

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΒΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ»

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ:

ΖΗΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ – ΕΛΕΝΗ

Α.Μ. 4230

ΕΠΟΠΤΕΥΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:

ΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΚΡΟΥΣΤΑΛΛΗ ΑΝΘΗ

ΠΑΤΡΑ 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	-4-
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ	-5-
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ	-5-
1.2 ΦΥΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	-7-
1.2.1 ΔΥΝΑΜΕΙΣ	-7-
1.2.2 ΟΡΘΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ - ΠΙΕΣΗ - ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΤΗΤΑ	-7-
1.2.3 ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ - ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ	-10-
1.3 ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ	-15-
1.3.1 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE	-16-
1.3.2 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΚΑΤΑ EULER	-17-
1.4 ΘΕΜΕΛΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	-21-
1.4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	-21-
1.4.2 ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ - ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ	-22-
1.4.3 ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ	-31-
1.4.4 ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ	-54-
1.5 ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ – ΣΤΡΩΤΗ & ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ	-65-
1.5.1 ΡΟΗΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ	-69-
1.5.2 ΡΟΗ ΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	-75-
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : ΑΙΜΟΡΡΕΟΛΟΓΙΑ	-81-
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	-81-
2.2 ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	-86-
2.3 ΑΓΓΕΙΑΚΟ ΔΙΚΤΥΟ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	-89-
2.4.ΣΥΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ	-91-

2.4.1 ΠΛΑΣΜΑ	-93-
2.4.2 ΈΜΜΟΡΦΑΣ ΣΥΣΤΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ	-93-
2.4.3 ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ	-94-
2.5 ΚΑΘΙΖΗΣΗ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ	-106-
2.6 ΠΗΞΗ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΙΜΟΣΤΑΤΗ	-108-
2.7 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΟ ΑΙΜΑΤΙΚΟ ΙΞΩΔΕΣ	-111-
2.7.1 ΙΞΩΔΕΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ	-116-
2.7.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΙΜΑΤΟΚΡΙΤΗ	-117-
2.7.3 ΣΥΓΚΟΛΛΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ - ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ ΣΕ ΣΥΣΣΩΜΑΤΩΜΑΤΑ - ROULEAUX	-117-
2.7.4 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ	-130-
2.8 ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ, ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΡΕΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ	-138-
2.9 ΠΛΑΣΜΑ ΚΑΙ ΟΡΟΣ	-140-
2.10 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ ΣΩΛΗΝΑ (ΑΓΓΕΙΟΥ) ΣΤΟ ΙΞΩΔΕΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ	-142-
2.10.1 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΚΡΙΤΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ ΜΙΚΡΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ	-143-
2.10.2 ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΚΥΤΤΑΡΩΝ	-145-
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	-149-

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πτυχιακή εργασία γράφτηκε με τρόπο που ελπίζεται ότι θα ελκύσει το ενδιαφέρον και θα βοηθήσει θετικά, ακόμα και εκείνους που νομίζουν ότι δεν αγαπούν την Ρευστομηχανική.

Το κεφάλαιο των **''Βιολογικών Ρευστών''** δεν θεωρείται από τα πλέον συνηθισμένα και μελετημένα κεφάλαια στον κλάδο της σημερινής Επιστήμης, ιδιαίτερα στην χώρα μας. Γενικά και με πολύ απλά λόγια, ο τομέας των Βιολογικών Ρευστών, μελετά την κίνηση των υγρών του ανθρώπινου σώματος. Θεωρούμε ότι είναι ένας συνδυασμός των κλάδων της Ιατρικής και της Ρευστομηχανικής.

Η πτυχιακή εργασία αρχίζει με απλή διατύπωση των βαθύτερων εννοιών, νόμων και αρχών της ρευστομηχανικής. Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε ότι αφορά την κίνηση και την ροή των ρευστών μέσα από τις αρτηρίες και τις φλέβες.

Επίσης, γίνεται εκτεταμένη ανάπτυξη της ροής του αίματος και του τρόπου ενέργειας του στις διάφορες δραστηριότητες, καθώς και στην εφαρμογή των αρχών της Υδροστατικής. Στο κεφάλαιο της Αιμοδυναμικής δίνονται πληροφορίες για την φυσιολογική και παθολογική λειτουργία του κυκλοφοριακού συστήματος, ενώ οι αιμοδυναμικές μετρήσεις περιγράφονται με τρόπο κατανοητό.

Τέλος θα ήθελα να αναφέρω ότι η εργασία γράφτηκε με την επιθυμία να συμβάλει στην διεύρυνση των επιστημονικών γνώσεων των σπουδαστών. Ελπίζεται ότι θα χρησιμοποιηθεί και θα βοηθήσει στην αναζήτηση του αναγνώστη για τη βαθύτερη μελέτη του θέματος σε περισσότερα συγγράμματα.

Η ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ

ΖΗΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ - ΕΛΕΝΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Με τον όρο ρευστά ονομάζουμε τα συνεχή σώματα που χαρακτηρίζονται από εύκολη μεταφορά των στοιχείων τους. Εννοούμε δηλαδή, το σύνολο εκείνων των ουσιών που είναι ικανές να ρέουν και δεν έχουν καθορισμένο σχήμα, αλλά παίρνουν το σχήμα του χώρου μέσα στον οποίο βρίσκονται (ασκούν μικρή αντίσταση στην αλλαγή της μορφής τους). Υπ' αυτήν την έννοια ρευστά είναι και τα υγρά και τα αέρια. Τα αέρια διακρίνονται από τα υγρά ως προς το γεγονός ότι καταλαμβάνουν όλο τον διαθέσιμο όγκο του δοχείου μέσα στο οποίο τοποθετούνται.

Η Μηχανική των Ρευστών (Ρευστομηχανική ή Δυναμική των Ρευστών, *Fluid Mechanics* ή *Fluid Dynamics*) είναι ο κλάδος της μηχανικής που μελετά τη συμπεριφορά των ρευστών κατά την ηρεμία ή την κίνησή τους. Σκοπός της είναι η έρευνα και η διατύπωση των νόμων της κινηματικής και της δυναμικής για τα ρευστά σώματα. Η μηχανική των ρευστών ανήκει στις θετικές επιστήμες. Έχει εκτεταμένο θεωρητικό και πειραματικό αντικείμενο και γι' αυτό η συμβολή της στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και των άλλων συγγενών θεωρητικών κλάδων είναι σημαντική. Εκεί όμως που η σημασία της είναι ιδιαίτερα αποφασιστική είναι στην εφαρμογή της στα συστήματα του ανθρώπινου οργανισμού.

Από τη σκοπιά του μηχανικού, το αναπνευστικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα δίκτυο αεραγωγών στο οποίο κυκλοφορεί αέρας και το κυκλοφορικό σύστημα σαν ένα δίκτυο σωληνώσεων στο οποίο κυκλοφορεί ένα υγρό, το αίμα. Βέβαια, σε ένα τμήμα του κυκλοφορικού συστήματος, τα τριχοειδή αγγεία,

εμφανίζονται φαινόμενα που δεν μας επιτρέπουν την παραπάνω μακροσκοπική θεώρηση.

Σήμερα, η μηχανική των ρευστών με τη μεταφορά θερμότητας, τη θεωρία της ελαστικότητας και των ταλαντώσεων καθώς επίσης και με τη θεωρία του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου και του πεδίου βαρύτητας, αποτελούν το πλαίσιο της λεγόμενης μαθηματικής φυσικής, που ανήκει στην κατηγορία των βασικών γνώσεων για την εξέλιξη της βιοϊατρικής τεχνολογίας.

Η μαθηματική φυσική που κατά κανόνα δεν ασχολείται με προβλήματα μικροφυσικής, βασίζεται στις αξιωματικές αρχές της κλασικής μηχανικής και στην από αιώνων εμπειρία μας πάνω στον φυσικό κόσμο, δηλαδή:

- Στην αρχή της συνέχειας των θεμελιωδών μεγεθών (χώρος-χρόνος)
- Στην αρχή διατήρησης της μάζας και της ενέργειας
- Στους εμπειρικούς νόμους κάθε ιδιαίτερου κλάδου π.χ. τους νόμους του Newton,
- τους νόμους της θερμοδυναμικής, τους νόμους Hook, Coulomb, Ampere, κ.τ.λ.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα αναφέρουμε βασικές έννοιες και αρχές της μηχανικής των ρευστών, οι οποίες θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση της εμβιομηχανικής η οποία είναι αυτοτελής κλάδος της ρευστομηχανικής και ασχολείται με την κίνηση των βιολογικών ρευστών (αίμα, λέμφος, ούρα, κ.λπ.) στον οργανισμό.

1.2 ΦΥΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

1.2.1 ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Δύναμη, όπως είναι γνωστό, είναι η οποιαδήποτε επίδραση που προκαλεί μεταβολή της κίνησης ή της μορφής των σωμάτων. Τα ρευστά ως υλικά σώματα υπόκεινται σε εξωτερικές και εσωτερικές δράσεις. Οι δυνάμεις που ενεργούν σε αυτά διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- i. επιφανειακές δυνάμεις που ενεργούν στην επιφάνεια του σώματος και είναι ανάλογες με το εμβαδόν της επιφάνειάς του και,*
- ii. ογκικές ή μαζικές δυνάμεις που ενεργούν στο στοιχείο του όγκου ή της μάζας και είναι ανάλογες με τον όγκο ή τη μάζα του.*

Κάθε στοιχείο του ρευστού είτε σε ηρεμία, είτε σε κίνηση, βρίσκεται σε εντατική κατάσταση που δημιουργείται σε αυτό από τα γειτονικά του στοιχεία. Σε αναλογία προς τη θεωρία της ελαστικότητας για τα στερεά σώματα, την εντατική κατάσταση στα ρευστά τη διακρίνουμε σε ορθή εντατική κατάσταση και διατμητική εντατική κατάσταση.

1.2.2 ΟΡΘΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ - ΠΙΕΣΗ - ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΤΗΤΑ

Πίεση

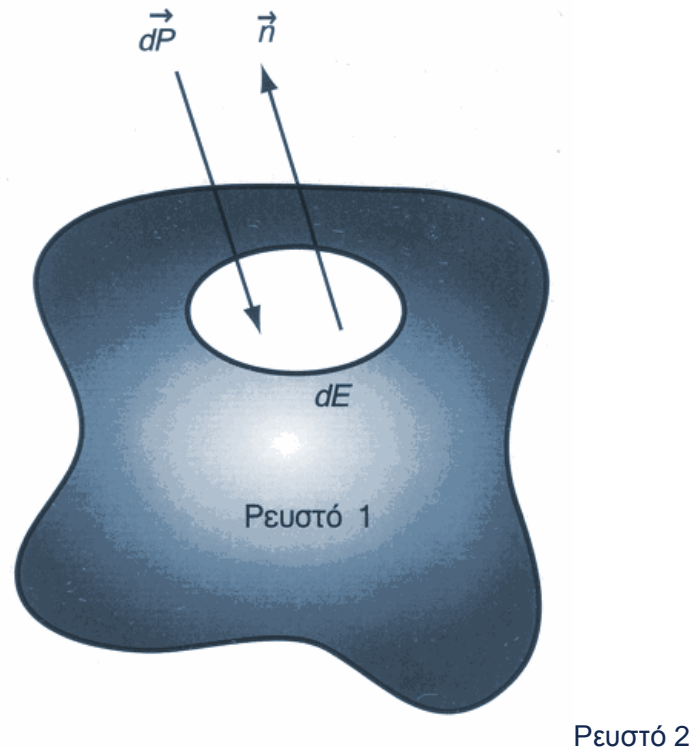
Την ορθή εντατική κατάσταση χαρακτηρίζει η πίεση p . Μπορούμε να κατανοήσουμε την έννοια της πίεσης εάν θεωρήσουμε το ρευστό σε ηρεμία, τότε δηλαδή που η εσωτερική του εντατική κατάσταση προέρχεται από τη βαρύτητα.

Η τυχαία στοιχειώδης επιφάνεια dE του ρευστού ισορροπεί από τη δράση δύο ίσων, αντίθετων και κάθετων σε αυτήν στοιχειωδών δυνάμεων $d\vec{P}$ (σχήμα 1.1). Επομένως, η ορθή εντατική κατάσταση εκφράζεται από την πίεση που αποτελεί το μέτρο της δύναμης που ενεργεί κάθετα στη μονάδα της επιφάνειας,

$$d\vec{P} = -\vec{n}pdE \quad (1.1)$$

Στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι η στοιχειώδης δύναμη $d\vec{P}$ (διανυσματικό μέγεθος) είναι πάντα αντίθετη (ίση κατά μέτρο και αντίθετης φοράς) προς το κάθετο στην επιφάνεια dE διευθύνον διάνυσμα, \vec{n} (κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα με φορά από το υλικό σώμα προς τα έξω). Επομένως, η πίεση p , από τη σχέση ορισμού της, φαίνεται ότι είναι μέγεθος βαθμωτό και πάντα θετικό ($p > 0$). Επίσης, αποδεικνύεται ότι η τιμή της p είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της επιφάνειας dE στο ρευστό (δηλαδή ανεξάρτητη του $n1$), εξαρτάται όμως από τη θέση του στοιχείου του ρευστού μέσα στο ίδιο το ρευστό (συνάρτηση της θέσης και του χρόνου).

Την έννοια της πίεσης που δώσαμε για ρευστό σε ηρεμία, μπορούμε να την επεκτείνουμε και στην περίπτωση ρευστού σε κίνηση, βασιζόμενοι στην κλασική μηχανική όπου η έννοια της δύναμης στη στατική (παράγοντας ισορροπίας των σωμάτων σε ηρεμία) είναι ταυτόσημη με την έννοια της δύναμης στη δυναμική (παράγοντας κίνησης). Το γεγονός ότι στη μηχανική των ρευστών δεν χρησιμοποιούμε τη δύναμη αλλά την πίεση, δηλαδή δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, δεν αλλάζει τίποτα. Επομένως, η επέκταση της έννοιας της πίεσης ως χαρακτηριστικού μεγέθους της ορθής εντατικής κατάστασης και στην περίπτωση ρευστού σε κίνηση, αποδεικνύεται από τα πράγματα ότι δεν αντίκειται στα φαινόμενα.



Σχήμα 1.1 Η έννοια της πίεσης.

Συμπιεστότητα

Μια άλλη φυσική ιδιότητα των ρευστών, και μάλιστα ιδιαίτερης σημασίας για τη μηχανική τους, είναι η συμπιεστότητα (*compressibility*). Συμπιεστότητα είναι η ιδιότητα των ρευστών να μεταβάλλουν την πυκνότητά τους με μεταβολή της ορθής εντατικής κατάστασης (πίεσης) είτε σε ηρεμία είτε σε κινήση. Μάλιστα, αύξηση της πίεσης προκαλεί αύξηση της πυκνότητας.

Εξετάζοντας τα υγρά, με τα οποία θα ασχοληθούμε εκτενώς στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι λόγω της μεγάλης πυκνότητας των μορίων τους (και επομένως των μικρών μεταξύ τους αποστάσεων), η μεταβολή του όγκου τους είναι αμελητέα ακόμα και κάτω από μεγάλες πιέσεις. Για τον λόγο αυτό, τα υγρά θεωρούνται ως πρακτικά ασυμπίεστα ($\rho = \text{const}$). Στα αέρια, στα οποία η απόσταση μεταξύ των μορίων είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το μέγεθός τους (μικρή σχετικά

πυκνότητα), η εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων που αυξάνουν την πίεσή τους, μειώνουν τον όγκο τους και επομένως αυξάνουν την πυκνότητά τους.

1.2.3 ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ - ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Τη διατμητική εντατική κατάσταση στα ρευστά τη χαρακτηρίζει η συνεκτικότητα (ή διαφορετικά το ιζώδες - χαρακτηριστική φυσική ιδιότητα των ρευστών), η οποία εκδηλώνεται όταν δύο γειτονικά στοιχεία του ρευστού βρίσκονται σε σχετική μεταξύ τους κίνηση. Κατά συνέπεια, η διατμητική εντατική κατάσταση εμφανίζεται στα ρευστά μόνο όταν αυτά βρίσκονται σε κίνηση. Σε κατάσταση ηρεμίας, δεν υπάρχει διατμητική εντατική κατάσταση. Από φαινομενολογική σκοπιά, η εκδήλωση της συνεκτικότητας μοιάζει με την εμφάνιση της τριβής στην επιφάνεια επαφής δύο στερεών σωμάτων που βρίσκονται σε σχετική μεταξύ τους κίνηση. Γι' αυτό τον λόγο η συνεκτικότητα συχνά συναντάται στη βιβλιογραφία και με την ονομασία "εσωτερική τριβή των ρευστών". Η συνεκτικότητα, με τη συγκεκριμένη έννοια, διατυπώθηκε αρχικά από τον Newton.

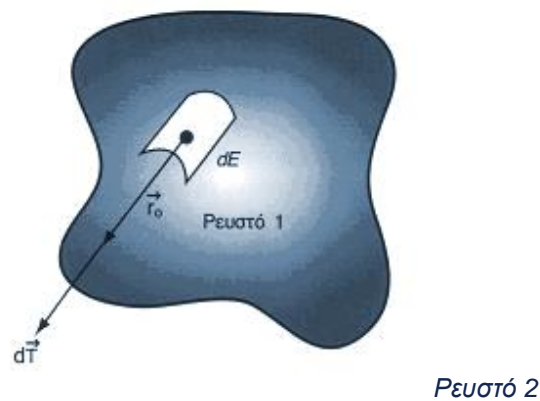
Αν θεωρήσουμε δύο γειτονικά στοιχεία ρευστού που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, τότε αναπτύσσεται μεταξύ τους εφαπτόμενη δύναμη, η οποία ονομάζεται διατμητική δύναμη. Η διατμητική αυτή δύναμη, \vec{T} , ανά μονάδα επιφάνειας, dE , λέγεται διατμητική τάση, τ , (*shear stress*)

$$d\vec{T} = \tau dE \vec{r}_o \quad (1.2)$$

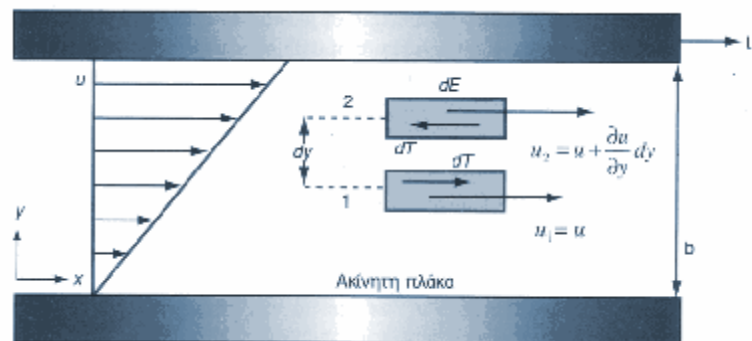
όπου \vec{r}_o είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά διεύθυνση παράλληλη στο στοιχείο επιφάνειας dE (σχήμα 1.2).

Προκειμένου να καταλάβουμε την εμφάνιση της διατμητικής δύναμης και την έννοια της διατμητικής τάσης θα εξετάσουμε το παρακάτω παράδειγμα που περιγράφει την παράλληλη ροή συνεκτικού ρευστού μεταξύ δύο παράλληλων πλακών, που η μία είναι ακίνητη, ενώ η άλλη θεωρούμε ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα U και σε διεύθυνση παράλληλη προς τις πλάκες (σχήμα 1.3).

Σε πρώτη προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ρευστό μεταξύ των δύο παράλληλων πλακών ρέει λόγω συνεκτικότητας κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας



Σχήμα 1.2 Ορισμός της διατμητικής τάσης.



Σχήμα 1.3 Εμφάνιση διατμητικής τάσης.

U και μπορούμε να αποδείξουμε ότι μεταξύ των πλακών διαμορφώνεται μια γραμμική κατανομή ταχυτήτων,

$$u = U \frac{y}{b} \quad (1.3)$$

όπου b είναι η απόσταση μεταξύ των δύο πλακών. Τα στοιχεία "1" και "2" (σχήμα 1.3) κινούνται παράλληλα μεταξύ τους με ταχύτητες $u_1 = u$ και $u_2 = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ αντίστοιχα. Εξαιτίας της διαφορετικής ταχύτητάς τους, αναπτύσσεται, λόγω συνεκτικότητας, από το ταχύτερο στοιχείο "2" στο στοιχείο "1" δύναμη dT , κατά τη διεύθυνση της ταχύτητάς του u_1 , προκειμένου να πραγματοποιηθεί επιτάχυνση του στοιχείου "1" και αντίστοιχα, από το στοιχείο "1" στο στοιχείο "2" δύναμη $-dT$, αντίθετη στην ταχύτητά του, για να πραγματοποιηθεί επιβράδυνση αυτού.

Έτσι, η θεμελιώδης σχέση του Newton για τη διατμητική δύναμη που προέρχεται από τη συνεκτικότητα στην περίπτωση ρευστού σε παράλληλη κίνηση, είναι:

$$dT = m \frac{u_2 - u_1}{dy} dE = m \frac{\partial u}{\partial y} dE \Rightarrow \tau = \frac{dT}{dE} = m \frac{\partial u}{\partial y} = \mu g \quad (1.4)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση, η διατμητική δύναμη είναι ανάλογη της κλίσης της ταχύτητας κατά την κάθετη στο στοιχείο κατεύθυνση $\frac{\partial u}{\partial y}$ και ανάλογη του εμβαδού της επιφάνειας του στοιχείου, dE . Ο συντελεστής αναλογίας, μ , είναι το φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τη συνεκτικότητα και ονομάζεται δυναμική συνεκτικότητα, ή δυναμικός συντελεστής συνεκτικότητας ή ιξώδες (*viscosity*) του ρευστού. Η βασική μονάδα της διατμητικής τάσης τ είναι το *Pascal* (Pa) το οποίο ορίζεται:

$$1Pa = 1N/m^2 = 10dyn/cm^2 = \frac{10^{-5}}{1,013} atm = 10^{-3} cmHg = 7,6 \times 10^{-5} torr$$

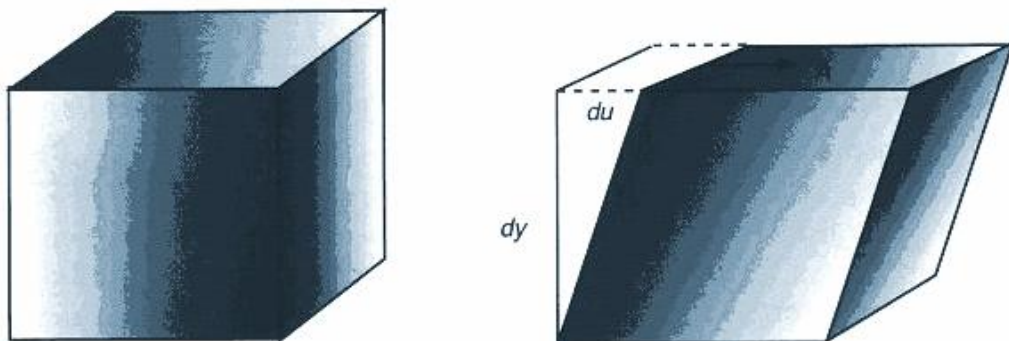
και αντίστοιχα η μονάδα της διατμητικής παραμόρφωσης (shear rate) γ , ($\gamma = \frac{\partial u}{\partial y}$), είναι το sec^{-1} (σχήμα 1.4). Συχνά στη βιβλιογραφία συναντάται ο όρος "ρυθμός" ή "ταχύτητα παραμόρφωσης".

Το ιξώδες, μ , εκφράζεται σε $\text{Pa} \cdot \text{s}$ (Parseuille), ($1 \text{ poise} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$) και εξαρτάται κυρίως από το είδος του ρευστού, από τη φυσική του κατάσταση και από τη θερμοκρασία, $\mu(T)$, και λιγότερο από την πίεση. Το αντίστροφο του ιξώδους, $f = \frac{1}{\mu}$, ονομάζεται ρευστότητα. Επίσης, το σχετικό ιξώδες ορίζεται ως

$$m_{sc} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (1.5)$$

όπου μ_0 είναι το ιξώδες αναφοράς.

Για παράδειγμα, στην αιμοδυναμική, αν μ είναι το ιξώδες του αίματος, τότε, μ_0 , είναι το ιξώδες του πλάσματος ή του χρησιμοποιούμενου ρυθμιστικού διαλύματος.



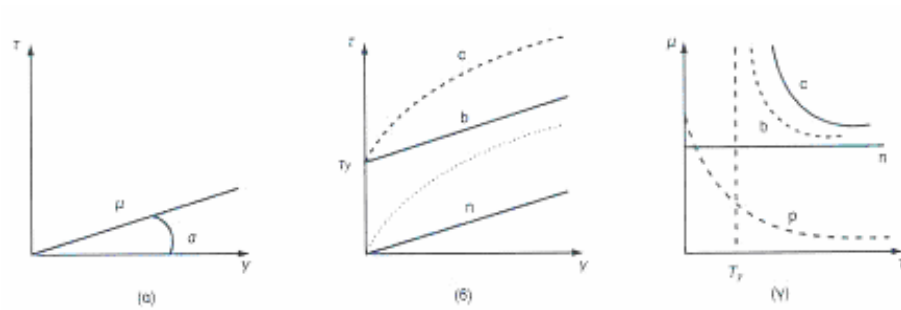
Σχήμα 1.4 Διατμητική παραμόρφωση.

Στη μηχανική των ρευστών, συχνά χρησιμοποιείται και ο όρος κινηματική συνεκτικότητα, η οποία ορίζεται ως

$$n = \frac{m}{r} \quad (1.6)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού. Η εξ. (1.4) είναι γνωστή επίσης και ως "υλική εξίσωση κατά Newton" και αποτελεί έναν πειραματικό-εμπειρικό νόμο (αντίστοιχο με τον νόμο του Hooke της θεωρίας της ελαστικότητας) για μια ορισμένη κατηγορία ρευστών που λέγονται νευτώνεια. Στα νευτώνεια ρευστά συμπεριλαμβάνεται το νερό και ο αέρας, ενώ στα μη νευτώνεια συμπεριλαμβάνονται κυρίως πολυμερή και ρευστά με σύνθετη μοριακή δομή όπως για παράδειγμα το αίμα. Τα τελευταία χρόνια, έχει αναπτυχθεί ένας ειδικός κλάδος της μηχανικής των ρευστών που ονομάζεται μηχανική των νευτώνειων ρευστών ή ρεολογία, ο οποίος ασχολείται με την εξέταση της μηχανικής συμπεριφοράς των ρευστών σε συνάρτηση με την αντίστοιχη ρεολογική τους. Στο σχήμα 1.5 παρουσιάζεται η σχέση της διατμητικής παραμόρφωσης, γ , και της διατμητικής τάσης, τ , α) για νευτώνεια ρευστά και β) για μη νευτώνεια ρευστά. Στα νευτώνεια ρευστά, το ιζώδες είναι σταθερό και ανεξάρτητο των υφισταμένων διατμητικών τάσεων (για σταθερή θερμοκρασία και πίεση), ενώ στα μη νευτώνεια το ιζώδες εξαρτάται από τις υπάρχουσες διατμητικές τάσεις.

Εκτός της συνεκτικότητας και της συμπιεστότητας υπάρχουν και άλλες φυσικές ιδιότητες των ρευστών που παίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορα μηχανικά φαινόμενα, όπως, για παράδειγμα, οι ιδιότητες της θερμικής και της ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Τις ιδιότητες αυτές δεν θα τις εξετάσουμε στο σημείο αυτό, προκειμένου να παραμείνουμε στο πλαίσιο του σκοπού αυτής της σύντομης εισαγωγής στη μηχανική των ρευστών.



Σχήμα 1.5 (α) Νευτώνεια ρευστά: Ιζώδες $\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \tan\alpha$, ρευστότητα: $\phi = 1/\mu = \cot\alpha$. (β) Μη νευτώνεια ρευστά. (γ) Ιζώδες μη νευτώνειων ρευστών.

1.3 ΠΕΛΙΟ ΡΟΗΣ

Πεδίο γενικά λέγεται ο χώρος που σε κάθε σημείο του, ένα φυσικό μέγεθος έχει ορισμένη τιμή. Αν το φυσικό αυτό μέγεθος είναι ανυσματικό, τότε μιλάμε για ανυσματικό πεδίο. Ο φυσικός χώρος μέσα στον οποίο κινείται ένα υγρό λέγεται "πεδίο ροής". Στην κλασική μηχανική των ρευστών (όταν, δηλαδή, δεν υπάρχουν ηλεκτρικές ή μαγνητικές δράσεις στη μάζα του ρευστού), η κινηματική και η δυναμική του κατάσταση περιγράφονται πλήρως με τη βοήθεια των εξής μεγεθών: της ταχύτητας \vec{u} , της πίεσης p , της πυκνότητας ρ και της θερμοκρασίας T . Τα μεγέθη αυτά χαρακτηρίζουν τις καταστάσεις των στοιχείων του ρευστού και είναι συνεχείς συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου που αναφέρονται συνήθως σε καρτεσιανά ή σε κυλινδρικά συστήματα (x,y,z,t) ή αντίστοιχα (r,φ,z,t) . Η μαθηματική απεικόνιση του πεδίου ροής μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με βάση την απεικόνιση κατά Lagrange είτε με βάση την απεικόνιση κατά Euler.

1.3.1 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE

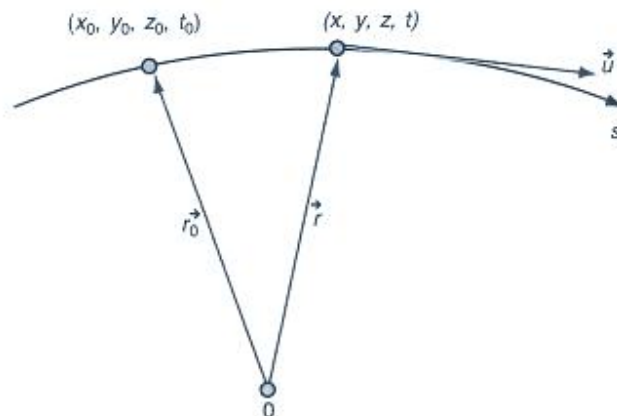
Η απεικόνιση κατά Lagrange είναι επέκταση του τρόπου απεικόνισης της κίνησης των υλικών σημείων στην κλασική μηχανική για την περίπτωση της μηχανικής των ρευστών. Σύμφωνα με την περιγραφή του πεδίου κατά Lagrange ("υλική περιγραφή"), παρακολουθούμε την κίνηση κάποιου στοιχείου του ρευστού σε συνάρτηση με τον χρόνο κατά μήκος της τροχιάς του, s (επομένως εξετάζουμε την κίνηση σαν να δεχόμαστε ότι ο παρατηρητής συμμετέχει σε αυτή). Στην αρχή της μέτρησης του χρόνου, t_0 , το στοιχείο θεωρούμε ότι βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_o = (x_0, y_0, z_0)$, Σε διανυσματική παράσταση με αρχή το σημείο O , η επιβατική ακτίνα \vec{r} πάνω στην τροχιά s στον χρόνο t είναι:

$$\vec{r}(x, y, z, t) = \vec{r}(\vec{r}_o, s, (t - t_0)) \quad (1.7)$$

όπου, όπως παρατηρούμε, το διάνυσμα \vec{r} εκφράζεται ως συνάρτηση του \vec{r}_o στον χρόνο t_0 , της τροχιάς s και του χρονικού διαστήματος, $t - t_0$, που παρήλθε για να διανύσει το στοιχείο του ρευστού το τμήμα της τροχιάς από το (x_0, y_0, z_0) στο (x, y, z) .

Σε αναλογία προς την κινηματική του υλικού σημείου, η ταχύτητα του κινούμενου ρευστού στοιχείου, καθώς αυτό διέρχεται από τη θέση (x, y, z) της τροχιάς, εκφράζεται από την παράγωγο του διαστήματος ως προς τον χρόνο:

$$\mathbf{u} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_o}{t - t_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_s = \vec{r}_s \quad (1.8)$$



Σχήμα 1.6 Απεικόνιση κατά Lagrange.

Η μέθοδος αυτή απεικόνισης, κατάλληλη για την απεικόνιση της κίνησης υλικών σημείων ή και στερεών σωμάτων της κλασικής μηχανικής, έχει αποδειχθεί πολύπλοκη και όχι εποπτική στη μηχανική των ρευστών. Γι' αυτό και χρησιμοποιείται μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.

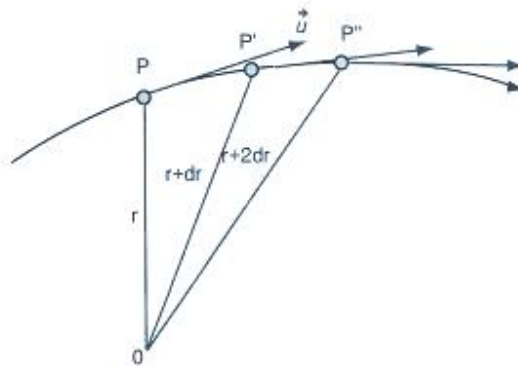
1.3.2 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΚΑΤΑ EULER

Εδώ, παρακολουθούμε την κινητική κατάσταση σε κάποια θέση του πεδίου χωρίς να μας ενδιαφέρει ποιο στοιχείο του ρευστού κατέχει τη θέση αυτή, στην οποιαδήποτε χρονική στιγμή t . Η παρακολούθηση με αυτό τον τρόπο του φαινομένου της ροής ("χωρική περιγραφή"), απαιτεί τον καθορισμό της συνάρτησης του διανύσματος \vec{u} της ταχύτητας κάθε στοιχείου καθώς με την πάροδο του χρόνου, το ένα μετά το άλλο, στοιχεία του ρευστού διέρχονται από τη θέση που εξετάζουμε (επομένως εξετάζουμε την κίνηση σαν να δεχόμαστε ότι ο παρατηρητής βρίσκεται στην εν λόγω θέση), (σχήμα 1.7).

Γραμμές ροής

Σύμφωνα με τον Euler, το πεδίο ροής παριστάνεται ως πεδίο ταχυτήτων, των οποίων τα μέτρα και οι διευθύνσεις αλλάζουν από χρονική σε χρονική στιγμή και από θέση σε θέση. Πρόκειται δηλαδή για διανυσματικό πεδίο με διάνυσμα την ταχύτητα,

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}(r, t) \quad (1.9)$$



Σχήμα 1.7 Στιγμαία εικόνα ροής - απεικόνιση κατά Euler.

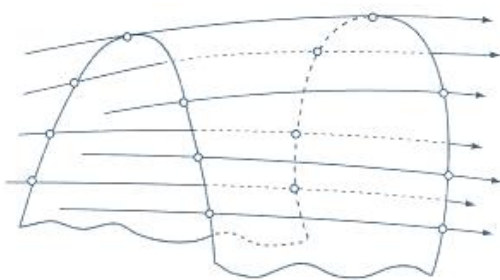
Γραμμή ροής (*stream line*) λέγεται η εικόνα που σε κάποια χρονική στιγμή t εμφανίζει μια αλληλουχία στοιχείων του ρευστού, όπου ένα τυχαίο από αυτά τείνει, στην κατεύθυνση της κίνησής του, να πάρει τη θέση που κατείχε το αμέσως προηγούμενο στοιχείο από αυτό. Το σύνολο των γραμμών ροής δίνει την κινηματική μορφή του πεδίου για κάποια χρονική στιγμή t .

Επιφάνειες ροής

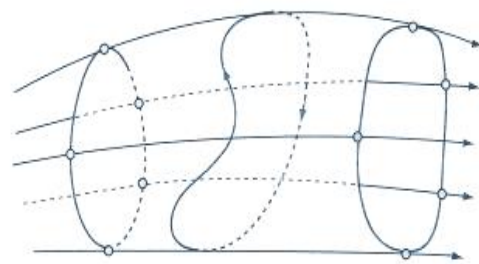
Ονομάζουμε επιφάνεια ροής κάθε νοητή επιφάνεια του πεδίου που έχει ως γενέτειρες, γραμμές ροής και μόνο. Η επιφάνεια ροής θεωρείται κλειστή (σωλήνας) αν ακολουθώντας μια διαδρομή πάνω σε αυτήν ξεκινώντας από κάποιο σημείο της, επανέλθουμε σε αυτό συναντώντας μία προς μία όλες τις γενέτειρές της γραμμές ροής, μία μόνο φορά την κάθε μια.

Μόνιμο πεδίο ροής

Το πεδίο ροής λέγεται μόνιμο όταν η μορφή των γραμμών ροής του παραμένει αναλλοίωτη καθώς ο χρόνος παρέρχεται, δηλαδή όταν τα χαρακτηριστικά του \vec{u} , ρ , T είναι συναρτήσεις της θέσης μέσα στο πεδίο και μόνο. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα \vec{u} είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Στην αντίθετη περίπτωση το πεδίο λέγεται μη μόνιμο.



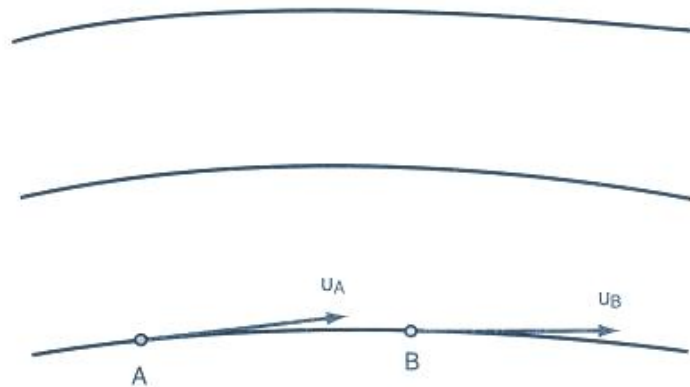
Σχήμα 1.8 Μόρφωση επιφάνειας ροής.



Σχήμα 1.9 Κλειστή επιφάνεια ροής.

Συνοπτικές παρατηρήσεις σχετικά με τις γραμμές ροής και τις επιφάνειες ροής - σωλήνας ροής

1. Οι γραμμές ροής δεν είναι δυνατόν να τέμνονται μεταξύ τους.
2. Οι επιφάνειες ροής αν εφάπτονται ή τέμνονται, εφάπτονται ή τέμνονται μόνο κατά μήκος κοινών γραμμών ροής και καθ' όλη τους την έκταση.
3. Σε μόνιμο πεδίο ροής, οι γραμμές ροής και οι τροχιές των στοιχείων ταυτίζονται. Η διεύθυνση της ταχύτητας σε κάθε σημείο του πεδίου ροής συμπίπτει με την εφαπτομένη της ρευματικής γραμμής που περνάει από το σημείο αυτό (σχήμα 1.10).



Σχήμα 1.10 Η διεύθυνση της ταχύτητας σε κάθε σημείο του πεδίου ροής συμπίπτει με την εφαπτομένη της ρευματικής γραμμής που περνάει από το σημείο αυτό.

4. Σε μόνιμο πεδίο ροής, η εικόνα των γραμμών ροής και των αντίστοιχων επιφανειών ροής που μπορούν να δημιουργηθούν από αυτές παραμένει αναλλοίωτη με την πάροδο του χρόνου.

5. Συχνά στην κινηματική των ρευστών συναντάμε τον όρο "σωλήνας ροής" (ή "υγρά φλέβα"). Με τον όρο αυτό εννοούμε έναν σωληνοειδή χώρο ο οποίος παράγεται από δέσμη ρευματικών γραμμών που διέρχονται από την περίμετρο ορισμένου τμήματος επιφάνειας A . Το περιεχόμενο ενός "σωλήνα ροής" δεν μπορεί να αναμιχθεί με το περιεχόμενο ενός "γειτονικού σωλήνα ροής" γιατί στην πραγματικότητα είναι σαν να ρέει σε στερεό σωλήνα αντίστοιχου σχήματος.

1.4 ΘΕΜΕΛΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1.4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αρχή διατήρησης της μάζας και η παραδοχή της συνέχειας, ότι δηλαδή τα ρευστά μπορούν να θεωρηθούν ως συνεχή μέσα, σε συνδυασμό με την αρχή διατήρησης της ενέργειας και τους νόμους του Newton της κλασικής μηχανικής, αποτελούν τις βασικές αρχές για τη μαθηματική διατύπωση των θεμελιακών εξισώσεων της ροής των μη συνεκτικών ρευστών. Στην περίπτωση συμπίεστου ρευστού, η παραπάνω διατύπωση συμπεριλαμβάνει και τους νόμους της θερμοδυναμικής. Ο εννοιολογικός νόμος της συνεκτικότητας κατά Newton είναι απαραίτητο συμπλήρωμα για τη διατύπωση των παραπάνω εξισώσεων για τα πραγματικά ρευστά που είναι συνεκτικά. Οι θεμελιακές εξισώσεις της κλασικής μηχανικής και επομένως και της μηχανικής των ρευστών είναι οι εξής τρεις:

1. Η εξίσωση της συνέχειας, που εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας με την παραδοχή ότι τα ρευστά είναι μέσα συνεχή.
2. Η εξίσωση της ορμής, που εκφράζει το 2^ο νόμο του Newton, ότι δηλαδή, η δύναμη είναι η μεταβολή της ποσότητας κίνησης στη μονάδα του χρόνου.
3. Η εξίσωση της ενέργειας, που εκφράζει την αρχή της διατήρησής της.

