

ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ
ΜΕ ΣΤΑΓΟΝΕΣ ΚΑΙ ΦΥΣΑΛΙΔΕΣ»

ΚΑΝΙΣΤΡΑ ΙΩΑΝΝΑ
ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΠΑΤΡΑ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	3
Εισαγωγή	4
1. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ	5
1.1. Εισαγωγή	5
1.2. Μαθηματική Περιγραφή	7
1.3. Μεταφορά Θερμότητας	16
2. ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ	23
2.1. Εισαγωγή	23
2.2. Σχήματα των Στατικών Σταγονιδίων	23
2.3. Σχήματα των Σωματιδίων σε Κίνηση	24
2.4. Κατανομή Μεγεθών Σταγόνας	32
3. ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΕ ΧΑΜΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS	34
3.1. Εισαγωγή	34
3.2. Μηχανική Ρευστών	36
3.3. Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας	68
4. ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΑΙ ΥΨΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS	143
4.1. Εισαγωγή	143
4.2. Μηχανική Ρευστών	143
4.3. Μεταφορά Θερμότητας	162
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	224

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αυτή η εργασία προτείνεται σε μια εκτενής αναφορά των φαινομένων της μεταφοράς σταγόνων και φυσαλίδων που σχετίζεται με ένα ευρύτερο φάσμα παραπλήσιων θεμάτων όπως η μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται οι θεμελιώδεις αρχές και ορισμοί όπως επίσης και οι βασικές εξισώσεις της ροής και της μεταφοράς θερμότητας και μάζας. Επιπρόσθετα αναφέρεται η σχέση αυτών των εξισώσεων με τις σταγόνες και τις φυσαλίδες. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρονται θέματα που σχετίζονται με το σχήμα και το μέγεθος των ρευστών σωματιδίων όπως και με την κατανομή του μεγέθους τους. Αυτές οι αναφορές συμπεριλαμβάνουν επίσης και τις επιδράσεις όπως η επιφανειακή τάση που συμμετέχουν στον καθορισμό του σχήματος και του μεγέθους των σταγόνων και των φυσαλίδων. Το κεφάλαιο τρία ασχολείται με τη μεταφορά σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Αρχικά αναφέρονται οι κλασικές μελέτες της Μηχανικής Ρευστών για μικρή ή μηδενική αδράνεια ενώ στη συνέχεια παρουσιάζονται νεώτερες μελέτες που κυρίως έχουν να κάνουν με την αλλαγή φάσης αλλά και τις επιδράσεις μεγάλης ακτινικής αδράνειας. Ο χειρισμός εδώ της μεταφοράς θερμότητας και μάζας γίνεται για τις οριακές περιπτώσεις χαμηλών και υψηλών αριθμών Peclet όπως και για ένα φάσμα ενδιάμεσων αριθμητικών αποτελεσμάτων. Στη μεταφορά σε ενδιάμεσους και υψηλούς αριθμούς Reynolds αναφέρεται το τέταρτο κεφάλαιο, όπου οι αναλυτικές διαδικασίες τόσο της μηχανικής των ρευστών όσο και της μεταφοράς θερμότητας και μάζας ορίζονται επαρκώς από αριθμητικές διαδικασίες που βρίσκονται σε συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα. Επίσης ένα σημαντικό τμήμα αυτού του κεφαλαίου σχετίζεται με τα ζητήματα αλλαγής φάσης των σταγόνων και των φυσαλίδων.

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Ιωάννη Γιαννάκη για τις συμβουλές και τις παρατηρήσεις του για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Θα θέλαμε επίσης να ευχαριστήσουμε και τους: Ειρήνη, Βασίλη, Μαρία, Σπύρο και Μαρία, για την πολύτιμη βοήθειά τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συμπεριφορά πολλών φυσικών και τεχνητών συστημάτων εξαρτάται ως ένα βαθμό από τα φαινόμενα που σχετίζονται με τις φουσαλίδες και τις σταγόνες που ενυπάρχουν ή εξ' ολοκλήρου αποτελούν τα συστήματα αυτά. Στο επίκεντρο της μελέτης των φαινομένων αυτών βρίσκεται η «μεταφορά», ένας όρος που συνήθως χρησιμοποιείται για να δηλώσει τη ροή της θερμότητας και της μάζας. Οι έρευνες και οι προσεγγίσεις της κατ' εξοχήν αρμόδιας Μηχανικής των Ρευστών που συνήθως αντιμετωπίζουν τις σταγόνες και τις φουσαλίδες σε ρευστά σωματίδια έχουν ουσιαστικά συμβάλει στην περαιτέρω ανάπτυξη αυτών των μελετών. Είναι γεγονός ότι το μεγαλύτερο μέρος της επιστημονικής προσπάθειας έχει δοθεί κυρίως στην κατανόηση της συμπεριφοράς των ρευστών σωματιδίων, ενώ σημαντική είναι και η συνεισφορά αρκετών αναλυτικών ερευνών γύρω από τα στερεά σωματίδια.

Υπάρχουν παράγοντες που επηρεάζουν ή και ακόμα αλλάζουν το χαρακτήρα της διαδικασίας της μεταφοράς. Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε το σχήμα και το μέγεθος των φουσαλίδων και των σταγόνων, τη συσσώρευση ρύπων στις επιφάνειες τους, την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων, ή την ίδια ακόμα τη φύση των σταγόνων και των φουσαλίδων και του μέσου που τις περιβάλλει.

Επιπρόσθετα σε διάφορες φυσικές ή μη καταστάσεις, έχουμε αλλαγή των χαρακτηριστικών της διαδικασίας της μεταφοράς. Για παράδειγμα έχουμε περιπτώσεις που τα σταγονίδια ή οι φουσαλίδες υφίστανται αλλαγή φάσης, εξάτμιση ή συμπύκνωση, μη αξονικά συμμετρική ροή, καύση κ.α. με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η όλη διαδικασία της μεταφοράς θερμότητας και μάζας.

Η διαδικασία της έρευνας των φαινομένων της μεταφοράς σταγονιδίων και φουσαλίδων αποτέλεσε αντικείμενο σπουδαίων ερευνητών από τις αρχές κιόλας του 20^{ου} αιώνα με σκοπό τη βελτίωση διαφόρων επιστημονικών πεδίων αλλά και τη βιομηχανική χρήση. Το μεγαλύτερο μέρος της προσπάθειας στηρίχθηκε τόσο σε αριθμητικές θεωρητικές προσεγγίσεις όσο και σε πειραματικές μελέτες. Γίνεται κατανοητό ότι η εξαγωγή συμπερασμάτων αποτέλεσε ζήτημα μεγάλης τεχνικής σπουδαιότητας. Πολλά από τα συμπεράσματα αυτά βρίσκουν εφαρμογή σε διαδικασίες όπως η πρόγνωση του καιρού, η εξέλιξη μηχανών εσωτερικής καύσης και αεριωθούμενων κινητήρων, αλλά και διατάξεις όπως οι πυρηνικοί και οι χημικοί αντιδραστήρες, κ.α. όπου η μεταφορά θερμότητας και μάζας μέσω σταγόνων και φουσαλίδων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο:

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σταγόνες και φυσαλίδες υπάρχουν σε ένα μεγάλο αριθμό φυσικών καθώς και τεχνητών συστημάτων. Σχεδόν σε κάθε περίπτωση, αυτά τα ρευστά σωματίδια τα οποία μπορεί να βρίσκονται είτε μέσα σε μια συνέχεια ενός άλλου ρευστού, είτε σε άλλη κατάσταση του ίδιου ρευστού, παίζουν σημαντικό ρόλο στη φυσική συμπεριφορά του συστήματος. Για παράδειγμα, τα σύννεφα αποτελούν φυσικές συγκεντρώσεις από μικρά υδάτινα σωματίδια που ενώνονται λόγω των αλλαγών στην ατμόσφαιρα και οδηγούν σε βροχή ή άλλες μορφές υδατόπτωσης. Φυσικά υδάτινα συστήματα όπως οι λίμνες και οι ωκεανοί περιέχουν αέρα σε διαλυμένη μορφή καθώς και φυσαλίδες, δημιουργώντας έτσι ένα συστατικό-στοιχείο που είναι ουσιώδες για τη θαλάσσια ζωή.

Από την άλλη τα βιομηχανικά συστήματα όπως κάποιες πυρηνικές εγκαταστάσεις, αντιμετωπίζουν φυσαλίδες σε αντιδραστήρες βραστού νερού και σταγονίδια σε ψυχώμενα στοιχεία ψεκασμού. Στους χημικούς αντιδραστήρες, τα σταγονίδια και οι φυσαλίδες παίζουν συχνά το ρόλο του μεταφορέα τόσο για τα αντιδραστήρια όσο και για τα προϊόντα. Οι μηχανές εσωτερικής καύσης και οι αεριοθούμενες μηχανές χρησιμοποιούν για καύσιμο υγρούς υδρογονάνθρακες σε μορφή σπρέι.

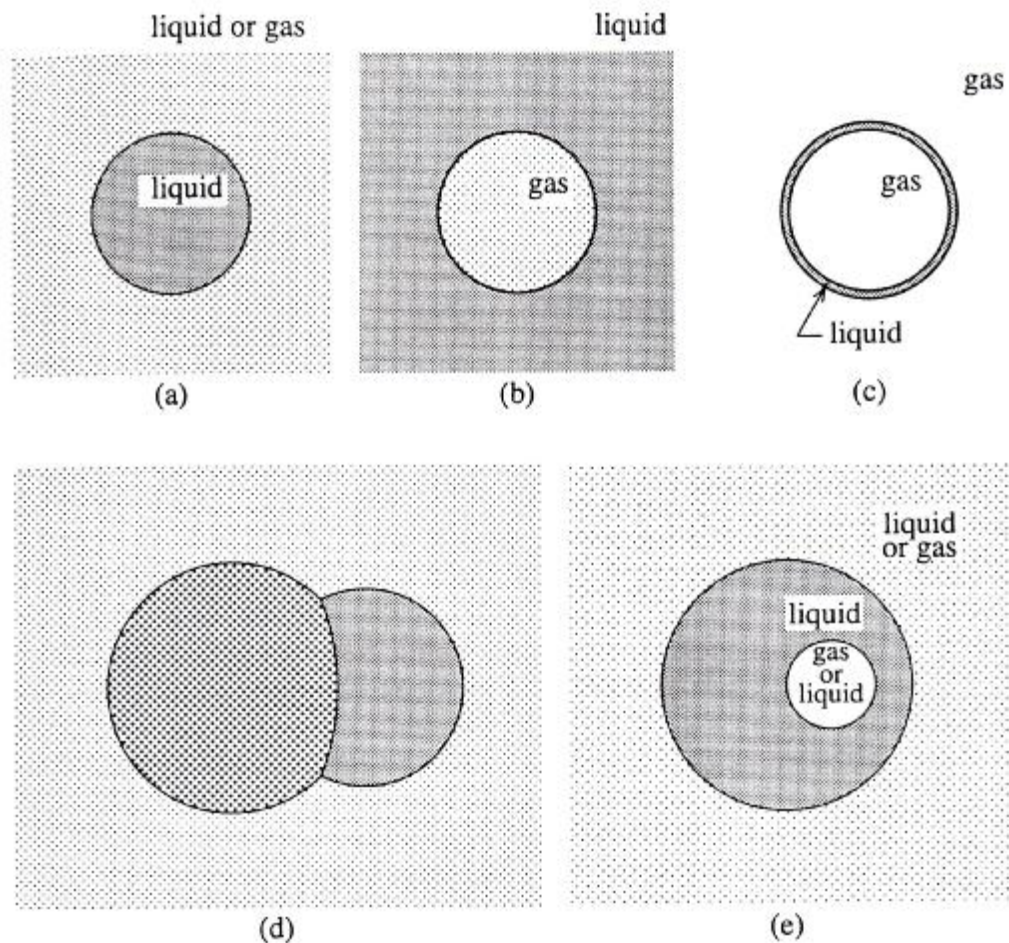
Στα περισσότερα απ' αυτά τα συστήματα, σημαντικά φυσικά φαινόμενα συμβαίνουν με τη μεταφορά της θερμότητας ή και της μάζας που μπορεί να συνοδεύεται από ροή ρευστού που γενικά βοηθά στη μεταφορά. Σε περιπτώσεις που σχετίζονται με αλλαγή φάσης, η κίνηση του ρευστού μπορεί επιπρόσθετα να παραχθεί από τη διαδικασία της μεταφοράς. Στις περισσότερες διαδικασίες που σχετίζονται με σταγόνες και φυσαλίδες, υπάρχει μια σχετική κίνηση μεταξύ των σωματιδίων όπως και μεταξύ των ρευστών σωματιδίων και του περιβάλλοντος μέσου.

Αυτή η εργασία πραγματεύεται διαδικασίες μεταφοράς που συνδέονται με σταγόνες και φυσαλίδες κάτω από διάφορες φυσικές καταστάσεις.

1.1.1 ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Οι ορισμοί των σταγονιδίων και των φυσαλίδων είναι γνωστοί. Μια σταγόνα είναι μια μάζα ρευστού μέσα σε ένα υγρό ή αέριο μέσο ενώ μια φυσαλίδα είναι μια μάζα αερίου σε ένα εξωτερικό μέσο. Οι σταγόνες ή οι φυσαλίδες ή και τα δύο μαζί αναφέρονται γενικά σε ρευστά σωματίδια με την παραδοχή ότι κάθε σωματίδιο αποτελείται από ένα αρκετά μεγάλο αριθμό μορίων και θεωρούνται συνεχή. Το ρευστό σωματίδιο και το περιβάλλον μέσο διαχωρίζονται από μια καλά καθορισμένη διεπιφάνεια. Σε κάποιες περιπτώσεις όπως σε μια φυσαλίδα σαπουνιού, η διαχωριστική διεπιφάνεια μπορεί να είναι μια λεπτή υγρή επιφάνεια. Η εσωτερική φάση του σωματιδίου ορίζεται σαν διασκορπισμένη φάση και αυτή του περιβάλλοντος μέσου σαν συνεχής φάση.

Περισσότερο πολύπλοκες καταστάσεις, όπως αυτές που αποτελούνται από ζεύγη σταγόνων ή φυσαλίδων σε επαφή ή ρευστό σωματίδιο μέσα σε μια φυσαλίδα, επίσης μελετώνται. Σε αυτά τα συστήματα αναφερόμαστε ως σύνθετα σταγονίδια. Όμως, το υγρό μέσο που περιβάλλει αυτά τα σταγονίδια, συνεχίζει να ορίζεται ως συνεχής φάση ενώ τα άλλα συστατικά του σύνθετου σταγονιδίου αναφέρονται σε διασκορπισμένη φάση. Τα διάφορα αυτά συστήματα εικονίζονται στο σχήμα 1.1.



ΣΧΗΜΑ 1.1: Αναγνώριση των φάσεων στις σταγόνες και τις φυσαλίδες: (a) υγρή σταγόνα, (b) αέρια φυσαλίδα μέσα σε ρευστό, (c) σαπουνόφουσκα, (d) σύνθετη σταγόνα – 3 διεπιφάνειες (τουλάχιστον 2 από τις φάσεις είναι ρευστές) και (e) σύνθετη σταγόνα – 2 διεπιφάνειες

1.1.2 ΣΚΟΠΟΣ

Αυτή η εργασία αναφέρεται σε θέματα που αφορούν σταγόνες και φυσαλίδες. Αν και αναφορές σε στερεά σωματίδια συχνά έγιναν χάριν πληρότητας, δεν έγινε μια πλήρης και διεξοδική μελέτη στις διαδικασίες μεταφοράς των στερεών σωματιδίων. Με τις σταγόνες και τις φυσαλίδες εστιάζουμε σε φαινόμενα μεταφοράς από θερμικές ή μαζικές μεταβολές συγκέντρωσης.

Σ' αυτό το περιβάλλον η αρμόδια μηχανική ρευστών είναι στενά συνδεδεμένη με αυτές τις διαδικασίες μεταφοράς. Σχεδόν για κάθε θέμα που καλύπτεται, παρουσιάζουμε τις απόψεις της μηχανικής ρευστών στο βαθμό που είναι αναγκαίο

για τη μελέτη της μεταφοράς θερμότητας και μάζας. Θέματα που σχετίζονται με τη διαμόρφωση και διάσπαση των σταγόνων και των φυσαλίδων αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια της μηχανικής ρευστών.

Έχει γίνει προσπάθεια να καλυφθεί ένα μεγάλο κομμάτι βιβλιογραφίας σχετιζόμενο με τις κινούμενες σταγόνες και φυσαλίδες, προβάλλοντας έτσι μια ερμηνεία της διαδικασίας μεταφοράς της θερμότητας και της μάζας σε συνδυασμό με τη σχετική μηχανική ρευστών. Στα πλαίσια αυτής της μελέτης μεταφοράς, στατικά ρευστά σωματίδια έχουν επίσης περιληφθεί σε σχετικά περιορισμένες περιπτώσεις. Για περιπτώσεις που αφορούν την εσωτερική μεριά της διεπιφάνειας, όπως η σταγονόμορφη συμπύκνωση, η συζήτηση σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με μηχανισμούς μεταφοράς των στατικών σταγόνων. Σε αυτό το πλαίσιο, υπάρχει μια ελάχιστη κάλυψη στη μηχανική ρευστών των σταγόνων και φυσαλίδων που αλληλεπιδρούν με την εσωτερική πλευρά.

Στη μελέτη των διαφόρων καταστάσεων που σχετίζονται με τις σταγόνες και τις φυσαλίδες, ασχολούμαστε με τη φυσική μορφή έχοντας ή όχι αλλαγή φάσης στη διεπιφάνεια. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις πιο πρόσφατες εξελίξεις πάνω στο θέμα, υπάρχει μια σημαντική εστίαση πάνω στην αλλαγή φάσης. Η παρουσία των χημικών αντιδράσεων έχει ληφθεί υπ' όψη τόσο στο πλαίσιο των ενεργών παραγόντων επιφάνειας όσο και στα φαινόμενα καύσης.

Η μελέτη της δυναμικής ρευστών στο μεγαλύτερο μέρος της εργασίας βασίζεται στην ασυμπίεστη Νευτώνεια ροή. Εξαιρέση σ' αυτό αποτελούν κάποιες αναφορές που σχετίζονται με την καύση των σταγόνων των καυσίμων όπου η συμπίεστικότητα έχει ληφθεί υπ' όψη και το σχηματισμό σταγόνων από τη διάσπαση των ελαστικών και κολλωδών νημάτων. Η θερμική και μαζική διαδικασία μεταφοράς βασίζεται σε σταθερές θερμοφυσικές ιδιότητες με ιστροπικά υλικά.

1.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Οι διαδικασίες μεταφοράς με κινούμενες σταγόνες και φυσαλίδες βασίζονται στη διατήρηση των αρχών που σχετίζονται με την ενέργεια, τη μάζα και την ορμή. Η διατήρηση της ενέργειας περιγράφεται από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής ο οποίος οδηγεί στην εξίσωση της ενέργειας.

Εφόσον η ορμή στο σύνολό της διατηρείται σε ένα αδρανειακό σύστημα, ο βαθμός μεταβολής της ορμής σε ένα δεδομένο σώμα ρευστού ισούται με το άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σ' αυτό, σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Μαθηματικά αυτό περιγράφεται από την εξίσωση Navier-Stokes. Η διατήρηση της μάζας σε ένα ομογενές ρευστό υλικό καταλήγει στην εξίσωση συνέχειας. Όμως όταν εμπλέκονται περισσότερα από ένα υλικά, έχουμε μετακίνηση του ενός είδους σε σχέση με το άλλο, μέσω της διάχυσης. Εφόσον ισχύει η αρχή διατήρησης της μάζας, η μεταφορά μέσω ενός ρευστού «φορέα» εμπλέκεται στη διαδικασία. Αυτό δίνει έναν όμοιο χαρακτήρα με την εξίσωση ενέργειας κάτω από πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Σχεδόν όλη η εργασία σε σταγόνες και φυσαλίδες εμπλέκει τις διεπιφάνειες. Οι αρχές διατήρησης ισχύουν επίσης και κατά μήκος των διεπιφανειών καθώς εξυπηρετούν τα βήματα αλλαγής των ιδιοτήτων των υλικών. Υπάρχουν διάφορες φυσικές πολυπλοκότητες που πηγάζουν από τη θερμοδυναμική των διεπιφανειών, όπως οι επιδράσεις των δυνάμεων συνάφειας και των επιφανειακών δυνάμεων του ιξώδους. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι αρχές διατήρησης εφαρμόζονται και για την επιφανειακή φάση.

Οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι γενικά αρκετά πολύπλοκες και απαιτούνται διάφορα επίπεδα προσεγγίσεων για τις αναλυτικές εκφράσεις. Ακόμα και αυτά τα προσεγγιστικά μοντέλα είναι περιορισμένα ως προς το εύρος και την εφαρμογή λόγω του σχήματος των ρευστών σωματιδίων που ποικίλλει ανάλογα με την ταχύτητα του ρευστού και των επιπέδων αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα σωματίδια. Μια αρκετά ευρύτερη ποικιλία λύσεων είναι διαθέσιμη μέσα από τη χρήση των αριθμητικών τεχνικών. Για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, αναζητούμε εκφράσεις για την ταχύτητα, τη θερμοκρασία και την κατανομή της διαλυμένης ουσίας από τις οποίες να εξασφαλίζονται οι αντίστοιχες ολοκληρωμένες ποσότητες όπως η δύναμη έλξης και ο ρυθμός ροής της θερμότητας ή της μάζας.

Η διατύπωση των εξισώσεων ακολουθείται από μια σύντομη αναφορά πάνω στην καταλληλότητα, την εφαρμογή και τους περιορισμούς αυτών των εξισώσεων. Οι δύο φάσεις γίνονται διακριτές μεταξύ τους από τον χαρακτήρα (\wedge) στις ποσότητες της διασκορπιζόμενης φάσης. Όταν όμως χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις στη γενική περίπτωση και για τις δύο φάσεις, η εφαρμογή στις σχετικές φάσεις με τις αντίστοιχες φυσικές ιδιότητες υπονοείται χωρίς την ένδειξη αυτή.

1.2.1 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Για ένα συμπίεστο ρευστό, η αρχή διατήρησης της μάζας δίνει:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.1)$$

Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο, τότε η παράγωγος της πυκνότητας είναι μηδέν, έτσι ώστε:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (1.2)$$

Σαν αποτέλεσμα έχουμε:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.3)$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΟΡΜΗΣ NAVIER-STOKES

Για ένα τμήμα (σώμα) ενός ασυμπίεστου συνεχούς ρευστού, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση η οποία περιγράφει την κίνησή του:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (1.4)$$

όπου u είναι η ταχύτητα του ρευστού, ρ η πυκνότητά του, F το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο σωματίδιο και μ το ιξώδες του ρευστού. Εδώ ο όρος στα αριστερά χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τη σχετική παράγωγο, έτσι ώστε:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.5)$$

όπου ο δεύτερος όρος εξηγεί την κίνηση του ρευστού με τη μορφή της θερμικής μεταφοράς της ορμής. Στην εξίσωση (1.4), ο πρώτος όρος στα δεξιά είναι η δύναμη πίεσης και ο δεύτερος είναι το άθροισμα των δυνάμεων του ιξώδους. Για το τελευταίο, η σχέση μεταξύ των καμπυλών πίεσης και ταχύτητας θεωρείται γραμμική, γεγονός που αντιστοιχεί σε Νευτώνειο ρευστό. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι για τα μη Νευτώνεια ρευστά ή και τα συμπιεστά ρευστά, οι όροι της πίεσης και του ιξώδους είναι πιο πολύπλοκοι. Η ασκούμενη δύναμη F προέρχεται από ένα πεδίο δυνάμεων οι οποίες μπορεί να είναι βαρυτικές, ηλεκτροστατικές ή ηλεκτρομαγνητικές. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η βαρύτητα είναι το μόνο πεδίο δυνάμεων και σε τέτοιες περιπτώσεις $F = \rho g$.

Γενικά η εξίσωση (1.4) συνδυάζεται με την εξίσωση συνέχειας της μάζας (1.1) που αποτελείται από τέσσερις κλιμακωτά εξαρτώμενες μεταβλητές. Αυτές είναι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας και το πεδίο πίεσης. Το σύστημα περικλείεται από μια σειρά ορίων και συνθηκών διεπιφάνειας που αναφέρονται παρακάτω. Είναι βολικό να γράφονται μια σειρά εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή. Συνήθως, η κλίμακα της ταχύτητας U και η κλίμακα του μήκους L είναι επαρκείς για να κάνουν όλες τις παραμέτρους αδιάστατες. Άρα με:

$$x^* = \frac{x}{L} \quad \text{και} \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad (1.6)$$

οι άλλες παράμετροι παίρνουν τη μορφή:

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho U^2} \quad \text{και} \quad t^* = \frac{tU}{L}. \quad (1.7)$$

Η εξίσωση της ορμής (1.4) γίνεται:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \rho^* \frac{1}{\text{Re}} (\rho^*)^2 u^* \quad (1.8)$$

όπου:

$$\rho^* = \rho L \quad \text{και} \quad \text{Re} = \frac{UL\rho}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (1.9)$$

Εδώ, Re είναι ο αριθμός Reynolds ο οποίος αποτελεί μια σημαντική αδιάστατη παράμετρο που καθορίζει το χαρακτήρα του πεδίου ροής. Όπως είναι φανερό από τους παραπάνω ορισμούς, έχουμε μια ένδειξη του βαθμού αδρανείας στις δυνάμεις ιξώδους. Η ποσότητα $\nu = \mu / \rho$ αναφέρεται ως κινηματικός συντελεστής ιξώδους. Για

ροές στις οποίες μια μοναδική ταχύτητα δεν μπορεί εύκολα να ταυτοποιηθεί προκειμένου να γίνει διαβάθμιση, μπορεί να χρειάζονται τροποποιημένοι ορισμοί του αριθμού Reynolds. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μιας γραμμικής διατμητικής ροής, χρησιμοποιούμε:

$$\text{Re} = \frac{L^2 G}{\nu}, \quad (1.10)$$

όπου G είναι η τιμή της διάτμησης. Αυτός ο ορισμός είναι κατάλληλος για περιπτώσεις όπως ένα σωματίδιο σε μια γραμμική διατμητική ροή ή ακόμα και ένα σωματίδιο που περιστρέφεται με μια γωνιακή ταχύτητα G . Όμως ο ορισμός θα πρέπει να επανεξεταστεί όταν δεν μπορούμε να ορίσουμε μια επαρκώς σταθερή τιμή της G . Για πολυπλοκότερες ροές, η έννοια ενός σταθερού αριθμού Re για όλο το πεδίο ροής δεν έχει τόσο νόημα και θα πρέπει πιθανό να εξεταστεί ένας τοπικός αριθμός Reynolds που μπορεί να ποικίλλει στο χώρο.

ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ

Ο βαθμός κυκλοφορίας σε μια συγκεκριμένη (περιορισμένη) περιοχή ενός ρευστού μπορεί να εκφραστεί από τον τύπο $\zeta = P \cdot u$. Αυτή η ποσότητα είναι γνωστή ως στροβιλισμός. Για ορισμένους τύπους ροών, ο στροβιλισμός είναι παντού μηδενικός. Τέτοιες ροές θεωρούνται ως μη περιστροφικές και το πεδίο της ταχύτητας μπορεί να εκφραστεί σαν την κλίση βαθμωτού δυναμικού.

Σε πολλές περιπτώσεις, ιδίως στην αριθμητική ανάλυση, είναι πιο εύκολο να εκφραστεί η ισορροπία της δύναμης-ορμής στην εξίσωση Navier-Stokes σε σχέση με το στροβιλισμό. Μια τέτοια διατύπωση οδηγεί στην εξίσωση του στροβιλισμού. Για μη συμπιεστή ροή, αυτή μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \nabla^2 \zeta. \quad (1.11)$$

Η εξίσωση συνέχειας (1.3) ισχύει ακόμα και οδηγεί στην ακόλουθη σχέση του στροβιλισμού:

$$P \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

ΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Κατά μήκος μιας υγρής-υγρής ή μιας υγρής-στερεής διεπιφάνειας εφαρμόζονται οι σχέσεις της δύναμης-ορμής και της συνέχειας της μάζας. Για σύστημα χωρίς αλλαγή φάσης, οι αντίστοιχες σχέσεις είναι αρκετά απλές. Σε περιπτώσεις με αλλαγές φάσεις όμως είναι απαραίτητη μια προσεκτική εφαρμογή των αρχών διατήρησης.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Όταν δεν υπάρχει συμπύκνωση ή εξάτμιση, όλες οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι συνεχείς σε μια υγρή-υγρή διεπιφάνεια. Αυτό εκφράζεται ως:

$$u = \hat{u}, \quad (1.13)$$

όπου το «καπέλο» (^) χρησιμοποιείται για να δηλώσει τις ποσότητες της διασκορπιζόμενης φάσης. Σε μια διεπιφάνεια, θεωρούμε γενικά τις κανονικές και τις εφαπτόμενες συνιστώσες, εκ των οποίων οι τελευταίες μπορούν να αναλυθούν παραπέρα ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων. Και για τις δυο συνιστώσες, η συνθήκη συνέχειας συνεπάγεται ότι η διεπιφάνεια διαδρά με τα γύρω ρευστά. Η εφαπτομενική συνθήκη συνέχειας είναι στην πραγματικότητα η συνθήκη μη ολίσθησης.

Στην αλλαγή φάσεων, η συνθήκη της διεπιφάνειας είναι πιο περίπλοκη εξ' αιτίας της φαινομενικής «παραγωγής μάζας» και «κένωσης μάζας» που συμβαίνει στις διαφορετικές φάσεις. Μπορεί να υπάρξει και επιπλέον πολυπλοκότητα εξ' αιτίας της αστάθειας του βαθμού εξάτμισης ή συμπύκνωσης στη διεπιφάνεια. Έτσι, με την εξάτμιση, το ρευστό πεδίο μπορεί να υπόκειται σε μια χωροταξικά κυμαινόμενου βαθμού κένωση μάζας πάνω στη διεπιφάνεια. Οι διεπιφανειακές εφελκυστικές δυνάμεις όμως τείνουν να επαναφέρουν το σχήμα της διεπιφάνειας, οδηγώντας σε μια κάθετη ταχύτητα στη ρευστή πλευρά που καθοδηγείται από την εξάτμιση. Στις περισσότερες εφαρμογές, αυτή η ταχύτητα είναι γενικά αρκετά μικρή για τις ρευστές σταγόνες λόγω του μεγάλου βαθμού πυκνότητας του ρευστού σε σχέση με τον ατμό. Για τις φυσαλίδες όμως το αποτέλεσμα της αλλαγής φάσης οδηγεί σε μια γρήγορη ανάπτυξη ή κατάρρευση, με εξαίρεση τις καταστάσεις υψηλής πίεσης. Για μια διεπιφάνεια που κινείται με μια ταχύτητα u_i , η συνθήκη συνέχειας της κάθετης ταχύτητας παίρνει τη μορφή:

$$\rho(u - u_i)Xn = \hat{\rho}(\hat{u} - u_i)Xn, \quad (1.14)$$

όπου n είναι μια κανονική μονάδα στη διεπιφάνεια. Η εφαπτομενική συνθήκη συνέχειας της ταχύτητας είναι απλά:

$$u_x t = \hat{u} X \quad (1.15)$$

όπου το t αναπαριστά κάθε εφαπτομενική μονάδα στη διεπιφάνεια. Για αρκετά προβλήματα που σχετίζονται με μικρές σταγόνες, το σχήμα είναι πολύ κοντά στο σφαιρικό και η ταχύτητα της διεπιφάνειας μπορεί να προσεγγιστεί ως $u_i Xn = \frac{R}{R_0}$, όπου το R είναι η ακτίνα της σταγόνας και $\frac{R}{R_0}$ είναι η παράγωγος του χρόνου του R .

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ ΣΤΗ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Παράλληλα με τις συνθήκες συνέχειας της ταχύτητας (1.13) ή (1.14) και (1.15), η συνολική σχέση δύναμης-ορμής (1.4) θα μπορούσε γενικά, να είναι συνεχής πάνω σε μια διεπιφάνεια με κατάλληλες τιμές ιξώδους και πυκνότητας. Σε περιπτώσεις μεγάλης διαφοράς της πυκνότητας κατά μήκος της διεπιφάνειας, έχοντας λάβει υπ' όψη τις συνθήκες συνέχειας της ταχύτητας, υπάρχει μια ασυνέχεια

της ορμής η οποία αντισταθμίζεται από μια αντίθετη δύναμη. Αυτό οδηγεί σε ποικίλου τύπου αστάθειες στη διεπιφάνεια. Όμως για τις περισσότερες σταθερές ροές, η επιτάχυνση είναι αδύναμη εξ' αιτίας της έλλειψης ορμής και η ισορροπία της συνολικής τάσης κατά μήκος της διεπιφάνειας, δίνει μια ακριβή περιγραφή της ροής. Στις περισσότερες περιπτώσεις, μια διεπιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι απειροελάχιστου πάχους. Η διαφορά στη συνολική τάση κατά μήκος της διεπιφάνειας εξομαλύνεται από μια διεπιφάνεια στην οποία η καμπύλωση δίνει αφορμή για μια κάθετη τάση. Η χωρική μεταβολή στη διεπιφανειακή τάση οδηγεί σε μια εφαπτόμενη δύναμη. Επιπλέον οι ίδιες οι διεπιφάνειες έχουν επιφανειακά διατμητικά και επιφανειακά διαστολικά ιξώδη που επιδρούν με τις αντίστοιχες δυνάμεις. Λαμβάνοντας υπ' όψη μόνο τις επιφανειακές τάσεις, η συνθήκη ισορροπίας των τάσεων οδηγεί σε:

$$-(\tau - \hat{\tau}) : n n - (p - \hat{p}) = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.16)$$

$$-(\tau - \hat{\tau}) : n t = P \sigma \mathcal{X}, \quad (1.17)$$

όπου σ είναι η διεπιφανειακή τάση, R_1 και R_2 οι αρχικές ακτίνες καμπυλότητας και t αναπαριστά τον ιξώδη τανυστή τάσης.

ΡΟΕΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Είναι γνωστό ότι η μη-γραμμική εξίσωση Navier-Stokes (1.4) έχει μόνο ένα περιορισμένο σύνολο από πλήρως αναλυτικές λύσεις. Αυτός ο αναλυτικός περιορισμός έχει ωθήσει τους ερευνητές στο να αναζητήσουν λύσεις για κάποιες κατηγορίες ροών για τις οποίες η εξίσωση Navier-Stokes μπορεί να είναι γραμμική. Έχουμε το όριο του ιξώδους που είναι γνωστό σαν ροή του Stokes στην οποία ο όρος της επιτάχυνσης σε ολόκληρη την αριστερή πλευρά παραλείπεται. Αυτή η προσέγγιση είναι χρήσιμη όταν ο αριθμός Reynolds τείνει στο μηδέν. Από την άλλη μεριά, έχουμε το όριο μη ιξώδους ροής για την οποία οι δυνάμεις του ιξώδους είναι αμελητέες. Επίσης, όπως προαναφέρθηκε, υπάρχουν συγκεκριμένοι τύποι για τα πεδία ροών που θεωρούνται μη περιστροφικές και μπορούν να περιγραφούν από ένα βαθμωτό δυναμικό.

ΡΟΗ STOKES

Όταν οι όροι της επιτάχυνσης παραλείπονται από την εξίσωση Navier-Stokes, προκύπτει ένα χωρίς αδράνεια σύστημα. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, για την ισορροπία ορμής-δύναμης έχουμε:

$$P \rho = \mu P^2 u + F, \quad (1.18)$$

η οποία λέγεται εξίσωση Stokes. Η κατηγορία των ροών που περιγράφεται από αυτή την εξίσωση είναι γνωστή ως *ροές Stokes*. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αυτή η εξίσωση έχει αξία για μηδενικούς αριθμούς Reynolds. Αφού θεωρούμε ότι:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg 0, \quad (1.19)$$

οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύει αυτό μπορούν να προκύψουν τόσο από πολύ αργή κίνηση ή από ένα πολύ υψηλό κινηματικό ιξώδες. Κίνηση σαν αυτή συχνά αναφέρεται ως έρπουσα ροή. Είναι όμως αλήθεια ότι το σωματίδιο κλίμακας μήκους L παίζει σημαντικό ρόλο ο οποίος μπορεί να εξισορροπήσει τις άλλες δυο παραμέτρους.

ΜΗ ΙΞΩΔΗΣ ΡΟΗ

Αν αγνοήσουμε τις δυνάμεις του ιξώδους, η εξίσωση Navier-Stokes παίρνει τη μορφή

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + F. \quad (1.20)$$

Φυσικά αυτή αναπαριστά ένα ανιξώδες ρευστό το οποίο επίσης αναφέρεται και ως *ιδανικό ρευστό*. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις με υψηλούς αριθμούς Reynolds κάτω από τις οποίες οι επιδράσεις του ιξώδους είναι σημαντικές μόνο κοντά στα όρια. Για τέτοιες περιπτώσεις, η μη-ιξώδης προσέγγιση είναι εφαρμόσιμη πάνω στα περισσότερα πεδία ορισμού μακριά από τα όρια. Υπάρχει όμως μια δυσκολία. Με τη μη-ιξώδη προσέγγιση, ο βαθμός της διαφορικής εξίσωσης μειώνεται και οι οριακές συνθήκες περιορίζουν σημαντικά το σύστημα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Για παράδειγμα, η συνθήκη μη ολίσθησης δεν ικανοποιείται. Άρα με τη μη-ιξώδη προσέγγιση έχουμε μόνο τη συνέχεια της κάθετης ταχύτητας σε μια διεπιφάνεια ενώ είναι παραδεκτή μια εφαπτομενική ολίσθηση.

ΜΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΡΟΗ

Όταν υπάρχει μια κίνηση ρευστού με μηδενικό στροβιλισμό, το πεδίο ροής θεωρείται μη περιστροφικό. Συνεπώς η ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως κλίση ενός δυναμικού Φ . Άρα,

$$u = \nabla \Phi. \quad (1.21)$$

Άσχετα με το ποια μπορεί να είναι η έκφραση για το Φ , ο στροβιλισμός εξαφανίζεται,

$$\zeta = \nabla \times u = \nabla \times \nabla \Phi = 0, \quad (1.22)$$

από τη στιγμή που η ταχύτητα είναι μετρήσιμη και συνεχής. Αυτός ο τύπος ροής είναι επίσης γνωστός ως δυναμική ροή.

Αφού τα όρια της μη-ιξώδους και έρπουσας ροής είναι για τις περισσότερες περιπτώσεις αμοιβαία αποκλειστικά στο πεδίο ισχύος, η δυναμική ροή είναι μια λύση στην πλήρη εξίσωση Navier-Stokes. Όπως στην περίπτωση της μη-ιξώδους ροής, ο βαθμός μειώνεται και πάλι κάποιες συνθήκες στα όρια και στη διεπιφάνεια πρέπει να χαλαρώσουν.

ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

Για πολλές περιπτώσεις ροών, η μη-περιστροφικές ή μη-ιξώδεις προσεγγίσεις δίνουν μια καλή μαθηματική περιγραφή μακριά από τα όρια του συστήματος, ακόμα κι αν το ιξώδες του ρευστού μπορεί να μην είναι μηδενικό. Σε ένα σταθερό όριο, η συνθήκη μη ολίσθησης πρέπει να ικανοποιείται και οι δυνάμεις του ιξώδους θα πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν. Για μεγάλους αριθμούς Reynolds η μετάπτωση από την περιοχή του ιξώδους κοντά στο όριο στη μη-περιστροφική περιοχή αρκετά μακριά είναι λεπτή. Αυτή η περιοχή μετάπτωσης λέγεται οριακό στρώμα στο οποίο η εξίσωση Navier-Stokes μπορεί να προσεγγιστεί με το να αποβάλλουμε κάποιους αμελητέους όρους ενώ παράλληλα να διατηρήσουμε τον ουσιαστικό μη γραμμικό χαρακτήρα του συστήματος. Η προσέγγιση βασίζεται στο να είναι το οριακό στρώμα λεπτό και οι μεταβολές ταχύτητας κάθετα στο όριο να είναι πολύ μικρές.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είναι φυσικά εφαρμόσιμο στις περισσότερες σταγόνες και φυσαλίδες. Μικρές σταγόνες και φυσαλίδες παίρνουν σφαιρικό σχήμα εξ' αιτίας των δυνάμεων της επιφανειακής τάσης. Σε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ακολουθούμε τη συνήθη σύμβαση και ορίζουμε το r ως την απόσταση ενός σημείου του πεδίου (r, θ, φ) από την αρχή των συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2. Το ακτινωτό διάνυσμα από την αρχή των αξόνων (r, θ, φ) σχηματίζει μια γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα z . Η προβολή του διανύσματος πάνω στο επίπεδο xy σχηματίζει μια γωνία φ με το επίπεδο xz . Συνεπώς έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

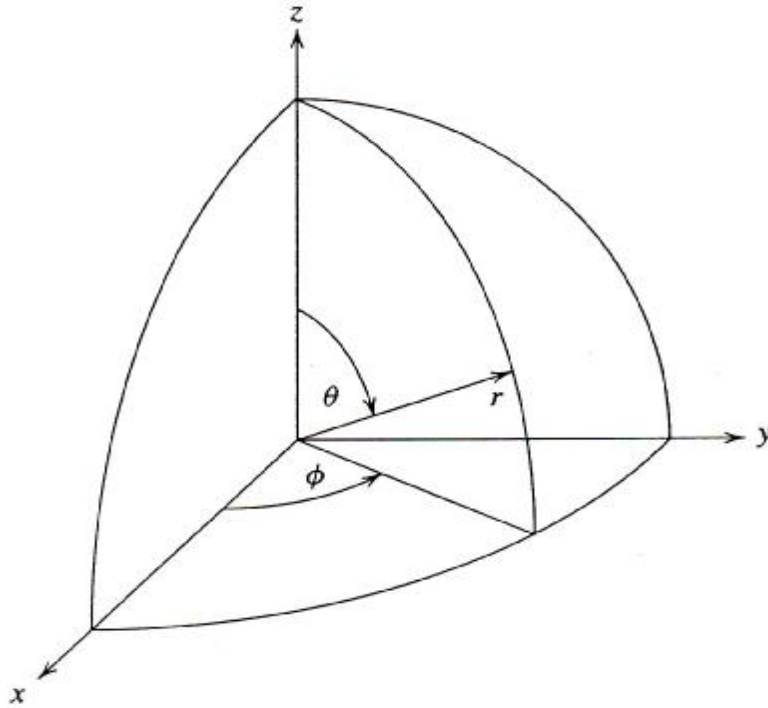
$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad \text{και} \quad z = r \cos \theta. \quad (1.23)$$

Με την ταχύτητα να εκφράζεται με τη βοήθεια των συνιστωσών:

$$u = (u_r, u_\theta, u_\varphi), \quad (1.24)$$

η εξίσωση συνέχειας (1.3) για την ασυμπύεστη ροή γίνεται:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} u_\varphi = 0 \quad (1.25)$$



ΣΧΗΜΑ 1.2: Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Με την απουσία σωματιδιακών δυνάμεων, για ένα Νευτώνειο ρευστό με σταθερά ρ και μ , η εξίσωση Navier-Stokes (1.4) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} = \rho^{-1} \nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} = \\ - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{1}{r} \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (1.27)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} = \\ \rho^{-1} \nabla^2 u_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (1.28)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ο αριθμός των μονόμετρων εξαρτημένων μεταβλητών γι' αυτό το σύστημα των ζευγών των διαφορικών εξισώσεων (1.26) – (1.28) μπορεί να μειωθεί (απλοποίηση) σε βάρος της αύξησης του βαθμού. Για αξονικά συμμετρικές ροές, μία μονή μεταβλητή που λέγεται ροϊκή συνάρτηση, αναπαριστά το πεδίο ροής. Για τέτοιες

ροές μπορούμε να εκφράσουμε την ταχύτητα u με όρους ενός δυναμικού διανύσματος. Σε ένα αξονικά συμμετρικό καμπύλο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η, φ) αυτό μπορεί να εκφραστεί ως:

$$u(\xi, \eta) = P' \frac{\psi(\xi, \eta)}{h_\varphi} e_\varphi \quad (1.29)$$

όπου h_φ είναι ο μετρικός συντελεστής της συντεταγμένης φ . Με αυτή την έκφραση του πεδίου ταχυτήτων, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται ενώ για κάθε αυθαίρετη διανυσματική συνάρτηση f , ισχύει η ταυτότητα $P \nabla(P' f) = 0$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$u_r(r, \theta) = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad u_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial r} \quad \text{και} \quad u_\varphi = 0. \quad (1.30)$$

Με τη βοήθεια της ροϊκής συνάρτησης, η εξίσωση Navier-Stokes για ασυμπίεστη αξονοσυμμετρική ροή και ένα συντηρητικό πεδίο σωματιδιακών δυνάμεων, μπορεί να γραφτεί ως:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (L_{-1} \Psi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (L_{-1} \Psi, \Psi)}{\partial (r, \theta)} + \frac{2}{r^3 \sin^2 \theta} L_{-1} \Psi \frac{\partial (\Psi, r \sin \theta)}{\partial (r, \theta)} = \mu L_{-1}^2 \Psi \quad (1.31)$$

στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Εδώ, ο L_{-1} είναι ο τελεστής Stokes που ορίζεται ως:

$$L_{-1} \nabla^2 + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \quad (1.32)$$

Για συγκεκριμένες ασύμμετρες ροές, το πεδίο ταχύτητας μπορεί να δημιουργηθεί από ένα δακτυλιοειδές και ένα πολικό διανυσματικό πεδίο. Ο τύπος που ακολουθεί, χρησιμοποιήθηκε από τον Chandrasekhar:

$$u = P' P' (\Psi e_r) + P' (\Phi e_r). \quad (1.33)$$

Με αυτή τη διατύπωση, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (1.26) – (1.28) ελαττώνεται σε μια τεταρτοβάθμια και μια δευτεροβάθμια εξίσωση για τα Ψ και Φ αντίστοιχα.

1.3 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Οι όροι μεταφορά θερμότητας και μεταφορά μάζας χρησιμοποιούνται πολλές φορές εναλλακτικά εξαιτίας της ομοιότητας των δύο διαδικασιών κάτω από κάποιες

συνθήκες. Η ροή θερμότητας συμβαίνει όταν υπάρχει μια βαθμιδωτή μεταβολή της θερμοκρασίας που χρησιμεύει ως προωθητική δύναμη. Αυτό είναι γνωστό ως νόμος του Fourier το οποίο μαθηματικά περιγράφεται ως:

$$\dot{q} = -k \nabla T, \quad (1.34)$$

όπου \dot{q} είναι η ροή θερμότητας, T η κατανομή θερμοκρασίας και k η θερμική αγωγιμότητα. Η διάχυση μάζας συμβαίνει εξαιτίας μιας μεταβολής συγκέντρωσης και μπορεί να περιγραφεί από μια παρόμοια γραμμική σχέση μεταξύ της ροής μάζας και της μεταβολής της συγκέντρωσης. Αυτό είναι γνωστό ως νόμος του Fick. Μπορεί να υπάρχουν αρκετές συνιστώσες που να εμπλέκονται στη διαδικασία και γενικά η ροή καθενός από τους παράγοντες αυτούς εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής του και ίσως και αρκετών άλλων παραγόντων. Όμως η αλληλεπίδραση είναι συνήθως πολύ μικρή και μπορεί να αγνοηθεί. Είναι σύνηθες να εκφράζουμε τις ροές με τον τύπο:

$$J_j = -D_{jm} \nabla c_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (1.35)$$

όπου J_j είναι το διάνυσμα ροής μοριακής διάχυσης, D_{jm} ο συντελεστής διάχυσης της μάζας των j^{th} συστατικών στο μείγμα και c_j είναι η μοριακή συγκέντρωση, όλα αναφέρονται στα προσδιοριζόμενα συστατικά. Ο δείκτης m αναφέρεται στην ανάμιξη όλων των συστατικών. Σε καταστάσεις όπου τα συστατικά δε χρειάζεται να προσδιοριστούν, όπως στη διπλή διάχυση, χρησιμοποιείται μια απλουστευμένη σημειογραφία όπου οι δείκτες j και m δεν αναγράφονται.

Υπάρχουν επίσης καταστάσεις όπου οι διαδικασίες μεταφοράς μάζας και θερμότητας συνδέονται και χρειάζεται να γίνει ταυτόχρονη επεξεργασία τους, όπως στην αλλαγή φάσης με την παρουσία αδρανών συστατικών. Παρακάτω γίνεται λόγος για την εξίσωση ενέργειας που περιγράφει τη μεταφορά θερμότητας και ακολουθείται από την εξίσωση συνέχειας των συστατικών.

1.3.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Με την εφαρμογή του νόμου του Fourier (εξίσωση 1.34), και με βάση τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής για έναν ελεγχόμενο όγκο, για την εξίσωση ενέργειας έχουμε:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + u \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} + \mu \Phi, \quad (1.36)$$

όπου c_p είναι η ειδική θερμότητα, T η θερμοκρασία, k είναι η θερμική αγωγιμότητα, \dot{q} ο βαθμός ογκομετρικής παραγωγής θερμότητας και Φ η συνάρτηση της σκέδασης ιξώδους. Στις περισσότερες εφαρμογές, η θερμική αγωγιμότητα και η πυκνότητα υποθέτουμε πως είναι σταθερές και η σκέδαση ιξώδους είναι αμελητέα. Κάτω από αυτές τις συνθήκες και με την απουσία πηγών και αναρροφήσεων θερμότητας, η εξίσωση ενέργειας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = P^2 T, \quad (1.37)$$

όπου $a = k/(\rho c_p)$ είναι η θερμική διαχυτότητα.

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Όσον αφορά στις σφαιρικές συντεταγμένες που καθορίζονται από την εξίσωση (1.23), η εξίσωση ενέργειας (1.37) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

ΑΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΟΡΦΗ

Για να γραφτεί η εξίσωση ενέργειας σε αδιάστατη μορφή, τοποθετούμε τις παραμέτρους όπως φαίνεται παρακάτω:

$$x^A = \frac{x}{L}, \quad t^A = \frac{at}{L^2}, \quad P^A = LP, \quad (1.39)$$

$$u^A = \frac{u}{U}, \quad T^A = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad Pe = \frac{UL}{a},$$

όπου το T_0 αναπαριστά την κατάλληλη θερμοκρασία που αντιστοιχεί σε ένα ρευστό σωματίδιο ενώ το T_∞ αναπαριστά τη θερμοκρασία του πεδίου. Ο λόγος της μεταφοράς θερμότητας προς τη θερμική διαχυτότητα αναπαρίσταται από τον αριθμό Péclet, Pe . Η εξίσωση ενέργειας μπορεί τώρα να γραφτεί ως:

$$\frac{\partial T^A}{\partial t^A} + Pe u^A \frac{\partial T^A}{\partial x^A} = (P^A)^2 T^A \quad (1.40)$$

Ο αδιάστατος χρόνος t^A είναι γνωστός ως αριθμός Fourier και συμβολίζεται με F_0 . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός Péclet είναι το γινόμενο του αριθμού Reynolds και του αριθμού Prandtl έτσι ώστε:

$$Pe = RePr \quad (1.41)$$

Εδώ ο αριθμός Prandtl που ορίζεται ως $Pr = \nu/a$, αναπαριστά το λόγο του κινηματικού ιξώδους προς τη θερμική διαχυτότητα.

1.3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΑΤΙΚΩΝ

Με την εφαρμογή του νόμου του Fick στη διάχυση σε ένα δυαδικό σύστημα, και την απουσία χημικών αντιδράσεων στον κυρίως όγκο των ρευστών, η αρχή διατήρησης της μάζας για σταθερά ρ και D_{jm} οδηγεί σε:

$$\frac{1}{D_{jm}} \frac{\partial c_j}{\partial t} + u \frac{\partial c_j}{\partial x} = P^2 c_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, (N-1), \quad (1.42)$$

το οποίο είναι μαθηματικά όμοιο με την εξίσωση ενέργειας (1.36). Εδώ c_j είναι η μοριακή συγκέντρωση των j^{th} συστατικών και σχετίζεται με τη συγκέντρωση της μάζας ρ_j και με το μοριακό βάρος m_j σύμφωνα με τη σχέση $c_j = \rho_j / m_j$. Αφού το σύνολο όλων των συγκεντρώσεων μάζας μπορεί να ερμηνευτεί ως η πυκνότητα του μίγματος, υπάρχει μια επιπλέον σχέση μεταξύ των συγκεντρώσεων. Επομένως χρειάζονται μόνο $(N-1)$ διαφορικές εξισώσεις για τα N συστατικά.

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Όσον αφορά στις σφαιρικές συντεταγμένες που καθορίζονται από την εξίσωση (1.23), η εξίσωση διατήρησης των συστατικών (1.42) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{\partial c_j}{\partial t} + u_r \frac{\partial c_j}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial c_j}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial c_j}{\partial \phi} = D_{jm} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c_j}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 c_j}{\partial \phi^2} \right],$$

$$j = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (1.43)$$

ΑΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΟΡΦΗ

Η αδιάστατη μορφή είναι:

$$\frac{\partial c_j^A}{\partial t} + Pe_j^A \frac{\partial c_j^A}{\partial x} = (P^A)^2 c_j^A \quad j = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (1.44)$$

όπου:

$$c_j^A = \frac{c_j - c_{j0}}{c_{j0} - c_{j\infty}}, \quad (1.45)$$

και

$$Pe_j^A = \frac{UL}{D_{jm}} = Re Sc_j \quad (1.46)$$

που αναπαριστά τον αριθμό Péclet για τη διάχυση της μάζας. Η συγκέντρωση c_{j0} αναπαριστά μια κατάλληλη τιμή των j^{th} συστατικών που αναφέρονται στη διασκορπιζόμενη φάση. Εδώ ο αριθμός Schmidt $Sc_j = v/D_{jm}$ αντιπροσωπεύει το λόγο του κινηματικού ιξώδους προς τη διαχυτότητα της μάζας. Ενώ οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις για τη μεταφορά μάζας και θερμότητας είναι παρόμοιες, εμφανίζονται διαφορές στις συνθήκες κατά μήκος της διεπιφάνειας.

1.3.3 ΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Για να εξασφαλίσουμε ένα σημαντικό μέτρο του βαθμού μεταφοράς της θερμότητας ή της μάζας από ένα σωματίδιο σε ένα συνεχές μέσο ή αντιστρόφως, θεωρούμε μια σταθερή οριακή συνθήκη του πεδίου (T_{∞} ή $c_{j,\infty}$). Σε πολλές περιπτώσεις στη διεπιφάνεια ενός ρευστού σωματιδίου και στη συνεχή φάση, οι αντίστοιχες μεταβλητές (T ή c_j) θεωρούνται ότι έχουν σταθερή τιμή. Έτσι μπορεί να έχουμε:

$$C_{j, \text{διεπιφάνεια}} = C_{j,i} \quad \text{ΚΑΙ} \quad C_{j, \text{οριακό πεδίο}} = C_{j,\infty} \quad (1.47)$$

Παρόμοιες συνθήκες ισχύουν και για το T , π.χ T_i στη διεπιφάνεια και T_{∞} αρκετά μακρύτερα. Μιλώντας με όρους φυσικής, μια σταθερή συνθήκη στη διεπιφάνεια συνεπάγεται μια απεριόριστη θερμική ή μαζική χωρητικότητα της διασκορπιζόμενης φάσης. Εφόσον τα αποτελέσματα για τη μεταφορά βασίζονται σε μια τέτοια σταθερή συνθήκη δίνοντάς μας πληροφορίες σχετικά με την αντίσταση της συνεχούς φάσης, η αξιοπιστία είναι γενικά αρκετά περιορισμένη. Για να κατανοήσουμε την ιδιαίτερη συμπεριφορά ενός συστήματος είναι απαραίτητη μια πλήρης υλοποίηση των συνθηκών διεπιφάνειας. Για την περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας, έχουμε συνέχεια της θερμοκρασίας και της ροής της θερμότητας στη διεπιφάνεια, π.χ:

$$\hat{T} = T \quad (1.48)$$

και

$$- \hat{k}P \hat{T} Xn = - kP T Xn, \quad (1.49)$$

όπου, όπως ειπώθηκε νωρίτερα, το καπέλο (^) χρησιμοποιείται για τις ποσότητες της διασκορπιζόμενης φάσης.

Για τις διαδικασίες μεταφοράς μάζας, η σχετική διεπιφανειακή θερμοδυναμική είναι αρκετά πιο πολύπλοκη. Πιο συγκεκριμένα, η κατανομή της συγκέντρωσης δεν είναι απαραίτητα συνεχής. Επίσης, μπορεί να υπάρχει μια διακριτή επιφανειακή φάση λόγω της σχέσης της διαλυμένης ουσίας με την επιφάνεια. Σε απλές περιπτώσεις που δεν περιλαμβάνουν επιφανειακή φάση, οι διεπιφανειακές συνθήκες για αραιό διάλυμα, μπορεί να γραφούν ως:

$$\hat{c}_j = \beta c_j \quad \text{και} \quad - \hat{D}_{jm}P \hat{c}_j Xn = - D_{jm}P c_j Xn \quad (1.50)$$

όπου β είναι ένας συντελεστής που βασίζεται στη διεπιφανειακή θερμοδυναμική.

Στην περίπτωση της αλλαγής φάσης στη διεπιφάνεια μιας σταγόνας ή μιας φυσαλίδας, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η λανθάνουσα θερμότητα. Η συνθήκη συνέχειας της θερμοκρασίας (1.48) παραμένει αμετάβλητη ενώ η συνθήκη συνέχειας της ροής της θερμότητας (1.49) θα πρέπει να τροποποιηθεί στην ακόλουθη μορφή:

$$-(\hat{k}_P \hat{T} - k_P T) \chi n = \frac{\rho \lambda}{\rho} \lambda \rho (u - u_i) \chi n, (\text{σταγόνα}) \quad (1.51)$$

$$- \frac{\rho \lambda}{\rho} \lambda \hat{\rho} (\hat{u} - u_i) \chi n (\text{φυσαλίδα})$$

συγχρόνως με τη συνθήκη στεγανότητας για αδρανές αέριο:

$$(m_A u - D_{Am} P m_A) \chi n = 0 \quad \text{ή} \quad (\hat{m}_A \hat{u} - \hat{D}_{Am} P \hat{m}_A) \chi n = 0 \quad (1.52)$$

Εδώ, m_A ή \hat{m}_A αναπαριστά το κλάσμα της μάζας ενός αδρανούς αερίου σε ένα μείγμα αερίου-ατμού, D_{Am} ή \hat{D}_{Am} είναι ο συντελεστής δυαδικής διάχυσης στο μίγμα, u_i είναι η ταχύτητα της κινούμενης διεπιφάνειας και λ είναι η λανθάνουσα θερμότητα της εξάτμισης.

1.3.4 ΜΕΣΟΣ ΒΑΘΜΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Με τις σταγόνες και τις φυσαλίδες, ο συνολικός βαθμός ανταλλαγής θερμότητας και μάζας μεταξύ των σωματιδίων και της συνεχούς φάσης είναι εκτός ενδιαφέροντος. Ο συνολικός βαθμός ροής θερμότητας κατά μήκος της διεπιφάνειας υπολογισμένος για την περιοχή A της διεπιφάνειας, δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{q} = - \frac{1}{A} \int_{S_A} k_P T \chi dA \quad (1.53)$$

Αυτός ο υπολογισμός του μέσου όρου της ροής θερμότητας συνήθως εκφράζεται σε αδιάστατη μορφή που λέγεται αριθμός Nusselt:

$$Nu = \frac{\bar{q} L}{k \Delta T}, \quad (1.54)$$

όπου L είναι ένα κατάλληλο μήκος που αντιστοιχεί στο μέγεθος του σωματιδίου και $\Delta T = (T_0 - T_\infty)$ είναι η διαφορά θερμοκρασίας. Όπως υποστηρίχτηκε προηγουμένως, T_0 είναι μια κατάλληλη θερμοκρασία που αντιστοιχεί στη διασκορπιζόμενη φάση. Ανάλογα με τις συνθήκες της διεπιφάνειας, μπορεί για παράδειγμα, να θεωρηθεί ως η αρχική θερμοκρασία του σωματιδίου σε ένα μεταβατικό σύστημα ή ο μέσος όρος της θερμοκρασίας της διασκορπιζόμενης φάσης ή η διεπιφανειακή θερμοκρασία T_i .

Με έναν ανάλογο τρόπο, μπορούμε να εκφράσουμε το βαθμό της αδιάστατης μεταφοράς μάζας ως αριθμό Sherwood:

$$Sh_j = \frac{\bar{J}_j L}{D_{jm} \Delta c_j} = - \frac{L}{D_{jm} A} \zeta_A \int_0^L c_j \kappa dA, \quad (1.55)$$

όπου \bar{J}_j είναι η μέση μοριακή ροή και $\Delta c_j = (c_{j,0} - c_{j,\infty})$. Και πάλι όπως με την επιλογή του T_0 για το πρόβλημα μεταφοράς της θερμότητας, η συγκέντρωση c_0 αντιστοιχεί σε μια κατάλληλη τιμή για το ρευστό σωματίδιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο:

ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το σχήμα και το μέγεθος ενός ρευστού σωματιδίου (μιας φυσαλίδας ή μιας σταγόνας) επηρεάζουν σημαντικά την κίνησή του εξ' ίσου με τις σχετιζόμενες διαδικασίες μεταφοράς θερμότητας και μάζας. Η οπισθέλκουσα δύναμη εξαρτάται από το σχήμα του σωματιδίου και είναι ένας από τους παράγοντες που καθορίζουν το μέγεθος της ταχύτητας του ρευστού. Η μεταφορά εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διαμετωπική περιοχή που είναι συνάρτηση του σχήματος και του μεγέθους του σωματιδίου, όπως και η συνολική κίνηση του ρευστού. Στην διεπιφάνεια ανάμεσα στο σωματίδιο και το περιβάλλον ρευστό, για τη σταθερότητα του σωματιδίου, πρέπει να διατηρείται ισορροπία ανάμεσα στην κάθετη δύναμη, τη διατμητική δύναμη, τη βαρύτητα και την επιφανειακή τάση. Αυτή η ισορροπία καθορίζει το σχήμα του σωματιδίου. Το μέγεθος του σωματιδίου επηρεάζεται επίσης, ειδικά αν υπάρχει αλλαγή φάσης.

Αυτό το κεφάλαιο, κυρίως διαπραγματεύεται τα Νευτώνεια ασυμπίεστα ρευστά σωματίδια, είτε σε ηρεμία είτε σε σταθερή και συμμετρική ως προς τους άξονες κίνηση σε περιβάλλον ασυμπίεστου ρευστού. Ειδικές επιδράσεις όπως αυτές που οφείλονται στην παρουσία ηλεκτρικών πεδίων δεν λαμβάνονται υπ' όψη εδώ. Οι εφαρμόσιμες διεπιφανειακές συνθήκες για διάφορες καταστάσεις, δίνονται με λεπτομέρεια σε διάφορες πηγές (πίνακες). Η επιφανειακή τάση, όταν έχει σταθερή τιμή σε όλη την επιφάνεια, δρα στην κατεύθυνση της ελαχιστοποίησης της επιφανειακής ενέργειας και συνεπώς τείνει να διατηρεί το ρευστό σωματίδιο σε σφαιρικό σχήμα. Το σωματίδιο θα αποσυντεθεί μόνο όταν είναι υποκείμενο μη ομοιόμορφων ή μη συμμετρικών δυνάμεων όπως αυτές που οφείλονται στην πίεση ή σε μεταβολές θερμοκρασίας που μπορεί να υπερβούν την σταθεροποιητική επιρροή της επιφανειακής τάσης. Ένα μικρό σωματίδιο καθαρού ρευστού τείνει να είναι σφαιρικό, εξαιτίας της μεγάλης αναλογίας επιφάνειας προς όγκο. Με την παρουσία ρύπων, η επιφανειακή κατανομή του ενεργού επιφανειακού παράγοντα θα επηρεάσει το σχήμα. Στα επόμενα τμήματα, θα εξεταστεί αναλυτικά η κατανομή του σχήματος και του μεγέθους των ρευστών σωματιδίων.

2.2 ΣΧΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Για ένα στατικό σφαιρικό ρευστό σωματίδιο που βρίσκεται σε μηχανική ισορροπία με το περιβάλλον ρευστό, η παρακάτω εξίσωση καθορίζει την ισορροπία μεταξύ επιφανειακής τάσης και πίεσης:

$$(\hat{p} - p) = \frac{2\sigma}{R}, \quad (2.1)$$

Για ένα μη σφαιρικό σωματίδιο, η τοπική δύναμη ισορροπίας σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας είναι:

$$(\hat{p} - p) = \sigma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (2.2)$$

όπου R_1 και R_2 είναι οι τοπικές κύριες ακτίνες καμπυλότητας στο σημείο που μας ενδιαφέρει.

Τα στατικά σωματίδια μπορούν να στέκονται σε μια επιφάνεια ή να είναι κρεμαστά (να κρέμονται από μια επιφάνεια). Η εξίσωση στατικής ισορροπίας για τέτοια σωματίδια μπορεί να εξαχθεί από τη σχέση (2.2) και είναι:

$$\Delta \rho g z = \sigma \left[\frac{2}{R_0} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \quad (2.3)$$

όπου το z μετριέται κάθετα προς τα πάνω από το άκρο του σωματιδίου στον άξονα συμμετρίας και το R_0 είναι η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας στο άκρο. Για τα σωματίδια που στέκονται, το μήκος z είναι αρνητικό, και η ακτίνα καμπυλότητας στο άκρο R_0 είναι μέγιστη στην επιφάνεια της σταγόνας, αναλογώντας στην πλάτυσή της. Για τα κρεμαστά σωματίδια, το z είναι θετικό και το R_0 ελάχιστο. Αυτό αντιστοιχεί σε επιμήκη σταγόνα.

Στο επόμενο τμήμα, εξετάζονται τα αποτελέσματα της κίνησης των σωματιδίων στο σχήμα τους.

2.3 ΣΧΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

Για ένα ρευστό σωματίδιο που κινείται ελεύθερα, το σχήμα του επηρεάζεται έντονα από τις δυνάμεις στη συνεχή φάση. Για τη σταθερότητα του σωματιδίου, οι κάθετες και διατμητικές δυνάμεις πρέπει να είναι σε ισορροπία στη διεπιφάνεια που διαχωρίζει τις φάσεις. Είναι σύνηθες να θεωρείται ότι η διεπιφάνεια έχει απειροστικό πάχος ή το πάχος της να τείνει στο μηδέν. Αν αγνοήσουμε τα επιφανειακά ιξώδη, η κανονική διεπιφανειακή συνθήκη τάσης για ένα κινούμενο σωματίδιο μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\hat{p} + \hat{t} : nn - (p + \tau : nn) = \sigma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (2.4)$$

Η συνθήκη διατμητικής δύναμης είναι:

$$\hat{t} g - \tau g = P_s \sigma. \quad (2.5)$$

Εδώ, το n και το t είναι τα κάθετα και εφαπτομενικά επιφανειακά μοναδιαία διανύσματα, και P_s είναι η κλίση κατά μήκος της επιφάνειας. Για Νευτώνεια ρευστά και ασυμπίεστη, συμμετρική ως προς τον άξονα ροής, για σφαιρικό σωματίδιο, οι εξισώσεις (2.4) και (2.5) γίνονται:

$$\hat{p} - 2\hat{\mu} \frac{\hat{u}_r}{r} - \hat{p} - 2\hat{\mu} \frac{u_r}{r} = \frac{2\sigma}{R}, \quad (2.6)$$

και

$$\hat{\mu} \frac{1}{\kappa} \frac{\zeta \hat{u}_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\hat{u}_r}{\theta} = \mu \frac{1}{\kappa} \frac{\zeta u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{u_r}{\theta} = \frac{1}{R} \frac{d\sigma}{d\theta}, \quad (2.7)$$

Εδώ το r είναι η ακτινική συντεταγμένη και το θ η γωνιακή συντεταγμένη σε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων. Η κανονική συνθήκη τάσης μπορεί να αδιαστατοποιηθεί προκειμένου να αναδειχτούν διάφορα χαρακτηριστικά όπως παρακάτω:

1. Για ροή με μέσο ή υψηλό αριθμό Reynolds, οι αδρανειακές δυνάμεις θα είναι κυρίαρχες και θα μπορούσαν να προκαλέσουν αλλαγή σχήματος του σωματιδίου. Θεωρούμε την ολική πίεση της συνεχούς φάσης p σαν το άθροισμα της στατικής πίεσης p_s και της δυναμικής πίεσης p_d όπως παρακάτω:

$$p = p_s + p_d. \quad (2.8)$$

Παρόμοια εξίσωση εφαρμόζεται για την πίεση της διεσπαρμένης φάσης. Οι πιέσεις της συνεχούς και της διεσπαρμένης φάσης αντικαθίστανται από τις ποσότητες ρU^2 και $\rho \hat{U}^2$, αντίστοιχα. Οι ταχύτητες αντικαθίστανται από τα U και \hat{U} , τα οποία αντιπροσωπεύουν τη σχετική ταχύτητα του σωματιδίου και τη μέγιστη ταχύτητα κυκλοφορίας στην επιφάνεια του σωματιδίου, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την ακτινική συντεταγμένη r από την ακτίνα R του σωματιδίου, η εξίσωση (2.6) σε αδιάστατη μορφή γίνεται:

$$We \frac{1}{\kappa} \frac{\hat{\rho} \zeta \hat{Re}}{\Delta \rho \theta} \frac{\zeta \hat{u}_\theta}{r} + \frac{4}{\hat{Re}} \frac{\hat{u}_r}{r} = \frac{\rho \zeta}{\Delta \rho \theta} \frac{\zeta u_\theta}{r} + \frac{4}{Re} \frac{u_r}{r} = \frac{2R}{\sigma} (p_s - \hat{p}_s) + 4, \quad (2.9)$$

όπου $Re = \rho U(2R)/\mu$ είναι ο αριθμός Reynolds της συνεχούς φάσης, $\hat{Re} = \hat{\rho} \hat{U}(2R)/\hat{\mu}$ είναι ο αριθμός Reynolds της διεσπαρμένης φάσης, και $We = U^2(2R)\Delta\rho/\sigma$ είναι ο αριθμός Weber. Ο αριθμός Reynolds δείχνει το επίπεδο της δύναμης αδράνειας και είναι ο λόγος των αδρανών προς τις ιξώδεις δυνάμεις. Ο αριθμός Weber είναι ένα μέτρο της σχετικής σημασίας της δύναμης αδράνειας σε σύγκριση με την επιφανειακή τάση. Αυτή η αδιαστατοποίηση δείχνει ότι όπου οι δυνάμεις αδράνειας είναι κυρίαρχες, η παράμετρος που πρέπει να ληφθεί υπ' όψη στη μελέτη της αποσύνθεσης του σωματιδίου είναι ο αριθμός Weber, We . Πρέπει να σημειωθεί ότι για ένα σύστημα υγρού – υγρού ο καθορισμός του αριθμού Weber βασίζεται στο ρ αντί για το $\Delta\rho$.

2. Για ένα σωματίδιο που η κίνησή του οδηγείται από τη βαρύτητα, είναι σωστό να παραστήσουμε την πίεση της συνεχούς και της διεσπαρμένης φάσης με τις ποσότητες $2\rho gR$ και $2\hat{\rho}gR$, αντίστοιχα και τις ταχύτητες από τα U και \hat{U} . Τότε, η εξίσωση (2.6) σε αδιάστατη μορφή γίνεται:

$$Eo = \frac{\rho \hat{\rho}}{\Delta \rho} \left(\frac{\zeta}{R} \right) \hat{\rho}_d^* - 2 \frac{Fr^2}{Re} \left(\frac{\zeta}{r^*} \right) \hat{u}_r^* = \frac{\rho}{\Delta \rho} \left(\frac{\zeta}{R} \right) \hat{\rho}_d^* - 2 \frac{Fr^2}{Re} \left(\frac{\zeta}{r^*} \right) \hat{u}_r^* = \frac{2R}{\sigma} (\rho_s - \hat{\rho}_s) + 4 \quad (2.10)$$

όπου $Eo = 4\Delta\rho g R^2 / \sigma$ είναι ο αριθμός Eotvos. Οι αριθμοί Froude για τη συνεχή και τη διαλυμένη φάση ορίζονται από τις σχέσεις $Fr = U/(gR)^{1/2}$ και $\hat{Fr} = \hat{U}/(gR)^{1/2}$, αντίστοιχα. Ο αριθμός Eotvos είναι μέτρο της σημασίας της βαρυτικής δύναμης σε σύγκριση με την επιφανειακή τάση. Ο αριθμός Froude είναι ένα μέτρο της σχετικής σημασίας της δύναμης αδράνειας σε σχέση με τη βαρυτική δύναμη. Αυτή η αδιαστατοποίηση δείχνει ότι όπου η δύναμη της βαρύτητας είναι κυρίαρχη, η παράμετρος που πρέπει να ληφθεί υπ' όψη είναι ο αριθμός Eotvos.

3. Τελικά, για ροή στην οποία οι αδρανείς δυνάμεις είναι αμελητέες και οι ιξώδεις δυνάμεις κυρίαρχες, οι πιέσεις συνεχούς και διεσπαρμένης φάσης μπορούν να παρασταθούν αποτελεσματικά από τις ποσότητες $\mu U/(2R)$ και $\hat{\mu} \hat{U}/(2R)$, και οι ταχύτητες από τα U και \hat{U} . Η εξίσωση (2.6) τότε παίρνει την ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$Ca = \frac{\mu U}{\sigma} \left(\frac{\zeta}{R} \right) \hat{\rho}_d^* - 4 \left(\frac{\zeta}{r^*} \right) \hat{u}_r^* = \frac{\mu \hat{U}}{\sigma} \left(\frac{\zeta}{R} \right) \hat{\rho}_d^* - 4 \left(\frac{\zeta}{r^*} \right) \hat{u}_r^* = \frac{2R}{\sigma} (\rho_s - \hat{\rho}_s) + 4, \quad (2.11)$$

όπου $Ca = \mu U / \sigma$ είναι ο τριχοειδής αριθμός, ο οποίος είναι το μέτρο της σχετικής σημασίας των ιξωδών δυνάμεων προς την επιφανειακή τάση. Αυτή η αδιαστατοποίηση δείχνει ότι όπου οι ιξώδεις δυνάμεις είναι κυρίαρχες και οι αδρανείς δυνάμεις αμελητέες, η κατάλληλη παράμετρος που πρέπει να ληφθεί υπ' όψη είναι ο τριχοειδής αριθμός.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την συνθήκη ισορροπίας της επαπτόμενης δύναμης που δίνεται από την εξίσωση (2.7). Αυτή η συνθήκη παίζει ρόλο στην αποσύνθεση της σταγόνας μόνο όταν υπάρχει διαβάθμιση στην επιφανειακή τάση της επιφάνειας. Αυτή η διαβάθμιση μπορεί, για παράδειγμα, να προκαλείται από την παρουσία ενός επιφανειακού – ενεργού παράγοντα ή από διαφοροποίηση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια. Για την κατάσταση στην οποία έχουμε διαφοροποίηση στη θερμοκρασία η οποία προκαλεί διαβάθμιση στην επιφανειακή τάση, το δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.7) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d\sigma}{dT} \frac{T}{\theta}. \quad (2.12)$$

Έτσι, αναπαριστώντας την ταχύτητα της συνεχούς και της διαλυμένης φάσης ως U και $\hat{U}/(2R)$, αντίστοιχα, η αδιάστατη εξίσωση ισορροπίας της επαπτόμενης δύναμης (2.7) γίνεται:

$$\frac{\zeta}{r^*} \left(\frac{\zeta}{R} \right) \hat{u}_r^* + \frac{1}{r^*} \left(\frac{\zeta}{R} \right) \hat{u}_r^* = \frac{Pe}{\varphi_\mu \varphi_a} \left(\frac{\zeta}{r^*} \right) \hat{u}_r^* + \frac{1}{r^*} \left(\frac{\zeta}{R} \right) \hat{u}_r^* = 2Ma, \quad (2.13)$$

όπου Ma είναι ο αριθμός Marangoni ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

$$Ma = \frac{2R\zeta \frac{d\sigma}{dT}}{\hat{\mu} a \theta} \quad (2.14)$$

και $Pe = 2UR/a$ είναι ο αριθμός Péclet. Αυτή η αδιάστατη εξίσωση δείχνει ότι για δοσμένο αριθμό Péclet, η αποσύνθεση εξαιτίας της διαφοροποίησης της επιφανειακής τάσης καθορίζεται από τον αριθμό Marangoni.

