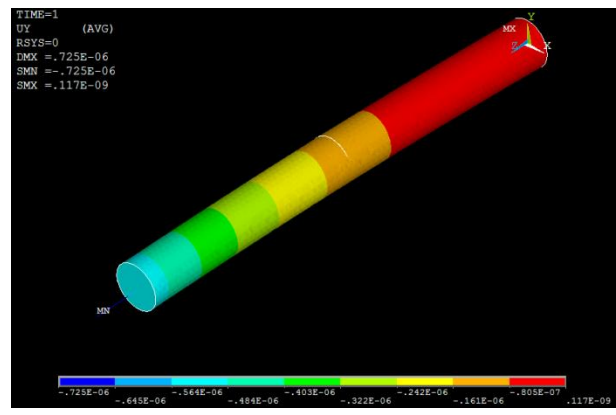


(ε)

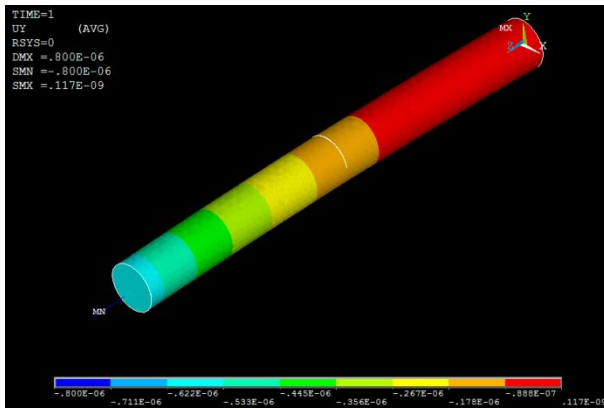
Σχήμα 5.8: Περιγράμματα συνισταμένης μετατόπισης ενός ρηγματωμένου άξονα υπό εφελκυσμό με ρωγή βάθους: (α) 0, (β) 0.02, (γ) 0.04, (δ) 0.06 και (ε) 0.08m.



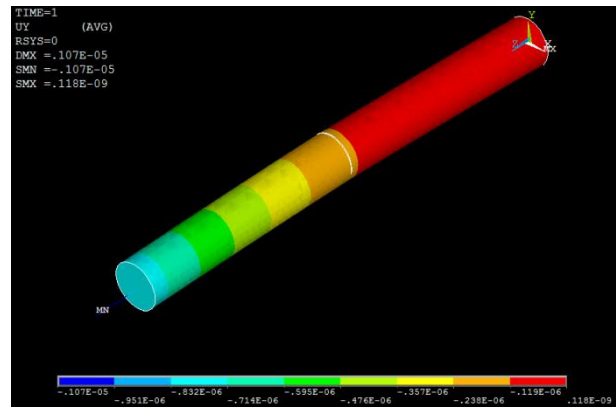
(α)



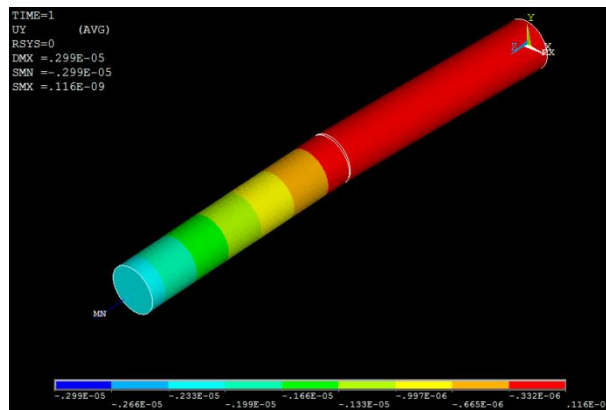
(β)



(γ)

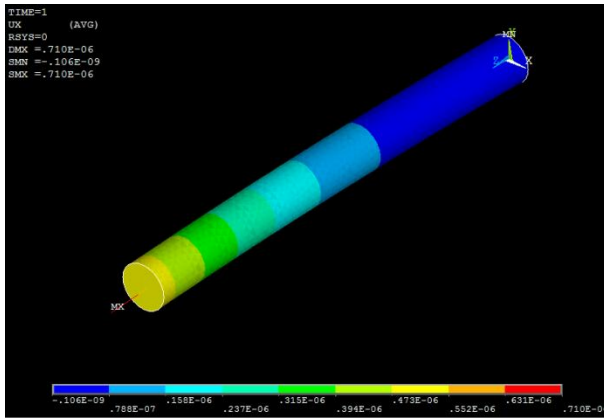


(δ)

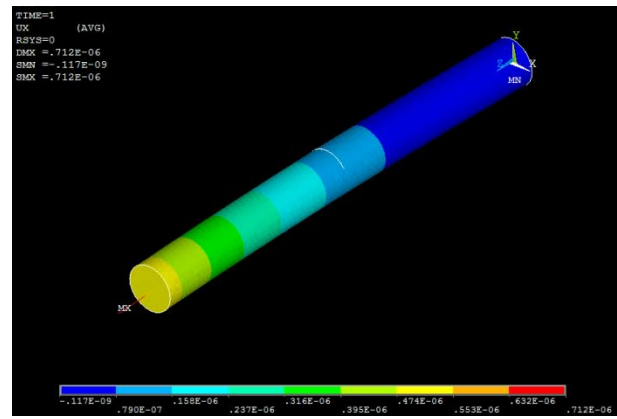


(ε)

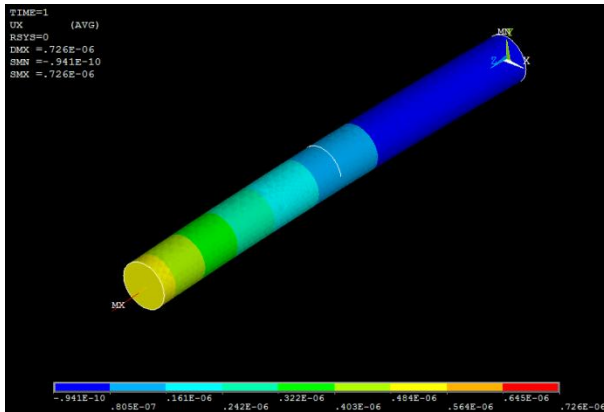
Σχήμα 5.9: Περιγράμματα συνισταμένης μετατόπισης ενός ρηγματωμένου άξονα υπό κατακόρυφη κάμψη με ρωγμή βάθους: (α) 0, (β) 0.02, (γ) 0.04, (δ) 0.06 και (ε) 0.08m.



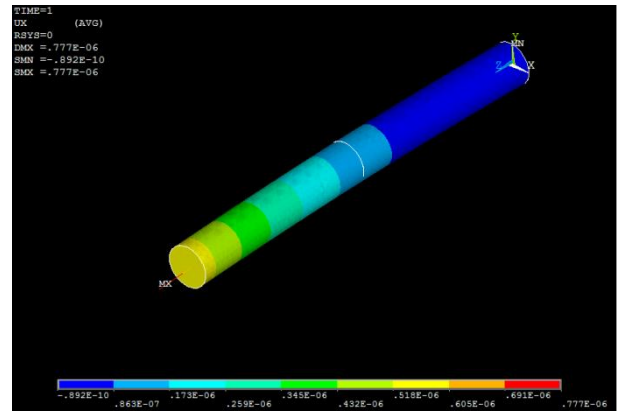
(α)



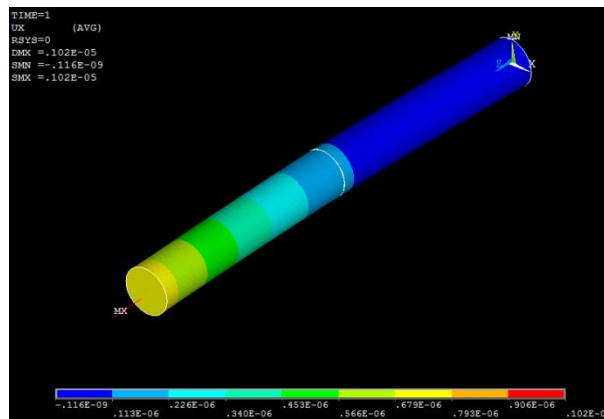
(β)



(γ)

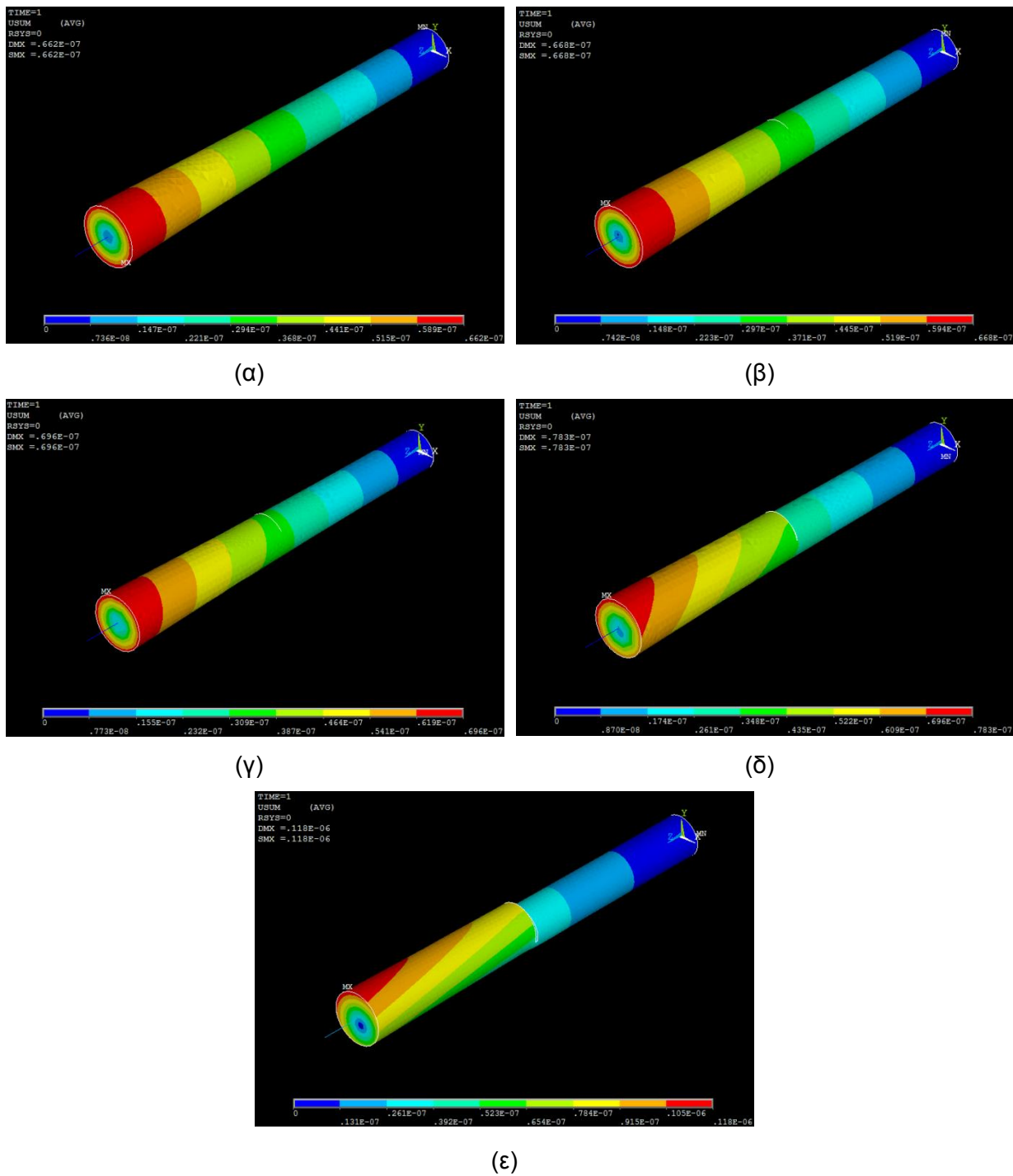


(δ)



(ε)

Σχήμα 5.10: Περιγράμματα συνισταμένης μετατόπισης ενός ρηγματωμένου άξονα υπό οριζόντια κάμψη με ρωγή βάθους: (α) 0, (β) 0.02, (γ) 0.04, (δ) 0.06 και (ε) 0.08m.



Σχήμα 5.11: Περιγράμματα συνισταμένης μετατόπισης ενός ρηγματωμένου άξονα υπό στρέψη με ρωγή βάθους: (α) 0, (β) 0.02, (γ) 0.04, (δ) 0.06 και (ε) 0.08m.

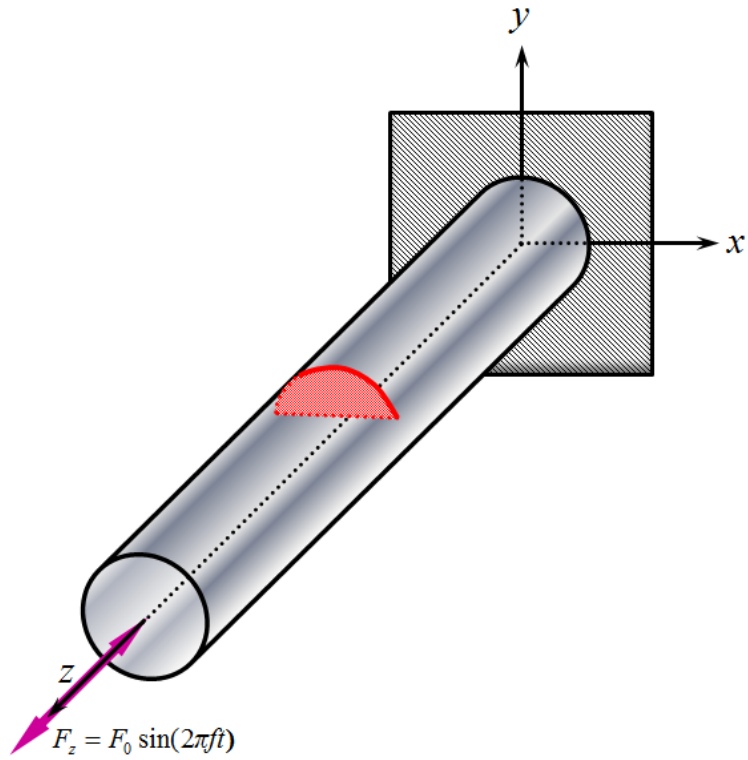
5.3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΑΞΟΝΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΠΙΚΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΡΩΓΜΗΣ

Προκειμένου να μελετηθεί το φαινόμενο του κλεισίματος της ρωγμής κατά την αντιστροφή των φορτίων και να μελετηθεί η ενδοτικότητα της κατασκευής υπό χρονικά εναλλασσόμενα φορτία, προσομοιώθηκε ο ρηγματωμένος άξονας κάτω από μια σειρά αρμονικά μεταβαλλόμενων φορτίων.

