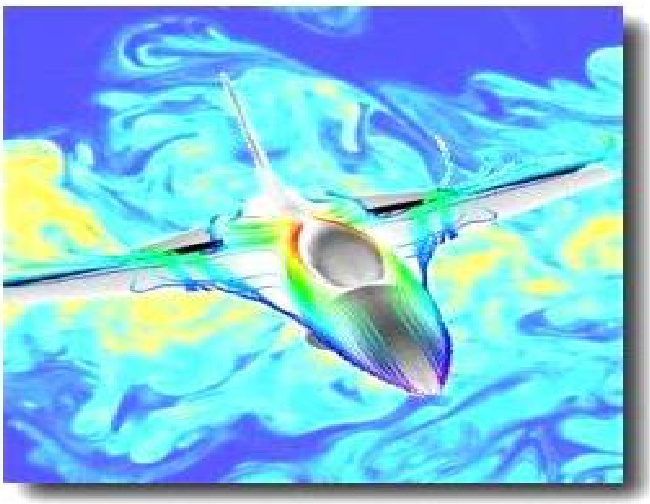
Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΡΟΗ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΟ ΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ ΣΩΛΗΝΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΓΙΑ ΙΞΩΔΕΣ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ



Σπουδαστές: ΣΕΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΑΡΓΥΡΟΣ

Εποπτεύων καθηγητής: Δρ. ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΜΑΝΩΛΗΣ

ΠΑΤΡΑ 2007

''Μηχανολογία είναι το επάγγελμα στο οποίο εφαρμόζεται η γνώση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών που αποκτήθηκε από μελέτη ώστε να χρησιμοποιηθούν τα υλικά και οι δυνάμεις της φύσης κατά τον καλύτερο τρόπο για το καλό της ανθρωπότητας.''

(Engineers Council for Professional Development)

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε θερμά τον καθ. Δρ. Πετράκη Μ. για την πολύτιμη καθοδήγηση και συμβολή του στην διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας καθώς και τους καθηγητές του ιδρύματος που μας μετέδωσαν ότι καλύτερο μπορούσαν στα πλαίσια της διδασκαλίας.

Πολύτιμη ήταν και η χρήση της εκπληκτικής συλλογής βιβλίων και επιστημονικών περιοδικών που βρίσκονται στη βιβλιοθήκη του ιδρύματος για την άντληση πληροφοριών.

ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μελετούμε την ροή σε ευθύγραμμο και καμπύλο αγωγό κυκλικής διατομής για ιξώδες ασυμπίεστο ρευστό. Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις κίνησης και χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών επιχειρούμε μια αριθμητική προσέγγιση του προβλήματος. Κατασκευάζουμε έναν κώδικα με την γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN 90/95 για την επίλυση των εξισώσεων ρευματοσυνάρτησης και αξονικής ταχύτητας με την τεχνική της διαδοχικής υπερχαλάρωσης. Τέλος, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής προσέγγισης με αυτά της αναλυτικής και εξάγουμε τα ωφέλιμα συμπεράσματα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εφαρμογές των δακτυλιοειδών καμπύλων αγωγών στην μηχανική και ιατρική

Η μελέτη ροής σε καμπύλους ή ευθύγραμμους δακτυλιοειδείς σωλήνες αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο στην ρευστομηχανική λόγω των πολλών εφαρμογών τόσο στη μηχανική όσο και στην ιατρική. Πιο συγκεκριμένα :

Α) Στην μηχανική

Η μόνιμη ροή ενός ιξώδους ρευστού σε ένα καμπύλο αγωγό κυκλικής διατομής έχει δεχθεί σημαντική προσοχή από την άποψη θεωρητικού αριθμητικού και πειραματικού χειρισμού.

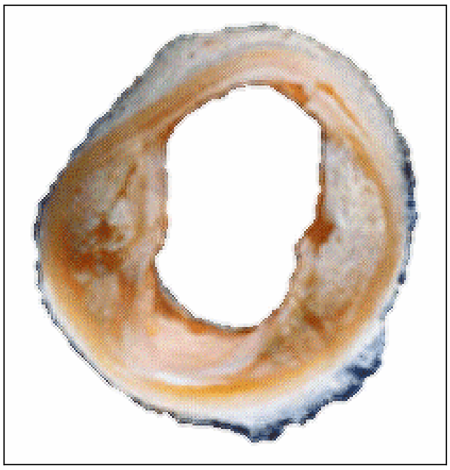
Έχει εκπονηθεί πλήθος εργασιών για μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε ελικοειδείς σωλήνες και σε έντονα καμπύλους σωλήνες εξαιτίας των πρακτικών εφαρμογών τους στους εναλλάκτες θερμότητας.

Η ροή σε ένα ευθύγραμμο περιστρεφόμενο σωλήνα αποτελεί σημαντικό κεφάλαιο για την μηχανική. Τέτοιες περιστρεφόμενες δίοδοι χρησιμοποιούνται σε συστήματα ψύξης των πτερυγίων των αεροστροβίλων, σε ψυκτικές συσκευές, σε ηλεκτρικές γεννήτριες και στα τύμπανα ρότορα. Επίσης οι δακτυλιοειδείς σωλήνες χρησιμοποιούνται σε πυρηνικούς αντιδραστήρες ψυχόμενους από αέρια, στις γεωτρήσεις της βιομηχανίας πετρελαίου και φυσικού αερίου, στα ρουλεμάν, στην επεξεργασία τροφίμων, στους συμπαγείς εναλλάκτες θερμότητας, στον ιατρικό εξοπλισμό, στα συστήματα ανάκτησης θερμότητας και για συσκευές καύσης. Χρησιμοποιούνται συχνά για την σταθεροποίηση της φλόγας μέσω μίας ζώνης ανακυκλοφορίας. Τέλος χρησιμοποιούνται για την εναλλαγή ποσών θερμότητας χαμηλής τάξης και για την λειτουργία εξελιγμένων αντιδραστήρων ισχύος σύντηξης και διάσπασης.

Η ροή σε δακτυλιοειδείς σωλήνες είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό στους εναλλάκτες θερμότητας διπλού σωλήνα ή σε συστήματα ψύξης και περιστρεφόμενα ηλεκτρικά μηχανήματα. Επίσης συναντάται σε χημικές προσμίξεις και σε μηχανήματα ξήρανσης.

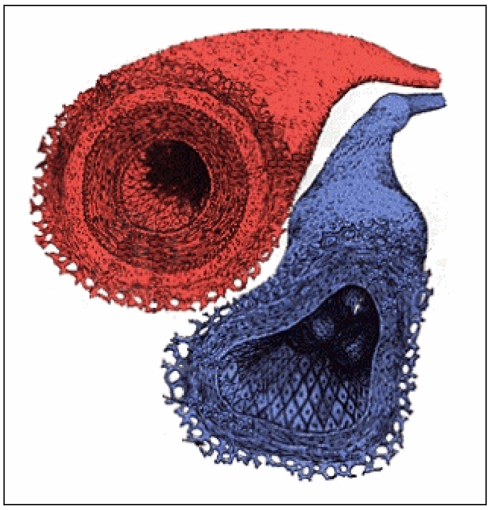
Β) Στην ιατρική

Η ροή του αίματος στο ανθρώπινο αρτηριακό σύστημα έχει προξενήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα πρόσφατα χρόνια (Pedley 1980). Το μεγαλύτερο δοχείο σε αυτό το σύστημα η αορτή είναι πολύ καμπυλωμένο. Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος όσον αφορά τη ροή σε αυτό το δοχείο είναι το μήκος της εισόδου- η απόσταση που απαιτείται για τη ροή ώστε να γίνει πλήρως ανεπτυγμένη καθώς και ο εντοπισμός των θέσεων της μέγιστης και ελάχιστης διατμητικής τάσης στα τοιχώματα της αρτηρίας. Το μήκος εισόδου είναι σχετικό προς τη ροή σε άλλα καμπύλα δοχεία αίματος από τη στιγμή που υπάρχει μερική αμφιβολία για το εάν υπάρχει αρκετή απόσταση μεταξύ των διακλαδώσεων ώστε η ροή στις αρτηρίες να γίνει πλήρως ανεπτυγμένη. Οι δευτερεύουσες κινήσεις σε καμπυλωμένες ροές θα ήταν αναμενόμενο να είναι σημαντικές σε αυτό το πλαίσιο.



Σχήμα 1: Η αορτή

Η μελέτη της μόνιμης ροής μέσα σε μία καθετηριασμένη αρτηρία δείχνει ότι η διατμητική τάση στο τοίχωμα και το ποσοστό ροής ελαττώνονται. Αυτοί οι παράγοντες μπορεί να εκκινούν την ανάπτυξη αθηρωματικών πλακών στο αρτηριακό τοίχωμα. Επιπροσθέτως, η ένταση του καρδιακού μυ αυξάνεται διαδοχικά και επιδεινώνει την προμήθεια αίματος στην καρδιά διαμέσου της στεφανιαίας αρτηρίας.



Σχήμα 2: Αρτηρία και φλέβα

Ένα κύριο χαρακτηριστικό της ροής του αίματος στις αρτηρίες είναι η αντλητική ικανότητα της καρδιάς. Όταν μια αρτηρία είναι καθετηριασμένη , είναι λογικό να αναμένεται ότι αυτή η αποδοτικότητα τροποποιείται. Είναι, επομένως, σημαντικό να γνωρίζουμε πως η κατανομή των τάσεων στην κοιλία της καρδιάς επηρεάζεται, η οποία διαδοχικά μεταβάλλει την προμήθεια αίματος στον καρδιακό μυ διαμέσου της στεφανιαίας αρτηρίας (Pedley). Από την άλλη μεριά μεγάλο ενδιαφέρον έχει η διατμητική τάση στο τοίχωμα του καθετηριασμένου δοχείου.

Επιπροσθέτως, η εγκατάσταση πολύ μικρών αντλιών στην καρδιά διαμέσου ενός μόνιμου καθετηριασμού αρτηρίας συνεπάγεται μία περαιτέρω πιθανή εφαρμογή στην ιατρική. Επίσης μελέτη έχει εκπονηθεί για τις πιθανές επιδράσεις του καθετηριασμού αρτηρίας στην αρτηριοσκλήρωση από τους Καραχάλιο & Πετράκη, Choi & Park.

Οι σωλήνες κυκλικής διατομής έχουν τραβήξει την προσοχή από πολύ νωρίς εξαιτίας της σημασίας τους στη ρευστομηχανική των αιμοφόρων αγγείων στα οποία παίζει μεγάλο ρόλο ο αριθμός Reynolds για τον οποίο η ροή είναι στρωτή.

Στο καρδιαγγειακό σύστημα η ροή είναι συνήθως στρωτή. Η μελέτη αυτού του συστήματος (μόνο σε μέρη στα οποία εμφανίζονται καμπυλωμένοι αγωγοί) κάνει επιθυμητή τη διερεύνηση στρωτών δευτερογενών ροών. Η κατανόηση του προτύπου των ρευματικών γραμμών τους, μπορεί να βοηθήσει για παράδειγμα στην περαιτέρω κατανόηση της κατανομής των ουσιών που εισάγονται με ένεση. Υπολογισμοί τέτοιων κατανομών σε ένα καμπυλωμένο σωλήνα έχουν επιχειρηθεί από τους Erdogan & Chatwin (1967), χρησιμοποιώντας τη λύση του Dean για μικρά K, αλλά στην επιστημονική ανακοίνωσή τους κάνουν εφικτή μία ανάλυση για πολύ μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds παρόμοιους με αυτούς που εμφανίζονται στις αρτηρίες.

Όταν ένας καθετήρας εισάγεται σε καμπύλη αρτηρία, η αζιμουθιακή τάση στα τοιχώματα της αρτηρίας μειώνεται με το μέγεθος του καθετήρα για σταθερή ροή. Τότε στο εσωτερικό τοίχωμα παρατηρείται μία αντίστροφη αξονική ροή. Έτσι μπορούμε να επέμβουμε και να διορθώσουμε την καρδιακή αρρυθμία. Αυτό μπορεί να γίνει αν από μια τομή σε μία αρτηρία του ασθενούς εισαχθεί μέσα σ' αυτήν ένας μικρός αεροστρόβιλος. Ο αεροστρόβιλος ωθείται με τη βοήθεια του καθετήρα μέχρι τον αριστερό κόλπο και ενισχύει την αντλητική ικανότητα της καρδιάς. Συνεπώς τίθεται το ερώτημα εάν ο καθετήρας επηρεάζει τις μηχανικές ιδιότητες των τοιχωμάτων και ποιες επιπτώσεις έχει αυτό.

Οι παράγοντες που επηρεάζουν τις μηχανικές ιδιότητες των τοιχωμάτων είναι:

a) η πίεση του αίματος και
b) η διατμητική τάση στα τοιχώματα

Έχει αναφερθεί ότι η χρόνια αυξημένη πίεση του αίματος αποτελεί προδιάθεση για την ανάπτυξη αρτηριοσκλήρωσης. Επίσης αυξημένη διατμητική τάση στα τοιχώματα για μικρό χρονικό διάστημα προκαλεί μόνιμη καταστροφή των τοιχωμάτων με αποτέλεσμα να γίνονται περισσότερο διαπερατά στις λιποπρωτεΐνες και έχει αποδειχθεί ότι όταν η διαπερατότητα είναι μεγάλη, εκεί αφθονούν και οι προάγγελοι των αθηρωματικών πλακών. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο η διατμητική τάση επηρεάζει το μηχανισμό μεταφοράς μεγαλομορίων δια μέσου των αρτηριακών τοιχωμάτων. Έχει αποδειχθεί ότι τα μεγαλομόρια ευθυγραμμίζονται με τη διεύθυνση της διατμητικής τάσης (Flaherty 1972). Επίσης έχει επιβεβαιωθεί ότι μετά από μία αρτηριακή στένωση, τα αρτηριακά τοιχώματα παθαίνουν διαστολή με αποτέλεσμα να αλλοιώνονται οι μηχανικές τους ιδιότητες.

Παρακάτω θα υπάρξει εκτενέστερη αναφορά στους μελετητές και τα συμπεράσματά τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δυναμική των ρευστών ή Υδροδυναμική

Αυτός ο κλάδος της ρευστομηχανικής ασχολείται με τους νόμους των ρευστών που βρίσκονται σε κίνηση. Αυτοί οι νόμοι είναι σημαντικά πολυπλοκότεροι εξαιτίας της μεγαλύτερης πρακτικής σημασίας, της δυναμικής των ρευστών.

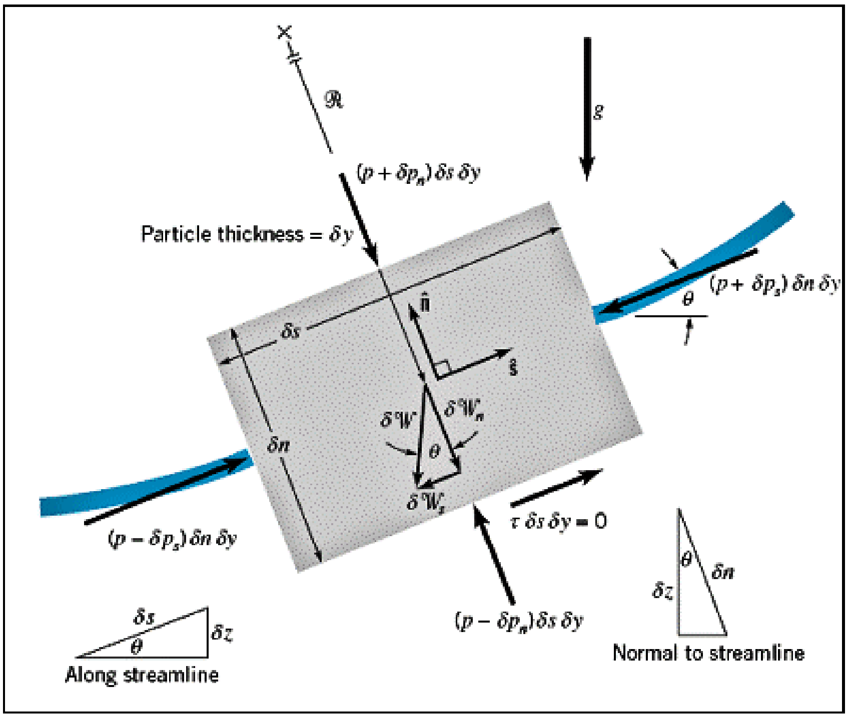
Το ενδιαφέρον για την δυναμική των ρευστών χρονολογείται από την πρώτη μηχανική εφαρμογή στις υδροδυναμικές μηχανές. Ο **Αρχιμήδης** έκανε μία πρώιμη συνεισφορά με την εφεύρεση της αντλίας. Άλλες υδραυλικές μηχανές και συσκευές αναπτύχθηκαν από τους Ρωμαίους οι οποίοι δεν χρησιμοποίησαν μόνο την έλικα του Αρχιμήδη για άρδευση, άντληση σε ορυχεία αλλά επίσης κατασκεύασαν και συστήματα υδραγωγών. Ο Ρωμαίος αρχιτέκτων και μηχανικός **Βιτρούβιος** πρώτος περίγραψε τον κάθετο υδροστρόβιλο.

Παρόλες τις πρώιμες εφαρμογές της δυναμικής των ρευστών, υπήρχε λίγη ή καθόλου κατανόηση της βασικής θεωρίας και συνεπώς υπήρξε μια αργοπορία στην ανάπτυξή της. Μετά τον Αρχιμήδη περισσότερο από 1800 χρόνια πέρασαν πριν την επόμενη σπουδαία επιστημονική πρόοδο που έγινε από τον Ιταλό μαθηματικό και φυσικό **Evangelista Torricelli** ο οποίος εφεύρε το βαρόμετρο το 1643. Ακόμη τυποποίησε τον νόμο που διέπει την ροή ενός υγρού από ένα στόμιο. Η μεγάλη ώθηση όμως στην ανάπτυξη της μηχανικής των ρευστών δόθηκε εξαιτίας της τυποποίησης του νόμου της κίνησης από των Άγγλο μαθηματικό και φυσικό **Isaac Newton**. Αυτοί οι νόμοι εφαρμόστηκαν από τον Σουηδό μαθηματικό **Leonard Euler** ο οποίος παρήγαγε τις βασικές εξισώσεις για ένα ανιξώδες ή ατριβές ρευστό. Ο Euler αναγνώρισε πως οι δυναμικοί νόμοι για τα ρευστά μπορούν να εκφραστούν εάν το υγρό θεωρηθεί ασυμπίεστο και ιδανικό που σημαίνει πως οι επιδράσεις της τριβής και του ιξώδους μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Επειδή αυτή η περίπτωση δεν ισχύει ποτέ για τα ρευστά σε κίνηση, τα αποτελέσματα μιας τέτοιας ανάλυσης μπορούν να εξυπηρετήσουν εκείνες τις ροές όπου οι επιδράσεις του ιξώδους είναι μικρές.

Ι. Ασυμπίεστες και ανιξώδεις ή ατριβείς ροές

Αυτές οι ροές ακολουθούν την αρχή του Bernoulli που ονομάστηκαν έτσι από το Σουηδό μαθηματικό και επιστήμονα Daniel Bernoulli. Η αρχή υποστηρίζει ότι η ολική μηχανική ενέργεια μιας ασυμπίεστης και ανιξώδους ροής είναι σταθερή κατά μήκος μίας ρευματικής γραμμής.

Οι ρευματικές γραμμές είναι φανταστικές ροϊκές γραμμές οι οποίες είναι πάντα παράλληλες στην τοπική διεύθυνση της ροής. Η αρχή του Bernoulli οδηγεί σε ένα συσχετισμό μεταξύ επιδράσεων της πίεσης, επιδράσεων της ταχύτητας και επιδράσεων της βαρύτητας. Αυτή η αρχή είναι σημαντική στο σχεδιασμό ακροφυσίων και στις μετρήσεις ροής.

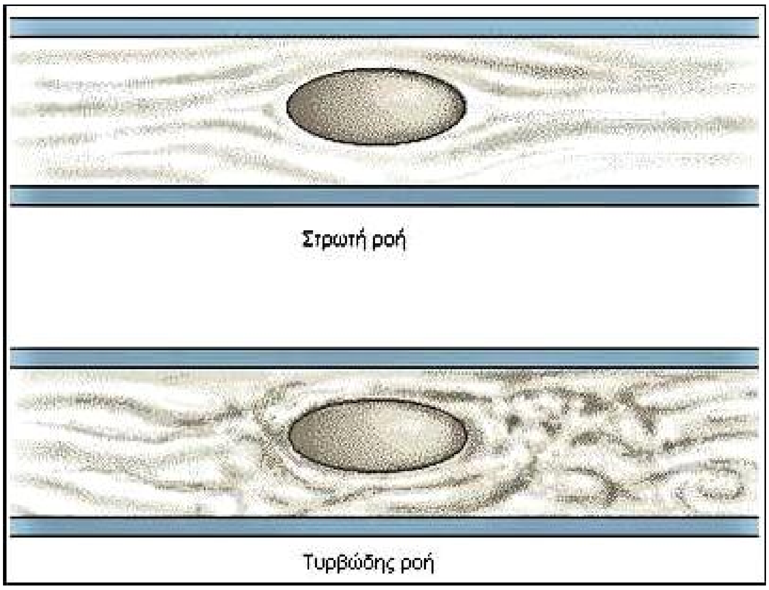


$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{σταθερό κατά μήκος μίας ρευματικής γραμμής}$$

Σχήμα 3: διαφορική ανάλυση ρευματικής γραμμής

II. Ιξώδεις ροές, στρωτή και τυρβώδης κίνηση

Τα πρώτα προσεκτικά τεκμηριωμένα πειράματα για την τριβή σε αγωγούς με χαμηλές ταχύτητες ροής διεξήχθησαν το **1839** από το Γάλλο φυσιολόγο **Jean Leonard Marie Poiseuille**, ο οποίος ενδιαφερόταν για τα χαρακτηριστικά της ροής του αίματος και το **1840** από τον Γερμανό υδραυλικό μηχανικό **Gotthief Heinrich Ludwig Hagen**. Μια προσπάθεια να συμπεριληφθούν οι επιδράσεις του ιξώδους στις μαθηματικές εξισώσεις έγινε πρώτα το 1827 από το Γάλλο μηχανικό **Claude Louis Navier**. Ο Βρετανός μαθηματικός **Sir George Gabriel Stokes** το **1845** τελειοποίησε τις βασικές εξισώσεις για ιξώδη ασυμπίεστα ρευστά. Αυτές είναι γνωστές ως οι εξισώσεις **Navier - Stokes** και είναι τόσο σύνθετες που μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε απλές ροές. Μια τέτοια ροή είναι εκείνη ενός πραγματικού ρευστού μέσα σε ένα ευθύγραμμο αγωγό. Εδώ η αρχή του Bernoulli δεν είναι εφαρμόσιμη επειδή μέρος της ολικής μηχανικής ενέργειας εκλύεται ως αποτέλεσμα της τριβής λόγω ιξώδους καταλήγοντας σε μία πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού. Οι συναρτήσεις υποθέτουν ότι αυτή η πτώση πίεσης για ένα δεδομένο αγωγό και ένα δεδομένο ρευστό θα έπρεπε να είναι γραμμική με την ταχύτητα της ροής. Τα πρώτα πειράματα διεξήχθησαν γύρω στα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα και έδειξαν ότι αυτό επαληθευόταν μόνο για χαμηλές ταχύτητες. Σε υψηλές ταχύτητες η πτώση πίεσης ήταν σχεδόν ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας. Αυτό το πρόβλημα δεν είχε επιλυθεί μέχρι το **1883** όταν ο Βρετανός μηχανικός **Osborne Reynolds** έδειξε την ύπαρξη δύο ειδών ιξώδους ροής σε αγωγούς. Σε χαμηλές ταχύτητες τα σωματίδια του ρευστού ακολουθούν τις ρευματικές γραμμές (στρωτή ροή) και τα αποτελέσματα ταιριάζουν με την αναλυτική πρόβλεψη. Σε μεγαλύτερες ταχύτητες η ροή διασπάται σε μια διακύμανση ταχυτήτων ή δινών (τυρβώδης ροή) σε μορφή η οποία δεν μπορεί να προβλεφθεί πλήρως ακόμα και σήμερα.



Σχήμα 4 : στρωτή και τυρβώδης ροή

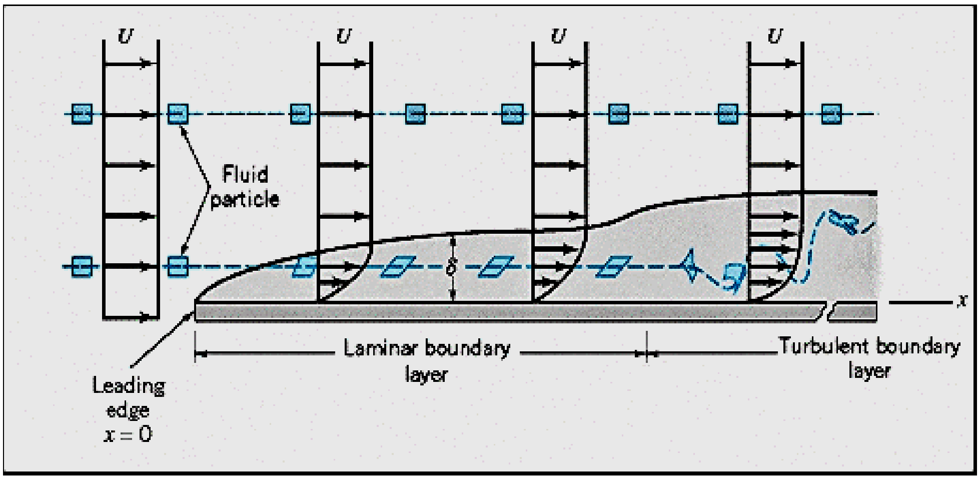
Ο Reynolds καθιέρωσε πως η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή ήταν συνάρτηση μιας μοναδικής παραμέτρου η οποία από τότε έχει γίνει γνωστή ως ο αριθμός **Reynolds**. Αυτός ορίζεται ως το γινόμενο της ταχύτητας, της πυκνότητας του ρευστού και της διαμέτρου του σωλήνα διαιρεμένο με το ιξώδες του ρευστού $\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$ και εκφράζει το πηλίκο των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις τριβής. Αν είναι μικρότερος του **2100** τότε η ροή θα είναι πάντα στρωτή ενώ για μεγαλύτερες τιμές η ροή κανονικά θα είναι τυρβώδης.

Οι τυρβώδεις ροές δεν μπορούν να αποτιμηθούν μεμονωμένα από υπολογισμένες προβλέψεις και εξαρτώνται από μία ανάμειξη πειραματικών πληροφοριών και μαθηματικών μοντέλων για την ανάλυσή τους.

III. Ροές οριακών στρωμάτων

Πριν από το 1866 το μηχανικό ενδιαφέρον της ρευστομηχανικής ήταν περιορισμένο στις ροές του νερού. Η ανάπτυξη της χημικής βιομηχανίας κατά το τελευταίο μέρος του 19^{ου} αιώνα κατεύθυνε την προσοχή σε άλλα ρευστά και αέρια. Το ενδιαφέρον για την αεροδυναμική άρχισε με τις μελέτες του Γερμανού αεροναυπηγού **Otto Lilienthal** την τελευταία δεκαετία του 18^{ου} αιώνα και έγινε μεγάλη πρόοδος με την πρώτη επιτυχημένη πτήση από τους Αμερικανούς εφευρέτες **Orville και Wilbur Wright** το 1903.

Η πολυπλοκότητα ιξωδών ροών, ειδικά τυρβωδών ροών περιόρισε αυστηρά την πρόοδο στην δυναμική των ρευστών μέχρι που ο Γερμανός μηχανικός **Ludwig Prandtl** αναγνώρισε το **1904** ότι πολλές ροές μπορούσαν να διαιρεθούν σε δύο κύριες περιοχές. Η περιοχή κοντά στην επιφάνεια αποτελείται από ένα λεπτό **οριακό στρώμα** όπου οι ιξώδεις επιδράσεις είναι συγκεντρωμένες και έντονες και το μαθηματικό μοντέλο μπορεί να απλουστευθεί. Έξω από το οριακό στρώμα οι ιξώδεις επιδράσεις μπορούν να αμεληθούν και μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι απλούστερες μαθηματικές εξισώσεις για ανιξώδεις ροές.



Σχήμα 5: Το οριακό στρώμα

Το μοντέλο του οριακού στρώματος όχι μόνο επέτρεψε μία πολλή απλουστευμένη τυποποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes στην περιοχή κοντά στην επιφάνεια του σώματος αλλά επίσης οδήγησε σε περεταίρω ανάπτυξη της ροής των ανιξωδών ρευστών που μπορούν να εφαρμοστού έξω από το οριακό στρώμα. Πολλή από τη σύγχρονη ανάπτυξη της μηχανικής των ρευστών έγινε εφικτή χάρη στην έννοια του οριακού στρώματος και συμπληρώθηκε από διάφορους μελετητές όπως ο γεννημένος στην Ουγγαρία Αμερικανός αεροναυπηγός μηχανικός **Theodore Von Karman**, ο Γερμανός μαθηματικός **Richard Von Mises** και ο Βρετανός φυσικός και μετεωρολόγος sir **Geoffrey Ingram Taylor**.

IV. Συμπιεστές ροές

Το ενδιαφέρον για τις συμπιεστές ροές άρχισε με την ανάπτυξη των ατμοστροβίλων από τον Βρετανό εφευρέτη **Charles Algernon Parsons** και τον Σουηδό μηχανικό **Carl Gustaf Patrik de Laval** στη δεκαετία του **1880**. Αντιμετωπίστηκε πρώτα η ροή υψηλής ταχύτητας του ατμού μέσα σε διόδους ροής και η ανάγκη για αποδοτικό σχεδιασμό στροβίλων οδήγησε σε βελτιωμένες αναλύσεις συμπιεστής ροής. Πρόοδοι σημειώθηκαν με την επιτυχή ανάπτυξη των αεροστροβίλων και μηχανών **Jet** στα **1930**. Το ενδιαφέρον σε ροές υψηλών ταχυτήτων πάνω σε επιφάνειες προέκυψε πάνω στη μελέτη της **βαλλιστικής** επιστήμης. Μεγάλες εξελίξεις ξεκίνησαν κατά το τέλος του **19^{ου}** αιώνα συμπεριλαμβάνοντας μεταξύ άλλων τον **Prandtl** και τους μαθητές του και αυξήθηκαν μετά την εισαγωγή των αεροσκαφών υψηλής ταχύτητας και των πυραύλων στο **Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο**.

Μία από τις βασικές αρχές των συμπιεστών ροών είναι πως η πυκνότητα ενός αερίου αλλάζει όταν το αέριο υφίσταται μεγάλες αλλαγές στην ταχύτητα και την πίεση. Όμως την ίδια στιγμή η θερμοκρασία του αλλάζει οδηγώντας σε πιο πολύπλοκους τρόπους ανάλυσης. Η συμπεριφορά της ροής ενός συμπιεστού αερίου εξαρτάται από το εάν η ταχύτητα της ροής είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου. Η ταχύτητα του ήχου είναι το όνομα που έχει δοθεί στην ταχύτητα διάδοσης μιας πολύ μικρής διαταραχής, η κύματος πίεσης μέσα στο ρευστό. Για ένα αέριο αυτή είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της απόλυτης θερμοκρασίας. Λόγου χάρη ο αέρας στους 20^o C ή 293^o K έχει μια ταχύτητα ήχου 344,65[m/s] (1130 [ft/s]). Εάν η ταχύτητα της ροής είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου (υποηχητική ροή), κύματα πιέσεως μπορούν να μεταδοθούν μέσα σε όλο το ρευστό για να διαρρυθμίσουν τη ροή που ορμά προς ένα αντικείμενο. Οι συμπιεστές ροές συχνά καθορίζονται από τον αριθμό Mach ο οποίος είναι ο λόγος της ταχύτητας της ροής προς την ταχύτητα του ήχου. Οι υπερηχητικές ροές συνεπώς έχουν έναν αριθμό Mach $M>1$.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Το γενικό πεδίο της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (CFD) στο οποίο υπολογιστές και αριθμητική ανάλυση συνδυάζονται για να λύσουν προβλήματα ροής ρευστών, παριστάνει μια εξαιρετικά σημαντική περιοχή θεμάτων στην εφαρμοσμένη ρευστομηχανική. Σημαντική πρόοδος έχει γίνει στα περασμένα λίγα σχετικά χρόνια αλλά πολλά απομένουν ακόμα να γίνουν. Στη συνέχεια περιγράφονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σε αυτόν τον τόσο ελκυστικό κλάδο για την προσομοίωση και επίλυση εξειδικευμένων προβλημάτων ροής.

(Α) ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Στην πραγματικότητα υπάρχουν πολύ λίγα πρακτικά προβλήματα τα οποία θα μπορούσαν να λυθούν χρησιμοποιώντας μια ακριβή αναλυτική προσέγγιση. Για παράδειγμα, δεν υπάρχουν γνωστές αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Navier-Stokes για ροή που διαπερνά ένα αντικείμενο όπως μία σφαίρα, έναν κύβο ή ένα αεροπλάνο. Εξαιτίας της δυσκολίας στην επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, μεγάλη προσοχή έχει δοθεί σε διάφορους τύπους προσεγγιστικών λύσεων. Για παράδειγμα, εάν το ιξώδες θεωρηθεί ίσο με 0 τότε οι Navier-Stokes απλοποιούνται στις εξισώσεις του Euler. Έτσι οι λύσεις ανιξώδους ρευστού είναι στην πραγματικότητα προσεγγιστικές λύσεις των εξισώσεων Navier-Stokes. Από την άλλη άκρη, για προβλήματα που αφορούν ρευστά σε αργή κίνηση, οι επιδράσεις του ιξώδους μπορεί να είναι επικρατέστερες και οι όροι της μη γραμμικής επιτάχυνσης μπορούν να αμεληθούν. Αυτή η θεώρηση απλουστεύει αρκετά την ανάλυση αφού οι εξισώσεις τώρα γίνονται γραμμικές. Υπάρχουν πολυάριθμες αναλυτικές λύσεις σε αυτά τα προβλήματα ‘αργής ροής’. Μια άλλη πλατιά κατηγορία προσεγγιστικών λύσεων αφορά τη ροή στο πολύ λεπτό οριακό στρώμα. Ο L. Prandtl έδειξε το 1904 πως οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούσαν να απλουστευθούν για να μελετηθεί η ροή σε οριακά στρώματα.

(B) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Οι αριθμητικές μέθοδοι με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών χρησιμοποιούνται κοινώς για την επίλυση μιας ευρείας ποικιλίας προβλημάτων. Αν και οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή Νευτωνικών ρευστών (οι εξισώσεις Navier – Stokes) είχαν παραγωγισθεί πολλά χρόνια πριν, υπάρχουν λίγες γνωστές αναλυτικές λύσεις γι' αυτές. Με την έλευση των ψηφιακών υπολογιστών υψηλής ταχύτητας έχει καταστεί δυνατό να λαμβάνουμε προσεγγιστικές αριθμητικές λύσεις σε αυτές (και άλλα προβλήματα ρευστομηχανικής) τις εξισώσεις για μια ευρεία ποικιλία περιπτώσεων.

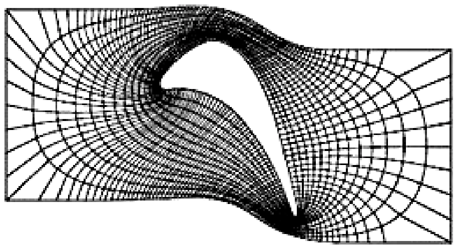
Για την αριθμητική επίλυση των διεπουσών εξισώσεων της ροής ρευστού, οι ακόλουθες τρεις μέθοδοι είναι οι πιο κοινές:

i) **η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών** (the *finite difference method*)
ii) **η μέθοδος του πεπερασμένου στοιχείου ή πεπερασμένου όγκου** (*the finite element or finite volume method*)
iii) **η μέθοδος του οριακού στοιχείου** (*the boundary element method*)

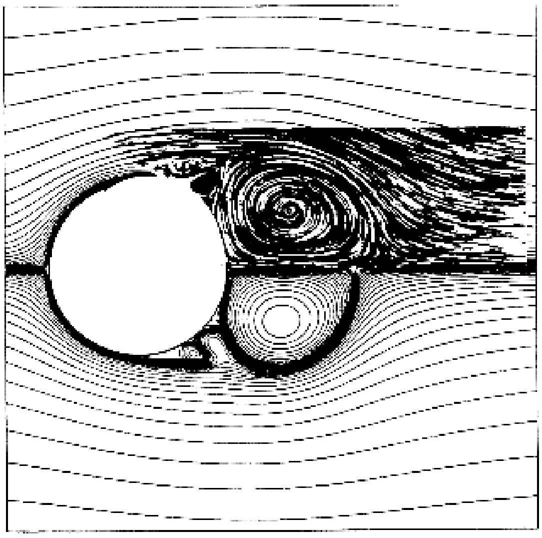
Σε κάθε μία από αυτές τις μεθόδους το συνεχές πεδίο ροής (η ταχύτητα ή η πίεση σαν συνάρτηση του χώρου και του χρόνου) περιγράφεται σε όρους διακριτοποιημένων (αντί συνεχών) τιμών σε προκαθορισμένα σημεία. Με αυτή την τεχνική οι διαφορικές εξισώσεις αντικαθίστανται από μία ομάδα αλγεβρικών εξισώσεων που μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια του υπολογιστή.

Αναλυτικότερα για τις τρεις μεθόδους μπορούμε να πούμε:

i) Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών για την υπολογιστική ρευστομηχανική (computational fluid dynamics ή CFD) είναι ίσως η πιο εύκολα κατανοητή μέθοδος και ευρέως χρησιμοποιούμενη από τις τρεις παραπάνω μεθόδους. Σε αυτήν την μέθοδο το πεδίο ροής διαμελίζεται σε μία ομάδα σημείων πλέγματος και οι συνεχείς συναρτήσεις (ταχύτητας, πίεσης κλπ.) προσεγγίζονται από διακριτές τιμές αυτών των συναρτήσεων υπολογισμένες στα σημεία του πλέγματος. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας διαφορές μεταξύ των τιμών της συνάρτησης στο γειτονικό σημείο του πλέγματος. Οι διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται με αυτόν τον τρόπο σε μία ομάδα αλγεβρικών εξισώσεων η οποία λύνεται με κατάλληλες αριθμητικές τεχνικές. Όσο πιο μεγάλος ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος που χρησιμοποιείται, τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των εξισώσεων που πρέπει να λυθούν. Είναι συνήθως απαραίτητο ν' αυξήσουμε τον αριθμό των κόμβων (που σημαίνει δημιουργία ενός λεπτότερου πλέγματος) όπου αναμένονται μεγάλες μεταβολές όπως στο οριακό στρώμα κοντά σε μια στερεή επιφάνεια.

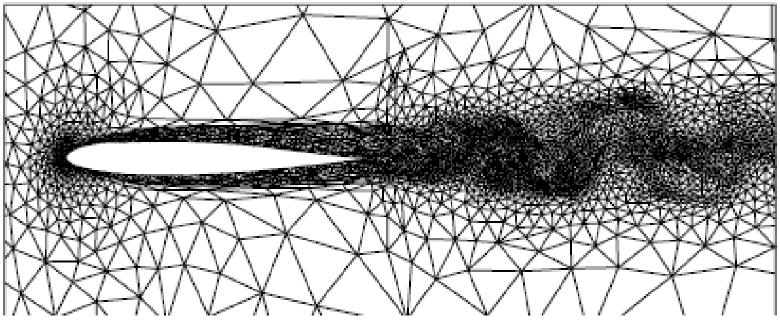


Σχήμα 6: Πλέγμα πεπερασμένων διαφορών για ροή γύρω από πτερύγιο στροβίλου (CFD-22, College of Engineering, Iowa State University, 1990.)



