

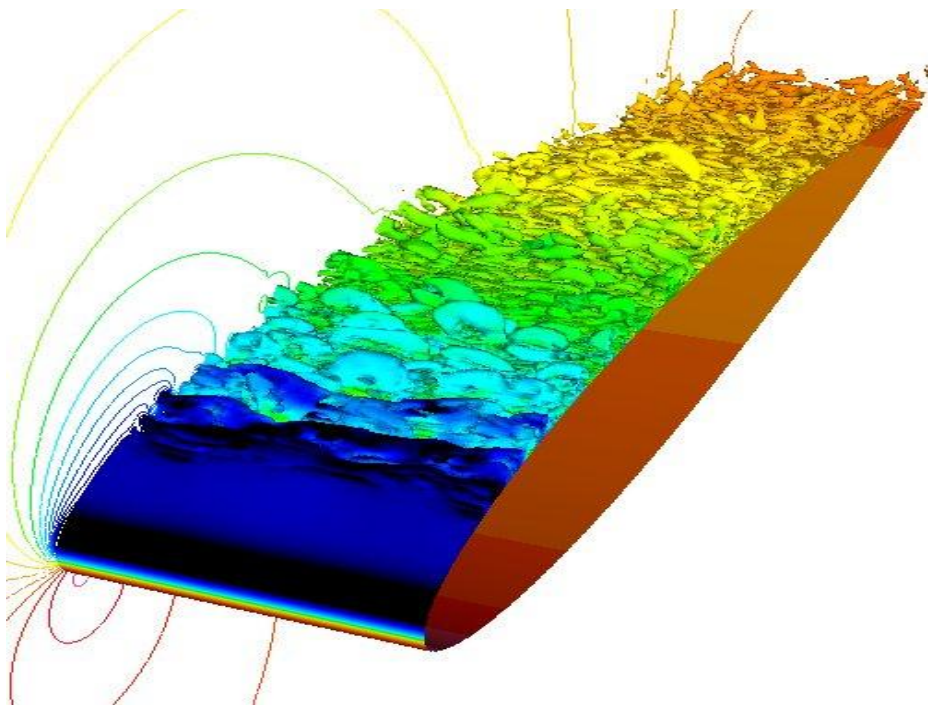
Τ.Ε.Ι ΠΑΤΡΑΣ

ΣΤΕ

ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΕΡΟΤΟΜΩΝ ΚΑΙ
ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ PARSEC



ΠΙΣΤΟΛΑΣ ΒΑΣΙΛΗΣ-ΤΣΙΓΚΛΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΒΟΥΡΟΣ ΑΝΤΡΕΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο τμήμα ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ του ΑΤΕΙ ΠΑΤΡΑΣ κατά το ακαδημαϊκό έτος 2007-2008.

Φθάνοντας στο πέρας αυτής της προσπάθειας θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε όλους όσους συνέβαλαν στην επιτυχή ολοκλήρωση αυτής της πτυχιακής εργασίας και να απευθύνουμε τις πιο θερμές ευχές μας για καλή συνέχεια στο έργο τους.

Αρχικά, αισθανόμαστε την ανάγκη να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας στον καθηγητή του Α. Τ. Ε. Ι ΠΑΤΡΑΣ. **κ. Αντρέα Βούρο** για την εμπιστοσύνη που μας έδειξε στην ανάθεση αυτής της εργασίας και την κατευθυντήρια ιδέα και ιδιαίτερα για την απaráμιλλη συνεργασία, συμπαράσταση και βοήθεια που μας πρόσφερε σε κάθε βήμα της όλης πορείας που διεσχίσαμε όλο αυτό το διάστημα με στόχο να επιτύχουμε μία άρτια επιστημονικά εργασία..

Τέλος, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε πολύ θερμά τη **οικογένεια μας** για την αμέριστη συμπαράσταση, υπομονή και εμπιστοσύνη που μας έδειξε όλα αυτά τα χρόνια της ζωής μας σε όλες τις επιλογές που κάναμε, αναπτύσσοντας με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τις ικανότητες μας για την μετέπειτα εξέλιξη της σταδιοδρομίας μας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	ΣΕΛ 5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1(ΕΙΣΑΓΩΓΗ)	ΣΕΛ 6-10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
Βελτιστοποίηση Αεροτομών Μέσω της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου.....	ΣΕΛ 11
Υπολογισμός των Παραγώγων Ευαισθησίας	ΣΕΛ 16
Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ	ΣΕΛ 20
Χρήση της Αυτόματης Διαφόρισης	ΣΕΛ 21
Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης	ΣΕΛ 22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
Παραμετροποίηση Αεροτομών	ΣΕΛ 25
Οι Πολυωνυμικές Καμπύλες Bezier	ΣΕΛ 26
Ο Αλγόριθμος του de Casteljau	ΣΕΛ 27
Αναλυτική Εκφραση των Καμπυλών BEZIER	ΣΕΛ 29
Μητρική Γραφή μιας Καμπύλης Bezier	ΣΕΛ 31
Παραδείγματα Αεροτομών με Παραμετροποιήσεις Bezier.....	ΣΕΛ 34
Τα Πολύωνυμα PARSEC	ΣΕΛ 34
Η Παραμετροποίηση PARSEC 11.....	ΣΕΛ 35
Η Παραμετροποίηση PARSEC14.....	ΣΕΛ 41
Η Υπέρθεση των Πολυωνύμων PARSEC11 και Bezier.....	ΣΕΛ 42
Τρόποι Υπέρθεσης των Δύο Παραμετροποιήσεων	ΣΕΛ 47
Παραδείγματα Υπέρθεσης των Παραμετροποιήσεων PARSEC11.....	ΣΕΛ 50
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	
Εφαρμογές και Παρουσίαση Αποτελεσμάτων.....	ΣΕΛ 52
Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς τη NACA0012	ΣΕΛ 54

Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς τη RAE2822	ΣΕΛ 60
Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς την MAN	ΣΕΛ 62
Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς τη <i>VR7</i>	ΣΕΛ 63
Βελτιστοποίηση της αεροτομής RAE2822	ΣΕΛ 64

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα	ΣΕΛ 102
--------------------	----------------

Παράρτημα Α'

A'.1 Η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου	ΣΕΛ 105
A'.2 Η Αυτόματη Διαφόριση και το λογισμικό	ΣΕΛ 107
A'.2.1 Αυτόματη Διαφόριση	ΣΕΛ107
A'.2.2 Το Λογισμικό <i>Odyssee</i>	ΣΕΛ 109
A'.2.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Λογισμικού <i>Odyssee</i>	ΣΕΛ 109
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	ΣΕΛ 115-117

Περίληψη

ΘΕΜΑ:

<< Μελέτη Συζυγούς Τεχνικής για τη βελτιστοποίηση και ανάστροφη σχεδίαση αεροτομών και στροβιλομηχανών με χρήση πολυωνύμων Parsec >>.

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αναφέρεται σε μια μέθοδο βελτιστοποίησης και ανάστροφης σχεδίασης μεμονωμένων αεροτομών, πτερυγίων στροβιλομηχανών. Για την εύρεση της πορείας βελτιστοποίησης και για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας χρησιμοποιούνται οι Συζυγείς Τεχνικές και ειδικότερα η Συνεχής Συζυγής Τεχνική. Η ροή θεωρείται συμπιεστή, μη συνεκτική και διαμορφώνεται μέσω των εξισώσεων Euler. Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στην παραμετροποίηση και τις μεταβλητές σχεδίασης των αεροτομών. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται εκ' νέου οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier οι οποίες στη συνέχεια αντικαθίστανται από τα πολυώνυμα Parsec. Τα Parsec χρησιμοποιούν ως μεταβλητές σχεδίασης γεωμετρικά και αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής. Παρουσιάζεται η ενοποίηση των δύο προηγούμενων παραμέτρων σε μια τεχνική με απώτερο στόχο την μοντελοποίηση αεροτομών με έντονη καμπυλότητα. Επίσης αναφέρεται ο υπολογισμός των μεταβολών χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών τα οποία βρίσκονται στις παραγώγους ευαισθησίας και εφαρμόζονται μέσω των Πεπερασμένων και της Αυτόματης Διαφόρησης. Με αυτόν τον τρόπο η μέθοδος καθίσταται ανεξάρτητη της Παραμετροποίησης. Στο τέλος γίνεται μία παρουσίαση των εφαρμογών της μεθόδου σε προβλήματα στροβιλομηχανών και αεροδυναμικής και έτσι διαπιστώνουμε ποια από τις τρεις παραμέτρους είναι η πιο αξιόπιστη.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η σχεδίαση και βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών αποτελεί εδώ και πάρα πολλά χρόνια, ένα σπουδαίο τμήμα έρευνας της Μηχανικής των Ρευστών. Η ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων οδήγησε πρόσφατα σε σημαντικές εξελίξεις, δίνοντας τεράστια ώθηση στους επιστημονικούς κλάδους της Αεροδυναμικής και των Στροβιλομηχανών.

Τα σημαντικότερα προβλήματα της αεροδυναμικής σχεδίασης αναφέρονται στη βελτιστοποίηση και ανάστροφη σχεδίαση αεροτομών (2D) και πτερυγίων (3D). Ουσιαστικά είναι προβλήματα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μίας συνάρτησης, ως προς κατάλληλα επιλεγμένες μεταβλητές σχεδίασης της αεροτομής. Η συνάρτηση αυτή αποτελεί μέτρο απόδοσης της υπό βελτιστοποίησης αεροτομής και ονομάζεται Συνάρτηση Κόστους. Μερικά παραδείγματα συναρτήσεων κόστους είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας, ο λόγος άνωσης προς οπισθέλκουσα, η διαφορά από μία προκαθορισμένη κατανομή πίεσης και άλλα.

Η επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης αεροτομής καθορίζεται από πολλούς παράγοντες, όπως για παράδειγμα, ο αριθμός παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής, το κόστος υπολογισμού της συνάρτησης κόστους ή την δημιουργικότητα της. Οι σημαντικότεροι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης αεροτομών χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Στις Στοχαστικές Μεθόδους και στις Αιτιοκρατικές Μεθόδους ή Μεθόδους βασισμένες στην κλίση της Αντικειμενικής Συνάρτησης.

Οι αλγόριθμοι που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία, δεν απαιτούν τον υπολογισμό των παραγώγων και χρησιμοποιούν για την εύρεση του βέλτιστου σημείου ευθείς υπολογισμούς της συνάρτησης κόστους. Γι αυτό το λόγο, οι παραπάνω μέθοδοι καλούνται και μέθοδοι Μηδενικής Τάξης. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα των Στοχαστικών Μεθόδων είναι ότι παρέχουν συχνά το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους. Όμως συχνά αντιμετωπίζουν προβλήματα με τις μεταβλητές (π.χ. στο να υπολογίσουν το βέλτιστο αριθμό πτερυγίων μιας στροβιλομηχανής), καθώς αδιαφορούν για την δημιουργικότητα της συνάρτησης κόστους. Παρόλα αυτά, για την

εύρεση του βέλτιστου σημείου, χρειάζονται, στις περισσότερες περιπτώσεις πολλοί υπολογισμοί της συνάρτησης κόστους και πολλοί κύκλοι βελτιστοποίησης, αυτό έχει ως αποτέλεσμα το υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Από την άλλη, οι Αιτιοκρατικές Μέθοδοι χρησιμοποιούν για την προσέγγιση του βέλτιστου σημείου στον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου ή και μεγαλύτερης τάξης της συνάρτησης κόστους. Συγκεκριμένα, στις Αιτιοκρατικές Τεχνικές οι παράγωγοι της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης, που ονομάζονται Παράγωγοι Ευαισθησίας χρησιμεύουν για την ανανέωση και την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους. Επιπρόσθετα το βέλτιστο δεν βρίσκεται πια σε ολόκληρο το πεδίο των πιθανών λύσεων, όπως στις Στοχαστικές Μεθόδους αλλά βρίσκεται πάνω σε μια συγκεκριμένη -διεύθυνση. Παραδείγματος χάρη στην απλούστερη Αιτιοκρατική Μέθοδο, όπου ονομάζεται Απότομη Κάθοδος, το βέλτιστο σημείο βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση που ορίζουν οι Παράγωγοι Ευαισθησίας, καθώς όπως αποδεικνύεται αυτή είναι η διεύθυνση κατά την οποία η συνάρτηση κόστους μειώνεται. Κατά συνέπεια το υπολογιστικό κόστος των Αιτιοκρατικών Μεθόδων είναι κατά πολύ μικρότερο από εκείνο των Στοχαστικών Μεθόδων. Όμως οι Αιτιοκρατικές Τεχνικές δεν καταλήγουν πάντα στο ολικό ελάχιστο, αλλά σε ένα ελάχιστο της συνάρτησης κόστους το οποίο εξαρτάται από τις αρχικές τιμές των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής.

Το μικρό υπολογιστικό κόστος των Αιτιοκρατικών Μεθόδων και η ικανότητα τους να προσφέρουν γρήγορα αποτελέσματα, κέρδισε έδαφος σε σχέση με τις άλλες μεθόδους και χρησιμοποιήθηκε σε πολλές βιομηχανικές εφαρμογές της Αεροδυναμικής. Αρκετοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης και ανάστροφης σχεδίασης αεροτομών που δημιουργούνται διεθνώς αναφέρονται κυρίως σε Αιτιοκρατικές Μεθόδους.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, βασικότερη απαίτηση των Αιτιοκρατικών Μεθόδων, είναι ο προσδιορισμός των Παραγώγων Ευαισθησίας δηλαδή των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης της αεροτομής. Έτσι έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές, η σπουδαιότερη τις Ευθείες Αιτιοκρατικές Τεχνικές, οι οποίες στηρίζονται κυρίως στην εφαρμογή των Πεπερασμένων Διαφορών. Δυστυχώς όταν οι Παράγωγοι Ευαισθησίας υπολογίζονται μέσω των Ευθέων Τεχνικών, το συνολικό κόστος της Αιτιοκρατικής Μεθόδου είναι ανάλογο των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής. Σε πολλές περιπτώσεις λοιπόν το κόστος γίνεται υπερβολικά μεγάλο και μερικές φορές είναι απαγορευτικό.

Για την αποφυγή του μεγάλου υπολογιστικού κόστους οδηγηθήκαμε πρόσφατα στην ανάπτυξη μίας ενδιαφέρουσας, εναλλακτικής προσέγγισης εύρεσης των Παραγώγων Ευαισθησίας. Αναφερόμαστε στην εφαρμογή των Συζυγών Τεχνικών. Σε αυτές τις μεθόδους η συνάρτηση κόστους αυξάνεται με τις εξισώσεις του πεδίου ροής γύρω από την αεροτομή, οι οποίες εισάγονται ως περιορισμός μέσω του διανύσματος των πολλαπλασιαστών Lagrange. Η αρμόζουσα μαθηματική επεξεργασία καταλήγει στο σχηματισμό των λεγόμενων Συζυγών Εξισώσεων. Η επίλυση των προηγούμενων ορίζει το κόστος της Αιτιοκρατικής Μεθόδου ανεξάρτητο του αριθμού των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής. Σε προβλήματα Αεροδυναμικής όπου ο αριθμός των παραμέτρων σχεδίασης είναι πολύ μεγαλύτερος από εκείνον των περιορισμών ή των συναρτήσεων κόστους, οι Συζυγείς Τεχνικές υπερτερούν φανερά έναντι των Ευθέων τεχνικών.

Η εφαρμογή των Συζυγών Εξισώσεων μπορεί να πραγματοποιηθεί τόσο σε ξεχωριστό επίπεδο, όσο και σε συνεχές. Στην πρώτη περίπτωση, η αυξημένη, με τις εξισώσεις της ροής, συνάρτηση κόστους χωρίζεται προτού εφαρμοστεί ο σχηματισμός των Συζυγών Εξισώσεων. Αντίθετα, στη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο, η διαδικασία διαφοροποιείται: πρώτα γίνεται η εφαρμογή των Συζυγών Εξισώσεων μετά έχουμε τον χωρισμό τους. Είναι φανερό ότι οι δύο προηγούμενες παράμετροι δεν ταυτίζονται ακριβώς και οι παράγωγοι που βρίσκονται μέσω της εφαρμογής τους πολλές φορές διαφοροποιούνται.

Ο Antony Jameson ήταν ο πρώτος που διατύπωσε τη θεωρία ελέγχου και πιο συγκεκριμένα τις Συζυγείς Τεχνικές σε εφαρμογές σχεδίασης τόσο σε υποηχητικές, όσο και διηχητικές αεροτομές. Μεταγενέστερα η μέθοδος εξελίχθηκε από τον Jameson αλλά και από άλλους διακεκριμένους μελετητές, όπως οι Giles και Pierce και διατυπώθηκε και στην κατηγορία των τριδιάστατων εφαρμογών που αναλύονται δια μέσου των εξισώσεων Euler και Navier-Stokes. Επιπροσθέτως, οι Anderson και Venkatakrishnan χρησιμοποίησαν τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο σε μη συνεκτικό κώδικα Navier-Stokes για μη δομημένα πλέγματα.

Γενικότερα, έχει αναπτυχθεί μία Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για τη βελτιστοποίηση αεροτομών σε περιπτώσεις συμπιεστής ροής. Επιπλέον, λύθηκαν αρκετά προβλήματα και έτσι επανασχεδιάστηκε η αεροτομή RAE2822 σε διηχητικές συνθήκες ροής, με απώτερο στόχο την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας.

Η παρούσα πτυχιακή αναφέρεται στην ανάστροφη σχεδίαση και βελτιστοποίηση συγκεκριμένων αεροτομών και πτερυγίων στροβιλομηχανών με την εφαρμογή της

Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου. Οι βασικές εφαρμογές που χρησιμοποιούνται είναι δύο:

1.ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ: Γενικά χρησιμοποιούνταν η τεχνική των πολυωνυμικών καμπυλών Bezier. Όμως για την βελτιστοποίηση αεροτομών η παραμετροποίηση κατέχει έναν από τους βασικότερους ρόλους, επειδή επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό παράγοντες σημαντικούς, όπως η ακρίβεια εύρεσης του βέλτιστου σημείου και το υπολογιστικό κόστος. Με σκοπό την εύρεση της τεχνικής και των παραμέτρων σχεδίασης, οι οποίες ανάγουν την διαδικασία της βελτιστοποίησης και καταλήγουν σε ακριβέστερα και ταχύτερα αποτελέσματα, εφαρμόζονται στη μέθοδο νέες τεχνικές παραμετροποίησης αεροτομών. Έτσι λοιπόν στην θέση των πολυωνυμικών καμπυλών Bezier, εισάγονται τα πολυώνυμα PARSEC. Πρόκειται για μία παραμετροποίηση, η οποία χρησιμοποιεί ως μεταβλητές σχεδίασης γεωμετρικές ποσότητες της αεροτομής με ιδιαίτερη φυσική σημασία. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται ο αποτελεσματικός έλεγχος των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών της αεροτομής, ενώ ο αριθμός των παραμέτρων σχεδίασης παραμένει σε χαμηλά επίπεδα. Επιπλέον τα πολυώνυμα PARSEC θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων εσωτερικής αεροδυναμικής δηλαδή για την παραμετροποίηση αεροτομών στροβιλομηχανών. Επιπροσθέτως αναπτύσσεται η υπέρθεση των δύο προηγούμενων παραμετροποιήσεων (PARSEC και Bezier) αποσκοπώντας στην ανάμειξη των πλεονεκτημάτων τους έτσι ώστε να μπορούν να σχεδιαστούν αεροτομές με καμπυλότητα.

2.ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ: Η δεύτερη τεχνική που επιλύεται στην παρούσα πτυχιακή εργασία αναφέρεται στην δημιουργία μίας μεθόδου όπου δεν θα χρειάζεται η ανάπτυξη αναλυτικών εκφράσεων για την εύρεση χαρακτηριστικών μεταβολών γεωμετρικών ποσοτήτων, οι οποίες εμπεριέχονται στον υπολογισμό των Παραγώγων Ευαισθησίας. Συγκεκριμένα τα πολυώνυμα Bezier καθιστούν εφικτή την ανάπτυξη αναλυτικών μορφών για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών γεωμετρικών ποσοτήτων, ο υπολογισμός αυτών μας οδηγεί στον τελικό υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Αυτό όμως δεν συμβαίνει σε όλες τις παραμετροποιήσεις, όπως συμβαίνει στα πολυώνυμα PARSEC. Γενικά στις μεθόδους των Πεπερασμένων Διαφορών και της Αυτόματης Διαφόρισης επιτυγχάνεται η ανεξαρτητοποίηση της από τις παραμέτρους σχεδίασης της αεροτομής και γίνεται εφικτή η δημιουργία γενικών αλγόριθμων.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν στη συνέχεια της εργασίας αναλύουν τα παρακάτω θέματα:

-Στο κεφάλαιο 2, παρουσιάζεται η μαθηματική ανάλυση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου. Ειδικότερα, επεξηγείτε ο τρόπος σχηματισμού και επίλυσης των Συζυγών Εξισώσεων, καθώς και η διαδικασία υπολογισμού των Παραγώγων Ευαισθησίας. Επιπλέον γίνεται μία εκτενής αναφορά στην διαδικασία βελτιστοποίησης αεροτομών μέσω της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις σημαντικότερες διαφορές της με τον υπολογισμό των Παραγώγων Ευαισθησίας μέσω των Πεπερασμένων Διαφορών.

-Στο κεφάλαιο 3, αναφέρονται οι τρεις τεχνικές που εφαρμόζονται στην διαδικασία παραμετροποίησης των αεροτομών. Περιγράφονται λεπτομερώς τα μαθηματικά τους μοντέλα και δίνεται έμφαση στις ιδιαιτερότητες των παραμέτρων σχεδίασης που χρησιμοποιούν. Επιπρόσθετα, κάθε παραμετροποίηση συνοδεύεται από εμφανή παραδείγματα.

-Στο κεφάλαιο 4, αναλύονται τρεις διαφορετικές, αντιπροσωπευτικές εφαρμογές του αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Οι εφαρμογές αυτές αναδεικνύουν τις ικανότητες της Συζυγούς Μεθόδου και αποτελούν κριτήριο σύγκρισης και αξιολόγησης μεταξύ των τριών παραμετροποιήσεων.

-Τέλος στο κεφάλαιο 5, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα καθώς και τα σχόλια και οι παρατηρήσεις από τη θεωρητική και υπολογιστική προσέγγιση της βελτιστοποίησης και ανάστροφης σχεδίασης των αεροτομών με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο αλλά και με τη μελέτη της παραμετροποίησης PARSEC.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βελτιστοποίηση Αεροτομών Μέσω της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Το κυριότερο σημείο για την εφαρμογή μίας Αιτιοκρατικής Μεθόδου βελτιστοποίησης αεροτομών, είναι η εύρεση των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης της αεροτομής δηλαδή των Παραγώγων Ευαισθησίας. Η πιο εύχρηστη τεχνική του παραπάνω υπολογισμού είναι οι Ευθείες Τεχνικές και συγκεκριμένα η απλή μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών όπου είναι ανάλογο του αριθμού των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής. Η πρακτικότητα τους σε δύσκολες εφαρμογές τα καθιστά απαγορευτικά προς χρήση διότι είναι συχνά χρονοβόρα. Έτσι λοιπόν η χρήση μίας σύντομης και αποτελεσματικής μεθόδου είναι επιτακτική στις σύγχρονες βιομηχανίες και εφαρμογές της αεροδυναμικής και της στροβιλομηχανικής.

Η λύση δόθηκε με την διατύπωση των Συζυγών Τεχνικών. Οι Συζυγείς Τεχνικές είναι μέθοδοι υπολογισμού παραγώγων και αποτελούν την εφαρμογή της θεωρίας ελέγχου. Βασικό χαρακτηριστικό τους είναι ότι με την πρόσθεση των εξισώσεων του πεδίου της ροής στη συνάρτηση κόστους και με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία πετυχαίνουμε την απεξάρτηση του κόστους του αλγόριθμου βελτιστοποίησης από τις παραμέτρους σχεδίασης της αεροτομής. Όποτε πετυχαίνουμε αποτελέσματα με μεγάλη ακρίβεια και με μικρό υπολογιστικό κόστος σε σύγκριση με τις Ευθείες Μεθόδους.

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύεται διεξοδικά η βελτιστοποίηση αεροτομών με τη χρήση της Συνεχούς Συζυγής Μεθόδου. Αρχικά αναλύονται οι Συζυγείς Εξισώσεις και οι συνοριακές τους συνθήκες για την ανάστροφη σχεδίαση αεροτομών και ως συνάρτηση κόστους ορίζεται η διαφορά από μία καθορισμένη κατανομή πίεσης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βήματα επίλυσης των Συζυγών Εξισώσεων και αναλύεται πλήρως η διαδικασία όπου μας οδηγεί στην τελική εξίσωση όπου προσδιορίζονται οι Παράγωγοι Ευαισθησίας. Η προηγούμενη εξίσωση για την επίλυση της απαιτεί την εύρεση της μεταβολής χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών της αεροτομής, τα οποία σχετίζονται με την παραμετροποίηση. Για την εύρεση αυτών παλαιότερα χρησιμοποιούνταν αναλυτικές εκφράσεις σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο τεχνικές στις οποίες οι υπολογισμοί είναι ανεξάρτητοι

της παραμετροποίησης. Οι τεχνικές αυτές είναι οι Πεπερασμένες Διαφορές και η Αυτόματη Διαφόριση.

2.1 Σχηματισμος

Το πρώτο στάδιο για τον σχηματισμό των Συζυγών Εξισώσεων είναι το άθροισμα των εξισώσεων της ροής στην συνάρτηση κόστους I_c , μέσω ενός διανύσματος μεταβλητών, σαν τους πολλαπλασιαστές Langrange. Απορρέει από αυτήν την εφαρμογή η επαυξημένη συνάρτηση κόστους, όπου χαρακτηρίζεται ως I_{aug} και παρουσιάζεται μέσω της εξίσωσης:

$$I_{aug} = I_c + \int_{\Omega} (\underline{\Psi}, \underline{R}) d\Omega$$

Όπου το $\underline{\Psi}^T = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4]$ είναι το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange, \underline{R} το διάνυσμα των εξισώσεων της ροής και Ω το υπολογιστικό χωρίο.

Επιπροσθέτως ο συμβολισμός $(\underline{\Psi}, \underline{R})$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.

Η ροή μοντελοποιείται στην παραπάνω ανάλυση με τις εξισώσεις Euler, οι οποίες διατυπώνουν τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας του συμπιεστού, μη συνεκτικού ρευστού. Η διανυσματική, μορφή τους για διδιάστατη ροή είναι: \underline{G}

$$(2.2) \quad \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial y} = \underline{r}$$

Όπου $\underline{Q} = (r, ru, rU, E)^T$ το μητρώο των συντηρητικών μεταβλητών, ρ η πυκνότητα, u και U οι συνιστώσες της ταχύτητας και E η ολική ενέργεια του ρευστού ανά μονάδα όγκου. Τα διανύσματα της μη συνεκτικής ροής \underline{F} και \underline{G} στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα, οριοθετούνται ως εξής:

$$(2.3) \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} ru \\ ru^2 + p \\ ruU \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} rU \\ ruU \\ rU^2 + p \\ U(E + p) \end{bmatrix}$$

Όπου p η πίεση του ρευστού. Οι προηγούμενες εξισώσεις ολοκληρώνονται με την καταστατική εξίσωση:

$$(2.4) \quad p = \rho RgT$$

Όπου Rg η σταθερά του τελείου αερίου.

Ως συνάρτηση κόστους προτιμάτε στην συγκεκριμένη ανάλυση, η επίτευξη μίας ορισμένης κατανομής πίεσης p_t ($t = \text{target}$), συνάρτηση που αξιοποιείται συνήθως σε εφαρμογές ανάστροφης σχεδίασης αεροτομών. Ειδικότερα:

$$(2.5) \quad I_c(\mathbf{Q}, D) = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 ds$$

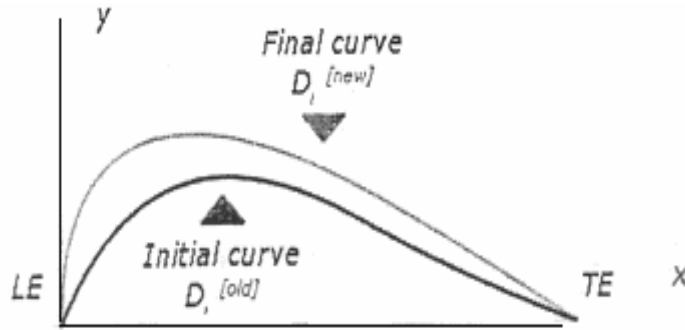
Όπου \mathbf{D} το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδίασης της αεροτομής, το οποίο προσδιορίζεται από την εκάστοτε τεχνική παραμετροποίησης. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 2.2 και 2.5 στην εξίσωση 2.1 έχουμε:

$$(2.6) \quad I_{aug}(\mathbf{Q}, D, \Psi) = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 ds + \int_{\Omega} \Psi^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) d\Omega$$

Και εφαρμόζοντας το θεώρημα Green καταλήγουμε στην τελική μορφή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους:

$$I_{aug}(\mathbf{Q}, D, \Psi) = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 ds - \int_{\Omega} \left(F^T \frac{\partial \Psi}{\partial x} + G^T \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\Omega + \int_s \Psi^T (n_x F + n_y G) ds \quad (2.7)$$

όπου $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο στερεό τοίχωμα s (περίγραμμα αεροτομής).



Σχήμα 2.1: Αλλαγή του αρχικού περιγράμματος της πλευράς υποπίεσης αεροτομής η οποία γίνεται λόγω της αλλαγής της στοιχειώδους σχεδίασης των παραμέτρων κατά $\delta D_i = D_i^{new} - D_i^{old}$

Το δεύτερο στάδιο για την θεμελίωση των Συζυγών Εξισώσεων, είναι η εκτέλεση του λογισμικού των Στοιχειωδών Μεταβολών όπως φαίνονται στο σχήμα 2.1. Η διεργασία αρχίζει με τη μεταβολή των παραμέτρων σχεδίασης D_i της αεροτομής και μεταβάλλει τις τιμές των μεγεθών της ροής, παραδείγματος χάρη την κατανομή πίεσης. Έτσι παρουσιάζονται στοιχειώδεις μεταβολές και στα τρία επιμέρους μέρη της επαυξημένης συνάρτησης κόστους (A,B,C). Οι μεταβολές αυτές είναι ίσες με:

$$d[A] = d\left[\frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 ds\right] = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 d(ds) + \int_s (p - p_t) d(p) ds \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} d[B] &= d\left[\int_{\Omega} \left(F^T \frac{\partial \Psi}{\partial x} + G^T \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\Omega\right] \\ &= d\left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} (A^T U) + (B^T U) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\Omega\right] \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} A^T + B^T \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d(U) d\Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

(όπου A^T και B^T τα ανάστροφα μητρώα ροής) έτσι έχουμε:

$$d[C] = d\left[\int_s \Psi^T (n_x F + n_y G) ds\right]$$

$$\begin{aligned}
&= (\text{Euler boundary condition : } \left[\begin{matrix} \mathbf{u}^T \mathbf{n} \end{matrix} \right]_s = 0) \\
&= d \left[\int_s (\Psi_2 n_x p + \Psi_3 n_y p) ds \right] \\
&= \int_s (\Psi_2 n_x + \Psi_3 n_y) d(p) ds + \int_s p (\Psi_2 d(n_x ds) + \Psi_3 d(n_y ds))
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Συνεπώς, η στοιχειώδης μεταβολή του διανύσματος των συντελεστών σχεδίασης κατά $d\mathbf{D}$ προξενεί μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους και ισούται με:

$$\begin{aligned}
dI_{aug} &= \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 d(ds) + \int_s (p - p_t) d(p) ds \\
&\quad - \int_{\Omega} \left(\mathbf{u}^T \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d(\mathbf{U}) d\Omega \\
&\quad + \int_s (\Psi_2 n_x + \Psi_3 n_y) d(p) ds + \int_s p (\Psi_2 d(n_x ds) + \Psi_3 d(n_y ds))
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Σκοπός των Συζυγών Τεχνικών είναι η αυτονόμηση των ποσοτήτων της ροής από τις μεταβολές των παραμέτρων σχεδίασης. Έτσι λοιπόν το υπολογιστικό κόστος ορίζεται αυτόματα αυτόνομο του αριθμού των παραμέτρων σχεδίασης. Εξετάζοντας την παραπάνω εξίσωση αντιλαμβανόμαστε ότι ο μηδενισμός των όρων με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι ποσότητες $d(p)$ και $d(\mathbf{U})$ εκπληρώνει την προηγούμενη αξίωση. Έτσι προέρχονται οι Συζυγείς Εξισώσεις, όπου παρουσιάζονται μέσω της σχέσης:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \left(\mathbf{u}^T \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0 \tag{2.12}$$

ενώ οι συνοριακές συνθήκες προέρχονται καθορίζοντας τα στερεά τοιχώματα:

$$(p - p_t) d(p) + (\Psi_2 n_x + \Psi_3 n_y) d(p) \Big|_s = 0 \rightarrow \Psi_2 n_x + \Psi_3 n_y = p_t - p \tag{2.13}$$

και στην είσοδο και έξοδο του υπολογιστικού χωρίου:

$$\Psi_{\infty} = 0 \quad (2.14)$$

Αρμόζει να επισημανθεί, ότι ο αρχικός χρονικός όρος της εξίσωσης 2.12 δεν συνάγεται από κανένα βήμα της προηγούμενης μαθηματικής διαδικασίας. Καθώς, είναι απαραίτητη η εισαγωγή ενός ψευδοχρόνου έτσι ώστε να λυθούν υπολογιστικά οι Συζυγείς Εξισώσεις. Ουσιαστικά οι Συζυγείς εξισώσεις απαρτίζουν ένα υπερβολικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων ίδιο με εκείνο των εξισώσεων Euler, αλλά με αντίθετες ιδιοτιμές. Συνεπώς οι εξισώσεις 2.2 και 2.12 μπορούν να λυθούν μέσω του ίδιου του αλγόριθμου. Οι μόνες διαφορές σχετίζονται με τις συνοριακές συνθήκες. Αξίζει να σημειωθεί ότι η επίλυση των εξισώσεων Euler προηγείται της επίλυσης των Συζυγών Εξισώσεων αφού για της δεύτερες είναι αναγκαία η γνώση των μητρών ροής, $\overline{\mathbf{A}}^T$ και $\overline{\mathbf{B}}^T$ τα οποία συγκροτούνται από ποσότητες της ροής καθώς και της διαφοράς $p - p_t$, όπου αναμειγνύεται στις συνοριακές συνθήκες.

2.2

Υπολογισμός των Παραγώγων Ευαισθησίας

Η ανεύρεση του διανύσματος $\overline{\Psi}$ που εκπληρώνει τις Συζυγείς Εξισώσεις 2.12 και τις συνοριακές συνθήκες 2.13, καταλήγει στην απαλοιφή μερικών όρων της σχέσης 2.11. Οι απομείνοντες όροι αναφέρονται στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας και συνιστούν τη καινούργια μορφή της στοιχειώδους μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης κόστους:

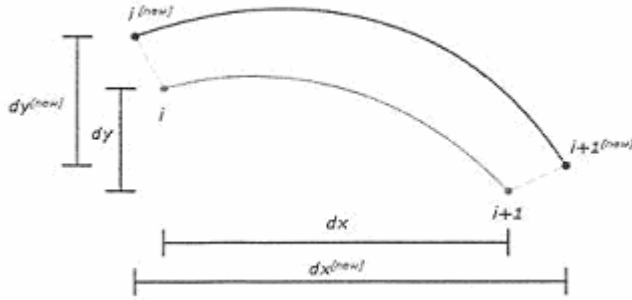
$$dI_{aug} = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 d(ds) + \int_s p [\Psi_2 d(n_c ds) + \Psi_3 d(n_y ds)] \quad (2.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του μοναδιαίου, κάθετου στην επιφάνεια διανύσματος $\hat{n} = (n_c, n_y)$. Ειδικότερα:

$$\mathbf{r}_{nds} = (n_c ds, n_y ds) = \left(\frac{dy}{ds} ds - \frac{dc}{ds} ds \right) = (dy - dc) \quad (2.16)$$

όπου dx , dy και ds , αντιπροσωπευτικές γεωμετρικές αποστάσεις μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του περιγράμματος της αεροτομής, τα οποία φαίνονται στο σχήμα 2.2. Έτσι λοιπόν, η εξίσωση 2.15 γίνεται:

$$dI_{aug} = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 d(ds) + \int_s p (\Psi_2 d(dy) + \Psi_3 d(-dx)) \quad (2.17)$$



Σχήμα 2.2: Χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων της αρχικής αεροτομής καθώς και της αεροτομής που προκύπτει μετά τη στοιχειώδη μεταβολή των παραμέτρων σχεδίασης κατά dD_i . Έπειτα προκειμένου να εισαχθεί το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδίασης στους υπολογισμούς, θέτεται σε εφαρμογή άλλη μια φορά ο κανόνας αλυσίδας και οι μεταβολές $d(dx)$, $d(dy)$ και $d(ds)$ γράφονται πλέον ως:

$$\begin{aligned} d(dx) &= \sum \frac{\partial dx}{\partial D_i} dD_i \\ d(dy) &= \sum \frac{\partial dy}{\partial D_i} dD_i \\ d(ds) &= \sum \frac{\partial ds}{\partial D_i} dD_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

Κατά συνέπεια, η dI_{aug} γίνεται:

$$dI_{aug} = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 \sum \frac{\partial ds}{\partial D_c} dD_i + \int_s p \left(\Psi_2 \sum \frac{\partial dy}{\partial D_i} dD_i - \Psi_3 \sum \frac{\partial dx}{\partial D_i} dD_i \right) \quad (2.19)$$

και διαιρώντας και τα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης, με το dD_i , πηγάζει η τελική εξίσωση από την οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας. Οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial I_{aug}}{\partial D_i} = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 \sum \frac{\partial ds}{\partial D_i} + \int_s p \left(\Psi_2 \sum \frac{\partial dy}{\partial D_i} - \Psi_3 \sum \frac{\partial dc}{\partial D_i} \right) \quad (2.20)$$

Οι μοναδικοί άγνωστοι της εξίσωσης 2.20 είναι οι μερικοί παράγωγοι των γεωμετρικών μεγεθών dc, dy και ds όσο αφορά τις μεταβλητές σχεδίασης D_i της αεροτομής. Η εξέταση αυτών των μεγεθών στην ως τώρα πορεία βασίζονταν στην ανάπτυξη των αναλυτικών τους εκφράσεων. Ειδικότερα η παραμετροποίηση των αεροτομών γίνονταν αποκλειστικά μέσω των πολυωνυμικών καμπύλων Bezier-Bernstein, η μαθηματική έκφραση των οποίων είναι:

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{i=0}^N X_i C_i(t) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^N Y_i C_i(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου X_i και Y_i οι συντεταγμένες μίας ομάδας σημείων ελέγχου, οι οποίες συνιστούν τις παραμέτρους σχεδίασης της αεροτομής. Είναι αυτονόητο, ότι η μη πεπλεγμένη μορφή των πολυωνύμων Bezier, επιδέχεται, αρκετά εύκολα τον σχηματισμό των αναλυτικών εκφράσεων των παραγώγων $\frac{\partial dx}{\partial D_i}$, $\frac{\partial dy}{\partial D_i}$ και $\frac{\partial ds}{\partial D_i}$, οι οποίες καταλήγουν στον οριστικό υπολογισμό των Παραγώγων Ευαισθησίας. Ειδικότερα:

$$d(dx) = d \left[\frac{dx}{dt} \right] dt = \sum_{i=0}^N dX_i \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (2.22)$$

$$d(dy) = d \left[\frac{dy}{dt} \right] dt = \sum_{i=0}^N dY_i \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (2.23)$$

$$d(ds) = d \left[\frac{ds}{dt} \right] dt = - \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \sum_{i=0}^N dX_i \frac{dC_i(t)}{dt} + \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \sum_{i=0}^N dY_i \frac{dC_i(t)}{dt}$$

(2.24)

Εφόσον το περίγραμμα παραμετροποιείται με τις καμπύλες Bezier, ο υπολογισμός των Παραγώγων Ευαισθησίας, συνίσταται στον σχηματισμό των προηγούμενων αναλυτικών εκφράσεων, οι οποίες προσφέρουν αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας. Επιπλέον η προηγούμενη εφαρμογή έχει αρκετά μειονεκτήματα και περιορισμούς

κατά την εφαρμογή της, όπου γίνονται αισθητοί όταν προσπαθούμε να εισάγουμε νέες τεχνικές παραμετροποίησης αντί των καμπυλών Bezier κατά την βελτιστοποίηση. Τα βασικότερα μειονεκτήματα είναι τα εξής:

Η ανάλυση των αναλυτικών εκφράσεων των παραγώγων των γεωμετρικών μεγεθών όσο αφορά τις παραμέτρους σχεδίασης δεν είναι εφικτή σε όλες τις τεχνικές παραμετροποίησης.