Συνοψίζοντας, για δοσμένο αριθμό Reynolds (ή αριθμό Péclet), οι τέσσερις αδιάστατες μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν για να καθορίσουμε το σχήμα του σωματιδίου είναι ο αριθμός Weber, ο αριθμός Eotvos, ο αριθμός Ca και ο αριθμός Marangoni. Για να εξακριβωθεί η μεταβολή από την σφαιρικότητα, πρέπει να ερευνηθούν οι συνέπειες καθεμιάς από αυτές τις παραμέτρους για δοσμένη φυσική κατάσταση. Μία ακόμα παράμετρος που είναι συνηθισμένη και η οποία χαρακτηρίζει αποκλειστικά τις φυσικές ιδιότητες του συστήματος είναι ο αριθμός Morton (M), ο οποίος ορίζεται ως: $M = g\mu^4 \Delta\rho / (\rho^2 \sigma^3)$.

Ο Grace και οι συνεργάτες του ταξινόμησαν σε δύο κατηγορίες τις καταστάσεις και τις παραμέτρους που διέπουν το σχήμα των σωματιδίων:

- (i) σωματίδιο σε υγρό και
- (ii) υγρή σταγόνα σε αέριο μέσο.

2.3.1. ΡΕΥΣΤΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΥΓΡΟ

Θεωρώντας τη κίνηση σωματιδίου σε υγρό, αναγνωρίζονται τρεις διαφορετικές καταστάσεις. Αυτές είναι:

- (1) η σφαιρική,
- (2) η ελλειψοειδής και
- (3) η κατάσταση σφαιρικής κεφαλής.

Για $Re < 1$, το ρευστό σωματίδιο θα παραμείνει ουσιαστικά σφαιρικό ανεξαρτήτως του μεγέθους του Re , του επιπέδου ρύπανσης και της τιμής της επιφανειακής τάσης. Για την ακρίβεια, για μια σταγόνα που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση σε $Re = 1$, το σχήμα της είναι τέλεια σφαίρα. Εξετάζοντας τις επιπτώσεις των φυσικών παραμέτρων του συστήματος, για $Re \neq 1$, εκτός αν $M \ll 1$, το σωματίδιο παραμένει σχεδόν σφαιρικό. Για συνήθεις εφαρμογές, ένα σωματίδιο σε έρπουσα κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σφαιρικό ανεξάρτητα από τους αριθμούς Weber και Eotvos. Αναλυτική εξέταση και εκτιμήσεις για την αποσύνθεση σωματιδίου σε χαμηλό αριθμό Reynolds παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3.

Σε υψηλότερες τιμές των αριθμών Reynolds και Eotvos (σωματίδια μεγαλύτερου μεγέθους), το σωματίδιο μετατρέπεται σε πεπλατυσμένο σφαιροειδές εκ περιστροφής (ελλειψοειδής κατάσταση) και τελικά εντάσσεται στην κατάσταση σφαιρικής κεφαλής. Το όριο ανάμεσα στις σφαιρικές και ελλειψοειδείς καταστάσεις είναι λιγότερο σαφές και ο εντοπισμός του μπορεί να εξαρτάται από την ποσότητα ρύπων στο σύστημα. Σε συστήματα με χαμηλό αριθμό M , ένα ελλειψοειδές σωματίδιο υφίσταται τυχαίες ταλαντώσεις. Η ελλειψοειδής κατάσταση παρακάμπτεται για συστήματα με $M > 100$. Για $Eo > 40$ και $Re > 1.2$, το σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση σφαιρικής κεφαλής. Το σωματίδιο που βρίσκεται σε αυτή την κατάσταση

μοιάζει με κομμάτι που κόπηκε από σφαίρα. Η προπορευόμενη επιφάνεια της κεφαλής είναι σφαιρική και η οπίσθια επιφάνεια επίπεδη. Για $M > 0.1$, το σωματίδιο μοιάζει με τμήμα κομμένο από πεπλατυσμένο σφαιροειδές με την οπίσθια επιφάνεια κοίλη ή βαθουλωμένη. Το σωματίδιο τότε θεωρείται ότι είναι στην κατάσταση σφαιρικής κεφαλής. Για $Re > 0.4$, μια μεγάλη σφαιρική / ελλειψοειδής κεφαλή πιθανώς να έχει ένα συρόμενο περίζωμα αποτελούμενο από το ρευστό του σωματιδίου. Με βάση τα πειράματα των Bhaqa και Weber, είναι δυνατόν να αναγνωριστούν καταστάσεις των σχημάτων του σωματιδίου όπως οι πεπλατυσμένες ελλειψοειδείς κεφαλές, τα ταλαντευόμενα δισκόμορφα ελλειψοειδή, οι περιζωματικές φουσαλίδες με ομαλά και κυματοειδή περιζώματα και οι σφαιρικές κεφαλές με κλειστά ή ανοιχτά αυλάκια.

Για ένα καθαρό σωματίδιο σε σφαιρική κατάσταση ($Re < 1$), η τελική ταχύτητα μπορεί να υπολογιστεί από τη λύση των Rybczynski – Hadamard. Στην περίπτωση επιφανειακής ρύπανσης (καταστολή εσωτερικής κυκλοφορίας), συνήθως χρησιμοποιείται η εξίσωση Stokes για συμπαγείς σφαίρες. Για $Re < 2$, η εξίσωση:

$$C_D = C_{D_0} + 0.40 \frac{\zeta \varphi_\mu + 2\varphi^2}{\varphi_\mu + 1}$$

και για $2 \leq Re \leq 50$ η εξίσωση:

$$C_D = \frac{1}{1 + \varphi_\mu} \frac{\zeta 24}{Re} + 4Re^{-\frac{1}{3}} + 14.9Re^{-0.78}$$

συνιστώνται για τον υπολογισμό του συντελεστή οπισθέλκουσας προκειμένου να εκτιμηθεί η τελική ταχύτητα για ένα σωματίδιο από καθαρό ρευστό. Με την παρουσία ενεργών επιφανειακών ρύπων η ακριβής τελική ταχύτητα θα είναι σημαντικά χαμηλότερη και πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι κατάλληλοι συντελεστές διόρθωσης.

Για σωματίδιο με ρύπους στην ελλειψοειδή κατάσταση, η τελική ταχύτητα μπορεί να εξαχθεί από την ακόλουθη εξίσωση των Grace, Wairegi και Nguyen:

$$Re = \frac{\rho d_e U_\infty}{\mu} = (J - 0.857)M^{0.149}, \quad (2.15)$$

όπου:

$$J = \begin{cases} 0.94N^{0.757} & \text{για } 2 < N \leq 59.3, \\ 3.42N^{0.441} & \text{για } N > 59.3 \end{cases}$$

και το N δίνεται από τη σχέση:

$$N = \frac{4}{3} EoM^{-0.149} \frac{\zeta \mu \varphi^{0.14}}{0.0009}$$

Εδώ το d_e είναι η διάμετρος σφαίρας ισοδύναμου όγκου με το ελλειψοειδές σωματίδιο και το μ πρέπει να είναι σε μονάδες SI. Για καθαρά σωματίδια, μια γραφική παράσταση από την οποία μπορεί να εξαχθεί ένας διορθωτικός παράγοντας στην παραπάνω σχέση δίνεται από τον Grace κ.α.

Στην κατάσταση σφαιρικής κεφαλής, η έκφραση για την τελική ταχύτητα δίνεται από τους Wairegi και Grace όπως παρακάτω:

$$U_{\infty} = \frac{2\zeta\Delta\rho}{3\theta\rho} gR^{\frac{1}{2}}, \quad (2.16)$$

όπου R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της προπορευόμενης επιφάνειας του σωματιδίου. Στην κατάσταση ελλειψοειδούς κεφαλής, η τελική ταχύτητα δίνεται ως εξής:

$$U_{\infty} = \frac{\sin^{-1} e - e(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{e^3} \frac{\zeta\Delta\rho}{\theta\rho} g b^{\frac{1}{2}}, \quad (2.17)$$

όπου:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (2.18)$$

είναι η εκκεντρότητα και a και b ο οριζόντιος και κάθετος ημιάξονας.

2.3.2 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΣΕ ΑΕΡΑ

Για μια σταγόνα με $Eo \leq 0.15$, η τελική ταχύτητα είναι ουσιαστικά η ίδια όπως και για συμπαγή σφαίρα της ίδιας πυκνότητας που βρίσκεται σε πτώση στο ίδιο αέριο. Για σταγόνες στην περιοχή, $0.15 < Eo < 0.5$, ένας τύπος υπολογισμού μέσω παρεμβολής δίνεται από τους Grace και Wairegi:

$$Re = Re_{Eo=0.15} + \frac{(Eo - 0.15)}{0.35} [Re_{Eo=0.5} - Re_{Eo=0.15}] \quad (2.19)$$

όπου το $Re_{Eo=0.5}$ μπορεί να εξαχθεί από τον Clift κ.α ως εξής:

$$Re = 1.62 Eo^{0.755} M^{-0.25} \quad \text{για} \quad 0.5 \leq Eo \leq 1.84 \quad (2.20)$$

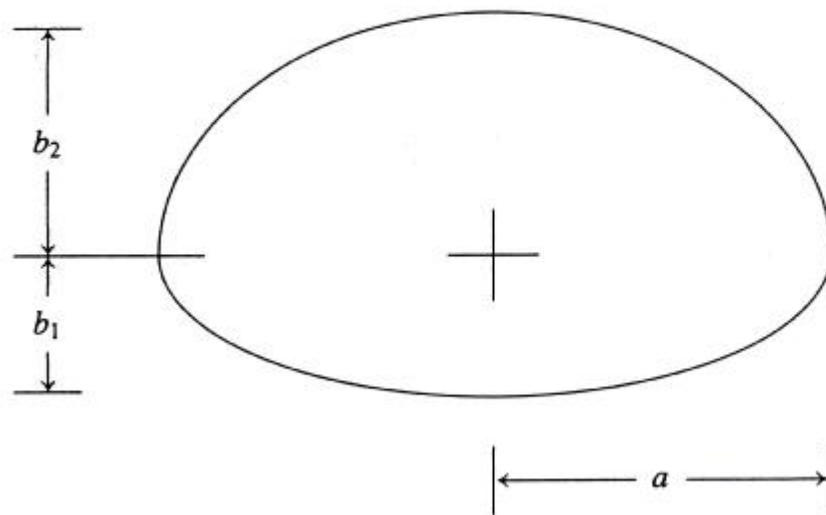
Για άλλες περιοχές τιμών του Eo , οι παρακάτω εξισώσεις από τον Clift κ.α δίνουν:

$$Re = \begin{cases} 1.83 Eo^{0.555} M^{-0.25} & \text{για} \quad 1.84 \leq Eo \leq 5.0, \\ 2.0 Eo^{0.5} M^{-0.25} & \text{για} \quad 5.0 \leq Eo \leq 16.0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Για $Eo^3 > 16$, μια σταγόνα που πέφτει σε αέριο περιβάλλον γίνεται ασταθής και διαλύεται εκτός αν έχει πολύ υψηλό ιξώδες.

2.3.3 ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Ένα προσεγγιστικό μοντέλο με το όνομα «διπλό ημιελλειψοειδές μοντέλο» για την πρόβλεψη της αποσύνθεσης ενός ρευστού σωματιδίου σε υψηλό αριθμό Reynolds, παρουσιάστηκε από τους Grace και Wairegi. Γίνεται η υπόθεση ότι ένα παραμορφωμένο ρευστό σωματίδιο έχει γενικά τη μορφή ενός διπλού ημιελλειψοειδούς σχήματος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.



ΣΧΗΜΑ 2.1: «Διπλό ημιελλειψοειδές μοντέλο» με b_1 και b_2 καθορισμένα για μια δεδομένη τιμή του a και ιδιοτήτων του ρευστού.

Το μοντέλο παρέχει εξισώσεις για τον υπολογισμό των δύο μικρών ημιαξόνων της έλλειψης, b_1 και b_2 , όταν ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης a , καθώς και οι τιμές των αριθμών Eotvos και Weber είναι γνωστά. Εκτός από την υπόθεση του διπλού ελλειψοειδούς σχήματος, οι άλλες βασικές υποθέσεις του μοντέλου είναι οι εξής:

1. Όλες οι δευτερεύουσες κινήσεις όπως οι διαστολές και η ταλάντωση είναι αμελητέες.
2. Η κατανομή της υδροδυναμικής πίεσης που οφείλεται στη ροή πάνω στο προπορευόμενο ημιελλειψοειδές είναι ταυτόσημη με αυτή για δυναμική ροή πάνω από τελείως πεπλατυσμένο σφαιροειδές της ίδιας εκκεντρότητας και προσανατολισμού με το μπροστινό ημισφαιροειδές μέρος.
3. Ο αποχωρισμός της ροής συμβαίνει στον ισημερινό (στο τμήμα με τη μεγαλύτερη διάμετρο).
4. Η ανάκτηση της πίεσης στο πίσω τμήμα είναι αμελητέα.

Για το πρόσθιο ημισφαιροειδές, η εξίσωση που συνδέει την υδροστατική, την τριχοειδή και τη δυναμική δύναμη είναι:

$$\frac{1}{4} E_0 (1 - e_1^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \cos n_1) = (1 - e_1^2)^{\frac{1}{2}} \frac{(2 - e_1^2 \sin^2 n_1)}{(1 - e_1^2 \sin^2 n_1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{We \sin^2 n_1}{4k_3^2 (1 - e_1^2 \sin^2 n_1)}, \quad (2.22)$$

όπου:

$$e_1^2 = \frac{\zeta}{a} \left(1 - \frac{b_1^2 \phi}{a^2 \psi}\right), \quad k_3 = \frac{1}{e_1^3} \sin^{-1} e_1 - e_1 (1 - e_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$E_0 = \frac{\Delta \rho g (2a)^2}{\sigma} \quad \text{και} \quad We = \frac{\rho (2a) U_{\infty}^2}{\sigma} \quad (2.23)$$

Η παράμετρος n_1 είναι η γωνιακή συντεταγμένη της έλλειψης μετρημένη από τη μύτη. Μια αριθμητική τεχνική χρησιμοποιείται για τη λύση της εξίσωσης ως προς το e_1 , και το b_1 εξάγεται από την εξίσωση (2.23). Για το οπίσθιο ημισφαιροειδές, ο μικρός ημιάξονας b_2 πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$(8 + E_0) \frac{\zeta b_2^3 \phi^3}{a^3 \psi^3} - 4 \frac{\zeta b_2^2 \phi^2}{a^2 \psi^2} - 4 = 0. \quad (2.24)$$

Με γνωστά τα b_1 και b_2 , η σφαιρική διάμετρος για ισοδύναμο όγκο, d_e , μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση:

$$d_e = \frac{4}{\kappa} a^2 (b_1 + b_2)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.25)$$

Το μοντέλο προβλέπει ότι για υψηλούς αριθμούς Reynolds, υπάρχει μια βαθμιαία και εξελικτική πλάτυνση του εμπρόσθιου τμήματος του σωματιδίου, ανεξάρτητα από το ρευστό – ρευστό σύστημα (ανεξάρτητα από το ποια ρευστά συμμετέχουν στο σύστημα). Στο μπροστινό μέρος, οι δυνάμεις της επιφανειακής τάσης πάντα δρουν στην κατεύθυνση της διατήρησης σφαιρικού σχήματος, ενώ αντίθετα οι δυναμικές δυνάμεις τείνουν στην πλάτυνση και οι υδροστατικές δυνάμεις στην επιμήκυνση. Το τελικό σχήμα του σωματιδίου καθορίζεται από την ισορροπία αυτών των τριών επιδράσεων. Το μοντέλο έχει προβλέψει με επιτυχία σχήματα σωματιδίων σε ελεύθερη πτώση σε υψηλούς αριθμούς Reynolds διαμέσου υγρών ή αερίων.

2.3.4 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΣΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Η αποσύνθεση ενός καθαρού μη ταλαντευόμενου σταγονιδίου υδρογονάνθρακα που πέφτει σε νερό έχει μελετηθεί πειραματικά από τους Winnikow και Chao με τη χρήση σκιαγραφικών τεχνικών. Η αποσύνθεση μετρίεται με το δείκτη ε , που είναι ο λόγος του μεγάλου προς το μικρό άξονα της παραμορφωμένης σταγόνας. Το σχήμα του σταγονιδίου συγκρατείται σε ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής αντιστοιχώντας στα πειραματικά δεδομένα, και τα αποτελέσματα εκφράζονται από το ε σαν εξίσωση του αριθμού Eotvos. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για δοσμένο σύστημα ρευστών το ε είναι γραμμική συνάρτηση του Eo . Η κλίση της γραμμικής εξίσωσης εξαρτάται από την παράμετρο b η οποία σχετίζεται με την ισχύ της εσωτερικής κυκλοφορίας και ορίζεται ως:

$$b = \frac{2 + 3\varphi_\mu}{\frac{1}{K} + (\varphi_\rho \varphi_\mu)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{b}} \quad (2.26)$$

Σημειώνεται ότι το σύστημα ρευστών με το μικρότερο b έχει τη μεγαλύτερη κλίση. Δεδομένου ότι η μικρή τιμή του b συνδέεται με ισχυρή εσωτερική κυκλοφορία, συμπεραίνεται ότι οι δυναμικές δυνάμεις που προκύπτουν από την εσωτερική κυκλοφορία συμβάλλουν σημαντικά στην αποσύνθεση. Αυτό το συμπέρασμα υποστηρίζεται περαιτέρω από την έρευνα συνθηκών όπου η εσωτερική κυκλοφορία μειώνεται σε ισχύ όπως με ένα μολυσμένο σταγονίδιο και με μία σταγόνα που μετατοπίζεται σε αέριο περιβάλλον. Τα δεδομένα δείχνουν ότι ένα σταγονίδιο σε καθαρό σύστημα θα παρέμενε σφαιρικό αν $Eo \leq 0.2$. Για σταγονίδιο που πέφτει με την επίδραση της βαρύτητας, η αποσύνθεση εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό Eotvos, ακόμα και σε ένα μολυσμένο σύστημα.

2.4 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΕΓΕΘΩΝ ΣΤΑΓΟΝΑΣ

Στις επιστήμες που σχετίζονται με την ατμόσφαιρα και στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές τα ρευστά σωματίδια έχουν ένα ευρύ φάσμα μεγεθών. Τα παρακάτω βασίζονται στις πληροφορίες που αναφέρονται από τον Lapple. Τα σωματίδια στα σύννεφα, την ομίχλη και το αεροζόλ έχουν ένα εύρος μεγέθους περίπου από $1\mu m$ έως $100\mu m$. Οι ταχύτητές τους στον αέρα ποικίλλουν από 10^{-4} ως $3 \cdot 10^{-1} ms^{-1}$ και οι αντίστοιχοι αριθμοί Reynolds βρίσκονται σε ένα εύρος μεταξύ 10^{-5} ως 1. Συνεπώς, η συμπεριφορά των σωματιδίων στα σύννεφα, την ομίχλη και το αεροζόλ, κατατάσσεται συνήθως στις καταστάσεις χαμηλού αριθμού Reynolds. Τα σχήματα αυτής της κατηγορίας μπορούν να θεωρηθούν σφαιρικά και η εσωτερική κυκλοφορία είναι συνήθως αμελητέα. Για πυκνή ομίχλη, ψιλόβροχο (ψιχάλες) και βροχή, τα μεγέθη των σωματιδίων, οι ταχύτητες στον αέρα και οι αντίστοιχοι αριθμοί Reynolds δίνονται στον πίνακα 2.1. Ένα σωματίδιο πυκνής ομίχλης μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει σε κατάσταση μεσαίου αριθμού Reynolds, ενώ οι σταγόνες του ψιλόβροχου (ψιχάλες) και της βροχής μπορούν να καταταχθούν σε μια ενδιάμεση κατάσταση ανάμεσα στους μεσαίους και τους υψηλούς αριθμούς Reynolds.

	Ομίχλη	Ψιχάλες	Σταγόνες
Μέγεθος (μm)	80-100	200-500	500-1000
Ταχύτητα (m/s)	0,3-1	1-3	3-20
Αριθμός Reynolds	1-20	20-100	10^2 - 10^4

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1: Μέγεθος, ταχύτητα και αριθμός Reynolds σωματιδίου για ομίχλη, ψιχάλες και σταγόνες βροχής.

Για πολλά συστήματα ψεκασμού, όπως αυτά σε ψυκτικές συσκευές με ψεκασμό, σε μηχανές με ανάφλεξη με ψεκασμό και σε ψεκαστικές συσκευές πυρασφάλειας, τα μεγέθη των σταγόνων καλύπτουν ένα πολύ ευρύ φάσμα. Τα περισσότερα από τα σταγονίδια ψεκασμού βρίσκονται σε ένα φάσμα μεταξύ 10 ως 500 μm, έχουν ταχύτητες από 0.01 ως 20 ms⁻¹ στον αέρα και 10⁻⁴ ως 5 · 10⁻² ms⁻¹ σε υγρά όπως το νερό. Το μέγεθος των αριθμών Reynolds ποικίλει μεταξύ 3 · 10⁻³ και 10⁻⁴ για σταγονίδια στον αέρα και 10⁻³ ως 3 · 10³ για υγρό – υγρό σύστημα. Γι' αυτό το λόγο τα σωματίδια ψεκασμού (ψιχάλες) εκτείνονται σε όλο το φάσμα από χαμηλούς μέχρι υψηλούς αριθμούς Reynolds. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σταγονίδια κλίμακας μεγέθους δισεκατομμυριοστού (nanometer) μπορούν να δημιουργηθούν σαν αποτέλεσμα συμπύκνωσης υπερηχητικού ακροφυσίου. Αυτά τα εμβρυακά σταγονίδια μπορεί τελικά να αναπτυχθούν σε σημαντικά μεγέθη με περαιτέρω συμπύκνωση. Η ανάλυση της συμπύκνωσης σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτεί προσεκτική μελέτη σε σχέση με το μέγεθος των σωματιδίων και τους αριθμούς Reynolds.

Σε πολλές διαδικασίες που εμπλέκονται οι φυσαλίδες όπως σπηλαιώση, ζέση, εξαέρωση, απορρόφηση και ζύμωση, τα μεγέθη τους (φυσαλίδες) καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα. Για τις περισσότερες των περιπτώσεων τα μεγέθη ξεκινούν από περίπου 1 μm και εκτείνονται ως και το 1mm. Για παράδειγμα κατά το βρασμό του νερού μια νεοδημιουργηθείσα εμβρυακή φυσαλίδα έχει μέγεθος 5 μm περίπου ενώ στην περιοχή του βρασμού το αρχικό μέγεθος της φυσαλίδας ανέρχεται κοντά στα 300 μm. Στη ζύμωση και τη σπηλαιώση το μέγεθος των φυσαλίδων κυμαίνεται μεταξύ 10 και 100 μm. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μέγεθος μιας φυσαλίδας κατά τη διάρκεια της «ζωής» της ποικίλει ανάλογα με την υδροστατική πίεση καθώς η φυσαλίδα ανέρχεται στο περικλείον ρευστό περιβάλλον.

Αν λάβουμε υπ' όψη την παρατήρηση ότι η αλλαγή φάσης κατά τις διαδικασίες μεταφοράς επιδρά σημαντικά και με πολύπλοκους τρόπους στη μορφή και το μέγεθος των φυσαλίδων, είναι αδύνατο να βγάλουμε γενικά συμπεράσματα χωρίς να συμπεριλάβουμε τους ιδιαίτερους φυσικούς μηχανισμούς που εμπλέκονται στη διαδικασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο:

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΕ ΧΑΜΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο η δυναμική των ρευστών σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds είναι κοινώς γνωστή στους χημικούς μηχανικούς ως έρπουσα ροή και φυσικά αντιστοιχεί σε κίνηση με μικρή ή και χωρίς καθόλου αδράνεια. Τέτοια κίνηση γενικά εφαρμόζεται σε συστήματα που σχετίζονται με ρευστά μεγάλου ιξώδους ή αλληλεπιδρώντα σωματίδια μικρών διαστάσεων. Η αδράνεια σ' ένα σύστημα μπορεί να είναι ασθενής τόσο εξ' αιτίας της χαμηλής πυκνότητας του ρευστού όσο και της αργής κίνησης του ρευστού. Η καθαρή επίδραση αυτών των παραμέτρων συνοψίζεται στον αριθμό Reynolds. Το μέγεθος αυτής της ποσότητας (αριθμός Reynolds) αποτελεί κατά κάποιο τρόπο ένα μέτρο της σχετικής σημασίας της αδράνειας για ένα δεδομένο σύστημα. Αυτό γίνεται φανερό από τη συμπεριφορά της κίνησης. Η πιο πρόσφατη εργασία πάνω στις μη αδρανειακές ροές φαίνεται ότι είναι του Stokes, ο οποίος πέτυχε μια έκφραση της οπισθέλκουσας δύναμης μιας στερεής σφαίρας κινούμενης σ' ένα ρευστό με ιξώδες. Αυτή η θεμελιώδης λύση προκάλεσε προβλήματα που αναφέρονται στις ρευστές σφαίρες όπως και στα στερεά σωματίδια άλλων σχημάτων. Στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος βρίσκεται συνήθως η οπισθέλκουσα δύναμη ενός σωματιδίου κάτω από μια καθαρή μετακίνησή του σ' ένα ρευστό μέσο. Η συμπεριφορά του πεδίου ροής που προκύπτει από μια τέτοια κίνηση επίσης αποτελεί ένα από τα προς μελέτη θέματα. Κλασική εξέλιξη μεταγενέστερη του Stokes υπήρξε η λύση της αργής κίνησης ρευστής σφαίρας που δόθηκε από τον Rybczynski και ανεξάρτητα από τον Hadamard.

Το ζήτημα της αντίστασης των μη σφαιρικών στερεών σωμάτων που τέθηκε από τον Stokes αποτέλεσε ένα από τα πιο ενδιαφέροντα ζητήματα κατά τη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα. Την ίδια στιγμή οι ερευνητές της δυναμικής των ρευστών ενδιαφέρονται για την περιστροφική κίνηση σωματιδίου με βασικό πρόβλημα εδώ να αποτελεί η εκτίμηση της ροπής ενός σώματος που περιστρέφεται σ' ένα κατά τα άλλα στάσιμο (ακίνητο) ρευστό. Ένας μεγάλος αριθμός συγγραφέων ασχολήθηκε με το θέμα και μια ανασκόπηση στις πρόσφατες λύσεις αυτών των προβλημάτων δόθηκε από τους O'Neil & Ranger. Αναλυτικές λύσεις δόθηκαν με μεγάλη επιτυχία πάνω σε απλά γεωμετρικά σχήματα όπως σφαιροειδή, δίσκοι, δακτύλιοι, κάτοπτρα και ζεύγη σφαιρών για αξονικά συμμετρικές ροές. Τις τελευταίες τρεις δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί λύσεις για διάφορους τύπους μη συμμετρικών ροών γύρω από αξονικά συμμετρικά σώματα. Η μηχανική των ρευστών έχει επίσης προχωρήσει σ' ένα μεγάλο αριθμό διατυπώσεων σε σχέση με τις γραμμικές και εκτεταμένες διαμητρικές ροές γύρω από στερεά και ρευστά σωματίδια.

Η δυναμική των ρευστών που συνδέεται με την κίνηση μεγάλου αριθμού σωματιδίων βρίσκεται ανάμεσα στα μεγάλα θεωρητικά προβλήματα στα οποία έχει γίνει σημαντική πρόοδος τα τελευταία 25 χρόνια. Θεμελιώδης συνεισφορά σ' αυτή τη θεώρηση υπήρξε η εργασία του Batchelor πάνω στη δυναμική ρευστών που σχετίζεται με την κίνηση τυχαία διασκορπισμένων στερεών σφαιριδίων σ' ένα ρευστό μέσο. Το ενδιαφέρον για αυτό το πεδίο προκύπτει κυρίως από την τεχνική σπουδαιότητα τέτοιας κατηγορίας προβλημάτων κάτω από ένα πλαίσιο πεδίων όπως

οι ρευστοποιημένοι πυθμένες, η καύση σταγονιδίων, η επιστήμη αιωρούμενων σωματιδίων, η πρόγνωση του καιρού, οι ροές φυσαλίδων, η με απ' ευθείας επαφή ανταλλαγή θερμότητας και η ροή κοκκώδων μέσων. Αυτό έχει οδηγήσει σε μια πρόσφατη ενδυνάμωση της επιστημονικής προσπάθειας στο να κατανοήσει τη συμπεριφορά ετερογενών ρευστών σε τέτοια συστήματα. Λαμβάνοντας υπ' όψη τη σχετική σημασία των διαδικασιών μεταφοράς μ' ένα φάσμα ρευστών σωματιδίων, ασχολούμαστε αποκλειστικά μ' αυτό το θέμα σε παρακάτω κεφάλαιο.

Η μεταφορά της θερμότητας και της μάζας που σχετίζεται με τις σταγόνες και τις φυσαλίδες, βρίσκεται στο επίκεντρο πολλών θεωρητικών όπως και πειραματικών μελετών τα τελευταία χρόνια. Η τεχνολογική σημασία αυτών των μελετών έχει ήδη αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο. Πολλές από τις πρόσφατες μελέτες διεξήχθησαν με σκοπό να αποκτήσουμε σημαντικές πληροφορίες της βιομηχανικής σημασίας. Οι κλασικές μελέτες ασχολούνται με τη σταθερή μεταφορά θερμότητας ή μάζας σε μια ισοθερμική (ή ομοιόμορφης συγκέντρωσης) στερεή σφαίρα, κινούμενη σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds με όρια είτε πολύ χαμηλού είτε πολύ υψηλού αριθμού Peclet. Επισημαίνουμε ότι η πιο πρόσφατη είναι η αδιάστατη ποσότητα που αναπαριστά το λόγο της μεταφερόμενης θερμότητας προς την αγωγή ή διαχυτή μεταφορά (μεταφορά δι' αγωγιμότητας ή διάχυσης). Η εστίαση πάνω στη μεταφορά θερμότητας στα ισοθερμικά σωματίδια μετατοπίστηκε μεταγενέστερα σε στερεά και ρευστά σωματίδια μη σφαιρικών σχημάτων. Παρόμοιες μελέτες για τη μεταφορά της θερμότητας και της μάζας σε περιστρεφόμενα σωματίδια έχουν επίσης λάβει χώρα.

Περισσότερο πολύπλοκες περιπτώσεις όπως η μη ομοιόμορφη θερμοκρασία ή η συγκέντρωση διαλυμένης ουσίας στη διασκορπισμένη φάση και στη διεπιφάνεια, συνεχίζουν να ενδιαφέρουν τους ερευνητές. Η ανάγκη γι' αυτή τη μελέτη απορρέει από τον πρακτικό περιορισμό των πρόσφατων αποτελεσμάτων που κυρίως έχουν θεωρήσει το σωματίδιο σαν πηγή ή δεξαμενή άπειρης χωρητικότητας. Επιπρόσθετα συμβαίνουν φυσικά φαινόμενα που προέρχονται από τη μεταβολή των θερμοδυναμικών μεγεθών στις διεπιφάνειες και αποτελούν βασικό λόγο προσεκτικής εξέτασης. Κύριο παράδειγμα είναι η επίδραση των ακαθαρσιών στην κίνηση των σταγόνων και των φυσαλίδων. Οι πιο πρόσφατες μελέτες πάνω σ' αυτή την θεώρηση μας οδηγούν πίσω στο 1928 όταν οι Bond & Newton παρατήρησαν ότι η οπισθέλκουσα δύναμη μικρών αέριων φυσαλίδων προσεγγίζει τα μεγέθη στερεής σφαίρας. Αυτή η παρατήρηση αποδίδεται στις ακαθαρσίες που έχουν σαν αποτέλεσμα τη μείωση της διεπιφανειακής τάσης σε μεταβαλλόμενα επίπεδα, μειώνοντας έτσι τη διεπιφανειακή κινητικότητα. Είναι φανερό ότι η μεταφορά της διαλυμένης ουσίας στη διεπιφάνεια παίζει τον κύριο ρόλο και η μεταγωγή μέσα στη διασκορπισμένη φάση προάγει ένα σημαντικό πολύπλοκο μηχανισμό.

Τα φαινόμενα μεταφοράς της θερμότητας και της μάζας αλλάζουν σημαντικά τον χαρακτήρα τους όταν έχουμε συμπύκνωση ή εξάτμιση. Για παράδειγμα με τη συμπύκνωση στις κινούμενες υγρές σταγόνες όπως κατά τη διάρκεια του σχηματισμού των σταγόνων της βροχής ή της μετακίνησης του προϊόντος της σχάσης από το περιεχόμενο σπρέι σ' ένα πυρηνικό αντιδραστήρα, η συμπύκνωση που προκύπτει από την ακτινική ταχύτητα γίνεται ένας σημαντικός παράγοντας στην όλη διαδικασία της μεταφοράς της θερμότητας. Την ίδια στιγμή η διεπιφανειακή θερμοκρασία σταδιακά αυξάνει εξ' αιτίας της περιορισμένης θερμικής χωρητικότητας της σταγόνας. Η σπουδαιότητα του ακριβή προσδιορισμού γίνεται κατανοητή όταν αναγνωρίσουμε ότι ο βαθμός συμπύκνωσης είναι αρκετά ευαίσθητος σ' αυτή τη θερμοκρασία. Παρόμοια αποτελέσματα συμβαίνουν με την εξάτμιση και μάλιστα σε μεγαλύτερο βαθμό. Η πολυπλοκότητα από πολλές πλευρές αυξάνει όταν λαμβάνουν χώρα χημικές αντιδράσεις όπως κατά τη διάρκεια καύσης σταγονιδίου.

Η εξάτμιση ή συμπύκνωση της διασκορπισμένης φάσης οδηγεί σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα τη δυναμική των ρευστών, ιδιαίτερα όταν η συνεχής φάση είναι ένα άλλο ρευστό που είναι άμεικτο με το ρευστό της διασκορπισμένης φάσης. Σ' ένα τέτοιο σύστημα σχηματίζονται σύνθετα σταγονίδια. Οι περισσότερες αναλύσεις τέτοιων συστημάτων έχουν περιοριστεί σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds κάτι το οποίο αναφέρεται λεπτομερώς σε παρακάτω κεφάλαιο.

Η έρευνα των θερμικών και υδροδυναμικών επιπτώσεων στις σταγόνες και τις φυσαλίδες χαμηλής βαρύτητας κατέχει εξέχουσα θέση με αυξανόμενη την πιθανότητα διεξαγωγής πειραμάτων στο μακρινό διάστημα. Ένα από τα ιδιαίτερα ζητήματα που προκύπτει από τη χαμηλή βαρύτητα είναι η απουσία της κίνησης από άνωση όπως στην απλή ανύψωση των αέριων φυσαλίδων. Άλλα χαρακτηριστικά περιλαμβάνουν την απουσία της φυσικής μεταγωγής όπου με μια θερμική κινητήρια δύναμη η θερμοτριχοειδής ροή γίνεται η κύρια μορφή της κίνησης του ρευστού. Κάποια από αυτά τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε παρακάτω κεφάλαιο. Σ' αυτό το κεφάλαιο ξεκινάμε με μια λεπτομερή αναφορά της μηχανικής ρευστών σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds που συνοδεύεται με πραγμάτευση πάνω στη μεταφορά της θερμότητας και της μάζας.

3.2 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Μια εξαιρετική αναφορά στην υδροδυναμική χαμηλών αριθμών Reynolds έχει δοθεί από τους Happel & Brenner. Αυτοί αναφέρθηκαν στην τεχνολογική επίδραση του θέματος από μια ευρύτερη άποψη που περιλαμβάνει εφαρμογές για μια σειρά παραδοσιακών πεδίων. Όσον αφορά τις σταγόνες, τις φυσαλίδες και τα στερεά σωματίδια έχουμε ήδη επισημάνει μερικούς από τους τομείς όπου τα αποτελέσματα των μελετών πάνω στους χαμηλούς αριθμούς Reynolds είναι χρήσιμα. Η γενική μαθηματική περιγραφή της διαδικασίας μεταφοράς του ρευστού δίνεται από την εξίσωση Navier – Stokes όπως ήδη αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο. Στο επόμενο κεφάλαιο περιγράφουμε τις εξισώσεις της κίνησης που προκύπτουν από το όριο του αριθμού Reynolds που γίνεται μικρότερος μαζί με τις οριακές διεπιφανειακές συνθήκες. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις ιδιαίτερες περιπτώσεις που σχετίζονται με διάφορους τύπους οριακών και διεπιφανειακών συνθηκών περιγράφοντας πειραματικά και θεωρητικά αποτελέσματα αυτού του πεδίου.

3.2.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Πολλά προβλήματα πρακτικής σημασίας της επιστήμης των μηχανικών περιλαμβάνουν τη ροή ασυμπίεστων ρευστών. Το πεδίο ροής σ' αυτήν την περίπτωση υπακούει στην εξίσωση συνέχειας (1.3) και την εξίσωση Navier – Stokes (1.4) που δίνονται στο πρώτο κεφάλαιο. Όπως αναφέρθηκε εκεί ο αριθμός Reynolds, $Re=UL/\nu$ είναι η αδιάστατη παράμετρος που αποτελεί μια καθαρή απεικόνιση του ιξώδους, της πυκνότητας, της ταχύτητας και του μεγέθους των αλληλεπιδρώντων ορίων. Μια πρώτη προσέγγιση στην υδροδυναμική των χαμηλών αριθμών Reynolds είναι ο αριθμός Reynolds να τείνει στο μηδέν, $Re \rightarrow 0$. Σαν αποτέλεσμα με την απουσία σωματιδιακών δυνάμεων εξασφαλίζουμε μια γραμμική εξίσωση:

$$P \rho = \mu P^2 u, \quad (3.1)$$

μαζί με την εξίσωση συνέχειας (1.3) για την περιγραφή της ροής. Η επιλογή του U/L σαν κλίμακα χρόνου έχει τοποθετήσει τον όρο της επιτάχυνσης ($\rho \frac{d}{dt} u$) ανάμεσα σ' αυτούς που θεωρούνται αμελητέοι. Αυτή είναι γενικά η περίπτωση, ακόμα και για χρονικά μεταβαλλόμενες ροές, σε αρκετά μικρούς αριθμούς Reynolds. Ενώ μια ημι-σταθερή προσέγγιση αυτού του τύπου συνήθως δίνει μια ικανοποιητική περιγραφή των ερπυσίων ροών, χρειάζεται να ληφθούν υπ' όψη κάποιες εξαιρέσεις πολύ προσεκτικά.

Για ασθενείς αδρανειακά ροές, μία μπορεί να διαταράξει ολόκληρη την εξίσωση ορμής (1.4) για μικρούς Re . Αυτό γενικά οδηγεί σε μια ακανόνιστη συμπεριφορά στο άπειρο στο $O(Re)$ και παραπέρα για απλή μεταφορά σ' ένα άπειρο ρευστό. Αυτή η δυσκολία μπορεί ωστόσο να διευθετηθεί με ξεχωριστές τεχνικές διαταραχής.

Για ροές που εξαρτώνται από μόνο δύο χωρικές μεταβλητές, η χρήση ενός δυναμικού διανύσματος για να εκφράσουμε την ταχύτητα είναι κατάλληλη διότι εν δυνάμει ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας. Η εξίσωση της ορμής τότε παίρνει τη μορφή μιας τεταρτοβάθμιας διαφορικής εξίσωσης. Για τρισδιάστατες αξονικά συμμετρικές ροές σε σφαιρικές συντεταγμένες η ταχύτητα εκφράζεται:

$$u = P \cdot \left(\frac{\zeta}{r \sin \theta} \frac{\psi}{r} e_{\phi} \right) \quad (3.2)$$

Η εξίσωση της ορμής για ένα μη αδρανειακό σύστημα οδηγείται στην εξίσωση Stokes:

$$L_{-1}^2(\psi) = 0, \quad (3.3)$$

όπου το L_{-1} είναι γνωστό σαν τελεστής Stokes που ορίζεται από την εξίσωση (1.32) στο πρώτο κεφάλαιο.

ΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Για σταθερά όρια η συνθήκη μη ολίσθησης είναι εφαρμόσιμη αναγκάζοντας το ρευστό κοντά στο όριο να έχει τις ίδιες συνιστώσες για την ταχύτητα όπως το ίδιο το σταθερό όριο. Σε μια ρευστή – ρευστή διεπιφάνεια η συνέχεια των εφαπτόμενων και κάθετων ταχυτήτων πρέπει να ληφθεί υπ' όψη. Επιπλέον το σύνολο των κάθετων όπως και των εφαπτόμενων τάσεων πρέπει να είναι συνεχές. Είναι γενικά αρκετά δύσκολο να ικανοποιηθούν όλες οι διεπιφανειακές συνθήκες σε μια ρευστή – ρευστή διεπιφάνεια, ειδικά η συνθήκη της κάθετης τάσης η οποία ουσιαστικά είναι μη γραμμική. Όπως και να 'χει οι γραμμικές προσεγγίσεις είναι συχνά αρκετά ικανοποιητικές για σφαιρικές διεπιφάνειες ή ελάχιστα διαφοροποιημένες απ' αυτό το σχήμα. Στην πραγματικότητα η υπόθεση σφαιρικού σωματιδίου για τη μεταφορά μιας σταγόνας ή μιας φυσαλίδας δεν αποτελεί διαδικασία προσέγγισης σε περίπτωση μη αδρανειακής ροής.

3.2.2 ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Κατά τον τελευταίο αιώνα της εξέλιξης της Μηχανικής των Ρευστών, το ενδιαφέρον έχει στραφεί στην απλή μεταφορά ή περιστροφή στερεών σωμάτων σ' ένα ρευστό. Υπάρχουν αρκετές αναφορές πάνω στα θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με την αλληλεπίδραση διαφόρων τύπων γεωμετρικών σχημάτων με τα ρευστά. Μια σημαντική συνεισφορά σχετικά με την υδροδυναμική αντίδραση των σωματιδίων ήταν αυτή του Brenner ο οποίος έδωσε γενικευμένες εκφράσεις για τις μεταφορικές και περιστροφικές συνιστώσες της οπισθέλκουσας για δοσμένα σώματα αυθαίρετου σχήματος. Με αυτή τη γενικευμένη διατύπωση για ένα σωματίδιο που μεταφέρεται με ταχύτητα U και περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο αναφοράς O με γωνιακή ταχύτητα Ω , η μεταφορική οπισθέλκουσα F και η στρεπτική ροπή T_0 γύρω από το O μπορούν να γραφούν:

$$F = -\mu(K^{(t)}gU + K_0^{(c)T}g\Omega), \quad (3.4)$$

$$T_0 = -\mu(K_0^{(c)}gU + K_0^{(r)}g\Omega), \quad (3.5)$$

όπου τα $K^{(t)}$, $K_0^{(r)}$ και $K_0^{(c)}$ είναι πίνακες αντίστασης που εξαρτώνται καθαρά από τη γεωμετρία σε σχέση με το όρισμα (αρχή των αξόνων) O . Εδώ οι εκθέτες t , r και c αναπαριστούν μεταφορά, περιστροφή και σύζευξη αντίστοιχα, ενώ το T αναπαριστά τη μετατόπιση του πλαισίου. Οι O' Neil & Ranger έχουν δώσει ένα κατάλογο τέτοιων πινάκων για διάφορα σχήματα στερεών σωματιδίων. Για να εξασφαλίσουμε αυτούς τους πίνακες είναι γενικά αναγκαίο να λύσουμε τις εξισώσεις ροής του Stokes για την μεταφορά και περιστροφή του υπό εξέταση σώματος, σε μια άπειρη μάζα ενός κατά τα άλλα αδρανούς – ήρεμου ρευστού. Αυτό έχει αναλυτικά διεξαχθεί για περιορισμένη τάξη γεωμετριών, συγκεκριμένα τη σφαίρα, τα επιμήκη και πεπλατυσμένα σφαιροειδή, την έλλειψη, τα ζεύγη σφαιρών, τα κατοπτροειδή, ημισφαιροειδή, τα σπειροειδή και μερικά άλλα.

ΑΞΟΝΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΡΟΕΣ – ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Το πεδίο ροής για να είναι αξονικά συμμετρικό η ελάχιστη απαίτηση είναι το μεταφερόμενο στερεό να είναι ένα σώμα εκ περιστροφής. Για απλή μεταφορά η κίνηση πρέπει να είναι παράλληλη στον άξονα συμμετρίας του σώματος. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα η διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης είναι πολύ χρήσιμη σε σχέση με τις αξονικά συμμετρικές ροές. Η περιγραφή της ροής δίνεται σε τέτοια περίπτωση από τη λύση της εξίσωσης του Stokes (3.3). Είναι προτιμότερο συνήθως η αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων να γίνεται σ' ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε με μια τέτοια διατύπωση το μακρινό πεδίο να έχει μια ομοιόμορφη ταχύτητα U . Αυτό ικανοποιείται από τη σχέση:

$$\psi|_{\text{μακρινού πεδίου}} \approx \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta, \quad (3.6)$$

όπου τα (r, θ) είναι οι συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες. Η συνθήκη μη ολίσθησης ισοδυναμεί με μηδενικές κάθετες και εφαπτομενικές ταχύτητες, που ικανοποιούνται από τη σχέση:

$$\psi|_{\text{ορίου}} = P \psi_{\theta}|_{\text{ορίου}} = 0, \quad (3.7)$$

Οι αποδειχθείσες αναλυτικές διαδικασίες γενικά δουλεύουν καλά εάν το όριο μπορεί να ταυτοποιηθεί κατά κάποιο τρόπο από τιμές μιας εκ των συντεταγμένων. Η οπισθέλκουσα δίνεται από τη σχέση:

$$F = 8\pi\mu \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\psi - \psi_0)}{r \sin^2 \theta}, \quad (3.8)$$

όπου:

$$\psi_0 = \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta \quad (3.9)$$

είναι η ροϊκή συνάρτηση που αναπαριστά μια καθαρά ομοιόμορφη ροή ταχύτητας U . Η παραπάνω έκφραση αναλογεί στην απώλεια ιξώδους, Φ με αποτέλεσμα για την παρακάτω σχέση ισορροπίας της ενέργειας έχουμε:

$$\Phi = FU. \quad (3.10)$$

Επίσης αναλογεί στη δύναμη του Stokeslet, S με τη σχέση:

$$F = 8\pi\mu S. \quad (3.11)$$

Για ένα αξονικά συμμετρικό σώμα που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του σε μια άπειρη μάζα ρευστού, έχει μόνο τη συνιστώσα φ της ταχύτητας για την περίπτωση στρωτής ροής. Ο περιστροφικός αριθμός Reynolds σ' αυτήν την περίπτωση είναι μέτρια μεγάλος. Απ' τη στιγμή που υπάρχει μόνο μια συνιστώσα της ταχύτητας, η εξίσωση της ορμής (1.4) σε σφαιρικές συντεταγμένες απλοποιείται στην παρακάτω διαβαθμισμένη μορφή:

$$P^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (3.12)$$

Οι οριακές συνθήκες εδώ είναι:

$$u_\varphi|_{\text{μακρινού πεδίου}} = 0 \quad (3.13)$$

και

$$u_\varphi|_{\text{ορίου}} = \Omega r \sin \theta, \quad (3.14)$$

όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου σώματος. Η ροπή του σώματος, απαραίτητη για τη διατήρηση της κίνησης μπορεί να υπολογιστεί από τη συνολική ορμή της διατμητικής τάσης πάνω στο όριο. Ωστόσο είναι συχνά ευκολότερο να υπολογιστεί η ροπή στο μακρινό πεδίο. Ένας τέτοιος υπολογισμός αποδίδει:

$$T = 8\pi\mu \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_\varphi r^2}{\sin\theta} \quad (3.15)$$

για τη γενική αξονοσυμμετρική περίπτωση.

3.2.3 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Η διεπιφανειακή κινητικότητα ενός ρευστού σωματιδίου έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία στροβίλων εντός του σωματιδίου και την ίδια στιγμή επιτρέπει την παραμόρφωση της διεπιφάνειας. Η παραμόρφωση του σωματιδίου συνιστά αξιοσημείωτη πολυπλοκότητα στην ανάλυση, εκτός της περίπτωσης που το μέγεθος του σωματιδίου είναι μικρό. Οι βασικές εξισώσεις κίνησης είναι ίδιες όπως και στα στερεά αλλά οι συνθήκες διεπιφάνειας απαιτούν τη συνέχεια των εφαπτόμενων και κάθετων ταχυτήτων όπως και των εφαπτόμενων και κάθετων τάσεων. Το βασικό ενδιαφέρον της δυναμικής ρευστών βρίσκεται γενικά στην απλή, αξονικά συμμετρική μεταφορά των σταγόνων και των φυσαλίδων.

Γενικά η σταθερή μεταφορά μιας σταγόνας ή φυσαλίδας σ' ένα ομοιόμορφο πεδίο δυνάμεων σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds είναι αξονικά συμμετρική. Το πεδίο ροής άρα περιγράφεται επαρκώς από δύο χωρικές μεταβλητές. Με την διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης θεωρούμε την $\psi(r, \theta)$ σαν την περιγραφή της ροής στη συνεχή φάση και την $\hat{\psi}(r, \theta)$ στη διασκορπισμένη φάση. Εδώ (r, θ) είναι οι συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες. Αναφορικά με το ρευστό σωματίδιο, η ομοιόμορφη ροϊκή συνθήκη, που καθορίζεται με την εξίσωση (3.6) πρέπει να ικανοποιείται στο μακρινό πεδίο.

Εφόσον γενικά η υγρή – υγρή διεπιφάνεια μπορεί να είναι μη σφαιρική, μπορεί να οριστεί με καλή προσέγγιση από τη σχέση $r = R$. Στην πραγματικότητα όταν $Re \gg 0$, το σχήμα είναι απόλυτα σφαιρικό όπως σημειώθηκε νωρίτερα. Οι συνθήκες συνέχειας στη διεπιφάνεια είναι:

- Συνέχεια κάθετης ταχύτητας:

$$\psi(r, \theta) \Big|_{r=R} = \hat{\psi}(r, \theta) \Big|_{r=R} \quad (3.16)$$

- Συνέχεια εφαπτομενικής ταχύτητας:

$$\frac{\nabla \psi(r, \theta)}{\nabla r} \Big|_{r=R} = \frac{\nabla \hat{\psi}(r, \theta)}{\nabla r} \Big|_{r=R} \quad (3.17)$$

- Συνέχεια διατμητικής τάσης:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\lambda}{\kappa} r^2 \frac{\zeta}{r} \frac{1}{r^2} \frac{\psi}{r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\zeta}{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\psi}{r} \Big|_{r=R} \\ &= \hat{\mu} \frac{\lambda}{\kappa} r^2 \frac{\zeta}{r} \frac{1}{r^2} \frac{\hat{\psi}}{r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\zeta}{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\hat{\psi}}{r} \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (3.18)$$

– Συνέχεια κάθετης τάσης:

$$\begin{aligned} & - \frac{\mu}{\kappa} \frac{\lambda}{\kappa} \frac{2}{\sin \theta} \frac{\zeta}{r} \frac{1}{r^2} \frac{\psi}{r} \int_0^\pi \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r} (L_{-1} \psi) d\theta \Big|_{r=R} \\ & \hat{\mu} \frac{\lambda}{\kappa} \frac{2}{\sin \theta} \frac{\zeta}{r} \frac{1}{r^2} \frac{\hat{\psi}}{r} \int_0^\pi \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r} (L_{-1} \hat{\psi}) d\theta \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου L_{-1} είναι ο τελεστής Stokes. Τα ολοκληρώματα στην εξίσωση (3.19) αναπαριστούν όρους πίεσης. Η κάθετη συνθήκη τάσης γενικά χρησιμοποιείται για να καθορίσει το σχήμα της διεπιφάνειας. Ωστόσο για ένα καθορισμένο σχήμα αυτή η εξίσωση δεν απαιτείται διότι ο καθορισμός του σχήματος αντικαθιστά τη συνθήκη ισορροπίας της κάθετης τάσης. Εξ' αιτίας του γεγονότος αυτού η εξίσωση (3.19) δεν ικανοποιείται επαρκώς, εκτός της περίπτωσης ελεύθερης πτώσης (ή ανύψωσης) σταγόνας με $\text{Re} \ll 0$ σ' ένα ομοιόμορφο πεδίο δυνάμεων για την οποία το σχήμα είναι σφαιρικό. Για μια περισσότερο ακριβή διατύπωση οι γενικές διεπιφανειακές συνθήκες πρέπει να καθοριστούν επακριβώς στη διεπιφάνεια. Το σχήμα της διεπιφάνειας καθορίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας της κάθετης τάσης που δίνεται από την εξίσωση (1.16).

Οι σχέσεις της οπισθέλκουσας δύναμης που δίνονται στις εξισώσεις (3.8) – (3.11) για στερεό σωματίδιο είναι επίσης χρήσιμες για τις σταγόνες και τις φυσαλίδες. Κλασικό παράδειγμα είναι αυτό της μονής ρευστής σφαίρας. Η λύση δόθηκε αρχικά από τον Rybczynski και λίγο αργότερα από τον Hadamard.

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑ

Η λύση της έρπουσας ροής με την υπόθεση σφαιρικής διεπιφάνειας δίνει τις παρακάτω μορφές ροϊκών συναρτήσεων:

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2} UR^2 \sin^2 \theta \left[\frac{r^2}{R^2} - \frac{(2 + 3\varphi_\mu) \zeta R^2}{2(\varphi_\mu)} \frac{1}{r} \right] \quad (3.20)$$

$$\hat{\psi}(r, \theta) = \frac{1}{4} UR^2 \sin^2 \theta \left[\frac{\zeta}{1 + \varphi_\mu} \frac{r^2}{R^2} - \frac{\zeta r^4}{R^2} \right] \quad (3.21)$$

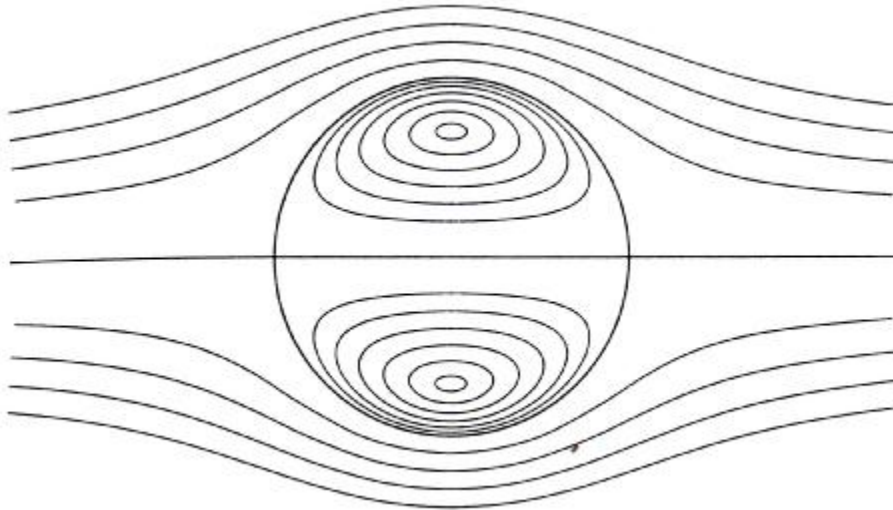
όπου $\varphi_\mu = \hat{\mu} / \mu$ είναι η αναλογία του ιξώδους. Οι ροϊκές γραμμές εικονίζονται στο σχήμα 3.1. Η κίνηση εντός της σταγόνας είναι ο σφαιρικός στρόβιλος του Hill. Για $\varphi_\mu = 0$ το ροϊκό πεδίο είναι όπως της ρευστής κίνησης γύρω από μια φυσαλίδα ικανοποιώντας μια χωρίς αντίσταση οριακή συνθήκη στη διεπιφάνεια. Στο όριο

$\varphi_\mu \propto \frac{1}{R}$ η συνθήκη μη ολίσθησης για στερεή σφαίρα ικανοποιείται. Πρέπει να σημειωθεί ότι η υπόθεση της σφαιρικής διεπιφάνειας είναι στην πραγματικότητα εντελώς σύμφωνη με την υπόθεση της έρπουσας ροής. Αυτό έχει ξεκάθαρα περιγραφεί από τους Taylor & Acrivos που εξέτασαν τη συνολική κάθετη τάση και στις δύο πλευρές της διεπιφάνειας. Αυτοί με ακριβή τρόπο έδειξαν ότι σ' ένα ομοιόμορφο πεδίο δυνάμεων (όπως της βαρύτητας) η διαφορά μεταξύ της συνολικής κάθετης τάσης κατά μήκος της διεπιφάνειας είναι η σταθερή τιμή:

$$(\tau_{rr} - \hat{\tau}_{rr}) = -\frac{2\sigma}{R}, \quad (3.22)$$

που είναι σύμφωνη με την υπόθεση της ομοιόμορφης καμπύλωσης. Μια ενδιαφέρουσα όψη αυτού του αποτελέσματος είναι ότι η έρπουσα κίνηση επιδρά στην αποκατάσταση της σφαιρικότητας σε μια σταγόνα που μπορεί να έχει ελαφρώς παραμορφωθεί όταν ηρεμεί σ' ένα βαρυτικό πεδίο. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι παρέκκλιση από την σφαιρικότητα λαμβάνει χώρα με τις επιδράσεις της αδράνειας. Σε μια μεταγενέστερη εργασία ο Levan απέδειξε αν η διεπιφανειακή τάση μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma(\theta) = a + b\cos\theta, \quad (3.23)$$



ΣΧΗΜΑ 3.1: Ροϊκές γραμμές για ροή Stokes γύρω από μια υγρή σφαίρα

τότε πάλι η υπόθεση για σφαιρικό σωματίδιο ισχύει πλήρως για ροή Stokes. Η οπισθέλκουσα δύναμη σύμφωνα με τη σχέση (3.8) είναι:

$$F = 4\pi\mu UR \frac{2 + 3\varphi_\mu}{2 + 2\varphi_\mu} \quad (3.24)$$

Σ' ένα βαρυτικό πεδίο η ισορροπία ανάμεσα στην οπισθέλκουσα του ιξώδους και την άνωση δίνει την παρακάτω έκφραση για την τελική ταχύτητα της σταγόνας:

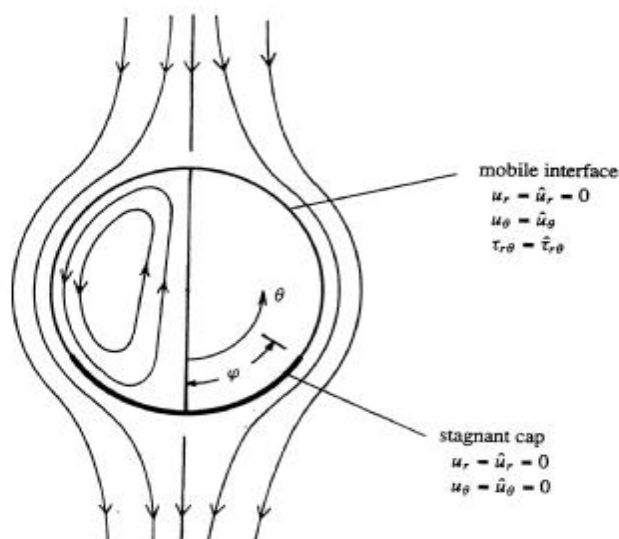
$$U_T = \frac{1}{3} \frac{gR^2(\rho - \hat{\rho})}{\mu} \frac{2 + 2\phi_\mu}{2 + 3\phi_\mu} \quad (3.25)$$

Αυτή η θεωρητική πρόβλεψη φαίνεται ότι συμφωνεί με πειράματα που σχετίζονται με πολύ καθαρά συστήματα. Η γενική παρατήρηση είναι ότι οι φυσαλίδες και οι σταγόνες τείνουν να κινούνται με την τελική ταχύτητα στερεής σφαίρας, ιδιαίτερα αν είναι μικρές. Αυτό είναι κυρίως αποδεκτό στις διεπιφανειακές ακαθαρσίες που έχουν την τάση να ελαττώνουν την επιφανειακή τάση, δημιουργώντας έτσι μια βαθμιαία επιφανειακή τάση που γενικά μειώνει την κινητικότητα της διεπιφάνειας. Για περιπτώσεις όπου οι ακαθαρσίες δρουν μόνο στην επιφανειακή φάση και δεν υπάρχει διάχυση εντός της επιφανειακής φάσης, το πίσω τμήμα της επιφάνειας συμπεριφέρεται σαν επαπτομενική άκαμπτη μεμβράνη ενώ το υπόλοιπο τμήμα της διεπιφάνειας παραμένει ευκίνητο. Τέτοια κίνηση μπορεί να περιγραφεί πλήρως με όρους ρευστομηχανικής με βάση την προϋπόθεση της επέκτασης της στάσιμης περιοχής. Έτσι ολοκληρώνοντας τη μελέτη πάνω στην αδρανειακή μεταφορά, μελετάμε τις επιδράσεις της ρευστομηχανικής στην επιφανειακή φάση. Υπάρχει περαιτέρω μελέτη πάνω στις επιδράσεις των ακαθαρσιών όταν τέτοιες διαλυμένες ουσίες εμφανίζονται στον κύριο όγκο της φάσης.

Επιδράσεις Επιφανειακής Φάσης

Η απόκλιση της οπισθέλκουσας δύναμης της ροής του Stokes από την πρόβλεψη των Rybczynski – Hadamard είναι γνωστή από την εποχή των κλασικών μελετών των Bond & Newton. Αυτές οι μελέτες και οι ακόλουθες μετρήσεις των Hu & Kinter, Klee & Theybal, Haberman & Morton και Elzinga & Banchero έδειξαν ότι οι μικρές σταγόνες και φυσαλίδες σε μολυσμένα υγρά συμπεριφέρονται σαν στερεές σφαίρες. Η μετάβαση σε σχέση με την έκφραση των Rybczynski – Hadamard λαμβάνει χώρα όταν το ρευστό σωματίδιο αυξάνει σε μεγέθη των 5 – 10 mm. Οι επιφανειακές ακαθαρσίες γενικά συσσωρεύονται στις διεπιφάνειες και προκαλούν μείωση στη διεπιφανειακή τάση. Ενώ οι ακίνητες σταγόνες δέχονται μικρή επίδραση εξ' αιτίας αυτής της συμπεριφοράς, οι κινούμενες σταγόνες δέχονται μια ανομοιόμορφη διανομή των ακαθαρσιών με μεγαλύτερη συγκέντρωση στο πίσω μέρος (των σταγόνων). Το μπροστινό τμήμα τείνει να παραμείνει καθαρό από ακαθαρσίες καθώς αυτές οδηγούνται προς το πίσω τμήμα της σταγόνας. Σαν αποτέλεσμα σχηματίζεται εφαρμόζεται μια βαθμωτή επιφανειακή τάση και δημιουργεί μια εφαπτόμενη τάση που μειώνει την επιφανειακή κινητικότητα όπως και την τελική ταχύτητα.

Εάν κάποιος συσχετίσει μια διεπιφάνεια μ' ένα πάχος h σχετικό με μια αναλογία επιφάνειας προς τις ογκομετρικές συγκεντρώσεις της ξένης ουσίας τότε οι μικρότερες σταγόνες θα υποστούν σημαντικότερη επίδραση σε σχέση με τις μεγαλύτερες. Αυτό είναι ξεκάθαρο θεωρώντας ότι το μήκος της βαθμίδας h αναπαριστά την έλξη της ξένης ουσίας στην επιφάνεια και είναι ανεξάρτητο από την ακτίνα της σταγόνας R .



ΣΧΗΜΑ 3.2: Θεωρητικό μοντέλο σταθερού καλύμματος

Γι' αυτό οι μικρότερες σταγόνες έχουν ένα μεγαλύτερο μέγεθος της αναλογίας h/R που αποτελεί ένα προσεγγιστικό κριτήριο της επίδρασης των ξένων ουσιών έναντι της επιβράδυνσης. Γενικά οι διαλυτές ακαθαρσίες έχουν σπουδαίο ρόλο που προκύπτει από τη μεταφορά της μάζας στον κύριο όγκο της φάσης. Στην αναφορά μας εδώ ενδιαφερόμαστε για περιπτώσεις στις οποίες η επίδραση των ξένων ουσιών στην κίνηση της σταγόνας προκύπτει καθαρά από την επιφανειακή φάση. Κάτω από αυτές τις περιστάσεις η ακαθαρσία έχει συνήθως μικρή διαλυτότητα στον κύριο όγκο της φάσης μαζί με υψηλή επιφανειακή δραστηριότητα και σχηματίζει ένα ακίνητο σταθερό κάλυμμα (καπάκι) στο πίσω μέρος της μεταφερόμενης σταγόνας. Η μικρή διαλυτότητα συνήθως αντιστοιχεί σ' ένα μικρό συντελεστή διάχυσης της μάζας και έτσι σ' ένα υψηλό αριθμό Peclet. Η κίνηση του ρευστού σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί πλήρως να καθοριστεί, ορίζοντας τις συνήθεις παραμέτρους της μεταφοράς και το βαθμό της ακινησίας της διεπιφάνειας. Γι' αυτό το λόγο έξω από την περιοχή που ορίζεται από τη γωνία του καλύμματος, η ροή είναι σχετικά ανεξάρτητη από τα φαινόμενα της διεπιφάνειας. Το φαινόμενο της μερικά ακίνητης διεπιφάνειας που παρατηρήθηκε πρώτα από τον Savic συμβαίνει στην μετάπτωση της περιοχής από κίνηση τύπου άκαμπτης – στερεής σφαίρας σε πλήρως κινητική διεπιφάνεια. Επακόλουθα αυτό επίσης παρατηρήθηκε από τους Garner & Skelland, Griffith και Horton.

Μεταφερόμενες Σταγόνες και Φυσαλίδες. Το θεωρητικό μοντέλο της συμπεριφοράς του σταθερού καλύμματος πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Savic που θεώρησε ροή Stokes γύρω από μια φυσαλίδα και εφάρμοσε τη συνθήκη μη ολίσθησης στη στάσιμη περιοχή. Μια χωρίς αντίσταση συνθήκη εφαρμόστηκε στην υπόλοιπη διεπιφάνεια θεωρώντας την έτσι απαλλαγμένη από ακαθαρσίες. Ένα έξι όρων ανάπτυγμα ιδιοσυνάρτησης, συμπεριληφθεί σ' αυτή τη μελέτη. Αυτή η μελέτη βελτιώθηκε αργότερα από τους Davis & Acrivos οι οποίοι εξήγαγαν ένα 150 – όρων ανάπτυγμα. Τα αποτελέσματά τους για την οπισθέλκουσα δύναμη σαν συνάρτηση του αριθμού Eotvos, $Eo = 4R^2\Delta\rho/(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})$ συμφωνούν ποσοτικά με τις παρατηρήσεις των Bond

& Newton. Ο ισχυρισμός που διατυπώθηκε από τους Davis & Acrivos ακολουθεί παρακάτω. Η συνολική ποσότητα ακαθαρσίας που η διεπιφάνεια μπορεί να δεχθεί, περιορίζεται από τη μέγιστη δυνατή τοπική διεπιφανειακή συγκέντρωση για ένα δεδομένο συνδυασμό υλικών. Για μικρές φυσαλίδες η διεπιφανειακή τάση που είναι απαραίτητη για να ακινητοποιήσει πλήρως τη διεπιφάνεια πετυχαίνεται, ενώ είναι ακόμα μικρότερη του υψηλού ορίου της διεπιφανειακής συγκέντρωσης. Στην περίπτωση μεγαλύτερων φυσαλίδων το υψηλότερο όριο μπορεί να προσεγγιστεί ακόμα και αν ένα τμήμα της επιφάνειας της φυσαλίδας είναι καθαρό από ξένες ουσίες. Με την ισχύ αυτού του επιχειρήματος ο παραπάνω καθορισμός του αριθμού Eo φαίνεται να είναι αρκετά κατάλληλος. Θεωρητική μελέτη πάνω στις συνολικά ακίνητες διεπιφάνειες, έχει διεξαχθεί από τον Levich και τους Dukhin & Buikov. Αυτές οι μελέτες έχουν διατυπωθεί σε βάθος από τον Harper.

Το μοντέλο του σταθερού καλύμματος αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Harper με τη μορφή ασυμπτωτικής ανάλυσης για μικρά καλύμματα και σε μεταγενέστερη μελέτη συμπεριελήφθη η επίδραση του μη μηδενικού ιξώδους της διασκορπισμένης φάσης. Ακολουθώντας οι Sadhal & Johnson έδωσαν μια ακριβή λύση πάνω σ' αυτό το πρόβλημα. Συγκεκριμένα έδωσαν την ακόλουθη κλειστή μορφής έκφραση για την οπισθέλκουσα δύναμη:

$$\frac{F}{6\pi\mu UR} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi(1+\varphi_\mu)} [2j + \sin j - \sin 2j - \frac{1}{3} \sin 3j] \frac{\zeta}{\theta} \frac{2+3\varphi_\mu}{2+2\varphi_\mu} \quad (3.26)$$

όπου φ είναι η γωνία του καλύμματος όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2. Στο ασυμπτωτικό όριο για μικρό φ η παραπάνω έκφραση συμφωνεί με το αποτέλεσμα του Harper. Αυτό το αποτέλεσμα επεκτάθηκε περαιτέρω για ασθενή αδρανειακή μεταφορά στο $O(\text{Re})$ από τους Oguz & Sadhal. Στη βάση της γραμμικής επιφανειακής θερμοδυναμικής οι Sadhal & Johnson επίσης απέδειξαν ότι:

$$\frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{\mu U} = \frac{1}{\pi} [3j + 3 \sin j - j(1 + \cos j)] \frac{\zeta}{\theta} \quad (3.27)$$

όπως και τη συνολική ποσότητα του ρύπου (σε moles)

$$S = \frac{\mu UR^2}{RT} [2j - 4j \cos j - \sin 2j + 4 \sin j] \quad (3.28)$$

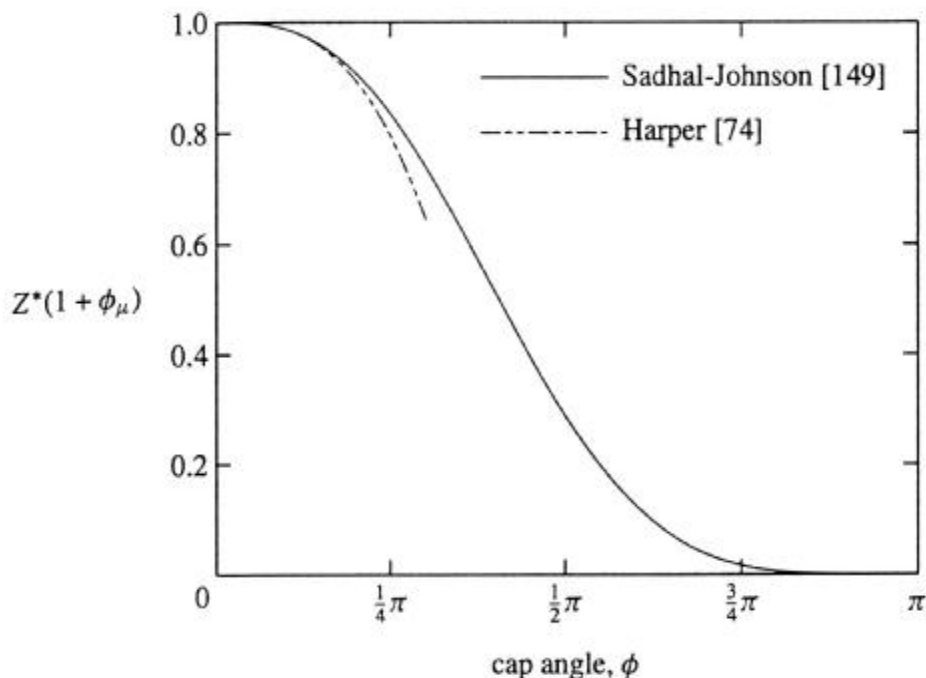
όπου R είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων και T η θερμοκρασία. Αυτοί έδειξαν ότι γι' αυτό το μοντέλο η εξάρτηση της αδρανειακής ροής στα ιξώδη των ρευστών φαίνεται μόνο μέσω μιας σταθερής αναλογίας, $1/(1+\varphi_\mu)$. Περαιτέρω απέδειξαν ότι για ένα μέτρο της αδρανειακής κυκλοφορίας είναι καταλληλότερο να οριστεί ο «βαθμός κυκλοφορίας» με τη σχέση $z^* = 3(1 - U_{TS}/U_T)$ απ' ό,τι με τη σχέση $z = 2(U_T/U_{TS} - 1)$ όπως ορίστηκε από τους Clift, Grace & Weber. Εδώ U_T και U_{TS} είναι οι τελικές ταχύτητες της σταγόνας και της στερεής σφαίρας αντίστοιχα. Ο νέος αυτός ορισμός αποδίδεται με τη σχέση:

$$z^* = \frac{[2\pi - \frac{\zeta}{\theta} (2j + \sin j - \sin 2j - \frac{1}{3} \sin 3j)]}{2\pi(1+\varphi_\mu)} \quad (3.29)$$

που δείχνει ότι οι επιδράσεις του ιξώδους μπορεί όντως να διαχωριστούν σαν ένας απλός παράγοντας. Η ισχύς εδώ περιορίζεται στην έρπουσα ροή χωρίς μεταφορά μάζας στο μεγαλύτερο μέρος της φάσης. Τα διαγράμματα για το z^* από την εξίσωση (3.29) και την ασυμπτωτική ανάλυση του Harper δίνονται στο σχήμα 3.3. Στις μελέτες του Harper η απόκλιση του κέντρου του εσωτερικού στροβίλου έχει επίσης θεωρητικά εξεταστεί. Με σκοπό τη σύγκριση με πειράματα ορίστηκε μια μετατόπιση ($\Delta R/\Delta Z$) στη θέση του κέντρου του στροβίλου λόγω των επιδράσεων της ακαθαρσίας. Οι συνιστώσες της μετατόπισης προσεγγιστικά δίνονται από τη σχέση:

$$\Delta Z \gg \frac{\zeta}{\theta} \frac{1}{2} \frac{\phi}{\Delta R} \gg \frac{2^{\frac{1}{2}} (2 + 3\phi_\mu) R (\Delta C_D)}{3^{\frac{1}{2}} C_D}, \quad (3.30)$$

όπου ο $C_D = F/(1/2\rho U^2)$ είναι ο συντελεστής της οπισθέλκουσας και (ΔC_D) είναι η αύξηση της οπισθέλκουσας σε σχέση με το μέγεθος για χωρίς ξένες ουσίες ρευστά. Το αποτέλεσμα είναι χρήσιμο όχι μόνο για περιπτώσεις σταθερού καλύμματος αλλά και για κινούμενες διεπιφάνειες. Σε άλλες περιπτώσεις η χρησιμότητα περιορίζεται σε μικρά σχετικά μεγέθη των ΔR , ΔZ και ΔC_D . Οι συγκρίσεις των ($\Delta R, \Delta Z$) του Harper με τα πειράματα του Horton ενώ δεν είναι σε πλήρη συμφωνία, φαίνεται να δείχνουν ότι ένα αναλυτικό ανάπτυγμα για μεγαλύτερες γωνίες καλύμματος, παρέχει μια επαρκή θεωρητική βάση. Αυτό όμως δεν αποτέλεσε ζήτημα όταν η ακριβής λύση των Sadhal – Johnson συγκρίθηκε με τα πειράματα του Horton.