1.4.2 ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ - ΕΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

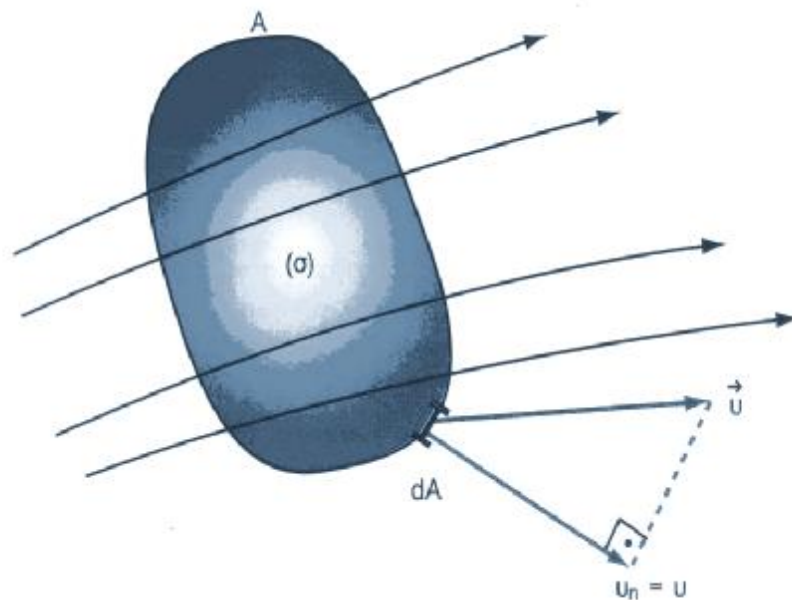
ΕΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΑΖΑΣ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Θεωρούμε τη στιγμιαία εικόνα πεδίου ροής, όπως αυτή παριστάνεται με τις γραμμές ροής και τη νοητή κλειστή επιφάνεια A , που περιβάλλει κάποιο χώρο (σ) μέσα σε αυτή (σχήμα 1.11).

Κατά τη χρονική στιγμή t που εξετάζουμε το πεδίο, έχουμε:

α) Μεταβολή της μάζας $\left(m(t) = \int_{\sigma} \rho dV \right)$ που περιβάλλει η επιφάνεια A , στη μονάδα του χρόνου:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \rho dV \quad (1.10)$$



Σχήμα 1.11 Ισολογισμός της ροής ρευστού από νοητή κλειστή επιφάνεια.

όπου ρ είναι η πυκνότητα της μάζας του ρευστού και dV το στοιχείο όγκου του

χώρου. Η μεταβολή αυτή παρατηρείται όταν η πυκνότητα, ρ , μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Στην περίπτωση που έχουμε $\rho = \text{const.}$, η μεταβολή της μάζας είναι μηδέν:

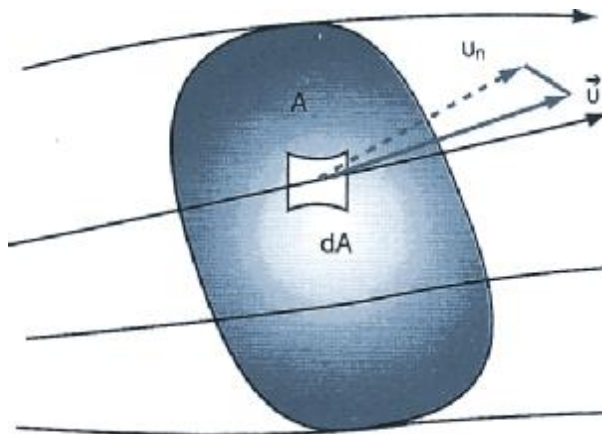
$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (1.11)$$

β) Παροχή μάζας από την επιφάνεια A (ποσό της μάζας που διέρχεται από την επιφάνεια αυτή προς τον χώρο (σ) στη μονάδα του χρόνου):

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \oint_A \mathbf{r} u_n dA \quad (1.12)$$

$$\oint_A \vec{r} u_n d\vec{A} = \oint_A \mathbf{r} u_n dA \quad (1.13)$$

όπου dA είναι η στοιχειώδης επιφάνεια και u_n η κάθετη σε αυτή συνιστώσα της ταχύτητας \vec{u} (το dA και η u_n είναι βαθμωτά μεγέθη). Η συνιστώσα της ταχύτητας u_n θεωρείται θετική όταν η ταχύτητα \vec{u} έχει φορά προς τα έξω του χώρου σ (θετική η ποσότητα της μάζας που εκρέει στο χώρο (σ)) και αρνητική όταν έχει φορά προς το εσωτερικό του χώρου (αρνητική η μάζα που εισρέει στον χώρο (σ)).



Σχήμα 1.12 Ροή μάζας ρευστού από επιφάνεια.

Στη βιβλιογραφία συχνά συναντάμε και την έκφραση "παροχή όγκου από επιφάνεια". Με τον όρο αυτό εννοούμε τον όγκο V που διέρχεται από επιφάνεια A στη μονάδα του χρόνου.

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση έχουμε (σχήμα 1.12):

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \oint_A \mathbf{u}_n \cdot d\mathbf{A}$$

γ) Συνολική παροχή μάζας m που παρέχουν ή απορροφούν πηγές μάζας που ενδεχόμενα υπάρχουν μέσα στο χώρο (σ):

$$\dot{m} = \sum_{k=1}^n \dot{m}_k, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1.14)$$

όπου \dot{m}_k η παροχή μάζας της k πηγής. Η πηγή και η αντίστοιχη \dot{m}_k θεωρούνται θετικές όταν έχουμε παροχή ρευστού μέσα στο πεδίο και αρνητικές όταν έχουμε απορρόφηση μάζας από το πεδίο. Η αρνητική πηγή συχνά συναντάται και με την ονομασία "καταβόθρα ρευστού".

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μάζας (1^{ος} βασικός νόμος της κλασικής μηχανικής: η μάζα δεν καταστρέφεται ούτε μπορεί να δημιουργηθεί από το μηδέν), ο ισολογισμός παροχής μάζας, μεταξύ της μάζας που εισέρχεται ή εξέρχεται ή συσσωρεύεται στη μονάδα του χρόνου στον χώρο (σ), οδηγεί στη σχέση:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma} \rho dV + \oint_A \rho \mathbf{u}_n \cdot d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \dot{m}_k \quad (1.15)$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας στη γενικότερη περίπτωση και ισχύει για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια A μέσα στο πεδίο.

Ειδικές περιπτώσεις:

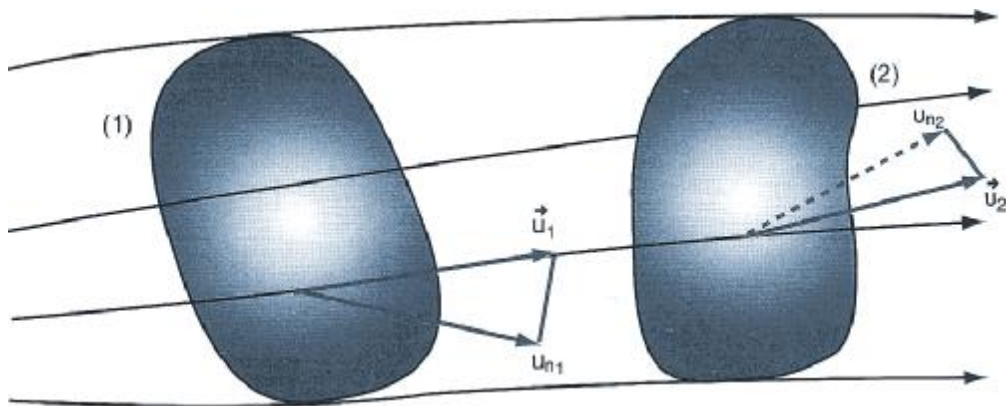
1. Πεδίο συμπιεστού ρευστού χωρίς πηγές:

$$\frac{d}{dt} \int_s r dV + \oint_A r u_n dA = 0 \quad (1.16)$$

2. Μόνιμο πεδίο χωρίς πηγές:

α) σε συμπιεστό ρευστό ($\rho \neq \text{const.}$),

$$\oint_A r u_n dA = 0 \quad (1.17)$$



Σχήμα 1.13 Η έννοια του σωλήνα ροής ρευστού.

β) σε ασυμπίεστο ρευστό ($\rho = \text{const.}$),

$$\oint_A u_n dA = 0 \quad (1.18)$$

Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι σε μόνιμο πεδίο χωρίς πηγές μέσα στον εξεταζόμενο χώρο, η παροχή μάζας από κάποια νοητή τομή κλειστής επιφάνειας είναι σταθερή (σχήμα 3). Επομένως, όπως φαίνεται και στο σχήμα, έχουμε:

$$\oint_{(1)} \mathbf{r} u_{n_1} dA_1 = \oint_{(2)} \mathbf{r} u_{n_2} dA_2 = \text{const.} \quad (1.19)$$

Για ασυμπίεστο ρευστό είναι:

$$\oint_{(1)} \mathbf{u}_{n_1} dA_1 = \oint_{(2)} \mathbf{u}_{n_2} dA_2 \quad (1.20)$$

Για την ιδιότητά τους αυτή, οι κλειστές επιφάνειες που διαρρέονται από ρευστό και που μέσα σε αυτές δεν υπάρχουν πηγές, ονομάζονται σωλήνες ροής.

Εξίσωση διατήρησης μάζας σε διαφορική μορφή

Η διαφορική διατύπωση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας αποδεικνύεται από την ολοκληρωτική διατύπωση με την εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss.

Υποθέτουμε ότι μέσα στον χώρο (σ) δεν υπάρχουν πηγές μάζας, $\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k = 0$.

Εισάγοντας το σύμβολο της ολικής χρονικής παραγώγου d/dt μέσα στο ολοκλήρωμα ως μερική παράγωγο $\partial/\partial t$ και μετατρέποντας το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ογκικό, με βάση την πρόταση του Gauss προκύπτει:

$$\oint_{(s)} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dV + \oint_{(s)} \text{div}(\mathbf{r}\vec{u}) dV = 0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r\vec{u}) = 0 \quad (1.21)$$

Η εξίσωση αυτή (διαφορική έκφραση της εξίσωσης της συνέχειας) χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που έχουμε διδιάστατη και τρισδιάστατη ροή.

Αρχικά δεχόμαστε ότι μέσα στον όγκο V ($dV = dx dy dz$) δεν υπάρχει πηγή (στον διαφορικό όγκο dV , αν υπάρχει πηγή, δεν μπορεί παρά να είναι μία και αυτή σημειακή). Σύμφωνα λοιπόν με το σκεπτικό που ακολουθήσαμε για την ολοκληρωτική διατύπωση της αρχής διατήρησης της μάζας έχουμε για το πεδίο:

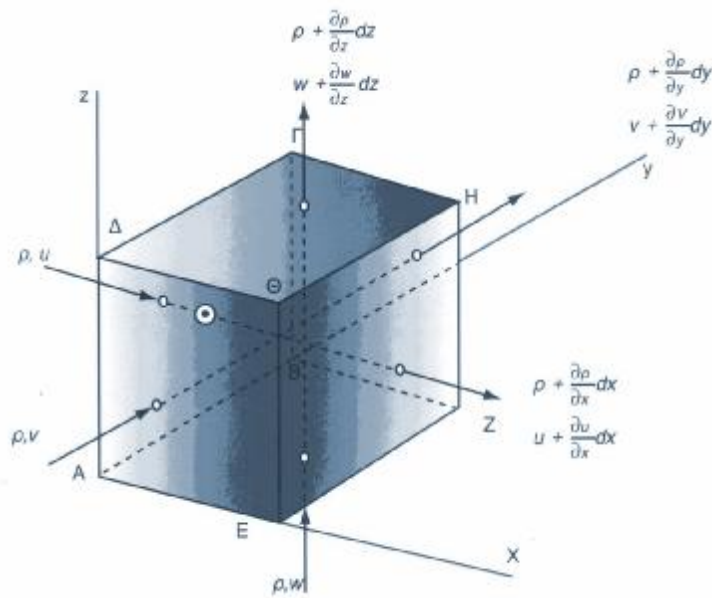
α) Η μεταβολή της μάζας στη μονάδα του χρόνου μέσα στον στοιχειώδη όγκο dV είναι:

$$\frac{\partial r}{\partial t} dV$$

β) Εφαρμόζοντας για τις συναρτήσεις ρ , u , v , w την ανάλυση σε σειρά Fourier στη χρονική στιγμή $t = \text{const.}$, $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + \dots$, και θεωρώντας αμελητέα τη συνεισφορά του δεύτερου και πέρα όρου του δευτέρου μέλους της εξίσωσης έχουμε ότι, κατά τον άξονα x , η διαφορά της εκρέουσας από την εισρέουσα παροχή μάζας, δηλαδή μεταξύ των επιφανειών (ΑΒΓΔ) - εισροή και (ΕΖΗΘ) εκροή (σχήμα 4) είναι:

$$\left(r + \frac{\partial r}{\partial x} dx \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz - r u dy dz = \frac{\partial(ru)}{\partial x} dV$$

(με παράλειψη του διαφορικού ανώτερης τάξης $\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx^2$).



Σχήμα 1.14 Ισολογισμός ροής μάζας μέσα από στοιχείο όγκου ΔV .

Οι αντίστοιχες διαφορές κατά τους άξονες y και z είναι $\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dV$ και $\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dV$.

Το άθροισμα και των τριών δίνει την παροχή μάζας που συνολικά εκρέει από την επιφάνεια $(AB\Gamma\Delta E\Z\eta\Theta)$ του στοιχείου dV . Η παροχή της μάζας που συνολικά εκρέει από όλες τις πλευρές που περικλείουν τον στοιχειώδη όγκο dV (σχήμα 4) είναι:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dV = \text{div}(\rho \vec{u}) dV \quad (1.22)$$

Επομένως, η διαφορική εξίσωση της συνέχειας (διατήρησης της μάζας), στην περίπτωση που δεν υπάρχουν πηγές μέσα στον χώρο dV είναι:

1. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0 \quad (1.23)$$

όπου $\vec{u} = (u, v, w)$ ή σε διανυσματική μορφή:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r\vec{u}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \nabla(r\vec{u}) = 0 \quad (1.24)$$

2. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_u)}{\partial j} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} + \frac{ru_r}{r} = 0 \quad (1.25)$$

Ειδικές περιπτώσεις των καρτεσιανών διαφορικών εξισώσεων (1.23)

1. Σε μόνιμη ροή συμπιεστού ρευστού $\left(\frac{\partial r}{\partial t} = 0\right)$ ισχύει:

$$\text{div}(r\vec{u}) = 0$$

	Ολοκληρωτική Διατύπωση	Διαφορική Διατύπωση
Συμπιεστό ρευστό χωρίς πηγές ή καταβόθρες	$\frac{d}{dt} \int_S r dV + \oint_A r u_n dA = 0$	$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r\vec{u}) = 0$
Μόνιμο πεδίο συμπιεστού ρευστού ($\rho \neq \text{const.}$)	$\oint_A r u_n dA = 0$	$\text{div}(r\vec{u}) = 0$
Ασυμπίεστο ρευστό (μόνιμης ή μη μόνιμης ροής) ($\rho = \text{const.}$)	$\oint_A u_n dA = 0$	$\text{div}(\vec{u}) = 0$

Πίνακας 1.1 Ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος διατήρησης της μάζας σε ολοκληρωτική και διαφορική μορφή

α. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ισχύει:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0 \quad (1.26)$$

β. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει:

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} + \frac{ru_r}{r} = 0 \quad (1.27)$$

2. Ροή ασυμπίεστου ρευστού, $\rho = \text{const.}$, στην περίπτωση μόνιμης και μη μόνιμης ροής:

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (1.28)$$

α. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ισχύει:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.29)$$

β. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad (1.30)$$

1.4.3 ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Το θεώρημα της ορμής στη μηχανική των ρευστών, αναφέρεται στη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου του Newton για ρευστά με τις γνωστές κινηματικές ιδιότητες.

Η μαθηματική έκφραση του νόμου αυτού, γνωστή από την κλασική μηχανική είναι:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = m\vec{g} \quad (1.31)$$

Η δύναμη \vec{F} που ενεργεί πάνω σε υλικό σημείο μάζας m είναι ίση με τη μεταβολή της ποσότητας κίνησης του $m\vec{u}$ ανά μονάδα χρόνου ή με το γινόμενο της μάζας m επί την επιτάχυνση \vec{g} που του προσδίδει.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος της ορμής μπορούμε να συσχετίσουμε την κινηματική και τη δυναμική κατάσταση του ρευστού μέσα στο πεδίο ροής του. Η έκφραση του θεωρήματος αυτού σε ολοκληρωτική και διαφορική μορφή δίνεται στη συνέχεια. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι η διαφορική μορφή του θεωρήματος της ορμής είναι γνωστή με την ονομασία Εξισώσεις του Euler για το μη συνεκτικό ρευστό και Εξισώσεις Navier-Stokes για το συνεκτικό.

ΕΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

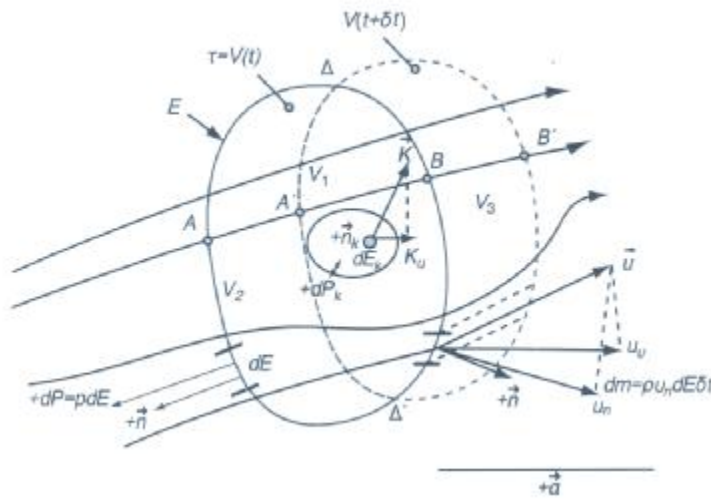
Έστω η νοητή κλειστή και ακίνητη επιφάνεια E του σχήματος 5 μέσα στο πεδίο ροής.

Η συνολική ορμή \vec{J} (ορμή θέσης) ρευστού μάζας dm που σε κάθε παρεχόμενη χρονική στιγμή περικλείεται στον χώρο τ κατά την κατεύθυνση \vec{a} είναι:

$$\vec{J}(t) = \int_{\tau} \vec{r} \vec{u} dV, \quad J_a(t) = \int_{\tau} r u_a dV \quad (1.32)$$

Η ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της ορμής είναι:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \vec{r} \vec{u} dV, \quad \frac{d}{dt} \int_{\tau} r u_a dV = \frac{d}{dt} J_a(t) \quad (1.33)$$



Σχήμα 1.15 Η εφαρμογή του θεωρήματος της ορμής κατά την κατεύθυνση \vec{a} , σε κλειστή επιφάνεια αναφοράς E .

Η εισερχόμενη ορμή ανά μονάδα χρόνο μέσω του στοιχείου της επιφάνειας dE είναι $-r \vec{u} (\vec{u} \vec{n}) E$, οπότε η συνολικά εξερχόμενη ορμή ανά μονάδα χρόνο στον χώρο

όγκου V μέσω της επιφάνειας dE είναι:

$$\vec{S} = \int_E \mathbf{r} \vec{u} (\vec{u} \vec{n}) E, \quad S_a = \int_E \mathbf{r} u_a u_n dE \quad (1.34)$$

όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα εκτείνεται σε όλη την έκταση της E . Επομένως, η συνολική αύξηση της ορμής της μάζας m του ρευστού που περικλείεται στον χώρο όγκου V είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}}{dt} + \vec{S} &= \frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \vec{u} dV + \int_E \mathbf{r} \vec{u} (\vec{u} \vec{n}) E \\ \frac{d}{dt} J_a(t) + S_a &= \frac{d}{dt} \int \mathbf{r} u_a dV + \int_E \mathbf{r} u_a u_n dE \end{aligned} \quad (1.35)$$

όπου το μέγεθος $\frac{d\vec{J}}{dt}$ λέγεται εν θέσει μεταβολή της ορμής και το μέγεθος \vec{S} λέγεται ροή της ορμής.

Σε μορφή διανυσματικού αθροίσματος, ο 2^{ος} θεμελιώδης νόμος του Newton γράφεται:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \sum dm \vec{u} = \frac{d}{dt} \sum d\vec{J}_o \quad (1.36)$$

όπου $d\vec{J}_o = dm \vec{u}$ είναι το διάνυσμα της ορμής οποιουδήποτε στοιχείου του ρευστού. Στην περίπτωση εφαρμογής του νόμου κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \vec{a} , έχουμε:

$$\sum F_a = \frac{d}{dt} \sum dm u_a = \frac{d}{dt} \sum dJ_{oa} \quad (1.37)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την παραπάνω εξίσωση για ρευστό που στη θεωρούμενη χρονική στιγμή t βρίσκεται μέσα στον χώρο τ , όγκου V που περικλείεται μεταξύ της επιφάνειας E και του στερεού (K) έχουμε:

$$\sum F_a = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} u_a dm = \frac{d}{dt} J_{oa}(t) \quad (1.38)$$

Επομένως έχουμε:

$$\sum F_a = \frac{d}{dt} J_{oa}(t) \quad (1.39)$$

όπου $\sum F_a$ είναι το άθροισμα των συνιστωσών των εξωτερικών δυνάμεων κατά την κατεύθυνση \vec{a} πάνω στην μάζα του ρευστού που κατέχει τον όγκο $\tau=V(t)$ μέσα στην επιφάνεια E κατά την ίδια χρονική στιγμή t και $J_{oa}(t)$ η ορμή της μάζας αυτής του ρευστού κατά την χρονική στιγμή t .

Όπως είδαμε και προηγουμένως, η ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της ορμής του ρευστού που κατά την χρονική στιγμή t διέρχεται από την επιφάνεια αναφοράς E είναι το αλγεβρικό άθροισμα της ορμής θέσης μέσα στην E και της ροής της ορμής από την E . Επομένως,

$$\frac{d}{dt} J_{oa}(t) = \frac{d}{dt} J_a(t) + S_a \quad (1.40)$$

Στην περίπτωση μη συνεκτικού ρευστού, ηλεκτρικά και μαγνητικά ουδέτερου, που βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας, οι εξωτερικές δυνάμεις προέρχονται:

α) Από την ορθή εντατική κατάσταση μέσα στην μάζα του ρευστού, δηλαδή από την πίεση p , που είναι βαθμωτό μέγεθος πάντα θετικό:

$$d\vec{P} = p d\vec{E} \quad (1.41)$$

Για το ρευστό που βρίσκεται μέσα στην E , η εντατική αυτή κατάσταση εκφράζεται ως το άθροισμα των στοιχειωδών δυνάμεων που δρουν από τα εξωτερικά στοιχεία κάθετα πάνω στην επιφάνεια E . Συνεπώς, η κατά την κατεύθυνση \vec{a} συνιστώσα του αθροίσματος $\sum d\vec{P}$ πάνω σε ολόκληρη την E , θα είναι:

$$P_a = \oint_E (\vec{a} d\vec{P}) = - \int_E p \cos(\vec{n}, \vec{a}) dE \quad (1.42)$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο στοιχείο dE της E με θετική κατεύθυνση από τα μέσα προς τα έξω. Δηλαδή τα $d\vec{P}$ και \vec{n} , στη θετική του φορά το καθένα, έχουν αντίθετη κατεύθυνση γι' αυτό και έχουμε αρνητικό πρόσημο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης.

β) Από τις δυνάμεις βαρύτητας.

Για παράδειγμα, για ροή μέσα στο πεδίο βαρύτητας της γης η συνιστώσα κατά την κατεύθυνση \vec{a} είναι:

$$G_a = (\vec{a}\vec{G}) = \int_t r(\vec{a}\vec{g}) dV = \int_t r g_a dV \quad (1.43)$$

δηλαδή η συνιστώσα του βάρους του ρευστού που κατά την χρονική στιγμή t βρίσκεται μέσα στο χώρο τ , όγκο V (ο όγκος που κατέχει το σώμα (K) εξαιρείται).

γ) Από την συνιστώσα της αντίδρασης $-\vec{K}$ κατά την κατεύθυνση \vec{a} , δηλαδή $-K_a$, με την οποία το σώμα αντιδρά στη δύναμη \vec{K} που εξασκεί το ρευστό πάνω του.

Στην περίπτωση μη συνεκτικού ρευστού, ηλεκτρικά και μαγνητικά ουδέτερου, με ροή μέσα στο πεδίο βαρύτητας της γης, οι εξωτερικές δυνάμεις κατά την κατεύθυνση \vec{a} πάνω στο ρευστό που κατά τη χρονική στιγμή t βρίσκεται μέσα στην νοητά κλειστή επιφάνεια E , είναι:

$$\sum F_a = P_a + G_a - K_a \quad (1.44)$$

Επομένως η εξίσωση $\sum F_a = \frac{d}{dt} J_{oa}(t)$ μπορεί να γραφτεί:

$$P_a + G_a - K_a = \frac{d}{dt} J_a(t) + S_a \quad (1.45)$$

Ειδικές περιπτώσεις για μη συνεκτικό ρευστό

A) Για στατικό πεδίο, η ταχύτητα \vec{u} είναι μηδενική σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού ($\vec{u} = 0$) και η εξ. (1.45) γίνεται:

$$P_a + G_a - K_a = 0 \quad (1.46)$$

Η παραπάνω συνθήκη εκφράζει την αρχή του Αρχιμήδη και η K_a είναι η άνωση κατά την κατεύθυνση \vec{a} που το ρευστό εξασκεί πάνω στο σώμα.

B) Για μόνιμο πεδίο ροής, όπου έχουμε $J_a = 0$:

$$P_a + G_a - K_a = S_a \quad (1.47)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί μας δείχνει ότι η ώθηση K_a που το ρευστό εξασκεί πάνω στο σώμα κατά την κατεύθυνση \vec{X} , εξαρτάται από την κατάσταση της ροής πάνω στην επιφάνεια αναφοράς E και μόνο, χωρίς να ενδιαφέρεται η μορφή της ροής του μέσα στον χώρο τ , όγκου V ή έστω κοντά στο σώμα.

ΕΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Εξισώσεις Euler. Οι σχέσεις που στη μηχανική των ρευστών είναι γνωστές με το όνομα εξισώσεις Euler είναι οι εξισώσεις που εκφράζουν το θεώρημα της ορμής στη διαφορική του μορφή στην περίπτωση μη συνεκτικού ρευστού.

Έστω ο διαφορικό όγκος δV ($\delta x, \delta y, \delta z$) με $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$, ο οποίος θεωρούμε ότι βρίσκεται σε κάποια θέση του πεδίου ροής μη συνεκτικού ρευστού, ακίνητου ως προς το σύστημα αναφοράς της κίνησης και ο οποίος δεχόμαστε ότι δεν περιέχει μέσα του πηγή ρεύματος + ή -. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) , $\vec{u}(u, v, w)$, η εξίσωση της μεταβολής της ορμής για τη χρονική στιγμή t κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \hat{i} γράφεται:

$$dP_x + F_x dV = \frac{\partial}{\partial t} dJ_x + dS_x \quad (1.48)$$

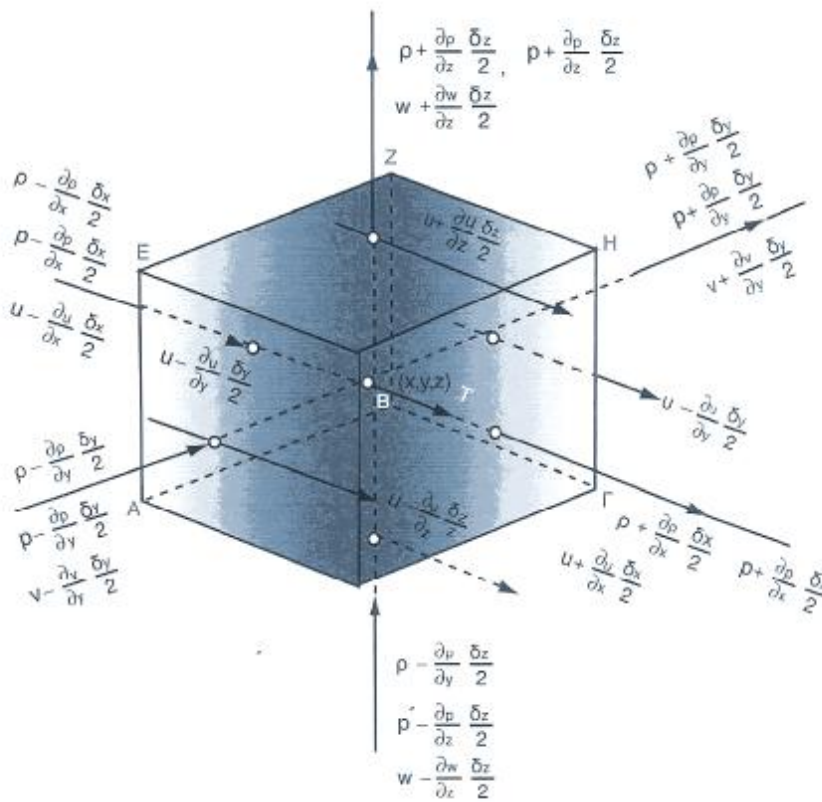
όπου δP_x είναι η δύναμη από πιέσεις πάνω στην επιφάνεια του όγκου δV κατά τον άξονα x και F_x είναι η δύναμη από εξωτερικές δράσεις η οποία ενεργεί κατά τον άξονα x πάνω στη μάζα του ρευστού που περιέχει ο όγκος δV :

$$F_x = G_x + H_x + \dots \quad (1.49)$$

(G_x : η δύναμη από βαρύτητα, H_x : ηλεκτρικές δυνάμεις αν το ρευστό δεν είναι ηλεκτρομαγνητικά ουδέτερο κτλ) δJ_x είναι ορμή θέσης κατά τον άξονα x , δS_x η ροή της ορμής από την επιφάνεια του δV .

Η διαφορική διατύπωση γίνεται με βάση την ανάλυση σε σειρά Taylor και την παράληψη των διαφορικών ανώτερης τάξης, όπως ακριβώς έγινε και κατά την διατύπωση της εξίσωσης της συνέχειας. Επομένως με την βοήθεια του σχήματος 1.16 έχουμε:

$$dP_x = \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \right] dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (1.50)$$



Σχήμα 1.16 Οι μεταβολές πιέσεων, πυκνοτήτων και ταχυτήτων πάνω στο στοιχείο δV του πεδίου ροής.

$$dJ_x = r u dV \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} dJ_x = \frac{\partial}{\partial t} (r u) dV = \left(r \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial t} \right) dV \quad (1.51)$$

$$dS_x = [r u u_n dE]_{\text{epif\u00e1neia \u03ccγκου} dV} \quad (1.52)$$

\u03ccπου u_n \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b7 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5\u03c4\u03b7 \u03c3\u03bd\u03b9\u03c3\u03c4\u03c9\u03c3\u03b1 \u03c4\u03b7\u03c3 \u03c4\u03b1\u03c7\u03c5\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1\u03c3 \u03c3\u03b5 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5 \u03b5\u03b4\u03c1\u03b1 dE \u03c4\u03bf\u03c5 \u03cc\u03b3\u03ba\u03bf\u03c5 dV .

$$\text{Κα\u03c4\u03ac \u03c4\u03bf\u03bd \u03b1\u03be\u03b9\u03bd\u03b1 x:} \quad u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}, \quad u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (1.53)$$

$$\text{Κα\u03c4\u03ac \u03c4\u03bf\u03bd \u03b1\u03be\u03b9\u03bd\u03b1 y:} \quad n - \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dy}{2}, \quad n + \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dy}{2} \quad (1.54)$$

$$\text{Κα\u03c4\u03ac \u03c4\u03bf\u03bd \u03b1\u03be\u03b9\u03bd\u03b1 z:} \quad w - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \quad (1.55)$$

Ε\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c3:

$$\begin{aligned} dS_x &= \left[\left(r + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)^2 - \left(r - \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)^2 \right] dy dz + \\ &+ \left[\left(r + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \left(n + \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) - \left(r - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \left(u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \left(n - \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \right] du dz d_x + \\ &+ \left[\left(r + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) - \left(r - \frac{\partial r}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(u - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(w - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right] d_x d_y = \\ &= \left[u \left(\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r n}{\partial y} + \frac{\partial r w}{\partial z} \right) + r \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (1.56)$$

Άρα:

$$F_x - \frac{\partial p}{\partial x} = u \left(\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rn}{\partial y} + \frac{\partial rw}{\partial z} \right) + r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.57)$$

$$F_x - \frac{\partial p}{\partial x} = r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.58)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους ισούται με το μηδέν γιατί αποτελεί την έκφραση της εξίσωσης συνέχειας. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και για τις κατευθύνσεις J και k στους άξονες y και Z .

Στη διαφορική του μορφή, λοιπόν, το θεώρημα της ορμής για μη συνεκτικό ρευστό σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τις παρακάτω τρεις εξισώσεις του Euler:

$$\begin{aligned} r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ r \left(\frac{\partial n}{\partial t} + u \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial n}{\partial y} + w \frac{\partial n}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ r \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + n \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} r \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_u}{r} \frac{\partial u_r}{\partial j} - \frac{u_u^2}{r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} \\ r \left(\frac{\partial u_u}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_u}{\partial r} + \frac{u_u}{r} \frac{\partial u_u}{\partial j} + \frac{u_u u_r}{r} + u_z \frac{\partial u_u}{\partial z} \right) &= F_u - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial j} \\ r \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_u}{r} \frac{\partial u_z}{\partial j} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

εισάγοντας τον τελεστή:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

από τις προηγούμενες εξισώσεις (1.59) έχουμε:

$$\begin{aligned} r \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ r \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ r \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις φαίνεται η θεμελιακή σημασία των εξισώσεων του Euler, δεδομένου ότι με αυτές συνδέεται η κινηματική με τη δυναμική κατάσταση μέσα στο πεδίο ροής. Με τις εξισώσεις του Euler σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας,

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r\vec{u}) = 0 \quad r \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F} - \text{grad}p \quad (1.61)$$

και με τη βοήθεια κατάλληλης καταστατικής εξίσωσης μεταξύ της πίεσης p και της πυκνότητας ρ , ανάλογα με τη φύση του ρευστού, έχουμε τον αναγκαίο και επαρκή αριθμό εξισώσεων για την επίλυση οποιουδήποτε πεδίου ροής μη συνεκτικού ρευστού μέσα σε γνωστό πεδίο εξωτερικών δράσεων $F(x, y, z, t)$, αν δοθούν οι οριακές συνθήκες.

Όπως είδαμε οι θεμελιακές εξισώσεις του Euler εκφράζουν ισολογισμό δυνάμεων μέσα, σε πεδίο ροής μη συνεκτικού ρευστού και είναι ταυτόσημες με το 2^ο νόμο του Newton. Επομένως, η χωρική ολοκλήρωσή τους κατά μια διαδρομής μέσα στο πεδίο ροής οδηγεί σε έκφραση διατήρησης της ενέργειας

$$\int_s \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\vec{s} + \int_s \frac{1}{r} \text{grad} p d\vec{s} - \int_s \frac{1}{r} \vec{F} d\vec{s} = E_s(t) \quad (1.62)$$

Όπου $E_s(t)$ η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία εξαρτάται από την διαδρομή s και την χρονική στιγμή t που θεωρούμε την ολοκλήρωση.

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων του Euler. Μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι ο τελεστής του Euler για το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ μπορεί να πάρει την εξής μορφή:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + [\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u}] \quad (1.63)$$

Επομένως, η εξ. (1.61) γίνεται:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + [\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u}] \quad (1.64)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $d\vec{s}$, $d\vec{s} = i dx + j dy + k dz$, και μεταφέροντας όλους τους όρους στο πρώτο μέρος, καταλήγουμε στην ακόλουθη ενεργειακή διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\vec{s} + \text{grad} \frac{u^2}{2} d\vec{s} + [\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u}] d\vec{s} + \frac{1}{r} \text{grad} p d\vec{s} - \frac{1}{r} \vec{F} d\vec{s} = 0 \quad (1.65)$$

Ισχύει ότι:

$$\text{grad}f \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) = df$$

Επομένως,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + d \frac{u^2}{2} + \frac{1}{r} dp + \text{rot} \mathbf{u} [\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}] - \frac{1}{r} \mathbf{F} d\mathbf{s} = 0 \quad (1.66)$$

Αν τώρα η εξωτερική δύναμη \mathbf{F} προέρχεται από δυναμικό W , έχουμε δηλαδή:

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W, \quad \mathbf{F} d\mathbf{s} = -dW \quad (1.67)$$

η εξ.(1.66) γράφεται:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + d \frac{u^2}{2} + \frac{1}{r} dp + \frac{1}{r} dW + \text{rot} \mathbf{u} [\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}] = 0 \quad (1.68)$$

Με τον τρόπο αυτό μετατρέψαμε τους περισσότερους όρους σε τέλεια διαφορικά και επομένως σε όρους ολοκληρώσιμους. Αυτό, όμως δεν συμβαίνει για τον όρο $\text{rot} \mathbf{u} [\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}]$ που η ολοκλήρωσή του είναι προβληματική. Προκειμένου τώρα να απαλλαγούμε από τον όρο αυτό εξετάζουμε κάτω από ποιες συνθήκες ο όρος αυτός μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει:

- 1) αν $\text{rot} \mathbf{u} = 0$, δηλαδή αν το πεδίο ροής είναι αστρόβιλο και
- 2) αν $[\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}] = 0$, δηλαδή αν η διαδρομή s είναι κάποια γραμμή ροής.

Για στροβιλό πεδίο ροής, $\text{rot} \mathbf{u} \neq 0$, ακολουθώντας γραμμή ροής, $[\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}] = 0$, η

εξ. (1.68) γράφεται:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{\rho}}{\partial t} d\mathbf{s}^{\rho} + d \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{1}{r} dp + \frac{1}{r} dW = 0 \quad (1.69)$$

Για αστρόβιλο πεδίο, $\text{rot} \mathbf{u}^{\rho} = 0$, η ταχύτητα είναι:

$$\mathbf{u}^{\rho} = \text{grad} \Phi \quad (1.70)$$

οπότε:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{\rho}}{\partial t} d\mathbf{s}^{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Phi d\mathbf{s}^{\rho} = \text{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\mathbf{s}^{\rho} = d \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.71)$$

Επομένως, έχουμε:

$$d \frac{\partial \Phi}{\partial t} + d \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{1}{r} dp + \frac{1}{r} dW = 0 \quad (1.72)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας την εξ. (1.69) κατά μήκος της γραμμής ροής s κατά τη χρονική στιγμή t έχουμε:

$$\int_s \frac{\partial \mathbf{u}^{\rho}}{\partial t} d\mathbf{s}^{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \int_s \frac{1}{r} dp + \int_s \frac{1}{r} dW = E_s(t) \quad (1.73)$$

όπου $E_s(t)$ είναι η σταθερά ολοκλήρωσης που γενικά εξαρτάται από τη γραμμή ροής s που οδεύει και από τη χρονική στιγμή t που νοείται η ολοκλήρωση. Η $E_s(t)$, με άλλα λόγια, μπορεί να μεταβάλει την τιμή της από γραμμή σε γραμμή ροής και από χρονική σε χρονική στιγμή.