Ο σχηματισμός των αναλυτικών εκφράσεων, είναι μία επίπονη και δυσχερής διαδικασία.

Η μέθοδος στερείται γενικότητας, αφού σε κάθε αλλαγή της παραμετροποίησης χρειάζεται επανάληψη των πράξεων για το σχηματισμό των αναλυτικών εκφράσεων των παραγώγων.

Στην εργασία επιχειρείται η εφαρμογή μιας άλλης παραμετροποίησης των πολυωνύμων PARSEC. Η απλούστερη μορφή τους είναι:

$$y(x) = \sum_{i=1}^6 a_i x^{i-\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

όπου a_i ($i = 1, \dots, 6$) πραγματικοί συντελεστές. Οι παράμετροι σχεδίασης της παραμετροποίησης PARSEC δεν είναι οι συντελεστές a_i της προηγούμενης εξίσωσης, αλλά γεωμετρικά και αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής, όπου αποτελούν τους συντελεστές ενός συστήματος, όπου με τη χρήση του προέρχονται οι a_i έπειτα το τελικό περίγραμμα της αεροτομής. Είναι φανερό, ότι σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι εφικτός ο σχηματισμός των αναλυτικών εκφράσεων των παραγώγων των γεωμετρικών μεγεθών ως προς τις παραμέτρους σχεδίασης. Χρειάζεται λοιπόν η λύση του προβλήματος με τη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την λύση του παραπάνω προβλήματος είναι:

Η χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών.

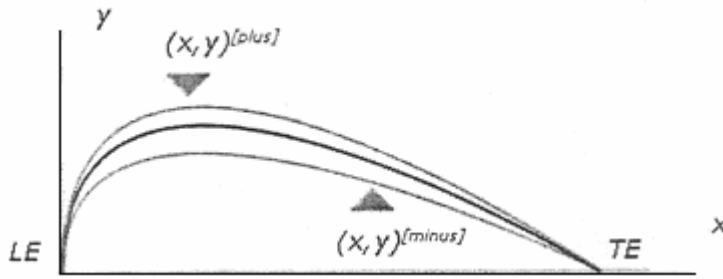
Η χρήση της Αυτόματης Διαφόρισης και συγκεκριμένα του λογισμικού *Odyssee*.

2.2.1 Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΈΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Η τεχνική των Πεπερασμένων Διαφορών εφαρμόζεται συχνά και χαρακτηρίζεται για την απλότητα της. Το πρώτο στάδιο για την εφαρμογή της στην παρούσα περίπτωση, είναι η μικρή μεταβολή των παραμέτρων σχεδίασης κατά μία ποσότητα $+e$ όπου παραδείγματος χάρη $e : 10^{-7}$. Οι νέες μεταβλητές σχεδίασης παρέχεται με την εφαρμογή της εξίσωσης:

$$D_i^{plus} = D_i + eD_i^{minus} = D_i + e \quad (2.26)$$

Έτσι λοιπόν πηγάζουν δύο νέα περιγράμματα αεροτομών, με γνωστές συντεταγμένες (x^{plus}, y^{plus}) και (x^{minus}, y^{minus}) , τα οποία παρίστανται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Περιγράμματα της πλευράς υποπίεσης της αεροτομής, τα οποία προκύπτουν λόγω μεταβολής των παραμέτρων σχεδίασης D_i , κατά $\pm e$. Η εύρεση των παραγώγων είναι από εδώ και πέρα εύκολη υπόθεση. Με χρήση της θεωρίας των Πεπερασμένων Διαφορών με ακρίβεια δεύτερης τάξης, για κάθε κόμβο i του περιγράμματος της αεροτομής, έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial dx(i)}{\partial D_i} &= \frac{dx^{plus}(i) - dx^{minus}(i)}{D_i^{plus} - D_i^{minus}} = \frac{dx^{plus}(i) - dx^{minus}(i)}{2e} \\ \frac{\partial dy(i)}{\partial D_i} &= \frac{dy^{plus}(i) - dy^{minus}(i)}{2e} \\ \frac{\partial ds(i)}{\partial D_i} &= \frac{ds^{plus}(i) - ds^{minus}(i)}{2e} \end{aligned} \quad (2.27)$$

όπου:

$$\begin{aligned} dx^*(i) &= c^*(i+1) - c^*(i) \\ dy^*(i) &= y^*(i+1) - y^*(i) \\ ds^*(i) &= \sqrt{dx^{*2}(i) + dy^{*2}(i)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

με * = plus ή minus ανάλογα.

Από τις προηγούμενες εξισώσεις κατανοείται, ότι η εφαρμογή των Πεπερασμένων Διαφορών είναι ένα πρακτικό, υπολογιστικά απλό και για τη συγκεκριμένη περίπτωση, μια αρκετά γρήγορη μέθοδο. Επιπρόσθετα, ορίζει τον αλγόριθμο γενικό, εφόσον δεν χρειάζεται την ανάπτυξη των αναλυτικών εκφράσεων. Περικλείει όμως δύο μειονεκτήματα:

Εμπεριέχει σχεδόν πάντα σφάλμα στους υπολογισμούς με επακόλουθο η αξιοπιστία της πολλές φορές να αμφισβητείται και επιπλέον, σε εφαρμογές με μεγάλη γκάμα παραμέτρων, το υπολογιστικό της κόστος επιβαρύνεται αρκετά.

2.2.2

Χρήση της Αυτόματης Διαφόρισης

Μία σύγχρονη μέθοδος υπολογισμού παραγώγων, επαρκής να υπερβεί τα προηγούμενα μειονεκτήματα των Πεπερασμένων Διαφορών, είναι η Αυτόματη Διαφόριση, και ειδικότερα το λογισμικό *Odyssee*. Ουσιαστικά είναι μία καινοτόμος μέθοδος υπολογισμού παραγώγων συναρτήσεων, όπου δεν παρέχουν πάντα εμπειριστατωμένα, αλλά διαμορφώνονται με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων. Η Αυτόματη Διαφόριση και οι επισημάνσεις του λογισμικού *Odyssee* αναλύονται διεξοδικά στην εργασία. Επιβάλλεται να τονιστούν τα δύο βασικά στάδια

της μεθόδου για την εύρεση των παραγώγων $\frac{\partial dx}{\partial D_i}$, $\frac{\partial dy}{\partial D_i}$ και $\frac{\partial ds}{\partial D_i}$. Στο πρώτο στάδιο δημιουργείται ο κώδικας της τεχνικής παραμετροποίησης (σε Fortran77 αφού θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό *Odyssee*), από το οποίο υπολογίζονται οι συντεταγμένες του περιγράμματος της αεροτομής. Έπειτα, εισάγεται στο λογισμικό *Odyssee* το προηγούμενο πρόγραμμα, διαμορφώνοντας ταυτόχρονα ως ορίσματα εισόδου τις μεταβλητές σχεδίασης της αεροτομής και τις γεωμετρικές ποσότητες dx, dy και ds . Αυτόματα το λογισμικό *Odyssee* μας παρουσιάζει έναν νέο κώδικα, όπου με την πληκτρολόγηση λίγων εντολών υπολογίζει τις παραγώγους των παραπάνω γεωμετρικών ποσοτήτων.

Είναι φανερό, ότι το υπολογιστικό κόστος εκτέλεσης της υπορουτίνας που μας παρουσιάζει το *Odyssee* είναι ανάλογο με εκείνο των αναλυτικών εκφράσεων και κατά

συνέπεια μικρό, συγκρινόμενο με το υπολογιστικό κόστος των Πεπερασμένων Διαφορών. Επιπρόσθετος πρόκειται για μια μέθοδο όπου προσφέρει αποτελέσματα υψηλής ακρίβειας και είναι γενική, αφού είναι ανεξάρτητη της παραμετροποίησης και δεν απαιτεί υπολογισμούς αναλυτικών εκφράσεων.

2.3

Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

Η ανανέωση των τιμών των παραμέτρων σχεδίασης υλοποιείται μέσω της Απότομης Καθόδου. Ειδικότερα, οι νέες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης θα δίνονται στο τέλος κάθε κύκλου βελτιστοποίησης από τη σχέση:

$$D_i^{new} = D_i^{old} - n_i \frac{\partial I_{aug}}{\partial D_i} \quad (2.29)$$

όπου n_i το θετικό βήμα της εκάστοτε παραμέτρου σχεδίασης, που επιλέγεται για τη μετακίνηση πάνω στην κατεύθυνση βελτιστοποίησης.

Ανακεφαλαιώνοντας την ως τώρα μαθηματική πορεία και ανάλυση η συνολική διαδικασία της βελτιστοποίησης και της ανάστροφης σχεδίασης αεροτομών με τη βοήθεια της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου έχει ως εξής:

Επιλέγεται η κατάλληλη συνάρτηση κόστους

Αναζητείται η κατάλληλη τεχνική παραμετροποίησης και ένα αρχικό διάνυσμα παραμέτρων σχεδίασης \vec{D} και σχεδιάζεται το περίγραμμα της αεροτομής.

Δημιουργείται μη δομημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή.

Λύνονται οι εξισώσεις Euler.

Λύνονται οι συζυγείς εξισώσεις με οριακές συνθήκες τη σχέση 2.13 στο στερεό τοίχωμα και την $Y = 0$ στο άπειρο.

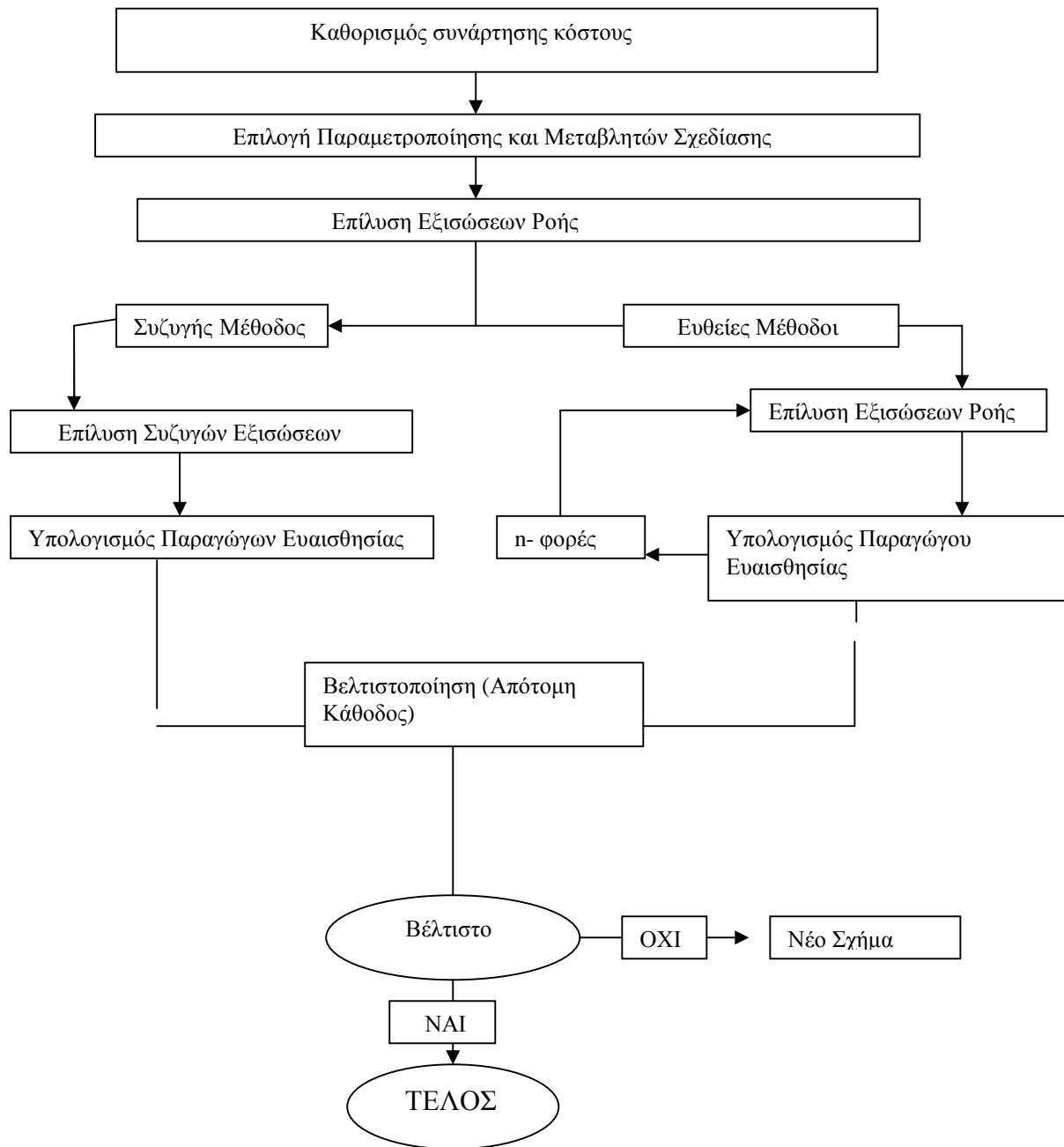
Υπολογίζονται οι παράγωγοι των μεταβολών των γεωμετρικών ποσοτήτων dx , dy και ds ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης είτε μέσω των Πεπερασμένων Διαφορών είτε μέσω της Αυτόματης Διαφόρισης.

Υπολογίζονται οι Παράγωγοι Ευαισθησίας, δηλαδή οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης της αεροτομής.

Αναμορφώνονται οι τιμές των παραμέτρων σχεδίασης μέσω της Απότομης Καθόδου.

Αναμορφώνεται το περίγραμμα της αεροτομής και επαναλαμβάνονται τα στάδια 3 ως 8 μέχρι να πετύχουμε τον επιθυμητό βαθμό σύγκλισης.

Στο σχήμα 2.4 αναπαριστούνται τα χαρακτηριστικά στάδια του προηγούμενου αλγόριθμου, σε άμεση αντιπαράθεση με τα στάδια βελτιστοποίησης με τη χρήση των Ευθέων Μεθόδων. Είναι φανερό, ότι το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου βελτιστοποίησης στην περίπτωση της Συζυγούς Τεχνικής, είναι βασικά το κόστος λύσης των εξισώσεων Euler και μιας επίλυσης των Συζυγών Εξισώσεων. Αντίθετα το κόστος εφαρμογής των Ευθέων Τεχνικών και συγκεκριμένα του υπολογισμού των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης με την εφαρμογή των Πεπερασμένων Διαφορών, απορρέει από την λύση των εξισώσεων της ροής n -φορές, όπου n ο αριθμός των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής. Είναι εμφανές, ότι οι Συζυγείς Τεχνικές όντας ανεξάρτητες του αριθμού των ελεύθερων παραμέτρων, είναι αποτελεσματικότερες και ταχύτερες σε πρακτικές εφαρμογές αεροδυναμικής σχεδίασης με πολλές παραμέτρους, έναντι των Ευθέων Μεθόδων.



Σχήμα 2.4: Σύγκριση μεταξύ του αλγόριθμου βελτιστοποίησης αεροτομών μέσω των Συζυγών Μεθόδων και μέσω των Πεπερασμένων Διαφορών.

Κεφάλαιο 3

Παραμετροποίηση Αεροτομών

Σε μία μέθοδο βελτιστοποίησης και αντίστροφης σχεδίασης αεροτομών, η παραμετροποίηση των περιγραμμάτων τους κατέχει έναν από τους βασικότερους ρόλους. Σημαντικοί παράγοντες, όπως η ακρίβεια εύρεσης του βέλτιστου σημείου και το υπολογιστικό κόστος, καθορίζονται άμεσα από το μαθηματικό μοντέλο και τις μεταβλητές σχεδίασης που επιλέγονται για την παραμετροποίηση των αεροτομών. Κατά συνέπεια, η επιλογή της κατάλληλης τεχνικής παραμετροποίησης αποτελεί πάντοτε βασικό ζητούμενο του προβλήματος βελτιστοποίησης και στηρίζεται σε σαφώς καθορισμένα κριτήρια και απαιτήσεις. Οι σημαντικότερες από τις απαιτήσεις αυτές είναι:

- Αυξημένη ευελιξία, έτσι ώστε να καλύπτεται ο χώρος αναζήτησης του βέλτιστου σημείου στο μέγιστο δυνατό βαθμό, επιτρέποντας την εμφάνιση ακόμα και 'μη παραδοσιακών' λύσεων.
- Όσο το δυνατό μικρότερος αριθμός παραμέτρων σχεδίασης, με αποτέλεσμα τον περιορισμό του πεδίου των πιθανών λύσεων και κατ' επέκταση μείωση του χρόνου αναζήτησης της βέλτιστης λύσης.
- Έλλειψη ασυνεχειών της κλίσης της συνάρτησης της καμπύλης ή της επιφάνειας, οι οποίες οφείλονται σε τοπικές προσεγγίσεις ή σε μοντέλα υπέρθεσης.
- Εξαίρεση παραμέτρων σχεδίασης, οι οποίες επιδρούν ελάχιστα στην αεροδυναμική απόδοση του σχήματος, διότι δημιουργούν υπολογιστικό θόρυβο και καθυστερούν τη σύγκλιση της μεθόδου.

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσονται και χρησιμοποιούνται τρεις διαφορετικοί τρόποι παραμετροποίησης αεροτομών. Κύριος στόχος είναι η εύρεση του καταλληλότερου μαθηματικού μοντέλου, η εύρεση δηλαδή της παραμετροποίησης που προάγει τη διαδικασία της βελτιστοποίησης και οδηγεί σε ακριβέστερα και ταχύτερα αποτελέσματα.

Αρχικά λοιπόν, για την παραμετροποίηση των υπό βελτιστοποίηση αεροτομών, επιλέγονται οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier[1]. Πρόκειται για ένα απλό, εύχρηστο και ιδιαίτερα ευέλικτο εργαλείο, ικανό για τη σχεδίαση αεροτομών κάθε είδους. Οι παρά-

μετροι σχεδίασης των πολυωνύμων Bezier είναι οι συντεταγμένες μίας ομάδας σημείων, τα οποία καλούνται και σημεία ελέγχου. Τα πολυώνυμα Bezier έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν σε μία πλειάδα εφαρμογών καθώς και στην περίπτωση βελτιστοποίησης αεροτομών.

Στη συνέχεια, αναπτύσσεται ο αλγόριθμος μίας νέας και πολλά υποσχόμενης παραμετροποίησης, των λεγόμενων πολυωνύμων PARSEC. Τα PARSEC ξεφεύγουν από τις τυπικές παραμετροποιήσεις, αφού ως παραμέτρους σχεδίασης χρησιμοποιούν χειροπιαστά αεροδυναμικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής, όπως για παράδειγμα την ακτίνα του χείλους πρόσπτωσης, τη θέση του μέγιστου πάχους και τις γωνίες του χείλους εκφυγής. Επιπλέον, στην παρούσα εργασία, εμπλουτίζονται και για πρώτη φορά (σύμφωνα με την έως σήμερα διεθνή βιβλιογραφία που έχουμε υπόψη μας) χρησιμοποιούνται για την παραμετροποίηση αεροτομών πτερυγίων στροβιλομηχανών και την αντιμετώπιση προβλημάτων εσωτερικής αεροδυναμικής.

Τέλος, ως λογική συνέχεια των παραπάνω τεχνικών και με βασικό σκοπό τον συγκερασμό των πλεονεκτημάτων των δύο προηγούμενων παραμετροποιήσεων, επιχειρείται η υπέρθεση των PARSEC - Bezier, δίνοντας μία καινοτόμα τεχνική παραμετροποίησης, με κύριο στόχο τη σχεδίαση αεροτομών με καμπυλότητα.

Στις σελίδες που ακολουθούν, παρουσιάζονται λεπτομερώς οι παράμετροι σχεδίασης και τα μαθηματικά μοντέλα των παραπάνω τριών τεχνικών παραμετροποίησης και παρατίθενται χαρακτηριστικά παραδείγματα τους.

3.1

Οι Πολυωνυμικές Καμπύλες Bezier

Οι καμπύλες Bezier-Bernstein, ή επικρατέστερα καμπύλες Bezier, αποτελούν έναν πολύ απλό και ευέλικτο τρόπο να προσεγγιστεί μία γεωμετρική μορφή (για παράδειγμα μία αεροτομή) χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό σημείων ελέγχου. Βασική ιδιότητα της καμπύλης Bezier, που θα προκύψει από τα $N + 1$ σημεία $(c_0, y_0), \dots, (c_N, y_N)$ είναι ότι η καμπύλη ξεκινά από το πρώτο και τερματίζει

στο τελευταίο σημείο της αλληλουχίας και ότι το ζεύγος των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων σημείων καθορίζει την κλίση της καμπύλης στο πρώτο και στο τελευταίο σημείο της. Βάση για τη δημιουργία των καμπυλών Bezier αποτελεί ο αλγόριθμος του de Casteljau.

3.1.1

Ο Αλγόριθμος του de Casteljau

Ο αλγόριθμος του de Casteljau αποτελεί, παρά την απλότητα του, ένα βασικό εργαλείο για τη σχεδίαση καμπυλών (στο δισδιάστατο ή τρισδιάστατο χώρο) αλλά και επιφανειών (στον τρισδιάστατο χώρο). Πριν την ανάπτυξη του γενικευμένου αλγορίθμου του de Casteljau, παρουσιάζεται μία ειδική εφαρμογή του, για τρία σημεία r_0, r_1, r_2 , όπως στο σχήμα 3.1.

Έστω $t \in [0,1]$ μία παράμετρος, με τη βοήθεια της οποίας και με αφητηρία τα σημεία r_0, r_1, r_2 , δημιουργούνται για κάθε τιμή της $t \in [0,1]$ δύο νέα σημεία ως εξής:

$$r_1(t) = (1-t)r_0 + tr_1 \quad r_1(t) = (1-t)r_1 + tr_2 \quad (3.1)$$

Από τον τρόπο ορισμού του, το σημείο r_0 ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα P_0P_1 και το σημείο r_1 στο τμήμα P_1P_2 . Με αφητηρία τα δύο νέα σημεία r_0 και r_1 που έστω προέκυψαν για μία τιμή της παραμέτρου t , δημιουργούμε ένα νέο τρίτο σημείο με βάση τη σχέση:

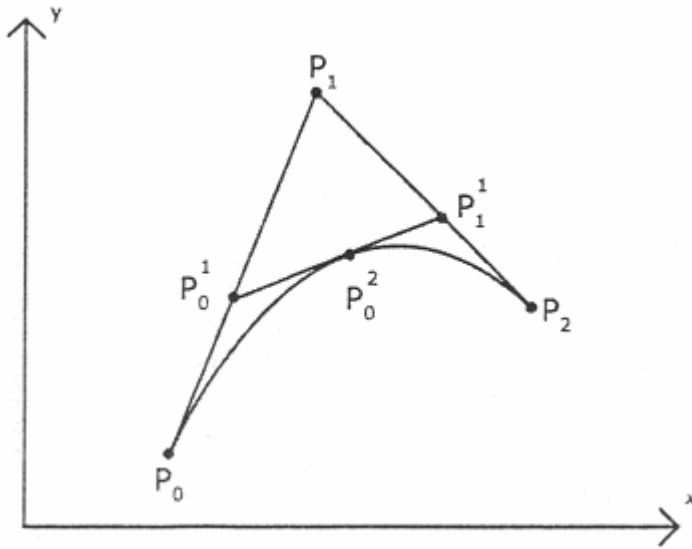
$$r_2(t) = (1-t)r_0 + tr_1 \quad (3.2)$$

που με τη σειρά του θα ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα P_0P_1 . Με την εισαγωγή των εξισώσεων 3.1 και 3.2 προκύπτει ότι:

$$r_2(t) = (1-t)^2 r_0 + 2t(t-1)r_1 + t^2 r_2 \quad (3.3)$$

δηλαδή μία τετραγωνική έκφραση ως προς την παράμετρο t , γεγονός που αντικατοπτρίζεται στον άνω δείκτη του διανύσματος θέσης r_2 . Καθώς το t

μεταβάλλεται γενικά στο $(-\infty, +\infty)$, ή ειδικά όπως εδώ ορίστηκε στο $[0,1]$ δημιουργείται και σχεδιάζεται μία παραβολή. Η παραβολή αυτή σχηματίστηκε από την επαναληπτική (αναδρομική) εφαρμογή σχημάτων γραμμικής παρεμβολής. Μετά το κατανοητό και απλό αυτό παράδειγμα, παρουσιάζεται ο αναδρομικός τύπος του de Casteljau για $N + 1$ σημεία στο δισδιάστατο ή τρισδιάστατο χώρο, τα



Σχήμα 3.1: Εφαρμογή του αλγορίθμου de Casteljau για τρία δεδομένα σημεία.

$\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_N$. Μαθηματικά εκφράζεται μέσω της εξίσωσης:

$$\mathbf{r}_i^a(t) = (1-t)\mathbf{r}_i^{a-1}(t) + t\mathbf{r}_{i+1}^{a-1}(t) \quad (3.4)$$

όπου $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i, i=0, \dots, N$. Τα δεδομένα $N + 1$ σημεία θα ονομάζονται πλέον σημεία ελέγχου ή σημεία Bezier. Αντίστοιχα, το πολυώνυμο που ορίζεται από την αλληλουχία σημείων $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_N$ θα λέγεται πολύγωνο Bezier. Η σχέση 3.4, ως αναδρομικός τύπος προγραμματιζόμενος σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού, αποτελείται από δύο βρόχους τον έναν μέσα στον άλλον. Ο εξωτερικός βρόχος έχει ως μεταβλητή την $a (a=1, \dots, N)$ και ο εσωτερικός έχει ως μεταβλητή την i και μεταβλητά όρια $(i=0, \dots, N-a)$. Η εκτέλεση των πράξεων που αντιστοιχούν στην εξίσωση 3.4 καταλήγει στην καμπύλη \mathbf{r}_0^N , που είναι η ζητούμενη καμπύλη Bezier για τα σημεία ελέγχου που προαναφέρθηκαν.

ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων θέσης των σημείων ελέγχου και με συντελεστές, οι οποίοι προσδιορίζονται από τα πολυώνυμα Bernstein:

$$B_i^N(t) = \binom{N}{i} t^i (1-t)^{N-i} \quad (3.7)$$

Οι σχέσεις 3.6 και 3.7 είναι έτοιμες να εφαρμοστούν και να προγραμματιστούν για το σχεδιασμό της καμπύλης Bezier. Η σχέση 3.7 είναι γενική, ισχύει δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του άνω δείκτη $a = 0, \dots, N$. Διατυπώνεται ως εξής:

$$B_i^a(t) = \binom{a}{i} t^i (1-t)^{a-i} \quad (3.8)$$

ενώ αποδεικνύεται ότι ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$B_i^a(t) = (1-t)B_i^{a-1}(t) + tB_{i-1}^{a-1}(t) \quad (3.9)$$

με

$$B_0^0(t) \equiv 1 \quad (3.10)$$

και

$$B_j^a(t) \equiv 0, j \in (0, \dots, N) \quad (3.11)$$

Βασική επίσης ιδιότητα των πολυωνύμων Bezier είναι ότι:

$$\sum_{i=0}^n B_i^N(t) \equiv 1 \quad (3.12)$$

Με τον ίδιο τρόπο που ο αλγόριθμος de Casteljau δημιουργεί τον τριγωνικό σχηματισμό 3.5, οι συντελεστές-πολυώνυμα Bernstein και αυτοί εντάσσονται σε ένα μητρώο ως εξής:

$$\begin{bmatrix} B_0^0(t) & B_0^1(t) & B_0^2(t) \dots & B_0^N(t) \\ & B_1^1(t) & B_1^2(t) \dots & B_1^N(t) \\ & & M & B_2^N(t) \\ & & & M & B_N^N(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

με κάθε μη μηδενικό συντελεστή να υπολογίζεται εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση 3.9.

Οι μέχρι τώρα σχέσεις που δόθηκαν για την καμπύλη Bezier είναι άμεσα υλοποιήσιμες σε γλώσσες προγραμματισμού. Για $N + 1$ σημεία ελέγχου r_0^u, \dots, r_N^u , ο αναδρομικός τύπος 3.9 υπολογίζει τους $N + 1$ συντελεστές $B_0^N(t), \dots, B_N^N(t)$ για ο-

ποιαδήποτε τιμή του $t \in [0,1]$ (Για κάθε τιμή του t υπολογίζεται ένα διακριτό σημείο της καμπύλης, άρα βασικό βήμα είναι ο καθορισμός μιας αλληλουχίας τιμών της παραμέτρου t για την οποία θα υπολογιστούν σημεία της καμπύλης Bezier) . Τα τελικά σημεία της καμπύλης υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης 3.6, συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου.

Είναι σημαντικό να τονισθεί η ανεξαρτησία και η ομοιότητα των εκφράσεων που παράγουν, λ.χ. τις τρεις συντεταγμένες κάθε σημείου της καμπύλης Bezier. Είναι:

$$\begin{aligned}x^N(t) &= x(t) = \sum_{i=0}^N B_i^N(t)x_i \\y^N(t) &= y(t) = \sum_{i=0}^N B_i^N(t)y_i \\z^N(t) &= z(t) = \sum_{i=0}^N B_i^N(t)z_i\end{aligned}\tag{3.14}$$

όπου $(x_i, y_i, z_i), i = 0, \dots, N$ είναι οι τρεις συντεταγμένες κάθε σημείου Bezier, έστω στον τρισδιάστατο χώρο.

3.1.3

Μητρική Γραφή μιας Καμπύλης Bezier

Ιδιαίτερα πρακτική είναι η μητρική γραφή μιας καμπύλης Bezier (21), η οποία καταλήγει να παραθέτει κάθε σημείο \mathbf{r}_N της καμπύλης Bezier ως:

$$\mathbf{r}_N(t) \equiv \mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^N r_i C_i(t)\tag{3.15}$$

δηλαδή:

$$c(t) = \sum_{i=0}^N c_i C_i(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^N c_i C_i(t)$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^N z_i C_i(t)$$

(3.16)

όπου:

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \mathbf{M} \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \mathbf{L} & m_{0,N} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \mathbf{L} & m_{1,N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ m_{N,0} & m_{N,1} & \mathbf{L} & m_{N,N} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \mathbf{M} \\ t^N \end{bmatrix}$$

(3.17)

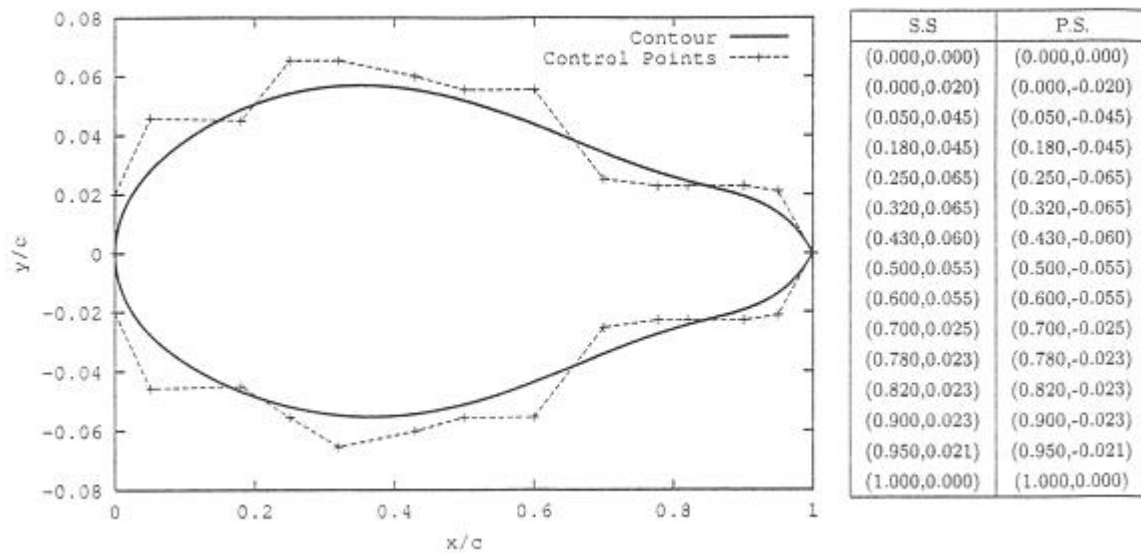
με στοιχεία που ορίζονται ως:

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{N}{j} \binom{j}{i}$$

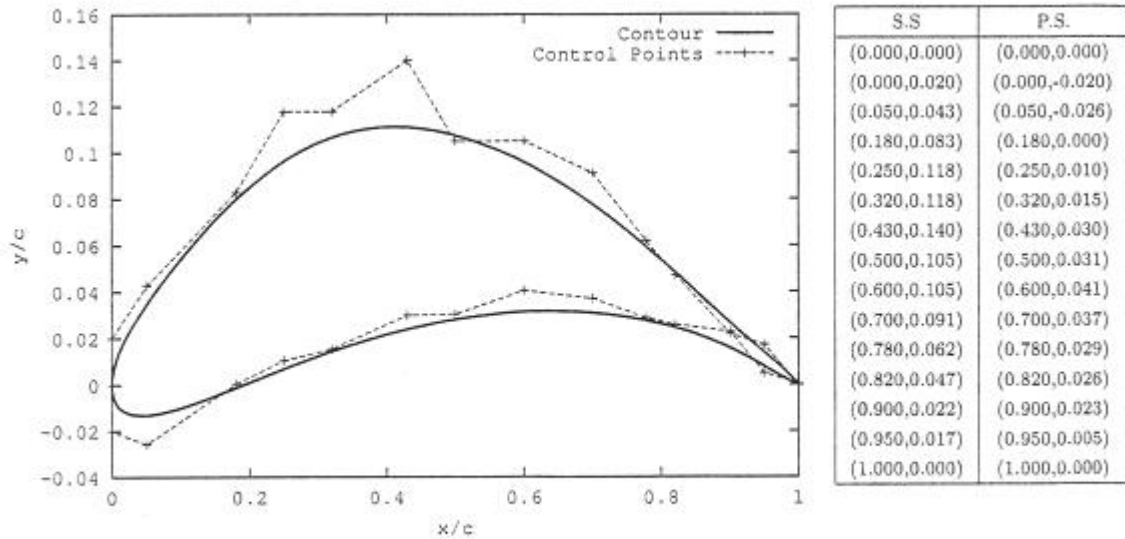
(3.18)

Παραδείγματα Αεροτομών με Παραμετροποιήσεις Bezier

Στην πορεία, παραθέτονται δύο παραδείγματα αεροτομών, οι οποίες σχεδιάζονται μέσω των πολυωνυμικών καμπυλών Bezier. Σε κάθε σχήμα παριστάνονται το περίγραμμα και τα σημεία ελέγχου (παράμετροι σχεδίασης) της αεροτομής, οι ακριβείς συντεταγμένες των οποίων αναφέρονται στον ισοδύναμο πίνακα. Για την σχεδίαση κάθε αεροτομής χρησιμοποιούνται δεκαπέντε σημεία ελέγχου. Η πρώτη αεροτομή (σχήμα 3.2) είναι συμμετρική, ενώ η δεύτερη (σχήμα 3.3), φανερώνοντας τις δυνατότητες των Bezier, έχει μεγάλη καμπυλότητα, προσομοιάζοντας μία αεροτομή πτερυγίου στροβιλομηχανών



Σχήμα 3.2: Περίγραμμα αεροτομής μέσω της παραμετροποίησης Bezier και συντεταγμένες των σημείων ελέγχου.



Σχήμα 3.3: Περίγραμμα αεροτομής μέσω της παραμετροποίησης Bezier και συντεταγμένες των σημείων ελέγχου.