ΣΧΗΜΑ 3.3: Βαθμός κυκλοφορίας σαν συνάρτηση της γωνίας καλύμματος

Διατυπώθηκε από τους Sadhal & Johnson ότι τα θεωρητικά μοντέλα που προτείνοντα δεν υπολόγισαν κατάλληλα τις πειραματικές συνθήκες. Συγκεκριμένα τα κινούμενα τμήματα των διεπιφανειών μπορεί επίσης να είναι καθαρά από ρύπους. Αυτό έχει περαιτέρω στηριχθεί από λεπτομερείς θεωρητικές έρευνες των Oguz &

Sadhil οι οποίοι χειρίστηκαν το πρόβλημα της κίνησης της σταγόνας με το συνδυασμό της επίδρασης μιας διαλυτής ακαθαρσίας και μιας μη διαλυτής.

Μεταξύ των πρόσφατων μελετών από τους Holbrook & Le Van οι περιπτώσεις σταθερού καλύμματος εξετάστηκαν αριθμητικά. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν μια ασθενή εξάρτηση του αριθμού Eotvos, $Eo=4R^2 \Delta\rho/(\sigma_{\max} - \sigma_{\text{avg}})$ στην αναλογία ιξώδους ϕ_μ . Δεν είναι δύσκολο να διακρίνουμε από τα αποτελέσματα των Sadhal & Johnson ότι αυτή η εξάρτηση του αριθμού Eo στο λόγο ϕ_μ προκύπτει από την εξάρτηση του ϕ_μ και της οπισθέλκουσας δύναμης η οποία επίσης είναι ίση με:

$$F = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\rho = \frac{1}{3}\pi R(4R^2 \Delta\rho).$$

Δύο αλληλεπιδρώντες σταθερού καλύμματος φυσαλίδες. Για μη αδρανειακή αξονοσυμμετρική ροή γύρω από ένα ζεύγος σταθερού καλύμματος φυσαλίδων οι Lerner & Harper διατύπωσαν μια λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διπλής σειράς και τη μέθοδο των ανακλάσεων. Με το ομοιόμορφο ρεύμα παράλληλο στη γραμμή των κέντρων, τα σταθερά καλύμματα θεωρούνται αξονοσυμμετρικά γύρω από το πίσω σταθερό σημείο. Και οι δύο φυσαλίδες θεωρούνται ίδιου μεγέθους και έτσι για πραγματικά σταθερή κατάσταση η οπισθέλκουσα δύναμη είναι και για τις δύο ίδια, αντιστοιχώντας σε μηδενική σχετική ταχύτητα. Με τον περιορισμό της ίσης οπισθέλκουσας μπορεί να οριστεί το μέγεθος του καλύμματος μόνο στη μία φυσαλίδα. Το μέγεθος του καλύμματος στη δεύτερη φυσαλίδα εξαρτάται από το μέγεθος του καλύμματος της πρώτης όπως και από την διαχωριστική απόσταση. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι για μικρά μεγέθη καλύμματος ($0^\circ < \phi < 30^\circ$) η πίσω φυσαλίδα έχει μικρότερου μεγέθους κάλυμμα σε σχέση με την μπροστά. Κατά μία ποιοτικότερη έννοια, για μικρά καλύμματα, το κάλυμμα της πρώτης φυσαλίδας είναι σε πιο αργή ροή απ' ότι της δεύτερης (αυτής που ακολουθεί). Γι' αυτό το λόγο για να έχουν και οι δύο φυσαλίδες την ίδια οπισθέλκουσα, η προπορευόμενη πρέπει να έχει μεγαλύτερο κάλυμμα για να εξασφαλίσει περισσότερη επιβράδυνση. Σημαντικά, η κατάσταση αντιστρέφεται για γωνία καλύμματος $\phi = 30^\circ$. Σ' ένα εύρος ($30^\circ < \phi < 110^\circ$) το μεγαλύτερο κάλυμμα στο πίσω μέρος της πρώτης φυσαλίδας εξασθενεί αρκετά τη ροή μπροστά από την πίσω φυσαλίδα. Συμπερασματικά η ακολουθούσα δέχεται ένα μεγαλύτερο κάλυμμα. Σημαντική αντιστροφή λαμβάνει χώρα για $\phi = 110^\circ$. Αυτό εξηγείται θεωρώντας τα πολύ μεγάλα καλύμματα σαν διαταραχές πολύ επιβαρημένων διεπιφανειών ($\phi = 180^\circ$). Η μικρή ελεύθερη επιφάνεια της πρώτης φυσαλίδας υπόκειται σε γρηγορότερη ροή σε σχέση με αυτή που ακολουθεί. Γι' αυτό το λόγο για να έχει την ίδια οπισθέλκουσα η ακολουθούσα πρέπει να έχει μεγαλύτερη ελεύθερη περιοχή άρα και μικρότερο σταθερό κάλυμμα.

Ενώ η σχέση μεταξύ των μεγεθών των καλυμμάτων επιτυγχάνεται θεωρώντας σχετική ισορροπία μεταξύ των δύο φυσαλίδων, το ερώτημα για τη σταθερότητα μιας τέτοιας ισορροπίας παραμένει. Επιπρόσθετα μ' ένα φυσικό σύστημα σ' ένα ομοιόμορφο πεδίο δυνάμεων (όπως της άνωσης) η διαδικασία επίτευξης ίσης οπισθέλκουσας μπορεί να είναι δύσκολη. Παίρνοντας υπ' όψη τη σταθερότητα και τον έλεγχο, χρειάζεται περισσότερη προσπάθεια για να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά ενός ζεύγους φυσαλίδων με ρύπους.

Φυσαλίδα κοντά σε οπή. Η κίνηση μιας φυσαλίδας με κάλυμμα ρύπου, προερχόμενη από μια τρύπα σε μια επιφάνεια, έχει αναλυθεί από τους Dagan, Yan & Shen. Αυτοί ανέλυσαν το πεδίο ροής σε δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα είναι η βασική – πρωταρχική ροή, (ροή Sampson) το πεδίο της οποίας περιγράφει τη ροή Stokes διαμέσου μια κυκλικής οπής σ' ένα άπειρο μέσο. Το δεύτερο τμήμα είναι η

δευτερεύουσα ροή ή μια διαταραχή σαν αποτέλεσμα της παρουσίας της φυσαλίδας. Τα αποτελέσματα της διαταραχής έχουν επιτευχθεί με τη μέθοδο της παράθεσης. Όπως αναμενόταν για μια ορισμένη ποσότητα ρύπων στη διεπιφάνεια, το μέγεθος του καλύμματος αυξάνει καθώς η φυσαλίδα απομακρύνεται από το άνοιγμα. Και αυτό εξ' αιτίας της μειούμενης ταχύτητας που οδηγεί σ' ένα μικρότερο βαθμό εκτεταμένης δράσης του ρύπου. Άλλες ενδιαφέρουσες παράμετροι που δεν έχουν πλήρως ερευνηθεί είναι περιπτώσεις όπου η φυσαλίδα απομακρύνεται από το άνοιγμα σ' ένα κύριο πεδίο ροής έξω από το άνοιγμα. Σ' αυτή την περίπτωση η σταθερή – ακίνητη περιοχή θα σχηματίσει μια ζώνη γύρω ή κοντά στον ισημερινό (μεσαία περιφέρεια). Υπάρχει επίσης η πιθανότητα με τη φυσαλίδα και την κύρια ροή και τα δύο κοντά στο άνοιγμα, να σχηματιστούν δύο σταθερά καλύμματα, ένα σε κάθε πόλο.

Παραμόρφωση σταγόνας οφειλόμενη στις επιδράσεις της επιφανειακής φάσης. Η χωρική μεταβολή της επιφανειακής φάσης μπορεί γενικά να οδηγήσει στην παραμόρφωση της σταγόνας ακόμα και αν το πεδίο ροής είναι μη αδρανειακή μεταφορά. Οι Sadhal & Johnson θεώρησαν μια διαταραχή του προφίλ της σταγόνας με καθορισμό του τριχοειδούς αριθμού $Ca = \mu U / \sigma_0$, στη μορφή:

$$R(\theta) = R_0 \left[1 + Ca \zeta(\theta) \right] \quad (3.31)$$

και πέτυχαν τη σχέση:

$$\zeta(\theta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{G_k}{(2k+1)k(k+2)} \frac{1}{k} \frac{\varphi_k}{\varphi_0} + \frac{1}{(k-1)k} P_k(\cos\theta), \quad (3.32)$$

όπου ο συντελεστής G_k αντιστοιχεί στη διανομή της επιφανειακής τάσης:

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 - Ca \sum_{k=1}^{\infty} G_k P_k(\cos\theta). \quad (3.33)$$

Η παραμόρφωση δείχνει ξεκάθαρα την απουσία της συνιστώσας $P_1(\cos\theta)$ σε συνταύτιση με τα αποτελέσματα του LeVan. Για την ειδική περίπτωση ενός σταθερού καλύμματος ρύπου έδειξαν ότι η παραμόρφωση είναι γενικά μια επιμήκυνση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας.

Επιφάνεια – Επιδράσεις του Ιξώδους

Οι κλίσεις της ταχύτητας μέσα στη διεπιφάνεια γενικά απαιτούν μια επιφάνεια με σκοπό να τις συγκρατεί. Και αυτό λόγω της ύπαρξης του επιφανειακού ιξώδους. Ο Bussinesq πρότεινε επιφανειακά διατμητικά και επιφανειακά διαστολής ιξώδη θεωρώντας τη διεπιφάνεια σα διδιάστατο ρευστό. Το μοντέλο αυτό εφαρμόστηκε στη λύση της ροής Stokes για την κίνηση μιας σταγόνας στις συνθήκες συνέχειας της τάσης για μια Νευτώνεια διεπιφάνεια που έχει ομοιόμορφη διεπιφανειακή τάση. Λεπτομερειακές μορφές μελετών ορίστηκαν από τον Scriven. Η μελέτη του Bussinesq γενικεύτηκε αργότερα από τους Agrawal & Wasan που συμπεριέλαβαν τη μεταβαλλόμενη διεπιφανειακή τάση και έδωσαν μια έκφραση για την τελική ταχύτητα. Μια σαφής μορφή γι' αυτήν την ταχύτητα δόθηκε αργότερα από τον LeVan με την ακόλουθη σχέση:

$$U_T = \frac{16(1 + \varphi_\mu) + 4k/(\mu R)U_0 - 2f_2/\mu}{3\chi + 3\varphi_k + 2k/(\mu R)U_0}, \quad (3.34)$$

όπου k είναι το επιφανειακό διατμητικό ιξώδες,

$$U_0 = \frac{R^2 g |\rho - \hat{\rho}|}{3\mu}, \quad (3.35)$$

και f_2 είναι η $\cos\theta$ συνιστώσα της διεπιφανειακής τάσης. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει την επικράτηση του επιφανειακού ιξώδους όταν η ακτίνα R της σταγόνας είναι μικρή. Η επίδραση εξασθενεί όσο το R αυξάνει. Αυτό είναι επίσης ολοφάνερο από το αποτέλεσμα του Bussinesq στο οποίο $f_2 = 0$.

Ενώ θεωρίες για τα επιφανειακά ιξώδη υπάρχουν από την πρώτη διατύπωση του Bussinesq, ποσοτικές διαστάσεις των συντελεστών ιξώδους k και ε υπάρχουν μόλις τις τελευταίες δύο δεκαετίες. Σ' αυτό το περιβάλλον οι Wei, Schmidt & Slattery πέτυχαν το πεδίο ροής που σχετίζεται με μια υγρή σταγόνα σε μια γραμμική διατμητική ροή με ένα ρύπο παρόντα.

ΑΣΘΕΝΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Ιστορικά οι ερευνητές δοκίμασαν να συμπεριλάβουν τις αδρανειακές επιδράσεις από τις διαταραχές των εξισώσεων Navier – Stokes με τον αριθμό Reynolds σαν μικρή παράμετρο. Μεταξύ των πιο πρόσφατων προσπαθειών για βελτίωση της λύσης του Stokes για ροή γύρω από μια σφαίρα, ήταν αυτή του Whitehead. Η συνήθης δυσκολία υπήρξε η ανακριβής συμπεριφορά του πεδίου ροής στο άπειρο. Αυτή η επίδραση είναι γνωστή σαν «παράδοξο του Whitehead». Το 1910 ο Osssen ασχολήθηκε με το πρόβλημα αλλάζοντας το μη γραμμικό όρο της αδράνειας. Αντί για $u \nabla u$ χρησιμοποίησε τον γραμμικό όρο $U \nabla u$, όπου U είναι η ταχύτητα της ομοιόμορφης ροής. Αυτή η προσέγγιση οδήγησε σε μια ομοιόμορφη βάσιμη λύση για $Re \ll 1$. Ιδιαίτερες τεχνικές διαταραχής επακόλουθα εφαρμόστηκαν και ήταν το 1957, που μια μεθοδική λύση για στερεή σφαίρα δόθηκε από τους Proudman & Pearson. Η μεθοδική λύση διαταραχής για ρευστή σφαίρα δόθηκε μερικά χρόνια αργότερα από τους Taylor & Acrivos που έδωσαν τις παρακάτω μορφές των ροϊκών συναρτήσεων:

$$\psi(r, \theta) = \psi_0 + \varepsilon \psi_1(r, \theta) + \dots \quad (3.36)$$

και

$$\hat{\psi}(r, \theta) = \hat{\psi}_0 + \varepsilon \hat{\psi}_1(r, \theta) + \dots \quad (3.37)$$

όπου $\psi_0(r, \theta)$ και $\hat{\psi}_0(r, \theta)$ αναπαριστούν την κύρια σειράς λύση των Rybczynski – Hadamard και $\varepsilon = \frac{1}{2} Re = UR/\nu$. Οι πρώτου βαθμού διορθώσεις δόθηκαν από τους Taylor & Acrivos και είναι:

$$\begin{aligned}
\psi_1(r, \theta) = & -UR^2 \frac{3\varphi_\mu + 2}{8(\varphi_\mu + 1)} \frac{\zeta r \varphi^2}{R^2} - \frac{3\varphi_\mu + 2}{2(\varphi_\mu + 1)} \frac{\zeta r \varphi}{R} \\
& + \frac{\varphi_\mu}{2(\varphi_\mu + 1)} \frac{\zeta R \varphi^{\omega-1}}{r} C_2^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta) + \frac{\zeta r \varphi^2}{R^2} - \frac{3\varphi_\mu + 2}{2(\varphi_\mu + 1)} \frac{\zeta r \varphi}{R} \\
& + \frac{\varphi_\mu (5\varphi_\mu + 4)}{10\varphi_\mu (\varphi_\mu + 1)^2} - \frac{\varphi_\mu}{2(\varphi_\mu + 1)} \frac{\zeta R \varphi}{r} + \frac{\varphi_\mu (5\varphi_\mu + 6)}{10\varphi_\mu (\varphi_\mu + 1)^2} \frac{\zeta R \varphi^{\omega-1}}{r} C_3^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta),
\end{aligned} \tag{3.38}$$

και

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_1(r, \theta) = & -UR^2 \frac{(2 + 3\varphi_\mu)}{16(1 + \varphi_\mu)^2} \frac{\zeta r \varphi^2}{R^2} - \frac{\zeta r \varphi^4}{R^2} C_2^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \\
& - \frac{(5 + 4\varphi_\mu)}{5(\varphi_\mu + 1)} \frac{\zeta r \varphi^3}{R^2} - \frac{\zeta r \varphi^5}{R^2} C_3^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Η παραπάνω έκφραση για τη ροϊκή συνάρτηση $\Psi(r, \theta)$ είναι κατάλληλη στην «εσωτερική περιοχή» της συνεχούς φάσης. Στην «εξωτερική περιοχή» η ροϊκή συνάρτηση υπακούει στην εξίσωση του Oseen ως το $O(\varepsilon)$. Όσον αφορά μια εξωτερική μεταβλητή, $\rho = \varepsilon r$, η έκφραση της ροϊκής συνάρτησης είναι:

$$\begin{aligned}
\Psi = & UR^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \frac{\zeta r \varphi^2}{R^2} \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\zeta (2 + 3\varphi_\mu)}{2 + 2\varphi_\mu} (1 + \cos \theta) - e^{-\frac{1}{2}\varepsilon(r/R)(1 + \cos \theta)} + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Οι εσωτερικές και εξωτερικές λύσεις μπορούν φυσικά να συνδυαστούν δίνοντας μια σύνθετη λύση που έχει βρεθεί ότι είναι:

$$\begin{aligned}
\psi(r, \theta) = & UR^2 \frac{1}{2} \sin^2 \theta \frac{\zeta r^2}{R^2} + \frac{\varphi_\mu}{2(1+\varphi_\mu)} \frac{\zeta R^3}{r} \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \frac{3\varphi_\mu + 2}{2\varphi_\mu + 2} (1 + \cos \theta) \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon(r/R)(1+\cos\theta)} \\
& - \varepsilon UR^2 \frac{(2+3\varphi_\mu)}{8(1+\varphi_\mu)} \frac{\zeta r^2}{R^2} + \frac{2+3\varphi_\mu}{2(1+\varphi_\mu)} \frac{\zeta r}{R} \\
& + \frac{\varphi_\mu}{2(1+\varphi_\mu)} \frac{\zeta R^3}{r} C_2^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta) + \frac{\zeta(2+3\varphi_\mu)}{2(2+2\varphi_\mu)} \frac{\zeta r}{R} + \frac{\varphi_\mu(4+5\varphi_\mu)}{10(1+\varphi_\mu)^2} \\
& - \frac{\varphi_\mu}{2(\varphi_\mu+1)} \frac{\zeta R^3}{r} + \frac{\varphi_\mu(6+5\varphi_\mu)}{10(1+\varphi_\mu)^2} \frac{\zeta R^3}{r} C_3^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Παραμόρφωση Σταγόνας

Το πεδίο ροής σ' αυτό το βαθμό δημιουργεί παραμόρφωση που έχει καθοριστεί από τους Taylor & Acrivos. Για ένα προφίλ σταγόνας της μορφής:

$$r(\theta) = R\lambda + \zeta(\theta) \tag{3.42}$$

η παραμόρφωση $\zeta(\theta)$ επετεύχθη στο $O(We)$ και επακόλουθα παίρνει υψηλότερου βαθμού διόρθωση στο πεδίο ροής. Εδώ το $We = \rho U^2 (2R) / \sigma$ ορίζεται σαν αριθμός Weber. Αυτή η διόρθωση οδήγησε στην παρακάτω έκφραση για την οπισθέλκουσα:

$$\begin{aligned}
F = & 2\pi\mu UR \frac{\zeta(2+3\varphi_\mu)}{1+\varphi_\mu} + \frac{\varepsilon \zeta(2+3\varphi_\mu)}{8(1+\varphi_\mu)} \\
& \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{40} \frac{\zeta(2+3\varphi_\mu)}{1+\varphi_\mu} + \frac{1}{5} \frac{\Lambda We}{(1+\varphi_\mu)^2} (3\varphi_\mu^2 - \varphi_\mu + 8)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

όπου:

$$\Lambda = \frac{1}{4(1+\varphi_\mu)^3} \left(\frac{81}{80} \varphi_\mu^3 + \frac{57}{27} \varphi_\mu^2 + \frac{103}{40} \varphi_\mu + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{12} (\varphi_\rho - 1)(\varphi_\mu + 1) \tag{3.44}$$

με το $\varphi_\rho = \hat{\rho} / \rho$ να είναι η αναλογία πυκνότητας. Μια περαιτέρω διόρθωση στο $O(We^2 / \varepsilon)$ στην παραμόρφωση αποδίδει:

$$\zeta(\theta) = -\frac{1}{2}\Lambda We P_2(\cos\theta) - \frac{3\Lambda(11\varphi_\mu + 10)}{70(\varphi_\mu + 1)} \frac{1}{4} \frac{We^2}{\varepsilon} P_3(\cos\theta) + \dots \quad (3.45)$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι ως το $O(We)$ το σχήμα της σταγόνας είναι σφαιροειδές. Η τιμή της παραμέτρου Λ ορίζει εάν το σφαιροειδές είναι ωοειδές ($\Lambda < 1$) ή πεπλατυσμένο ($\Lambda > 1$). Όπως και να 'χει για τα περισσότερα ρευστά πρακτικού ενδιαφέροντος, η παραμορφωμένη σταγόνα είναι πεπλατυσμένη. Υψηλότερου βαθμού διορθώσεις εξήχθησαν από τον Brignell, που έδωσε την παραμόρφωση με τη μορφή:

$$\begin{aligned} \zeta(\theta) = & -\Lambda Ca \varepsilon P_2(\cos\theta) - \frac{3\Lambda(11\varphi_\mu + 10)}{70(\varphi_\mu + 1)} Ca^2 \varepsilon - Ca \varepsilon^2 P_2(\cos\theta) \\ & + \frac{3\varphi_\mu + 2}{3840(\varphi_\mu + 1)^4} \{43\varphi_\mu^3 - 96\varphi_\mu^2 - 282\varphi_\mu - 140 - 20(\varphi_\mu - 1)(\varphi_\mu + 1)\} \\ & + P_3(\cos\theta) \frac{3\varphi_\mu + 2}{5600(\varphi_\mu + 1)^5} \left\{ \frac{1876}{1680} \varphi_\mu^4 + \frac{52553}{13860} \varphi_\mu^3 + \frac{103}{40} \varphi_\mu^2 + \frac{162992}{13860} \varphi_\mu + \frac{90}{8} \right\} \\ & + P_3(\cos\theta) \frac{(2 + 3\varphi_\mu)}{4000(1 + \varphi_\mu)^4} (\varphi_\mu - 1)(4\varphi_\mu + 5) \\ & - Ca(\varepsilon^3 \ln \varepsilon) P_2(\cos\theta) \frac{\Lambda}{20} \frac{2 + 3\varphi_\mu}{1 + \varphi_\mu} + \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

όπου $Ca = \mu U / \sigma$ είναι ο τριχοειδής αριθμός που σχετίζεται με τον αριθμό Weber με τη σχέση $We = Ca Re = 2Ca\varepsilon$. Διορθώσεις σε βαθμούς υψηλότερους από αυτούς που αναφερθήκαμε θα επιφέρουν όρους συμπεριλαμβανομένων των $Ca\varepsilon^3$ ή $Ca^2\varepsilon^3$. Ο Brignell προέβλεψε το επιχείρημα ότι με $\varepsilon \ll 1$ και $Ca \ll 1$ σημαντική παραμόρφωση μπορεί να λάβει χώρα με υγρά με μεγάλες τιμές $M = g\mu^4 / (\rho\sigma^3)$.

Επιδράσεις Επιφανειακής Φάσης με Ασθενείς Αδρανειακές Ροές

Για την περίπτωση του «σταθερού καλύμματος» εξ' αιτίας της παρουσίας χαμηλής διαλυτότητας ακαθαρσιών, η διόρθωση του πεδίου ροής στο $O(\varepsilon)$ έχει υπολογιστεί από τους Oguz & Sadhal. Επιπρόσθετα για να επιτύχουν μια μορφή σύνθετης λύσης για όλο το πεδίο ροής έδωσαν μια έκφραση για την οπισθέλκουσα δύναμη με μια $O(\varepsilon)$ διόρθωση στο αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.26). Η οπισθέλκουσα δύναμη δίνεται από τη σχέση:

$$F = \frac{2\pi\mu U_{\infty} R}{(1 + \varphi_{\mu})} \left[(2 + 3\varphi_{\mu}) + C_1(j) \right] \frac{1}{8(1 + \varphi_{\mu})} \varepsilon \left[(2 + 3\varphi_{\mu}) + C_1(j) \right] + \frac{1}{10(1 + \varphi_{\mu})^2} \left\{ (4 + 5\varphi_{\mu}) - C_1(j) \right\} R_1(j) + O(\varepsilon^2), \quad (3.47)$$

όπου $\varepsilon = \frac{1}{2} Re = UR/v$ όπως ορίστηκε νωρίτερα. Οι παράμετροι $C_1(\varphi)$ και $R_1(\varphi)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$C_1(j) = \frac{1}{2\pi} \left[2j + \sin j - \sin 2j - \frac{1}{3} \sin 3j \right] \quad (3.48)$$

και

$$R_1(j) = \frac{1}{\pi} \left[4 \cos 2j + \cos j - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{1}{2} j \right] \sin j - 2 \frac{1}{\pi} \sin 4j + \sin j. \quad (3.49)$$

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΕΝΑ ΙΣΧΥΡΟ ΑΚΤΙΝΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Για ρευστές σταγόνες σε μια αέρια συνεχή φάση, η εξάτμιση ή συμπύκνωση μπορούν να δημιουργήσουν μια μεγάλη ακτινική ταχύτητα εξ' αιτίας της πολύ μεγάλης αλλαγής της πυκνότητας από ρευστό σε ατμό. Κάτω από αυτές τις περιστάσεις ακόμα και οι πολύ μικρές σταγόνες (ακτίνας 100μm) δέχονται τις επιδράσεις της αδράνειας από το ακτινικό πεδίο. Τα φαινόμενα της Μηχανικής των Ρευστών που σχετίζονται με τέτοιες ροές έχουν ερευνηθεί από τους Sadhal & Ayyaswamy, Sadhal και πρόσφατα από τους Jog, Ayyaswamy & Cohen. Αυτοί οι ερευνητές θεώρησαν ένα καθαρό ακτινικό πεδίο, σαν το κυρίαρχο – οδηγόν σύστημα και παρουσίασαν τη μεταφορά σαν μια διαταραχή πάνω σ' αυτό. Η σταγόνα δίνει μια μεταφορική ταχύτητα U_{∞} που είναι αρκετά μικρότερη από την ακτινική ταχύτητα στη διεπιφάνεια $U^R(\theta)$. Ενώ γενικά η ακτινική ταχύτητα είναι ανομοιομορφη, η σταγόνα διατηρεί το σχεδόν σφαιρικό της σχήμα εξ' αιτίας της διεπιφανειακής τάσης. Για σταγόνες διαμέτρου μικρότερης του 1mm η υπόθεση της σφαιρικότητας ισχύει. Γι' αυτό ακόμα και όταν έχουμε μια ανομοιομορφη ελάττωση ή αύξηση του υλικού, το ρευστό εντός της σταγόνας αλλάζει θέση για να διατηρήσει ένα σχεδόν σφαιρικό σχήμα. Σ' αυτό το περιβάλλον η διεπιφανειακή συνθήκη συνέχειας της μάζας μπορεί να οριστεί με την παρακάτω σχέση ανάμεσα στις κάθετες ταχύτητες της διασκορπισμένης και της συνεχούς φάσης:

$$\rho_{\mu}^{\zeta} U^R - R \frac{\partial \rho_{\mu}^{\zeta}}{\partial t} = \rho_{\mu}^{\zeta} \hat{U}^R - R \frac{\partial \rho_{\mu}^{\zeta}}{\partial t} \quad (3.50)$$

Με βάση την ανάλυση του $U^R(\theta)$ σε μια σταθερή συνιστώσα (μια μέση) και μια μεταβλητή, της μορφής:

$$U^R(\theta) = \bar{U}^R + V^R(\theta), \quad (3.51)$$

και με περαιτέρω χειρισμό μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\hat{U}^R(\theta) = \frac{1}{\varphi_\rho} + \frac{V^R(\theta)}{\varphi_\rho} \quad (3.52)$$

Εδώ το $\hat{U}^R(\theta)$ αναπαριστά τη διανομή της κάθετης ταχύτητας της ρευστής πλευράς στην επιφάνεια της σταγόνας και $\varphi_\rho = \hat{\rho}/\rho$. Αυτή η ταχύτητα είναι αποτέλεσμα της συνεχούς αλλαγής της επιφάνειας σ' ένα σφαιρικό σχήμα και έχει μηδενική μέση τιμή. Για τα περισσότερα συστήματα σταγόνων σε αέρα και / ή ατμό, $\varphi_\rho = \hat{\rho}/\rho \approx 1$ και κάτω από αυτές τις περιστάσεις η κάθετη ταχύτητα στη ρευστή πλευρά της επιφάνειας της σταγόνας είναι αμελητέα.

Για αδιατάραχτη ροή η ακτινική ταχύτητα είναι U_0^R και βασιζόμενοι σ' αυτό οι Sadhal & Ayyaswamy όρισαν ένα ακτινικό αριθμό Reynolds $U_{00} = U_0^R R/\nu$ και ένα μεταφορικό αριθμό Reynolds $\varepsilon = U_\infty R/\nu = 1$. Ένα ομαλής διαταραχής σχέδιο στις δυνάμεις του ε δίνει μια ομοιόμορφη κατάλληλη λύση στο $O(\varepsilon)$. Για υψηλότερους βαθμούς οι μέθοδοι ομαλής διαταραχής χρειάζεται να συμπεριληφθούν στη μελέτη. Έτσι ένα σχέδιο του τύπου:

$$u = U_{00}u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.53)$$

$$u = \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2 + \dots \quad (3.54)$$

$$\rho = U_{00}\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots \quad (3.55)$$

$$\hat{\rho} = U_\infty \hat{\rho}_0 + \varepsilon \hat{\rho}_1 + \varepsilon^2 \hat{\rho}_2 + \dots \quad (3.56)$$

σε αδιάστατη μορφή χρησιμοποιήθηκε για τα πεδία της ταχύτητας και της πίεσης. Οι κύριες κλιμακωτές παράμετροι είναι U_0^R για την πρώτου βαθμού ταχύτητα και U_∞ για τα διαταραγμένα πεδία. Η συνθήκη συνέχειας ικανοποιείται ορίζοντας την ταχύτητα όσον αφορά τη ροϊκή συνάρτηση με το συνήθη τρόπο. Έτσι οι διαταραγμένες ταχύτητες μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$(u_m, \hat{u}_m) = P \cdot \frac{1}{r \sin \theta} e_{\varphi}^{\hat{u}_m} \quad (3.57)$$

Η κάθετη ταχύτητα στη διεπιφάνεια σε αδιάστατη μορφή μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$u_r|_{r=1} = U_{00} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} U_{n1}^R P_n(\bar{\mu}) + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} U_{n2}^R P_n(\bar{\mu}) + \dots \quad (3.58)$$

Ωστόσο ολόκληρο το πακέτο αυτής της σειράς δεν είναι απαραίτητο. Εφόσον η κάθετη ταχύτητα στην επιφάνεια αυξάνει λόγω του θερμικού πεδίου, έχει αντίστοιχη μορφή συνάρτησης όπως η τοπική θερμοκρασία η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από την τοπική διαταραχή της ταχύτητας που προκύπτει από τη μεταφορά. Η παρουσίαση του βαθμού της σειράς Legendre ορίζεται από το βαθμό του ε γι' αυτού του τύπου ομαλής διαταραχής προβλήματα. Γι' αυτό το λόγο θεωρείται ότι:

$$u_r|_{r=1} = U_{00} + \varepsilon (U_{01}^R + \bar{\mu} U_{11}^R) + \varepsilon^2 \left(U_{02}^R + \bar{\mu} U_{12}^R + \frac{1}{2} (3\bar{\mu}^2 - 1) U_{22}^R \right) + \dots \quad (3.59)$$

που μπορεί να δειχθεί ότι είναι σύμφωνη με τον υπολογισμό του θερμικού πεδίου. Η ροϊκή συνάρτηση επεκτείνεται όσον αφορά τα πολυώνυμα Gegenbauer με τη σχέση:

$$\psi_m(r, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_m^n(r) C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\bar{\mu}). \quad (3.60)$$

Με αυτή την επέκταση της σειράς η μεταβολή της ταχύτητας στην επιφάνεια του σταγονιδίου όπως και η ροϊκή συνθήκη της απομακρυσμένης ροής περιγράφονται επαρκώς. Στην πραγματική εκτίμηση των ποσοτήτων ο αριθμός των όρων της σειράς επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί όλες τις επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες. Η σπουδαιότητα των όρων της αδράνειας και του ιξώδους σ' ολόκληρο το πεδίο ροής καθορίστηκε με την αντικατάσταση του σχεδίου ανάλυσης των εξισώσεων (3.53) και (3.55) από την εξίσωση της ορμής και την εξέτασή της. Ειδικότερα οι λύσεις των ροϊκών συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της συμπεριφοράς μεγάλου r , των όρων της αδράνειας και του ιξώδους. Ο βαθμός του μεγέθους των υπολογισμών παρατηρήθηκε ότι είναι, όπως παρακάτω:

Όροι αδράνειας:

$$U_{00}^2 u_0 \mathcal{P} u_0 + U_{00} \varepsilon (u_0 \mathcal{P} u_1 + u_1 \mathcal{P} u_0) + \varepsilon^2 (U_{00} u_0 \mathcal{P} u_2 + u_1 \mathcal{P} u_1 + U_{00} u_2 \mathcal{P} u_0).$$

Για $r \gg 1$:

$$: O\left(\frac{1}{r^5}\right) : O\left(\frac{\varepsilon}{r^5}\right) : O\left(\frac{\varepsilon^2}{r^3}\right)$$

Όροι ιξώδους:

$$U_{00} P^2 u_0 + \varepsilon P^2 u_1 + \varepsilon^2 P^2 u_2.$$

Για $r \gg 1$:

$$: O\left(\frac{1}{r^4}\right) : O\left(\frac{\varepsilon}{r^4}\right) : O\left(\frac{\varepsilon^2}{r^3}\right)$$

Αυτές οι εκτιμήσεις δείχνουν ότι για να πετύχουμε τις υψηλότερου βαθμού $O(\varepsilon^2)$ λύσεις του πεδίου ροής για την εσωτερική περιοχή, διατηρώντας όρους του βαθμού $(1/r^5)$ και αγνοώντας όρους του βαθμού (ε^2/r^3) (όπως θα γινόταν με τη θεωρία ομαλής διαταραχής) οδηγούν σε ανακολουθίες για $r > 1/\varepsilon$. Σαν αποτέλεσμα οι εσωτερικές λύσεις δεν είναι ομοιόμορφα κατάλληλες σ' ολόκληρο το πεδίο ροής. Ένα κανονικής διαταραχής σχέδιο είναι γι' αυτό το λόγο μη επαρκές να επιτύχει κατάλληλες λύσεις για τη ροή πέραν του $O(\varepsilon)$ και μια ιδιαίτερης διαταραχής προσέγγιση υιοθετήθηκε απαιτώντας την αλλαγή κλίμακας – τροποποίηση των κυρίαρχων εξισώσεων στην εξωτερική περιοχή ($\varepsilon r > 1$). Μια με προσπάθεια ορισμένη συντεταγμένη $\rho = \varepsilon r$ και μια ροϊκή συνάρτηση $\Psi^2 = \varepsilon^2 \psi$ ορίστηκαν για την εξωτερική περιοχή. Επισημάνθηκε ότι στην εξωτερική περιοχή είναι ακατάλληλο να διαβαθμίσουμε την ταχύτητα με την ακτινική ταχύτητα U_0^R και ότι η κατάλληλη παράμετρος είναι η U_∞ . Με μια αδιάστατη εξωτερική ταχύτητα που ορίζεται από τη σχέση $U^* = UR/v$, το παρακάτω ανάπτυγμα (παραλείπονται οι αστερίσκοι) αναπτύχθηκε ως εξής:

$$U = \varepsilon U_0 + \varepsilon^2 U_1 + \dots \quad (3.61)$$

$$\Psi = \varepsilon \Psi_0 + \varepsilon^2 \Psi_1 + \dots \quad (3.62)$$

Βασιζόμενοι στα εκτεταμένα αναπτύγματα που περιγράφηκαν παραπάνω, η τυπική ιεραρχία των πρωτοβάθμιων, δευτεροβάθμιων εσωτερικών και πρωτοβάθμιων εξωτερικών προβλημάτων κατασκευάστηκε και λύθηκε. Αυτά συνοπτικά περιγράφονται εδώ.

Εσωτερικές Λύσεις:

Αρχικού βαθμού εσωτερική λύση (ε^0):

$$P \mathbf{u}_0 = 0, \quad (3.63)$$

$$U_{00} u_0 \mathbf{p} u_0 + P \rho = P^2 u_0, \quad (3.64)$$

με οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u_{1r}|_{r=1} &= U_{01}^R + U_{11}^R \cos \theta \\ u_{1\theta}|_{r=1} &= 0, \quad u_{0r}|_{r=1} = 1, \quad u_{1\theta}|_{r=1} = \hat{u}_{1\theta}|_{r=1} = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Η αρχικού βαθμού ταχύτητα του πεδίου για τη συνεχή φάση είναι:

$$u_0 = \frac{1}{r^2} \hat{e}_r. \quad (3.66)$$

Για τη διασκορπισμένη φάση η αρχικού βαθμού ταχύτητα είναι μηδέν.

Πρωτοβάθμια εσωτερική λύση (ε^1):

$$P g_1 = 0, \quad (3.67)$$

$$P \hat{g}_1 = 0, \quad (3.68)$$

$$U_{00} (u_0 g^P u_1 + u_1 g^P u_0) + P \rho_1 = P^2 u_1, \quad (3.69)$$

$$P \hat{\rho}_1 = P^2 \hat{u}_1. \quad (3.70)$$

με οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u_{1r}|_{r=0} &= \cos \theta, \\ u_{1\theta}|_{r=0} &= -\sin \theta, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} u_{1r}|_{r=1} &= U_{01}^R + U_{11}^R \cos \theta, \\ u_{1\theta}|_{r=1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$u_{1\theta}|_{r=1} = \hat{u}_{1\theta}|_{r=1}, \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\zeta u_{1\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{u_{1r}}{\theta} = \varphi_\mu \frac{1}{\kappa} \frac{\zeta \hat{u}_{1\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\hat{u}_{1r}}{\theta}, \quad (3.74)$$

$$\hat{u}_{1\theta}, \hat{u}_{1r}|_{r=0} < \infty. \quad (3.75)$$

Με την έκφραση της ροϊκής συνάρτησης (3.57) η λύση βρίσκεται ότι είναι:

$$\psi_1 = U_{00} \cos \theta + \varepsilon \frac{1}{\kappa} U_{01}^R \cos \theta + \frac{1}{2} f_1(r) \sin^2 \theta, \quad (3.76)$$

$$\hat{\psi}_1 = \frac{1}{2} \hat{B}_1 (r^4 - r^2) \sin^2 \theta, \quad (3.77)$$

όπου:

$$f_1(r) = r^2 + B_1 \frac{\zeta}{r} + C_1 \frac{U_{00}}{\kappa r} \int_{r/U_{00}}^{r/U_{00}} (\xi^4 + \xi^3) e^{-1/\xi} d\xi - \frac{1}{5} \frac{\zeta r^4}{U_{00}} + \frac{1}{6} \frac{\zeta r^2}{U_{00}}. \quad (3.78)$$

Οι σταθερές B_1 , \hat{B}_1 , C_1 δίνονται από τις σχέσεις:

$$B_1 = - (1 - U_{11}^R) + \frac{\frac{\zeta}{\theta} \frac{1}{5} + \frac{1}{6} U_{00}^2 \frac{\phi}{\kappa} (2 + 3\varphi_\mu) - U_{11}^R (2 + \varphi_\mu) \frac{\omega}{\delta}}{-\varphi_\mu + \frac{1}{6} (2 + 3\varphi_\mu) U_{00}^2 + \frac{1}{\kappa} (1 + U_{00}) \varphi_\mu - \frac{1}{3} \varphi_\mu U_{00}^2 \frac{\omega}{\delta} e^{-U_{00}}}, \quad (3.79)$$

$$C_1 = \frac{-\frac{12}{\kappa} + 3\varphi_\mu - U_{11}^R (2 + \varphi_\mu) \frac{\omega}{\delta} U_{00}^4}{-\varphi_\mu + \frac{1}{6} (2 + 3\varphi_\mu) U_{00}^2 + \frac{1}{\kappa} (1 + U_{00}) \varphi_\mu - \frac{1}{3} U_{00}^2 \frac{\omega}{\delta} e^{-U_{00}}}, \quad (3.80)$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\left((1 - U_{11}^R) \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{3} U_{00}^2 - \frac{\zeta}{\theta} (1 - U_{00}) + \frac{1}{6} U_{00}^2 \frac{\phi}{\kappa} e^{-U_{00}} \frac{\omega}{\delta} + \frac{1}{3} U_{00}^2 (1 - e^{-U_{00}}) \right)}{-\varphi_\mu + \frac{1}{6} (2 + 3\varphi_\mu) U_{00}^2 + \frac{1}{\kappa} (1 + U_{00}) \varphi_\mu - \frac{1}{3} \varphi_\mu U_{00}^2 \frac{\omega}{\delta} e^{-U_{00}}}. \quad (3.81)$$

Δευτεροβάθμια εσωτερική λύση (ε^2). Η δευτεροβάθμια εσωτερική ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση:

$$L_{-1}^2 \psi_2 - \frac{U_{00} \frac{\zeta}{\theta}}{r^2} \frac{1}{r} - \frac{2\phi}{r\kappa} L_{-1} \psi_2 = \frac{C_1 e^{-U_{00}/r}}{2U_{00} r^4} \frac{1}{\kappa} U_{01}^R + \bar{\mu} f_1(r) \frac{\omega}{\delta} (1 - \bar{\mu}^2), \quad (3.82)$$

και η λύση παίρνει τη μορφή:

$$\psi_r(r, \bar{\mu}) = -U_{02}' \bar{\mu} + f_{21}(r)(1 - \bar{\mu}^2) + f_{22}(r) \bar{\mu}(1 - \bar{\mu}^2). \quad (3.83)$$

Οι εκφράσεις για τα $f_{21}(r)$ και $f_{22}(r)$ έχουν επεξεργαστεί και δε θα αναφερθούν εδώ. Για τη διασκορπισμένη φάση η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση:

$$L_{-1}^2 \hat{\psi}_2 = 0, \quad (3.84)$$

και η λύση αυτού του βαθμού είναι:

$$\hat{\psi}_2(r, \bar{\mu}) = \hat{B}_{21}(1 - \bar{\mu}^2) + \hat{B}_{22} \bar{\mu}(1 - \bar{\mu}^2). \quad (3.85)$$

Οι εκφράσεις για τις σταθερές \hat{B}_{21} και \hat{B}_{22} είναι διαθέσιμες σε αναφορές.

Εξωτερικές Λύσεις

Η διάταξη για το εξωτερικό πεδίο ροής που δίνεται από τις εξισώσεις (3.61) και (3.62) έχει διεξαχθεί στον πρώτο βαθμό. Οι αντίστοιχες λύσεις αναφέρονται μετέπειτα. Αυτές οι λύσεις υπακούουν στο ίδιο πακέτο εξισώσεων όπως του Oseen

και είναι παρεμφερείς στην έκφραση που δίνεται στην εξίσωση (3.40) με την κατάλληλη τροποποίηση για την ακτινική ροή στη διεπιφάνεια.

Αρχικού βαθμού εξωτερική λύση. Η αρχικού βαθμού εξωτερική λύση συμπεραίνεται ότι είναι μια ομοιόμορφη ροή που δίνεται από τη σχέση:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \bar{\mu}^2), \quad (3.86)$$

όπου $\rho = \varepsilon r$.

Πρωτοβάθμια εξωτερική λύση. Η έκφραση για το $\Psi_1(\rho, \bar{\mu})$ είναι:

$$\Psi_1(\rho, \bar{\mu}) = -U_{00} \bar{\mu} + \frac{C_1}{6U_{00}} (1 + \bar{\mu})^2 e^{-\frac{1}{2}\rho(1-\bar{\mu})} \quad (3.87)$$

Η Οπισθέλκουσα Δύναμη

Η οπισθέλκουσα δύναμη έχει τρεις συνιστώσες: την οπισθέλκουσα του ιξώδους F_μ , την οπισθέλκουσα της μορφής F_ρ και την οπισθέλκουσα της ορμής – ροής F_m . Οι δύο πρώτες συνιστώσες είναι γνωστές ειδικά για περιπτώσεις χωρίς αλλαγή φάσης. Η τρίτη, F_m προκύπτει από την καθαρή ορμή της ροής ($\rho u u e_z$) εξ' αιτίας της αλλαγής φάσης στη διεπιφάνεια. Οι συνιστώσες αυτές δίνονται σε αδιάστατες μορφές όπως παρακάτω:

$$F_\mu^* = \frac{4\pi C_1}{3} \frac{2}{U_{00}^4} + \frac{2}{U_{00}^3} + \frac{1}{U_{00}^2} e^{-U_{00}} - \frac{2}{U_{00}^4} \quad (3.88)$$

$$+ \varepsilon \frac{4\pi}{3} \frac{2}{U_{00}^4} + \frac{2}{U_{00}^3} + \frac{1}{U_{00}^2} e^{-U_{00}} - \frac{2}{U_{00}^4} - \frac{C_1 U_{01}^R}{U_{00}^2} e^{-U_{00}} + O(\varepsilon^2),$$

$$F_\rho^* = \frac{4\pi}{3} U_{01}^R U_{11}^R - C_1 \frac{2}{U_{00}^4} + \frac{1}{U_{00}^3} e^{-U_{00}} - \frac{2}{U_{00}^4} + \frac{1}{U_{00}^3} \quad (3.89)$$

$$+ \varepsilon \frac{4\pi}{3} U_{01}^R U_{12}^R + U_{01}^R U_{11}^R - 2C_2 \frac{2}{U_{00}^4} + \frac{1}{U_{00}^3} e^{-U_{00}} - \frac{2}{U_{00}^4} + \frac{1}{U_{00}^3}$$

$$+ C_1 U_{01}^R \frac{1}{U_{00}^4} + \frac{1}{U_{00}^3} e^{-U_{00}} - \frac{1}{U_{00}^4} + O(\varepsilon^2),$$

$$\begin{aligned}
F_m^* = & -\frac{4\pi}{3} \frac{\hbar}{\rho} 3U_{00} + U_{00} U_{11}^R + C_1 \frac{\zeta}{\kappa} \frac{1}{U_{00}^3} + \frac{1}{U_{00}^2} \frac{\varphi}{\kappa} e^{-U_{00}} - \frac{1}{U_{00}^3} + \frac{1}{2U_{00}} \frac{\theta}{\rho} \\
& - \frac{4\pi}{3} \varepsilon \left\{ 3U_{01}^R + U_{00} U_{12}^R + U_{01}^R U_{11}^R + 2C_2 \frac{\zeta}{\kappa} \frac{1}{U_{00}^3} + \frac{1}{U_{00}^2} \frac{\varphi}{\kappa} e^{-U_{00}} - \frac{1}{U_{00}^3} + \frac{1}{2U_{00}} \frac{\theta}{\rho} \right. \\
& \left. + C_1 U_{01}^R \frac{\zeta}{\kappa} \frac{1}{U_{00}^4} + \frac{1}{U_{00}^3} - \frac{1}{U_{00}^2} \frac{\varphi}{\kappa} e^{-U_{00}} - \frac{1}{U_{00}^4} + \frac{3}{2U_{00}^2} - \frac{1}{8U_{01}^R} \frac{\theta}{\rho} + O(\varepsilon^2) \right\},
\end{aligned} \tag{3.90}$$

όπου η σταθερά C_1 δίνεται από την εξίσωση (3.80) και η C_2 από τη σχέση:

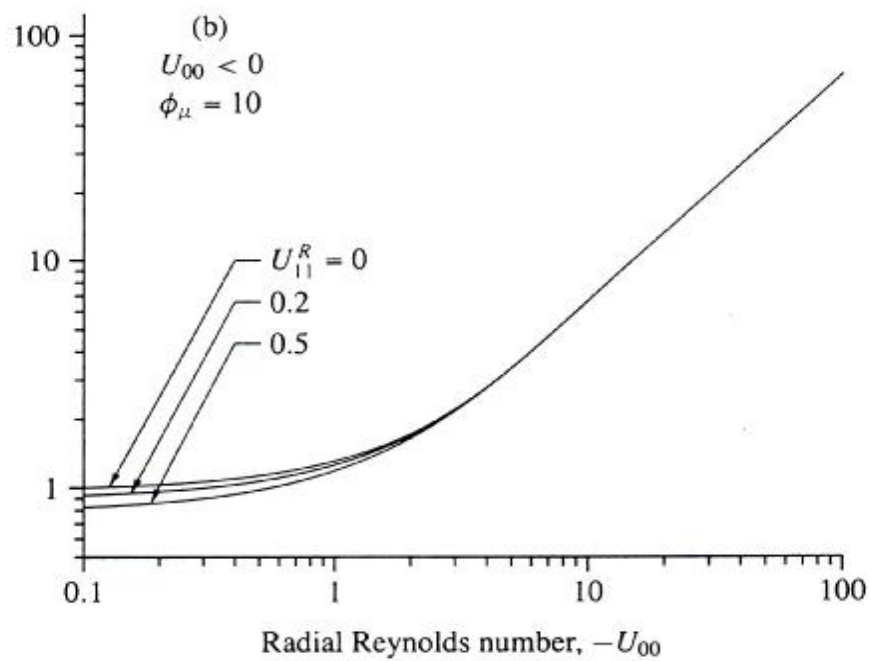
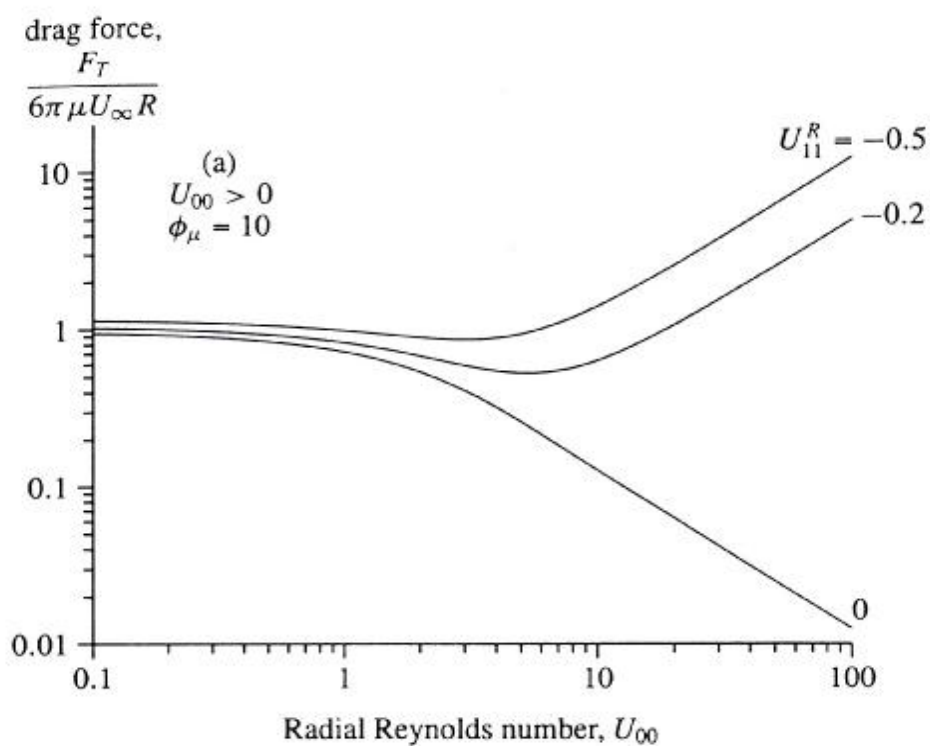
$$C_2 = \frac{\frac{1}{6}(2 + 3\varphi_\mu) \frac{\zeta}{\kappa} U_{12}^R U_{00}^4 + \frac{1}{8} C_1 U_{00}^3 + C_1 U_{01}^R U_{00} (e^{-U_{00}} - 1) \frac{\theta}{\rho} - \frac{1}{12} C_1 U_{01}^R U_{00}^2}{\varphi_\mu + \frac{1}{6}(2 + 3\varphi_\mu) U_{00}^2 + \frac{\zeta}{\kappa} (1 + U_{00}) \varphi_\mu - \frac{1}{3} U_{00}^2 \frac{\theta}{\rho} e^{-U_{00}}} \tag{3.91}$$

η συνολική οπισθέλκουσα είναι:

$$\begin{aligned}
F_T^* &= F_\mu^* + F_p^* + F_m^* \\
&= -\frac{4\pi}{3} \frac{\hbar}{\rho} 3U_{00} \frac{C_1}{2U_{00}} + \varepsilon \left\{ 3U_{01}^R + \frac{C_2}{U_{00}} + \frac{3C_1 U_{01}^R}{2U_{00}^2} - \frac{C_1}{8} \frac{\theta}{\rho} \right\} + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Εδώ κάθε συνιστώσα έχει διαβαθμιστεί με U_{00} . Η έκφραση για τη συνολική οπισθέλκουσα πρώτου βαθμού σχεδιάστηκε στο σχήμα 3.4. Για μια εξωτερική ακτινική ταχύτητα που είναι μέγιστη στην αρχή, η οπισθέλκουσα μειώνεται με αύξηση της ακτινικής ταχύτητας, φτάνει ένα ελάχιστο και μετά αυξάνει. Για μεγάλο U_{00} η ασυμπτωτική συμπεριφορά είναι:

$$F^* : 4\pi \frac{\zeta}{\kappa} \frac{2 + \varphi_\mu}{2 + 3\varphi_\mu} \frac{\hbar}{\rho} U_{00} U_{11}^R + \frac{\zeta}{\kappa} \frac{\varphi_\mu U_{11}^R}{(2 + 3\varphi_\mu)} + \frac{\varphi_\mu}{(2 + \varphi_\mu)} \frac{\theta}{\rho} U_{00}^2 + \frac{\theta}{\rho} + O(\varepsilon). \tag{3.93}$$



ΣΧΗΜΑ 3.4: Η οπισθέλκουσα δύναμη σε συνάρτηση της ακτινικής ταχύτητας: (α) εξωτερική ροή, (β) εσωτερική ροή

Η μείωση στην οπισθέλκουσα οφείλεται στο στροβιλισμό που μεταφέρεται μακριά από την επιφάνεια και στην ελάττωση της πίεσης της σταγόνας από τα μπροστά προς τα πίσω σταθερά σημεία. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αρνητική πίεση οπισθέλκουσας όταν η ακτινική ταχύτητα είναι αρκετά μεγάλη. Ο λόγος για τέτοια συμπεριφορά είναι η αρνητική συμβολή του όρου της αδράνειας $\frac{\zeta}{\theta} \frac{1}{2} \rho u_{11}^2$ που δίνει αφορμή για μια μεγαλύτερη πίεση στο πίσω απ' ότι στο μπροστινό μέρος, αν η μέγιστη ακτινική ταχύτητα είναι στο μπροστινό τμήμα. Απ' την άλλη η υποχώρηση της ορμής της ροής αφήνοντας την επιφάνεια, δημιουργεί μια αύξηση στην οπισθέλκουσα και στην πράξη γίνεται ο κυρίαρχος μηχανισμός όταν η U_{00} είναι μεγάλη. Με μια ομοιόμορφη ακτινική ταχύτητα $U_{11}^R = 0$ αυτή η επίδραση είναι ανύπαρκτη και η οπισθέλκουσα συνεχίζει να μειώνεται με αύξηση της U_{00} .

Με την εξωτερική κάθετη ταχύτητα (συμπύκνωση, $U_{00} < 0$) η οπισθέλκουσα αυξάνει με αύξηση του $-U_{00}$. Η μεταβολή της επιφανειακής πίεσης κάτω από την επίδραση του δευτεροβάθμιου όρου $\frac{\zeta}{\theta} \frac{1}{2} \rho u_{11}^2$, έχει το ίδιο αποτέλεσμα όπως στην περίπτωση εξωτερικής κάθετης ταχύτητας – μείωση στην οπισθέλκουσα με αύξηση του $|U_{00}|$. Ωστόσο, γενικά αυτή η επίδραση γίνεται πιο ασθενής από την αυξανόμενη οπισθέλκουσα σαν αποτέλεσμα του κατάλοιπου της ορμής στη διεπιφάνεια. Ανεξάρτητα των ενδείξεων της κάθετης ταχύτητας, εάν το μέγιστο της ποσότητας είναι στο μπροστινό τμήμα, η ορμή πάντα ανθίσταται στην κίνηση (έχει αντίθετη κίνηση). Αυτό εξ' αιτίας της θετικής συνεισφοράς του όρου $u_r u_r$ σε σχέση με την ορμή.

Η Εσωτερική Κυκλοφορία

Ως το $O(\epsilon)$ το ροϊκό πεδίο στο εσωτερικό της σταγόνας είναι ο σφαιρικός στρόβιλος του Hill. Η ισχύς αυτού του στροβίλου επηρεάζεται απ' το ακτινικό πεδίο. Για αύξηση ακτινικά της εξωτερικής ταχύτητας η δύναμη του στροβίλου μειώνεται εξ' αιτίας του μειωμένου στροβιλισμού στην επιφάνεια. Με μια αρκετά μεγάλη ακτινική ταχύτητα η εσωτερική κυκλοφορία μηδενίζεται και μια περαιτέρω αύξηση του U_{00} προκαλεί αντιστροφή στην εσωτερική κυκλοφορία. Το αξιοσημείωτο αυτό αποτέλεσμα προέρχεται από την ανομοιομορφία στην ακτινική ταχύτητα που δημιουργεί μια διατμητική τάση που ανθίσταται στη κυκλοφορία. Καθώς η ακτινική ταχύτητα αυξάνει, ο στροβιλισμός που δημιουργείται από τη μεταφορά απομακρύνεται ενώ η διατμητική τάση από την ανομοιομορφία της ακτινικής ταχύτητας παραμένει. Σαν αποτέλεσμα η εσωτερική κυκλοφορία εξασθενεί και όταν η επόμενη (δεύτερη) δύναμη επιδρά, λαμβάνει χώρα αντιστροφή.

Συμπεριλαμβανοντας υψηλότερου βαθμού αποτελέσματα στην ανάλυση, το ροϊκό πεδίο στη σταγόνα δείχνει να παρεκκλίνει από το σφαιρικό στρόβιλο Hill και η συμμετρία σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο δεν υφίσταται. Αυτή η ασυμμετρία εμφανίζεται σαν αλλαγή κατεύθυνσης του στροβίλου έναντι του μπροστινού τμήματος της σταγόνας. Στη μαθηματική περιγραφή του πεδίου ροής αυτή η συμπεριφορά παρουσιάζεται από το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.85) που είναι μια περιπτή συνάρτηση του $\bar{\mu}$.

Ιδιόμορφη Περιγραφή της Εξωτερικής Ροής

Με τη λύση για το πρώτου βαθμού πεδίο ροής που δίνεται στην εξίσωση (3.76) οι Sadhal & Ayyaswamy προσδιόρισαν μια νέα ιδιομορφή:

$$S = \frac{3m}{16\pi^2\nu\kappa} \frac{1}{\zeta} \zeta_{\zeta_0}^{\zeta} (\xi^4 + \xi^3) e^{-1/\xi} d\xi - \frac{1}{5}\zeta^4 + \frac{1}{6}\zeta^2 \frac{\omega}{b} \sin^2 \theta, \quad (3.94)$$

όπου $\zeta = 4\pi r\nu/m$, $\zeta_0 = 4\pi R\nu/m$ και $m = 4\pi U_0^R R$ είναι η γενεσιουργός δύναμη. Αυτή η ιδιομορφή συμπεριφέρεται σαν Stokeslet για μικρό m . Αυτό ανταποκρίνεται σε μια μεγάλη απόσταση από τη σταγόνα ή τη γενεσιουργό δύναμη που γίνεται αρκετά ασθενής ώστε η ροή να είναι εντελώς μη αδρανειακή. Αυτή η νέα ιδιομορφή μπορεί κατάλληλα να περιγραφεί σαν «Stokeslet - πηγή».

ΣΤΑΓΟΝΕΣ ΚΑΙ ΦΥΣΑΛΙΔΕΣ ΣΕ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΡΟΕΣ

Μερικές από τις πιο πρόσφατες μελέτες πάνω στα στερεά σωματίδια σε διατμητικές ροές διεξήχθησαν από τον Einstein σε συνδυασμό με τον υπολογισμό του ιξώδους ενός αιωρήματος. Αυτό επεκτάθηκε στις ρευστές σφαίρες από τον Taylor. Η παρουσία σωματιδίων απαιτεί μια μεγαλύτερη μέση διατμητική τάση για να εξασφαλίσει μια δεδομένη μεταβολή της ταχύτητας. Και αυτό γιατί το επιδρόν ιξώδες ενός αιωρήματος είναι μεγαλύτερο απ' ό,τι αυτό ενός ρευστού μονής – φάσης.

Σφαιρικές Σταγόνες

Για σταγόνες με μεγάλες διεπιφανειακές τάσεις, η διαφορά της στατικής πίεσης εξ' αιτίας της καμπύλης $2\sigma/R$ επιδρά και η μεταβολή της υδροδυναμικής κάθετης τάσης είναι σχετικά μικρή. Η παραμόρφωση της σταγόνας είναι γι' αυτό το λόγο αμελητέα. Για μια σφαιρική σταγόνα σε μια γραμμικά διατμητική ροή, ο Taylor θεώρησε ένα συνδυασμό διδιάστατης υπερβολικής ροής και περιστροφής στερεού σώματος για να πετύχει τη γραμμική διάτμηση. Αυτό έχει μελετηθεί λεπτομερώς από τους από τους Bartok & Mason. Η υπερβολική ροή που δίνεται από τις σχέσεις:

$$u_x^A = \frac{1}{2} G x^A, \quad u_y^A = \frac{1}{2} G y^A \quad \text{και} \quad u_z^A = 0, \quad (3.95)$$

μαζί με την περιστροφή του (x', y', z') συστήματος συντεταγμένων γύρω από τον άξονα z' με μια γωνιακή ταχύτητα $\frac{1}{2} G$, οδηγούν στη γραμμικά διατμητική ροή. Στο (x, y, z) σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$u_x = Gy, \quad u_y = 0 \quad \text{και} \quad u_z = 0 \quad (3.96)$$

Εδώ ο άξονας y εκτείνεται σε μια γωνία $+45^\circ$ με τον άξονα x' . Ο Taylor θεώρησε μια σταγόνα που βρίσκεται στο κέντρο της υπερβολικής ροής και δέχεται την εφαρμογή της συνέχειας της εφαπτομενικής ταχύτητας και της διατμητικής τάσης στη διεπιφάνεια. Η λύση της ροής Stokes επακόλουθα επετεύχθη στη μορφή των συνιστωσών της ταχύτητας. Το ροϊκό πεδίο είναι μη αξονοσυμμετρικό και η ευθεία

διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης δεν είναι δυνατή. Ωστόσο κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει δύο αξονικά συμμετρικά δυναμικά διανύσματα (διανύσματα τάσης) και να δημιουργήσει μια λύση σ' ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Βαθμωτού πεδίου απεικόνιση της ταχύτητας. Με σκοπό να ικανοποιηθεί η εξίσωση συνέχειας (1.3) η ταχύτητα παίρνει την ακόλουθη μορφή σ' ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων:

$$(u, \hat{u}) = P' \frac{1}{\kappa} \frac{(\psi, \hat{\psi})}{\sin \theta} e_r \cos \varphi + P' \frac{1}{\kappa} \frac{V, \hat{V}}{\sin \theta} e_r \sin \varphi \quad (3.97)$$

όπου ψ , $\hat{\psi}$ και \hat{V} είναι αξονικά συμμετρικές συναρτήσεις του (r, θ) . Αυτή η διατύπωση είναι μια ειδική περίπτωση της απεικόνισης του διανύσματος τάσης που δίνεται από την εξίσωση (1.33) στο πρώτο κεφάλαιο. Με τη μορφή συνιστωσών μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$u_r = - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos \varphi, \quad (3.98)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{V}{\sin^2 \theta} \cos \varphi, \quad (3.99)$$

$$u_\varphi = - \frac{1}{r} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{V}{\sin \theta} \sin \varphi. \quad (3.100)$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης (3.97) στην εξίσωση Stokes (3.1) οι παρακάτω βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$L_{-1}^2 \psi = 0, \quad L_{-1}^2 \hat{\psi} = 0, \quad (3.101)$$

$$L_{-1} V = 0, \quad L_{-1} \hat{V} = 0. \quad (3.102)$$

Εδώ r είναι η αδιάστατη ακτινική συντεταγμένη και L_{-1} είναι ο τελεστής Stokes όπως ορίστηκε από την εξίσωση (1.32). Η οριακή συνθήκη του πεδίου:

$$\begin{aligned} u|_{r=1} &= Gze_x, \\ &= Gr \cos \theta (\sin \theta \cos \varphi e_r + \cos \theta \cos \varphi e_\theta - \sin \varphi e_\varphi), \end{aligned} \quad (3.103)$$

που γράφτηκε σε σχέση με τα $\psi(r, \theta)$ και $V(r, \theta)$ γίνεται:

$$\psi(r, \theta)|_{r=1} = \frac{1}{6} Gr^3 \sin^2 \theta \cos \theta = \frac{1}{3} Gr^3 C_3^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta), \quad (3.104)$$

$$V(r, \theta)|_{r=R} = \frac{1}{2} Gr^2 \sin^2 \theta = Gr^2 C_2^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta), \quad (3.105)$$

όπου το $C_n^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta)$ δηλώνει τα πολυώνυμα Gegenbauer. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η οριακή συνθήκη είναι για γραμμική τέμνουσα και όχι για υπερβολική ροή. Οι συνθήκες συνέχειας της ταχύτητας και της διατμητικής τάσης στη διεπιφάνεια απαιτούν:

$$\psi|_{r=1} = \hat{\psi}|_{r=1}, \quad V|_{r=1} = \hat{V}|_{r=1}, \quad (3.106)$$

$$r \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varphi_\mu r \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (3.107)$$

και

$$r \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varphi_\mu r \frac{\partial \hat{V}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (3.108)$$

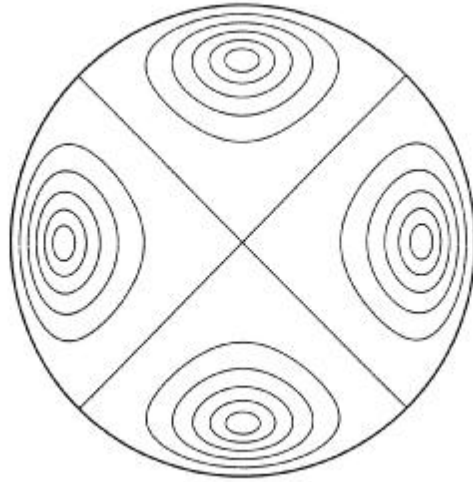
Ικανοποιώντας τις οριακές και διεπιφανειακές συνθήκες, επιτυγχάνονται οι παρακάτω εκφράσεις για τα βαθμωτά πεδία:

$$\psi(r, \theta) = G \frac{1}{6} r^3 + \frac{1}{4} \frac{\varphi_\mu}{1 + \varphi_\mu} r^2 - \frac{1}{12} \frac{2 + 3\varphi_\mu}{1 + \varphi_\mu} \sin^2 \theta \cos \theta, \quad (3.109)$$

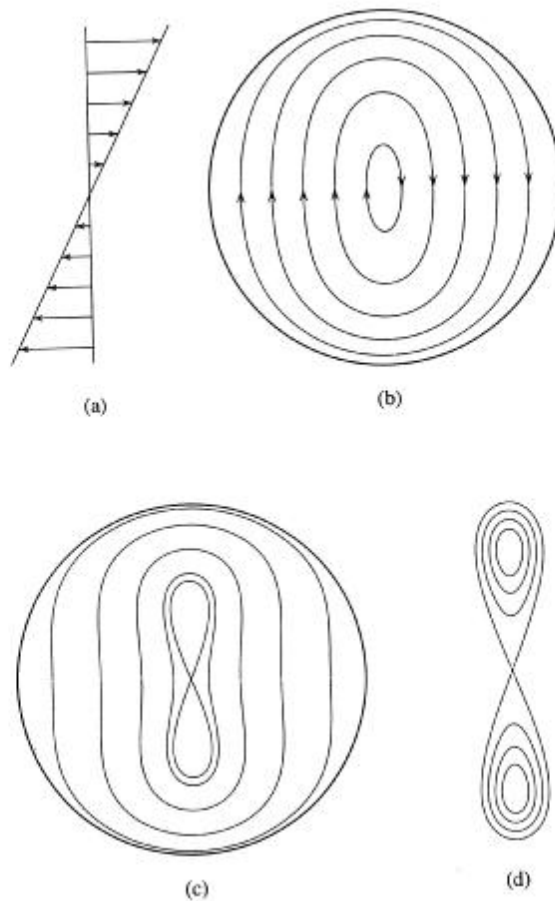
$$\hat{\psi}(r, \theta) = \frac{1}{4} G \frac{1}{1 + \varphi_\mu} (r^5 - r^3) \sin^2 \theta \cos \theta, \quad (3.110)$$

$$V(r, \theta) = \hat{V}(r, \theta) = \frac{1}{2} Gr^2 \sin^2 \theta. \quad (3.111)$$

Εδώ οι ταχύτητες που προκύπτουν από τα διανύσματα $V(r, \theta)$ και $\hat{V}(r, \theta)$ αναπαριστούν καθαρή περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\frac{1}{2} G$. Στα όρια στερεού σωματιδίου $\varphi_\mu \ll 1$, το σωματίδιο περιστρέφεται με αυτή τη γωνιακή ταχύτητα. Το παραμένον πεδίο που ορίζεται από το $\psi(r, \theta)$ είναι υπερβολικής ροής στα όρια του απομακρυσμένου πεδίου. Οι ροϊκές γραμμές γι' αυτές τις ροές έχουν αναλυθεί από τους Bartok & Mason. Με τη διατύπωση που χρησιμοποιείται στην παρούσα ανάλυση, οι ροϊκές γραμμές στη σταγόνα διαγράφονται στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi$. Αυτό είναι το μέσο επίπεδο κάθετο στον άξονα της περιστροφής. Για υπερβολική διατμητική ροή αυτές οι ροϊκές γραμμές φαίνονται στο σχήμα 3.5. που παρουσιάζει συμμετρικούς στροβίλους γύρω από διαγώνιους που είναι οι ασυμπτωτικές της εξωτερικής υπερβολικής ροής.



ΣΧΗΜΑ 3.5: Κυκλοφορία εντός μιας σταγόνας σε επίπεδη υπερβολική ροή για $\varphi = 0, \pi$. Οι διαγώνιες γραμμές διαγράφονται στα επίπεδα των αντίστοιχων ασυμπτωτικών της εξωτερικής υπερβολικής ροής.



ΣΧΗΜΑ 3.6: Κυκλοφορία εντός μιας σταγόνας σε σχέση με εξωτερική γραμμική διατμητική – τέμνουσα ροή: (α) αδιατάραχτη εξωτερική ροή, (β) εσωτερική ροή για $\varphi_\mu = 1 > \frac{1}{2}$, (γ) εσωτερική ροή για $\varphi_\mu = 0,1 < \frac{1}{2}$ δείχνοντας πρόσθετους στροβίλους και (δ) λεπτομερής τρόπος ροής στο εσωτερικό του σχήματος «8».

Στην περίπτωση γραμμικά τέμνουσας ροής οι ροϊκές γραμμές παίρνουν οβάλ σχήματα στο επίπεδο $\varphi = 0, \pi$ για $\varphi_\mu > 1/2$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6 (b). Αυτά γίνονται περισσότερο κυκλικά με αύξηση του φ_μ . Για $\varphi_\mu < 1/2$ η ροή αναπτύσσει δύο επιπρόσθετους στροβίλους με σταθερά σημεία με αποστάσεις $(1/10^{1/2})R$ από το κέντρο της σταγόνας. Μια ροϊκή γραμμή σχηματίζει ένα σχήμα τύπου 8. Το ροϊκό πεδίο για $\varphi_\mu = 0,1 < 1/2$ εικονίζεται στο σχήμα 3.6 (c, d) μαζί με μια λεπτομερή απεικόνιση για το σχήμα τύπου 8. Η μέση περίοδος της κυκλοφορίας των ροϊκών γραμμών κοντά στο κέντρο της σταγόνα για $\varphi_\mu > 1/2$ έχει βρεθεί ότι είναι:

$$t_c = \frac{8\pi(\varphi_\mu + 1)}{G\sqrt{(2\varphi_\mu + 5)(2\varphi_\mu - 1)}\frac{1}{\zeta}} \quad (3.112)$$

Μέσο Ιξώδες Γαλακτώματος. Ο Taylor χρησιμοποίησε το πεδίο ροής εξ' αιτίας μιας σταγόνας σε γραμμικά τέμνουσα ροή για να υπολογίσει το δραστικό ιξώδες ενός αραιού γαλακτώματος σφαιρικών σταγονιδίων ευρισκόμενα σε ρευστό περιβάλλον. Συγκεκριμένα έδωσε την παρακάτω πρώτη προσέγγιση:

$$\mu_{\text{γαλακτώματος}} = \mu \frac{1 + \frac{5}{2}\varphi_\mu}{1 + \varphi_\mu} \quad (3.113)$$

Παραμορφωμένες Σταγόνες

Για τη λύση που δίνεται από τις εξισώσεις (3.109) – (3.111) η συνθήκη συνέχειας της διατμητικής τάσης ικανοποιείται στη διεπιφάνεια αλλά η κάθετη τάση είναι ασυνεχής. Η διαφορά ανάμεσα στις κάθετες τάσεις στις εσωτερικές και εξωτερικές πλευρές της διεπιφάνειας είναι:

$$\tau_{rr} - \hat{\tau}_{rr} = -4G\mu \frac{\zeta(16 + 19\varphi_\mu)}{\theta(16 + 16\varphi_\mu)} \sin 2\theta \cos \varphi. \quad (3.114)$$

Μ' ένα μέτριο τριχοειδή αριθμό $Ca = \mu GR/\sigma$ η διεπιφάνεια δέχεται παραμόρφωση και η σταγόνα παίρνει το σχήμα επιμήκους σφαιροειδούς που για το μεγαλύτερο άξονα του ισχύει $(\theta, \varphi) = (\theta_m, \varphi_m) = \left(\frac{\zeta}{\theta} \frac{1}{4} \pi, 0\right)$. Αυτό είναι σε απ' ευθείας ταύτιση με τον

προσανατολισμό του υπερβολικού τμήματος της ροής στα όρια του απομακρυσμένου πεδίου. Όπως σημειώθηκε από τον Rallison τα αποτελέσματα της παραμόρφωσης δείχνουν μια πολύ μικρή εξάρτηση της σταθερής στρέβλωσης, στο βαθμό ιξώδους. Ωστόσο μια μεγαλύτερου βαθμού ανάλυση για μικρή παραμόρφωση για γραμμικά τέμνουσα ροή δείχνει ότι ο προσανατολισμός είναι ελαφρώς ψηλότερα από το $\theta_m = \frac{1}{4}\pi$. Λεπτομερείς υπολογισμοί δίνουν τη σχέση:

$$\theta_m = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{19}{20} \varphi_\mu Ca^{\frac{1}{2}} \quad (3.115)$$

που είναι κατάλληλη για $Ca \ll 1$. Η έκφραση για την παραμόρφωση έχει οριστεί από τον Taylor για $Ca \ll 1$, και επακόλουθα βελτιώθηκε από τον Cox που έδωσε την εκκεντρότητα με τη σχέση:

$$\frac{\zeta l - b\varphi}{a l + b\varphi} = \frac{5(19\varphi_\mu + 16)}{4(1 + \varphi_\mu) \left[(19\varphi_\mu)^2 + (20/Ca)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.116)$$

όπου l και b είναι ο ημι – μέγιστος και ο ημι – ελάχιστος άξονας της παραμορφωμένης σταγόνας αντίστοιχα. Στο όριο $Ca \rightarrow 0$, το αποτέλεσμα του Taylor επανεμφανίζεται. Η αναφορά στην παραμόρφωση ιδιαίτερα σε σχέση με τη διάλυση της σταγόνας δίνεται με περισσότερες λεπτομέρειες σε παρακάτω κεφάλαιο.