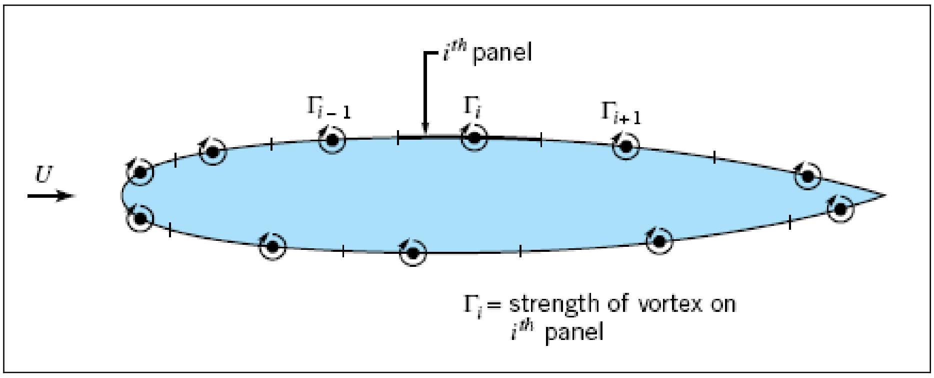
Σχήμα 7: Ρευματικές γραμμές σε ροή γύρω από κύλινδρο σε μικρό χρονικό διάστημα μετά από την παρορμητική εκκίνησή της. Το πάνω μισό είναι φωτογραφία από ένα πείραμα οπτικοποίησης ροής. Το κάτω μισό είναι από υπολογισμό με πεπερασμένες διαφορές. (CFD-22, College of Engineering, Iowa State University, 1990.)

ii) Για τη μέθοδο του πεπερασμένου στοιχείου (ή πεπερασμένου όγκου) η ροή διασπάται σε μία ομάδα μικρών στοιχείων ρευστού (συνήθως τριγωνικές περιοχές έαν η ροή είναι διδιάστατη ή μικρά στοιχεία όγκου αν η ροή είναι τρισδιάστατη. Οι εξισώσεις διατήρησης (διατήρηση της μάζας, ορμής και ενέργειας) γράφονται σε μία ειδική μορφή για κάθε στοιχείο και η ομάδα των συνεπακόλουθων αλγεβρικών εξισώσεων λύνεται αριθμητικά για το πεδίο ροής. Ο αριθμός, το σχήμα και το μέγεθος των στοιχείων διατάσσονται μερικά από την ιδιαίτερη γεωμετρία της ροής και τις συνθήκες ροής για το περιορισμένο (σε χώρο και χρόνο) πρόβλημα. Καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται (όπως είναι απαραίτητο για ροές με πολύπλοκα περιοριστικά όρια), ο αριθμός των ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων που πρέπει να λυθούν αυξάνεται γρήγορα. Προβλήματα που περιλαμβάνουν 1000 έως 10000 στοιχεία και 50000 εξισώσεις δεν είναι καθόλου αξιοπερίεργα. Ένα πλέγμα για την πρόβλεψη της ροής γύρω από πτερύγιο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 8: Ανισοτροπικό προσαρμόσιμο πλέγμα για την πρόβλεψη ιξώδους ροής γύρω από ένα πτερύγιο NACA 0012 σε αριθμό Reynolds 10000, αριθμό Mach 0.075 και γωνία πρόσπτωσης $1,5^{o}$. (Από το εργαστήριο CFD , Πανεπιστήμιο της Concordia, Μόντρεαλ, Καναδάς)

iii) Για τη μέθοδο του οριακού στοιχείου, τα περιοριστικά όρια του πεδίου ροής (όχι ολόκληρο το πεδίο ροής όπως στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων) διασπώνται σε ξεχωριστά ευθύγραμμα τμήματα και ειδικές ιδιομορφίες όπως πηγές, καταβόθρες, δίπολα και στροβιλισμούς που κατανέμονται σε αυτά τα οριακά στοιχεία.



Σχήμα 9: Μέθοδος πλαισίου για ροή γύρω από πτερύγιο.

Η ισχύς και ο τύπος των ιδιομορφιών επιλέγονται έτσι ώστε οι κατάλληλες οριακές συνθήκες της ροής να λαμβάνονται στα οριακά στοιχεία. Για σημεία στο πεδίο ροής που δεν ανήκουν στα περιοριστικά όρια, η ροή προσδιορίζεται προσθέτοντας τις διάφορες συνεισφορές των ιδιομορφιών του ορίου. Αν και οι λεπτομέρειες αυτής της μεθόδου είναι κατά κάποιο τρόπο μαθηματικά εξεζητημένες, μπορεί (εξαρτώμενες από το ίδιο το πρόβλημα) να απαιτούν λιγότερο υπολογιστικό χρόνο και χώρο απ’ ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

Οποιαδήποτε αριθμητική τεχνική, ανεξάρτητα από το πόσο απλή είναι στην ιδέα, εμπεριέχει πολλές κρυφές λεπτότητες και ενδεχόμενα προβλήματα. Για παράδειγμα, μπορεί να φαίνεται λογικό ότι μια πιο λεπτή διακριτοποίηση (μικρότερα στοιχεία πλέγματος λεπτότερων διαστάσεων) θα διασφάλιζε μια πιο ακριβή επίλυση. Ενώ σε μερικές περιπτώσεις αυτό θα ήταν σωστό σε άλλες περιπτώσεις θα μπορούσαν να εμφανιστούν προβλήματα ευστάθειας ή σύγκλισης. Σε τέτοιες περιπτώσεις η αριθμητική επίλυση που λαμβάνεται μπορεί να εκφράσει αδικαιολόγητες ταλαντώσεις ή το αριθμητικό αποτέλεσμα μπορεί να αποκλίνει σε ένα μη λογικό ή και λανθασμένο αποτέλεσμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ιστορική Αναδρομή πάνω στην ερευνητική εργασία

Παρόλο που η συστηματική θεωρητική και πειραματική εξερεύνηση της ροής σε καμπύλες σωληνώσεις είναι σαφώς πρόσφατης προέλευσης, έχει επί μακράν εκτιμηθεί ότι η ροή αυτή είναι σημαντικά πολυπλοκότερη από αυτή σε ευθύγραμμους αγωγούς.

Η πρώιμη αυτή παρατήρηση συνέβη στην πραγματικότητα σε ανοικτούς αγωγούς όπου οι επιδράσεις της καμπύλωσης είναι πιο προφανείς και αξιοσημείωτες **(Thomson 1876, 1877, [2],[26]).** Τον προηγούμενο αιώνα οι **Grindley & Gibson (1908, [2])** αντιλήφθηκαν την επίδραση της καμπύλωσης στη ροή μέσα σε ένα ελικοειδή σωλήνα σε πειράματα που διεξήγαγαν για το ιξώδες του αέρα. Ο **Williams (1902, [2],[7],[26])** παρατήρησε ότι η θέση της μέγιστης αξονικής ταχύτητας μετατοπίζεται προς το εξωτερικό τοίχωμα ενός καμπύλου αγωγού. Αργότερα ο **Eustice (1910,1911, [2],[26])** επέδειξε την ύπαρξη μιας δευτερογενούς ροής με την έγχυση μελανιού σε νερό που έρεε μέσα σε σπειροειδή σωλήνα.

Δευτερογενείς ροές εμφανίζονται οποτεδήποτε ένα ρευστό ρέει σε καμπύλους σωλήνες ή ανοικτούς αγωγούς. Τέτοιες δευτερογενείς κινήσεις μπορούν να προκύψουν σε ένα ιδανικό (ανιξώδες) ρευστό σαν αποτέλεσμα μιας ανομοιόμορφης κατανομής της ταχύτητας από την είσοδο ως την καμπύλωση **(Squire & Winter 1949, [2], Hawthorne 1951, [2],[26])**. Στα πραγματικά όμως ρευστά, η δευτερεύουσα ροή μπορεί να αποδοθεί κυρίως στην επίδραση της φυγοκεντρικής βαθμίδας της πίεσης στην κύρια ροή που δρα πάνω στο στάσιμο συγκριτικά ρευστό στο οριακό στρώμα του τοιχώματος.

Η ευσταθής στρωτή ροή ενός ιξώδους ασυμπίεστου ρευστού διαμέσου ενός καμπύλου σωλήνα έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον από τις πρώιμες επιστημονικές ανακοινώσεις του Dean ο οποίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε την διαταραχή από τη ροπή Poiseuille σε έναν ευθύγραμμο αγωγό κυκλικής διατομής ο οποίος ήταν τυλιγμένος γύρω από ένα κύκλο δεδομένης ακτίνας. Στην πρώτη θεωρητική προσέγγισή του **(Dean 1927 [3])**, βρήκε πως η σχέση μεταξύ της βαθμίδας πίεσης και του ποσοστού ροής δεν εξαρτάται από την καμπυλότητα. Με σκοπό να αποδείξει την εξάρτησή της, τροποποίησε την ανάλυσή του περικλείοντας όρους ανώτερης τάξεως και κατέστη ικανός να δείξει **(Dean 1928, [4])** ότι η ελάττωση στο ποσοστό ροής εξαιτίας της καμπυλότητας εξαρτάται από μία μοναδική μεταβλητή **K** ίση με $K = 2 \cdot R^2 \cdot \frac{a}{L}$ όπου: **R**: ο αριθμός Reynolds

a: η ακτίνα του σωλήνα και

L: η ακτίνα καμπυλότητας του καμπύλου αγωγού

Αυτός έδειξε ότι η ανάλυσή του ήταν πρακτικά αξιόπιστη για τιμές του K έως και 576. Το 1927 είχε σκιαγραφήσει τις ρευματικές γραμμές στο επίπεδο της διατομής σύμφωνα με την πρώτη προσέγγισή του η οποία ήταν ακριβής μόνο για τιμές του K σημαντικά μικρότερες από 576.

Πειράματα από τους **White (1929)**, **Taylor (1929)**, **Adler (1934) ([2],[6],[7],[15],[17],[26],[6],[23],[25])** έχουν επιβεβαιώσει πως η ροή σε ένα καμπύλο σωλήνα ή αγωγό είναι πολύ περισσότερο σταθερή απ' ότι η ροή σε ένα ευθύγραμμο. Έτσι, ενώ για τον ευθύγραμμο σωλήνα ο κρίσιμος αριθμός Reynolds είναι περίπου 2000, σε ένα καμπύλο σωλήνα μπορεί να είναι μεγαλύτερος κατά ένα συντελεστή 2 ή μεγαλύτερο. Συγκεκριμένα ο Taylor βρήκε πως για λόγο καμπυλότητας α/R = 1 / 31.9 ο κρίσιμος αριθμός Reynolds ήταν περίπου 5000. Αυτός αντιστοιχεί σε $K \approx 1{,}6x10^6$ και συνεπώς προσεγγιστικά σκιαγραφεί την στρωτή κατάσταση πάνω στην οποία έχουν ενδιαφέρον τα υπολογισμένα αποτελέσματα. Έμφαση δόθηκε πάνω σε μετρήσεις του λόγου τριβής ή του λόγου λc / λs όπως ορίστηκε από τον White (1929) ως ο λόγος των αντιστάσεων σε ένα καμπύλο σωλήνα. Αυτός επέκτεινε την μελέτη του Dean για την στρωτή ροή νερού και ελαίου διαφορετικού ιξώδους μέσα σε καμπύλους σωλήνες με λόγους καμπυλότητας 1/15, 1/50 και 1/2050. έδειξε πως η έφοδος της τύρβης δεν εξαρτάται μόνο από την τιμή του αριθμού Reynolds ούτε του κριτηρίου του Dean $De = R \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^{1/2}$. Για ένα λόγο καμπυλότητας 1/15 ένας αριθμός Reynolds 9000 χρειάστηκε για να προκληθεί τύρβη. Από την άλλη για ένα λόγο καμπυλότητας 1/2050 δεν σημειώθηκε αξιοσημείωτη διαφορά στην κρίσιμη ταχύτητα σε σύγκριση με έναν ευθύγραμμο σωλήνα για την επίτευξη τύρβης. Ο Adler πήρε εντατικές μετρήσεις των κατανομών αξονικής ταχύτητας σε πλήρως ανεπτυγμένη μόνιμη στρωτή ροή σε καμπύλους σωλήνες κυκλικής διατομής και εξέθεσε την γνωστή πια μετατόπιση της μέγιστης αξονικής ταχύτητας προς το εξωτερικό τοίχωμα της καμπύλωσης.

Οι **Kapur et al (1964, [26])** διεξήγαγαν θεωρητικούς υπολογισμούς για την σταθερή στρωτή ροή ενός Νευτωνικού ρευστού διαμέσου ενός καμπύλου δακτυλίου για περιπτώσεις με ελαφρά καμπυλότητα. Έδειξαν γραφικές απεικονίσεις των προβαλλόμενων ρευματικών γραμμών στην διατομή. Η εργασία τους έδειξε δύο δίνες κατά πολύ όμοιες με αυτές της ροής ενός κανονικού καμπύλου σωλήνα αλλά οι δίνες ήταν καμπυλωμένες ώστε να ταιριάζουν με τον δακτύλιο.

Ο **Topakoglu (1967, [2],[6],[16],[26])** έλαβε μια προσεγγιστική λύση χρησιμοποιώντας εξισώσεις ροής για να καθορίσει το πρότυπο ροής για σταθερή ροή ενός ασυμπίεστου ιξώδους ρευστού σε καμπύλους σωλήνες. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως το ποσοστό ροής ήταν εξαρτώμενο από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, τον αριθμό Reynolds και την καμπυλότητα του σωλήνα.

Ο **Topakoglu (1967, [2],[6],[16],[26])** χρησιμοποίησε μια προσεγγιστική λύση για να καθορίσει τις ρευματικές γραμμές της δευτερεύουσας ροής, για ροή ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους τοροειδείς σωλήνες. Στις περιπτώσεις που μελετήθηκαν υπήρχαν 4 δευτερεύουσες ροές με συμμετρικές δίνες στο επίπεδο που κόβει τον τόρο μέσα από το κέντρο. Με δύο δίνες σε κάθε πλευρά του κεντρικού επιπέδου, η διεύθυνση των δευτερευουσών ροών ήταν αντίθετη.

Οι **Mc Conalogue & Srivastava (1968, [12])** διεξήγαγαν αριθμητικές μελέτες για να καθορίσουν τα χαρακτηριστικά της δευτερεύουσας ροής για πλήρως ανεπτυγμένη στρωτή ροή. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν πως καθώς η αξονική ταχύτητα αυξανόταν, η μέγιστη τιμή της αξονικής ταχύτητας μετακινείτο προς το εξωτερικό τοίχωμα και οι δευτερεύουσες δίνες επίσης ''μετανάστευαν'' πιο κοντά στο εξωτερικό τοίχωμα.

Αριθμητικές μελέτες της στρωτής ροής διεξήχθησαν από τους **Truesdell & Adler (1970, [2],[6])** χρησιμοποιώντας ένα τετραγωνικό πλέγμα. Αυτοί βρήκαν πως η αριθμητική διαδικασία μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για αριθμούς Dean έως 200. παραπάνω αύξησή του προκαλούσε απόκλιση των τιμών που προέκυπταν από τη μέθοδο επίλυσής τους. Η αριθμητική διαδικασία ήταν βασισμένη σε τοροειδή γεωμετρία. Τα αποτελέσματά τους συγκρίθηκαν με πειραματικά από τη βιβλιογραφία.

Ο **Smith (1976, [6],[2],[7],[20])** μελέτησε αναλυτικά την στρωτή ροή σε καμπύλους σωλήνες για μεγάλους αριθμούς Dean. Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν για σωλήνες κυκλικής διατομής όπως επίσης και για αγωγούς με τριγωνική ή ορθογωνική διατομή.

Ο **Masliyah (1980, [7],[26])** μελέτησε την δευτερεύουσα ροή μιας στρωτής ροής σε ένα καμπύλο ημικυκλικό σωλήνα χρησιμοποιώντας αριθμητικές και πειραματικές μεθόδους. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν πως για αριθμούς Dean πάνω από 105, η δευτερογενής ροή μπορούσε να έχει δύο λύσεις, είτε το μοντέλο των δύο δινών είτε αυτό των τεσσάρων εξαρτώμενη από την αρχική πρόβλεψη του πεδίου ροής.

Οι **Dennis & Ng (1982, [5], [6], [7])** μελέτησαν αριθμητικά τη στρωτή ροή μέσα σε καμπύλο σωλήνα χρησιμοποιώντας μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών με έμφαση στις 4 δίνες που εμφανίστηκαν αντί για 2. Έτρεξαν προσομοιώσεις στο εύρος του αριθμού Dean 96 – 5000 και βρήκαν τις δύο επιπρόσθετες συμμετρικές δίνες για αριθμό Dean > 956 που έδιναν δύο δίδυμα μέγιστα της αξονικής ταχύτητας. Οι δύο αυτές λύσεις για τις 2 και 4 δίνες επαληθεύτηκαν πειραματικά από μια διαδικασία οπτικοποίησης.

Ο **Καραχάλιος (1990, [9], [10])** μελέτησε την μετάδοση θερμότητας ενός ρευστού που έρεε μέσα σε καμπύλο σωλήνα με στερεό πυρήνα. Ο πυρήνας και η επιφάνεια του καμπύλου σωλήνα είχαν σταθερή μεταβολή θερμοκρασίας κατά μήκος της αξονικής διεύθυνσης. Μια αντιστροφή της ροής εξαρτώμενη από τον αριθμό Dean εντοπίστηκε στο εσωτερικό τμήμα της καμπύλωσης για σημαντικά μεγάλους πυρήνες.

Οι **Nandakumar & Masliyah (1982)** μελέτησαν περεταίρω αυτό το φαινόμενο και ανέφεραν πως χρησιμοποιώντας ένα διπολικό-τοροειδές σύστημα συντεταγμένων ήταν καλύτερο για την πρόβλεψη της λύσης των $4^{ων}$ δινών και πως ήταν ευκολότερο να παραχθούν λύσεις $4^{ων}$ δινών για καμπύλους ημικυκλικούς σωλήνες απ' ότι για καμπύλους κυκλικούς. Ωστόσο χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα ενός ημικυκλικού σωλήνα σαν αρχικές συνθήκες για σωλήνες με αυξανόμενη κυκλικότητα έκανε εφικτή την πρόβλεψη των λύσεων $4^{ων}$ δινών όπου μια άμεση λύση θα απέτυχε στην προσπάθειά τους.

Οι **Dennis & Riley (1991)** ανέπτυξαν μια αναλυτική λύση για την πλήρως ανεπτυγμένη στρωτή ροή για μεγάλους αριθμούς Dean. Αν και δεν μπορούσαν να βρουν μια ολοκληρωμένη λύση στο πρόβλημα, ισχυρίστηκαν πως υπάρχει απόδειξη για το ότι σε μεγάλους αριθμούς Dean η ροή αναπτύσσεται σε ένα ανιξώδες πυρήνα με ένα ιξώδες οριακό στρώμα στο τοίχωμα του σωλήνα.

Η ροή εισόδου μέσα σε ένα καμπύλο δακτύλιο μελετήθηκε αριθμητικά από τους **Choi & Park (1992)** για την περίπτωση της ασυμπίεστης σταθερής στρωτής ροής. Αυτοί εξέφρασαν πως αντίθετα από την περίπτωση ενός ευθύγραμμου δακτυλιοειδούς σωλήνα, η πλήρως ανεπτυγμένη ροή δεν αναπτύσσεται απαραίτητα νωρίτερα όταν ο λόγος των ακτινών είναι μεγαλύτερος.

Οι **Choi & Park (1994)** δημοσίευσαν μία επιστημονική ανακοίνωση πάνω στην μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε ένα καμπύλο δακτύλιο. Αυτοί επίσης επικαλέστηκαν την προσέγγιση Boussinesq για να λάβουν υπ' όψη τις επιδράσεις της άνωσης. Σύγκριναν τον αριθμό Nusselt και τον παράγοντα τριβής της ροής με αυτούς ενός ευθύγραμμου δακτυλίου. Βρήκαν πως ο λόγος του αριθμού Nusselt (καμπυλωμένου προς ευθύγραμμου) επηρεάζεται σημαντικά από τον λόγο ακτινών και τον αριθμό Dean για μικρούς αριθμούς Grashof χωρίς να αλλάζουν πολύ σε μεγάλους αριθμούς Grashof.

Οι **Πετράκης και Καραχάλιος (1996, [15])** μελέτησαν την ευσταθή ροή ενός ασυμπίεστου ιξώδους ρευστού μέσα σε ένα καμπύλο σωλήνα με ομοαξονικό πυρήνα. Τα πορίσματά τους δείχνουν πως η παρουσία ενός πυρήνα επηρεάζει τις ιδιότητες της ροής, ειδικά σε μεγάλους αριθμούς Dean. Οι ίδιοι συγγραφείς **(1997, [16])** ανέπτυξαν αναλυτικές εκφράσεις για την αξονική ταχύτητα και για την συνάρτηση της ροής για εκθετικά εξασθενούμενη ροή σε ένα καμπύλο δακτυλιοειδή σωλήνα. Στις παραπάνω μελέτες δείχθηκε πως σε μερικές περιπτώσεις δύο επιπρόσθετα μοντέλα δευτερευουσών ροών αναπτύσσονται καταλήγοντας σε ένα σύνολο 4^{ων} δινών. Επίσης οι ίδιοι **(1999, [17])** χρησιμοποίησαν μια αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για τη ροή ενός ιξώδους ασυμπίεστου ρευστού σε ένα καμπύλο δακτυλιοειδή σωλήνα κυκλικής διατομής. Το εύρος του αριθμού Dean ήταν από 96 έως 8000. Διάφορα μεγέθη πυρήνα χρησιμοποιήθηκαν και κατέληξαν στο ότι για μικρά μεγέθη πυρήνα οι αλλαγές στον αριθμό Dean επηρεάζουν σημαντικά τις ιδιότητες της ροής αν και αυτό δεν υφίσταται για μεγάλους πυρήνες. Για τα μικρότερα μεγέθη πυρήνα το προφίλ των ταχυτήτων διαστρεβλώνεται προς το εξωτερικό τοίχωμα ενώ για μεγάλους πυρήνες οι ταχύτητες της ροής προσεγγίζουν παραβολική μορφή.

Το επόμενο λογικό βήμα στην παρατήρηση των μοντέλων ροής ήταν να μελετηθούν αυτά τα μοντέλα στις εφαρμογές μετάδοσης θερμότητας. Εντατικές μελέτες έχουν γίνει περί μετάδοσης θερμότητας σε σωλήνες ελικοειδούς μορφής εξ' αιτίας της παραπάνω εφαρμογής τους σε εναλλάκτες θερμότητας. Μια ποικιλία μοντέλων ροής καθώς και πλήρεις αριθμητικές προσεγγίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί για να προβλέψουν το ποσοστό μεταφοράς θερμότητας. Έτσι προτάθηκε η κατασκευή ενός εναλλάκτη θερμότητας διπλού σωλήνα σε ελικοειδή μορφή για εξοικονόμηση χώρου και ροή δύο ρευστών (ομορροή ή αντιρροή).

Τα πλεονεκτήματα αυτής της διάταξης είναι:

i) όλη η επιφάνεια του ελικοειδούς εναλλάκτη θα εκμεταλλεύεται από το κινούμενο ρευστό με αποτέλεσμα να αποκλείονται οι νεκρές ζώνες

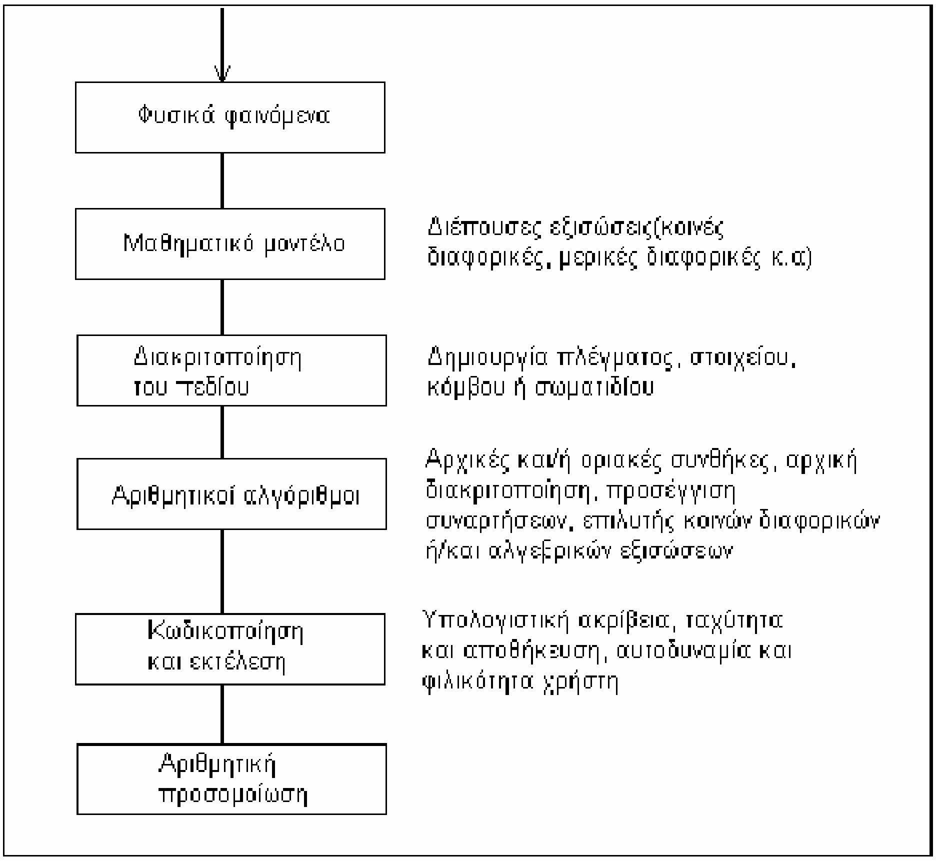
ii) η ροή στον εξωτερικό σωλήνα θα παρουσιάσει δευτερογενείς ροές πράγμα που ενισχύει τον συντελεστή μετάδοσης θερμότητας.

Ο **Ahn (2000, [26])** μελέτησε την μετάδοση θερμότητας σε ένα ρευστό μέσα στους δακτυλίους για ένα ευθύγραμμο σωλήνα με δύο καταστάσεις: είτε με μονωμένο εξωτερικό σωλήνα είτε μονωμένο πυρήνα και αγωγή θερμότητας προς το αντίστοιχο τοίχωμα. Το πείραμά του έγινε για τυρβώδεις ροές και το εξωτερικό τοίχωμα είχε μια τραχεία επιφάνεια. Επίσης χρησιμοποίησε διάφορους λόγους διαμέτρων και διάφορες τραχύτητες επιφάνειας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κατάστρωση του προβλήματος

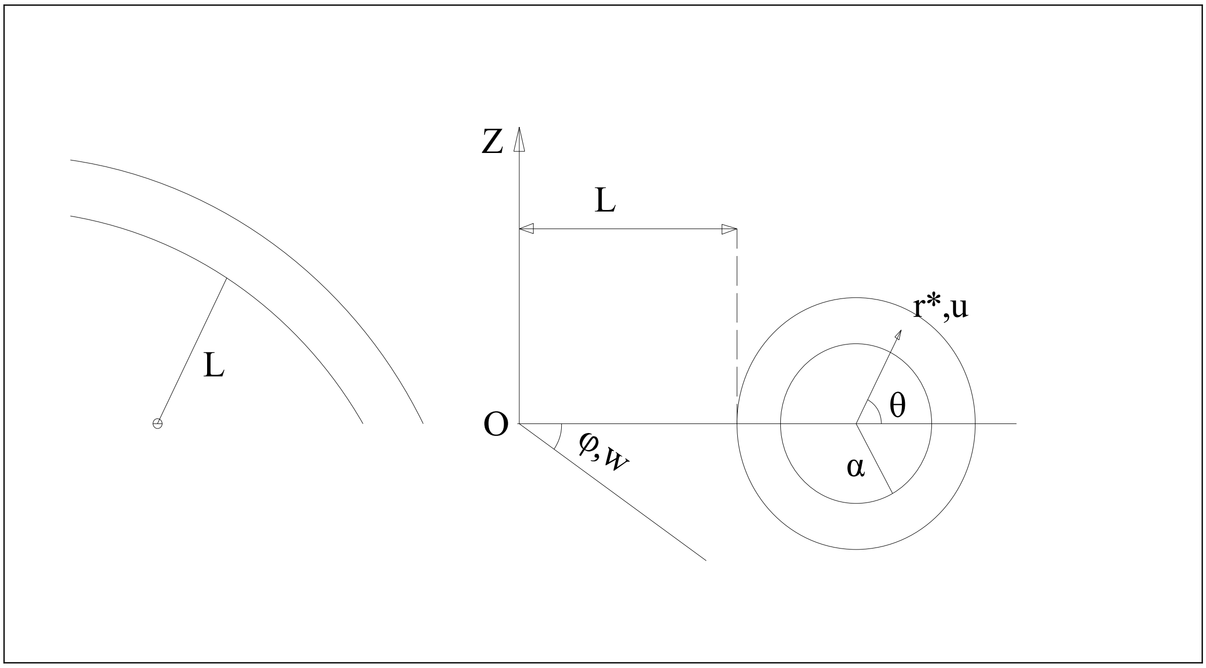
Πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση των εξισώσεων θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε την πορεία που ακολουθείται γενικά σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστομηχανικής με ένα χαρακτηριστικό σχεδιάγραμμα :



Σχήμα 2.1 : Πορεία επίλυσης προβλημάτων υπολογιστικής ρευστομηχανικής

2.1 Εξισώσεις κίνησης

Θεωρούμε σταθερή ασυμπίεστη ιξώδη ροή σε ένα ελαφρά καμπύλο δακτυλιοειδή σωλήνα κυκλικής διατομής, ακτίνας Κα (Κ > 1), όπου α η ακτίνα του ομοαξονικού πυρήνα. Ο σωλήνας έχει ακτίνα L γύρω από ένα άξονα Oz.



Σχήμα 2.2 : Γεωμετρία προβλήματος

Η γεωμετρία του προβλήματος επιβάλλει τη χρήση τοροειδών συντεταγμένων: r*, θ, φ.

όπου u, v, w είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας που αντιστοιχούν σ' ένα σημείο και :

P → πίεση, ρ → πυκνότητα, ν → κινηματικό ιξώδες

Τότε οι εξισώσεις κίνησης που διέπουν τη ροή είναι:

$$u\frac{\partial u}{\partial r^*}+\frac{v}{r^*}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v^2}{r^*}-\frac{w^2\cos\theta}{L}=+\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{P}{\rho}\right)-\frac{\nu}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r^*}+\frac{\nu}{r^*}-\frac{1}{r^*}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r^*}+\frac{v}{r^*}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{uv}{r^*}+\frac{w^2\sin\theta}{L}=\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{P}{\rho}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial v}{\partial r^*}+\frac{v}{r^*}-\frac{1}{r^*}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \qquad (2)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r^*}+\frac{v}{r^*}\frac{\partial w}{\partial \theta}=-\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial w}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \qquad (3)$$

Όπου $-\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ → βαθμίδα πίεσης στα άκρα του σωλήνα.

Η εξίσωση συνέχειας σε τοροεδείς συντεταγμένες είναι:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r^*}+\frac{u}{r^*}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial v}{\partial \theta}=0} \qquad (4)$$

Θεωρούμε τη ροή πλήρως ανεπτυγμένη που σημαίνει ότι είναι ανεξάρτητη της γωνίας φ.

Εισάγουμε την ρευματοσυνάρτηση *F* για ροή στη διατομή ώστε:

$$\boxed{r*u=\frac{\partial F}{\partial \theta}} \qquad \text{και} \qquad \boxed{v=-\frac{\partial F}{\partial r*}} \qquad (5)$$

<u>Επαλήθευση της εξίσωσης συνέχειας</u>

Αντικαθιστώντας τις (5) στην (4) λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r*}\left(\frac{1}{r*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{1}{r*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\frac{1}{r*}+\frac{1}{r*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial F}{\partial r*}\right)=0$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{r*^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}+\frac{1}{r*}\frac{\partial^2 F}{\partial r*\partial \theta}+\frac{1}{r*^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}-\frac{1}{r*}\frac{\partial^2 F}{\partial r*\partial \theta}=0$$

και έτσι η εξίσωση συνέχειας επαληθεύεται από τη ρευματοσυνάρτηση F.

<u>Αντικατάσταση των u, v στις εξισώσεις κίνησης</u>

Αντικαθιστούμε τις συνιστώσες u, v στην εξίσωση (1) και παραγωγίζουμε ως προς θ.

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)-\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)-\frac{1}{r^*}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right)^2-\frac{w^2\cos\theta}{L}=\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-\frac{\nu}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right)+\frac{1}{r^*}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right)-\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial F}{\partial r^*}\right)^2-\frac{w^2\cos\theta}{L}=\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-\frac{\nu}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}}-\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial F}{\partial r^*}\right)^2-\frac{w^2\cos\theta}{L}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{P}{\rho}\right)-\frac{\nu}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}}-\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)\right]$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\left(-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial^3 F}{\partial r^*\partial\theta^2}\right)-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^3 F}{\partial\theta^3}-\frac{2}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}-\frac{2w}{L}\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta-\frac{w^2}{L}\sin\theta=\frac{\partial^2}{\partial r^*\partial\theta}\left(\frac{P}{\rho}\right)-\frac{\nu}{r^*}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[-\nabla_1{}^2 F\right]$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{r^{*3}}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}-\frac{1}{r^{*3}}\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^3 F}{\partial r^*\partial\theta^2}-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^3 F}{\partial\theta^3}-\frac{2}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}-\frac{2w}{L}\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta-\frac{w^2}{L}\sin\theta=\frac{\partial^2}{\partial r^*\partial\theta}\left(\frac{P}{\rho}\right)-\frac{\nu}{r^*}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[-\nabla_1{}^2 F\right]$$

Όπου $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2(\,)}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial(\,)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2(\,)}{\partial \theta^2}$

Αντικαθιστούμε τις συνιστώσες u, v στην εξίσωση (2) και την πολλαπλασιάζουμε με r* για να προκύψει ο όρος της πίεσης της (1).

$$r^*\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right) + r^*\frac{1}{r^*}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right) + r^*\frac{1}{r^*}\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right) + r^*\frac{w^2\sin\theta}{L} =$$

$$= r^*\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{P}{\rho}\right) + r^*\nu\frac{\partial}{\partial r^*}\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\right) - \frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial F}{\partial r^*}\right) - \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta} - \frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta} + r^*\frac{w^2\sin\theta}{L} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{P}{\rho}\right) +$$

$$+ r^*\nu\frac{\partial}{\partial r^*}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*} - \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)$$

Παραγωγίζοντας ως προς r* έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left[-\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta} - \frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial F}{\partial\theta} + r^*\frac{w^2\sin\theta}{L}\right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\cdot r^*\frac{\partial}{\partial r^*}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*} - \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)\right]$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}} - \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^3 F}{\partial r^{*3}} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta} + \frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^3 F}{\partial r^{*2}\partial\theta} + \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{1}{r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^{*2}}\frac{\partial F}{\partial\theta}-\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}+\frac{w^2}{L}\sin\theta+r^*\frac{2w}{L}\frac{\partial w}{\partial r^*}\sin\theta=\frac{\partial^2}{\partial r^*\partial\theta}\left(\frac{P}{\rho}\right)+$$

$$\nu\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(-\nabla_1^2 F\right)+r^*\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}\left(-\nabla_1^2 F\right)\right]$$

Στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή των όρων της πίεσης αφαιρώντας κατά μέλη την εξίσωση (1΄) από τη (2΄):

<u>Για το πρώτο μέλος έχουμε:</u>

$$-\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^3 F}{\partial r^{*3}}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}-\frac{1}{r^*}\frac{\partial^3 F}{\partial r^{*2}\,\partial\theta}+\frac{2}{r^{*3}}\frac{\partial^3 F}{\partial\theta^3}-\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^3 F}{\partial r^*\partial\theta^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial r^{*2}\,\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial r^*}+$$

$$+\frac{1}{r^*}\frac{\partial^2 F}{\partial r^*\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^3 F}{\partial\theta^3}\frac{\partial F}{\partial\theta^3}\frac{\partial F}{\partial r^*}+\frac{2w}{L}\left(r^*\frac{\partial w}{\partial r^*}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta\right)$$

<u>Και για το δεύτερο μέλος</u>

$$-\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r^*}\left(\frac{P}{\rho}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r^*}\left(\frac{P}{\rho}\right)+\nu\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(-\nabla_1^2 F\right)+r^*\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}\left(-\nabla_1^2 F\right)\right]+\frac{\nu}{r^*}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[-\nabla_1^2 F\right]$$

$$=-\nu\cdot r^*\left[\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}\left(\nabla_1^2 F\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\nabla_1^2 F\right)+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\nabla_1^2 F\right)\right]=-\nu\cdot r^*\nabla_1^4 F$$

Τελικά η εξίσωση που προκύπτει είναι :

$$\boxed{\left(-\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r^*}+\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\nabla_1^2 F+\frac{2w}{L}\left(r^*\frac{\partial w}{\partial r^*}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta\right)=-\nu\cdot r^*\nabla_1^4 F}\qquad(6)$$

όπου $\nabla_1^4(\ )=\nabla_1^2\left(\nabla_1^2(\ )\right)$

Αντικαθιστούμε τις συνιστώσες u, v στην εξίσωση (3)

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r^*}-\frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial F}{\partial r^*}\right)\frac{\partial w}{\partial \theta}=-\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial w}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r^*}-\frac{1}{r^*}\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r^*}=-\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial w}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{r^*}\left(-\frac{\partial F}{\partial r^*}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r^*}\right)=\frac{G}{\rho}+\nu\cdot\nabla_1{}^2 w} \qquad (7)$$

όπου $G=-\frac{1}{L}\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ και $\nabla_1{}^2=\frac{\partial^2(\ )}{\partial r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial(\ )}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2}$

2.2 Αδιαστατικοποίηση των εξισώσεων

Εισάγουμε αδιάστατες μεταβλητές όπου με * συμβολίζονται οι υπάρχουσες διαστατές και αντικαθιστούμε τις (8) στις (6) και (7):

$$\boxed{r^*=Kar},\ \boxed{U^*=\nu\frac{u}{Ka}},\ \boxed{V^*=\nu\frac{v}{Ka}},\ \boxed{F^*=\nu\cdot f},\ \boxed{W^*=\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}w} \qquad (8)$$

Η αδιαστατικοποίηση του τελεστή δίνει γενικά $\boxed{\nabla_1{}^2(\ )=\frac{1}{(Ka)^2}\nabla^2(\ )}$ και για την F=ν·f ειδικά:

$$\nabla_1{}^2F=\frac{\partial^2(\nu f)}{\partial(Kar)^2}+\frac{1}{Kar}\frac{\partial(\nu f)}{\partial(Kar)}+\frac{1}{(Kar)^2}\frac{\partial^2(\nu f)}{\partial\theta^2}=\frac{\nu}{(Ka)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta}\right)=\frac{\nu}{(Ka)^2}\nabla^2 f$$

Και $\nabla^4 f=\nabla^2(\nabla^2 f)=\left(\frac{1}{(Ka)^2}\right)\left(\frac{\nu}{(Ka)^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\nu}{(Ka)^2 r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu}{(Ka)^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)$

$$= \frac{\nu}{(Ka)^4}\left(\frac{\partial^2\nabla^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\nabla^2 f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\nabla^2 f}{\partial\theta^2}\right) = \frac{\nu}{(Ka)^4}\nabla^4 f$$

Επομένως η (6) γίνεται:

$$\left(-\frac{\nu}{Ka}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu}{Ka}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\nu}{(Ka)^2}\nabla^2 f +$$

$$2\frac{\nu}{L}\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\left\langle\frac{Kar}{Ka}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\right\}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\right\}\cos\theta\right\rangle =$$

$$= -\nu Kar\frac{\nu}{(Ka)^4}\nabla^4 f$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{\nu^2}{(Ka)^3}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 f - \frac{\nu^2}{(Ka)^3}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 f + 2\frac{\nu}{L}\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\left\{\begin{matrix} r\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta + \\ \nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{\nu^2}{(Ka)^3} r\nabla^4 f$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{\nu^2}{(Ka)^3}\nabla^2 f\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\right) + 2\frac{\nu^2}{L}\frac{L}{2(Ka)^3} wr\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta + 2\frac{\nu^2}{L}\frac{L}{2(Ka)^3} w\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta =$$

$$-\frac{\nu^2}{(Ka)^3} r\nabla^4 f$$

$$\leftrightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\right)\nabla^2 f + w\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta\right) = -r\nabla^4 f} \qquad (6')$$

Η αδιαστατικοποίηση του τελεστή για την $W^{*} = \nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w$ δίνει:

$$\nabla_1^{\,2} W = \frac{1}{(Ka)^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left\{\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\right\} + \frac{1}{(Ka)^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\right\} +$$

$$+\frac{1}{(Ka)^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w = \nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{1}{(Ka)^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{1}{(Ka)^2}\nabla^2 w$$

<u>Επομένως η (7) γίνεται:</u>

$$\frac{1}{Kar}\left\langle -\frac{\nu}{Ka}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\right\} + \frac{\nu}{Ka}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2} w\right\}\right\rangle =$$

$$\frac{G}{\rho} + \nu\cdot\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{1}{(Ka)^2}\nabla^2 w$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{\nu}{(Ka)^2 r}\frac{\partial f}{\partial r}\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\nu}{(Ka)^2 r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\nu\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{\partial w}{\partial r} =$$

$$\frac{G}{\rho} + \nu^2\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}\frac{1}{(Ka)^2}\nabla^2 w$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{(Ka)^2 r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}-\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\frac{G}{\rho\nu^2\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}}+\frac{1}{(Ka)^2}\nabla^2 w$$

$$\leftrightarrow$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(Ka)^2$ η σχέση γίνεται:

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\frac{G}{\rho\nu^2\left[\frac{L}{2(Ka)^3}\right]^{1/2}}(Ka)^2+\nabla^2 w$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\frac{2^{1/2}(Ka)^{3/2}}{L^{1/2}}\frac{G(Ka)^2}{\mu\cdot\nu}+\nabla^2 w$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}\frac{GK^{3/2}a^{3/2}K^2a^2}{\mu\cdot\nu}+\nabla^2 w$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}\frac{GK^{7/2}a^{7/2}}{\mu\cdot\nu}+\nabla^2 w$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\left(\frac{2}{L}Ka\right)^{1/2}\frac{GK^3a^3}{\mu\cdot\nu}+\nabla^2 w$$

Στη συνέχεια ορίζοντας τον αριθμό Dean ως $D=\left(\frac{2}{L}Ka\right)^{1/2}G\frac{K^3a^3}{\mu\cdot\nu}$ ή σχέση τελικά γίνεται :

$$\boxed{\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=D+\nabla^2 w} \qquad (7΄)$$

Έτσι έχουμε καταλήξει στις τελικές εξισώσεις (6') και (7') οι οποίες θα πρέπει να διακριτοποιηθούν δηλαδή να μετατραπούν σε αλγεβρικές με την αντικατάσταση των παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές ώστε να είναι δυνατή η επίλυση τους ως αλγεβρικού συστήματος στο πεδίο ροής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Δημιουργία πλέγματος και διακριτοποίηση των αδιάστατων εξισώσεων

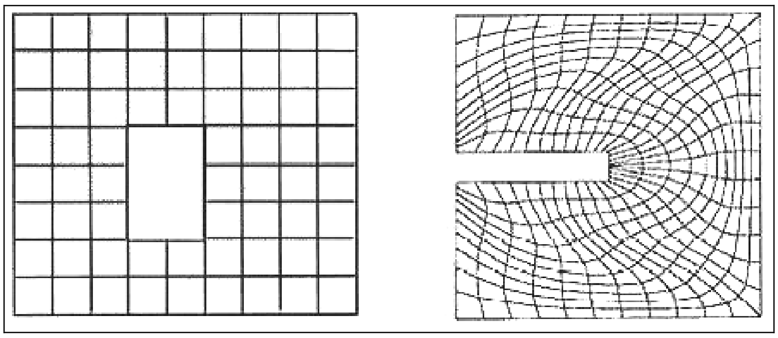
Η μέθοδος διακριτοποίησης που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτή των πεπερασμένων διαφορών στην οποία οι διακριτοποιημένες θέσεις στις οποίες οι μεταβλητές πρόκειται να υπολογιστούν καθορίζονται από το αριθμητικό πλέγμα το οποίο είναι στην ουσία μια διακριτή αναπαράσταση του γεωμετρικού πεδίου πάνω στο οποίο θα λυθεί το πρόβλημα.