3.2

Τα Πολυώνυμα PARSEC

Μία από τις πιο καινοτόμες και αξιόλογες παραμετροποιήσεις αεροτομών, είναι τα ονομαζόμενα πολυώνυμα PARSEC. Αρχικά η παραμετροποίηση PARSEC παρουσιάστηκε από τον Helmut Sobieczky και έχει εφαρμοστεί με μεγάλη επιτυχία παλιά, για την παραμετροποίηση μεμονωμένων αεροτομών και στην προσέγγιση προβλημάτων εξωτερικής αεροδυναμικής. Παρόλα αυτά, είναι ένα γενικό εργαλείο και στην παρούσα πτυχιακή εργασία η χρησιμοποίηση της επεκτείνεται στην

παραμετροποίηση αεροτομών με αυξημένη καμπυλότητα και κατά συνέπεια στην αντιμετώπιση προβλημάτων που συναντάμε κατά κύριο λόγο στις στροβιλομηχανές (π.χ. στις αεροτομές πτερυγίων στροβίλου). Η σπουδαία ιδιαιτερότητα της προηγούμενης παραμετροποίησης επικεντρώνεται στις μεταβλητές σχεδίασης που χρησιμοποιεί. Ειδικότερα, τα πολυώνυμα PARSEC χρησιμοποιούν ως παραμέτρους σχεδίασης, ένα μικρό αριθμό αεροδυναμικών και γεωμετρικών χαρακτηριστικών της αεροτομής με σπουδαία φυσική σημασία, όπως για παράδειγμα την ακτίνα του χείλους πρόσπτωσης και τη θέση του μέγιστου πάχους. Πρόκειται πραγματικά για μία εξειδικευμένη παραμετροποίηση, η οποία διαφεύγει από τις γενικές, τυπικές τεχνικές σχεδίασης αεροτομών που βασίζονται για παράδειγμα στις Splines ή στα πολυώνυμα Bezier.

3.2.1

Η Παραμετροποίηση PARSEC 11

Η πιο απλή κατηγορία του συνόλου των πολυωνύμων PARSEC χρησιμοποιεί έντεκα παραμέτρους σχεδίασης και για αυτόν τον λόγο λέγεται PARSEC11. Θεμελιώνεται σε δύο όμοιες πολυωνυμικές διατυπώσεις για την άνω και κάτω πλευρά της αεροτομής, οι οποίες είναι της μορφής:

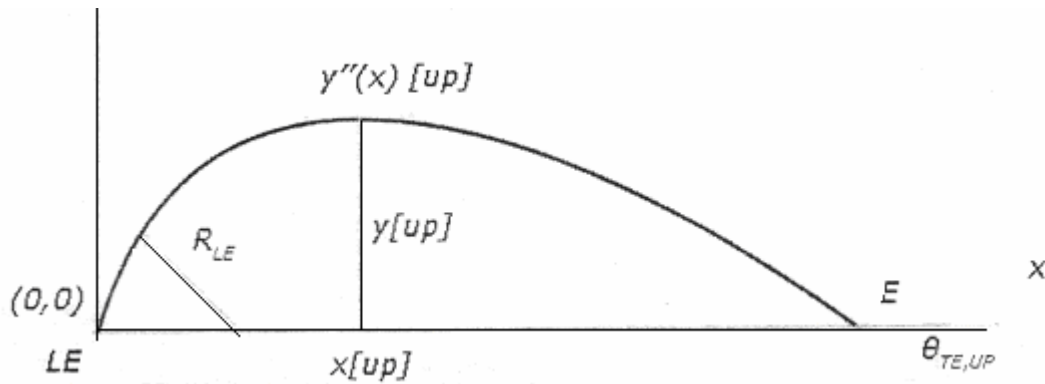
$$y(c) = \sum_{i=1}^6 a_i c^{i-\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

όπου $a_i (i=1, \dots, 6)$ άγνωστοι, πραγματικοί συντελεστές. Τα έντεκα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, που εφαρμόζει η PARSEC11 ως παραμέτρους σχεδίασης μίας αεροτομής με σημείο προβολής το $(0,0)$, παριστάνονται στο σχήμα 3.4 και είναι:

-Το χείλος εκφυγής (c_{TE}, y_{TE})

-Η ακτίνα του χείλους πρόσπτωσης, R_{LE}

-Το 'άνωτατο' και 'κατώτατο' σημείο της αεροτομής, (c_{UP}, y_{UP}) και (c_{LOW}, y_{LOW})



Σχήμα 3.4: Οι παράμετροι σχεδίασης της παραμετροποίησης PARSEC11 για την πλευρά υποπίεσης αεροτομής με σημείο προβολής το (0,0)

-Οι δεύτερες παράγωγοι στα σημεία αυτά $\left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{c=c_{UP}}$, και $\left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{c=c_{LOW}}$

-Οι γωνίες του χείλους εκφυγής, $q_{TE,UP}$ και $q_{TE,LOW}$

Υπολογίζοντας την εξίσωση 3.19 όπως και τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης που απεικονίζει την πλευρά υποπίεσης της αεροτομής, απορρέουν οι εξισώσεις:

$$y(c_{TE}) = y_{TE} \quad (3.20)$$

$$\tan q_{TE,UP} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{c=c_{TE}} = \sum_{i=1}^6 \left(i - \frac{1}{2} \right) a_i c_{TE}^{i-\frac{3}{2}} \quad (3.21)$$

$$y(c_{UP}) = y_{UP} = \sum_{i=1}^6 a_i c_{UP}^{i-\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{c=c_{UP}} = 0 = \sum_{i=1}^6 \left(i - \frac{1}{2} \right) a_i c_{UP}^{i-\frac{3}{2}} \quad (3.23)$$

$$\left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=x_{UP}} = \sum_{i=1}^6 \left(i - \frac{1}{2} \right) \left(i - \frac{3}{2} \right) a_i x_{UP}^{i-\frac{5}{2}} \quad (3.24)$$

$$R_{LE} = \left[\frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]_{c=c_{LE}} = \left| \frac{2}{a_1^2} \right| \quad (3.25)$$

Η προηγούμενη σχέση δεν είναι ιδιαίτερα προφανής και για αυτό τον λόγο θεωρείται σκόπιμη η αναφορά της τεκμηριωσής της. Εύκολα υπολογίζεται η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της πολυωνυμικής διατύπωσης των PARSEC11 ως προς τις μεταβλητές χ . Πιο συγκεκριμένα:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sum_{i=1}^6 a_i c^{i-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} a_1 c^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} a_2 c^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} a_3 c^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (3.26)$$

και:

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{1}{4} a_1 c^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} a_2 c^{-\frac{1}{2}} + \frac{15}{4} a_3 c^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (3.27)$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες ποσότητες στην εξίσωση (3.25) προκύπτει τελικά ότι:

$$\begin{aligned}
 R_{LE} &= \left[\frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]_{c=c_{LE}} = \left[\frac{-\frac{1}{4}a_1 c^{-\frac{3}{2}}}{\left[1 + \frac{1}{4}a_1^2 c^{-1}\right]^{\frac{3}{2}}} \right]_{c=c_{LE}} = \\
 &= \left[\frac{-\frac{1}{4}a_1}{\left[c + \frac{1}{4}a_1^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]_{c=c_{LE}=0} = \left[\frac{-\frac{1}{4}a_1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} a_1^3} \right] = \left| \frac{2}{a_1^2} \right|
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

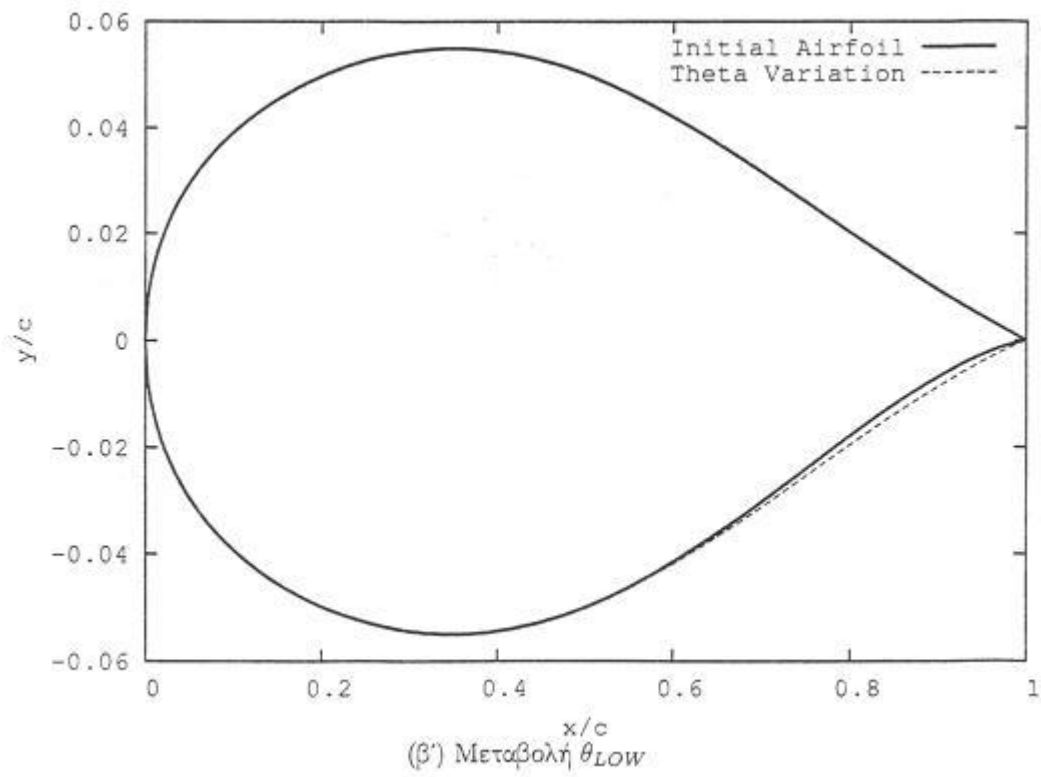
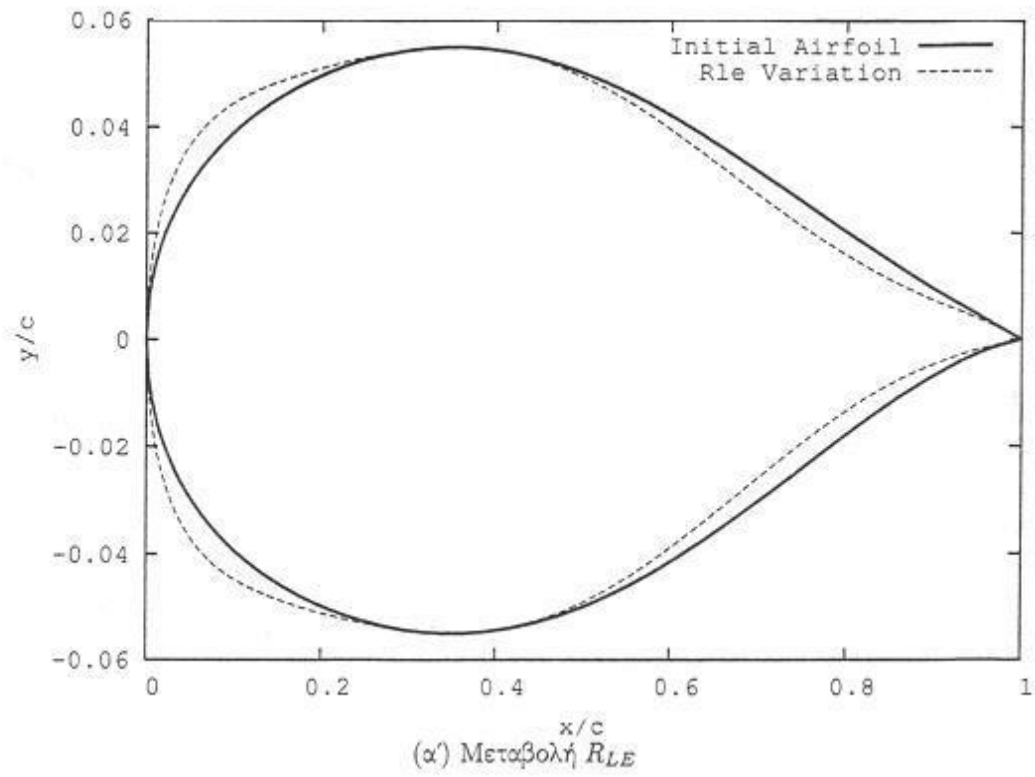
Με καθορισμένες τις παραμέτρους σχεδίασης- γεωμετρικά χαρακτηριστικά- της αεροτομής, ο συντελεστής a_1 υπολογίζεται άμεσα μέσω της εξίσωσης 3.25, ενώ οι υπόλοιποι πέντε προκύπτουν ως λύση του γραμμικού συστήματος, το οποίο δημιουργείται με την συνδρομή των εξισώσεων 3.20 έως 3.24. Για την πλευρά υποπίεσης της αεροτομής, το σύστημα αυτό έχει την μορφή:

$$\begin{bmatrix}
\frac{3}{2}x_{TE}^2 & \frac{5}{2}x_{TE}^2 & \frac{7}{2}x_{TE}^2 & \frac{9}{2}x_{TE}^2 & \frac{11}{2}x_{TE}^2 \\
\frac{3}{2}x_{UP}^2 & \frac{5}{2}x_{UP}^2 & \frac{7}{2}x_{UP}^2 & \frac{9}{2}x_{UP}^2 & \frac{11}{2}x_{UP}^2 \\
\frac{3}{4}x_{TE}^2 & \frac{5}{2}x_{TE}^2 & \frac{7}{2}x_{TE}^2 & \frac{9}{2}x_{TE}^2 & \frac{11}{2}x_{TE}^2 \\
\frac{3}{2}x_{UP}^2 & \frac{5}{2}x_{UP}^2 & \frac{7}{2}x_{UP}^2 & \frac{9}{2}x_{UP}^2 & \frac{11}{2}x_{UP}^2 \\
\frac{3}{4}x_{UP}^2 & \frac{15}{4}x_{UP}^2 & \frac{35}{4}x_{UP}^2 & \frac{53}{4}x_{UP}^2 & \frac{99}{4}x_{UP}^2
\end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{TE} - a_1 x_{TE}^{\frac{1}{2}} \\ y_{UP} - a_1 x_{UP}^{\frac{1}{2}} \\ \tan \mathbf{q}_{TE,UP} - \frac{1}{2} a_1 x_{TE}^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} a_1 x_{UP}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{4} a_1 + \left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{x=x_{UP}} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

ενώ για την πλευρά υπερπίεσης της αεροτομής, προκύπτει το αντίστοιχο σύστημα:

$$\begin{bmatrix}
x_{TE}^{\frac{3}{2}} & x_{TE}^{\frac{5}{2}} & x_{TE}^{\frac{7}{2}} & x_{TE}^{\frac{9}{2}} & x_{TE}^{\frac{11}{2}} \\
x_{LOW}^{\frac{3}{2}} & x_{LOW}^{\frac{5}{2}} & x_{LOW}^{\frac{7}{2}} & x_{LOW}^{\frac{9}{2}} & x_{LOW}^{\frac{11}{2}} \\
\frac{3}{2}x_{TE}^{\frac{1}{2}} & \frac{5}{2}x_{TE}^{\frac{3}{2}} & \frac{7}{2}x_{TE}^{\frac{5}{2}} & \frac{9}{2}x_{TE}^{\frac{7}{2}} & \frac{11}{2}x_{TE}^{\frac{9}{2}} \\
\frac{3}{2}x_{LOW}^{\frac{1}{2}} & \frac{5}{2}x_{LOW}^{\frac{3}{2}} & \frac{7}{2}x_{LOW}^{\frac{5}{2}} & \frac{9}{2}x_{LOW}^{\frac{7}{2}} & \frac{11}{2}x_{LOW}^{\frac{9}{2}} \\
\frac{3}{4}x_{LOW}^{\frac{1}{2}} & \frac{15}{4}x_{LOW}^{\frac{1}{2}} & \frac{35}{4}x_{LOW}^{\frac{3}{2}} & \frac{53}{4}x_{LOW}^{\frac{5}{2}} & \frac{99}{4}x_{LOW}^{\frac{7}{2}}
\end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{TE} - a_1 x_{TE}^{\frac{1}{2}} \\ y_{LOW} - a_1 x_{LOW}^{\frac{1}{2}} \\ \tan \mathbf{q}_{TE,LOW} - \frac{1}{2} a_1 x_{TE}^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} a_1 x_{LOW}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{4} a_1 + \left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{x=x_{LOW}} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Η απλή εφαρμογή της εξίσωσης 3.19 δύο φορές, μετά των προσδιορισμό των συντελεστών a_i , οδηγεί στο συνολικό, τελικό περίγραμμα της αεροτομής.



Σχήμα 3.5: Αρχικό και τελικό περίγραμμα αεροτομής, μετά από μεταβολή των παραμέτρων R_{LE} (επάνω) και q_{LOW} (κάτω) κατά 200%. Απόδειξη της διαφορετικής βαρύτητας των επιμέρους παραμέτρων σχεδίασης των πολυωνύμων PARSEC.

Είναι αναγκαίο σε αυτό το σημείο να επισημανθεί, ότι οι μεταβλητές σχεδίασης της παραμετροποίησης PARSEC, η φυσική σημασία των οποίων είναι προφανής, είναι μεγέθη διαφορετικής τάξης μεγέθους και κατά συνέπεια, δεν επηρεάζουν την μορφή της αεροτομής στον ίδιο βαθμό. Αν και οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier χρησιμοποιούν ως παραμέτρους σχεδίασης συντεταγμένες σημείων με την ίδια σημασία, κάθε μία από τις μεταβλητές των PARSEC προσδιορίζει με ένα διαφορετικό συντελεστή το περίγραμμα της αεροτομής. Αυτό διακρίνεται ξεκάθαρα στο σχήμα 3.5, όπου εμφανίζονται οι μεταβολές στο περίγραμμα της αεροτομής λόγω αύξησης των τιμών των παραμέτρων R_{LE} και q_{LOW} αντίστοιχα, κατά 200%. Είναι εμφανές, ότι ενώ η αύξηση της καμπυλότητας στο χείλος πρόσπτωσης επηρεάζει σημαντικά την αεροτομή, η ίδια μεταβολή στη γωνία εκφυγής ασκεί επίδραση ελάχιστα στο περίγραμμά της.

Η Παραμετροποίηση PARSEC14

Μελετώντας το μαθηματικό μοντέλο και τις μεταβλητές σχεδίασης των πολυωνύμων PARSEC11 είναι κατανοητό, ότι παρόλο τις δυνατότητες και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, δεν μπορεί να πραγματευτεί όλο το φάσμα των πιθανών αεροτομών. Είναι λοιπόν προφανές, ότι μέσω της PARSEC11 είναι αδύνατη η

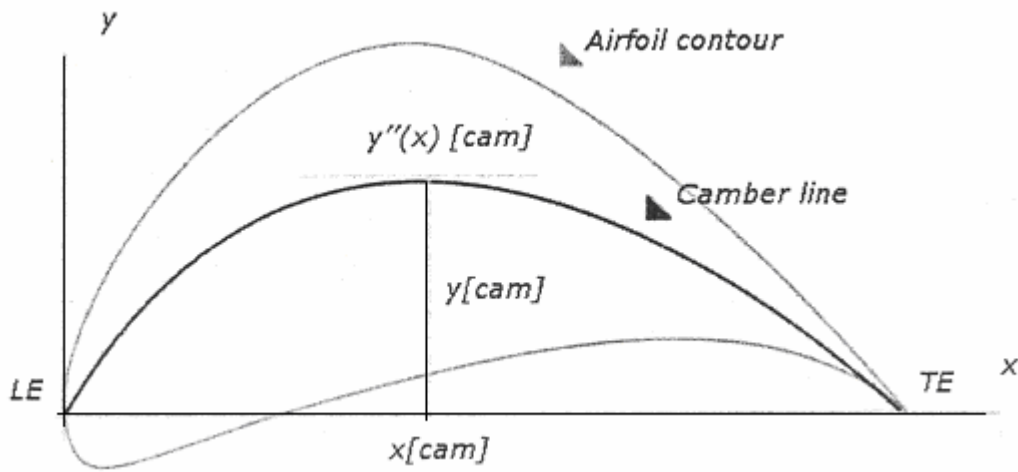
σχεδίαση αεροτομών με καμπυλότητα, σημαντικές σε μία πλειάδα εφαρμογών, όπως παραδείγματος χάρη στις στροβιλομηχανές. Ωστόσο, υπάρχει η δυνατότητα βελτίωσης της παραμετροποίησης PARSEC11 με επιπλέον όρους και νέες παραμέτρους σχεδίασης. Με αυτήν την μέθοδο, παρουσιάζονται πιο πολύπλοκες παραμετροποιήσεις της κατηγορίας PARSEC, ικανές να εξετάσουν όλες τις περιπτώσεις αεροτομών. Μία από αυτές είναι και η PARSEC14. Τα πολυώνυμα PARSEC14 περιγράφονται μέσω της εξίσωσης:

$$y(c) = \sum_{i=1}^6 a_i c^{i-\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^4 b_i c^{i-\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

όπου $b_i, (i=1, \dots, 4)$ τέσσερις (πρόσθετοι) συντελεστές. Οι συντελεστές αυτοί προκύπτουν με την βοήθεια τριών νέων γεωμετρικών χαρακτηριστικών της αεροτομής, τα οποία καθορίζουν το σχήμα της και συγκεκριμένα μία γραμμή κυρτότητας (camber line). Τα γεωμετρικά αυτά χαρακτηριστικά παριστάνονται στο σχήμα 3.6 και είναι:

Το ανώτατο σημείο της γραμμής κυρτότητας (c_{cam}, y_{cam})

Η δεύτερη παράγωγος στο ίδιο σημείο, $\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{c=c_{UP}}$



Σχήμα 3.6: Η γραμμή κυρτότητας και τα τρία επιπλέον γεωμετρικά χαρακτηριστικά της παραμετροποίησης PARSEC14.

Με βάση την εξίσωση 3.31 και τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης που αντιστοιχεί στη γραμμή κυρτότητας της αεροτομής, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$y(c_{TE}) = y_{TE} \quad (3.32)$$

$$y(c_{cam}) = y_{cam} \quad (3.33)$$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{c=c_{cam}} = 0 = \sum_{i=1}^4 \left(i - \frac{1}{2} \right) b_i c_{cam}^{i-\frac{3}{2}} \quad (3.34)$$

$$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{c=c_{cam}} = \sum_{i=1}^4 \left(i - \frac{1}{2} \right) \left(i - \frac{3}{2} \right) b_i c_{cam}^{i-\frac{5}{2}} \quad (3.35)$$

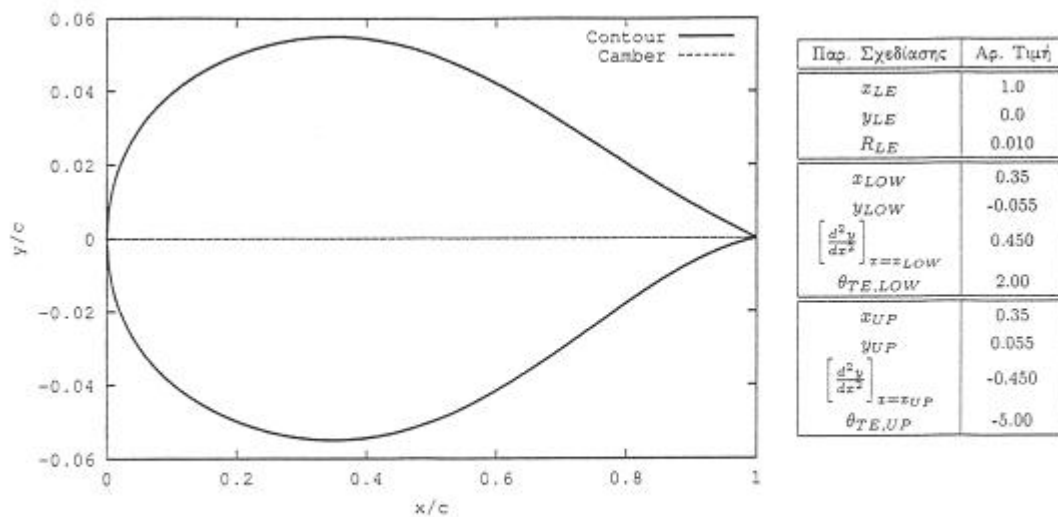
Με την βοήθεια των προηγούμενων εξισώσεων και με δεδομένα τις δεκατέσσερις παραμέτρους σχεδίασης, οι τέσσερις πρόσθετοι συντελεστές b_i προκύπτουν μέσω ενός συστήματος, η μορφή του οποίου είναι:

$$\begin{bmatrix} c_{TE}^{\frac{1}{2}} & c_{TE}^{\frac{3}{2}} & c_{TE}^{\frac{5}{2}} & c_{TE}^{\frac{7}{2}} \\ c_{cam}^{\frac{1}{2}} & c_{cam}^{\frac{3}{2}} & c_{cam}^{\frac{5}{2}} & c_{cam}^{\frac{7}{2}} \\ \frac{1}{2}c_{cam}^{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2}c_{cam}^{\frac{1}{2}} & \frac{5}{2}c_{cam}^{\frac{3}{2}} & \frac{7}{2}c_{cam}^{\frac{5}{2}} \\ -\frac{1}{4}c_{cam}^{-\frac{3}{2}} & \frac{3}{4}c_{cam}^{-\frac{1}{2}} & \frac{15}{4}c_{cam}^{\frac{1}{2}} & \frac{35}{4}c_{cam}^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{TE} \\ y_{cam} \\ 0 \\ \left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{c=c_{cam}} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

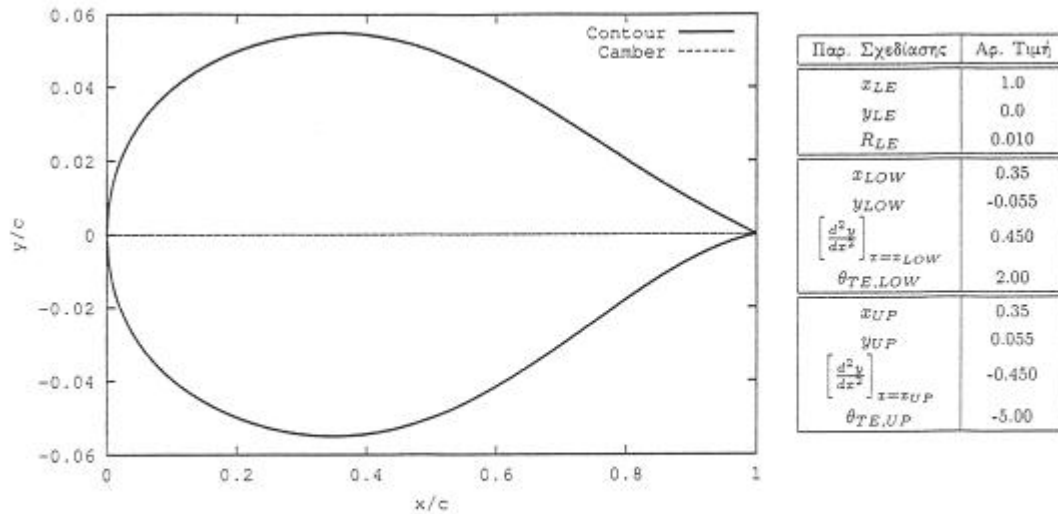
Η απλή εφαρμογή της εξίσωσης 3.31 των πολυωνύμων PARSEC14, μετά την επίλυση των συστημάτων 3.29, 3.30 και 3.36 και τον αριθμητικό προσδιορισμό των πραγματικών συντελεστών a_i και b_i , δίνει το τελικό περίγραμμα της αεροτομής.

Παραδείγματα Αεροτομών με Παραμετροποιήσεις PARSEC

Στην πορεία εκθέτονται δύο παραδείγματα των παραμετροποιήσεων PARSEC. Σε κάθε σχήμα, περιγράφεται το περίγραμμα της αεροτομής, η μέση γραμμή κυρτότητας της όπως και οι έντεκα (ή δεκατέσσερις) αριθμητικές τιμές των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής. Η πρώτη αεροτομή (σχήμα 3.7) είναι συμμετρική και σχεδιάζεται μέσω των πολυωνύμων PARSEC11. Αντίθετα, η ακόλουθη είναι παραδείγματα αεροτομής με μεγάλη καμπυλότητα ($y_{cam} = 0.030$) και σχεδιάζεται με την συνδρομή των πολυωνύμων PARSEC14.



Σχήμα 3.7: Περίγραμμα αεροτομής μέσω της παραμετροποίησης PARSEC11 και αριθμητικές τιμές των έντεκα παραμέτρων σχεδίασης.



Σχήμα 3.8: Περίγραμμα αεροτομής μέσω της παραμετροποίησης PARSEC14 και αριθμητικές τιμές των δεκατεσσάρων παραμέτρων σχεδίασης.

Η Υπέρθυση των Πολυωνύμων PARSEC11 και Bezier

Η μελέτη των μαθηματικών μοντέλων και των παραμέτρων σχεδίασης των δύο προηγούμενων παραμετροποιήσεων, υπογραμμίζει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τις δυνατότητες τους. Οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier παρέχουν ένα εύχρηστο και ευέλικτο βοήθημα ενώ τα πολυώνυμα PARSEC επιτυγχάνουν τον αποτελεσματικό έλεγχο των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών της αεροτομής με την βοήθεια ελάχιστων παραμέτρων σχεδίασης, με ιδιαίτερη φυσική αξία. Η σύνθεση των

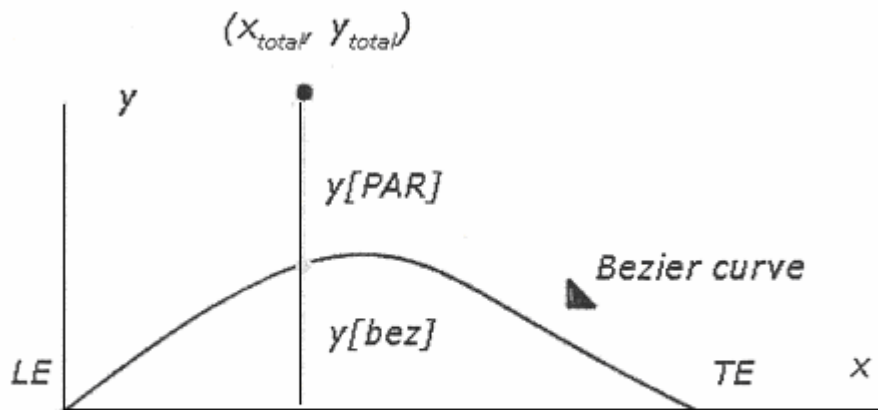
πλεονεκτημάτων των δύο αυτών τεχνικών παραμετροποίησης φαίνεται ιδιαίτερα δελεαστικό. Το ακόλουθο λοιπόν ορθολογικό βήμα είναι η προσπάθεια της υπέρθεσης των PARSEC και των Bezier στον σχηματισμό μίας καινοτόμου, γενικής μεθόδου παραμετροποίησης, με αντικείμενο τη σχεδίαση κυρίως περιγραμμάτων αεροτομών με καμπυλότητα και την προσέγγιση προβλημάτων εσωτερικής αεροδυναμικής (πτερύγια στροβιλομηχανών).

Τρόποι Υπέρθεσης των Δύο Παραμετροποιήσεων

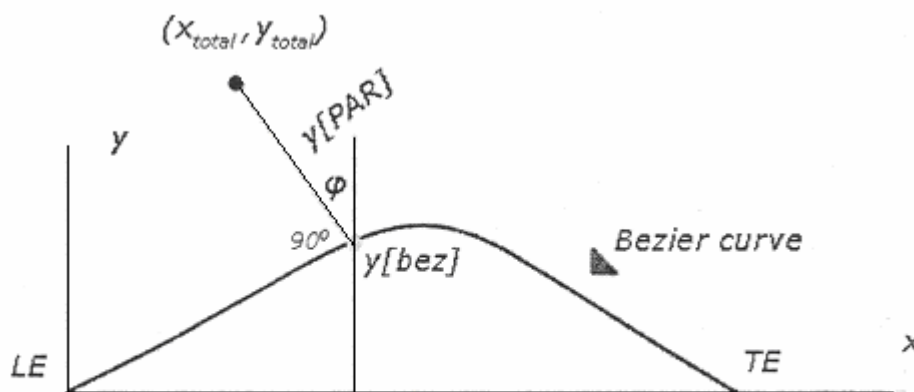
Καταρχήν το αρχικό ζήτημα που δημιουργείται κατά την πραγματοποίηση του προηγούμενου εγχειρήματος αναφέρεται στον τρόπο υπέρθεσης των δύο παραμετροποιήσεων. Με γνώμονα την απλότητα και προσαρμοστικότητα των πολυωνύμων Bezier και την επιδεξιότητα των πολυωνύμων PARSEC να ελέγχουν αποτελεσματικά τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής, καθορίζεται η παραμετροποίηση της γραμμής κυρτότητας μέσω των πολυωνύμων Bezier και η παραμετροποίηση του πάχους γύρω από αυτήν, μέσω των πολυωνύμων PARSEC¹¹. Προκύπτει με αυτόν τον τρόπο μία νέα τεχνική σχεδίασης αεροτομών με καμπυλότητα, η οποία συγκρινόμενη με τα πολυώνυμα PARSEC¹⁴, δείχνει πιθανόν πιο ευπροσάρμοστη και ικανότερη να πλησιάσει το βέλτιστο περίγραμμα γρηγορότερα. Η πρόσθεση του πάχους της αεροτομής (PARSEC) στη μέση γραμμή κυρτότητας (Bezier), μπορεί να υλοποιηθεί μέσω δύο διαφορετικών προσεγγίσεων, οι οποίες παριστάνονται στο σχήμα 3.9 και περιγράφονται διεξοδικά στην συνέχεια. Η πρώτη τεχνική αποτελεί ουσιαστικά την απλή πρόσθεση των τεταγμένων των δύο καμπυλών. Στην αρχή, σχηματίζεται με την βοήθεια των σημείων ελέγχου $(c_0, y_0), \dots, (c_N, y_N)$ η καμπύλη Bezier $(c_b(t), y_b(t))$. Η καμπύλη αυτή αντιστοιχεί, όπως αναφέρεται και προηγουμένως, στην μέση γραμμή καμπυλότητας. Έπειτα, οι

τετμημένες c_b εισάγονται στην πολυωνυμική εξίσωση των PARSEC11

$$y(x) = \sum_{i=1}^6 a_i c^{i-\frac{1}{2}}$$



(α) Απλή πρόσθεση



(β') Πρόσθεση πάνω στην κάθετη διεύθυνση

Σχήμα 3.9: Τρόποι υπέρθεσης των δύο πολυωνυμικών καμπυλών Bezier και PARSEC: (α) Απλή πρόσθεση των τεταγμένων των δύο καμπυλών στις ίδιες τετμημένες, (β) Πρόσθεση του πάχους της αεροτομής (καμπύλη PARSEC11) πάνω στην κάθετη διεύθυνση σε κάθε σημείο της γραμμής κυρτότητας(καμπύλη Bezier). και μέσω των έντεκα παραμέτρων σχεδίασης προκύπτει η καμπύλη PARSEC11, $(c_p = c_b, y_p(c_p))$. Τα σημεία του συνολικού περιγράμματος της αεροτομής, δίνονται μέσω των εξισώσεων:

$$c_{tot} = c_b = c_p, y_{tot} = y_b + c_p \quad (3.37)$$

Ουσιαστικά δηλαδή, για τις ίδιες τετμημένες, προσθέτουμε τις τεταγμένες των δύο καμπυλών. Ο δεύτερος τρόπος υπέρθεσης των δύο καμπυλών είναι πιο σύνθετος. Η διαδικασία είναι μέχρι ενός σημείου, ομοίως με εκείνην του πρώτου τρόπου υπέρθεσης. Ειδικότερα, με την συνδρομή των σημείων ελέγχου $(c_0, y_0), \dots, (c_N, y_N)$, προκύπτει, όπως και προηγουμένως, η καμπύλη Bezier, $(c_b(t), y_b(t))$. Θέτοντας τις προηγούμενες τετμημένες, c_b , στην εξίσωση $y(c) = \sum_{i=1}^6 a_i c^{i-\frac{1}{2}}$, προκύπτει η καμπύλη PARSEC11, $(c_p = c_b, y_p(c_p))$. Από αυτό το σημείο και ύστερα η διαδικασία μεταβάλλεται. Σκοπός δεν είναι πλέον η απλή πρόσθεση των δύο καμπυλών, αλλά η πρόσθεση της εκάστοτε απόστασης y_b πάνω στην κάθετη διεύθυνση σε κάθε σημείο της καμπύλης Bezier. Το τελικό περίγραμμα της αεροτομής σε αυτήν την περίπτωση δίνεται με την συνδρομή της τριγωνομετρίας και πιο συγκεκριμένα μέσω των εξισώσεων:

$$c_{tot} = c_p - y_p * \sin f, y_{tot} = y_b + y_p * \cos f \quad (3.38)$$

όπου η γωνία φ ισούται με:

$$f = \arctan \left[\frac{dy_b}{dx_b} \right] \quad (3.39)$$

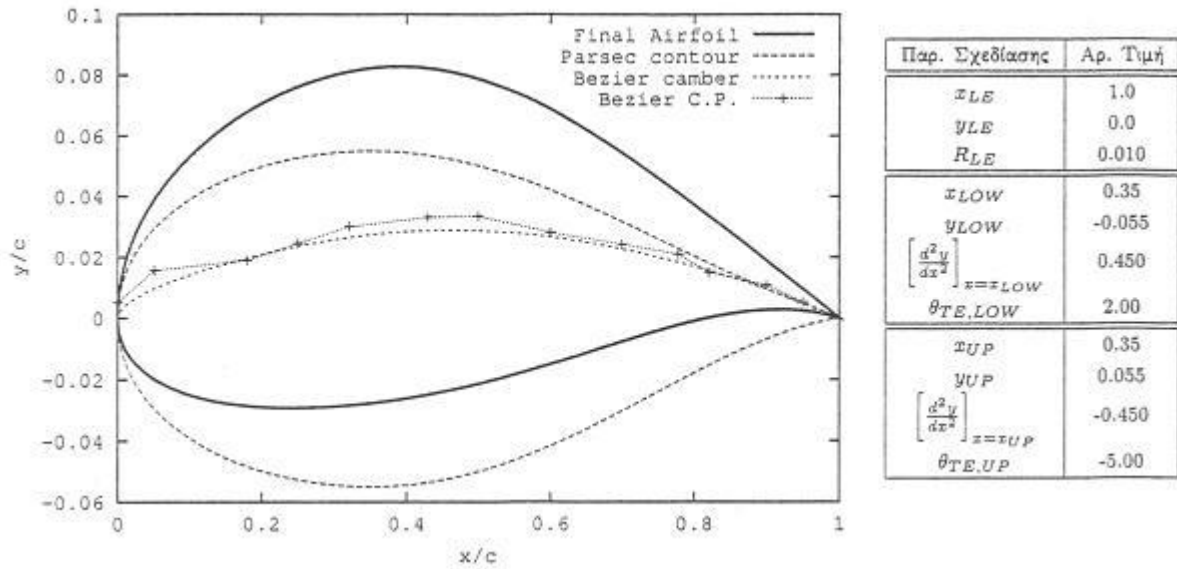
Οι διαφορές dy_b και dx_b της εξίσωσης 3.39, αξιολογούνται με την βοήθεια της μεθόδου των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών. Εάν λοιπόν με i συμβολιστεί ο κόμβος (σημείο) στο οποίο υλοποιείται η υπέρθεση, η γωνία f θα δίνεται πλέον μέσω της εξίσωσης:

$$f = \arctan \left[\frac{dy_b}{dx_b} \right] = \arctan \left[\frac{y_b(i+1) - y_b(i-1)}{c_b(i+1) - c_b(i-1)} \right] \quad (3.40)$$

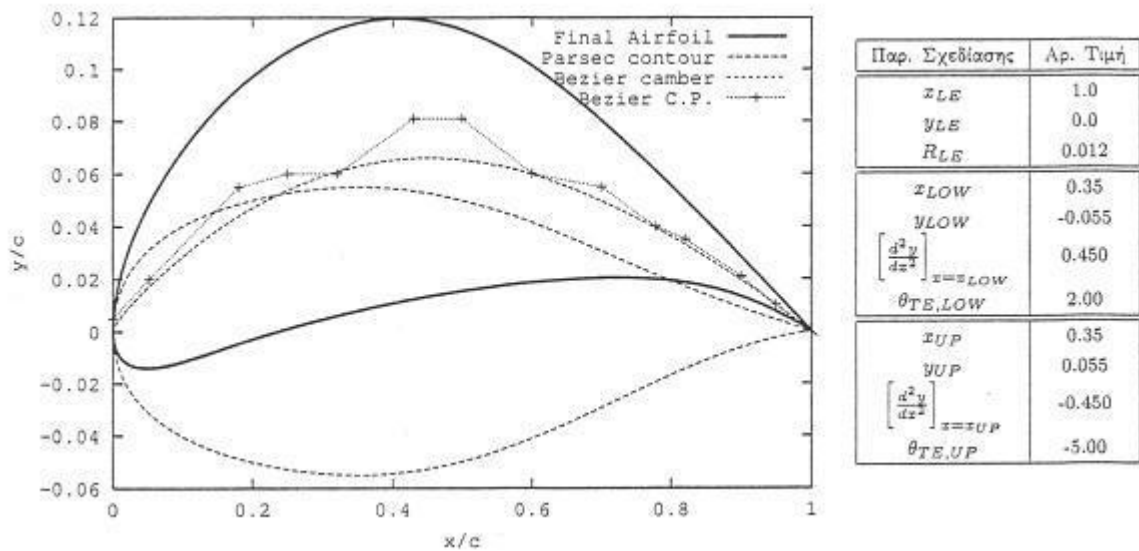
Παραδείγματα Υπέρθεσης των Παραμετροποιήσεων PARSEC11 και Bezier

Στην συνέχεια προσκομίζονται δύο παραδείγματα της υπέρθεσης των παραμετροποιήσεων PARSEC11 και Bezier. Σε κάθε σχήμα, απεικονίζεται η μέση γραμμή κυρτότητας της αεροτομής (καμπύλη Bezier), το πάχος της (καμπύλη PARSEC11) και το γενικό περίγραμμά της. Η μέση γραμμή κυρτότητας σχεδιάζεται με την βοήθεια δεκαπέντε σημείων ελέγχου, τα οποία σημειώνονται επίσης στα σχήματα, ενώ οι έντεκα τιμές των παραμέτρων σχεδίασης των πολυωνύμων PARSEC11, καταγράφονται στον πίνακα που πλαισιώνει κάθε παράδειγμα. Πρέπει τέλος να επισημανθεί, ότι στο σχήμα 3.10, η υπέρθεση γίνεται μέσω της απλής

πρόσθεσης των δύο καμπυλών, ενώ το σχήμα 3.11, αποτελεί παράδειγμα της πρόσθεσης του πάχους πάνω στην κάθετη διεύθυνση.



