

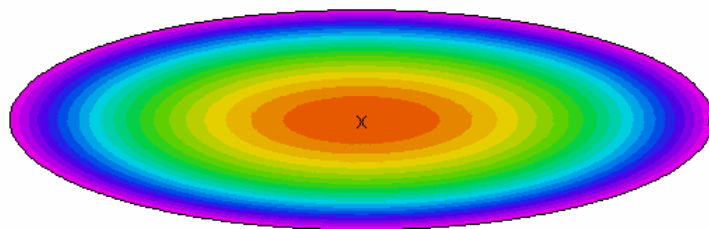
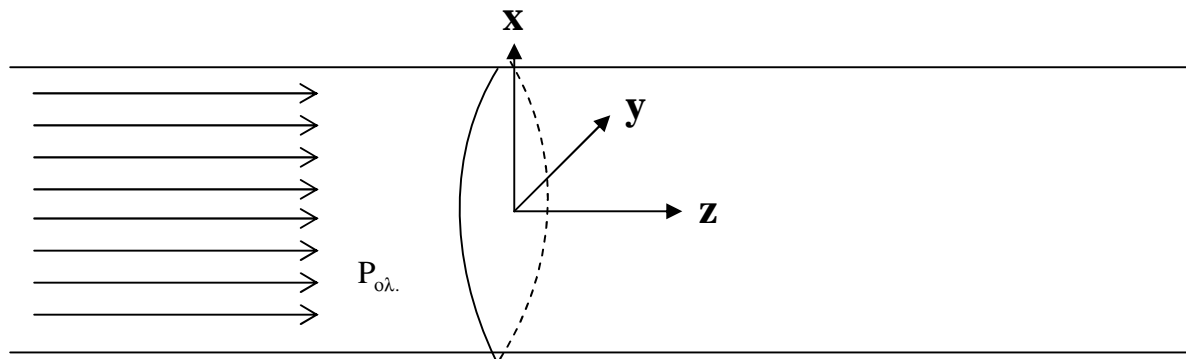
Τ.Ε.Ι ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΩΝ
ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ



ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ	ΜΠΑΡΜΠΑΣ ΑΓΓΕΛΟΣ
ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ	
ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	Δρ. ΤΣΑΚΙΡΟΓΛΟΥ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΠΑΤΡΑ, 2009

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	3
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
ΕΞΑΠΛΩΣΗ ΟΡΓΑΝΙΚΩΝ ΡΥΠΩΝ ΣΤΟ ΥΠΕΔΑΦΟΣ ΜΕΣΩ ΡΩΓΜΩΝ	4
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ	8
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ	8
1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	9
1.3 ΤΟ ΡΕΥΣΤΟ ΣΑΝ ΣΥΝΕΧΕΣ	9
1.4 ΠΕΔΙΟ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ	11
1.5 ΙΞΩΔΕΣ	13
1.6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ	17
1.7 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ	20
1.8 ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΡΕΥΣΤΑ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES	20
1.9 ΙΞΩΔΕΙΣ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΟΡΩΔΗ ΥΛΙΚΑ	24
2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	24
2.2 ΑΠΟΛΥΤΗ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ DARCY	25
2.3 ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΡΟΗΣ ΣΕ ΠΟΡΩΔΕΣ ΜΕΣΟ ΓΙΑ ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΡΕΥΣΤΑ	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΡΟΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΥ ΥΓΡΟΥ ΣΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ	30
3.1. ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ	30
6.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΡΟΗ ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΥ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΥΓΡΟΥ	48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	61
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	65
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	67

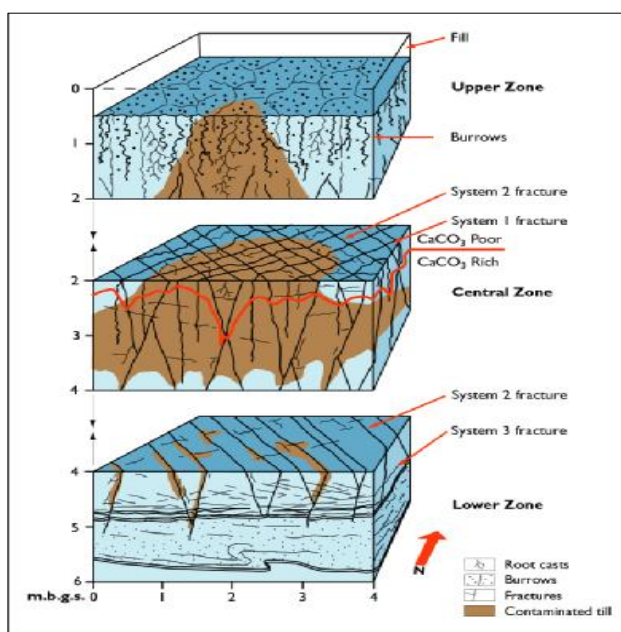
ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε θεωρητικά η ροή Νευτώνειων και μη Νευτώνειων ρευστών σε ελλειπτικούς κυλίνδρους. Ο στόχος της εργασίας είναι η ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν μόνιμη, μονοδιάστατη και πλήρως ανεπτυγμένη ροή ασυμπίεστου ρευστού σε πόρους ελλειπτικής διατομής ή οποιουδήποτε άλλου σχήματος που στερείται αξονικής συμμετρίας. Η αναλυτική ή αριθμητική λύση της ροής στην κλίμακα του πόρου επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της σχέσης που συνδέει την ογκομετρική παροχή με την πτώση πίεσης κατά μήκος του πόρου και έμμεσα υπεισέρχεται στον υπολογισμό των μακροσκοπικών παραμέτρων που ρυθμίζουν τη ροή μέσα σε ένα πορώδες μέσο. Το ελλειπτικό σχήμα παρουσιάζει ενδιαφέρον λόγω της προσεγγιστικής αναπαράστασης μιας απλής ρωγμής από ένα συνδεδεμένο δίκτυο ελλειπτικών πόρων. Από την άλλη πλευρά, η εξάπλωση υγρών οργανικών ρύπων μη Νευτώνειας ρεολογίας στο υπέδαφος, μέσω ρωγμών μεγάλης σχετικά υδραυλικής διαπερατότητας, παρουσιάζει περιβαλλοντικό ενδιαφέρον και κάθε απόπειρα πρόβλεψης της μακροσκοπικής συμπεριφοράς της κίνησης των ρύπων απαιτεί ακριβή μοντέλα και σχέσεις τόσο στη κλίμακα του πόρου όσο και στη κλίμακα της ρωγμής. Το τελικό προϊόν της εργασίας είναι η μετατροπή της σχετικά πολύπλοκης εξίσωσης διατήρησης γραμμικής ορμής για ροή μη Νευτώνειου ρευστού (shear thinning fluid) σε ελλειπτικό κύλινδρο με σε μία εύχρηστη μη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Η αριθμητική λύση της εξίσωσης με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες θα επιτρέψει τον ακριβή υπολογισμό της κατανομής (προφίλ) ταχύτητας σε ελλειπτικούς πόρους αλλά και σε άλλα σχήματα πόρων χωρίς αξονική συμμετρία (π.χ. ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

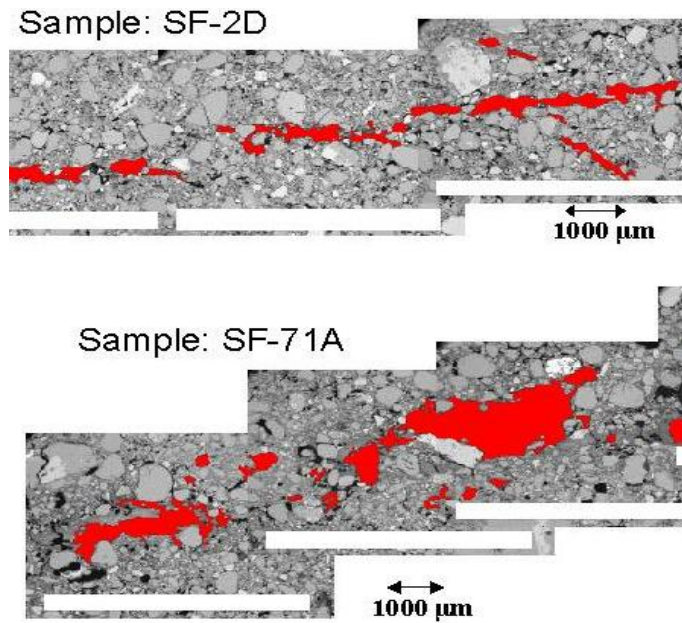
Εξάπλωση οργανικών ρύπων στο υπέδαφος μέσω ρωγμών

Η εκτίμηση επικινδυνότητας και εφαρμογή στρατηγικών απορρύπανσης ρωγματωδών εδαφών και πετρωμάτων που έχουν ρυπανθεί με οργανικούς ρύπους είναι δύο από τα πλέον δύσκολα προβλήματα (Σχ.1) (Goldford et al., 1994; Keyes et al., 1994).



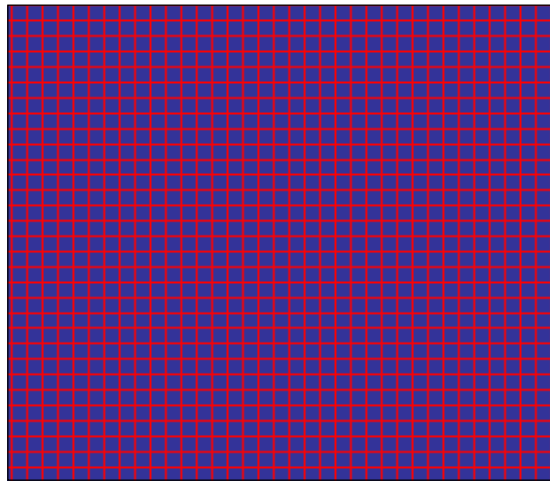
Σχήμα 1. Ρύπανση υπογείων υδάτων μέσω ρωγμών.

Ο ορθολογικός σχεδιασμός και η εγκατάσταση ενός κατάλληλου σχήματος απορρύπανσης σε μία τοποθεσία με ρωγμές απαιτεί πληροφορίες σχετικά με την κατανομή των υγρών ρύπων στο υπέδαφος (Jorgensen et al., 1998). Αν και υπάρχουν πολύ εξελιγμένοι αριθμητικοί κώδικες πρόβλεψης της εξάπλωσης ρύπων σε υπόγειους ταμιευτήρες με ρωγμές (Vogel et al., 2000) υπάρχει έλλειψη θεμελιώδους γνώσης όσον αφορά τη φυσική της ροής δια μέσου ρωγμών πολύπλοκης γεωμετρίας (Zimmerman and Bodvarsson, 1996). Οπτικές μελέτες με ηλεκτρονικό μικροσκόπιο έχουν δείξει ότι οι απλές ρωγμές έχουν τραχεία επιφάνεια, το άνοιγμα τους παρουσιάζει διακυμάνσεις ενώ οι δύο απέναντι επιφάνειες μπορεί να έρχονται σε επαφή μεταξύ τους (Σχ.2). (Zimmerman, 1992).



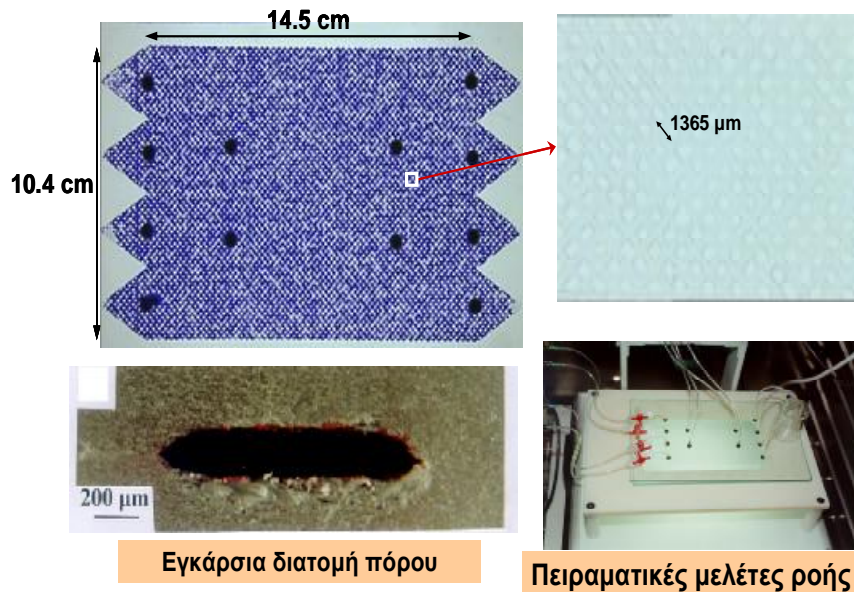
Σχήμα 2. Εικόνες ρωγμών από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο.

Για ορισμένες κατηγορίες φυσικών ρωγμών (glaciotectonic fractures) η ακριβής αναπαράσταση του ανοίγματος των ρωγμών (Σχ.3) απαιτεί τη χρήση τυχαίων δικτύων ελλειπτικών πόρων (Klint and Tsakiroglou, 2000; Klint et al., 2001).



Σχήμα 3. Δίκτυο ελλειπτικών καναλιών.

Τα μορφολογικά χαρακτηριστικά του ανοίγματος αυτών των ρωγμών (τοπολογία, σχήματα πόρων και κλίμακες μεγεθών πόρων) είναι παρόμοια με εκείνα τεχνητών δικτύων πόρων χαραγμένων σε γυαλί ή πλαστικό (Σχ.4).



Σχήμα 4. Τεχνητές ρωγμές χαραγμένες σε γυαλί.

Αυτά τα πορώδη μέσα έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν σε πολλές οπτικές μελέτες διεργασιών μεταφοράς μίας ή περισσοτέρων φάσεων με εφαρμογές στην απορρύπανση εδαφών και τη βελτιωμένη εξόρυξη πετρελαίου (Vizika et al, 1993; Avraam et al., 1995, Tsakiroglou and Payatakes, 1998; Theodoropoulou et al., 2003, 2005; Tsakiroglou et al., 2005).