Η εξ. (1.72) μετά από ολοκλήρωση, μας δίνει:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{r} dp + \int \frac{1}{r} dW = E(t) \quad (1.74)$$

όπου η σταθερά $E(t)$ της ολοκλήρωσης είναι συνάρτηση του χρόνου και μόνο. Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου αυτής, η χωρική ολοκλήρωση των εξισώσεων του Euler κατά τη χρονική στιγμή t οδηγεί σε ενεργειακή σχέση. Έτσι, για το στροβιλό και το αστρόβιλο πεδίο αντίστοιχα οι ποσότητες $\int \frac{\partial \vec{u}^p}{\partial t} d\vec{s}^p + \frac{u^2}{2}$, $\frac{d\Phi}{dt} + \frac{u^2}{2}$, παριστάνουν την ενέργεια των δυνάμεων αδράνειας ανά μονάδα μάζας του ρευστού. Πιο συγκεκριμένα, ο όρος $\int \frac{1}{r} dp$ παριστάνει την ενέργεια εντατικής κατάστασης ή εσωτερική ενέργεια και ο όρος $\int \frac{1}{r} dW$ παριστάνει τη δυνητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού. Επομένως, οι σταθερές ολοκλήρωσης $E_s(t)$ ή $E(t)$ για το αστρόβιλο πεδίο ως αθροίσματα των παραπάνω εκφράζουν τη συνολική ενέργεια μέσα στο πεδίο ροής.

Αν τώρα το πεδίο ροής βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας της $\Gamma\eta$, τότε:

$$dW = r g dh \quad (1.75)$$

οπότε έχουμε:

α. για το στροβιλό πεδίο ροής:

$$\int \frac{\partial \vec{u}^p}{\partial t} d\vec{s}^p + \frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{r} dp + gh = E_s(t) \quad (1.76)$$

β. για το αστρόβιλο πεδίο ροής:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{r} dp + gh = E(t) \quad (1.77)$$

Στην περίπτωση που στο μόνιμο αστρόβιλο πεδίο ροής μέσα σε πεδίο βαρύτητας η τιμή της ενέργειας ανά μονάδα μάζας του ρευστού παραμένει σταθερή σε ολόκληρη την έκταση του πεδίου και αναλλοίωτη με την πάροδο του χρόνου, η εξ. (1.77) γίνεται:

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{r} dp + gh = E_0 = \text{const} \quad (1.78)$$

όπου τα u , ρ , r είναι ανεξάρτητα του χρόνου.

Το αστρόβιλο πεδίο, μόνιμο ή μη μόνιμο, αποτελεί ιδεατή περίπτωση ροής γιατί η ροή του πραγματικού ρευστού, που είναι συνεκτικό, δεν μπορεί να είναι αστρόβιλη.

Εξίσωση Bernoulli. Σε μόνιμο αστρόβιλο πεδίο ασυμπίεστου ρευστού, $r = \text{const}$, μέσα στο πεδίο βαρύτητας της $\Gamma\eta\varsigma$ η εξ. (1.78) γράφεται:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{r} + gh = \frac{p_0}{r} \quad (1.79)$$

ή, πολλαπλασιάζοντας με r :

$$\frac{r}{2} u^2 + p + rgh = p_0 \quad (1.80)$$

ή ακόμα, διαιρώντας με το ειδικό βάρος $e = r \cdot g$ του ρευστού,

$$\frac{u^2}{2g} + H + h = H_0 \quad (1.81)$$

όπου $p_0 = E_0 \gamma = \gamma g H_0 = \text{const.}$, $p = \gamma g H$.

Η εξ. (1.79) είναι θεμελιακή εξίσωση γιατί συνδέει την κινηματική και τη δυναμική κατάσταση του ασυμπίεστου ρευστού σε αστρόβιλη ροή και ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την εξίσωση αυτή σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας, που για το αστρόβιλο πεδίο ροής είναι η εξίσωση του Laplace $\Delta \Phi = 0$ με $\Phi = \Phi(x, y, z)$, αφού πρόκειται για μόνιμο πεδίο, μπορούμε να επιλύσουμε τα σχετικά προβλήματα και να βρούμε τις κατανομές της ταχύτητας u (x, y, z) και της πίεσης $p(x, y, z)$.

Η εξίσωση Bernoulli εκφράζει την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μέσα σε πεδίο βαρύτητας, όταν η ολική πίεση $p_0 = \text{const.}$

Θα πρέπει, τέλος, να τονιστεί ότι οι παραπάνω εκφράσεις της εξίσωσης Bernoulli δεν ισχύουν μόνο στην περίπτωση του αστρόβιλου πεδίου. Οι εκφράσεις αυτές ισχύουν και όταν $\text{rot} \mathbf{u} \neq 0$, δηλ. για μόνιμο στροβιλό πεδίο ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, αλλά μόνο κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής ροής.

Εξισώσεις Navier - Stokes. Ο Stokes βασιζόμενος σε μια σειρά παρατηρήσεων, σκέφτηκε να επεκτείνει τη θεωρία της ελαστικότητας και στην περιοχή του πεδίου ροής, με την παραδοχή ότι: οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων σε ισότροπο ελαστικό (στερεό) μέσο, είναι μαθηματικά ταυτόσημες προς εκείνες μεταξύ τάσεων και ανηγμένων στη μονάδα του χρόνου παραμορφώσεων ρευστού στοιχείου σε κίνηση. Ας θεωρήσουμε κάποιο στοιχείο όγκου μέσα στο πεδίο ροής. Κατά τη χρονική στιγμή t , έστω u , v , w οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού δια του

στοιχείου, F_x, F_y, F_z , οι ανά μονάδα όγκου εξωτερικές δυνάμεις πάνω σε αυτό και $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, η γενική εντατική κατάσταση πάνω στην επιφάνεια του στοιχείου, όπως αυτή καθορίζεται από τις κάθετες και διατμητικές τάσεις. Στο μη συνεκτικό ρευστό, εφαρμόζοντας το θεώρημα της ορμής σε στοιχείο του όγκου του ρευστού, είχαμε καταλήξει στις εξισώσεις του Euler [εξ. (1.60)].

Θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε κι εδώ τον ίδιο δρόμο, έχοντας υπ' όψη ότι στην περίπτωση εκείνη, η εντατική κατάσταση, προερχόμενη από κάθετες τάσεις και μόνο, ήταν καθορισμένη από τη στατική πίεση p για οποιαδήποτε κατεύθυνση, ενώ εδώ, εκτός από την κάθετη εντατική κατάσταση που καθορίζεται από τις συνιστώσες $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, οι οποίες δεν είναι υποχρεωτικά ίσες, εμφανίζονται και οι διατμητικές τάσεις $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$. Έτσι, οι κατά τους τρεις άξονες δυνάμεις ανά μονάδα όγκου του ρευστού σε εντατική κατάσταση θα είναι τώρα οι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} & \quad (\text{κατά τον άξονα } x) \\ \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} & \quad (\text{κατά τον άξονα } y) \\ \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} & \quad (\text{κατά τον άξονα } z) \end{aligned} \quad (1.82)$$

αντί των $-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z}$, του μη συνεκτικού ρευστού.

Στη γενικευμένη περίπτωση, οι σχέσεις ισολογισμού των δυνάμεων που εξασκούνται ανά μονάδα όγκου του ρευστού κατά τους τρεις άξονες, είναι:

$$\mathbf{r} \frac{Du}{Dt} = \mathbf{F} + \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z}$$

$$r \frac{Du}{Dt} = F_x + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} \quad (1.83)$$

$$r \frac{Du}{Dt} = F_x + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y}$$

Σύμφωνα με την παραδοχή του Stokes, αν υποθέσουμε ότι η εξεταζόμενη εντατική κατάσταση αναφέρεται σε στοιχειώδη όγκο ισότροπου ελαστικού (στερεού) μέσου σε ισορροπία, με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G και συντελεστή Poisson $1/m$, τότε, σύμφωνα με τη θεωρία της ελαστικότητας:

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E \quad (1.84)$$

και κατά, τους τρεις άξονες έχουμε:

$$E \cdot e_x = s_x - \frac{1}{m}(s_y + s_z)$$

$$E \cdot e_y = s_y - \frac{1}{m}(s_z + s_x) \quad (1.85)$$

$$E \cdot e_z = s_z - \frac{1}{m}(s_x + s_y)$$

Με πρόσθεση των τριών τελευταίων, έχουμε την κατ' όγκο παραμόρφωση:

$$E \cdot e = \frac{m-2}{m}(s_x + s_y + s_z) \quad (1.86)$$

Απαλείφοντας τα E και m από τις σχέσεις αυτές, μπορούμε να εκφράσουμε τις τάσεις σ_x , σ_y , σ_z συναρτήσει των γραμμικών παραμορφώσεων, του ϵ και του G . Έτσι, θέτοντας για λόγους συντομίας,

$$s = \frac{1}{3}(s_x + s_y + s_z) \quad (1.87)$$

(η s είναι η μέση κάθετη τάση πάνω στο στοιχείο) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} s_x &= s + 2Ge_x - \frac{2}{3}Ge \\ s_y &= s + 2Ge_y - \frac{2}{3}Ge \\ s_z &= s + 2Ge_z - \frac{2}{3}Ge \end{aligned} \quad (1.88)$$

Στη συνέχεια μετατρέπουμε τις σχέσεις αυτές σε σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων κάποιου στοιχείου του ρευστού σε κίνηση, αντικαθιστώντας το G με το μ , και

το ε με το $din\bar{u}$ και τα $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ με τα $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ αντίστοιχα. Έτσι, οι κάθετες τάσεις

μέσα στη μάζα του ρευστού είναι

$$\begin{aligned} s_x &= s + 2m \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} m \operatorname{div} \bar{u} \\ s_y &= s + 2m \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{2}{3} m \operatorname{div} \bar{u} \\ s_z &= s + 2m \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} m \operatorname{div} \bar{u} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Υποθέτοντας ότι έχουμε μη συνεκτικό ρευστό, θα είναι $\mu = 0$, και συνεπώς

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma \quad (1.90)$$

Συγκρίνοντας στην ειδική αυτή περίπτωση τις εξ. (1.83), όπου $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, με τις εξισώσεις (1.60) του Euler και λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω εκφράσεις των $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, βλέπουμε ότι αυτές ταυτίζονται όταν $s = -p$. Η s δηλαδή αντιστοιχεί προς την πίεση που το στοιχείο του ρευστού εξασκεί προς τα έξω (το θετικό s παριστά ελκυσμό, ενώ το θετικό p θλίψη). Επεκτείνοντας την ισχύ της αντιστοιχίας αυτής μεταξύ μέσης κάθετης τάσης και πίεσης και στη γενική περίπτωση του συνεκτικού ρευστού, γράφουμε:

$$\frac{1}{3}(s_x + s_y + s_z) = -p \quad (1.91)$$

και καταλήγουμε στις τελικές εκφράσεις των $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ συνεκτικού ρευστού σε κίνηση.

$$\begin{aligned} s_x &= -p + 2m \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} m \rho \text{div} \mathbf{u} \\ s_y &= -p + 2m \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{2}{3} m \rho \text{div} \mathbf{u} \\ s_z &= -p + 2m \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} m \rho \text{div} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Με την εισαγωγή στις εξ. (1.83) των τιμών των $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ και των εκφράσεων για τα $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$:

$$\begin{aligned} t_{xy} &= m \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \\ t_{yz} &= m \left(\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ t_{xz} &= m \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.93)$$

και μετά την εκτέλεση πράξεων, καταλήγουμε στις εξισώσεις που ο G. Stokes δημοσίευε το 1845:

$$\begin{aligned} r \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + m\Delta u + \frac{m}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\text{div} \mathbf{u}) \\ r \frac{Dn}{Dt} &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + m\Delta n + \frac{m}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\text{div} \mathbf{u}) \\ r \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + m\Delta w + \frac{m}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\text{div} \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.94)$$

όπου,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \Delta n &= \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \\ \Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ \Delta &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις Navier-Stokes και είναι θεμελιώδεις στη μελέτη και διερεύνηση του πεδίου ροής συνεκτικού ρευστού. Είναι φανερό ότι οι εξισώσεις του Euler, (1.60) αποτελούν ειδική περίπτωση των εξισώσεων Navier-Stokes, όταν $\mu = 0$ (μη συνεκτικό ρευστό). Εν τούτοις, μεταξύ των δύο αυτών ομάδων εξισώσεων, υπάρχει ουσιώδης διαφορά, γιατί ενώ οι εξισώσεις του Euler, βασίζονται στον θεμελιώδη 2^ο νόμο της μηχανικής του Newton, αποτελούν αξιωματικές σχέσεις για τη μηχανική των ρευστών, οι εξισώσεις Navier-Stokes αντίθετα, βασίζονται στη λογική μεν, αλλά σε τελευταία ανάλυση σε αυθαίρετη παραδοχή του Stokes. Η ισχύς τους λοιπόν δεν είναι a priori και επαφίεται στο πείραμα να δείξει αν τα σχετικά φαινόμενα πράγματι εξελίσσονται όπως αυτές προδιαγράφουν.

Μία ειδική περίπτωση είναι η περίπτωση ρευστού μη συμπιεστού, απουσία εξωτερικών δυνάμεων. Σε αυτή την περίπτωση $r = \text{const.}$, $\text{div} \mathbf{u} = 0$ και $\mathbf{F} = 0$. Οι εξισώσεις (1.94) γράφονται,

$$\begin{aligned} r \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + m\Delta u \\ r \frac{Dn}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + m\Delta n \\ r \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + m\Delta w \end{aligned} \quad (1.95)$$

και

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{εξίσωση συνέχειας}) \quad (1.96)$$

Σκόπιμο θα ήταν να δοθούν εδώ και οι εκφράσεις των εξ. (1.94) σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, φ, z) . Αν (u_r, u_φ, u_z) οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας, είναι:

$$\begin{aligned} & r \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \\ & F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + m \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \\ & r \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) = \\ & F_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + m \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} \right) \\ & r \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ & F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + m \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.97)$$

Και η εξίσωση συνέχειας,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.98)$$

1.4.4 ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στη μηχανική, η ενέργεια σώματος σε κίνηση μέσα στο πεδίο βαρύτητας της γης, ουδέτερου ως προς τις ηλεκτρικές και τις μαγνητικές επιδράσεις, είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας, δηλαδή, ανά μονάδα μάζας το άθροισμα :

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + gh$$

Σύμφωνα τώρα με τη θερμοδυναμική, θα σχηματίσουμε την ενέργεια μάζας του σώματος αν στην έκφραση αυτή προσθέσουμε και την εσωτερική θερμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, που θα τη συμβολίσουμε με Ω ,

$$\Omega = u_n T \quad (1.99)$$

Η Ω είναι ποσότητα ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας T του σώματος με συντελεστή αναλογίας την ειδική θερμότητα u_n για ισόογκη μεταβολή της θερμοκρασίας του. Η ενέργεια μάζας αναφερόμενη στη μονάδα της μάζας του σώματος είναι:

$$\frac{de}{dm} = \Omega + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + gh \quad (1.100)$$

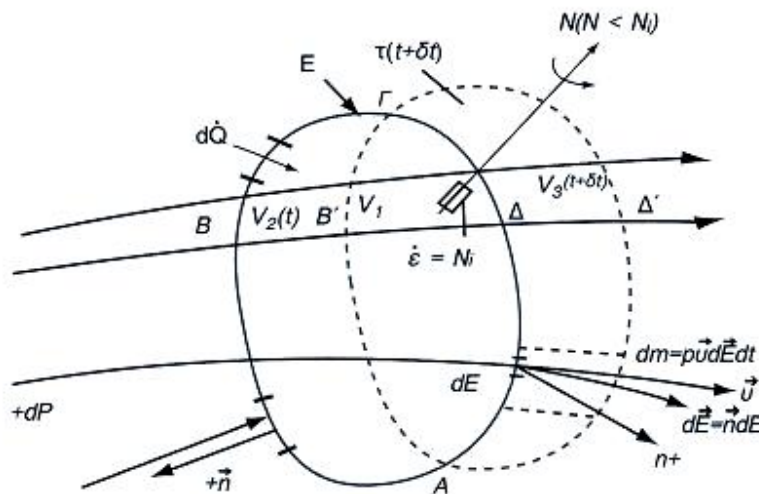
όπου de η ενέργεια μάζας στοιχείου μάζας dm .

Η ειδική θερμότητα u_v είναι, με πολύ καλή προσέγγιση, σταθερή μέσα σε μεγάλες περιοχές θερμοκρασιακών μεταβολών, τόσο για τα στερεά σώματα όσο και για τα υγρά και τα αέρια. Όπως έχουμε ήδη πει, τα υγρά είναι σώματα πρακτικά ασυμπίεστα. Αυτό σημαίνει ότι πρόσδοση ή αφαίρεση θερμότητας σε υγρό, έχει ως αποτέλεσμα την αντίστοιχη αναλογική αύξηση ή μείωση της θερμοκρασίας του σύμφωνα με την εξίσωση.

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με τα συμπιεστά ρευστά, όπου η πρόσδοση ή η αφαίρεση θερμότητας μπορεί, ανάλογα με τις συνθήκες, να συνοδεύεται από μεταβολές της θερμοκρασίας, της πίεσης και του όγκου, ή της πυκνότητας, όπως δείχνει η εξίσωση των τελείων αερίων:

$$P\rho^{-1}=RT \quad (1.101)$$

Ας εξετάσουμε τώρα τον ισολογισμό της ενέργειας, με άλλα λόγια ας διατυπώσουμε τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής σε μια νοητή επιφάνεια αναφοράς E , ακίνητη ως προς το απόλυτο σύστημα της γης, που διαρρέεται από ρευστό (σχήμα 1.17).



Σχήμα 1.17 Νοητή κλειστή επιφάνεια αναφοράς για τον ενεργειακό ισολογισμό

Υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι ηλεκτρικά και μαγνητικά ουδέτερο. Επίσης, υποθέτουμε ότι μέσα στην E υπάρχει στροβιλομηχανή, έστω στρόβιλος, που καθώς το ρευστό ρέει, του προσδίδει ενέργεια \mathcal{E} ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή του προσδίδει ισχύ $N_i = \mathcal{E}$. Όπως θα δούμε η εμφάνιση παθητικών ενεργειακών παραγόντων μέσα στον ίδιο το στρόβιλο, έχει ως συνέπεια η ισχύς N της ατράκτου, δηλαδή αυτή που η άτρακτος μεταφέρει προς τα έξω, να είναι μικρότερη της N_i . Έστω ακόμη ότι υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας δια της E με αγωγή ή ακτινοβολία κ.τ.λ. μεταξύ του ρευστού που σε κάποια χρονική στιγμή βρίσκεται μέσα στην E και του εξωτερικού χώρου. Χαρακτηρίζουμε με $+dQ$ το ποσό της θερμότητας αυτής που στη μονάδα του χρόνου διαβαίνει το στοιχείο dE της E από τα έξω προς τα μέσα. Η αντίθετη φορά ροής της θερμότητας αυτής, δηλαδή από τα μέσα προς τα έξω της E θα είναι αρνητική. Θα ακολουθήσουμε εδώ την ίδια ακριβώς μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για τη διατύπωση του θεωρήματος της ορμής στην ολοκληρωτική του μορφή. Έτσι, αντί εξωτερικών δυνάμεων και μεταβολή ορμής στη μονάδα του χρόνου, θα έχουμε ενέργεια από εξωτερικές δράσεις και ενέργεια μάζας του ρέοντος ρευστού, ανηγμένες στη μονάδα του χρόνου. Τώρα, η ενέργεια των εξωτερικών δράσεων ανά μονάδα χρόνου πάνω στην E κατά τη χρονική στιγμή t , προέρχεται:

α) Από ροή θερμότητας,

$$\oint_E d\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \quad (1.102)$$

β) Από την ισχύ αντίδρασης του συστήματος του στρόβιλου στη ροή, $-N_i$.

Με N_i χαρακτηρίσαμε την ενέργεια που δαπανά το ρευστό κατά τη ροή του ανά μονάδα χρόνου στον στρόβιλο. Επομένως και ο στρόβιλος, ως εξωτερικός παράγοντας για το ρευστό, αντιδρά στη ροή του με ισχύ $-N_i$. Με άλλα λόγια εισέρχεται στον χώρο που περικλείει η E ενέργεια $-N_i = -\mathcal{E}$, ανά μονάδα χρόνου.

γ) Από την ισχύ της ορθής εντατικής κατάστασης πάνω στην E ,

$$\oint_E d\vec{P}\vec{u} = -\oint_E p\vec{u}d\vec{E} = -\oint_E \frac{P}{r} r\vec{u}d\vec{E} \quad (1.103)$$

(είναι το έργο ανά μονάδα χρόνου της δύναμης dP , καθώς το ρευστό διαβαίνει το αντίστοιχο στοιχείο dE της E με ταχύτητα v).

Για το ρόλο της συνεκτικότητας του ρευστού ως παράγοντα που επηρεάζει την ενεργειακή πορεία της ροής μέσα στην επιφάνεια E θα μιλήσουμε στη συνέχεια. Ας εξετάσουμε τώρα την πορεία της ενέργειας μάζας του ρευστού που καθώς ρέει, κατά τη χρονική στιγμή t βρίσκεται μέσα στον χώρο $\tau(t)$ που περικλείει η E , ενώ μετά από μικρό χρονικό διάστημα δt , κατέχει τον χώρο $\tau(t + \delta t)$. Η ενέργεια μάζας κάθε στοιχείου του ρευστού, είναι:

$$de = \left(\Omega + \frac{u^2}{2} + gh \right) dm \quad (1.104)$$

Επομένως, η μεταβολή ανά μονάδα χρόνου της de , κατά την κίνηση από τον χώρο $\tau(t) = (AB\Gamma\Delta A)$ στον $\tau(t + \delta t) = (AB'\Gamma\Delta' A)$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sum de(t+dt) - \sum de(t)}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sum [de(t+dt)]_{\mathcal{R}_1(t+dt)} - \sum [de(t)]_{\mathcal{R}_1(t)}}{dt} + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sum [de(t+dt)]_{\mathcal{R}_2(t+dt)} - \sum [de(t)]_{\mathcal{R}_2(t)}}{dt} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Με το σκεπτικό που κάναμε κατά την ολοκληρωτική διατύπωση του θεωρήματος της ορμής, και με την αντιστοιχία της σειράς των δύο ορίων του 2^{ου} μέλους της παραπάνω σχέσης, η ισχύς της ενέργειας μάζας $\frac{\partial e}{\partial t}$ του ρευστού κατά τη χρονική στιγμή t μέσα στον χώρο που περικλείει η επιφάνεια αναφοράς E , είναι:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{de}{dm} r dV + \int_E \frac{de}{dm} r \vec{u} d\vec{E} \quad (1.106)$$

όπου:

$$\frac{de}{dm} = \Omega + \frac{u^2}{2} + gh \quad (1.107)$$

Ο πρώτος όρος παριστάνει την ανά μονάδα χρόνου ενέργεια θέσης του ρευστού και ο δεύτερος τη ροή της ενέργειας μάζας από την επιφάνεια E . Για τον πρώτο όρο, $\rho dV = dm$ και για τον δεύτερο όρο είναι $\rho \vec{u} d\vec{E} = d\dot{m}$, δηλαδή διαφορικό της ροής μάζας \dot{m} από την \vec{E} . Ο ισολογισμός της ενέργειας είναι λοιπόν:

$$Q - N_i - \int_E \frac{p}{r} r \vec{u} d\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{de}{dm} r dV + \int_E \frac{de}{dm} r \vec{u} d\vec{E} \quad (1.108)$$

Διατάσσοντας κατάλληλα τους όρους της σχέσης αυτής στο 2^ο μέλος εκφράζουμε την ισχύ N_i που το ρευστό προσδίδει στον στρόβιλο, ως:

$$-N_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{de}{dm} r dV + \int_E W \cdot d\dot{m} + \mathcal{G} \quad (1.109)$$

όπου $\rho \vec{u} d\vec{E} = d\dot{m}$, το διαφορικό της ροής μάζας \dot{m} από την E και

$$W = \frac{de}{dm} + \frac{p}{r} = \Omega + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{r} + gh \quad (1.110)$$

η ολική μηχανική ενέργεια του ρευστού ανά μονάδα μάζας. Ξέρουμε από τη θερμοδυναμική ότι η ενθαλπία i εκφράζει το τμήμα εκείνο της ολικής μηχανικής ενέργειας του συμπιεστού ρευστού που αναφέρεται στην εσωτερική θερμική του

ενέργεια και την ενέργεια εντατικής κατάστασης. Ορίζεται δηλαδή ανά μονάδα μάζας το i ως:

$$i \equiv \Omega + \frac{p}{\rho} \quad (1.111)$$

οπότε η ολική μηχανική ενέργεια W του ρευστού γράφεται

$$W = i + \frac{u^2}{2} + gh \quad (1.112)$$

Η εξίσωση που δόθηκε παραπάνω της ισχύος, εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε ολοκληρωτική μορφή, πάνω στην κλειστή επιφάνεια αναφοράς E .

Γενική μέθοδος επίλυσης σε πεδία ροής

Εδώ χρησιμοποιείται η έννοια του συστήματος, δηλαδή μιας συγκεκριμένης ποσότητας μάζας, η οποία ξεχωρίζει από τη γειτονική της ύλη με τη βοήθεια της περιβάλλουσάς της. Η περιβάλλουσα, που είναι το όριο του συστήματος, είναι στην ουσία μια κλειστή επιφάνεια η οποία μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να περιέχει πάντα την ίδια ποσότητα μάζας. Για παράδειγμα, 1kg αερίου μπορεί να περιοριστεί σε έναν κύλινδρο και να συμπιεστεί με τη βοήθεια ενός πιστονιού. Το όριο του συστήματος που συμπίπτει με την επιφάνεια του πιστονιού προφανώς κινείται όπως και το πιστόνι. Όμως η μάζα του αερίου παραμένει σταθερή.

Ένα σύστημα μπορεί να περιέχει ελάχιστη ή τεράστια ποσότητα μάζας ρευστών στερεών, αναλόγως με την επιλογή του μελετητή και για υπολογισμούς σε αυτό έχουμε:

α) Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μάζας, αυτή παραμένει σταθερή με τον χρόνο. Υπό μορφή εξίσωσης αυτό γράφεται:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (1.113)$$

όπου m είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

β) Ο δεύτερος νόμος του Newton συνήθως εκφράζεται για ένα σύστημα με τη μορφή:

$$\sum F = \frac{d(mu)}{dt} \quad (1.114)$$

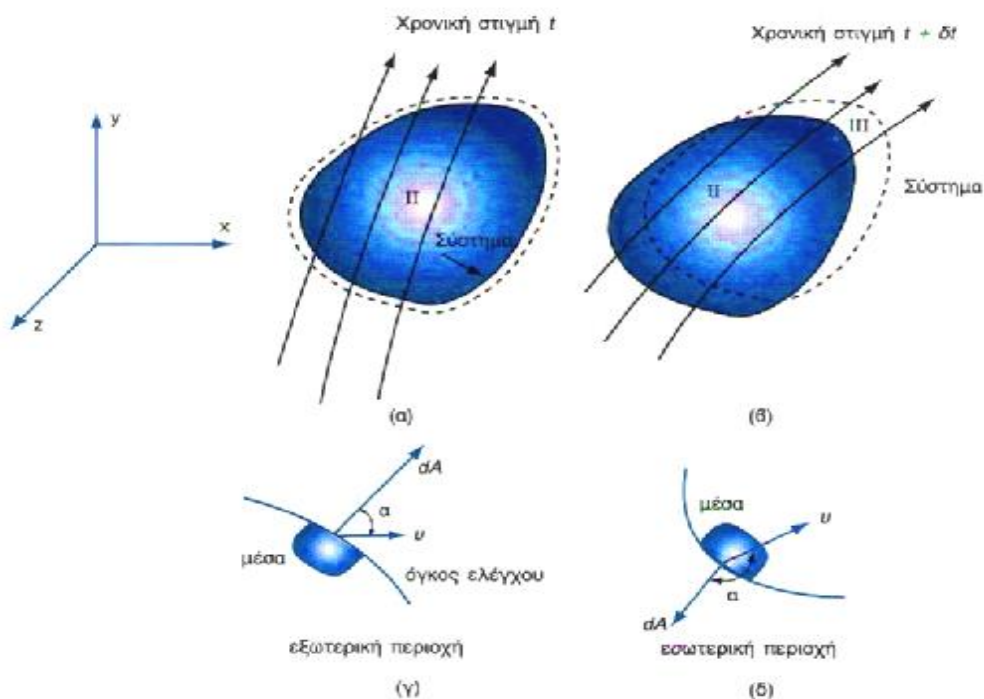
όπου πρέπει να σημειώσουμε ότι m είναι η σταθερή μάζα του συστήματος, $\sum F$ είναι η συνισταμένη όλων των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα,

συμπεριλαμβανομένου και του βάρους του και v είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.

Ο όγκος υπολογισμών αναφέρεται σε μια περιοχή του χώρου και είναι πολύ χρήσιμος στην ανάλυση καταστάσεων όπου υπάρχει ροή προς τα μέσα, αλλά και προς τα έξω από τον χώρο. Το όριο του όγκου υπολογισμών είναι η επιφάνεια υπολογισμών. Το μέγεθος και το σχήμα του παραπάνω όγκου επιλέγονται ελεύθερα και σύμφωνα με τις ανάγκες του προβλήματος κάθε φορά. Έτσι, για να πετύχουμε απλοποιήσεις στους υπολογισμούς επιλέγουμε συνήθως τα όρια του όγκου υπολογισμών να συμπίπτουν με τα όρια του συστήματος, ή να είναι κάθετα στη διεύθυνση ροής κ.λπ.

Ανεξαρτήτως από τη φύση της ροής, σε όλες τις περιπτώσεις μπορούν να εφαρμοστούν:

1. Οι νόμοι του Newton, οι οποίοι πρέπει να ισχύουν για κάθε σωματίδιο, κάθε χρονική στιγμή.



Σχήμα 1.18 Όγκος υπολογισμών και επιφάνεια υπολογισμών.

2. Η εξίσωση συνέχειας (π.χ. η αρχή διατήρησης της μάζας).
3. Το πρώτο και το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα.
4. Οριακές συνθήκες.

Για να εκφράσουμε με τύπους τη σχέση μεταξύ των εξισώσεων που εφαρμόζονται σε ένα σύστημα και του όγκου υπολογισμών, ας θεωρήσουμε κάποια γενική περίπτωση ροής (βλ. σχήμα 1.18) στην οποία η ταχύτητα ρευστού δίνεται ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων xyz . Ας θεωρήσουμε πως τη χρονική στιγμή t , μια συγκεκριμένη μάζα ρευστού του συστήματος περικλείεται από τα όρια που έχουν σχεδιαστεί με τη διακεκομμένη γραμμή. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι ο όγκος υπολογισμών ως προς το σχετικό σύστημα συντεταγμένων xyz , συμπίπτει ακριβώς με το σύστημα τη χρονική στιγμή t . Τη χρονική στιγμή $t+dt$ το σύστημα έχει μετακινηθεί, καθώς κάθε σωματίδιο μετακινείται με την αντίστοιχη ταχύτητα.

Έστω N το συνολικό υπό εξέταση μέγεθος (μάζα, ενέργεια, ορμή) ενός συστήματος τη χρονική στιγμή t και έστω n το μέγεθος αυτό ανά μονάδα μέσα σε όλο το ρευστό. Ο ρυθμός αύξησης του N στο σύστημα μπορεί να υπολογιστεί με βάση τον όγκο υπολογισμών. Τη χρονική στιγμή $t+dt$ το σύστημα καταλαμβάνει τους χώρους II και III , ενώ τη χρονική στιγμή t καταλαμβάνει το χώρο I . Έτσι η αύξηση του μεγέθους N του συστήματος μέσα στο χρόνο dt , δίνεται από τη σχέση:

$$N_{sust,t} - N_{sust,t} = \left(\int_{II} n r dV + \int_{III} n r dV \right)_{t+dt} - \left(\int_{I} n r dV \right)_t \quad (1.115)$$

όπου dV είναι ο στοιχειώδης όγκος. Προσθέτοντας και αφαιρώντας τον όρο:

$$\left(\int_{II} n r dV \right)_{t+dt} \quad (1.116)$$

στο δεξί μέλος, κάνοντας τις κατάλληλες αναγωγές και διαιρώντας και τα δύο μέλη με δt καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{N_{sust.t+\delta t} - N_{sust.t}}{\delta t} = \frac{\left(\int_{II} n r dV + \int_I n r dV \right)_{t+\delta t} - \left(\int_{II} n r dV \right)_t}{\delta t} + \frac{\left(\int_{III} n r dV \right)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{\left(\int_{I} n r dV \right)_t}{\delta t} \quad (1.117)$$

Το αριστερό μέλος είναι ο μέσος ρυθμός αύξησης του N στο σύστημα κατά τη διάρκεια του χρόνου δt . Παίρνοντας το όριο $\delta N/\delta t$, του δt τείνοντος στο 0, τα δύο πρώτα ολοκληρώματα του δευτέρου μέλους είναι το N στον όγκο υπολογισμών τη χρονική στιγμή t . Το όριο είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cu} n r dV \quad (1.118)$$

Η μερική παράγωγος είναι απαραίτητη καθώς ο όγκος παραμένει σταθερός του δt τείνοντος στο 0. Ο επόμενος όρος, που είναι ο ρυθμός ροής του N έξω από τον όγκο υπολογισμών, στο όριό του μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int n r dV \right)_{t+\delta t}}{\delta t} = \int_{\text{inf low area}} n r \bar{u} \cdot d\bar{A} = \int n r u \cos \alpha dA \quad (1.119)$$

Όπου $d\bar{A}$ είναι το διάνυσμα που φανερώνει ένα στοιχειώδες εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας, το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια και φορά προς τα έξω, αφού συμμετέχει στον όρο που φανερώνει την προς τα έξω ροή. Τέλος, α είναι η γωνία ανάμεσα στο παραπάνω διάνυσμα και την ταχύτητα.

Όμοια, ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (1.117) που παριστάνει το ρυθμό ροής του N μέσα στον όγκο υπολογισμών γράφεται στο όριό του:

$$dW_p = dt \int re \hat{u}^{\rho} d\hat{A} \quad (1.120)$$

όπου το $\hat{u}^{\rho} d\hat{A}$ (ή το $\cos\alpha$) είναι αρνητικό για την προς τα μέσα ροή.

Οι τελευταίοι δύο όροι της εξ. (1.117), έτσι όπως αναλύθηκαν παραπάνω μπορούν να συνδυαστούν σε έναν όρο, ο οποίος είναι ένα ολοκλήρωμα πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια του όγκου υπολογισμών (CS):

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\left(\int_{III} n r dV \right)_{t+dt}}{dt} - \frac{\left(\int_{I} n r dV \right)_{t+dt}}{dt} \right) = \int_{cs} n r \hat{u}^{\rho} \cdot d\hat{A} \int_{cs} n r u \cos\alpha dA \quad (1.121)$$

Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει ροή προς τα μέσα η προς τα έξω έχουμε $\hat{u}^{\rho} d\hat{A} = 0$.

Τέλος, συγκεντρώνοντας και ανάγοντας τους όρους της εξ. (1.117) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cu} n r dV + \int_{cs} n r \hat{u}^{\rho} \cdot d\hat{A} \quad (1.122)$$

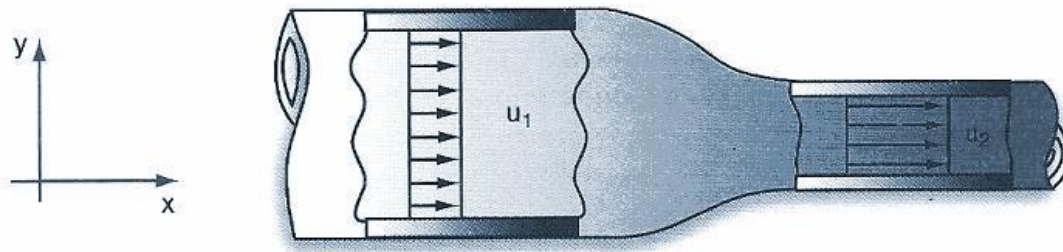
Με λόγια, η εξ. (1.122) λέει ότι ο ρυθμός αύξησης του N σε ένα σύστημα είναι ακριβώς ίσος προς τον ρυθμό αύξησης του μεγέθους N μέσα στον όγκο υπολογισμών συν τον καθαρό ρυθμό ροής του N μέσα από τα όρια του όγκου υπολογισμών.

1.5 ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ – ΣΤΡΩΤΗ & ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ

Για την απλούστευση της μελέτης ενός πεδίου ροής, πολλές φορές δεχόμαστε ότι ισχύουν ορισμένες υποθέσεις. Η κατανόηση όμως των απλουστεύσεων αυτών προϋποθέτει τη γνώση των διαφόρων καταστάσεων ροής των υγρών μάζας M .

Όσον αφορά τους τύπους ροής ισχύουν τα εξής:

Σταθερή ροή έχουμε όταν οι διάφορες παράμετροι της ροής (παροχή, ταχύτητα, πίεση κ.λπ.) σε κάποιο σημείο παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της ροής.



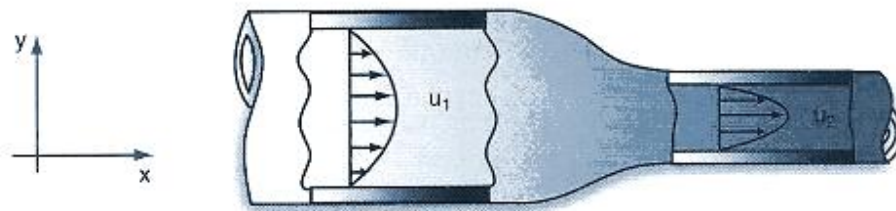
Σχήμα 1.19 Μονοδιάστατη Ροή

Προφανώς, αν οι συνθήκες της ροής μεταβάλλονται με τον χρόνο η ροή είναι μη σταθερή. Έτσι αν, για παράδειγμα, το νερό που ρέει σε έναν σωλήνα χύνεται από μια βρύση, τότε είναι δυνατό να πετύχουμε σταθερή ροή, ενώ αν αρχίσουμε να ανοιγοκλείνουμε τη βρύση, η ροή γίνεται μη σταθερή.

Μονοδιάστατη ροή έχουμε όταν η ροή γίνεται σε μια κατεύθυνση και όταν οι παράμετροι της ροής μπορούν να μεταβάλλονται μόνο ως προς αυτή την κατεύθυνση. Είναι φανερό ότι στη μονοδιάστατη ροή οι παράμετροι παραμένουν σταθερές σε οποιαδήποτε κάθετη προς την κατεύθυνση της ροής τομή (σχήμα 1).

Δισδιάστατη ροή έχουμε όταν μια ή περισσότερες παράμετροι μπορούν να μεταβάλλονται ως προς δύο διευθύνσεις. Αντίστοιχα τρισδιάστατη ροή έχουμε όταν μια ή περισσότερες παράμετροι της ροής μεταβάλλονται ως προς τις τρεις διευθύνσεις. Στην πραγματικότητα δεν είναι δυνατό μια ροή να είναι μονοδιάστατη, διότι η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδέν στα τοιχώματα και συνεπώς η ταχύτητα μεταβάλλεται κατά μήκος της κάθετης διεύθυνσης στην κατεύθυνση της ροής (σχήμα 2).

Στις πρακτικές εφαρμογές πάντως, είναι δυνατόν πολλές περιπτώσεις ροής δύο και τριών διαστάσεων να αναλυθούν με μονοδιάστατη θεώρηση, χρησιμοποιώντας μέσες τιμές των παραμέτρων στην κάθετη τομή, χωρίς μεγάλο σφάλμα στα αποτελέσματα.



Σχήμα 1.20 Δισδιάστατη Ροή

Αν σε ολόκληρο το μήκος ενός τμήματος του αγωγού ή του καναλιού, τόσο η μέση ταχύτητα ροής όσο και το εμβαδόν της κάθετης στη ροή τομής του ρευστού παραμένουν σταθερά, τότε έχουμε ομοιόμορφη ροή σε αυτό το τμήμα. Φυσικά, αν οι παραπάνω παράμετροι δεν παραμένουν σταθερές τότε έχουμε ανομοιόμορφη ροή.

Η ροή ονομάζεται **στρωτή**, αν τα γειτονικά στρώματα του ρευστού κινούνται με την ίδια (ή σχεδόν την ίδια) ταχύτητα και οι τροχιές των σωματιδίων του υγρού δεν

διασταυρώνονται ή τέμνονται. Στρωτή ροή συνήθως εμφανίζεται σε χαμηλές ταχύτητες ροής και σε ρευστά με σχετικά μεγάλο ιξώδες.