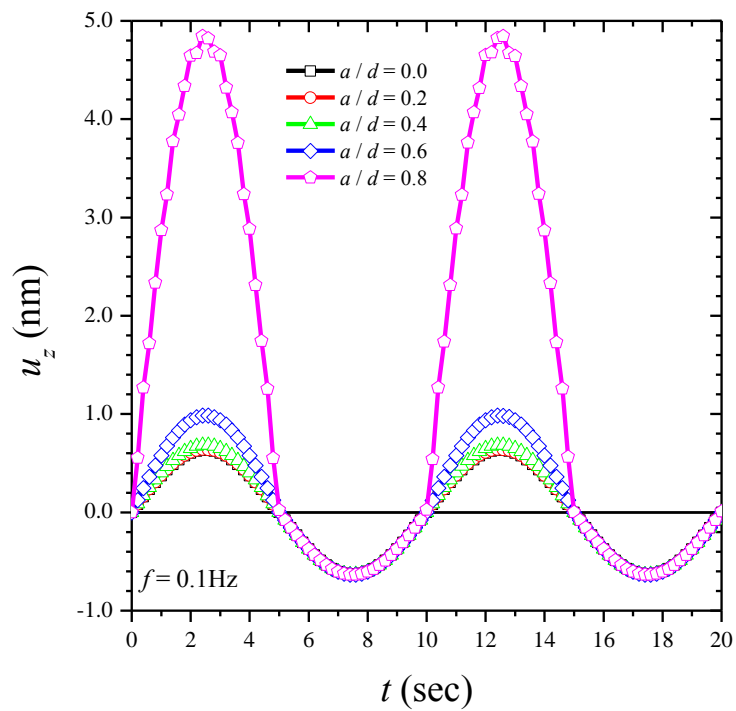
Προς αποφυγή προβλημάτων σύγκλισης και φαινομένων συντονισμού, για όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε μια μικρή αρμονική συχνότητα ίση με $f = 0.1\text{Hz}$. Ο τελικός χρόνος ανάλυσης πάρθηκε ίσος με 20sec ώστε να μελετηθεί χρονικό διάστημα ίσο με δύο περιόδους $T = 10\text{sec}$ και να προσδιορισθεί το αποτέλεσμα της τριβής. Λόγω της έμφυτης μη γραμμικότητας της επαφής των επιφανειών της ρωγμής, χρησιμοποιήθηκε ανάλυση μεγάλων μετατοπίσεων [8]. Για ταχύτερη σύγκλιση των χρονικών λύσεων χρησιμοποιήθηκαν σε όλες τις περιπτώσεις μικρά χρονικά βήμα ίσα με $\Delta t = 0.2\text{sec}$. Μεταξύ δύο χρονικών βημάτων λάμβανε χώρα μια *Newton-Raphson* [8] επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό της έκτασης και του είδους της επαφής και επομένως τη σύγκλιση της χρονικής λύσης.

5.3.1 Αρμονικά μεταβαλλόμενη αξονική φόρτιση

Στη περίπτωση αυτή επιβάλλεται αξονικό φορτίο $F_x = F_0 \sin(2\pi ft)$ σύμφωνα με το Σχήμα 5.12. Η μέγιστη τιμή της εφελκυστικής δύναμης λαμβάνεται ίση με $F_0 = 1\text{N}$. Στο Σχήμα 5.13 παρουσιάζεται η μεταβολή της μετατόπισης u_z του φορτιζόμενου άκρου του άξονα σε σχέση με το χρόνο και για διάφορα βάθη ρωγμής. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι κατά το χρονικό διάστημα που υφίστανται εφελκυστικά φορτία και άρα η ρωγμή είναι ανοιχτή, η μετατόπιση του φορτιζόμενου άκρου του άξονα αυξάνει σημαντικά με το βάθος της ρωγμής. Αντίθετα, κατά τα χρονικά διαστήματα όπου επικρατούν θλιπτικά φορτία και ρωγμή κλείνει, η απόκριση του φορτιζόμενου άκρου του άξονα παραμένει σχεδόν η ίδια ανεξάρτητα από το μέγεθος της ρωγμής.



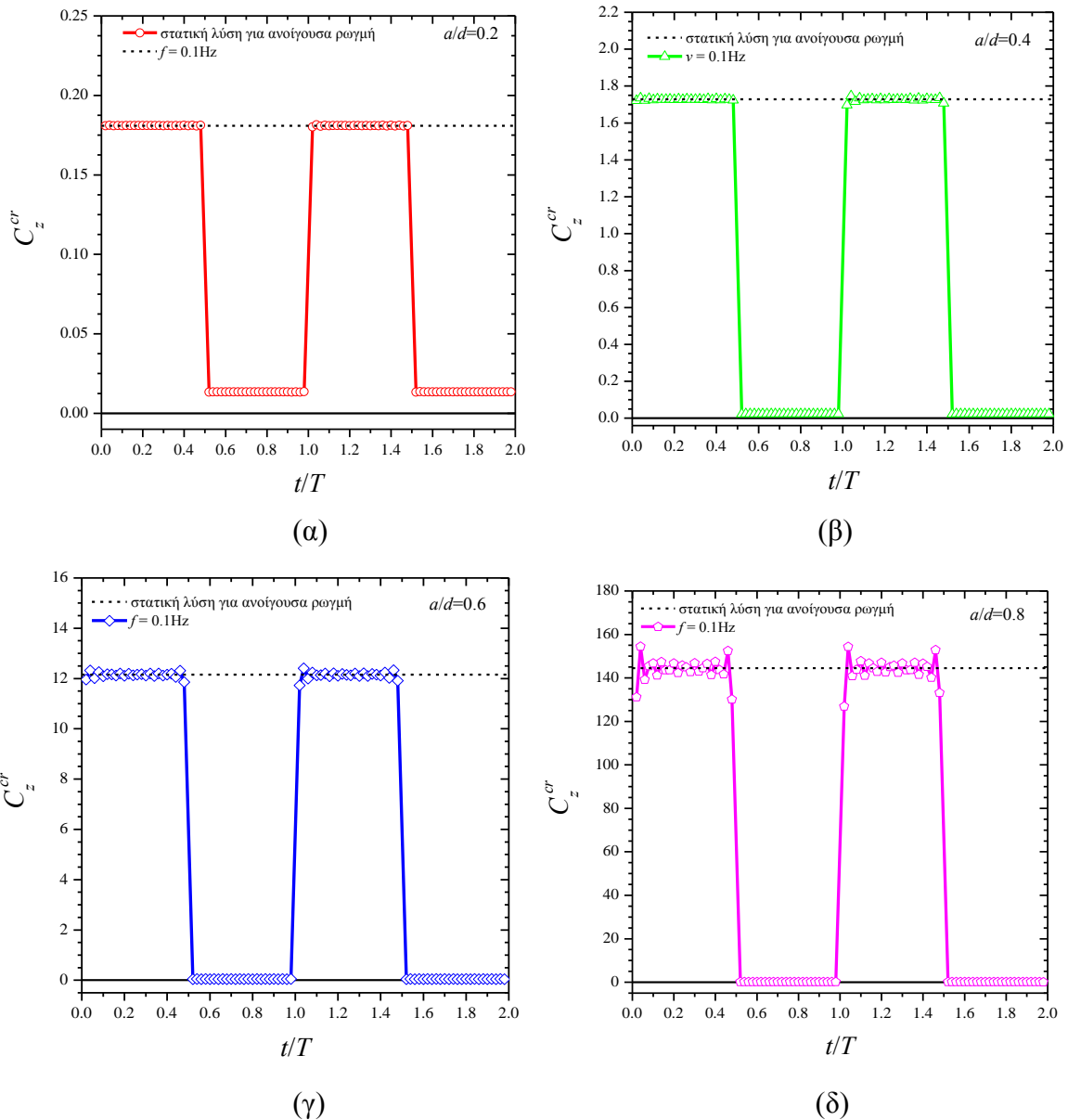
Σχήμα 5.12: Ρηγματωμένος άξονας υπό την επίδραση αρμονικά μεταβαλλόμενης αξονικής δύναμης.



Σχήμα 5.13: Αξονική μετατόπιση του αξονικά φορτιζόμενου άκρου άξονα σε σχέση με το χρόνο και το βάθος ρωγμής.

Για τον υπολογισμό της χρονικά μεταβαλλόμενης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής υπό αρμονικά μεταβαλλόμενο αξονικό φορτίο, υιοθετείται η σχέση:

$$c_z^{cr}(t) = c_z^{cs}(t) - c_z^{sh}(t) = \frac{u_z^{cs}(t) - u_z^{sh}(t)}{F(t)} \quad (5.8)$$

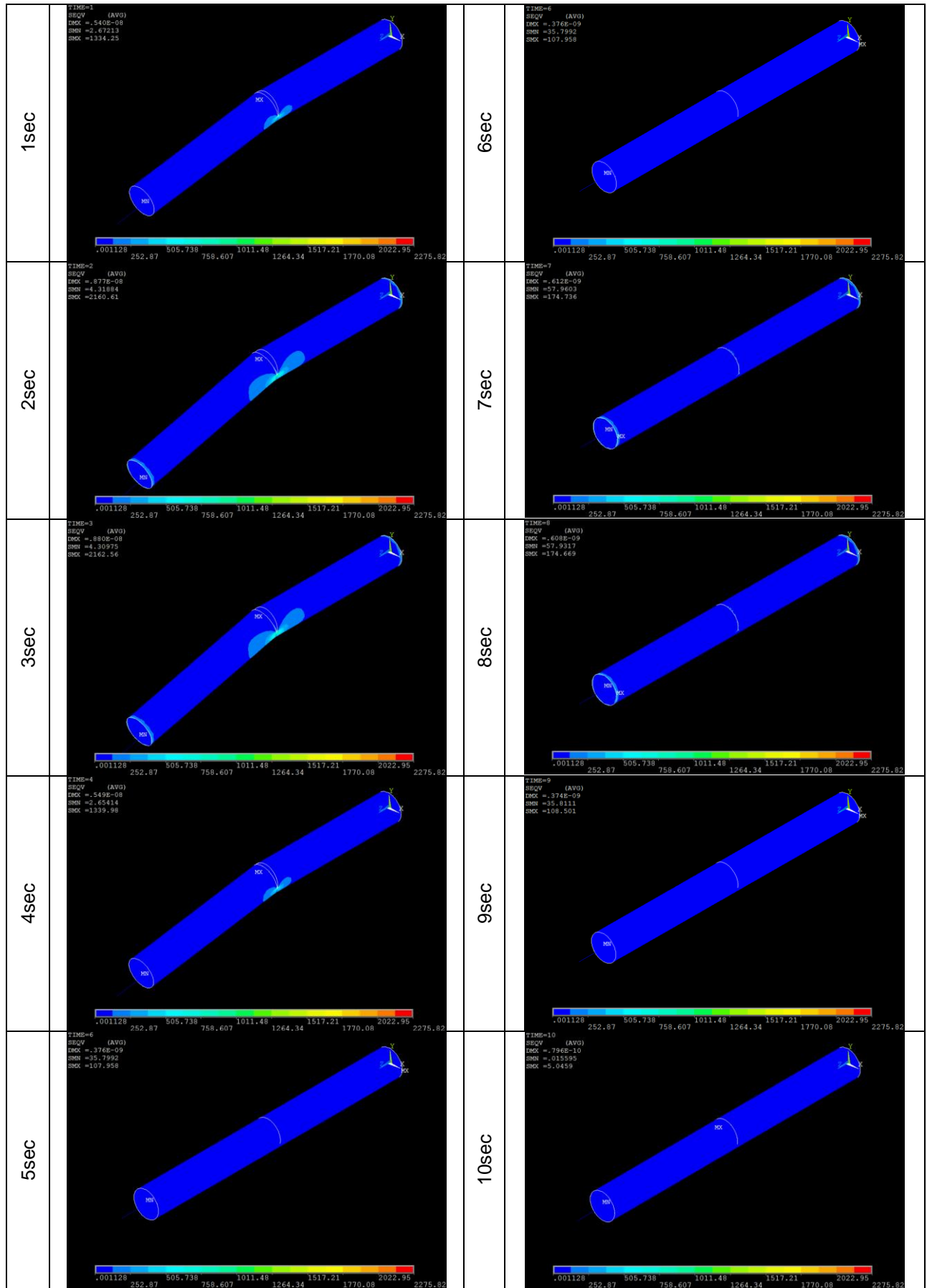


Σχήμα 5.14: Χρονικά μεταβαλλόμενη αδιάστατη τοπική ενδοτικότητα ρωγμής υπό αξονική εναλλασσόμενη φόρτιση για (α) 0.02, (β) 0.04, (γ) 0.06 και (δ) 0.08m βάθος ρωγμής.