3.3 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ

Η μεταφορά θερμότητας και μάζας συμβαίνει από διάχυση μαζί με μεταγωγή. Η διαδικασία διάχυσης περιγράφεται από το νόμο του Fourier και το νόμο του Fick και η μεταγωγή (διάδοση δι' αγωγής) είναι η διαδικασία μεταφοράς που λαμβάνει χώρα εξ' αιτίας της κίνησης του ρευστού. Η καθολική περιγραφή και των δύο διαδικασιών, της διάχυσης και της μεταγωγής δόθηκε από την εξίσωση ενέργειας (1.36) για την περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας και την εξίσωση συνέχειας των συστατικών (1.42) για τη μεταφορά της μάζας. Λεπτομερής αναφορά γι' αυτές τις εξισώσεις έγινε στο πρώτο κεφάλαιο. Όπως σημειώθηκε εκεί οι δύο αυτές εξισώσεις μοιάζουν κάτω από κάποιες περιστάσεις. Εδώ, όπου προκύπτουν τέτοιες ομοιότητες, περιορίζουμε την αναφορά μας στην εξίσωση ενέργειας. Σαφώς υπάρχουν διαφορές όταν η διαλυμένη ουσία είναι ρύπος και συσσωρεύεται σε μια διεπιφάνεια. Επίσης υπάρχει διαφορά όταν η μεταφορά θερμότητας οδηγεί σε αλλαγή φάσης. Επιπρόσθετα πολυπλοκότητες συμβαίνουν όταν η διαλυμένη ουσία αλλάζει φάση ή όταν το σύστημα δεν είναι ισοθερμικό και συμβαίνει την ίδια στιγμή μεταφορά της διαλυμένης ουσίας.

Η λύση της εξίσωσης ενέργειας είναι γενικά αρκετά πολύπλοκη και αναλυτικές λύσεις έχουν επιτευχθεί μόνο στο όριο υψηλού ή χαμηλού αριθμού Peclet, Pe . Ακόμα και σ' αυτά τα όρια οι διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις είναι γενικά εφαρμόσιμες για τη σταθερή κατάσταση και επιπλέον σε κάποιες από τις πιο πρόσφατες μελέτες, τα σφαιρικά σωματίδια θεωρήθηκαν στερεά και ισοθερμικά. Η υπόθεση της ισοθερμικότητας συνεπάγεται ότι υπάρχει απεριόριστη θερμική χωρητικότητα ή εκλείπει η αντίδραση της διασκορπισμένης φάσης εκτός εάν συμβαίνει αλλαγή φάσης εξ' αιτίας εξάτμισης ή συμπύκνωσης ή υπάρχουν πηγές θερμότητας ή αναρροφήσεις στη διασκορπισμένη φάση. Εδώ εξετάζουμε και τις δύο περιπτώσεις, με και χωρίς αλλαγή φάσης. Οι περιπτώσεις ενδιαφέροντος είναι αυτές που εμπλέκουν τη θέρμανση ή ψύξη μιας σταγόνας με τη συνεχή φάση να έχει ομοιόμορφη θερμοκρασία στο απομακρυσμένο πεδίο.

3.3.1 ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ

Στη σταθερή κατάσταση η παράγωγος του χρόνου στην εξίσωση ενέργειας (1.37) εξαλείφεται. Εάν η διασκορπισμένη φάση επίσης θεωρηθεί σταθερή και χωρίς πηγές η μοναδική σημαντική λύση για το πρόβλημα της ομοιόμορφης θερμοκρασίας, είναι μία με μια ισοθερμική συνθήκη στη διεπιφάνεια. Αυτό κατ' ουσία συνεπάγεται μια απεριόριστη θερμική χωρητικότητα της διασκορπισμένης φάσης. Περιπτώσεις με μεταβαλλόμενη θερμοκρασία στη διεπιφάνεια μπορούν βεβαίως να θεωρηθούν. Όπως και να 'χει, αποδεικνύεται ότι η οδηγούσα τάση για ολόκληρη τη ροή θερμότητας είναι ακριβώς η διαφορά ανάμεσα στη θερμοκρασία του απομακρυσμένου πεδίου και τη μέση επιφανειακή θερμοκρασία. Σε περίπτωση πλήρους θερμικού ταιριάσματος ανάμεσα στη διασκορπισμένη και τη συνεχή φάση και μιας ομοιόμορφης θερμοκρασίας στο απομακρυσμένο πεδίο η λύση με την απουσία πηγών και αναρροφήσεων είναι ασήμαντη. Γι' αυτό το λόγο πολλές από τις περιπτώσεις σταθερής κατάστασης που αναφέρονται, αντιστοιχούν σε απεριόριστη θερμική χωρητικότητα στη διασκορπισμένη φάση. Παρ' όλα αυτά τα αποτελέσματα του αριθμού Nusselt για τέτοιες περιπτώσεις δίνουν μια καλή προσέγγιση για τη μεταφορά στη συνεχή φάση.

ΜΗ – ΜΕΤΑΓΩΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Με την απουσία ροής ρευστού ($Pe = 0$) η μεταφορά θερμότητας οδηγείται καθαρά από την αγωγιμότητα. Με ομοιόμορφη οριακή θερμοκρασία (στα όρια του πεδίου) η λύση σε αδιάστατη μορφή είναι:

$$T = T_{\infty} + \Delta T \frac{\zeta R \phi}{r \xi} \quad (3.117)$$

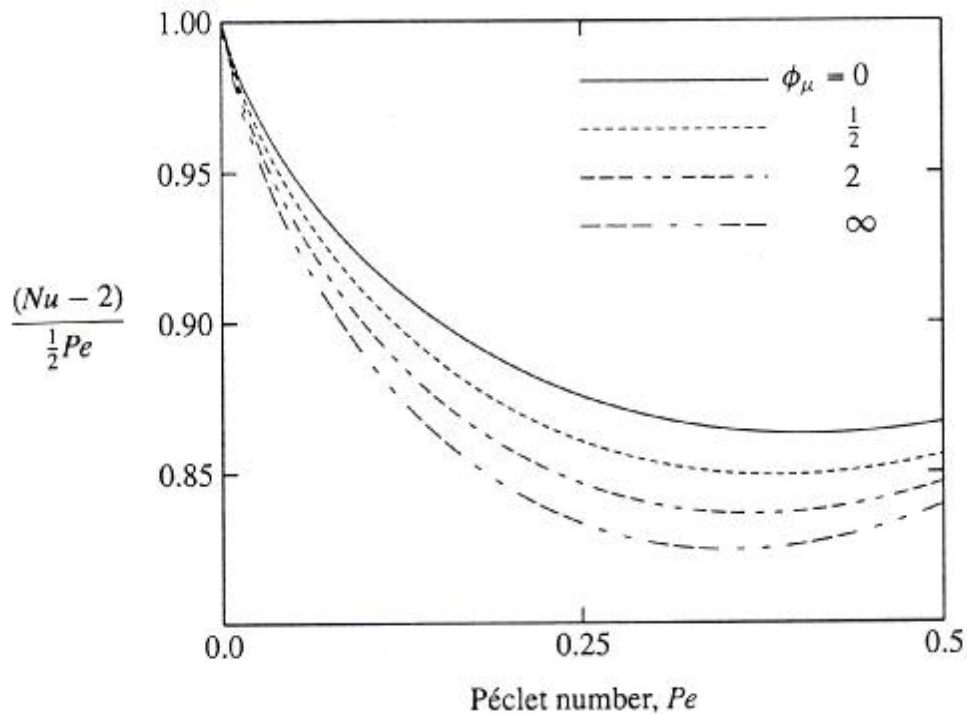
όπου $\Delta T = (T_i - T_{\infty})$. Η επιφανειακή ροή της θερμότητας είναι $\dot{q} = k\Delta T/R$ και ο βαθμός της ολικής ροής θερμότητας είναι $\dot{Q} = 4\pi kR\Delta T$. Αυτό αποδίδει ένα αριθμό Nusselt:

$$Nu = \frac{\dot{Q}(2R)}{k\Delta T} = 2. \quad (3.118)$$

ΜΕΤΑΦΕΡΟΜΕΝΕΣ ΣΤΑΓΟΝΕΣ ΜΕ ΧΑΜΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ PécLET

Για $Pe \ll 1$ η στερεή ισοθερμική σφαίρα έχει αναλυθεί από τη μέθοδο της διαταραχής. Οι πιο πρόσφατες προσπάθειες που έγιναν ξεκινούν από το 1950 όταν οι Kronig & Bruijsten, ακολουθούμενοι από τον Frisch έδωσαν τη λύση για χαμηλού αριθμού Pe μεταφορά θερμότητας / μάζας. Αυτές οι λύσεις αντικαταστάθηκαν από τη μελέτη των Acrivos & Taylor σε μια κλασική διατριβή προβάλλοντας σωστής διαταραχής λύση για στερεή σφαίρα. Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύτηκε για ρευστή σφαίρα από τον Brunn που έδωσε:

$$Nu = 2 + \frac{1}{2}Pe + \frac{1}{4}F_0Pe^2 \ln Pe + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{13}{80} + \frac{1}{20} \gamma \right) Pe - \ln 2 + \frac{37}{120} \frac{\phi}{F_0} + \frac{43}{320} F_0^2 \frac{\omega}{b} Pe^2 + \frac{1}{16} Pe^3 \ln Pe + \dots \quad (3.119)$$



ΣΧΗΜΑ 3.7: Ο αριθμός Nusselt σαν συνάρτηση του αριθμού Peclet για χαμηλό Re και χαμηλό Pe .

όπου $\gamma = 0.5772156\dots$ είναι η σταθερά Euler – Mascheroni και

$$F_0 = \frac{(2 + 3\phi_\mu)}{3(1 + \phi_\mu)} \quad (3.120)$$

είναι μια σταθερά της οπισθέλκουσας Stokes. Ο Brunn έδωσε το διάγραμμα του $(Nu - 2) / \frac{1}{2}Pe$, σε σχέση με τον αριθμό Pe για περιπτώσεις στερεής σφαίρας και αέριας φυσαλίδας. Έχουμε γενικεύσει το διάγραμμα για να καλύψουμε περιπτώσεις σ' ένα φάσμα $0 < \phi_\mu < \infty$ στο σχήμα 3.7. Οι Gupalo & Ryazantsev θεώρησαν την περίπτωση στερεής σφαίρας με χημική αντίδραση στη διεπιφάνεια με τη γραμμική συνθήκη:

$$\left. \frac{dc}{dr} \right|_{r=R} = K(c - 1) \Big|_{r=R}, \quad (3.121)$$

όπου c είναι η συγκέντρωση των συστατικών στη συνεχή φάση και K είναι η σταθερά της αντίδρασης. Αυτοί προσπάθησαν να ενισχύσουν τη χρησιμότητα σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds και χρησιμοποίησαν το πεδίο ταχύτητας των Proudman & Pearson για να αναπτύξουν το αποτέλεσμα:

$$Sh = 2q + q^2 \left[\frac{1}{2} Pe + \frac{1}{4} Pe^2 \ln Pe + \frac{1}{16} q Pe^3 \ln Pe \right] + \frac{1}{4} q^2 Q(q, Sc) - \ln 2 Pe^2 + O(Pe^3), \quad (3.122)$$

όπου:

$$Q(q, Sc) = \frac{1}{2} q - \frac{119}{80} + \gamma - \frac{3}{32(2-q)} + \frac{1}{2}(Sc+1)(Sc-2)\ln(1+Sc^{-1}), \quad (3.123)$$

και το q σχετίζεται με τη σταθερά της αντίδρασης K με τη σχέση:

$$q = \frac{K}{K+1}. \quad (3.124)$$

Στο όριο του $K \gg 1$ ($q \rightarrow 1$) και του μετασχηματισμού $(Sh, Sc) \rightarrow (Nu, Pr)$, το παραπάνω αποτέλεσμα είναι κατάλληλο σε μια ισοθερμική σφαίρα που μεταφέρεται κάτω από παρόμοιες συνθήκες. Ένα μη αντίστοιχο αποτέλεσμα φαίνεται να είναι κατάλληλο για ρευστές σφαίρες.

ΜΕΤΑΦΕΡΟΜΕΝΕΣ ΣΤΑΓΟΝΕΣ ΜΕ ΥΨΗΛΟ ΑΡΙΘΜΟ PECLET

Καθώς $Pe \gg 1$ οι περισσότερες από τις διαδικασίες μεταφοράς λαμβάνουν χώρα σ' ένα λεπτό θερμικό (ή συγκέντρωσης) οριακό στρώμα παρακείμενο στην ισοθερμική διεπιφάνεια. Η ασυμπτωτική ανάλυση γι' αυτής της τάξης τα προβλήματα χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό Mises που βασίζεται στην υπόθεση ότι κατά μήκος των ροϊκών γραμμών η θερμική μεταφορά οφείλεται αποκλειστικά στην αρχικού βαθμού μεταγωγή. Αποτελεσματικά η ροϊκή συνάρτηση ή μια σχετική μεταβλητή παίρνει το ρόλο μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στην εξίσωση ενέργειας. Αυτό είναι λογικό στο όριο $Pe \gg 1$ και η μεταφορά διάχυσης γι' αυτό το λόγο λαμβάνει χώρα κυρίως διαμέσου των ροϊκών γραμμών. Για ρευστή σταγόνα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η λύση των Rybczynski – Hadamard για το πεδίο ροής που δίνεται από τις εξισώσεις (3.20) και (3.21) και να εξαχθεί μια ασυμπτωτική επέκταση για την εξίσωση ενέργειας. Όπως και να 'χει στη μελέτη του Brunn η λύση έχει επεκταθεί σε αδύναμα αδρανειακές ροές με τη χρησιμοποίηση του πεδίου ροής των Taylor & Acrivos που είναι κατάλληλο ως το $O(Re)$ (βλέπε εξισώσεις (3.36) – (3.41)). Εξ' αιτίας της μεταβλητής διαστολής του θερμικού οριακού στρώματος, $\xi = (r-1)$, η αρχικού βαθμού ροϊκή συνάρτηση είναι:

$$\psi = \frac{3}{4} \xi^2 \sin^2 \theta + \frac{3}{16} Re(1 - \cos \theta) \quad \text{για } \varphi_\mu \gg 1, \quad (3.125)$$

ή αλλιώς:

$$\psi = \frac{\xi \sin^2 \theta}{2(1 + \varphi_\mu)} \left[1 + \frac{1}{\kappa} \frac{2 + 3\varphi_\mu}{16(1 + \varphi_\mu)} \operatorname{Re} \left(\frac{5 + 4\varphi_\mu}{5 + 5\varphi_\mu} \cos \theta \right) \right]. \quad (3.126)$$

Εξ' αιτίας του ψ επιτυγχάνεται η παρακάτω αδιάστατη μορφή της εξίσωσης ενέργειας:

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Pe} \frac{T}{\theta} = \sin \theta \frac{\zeta}{\psi} r^2 \frac{\psi}{r} \frac{T}{\psi} \quad (3.127)$$

υπό τις οριακές συνθήκες:

$$T|_{\psi=0} = 1, \quad T|_{\psi=\infty} = 0. \quad (3.128)$$

Ακολουθώντας τον Brunn ο μετασχηματισμός:

$$\xi = (r - 1) \quad \text{και} \quad \frac{\psi}{\xi} = H(\theta) \psi^\kappa, \quad (3.129)$$

αποδίδει την παρακάτω λύση:

$$T = 1 - \frac{(2 - \kappa)^{\kappa/(2 - \kappa)}}{(1 - \kappa) \Gamma \left(\frac{1 - \kappa}{2 - \kappa} \right)} \zeta_0^x \exp \left[\frac{x^{(2 - \kappa)/(1 - \kappa)}}{(2 - \kappa)} \right] dx \quad (3.130)$$

όπου:

$$x = (\psi r^{\kappa - 2})^{1 - \kappa} \quad \text{και} \quad r(\theta) = \zeta_0^\theta H(\theta) \sin \theta \theta^A \quad (3.131)$$

Ο αριθμός Nusselt που προκύπτει από αυτή την έκφραση είναι:

$$Nu = \frac{(2 - \kappa)^{2/(2 - \kappa)}}{2 \Gamma \left(\frac{1 - \kappa}{2 - \kappa} \right)} \zeta_0^{1/(2 - \kappa)} \operatorname{Pe} \quad (3.132)$$

Οι εκφράσεις για τα κ και $H(\theta)$ είναι:

$$H(\theta) = 3^{\frac{1}{2}} \sin \theta \frac{1}{\kappa} + \frac{3}{16} \operatorname{Re} (1 - \cos \theta)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad \kappa = \frac{1}{2}, \quad \text{για} \quad \varphi_\mu \ll 1, \quad (3.133)$$

$$H(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{2(1 + \varphi_\mu)} \left[1 + \frac{2 + 3\varphi_\mu}{16(1 + \varphi_\mu)} \text{Re} - \frac{5 + 4\varphi_\mu}{5 + 5\varphi_\mu} \cos \theta \right] \quad (3.134)$$

$$\kappa = 0, \quad \text{για} \quad \varphi_\mu < \infty. \quad (3.134)$$

Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να καθοριστούν σε μία πιο συμβατική μορφή με τις σχέσεις:

$$Nu = 0.6246(4FPe)^{\frac{1}{3}} \quad (\varphi_\mu \ll \infty), \quad (3.135)$$

$$Nu = 2 \frac{1 - F_0 FPe^{\frac{1}{3}}}{F_0 \pi} \quad (3.136)$$

που είναι σύμφωνες με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Εδώ το F ορίζεται με τη σχέση:

$$F = F_0 + \frac{3}{16} \text{Re} F_0^2 \quad (3.137)$$

που είναι η σταθερά για την οπισθέλκουσα στο $O(\text{Re})$.

ΧΑΜΗΛΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ PECLET ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΡΟΗ.

Η μεταφορά θερμότητας από στερεές σφαίρες σε μια διατμητική ροή έχει αντιμετωπιστεί από τη μέθοδο της ιδιόμορφης διαταραχής των Frenkel & Acrivos. Το αποτέλεσμα για μια στερεή σφαίρα δίνεται από τη σχέση:

$$Nu = 2 + 0.4552 \frac{\zeta 2Pe_G^{\frac{1}{2}}}{\pi} + O(Pe_G), \quad (3.138)$$

όπου $Pe_G = 2GR^2/a$ είναι ο διατμητικός αριθμός Peclet και G είναι ο βαθμός διάτμησης. Για μια υγρή σταγόνα σε γραμμικά διατμητική ροή, ο Leal υπολόγισε το πεδίο θερμοκρασίας και στις δύο φάσεις, χρησιμοποιώντας μεθόδους διαταραχής. Εδώ το απομακρυσμένο πεδίο είναι ένα προφίλ γραμμικής θερμοκρασίας με διάνυσμα κάθετο στην ταχύτητα του απομακρυσμένου πεδίου. Το σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει από αυτή τη μελέτη είναι η δραστική θερμική αγωγιμότητα μιας σύνθεσης αποτελούμενης από μια διασπορά σταγόνων διαλυμένων σ' ένα ομοιογενές ρευστό. Η έκφραση για τη μέση αγωγιμότητα $\langle k \rangle$ είναι

$$\frac{\langle k \rangle}{k} = 1 + \frac{\varphi_v}{\varphi_k + 2} + \frac{1.176(\varphi_k - 1)^2}{(\varphi_k + 2)^2} + \frac{\zeta(2 + 5\varphi_\mu)}{1 + \varphi_\mu} + \frac{\zeta(0.12(2 + 5\varphi_\mu))}{(1 + \varphi_\mu)} - \frac{0.028(\varphi_k - 1)}{(\varphi_k + 2)} Pe_G^{\frac{3}{2}} + O(Pe_G^2) \quad (3.139)$$

όπου το Φ_v αναπαριστά το κλάσμα του όγκου της διασποράς. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι το διατμητικό πεδίο συνεισφέρει στην αγωγιμότητα μόνο στο $O(Pe_G^{3/2})$ έστω και αν το θερμικό πεδίο επηρεάζεται στο $O(Pe_G)$. Η $O(Pe_G)$ μεταφορά δι' αγωγής ουσιαστικά δεν επιφέρει αλλαγή στη συνολική μεταφορά θερμότητας διαμέσου του κυρίου σώματος της διατμητικής ροής.

ΥΨΗΛΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ PECLET ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΡΟΗ

Για μια σταγόνα σε μια αξονοσυμμετρική εκτεταμένη ροή, το πεδίο της ταχύτητας εκφράζεται από τις ροϊκές συναρτήσεις που δίνονται στις εξισώσεις (3.109) και (3.110). Αυτό το πακέτο ροϊκών συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκε για ασυμμετρικές υπερβολικές και γραμμικά διατμητικές ροές είναι επίσης εφαρμόσιμο στην αξονοσυμμετρική εκτεταμένη ροή χρησιμοποιώντας τη, με την έκφραση δυναμικών διανυσμάτων που δίνονται από την εξίσωση (3.2).

Για μια σταγόνα σε σταθερή θερμοκρασία η ανάλυση της περιοχής του θερμικού οριακού στρώματος εξήχθη από τους Gupalo & Riazantsev που όρισαν τη σχέση:

$$Nu = \frac{6Pe_G}{4\pi(1 + \varphi_\mu)} \quad (\varphi_\mu < \infty) \quad (3.140)$$

Μαζί με τα αποτελέσματα για το θερμικό ή συγκέντρωσης οριακό στρώμα που αντιστοιχεί σε μεταφορική κίνηση (π.χ εξίσωση (3.119)), αυτή η έκφραση για το Nu δεν είναι κατάλληλη για στερεή σφαίρα στο όριο ($\varphi_\mu \rightarrow \infty$). Για την περίπτωση στερεής σφαίρας έχουμε:

$$Nu = 1.193Pe_G^{\frac{1}{2}} \quad (\varphi_\mu \rightarrow \infty) \quad (3.141)$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς της θερμότητας ή της μάζας με αγωγή και από τα δύο: διάτμηση και μετασχηματισμό έχει αναλυθεί από τους Gupalo, Riazantsev & Ulin. Ο αριθμός Nusselt δίνεται από τη σχέση:

$$Nu = \frac{1}{1 + |\omega|^3} + \frac{1}{3} |\omega|^{-\frac{1}{2}} + (1 - |\omega|^3)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} |\omega| + \frac{1}{3} \frac{Pe}{4\pi(1 + \varphi_\mu)} \quad (|\omega|^3 \ll 1), \quad (3.142)$$

όπου $\omega = 6GR/U_{\infty}$ και $Pe = U_{\infty} (2R)/a$ είναι ο μεταφορικός αριθμός Peclet. Για $|\omega| \ll 1$ η έκφραση για τον αριθμό Nusselt είναι η ίδια όπως αυτή για καθαρά μεταφορική κίνηση που δίνεται στην εξίσωση (3.136). Η εξάρτηση της συνάρτησης του Nu από τη σχέση $(|\omega| - 1)$ μπορεί να εξηγηθεί παρατηρώντας ότι για $|\omega| < 1$, υπάρχουν μόνο δύο σταθερά σημεία στην επιφάνεια της σταγόνας. Η αλληλεπίδραση των μεταφορικών και των διατμητικών ροών δημιουργεί άλλο ένα σταθερό σημείο έξω από τη σταγόνα γεγονός το οποίο έχει μικρή επίδραση στο οριακό στρώμα και το μεταφορικό πεδίο κυριαρχεί στη διαδικασία μεταφοράς θερμότητας ή μάζας. Ωστόσο για $|\omega| > 1$ υπάρχει ένα σταθερό δαχτυλίδι στη διεπιφάνεια επιπρόσθετα των μπροστά και πίσω σταθερών σημείων. Γι' αυτό το λόγο ο χαρακτήρας της μεταφοράς θερμότητας ή μάζας αλλάζει αξιοσημείωτα.

Για γραμμικά διατμητικές ροές αυτός ο τύπος ανάλυσης είναι πολύ δύσκολος κυρίως διότι οι ροϊκές γραμμές δεν αποκτούν τις συντεταγμένες ενός ορθογώνιου συστήματος στο οριακό στρώμα όπως γίνεται με τις αξονικά συμμετρικές ροές.

3.3.2 ΑΣΤΑΘΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΧΩΡΙΣ ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ

Γενικά για σταγόνες και φυσαλίδες με απεριόριστη χωρητικότητα θερμότητας και / ή μάζας, χωρίς πηγές ή αναρροφήσεις και χωρίς αλλαγή φάσης μια μεταβατική ανάλυση θα ήταν απαραίτητη τουλάχιστον στη διασκορπισμένη φάση. Και αυτό διότι όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η σταθερής κατάστασης λύση στο πρόβλημα είναι ασήμαντη (μηδενική) – ομοιόμορφη συγκέντρωση ή θερμοκρασία παντού. Ωστόσο εάν η υπό εξέταση κατάσταση είναι για παράδειγμα ένα σωματίδιο σ' ένα γραμμικό πεδίο θερμοκρασίας, υπάρχουν χρήσιμες μη ασήμαντες σταθερές λύσεις. Η ανάλυση εδώ ξεκινά με τη θεώρηση ασταθούς διασκορπισμένης και σταθερής συνεχούς φάσης ακολουθούμενη από μια περιεκτική αναφορά ασταθών εξωτερικών προβλημάτων. Πλήρως ασταθείς λύσεις και για τις δύο φάσεις αναφέρονται παρακάτω. Αυτές είναι υπερβολικά πολύπλοκες και αναλυτικές λύσεις είναι κατάλληλες μόνο για μεταφορά χωρίς μεταγωγή. Για ολόκληρο το μεταβατικό ζήτημα η περισσότερη από τη θεωρητική έρευνα έχει διεξαχθεί με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων.

ΑΣΤΑΘΗΣ ΔΙΑΣΚΟΡΠΙΣΜΕΝΗ ΦΑΣΗ

Μια πλήρως διασκορπισμένη φάση με μια σταθερή συνεχή φάση δίνει μια κατάλληλη περιγραφή της διαδικασίας μεταφοράς όταν η θερμική διαχυτότητα της συνεχούς φάσης είναι μεγάλη συγκρινόμενη με αυτή της διασκορπισμένης φάσης, π.χ $a \gg \hat{a}$. Αυτό είναι γενικά αληθές όταν έχουμε ένα στερεό ή ένα ρευστό σωματίδιο μέσα σε αέριο. Στις περιπτώσεις όπου $a = \hat{a}$ μακροχρόνιες λύσεις μπορεί να επιτευχθούν από την ασταθή εξίσωση ενέργειας στη συνεχή φάση θεωρώντας ότι το σωματίδιο έχει μια χωροταξικά ομοιόμορφη αλλά χρονικά μεταβαλλόμενη κατανομή θερμοκρασίας. Αυτό αποτελεί μια ημισταθερή κατάσταση στη διασκορπισμένη φάση.

Η θερμοκρασία του σωματιδίου αλλάζει με το χρόνο καθώς ανταλλάσσει θερμότητα με τη συνεχή φάση. Με μια πλήρως μεταβατική μεταχείριση της διασκορπισμένης φάσης, ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + u_{gp} \hat{T} = P^2 \hat{T}, \quad (3.143)$$

και η σταθερή συνεχής φάση ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{1}{\alpha} u_{gp} T = P^2 T. \quad (3.144)$$

Οι αρχικές, οριακές και διεπιφανειακές συνθήκες είναι όπως παρακάτω:

$$\hat{T}|_{t=0} = T_0 \quad T|_{t=0} = T_{\Psi}, \quad (3.145)$$

$$T|_{(r=\Psi)} = T_{\Psi}, \quad (3.146)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (3.147)$$

$$T|_{r=R} = \hat{T}|_{r=R}, \quad k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \hat{k} \left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (3.148)$$

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΚΑΙ ΧΑΜΗΛΟ ΑΡΙΘΜΟ PécLET

Για ένα ακίνητο σωματίδιο με ισοθερμική αρχική συνθήκη και μηδενική σχετική θερμοκρασία στο σφαιρικό όριο, μια λύση δόθηκε από τον Newman. Αυτή η λύση υποθέτει μηδενική αντίσταση στη συνεχή φάση. Σε μια πρόσφατη ανάλυση ο Sadhal πέτυχε τη λύση για μια μεταφερόμενη στερεή σφαίρα με μεταβατική διασκορπισμένη φάση και ημι – σταθερή συνεχή φάση. Μια ιδιόμορφη διαταραχή του τύπου των Acrivos & Taylor μαζί με τον μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιήθηκαν. Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$Nu(t) = 2 \frac{\alpha_0(t) + \frac{1}{2} Pe \alpha_0^*(t)}{\alpha_0(t) + \frac{1}{2} Pe \alpha_0^*(t)} \quad (3.149)$$

όπου:

$$\alpha_0(t) = 2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_k e^{-\lambda_n^2 \hat{F}_0}}{G_n}, \quad (3.150)$$

$$\alpha_0^*(t) = 2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \varphi_k^2 \lambda_n^2}{2 G_n^3} - \frac{(1 - \varphi_k + \lambda_n^2 \hat{F}_0)}{G_n^2} e^{-\lambda_n^2 \hat{F}_0}, \quad (3.151)$$

$$d_0(t) = 6\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \hat{F}_0}}{G_n \lambda_n^2}, \quad (3.152)$$

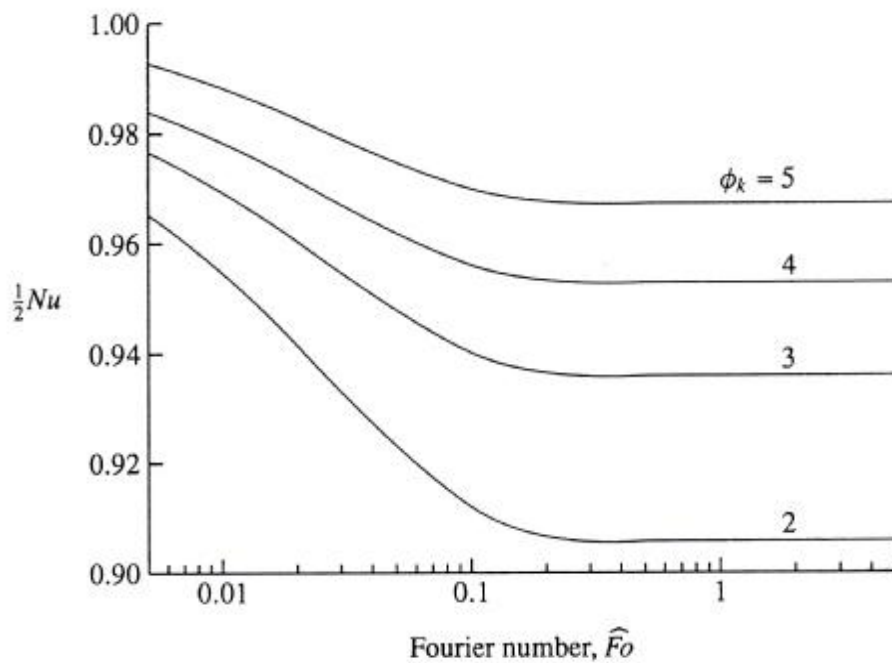
$$d_0^*(t) = 6\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \varphi_k - \varphi_k^2 \lambda_n^2}{2G_n^3} - \frac{(2 - \varphi_k + \lambda_n^2 \hat{F}_0) e^{-\lambda_n^2 \hat{F}_0}}{G_n^2 (1 - \varphi_k \lambda_n^2)}. \quad (3.153)$$

όπου $\hat{F}_0 = \hat{a}t/R^2$ είναι ο αδιάστατος χρόνος (αριθμός Fourier) και το σέτ $\{\lambda_n\}$ αντιστοιχεί στις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\tan \lambda_n = - \frac{\varphi_k \lambda_n}{(1 - \varphi_k)}, \quad (3.154)$$

και

$$G_n = (1 - \varphi_k + \varphi_k^2 \lambda_n^2). \quad (3.155)$$



ΣΧΗΜΑ 3.8: Ο αριθμός Nusselt, Nu , σαν συνάρτηση του αριθμού Fourier.

Ο αριθμός Nusselt εδώ βασίζεται στη σχέση $\Delta T = (T_b - T_{\infty})$, όπου T_b είναι η θερμοκρασία του κύριου όγκου της διασκορπισμένης φάσης. Διαγράμματα αυτού του αποτελέσματος σε συνάρτηση με τον αριθμό Fourier δίνονται στο σχήμα 3.8. Ο αριθμός Nusselt ξεκινά με μια τιμή κοντά στο $Nu = 2$ και φτάνει σε μια σταθερή τιμή όταν ο αδιάστατος χρόνος είναι περίπου $t = 0,3$. Μια ασυμπτωτική ανάλυση της εξίσωσης (3.149) δείχνει ότι αυτή η τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$Nu|_{t=0} = \frac{3}{2} \lambda_1^2 \varphi_k = 2 \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{5} \frac{1}{\varphi_k} + \frac{38}{175} \frac{1}{\varphi_k^2} + \dots \quad (3.156)$$

όπου λ_1 είναι η πρώτη μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης (3.154). Στο όριο $Pe \rightarrow 0$, δεν υπάρχει μεταγωγή και το αποτέλεσμα οδηγείται σ' αυτό του Newman:

$$Nu = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \frac{r_0}{R}}}{n^2} \quad (3.157)$$

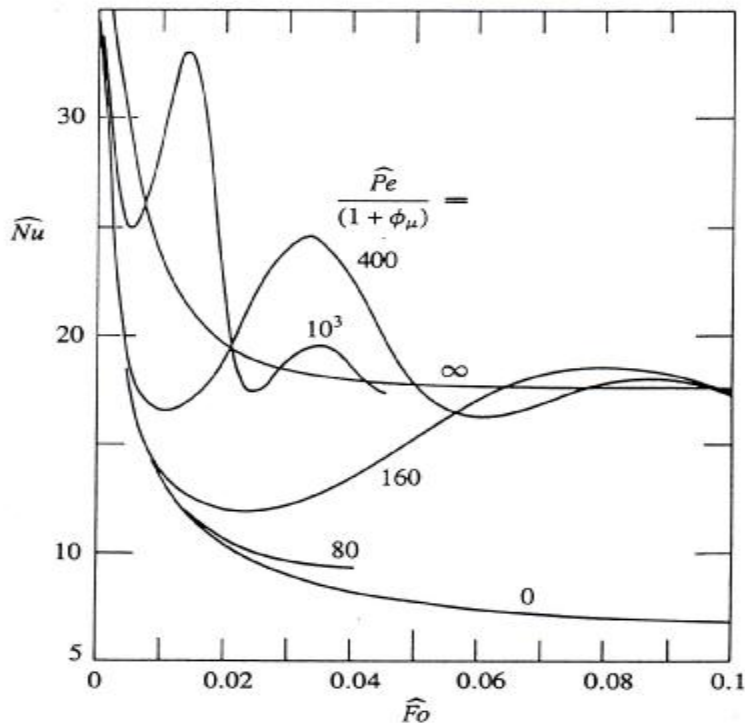
ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΕ ΜΕΣΟΥΣ ΚΑΙ ΥΨΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ PECLET

Για μια ρευστή σταγόνα με αμελητέα εξωτερική αντίσταση, οι Kronig & Brink ανέπτυξαν μια λύση για $Pe \gg 1$. Με την αμελητέα εξωτερική αντίσταση, η ροϊκή συνθήκη (3.148) αποτελεσματικά γίνεται:

$$T|_{r=R} = T_{\infty} \quad (3.158)$$

Ενώ η ισχύς του σφαιρικού στροβίλου του Hill είναι αντιστρόφως ανάλογη του $(1 + \varphi_{\mu})$, μια βαθμονόμηση του αριθμού Peclet της μορφής $Pe/(1 + \varphi_{\mu})$ είναι ένας φυσικός αριθμός. Οι Kronig & Brink δημιούργησαν ένα σύστημα συντεταγμένων κατά μήκος των ροϊκών γραμμών του σφαιρικού στροβίλου του Hill. Όπως αναφέρθηκε για περιπτώσεις σταθερής κατάστασης υψηλού αριθμού Pe , η διάχυση κατά μήκος των ροϊκών γραμμών είναι αμελητέα και το πρόβλημα μειώνεται σε μια χωρική και μια χρονική μεταβλητή. Μια αναλυτική λύση βρέθηκε σε σχέση μ' ένα πακέτο χωρικών ιδιοσυναρτήσεων που πρέπει να επιλυθεί. Ο λεπτομερής μηχανισμός μεταφοράς, κατάλληλος σ' αυτό το καθεστώς μεταφοράς μάζας αναπτύχθηκε από τον Brignell, ο οποίος επίσης έδωσε διαγράμματα των προφίλ συγκέντρωσης για διάφορες τιμές του χρόνου σ' ένα εύρος τιμών $0 \leq \frac{r}{R} \leq 0.1367$.

Η λύση των Kronig – Brink αντικαταστάθηκε από διάφορες αριθμητικές λύσεις. Ανάμεσα σ' αυτές οι πιο αξιοσημείωτες είναι οι μελέτες των Johns & Beckmann και των Watada, Hamielec & Johnson. Η δεύτερη έρευνα επιτρέπει μια ομοιογενή χημική αντίδραση στη σταγόνα όπως και στη διεπιφάνεια. Και οι δύο αυτές έρευνες παρουσίασαν τα αποτελέσματα για τον αριθμό Nu σε συνάρτηση του Pe . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για $0 \leq Pe/(1 + \varphi_{\mu}) \leq 320$ ενώ ο $Pe/(1 + \varphi_{\mu})$ επεκτείνεται ως το 4000 όπως φαίνεται στο σχήμα 3.9.



ΣΧΗΜΑ 3.9: Ο αριθμός Nusselt σε συνάρτηση του χρόνου για μια υγρή σταγόνα με μηδενική εξωτερική αντίσταση.

Το ενδιαφέρον χαρακτηριστικό εδώ είναι η φυσική ταλάντωση του Nu στους μικρούς χρόνους εξ' αιτίας της εσωτερικής κυκλοφορίας. Αρχικά η σταγόνα έρχεται σε επαφή με το εξωτερικό ρευστό και με μια μεγάλη θερμοκή μεταβολή υπάρχει ένας πολύ υψηλός ρυθμός μεταφοράς θερμότητας. Αυτός ο βαθμός μειώνεται με το χρόνο αλλά αργότερα το χωρίς θερμότητα ρευστό από το εσωτερικό, κοντά στον άξονα, μετάγεται κατά μήκος των ροϊκών γραμμών προς την εξωτερική επιφάνεια. Συμπερασματικά ο βαθμός θερμότητας αυξάνει μέχρι να επιτευχθεί ένα τοπικό μέγιστο, μετά από περίπου ένα πλήρη κύκλο της κυκλοφορίας του ρευστού. Αυτός ο τρόπος των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων συνεχίζεται εξασθενώντας καθώς η θερμότητα της σταγόνας αυξάνει. Η περιοδικότητα περίπου ισούται με την περίοδο της κυκλοφορίας και γι' αυτό το λόγο είναι ανάλογη του $Pe/(1 + \phi_\mu)$. Για μεγάλες τιμές του χρόνου τα παρακάτω ασυμπτωτικά όρια είναι:

$$\overline{Nu} \otimes \frac{2}{3} \pi^2 = 6.58 \quad (\text{Newman}, Pe = 0) \quad (3.159)$$

$$\overline{Nu} \otimes 17.66 \quad (\text{Kronig-Brink}, Pe \otimes \infty). \quad (3.160)$$

Το όριο του υψηλού αριθμού Peclet έχει προσεκτικά εξεταστεί από τους Oliver & De Witt οι οποίοι παρουσίασαν ότι $\overline{Nu} \otimes 17.903$ αντί για 17,66. Αυτά τα όρια δείχνουν την επίδραση της εσωτερικής κυκλοφορίας για την αύξηση της μεταφοράς θερμότητας σ' ένα μέγιστο σταθερό όρο περίπου 2,7, προβάλλοντας το ροϊκό πεδίο σαν στρόβιλο Hill. Ο Clift κ.α. κριτικά επανεξέτασε τις αριθμητικές λύσεις και τα ασυμπτωτικά όρια. Αυτός συμπέρανε ότι για $Pe/(1 + \phi_\mu) < 10$ και $Pe/(1 + \phi_\mu) > 250$

το $\frac{R}{\alpha} \sqrt{t}$ όριο της αριθμητικής λύσης είναι στο 5% των ασυμπτώτων του Newman και των Kronging – Brink αντίστοιχα.

ΑΣΤΑΘΗΣ ΣΥΝΕΧΗΣ ΦΑΣΗ

Πολλές από τις αναλύσεις τύπου – διαταραχής για ασταθή διασκορπισμένη φάση αντιστοιχούν σε καταστάσεις στις οποίες η σταγόνα θεωρείται ότι έχει ισοθερμική διεπιφάνεια για όλο το χρόνο. Η υπόθεση εδώ είναι ότι η διασκορπισμένη φάση έχει πολύ μεγάλη θερμική χωρητικότητα. Γι' αυτό το λόγο η χρησιμότητα τέτοιων αναλύσεων είναι αρκετά περιορισμένη. Το μοντέλο της ισοθερμικής διεπιφάνειας, εφαρμόζεται κατάλληλα σε κάποιες περιπτώσεις αλλαγής φάσης που αναφέρονται αργότερα. Κάποιες μελέτες που σχετίζονται με τις δύο φάσεις που είναι πλήρως μεταβατικές έχουν επίσης διεξαχθεί. Αρχικά αναφερόμαστε στην ασταθή μη μεταγωγική συνεχή φάση.

Μη Μεταγωγική Ασταθής Συνεχής Φάση

Με την έλλειψη μεταγωγής για ένα σφαιρικό σωματίδιο, έχουμε την εξίσωση διάχυσης (ή την εξίσωση θερμότητας) με ακτινική μόνο μεταφορά:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.161)$$

Με $T = T_i$ για $r = R$ και $T = T_\infty$ για $r \rightarrow \infty$ η ακριβής λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{R}{r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r - R}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \quad (3.162)$$

Ο υπολογισμός της ροής θερμότητας δίνει:

$$Nu = 2 \frac{R}{\lambda} + \frac{1}{(\pi Fo)^{1/2}} \quad (3.163)$$

όπου $Fo = \alpha t / R^2$.

Ασταθής Συνεχής Φάση Με Μεταγωγή

Ένας αριθμός αποτελεσμάτων έχουν δοθεί για περιπτώσεις στερεής σφαίρας που αναφέρονται σε περιεκτική μορφή. Για ρευστή σφαίρα η αξιοσημείωτη μελέτη είναι αυτή των Levich, Krylov & Vorotilin. Η λύση τους επακόλουθα αναπτύχθηκε από τον Ruckenstein και τον Chao όπου και οι δύο είχαν ουσιώδη συνεισφορά με τις αντίστοιχες έρευνές τους. Τα αποτελέσματα είναι για πλήρως ασταθείς διατυπώσεις

και για τις δύο φάσεις και αναφέρονται στην παρακάτω παράγραφο. Όπως και να 'χει το σταθερής κατάστασης όριο έχει εξαχθεί και προσεγγιστεί σύμφωνα με τη σχέση:

$$Nu = \frac{4Pe}{3\pi(1+\varphi_\mu)} + \frac{3(1+\varphi_\mu)}{FoPe} \quad (3.164)$$

ΑΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΦΑΣΕΙΣ

Πλήρως Ασταθής Μη Μεταγωγική Μεταφορά

Μια ακριβής αναλυτική λύση για μηδενικό αριθμό Peclet, πλήρως μεταβατική και στις δύο φάσεις, εξήχθη από τον Cooper. Από τις εκφράσεις για τη διεπιφανειακή ροή θερμότητας και τη διανομή θερμοκρασίας της σφαίρας, η παρακάτω έκφραση για τον αριθμό Nusselt είναι:

$$Nu = \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda^2 Fo} G(\lambda) \lambda^2 d\lambda}{3 \int_0^\infty e^{-\lambda^2 Fo} G(\lambda) / \lambda^2 d\lambda} \quad (3.165)$$

όπου:

$$G(\lambda) = \frac{(\lambda \cos \lambda - \sin \lambda)^2}{\hat{\alpha}(k^2 \lambda^2 \sin^2 \lambda) + \alpha \hat{k} (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda)^2 + k \sin \lambda^2} \quad (3.166)$$

Στο όριο του $\varphi_k = \hat{k}/k \ll 1$ αυτή η έκφραση για τον αριθμό Nusselt καταπίπτει στην εξίσωση (3.163)

Πλήρως Ασταθής Μεταφορά με $Pe \ll 1$

Όπως αναφέρθηκε στις προηγούμενες περιπτώσεις για $Pe \ll 1$, η διάχυση κατά μήκος των ροϊκών γραμμών σ' αυτό το όριο είναι αμελητέα. Στη γειτνιάζουσα περιοχή της διεπιφάνειας η διαχυτότητα στην κατεύθυνση θ παραλείπεται. Ο Levich κ.α, ο Ruckenstein και επακόλουθα ο Chao εφάρμοσαν αυτή την προσέγγιση για ρευστή σφαίρα σε ροή Stokes εξαρτώμενη από το χρόνο και στις δύο φάσεις. Η διαδικασία εμπλέκει εκφράσεις σε σχέση με τη μεταβλητή του χρόνου και την τοπική μεταβλητή κάθετη στη διεπιφάνεια. Η λύση αποδίδει την παρακάτω έκφραση για την τοπική ροή:

$$\Phi(\theta, Fo) = \frac{2k(T_\infty - T_i)l}{R\left(1 + \varphi_k \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\lambda}\right)} \frac{Pe}{3\pi(1 + \varphi_\mu)} \frac{1}{b} \zeta(\theta, Fo), \quad (3.167)$$

όπου $\varphi_k = (\hat{k}\hat{\rho}c_p / k\rho c_p)$ και

$$\zeta(\theta, Fo) = \frac{\frac{3}{4} \sin^2 \theta}{\left\{3\sqrt{\frac{1}{\lambda}}(\theta, Fo) - \cos \theta\right\}^3 - \cos^3 \theta} \frac{1}{b}, \quad (3.168)$$

με $f(\theta, Fo)$ να δίνεται από τη σχέση:

$$f(\theta, Fo) = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} \theta e^{-PeFo/2(1 + \varphi_\mu)}}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \theta e^{-PeFo/2(1 + \varphi_\mu)}}. \quad (3.169)$$

Ο αριθμός Nusselt στην αρχική θερμοκρασιακή διαφορά επιτυγχάνεται με την ολοκλήρωση της πιο πάνω έκφρασης για τη ροή. Το αποτέλεσμα είναι:

$$Nu = \frac{2}{1 + \varphi_k \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\lambda}} \frac{l}{k} \frac{Pe}{3\pi(1 + \varphi_\mu)} \frac{1}{b} \int_0^\pi \zeta(\theta, Fo) \sin \theta d\theta. \quad (3.170)$$

Το ολοκλήρωμα είναι μια συνάρτηση του $\tau = PeFo/(1 + \varphi_\mu)$ και οι τιμές του συνοψίζονται από τον Ruckenstein σ' ένα εύρος $0.01 \leq \tau \leq 100$. Για τα όρια $Fo \rightarrow 0$ και $Fo \rightarrow \infty$ αυτό το ολοκλήρωμα δίνει:

$$Nu = \frac{2}{\left(1 + \varphi_k \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\lambda}\right) (\pi Fo)^2}, \quad Fo \rightarrow 0, \quad (3.171)$$

και

$$Nu = \frac{2}{\left(1 + \varphi_k \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\lambda}\right) 3\pi(1 + \varphi_\mu)} \frac{l}{k} \frac{Pe}{b}, \quad Fo \rightarrow \infty. \quad (3.172)$$

Ο θερμικός πυρήνας της θερμοκρασίας περιγράφεται ανεπαρκώς από αυτή τη λύση εφόσον η μεταφορά από τη διάχυση στην κατεύθυνση θ έχει αγνοηθεί στο οριακό στρώμα της εξίσωσης ενέργειας. Εξ' αιτίας της ελλειπτικής φύσης της εσωτερικής

περιοχής, οι λύσεις που παρουσιάζονται εδώ είναι ανακριβείς εκτός των αρχικών σταδίων της μεταβατικής διαδικασίας. Η μικρού – χρόνου λύση αποδίδει ένα αποτέλεσμα που ισοδυναμεί με την καθαρή αγωγιμότητα. Αυτή είναι κατάλληλη εφόσον με μια αλλαγή στη θερμοκρασία στην εσωτερική μεταφορά κυριαρχεί η αγωγιμότητα (ουσιαστικά: μεταφορά θερμότητας δι' αγωγής κυρίαρχα). Μαθηματικά εφόσον τα Fo και Pe εμφανίζονται σαν γινόμενα το όριο μικρού Fo ισοδυναμεί με $Pe \gg 0$. Αυτό μπορεί να φαίνεται αντιφατικό με την $Pe \gg \infty$ προσέγγιση που εξετάζεται σ' αυτήν την παράγραφο. Όπως και να 'χει η πραγματική προσέγγιση συμφωνεί με την υπόθεση ενός λεπτού θερμικού οριακού στρώματος. Σ' αυτό το περιβάλλον είναι κατάλληλη και για τα δύο όρια, $Fo \gg 0$ και $Pe \gg \infty$. Η μεγάλη χρόνο λύση έχει μια σχεδόν περιορισμένη χρησιμότητα διότι η διαστολή στη διεπιφάνεια, επεκτείνει τη θερμική χωρητικότητα της σταγόνας σε απεριόριστες τιμές. Γι' αυτό το λόγο η μόνη σημαντική εφαρμογή της σχέσης (3.172) είναι για την περίπτωση μιας ενυπάρχουσας μεγάλης θερμικής αγωγιμότητας της διασκορπισμένης φάσης π.χ $\varphi_k = \infty$.

Πλήρως Ασταθής Μεταφορά για $0 < Pe < 1000$

Σ' αυτή την περιοχή η περισσότερη από τη μελέτη είναι αριθμητική εκτός της περίπτωσης για $Pe = 1$ όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Η περίπτωση σταθερής μεταφοράς και στις δύο φάσεις έχει αναπτυχθεί από τους Abramzon & Borde. Η ADI πεπερασμένης διαφοράς μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη του προβλήματος της έρπουσας ροής μεταφοράς θερμότητας σ' ένα εύρος τιμών $0 < Pe < 10^3$. Οι θερμικές συνθήκες της διασκορπισμένης και της συνεχούς φάσης θεωρούνται πανομοιότυπες και έτσι περιορίζουν αυστηρά την εφαρμοσιμότητα των αποτελεσμάτων. Μπορεί να σημειωθεί ότι τα περισσότερα σημαντικά συστήματα υγρού – υγρού, $\varphi_k = \hat{k}/k$ και $\varphi_{\rho c} = \hat{\rho} \hat{c}_p / (\rho c_p)$ βρίσκονται τυπικά σ' ένα εύρος τιμών 0,3 έως 3. Σε μια επακόλουθη μελέτη οι Abramzon & Elata ανέπτυξαν την ασταθή μεταφορά θερμότητας για στερεή σφαίρα με τις παραμέτρους $\varphi_{\rho c}$ και Pe σ' ένα εύρος τιμών $0.5 < \varphi_{\rho c} < \infty$ και $1 \leq Pe \leq 10^4$ αντίστοιχα. Οι Oliver & Chung εξέτασαν το πρόβλημα της ρευστής σφαίρας αφήνοντας τις τιμές των θερμικών χωρητικοτήτων των δύο φάσεων να κυμαίνονται σ' ένα εύρος $0.333 \leq \varphi_{\rho c} \leq 3$ αλλά $\varphi_a = \hat{a}/a$ να ισούται με τη μονάδα. Το πεδίο ροής περιγράφηκε από τη λύση των Rybczynski – Hadamard. Η ακτινική συντεταγμένη διαβαθμίστηκε από το R και ορίστηκαν οι αδιάστατες ποσότητες $Fo = at/R^2$, $Pe = U(2R)/a$, $\Theta = (T - T_\infty) / (\hat{T}_0 - T_\infty)$ και $\hat{\Theta} = r(\hat{T} - T_\infty) / (\hat{T}_0 - T_\infty)$. Επιπρόσθετα για τη συνεχή φάση χρησιμοποιήθηκε ο μετασχηματισμός $n = 1/r$. Σαν αποτέλεσμα επιτεύχθηκαν οι παρακάτω μορφές της εξίσωσης ενέργειας:

Συνεχής Φάση

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + \frac{1}{2} Pe \frac{\partial}{\partial n} n^2 u_r \frac{\partial \Theta}{\partial n} + n \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = n^4 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial n^2} + n^2 \cot \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + n^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}, \quad (3.173)$$

και

Διασκορπισμένη Φάση

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{2} Pe \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} - \frac{\hat{\theta}}{r} + \frac{\hat{u}_\theta}{r} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = \varphi_a \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \theta^2} \quad (3.174)$$

Η συνθήκη στο κέντρο του σταγονιδίου είναι $\hat{\theta} = 0$ και η συνέχεια της ροής θερμότητας για $r = 1$ και $n = 1$ εκφράζεται με τη σχέση:

$$\varphi_k \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0. \quad (3.175)$$

Ο μετασχηματισμός $n = 1/r$ είναι καλύτερος από τον συνήθως χρησιμοποιούμενο $\xi = \ln(r)$ για δύο λόγους που αναφέρονται παρακάτω

1. Με το n είναι πιθανό να επιτευχθούν υψηλής πυκνότητας κόμβοι (σημεία τομής) κοντά στη διεπιφάνεια όπου οι κλίσεις είναι απότομες με μικρότερη (πυκνότητα κόμβων) κοντά στη ροή στα όρια του πεδίου χωρίς να θεωρηθεί η ακριβής θέση στην οποία δημιουργούνται οι ελεύθερες ροής συνθήκες. Και αυτό διότι $n = 0$ είναι στην πραγματικότητα ένα «σημείο στο άπειρο».

2. Με κάποιο επίπεδο βελτιστοποίησης του μεγέθους του πλέγματος διανομής λιγότερα συνολικά κομβικά σημεία χρειάζονται για μια ισοδύναμη χωρική διάταξη στη διεπιφάνεια.

Οι μεταγωγικοί όροι σχηματίζονται με κεντρικής – διαφοράς προσεγγίσεις και το σχέδιο ADI υλοποιείται με το συνήθη χειρισμό. Οι μεταβολές του αριθμού Nusselt με τον αριθμό Fourier ($Fo = at/R^2$) για $Pe = 200$ και 1000 , $\varphi_\mu = 1$, $\varphi_a = 1$ και $\varphi_{\rho c} = 1$ παρουσιάζονται στις αναφορές. Ο αριθμός Nusselt ταλαντεύεται μ' ένα εξασθενημένο πλάτος σε σχέση με την εσωτερική κυκλοφορία στη σταγόνα που εναλλάσσεται με είδη ζεστού και ψυχρού ρευστού στο εμπρόσθιο τμήμα της περιοχής, που λαμβάνει χώρα το μεγαλύτερο μέρος της μεταφοράς. Για ένα δεδομένο αριθμό Pe με αυξανόμενο χρόνο ο αριθμός Nusselt ασυμπτωτικά προσεγγίζει μια σταθερή τιμή ανεξάρτητη από το προφίλ της αρχικής θερμοκρασίας. Για περιπτώσεις όπου $\varphi_a = 1$ η παρακάτω έκφραση για τον ασυμπτωτικό αριθμό Nusselt, συνίσταται για την έρπουσα ροή και υψηλό αριθμό Pe :

$$Nu_{asymptotic} = \frac{1}{\varphi_k} Nu_{interior} + \frac{1}{Nu_{exterior}}, \quad (3.176)$$

όπου $Nu_{interior}$ είναι ο ασυμπτωτικός αριθμός Nusselt για το εσωτερικό πρόβλημα που βασίζεται στις ιδιότητες της διασκορπισμένης φάσης και $Nu_{exterior}$ είναι ο ασυμπτωτικός αριθμός Nusselt για το εξωτερικό πρόβλημα με $\varphi_{\rho c} = \infty$. Οι εσωτερικοί και εξωτερικοί αριθμοί Nusselt προέρχονται από τις αναφορές.

3.3.3 ΗΜΙΣΤΑΘΕΡΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ

Μια αλλαγή φάσης φέρνει ένα σημαντικό χαρακτηριστικό στην όλη εικόνα, δηλαδή ακτινική μεταφορά δι' αγωγής με άλλα μεταγωγικά πεδία. Αυτός ο μηχανισμός μεταφοράς μπορεί ιδιαίτερα να περιπλεχθεί διότι το ακτινικό πεδίο και ο βαθμός μεταφοράς θερμότητας / μάζας είναι αλληλοεξαρτώμενα. Στην περίπτωση μιας φυσαλίδας υπάρχει ανάπτυξη ή κατάρρευση και στην περίπτωση σταγόνας σε αέρια συνεχή φάση υπάρχει ακτινική μεταφορά ατμού. Γενικά σε μια διεπιφάνεια κάτω από αλλαγή φάσης, απαιτείται η ισορροπία μάζας όπως και η ισορροπία ενέργειας και / ή ισορροπίας των συστατικών. Γι' αυτό το λόγο εφαρμόζεται η οριακή συνθήκη στεγανότητας (1.52). Ξανά αναφέρουμε ότι η εξίσωση (1.52) αναπαριστά κίνηση αέριας φάσης που προκύπτει από τη μεταφορά ατμού. Ο ατμός μεταφέρει μαζί του μη συμπυκνώματα αλλά αυτά διαχέονται πάλι. Γι' αυτό ο ατμός διεισδύει αποτελεσματικά ανάμεσα στα μη συμπυκνώματα.

ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΦΥΣΑΛΙΔΑΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ

Μια απλή φυσαλίδα με το αέριό της διαλυμένο σ' ένα συνεχής φάσης ρευστό, θα αναπτυχθεί ή θα καταρρεύσει με αλλαγές στην εξωτερική θερμοκρασία ή πίεση. Σ' ένα ισοθερμικό σύστημα η μοριακή μεταφορά περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$U^R \frac{\zeta R \phi^2}{r} \frac{c}{r} = D \frac{1}{r^2} \frac{\zeta}{r} \frac{c \phi}{r} \quad (3.177)$$

όπου χρησιμοποιείται μια απλή σημειογραφία και η ταυτοποίηση των συστατικών με τα C, D και η μοριακή ροή J εγκαταλείπεται. Το μεταγωγικό πεδίο είναι η ακτινική ταχύτητα (διαστατικά):

$$u_r = U^R \frac{\zeta R \phi^2}{r} \quad (3.178)$$

Κάτω από την ημισταθερή προσέγγιση ο διαβαθμισμένος χρόνος της ανάπτυξης και κατάρρευσης της φυσαλίδας t_{R^*} είναι πολύ μεγαλύτερος από τον διαβαθμισμένο χρόνο διάχυσης t_D . Εφόσον ο βαθμός μεταφοράς της διαλυμένης ύλης είναι ανάλογος με τη $\Delta c = (c_0 - c_{\infty})$ και το D έχουμε για το βαθμό μοριακής ροής:

$$J : \frac{D \Delta c}{R} \quad (3.179)$$

Αυτό οδηγεί σε μια διεπιφανειακή ταχύτητα:

$$U^R : \frac{D \Delta c}{\hat{c} R}, \quad (3.180)$$

και ένα διαβαθμισμένο χρόνο ανάπτυξης (ή κατάρρευσης):

$$t_{\kappa} = \frac{R}{U^R} : \frac{\hat{c}R^2}{D\Delta c}, \quad (3.181)$$

όπου \hat{c} είναι η μοριακή πυκνότητα της αέριας φάσης. Απ' την άλλη μεριά ο διαβαθμισμένος χρόνος διάχυσης είναι:

$$t_D = \frac{R^2}{D}. \quad (3.182)$$

Γι' αυτό το λόγο για να έχουμε την ημισταθερή συνθήκη $t_{\kappa} \approx t_D$ πρέπει:

$$\frac{\hat{c}}{\Delta c} \approx 1. \quad (3.183)$$

Για πολλούς συνδυασμούς αερίων και υγρών αυτή η συνθήκη είναι κατάλληλη. Το κυρίαρχο κριτήριο είναι ότι η σταθερά του νόμου του Henry πρέπει τουλάχιστον να είναι 100 atm. Αυτή είναι η σταθερή αναλογία που συσχετίζει την μερική πίεση του αερίου με την επιφανειακή μοριακή συγκέντρωση, c_0 , του διαλυμένου αερίου. Αν η παραπάνω ημισταθερή συνθήκη ικανοποιείται, η ακτινική μεταγωγή είναι αμελητέα. Συμπερασματικά το αποτέλεσμα είναι ίδιο με της εξίσωσης (3.118) πχ $Sh = 2$. Για μια φυσαλίδα μέσα στο δικό της υγρό με οδηγούσα την θερμική μεταφορά, η ανάπτυξή της (φυσαλίδας) είναι γρήγορη, και μια συνθήκη παρόμοια με την εξίσωση (3.183) είναι πιο δύσκολο να επιτευχθεί εκτός των συνθηκών υψηλής πίεσης και υπερθέρμανσης.

ΣΤΑΓΟΝΕΣ ΜΕ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗ Ή ΕΞΑΤΜΙΣΗ

Στην περίπτωση μιας υγρής σταγόνας που υπόκειται σε εξάτμιση ή συμπύκνωση, οι πυκνότητες των φάσεων αντιστρέφονται και η ημι – σταθερή προσέγγιση επιτρέπει μια πολύ μεγαλύτερη ακτινική μεταγωγή. Ο διαβαθμισμένος χρόνος που αντιστοιχεί στην αλλαγή του μεγέθους της σταγόνας είναι:

$$t_{\kappa} = \frac{\zeta \hat{c} \phi R}{\theta c \psi U^R} \quad (3.184)$$

αντί του χρόνου που δίνεται από την εξίσωση (3.181). Αυτός είναι αρκετά μικρότερος συγκρινόμενος με το διαβαθμισμένο χρόνο διάχυσης. Μια εκτίμηση της U^R δε μπορεί να επιτευχθεί στη βάση καθαρής αγωγιμότητας γιατί θα ήταν πολύ χαμηλή. Επιπλέον εξαρτάται από το κλάσμα της μη συμπυκνωμένης μάζας στο σύστημα.

Μονής Φάσης Σταγόνες

Για αργή εξάτμιση ή συμπύκνωση το σύστημα παραμένει σχεδόν ισοθερμικό. Στην περίπτωση μονής φάσης σταγόνων, η συγκέντρωση της μάζας της διασκορπισμένης φάσης δεν αποτελεί ζήτημα ενδιαφέροντος και το πρόβλημα εστιάζεται μόνο στη μεταφορά στην αέρια φάση. Το ανώτερο όριο του βαθμού ροής

του ατμού που ευθύνεται για τον καθαρό ατμό στην περιοχή γύρω από τη σταγόνα, μπορεί να επιτευχθεί από την κινητική θεωρία των Plesset & Prosperetti. Η ανάλυσή τους δείχνει ότι:

$$U_{\max}^R = \frac{\zeta R T_i}{2\pi \mu} \frac{\rho_{\text{sat}}(T_i) - \rho_{\text{sat}}(T_{\infty})}{\rho_{\text{sat}}(T_{\infty})}, \quad (3.185)$$

όπου $\rho_{\text{sat}}(T)$ αναπαριστά την ισορροπία της πίεσης του ατμού στην καθορισμένη πίεση και R είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων διαιρούμενη από το μοριακό βάρος του ατμού. Για ατμό νερού 373 K, ανέρχεται περίπου σε 1 ms^{-1} για $\Delta T = O(1K)$. Για σταγόνες μεγέθους 1mm μπορούμε να περιμένουμε αριθμό Peclet της τάξης $Pe_R : 100$. Αυτό είναι μια εκτίμηση για το θεωρητικό ανώτερο όριο. Η παρουσία μη συμπυκνωμάτων θα μειώσει σημαντικά την ταχύτητα του αερίου. Ωστόσο μπορεί να αναμένονται ακτινικοί αριθμοί Peclet της τάξεως $Pe_R : 1$. Οι Plesset & Prosperetti έδωσαν τα πεδία της θερμοκρασίας για περιπτώσεις κοιλότητας ατμού σ' ένα υγρό, σχημάτων κυλινδρικού και σφαιρικού δαχτυλιδιού με μια μονοδιάστατη κοιλότητα ανάμεσα σε δύο επίπεδα. Το πεδίο της θερμοκρασίας τους για μια σταγόνα σ' ένα άπειρο μέσο ατμού, καταλήγει σ' ένα από τα αποτελέσματα του Shadal:

$$T(r) = \frac{(T_i - T_{\infty}) e^{-\frac{1}{2} Pe_R} - (T_i - T_{\infty}) e^{-\frac{1}{2} Pe_R R/r}}{1 - e^{-\frac{1}{2} Pe_R} - e^{-\frac{1}{2} Pe_R R/r}}, \quad (3.186)$$

όπου $Pe_R = 2UR/a$.

Επίδραση των μη συμπυκνωμάτων. Ο αριθμός Nusselt εξαρτάται πάρα πολύ από τη συγκέντρωση των μη συμπυκνωμάτων. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις μεταφοράς για τη θερμοκρασία και το κλάσμα της μάζας:

$$U^R \frac{\zeta R \phi}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.187)$$

και

$$U^R \frac{\zeta R \phi}{r} \frac{\partial m}{\partial r} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial m}{\partial r} \right) \quad (3.188)$$

με οριακές συνθήκες:

$$T|_{(r=R)} = T_i, \quad m|_{(r=R)} = m_i, \quad (3.189)$$

$$T|_{(r=\infty)} = T_{\infty}, \quad m|_{(r=\infty)} = m_{\infty}, \quad (3.190)$$

το κλάσμα της μάζας βρίσκεται ότι είναι:

$$m(r) = \frac{(m_i - m_\infty) e^{-\frac{1}{2} Pe_R \frac{r}{R}}}{1 - e^{-\frac{1}{2} Pe_R}} - \frac{(m_i - m_\infty) e^{-\frac{1}{2} Pe_R \frac{R}{r}}}{1 - e^{-\frac{1}{2} Pe_R}} \quad (3.191)$$

όπου $Pe_R = U^R (2R)/D = Pe_R / Le$ και m_i είναι η διεπιφανειακή τιμή του m . Εδώ συνθήκες ισορροπίας θεωρούνται στη διεπιφάνεια π.χ η μερική πίεση του ατμού $P_v = p_{sat}(T_i)$. Το πεδίο θερμοκρασίας είναι ίδιο με αυτό που δίνεται στην εξίσωση (3.186). Με τη συνθήκη στεγανότητας:

$$U^R = \frac{1}{m_i} D \left. \frac{dm}{dr} \right|_{r=R}, \quad (3.192)$$

επιτυγχάνεται το αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{2} Pe_R = \ln \frac{m_i}{m_\infty} \quad (3.193)$$

Ο υπολογισμός του αριθμού Nusselt που περιλαμβάνει αγωγιμότητα, μεταγωγική μεταφορά και απόθεση ατμού, αποδίδεται με τη σχέση:

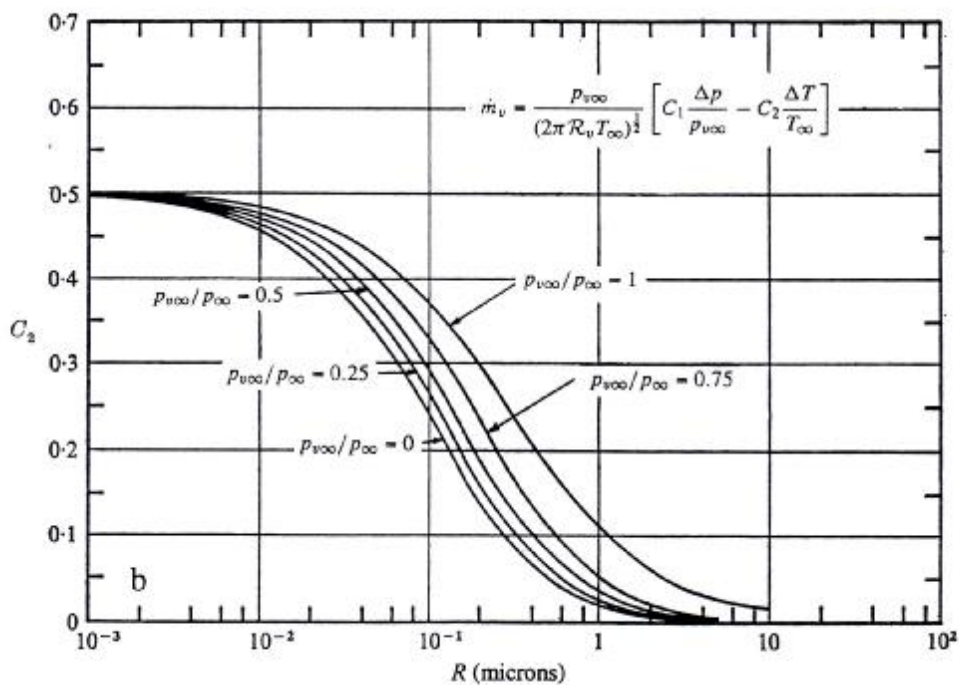
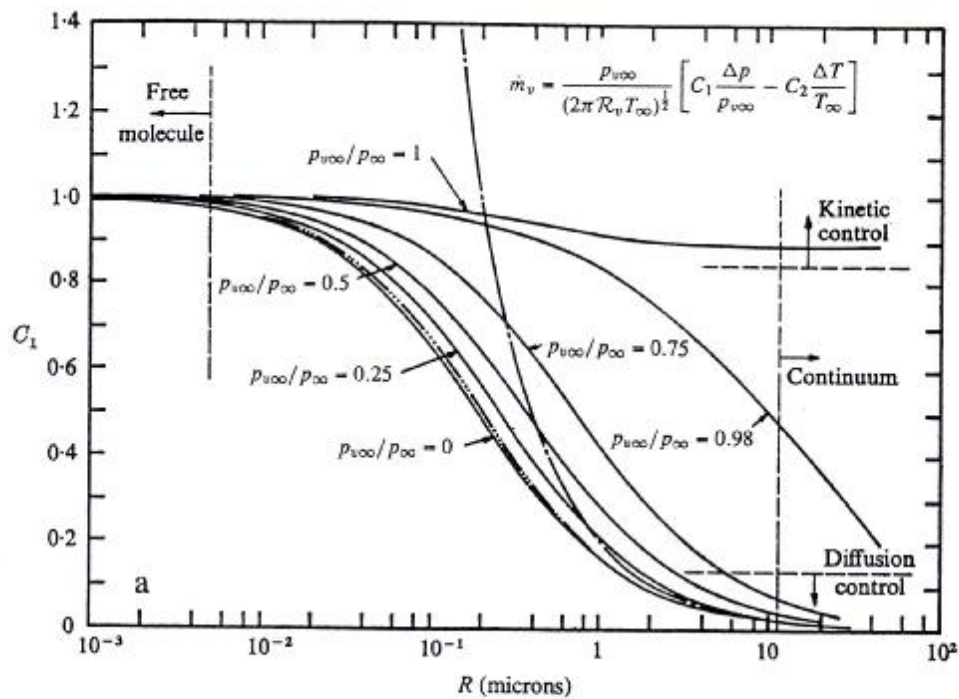
$$Nu = \frac{2 \ln x \frac{1}{Le} + \frac{1 - m_i}{Ja}}{x(1 - x^{Le})} \quad (3.194)$$

όπου $x = (m_i / m_\infty)$, $Ja = c_p (T_i - T_\infty) / \lambda$. Εφόσον αυτό το αποτέλεσμα προβλέπει $Nu \gg 1$ και $m_\infty \gg 0$, είναι κατάλληλο μόνο για $m_\infty \ll 0.01$. Για μικρότερες τιμές του m_∞ , η μεταφορά ατμού όπως περιγράφεται από τη διατύπωση των Plesset – Prosperetti αποκτά νόημα. Η καταλληλότητα περιορίζεται περισσότερο για σταγόνες με μεγέθη μεγαλύτερα από 10μm. Για μικρότερες σταγόνες μια λεπτομερειακή ανάλυση της θεωρίας της μεταφοράς είναι αναγκαία. Τέτοια ανάλυση έχει διεξαχθεί από τον Shankar που επίσης επεξεργάστηκε την επίδραση των μη συμπυκνωμάτων σε τόσο μικρά μεγέθη. Η ροή της μάζας του ατμού δίνεται από τη σχέση:

$$j = \frac{\rho_{v\infty}}{(2\pi R_v T_\infty)^{\frac{1}{2}}} C_1 \frac{\Delta p}{\rho_{v\infty}} - C_2 \frac{\Delta T}{T_\infty} \quad (3.195)$$

όπου $R_v = R / m_v$ αναφέρεται στην σταθερά αερίου για τον ατμό. Οι σταθερές C_1 και C_2 δίνονται στο σχήμα 3.10. Αυτά τα διαγράμματα δείχνουν εμφανώς τον ευρύ σκοπό των υπολογισμών του Shankar που καλύπτουν το ελεύθερο μοριακό όριο, το όριο συνέχειας, το όριο ελέγχου διάχυσης (ρυθμιστικό όριο) και το κινητικό όριο ελέγχου (ρυθμιστικό όριο). Το γράφημα για το C_1 δείχνει μια δραματική αλλαγή στη συμπεριφορά με μόνο 2% μη συμπυκνώματα παρόντα.

Άλλες έρευνες περιλαμβάνουν τις μελέτες του Loyalka που σχετίζονται με ισοθερμικά συστήματα αερίου – ατμού. Για καθαρά διαχυτή μεταφορά (με αμελητέα αγωγή) η ροή της μάζας του ατμού δίνεται στο όριο συνέχειας από τη σχέση:



ΣΧΗΜΑ 3.10: Η εξάρτηση των συντελεστών (α) C_1 και (β) C_2 από την ακτίνα του σταγονιδίου και του λόγου πίεσεως $p_{v\infty} / p_{\infty}$. Οι υπολογισμοί είναι για ένα μίγμα ρεύματος αέρα με $T_{\infty} = 150^{\circ}\text{C}$, προσαρμοσμένοι συντελεστές, $a_m = a_T = 1$, $D_{oa} = 0.361\text{cm}^2\text{s}^{-1}$, $\mu_{\infty} = 1.54 \cdot 10^{-4}\text{gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$. — — — Maxwell, - L - Fuchs, a=0, — — — υπολογισμός ορμής

$$j^{(c)} = \frac{Dm_i \zeta m_i}{R} - \frac{1}{2} \quad (3.196)$$

που είναι ουσιαστικά μια ειδική περίπτωση της (3.194) για τα όρια $\Delta T = 0$ και $Pe_R \gg 0$. Το άλλο άκρο είναι το ελεύθερο – μοριακό όριο:

$$j^{(k)} = \rho m_i \left[1 - \frac{m_i R_u T}{2\pi} \right]^{-1} \quad (3.197)$$

που παράγεται από την κινητική θεωρία. Αυτά αντιστοιχούν στα όρια του αριθμού Knudsen για μηδέν και άπειρο αντίστοιχα. Ο αριθμός Knudsen είναι ο λόγος του

Fuchs - Sutugin	Loyalka
$I_1 = \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}} 2D \frac{\zeta m_i}{2RT}$	$I_2 = 2D \frac{\zeta m_i}{2RT}$
$f_1 = \frac{3}{4} \pi^{-\frac{1}{2}}$	$f_2 = 1$
$\zeta_1 = 0.7104 \quad \eta \quad (1.0161) \frac{4}{3} \pi^{-\frac{1}{2}}$	$\zeta_2 = (0.7104) \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}} \quad \eta \quad 1.0161$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1: Οι σταθερές του Loyalka τη γενικευμένη φόρμουλα

μέσου ελεύθερου τμήματος l προς την ακτίνα της σταγόνας R έτσι ώστε $Kn = l/R$. Για ολόκληρο το εύρος του αριθμού Kn οι Fucks & Sutugin έδωσαν μια φόρμουλα παρεμβολής για το βαθμό συμπίκνωσης χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Sahní. Αυτό περαιτέρω ακολουθήθηκε από τον Loyalka που όρισε μια πιο γενική φόρμουλα που σχεδόν συμφωνεί με τα αποτελέσματα των Fucks & Sutugin. Εκτός των διαφορών σε κάποιες σταθερές οι δύο εκφράσεις διαφέρουν στον ορισμό του μέσου ελεύθερου τμήματος. Η γενικευμένη έκφραση για τη ροή της μάζας του ατμού είναι:

$$\frac{j}{j^{(c)}} = - \frac{l}{R} + Kn_i \frac{\pi^{\frac{1}{2}} f_i Kn_i + \zeta_i}{1 + Kn_i} \quad (i=1,2), \quad (3.198)$$

όπου οι σταθερές ζ_1 και f_1 δίνονται στον πίνακα 3.1. Οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στους Fucks & Sutugin αντίστοιχα. Η σαφής εξάρτηση της ροής μάζας από την αναλογία των μοριακών μαζών των συστατικών της αέριας φάσης έχει οριστεί από τους Sitarski & Nowakowski. Λεπτομερείς αναφορές αυτών των μελετών έχουν

επίσης παρουσιαστεί από τους Davis, Ravidran & Ray. Σε πιο πρόσφατες μελέτες ο Loyalka ανέπτυξε το παρακάτω αποτέλεσμα για το βαθμό συμπύκνωσης:

$$\frac{j}{j^{(c)}} = 1 - \frac{2Kn_2^{-1} \left[\frac{1}{2} + I_1(Kn_2^{-1}) \right]}{\frac{1}{4} \pi^{\frac{1}{2}} L_1(Kn_2^{-1})} \quad (3.199)$$

όπου:

$$L_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^A}{(x^A + z^2)^{\frac{1}{2}}} T_1(x^A) dx^A \quad (3.200)$$

και

$$I_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^A}{(x^A + z^2)^{\frac{1}{2}}} dx^A \int_0^{\infty} \frac{y^A}{(y^A + z^2)^{\frac{1}{2}}} T_1(x^A + y^A) dy, \quad (3.201)$$

με

$$T_n(x) = \int_0^{\infty} t^n e^{-(t^2 + x/t)} dt. \quad (3.202)$$

Στην αυθεντική ανάλυση αυτά τα ολοκληρώματα αποτιμώνται αριθμητικά. Ωστόσο πιο πρόσφατα οι Tompson & Loyalka πέτυχαν μια ακριβή αναλυτική έκφραση για το $L_1(z)$ και μια προσεγγιστική $\frac{1}{2} O(Kn_2^{-4} \ln Kn_2)$ για το $I_1(z)$. Ενώ βρέθηκε μια καλή προσέγγιση μεταξύ των αναλυτικών και αριθμητικών τιμών του ολοκληρώματος $L_1(z)$, δεν βρέθηκε πλήρης προσέγγιση με άλλα γνωστά «ακριβή» αποτελέσματα για $Kn \gg 1$ (Parison).