Αντίθετα, η ροή ονομάζεται **τυρβώδης** όταν γειτονικά στρώματα του ρευστού κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες και οι τροχιές των σωματιδίων του ρευστού είναι ακατάστατες και τέμνονται μεταξύ τους. Συνήθως τυρβώδης ροή εμφανίζεται σε μεγάλες ταχύτητες ρευστών με χαμηλό ιξώδες.

Η ροή μπορεί να είναι **στροβιλή** ή **αστρόβιλη**. Στη στροβιλή ροή υπάρχουν περιοχές του πεδίου που στοιχείο του υγρού (Δm) παρουσιάζει στροφορμή ως προς ένα σημείο. Οι περιοχές αυτές που το υγρό εκτελεί περιστροφική κίνηση, λέγονται στρόβιλοι. Ένας καλύτερος ορισμός των στροβίλων δίνεται με τη βοήθεια της κυκλοφορίας,

$$\Gamma = \oint_s \oint_s (\vec{u} d\vec{A})$$

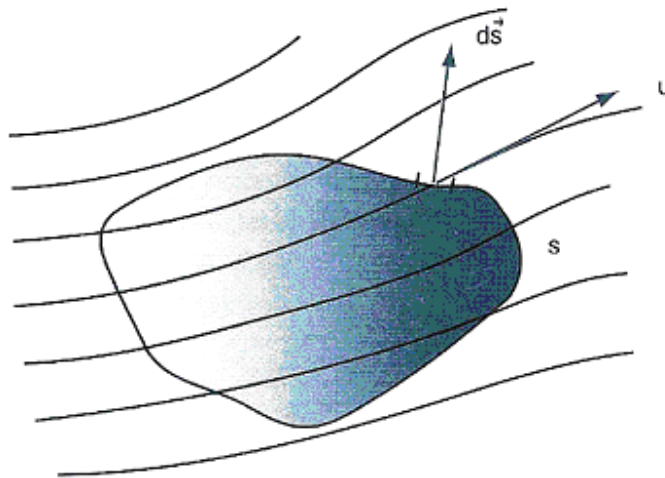
όπου A μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη του πεδίου (σχήμα 3). Όταν $\Gamma = 0$ για κάθε καμπύλη A , έχουμε αστρόβιλη περιοχή πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του ρευστού, ταυτόχρονα με τη μεταφορική τους κίνηση με ταχύτητα \vec{u} έχουν και δική τους εσωτερική περιστροφή.

Όταν υπάρχει A τέτοια ώστε $\Gamma \neq 0$, τότε έχουμε στροβιλή περιοχή πεδίου. Παράδειγμα αστρόβιλου πεδίου $\Gamma = 0$ δίνεται στο σχήμα 4 και στροβιλού στο 5 ($\Gamma = 2\pi u \neq 0$) και 6 ($\Gamma = u_1(B\Gamma) - u_2(\Delta A) \neq 0$).

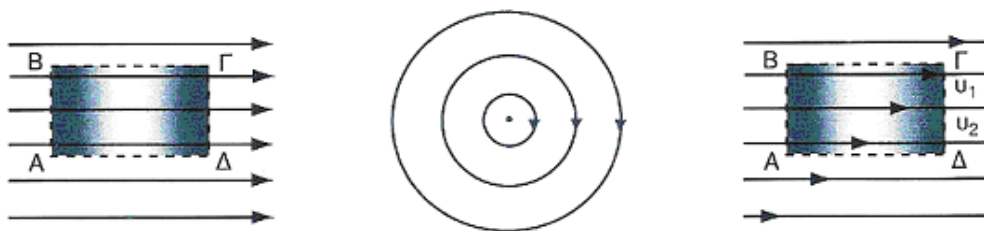
Τέλος, για τη διευκόλυνση της θεωρητικής μελέτης της ροής θεωρούμε την ύπαρξη ιδανικών ρευστών τα οποία χαρακτηρίζονται από σειρά απλουστευτικών υποθέσεων (Πίνακας 1).

Με τις μαθηματικές αυτές απλουστεύσεις η περιγραφή των πραγματικών ρευστών που συναντούμε στη φύση είναι ελλιπής (Πίνακας 1.2),

Ακόμη, ασυμπίεστη ροή εμφανίζεται σε ρευστά των οποίων η πυκνότητα είναι ανεξάρτητη από την πίεση, όπως π.χ. το νερό. Προφανώς, συμπίεστη ροή εμφανίζεται όταν το ρευστό δεν μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο, δηλαδή όταν η πυκνότητά του εξαρτάται από την πίεση. Στην πραγματικότητα όλα τα ρευστά είναι έστω και ελάχιστα συμπίεστα, αλλά πολλά μπορούν να θεωρηθούν πρακτικά ασυμπίεστα. Στον γενικό κανόνα μπορούμε να πούμε ότι τα υγρά είναι ασυμπίεστα και τα αέρια συμπίεστα.



Σχήμα 1.21 Για τον ορισμό της κυκλοφορίας



Σχήμα 1.22 (α) . Αστρόβιλο

(β).Στροβιλό Πεδίο

(γ).. Στροβιλό Πεδίο

Πίνακας 1.2 Χαρακτηριστικά στοιχεία ροής ιδανικών ρευστών και πραγματικών ρευστών και αίματος όπως εξετάζονται στην ανάλυση που ακολουθεί

Χαρακτηριστικό	Ιδανικά	Πραγματικά	Αίμα
<i>Συμπιεστότητα</i>	<i>OXI</i>	<i>Αμελητέα</i>	<i>Αμελητέα</i>
<i>Συνάφεια με τοίχωμα σε επαφή</i>	<i>OXI</i>	<i>NAI</i>	<i>NAI</i>
<i>Εσωτερική τριβή</i>	<i>OXI</i>	<i>NAI</i>	<i>NAI</i>
<i>Ελαστικά τοιχώματα αγγείων</i>	<i>OXI</i>	<i>OXI</i>	<i>NAI</i>
<i>Ανομοιογενές υγρό</i>	<i>OXI</i>	<i>OXI</i>	<i>NAI</i>
<i>Διαπερατά τοιχώματα</i>	<i>OXI</i>	<i>OXI</i>	<i>NAI</i>
<i>Εξάρτηση ιξώδους από διάμετρο αγγείου</i>	<i>OXI</i>	<i>OXI</i>	<i>NAI</i>

Τέλος, μια ροή είναι υποηχητική όταν η ταχύτητα του αερίου είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου. Αντίστοιχα, ορίζονται η υπερηχητική ροή και η ροή με την ταχύτητα του ήχου.

Στην ανάλυση της ροής των ρευστών εφαρμόζονται οι παραπάνω βασικές αρχές, οι οποίες στην ουσία αποτελούν μια γέφυρα που ενώνει τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται τα προβλήματα στη μηχανική των στερεών σωμάτων με αυτόν που χρησιμοποιείται στη μηχανική των ρευστών.

1.5.1 ΡΟΗ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

Εδώ θα μιλήσουμε για ροή, κυρίως υγρών, μέσα σε κλειστούς αγωγούς, οι οποίοι είναι γεμάτοι από ρευστό υπό πίεση. Ο όρος "κλειστός αγωγός" αναφέρεται σε ένα κανάλι το οποίο είναι κλεισμένο από στερεά τοιχώματα, οποιουδήποτε σχήματος. Η πλειοψηφία των κλειστών αγωγών έχει κυκλική διατομή. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι αν σε έναν κλειστό αγωγό το ρευστό δεν καλύπτει ολόκληρη τη διατομή του, τότε αυτός προσεγγίζεται με την ανάλυση που γίνεται στα προβλήματα ροής σε ανοικτά κανάλια. Επίσης, τονίζεται ότι στους κυκλικούς αγωγούς λαμβάνεται υπ' όψη η

εσωτερική, και όχι η εξωτερική διάμετρος για τους υπολογισμούς του πεδίου ροής.

Με αυτές τις προϋποθέσεις η ροή μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης και βέβαια έχουμε διαφορετική ανάλυση για κάθε μία περίπτωση. Είναι συνεπώς σημαντικό να ξέρουμε τι τύπο ροής έχουμε στο πρόβλημα που πρόκειται να λύσουμε και γι' αυτόν το λόγο είναι απαραίτητο να υπάρχει κάποιο κριτήριο που θα τον καθορίζει. Ένα τέτοιο κριτήριο είναι ο αριθμός Reynolds, ο οποίος είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που ορίζεται από τη σχέση:

$$\text{Re} = \frac{ruD}{m} \quad (1.123)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, D η διάμετρος του σωλήνα, v η ταχύτητα του ρευστού, μ το δυναμικό ιξώδες του ρευστού, και καθώς $\nu = \mu/\rho$, ο αριθμός Reynolds μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση:

$$\text{Re} = \frac{uD}{\nu} \quad (1.124)$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση ορισμού του, ο αριθμός Reynolds είναι στην πραγματικότητα ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις που οφείλονται στο ιξώδες.

Έχει προσδιοριστεί ότι η ροή είναι στρωτή αν $\text{Re} < 2000$, ενώ αν $\text{Re} > 4000$ είναι τυρβώδης. Συνεπώς, μένει μία περιοχή $2000 < \text{Re} < 4000$, στην οποία συμβαίνουν μεταβατικά φαινόμενα και ο τύπος της ροής είναι απρόβλεπτος.

Πάντως, είτε η ροή είναι στρωτή, είτε τυρβώδης, παρουσιάζονται τριβές οι οποίες

δημιουργούν απώλειες ενέργειας και συνεπώς πρέπει να υπολογίζεται το μέγεθός τους. Έχει βρεθεί ότι αυτές οι απώλειες είναι ανάλογες με το μήκος του αγωγού και με το προφίλ της ταχύτητας και αντιστρόφως ανάλογες με τη διάμετρο του αγωγού. Υπολογίζονται δηλαδή από τη σχέση:

$$h_f = \frac{fLu^2}{2Dg} \quad (1.125)$$

Όπου h_f είναι οι απώλειες λόγω τριβής, f ο συντελεστής τριβής, L το μήκος του αγωγού, u η ταχύτητα του ρευστού, D η διάμετρος του αγωγού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Ο συντελεστής τριβής f είναι ένα αδιάστατο μέγεθος. Όταν έχουμε στρωτή ροή ο συντελεστής τριβής εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Reynolds και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (1.126)$$

Στην τυρβώδη ροή όμως, ο συντελεστής τριβής εξαρτάται, εκτός από τον αριθμό Reynolds και από έναν άλλο παράγοντα που ονομάζεται σχετική τραχύτητα του αγωγού. Η σχετική τραχύτητα είναι ο λόγος της μέσης τραχύτητας του αγωγού ϵ προς τη διάμετρο D . Η τραχύτητα του τοιχώματος εξαρτάται από το υλικό και από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Όταν είναι δεδομένοι ο αριθμός Reynolds και η σχετική τραχύτητα, τότε η τιμή f του συντελεστή τριβής μπορεί να εκτιμηθεί με τη χρήση του διαγράμματος Moody (σχήμα 7).

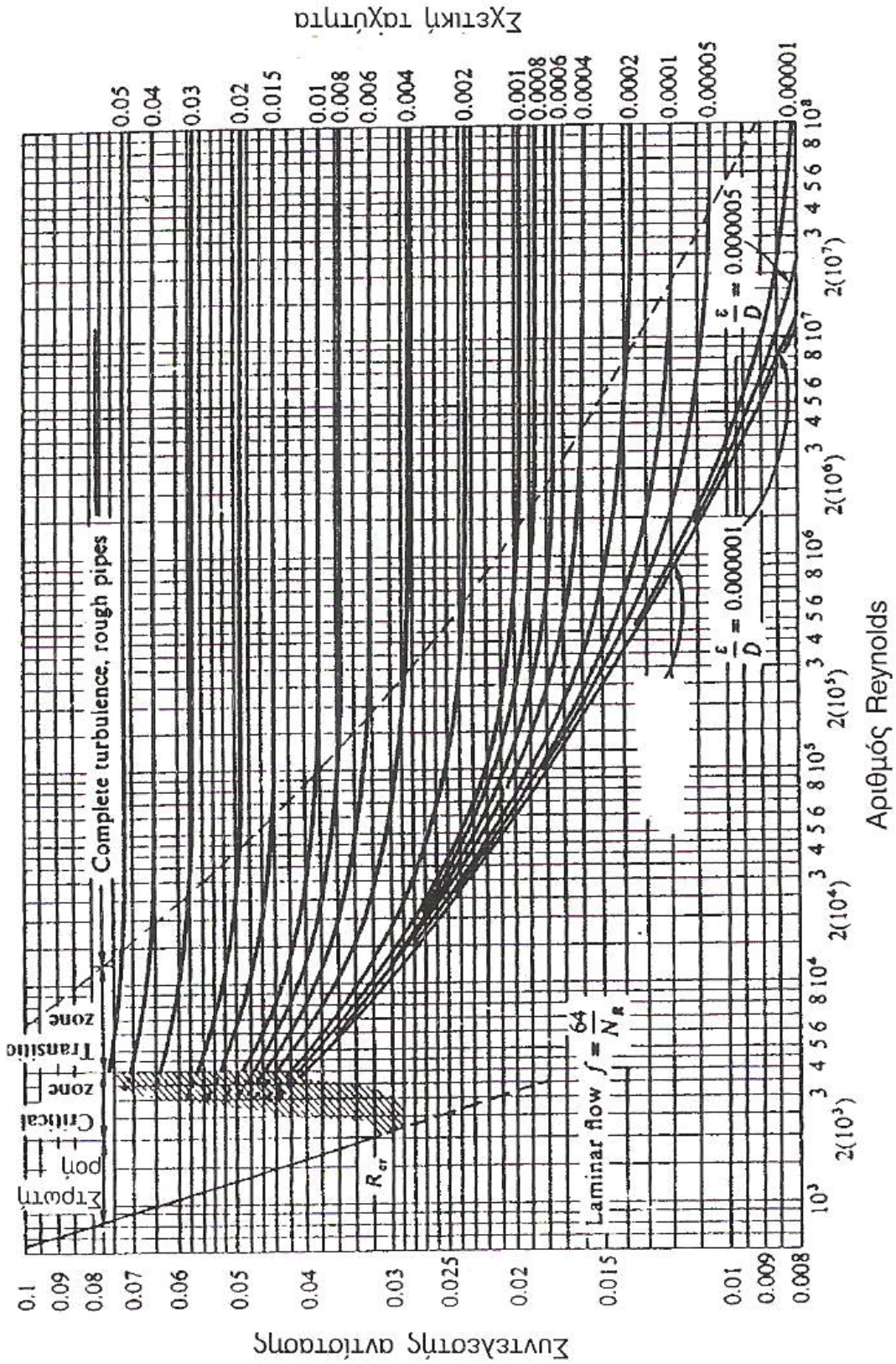
Για να βρεθεί ο συντελεστής τριβής από το διάγραμμα αυτό, βρίσκουμε πρώτα στον οριζόντιο άξονα τον αντίστοιχο αριθμό Reynolds, εν συνεχεία κινούμαστε

κατακόρυφα μέχρι να συναντήσουμε την καμπύλη που αντιστοιχεί στη σχετική τραχύτητα του αγωγού του προβλήματος και, τέλος, παράλληλα στον οριζόντιο άξονα, εκτιμούμε τη ζητούμενη τιμή του συντελεστή τριβής.

Εκτός όμως από τις απώλειες λόγω τριβών έχουμε και τις απώλειες λόγω αλλαγής διεύθυνσης της ροής που παρουσιάζονται σε σημεία αλλαγής διεύθυνσης, σε σημεία που ξαφνικά μεγαλώνει ή μικραίνει η διατομή του αγωγού, σε σημεία όπου υπάρχουν διαφόρων ειδών εξαρτήματα, όπως βαλβίδες, γωνίες κ.λπ., οι οποίες και αυτές δημιουργούν απώλειες ενέργειας που καμιά φορά είναι σημαντικές και πρέπει να υπολογίζονται. Γενικά, ο υπολογισμός αυτών των απωλειών μπορεί να είναι περίπλοκος, αλλά επειδή όλες έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι ουσιαστικά οφείλονται στην κατανομή της ταχύτητας του ρευστού, εκφράζονται από τη σχέση:

$$h_m = \frac{Ku^2}{2g} \quad (1.127)$$

όπου K είναι ο συντελεστής απωλειών, που αναλόγως με την περίπτωση δίνεται από πίνακες, v η ταχύτητα του ρευστού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.



Το διάγραμμα Moody, το οποίο αναπτύχθηκε το 1944, χρησιμοποιείται εκτενώς στη λύση προβλημάτων που έχουν σχέση με ροή σε σωλήνες. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν από τον Moody για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής είναι οι εξής:

α. Για στρωτή ροή ($Re < 2000$), χρησιμοποιείται ο τύπος που έχει αναφερθεί $f=64/Re$. Αυτός παριστάνεται στο διάγραμμα με μια ευθεία γραμμή πάνω αριστερά.

β. Για τυρβώδη ροή ($Re > 4000$), η σχέση μεταξύ συντελεστή τριβής, αριθμού Reynolds και σχετικής συχνότητας είναι πιο περίπλοκη. Έτσι, για ρευστά με μεγάλο αριθμό Reynolds έχει αποδειχθεί ότι ο συντελεστής τριβής είναι πρακτικά ανεξάρτητος από τον αριθμό Reynolds. Η περιοχή αυτή του διαγράμματος είναι γνωστή σαν περιοχή της πλήρως τυρβώδους ροής και ο συντελεστής τριβής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log \left[\frac{3.7}{(e/D)} \right] \quad (1.128)$$

Αυτή η περιοχή στο διάγραμμα Moody αντιστοιχεί στην περιοχή δεξιά από τη διακεκομμένη γραμμή, της οποίας η εξίσωση είναι:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{(e/D)Re}{200} \quad (1.129)$$

Η γραμμή του διαγράμματος με την ένδειξη "smooth pipes" μπορεί να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του συντελεστή τριβής σε πολύ λείους σωλήνες (κατασκευασμένους π.χ. από γυαλί και πλαστικό). Για αυτούς ο συντελεστής τριβής είναι συνάρτηση μόνο του αριθμού Reynolds και δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log \left[\text{Re} \frac{\sqrt{f}}{2.51} \right] \quad (1.130)$$

Η περιοχή του διαγράμματος Moody μεταξύ της διακεκομμένης γραμμής και της γραμμής "smooth pipes" είναι γνωστή σαν μεταβατική ζώνη. Σε αυτή τη ζώνη ο συντελεστής τριβής f εξαρτάται τόσο από τον αριθμό Reynolds όσο και από τη σχετική τραχύτητα και προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left[\frac{(e/D)}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] \quad (1.131)$$

Για ρευστά με πολύ μεγάλο αριθμό Reynolds, ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης τείνει στο μηδέν και έτσι αυτή η σχέση πλησιάζει την εξίσωση που χρησιμοποιείται στην πλήρως τυρβώδη ροή ενώ για λείες σωληνώσεις ο πρώτος όρος είναι πολύ μικρός και αυτή η σχέση πλησιάζει την εξίσωση της "smooth pipes" γραμμής.

1.5.2 ΡΟΗ ΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ορίζουμε ως εσωτερική τριβή:

$$T = \mu S \frac{du}{dz} \quad (1.132)$$

όπου: μ είναι ο συντελεστής εσωτερικής τριβής (συντελεστής ιξώδους) με μονάδα Pa.s στο σύστημα S.I., S το εμβαδόν της επιφανείας του στρώματος του υγρού που εκτίθεται στην τριβή, du/dz η μεταβολή της ταχύτητας του υγρού κατά τον άξονα Z , κάθετα στη διεύθυνση ροής.

Για τη στρωτή ροή πραγματικού υγρού μέσα σε σωλήνα ακτίνας R και μήκους L (σχήμα 1.24), η εξ. (1.132) γράφεται:

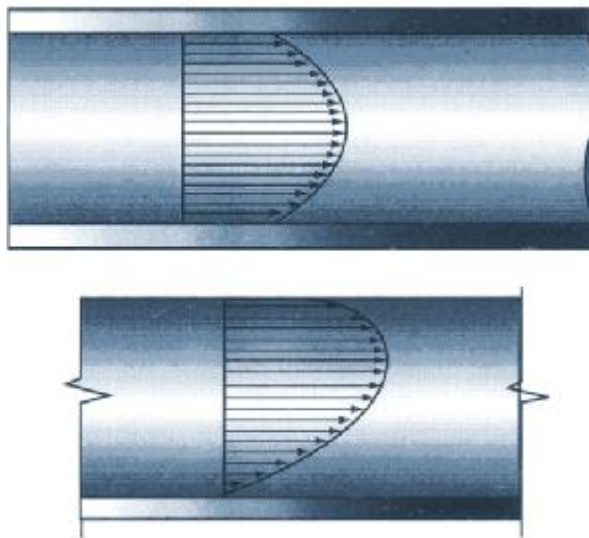
$$T = m[2pr(dx)]\frac{du}{dr} \quad \text{ή} \quad T = 2prm\frac{du}{dr}dx \quad (1.133)$$

Η δύναμη F κατά τη διεύθυνση της ροής που εξασκείται επάνω στον όγκο $dV = \pi r^2 dx$ (σχήμα 1.24) λόγω της διαφοράς πιέσεων dP στις δύο μετωπιαίες επιφάνειες του στοιχείου είναι:

$$F = dP \cdot S = dP \cdot \pi r^2 \quad (1.134)$$

Επειδή το στοιχείο του υγρού (V) δεν επιταχύνεται, οι δύο δυνάμεις F και T πρέπει να είναι αντίθετες. Δηλαδή ισχύει:

$$r \frac{dP}{dx} = 2m \frac{du}{dr} \quad (1.135)$$



Σχήμα 1.24 Η παραβολική κατανομή ταχυτήτων στην περίπτωση στρωτής ροής σε σωλήνα.

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση για $x=0$ έως $x=L$ και εφόσον το du/dr είναι ανεξάρτητο του x έχουμε:

$$\frac{du}{dr} = \frac{P_L - P_0}{2mL} \quad (1.136)$$

Ολοκληρώνοντας δε ως προς r , με οριακές συνθήκες $u(r) = 0$, $u(R) = 0$ και με $\Delta P = P_L - P_0$ και L σταθερά ως προς u και r έχουμε:

$$u = \frac{P_0 - P_L}{4mL} (R^2 - r^2) \quad (1.137)$$

Από την εξ. (1.136) είναι φανερό ότι στη στρωτή ροή σε σωλήνα η κατανομή των ταχυτήτων είναι παραβολική όπως δείχνει το σχήμα 1.24. Η παροχή (dQ) της ροής μέσα από την επιφάνεια του διαφορικού δακτυλίου (σχήμα 1.24) εμβαδού $dS = 2\pi r dr$ δίνεται από τη σχέση:

$$dQ = u dS = 2\pi r \frac{P_0 - P_L}{4mL} (R^2 - r^2) dr \quad (1.138)$$

Η ολοκλήρωση της τελευταίας σχέσης για $r = 0$ έως $r = R$ μας δίνει τη γνωστή εξίσωση του "Poiseuille".

$$Q = \frac{\rho \Delta P}{8mL} R^4 \quad (1.139)$$

Στην περίπτωση της στρωτής ροής πραγματικού ρευστού γύρω από σφαίρα, η αντίσταση υπολογίζεται από τον τύπο του Stokes:

$$T = 6\pi r \mu \quad (\text{σε } Nt) \quad (1.140)$$

όπου: r είναι η ακτίνα της σφαίρας (σε m), μ ο συντελεστής ιξώδους του υγρού (εσωτερικής τριβής) (σε Poise) και u η σχετική οριακή ταχύτητα του υγρού ως προς τη σφαίρα (σε m/sec).

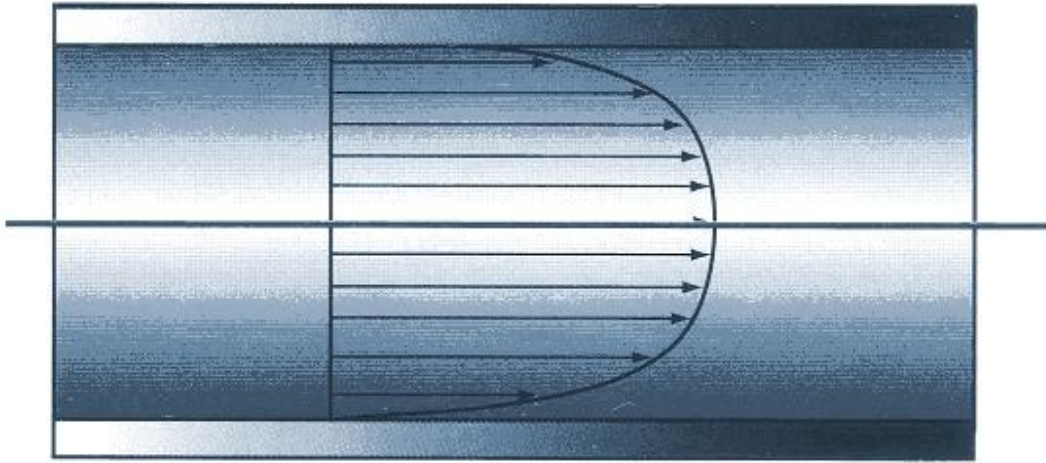
Τυρβώδης ροή. Στην τυρβώδη ροή πραγματικού υγρού μέσα σε σωλήνα υπάρχουν και συνιστώσες της ταχύτητας ($u_y = 0$ και $u_z = 0$) που δεν συμπίπτουν με τη διεύθυνση ροής, με αποτέλεσμα οι ρευματικές γραμμές να μεταβάλλονται ακανόνιστα συνεχώς. Η ταχύτητα σε κάθε σημείο του υγρού δεν είναι χρονικά σταθερή αλλά κυμαίνεται γύρω από μία μέση τιμή, τη μέση ταχύτητα στο σημείο αυτό. Η κατανομή των μέσων ταχυτήτων, στην περίπτωση αυτή, δίνεται στο σχήμα 1.25.

Παρατηρούμε ότι κοντά στα τοιχώματα του σωλήνα έχουμε μεγάλη πτώση της μέσης ταχύτητας ενώ στον πυρήνα του η ταχύτητα είναι σχεδόν σταθερή.

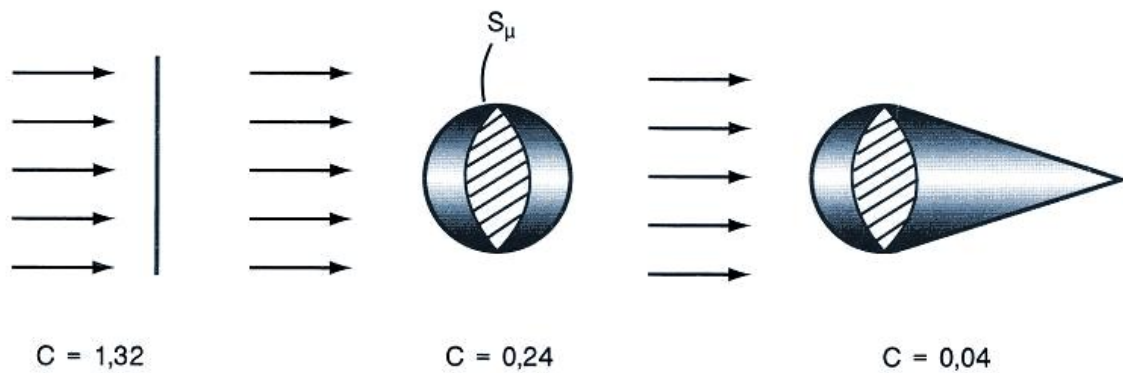
Στην τυρβώδη ροή, η αντίσταση που συναντούν σώματα οποιασδήποτε μορφής, δίνεται από τη σχέση:

$$T = CS_m \rho u_\infty^2 \quad (1.141)$$

όπου: C είναι ο συντελεστής αντίστασης, που κυρίως εξαρτάται από τη μορφή του σώματος (κυρίως από τη μορφή του πίσω μέρους του σώματος), όπως π.χ. φαίνεται στο σχήμα 1.26, S_μ το εμβαδόν μετωπιαίας επιφάνειας κάθετης στη ροή, ρ η πυκνότητα του υγρού και U^2 : η σχετική ταχύτητα του υγρού ως προς το σώμα.



Σχήμα 1.25 Κατανομή ταχυτήτων σε περίπτωση τυρβώδους ροής σε σωλήνα.

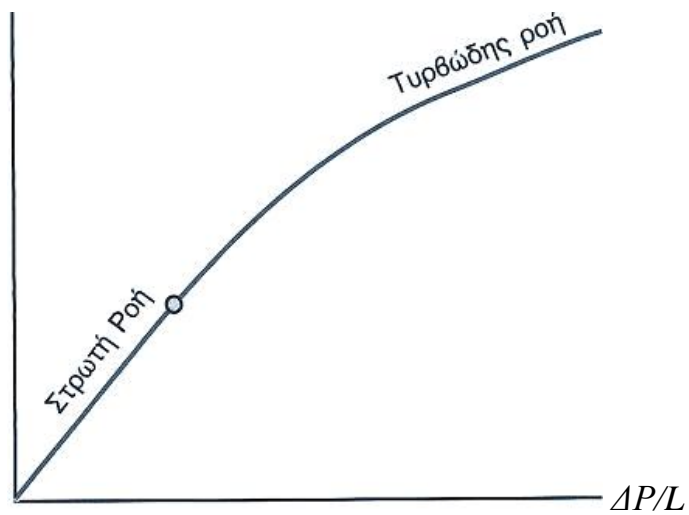


Σχήμα 1.26 Συντελεστής αντίστασης στη ροή διαφόρων σωμάτων.

Είναι αξιοσημείωτο ότι στη μεν στρωτή ροή η αντίσταση (T) είναι ανάλογη της ταχύτητας u_{∞} , (Νόμος Stokes), ενώ στην τυρβώδη ροή είναι ανάλογη του u_{∞}^2 . Σαν αποτέλεσμα αυτού η κλίση της σχέσης:

$$Q = f\left(\frac{\Delta P}{L}\right) \quad (1.142)$$

ελαττώνεται όταν με την αύξηση της ταχύτητας η ροή από στρωτή γίνεται τυρβώδης, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο σχήμα 1.27.



Σχήμα 1.27 Στρωτή και τυρβώδης ροή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΑΙΜΟΡΡΕΟΛΟΓΙΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις πρώτες αξιόλογες παρατηρήσεις σχετικά με το αίμα τις έκαναν οι αρχαίοι Έλληνες. Οι ιδέες και οι θεωρίες που ανέπτυξαν ήταν τόσο ισχυρές, που μέχρι τον 18^ο αιώνα είχαν επιβληθεί στον ιατρικό χώρο. Η ίδια η λέξη αίμα, κατά κάποιους μελετητές, προέρχεται από το αρχαίο ελληνικό ρήμα "αίθω" το οποίο σημαίνει πυρώνω ή θερμαίνω. Ακριβέστερα, η ονομασία, σύμφωνα με την εκδοχή αυτή, προέρχεται από τον παθητικό παρακείμενο του ρήματος αίθω "ήσμαι" εξ ου "αίσμα" ή "αίμα" τα οποία σημαίνουν κατά γράμμα το "πυρωμένο" ή το "θερμό".

Κατά τον Γαληνό: "το αίμα εστί θερμόν και υγρόν εν ταις αρτηρίαις ολιγότερον, εξ ου το ζών τρέφεται".

Οι περί του αίματος γνώσεις της Ομηρικής εποχής συνοψίζονται στις εξής τέσσερις θεμελιώδεις έννοιες:

α) ... το αίμα είναι τόσο απαραίτητο για τη ζωή ώστε θεωρείται ως έδρα αυτής της ίδιας της ζωής ... (Οδύσσεια γ 445).

β) ... ολοκληρωμένος, οριστικός, τελειωτικός θάνατος είναι εκείνος που προέρχεται από έλλειψη αίματος. Ως εκ τούτου φοβερές είναι οι συγκρούσεις όπου εμφανίζεται "φόνος τε και αίμα"... (Ιλιάδα Τ 314).

γ) ... υπάρχει στο σώμα κόκκινο και μαύρο αίμα και όχι μόνο στο σώμα των ανθρώπων αλλά και των ζώων (πρόκειται για διάκριση μεταξύ αρτηριακού και φλεβικού αίματος).

δ) η ανθρωπολογική, φυλετική, εθνολογική και κοινωνική σημασία του αίματος ως δεσμού φυλής, έθνους και οικογένειας:

.. .Οι από της βορειότατης περιοχής της Ηπείρου μέχρι της μεσημβρινής Κρήτης, οι

παντός είδους και πάσης προέλευσης Αχαιοί, αποτελούν έναν και τον αυτό λαό, ένα και το αυτό έθνος, διότι έχουν το ίδιο φυλετικό αίμα. Εξ άλλου, το αίμα του γένους συνδέει μεταξύ των τα μέλη μιας οικογένειας. Εν τέλει, κανείς δεν είναι γενναίος, ανδρείος, ενάρτεος εάν δεν παρουσιάζει τα γνωρίσματα "αίματος αγάθιο" (καλού και υγιούς αίματος) ... (Οδύσσεια δ 611).

Κατά τις γενικότερες αρχαίες ελληνικές επιστημονικές αντιλήψεις, το αίμα εθεωρείτο ως το απαραίτητο θρεπτικό υγρό του ζωικού συστήματος, όπως ο χυμός αποτελεί την αναγκαία προϋπόθεση της ζωής των φυτών. Το αίμα είναι ερυθρό στα πλείστα των ζώων, διακρίνεται, δε, σε ανοιχτόχρωμο ερυθρό και σε ερυθρομέλαν. Εν τούτοις, το αίμα όλων των ζώων δεν παρουσιάζει τα ίδια γνωρίσματα. Όλα τα ζώα, γράφει ο Αριστοτέλης, είναι προικισμένα με ένα ρευστό του οποίου η στέρηση, είτε φυσική, είτε συμπτωματική, προκαλεί τον θάνατο. Σε ορισμένα ζώα το ρευστό αυτό είναι το αίμα, σε ορισμένα όμως άλλα το ρευστό αυτό είναι ένα υγρό άχρουν που αντικαθιστά το αίμα. Ο Αριστοτέλης παρατηρεί ότι "υπό έποψην αιματολογικήν" τα πτηνά, οι ιχθύες και τα τετράποδα ομοιάζουν με τον άνθρωπο, ενώ τα μαλάκια, τα μαλακόστρακα και τα έντομα διαφέρουν. Πριν τον Αριστοτέλη, ο Πλάτωνας είχε ήδη διαβλέψει ότι το αίμα έπρεπε να κυκλοφορεί αδιάκοπα στα αιμοφόρα αγγεία και να επανέρχεται εκ περιτροπής στο σημείο της αφετηρίας του.

Οι γνώσεις περί του αίματος και της κυκλοφορίας του ήταν γνωστές στους Έλληνες γιατρούς Ηρόφιλο και Ερασίστρατο, διαπλουτίστηκαν από τους Αλεξανδρινούς και κυρίως από τον Γαληνό, μεταλαμπαδεύτηκαν στο Βυζάντιο και από εκεί εξαπλώθηκαν στον υπόλοιπο κόσμο.

Ο Ιπποκράτης θεωρούσε ότι η κατάσταση της υγείας εξαρτάται από την ισορροπία τεσσάρων ρευστών, τα οποία αποτελούσαν το "ζωτικό" ρευστό (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1 Η ισορροπία τεσσάρων ρευστών ως κριτήριο υγείας κατά τον Ιπποκράτη.

Ο Γαλαίος (131 π.χ.) και ο Ερυστάτης (280 π.χ.) είναι οι πρώτοι που παρατήρησαν ότι η παλμική ροή είναι φαινόμενο της διάδοσης ενός κύματος. Στη συνέχεια ακολούθησε ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι, ο οποίος περιέγραψε την κίνηση του αίματος σαν μια κίνηση παλμική και επισήμανε την ελαστικότητα των αρτηριακών τοιχωμάτων.

Οι παρατηρήσεις του αυτές χρησίμευσαν σαν βάση στον Άγγλο φυσικό Harvey, ο οποίος δημιούργησε ένα "φυσικό μοντέλο" για τη ροή του αίματος. Μια σειρά από μελέτες ακολούθησαν ως το 1775, όταν ο Euler περιγράφει το πρώτο μαθηματικό ολοκληρωμένο μοντέλο, θεωρώντας την κυκλοφορία του αίματος σαν ισοδύναμη με αυτήν ενός ασυμπίεστου υγρού μέσα σε ελαστικό σωλήνα. Ο Young, το 1808, χρησιμοποίησε τον ακόλουθο τύπο για να εκφράσει την ταχύτητα της κυματικής διάδοσης κατά τη ροή του αίματος:

$$C = \left(\frac{hE}{2ar} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

όπου h είναι το πάχος των αγγείων, E ο συντελεστής του Young, a η ακτίνα του σωλήνα και ρ η πυκνότητα.



Σχήμα 2.2 Η παλμική κίνηση του αίματος κατά τον Λεονάρντο Ντα Βίντσι.

Ο Young εκτίμησε ότι η αντίσταση του αίματος κατά τη ροή (αυτό που σήμερα εκφράζουμε σαν ιξώδες) είναι 4 φορές περίπου μεγαλύτερη του νερού. Η σημερινή τιμή που δεχόμαστε είναι ότι το ιξώδες του αίματος είναι 3,5 φορές μεγαλύτερο του νερού.

Τέλος, φτάνουμε στο 1840, όπου, μετά από σειρά πειραμάτων, ο Γάλλος φυσικός και φυσιολόγος Poiseuille, κατέληξε στον περίφημο τύπο του, ο οποίος ακόμα και

σήμερα έχει εφαρμογή:

$$Q = \left(\frac{P}{8m} \right) \cdot \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^4 \quad (2.2)$$

όπου Q είναι η ροή, μ το ιξώδες, L το μήκος του σωλήνα και R η ακτίνα.

Στις αρχές του αιώνα μας, και συγκεκριμένα το 1929, εισάγεται ο όρος ρεολογία. Ο A.L. Copley είναι ο πρώτος που ονομάζει "Βιορρεολογία" την εφαρμογή αυτής στα βιολογικά συστήματα.

Κατά τις σύγχρονες αντιλήψεις, το αίμα αποτελεί "ρευστόν ιστό", ο οποίος περιέχεται και κυκλοφορεί μέσα στο καρδιαγγειακό σύστημα των ζωικών οργανισμών. Πρέπει δε, να θεωρηθεί ως μορφή του συνδετικού ιστού. Όπως όλοι οι άλλοι ιστοί του σώματος, έτσι και το αίμα αποτελείται από κύτταρα και μεσοκυττάρια ουσία (δηλαδή το υγρό που βρίσκεται εκτός των κυττάρων του σώματος και τα περιβάλλει).

Η Ηλεκτρομηχανική της κυκλοφορίας είναι η μελέτη του περιέχοντος (αγγεία) και του περιεχόμενου (αίμα), καθώς και οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Επί μέρους θέματα είναι τέτοια όπως τάσεις παραμόρφωσης σε βιολογικούς ιστούς, μελέτη της ροής του αίματος, θερμικές και ηλεκτροστατικές δυνάμεις, φαινόμενα μεταφοράς, φαινόμενα διάχυσης δια μέσου βιολογικών μεμβρανών, κίνηση ιόντων και γενικότερα κίνηση ηλεκτρικά φορτισμένων κυττάρων, έλεγχος της σταθερότητας των διαφόρων συστημάτων (γραμμικών και μη).

Αιμορρεολογία είναι η εξέταση της ροής του αίματος, στο αγγειακό σύστημα των ζωντανών οργανισμών. Η ροή αυτή διαφέρει από τη ροή άλλων ρευστών (π.χ. τη ροή H_2O στους σωλήνες ύδρευσης μιας πόλης) στα παρακάτω βασικά σημεία:

α) Το αίμα, σε αντίθεση με το νερό, είναι ένα σύνθετο, ετερογενές υγρό με μη νευτώνεια συμπεριφορά (το ιξώδες του δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτώμενο από τις υφιστάμενες δυνάμεις),

β) Τα τοιχώματα των αιμοφόρων αγγείων είναι διασταλτά και διαπερατά από ένα μέρος του υλικού που ρέει δια μέσου αυτών,

γ) Η ροή του αίματος δεν είναι σταθερή αλλά παλμική.

Πριν προχωρήσουμε σε ειδικότερη περιγραφή του αίματος από τη σκοπιά των ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών που επηρεάζουν τη ροή, θα υπενθυμίσουμε τα λόγια του Μεφιστοφελή στον Φάουστ από το ομώνυμο αριστούργημα του Γκαίτε:

"Το αίμα είναι ένας ιδιαίτερος χυμός".