Υπάρχουν διάφορα είδη πλεγμάτων όπως:

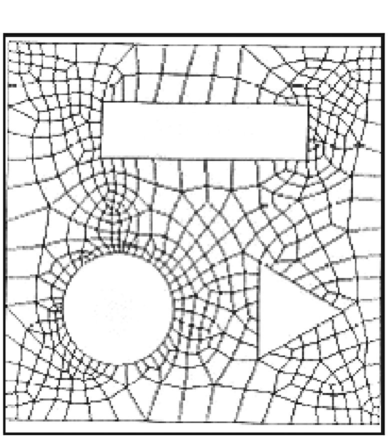
i) το δομημένο (*structured grid*) (σχήμα 3.α) στο οποίο όλοι οι κόμβοι έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων γύρω τους και χρησιμοποιείται για απλές γεωμετρίες

ii) το αδόμητο πλέγμα (*unstructured grid*) (σχήμα 3.β) για σύνθετες γεωμετρίες

iii) δομημένο σε ομάδες πλέγμα στο οποίο υπάρχουν δομημένα πλέγματα σε κάθε ομάδα αλλά οι ομάδες είναι ακανόνιστες



Σχήμα 3.α: Δομημένο πλέγμα



Σχήμα 3.β: Αδόμητο πλέγμα

3.1 Περιγραφή των πεπερασμένων διαφορών και των πεπλεγμένων παραγώγων

Οι μερικές παράγωγοι στις αδιάστατες εξισώσεις πρέπει να αντικατασταθούν με τις πεπερασμένες διαφορές όπως αυτές προκύπτουν από τη σειρά του Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-a)^v}{v!} f^v(a) + ...$$

με αφαίρεση των πίσω διαφορών από τις εμπρόσθιες:

$$\boxed{f_{i+1,j} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\bigg|_{i,j} \Delta x^4 + 0\left(\Delta x^5\right)}$$

$$\boxed{f_{i-1,j} = f_{i,j} - \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\bigg|_{i,j} \Delta x^4 - 0\left(\Delta x^5\right)}$$

Τελικά προκύπτει: $f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{3}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{i,j} + HOT$

όπου HOT είναι η συντομογραφία των όρων ανώτερης τάξης (*high order terms*).

Έτσι λύνοντας ως προς $\frac{\partial f}{\partial x}$ λαμβάνουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^2 + HOT = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + 0\left(\Delta x^2\right)$$

από την οποία παρατηρούμε πως η έκφραση κεντρικών διαφορών για την πρώτη παράγωγο είναι μια προσέγγιση δεύτερης τάξεως που σημαίνει ότι έχει σφάλμα περικοπής της τάξης $\left(\Delta x^2\right)$.

Αναλόγως, για να λάβουμε τις κεντρικές διαφορές της δεύτερης παραγώγου, προσθέτουμε τις εμπρόσθιες και πίσω διαφορές και λύνουμε ως προς $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

$$f_{i+1,j}+f_{i-1,j}=2f_{i,j}+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j}\Delta x^2+\frac{1}{12}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_{i,j}\Delta x^4+HOT$$

$$\rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j}=\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\Delta x^2}+0\left(\Delta x^2\right)$$

Επειδή η μεταβολή κατά i είναι Δr και η αντίστοιχη κατά j είναι Δθ, οι διαφορές λαμβάνουν την παρακάτω μορφή για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της ρευματοσυνάρτησης:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2\Delta r}+O(\Delta r^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta \theta}+O(\Delta \theta^2) \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{f_{i+1,j}-2f_{1,j}+f_{i-1,j}}{\Delta r^2}+O(\Delta r^2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\Delta \theta^2}+O(\Delta \theta^2)$$

όπου O είναι το λάθος αποκοπής δεύτερης τάξης.

Στη σχέση (6’) εμφανίζονται πεπλεγμένες παράγωγοι εξαιτίας του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε.

Π.χ. η πεπλεγμένη παράγωγος

$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$ μπορεί να χειριστεί ως $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$

Ας συμβολίσουμε τις εμπρόσθιες και πίσω διαφορές για την r με (1) και (2) αντίστοιχα και με (1)* και (2)* για την θ.

Αυτές είναι :

(1) $$f_{i+1,j}=f_{i,j}+\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{i,j}\Delta r+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right|_{i,j}\Delta r^2+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right|_{i,j}\Delta r^3+O(\Delta r^4)$$

(2) $$f_{i-1,j}=f_{i,j}-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{i,j}\Delta r+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right|_{i,j}\Delta r^2-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right|_{i,j}\Delta r^3+O(\Delta r^4)$$

και

(1)* $$f_{i,j+1} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{i,j}\Delta\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\Big|_{i,j}\Delta\theta^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3}\Big|_{i,j}\Delta\theta^3 + O(\Delta\theta^4)$$

(2)* $$f_{i,j-1} = f_{i,j} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{i,j}\Delta\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\Big|_{i,j}\Delta\theta^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3}\Big|_{i,j}\Delta\theta^3 + O(\Delta\theta^4)$$

τότε για να βρούμε τις κεντρικές διαφορές για την πεπλεγμένη παράγωγο

$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$ παραγωγίζουμε τις (1) και (2) ως προς θ, αφαιρούμε την (2) από την (1) και λύνουμε ως προς $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta\theta\Delta r} + O\left(\Delta r^2\right)$$

Με την ίδια συλλογιστική πορεία αν παραγωγίζουμε τις (1), (1)* και (2), (2) * ως προς θ ή r ανάλογα τότε μπορούμε να εξάγουμε τις κεντρικές διαφορές των άλλων πεπλεγμένων παραγώγων που χρειαζόμαστε όπως:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial r \partial \theta^2}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta r\Delta\theta^2} + O\left(\Delta r^2\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial r^2 \partial \theta}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i+2,j+1} - f_{i+2,j-1} - 2f_{i,j+1} + 2f_{i,j-1} + f_{i-2,j+1} - f_{i-2,j-1}}{8\Delta r^2\Delta\theta} + O\left(\Delta r^2\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + 2f_{i-1,j} - f_{i-2,j}}{2\Delta r^3} + O\left(\Delta r^2\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j+2} - 2f_{i,j+1} + 2f_{i,j-1} - f_{i,j-2}}{2\Delta\theta^3} + O\left(\Delta\theta^2\right)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i+2,j} - 4f_{i+1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{\Delta r^4} + O\left(\Delta r^2\right)$$

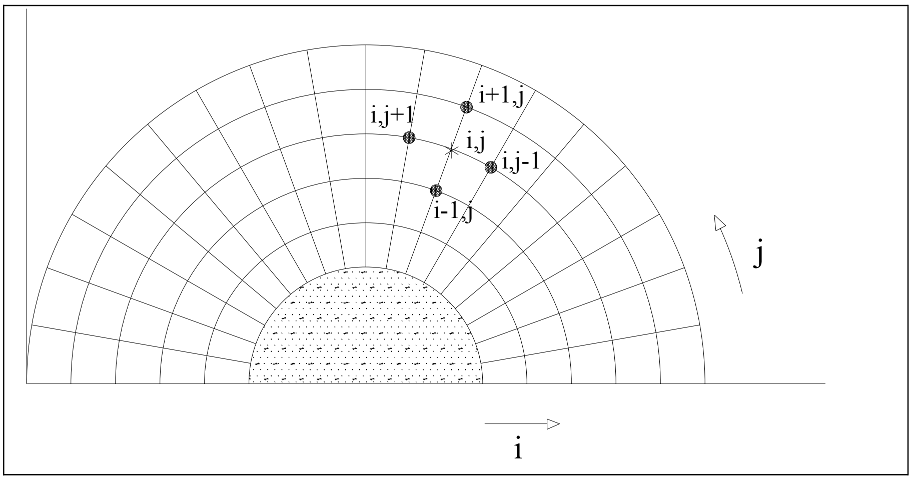
$$\frac{\partial^4 f}{\partial \theta^4}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j+2} - 4f_{i,j+1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j-1} + f_{i,j-2}}{\Delta\theta^4} + O\left(\Delta\theta^2\right)$$

$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial r^2 \partial \theta^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+2,j+1} - 2f_{i+2,j} + f_{i+2,j-1} - 2f_{i,j+1} + f_{i,j} - 2f_{i,j-1} + f_{i-2,j+1} - 2f_{i-2,j} + f_{i-2,j-1}}{4\Delta r^2 \Delta\theta^2} + O\left(\Delta r^2\right)$$

Θεωρούμε ότι η προσέγγιση δευτέρου βαθμού είναι αρκετά ικανοποιητική και σημειώνουμε πως μια προσέγγιση ανώτερου βαθμού απαιτεί περισσότερα σημεία για την περιγραφή της ίδιας παραγώγου και μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο αλλά μπορεί να αποδώσει μια ακριβέστερη λύση (π.χ. για κρουστικά κύματα).

3.2 Δημιουργία του πλέγματος

Παρακάτω φαίνεται η κατασκευή του πλέγματος όπου το κάθε σημείο (i,j) θα περιγράφεται από τα γειτονικά του και η μεταβολή ως προς θ κατά τη διεύθυνση j και ως προς i κατά τη διεύθυνση r.



Σχήμα 3.2: Δημιουργία πλέγματος στο πεδίο ροής

3.3 Διακριτοποίηση της σχέσης (6΄)

Η (6΄) είναι: $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}\right)\nabla^2 f + w\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta}\cos\theta\right) = -r\nabla^4 f$

$\leftrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\left(\nabla^2 f\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\left(\nabla^2 f\right)}{\partial r}+w\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta\right)=-r\nabla^2\left(\nabla^2 f\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right\}-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right\}+w\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta\right)=$$

$$=-r\left(\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial r^2\partial\theta^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^2\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 f}{\partial\theta^3}\right)-\frac{\partial f}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}\right)$$

$$+w\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta\right)=$$

$$-r\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}-2\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}-\frac{2}{r}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^2\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{4}{r^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Η σχέση (6’) μετά από πράξεις γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^2\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^3 f}{\partial\theta^3}-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+w\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta\right)=-r\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}-2\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}-\frac{2}{r}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^2\partial r^2}+$$

$$\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{4}{r^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Όπου ο $\nabla^2\left(\nabla^2 f\right)$ εξάγεται αναλυτικά ως εξής:

$$\nabla^2(\nabla^2 f)=\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right\}=\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}+$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^2\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}\right)=\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}+\frac{6}{r^4}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^2\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}\right)=\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}+\frac{6}{r^4}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-$$

$$\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{2}{r^4}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial r^2\partial\theta^2}$$

$$+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}=$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 f}{\partial r^2\partial\theta^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 f}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Αντικαθιστώντας τις πεπλεγμένες παραγώγους που προσδιορίσαμε η (6’) γίνεται:

$$\left(\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2\Delta r}\right)\left(\frac{f_{i+2,j+1}-f_{i+2,j-1}-2f_{i,j+1}+2f_{i,j-1}+f_{i-2,j+1}-f_{i-2,j-1}}{8\Delta r^2\Delta\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2\Delta r}\right)\left(\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}-f_{i-1,j+1}+f_{i-1,j-1}}{4\Delta\theta\Delta r}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2\Delta r}\right)\left(\frac{f_{i,j+2}-2f_{i,j+1}+2f_{i,j-1}-f_{i,j-2}}{2\Delta\theta^3}\right)$$

$$-\left(\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta\theta}\right)\left(\frac{f_{i+2,j}-2f_{i+1,j}+2f_{i-1,j}-f_{i-2,j}}{2\Delta r^{3}}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^{2}}\left(\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta\theta}\right)\left(\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2\Delta r}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta\theta}\right)\left(\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\Delta r^{2}}\right)$$

$$+\frac{2}{r^{3}}\left(\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta\theta}\right)\left(\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\Delta\theta^{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{r^{2}}\left(\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta\theta}\right)\left(\frac{f_{i+1,j+1}-2f_{i+1,j}+f_{i+1,j-1}-f_{i-1,j+1}+2f_{i-1,j}-f_{i-1,j-1}}{2\Delta r\Delta\theta^{2}}\right)$$

$$+w_{i,j}\left[r\left(\frac{w_{i+1,j}-w_{i-1,j}}{2\Delta r}\right)\sin\theta+\left(\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2\Delta\theta}\right)\cos\theta\right]=-r\left(\frac{f_{i+2,j}-4f_{i+1,j}+6f_{i,j}-4f_{i-1,j}+f_{i-2,j}}{\Delta r^{4}}\right)$$

$$-\frac{1}{r^{3}}\left(\frac{f_{i,j+2}-4f_{i,j+1}+6f_{i,j}-4f_{i,j-1}+f_{i,j-2}}{\Delta\theta^{4}}\right)-2\left(\frac{f_{i+2,j}-2f_{i+1,j}+2f_{i-1,j}-f_{i-2,j}}{2\Delta r^{3}}\right)$$

$$-\frac{2}{r}\left(\frac{f_{i+2,j+1}-2f_{i+2,j}+f_{i+2,j-1}-2f_{i,j+1}+f_{i,j}-2f_{i,j-1}+f_{i-2,j+1}-2f_{i-2,j+1}+f_{i-2,j-1}}{4\Delta r^{2}\Delta\theta^{2}}\right)$$

$$+\frac{2}{r^{2}}\left(\frac{f_{i+1,j+1}-2f_{i+1,j}+f_{i+1,j-1}-f_{i-1,j+1}+2f_{i-1,j}-f_{i-1,j-1}}{2\Delta r\Delta\theta^{2}}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\Delta r^{2}}\right)$$

$$-\frac{4}{r^{3}}\left(\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\Delta\theta^{2}}\right)-\frac{1}{r^{2}}\left(\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2\Delta r}\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{\left(+f_{i+1,j}\,f_{i+2,j+1}-f_{i+1,j}f_{i+2,j-1}-2f_{i+1,j}f_{i,j+1}+2f_{i+1,j}f_{i,j-1}+f_{i+1,j}f_{i-2,j+1}-f_{i+1,j}f_{i-2,j-1}\right.}{16\Delta r^{3}\Delta\theta}$$

$$\frac{-f_{i-1,j}f_{i+2,j+1}+f_{i-1,j}f_{i+2,j-1}+2f_{i-1,j}f_{i,j+1}-2f_{i-1,j}f_{i,j-1}-f_{i-1,j}f_{i-2,j+1}+f_{i-1,j}\,f_{i-2,j-1}\Big)}{}$$

$$+\frac{\left(f_{i+1,j}\,f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j}f_{i+1,j-1}-f_{i+1,j}f_{i-1,j+1}+f_{i+1,j}f_{i-1,j-1}-f_{i-1,j}f_{i+1,j+1}+f_{i-1,j}f_{i+1,j-1}+f_{i-1,j}f_{i-1,j+1}-f_{i-1,j}\,f_{i-1,j-1}\right)}{8\Delta r^2\Delta\theta r}$$

$$+\frac{\left(f_{i+1,j}\,f_{i,j+2}-2f_{i+1,j}f_{i,j+1}+2f_{i+1,j}f_{i,j-1}-f_{i+1,j}f_{i,j-2}-f_{i-1,j}f_{i,j+2}+2f_{i-1,j}f_{i,j+1}-2f_{i-1,j}f_{i,j-1}+f_{i-1,j}\,f_{i,j-2}\right)}{4\Delta r\Delta\theta^3 r^2}$$

$$-\frac{\left(f_{i,j+1}\,f_{i+2,j}-2f_{i,j+1}f_{i+1,j}+2f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j+1}f_{i-2,j}-f_{i,j-1}f_{i+2,j}+2f_{i,j-1}f_{i+1,j}-2f_{i,j-1}f_{i-1,j}+f_{i,j-1}\,f_{i-2,j}\right)}{4\Delta r^3\Delta\theta}$$

$$+\frac{\left(f_{i,j+1}f_{i+1,j}-f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j-1}f_{i+1,j}+f_{i,j-1}f_{i-1,j}\right)}{4\Delta r\Delta\theta r^2}$$

$$-\frac{\left(f_{i,j+1}f_{i+1,j}-2f_{i,j+1}f_{i,j}+f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j-1}f_{i+1,j}+2f_{i,j-1}f_{i,j}-f_{i,j-1}f_{i-1,j}\right)}{2\Delta r^2\Delta\theta r}$$

$$+\frac{\left(f^2{}_{i,j+1}-2f_{i,j+1}f_{i,j}+f_{i,j+1}f_{i,j-1}-f_{i,j-1}f_{i,j+1}+2f_{i,j-1}f_{i,j}-f^2{}_{i,j-1}\right)}{\Delta\theta^3 r^3}$$

$$-\frac{\Big(f_{i,j+1}f_{i+1,j+1}-2f_{i,j+1}f_{i+1,j}+f_{i,j+1}f_{i+1,j-1}-f_{i,j+1}f_{i-1,j+1}+2f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j+1}f_{i-1,j-1}}{4\Delta r\Delta\theta^3 r^2}$$

$$\frac{-f_{i,j-1}f_{i+1,j+1}+2f_{i,j-1}f_{i+1,j}-f_{i,j-1}f_{i+1,j-1}+f_{i,j-1}f_{i-1,j+1}-2f_{i,j-1}f_{i-1,j}+f_{i,j-1}\,f_{i-1,j-1}\Big)}{}$$

$$+w_{i,j}\left(w_{i+1,j}-w_{i-1,j}\right)\left(\frac{r\sin\theta}{2\Delta r}\right)+w_{i,j}\left(w_{i,j+1}-w_{i,j-1}\right)\left(\frac{\cos\theta}{2\Delta\theta}\right)$$

$$= -r\left(\frac{f_{i+2,j} - 4f_{i+1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{\Delta r^4}\right)$$

$$-\left(\frac{f_{i,j+2} - 4f_{i,j+1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j-1} + f_{i,j-2}}{\Delta\theta^4 r^3}\right) - \left(\frac{f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + 2f_{i-1,j} - f_{i-2,j}}{\Delta r^3}\right)$$

$$-\left(\frac{f_{i+2,j+1} - 2f_{i+2,j} + f_{i+2,j-1} - 2f_{i,j+1} + f_{i,j} - 2f_{i,j-1} + f_{i-2,j+1} - 2f_{i-2,j+1} + f_{i-2,j-1}}{2\Delta r^2 \Delta\theta^2 r}\right)$$

$$+\left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{\Delta r \Delta\theta^2 r^2}\right) + \left(\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta r^2 r}\right)$$

$$-4\left(\frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta\theta^2 r^3}\right) - \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta r \times r^2}\right)$$

Και με απαλοιφή των παρονομαστών δηλαδή πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με τον αριθμό ($16\Delta r^4 \Delta\theta^4 r^3$) αυτή γίνεται:

$$\Delta r \Delta\theta^3 r^3 \left(+f_{i+1,j}\, f_{i+2,j+1} - f_{i+1,j} f_{i+2,j-1} - 2f_{i+1,j} f_{i,j+1} + 2f_{i+1,j} f_{i,j-1} + f_{i+1,j} f_{i-2,j+1} - f_{i+1,j} f_{i-2,j-1}\right.$$

$$\left.-f_{i-1,j} f_{i+2,j+1} + f_{i-1,j} f_{i+2,j-1} + 2f_{i-1,j} f_{i,j+1} - 2f_{i-1,j} f_{i,j-1} - f_{i-1,j} f_{i-2,j+1} + f_{i-1,j}\, f_{i-2,j-1}\right)$$

$$+2\Delta r^2 \Delta\theta^3 r^2 \left(f_{i+1,j}\, f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} f_{i+1,j-1} - f_{i+1,j} f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j} f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j} f_{i+1,j+1}\right.$$

$$\left.+f_{i-1,j} f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j} f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}\, f_{i-1,j-1}\right)$$

$$+4\Delta r^3 \Delta\theta r \left(f_{i+1,j}\, f_{i,j+2} - 2f_{i+1,j} f_{i,j+1} + 2f_{i+1,j} f_{i,j-1} - f_{i+1,j} f_{i,j-2} - f_{i-1,j} f_{i,j+2} + 2f_{i-1,j} f_{i,j+1}\right.$$

$$\left.-2f_{i-1,j} f_{i,j-1} + f_{i-1,j}\, f_{i,j-2}\right)$$

$$-4\Delta r\Delta\theta^3 r^3\left(f_{i,j+1}f_{i+2,j}-2f_{i,j+1}f_{i+1,j}+2f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j+1}f_{i-2,j}-f_{i,j-1}f_{i+2,j}+2f_{i,j-1}f_{i+1,j}\right.$$

$$\left.-2f_{i,j-1}f_{i-1,j}+f_{i,j-1}f_{i-2,j}\right)+4\Delta r^3\Delta\theta^3 r\left(f_{i,j+1}f_{i+1,j}-f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j-1}f_{i+1,j}+f_{i,j-1}f_{i-1,j}\right)$$

$$-8\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\left(f_{i,j+1}f_{i+1,j}-2f_{i,j+1}f_{i,j}+f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j-1}f_{i+1,j}+2f_{i,j-1}f_{i,j}-f_{i,j-1}f_{i-1,j}\right)$$

$$+16\Delta r^4\Delta\theta\left(f^2_{i,j+1}-2f_{i,j+1}f_{i,j}+2f_{i,j-1}f_{i,j}-f^2_{i,j-1}\right)$$

$$-4\Delta r^3\Delta\theta r\left(f_{i,j+1}f_{i+1,j+1}-2f_{i,j+1}f_{i+1,j}+f_{i,j+1}f_{i+1,j-1}-f_{i,j+1}f_{i-1,j+1}+2f_{i,j+1}f_{i-1,j}-f_{i,j+1}f_{i-1,j-1}\right.$$

$$\left.-f_{i,j-1}f_{i+1,j+1}+2f_{i,j-1}f_{i+1,j}-f_{i,j-1}f_{i+1,j-1}+f_{i,j-1}f_{i-1,j+1}-2f_{i,j-1}f_{i-1,j}+f_{i,j-1}f_{i-1,j-1}\right)$$

$$+w_{i,j}w_{i+1,j}\left(8\Delta r^3\Delta\theta^4 r^4\sin\theta\right)-w_{i,j}w_{i-1,j}\left(8\Delta r^3\Delta\theta^4 r^4\sin\theta\right)$$

$$+w_{i,j}w_{i,j+1}\left(8\Delta r^4\Delta\theta^3 r^3\cos\theta\right)-w_{i,j}w_{i,j-1}\left(8\Delta r^4\Delta\theta^3 r^3\cos\theta\right)$$

$$=-16\Delta\theta^4 r^4\left(f_{i+2,j}-4f_{i+1,j}+6f_{i,j}-4f_{i-1,j}+f_{i-2,j}\right)\ -16\Delta r^4\left(f_{i,j+2}-4f_{i,j+1}+6f_{i,j}-4f_{i,j-1}+f_{i,j-2}\right)$$

$$-16\Delta r\Delta\theta^4 r^3\left(f_{i+2,j}-2f_{i+1,j}+2f_{i-1,j}-f_{i-2,j}\right)$$

$$-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\left(f_{i+2,j+1}-2f_{i+2,j}+f_{i+2,j-1}-2f_{i,j+1}+f_{i,j}-2f_{i,j-1}+f_{i-2,j+1}-2f_{i-2,j}+f_{i-2,j-1}\right)$$

$$+16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\left(f_{i+1,j+1}-2f_{i+1,j}+f_{i+1,j-1}-f_{i-1,j+1}+2f_{i-1,j}-f_{i-1,j-1}\right)$$

$$+16\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2\left(f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}\right)-64\Delta r^4\Delta\theta^2\left(f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}\right)-8\Delta r^3\Delta\theta^4 r\left(f_{i+1,j}-f_{i-1,j}\right)$$

Στη συνέχεια με εξαγωγή κοινών παραγόντων η σχέση παίρνει τη μορφή:

$$f_{i+1,j}f_{i+2,j+1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) - f_{i+1,j}f_{i+2,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right)$$

$$-f_{i+1,j}f_{i,j+1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right)$$

$$+f_{i+1,j}f_{i,j-1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right)$$

$$+f_{i+1,j}f_{i-2,j+1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) - f_{i+1,j}f_{i-2,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) - f_{i-1,j}f_{i+2,j+1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) + f_{i-1,j}f_{i+2,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right)$$

$$+f_{i-1,j}f_{i,j+1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right)$$

$$+f_{i-1,j}f_{i,j-1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}f_{i+1,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) + f_{i-1,j}f_{i-2,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) + f_{i+1,j}f_{i+1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right)$$

$$-f_{i+1,j}f_{i+1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right) - f_{i+1,j}f_{i-1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right) + f_{i+1,j}f_{i-1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}f_{i+1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right) + f_{i-1,j}f_{i+1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right) + f_{i-1,j}f_{i-1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}f_{i-1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3r^2\right) + f_{i+1,j}f_{i,j+2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) - f_{i+1,j}f_{i,j-2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) - f_{i-1,j}f_{i,j+2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$+f_{i-1,j}f_{i,j-2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) - f_{i,j+1}f_{i+2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) + f_{i,j+1}f_{i-2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) + f_{i,j-1}f_{i+2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3r^3\right)$$

$$= f_{i,j-1}f_{i-2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3r^3\right) + f_{i,j+1}f_{i,j}\left(16\Delta r^2\Delta\theta^3r^2 - 32\Delta r^4\Delta\theta\right) - f_{i,j-1}f_{i,j}\left(16\Delta r^2\Delta\theta^3r^2 - 32\Delta r^4\Delta\theta\right)$$

$$+f^2_{i,j+1}\left(16\Delta r^4\Delta\theta\right) - f^2_{i,j-1}\left(16\Delta r^4\Delta\theta\right) - f_{i,j+1}f_{i+1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) - f_{i,j+1}f_{i+1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$+f_{1,j+1}f_{i-1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) + f_{i,j+1}f_{i-1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) + f_{1,j-1}f_{i+1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$+f_{i,j-1}f_{i+1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)-f_{i,j-1}f_{i-1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)-f_{i,j-1}f_{i-1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$+w_{i,j}w_{i+1,j}\left(8\Delta r^3\Delta\theta^4 r^4\sin\theta\right)-w_{i,j}w_{i-1,j}\left(8\Delta r^3\Delta\theta^4 r^4\sin\theta\right)$$

$$+w_{i,j}w_{i,j+1}\left(8\Delta r^4\Delta\theta^3 r^3\cos\theta\right)-w_{i,j}w_{i,j-1}\left(8\Delta r^4\Delta\theta^3 r^3\cos\theta\right)$$

$$=f_{i+2,j}\left(-16\Delta\theta^4 r^4-16\Delta r\Delta\theta^4 r^3+16\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)$$

$$+f_{i+1,j}\left(64\Delta\theta^4 r^4+32\Delta r\Delta\theta^4 r^3-32\Delta r^3\Delta\theta^2 r+16\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2-8\Delta r^3\Delta\theta^4 r\right)$$

$$+f_{i,j}\left(-96\Delta\theta^4 r^4-96\Delta r^4-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2-32\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2+128\Delta r^4\Delta\theta^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}\left(64\Delta\theta^4 r^4-32\Delta r\Delta\theta^4 r^3+32\Delta r^3\Delta\theta^2 r+16\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2+8\Delta r^3\Delta\theta^4 r\right)$$

$$+f_{i-2,j}\left(-16\Delta\theta^4 r^4+16\Delta r\Delta\theta^4 r^3+8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)+f_{i,j+2}\left(-16\Delta r^4\right)$$

$$+f_{i,j+1}\left(64\Delta r^4+16\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2-64\Delta r^4\Delta\theta^2\right)+f_{i,j-1}\left(64\Delta r^4+16\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2-64\Delta r^4\Delta\theta^2\right)$$

$$+f_{i,j-2}\left(-16\Delta r^4\right)+f_{i+2,j+1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)+f_{i+2,j-1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)$$

$$+f_{i-2,j+1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)+f_{i-2,j-1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)+f_{i+1,j+1}\left(16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)+f_{i+1,j-1}\left(16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)$$

$$+f_{i-1,j+1}\left(-16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)+f_{i-1,j-1}\left(-16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)$$

Και με ανακατάταξη των όρων αυτή γίνεται:

$$f_{i,j}\left(-96\Delta\theta^4 r^4-96\Delta r^4-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2-32\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2+128\Delta r^4\Delta\theta^2\right)$$

$$-f_{i,j+1}f_{i,j}\left(16\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2 - 32\Delta r^4\Delta\theta\right) + f_{i,j-1}f_{i,j}\left(16\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2 - 32\Delta r^4\Delta\theta\right)$$

$$= f_{i+1,j}f_{i+2,j+1}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) - f_{i+1,j}f_{i+2,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right)$$

$$-f_{i+1,j}f_{i,j+1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3 r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3 r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3 r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right)$$

$$+f_{i+1,j}f_{i,j-1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3 r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3 r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3 r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right)$$

$$+f_{i+1,j}f_{i-2,j+1}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) - f_{i+1,j}f_{i-2,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) - f_{i-1,j}f_{i+2,j+1}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) + f_{i-1,j}f_{i+2,j-1}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right)$$

$$+f_{i-1,j}f_{i,j+1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3 r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3 r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3 r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}f_{i,j-1}\left(2\Delta r\Delta\theta^3 r^3 + 8\Delta r^3\Delta\theta r - 8\Delta r\Delta\theta^3 r^3 - 4\Delta r^3\Delta\theta^3 r - 8\Delta r^3\Delta\theta r + 8\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}f_{i-2,j+1}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) + f_{i-1,j}f_{i-2,j}\left(\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) + f_{i+1,j}f_{i+1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right)$$

$$-f_{i+1,j}f_{i+1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right) - f_{i+1,j}f_{i-1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right) + f_{i+1,j}f_{i-1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}f_{i+1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right) + f_{i-1,j}f_{i+1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right) + f_{i-1,j}f_{i-1,j+1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right)$$

$$-f_{i-1,j}f_{i-1,j-1}\left(2\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2\right) + f_{i+1,j}f_{i,j+2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) - f_{i+1,j}f_{i,j-2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) - f_{i-1,j}f_{i,j+2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$+f_{i-1,j}f_{i,j-2}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) - f_{i,j+1}f_{i+2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) + f_{i,j+1}f_{i-2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) + f_{i,j-1}f_{i+2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right)$$

$$-f_{i,j-1}f_{i-2,j}\left(4\Delta r\Delta\theta^3 r^3\right) + f^2_{i,j+1}\left(16\Delta r^4\Delta\theta\right) - f^2_{i,j-1}\left(16\Delta r^4\Delta\theta\right) - f_{i,j+1}f_{i+1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$-f_{i,j+1}f_{i+1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) + f_{i,j+1}f_{i-1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) + f_{i,j+1}f_{i-1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right) + f_{i,j-1}f_{i+1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$+f_{i,j-1}f_{i+1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)-f_{i,j-1}f_{i-1,j+1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)-f_{i,j-1}f_{i-1,j-1}\left(4\Delta r^3\Delta\theta r\right)$$

$$+w_{i,j}w_{i+1,j}\left(8\Delta r^3\Delta\theta^4 r^4\sin\theta\right)-w_{i,j}w_{i-1,j}\left(8\Delta r^3\Delta\theta^4 r^4\sin\theta\right)$$

$$+w_{i,j}w_{i,j+1}\left(8\Delta r^4\Delta\theta^3 r^3\cos\theta\right)-w_{i,j}w_{i,j-1}\left(8\Delta r^4\Delta\theta^3 r^3\cos\theta\right)$$

$$-f_{i+2,j}\left(-16\Delta\theta^4 r^4-16\Delta r\Delta\theta^4 r^3+16\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)$$

$$-f_{i+1,j}\left(64\Delta\theta^4 r^4+32\Delta r\Delta\theta^4 r^3-32\Delta r^3\Delta\theta^2 r+16\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2-8\Delta r^3\Delta\theta^4 r\right)$$

$$+f_{i-1,j}\left(64\Delta\theta^4 r^4-32\Delta r\Delta\theta^4 r^3+32\Delta r^3\Delta\theta^2 r+16\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2+8\Delta r^3\Delta\theta^4 r\right)$$

$$-f_{i-2,j}\left(-16\Delta\theta^4 r^4+16\Delta r\Delta\theta^4 r^3+8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)-f_{i,j+2}\left(-16\Delta r^4\right)$$

$$-f_{i,j+1}\left(64\Delta r^4+16\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2-64\Delta r^4\Delta\theta^2\right)-f_{i,j-1}\left(64\Delta r^4+16\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2-64\Delta r^4\Delta\theta^2\right)-f_{i,j-2}\left(-16\Delta r^4\right)$$

$$-f_{i+2,j+1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)-f_{i+2,j-1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)-f_{i-2,j+1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)-f_{i-2,j-1}\left(-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2\right)$$

$$-f_{i+1,j+1}\left(16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)-f_{i+1,j-1}\left(16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)-f_{i-1,j+1}\left(-16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)-f_{i-1,j-1}\left(-16\Delta r^3\Delta\theta^2 r\right)$$

Και λύνοντας ως προς $f_{i,j}$ η σχέση γίνεται:

$$f_{i,j}=\frac{1}{\left(-96\Delta\theta^4 r^4-96\Delta r^4-8\Delta r^2\Delta\theta^2 r^2-32\Delta r^2\Delta\theta^4 r^2+128\Delta r^4\Delta\theta^2\right)-f_{i,j+1}\left(16\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2-32\Delta r^4\Delta\theta\right)}$$

$$\frac{}{+f_{i,j+1}\left(16\Delta r^2\Delta\theta^3 r^2-32\Delta r^4\Delta\theta\right)}\times\left[\text{το δεύτερο μέλος}\right]$$

Θέτοντας τους σταθερούς όρους για την (6’)

$a_1 = \Delta r^4$, $a_2 = \Delta r^4 \Delta\theta^3 r^3$, $a_3 = \Delta r^4 \Delta\theta^2$, $a_4 = \Delta r^4 \Delta\theta$, $a_5 = \Delta r^3 \Delta\theta^4 r^4$

$a_6 = \Delta r^3 \Delta\theta^3 r$, $a_7 = \Delta r^3 \Delta\theta^2 r$, $a_8 = \Delta r^3 \Delta\theta r$, $a_9 = \Delta r^2 \Delta\theta^4 r^2$

$a_{10} = \Delta r^2 \Delta\theta^3 r^2$, $a_{11} = \Delta r^2 \Delta\theta^2 r^2$, $a_{12} = \Delta r \Delta\theta^4 r^3$, $a_{13} = \Delta r \Delta\theta^3 r^3$