Πολυσύνθετες Σταγόνες

Για την αργή ισοθερμική εξάτμιση των πολυσύνθετων σταγόνων η ημισταθερή θεωρία, θεωρεί ένα ομογενές μίγμα της διασκορπισμένης φάσης. Τα πειράματα του Rubel με δυαδικές σταγόνες λαδιού επαλήθευσαν τη θεωρία της ομοιογενούς σταγόνας και εξασφαλίστηκε μια έκφραση για το βαθμό εξάτμισης που ορίζεται από την απλή ημισταθερή διάχυση του ατμού. Με τη θεωρητική ανάπτυξη στη βάση του νόμου του Raoult, η μοριακή πίεση του ατμού στην επιφάνεια πάρθηκε σαν αναλογία του κλάσματος του γραμμομορίου (mole) των συστατικών. Εξ' αιτίας των moles n_1 και n_2 των δύο συστατικών στην υγρή φάση ο ρυθμός αλλαγής του συστατικού 1 δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dn_1}{dt} = - \frac{2\pi D_1 \rho_{1,sat}}{RT} \frac{6(n_1 m_1 + n_2 m_2)(n_1 u_1 + n_2 u_2)}{\pi (n_1 + n_2)^4} \lambda_i^{\frac{1}{b}} n_1, \quad (3.203)$$

όπου D_1 είναι ο συντελεστής διάχυσης μάζας του συστατικού 1 στην αέρια φάση, που περιέχει ένα μεγάλο αδρανές συστατικό, όπως ο αέρας. Οι λύσεις των πειραμάτων εξάτμισης με διοξυγόλιο –φθαλικό διβουτύλιο στους 23°C και 41°C δείχνουν ότι η λύση είναι θερμοδυναμικά ιδανική. Η υπόθεση για ομογενές ρευστό μίγμα είναι κατάλληλη κυρίως λόγω του μικρού χρόνου διάχυσης (: 1s) στη διασκορπισμένη φάση για σταγόνες μεγέθους 10μm, ενώ ο χρόνος εξάτμισης μπορεί να είναι μεγέθους 10⁴s. Οι Ravidran & Davis με βάση τα πειράματα τους ανέφεραν κάποιες παρεκκλίσεις της θεωρίας με τις σταγόνες μεγέθους μικρο (μ) να έχουν μικρότερους χρόνους εξάτμισης (: 500s). Είναι απίθανο αν αυτή η συμφωνία είναι κατάλληλη για τη μη εκτιμηθείσα εσωτερική διάχυση. Η ημισταθερή ανάλυση των δυαδικών σταγόνων διεξήχθη από τους Newbold & Amundson για μίγματα επτανίων – οκτανίων, μαζί με κάποια μελέτη των σταγόνων τριών – συστατικών. Εδώ και για τις δύο περιπτώσεις των υψηλών και χαμηλών αέριων θερμοκρασιών, καθώς η θερμοκρασία του σταγονιδίου αυξάνει ή μειώνεται με το χρόνο, εκθέτει ένα σημείο καμπής κοντά στο σημείο του υγρού βολβού (wet – bulb).

3.3.4 ΑΣΤΑΘΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ

Σε περιπτώσεις όπως της συμπύκνωσης στις σταγόνες, λόγω της πεπερασμένης χωρητικότητας της διασκορπισμένης φάσης, ένας πλήρως μεταβατικός χειρισμός της αύξησης θερμοκρασίας της σταγόνας είναι απαραίτητος, ειδικά κατά τη διάρκεια των αρχικών σταδίων της συμπύκνωσης. Μια μεταβατική ανάλυση είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν υπάρχουν απότομες κλίσεις της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της άμεσης περιόδου ακολουθώντας την έγχυση ψυχρού σπρέι σ' ένα μέσο ατμού. Ακόμα ένας άλλος σημαντικός λόγος είναι ότι ενώ η θερμική αγωγιμότητα της υγρής φάσης μπορεί να είναι μεγαλύτερη απ' ότι της αέριας φάσης, δε σημαίνει ότι η χωρική μεταβολή της θερμοκρασίας στο υγρό μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Η διαδικασία μεταφοράς ατμού συνήθως έχει μεγάλη συνεισφορά και συνεπώς οι ρόλοι του αερίου και του υγρού από μια γενική σκοπιά της μεταφοράς είναι στην πραγματικότητα αντίθετοι απ' ότι θα περιμέναμε από μια άλλη αναφορά που βασίζεται στην αγωγιμότητα μόνο. Γι' αυτό το λόγο ισχύει σχεδόν πάντα ότι η μελέτη της αλλαγής φάσης στις ρευστές σταγόνες απαιτεί ένα μεταβατικό χειρισμό τουλάχιστον στη διασκορπισμένη φάση. Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις για τις οποίες ακόμα και σε μια σχεδόν ισοθερμική κατάσταση, ένας μεταβατικός χειρισμός είναι απαραίτητος. Για παράδειγμα για τις πολυσύνθετες σταγόνες η μεταβατική διάχυση της μάζας στην υγρή φάση πρέπει να μελετηθεί ακόμα και αν η μεταβατική διαδικασία είναι αργή.

ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ (Pe = 0)

Για σταγόνες που δεν μεταφέρονται σε σχέση με το περιβάλλον, οι διαδικασίες μεταφοράς είναι ακτινικά συμμετρικές. Αυτό είναι μια κατάλληλη μηδενικού βαθμού προσέγγιση για αδύναμα μεταφερόμενες σταγόνες και φουσαλίδες.

Όπως και να 'χει πολύ μικρά σταγονίδια τείνουν να «συγκεντρωθούν» στην ατμόσφαιρα και για τέτοιες περιπτώσεις η προσέγγιση είναι επίσης ικανοποιητική. Σφαιρικά συμμετρική αλλαγή φάσης μπορεί επίσης να συμβεί σ' ένα ελεγχόμενο μηδενικής βαρύτητας περιβάλλον. Εφόσον ο μεταφορικό αριθμός Peclet είναι μηδενικός, λαμβάνει χώρα ακτινική μεταγωγή.

Ασταθής Διασκορπισμένη Φάση

Σταγόνες ενός συστατικού. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, για μια σταγόνα ενός συστατικού η διαδικασία ασταθούς μεταφοράς στη σταγόνα είναι αυστηρά θερμική. Με τη σφαιρική συμμετρία, αυτό αντιστοιχεί σε καθαρή αγωγιμότητα στη διασκορπισμένη φάση. Για μια συνεχή φάση αποτελούμενη από ένα καθαρό σύστημα ατμού του διασκορπισμένου υγρού, η κάθετη ταχύτητα του ατμού στη διεπιφάνεια δίνεται από την εξίσωση (3.185) και η διανομή της θερμοκρασίας στον ατμό περιγράφεται από την έκφραση (3.186). Με τη χρησιμοποίηση της εξίσωσης Clausius – Clapeyron για να συσχετίσουμε τα $P_{sat}(T_i)$ και $P_{sat}(T_{\Psi})$ και δίνοντας γραμμική μορφή στη σχέση με την προσέγγιση:

$$\frac{\lambda}{RT_i T_{\Psi}} (T_{\Psi} - T_i) = 1, \quad (3.204)$$

βρίσκουμε ότι η λανθάνουσα θερμότητα ροής δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_{\lambda} = \frac{\rho_{sat}(T_{\Psi}) \lambda^2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} T_{\Psi}^{\frac{5}{2}}} (T_{\Psi} - T_i), \quad (3.205)$$

όπου R είναι η σταθερά του αερίου ανά μοριακό βάρος του ατμού. Αφού για τα περισσότερα συστήματα $k = \hat{k}$ η ουσιαστική μεταφορά θερμότητας στη φάση του ατμού είναι αμελητέα και για $Ja = 1$ οι διεπιφανειακές συνθήκες μπορεί να ενσωματωθούν σ' ένα συντελεστή μεταφοράς θερμότητας:

$$h = \frac{\rho_{sat}(T_{\Psi}) \lambda^2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} T_{\Psi}^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.206)$$

Από εδώ η ανάλυση του Sadhal για $Pe = 0$ μπορεί να εφαρμοστεί με την απλή τροποποίηση της αντικατάστασης του K από hR. Όταν ένα μη συμπύκνωμα είναι παρόν, η μεταφορά στη συνεχή φάση αποτελείται και από τις δύο: ροή θερμότητας και ροή μάζας και η διεπιφανειακή συνθήκη συνέχειας για τη ροή θερμότητας είναι:

$$- \frac{1}{k} \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} - k \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\zeta \lambda \rho_{sat} D}{m} \frac{\partial m}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (3.207)$$

όπου m είναι το κλάσμα της μάζας του μη συμπυκνωμένου αερίου. Εδώ οι τιμές των T και m στη διεπιφάνεια σχετίζονται με μια μη γραμμική διαμόρφωση με την εξίσωση

Clausius – Clapeyron. Για μη ισοθερμικά συστήματα με σταθερή διασκορπισμένη φάση, είναι ακατάλληλες οι πλήρως αναλυτικές λύσεις.

Πολυσύνθετες σταγόνες. Μια σταθερή πολυσύνθετη σταγόνα σ' ένα ισοθερμικό σύστημα δέχεται μεταβατική διάχυση ενώ η συνεχής φάση μπορεί να περιγραφεί σαν ημισταθερή. Το κλάσμα της μάζας που δίνεται από την εξίσωση (3.191) είναι εφαρμόσιμο με το $m(r)$ να αναπαριστά το κλάσμα της διαλυμένης μάζας στην αέρια φάση. Με την μεταγωγική μεταφορά στην αέρια φάση η διεπιφανειακή συνθήκη συνέχειας της ροής της μάζας είναι μη γραμμική. Αναλυτικές λύσεις για τη γραμμική περίπτωση $Pe_R = 1$ έχουν βρεθεί από τους Charlesworth & Marshall και τον Schlunder. Αυτές οι λύσεις ωστόσο έχουν τη δυσκολία της εξάρτησης από τον εκθετικό χρόνο. Αντίθετα η λύση του πεδίου της θερμοκρασίας του Sadhal μπορεί να χρησιμοποιηθεί με την παρακάτω αναλογία:

$$\hat{T} \otimes K\hat{m}, \quad T \otimes m, \quad \hat{a} \otimes \hat{k} \otimes \hat{D}, \quad k \otimes \beta D, \quad \varphi_k \otimes \frac{\hat{D}}{\beta D},$$

όπου το B αναπαριστά τη σταθερά για τη γραμμική σχέση ανάμεσα στα κλάσματα της μάζας στις δύο πλευρές της διεπιφάνειας:

$$\hat{m}|_{r=R} = \beta m|_{r=R}. \quad (3.208)$$

Κάποιες απλές εκφράσεις μπορούν να επιτευχθούν για την περιορισμένη περίπτωση που αποκαλείται νόμος του d^2 . Εδώ το τετράγωνο της ακτίνας (ή της διαμέτρου) θεωρείται ότι μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο:

$$[R(t)]^2 = -\beta \hat{D}t, \quad t \leq 0. \quad (3.209)$$

Αυτή η υπόθεση είναι καλύτερη για ενός – συστατικού υγρή σταγόνα για την οποία ο βαθμός εξάτμισης είναι πάντοτε ανάλογος με την περιοχή της επιφάνειάς της. Ωστόσο έχει εφαρμοστεί σαν μια προσέγγιση για μια σταγόνα, αποτελούμενη από εσωτερικά άστατη διαλυμένη ύλη σε εξατμιζόμενο υγρό. Ένα κινούμενο οριακό πρόβλημα έχει λυθεί και η διανομή της διαλυμένης ουσίας δίνεται εξ' αιτίας του κεντρικού σημείου συγκέντρωσης στη μορφή:

$$m(r) = m(0) \exp\left[-\beta \frac{r}{2R(t)}\right]. \quad (3.210)$$

Για μια δυαδική σταγόνα με τις δύο φάσεις εξατμιζόμενες οι Landis & Mills ερεύνησαν αριθμητικά το πρόβλημα. Αυτοί εξέτασαν περιπτώσεις αναφερόμενες σε επτανίου – οκτανίου σταγόνες στον αέρα σε θερμοκρασίες που κυμαίνονται από 600 K ως 2300 K όπως επίσης και εξανίου – οκτανίου σταγόνα σε αέρα 2300 K. Σε όλες τις περιπτώσεις η αρχική θερμοκρασία της σταγόνας βρίσκεται ότι είναι 300 K. Αυτοί θεώρησαν καταστάσεις με πεπερασμένες θερμικές αγωγιμότητες και διαχυτότητες μάζας μαζί με αυτές στις οποίες μία από αυτές τις παραμέτρους τείνει στο άπειρο. Η εξανίου – οκτανίου σταγόνα αναπαριστά την περίπτωση παραγωγής απόσταξης. Η μεταφορά ατμού έχει μοντελοποιηθεί μέσα από σταθερές παραμέτρους. Τα

αποτελέσματα έδειξαν ότι για το μοντέλο αγωγιμότητας – διάχυσης, η επιφανειακή συγκέντρωση των περισσότερο πτητικών συστατικών αρχικά πέφτει γρήγορα και μετά φτάνει σε μια αμετακίνητη σταθερή τιμή, ενώ η συγκέντρωση στο κέντρο παραμένει σταθερή. Για την περίπτωση της δέσμης, απόσταξης ($Le : 1$), η συγκέντρωση των σωματιδίων μέσα στη σταγόνα παραμένει σχεδόν ομοιόμορφη. Ο κύριος όγκος της συγκέντρωσης των περισσότερο πτητικών συστατικών μειώνεται σταθερά με το χρόνο.

Η εξάτμιση ενός σταγονιδίου αλκοόλης σε υγρό αέρα (αέρα με μεγάλη ποσότητα υγρασίας) έχει εξεταστεί από τους Law, Xiong & Wang χρησιμοποιώντας ένα ημισταθερό εξωτερικό μοντέλο παρόμοιο με αυτό των Landis & Mills. Επιπρόσθετα, διεξήγαγαν πειράματα που έδειξαν ότι στην περίπτωση πτητικών αλκοολών όπως το αιθάνιο και το μεθάνιο, η διαδικασία εξάτμισης συνοδεύεται από συμπύκνωση ατμού νερού στα σταγονίδια. Η απώλεια λανθάνουσας θερμότητας σε σχέση με την εξάτμιση της αλκοόλης αντισταθμίζεται από τη συμπύκνωση του ατμού του νερού. Για λιγότερες πτητικές αλκοόλες ή για υγρά αμιγώς με νερό η ατμοσφαιρική υγρασία έχει μικρή επίδραση στο βαθμό εξαέρωσης.

Ασταθής Συνεχής Φάση

Σταγόνες. Για ελεγχόμενα συστήματα διάχυσης στα οποία η ακτινική μεταγωγή είναι αμελητέα, το προφίλ συγκέντρωσης στη συνεχή φάση δίνεται από μια έκφραση ανάλογη στη (3.162) και η ροή μάζας μπορεί να παρασταθεί με μια κατάλληλη τροποποιημένη εκδοχή της εξίσωσης (3.163), π.χ σε διαστατική μορφή η ροή μάζας του j^{th} συστατικού είναι:

$$j_j = D_{jm} (m_{j0} - m_{j\infty}) \frac{1}{R} + \frac{1}{(\pi D_{jm} t)^{1/2}} \quad (3.211)$$

Τέτοιο αποτέλεσμα έχει δοθεί από τον Fuchs. Επίσης εφαρμόζεται σε ισοθερμικής φυσαλίδας διάλυση και ανάπτυξη σε υγρά που περιέχουν διαλυμένα αέρια. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι και στις δύο: σταγόνες και φυσαλίδες, αυτό το αποτέλεσμα βασίζεται στην υπόθεση σταθερής διεπιφάνειας μαζί με σταθερές τιμές της διεπιφανειακής συγκέντρωσης. Η συνθήκη $Re \ll 1$ είναι γι' αυτό το λόγο απαραίτητη για την καταλληλότητα αυτού του επιπέδου της μεταβατικής διαδικασίας προσέγγισης. Για εξατμιζόμενες ή αναπτυσσόμενες σταγόνες μια μεγάλη ποσότητα μεταφοράς ατμού οδηγεί σε μικρές μόνο αλλαγές στον όγκο της σταγόνας και γι' αυτό το λόγο η καταλληλότητα για ένα μεγάλο τμήμα της διαδικασίας πρέπει να διατυπωθεί. Μια τροποποίηση που υπολογίζεται από μια κινούμενη διεπιφάνεια έχει διατυπωθεί από τους Yalamon & Kolesnik που βρήκαν ότι:

$$Sh = 2 + \frac{2 \zeta \rho_0 - \rho_{\infty}}{\pi \theta \hat{\rho}} \frac{1}{\zeta \pi D t} \frac{1}{R_0^2} \quad (3.212)$$

Η μεταβατική συμπύκνωση στις σταγόνες έχει επίσης μελετηθεί από τους Nix & Fukuta που εξέτασαν και τα δύο: θερμότητα και διάχυση μάζας σε μια αέρια περιοχή. Επιπρόσθετα συμπεριέλαβαν εκθετική ελάττωση θερμότητας και πηγών διανομής της μάζας στη συνεχή φάση. Αυτοί θεώρησαν τις ελαττωμένες σταθερές τιμές 1 , 10^2 και 10^4 s και βρήκαν ότι με μεγαλύτερες τιμές (αργές μεταβάσεις), ο βαθμός ανάπτυξης του σταγονιδίου αυξάνει με το χρόνο, φτάνει σε μια κορυφή και μετά πέφτει σ' ένα κοινό επίπεδο. Με μικρότερες τιμές η κορυφή είναι λιγότερο έντονη και με την ημισταθερή κατάσταση υπάρχει μια μονότονη κλίση στο επίπεδο.

Συστήματα υγρού – υγρού. Για συστήματα υγρού – υγρού, οι Readey & Cooper ανέλυσαν την ανάπτυξη ενός σφαιρικού διαλυμένου σωματιδίου σ' ένα διαλύτη. Αυτό το σύστημα που δεν έχει πραγματική αλλαγή φάσης, είναι κατάλληλο για την εδώ αναφορά εξ' αιτίας των αλλαγών του όγκου λόγω της διάλυσης. Σαν αποτέλεσμα συμβαίνει μεταφορά με μεταγωγή στη συνεχή φάση. Η μεταφορά μέσα στη σταγόνα θεωρείται αρκετά γρήγορη έτσι ώστε η συγκέντρωση της διαλυμένης ύλης να θεωρείται χωρικά ομοιόμορφη. Το όλο σύστημα των εξισώσεων είναι μη γραμμικό εξ' αιτίας της συγκέντρωσης – εξαρτώμενη μεταγωγική μεταφορά. Οι πεπερασμένοι διαφορικοί υπολογισμοί δίνουν την εξέλιξη της διάλυσης με κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Ο βαθμός αλλαγής της σταγόνας αρχικά μειώνεται αλλά αργότερα αυξάνει. Η αρχική μείωση προκύπτει από την κύρια συμπεριφορά του $t^{-1/2}$ που γρήγορα μειώνεται καθώς η μεταβολή της συγκέντρωσης κοντά στην επιφάνεια μειώνεται. Η αύξηση μεταγενέστερα αποδίδεται σε μια μείωση στην ακτίνα όταν το $R\dot{R}$ γίνεται σχεδόν σταθερό. Επίσης παρατηρήθηκε ότι αυξανόμενη μεταγωγική μεταφορά κάνει πιο επίπεδο (ισοπεδώνει) το προφίλ συγκέντρωσης κοντά στη διεπιφάνεια και επίσης αυξάνει το βαθμό διάλυσης.

Φυσαλίδες. Σε σχέση με την ασταθή ανάπτυξη ή κατάρρευση φυσαλίδας οι Plesset & Swick ανέπτυξαν μια λύση διαταραχής στην περιοχή θερμικού οριακού στρώματος κοντά στην επιφάνεια της φυσαλίδας. Αυτή η λύση δίνει τη θερμοκρασία στην επιφάνεια της φυσαλίδας για ένα καθορισμένο χρόνο – μεταβαλλόμενη ροή θερμότητας σ' αυτό το όριο όπως επίσης και η χρονικά – εξαρτώμενη διανομή χωρικά ομοιόμορφης θερμότητας στη συνεχή φάση. Η ανάλυση υπολογίζει την ακτινική μεταγωγική μεταφορά, μαζί με τις επιδράσεις ενός κινούμενου ορίου. Το αποτέλεσμα είναι ένα γενικό πακέτο ολοκληρωμάτων για διάφορες αυθαίρετες παραμέτρους που αντιστοιχούν στη συνάρτηση πηγής και στην οριακή συνθήκη.

Η αργή ισοθερμική διάλυση μιας αέριας φυσαλίδας σ' ένα υγρό έχει γίνει αντικείμενο πολλών ερευνών. Για τέτοια συστήματα, η μερική πίεση του κάθε διαλυμένου συστατικού αναλογεί στην επιφανειακή συγκέντρωση, c_{j0} , μέσω της σχέσης:

$$\hat{p}_j = p \frac{c_{j0}}{c_{j\text{sat}}}, \quad (3.213)$$

όπου $c_{j\text{sat}}$ αντιστοιχεί στη συγκέντρωση του διαλυμένου αερίου όταν είναι κορεσμένο στο διαλύτη και p είναι η πίεση του υγρού της συνεχούς φάσης. Όταν η φυσαλίδα μορφοποιείται οι αρχικές μερικές πιέσεις των συστατικών σχετίζονται όπως παρακάτω:

$$\varepsilon \rho \sum_{j=1}^N \frac{c_{jo}}{c_{jsat}} + (\rho_{sat} - \rho) = \frac{2\sigma}{R}, \quad (3.214)$$

όπου ρ_{sat} είναι η κορεσμένη πίεση ατμού της διαλυμένης ύλης. Για ένα μόνο διαλυμένο συστατικό (π.χ $N = 1$) αυτή η σχέση θα καθορίσει την επιφανειακή συγκέντρωση της διαλυμένης ύλης. Γι' αυτό το λόγο για ένα κορεσμένο σύστημα με $c_{j\%} = c_{jsat}$, μαζί με τη σχέση μεταβατικής ροής (3.211) για το συστατικό $j = 1$, μπορεί να επιτευχθεί ένα σύστημα πρωτο – βαθμίων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για $c_{10}(t)$ και $R(t)$. Ο Sizon εφάρμοσε μια διαδικασία παρόμοια με αυτή των Plesset & Zwick και πέτυχε την παρακάτω σχέση μεταξύ της ακτίνας της σταγόνας και του χρόνου κατά τη διάρκεια της αρχικής περιόδου της ανάπτυξης:

$$t = \frac{2R_0^2 \eta (1 - \varepsilon U^2)}{D_1 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon U^2)} - \frac{\omega}{\nu} \quad (3.215)$$

όπου:

$$\varepsilon = - \frac{3(c_{10} - c_{1\%})RTR_0}{\pi^2 \sigma} \quad (3.216)$$

και

$$u(t) = \frac{D_1}{R_0^2} \int_0^t R^4(t') dt' \quad (3.217)$$

Αυτό απλοποιείται στη σχέση:

$$R(t) = R_0 \left[\frac{3(c_{10} - c_{1\%})RTR_0}{\sigma} \frac{D_1 t^{\frac{1}{2}}}{\pi R_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.218)$$

Για πολυσύνθετη περίπτωση έχουμε $N^3 - 2$ και η εξίσωση (3.213) παρέχει N σχέσεις. Όπως και να 'χει ο αριθμός των σχέσεων πίεσης – συγκέντρωσης που δίνεται στην μονή εξίσωση (3.214), παραμένει ανεξάρτητος του N . Γι' αυτό το λόγο ο αριθμός των οριακών συνθηκών είναι ανεπαρκής να κλείσει το σύστημα. Ένα πρόσθετο πακέτο συνθηκών απαιτούνται να συσχετίσουν κάθε μία από τις επιφανειακές συγκεντρώσεις. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν επιφανειακές συγκεντρώσεις σε σταθερές αναλογίες μεταξύ τους. Αυτό έχει βρεθεί να είναι πειραματικά μη ικανοποιητικό, σύμφωνα με τους Ward & Taker που όρισαν την αρχή του ελάχιστου βαθμού παραγωγής εντροπίας στη διεπιφάνεια. Έχει δειχθεί από τον Sadhal για την περίπτωση φυσαλίδων ότι αυτό ισοδυναμεί με τον ελάχιστο βαθμό παραγωγής εντροπίας σε ολόκληρο τον όγκο. Για χαμηλής πίεσης διάλυση φυσαλίδας αυτή η θεωρία είναι σύμφωνη με τα πειράματα.

Αστάθεια και Στις Δυο Φάσεις

Η συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας και μάζας για μια μονού συστατικού σταγόνα έχει αναπτυχθεί, για διάχυση Stefan στη συνεχή φάση από τους Chang & Davis. Αυτοί πέτυχαν ξεχωριστές λύσεις για τη θερμοκρασία και τα συστατικά κατάλληλες για κάθε φάση, για αυθαίρετες συνθήκες Dirichlet στη διεπιφάνεια. Αυτές οι λύσεις συνδέθηκαν μεταξύ τους μέσω της εξίσωσης Clausius – Clapeyron και άλλες συνθήκες συνέχειας για να αποδώσουν μια ολοκληρωτική εξίσωση που ολοκληρώθηκε αριθμητικά. Στην οριακή περίπτωση μικρού χρόνου για μια σταγόνα με T_0 , μέσα σε αέριο μέσο με T_∞ , μια έκφραση για την άμεση ($t = 0^+$) διεπιφανειακή θερμοκρασία έχει δοθεί με τη σχέση:

$$T_i(0^+) = T_\infty \left[1 - \frac{\frac{p_{sat}(T_\infty)}{\rho} - x_\infty \frac{kT_\infty}{\lambda Dc_t} \frac{\zeta D \frac{1}{\lambda} (T_0 - T_\infty)}{T_\infty}}{\frac{p_{sat}(T_\infty) \lambda}{\rho R T_\infty} + \frac{kT_\infty}{\lambda Dc_t} \frac{\zeta D \frac{1}{\lambda}}{T_\infty} + \frac{\hat{k}T_\infty}{\lambda Dc_t} \frac{\zeta D \frac{1}{\lambda}}{T_\infty}} \right] \quad (3.219)$$

όπου c_t αναπαριστά τη συνολική μοριακή συγκέντρωση στην αέρια φάση x_∞ είναι το κλάσμα mole του ατμού στο μακρινό πεδίο, R η παγκόσμια σταθερά αερίου σε σχέση με το μοριακό βάρος του ατμού και λ η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης του ατμού σε μονάδες ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Αριθμητικοί υπολογισμοί διεξήχθησαν για σταγόνες νερού εξατμιζόμενες σε αέρα στους 298 K και φθαλικό διβουτύλιο εξατμιζόμενο σε ήλιο στους 373 K. Βρέθηκε ότι η αυθαίρετη αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας της σταγόνας έχει μικρή επίδραση στην εξέλιξη της θερμοκρασίας των δύο συστημάτων.

Στο πεδίο των περιβαλλοντικών μελετών η απορρόφηση αερίων από την ατμόσφαιρα από τα σταγονίδια νερού είναι μεγάλου ενδιαφέροντος και έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές. Η μεταβατική συμπεριφορά έχει αριθμητικά ερευνηθεί από τους Huckaby & Ray. Αυτοί πέτυχαν την εξέλιξη του χρόνου της απορρόφησης SO_2 για διάφορα επίπεδα του υπερκορεσμού ή υποκορεσμού της αέριας φάσης, σύμφωνα με την ανάπτυξη ή την εξάτμιση αντίστοιχα. Η αύξηση της θερμοκρασίας εξ' αιτίας της λανθάνουσας θερμότητας απόθεσης λόγω συμπύκνωσης μειώνει τη διαλυτότητα του SO_2 και έτσι μειώνει το βαθμό απορρόφησης. Απ' την άλλη πλευρά, η εξάτμιση έχει αντίθετο αποτέλεσμα. Η επίδραση εξ' αιτίας των αλλαγών της διαλυτότητας με τη θερμοκρασία λαμβάνει χώρα μέχρι ενός αδιάστατου χρόνου $tR^2/\hat{D} < 1$. Πέραν αυτού του χρόνου παίζουν ρόλο οι αλλαγές του όγκου. Με τη συμπύκνωση η ακολουθούσα ανάπτυξη οδηγεί σε περισσότερο διαθέσιμο διαλύτη για την απορρόφηση του SO_2 . Γι' αυτό το λόγο για ένα δεδομένο αρχικό όγκο μιας σταγόνας, η ποσότητα του SO_2 που απορροφάται συνεχίζει να αυξάνει αλλά η ογκομετρική συγκέντρωση της διαλυμένης ουσίας παραμένει κάτω του σημείου κορεσμού (υποκορεσμός). Με την εξάτμιση η μείωση του διαλύτη οδηγεί σε υπερκορεσμό της διαλυμένης ουσίας και απορρόφηση.

Εξάτμιση Σταγόνας Καυσίμου

Σε ψυχώμενα συστήματα ψεκασμού, η κεντρική διαδικασία είναι η εξάτμιση της σταγόνας. Η εξάτμιση των σταγόνων έχει σ' ένα μεγάλο βαθμό ερευνηθεί σαν ένα αναπόσπαστο τμήμα της έρευνας καύσης σπρέι (αιωρούμενων σωματιδίων). Η βασική ύπαρξη των μελετών της εξάτμισης σταγόνας καυσίμου είναι να αναπτύξουν επαρκώς και με ακρίβεια ακόμα και αρκετά απλά μοντέλα για θέρμανση και εξάτμιση σταγονιδίου για χρησιμοποίηση σε ανάλυση ψεκασμού που εμπειριέχει ένα μεγάλο αριθμό σταγονιδίων. Ένα εξατμιζόμενο σταγονίδιο μπορεί να υπόκειται σ' ένα εύρος αριθμών Reynolds κατά τη διάρκεια της «ζωής» του. Γενικά ο αριθμός Reynolds θα αυξηθεί με το χρόνο καθώς και η διάμετρος του σταγονιδίου και η σχετική ταχύτητα μειωθούν. Αυτές είναι εξαιρέσεις σε μια τέτοια μονότονη μείωση στον αριθμό Reynolds. Για παράδειγμα σ' ένα περιβάλλον ταλαντευόμενης ροής, όπου μπορεί να συμβαίνουν διακυμάνσεις στη σχετική ταχύτητα και στη διεύθυνση, η μονότονη μείωση μπορεί να μη συμβεί. Σε τυπικές καταστάσεις καύσης, η μεταβατική θέρμανση σταγονιδίου μπορεί να παραμένει για ένα σημαντικό μέρος του χρόνου εξάτμισης του σταγονιδίου.

Σ' ένα θάλαμο καύσης, ένας ψεκασμός καυσίμου που τυπικά αποτελείται από σταγονίδια έχει ένα ευρύ φάσμα μεγεθών και ταχυτήτων. Μικρότερα σταγονίδια (διάμετρος < 30 μm) ουσιαστικά ακολουθούν το περιβάλλον πεδίο ροής και θα βρεθούν υπό το καθεστώς χαμηλού μεταφορικού αριθμού Reynolds ($Re < 1$) κατά τη διάρκεια της ύπαρξής τους. Μεγαλύτερα σταγονίδια (διάμετρος : 100μm), εξ' αιτίας της μεγάλης αδράνειας και ορμής είναι πιθανό να είναι σ' ένα καθεστώς ενδιάμεσου αριθμού Reynolds ($Re = O(100)$) για σημαντικό μέρος της ύπαρξής τους. Αυτά διεισδύουν βαθιά στον πυρήνα του ψεκασμού και εφόσον σχηματίσουν ένα σημαντικό κλάσμα μάζας επιδρούν στην όλη συμπεριφορά της διαδικασίας καύσης του ψεκασμού. Τα μικρότερα σταγονίδια παίζουν ένα σχετικά μικρότερο ρόλο καθώς συγκρινόμενα έχουν μικρότερη ζωή. Διάφορα μοντέλα έχουν αναπτυχθεί για να περιγράψουν τα φαινόμενα εξάτμισης και καύσης.

Οι περισσότερες των αναλυτικών αριθμητικών μελετών της εξάτμισης των σταγονιδίων συμπεριλαμβάνουν πολλές υποθέσεις. Η πιο διαδεδομένη είναι η υπόθεση μικρού αριθμού Mach έτσι ώστε η κινητική ενέργεια και η απώλεια ιξώδους να θεωρούνται αμελητέες. Εδώ ο αριθμός Mach ορίζεται με τη σχέση $M = (U_c / c)$ όπου U_c είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα και c είναι η ακουστική ταχύτητα στο μέσον. Η υπόθεση ιδανικού αερίου συχνά συμπεριλαμβάνεται για ένα πολυσύνθετο (πολλών συστατικών) μίγμα αέριας φάσης εκτός και αν εστιάζουμε σε καταστάσεις υψηλής πίεσης (σχεδόν κρίσιμης) εξάτμισης και καύσης. Η αέρια – υγρή διεπιφάνεια συχνά θεωρείται ότι είναι σε φάση ισορροπίας και περιγράφεται από την εξίσωση Clausius – Clapeyron. Η πυκνότητα και οι θερμοφυσικές παράμετροι της συνεχούς φάσης γενικά θεωρούνται μεταβαλλόμενες. Το ιξώδες της διασκορπισμένης φάσης θεωρείται μεταβαλλόμενο αλλά η πυκνότητα και άλλες ιδιότητες συνήθως θεωρούνται σταθερά.

Λόγω της εξάτμισης, τροποποιείται η σύνθεση της αέριας φάσης για την οποία στις περισσότερες περιπτώσεις καταλήγει σε πολύ σημαντικές αλλαγές των θερμοφυσικών ιδιοτήτων και έτσι και των σχετικών βαθμών μεταφοράς.

Με την εξάτμιση η επιφάνεια του σταγονιδίου οπισθοδρομεί μέσα στο υγρό. Οι επιδράσεις των μεταβατικών και μεταβαλλόμενων ιδιοτήτων της συνεχούς φάσης σ' ένα σταγονίδιο οκτανίου εξατμιζόμενο σε στάσιμο – ακίνητο αέρα έχουν αριθμητικά μελετηθεί. Υπολογισμοί έχουν αναφερθεί για σταγονίδια αρχικά στους 300 K με

$R_0 = (0.1, 0.5, 2.5) \cdot 10^{-4} \text{ m}$ εξατμιζόμενα σε θερμοκρασίες και πιέσεις σ' ένα εύρος τιμών 600 – 2000 K και 1 – 10 atm, αντίστοιχα. Η μελέτη διατυπώνει ότι για σκοπούς υπολογισμών της μηχανικής, η πιο κατάλληλη σχέση είναι ο απλός κανόνας του 1/3 όπου η θερμοκρασία προσαρμόζεται στη σχέση $T_r = T_s + \frac{1}{3}(T_e - T_s)$. Μια παρόμοια έκφραση εφαρμόζεται για το κλάσμα της μάζας.

Η επίδραση της παρουσίας μιας εξώθερμης αντίδρασης στη συνεχή φάση ανάμεσα στον ατμό του καυσίμου και ενός κατάλληλου αντιδραστήριου σε σφαιρικό – συμμετρική εξάτμιση, είναι αντικείμενο ενός αριθμού μελετών. Η ισορροπία ενέργειας στη διεπιφάνεια είναι:

$$kR^2 \left. \frac{dT}{dr} \right|_s = \left. \frac{\hat{k}R^2}{\hat{\rho}} \frac{dT}{dr} \right|_u + \frac{\dot{m}''_s}{4\pi} \frac{Q}{\lambda_{eff}} = \frac{\dot{m}''_s}{4\pi} \lambda_{eff}, \quad (3.220)$$

όπου \dot{m}''_s είναι ο βαθμός εξάτμισης της σταγόνας και οι δείκτες s και u αναπαριστούν τη σταθερή σημειογραφία για τη μεταφορά της μάζας για τις s και u επιφάνειες. Εδώ αυτές αναπαριστούν την αέρια και την υγρή πλευρά της διεπιφάνειας αντίστοιχα. Ο παράγοντας λ_{eff} ερμηνεύει και τα δύο, λανθάνουσα θερμότητα, υγρή θερμότητα. Για πολύ γρήγορους βαθμούς αντίδρασης, η ζώνη αντίδρασης είναι πολύ λεπτή. Σ' αυτό το όριο του μηδενικού πάχους της ζώνης για σταθερή συγκεκριμένη θερμότητα και μοναδιαίο αριθμό Lewis ($Le = 1$), ο σφαιρικό – συμμετρικός βαθμός εξάτμισης της μάζας είναι:

$$\dot{m}''_{ss} = 4\pi \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_R} \frac{dr}{\rho D r^2} \ln(1+B), \quad (3.221)$$

όπου ο αριθμός μεταφοράς B δίνεται από τη σχέση:

$$B \equiv \frac{h_s - h_s + vQY_{0\%}}{\lambda_{eff}} = \frac{vY_{0\%} + Y_{Fs}}{1 - Y_{Fs}}. \quad (3.222)$$

Εδώ το Q είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας καυσίμου. Η ακτινική θέση r_f της ζώνης της φλόγας για μια λεπτή φλόγα μπορεί να οριστεί από τη σχέση:

$$\frac{r_f}{R} = \frac{\ln(1 + vY_{0\%}) / (1 - Y_{Fs})}{\ln(1 + vY_{0\%})}. \quad (3.223)$$

Η μεταβατική εξίσωση ενέργειας για την υγρή φάση λύνεται για να αποδείξει τη σχέση ανάμεσα στη διεπιφανειακή θερμοκρασία και το βαθμό θέρμανσης του υγρού. Ο χρόνος θέρμανσης του σταγονιδίου τ_H είναι $O(R_0^2 / \hat{\alpha})$. Για σταθερό ρD ο χρόνος ζωής του σταγονιδίου τ_L εκτιμάται με τη σχέση $\hat{\rho} R_0^2 / \lambda_{eff} \rho D \ln(1+B)$, όπου ο αριθμός μεταφοράς B δίνεται από την εξίσωση (3.222). Ένας αριθμός οριακών περιπτώσεων σε σφαιρικά – συμμετρική εξάτμιση αναφέρονται σε βιβλιογραφικές πηγές. Όταν $k = \hat{k}$ και $\hat{c}_p = c_p$ ή B είναι μικρός, ο τ_H είναι μικρός συγκρινόμενος με τον τ_L , καταλήγοντας

έτσι σε μια γρήγορη απόδειξη μιας σχεδόν ομοιόμορφης θερμοκρασίας υγρού. Μπορεί να σημειωθεί ότι οι θερμοκρασίες της αέριας φάσης μερικών εκατοντάδων °C οδηγούν σε μικρό B. Η θερμοκρασία του υγρού συνεχίζει να αυξάνει μέχρι να φθάσει τη θερμοκρασία υγρού – βολβού T_{wb} , σ' ένα σημείο το οποίο η ροή θερμότητας που μπαίνει στο υγρό $\dot{\Phi}$ σταματάει. Ο χαρακτηριστικός χρόνος γι' αυτή τη θερμότητα τ^* εξαρτάται από τα $m\hat{c}$ και $\hat{\Phi}$. Για $\tau^* : O(\tau_H) = \tau_L$, σταθερό ρD και θεωρώντας αμελητέα την αρχική θερμική διάχυση κατά μήκος του εσωτερικού της σταγόνας, η επιφανειακή οπισθοδρόμηση ορίζεται από το νομό d^2 :

$$\frac{\zeta R \dot{\Phi}^2}{h R_0} = \frac{\zeta}{h} - \frac{t \dot{\Phi}}{\tau_L} \quad (3.224)$$

Για $\tau^* : O(\tau_L) \approx \tau_H$, ένα μοντέλο της μεταφοράς της θερμότητας που βασίζεται στη μέση θερμοκρασία του υγρού (μοντέλο ταχείας ανάμιξης) θα υποτιμηθεί την επιφανειακή θερμοκρασία του σταγονιδίου κατά τη διάρκεια της πρώιμης περιόδου της εξάτμισης. Σαν αποτέλεσμα ο βαθμός πρώιμης εξάτμισης θεωρείται χαμηλότερος σε σχέση με αυτόν που βρέθηκε στην εξίσωση ενέργειας της μεταβατικής υγρής φάσης (μοντέλο οριακής διάχυσης). Αλλά με μια υποτιμημένη επιφανειακή θερμοκρασία η αντίστοιχη ροή θερμότητας στη σταγόνα κατά τη διάρκεια της πρώιμης περιόδου είναι υπερεκτιμημένη. Το σταγονίδιο τελικά θεωρείται ότι εξατμίζεται σ' ένα υψηλότερο βαθμό συγκρινόμενο με τη λύση του μοντέλου οριακής διάχυσης. Για μικρό \hat{k} ή εάν το \hat{c}_p ή το B είναι μεγάλα, ο τ_H είναι πολύ μεγαλύτερος απ' ότι ο τ_L . Μπορεί να σημειωθεί ότι οι θερμοκρασίες της αέριας φάσης μερικών χιλιάδων °C οδηγούν σε μεγάλο B. Ένα ημισταθερό λεπτό θερμικό στρώμα μπορεί να θεωρηθεί μέσα στη σταγόνα κοντά στην επιφάνεια. Σ' αυτή την περίπτωση εάν η θερμική διάχυση στο λεπτό στρώμα θεωρείται αμελητέα, ο βαθμός εξάτμισης ορίζεται από ακόμα ένα νόμο του d^2 αλλά με μια μικρότερη απόλυτη τιμή της κλίσης ενός χρονικού διαγράμματος.

Ο Avedisian και οι συνεργάτες του διεξήγαγαν μια σειρά συστηματικών και πολύ προσεκτικών πειραματικών μελετών πάνω σε σφαιρικό – συμμετρικό χαμηλού – βαρυτικού σταγονιδίου καύση. Όπως σημειώθηκε από τους συγγραφείς «Η ελκτικότητα αμελητέας ροής ατμού γύρω από καιγόμενο σταγονίδιο μ' ένα μοντέλο ανάπτυξης αντιτίθεται στις δυσκολίες επινοώντας ένα βασικό πείραμα που καθιστά κατάλληλη αυτή την υπόθεση». Τα πειράματα διεξήχθησαν σε μια σταγόνα υψωμένη μέσα σε ελεύθερης πτώσης πακέτο. Η διαδικασία αποτελείται από προώθηση ενός σταγονιδίου από μια πιεζοηλεκτρική γεννήτρια σε μια σχεδόν κάθετη – κατακόρυφη τροχιά. Όταν αυτό το σταγονίδιο έφθασε στην κορυφή της ανοδικής του τροχιάς (αντιστοιχώντας σε $Re < 0.01$) αναφλέχθηκε από σπινθήρα από τα ηλεκτρόδια που ήταν τοποθετημένα δίπλα στην κορυφή της τροχιάς. Το σταγονίδιο κήκε σ' ένα θάλαμο με αέρα θερμοκρασίας δωματίου σε 0,101 MPa με μια σχετική υγρασία περίπου 30%. Ο θάλαμος καύσης και η σχετική εγκατάσταση οπτικών οργάνων αφέθηκαν σε μια ελεύθερη πτώση και κατά τη διάρκεια της περιόδου της πτώσης, η εξέλιξη της καύσης καταγράφηκε από μια υψηλής ταχύτητας κινηματογραφική κάμερα. Η περίοδος παρατήρησης ήταν 1,2 s που ήταν αρκετό διάστημα για να παρατηρηθεί η εξέλιξη της καύσης του σταγονιδίου και ολοκληρώθηκε όταν η συσκευασία της σταγόνας πρόσκρουσε σ' ένα σπογγώδη θάλαμο αέρα. Οι επιδράσεις της άνωσης ήταν ελάχιστες σε χαμηλά επίπεδα βαρύτητας που ήταν

περίπου ίσα με 10^{-3} φορές της βαρύτητας της γης στο κινούμενο πλαίσιο αναφοράς. Με $g/g_0 : 10^{-3}$ για τα μεγέθη σταγονιδίου που εξετάστηκαν ο αριθμός Grashof είναι πολύ μικρός ($Gr_0 : 10^{-5}$). Στα σταγονίδια που εξετάστηκαν περιλαμβάνονταν η – επτάνιο, τολουένιο, μίγμα 5%, 25% και 50% κατ’ όγκο τολουένιο σε μεθανόλη και 1 – 1 - χλωρο – οκτάνιο. Οι αρχικές διαμέτροι του σταγονιδίου κυμαίνονταν σ’ ένα εύρος τιμών 0,4 – 1,1 mm. Οι μετρημένοι βαθμοί καύσης ήταν σε συμφωνία με τις προβλέψεις του νόμου του d^2 με θεωρίες που υποθέτουν σφαιρική συμμετρία, σταθερές ιδιότητες και θεωρούν αμελητέες τις ιδιότητες μεταβατικής θέρμανσης μέσα στο σταγονίδιο. Με αυτές τις θερμοκρασίες θεωρήσαμε ένα σταγονίδιο στη θερμοκρασία υγρού βολβού στην στιγμιαία ανάφλεξη του και υποθέσαμε ενός βήματος χημική αντίδραση στο μέτωπο της φλόγας. Με βάση αυτές τις θεωρίες ο νόμος d^2 εκφράζεται με τη σχέση:

$$\frac{dd^2}{dt} = -K_0 = -8 \ln(1+B), \quad (3.225)$$

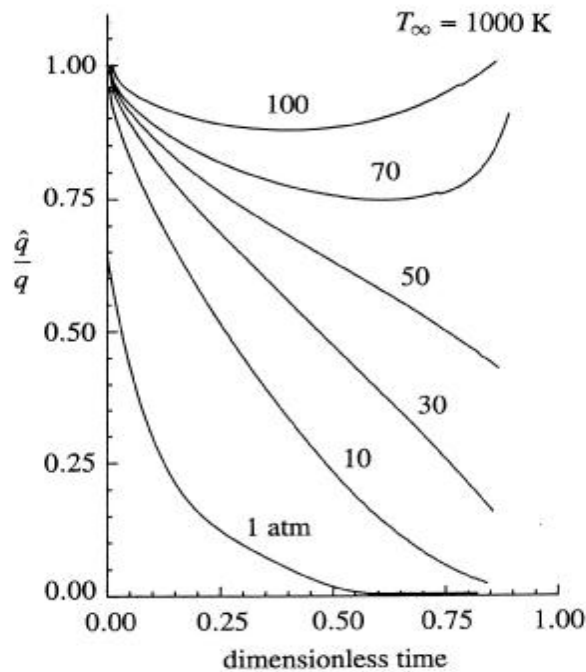
όπου $B = \frac{1}{k_p} (T_b - T_\infty) + Q Y_{O_2} v_F M_F / v_O M_O \frac{d_0}{\lambda}$, k_0 η σταθερά του βαθμού καύσης, T_b το φυσιολογικό σημείο βρασμού του καυσίμου, Q η θερμότητα καύσης, M_F και M_O οι μοριακές μάζες του καυσίμου και του οξυγόνου αντίστοιχα, $\tau = t / (\hat{\rho} c_p d_0^2 / k)$ και d_0 η αρχική διάμετρος ακριβώς πριν την ανάφλεξη. Ο βαθμός καύσης εδώ είναι ανεξάρτητος του d_0 . Με άλλα λόγια η εξέλιξη της διαμέτρου μπορεί να εκφραστεί εξ’ αιτίας της σταθεράς του βαθμού καύσης K_0 με τη σχέση:

$$d^2 = d_0^2 - K_0 t. \quad (3.226)$$

Με την υπόθεση ημισταθερής καύσης, ο λόγος της διαμέτρου του σταγονιδίου προς τη διάμετρο της φλόγας d_f είναι επίσης σταθερός. Ωστόσο ο σχηματισμός καπνού μεταβάλλει αυτές τις εξαρτήσεις.

Επιδράσεις υψηλής πίεσης. Σε πολλές ψεκασμού – καύσης διατάξεις όπως οι υγρού καυσίμου προωθητικές μηχανές (rocket, πυραυλοκίνητες) και οι μηχανές diesel, η εξάτμιση μπορεί να συμβεί σε πιέσεις κοντά ή πάνω από την κρίσιμη πίεση του καυσίμου. Κάτω από αυτές τις συνθήκες πολλές επιδράσεις που είναι συνήθως αμελητέες σε χαμηλό και μέτριο περιβάλλον πιέσεων χρειάζεται να επανεκτιμηθούν. Τέτοιες επιδράσεις περιλαμβάνουν, το μεταβατικό χαρακτήρα της αέριας φάσης, τη μη – ιδανική συμπεριφορά της αέριας φάσης, την πραγματική επίδραση στη θερμότητα της ατμοποίησης, τη συνθήκη ισορροπίας ατμού – υγρού στην επιφάνεια του σταγονιδίου και τη διαλυτότητα του περιβάλλοντος αερίου στην υγρή φάση. Η σφαιρική – συμμετρική εξάτμιση ενός σταγονιδίου η – εξανίου σ’ ένα περιβάλλον αζώτου για πιέσεις 1 -100 atm και θερμοκρασίες 500 – 1500 K, ερευνήθηκε αριθμητικά από τους Jia & Gogos. Αυτές οι μελέτες επίσης περιλαμβάνουν αναφορές των πιο σημαντικών πρόσφατων μελετών πάνω σ’ αυτό το πεδίο. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι στη χαμηλότερη θεωρούμενη θερμοκρασία (500 K), η ζωή ενός σταγονιδίου αυξάνει μονοτονικά με την περιβάλλουσα πίεση σ’ ένα εύρος πιέσεων που έχει ερευνηθεί. Σε μια υψηλότερη θερμοκρασία παρουσιάζει ένα μέγιστο με την περιβάλλουσα πίεση. Σε πολύ κρίσιμες πιέσεις η θερμοκρασία στην επιφάνεια του σταγονιδίου συνεχίζει να αυξάνει καθ’ όλη τη διάρκεια ζωής του. Σε υψηλές

θερμοκρασίες ($T_\infty = 1200 \text{ K}$) η ζωή (διάρκεια ύπαρξης) του σταγονιδίου μειώνεται μονοτονικά με την πίεση. Σ' ένα περιβάλλον πλούσιο σε καύσιμο, σε σχετικά χαμηλές περιβάλλουσες θερμοκρασίες και υψηλές περιβάλλουσες πιέσεις, συμπύκνωση μπορεί να συμβεί κατά τη διάρκεια του αρχικού μέρους της ζωής του σταγονιδίου. Σε υψηλές πιέσεις ένα μοντέλο που θεωρεί αμελητέα τη διαλυτότητα του αερίου θα αποδώσει έτσι κι αλλιώς μικρότερη αξία στη ζωή του σταγονιδίου (χαμηλή περιβάλλουσα θερμοκρασία) ή στην κατάρρευση (διάλυση), αποτυγχάνοντας να προβλέψει το σωστό κριτήριο για την ισορροπία ατμού –υγρού (υψηλή περιβάλλουσα θερμοκρασία).



ΣΧΗΜΑ 3.11: Μεταβολή διεπιφανειακής μεταφοράς θερμότητας με το χρόνο για διαφορετικές περιβάλλουσες πιέσεις.

Η μεταβολή στο κλάσμα θερμότητας του υγρού ($\hat{\phi}_s / \phi_s$) σαν συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου (t/τ_L) για διάφορες περιβάλλουσες πιέσεις, για $T_\infty = 1000 \text{ K}$ φαίνεται στο σχήμα 3.11.

Εδώ $\hat{\phi}_s$ είναι η μεταφορά θερμότητας μέσα στην υγρή φάση που τείνει να θερμάνει το εσωτερικό του σταγονιδίου, ϕ_s είναι η μεταφερόμενη θερμότητα στην επιφάνεια του σταγονιδίου από την συνεχή φάση και τ_L είναι ο χρόνος ζωής του σταγονιδίου. Κάτω από πολύ κρίσιμες συνθήκες, η ενέργεια που απαιτείται για αλλαγή φάσης τείνει στο μηδέν δηλαδή, $(\hat{\phi}_s / \phi_s) \rightarrow 0$. Στη συνέχεια αναφέρουμε μια πρόσφατη μελέτη των επιδράσεων της υψηλής πίεσης, χρησιμοποιώντας μια αριθμητική διαδικασία που είναι σταθερή και έχει αποδώσει συγκλίνοντα αποτελέσματα.

Ένα ενδεχόμενο σχέδιο που περιλαμβάνει το βήμα διπλού – χρόνου (μη – πραγματικός και πραγματικός χρόνος) με τεχνική ολοκλήρωσης, χρησιμοποιείται για να λύσει τις εξισώσεις και τις σχετιζόμενες διεπιφανειακές οριακές συνθήκες, κατευθύνοντας την εξάτμιση και την καύση του σταγονιδίου του καυσίμου σε

υποκρίσιμα και υπερκρίσιμα περιβάλλοντα. Το πλήρως ταιριασμένο ενδεχόμενο σχέδιο που περιγράφεται εδώ είναι κατάλληλο για την επίλυση χημικά αντιδρώντων ροών πάνω σ' ένα μεγάλο εύρος αριθμών Mach. Συγκεκριμένα το σχέδιο είναι κατάλληλο για την ανάλυση πολύ χαμηλού αριθμού Mach συμπιεστών ροών όπου άλλα καθιερωμένα σχέδια έχουν δυσκολίες που σχετίζονται με δύσκολες διαφορικές εξισώσεις, χαρακτηριστική ρίζα ανομοιότητας, αριθμητική σταθερότητα, αργή σύγκλιση και σφάλματα που προκύπτουν από το χειρισμό των όρων της πίεσης και ροής της ορμής στην εξίσωση ορμής. Η ανάλυση βασίζεται σε μια ελεγχόμενου όγκου διατύπωση που περιλαμβάνει ολοκληρωμένες μορφές των εξισώσεων διατήρησης όπως περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho Q dV + \int_{\Omega} \rho F_1 g dS - \int_{\Omega} \rho F_2 g dS = \int_{\Omega} \rho H g dS, \quad (3.227)$$

όπου το Q δηλώνει εξαρτώμενες μεταβλητές όπως πυκνότητα, μάζα, ενέργεια και κλάσμα της μάζας των συστατικών, F_1 είναι η ροϊκή ποσότητα όπως ορμή της ροής συν την κυμαινόμενη συνιστώσα της πίεσης, F_2 είναι η επιφανειακή ροή και H είναι ο όρος της πηγής. Ο όγκος ελέγχου θεωρείται σφαιρικού σχήματος και είναι ομοαξονικός (ομόκεντρος για την περίπτωση) με το σταγονίδιο. Ένα σύστημα κινούμενου πλέγματος στη συνεχή φάση εφαρμόζεται για να υπολογιστεί η παλινδρόμηση της επιφάνειας του σταγονιδίου. Όλα τα πεπερασμένα κελιά όγκου του συστήματος του πλέγματος, κινούνται έναντι του κέντρου της σταγόνας με μια ταχύτητα ίση με την ταχύτητα της επιφανειακής παλινδρόμησης. Στη διασκορπισμένη φάση εφαρμόζεται ένα σύστημα πλέγματος με χρονικά εξαρτώμενο μέγεθος που επίσης κινείται με την ταχύτητα παλινδρόμησης της επιφάνειας. Περιγραφές των θερμοφυσικών ιδιοτήτων σε αυξημένες πιέσεις και θερμοκρασίες απαιτούν ιδιαίτερες θεωρήσεις. Για παράδειγμα η δυαδική διαχυτότητα της μάζας για τη συνεχή φάση έχει επιτευχθεί εδώ απ' τη θεωρία των Chapman – Enskog με διορθώσεις για τις επιδράσεις της υψηλής πίεσης. Η διαχυτότητα της διασκορπισμένης φάσης έχει εκτιμηθεί με τη χρήση του μοντέλου Hayduk – Minhas. Οι άλλες θερμοφυσικές ιδιότητες έχουν οριστεί με την εφαρμογή ανάμιξης και συνδυασμού κανόνων. Μια τροποποιημένη εξίσωση Soave – Redlich – Kwong έχει χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του παράγοντα της συμπιεστότητας στη συνεχή φάση. Για την πυκνότητα της διασκορπισμένης φάσης έχει χρησιμοποιηθεί μια κατάλληλη καμπύλη από εμπειρικά δεδομένα. Για την πρόβλεψη των βαθμών αντίδρασης κατά τη διάρκεια της καύσης ένας απλού – βήματος σφαιρικός μηχανισμός αντίδρασης υιοθετήθηκε. Ωστόσο δεν έχει γίνει ιδιαίτερη προσπάθεια για τον υπολογισμό της επίδρασης της πίεσης στη χημική κινηματική. Η φάση ισορροπίας ατμού –υγρού στη διεπιφάνεια, έχει θεωρηθεί στη βάση της ισότητας των πιέσεων, και θερμοκρασιών για κάθε συστατικό για τις δύο φάσεις στη διεπιφάνεια. Όταν το σταγονίδιο φτάνει στην κρίσιμη κατάσταση ανάμιξης, οι διεπιφανειακές συνθήκες περιγράφονται από τις χαρακτηριστικές της κρίσιμης επιφάνειας.

Η τεχνική του διπλού – χρόνου βήματος κατασκευάζεται σε δύο στάδια. Αρχικά με σκοπό να αποφευχθεί η ιδιαίτερη συμπεριφορά του όρου της πίεσης στην εξίσωση της ορμής, αυτός ο όρος αναλύεται σε ένα χρονικά σταθερό και ένα κυμαινόμενο τμήμα π. χ

$$p(r, t) = p_0 + p'(r, t). \quad (3.228)$$

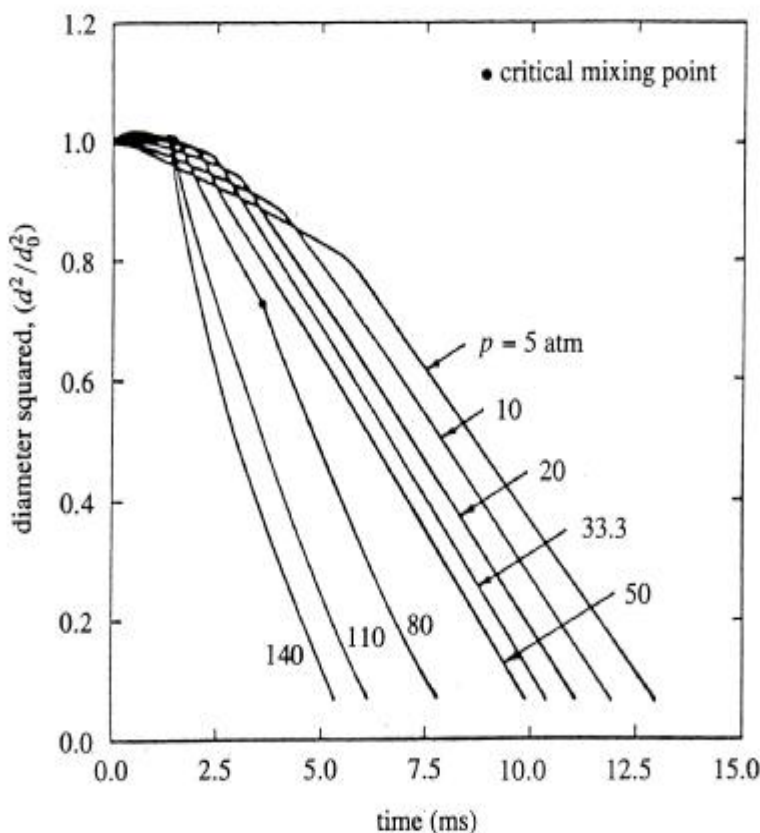
Εδώ το p_0 αναπαριστά την αρχική περιβάλλουσα πίεση και το p^2 αναπαριστά την αλλαγή λόγω της εξαέρωσης και της καύσης του σταγονιδίου. Το σταθερό τμήμα δεν παίζει κανένα περαιτέρω ρόλο στην εξίσωση ορμής. Παρατηρήθηκε ότι ενώ η ανάλυση της πίεσης απομακρύνει την ιδιαίτερη συμπεριφορά, παρουσιάζει ένα σοβαρό αριθμητικό πρόβλημα στην αποσύνδεση της εξαρτημένης μεταβλητής Q από τους άλλους όρους της εξίσωσης (3.227) και σταθερός ενδεχόμενος χρόνος που προάγει τη διαδικασία δε μπορεί να επιτευχθεί. Σα δεύτερο βήμα στο νέο σχέδιο, μια διπλού – χρόνου βήματος μέθοδος παρουσιάζεται για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία και να παρουσιάσει την αριθμητική ολοκλήρωση. Σ' αυτή τη διαδικασία μια μη – πραγματική χρονική παράγωγος της μορφής $\Gamma(\frac{Q}{\tau})$ προστίθεται στις εξισώσεις διατήρησης και αυτός ο όρος μηδενίζεται στη συνθήκη σύγκλισης. Εδώ το Γ είναι ένας «κατάλληλος» προαπαιτούμενος παράγοντας που παίρνει τις τιμές της μονάδας για την εξίσωση διατήρησης της μάζας και $\frac{1}{\rho}(\rho^2 \beta)^+$ για την εξίσωση της ορμής.

Επίσης το Q είναι η «κατάλληλη» αρχική μεταβλητή και συγκεκριμένα στην εξίσωση διατήρησης της μάζας είναι ο βαθμωτός όρος πίεσης $p^2 \beta$. Ο βαθμωτός παράγοντας β χρησιμοποιείται για να εξασφαλίσει ότι όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος έχουν την ίδια τάξη μεγέθους και στην πραγματικότητα περίπου το ίδιο μέγεθος. Μια ανάλυση των χαρακτηριστικών ριζών υποδεικνύει ότι το $\beta \gg u^2$ αποδίδει ικανοποιητικές χαρακτηριστικές ρίζες για όλους τους αριθμούς Mach. Η υψηλότερη ευαισθησία του $p^2 \beta$ συγκρινόμενο με το ρ σε χαμηλούς αριθμούς Mach, εγγυάται μια ισχυρή σχέση ταχύτητας – πίεσης στην εξίσωση ορμής. Οι τροποποιημένες κατευθύνουσες εξισώσεις στο σχέδιο διπλού – χρόνου βήματος παίρνουν τη μορφή:

$$\Gamma \frac{1}{\tau} \zeta_V \bar{Q} dV + \frac{1}{\tau} \zeta_V Q dV + \zeta_S F_1 g dS - \zeta_S F_2 g dS = \zeta_S H g dS, \quad (3.229)$$

όπου τ είναι ο μη – πραγματικός χρόνος. Με αυτή τη διατύπωση ένα πλήρως ενδεχόμενο σχέδιο έχει χρησιμοποιηθεί για να παρουσιάσει την αριθμητική ολοκλήρωση στον μη – πραγματικό χρόνο τ . Μια συγκλίνουσα λύση για τ αντιστοιχεί σε μια χρονικά ορθή λύση για t . Είναι καθορισμένο ότι με τη διαδικασία διπλού χρόνου – βήματος, η χρονική ακρίβεια βελτιώνεται πάρα πολύ με περιορισμένη αύξηση στην υπολογιστική τιμή. Επιπρόσθετα η διαδικασία είναι πάρα πολύ χρήσιμη εφόσον επιτρέπει η επιλογή του βήματος ολοκλήρωσης του χρόνου να υπαγορεύεται από τη φυσική διαδικασία αντί των εμποδίων της αριθμητικής σταθερότητας.

Οι χαρακτηριστικές της εξάτμισης και της καύσης σταγονιδίων καυσίμου η – επτανίου στον αέρα σε πιέσεις μεταξύ 5 και 140 atm έχουν αριθμητικά οριστεί. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο βαθμός εξαέρωσης του σταγονιδίου αυξάνει προοδευτικά με την πίεση, με μια γρήγορη αύξηση κοντά στην κρίσιμη πίεση. Σε υπερκρίσιμες πιέσεις η διάχυση στη συνεχή φάση είναι ο μηχανισμός ελέγχου για την καύση. Η χρονική μεταβολή του τετραγώνου της διαμέτρου του σταγονιδίου σε διάφορες πιέσεις φαίνεται στο σχήμα 3.12.



ΣΧΗΜΑ 3.12: Χρονική μεταβολή του τετραγώνου της διαμέτρου του σταγονιδίου για διάφορες πιέσεις. Σύστημα n – επτανίου – αέρα.

Η αρχική διάμετρος του σταγονιδίου παίρνεται ότι είναι $100\mu\text{m}$. Σε χαμηλές πιέσεις όταν το σταγονίδιο φτάνει την μη πραγματική υγρού βολβού κατάστασή του, η περιοχή της επιφανείας μεταβάλλεται σχεδόν γραμμικά με το χρόνο ακολουθώντας τον κλασσικό νόμο του d^2 . Σε υψηλές πιέσεις οι συνεχείς μεταβολές της διασκορπισμένης φάσης και οι διεπιφανειακές ιδιότητες επηρεάζουν τη συμπεριφορά του νόμου του d^2 . Καθώς η επιφάνεια του σταγονιδίου φθάνει το κρίσιμο σημείο ανάμιξης, η λανθάνουσα θερμότητα των εξατμιζόμενων σταγονιδίων τείνει στο μηδέν και ο βαθμός παλινδρόμησης της επιφανείας αυξάνει. Καθώς η περιβάλλουσα πίεση αυξάνει από 110 σε 140 atm η μειωμένη διαχυτότητα της μάζας καταλήγει σε μια επιβράδυνση της αύξησης του βαθμού παλινδρόμησης με την πίεση.

Φαινόμενα Ανάφλεξης και Απόσβεσης με ένα Στάσιμο – Σταθερό Σταγονίδιο

Τα φαινόμενα ανάφλεξης και απόσβεσης μ' ένα στάσιμο σταγονίδιο έχουν μελετηθεί υπολογίζοντας την πεπερασμένου βαθμού κινηματική και αναλύοντας τη δομή της φλόγας με τη μέθοδο ενεργοποίησης ασυμπτωτικών ενέργειας (activation energy asymptotics - AEA). Πρόσφατα μια πολυδιαβαθμισμένη AEA ανάλυση της σύνθεσης και απόσβεσης μιας φλόγας διάχυσης για τον υπολογισμό της ακτινοβολίας της φλόγας σε μια σφαιρική – συμμετρική περίπτωση μ' ένα σταγονίδιο καυσίμου, παρέχεται. Το πάχος της ζώνης ακτινοβολίας είναι ασυμπτωτικά ενδιάμεσο σε αυτά της ζώνης αντίδρασης και του κυρίως όγκου του ροϊκού πεδίου. Η

μελέτη προσδιόρισε την ύπαρξη διπλών σημείων καμπής. Συγκεκριμένα δείχνει ότι μ' ένα δεδομένο σύστημα καυσίμου / οξειδωτικού, η καύση σταθερού σταγονιδίου είναι πιθανή μόνο για μεγέθη σταγονιδίου μέσα σ' ένα συγκεκριμένο εύρος. Η απόσβεση μικρότερων σταγονιδίων προκαλείται από καθαρά πεπερασμένου βαθμού κινηματική ενώ η απόσβεση μεγαλύτερων σταγονιδίων προκαλείται από υπερβολική απώλεια θερμότητας λόγω ακτινοβολίας. Η δομή μιας σφαιρικό –συμμετρικής φλόγας διάχυσης γύρω από ένα σταγονίδιο η – επτανίου έχει αναλυθεί χρησιμοποιώντας βαθμό ασυμπτωτικών. Από την ανάλυση οι διάμετροι απόσβεσης για σταγονίδια η – επτανίου έχουν εκτιμηθεί για διάφορες πιέσεις και συγκεντρώσεις του περιβάλλοντος οξυγόνου. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι διάμετροι απόσβεσης είναι ευαίσθητες στον αριθμό των ριζών που εμπλέκονται στην διάσπαση κάθε μορίου καυσίμου. Η σπουδαιότητα των μελετών των μη – μοναδιαίων αριθμών Lewis επίσης αναφέρεται σ' αυτές τις μελέτες.

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ

Στο καθεστώς όπου $Re \ll 1$ το μεγαλύτερο μέρος της δουλειάς περιέχει μελέτες στις οποίες επίσης έχουμε $Pe \ll 1$. Και αυτό, διότι πολλά από τα πρακτικά υλικά όπως το νερό και τα καύσιμα υδρογονανθράκων έχουν αριθμό Prandtl κοντά στη μονάδα. Ωστόσο παρά του ασθενούς μετασχηματισμού σε κάποια συστήματα, η αλλαγή φάσης μπορεί να προκαλέσει ένα μεγάλο ακτινικό πεδίο, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα. Μ' ένα μεγάλο ακτινικό πεδίο, οι αδρανειακές επιδράσεις πρέπει να ληφθούν υπ' όψη ακόμα και για ένα αργά κινούμενο ρευστό σωματίδιο. Ενώ μια σταγόνα υπόκειται σε αργή ανάπτυξη ή υποβάθμιση εξ' αιτίας της αλλαγής φάσης, μια φυσαλίδα υφίσταται μια γρήγορη αλλαγή μεγέθους κάτω από αντίστοιχες κινητήριες δυνάμεις. Οι εξατμιζόμενες φυσαλίδες γενικά αναπτύσσονται πολύ γρήγορα και οι αδρανειακές επιδράσεις της μετατροπής επίσης γίνονται σημαντικές καθώς η δύναμη της άνωσης αυξάνει και ο αριθμός Re υπερβαίνει γενικά τη μονάδα. Συνεπώς τα αποτελέσματα για $Re \ll 1$ είναι από πρακτικής σπουδαιότητας μόνο για σταγόνες. Στην αναφορά μας εδώ, η συμπύκνωση στις σταγόνες εκτίθεται πρώτα, ακολουθούμενη από την εξάτμιση και την καύση.

Συμπύκνωση στις Σταγόνες

Η στρωτή συμπύκνωση σ' ένα σταγονίδιο ακτίνας R που μεταφέρεται αργά με μια σταθερή ταχύτητα U_∞ σε μια μεγάλη αναλογία ενός δυϊκού μίγματος από το δικό του ατμό (συμπύκνωμα) και ένα αέριο (μη συμπύκνωμα), έχει ερευνηθεί από τους Chung, Ayyaswamy & Sadhal. Η πρώτη μελέτη αποτελείται από μια ημισταθερή ανάλυση διαταραχής στο εξωτερικό τμήμα και μερικά αριθμητικής πραγμάτευσης της μεταβατικής αύξησης θερμότητας της σταγόνας. Το σταγονίδιο θεωρείται ότι έχει μια πλήρως αναπτυσσόμενη εσωτερική κίνηση. Ο μεταφορικός αριθμός Reynolds είναι $Re_\infty = \varepsilon = 1$, ενώ ο αριθμός Reynolds που σχετίζεται με την κάθετη ταχύτητα, λόγω της συμπύκνωσης στη διεπιφάνεια $Re_c = u_{c,max} R / \nu_\infty$ μπορεί να είναι της τάξεως της μονάδας. Εδώ $u_{c,max}$ είναι το μέγιστο της κάθετης ταχύτητας u_c στη διεπιφάνεια. Η σταγόνα είναι αρχικά ψυχρή σε μια θερμοκρασία T_0 ενώ το δυϊκό μίγμα παίρνεται ως

κορεσμένο σε μια θερμοκρασία $T_{\infty} > T_0$. Η θερμοκρασία δίνεται αδιάστατα με τη σχέση $\Theta = (T - T_{\infty}) / (T_0 - T_{\infty})$ και το αδιάστατο κλάσμα μάζας είναι $\omega = (m - m_{\infty})$.

Το κλάσμα μάζας m_{∞} για το αέριο συστατικό παίρνεται ότι είναι όπως προκαθορίστηκε. Η μεταφορά θερμότητας και μάζας στην αέρια φάση θεωρείται σαν ημισταθερή ενώ η μεταφορά θερμότητας στη σταγόνα θεωρείται σα μεταβατική διαδικασία. Αυτή η προσέγγιση δικαιολογείται παρατηρώντας ότι οι διαχυτότητες, α και D είναι πολύ υψηλότερες από τις $\hat{\alpha}$ και \hat{D} που ελέγχουν το χρόνο αύξησης της θερμότητας της σταγόνας. Τα ροϊκά πεδία και στις δύο φάσεις θεωρούνται σαν ημισταθερά. Η ακαριαία πτωτική ταχύτητα της σταγόνας διατυπώνεται μέσω μιας ισορροπίας μεταξύ οπισθελκουσών και βαρυτικών δυνάμεων ότι είναι:

$$U_{\infty}(t) = \frac{(\hat{\rho} - \rho_{\infty})gR^2}{3U_0 + \frac{C_1}{2U_0}\mu_{\infty}}, \quad (3.230)$$

όπου C_1 δίνεται από την εξίσωση (3.80) και $U_0 = U_0^R R / \nu$, ο ακτινικός αριθμός Reynolds. Εδώ U_0^R είναι η ακτινική ταχύτητα στην επιφάνεια της σταγόνας με την απουσία μεταφοράς και μ_{∞} είναι το ιξώδες της συνεχούς φάσης του περιβάλλοντος μίγματος. Για μια κατάσταση μη – συμπύκνωσης έχουμε τη σχέση:

$$U_{\infty}(t) = \frac{1}{3} \frac{gR^2 (\hat{\rho} - \rho_{\infty})}{\mu_{\infty}} \frac{2\mu_{\infty} + 2\hat{\mu}}{2\mu_{\infty} + 3\hat{\mu}}, \quad (3.231)$$

που είναι ίδια με την έκφραση της U_T που δίνεται από την εξίσωση (3.25), εκτός του όρου της διαφοράς πυκνότητας. Οι εξισώσεις της ενέργειας και των συστατικών για τη συνεχή φάση έχουν λυθεί μέσω μιας ιδιαίτερης ισοδύναμης – ασυμπτωτικής τεχνικής λόγω της ύπαρξης μιας περιοχής ανομοιομορφίας γύρω από το σημείο στο άπειρο. Οι εξισώσεις έχουν επεκταθεί σε σχέση με τη μικρή παράμετρο ϵ και των συναρτήσεων Legendre και λύθηκαν με ακρίβεια μέσω εσωτερικής και εξωτερικής ισοδυναμίας. Η μεταβατική αύξηση της θερμοκρασίας στο εσωτερικό της σταγόνας έχει επιλυθεί από τη μέθοδο σειρών και ταιριάζει στη διεπιφάνεια με τη λύση της συνεχούς φάσης.