2.2 ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Πριν εισέλθουμε σε μια λεπτομερή μελέτη των επιμέρους συστατικών του αίματος θα μελετήσουμε γενικά από "μηχανική" άποψη το κυκλοφορικό σύστημα και θα εκτιμήσουμε τις δυνατότητες και τα προβλήματα μηχανικής μοντελοποίησης του. Επίσης, σημειώνουμε ότι η παράγραφος αυτή δεν έχει σκοπό να καλύψει το σύνολο της φυσιολογίας του κυκλοφορικού συστήματος αλλά να δώσει κυρίως έμφαση σε ό,τι αφορά τη μακροσκοπική θεώρηση των φυσιολογικών μηχανισμών.

Το κυκλοφορικό σύστημα, ανάλογα με το υγρό το οποίο κυκλοφορεί, δηλαδή αίμα ή λέμφος, διακρίνεται σε αιμοφόρο και σε λεμφοφόρο σύστημα. Το αιμοφόρο σύστημα με το οποίο θα ασχοληθούμε και στη συνέχεια αποτελείται:

α) από την καρδιά, η οποία είναι κοίλο και συσταλτό όργανο που αποτελεί την κεντρική μοίρα και τον κεντρικό κινητήρα του συστήματος και,

β) από τα αιμοφόρα αγγεία, τα οποία αποτελούν την περιφερική μοίρα του συστήματος και με τα οποία επιτελείται ο σκοπός της κυκλοφορίας και διανομής του αίματος στους ιστούς. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των αρτηριών, οι οποίες απάγουν το αίμα από την καρδιά, των τριχοειδών αγγείων μέσω των οποίων πραγματοποιείται η ανταλλαγή της ύλης στους ιστούς, και των φλεβών οι οποίες επαναφέρουν το αίμα στην καρδιά.

Η ποσότητα της κυκλοφορίας οφείλει να είναι ανάλογη των ιδιαίτερων και μεμονωμένων αναγκών του κάθε κυττάρου χωριστά. Βασική λειτουργία του κυκλοφορικού συστήματος είναι η τροφοδοσία των κυττάρων με O_2 και η θερμική ισορροπία. Στον πίνακα 2.1 φαίνεται η κατανάλωση σε O_2 ορισμένων βασικών ιστών:

Πίνακας 2.1 Κατανάλωση σε O_2 εκφρασμένη σε $[ml O_2/gr] / h$

Δραστηριότητα Ιστών					
Υψηλή		Μέση		Χαμηλή	
Νεφροί	2.2	Σπλήνας	0.8	Λίπη	0.2
Ήπαρ	2.0	Καρδιακός Μυς	0.7	Δέρμα	0.2
Εγκέφαλος	1.3	Σκελετικός Μυς	0.5	Οστά	0.03
		Πνευμονικοί Ιστοί	0.4	Αίμα	0.006

Στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι το κυκλοφορικό σύστημα των αρτηριών και των φλεβών (όπως οι περισσότεροι βιολογικοί ιστοί) έχει μια δομή μορφοκλασματική (fractal). Μια τέτοια δομή χαρακτηρίζεται (σε αντιδιαστολή προς τα ευκλείδεια γεωμετρικά σχήματα) από αναλλοίωτες ιδιότητες σε αλλαγή κλίμακας και από κλασματικούς βαθμούς ελευθερίας. Να αναφέρουμε εδώ ότι κάθε χαοτικό σύστημα στη βάση της τοπολογίας ενός χαοτικού ελκυστού έχει επίσης fractal δομή. Τα μη διατηρητικά χαοτικά συστήματα αποτελούν μοντέλα βιολογικών επεξεργαστών πληροφορίας, καθόσον μάλιστα σε κάθε βιολογικό σήμα ή μνήμη έχουμε συνύπαρξη θορύβου και τάξης.

Δεν είναι ίσως τυχαίο ότι πολλοί βιολογικοί ιστοί (το βρογχοπνευμονικό δένδρο, ο προστάτης, ο εγκεφαλικός φλοιός, το εσωτερικό τοίχωμα του λεπτού εντέρου, το κυκλοφορικό σύστημα των αρτηριών και φλεβών κ.τ.λ., καθώς και όλες οι

πρωτεΐνες) έχουν *fractal* δομή. Είναι δε αξιοσημείωτο ότι όταν μια *fractal* (αυτοόμοια σε μετασχηματισμούς κλίμακας) δομή διεγερθεί από ένα παλμικό ερέθισμα, παρουσιάζει μη διατηρητική χαοτική λειτουργία με απλούς ή πολλαπλούς συνυπάρχοντες ελκυστές. Η χαοτική δομή εξασφαλίζει σε έναν βιολογικό ιστό τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

1) Σε πολύ μικρούς όγκους αντιστοιχούν αναλογικά τεράστιες επιφάνειες. Ας σκεφτούμε τι θα συνέβαινε εάν οι βιολογικοί ιστοί ήταν "ευκλείδεια στερεά". Τότε, ένα βιολογικό ον διπλάσιου για παράδειγμα ύψους θα είχε τετραπλάσια επιφάνεια αλλά και οκταπλάσιο βάρος. Αντιλαμβάνεται κανείς αμέσως ότι πέραν ενός ορίου ένας τέτοιος οργανισμός θα κατάρρεε από το ίδιο του το βάρος. Η *fractal* δομή αντιπαρέρχεται ένα τέτοιο ενδεχόμενο, δημιουργώντας δομές που στον τρισδιάστατο π.χ. καρτεσιανό χώρο έχουν διασταλτικότητα μεταξύ 2 και 3 δηλαδή μεταξύ μιας ευκλείδειας επιφάνειας και ενός ευκλείδειου όγκου.

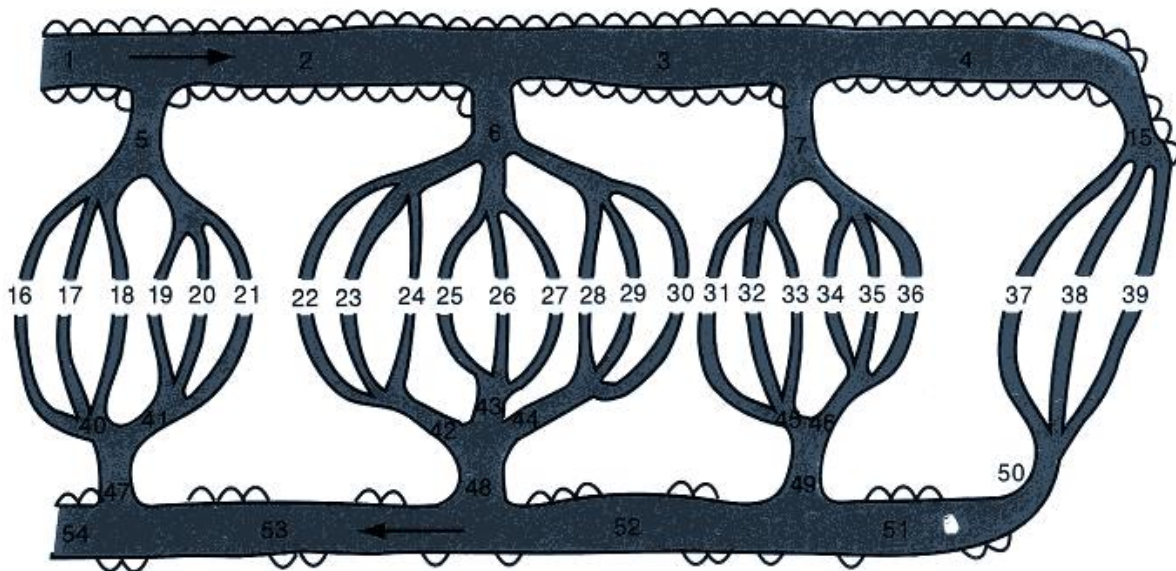
2) Σε ένα σύνηθες ευκλείδειο στερεό ή επιφάνεια ο "βαθμός διαχυτότητας" μιας ουσίας υπό την επίδραση τυχαίων διακυμάνσεων (θορύβου) είναι ευθέως ανάλογος του χρόνου t . Αποδεικνύεται ότι σε *fractal* δομές ο βαθμός διαχυτότητας αυξάνει ταχύτερα σαν δύναμη του t^v ($v > 1$). (το φαινόμενο αυτό καλείται "υπερδιάχυση").

3) Μια *fractal* δομή είναι δυνατόν να κατασκευαστεί σε μικρό χρόνο από έναν απλό αλγόριθμο, ο οποίος επαναλαμβάνει τον ίδιο του τον εαυτό σε πολλές κλίμακες ταυτόχρονα χωρίς ουσιώδεις αλλαγές. Έτσι, ο γεννητικός αλγόριθμος εν προκειμένω, χρειάζεται για την κατασκευή ενός βιολογικού ιστού πολύ μικρότερο χρόνο από αυτόν που θα απαιτούσε η κατασκευή ενός "συμπαγούς" ευκλείδειου ιστού.

4) Επειδή μια *fractal* δομή εμπεριέχει πολλαπλές κλίμακες, επιτρέπει βραδεία αύξηση του λεγόμενου "μορφογεννητικού σφάλματος" δηλαδή του μοιραίου σφάλματος (λόγω μεταλλαγών) ανακατασκευής από γενεά σε γενεά ενός συγκεκριμένου ιστού.

2.3 ΑΓΓΕΙΑΚΟ ΔΙΚΤΥΟ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μια σχηματική και απλοποιημένη παράσταση της χωροταξικής δομής ενός αγγειακού δικτύου δίνεται στο σχήμα 2.3:



Σχήμα 2.3 Δίκτυο μοντελοποίησης της χωροταξικής κατανομής των αγγείων.

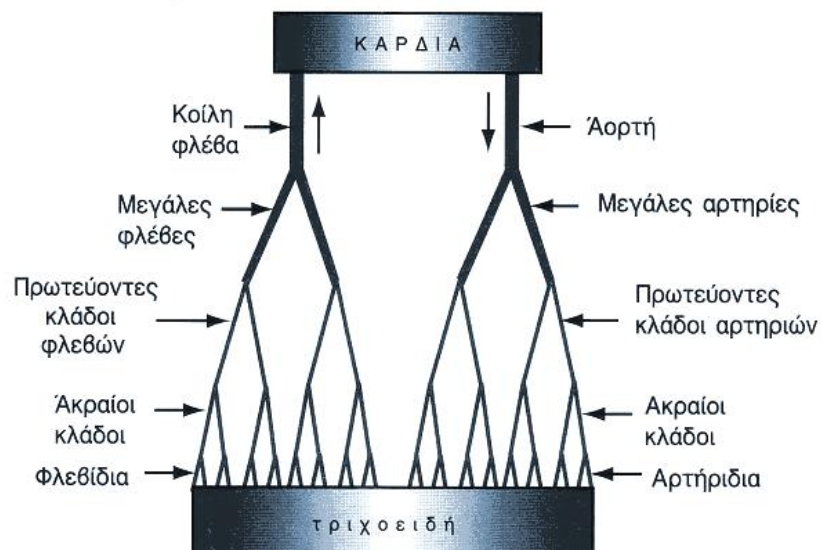
Μια άλλη παράσταση με την οποία μπορεί να αποδοθεί το κυκλοφορικό σύστημα (καρδιά - αγγεία) δίνεται στο σχήμα 2.4. Να σημειώσουμε εδώ ότι οι αριθμοί των αγγείων δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα όπως φαίνεται στο σχήμα.

Περισσότερα στοιχεία για τη γεωμετρία του αγγειακού δικτύου δίνονται στον Πίνακα 2.2.:

Πίνακας 2.2 Γεωμετρία αγγειακού δικτύου

Είδος αγγείου	Αριθμός	Διάμετρος	Μήκος	Πάχος
---------------	---------	-----------	-------	-------

		(cm)		Τοιχώματος (cm)
Αορτή	1	2.5	50	0.2
Αρτηρίες	40	0.4	50	0.1
Αρτηρίδια	40.000.000	0.0050	1	0.2
Τριχοειδή	1.200.000.000	0.0008	0.1	0.0001
Φλεβίδια	90.000.000	0.0020	0.2	0.0002
Φλέβες	40	0.5	25	0.05
Κοίλη φλέβα	1	3.0	50	0.15



Σχήμα 2.4 Σχηματική παράσταση καρδιάς / δικτύου αιμοφόρων αγγείων.

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία που μπορούμε να διακρίνουμε στον παραπάνω πίνακα είναι τα ακόλουθα:

- 1) Ο αριθμός των αγγείων μιας κατηγορίας αυξάνει γρήγορα από την καρδιά μέχρι τα τριχοειδή και μειώνεται πάλι γρήγορα από τα τριχοειδή προς την καρδιά.
- 2) Η διάμετρος των αγγείων μικραίνει γρήγορα από την καρδιά προς τα τριχοειδή και αυξάνει πάλι γρήγορα στην πορεία επιστροφής.

- 3) Η συνολική διατομή των αγγείων μιας κατηγορίας αυξάνει από την καρδιά προς τα τριχοειδή όπου έχει τη μέγιστη τιμή της.
- 4) Η ποσότητα αίματος στο φλεβικό τμήμα του δικτύου (μετά τα τριχοειδή) είναι πάνω από 3.5 φορές μεγαλύτερη από αυτήν στο αρτηριακό (πριν τα τριχοειδή).
- 5) Τα τριχοειδή παρουσιάζουν σημαντική χωρητικότητα.

2.4.ΣΥΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ

Η εξέχουσα σημασία του αίματος έγκειται στη λειτουργία του, η οποία μπορεί να συνοψισθεί στα ακόλουθα:

- 1) παραλαμβάνει O_2 από τους πνεύμονες και δια των τριχοειδών το μεταφέρει στους ιστούς και στα όργανα του σώματος όπου χρησιμοποιείται για τις καύσεις, ενώ επιστρέφοντας μεταφέρει από τους ιστούς και τα όργανα του σώματος προς τους πνεύμονες το CO_2 που σχηματίζεται,
- 2) μεταφέρει και αποδίδει προς το υγρό των ιστών και δια αυτού προς τα κύτταρα διάφορες ουσίες οι οποίες χρησιμοποιούνται ως δομικά και λειτουργικά στοιχεία των κυττάρων καθώς και ως φορείς ενέργειας,
- 3) παραλαμβάνει από τους διάφορους ιστούς και όργανα του σώματος τα άχρηστα και επιβλαβή προϊόντα του μεταβολισμού και τα μεταφέρει στα όργανα απέκκρισεως (κυρίως τους νεφρούς), μέσω των οποίων ο οργανισμός απαλλάσσεται από αυτά,
- 4) αποτελεί το κυριότερο μέσο μεταφοράς θερμότητας μεταξύ των διαφόρων τμημάτων του οργανισμού,
- 5) συμβάλλει στην άμυνα του οργανισμού.

Οι κυριότερες φυσικοχημικές ιδιότητες του αίματος είναι οι ακόλουθες:

- 1) αδιαφάνεια: το αίμα είναι αδιαφανές λόγω της παρουσίας σε αυτό των αιμοσφαιρίων, τα οποία έχουν διαφορετικό δείκτη διάθλασης του φωτός σε σχέση με το πλάσμα, οπότε παρακωλύουν τη δια του αίματος ευθύγραμμη διάδοση του φωτός,

- 2) χροιά: το αίμα εμφανίζει ζωηρή κόκκινη ή κυανέρυθρη χροιά, ανάλογα με το βαθμό κορεσμού της αιμοσφαιρίνης με O_2 ,
- 3) χημική συμπεριφορά και αντίδραση του αίματος: είναι ελαφρά αλκαλική με pH 7.35 έως 7.44,
- 4) από φυσικής απόψεως το αίμα στην υγρή κατάσταση είναι εναιώρημα κυτταρικών στοιχείων,
- 5) το ειδικό βάρος του αίματος κυμαίνεται περί τη μέση τιμή του που είναι 1.06 gr/cm^3 ,
- 6) η συνεκτικότητα ή γλοιότητα ή εσωτερική τριβή ή ιξώδες του αίματος (η χρήση αυτού του όρου γίνεται από κλινικούς ιατρούς) κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 3.5 έως 5 cpoise,
- 7) αιματοκρίτης: ορίζεται ως η επί τοις εκατό κατ' όγκον περιεκτικότητα του αίματος σε έμμορφα στοιχεία.

Η ιδιαιτερότητα του αίματος ως υγρό οφείλεται στη σύστασή του. Το αίμα είναι ένα υγρό μείγμα από κύτταρα (ερυθρά: 5×10^6 κύτταρα/ mm^3 , λευκά: 6×10^3 κύτταρα/ mm^3 , αιμοπετάλια: 3×10^3 κύτταρα/ mm^3) και μία υδάτινη διάλυση ηλεκτρολυτών και ουδέτερων μορίων.

2.4.1 ΠΛΑΣΜΑ

Το πλάσμα (*plasma*) είναι ένα ωχροκίτρινο υγρό αποτελούμενο από νερό (κατά 90%), άλατα και οργανικές ενώσεις. Στις οργανικές ενώσεις περιλαμβάνονται πρωτεΐνες, γλυκόζη, λιπίδια, βιταμίνες, ορμόνες και χρωστικές. Από τις πρωτεΐνες, ιδιαίτερη σημασία στην αιματολογία έχουν οι παράγοντες του μηχανισμού της πήξης του αίματος, οι ανοσοσφαιρίνες, οι παράγοντες του συμπληρώματος, κι ακόμη ορισμένα πρωτεϊνικά μόρια που υπεισέρχονται στη μεταφορά αιμοποιητικών και άλλων παραγόντων. Το πλάσμα αποτελεί την υγρή φάση του αίματος και είναι περίπου 3 lt.

2.4.2 ΈΜΜΟΡΦΑΣ ΣΥΣΤΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ

Τα έμμορφα συστατικά του αίματος διακρίνονται σε 3 κατηγορίες, στα ερυθρά αιμοσφαίρια ή ερυθροκύτταρα, στα λευκά αιμοσφαίρια ή λευκοκύτταρα και στα αιμοπετάλια ή θρομβοκύτταρα.

Τα ερυθροκύτταρα (*erythrocytes* ή *red blood cells* - RBCs) είναι "απύρρηνοι κυτταρικοί σάκοι" που περιέχουν μια χρωμοπρωτεΐνη, την αιμοσφαιρίνη (*hemoglobin*), στο χρώμα της οποίας οφείλουν και το όνομά τους. Έχουν σαν βασική τους βιολογική αποστολή τη μεταφορά του O_2 από τους πνεύμονες στους ιστούς. Τα ερυθροκύτταρα αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία των κυττάρων του αίματος (5×10^6 κύτταρα/ mm^3), γι' αυτό και είναι τα κυρίως υπεύθυνα για τις ρεολογικές του ιδιότητες. Τα ερυθρά αιμοσφαίρια έχουν διάρκεια ζωής 110-120 ημέρες. Εκτενής μελέτη (ποσοτική και μορφολογική) αυτών παρουσιάζεται σε επόμενη παράγραφο.

Τα λευκοκύτταρα (*leukocytes* ή *white blood cells* - WBCs) είναι εμπύρρηνα κύτταρα χωρίς ιδιαίτερο χρώμα. Διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, στα κοκκιοκύτταρα ή πολυπύρρηνα ή πολυμορφοπύρρηνα, στα μονοκύτταρα ή μεγάλα

μονοπύρηννα και στα λεμφοκύτταρα. Τα κοκκιοκύτταρα, ανάλογα της χρωστικής την οποία προσλαμβάνουν τα κοκκία του πρωτοπλάσματός τους (σε ξηρές επιστρώσεις αίματος), διακρίνονται σε ουδετερόφιλα, ηωσινόφιλα και βασεόφιλα. Βασική αποστολή των λευκοκυττάρων είναι η εξασφάλιση της άμυνας του οργανισμού έναντι των ποικίλων λοιμώξεων. Τα πολυμορφοπύρηννα και μεγάλα μονοπύρηννα καταστρέφουν και απομακρύνουν (με φαγοκυττάρωση και ενδοκυττάρια πέψη) μικροοργανισμούς και τεμαχίδια ιστών που έχουν υποστεί βλάβη ή νέκρωση. Τα λεμφοκύτταρα έχουν σχέση με την παραγωγή και κατανομή των αντισωμάτων. Τα πολυμορφοπύρηννα και μεγάλα μονοπύρηννα έχουν διάρκεια ζωής ολίγων ωρών. Τα λεμφοκύτταρα παραμένουν στη ζωή μέχρι μερικούς μήνες.

Τα αιμοπετάλια (platelets) τέλος, είναι "μικροί απύρηννοι δίσκοι". Αποτελούν τμήματα του πρωτοπλάσματος των μητρικών τους κυττάρων, που περικλείονται από κυτταρική μεμβράνη. Η μείωση του αριθμού τους καλείται θρομβοπενία, η δε αύξησή του θρομβοκυττάρωση. Η λειτουργία τους αφορά κυρίως την πήξη του αίματος και την αιμόσταση. Η διάρκεια ζωής τους είναι 8-11 ημέρες.

2.4.3 ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, σε φυσιολογικές συνθήκες οι ρεολογικές ιδιότητες του αίματος χαρακτηρίζονται από αυτές των ερυθροκυττάρων λόγω της αριθμητικής τους υπεροχής έναντι των άλλων κυττάρων. Η ανάπτυξη των τεχνικών μέτρησης έδωσε τη δυνατότητα, όχι μόνο να καθοριστεί με ακρίβεια η μορφή και το σχήμα του ερυθροκυττάρου (τα οποία οφείλονται κυρίως σε μια πρωτεΐνη, τη σπεκτρίνη, και ήταν ως ένα σημείο γνωστά), αλλά και να καθοριστεί η σχέση της επιφάνειας ως προς τον όγκο του και να εκφραστεί μαθηματικά η μορφολογία του.

Ποσοτική μελέτη των ερυθροκυττάρων

Η ποσοτική μελέτη των ερυθροκυττάρων περιλαμβάνει την εκτίμηση του ποσού της αιμοσφαιρίνης, την εκτίμηση της τιμής του αιματοκρίτη και την εκτίμηση του αριθμού των ερυθροκυττάρων στη μονάδα όγκου του αίματος. Από τις τρεις αυτές παραμέτρους υπολογίζονται οι ερυθροκυτταρικοί δείκτες που αποτελούν βασικά διαφοροδιαγνωστικά κριτήρια στη διερεύνηση των αναιμικών συνδρόμων.

α. Το ποσό της αιμοσφαιρίνης στη μονάδα όγκου του αίματος εκτιμάται με διάφορες τεχνικές, φαίνεται όμως ότι έχει επικρατήσει η μέθοδος της μετατροπής της αιμοσφαιρίνης σε κυανο-μεθαιμοσφαιρίνη. Η τελευταία είναι σταθερή ένωση και μετριέται εύκολα με ένα φασματοφωτόμετρο. Η αιμοσφαιρίνη (Hb) εκφράζεται σε γραμμάρια ανά 100 ml αίματος (g/dl). Οι φυσιολογικές τιμές της είναι διαφορετικές στον άνδρα και τη γυναίκα, και διαφορετικές στα παιδιά και τους ενήλικες (Πίνακας 2.3). Η μείωση των τιμών της Hb κάτω από τα φυσιολογικά όρια λέγεται "αναιμία" και η αύξησή τους πάνω από τα φυσιολογικά όρια, "ερυθραιμία".

Πίνακας 2.3

Φυσιολογικές τιμές αιματοκρίτη, αιμοσφαιρίνης και αριθμού ερυθροκυττάρων. Οι τιμές αιματοκρίτη εκφράζονται σε εκατοστιαία αναλογία (%). Οι τιμές αιμοσφαιρίνης εκφράζονται σε γραμμάρια ανά 100 ml αίματος. Οι τιμές του αριθμού ερυθροκυττάρων εκφράζονται σε εκατομμύρια ανά ml αίματος.

Κατηγορία	Αιματοκρίτης	Αιμοσφαιρίνη	Ερυθροκύτταρα
Ανδρας	46 (40-52)	15 (13-17)	5.2 (4.4-5.9)
Γυναίκα	42 (37-47)	14 (12-16)	4.5 (3.8-5.2)
Αρτιγέννητο	53 (44-62)	19 (14-23)	5.3 (4.9-5.7)
Παιδί 1 έτους	40 (36-44)	12 (10-14)	4.5 (3.6-5.1)

β. Ο υπολογισμός του αριθμού των ερυθροκυττάρων επιτυγχάνεται με την αραιώση του αίματος σε φυσιολογικό χλωριονατρίουχο διάλυμα και την πλήρωση στη συνέχεια με το αραιωμένο αυτό αίμα της θαλάμης που σχηματίζεται στην επιφάνεια ειδικής αντικειμενοφόρου πλάκας μικροσκοπίου (πλάκες Newbaue, Thomas, Malassez, κ.ά.). Από τον όγκο της θαλάμης (οι διαστάσεις της αναγράφονται στην πλάκα), την πραγματοποιηθείσα αραιώση του αίματος, και τον αριθμό των ερυθροκυττάρων που μετρούνται με τη βοήθεια μικροσκοπίου μέσα στη θαλάμη, υπολογίζεται με απλές πράξεις ο αριθμός των ερυθροκυττάρων ανά μl αίματος.

Η μέτρηση του αριθμού των ερυθροκυττάρων σήμερα γίνεται σχεδόν αποκλειστικά με ηλεκτρονικούς μετρητές (Coulter Electronics, SMA7A, κ.ά.). Με τους μετρητές αυτούς, η μέτρηση είναι ταχεία (της τάξης των μερικών δευτερολέπτων) και με ποσοστό λάθους που συνήθως δεν υπερβαίνει το 5%. Ας σημειωθεί ότι, παράλληλα με τον αριθμό των ερυθροκυττάρων, οι ηλεκτρονικοί μετρητές δίνουν την τιμή της αιμοσφαιρίνης, την τιμή του αιματοκρίτη κι ακόμη τις τιμές των ερυθροκυτταρικών δεικτών.

γ. Αιματοκρίτης (hematocrit ή packed red blood cells - HCT) λέγεται ο όγκος τον οποίο καταλαμβάνουν τα ερυθροκύτταρα σε 100 ml αίματος. Ένας αυθαίρετα βαθμονομημένος σωλήνας από 0 έως 100, γεμίζεται με αίμα και φυγοκεντρείται σε 3000 στροφές για 30 min. Μετά τη φυγοκέντρωση, τα ερυθροκύτταρα έχουν σχηματίσει μια εμφανή στήλη που αρχίζει από το μηδέν και τελειώνει προς τα πάνω σε κάποιο σημείο του σωλήνα. Η ένδειξη που αντιστοιχεί στην άνω επιφάνεια της ερυθροκυτταρικής στήλης δίνει απ' ευθείας την τιμή του αιματοκρίτη (σχήμα 2.8). Στους ηλεκτρονικούς μετρητές, ο αιματοκρίτης υπολογίζεται από το γινόμενο του "μέσου όγκου των ερυθροκυττάρων" επί τον "απόλυτο ανά μl αριθμό τους" στο εξεταζόμενο αίμα.

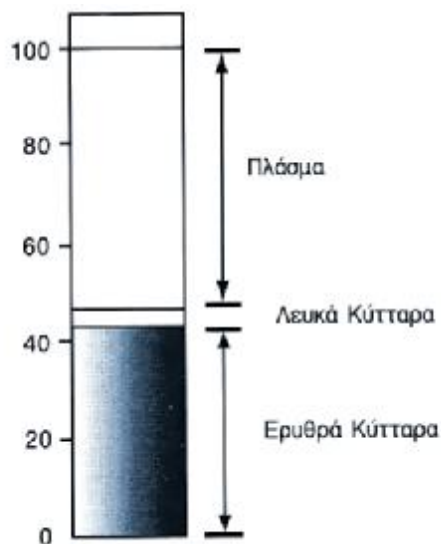
Ο αιματοκρίτης εκφράζεται σε εκατοστιαία αναλογία και είναι διαφορετικός στον άνδρα και τη γυναίκα και διαφορετικός στους ενήλικες και τα παιδιά (Πίνακας 2.3). Στα αναιμικά σύνδρομα είναι μειωμένος σε σχέση με το φυσιολογικό, ενώ στις ερυθραιμίες είναι πάντοτε αυξημένος.

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι ο αιματοκρίτης μεταβάλλεται με τη διάρκεια φυγοκέντρησης όταν η διάρκεια αυτή είναι μικρότερη από 30-40 min, καθώς και με τον αριθμό των στροφών όταν αυτές δεν ξεπερνούν τις 2500-3000 / min (σχήμα 2.9).

Ερυθροκυτταρικοί δείκτες ονομάζονται ο μέσος όγκος των ερυθροκυττάρων, η μέση ανά ερυθροκύτταρο πυκνότητα αιμοσφαιρίνης και η μέση ανά ερυθροκύτταρο περιεκτικότητα αιμοσφαιρίνης.

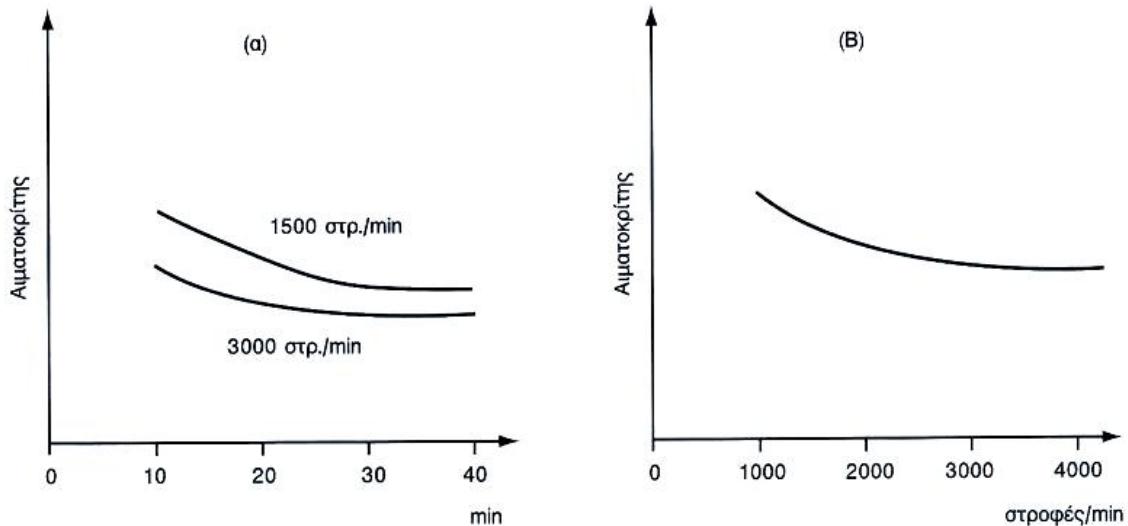
Ο μέσος όγκος των ερυθροκυττάρων (*Mean Corpuscular Volume - MCV*) υπολογίζεται από τον αιματοκρίτη και τον αριθμό των ερυθροκυττάρων με τη σχέση:

$$MCV = \frac{HCT(\%)}{RBC(10^6 / ml)} \cdot 10 \quad (2.15)$$



Σχήμα 2.8 Μετά τη φυγοκέντρηση του αίματος σχηματίζεται στον σωλήνα μια στήλη από

ερυθροκύτταρα - αιματοκρίτης.



Σχήμα 2.9 Εξάρτηση του αιματοκρίτη από α) τη διάρκεια φυγοκέντρωσης και β) την ταχύτητα περιστροφής.

και εκφράζεται σε φεμτόλιτρα (femtoliters) (fl) που αντιστοιχούν στα παλαιά κυβικά μικρά (μm^3). Οι φυσιολογικές τιμές κυμαίνονται από 85 έως 95fl. Για τιμές MCV κάτω των 85 fl γίνεται χρήση του όρου "μικροκυττάρωση" και για τιμές πάνω από 95 fl, του όρου "μακροκυττάρωση". Για τιμές MCV που είναι μέσα στα φυσιολογικά πλαίσια χρησιμοποιείται ο όρος "νορμοκυττάρωση".

Η μέση ανά ερυθροκύτταρο πυκνότητα αιμοσφαιρίνης (Mean Corpuscular Hemoglobin Concentration - MCHC) υπολογίζεται από την αιμοσφαιρίνη και τον αιματοκρίτη με τον τύπο:

$$MCHC = \frac{Hb(g/dl)}{HCT(\%)} \cdot 100 \quad (2.16)$$

και εκφράζεται σε εκατοστιαία αναλογία. Οι φυσιολογικές τιμές κυμαίνονται από

32% έως 36%. Όταν οι τιμές MCHC είναι μικρότερες του 32% γίνεται λόγος για "υποχρωμία" και όταν αυτές βρίσκονται μέσα στα φυσιολογικά πλαίσια, για "νορμοχρωμία". Τιμές MCHC πάνω από 36% δεν μπορούν να υπάρξουν, δοθέντος ότι η αιμοσφαιρίνη στο ερυθροκύτταρο είναι διαλυμένη στον μέγιστο δυνατό κορεσμό της, που είναι το 36%.

Η μέση ανά ερυθροκύτταρο περιεκτικότητα αιμοσφαιρίνης (Mean Corpuscular Hemoglobin -MCH) υποδηλώνει το μέσο βάρος της αιμοσφαιρίνης στα ερυθροκύτταρα. Υπολογίζεται δε με τον τύπο:

$$MCH = \frac{Hb(g/dl)}{RBC(10^6/ml)} \cdot 10 \quad (2.17)$$

και εκφράζεται σε πικογραμμάρια (picograms-pg), που αντιστοιχούν στα παλαιά γγ. Οι φυσιολογικές τιμές της κυμαίνονται από 28 έως 34 pg. MCH μικρότερη των 28 pg υποδηλώνει υποχρωμία και MCH μεγαλύτερη από 34 pg υπερχρωμία. Στη νορμοχρωμία, οι τιμές βρίσκονται μέσα στα φυσιολογικά πλαίσια. Οι φυσιολογικές αιματικές τιμές δίνονται στον Πίνακα 2.4.

Μορφολογική μελέτη των ερυθροκυττάρων

Το τυπικό σχήμα ενός ερυθρού αιμοσφαιρίου σε ηρεμία δίνεται στο σχήμα 2.10α. Το σχήμα των ερυθροκυττάρων στο μικροσκόπιο φαίνεται στρογγυλό, στην πραγματικότητα, όμως, είναι αμφίκοιλος δίσκος (ή δισκοειδής). Το χρώμα τους είναι πορτοκαλόχρουν και μάλιστα περισσότερο έντονο στην περιφέρεια και λιγότερο έντονο στο κέντρο. Η ανομοιόμορφη κατανομή του χρώματος οφείλεται στο γεγονός ότι η αιμοσφαιρίνη είναι αφθονότερη στην περιφέρεια και λιγότερη στο κέντρο του αμφίκοιλου δίσκου. Το σχήμα και η μορφή του είναι τέτοια ώστε η επιφάνειά

Πίνακας 2.4 Φυσιολογικές αιματικές τιμές.

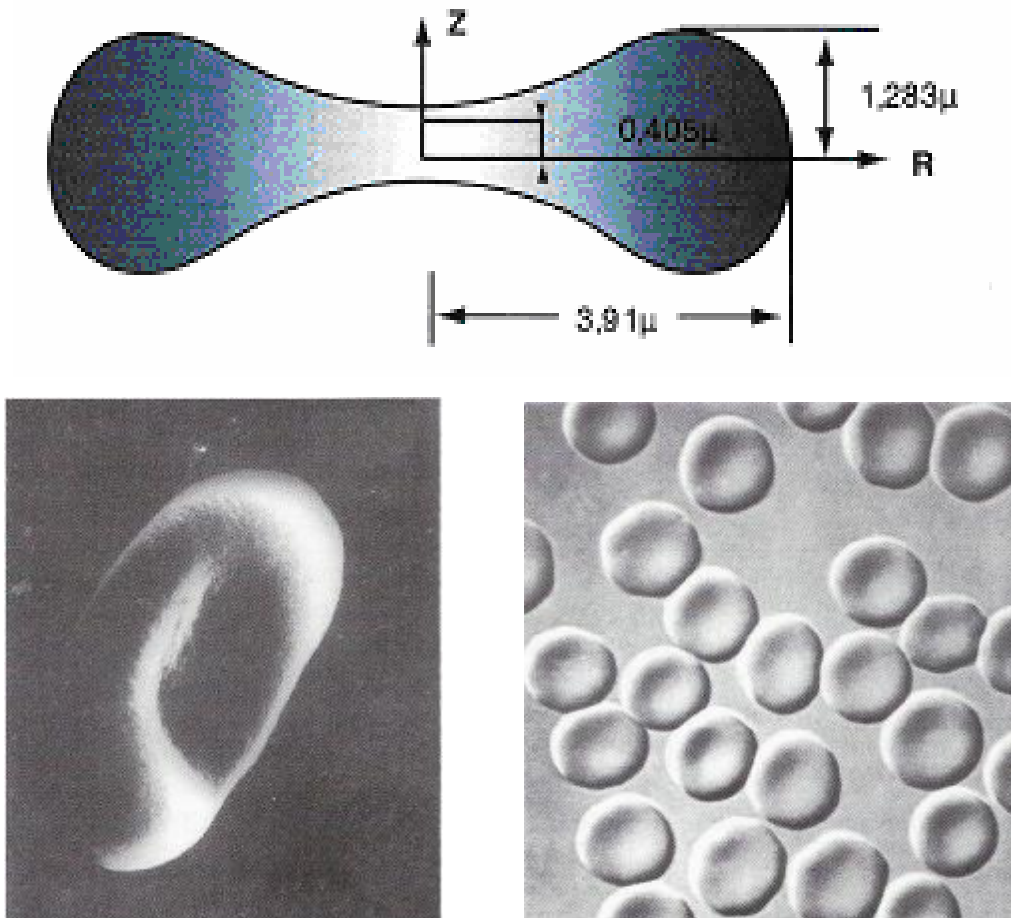
Παράμετρος	Σύμβολο	Μονάδες	Φυσιολογική τιμή	
			Άντρας	Γυναίκα
Αιματοκρίτης	Hct	%	40-54	37-47
Ερυθρά αιμοσφαίρια	RBC	Εκατ./mm ³	4.6-6.2	4-5.5
Αιμοσφαιρίνη	Hb	gr/100ml	14-18	12-16
pH του αίματος	pH		7.35-7.45	7.35-7.45
Διάρκεια ζωής	MCV	Ημέρες	120	120
Μέσος όγκος (mean corpuscular volume)	MCH	μm ³	87±7	90±1
Μέση τιμή αιμοσφαιρίνης Στο ερυθροκύτταρο	MCHC	μμg ≡ pg ≡ 10 ⁻¹² gr	27-31	27-31
Μέση συγκέντρωση αιμοσφαιρίνης στο κύτταρο		%	32-37	32-37
Χρόνος αιμορραγίας (Ivy)		min	1-7	1-7
Ρυθμός πηκτικότητας (Lee-White)		min	6-18	6-18
Ρυθμός καθίζησης Wintrobe – κάτω 50		min/h	15	20
Ρυθμός καθίζησης Wintrobe – άνω 50		min/h	20	30

του να είναι η μέγιστη ως προς τον όγκο του (η επιφάνειά του, δηλαδή, είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι θα ήταν εάν το κύτταρο ήταν σφαιρικό).

Μαθηματικά, η μορφολογία του κυττάρου καθορίζεται από έναν δείκτη σφαιρικότητας (18: *index of sphericity*) του αιμοσφαιρίου, ο οποίος ορίζεται:

$$IS = 4.84 \cdot \frac{V^{2/3}}{S} \quad (2.18)$$

όπου V είναι ο όγκος και S η επιφάνεια.



Σχήμα 2.10 Σχήμα και μορφολογία ερυθρού αιμοσφαιρίου σε ηρεμία εντός ισοτονικού διαλύματος (300mOsm.l^{-1} ανάλογο του πλάσματος). Η μορφή του προσεγγίζει αμφίκυκλο δίσκο.

Χαρακτηριστικά αυτού του αδιάστατου αριθμού είναι ότι το IS λαμβάνει την τιμή 1 όταν το κύτταρο είναι σφαιρικό και την τιμή 0.7 όταν είναι δισκοειδούς μορφής. Στον Πίνακα 2.5 παραθέτουμε τις γεωμετρικές διαστάσεις του ερυθρού αιμοσφαιρίου.

Πίνακας 2.5: Γεωμετρικές διαστάσεις ερυθρού αιμοσφαιρίου.