$a_{14} = \Delta\theta^4 r^4$, $a_{15} = \Delta r^3 \Delta\theta^4 r$

αυτή γίνεται:

$$f_{i,j} = \frac{1}{\left(-96a_{14} - 96a_1 - 8a_{11} - 32a_9 + 128a_3\right) - f_{i,j+1}\left(16a_{10} - 32a_4\right)}$$

$$\frac{}{+f_{i,j-1}\left(16\alpha_{10} - 32\alpha_4\right)} \times \Big[f_{i+1,j} f_{i+2,j+1}\left(\alpha_{13}\right) - f_{i+1,j} f_{i+2,j-1}\left(\alpha_{13}\right)$$

$$-f_{i+1,j} f_{i,j+1}\left(2\alpha_{13} + 8\alpha_8 - 8\alpha_{13} - 4\alpha_6 - 8\alpha_8 + 8\alpha_{10}\right) + f_{i+1,j} f_{i,j-1}\left(2\alpha_{13} + 8\alpha_8 - 8\alpha_{13} - 4\alpha_6 - 8\alpha_8 + 8\alpha_{10}\right)$$

$$+f_{i+1,j} f_{i-2,j+1}\left(\alpha_{13}\right) - f_{i+1,j} f_{i-2,j-1}\left(\alpha_{13}\right) - f_{i-1,j} f_{i+2,j+1}\left(\alpha_{13}\right) + f_{i-1,j} f_{i+2,j-1}\left(\alpha_{13}\right)$$

$$+f_{i-1,j} f_{i,j+1}\left(2\alpha_{13} + 8\alpha_8 - 8\alpha_{13} - 4\alpha_6 - 8\alpha_8 + 8\alpha_{10}\right) - f_{i-1,j} f_{i,j-1}\left(2\alpha_{13} + 8\alpha_8 - 8\alpha_{13} - 4\alpha_6 - 8\alpha_8 + 8\alpha_{10}\right)$$

$$-f_{i-1,j} f_{i-2,j+1}\left(\alpha_{13}\right) + f_{i-1,j} f_{i-2,j-1}\left(\alpha_{13}\right) + f_{i+1,j} f_{i+1,j+1}\left(2\alpha_{10}\right) - f_{i+1,j} f_{i+1,j-1}\left(2\alpha_{10}\right) - f_{i+1,j} f_{i-1,j+1}\left(2\alpha_{10}\right) + f_{i+1,j} f_{i-1,j-1}\left(2\alpha_{10}\right)$$

$$-f_{i-1,j} f_{i+1,j+1}\left(2\alpha_{10}\right) + f_{i-1,j} f_{i+1,j-1}\left(2\alpha_{10}\right) + f_{i-1,j} f_{i-1,j+1}\left(2\alpha_{10}\right) - f_{i-1,j} f_{i-1,j-1}\left(2\alpha_{13}\right) + f_{i+1,j} f_{i,j+2}\left(4\alpha_8\right)$$

$$-f_{i+1,j} f_{i,j-2}\left(4\alpha_8\right) - f_{i-1,j} f_{i,j+2}\left(4\alpha_8\right) + f_{i-1,j} f_{i,j-2}\left(4\alpha_8\right) - f_{i,j+1} f_{i+2,j}\left(4\alpha_{13}\right) + f_{i,j+1} f_{i-2,j}\left(4\alpha_{13}\right) + f_{i,j-1} f_{i+2,j}\left(4\alpha_{13}\right)$$

$$-f_{i,j-1} f_{i-2,j}\left(4\alpha_{13}\right) + +f^2_{i,j+1}\left(16\alpha_4\right) - f^2_{i,j-1}\left(16\alpha_4\right) - f_{i,j+1} f_{i+1,j+1}\left(4\alpha_8\right) - f_{i,j+1} f_{i+1,j-1}\left(4\alpha_8\right)$$

$$+f_{i,j+1} f_{i-1,j+1}\left(4\alpha_8\right) + f_{i,j+1} f_{i-1,j-1}\left(4\alpha_8\right) + f_{i,j-1} f_{i+1,j+1}\left(4\alpha_8\right) + f_{i,j-1} f_{i+1,j-1}\left(4\alpha_8\right) - f_{i,j-1} f_{i-1,j+1}\left(4\alpha_8\right)$$

$$-f_{i,j-1} f_{i-1,j-1}\left(4\alpha_8\right) + w_{i,j} w_{i+1,j}\left(8\alpha_5 \sin\theta\right) - w_{i,j} w_{i-1,j}\left(8\alpha_5 \sin\theta\right) + w_{i,j} w_{i,j+1}\left(8\alpha_2 \cos\theta\right)$$

$$-w_{i,j}w_{i,j-1}\left(8\alpha_2\cos\theta\right)-f_{i+2,j}\left(-16\alpha_{14}-16\alpha_{12}+16\alpha_{11}\right)-f_{i+1,j}\left(64\alpha_{14}+32\alpha_{12}-32\alpha_7+16\alpha_9-8\alpha_{15}\right)$$

$$+f_{i-1,j}\left(64\alpha_{14}-32\alpha_{12}+32\alpha_7+16\alpha_9+8\alpha_{15}\right)-f_{i-2,j}\left(-16\alpha_{14}+16\alpha_{12}+8\alpha_{11}\right)-f_{i,j+2}\left(-16\alpha_1\right)$$

$$-f_{i,j+1}\left(64\alpha_1+16\alpha_{11}-64\alpha_3\right)-f_{i,j-1}\left(64\alpha_1+16\alpha_{11}-64\alpha_3\right)-f_{i,j-2}\left(-16\alpha_1\right)-f_{i+2,j+1}\left(-8\alpha_{11}\right)-f_{i+2,j-1}\left(-8\alpha_{11}\right)$$

$$-f_{i-2,j+1}\left(-8\alpha_{11}\right)-f_{i-2,j-1}\left(-8\alpha_{11}\right)-f_{i+1,j+1}\left(16\alpha_7\right)-f_{i+1,j-1}\left(16\alpha_7\right)-f_{i-1,j+1}\left(-16\alpha_7\right)-f_{i-1,j-1}\left(-16\alpha_7\right)\Big]$$

3.4 Διακριτοποίηση της σχέσης (7΄)

Αντικαθιστούμε τις μερικές παραγώγους με τις διαφορές όπως κάναμε και για την (6)'

$$\boxed{\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=D+\nabla^2 w} \qquad (7΄)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{-\left(f_{i+1,j}-f_{i-1,j}\right)\left(w_{i,j+1}-w_{i,j-1}\right)+\left(f_{i,j+1}-f_{i,j-1}\right)\left(w_{i+1,j}-w_{i-1,j}\right)}{4r\Delta r\Delta\theta}=$$

$$D+\frac{\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}\right)}{\Delta r^2}+\frac{\left(w_{i+1,j}-w_{i-1,j}\right)}{2r\Delta r}+\frac{\left(w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}\right)}{r^2\Delta\theta^2}$$

Στη συνέχεια με απαλοιφή των παρονομαστών δηλαδή πολλαπλασιάζοντας με $\left(4r^2\Delta r^2\Delta\theta^2\right)$ η (7') γίνεται:

$$-w_{i,j+1}f_{i+1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i,j-1}f_{i+1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i,j+1}f_{i-1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)-w_{i,j-1}f_{i-1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)$$

$$+w_{i+1,j}f_{i,j+1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)-w_{i-1,j}f_{i,j+1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)-w_{i+1,j}f_{i,j-1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i-1,j}f_{i,j-1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)$$

$$=\left(4r^2\Delta r^2\Delta\theta^2\right)\times D+w_{i+1,j}\left(4r^2\Delta\theta^2+2r\Delta r\Delta\theta^2\right)+w_{i-1,j}\left(4r^2\Delta\theta^2-2r\Delta r\Delta\theta^2\right)$$

$$-w_{i,j}\left(8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2\right)+w_{i,j+1}(4\Delta r^2)+w_{i,j-1}(4\Delta r^2)$$

$$\leftrightarrow$$

$$w_{i,j}=\frac{1}{\left(8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2\right)}\times\Big[w_{i,j+1}f_{i+1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)-w_{i,j+1}f_{i-1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i,j+1}\left(4\Delta r^2\right)$$

$$-w_{i,j-1}f_{i+1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i,j-1}f_{i-1,j}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i,j-1}\left(4\Delta r^2\right)$$

$$-w_{i+1,j}f_{i,j+1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i+1,j}f_{i,j-1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i+1,j}\left(4r^2\Delta\theta^2+2r\Delta r\Delta\theta^2\right)$$

$$+w_{i-1,j}f_{i,j+1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)-w_{i-1,j}f_{i,j-1}\left(r\Delta r\Delta\theta\right)+w_{i-1,j}\left(4r^2\Delta\theta^2-2r\Delta r\Delta\theta^2\right)$$

$$+\left(4r^2\Delta r^2\Delta\theta^2\right)\times D\Big]$$

$$\leftrightarrow$$

$$w_{i,j}=\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i,j+1}f_{i+1,j}-\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i,j+1}f_{i-1,j}+\left(\frac{4\Delta r^2}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i,j+1}$$

$$-\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i,j-1}f_{i+1,j}+\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i,j-1}f_{i-1,j}$$

$$+\left(\frac{4\Delta r^2}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i,j-1}-\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i+1,j}f_{i,j+1}+\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i+1,j}f_{i,j-1}$$

$$+\left(\frac{4r^2\Delta\theta^2+2r\Delta r\Delta\theta^2}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i+1,j}+\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i-1,j}f_{i,j+1}$$

$$-\left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i-1,j}f_{i,j-1}+\left(\frac{4r^2\Delta\theta^2-2r\Delta r\Delta\theta^2}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)w_{i-1,j}+\left(\frac{4r^2\Delta r^2\Delta\theta^2}{8r^2\Delta\theta^2+8\Delta r^2}\right)D$$

Θέτοντας ως παραμέτρους τους σταθερούς όρους

$$a_{16} = \left(\frac{r\Delta r\Delta\theta}{8r^2\Delta\theta^2 + 8\Delta r^2} \right),\ a_{17} = \left(\frac{4\Delta r^2}{8r^2\Delta\theta^2 + 8\Delta r^2} \right),\ a_{18} = \left(\frac{4r^2\Delta\theta^2 + 2r\Delta r\Delta\theta^2}{8r^2\Delta\theta^2 + 8\Delta r^2} \right)$$

$$a_{19} = \left(\frac{4r^2\Delta r^2\Delta\theta^2}{8r^2\Delta\theta^2 + 8\Delta r^2} \right)\ a_{20} = \left(\frac{4r^2\Delta\theta^2 - 2r\Delta r\Delta\theta^2}{8r^2\Delta\theta^2 + 8\Delta r^2} \right)$$

για την (7)’ αυτή παίρνει τελικά την μορφή:

$$w_{i,j} = a_{16} w_{i,j+1} f_{i+1,j} - a_{16} w_{i,j+1} f_{i-1,j} + a_{17} w_{i,j+1} - a_{16} w_{i,j-1} f_{i+1,j} + a_{16} w_{i,j-1} f_{i-1,j}$$

$$+ a_{17} w_{i+1,j} + a_{16} w_{i+1,j} f_{i,j+1} + a_{16} w_{i+1,j} f_{i,j-1} + a_{18} w_{i+1} + a_{16} w_{i-1,j} f_{i,j+1}$$

$$- a_{16} w_{i-1,j} f_{i,j-1} + a_{20} w_{i-1,j} + a_{19} D$$

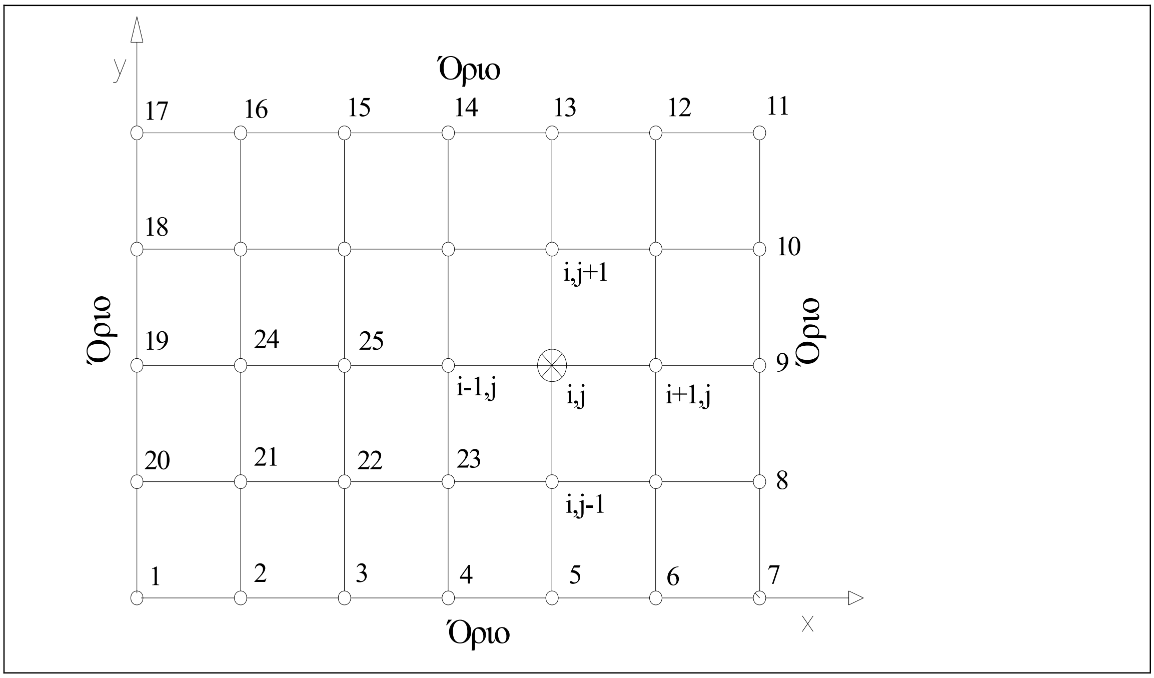
3.5 Περιγραφή της μεθόδου διαδοχικής υπέρ-χαλάρωσης (successive over relaxation [S.O.R])

Η τεχνική χαλάρωσης είναι μία μέθοδος πεπερασμένων διαφορών ιδιαίτερα βολική για την λύση ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Για περιγραφικούς λόγους ας θεωρήσουμε ένα ανιξώδες, ασυμπίεστο, δι-διάστατο μη περιστρεφόμενο ρευστό. Για μια τέτοια ροή οι διέπουσες εξισώσεις της ροής ανάγονται σε μία μοναδική μερική διαφορική εξίσωση κυρίως, την εξίσωση του Laplace σε όρους του βαθμωτού δυναμικού ταχύτητας Φ, όπου το Φ ορίζεται ως $V = \nabla \times \Phi$.

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2} = 0 \quad (3.5.1)$$

Επιθυμούμε να λύσουμε την (3.5.1) αριθμητικά στο πλέγμα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.5 : Πλέγμα για την κατανόηση της μεθόδου διαδοχικής υπέρ-χαλάρωσης

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους με κεντρικές διαφορές όπως αναφέραμε παραπάνω η (3.5.1) γίνεται:

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\left(\Delta x\right)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{\left(\Delta y\right)^2} = 0 \quad (3.5.2)$$

Εξετάζοντας το σχήμα του πλέγματος σημειώνουμε πως τα σημεία 1 έως 20 αποτελούν το όριο του πεδίου και αυτό επειδή οριακές συνθήκες πρέπει να καθοριστούν γύρω από το εσωτερικό πεδίο ώστε μια ελλειπτική εξίσωση να είναι καλά ορισμένη. Αυτό σημαίνει πως τα Φ_1 έως Φ_{20} είναι γνωστές τιμές ίσες προς τις δεδομένες οριακές συνθήκες σε αυτά τα σημεία. Οι τιμές της Φ σε όλα τα υπόλοιπα σημεία (εσωτερικά) είναι άγνωστες. Έτσι η εξίσωση (3.5.2) έχουσα κέντρο το i,j περιέχει πέντε από αυτούς τους αγνώστους $\Phi_{i,j}, \Phi_{i+1,j}, \Phi_{i-1,j}, \Phi_{i,j+1}, \Phi_{i,j-1}$. Στην πραγματικότητα η (3.5.2) μπορεί να γραφτεί γύρω από κάθε εσωτερικό σημείο του πλέγματος (υπάρχουν 15 τέτοια σημεία) οδηγώντας σε ένα σύστημα 15 γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με ένα σύνολο 15 αγνώστων. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την επίλυση αυτών των ταυτόχρονων εξισώσεων.

Η μέθοδος χαλάρωσης είναι μια επαναληπτική μέθοδος στην οποία οι τιμές των τεσσάρων από τις ποσότητες στην (3.5.2) θεωρούνται γνωστές τιμές στο βήμα επανάληψης n και μόνο μία από τις ποσότητες θεωρείται ως άγνωστη στο βήμα επανάληψης n+1.

Στην (3.5.2) αν επιλέξουμε τον $\Phi_{i,j}$ ως άγνωστο, λύνοντας ως προς αυτόν έχουμε:

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{2(\Delta y)^2 + 2(\Delta x)^2} \left[\frac{\Phi_{i+i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \quad (3.5.3)$$

Στην (3.5.3) ο άνω δείκτης υποδηλώνει το βήμα επανάληψης. Ο $\Phi_{i,j}^{n+1}$ παριστάνει τον άγνωστο που πρόκειται να υπολογιστεί στο επόμενο βήμα επανάληψης, n+1 σε όρους των γνωστών ποσοτήτων $\Phi_{i+i,j}^n$, $\Phi_{i-1,j}^n$, $\Phi_{i,j+1}^n$, και $\Phi_{i,j-1}^n$ από το προηγούμενο βήμα n. (Αυτή η προσέγγιση καλείται μέθοδος *Jacobi*).

Για να αρχίσει η όλη διαδικασία, πρώτα θεωρούμε τιμές για την Φ σε όλα τα σημεία του πλέγματος εκτός από ένα, στο οποίο η Φ θεωρείται άγνωστη. Μετά από επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της (3.5.3) σε όλα τα σημεία του πλέγματος, έχουμε ολοκληρώσει την πρώτη επανάληψη, n=1 και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα n=2. αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όσες επαναλήψεις είναι απαραίτητες για να συγκλίνουμε σε μία λύση. Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε την εξίσωση (3.5.3) με εφαρμογή στο σημείο 21 του πλέγματος και πως έχουμε ήδη διεξάγει n επαναλήψεις τότε για την επανάληψη n+1 η (3.5.3) γίνεται:

$$\Phi_{21}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{2(\Delta y)^2 + 2(\Delta x)^2} \left[\frac{\Phi_{22}^n + \Phi_{20}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{24}^n + \Phi_{2}^n}{(\Delta y)^2} \right] \quad (3.5.4)$$

Στην (3.5.4) ο Φ_{21}^{n+1} είναι ο άγνωστος, οι Φ_{22}^n, Φ_{24}^n είναι γνωστοί από την προηγούμενη επανάληψη και οι Φ_{20}^n, Φ_{2}^n είναι γνωστοί από τις προκαθορισμένες οριακές συνθήκες. Συνιστάται οι ανανεωμένες τιμές του Φ να χρησιμοποιούνται όσο σύντομα είναι δυνατόν στο δεξιό μέλος της (3.5.3). για παράδειγμα αφού έχουμε υπολογίσει τον Φ_{21}^{n+1} από την (3.5.4) μετακινούμαστε στο σημείο 22 του πλέγματος όπου μια εφαρμογή της (3.5.3) αποδίδει:

$$\Phi_{22}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{2(\Delta y)^2 + 2(\Delta x)^2} \left[\frac{\Phi_{23}^n + \Phi_{21}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{25}^n + \Phi_{3}^n}{(\Delta y)^2} \right] \quad (3.5.5)$$

Έτσι με αυτό το σκεπτικό οι άγνωστοι Φ στην επανάληψη n+1 υπολογίζονται προοδευτικά κατά μήκος μιας δεδομένης γραμμής, σαρώνοντας από τα αριστερά προς τα δεξιά. (*Αυτή η προσέγγιση καλείται μέθοδος Gauss-Siedel*). Να σημειώσουμε πως κατά τη διάρκεια της προοδευτικής λύσης της (3.5.3) θα μπορούσαμε κάλλιστα να στήσουμε ακολουθίες που σαρώνουν από τα δεξιά προς τα αριστερά, από την βάση προς την κορυφή του πλέγματος ή αντίστροφα.

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για ένα αριθμό επαναλήψεων: η σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η διαφορά $\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n}$ γίνεται μικρότερη από κάποια προκαθορισμένη τιμή σε όλα τα σημεία του πλέγματος. Ο βαθμός στον οποίο επιθυμούμε να επιτευχθεί σύγκλιση βασίζεται σε εμάς: όσο περισσότερες επαναλήψεις λαμβάνουμε, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η ακρίβεια. Συχνά, η σύγκλιση σε μια λύση μερικές φορές μπορεί να εμπλουτισθεί από μια τεχνική που ονομάζεται **διαδοχική υπέρ-χαλάρωση** (*successive over relaxation [S.O.R]).* Αυτή είναι μια διαδικασία βασισμένη στην ακόλουθη ιδέα:

Αναπαριστούμε την (3.5.3) αποδίδοντας μια μέση τιμή του $\Phi_{i,j}$ συμβολισμένη με $\overline{\Phi_{i,j}^{n+1}}$ όπου:

$$\overline{\Phi_{i,j}^{n+1}} = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{2(\Delta y)^2 + 2(\Delta x)^2}\left[\frac{\Phi_{i+1,j}^{n} + \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^{n} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right] \qquad (3.5.6)$$

Σημειώνουμε πως έχουμε επιλέξει να γράψουμε την τιμή του $\Phi_{i-1,j}^{n+1}$ στην (3.5.6) στο επίπεδο επανάληψης n+1 με την υπόθεση πως σαρώνουμε από τα αριστερά προς τα δεξιά όπως συζητήσαμε παραπάνω και συνεπώς η τιμή του $\Phi_{i-1,j}^{n+1}$ είναι γνωστή σε αυτό το στάδιο. Παρομοίως, η $\Phi_{i,j-1}^{n+1}$ είναι γνωστή σε αυτό το στάδιο γιατί ξεκινάμε την σάρωση στη βάση του πλέγματος και βηματίζοντας διαδοχικά στην επόμενη ανώτερη γραμμή σημείων πλέγματος. Τότε χρησιμοποιούμε την τιμή του $\Phi_{i,j}^{n}$ που ελήφθη στο τέλος της προηγούμενης επανάληψης και τον $\overline{\Phi_{i,j}^{n+1}}$ που ελήφθη από την (3.5.6) για να εξάγουμε συμπερασματικά μια τιμή για το $\Phi_{i,j}^{n+1}$ ως ακολούθως:

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^{n} + \omega\left(\overline{\Phi_{i,j}^{n+1}} - \Phi_{i,j}^{n}\right) \qquad (3.5.7)$$

Στην (3.5.7) το **ω** είναι η παράμετρος χαλάρωσης της οποίας η τιμή βρίσκεται συνήθως από τον πειραματισμό δοκιμής-λάθους για ένα δεδομένο πρόβλημα.

Εάν **ω>1** η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **διαδοχική υπέρ-χαλάρωση** (*successive over relaxation [S.O.R]) ενώ* εάν **ω<1** τότε ονομάζεται **διαδοχική υπό-χαλάρωση** (*successive under-relaxation [S.U.R])* και χρησιμοποιείται συνήθως όταν η συμπεριφορά της σύγκλισης ταλαντεύεται μπρος πίσω ενδιάμεσα σε κάποια τιμή.

Για την S.O.R γενικά η τιμή του ω περιορίζεται από **1<ω<2**. σε κάθε περίπτωση η χρήση της (3.5.7) με μια κατάλληλη τιμή για την ω μπορεί να μειώσει τον αριθμό των επαναλήψεων που είναι απαραίτητες για να επιτευχθεί σύγκλιση και συνεπώς μειώνει τον υπολογιστικό χρόνο.

Ένας βολικότερος συμβολισμός για την (3.5.7) θα ήταν :

$$\boxed{\Phi_{i,j}^{new} = \omega \cdot \Phi_{i,j} + (1-\omega) \cdot \Phi_{i,j}^{old}}$$

3.6 Καθορισμός Οριακών Συνθηκών

Εξαιτίας της αδιάστατης ακτίνας r οι οριακές συνθήκες της γεωμετρίας θα περιγράφονται από τις τιμές:

$r = 1 = r_{εξωτερικό}$ και $r = 1/k = r_{εσωτερικό}$

όπου οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδενικές λόγω της συνθήκης της μη ολίσθησης (*no-slip condition*).

Επομένως για την (7΄) : $W_{1,j} = 0$ στο $r = 1$
$W_{1/k,j} = 0$ στο $r = 1/k$

Σημειώνουμε πως οι περιγραφή της ρευματοσυνάρτησης στα όρια θα γίνει με πίσω διαφορές στο

$r = 1 = r_{εξωτερικό}$ και με εμπρόσθιες στο $r = 1/k = r_{εσωτερικό}$

είναι:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta r} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=1/k} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta r} \qquad \text{και}$$

$$f_{(n,j)} = f_{(n-1,j)} \qquad f_{(1,j)} = f_{(2,j)}$$

Κεφάλαιο 4

Κώδικας επίλυσης σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90

Η λογική της επίλυσης βασίζεται όπως είπαμε στην επαναληπτική διαδικασία και στην μέθοδο χαλάρωσης που περιγράψαμε παραπάνω.

Ο αλγόριθμός είναι σχετικά απλός και λειτουργεί ως εξής:

Όσο το άθροισμα των σφαλμάτων παραμένει μεγαλύτερο από κάποια τιμή συνεχίζεται η επαναληπτική διαδικασία μέχρι τις 10000 επαναλήψεις και αντικαθίστανται οι παλιές τιμές της αξονικής ταχύτητας και ρευματοσυνάρτησης με αυτές που προκύπτουν από την επανάληψη.

Κώδικας σε Fortran

```
PROGRAM SOR_Ptyxiaki

IMPLICIT NONE
INTEGER(2)::i,j,n,m,iter,maxiter=10000
REAL::a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,a18,a19,a20,&
      Dean,eps,init_val,k,omega,r,sum_f,sum_w,theta

REAL(8),PARAMETER::pi=3.141592_8
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:,:)::f,f_old,f_new,w,w_old,w_new,error_f,error_w
       ,df,dw
REAL Dth,Dr

PRINT*,'====================================================================='
PRINT*,'                             W E L C O M E                           '
PRINT*,'====================================================================='
PRINT*,'This code is an application of the S.O.R. method for the numerical    '
PRINT*,'solution of equations of motion for the particular problem of the flow'
PRINT*,' in a curved annular pipe                                             '
PRINT*,'====================================================================='

PRINT*,'Give the discretization in r and th directions'
  READ*,n,m
PRINT*,'Give the value of k'
  READ*,k
PRINT*,'Give the value of omega'
  READ*,omega
PRINT*,'Give the initial value of w and f'
  READ*,init_val
PRINT*,'Give the value of eps'
  READ*,eps
PRINT*,'Give the Dean number'
  READ*,Dean

ALLOCATE(f(-2:n+2,-2:m+2),f_old(-2:n+2,-2:m+2),f_new(-2:n+2,-2:m+2),&
        w(-2:n+2,-2:m+2),w_old(-2:n+2,-2:m+2),w_new(-2:n+2,-2:m+2),&
        error_f(-2:n+2,-2:m+2),error_w(-2:n+2,-2:m+2),df(-2:n+2,-2:m+2),&
        dw(-2:n+2,-2:m+2))

   Dth=2.*pi/real(m)
   Dr=(1.-1./k)/real(n)
```

```
 InVal:DO j=1,m             !===================================================!
        DO i=2,n-1         !The Initial Value given by the user is assigned  !
          w(i,j)=init_val !at all internal grid points of f & w             !
          f(i,j)=init_val !===================================================!
        ENDDO
       ENDDO InVal

 BounConW:DO j=1,m      !===================================================!
           w(n,j)=0.0  !Determination of Boundary Conditions of w function!
           w(1,j)=0.0  !===================================================!
         ENDDO BounConW

 BounConF:DO j=1,m         !===================================================!
           f(n,j)=f(n-1,j)!Determination of Boundary Conditions of f function!
           f(1,j)=f(2,j)  !===================================================!
         ENDDO BounConF

OldVal:DO j=1,m               !==================================================!
        DO i=2,n-1            !Here, the initial values of f & w become the old!
           w_old(i,j)=w(i,j) !values for the first iteration and are not      !
           f_old(i,j)=f(i,j) !included in the next iterations                 !
        ENDDO                 !==================================================!
        ENDDO OldVal

theta=0.0

OPEN(666,FILE='f,w.DAT',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='new')
    iter=0
20  iter=iter+1

   Iterat:DO j=1,m           !============================================!
          theta =theta+Dth  !====Here starts the iterative procedure====!
          r=1./k            !============================================!
             DO i=2,n-1
              a1=Dr**4
              a2=Dr**4*Dth**3*r**3
              a3=Dr**4*Dth**2
              a4=Dr**4*Dth
              a5=Dr**3*Dth**4*r**4
              a6=Dr**3*Dth**3*r
              a7=Dr**3*Dth**2*r
              a8=Dr**3*Dth*r
              a9=Dr**2*Dth**4*r**2
              a10=Dr**2*Dth**3*r**2
              a11=Dr**2*Dth**2*r**2
              a12=Dr*Dth**4*r**3
              a13=Dr*Dth**3*r**3
              a14=Dth**4*r**4
              a15=Dr**3*Dth**4*r
              a16=(r*Dr*Dth)/(8.*r**2*Dth**2+8.*Dr**2)
              a17=(4.*Dr**2)/(8.*r**2*Dth**2+8.*Dr**2)
             a18=(4.*r**2*Dth**2+2.*r*Dr*Dth**2)/(8.*r**2*Dth**2+8.*Dr**2)
              a19=(4.*r**2*Dr**2*Dth**2)/(8.*r**2*Dth**2+8.*Dr**2)
             a20=(4.*r**2*Dth**2-2.*r*Dr*Dth**2)/(8.*r**2*Dth**2+8.*Dr**2)

 f_new(i,j)=omega*(1./((-96.*a14-96.*a1-8.*a11+128.*a3-32.*a9)-&
           f(i,j+1)*(16.*a10-32.*a4)+f(i,j-1)*(16.*a10-32.*a4))*&
          (f(i+1,j)*f(i+2,j+1)*a13-f(i+1,j)*f(i+2,j-1)*a13-&
           f(i+1,j)*f(i,j+1)*(2.*a13+8.*a8-8.*a13-4.*a6-8.*a8+8.*a10)+&
           f(i+1,j)*f(i,j-1)*(2.*a13+8.*a8-8.*a13-4.*a6-8.*a8+8.*a10)+&
           f(i+1,j)*f(i-2,j+1)*a13-f(i+1,j)*f(i-2,j-1)*a13-&
           f(i-1,j)*f(i+2,j+1)*a13+f(i-1,j)*f(i+2,j-1)*a13+&
           f(i-1,j)*f(i,j+1)*(2.*a13+8.*a8-8.*a13-4.*a6-8.*a8+8.*a10)-&
           f(i-1,j)*f(i,j-1)*(2.*a13+8.*a8-8.*a13-4.*a6-8.*a8+8.*a10)-&
           f(i-1,j)*f(i-2,j+1)*a13+f(i-1,j)*f(i-2,j-1)*a13+&
           f(i+1,j)*f(i+1,j+1)*2.*a10-f(i+1,j)*f(i+1,j-1)*2.*a10-&
           f(i+1,j)*f(i-1,j+1)*2.*a10+f(i+1,j)*f(i-1,j-1)*2.*a10-&
```

```
            f(i-1,j)*f(i+1,j+1)*2.*a10+f(i-1,j)*f(i+1,j-1)*2.*a10+&
            f(i-1,j)*f(i-1,j+1)*2.*a10-f(i-1,j)*f(i-1,j-1)*2.*a13+&
            f(i+1,j)*f(i,j+2)*4.*a8-f(i+1,j)*f(i,j-2)*4.*a7-&
            f(i-1,j)*f(i,j+2)*4.*a8+f(i-1,j)*f(i,j-2)*4.*a8-&
            f(i,j+1)*f(i+2,j)*4.*a13+f(i,j+1)*f(i-2,j)*4.*a13+&
            f(i,j-1)*f(i+2,j)*4.*a13-f(i,j-1)*f(i-2,j)*4.*a13+&
            f(i,j+1)*f(i,j+1)*16.*a4-f(i,j-1)*f(i,j-1)*16.*a4-&
            f(i,j+1)*f(i+1,j+1)*4.*a8-f(i,j+1)*f(i+1,j-1)*4.*a8+&
            f(i,j+1)*f(i-1,j+1)*4.*a8+f(i,j+1)*f(i-1,j-1)*4.*a8+&
            f(i,j-1)*f(i+1,j+1)*4.*a8+f(i,j-1)*f(i+1,j-1)*4.*a8-&
            f(i,j-1)*f(i-1,j+1)*4.*a8-f(i,j-1)*f(i-1,j-1)*4.*a8+&

            w(i,j)*w(i+1,j)*8.*a5*sin(theta)-&
            w(i,j)*w(i-1,j)*8.*a5*sin(theta)+&
            w(i,j)*w(i,j+1)*8.*a2*cos(theta)-&
            w(i,j)*w(i,j-1)*8.*a2*cos(theta)-&

            f(i+2,j)*(-16.*a14-16.*a12+16.*a11)-&
            f(i+1,j)*(64.*a14+32.*a12-32.*a7+16.*a9-8.*a15)+&
            f(i-1,j)*(64.*a14-32.*a12+32.*a7+16.*a9+8.*a15)-&
            f(i-2,j)*(-16.*a14+16.*a12+8*a11)-f(i,j+2)*(-16.*a1)-&
            f(i,j+1)*(64.*a1+16.*a11-64.*a3)-f(i,j-1)*(64.*a1+16.*a11-64.*a3)-&
            f(i,j-2)*(-16.*a1)-f(i+2,j+1)*(-8.*a11)-&
            f(i+2,j-1)*(-8.*a11)-f(i-2,j+1)*(-8.*a11)-f(i-2,j-1)*(-8.*a11)-&
            f(i+1,j+1)*16.*a7-f(i+1,j-1)*16.*a7-f(i-1,j+1)*(-16.*a7)-&
            f(i-1,j-1)*(-16.*a7)))+(1.-omega)*f_old(i,j)

w_new(i,j)=omega*(a16*w(i,j+1)*f(i+1,j)-a16*w(i,j+1)*f(i-1,j)+a17*w(i,j+1)-&
           a16*w(i,j-1)*f(i+1,j)+a16*w(i,j-1)*f(i-1,j)+a17*w(i,j-1)-&
           a16*w(i+1,j)*f(i,j+1)+a16*w(i+1,j)*f(i,j-1)+a18*w(i+1,j)+&
           a16*w(i-1,j)*f(i,j+1)-a16*w(i-1,j)*f(i,j-1)+a20*w(i-1,j)+a19*Dean)+&
           (1.-omega)*w_old(i,j)

WRITE (*,100) f_new(i,j),w_new(i,j),iter,j,i
100  FORMAT (T3,'f=',D15.8,TR2,'w=',D15.8,TR2,'Iter=',I7.5,TR2,'j=',&
             I7.5,TR2,'i=',I7.5)

    r=r+Dr

         ENDDO
ENDDO Iterat

NewValf:DO j=1,m              !=============================================!
          DO i=2,n-1          !Assignment of the calculated values of f to !
            f(i,j)=f_new(i,j) !the running values of f                     !
          ENDDO               !=============================================!
         ENDDO NewValf

NewValw:DO j=1,m               !=============================================!
          DO i=2,n-1            !Assignment of the calculated values of w to !
            w(i,j)=w_new(i,j)   !the running values of w                    !
           ENDDO                !=============================================!
         ENDDO NewValw

Diffs:DO j=1,m                                    !======================!
         DO i=2,n-1                                !Differences of calcu  !
           df(i,j)=abs(abs(f(i,j))-abs(f_old(i,j)))  !lated & old values    !
           dw(i,j)=abs(abs(w(i,j))-abs(w_old(i,j)))  !======================!
          ENDDO
       ENDDO Diffs

sum_f=0.0

Errorf:DO j=1,m                         !================================!
         DO i=2,n-1                     !Relative Error of f and sum of!
           error_f(i,j)=df(i,j)/f_old(i,j) !all errors                     !
           sum_f=abs(sum_f+error_f(i,j))   !================================!
```

```
WRITE (*,200) sum_f,iter,j,i
200    FORMAT (T3,'Sum of f errors=',D15.8,TR2,'Iter=',I7.5,TR2,'j=',&
               I7.5,TR2,'i=',I7.5)
         ENDDO
       ENDDO Errorf

sum_w=0.0

Errorw:DO j=1,m                              !==============================!
         DO i=2,n-1                          !Relative Error of w and sum of!
           error_w(i,j)=dw(i,j)/w_old(i,j)   !all errors                    !
           sum_w=abs(sum_w+error_w(i,j))     !==============================!

WRITE (*,300) sum_f,iter,j,i
300    FORMAT (T3,'Sum of w errors=',D15.8,TR2,'Iter=',I7.5,TR2,'j=',&
               I7.5,TR2,'i=',I7.5)
           ENDDO
       ENDDO  Errorw

New2old:DO j=1,m                     !======================================!
           DO i=2,n-1                !Assignment of the running values of f !
            w_old(i,j)=w_new(i,j)   !& w to the old ones to be used in the !
            f_old(i,j)=f_new(i,j)   !next iteration                        !
           ENDDO                    !======================================!
         ENDDO New2old

CLOSE (666)

Control:DO j=1,m                               !==========================!
           DO i=2,n-1                          !Control of the convergence!
       IF (((sum_w.gt.eps).or.(sum_f.gt.eps))&  !& number of iterations   !
           .and.(iter.lt.maxiter)) THEN         !=========================!

       GOTO 20

       ELSE
       EXIT Control
       WRITE(*,*) 'Error less than eps, convergence'
       WRITE(*,*) 'Iter=',iter
       STOP
       ENDIF

           ENDDO
         ENDDO Control

END PROGRAM SOR_Ptyxiaki
```

Σημειώνουμε πως δεν ήταν δυνατή η σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας και ο κώδικας μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων αποκλίνει. Για το λόγο αυτό θα επικεντρωθούμε στην **αναλυτική λύση** των εξισώσεων κίνησης (ρευματοσυνάρτηση, αξονική ταχύτητα) για την παρουσίαση αποτελεσμάτων και δυστυχώς δεν θα είναι δυνατή η σύγκριση με τα αποτελέσματα της **αριθμητικής λύσης**.

Κεφάλαιο 5

Αναλυτική λύση των εξισώσεων σύμφωνα με τη θεωρία διαταραχών

Η αναλυτική λύση βασίζεται στην θεωρία διαταραχών κατά την οποία αναζητούμε λύσεις για την w και f σε μορφή σειράς εξάγοντας συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να επιλυθούν με τις γνωστές μεθόδους :

$$w = Dw_1 + D^3 w_2 + \ldots \qquad (5.0.1)$$

και

$$f = D^2 f_1 + D^4 f_2 + \ldots \qquad (5.0.2)$$

Επιστρέφοντας στις αδιαστατικοποιημένες εξισώσεις της παραγράφου 2.2 είχαμε καταλήξει στις αδιάστατες εξισώσεις (6') και (7'):

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}\right)\nabla^2 f + w\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta}\cos\theta\right) = -r\,\nabla^4 f} \qquad (6')$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = D + \nabla^2 w} \qquad (7')$$

5.1 Εξαγωγή διαφορικών εξισώσεων από την αδιάστατη εξίσωση (7') για τον υπολογισμό των W_1, W_2.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7') τις (5.0.1) και (5.0.2) έχουμε :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(D^2 f_1 + D^4 f_2 + \ldots\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Dw_1 + D^3 w_2 + \ldots\right) +$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(D^2 f_1 + D^4 f_2 + \ldots\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(Dw_1 + D^3 w_2 + \ldots\right) = D + \nabla^2\left(Dw_1 + D^3 w_2 + \ldots\right)$$

Από την οποία εξισώνοντας τις όμοιες δυνάμεις του D εξάγονται οι σχέσεις:

$\boxed{\nabla^2 w_1 = -1}$ (5.1.1) για τον προσδιορισμό της w_1 και

$\boxed{\nabla^2 w_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\frac{\partial w_1}{\partial r}}$ (5.1.2) για τον προσδιορισμό της w_2 η οποία

εξάγεται από την $\nabla^2 w_2 = \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial f_1}{\partial r}\cancel{\frac{\partial w_1}{\partial \theta}} + \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)$ με το W_1 να είναι ανεξάρτητο της γωνίας θ άρα $\frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0$

5.2 Υπολογισμός της W_1

Από την (5.1.1) έχουμε : $\nabla^2 w_1 = -1 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial^2 \theta} + 1 = 0$

Το w_1 είναι ανεξάρτητο του θ όπως είπαμε και θέτοντας τον μετασχηματισμό (Μ):

$\omega = \frac{dw_1}{dr}$ η (5.1.1) γράφεται ως $\omega' + \frac{1}{r}\omega = -1$.

Ο γενικός τύπος της μη ομογενούς διαφορικής είναι:

$\boxed{\omega = e^{-\int P(r)dr} \cdot \left[\int Q(r) \cdot e^{\int P(r)dr} dr + C_1 \right]}$ και αντικαθιστώντας για την (5.1.1) έχουμε:

$$\omega = e^{-\int \frac{1}{r}dr} \cdot \left[\int (-1) \cdot e^{\int \frac{1}{r}dr} dr + C_1 \right] = e^{-\ln r} \cdot \left[-1 \int e^{\int \ln r} dr + C_1 \right] = \frac{1}{r}\left[(-1)\frac{r^2}{2} + C_1 \right] = -\frac{r}{2} + \frac{1}{r}C_1$$

και με αντικατάσταση του ω με τον αρχικό μετασχηματισμό έχουμε:

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{r}{2} + \frac{1}{r}C_1 \Rightarrow dw_1 = \left(-\frac{r}{2} + \frac{1}{r}C_1 \right) dr \Leftrightarrow \int dw_1 = -\frac{1}{2}\int r dr + C_1 \int \frac{1}{r} dr$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = -\frac{1}{4}r^2 + C_1 \ln r + C_2}$$

Οι σταθερές C_1, C_2 προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες:

$$w_1\Big|_{r=1} = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{4} + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1/4}$$ και

$$W_1\Big|_{r=1/k} = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{4}\left(1/k\right)^2 + C_1 \cdot \ln\left(1/k\right) + C_2 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{4k^2} + C_1 \cdot \left(\ln 1 - \ln k\right) + 1/4$$

$$\Rightarrow C_1 4 \ln k = 1 - \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \boxed{C_1 = -\frac{\left(1 - 1/k^2\right)}{4 \ln k}}$$

Επομένως $\boxed{w_1 = -\frac{1}{4}r^2 + \frac{\left(1 - 1/k^2\right)}{4\ln k}\ln r + 1/4}$ (5.2)

Τιμές του k για την γραφική απεικόνιση της W1, (k = 2,5,10). Τα αποτελέσματα και ο σχολιασμός βρίσκονται στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

5.3 Εξαγωγή διαφορικών εξισώσεων από την αδιάστατη εξίσωση (6′) για τον υπολογισμό των f_1, f_2.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (6′) τις (5.0.1) και (5.0.2) έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(D^2 f_1 + D^4 f_2 + ...\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\nabla^2\left(D^2 f_1 + D^4 f_2 + ...\right) -$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(D^2 f_1 + D^4 f_2 + ...\right)\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\left(D^2 f_1 + D^4 f_2 + ...\right) +$$

$$\left(Dw_1 + D^3 w_2 + ...\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(Dw_1 + D^3 w_2 + ...\right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(Dw_1 + D^3 w_2 + ...\right)\cos\theta\right)$$

$$= -r\nabla^4\left(D^2 f_1 + D^4 f_2 + ...\right)$$

Και εξισώνοντας τις όμοιες δυνάμεις του αριθμού Dean λαμβάνουμε την παρακάτω σχέση:

$$\boxed{r \cdot w_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} \sin\theta = -r \cdot \nabla^4 f_1} \qquad (5.3)$$

από την οποία υπολογίζουμε την f_1 με γνωστή την w_0 και την απαλοιφή του r.