Ένα σχέδιο του τύπου που δίνεται στις εξισώσεις (3.53 – 3.56) έχει συμπεριληφθεί για την ταχύτητα και τα πεδία πίεσης, τη θερμοκρασία και το κλάσμα της μάζας. Το μεγάλο ενδιαφέρον με τα προβλήματα αλλαγής φάσης είναι με το χειρισμό των διεπιφανειακών και οριακών ροϊκών συνθηκών. Οι παρακάτω συνθήκες όσον αφορά τα αδιάστατα μεγέθη θεωρούνται:

Αρχική συνθήκη:

$$\hat{\Theta} = 1 \quad \text{για} \quad t=0. \quad (3.232)$$

Οριακού πεδίου συνθήκες:

$$\Theta \approx 0, \quad \omega \approx 0, \quad u \approx \epsilon i \quad \text{καθώς} \quad r \approx \infty, \quad (3.233)$$

όπου i είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ομοιόμορφης ροής

Διεπιφανειακές συνθήκες για $r = 1$:

$$\begin{aligned} (U_{00}u_0 + \varepsilon u_1^A)_{gr} &= \varepsilon \hat{u}_1^A t, \\ \tau : nt &= \varphi_\mu \hat{r} : nt, \\ \Theta &= \hat{\Theta}, \\ (U_{00}u_0 + \varepsilon u_1^A)_{gr} &= \frac{1}{m_i Sc} (P \omega)_{gr}, \end{aligned} \quad (3.234)$$

$$\frac{i}{\kappa} \frac{Pr}{Ja} (U_{00}u_0 + \varepsilon u_1^A) + P \Theta_{i\delta}^{\omega} = \varphi_k P \hat{\Theta} g_n,$$

όπου m_i είναι το μη συμπυκνώσιμο κλάσμα μάζας στη διεπιφάνεια, τ η αδιάστατη εφελκυστική τάση και τα t και n αναφέρονται στα μοναδιαία εφαπτομενικά και μοναδιαία κάθετα διανύσματα, αντίστοιχα. Η συνολική κάθετη ταχύτητα στη διεπιφάνεια διαταράσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$u_{gr} = U_{00} + \varepsilon u_1^A g_n = U_{00} + \varepsilon U_1^R(\theta) + O(\varepsilon^2), \quad (3.235)$$

όπου $-\varepsilon U_1^R$ αναπαριστά μια αύξηση στην επηρεασμένη από τη συμπύκνωση ταχύτητα που απορρέει από τη μεταφορά. Οι άλλες μεταβλητές διαταράσσονται μ' ένα αντίστοιχο τρόπο. Εδώ το $U_1^R(\theta)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του θ που εν μέρει ελέγχεται από τη θερμοδυναμική και επεκτείνεται σε σχέση με μια στο άπειρο σειρά πολυώνυμων Legendre:

$$U_1^R(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}^R P_n(\cos \theta). \quad (3.236)$$

Όπως και να 'χει μια λεπτομερής ανάλυση δείχνει ότι έως το βαθμό του ε , προσλαμβάνει τα ίδια χαρακτηριστικά όπως η μεταβλητή που προκαλεί τη διαταραχή, δηλαδή το μεταφορικό πεδίο. Λαμβάνοντας υπ' όψη την οριακή συνθήκη:

$$u_1 = i \quad \text{καθώς} \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.237)$$

που είναι $u_{1r}|_{r \rightarrow \infty} = \cos \theta$ μόνο οι όροι μέχρι το $P_1(\cos \theta)$ έχουν διατηρηθεί. Έτσι,

$$U_1^R(\theta) = U_{01}^R + U_{11}^R \cos \theta, \quad (3.238)$$

που είναι ο $O(\varepsilon)$ όρος στην εξίσωση (3.59). Ακολούθως η εσωτερική και εξωτερική συμφωνία των θερμοδυναμικών μεταβλητών που έχει πραγματοποιηθεί δείχνει τη μεγάλη γενικότητα αυτής της έκφρασης μέχρι το $O(\varepsilon)$.

Ημισταθερή ανάλυση εξωτερικής διαταραχής. Οι εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας και της μάζας της συνεχούς φάσης απαιτούν ισοδύναμες ασυμπτωτικά διαδικασίες

ιδιόμορφης διαταραχής. Αυτό μπορεί να κατανοηθεί εξετάζοντας τις πρώτου βαθμού εξισώσεις για την ενέργεια και τη μάζα και τις οριακές ροϊκές συνθήκες που εφαρμόζονται για τη συνεχή φάση. Αυτές είναι:

Πρώτου βαθμού, ε^1 :

$$\text{Pr}(U_{00}u_0 \mathcal{P} \Theta_1 + u_1 \mathcal{P} \Theta_0) = P^2 \Theta_1, \quad (3.239)$$

και

$$\text{Sc}(U_{00}u_0 \mathcal{P} \omega_1 + u_1 \mathcal{P} \omega_0) = P^2 \omega_1, \quad (3.240)$$

όπου Θ_0 και ω_0 είναι οι αρχικού βαθμού λύσεις. Οι οριακές ροϊκές συνθήκες είναι:

$$\Theta_1 \otimes 0, \quad \omega_1 \otimes 0, \quad \text{καθώς} \quad r \otimes \infty. \quad (3.241)$$

Αναφέρεται ότι η ταχύτητα u_1 που εμφανίζεται στην εξίσωση (3.53) και στις εξισώσεις (3.239) και (3.240) είναι μη μηδενική καθώς το $r \otimes \infty$ (ομοιόμορφη ροή). Λαμβάνοντας αυτό υπ' όψη, οι μη ομοιογενείς όροι $u_1 \mathcal{P} \Theta_0$ και $u_1 \mathcal{P} \omega_0$ στις εξισώσεις (3.239) και (3.240) οδηγούν σε ακριβείς λύσεις για τα Θ_1 και ω_1 . Αυτές οι λύσεις δεν ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες στο άπειρο όπως αξιώνεται στην εξίσωση (3.241). Αυτό συμβαίνει λόγω της ύπαρξης μιας μη – ομοιόμορφης περιοχής κοντά στο σημείο στο άπειρο. Γι' αυτό μια διαδικασία ιδιόμορφης διαταραχής έχει συμπεριληφθεί, στην οποία η αρχικού βαθμού περιγραφή για τη μακρινού πεδίου θερμοκρασία και το κλάσμα της μάζας ερμηνεύουν την επίδραση του διαταραγμένου πεδίου ταχύτητας. Ομοιόμορφα κατάλληλες λύσεις για ολόκληρο το πεδίο ορισμού έχουν επιτευχθεί ταιριάζοντας τις εσωτερικές με τις εξωτερικές λύσεις που είναι κατάλληλες για $r \otimes \infty$. Η εξωτερική ασυμπτωτική λύση έχει επιτευχθεί προσδιορίζοντας μια ακτινική ισοδυναμία $\rho = \varepsilon r$ και γράφοντας τις εξισώσεις της ενέργειας και των συστατικών σε σχέση με το ρ . Η αρχικού βαθμού περιγραφή για το ε σ' αυτή την ισοδυναμία περιλαμβάνει το διαταραγμένο πεδίο ταχύτητας και έτσι δίνει την κατάλληλη ασυμπτωτική συμπεριφορά για τα Θ και ω καθώς $r \otimes \infty$. Οι εσωτερικές επεκτάσεις θεωρούνται της μορφής:

$$\Theta(r, \bar{\mu}; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n(\varepsilon) \mathcal{X}_n(r, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}_n(\varepsilon) I_{mn}(r) P_m(\bar{\mu}), \quad \bar{f}_0(\varepsilon) = 1. \quad (3.242)$$

και

$$\omega(r, \bar{\mu}; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n(\varepsilon) \omega_n(r, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}_n(\varepsilon) \bar{I}_{mn}(r) P_m(\bar{\mu}), \quad \bar{f}_0(\varepsilon) = 1. \quad (3.243)$$

Παραπάνω το $P_m(\bar{\mu})$ δηλώνει το πολυώνυμο Legendre βαθμού m και τα $\mathcal{X}_n(\varepsilon), \bar{f}_n(\varepsilon)$ είναι πακέτα συντελεστών για τα οποία τα παρακάτω όρια είναι:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\zeta f_{n+1} \Phi}{\theta f_n \Psi} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\zeta \bar{f}_{n+1} \Phi}{\theta \bar{f}_n \Psi} = 0. \quad (3.244)$$

Ακολουθώντας τη σταθερή διαβάθμιση του αρχικού βαθμού εσωτερικών και εξωτερικών προβλημάτων, έχουν αναπτυχθεί οι διάφορες ποσότητες μεταφοράς.

Οι λύσεις αποκαλύπτουν ότι οι διεπιφανειακές ταχύτητες είναι συναρτήσεις των κλασμάτων μάζας για κάθε συγκεκριμένη θέση και είναι στενά συνδεδεμένες με τη θερμοκρασία και τη σύνθεση. Η μεταβατική λύση της διασκορπισμένης φάσης έχει αναπτυχθεί χρησιμοποιώντας την μερικώς αναλυτικής σειράς μέθοδο και ορίζει έτσι την επιφανειακή θερμοκρασία. Η συνεχής και η διασκορπισμένη φάση συνδέονται μέσω της ροϊκής εξίσωσης συνέχειας της ενέργειας. Τα αποτελέσματα της συμπύκνωσης έχουν αναφερθεί στη βάση ενός μέσου βαθμού μεταφοράς θερμότητας που ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho(u \sin \theta) \lambda - k \frac{T_\infty}{r} \sin \theta d\theta. \quad (3.245)$$

Αυτά τα αποτελέσματα παρίστανται σε σχέση με τις μεταβολές του αδιάστατου ροϊκού βαθμού θερμότητας $\bar{\Phi} / \bar{\Phi}_{Nuss}$. Η ροή θερμότητας $\bar{\Phi}_{Nuss}$ είναι η μέση ροή θερμότητας που αντιστοιχεί σε μια «τύπου – Nusselt» συμπύκνωση μεταφοράς θερμότητας σε μια ισοθερμική στερεή σφαίρα που βρίσκεται σε ατμόσφαιρα αδρανούς – ήρεμης καθαρά κορεσμένης ροής. Μια έκφραση για το $\bar{\Phi}_{Nuss}$ δίνεται με τη σχέση:

$$\bar{\Phi}_{Nuss} = 0.803 \frac{g(\hat{\rho} - \rho_\infty) \lambda k^3 (T_\infty - T_0)^3}{2R\hat{\nu}}. \quad (3.246)$$

Από μια τάξη μεγέθους διαφοροποιήσεων, δείχνεται ότι για υψηλότερους βαθμούς συμπύκνωσης:

$$\frac{\bar{\Phi}}{\bar{\Phi}_{Nuss}} = \frac{\zeta \bar{\Phi}}{\theta \bar{\Phi}_{Nuss}} + \frac{\varepsilon \bar{\Phi}}{\theta \bar{\Phi}_{Nuss}}, \quad (3.247)$$

όπου:

$$\frac{\zeta \bar{\Phi}}{\theta \bar{\Phi}_{Nuss}} \mu R^{-\frac{3}{4}} \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon \bar{\Phi}}{\theta \bar{\Phi}_{Nuss}} \mu \frac{U_\infty}{R^{-\frac{1}{4}}}. \quad (3.248)$$

Το μέγεθος της σταγόνας ελέγχει τη μεταφορά θερμότητας σε όλους τους βαθμούς, ενώ το εξαναγκασμένο (κάτω από την επίδραση δυνάμεων) ροϊκό πεδίο σε μικρούς αριθμούς Reynolds επιδρά μόνο στο χαμηλότερο βαθμό. Στη συνέχεια περιγράψουμε τον αριθμητικό χειρισμό του προβλήματος της συμπύκνωσης.

Πλήρως μεταβατική αριθμητική ανάλυση. Οι συνεχείς και διασκορπισμένες φάσεις έχουν μεταχειριστεί σαν πλήρως μεταβατικές και τα ζεύγη των εξισώσεων έχουν ταυτόχρονα λυθεί από την μερικώς αναλυτικής σειράς μέθοδο. Το κίνητρο ήταν να ελεγχθεί η καταλληλότητα των ημισταθερών προσεγγίσεων. Το πεδίο ροής, η θερμοκρασία ροής και το κλάσμα μάζας του μη – συμπυκνώσιμου αερίου επεκτάθηκαν σαν ολόκληρη σειρά πολυωνύμων Legendre. Η βάση της μεθόδου σειράς είναι να προσεγγίσει τις λύσεις μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού όρων και έτσι έχει αναφερθεί σαν πιο κατάλληλη για χρήση σε σχέση μ' ένα σχέδιο πλήρως πεπερασμένων διαφορών, εφόσον η διαδικασία αποδίδει προς αντιμετώπιση ένα πακέτο συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων. Για χαμηλών αριθμών Reynolds ροές υπάρχει το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι μόνο λίγοι όροι χρειάζεται να θεωρηθούν στο ανάπτυγμα της σειράς. Σ' αυτή τη μελέτη ένα ανάπτυγμα σειράς έξι όρων έχει συμπεριληφθεί. Κάποιες από τις λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας δίνονται παρακάτω.

Οι πλήρως μεταβατικές εξισώσεις στο $O(\varepsilon)$ που είναι εφαρμόσιμες στις διαφορετικές φάσεις δίνονται από τις σχέσεις:

Συνεχής Φάση:

$$\frac{\partial L_{-1}\psi}{\partial t} + \frac{U_{00}}{r^2} \frac{\partial L_{-1}\psi}{\partial r} - 2 \frac{U_{00}}{r^3} L_{-1}\psi = L_{-1}^2\psi, \quad (3.249)$$

Διασκορπισμένη Φάση:

$$\frac{\partial L_{-1}\hat{\psi}}{\partial t} = L_{-1}^2\hat{\psi}, \quad (3.250)$$

όπου L_{-1} είναι τελεστής Stokes που ορίζεται από την εξίσωση (1.32). Για ευκολία στον υπολογισμό, αυτές οι εξισώσεις επαναδιατυπώνονται όσον αφορά στο στροβιλισμό ζ και η ακτινική συντεταγμένη μετασχηματίζεται σε $r = e^\xi$. Οι εξισώσεις στροβιλισμού και ορμής είναι:

Συνεχής Φάση:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + (1 - \bar{\mu}^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\mu}^2} \zeta e^{3\xi} (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.251)$$

και

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + e^{-3\xi} U_{00} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\bar{\mu}^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + (1 - \bar{\mu}^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \bar{\mu}^2} - 2\bar{\mu} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\mu}} \right) \frac{\zeta}{(1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-2\xi}. \quad (3.252)$$

Διασκορπισμένη Φάση:

$$L_{-1}\hat{\psi} + \hat{\zeta} r (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (3.253)$$

και

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial r} + \frac{(1-\bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}}{r^2} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \bar{\mu}} - \frac{2\bar{\mu}}{(1-\bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \bar{\mu}} - \frac{\hat{\zeta}}{(1-\bar{\mu}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.254)$$

Οι αδιάστατες εξισώσεις της ενέργειας και των συστατικών για τη συνεχή φάση είναι:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\mu}} (1-\bar{\mu}^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\mu}} = \text{Pr} e^{\xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - u_{\theta} (1-\bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\mu}} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} e^{2\xi}, \quad (3.255)$$

με μια αντίστοιχη για τη μεταφορά των συστατικών. Η εξίσωση ενέργειας για τη διασκορπισμένη φάση είναι:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \bar{\mu}} (1-\bar{\mu}^2) \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \bar{\mu}} = \text{Pr} e^{\hat{\xi}} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial r} + \hat{u}_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \bar{\mu}} + \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t}. \quad (3.256)$$

Οι μεταβλητές έχουν εκφραστεί όσον αφορά τη σειρά των συναρτήσεων των ακτινικών αποστάσεων, γωνίας και χρόνου όπως παρακάτω:

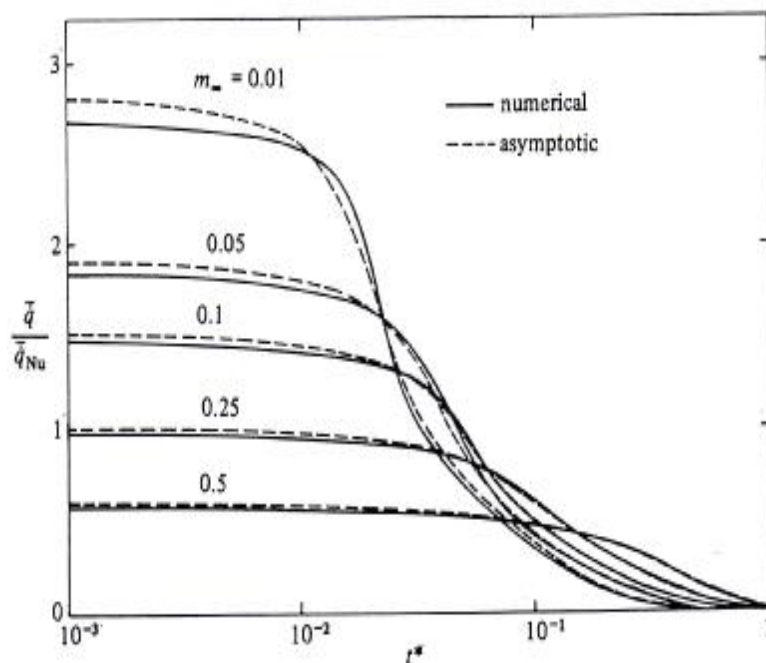
$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{\frac{1}{2}\xi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi, t) \zeta_{-1}^{\bar{\mu}} P_n(z) dz, \\ \hat{\psi} &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r, t) \zeta_{-1}^{\bar{\mu}} P_n(z) dz, \\ \zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi, t) P_n^1(\bar{\mu}), \\ \hat{\zeta} &= \sum_{n=1}^{\infty} G_n(r, t) P_n^1(\bar{\mu}), \\ \Theta &= \bar{\Theta}_0(\xi, t) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \Theta_n(\xi, t) P_n(\bar{\mu}), \\ \omega &= \bar{\omega}_0(\xi, t) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \omega_n(\xi, t) P_n(\bar{\mu}), \\ \hat{\Theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\Theta}_n(r, t) P_n(\bar{\mu}). \end{aligned}$$

όπου $P_n(\bar{\mu})$ και $P_n^1(\bar{\mu})$ είναι πολυώνυμα Legendre και πρωτοβάθμιες συναρτήσεις Legendre σειράς η, αντίστοιχα. Οι απεικονίσεις της σειράς έχουν παρουσιαστεί στις κατάλληλες κινητήριες εξισώσεις και οι ορθογωνικές ιδιότητες του Legendre και των σχετικών συναρτήσεων Legendre έχουν χρησιμοποιηθεί για να μετασχηματίσουν αυτές τις εξισώσεις σ' ένα πακέτο ζευγών μη – γραμμικών απλών διαφορικών εξισώσεων. Μια μέθοδος για το μετασχηματισμό ενός γινομένου των συναρτήσεων Legendre, χρησιμοποιεί τους συντελεστές Wigner 3 – J. Αυτή η μέθοδος έχει αποτελεσματικά χρησιμοποιηθεί εδώ. Το πακέτο των μη γραμμικών ζευγών απλών

διαφορικών εξισώσεων κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες έχει επιλυθεί χρησιμοποιώντας μια ισχυρή έμμεση διαδικασία που περιλαμβάνει ένα τριών σημείων κεντρικού διαχωρισμού σχέδιο για τις χωρικές παραγώγους και τον πίσω διαχωρισμό για τις χρονικές παραγώγους.

Στο ανάπτυγμα της πραγματικής λύσης, ένας βαθμός n_0 έχει οριστεί εξισώνοντας όλους τους παράγοντες $f_n, F_n, g_n, T_n, \omega_n$ και \hat{T}_n με το μηδέν για $n > n_0$. Η επακόλουθη τριών διαγωνίων μήτρα για κάθε κατάσταση έχει λυθεί από $n = 0$ έως $n = n_0$ για μία – μία κατάσταση, κρατώντας τα μεγέθη των άλλων καταστάσεων σταθερά μέχρι όλες οι συνθήκες που είναι κατάλληλες για τη δεδομένη κατάσταση να ικανοποιηθούν. Η εφαρμογή επαναλαμβάνεται στην επόμενη κατάσταση με μια χαλάρωση των υπολογισμένων μεγεθών της προηγούμενης κατάστασης. Κατά τη διάρκεια της πρωταρχικής επανάληψης οι μη – γραμμικοί όροι κρατήθηκαν σταθεροί. Στο τέλος κάθε πρωταρχικού κύκλου επανάληψης, οι μη – γραμμικοί όροι ηρεμούσαν και ο κύκλος της επανάληψης επαναλαμβάνονταν μέχρι η επιθυμητή σύγκλιση να επιτευχθεί. Η συνθήκη για $\xi \otimes \forall$ ορίστηκε για $\xi = 5.5$ μετά από αριθμητικούς πειραματισμούς.

Στους υπολογισμούς η αρχική θερμοκρασία του σταγονιδίου πάρθηκε στους 30°C . Το περιβάλλον του σταγονιδίου θεωρήθηκε ότι αποτελείται από αέρα κορεσμένο με ατμό με το κλάσμα μάζας του αέρα να κυμαίνεται από 0,01 έως 0,5. Η περιβάλλουσα θερμοκρασία κυμαίνεται μεταξύ 100 και 150°C . Η μεταβολή στην αδιάστατη μεταφορά θερμότητας με τον αδιάστατο χρόνο $t^* = \hat{\alpha}t/R^2$ για διάφορες τιμές του κλάσματος μάζας του μη συμπυκνωμένου αέρα, m_\forall φαίνονται στο σχήμα 3.13.



ΣΧΗΜΑ 3.13: Η σύγκριση ανάμεσα στα αριθμητικά και ασυμπτωτικά αποτελέσματα για αδιάστατη μεταφορά θερμότητας σαν συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου. Re σε ισορροπία = 0,5, $T_0 = 30^\circ\text{C}$, $T_\forall = 100^\circ\text{C}$.

Στην περιοχή υψηλής συμπύκνωσης, για $t^* = 10^{-3}$, η αδιάστατη μεταφορά θερμότητας φαίνεται να μειώνεται από περίπου 2,8 σχεδόν στο μισό του μεγέθους

της, καθώς το κλάσμα της μάζας του αέρα αυξάνει από 0,01 σε 0,1. Στην περιοχή χαμηλής συμπύκνωσης το \bar{q} / \bar{q}_{Nuss} είναι απολύτως 0,6 για $m_{\text{v}} = 0.5$. Για τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται εδώ $\bar{q}_{Nuss} = 250 Wcm^{-2}$. Ο λόγος για τη μείωση της μεταφοράς θερμότητας εξ' αιτίας της παρουσίας αέρα, είναι ότι ένα αναπτυσσόμενο φιλμ αέρα στη διεπιφάνεια προκαλεί μια μείωση στη μερική πίεση του ατμού στη διεπιφάνεια. Διαδοχικά αυτό μειώνει τη θερμοκρασία κορεσμού στην οποία λαμβάνει χώρα η συμπύκνωση. Η τελική επίδραση είναι να μειώσει τη δραστηκή κινητήρια δύναμη, μειώνοντας έτσι τη μεταφορά θερμότητας. Είναι επίσης φανερό από το σχήμα 3.13 ότι ο αδιάστατος βαθμός μεταφοράς θερμότητας επηρεάζεται σημαντικά από την επιφανειακή θερμοκρασία του σταγονιδίου. Τα αποτελέσματα φαίνεται να συγκρίνονται πολύ καλά με τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα ιδιαίτερα για τους μικρούς βαθμούς συμπύκνωσης. Η παρουσία ενός μη – συμπυκνώσιμου κλάσματος μάζας στον κύριο όγκο προκαλεί εξασθένηση στην ακτινική ροή του ατμού. Σαν αποτέλεσμα η εσωτερική κυκλοφορία είναι ασθενέστερη και ο αριθμός Peclet, Pe της αντίστοιχης ρευστής πλευράς είναι μικρότερος. Παρατηρήθηκε ότι η ασυμπτωτική λύση είναι ικανή να παραστήσει αυτή την κατάσταση. Η συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της πλήρως αριθμητικής μελέτης και της ασυμπτωτικής λύσης επιβεβαιώνει τις ημισταθερές υποθέσεις.

Εξάτμιση και Καύση Σταγόνας

Μ' ένα κινούμενο σταγονίδιο το πρόβλημα της ατμοποίησης είναι πολύ πιο πολύπλοκο. Η μη – ομοιόμορφη διαδιδόμενη επίδραση λόγω της εξάτμισης επηρεάζει τις συνιστώσες της οπισθέλκουσας δύναμης και τη μεταφορά θερμότητας στη σταγόνα με πολύπλοκους τρόπους. Η σύνθεση της αέριας φάσης τροποποιείται καταλήγοντας σε σημαντικές αλλαγές στις θερμοφυσικές ιδιότητες. Η εξάτμιση και η καύση ενός αργά κινούμενου σταγονιδίου μπορεί όπως και να 'χει, να αναλυθεί με μια μέθοδο παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη της συμπύκνωσης σχετικά με μια σταγόνα που υφίσταται αργή μεταφορά.

Ένα αργά κινούμενο σωματίδιο η – επτανίου αρχικά στους 300 K που εξατμίζεται σ' ένα περιβάλλον χωρίς καύσιμο θερμοκρασίας 1000 K και πίεσης 10 atm εξετάστηκε αναλυτικά. Το μέγεθος της ταχύτητας εξάτμισης ήταν μεγάλο αν και ο μεταφορικός αριθμός Reynolds ήταν πολύ μικρός ($\epsilon \ll 1$). Ενώ οι διαδικασίες ροής και μεταφοράς στην αέρια φάση και στην εσωτερική κυκλοφορία του σταγονιδίου θεωρήθηκαν σαν ημισταθερές, η θερμότητα του σταγονιδίου θεωρήθηκε σα μια μεταβατική διαδικασία. Οι ιδιότητες μεταφοράς της αέριας φάσης θεωρήθηκαν μεταβλητές. Η λύση της ροής στην αέρια φάση αναπτύχθηκε με παρόμοιο τρόπο. Οι εξισώσεις μεταφοράς της αέριας φάσης απαιτούν ανάλυση με την τεχνική της ιδιόμορφης διαταραχής. Η μεταβατική θερμότητα του εσωτερικού της σταγόνας επιλύθηκε με τη μέθοδο σειράς. Η λύση σ' ολόκληρο το πρόβλημα επετεύχθη από τη σύζευξη των αποτελεσμάτων για τις συνεχείς και διασκορπισμένες φάσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η μεταγωγική κίνηση αυξάνει το βαθμό εξάτμισης και οι συντελεστές τριβής και πίεσης της οπισθέλκουσας είναι μικρότεροι συγκρινόμενοι με τις τιμές του Stokes κατά τη διάρκεια ζωής του σταγονιδίου. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας εξάτμισης που σχετίζεται με τη ροή ορμής στη διεπιφάνεια, γίνεται προοδευτικά σημαντικός με αύξηση της δύναμης της μη ομοιόμορφης ακτινικής ροής λόγω της εξάτμισης.

Ένα αργά κινούμενο σταγονίδιο καυσίμου που αναφλέγεται σ' ένα οξειδωτικό περιβάλλον έχει ερευνηθεί διατηρώντας τόσο τους όρους του ιξώδους όσο και της αδρανείας στις κινητήριες εξισώσεις. Επιπρόσθετα οι επιδράσεις της μεταβλητής πυκνότητας συμπεριελήφθησαν στον υπολογισμό. Η διαδικασία καύσης μορφοποιήθηκε από μία απροσδιόριστου γρήγορου βαθμού χημική αντίδραση και μια περιβάλλουσα διαχυτή φλόγα. Οι εξισώσεις της ενέργειας και των συστατικών της συνεχούς φάσης όσον αφορά τις μεταβλητές Shvab – Zeldovich επιλύθηκαν μέσω μιας τεχνικής ιδιόμορφης διαταραχής – ισοδύναμα ασυμπτωτικής. Η μεταβατική αύξηση της θερμοκρασίας του εσωτερικού της σταγόνας επιλύθηκε με την αριθμητική μέθοδο σειράς. Για τη διάχυση μάζας θεωρήθηκαν ένας δραστικός συντελεστής δυϊκής διάχυσης για όλα τα ζεύγη των συστατικών και μια ενός βήματος μη – αντιστρεπτή χημική αντίδραση. Η προσέγγιση του μετώπου φλόγας των Burke – Schumann χρησιμοποιήθηκε να αναπαραστήσει τη λεπτή ζώνη αντίδρασης. Τα αντιδραστήρια θεωρήθηκαν ότι ενώνονται σε στοιχειομετρική αναλογία και καταναλώνονται πλήρως στο μέτωπο της φλόγας. Έχουν προβλεφθεί αποτελέσματα για την αύξηση του βαθμού καύσης της μάζας και την παραμόρφωση του σχήματος της φλόγας εξ' αιτίας της μεταφοράς της φλόγας. Η αρχική θερμοκρασία της φλόγας και η επακόλουθη θερμότητα φαίνεται ότι επηρεάζουν τις χρονικές μεταβολές του βαθμού διαχώρισης του μετώπου της φλόγας και την απόσταση της φλόγας. Η ένταση της κυκλοφορίας στο εσωτερικό της σταγόνας παρατηρείται ότι μειώνεται με το βαθμό εξάτμισης.

Ο βαθμός καύσης του μεταγωγικού σταγονιδίου συχνά υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μια απλή εξίσωση που θεωρεί το βαθμό καύσης σαν μια διαταραχή του σφαιρικά συμμετρικού μεγέθους K_0 . Η μορφή της εξίσωσης είναι:

$$K = K_0(1 + aRe^b)(1 + Gr^e), \quad (3.257)$$

όπου Re και Gr είναι οι αριθμοί Reynolds και Grashof που βασίζονται στη διάμετρο του σταγονιδίου d και a , b , c , e είναι σταθερές. Αυτή η εξίσωση επίσημα εφαρμόζεται για μεταφορά σταγόνας σε χαμηλό αριθμό Reynolds, $Re \ll 1$ και $Gr = 0$. Η πρόσθεση του όρου Gr , του αριθμού Grashof γίνεται για συγκεκριμένο σκοπό. Επίσης για $Re \ll 1$, $Gr_0 = 0$, $a = 0,25$, $b = 1$, ανεξάρτητα του K_0 . Ο αριθμός Reynolds εδώ πρέπει να αποτιμηθεί με κατάλληλες τιμές ανταποκρινόμενος σε ελεύθερης ροής συνθήκες. Η εξίσωση δείχνει ότι το K μειώνεται καθώς η διάμετρος του σταγονιδίου μειώνεται. Αυτή η τάση έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Μια καλύτερη προσαρμογή κάποιων αιωρούμενων και ελεύθερου – σταγονιδίου δεδομένων σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds αναφέρεται ότι αποδίδει $a = 0,276$, $b = 0,5$, $c = 0,533$ και $e = 0,52$.

Η ανάλυση έχει επεκταθεί ώστε να περιλάβει τις επιδράσεις υψηλότερου βαθμού διαταραχών στο πεδίο ροής όπως και τη θερμοκρασία και τη μεταφορά των συστατικών. Το βασικό κίνητρο για την ανάπτυξη λεπτομερών, δευτέρου βαθμού αναλυτικών αριθμητικών λύσεων είναι η ανάγκη για τέτοια υψηλότερου βαθμού θεωρία με σκοπό να ερευνηθεί η ανάφλεξη σταγονιδίου καυσίμου και οι χαρακτηριστικές απόσβεσης στην παρουσία μεταγωγικής ροής. Για να εκτιμήσουμε αυτή την ανάγκη πρέπει να επαναφέρουμε ότι η έναρξη της ανάφλεξης του σταγονιδίου ελέγχεται από δύο χαρακτηριστικούς διαβαθμισμένους χρόνους: το «χρόνο διάχυσης» και το «χρόνο χημικής αντίδρασης». Ο λόγος αυτών των διαβαθμισμένων χρόνων είναι ο αριθμός Damkohler, D . Όταν $D \gg 0$ ο χρόνος αντίδρασης είναι πολύ μεγάλος συγκρινόμενος με το χρόνο διάχυσης και οι επιδράσεις λόγω της αντίδρασης θεωρούνται αμελητέες. Αυτό είναι το παγωμένο όριο. Όταν $D \ll 1$ ο χρόνος αντίδρασης είναι τόσο μικρός που η αντίδραση μπορεί

να θεωρηθεί ότι γίνεται ακαριαία. Αυτό είναι το γρήγορο χημικό όριο. Τα φαινόμενα της ανάφλεξης και απόσβεσης χαρακτηρίζονται από το $D: O(1)$ το οποίο και αναπαριστά τη μετάβαση μεταξύ των παγωμένων και γρήγορων χημικών ορίων. Η ανάφλεξη μπορεί να συμβεί όταν ο χρόνος διάχυσης είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το χρόνο αντίδρασης. Η παρουσία μεταγωγικής ροής εισάγει το συναγωνισμό ανάμεσα στους χαρακτηριστικούς διαβαθμισμένους χρόνους, μεταβάλλοντάς τους κατά μήκος της περιφέρειας του σταγονιδίου. Γι' αυτό το λόγο η θέση κατά μήκος της επιφάνειας του σταγονιδίου όπου η ανάφλεξη ξεκινά, εν μέρει αποφασίζεται από τις επιδράσεις της μεταγωγής. Αυτή η θέση είναι σημαντική εφόσον ορίζει τόσο τη φύση της φλόγας όσο και την έκταση της καύσης. Η παρουσία της μεταγωγής επίσης επηρεάζει το χρόνο καθυστέρησης της ανάφλεξης επιδρώντας στους βαθμούς θερμότητας και ατμοποίησης του σταγονιδίου. Παρόμοιες αναφορές εφαρμόζονται και για την απόσβεση. Τα φαινόμενα ανάφλεξης και απόσβεσης μπορούν να μελετηθούν θεωρώντας πεπερασμένου βαθμού κινηματική και αναλύοντας τη δομή της φλόγας. Αυτό μπορεί αναλυτικά να επιτευχθεί με τη μέθοδο ενεργοποίησης ασυμπτωτικών ενέργειας – activation energy asymptotics (AEA). Η AEA υποθέτει ότι ο βαθμός χημικής αντίδρασης έχει μια Arrhenius θερμοκρασιακή εξάρτηση με μια μεγάλη δραστηριοποίηση ενέργειας. Ο όρος αντίδρασης που εμφανίζεται στις αδιάστατες κινητήριες εξισώσεις για τη μεταφορά θερμότητας / συστατικών έχει τη μορφή $DY_OY_F e^{\Theta/T}$ όπου τα Y_O και Y_F είναι τα κλάσματα μάζας οξειδωτικού και καυσίμου αντίστοιχα. Εδώ T είναι η θερμοκρασία που γίνεται αδιάστατη με τη σχέση Q/c_p , Q είναι η θερμότητα της καύσης, R είναι η παγκόσμια σταθερά αερίου και C_p είναι η ειδική θερμότητα για σταθερή πίεση. Ένα διακεκριμένο όριο παίρνεται εκεί όπου η δραστηριοποίηση ενέργειας Θ και ο αριθμός Damkohler, D τείνουν στο άπειρο. Ο αριθμός Damkohler που παίρνεται στη μορφή $D = \frac{\bar{D}}{D_c} e^{\Theta/T_c}$ όπου T_c είναι η αδιάστατη θερμοκρασία που χαρακτηρίζει το μέγεθος του D . Ο παράγοντας \bar{D} μεταβάλλεται αλγεβρικά με το Θ και ο όρος της αντίδρασης γίνεται $\bar{D} Y_O Y_F e^{\Theta(1/T_c - 1/T)}$. Όταν η θερμοκρασία είναι μικρότερη από T_c ο όρος αντίδρασης είναι εκθετικά μικρός και η χημεία είναι ουσιαστικά παγωμένη. Όταν η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από T_c ο εκθετικός όρος \bar{D} μπορεί να διακυμανθεί εκτός εάν το γινόμενο $Y_O Y_F$ είναι μηδέν. Γι' αυτό το λόγο η χημική δραστηριότητα περιορίζεται σε μια λεπτή αλλά μετρήσιμη ζώνη αντίδρασης όπου η T είναι κοντά στην T_c και τόσο το Y_O όσο και το Y_F είναι μη – μηδενικά.

Με σκοπό την εφαρμογή της AEA για ανάφλεξη / απόσβεση σταγονιδίου, τρεις διαφορετικές καταστάσεις μεταξύ ρευστής διάχυσης – μεταγωγής και χημικής αντίδρασης πρέπει να θεωρηθούν. Αυτές είναι: (1) μερικής καύσης κατάσταση στην οποία το οξειδωτικό ή το καύσιμο διαρρέεται μέσα στη φλόγα σε αρχικό βαθμό, (2) Burke – Schumann κατάσταση στην οποία Y_O και Y_F είναι μηδενικά στη φλόγα σε αρχικό βαθμό και (3) παγωμένη χημικά κατάσταση στην οποία η χημική αντίδραση είναι αμελητέα σε αρχικό βαθμό.

Απόσβεση μπορεί να συμβεί στη μερική καύση ή στην κατάσταση Burke – Schumann ενώ ανάφλεξη στην παγωμένη χημικά κατάσταση. Για σκοπούς απεικόνισης (επεξήγησης), θεωρούμε την κατάσταση μερικής καύσης. Σ' αυτή την κατάσταση ή το Y_O ή το Y_F είναι μη μηδενικά σε αρχικό βαθμό τη φλόγα. Γι' αυτό το λόγο για να κρατήσουμε τον όρο της αντίδρασης πεπερασμένο, η θερμοκρασία

πρέπει να είναι κοντά στην T_c εντός του $O(T_c^2/\Theta)$. Για να προβλέψουμε την απόσβεση πρέπει να εξεταστεί η δομή της φλόγας. Αυτό μπορεί να εξαχθεί, εκτεινώντας τη ζώνη αντίδρασης γύρω από τη θέση της φλόγας, $r = r_f(\bar{\mu})$, πριν συμβεί η απόσβεση και επιλύοντας σ' αυτή την κατάσταση τις εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας και των συστατικών. Εδώ r είναι η ακτινική συντεταγμένη, $\bar{\mu} = \cos\theta$ και θ είναι η αζιμούθια γωνία. Η θερμοκρασία στη ζώνη αντίδρασης μπορεί να μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $T = T_c + \delta T$ όπου $\delta = T_c^2/\Theta$. Για να επιλύσουμε τις κινητήριες εξισώσεις για την ενέργεια και τα συστατικά στη ζώνη αντίδρασης στο $O(\delta)$, ισοδύναμες συνθήκες για τις κατανομές της θερμοκρασίας των συστατικών είναι απαραίτητες. Αυτό τοποθετεί το ανάπτυσμα των λύσεων της θερμοκρασίας των εξισώσεων διατήρησης των συστατικών στο $O(\delta)$ στην περιοχή ανάμεσα στη σταγόνα και τη φλόγα και στην περιοχή από τη φλόγα στο μακρινό πεδίο ($r \gg \mathbb{R}$). Τυπικά για ένα σταγονίδιο καυσίμου υδρογονάνθρακα το δ είναι $O(10^{-2})$. Με μια κινούμενη σταγόνα οι επιδράσεις της μεταγωγής που απορρέουν από την κίνηση του σταγονιδίου πρέπει ταυτόχρονα να θεωρηθούν. Ο μεταφορικός αριθμός Reynolds της σταγόνας είναι $\varepsilon : O(10^{-1})$ ενώ ο ακτινικός αριθμός Reynolds που σχετίζεται μ' ένα ισχυρό ακτινικό πεδίο λόγω της εξάτμισης είναι $U_{00} : O(1)$. Μια ανάλυση της απόσβεσης (ή ανάφλεξης) έχει γι' αυτό το λόγο δύο παραμέτρους ε και δ , όπου η μία εκφράζει τις επιδράσεις της μεταγωγικής ροής και η άλλη αναπαριστά την επίδραση της δραστηριοποίησης της ενέργειας. Θεωρητικά γι' αυτό το λόγο σε κάθε μελέτη διαταραχής της απόσβεσης ή της καύσης οι μεταβολές της θερμοκρασίας και των συστατικών πρέπει να επεκταθούν όσον αφορά τόσο το ε όσο και το γ και στις δύο περιοχές: στην εσωτερική και την εξωτερική. Τέτοιες επεκτάσεις εξασφαλίζουν τις απαιτούμενες ισοδύναμες συνθήκες. Στην περισσότερο γενική της μορφή αυτή η διατύπωση είναι απαγορευτικά δύσκολο να λυθεί από την άποψη των πολλών σετ των ζευγών εξισώσεων που έχει να κάνει. Ωστόσο αναλυτικές και αριθμητικές σύμφωνες λύσεις μπορεί να επιτευχθούν θεωρώντας το όριο $\delta/\varepsilon = 1$ ή ισοδύναμα για τις θεωρούμενες παραμέτρους στην καύση σταγονιδίου καυσίμου $\delta : O(\varepsilon^2)$. Αυτή η επιλογή ικανοποιεί δύο φυσικές απαιτήσεις παραμέτρων – μία ε για $O(10^{-1})$ και μια δ για $O(10^{-2})$. Η προηγούμενη αναφορά ξεκάθαρα αποδεικνύει την ανάγκη για τον υπολογισμό της διανομής της θερμοκρασίας και των συστατικών στο $O(\varepsilon^2)$ για να εξασφαλιστούν αποτελέσματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση του προβλήματος της απόσβεσης ακριβώς στο $O(\delta)$. Επίσης μπορεί να αναφερθεί ότι το πεδίο ροής πρέπει να καθοριστεί στο $O(\varepsilon^2)$. Παρόμοιες αναφορές θα εφαρμοστούν για την κατάσταση Burke – Schumann και την παγωμένη χημικά κατάσταση.

Ο συνυπολογισμός υψηλότερων – βαθμών διαταραχών στο $O(\varepsilon^2)$ αυξάνει κατά πολύ τις μαθηματικές πολυπλοκότητες. Συγκεκριμένα, ο καθορισμός του ίδιου του πεδίου ροής γίνεται ένα πρόβλημα ιδιόμορφης διαταραχής διότι για να επιτευχθεί η δευτέρου βαθμού λύση για το πεδίο ροής, οι επιδράσεις της αδράνειας και του ιξώδους γίνονται ισοδύναμες μακριά από το σταγονίδιο. Σαν αποτέλεσμα ένα σχέδιο ομαλής διαταραχής δεν είναι πια αρκετό για να επιτευχθούν ομοιόμορφα κατάλληλες λύσεις ακόμα και για τα ροϊκά πεδία. Εφόσον ο βαθμός δυσκολίας που παρουσιάζεται απ' αυτό το πολύπλοκο θέμα είναι αξιοσημείωτος, τα αποτελέσματα είναι πολύ χρήσιμα. Τα αποτελέσματα της εξάτμισης βοηθούν τις μελέτες ανάφλεξης ενώ τα αποτελέσματα της καύσης είναι χρήσιμα για την έρευνα της απόσβεσης.

Στο πρόβλημα της εξάτμισης θεωρήθηκε, μια μονού συστατικού σταγόνα που πάρηκε να είναι αρχικά ψυχρή σε μια θερμοκρασία T_0 . Η περιβάλλουσα

θερμοκρασία T_{Ψ} και το κλάσμα μάζας του οξειδωτικού μέσου $Y_{F,\Psi}$ ήταν καθορισμένα. Το σχήμα της σταγόνας θεωρήθηκε σφαιρικό εφόσον οι αριθμοί Weber και Eotvos είναι πολύ μικροί. Οι επιδράσεις της φυσικής μεταγωγής και της θερμικής διάχυσης θεωρήθηκαν αμελητέες. Ο αριθμός Lewis πάρθηκε ίσος με τη μονάδα και ένας συντελεστής απλής δραστικής διάχυσης χρησιμοποιήθηκε για όλα τα ζεύγη των συστατικών. Για την εξομάλυνση της μεταβολής των ιδιοτήτων ο επανομαζόμενος κανόνας του 1/3 συμπεριελήφθη και η αναφερθείσα θερμοκρασία για τις εκτιμήσεις των ιδιοτήτων παίρνεται με τη σχέση $T_r = T_s + \frac{1}{3}(T_{\Psi} - T_s)$.

Με την εξάτμιση η εξίσωση μεταφοράς της μάζας και οι συνθήκες στεγανότητας θεωρούνται με τις παρακάτω μορφές:

$$\rho u \frac{dY_F}{dr} - \rho D \frac{d^2 Y_F}{dr^2} = 0, \quad (3.258)$$

και

$$D \frac{dY_F}{dr} = - (1 - Y_F) u_r, \quad (3.259)$$

όπου το Y_F στην επιφάνεια του σταγονιδίου έχει υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση Clausius – Clapeyron.

Ανάλυση της μεταφοράς θερμότητας και μάζας. Η ανάλυση της ροής ρευστού που αντιστοιχεί σε μια μεγάλη ακτινική ροή έχει ήδη δοθεί. Εδώ ξεκινάμε με αυτό το πεδίο ροής και αναπτύσσουμε τις εξισώσεις μεταφοράς θερμότητας και μάζας.

Συνεχής φάση. Οι λύσεις στα προβλήματα μεταφοράς θερμότητας και μάζας στη συνεχή φάση επίσης απαιτούν ισοδύναμες ασυμπτωτικές τεχνικές. Οι εξισώσεις που μελετούνται είναι:

$$Sc(U_{00}u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2) \frac{dg}{dr} - P^2 \frac{d^2 g}{dr^2} = 0, \quad (3.260)$$

$$Sc(U_{00}u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2) \frac{dh}{dr} - P^2 \frac{d^2 h}{dr^2} = 0, \quad (3.261)$$

όπου $g = (T^* - T_{\Psi}^*) / (T_0^* - T_{\Psi}^*)$, $T^* = Tc_p / \Delta H_c$ και $h = Y_F$. Στην εξωτερική περιοχή η έκφραση:

$$g^0(\rho, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\Psi} F^n(\epsilon) G_n(\rho, \bar{\mu}) \quad (3.262)$$

έχει χρησιμοποιηθεί και με μια αρκετά γενική μορφή έχει θεωρηθεί για την εσωτερική επέκταση:

$$g^i(r, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\Psi} \sum_{m=0}^{\Psi} f_n(\epsilon) g_{mn}(r) P_m(\bar{\mu}) \quad (3.263)$$

Το κλάσμα μάζας του καυσίμου και η θερμοκρασία στην επιφάνεια της σταγόνας εκτείνονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$Y_{F,s} = h_{s00} + \varepsilon(h_{s01} + \bar{\mu}h_{s11}) + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{\kappa} h_{s02} + \bar{\mu}h_{s12} + \frac{1}{2}(3\bar{\mu}^2 - 1)h_{s22} \right] + \dots$$

$$T_s = T_{s00} + \varepsilon(T_{s01} + \bar{\mu}T_{s11}) + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{\kappa} T_{s02} + \bar{\mu}T_{s12} + \frac{1}{2}(3\bar{\mu}^2 - 1)T_{s22} \right] + \dots$$

Αναφέρεται ότι η ακτινική ταχύτητα στην επιφάνεια του σταγονιδίου σχετίζεται με το κλάσμα μάζας του καυσίμου δια μέσου της συνθήκης στεγανότητας. Αυτή η σχέση συμπεριελήφθη σαν κατάλληλη συνθήκη εφαρμογής στην διατύπωση. Η συνθήκη ιεράρχηση των εσωτερικών και εξωτερικών προβλημάτων έχει παρακάτω δημιουργηθεί και διαδοχικά επιλυθεί.

Διασκορπισμένη Φάση. Το πεδίο της θερμοκρασίας στη διασκορπισμένη φάση έχει αδιαστατοποιηθεί με τη σχέση $\hat{T}^* = \hat{T}_c / \Delta H_c$ και ο χρόνος έχει κανονικοποιηθεί με τη σχέση $t^* = \hat{a}t / R^2$. Οι κινητήριες εξισώσεις γράφονται σε σχέση με τη μετασχηματισμένη μεταβλητή \hat{g} . Ένα σχέδιο διαταραχής σε σχέση με το ε και τα πολυώνυμα Legendre παρόμοιο με την επέκταση της θερμοκρασίας στη συνεχή φάση, έχει μελετηθεί. Έτσι,

$$\hat{g} = \hat{g}_{00} + \varepsilon(\hat{g}_{01} + P_1(\bar{\mu})\hat{g}_{11}) + \varepsilon^2 \left[\hat{g}_{02} + P_1(\bar{\mu})\hat{g}_{12} + P_2(\bar{\mu})\hat{g}_{22} \right] + \dots \quad (3.264)$$

όπου:

$$\hat{g} = \frac{\hat{T}^* - T_{\infty}^*}{T_0^* - T_{\infty}^*}. \quad (3.265)$$

Οι κινητήριες εξισώσεις, με την επέκταση σειράς που είναι ενσωματωμένη σ' αυτές, έχουν αριθμητικά λυθεί χρησιμοποιώντας μια μέθοδο πεπερασμένης διαφοράς. Ένας κατάλληλος αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του μεταβατικού πεδίου θερμοκρασίας μέσα στο σταγονίδιο. Υπολογισμοί για τη συνεχή φάση έχουν ταυτόχρονα διεξαχθεί. Για κάθε χρονικό βήμα αρκετές επαναλήψεις χρησιμοποιήθηκαν για να επιτευχθούν σύμφωνες συγκλίνουσες λύσεις.

Η κίνηση του σταγονιδίου έχει οριστεί, λύνοντας την εξίσωση ισορροπίας βαρύτητας – οπισθέλκουσας δύναμης:

$$\frac{dU_{\infty}}{dt} = \varphi_{\mu}^{-1} \left[\frac{1}{\kappa} U_{00} + \frac{C}{2U_{00}} + \varepsilon \left[\frac{1}{\kappa} U_{01}^R + \frac{C_1}{U_{00}} + \frac{3CU_{01}^R}{2U_{00}^2} - \frac{C_{\infty}}{8U_{\infty}} \right] \right. \\ \left. + \frac{gPR_0}{v^2} R^2 (\varphi_v^{-1} - \varphi_{\mu}^{-1}) \right] \quad (3.266)$$

Ανάλυση της καύσης σταγονιδίου. Για το πρόβλημα της καύσης οι εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας και των συστατικών έχουν τροποποιηθεί για τη διευθέτηση της αντίδρασης όπως παρακάτω:

$$\rho c u g^{\circ} T - k P^2 T = \Delta H_c \omega, \quad (3.267)$$

$$\rho c u g^{\circ} Y_o - \rho D P^2 Y_o = - W_o v_o \omega, \quad (3.268)$$

$$\rho c u g^{\circ} Y_F - \rho D P^2 Y_F = - W_F v_F \omega, \quad (3.269)$$

όπου ω είναι ο βαθμός αντίδρασης για την αντίδραση:

$$v_F F + v_o O \text{ ® προϊόντα.} \quad (3.270)$$

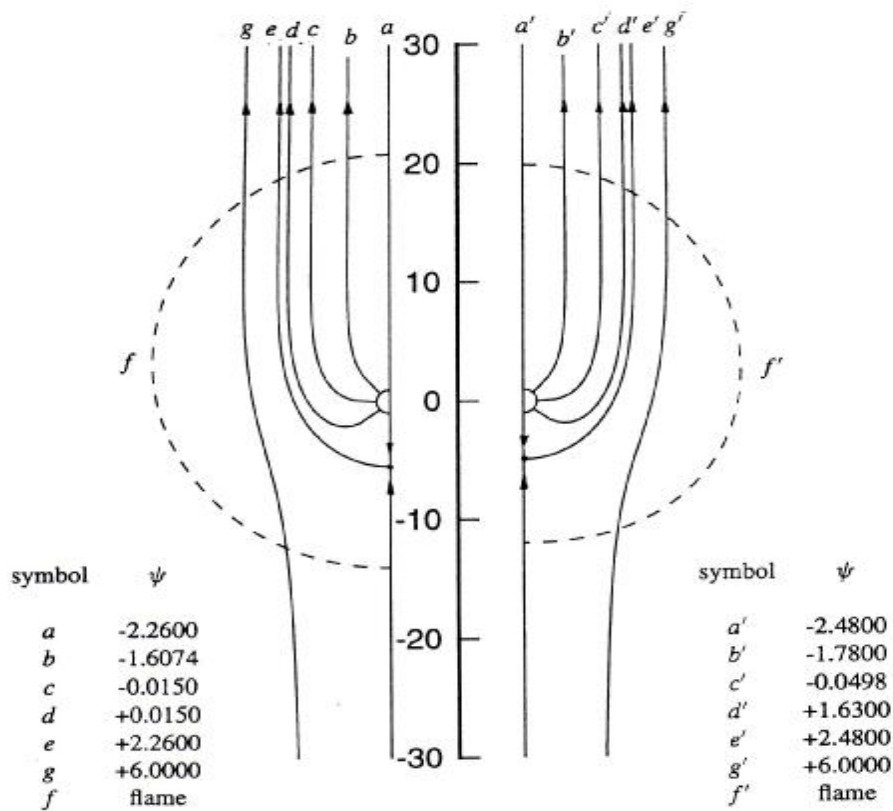
Η θερμοκρασία και τα κλάσματα μάζας έχουν αδιαστατοποιηθεί σύμφωνα με τις σχέσεις $T^* = T_c / \Delta H_c$, $Y_o^* = W_F Y_o / (v_o W_o)$ και $Y_F^* = Y_F / v_F$. Με τις μεταβλητές Shvab & Zeldovich:

$$g = \frac{T^* - T_{\Psi}^* + Y_o^* - Y_{o\Phi}^*}{T_o^* - T_{\Psi}^* - Y_{o\Phi}^*} \quad \text{και} \quad h = Y_F^* - Y_o^* + Y_{o\Phi}^*, \quad (3.271)$$

οι κινητήριες εξισώσεις για τις ζευγαρωμένες μεταβλητές g και h έχουν τυποποιηθεί με ακριβώς ίδιες μορφές όπως οι κινητήριες εξισώσεις για το πρόβλημα της εξάτμισης. Έτσι οι μαθηματικές διαδικασίες που περιγράφονται για το πρόβλημα της εξάτμισης έχουν επίσης εφαρμοστεί για να επιτευχθούν λύσεις για το πεδίο θερμοκρασίας και την κατανομή των συστατικών για το μεταφερόμενο καιγόμενο σταγονίδιο. Η αδιάστατη μεταβλητή \hat{g} για το πεδίο της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του σταγονιδίου έχει τροποποιηθεί στη σχέση:

$$\hat{g} = \frac{\hat{T}^* - T_{\Psi}^* - Y_{o\Phi}^*}{T_o^* - T_{\Psi}^* - Y_{o\Phi}^*}. \quad (3.272)$$

Οι επακόλουθες διατυπώσεις έχουν επιλυθεί με ακριβείς αριθμητικές διαδικασίες. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για ημισταθερή καύση ενός αργά κινούμενου σταγονιδίου η – επτανίου στον αέρα. Για τη σύγκριση με τη χαμηλότερου βαθμού θεωρία, διεξήχθησαν οι υπολογισμοί για καύσιμο η – επτανίου και αναπτύχθηκαν λεπτομερειακές χρονικές εξελίξεις της καιγόμενης σταγόνας και της υδροδυναμικής της σταγόνας. Το σχήμα 3.14 δείχνει τις ροϊκές γραμμές στη ροή γύρω από το καιγόμενο σταγονίδιο για αρχικό μεταφορικό αριθμό Reynolds $E_o = 0,2$ στον αδιάστατο χρόνο $t^* = \hat{a}t / R_o^2 = 0.1$. Τα αποτελέσματα επιτεύχθηκαν από την πρώτη βαθμού θεωρία όπως φαίνεται στο αριστερό τμήμα του σχήματος και τα αποτελέσματα της υψηλότερου βαθμού θεωρίας φαίνονται στο δεξιό τμήμα. Εξ' αιτίας της εξάτμισης του καυσίμου στην επιφάνεια, οι ροϊκές γραμμές δημιουργούνται στην επιφάνεια του σταγονιδίου και ακολουθούν την εξωτερική ροή. Κοντά στο μπροστινό τμήμα της σταγόνας η εξωτερική ακτινική ροή και η ομοιόμορφη εξωτερική ροή αντιπίνονται μεταξύ τους σχηματίζοντας ένα στάσιμο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

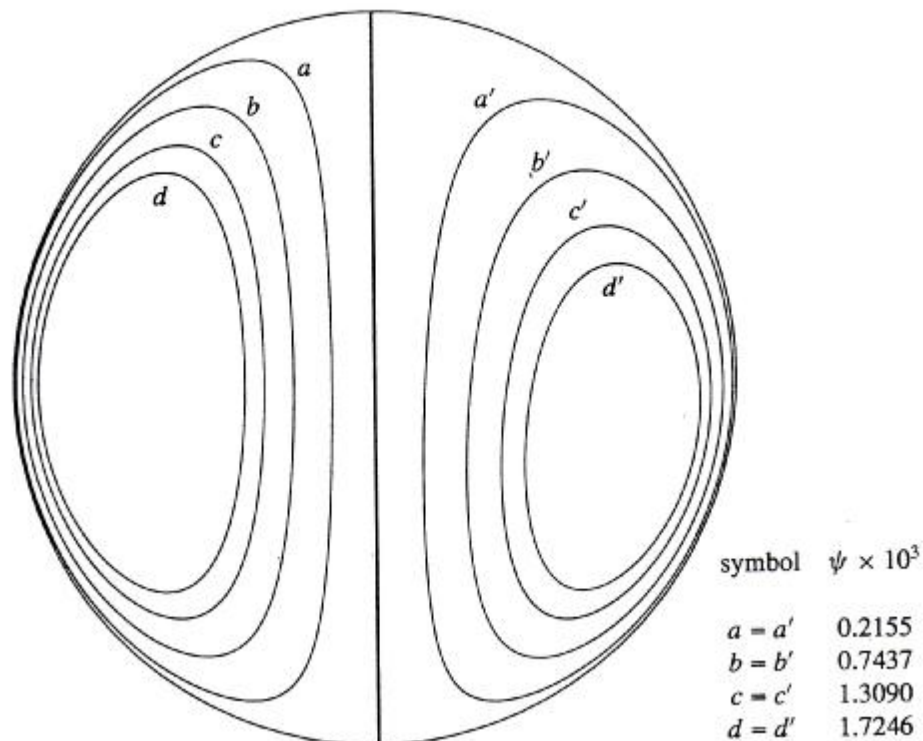


ΣΧΗΜΑ 3.14: Ροϊκές γραμμές σε αδιάστατο χρόνο $t^* = 0,1$, $\varepsilon_0 = 0,2$, $T_0 = 320$ K. Η κάθετη βαθμονόμηση δείχνει την ακτίνα του σταγονιδίου. — Ροϊκές γραμμές, το μέτωπο της φλόγας ----- . Αριστερή πλευρά: ροϊκές γραμμές υπολογισμένες από την πρώτου βαθμού θεωρία, δεξιά πλευρά: ροϊκές γραμμές υπολογισμένες από τη δεύτερου βαθμού θεωρία.

Για τις παραμέτρους που μελετήθηκαν, το στάσιμο σημείο τοποθετείται ανάμεσα στη φλόγα και την επιφάνεια του σταγονιδίου. Στο σχήμα οι ροϊκές γραμμές a, b, c και a', b', c' σχεδιάζονται για ίδιες ακριβώς θέσεις στην επιφάνεια της σταγόνας και οι ροϊκές γραμμές που σημειώνονται από τα d και d' είναι εκείνες που ξεκινούν από το στάσιμο σημείο. Οι ροϊκές συναρτήσεις για e και e' είναι ακριβώς ίδιες σε μέγεθος. Οι πρωταρχικές αναφορές απορρέουν από τη δεύτερου βαθμού θεωρία. Τα μεγέθη των ροϊκών συναρτήσεων, φαίνονται στο σχήμα. Με τη σύγκριση των τιμών των a, b, c και a', b', c' φαίνεται ότι μια μεγαλύτερη εκροή μάζας ή υψηλότερου βαθμού ατμοποίησης, προβλέπεται από τη δεύτερου βαθμού θεωρία. Για παρόμοιες συνθήκες τα απότελέσματα της υψηλότερου βαθμού θεωρίας προβλέπουν τη θέση του μετώπου της φλόγας και του μπροστινού στάσιμου σημείου να είναι περίπου 15% πιο κοντά στην επιφάνεια της σταγόνας από εκείνες που προβλέφθηκαν από την πρώτου βαθμού θεωρία. Η φλόγα δηλώνεται να είναι ασύμμετρη αλλά μ' ένα μεταβαλλόμενο βαθμό ασυμμετρίας. Η ασυμμετρία από μόνη της είναι μια άμεση συνέπεια της μεταγωγής. Η ροϊκή γραμμή e μετακινείται περαιτέρω (πιο μακριά) από το κέντρο της σταγόνας συγκρινόμενη με τη θέση της e' αν και οι τιμές των ροϊκών συναρτήσεων γι' αυτές τις γραμμές είναι ίδιες.

Η δεύτερου βαθμού θεωρία προβλέπει μια σχετικά μικρότερη συνολική οπισθέλκουσα και ένα σχετικά μεγαλύτερο βαθμό ατμοποίησης συγκρινόμενα με την

πρώτου βαθμού θεωρία. Για τις υπό μελέτη παραμέτρους η αυξημένη μεταφορική ταχύτητα έχει προκαλέσει το μπροστινό στάσιμο σημείο να είναι πιο κοντά στην επιφάνεια του σταγονιδίου και έναν αυξημένο βαθμό ασυμμετρίας για τη φλόγα. Οι ροϊκές γραμμές στο εσωτερικό της σταγόνας για αδιάστατο χρόνο $t^* = 0.1$ φαίνονται στο σχήμα 3.15.



ΣΧΗΜΑ 3.15: Ροϊκές γραμμές εντός του σταγονιδίου για $\hat{a}t/R_0^2 = 0.1$, $\varepsilon_0 = 0.2$, $T_0 = 320$ K. Αριστερή πλευρά: ροϊκές γραμμές υπολογισμένες από μια χαμηλότερου βαθμού θεωρία, δεξιά πλευρά: ροϊκές γραμμές υπολογισμένες από μια υψηλότερου βαθμού θεωρία.

Το αριστερό μισό είναι αποτέλεσμα της πρώτου βαθμού θεωρίας και το δεξιό μισό αντιστοιχεί στο δεύτερο βαθμό. Οι εικονιζόμενες ροϊκές γραμμές είναι για ίδιες τιμές ροϊκών συναρτήσεων υπολογισμένες και από τις δύο θεωρίες. Η χαμηλότερου βαθμού θεωρία προβλέπει έναν εσωτερικό σφαιρικό στρόβιλο συμμετρικό σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο για όλους τους χρόνους. Απ' την άλλη μεριά η υψηλότερου βαθμού θεωρία αποκαλύπτει ασυμμετρία στην εσωτερική κυκλοφορία. Με την πάροδο του χρόνου ο εσωτερικός στρόβιλος αλλάζει θέση πιο κοντά στο μπροστινό τμήμα του σταγονιδίου με αυξημένη συμμετρία. Αυτή η συμπεριφορά αποκαλύπτεται μόνο με το συνυπολογισμό υψηλότερου βαθμού όρων. Η ανομοιομορφία της ακτινικής εξάρτησης αυξάνει με το χρόνο και αυτό προκαλεί την αλλαγή θέσης στον εσωτερικό στρόβιλο. Καθώς η ακτινική ταχύτητα εξάτμισης αυξάνει, η ισχύς αυτού του κυκλοφοριακού στροβίλου μειώνεται. Αυτό έχει να κάνει με τη μεταγωγή θερμότητας της στροβιλώδους ροής μακριά από την επιφάνεια της σταγόνας. Καθώς το σταγονίδιο κινείται και στην ατμόσφαιρα, η συνολική οπισθέλκουσα αρχικά μειώνεται και επακόλουθα αυξάνει με αυξανόμενο U_{00} .

Συνοπτικά η σύγκριση των αποτελεσμάτων της υψηλότερου βαθμού θεωρίας μ' εκείνα που επιτυγχάνονται με την πρώτου βαθμού θεωρία δείχνουν ότι για ίδιες συνθήκες, η υψηλότερου βαθμού θεωρία προβλέπει αυξημένη διεπιφανειακή μεταφορά θερμότητας και μάζας και μικρότερη συνολικά οπισθέλκουσα δύναμη. Σημαντικότερα δείχνει ότι η απόσταση διαχωρισμού της φλόγας μειώνεται, υπάρχει μεγαλύτερη ασυμμετρία στη δομή της φλόγας, το μπροστινό στάσιμο σημείο είναι πιο κοντά και το εσωτερικό ροϊκό πεδίο είναι ασύμμετρο. Η ζωή του σταγονιδίου έχει προβλεφθεί μικρότερη απ' ό,τι προβλέπεται με τη θεωρία του πρώτου βαθμού. Αυτά τα θέματα θα επηρεάσουν σημαντικά τις μελέτες ανάφλεξης / απόσβεσης εφόσον η θέση του σημείου της ανάφλεξης / απόσβεσης θα εξαρτάται από αυτά. Για να δοκιμαστεί η καταλληλότητα της θεωρίας, τα αποτελέσματα από τη θεωρία διαταραχής συγκρίθηκαν με αριθμητικές προβλέψεις και έχει βρεθεί καλή συμφωνία.

Επίδραση του Καπνού (αιθάλη) στο Βαθμό Καύσης. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα ο Avedisian και οι συνεργάτες του έχουν πειραματικά ερευνήσει χαμηλής βαρύτητας καύση σταγονιδίου. Οι μετρήσεις της εξέλιξης της διαμέτρου του σταγονιδίου κάτω από μικροβαρυτικές (ουσιαστικά σφαιρικό – συμμετρικές) συνθήκες έχουν σημειώσει ότι ο βαθμός καύσης μπορεί στην πραγματικότητα να είναι εξαρτώμενος από το d_0 τουλάχιστον για καύσιμα που παράγουν καπνό. Αυτό το συμπέρασμα βασίζεται στους διαφορετικούς βαθμούς καύσης που παρατηρήθηκαν για σταγονίδια διαφορετικής αρχικής διαμέτρου του ίδιου καυσίμου. Οι ασυμπτωτικοί βαθμοί καύσης μειώνονται με την αύξηση της διαμέτρου. Η επίδραση του καπνού στον σταθερό βαθμό καύσης είναι αυτή που προκύπτει λόγω του σταθερού κελύφους (περίβλημα) του καπνού που δρα σαν εμπόδιο για τη μεταφορά θερμότητας στην αέρια φάση. Το περίβλημα του καπνού επίσης δρα σαν εμπόδιο απλώνοντας ακτινικά τη θερμότητα μακριά από το σταγονίδιο. Η μείωση της μεταφοράς θερμότητας ανάμεσα στη φλόγα και το σταγονίδιο με αύξηση του καπνού μπορεί να συμβεί εξ' αιτίας της μείωσης του οξειδωτικού μέσου του καυσίμου στη ζώνη της φλόγας. Το περίβλημα του καπνού επίσης δρα σα φυσικό εμπόδιο για τη διάχυση μάζας των μορίων ή προκαλεί τα μόρια του καυσίμου να αντιδράσουν στην επιφάνεια των σωματιδίων του καπνού πριν φθάσουν στην οξειδωτική ζώνη.

3.3.5 ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΡΥΠΩΝ

Επιφανειακά – δρώσες διαλυμένες ουσίες ή ρύποι, έχουν την ιδιότητα να τείνουν να συγκεντρώνονται στη διεπιφάνεια δύο ρευστών. Τυπικά ένας ρύπος έχει μια ογκομετρική συγκέντρωση c και \hat{c} στον όγκο των φάσεων δύο παρακείμενων ρευστών με τη διεπιφάνεια να μεταφέρει μια υψηλή συγκέντρωση του ρύπου. Μια τέτοια παρουσία έχει σαν αποτέλεσμα την μεταβολή της επιφανειακής τάσης και την εφαρμογή μιας εφαπτομενικής δύναμης στη διεπιφάνεια αυξάνοντας έτσι την οπισθέλκουσα. Σε μια από τις πιο πρόσφατες μελέτες, οι Bond & Newton απέδειξαν ότι οι μεγάλες σταγόνες πέφτουν με των Rybczynski – Hadamard την τελική ταχύτητα, ενώ στις μικρές σταγόνες εφαρμόζεται η οπισθέλκουσα του Stokes. Αυτό έχει συνοπτικά εξηγηθεί νωρίτερα στην παράγραφο 3.2.3 προβάλλοντας ένα πάχος h χαρακτηρίζοντας τις επιδράσεις στην επιφανειακή φάση και θεωρώντας τη σημαντική του σχέση με το μέγεθος της σταγόνας.

Εφόσον η επιφανειακή φάση είναι πολύ λεπτή, η συγκέντρωση σ' αυτή τη φάση περιγράφεται με τον όρο μάζας ανά μονάδα επιφανείας Γ . Η λεπτομερειακή θερμοδυναμική των λύσεων περιγράφεται με την εξίσωση Gibbs – Duhem που

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συσχετίσει την επιφανειακή τάση με τις συγκεντρώσεις. Για αραιά διαλύματα, η επιφανειακή τάση σχετίζεται με το Γ με τη σχέση:

$$(\sigma_0 - \sigma) = R\Gamma, \quad (3.273)$$

όπου R είναι η παγκόσμια σταθερά του αερίου σύμφωνα με τις μονάδες του Γ . Εδώ το Γ ορίζεται σαν μάζα ανά μονάδα επιφάνειας και έτσι σ' αυτήν την περίπτωση $R = R/m$ όπου R είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων και m είναι το μοριακό βάρος της διαλυμένης ουσίας. Επιπρόσθετα στην παραπάνω εξίσωση η γραμμική σχέση για ιδανικές λύσεις που ακολουθεί εφαρμόζεται στη διεπιφάνεια:

$$hc = \hat{h}\hat{c} = \Gamma, \quad (3.274)$$

όπου h και \hat{h} είναι ουσιώδεις – υλικές ιδιότητες που ορίζονται σαν βάθη προσρόφησης με διαστάσεις μήκους. Αυτή η σχέση βασίζεται σε καταστάσεις σχεδόν ισορροπίας και θα έπρεπε να γραφεί:

$$hc_{\Psi} = \hat{h}\hat{c}_{\Psi} = \Gamma_{\Psi}, \quad (3.275)$$

όπου ο δείκτης Ψ αναφέρεται σε θερμοδυναμικές ποσότητες για ένα στατικό σύστημα. Εφόσον στη διεπιφάνεια c και \hat{c} μεταβάλλονται αναλογικά με το Γ , επιπρόσθετες μεταβολές στον κύριο όγκο λαμβάνουν χώρα κάτω από τις επικρατούσες θερμοδυναμικές και ρευστό – δυναμικές συνθήκες. Εφαρμόζοντας αυτές τις σχέσεις στις αρχές διατήρησης των συστατικών, ένα παρεμφερές σετ κινητήριων εξισώσεων μπορεί να παραχθεί.

Οι εξισώσεις μεταφοράς στον κύριο όγκο των φάσεων δίνονται από την εξίσωση (1.42). Στην σταθερή κατάσταση έχουμε:

$$u_{\mathcal{P}} c = D_{\mathcal{P}}^2 c, \quad (3.276)$$

$$\hat{u}_{\mathcal{P}} \hat{c} = \hat{D}_{\mathcal{P}}^2 \hat{c}, \quad (3.277)$$

Η διατήρηση των συστατικών της επιφανειακής φάσης, στη σταθερή κατάσταση αποδίδει:

$$P_s \mathcal{G}(u_s \Gamma) - D_s P_s^2 \Gamma = (D_{\mathcal{P}} c - \hat{D}_{\mathcal{P}} \hat{c}) \eta|_s, \quad (3.278)$$

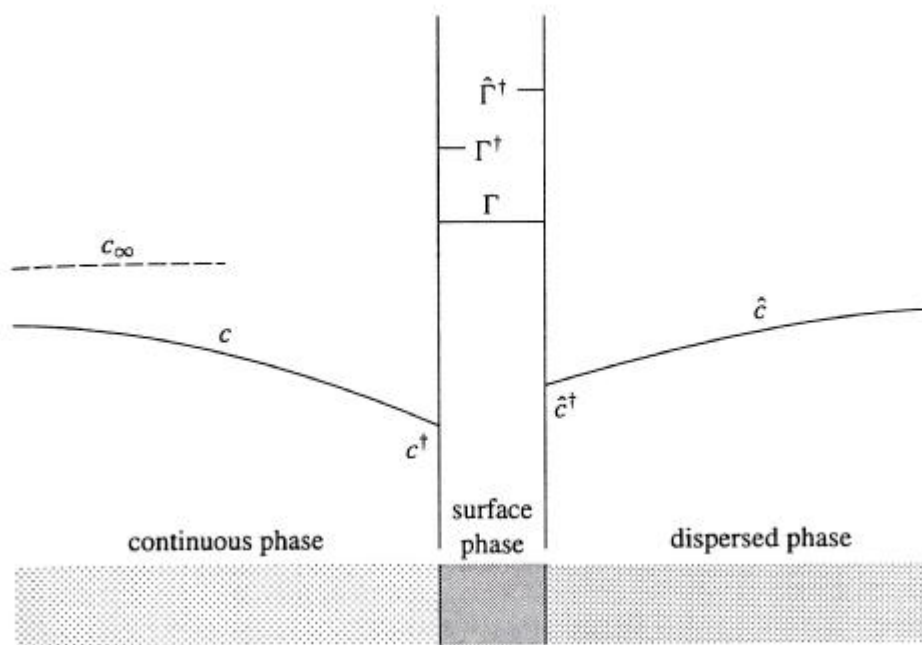
όπου το P_s αναπαριστά τη βαθμωτή μεταβολή (βαθμωτό διάνυσμα) κατά μήκος της επιφάνειας. Ενώ η εξίσωση (3.274) αναπαριστά θερμοδυναμική ισορροπία στην περίπτωση συνεχούς απορρόφησης και διάχυσης, η επιφανειακή κινηματική περιγραφή απαιτεί την ισορροπία του καθαρού βαθμού απορρόφησης με το βαθμό διάχυσης. Επιπρόσθετα η θερμοδυναμική της διεπιφάνειας μέσω του θεωρήματος απορρόφησης Gibbs παρέχει σχέσεις ανάμεσα στην επιφανειακή συγκέντρωση, τη συγκέντρωση του κυρίως όγκου και της επιφανειακής τάσης. Μια λεπτομερειακή παραγόμενη μελέτη της επιφανειακής κινηματικής εξήχθη από τους Holbrook & LeVan οδηγώντας σε αποτελέσματα πιο γενικά απ' ότι οι σχέσεις που δίνονται από

την (3.274). Βασιζόμενες σ' αυτές τις μελέτες οι εξισώσεις για την επιφανειακή κινηματική παίρνουν τις ακόλουθες μορφές:

$$n_g [DP \ c]_{\xi} = K \Gamma^{\dagger} - \Gamma_{\xi}^{\omega}, \quad (3.279)$$

$$n_g \hat{DP} \hat{c}_{\xi}^{\omega} = \hat{K} \hat{\Gamma}^{\dagger} - \Gamma_{\xi}^{\omega}. \quad (3.280)$$

όπου Γ^{\dagger} και $\hat{\Gamma}^{\dagger}$ είναι φανταστικές συγκεντρώσεις στην επιφανειακή φάση άμεσα παρακείμενες στις αντίστοιχες φάσεις του κυρίως όγκου (κύριες φάσεις) όπως φαίνεται στο σχήμα 3.16.