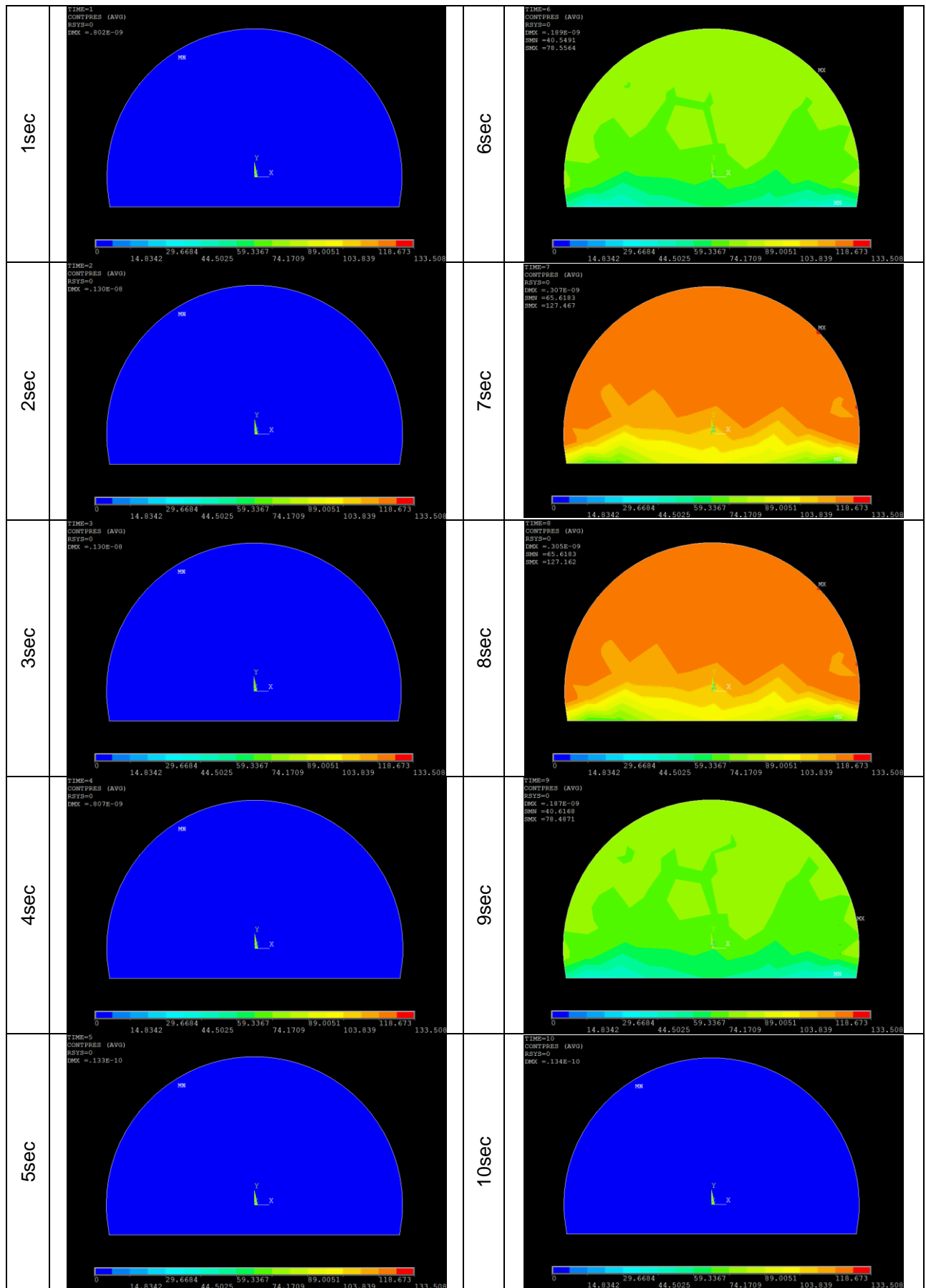
Το Σχήμα 5.14α, β, γ και δ παρουσιάζει τη χρονική μεταβολή της αντίστοιχης αδιάστατης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής για βάθος ρωγμής 0.02, 0.04, 0.06 και 0.08m, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, η τοπική ενδοτικότητα κατά

τα χρονικά διαστήματα που η ρωγμή είναι ανοιχτή παραμένει σχεδόν σταθερή και ίση με την αντίστοιχη στατική λύση. Κατά τα χρονικά διαστήματα που η ρωγμή παραμένει κλειστή η τοπική ενδοτικότητα παίρνει πολύ μικρότερες σχεδόν σταθερές τιμές οι οποίες φαίνεται παρόλα αυτά να είναι μη μηδενικές.

Το Σχήμα 5.15 περιέχει περιγράμματα της τάσης Von Mises στο ρηγματωμένο, σε βάθος 0.06m, άξονα για διάφορες χρονικές στιγμές της πρώτης περιόδου. Σε αντιδιαστολή, το Σχήμα 5.16 παρουσιάζει τα αντίστοιχα περιγράμματα της πίεσης επαφής των επιφανειών της ρωγμής. Η συγκέντρωση των τάσεων στο άκρο της ρωγμής και η μεταβολή της επαφής με το χρόνο γίνεται εμφανής.



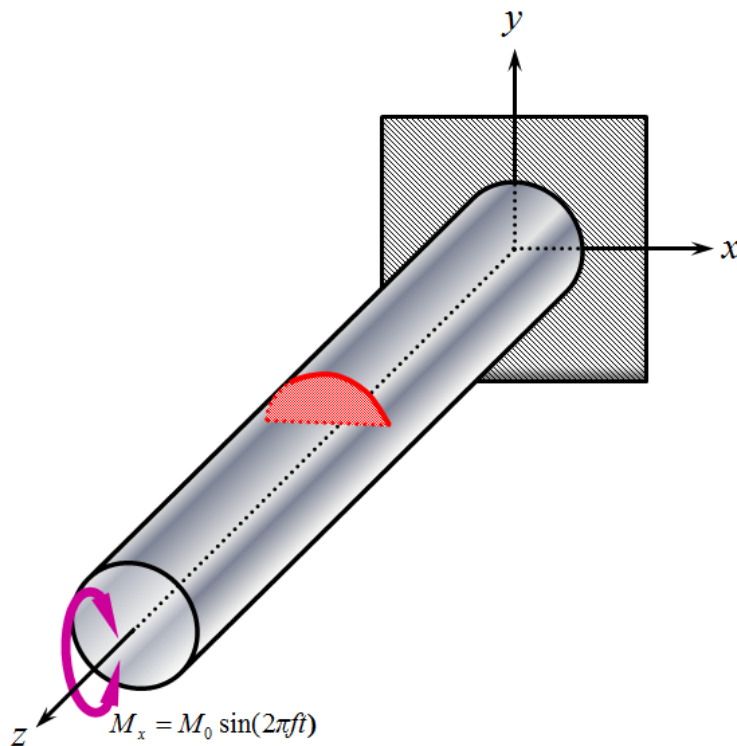
Σχήμα 5.15: Περιγράμματα τάσης Von Mises ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο αξονικό φορτίο με ρωγή βάθους 0.06m.



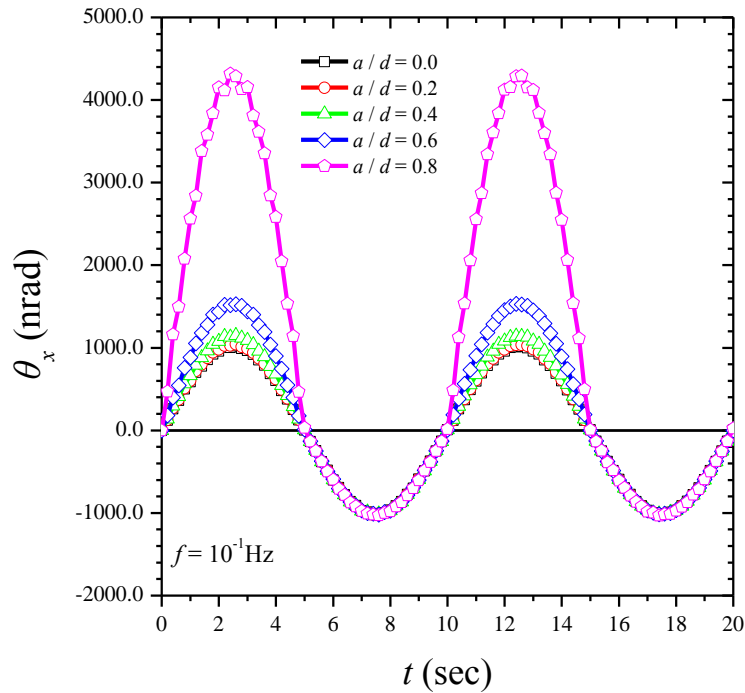
Σχήμα 5.16: Περιγράμματα πίεσης επαφής της ρωγμής βάθους 0.06m ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο αξονικό φορτίο.

5.3.2 Αρμονικά μεταβαλλόμενη κατακόρυφη καμπτική φόρτιση

Σε αυτή τη περίπτωση επιβάλλεται κατακόρυφη ροπή κάμψης $M_x = M_0 \sin(2\pi ft)$ σύμφωνα με το Σχήμα 5.17. Η μέγιστη τιμή της ροπής κάμψης λαμβάνεται ίση με $M_0 = 1 \text{ Nm}$. Στο Σχήμα 5.18 παρουσιάζεται η μεταβολή της γωνίας κάμψης θ_x του φορτιζόμενου άκρου του άξονα σε σχέση με το χρόνο και για διάφορα βάθη ρωγμής. Και εδώ μπορεί να παρατηρηθεί ότι κατά το χρονικό διάστημα που υφίστανται εφελκυστικές πιέσεις στη ρωγμή και άρα η ρωγμή παραμένει ανοιχτή η μετατόπιση του φορτιζόμενου άκρου του άξονα αυξάνει σημαντικά με το βάθος της ρωγμής. Αντίθετα, κατά τα χρονικά διαστήματα όπου επικρατούν θλιπτικά φορτία στη ρωγμή, η απόκριση του φορτιζόμενου άκρου του άξονα παραμένει σχεδόν η ίδια ανεξάρτητα από το μέγεθος της ρωγμής.



Σχήμα 5.17: Ρηγματωμένος άξονας υπό την επίδραση αρμονικά μεταβαλλόμενης κατακόρυφης ροπής κάμψης.

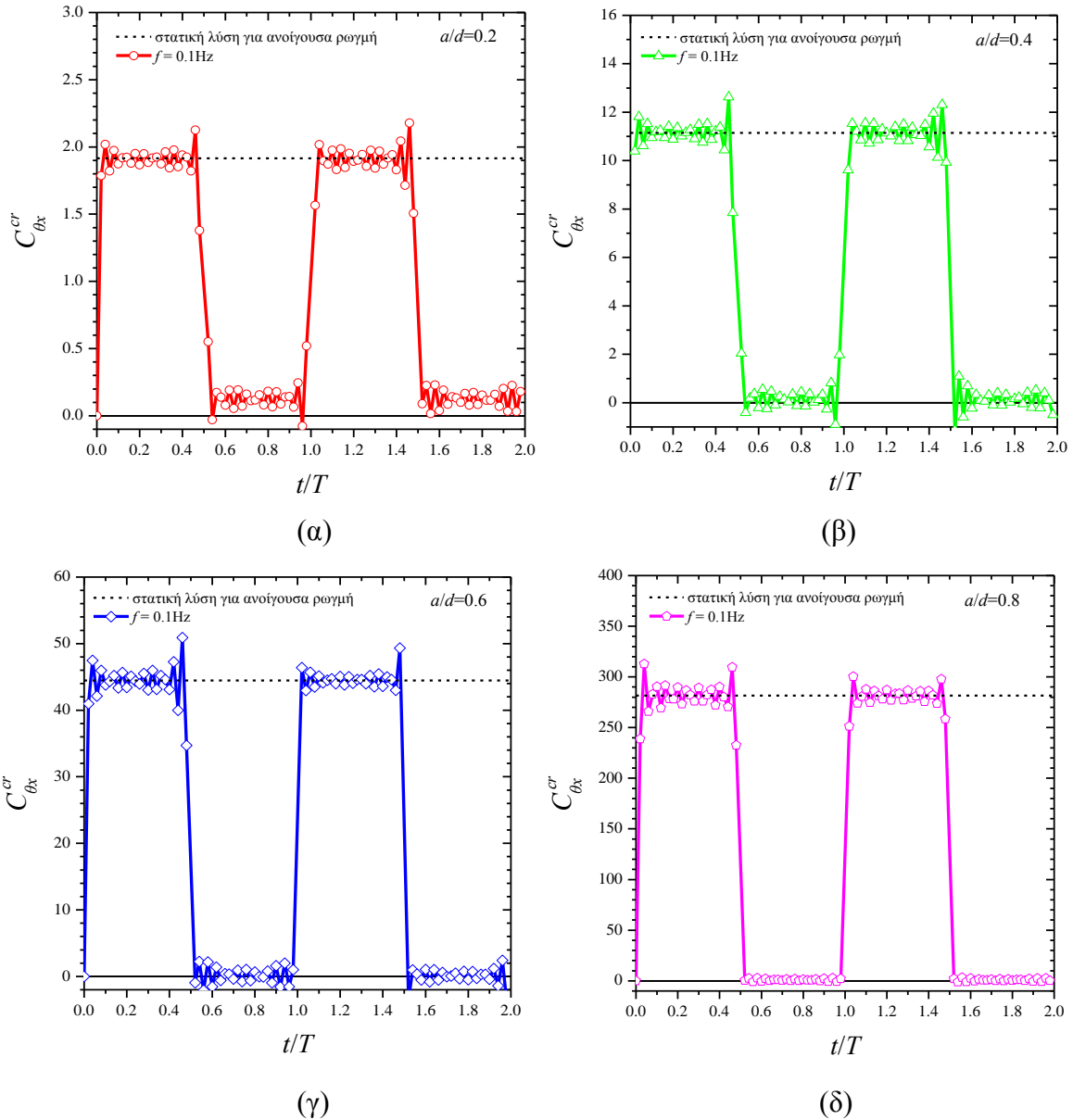


Σχήμα 5.18: Γωνία κάμψης γύρω από τον άξονα x του κατακόρυφως καμπτικά φορτιζόμενου άκρου άξονα σε σχέση με το χρόνο και το βάθος ρωγμής.