Αρκετές κατηγορίες υγρών ρύπων που ρυπαίνουν το υπέδαφος (π.χ. μίγμα υδρογονανθράκων, αργό πετρέλαιο, άσφαλτος, αιώρημα ορυκτελαίων, εκχυλίσματα χωματερών, κλπ) παρουσιάζουν απόκλιση από τη γραμμική Νευτώνεια συμπεριφορά (Wu and Pruess, 1998). Με αυτό τον τρόπο εισάγονται επιπρόσθετες μη γραμμικότητες στους μηχανισμούς μικρο-ροής, η ροή γίνεται πολύπλοκη ακόμη και για απλές γεωμετρίες (Bird et al., 1977) και ο νόμος του Darcy δεν ισχύει πλέον (Sahimi, 1993). Υπό αυτές τις συνθήκες, σε πρώτη προσέγγιση, χρειαζόμαστε μοντέλα που να περιγράφουν την μονοφασική ροή μη Νευτώνειου ρευστού σε ομογενές πορώδες μέσο (Liu and Masliyah, 1998, 1999) ή σε μία απλή ρωγμή (Tsakiroglou, 2002).

Σε μία απόπειρα να προσομοιωθεί η ροή μη Νευτώνειων οργανικών ρύπων σε πορώδη μέσα και να ερμηνευτούν πειραματικά αποτελέσματα μονοφασικής και διαφασικής ροής σε δισδιάστατα δίκτυα πόρων που

αναπαριστάνουν απλές ρωγμές (Theodoropoulou et al., 2001), αναπτύχθηκε μία μεθοδολογία που βασίζεται στον συνδυασμό της θεωρίας ομογενοποίησης μέσου όγκου (volume averaging) με προσομοιώσεις ροής μη γραμμικών ρευστών σε δίκτυα πόρων (Tsakiroglou, 2002). Ένα από τα στάδια της μεθοδολογίας είναι η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν τη ροή μη Νευτώνειων ρευστών, που λεπταίνουν με τον ρυθμό παραμόρφωσης (shear thinning fluids), μέσα σε έναν ελλειπτικό πόρο (Tsakiroglou, 2002). Για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας ροής σε πόρο χρησιμοποιήθηκε μία προσεγγιστική μέθοδος η γενικευμένη εξίσωση Rabinowitsch-Mooney (Kozicki et al., 1966) που βασίζεται στην ολοκληρωτική εξίσωση διατήρησης της ορμής, περιλαμβάνει μία συνάρτηση της διατμητικής τάσης τοιχώματος που μεταβάλλεται με τη ρεολογία του ρευστού καθώς επίσης και ορισμένες παραμέτρους σχήματος πόρου (Tsakiroglou, 2002).

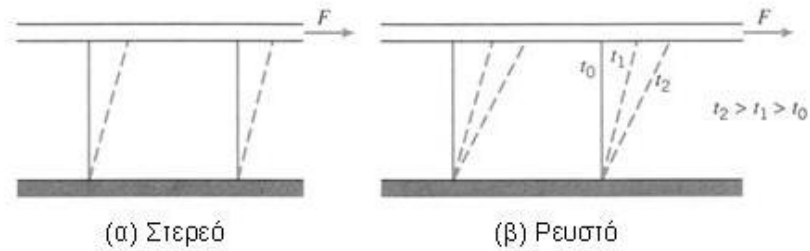
Στόχος της παρούσας εργασίας είναι, ξεκινώντας από τη βασική εξίσωση διατήρησης της γραμμικής ορμής, αντί της προαναφερθείσας προσέγγισης, να αναπτύξει την αναλυτική ή αριθμητική λύση της μόνιμης και πλήρως ανεπτυγμένης μονοδιάστατης ροής ενός μη Νευτώνειου εκθετικού ρευστού δια μέσου μίας γεωμετρίας χωρίς αξονική συμμετρία και ειδικότερα δια μέσου ενός ελλειπτικού κυλίνδρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

1.1 Ορισμός του ρευστού

Τα ρευστά τείνουν να ρέουν όταν αλληλεπιδρούμε με αυτά (π.χ. ανάδευση του πρωϊνού καφέ). Τα στερεά τείνουν να παραμορφώνονται ή να κάμπτονται. Από μηχανική άποψη το ρευστό είναι ένα υλικό που παραμορφώνεται συνεχώς υπό την επίδραση μιας διατμητικής (εφαπτομενικής) τάσης ανεξαρτήτως του πόσο μικρή είναι αυτή η τάση. Τα ρευστά περιλαμβάνουν τα υγρά και τα αέρια.

Ο διαχωρισμός μεταξύ ρευστής και στερεάς μορφής της ύλης γίνεται αισθητός αν συγκρίνουμε τη συμπεριφορά ρευστού και στερεού (Σχ.1.1). Το στερεό παραμορφώνεται όταν εφαρμόζεται μία διατμητική τάση, όμως η παραμόρφωση δεν συνεχίζει να αυξάνεται με το χρόνο. Μία διατμητική δύναμη εφαρμόζεται στο στερεό μέσω της ανώτερης των δύο πλακών όπου αυτό έχει προσαρτηθεί (Σχ.1.1α). Αν δεν ξεπεραστεί το όριο ελαστικότητας του υλικού, η παραμόρφωση είναι ανάλογη προς την εφαρμοζόμενη διατμητική τάση $\tau = F/A$, όπου A είναι το εμβαδό της επιφάνειας επαφής με τη πλάκα. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα με ένα ρευστό μεταξύ των πλακών και χρησιμοποιούμε ένα δείκτη χρώματος για να διαγραμμίσουμε ένα στοιχείο ρευστού όπως φαίνεται από τις πλήρεις γραμμές (Σχ.1.1β). Όταν η διατμητική δύναμη εφαρμοστεί στην πάνω πλάκα η παραμόρφωση του στοιχείου του ρευστού συνεχίζεται να αυξάνεται όσο εφαρμόζεται η δύναμη. Το ρευστό σε επαφή με τη πλάκα έχει την ίδια ταχύτητα με αυτήν (δηλαδή δεν υπάρχει ολίσθηση στο σύνορο). Το σχήμα του στοιχείου του ρευστού σε διαδοχικούς χρόνους $t_2 > t_1 > t_0$ φαίνεται από τις διακεκομμένες γραμμές που παριστάνουν τις θέσεις του δείκτη χρώματος σε διάφορους χρόνους. Επειδή η κίνηση του ρευστού συνεχίζεται όσο εφαρμόζεται διατμητική τάση, ορίζουμε σαν ρευστό ένα υλικό που δεν μπορεί να «βιώσει» διατμητική τάση όταν είναι σε ηρεμία.



Σχήμα 1.1. Συμπεριφορά στερεού και ρευστού υπό την επίδραση σταθερής διατμητικής δύναμης.

1.2 Βασικές εξισώσεις

Οι βασικοί νόμοι που είναι εφαρμόσιμοι στη κίνηση των ρευστών είναι:

- (i) Η αρχή διατήρησης της μάζας
- (ii) Η αρχή διατήρησης της γραμμικής ορμής (2^{ος} νόμος κίνησης του Νεύτωνα)
- (iii) Η αρχή διατήρησης της γωνιακής ορμής (στροφορμής)
- (iv) Η αρχή διατήρησης της ενέργειας (1^{ος} νόμος της θερμοδυναμικής)
- (v) Ο 2^{ος} νόμος της θερμοδυναμικής

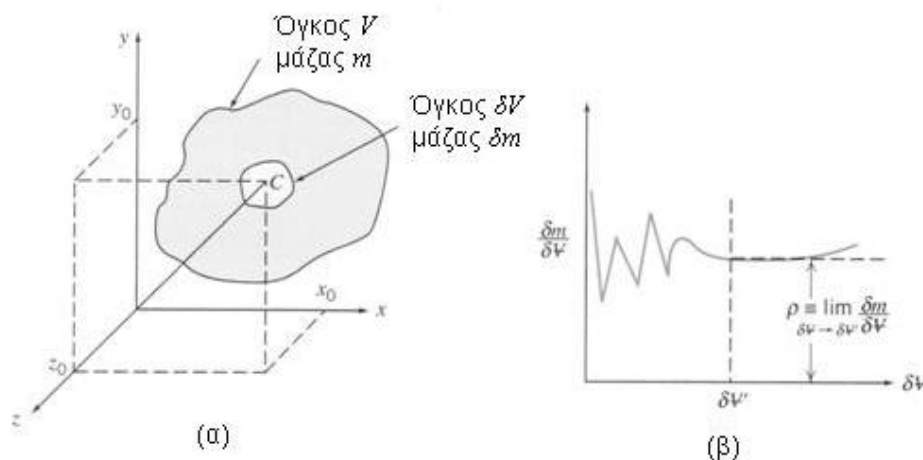
1.3 Το ρευστό σαν συνεχές

Σύμφωνα με την ατομική θεωρία και τη μοριακή δομή της ύλης, η μάζα δεν είναι κατανομημένη συνεχώς στο χώρο αλλά είναι συγκεντρωμένη σε μόρια που χωρίζονται από μεγάλους κενούς χώρους. Κάτω από ποιες συνθήκες μπορεί να θεωρηθεί ένα ρευστό σαν «συνεχές» έτσι ώστε οι ιδιότητες του να μεταβάλλονται ομαλά από σημείο σε σημείο; Η ιδέα του συνεχούς είναι η βάση της ρευστομηχανικής. Παύει να ισχύει όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων γίνει της ίδιας τάξης μεγέθους με τη μικρότερη χαρακτηριστική διάσταση του προβλήματος. Αυτό συμβαίνει σε ειδικές περιπτώσεις αραιών αερίων, όπως για παράδειγμα στις πτήσεις στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, και απαιτείται η χρήση μεθόδων και νόμων της στατιστικής φυσικής.

Σαν συνέπεια της υπόθεσης τους συνεχούς κάθε ιδιότητα ρευστού υποτίθεται ότι έχει συγκεκριμένη τιμή σε κάθε σημείο του χώρου. Με αυτό τον τρόπο ιδιότητες όπως πυκνότητα, θερμοκρασία, ταχύτητα, κ.λ.π. θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου. Ας θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο όγκο V μάζας m και μέσης πυκνότητας $\rho = m/V$ (Σχ.1.2α). Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τη πυκνότητα σε κάποιο εσωτερικό του σημείο C με συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0) . Θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο δV γύρω από το C και προσδιορίζουμε τον λόγο $\delta m/\delta V$ (Σχ.1.2α). Πόσο μικρό μπορεί να επιλεγεί το δV ; Το δV πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο για να δώσει μία σταθερή και αναπαραγωγίσιμη τιμή της πυκνότητας σε μία θέση ενώ ταυτόχρονα πρέπει να είναι αρκετά μικρό ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σημείο. Η πυκνότητα τείνει σε μία ασυμπτωτική τιμή καθώς το δV συρρικνώνεται. Για πολύ μικρά δV όπου ο αριθμός των μορίων που περιέχονται στον στοιχειώδη όγκο είναι πολύ μικρός, λόγω της θερμικής κίνησης κάποια μόρια εισέρχονται ή εξέρχονται από το δV και η μάζα δm παρουσιάζει σημαντικές διακυμάνσεις (Σχ.1.2β). Ο μικρότερος επιτρεπτός όγκος $\delta V'$ είναι αυτός που καθορίζει τη σημειακή πυκνότητα:

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V} \quad (1-1)$$

Ο προσδιορισμός της πυκνότητας σε διάφορα σημεία για διάφορες χρονικές στιγμές καθορίζει ένα βαθμωτό πεδίο πυκνοτήτων $\rho = \rho(x, y, z, t)$ (1-2)



Σχήμα 1.2. Ορισμός της πυκνότητας σε ένα σημείο

1.4 Πεδίο ταχυτήτων

Η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο C ορίζεται σαν η στιγμιαία ταχύτητα του κέντρου όγκου δV που περιβάλλει στιγμιαία το σημείο C . Αν ορίσουμε το σωματίδιο ρευστού σαν μία μικρή μάζα ρευστού σταθερής ταυτότητας (αποτελούμενη από τα ίδια μόρια) και όγκου, τότε η ταχύτητα στο C ορίζεται σαν η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου που σε κάποια χρονική στιγμή περνάει από το C . Παρομοίως ορίζεται η ταχύτητα σε κάθε σημείο. Σε δεδομένη στιγμή t το πεδίο ταχυτήτων \mathbf{u} είναι συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων x, y, z , δηλαδή

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (1-3)$$

Η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος και αναλύεται σε συνιστώσες, δηλαδή

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} \quad (1-4)$$

Όταν οι ιδιότητες σε κάθε σημείο του πεδίου ροής δεν αλλάζουν με το χρόνο, η ροή είναι μόνιμη. Αυτή η συνθήκη μαθηματικά εκφράζεται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \rho(x, y, z) \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) \quad (1-6)$$

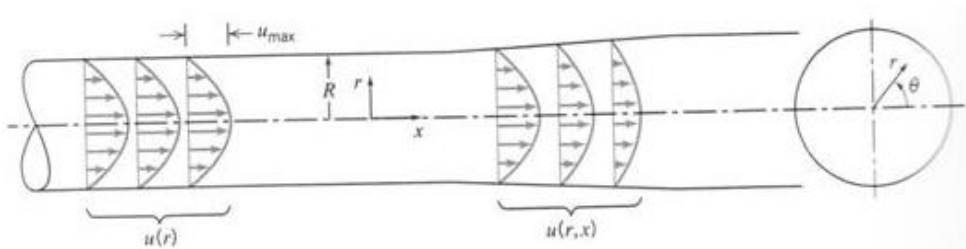
Μονοδιάστατη, δισδιάστατη και τρισδιάστατη ροή

Ανάλογα με τον αριθμό των χωρικών συντεταγμένων που απαιτούνται για να προσδιοριστεί το πεδίο ταχυτήτων η ροή χαρακτηρίζεται μονο- δισ- ή τρισδιάστατη. Η εξίσωση (1-3) δείχνει ότι το πεδίο ταχυτήτων είναι συνάρτηση τριών χωρικών συντεταγμένων και του χρόνου. Μία τέτοια ροή είναι μη μόνιμη τρισδιάστατη ροή.