5.4 Υπολογισμός της f_1

Έχοντας υπολογίσει την w_1, βρίσκουμε την παράγωγο $\frac{\partial w_1}{\partial r}$ και αντικαθιστούμε αυτή καθώς και την τιμή της w1 στην (5.3).

Είναι:

$$-w_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} \sin\theta =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{8}r^3 + \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} + \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 r} - \frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 r} \\ + \frac{1}{8}r + \frac{1}{8}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2 r} - \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 r} + \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)r} \end{array}\right]\sin\theta$$

$$\leftrightarrow$$

$$\nabla^4 f_1 = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{8}r^3 + \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} + \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 r} \\ - \frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 r} + \frac{1}{8}r + \frac{1}{8}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2 r} - \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 r} + \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)r} \end{array}\right]\sin\theta$$

Ο $\nabla^4 f_1$ μπορεί να γραφτεί ως $\boxed{\nabla^4 f_1 = \nabla^2\left(\nabla^2 f_1\right) = \nabla^2 z}$

Άρα :

$$\nabla^2 z = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}r^3 + \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} + \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 r} \\ -\frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 r} + \frac{1}{8}r + \frac{1}{8}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2 r} - \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 r} + \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)r} \end{bmatrix} \sin\theta$$

Αναζητούμε λύση της μορφής $z = \bar{z}\sin\theta$, έτσι έχουμε:

$$\frac{d^2\bar{z}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{z}}{dr} - \frac{1}{r^2}\bar{z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}r^3 + \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{16}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} + \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2} - \frac{1}{8}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 r} \\ -\frac{1}{16}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 r} + \frac{1}{8}r + \frac{1}{8}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2 r} - \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 r} + \frac{1}{16\ln\left(\frac{1}{k}\right)r} \end{bmatrix} \sin\theta$$

Από το μετασχηματισμό του Euler $r = e^s$ έχουμε : $dr = e^s ds \Rightarrow \frac{ds}{dr} = \frac{1}{e^s}$

Συνεπώς: $\frac{d\bar{z}}{dr} = \frac{d\bar{z}}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{1}{e^s}\frac{d\bar{z}}{ds} = \frac{d\bar{z}}{ds}e^{-s}$ και $\frac{d^2\bar{z}}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{e^s}\frac{d\bar{z}}{ds}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d\bar{z}}{ds} + \frac{1}{r}\frac{d^2\bar{z}}{ds^2}\frac{1}{r}$

Και τελικά αντικαθιστώντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d\bar{z}}{ds} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\bar{z}}{ds^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d\bar{z}}{ds} - \frac{1}{r^2}\bar{z} = [\text{συνάρτηση}]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\bar{z}}{ds^2} - \bar{z} = [\text{συνάρτηση}]$$

Θέτοντας $z_1 = \frac{d\bar{z}}{ds}$ έχουμε: $\Rightarrow \frac{dz_1}{ds} - z_1 = [\text{συνάρτηση}]$

$$\Rightarrow z_1 = e^{-\int(-1)ds}\left[\int [\text{συνάρτηση}]\cdot e^{2s}e^{\int(-1)ds}ds + C_1\right]$$

$$=-\frac{1}{16}\frac{e^s\ln e^s s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{16}\frac{e^s\ln e^s s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{8}\frac{e^s\ln e^s s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{16}\frac{\ln e^s e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{16}\frac{\ln e^s e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{32}\frac{e^s s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{32}\frac{e^s s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4}-\frac{1}{16}\frac{e^s s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2}+\frac{1}{16}\frac{e^s s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{16}\frac{e^s s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2}-\frac{1}{32}e^{5s}+\frac{1}{16}e^{3s}+e^s C_1$$

$$\Rightarrow z_2=e^{\int(-1)ds}\left[\int[z_1]\cdot e^{\int ds}ds+C_2\right]$$

$$=-\frac{1}{64}\frac{\ln e^s e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{64}\frac{\ln e^s e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{64}\frac{\ln e^s e^s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{64}\frac{\ln e^s e^s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{32}\frac{\ln e^s e^s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{32}\frac{\ln e^s e^s s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{32}\frac{\ln e^s e^s s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{16}\frac{\ln e^s e^s s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{192}e^{5s}-\frac{1}{256}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{256}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{64}e^{3s}$$

$$+\frac{1}{2}e^s C_1-\frac{1}{128}\frac{e^s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{128}\frac{e^s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{64}\frac{e^s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{64}\frac{e^s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{64}\frac{e^s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$-\frac{1}{32}\frac{se^s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{32}\frac{se^s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{64}\frac{s^2e^s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{64}\frac{s^2e^s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{32}\frac{s^2e^s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{C_2}{e^s}$$

$$\Rightarrow z_3=e^{-\int(-1)ds}\left[\int[z_2]\cdot e^{2s}e^{\int(-1)ds}ds+C_3\right]$$

$$=-\frac{1}{64}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+e^sC_2s+e^sC_3+\frac{1}{512}\frac{e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{3}{256}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{3s}C_1+\frac{1}{64}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$-\frac{1}{64}\frac{e^{3s}\ln e^{s}s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{32}\frac{e^{3s}\ln e^{s}s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{128}\frac{e^{3s}s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{64}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{64}\frac{e^{3s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{512}\frac{e^{5s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$-\frac{1}{256}\frac{e^{5s}\ln e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{3}{128}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{3}{256}\frac{e^{3s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{64}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{32}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{64}\frac{e^{3s}s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{128}\frac{e^{3s}s^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{64}\frac{e^{3s}s^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{64}\frac{e^{3s}\ln e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{256}\frac{e^{5s}\ln e^{s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$-\frac{1}{1152}e^{7s}+\frac{1}{256}e^{5s}$$

$$\Rightarrow f_1 = e^{\int(-1)ds}\left[\int[z_3]\cdot e^{\int ds}ds + C_4\right]$$

$$=-\frac{5}{1024}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{2}e^{s}C_2 s+\frac{1}{2}e^{s}C_3+\frac{1}{2304}\frac{e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{17}{4096}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{16}e^{3s}C_1$$

$$+\frac{5}{1024}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{256}\frac{e^{3s}\ln e^{s}s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{128}\frac{e^{3s}\ln e^{s}s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{512}\frac{e^{3s}s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{5}{1024}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{256}\frac{e^{3s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{2304}\frac{e^{5s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{1536}\frac{e^{5s}\ln e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{17}{2048}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{17}{4096}\frac{e^{3s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{4}e^{s}C_2$$

$$+\frac{5}{1024}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{5}{512}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{256}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{512}\frac{e^{3s}s^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{256}\frac{e^{3s}s^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{256}\frac{e^{3s}\ln e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{1}{1536}\frac{e^{5s}\ln e^{s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{9216}e^{7s}+\frac{1}{1536}e^{5s}+\frac{C_4}{e^{s}}$$

Και αντικαθιστώντας το s με το lnr (μετασχηματισμός Euler) η f_1 γίνεται:

$$-\frac{1}{4}rC_2+\frac{1}{2}rC_3+\frac{1}{2304}\frac{r^5}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{17}{4096}\frac{r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{1}{16}r^3C_1+\frac{C_4}{r}-\frac{5}{1024}\frac{r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{9216}r^7$$

$$+\frac{1}{1536}r^5-\frac{1}{512}\frac{r^3\ln^2 r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{5}{1024}\frac{r^3}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{2}r\ln rC_2+\frac{5}{1024}\frac{r^3\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}-\frac{1}{256}\frac{r^3\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$+\frac{1}{1536}\frac{r^5\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

Ο υπολογισμός των C1, C2, C3, C4 θα γίνει από τις οριακές συνθήκες :

$$\left.\overline{f_1}\right|_{r=1}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{4}C_2+\frac{1}{2}C_3-\frac{41}{9216\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{17}{4096\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{1}{16}C_1+C_4+\frac{5}{9216}$$

$$-\frac{17}{4096k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{17}{2048k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{41}{9216k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}=0 \qquad (5.4.1)$$

και

$$\left.\overline{f_1}\right|_{r=1/k}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\frac{C_2}{k}+\frac{1}{2}\frac{C_3}{k}-\frac{41}{9216k^5\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{17}{4096k^3\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{1}{16}\frac{C_1}{k^3}+kC_4-\frac{13}{9216k^7}$$

$$-\frac{17}{4096k^7\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{512k^3}+\frac{17}{2048k^5\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{41}{9216k^7\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{2}\frac{C_2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k}=0 \qquad (5.4.2)$$

καθώς επίσης και για την παράγωγο ισχύει:

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}=-\frac{5}{1536}\frac{r^4\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{11}{1024}\frac{r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{4}C_2+\frac{1}{2}C_3-\frac{3}{256}\frac{r^2\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{5}{1536}\frac{r^4\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$-\frac{7}{9216}r^6+\frac{5}{1536}r^4+\frac{3}{16}r^2C_1-\frac{C_4}{r^2}+\frac{7}{4608}\frac{r^4}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{3}{256}\frac{r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{3}{512}\frac{r^2\ln^2 r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$-\frac{31}{4096}\frac{r^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{31}{2048}\frac{r^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{11}{1024}\frac{r^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{7}{4608}\frac{r^4}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{3}{512}\frac{r^2\ln^2 r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$+\frac{11}{1024}\frac{r^2\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{3}{256}\frac{r^2\ln^2 r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{11}{512}\frac{r^2\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{31}{4096}\frac{r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{11}{1024}\frac{r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{2}C_2\ln r$$

Με οριακές συνθήκες:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial r}\right|_{r=1}=0\Leftrightarrow\frac{23}{9216}+\frac{1}{4}C_2+\frac{1}{2}C_3+\frac{3}{16}C_1-C_4-\frac{85}{9216\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{31}{4096k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$+\frac{31}{2048k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{85}{9216k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{31}{4096\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}=0 \qquad (5.4.3)$$

Και

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial r}\right|_{r=1/k}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}C_2+\frac{1}{2}C_3-\frac{31}{9216k^6}+\frac{3}{16}\frac{C_1}{k^2}-k^2C_4-\frac{85}{9216k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{3}{512k^2}$$

$$-\frac{31}{4096k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{31}{2048k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+-\frac{85}{9216k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{31}{4096k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{2}C_2\ln\left(\frac{1}{k}\right)=0 \qquad (5.4.4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (5.4.1), (5.4.2), (5.4.3), (5.4.4) έχουμε:

$$C_1=-\frac{1}{768}\frac{1}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\left(36-36k^6+44\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+63\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4\right.$$

$$+12k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-20k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+104k^4-63\ln\left(\frac{1}{k}\right)+63\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2-24k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-63k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\left.-12\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-108k^2-12k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+12k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\right)$$

$$C_2=-\frac{1}{9216}\frac{1}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\left(-45-90k^6+8k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\right.$$

$$-252k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)+44k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38\ln\left(\frac{1}{k}\right)+88k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)+88k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)+90k^2+45k^8$$

$$\left.-44k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$C_3 = -\frac{1}{9216}\frac{1}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\left(45k^6+8k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\right.$$

$$+8k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-44k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)-171k^4-36k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-126k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)+207k^2-36\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$\left.+132\ln\left(\frac{1}{k}\right)-81\right)$$

$$C_4 = -\frac{1}{36864}\frac{1}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\left(-38k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)-36k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+45k^6\right.$$

$$+8k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)-88k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-36k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-135k^4-38k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)-45$$

$$\left.+88k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-135k^2-8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38\ln\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Τέλος αντικαθιστώντας τα C1, C2, C3, C4 στην f1 και πολλαπλασιάζοντας με sinθ έχουμε την παράσταση της ρευματοσυνάρτησης:

$$f_1 = \left\{\frac{1}{1536}\frac{r^5\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{36864}\frac{1}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\left[r\left(-45-90k^6\right.\right.\right.$$

$$+8k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-252k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)+44k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38\ln\left(\frac{1}{k}\right)+88\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2$$

$$+88k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)+90k^2+45k^8-44k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\Big)\Big]\Big]$$

$$+\frac{1}{18432}\frac{1}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\Big[r\Big(45k^6+8k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$+8k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-44k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)-171k^4-36k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-126k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)+207k^2-36\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+132\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$-81\Big)\Big]+\frac{1}{2304}\frac{r^5}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{17}{4096}\frac{r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{12288}\frac{1}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\Big[r^3\Big(36$$

$$-36k^6+44\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+63k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)+12k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-20k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+108k^4-63\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$+63k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)-24k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-63k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)-12\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-108k^2-12k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$+12k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\Big)\Big]-\frac{5}{512}\frac{r^3\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{256}\frac{r^3\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{1536}r^5-\frac{1}{512}\frac{r^3\ln^2 r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{256}\frac{r^3\ln^2 r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{36864}\frac{1}{rk^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\Big(-38k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)-36\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$+45k^6+8k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)-88k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-36k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-135k^4-38k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)-45$$

$$+88k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+135k^2-8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+38\ln\left(\frac{1}{k}\right)\Bigg)-\frac{5}{1024}\frac{r^3\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{1536}\frac{r^5\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$-\frac{1}{2304}\frac{r^5}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{1}{512}\frac{r^3\ln^2 r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{5}{1024}\frac{r^3\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{17}{2048}\frac{r^3}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{5}{1024}\frac{r^3}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{1}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\Big[r\Big(-45-90k^6+8k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$-252k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)+44k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+88k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)+88k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)+90k^2+45k^8-44k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$+38k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\Big)\ln r\Big]+\frac{1}{256}\frac{r^3\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{17}{4096}\frac{r^3}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}\Bigg\}\sin\theta$$

<u>5.5 Υπολογισμός της w_2</u>

Η w_2 υπολογίζεται από την σχέση (5.1.2) $\boxed{\nabla^2 w_2=\frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial\theta}\frac{\partial w_1}{\partial r}}$ με γνωστή την f_1

Εάν απλουστεύσουμε τη σχέση $\frac{1}{r}\frac{\partial f_1/\partial\theta\times\partial w_1/\partial r}{\cos\theta}$ (διαιρούμε με cosθ για την απλοποίηση του ημιτόνου μετά την παραγώγιση) αυτή θα είναι:

$$\frac{1}{147456}\frac{1}{r^3k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2\right)}\Big[\Big(-45+45k^6+144r^4k^4\ln r\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$-24r^6\ln r k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 90r^2\ln r - 36k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 36k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 180r^4k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$-24r^6k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 24r^6k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right) - 72r^4k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln^2 r - 48r^6k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r + 468r^4k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r$$

$$+36r^4k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r - 504r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r + 88r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\ln r + 176r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r$$

$$+176r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r - 88r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\ln r + 76r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r - 324r^4k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r$$

$$+72r^4k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln^2 r + 38k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right) - 72r^4k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln^2 r + 24r^6k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r - 144r^4k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\ln r$$

$$+16r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\ln r + 8r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 38r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 24r^6k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 4r^8k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$+32r^6k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right) - 38k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 8k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 45r^2 + 4r^8k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 + 4r^8k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$+4r^8k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 24r^6k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 24r^6k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 40r^6k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 216r^4k^4\ln^2 r$$

$$-216r^4k^6\ln^2 r + 16r^4k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 72r^4k^8\ln^2 r - 180r^4k^8\ln r - 180r^4k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 180r^2k^6\ln r$$

$$-16r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\ln r + 180r^2k^2\ln r + 90r^2k^8\ln r + 72r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 + 252r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$+72r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 16r^6k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 144r^4k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right) - 324r^4k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 132r^4k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$+36r^4k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+120r^4k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+216r^4k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)-72r^4k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-36r^4k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$+38\ln\left(\frac{1}{k}\right)-135k^4+74r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)+254r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)-220r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-128r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$-16r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3r-16r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-72r^4k^2\ln^2r-16r^6k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)+180r^4k^2\ln r+540r^4k^6\ln r$$

$$+72r^4k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln^2r-88k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+135k^2-84r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-162r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$+44r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-38k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)-8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+88k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-36r^4k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+36r^4k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$+90r^2k^6-90r^2k^2-45r^2k^8+45r^4k^8+135r^4k^4+76r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r-36r^4k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\left.\left.-540r^4k^4\ln r-135r^4k^6-45r^4k^2\right)\left(2r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1+k^2\right)\right]$$

Με αντικατάσταση του μετασχηματισμού Euler $r=e^s$ και ολοκλήρωση έχουμε:

$$\Rightarrow z_1=e^{-\int(-1)ds}\left[\int[\text{συνάρτηση}]\cdot e^{2s}e^{\int(-1)ds}ds+X_6\right]$$

$$=-\frac{15}{8192}\frac{e^s\ln e^s s}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{36864}\frac{e^s\ln e^s s}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{8192}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{7}{2048}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{7}{8192}\frac{k^{2}e^{3s}\ln e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{21}{4096}\frac{e^{3s}\ln e^{s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{11}{18432}\frac{e^{s}\ln e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{17}{24576}\frac{e^{5s}\ln e^{s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{17}{24576}\frac{e^{5s}\ln e^{s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{17}{24576}\frac{k^{2}e^{5s}\ln e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{5}{24576}\frac{e^{5s}\ln e^{s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{85}{18432}\frac{e^{s}\ln e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{11}{18432}\frac{e^{s}\ln e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{11}{12288}\frac{e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{17}{73728}\frac{e^{3s}}{k^{6}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{15}{16384}\frac{e^{s}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{15}{16384}\frac{e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{9216}\frac{e^{s}k^{2}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1}$$

$$+\frac{17}{12288}\frac{e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{11}{18432}\frac{\ln e^{s}e^{3s}}{k^{4}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{9216}\frac{\ln e^{s}e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{9216}\frac{\ln e^{s}e^{3s}}{k^{6}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{41}{24576}\frac{\ln e^{s}e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{211}{294912}\frac{k^{2}e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{197}{294912}\frac{e^{5s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{57}{16384}\frac{e^{3s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{19}{73728k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)e^{s}}+\frac{1}{3072k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)e^{s}}$$

$$-\frac{1}{36864k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)e^{s}}-\frac{3}{2048}\frac{e^{3s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{89}{73728}\frac{e^{3s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{9}{16384}\frac{k^{2}e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{5}{8192k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)e^{s}}-\frac{85}{36864}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{15}{16384}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{8192}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{5s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{5s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{4096}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{5s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{4096}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{147456}\frac{e^{9s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1}+e^{s}X_{6}$$

$$+\frac{1}{18432}\frac{e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1}-\frac{1}{4096}\frac{e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1}$$

$$-\frac{1}{36864\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)e^{s}}+\frac{1}{9216}\frac{e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1}$$

$$-\frac{17}{24576}\frac{e^{5s}}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{3}{2048}\frac{e^{3s}}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{2048}\frac{k^{2}e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1}-\frac{37}{73728}\frac{k^{2}e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1}$$

$$+\frac{1}{8192k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}+\frac{1}{12288}\frac{e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{512}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{8192k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}$$

$$-\frac{19}{147456\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}-\frac{11}{9216}\frac{e^{3s}}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{9s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}+\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}$$

$$-\frac{1}{9216}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}-\frac{5}{32768\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}$$

$$-\frac{415}{294912}\frac{e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{7}{73728}\frac{k^2e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}$$

$$+\frac{17}{73728}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{18432}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}$$

$$+\frac{11}{24576}\frac{e^{5s}}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{32768}\frac{k^2e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{32768}\frac{e^{3s}}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{18432}\frac{e^s s}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{3s}}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{36864}\frac{k^2 e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{24576}\frac{e^{7s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{12288}\frac{e^{5s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{71}{73728}\frac{e^{3s}}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{8192}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{7s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{15}{16384k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}$$

$$+\frac{7}{294912}\frac{e^{5s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{3072k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}$$

$$+\frac{1}{512}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{3}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{5s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{3s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{1024}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{3s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{3s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{e^{s}s}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{137}{36864}\frac{e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{101}{73728}\frac{e^{s}s}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{11}{36864}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{4096}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{8192}\frac{e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{5}{8192}\frac{e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{4096}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{15}{16384}\frac{e^{s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{e^{s}s}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384}\frac{k^2e^s s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{24576}\frac{e^{7s}}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{7s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{8192}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^s s}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{1024}\frac{\ln\left(e^s\right)^2e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(e^s\right)^2e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{17}{8192}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{36864}\frac{e^{5s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{2048}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{3s}}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{8192}\frac{e^{3s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}-\frac{3}{4096}\frac{\ln\left(e^s\right)^2e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{s^{2}e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{25}{73728}\frac{e^{s}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{11}{18432}\frac{e^{s}s}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{59}{18432}\frac{e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{5}{16384}\frac{e^{3s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)e^{s}}+\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{3s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{25}{36864}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{5}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{85}{18432}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{1152}\frac{e^{s}k^{2}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{19}{36864}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{9216}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{25}{36864}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{9216}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{s}s}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{5}{4096}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{k^{2}e^{9s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{18432}\frac{e^{s}s}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{7}{12288}\frac{k^{2}e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{19}{73728}\frac{k^{2}e^{s}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{11}{36864}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{253}{73728}\frac{e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{343}{73728}\frac{e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{11}{12288}\frac{e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{25}{73728}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{85}{36864}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{3}{2048}\frac{\ln\left(e^{s}\right)^{2}e^{3s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{2048}\frac{e^{s}\ln\left(\frac{1}{k}\right)s}{k^{4}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{3}{1024}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{k^{2}e^{s}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{15}{8192}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{5}{8192}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{19}{36864}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{29}{24576}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{19}{9216}\frac{e^{s}s}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{31}{18432}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{18432}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{7s}}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{2048}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{18432}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{7s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{9216}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{2048}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{11}{9216}\frac{e^{s}s}{k^{4}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{147456}\frac{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{9s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{24576}\frac{k^2e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{8192k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}$$

$$-\frac{11}{18432k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}-\frac{19}{73728k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)e^s}$$

$$-\frac{35}{73728}\frac{k^2e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{3}{4096}\frac{k^2\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{18432}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{7s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{k^2\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{18432}\frac{k^2\ln\left(e^s\right)e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{3}{2048}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{e^ss^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{8192}\frac{e^ss^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{73728}\frac{e^ss^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{73728}\frac{e^ss}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{13}{18432}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{17}{8192}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{5s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384}\frac{e^s k^2 s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{8192}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{21}{8192}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{9216}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{3s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$\Rightarrow z_2=e^{\int(-1)ds}\left[\int[z_1]\cdot e^{\int ds}ds+X_7\right]$$

$$\Rightarrow\frac{5}{16384}\frac{e^s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{16384}\frac{e^s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768}\frac{e^s}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{32768}\frac{e^s k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{16384}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{73728}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{1024}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{k^2\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{3}{2048}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{36864}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{19}{147456}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{19}{147456}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{7}{147456}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{85}{36864}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{11}{36864}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{7}{32768}\frac{e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{19}{294912}\frac{e^{3s}}{k^{6}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{85}{73728}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{s}}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{11}{73728}\frac{e^{s}}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{211}{294912}\frac{e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{15}{32768}\frac{e^{s}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{15}{32768}\frac{e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{18432}\frac{e^{s}k^{2}s}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{17}{24576}\frac{e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{11}{73728}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{k^{4}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{73728}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{k^{6}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{43}{147456}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{91}{589824}\frac{k^{2}e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{61}{589824}\frac{e^{5s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{81}{65536}\frac{e^{3s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{23}{65536}\frac{e^{3s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{19}{73728}\frac{e^{3s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{25}{131072}\frac{k^{2}e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{85}{73728}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{15}{32768}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{X_7}{e^s}-\frac{1}{1474560}\frac{e^{9s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{147456}\frac{e^{7s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{24576}\frac{e^{5s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{147456}\frac{s}{e^s k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{16384}\frac{\ln\left(e^s\right)^2 e^{3s}}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}+\frac{1}{2}\frac{e^s\ln\left(\frac{1}{k}\right)X_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{83}{294912}\frac{e^s k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{\ln\left(e^s\right)e^s k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{73728}\frac{s}{e^s k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{s}{e^s k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{32768}\frac{s}{e^s\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{24576}\frac{\ln\left(e^s\right)^2 e^{5s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{12288}\frac{\ln\left(e^s\right)^2 e^{5s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{3}{16384}\frac{\ln\left(e^s\right)^2 e^{3s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}-\frac{3}{16384}\frac{\ln\left(e^s\right)^2 e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}$$

$$-\frac{1}{36864}\frac{e^s}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{73728}\frac{e^s}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{73728}\frac{\ln\left(e^s\right)e^s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{18432}\frac{e^s s}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{e^{5s}}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{3}{8192}\frac{e^{3s}}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{7}{73728}\frac{k^2e^{5s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{13}{98304}\frac{k^2e^{3s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{7}{589824}\frac{e^{7s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{41}{65536}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{77}{294912}\frac{e^{3s}}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{1474560}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{9s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{3s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{167}{589824}\frac{e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{393216}\frac{k^2e^{7s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{147456}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{73728}\frac{\ln\left(e^s\right)e^{3s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{147456}\frac{e^{5s}}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{147456}\frac{e^{s}}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{294912}\frac{e^{3s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{27}{131072}\frac{k^2e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{27}{131072}\frac{e^{3s}}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{36864}\frac{e^{s}s}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{3s}}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{98304}\frac{k^2e^{5s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{1179648}\frac{e^{7s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{32768}\frac{e^{5s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{161}{589824}\frac{e^{3s}}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{49152}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{5s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{147456}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{7s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{196608}\frac{e^{5s}}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{9}{16384}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{83}{294912}\frac{e^{s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{173}{294912}\frac{e^{s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{11}{36864}\frac{e^{s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768}\frac{\ln\left(e^{s}\right)e^{s}}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{32768}\frac{e^{s}s}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{137}{73728}\frac{e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{101}{147456}\frac{e^{s}s}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{11}{73728}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384}\frac{e^{s}s}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{e^{s}s}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{15}{32768}\frac{e^{s}s}{k^{6}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{32768}\frac{k^{2}e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{7}{1179648}\frac{e^{7s}}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{147456}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)e^{7s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{27}{32768}\frac{e^{3s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{5}{32768}\frac{e^{s}}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864}\frac{k^{2}\ln\left(e^{s}\right)e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{25}{147456}\frac{e^{s}\ln\left(e^{s}\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{8192}\frac{e^{s}\ln\left(e^{s}\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{e^{s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{e^{s}\ln\left(\frac{1}{k}\right)s}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{19}{49152}\frac{e^{5s}\ln\left(e^{s}\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$\frac{7}{98304}\frac{e^{5s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{1024}\frac{e^{3s}\ln\left(e^{s}\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{e^{3s}\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^{4}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{27}{32768}\frac{e^{3s}}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{8192}\frac{e^{s}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{25}{147456}\frac{e^{s}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{11}{36864}\frac{e^{s}s}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{59}{36864}\frac{e^{s}s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{7}{131072}\frac{e^{3s}}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{8192}\frac{e^s\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{3}{16384}\frac{e^{3s}}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{25}{73728}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{8192}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{85}{36864}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{4096}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{3}{32768}\frac{e^{3s}\ln\left(e^s\right)}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{2304}\frac{e^s k^2 s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{73728}\frac{k^2e^s\ln\left(e^s\right)s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{18432}\frac{k^2e^s\ln\left(e^s\right)s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{25}{73728}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{4096}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{18432}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{8192}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{1474560}\frac{k^2e^{9s}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{7}{8192}\frac{e^s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{73728}\frac{e^s}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{e^s}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{23}{147456}\frac{e^s k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{15}{32768}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{s}{e^s k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{73728}\frac{s}{e^s k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{3072}\frac{s}{e^s k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{8192}\frac{s}{e^s k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{15}{32768}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768}\frac{e^s k^2\ln\left(e^s\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{e^s s}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{24576}\frac{e^s k^2 s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{147456}\frac{e^s k^2 s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{73728}\frac{e^s s^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{253}{147456}\frac{e^s s}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{8192}\frac{e^s s^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{343}{147456}\frac{e^s s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{24576}\frac{e^s s}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{25}{147456}\frac{e^s s^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{85}{73728}\frac{e^s s^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{e^s\ln\left(\frac{1}{k}\right)s}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{3}{4096}\frac{e^{3s}\ln\left(e^s\right)}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{e^s k^2 s^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{16384}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{16384}\frac{e^{3s}\ln\left(e^s\right)}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{25}{147456}\frac{e^s\ln\left(e^s\right)}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{15}{16384}\frac{s}{e^s k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{8192}\frac{s}{e^s k^6 \ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{18432}\frac{s}{e^s k^4 \ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{3072}\frac{s}{e^s k^6 \ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{32768}\frac{s}{e^s k^8 \ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{e^s k^2 \ln\left(\frac{1}{k}\right)X_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{2}\frac{e^s k^2 X_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{8192}\frac{s}{e^s k^6 \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{s}{e^s \ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{s}{e^s \ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{67}{147456}\frac{e^s}{k^6 \ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{36864}\frac{e^s}{k^4 \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{16384}\frac{e^s k^2 \ln\left(e^s\right)s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456}\frac{e^{3s}\ln\left(e^s\right)}{k^6 \ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{31}{147456}\frac{e^{5s}k^2\ln\left(e^s\right)s}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{18432}\frac{e^s s}{k^6 \ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{31}{73728}\frac{e^{3s}\ln\left(e^s\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{147456}\frac{e^{7s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{12288}\frac{e^{5s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{e^{7s}k^{2}\ln\left(e^{s}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{e^{3s}k^{2}\ln\left(e^{s}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{12288}\frac{e^{5s}k^{2}\ln\left(e^{s}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{11}{18432}\frac{e^{s}s}{k^{4}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{1474560}\frac{e^{9s}k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{7}{1179648}\frac{e^{7s}k^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{71}{589824}\frac{e^{3s}k^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{2}\frac{e^{s}X_{6}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{24576}\frac{e^{5s}k^{2}\ln\left(e^{s}\right)^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}+\frac{1}{16384}\frac{e^{3s}\ln\left(e^{s}\right)^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}}-\frac{7}{32768}\frac{e^{3s}k^{2}\ln\left(e^{s}\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{e^{7s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{147456}\frac{e^{3s}k^{2}\ln\left(e^{s}\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{e^{7s}k^{2}\ln\left(e^{s}\right)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{3}{8192}\frac{e^{3s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456}\frac{e^{s}s^{2}}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{19}{147456}\frac{e^{s}s}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{13}{73728}\frac{e^{3s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{19}{49152}\frac{e^{5s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768}\frac{e^{s}k^{2}s^{2}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{5}{16384}\frac{e^{s}\ln\left(e^{s}\right)s}{k^{8}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{3}{4096}\frac{e^{3s}}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{e^{3s}k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{15}{32768}\frac{e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{e^{s}k^{2}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{7}{24576}\frac{e^{s}}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{85}{73728}\frac{e^{s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{2}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{11}{73728}\frac{e^{s}\ln\left(e^{s}\right)}{k^{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

Στη συνέχεια με αντικατάσταση του $s=\ln(r)$ στη συνάρτηση z_2 και από τις οριακές συνθήκες υπολογίζουμε τα X_6, X_7. Είναι:

$$W_2\Big|_{r=1}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{19}{1474560}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{917}{589824\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{7}{32768k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{89}{147456k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{131}{5898240}\frac{k^2}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{21}{16384\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{463}{1179648k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{143}{294912k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{X_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+X_7-\frac{19}{1474560}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{641}{1179648}\frac{k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{217}{1179648}\frac{k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{113}{73728k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{101}{65536k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{17}{32768k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{47}{131072}\frac{k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{33}{131072k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{143}{196608k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{2}\frac{k^2X_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{393216k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{671}{589824k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{415}{589824k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{367}{1179648k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{36864k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)X_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{147456k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{73}{737280\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)X_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}=0$$

$$W_2\Big|_{r=1/k}=0\Leftrightarrow$$

$$kX_7+\frac{3}{16384k^7\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{24576k^9}+\frac{893}{1179648k\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{73}{491520}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^7\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{53}{131072k^9\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{113}{294912}\frac{k}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1097}{589824k^{7}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{821}{1179648k^{9}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{13}{73728}\frac{k}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{12288k^{7}}-\frac{3}{16384\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{5}}$$

$$-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}{k^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}}{k^{5}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{11}{36864}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}+\frac{1}{2}\frac{k\ln\left(\frac{1}{k}\right)X_{6}}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{101}{65536k^{5}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{21}{16384k^{7}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768}\frac{k}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{181}{147456k^{5}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{269}{294912k\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{21}{655360k^{9}\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$+\frac{361}{589824k\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}-\frac{3}{16384}\frac{k}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{2}+k^{2}-1\right)}$$

$$-\frac{3}{16384}\frac{k}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{33}{131072k\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{16384k^3\ln\left(\frac{1}{k}\right)}-\frac{17}{32768k^3\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{305}{589824k^3\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{45}{32768k^7\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{377}{589824k^3\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{767}{1179648k^5\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1627}{1179648k^5\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{13}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{29}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^5\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{13}{491520}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^9\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{24576k^5}-\frac{1}{2}\frac{X_6}{k\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{2}\frac{kX_6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{16384k^9\ln\left(\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)X_6}{k\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{47}{131072k^9\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{127}{184320k^7\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{217}{294912k^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}=0$$

Τελικά:

$w_2 =$

$$-\frac{161}{589824}\frac{r^3}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{32768}\frac{r^5}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{1179648}\frac{r^7}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^5}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^5}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{98304}\frac{k^2r^5}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{24576}\frac{r^5\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{7}{1179648}\frac{r^7}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{77}{294912}\frac{r^3}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{73728}\frac{r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{147456}\frac{r^5}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{41}{65536}\frac{r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{32768}\frac{r^5}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{49152}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^5}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{5898240}\Big[r\Big(2115+10575k^4-9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4-2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^6+3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^4$$

$$+131k^{12}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-3205k^{12}\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1085k^{12}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-11920k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-4105\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$+76k^{12}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4+8130k^{10}\ln\left(\frac{1}{k}\right)-496k^{10}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+1300k^{10}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+440k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4$$

$$-1116k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4+1100k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)-9700k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-4575k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4+4075k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$+5504k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-5815k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-1960k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$-84k^{10}\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4-1440k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5-1440k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5+84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4-2115k^{12}-8460k^2$$

$$+14585k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-10575k^8+11730k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)+3425k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+8460k^{10}\Big)\Big]/$$

$$\left[\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(1+k^4-\ln\left(\frac{1}{k}\right)+k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)-2k^2\right)\right]$$

$$+\frac{7}{12288}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{147456}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^7}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{r\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^3}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{196608}\frac{r^5}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{25}{131072}\frac{k^2r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{24576}\frac{r^5\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^4}+\frac{1}{8192}\frac{\ln r}{rk^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{7}{8192}\frac{r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{83}{294912}\frac{rk^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{73728}\frac{r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{16384}\frac{r^3\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{r\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{3}{16384}\frac{r^3}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768}\frac{\ln r}{r\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{131072}\frac{r^3}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{294912}\frac{r^3}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{81}{65536}\frac{r^3}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{36864}\frac{r}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{36864}\frac{r\ln r}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{9}{16384}\frac{r^3\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{73728}\frac{r^3}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{23}{65536}\frac{r^3}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{27}{131072}\frac{r^3}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{43}{147456}\frac{r^5\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{91}{589824}\frac{k^2r^5}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{15}{16384}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{61}{589824}\frac{r^5}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{rk^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{73728}\frac{r^3\ln r}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{23}{147456}\frac{rk^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{r^3\ln r}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{73728}\frac{r^7\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{15}{32768}\frac{r\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864}\frac{\ln r}{r\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{8192}\frac{\ln r}{rk^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{27}{32768}\frac{r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{27}{131072}\frac{k^2r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{r\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{73728}\frac{r}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{1474560}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^9}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{73728}\frac{k^2r^5}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{\ln r}{r\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{36864}\frac{r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{32768}\frac{r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{27}{32768}\frac{r^3}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{67}{147456}\frac{r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{13}{98304}\frac{k^2r^3}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{24576}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{49152}\frac{r^5\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768}\frac{rk^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{31}{73728}\frac{r^3\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{16384}\frac{r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{147456}\frac{r^7\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{12288}\frac{r^5\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{25}{147456}\frac{r\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{r^7k^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{18432}\frac{r\ln r}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{12288}\frac{r^5k^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{r^3k^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{1474560}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^9}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{7}{1179648}\frac{k^2r^7}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{71}{589824}\frac{k^2r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{3}{4096}\frac{r^3}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{173}{294912}\frac{r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{36864}\frac{r\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{16384}\frac{r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{32768}\frac{r}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{3}{8192}\frac{r^3}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{1474560}\frac{k^2r^9}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^3}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{5898240}\frac{1}{rk^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(1-\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4+k^4-2k^2\right)}\left(-1215-12150k^4+3090\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4\right.$$

$$+2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6-1920\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4+5105\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^6+3345\ln\left(\frac{1}{k}\right)+4245\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10}$$

$$+949\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{10}+3345\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{10}-1836\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^8+116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^2+12150k^6$$

$$+12090\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6+5250\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^2-13635\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8-7530\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^8-4244\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^2$$

$$+1695\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^4+7135\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^6-2585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{10}$$

$$+1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^6+1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^4-84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4+6075k^2-3585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4$$

$$-6075k^8-9135\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2-6324\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^8+1215k^{10}\Big)$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{r}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{1024}\frac{r^3\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{r\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{r\ln(r)^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{36864}\frac{rk^2\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{147456}\frac{rk^2\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768}\frac{rk^2\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{16384}\frac{r\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768}\frac{r\ln(r)^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{24576}\frac{r^5}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{r^7}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{1474560}\frac{r^9}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{3}{16384}\frac{r^3\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}+\frac{211}{147456}\frac{r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{3}{2048}\frac{r^3\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{k^2r^3\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{1024}\frac{r^3\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{r^3\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{67}{73728}\frac{r\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{83}{147456}\frac{r\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{8192}\frac{r\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{147456}\frac{r^5\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{k^2r^5\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{147456}\frac{r^5\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456}\frac{r^5\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{147456}\frac{r^5\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{83}{147456}\frac{k^2r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{147456}\frac{\ln r}{rk^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{32768}\frac{r\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{85}{73728}\frac{r\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384}\frac{r\ln r}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{18432}\frac{r\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{73728}\frac{\ln r}{rk^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{k^2r\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{15}{16384}\frac{r\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{8192}\frac{r\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{73728}\frac{r\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{36864}\frac{r\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{294912}\frac{r^3}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{3}{16384}\frac{r^3\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}-\frac{17}{147456}\frac{r^3}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{16384}\frac{r^3\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{r^5}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{73728}\frac{r^3\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{147456}\frac{r^7\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{18432}\frac{r\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{83}{294912}\frac{r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{7}{4096}\frac{r\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{3}{32768}\frac{r^3\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{r\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{r\ln r}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{23}{73728}\frac{rk^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{8192}\frac{\ln r}{rk^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{3072}\frac{\ln r}{rk^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{73728}\frac{\ln r}{rk^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864}\frac{\ln r}{rk^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{73728}\frac{r\ln r}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{r\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{85}{73728}\frac{r\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{25}{147456}\frac{r\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{173}{147456}\frac{r\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{73728}\frac{r\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{3}{4096}\frac{r^3\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{16384}\frac{r^3\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768}\frac{\ln r}{rk^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{3072}\frac{\ln r}{rk^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{18432}\frac{\ln r}{rk^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{8192}\frac{\ln r}{rk^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{16384}\frac{\ln r}{rk^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{147456}\frac{r^7k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{147456}\frac{r^3k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{147456}\frac{r^7\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{32768}\frac{r^3k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{31}{147456}\frac{r^5k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456}\frac{r^3\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{16384}\frac{r\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{3}{8192}\frac{r^3\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{13}{73728}\frac{r^3\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{98304}\frac{r^5}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{12288}\frac{r^5\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^2}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^3}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{147456}\frac{r\ln(r)^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{49152}\frac{r^5\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{5898240}\left(\left(\left(2115+10575k^4-9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4\right.\right.\right.$$

$$-2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^6+3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^4+131\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{12}-3205\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{12}-1085\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{12}$$

$$-11920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^6-4105\ln\left(\frac{1}{k}\right)+76\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{12}+8130\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10}-496\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{10}$$

$$+1300\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{10}+440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^8-1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^2+1100\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6-9700\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^2$$

$$-4575\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8+4075\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^8+5504\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^2-5815\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^4-1960\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^6$$

$$+2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{10}-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^6-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^4+84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4$$

$$-2115k^{12} - 8460k^2 + 14585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 - 10575k^8 + 11730\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + 3425\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^8$$

$$+8460k^{10}\Big)\Big) \Big/ \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)k^8 \left(1 + k^4 - \ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4 - 2k^2\right)\right)$$

$$+\frac{1}{5898240}\Bigg(r\Bigg(2115 + 10575k^4 - 9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4 - 2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^6 + 3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^4$$

$$+131\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^{12} - 3205\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{12} - 1085\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^{12} - 11920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^6 - 4105\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$+76\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{12} + 8130\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10} - 496\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^{10} + 1300\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^{10} + 440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^8$$

$$-1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^2 + 1100\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6 - 9700\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2 - 4575\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8 + 4075\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^8$$

$$+5504\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^2 - 5815\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^4 - 1960\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^6 + 2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$-84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{10} - 1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^6 - 1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^4 + 84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 - 2115k^{12} - 8460k^2$$

$$+14585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 - 10575k^8 + 11730\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + 3425\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^8 + 8460k^{10}\Bigg)\Bigg) \Big/$$

$$k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 \left(1 + k^4 - \ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4 - 2k^2\right)\Big)$$

$$+\frac{1}{5898240}\Bigg(r\Bigg(2115+10575k^4-9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4-2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^6+3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^4$$

$$+131\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{12}-3205\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{12}-1085\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{12}-11920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^6-4105\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$+76\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{12}+8130\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10}-496\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{10}+1300\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{10}+440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^8$$

$$-1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^2+1100\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6-9700\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^2-4575\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8+4075\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^8$$

$$+5504\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^2-5815\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^4-1960\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^6+2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$-84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{10}-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^6-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^4+84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4-2115k^{12}-8460k^2$$

$$+14585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^4-10575k^8+11730\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+3425\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^8+8460k^{10}\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)\left(1+k^4-\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4-2k^2\right)\Bigg)$$

$$-\frac{211}{294912}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{15}{32768}\frac{r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{36864}\frac{rk^2}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{589824}\frac{r^7}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^3}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^5}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{36864}\frac{r}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{393216}\frac{k^2r^7}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{167}{589824}\frac{r^5}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

Ο υπολογισμός των τιμών γίνεται με έναν κώδικα υπολογισμού σε Fortran ο οποίος βρίσκεται στο παράρτημα.