Σχήμα 3.10: Περίγραμμα αεροτομής μέσω της υπέρθεσης των παραμετροποιήσεων Bezier και Parsec-11.



Σχήμα 3.11: Περίγραμμα αεροτομής μέσω της υπέρθεσης των παραμετροποιήσεων Bezier και Parsec11.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές και Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Πέντε αντιπροσωπευτικά παραδείγματα προτιμώνται για την παρουσίαση των δυνατοτήτων του αλγόριθμου βελτιστοποίησης, που αναλύεται στα πλαίσια της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Με την βοήθεια τους, επισημαίνεται η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα της Συζυγούς Μεθόδου και ερευνώνται τα ιδιάζων (θετικά ή αρνητικά) χαρακτηριστικά των νέων, υποδεικνυόμενων παραμετροποιήσεων (PARSEC, PARSEC- Bezier) και μεθόδων (λογισμικό *Odyssee*). Πιο συγκεκριμένα, εκθέτονται τέσσερα προβλήματα αντίστροφης σχεδίασης αεροτομών και ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Το πεδίο ροής λαμβάνεται σε όλες τις περιπτώσεις συμπιεστό και μη συνεκτικό. Ως συνάρτηση κόστους, στην περίπτωση της αντίστροφης σχεδίασης, προτιμάται η γνωστή από το δεύτερο κεφάλαιο, προσέγγιση μίας προκαθορισμένης κατανομής πίεσης, η οποία περιγράφεται μαθηματικά μέσω της εξίσωσης:

$$I_c = \frac{1}{2} \int_s (p - p_t)^2 ds \quad (4.1)$$

Η πίεση στόχος, p_t , προκύπτει από τέσσερις αεροτομές αναφοράς, οι οποίες συναντώνται υπό διαφορετικές συνθήκες ροής (Πίνακας 4.1). Επιπροσθέτως, στον πίνακα 4.2 καταγράφονται τα είδη της παραμετροποίησης που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση κάθε εφαρμογής. Οι δύο πρώτες αεροτομές αποτελούν παραδείγματα μεμονωμένων αεροτομών, η τρίτη, στην οποία προσανατολίζεται κατά κύριο λόγο η προσοχή της πτυχιακής εργασίας, είναι αεροτομή πτερυγίου συμπιεστή και η τέταρτη αεροτομή πτερυγίου έλικας ελικοπτέρου. Επίσης, μία εκ των

προηγούμενων αεροτομών αναφοράς εντοπίζεται εντός διηχητικής ροής, καλύπτοντας έτσι σχεδόν ολόκληρο το εύρος των διαστάσεων εφαρμογών.

Αεροτομή αναφοράς	Mach	Γωνία ροής
NACA0012	0.80	0°
RAE2822	0.35	5°
Πτερύγωση συμπίεστη MAN	0.40	47°
Πτερύγωση έλικας VR-7	0.35	0°

Πίνακας 4.1: Αεροτομές αναφοράς και συνθήκες ροής των τριών εφαρμογών αντίστροφης σχεδίασης.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου περιγράφεται λεπτομερώς η διαδικασία της αντίστροφης σχεδίασης σε κάθε περίπτωση – εφαρμογή, ενώ παράλληλα παρουσιάζεται μία πλειάδα διαγραμμάτων, βασικός στόχος των οποίων είναι η βαθύτερη αφομοίωση της μεθόδου. Παράλληλα, καταγράφονται τα σημαντικότερα συμπεράσματα, που προκύπτουν μέσω της εφαρμογής του αλγόριθμου και της παρατήρησης των διαγραμμάτων.

Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς τη NACA0012

Στην πρώτη εφαρμογή επιλέγεται ως αεροτομή αναφοράς η NACA0012. Πρόκειται για μία συμμετρική, μεμονωμένη αεροτομή, η οποία σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, εντοπίζεται εντός διηχητικής ροής ($Mach=0.8$). Ακόμα, σχεδόν στο μέσο της πλευράς υποπίεσης και υπερπίεσης της, παρουσιάζεται κάθετο κύμα κρούσης με συνέπεια μεγάλη ασυνέχεια της κατανομής πίεσης στόχου σε αυτό το σημείο. Η συγκεκριμένη αεροτομή αναφοράς είναι συνεπώς ένα υψηλών απαιτήσεων πρόβλημα και παράλληλα ένα πολύ καλό κριτήριο του αλγόριθμου, ο οποίος καλείται να πλησιάσει μία κατανομή πίεσης με μία μεγάλη και απότομη μεταβολή. Το πρώτο βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης – σχεδίασης, είναι η επιλογή της τεχνικής παραμετροποίησης και των αρχικών τιμών των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής.

Εφαρμογή	Παραμετροποίηση			
	Bezier PARSEC11	PARSEC11	PARSEC14	Bezier- PARSEC11
NACA0012	*	*		
RAE2822	*		*	*
Πτερύγωση συμπίεστη MAN	*		*	*
Πτερύγωση έλικας VR-7	*			

Πίνακας 4.2: Τεχνικές παραμετροποίησης που επιλέγονται για την επίλυση των τεσσάρων προβλημάτων αντίστροφης σχεδίασης.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, που η αεροτομή αναφοράς είναι συμμετρική, άνευ καμπυλότητας, για την παραμετροποίηση της υπό σχεδίαση αεροτομής χρησιμοποιούνται μόνο οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier και τα πολυώνυμα PARSEC11. Η χρησιμοποίηση πιο σύνθετων τεχνικών (PARSEC14, PARSEC-Bezier) δεν παρέχει ουσιαστικά κάποιο κέρδος ενώ ίσως να καταλήγει σε αυξημένο υπολογιστικό ντόρο. Ακόμη, σε όλες τις εφαρμογές, οι αρχικές τιμές των παραμέτρων σχεδίασης διαλέγονται κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε η κατανομή πίεσης της αρχικής αεροτομής να μην εντοπίζεται πολύ κοντά στο αντικείμενο, επειδή με αυτόν τον τρόπο δεν ερευνώνται στο έπακρον οι δυνατότητες της μεθόδου, αλλά ούτε και πολύ μακριά γιατί υπάρχει πάντα το ενδεχόμενο να προσεγγιστεί ένα άλλο τοπικό ελάχιστο. Αμέσως μετά την παραμετροποίηση, επακολουθεί η επίλυση των εξισώσεων της μη συνεκτικής ροής (εξισώσεις Euler). Το υπολογιστικό εδάφιο διαφοροποιείται μέσω μη-δομημένου πλέγματος, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 4.1, ενώ στο σχήμα 4.2 παριστάνεται λεπτομέρεια του πλέγματος. Η επίλυση των εξισώσεων γίνεται και στις τρεις εφαρμογές, με την βοήθεια αλγορίθμων, οι οποίοι έχουν δημιουργηθεί στο Ε.Θ.Σ. και έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν με μεγάλη επιτυχία. Συγκεκριμένα, πραγματοποιείται μία μέθοδος χρονοπροέλασης, πεπερασμένων διαφορών. Τα μη συνεκτικά μητρώα της ροής υπολογίζονται με την συνδρομή του σχήματος του Roe ενώ πετυχαίνεται ακρίβεια δεύτερης τάξης χρησιμοποιώντας το σχήμα MUSCL. Επιπρόσθετα, εφαρμόζεται ο περιοριστής van Leer για τον περιορισμό των ζητούμενων κλίσεων των μεταβλητών της ροής. Τέλος, το γραμμικοποιημένο σύστημα των εξισώσεων λύνεται δημιουργώντας την μέθοδο Gauss-Seidel. Με την βοήθεια των ίδιων αλγορίθμων βρίσκονται ακολούθως και οι Συζυγείς Εξισώσεις, επειδή όπως παρατηρείται και σε προηγούμενο κεφάλαιο, είναι ένα υπερβολικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, όμοιο με εκείνο των εξισώσεων Euler, αλλά με αντίθετες ιδιότητες και φυσικά διαφορετικές οριακές συνθήκες. Η εύρεση του διανύσματος των πολλαπλασιαστών Lagrange (Ψ) καταλήγει, σύμφωνα με την μαθηματική ανάλυση του κεφαλαίου 2, στην τελική εξίσωση υπολογισμού των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης της αεροτομής. Μοναδικός άγνωστος αυτής της εξίσωσης είναι οι μεταβολές χαρακτηριστικών γεωμετρικών ποσοτήτων της αεροτομής. Για τον προσδιορισμό αυτών των γεωμετρικών μεγεθών, δραστηριοποιείται είτε η Αυτόματη Διαφόριση και πιο ειδικά το λογισμικό Odyssee, είτε η απλή μέθοδος των

Πεπερασμένων Διαφορών. Η σύγκριση μεταξύ των δύο μεθόδων, δείχνεται στο σχήμα 4.3. Συγκεκριμένα, το σχήμα 4.3 απεικονίζει τις παραγώγους της γεωμετρικής ποσότητας dy (κάθετη απόσταση μεταξύ δύο κοντινών κόμβων) μίας συμμετρικής αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC, ως προς πέντε παραμέτρους σχεδίασης PARSEC, υπολογισμένες μέσω και των δύο προαναφερθέντων μεθόδων. Ο άξονας χ αντιστοιχεί στους κόμβους της επιφάνειας της αεροτομής (50 για κάθε πλευρά), σαρώνοντας την αεροτομή από το χείλος εκφυγής (TE) προς το χείλος πρόσπτωσης (LE) και ξανά προς το χείλος εκφυγής. Σημειώνεται, ότι όλα τα αποτελέσματα που δίνουν οι δύο μέθοδοι, ταιριάζουν. Επομένως, η ακρίβεια που επιτυγχάνεται μέσω των Πεπερασμένων Διαφορών και του λογισμικού *Odyssee* είναι η ίδια. Πρέπει ασφαλώς να επισημανθεί, ότι το λογισμικό *Odyssee* αν και γρηγορότερο, χρειάζεται για την παραπάνω εργασία πολύ περισσότερη υπολογιστική μνήμη σε σχέση με τις Πεπερασμένες Διαφορές, επειδή υπολογίζει αρκετές παραγώγους και σχηματίζει μητρώα τα οποία ουσιαστικά δεν είναι αναγκαία. Στις νέες εκδόσεις του λογισμικού *Odyssee*, γίνεται προσπάθεια αποτροπής του προηγούμενου μειονεκτήματος. Η μοναδική ενδεχομένως δυσκολία που συναντάται κατά την διάρκεια εφαρμογής των Πεπερασμένων Διαφορών, έχει να κάνει με την επιλογή της ποσότητας e . Λανθασμένη επιλογή της καταλήγει πιθανών σε λάθος αποτελέσματα. Σε αυτήν την περίπτωση επιλέγεται $e = 10^{-7}$. Συνεχίζοντας τον σχολιασμό επί των διαγραμμάτων του σχήματος 4.3, επιβάλλεται να επισημανθεί, ότι ο μηδενισμός των παραγώγων της ποσότητας dy ως προς τις τέσσερις πρώτες μεταβλητές στην πλευρά υποπίεσης (κόμβοι 50 έως 100) είναι βάσιμος, μίας και οι παράμετροι αυτές δεν επηρεάζουν ουδόλως την μορφή της άνω πλευράς της αεροτομής. Απεναντίας, η μεταβλητή R_{LE} επιδρά και στις δύο πλευρές και μάλιστα με τρόπο αντισυμμετρικό, καθότι η αεροτομή για την οποία υλοποιείται ο παραπάνω υπολογισμός είναι συμμετρική.

Ομοίως, ορθολογικός και αναμενόμενος είναι ο μηδενισμός των παραγώγων $\frac{\partial dy}{\partial c_{LOW}}$

και $\frac{\partial \left(\frac{dy^2}{dx^2} \right)}{\partial c_{LOW}}$ στη θέση του 'ελάχιστου' σημείου της αεροτομής (κόμβος 27).

Έπειτα και από τον υπολογισμό των Παραγώγων Ευαισθησίας, εφαρμόζεται ο αλγόριθμος της Απότομης Καθόδου. Ειδικότερα, η αναμόρφωση των παραμέτρων

σχεδίασης (σημεία ελέγχου Bezier ή παράμετροι PARSEC) της αεροτομής γίνεται βάση της εξίσωσης:

$$D_i^{new} = D_i^{old} - n_i \frac{\partial I_{aug}}{\partial D_i} \quad (4.2)$$

Κατά την εφαρμογή του συγκεκριμένου αλγορίθμου, στην περίπτωση που η αεροτομή σχεδιάζεται μέσω των πολυωνύμων Bezier, οι τετμημένες των σημείων ελέγχου διαλέγονται σταθερές ($n_c = 0$) και αναμορφώνονται μόνο οι τεταγμένες. Έτσι λοιπόν, οι ελεύθερες παράμετροι του προβλήματος ελαττώνονται, καταλήγοντας σε γρηγορότερα αποτελέσματα όχι όμως και επιδρώντας στην γενικότητα της μεθόδου. Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει και στην εξάρτηση μεταξύ του βήματος n_i της Απότομης Καθόδου και της τεχνικής παραμετροποίησης. Στο ενδεχόμενο που το περίγραμμα της αεροτομής παραμετροποιείται μέσω των πολυωνύμων Bezier, οι παράμετροι σχεδίασης της αεροτομής (τεταγμένες των σημείων ελέγχου Bezier, Y_i) είναι ποσότητες της ίδιας τάξης μεγέθους. Ως επακόλουθο, για όλες τις μεταβλητές σχεδίασης, προτιμάται το ίδιο βήμα $n = \text{constant} = n$ και σχεδόν σε όλες τις εφαρμογές ως αρχική τιμή επιλέγεται $n = 10^{-3}$. Στην περίπτωση όμως των πολυωνύμων PARSEC, οι παράμετροι σχεδίασης δεν είναι, όπως έχει εξάλλου επισημανθεί και στο κεφάλαιο τρία, μεγέθη της ίδιας τάξης μεγέθους και κατά συνέπεια, επιδρούν στην μορφή της αεροτομής σε διαφορετικό βαθμό. Χρειάζεται συνεπώς η επιλογή διαφορετικού βήματος n για κάθε μία από αυτές τις παραμέτρους. Στον πίνακα 4.2 αναφέρονται ενδεικτικές τιμές του βήματος n για κάθε μία από τις μεταβλητές σχεδίασης των πολυωνύμων PARSEC11. Ακόμα, ενώ η ζητούμενη πίεση σκοπός προσεγγίζεται και η συνάρτηση κόστους ελαχιστοποιείται, είναι ίσως αναγκαία η μείωση του βήματος n , έτσι ώστε το βέλτιστο σημείο να μην υπερκεραστεί. Ο αλγόριθμος παρέχει την δυνατότητα αλλαγής του βήματος σε κάθε κύκλο σχεδίασης. Η διαδικασία της αντίστροφης σχεδίασης διακόπτεται όταν επιτευχθεί η πίεση στόχος, ή διαφορετικά όταν η συνάρτηση κόστους μειωθεί στην

επιθυμητή τιμή. Τα βήματα σχεδίασης μίας αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier διακρίνονται χαρακτηριστικά στα σχήματα 4.4 έως 4.6. Ειδικότερα, στο σχήμα 4.4 απεικονίζονται το περίγραμμα και

Μετ. Σχεδίασης PARSEC	Βήμα n_i
R_{LE}	0.0001
c_{LOW}	0.0200
y_{LOW}	0.0010
$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{c=c_{LOW}}$	0.1000
$q_{TE,LOW}$	20.0000

Πίνακας 4.3: Χαρακτηριστικές αριθμητικές τιμές του βήματος n , που επιλέγεται για μία ομάδα μεταβλητών σχεδίασης της παραμετροποίησης PARSEC-11

η κατανομή πίεσης της αεροτομής από την οποία αρχίζει η διαδικασία, καθώς και της αεροτομής αναφοράς, *NACA0012*. Πιθανόν, το περίγραμμα της αρχικής αεροτομής να φαίνεται πολύ κοντά στον στόχο. Παρατηρώντας όμως τα διαγράμματα των πιέσεων, συμπεραίνεται ότι το πρόβλημα έχει τεθεί ορθά, και αυτό γιατί οι κατανομές των πιέσεων αποκλίνουν αρκετά και είναι άριστο κριτήριο των δυνατοτήτων του αλγόριθμου. Στα σχήματα 4.5 και 4.6 απεικονίζονται τα διαγράμματα και οι κατανομές πίεσης της υπό σχεδίασης αεροτομής και της αεροτομής αναφοράς (*NACA0012*) στον 10 και 50 κύκλο σχεδίασης αντίστοιχα. Είναι φανερή η προσέγγιση της επιθυμητής πίεσης καθώς οι κύκλοι σχεδίασης αυξάνονται και πλέον στον 50 κύκλο, οι δύο κατανομές ταυτίζονται σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό. Είναι επιπλέον άξιο αναφοράς, ότι σχεδόν τέλεια έχει προσεγγιστεί και η πίεση στο μέσο της αεροτομής αναφοράς, στο οποίο γίνεται το κύμα κρούσης. Οι ολικές μεταβολές που

παρατηρούνται στις παραμέτρους σχεδίασης (τεταγμένες σημείων ελέγχου Bezier) ανάμεσα στον πρώτο και στον τελευταίο κύκλο σχεδίασης εμφανίζονται στο διάγραμμα 4.7. Τέλος, στο σχήμα 4.8, απεικονίζονται οι ισογραμμές της πίεσης της αεροτομής αναφοράς και της υπό σχεδίασης αεροτομής, στον τελευταίο κύκλο. Είναι χαρακτηριστική η ομοιότητα ανάμεσα στα δύο διαγράμματα, κάτι που συν τοις άλλοις φανερώνει τις δυνατότητες του αλγόριθμου. Το συμπέρασμα που απορρέει από την προηγούμενη διαδικασία, είναι ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης δουλεύει στην εντέλεια όταν η αεροτομή παραμετροποιείται μέσω των πολυωνύμων Bezier, ακόμα και στην περίπτωση διηχητικών αεροτομών. Το σημαντικότερο όμως ερώτημα έχει να κάνει με την συμπεριφορά των πολυωνύμων PARSEC, την βασικότερη καινοτομία του αλγορίθμου της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Στη συνέχεια λοιπόν, η διαδικασία σχεδίασης γίνεται πάλι από την αρχή. Για την παραμετροποίηση ωστόσο της αεροτομής προτιμώνται τα πολυώνυμα PARSEC11. Στο σχήμα 4.9 απεικονίζονται τα διαγράμματα και οι κατανομές πίεσης της αεροτομής με PARSEC παραμετροποίηση, στον πρώτο και τελευταίο κύκλο σχεδίασης. Η παρατήρηση τους κάνει εμφανές, ότι όπως ακριβώς και στην περίπτωση των Bezier έτσι και εδώ, η πίεση αυτοσκοπός προσεγγίζεται περίπου άψογα. Κατά συνέπεια τα πολυώνυμα PARSEC αποτελούν συνάμα ένα πάρα πολύ καλό και χρηστικό βοήθημα. Οι μεταβολές των παραμέτρων σχεδίασης PARSEC, μεταξύ πρώτου και τελευταίου κύκλου σχεδίασης, επισημαίνονται στον πίνακα 4.5. Πρέπει ασφαλώς να σημειωθεί, ότι τόσο τα σημεία Bezier όσο και οι παράμετροι PARSEC, αλλάζουν εντός ορισμένων ορίων, τα οποία διαλέγονται από τον χρήστη του αλγορίθμου. Στο σχήμα 4.10 και στον πίνακα 4.5 φαίνονται οι μεταβολές της συνάρτησης κόστους κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου και την αντίστροφη σχεδίαση αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier και PARSEC11. Μετά από 150 περίπου κύκλους σχεδίασης, η τιμή της συνάρτησης κόστους και στις δύο περιπτώσεις, παγιώνεται ($I_c ; 0.2$) και η εφαρμογή του αλγορίθμου διακόπτεται. Θεωρείται εκτός αυτού ότι οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier κατευθύνουν γρηγορότερα σε άμεσα αποτελέσματα. Παρόλα αυτά, το παρόν διάγραμμα δεν μπορεί να αποτελέσει κριτήριο γρήγορης παραμετροποίησης. Ο ρυθμός σύγκλισης και εύρεσης του βέλτιστου σημείου, εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως από τις αρχικές τιμές των παραμέτρων σχεδίασης (για παράδειγμα $I_{c,Bezier}^{1st} = 0.146$ ενώ $I_{c,PARSEC}^{1st} = 0.176$) καθώς και από το βήμα της Απότομής Καθόδου. Κατά επέκταση, άμεση σύγκριση μεταξύ των δύο

παραμετροποιήσεων ως προς την ταχύτητα σύγκλισης δεν γίνεται να υφίσταται. Είναι πιθανό βεβαίως να παρατηρηθεί, ότι και οι δύο τεχνικές πλησιάζουν την επιθυμητή πίεση αυτοσκοπό, με την ίδια αρτιότητα. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί και η χαρακτηριστική διαφορά στην δομή των δύο συναρτήσεων κόστους. Στην περίπτωση των πολυωνύμων Bezier, η συνάρτηση κόστους είναι ομοιόμορφη, ενώ με την καθιέρωση των PARSEC παρατηρούνται έντονες αυξομειώσεις και πιο συγκεκριμένα όσο προσεγγίζεται το βέλτιστο σημείο. Το αίτιο αυτής της διαφοράς οφείλεται ενδεχομένως στην πιο ισχυρή έξη που υφίσταται ανάμεσα στις μεταβλητές σχεδίασης PARSEC, σε σχέση με εκείνη ανάμεσα στα σημεία Bezier. Μικρές δηλαδή μεταβολές, για παράδειγμα, στην ακτίνα καμπυλότητας (R_{LE}) επηρεάζουν αισθητά και τις υπόλοιπες παραμέτρους PARSEC, με επακόλουθο αυξομειώσεις της συνάρτησης κόστους. Αντίστοιχη αλλαγή της τεταγμένης ενός εκ των τριάντα συνολικά σημείων ελέγχου Bezier, δεν δημιουργεί τόσο αισθητή μεταβολή του περιγράμματος της αεροτομής και κατά συνέπεια, η συνάρτηση κόστους μειώνεται εύρυθμα.

Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς τη RAE2822

Η δεύτερη εφαρμογή, στην οποία προσκαλείται ο κώδικας να φανερώσει τις δυνατότητες του, είναι η αντίστροφη σχεδίαση περιγράμματος αεροτομής με αεροτομή αναφοράς τη RAE2822. Η RAE2822 είναι, όπως και η *NACA0012*, δηλαδή μία μεμονωμένη αεροτομή, όχι όμως και συμμετρική. Επιπρόσθετα, η ροή σε αυτό το παράδειγμα, δεν είναι διηχητική ($Mach=0.35$) και δεν φαίνεται πουθενά κάθετο κρουστικό κύμα, όπως προηγουμένως. Ωστόσο, το επίπεδο δυσκολίας και αυτής της εφαρμογής είναι μεγάλο, και αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στην δομή της αεροτομής αναφοράς. Η RAE2822, αν και έχει μηδαμινή γραμμή καμπυλότητας, εντούτοις έχει ιδιότυπη πλευρά υπερπίεσης, η οποία δίνει την δυνατότητα χρησιμοποίησης και των τριών τεχνικών παραμετροποίησης, που αναλύονται διεξοδικά στην παρούσα πτυχιακή εργασία (Bezier, PARSEC14, Bezier-PARSEC11). Το τωρινό παράδειγμα δίνει επομένως την δυνατότητα έρευνας και σύγκρισης όλων των παραμετροποιήσεων. Η διαδικασία της αντίστροφης σχεδίασης και η μορφή του

αλγόριθμοι σε αυτήν την εφαρμογή δεν εμφανίζουν σχεδόν καμία διαφορά συγκρινόμενες με εκείνες τις προηγούμενης εφαρμογής. Στην πιθανότητα που το περίγραμμα της υπό σχεδίασης αεροτομής παραμετροποιείται μέσω των πολυωνυμικών καμπυλών Bezier, οι παράμετροι σχεδίασης είναι, όπως και παραπάνω, οι τεταγμένες (Y_i) τριάντα σημείων ελέγχου Bezier. Το αποτέλεσμα της αντίστροφης σχεδίασης σε αυτήν την περίπτωση και πιο ειδικά τα περιγράμματα και οι κατανομές πίεσης στον πρώτο και τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης, δίνονται στο σχήμα 4.11. Θεωρείται, ότι τόσο η πίεση αυτοσκοπός, όσο και το περίγραμμα της αεροτομής αναφοράς προσεγγίζονται απόλυτα. Επίσης, στο σχήμα 4.12 φαίνονται οι μεταβολές των σημείων ελέγχου Bezier μεταξύ του πρώτου και τελευταίου κύκλου σχεδίασης. Χαρακτηριστικές είναι οι μεγάλες μεταβολές των σημείων ελέγχου στο πίσω μέρος της πλευράς υπερπίεσης, προκειμένου να προσεγγίσουν την ιδιοτυπία της αεροτομής RAE2822 σε αυτό το μέρος. Η διαδικασία της αντίστροφης σχεδίασης της αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC14, παρουσιάζεται λεπτομερώς στα σχήματα 4.13 έως 4.15. Ειδικότερα, στο σχήμα 4.13 διακρίνεται το περίγραμμα και η κατανομή πίεσης στον 1ο κύκλο σχεδίασης. Είναι φανερό, ότι εάν και η αρχική αεροτομή εντοπίζεται πολύ μακριά από την αεροτομή αναφοράς, μετά από μόλις 10 κύκλους (σχήμα 4.14), το περίγραμμα και η κατανομή πίεσης της υπό σχεδίαση αεροτομής έχουν προσεγγίσει ικανοποιητικά τα αντίστοιχα της αεροτομής αναφοράς, ενώ στον 1500 κύκλο, συμφωνούν σχεδόν απόλυτα. Στον πίνακα 4.5 αναφέρονται και οι μεταβολές που παθαίνουν οι παράμετροι σχεδίασης PARSEC14, κατά την διαδικασία της σχεδίασης. Οι μεγαλύτερες μεταβολές παρατηρούνται στις παραμέτρους y_{TE} και $\theta_{TE,UP}$, ενώ η μικρότερη στην χ_{LOW} . Τέλος, οι ελαχιστοποιήσεις των συναρτήσεων κόστους και για τις τρεις παραμετροποιήσεις, φαίνονται στο σχήμα 4.16, ενώ στον πίνακα 4.5 παραθέτονται οι τιμές τους σε ενδεικτικούς κύκλους σχεδίασης. Μέσω του διαγράμματος 4.16 είναι ολοφάνερο, ότι και οι τρεις παραμετροποιήσεις συγκλίνουν στο βέλτιστο σημείο με την ίδια περίπου ακρίβεια. Πιθανόν, η συνάρτηση κόστους στην περίπτωση που η αεροτομή σχεδιάζεται μέσω των πολυωνύμων Bezier, να πιάνει τα χαμηλότερα επίπεδα τιμών ($I_{C,Bezier}^{min} ; 8 \cdot 10^{-3}$). Ωστόσο, η διαφορά με τις άλλες δύο τεχνικές παραμετροποίησης κρίνεται σχεδόν αμελητέα.

Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς την πτερύγωση συμπιεστή της MAN

Κύριος σκοπός του αλγόριθμου που αναλύεται στην παρούσα πτυχιακή εργασία, είναι η εφαρμογή της Συζυγούς Μεθόδου βασικά σε προβλήματα στροβιλομηχανών. Η εφαρμογή που προκύπτει στην συνέχεια, είναι ένα πρόβλημα στροβιλομηχανών, μίας και αναφέρεται στην αντίστροφη σχεδίαση περιγράμματος αεροτομής, με αεροτομή αναφοράς υπάρχουν πτερύγιο συμπιεστή της γερμανικής εταιρίας MAN. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Η αεροτομή της MAN, όντας αεροτομή πτερυγίου συμπιεστή, είναι αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αεροτομής με μεγάλη καμπυλότητα. Για την παραμετροποίηση της μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι τρεις τεχνικές παραμετροποίησης. Μάλιστα, μέσω της συγκεκριμένης αεροτομής, επιδεικνύονται ιδιαίτερα οι δυνατότητες των παραμετροποιήσεων, μιας και η αυξημένη καμπυλότητα κάνει τις απαιτήσεις του προβλήματος υψηλότερες. Όπως και στην περίπτωση της μεμονωμένης αεροτομής RAE2822, έτσι και εδώ, η ροή είναι υποηχητική ($Mach = 0.40$) και δεν δημιουργούνται κύματα κρούσης. Στην περίπτωση εφαρμογών εσωτερικής αεροδυναμικής (στροβιλομηχανές), μικρές αλλαγές παρατηρούνται στον αλγόριθμο, ενώ η διαδικασία βελτιστοποίησης παραμένει ακριβώς η ίδια. Η ουσιαστικότερη ίσως μεταβολή, έχει να κάνει με το υπολογιστικό εδάφιο σχετικά με την αεροτομή. Στο σχήμα 4.17, παριστάνεται το εδάφιο και πιο συγκεκριμένα το μη-δομημένο πλέγμα γύρω από αεροτομή πτερυγίου συμπιεστή, ενώ στο σχήμα 4.18, διακρίνεται η λεπτομέρεια του πλέγματος, κοντά στο χείλος πρόσπτωσης της αεροτομής. Οι οριακές συνθήκες στην είσοδο και έξοδο του χωρίου επίλυσης, καθώς και στην επιφάνεια της αεροτομής εξακολουθούν να είναι οι ίδιες τόσο για τις εξισώσεις της ροής, όσο και για τις Συζυγείς Εξισώσεις. Επιπλέον, στον συγκεκριμένο αλγόριθμο δεν γίνεται χρήση της μεθόδου του Πάχους Ροής (AVDR). Όπως παραθέεται και προηγουμένως, η διαδικασία της αντίστροφης σχεδίασης δεν εμφανίζει καμία διαφορά με εκείνη που εφαρμόζεται στις προηγούμενες εφαρμογές. Η πρώτη τεχνική παραμετροποίησης που θέτεται στον αλγόριθμο, είναι οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier και τα αποτελέσματα της αντίστροφης σχεδίασης αποτυπώνονται στο σχήμα 4.19. Ειδικότερα, στο σχήμα 4.19

φαίνονται τα περιγράμματα και οι κατανομές πίεσης στον πρώτο και τον τελευταίο κύκλο σχεδίασης. Διαπιστώνεται, ότι η κατανομή πίεσης της υπό σχεδίασης αεροτομής, στο τέλος της διαδικασίας, ταυτίζεται σχεδόν απόλυτα με την κατανομή πίεσης της αεροτομής αναφοράς (MAN). Το ίδιο πράγμα γίνεται και με τα περιγράμματα των δύο αεροτομών. Επιπροσθέτως, στο σχήμα 4.20 διακρίνονται οι μεγάλες μεταβολές των σημείων ελέγχου Bezier, που παρατηρούνται κατά την διαδικασία σχεδίασης. Το πρώτο συμπέρασμα λοιπόν που προκύπτει, είναι ότι ο αλγόριθμος καθώς και τα πολυώνυμα Bezier δουλεύουν άψογα και πετυχαίνουν προσέγγιση της πίεσης αυτοσκοπού με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Στην συνέχεια, εισάγονται τα πολυώνυμα PARSEC14 για την παραμετροποίηση του υπό σχεδίαση περιγράμματος της αεροτομής. Όπως και προηγουμένως, στο σχήμα 4.21 απεικονίζεται το αρχικό και τελικό στάδιο της σχεδίασης (περιγράμματα και κατανομές πίεσης). Οι μεταβολές των δεκατεσσάρων παραμέτρων σχεδίασης PARSEC φαίνονται στον πίνακα 4.5. Ο αλγόριθμος παρέχει και σε αυτήν την περίπτωση ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα. Κατά συνέπεια, η παραμετροποίηση PARSEC14 είναι εξίσου αποτελεσματική με τα πολυώνυμα Bezier. Ακολούθως, το περίγραμμα της αεροτομής παραμετροποιείται μέσω της υπέρθεσης των πολυωνύμων PARSEC11 και Bezier. Τα στάδια της αντίστροφης σχεδίασης σε αυτήν την περίπτωση, αναφέρονται στα σχήματα 4.22 έως 4.24. Παρ' όλο που η αρχική κατανομή πίεσης εντοπίζεται πολύ μακριά από την αντίστοιχη της αεροτομής αναφοράς (σχήμα 4.22), στο σχήμα 4.24 θεωρείται ότι μετά το τέλος της σχεδίασης, οι δύο κατανομές αλλά και τα δύο περιγράμματα ταυτίζονται. Ιδιάζων ενδιαφέρον εμφανίζει και η συνολική μεταβολή της μέσης γραμμής κυρτότητας (σχήμα 4.25), η οποία παραμετροποιείται μέσω των πολυωνύμων Bezier. Τέλος, τα διαγράμματα των συναρτήσεων κόστους και για τις τρεις παραμετροποιήσεις, αναφέρεται στο σχήμα 4.26, ενώ στον πίνακα 4.5 παραθέτονται τιμές των συναρτήσεων κόστους, σε ενδεικτικούς κύκλους σχεδίασης. Είναι εμφανές, ότι και οι τρεις τεχνικές παραμετροποίησης κατευθύνουν την συνάρτηση κόστους σε πολύ χαμηλά επίπεδα και προσεγγίζουν το βέλτιστο σημείο με την ίδια περίπου ακρίβεια.