Θεωρήστε για παράδειγμα τη μόνιμη ροή μέσω ενός ευθύγραμμου σωλήνα με ένα αποκλίνον τμήμα (Σχ. 1.3). Σε αυτή τη περίπτωση χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, x) . Θα μάθουμε αργότερα ότι μακριά από την είσοδο και το αποκλίνον τμήμα του σωλήνα η κατανομή ταχύτητας περιγράφεται από τη σχέση

$$u = u_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (1-7)$$

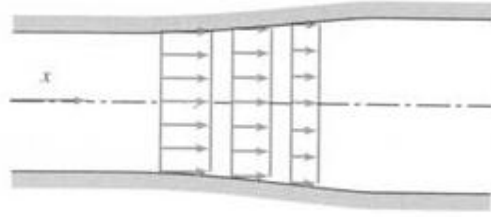
Αυτή η κατανομή φαίνεται στα αριστερά του Σχ.1.3. Η ταχύτητα εξαρτάται από μία μεταβλητή, $u = u(r)$ και η ροή είναι μονοδιάστατη. Στο αποκλίνον τμήμα, η ταχύτητα μειώνεται στη x -κατεύθυνση και η ροή γίνεται δισδιάστατη. Προφανώς, η πολυπλοκότητα της ανάλυσης αυξάνεται σημαντικά με τον αριθμό των διαστάσεων του πεδίου ροής.



Σχήμα 1.3. Παραδείγματα μονοδιάστατης και δισδιάστατης ροής

Επειδή όλα τα ρευστά που ικανοποιούν την υπόθεση του συνεχούς πρέπει να έχουν μηδέν σχετική ταχύτητα στις στερεές επιφάνειες (συνθήκη μη ολίσθησης) οι περισσότερες ροές είναι από τη φύση τους τρισδιάστατες. Για λόγους απλοποίησης, μερικές φορές χρησιμοποιούμε την έννοια της ομοιόμορφης ροής σε μία διατομή. Σε αυτή τη περίπτωση η ταχύτητα θεωρείται σταθερή κατά πλάτος μιας διατομής που είναι κάθετη στη ροή. Με βάση αυτήν την υπόθεση η δισδιάστατη ροή του Σχ.1.3 μοντελοποιείται με τη ροή που φαίνεται στο Σχ.1.4. Στη ροή του Σχ. 1.4, το πεδίο ταχυτήτων είναι συνάρτηση μόνο του x , και το μοντέλο είναι μονοδιάστατο.

Ο όρος ομοιόμορφο πεδίο ροής (σε αντίθεση με την ομοιόμορφη ροή σε διατομή) χρησιμοποιείται για να περιγράψει μία ροή όπου η ταχύτητα είναι σταθερή (δηλ. ανεξάρτητη όλων των χωρικών συντεταγμένων) μέσα σε όλο το πεδίο ροής.



Σχήμα 1.4. Παράδειγμα ομοιόμορφης ροής σε μία διατομή

1.5 Ιξώδες

Τα ρευστά μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τη σχέση διατμητικής τάσης και ροής. Ας εξετάσουμε τη συμπεριφορά στοιχειώδους όγκου ρευστού που βρίσκεται μεταξύ δύο πλακών απείρου μήκους (Σχ.1.5). Η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα du_x κάτω από την επίδραση σταθερής δύναμης dF_x . Η διατμητική τάση t_{yx} που ασκείται στο στοιχειώδες ρευστό είναι

$$t_{yx} = \lim_{dA_y \rightarrow 0} \frac{dF_x}{dA_y} = \frac{dF_x}{dA_y} \quad (1-8)$$

όπου dA_y είναι το εμβαδό της επιφάνειας επαφής του στοιχειώδους ρευστού με την πλάκα και dF_x είναι η δύναμη που ασκεί η πλάκα στο στοιχειώδες ρευστό. Κατά το χρονικό διάστημα dt το στοιχειώδες ρευστό παραμορφώνεται από MNOP σε M'NOP' (Σχ.1.5).

Ο ρυθμός γωνιακής παραμόρφωσης είναι

$$\mathcal{E}_{yx} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta a}{\delta t} = \frac{da}{dt} \quad (1-9)$$

Η απόσταση $MM' = dl$ είναι

$$dl = du_x dt \quad (1-10)$$

Επίσης είναι

$$\tan(da) = \frac{dl}{dy} \quad (1-11)$$

και για μικρές γωνίες da η εξ.(1-11) γράφεται

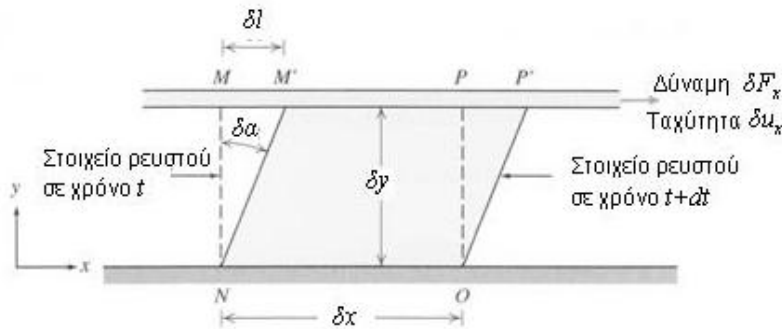
$$da \cong \frac{dl}{dy} \Rightarrow dl = da dy \quad (1-12)$$

Από τις εξ.(1-10) και (1-12) προκύπτει

$$du_x dt = da dy \Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{du_x}{dy} \Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{du_x}{dy} \quad (1-13)$$

Συνεπώς, υπό την επίδραση διατμητικής τάσης t_{yx} , το ρευστό υφίσταται ρυθμό παραμόρφωσης

$$\gamma_{yx} = \frac{du_x}{dy} \quad (1-14)$$



Σχήμα 1.5. Παραμόρφωση ενός στοιχείου ρευστού

Νευτώνεια ρευστά

Όταν η διατμητική τάση είναι ανάλογη του ρυθμού παραμόρφωσης ($\mu = \text{σταθερό}$) το ρευστό λέγεται Νευτώνειο. Η σταθερά αναλογίας για ένα Νευτώνειο ρευστό ορίζεται σαν δυναμικό ιξώδες και συμβολίζεται με το m

$$t_{yx} = m \frac{du_x}{dy} \quad (1-15)$$

Διαστάσεις ιξώδους:

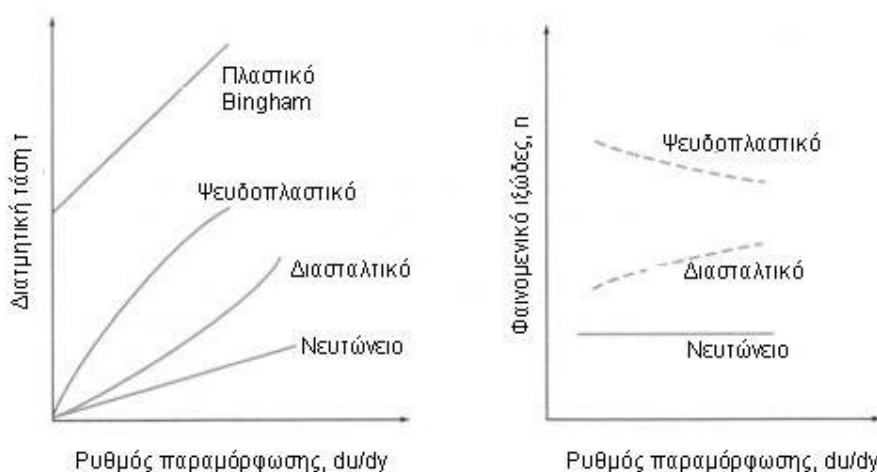
$$t_{yx} \left[\frac{F}{L^2} \right] \equiv \left[\frac{ML}{t^2 L^2} \right] \equiv \left[\frac{M}{Lt^2} \right] \quad \frac{du_x}{dy} \left[\frac{L}{Lt} \right] \equiv \left[\frac{1}{t} \right] \quad m \left[\frac{\frac{M}{Lt^2}}{\frac{1}{t}} \right] \equiv \left[\frac{M}{Lt} \right] \quad (1-16)$$

Στο απόλυτο μετρικό σύστημα (CGS) η μονάδα του ιξώδους ονομάζεται poise [1 poise = 1 g cm⁻¹ s⁻¹]. Στο Διεθνές σύστημα (SI) η μονάδα ιξώδους είναι kg m⁻¹ s⁻¹ ή Pa s. Το ιξώδες του νερού σε θερμοκρασία 20°C είναι περίπου 1 cp = 10⁻² poise = 10⁻³ kg m⁻¹ s⁻¹.

Στη Ρευστομηχανική συχνά προκύπτει ο λόγος δυναμικού ιξώδους προς πυκνότητα. Αυτός ο λόγος ορίζεται σαν κινηματικό ιξώδες, $\nu = \mu/\rho$, και στο απόλυτο μετρικό σύστημα έχει σαν μονάδα μέτρησης το Stoke [$1 \text{ Stoke} = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$]. Να σημειωθεί ότι στα αέρια το ιξώδες αυξάνεται με την άνοδο της θερμοκρασίας, ενώ στα υγρά το ιξώδες πέφτει με την άνοδο της θερμοκρασίας.

Μη Νευτώνεια ρευστά

Ρευστά στα οποία η διατμητική τάση δεν είναι ευθέως ανάλογη του ρυθμού παραμόρφωσης ($\mu \neq \text{σταθερό}$) είναι μη Νευτώνεια. Παραδείγματα: οδοντόπαστες, μπογιές. Οι μπογιές είναι πολύ «παχύρρευστες» όσο βρίσκονται στο δοχείο και γίνονται λεπτόρρευστες όταν υποστούν διάτμηση κατά τη βαφή με τη βούρτσα. Όσον αφορά τις οδοντόπαστες, αυτές δεν ρέουν ακόμη και αν ανοίξουμε το καπάκι στο σωληνάριο. Υπάρχει ένα κατώφλι τάσης, η λεγόμενη τάση διαρροής, κάτω από την οποία συμπεριφέρονται σαν στερεά. Τα μη Νευτώνεια ρευστά ταξινομούνται ως έχοντα χρονικά ανεξάρτητη ή χρονικά εξαρτημένη συμπεριφορά (Σχ.1.6).



Σχήμα 1.6. (α) Διατμητική τάση και (β) φαινομενικό ιξώδες σε συνάρτηση με τον ρυθμό παραμόρφωσης για μονοδιάστατη ροή διαφόρων τύπων μη Νευτώνειων ρευστών.

Άπειρες εμπειρικές εξισώσεις έχουν προταθεί για να μοντελοποιήσουμε τη παρατηρούμενη σχέση μεταξύ τ_{xy} και du_x/dy για χρονικά ανεξάρτητα ρευστά. Σε πολλές εφαρμογές της ρευστομηχανικής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εκθετικό μοντέλο το οποίο για μονοδιάστατη ροή παίρνει τη μορφή

$$\tau_{yx} = k \left(\frac{du_x}{dy} \right)^n \quad (1-17)$$

όπου ο εκθέτης n καλείται δείκτης συμπεριφοράς ροής και ο συντελεστής k δείκτης προσαρμογής. Αυτή η εξίσωση ανάγεται στον νόμο του Νεύτωνα για ιξώδη ροή όπου $n = 1$ και $k = \mu$.

Για να διασφαλιστεί ότι η διατμητική τάση τ_{xy} έχει το ίδιο πρόσημο με τον ρυθμό παραμόρφωσης, du_x/dy , η εξ.(1-17) ξαναγράφεται σαν

$$\tau_{yx} = k \left| \frac{du_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{du_x}{dy} = n \frac{du_x}{dy} \quad (1-18)$$

Ο όρος $n = k / |du_x/dy|^{n-1}$ αναφέρεται σαν φαινομενικό ιξώδες το οποίο πλέον δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται από τον ρυθμό παραμόρφωσης. Ρευστά στα οποία το φαινομενικό ιξώδες μειώνεται με αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης ($n < 1$) ονομάζονται ψευδοπλαστικά. Τα περισσότερα μη Νευτώνεια ρευστά ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία. Παραδείγματα: διαλύματα πολυμερών, κολλοειδή αιωρήματα, πολτός χαρτιού σε νερό. Αν το φαινομενικό ιξώδες αυξάνεται με αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης ($n > 1$) το ρευστό ονομάζεται διασταλτικό. Αιωρήματα αμύλου και άμμου είναι παραδείγματα διασταλτικών ρευστών.