5.6 Υπολογισμός των τιμών της αξονικής διατμητικής τάσης

Αν παραγωγίσουμε την σειρά που περιέχει την αξονική ταχύτητα w λαμβάνουμε την αξονική διατμητική τάση.

Είναι:

$$t_{ax}=-D\left(-\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\frac{-1+k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2r}\right)-D^3\left(\frac{67}{98304}\frac{r^4}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}\right.$$

$$-\frac{95}{49152}\frac{r^4\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{5898240}\left(2115+10575k^4-9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4\right.$$

$$-2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^6 + 3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^4 + 131\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^{12} - 3205\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{12} - 1085\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^{12}$$

$$-11920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^6 - 4105\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 76\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{12} + 8130\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10} - 496\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^{10}$$

$$+1300\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^{10} + 440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^8 - 1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^2 - 1100\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6 - 9700\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2$$

$$-4575\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8 + 4075\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^8 + 5504\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^2 - 5815\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^4 - 1960\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^6$$

$$+2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{10} - 1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^6 - 1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^4 + 84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4$$

$$-2115k^{12} - 8460k^2 + 14585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 - 10575k^8 + 11730\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + 3425\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^8 + 8460k^{10}\Bigg)$$

$$\Bigg/\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)k^8\left(1 + k^4 - \ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4 - 2k^2\right)\right)$$

$$+\frac{1}{5898240}\Big(2115 + 10575k^4 - 9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4$$

$$-2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^6 + 3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^4 + 131\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^{12} - 3205\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{12} - 1085\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^{12}$$

$$-11920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^6 - 4105\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 76\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{12} + 8130\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10} - 496\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^{10}$$

$$+1300\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^{10} + 440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^8 - 1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^2 - 1100\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6 - 9700\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2$$

$$-4575\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8+4075\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^8+5504\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^2-5815\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^4-1960\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^6$$

$$+2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{10}-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^6-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^4+84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4$$

$$-2115k^{12}-8460k^2+14585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^4-10575k^8+11730\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+3425\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^8+8460k^{10}\Bigg)$$

$$\Bigg/\left(k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(1+k^4-\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4-2k^2\right)\right)$$

$$+\frac{1}{5898240}\Bigg(2115+10575k^4-9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4$$

$$-2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^6+3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^4+131\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{12}-3205\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{12}-1085\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{12}$$

$$-11920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^6-4105\ln\left(\frac{1}{k}\right)+76\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{12}+8130\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10}-496\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{10}$$

$$+1300\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{10}+440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^8-1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^2-1100\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6-9700\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^2$$

$$-4575\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8+4075\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^8+5504\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^2-5815\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^4-1960\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^6$$

$$+2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2-789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3-84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{10}-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^6-1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^4+84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4$$

$$-2115k^{12}-8460k^2+14585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^4-10575k^8+11730\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+3425\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^8+8460k^{10}\Bigg)$$

$$\Bigg/\left(k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)\left(1+k^4-\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4-2k^2\right)\right)$$

$$-\frac{1}{12288}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}+\frac{5}{49152}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^4}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}$$

$$+\frac{5}{49152}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^4}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1}+\frac{1}{12288}\frac{r^4\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$+\frac{37}{65536}\frac{r^4}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{35}{147456}\frac{r^4\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{67}{294912}\frac{k^2r^4}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{95}{147456}\frac{k^2r^4\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{589824}\frac{r^4}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{8192r^2k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{211}{294912\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{73728k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{24576\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864}\frac{k^2}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{15}{32768\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{155}{147456}\frac{k^2r^4\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{407}{589824}\frac{r^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{49152}\frac{r^2\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{147456}\frac{\ln r}{r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{95}{147456}\frac{r^4\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{3}{8192}\frac{r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{95}{147456}\frac{r^4\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{67}{294912}\frac{r^4}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{73728k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{36864k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{85}{73728}\frac{\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{\ln(r)^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{147456}\frac{k^2r^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{6144}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{9}{8192}\frac{r^2}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{7}{147456}\frac{r^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{18432}\frac{\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{36864}\frac{\ln r}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{32768}\frac{\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{85}{73728}\frac{\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{36864}\frac{\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{73728}\frac{\ln r}{r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{5898240}\Big(2115+10575k^4-9075\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4$$

$$-2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^6+3240\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^4+131\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{12}-3205\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{12}-1085\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{12}$$

$$-11920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^6 - 4105\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 76\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{12} + 8130\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10} - 496\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^{10}$$

$$+1300\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^{10} + 440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^8 - 1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^2 - 1100\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6 - 9700\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^2$$

$$-4575\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8 + 4075\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^8 + 5504\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^2 - 5815\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^4 - 1960\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^6$$

$$+2745\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4 k^{10} - 1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^6 - 1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5 k^4 + 84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4$$

$$\left.-2115k^{12} - 8460k^2 + 14585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2 k^4 - 10575k^8 + 11730\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + 3425\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3 k^8 + 8460k^{10}\right)$$

$$\Bigg/ \left(k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)\left(1 + k^4 - \ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4 - 2k^2\right)\right)$$

$$-\frac{19}{73728r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)} - \frac{83}{294912}\frac{k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)}$$

$$-\frac{87}{65536}\frac{r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)} - \frac{23}{147456}\frac{k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)}$$

$$-\frac{173}{294912k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)} - \frac{11}{73728}\frac{\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2 + k^2 - 1\right)}$$

$$+\frac{5}{24576}\frac{r^4\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{5}{16384}\frac{\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{15}{8192}\frac{r^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{24576}\frac{r^4\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{12288}\frac{r^4\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{8192}\frac{\ln r}{r^2k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{3}{16384}\frac{r^2\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}+\frac{9}{16384}\frac{r^2\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}$$

$$+\frac{3}{8192}\frac{r^2\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}+\frac{3}{16384}\frac{r^2\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}+\frac{1}{8192}\frac{r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}+\frac{55}{147456}\frac{r^4}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{163840}\frac{k^2r^8}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{7}{8192}\frac{\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{27}{16384}\frac{r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{215}{147456}\frac{r^4\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{8192}\frac{r^2\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}+\frac{5}{32768}\frac{\ln r}{r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{16384k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{32768}\frac{k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{15}{32768k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{221}{196608}\frac{r^4}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{67}{147456k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{24576}\frac{r^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{3}{8192}\frac{r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{294912}\frac{r^2}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{49152}\frac{r^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{49152}\frac{r^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{18432}\frac{k^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{11}{24576}\frac{r^2\ln r}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{49}{294912}\frac{r^2}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{16384}\frac{k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{36864}\frac{k^2\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{73728}\frac{k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456}\frac{k^2\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{275}{294912}\frac{r^2}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{9}{8192}\frac{r^2\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{37}{18432}\frac{\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{32768}\frac{\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{41}{589824}\frac{r^6}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{36864k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{35}{36864}\frac{r^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{13}{24576}\frac{r^2\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{12288}\frac{r^4\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}-\frac{1}{6144}\frac{r^4\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$-\frac{19}{147456}\frac{\ln(r)^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{33}{131072}\frac{r^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{9}{32768}\frac{r^2\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{8192r^2k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{8192k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{83}{294912k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{12288}\frac{r^2\ln r}{k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{7}{73728}\frac{r^6\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{73728k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{19}{147456r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{36864k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{24576}\frac{r^4}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768}\frac{\ln(r)^2}{k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{163840}\frac{r^8}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{32768}\frac{k^2\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{16384}\frac{r^6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{5}{16384}\frac{\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{8192}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{8192}\frac{\ln r}{r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{\ln r}{r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{\ln r}{r^2k^6\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{8192r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{3072}\frac{\ln r}{r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{9}{16384}\frac{r^2\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}-\frac{3}{8192}\frac{r^2\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3}$$

$$-\frac{67}{98304}\frac{r^4}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{19}{147456}\frac{\ln r}{r^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{41}{147456}\frac{r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{147}{65536}\frac{r^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{9}{2048}\frac{r^2\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{3072r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{19}{73728}\frac{\ln r}{r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864}\frac{\ln r}{r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{95}{49152}\frac{r^4\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{31}{24576}\frac{r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{7}{147456}\frac{r^6\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{83}{147456}\frac{r^4}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{73728r^2k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{36864r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{19}{147456k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{57}{16384}\frac{\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{25}{147456}\frac{\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{85}{73728}\frac{\ln(r)^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{41}{1179648}\frac{r^6}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{4096}\frac{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\ln r}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{73728}\frac{\ln(r)^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{49}{131072}\frac{k^2r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{3}{4096}\frac{r^2k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{49}{32768}\frac{r^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{97}{1179648}\frac{k^2r^6}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{32768k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{25}{147456}\frac{\ln(r)^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{11}{18432}\frac{\ln r}{k^4\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{12288}\frac{r^4\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{29}{16384}\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{7}{147456}\frac{r^6k^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{3}{16384}\frac{r^2\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{32768}\frac{\ln r}{r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{32768r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{3}{16384}\frac{r^2}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{9}{4096}\frac{r^2\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{73}{65536}\frac{r^2}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{163840}\frac{r^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{3072}\frac{\ln r}{r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{3072r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{11}{18432}\frac{\ln r}{r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{18432r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{36864\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{5}{8192}\frac{\ln r}{r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{5}{8192r^2k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{15}{16384r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{5}{12288}\frac{r^4k^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{12288}\frac{r^2k^2\ln r}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{29}{73728}\frac{r^4k^2}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{109}{294912}\frac{k^2r^2}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{15}{16384}\frac{\ln r}{r^2k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{41}{1179648}\frac{r^6k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{1}{163840}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^8}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{7}{147456}\frac{r^6k^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{209}{589824}\frac{k^2r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{49152}\frac{k^2r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{3}{1024}\frac{r^2\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{49}{131072}\frac{r^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{3}{4096}\frac{r^2\ln r}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{11}{36864}\frac{\ln r}{k^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{41}{1179648}\frac{r^6}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{7}{147456}\frac{r^6\ln r}{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{47}{131072}\frac{k^2r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{21}{32768}\frac{k^2r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}+\frac{331}{589824}\frac{k^2r^4}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{5898240}\frac{1}{r^2k^8\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(1+k^4-\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4-2k^2\right)}\left(-1215-12150k^4+3090\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^4\right.$$

$$+2640\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^6-1920\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^4+5105k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+3345\ln\left(\frac{1}{k}\right)+4245\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^{10}$$

$$+949\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^{10}+3345\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^{10}-1836\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^8+1116\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^2+12150k^6$$

$$+12090\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^6+5250\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^2-13635\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^8-7530\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^8-4244\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^2$$

$$+1695\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^4+7135\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^6-2585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2+789\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3+84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4k^{10}$$

$$+1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^6+1440\ln\left(\frac{1}{k}\right)^5k^4-84\ln\left(\frac{1}{k}\right)^4+6075k^2-3585\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2k^4-6075k^8$$

$$-9135\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2-6324\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3k^8+1215k^{10}\Bigg)+\frac{3}{1024}\frac{r^2\ln r}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{8192}\frac{\ln(r)^2}{k^6\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{1}{12288}\frac{k^2\ln\left(\frac{1}{k}\right)r^2}{\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}$$

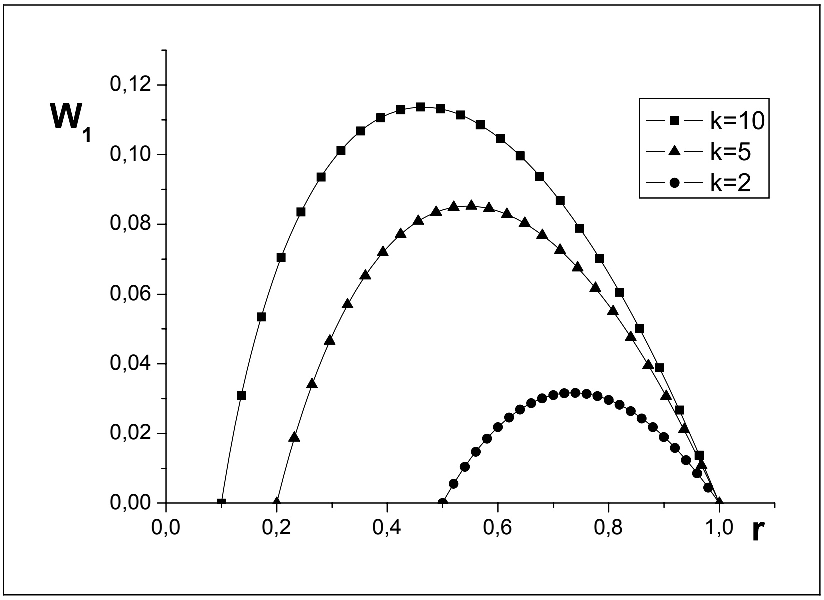
$$+\frac{47}{16384}\frac{\ln r}{k^4\ln\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}-\frac{49}{32768}\frac{r^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^3\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\left(\frac{1}{k}\right)k^2+k^2-1\right)}\Bigg)$$

Να σημειώσουμε πως και οι τιμές της αξονικής διατμητικής τάσης υπολογίζονται από κώδικα ο οποίος βρίσκονται στο παράρτημα.

Κεφάλαιο 6

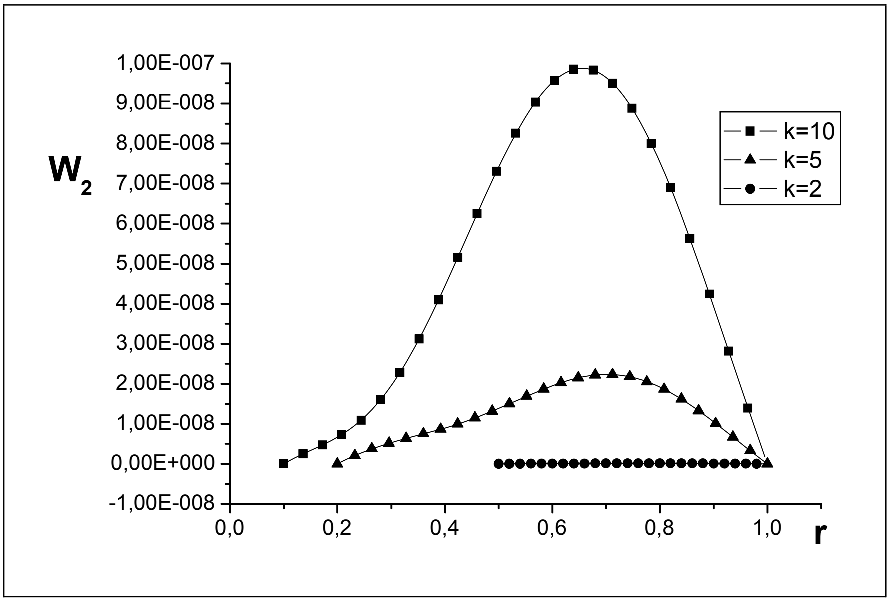
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ – ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

6.1.1 Προφίλ της αξονικής ταχύτητας W



Σχήμα 6.1.1 (α) : Προφίλ της αξονικής ταχύτητας W_1 κατά μήκος μιας ακτίνας

Στο παραπάνω γράφημα δείχνεται η μεταβολή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας κατά μήκος της γραμμής συμμετρίας **θ=0,π** της κατατομής. Φαίνονται οι μεταβολές για 3 χαρακτηριστικά μεγέθη πυρήνα **k=2, 5 και 10** όπου το **k=10** αντιστοιχεί σε μικρό σχετικά πυρήνα και το **k=2** σε σχετικά μεγάλο για τη δυνατότητα σύγκρισης. Όσο αυξάνεται η ακτίνα του πυρήνα (k→2) η μέγιστη τιμή της ταχύτητας ελαττώνεται και όσο πλησιάζουμε στα όρια η ελάττωση είναι πιο απότομη σε σύγκριση με πυρήνες μικρότερων ακτινών. Απουσία πυρήνα, το μέγιστο της αξονικής ταχύτητας εμφανίζεται στον άξονα του σωλήνα ενώ με την παρουσία του ο πυρήνας διαφοροποιεί την τοπογραφία της ροής. Οι ιξώδεις τάσεις από τον πυρήνα διαδίδονται στο ρευστό και διαφοροποιούν το προφίλ της ροής μετακινώντας το μέγιστο προς τα έξω αλλά ακόμη κοντά στον πυρήνα όπως επίσης προκαλούν ταυτόχρονα μια μείωση στην τιμή του μέγιστου. Καθώς η ακτίνα του πυρήνα μεγαλώνει η επίδραση των τάσεων γίνεται ισχυρότερη. Η παρουσία του πυρήνα τείνει να εξισορροπήσει την επίδραση του τοιχώματος του σωλήνα και μετακινεί το μέγιστο προς το μέσον της ακτινικής απόστασης των ορίων. Τελικά η μέγιστη τιμή της αξονικής ταχύτητας γίνεται μικρότερη εξαιτίας της συνδυασμένης επίδρασης των τάσεων από τα τοιχώματα σωλήνα και πυρήνα.



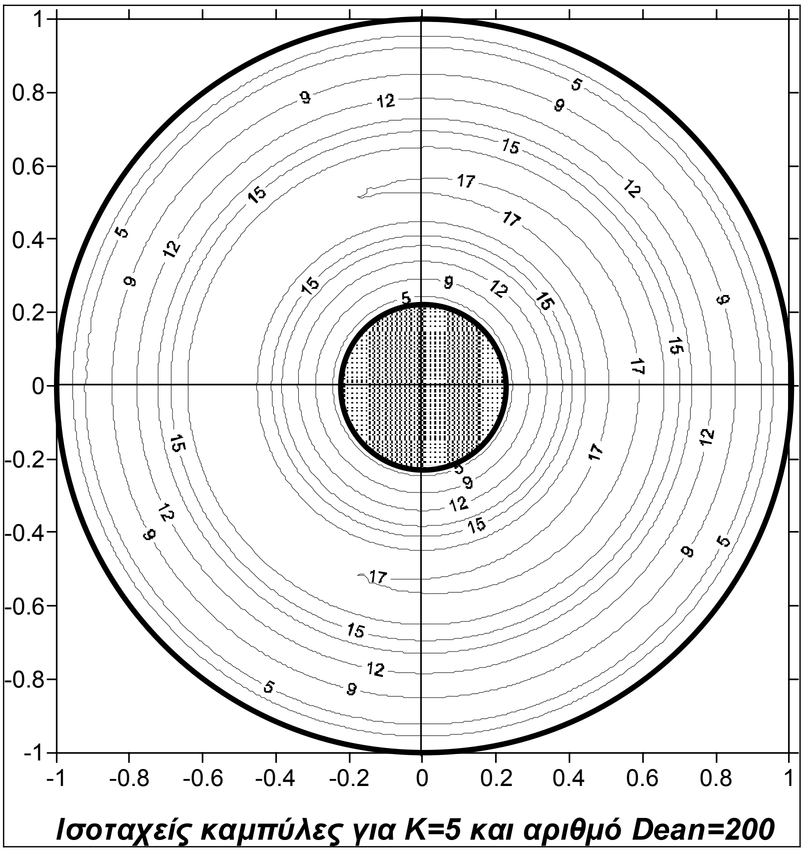
Σχήμα 6.1.1 (β) : Προφίλ της αξονικής ταχύτητας W2 κατά μήκος μιας ακτίνας

Στο γράφημα της W_2 δείχνεται η μεταβολή της κατά μήκος της γραμμής συμμετρίας **θ=0,π**. Είναι εμφανές πως όσο αυξάνεται η ακτίνα του πυρήνα υπάρχει ελάττωση των τιμών της ταχύτητας καθώς και του μέγιστου αυτής με εμφάνιση αρνητικών τιμών για μέγεθος πυρήνα **k=2**.

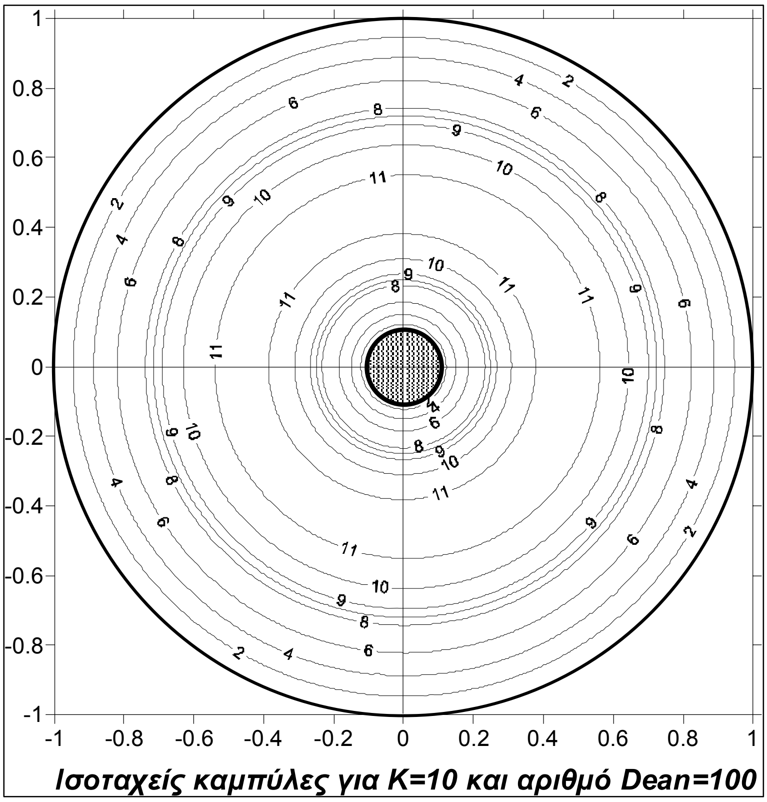
6.1.2 Περίγραμμα ισοταχών καμπύλων της W

Παρακάτω δείχνουμε τις ισοταχείς καμπύλες της αξονικής ταχύτητας W στη διατομή και όπως έχουμε αναφέρει οι τιμές της υπολογίστηκαν με τη σειρά $w = D \cdot w_1 + D^3 \cdot w_2 + \ldots\ldots$. Να σημειώσουμε πως η συνεισφορά της W_2 γίνεται ασήμαντη εξαιτίας του μικρού αριθμού Dean. Η μορφή αυτών των καμπυλών δείχνει την ανάπτυξη μιας κεντρικής ανιξώδους περιοχής καθώς ο αριθμός **Dean** αυξάνεται σταδιακά. Για ακτίνες μεγάλων πυρήνων αλλά και μικρών με μικρό αριθμό Dean όπως 100, το περίγραμμα υποδεικνύει πως οι ισοταχείς καμπύλες είναι κύκλοι ομόκεντροι των ορίων . Αυτές γίνονται παράλληλες κατά μήκος ενός σημαντικού μέρους του ρευστού στο οποίο οι επιδράσεις του ιξώδους μπορούν να αμεληθούν. Ωστόσο, είναι αναμενόμενο πως για **μεγάλους αριθμούς Dean** η φυγόκεντρος δύναμη θα εκδηλωθεί πιο ενεργά και οι ισοταχείς καμπύλες θα σχηματίσουν ένα διαχωρισμένο βρόχο στην άλλη μεριά της καμπύλωσης.

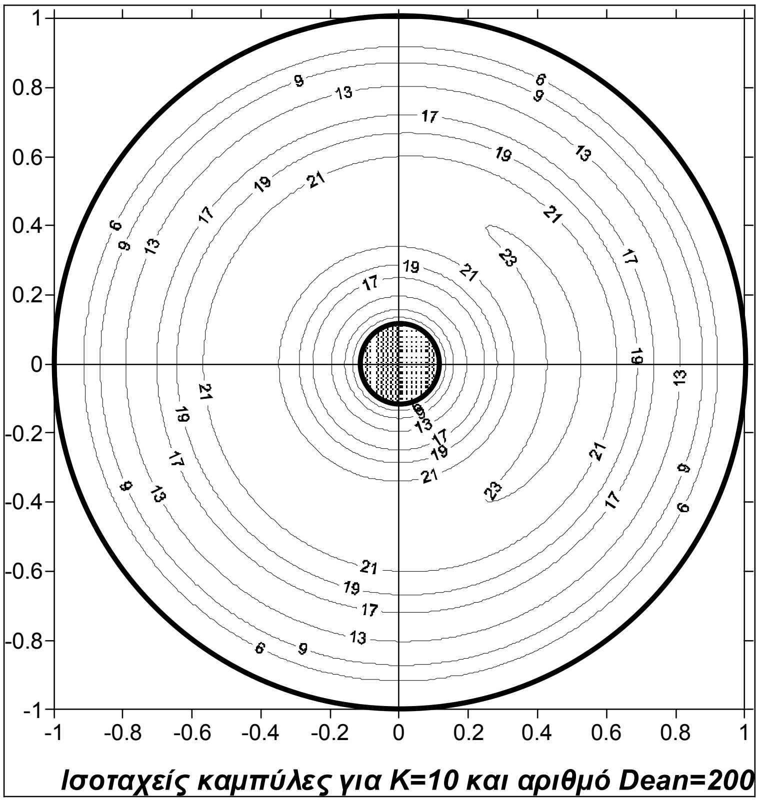
Παρατηρείται η εκκίνηση σχηματισμού του βρόχου για μέγεθος πυρήνα **k=5** και αριθμό **Dean 200** ενώ για μέγεθος πυρήνα **k=10** και αριθμό **Dean 100** οι ισοταχείς καμπύλες είναι κύκλοι ομόκεντροι των ορίων. Ο σχηματισμός του βρόχου ξεκινά για αριθμό Dean 200 και εντείνεται για αριθμό **Dean 500**.



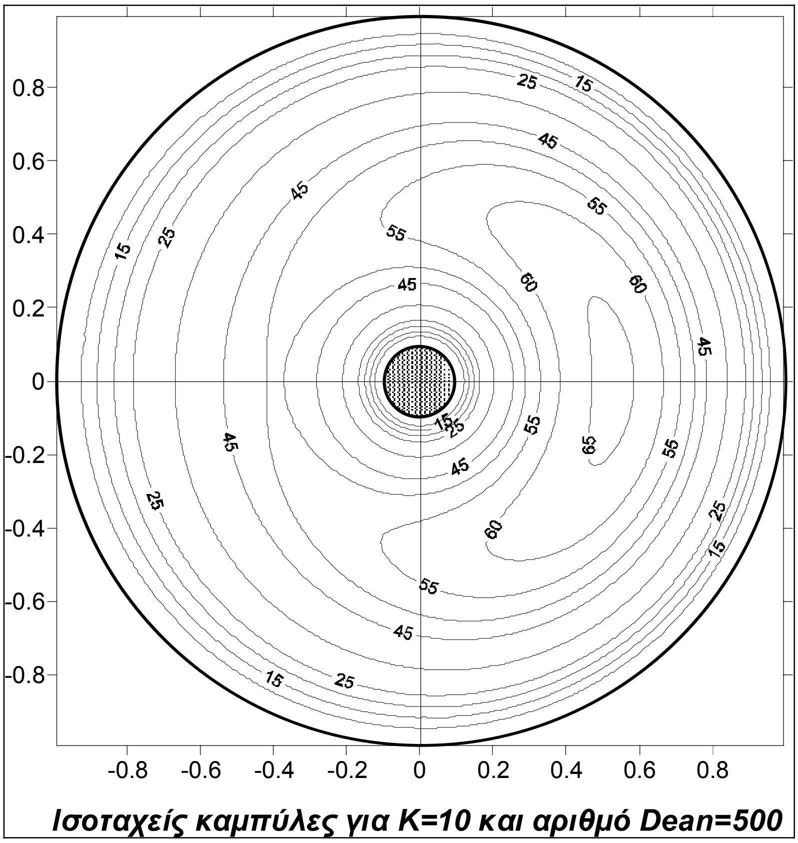
Σχήμα 6.1.2 (α) : Περίγραμμα ισοταχών καμπυλών για K=5 και αριθμό Dean=200



Σχήμα 6.1.2 (β) : Περίγραμμα ισοταχών καμπυλών για K=10 και αριθμό Dean=100



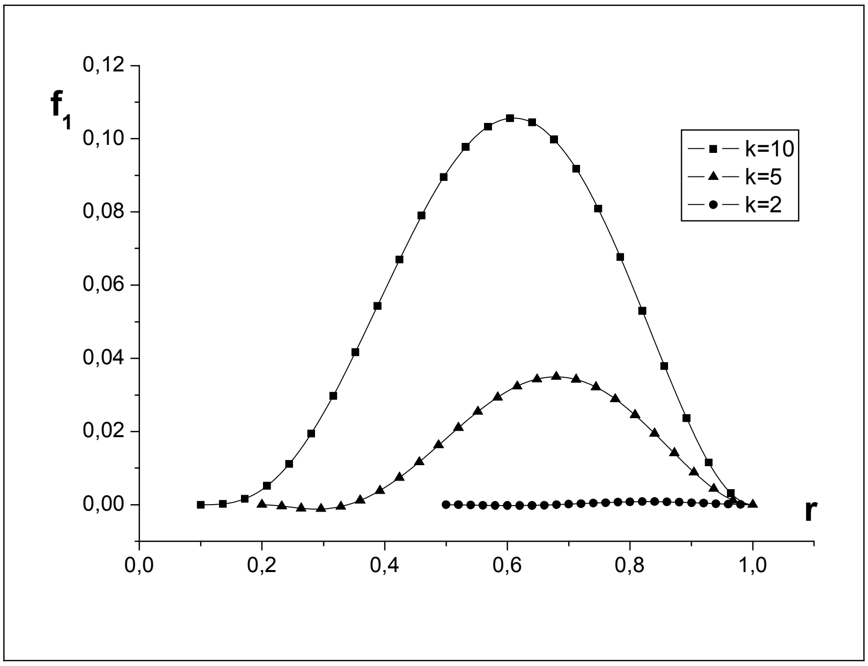
Σχήμα 6.1.2 (γ) : Περίγραμμα ισοταχών καμπυλών για K=10 και αριθμό Dean=200



Σχήμα 6.1.2 (δ) : Περίγραμμα ισοταχών καμπυλών για K=10 και αριθμό Dean=500

6.2.1 Προφίλ της αδιάστατης ρευματοσυνάρτησης f1

Στο παρακάτω γράφημα δείχνεται η μεταβολή της αδιάστατης ρευματοσυνάρτησης συναρτήσει της ακτίνας r. Παρατηρείται η μέγιστη τιμή της να βρίσκεται κοντύτερα στο εξωτερικό όριο για μεγέθη πυρήνα **k=5, 10** και η ελάττωση να είναι ομαλότερη κοντά στο εσωτερικό όριο και πιο απότομη στο εξωτερικό. Ακόμη παρατηρείται πως καθώς **αυξάνεται η ακτίνα** του πυρήνα οι τιμές της ρευματοσυνάρτησης είναι μικρότερες με εμφάνιση **αρνητικών** για μέγεθος πυρήνα **k=2**. Αυτό δείχνει και την εκκίνηση της μη κανονικότητας η οποία είναι ανεπαίσθητη για μικρές ακτίνες πυρήνα.

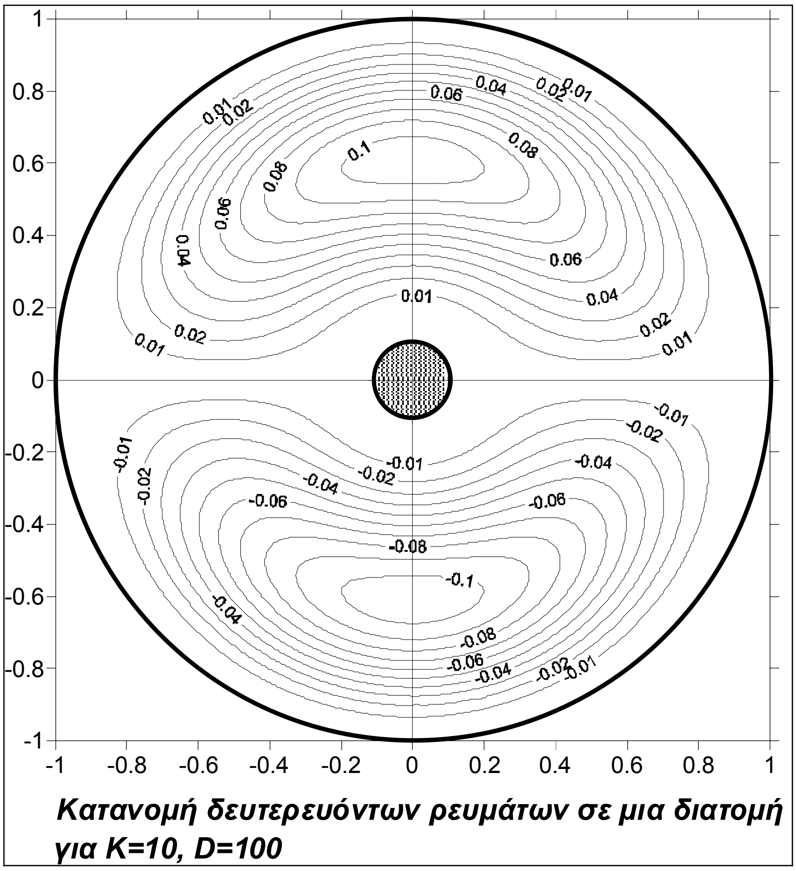


Σχήμα 6.2.1 : Προφίλ της ρευματοσυνάρτησης f_1 συναρτήσει της ακτίνας r

6.2.2 Κατανομές δευτερευόντων ρευμάτων

Παρακάτω φαίνονται οι καμπύλες σταθερής ρευματοσυνάρτησης οι οποίες δίνουν τις ρευματικές γραμμές της δευτερεύουσας ροής στη διατομή για αριθμό πυρήνα **k=2, 5, 10**. Είναι εμφανής η επίδραση του αριθμού **Dean** και του **μεγέθους του πυρήνα** πάνω στη **δευτερεύουσα ροή**.

Η μορφή της $\mathbf{f_1}$ δείχνει πως αντί για το σύνηθες σύστημα των δύο δινών που σχηματίζονται σε κάθε μισό του άξονα συμμετρίας απουσία πυρήνα (ή παρουσία μικρού), δύο δίνες σχηματίζονται σε κάθε μισό περιστρεφόμενες σε αντίθετες κατευθύνσεις.

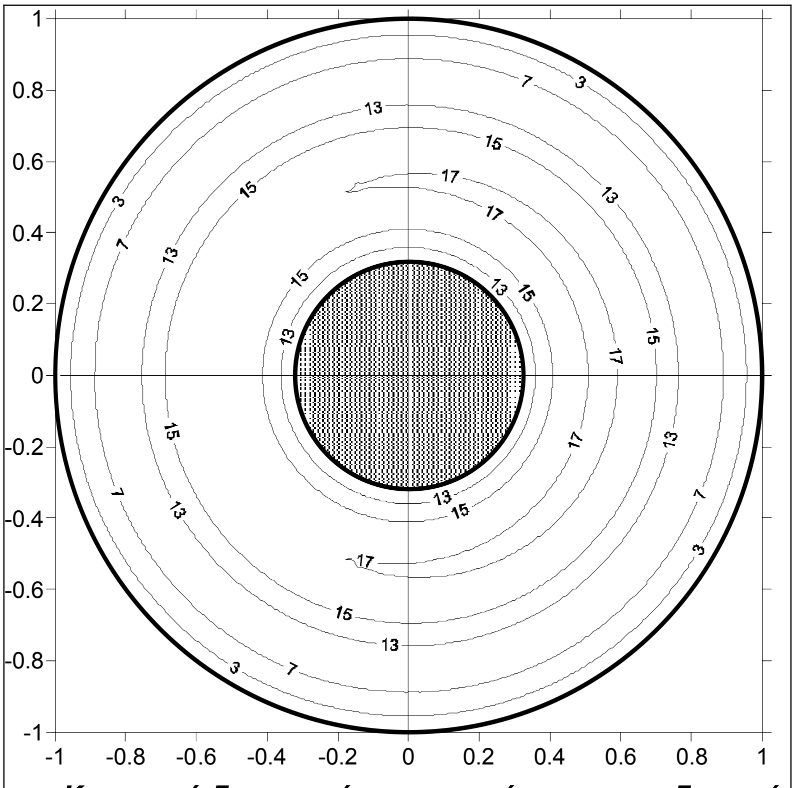


Σχήμα 6.2.2 (α) : Κατανομή δευτερευόντων ρευμάτων σε μια διατομή για K=10 και αριθμό Dean=100

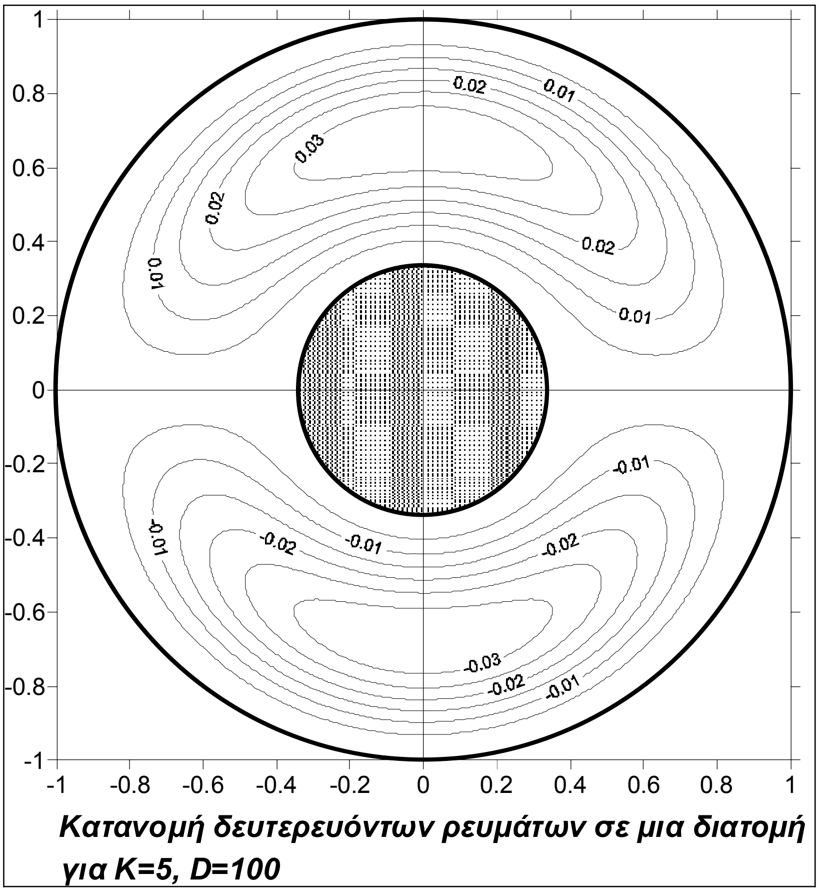
Ο σχηματισμός των δινών είναι συνέπεια του ιξώδους χαρακτήρα των **στρωμάτων Stokes** που σχηματίζονται κατά μήκος των ορίων. Έτσι απουσία πυρήνα η δευτερεύουσα ροή αποτελείται από μια δίνη σε κάθε μισό του μεσημβρινού επιπέδου. Στο στρώμα Stokes του τοιχώματος του σωλήνα η φυγόκεντρος δύναμη δεν εξισορροπείται από τη βαθμίδα πίεσης επειδή η τελευταία παραμένει απαράλλακτη ενώ η W τείνει στο μηδέν καθώς πλησιάζεται το τοίχωμα του σωλήνα.