Για τον υπολογισμό της χρονικά μεταβαλλόμενης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής υπό αρμονικά μεταβαλλόμενη κατακόρυφη ροπή κάμψης, υιοθετείται η σχέση:

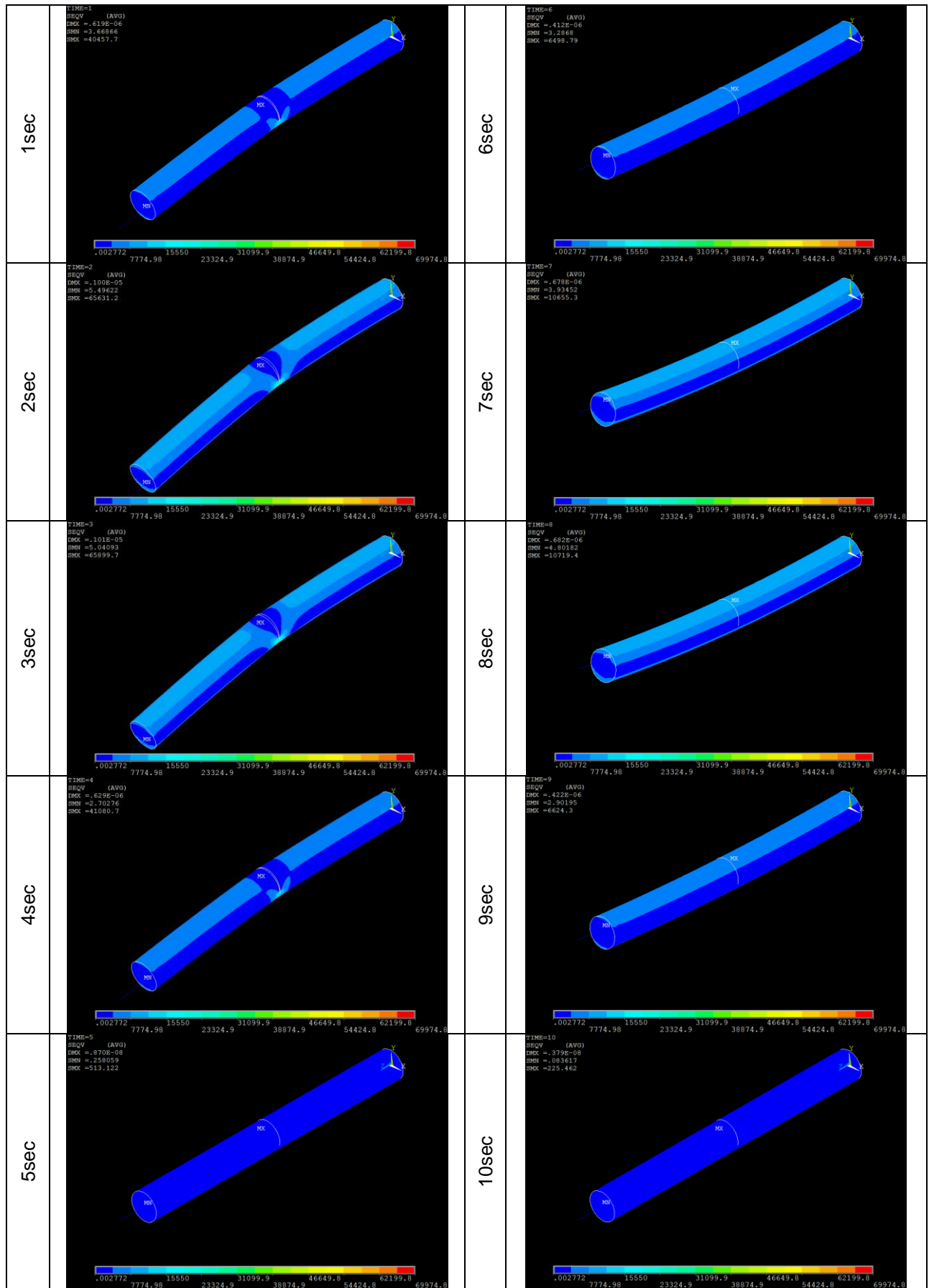
$$c_{\theta x}^{cr}(t) = c_{\theta x}^{cs}(t) - c_{\theta x}^{sh}(t) = \frac{\theta_x^{cs}(t) - \theta_x^{sh}(t)}{M_x(t)} \quad (5.9)$$

Το Σχήμα 5.19α, β, γ και δ παρουσιάζει τη χρονική μεταβολή της αντίστοιχης αδιάστατης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής για βάθος ρωγμής ίσο με 0.02, 0.04, 0.06 και 0.08m, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, η τοπική ενδοτικότητα κατά τα χρονικά διαστήματα που η ρωγμή είναι ανοιχτή παραμένει σχεδόν σταθερή και ίση με την αντίστοιχη στατική λύση. Κατά τα χρονικά διαστήματα που η ρωγμή παραμένει κλειστή η τοπική ενδοτικότητα παίρνει πολύ μικρότερες σχεδόν σταθερές τιμές, οι οποίες φαίνεται παρόλα αυτά να είναι μη μηδενικές. Να τονισθεί σε αυτό το σημείο ότι για μεγάλα βάθη ρωγμής δύναται η ρωγμή να κλείνει τμηματικά αλλά το άκρο της να παραμένει ανοιχτό.

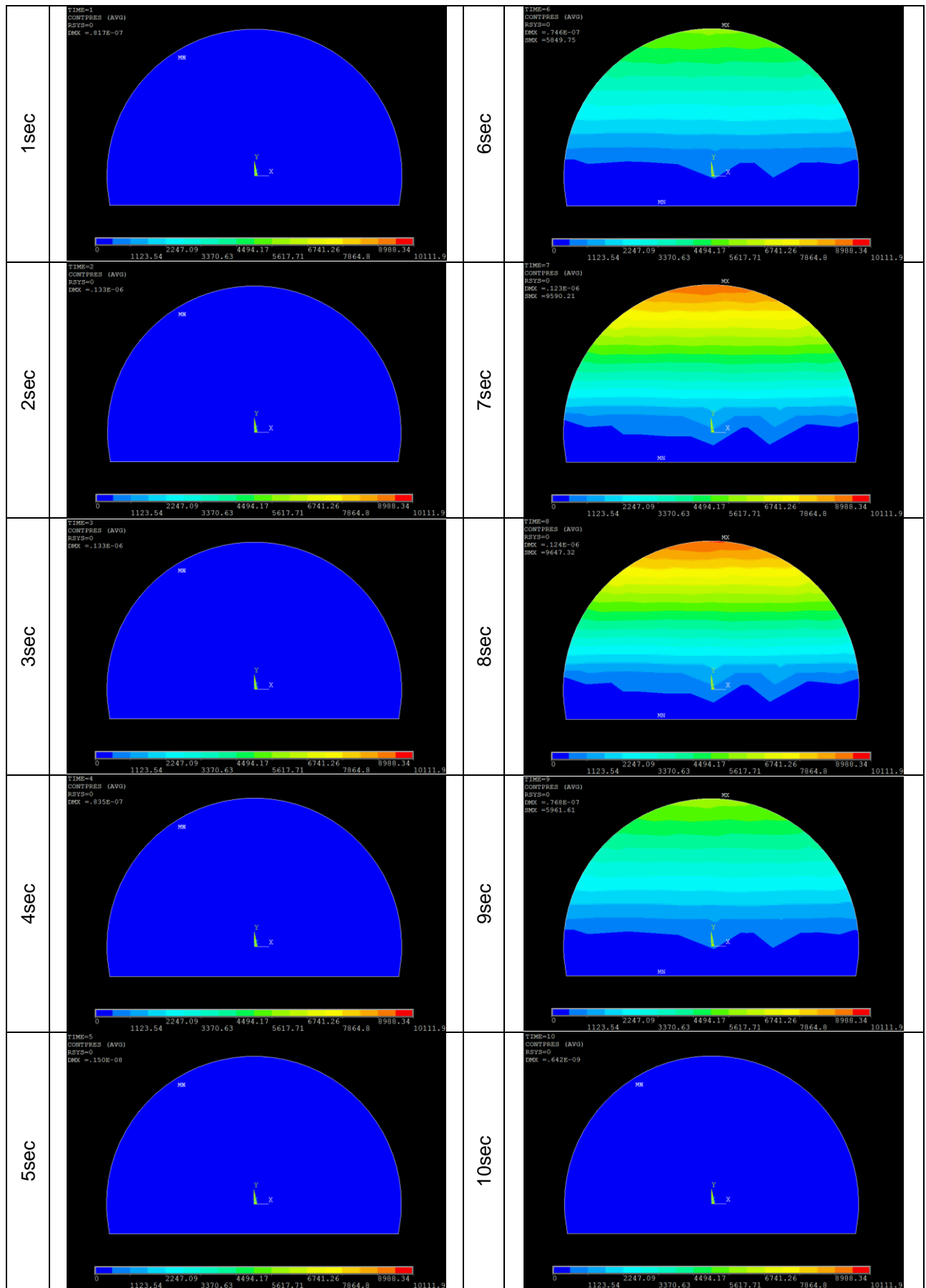


Σχήμα 5.19: Χρονικά μεταβαλλόμενη αδιάστατη τοπική ενδοτικότητα ρωγμής υπό κατακόρυφη καμπτική εναλλασσόμενη φόρτιση για (α) 0.02, (β) 0.04, (γ) 0.06 και (δ) 0.08m βάθος ρωγμής.

Το Σχήμα 5.20 περιέχει περιγράμματα της τάσης Von Mises στο ρηγματωμένο, σε βάθος 0.06m, άξονα για διάφορες χρονικές στιγμές της πρώτης περιόδου. Σε αντιδιαστολή, το Σχήμα 5.21 παρουσιάζει τα αντίστοιχα περιγράμματα της πίεσης επαφής των επιφανειών της ρωγμής. Η συγκέντρωση των τάσεων στο άκρο της ρωγμής και η μεταβολή της επαφής με το χρόνο γίνεται εμφανής. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι όπως φαίνεται από τα περιγράμματα της πίεσης επαφής, ακόμα και όταν η ροπή έχει φορά που τείνει να κλείσει την ρωγμή, τμήμα της ρωγμής παραμένει ανοιχτό.



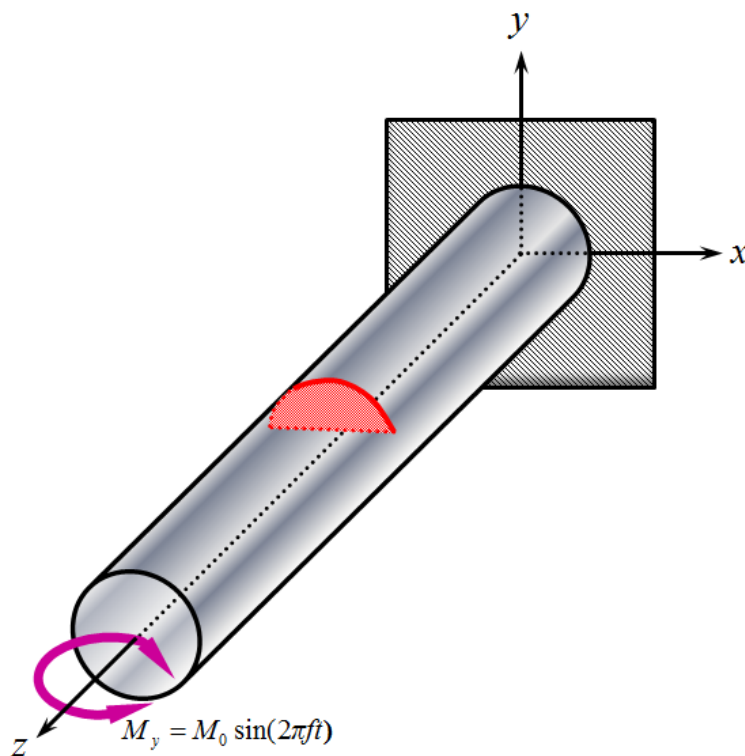
Σχήμα 5.20: Περιγράμματα τάσης Von Mises ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο κατακόρυφα καμπτικό φορτίο με ρωγή βάθους 0.06m.



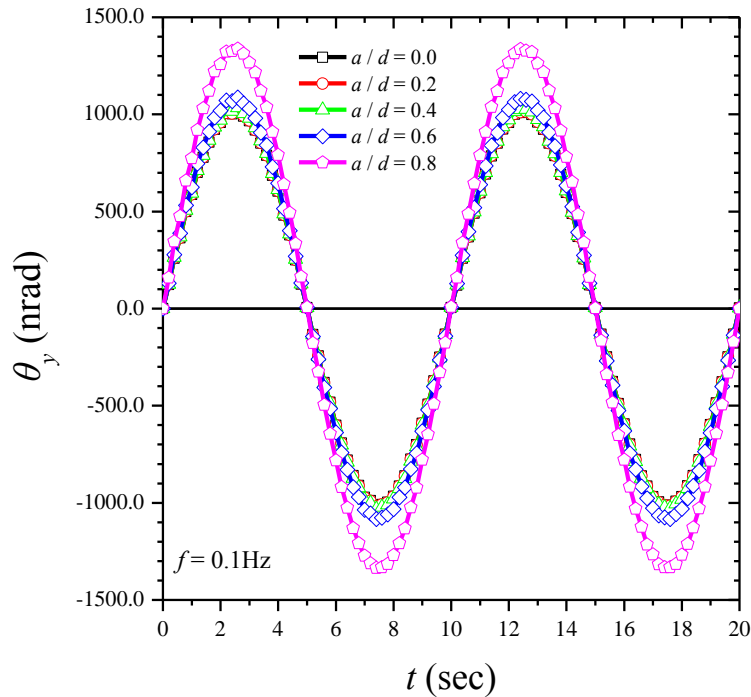
Σχήμα 5.21: Περιγράμματα πίεσης επαφής της ρωγμής βάθους 0.06m ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο κατακόρυφο καμπτικό φορτίο.

5.3.3 Αρμονικά μεταβαλλόμενη οριζόντια καμπτική φόρτιση

Σε αυτή τη περίπτωση επιβάλλεται οριζόντια ροπή κάμψης $M_y = M_0 \sin(2\pi ft)$ σύμφωνα με το Σχήμα 5.22. Η μέγιστη τιμή της ροπής κάμψης λαμβάνεται ίση με $M_0 = 1 \text{ Nm}$. Στο Σχήμα 5.23 παρουσιάζεται η μεταβολή της γωνίας κάμψης θ_y του φορτιζόμενου άκρου του άξονα σε σχέση με το χρόνο και για διάφορα βάθη ρωγμής. Σε αυτή τη περίπτωση φόρτισης ανεξάρτητα από τη φορά της ροπής, μέρος της ρωγμής βρίσκεται σε επαφή ενώ το υπόλοιπο τμήμα της παραμένει ανοιχτό. Ως εκ τούτου για όλα τα χρονικά διαστήματα το μέγεθος της στρέψης του φορτιζόμενου άξονα τείνει να αυξάνεται καθώς αυξάνεται το μέγεθος τη ρωγμής. Με άλλα λόγια ο άξονας υπό την παρουσία ρωγμής γίνεται αισθητά πιο εύκαμπτος για όλες τις χρονικές στιγμές.



Σχήμα 5.22: Ρηγματωμένος άξονας υπό την επίδραση αρμονικά μεταβαλλόμενης οριζόντιας ροπής κάμψης.