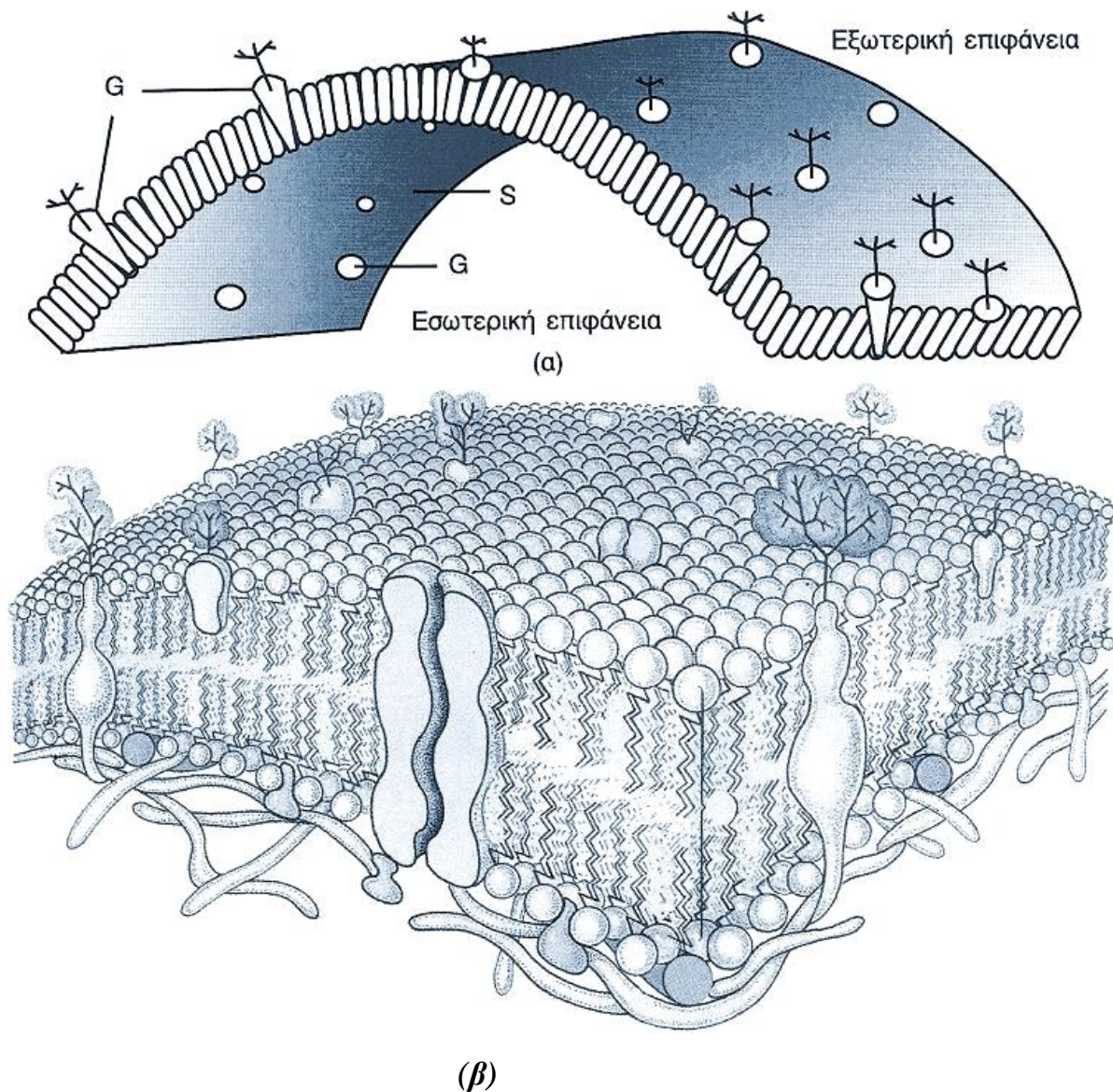
Διάμετρος	$7.8 \pm 0.62 \mu\text{m}$
Πάχος κυτταρικής μεμβράνης	$0.81 \pm 0.35 \mu\text{m}$
Επιφάνεια	$135.00 \pm 16.00 \mu\text{m}^2$
Όγκος	$96.00 \pm 14.00 \mu\text{m}^3$

Οι κύριες τεχνικές μελέτης χρησιμοποιούν ηλεκτρικούς αναλυτές (ηλεκτρικές τεχνικές) ή κλασική μικροσκοπία ή ηλεκτρονική μικροσκοπία σάρωσης (οπτικές τεχνικές).

Η βασική λειτουργία του ερυθροκυττάρου, όπως είδαμε, είναι η μεταφορά μέσω της αιμοσφαιρίνης (Hb) του απαραίτητου O_2 στους ιστούς. Το 25% περίπου του όγκου του ερυθρού καταλαμβάνεται από αιμοσφαιρίνη και το 70% από H_2O . Την αιμοσφαιρίνη περικλείει η κυτταρική μεμβράνη της οποίας η δομή είναι ανάλογη ενός "μωσαϊκού ρευστού". Η χημική ανάλυση δείχνει ότι η μεμβράνη αποτελείται από λιπίδια, υδατάνθρακες και πρωτεΐνες. Τα λιπίδια ανήκουν σε διάφορες κατηγορίες και σχηματίζουν διπλοστοιβάδα

εντός της οποίας βρίσκονται "πλέοντας" οι πρωτεΐνες. Οι υδατάνθρακες είναι ετερογενείς και είναι υπεύθυνοι για το αρνητικό φορτίο της επιφάνειας της μεμβράνης.

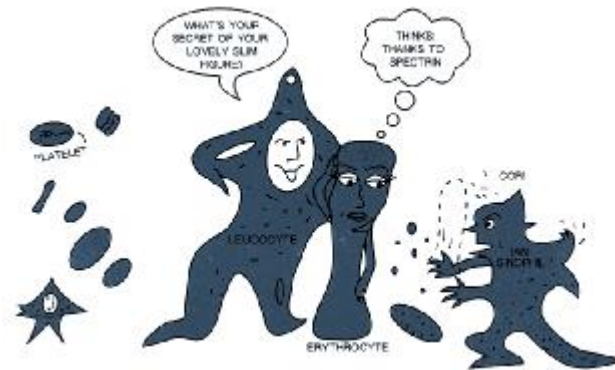
Στο σχήμα 2.11 (α, β) παρουσιάζεται σχηματικά η δομή της ερυθροκυτταρικής μεμβράνης.



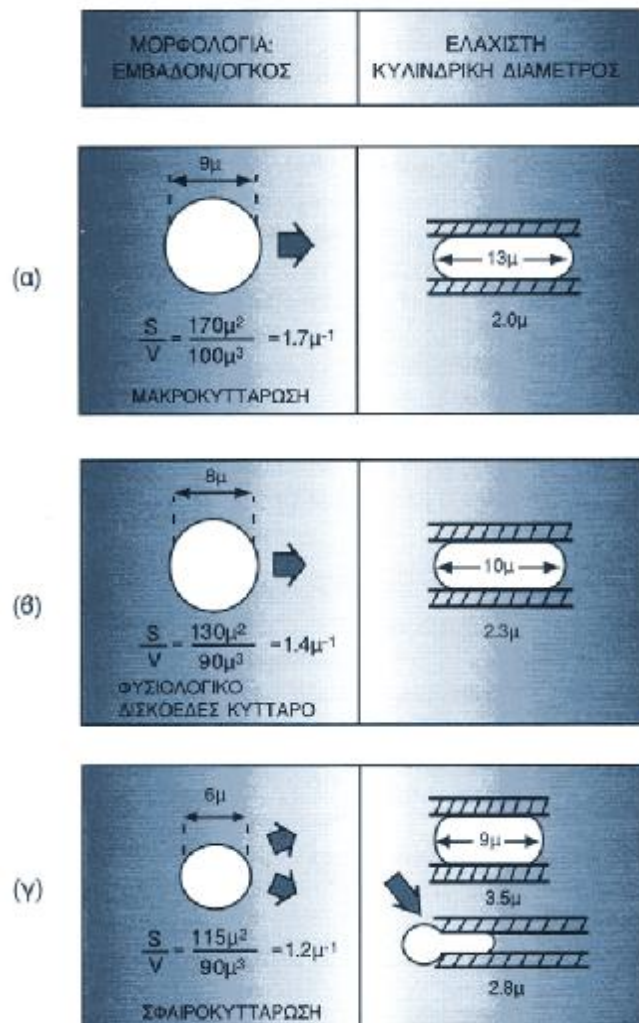
Σχήμα 2.11 Σχηματική παράσταση της δομής της ερυθροκυτταρικής μεμβράνης.

Να σημειώσουμε ότι, από τις πρωτεΐνες, η σπεκτρίνη είναι η κατ' εξοχήν υπεύθυνη για το σχήμα και τη δεδομένη μορφή του ερυθρού αιμοσφαιρίου (σχήμα 2.12).

Είδαμε ότι το σχήμα του ερυθροκυττάρου παρέχει μεγαλύτερη επιφάνεια από αυτή που θα έδινε μία σφαίρα του ίδιου όγκου. Η μεγαλύτερη επιφάνεια διευκολύνει τη διάχυση των προϊόντων της αναπνοής σε όλο τον όγκο του κυττάρου. Βέβαια, η διάχυση θα διευκολυνόταν τόσο περισσότερο, όσο πιο δισκοειδές ήταν το σχήμα του. Αυτό όμως περιορίζεται από το γεγονός ότι το κύτταρο διασχίζει τα τριχοειδή αγγεία του κυκλοφορικού συστήματος των οποίων η διάμετρος είναι πολύ μικρότερη των κυττάρων (μικροκυκλοφορία - *microcirculation*). Η βασική μεγάλη διάσταση των ερυθρών αιμοσφαιρίων είναι, όπως έχει αναφερθεί, περίπου 8 μm . Το ερυθρό αιμοσφαίριο μπορεί να διέλθει κατά μήκος των τριχοειδών αγγείων (διάμετρος 5 μm) αλλά και διαμέσου του ενδοθηλιακού τοιχώματος (διάμετρος τάξεως 0.5 μm). Η διέλευση αυτή είναι δυνατή χάρη στην ικανότητα των ερυθρών να παραμορφώνονται (η δεδομένη γεωμετρία τους συντελεί στην παραμόρφωσή τους). Διαπιστώνουμε για παράδειγμα ότι κάθε μείωση του λόγου S/V (εμβαδόν/όγκος), με άλλα λόγια αύξηση του IS , καθιστά δύσκολη τη διέλευση του κυττάρου μέσα από τριχοειδή ίδιας ή μικρότερης διαμέτρου (σχήμα 2.13). Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι υπάρχει κάποιο όριο διαμέτρου, της τάξης των 2.8 μm , όπου πέρα από αυτό το κύτταρο υφίσταται την ονομαζόμενη "αιμόλυση" (διασπάται η κυτταρική του μεμβράνη και έχουμε απώλεια της αιμοσφαιρίνης, το λεγόμενο "μηχανικό τραύμα"). Το σχήμα 2.13 (β) δείχνει τις ελάχιστες συνθήκες που απαιτούνται για να διασχίσει το ερυθρό τα τριχοειδή. Στο σχήμα 2.13 (γ) παρουσιάζεται ένα σφαιρικό κύτταρο το οποίο "φράζεται" κατά τη δίοδό του από τριχοειδές αγγείο διαμέτρου 2.8 μm . Κύτταρο μεγαλύτερου όγκου, ελλειπτικής όμως μορφής είναι δυνατόν να διασχίσει τριχοειδές αγγείο μικρότερης διαμέτρου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.13(α).



Σχήμα 2.12 Στη σπεκτρίνη οφείλεται κατ' εξοχήν το σχήμα και η δοσμένη μορφή του ερυθρού αιμοσφαιρίου.



Σχήμα 2.13 Διέλευση ερυθροκυττάρου διαμέσου τριχοειδούς ίδιας ή μικρότερης διαμέτρου.

2.5 ΚΑΘΙΖΗΣΗ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ

Στο αίμα, το οποίο μακροσκοπικά έχει πυκνότητα 1.06 gr/cm^3 , τα ερυθρά αιμοσφαίρια έχουν πυκνότητα $\rho_1 = 1.10 \text{ gr/cm}^3$ και το πλάσμα έχει πυκνότητα $\rho_2 = 1.03 \text{ gr/cm}^3$. Κατά συνέπεια τα κύτταρα τείνουν να καθιζάνουν με αργό ρυθμό μέσα στο πλάσμα. Ο ρυθμός αυτός εξαρτάται από το μέγεθος των κυττάρων.

Ας υποθέσουμε για χάρη της ανάλυσης ότι το κύτταρο είναι σφαιρικό με ακτίνα a . Πάνω στο κύτταρο εξασκούνται το βάρος του B , η άνωση A , και μια δύναμη F_n που οφείλεται στην τριβή του κυττάρου με το υγρό που το περιβάλλει. Έχουμε:

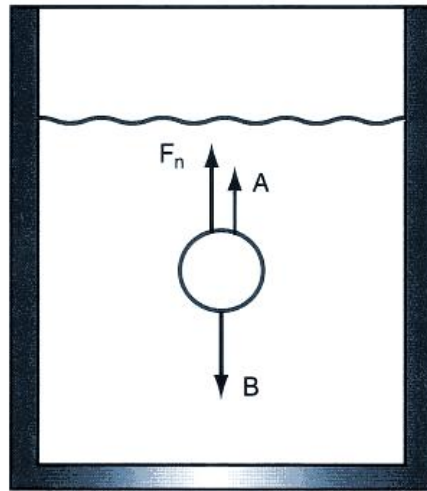
$$B = mg = r_1 V g = \frac{4}{3} \rho a^3 r_1 g \quad (2.19)$$

$$A = r_2 V g = r_2 \frac{4}{3} \rho a^3 g \quad (2.20)$$

Ο νόμος του Stokes δίνει:

$$F_n = 6\pi\mu a v \quad (2.21)$$

όπου v και a είναι η ταχύτητα πτώσης και η ακτίνα του κυττάρου αντίστοιχα και μ το ιξώδες του υγρού.



Σχήμα 2.14 Για τον υπολογισμό του ρυθμού καθιζήσεως.

Η ταχύτητα πτώσης αυξάνει σταδιακά και στη συνέχεια παίρνει οριακή τιμή και παραμένει σταθερή. Αυτό ισχύει όταν:

$$F_n + A = B \quad (2.22)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$u = \frac{2}{9} \cdot \frac{r_1 - r_2}{m} \cdot a^2 \cdot g \quad (2.23)$$

Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται "ρυθμός καθιζήσεως". Για αίμα στο οποίο έχει προστεθεί αντιπηκτικό (χημική ουσία που εμποδίζει την πήξη του αίματος), ο ρυθμός είναι 1-3 mm/h για άνδρες και 4-7 mm/h για γυναίκες (όπου h: ώρα). Σε οξείες μολύνσεις και σε μερικές χρόνιες ασθένειες (π.χ. φυματίωση), ο ρυθμός αυτός μπορεί να ανεβεί σε 100 mm/h ή και περισσότερο. Η μεγάλη αυτή αύξηση δεν μπορεί να

εξηγηθεί από τη μεταβολή καμιάς από τις παραμέτρους ρ_1 , ρ_2 , μ , g της παραπάνω εξίσωσης (γιατί τόσο μεγάλες μεταβολές δεν παρουσιάζονται). Εκείνο που συμβαίνει είναι ότι πολλά ερυθρά συγκολλούνται μεταξύ τους αυξάνοντας σημαντικά τον παράγοντα a του μεγέθους.

Η διαδικασία καθίζησης μπορεί επίσης να επιταχυνθεί τεχνητά, αυξάνοντας την επιτάχυνση της βαρύτητας g . Αυτό γίνεται με τη βοήθεια φυγοκέντρωσης.

2.6 ΠΗΞΗ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΙΜΟΣΤΑΤΗ

Το αίμα διερχόμενο από το κυκλοφορικό σύστημα και κατά την επαφή του με το ενδοθήλιο των αγγείων και το ενδοκάρδιο βρίσκεται σε υγρή κατάσταση. Κατά την έξοδο του όμως από τα αγγεία κάτω από ορισμένες συνθήκες, τίθενται σε λειτουργία ενζυμικές διεργασίες που έχουν σαν αποτέλεσμα τη μετάπτωσή του από την υγρή στην ημιστερεή κατάσταση. Η διεργασία αυτή ονομάζεται "πήξη του αίματος" (blood coagulation / blood clotting).

Το πηχθέν αίμα έξω από τα αγγεία και έξω από το σώμα λέγεται "πλακούς", ενώ μέσα στο κυκλοφορικό σύστημα "θρόμβος". Εάν, επί πλέον, κάτω από ορισμένες συνθήκες γίνει ρήξη αγγείων (π.χ. τραυματισμός) εντός του σώματος τότε εκτός της πήξης συντελείται και αγγειοσυστολή με αποτέλεσμα την "αιμόσταση" (hemostasis) και την επίσχεση της αιμορραγίας.

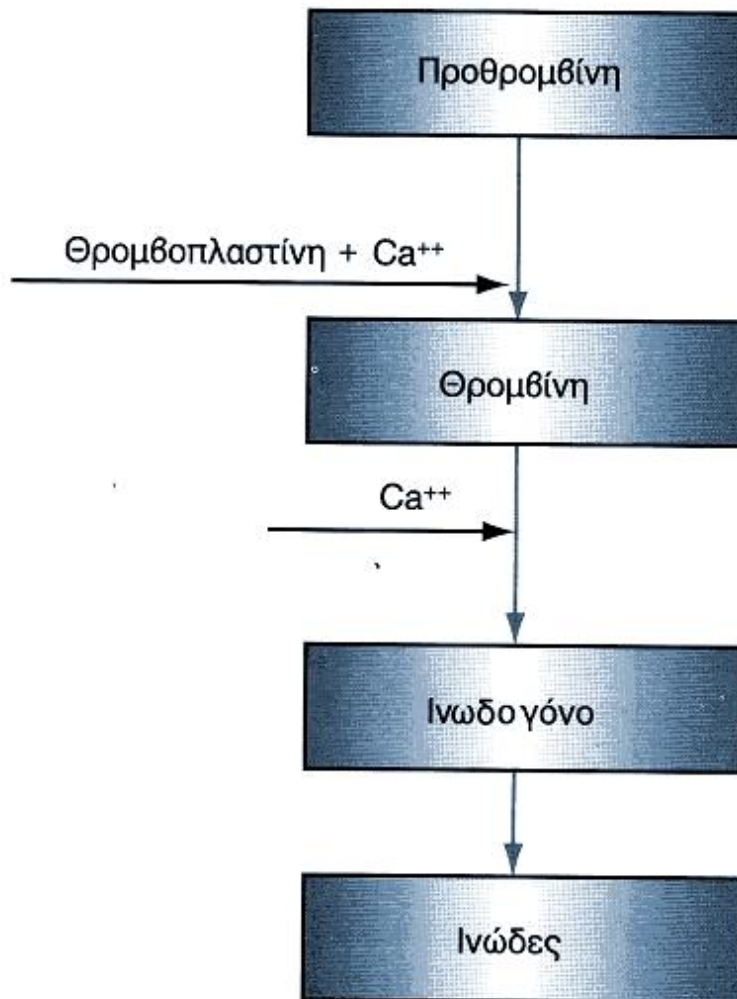
Η πήξη του αίματος και η αιμόσταση είναι απαραίτητες λειτουργίες του οργανισμού διότι διαφορετικά οποιαδήποτε ρήξη αγγείου θα συνεπάγετο τον θάνατο. Η πήξη του αίματος πραγματοποιείται με μετατροπή του ινωδογόνου (fibrinogen) του πλάσματος σε πυκνό δίκτυο ινώδους, εντός των δοκίδων του οποίου εμπλέκονται και συγκρατούνται τα έμμορφα συστατικά του αίματος και η υγρή του φάση. Το ινωδογόνο είναι σφαιρίνη (πρωτεΐνη) του πλάσματος και παράγεται από το ήπαρ (φυσιολογική συγκέντρωση στο πλάσμα 0.4-0.5 gr / 100 ml). Μετά από πάροδο μιας

ώρας περίπου οι δοκίδες του ινώδους βραχύνονται με αποτέλεσμα τη συρρίκνωση του πηγματος και την έκθλιψη της υγρής φάσης (ορός αίματος).

Η μετατροπή του ινωδογόνου σε ινώδες πραγματοποιείται με την επίδραση του ενζύμου θρομβίνη πάνω στο πρώτο, παρουσία ιόντων ασβεστίου (Ca^{++}). Η θρομβίνη παράγεται κατά την πήξη του αίματος από πρόδρομη ανενεργή μορφή που ονομάζεται προθρομβίνη, παράγεται στο ήπαρ και βρίσκεται στο πλάσμα κατόπιν επίδρασης της θρομβοπλαστίνης, παρουσία Ca^{++} . Οι παραπάνω διεργασίες παριστάνονται σχηματικά στο σχήμα 2.15.

Ο μηχανισμός της αιμόστασης σε ρήξη μικρού αγγείου συνίσταται στη συστολή του (μείωση της διαμέτρου). Συγχρόνως προσκολλώνται επί του ενδοθηλίου και επί των ινών κολλαγόνου αιμοπετάλια που αθροιζόμενα σχηματίζουν άμορφη μάζα και αποφράσσουν το χάσμα, ενώ ταυτόχρονα απελευθερώνουν σεροτονίνη η οποία προκαλεί περαιτέρω συστολή.

Το αίμα διατηρείται σε υγρή κατάσταση εκτός σώματος με δέσμευση του Ca^{++} , με προσθήκη οξαλικών ή κιτρικών αλάτων ή ηπαρίνης (αντιπηκτικά). Επίσης, *in vivo* διατηρείται στην υγρή κατάσταση με χορήγηση δικουμαρόλης που παρακωλύει την παραγωγή προθρομβίνης.



Σχήμα 2.15 Μετατροπή του ινωδογόνου σε ινώδες.

Πρόσθετες ουσίες

Μεταξύ των διαφόρων ουσιών που μπορούν να προστεθούν στο αίμα για κλινικούς λόγους οι πλέον σημαντικές από πλευράς ρεολογίας είναι τα αντιθρομβωτικά ή αντιπηκτικά (anticoagulants) και η δεξτράνη (dextran). Όλα δρουν επί των ερυθρών αιμοσφαιρίων μεταβάλλοντας το ηλεκτροστατικό φορτίο της μεμβράνης τους. Η μεμβράνη των ερυθρών αιμοσφαιρίων είναι φορτισμένη με αρνητικά ιόντα και περιβάλλεται από στρώμα διαλύματος με αντίθετα ιόντα που μαζί σχηματίζουν ένα

διπλό αντίθετα ιονισμένο στρώμα.

Το στρώμα αυτό που εκτείνεται μερικές δεκάδες \AA από τη μεμβράνη του κυττάρου, παίζει τον κύριο ρόλο στο σχηματισμό της απωθητικής δύναμης για να υπερνικηθούν οι ελκτικές δυνάμεις Van der Waals μεταξύ δύο γειτονικών κυττάρων. Η παρουσία πρωτεϊνών στο διάλυμα (ορό) μειώνει τη δύναμη Van der Waals και επομένως τη μεγάλη αλληλεπίδραση. Όμως, οι πρόσθετες ουσίες δεν λειτουργούν όλες με τον ίδιο μηχανισμό και επομένως δεν προκαλούν τα ίδια αποτελέσματα.

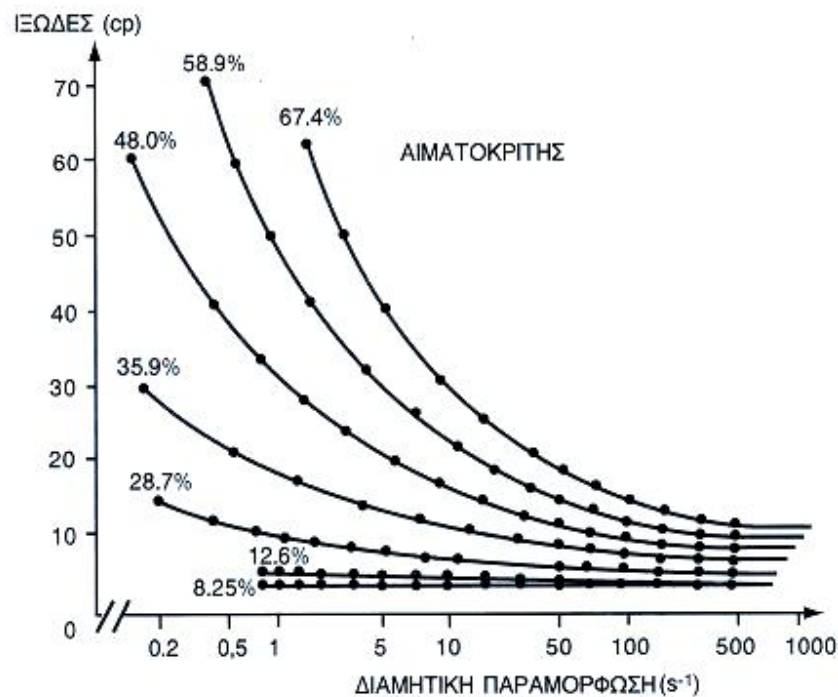
Τα αντιπηκτικά προστίθενται στο αίμα για να μειώσουν το βαθμό της αλληλεπίδρασης και να αποτρέψουν την πήξη. Μειώνουν τις αρχικές τάσεις (yield stress). Η φαινομενική συνεκτικότητα αλλάζει ανάλογα με τον τύπο του αντιπηκτικού που χρησιμοποιείται. Η ηπαρίνη (heparin), για παράδειγμα, μειώνει τη φαινομενική συνεκτικότητα ενώ τα κιτρικά (citrate) την αυξάνουν. Η δεξτράνη (dextran) προστίθεται στο αίμα για να βελτιώσει τις συνθήκες ροής, και συγκεκριμένα για να αυξήσει την παροχή και να μειώσει τον ρυθμό διάτμησης.

Χρησιμοποιούνται πολλών ειδών δεξτράνες. Διακρίνονται σε δεξτράνες μικρού μοριακού βάρους (μικρότερου του 40.000), που μειώνουν τη συνεκτικότητα και τον συντελεστή πηκτικότητας, και μεγάλου μοριακού βάρους (μεγαλύτερου του 40.000), που αυξάνουν τη φαινομενική συνεκτικότητα και αυξάνουν την αλληλεπίδραση των αιματικών συστατικών και άρα του βαθμού πηκτικότητας.

2.7 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΟ ΑΙΜΑΤΙΚΟ ΙΞΩΔΕΣ

Το αίμα, σε αντίθεση με άλλα βιολογικά ρευστά, όπως π.χ. το πλάσμα ή η αιμοσφαιρίνη, παρουσιάζει μία μη νευτόνεια συμπεριφορά (το ιξώδες του εξαρτάται από την ταχύτητα παραμόρφωσης -ή διατμητική παραμόρφωση-, δηλαδή τις υφιστάμενες τάσεις ανά πάσα στιγμή). Στο σχήμα 2.16 παρουσιάζεται το ιξώδες του αίματος σαν συνάρτηση της ταχύτητας παραμόρφωσης (σε poise και sec^{-1}

αντίστοιχα), για διαφορετικές τιμές του αιματοκρίτη (Hct) και σε θερμοκρασία $25^{\circ}C$. Στο σχήμα αυτό παρατηρείται ότι σε χαμηλές τιμές Hct το ιξώδες του αίματος είναι σταθερό. Αντίθετα, σε υψηλές τιμές Hct το ιξώδες αυξάνει με τη μείωση των διατμητικών τάσεων, ενώ γίνεται σταθερό στις πολύ υψηλές διατμητικές τάσεις.

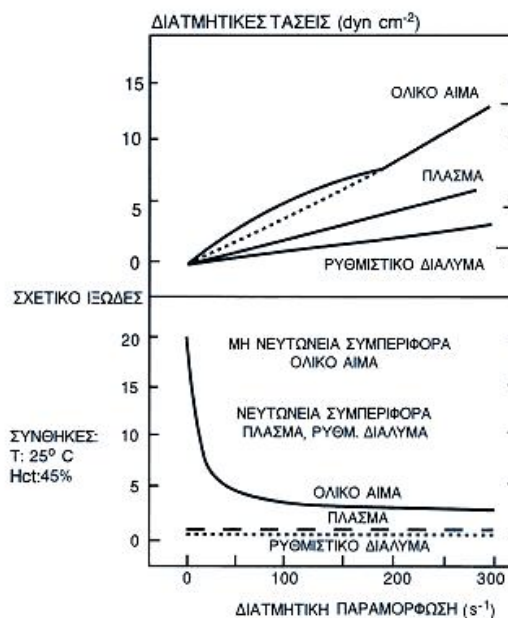


Σχήμα 2.16 Αιματικό ιξώδες σε σχέση με τις ταχύτητες παραμόρφωσης - διατμητικές παραμορφώσεις του αίματος.

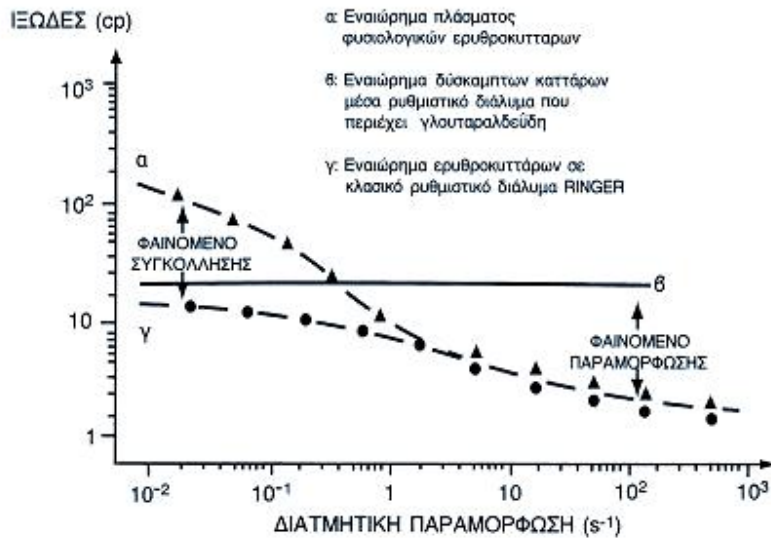
Η μη νευτώνεια συμπεριφορά του αίματος γίνεται πιο εμφανής στο σχήμα 2.17. Σε αυτό το σχήμα έχουμε το σχετικό ιξώδες του αίματος, του πλάσματος και των διαφόρων ρυθμιστικών διαλυμάτων -buffers, δηλαδή διαλυμάτων που προσομοιώνουν φυσιολογικά και βιοχημικά το πλάσμα- σε σχέση με την ταχύτητα παραμόρφωσης (κάτω μέρος της εικόνας) / διατμητική παραμόρφωση. Στο πάνω

μέρος του σχήματος έχουμε, για τα ίδια ρευστά, τη σχέση των διατμητικών τάσεων τις οποίες υφίσταται το αίμα κατά την κυκλοφορία του, με την ταχύτητα παραμόρφωσης. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το αιματικό ιζώδες εξαρτάται από τις διατμητικές τάσεις, σε αντίθεση με το πλάσμα και τα ρυθμιστικά διαλύματα. Ο όρος "σχετικό" ιζώδες χρησιμοποιείται στην περίπτωση του αίματος και αναφέρεται στην αύξηση του ιζώδους του πλάσματος από τα διάφορα κυτταρικά στοιχεία του αίματος. Ο λόγος του τελικού ιζώδους δια του ιζώδους του πλάσματος είναι το "σχετικό" ιζώδες.

Στο σχήμα 2.18 η καμπύλη (α) παριστάνει τη μεταβολή του ιζώδους σε σχέση με τη διατμητική παραμόρφωση. Ο αιματοκρίτης είναι 45% (φυσιολογική τιμή) και η θερμοκρασία είναι 37⁰C. Με βάση το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι στις χαμηλές διατμητικές τάσεις το ερυθροκυτταρικό εναιώρημα έχει υψηλό ιζώδες λόγω της συγκόλλησης μεταξύ των κυττάρων (σχηματισμός νομισματοειδών στιβάδων - rouleaux).



Σχήμα 2.17 Σχέση της ταχύτητας παραμόρφωσης (διατμητικής παραμόρφωσης) με τις εξασκούμενες διατμητικές τάσεις.



Σχήμα 2.18 Αιματικό ιξώδες σε συνάρτηση των διατμητικών παραμορφώσεων. Ρόλος της συγκόλλησης και της παραμόρφωσης των ερυθροκυττάρων.

Κάτω από την επίδραση χαμηλών διατμητικών τάσεων, άρα μικρών ταχυτήτων παραμόρφωσης (με άλλα λόγια στο μακροκυκλοφορικό σύστημα, αρτηρίες-φλέβες), τα κύτταρα παραμένουν λιγότερο ή περισσότερο συγκολλημένα μεταξύ τους. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το εναιώρημα των κυττάρων να έχει υψηλό ιξώδες (αριστερό μέρος της καμπύλης (α)). Αυξανόμενης τώρα της τιμής των διατμητικών τάσεων (όσο δηλαδή μικραίνει η διάμετρος των αγγείων) τα ερυθροκύτταρα αποσυγκολλούνται, πράγμα που οδηγεί σε μείωση του αιματικού ιξώδους (μεσαίο μέρος της καμπύλης (α)). Για διατμητικές παραμορφώσεις 1000 s^{-1} έχουμε κίνηση ερυθρών ένα προς ένα, δηλαδή κίνηση μεμονωμένων κυττάρων (στα τριχοειδή αγγεία). Από ένα όριο και μετά, τα ερυθρά, κάτω από την επίδραση υψηλών διατμητικών τάσεων, υφίστανται τη μέγιστη δυνατή παραμόρφωσή τους, το ιξώδες του εναιωρήματος γίνεται ανεξάρτητο των διατμητικών τάσεων και έχουμε μία νευτώνεια συμπεριφορά του "αίματος" (δεξί μέρος της καμπύλης (α)).

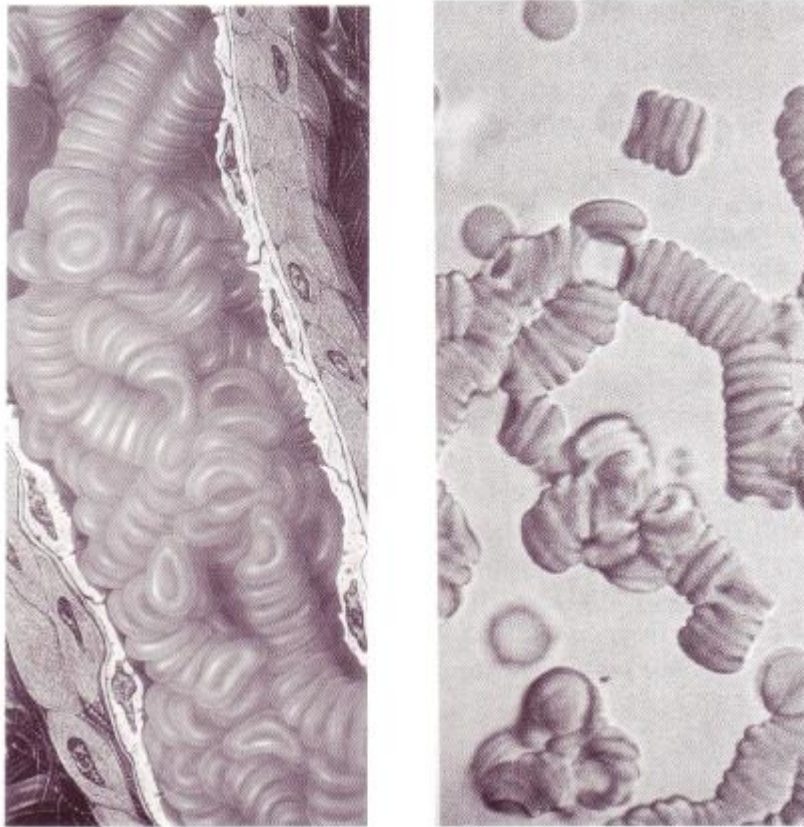
Η καμπύλη (β) αντιστοιχεί σε εναιώρημα ερυθρών αιμοσφαιρίων σε

γλουταραλδευδη. Η επώαση των ερυθρών μέσα σε αυτό το εναιώρημα έχει σαν αποτέλεσμα (λόγωβιοχημικών αντιδράσεων) τα ερυθρά να γίνονται δύσκαμπτα και σφαιρικά. Παρατηρούμε στην καμπύλη αυτή ότι το ιζώδες του εναιωρήματος μένει ανεξάρτητο από το μέγεθος των εξασκούμενων διατμητικών τάσεων. Η καμπύλη (β), η οποία όπως είπαμε αντιστοιχεί σε δύσκαμπτες "μεμονωμένες ερυθροκυτταρικές σφαίρες", είναι αυτονόητο ότι έχει μία νευτώνεια συμπεριφορά και σχετικά υψηλό ιζώδες λόγω ακριβώς αυτής της δυσκαμπτότητας των κυττάρων. Η διαφορά στις τιμές ιζώδους στις υψηλές διατμητικές τάσεις μεταξύ ολικού αίματος και εναιωρήματος δύσκαμπτων ερυθροκυττάρων δίνει το μέτρο της παραμορφωσιμότητάς τους (όλοι οι άλλοι παράγοντες είναι οι ίδιοι - μεμονωμένα ερυθρά στο εναιώρημα, 45% περιεκτικότητα, 37°C).

Τέλος, η καμπύλη (γ), παριστάνει τα ερυθροκύτταρα μέσα σε διάλυμα RINGER. Το διάλυμα αυτό διατηρεί τα ερυθροκύτταρα στη φυσιολογική τους μορφολογία αλλά δεν έχει τις ανάλογες πρωτεΐνες για να έχουμε συγκόλληση των ερυθρών (σχηματισμό rouleaux). Η διαφορά ιζώδους που παρατηρείται στις χαμηλές διατμητικές παραμορφώσεις μεταξύ των καμπύλων (α) και (γ) οφείλεται στην παρουσία ή απουσία rouleaux και αναφέρεται σαν συσσώρευση συγκολλητικότητα. Προοδευτική αύξηση των διατμητικών τάσεων συνοδεύεται από εξαφάνιση των rouleaux, ενοποίηση των τιμών ιζώδους στα εναιωρήματα και την τάση τους να έχουν Νευτώνεια συμπεριφορά.

Το παραπάνω σχήμα δίνει ερμηνεία στον γενικότερο χαρακτήρα της "μακροσκοπικής - ρεολογικής - ηλεκτρομηχανικής" συμπεριφοράς του αίματος, μέσα από τη θεώρηση της ίδιας της δομής του ρευστού αυτού.

Κατ' αρχάς, σε κατάσταση ηρεμίας, τα κύτταρα είναι οργανωμένα μέσα στο πλάσμα σε ένα τρισδιάστατο δίκτυο "νομισματοειδών στιβάδων" - rouleaux (σχήμα 2.19). Η οργάνωση αυτή εξαρτάται από τις πρωτεΐνες του πλάσματος και κυρίως το ινωδογόνο, το οποίο επηρεάζει τη συγκόλληση των κυττάρων.



Σχήμα 2.19 Δομή και οργάνωση των ερυθροκυττάρων σε rouleaux.

Οι βασικοί λοιπόν παράγοντες που καθορίζουν το αιματικό ιξώδες είναι οι παρακάτω τέσσερις:

- . Το ιξώδες του πλάσματος
- . Ο αιματοκρίτης
- . Η συγκολλητικότητα των κυττάρων
- . Η παραμορφωσιμότητα των κυττάρων

2.7.1 ΙΞΩΔΕΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

Το πλασματικό ιξώδες έχει νευτώνεια συμπεριφορά (είναι σταθερό για σταθερή θερμοκρασία και πίεση). Η τιμή του είναι περίπου 1.8 φορές μεγαλύτερη της τιμής

του H_2O και οφείλεται κυρίως στην υψηλή του περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες (λευκωματίνη, σφαιρίνη, ινωδογόνο) (70 g/l). Υπενθυμίζουμε ότι έως $55^\circ C$ το πλασματικό ιζώδες μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Στους $55^\circ C$ έχουμε μία αλλαγή φάσης με αποτέλεσμα την απότομη αύξηση του πλασματικού ιζώδους που οφείλεται στην πήξη των πρωτεϊνών.