Αν ένα ρευστό συμπεριφέρεται σαν στερεό μέχρις ότου μία ελάχιστη τάση διαρροής, τ_y , να ξεπεραστεί και στη συνέχεια παρουσιάζει μία γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και ρυθμού παραμόρφωσης, τότε αυτό ονομάζεται πλαστικό Bingham και το αντίστοιχο μοντέλο διατμητικής τάσης είναι

$$\tau_{yx} = \tau_y + \mu_p \frac{du_x}{dy} \quad (1-19)$$

1.6 Εξίσωση διατήρησης της μάζας

Σε ορθογώνιες συντεταγμένες επιλέγουμε σαν όγκο ελέγχου έναν απειροστό κύβο με πλευρές dx, dy, dz όπως φαίνεται στο Σχ.1.7. Στο κέντρο O του όγκου ελέγχου η πυκνότητα είναι ρ και η ταχύτητα $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$. Για να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες σε κάθε μία από τις έξι έδρες της επιφάνειας ελέγχου χρησιμοποιούμε 1^{ης} τάξης ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο O . Για παράδειγμα στη δεξιά έδρα είναι

$$\rho)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (1-20)$$

και

$$u_x)_{x+dx/2} = u_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (1-21)$$

όπου όλοι οι όροι $\rho, u_x, \partial \rho / \partial x, \partial u_x / \partial x$ υπολογίζονται στο σημείο O . Οι αντίστοιχοι όροι στην αριστερή έδρα είναι

$$\rho)_{x-dx/2} = \rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (1-22)$$

και

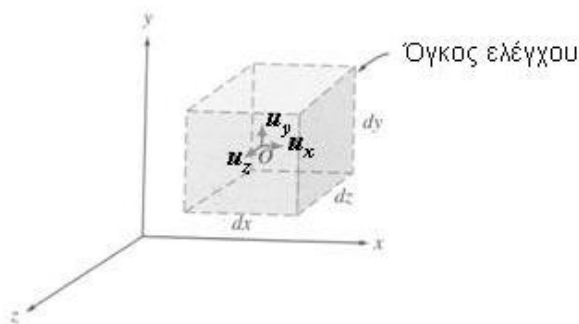
$$u_x)_{x-dx/2} = u_x - \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (1-23)$$

Ο νόμος διατήρησης της μάζας διατυπώνει ότι:

[καθαρός ρυθμός εκροής μάζας από την επιφάνεια ελέγχου] + [ρυθμός μεταβολής μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου] = 0

Για να υπολογίσουμε τον 1^ο όρο της παραπάνω σχέσης πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{A_{EE}} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$. Δηλαδή, πρέπει να θεωρήσουμε τη ροή μέσα από κάθε μία των έξι εδρών της επιφάνειας ελέγχου. Μετά από πράξεις προκύπτει ότι ο καθαρός ρυθμός εκροής μάζας από την επιφάνεια ελέγχου είναι

$$\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (1-24)$$



Σχήμα 1.7. Διαφορικός όγκος ελέγχου σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Η μάζα μέσα στον όγκο ελέγχου σε κάθε στιγμή είναι το γινόμενο της μάζας ανά μονάδα όγκου, ρ , και του όγκου, $dx dy dz$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου είναι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (1-25)$$

Κατά συνέπεια σε διαφορική μορφή η εξίσωση διατήρησης μάζας (**εξίσωση συνέχειας**) γράφεται

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (1-26)$$

Επειδή ο διανυσματικός τελεστής ∇ σε ορθογώνιες συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-27)$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = \mathbf{\nabla} \cdot \rho \mathbf{u} \quad (1-28)$$

και η εξίσωση της συνέχειας γράφεται

$$\mathbf{\nabla} \cdot \rho \mathbf{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1-29)$$

Για ένα ασυμπίεστο ρευστό ($\rho = \text{σταθερά}$) η πυκνότητα δεν μεταβάλλεται ούτε με τις χωρικές συντεταγμένες ούτε με τον χρόνο και η εξίσωση συνέχειας απλοποιείται στη σχέση

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1-30)$$

Για μόνιμη ροή όλες οι ιδιότητες του ρευστού είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

Δηλαδή

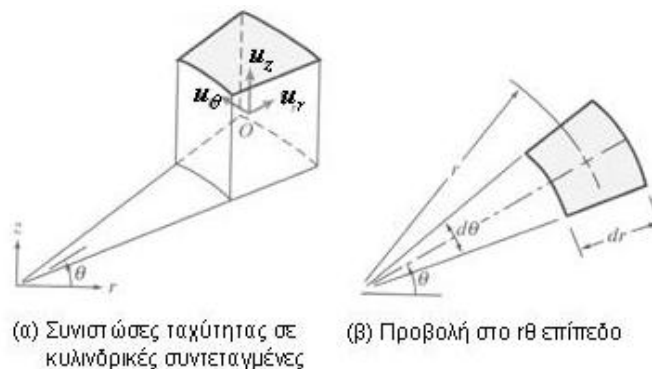
$\partial \rho / \partial t = 0$ και $\rho = \rho(x, y, z)$ οπότε η εξίσωση της συνέχειας γράφεται

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = \mathbf{\nabla} \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1-31)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες η ταχύτητα γράφεται $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{k}$, όπου $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις r, θ, z , αντίστοιχα και u_r, u_θ, u_z είναι οι συνιστώσες ταχύτητας στις αντίστοιχες διευθύνσεις (Σχ.1.8).

Με παρόμοια μέθοδο προκύπτει η εξίσωση της συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1-32)$$



Σχήμα 1.8. Διαφορικός όγκος ελέγχου σε κυλινδρικές συντεταγμένες

1.7 Εξίσωση διατήρησης της γραμμικής ορμής

Μέχρι τώρα έχουμε αναπτύξει εκφράσεις για τις συνιστώσες dF_x, dF_y, dF_z της δύναμης $d\vec{F}$ που επενεργεί σε σωματίδιο ρευστού μάζας dm . Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη κίνηση του ρευστού:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (1-33\alpha)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (1-33\beta)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (1-33\gamma)$$

(Σωματικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου)_i + (Επιφανειακές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου)_i = (Ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ορμής ανά μονάδα όγκου)_i = πυκνότητα X (ολική ή υλική παράγωγος της ταχύτητας)_i = πυκνότητα X (τοπική μεταβολή ταχύτητας + μεταβολή ταχύτητας λόγω συναγωγής)_i

όπου: (i = x, y, z)

Οι εξ.(3-14) είναι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης για οποιοδήποτε ρευστό που ικανοποιεί την υπόθεση του συνεχούς και ισχύουν ανεξαρτήτως καθεστώτος ροής (π.χ. στρωτή, τυρβώδης). Πριν προσπαθήσουμε να τις λύσουμε και να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες ταχύτητας u_x, u_y, u_z θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες σχέσεις για τις τάσεις σαν συναρτήσεις των πεδίων ταχυτήτων και πιέσεων.

1.8 Νευτώνεια ρευστά: Εξισώσεις Navier-Stokes

Για Νευτώνεια ρευστά και στρωτή ροή οι τάσεις μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση με τις βαθμίδες ταχύτητας και τις ιδιότητες του ρευστού σε ορθογώνιες συντεταγμένες όπως φαίνεται στις παρακάτω ρεολογικές εξισώσεις:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (1-34\alpha)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (1-34\beta)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (1-34\gamma)$$

$$\sigma_{xx} = -P - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1-34\delta)$$

$$\sigma_{yy} = -P - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (1-34\epsilon)$$

$$\sigma_{zz} = -P - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1-34\sigma)$$

όπου P είναι η θερμοδυναμική πίεση η οποία συνδέεται με τη πυκνότητα και τη θερμοκρασία μέσω κάποιας καταστατικής εξίσωσης.

Αν οι εξ.(1-34) αντικατασταθούν στις εξ.(1-33) προκύπτουν οι εξισώσεις Navier-Stokes. Αυτές οι εξισώσεις απλοποιούνται πολύ αν εφαρμοστούν για ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες. Τότε οι Navier-Stokes παίρνουν τη παρακάτω μορφή

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (1-35\alpha)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \quad (1-35\beta)$$

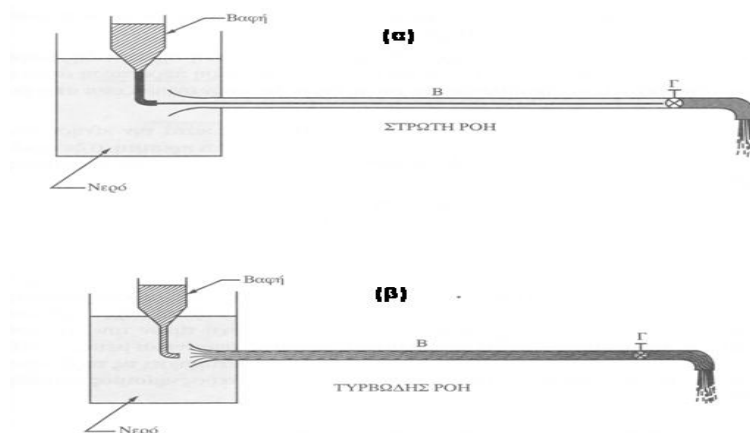
$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (1-35\gamma)$$

Αυτή η μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes είναι (μετά την εξίσωση Bernoulli) το πιο διάσημο σύστημα εξισώσεων που έχει μελετηθεί στη ρευστομηχανική. Οι εξ.(1-35) μαζί με την εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστη ροή, εξ.(1-30), σχηματίζουν ένα σύστημα τεσσάρων συζευγμένων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις μεταβλητές u_x, u_y, u_z, P . Αναλυτικές λύσεις μπορούν να επιτευχθούν μόνο για απλές γεωμετρίες και

αρχικές-συνοριακές συνθήκες, όπου οι περισσότεροι από τους όρους των εξισώσεων μηδενίζονται.

1.9 Ιξώδεις και τυρβώδεις ροές

Αν ανοίξουμε μία βρύση σε πολύ χαμηλή ογκομετρική παροχή, το νερό θα εξέρχεται πολύ ομαλά σχεδόν σαν «γυαλί». Αν αυξήσουμε την ογκομετρική παροχή το νερό θα αρχίσει να βγαίνει με αναταράξεις και με ένα χασοτικό τρόπο. Αυτά είναι παραδείγματα στο κατά πόσο μία ιξώδης ροή μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης, αντίστοιχα.

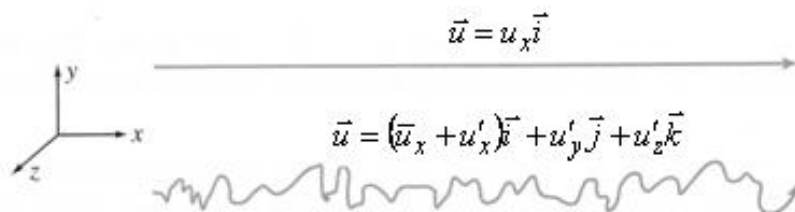


Σχήμα 1.9. Πείραμα του Reynolds. (α) Στρωτή ροή. (β) Τυρβώδης ροή

Το καθεστώς ροής σε ένα σωλήνα (στρωτή ή τυρβώδης) καθορίζεται από τον αριθμό Reynolds ($Re = \rho \langle u \rangle D / \mu$). Η ποιοτική διαφορά μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής μπορεί να επιδειχθεί μέσω του κλασσικού πειράματος του Reynolds (Σχ.1.9). Σε αυτό το πείραμα νερό ρέει από μία μεγάλη δεξαμενή μέσω ενός διαφανούς γυάλινου σωλήνα. Μία λεπτή ίνα χρώματος που εγχέεται στην είσοδο του σωλήνα επιτρέπει την οπτική παρατήρηση της ροής. Σε χαμηλές ογκομετρικές παροχές (μικρούς αριθμούς Reynolds) το χρώμα παραμένει σε ένα λεπτό νήμα κατά μήκος του σωλήνα. Για στρωτή ροή δεν υφίσταται ανάμιξη γειτονικών στρωμάτων ρευστού και υπάρχει μικρή διασπορά χρώματος κυρίως λόγω μοριακής διάχυσης (δηλαδή διαφοράς συγκέντρωσης χρώματος) (Σχ.1.9α). Καθώς η ογκομετρική παροχή μέσω του σωλήνα

αυξάνεται, το νήμα του χρώματος βαθμιαία γίνεται ασταθές και διασπάται σε τυχαίες κινήσεις μέσα σε όλο τον σωλήνα. Η γραμμή του χρώματος απλώνεται και στριφογυρίζει σε μυριάδες συστάδες νημάτων και πολύ γρήγορα διασπείρεται σε ολόκληρο το πεδίο ροής (Σχ.1.9β).

Στρωτή ροή είναι εκείνη όπου τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σε λεία στρώματα. Τυρβώδης ροή είναι εκείνη όπου τα σωματίδια του ρευστού αναμιγνύονται γρήγορα καθώς κινούνται λόγω των τυχαίων τρισδιάστατων διακυμάνσεων. Τυπικά παραδείγματα τροχιών για κάθε μία από αυτές τις ροές φαίνονται στο Σχ.1.10 που δείχνει μία μονοδιάστατη ροή. Στα περισσότερα προβλήματα ρευστομηχανικής, όπως για παράδειγμα η ροή νερού σε ένα σωλήνα, η τύρβη είναι ένα ανεπιθύμητο αλλά συχνά αναπόφευκτο φαινόμενο, καθώς παράγει μεγαλύτερη αντίσταση στη ροή. Σε άλλα προβλήματα, όπως για παράδειγμα η ροή αίματος μέσω των αιμοφόρων αγγείων, είναι επιθυμητή η δημιουργία τύρβης γιατί η τυχαία ανάμιξη επιτρέπει όλα τα αιμοσφαίρια να έρθουν σε επαφή με τα τοιχώματα των αγγείων και να ανταλλάξουν οξυγόνο και άλλα θρεπτικά συστατικά.

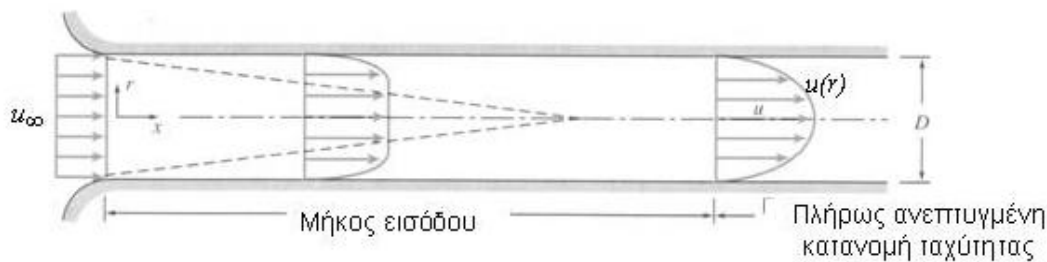


Σχήμα 1.10. Τροχιές σωματιδίων σε μονοδιάστατη στρωτή και τυρβώδη ροή.