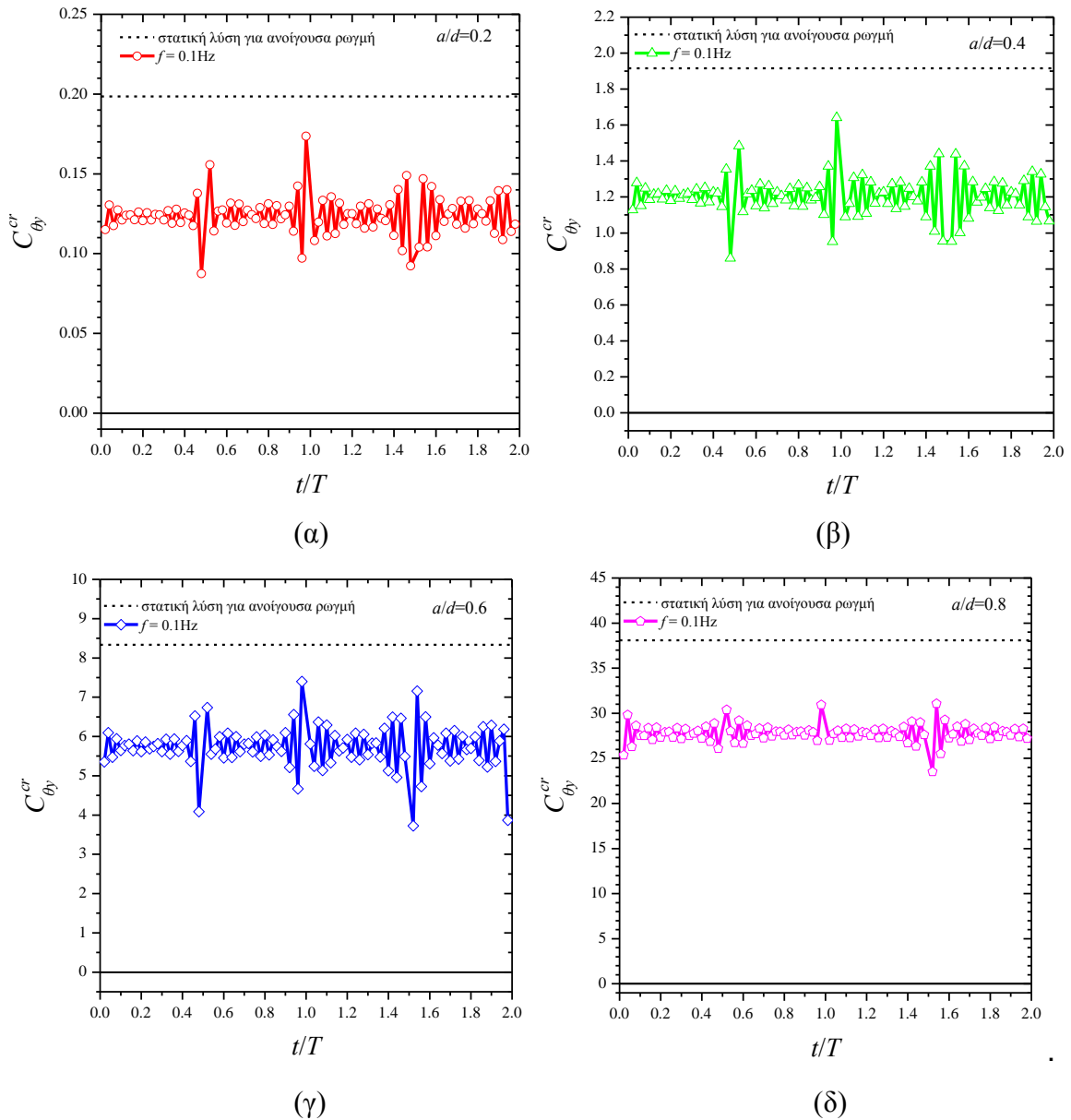


Σχήμα 5.23: Γωνία κάμψης γύρω από τον άξονα y του οριζοντίως καμπτικά φορτιζόμενου άκρου άξονα σε σχέση με το χρόνο και το βάθος ρωγμής.

Για τον υπολογισμό της χρονικά μεταβαλλόμενης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής υπό αρμονικά μεταβαλλόμενη οριζόντια ροπή κάμψης, υιοθετείται η σχέση:

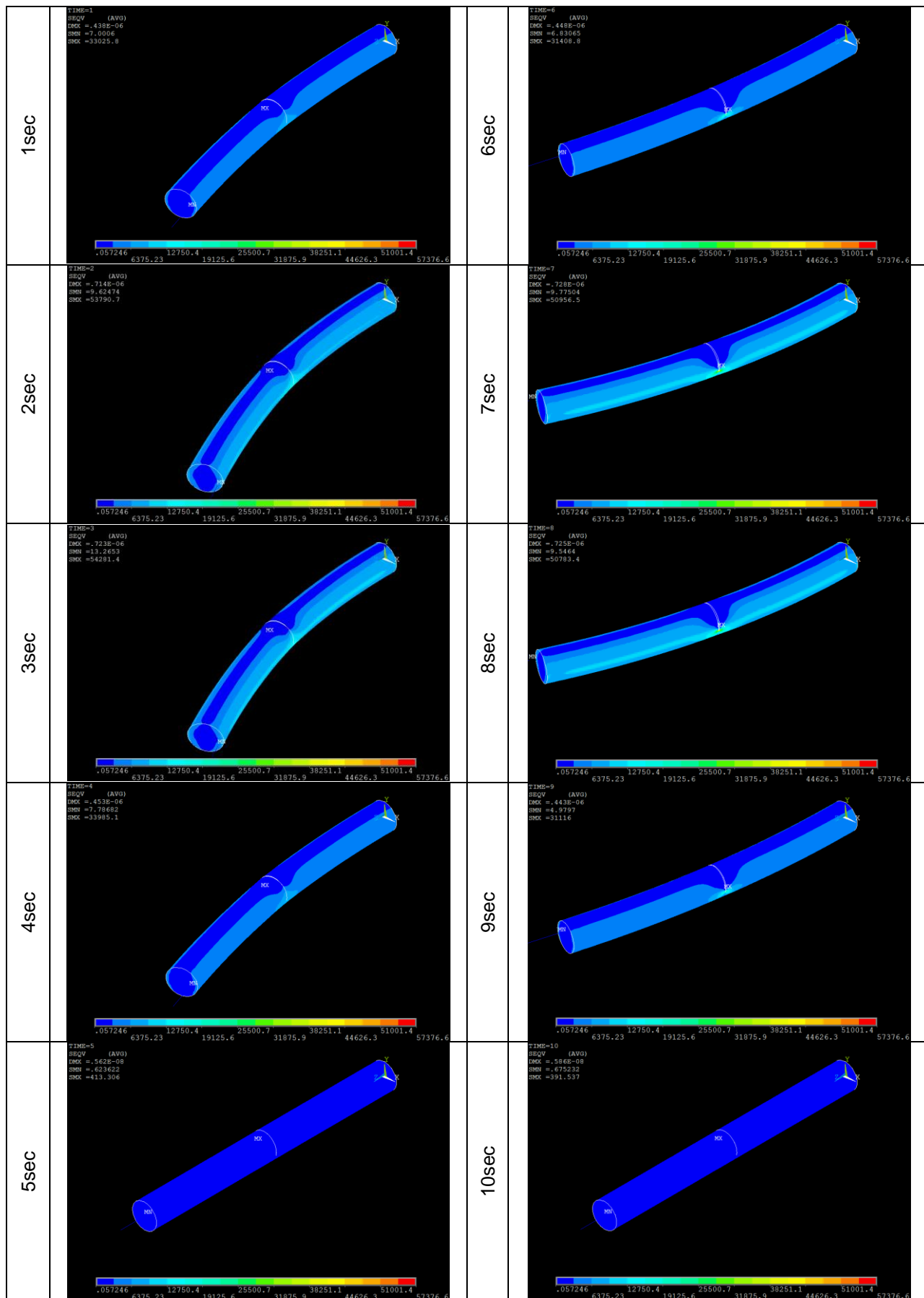
$$c_{\theta_y}^{cr}(t) = c_{\theta_y}^{cs}(t) - c_{\theta_y}^{sh}(t) = \frac{\theta_y^{cs}(t) - \theta_y^{sh}(t)}{M_y(t)} \quad (5.10)$$

Το Σχήμα 5.24α, β, γ και δ παρουσιάζει τη χρονική μεταβολή της αντίστοιχης αδιάστατης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής για βάθος ρωγμής ίσο με 0.02, 0.04, 0.06 και 0.08m, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα η τοπική ενδοτικότητα σε όλο το χρονικό διάστημα παραμένει σχεδόν σταθερή και διαφορετική με την αντίστοιχη στατική λύση ανοίγουσας ρωγμής.

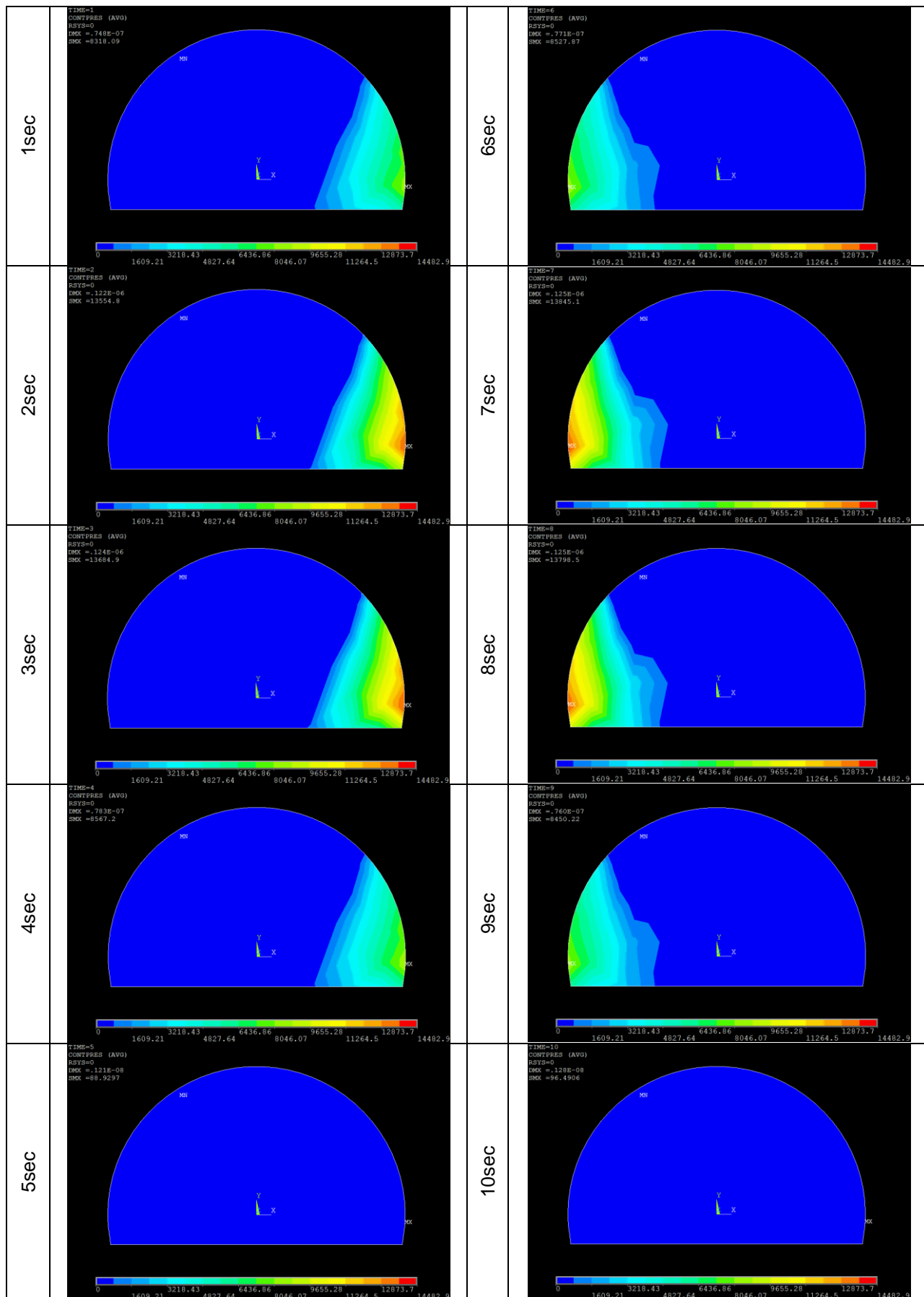


Σχήμα 5.24: Χρονικά μεταβαλλόμενη αδιάστατη τοπική ενδοτικότητα ρωγμής υπό οριζόντια καμπτική εναλλασσόμενη φόρτιση για (α) 0.02, (β) 0.04, (γ) 0.06 και (δ) 0.08m βάθος ρωγμής.

Το Σχήμα 5.25 περιέχει περιγράμματα της τάσης Von Mises στο ρηγματωμένο, σε βάθος 0.06m, άξονα για διάφορες χρονικές στιγμές της πρώτης περιόδου. Σε αντιδιαστολή, το Σχήμα 5.26 παρουσιάζει τα αντίστοιχα περιγράμματα της πίεσης επαφής των επιφανειών της ρωγμής. Η συμμετρική με το χρόνο μεταβολή της επαφής γύρω από τον άξονα y γίνεται εμφανής.



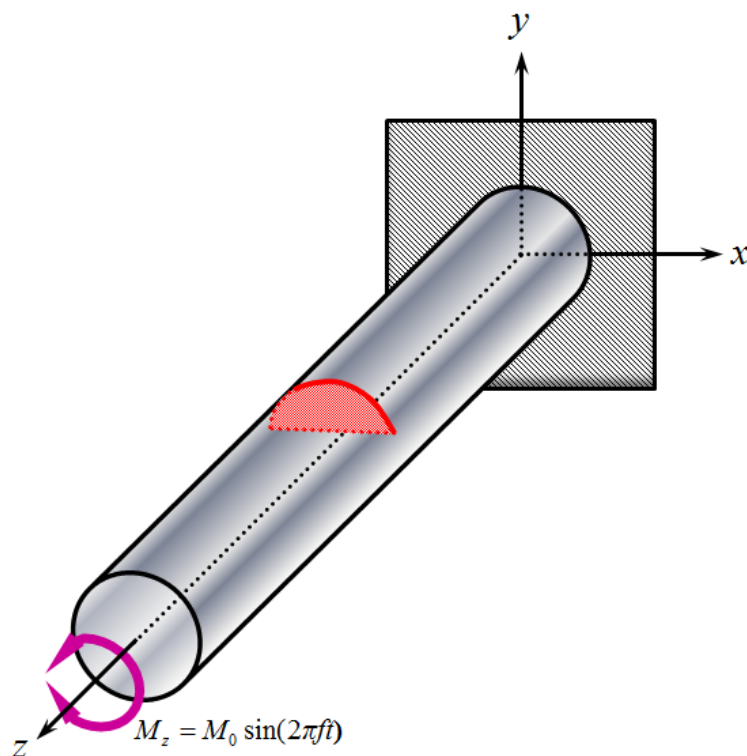
Σχήμα 5.25: Περιγράμματα τάσης Von Mises ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο οριζόντιο καμπτικό φορτίο με ρωγή βάθους 0.06m.