ΣΧΗΜΑ 3.16: Κατανομή ρύπου σε μια διεπιφάνεια και τις παρακείμενες κύριες φάσεις.

Οι επιφανειακές και οι κύριες συγκεντρώσεις (συγκεντρώσεις των κυρίων φάσεων) μαζί με τις διεπιφανειακές τάσεις είναι αλληλοεξαρτώμενες μέσω διεπιφανειακών σχέσεων που βασίζονται στην ισόθερμη προσρόφηση Gibbs. Μ' ένα μοναδιαίο δραστικό συντελεστή έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\Gamma}{c} = - \frac{1}{RT} \left(\frac{d\sigma}{dc} \right) \quad (3.281)$$

Για μικρές αποκλίσεις από την ισορροπία, οι σχέσεις μεταξύ Γ , c και \hat{c} μπορούν να γίνουν γραμμικές με τις μορφές:

$$(\Gamma^{\dagger} - \Gamma_{\infty}) = \left. \frac{d\Gamma}{dc} \right|_{c_{\infty}} (c^{\dagger} - c_{\infty}), \quad (3.282)$$

$$(\hat{\Gamma}^+ - \Gamma_{\infty}) = \left. \frac{d\Gamma}{d\hat{c}} \right|_{\hat{c}_{\infty}} (\hat{c}^+ - \hat{c}_{\infty}), \quad (3.283)$$

όπου c_{∞} είναι η συγκέντρωση στα όρια του απομακρυσμένου πεδίου στη συνεχή φάση τόσο για στατικά όσο και για δυναμικά συστήματα. Οι συγκεντρώσεις \hat{c}_{∞} και Γ_{∞} είναι οι συγκεντρώσεις ισορροπίας στη διασκορπισμένη και στη συνεχή φάση αντίστοιχα, στην απουσία κίνησης ρευστού. Σε μια παρόμοια διαδικασία γραμμικής μορφοποίησης όπως παραπάνω, η σχέση (3.281) μεταξύ του σ και (Γ, C) μπορεί να απλοποιηθεί για καταστάσεις σχεδόν ισορροπίας δίνοντας:

$$\frac{\sigma_o - \sigma}{\sigma_o - \sigma_{\infty}} = 1 + \frac{G}{H}(\Gamma - \Gamma_{\infty}), \quad (3.284)$$

όπου:

$$H = \frac{1}{h} \left. \frac{d\Gamma}{dc} \right|_{c_{\infty}} \quad (3.285)$$

με τον καθορισμό του h όπως δίνεται στην (3.275). Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε ότι:

$$\hat{H} = \frac{1}{h} \left. \frac{d\Gamma}{d\hat{c}} \right|_{\hat{c}_{\infty}} \quad (3.286)$$

Ο όρος G δίνεται από τη σχέση:

$$G = \frac{\Gamma_{\infty} RT}{\sigma_o - \sigma_{\infty}}. \quad (3.287)$$

Στο όριο λύσεων πολύ αραιού ρύπου, αυτές οι σχέσεις ανάγονται στην εξίσωση (3.274) μαζί με:

$$\frac{\sigma_o - \sigma}{\sigma_o - \sigma_{\infty}} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\infty}}. \quad (3.288)$$

Οι ρευστό – δυναμικές απόψεις για το πρόβλημα του ρύπου, περιγράφονται από την εξίσωση Navier – Stokes. Οι περισσότεροι ερευνητές έχουν χειριστεί τη μηχανική των ρευστών σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Οι μελέτες της μεταφοράς με αγωγή θερμότητας έχουν διεξαχθεί για διάφορα επίπεδα του αριθμού Peclet. Γενικά, για μια κατανομή της επιφανειακής τάσης που δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\sigma_o - \sigma}{\sigma_o - \sigma_{\infty}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_n(\cos \theta), \quad (3.289)$$

οι ροϊκές συναρτήσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty R^2 \frac{\zeta r \phi^2}{R^2} - \frac{2 + 3\varphi_\mu}{2(1 + \varphi_\mu)} \frac{\zeta r \phi}{R} + \frac{\varphi_\mu}{2(1 + \varphi_\mu)} \frac{R^\omega}{r} (1 - \bar{\mu}^2) + \frac{1}{2(1 + \varphi_\mu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} S_n \frac{\zeta r \phi^{n+2}}{R^n} - \frac{\zeta r \phi^n}{R^n} C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \quad (3.290)$$

$$\hat{\psi} = \frac{1}{4} U_\infty R^2 \frac{1}{(1 + \varphi_\mu)} \frac{\zeta r \phi^4}{R^2} - \frac{\zeta r \phi^2}{R} (1 - \bar{\mu}^2) + \frac{1}{2(1 + \varphi_\mu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} S_n \frac{\zeta r \phi^{n+3}}{R^n} - \frac{\zeta r \phi^{n+1}}{R^n} C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \quad (3.291)$$

Οι διεπιφανειακές χαρακτηριστικές που δίνονται από το σετ των συντελεστών S_n στις παραπάνω εξισώσεις, καθορίζονται από τη λύση των εξισώσεων μεταφοράς μάζας τόσο στις κυρίως φάσεις (διασκορπισμένη, συνεχής) όσο και στην επιφανειακή φάση. Η διαδικασία της λύσης γενικά απαιτεί κάποιο επίπεδο προσεγγιστικής ή αριθμητικής ανάλυσης. Κάποια αποτελέσματα έχουν βρεθεί για το όριο χαμηλού αριθμού Peclet.

ΧΑΜΗΛΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ PECLET ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Για χαμηλό αριθμό Peclet, θεωρούμε δύο τύπους πεδίων ροής, εξαναγκασμένη μεταγωγή (υπό την επίδραση δυνάμεων) και «αυτόνομη κίνηση». Η εξαναγκασμένη μεταγωγή γενικά λαμβάνει χώρα λόγω βαρύτητας όταν όπως κάτω από τις περισσότερες των περιστάσεων με ρευστά σωματίδια, έχουμε μια διαφορά πυκνότητας $\Delta\rho = (\hat{\rho} - \rho)$. Η αυτόνομη κίνηση ή αυτό – προωθούμενη κίνηση των σταγόνων έχει μελετηθεί για συγκεκριμένους τύπους επιφανειακών αντιδράσεων. Ξανά αναφέρουμε ότι για μια μεταφορική ταχύτητα U , οι αριθμοί Peclet της μεταφοράς μάζας ορίζονται με τις σχέσεις $Pe = 2UR/D$ και $\hat{Pe} = 2UR/\hat{D}$, όπου D και \hat{D} είναι οι κατάλληλοι συντελεστές διάχυσης. Επιπρόσθετα ένας επιφανειακός αριθμός Peclet που βασίζεται στο συντελεστή επιφανειακής διάχυσης D_s ορίζεται με τη σχέση $Pe_s = 2UR/D_s$.

Σταθερή Εξαναγκασμένη Μεταγωγή

Στο όριο του Pe , $\hat{Pe} \ll 1$ η αρχικού – βαθμού διάχυση μάζας μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση Laplace σε κάθε φάση, με την εξαίρεση των όρων της μεταγωγής. Μια λύση σε σχέση με τη σειρά Legendre έχει δοθεί από τον Harper. Ενώ η μεταφορά μάζας στην κυρίως φάση είναι γραμμικά μορφοποιημένη, η διεπιφανειακή ισορροπία μάζας παραμένει μη γραμμική λόγω του όρου επιφανειακής μεταγωγής στην οποία η ταχύτητα εξαρτάται από τη συγκέντρωση. Έτσι ο Harper θεώρησε μόνο μια ελάχιστα διαφοροποιημένη επιφανειακή συγκέντρωση από τη μέση τιμή. Σαν αποτέλεσμα μόνο οι όροι στα $P_0(\cos \theta)$ και $P_1(\cos \theta)$ παρέμειναν c ,

\hat{c} και Γ . Η διανομή της διεπιφανειακής ταχύτητας είναι ανάλογη του $\sin\theta$. Οι Holbrook & LeVan συμπεριέλαβαν μια παρόμοια διαδικασία με μια περισσότερο γενική συνθήκη για τη διεπιφανειακή κινηματική. Με την εφαρμογή αυτών των συνθηκών για τη διεπιφανειακή κινηματική [εξισώσεις (3.279) και (3.280)] μαζί με την εξίσωση (3.278) για τη διεπιφανειακή διατήρηση μάζας, επιτεύχθηκε το παρακάτω πακέτο αποτελεσμάτων:

$$\frac{\sigma_o - \sigma}{\sigma_o - \sigma_{\Psi}} = 1 + S_1 \cos\theta, \quad (3.292)$$

$$\Gamma - \Gamma_{\Psi} = \frac{H}{G} \Gamma_{\Psi} S_1 \cos\theta, \quad (3.293)$$

$$\frac{c - c_{\Psi}}{c_{\Psi}} = \frac{1}{G \frac{1}{\kappa} + 2R / (HhK^*)} \frac{\zeta R \phi^2}{\phi} S_1 \cos\theta, \quad (3.294)$$

$$\frac{\hat{c} - \hat{c}_{\Psi}}{c_{\Psi}} = \frac{1}{G \frac{1}{\hat{\kappa}} + 2R / (\hat{H}h\hat{K}^*)} \frac{\zeta R \phi^2}{\phi} S_1 \cos\theta, \quad (3.295)$$

όπου:

$$K^* = \frac{KR^2}{D} \quad \text{και} \quad \hat{K}^* = \frac{\hat{K}R^2}{\hat{D}} \quad (3.296)$$

ο συντελεστής S_1 στη σειρά (3.289) δίνεται από τη σχέση:

$$S_1 = - \frac{x}{(1 + \varphi_{\mu}) + \frac{1}{3}x}, \quad (3.297)$$

όπου:

$$x = - \frac{RT\Gamma_{\Psi}}{\mu V_D}. \quad (3.298)$$

Όπου το V_D αναπαριστά μια τροποποιημένη ταχύτητα διάχυσης:

$$V_D = H \frac{\frac{D}{hH}}{\frac{1}{\kappa} + \frac{2D}{hHK^*U_{\Psi}}} + \frac{\frac{\hat{D}}{h\hat{H}}}{1 + \frac{2\hat{D}}{h\hat{H}\hat{K}^*U_{\Psi}}} + \frac{D_s}{R} \quad (3.299)$$

Στο όριο της σχεδόν – ισορροπίας έχουμε $H \approx 1$ μαζί με $\hat{H}h \approx \hat{h}$ για ένα απείρως γρήγορο βαθμό αντίδρασης K^* , $\hat{K}^* \approx \infty$. Σ' αυτά τα όρια η παραπάνω ταχύτητα διανομής ανάγεται στο αποτέλεσμα του Harper.

$$V_D \approx \frac{D}{h} + \frac{\hat{D}}{2\hat{h}} + \frac{D_s \varphi}{R} \quad (3.300)$$

Η οπισθέλκουσα δύναμη δίνεται από τη σχέση:

$$F = \frac{2\pi\mu U_\infty R}{(1 + \varphi_\mu)} \frac{1}{\kappa} (2 + 3\varphi_\mu) - \frac{1}{3} S_1 \frac{\omega}{\Omega} = 4\pi\mu U_\infty R \frac{(2 + 3\varphi_\mu) + x}{(2 + 2\varphi_\mu) + \frac{2}{3}x} \quad (3.301)$$

Αυτόνομη Κίνηση

Σε μια πρόσφατη μελέτη οι Rednikov, Ryazantsev & Velard έχουν θεωρητικά εξετάσει τις επιφανειακές αντιδράσεις που καταναλώνουν τη διαλυμένη ύλη. Σαν αποτέλεσμα η συγκέντρωση της κύριας φάσης είναι χαμηλότερη από την τιμή στα όρια του πεδίου. Αυτό είναι αντίθετο στην περίπτωση που θεωρήθηκε πριν όταν η επιφάνεια συσσωρεύει το ρύπο. Με την κένωση στη διεπιφάνεια η μεταφορική (ομοιογενής) κίνηση προκαλεί τη μεταγωγή υψηλής συγκέντρωσης ρευστού στο μπροστινό μέρος το οποίο μετά μεταφέρεται στο χαμηλής συγκέντρωσης πίσω μέρος. Με αυτό τον τρόπο αποδεικνύεται μια βαθμωτή μεταβολή μείωσης από το μπροστινό μέρος στο πίσω και μπορεί να προκαλέσει πρόωση ακόμα και με $d\sigma/d\Gamma < 0$. Αυτός ο μηχανισμός πρόωσης ολοκληρώνεται με άλλες δυνάμεις επιβράδυνσης όπως η οπισθέλκουσα του ιξώδους. Το καθαρό αποτέλεσμα είναι ότι υπάρχει η πιθανότητα για μια αυτό – ωθούμενη σταγόνα που έλκει την ενέργειά της από την επιφανειακή χημική αντίδραση, να προκαλέσει μια χημική μετατροπή σε μηχανική. Μια σφαιρικά συμμετρική ακίνητη σταγόνα με μια αυξανόμενη επιφανειακή αντίδραση μπορεί ν' αρχίσει να κινείται εάν διαταραχτεί. Μια μικρή μεταφορική διαταραχή θα προκαλέσει μια βαθμωτή μεταβολή συγκέντρωσης στο ανάπτυγμα ευνοώντας την πρόωση και συνεπώς μια χημικά οδηγούσα κίνηση θα ξεκινήσει.

Ο Rednikov κ.α εφάρμοσαν το ζήτημα της κένωσης μάζας, τροποποιώντας τη συνθήκη διατήρησης. Αντί της εξίσωσης (3.278) χρησιμοποίησαν την παρακάτω εξίσωση για μια αδιάλυτη διασκορπισμένη φάση:

$$P_s \frac{d(u_s \Gamma)}{ds} - D_s P_s \frac{d^2 \Gamma}{ds^2} = DP_s c \frac{d\eta}{ds} - K^A \quad (3.302)$$

όπου K^A είναι η σταθερά της αντίδρασης. Με τις κυρίως και τις επιφανειακές συγκεντρώσεις που σχετίζονται με την (3.275), εξήγαγαν μια επέκταση ιδιόμορφης διαταραχής στο $O(Pe)$. Η γενική ανάλυση δίνει μια έκφραση για την οπισθέλκουσα δύναμη στο $O(Pe)$ όπως παρακάτω:

$$F = 4\pi\mu U_\infty R \frac{1}{\kappa} D_0 + \frac{1}{2} Pe D_1 + O(Pe^2) \quad (3.303)$$

όπου:

$$D_0 = \frac{(2 + 3\varphi_\mu) + \frac{\zeta}{h} x_A \frac{1}{4} K_A \frac{\varphi}{\psi}}{(2 + 2\varphi_\mu) + \frac{\zeta}{h} x_A \frac{1}{8} K_A \frac{\varphi}{\psi}} \quad (3.304)$$

$$D_1 = \frac{\frac{1}{2} \frac{K_A x_A}{h} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{4} K_A \frac{\varphi}{\psi}}{R/h + K_A} \right) - \frac{1}{8} K_A \frac{\varphi}{\psi}}{\frac{1}{3} x_A \left(1 - \frac{1}{8} K_A \frac{\varphi}{\psi} \right) + (1 + \varphi_k) \left(\frac{R}{h} + K_A \right) - \frac{1}{8} K_A \frac{\varphi}{\psi}} \quad (3.305)$$

$$\frac{1}{3} x_A \frac{(2 + 3\varphi_\mu) + \frac{\zeta}{h} x_A \frac{1}{4} K_A \frac{\varphi}{\psi}}{(2 + 2\varphi_\mu) + \frac{\zeta}{h} x_A \frac{1}{8} K_A \frac{\varphi}{\psi}} + \frac{D_0^2}{2Sc}$$

και $Pe = 2U_\infty R/D$. Σ' αυτές τις εκφράσεις:

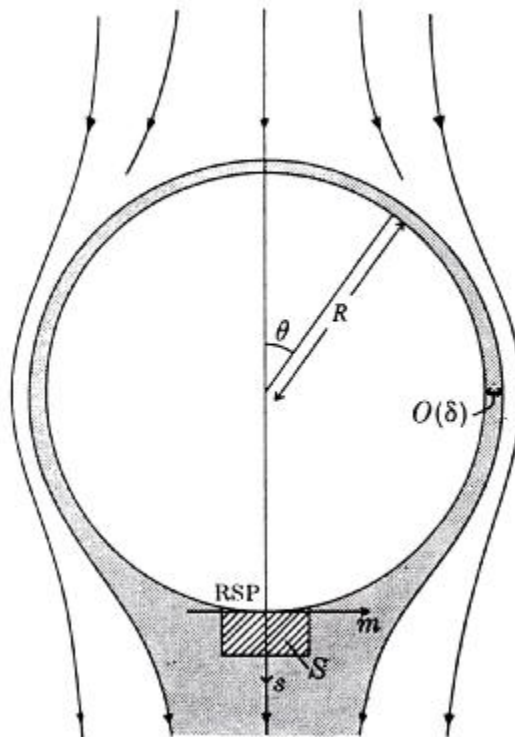
$$x_A = \frac{-\frac{d\sigma}{d\Gamma} \frac{c_\infty R^2}{\mu D}}{\frac{R}{h} + K_A \frac{D_s}{D} + \frac{R}{h} + \frac{1}{2} K_A \frac{\varphi}{\psi}} \quad (3.306)$$

$$K_A = \frac{KR^2}{D} \quad \text{και} \quad Sc = \frac{v}{D} \quad (3.307)$$

Το πεδίο ροής επιδεικνύει κάποια ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Ο τύπος της ροής παίρνει διαφορετικές μορφές εξαρτώμενες από την τιμή του D_0 . Για $D_0 > \frac{3}{2}$ το πεδίο ροής είναι παρόμοιο με τη ροή Rybczynski – Hadamard. Όταν $D_0 = \frac{3}{2}$ η ροή μέσα στη σταγόνα είναι εντελώς στάσιμη (λιμνάζει) σαν να πρόκειται για μια στερεή σφαίρα. Με $D_0 < \frac{3}{2}$ εμφανίζονται περισσότερες πολυπλοκότητες με την παρουσία ενός στρώματος ανακυκλοφορίας γύρω από τη σταγόνα και μια αντίστροφη ροή στη σταγόνα. Η οπισθέλκουσα δύναμη σ' αυτή την περίπτωση είναι μεγαλύτερη από την οπισθέλκουσα Stokes.

ΥΨΗΛΟΥ ΒΑΘΜΟΥ PECLET ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Για υψηλό αριθμό Peclet η διαδικασία διάχυσης είναι αργή συγκρινόμενη με τη μεταγωγική μεταφορά. Για χαμηλό Re λαμβάνει χώρα υψηλού αριθμού Peclet μεταφορά όταν οι σταθερές διάχυσης D και \hat{D} είναι μικρές. Κάτω από τέτοιες περιστάσεις η παρουσία της διαλυμένης ουσίας σε μεγάλες συγκεντρώσεις, περιορίζεται σε μια συγκέντρωση οριακού στρώματος κοντά στη διεπιφάνεια της σταγόνας μαζί με μια συγκέντρωση πάνω και πέρα από το πίσω σταθερό σημείο. Αυτό εικονίζεται στο σχήμα 3.17.



ΣΧΗΜΑ 3.17: Διάχυση οριακού στρώματος και συγκέντρωση σε υψηλού αριθμού Peclet μεταφορά γύρω από μια κινούμενη σταγόνα.

Διάφορες μελέτες στο όριο υψηλού αριθμού Peclet έχουν διεξαχθεί και κάποιες από τις πιο πρόσφατες έρευνες περιλαμβάνουν μελέτες των Deryagin, Dukhin & Lisichenko, Derjaguin & Dukhin και Dukhin & Deryagin. Αυτές διαδοχικά ακολουθήθηκαν από ένα αριθμό άλλων μελετών για πάνω από μια δεκαετία. Όπως σημειώθηκε από τον Harper η λύση με μια μέθοδο ομαλής διαταραχής για $Pe \gg 1$ οδηγεί σε μια ιδιομορφία στο πίσω σταθερό σημείο για τη συγκέντρωση ρύπων και το προφίλ της ταχύτητας. Σε πολλές απ' αυτές τις μελέτες το πρόβλημα της ιδιομορφής συμπεριφοράς δεν έχει κατάλληλα διευθετηθεί. Ευτυχώς όπως και να 'χει το ανάπτυγμα του Harper αποδεικνύει ότι ο υπολογισμός της οπισθέλκουσας δύναμης με κατάλληλη συμπεριφορά που απορρέει από την πίσω σταθερή περιοχή, δημιουργεί πολύ μικρή διαφορά στο τελικό αποτέλεσμα. Η φύση της ιδιομορφίας για διαφορετικά επίπεδα επιφανειακής δραστηριότητας έχει εξεταστεί από τον Harper. Συγκεκριμένα η ιδιομορφία είναι αλγεβρική ή λογαριθμική για υψηλή ή χαμηλή

επιφανειακή δραστηριότητα αντίστοιχα. Αυτό είναι σε αντίθεση με το αξίωμα του Saville ότι η ιδιομορφία είναι λογαριθμική για όλα τα επίπεδα επιφανειακής δραστηριότητας. Ο Harper αυτό το έχει αποδώσει σε αριθμητικό σφάλμα. Εφόσον η ανάλυση του Harper είναι η πιο περιεκτική σε σχέση με το όριο υψηλού αριθμού Peclet, εστιάζουμε την αναφορά μας σ' αυτό το ανάπτυγμα για αέριες φυσαλίδες. Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$(\sigma_0 - \sigma) = RT\Gamma = RThc, \quad (3.308)$$

στην εξίσωση (3.276) έχουμε:

$$u_g P \Gamma = DP^2 \Gamma. \quad (3.309)$$

Εδώ το Γ που είναι ανάλογο του c ερμηνεύεται σαν κυρίως συγκέντρωση. Έγινε κατανοητό ότι αυτή η συγκέντρωση στην κυρίως φάση πρέπει να αλλάξει πάλι σε c με την εξίσωση (3.308).

Η σχέση διατήρησης της επιφανειακής φάσης (3.278) μπορεί να γραφεί για σταθερή κατάσταση με την παρακάτω βαθμωτή μορφή:

$$hD_s \frac{1}{R} (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma}{\theta} + DR^2 (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma}{r} = Rh \frac{1}{\theta} u_g (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.310)$$

Στα όρια του πεδίου η συγκέντρωση ρύπων φτάνει το στατικό μέγεθος c_s ή ισοδύναμα:

$$\Gamma \approx \Gamma_s \quad \text{καθώς} \quad r \approx R \quad (3.311)$$

Στο όριο του $Pe \gg 1$, ο Harper έχει παρουσιάσει το μετασχηματισμό των συντεταγμένων:

$$x = \frac{1}{4}(2 - 3\bar{\mu} + \bar{\mu}^3), \quad y = \frac{(3Pe_v)^{\frac{1}{2}}(r - R)(1 - \bar{\mu}^2)}{4R} \quad (3.312)$$

όπου $\bar{\mu} = \cos\theta$ και Pe_v είναι ο αριθμός Peclet που βασίζεται στη μέγιστη επιφανειακή ταχύτητα η οποία στην παρούσα περίπτωση της έρπουσας ροής είναι

$$U_s = \frac{1}{2} U_g. \quad \text{Έτσι:}$$

$$Pe_v = \frac{\frac{1}{2} U_g R}{D} = \frac{1}{4} Pe. \quad (3.313)$$

Η μεταβλητή χ εκτείνεται σ' ένα εύρος τιμών $0 \leq \chi \leq 1$. Σαν αποτέλεσμα, η εξίσωση (3.309) γίνεται:

$$4 \frac{\zeta \Gamma \Phi}{\theta \Gamma x \Psi} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma y^2} + \frac{8}{(3Pe_s)^2 (1 - \bar{\mu}^2)} \frac{\zeta \Gamma \Phi}{\theta \Gamma y \Psi} + O(Pe_s^{-1}). \quad (3.314)$$

Για $Pe \gg 1$, αυτή η εξίσωση μπορεί περαιτέρω να προσεγγιστεί:

$$4 \frac{\Gamma}{\Gamma x} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma y^2}, \quad (3.315)$$

παρουσιάζοντας το $\bar{\mu}$ όχι κοντά στο ± 1 π.χ μακριά από τον άξονα. Οι οριακές συνθήκες παίρνουν τη μορφή:

$$\Gamma \otimes \Gamma_{\Psi} \quad \text{καθώς} \quad y \otimes \Psi, \quad (3.316)$$

$$\Gamma \otimes \Gamma_{\Psi} \quad \text{για} \quad x = 0, \quad y \neq 0, \quad (3.317)$$

$$\frac{\Gamma}{\Gamma y} = 3^{\frac{1}{2}} \kappa \frac{\Gamma}{\Gamma x} (1 - \bar{\mu}^2) - \frac{3(1 - \bar{\mu}^2)^2}{2Pe_s} \frac{\zeta \Gamma \Phi}{\theta \Gamma x \Psi} \quad \text{για} \quad y = 0, \quad (3.318)$$

όπου:

$$Pe_s = \frac{\zeta \frac{1}{2} U_{\Psi} R \Phi}{D_s \Psi} \quad (3.319)$$

είναι ένας επιφανειακός αριθμός Peclet και

$$\kappa = \frac{hPe_s^2}{R} \quad (3.320)$$

αναπαριστά το επίπεδο της επιφανειακής δραστηριότητας. Ο Harper έχει εξασφαλίσει αποτελέσματα στα όρια υψηλής και χαμηλής επιφανειακής δραστηριότητας π.χ $\kappa \gg 1$ και $\kappa = 1$, αντίστοιχα. Αυτά αναφέρονται παρακάτω.

Χαμηλή Επιφανειακή Δραστηριότητα ($\kappa \ll 1$)

Με $\kappa = 1$ χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω ανάπτυγμα διαταραχής

$$\Gamma = \Gamma_{\Psi} \frac{\Gamma}{\kappa} + \kappa \Gamma_{\kappa 1} + O(\kappa^2) + O\left(\frac{\zeta \Gamma \Phi}{\theta \Gamma x \Psi} \kappa Pe_s^{-\frac{1}{2}}\right) + O\left(\frac{\zeta \Gamma \Phi}{\theta \Gamma x \Psi} Pe_s^{-\frac{1}{2}}\right) + O(\kappa Pe_s^{-1}) \frac{\zeta \Gamma \Phi}{\theta \Gamma x \Psi} \quad (3.321)$$

Λεπτομερείς υπολογισμούς για το $\Gamma_{\kappa 1}$ αποδίδουν τα αποτελέσματα του Dukhin:

$$\Gamma_{\kappa 1} = \frac{\zeta}{\theta \pi^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{\zeta \bar{\mu}^2} \Lambda(\bar{\mu}, \bar{\mu}^A) \exp \left\{ - \frac{1}{\kappa} \Lambda(\bar{\mu}, \bar{\mu}^A) y \frac{\zeta}{\theta} \right\} d\bar{\mu}^A \quad (3.322)$$

όπου:

$$\Lambda(\bar{\mu}, \bar{\mu}^A) = 2(\bar{\mu} - \bar{\mu}^A)^{1/2} (3 - \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}\bar{\mu}^A - \bar{\mu}^A)^{1/2}. \quad (3.323)$$

Αυτό είναι πάλι κατάλληλο μακριά από τον άξονα π.χ $\bar{\mu}^A \approx \pm 1$. Στην περιοχή μπροστά από το σταθερό σημείο ($\bar{\mu} = \pm 1$) με $(1 - \bar{\mu}^2)^{1/2} = 4(x/3)^{1/2}$,

$$\Gamma_{\kappa 1} : \pi^{1/2} \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{\chi^{1/2}} \right] : \pi^{1/2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\kappa(r - R)}{\lambda h} \right] \quad (3.324)$$

Για ανάλυση στο πίσω σταθερό σημείο οι αδιάστατες συντεταγμένες (m, s) έχουν οριστεί. Το πάχος συγκέντρωσης του οριακού στρώματος $\delta = RPe_v^{-1/2}$ χρησιμοποιήθηκε σα βαθμωτή παράμετρος δίνοντας:

$$m = \frac{r(1 - \bar{\mu}^2)^{1/2}}{\delta} : Pe_v^{-1/2} (1 - \bar{\mu}^2)^{1/2} : 2Pe_v^{1/2} \frac{1}{3} (1 - x)^{1/2}, \quad (3.325)$$

$$s = - \frac{r \cos \theta + R}{\delta} : \frac{y}{(1 - x)^{1/2}}, \quad (3.326)$$

όπου προσεγγίσεις στην (3.312) για $\bar{\mu} \approx -1$ έχουν συμπεριληφθεί. Λεπτομερειακή ανάλυση της (3.322) για (m, s) οδηγεί στην παρακάτω ασυμπτωτική μορφή για την (3.322):

$$\Gamma_{\kappa 1} : - \frac{2}{\pi^{1/2}} \left[\ln Pe_v + 2 \ln m \right. \\ \left. + \pi^{1/2} \int_0^s e^{t^2} \operatorname{erfc} t dt + 2 \left(3 - \frac{1}{3} \right) \ln \left(3 - \frac{1}{3} \right) \right] \quad (3.327)$$

Η ασυμπτωτική σύνδεση με μια εσωτερική λύση για πεπερασμένο m και s απαιτεί την πρόσθεση του όρου Γ^A στο $\Gamma_{\kappa 1}$ με σκοπό να εξουδετερώσουμε μια αναρρόφηση - όμοια με τη συμπεριφορά για $m = 0$. Αυτό δίνεται με το εκθετικό ολοκλήρωμα:

$$\Gamma^A = \Gamma_{\kappa 1} \frac{2}{\pi^{1/2}} E_1 \left[\frac{1}{2} m^2 \right] \quad (3.328)$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα γι' αυτή την ανάλυση είναι η έκφραση για τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη και την ελάχιστη επιφανειακή τάση. Αυτή φαίνεται να είναι:

$$(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{2RT\gamma_{\infty} \kappa}{\pi^2} \ln Pe_u - \frac{\zeta}{a} \left[3 - \frac{1}{3} \frac{\phi}{\psi} + \frac{1}{2} \pi + \gamma + \ln \frac{\zeta}{a} \right] - \frac{1}{3} \frac{\phi}{\psi} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_0} \quad (3.329)$$

$$; RT\gamma_{\infty} \kappa [1.128 \ln Pe_u + 1.662]$$

Οι υπολογισμοί για την οπισθέλκουσα δύναμη έδωσαν το αποτέλεσμα:

$$F = 4\pi\mu U_{\infty} R \frac{l}{\kappa} + \frac{1.053 \sigma_{\infty}}{Ca} \frac{l}{b} \quad (3.330)$$

όπου Ca είναι ο τριχοειδής αριθμός που ορίζεται από τη σχέση:

$$Ca = \frac{\mu U_{\infty}}{(\sigma_0 - \sigma_{\infty})} \quad (3.331)$$

Η επιφανειακή τάση σ_{∞} παίρνει την τιμή όπως για μια στάσιμη σταγόνα με επιφανειακή συγκέντρωση Γ_{∞} . Όπως αναφέρθηκε από τον Harper αυτό αναπαριστά μικρή διαφοροποίηση από τους υπολογισμούς του Dukhin στους οποίους ο δεύτερος όρος έχει το συντελεστή 1,08 αντί του 1,053. Εφόσον γίνεται μικρός, η διαφορά αυτή έχει σχέση με το σφάλμα που προκύπτει με την ύπαρξη ιδιόμορφης συμπεριφοράς στο πίσω σταθερό σημείο.

Υψηλή επιφανειακή Δραστηριότητα ($\kappa \gg 1$)

Η αναφορά εδώ κατηγοριοποιείται σε δύο μέρη: τις πλήρως κινητικές διεπιφάνειες και αυτές με ακίνητες απορροφούμενες επιφάνειες (films).

Πλήρως Κινητικές Διεπιφάνειες. Για την περίπτωση υψηλής επιφανειακής δραστηριότητας έχουμε $\kappa \gg 1$. Εφόσον έχουμε $Pe \gg 1$ θεωρούμε την οριακή περίπτωση $\kappa^{-1} Pe_u^{-1/2} \ll \gamma$ και $\kappa^{-1} Pe_s \ll \gamma$. Μια έκφραση της μορφής:

$$\Gamma = \Gamma_{\infty} \frac{l}{\kappa} f_0(x, y) + \kappa^{-1} f_1(x, y) + O(\kappa^2) + O(Pe_s^{-1}) + O\left(\frac{\zeta}{a} Pe_u^{-\frac{1}{2}} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_0}\right) \quad (3.332)$$

αποδίδει:

$$f_0(x, y) = \operatorname{erf} \left[\frac{\zeta}{a} \frac{y}{x^2} \frac{\phi}{\psi} \right] \quad (3.333)$$

$$f_1(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1-x)^2} \exp\left[-\frac{y^2}{\lambda^2 (1-x)^2}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{y}{\lambda (1-x)}\right] \quad (3.334)$$

για την περιοχή μπροστά από το σταθερό σημείο ($\bar{\mu} = 1$). Κοντά στο πίσω σταθερό σημείο ($\bar{\mu} = -1$) εμφανίζεται αξιοσημείωτη πολυπλοκότητα με την επίτευξη πεπερασμένων λύσεων οι οποίες σχετίζονται με τις συρρέουσες υπεργεωμετρικές συναρτήσεις. Γι' αυτό το λόγο μόνο το αρχικού βαθμού αποτέλεσμα αναφέρεται εδώ και ακόμα και αυτό μόνο από τη δική του πλευρά. Έτσι,

$$\Gamma = \frac{2Pe_s \Gamma_\infty}{3^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.335)$$

Η οπισθέλκουσα δύναμη δίνεται με τη σχέση:

$$F = 4\pi\mu U_\infty R \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}} Ca} \right] \quad (3.336)$$

Ακίνητες απορροφούμενες επιφάνειες. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, ένα σταθερό κάλυμμα σχηματίζεται στο πίσω μέρος της σταγόνας όταν ο αριθμός Peclet είναι μεγάλος και συνδυάζεται με πολύ υψηλή επιφανειακή δραστηριότητα. Οι κατάλληλες συνθήκες για το σχηματισμό ενός σταθερού καλύμματος είναι:

$$Pe \gg 1 \quad \text{και} \quad \frac{h}{R} \gg Pe^{-\frac{3}{4}} Ca^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.337)$$

Ενώ η προηγούμενη αναφορά πάνω στα σταθερά καλύμματα περιορίστηκε σε περιπτώσεις με αμελητέα διαχυτή μεταφορά, τώρα αναφέρουμε τη διάχυση από σταθερές απορροφούμενες επιφάνειες, με τις υποθέσεις ότι $\Gamma = \Gamma_\infty$ στη σταθερή περιοχή και $\Gamma = \Gamma_\infty$ στο κινούμενο τμήμα της διεπιφάνειας. Ο Harper έχει θεωρήσει μια περιορισμένη επέκταση γύρω από ένα μικρό σταθερό κάλυμμα, προσεγγίζοντας τη διεπιφάνεια να είναι σχεδόν επίπεδη, έτσι ώστε τα καλύμματα να είναι σχεδόν σα δίσκος ακτίνας jR , όπου ϕ είναι η γωνία του καλύμματος όπως εικονίζεται στο σχήμα 3.2. Για να επιτευχθεί μια τιμή για το ϕ και το $\Gamma(\pi)$ η επιφανειακή συγκέντρωση στο πίσω σταθερό σημείο, η συνολική καθαρά διαχυτή ροή στην επιφάνεια χρειάζεται να μηδενιστούν π.χ,

$$\int_0^\pi \sin\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} d\theta = 0. \quad (3.338)$$

Ο Harper χρησιμοποίησε την ανάλυση του Levich για να πετύχει τη βαθμωτή μεταβολή της επιφανειακής συγκέντρωσης στην ελεύθερη περιοχή της επιφάνειας. Για το ακίνητο τμήμα της διεπιφάνειας, εφάρμοσε τη μέθοδο του Lighthill για μεταγωγική διάχυση στο λεπτό στρώμα διάχυσης ($Pe \gg 1$) ώστε να υπολογίσει την

επιφανειακή συγκέντρωση. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την (3.338) επιτεύχθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$j = 1.761Ca^{-\frac{3}{8}} \frac{\zeta}{\theta^2} Pe^{\frac{1}{6}} \quad (3.339)$$

$$\frac{\Gamma(\pi)}{\Gamma_{\infty}} = 2.242Ca^{\frac{5}{8}} \frac{\zeta}{\theta^2} Pe^{\frac{1}{6}} = 2.431 \frac{\zeta}{\theta^2} Pe^{\frac{1}{6}} j^{-\frac{5}{3}}, \quad (3.340)$$

όπου $Pe = 2U_{\infty} R/D$ και $Ca = \mu U_{\infty} / (\sigma_0 - \sigma_{\infty})$ και το σ_{∞} αναφέρεται στην επιφανειακή τάση που αντιστοιχεί στις συνθήκες ισορροπίας στο άπειρο. Ο Harper έχει αναφέρει με λεπτομέρεια τις συνθήκες για την καταλληλότητα αυτής της ανάλυσης. Εκτός από τις υποθέσεις χαμηλού αριθμού Re και της σφαιρικότητας αυτές οι συνθήκες συνοψίζονται στα παρακάτω:

$$\frac{h}{R} \ll Pe^{-\frac{1}{2}}, \quad j \ll Pe^{-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, \quad j^{\frac{4}{3}} Pe^{\frac{2}{3}} \frac{D}{D_s} \ll 1 \text{ και } j^{-\frac{1}{3}} Pe^{\frac{1}{3}} \frac{h}{R} \ll 1. \quad (3.341)$$

Μοντελοποιώντας την επιφανειακή θερμοδυναμική, η γραμμική εξίσωση αερίου έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές. Έχει δειχθεί από τους He, Maldarelli & Dagan ότι αυτή η προσέγγιση είναι πολύ χρήσιμη για υψηλούς αριθμούς Marangoni ($Ma = \Gamma_{\infty} RT / (\mu U) > 10$). Για μικρότερες τιμές του Ma, η γραμμική θεωρία δεν προβλέπει πλήρως την ποσότητα της προσροφούμενης διαλυμένης ύλης και τα αποτελέσματα που αναφέρονται εδώ και στην εξίσωση (3.27) πρέπει να ερμηνευτούν αναλόγως.

ΜΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ PECLET ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Για τις τιμές του αριθμού Peclet που βρίσκουμε εκτός των ασυμπτωτικών ορίων ($Pe = 1, Pe \gg 1$), έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Galerkin και η αριθμητική μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς. Οι Wasserman & Slattery χρησιμοποίησαν μια γενικευμένη ροϊκή συνάρτηση Stokes του τύπου που δίνεται στις εξισώσεις (3.290) και (3.291) μαζί με τις επεκτάσεις της 5 όρων σειράς Legendre για τη συγκέντρωση ρύπων στη συνεχή φάση όπως και για την παραμόρφωση της επιφανείας. Η διασκορπισμένη φάση θεωρήθηκε στεγανή στο ρύπο. Οι ακτινικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στη συγκέντρωση περιγράφονται από ένα σετ διαφορετικών διαφορικών εξισώσεων που έχουν επιλυθεί με τη μέθοδο Rurge – Kutta. Τα αποτελέσματα για συγκεκριμένα σετ παραμέτρων έχουν επιλυθεί και κατηγοριοποιηθεί για $0 \leq Pe \leq 100$.

Πιο πρόσφατα οι Oguz & Sadhal εφάρμοσαν τη μέθοδο ιδιόμορφης διαταραχής για να επιτύχουν το πεδίο ταχύτητας μιας ασθενούς αδρανειακής ροής με ρύπους. Οι υπολογισμοί διεξήχθησαν για ένα σύστημα που έχει ένα διαλυτό ρύπο και μια αδιάλυτη ξένη ουσία. Όπως και να 'χει αυτοί έδωσαν προφίλ συγκεντρώσεων για την περίπτωση όπου ήταν παρών μόνο ένας διαλυτός ρύπος. Στην ανάλυσή τους χρησιμοποίησαν τη λύση διαταραχής για το πεδίο της ταχύτητας και την επίλυσαν

αριθμητικά για το προφίλ της συγκέντρωσης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 3.18 σε σχέδιο εικονοστοιχείων (pixels). Οι πιο σκούρες περιοχές δηλώνουν υψηλότερη συγκέντρωση. Τα σχέδια δείχνουν καθαρά ότι για μικρούς αριθμούς Peclet η συγκέντρωση ρύπων είναι κυρίως στην περιοχή γύρω από το πίσω σταθερό σημείο. Καθώς ο αριθμός Pe αυξάνει η εσωτερική και εξωτερική συγκέντρωση εκτείνονται επιμήκως, δείχνοντας την περιοχή της μεταγωγικής μεταφοράς έναντι της διάχυσης.

Οι ξεχωριστές επιδράσεις της επιφανειακής διάχυσης έχουν εξεταστεί από τους Holbrook & LeVan. Η συμπεριφορά των σταγόνων για κάθε μια απ' αυτές τις καταστάσεις αναφέρονται παρακάτω.

Επιφανειακή Διάχυση Ελεγχόμενης Μεταφοράς

Χωρίς μεταγωγή σε καμία από τις κυρίως φάσεις ($Pe_s \ll 0$) η εξίσωση (3.278) για την επιφανειακή διατήρηση της μάζας απλοποιείται στη μορφή:

$$\Gamma u_i = \frac{2}{Pe_s} \frac{\Gamma}{\theta}, \quad (3.342)$$

όπου $Pe_s = 2U_\infty R/D_s$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της σειράς Legendre (3.289) για $\sigma(\theta)$ μαζί με την (3.288) και με την επιφανειακή ταχύτητα από την (3.290), η εξίσωση (3.342) επιλύθηκε από τους Holbrook & LeVan, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συγκριτικής παράθεσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για μικρές τιμές μέσης συγκέντρωσης ρύπων ($E_0 \gg 1$) η κατανομή ρύπων συγκεντρώνεται γύρω από το πίσω σταθερό σημείο. Με την αύξηση της συγκέντρωσης ρύπων, η κατανομή γίνεται περισσότερο ομοιόμορφη, οδηγώντας στη στασιμότητα ολόκληρης της διεπιφανείας. Για την οριακή περίπτωση $\Gamma_\infty \ll 0$ η διεπιφανειακή ταχύτητα παίρνει την τιμή Rybczynski – Hadamard:

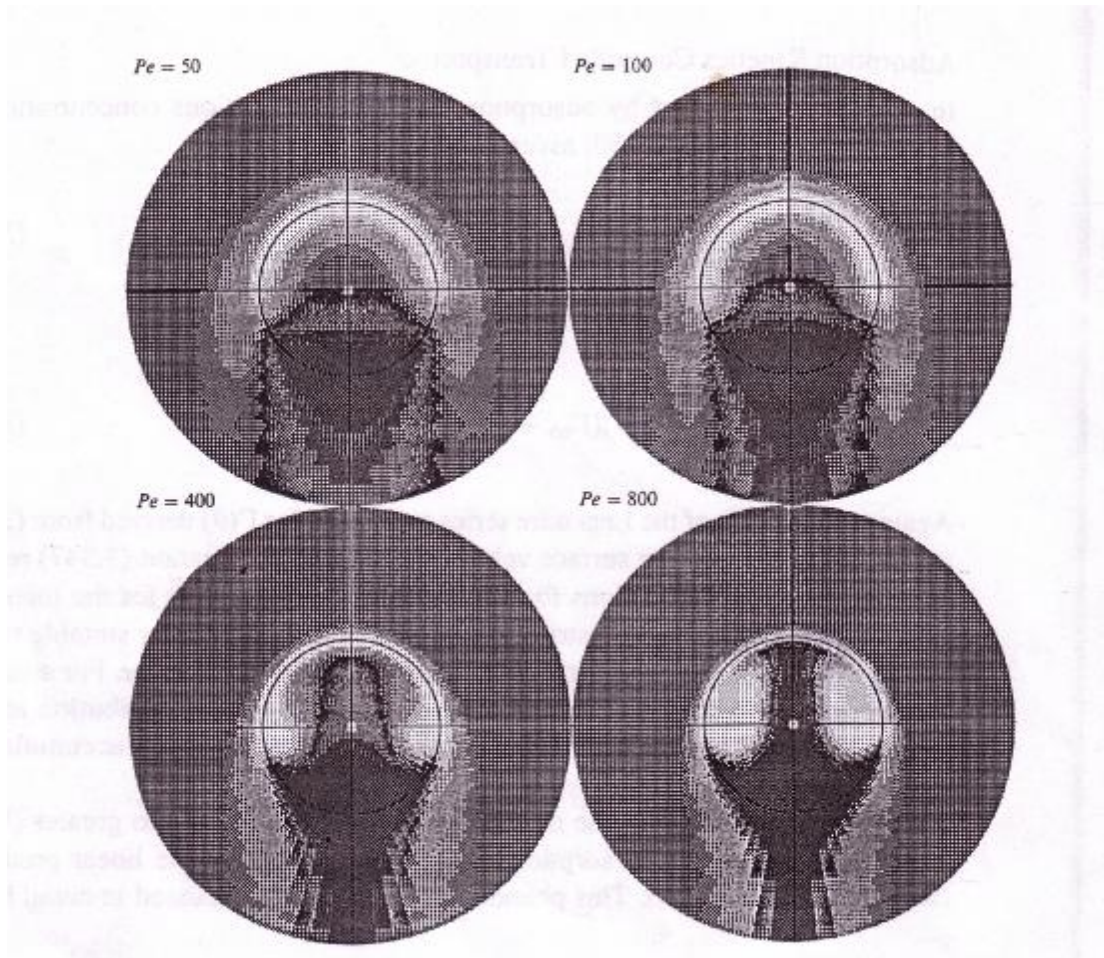
$$u_i = U_\infty \frac{\sin \theta}{2(1 + \varphi_\mu)}. \quad (3.343)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την έκφραση στην (3.342) και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_\infty Pe_s \frac{1 - \frac{1}{2} Pe_s (1 - \cos \theta)}{e^{2 Pe_s} - 1}. \quad (3.344)$$

όπου:

$$Pe_s = \frac{Pe_s}{(1 + \varphi_\mu)}. \quad (3.345)$$



ΣΧΗΜΑ 3.18. Προφίλ συγκεντρώσεων για $K^* = 0.5$, $E_0 = 30$, $\varphi_\mu = 0.2$, $\hat{h}/h = 1$, $Pe = Pe$.

Κινηματική της Προσρόφησης Ελεγχόμενης Μεταφοράς

Σε περιπτώσεις που επιδρά η κινηματική της προσρόφησης για τις φανταστικές συγκεντρώσεις στις εξισώσεις (3.279) και (3.280) υποθέτουμε τις σταθερές τιμές:

$$\hat{\Gamma}^\dagger = \Gamma^\dagger = \Gamma_\forall \quad (3.346)$$

έτσι ώστε η εξίσωση (3.278) παίρνει τη μορφή:

$$(K + \hat{K})(\Gamma_\forall - \Gamma) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\Gamma u_i \sin\theta). \quad (3.347)$$

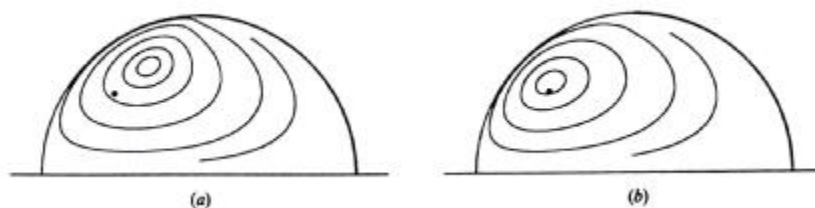
Με τη χρησιμοποίηση πάλι του αναπτύγματος της σειράς Legendre για $\Gamma(\theta)$ παραγόμενο από τις σχέσεις (3.288) και (3.289) και με την επιφανειακή ταχύτητα από

τη σχέση (3.290), η εξίσωση (3.347) ανάγεται σ' ένα σετ αλγεβρικών εξισώσεων για τους συντελεστές. Τα αποτελέσματα για τη διεπιφανειακή ταχύτητα και την κατανομή του ρύπου έχουν αναπτυχθεί μετά από κατάλληλη απλοποίηση αυτών των εξισώσεων και ικανοποιώντας αυτές μ' ένα τρόπο. Για μικρό E_0 το προφίλ της συγκέντρωσης είναι κοντά σ' αυτό μιας απλής ημιτονοειδούς διανομής για μια μέση τιμή του $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$. Με τη μείωση της συγκέντρωσης ο ρύπος συσσωρεύεται στο πίσω μέρος.

Για μη ιδανικές καταστάσεις η μη γραμμική κινηματική της αναρρόφησης οδηγεί σε μεγαλύτερη (μικρότερη) επιβράδυνση για μικρούς (μεγάλους) βαθμούς αναρρόφησης συγκρινόμενη με τη γραμμική πρόβλεψη (βλέπε Chen & Stebe).

Συνδυασμός Επίδρασης Διαλυτών και μη Διαλυτών Ρύπων

Οι Oguz & Sadhal έχουν εξετάσει την επίδραση ενός καλύμματος ρύπου εξ' αιτίας ενός μη διαλυτού ρύπου και της συμμετοχής ενός διαλυτού ρύπου. Εδώ ο μη διαλυτός ρύπος σχηματίζει ένα σταθερό κάλυμμα γύρω από το πίσω σταθερό σημείο και ο διαλυτός δρα σε ολόκληρες τις κυρίως και επιφανειακές φάσεις. Το βασικό κίνητρο γι' αυτή την ανάλυση του τρόπου συνδυασμού προέκυψε από το γεγονός ότι κανένα από τα πρόσφατα μοντέλα «καλύμματος» που προέβλεπαν το τύπο της ροής της εσωτερικής κυκλοφορίας δε φαινόταν να συμφωνεί με τις μετρήσεις του Horton. Το κατάλληλο στοιχείο είναι η θέση του «ματιού» του δακτυλιοειδούς στροβίλου. Οι προβλέψεις με τη βοήθεια μόνο του καλύμματος ρύπου (χωρίς καθόλου διαλυτό ρύπο) δείχνουν το «μάτι» να είναι πιο κοντά στο μπροστινό μέρος της σταγόνας και στον άξονα, συγκρινόμενο με τις πειραματικές παρατηρήσεις. Γι' αυτό το λόγο βασιζόμενοι στην ιδέα ότι η κινούμενη περιοχή της διεπιφάνειας δε μπορεί να είναι τελείως χωρίς ρύπους, ο κατάλληλος ρόλος του διαλυτού ρύπου που προκαλεί πρόσθετη επιβράδυνση, έχει ερμηνευτεί. Με μια κατάλληλη επιλογή παραμέτρων έχει βρεθεί καλή συμφωνία με τα πειράματα. Αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 3.19.



ΣΧΗΜΑ 3.19: Ροϊκές γραμμές σε μια σταγόνα: (α) αδιάλυτη ρυπογόνος ουσία μόνο, $Pe = 0$ και (β) αδιάλυτη ρυπογόνος ουσία και διαλυτός ρύπος, $Pe = He = 700$, $E_0 = 30$, γωνία καλύμματος, $\varphi = \frac{1}{2} \pi$. Οι σταθεροί κύκλοι δείχνουν τις μετρήσεις του Horton.

Το πεδίο ροής του ρευστού υπολογίστηκε από ένα ανάπτυγμα διαταραχής για ασθενές αδρανειακό σύστημα. Ένα σημαντικό πρόβλημα από αυτό τον υπολογισμό είναι η οπισθέλκουσα δύναμη η οποία δόθηκε νωρίτερα από τις

εξισώσεις (3.47) και (3.48). Επιπρόσθετα έχουν υπολογιστεί τα προφίλ της συγκέντρωσης με μόνο τη διαλυτή ρυπογόνο ουσία παρούσα. Τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών έχουν αναφερθεί νωρίτερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο:

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΑΙ ΥΨΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υψηλής ακριβείας αναλυτικές λύσεις και λύσεις διαταραχής κλειστής μορφής για την περιγραφή της ροής και την μεταφορά, είναι διαθέσιμες για πολλές καταστάσεις χαμηλού αριθμού Reynolds (έρπουσα ροή) όπου οι μη γραμμικές αναλυτικές επιδράσεις είναι ασθενείς. Όμως, η κίνηση ρευστού και η μεταφορά σε ενδιάμεσους αριθμούς Reynolds ή ακόμα και σε υψηλότερες τιμές είναι περισσότερο πολύπλοκες. Για παράδειγμα σε υψηλότερες τιμές μεταφορικού αριθμού Reynolds, η εξωτερική ροή μπορεί να διαχωριστεί καθώς κινείται προς το πίσω μέρος του σωματιδίου και η εσωτερική κίνηση μπορεί επίσης να αποτελείται από δευτερεύοντες στροβίλους. Κάτω από τέτοιες περιστάσεις διάφοροι μηχανισμοί μεταφοράς λαμβάνουν χώρα και ο ακριβής προσδιορισμός του μεγέθους της μεταφοράς αποτελεί μία πρόκληση. Αριθμητικές και πειραματικές μελέτες έχουν δείξει ότι σε υψηλότερες τιμές του αριθμού Reynolds ένα απόρρευμα σχηματίζεται με διαστάσεις ισοδύναμες του μεγέθους της σταγόνας. Σε τέτοιες περιπτώσεις οι επιδράσεις αυτής της ροής πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψη στον υπολογισμό για να εξακριβωθεί επακριβώς το μέγεθος των ποσοτήτων της μεταφοράς. Είναι επίσης βεβαιωμένο ότι τόσο το αναλυτικό μοντέλο όσο και οι αριθμητικές εκτιμήσεις των επιδράσεων αυτής της ροής είναι γενικά δύσκολες εξ' αιτίας της ελλειπτικής τους φύσης. Σε τέτοιες περιπτώσεις βασιζόμαστε σε ημι – αναλυτικές ή πλήρως αριθμητικές λύσεις των κινητήριων εξισώσεων. Με σύνθετες αριθμητικές μεθόδους και υπέρ – υπολογιστές είναι πιθανό να αναπτυχθούν επαρκώς ορθές και φυσικά πραγματοποιήσιμες λύσεις στα προβλήματα που αναφέρονται σε καθεστώτα ροών ενδιάμεσου και υψηλού αριθμού Reynolds.

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μια συνοπτική αναφορά των βασικών κινητήριων εξισώσεων και των αδιάστατων παραμέτρων ελέγχου που είναι κατάλληλες για μια φυσαλίδα ή μια σταγόνα σε ροές ενδιάμεσου και υψηλού αριθμού Reynolds. Αυτή ακολουθείται από περιεκτικές αναφορές κάποιων τεχνικών λύσεων και αποτελεσμάτων που είναι διαθέσιμα στο περιβάλλον μεταφοράς με απευθείας επαφή.

4.2 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

4.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Θεωρείται μια φυσαλίδα που ανέρχεται ή μια σταγόνα που πέφτει κάτω από την επίδραση της βαρύτητας σ' ένα απεριόριστο καθαρό ομοιογενές ρευστό μέσο. Εκτός από αντίθετη αναφορά η ρευστή σφαίρα γενικά θεωρείται ότι παραμένει σφαιρική καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας και τόσο το ρευστό της διασκορπισμένης φάσης όσο και αυτό της συνεχούς θεωρούνται ασυμπύεστα με σταθερά ιξώδη. Ακολουθώντας τον Harper η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή εάν υπάρχει σταθερότητα στις τυχαίες μικρές διαταραχές και αν ο χρόνος που χρειάζεται

για να προσεγγιστεί η τελική ταχύτητα είναι πολύ μικρότερος απ' το χρόνο που απαιτείται για να αλλάξει το μέγεθος του ρευστού σωματιδίου από ένα σημαντικό κλάσμα.

Όταν η κίνηση του ρευστού σωματιδίου γίνεται στη στρωτή περιοχή οι κινητήριες εξισώσεις για τη συνεχή φάση σ' ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ) με βάση το κέντρο της ρευστής σφαίρας δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0 \text{ και}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

ΑΞΟΝΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΡΟΕΣ

Σε πολλές φυσικές καταστάσεις που έχουν να κάνουν με μεταφερόμενες σταγόνες και φυσαλίδες, η ροή είναι αξονικά συμμετρική. Γι' αυτό το λόγο στις περισσότερες αναλυτικές και αριθμητικές μελέτες μιας ανερχόμενης φυσαλίδας (ή μιας πτώσης σταγόνας), η αξονοσυμμετρική υπόθεση συμπεριλαμβάνεται στη μελέτη και με την απουσία σωματιδιακών δυνάμεων για ένα Νευτώνειο ρευστό με σταθερά ρ και μ έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

– Συνέχεια:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0 \quad (4.1)$$

– r – ορμή:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta \quad (4.2)$$

– θ – ορμή:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (4.3)$$

όπου:

$$P^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\zeta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\zeta \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (4.4)$$

Παρόμοιες εξισώσεις εφαρμόζονται για τη διασκορπισμένη φάση.

ΟΡΙΑΚΕΣ, ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι οριακές και διεπιφανειακές συνθήκες που συνήθως εφαρμόζονται είναι:

– Στον άξονα συμμετρίας ($\theta = 0$ και π):

$$u_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \hat{u}_\theta = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta} = 0 \quad (4.5)$$

– Στη διεπιφάνεια, $r = R$ (με απουσία αλλαγής φάσης):

$$\hat{u}_r = u_r = 0, \quad \hat{u}_\theta = u_\theta \quad (4.6)$$

και

$$\hat{\mu} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \mu \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (4.7)$$

– Στο ελεύθερο ρεύμα, $r \rightarrow \infty$ (ομοιόμορφη ροή):

$$u_r \rightarrow U_\infty(t) \cos \theta, \quad u_\theta \rightarrow U_\infty(t) \sin \theta. \quad (4.8)$$

Εδώ $U_\infty(t)$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα της ελεύθερης ανύψωσης (ή πτώσης) της ρευστής σφαίρας που μπορεί να ορίζεται από μια ισορροπία βαρύτητας – οπισθέλκουσας δύναμης όπως:

$$\hat{\rho} \frac{dU_\infty(t)}{dt} = (\hat{\rho} - \rho)g - \frac{3}{8} C_D \rho \frac{U_\infty^2(t)}{R}, \quad (4.9)$$

όπου C_D είναι ο συντελεστής συνολικής οπισθέλκουσας. Γράφοντας αυτή την ισορροπία οι δυνάμεις που μπορεί να προκύπτουν εξ' αιτίας της «πρόσθεσης μάζας», της μεταβολής πίεσης και της «εξέλιξης Basset» έχουν θεωρηθεί όλες αμελητέες. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας δίνεται σ' αυτή την περίπτωση από τη σχέση:

$$C_D = \frac{\text{οπισθέλκουσα δύναμη}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2(t) \pi R^2}, \quad (4.10)$$

όπου η οπισθέλκουσα δύναμη εξαρτάται από το πρόβλημα. Οι αρχικές συνθήκες για κάθε φάση που αντιστοιχούν σε μια κατάσταση μη – ροής εκφράζονται με τις σχέσεις:

$$\hat{u}_r = u_r = 0, \quad \hat{u}_\theta = u_\theta = 0 \quad \text{και} \quad U_\infty(0) = 0 \quad \text{για} \quad t = 0. \quad (4.11)$$

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Οι κινητήριες εξισώσεις και οι αντίστοιχες οριακές και αρχικές συνθήκες συνήθως αδιαστατοποιούνται όπως παρακάτω: όλες οι ταχύτητες διαβαθμίζονται με U_∞ , η πίεση με $(\hat{\rho}U_\infty^2)$ ή (ρU_∞^2) αναλόγως τη φάση, r με R η ακτίνα της ρευστής σφαίρας και t με R/U_∞ . Από αυτό το σημείο όλες οι μεταβλητές θα θεωρούνται αδιάστατες.

Αδιάστατες Εξισώσεις Κίνησης

Για τη συνεχή φάση, οι αδιάστατες κινητήριες εξισώσεις για αξονικά συμμετρικές ροές γίνονται:

– Συνέχεια:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0 \quad (4.12)$$

– r – ορμή:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta \quad (4.13)$$

– θ – ορμή:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_\theta) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (4.14)$$

Παρόμοιες εξισώσεις εφαρμόζονται για τη διασκορπισμένη φάση.

Τελική ταχύτητα. Η αδιάστατη κινητήρια εξίσωση για $U_\infty(t)$ είναι:

$$\frac{dU_\infty}{dt} = \frac{\zeta}{\theta} - \frac{1}{\varphi_\rho} \frac{1}{Fr^2} - \frac{3}{8} C_D \frac{1}{\varphi_\rho} \quad (4.15)$$

όπου $Fr = U_\infty / (gR)^{1/2}$ είναι ο αριθμός Froude.

Αρχικές, Οριακές και Διεπιφανειακές Συνθήκες

Οι αδιάστατες οριακές συνθήκες είναι:

– Στον άξονα συμμετρίας ($\theta = 0$ και π):

$$u_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (4.16)$$

και

$$\hat{u}_\theta = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} = 0. \quad (4.17)$$

– Στη διεπιφάνεια, $r = 1$:

Συνέχεια της ταχύτητας (Με απουσία αλλαγής φάσης)

$$\hat{u}_r = u_r = 0 \quad \text{και} \quad \hat{u}_\theta = u_\theta \quad (4.18)$$

Συνέχεια της εφαπτομενικής τάσης:

$$\varphi_\mu \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \zeta \hat{u}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \zeta u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (4.19)$$

– Στο ελεύθερο ρεύμα, $r \rightarrow \infty$ (ομοιόμορφη ροή):

$$u_r \rightarrow -\cos \theta, \quad u_\theta \rightarrow \sin \theta. \quad (4.20)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$\hat{u}_r = u_r = 0 \quad \text{και} \quad \hat{u}_\theta = u_\theta = 0 \quad \text{για} \quad t = 0. \quad (4.21)$$

Αδιάστατες Παράμετροι

Οι αδιάστατες παράμετροι που εμπλέκονται στον ορισμό της μεταφοράς ορμής που σχετίζεται μ' ένα σφαιρικό ρευστό σωματίδιο είναι: ο αριθμός Reynolds για τη συνεχή φάση $Re = U_\infty (2R)/\nu$ μ' έναν παρόμοιο για τη διασκορπισμένη φάση, ο δυναμικός λόγος ιξώδους $\varphi_\mu = (\hat{\mu}/\mu)$, ο λόγος πυκνότητας $\varphi_\rho = (\hat{\rho}/\rho)$ και ο αριθμός Froude $Fr = U_\infty / (gR)^{1/2}$. Πρόσθετες αδιάστατες παράμετροι όπως ο αριθμός Weber $Fr = U_\infty^2 (2R)\Delta\rho/\sigma$, ο αριθμός Eotvos $Eo = 4\Delta\rho gR^2/\sigma$ και ο αριθμός Morton $M = g\mu^4 \Delta\rho / (\rho^2 \sigma^3)$, εφαρμόζονται όπως δηλώνονται – ορίζονται από την φυσική κατάσταση. Οι αριθμοί Reynolds και για τις δύο φάσεις είναι συνήθως της ίδιας τάξης μεγέθους για τις φυσαλίδες ή τις υγρές σταγόνες λόγω της φύσης της ορμής της διεπιφάνειας και είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται το Re σα σύμβολο. Οι λόγοι Φ_μ και Φ_ρ είναι και οι δύο της τάξης του 10^{-3} για φυσαλίδες και 10^3 για ρευστές σταγόνες σ' ένα αέριο περιβάλλον.

Για ένα δεδομένο αριθμό Reynolds, το σχήμα μιας κινούμενης φυσαλίδας (ή σταγόνας) γενικά ελέγχεται από μια ισορροπία μεταξύ της επιφανειακής τάσης και

των διάφορων μεταβαλλόμενων υδροδυναμικών δυνάμεων. Ο βαθμός παραμόρφωσης συνήθως μετριέται με τον αριθμό Weber, τον αριθμό Eotvos και τον αριθμό Morton. Όταν αυτοί οι αριθμοί είναι μικροί (μεγάλη επιφανειακή τάση) η παραμόρφωση του σταγονιδίου είναι αμελητέα.

4.2.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds οι κινητήριες εξισώσεις ορμής μπορούν να επιλυθούν και οι συντελεστές οπισθέλκουσας να οριστούν με αρκετή ακρίβεια χρησιμοποιώντας τη θεωρία του οριακού στρώματος. Η θεωρία απαιτεί την ύπαρξη λεπτών υδροδυναμικών οριακών στρωμάτων στις δύο πλευρές της διεπιφάνειας. Οι ροές εξωτερικά σ' αυτά τα οριακά στρώματα θεωρούνται ανιζώδεις. Αυτές αντιστοιχούν σε δυναμική ροή πάνω από μια σφαίρα για τη συνεχή φάση και στο στρόβιλο Hill για τη διασκορπισμένη φάση. Για μια φυσαλίδα με μικρή αναλογία ιζώδους ($\Phi_{\mu} \ll 1$), η ροή στη διασκορπισμένη φάση είναι συνήθως αμελητέα. Η κίνηση μιας αέριας φυσαλίδας σ' ένα υγρό μέσο, μιας υγρής σταγόνας μέσα σ' ένα άλλο ομοιόμορφο υγρό ισοδύναμης πυκνότητας και ιζώδους και μιας υγρής σταγόνας σε μια αέρια συνεχή φάση μελετώνται παρακάτω.

ΑΕΡΙΑ ΦΥΣΑΛΙΔΑ Σ' ΕΝΑ ΥΓΡΟ ΜΕΣΟ

Μια σφαιρική φυσαλίδα ακτίνας R που ανέρχεται σταθερά με μια σταθερή ταχύτητα U_{∞} σ' ένα κατά τα άλλα ήρεμο – αδρανές υγρό μελετάται εδώ. Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds ($Re \gg 1$, σ' αυτήν την περίπτωση) μπορούμε να θεωρήσουμε ένα λεπτό οριακό στρώμα στην επιφάνεια της φυσαλίδας. Η κινητικότητα της επιφάνειας της φυσαλίδας είναι τέτοια ώστε η ταχύτητα του υγρού στο οριακό στρώμα είναι μόνο μια μικρή διαταραχή της ταχύτητας της μη – περιστροφικής ροής έξω από το οριακό στρώμα. Το οριακό στρώμα παρέχει ένα μηχανισμό που επιτρέπει στην τάση να αλλάζει την τιμή της από $O(Re^{-1})$ στη μη – περιστροφική ροή, στην επαπτομενική χωρίς τάση συνθήκη στην επιφάνεια της φυσαλίδας. Με μια φυσαλίδα η εσωτερική κυκλοφορία έχει αμελητέα επίδραση στην εξωτερική ροή και μπορεί να αγνοηθεί. Αυτό εξ' αιτίας των πολύ μικρών μεγεθών τόσο των δυνάμεων της πίεσης όσο και του ιζώδους που ασκούνται από το αέριο μέσο μέσα στη φυσαλίδα στη διεπιφάνεια.

Ο Moore έχει εξετάσει τη σταθερή ροή του οριακού στρώματος θεωρώντας ότι η ταχύτητα συνθέτεται με τη συνεισφορά της μη – περιστροφικής ροής και μιας μικρής διαταραχής. Αυτό το ανάπτυγμα θα αναφερθεί παρακάτω.

Λόγω των αδιάστατων ποσοτήτων, ακολουθώντας τον Moore έχουμε:

$$u_r = \bar{u}_r + u_r^A \quad (4.22)$$

$$u_{\theta} = \bar{u}_{\theta} + u_{\theta}^A \quad (4.23)$$

όπου $(\bar{u}_r, \bar{u}_{\theta})$ είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας της μη – περιστροφικής ροής που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{u}_r = -\cos\theta \left[1 - \frac{1}{r^3} \right] \quad (4.24)$$

$$\bar{u}_\theta = \sin\theta \left[1 + \frac{1}{2r^3} \right] \quad (4.25)$$

και τα αρχικά δηλώνουν διαταραγμένα μεγέθη. Αυτές οι εξισώσεις αλλάζουν χρησιμοποιώντας τη σχέση $y = (r - 1)$ και την προσέγγιση ότι:

$$(1 + y)^{-3} ; (1 - 3y) \quad \text{για} \quad y = 1,$$

$$\text{επιτυγχάνουμε: } \bar{u}_r = -3y\cos\theta \quad (4.26) \quad \text{και} \quad \bar{u}_\theta = \frac{3}{2}(1 - y)\sin\theta. \quad (4.27)$$

Οι γραμμικές εξισώσεις για τα μεγέθη της διαταραχής αναπτύσσονται αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.22) και (4.23) στις κινητήριες εξισώσεις (4.12) – (4.14) και θεωρώντας αμελητέους τους υψηλότερου βαθμού όρους. Οι εξισώσεις διαταραχής που αναπτύχθηκαν υπόκεινται στις παρακάτω συνθήκες:

$$u_r^A \approx 0 \quad \text{καθώς} \quad r \approx \infty \quad (4.28)$$

$$u_r^A, u_\theta^A \approx 0, \quad \text{για} \quad r = 1 \quad (4.29)$$

και εξ' αιτίας της μεγάλης διαφοράς μεταξύ των δυναμικών ιξωδών των δύο φάσεων έχουμε:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_r + u_r^A) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\zeta \bar{u}_\theta}{r} \right) + \frac{u_\theta^A}{r} = 0 \quad \text{για} \quad r = 1. \quad (4.30)$$

Μπορεί να αναφερθεί ότι η εξίσωση (4.30) δεν ικανοποιείται αν οι ταχύτητες διαταραχής ισούνται με το μηδέν. Το αδιάστατο πάχος του οριακού στρώματος (αδιαστατοποιείται από την ακτίνα της φυσαλίδας) λαμβάνεται σαν την ποσότητα αναφοράς και είναι $O(\delta)$ με $\delta \ll 1$. Σημειώνοντας ότι $\eta/\eta_0 = O(1/\delta)$, από την εξίσωση (4.30) προκύπτει ότι $u_\theta^A = O(\delta)$ και από την εξίσωση συνέχειας ότι $u_r^A = O(\delta^2)$. Στο οριακό στρώμα $\bar{u}_r = O(\delta)$, $\bar{u}_\theta = O(1)$ και $\eta \bar{u}_r / \eta_0 = O(1)$. Από την διαταραγμένη θ – συνιστώσα της εξίσωσης της ορμής, το δ εκτιμάται ότι είναι $O(\delta^2)$ και η πίεση p στο οριακό στρώμα φαίνεται ότι είναι $O(\delta^2)$, ενώ στην εξωτερική πλευρά του οριακού στρώματος είναι $O(\delta^3)$. Οι δυνάμεις της πίεσης είναι $O(Re^{-1})$ και γι' αυτό το λόγο η πίεση έχει τον ίδιο βαθμό συνεισφοράς στην οπισθέλκουσα της φυσαλίδας, όπως και οι τάσεις του ιξώδους. Εκτός της ανάπτυξης αυτών των εκτιμήσεων, ο Moore έχει επίσης επιλύσει τις διαταραγμένες εξισώσεις ορμής στο $O(\delta)$ και έχει δώσει καθαρές εκφράσεις για τις διάφορες μεταβλητές διαταραχής. Οι λεπτομερειακές λύσεις δείχνουν ότι το οριακό στρώμα στη φυσαλίδα ξεκινάει μ' ένα πεπερασμένο πάχος $\delta \approx (1/6^{1/2})$ καθώς $\theta \approx 0$. Αυτό συμπεριφέρεται καλά για

$0 \leq \theta < \pi$ δηλαδή παντού εκτός της «γειτονιάς» του πίσω σταθερού σημείου ($\theta = \pi$).
 Με $\varphi = (\pi - \theta) \ll 1$, δείχνεται ότι:

$$\delta : \frac{8^{1/2}}{9} \frac{1}{\varphi^2} \quad \text{καθώς} \quad \theta \ll \pi \quad (4.31)$$

Για $\delta^{1/4} = \varphi = 1$, οι δυνάμεις του ιξώδους είναι αμελητέες συγκρινόμενες με τις δυνάμεις αδρανείας. Για μικρότερες τιμές του φ που είναι πολύ κοντύτερα στο σταθερό σημείο, εικάζεται ότι η πραγματική ροή είναι ακόμα η δυναμική ροή ($\bar{u}_r, \bar{u}_\theta$) και μια μικρή διαταραχή, αλλά η διαταραχή οδηγείται από τις πλήρως ανιξώδεις εξισώσεις. Σ' αυτή τη βάση η σταθερή περιοχή εκτιμάται ότι είναι μεγέθους $O(Re^{-1/6})$ και η ταχύτητα διαταραχής εδώ είναι $O(Re^{1/3})$ συγκρινόμενη με την $O(Re^{-1/2})$ στο οριακό στρώμα. Στη σταθερή περιοχή οι δυνάμεις του ιξώδους εκτιμώνται ότι είναι $O(Re^{-1})$ ενώ οι δυνάμεις αδρανείας είναι $O(Re^{-1/6})$. Στην περιοχή του οριακού στρώματος οι δυνάμεις της αδρανείας εξισορροπούν τις δυνάμεις του ιξώδους και έτσι δημιουργείται στροβιλισμός. Η σταθερή περιοχή τροφοδοτεί αυτό το στροβιλισμό μέσα στο απόρρευμα της φουσαλίδας. Με παρόμοιες συμφωνίες μ' αυτές που προήχθησαν για τη σταθερή περιοχή ο Moore έχει εκτιμήσει το μέγεθος του απορρεύματος ότι είναι $O(Re^{-1/4})$ και την αξονική συνιστώσα της ταχύτητας ότι είναι $O(Re^{-1/2})$.