Στο Σχ.1.11 φαίνεται μία στρωτή ροή στη περιοχή εισόδου ενός κυλινδρικού σωλήνα. Λόγω της συνθήκης της μη ολίσθησης στο τοίχωμα γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του ρευστού πάνω στο τοίχωμα θα είναι μηδέν κατά μήκος όλου του σωλήνα.

Έτσι ένα συνοριακό στρώμα αναπτύσσεται κατά μήκος των τοιχωμάτων του καναλιού. Η στερεά επιφάνεια ασκεί μία επιβραδυντική διατμητική δύναμη στη

ροή, με αποτέλεσμα η ταχύτητα ροής κοντά στην επιφάνεια του τοιχώματος να μειώνεται (Σχ. 1.11).



Σχήμα 1.11. Ροή στη περιοχή εισόδου ενός αγωγού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΟΡΩΔΗ ΥΛΙΚΑ

2.1 Βασικές έννοιες

Το **πορώδες** ενός υλικού ϕ , ορίζεται σαν ο λόγος του όγκου των πόρων, V_p , προς τον συνολικό όγκο, V_s , του πορώδους υλικού.

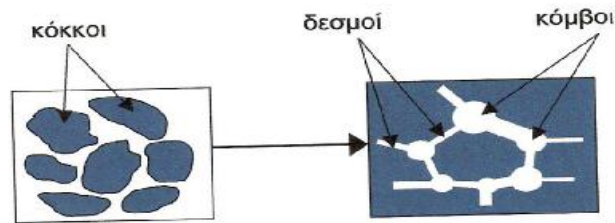
$$\phi = \frac{V_p}{V_s} \quad (2-1)$$

Πόρος, ονομάζεται κάθε κενός χώρος μέσα στη δομή του πορώδους μέσου ανεξάρτητα από το σχήμα και το μέγεθός του. Το σχήμα και οι διαστάσεις των πόρων των φυσικών πορώδων μέσων (εδάφη, πετρώματα) καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από το είδος του εδάφους / πετρώματος και την ιστορία διαγένεσης η οποία καθορίζει τον τελικό σχηματισμό του. Στα φυσικά πορώδη μέσα οι πόροι διακρίνονται σε **θαλάμους** και **λαιμούς**.

Θάλαμοι ονομάζονται οι μεγαλύτεροι πόροι των οποίων οι διαστάσεις είναι συγκεκριμένες με αυτές των κόκκων που συνθέτουν το υλικό.

Λαιμοί καλούνται οι μικρότεροι πόροι οι οποίοι έχουν τη μορφή καναλιών (στενώσεων) που συνδέουν τους θαλάμους. Ως χαρακτηριστική διάσταση των θαλάμων μπορεί να θεωρηθεί η αποτελεσματική ακτίνα μιας σφαίρας που έχει τον ίδιο όγκο με τους πόρους του υλικού. Το πορώδες μέσο μπορεί να

αναπαρασταθεί με ένα δίκτυο στους κόμβους του οποίου τοποθετούνται οι θάλαμοι ενώ στους δεσμούς οι λαιμοί (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1. Αναπαράσταση του πορώδους μέσου με ένα δίκτυο δεσμών και κόμβων.

Τα πιο γνωστά πορώδη μέσα που συναντώνται στο φυσικό κόσμο είναι τα **εδάφη** που καλύπτουν το ανώτατο στρώμα του φλοιού της γης, δηλαδή το επιφανειακό στρώμα σε απόσταση μέχρι 50 πόντους από την επιφάνειά της. Το έδαφος σε κατώτερα στρώματα καλείται υπέδαφος και εκτείνεται από 0,5-5 μέτρα από την επιφάνεια, ως εκεί δηλαδή που προχωρούν οι ρίζες των φυτών και ξεκινά ο υδροφόρος ορίζοντας. Το έδαφος προήλθε από την αποσάθρωση (διάβρωση) των πετρωμάτων της γήινης επιφάνειας από διάφορες αιτίες, όπως η θάλασσα, η βροχή, ο ήλιος, το κρύο, ο αέρας, τα φυτά και τα ζώα.

2.2 Απόλυτη διαπερατότητα και νόμος του Darcy

Η **απόλυτη διαπερατότητα**, k , αποτελεί μέτρο της υδραυλικής αγωγιμότητα που παρουσιάζει ένα διαπερατό πορώδες μέσο κατά τη μονοφασική ροή ενός Νευτώνειου ρευστού μέσα από αυτό και εξαρτάται αποκλειστικά από γεωμετρικά και τοπολογικά χαρακτηριστικά της πορώδους δομής.

Ο ορισμός της απόλυτης διαπερατότητας δίνεται μέσω του νόμου Darcy (1856) και ισχύει με μεγάλη ακρίβεια στην περίπτωση που οι αδρανειακές δυνάμεις των ροών μέσα σε πορώδη μέσα είναι αμελητέες και η ροή είναι έρπουσα ($Re \ll 1$).

Η εξίσωση Navier-Stokes για ισόθερμη ροή ασυμπίεστου Νευτώνειου ρευστού σε αδιάστατη μορφή γράφεται ως εξής:

$$\frac{Du^*}{Dt^*} = \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla^*)u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* + \frac{1}{Fr} g^* \quad (2-2)$$

όπου $Re = \frac{\rho u d}{\mu}$ είναι ο αριθμός Reynolds, $Fr = \frac{u^2}{dg}$ ο αριθμός Froude, ρ η πυκνότητα του ρευστού, u η ταχύτητα, d το χαρακτηριστικό μήκος της ροής, μ το ιξώδες και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Στην περίπτωση έρπουσας ροής όπου η ταχύτητα είναι πολύ μικρή και κατ' επέκταση ο αριθμός Reynolds είναι πολύ μικρός ($Re \ll 1$), και για συνθήκες μόνιμης ροής $\frac{\partial u^*}{\partial t^*} \approx 0$ από την παραπάνω εξίσωση, λαμβάνεται η εξίσωση του

Stokes:

$$\frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* = \nabla^* p^* - \frac{1}{Fr} g^* = \nabla^* P^* \quad (2-3)$$

όπου P είναι η ολική πίεση που ορίζεται από τη σχέση $P = p + \rho g z$

και z είναι το ύψος από το επίπεδο αναφοράς. Η εξίσωση του Stokes, που διέπει την έρπουσα ροή, είναι γραμμική εξίσωση και συνήθως επιλύεται ευκολότερα.

Ο νόμος του Darcy, που προκύπτει με ομογενοποίηση της εξίσωσης Navier-Stokes, όταν αυτή εφαρμοσθεί για τους πόρους ενός συστήματος και ολοκληρωθεί σε ένα στοιχειώδη όγκο με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, έχει την εξής μορφή (Whitaker, 1986a):

$$\langle u_b \rangle = -\frac{\overline{\overline{K}}}{m} \left(\overline{\nabla} \langle P_b \rangle^b - r_b \overline{g} \right) \quad (2-4)$$

όπου ο κάτω δείκτης β αναφέρεται στις ποσότητες τη φάσης β που καταλαμβάνει τους πόρους, ενώ ο άνω δείκτης β υποδηλώνει ότι η μέση τιμή της ιδιότητας αναφέρεται μόνο στη φάση β , ενώ η στερεά φάση εξαιρείται. Ο τανυστής της διαπερατότητας, $\overline{\overline{K}}$, δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{K} = f_b T^{-1} \quad (2-5)$$

και ο τανυστής T είναι ίσος με:

$$T = -\frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} \cdot (\nabla B - I_b) dA \quad (2-6)$$

Όπου ϕ_β είναι το πορώδες, V_β ο όγκος των πόρων, $n_{\beta\sigma}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στη διεπιφάνεια μεταξύ των φάσεων β και σ , δηλαδή της πορώδους και της στερεάς δομής, και $A_{\beta\sigma}$ είναι η αντίστοιχη επιφάνεια. Τα B και b είναι ένας τανυστής και ένα διάνυσμα αντίστοιχα, που προκύπτουν από τις διακυμάνσεις των τοπικών τιμών της ταχύτητας και της πίεσης από τις εσωτερικές μέσες τιμές τους και εξαρτώνται αποκλειστικά από την πορώδη δομή (Auriault, 1987).

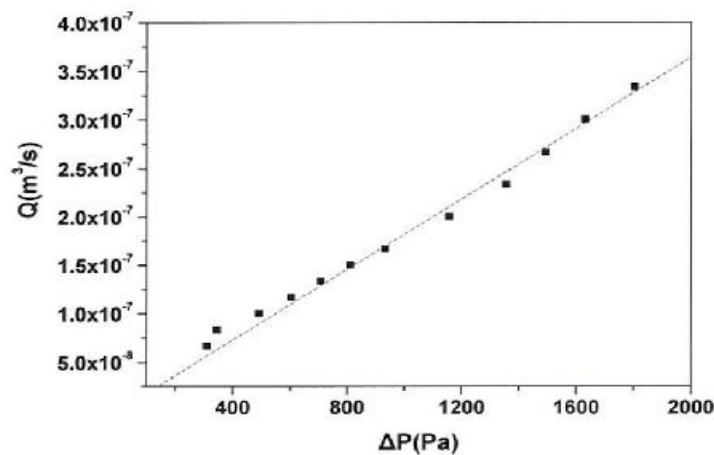
Στην περίπτωση **ισότροπου** πορώδους μέσου (όπου η διαπερατότητα είναι αναλλοίωτη σε κάθε κατεύθυνση) και **μονοδιάστατης** ασυμπίεστης ροής, η ολοκλήρωση του **νόμου του Darcy** δίνει τη σχέση:

$$Q = \left(\frac{kA}{\mu} \right) \frac{\Delta P}{L} \quad (2-7)$$

όπου Q είναι η ογκομετρική παροχή του ρευστού που διοχετεύεται στο πορώδες μέσο, A είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του πορώδους μέσου κάθετα στην διεύθυνση ροής, L είναι το μήκος του πορώδους μέσου στην διεύθυνση ροής, P είναι η πίεση και μ είναι το ιξώδες του ρευστού. Η απόλυτη διαπερατότητα έχει διαστάσεις επιφάνειας. Η μονάδα μέτρησης της απόλυτη διαπερατότητας είναι το Darcy ($1 \text{ Da} = 0.987 \mu\text{m}^2$).

Για τη μέτρηση της απόλυτης διαπερατότητας μετριέται η παροχή σαν συνάρτηση της πτώσης πίεσης κατά μήκος του πορώδους μέσου και τα δεδομένα προσαρμόζονται στη γραμμική εξίσωση του Darcy. Προτιμάται η χρήση αερίων επειδή τα υγρά μερικές φορές αλλάζουν την πορώδη δομή και συνεπώς τη

διαπερατότητα προκαλώντας αναδιάταξη μερικών σωματιδίων, φούσκωμα ορισμένων υλικών όπως αργιλικά, χημικές αντιδράσεις κ.λ.π. Εκτέλεση περισσότερων από μία μετρήσεων ρυθμού ροής – πτώσης πίεσης και προσαρμογή των δεδομένων σε ευθεία σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση παρέχει τη διαπερατότητα (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2. Πτώση πίεσης κατά μήκος κλίνης άμμου για διάφορες τιμές παροχής μονοφασικής ροής.

2.3 Μακροσκοπική εξίσωση ροής σε πορώδες μέσο για μη Νευτώνεια ρευστά

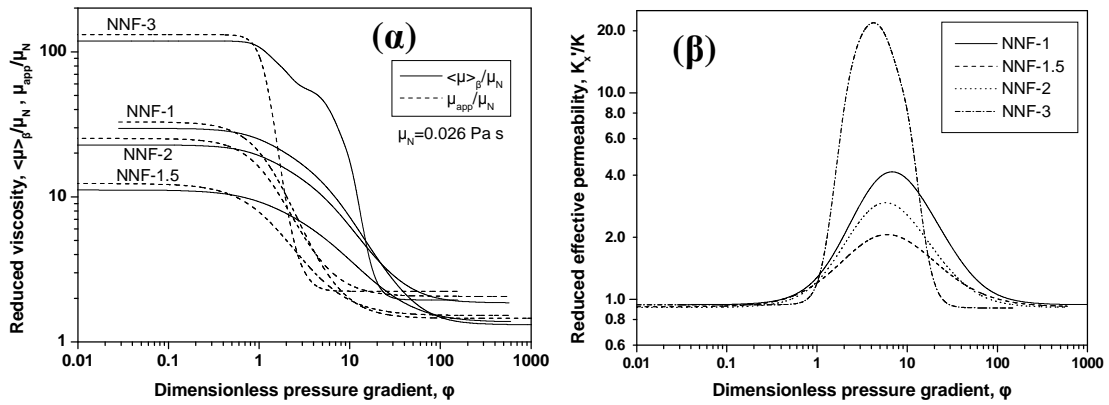
Ομογενοποίηση της εξίσωσης διατήρησης γραμμικής ορμής για ένα γενικευμένο μη Νευτώνειο ρευστό, καταλήγει (Tsakiroglou, 2002) στη σχέση:

$$\langle u \rangle = -\frac{\overline{\overline{K}}}{\langle m \rangle_b} (\overline{\nabla} \langle P \rangle_b - r \overline{g}) \quad (2-8)$$

η οποία είναι ανάλογη του νόμου του Darcy και περιγράφει έρπουσα ροή ($Re \ll 1$) μη Νευτώνειου ρευστού σε ομογενές πορώδες μέσο.