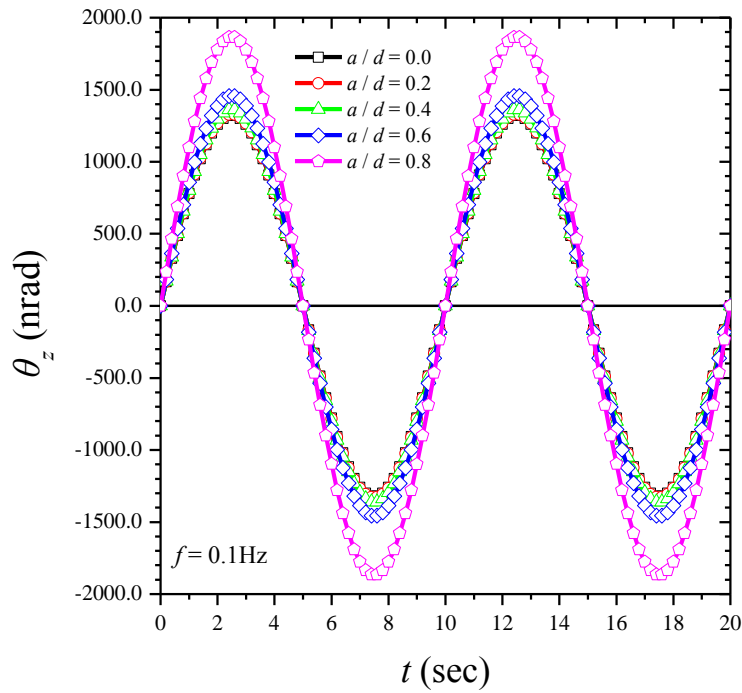
Σχήμα 5.26: Περιγράμματα πίεσης επαφής της ρωγμής βάθους 0.06m ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο οριζόντιο καμπτικό φορτίο.

5.3.4 Αρμονικά μεταβαλλόμενη στεπτική φόρτιση

Σε αυτή τη περίπτωση επιβάλλεται μια ροπή στρέψης $M_z = M_0 \sin(2\pi ft)$ σύμφωνα με το Σχήμα 5.27. Η μέγιστη τιμή της ροπής κάμψης λαμβάνεται ίση με $M_0 = 1 \text{ Nm}$. Στο Σχήμα 5.28 απεικονίζεται η μεταβολή της γωνίας στρέψης θ_z του φορτιζόμενου άκρου του άξονα σε σχέση με το χρόνο και για διάφορα βάθη ρωγμής. Σε αυτή τη περίπτωση φόρτισης, καθώς η ροπή παίρνει τις μέγιστες τιμές της αριστερόστροφα και δεξιόστροφα, ανεπαίσθητη επαφή εμφανίζεται κοντά στο άκρο της ρωγμής. Επειδή το φαινόμενο της επαφής είναι αμελητέο, η τοπική ενδοτικότητα της ρωγμής μοιάζει να είναι ανεξάρτητη από αυτό και ίση με τη στατική λύση ανοίγουσας ρωγμής που υπολογίσθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Ως εκ τούτου για όλα τα χρονικά διαστήματα το μέγεθος της στρέψης του φορτιζόμενου άξονα και άρα η ευκαμψία του τείνει να αυξάνεται καθώς αυξάνεται το μέγεθος της ρωγμής.



Σχήμα 5.27: Ρηγματωμένος άξονας υπό την επίδραση αρμονικά μεταβαλλόμενης ροπής στρέψης.

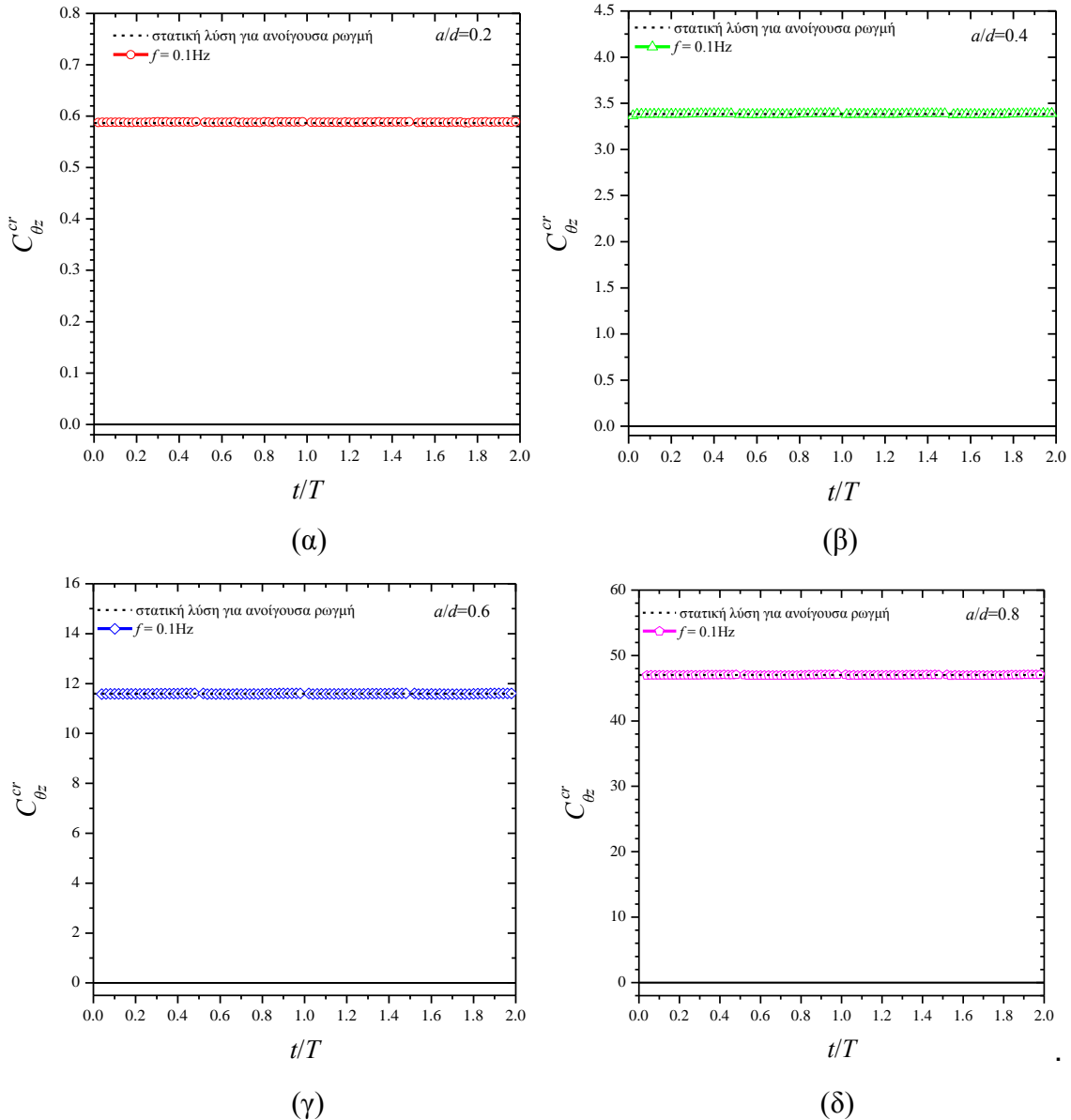


Σχήμα 5.28: Γωνία στρέψης του στρεπτικά φορτιζόμενου άκρου άξονα σε σχέση με το χρόνο και το βάθος ρωγμής.

Για τον υπολογισμό της χρονικά μεταβαλλόμενης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής υπό αρμονικά μεταβαλλόμενη ροπή στρέψης, χρησιμοποιείται η σχέση:

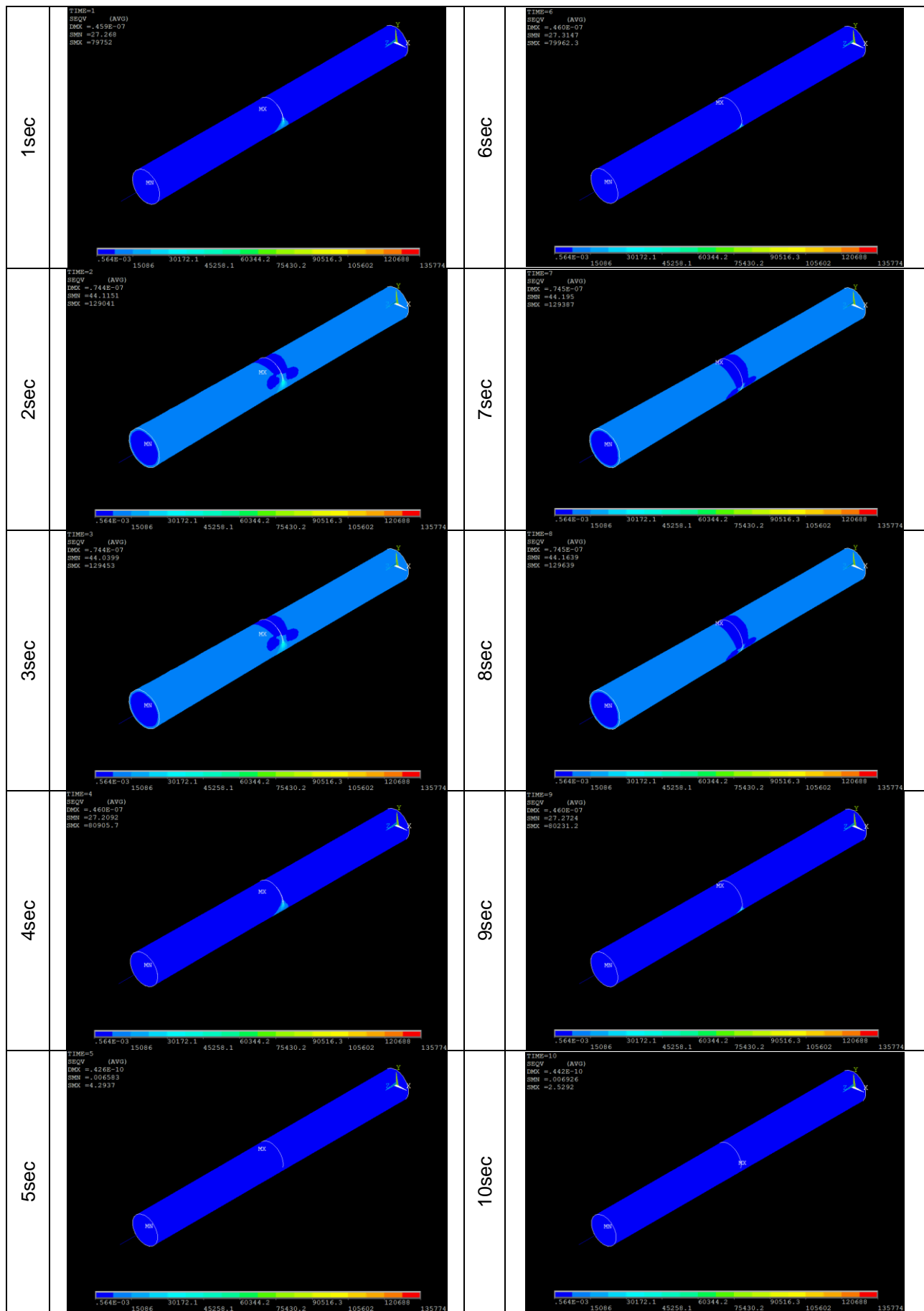
$$c_{\theta_z}^{cr}(t) = c_{\theta_z}^{cs}(t) - c_{\theta_z}^{sh}(t) = \frac{\theta_z^{cs}(t) - \theta_z^{sh}(t)}{M_z(t)} \quad (5.11)$$

Το Σχήμα 5.29α, β, γ και δ παρουσιάζει τη χρονική μεταβολή της αντίστοιχης αδιάστατης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής για βάθος ρωγμής ίσο με 0.02, 0.04, 0.06 και 0.08m, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα η τοπική ενδοτικότητα σε όλο το χρονικό διάστημα παραμένει απόλυτα σταθερή.