Ανάστροφη Σχεδίαση με Αεροτομή Αναφοράς τη ^{VR7}

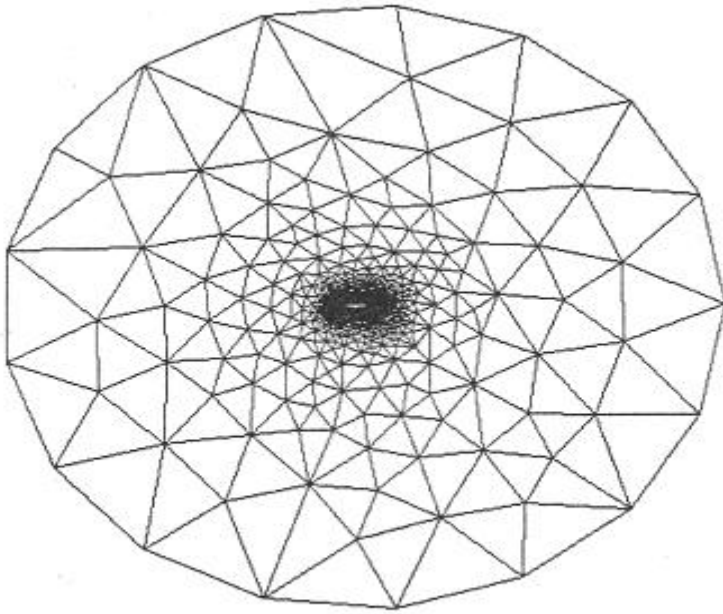
Ένα επιπλέον παράδειγμα αντίστροφης σχεδίασης εκθέτεται στην συνέχεια της πτυχιακής, με κύριο στόχο την παρουσίαση των δυνατοτήτων των πολυωνύμων Bezier, αλλά και την εμφάνιση μίας, όχι ιδιαίτερα συνηθισμένης εφαρμογής, της VR-7. Η VR-7 είναι μία αεροτομή πτερυγίου έλικα, σχεδιασμένη από τον Leo Dadone στην Boeing. Πρόκειται ουσιαστικά για μεμονωμένη αεροτομή, σε υποηχητικές συνθήκες ροής ($Mach = 0.35$). Για την παραμετροποίηση της υπό σχεδίαση αεροτομής, διαλέγονται οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier. Η διαδικασία της αντίστροφης σχεδίασης αποτυπώνεται στα σχήματα 4.27 έως 4.29. Επίσης, η ελάττωση της συνάρτησης κόστους δείχνεται στο σχήμα 4.30. Αν και πετυχαίνεται η προσέγγιση της πίεσης αυτοσκοπού μέχρι ενός μεγάλου βαθμού ακριβείας, στη συγκεκριμένη εφαρμογή η συνάρτηση κόστους δεν ελαττώνεται σε τόσο χαμηλά επίπεδα, όσο στις προηγούμενες εφαρμογές ($I_c^{min} = 0.021$). Αυτό όμως δεν προέρχεται από την παραμετροποίηση και ειδικότερα στα πολυώνυμα Bezier, αλλά στις ιδιομορφίες και τις μικρές μεταβολές που παρουσιάζει η κατανομή πίεσης της αεροτομής VR7.

Βελτιστοποίηση της αεροτομής RAE2822

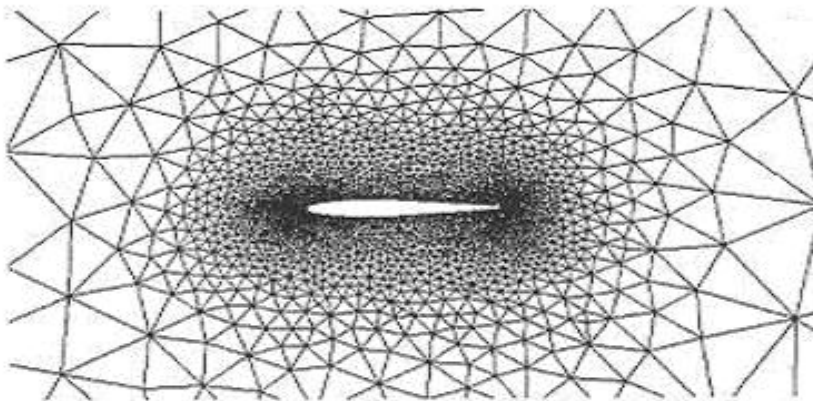
Η τελευταία εφαρμογή της πτυχιακής, σχετίζεται με την βελτιστοποίηση της αεροτομής RAE2822. Βασικός σκοπός του παραδείγματος αυτού, στο οποίο για την παραμετροποίηση της αεροτομής χρησιμοποιούνται μόνο τα πολυώνυμα Bezier, είναι να δείξει ότι η αντικατάσταση των αναλυτικών διατυπώσεων από την γενική μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών για την εύρεση χαρακτηριστικών γεωμετρικών ποσοτήτων, δεν έχει δυσμενή συνέπεια στην ακρίβεια και ορθότητα των αποτελεσμάτων. Η συνάρτηση κόστους που επιλέγεται για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος βελτιστοποίησης, περιγράφεται μαθηματικά μέσω της εξίσωσης:

$$I_c = (C_L - C_{L,t})^2 + C_D^2 \quad (4.3)$$

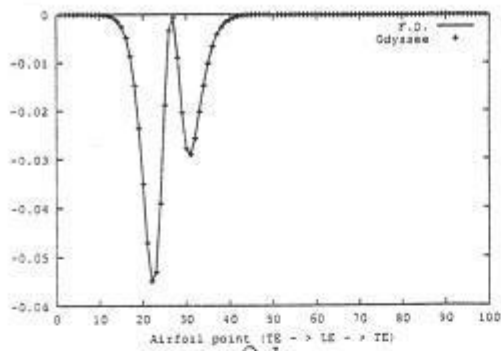
όπου C_L και C_D οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας αντίστοιχα και $C_{L,target}$ μία επιθυμητή τιμή του συντελεστή άνωσης, η οποία στο τωρινό παράδειγμα εκλαμβάνεται ίση με 0.78. Σκοπός δηλαδή, είναι η ελάττωση του συντελεστή οπισθέλκουσας, σε συνδυασμό με την προσέγγιση ενός επιθυμητού συντελεστή άνωσης. Όπως και προηγουμένως, παράμετροι του προβλήματος λογίζονται οι τεταγμένες (Yi) των σημείων ελέγχου Bezier. Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης παραθέτονται στα σχήματα 4.31 έως 4.33. Συγκεκριμένα, στο σχήμα 4.31 παριστάνεται η μεταβολή του συντελεστή άνωσης και του συντελεστή οπισθέλκουσας. Είναι χαρακτηριστικό, ότι ο συντελεστής άνωσης αρχίζει από μία ιδιαίτερα χαμηλή τιμή και τελικά, μετά από 90 περίπου κύκλους βελτιστοποίησης, παγιώνεται πολύ κοντά στην επιθυμητή τιμή 0.78. Συμπληρωματικά, ο συντελεστής οπισθέλκουσας ισούται στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης με 0.016 και βαθμιαία ελαττώνεται, λαμβάνοντας στον 90ο κύκλο βελτιστοποίησης την τιμή 0.0103. Η ελάττωση της συνάρτησης κόστους φαίνεται στο σχήμα 4.5 και οι κατανομές της πίεσης της αρχικής αλλά και της βελτιστοποιημένης αεροτομής RAE2822, στο σχήμα 4.5. Η παρακολούθηση των προηγούμενων γραφημάτων καταλήγει εύκολα στο συμπέρασμα, πως η εύρεση των γεωμετρικών ποσοτήτων οι οποίες αναμειγνύονται στην εξίσωση των Παραγώγων Ευαισθησίας, μέσω των Πεπερασμένων Διαφορών και όχι με την συνδρομή αναλυτικών εκφράσεων, προσφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας. Πρέπει όμως να επισημανθεί και το μειονέκτημα της μεθόδου, το οποίο έχει να κάνει με τον υπολογιστικό της χρόνο. Είναι ολοφάνερο, ότι οι αναλυτικές εκφράσεις είναι γρηγορότερες των Πεπερασμένων Διαφορών, κάτι που συμπεραίνεται και κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου στο προηγούμενο πρόβλημα.



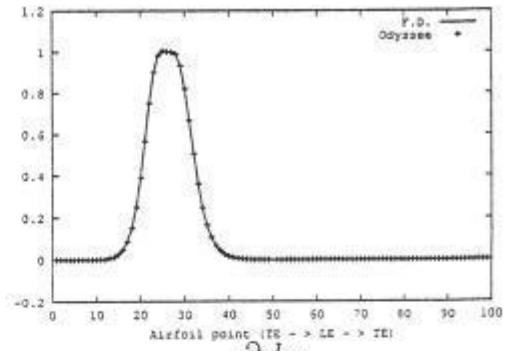
Σχήμα 4.1: Μη- δομημένο υπολογιστικό πλέγμα γύρω από μεμονωμένη αεροτομή (6.585 τριγωνικά στοιχεία, 3.371 κόμβοι).



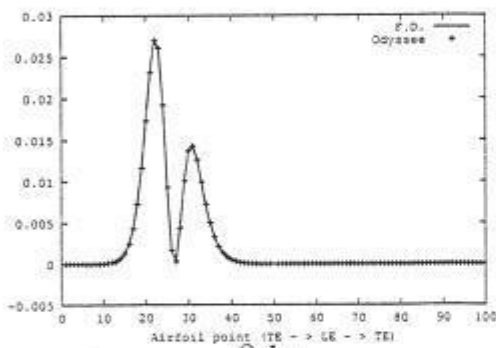
Σχήμα 4.2: Λεπτομέρεια μη- δομημένου υπολογιστικού πλέγματος.



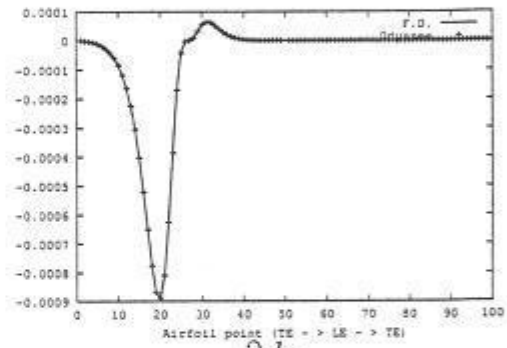
$$(\alpha') \frac{\partial dy}{\partial x}_{LOW}$$



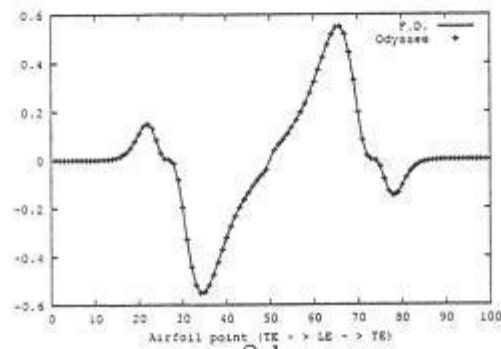
$$(\beta') \frac{\partial dy}{\partial y}_{LOW}$$



$$(\gamma') \frac{\partial dy}{\partial \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_{LOW}}}$$

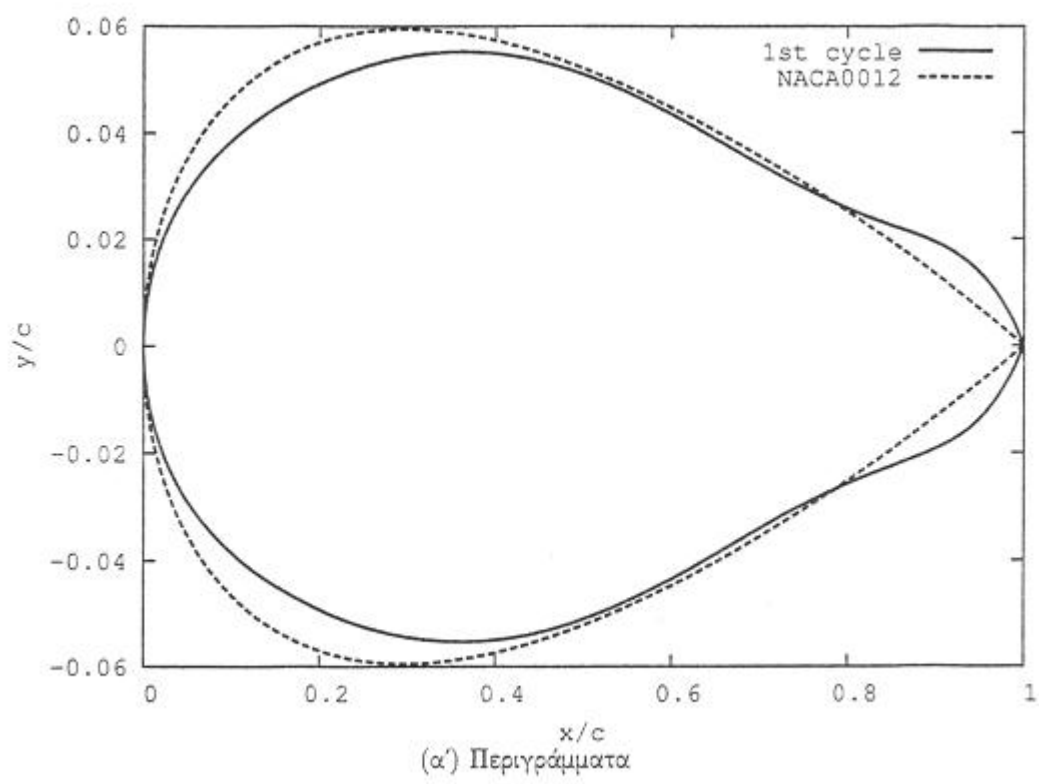


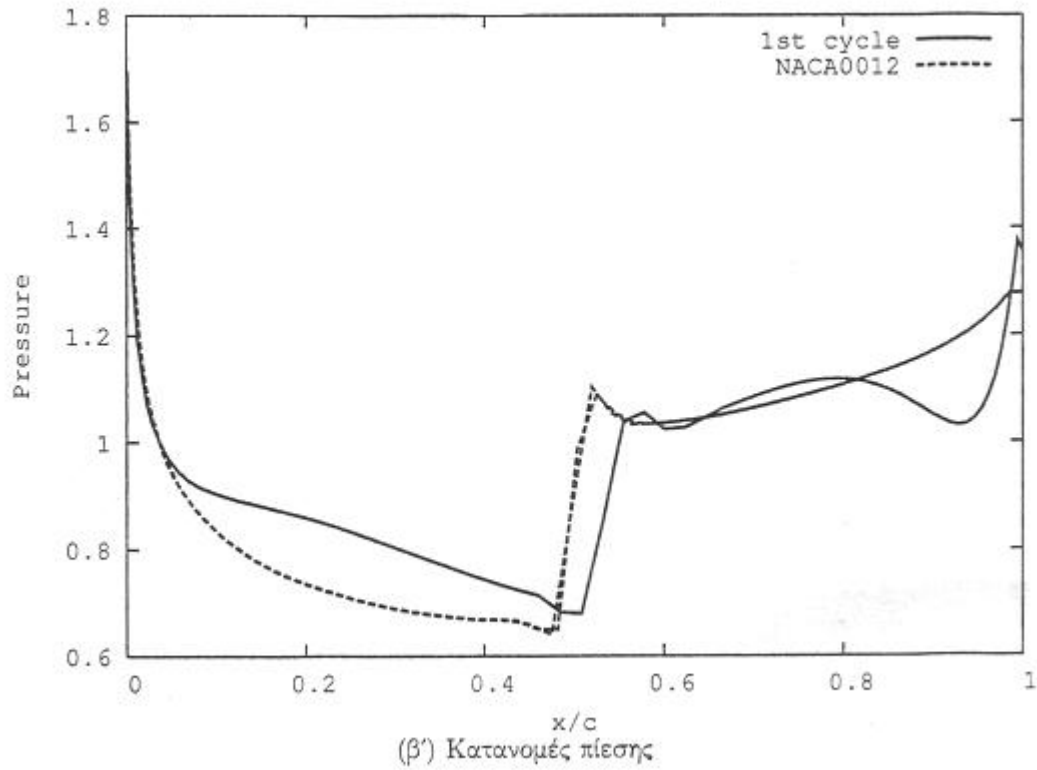
$$(\delta') \frac{\partial dy}{\partial \theta}_{TE,LOW}$$



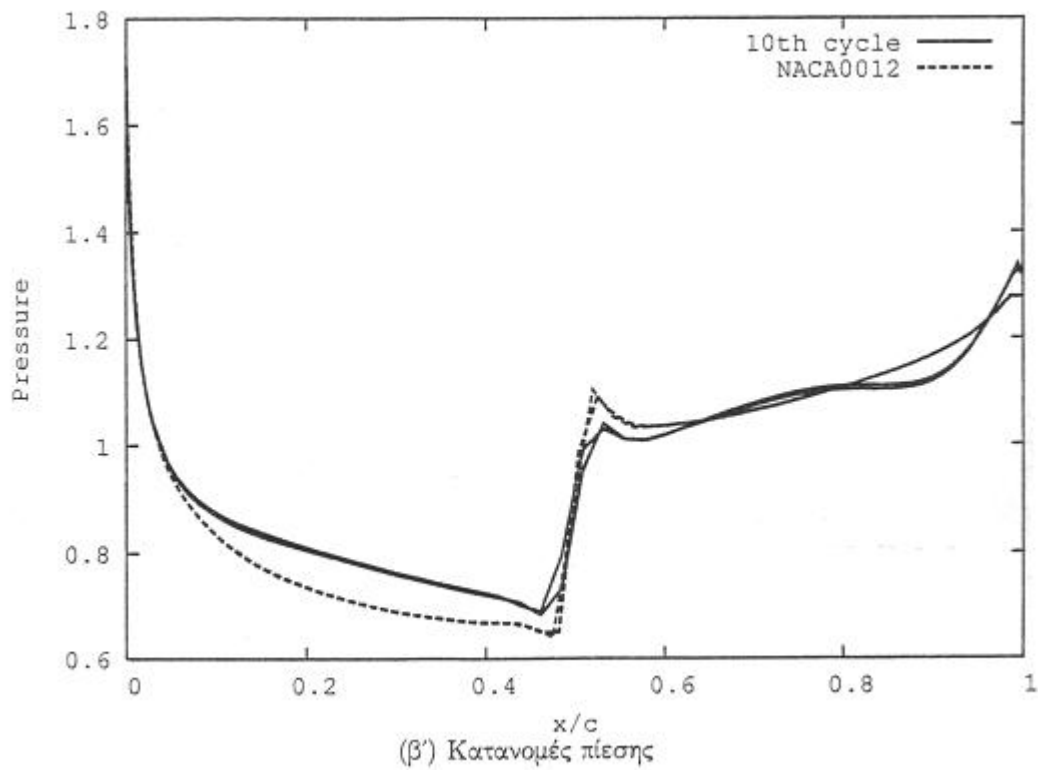
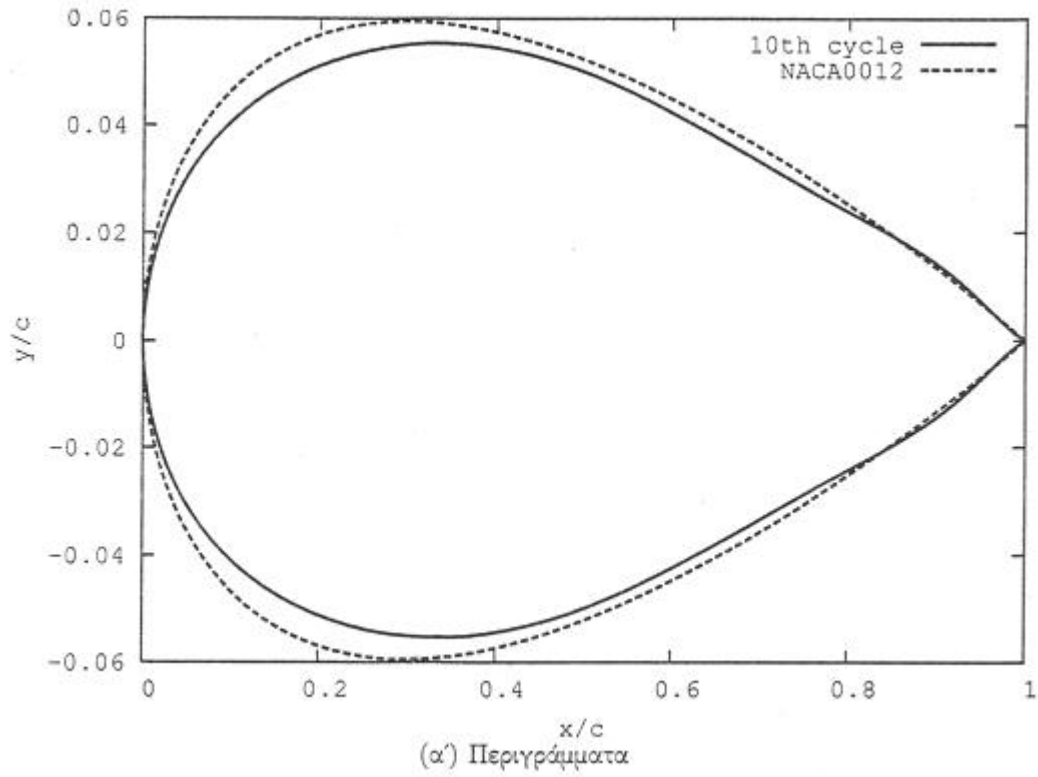
$$(\epsilon') \frac{\partial dy}{\partial R}_{LE}$$

Σχήμα 4.3: Μερικές παράγωγοι της γεωμετρικής ποσότητας dy ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης της παραμετροποίησης PARSEC-11 μέσω της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών και του λογισμικού Odyssee.

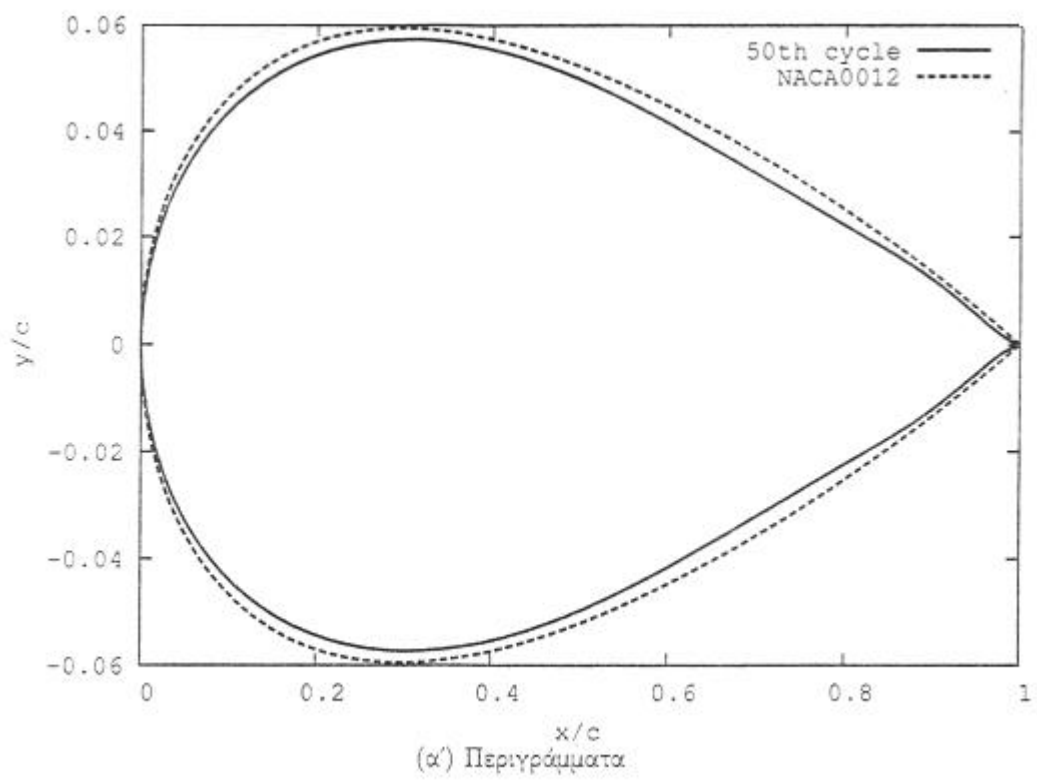


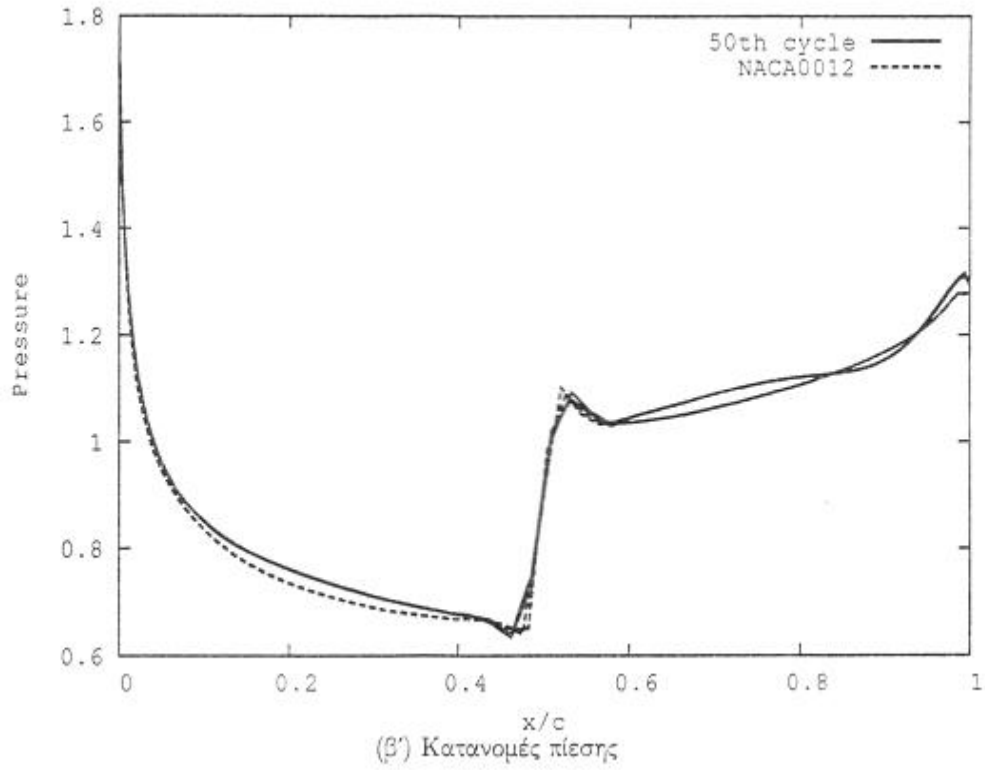


Σχήμα 4.4: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 1ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή αναφοράς τη NACA0012.

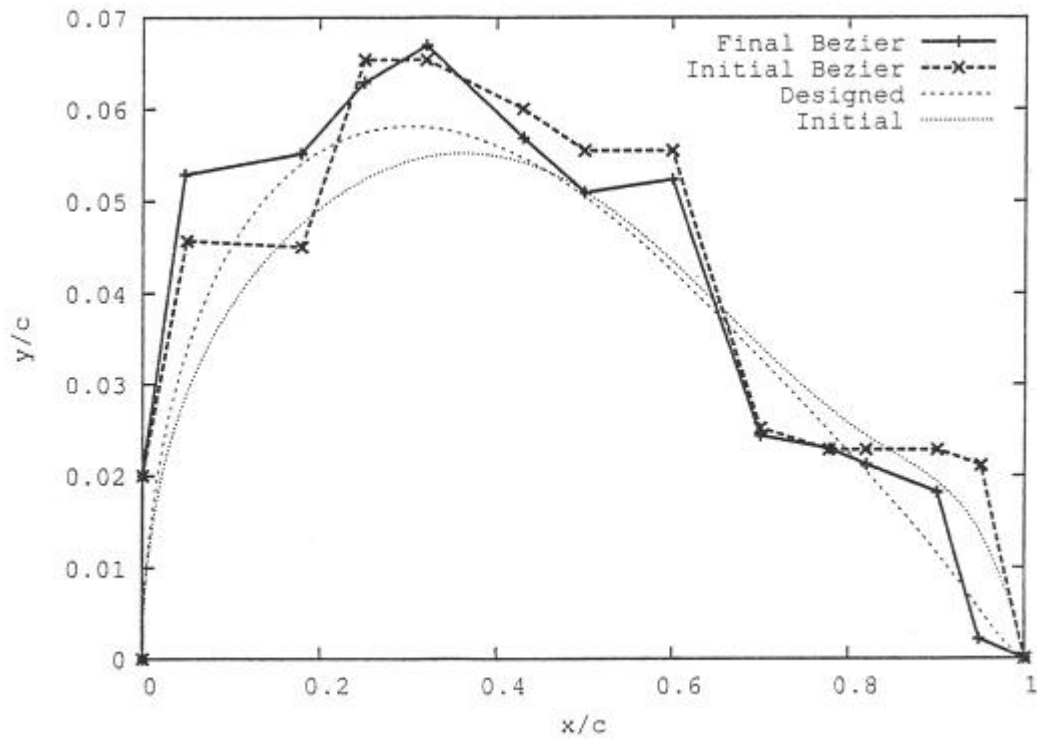


Σχήμα 4.5: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 10ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή αναφοράς τη NACA0012.

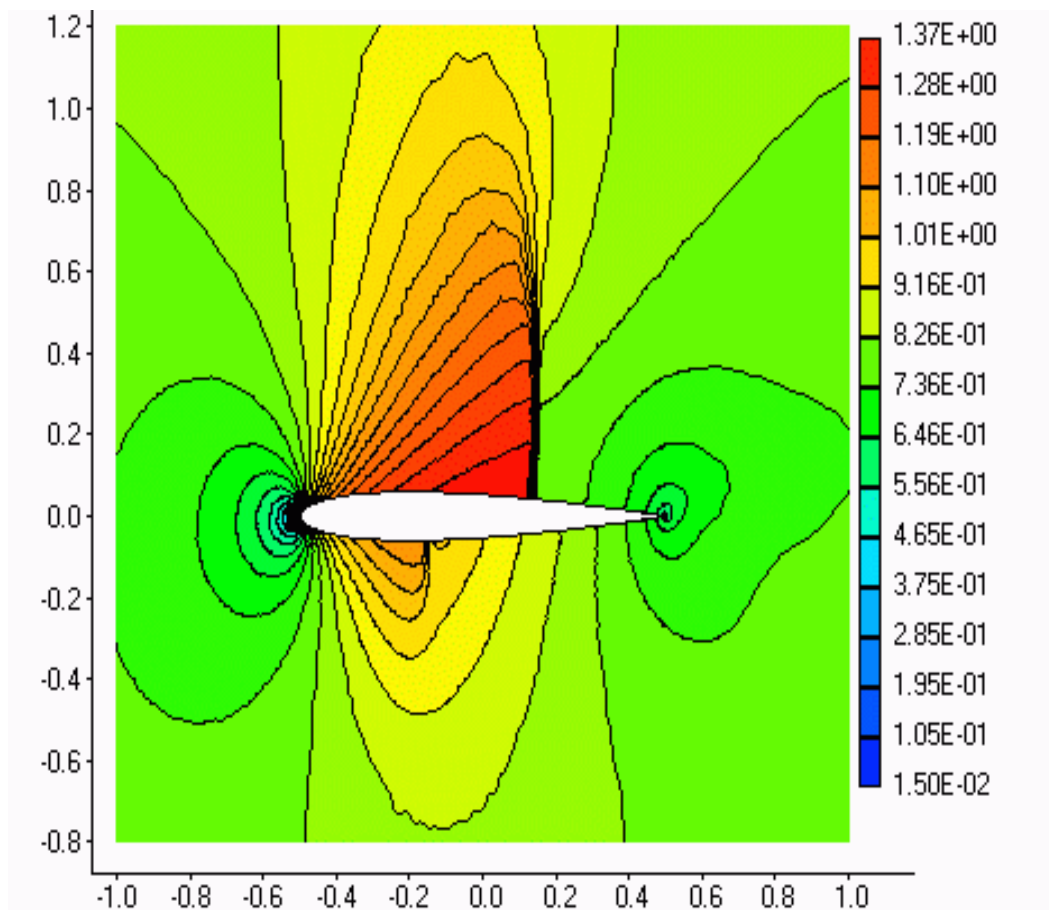




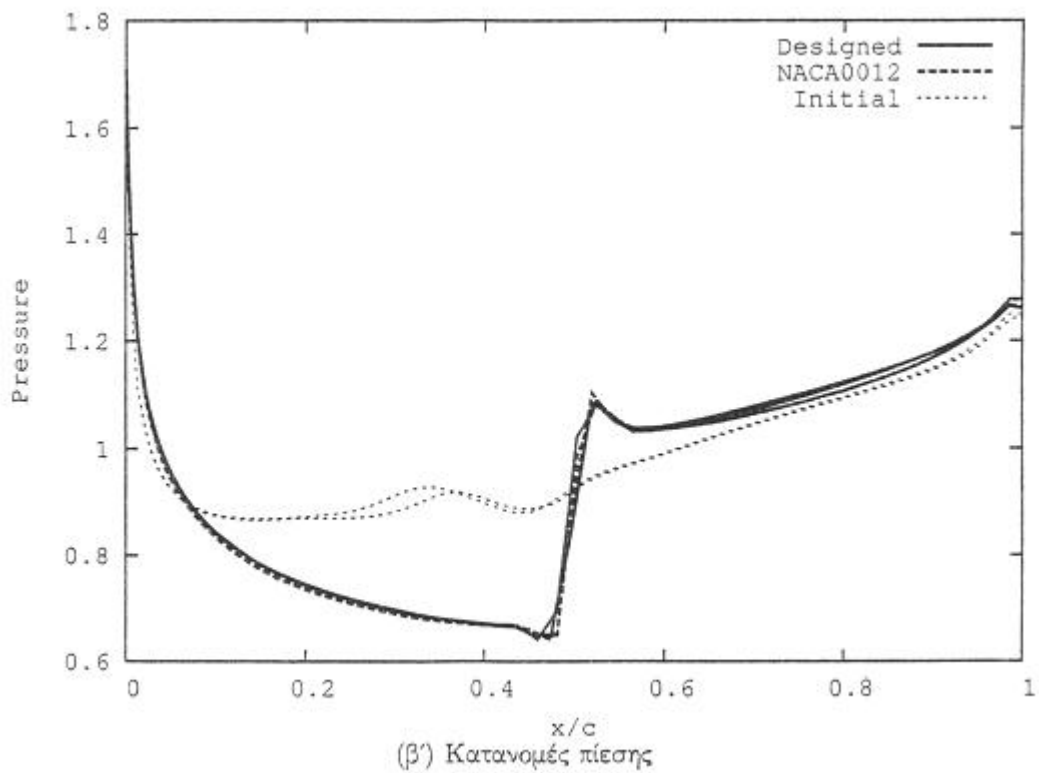
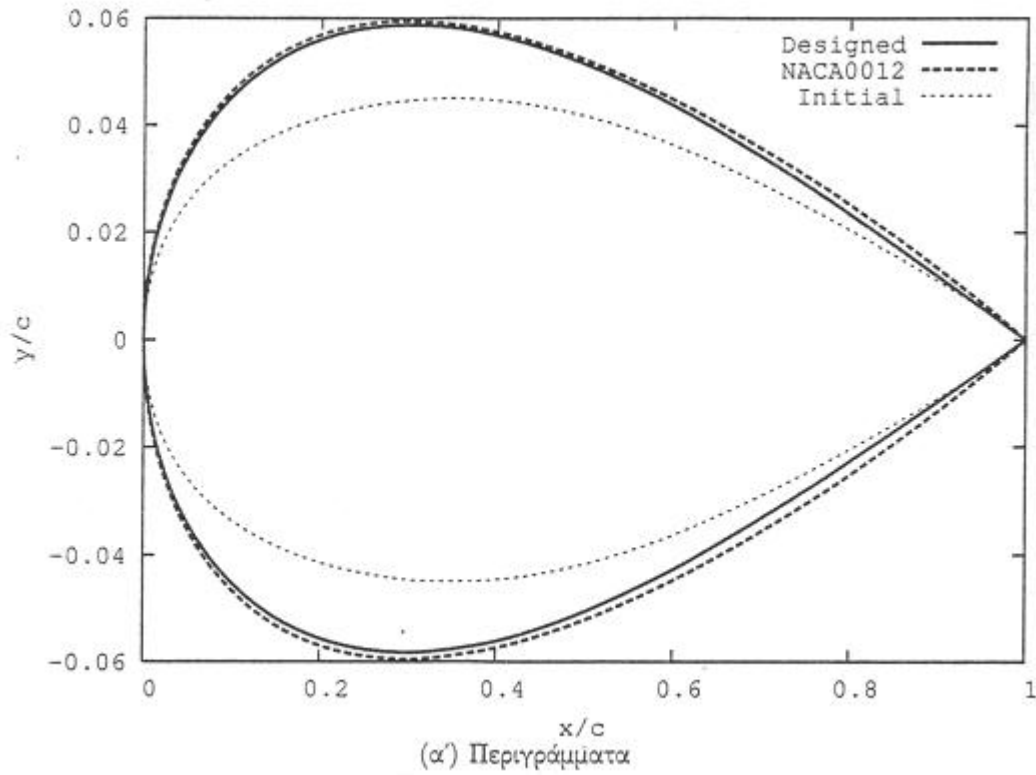
Σχήμα 4.6: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 50ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή αναφοράς τη NACA0012.



Σχήμα 4.7: Μεταβολές των σημείων ελέγχου Bezier μεταξύ του πρώτου και τελευταίου κύκλου ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με αεροτομή αναφοράς τη NACA0012. Επισημαίνονται επίσης, το αρχικό (Initial) και το τελικό (Designed) περίγραμμά της υπό σχεδίαση αεροτομής.