Σαν συνέπεια, μια **δευτερεύουσα ροή** δημιουργείται μέσα σε αυτό το στρώμα. Το ρευστό κινείται από την έξω πλευρά της καμπύλωσης προς την έσω και επιστρέφει στην αρχική θέση κινούμενο κατά μήκος της γραμμής συμμετρίας θ=0,π.

Κατά μήκος αυτής της γραμμής ένα άλλο οριακό στρώμα σχηματίζεται επειδή το ανακυκλοφορούμενο ρευστό του άνω μισού συναντά στο **θ=π** το ανακυκλοφορούμενο ρευστό του κάτω μισού. Τα δύο οριακά στρώματα συγκρούονται και το ρευστό κινείται κατά μήκος της γραμμής συμμετρίας.



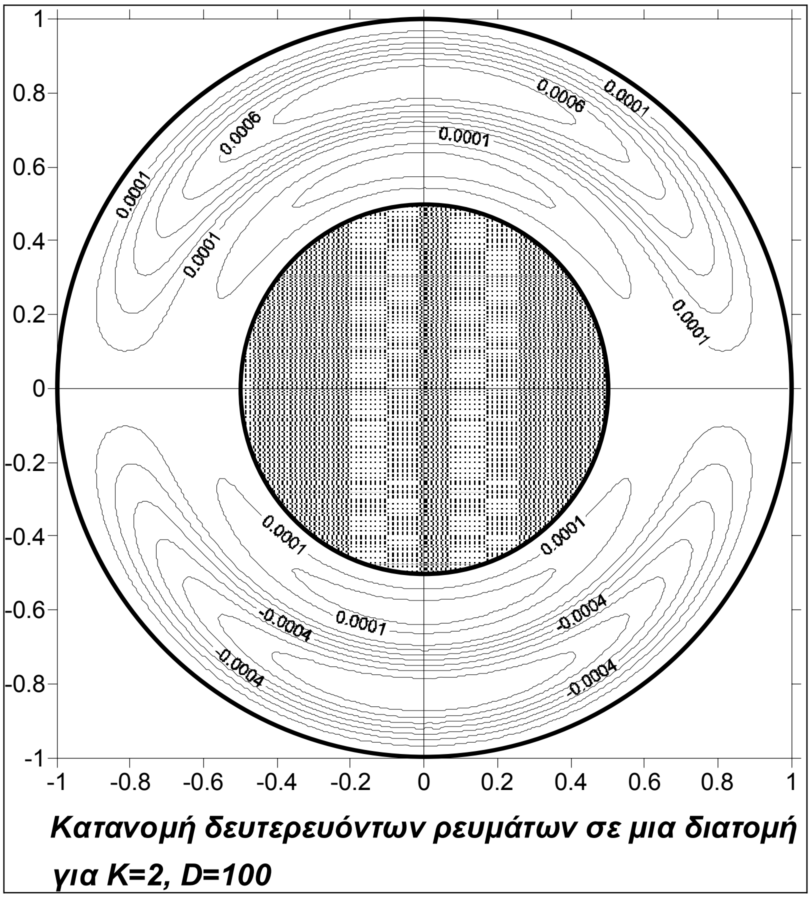
Σχήμα 6.2.2 (β) : Κατανομή δευτερευόντων ρευμάτων σε μια διατομή για K=5 και αριθμό Dean=200



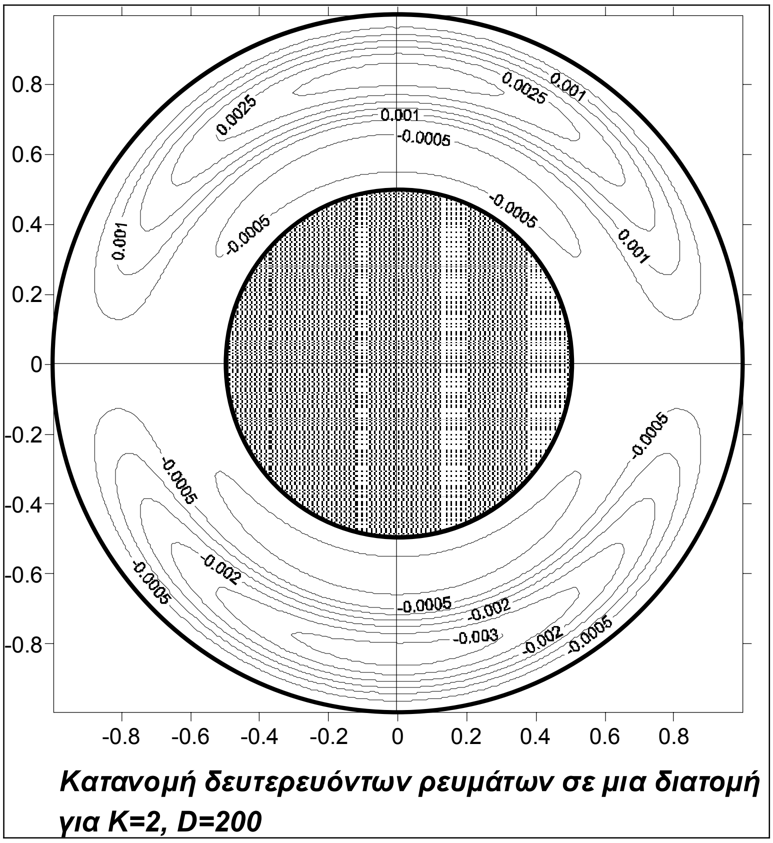
Σχήμα 6.2.2 (γ) : Κατανομή δευτερευόντων ρευμάτων σε μια διατομή για K=5 και αριθμό Dean=100

Στην παρουσία ενός μεγάλου πυρήνα (k=2), μια **δεύτερη δίνη** δημιουργείται. Η κίνηση κατά μήκος του τοιχώματος του πυρήνα από **θ=0 σε θ=π** γίνεται από την έξω πλευρά του σωλήνα προς την έσω. Ο πυρήνας εισχωρεί βαθιά στο κύριο σώμα του ρευστού έχοντας έτσι ως αποτέλεσμα **μικρότερες αξονικές ταχύτητες** και επομένως **μικρότερες φυγόκεντρες δυνάμεις**.

Επιπροσθέτως, στον πυρήνα καθαυτό ένα άλλο στρώμα Stokes σχηματίζεται. Μέσα σε αυτό η αξονική ταχύτητα ξανά εξασθενίζει προς το μηδέν καθώς το τοίχωμα του πυρήνα πλησιάζεται. Η βαθμίδα πίεσης μέσα στο στρώμα Stokes οδηγεί το ρευστό κατά μήκος των τοιχωμάτων από την εξωτερική πλευρά της καμπύλωσης προς την εσωτερική. Τα δύο στρώματα που σχηματίζονται σε κάθε μισό συναντούν το ένα το άλλο στην εσωτερική καμπύλωση όπου και συγκρούονται. Σε αυτό το σημείο αυτά αλλάζουν διεύθυνση εξαιτίας της φυγόκεντρου δύναμης που σχετίζεται με την ροή του καμπύλου σωλήνα και κινούνται από την εσωτερική προς την εξωτερική πλευρά της καμπύλωσης, στο κύριο σώμα του ρευστού, δημιουργώντας έτσι δύο **αντίθετα περιστρεφόμενες δίνες** σε κάθε μισό.

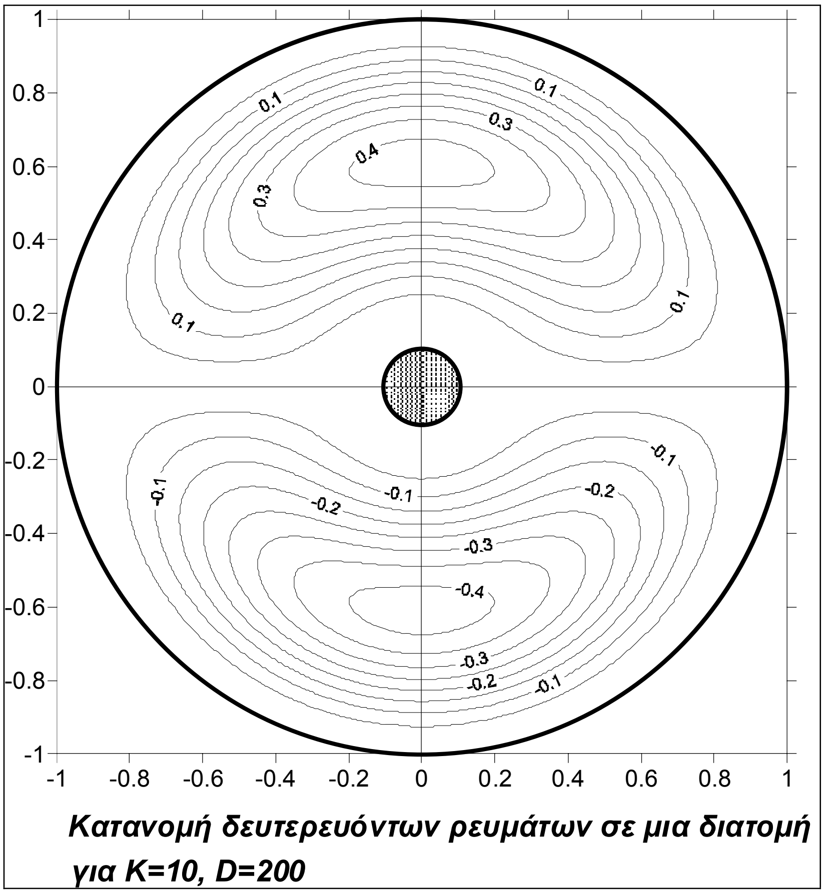


Σχήμα 6.2.2 (δ) : Κατανομή δευτερευόντων ρευμάτων σε μια διατομή για K=2 και αριθμό Dean=100



Σχήμα 6.2.2 (ε) : Κατανομή δευτερευόντων ρευμάτων σε μια διατομή για K=2 και αριθμό Dean=200

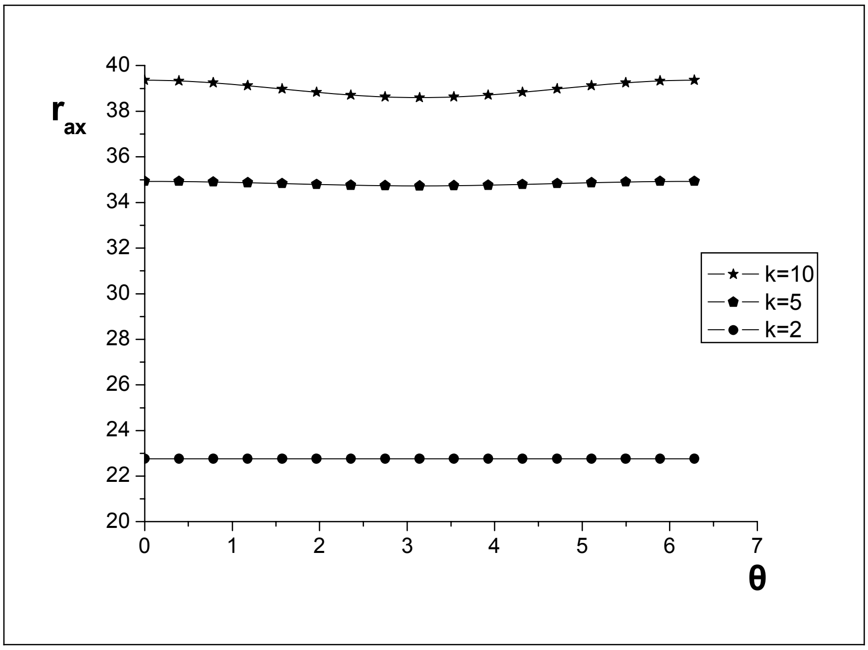
Όταν η ακτίνα του πυρήνα είναι μικρή π.χ. k=10 η δίνη που σχηματίζεται κοντά στον πυρήνα είναι πολύ μικρή και έτσι η δευτερεύουσα ροή είναι περίπου ίδια με αυτή απουσίας πυρήνα.



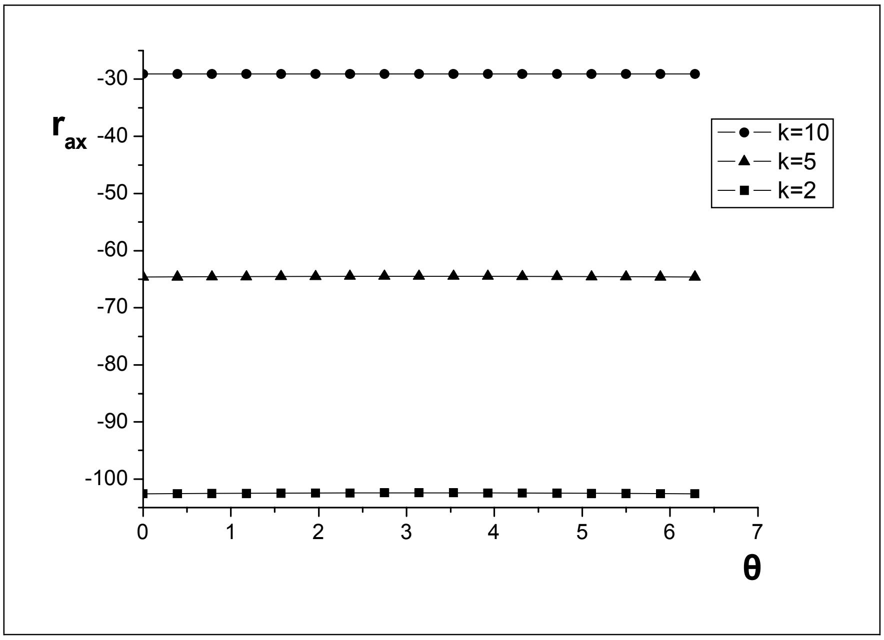
Σχήμα 6.2.2 (στ) : Κατανομή δευτερευόντων ρευμάτων σε μια διατομή για K=10 και αριθμό Dean=200

6.3 Μεταβολές αξονικών διατμητικών τάσεων

Παρακάτω φαίνονται οι μεταβολές της αδιάστατης αξονικής διατμητικής τάσης γύρω από το τοίχωμα του πυρήνα και αυτό του σωλήνα (r=1/k, r=1), $r_{ax} = -\frac{\partial w}{\partial r}$. Στον πυρήνα (r=1/k), η απόλυτη τιμή της αξονικής διατμητικής τάσης ελαττώνεται με την αύξηση της ακτίνας του πυρήνα. Η ίδια σχέση παρατηρείται στο τοίχωμα του σωλήνα (r=1). Αυτό συμβαίνει επειδή για μικρές ακτίνες πυρήνων η αξονική ταχύτητα λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές και συνεπώς η παράγωγος $\frac{\partial w}{\partial r}$ είναι μεγαλύτερη στο τοίχωμα του σωλήνα. Προφανώς στην οριακή τιμή του k→1, η αξονική διατμητική τάση του πυρήνα και αυτή στο τοίχωμα του σωλήνα τείνουν να συνταυτίζονται.

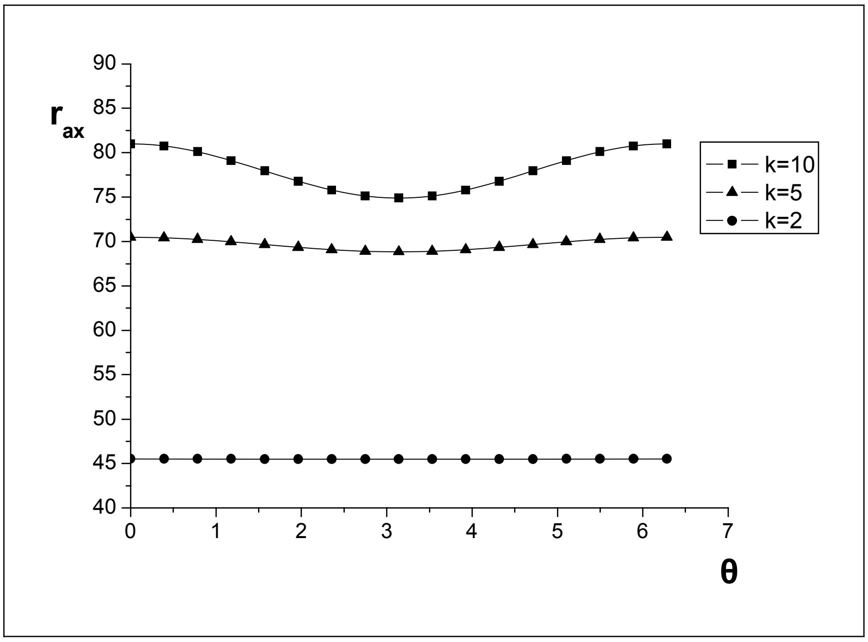


Σχήμα 6.3 (α) : Αξονική διατμητική τάση στο τοίχωμα r=1/k για αριθμό Dean=100

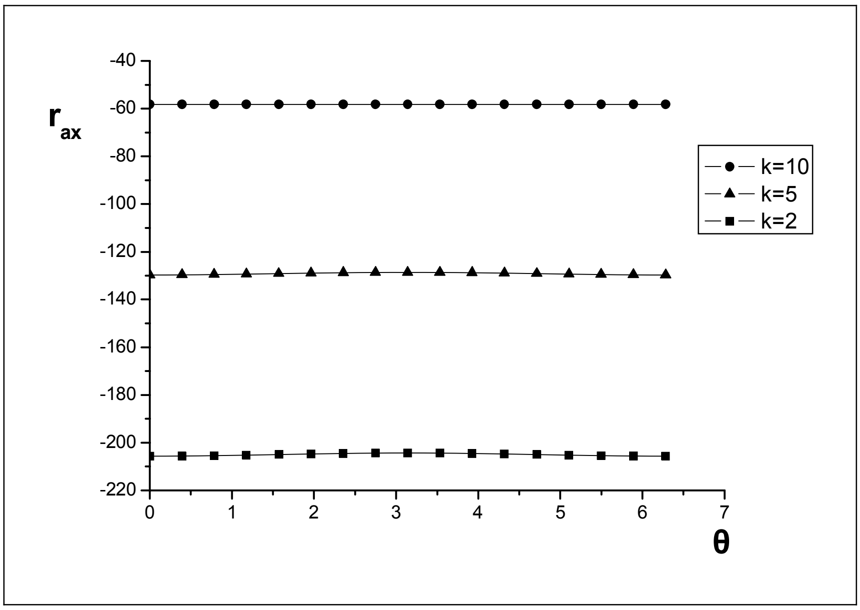


Σχήμα 6.3 (β) : Αξονική διατμητική τάση στο τοίχωμα r=1 για αριθμό Dean=100

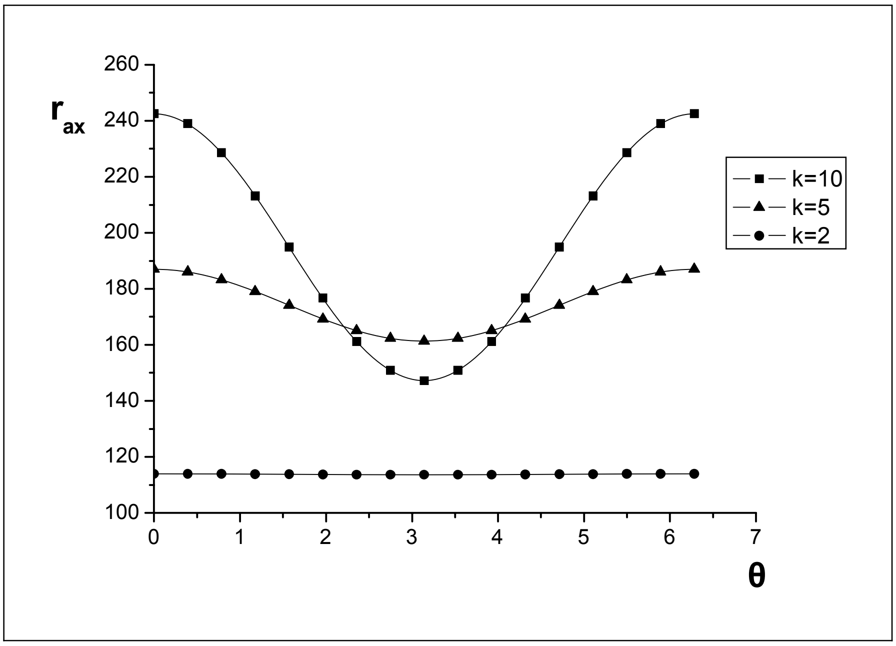
Να σημειώσουμε πως όταν ο αριθμός Dean λαμβάνει μικρές τιμές, η αξονική διατμητική τάση παραμένει σχεδόν σταθερή κατά μήκος του σωλήνα και μόνο για μεγαλύτερες τιμές αυτού φαίνεται να υπάρχει διακύμανση με το μέγιστο να εμφανίζεται στο εξωτερικό όριο της καμπύλωσης. Αυτά τα αποτελέσματα συμφωνούν με το γεγονός πως όταν το k=2 το προφίλ της αξονικής ταχύτητας είναι σχεδόν παραβολικό και μόνο για μεγαλύτερους αριθμούς Dean εμφανίζεται μια απόκλιση σε αυτή τη μορφή.



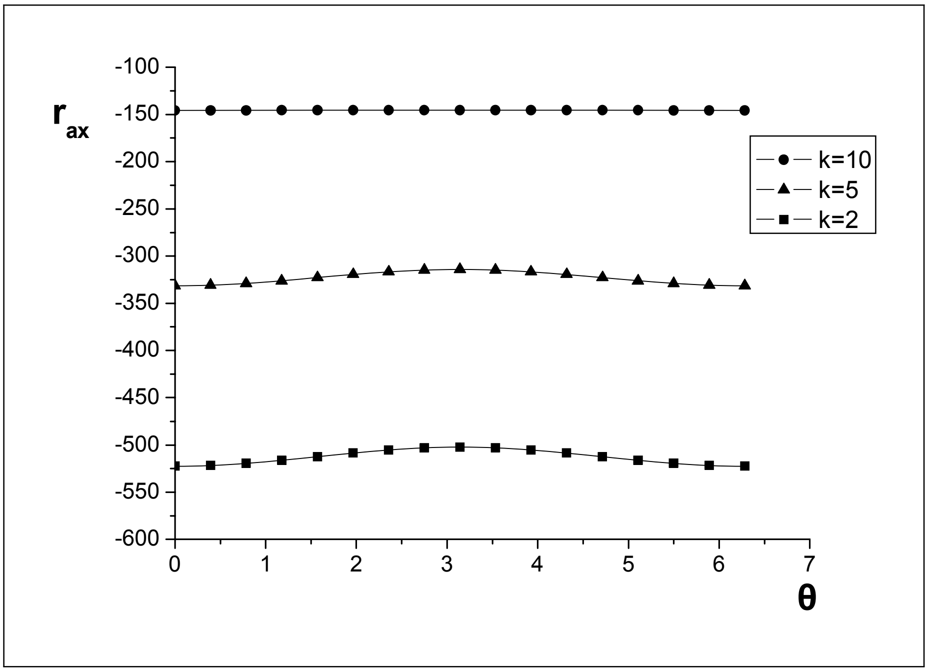
Σχήμα 6.3 (γ) : Αξονική διατμητική τάση στο τοίχωμα r=1/k για αριθμό Dean=200