Όπου: $\overline{\overline{K}}$ είναι ο τανυστής αποτελεσματικής διαπερατότητας και εξαρτάται από την πορώδη δομή, την ρεολογία του ρευστού καθώς και το πεδίο ροής.

$$\text{και } \overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$



Σχήμα 2.3. Υπολογισμός της μεταβολής (α) του μέσου ιξώδους και (β) της αποτελεσματικής διαπερατότητας με τη αδιάστατη βαθμίδα πίεσης για ροή μη Νευτώνειου ρευστού (που ακολουθεί το μοντέλο Meter) σε ένα δίκτυο πόρων ελλειπτικής διατομής (Tsakiroglou, 2002)

Σε χαμηλές και υψηλές βαθμίδες πίεσης, η αποτελεσματική διαπερατότητα, εξ.(2.8) τείνει σε μία ασυμπτωτική τιμή που εξαρτάται από τη ρεολογία του ρευστού (Σχ.2.3α). Αυτή η ασυμπτωτική τιμή δεν γίνεται ποτέ ίση με την απόλυτη διαπερατότητα επειδή κατά πλάτος ενός πόρου, η διατμητική τάση αυξάνεται από μηδέν στο κέντρο του σε μία μέγιστη τιμή στα τοιχώματά του έτσι ώστε το μέσο ιξώδες του ρευστού να μεταβάλλεται απεριόριστα με τη βαθμίδα πίεσης (Σχ. 2.3α). Η αποτελεσματική διαπερατότητα είναι μία ισχυρά μη γραμμική συνάρτηση της βαθμίδας πίεσης σε ενδιάμεσες τιμές αυτής της μεταβλητής (Σχ. 2.3β) και παρουσιάζει μέγιστο (Σχ.2.3β) περίπου εκεί που παρατηρείται το σημείο καμψής του μέσου ιξώδους (Σχ.2.3α).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΡΟΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΥ ΥΓΡΟΥ ΣΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ

3.1. Τροποποίηση της εξίσωσης διατήρησης γραμμικής ορμής

Η Εξίσωση διατήρησης της γραμμικής ορμής για μόνιμη - ασυμπίεστη και πλήρης ανεπτυγμένη ροή, δίνεται από τη σχέση:

$$\rho \cdot g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (3-1)$$

*Στην περίπτωσή μας έχουμε οριζόντια ροή, δηλαδή:

$$g_z = 0$$

Οπότε, η εξίσωση (3-1), γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (3-2)$$

*Στην περίπτωσή μας έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη ροή, δηλαδή:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Οπότε, η εξίσωση (3-2), γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (3-3)$$

*Στην περίπτωση μας έχουμε μόνιμη ροή, δηλαδή δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, οπότε:

$$\boxed{\frac{\partial u_z}{\partial t} = 0}$$

Οπότε, η εξίσωση (3-3), γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \cdot \left(u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (3-4)$$

*Στην περίπτωση μας έχουμε μονοδιάστατη ροή, δηλαδή η u_z ως προς τη διεύθυνση x και y είναι μηδέν(0), οπότε:

$$\boxed{u_x = 0} \quad \& \quad \boxed{u_y = 0}$$

Οπότε, η εξίσωση (3-4), γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (3-5)$$

*Στην περίπτωση μας έχουμε ασυμπίεστη ροή, δηλαδή:

$$\boxed{\rho = \text{σταθερ } \acute{o} \Rightarrow \partial \rho = 0}$$

Οπότε, από την Εξίσωση της Συνέχειας, έχουμε ότι:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} = 0} \quad (3-6)$$

Όμως, επειδή $\rho = \text{σταθερ } \acute{o}$ έχουμε ότι:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \rho \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3-7)$$

*όπου: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$

και, $\vec{u} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}$

Για Νευτώνεια ρευστά και στρωτή ροή, οι τάσεις μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση με τις βαθμίδες ταχύτητας και τις ιδιότητες του ρευστού σε ορθογώνιες συντεταγμένες, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\sigma_{zz} = -P - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3-8)$$

*Στην περίπτωσή μας έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη ροή, δηλαδή:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Οπότε,

$$\sigma_{zz} = -P - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (3-9)$$

Όμως, από τη σχέση (3-7), η σχέση (3-9) γίνεται ως εξής:

$$\sigma_{zz} = -P - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = -P - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = -P \quad (3-10)$$

Επομένως, η σχέση (3-5) βάσει της (3-10) γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3-11)$$

Η παραπάνω σχέση (3-11) καλείται ως Εξίσωση Διατήρησης Γραμμικής Ορμής, για μόνιμη – ασυμπίεστη και πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε έναν αγωγό.

6.2. Εφαρμογή σε ελλειπτική διατομή

Από την Εξίσωση Διατήρησης Γραμμικής Ορμής, για τη z-κατεύθυνση, έχουμε:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Όμως, $\tau_{zx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$: Ρεολογική εξίσωση Νευτώνειων ρευστών

και, στη περίπτωση μας έχουμε μονοδιάστατη ροή ως προς τον άξονα-z:

$$u_{xz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$$

Επομένως, $\tau_{zx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (3-12)$$

Ομοίως, $\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$ (3-13)

Οπότε, η σχέση (3-11) βάσει των σχέσεων (3-12), (3-13) γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow & - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0 \\ \Rightarrow & - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-14)$$

Υπόθεση 1^η:

Έστω ότι, $u_z = A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C$ (3-15)

Τότε, $\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = (A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C)''$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = (2 \cdot A \cdot x)'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = (2 \cdot A) \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} \text{Και,} \quad & \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = (A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C)'' \\ \Rightarrow & \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = (2 \cdot B \cdot y)' \\ \Rightarrow & \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = (2 \cdot B) \end{aligned} \quad (3-17)$$

Οπότε, η σχέση (3-14) βάσει των σχέσεων (3-16) και (3-17) γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot (2 \cdot A + 2 \cdot B) = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{\partial P}{\partial z} + 2 \cdot \mu \cdot (A + B) = 0 \\ \Rightarrow & 2 \cdot \mu \cdot (A + B) = \frac{\partial P}{\partial z} \\ \Rightarrow & (A + B) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-18)$$

Όμως, $u_z = f(x) + g(y)$

Από τη σχέση (3-14), έχουμε:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0$$

Όμως, $\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (f + g)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (f)}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (f)}{\partial x^2} \quad (3-19)$$

Και,
$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (f + g)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (g)}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (g)}{\partial y^2} \quad (3-20)$$

Επομένως,
$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 (f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (g)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3-21)$$

Από τα Μαθηματικά, γνωρίζουμε ότι εάν έχουμε μια συνάρτηση $f(x, y, z)$ τότε ο μερικός διαφορικός της συνάρτησης ως προς x είναι:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Επομένως, η σχέση (3-21) γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 (f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (g)}{\partial y^2} \right) = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{d^2 (f)}{dx^2} + \frac{d^2 (g)}{dy^2} \right) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial P}{\partial z} = \mu \cdot \left(\frac{d^2 (f)}{dx^2} + \frac{d^2 (g)}{dy^2} \right) = K \\ \Rightarrow & \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = \left(\frac{d^2 (f)}{dx^2} + \frac{d^2 (g)}{dy^2} \right) = K \\ \Rightarrow & \frac{d^2 (f)}{dx^2} = -\frac{d^2 (g)}{dy^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = K \end{aligned} \quad (3-22)$$

Από τη σχέση (3-22) έχουμε:

$$\frac{d^2(f)}{dx^2} = -\frac{d^2(g)}{dy^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = K$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \frac{d^2(f)}{dx^2} &= K \\ \Rightarrow \frac{d(f)}{dx} &= K \cdot x + E \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + E \cdot x + D \end{aligned} \quad (3-23)$$

Και,

$$\begin{aligned} -\frac{d^2(g)}{dy^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} &= K \\ \Rightarrow \frac{d^2(g)}{dy^2} &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \\ \Rightarrow \frac{d(g)}{dy} &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \cdot y - K \cdot y + F \\ \Rightarrow g(y) &= \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \cdot y^2 - \frac{1}{2} \cdot K \cdot y^2 + F \cdot y + L \\ \Rightarrow g(y) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + F \cdot y + L \end{aligned} \quad (3-24)$$

$$\text{Όμως, } \tau_{zx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \mu \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \mu \cdot \frac{df}{dx}$$

$$\Rightarrow \tau_{zx} = \mu \cdot \frac{df}{dx} \quad (3-25)$$

$$\text{Και, } \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} = \mu \cdot \frac{\partial(f+g)}{\partial y} = \mu \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \mu \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = \mu \cdot \frac{dg}{dy}$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau_{zy} = \mu \cdot \frac{dg}{dy}} \quad (3-26)$$

Επομένως, η σχέση (3-25) βάσει της σχέσης (3-23), γίνεται ως εξής:

$$\tau_{zx} = \mu \cdot \frac{df}{dx} = \mu \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + E \cdot x + D \right)' = \mu \cdot (K \cdot x + E)$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau_{zx} = \mu \cdot (K \cdot x + E)} \quad (3-27)$$

Επίσης έχουμε

$$\tau_{zy} = \mu \cdot \frac{dg}{dy} = \mu \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + F \cdot y + L \right]'$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \mu \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y + F \right]$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau_{zy} = \mu \cdot \left[\left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y + F \right]} \quad (3-28)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (1):

Στο σημείο $x = 0, y = 0$ (κέντρο της έλλειψης), η ταχύτητα του ρευστού μεγιστοποιείται και συνεπώς οι παράγωγοί της ως προς x και y είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή:

$$\boxed{\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0} \quad (3-29)$$

και,

$$\boxed{\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0} \quad (3-30)$$

Οπότε,

$$\tau_{zx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \quad (3-29')$$

και συνεπώς

$$\tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \quad (3-30')$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3-27) και (3-28) βάσει των σχέσεων (3-29') και (3-30') προκύπτει ότι:

$$\boxed{E = 0} \quad (3-31)$$

Και,

$$\boxed{F = 0} \quad (3-32)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (2):

Για την περίπτωση αγωγού ελλειπτικής διατομής ισχύει ότι (Εξίσωση Έλλειψης):

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = b^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \quad (3-33)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3-31) και (3-32), στις σχέσεις (3-23) και (3-24) έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + E \cdot x + D$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + 0 \cdot x + D$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + D \quad (3-34)$$

Επίσης έχουμε

$$g(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + F \cdot y + L$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + 0 \cdot y + L$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + L \quad (3-35)$$

Επομένως,

$$u_z = f(x) + g(y)$$

$$\Rightarrow u_z = \left(\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + D \right) + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + L \right] \quad (3-36)$$

$$\xrightarrow{(3-33)} u_z = \left(\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + D \right) + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot \left[b^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \right] + L \right]$$

$$\Rightarrow u_z = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + D + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot b^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot b^2 + L$$

$$\boxed{\Rightarrow u_z = \left[\frac{1}{2} \cdot K - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \right] \cdot x^2 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \right] \cdot b^2 + (D+L)} \quad (3-37)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (3):

Στο τοίχωμα του αγωγού: $u_z = 0$

Επομένως, από τη σχέση (3-37) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2} \cdot K - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) = 0 \quad (3-38)$$

και παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot b^2 + (D+L) = 0 \quad (3-39)$$

Επομένως, η σχέση (3-38) γίνεται ως εξής:

$$\frac{1}{2} \cdot K - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot K - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot K = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot K \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu}$$

$$\Rightarrow K \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right)}$$

$$\boxed{\Rightarrow K = \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2}} \quad (3-40)$$

Η σχέση (3-39) γίνεται ως εξής:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot b^2 + (D+L) = 0$$

$$\Rightarrow (D+L) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot b^2$$

$$\Rightarrow (D+L) = \frac{1}{2} \cdot \left(K - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot b^2$$

$$\xrightarrow{(3-40)} (D + L) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial P / \partial z}{m} \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2} - \frac{\partial P / \partial z}{m} \right) \cdot b^2$$

$$\Rightarrow (D + L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \cdot b^2$$

$$\Rightarrow (D + L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \left(\frac{b^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot b^2$$

$$\boxed{\Rightarrow (D + L) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \right)} \quad (3-41)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3-40), (3-41) στη σχέση (3-36) έχουμε:

$$u_z = \left(\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + D \right) + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + L \right]$$

$$\Rightarrow u_z = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - K \right) \cdot y^2 + (D + L)$$

$$\xrightarrow{(3-40),(3-41)} u_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial P / \partial z}{m} \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial P / \partial z}{m} - \frac{\partial P / \partial z}{m} \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot y^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{m} \cdot \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\Rightarrow u_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \left[\frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot x^2 + \left(y^2 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot y^2 \right) - \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow u_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \left[\frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot x^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot y^2 - \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow u_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \left[\frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot x^2 + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot y^2 - \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \right) \right]$$

$$\boxed{\Rightarrow u_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)} \quad (3-42)$$

ή

$$\boxed{\Rightarrow u_z = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(- \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right]} \quad (3-42\alpha)$$

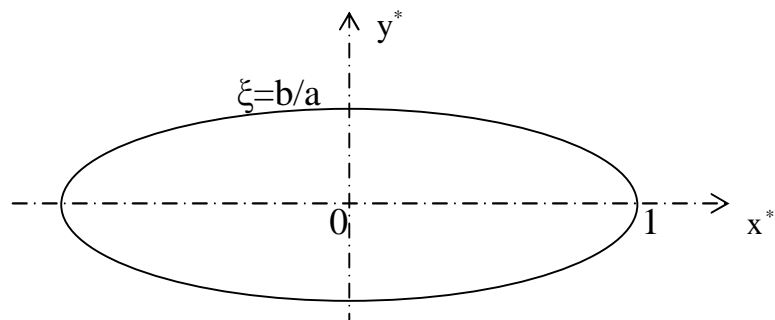
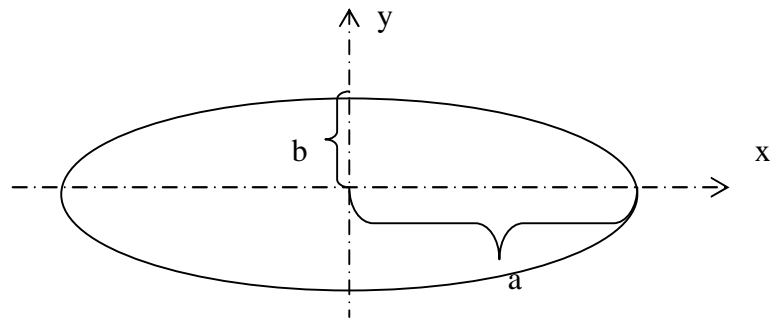
Η παραπάνω εξίσωση (3-42α) είναι η κατανομή (προφίλ) ταχύτητας στη διατομή του ελλειπτικού κυλίνδρου.