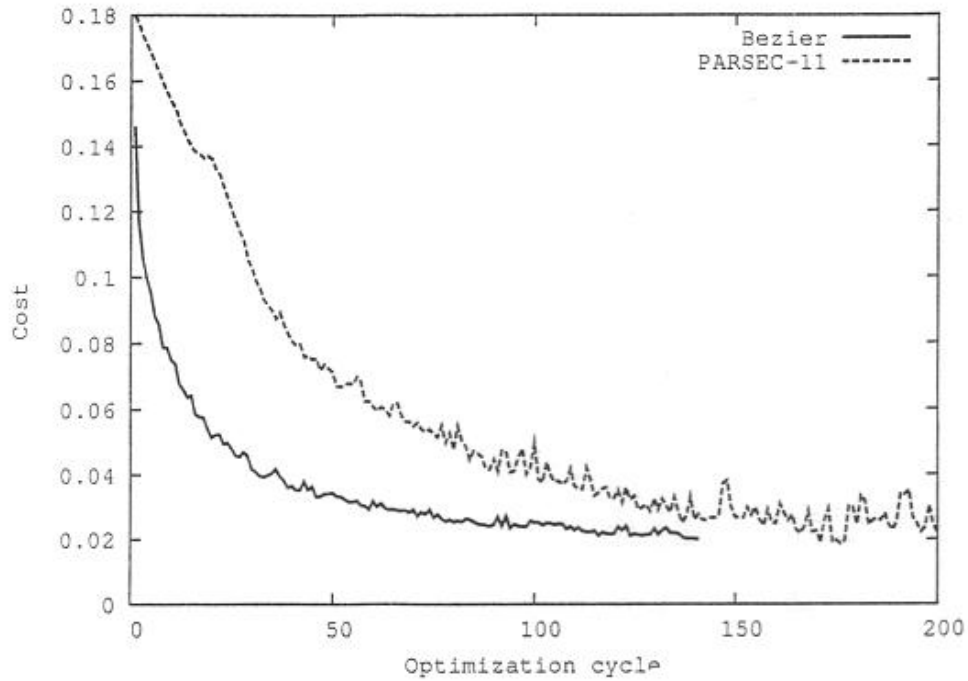
Σχήμα 4.8: Ισογραμμές πίεσης γύρω από την αεροτομή αναφοράς NACA0012.



Σχήμα 4.9: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον πρώτο (Initial) και τον τελευταίο (Designed) κύκλο ανάστροφη σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC11 και αεροτομή αναφοράς τη NACA0012

Παρ. Σχεδίασης PARSEC		Αρχική Τιμή	Τελική Τιμή
x_{LE}		1.000	1.000
y_{LE}		0.000	0.000
R_{LE}		0.0100	0.009
x_{LOW}		0.350	0.334
y_{LOW}		-0.055	-0.0573
	$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{X=X_{LOW}}$	0.450	0.421
$q_{TE,LOW}$		2.000	2.130
x_{UP}		0.350	0.332
y_{UP}		0.055	0.056
	$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{X=X_{UP}}$	-0.450	-0.419
$q_{TE,UP}$		-5.000	-5.052

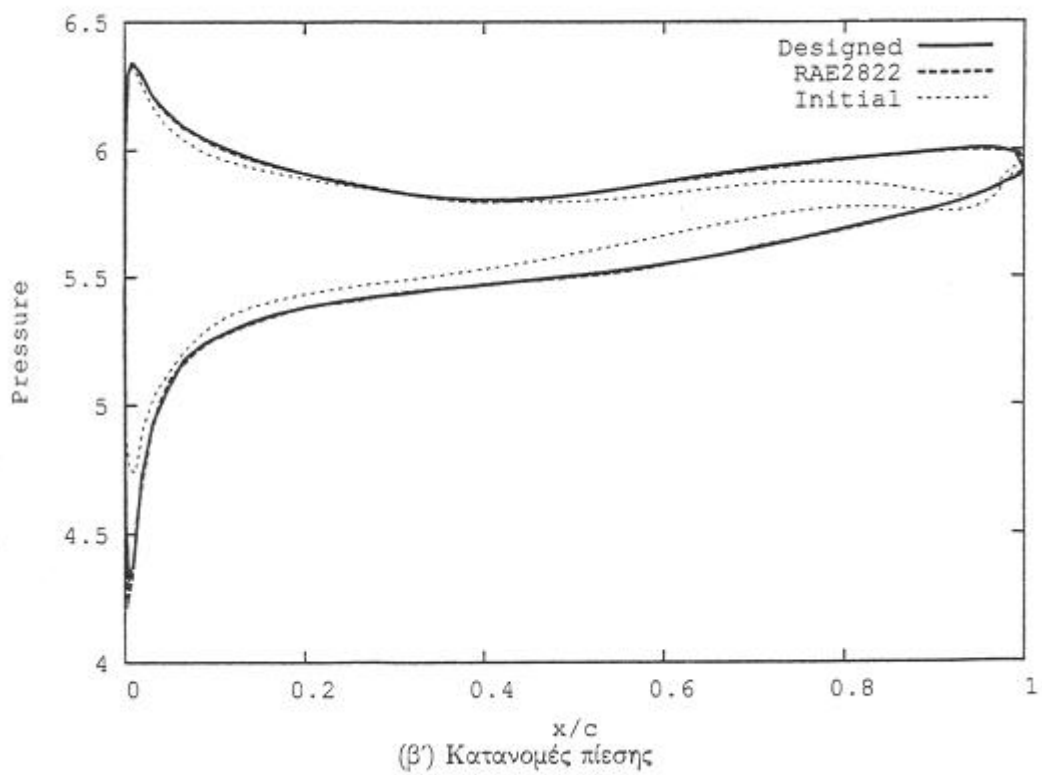
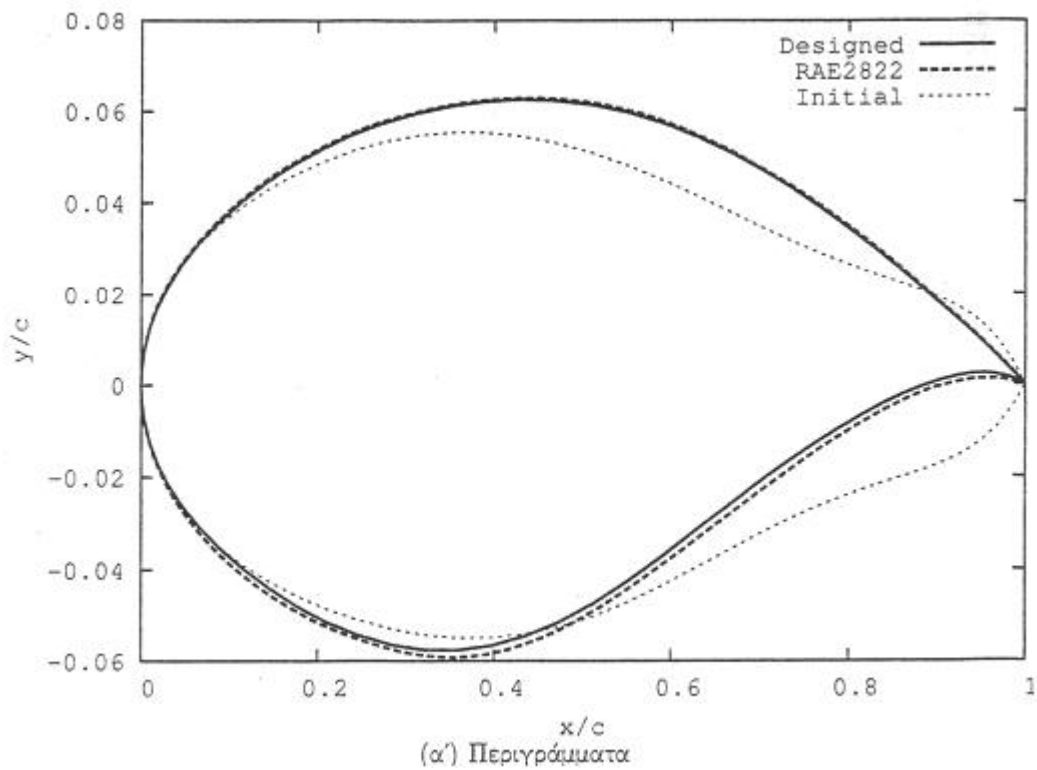
Πίνακας 4.4: Τιμές των μεταβλητών σχεδίασης PARSEC11 στον πρώτο και τον τελευταίο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής, με αεροτομή αναφοράς τη NACA0012



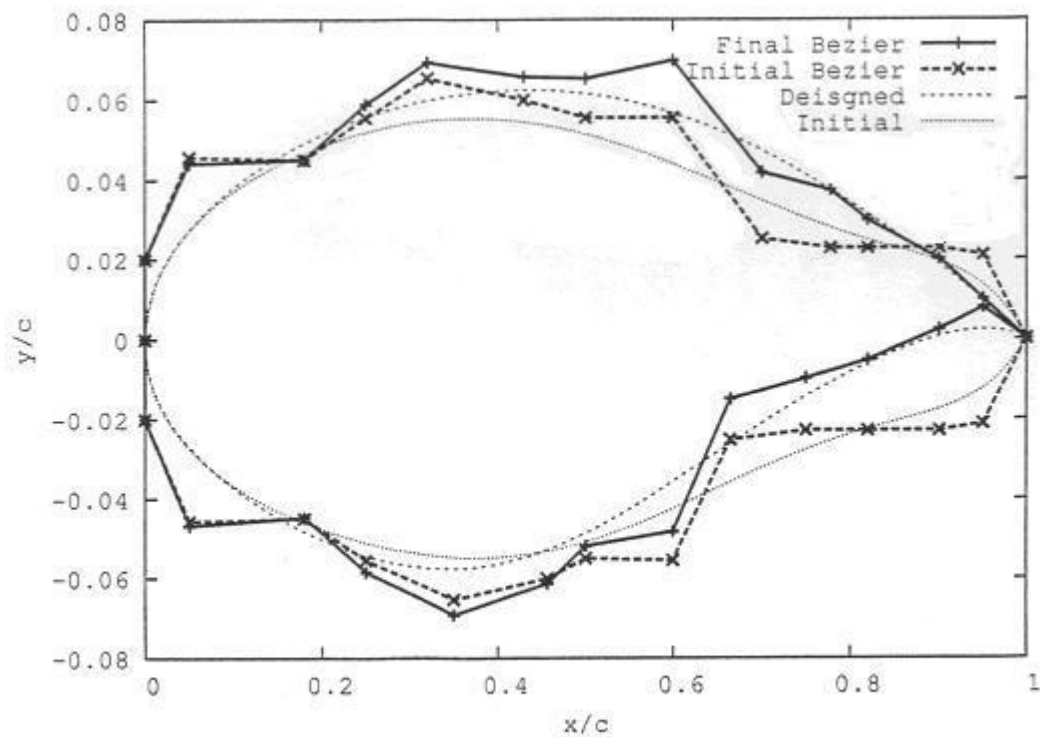
Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων κόστους κατά την ανάστροφη σχεδίαση αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier και PARSEC11 και αεροτομή αναφοράς τη NACA0012.

Κύκλος Σχεδίασης	I_c (Bezier)	I_c (PARSEC11)
1	0.146	0.179
10	0.075	0.153
50	0.034	0.071
100	0.025	0.038
140	0.020	0.025

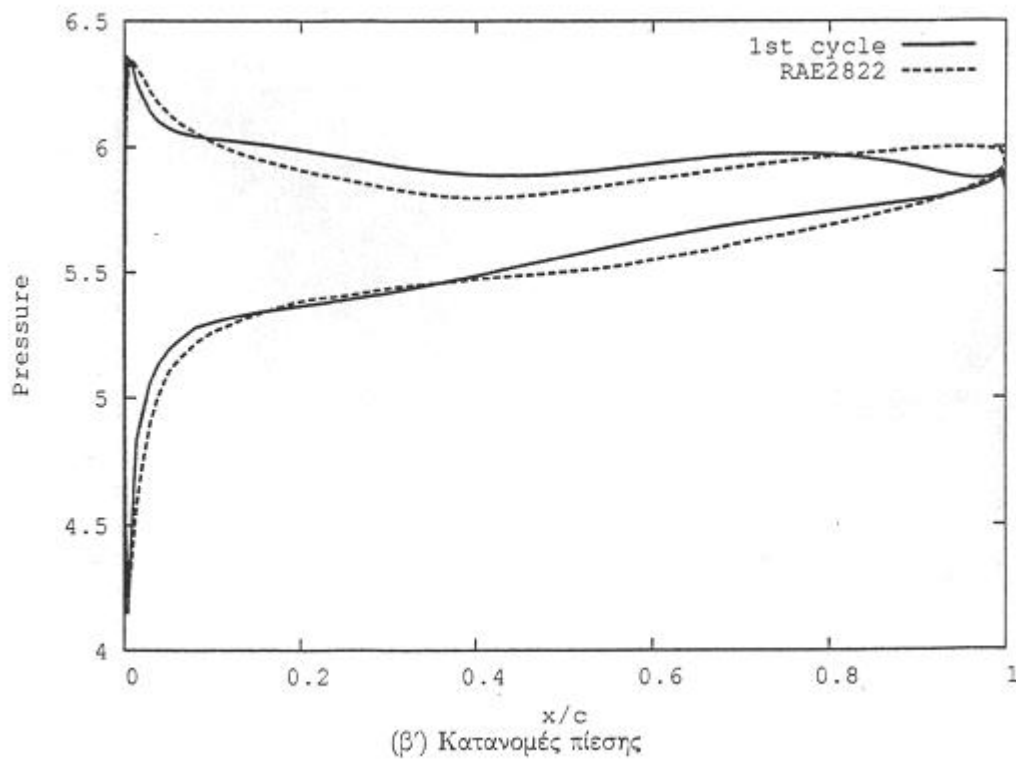
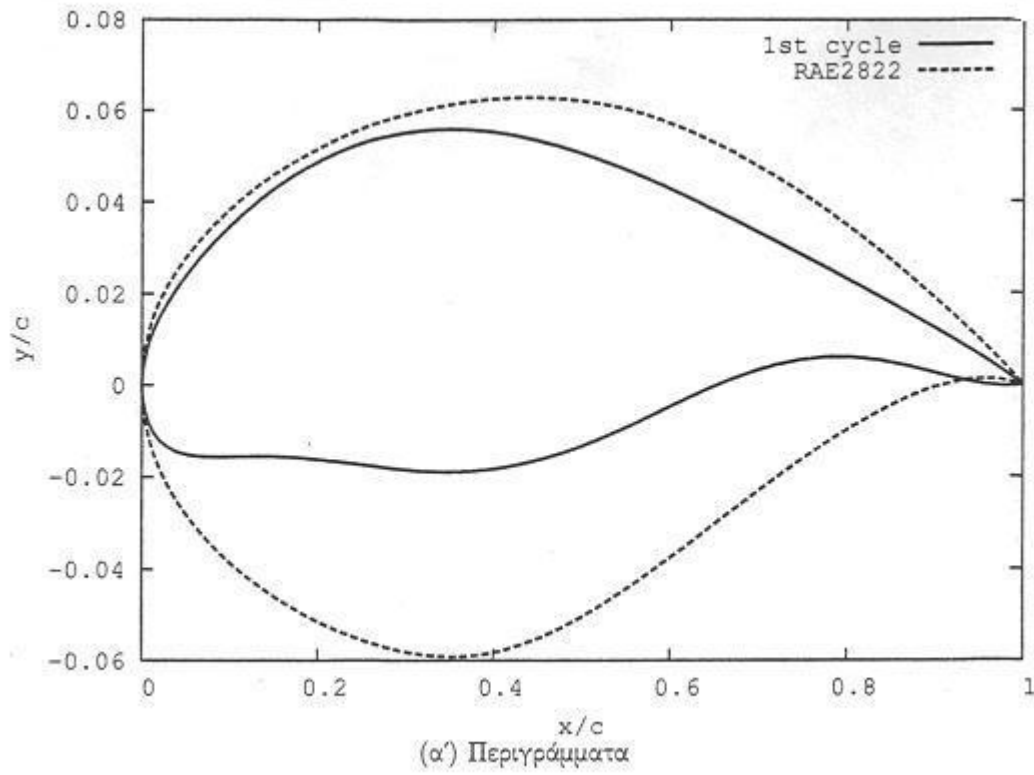
Πίνακας 4.5: Τιμές της συνάρτησης κόστους σε χαρακτηριστικούς κύκλους ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier και PARSEC11 και με αεροτομή αναφοράς τη NACA0012.



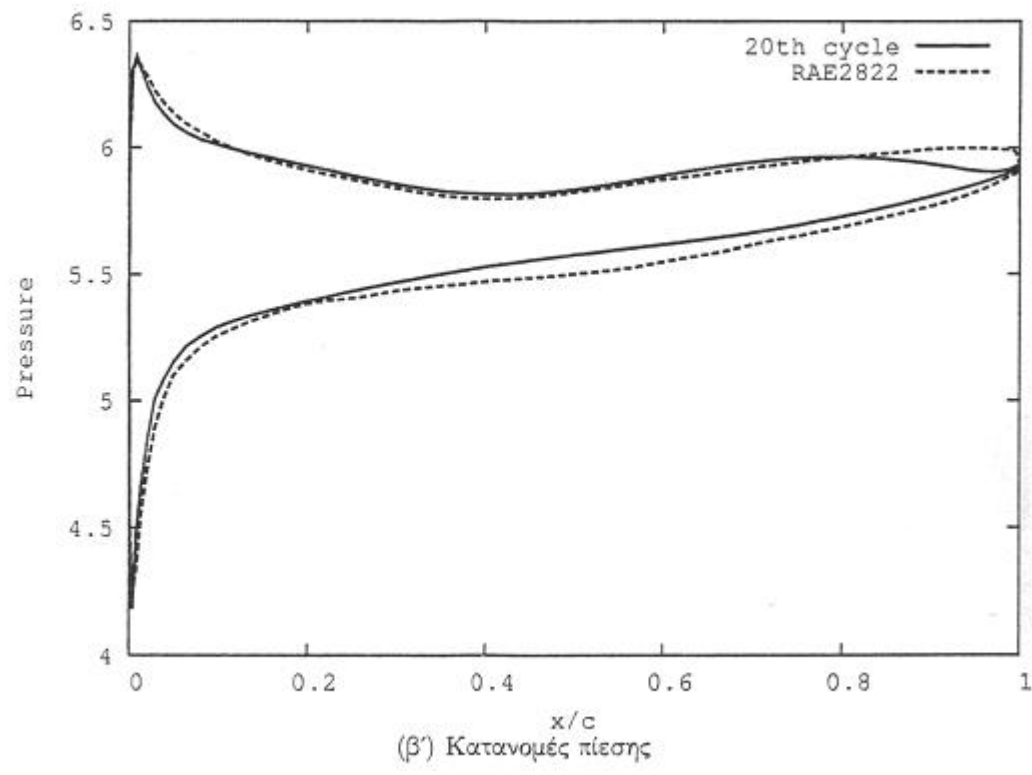
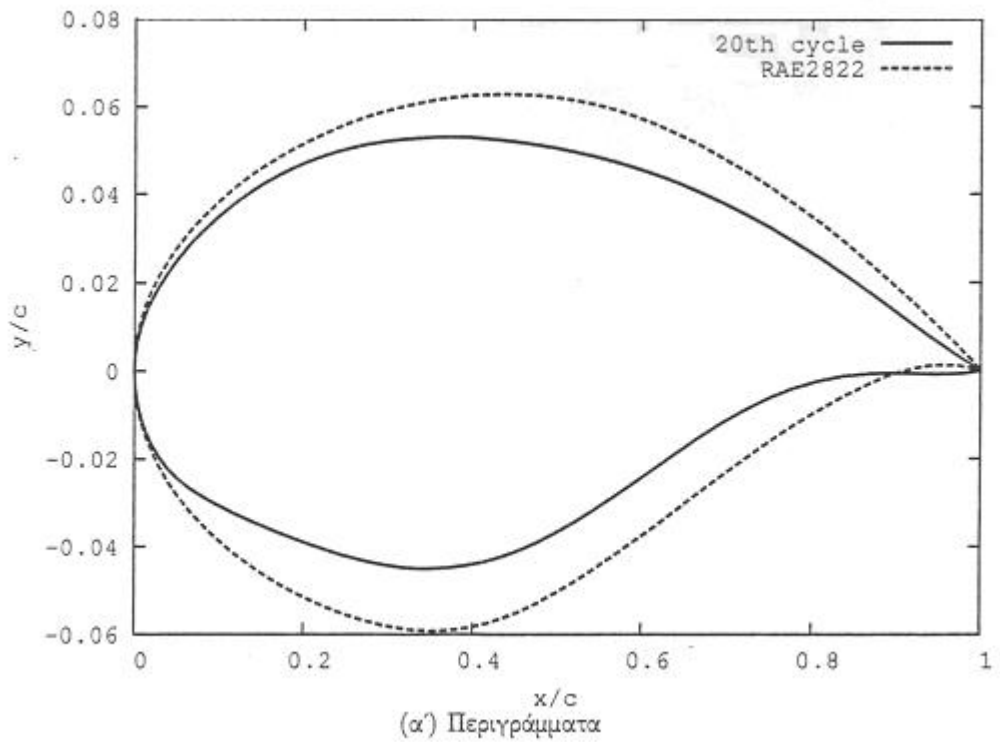
Σχήμα 4.11: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον πρώτο (Initial) και τον τελευταίο (Designed) κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή αναφοράς τη RAE2822.



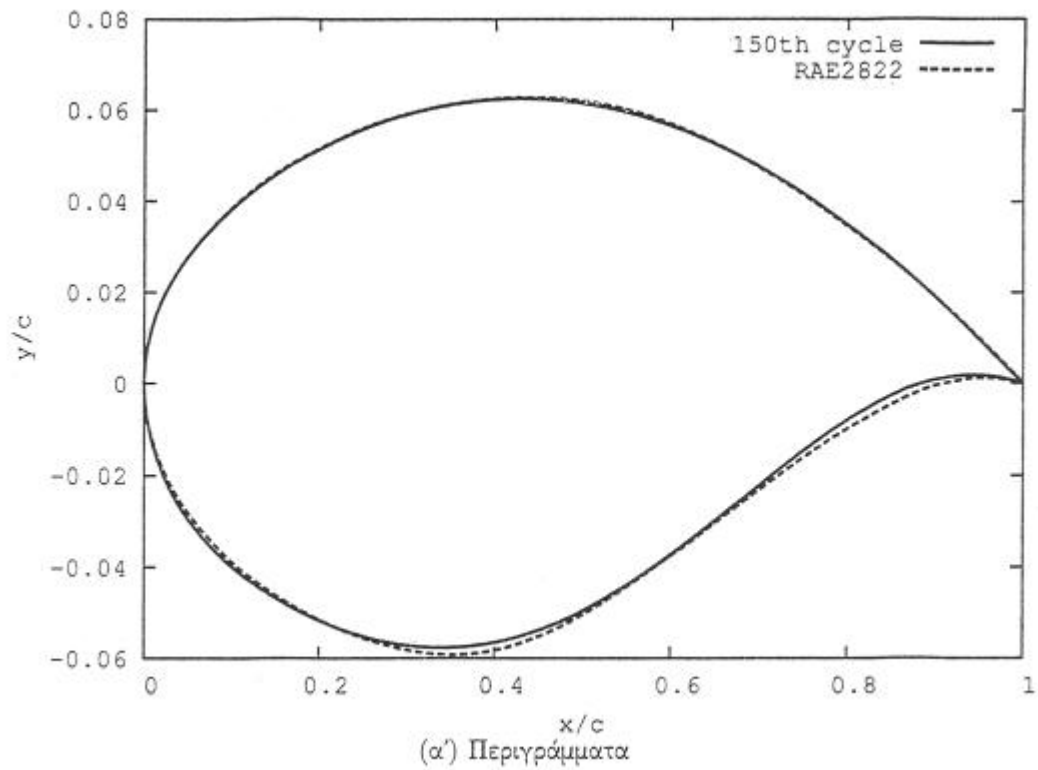
Σχήμα 4.12: Μεταβολές των σημείων ελέγχου Bezier μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου κύκλου ανάστροφης σχεδίασης με αεροτομή αναφοράς τη RAE 2822. Αναφέρονται επιπλέον, το αρχικό (Initial) και το τελικό (Designed) περίγραμμα της υπό σχεδίασης αεροτομής.

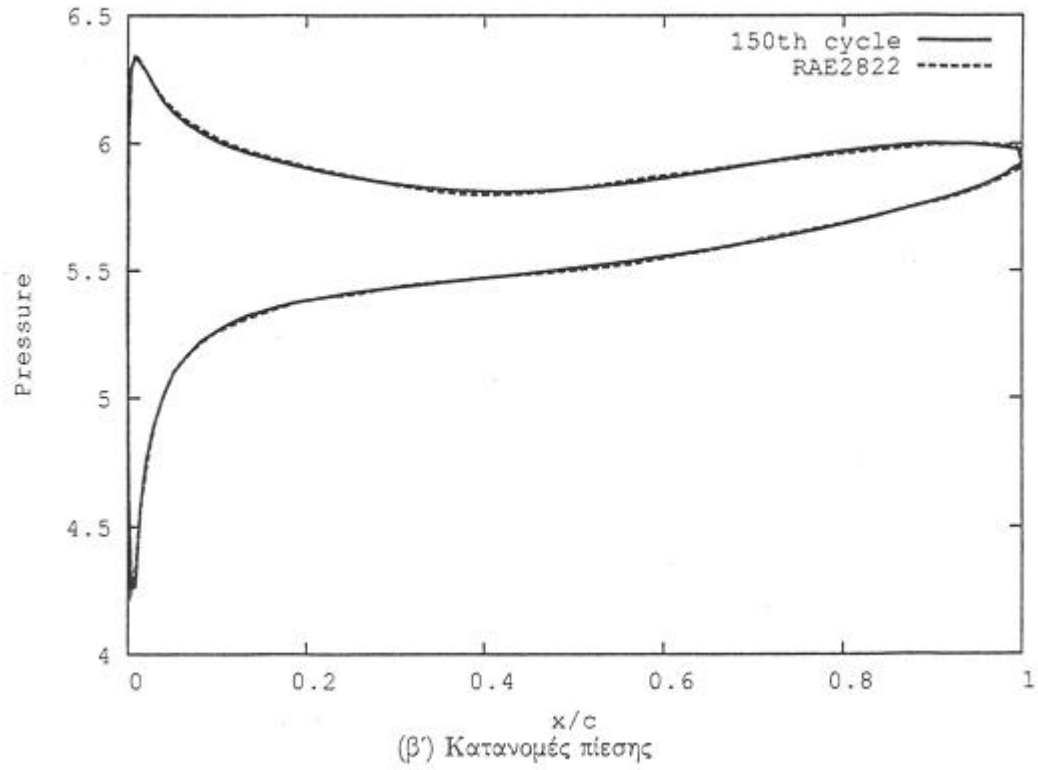


Σχήμα 4.13: Περιγράμματος και κατανομές πίεσης στον 1ο κύκλο αντίστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC14 και αεροτομή αναφοράς τη RAE 2822



Σχήμα 4.14: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 20ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC14 και αεροτομή αναφοράς τη RAE 2822

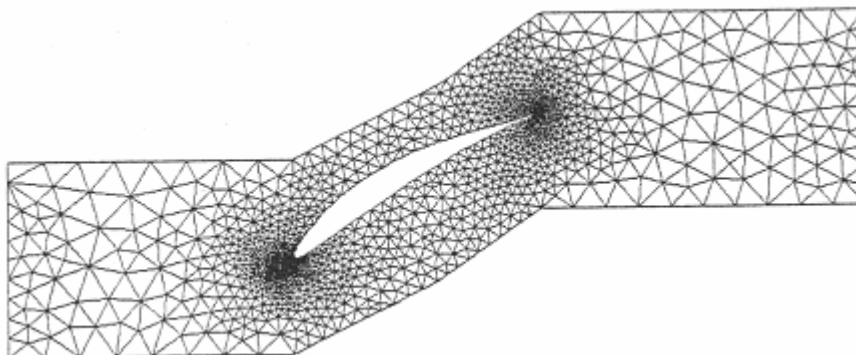




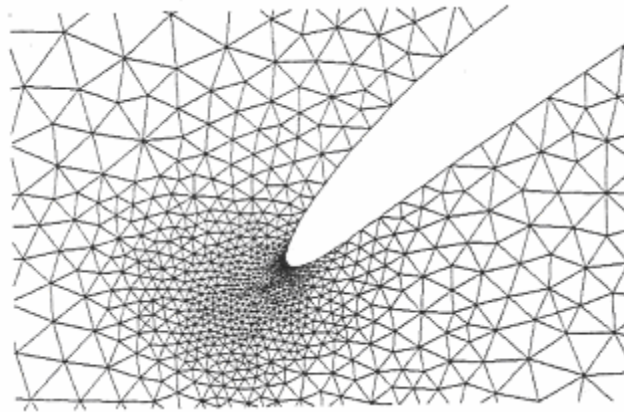
Σχήμα 4.15: Περιγράμματα κατανομές πίεσης στον 150ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC14 και αεροτομή αναφοράς τη RAE2822.

Παρ. Σχεδίασης PARSEC		Αρχική Τιμή	Τελική Τιμή
x_{LE}		1.000	1.000
y_{LE}		0.000	0.000
R_{LE}		0.0070	0.0130
x_{LOW}		0.3500	0.3170
y_{LOW}		-0.0200	-0.0534
	$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{X=X_{LOW}}$	0.4500	0.5638
$q_{TE,LOW}$		2.000	4.0000
x_{UP}		0.350	0.4284
y_{UP}		0.055	0.0700
	$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{X=X_{UP}}$	-0.450	-0.4654
$q_{TE,UP}$		-5.000	-12.5716
x_{CAM}		0.2500	0.4343
y_{CAM}		0.0010	-0.0100

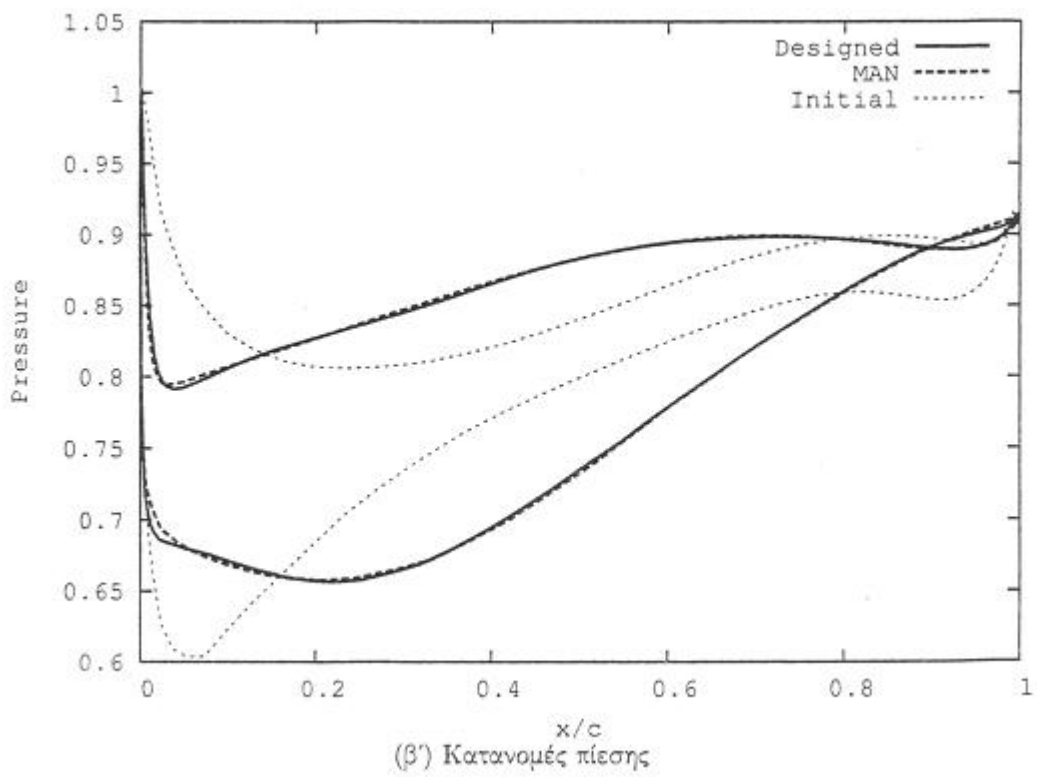
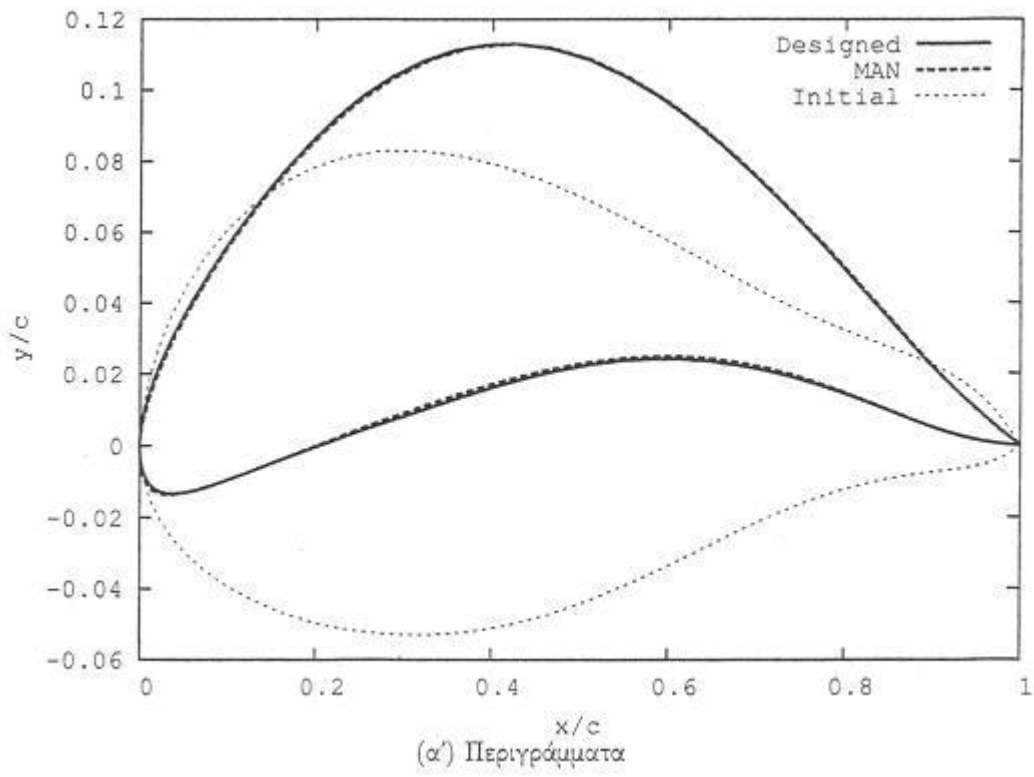
Πίνακας 4.6: Τιμές των μεταβλητών σχεδίασης PARSEC14 στον πρώτο και τον τελευταίο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής, με αεροτομή αναφοράς τη RAE2822.



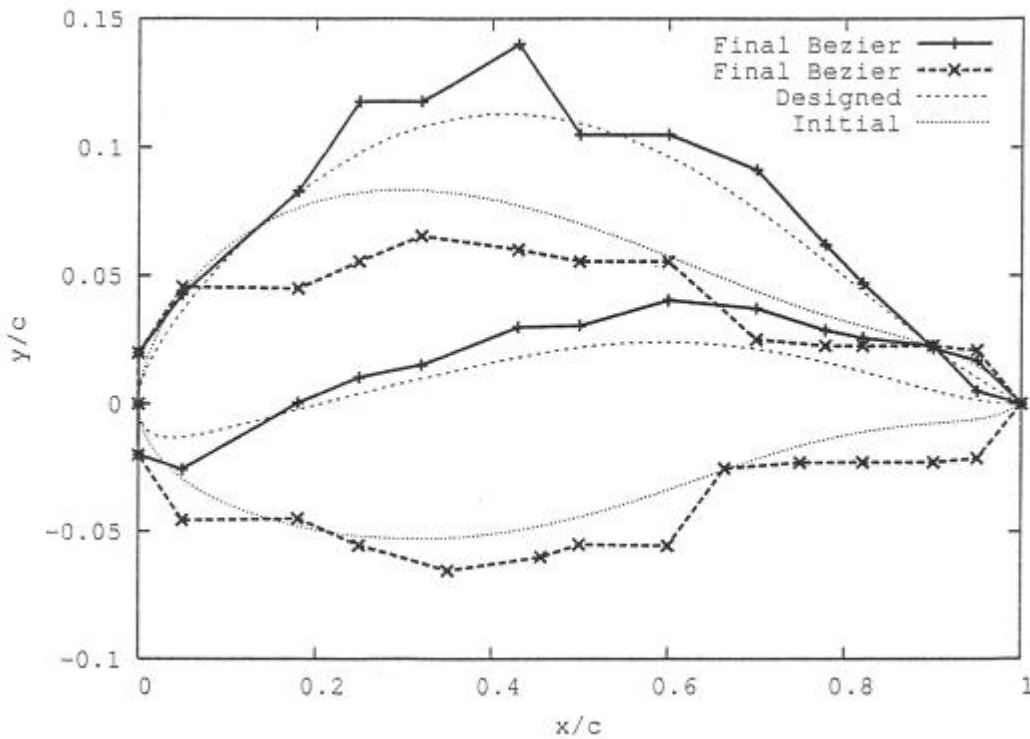
Σχήμα 4.17: Μη-δομημένο υπολογιστικό πλέγμα γύρω από αεροτομή πτερυγίου συμπιεστή (3478 τριγωνικά στοιχεία, 1836 κόμβοι).