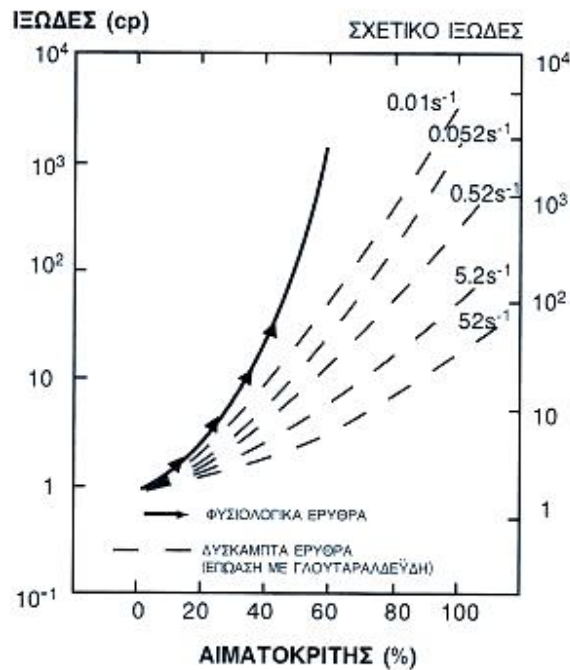
2.7.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΙΜΑΤΟΚΡΙΤΗ

Αναφέραμε ήδη την επίδραση του αιματοκρίτη στο αιματικό ιζώδες. Στο σχήμα 2.20 παρουσιάζεται ο αιματοκρίτης σε σχέση με το αιματικό ιζώδες και το σχετικό ιζώδες του αίματος.

Η μέση αύξηση του ιζώδους κατά μονάδα αιματοκρίτη γίνεται κατά 3 φορές μεγαλύτερη για τιμές αιματοκρίτη πάνω από 50% πράγμα που οφείλεται στο ότι σε χαμηλές διατμητικές τάσεις ευνοείται η συσσώρευση και συγκόλληση των ερυθροκυττάρων.

2.7.3 ΣΥΓΚΟΛΛΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ - ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ ΣΕ ΣΥΣΣΩΜΑΤΩΜΑΤΑ - ROULEAUX

Μια σημαντική ιδιότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων είναι η ικανότητά τους να συνενώνονται όταν το ανθρώπινο αίμα είναι στάσιμο ή ρέει αργά. Ο πρώτος που μελέτησε αυτό το φαινόμενο ήταν ο *Fahraeus* το 1921, ο οποίος παρατήρησε ότι τα ερυθρά αιμοσφαίρια συγκολλούνται το ένα στο άλλο με τις πλατιές πλευρές τους σχηματίζοντας έτσι κάτι που μπορεί να παρομοιαστεί με στοίβα από κέρματα. Αυτές οι στοίβες ονομάζονται *rouleaux*.



Σχήμα 2.20 Επίδραση του αιματοκρίτη στο αιματικό ιξώδες.

Κανονικά, σε στάσιμο υγιές αίμα ένα rouleau μπορεί να περιέχει από οκτώ έως τριάντα αιμοσφαίρια με ένα μέσο όρο γύρω στα δεκαπέντε. Τα rouleaux είναι εύκαμπτα και μπορούν να λυγίζουν όταν ρέουν γύρω από ακίνητες δομές. Σε μη παθολογικές καταστάσεις ο σχηματισμός τους είναι αντιστρεπτός και μπορούν να διασπαστούν σε συνθήκες υψηλής διάτμησης και να ξανασχηματιστούν όταν η ροή σταματήσει.

Η συσσωμάτωση των ερυθρών αιμοσφαιρίων σε μακριές αλυσίδες που μοιάζουν με στοίβα από νομίσματα (rouleaux), είναι ένα φαινόμενο που συμβαίνει στην κυκλοφορία του αίματος υπό φυσιολογικές συνθήκες. Όταν τα ερυθροκύτταρα διασχίζουν τα αγγεία, "συγκρούονται" συνέχεια, έρχονται σε επαφή μεταξύ τους και δημιουργούν συσσωματώματα ή αντίστροφα, με τις κρούσεις μεταξύ τους γίνονται κατατμήσεις ήδη σχηματισμένων ομάδων. Οι συγκολλήσεις μπορούν να είναι τελείως ακανόνιστες, με τα αιμοσφαίρια να καταλαμβάνουν αυθαίρετες θέσεις, ή να

μαζεύονται σε κυλινδρικές στοίβες. Συχνά αυτές οι στοίβες είναι μεγάλες και δενδροειδείς. Ο βαθμός της συγκόλλησης εξαρτάται από τον τύπο και τη συγκέντρωση των μακρομορίων που χρησιμοποιήθηκαν, τον ρυθμό διάτμησης στο διαλυτικό μέσο, τη θερμοκρασία, την ιοντική ισχύ και το ηλεκτρικό φορτίο των ερυθροκυττάρων.

Η αλληλεπίδραση των κυττάρων

Στο φυσιολογικό ανθρώπινο αίμα (με τιμή αιματοκρίτη $Hct > 40\%$) η μέση απόσταση ανάμεσα σε γειτονικά ερυθρά κύτταρα είναι λιγότερο από 10% από τη διάμετρο του κυττάρου. Έτσι κάθε στιγμή, τα περισσότερα από τα ερυθρά κύτταρα θα έπρεπε να είναι σε φυσική επαφή με τα άλλα κύτταρα. Στην πραγματικότητα, αναμένεται (Burton, 1972) ότι πολλά από τα ερυθρά κύτταρα θα παραμορφώνονταν από τον "συνωστισμό". Τα ερυθρά κύτταρα όμως μπορούν να αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο με πιο πολύπλοκους τρόπους. Κατ' αρχήν, αφού τα ερυθρά κύτταρα φυσιολογικά είναι αρνητικά φορτισμένα, είναι λογικό ότι μια δύναμη (απωθητική κατά κύριο λόγο) υπάρχει πάντα ανάμεσα σε γειτονικά κύτταρα (Whitmore, 1968). Από την άλλη, υπάρχουν δύο αντίθετες δυνάμεις που τείνουν να προκαλέσουν συγκόλληση των ερυθροκυττάρων: συγκολλητικές ουσίες στις επιφάνειες των κυττάρων και "γεφύρωση" ανάμεσα στα κύτταρα από μόρια πρωτεΐνης. Το πρώτο συμβαίνει σε συγκεκριμένα παθολογικά ή τραυματικά γεγονότα και οδηγεί σε "λάσπωμα" (sludge) του αίματος (μετατρέπεται δηλαδή σε ένα πολύ παχύρρευστο διάλυμα), ενώ το δεύτερο μπορεί να συμβεί κάτω από κανονικές συνθήκες, δημιουργώντας κυλινδρικούς σωρούς από ερυθρά κύτταρα ή αλλιώς "rouleaux".

Τα rouleaux στο ανθρώπινο αίμα έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης εδώ και 200 χρόνια. Η έρευνα πάνω σε αυτά όμως ξεκίνησε από τις πρωτοποριακές εργασίες του Fahraeus (1921, 1958), ο οποίος ήδη το 1921, έδωσε μεγάλη προσοχή στα

φαινόμενα της συνάθροισης και ιζηματοποίησης των ερυθρών αιμοσφαιρίων.

Η μελέτη της προσκόλλησης και του διαχωρισμού των ερυθρών αιμοσφαιρίων παρουσιάζεται σαν ένα περίπλοκο πρόβλημα μεγάλου ενδιαφέροντος για πεδία όπως η φυσιολογία, η βιοχημεία κυτταρικής επιφάνειας και η μηχανική μεμβρανών. Τα ερυθρά αιμοσφαίρια είναι πολύ δημοφιλή σαν μοντέλα κυττάρων: δεν έχουν πυρήνα, ούτε εσωτερικά οργανίδια και το ενδοκυτταρικό διάλυμά τους, το διάλυμα αιμοσφαιρίνης, είναι ένα νευτώνειο ρευστό. Η μεμβράνη που περιβάλλει το ενδοκυτταρικό διάλυμα είναι ένα ιζωδοελαστικό υλικό. Έχουν ομαλή επιφάνεια χωρίς πτυχές και υπόκεινται σε βιοχημικές μετατροπές για να μεταβάλλουν τη μοριακή δομή της επιφάνειάς τους.

Είναι τώρα αποδεκτό (Wells, 1964) ότι τα ερυθρά κύτταρα στα *rouleaux*, είναι δεμένα μαζί από πρωτεϊνικά μόρια πλάσματος, κυρίως ινωδογόνο. Ένα συνθετικό "ψευδο-ινωδογόνο" γνωστό και ως *dextran* (ένα πολυσακχαρίδιο με υψηλό μοριακό βάρος για το οποίο θα γίνει αναφορά πολλές φορές παρακάτω) χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές για να ευνοήσει τον σχηματισμό *rouleaux* στις ερευνητικές εργασίες. Επειδή τα επίπεδα ινωδογόνου και σφαιρίνης στο πλάσμα είναι πολύ ευαίσθητα στην ασθένεια και το στρες (Wells, 1964), ο βαθμός συσσώρευσης των ερυθρών κυττάρων μπορεί ενδεχομένως να παρέχει ένα μέτρο-δείκτη της κατάστασης της υγείας, και γι' αυτό η δημιουργία *rouleaux* παρέμεινε ένα θέμα εντατικής έρευνας.

Έχει αποδειχτεί (Whitmore, 1968) ότι για ένα συσσωμάτωμα δισκοειδών, το σχήμα *rouleaux* δίνει μέγιστη μηχανική σταθερότητα και επιπλέον ελαχιστοποιεί την ελεύθερη επιφάνεια και ενέργεια σε πλάσμα. Όμως, οι μηχανισμοί με τους οποίους τα ερυθρά κύτταρα συναθροίζονται, ειδικά σε αραιά εναιωρήματα, δεν είναι πολύ κατανοητοί, ακόμη και σήμερα.

Αιμοδυναμική της μικροκυκλοφορίας - αλληλεπίδραση ερυθρών κυττάρων σε πεδία ροής

Ο σχηματισμός *rouleaux* είναι λοιπόν πολύ σημαντικός παράγοντας στην αιμοδυναμική της μικροκυκλοφορίας. Η δημιουργία συσσωματωμάτων σε ζωντανούς οργανισμούς συνδέεται συνήθως με την ύπαρξη του ινωδογόνου του πλάσματος (*fibrinogen*) (Chien,1967) ή τον ορό σφαιρίνης (Dintenfass,1975). Τα *rouleaux* είναι επίσης ευαίσθητα στις συνθήκες ροής του υγρού στο οποίο είναι διαλυμένα(Usami,1975).

Πρέπει να σημειωθεί ότι η επέκταση του σχηματισμού συσσωματωμάτων, εξαρτάται σημαντικά από τον μέσο ρυθμό διάτμησης (Sigel et al.,1982). Ιδιαίτερα, οι Schmid - Schonbein et al. (1976) ανέφεραν ότι σε κανονικό στατικό αίμα, ολόκληρα δίκτυα από *rouleaux* μπορούν να σχηματιστούν, ενώ κάτω από υψηλές διατμητικές τάσεις της κανονικής αρτηριακής ροής, τα *rouleaux* τείνουν να διασπώνται σε πολύ μικρές μονάδες που συνήθως αποτελούνται από όχι περισσότερα από τρία κύτταρα η καθεμία. Πέρα από τη δημιουργία *rouleaux*, το πεδίο αρτηριακής ροής μπορεί επίσης να κάνει τα ερυθρά κύτταρα να υποστούν διάφορες μικρές προσαρμογές: επιμήκυνση κυττάρου, προσανατολισμό στην κατεύθυνση της ροής, περιστροφή κυττάρων ή "tank treading" (κίνηση "ερπύστριας") (Schmid-Schonbein and Wells, 1969, Fischer and Schmid-Schonbein, 1977, Fung, 1981).

Ενώ λοιπόν το πεδίο ροής μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τη συμπεριφορά των ερυθρών κυττάρων, μπορούμε να πούμε ότι και το αντίθετο αληθεύει επίσης. Στην πραγματικότητα, και μόνο η παρουσία σωματιδίων σε ένα υγρό θα αυξήσει γενικά την αντίσταση της ροής. Η τάση των ερυθρών κυττάρων να σχηματίζουν *rouleaux* δημιουργεί τη μη νευτώνεια συμπεριφορά του αίματος και, τέλος, ο βαθμός στον οποίο αυτό μπορεί να επηρεάσει το προφίλ της ταχύτητας σε ένα μεγάλο αγγείο, δεν είναι απόλυτα γνωστός (Whitemore, 1968). Πιστεύεται επίσης, (Rothe, 1976) ότι τα

συσσωματώματα μπορεί να προκαλέσουν τυρβώδη ροή αίματος σε σημαντικά χαμηλότερους αριθμούς του Reynolds από ό,τι σε ένα καθαρό υγρό.

Παράγοντες που καθορίζουν τη συγκολλητικότητα των ερυθροκυττάρων

Οι παράγοντες που καθορίζουν την τάση των ερυθρών να σχηματίζουν μεταξύ τους "rouleaux" διακρίνονται σε "εξωτερικούς" και "εσωτερικούς". Σαν "εξωτερικούς" παράγοντες λαμβάνουμε τις εξασκούμενες διατμητικές τάσεις, τη γεωμετρία των αγγείων, τον αιματοκρίτη, το ιζώδες του πλάσματος ή του χρησιμοποιούμενου ρυθμιστικού διαλύματος, τις μακρομοριακές ενώσεις του πλάσματος, καθώς και την ιοντική ισχύ του ρυθμιστικού διαλύματος. Σαν "εσωτερικούς" παράγοντες λαμβάνουμε την ελαστικότητα των κυττάρων, το ηλεκτρικό τους φορτίο, καθώς και την απορρόφηση διαφόρων μακρομορίων από την κυτταρική μεμβράνη.

Οι εσωτερικοί παράγοντες είναι πολλές φορές ανταγωνιστικοί, όπως η συγκόλληση μακρομορίων και η ταυτόχρονη απόθεση λόγω της αρνητικής ηλεκτρικής φόρτισης των κυττάρων.

Οι πρωτεΐνες του πλάσματος

Η πρωτεΐνη με τη μεγαλύτερη συγκέντρωση στο πλάσμα είναι η λευκωματίνη-αλβουμίνη (albumin) αλλά λόγω του μικρού της μεγέθους η επίδρασή της στις μηχανικές ιδιότητες του πλάσματος είναι μικρή. Σε ορισμένες περιπτώσεις, υψηλή συγκέντρωση λευκωματίνης συνοδεύεται από μείωση της συγκέντρωσης μιας άλλης πρωτεΐνης, της σφαιρίνης (globulin). Το γεγονός αυτό κατά ορισμένους (Chien, 1967) προκαλεί μείωση του ιζώδους. Η μέση συγκέντρωση της σφαιρίνης είναι 40-45%, αλλά σε ορισμένες κλινικές περιπτώσεις, όπως σε ασθένειες του ήπατος, φθάνει υψηλότερες τιμές που προκαλούν αύξηση του ιζώδους μέχρι και 1.5.

Η πρωτεΐνη που έχει το μεγαλύτερο μέγεθος αλλά τη μικρότερη συγκέντρωση (5%) είναι το ινωδογόνο (fibrinogen). Η τάση της να δημιουργεί συσσωματώματα την καθιστά την πλέον σημαντική πρωτεΐνη για τον καθορισμό των ρεολογικών ιδιοτήτων του πλάσματος. Η δημιουργία συσσωματωμάτων που προκαλείται από τη συγκέντρωση του ινωδογόνου είναι καθοριστικός παράγοντας για τη μη νευτώνεια συμπεριφορά του αίματος και ειδικά για την εμφάνιση της αρχικής τάσης και τη ρεολογική συμπεριφορά σε μικρούς ρυθμούς διάτμησης.

Ο Ponder το 1927 και ο Fahraeus το 1929 βρήκαν ότι οι πρωτεΐνες που είναι παρούσες στο πλάσμα είναι υπεύθυνες για τη συσσωμάτωση των ερυθρών αιμοσφαιρίων σε διάφορους βαθμούς, με πιο αποτελεσματικές κατά σειρά το ινωδογόνο, τη σφαιρίνη και την αλβουμίνη-λευκωματίνη. Ο μηχανισμός που αυτές οι πρωτεΐνες προκαλούν συσσωμάτωση των ερυθρών αιμοσφαιρίων δεν είναι απλός. Η επιφάνεια της μεμβράνης στο ερυθροκύτταρο έχει ένα αρνητικό φορτίο με μέγεθος-15 mV (Ponder, 1927), χάρις κυρίως στην καρβοξυλική ομάδα του N-ακετυλονευραμινικού οξέος στο ίζημα των γλυκοπρωτεϊνών της μεμβράνης. Αυτό οδηγεί σε μια απόθεση των επιφανειών των μεμβρανών γειτονικών κυττάρων. Άρα, συσσωμάτωση έχουμε μόνο όταν η ελκτική δύναμη που επηρεάζεται από τις πρωτεΐνες του πλάσματος ξεπερνά την ηλεκτροστατική απωθητική δύναμη.

Επίδραση των διατμητικών τάσεων και παραμορφώσεων

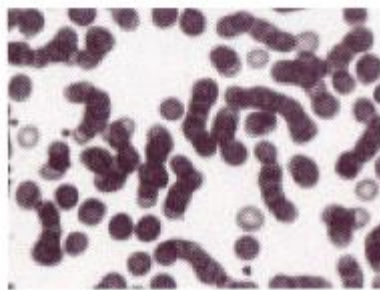
Σε υψηλούς ρυθμούς διάτμησης όπως ήδη αναφέρθηκε, τα rouleaux διασπώνται ταχύτατα, και τα αιμοσφαίρια χωρίζονται σε μονάδες. Κατά την απουσία διατμητικών τάσεων, τα ερυθροκύτταρα συγκρούονται σπάνια, επομένως η διαδικασία συγκόλλησης προχωράει αργά. Χαμηλοί ρυθμοί διάτμησης προκαλούν συγκόλληση των αιμοσφαιρίων, πιθανότατα επειδή αυξάνουν τις συγκρούσεις χωρίς ταυτόχρονα να προκαλούν μηχανικές δυνάμεις που τα διασπούν. Τεχνικές της

μηχανικής των ρευστών έχουν χρησιμοποιηθεί για να δείξουν ότι η προσκόλληση των ερυθροκυττάρων στα *rouleaux* είναι αντιστρέψιμη. Δυο διαχωρισμένα κύτταρα επανασυνδέονται όταν αφαιρεθούν οι εφαρμοζόμενες διατμητικές τάσεις (Chien,1977). Επίσης οι υψηλές διατμητικές τάσεις διασπών ακόμη και τα μεγαλύτερα *rouleaux* (Usami,1975). Στο ανθρώπινο αίμα, πλήρης διαχωρισμός συμβαίνει όταν ο ρυθμός παραμόρφωσης αυξηθεί πάνω από 50 sec^{-1} . Το ίδιο συμβαίνει, όταν οι διατμητικές τάσεις του διαλύματος υπερβούν τις 2 dynes/cm^2 .

Το αίμα σε χαμηλούς ρυθμούς διάτμησης επιδεικνύει ιζωδοελαστικότητα (Chien et al., 1975). Το "διαταραγμένο" ή μη φυσιολογικό ιζώδες του αίματος τείνει να είναι πιο σημαντικό στη μικροκυκλοφορία, και είναι γενικό χαρακτηριστικό του σχηματισμού *rouleaux* και της ικανότητας των αιμοσφαιρίων να απομονώνονται (Fung,1981).

Γεωμετρικοί παράγοντες

Σε αγγεία πολύ πλατύτερα από τη μέγιστη διάμετρο των ερυθρών αιμοσφαιρίων, η κυτταρική συγκόλληση δεν περιορίζεται σε δημιουργία γραμμικών *rouleaux*. Έτσι, τρισδιάστατα δίκτυα κυτταρικών συσσωματωμάτων σχηματίζονται αρκετά συχνά. Ένα τέτοιο *rouleaux* φαίνεται στο σχήμα 2.21.



Σχήμα 2.21 Τρισδιάστατα *rouleaux*.

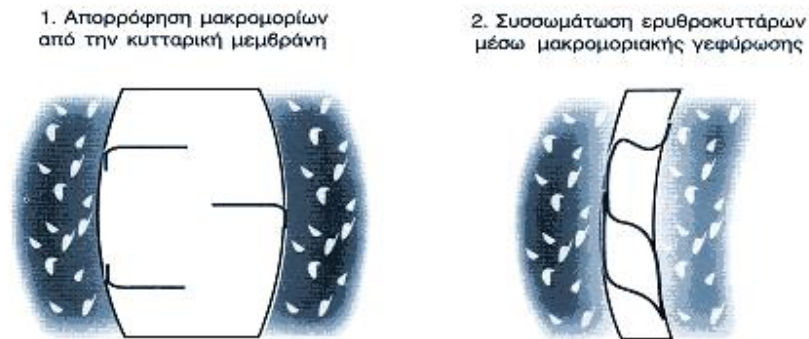
Σε αγγεία με διαμέτρους ελαφρά μεγαλύτερες από τη μέγιστη διάμετρο των ερυθρών αιμοσφαιρίων, οι συναθροίσεις παίρνουν τη μορφή γραμμικών *rouleaux*. Αντίθετα, σε τριχοειδή αγγεία με μικρότερη των αιμοσφαιρίων διάμετρο, οι γεωμετρικοί περιορισμοί και οι υψηλές διατμητικές τάσεις δεν ευνοούν τον σχηματισμό *rouleaux*.

Συγκέντρωση των ερυθρών αιμοσφαιρίων

Η δημιουργία συσσωματωμάτων απαιτεί ικανές συγκεντρώσεις ερυθρών αιμοσφαιρίων προκειμένου να υπάρχει αρκετή πιθανότητα κυτταρικών συγκρούσεων. Μια αύξηση του αιματοκρίτη στο κανονικό επίπεδο, γενικά οδηγεί στη δημιουργία *rouleaux*. Ωστόσο, σε κάποιους ρυθμούς διατμητικής παραμόρφωσης, η αύξηση της συγκέντρωσης οδηγεί σε διαχωρισμό. Ταυτόχρονα, σε μεγάλες συγκεντρώσεις εμποδίζεται η περιστροφή των κυττάρων.

Προσθήκη πολυμερών

Τα ερυθρά αιμοσφαίρια διαλυμένα σε πλάσμα, σχηματίζουν *rouleaux* σε μηδενική ροή, ή καταστάσεις χαμηλής διάτμησης. Μια σύγκριση των διαφόρων πρωτεϊνών του πλάσματος, δείχνει ότι η αποτελεσματικότητά τους εξαρτάται κυρίως από το μοριακό βάρος. Η αύξηση της αποτελεσματικότητας με την αύξηση του μοριακού βάρους εξηγείται (α) από την αύξηση των δεσμών λόγω προσρόφησης ανά μόριο και, (β) από τη μείωση της ηλεκτροστατικής απωθητικής δύναμης λόγω αύξησης της διακυτταρικής απόστασης. Ταυτόχρονα, η αύξηση της αποτελεσματικότητας σχετίζεται και με την αύξηση της συγκέντρωσης του μακρομορίου στο διάλυμα.

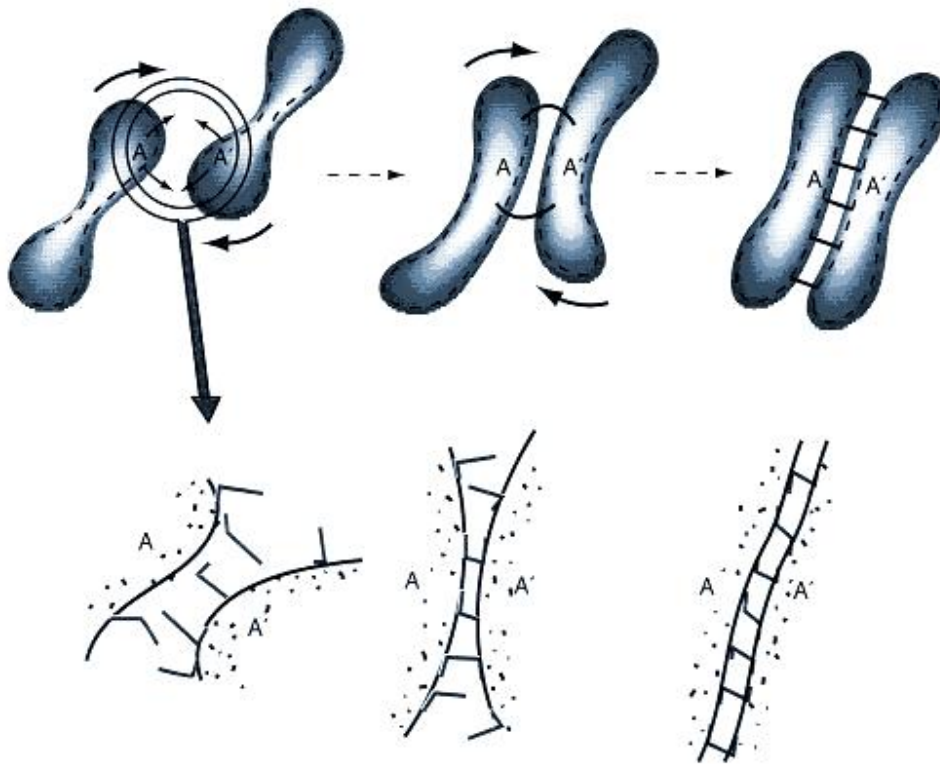


Σχήμα 2.22 Συγκόλληση ερυθροκυττάρων μέσω γεφύρωσης μακρομορίων.

Επιπρόσθετα, στις πρωτεΐνες του πλάσματος, ένα άλλο μακρομόριο για το οποίο ισχύουν τα παραπάνω είναι η δεξτράνη (*dextran*), ένα ουδέτερο πολυμερές της γλυκόζης, που είναι ικανό να προκαλέσει συγκόλληση των ερυθρών αιμοσφαιρίων (Thorsen, 1950, Brooks, 1973, Chien, 1977). Οι εμφανίσεις των σχηματισμών *rouleaux* έχουν εξεταστεί σε μοντελοποιημένα συστήματα με προσθήκη δεξτράνης (Brooks, 1973) με διάφορα μοριακά βάρη. Τα μακρομόρια απορροφούνται από τις απέναντι πλευρές δυο γειτονικών κυττάρων, και με τον τρόπο αυτό τα συνδέουν. Έχει προταθεί ότι η δεξτράνη προκαλεί συσσωμάτωση ερυθρών μέσω κατασκευής "γεφυρών" ανάμεσα στις επιφάνειες μέσω ασθενούς συγκολλησεως υδρογόνου (Brooks, 1973). Σε αυτό το μοντέλο τα ακραία τμήματα του μακρομορίου απορροφούνται από τις επιφάνειες των αιμοσφαιρίων, ενώ το κεντρικό τμήμα καταλαμβάνει τον διακυτταρικό χώρο. Αυτό συμβαίνει ως εξής: όταν δυο κύτταρα έρχονται κοντά από κάποιο εξωτερικό παράγοντα (μηχανική ανάδευση, καθίζηση και ιζηματογένεση, θερμική υποκίνηση), το ελεύθερο άκρο ενός μακρομορίου που έχει απορροφηθεί από το ένα κύτταρο, προσροφάται από το άλλο κύτταρο, στην περίπτωση που η ηλεκτροστατική απωθητική δύναμη δεν είναι τόσο ισχυρή για να προκαλέσει διαχωρισμό. Η γεφύρωση αυτή φαίνεται στο σχήμα 2.22.

Παραμορφωσιμότητα των ερυθροκυττάρων

Στο σχήμα 2.23 δείχνουμε τη διαδικασία σχηματισμού των rouleaux από αριστερά προς τα δεξιά. Επίσης διακρίνεται ο τρόπος ένωσης των μακρομορίων, καθώς και η σημασία της ελαστικότητας της μεμβράνης στον σχηματισμό των rouleaux (βλέπουμε την ανάγκη περιστροφής της κυτταρικής μεμβράνης γύρω από τον εαυτό της για να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή ένωση μέσω μακρομορίων). Στη συνέχεια, η ιδιότητα αυτή των ερυθροκυττάρων θα μελετηθεί εκτενέστερα.



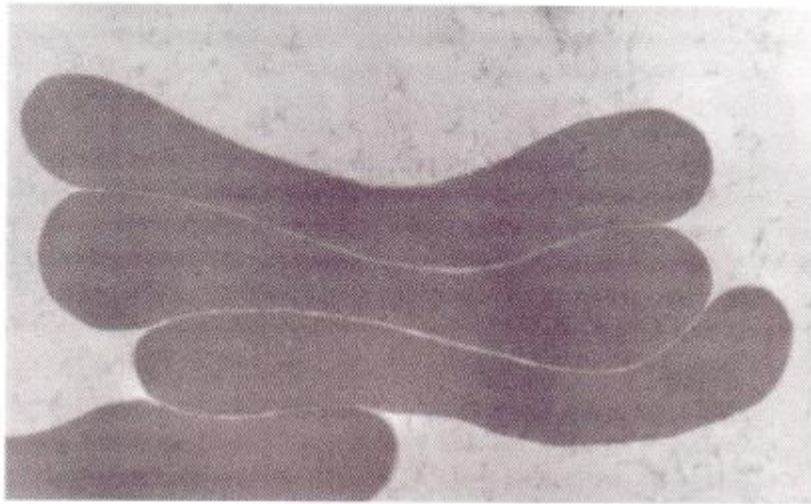
Σχήμα 2.23 Σχηματική παράσταση της διαδικασίας σχηματισμού των rouleaux.

Μελέτες των rouleaux ερυθρών αιμοσφαιρίων έδειξαν ότι τα κύτταρα έχουν τις επιφάνειές τους παράλληλες. Επομένως η παραμορφωσιμότητα των αιμοσφαιρίων παίζει σοβαρό ρόλο στη δημιουργία τους. Μείωσή της, σε φυσιολογικές και

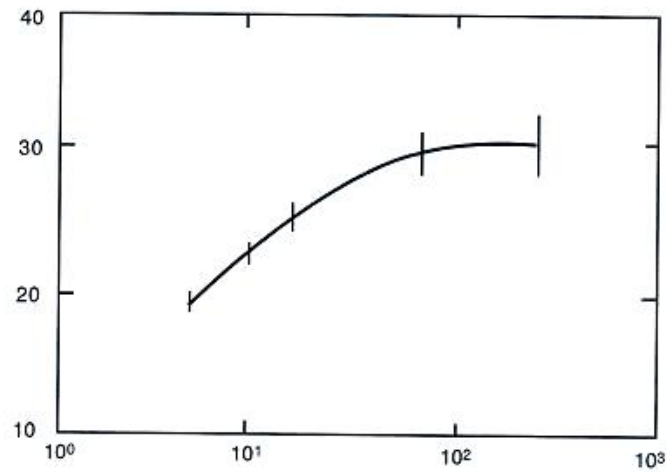
παθολογικές καταστάσεις, οδηγεί σε μείωση της συγκόλλησης των κυττάρων.

Διάφορες έρευνες με χρήση μικροσκοπίου για rouleaux που σχηματίστηκαν σε δεξτράνη, πλάσμα ή διαλύματα σφαιρίνης έδειξαν ότι οι επιφάνειες στα γειτονικά κύτταρα μέσα στα rouleaux, ακολουθούν η μια την άλλη σε καμπυλότητα με αποτέλεσμα μια ομοιόμορφη διακυτταρική απόσταση (σχήμα 2.24). Η διακυτταρική απόσταση σε rouleaux ερυθροκυττάρων σχηματισμένων με δεξτράνη, αυξάνει ανάλογα με το μοριακό βάρος (σχήμα 2.25).

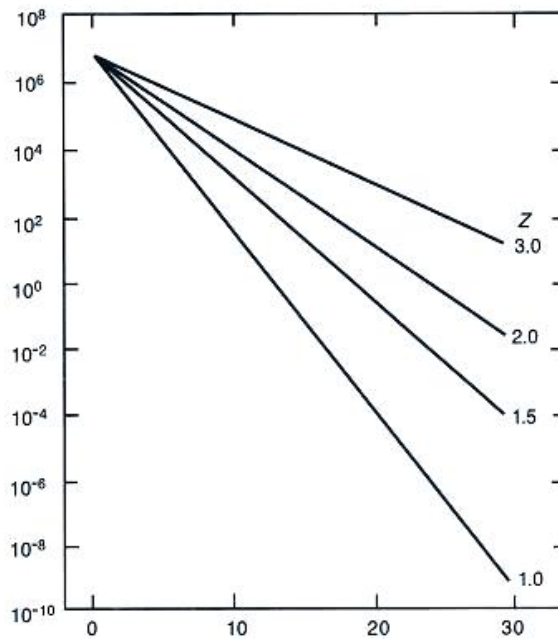
Τέλος, στο σχήμα 2.26 παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ της ηλεκτροστατικής αποθητικής δύναμης Π_a και της απόστασης d μεταξύ των κυττάρων. Σημειώνεται ότι το Π_a παριστάνεται σε κλίμακα log, τα κύτταρα βρίσκονται σε διάλυμα χαμηλής μοριακής συγκέντρωσης, 150 mM, και το Z αντιστοιχεί στο υπάρχον δυναμικό. Είναι κατανοητό ότι αυξανόμενου του Π_a το d μειώνεται.



Σχήμα 2.24 Ηλεκτρονική μικρογραφία εκπομπής από rouleaux ανθρώπινων ερυθροκυττάρων σε πλάσμα. Σημειώνονται οι παράλληλες επιφάνειες και η σχεδόν ομοιόμορφη διακυτταρική απόσταση.



Σχήμα 2.25 Παραλλαγή της διακυτταρικής απόστασης σε rouleaux ανθρώπινων ερυθροκυττάρων, συναρτήσει του μέσου μοριακού βάρους της δεξτράνης.



Σχήμα 2.26 Διάγραμμα μεταβολής της ηλεκτροστατικής αποθθητικής δύναμης με την απόσταση μεταξύ των κυττάρων.

Επίδραση του φορτίου επιφάνειας

Τα ερυθρά αιμοσφαίρια είναι αρνητικά φορτισμένα, κυρίως σαν αποτέλεσμα της παρουσίας του *N*-ακετυλο-νευραμινικού οξέος (σιαλικού οξέος). Εφόσον οι επιφάνειες των ερυθρών αιμοσφαιρίων στα *rouleaux* είναι όπως ήδη ειπώθηκε παράλληλες, η ηλεκτροστατική απωθητική δύναμη ανάμεσα στις κυτταρικές επιφάνειες μπορεί να εκτιμηθεί από τη θεωρητική σκοπιά της κολλοειδούς χημείας, για παράλληλες πλάκες με το φορτίο των επιφανειών των αιμοσφαιρίων. Από τη μελέτη αυτή διαπιστώνεται, ότι η ηλεκτροστατική απωθητική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας μειώνεται εκθετικά με τη διαπλάτυνση της απόστασης διαχωρισμού.

Το αρνητικό φορτίο της επιφάνειας της μεμβράνης μπορεί να εξαφανιστεί με επεξεργασία με νευραμινιδάση, ένα ένζυμο που διασπά το νευραμινικό οξύ από την επιφάνεια (Chien, 1975). Αυτή η προσέγγιση φάνηκε χρήσιμη στην απόδειξη ότι η αφαίρεση του αρνητικού φορτίου από την επιφάνεια που είναι υπεύθυνη για την ηλεκτροστατική άπωση, οδηγεί στην αύξηση της συγκόλλησης των ερυθρών αιμοσφαιρινών, όταν αυτή έχει ήδη προκληθεί από κάποια δεξτράνη. Επιπρόσθετα, η φάση διαχωρισμού των συσσωματωμάτων, που παρατηρήθηκε σε μεγαλύτερες συγκεντρώσεις δεξτράνης χωρίς αφαίρεση του ηλεκτρικού φορτίου, δεν παρατηρήθηκε όταν διασπάστηκε το νευραμινικό οξύ από την επιφάνεια (Chien, 1977). Τα κύτταρα παρέμειναν συσσωματωμένα.

2.7.4 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΩΝ

Σαν "παραμορφωσιμότητα" θα μπορούσαμε να ορίσουμε την ικανότητα του ερυθρού αιμοσφαιρίου να παραμορφώνεται όταν υφίσταται την επίδραση της συνεκτικής ροής και υπόκειται στην εξάσκηση τάσεων. Τις τάσεις αυτές τις υφίσταται καθόλη τη διάρκεια της ζωής του (120 ημέρες) καθώς διασχίζει το κυκλοφορικό σύστημα. Οι

εξασκούμενες αυτές τάσεις είναι διατμητικές ή κάθετες επί του κυττάρου. Οι διατμητικές τάσεις οφείλονται στις ταχύτητες παραμόρφωσης που αναπτύσσονται κατά την αιματική ροή μέσα στα αγγεία, σε αντίθεση με τις κάθετες τάσεις που είναι εσωτερικές ή εξωτερικές πιέσεις και οφείλονται σε φυσικοχημικά φαινόμενα (π.χ. όταν έχουμε αλλαγή της ωσμωτικής πίεσης).

Βέβαια, εδώ θα πρέπει να διαχωρίσουμε την "έκφραση" που βρίσκει αυτή η ιδιότητα σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα. Έτσι, για παράδειγμα, όταν το ερυθροκύτταρο παραμορφωθεί και η μελέτη του γίνει ενώ έχει υποστεί την τελική του παραμόρφωση, έχουμε τη "στατική" θεώρηση της παραπάνω ιδιότητας. Το ερυθροκύτταρο ξαναπαίρνει την αρχική του μορφή μετά από την κατάργηση των δυνάμεων που έχουμε εξασκήσει. Αυτή η συμπεριφορά του οφείλεται κυρίως στις ελαστικές ιδιότητες της μεμβράνης του κυττάρου. Αντίθετα, όταν έχουμε γρήγορες παραμορφώσεις και η εξέταση του φαινομένου γίνεται κατά τη διάρκεια αυτών των παραμορφώσεων πρόκειται για τη "δυναμική" προσέγγιση της εξέλιξης της παραμόρφωσης του ερυθροκυττάρου, καθώς αυτό διασχίζει τα τριχοειδή. Στην περίπτωση αυτή βασικό ρόλο παίζει η ιζωδοελαστικότητα της κυτταρικής του μεμβράνης και το ιζώδες της αιμοσφαιρίνης του.

Οι βασικοί τρόποι παραμόρφωσης της κυτταρικής μεμβράνης είναι οι παρακάτω:

Παραμόρφωση υπό σταθερή επιφάνεια

Η παραμόρφωση αυτή είναι ο κύριος και συνήθης μηχανισμός παραμόρφωσης των ερυθροκυττάρων όταν περνούν από τριχοειδή μικρότερης διαμέτρου. Κατά τον τρόπο αυτό, η επιφάνεια διατηρείται σταθερή κάτω από την επίδραση διατμητικών τάσεων T_1 και T_2 (σχήμα 2.27) και ισχύει:

$$T_1 = \frac{m \cdot (I_1^2 - I_1^{-2})}{2} \quad \text{και} \quad T_2 = \frac{m \cdot (I_2^2 - I_2^{-2})}{2} \quad (2.24)$$

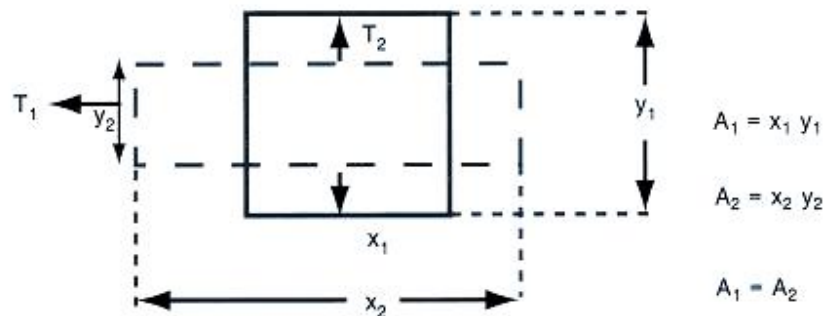
όπου λ_1 , λ_2 είναι οι λόγοι αρχικού και τελικού μήκους (x_1/x_2 , y_1/y_2) και μ ο συντελεστής ελαστικότητας σε σταθερή επιφάνεια.