Σχήμα 6.3 (δ) : Αξονική διατμητική τάση στο τοίχωμα r=1 για αριθμό Dean=200



Σχήμα 6.3 (ε) : Αξονική διατμητική τάση στο τοίχωμα r=1/k για αριθμό Dean=500



Σχήμα 6.3 (στ) : Αξονική διατμητική τάση στο τοίχωμα r=1 για αριθμό Dean=500

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1.Κώδικας υπολογισμού τιμών και ισοταχών καμπύλων-περιγραμμάτων των αξονικών ταχυτήτων και ρευματοσυνάρτησης.

```
      program flow
       implicit none
       double precision k,r,w1,w2,th ,pi,f,w,d,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,
       *s10,s11,s12,s13,s14,s15,s16,s17,s18,s19,p1,p2,p3,p4,j,i,h,s1,
       *stress_ax
      integer iter,iter_th
       open(16,file='w_cnt_k_2d100.dat',access='sequential',status='old')
       open(17,file='f_cnt_k_2d100.dat',access='sequential',status='old')
       open(18,file='w1_pr_k_2d100.dat',access='sequential',status='old')
       open(19,file='f_pr_k_2d100.dat',access='sequential',status='old')
       open(20,file='w2_pr_k_2d100.dat',access='sequential',status='old')
       open(21,file='strs_k_2d100.dat',access='sequential',status='old')
       open(22,file='strs_k2d1_r_1.dat',access='sequential',status='old')
       open(23,file='strs_k2d1_r_k.dat',access='sequential',status='old')

      write(*,*) 'GIVE THE VALUE OF k'
       read(*,*) k
       write(*,*) 'GIVE THE VALUE OF d'
       read(*,*) d
       pi=acos(-1.d0)
       iter_th=0
       do th=.0d0 ,2.d0*pi,  2.d0*pi/128.d0
       iter_th=iter_th+1
       iter=1
        do r=1.d0/k,1.d0,(1.d0-1.d0/k)/200.
         h=log(k)
         i=log(r)
         j=log(1.d0/k)
      p2=5.d0/1024.d0/k**2/j*r**3-17.d0/4096.d0/k**4/j**2*r**3-1.d0/
     *k**2/j*r**5/2304.+17.d0/2048.d0/k**2/j**2*r**3-r**5/j*i/
     *1536.-1/j**2*r**3*i**2/512.-r*(-45.+8.*k**8*j**2+88.*j*k**2-
     *252.*j*k**4+88.*j*k**6+90.*k**2+38.*j*k**8+38.*j-8.*j**2+45.*k**8
     *-90.*k**6-44.*k**2*j**2+44.*k**6*j**2)/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+
     *j)*i/18432.+1./j*r**3*i/256.+5.d0/1024.d0*r**3/j**2*
     *i-r**3/k**4/j**2*i**2/512.-5.d0/512.d0*r**3/k**2/j**2*
     *i+1./k**2/j**2*r**3*i**2/256.
      p3=p2-1./k**2/j*r**3*i/256.+r**5/k**2/j*i/1536.+5.d0/
     *1024.d0*r**3/k**4/j**2*i-r**3/k**4*(36.+108.*k**4+63.*j*k**2
     *+63.*j*k**4-63.*j*k**6-108.*k**2-63.*j-24.*k**4*j**2+44.*j**2+12.
     **k**4*j**3-12.*j**3-36.*k**6-12.*j**3*k**2-20.*k**6*j**2+12.*j**3
     **k**6)/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)/12288.+1./j*r**5/2304.
      p4=p3-17.d0/4096.d0/j**2*r**3+r*(-45.+8.*k**8*j**2+88.*j*k**2-
     *252.*j*k**4+88.*j*k**6+90.*k**2+38.*j*k**8+38.*j-8*j**2+45.*k**8
     *-90.*k**6-44.*k**2*j**2+44.*k**6*j**2)/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+
     *j)/36864.-1./r*(-36.*j**3*k**2-38.*j*k**2+8.*k**6*j**2-45.+38.*j*
     *k**6+45.*k**6-38.*j*k**4-36.*k**4*j**3-88.*k**4*j**2-135.*k**4+
     *88.*k**2*j**2+135.*k**2+38.*j-8.*j**2)/k**6/j**2/(k**2+j*k**2
     *-1.+j)/36864.
      p1=p4-5.d0/1024.d0/j*r**3-r**7/9216.+r**5/1536.+r*(8.*k**6*j**2
     *+38.*j*k**6+45.*k**6+8.*k**4*j**2-44.*j*k**4-171.*k**4-36.*k**2*
     *j**2-126.*j*k**2+207.*k**2-36.*j**2+132.*j-81.)/j/k**4/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)/18432.
      p2=sin(th)

      f=d**2*p1*p2
      w1=-(r**2/4.)+(k**2-1.)/(4.*k**2*h)*i+1./4.

     s4=r*k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)/36864.+7.d0/73728.d0*k**2/(k**2+j*
```

```
      *k**2-1.+j)*r**5-15.d0/32768.d0*r/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)-7.d0/
      *32768.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-11.d0/294912.d0/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**3-41.d0/65536.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+r/
      *(k**2+j*k**2-1.+j)*i/18432.+19.d0/294912.d0/k**6/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**3+1./k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3/8192.-1./k**2*j
      */(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5/49152.+5.d0/196608.d0/k**4/j/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**5
       s3=s4+11.d0/73728.d0*r/k**6/(k**2+j*k**2-1.+j)-19.d0/147456.d0/
      *k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-11.d0/36864.d0*r/k**4/(k**2+j*k**2-1.
      *+j)+11.d0/147456.d0/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5+r**3/j**3*
      *i**2/16384.+11.d0/73728.d0/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3+
      *7.d0/1179648.d0/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7-j/(k**2+j*k**2-1.+j)*
      *r**7/147456.-7.d0/147456.d0/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+r**5/j**2*
      *i**2/24576.+3.d0/8192.d0/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3
       s5=s3-13.d0/98304.d0*k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+11.d0/73728.d0
      **r/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+1./r/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/
      *3072.-r/k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/4096.-11.d0/73728.d0*r/
      *k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2
       s4 = s5-167.d0/589824.d0/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-211.d0/
      *294912.d0*r/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+7.d0/589824.d0/j/(k**2+j*k**2-
      *1.+j)*r**7-5.d0/393216.d0*k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7+j/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**5/49152.+j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.
       s5=s4-77.d0/294912.d0/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-7.d0/24576.d0
      **r/j/(k**2+j*k**2-1.+j)+k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.-
      *27.d0/32768.d0/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-j/(k**2+j*k**2-1.+j)*
      *r**3/36864.
       s2 = s5+13.d0/73728.d0/k**4/j/(k**2+j*k**2-1+j)*i*r**3-3.d0/
      *8192.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3+r/k**2*j/(k**2+j
      **k**2-1.+j)/8192.+23.d0/147456.d0*r*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)+
      *7.d0/8192.d0*r/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)-19.d0/147456.d0*r/k**8/
      *j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+r/k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/
      *8192.
       s5 = -15.d0/32768.d0*r/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+r*k**2/
      *j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/36864.-r/k**4*j/(k**2+j*k**2-1.+j)
      **i/4096.-5.d0/32768.d0/r/k**8/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i
      *-23.d0/73728.d0*r*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i
       s4 = s5-11.d0/73728.d0/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-3.d0/
      *16384.d0*r**3/k**2/j**3*i**2+5.d0/16384.d0*r/k**4/j**3/(k**2
      *+j*k**2-1.+j)+61.d0/589824.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-5.d0
      */32768.d0/r/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+19.d0/73728.d0*r/k**6/
      *j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)
       s5 = s4+5.d0/32768.d0*r*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)+91.d0/
      *589824.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-1./r/k**8/j/(k**2+j*k**2
      *-1.+j)*i/36864.+19.d0/73728.d0/r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)
      **i+1./r/k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/3072.
       s3 = s5-15.d0/32768.d0*r/k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2-
      *11.d0/18432.d0/r/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-85.d0/73728.d0*
      *r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+5.d0/8192.d0/r/k**6/j**3
      */(k**2+j*k**2-1.+j)*i+15.d0/16384.d0*r/k**6/j**3/(k**2+j*k**2
      *-1.+j)*i-19.d0/147456.d0*r/k**8/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
      *i**2-r/k**8/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/18432.
       s5=-19.d0/147456.d0/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+5.d0/
      *16384.d0*r/k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+s2+s3-25.d0/
      *147456.d0*r/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+85.d0/73728.d0
      **r/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2
       s6 = s5-173.d0/147456.d0*r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+
      *5.d0/32768.d0*r*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2
       s8 = s6
       s10 = r/j**2/5898240.
       s11=1./(k**2+j*k**2-1.+j)*(2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2
      *-1440.*j**5*k**4+8130.*j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-
      *84.*j**4*k**10-1440.*j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-
      *10575.*k**8+10575.*k**4-9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12
      *+2745.*j**2-8460.*k**2-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-
      *1085.*k**12*j**2-3205.*k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-
      *4105.*j+8460.*k**10+3425.*j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-
      *4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*
      *k**2*j**2+11730.*j*k**2)/k**8/(k**4+1.-2.*k**2-j+j*k**4)
```

```
      s9 = s10*s11
      s7 = s8+s9
      s9 = s7
      s11 = r/k**6/5898240.
      s13=1./(k**2+j*k**2-1.+j)*(2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2
     *-1440.*j**5*k**4+8130.*j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-
     *84.*j**4*k**10-1440.*j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-
     *10575.*k**8+10575.*k**4-9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12
     *+2745.*j**2-8460.*k**2-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-
     *1085.*k**12*j**2-3205.*k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-
     *4105.*j+8460.*k**10+3425.*j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-
     *4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*
     *k**2*j**2+11730.*j*k**2)
      s14 = 1./j**3/(k**4+1.-2.*k**2-j+j*k**4)
      s12 = s13*s14
      s10 = s11*s12
      s8 = s9+s10
      s4 = s8+r/k**8/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/36864.+5.d0/
     *32768.d0*r/k**8/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2
      s5 = s4+k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3/147456.-11.d0/
     *36864.d0*r/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)+31.d0/73728.d0/j/(k**2+j*k**2
     *-1.+j)*i*r**3+83.d0/294912.d0*r*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+
     *r/k**4*j/(k**2+j*k**2-1.+j)/8192.-67.d0/147456.d0*r/k**6/j/(k**2+j
     **k**2-1.+j)
      s1 = s5-k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5/12288.-1./k**6/(k**2+
     *j*k**2-1.+j)*i*r**3/36864.-1./j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*
     *r**7/73728.+3.d0/16384.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+19.d0/
     *49152.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+43.d0/147456.d0/j/
     *(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5-1./k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *i*r**3/16384.
         s4 = s1+9.d0/16384.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-19.d0/
     *147456.d0*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+1./k**2/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i*r**5/12288.+15.d0/16384.d0*r/j**3/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)*i-1./k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.
     *+7.d0/147456.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+k**2/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.+67.d0/73728.d0*r/k**6/j/(k**2+
     *j*k**2-1.+j)*i-161.d0/589824.d0/k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *r**3+27.d0/131072.d0*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3
      s5=s4+7.d0/32768.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-5.d0/
     *16384.d0*r*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-7.d0/98304.d0/k**4
     */j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-5.d0/16384.d0*r/k**8/j**3/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)*i+1./j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3/1024.
      s3 = s5+19.d0/147456.d0*r*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2-
     *1./(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.+1./r/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *i/8192.+211.d0/147456.d0*r/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-
     *11.d0/36864.d0*r/k**6/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+11.d0/18432.d0
     **r/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+7.d0/12288.d0*r/j/(k**2+j*k**2-
     *1.+j)*i
      s4 = s3-19.d0/36864.d0*r/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-r*
     *k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/18432.-11.d0/36864.d0*r/k**2/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i+19.d0/73728.d0*r/k**8/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)
     **i+r/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/8192.-5.d0/8192.d0*r/k**2
     */j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+25.d0/147456.d0*r/j**2/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)*i**2+r**5/k**4/j**2*i**2/24576.-r**3/k**6/
     *j**3*i**2/16384.+27.d0/131072.d0/k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)
     **r**3+k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.
      s5 = s4+1./k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.-3.d0/
     *4096.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3+81.d0/65536.d0/k**2/
     *j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-1./r/k**6/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/
     *8192.+83.d0/147456.d0*r/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i
      s6 = s5-27.d0/32768.d0/k**4/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-83.d0/
     *147456.d0*r*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+19.d0/147456.d0/
     *k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5
      s8 = s6
      s10 = -r/(k**2+j*k**2-1.+j)/5898240.
      s11=(2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2-1440.*j**5*k**4+8130.
     **j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-84.*j**4*k**10-1440.*
     *j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-10575.*k**8+10575.*k**4-
```

```
     *9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12+2745.*j**2-8460.*k**2
     *-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-1085.*k**12*j**2-3205.*
     *k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-4105.*j+8460.*k**10+3425.
     **j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2
     *+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*k**2*j**2+11730.*j*k**2)/j**3/
     *k**8/(k**4+1.-2*k**2-j+j*k**4)
      s9 = s10*s11
      s7 = s8+s9
      s2=s7-1./(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5/24576.+1./(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *r**7/147456.+r/k**8/j/(k**2+j*k**2-1.+j)/36864.
      s6 = s2+19.d0/147456.d0/r/k**8/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i
      s8 = s6
      s10 = r/k**6/5898240.
      s12 = 1./j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)
      s13=(2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2-1440.*j**5*k**4+8130.
     **j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-84.*j**4*k**10-1440.*
     *j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-10575.*k**8+10575.*k**4-
     *9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12+2745.*j**2-8460.*k**2
     *-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-1085.*k**12*j**2-3205.
     **k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-4105.*j+8460.*k**10+3425.
     **j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2
     *+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*k**2*j**2+11730.*j*k**2)/(k**4
     *+1.-2.*k**2-j+j*k**4)
      s11 = s12*s13
      s9 = s10*s11
      s7 = s8+s9
      s5 = s7-31.d0/147456.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5-
     *23.d0/65536.d0/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3
      s4 = s5-71.d0/589824.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-15.d0/
     *32768.d0*r/k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)+5.d0/16384.d0*r/k**2/j**3/
     *(k**2+j*k**2-1.+j)-83.d0/294912.d0*r/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+
     *173.d0/294912.d0*r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+3.d0/16384.d0*r**3
     */k**4/j**3*i**2
      s5 = s4-r**5/k**2/j**2*i**2/12288.+25.d0/131072.d0*k**2/j**2/
     *(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-15.d0/16384.d0/r/k**4/j**3/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)*i-19.d0/49152.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *i*r**5+3.d0/32768.d0/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3
      s3 = s5+11.d0/18432.d0*r/k**2/j/(k**2+j*k**2-1+j)*i-3.d0/
     *2048.d0/k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-7.d0/32768.d0*
     *k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-r/(k**2+j*k**2-1.+j)/
     *36864.+k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.+19.d0/73728.d0/k**4
     */j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-1./k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*
     *r**3/4096.
      s5 = s3+3.d0/4096.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-7.d0/
     *1179648.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7+5.d0/8192.d0/r/k**2/j**3
     */(k**2+j*k**2-1.+j)*i+7.d0/98304.d0*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-
     *1.+j)*r**5+5.d0/16384.d0*r/k**4/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2
      s4 = s5-19.d0/147456.d0/r/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-11.d0/
     *73728.d0*r/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+1./k**4/j**3/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i*r**3/1024.+1./k**4*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3
     */8192.-5.d0/8192.d0*r/k**4/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-7.d0/
     *1179648.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7
      s6 = s4-k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7/147456.-1./k**4*j/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)*r**5/49152.
      s7 = s6+1./r*(-1215.+5105.*k**6*j**2+1440.*j**5*k**4+4245.*j*
     *k**10+949.*j**3*k**10+3345.*k**10*j**2+84.*j**4*k**10+1440.*j**5
     **k**6-1836.*k**8*j**4+1116.*j**4*k**2-6075.*k**8-12150.*k**4+3090.
     **j*k**4-3585.*k**4*j**2-2585.*j**2+6075.*k**2+7135.*j**3*k**6+
     *2640.*j**4*k**6-84.*j**4+12150.*k**6-1920.*j**4*k**4+3345.*j+1215.
     **k**10-6324.*j**3*k**8-7530.*k**8*j**2+789.*j**3-13635.*j*k**8-
     *4244.*j**3*k**2+12090.*j*k**6+1695.*k**4*j**3+5250.*k**2*j**2-
     *9135.*j*k**2)/j**3/k**8/(k**4+1.-2*k**2-j+j*k**4)/5898240.
      s5 = s7-19.d0/73728.d0/r/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-k**2
     */j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3/4096.+5.d0/32768.d0*r/k**8/
     *j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)
      w2 = s5-1./r/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/36864.+k**2/(k**2+j*k**2
     *-1.+j)*i*r**3/36864.+7.d0/131072.d0/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-
     *1.+j)*r**3-k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3/36864.+19.d0/147456.d0/
```

```
     *k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-7.d0/4096.d0*r/k**4/j/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i+k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5/49152.

      w=d*w1+d**3*w2*cos(th)
         write(16,*) r*cos(th), r*sin(th), w
         write(17,*) r*cos(th), r*sin(th), f
      s1 = -d*(-r/2.-(-1.+k**2)/j/k**2/r/4.)
      s3 = -1.
      s5 = d**3
      s12 = 7.D0/147456.D0/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**6+11.D0/294912.D0/(j+
     #j*k**2+k**2-1.)*r**2+3.D0/8192.D0/k**4*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2
      s14 = s12
      s16 = 1./j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)/5898240.
      s17 = (2115.-11920.*k**6*j**2-1085.*k**12*j**2+131.*k**12*j**3-
       #1440.*j**5*k**6-2115.*k**12+76.*k**12*j**4-3205.*k**12*j-10575.*
     #k**8-1960.*j**3*k**6+8460.*k**10-1116.*j**4*k**2-789.*j**3+2745.*
     #j**2-8460.*k**2-4105.*j+10575.*k**4+84.*j**4-9075.*j*k**4-2640.*
     #j**4*k**6+11730.*j*k**2+3240.*j**4*k**4+8130.*j*k**10-496.*j**3*
     #k**10+1300.*k**10*j**2+440.*k**8*j**4+1100.*k**6*j-9700.*k**2*j**2
     #-4575.*j*k**8+4075.*k**8*j**2+5504.*j**3*k**2-5815.*k**4*j**3-84.*
     #j**4*k**10-1440.*j**5*k**4+14585.*k**4*j**2+3425.*j**3*k**8)/k**8/
     #(1.+k**4-j+j*k**4-2.*k**2)
      s15 = s16*s17
      s13 = s14+s15
      s14 = s13
      s17 = 1./k**6/(j+j*k**2+k**2-1.)/5898240.
      s18 = (2115.-11920.*k**6*j**2-1085.*k**12*j**2+131.*k**12*j**3-
       #1440.*j**5*k**6-2115.*k**12+76.*k**12*j**4-3205.*k**12*j-10575.*
     #k**8-1960.*j**3*k**6+8460.*k**10-1116.*j**4*k**2-789.*j**3+2745.
     #*j**2-8460.*k**2-4105.*j+10575.*k**4+84.*j**4-9075.*j*k**4-2640.*
     #j**4*k**6+11730.*j*k**2+3240.*j**4*k**4+8130.*j*k**10-496.*j**3*
     #k**10+1300.*k**10*j**2+440.*k**8*j**4+1100.*k**6*j-9700.*k**2*
     #j**2-4575.*j*k**8+4075.*k**8*j**2+5504.*j**3*k**2-5815.*k**4*j**3
     #-84.*j**4*k**10-1440.*j**5*k**4+14585.*k**4*j**2+3425.*j**3*k**8)
     #/j**3/(1.+k**4-j+j*k**4-2.*k**2)
      s16 = s17*s18
      s18 = 1./k**6/j**2/5898240.
      s19 = 1./(j+j*k**2+k**2-1.)*(2115.-11920.*k**6*j**2-1085.*k**12*
     #j**2+131.*k**12*j**3-1440.*j**5*k**6-2115.*k**12+76.*k**12*j**4-
     #3205.*k**12*j-10575.*k**8-1960.*j**3*k**6+8460.*k**10-1116.*j**4*
     #k**2-789.*j**3+2745.*j**2-8460.*k**2-4105.*j+10575.*k**4+84.*j**4
     #-9075.*j*k**4-2640.*j**4*k**6+11730.*j*k**2+3240.*j**4*k**4+8130.
     #*j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2+440.*k**8*j**4+1100.*
     #k**6*j-9700.*k**2*j**2-4575.*j*k**8+4075.*k**8*j**2+5504.*j**3*
     #k**2-5815.*k**4*j**3-84.*j**4*k**10-1440.*j**5*k**4+14585.*k**4*
     #j**2+3425.*j**3*k**8)/(1.+k**4-j+j*k**4-2.*k**2)
      s17 = s18*s19
      s15 = s16+s17
      s11 = s14+s15
      s10 = s11-11.D0/73728.D0/k**6/(j+j*k**2+k**2-1.)+5.D0/16384.D0/
     #k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2-1./r**2/k**6/j/(j+j*k**2+k**2-1.
     #)*i/3072.+11.D0/18432.D0/r**2/k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i+15.D0/
     #32768.D0/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)+85.D0/73728.D0/k**6/j/(j+j*k**2+
     #k**2-1.)*i
      s11 = s10+211.D0/294912.D0/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)+5.D0/16384.D0/
     #k**4/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2-5.D0/24576.D0/(j+j*k**2+k**2-1.)
     #*r**4+1./(j+j*k**2+k**2-1.)*i/18432.+7.D0/147456.D0/k**2/j/(j+j*
     #k**2+k**2-1.)*i*r**6
      s12 = s11-k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)/36864.-1./(j+j*k**2+k**2-1.)*
     #r**8/163840.+15.D0/16384.D0/r**2/k**4/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i
      s13 = s12+1./r**2/k**8/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i/36864.
      s14 = s13-5.D0/49152.D0/k**4*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4
      s9 = s14+47.D0/131072.D0*k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2-1./r**2
       #*(-1215.+5105.*k**6*j**2+1440.*j**5*k**6-6075.*k**8+7135.*j**3*
     #k**6+1215.*k**10+1116.*j**4*k**2+789.*j**3-2585.*j**2+6075.*k**2+
     #3345.*j-12150.*k**4-84.*j**4+12150.*k**6+3090.*j*k**4+2640.*j**4*
     #k**6-9135.*j*k**2-1920.*j**4*k**4+4245.*j*k**10+949.*j**3*k**10+
     #3345.*k**10*j**2-1836.*k**8*j**4+12090.*k**6*j+5250.*k**2*j**2-
```

```
#13635.*j*k**8-7530.*k**8*j**2-4244.*j**3*k**2+1695.*k**4*j**3+84.*
#j**4*k**10+1440.*j**5*k**4-3585.*k**4*j**2-6324.*j**3*k**8)/j**3/
#k**8/(1.+k**4-j+j*k**4-2.*k**2)/5898240.
 s12 = 1./k**6/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2/8192.+3.D0/1024.D0/k**4/
#j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2+1./(j+j*k**2+k**2-1.)/36864.
 s13 = s12+1./j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2/8192.
 s14 = s13
 s16 = 19.D0/73728.D0/r**2/k**6/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i
 s18 = -1./(j+j*k**2+k**2-1.)*(2115.-11920.*k**6*j**2-1085.*k**12*
#j**2+131.*k**12*j**3-1440.*j**5*k**6-2115.*k**12+76.*k**12*j**4-
#3205.*k**12*j-10575.*k**8-1960.*j**3*k**6+8460.*k**10-1116.*j**4*
#k**2-789.*j**3+2745.*j**2-8460.*k**2-4105.*j+10575.*k**4+84.*j**4-
#9075.*j*k**4-2640.*j**4*k**6+11730.*j*k**2+3240.*j**4*k**4+8130.*
#j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2+440.*k**8*j**4+1100.*k**6
#*j-9700.*k**2*j**2-4575.*j*k**8+4075.*k**8*j**2+5504.*j**3*k**2-
#5815.*k**4*j**3-84.*j**4*k**10-1440.*j**5*k**4+14585.*k**4*j**2+
#3425.*j**3*k**8)/5898240.
 s19 = 1./j**3/k**8/(1.+k**4-j+j*k**4-2.*k**2)
 s17 = s18*s19
 s15 = s16+s17
 s11 = s14+s15
 s10 = s11+7.D0/147456.D0*k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**6+k**2/j/
  #(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2/49152.-3.D0/4096.D0/k**6/j**3/(j+j*k**2
#+k**2-1.)*i*r**2-21.D0/32768.D0*k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*
#r**2+5.D0/49152.D0*k**2*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4+37.D0/65536.D0/
#k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4+67.D0/294912.D0*k**2/j**2/(j+j*k**2
#+k**2-1.)*r**4
 s11 = s10-1./k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4/589824.-407.D0/
  #589824.D0/k**6/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2+19.D0/49152.D0/k**6/j/
#(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2-19.D0/147456.D0/r**2/k**8/j**2/(j+j*
#k**2+k**2-1.)*i+19.D0/147456.D0/r**2/k**8/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)+
#3.D0/8192.D0/k**2*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2
 s8 = s11-67.D0/294912.D0/k**4/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4-7.D0/
  #147456.D0*k**2*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**6-15.D0/32768.D0/k**6/j**3/
#(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2+85.D0/73728.D0/k**4/j**2/(j+j*k**2+k**2-
#1.)*i**2+11.D0/36864.D0/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i-19.D0/73728.D0
#/r**2/k**6/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)+s9
 s10 = -11.D0/73728.D0/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2+15.D0/8192.D0
  #/k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2+5.D0/24576.D0*r**4/j**2/k**4*
#i**2+r**4/j**2/k**4*i/12288.-1./r**2/k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i/
#8192.-3.D0/16384.D0*r**2/j**3/k**6*i**2+9.D0/16384.D0*r**2/j**3/
#k**4*i**2+3.D0/8192.D0*r**2/j**3/k**4*i-7.D0/8192.D0/k**6/j**2/
#(j+j*k**2+k**2-1.)*i+27.D0/16384.D0/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2
#+215.D0/147456.D0/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4-r**2/j**3/k**6*i/
#8192.
 s11 = s10+5.D0/32768.D0/r**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i-5.D0/
  #49152.D0/k**2*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4-11.D0/24576.D0/k**4/
#(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2-5.D0/16384.D0*k**2/j**2/(j+j*k**2+
#k**2-1.)*i+k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2/36864.-19.D0/73728.D0*
#k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i
 s9 = s11+19.D0/147456.D0*k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2-37.D0/
  #18432.D0/k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i+35.D0/36864.D0/k**4/j/
#(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2-5.D0/12288.D0*r**4/j**2/k**2*i**2-r**4/
#j**2/k**2*i/6144.-19.D0/147456.D0/k**8/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*
#i**2+33.D0/131072.D0/k**6/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2
 s11 = -1./k**2*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i/4096.-1./k**6/(j+j*k**2+k**2
  #-1.)*i*r**2/12288.-7.D0/73728.D0/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**6+5.D0/
#32768.D0/k**8/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2+5.D0/32768.D0*k**2/j**3
#/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2+1./r**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i/36864.
 s10 = s11+1./r**2/k**6/(j+j*k**2+k**2-1.)*i/8192.+5.D0/8192.D0/
#r**2/k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)-9.D0/16384.D0*r**2/j**3/k**2*
#i**2-3.D0/8192.D0*r**2/j**3/k**2*i+19.D0/147456.D0/r**2/j**2/(j+
#j*k**2+k**2-1.)*i+147.D0/65536.D0/k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*
#r**2+1./r**2/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)/3072.
 s11 = s10+95.D0/49152.D0/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4+31.D0/
  #24576.D0/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2-11.D0/73728.D0/k**2/(j+j*k**2
#+k**2-1.)+35.D0/147456.D0/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4-95.D0/
#147456.D0*k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4+11.D0/24576.D0/
```

```
      #(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2
       s7 = s11+55.D0/147456.D0/k**4/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4-5.D0/
        #32768.D0*k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)-49.D0/32768.D0/j**3/
      #(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2-5.D0/16384.D0/k**4/j**3/(j+j*k**2+
      #k**2-1.)-5.D0/32768.D0/r**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)+s9+s8
       s10 = -67.D0/98304.D0/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4-11.D0/36864.D0
        #/k**6/(j+j*k**2+k**2-1.)*i-221.D0/196608.D0/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*
      #r**4-1./r**2/k**6/(j+j*k**2+k**2-1.)/8192.+1./r**2/k**2/(j+j*k**2+
      #k**2-1.)/8192.+67.D0/147456.D0/k**6/j/(j+j*k**2+k**2-1.)-15.D0/
      #32768.D0/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2-j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2/
      #12288.+r**4/j**2*i/12288.-k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i/18432+5.D0/
      #24576.D0*r**4/j**2*i**2-87.D0/65536.D0/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*
      #r**2
       s11 = s10-109.D0/294912.D0*k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2-173.D0/
        #294912.D0/k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)+k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*
      #r**8/163840.-5.D0/16384.D0/k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)-1./k**2*j
      #/(j+j*k**2+k**2-1.)/8192.+j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**8/163840.
       s9 = s11+41.D0/589824.D0/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**6+11.D0/36864.D0
        #/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)-1./r**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)/36864.+
      #83.D0/294912.D0/k**4/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)-83.D0/147456.D0/k**2
      #/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4-19.D0/73728.D0/k**6/j**2/(j+j*k**2+k**2-
      #1.)-19.D0/147456.D0/r**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)
       s11 = -1./k**8/j/(j+j*k**2+k**2-1.)/36864.+41.D0/147456.D0/j/(j+
      #j*k**2+k**2-1.)*r**2+19.D0/147456.D0/k**8/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)+
      #9.D0/8192.D0/k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2+5.D0/6144.D0/j/(j+j*k**2
      #+k**2-1.)*i-7.D0/8192.D0/k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)
       s10 = s11-275.D0/294912.D0/k**4/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2-5.D0/
        #32768.D0/k**8/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)+29.D0/16384.D0/j**2/(j+
      #j*k**2+k**2-1.)*i+11.D0/18432.D0/k**4/(j+j*k**2+k**2-1.)*i+r**2/
      #j**3*i/8192.-83.D0/294912.D0*k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)-23.D0/
      #147456.D0*k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)
       s11 = s10+29.D0/73728.D0*k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4+15.D0/
        #32768.D0/k**6/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)+25.D0/147456.D0/j**2/(j+j*
      #k**2+k**2-1.)*i**2+41.D0/1179648.D0/k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**6+
      #5.D0/49152.D0*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4-7.D0/147456.D0*j/(j+j*
      #k**2+k**2-1.)*r**6
       s8 = s11-1./k**4*j/(j+j*k**2+k**2-1.)/8192.-11.D0/36864.D0/k**2/
        #(j+j*k**2+k**2-1.)*i+49.D0/294912.D0/k**6/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2+
      #3.D0/16384.D0*r**2/j**3*i**2-97.D0/1179648.D0*k**2/(j+j*k**2+k**2
      #-1.)*r**6+67.D0/98304.D0/k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**4+s9
       s11 = -9.D0/2048.D0/k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2-19.D0/
        #73728.D0/r**2/k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i-7.D0/147456.D0/k**2/
      #(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**6+19.D0/73728.D0/r**2/k**2/j**2/(j+j*k**2+
      #k**2-1.)-1./r**2/k**8/j/(j+j*k**2+k**2-1.)/36864.-57.D0/16384.D0/
      #k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i
       s10 = s11-25.D0/147456.D0/k**6/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2-85.D0/
        #73728.D0/k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2-1./k**4*j/(j+j*k**2
      #+k**2-1.)*i/4096.-11.D0/73728.D0/k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i**2+
      #49.D0/131072.D0*k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2-49.D0/32768.D0/
      #k**4/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2
       s11 = s10+5.D0/12288.D0/k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4+7.D0/
        #147456.D0*k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**6-5.D0/32768.D0/r**2/k**8/
      #j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)-3.D0/16384.D0/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)
      #*r**2-73.D0/65536.D0/k**4/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2+1./r**2/
      #k**6/j/(j+j*k**2+k**2-1.)/3072.
       s9 = s11-11.D0/18432.D0/r**2/k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)+5.D0/
        #8192.D0/r**2/k**6/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)-15.D0/16384.D0/r**2/k**4
      #/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)-5.D0/12288.D0*k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*
      #r**4+k**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2/12288.-41.D0/1179648.D0*k**2/j
      #/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**6+k**2*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**8/163840.
       s11 = -209.D0/589824.D0*k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2+49.D0/
        #131072.D0/k**6/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2-41.D0/1179648.D0/k**2/
      #j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**6+331.D0/589824.D0*k**2/j/(j+j*k**2+k**2-
      #1.)*r**4-k**2*j/(j+j*k**2+k**2-1.)*r**2/12288.+47.D0/16384.D0/k**4
      #/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i
       s10 = s11-5.D0/8192.D0/r**2/k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i-1./r**2
        #/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i/3072.-9.D0/8192.D0/k**2/j**2/(j+j*
      #k**2+k**2-1.)*i*r**2-3.D0/16384.D0/k**4/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*
```

```
     #r**2+5.D0/32768.D0/r**2/k**8/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i-9.D0/
     #4096.D0/k**2/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2-5.D0/8192.D0/r**2/k**6/
     #j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i
      s11 = s10+95.D0/147456.D0/k**4/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4-
       #95.D0/147456.D0/k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4+1./k**8/j/(j+j*
     #k**2+k**2-1.)*i**2/36864.+13.D0/24576.D0/k**4/j/(j+j*k**2+k**2-1.)
     #*i*r**2+9.D0/32768.D0/k**6/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2+3.D0/
     #1024.D0/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2
      s6 = s11-95.D0/49152.D0/k**2/j**2/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4-3.D0/
       #4096.D0*k**2/j**3/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**2-155.D0/147456.D0*k**2/
     #j/(j+j*k**2+k**2-1.)*i*r**4+7.D0/24576.D0/j/(j+j*k**2+k**2-1.)+
     #11.D0/36864.D0/k**4/(j+j*k**2+k**2-1.)+s9+s7+s8
      s4 = s5*s6
      s2 = s3*s4
      stress_ax = s1+s2*cos(th)
       if(th.eq..0d0) then
       write(18,*) r,w1
       write(20,*) r,w2
       write(21,*) r,stress_ax
       else
       endif
       if(iter.eq.1) then
       write(22,*) th, stress_ax
       else
       endif
       if(iter.eq.200) then
       write(23,*) th, stress_ax
       else
       endif
       if(iter_th.eq.32) then
       write(19,*) r,f
       else
       endif
       iter=iter+1
         enddo
         enddo
       close (16)
       close (17)
       close (18)
       close (19)
       close (20)
       close (21)
       close (22)
       close (23)
       stop
      end
```

2.Κώδικας υπολογισμού των τιμών της αξονικής ταχύτητας W, και της ρευματοσυνάρτησης f.

```
      program w1
      implicit none
      double precision k,r,w1,w2,th ,pi,f,w,d,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,&
         s10,s11,s12,s13,s14,p1,p2,p3,p4,j,i,h,s1
      open(16,file='w_k=10.dat',access='sequential',status='new')
      open(17,file='f_k=10.dat',access='sequential',status='new')
      write(*,*) 'GIVE THE VALUE OF k'
      read(*,*) k
      write(*,*) 'GIVE THE VALUE OF d'
      read(*,*) d
       pi=acos(-1.d0)
       do th=.0d0 ,2.d0*pi,  2.d0*pi/128.d0
         do r=1.d0/k,1.d0,0.005d0
```

```
       h=log(k)
       i=log(r)
       j=log(1.d0/k)

        p2=5.d0/1024.d0/k**2/j*r**3-17.d0/4096.d0/k**4/j**2*r**3-1.d0/
      *k**2/j*r**5/2304.+17.d0/2048.d0/k**2/j**2*r**3-r**5/j*i/
      *1536.-1/j**2*r**3*i**2/512.-r*(-45.+8.*k**8*j**2+88.*j*k**2-
      *252.*j*k**4+88.*j*k**6+90.*k**2+38.*j*k**8+38.*j-8.*j**2+45.*k**8
      *-90.*k**6-44.*k**2*j**2+44.*k**6*j**2)/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+
      *j)*i/18432.+1./j*r**3*i/256.+5.d0/1024.d0*r**3/j**2*
      *i-r**3/k**4/j**2*i**2/512.-5.d0/512.d0*r**3/k**2/j**2*
      *i+1./k**2/j**2*r**3*i**2/256.

       p3=p2-1./k**2/j*r**3*i/256.+r**5/k**2/j*i/1536.+5.d0/
      *1024.d0*r**3/k**4/j**2*i-r**3/k**4*(36.+108.*k**4+63.*j*k**2
      *+63.*j*k**4-63.*j*k**6-108.*k**2-63.*j-24.*k**4*j**2+44.*j**2+12.
      **k**4*j**3-12.*j**3-36.*k**6-12.*j**3*k**2-20.*k**6*j**2+12.*j**3
      **k**6)/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)/12288.+1./j*r**5/2304.

       p4=p3-17.d0/4096.d0/j**2*r**3+r*(-45.+8.*k**8*j**2+88.*j*k**2-
      *252.*j*k**4+88.*j*k**6+90.*k**2+38.*j*k**8+38.*j-8*j**2+45.*k**8
      *-90.*k**6-44.*k**2*j**2+44.*k**6*j**2)/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+
   *j)/36864.-1./r*(-36.*j**3*k**2-38.*j*k**2+8.*k**6*j**2-45.+38.*j*
      *k**6+45.*k**6-38.*j*k**4-36.*k**4*j**3-88.*k**4*j**2-135.*k**4+
      *88.*k**2*j**2+135.*k**2+38.*j-8.*j**2)/k**6/j**2/(k**2+j*k**2
   *-1.+j)/36864.

       p1=p4-5.d0/1024.d0/j*r**3-r**7/9216.+r**5/1536.+r*(8.*k**6*j**2
      *+38.*j*k**6+45.*k**6+8.*k**4*j**2-44.*j*k**4-171.*k**4-36.*k**2*
      *j**2-126.*j*k**2+207.*k**2-36.*j**2+132.*j-81.)/j/k**4/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)/18432.

       p2=sin(th)
      f=d**2*p1*p2

       w1=-(r**2/4.)+(k**2-1.)/(4.*k**2*h)*i+1./4.

       s4 = r*k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)/36864.+7.d0/73728.d0*k**2/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**5-15.d0/32768.d0*r/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)-7.d0/
      *32768.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-11.d0/294912.d0/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**3-41.d0/65536.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+r/
      *(k**2+j*k**2-1.+j)*i/18432.+19.d0/294912.d0/k**6/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**3+1./k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3/8192.-1./k**2*j
      */(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5/49152.+5.d0/196608.d0/k**4/j/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**5

       s3 = s4+11.d0/73728.d0*r/k**6/(k**2+j*k**2-1.+j)-19.d0/147456.d0/
      *k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-11.d0/36864.d0*r/k**4/(k**2+j*k**2-1.
      *+j)+11.d0/147456.d0/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5+r**3/j**3*
      *i**2/16384.+11.d0/73728.d0/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3+
      *7.d0/1179648.d0/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7-j/(k**2+j*k**2-1.+j)*
      *r**7/147456.-7.d0/147456.d0/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+r**5/j**2*
      *i**2/24576.+3.d0/8192.d0/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3

       s5 = s3-13.d0/98304.d0*k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+11.d0/73728.d0
      **r/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+1./r/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/
      *3072.-r/k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/4096.-11.d0/73728.d0*r/
      *k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2

       s4 = s5-167.d0/589824.d0/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-211.d0/
      *294912.d0*r/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+7.d0/589824.d0/j/(k**2+j*k**2-
      *1.+j)*r**7-5.d0/393216.d0*k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7+j/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**5/49152.+j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.

       s5 = s4-77.d0/294912.d0/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-7.d0/24576.d0
      **r/j/(k**2+j*k**2-1.+j)+k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.-
      *27.d0/32768.d0/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-j/(k**2+j*k**2-1.+j)*
      *r**3/36864.
```

```
 s2 = s5+13.d0/73728.d0/k**4/j/(k**2+j*k**2-1+j)*i*r**3-3.d0/
*8192.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3+r/k**2*j/(k**2+j
**k**2-1.+j)/8192.+23.d0/147456.d0*r*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)+
*7.d0/8192.d0*r/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)-19.d0/147456.d0*r/k**8/
*j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+r/k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/
*8192.

 s5 = -15.d0/32768.d0*r/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+r*k**2/
*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/36864.-r/k**4*j/(k**2+j*k**2-1.+j)
**i/4096.-5.d0/32768.d0/r/k**8/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i
*-23.d0/73728.d0*r*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i

 s4 = s5-11.d0/73728.d0/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-3.d0/
*16384.d0*r**3/k**2/j**3*i**2+5.d0/16384.d0*r/k**4/j**3/(k**2
*+j*k**2-1.+j)+61.d0/589824.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-5.d0
*/32768.d0/r/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+19.d0/73728.d0*r/k**6/
*j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)

 s5 = s4+5.d0/32768.d0*r*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)+91.d0/
*589824.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-1./r/k**8/j/(k**2+j*k**2
*-1.+j)*i/36864.+19.d0/73728.d0/r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)
**i+1./r/k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/3072.

 s3 = s5-15.d0/32768.d0*r/k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2-
*11.d0/18432.d0/r/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-85.d0/73728.d0*
*r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+5.d0/8192.d0/r/k**6/j**3
*/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+15.d0/16384.d0*r/k**6/j**3/(k**2+j*k**2
*-1.+j)*i-19.d0/147456.d0*r/k**8/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
*i**2-r/k**8/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/18432.

 s5 = -19.d0/147456.d0/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+5.d0/
*16384.d0*r/k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+s2+s3-25.d0/
*147456.d0*r/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+85.d0/73728.d0
**r/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2

 s6 = s5-173.d0/147456.d0*r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+
*5.d0/32768.d0*r*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2

 s8 = s6

 s10 = r/j**2/5898240.

 s11 = 1./(k**2+j*k**2-1.+j)*(2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2
*-1440.*j**5*k**4+8130.*j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-
*84.*j**4*k**10-1440.*j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-
*10575.*k**8+10575.*k**4-9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12
*+2745.*j**2-8460.*k**2-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-
*1085.*k**12*j**2-3205.*k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-
*4105.*j+8460.*k**10+3425.*j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-
*4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*
*k**2*j**2+11730.*j*k**2)/k**8/(k**4+1.-2.*k**2-j+j*k**4)

 s9 = s10*s11

 s7 = s8+s9

 s9 = s7

 s11 = r/k**6/5898240.

 s13 = 1./(k**2+j*k**2-1.+j)*(2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2
*-1440.*j**5*k**4+8130.*j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-
*84.*j**4*k**10-1440.*j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-
*10575.*k**8+10575.*k**4-9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12
*+2745.*j**2-8460.*k**2-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-
*1085.*k**12*j**2-3205.*k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-
*4105.*j+8460.*k**10+3425.*j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-
```

```
     *4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*
     *k**2*j**2+11730.*j*k**2)

      s14 = 1./j**3/(k**4+1.-2.*k**2-j+j*k**4)

      s12 = s13*s14

      s10 = s11*s12

      s8 = s9+s10

      s4 = s8+r/k**8/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/36864.+5.d0/
     *32768.d0*r/k**8/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2

      s5 = s4+k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3/147456.-11.d0/
     *36864.d0*r/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)+31.d0/73728.d0/j/(k**2+j*k**2
     *-1.+j)*i*r**3+83.d0/294912.d0*r*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+
     *r/k**4*j/(k**2+j*k**2-1.+j)/8192.-67.d0/147456.d0*r/k**6/j/(k**2+j
     **k**2-1.+j)
   s1 = s5-k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5/12288.-1./k**6/(k**2+
     *j*k**2-1.+j)*i*r**3/36864.-1./j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*
     *r**7/73728.+3.d0/16384.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3+19.d0/
     *49152.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+43.d0/147456.d0/j/
     *(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5-1./k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *i*r**3/16384.
      s4 = s1+9.d0/16384.d0/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-19.d0/
     *147456.d0*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+1./k**2/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i*r**5/12288.+15.d0/16384.d0*r/j**3/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)*i-1./k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.
     *+7.d0/147456.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5+k**2/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.+67.d0/73728.d0*r/k**6/j/(k**2+
     *j*k**2-1.+j)*i-161.d0/589824.d0/k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *r**3+27.d0/131072.d0*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3
   s5 = s4+7.d0/32768.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-5.d0/
     *16384.d0*r*k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-7.d0/98304.d0/k**4
     */j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5-5.d0/16384.d0*r/k**8/j**3/(k**2+j*
  *k**2-1.+j)*i+1./j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3/1024.
   s3 = s5+19.d0/147456.d0*r*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2-
     *1./(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.+1./r/k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
     *i/8192.+211.d0/147456.d0*r/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-
     *11.d0/36864.d0*r/k**6/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+11.d0/18432.d0
  **r/k**4/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+7.d0/12288.d0*r/j/(k**2+j*k**2-
     *1.+j)*i
   s4 = s3-19.d0/36864.d0*r/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-r*
     *k**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/18432.-11.d0/36864.d0*r/k**2/(k**2
     *+j*k**2-1.+j)*i+19.d0/73728.d0*r/k**8/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)
     **i+r/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2/8192.-5.d0/8192.d0*r/k**2
     */j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+25.d0/147456.d0*r/j**2/(k**2+j*
     *k**2-1.+j)*i**2+r**5/k**4/j**2*i**2/24576.-r**3/k**6/
     *j**3*i**2/16384.+27.d0/131072.d0/k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)
     **r**3+k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.
   s5 = s4+1./k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**7/147456.-3.d0/
     *4096.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3+81.d0/65536.d0/k**2/
     *j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-1./r/k**6/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/
     *8192.+83.d0/147456.d0*r/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i
   s6 = s5-27.d0/32768.d0/k**4/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-83.d0/
     *147456.d0*r*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i+19.d0/147456.d0/
     *k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5
   s8 = s6
   s10 = -r/(k**2+j*k**2-1.+j)/5898240.
   s11 = (2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2-1440.*j**5*k**4+8130.
     **j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-84.*j**4*k**10-1440.*
     *j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-10575.*k**8+10575.*k**4-
     *9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12+2745.*j**2-8460.*k**2
  *-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-1085.*k**12*j**2-3205.*
     *k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-4105.*j+8460.*k**10+3425.
     **j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2
     *+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*k**2*j**2+11730.*j*k**2)/j**3/
```

```
      *k**8/(k**4+1.-2*k**2-j+j*k**4)
     s9 = s10*s11
     s7 = s8+s9
     s2 = s7-1./(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5/24576.+1./(k**2+j*k**2-1.+j)*
      *r**7/147456.+r/k**8/j/(k**2+j*k**2-1.+j)/36864.
     s6 = s2+19.d0/147456.d0/r/k**8/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i
     s8 = s6
     s10 = r/k**6/5898240.
     s12 = 1./j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)
     s13 = (2115.+76.*k**12*j**4-11920.*k**6*j**2-1440.*j**5*k**4+8130.
      **j*k**10-496.*j**3*k**10+1300.*k**10*j**2-84.*j**4*k**10-1440.*
      *j**5*k**6+440.*k**8*j**4-1116.*j**4*k**2-10575.*k**8+10575.*k**4-
      *9075.*j*k**4+14585.*k**4*j**2-2115.*k**12+2745.*j**2-8460.*k**2
    *-1960.*j**3*k**6-2640.*j**4*k**6+84.*j**4-1085.*k**12*j**2-3205.
      **k**12*j+131.*k**12*j**3+3240.*j**4*k**4-4105.*j+8460.*k**10+3425.
      **j**3*k**8+4075.*k**8*j**2-789.*j**3-4575.*j*k**8+5504.*j**3*k**2
      *+1100.*j*k**6-5815.*k**4*j**3-9700.*k**2*j**2+11730.*j*k**2)/(k**4
      *+1.-2.*k**2-j+j*k**4)
     s11 = s12*s13
     s9 = s10*s11
     s7 = s8+s9
     s5 = s7-31.d0/147456.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**5-
      *23.d0/65536.d0/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3
     s4 = s5-71.d0/589824.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-15.d0/
      *32768.d0*r/k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)+5.d0/16384.d0*r/k**2/j**3/
      *(k**2+j*k**2-1.+j)-83.d0/294912.d0*r/k**4/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+
      *173.d0/294912.d0*r/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)+3.d0/16384.d0*r**3
      */k**4/j**3*i**2
     s5 = s4-r**5/k**2/j**2*i**2/12288.+25.d0/131072.d0*k**2/j**2/
      *(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-15.d0/16384.d0/r/k**4/j**3/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*i-19.d0/49152.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*
      *i*r**5+3.d0/32768.d0/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3
     s3 = s5+11.d0/18432.d0*r/k**2/j/(k**2+j*k**2-1+j)*i-3.d0/
      *2048.d0/k**2/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-7.d0/32768.d0*
      *k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-r/(k**2+j*k**2-1.+j)/
      *36864.+k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**9/1474560.+19.d0/73728.d0/k**4
      */j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-1./k**6/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*
      *r**3/4096.
     s5 = s3+3.d0/4096.d0/k**2/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3-7.d0/
      *1179648.d0*k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7+5.d0/8192.d0/r/k**2/j**3
      */(k**2+j*k**2-1.+j)*i+7.d0/98304.d0*k**2/j**2/(k**2+j*k**2-
    *1.+j)*r**5+5.d0/16384.d0*r/k**4/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2
     s4 = s5-19.d0/147456.d0/r/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-11.d0/
      *73728.d0*r/k**4/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i**2+1./k**4/j**3/(k**2
      *+j*k**2-1.+j)*i*r**3/1024.+1./k**4*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3
      */8192.-5.d0/8192.d0*r/k**4/j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-7.d0/
      *1179648.d0/k**2/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7
     s6 = s4-k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**7/147456.-1./k**4*j/(k**2+j*
      *k**2-1.+j)*r**5/49152.
     s7 = s6+1./r*(-1215.+5105.*k**6*j**2+1440.*j**5*k**4+4245.*j*
      *k**10+949.*j**3*k**10+3345.*k**10*j**2+84.*j**4*k**10+1440.*j**5
      **k**6-1836.*k**8*j**4+1116.*j**4*k**2-6075.*k**8-12150.*k**4+3090.
      **j*k**4-3585.*k**4*j**2-2585.*j**2+6075.*k**2+7135.*j**3*k**6+
      *2640.*j**4*k**6-84.*j**4+12150.*k**6-1920.*j**4*k**4+3345.*j+1215.
      **k**10-6324.*j**3*k**8-7530.*k**8*j**2+789.*j**3-13635.*j*k**8-
      *4244.*j**3*k**2+12090.*j*k**6+1695.*k**4*j**3+5250.*k**2*j**2-
      *9135.*j*k**2)/j**3/k**8/(k**4+1.-2*k**2-j+j*k**4)/5898240.
     s5 = s7-19.d0/73728.d0/r/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-1.+j)*i-k**2
      */j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3/4096.+5.d0/32768.d0*r/k**8/
      *j**3/(k**2+j*k**2-1.+j)
     w2 = s5-1./r/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i/36864.+k**2/(k**2+j*k**2
      *-1.+j)*i*r**3/36864.+7.d0/131072.d0/k**6/j**2/(k**2+j*k**2-
      *1.+j)*r**3-k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**3/36864.+19.d0/147456.d0/
      *k**6/j/(k**2+j*k**2-1.+j)*i*r**3-7.d0/4096.d0*r/k**4/j/(k**2
      *+j*k**2-1.+j)*i+k**2*j/(k**2+j*k**2-1.+j)*r**5/49152.
       w=d*w1+d**3*w2
       write(16,*) r*cos(th), r*sin(th), w
       write(17,*) r*cos(th), r*sin(th), f
```

```
       enddo
       enddo
           close (16)
           close (17)
            stop
        end
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Anderson, J.D., *Computational Fluid Dynamics: the basics with applications*, McGraw - Hill, 1995.

[2] Berger S. A., L.Talbot, L.-S. Yao, *Flow in curved pipes: Ann. Review*, Fluid Mechanics, 1983, 15:461-512

[3] Dean W.R., M.A., *Note on the motion of Fluid in a Curved Pipe*, Imperial College of Science, Phil. Mag. S. 7. Vol. 4 No. 20. July 1927

[4] Dean W.R., M.A, *The stream-line motion of fluid in a curved pipe(second paper)*, Imperial College of Science, Phil. Mag. S. 7. Vol. 5 No. 30. Apri 1928

[5] Dennis S.C.R. and J.D. Hudson *, A difference method for solving the Navier-Stokes equations,* Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario, London, Canada and Department of Applied Mathematics and Computing Science, University of Sheffield, England.

[6] Dennis S.C.R., *Calculation of the steady flow through a curved tube using a new finite difference method*, Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario, London, Canada, J. Fluid Mech. 1980, vol. 99, part 3, pp, 449-467

[7] Dennis S.C.R. and Michael NG, *Dual Solutions for Steady Laminar Flow Through A Curved Tube*, Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario, London, Canada, Q. Jl Mech. Appl. Math 1982, Vol. XXXV, Pt. 3, 1982

[8] Encarta Reference Library DVD 2005

[9] Karahalios G.T. *Mixed convection flow in a heated curved pipe with core*, Physics of fluids A 2 (12) December 1990

[10] Karahalios G.T. , Petrakis M.A. *Rotation effects in a heated straight pipe*, Department of Physics, University of Patras, Greece

[11] Ματαράς Δ. – Κουτελιέρης Φ., *Προγραμματισμός Fortran 90/95 για επιστήμονες και μηχανικούς*, Εκδόσεις Τζιόλα

[12] McConalogue D.J. and Srivastava R. S., *Motion of a fluid in a curved tube*, Imperial College, London, Proc. Roy. Soc. A. 307, 37-53, 1968

[13] Munson, Young, Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons 2002©

[14] Petrakis M. A, *Effect of permanent catheterization on the cardiac muscle*, Department of Physics, University of Patras, Greece

[15] Petrakis M. A and G. T. Karahalios. *Technical note: steady flow in a curved pipe with a coaxial core*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 22(12):1231-1237, 1996.

[16] Petrakis M. A. and G. T. Karahalios, *Exponentially decaying flow in a gently curved annular pipe*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 32(5):823-835, 1997.

[17] Petrakis M. A. and G. T. Karahalios, *Fluid flow behaviour in a curved annular conduit*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 34(1):13-35, 1999.

[18] Petrakis M. A. , *Flow characteristics in a heated rotating straight pipe*, Department of Physics, University of Patras, Greece, Intern. Journal of Heat and Mass Transfer, 41, 4385-4392, 1998.

[19] Petrakis M. A., G.T. Karahalios, *Flow properties in a gently curved annular conduit of circular cross-section*, Department of Physics, University of Patras, Greece

[20] Petrakis M. A., *Fully developed steady flow into a curved annular pipe*, Department of Physics, University of Patras, Greece

[21] Petrakis M. A., Panagopoulos A. A., Psillakis Z. M. and Karahalios G. T., *The effects of rotation in pipe flow*, Department of Physics, University of Patras, Greece

[22] Πετράκης Μ. Α., *Αναστροφή της ροής σε καμπύλο σωλήνα με καθετήρα*, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

[23] Πετράκης Μ. Α., *Αριθμητική λύση των εξισώσεων της κίνησης ενός ιξώδους ασυμπίεστου ρευστού σε ένα καμπύλο δακτυλιοειδή σωλήνα*, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

[24] Πετράκης Μ. Α. και Γ. Τ. Καραχάλιος, *Ροή σε ευθύγραμμο περιστρεφόμενο και θερμαινόμενο σωλήνα*, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

[25] Piercy N. A. V., D.Sc., M. S. Hooper and H. F. Winny, Ph.D. *Viscous Flow With Pipes with cores*, Phil. Mag. S. 7. Vol. 15 No. 99. March 1933.

[26] Rennie J. Timothy, *Numerical and experimental studies of a double-Pipe Helical heat exchanger*, Department of Bioresource Engineering, Thesis of the degree of Doctor of philosophy, McGill University, Montreal 2004.

[27] Roache Patrick J., *Computational Fluid Dynamics*, Albuquerque, New Mexico 1982

[28] Schlichting H., *Boundary-Layer Theory,7th Ed.,* Mc-Graw-Hill, New York, 1979.

[29] Sherman, Frederick ,*Viscous Flow ,* Mc-Graw-Hill, New York, 1990.

[30] Teukolsky , Saul A. , Vetterling , William T., Flannery, Brian P., Press William H. , *Numerical Recipes in Fortran , 2nd edition* , Cambridge University Press , New York, 1992.

[31] Yasuo Mori and Wataru Nakayama , *Convective heat transfer in rotating radial circular pipes (1st report, laminar region)*, Department of Mechanical Engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, 1967