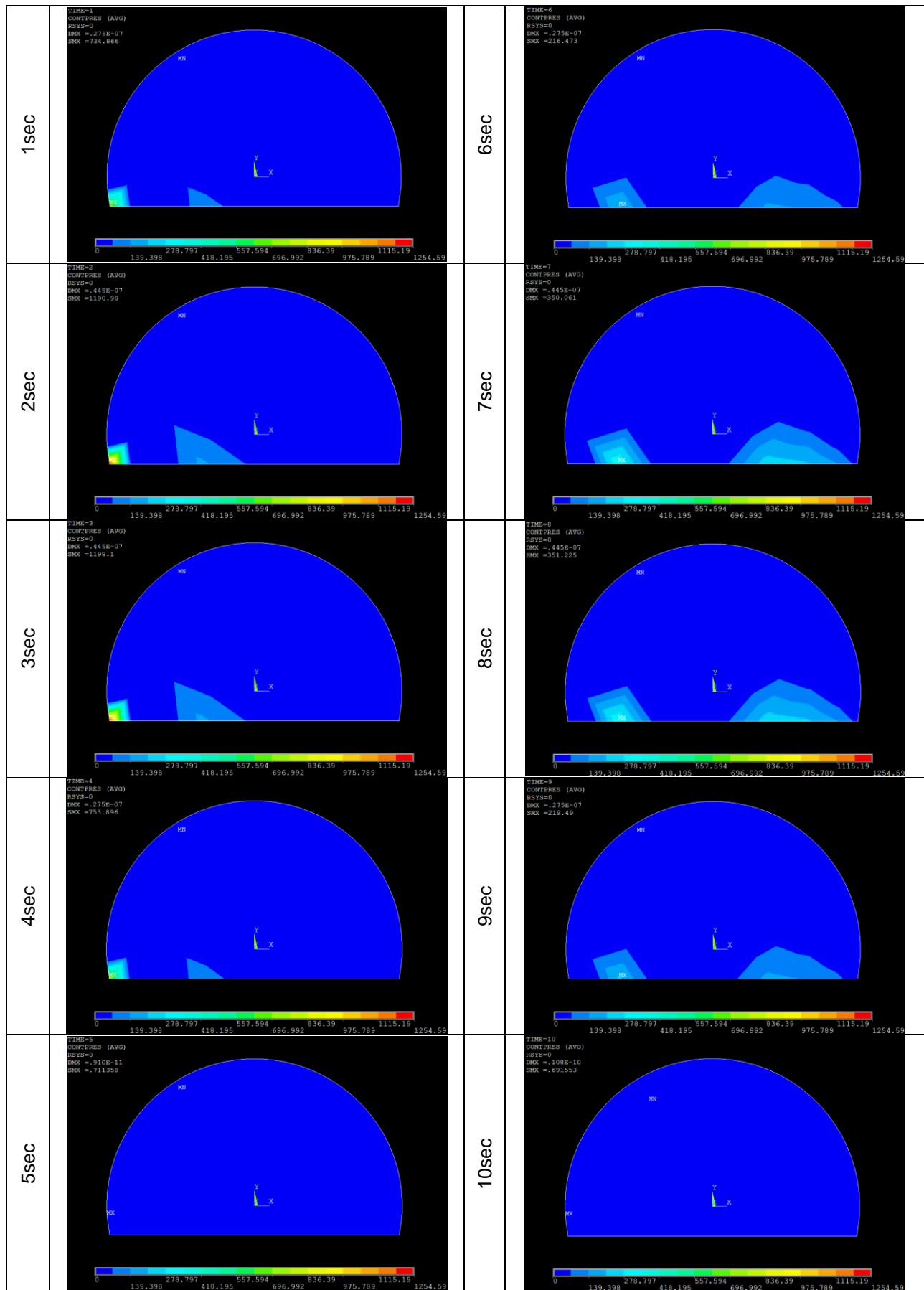


Σχήμα 5.29: Χρονικά μεταβαλλόμενη αδιάστατη τοπική ενδοτικότητα ρωγμής υπό στρεπτική εναλλασσόμενη φόρτιση για (α) 0.02, (β) 0.04, (γ) 0.06 και (δ) 0.08m βάθος ρωγμής.

Το Σχήμα 5.30 περιέχει περιγράμματα της τάσης Von Mises στο ρηγματωμένο, σε βάθος 0.06m, άξονα για διάφορες χρονικές στιγμές της πρώτης περιόδου. Σε αντιδιαστολή, το Σχήμα 5.31 παρουσιάζει τα αντίστοιχα περιγράμματα της πίεσης επαφής των επιφανειών της ρωγμής. Η σχεδόν ανεπαίσθητη σε μέγεθος επαφή σε σχέση με το χρόνο γίνεται αντιληπτή.



Σχήμα 5.30: Περιγράμματα τάσης Von Mises ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο στρεπτικό φορτίο με ρωγή βάθους 0.06m.



Σχήμα 5.31: Περιγράμματα πίεσης επαφής της ρωγμής βάθους 0.06m ενός άξονα υπό εναλλασσόμενο στρεπτικό φορτίο.

5.3.5 Ομαλά περιστρεφόμενη και σταθερή σε μέτρο κάμψη

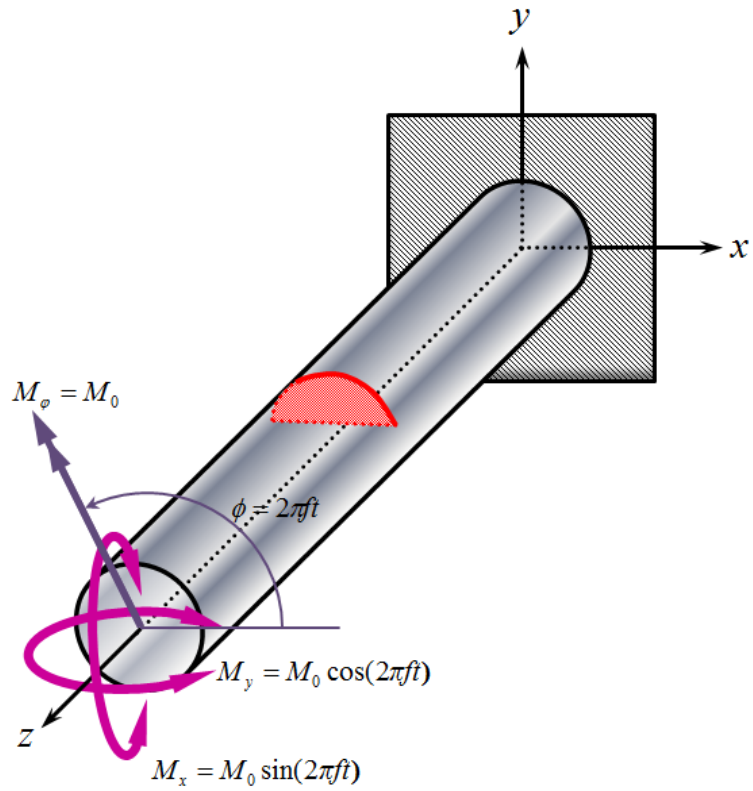
Σε αυτή τη περίπτωση επιβάλλεται ταυτόχρονα μια ροπή κάμψης $M_x = M_0 \sin(2\pi ft)$ και μια ροπή κάμψης $M_y = M_0 \cos(2\pi ft)$ σύμφωνα με το Σχήμα 5.32. Ως αποτέλεσμα δημιουργείται μια συνισταμένη σταθερή με το χρόνο ροπή ίση με:

$$M_\varphi = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = M_0 \sqrt{\sin^2(2\pi ft) + \cos^2(2\pi ft)} = M_0 \quad (5.12)$$

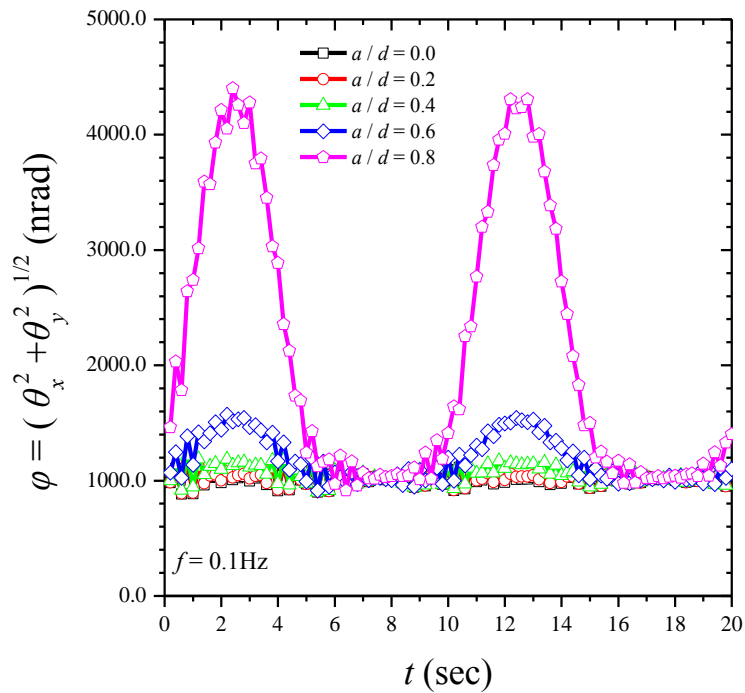
Προφανώς η συγκεκριμένη ροπή θα περιστρέφεται με μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με $\omega = 2\pi f$. Η μέγιστη τιμή της καθεμιάς από τις δύο ροπές, και άρα η τιμή του μέτρου της συνισταμένης ροπής, λαμβάνεται ίση με: $M_0 = 1 \text{ Nm}$. Στο Σχήμα 5.33 απεικονίζεται η μεταβολή της συνισταμένης γωνίας κάμψης φ του φορτιζόμενου άκρου του άξονα σε σχέση με το χρόνο και για διάφορα βάθη ρωγμής, όπου.

$$\varphi = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2} \quad (5.13)$$

Σε αυτή τη περίπτωση φόρτισης, καθώς η ροπή περιστρέφεται η απόκριση παίρνει τις μέγιστες τιμές της όταν η συνισταμένη ροπή τείνει να ανοίξει πλήρως τη ρωγμή. Κάτι τέτοιο συμβαίνει μετά από χρόνο $t = T/4$ από την έναρξη κάθε περιόδου T , όπου η ροπή κάμψης δρα κατακορύφως προς τα κάτω. Αντιθέτως όταν η ροπή δρα κατακορύφως προς τα άνω τότε η ρωγμή κλείνει στο μεγαλύτερο της μέρος και ως εκ τούτου οι τιμές της απόκρισης λαμβάνουν ελάχιστη τιμή. Αυτό συμβαίνει μετά από χρόνο $t = T/2$ από την έναρξη κάθε περιόδου. Σχεδόν σε όλες τις άλλες χρονικές στιγμές η ρωγμή είναι ταυτόχρονα και ανοιχτή και κλειστή, με αποτέλεσμα η τοπική ενδοτικότητα της ρωγμής να έχει υπολογίσιμο μέγεθος.



Σχήμα 5.32: Ρηγματωμένος άξονας υπό την επίδραση ομαλά περιστρεφόμενης και σταθερής σε μέτρο κάμψης.

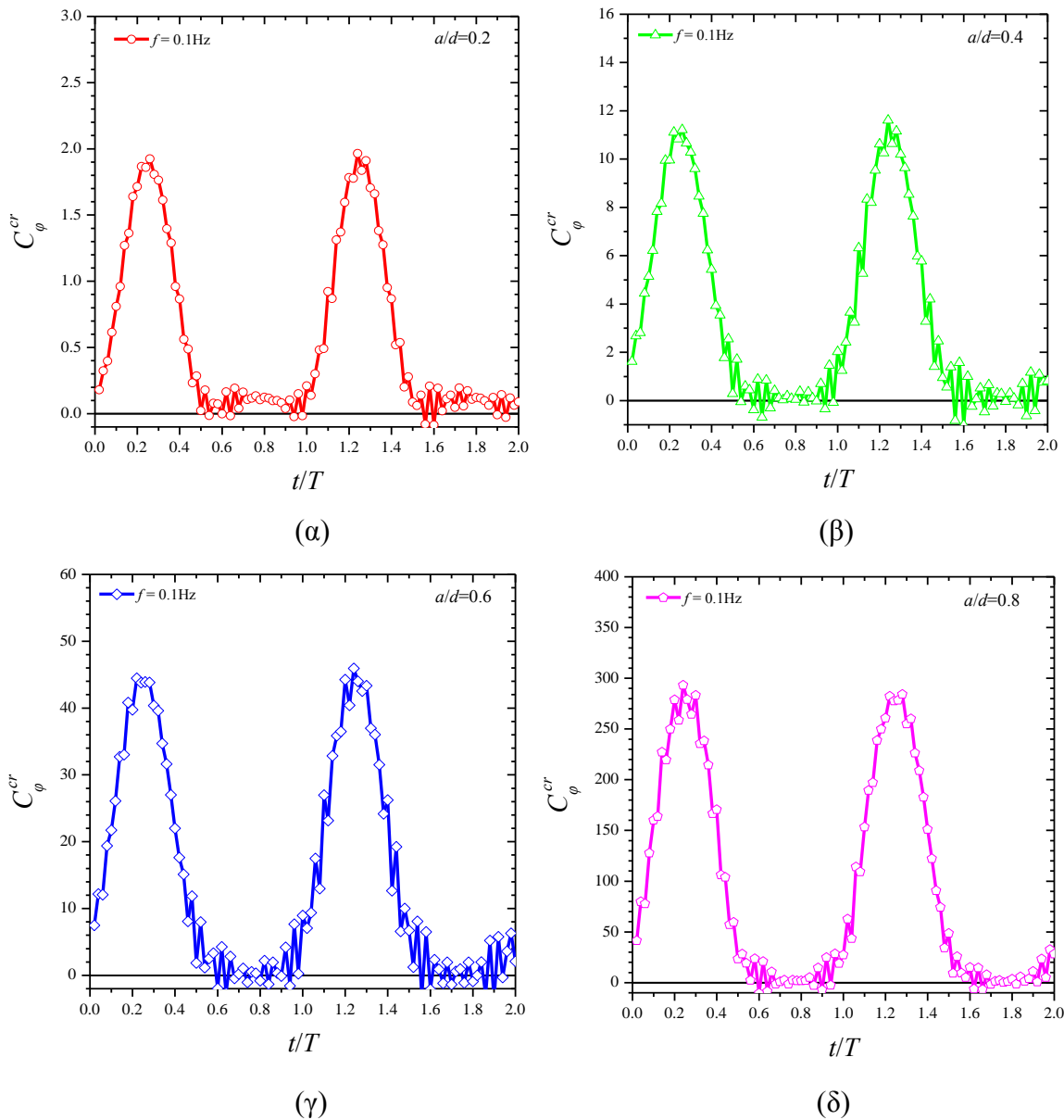


Σχήμα 5.33: Γωνία κάμψης του άκρου άξονα υπό ομαλά περιστρεφόμενη και σταθερής σε μέτρο καμπτικής φόρτισης σε σχέση με το χρόνο και το βάθος ρωγμής.