Παραμόρφωση με αύξηση επιφανείας

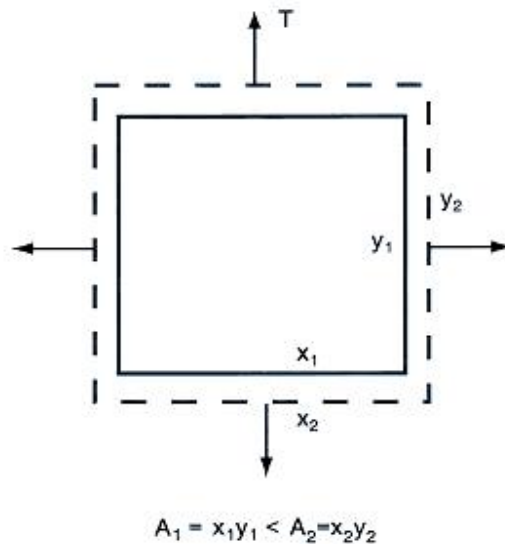
Η παραμόρφωση αυτού του είδους (καλείται επίσης και ισοτροπική, σχήμα 2.28) οφείλεται στην ενιαία εξασκούμενη διατμητική τάση T προς όλες τις κατευθύνσεις. Ισχύει ότι:

$$T_i = m \cdot (I_1 \cdot I_2 - 1) \quad (2.25)$$

όπου T_i η διατμητική τάση που εξασκείται στη μεμβράνη για κάθε άξονα i , μ ο συντελεστής ελαστικότητας της ισοτροπικής παραμόρφωσης και λ_1 , λ_2 οι λόγοι αρχικού και τελικού μήκους.



Σχήμα 2.27 Παραμόρφωση υπό σταθερή επιφάνεια.



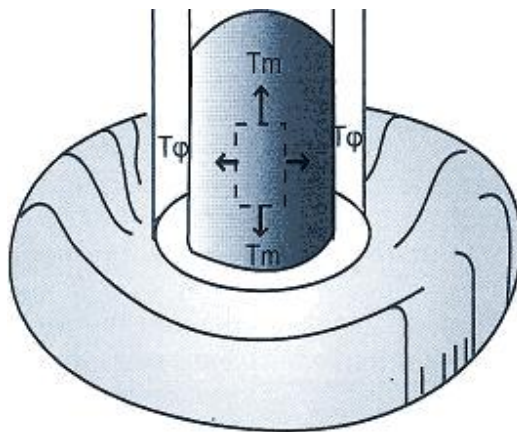
Σχήμα 2.28 Παραμόρφωση με αύξηση επιφάνειας.

Η παραμόρφωση με αύξηση της επιφάνειας παρατηρείται όταν ένα σφαιρικό κύτταρο τοποθετηθεί σε υπότονο διάλυμα. Η είσοδος νερού στο κύτταρο επαυξάνει την ήδη αυξημένη ενδοκυττάρια πίεση που τείνει να αυξήσει την επιφάνεια της μεμβράνης (πράγμα που μπορεί να γίνει σε μικρό βαθμό, στη συνέχεια όμως ακολουθεί αιμόλυση).

Παράδειγμα παραμόρφωσης της κυτταρικής μεμβράνης υπό σταθερή επιφάνεια είναι η αναρρόφηση ερυθρού σε μικροπροχοΐδα (μικροπιπέττα) (σχήμα 2.29). Σε αυτή την περίπτωση η διάμετρος της μικροπροχοΐδας είναι μικρότερη αυτής του ερυθρού και η αναρρόφηση γίνεται έως ότου ο δακτύλιος του κυττάρου που θα εισέλθει εντός της μικροπιπέττας λάβει σχήμα σφαιρικό. Η εξασκούμενη τάση T είναι αναγκαία για την αναρρόφηση του κυττάρου και αναλύεται σε T_m και T_ϕ .

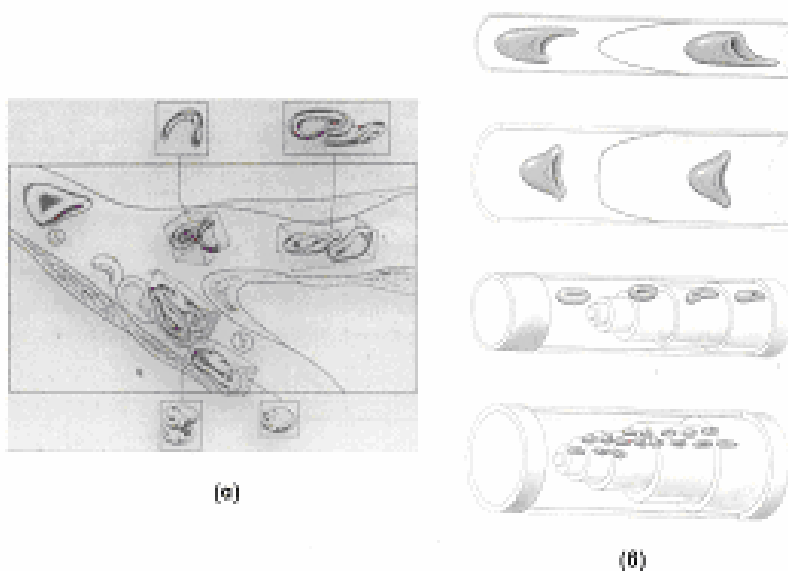
Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι, αν και, από άποψη φυσιολογίας αλλά και χρήσης, ο όρος παραμορφωσιμότητα (η μεγαλύτερη ή μικρότερη δυνατότητα του κυττάρου να παραμορφώνεται όταν υφίσταται τάσεις) είναι ικανοποιητικός, δεν έχει ωστόσο "φυσικό" νόημα, σε αντίθεση με τη "φυσική" σχέση τάσης - παραμόρφωσης.

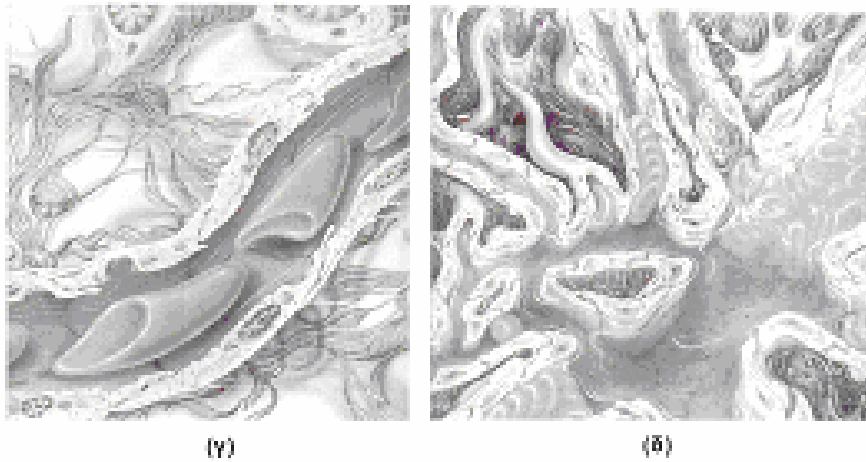
Οι παράγοντες που καθορίζουν την παραπάνω "ιδιότητα" του κυττάρου έχουν να κάνουν με τη δομή, τη γεωμετρία και την ίδια την πολυδιάστατη φύση του. Οι παράγοντες αυτοί είναι οι ηλεκτρομηχανικές ιδιότητες της κυτταρικής του μεμβράνης σε άμεση σχέση με τη λιποπρωτεϊνική σύστασή της, το ιζώδες της αιμοσφαιρίνης (δηλαδή το ιζώδες του εσωτερικού του κυττάρου) και τη μορφολογία του κυττάρου.



Σχήμα 2.29 Παραμόρφωση κυτταρικής μεμβράνης υπό σταθερή επιφάνεια.

Στο σχήμα 2.30 μπορούμε να διακρίνουμε όλες τις φόρμες και τις μορφές που λαμβάνουν τα ερυθροκύτταρα διασχίζοντας τα τριχοειδή.



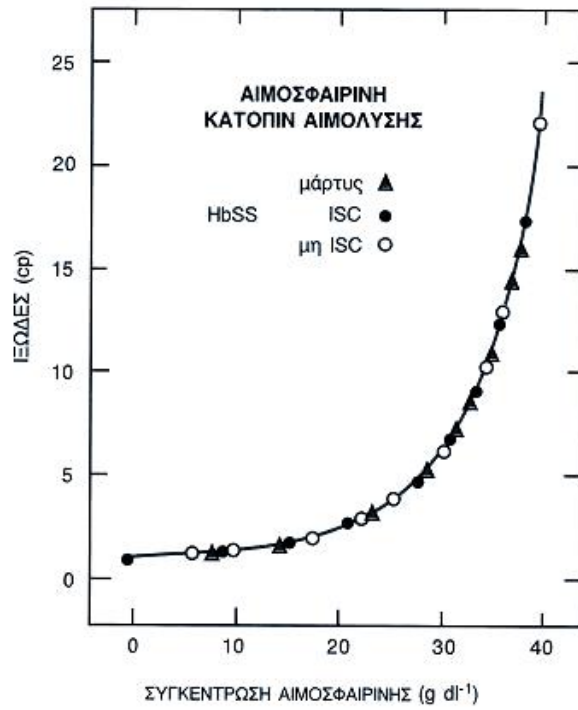


Σχήμα 2.30 Μορφές και σχήματα που λαμβάνουν τα ερυθροκύτταρα.

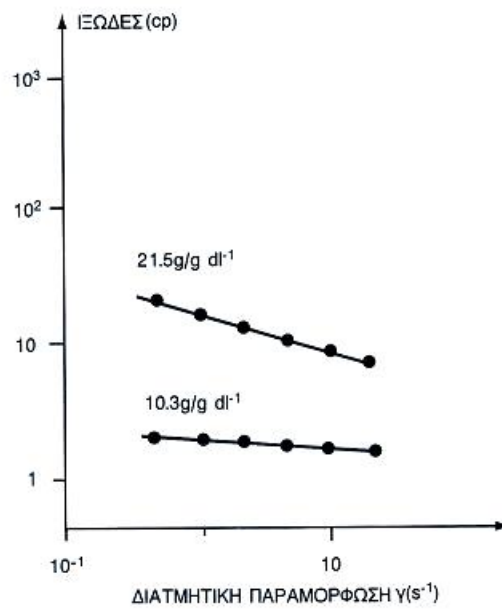
Εκτός της βασικής παρατήρησης ότι τα κύτταρα διατηρούν σταθερή την επιφάνειά τους στις φυσιολογικές συνθήκες, κοινό χαρακτηριστικό όλων των υφισταμένων παραμορφώσεων είναι ότι όλα τα κύτταρα ανακτούν πάντα την αρχική τους μορφή, έχουν δηλαδή "ιστορική μνήμη". Τέλος, να αναφέρουμε ότι το ιξώδες της αιμοσφαιρίνης έχει συμπεριφορά νευτώνειου ρευστού, εκτός παθολογικών περιπτώσεων, όπως η δρεπανοκυτταρική αναιμία κ.λπ. Το ιξώδες αυτό εξαρτάται από την περιεκτικότητα σε αιμοσφαιρίνη (σχήμα 2.31). Στο σχήμα 2.32, φαίνεται η νευτώνεια συμπεριφορά δύο διαλυμάτων αιμοσφαιρίνης διαφορετικής συγκέντρωσης.

Η ευκαμψία του ερυθρού αιμοσφαιρίου και η επίδρασή της στο ιξώδες

Για να μπορέσει κανείς να συνάγει από τις φυσικές ιδιότητες του μεμονωμένου αιμοσφαιρίου συμπεράσματα για τη μακροσκοπική συμπεριφορά του αίματος, θα πρέπει να συνδέσει τη μικρορροεολογία με τη ρεολογία. Αυτό προϋποθέτει λεπτομερή ανάλυση των χαρακτηριστικών της ελαστοϋδροδυναμικής του μεμονωμένου



Σχήμα 2.31 Μεταβολή του ιξώδους με την αιμοσφαιρίνη.



Σχήμα 2.32 Μεταβολή του ιξώδους με τον ρυθμό παραμόρφωσης.

ερυθρού αιμοσφαιρίου και ακολούθως των φαινομένων αλληλεπίδρασης των αιμοσφαιρίων μεταξύ τους και μεταξύ αυτών και του τοιχώματος των αρτηριών. Η συνολική αθροιστική εκτίμηση των παραπάνω φαινομένων μας δίνει τη μακροσκοπική θεώρηση και περιγραφή της συμπεριφοράς του αίματος.

Το μεμονωμένο ερυθρό αιμοσφαίριο υφίσταται την επίδραση της συνεκτικής ροής και υπόκειται σε διατμητικές δυνάμεις. Έτσι, παραμορφώνεται. Η παραμόρφωση εξαρτάται από τον ρυθμό διάτμησης, το περιεχόμενό του και τις ελαστικές ιδιότητες της κυτταρικής μεμβράνης.

Ένα ρεαλιστικό μοντέλο προτάθηκε από τον Fung (1966) που περιγράφει το ερυθρό αιμοσφαίριο ως εύκαμπτη, μη εκτατή κλειστή μεμβράνη μη πλήρως γεμάτη από συνεκτικό ασυμπίεστο ρευστό. Σε μεγάλους ρυθμούς διάτμησης η παραμόρφωση του μεμονωμένου κυττάρου είναι ο κύριος παράγοντας της μείωσης του σχετικού ιξώδους. Η παραμόρφωση που επάγεται λόγω διάτμησης και επομένως η μείωση του σχετικού ιξώδους μειώνονται με τον ρυθμό διάτμησης. Όταν ο ρυθμός διάτμησης μειώνεται, το φαινόμενο της παραμόρφωσης μειώνεται και η αλληλεπίδραση των κυττάρων μεταξύ τους και με το τοίχωμα γίνονται οι κυρίαρχοι παράγοντες.

Το δυναμικό Zeta της μεμβράνης του κυττάρου δημιουργεί την απωθητική δύναμη μεταξύ των κυττάρων που έρχονται σε επαφή και του τοιχώματος του αγγείου.

Απαραίτητο είναι να έχουμε υπόψη μας ότι σε παθολογικές περιπτώσεις αυτές οι ιδιότητες αλλάζουν δραστικά. Για παράδειγμα, παθολογικά κύτταρα υφίστανται παραμορφώσεις στερεού σώματος. Μεταβολή στις ιδιότητες του περιεχομένου του ερυθρού αιμοσφαιρίου προκαλεί αυξημένη δυσκαμψία (ανελαστικότητα) του κυττάρου και επομένως αύξηση του ιξώδους του αίματος. Σε περιπτώσεις απώλειας τμήματος του ηλεκτρικού φορτίου, που συμβαίνει συχνά στα κύτταρα, η δύναμη μειώνεται και αυτό προκαλεί μεγαλύτερη αλληλεπίδραση μεταξύ των κυττάρων και βοηθάει τη δημιουργία συσσωματωμάτων και επομένως μεταβολή των ρεολογικών ιδιοτήτων.

2.8 ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ, ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΡΕΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ

Οι συνέπειες της μηχανικής συμπεριφοράς του αίματος μπορούν να κωδικοποιηθούν ως εξής:

1. Σε αγγεία διαμέτρου D , όπου $D > 500 \mu\text{m}$, λόγω του υψηλού αριθμού Re , οι δυνάμεις αδράνειας παίζουν σημαντικό ρόλο. Εκτός της ύπαρξης μη γραμμικών φαινομένων, αξιοσημείωτο είναι το ότι το αίμα θεωρείται σαν ομογενές ρευστό.

2. Σε αγγεία διαμέτρου $100 < D < 500 \mu\text{m}$, η ροή του αίματος βοηθάται από μία λιπαντική στοιβάδα στα τοιχώματα των αγγείων, που είναι το πλάσμα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τη λεγόμενη διφασική ροή με αξονική συγκέντρωση των ερυθρών (σχήμα 2.33).

3. Στα τριχοειδή αγγεία διαμέτρου $10 > D > 3 \mu\text{m}$, τα ερυθρά έχουν την ίδια περίπου διάμετρο ή μικρότερη και κυκλοφορούν μεμονωμένα. Έτσι, ουσιαστικά η κυκλοφορία σε αυτό το επίπεδο εξαρτάται αποκλειστικά από τις μηχανικές / φυσιολογικές ιδιότητες των κυττάρων αυτών.

4. Το αίμα από μηχανική άποψη θεωρείται σώμα ιξωδοελαστικό, το οποίο, κάτω από ορισμένες συνθήκες, μπορεί να έχει και συμπεριφορά πλαστικού σώματος.

5. Οι όροι "Μακρό" και "Μικρό" της κυκλοφορίας του αίματος είναι κατανοητό ότι δεν καλύπτουν μόνο τα κριτήρια της φυσιολογίας, αλλά και της μηχανικής.

6. Βασικός διαχωρισμός ως προς τη "μηχανική" συμπεριφορά του αίματος είναι ο αριθμός του Reynolds, όπως έχουμε ήδη αναφέρει (βλ. πίνακα 2.6) είναι:

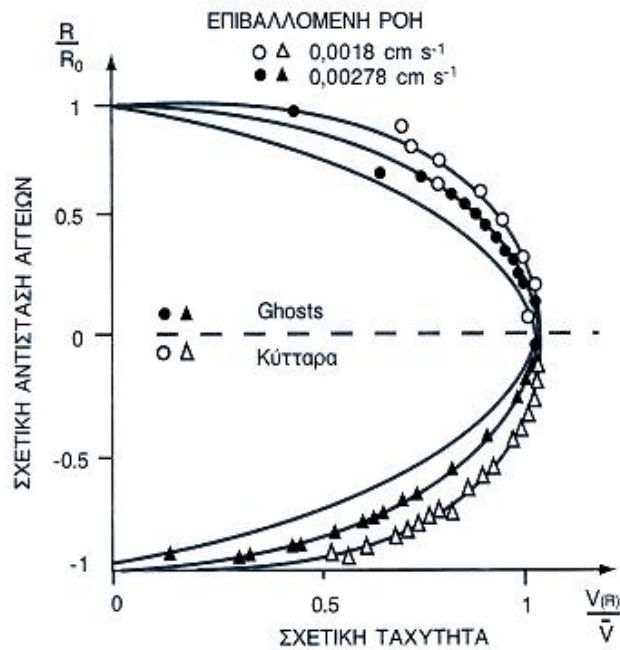
$$R_E = r \cdot u \cdot \frac{D}{m} \quad (2.26)$$

Όπου ρ είναι η πυκνότητα, v η ταχύτητα ρευστού, D η διάμετρος του αγγείου, και μ το ιξώδες. Να σημειώσουμε εδώ, ότι ουσιαστικά ο αριθμός R_E ορίζει τον λόγο μεταξύ των δυνάμεων αδρανείας και των δυνάμεων του ιξώδους.

Στον πίνακα 2.6 αναφέρονται οι υδροδυναμικές συνθήκες που επικρατούν στο μικροκυκλοφορικό.

Πίνακας 2.6 Υδροδυναμικές συνθήκες του μικροκυκλοφορικού. D_a είναι η διάμετρος του αγγείου, D_r είναι η διάμετρος του ερυθρού αιμοσφαιρίου και F_d είναι οι διατημητικές τάσεις.

<i>Είδος αγγείου</i>	<i>Διάμετρος (μm)</i>	<i>D_a/D_r</i>	<i>Ταχύτητα (cm/sec)</i>	<i>Αριθμός R_E</i>	<i>F_d (dyn/cm²)</i>
<i>Μικρές αρτηρίες</i>	<i>70-500</i>	<i>10-60</i>	<i>4</i>	<i>1-5</i>	<i>30-180</i>
<i>Αρτηρίδια</i>	<i>10-70</i>	<i>1-10</i>	<i>-5</i>	<i><0.1</i>	<i>20-160</i>
<i>Τριχοειδή</i>	<i>4-10</i>	<i><1</i>	<i>-1</i>	<i><0.002</i>	<i>30-80</i>
<i>Φλεβίδια</i>	<i>10-110</i>	<i>1-14</i>	<i>-4</i>	<i><0.1</i>	<i>10-130</i>
<i>Μικρές φλέβες</i>	<i>110-500</i>	<i>15-60</i>	<i>2</i>	<i><3</i>	<i>10-60</i>



Σχήμα 2.33 Προφίλ της ταχύτητας των ερυθροκυττάρων καθώς και των αντίστοιχων μεμβρανών τους (ghosts), στο μικροκυκλοφορικό.

2.9 ΠΛΑΣΜΑ ΚΑΙ ΟΡΟΣ

Το ιζώδες του πλάσματος εξαρτάται από τη συγκέντρωση πρωτεΐνης και γενικά αυξάνεται με τη συγκέντρωση της πρωτεΐνης. Αν και κάθε πρωτεΐνη έχει διαφορετική επίδραση στις φυσικές ιδιότητες του πλάσματος και στη ρεολογική συμπεριφορά του, εν τούτοις υπάρχουν μερικές εμπειρικές σχέσεις που συνδέουν τη συγκέντρωση πρωτεΐνης με το ιζώδες. Μία από αυτές είναι η σχέση:

$$m_p = m_w \frac{1}{1 - b \cdot c} \quad (\text{Hess- Bingham}) \quad (2.27)$$

όπου m_p και m_w είναι αντίστοιχα το ιζώδες του πλάσματος και του νερού, c είναι η συγκέντρωση του πλάσματος ή του ορού σε πρωτεΐνες και b μια σταθερά.

Η σχέση μεταξύ ιζώδους αίματος και ιζώδους πλάσματος δίνεται από τον Bayliss ως τροποποιημένη εξίσωση Hatschek από τους Whittaker και Winton:

$$m_b = m_p \cdot \frac{k}{1 - f^{1/3}} \quad (2.28)$$

όπου η k είναι συνάρτηση της ακτίνας του αγωγού και φ η συγκέντρωση του πλάσματος σε έμμορφα συστατικά.

Η πρωτεΐνη με τη μεγαλύτερη συγκέντρωση στο πλάσμα είναι η λευκωματίνη (albumin) αλλά λόγω του μικρού της μεγέθους η επίδρασή της στις μηχανικές ιδιότητες του πλάσματος είναι μικρή. Σε ορισμένες περιπτώσεις υψηλή συγκέντρωση λευκωματίνης συνοδεύεται από μείωση της συγκέντρωσης μιας άλλης πρωτεΐνης, της σφαιρίνης (globulin). Αυτό κατά μία άποψη προκαλεί μείωση του ιζώδους. Η μέση συγκέντρωση της σφαιρίνης είναι 40-45%, αλλά σε ορισμένες κλινικές περιπτώσεις, όπως κάποιες ασθένειες του ήπατος, παίρνει υψηλότερες τιμές που προκαλούν αύξηση του ιζώδους μέχρι και 1.5 cp.

Η πρωτεΐνη που έχει το μεγαλύτερο μέγεθος αλλά τη μικρότερη συγκέντρωση (5%) είναι το ινωδογόνο (fibrinogen). Η τάση της να δημιουργεί συσσωματώματα την καθιστά την πλέον σημαντική πρωτεΐνη για τον καθορισμό των ρεολογικών ιδιοτήτων του πλάσματος. Η δημιουργία συσσωματωμάτων λόγω της συγκέντρωσης του ινωδογόνου είναι καθοριστικός παράγοντας για τη μη νευτώνεια συμπεριφορά του αίματος και ειδικά για την εμφάνιση της αρχικής τάσης, t_0 και τη ρεολογική συμπεριφορά σε μικρούς ρυθμούς διάτμησης.

Ο Merrill (1965) πρότεινε την παρακάτω έκφραση για την τάση ροής, t_0 ως συνάρτηση της συγκέντρωσης του ινωδογόνου:

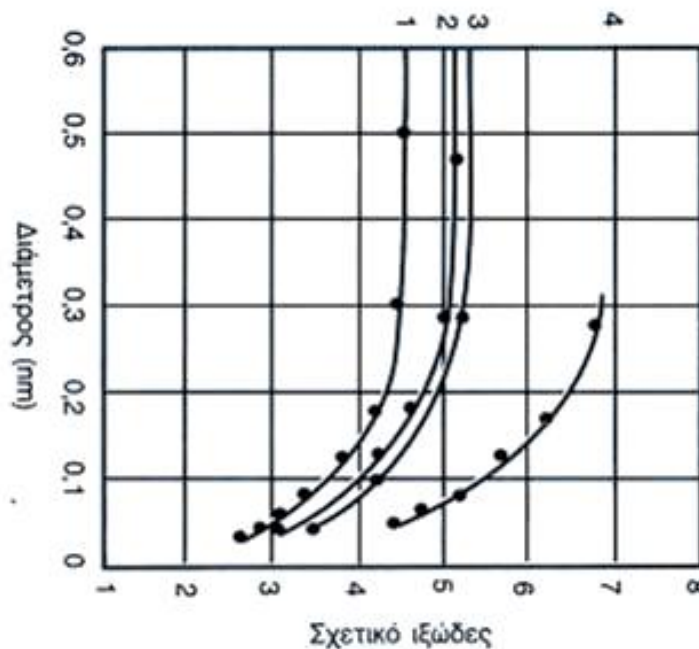
$$t_0^{1/2} = 0.36 \cdot \left(\frac{B}{1-c} - 1 \right) \quad (2.29)$$

όπου B είναι εμπειρική συνάρτηση της συγκέντρωσης του ινωδογόνου στο πλάσμα. Εάν από το πλάσμα αφαιρεθούν οι πρωτεΐνες, το προκύπτον διάλυμα λέγεται ορός (*serum*). Ο ορός έχει καθαρά νευτώνεια συμπεριφορά χωρίς αρχική τάση. Το ιξώδες του ορού είναι μικρότερο κατά 20% από εκείνο του πλάσματος. Οι πλέον συνηθισμένες τιμές για την πυκνότητα του πλάσματος είναι 1.035 gr/ml και για το ιξώδες 0.011 – 0.016 poise.

2.10 ΕΠΙΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ ΣΩΛΗΝΑ (ΑΓΓΕΙΟΥ) ΣΤΟ ΙΞΩΔΕΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ

Σε πειράματα που διεξήχθησαν από τους *Fahraeus* και *Lindquist* (1931) σε γυάλινους σωλήνες ποικίλων διαμέτρων και με σταθερή κλίση πίεσης αποδείχτηκε ότι οι σωλήνες διαμέτρου μικρότερης των 400 μm εμφάνιζαν μεγάλη πτώση του φαινομενικού ιξώδους και αύξηση του αιματοκρίτη. Το φαινομενικό ιξώδες ορίζεται με την τιμή της κλίσεως της καμπύλης $Q(\Delta P)$.

Η μείωση του φαινομενικού ιξώδους και η εξάρτησή του από τη διάμετρο του σωλήνα φαίνεται στο σχήμα 2.34 και λέγεται φαινόμενο *Fahraeus - Lindquist*. Οι *Fahraeus - Lindquist* ονόμασαν το εύρημά τους "μη ομαλή συμπεριφορά" του αίματος. Εν τούτοις δεν πρόκειται για ανωμαλία αλλά για συμπεριφορά που εξηγείται από δύο μηχανισμούς ροής:



Σχήμα 2.34 Φαινόμενο Fahraeus - Lindquist.

1. Τη μεταβολή του αιματοκρίτη σε σωλήνα μικρής διαμέτρου,
2. Την τάση των ερυθρών αιμοσφαιρίων να μεταναστεύουν προς το κέντρο του σωλήνα.

2.10.1 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΚΡΙΤΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ ΜΙΚΡΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

Η τιμή του αιματοκρίτη για το συνολικό αίμα είναι μια μέση τιμή που προέρχεται από μέτρηση σε κάποιο δείγμα αίματος. Η συγκέντρωση όμως των έμμορφων συστατικών όταν ρέει το αίμα δεν είναι σταθερή σε κάθε θέση του πεδίου ροής. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο συγκοινωνούντα δοχεία συνδεδεμένα με σωλήνα σταθερής ακτίνας R και ότι κάθε δοχείο έχει σταθερή συγκέντρωση C_0 (έμμορφων συστατικών, δηλαδή αιματοκρίτη). Εάν αγνοηθεί η κατά μήκος επίδραση και υποτεθεί ότι η συγκέντρωση

c είναι συνάρτηση της ακτινικής απόστασης r , $c(r)$, τότε η μέση συγκέντρωση σωματιδίων σε κάθε διατομή του σωλήνα είναι:

$$\bar{c} = \frac{1}{\rho R^2} \int_0^R 2\rho r c(r) dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R c(r) r dr \quad (2.30)$$

Στην έξοδο του σωλήνα στο άλλο δοχείο η συγκέντρωση θα πρέπει να εξισωθεί με εκείνη του δοχείου c_0 και επομένως:

$$\int_0^R c_0 u(r) 2\rho r u(r) dr \Rightarrow$$

$$c_0 = \frac{\int_0^R u(r) c(r) r dr}{\int_0^R u(r) r dr} \quad (2.31)$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = \frac{2}{R^2} \frac{\left[\int_0^R c(r) r dr \right] \left[\int_0^R u(r) r dr \right]}{\int_0^R u(r) c(r) r dr} \quad (2.32)$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορεί να αποδειχθεί ότι μόνον εάν $c(r) = \text{const}$ τότε $\bar{c} = c_0$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι η υπολογιζόμενη τιμή του αιματοκρίτη είναι χαμηλότερη της ενεργού τιμής $\bar{c} < c_0$. Είναι φανερό ότι η ταχύτητα προς τον άξονα του αγωγού είναι υψηλότερη από τη μέση τιμή της ταχύτητας. Αν επιπλέον η συγκέντρωση των σωματιδίων είναι επίσης υψηλότερη τότε η συγκέντρωση μακριά από τον άξονα θα πρέπει να μειώνεται ώστε η συγκέντρωση να

παραμένει η ίδια με το τροφοδοτούν δοχείο. Για παράδειγμα, εάν η κατανομή ταχύτητας υποτεθεί ότι είναι παραβολική (Poiseuille) και υποτεθούν διάφορες κατανομές συγκέντρωσης σωματιδίων κατά μήκος της ακτίνας προκύπτει:

Για γραμμική συγκέντρωση:

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = \frac{5}{7} \quad (2.33)$$

Για παραβολική συγκέντρωση:

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = \frac{3}{4} \quad (2.34)$$

Εάν τα σωματίδια βρίσκονται σε εσωτερικά στρώματα ακτίνας δ :

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = \frac{1}{1 - \frac{d^2}{R^2}} \quad (2.35)$$

2.10.2 ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΚΥΤΤΑΡΩΝ

Εάν εισάγουμε σωματίδια μέσα σε ροή τότε παρατηρούνται δύο κατηγορίες φαινομένων. Λόγω των τάσεων που επιβάλλονται στην επιφάνεια των σωματιδίων, αυτά παραμορφώνονται ανάλογα με τις ελαστικές τους ιδιότητες, δηλαδή κάμπτονται, λυγίζουν και στρέφονται. Επιπροσθέτως υπάρχει αλληλεπίδραση σωματιδίων και τοιχώματος σωλήνα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση του σωματιδίου προς τον άξονα του σωλήνα λόγω της δύναμης που ασκείται σε αυτό από το τοίχωμα και κατευθύνεται προς τον άξονα του σωλήνα. Το τελευταίο έχει ως αποτέλεσμα να

δημιουργηθεί ένα ελεύθερο στρώμα ρευστού σωματιδίων, κοντά στο τοίχωμα του σωλήνα (*free marginal layer, plasma skimming layer*). Λόγω δυσκολιών μέτρησης δεν είναι ακόμη σαφές το μέγεθος αυτού του στρώματος.

Η μετανάστευση αυτών των σωματιδίων προκαλεί μεταβολή του φαινομενικού ιξώδους του ρευστού. Ακριβής αναλυτικός υπολογισμός του προβλήματος είναι σύνθετος επειδή θα πρέπει να ληφθούν υπόψη πολλοί παράγοντες όπως η παραμορφωσιμότητα του σωματιδίου, η αλληλεπίδραση των σωματιδίων και η αλληλεπίδραση σωματιδίου - τοιχώματος. Ένα απλό μοντέλο μπορεί όμως να επιδείξει πως η μετανάστευση επηρεάζει το φαινομενικό ιξώδες χωρίς να φανεί πώς αυτό επιτυγχάνεται. Ας υποθέσουμε ότι λόγω της μετανάστευσης υπάρχει στρώμα ρευστού στο τοίχωμα χωρίς σωματίδια. Το ιξώδες αυτού του στρώματος ισούται με αυτό του πλάσματος μ_p . Το υπόλοιπο της διατομής έχει κάποια κατανομή σωματιδίων που χάριν απλότητας θεωρείται ομοιόμορφη και με ομοιόμορφο ιξώδες μ_1 .

Εάν το ελεύθερο στρώμα είναι πάχους δ , (σχήμα 2.24) και ο πυρήνας ακτίνας $r_1 = R - \delta$, η ροή σε κάθε περιοχή είναι νευτώνεια και δίνεται από παραβολική κατανομή:

$$u_1 = \frac{1}{4 \cdot \mu_1} \cdot P \cdot r^2 + c_1 \quad (2.36)$$

$$u_2 = \frac{1}{4 \cdot \mu_p} \cdot P \cdot (r^2 - R^2) \quad (2.37)$$

Όπου είναι η αρτηριακή κλίση πίεσης, $E\Xi$ (εχει θετική τιμή).

Στο όριο των δύο περιοχών ισχύει η συνέχεια της ταχύτητας η οποία δίνει:

$$\begin{aligned}
 u_1(r=r_1) &= \frac{-1}{4m_1} \cdot P \cdot r_1^2 + c_1 = \\
 u_2(r=r_2) &= \frac{-1}{4 \cdot m_p} \cdot P \cdot (r^2 - R^2) \Rightarrow \\
 c_1 &= -\frac{P}{4} \left[r_1^2 \cdot \left(\frac{1}{m_p} - \frac{1}{m_1} \right) - \frac{R^2}{m_p} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

Επομένως η κατανομή ταχύτητας είναι γνωστή και μπορεί να υπολογιστεί η παροχή:

$$Q = 2p \int_0^{r_1} ru_1 dr + 2p \int_{r_1}^R ru_2 dr = +\frac{p}{8} P \left[-\frac{r_1^4}{m_p} + \frac{r_1^4}{m_1} + \frac{R^4}{m_p} \right]
 \tag{2.39}$$

και από αυτήν, χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$Q = P \frac{pR^4}{8m_a}
 \tag{2.40}$$

προκύπτει:

$$\frac{1}{m_a} = \frac{1}{m_p} \left[1 - \left(\frac{r_1}{R} \right)^4 \right] + \frac{1}{m_1} \left(\frac{r_1}{R} \right)^4
 \tag{2.41}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το φαινομενικό ιζώδες παίρνει τιμές ενδιάμεσες των m_p και m_1 .

Μια άλλη προσέγγιση του ίδιου προβλήματος προκύπτει από τη θεώρηση της διατομής του σωλήνα ως αποτελούμενης από ομόκεντρους δακτύλιους μεγέθους ερυθρού αιμοσφαιρίου και αντικαθιστώντας την ολοκλήρωση με άθροισμα:

$$Q = \frac{rP}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(nd)^3}{m_n} \quad (2.42)$$

όπου το (nd) έχει αντικαταστήσει το r και το δ το δ_r .

Υποθέτοντας ότι το ιζώδες μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφο και αθροίζοντας προκύπτει το φαινομενικό ιζώδες:

$$m_a = m \left(1 + \frac{d}{R} \right)^{-2} \quad (2.43)$$

Το υπολογιζόμενο φαινομενικό ιζώδες είναι μικρότερο του μετρούμενου. Αν και οι δύο λύσεις χρησιμοποιούν χονδροειδείς υποθέσεις και αγνοούν τον ακριβή μηχανισμό της μετάθεσης των σωματιδίων, αποδίδουν ωστόσο τη μεταβολή του φαινομενικού ιζώδους.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το ανθρώπινο σώμα κάνει χρήση του γεγονότος ότι στο κέντρο του σωλήνα (αγγείου) η συγκέντρωση του αίματος σε ερυθρά αιμοσφαίρια και επομένως σε αιμοσφαιρίνη είναι υψηλή. Στις αρτηρίες που απάγονται από τον βασικό κλάδο της μητροειδούς αρτηρίας (*uterine artery*) καθώς και στις νεφρικές αρτηρίες (*kidney arteries*) υπάρχει, ακριβώς στην απαγωγή, το λεγόμενο αρτηριακό μαξιλάρι (*arterial cushion*), έτσι ώστε το απαγόμενο αίμα να προέρχεται κυρίως από την κεντρική περιοχή και όχι από την περιοχή του τοιχώματος. Επομένως το αίμα αυτό είναι πλούσιο σε αιμοσφαίρια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- i. *Τσαγγάρης Σ.: Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 1995.*
- ii. *Αθανασιάδης Ν.: Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 1989.*
- iii. *Παπανίκας Δ.Γ.: Εφαρμοσμένη Ρευστομηχανική, Πάτρα 1978.*
- iv. *C.G.Caro, T.J.Pedley, R.C.Schroter, W.A.Seed: The mechanics of the circulation, Oxford Univ. Press, 1978*
- v. *Donald A. McDonald: Blood flow in arteries, Edw. Arnold, 1974*
- vi. *Jean Salencon, Mecanique des milieux continus, I, II, Ecole Polytechnique, Ellipses.*
- vii. *Prandtl L., Q.G. Tietjens: Fundamentals of Hydro - and Aerodynamics, 1934. Dover Publications Inc., New York, 1957.*
- viii. *Goldstein S.: Modern Developments in Fluid Dynamics, vol 1+2. Clarendon Press, Oxford 1938.*
- ix. *Frank R. S., Hoshmuth R.M., The influence of the mechanical properties of the red cell on flow through capillary-sized pores. Biorheol., 23(3),241, 1986.*
- x. *Fung Y.C., Theoretical considerations of the elasticity of red cells and small blood vessels, Frd. Proc., 25, pp. 1761-1772, 1996*
- xi. *D.Liepsch ed.: Biofluid Mechanics-Blood flow in large vessels (Proc. of the 2nd Intern. Symposium), Springer- Verlag, 1990*
- xii. *G.W.Scott Blair: An Introduction to biorheology, Elsevier, 1974*
- xiii. *John Grayson, Walter Zingg: Microcirculation 1: Blood- Vessel Interactions,*
- xiv. *Systems in Special Tissues, Plenum Press, 1976*
- xv. *Leopold Dintenfass: Blood Microrheology - Viscosity factors in blood flow,*

- xvi. *Ischaemia and Thrombosis, Butterworths, 1971*
- xvii. *G.R.Cokelet, H.J.Meiselman, D.E.Brooks: Erythrocyte Mechanics and Blood*
- xviii. *Flow, ARL Inc., 1980*
- xix. *D.MacN.Surgenor ed: The Red Blood Cell, Academic Press, 1975*
- xx. *J.Dormandy ed.: Red Cell Deformability and Filterability, Martinus NijhoffPubl.,1983*
- xxi. *N.I Βοργία, Ν.Π. Λαουτάρη: Αιματολογία, Ιατρ. Εκδ. Αργυρίου, 1991*
- xxii. *Έρευνα των ρεολογικών ιδιοτήτων των ερυθροκυττάρων και ερυθροκυτταρικών μεμβρανών στην ιδιοπαθή πολυκυτταραιμία (Νόσο του Vaquez), Μαυρομμάτης (Διατριβή για υφηγεσία)*
- xxiii. *Corry W.D., Meiselman H. Deformation of human erythrocytes in a centrifugal*
- xxiv. *field. Biophys. J., 21, 19-23, 1978.*
- xxv. *Chien S. Red Cell deformability and its relevance to blood flow. Ann. Rev.*
- xxvi. *Physiol., 49,177-192,1987.*
- xxvii. *Evans E. Mohandas N., Leung A., Static and dynamic rigidity of normal and sickle erythrocytes. Major influence of cell hemoglobin concentration. J., Clin. Invest., 73, 477-481, 1984.*
- xxviii. *Engelhardt H., Gaub H., Sackmann E., Viscoelastic properties of erythrocyte membranes in high frequency electric field, Nature, 307, pp.978-380, 1984.*
- xxix. *Kiesewetter H., Duaer u., Teitel P., Schmid-Schoenbein H., Trapp R. The single*
- xxx. *erythrocyte (SER) as a reference for RBC deformability. Biorheol., 19, 737-753,1982.*
- xxx. *Schmid - Schonbein H. and Volger E., Red cell aggregation and red cell*

- deformability in diabetes. Diabetes, 25, pp. 897-902, 1976*
- xxxii. *Skalak R. and Branemark P.I, Deformation of red blood cells in capillaries, Science, 164, pp. 717-719,1969.*
- xxxiii. *Schmid-Schoenbein H. Normal and pathological distributions of blood flow in the microcirculation. In "Proceedings of congress: Microcirculation and ischemic vascular diseases. Clinical and therapeutic approaches" pp. 281-289, Biomedical Information Corporation, Rio de Janeiro, 1981.*
- xxxiv. *Schmid-Schoenbein H., Teitel P. In vitro assessment of "covertly abnormal" blood rheology: critical approach of presently available microrheological methodology. A review focusing on diabetic retinopathy as a possible consequence of rheological occlusion. Clin. Hemorheol. 7(2), 203-238,1987.*
- xxxv. *Schmid-Schonbein H., Volger E., Red cell aggregation and red cell deformability in diabetes. Diabetes, 25, pp. 897-902, 1976.*