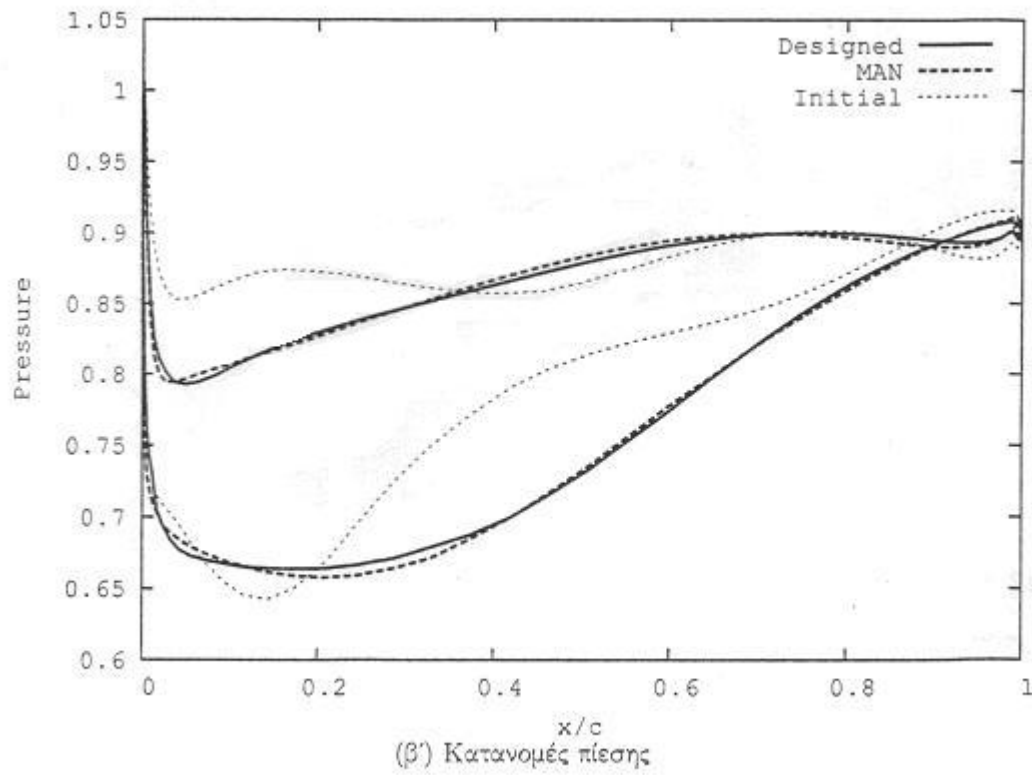
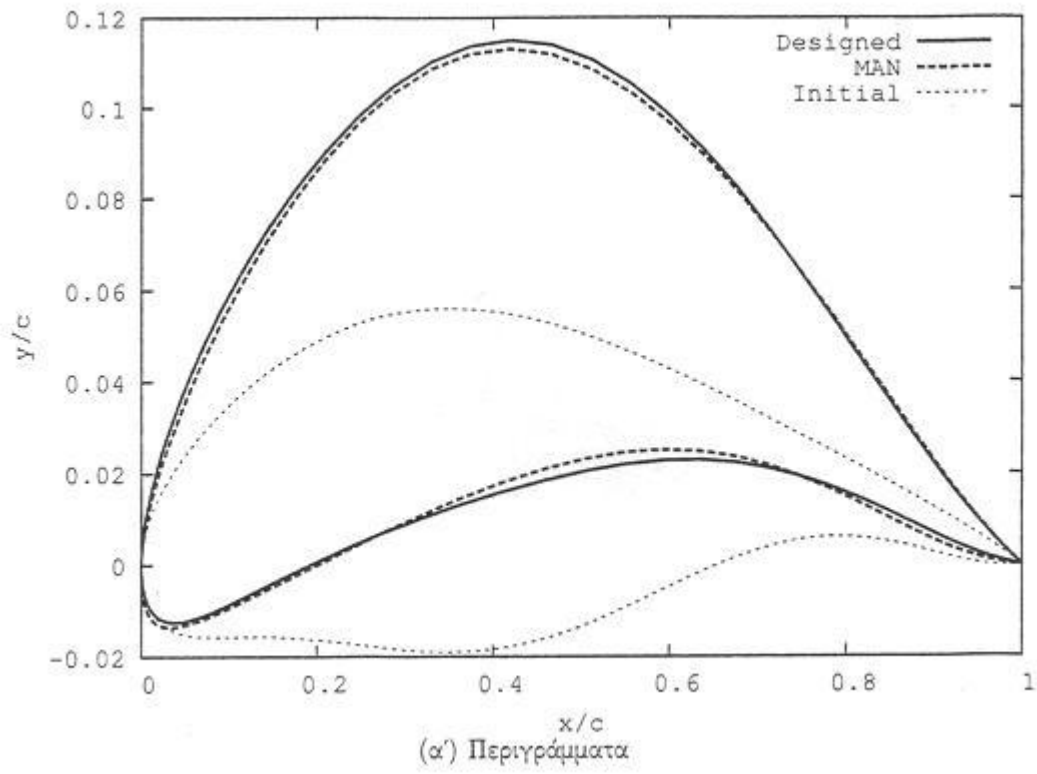
Σχήμα 4.18: Λεπτομέρεια μη-δομημένου υπολογιστικού πλέγματος στο χείλος πρόσπτωσης της αεροτομής.



Σχήμα 4.19: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον πρώτο (Initial) και τον τελευταίο (Designed) κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή αναφοράς την αεροτομή πτερυγίου της MAN.



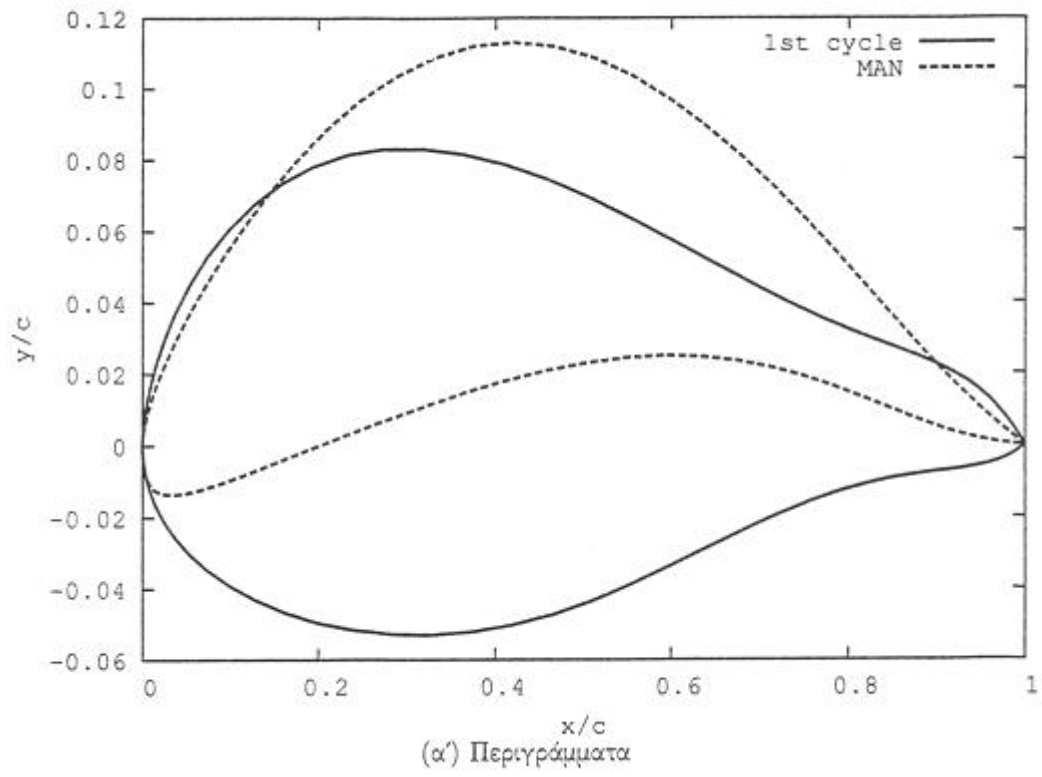
Σχήμα 4.20: Μεταβολές των σημείων ελέγχου Bezier μεταξύ του πρώτου και τελευταίου κύκλου ανάστροφης σχεδίασης με αεροτομή αναφοράς υπάρχουσα αεροτομή πτερυγίου της MAN. Επισημαίνονται επίσης, το αρχικό (Initial) και το τελικό (Designed) περίγραμμα της υπό σχεδίαση αεροτομής.

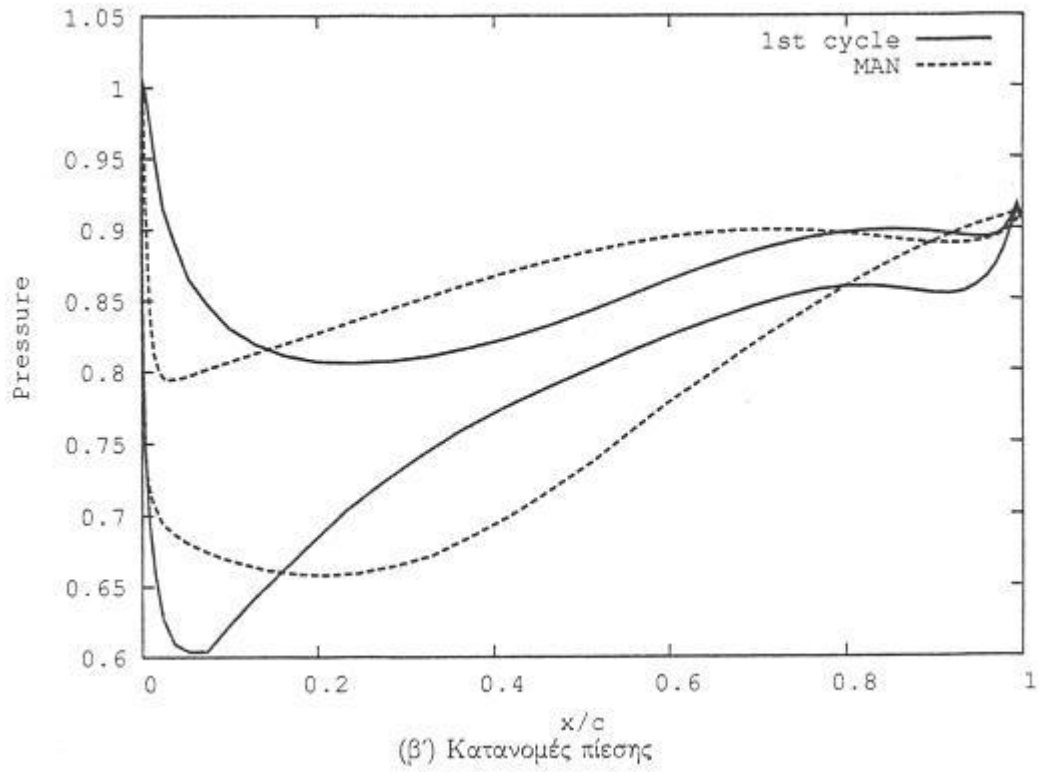


Σχήμα 4.21: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον πρώτο (Initial) και τον τελευταίο (Designed) κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC14 και αεροτομή αναφοράς την αεροτομή πτερυγίου της MAN.

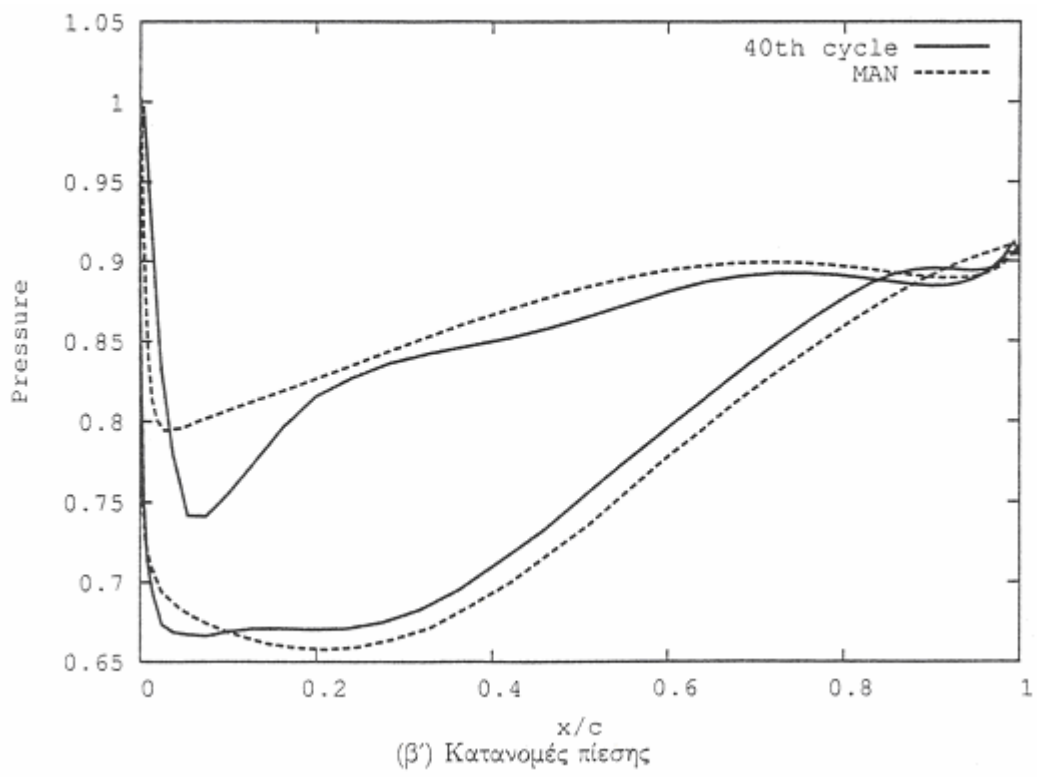
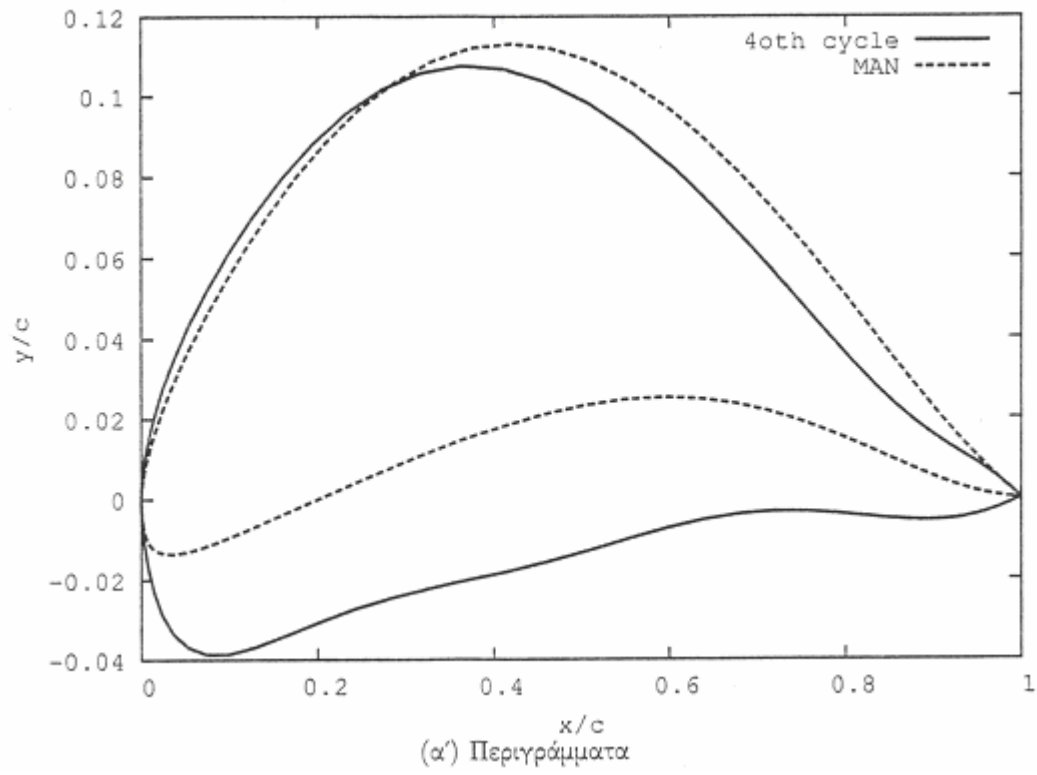
Παρ. Σχεδίασης PARSEC	Αρχική Τιμή	Τελική Τιμή
x_{LE}	1.000	1.000
y_{LE}	0.000	0.000
R_{LE}	0.0070	0.0075
x_{LOW}	0.3500	0.2276
y_{LOW}	-0.0200	-0.0333
$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{X=X_{LOW}}$	0.4500	0.4175
$q_{TE,LOW}$	2.000	2.2331
x_{UP}	0.350	0.4419
y_{UP}	0.055	0.0748
$\left[\frac{dy^2}{dx^2} \right]_{X=X_{UP}}$	-0.450	-0.6701
$q_{TE,UP}$	-5.000	-5.2404
x_{CAM}	0.2500	0.3766
y_{CAM}	0.0010	0.0399

Πίνακας 4.6: Τιμές των μεταβλητών σχεδίασης PARSEC14 στον πρώτο και τον τελευταίο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής, με αεροτομή αναφοράς την αεροτομή πτερυγίου της MAN.

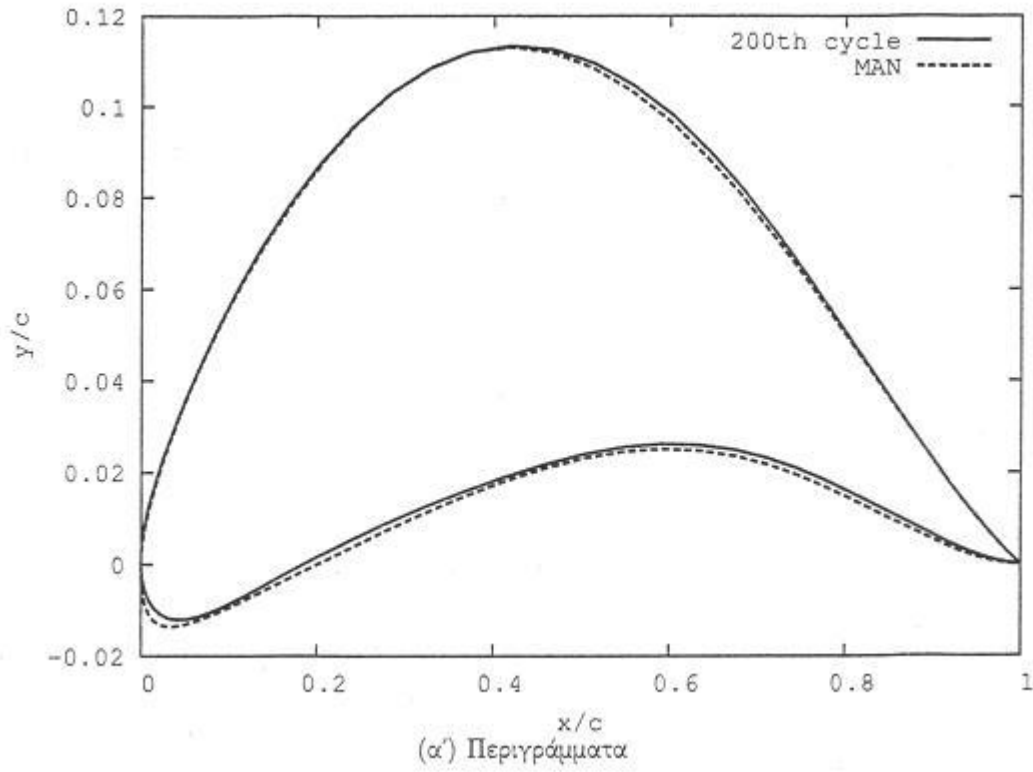


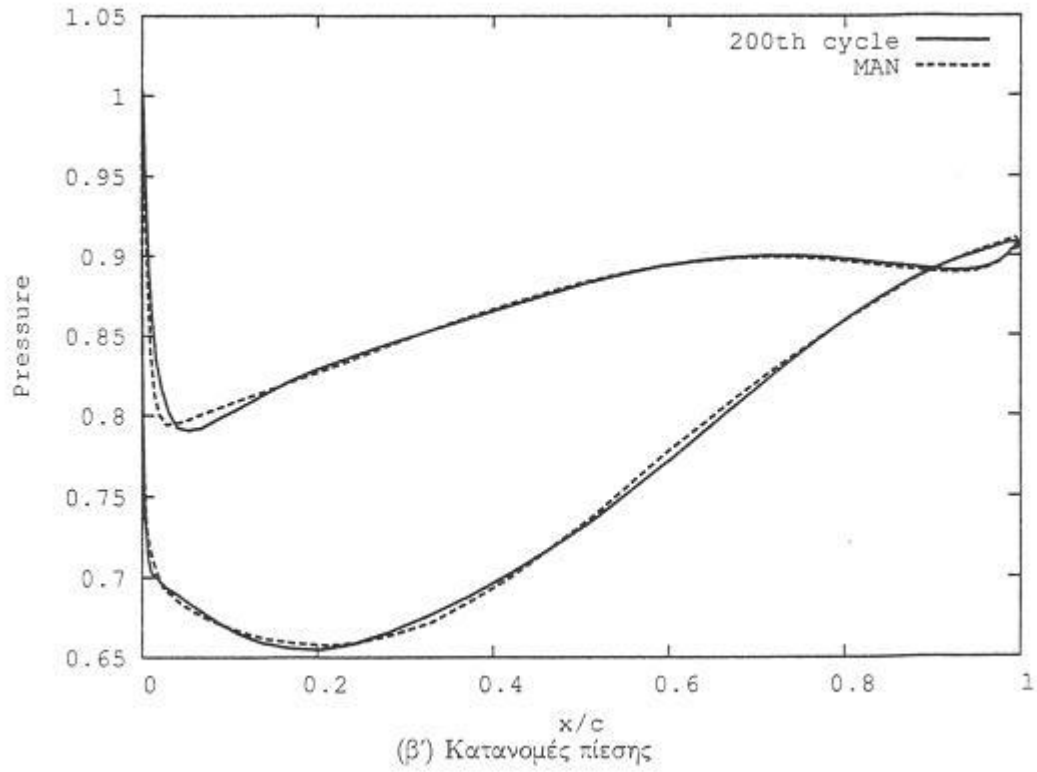


Σχήμα 4.22: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 1ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier-PARSEC11 και αεροτομή αναφοράς, η αεροτομή πτερυγίου της MAN.

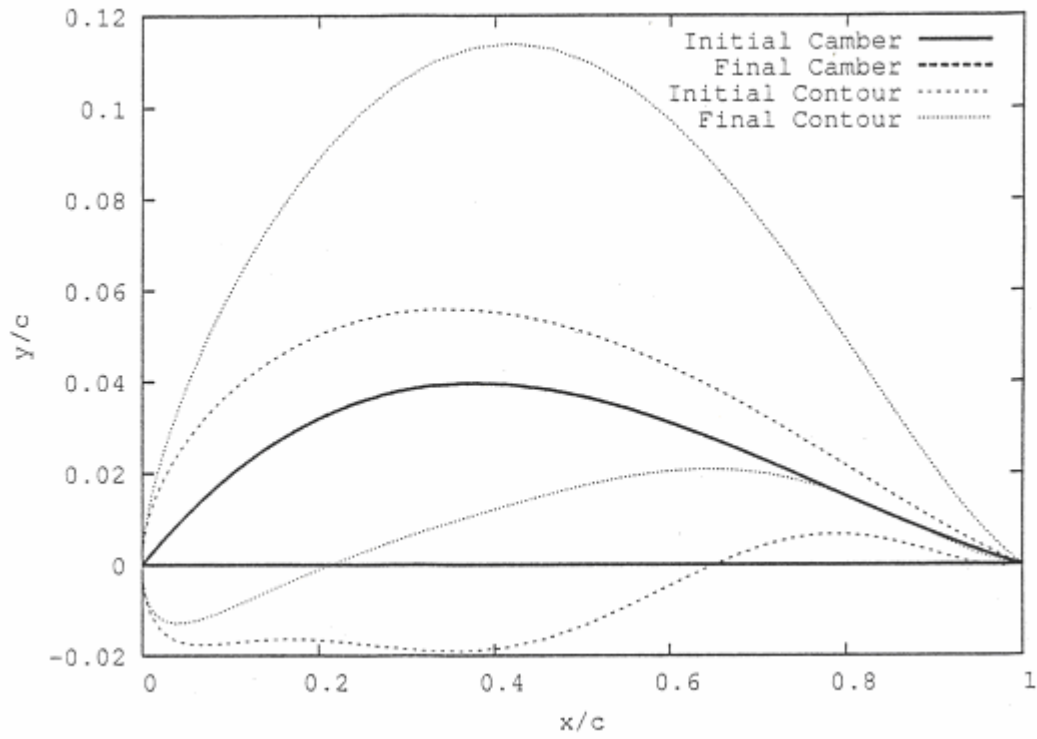


Σχήμα 4.23: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 40° κύκλο ανάστροφής σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier-PARSEC11 και αεροτομή αναφοράς υπάρχουσα αεροτομή πτερυγίου της MAN.

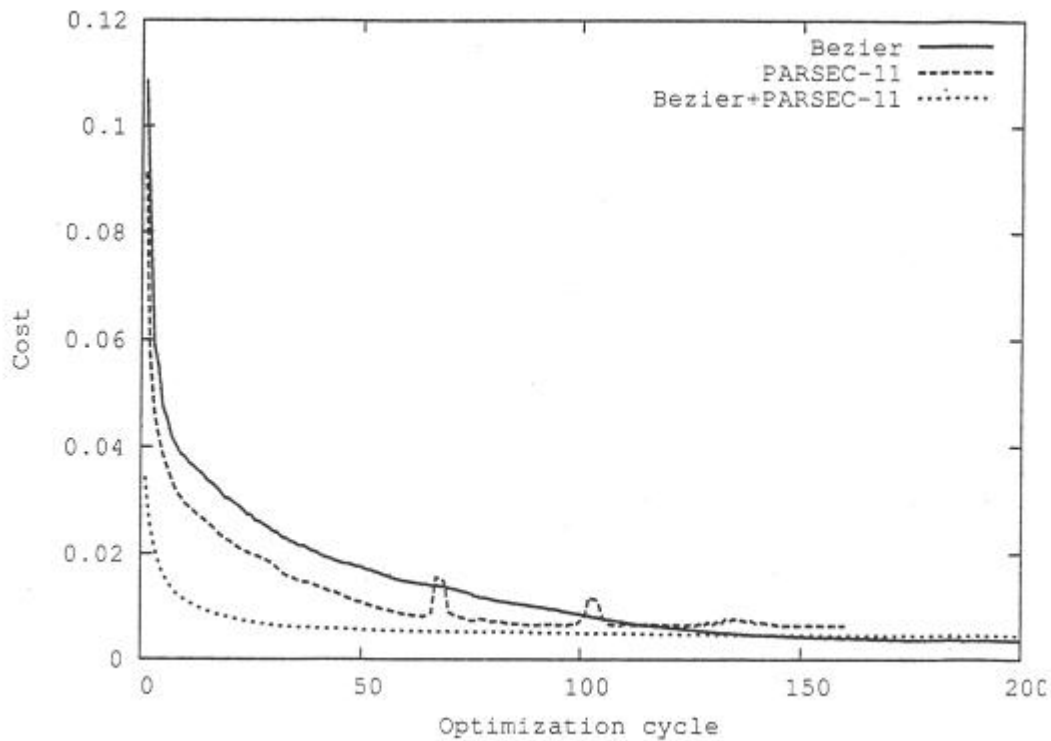




Σχήμα 4.24: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 200ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier-PARSEC11 και αεροτομή αναφοράς την αεροτομή πτερυγίου της MAN.



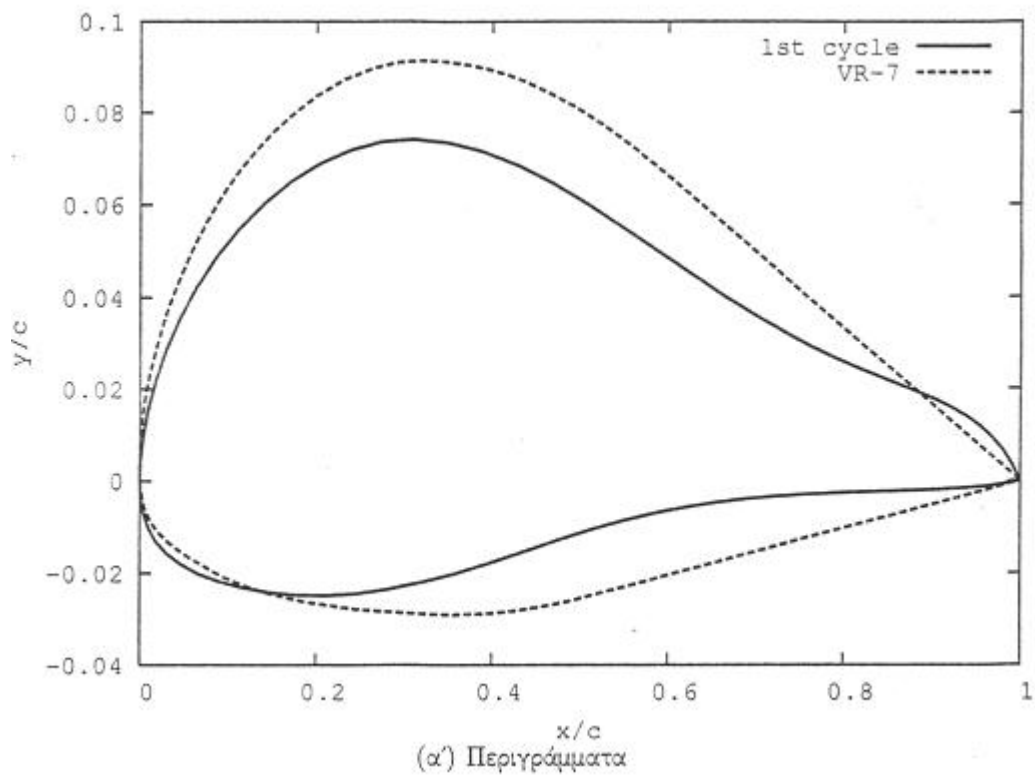
Σχήμα 4.25: Γραμμή κυρτότητας στον πρώτο και τον τελευταίο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής, με παραμετροποίηση PARSEC11-Bezier και με αεροτομή αναφοράς την αεροτομή πτερυγίου της MAN

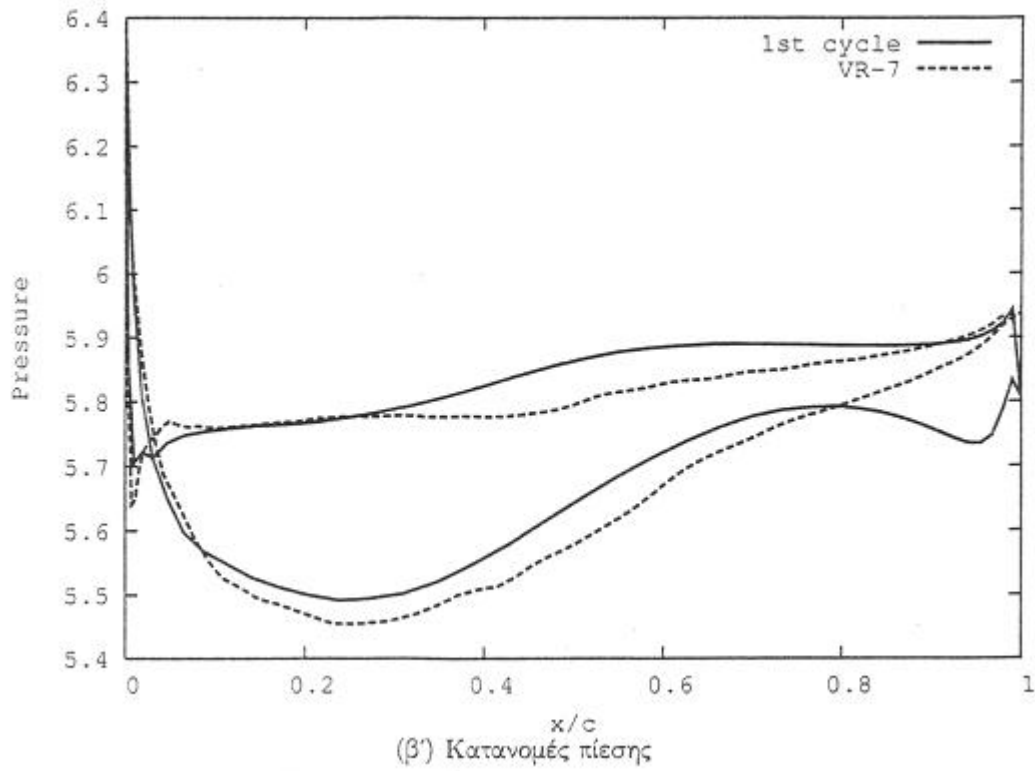


Σχήμα 4.26: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων κόστους κατά την αντίστροφη σχεδίαση αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier, PARSEC14 και PARSEC11-Bezier και αεροτομή αναφοράς υπάρχουσα αεροτομή πτερυγίου της MAN.

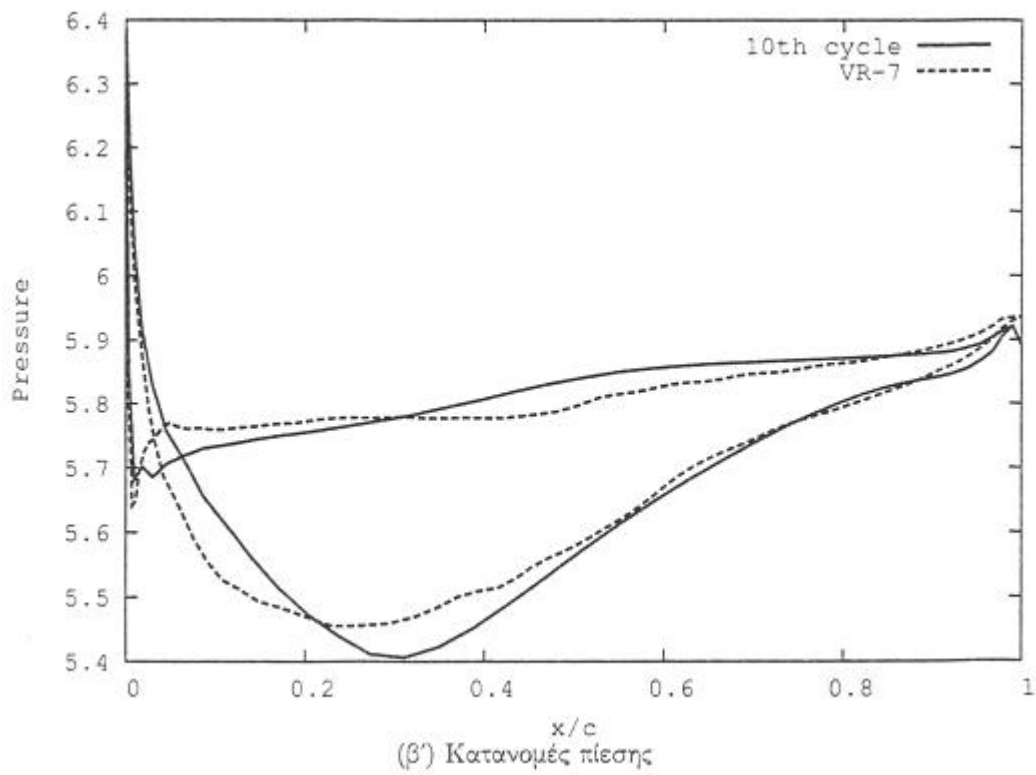
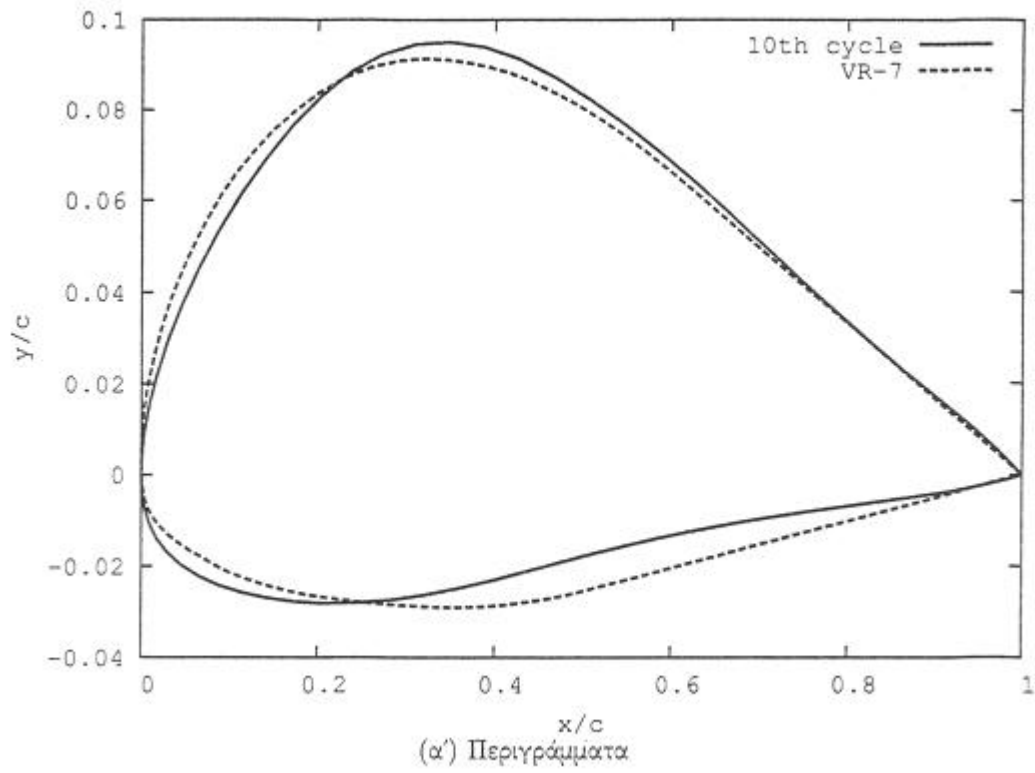
Κύκλος Σχεδίασης	I_c (Bezier)	I_c (PARSEC14)	I_c (PARSEC11Bezier)
1	0.1088	0.0912	0.0344
10	0.0381	0.0295	0.0111
50	0.0176	0.0108	0.0056
100	0.0086	0.0073	0.0049

Πίνακας 4.9: Τιμές της συνάρτησης κόστους κατά τη διαδικασία της ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποιήσεις Bezier, PARSEC14 και PARSEC-Bezier και με αεροτομή αναφοράς υπάρχουσα αεροτομή πτερυγίου της MAN.