Για τον υπολογισμό της χρονικά μεταβαλλόμενης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής υπό ομαλά περιστρεφόμενη σταθερή ροπή κάμψης, χρησιμοποιείται η σχέση:

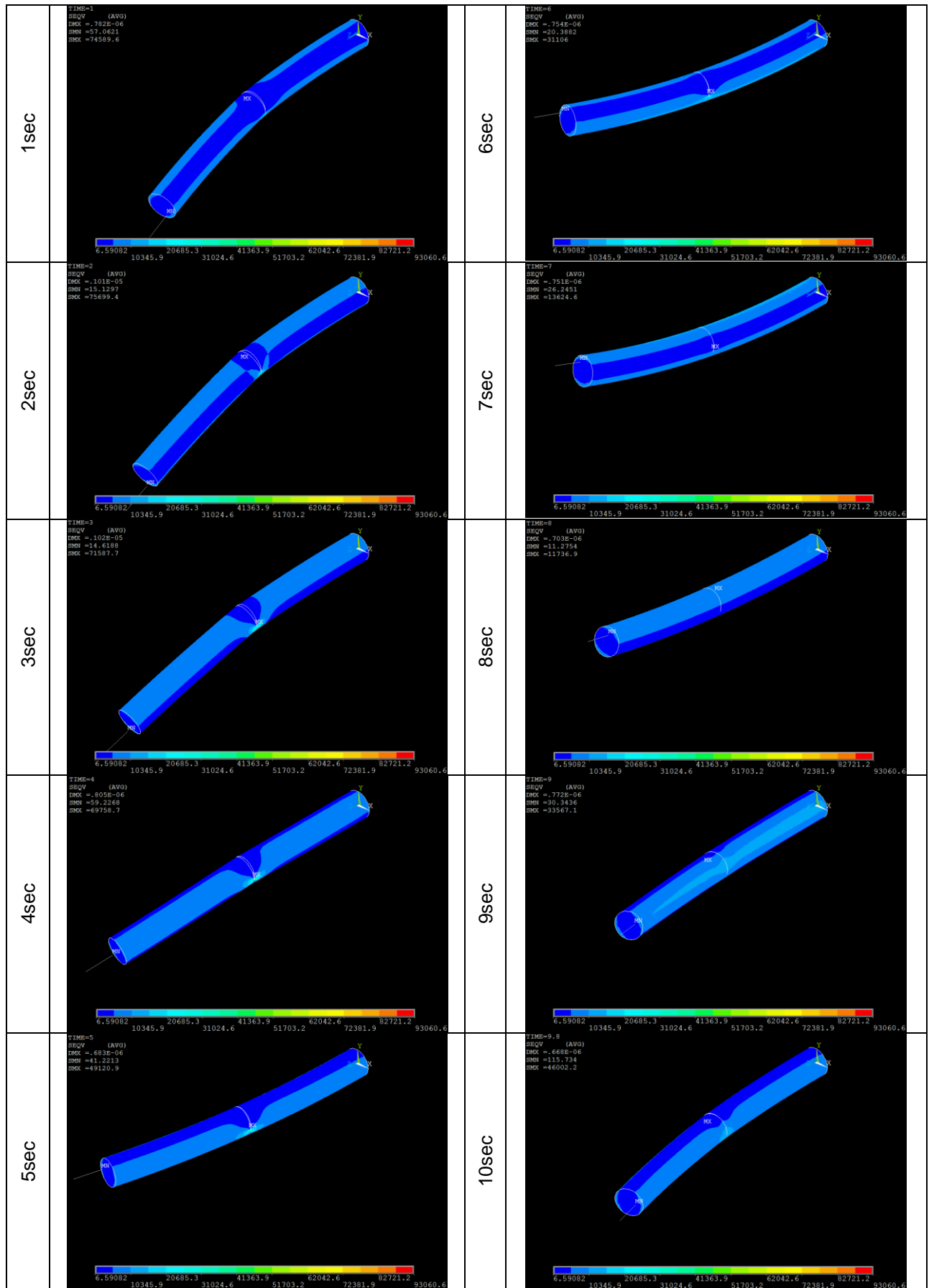
$$c_{\varphi}^{cr}(t) = c_{\varphi}^{cs}(t) - c_{\varphi}^{sh}(t) = \frac{\varphi^{cs}(t) - \varphi^{sh}(t)}{M_{\varphi}(t)} \quad (5.14)$$

Το Σχήμα 5.34α, β, γ και δ παρουσιάζει τη χρονική μεταβολή της αντίστοιχης αδιάστατης τοπικής ενδοτικότητας της ρωγμής για βάθος ρωγμής ίσο με 0.02, 0.04, 0.06 και 0.08m, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα η τοπική ενδοτικότητα μεταβάλλεται σε όλο το χρονικό διάστημα καθώς και το μέγεθος της επαφής των επιφανειών της ρωγμής μεταβάλλεται με ανάλογο τρόπο.

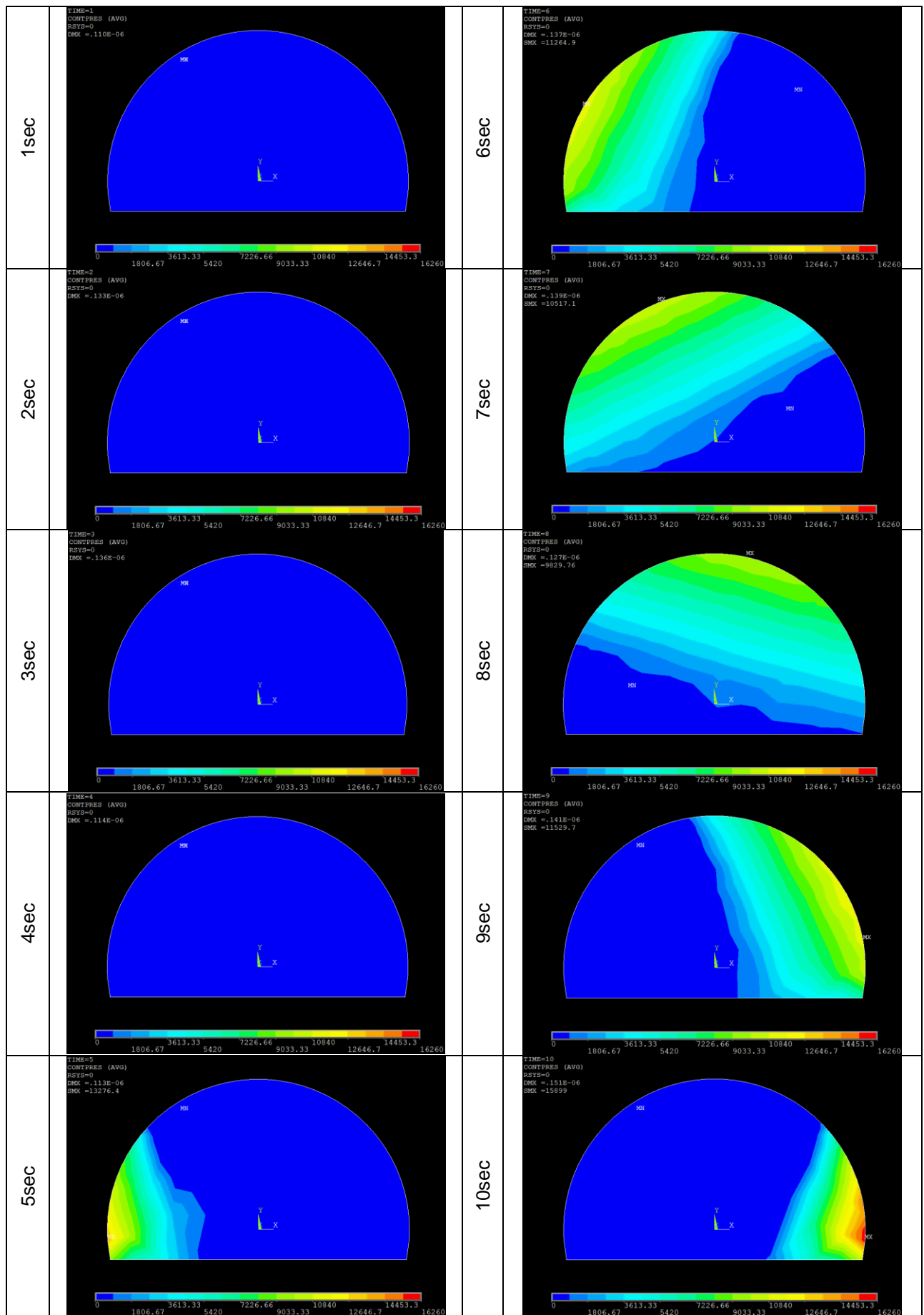


Σχήμα 5.34: Χρονικά μεταβαλλόμενη αδιάστατη τοπική ενδοτικότητα ρωγμής υπό ομαλά περιστρεφόμενη και σταθερή σε μέτρο ροπή κάμψης για (α) 0.02, (β) 0.04, (γ) 0.06 και (δ) 0.08m βάθος ρωγμής.

Το Σχήμα 5.35 περιέχει περιγράμματα της τάσης Von Mises στο ρηγματωμένο, σε βάθος 0.06m, άξονα για διάφορες χρονικές στιγμές της πρώτης περιόδου. Σε αντιδιαστολή, το Σχήμα 5.36 παρουσιάζει τα αντίστοιχα περιγράμματα της πίεσης επαφής των επιφανειών της ρωγμής. Η συνεχώς μεταβαλλόμενη με περιστροφικό τρόπο επιφάνεια επαφής, γίνεται αντιληπτή.



Σχήμα 5.35: Περιγράμματα τάσης Von Mises ενός άξονα υπό ομαλά περιστρεφόμενο και σταθερό σε μέτρο φορτίο κάμψης με ρωγή βάθους 0.06m.



Σχήμα 5.36: Περιγράμματα πίεσης επαφής της ρωγμής βάθους 0.06m ενός άξονα υπό ομαλά περιστρεφόμενο και σταθερό σε μέτρο φορτίο κάμψης.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη παρούσα πτυχιακή υιοθετήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την προσομοίωση της στατικής και δυναμικής συμπεριφοράς ρηγματωμένων αξόνων από χάλυβα. Το πρόβλημα ήταν ισχυρά μη γραμμικό και δεν ήταν δυνατή η αναλυτική του προσέγγιση, διότι η μελέτη εμπεριείχε άνοιγμα και κλείσιμο της ρωγμής. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για ένα μηχανικό, διότι επιτρέπει σε αυτόν να μελετήσει τη συμπεριφορά οποιασδήποτε κατασκευής και να προβεί σε αλλαγές σε περίπτωση που ο σχεδιασμός δεν είναι επαρκής. Δεν απαιτείται η κατασκευή δοκιμών (που έπειτα αχρηστεύονται), η διενέργεια πειραμάτων (σε αρχικό τουλάχιστον επίπεδο), δαπανηρός, πολύπλοκος και εξειδικευμένος εξοπλισμός και τέλος πολύ χρόνος, κόπος και χρήμα.

Η μοντελοποίηση βασίστηκε κυρίως στη χρήση τρισδιάστατων στοιχείων όγκου αλλά και επιφανειακών στοιχείων επαφής με τριβή στις επιφάνειες της ρωγμής. Στόχος ήταν η εξαγωγή καίριων συμπερασμάτων όσον αφορά την ευκαμψία που δημιουργεί η ύπαρξη της ρωγμής στην κατασκευή, λαμβάνοντας υπόψη το κλείσιμο τη ρωγμής κατά την εναλλαγή των φορτίων. Για το σκοπό αυτό, η μελέτη είχε παραμετρικό χαρακτήρα, θεωρήθηκαν δηλαδή διάφορα μεγέθη ρωγμής αλλά και ήδη εναλλασσόμενων ή μη αξονικών, καμπτικών και στρεπτικών φορτίσεων. Η εγκυρότητα της μεθόδου πιστοποιήθηκε μέσα από συγκρίσεις με άλλες θεωρητικές και πειραματικές προσεγγίσεις. Στόχος της εργασίας ήταν να δοθούν οι κατευθύνσεις για την ανίχνευση μιας ρωγμής μέσα από την τοπική ενδοτικότητα που παρουσιάζει και επομένως την ευκαμψία που προσδίδει σε έναν άξονα.

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα εξάχθηκαν κάποια σημαντικά συμπεράσματα:

- Η ενδοτικότητα του άξονα τείνει να αυξάνει σχεδόν λογαριθμικά καθώς αυξάνεται το μέγεθος τη ρωγμής.
- Κατά το άνοιγμα της ρωγμής λαμβάνονται μεγαλύτερες τιμές ενδοτικότητας.
- Κατά το κλείσιμο της ρωγμής η ενδοτικότητα λαμβάνει μη μηδενικές αλλά σαφώς μικρότερες τιμές.
- Όταν η ρωγμή κλείνει πλήρως ο άξονας τότε συμπεριφέρεται σχεδόν ως ενιαίο σώμα.

- Για την γεωμετρία ρωγμής που αναλύθηκε, μεγαλύτερη τιμή τοπικής ενδοτικότητας ρωγμής εμφανίζεται υπό κατακόρυφη κάμψη, έπειτα υπό αξονική φόρτιση, έπειτα υπό στρέψη και τέλος υπό οριζόντια κάμψη.
- Για περιστρεφόμενη ροπή κάμψης σταθερού μέτρου, η τοπική ενδοτικότητα μεταβάλλεται πιο ομαλά με το χρόνο αλλά εξακολουθεί να λαμβάνει περιοδικά μεγάλες τιμές.

Η παρούσα εργασία βοήθησε στην καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς ενός ρηγματωμένου άξονα για διάφορες φορτίσεις. Μια μελλοντική μελέτη σε παρόμοιο πεδίο, θα έχει ένα πολύ καλό υπόβαθρο για τον συγγραφέα λόγω της παρούσας εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Σ. Παντελάκης, Μηχανική Συμπεριφορά Μεταλλικών Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2002
- [2] G.R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Applied Mechanics*, **24**, 361–364, 1957.
- [3] C.A. Papadopoulos, A.D. Dimarogonas. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. *Journal of Sound and Vibration*, **117**(1), 81-93, 1987.
- [4] A.C. Chasalevris, C.A. Papadopoulos. Identification of multiple cracks in beams under bending, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, 1631-1673, 2006.
- [5] J. Zou, J. Chen, J.C. Niu, Z.M. Geng. Discussion on the local flexibility due to the crack in a cracked rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, **262**, 365–369, 2003.
- [6] A.J. Bush, Experimentally determined stress-intensity factors for single-edge-cracked round bars loaded in bending. *Experimental Mechanics*, **16**, 249-257, 1976.
- [7] J. Zou, J. Chen, Y.P. Pu, Wavelet time-frequency analysis of torsional vibrations in rotor system with a transverse crack, *Computers and Structures*, **82**, 1181-1187, 2004.
- [8] ANSYS® Academic Research, Release 14.0.
- [9] J.F. Sullivan, *Technical Physics*. USA: Wiley, p. 204, 1988.