Η μέση ταχύτητα σε όλη την διατομή είναι:

$$\boxed{\langle u_z \rangle = \frac{1}{A} \cdot \int_A u_z dA = \frac{1}{64 \cdot m} \cdot \left(- \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \frac{a^2 \cdot x^2}{1 + x^2}} \quad (3-43)$$

όπου, $x = b/a < 1$

- Αδιαστατοποίηση



$$x^* = \frac{x}{a} \quad \text{όπου, } 0 \leq x^* \leq 1$$

και,

$$y^* = \frac{y}{a} \quad \text{όπου, } 0 \leq y^* \leq b/a$$

Από την εξίσωση (3-42), για $x = 0$, $y = 0$ (κέντρο έλλειψης) έχουμε:

$$u_{z, \max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow u_{z, \max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial z}{\mu} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{0^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\boxed{\Rightarrow u_{z, \max} = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(- \frac{\partial P}{\partial z} \right)} \quad (3-44)$$

Οπότε,

$$u_z^* = \frac{u_z}{u_{z, \max}}$$

$$\Rightarrow u_z = u_z^* \cdot u_{z, \max}$$

$$\boxed{\Rightarrow u_z = u_z^* \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(- \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right]} \quad (3-45)$$

Η παραπάνω σχέση (3-45), βάσει της σχέσης (3-42α) γίνεται ως εξής:

$$u_z = u_z^* \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(- \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(- \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] = u_z^* \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(- \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right]$$

$$\Rightarrow u_z^* = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$\Rightarrow u_z^* = 1 - \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow u_z^* = 1 - \left[(x^*)^2 + \left(\frac{y^* \cdot a}{b} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow u_z^* = 1 - \left[(x^*)^2 + (y^*)^2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow u_z^* = 1 - \left[(x^*)^2 + (y^*)^2 \cdot \left(\frac{1}{\xi} \right)^2 \right]$$

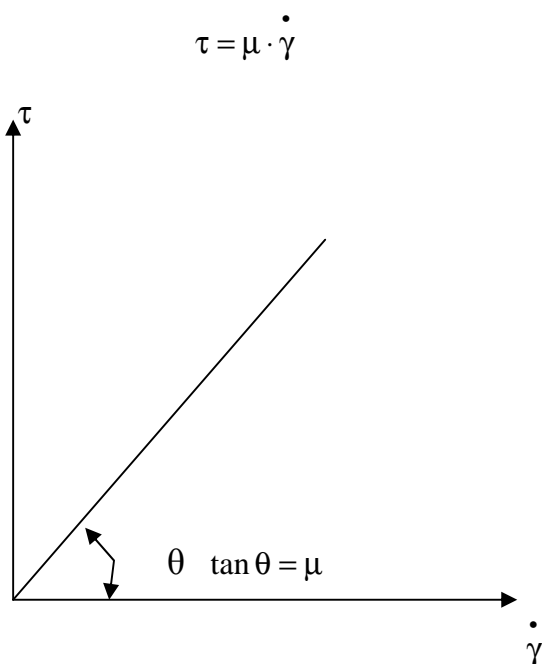
$$\boxed{\Rightarrow u_z^* = 1 - \left[(x^*)^2 + \left(\frac{y^*}{\xi} \right)^2 \right]} \quad (3-46)$$

όπου, $x = b/a < 1$

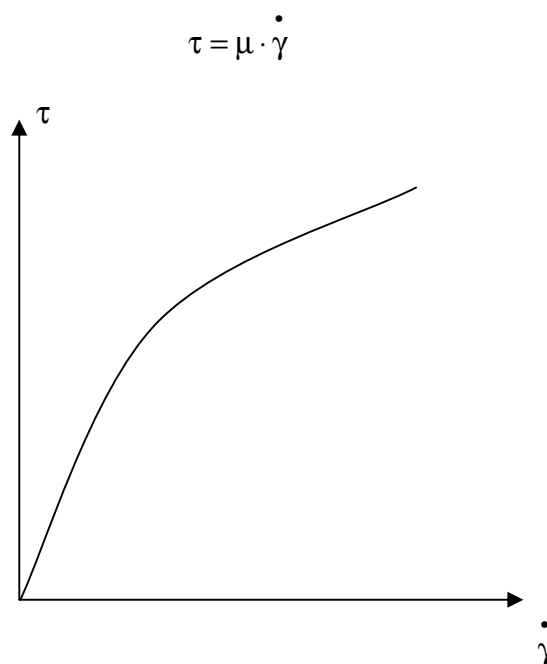
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΡΟΗ ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΥ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΥΓΡΟΥ

Το μοντέλο εκθετικού νόμου, δίνεται από τη σχέση:

$$\mu = \mu_o \cdot \dot{\gamma}^{n-1} \quad (4-1)$$



Νευτώνειο Ρευστό
($\mu = \text{σταθερό}$)



Μη Νευτώνειο Ρευστό
($\mu \neq \text{σταθερό}$)

Έχουμε: $\tau = \mu \cdot \dot{\gamma} \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu}$ (4-2)

Η σχέση (4-1) γίνεται ως εξής:

$$\mu = \mu_o \cdot \dot{\gamma}^{n-1}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_o \cdot \left(\frac{\tau}{\mu} \right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_o \cdot \frac{\tau^{n-1}}{\mu^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \mu \cdot \mu^{n-1} = \mu_o \cdot \tau^{n-1}$$

$$\Rightarrow \mu^n = \mu_o \cdot \tau^{n-1}$$

$$\Rightarrow (\mu^n)^{1/n} = (\mu_o \cdot \tau^{n-1})^{1/n}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_o^{1/n} \cdot \tau^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mu = \mu_o^{1/n} \cdot \tau^{1-1/n}} \quad (4-3)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι:

$$|\tau| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow |\tau| = (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{1/2}} \quad (4-4)$$

Οπότε,

$$\tau_{zx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\boxed{\xrightarrow{(4-3)} \tau_{zx} = (\mu_o^{1/n} \cdot \tau^{1-1/n}) \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}} \quad (4-5)$$

Και,

$$\tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\xrightarrow{(4-3)} \tau_{zy} = \left(\mu_o^{1/n} \cdot t^{1-1/n} \right) \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (4-6)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4-4), στις σχέσεις (4-5) και (4-6) έχουμε:

$$\tau_{zx} = \left(\mu_o^{1/n} \cdot \tau^{1-1/n} \right) \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \tau_{zx} = \mu_o^{1/n} \cdot \left[\left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 \right)^{1/2} \right]^{1-1/n} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (4-7)$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 \right)^{\frac{1}{2} \cdot (1-1/n) \cdot 2} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 \right)^{(1-1/n)} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \quad (4-7a)$$

Αντιστοίχως έχουμε

$$\tau_{zy} = \left(\mu_o^{1/n} \cdot \tau^{1-1/n} \right) \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \mu_o^{1/n} \cdot \left[\left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 \right)^{1/2} \right]^{1-1/n} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (4-8)$$

$$\Rightarrow \tau_{zy}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{\frac{1}{2} \cdot (1-1/n)^2} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau_{zy}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{(1-1/n)} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2} \quad (4-8\alpha)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (4-7α) και (4-8α) έχουμε:

$$\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{(1-1/n)} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{(1-1/n)}} = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{-(1-1/n)} = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{1/n} = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{\Rightarrow (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \mu_o^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^n} \quad (4-9)$$

Επομένως, η σχέση (4-7α) βάσει της σχέσης (4-9) γίνεται ως εξής:

$$\tau_{zx}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{(1-1/n)} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\mu_o^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^n \right]^{(1-1/n)} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\mu_o^{2 \cdot (1-1/n)} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n \cdot (1-1/n)} \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \mu_o^{2 \cdot (1-1/n)} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \mu_o^{2-2/n} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^{\left(\frac{2}{n} + 2 - \frac{2}{n}\right)} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}^2 = \mu_o^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zx} = \mu_o \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \mu_o \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \mu_0 \cdot \left[\left[\frac{n-1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \right]$$

(4-10)

Όμως,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] = \left[2 \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^{2-1} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \cdot \partial x} \right) \right] + \left[2 \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^{2-1} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] = 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right] \quad (4-10\alpha)$$

Επομένως, η σχέση (4-10) βάσει της (4-10α) γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \mu_0 \cdot \left[\left[\frac{n-1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot \left[2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right] \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \mu_0 \cdot \left[\left[(n-1) \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right] \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \mu_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left[\left[(n-1) \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right] \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \tau_{zy}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\mu_o^{2 \cdot (1-1/n)} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n \cdot (1-1/n)} \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zy}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \left[\mu_o^{2-2/n} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n-1} \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zy}^2 = \mu_o^{2/n} \cdot \mu_o^{2-2/n} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zy}^2 = \mu_o^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \mu_o \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \mu_o \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \mu_o \cdot \left[\left[\frac{n-1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right] \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \right] \quad (4-12)$$

Όμως,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \mu_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left[(n-1+1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \cdot \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \mu_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \cdot \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \mu_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] + (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \cdot \partial y} \right) \right\} \quad (4-13)$$

Από την Εξίσωση Διατήρησης Γραμμικής Ορμής, για τη z-κατεύθυνση, έχουμε:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4-11) και (4-13) στην παραπάνω Εξίσωση Διατήρησης Γραμμικής Ορμής, έχουμε:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

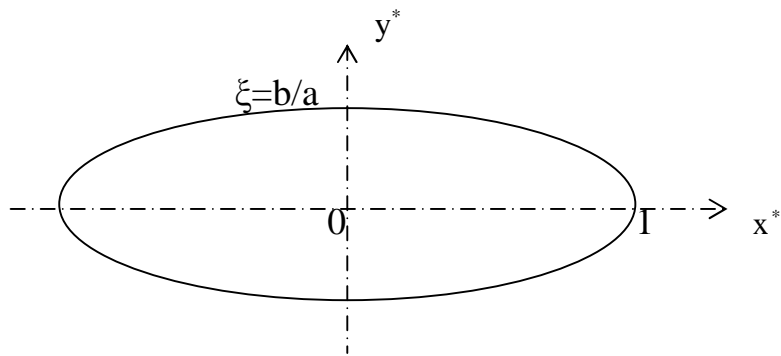
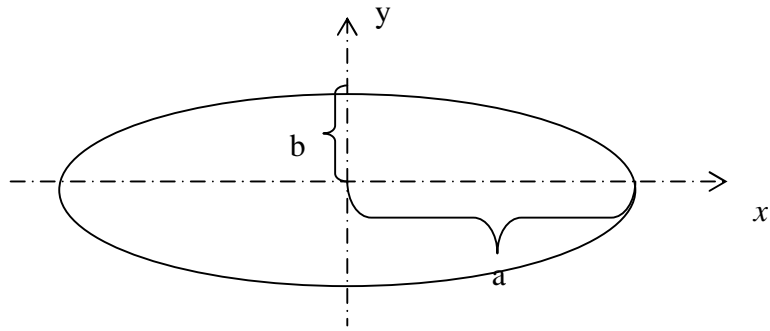
$$\Rightarrow \mu_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] + (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] + (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \cdot \partial y} \right) \right\} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \mu_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right\} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \mu_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right\} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

(4-14)

• Αδιαστατοποίηση



$$x^* = \frac{x}{a} \Rightarrow x = x^* \cdot a \quad \text{όπου, } 0 \leq x^* \leq 1$$

$$y^* = \frac{y}{a} \Rightarrow y = y^* \cdot a \quad \text{όπου, } 0 \leq y^* \leq b/a$$

και, $u_z^* = \frac{u_z}{u_{z,\max}} \Rightarrow u_z = u_z^* \cdot u_{z,\max}$

Αδιαστατοποίηση της εξίσωσης (46) δίνει:

$$\mu_b \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \cdot \partial x} \right) \right\} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{n-3} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^{*2}} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^{*2}} \right) \left[n \cdot \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] + \left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_a}{\mu_0 \left(\frac{u_{z,max}}{a} \right)^n} \right] \\ & 2 \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} \right) \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^* \partial x^*} \right) \end{aligned} \right\} = 0$$

(4-15)

Η ροή εκθετικού υγρού σε ελλειπτικής διατομής κύλινδρο πρέπει να υπακούει στις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (1):

Στο σημείο $x^* = 0, y^* = 0$ (κέντρο της έλλειψης), η ταχύτητα του ρευστού μεγιστοποιείται και συνεπώς οι παράγωγοί της ως προς x^* και y^* είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή:

$$\boxed{\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} = 0} \quad (4-16)$$

και,

$$\boxed{\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} = 0} \quad (4-17)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (2):

Για την περίπτωση αγωγού ελλειπτικής διατομής ισχύει ότι (Εξίσωση Έλλειψης):

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^* \cdot a}{a} \right)^2 + \left(\frac{y^* \cdot a}{b} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^{*2} + \left(\frac{y^*}{b/a} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^{*2} + \left(\frac{y^*}{x} \right)^2 = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow x^{*2} + \frac{y^{*2}}{x^2} = 1} \quad (4-18)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (3):

Στο τοίχωμα του αγωγού: $u_z^* = 0$ (4-19)

Η παραπάνω σχέση, εξ.(4-15) μαζί με τις εξ. (4-16) – (4-19) αποτελούν μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ελλειπτικού τύπου, και για τη λύση της απαιτούνται μέθοδοι αριθμητικής ανάλυσης (π.χ. πεπερασμένα στοιχεία) και κατάλληλος υπολογιστικός κώδικας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σε μία προσπάθεια εξεύρεσης αναλυτικής λύσης στο πρόβλημα της ροής μη Νευτώνειων υγρών σε αγωγούς για διάφορα σχήματα διατομών έχει αναπτυχθεί μία προσεγγιστική μέθοδος (Kozicki et al., 1966) που περιγράφεται σε συντομία παρακάτω και επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης και της μέγιστης ταχύτητας ροής.