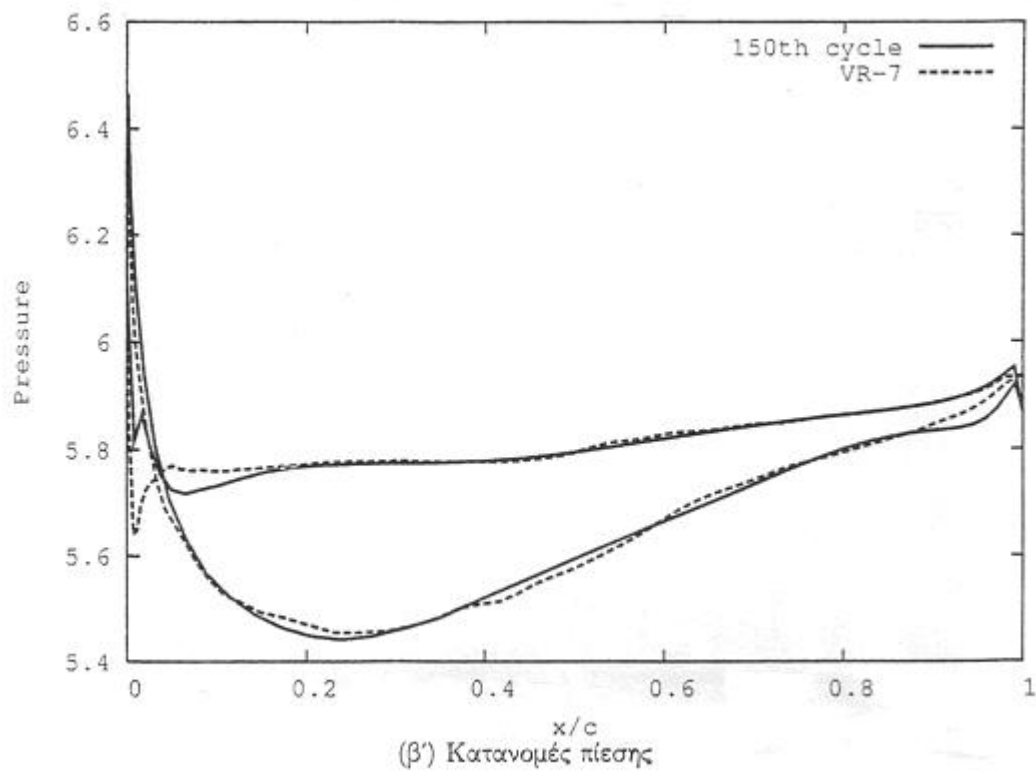
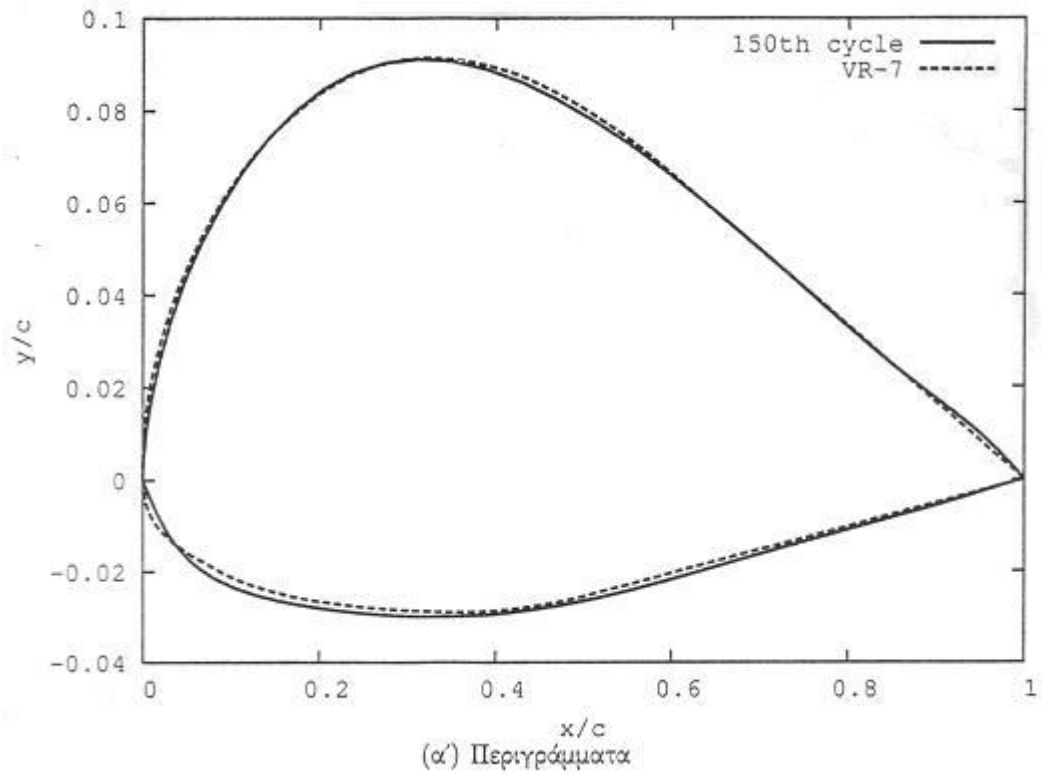




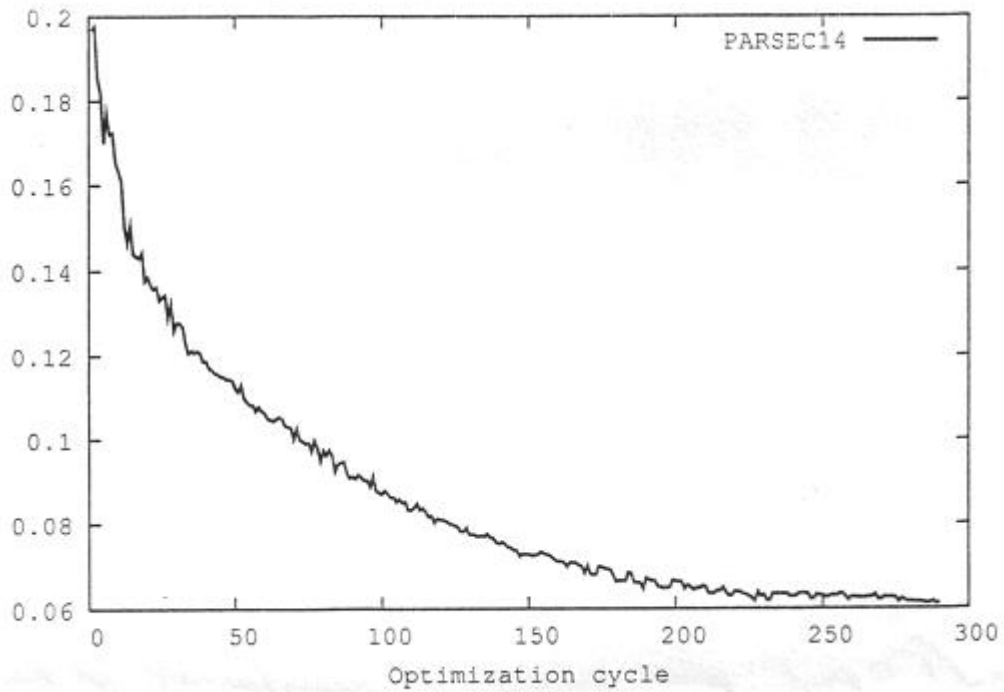
Σχήμα 4.27: Περίγραμμα και κατανομές πίεσης στον 1ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή τη VR-7.



Σχήμα 4.28: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 10ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή αναφοράς την VR-7.



Σχήμα 4.29: Περιγράμματα και κατανομές πίεσης στον 150ο κύκλο ανάστροφης σχεδίασης αεροτομής με παραμετροποίηση Bezier και αεροτομή τη VR-7.



Σχήμα 4.30: Παράσταση της συνάρτησης κόστους κατά την ανάστροφη σχεδίαση αεροτομής με παραμετροποίηση PARSEC14 και αεροτομή αναφοράς τη VR7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε μία αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης μεμονωμένων αεροτομών και αεροτομών πτερυγίων στροβιλομηχανών. Για τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης της αεροτομής αναπτύχθηκαν οι Συζυγείς Τεχνικές και συγκεκριμένα η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος.

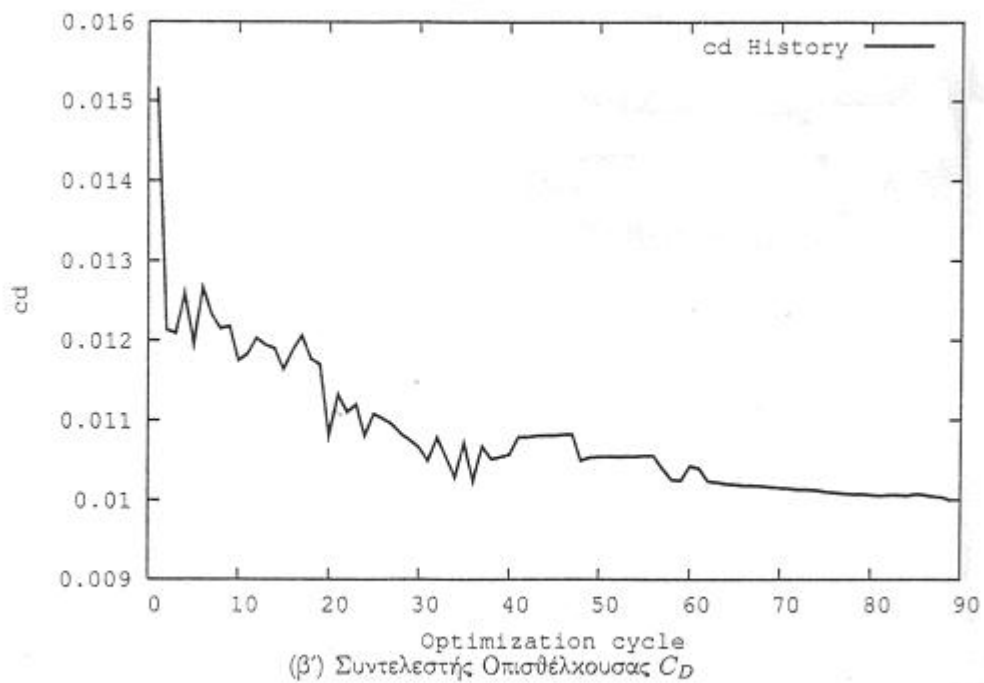
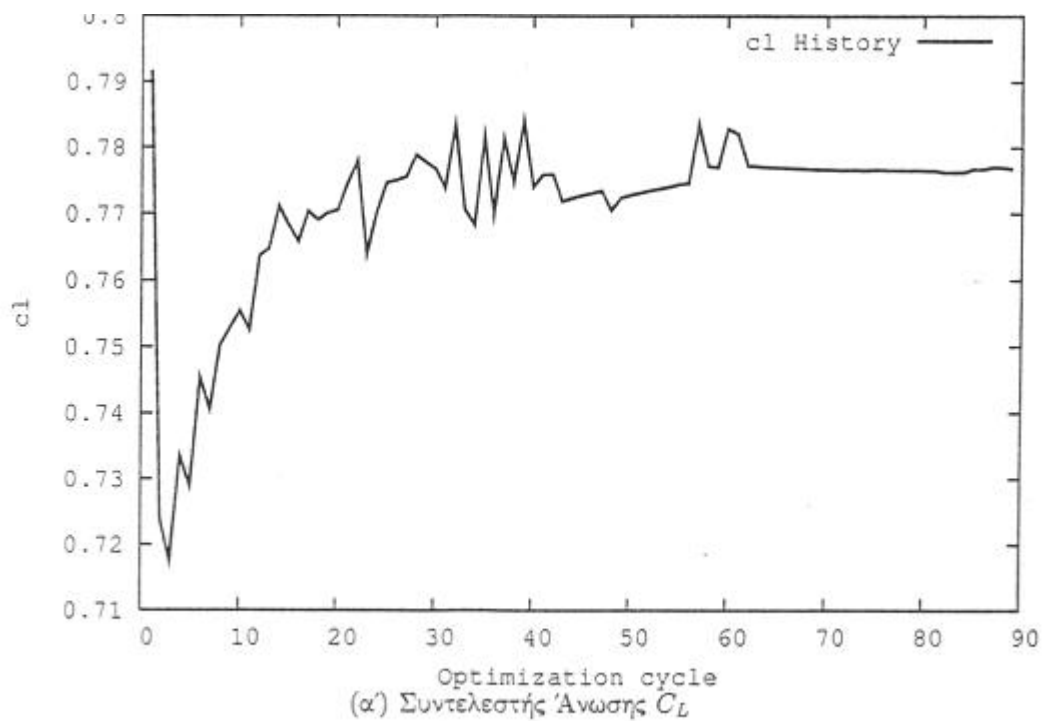
Το πρώτο βήμα της εργασίας υπήρξε η πλήρης κατανόηση της θεωρίας των Συζυγών Μεθόδων και ειδικότερα των εξισώσεων που οδηγούν στον τελικό υπολογισμό των Παραγώγων Ευαισθησίας. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, η μαθηματική επεξεργασία μέσω της οποίας προκύπτουν οι Συζυγείς Εξισώσεις και ακολούθως η τελική εξίσωση υπολογισμού των Παραγώγων Ευαισθησίας, πραγματοποιήθηκε και παρουσιάστηκε από την αρχή.

Η πρώτη ουσιαστική καινοτομία της εργασίας σημειώθηκε στη συνέχεια, κατά την αντιμετώπιση των μοναδικών αγνώστων της εξίσωσης των Παραγώγων Ευαισθησίας, κατά την εύρεση δηλαδή της μεταβολής χαρακτηριστικών γεωμετρικών ποσοτήτων της αεροτομής. Η μοναδική προσέγγιση στον παραπάνω υπολογισμό υπήρξε έως σήμερα, ο σχηματικός αναλυτικών εκφράσεων. Η εισαγωγή όμως νέων παραμετροποιήσεων και η ανάγκη ενός γενικού αλγορίθμου, ανεξάρτητου της παραμετροποίησης, οδήγησε στην εφαρμογή δύο άλλων μεθόδων υπολογισμού αυτών των ποσοτήτων: των Πεπερασμένων Διαφορών και της Αυτόματης Διαφόρισης. ή πιο συγκεκριμένα, του λογισμικού *Odyssee*.

Στη συνέχεια, περιγράφηκε ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, μέσω του οποίου ανα-νεώνονται οι τιμές των παραμέτρων σχεδίασης της αεροτομής και προσεγγίζεται στο βέλτιστο σημείο. Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε η Απότομη Κάθοδος, κυρίως λόγω της εξαιρετικής της απλότητας. Σ το διάγραμμα 2.4, παρουσιάστηκε η σύνοψη των βημάτων του αλγορίθμου μέσω των Συζυγών Τεχνικών και τονίστηκε το πλεονέκτημα των τελευταίων σε υπολογιστικό κόστος, έναντι των Ευθέων Αιτιοκρατικών Μεθόδων.

Βασικότατο θέμα μελέτης, υπήρξε η παραμετροποίηση των υπό σχεδίαση αεροτομών. Αμέσως μετά τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης λοιπόν, παρουσιάστηκαν λεπτομερώς τρεις διαφορετικές τεχνικές παραμετροποίησης αεροτομών: Οι ήδη γνωστές, πολυωνυμικές καμπύλες Bezier, τα σύγχρονα και πολλά υποσχόμενα πολυώνυμα PARSEC, τα οποία αποτελούν τη βασικό στοιχείο της παρούσας εργασίας και τέλος η υπέρθεσή των Bezier –PARSEC. Αναλύθηκε πλήρως το μαθηματικό μοντέλο και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των παραμέτρων σχεδίασης κάθε παραμετροποίησης και τονίστηκαν οι μεταξύ τους διαφορές. Επιπλέον, κάθε τεχνική σχεδίασης συνοδεύτηκε από χαρακτηριστικά παραδείγματα για κατανόηση των μαθηματικών μοντέλων.

Η αξιολόγηση των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της εργασίας και η επίδειξη των ικανοτήτων τους, πραγματοποιήθηκε μέσω πέντε συνολικά εφαρμογών. Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκε η ανάστροφη σχεδίαση των μεμονωμένων αεροτομών NACA0012, RAE2822, VR-7 καθώς και της αεροτομής πτερυγίου της MAN. Μέσω των αποτελεσμάτων αυτών των εφαρμογών, προέκυψαν χρήσιμα συμπεράσματα τόσο για τον αλγόριθμο, όσο και για τις τρεις τεχνικές παραμετροποίησης. Σημειώθηκε λοιπόν, ότι οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier, αλλά και τα πολυώνυμα PARSEC μπορούν να προσεγγίσουν τις επιθυμητές κατανομές πίεσης με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια (σχήματα 4.9, 4.15 και 4.25). Ενδεχομένως, η χρήση της τεχνικής PARSEC να απαιτεί περισσότερη προεργασία, λόγω της εύρεσης κατάλληλων τιμών των επιμέρους βημάτων n_i . Παρόλα αυτά, η ιδιαίτερη φυσική σημασία των παραμέτρων σχεδίασης της, την καθιστά ιδιαίτερα ελκυστική. Τέλος, παρουσιάζεται και ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της αεροτομής RAE2822, με χρήση των πολυωνύμων Bezier. Στόχος του συγκεκριμένου παραδείγματος ήταν να αποδείξει ότι η αντικατάσταση των αναλυτικών εκφράσεων από τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών, για τον υπολογισμό χαρακτηριστικών γεωμετρικών ποσοτήτων, οδηγεί επίσης σε σωστά αποτελέσματα.



Σχήμα 4.31: Γραφικές παραστάσεις των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας, κατά τη βελτιστοποίηση της αεροτομής RAE 2822.

Παράρτημα Α'

Α'.1 Η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου

Η απλούστερη αλλά και η πιο διαδεδομένη Απιοκρατική Μέθοδος βελτιστοποίησης είναι η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου. Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο, η κατεύθυνση -άνω στην οποία η συνάρτηση κόστους μειώνεται ταχύτερα ταυτίζεται με την κατεύθυνση που ορίζουν οι παράγωγοι της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές του προβλήματος. Πάνω σε αυτήν την κατεύθυνση λοιπόν αναζητείται το ελάχιστο σημείο. Η ορθότητα του παραπάνω ισχυρισμού - θεωρήματος δεν είναι άμεσα προφανής. Γι αυτό το λόγο παρατίθεται η απόδειξη του.

Το πρώτο βήμα της απόδειξης στηρίζεται στην εφαρμογή του θεωρήματος Ταγ1θΓ. Ως γνωστόν, η μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι:

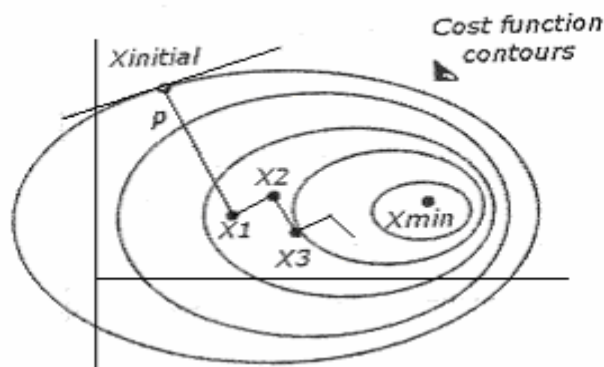
$$\min_x f(x) \quad (\text{A'.1})$$

όπου $x \in \mathcal{R}^n$ ένα διάνυσμα πραγματικών αριθμών με $n \geq 1$ στοιχεία και $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ μία αναλυτική συνάρτηση κόστους. Εάν με p συμβολίζεται η κατεύθυνση βελτιστοποίησης και a είναι το βήμα που επιλέγεται για την μετακίνηση πάνω σε αυτήν, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor προκύπτει:

$$f(x+ap) = f(x) + ap^T \nabla f + \frac{1}{2} a^2 p^T \nabla^2 f(x+tp) p \quad (\text{A'.2})$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο δεύτερος όρος $p^T \nabla f$ αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της συνάρτησης f κατά την κατεύθυνση p . Η τιμή λοιπόν της κατεύθυνσης p που παρέχει την πιο απότομη ελάττωση της συνάρτησης κόστους f , είναι η λύση ενός νέου προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\min_p p^T \nabla f, \quad \|p\|=1 \quad (\text{A'.3})$$



Σχήμα Α.1: Σχηματική παράσταση της Απότομης Καθόδου.

Θέτοντας $\|p\|=1$, το εσωτερικό γινόμενο $p^T \nabla f$ απλοποιείται

$$p^T \nabla f = \|p\| \cdot \|\nabla f\| \cdot \cos \theta \Rightarrow p^T \nabla f = \|\nabla f\| \cdot \cos \theta \quad (\text{A}' 4)$$

όπου θ η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης αναζήτησης p και του διανύσματος των παραγώγων ∇f . Η παραπάνω ποσότητα ελαχιστοποιείται όταν $\cos \theta = -1$, δηλαδή όταν $\theta = -\pi$. Κατά συνέπεια, η εξίσωση Α'.4 δύναται να απλοποιηθεί περαιτέρω και να πάρει τη μορφή:

$$\min p^T \nabla f = -\|\nabla f\| \Rightarrow p = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (\text{A}' 5)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποδεικνύουν τον αρχικό ισχυρισμό, ότι δηλαδή η κατεύθυνση κατά την οποία η f ελαχιστοποιείται ταχύτερα, είναι η $-\nabla f$. Το διάνυσμα των μεταβλητών x σύμφωνα με τη μέθοδο της Απότομης Καθόδου ανανεώνεται λοιπόν ως εξής

$$x^{n+1} = x^n - a \nabla f \quad (\text{A}' 6)$$

Η απλότητα και χρηστικότητα της Απότομης Καθόδου, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα A1, την καθιστούν ως έναν από τους πιο δημοφιλείς και εύχρηστους αλγορίθμους βελτιστοποίησης. Παρόλα αυτά, ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου και ειδικότερα σε προβλήματα με μεγάλο αριθμό μεταβλητών, είναι αρκετά μικρός. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι η Απότομη Κάθοδος δεν χρησιμοποιεί πληροφορία από τις προηγούμενες επαναλήψεις, προκειμένου να επιταχύνει τη σύγκλιση. Συχνά λοιπόν, χρησιμοποιείται η Απότομη Κάθοδος ως αρχική μέθοδος βελτιστοποίησης και στη συνέχεια εφαρμόζονται πιο απαιτητικές και δραστικές τεχνικές, όπως για παράδειγμα η μέθοδος Newton ή η μέθοδος των Fletcher-Reeves.

A'.2 Η Αυτόματη Διαφόριση και το λογισμικό

A'.2.1 Αυτόματη Διαφόριση

Η μέθοδος βελτιστοποίησης αεροτομών που περιγράφεται στην παρούσα εργασία, καθώς και η πλειοψηφία των αριθμητικών μεθόδων που αναπτύσσονται για την αντιμετώπιση προβλημάτων της Μηχανικής των Ρευστών, τονίζουν την ανάγκη για ακριβή και ταχύ υπολογισμό παραγώγων. Οι βασικότερες απαντήσεις σε αυτήν την απαίτηση, μέχρι πρόσφατα ήταν:

Ο σχηματισμός των αναλυτικών εκφράσεων αυτών των παραγώγων

Η εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών

Είναι προφανές, ότι η κατασκευή των αναλυτικών εκφράσεων δίνει ακριβή αποτελέσματα. Παρόλα αυτά, είναι συχνά μία επίπονη και δύσκολη διαδικασία, όπως ακριβώς στην περίπτωση της παρακάτω συνάρτησης:

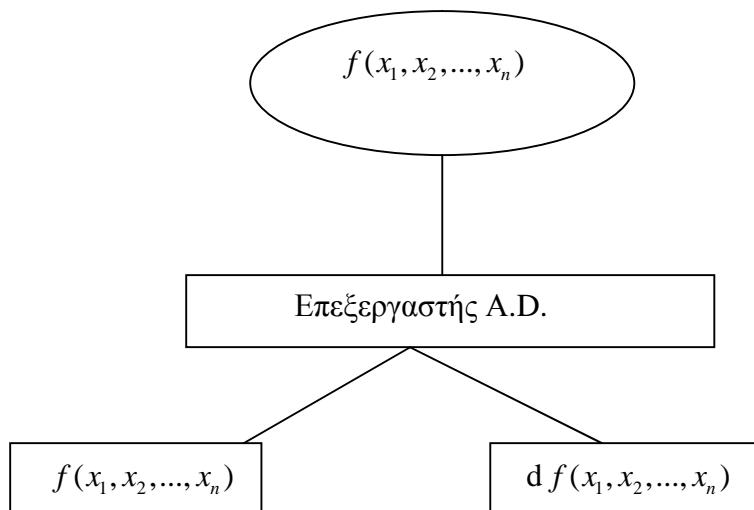
$$j(s,t) = \frac{\sqrt{\exp(s^2) + \frac{\sin s}{s}} - \sqrt{\exp(t^2) - \frac{\sin t}{t}}}{1 + \sqrt{\exp(s^2) + \frac{\sin s}{s}} + \sqrt{\exp(t^2) + \frac{\sin t}{t}}}$$

Αντίστοιχα, η θεωρία των Πεπερασμένων Διαφορών παρέχει με μεγάλη ευκολία, παραγώγους συναρτήσεων κάθε είδους. Έχει όμως δύο σημαντικά μειονεκτήματα. Εισάγει πάντοτε κάποιο σφάλμα στους υπολογισμούς ενώ σε προβλήματα με μεγάλο

αριθμό ελεύτερων παραμέτρων, το υπολογιστικό της κόστος την καθιστά απαγορευτική. Η υπερκέραση των ατελειών των δύο παραπάνω μεθόδων πραγματοποιείται με ένα σύγχρονο εργαλείο, την Αυτόματη Διαφόριση.

Η Αυτόματη Διαφόριση είναι ουσιαστικά μία πρωτοποριακή μέθοδος υπολογισμού παραγώγων συναρτήσεων, οι οποίες δεν δίνονται κατ' ανάγκη αναλυτικά, αλλά καθορίζονται μέσω υπολογιστικών προγραμμάτων ή υπορουτινών. Ο τρόπος λειτουργίας της για τον υπολογισμό των παραγώγων μίας οποιαδήποτε συνάρτησης $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, απεικονίζεται στο σχήμα Α'.2 και συνοψίζεται στα εξής στάδια:

- Κατασκευή του υπολογιστικού κώδικα (ή υπορουτίνας) μέσω του οποίου περιγράφεται η μαθηματική συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Σχήμα Α.2 : Σχηματική παράσταση της λειτουργίας ενός επεξεργαστή Αυτόματης Διαφόρισης.

Εισαγωγή του κώδικα της f και μίας λίστας ορισμάτων εισόδου (x_1, \dots, x_n) στον κατάλληλο επεξεργαστή Αυτόματης Διαφόρισης.

Δημιουργία, μέσω του επεξεργαστή της Αυτόματης Διαφόρισης και με τη βοήθεια ελάχιστων εντολών, ενός νέου, αντίστοιχου κώδικα, ο οποίος υπολογίζει τόσο την αρχική συνάρτηση f , όσο και τις παραγώγους της, ∇f .

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, πως η Αυτόματη Διαφόριση υπερτερεί συγκρινόμενη με τις δύο άλλες μεθόδους (αναλυτική γραφή και πεπερασμένες διαφορές). Παρέχει γρήγορα και ακριβή αποτελέσματα, ενώ παράλληλα δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας γενικών αλγορίθμων, ανεξάρτητους των προς παραγωγή συναρτήσεων. Τα προφανή πλεονεκτήματα της την καθιστούν ολοένα και περισσότερο δημοφιλή στα ερευνητικά κέντρα και εργαστήρια ανά τον κόσμο και αποτελούν τους κύριους λόγους χρήσης της και στην παρούσα εργασία.

A'.2.2 Το Λογισμικό *Odysee*

Το *Odysee* είναι ένα λογισμικό Αυτόματης Παραγωγίσης για κώδικες FORTRAN77, η κατασκευή του οποίου ξεκίνησε στο Γαλλικό Ινστιτούτο Ερευνών Πληροφορικής και Αυτοματισμών το 1991. Το *Odysee* λειτουργεί προς το παρόν αποκλειστικά σε περιβάλλον UNIX. Το κυριότερο πλεονέκτημα του σε σύγκριση με τους υπόλοιπους επεξεργαστές Αυτόματης Παραγωγίσης (π.χ. ADIFOR), είναι ότι προσφέρει τη δυνατότητα τόσο του ευθύ (direct), όσο και του ανάστροφου (inverse) τρόπου παραγωγίσης. Εκτός δηλαδή από τον υπολογισμό της παραγώγου ως προς μία μόνο μεταβλητή (ευθεία παραγωγή), δύναται να υπολογίσει και τις παραγώγους της συνάρτησης f προς όλες τις μεταβλητές της, δηλαδή το ∇f (αντίστροφη παραγωγή).

A'.2.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Λογισμικού *Odysee*

Για την πλήρη κατανόηση του τρόπου λειτουργίας της Αυτόματης Διαφόρισης και ειδικότερα του λογισμικού *Odysee*, κρίνεται σκόπιμη η παράθεση ενός παραδείγματος. Το παρακάτω παράδειγμα έχει ουσιαστικά διττή λειτουργία:

- Επεξηγεί πλήρως και αναλυτικά τον τρόπο υπολογισμού παραγώγων μέσω της Αυτόματης Διαφόρισης και συγκεκριμένα του *Odysee*.

- Προσομειώνει μέσα από πολύ απλές συναρτήσεις, αλλά με εποπτικό τρόπο, τη βελτιστοποίηση περιγραμμάτων αεροτομών με χρήση των συζυγών τεχνικών, κύριο θέμα αυτής της εργασίας.

Έστω λοιπόν η συνάρτηση y , η οποία αντιστοιχεί (θεωρητικά) στο περίγραμμα μίας αεροτομής και περιγράφεται μέσω της εξίσωσης $y(x) = x^2$, όπου x οι μεταβλητές σχεδίασης (πρακτικά μία) της αεροτομής. Η αναλυτική λύση (λ.χ. η πίεση) παριστάνεται μέσω μίας νέας συνάρτησης, $z(y) = \sqrt{y^2 - 4}$ και η συνάρτηση κόστους $u(z)$ ορίζεται ως $u(z) = \sum (z - \bar{z})$, όπου $\bar{z} = \sqrt{y}$ είναι η γνωστή κατανομή πίεσης (στόχος), που πρέπει να επιτευχθεί. Προφανώς, η παραπάνω άθροιση στη συνάρτηση κόστους είναι εικονική, αφού υπάρχει μόνο μία μεταβλητή σχεδίασης.

Στόχος είναι η εύρεση της τιμής της μεταβλητής x , η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους $u(z)$. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τη μέθοδο της Απότομης Καθόδου, ανανεώνοντας δηλαδή τη μεταβλητή x , μέσω της εξίσωσης:

$$x^{new} = x^{old} - n \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (\text{A'.7})$$

Με την βοήθεια του κανόνα αλυσίδας, η προηγούμενη εξίσωση, μετατρέπεται στην τανυστική σχέση:

$$x^{new} = x^{old} - n \left(\frac{\partial u}{\partial z_m} * \frac{\partial z_m}{\partial y_j} * \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A'.8})$$

Είναι προφανές ότι για την εύρεση του βέλτιστου σημείου, απαιτείται η γνώση των παραγώγων που εμπεριέχονται στην εξίσωση A'.8. Ακριβώς για τον υπολογισμό αυτών των παραγώγων, χρησιμοποιείται η Αυτόματη Διαφόριση και ειδικότερα ο επεξεργαστής *Odyssee*.

Η σειρά εργασίας που ακολουθείται για τον υπολογισμό των παραπάνω μερικών παραγώγων μέσω του λογισμικού *Odyssee* και την εύρεση της βέλτιστης τιμής της μεταβλητής x , έχει ως εξής:

1. Κατασκευάζονται τρεις κώδικες σε γλώσσα FORTRAN77, οι οποίοι

καθορίζουν τις συναρτήσεις $y(x)$, $z(y)$ και $u(z)$.

2. Αυτοί οι αλγόριθμοι εισάγονται στον επεξεργαστή *Odysee*.
3. Ο επεξεργαστής *Odysee* δημιουργεί τρεις νέους κώδικες, οι οποίοι υπολογίζουν και τις αρχικές συναρτήσεις $y(x)$, $z(y)$ και $u(z)$ και τις $\partial u / \partial z_m$, $\partial z_m / \partial y$
4. Οι γνωστές πλέον παράγωγοι εισάγονται στην εξίσωση A'.8 και ανανεώνεται η τιμή της μεταβλητής χ .
5. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου να βρεθεί η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου σχεδίασης της αεροτομής.

Στη συνέχεια, για εποπτικούς λόγους και για ουσιαστικότερη κατανόηση του επεξεργαστή *Odysee* και της παραπάνω διαδικασίας, παρατίθενται τρία προγράμματα FORTRAN77: Αρχικά, ο κώδικας υπολογισμού της συνάρτησης $(y) = \chi^2$, που εισάγεται στο *Odysee* (SUBROUTINE BEZIER), ο κώδικας που επιστρέφει το *Odysee* και υπολογίζει την παράγωγο $\partial y / \partial x$ και τη συνάρτηση y (SUBROUTINE BEZIER) και τέλος, το κυριότερο μέρος του προγράμματος βελτιστοποίησης της παραμέτρου χ (PROGRAM EXAMPLE).

Listing A. 1: Subroutine $y(x) = x^2$

```
SUBROUTINE BEZIER ( N, X, Y )  
DIMENSION X ( 10 ), Y ( 10 )
```

Calculation of the function $Y = Y (X)$

```
DO I = 1, N  
  Y ( I ) = X ( I ) ** 2  
END DO  
RETURN  
END
```

Listing A.2: Odyssee Subroutine $\frac{dy}{dx}$

```
SUBROUTINE BEZIER ( N, X, Y, XTTL, YTTL )  
  IMPLICIT NONE  
  INTEGER I  
  INTEGER N  
  REAL X ( 10 )  
  REAL Y ( 10 )  
  REAL YTTL ( 10 )  
  REAL XTTL ( 10 )  
  
  DO I = 1, N  
    Calculation of the derivative of Y(X)  
    YTTL ( I ) = XTTL ( I ) * X ( I ) + X ( I ) * XTTL ( I )  
    Calculation of the function Y=Y(X)  
    Y ( I ) = X ( I ) * X ( I )  
  END DO  
  RETURN  
END
```


Listing A.3: Main part of the code EXAMPLE

PROGRAM EXAMPLE

DIMENSION X (10), Y (10), Z (10)

DIMENSION DX (10), DY (10), DZ (10)

.....

Calculate function Y and derivative dy/dx

CALL YXTL (N, X, Y, DY)

Calculate function Z and derivative dZ/dy

CALL ZYTL (N, Y, Z, DZ)

Calculate function u (cost function) and derivative dU/Dz

CALL UZTL (N, Z, U, DU)

c *Main loops*

c

 DO 20 K=1,N

 SENS=0.0

 DO 30 M=1,N

 CALL UZTL(N,Z,U,DU)

 SUMMY=0.0

 DO 40 J = 1,N

 CALL ZYTL(N,Y,Z,DZ)

 CALL YXTL(N,X,Y,DY)

c *Calculate sum of partial derivatives*

c

 SUMMY=SUMMY+DZ (M) *DY(J)

40 CONTINUE ■

c

c *Calculate sensitivity derivatives*

 SENS=SENS+SUNNY*DU

30 CONTINUE

c

c *Calculate new values of X*

 X(K)=X(K)-ETA*SENS 20 CONTINUE

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, <Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς>
- W. K. Anderson, V. Venkatakrishnan, Aerodynamic Design Optimisations on Unstructured Grids with a Continuous Adjoint Formulation, AIAA Paper 97-0643
- O. Baysal, M. E. Eleshaky, Aerodynamic Sensitivity Analysis Methods for the Compressible Euler Equations, Journal of Fluids Engineering, Vol. 113 , 1991, 681-688.
- M. Berz, C.H. Bischof, G.F. Corliss, Computational Differentiation: Applications, Techniques and Tools, SIAM, 1996
- C. H. Bischof, A.Griewank, Computational Differentiation and Multidisciplinary Design, Symposium on Inverse Problems and Optimal Design in Industry
- A. Carle, L. L. Green, C. H. Bischof, P. A. Newman, Applications of Automatic Differentiation in CFD, Center for Research on Parallel Computation, TR94404
- C. Faure, Yv. Papegay, *Odyssee* User's Guide Rapport Technique N.0224, INRIA
- R. Fletcher, Practical Methods of Optimization, John Wiley and Sons
- M. B. Giles, N. A. Pierce Adjoint equations in CFD: Duality, Boundary Conditions and Solution Behaviour, AIAA Paper 97-1850, 1997
- M. B. Giles, N. A. Pierce Improved Lift and Drag Estimates Using Adjoint Euler Equations, AIAA Paper 99-3293, 1999

- A. Griewank, G. F. Corliss, Automatic Differentiation of Algorithms: Theory, Implementation and Applications, SIAM, 1991
- G. J. Hou, A. C. Taylor, V. M. Korivi, Discrete Shape Sensitivity Equations for Aerodynamic Problems, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37,1994, pp 2251-2266
- A. Jameson, Computational Aerodynamics for Aircraft Design, Science 254: 361-371, 1989
- A. Jameson, Automatic Design of Transonic Airfoils to Reduce the Shock Induced Pressure Drag, Proceedings of the 31th Israel Annual Conference of Aviation and Aeronautics, Tel Aviv, pages 5-17, February 1990
- A. Jameson, Optimum Aerodynamic Design Using CFD and Control Theory, AIAA Paper 95-1729, AIAA 12th Computational Fluids Dynamic Conference, San Diego, CA, June 1995
- A. Jameson, L. Martinelli, N. Pierce, Optimum Aerodynamic Design Using the Navier-Stokes Equations, AIAA Paper 97-0101, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 1997
- A. Jameson, J. Reuther, Control Theory Based Airfoil Design Using the Euler Equations, AIAA Paper 94-4272-CP
- S. K. Nadarajah, The Discrete Adjoint Approach, PhD Thesis, Stanford University
- George Nocelad, Stephen Wright, Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research

- S. S. Petropoulou, T. I. Pappou, D. G. Koubogiannis, C. O. Freskos, Multi-point Airfoil Design Using a Continuous Adjoint Method, CEAS Aerospace Aerodynamic Research Conference
- L. Piegl, W. Tiller, The NURBS book, Springer
- H. Sagan, Introduction to the Calculus of Variations, Dover Publications Inc., New York 1992
- G. R. Shubin, P. D. Frank, A Comparison of the Implicit Gradient Approach and the Variational Approach to Aerodynamic Design Optimization, Boeing Computer Services Report AMS-TR-163, April 1991
- H. Sobieczky, Parametric Airfoils and Wings, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 68, Vieweg Verlag, pp 71-88
- H. Sobieczky, M. Klein, Sensitivity of Aerodynamic Optimization to Parameterized Target Functions, Proc. Int. Symp. On Inverse Problems in Engineering Mechanics (ISIP 2001)
- G. N. Vanderplaats, Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, Mc Graw- Hill Book Company
- K. C. Giannakoglou, A Design Method For Turbine Blades Using Genetic Algorithms On Parallel Computers, ECCOMAS 98, John Wiley and Sons, 1998
- K. C. Giannakoglou, Designing Turbomachinery Blades Using Evolutionary Methods, 44th ASME Gus Turbine and Aeroengine Congress, Indianapolis USA, June 7-10, 1999