Η μέση ταχύτητα (u_p) της ροής ενός μη ελαστικού, ασυμπίεστου, χρονικά ανεξάρτητου και μη Νευτώνειου υγρού μέσα από πόρο (ή αγωγό) σταθερής διατομής αυθαιρέτου σχήματος, προσεγγιστικά περιγράφεται από την τροποποιημένη εξίσωση Rabinowitch-Mooney:

$$u_p = \frac{r_H}{2 \cdot a} \cdot \tau_0^{-b/a} \cdot \int_0^{\tau_0} \frac{\tau^{b/a}}{\mu} d\tau \quad (5-1)$$

Όπου η μέση διατμητική τάση στο τοίχωμα (τ_0) δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_0 = \frac{1}{S_p} \oint_{S_p} \tau_w dS_w = r_H \cdot \left(-\frac{dP}{dx} \right) \quad (5-2)$$

Και r_H , είναι η υδραυλική ακτίνα πόρου (αγωγού) η οποία είναι ίση με το εμβαδό διατομής (A_p) προς τη περίμετρό της (S_p). Το φαινομενικό ιξώδες (μ_{app}) και ο γενικευμένος αριθμός Reynolds (N_{Re}) μπορούν να οριστούν μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$$\mu_{app} = \frac{\tau_0 \cdot r_H}{2 \cdot u_p} \quad (5-3)$$

και,

$$N_{Re} = \frac{4 \cdot r_H \cdot u_p \cdot \rho}{\mu_{app}} \quad (5-4)$$

Για εκθετικό ρευστό ($\mu = \mu_0 \cdot \gamma^{n-1}$) η συνάρτηση της διατμητικής τάσης είναι (Kozicki, 1966):

$$f(\tau) = \left(\frac{\tau}{\mu_0} \right)^{1/n} \quad (5-5)$$

Και η αναλυτική λύση της εξίσωσης (5-1) είναι η εξής:

$$\frac{2 \cdot u_p}{r_H} = \left(\frac{\tau_0}{\mu_0} \right)^{1/n} \cdot \frac{n}{a + b \cdot n} \quad (5-6)$$

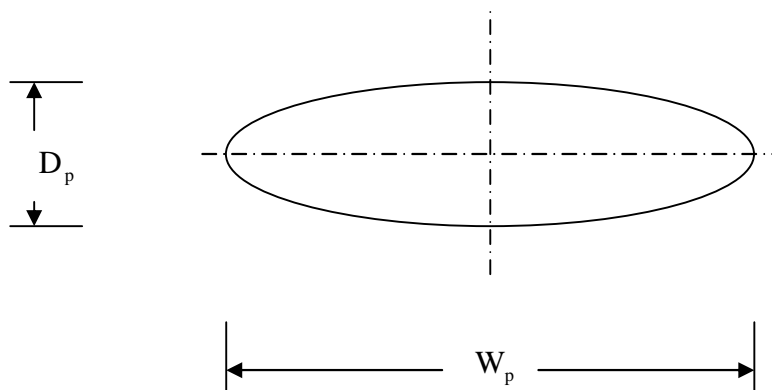
Για έναν ελλειπτικής διατομής πόρο με μείζονα και ελάσσονα μήκη αξόνων, ο λόγος D_p και W_p , $\xi (0 \leq \xi \leq 1)$ ορίζεται σαν:

$$\xi = \frac{D_p}{W_p}$$

Για ελλειπτική διατομή, οι παράμετροι σχήματος a και b είναι (Tsakiroglou, 2002):

$$a = \frac{\pi^2}{32 \cdot E^2 \cdot (\sqrt{1-\xi^2}, \pi/2)} \cdot (1 + \xi^2) \quad (5-7)$$

Και,
$$b = \frac{3 \cdot \pi^2}{32 \cdot E^2 \cdot (\sqrt{1-\xi^2}, \pi/2)} \cdot (1 + \xi^2) \quad (5-8)$$



Και η ισοδύναμη υδραυλική ακτίνα (r_H) δίνεται από τη σχέση:

$$r_H = \frac{\pi \cdot D}{8 \cdot E \cdot \left(\sqrt{1-\xi^2}, \pi/2 \right)} = \frac{D}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{1+\xi^2}} \quad (5-9)$$

Όπου, $E\left(\sqrt{1-\xi^2}, \pi/2\right)$ είναι ένα γενικευμένο ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερης τάξης και μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά από τον παρακάτω τύπο:

$$E\left(\sqrt{1-\xi^2}, \pi/2\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-\xi^2)^j}{2 \cdot j-1} \cdot \left[\frac{(2 \cdot j-1)!}{(2 \cdot j)!} \right]^2 \right\}$$

Επομένως, η εξίσωση (5-6) βάσει της εξίσωσης (5-2) γίνεται ως εξής:

$$\frac{2 \cdot u_p}{r_H} = \left(\frac{\tau_0}{\mu_0} \right)^{1/n} \cdot \frac{n}{a + b \cdot n}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot u_p}{r_H} = \left[\frac{r_H \cdot (-dP/dx)}{\mu_0} \right]^{1/n} \cdot \frac{n}{a + b \cdot n}$$

$$\Rightarrow u_p = \frac{r_H}{2} \cdot \left[r_H \cdot \left(-\frac{dP}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\mu_0} \right]^{1/n} \cdot \frac{n}{a + b \cdot n}$$

$$\Rightarrow u_p = \frac{r_H}{2} \cdot \left[r_H^{1/n} \cdot \left(-\frac{dP}{dx} \right)^{1/n} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \right)^{1/n} \right] \cdot \frac{n}{a + b \cdot n}$$

$$\Rightarrow u_p = \left[r_H^{1+1/n} \cdot \frac{(-dP/dx)^{1/n}}{2 \cdot \mu_0^{1/n}} \right] \cdot \left(\frac{n}{a + b \cdot n} \right)$$

$$\boxed{\Rightarrow u_p = \left[\frac{r_H^{1+1/n} \cdot (-dP/dx)^{1/n}}{2 \cdot \mu_0^{1/n}} \right] \cdot \left(\frac{n}{a + b \cdot n} \right)} \quad (5-10)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το πρόβλημα της ροής σε ελλειπτικό κύλινδρο αποτελεί τμήμα μίας γενικότερης προσπάθειας ανάλυσης της μονοφασικής και διφασικής ροής μη Νευτώνειων υγρών σε ρωγμές και πορώδη μέσα. Στο παρελθόν έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές πειραματικές μελέτες πολυφασικών ροών σε πρότυπα πορώδη μέσα (Tsakiroglou, 2003; Tsakiroglou et al., 2003, 2004, 2005; Theodoropoulou et al., 2005) και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων με μηχανιστικά μοντέλα που ενσωματώνουν τη φυσική της ροής στη κλίμακα του πόρου είναι το επόμενο βήμα. Το άνοιγμα των ρωγμών σε φυσικούς σχηματισμούς (π.χ. υπέδαφος) όπως και στο δομημένο περιβάλλον (π.χ. τοιχοποιία) μπορούν να αναπαρασταθούν με δίκτυα ελλειπτικών πόρων. Επίσης, οι πόροι σε υπόγειους ταμιευτήρες υπογείων υδάτων και υδρογονανθράκων, λόγω της εναπόθεσης των σωματιδίων με τη μεγάλη τους διάσταση παράλληλα προς το επίπεδο στρώσεως και διεργασιών διαγένεσης, έχουν μη συμμετρικό σχήμα. Η εκτίμηση επικινδυνότητας της ρύπανσης υπόγειων σχηματισμών με οργανικούς ρύπους μη Νευτώνειας ρεολογίας και η βελτιωμένη εξόρυξη αργού πετρελαίου (που είναι επίσης ένα μη Νευτώνειο υγρό) απαιτούν τη χρήση μακροσκοπικών εξισώσεων και υπολογιστικών αλγορίθμων που να βασίζονται στη σωστή περιγραφή της ροής στη μικροκλίμακα του πόρου.

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις που περιγράφουν μόνιμη, μονοδιάστατη και πλήρως ανεπτυγμένη ροή ασυμπίεστου ρευστού σε ελλειπτικό κύλινδρο. Για τη περίπτωση Νευτώνειου υγρού, το πρόβλημα λύνεται αναλυτικά και ο υπολογισμός της μέσης ταχύτητας σε συνάρτηση με τη πτώση πίεσης από το προφίλ ταχυτήτων είναι απλός. Στη περίπτωση μη Νευτώνειου υγρού με ρεολογική συμπεριφορά εκθετικού ρευστού (shear-thinning power law fluid), η μαθηματική επεξεργασία της εξίσωσης διατήρησης γραμμικής ορμής είναι αρκετά πιο πολύπλοκη. Τελικά προκύπτει μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που μπορεί να λυθεί

αριθμητικά με τη χρήση υπολογιστικών πακέτων πεπερασμένων στοιχείων. Η αριθμητική λύση της ροής μη Νευτώνειου υγρού θα επιτρέψει την αξιολόγηση προσεγγιστικών αναλυτικών λύσεων του προβλήματος που βασίζονται στη μέθοδο Rabinowitch-Mooney (Kozicki et al., 1966) και είναι ακριβείς μόνο για διατομές με αξονική συμμετρία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] R.P. Chhabra, J. Comiti, I. Machac, Flow of non-Newtonian fluids in fixed and fluidized beds, Chem. Eng. Sci., (2001).
- [2] C.U. Ikoku, H.J. Ramey, Transient flow of non-Newtonian power law fluids in porous media, SPE J. June, (1979).
- [3] A.K. Podolsak, C. Tiu, T.N. Fang, Flow of non-Newtonian fluids through tubes with abrupt expansions and contractions, J. Non-Newt. Fluid Mech.,(1997).
- [4] N.E. Sabiri, J. Comiti, Pressure drop in non-Newtonian purely viscous fluid flow through porous media, Chem. Eng. Sci., (1995).
- [5] S. Liu, J.H. Masliyah, Non-linear flows in porous media, J. Non-Newt. Fluid Mech., (1999).
- [6] S. Liu, J.H. Masliyah, On non-Newtonian fluid flow in ducts and porous media, Chem. Eng. Sci., (1998).
- [7] C.B. Shah, Y.C. Yortsos, Aspects of flow of power law fluids in porous media, (1995).
- [8] W. Kozicki, C. Tiu, Flow of complex fluids in open or closed conduits, Packed beds and porous media, Can. J. Chem. Eng., (1973).
- [9] M.G. Satish, J. Zhu, Flow resistance and mass transfer in slow non-Newtonian flow through multiparticle systems, J. Appl. Mech., (1992).
- [10] D.M. Meter, R.B. Bird, Tube flow of non-Newtonian polymer solutions, (1964).
- [11] S. Whitaker, The Method of Volume Averaging, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, (1999).
- [12] W. Kozicki, C.H. Chou, C. Tiu, Non-Newtonian flow in ducts of arbitrary Cross-sectional shape, Chem. Eng. Sci., (1966).

- [13] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager Dynamics of Polymeric Liquids, Wiley, New York, (1977).
- [14] M. Theodoropoulou, V. Karoutsos, C. Tsakiroglou, Investigation of the contamination of fractured formations by non-Newtonian oil pollutants, *J. Environ.Forensics*, (2001).
- [15] O. Vizika, D.G. Avraam, A.C. Payatakes, On the role of the viscosity ratio during low-capillary number forced imbibition in porous media, (1994).
- [16] K.E. Klint, C.D. Tsakiroglou, in: V.A. Tsihrintzis, G.P. Korfiatis, K.L. Katsifarakis, A.C. Demetracopoulos, Proceedings of the 5th International Conference on the Protection and Restoration of the Environment, Thassos Island, Greece, (2000).
- [17] D.G. Avraam, A.C. Payatakes, Flow regimes and relative permeabilities during steady-state two-phase flow in porous media, (1995).
- [18] M. Sahimi, Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock: From Classical Methods to Modern Approaches, (1995).
- [19] Tsakiroglou, C.D., M. Theodoropoulou, V. Karoutsos, D. Papanicolaou, V. Sygouni “Experimental study of the immiscible displacement of shear-thinning fluids in pore networks”, *J. Colloid Interface Science*, **267**, 217-232 (2003).
- [20] Tsakiroglou, C.D., M. Theodoropoulou, and V. Karoutsos, “Non-equilibrium capillary pressure and relative permeability curves of porous media”, *AIChE J.*, **49**, 2472-2486 (2003).
- [21] Tsakiroglou, C.D., “Correlation of the two-phase flow coefficients of porous media with the rheology of shear-thinning fluids”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **117**, 1-23 (2004).
- [22] C.D. Tsakiroglou, M.A. Theodoropoulou, V. Karoutsos, and D. Papanicolaou, “Determination of the effective transport coefficients of pore networks from transient immiscible and miscible displacement experiments”, *Water Resources Research*, **41**(2), W02014 (2005).

- [23] M.A. Theodoropoulou, V. Sygouni, V. Karoutsos, and C.D. Tsakiroglou, “Relative permeability and capillary pressure functions of porous media as related to the displacement growth pattern”, *Int. J. Multiphase Flow*, **31**, 1155-1180 (2005).
- [24] Χ. Αγγελόπουλος, “Ανάπτυξη εργαστηριακών μεθόδων προσδιορισμού των συντελεστών μεταφοράς σε εδάφη από δυναμικά πειράματα”, Διαδακτορική διατριβή, Παν/μιο Πατρών (2007).