Για πολλές εφαρμογές είναι σημαντικό να προβλεφθεί η οπισθέλκουσα της φουσαλίδας. Εφόσον οι κλειστής μορφής εκφράσεις για τις ταχύτητες διαταραχής και την πίεση στη σταθερή περιοχή είναι ακατάλληλες, μέθοδοι διαφορετικές της ολοκλήρωσης της συνολικής τάσης της επιφάνειας της φουσαλίδας, εφαρμόζονται για την πρόβλεψη της οπισθέλκουσας. Ο Levich έχει εκτιμήσει το συντελεστή της οπισθέλκουσας υπολογίζοντας την απώλεια ιξώδους για μη περιστροφική ροή γύρω από μία σφαίρα και το αποτέλεσμα είναι:

$$C_D = \frac{48}{Re}, \quad Re = \frac{2U_\infty R}{\nu} \quad (4.32)$$

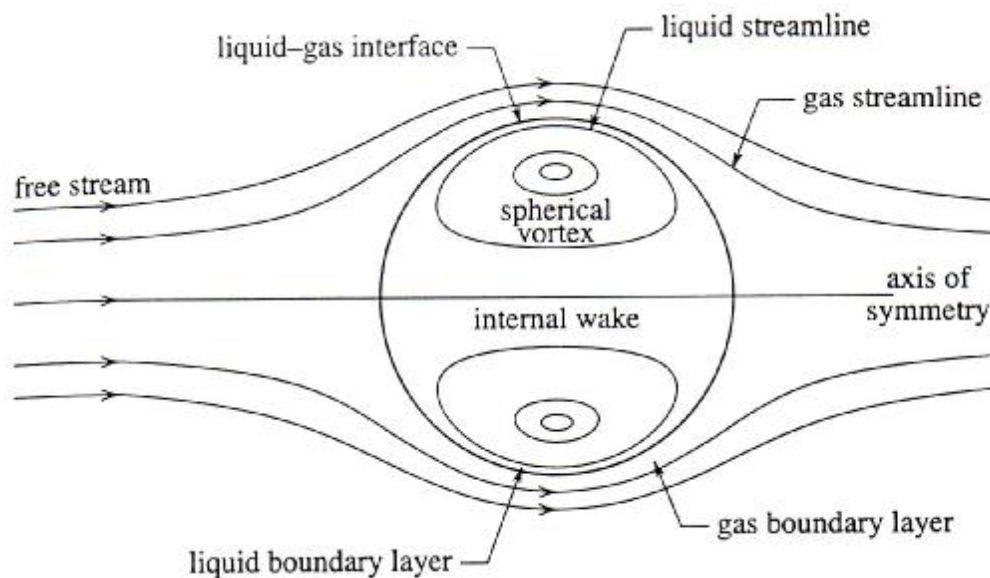
Αυτό το αποτέλεσμα είναι σωστό για τον πρώτο βαθμό. Ο Moore παρουσίασε ένα βελτιωμένο αποτέλεσμα συμπεριλαμβάνοντας την απώλεια από το οριακό στρώμα και το απόρρευμα. Τα αποτελέσματα για ένα εύρος τιμών $Re^{-1/3} \ll 1$ είναι:

$$C_D = \frac{48}{Re} - \frac{2.211}{Re^{1/2}} + O\left(\frac{1}{Re^{5/6}}\right), \quad Re = \frac{2U_\infty R}{\nu} \quad (4.33)$$

ΡΕΥΣΤΗ ΣΤΑΓΟΝΑ Σ' ΕΝΑ ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΣ ΡΕΥΣΤΟ ΜΕΣΟ

Η σταθερή κίνηση κάτω από την επίδραση της βαρύτητας μιας σταγόνας ενός καθαρού υγρού μέσα σ' ένα άλλο ομοιογενές καθαρό υγρό ισοδύναμης πυκνότητας και ιξώδους έχει ερευνηθεί από τους Harper & Moore. Σ' αυτή τη μελέτη η επιφανειακή τάση θεωρείται πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με την εξωτερική ή την εσωτερική δυναμική πίεση έτσι ώστε η σταγόνα να είναι σχεδόν σφαιρική. Η

εσωτερική κυκλοφορία δε μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα για τις σταγόνες κάτι που περιπλέκει την ανάλυση. Τόσο ο Re όσο και ο Re^* παίρνονται της ίδιας τάξης μεγέθους και θεωρούνται αρκετά μεγάλοι [$> O(100)$] επιτρέποντας τις υποθέσεις του οριακού στρώματος. Αυτά τα οριακά στρώματα αναπαριστούν διαταραχές στη μη περιστρεφόμενη δυναμική ροή στο εξωτερικό και τον ανιζώδη περιστροφικό σφαιρικό στρόβιλο Hill στο εσωτερικό της σταγόνας. Ρευστό μεταφέρεται από το εσωτερικό οριακό στρώμα στην πίσω σταθερή περιοχή στο εσωτερικό της σταγόνας πλάτους $O(Re^{-1/6})$. Αυτό το ρευστό προωθείται σ' ένα εσωτερικό απόρρευμα πλάτους $O(Re^{-1/4})$ για να επανέλθει στο οριακό στρώμα πάχους $O(Re^{-1/2})$ στη μπροστινή σταθερή περιοχή. Οι όροι του ιζώδους στο εσωτερικό απόρρευμα είναι αμελητέοι σε σχέση με τους όρους αδρανείας και η περιοχή του απορρευμάτος μεταχειρίζεται σαν πραγματικά ανιζώδης. Έτσι η εσωτερική ροή συνθέτεται από τρεις ξεχωριστές περιοχές: ένα λεπτό οριακό στρώμα κοντά στην επιφάνεια, μια ανιζώδη εσωτερική περιοχή απορρευμάτος κοντά στον κεντρικό άξονα και μια στροβιλώδη ροή Hill με μειωμένη ισχύ σε σχέση με αυτή μιας ανιζώδους λύσης. Ένα σχεδιάγραμμα που δείχνει το μοντέλο και τον τρόπο της φυσικής ροής δίνεται στο σχήμα 4.1. Το ιζώδες οριακό στρώμα στη διεπιφάνεια φαίνεται να διαταράσσει ελάχιστα το πεδίο ταχύτητας καθιστώντας έτσι ικανή τη γραμμικότητα των εξισώσεων του οριακού στρώματος.



ΣΧΗΜΑ 4.1: Περιοχές της ροής εκτός και εντός του σταγονιδίου για υψηλούς αριθμούς Reynolds.

Οι ταχύτητες στα οριακά στρώματα γράφονται:

$$u_r = \bar{u}_r + u_r^* \quad (4.34)$$

$$u_\theta = \bar{u}_\theta + u_\theta^* \quad (4.35)$$

και

$$\hat{u}_r = \hat{\bar{u}}_r + \hat{u}_r^A \quad (4.36)$$

$$\hat{u}_\theta = \hat{\bar{u}}_\theta + (u_\theta^A - u_\theta^X), \quad (4.37)$$

όπου \bar{u}_r και \bar{u}_θ αναπαριστώνται από τις εξισώσεις (4.26) και (4.27). Η ανιξώδης εσωτερική ροή είναι ο στρόβιλος Hill που δίνεται από τις σχέσεις:

$$\hat{\bar{u}}_r = -3y \cos \theta, \quad (4.38)$$

$$\hat{\bar{u}}_\theta = \frac{3}{2}(1+4y)\sin \theta \quad (4.39)$$

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα η πραγματική εσωτερική κίνηση είναι ο στρόβιλος Hill μειωμένης ισχύος. Ο όρος \hat{u}_θ^X αναπαριστά ασυμπτωτική τιμή του \hat{u}_θ^A στο εσωτερικό όριο του οριακού στρώματος. Αυτός παρουσιάζεται για να υπολογίσει την παρέκκλιση της εσωτερικής ροής από αυτήν του στρόβιλου Hill.

Ο στρόβιλος Hill με μειωμένη ισχύ αναπαρίσταται από την αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση:

$$\hat{\psi} = -\frac{1}{2}A(r^4 - r^2)\sin^2 \theta \quad (4.40)$$

όπου $A = \frac{3}{2}$ αναπαριστά την πλήρη ισχύ και είναι αποτέλεσμα της σύνδεσης με τη μη – περιστροφική ροή της συνεχούς φάσης. Για ένα εσωτερικό ιξώδες το A ορίζεται από τις σχετικές συνθήκες στη διεπιφάνεια. Βάσει της εξίσωσης (4.40) θεωρείται ότι:

$$\hat{u}_\theta^X = \frac{3}{2}B \sin \theta,$$

με το $B = O(1)$ να ορίζεται από τις σχετιζόμενες συνθήκες που αναφέρονται παρακάτω. Το πεδίο ταχύτητας πρέπει να είναι συνεχές στη διεπιφάνεια, $r = 1$, που συνεπάγεται ότι:

$$\text{Re}^{-\frac{1}{2}} \lim_{y \rightarrow 0^+} (u_\theta^A) = \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \lim_{y \rightarrow 0^-} (\hat{u}_\theta^A). \quad (4.41)$$

Η συνέχεια της διαμητρικής τάσης για $r = 1$ απαιτεί:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\zeta \mu}{\theta} \frac{u_\theta^A}{y} = \varphi_\mu \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\zeta \mu}{\theta} \frac{\hat{u}_\theta^A}{y} = 3 \sin \theta \frac{\zeta}{\theta} + \frac{3}{2} \varphi_\mu \frac{\mu}{\zeta} \quad (4.42)$$

Οι εξισώσεις διαταραχής αναπτύσσονται με παρόμοιο τρόπο. Επιλύοντας αυτές τις εξισώσεις διαταραχής, υψηλότερου βαθμού διορθώσεις στην ισχύ του στροβίλου Hill έχουν οριστεί αποδίδοντας το αποτέλεσμα:

$$\frac{\text{πραγματική δύναμη}}{\text{ισχύς ανιζώδους θεωρίας}} = 1 - \frac{\zeta \left(2.5 \frac{\varphi}{\lambda} + (\varphi_\mu \varphi_\rho)^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega}{b} (2 + 3\varphi_\mu) \right)}{\text{Re}^{\frac{1}{2}} \varphi \left(3 + 2(\varphi_\mu \varphi_\rho)^{-\frac{1}{2}} \right)}, \quad (4.43)$$

με την προϋπόθεση ότι αυτός ο λόγος σχεδόν ισούται με τη μονάδα. Οι Harper & Moore διαπίστωσαν ότι εάν ο λόγος δεν είναι σχεδόν ίσος με τη μονάδα, ο αριθμός Reynolds μπορεί να μην είναι αρκετά μεγάλος (> 50) έτσι ώστε οι διαταραχές να είναι μικρές και μια υψηλότερου βαθμού θεωρία μπορεί να είναι αναγκαία. Αυτή η κατάσταση είναι πολύ πιθανή αν το φ_μ είναι μεγάλο (> 2.0) και έτσι η θεωρία που περιγράφεται είναι μη εφαρμόσιμη για σταγόνες που πέφτουν στον αέρα ή σ' ένα πολύ μικρότερου ιζώδους υγρό. Για μεταφορά σταγόνας σ' ένα μέσο ισοδύναμης πυκνότητας και ιζώδους, η πρώτη προσέγγιση της οπισθέλκουσας δύναμης έχει υπολογιστεί από την έλλειψη ορμής στην εξωτερική περιοχή απορρεύματος. Σαν αποτέλεσμα ο συντελεστής οπισθέλκουσας βρίσκεται ότι είναι:

$$C_D = \frac{48\zeta}{\text{Re}} + \frac{3}{2} \varphi_\mu \frac{\varphi}{\lambda} \quad (4.44)$$

Υψηλότερου βαθμού προσεγγίσεις είναι διαθέσιμες στη μελέτη του Harper. Οι συντελεστές της οπισθέλκουσας που προβλέπονται από την εξίσωση (4.44) συμφωνούν με τα πειραματικά αποτελέσματα των Winnikow & Chao. Η αστάθεια του στροβίλου Hill έχει μελετηθεί από τον Pozrikidis.

ΥΓΡΗ ΣΤΑΓΟΝΑ Σ' ΕΝΑ ΑΕΡΙΟ ΜΕΣΟ

Το ανάπτυγμα που περιγράφουμε εδώ βασίζεται στη μελέτη των Prakash & Sirignano. Η θεωρία που αναπτύχθηκε από τους Harper & Moore περιγράφει την κίνηση σταγόνας σε μια αέρια συνεχή φάση. Όπως και πριν η εσωτερική ροή συνθέτεται από τρεις ξεχωριστές περιοχές: ένα λεπτό οριακό στρώμα κοντά στην επιφάνεια, μια εσωτερική περιοχή απορρεύματος κοντά στον κεντρικό άξονα και μια ροή στροβίλου Hill μικρότερης ισχύος από την ανιζώδη περίπτωση. Αναφέρεται ότι για μια υγρή σταγόνα που κινείται σε αέριο περιβάλλον, η ισχύς του εσωτερικού στροβίλου μειώνεται δραστικά λόγω του μεγάλου φ_μ και οι ανιζώδεις λύσεις δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια πρώτη προσέγγιση. Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος της διασκορπισμένης φάσης γίνονται γραμμικές στη βάση ότι η ταχύτητα διαταραχής του πεδίου του στροβίλου Hill παραμένει μικρή ενώ η διαταραχή της στροβιλώδους ροής είναι μεγάλη. Η τελευταία είναι της τάξεως της μονάδας όταν διαβαθμίζεται από το AR με το A να αναπαριστά την ισχύ του στροβίλου Hill. Γι' αυτό το λόγο η διαταραχή του στροβιλισμού είναι της ίδιας τάξης μεγέθους όπως ο στροβιλισμός Hill στον πυρήνα. Η ροή στον πυρήνα (δείκτης 0) περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}Ar^2(R^2 - r^2)\sin^2\theta, \quad \hat{u}_{\theta,0} = -A(R^2 - r^2)\sin\theta, \quad \hat{u}_{r,0} = A(R^2 - r^2)\cos\theta.$$

Το πεδίο ροής του οριακού στρώματος παίρνεται ότι είναι:

$$\hat{u} = \hat{u}_0 + \hat{u}^A \quad (4.45)$$

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_0 + \hat{\zeta}^A \quad (4.46)$$

$$\psi = \psi_0 + \psi^A \quad (4.47)$$

όπου $\hat{\zeta}$ είναι το διάνυσμα του στροβιλισμού. Η εξίσωση ορμής ασυμπίεστης ροής εξ' αιτίας του στροβιλισμού είναι:

$$\hat{\nu}P^2\hat{\zeta}^A + P'(\hat{u}_0 \cdot \hat{\zeta}^A) + P(\hat{u}^A \cdot \hat{\zeta}_0) + P'(\hat{u}^A \cdot \hat{\zeta}^A) = 0. \quad (4.48)$$

Η παραπάνω εξίσωση γίνεται γραμμική στη βάση μιας τάξης μεγέθους ανάλυσης. Η ανάλυση δείχνει ότι:

$$\hat{\delta} = O(\text{Re}^{-1/2}) \quad (4.49)$$

$$\hat{u}_r^A = O(\hat{\delta}^2) \quad \text{και} \quad \hat{u}_\theta^A = O(\hat{\delta}), \quad (4.50)$$

$$\hat{\zeta}^A \cdot \frac{\hat{u}_\theta^A}{r} = O(1). \quad (4.51)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις το πάχος του υγρού οριακού στρώματος $\hat{\delta}$ αδιαστατοποιείται από την ακτίνα της σταγόνας R , \hat{u}_r^A και \hat{u}_θ^A από AR^2 και η διαταραχή στροβιλισμού της αξονοσυμμετρικής ροής $\hat{\zeta}^A$ από AR . Ο αριθμός Reynolds ορίζεται από τη σχέση $\text{Re} = AR^3/\hat{\nu}$.

Διατηρώντας όρους της τάξεως της μονάδας η εξίσωση (4.48) ανάγεται στην παρακάτω σχέση:

$$\hat{\nu} \frac{\hat{\zeta}^A}{r^2} - A(R^2 - r^2)\cos\theta \frac{\hat{\zeta}^A}{r} + A(R^2 - 2r^2)\sin\theta \frac{1}{r} \frac{\hat{\zeta}^A}{\theta} + AR^2 \frac{\cos\theta}{r} \hat{\zeta}^A = 0, \quad (4.52)$$

όπου $\hat{\zeta}^A$ είναι η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του διαταραγμένου διανύσματος του στροβιλισμού κατά τη διεύθυνση Φ . Νέες συντεταγμένες ορίζονται για να απλοποιηθεί η παραπάνω εξίσωση σε μια εξίσωση διάχυσης της μορφής:

$$\frac{\nabla^2 W}{Y^2} = \frac{\nabla W}{X}, \quad (4.53)$$

όπου:

$$W = \frac{\hat{\zeta} A}{AR \sin \theta},$$

$$Y = y \sin^2 \theta, \quad y = \frac{y}{R \sin^2 \theta}, \quad y = (R - r),$$

και

$$X = \frac{1}{12} \cos 3\theta - \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{2}{3}.$$

Η εξίσωση (4.53) υπόκειται σε οριακές συνθήκες που αναφέρονται παρακάτω. Η παράμετρος w ικανοποιεί τη σχέση:

$$W = -3 + \frac{1}{\hat{\mu} AR} \frac{F(\theta)}{\sin \theta} \quad \text{για} \quad Y = 0, \quad (4.54)$$

όπου $F(\theta)$ είναι η κατανομή της διεπιφανειακής διατμητικής τάσης από τη λύση της συνεχούς φάσης. Επιπρόσθετα οι παρακάτω συνθήκες στην εσωτερική πλευρά του υγρού οριακού στρώματος χρειάζεται να ταιριάζουν καλά με τη λύση του ανιζώδους στροβίλου Hill στον πυρήνα:

$$\hat{u} = 0 \quad \text{και} \quad \hat{\zeta} = 0. \quad (4.55)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$W = 0 \quad \text{καθώς} \quad Y = \infty. \quad (4.56)$$

Υπάρχουν περισσότερες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιηθούν γύρω από τα στάσιμα σημεία για να υπολογίσουν τις ροές στο εσωτερικό του απορρευμάτος και τις στρεφόμενες περιοχές. Η παρακάτω συνθήκη εφαρμόζεται ελάχιστα μακριά από το σταθερό σημείο (δηλώνεται από το $X = 0^+$).

$$W = g(Y) \quad \text{για} \quad X = 0^+, \quad (4.57)$$

όπου $g(Y)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση που ορίζεται από την ισοδυναμία. Η λύση της εξίσωσης (4.53) δείχνεται ότι είναι:

$$W = \frac{1}{2(\pi X)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} g(Y) \exp\left[-\frac{(Y - YA)^2}{4X}\right] dYA - \exp\left[-\frac{(Y + YA)^2}{4X}\right] dYA = 3\varphi_a(X, Y) + K\varphi_b(X, Y), \quad (4.58)$$

όπου $\varphi_a(X, Y) = \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{2X^{1/2}}\right)$, Φ_b είναι μια συνάρτηση μήκους που σχετίζεται με μια πολυωνυμική συνάρτηση για το $F(\theta)$ και $K = U_\infty / AR^2$ είναι ο λόγος της χαρακτηριστικής ταχύτητας στη συνεχή φάση προς αυτή της διασκορπισμένης φάσης και είναι αντίστροφος της ισχύος του στροβίλου. Στην εξίσωση (4.58) τα $g(Y)$ και k_1 είναι άγνωστοι που ορίζονται από τις συνθήκες της ροής και του στροβιλισμού κοντά στο πίσω σταθερό σημείο και στην εσωτερική περιοχή του απορρεύματος. Η εξίσωση (4.58) επιλύθηκε από μια αριθμητική μέθοδο και βρέθηκε ότι:

$$K = O(4 - 10), \quad (4.59)$$

το οποίο είναι εξαρτώμενο από την εφαρμοζόμενη τάση και το φ_μ . Έχει ενδιαφέρον να συγκριθεί αυτή η τιμή με την τιμή των Harper & Moore για τα υγρά – υγρά συστήματα ισοδύναμης πυκνότητας και ιξώδους που είναι $U_\infty / AR^2 = O(1)$. Η εσωτερική κυκλοφορία που προκαλείται από μια αέρια συνεχή φάση είναι πιο ασθενής συγκρινόμενη με αυτή από ένα υγρό ρεύμα και η εξίσωση (4.59) προάγει μια εκτίμηση της μείωσης της ισχύος.

4.2.3 ΠΛΗΡΩΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Για κίνηση σταγόνας σε ενδιάμεσους αριθμούς Reynolds $Re: O(10) - O(100)$, πλήρως αριθμητικές τεχνικές ή η μέθοδος Galerkin χρησιμοποιούνται έτσι ώστε να αναπτυχθούν λύσεις. Ο τύπος της μεθόδου Galerkin που συνήθως εφαρμόζεται είναι η εσωτερική ορθογωνική μέθοδος που προάγει πολυωνυμικές λύσεις για τη ροϊκή συνάρτηση που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες και μια ολοκληρωμένη μορφή της εξίσωσης ορμής. Αυτές οι πολυωνυμικές λύσεις που αποτελούνται από σειρές είναι κατάλληλες για υπολογιστικούς σκοπούς. Απ' την άλλη μεριά οι πλήρως αριθμητικές μέθοδοι που εφαρμόζουν μετρήσιμης διαφοράς ή μετρήσιμου στοιχείου ανάλυση, έχει δείχθει ότι αποδίδουν ποσοτικά και ποιοτικά αποτελέσματα που είναι ισοδύναμα με αυτά που εξάγονται από τα πειράματα. Για την επίτευξη μιας αποτελεσματικής αριθμητικής λύσης συνήθως εφαρμόζεται η διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης στροβιλισμού για την εξίσωση Navier – Stokes. Λόγω των αδιάστατων μεταβλητών αυτή η διατύπωση οδηγεί στις παρακάτω σχέσεις:

$$L_{-1}\psi = \zeta r \sin\theta \quad (4.60)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\zeta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = L_{-1}(\zeta r \sin\theta). \quad (4.61)$$

όπου L_{-1} είναι ο τελεστής Stokes που ορίζεται από την εξίσωση $L_{-1} \nabla^2 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, ψ είναι η ροϊκή συνάρτηση (διαβαθμιζόμενη από $U_\infty R^2$) και ζ είναι ο στροβιλισμός (διαβαθμιζόμενος από U_∞ / R). Ένα παρόμοιο σετ

εξισώσεων είναι κατάλληλο για τη διασκορπισμένη φάση. Μπορεί να σημειωθεί ότι εξ' αιτίας της αξονικής συμμετρίας η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα του στροβιλισμού ζ είναι στην αξιμούθια διεύθυνση (Φ). Οι οριακές συνθήκες που ικανοποιούνται είναι:

Στον άξονα συμμετρίας ($\theta = 0, \pi$):

$$\frac{\hat{\psi}}{\hat{\theta}} = 0 \quad (\text{η ακτινική ταχύτητα } u \text{ είναι πεπερασμένη}) \quad (4.62)$$

$$\hat{\psi} = 0 \quad (\text{αυθαίρετη σταθερά}) \quad (4.63)$$

Στη διεπιφάνεια ($r = 1$):

$$\frac{\hat{\psi}}{\hat{r}} = \frac{\psi}{r} \quad (\text{μη - ολίσθηση}) \quad (4.64)$$

$$\hat{r}_{r\theta} = \tau_{r\theta} \quad (\text{συνέχεια της διατμητικής τάσης}) \quad (4.65)$$

$$\hat{\psi} = \psi = 0 \quad (\text{η διεπιφάνεια είναι μια ροϊκή γραμμή}) \quad (4.66)$$

Στο ελεύθερο ρεύμα ($r \rightarrow \infty$):

$$\psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{ομοιόμορφη ροή}) \quad (4.67)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις $\tau_{r\theta}$ είναι η αδιάστατη διεπιφανειακή διατμητική τάση. Λόγω του ζ , η συνθήκη συνέχειας της διατμητικής τάσης με την απουσία κάθετης ταχύτητας, γράφεται:

$$\varphi_{,\mu} (\hat{\zeta} - 2\hat{u}_{\theta}) = (\zeta - 2u_{\theta}). \quad (4.68)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης που υπόκειται στις κατάλληλες οριακές συνθήκες που περιγράφονται παραπάνω, καθιστά ικανό τον υπολογισμό της οπισθέλκουσας δύναμης. Για ένα ρευστό σωματίδιο με απουσία αλλαγής φάσης στη διεπιφάνεια η οπισθέλκουσα δύναμη χωρίζεται σε δύο συνιστώσες: F_p και F_{μ} που είναι η οπισθέλκουσα της μορφής και η οπισθέλκουσα του ιξώδους αντίστοιχα. Αυτές δίνονται με τις σχέσεις:

$$F_p = - 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \rho \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (4.69)$$

και

$$F_{\mu} = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} (-\tau_{r\theta} \sin^2 \theta + \tau_{rr} \cos \theta \sin \theta) r d\theta, \quad (4.70)$$

όπου όλες οι ποσότητες μετρούνται στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας. Παρακάτω αναφέρουμε τα αποτελέσματα για τους συντελεστές οπισθέλκουσας για ρευστά σωματίδια από κάποιες πλήρως αριθμητικές μελέτες και επίσης περιγράφουμε την εφαρμογή της ημι – αναλυτικής μεθόδου σε σχέση με την κίνηση ενός ρευστού σωματιδίου.

Μια μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς για την έρευνα της σταθερής κίνησης μιας σταγόνας νερού στον αέρα σε ενδιάμεσους αριθμούς Reynolds έχει περιγραφεί από τον LeClair κ.α. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μέγιστη επιφανειακή ταχύτητα της κυκλοφορίας U_s είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερη από την ταχύτητα της ελεύθερης ροής $\frac{1}{2}(U_s/U_\infty)$: $O(10^{-1})$. Ο αριθμός Reynolds της κυκλοφορίας Re που βασίζεται στη μέγιστη ταχύτητα της κυκλοφορίας είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τον Re . Για $Re : O(100)$ η εξωτερική ροή χωρίζεται πίσω από τη σταγόνα. Το ρευστό στο πίσω τμήμα δεν έχει αρκετή κινητική ενέργεια (λόγω των επιδράσεων του ιξώδους) για να κινηθεί έναντι μιας θετικής μεταβολής πίεσης που επικρατεί στην πίσω περιοχή. Ένα ανακυκλοφορόν απόρρευμα σχηματίζεται με διαστάσεις ισοδύναμες του μεγέθους της σταγόνας.

Οι διαδικασίες πεπερασμένης διαφοράς έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί από τους Rivkind & Ryskin και τους Rivkind, Ryskin & Fishbein για να υπολογίσουν το συντελεστή οπισθέλκουσας C_D σε συνάρτηση του Re και του Φ_μ για ένα εύρος τιμών $0.5 \leq Re \leq 200$. Η μέθοδος συνεπάγεται ένα μετασχηματισμό της ροϊκής συνάρτησης της συνεχούς φάσης και της ακτινικής συντεταγμένης σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\psi^* = \psi - \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta \quad \text{και} \quad r = \frac{1}{n} \quad (4.71)$$

Η εξίσωση για το ψ^* διακρίνεται χρησιμοποιώντας δευτέρου βαθμού ορθές κεντρικές διαφορές για τις πρώτες παραγώγους. Η επαναληπτική διαδικασία για την εφαρμογή της συνθήκης συνέχειας της διατμητικής τάσης στη διεπιφάνεια είναι όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}^n &= \hat{\zeta}^{n-1} + \beta(u_\theta^{n-1} - \hat{u}_\theta^{n-1}), \\ \zeta^n &= \varphi_\mu \hat{\zeta}^n + (1 - \varphi_\mu)(u_\theta^{n-1} + \hat{u}_\theta^{n-1}) \quad \text{για} \quad \varphi_\mu \leq 1, \end{aligned} \quad (4.72)$$

και

$$\begin{aligned} \zeta^n &= \zeta^{n-1} + \beta(u_\theta^{n-1} - \hat{u}_\theta^{n-1}), \\ \hat{\zeta}^n &= \frac{\zeta^n}{n} + \frac{(\varphi_\mu - 1)}{\varphi_\mu}(u_\theta^{n-1} + \hat{u}_\theta^{n-1}) \quad \text{για} \quad \varphi_\mu > 1, \end{aligned} \quad (4.73)$$

όπου ο εκθέτης n δηλώνει τις n επαναλήψεις και B είναι μια παράμετρος ($0.1 \leq \beta \leq 1$) που επιλέγεται για να δώσει καλύτερη σύγκλιση. Βασιζόμενοι στα αριθμητικά τους αποτελέσματα, προτείνεται η παρακάτω εξίσωση για το C_D :

$$C_D = \frac{1}{1 + \frac{0.425}{\text{Re}} + \frac{0.6}{\text{Re}^2}} + 4\text{Re}^{-\frac{1}{3}} + 14.9\text{Re}^{-0.78} \quad (4.74)$$

Ωστόσο βασιζόμενοι στις αριθμητικές μελέτες των Oliver & Chung η εξίσωση (4.74) συνίσταται μόνο για το εύρος των τιμών $2 \leq \text{Re} \leq 50$.

Μια ημι – αναλυτική μέθοδος σειράς σε σύνδεση μ' ένα σχήμα κυβικού πεπερασμένου στοιχείου έχει εφαρμοστεί από τους Oliver & Chung για να αναπτύξουν τα αποτελέσματα ροής για ένα ρευστό σωματίδιο από χαμηλούς σε ενδιάμεσους αριθμούς Reynolds. Η φασματικού στοιχείου υβριδική μέθοδος συνδυάζει την ακρίβεια των φασματικών μεθόδων με την γεωμετρική ελαστικότητα που παρέχεται από τα σχήματα πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος έχει βρεθεί να είναι κατάλληλη ιδιαίτερα για χρήση με υπέρ – υπολογιστές. Τυπικά η ροϊκή συνάρτηση επεκτείνεται με όρους μιας άπειρης σειράς συνδεόμενων συναρτήσεων Legendre $P_n^1(\cos \theta)$ με συσχέτιση άγνωστων ακτινικών συναρτήσεων $F_n(r)$ που δίνονται από τη σχέση:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \zeta_n^{\bar{\mu}} P_n^1(\bar{\mu}) d\bar{\mu} \quad (\bar{\mu} = \cos \theta) \quad (4.75)$$

Με αυτή την έκφραση για τη ροϊκή συνάρτηση, η εξίσωση της ορμής (4.61) μετατρέπεται σ' ένα άπειρο σύστημα ζευγών απλών διαφορικών εξισώσεων για τις άγνωστες συναρτήσεις $F_n(r)$ με τη χρήση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων Legendre. Αυτές οι εξισώσεις είναι:

$$\frac{F_n^{iv}}{n(n+1)} + \frac{2F_n'''}{r^2} - \frac{4F_n''}{r^3} + \frac{16-n(n-1)}{r^4} F_n - S_n = 0, \quad (4.76)$$

όπου,

$$S_n = \frac{1}{2} \text{Re} \sum_{i,j} C_{i,j}^n \frac{F_i}{r^2 j(j+1)} - \frac{F_j''}{r^3 j(j+1)} + \frac{F_j'}{r^4} - \frac{4F_j}{r^5} + C_{i,j}^n \frac{F_i}{r^2 j(j+1)} - \frac{f_j}{r^4} \quad (4.77)$$

Ένα παρόμοιο ανάπτυγμα εφαρμόζεται για τη διασκορπισμένη φάση όπου το $\hat{\psi}$ επεκτείνεται με όρους $\hat{F}_n(r)$. Οι αρχικές δηλώνουν διαφόρηση σε σχέση με το r και οι συντελεστές CU και CV δίνονται με τις σχέσεις:

$$CU_{i,j}^n = - (2n+1) \frac{j(j+1)}{n(n+1)} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \zeta & \zeta & \zeta & \zeta & \zeta \\ n & i & j & n & i & j \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$CV_{i,j}^n = (2n+1) \frac{j(j^2-1)(j+2)}{n(n+1)i(i+1)} \zeta_{n,i,j}^{\theta} \quad (4.76)$$

Οι συντελεστές:

$$\zeta_{n,i,j}^{\theta} = \frac{j!}{i!} \frac{(j+2)!}{(i+1)!} \zeta_{n,i,j}^{\theta} \quad (4.78)$$

είναι τα 3 – J σύμβολα που δίνονται από τον Talman.

Λόγω των μεταβλητών $F_n(\theta)$ και $\hat{F}_n(\theta)$ οι οριακές συνθήκες γίνονται:

Στο κέντρο ($r = 0$):

$$\hat{F}_n'(0) = 0 \quad (4.79)$$

$$\hat{F}_n(0) = 0. \quad (4.80)$$

Στη διεπιφάνεια ($r = 1$):

$$\hat{F}_n'(1) = F_n'(1) \quad (4.81)$$

$$\varphi_{\mu} (-\hat{F}_n'' + 2\hat{F}_n') + (F_n'' - 2F_n') = 0 \quad (4.82)$$

$$\hat{F}_n(1) = F_n(1) = 0. \quad (4.83)$$

Στο ελεύθερο ρεύμα ($r \rightarrow \infty$):

$$F_n(r) = r^2 \delta_{n1} \quad (4.84)$$

$$F_n'(r) = 2r \delta_{n1} \quad (\delta_{ij} = \eta \text{ συνάρτηση } \delta \text{ του Kronecker}) \quad (4.85)$$

Αυτό το άπειρο σύστημα ($n \in [1, \infty)$) απλοποιείται σ' ένα πεπερασμένο σειρών στην εξίσωση (4.75) θέτοντας όλα τα $F_n(r) = 0$ για $n > n_0$. Η βέλτιστη τιμή του n_0 στην οποία οι αμελητέοι όροι έχουν μια ασήμαντη επίδραση στη λύση βρέθηκαν με δοκιμή και σφάλμα. Η τιμή του n_0 αυξάνει με τον αριθμό Reynolds της ροής. Για μικρές τιμές του αριθμού Reynolds μόνο λίγοι όροι χρειάζονται για καλή σύγκλιση εξ' αιτίας της σχετικής συμμετρίας της ροής γύρω από το $\theta = \frac{1}{2}$ π. Ωστόσο, καθώς η μεταγωγή γίνεται πιο σημαντική, η συμμετρία χάνεται και έτσι χρειάζεται η θεώρηση ενός μεγαλύτερου αριθμών όρων. Το σειρών των εξισώσεων επιλύεται από μια πεπερασμένου στοιχείου μέθοδο όπου το κύριο στοιχείο διαιρείται σε διάφορα στοιχεία. Η μελέτη των Oliver & Chung χρησιμοποιεί πέντε εσωτερικά και έντεκα εξωτερικά στοιχεία. Οι δοκιμαστικές συναρτήσεις που επιλέχθηκαν για τη μετρήσιμου

στοιχείου μέθοδο είναι κυβικά πολυώνυμα Hermite με C' συνέχεια. Κάθε κυβικό στοιχείο αντιστοιχεί σε διάφορες συναρτήσεις παρεμβολής. Οι n_0 εξισώσεις σε όλο το πεδίο ορισμού $0 < r < \mathbb{Y}$ μετασχηματίζονται σε $4n_0$ εξισώσεις για κάθε στοιχείο με την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin για κάθε στοιχείο: δηλαδή κάθε εξίσωση από το σετ πολλαπλασιάζεται με κάθε μία από τις τέσσερις συναρτήσεις παρεμβολής και έπειτα ολοκληρώνεται για κάθε ένα από τα πεδία ορισμού των στοιχείων. Το σύστημα των εξισώσεων των στοιχείων μαζί με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες συνδυάζονται σ' ένα γενικό σύστημα εξισώσεων. Αυτό το γενικό σύστημα γίνεται γραμμικό χρησιμοποιώντας ένα επαναληπτικό διάγραμμα Newton – Raphson. Με κατάλληλη διευθέτηση αυτό το γενικό σύστημα παίρνει μια τρισδιάστατη μορφή με κάθε μπλοκ να έχει μια καλούπι – μήτρα $2n_0 \times 2n_0$. Μ' ένα τέτοιο σύστημα τρισδιάστατου σχήματος, ο αριθμός των υπολογισμών ανά επανάληψη είναι περίπου ανάλογος με En_0^3 , όπου E είναι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων στο πεδίο του υπολογισμού. Οι επαναλήψεις διεξάγονται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Το κριτήριο της σύγκλισης βασίζεται στις διαδοχικά επαναλαμβανόμενες τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας C_D που κυμαίνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\left| \frac{C_D^{\text{παλιός}}}{C_D^{\text{νέος}}} - 1 \right| \leq 0.001. \quad (4.86)$$

Με το $F_n(r)$ γνωστό, οι συνιστώσες της ταχύτητας υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$u_r = \varepsilon \sum_{n=1}^{n_0} \frac{F_n(r)}{r^2} P_n(\bar{\mu}) \quad \text{και} \quad u_\theta = \varepsilon \sum_{n=1}^{n_0} \frac{F_n'(r)}{r} \frac{P_n^1(\bar{\mu})}{n(n+1)}. \quad (4.87)$$

Μετάπειτα αυτές χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις ενέργειας και η επακόλουθη διατύπωση για τη μεταφορά θερμότητας επιλύεται από την αριθμητική μέθοδο ADI.

Βασιζόμενοι σε αυτούς τους υπολογισμούς οι Oliver & Chung έχουν επίσης εξετάσει διάφορα θέματα της βιβλιογραφίας που σχετίζονται με την κίνηση ρευστού σωματιδίου και έχουν εξαγει ακριβή αποτελέσματα για την οπισθέλκουσα της μορφής, την οπισθέλκουσα του ιζώδους και τους ολικούς συντελεστές οπισθέλκουσας για ένα μεγάλο εύρος τιμών των Re , Re^* , φ_p και φ_μ . Για $Re < 2$ πρότειναν τη σχέση:

$$C_D = C_{D_0} + 0.40 \frac{\zeta 3\varphi_\mu + 2\varphi^2}{\varphi_\mu + 1}, \quad (4.88)$$

όπου C_{D_0} είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας για την έρπουσα ροή που δίνεται από τη σχέση:

$$C_{D_0} = \frac{8}{Re} \frac{\zeta 3\varphi_\mu + 2\varphi^2}{\varphi_\mu + 1}, \quad (4.89)$$

Μια σημαντική παρατήρηση που έγινε, ότι μέσα σε μια σταγόνα οι εσωτερικές μορφές της ροής και οι συντελεστές οπισθέλκουσας δεν είναι γενικά ευαίσθητοι στις

αλλαγές του Re , επιβεβαιώθηκε για ένα εύρος τιμών $Re < 50$ από την αριθμητική μελέτη των Oliver & Chung. Αξίζει να σημειωθεί ότι η εσωτερική κυκλοφορία εμποδίζει το διαχωρισμό της ροής από την επιφάνεια της σταγόνας. Όπως διαφαίνεται η ροή διαχωρίζεται από μια στερεή σφαίρα ($\phi_\mu = 10^7$) για $Re = 30$, ενώ παραμένει προσαρτημένη για $Re = 50$ για ροές πάνω από σταγόνες με τιμές $\phi_\mu = 0.33$ και $3,0$. Τα αριθμητικά αποτελέσματα για τους συντελεστές οπισθέλκουσας που προβλέπονται ισοδυναμούν με τα πειραματικά δεδομένα των Elzinga & Banchoero που δείχνουν καλύτερη συμφωνία για στερεές σφαίρες απ' ότι για σταγόνες. Ωστόσο τα αποτελέσματα σημαντικά διαφωνούν με τις προβλέψεις των Abdel – Alim & Hamielec.

4.3 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ

Για ένα σωματίδιο που υφίσταται μεταφορά θερμότητας και μεταφορά μάζας δι' αγωγής με το περιβάλλον ρευστό, οι εξισώσεις της ενέργειας και των συστατικών πρέπει να επιλυθούν επιπρόσθετα των εξισώσεων της συνέχειας και της ορμής που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Σ' αυτή την παράγραφο οι αναφορές περιορίζονται σε περιπτώσεις ροών με μέτριες ταχύτητες και μεταφοράς με απ' ευθείας σύνδεση. Η απώλεια ιξώδους, οι επιδράσεις της συμπιεστότητας και το έργο της διαστολής θεωρούνται αμελητέα. Μπορεί να αναφερθεί ότι για ασυμπίεστες ροές, οι εξισώσεις ορμής και ενέργειας μπορούν να αποσυνδεθούν η μία από την άλλη και να επιλυθούν ξεχωριστά. Αλλά όπου οι μεταβολές της πυκνότητας με τη θερμοκρασία (ή τη συγκέντρωση) είναι σημαντικές ή στις καταστάσεις αλλαγής φάσης, πρέπει να επιλυθούν ζεύγη διατυπώσεων (των εξισώσεων ορμής και ενέργειας).

4.3.1 ΚΙΝΗΤΗΡΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

Οι βασικές εξισώσεις της μεταφοράς θερμότητας και μάζας έχουν περιγραφεί στο κεφάλαιο 1. Σ' ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων αυτές δίνονται από τις εξισώσεις (1.38) και (1.43). Με σκοπό να κάνουμε αδιάστατη την εξίσωση ενέργειας μια διαβαθμισμένη θερμοκρασία Θ ορίζεται από τη σχέση:

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad (4.90)$$

με μια παρόμοια σχέση για το εσωτερικό του σωματιδίου, όπου T_∞ είναι η θερμοκρασία της ελεύθερης ροής της συνεχούς φάσης και T_0 είναι η αρχική θερμοκρασία του σωματιδίου. Η αδιάστατη αξονοσυμμετρική εκδοχή της εξίσωσης (1.38) είναι:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} + u_r \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = \frac{1}{Re Pr} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right), \quad (4.91)$$

με μια παρόμοια εξίσωση για τη διασκορπισμένη φάση. Η αδιάστατη εξίσωση μάζας είναι:

$$\frac{m_j}{r} + u_r \frac{m_j}{r} + \frac{u_r}{r} \frac{m_j}{\theta} = \frac{1}{\text{Re Sc}_j} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial m_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial m_j}{\partial \theta} \right) \quad j = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (4.92)$$

Εδώ το m_j δηλώνει ένα κλάσμα μάζας και παίρνει τη θέση του c_j στην εξίσωση (1.43).

Δύο αδιάστατες παράμετροι προσδιορίζονται στις εξισώσεις της ενέργειας και των συστατικών. Αυτές είναι ο αριθμός Prandtl $Pr = (\nu/\alpha)$ που είναι ο λόγος της διαχυτότητας της ορμής προς αυτήν της θερμότητας και ο αριθμός Schmidt $Sc_j = (\nu/D_{jm})$ που αναπαριστά το λόγο της διαχυτότητας της ορμής προς αυτήν των συστατικών.

Σε πολλές περιπτώσεις απευθείας επαφής μεταφοράς οι λόγοι των θερμικών ιδιοτήτων των συνεχών και διασκορπισμένων φάσεων είναι τέτοιοι ώστε είναι επαρκείς για να υπολογιστεί η μεταφορά σε μια ειδικά φάση απ' ότι να επιτευχθεί μια λογική εκτίμηση του ολικού βαθμού μεταφοράς. Απ' την άποψη αυτής της παρατήρησης, ανάλογα με την περίπτωση, υποθέτεται ότι η αντίσταση είναι σημαντική είτε στη διασκορπισμένη φάση («εσωτερικό πρόβλημα») είτε στη συνεχή φάση («εξωτερικό πρόβλημα»). Η μεταφορά εκτιμάται με τέτοια μοντέλα υποθέτοντας ότι οι μεταβολές της θερμοκρασίας (ή της συγκέντρωσης) στη μη ελεγχόμενη φάση είναι αμελητέες και ότι η διεπιφανειακή θερμοκρασία (ή συγκέντρωση) εξαρτάται από το χρόνο. Ωστόσο οι αντιστάσεις και των δύο φάσεων μπορεί να είναι σημαντικές και μπορεί να πρέπει να διατηρηθούν στην ανάλυση όπως γίνεται με πολλές σημαντικές εφαρμογές της απευθείας σύνδεσης μεταφοράς. Η μεταφορά τότε χειρίζεται σε μια «συζευγμένη διαδικασία». Για προβλήματα που δεν περιλαμβάνουν αλλαγή φάσης, μια περιεκτική αναφορά αυτών των προσεγγίσεων δίνεται από τους Abramzon & Borde.

Η μεταφορά θερμότητας και μάζας σε ενδιάμεσους και υψηλούς αριθμούς Reynolds θα αναφερθεί τώρα κάτω από σειρές διαδικασιών μεταφοράς: αυτές που περιλαμβάνουν αλλαγή φάσης στην επιφάνεια της σταγόνας και εκείνες που δεν περιλαμβάνουν.

4.3.2 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΧΩΡΙΣ ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα πολύ καλό παράδειγμα του εξωτερικού προβλήματος (όπου η αντίσταση είναι κυρίως στην αρχική φάση και η σταγόνα θερμικά αυτοπροσαρμόζεται σε κάθε αλλαγή στην επιφάνεια σχεδόν ακαριαία) είναι αυτό της σταγόνας της βροχής που πέφτει στην ατμόσφαιρα. Για μια τέτοια σταγόνα στον αέρα ο λόγος των ογκομετρικών θερμικών χωρητικοτήτων $\varphi_{\rho c} = \varphi_{\rho} \varphi_c = (\hat{\rho} \hat{c}_p / \rho c_p)$ είναι περίπου 4000 προς 1, με το λόγο της θερμικής αγωγιμότητας $\varphi_k (\varphi_k = \varphi_{\rho c} \varphi_{\alpha})$ περίπου 20 προς 1.

Λόγω των μεγάλων τιμών των $\varphi_{\rho c}$ και φ_k αυτή η κατάσταση μπορεί λογικά να μοντελοποιηθεί σαν ένα πρόβλημα ισοθερμικής σφαίρας με το βαθμό μεταφοράς της θερμότητας να οδηγείται μόνο από την αντίσταση της συνεχούς φάσης. Μια εκτεταμένη κάλυψη του εξωτερικού προβλήματος παρουσιάστηκε από τον Clift κ.α και από τους Ruppacher & Klet. Εμείς τώρα προβάλλουμε αποτελέσματα από μια πρόσφατη ημιαναλυτική μελέτη και μια πειραματική έρευνα.

Το πρόβλημα της εξωτερικής μεταφοράς μάζας για ένα ρευστό σωματίδιο που κινείται σ' ένα εύρος τιμών $0 < Re < 100$ για $0 \leq \varphi_\mu \leq 50$ και $Pe \gg 1$ έχει ερευνηθεί από τους Oliver & De Witt με μια ημιαναλυτική μέθοδο σειράς για τον προσδιορισμό του ροϊκού πεδίου σε συνδυασμό με μια εξίσωση για τον αριθμό Sherwood που παρουσιάστηκε από τον Clift κ.α. Η υψηλή τιμή του αριθμού Peclet της μεταφοράς της μάζας υποδηλώνει τη θεώρηση ενός λεπτού οριακού στρώματος συγκέντρωσης στη συνεχή φάση στη διεπιφάνεια. Το πεδίο ροής κοντά στη σταγόνα παρουσιάζεται από μια σειρά άγνωστων ακτινικών συναρτήσεων και εφαπτόμενων συναρτήσεων Gengebauer με τη σχέση:

$$\psi = \sum_{n=1}^{n_0} F_n(r) C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\bar{\mu}), \quad (4.93)$$

όπου $C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\bar{\mu})$ είναι το πολυώνυμο Gengebauer σειράς $(n+1)$ και βαθμού $(-1/2)$. Με βάση αυτό το ανάπτυγμα εκτιμάται το u_θ στη διεπιφάνεια. Αυτό μετά χρησιμοποιείται στην εξίσωση (3.51) των Clift κ.α που είναι:

$$Sh = 0.798 Pe^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi (u_\theta)_{r=1} \sin^2 \theta d\theta, \quad (4.94)$$

για να υπολογιστεί ο αριθμός Sherwood. Έχει υπολογιστεί ότι για τις αδιάστατες παραμέτρους σ' ένα εύρος τιμών $0 < Re < 100$, $0 \leq \varphi_\mu \leq 50$ και $Pe \gg 1$ έχουμε τη σχέση:

$$Sh = \frac{2h_M R}{D} = 0.65 Pe^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \varphi_\mu + 0.1 Re^{\frac{1}{2}} + 0.11 \ln(Re + 1)}{(1 + \varphi_\mu)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.95)$$

Οι προβλέψεις της εξίσωσης (4.95) συμφωνούν με τους υπολογισμούς των Ryskin & Fishbein και τα πειραματικά δεδομένα που παρουσιάστηκαν από τον Griffith. Οι Oliver & De Witt προτείνουν έναντι της χρησιμοποίησης της εξίσωσης των Clift κ.α για τον υπολογισμό του αριθμού Sh για το εξωτερικό πρόβλημα για $\varphi_\mu \leq 2$, $Re \leq 50$ και $Pe \gg 1$ την εξίσωση (4.94), όπου αυτή ορίζεται. Αυτό διότι η εξίσωση εφαρμόζει μια έκφραση για την επιφανειακή ταχύτητα που είναι ανακριβής.

Πειράματα πάνω στην ελεύθερη πτώση σταγόνων νερού στον αέρα για να εξακριβωθεί η μεταβολή της θερμοκρασίας της σταγόνας με την απόσταση της πτώσης (θεωρώντας αμελητέα την εσωτερική αντίσταση) διεξήχθησαν από τους Yao & Schrock. Βρέθηκε ότι για σταγόνες διαμέτρου 3 – 6 mm ένας εμπειρικός

μεταφορικός παράγοντας διόρθωσης εφαρμόστηκε στη σχέση των Ranz – Marshall (βλέπε εξίσωση (4.212)), ρυθμίζει επαρκώς τα πειραματικά δεδομένα. Σ' αυτή τη βάση συστήνονται οι παρακάτω σχέσεις:

$$Nu = 2.0 + 15.0 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.7} \quad \text{για} \quad 10 \leq \frac{x}{d} \leq 600, \quad (4.96)$$

και μια πανομοιότυπη σχέση για τον Sh με αντικατάσταση του Pr από τον Sc. Εδώ x είναι η απόσταση της πτώσης.

ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Για το εσωτερικό πρόβλημα ο χαρακτηριστικός χρόνος της θερμικής απόκρισης είναι πολύ μεγαλύτερος στο εσωτερικό της σταγόνας απ' ό,τι στο εξωτερικό και η μεταφορά πρέπει να θεωρηθεί σα μια μεταβατική διαδικασία. Αριθμητικές λύσεις για τη μεταφορά θερμότητας εντός της σταγόνας σε ενδιάμεσους αριθμούς Peclet π.χ $0 \leq Pe \leq 100$, έχουν επιτευχθεί από τους Johns & Beckmann, Watada, Hamielec & Johnson και Wellek, Andoe & Brunson. Συνοψίζοντας οι Abramzon & Borde και ο Ayyaswamy, αυτές τις μελέτες δείχνουν ότι σε κάθε δεδομένο αριθμό Peclet, ο μεταφορικός αριθμός Nusselt μειώνεται από μια πολύ υψηλή τιμή στην αρχή της διαδικασίας και για μεγάλους χρόνους επαφής ($\tau = (\alpha t / R^2)^{1/2}$) προσεγγίζει μια ασυμπτωτική τιμή. Οι ασυμπτωτικές τιμές του

$$Nu = Q(2R) / \left(\frac{1}{4} \pi R^2 k (\bar{T} - \bar{T}_s) \right) \quad \text{αυξάνουν μονότονα από 6.58 για } Pe = 0 \text{ σε 17.66 για}$$

$Pe \rightarrow \infty$. Οι περιοχές μέσων όρων δείχνονται με «καπελάκια». Για $Pe > 80(1 + \phi_\mu)$ η στιγμιαία τιμή $Nu(\tau)$ κυμαίνεται σε μια χρονική περίοδο που συσχετίζεται με το χρόνο της κυκλοφορίας του υγρού σε μια κλειστή ροϊκή γραμμή στο εσωτερικό της σταγόνας. Οι ταλαντώσεις έχουν εξασθενημένο πλάτος.

Για την οριακή περίπτωση $Pe \rightarrow \infty$ η διαδικασία μεταφοράς έχει ερευνηθεί αριθμητικά από τον Brignell τόσο για συστήματα χαμηλών όσο και για συστήματα υψηλών αριθμών Reynolds. Ο μηχανισμός ελέγχου για τη μεταφορά θεωρείται ότι είναι η διάχυση κατά μήκος των ροϊκών γραμμών στη σταγόνα. Κάποιες ενδιαφέρουσες εκτιμήσεις της τάξης μεγέθους των επιδράσεων των εσωτερικών και εξωτερικών απορρευμάτων υποδείχθηκαν από τον Brignell. Οι εκτιμήσεις του πάχους είναι:

(i) για το εξωτερικό απόρρευμα, $O(Pe^{-1/4})$

(ii) εσωτερικό απόρρευμα $O(Pe^{-1/4})$

(iii) εξωτερικό οριακό στρώμα $O(Pe^{-1/2})$ και

(iv) εσωτερικό οριακό στρώμα $O(Pe^{-1/2})$.

Δείχνεται ότι τα αποτελέσματα του χαμηλού αριθμού Reynolds των Kronig & Brink μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση υψηλού αριθμού Reynolds με ένα σφάλμα της τιμής $O(Pe^{-1/2})$.

Μια σημαντική συνεισφορά στην αριθμητική μοντελοποίηση της εσωτερικής μεταφοράς θερμότητας για μια σταγόνα καυσίμου έχει γίνει από τους Prakash & Sirignano. Αντίστοιχα με την περιγραφή της εσωτερικής ροής, η σταγόνα του καυσίμου θεωρείται ότι αποτελείται από ένα θερμικό οριακό στρώμα, ένα θερμικό απόρρευμα, και ένα θερμικό πυρήνα. Σημειώθηκε ότι τυπικά $Pe_t: O(10)$, $Pe: O(10^3)$ το πάχος του θερμικού οριακού στρώματος είναι $\delta_t = O(Re^{-1/2})$ και το

πάχος του θερμικού απορρευμάτος είναι $\delta_{wt} = O(Re^{-1/4})$. Το θερμικό οριακό στρώμα

θεωρείται ότι είναι πλήρως αναπτυγμένο και λεπτό. Βασιζόμενοι σε μια μελέτη σχετικών κλιμάκων του χρόνου για θέρμανση σταγονιδίου, το θερμικό οριακό στρώμα δείχνεται ότι είναι ημισταθερό ενώ η θέρμανση του πυρήνα είναι μια μεταφορική διαδικασία. Σ' αυτό το περιβάλλον αποδεικνύεται ότι ο χρόνος παραμονής κατά μήκος μιας κλειστής ροϊκής γραμμής που είναι επίσης και ο χρόνος παραμονής στο θερμικό οριακό στρώμα, είναι περίπου δυο τάξεις μεγέθους μικρότερος από το θερμικό χρόνο διάχυσης. Αυτός ο μικρός χρόνος παραμονής κατά μήκος μιας κλειστής ροϊκής γραμμής δείχνει επίσης ότι στο θερμικό πυρήνα, μακριά από το οριακό στρώμα, η μεταβολή της θερμοκρασίας κάθετα στη ροϊκή γραμμή είναι σημαντική. Η θέρμανση του πυρήνα ορίζεται από μια μονοδιάστατη ασταθή εξίσωση ενέργειας στις συντεταγμένες της ροϊκής γραμμής. Η σύνδεση ανάμεσα στο θερμικό οριακό στρώμα και τον πυρήνα επιτυγχάνεται με τη θεώρηση της συνέχειας της μεταβολής της μέσης θερμοκρασίας κάθετα στην εξωτερική ροϊκή γραμμή του πυρήνα. Η βασική διαφορά ανάμεσα στην ανάλυση των Prakash & Sirignano και αυτή του Brignell είναι στη σύνδεση του θερμικού πυρήνα και του οριακού στρώματος. Δείχνεται ότι για υψηλό αριθμό Peclet μεταφοράς στο εσωτερικό της σταγόνας, το θερμικό οριακό στρώμα είναι σχετικά λεπτό και γι' αυτό το λόγο η μεταφορά του θερμικού πυρήνα είναι συνήθως ο κυρίαρχος παράγοντας της διαδικασίας. Ωστόσο ο χειρισμός του θερμικού οριακού στρώματος αναφέρεται ότι είναι πολύ βασικός για την ανάλυση καταστάσεων όπου η πρόβλεψη της επιφανειακής θερμοκρασίας της σταγόνας είναι σημαντική. Η εξίσωση διάχυσης στον πυρήνα ενός εξατμιζόμενου σταγονιδίου καυσίμου επιλύεται αριθμητικά για προκαθορισμένες θερμικές συνθήκες στη διεπιφάνεια. Με μετατροπές των συντεταγμένων παρόμοιες με εκείνες που χρησιμοποιήθηκαν για την υδροδυναμική της διασκορπισμένης φάσης, η εξίσωση της ενέργειας στο οριακό στρώμα γίνεται:

$$\frac{\eta^2 \hat{\Theta}}{\eta Y_t^2} = \frac{\eta \hat{\Theta}}{\eta X_t}, \quad (4.97)$$

όπου $\hat{\Theta}$ είναι η αδιάστατη θερμοκρασία που ορίζεται από τη σχέση $\frac{1}{k} \hat{T} - \hat{T}_c(t) \frac{\eta}{\delta_t} (\hat{T}_{bp} - \hat{T}_0)$. Εδώ \hat{T} είναι η αδιάστατη θερμοκρασία, $\hat{T}_c(t)$ είναι ο μέσος όρος της θερμοκρασίας στο εξωτερικό όριο – στρώμα του θερμικού πυρήνα, \hat{T}_{bp} είναι η θερμοκρασία βρασμού του υγρού και \hat{T}_0 είναι η αρχική θερμοκρασία της σταγόνας. Ο δείκτης t δηλώνει ότι η διαβάθμιση βασίζεται στο πάχος δ_t του θερμικού οριακού στρώματος. Οι οριακές συνθήκες για την εξίσωση (4.94) είναι:

$$\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial Y_t} = f(X_t, t) \quad \text{για} \quad Y_t = 0, \quad (4.98)$$

και

$$\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial Y_t} = C_1 \quad \text{για} \quad Y_t \in \mathbb{R}, \quad (4.99)$$

Σ' αυτές τις εξισώσεις $f(X_t, t)$ είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας κάθετα στην επιφάνεια της σταγόνας μ' ένα σετ τιμών από τη σύνδεση της διαδικασίας για τη συνεχή φάση. Η παράμετρος C_1 σχετίζεται με τη μεταβολή του μέσου όρου της θερμοκρασίας κάθετα στην περιβάλλουσα – οριακή ροϊκή γραμμή του πυρήνα και ορίζεται από τη σχέση:

$$C_1 = \frac{1}{X_e} \int_0^{X_e} f(X_t) dX_t, \quad (4.100)$$

Εδώ X_e είναι η τιμή του X στο πίσω σταθερό σημείο. Η παραπάνω εξίσωση βασίζεται στην ισορροπία ενέργειας και στην υπόθεση της αμελητέας διάχυσης στην περιοχή του απορρεύματος. Κατά τη διεύθυνση της ροής:

$$V = h(Y_t) \quad \text{για} \quad X_t = 0^+, \quad (4.101)$$

και

$$\begin{aligned} V(0, Y_t) &= h(Y_t) \\ &= V(X_e, Y_t), \end{aligned} \quad (4.102)$$

όπου $V = \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial Y_t} - C_1 \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial X_t}$. Αυτή η συνθήκη βασίζεται σε διατυπώσεις παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της ροής υγρού. Στις μετακινούμενες περιοχές κοντά στο πίσω σταθερό σημείο και στο εσωτερικό απόρρευμα, θεωρείται ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι αμελητέα και η θερμότητα μεταφέρεται δι' αγωγιμότητας χωρίς διάχυση μέσα στην περιοχή ώστε να εισέλθει μέσα στο θερμικό οριακό στρώμα. Η διατύπωση για το θερμικό οριακό στρώμα επιλύεται μ' ένα παρόμοιο τρόπο μ' αυτόν που χρησιμοποιήθηκε για το οριακό στρώμα της ορμής.

Το πρόβλημα της θέρμανσης του πυρήνα του σταγονιδίου μετασχηματίζεται από διδιάστατο ασταθές πρόβλημα διάχυσης σ' ένα μονοδιάστατο ασταθές πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις ημισταθερές ροϊκές επιφάνειες (δηλώνονται με το Φ) σαν συντεταγμένες και θεωρώντας ότι για μεγάλο αριθμό Peclet της διασκορπισμένης φάσης, η θερμοκρασία είναι ομοιόμορφη (αλλά χρονικά μεταβαλλόμενη) πάνω σε κάθε μία από αυτές τις επιφάνειες. Με αυτό το μετασχηματισμό η εξίσωση ενέργειας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \tau} = \frac{1}{g_1(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} g_2(\varphi) \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \varphi} \right) \quad (4.103)$$

Η αδιάστατη θερμοκρασία $\hat{\Theta}$ εδώ προσδιορίζεται από τη σχέση $(\hat{T}_{av} - \hat{T}_0)/(\hat{T}_{bp} - \hat{T}_0)$ όπου \hat{T}_{av} είναι ο μέσος όρος της θερμοκρασίας σε μια κλειστή ροϊκή γραμμή, που βασίζεται στη θεώρηση ότι ο χρόνος παραμονής κατά μήκος του κλειστού βρόχου είναι μικρός συγκρινόμενος με το θερμικό χρόνο διάχυσης. Αυτή υπολογίζεται με τη σχέση:

$$\hat{T}_{av}(\psi, t) = \frac{\int_{\xi} (\hat{T}/q_1) h_{\xi} d\xi}{\int_{\xi} (1/q_1) h_{\xi} d\xi}, \quad (4.104)$$

όπου ψ είναι η ροϊκή συνάρτηση, q_1 , είναι η ταχύτητα στη διεύθυνση της ροής, $h_{\xi} = Ar^5 \cos^5 \theta / 2q_1$ είναι ο διαβαθμισμένος παράγοντας στη διεύθυνση ροής, A είναι η ισχύς του στροβίλου Hill, r είναι η ακτινική απόσταση στο σφαιρικό σύστημα πολικών συντεταγμένων και $\xi = \frac{\zeta}{\theta} r^2 - \frac{1}{2} R^2 \frac{\varphi}{\psi} (r^4 \cos^4 \theta)$ είναι το μέτρο της συντεταγμένης κατά μήκος των ροϊκών γραμμών. Επιπρόσθετες παράμετροι ορίζονται με τις σχέσεις:

$$\varphi = - \frac{8\psi}{AR^4}, \quad (4.105)$$

$$g_1(\varphi) = \frac{AR}{8} \int_{\xi} \frac{h_{\xi}}{q_1} d\xi, \quad (4.106)$$

και

$$g_2(\varphi) = \frac{8}{AR^5} \int_{\xi} \frac{h_{\varphi}}{h_{\psi}} h_{\xi} d\xi. \quad (4.107)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις $h_{\varphi} = r \sin \theta$ και $h_{\psi} = 1/(r \sin \theta q_1)$. Ο αδιάστατος χρόνος τ ορίζεται με τη σχέση $(\hat{a}t/R^2)$. Οι αρχικές και οριακές συνθήκες είναι:

$$\hat{\Theta} = 0 \quad \text{για} \quad \tau = 0, \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \Phi} = C_2 \quad \text{για} \quad \varphi = \varphi_0, \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \tau} = \frac{1}{K} \frac{1}{g_1(\varphi)} \frac{dg_2(\varphi)}{d\varphi} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \Phi} \quad \text{για} \quad \varphi = 1. \quad (4.110)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, φ_0 είναι η εξωτερική οριακή περιοχή του θερμικού πυρήνα. Δίνεται από μια εκτίμηση του πάχους του θερμικού οριακού στρώματος ότι $\varphi_0 = 0.16$ για σταγονίδια καυσίμου. Η σταθερά C_2 σχετίζεται με τη C_1 της εξίσωσης (4.100). Η οριακή συνθήκη στο στάσιμο δαχτυλίδι, $\Phi = 1$ επιτυγχάνεται θεωρώντας

ότι η $\hat{\Theta}$ είναι μια κανονική συνάρτηση του Φ σ' αυτό το σημείο. Με τη σύνδεση της ροής θερμότητας στο όριο ανάμεσα στο θερμικό οριακό στρώμα και στο θερμικό πυρήνα τα C_1 και C_2 συσχετίζονται με την παρακάτω σχέση:

$$C_1 = 8\delta_t C_2 \frac{\zeta}{\theta} + \frac{\delta_{wt}}{R} \frac{\phi}{\theta} \quad (4.111)$$

Η λύση της εξίσωσης της θερμοκρασίας του πυρήνα (4.103) αριθμητικά αναπτύσσεται με τη σύζευξη με τη λύση του θερμικού οριακού στρώματος της υγρής φάσης στην επιφάνεια του σταγονιδίου. Αυτή η άποψη της σύζευξης με τη λύση της συνεχούς φάσης και το ανάπτυγμα των αποτελεσμάτων αναφέρονται σε παρακάτω παράγραφο που σχετίζεται με αλλαγή φάσης στη διεπιφάνεια. Η μέθοδος των Prakash & Sirignano έχει μεγάλη επιτυχία στις μελέτες εξάτμισης σταγονιδίου καυσίμου.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΔΕΣΗΣ

Σ' ένα πρόβλημα σύνδεσης, οι αντιστάσεις για τη μεταφορά τόσο στη διασκορπισμένη όσο και στη συνεχή φάση είναι ισοδύναμες. Στη διεπιφάνεια οι συνθήκες για τη συνέχεια της θερμοκρασίας (συγκέντρωσης) και τη ροή θερμότητας (ροή μάζας) πρέπει να ικανοποιηθούν και οι εξισώσεις μεταφοράς για το εσωτερικό και το εξωτερικό του σταγονιδίου πρέπει ταυτόχρονα να επιλυθούν. Τώρα περιγράφουμε δύο πρόσφατες αναλύσεις των προβλημάτων σύνδεσης που σχετίζονται με ρευστά σωματίδια.

Για $0 < Re < 50$ με $0 < \phi_\mu < 10$ και $0.01 < \phi_k < 3$ τα σταθερά ροϊκά πεδία εσωτερικά και εξωτερικά της σταγόνας έχουν επιλυθεί από τους Oliver & Chung χρησιμοποιώντας τη φασματική μέθοδο σειράς καθώς η εναλλακτική κατεύθυνση που συνεπάγεται την ADI τεχνική έχει εφαρμοστεί για την επίλυση των εξισώσεων. Για χρόνο $t = 0$, η θερμοκρασία της συνεχούς φάσης υπόκειται σε μια βηματική αλλαγή από T_0 σε T_∞ . Η ακτινική απόσταση διαβαθμίζεται από το R και εκτός από τον αριθμό Peclet, Pe παρουσιάζονται οι παρακάτω αδιάστατες ποσότητες:

$$F_0 = \frac{at}{R^2}, \quad \text{ο αριθμός Fourier}$$

$$\Theta = \frac{\zeta}{\theta} \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \frac{\phi}{\theta} \quad \hat{\Theta} = r \frac{\zeta}{\theta} \frac{\hat{T} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \frac{\phi}{\theta}$$

και επιπρόσθετα για τη συνεχή φάση, $n = 1/r$. Οι εξισώσεις ενέργειας στις δύο φάσεις παίρνουν τη μορφή που δίνονται στις εξισώσεις (3.173) και (3.174) υπό τον όρο ότι $\hat{\Theta} = 0$ στο κέντρο του σταγονιδίου και η συνθήκη συνέχειας της ροής θερμότητας εκφράζεται από την εξίσωση (3.172). Σ' αυτή τη διατύπωση οι όροι της μεταγωγής ορίζονται με προσεγγίσεις κεντρικής διαφοράς και το σχέδιο ADI εφαρμόζεται με το συνήθη τρόπο. Για την εξίσωση ενέργειας η αριθμητική έρευνα έχει διεξαχθεί για ένα εύρος τιμών των παραμέτρων $0.333 \leq \phi_{pc} = \phi_\rho \phi_c \leq 3$, $\phi_a = 1$

και $\varphi_\mu = 1$. Ένας χρονικά εξαρτώμενος αριθμός Nusselt για την ποσοτικοποίηση του βαθμού μεταφοράς ορίζεται με τη σχέση:

$$Nu = \frac{1}{\Theta_b} \zeta_0 \int_0^\pi \left. \frac{\Theta}{n} \right|_{n=1} \sin\theta d\theta, \quad (4.112)$$

όπου Θ_b είναι η θερμοκρασία στον κύριο όγκο της σταγόνας που δίνεται από τη σχέση:

$$\Theta_b = \frac{3}{2} \zeta_0 \int_0^\pi \int_0^1 \hat{\Theta}^2 \sin\theta dr d\theta. \quad (4.113)$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις μεταβολές του αριθμού Nusselt με τον αριθμό Fourier, για διάφορους αριθμούς Peclet και $\varphi_{pc} = 1$ δείχνουν ταλαντώσεις μ' ένα εξασθενημένο πλάτος. Η εσωτερική κυκλοφορία στη σταγόνα διαδοχικά τροφοδοτεί με ζεστό και κρύο ρευστό τη μπροστινή περιοχή όπου λαμβάνει χώρα το μεγαλύτερο μέρος της μεταφοράς. Αυτό προκαλεί ταλαντώσεις στον αριθμό Nusselt. Τα αποτελέσματα για τη μεταβολή του αριθμού Nusselt για $Pe = 300$, $\varphi_a = 1$, $\varphi_k = 3$ για λόγους ιξώδους $\varphi_\mu = 0.333$ και 3, δείχνουν ότι τόσο η ταχύτητα της συνεχούς φάσης κοντά στην επιφάνεια της σταγόνας όσο και η ισχύς του εσωτερικού στροβίλου αυξάνουν με τον αριθμό Reynolds. Αυτά τα αποτελέσματα εντείνουν τη μεταφορά θερμότητας μεταξύ των φάσεων. Η αυξημένη εσωτερική κυκλοφορία μικραίνει τους χρονικούς κύκλους ταλάντωσης του αριθμού Nusselt κατά τη διάρκεια της αρχικής μεταβατικής περιόδου. Για ένα καθορισμένο φ_k μια αύξηση στο φ_μ προκαλεί μείωση στην ισχύ της εσωτερικής κυκλοφορίας και κατά συνέπεια οι κύκλοι ταλάντωσης είναι μεγαλύτεροι και οι αριθμοί Nusselt μικρότεροι. Παρόμοιοι υπολογισμοί για μεταβαλλόμενο φ_k για ένα καθορισμένο φ_μ δείχνουν ότι ο αριθμός Nusselt αυξάνει με αύξηση του φ_k εξ' αιτίας του υψηλότερου βαθμού διάχυσης της θερμικής ενέργειας από τη διεπιφάνεια στο εσωτερικό της σταγόνας. Με αυξανόμενο φ_k το πλάτος της ταλάντωσης του αριθμού Nusselt μειώνεται διότι η διάχυση κατά μήκος των ροϊκών γραμμών του εσωτερικού στροβίλου αυξανόμενα επικρατεί πάνω στη μεταγωγική κυκλοφορία που είναι η βασική αιτία των διακυμάνσεων.

Το πρόβλημα της πλήρως μεταβατικής σύνδεσης μεταφοράς θερμότητας έχει ερευνηθεί με τη χρησιμοποίηση μιας αριθμητικής διαδικασίας που βασίζεται σ' ένα υβριδικό φασματικό σχέδιο από τους Nguyen, Paik & Chung. Το κίνητρο γι' αυτή τη μελέτη ήταν η εξέταση της καταλληλότητας των ημισταθερών προσεγγίσεων που συχνά συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις του πεδίου ροής και στις διατυπώσεις της μεταφοράς στη συνεχή φάση. Η διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης του στροβιλισμού χρησιμοποιείται εδώ για να επιλύσει το ροϊκό πεδίο. Ο στροβιλισμός και η θερμοκρασία επεκτείνονται στα r και θ με όρους πολυωνύμων Chebyshev και Legendre αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας αυτά τα αναπτύγματα οι κινητήριες μερικές διαφορικές εξισώσεις απλοποιούνται σ' ένα μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Στην αριθμητική διαδικασία τα πεδία της συνεχούς και της διασκορπισμένης φάσης σχηματοποιούνται σε τετράγωνα με πλευρές μήκους δύο μονάδων. Αυτές οι σχηματοποιήσεις επιτυγχάνονται με τους παρακάτω μετασχηματισμούς των συντεταγμένων:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \xi) & \text{για } 0 \leq r \leq 1, \\ e^{1/2(1+n)} & \text{για } 1 \leq r \leq r_{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (4.114)$$

όπου $\bar{\mu} = \cos \theta$. Το εξωτερικό υπολογιστικό όριο ορίζεται από το $r_{\frac{1}{2}}$ και l είναι μια παράμετρος που ελέγχει την ελάττωση του πεδίου. Οι μετασχηματισμένες ακτινικές συντεταγμένες ορίζονται από τα ξ και η . Τα αναπτύγματα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\{\zeta, \hat{\zeta}\} = \varepsilon \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \{\zeta_{ni}(\tau), \hat{\zeta}_{ni}(\tau)\} \{x_i(n), \hat{x}_i(\xi)\} P_n^1(\bar{\mu}), \quad (4.115)$$

$$\{\psi, \hat{\psi}\} = \varepsilon \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \{\psi_{ni}(\tau), \hat{\psi}_{ni}(\tau)\} \{x_i(n), \hat{x}_i(\xi)\} C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\bar{\mu}), \quad (4.116)$$

$$\{\theta, \hat{\theta}\} = \varepsilon \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \{\theta_{ni}(\tau), \hat{\theta}_{ni}(\tau)\} \{x_i(n), \hat{x}_i(\xi)\} P_n(\bar{\mu}), \quad (4.117)$$

όπου x_i είναι το πολυώνυμο Ghebyshev σειράς i . Στους πραγματικούς υπολογισμούς έχει χρησιμοποιηθεί ένας πεπερασμένος αριθμός όρων στη σειρά Legendre. Αναφέρεται ότι το $r\theta$ αναπτύσσεται αντί του θ για να εξυπηρετήσει την οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας στο κέντρο της σταγόνας. Οι σειρές των αναπτυγμάτων αντικαθίστανται στις κινητήριες εξισώσεις. Η μέθοδος Galerkin χρησιμοποιώντας την ορθογωνικότητα και τις περιοδικά επαναλαμβανόμενες ιδιότητες των συναρτήσεων Legendre μαζί μ' ένα πρώτου βαθμού διαφορισμένου χρόνου σχέδιο Euler, εφαρμόζονται για να απλοποιήσουν τις μερικές διαφορικές εξισώσεις σ' ένα σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που είναι ανεξάρτητες του θ . Για το σετ εξισώσεων που προκύπτει στην ακτινική διεύθυνση ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων συγκριτικής παράθεσης επιλέγεται από τον τετραγωνισμό Gauss – Lobatto. Οι εξισώσεις επανεγγράφονται σε μια μορφή κατάλληλη για επανάληψη όσον αφορά στα ζεύγη των γραμμικών εξισώσεων. Οι διεπιφανειακές συνθήκες στις ροϊκές συναρτήσεις οδηγούν σε μια σύνδεση αυτών των ζευγών. Ωστόσο η απουσία των συνθηκών στροβιλισμού παρουσιάζει δυσκολίες. Μια μέθοδος ανάλυσης που χρησιμοποιεί την ταυτότητα Green εφαρμόζεται για να υπερνικήσει αυτή τη δυσκολία δημιουργώντας ολοκληρωμένου τύπου συνθήκες στροβιλισμού που είναι ισοδύναμες με τις διεπιφανειακές συνθήκες. Η ροϊκή συνάρτηση της συνεχούς φάσης και ο στροβιλισμός αναλύονται όπως παρακάτω:

$$\psi_n = \psi_0 + \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2, \quad (4.118)$$

$$\zeta_n = \zeta_0 + \gamma_1 \zeta_1 + \gamma_2 \zeta_2, \quad (4.119)$$

όπου τα γ_1 και γ_2 ορίζονται από τις διεπιφανειακές ή τις ολοκληρωμένου τύπου συνθήκες στροβιλισμού. Οι συναρτήσεις ψ_j και ζ_j ($j = 0, 1, 2$) είναι οι λύσεις σε βοηθητικά προβλήματα που προέρχονται από την επαναληπτική μορφή των

κινητήριων εξισώσεων. Παρόμοιες αναφορές εφαρμόζονται για τη ροϊκή συνάρτηση και το στροβιλισμό της διασκορπισμένης φάσης.

Όσον αφορά στη μεταφορά θερμότητας, βοηθητικά προβλήματα σε σχέση με τους συντελεστές Φ_1 και Φ_2 τίθενται για τα Θ_n και $\hat{\Theta}_n$ για κάθε δεδομένο κύκλο επανάληψης όπως παρακάτω:

$$\Theta_n = \Xi_0 + \varphi_1 \Xi_1, \quad (4.120)$$

$$\hat{\Theta}_n = \hat{\Xi}_0 + \varphi_2 \hat{\Xi}_1 \quad (4.121)$$

Οι διεπιφανειακές συνθήκες της θερμοκρασίας και της συνέχειας της ροής θερμότητας στις τροποποιημένες συντεταγμένες σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων που χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν τα Φ_1 και Φ_2 και διαδοχικά να αναπτύξουν νέες εκτιμήσεις για τα Θ_n και $\hat{\Theta}_n$ σε σχέση με τα Ξ και $\hat{\Xi}$. Η διαδικασία επανάληψης συνεχίζεται μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση.

Τα αποτελέσματα που αναφέρονται στη βάση ενός όγκου σταγονιδίου μέσης θερμοκρασίας προσδιορίζονται από τη σχέση:

$$\hat{\Theta}_b(\tau) = \frac{3}{2} \zeta_0^{-1} \zeta_1^{-1} \hat{\Theta} r^2 dr d\bar{\mu}. \quad (4.122)$$

Ο στιγμιαίος τοπικός χρόνος δίνεται από τη σχέση:

$$Nu(\tau, \theta) = - \left. \frac{4 \varphi_1 \Theta}{\hat{\Theta}_b \varphi_2 n} \right|_{r=1}. \quad (4.123)$$

Ο μέσος αριθμός Nusselt επιτυγχάνεται ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.123) για όλη την επιφάνεια του σταγονιδίου. Οι υπολογισμοί διεξάγονται για μια σταγόνα σ' ένα αέριο περιβάλλον για δύο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι αυτή ενός σταγονιδίου μεθανόλης στον αέρα, $Re = 20$, $\varphi_{pc} > 1800$. Η δεύτερη κατάσταση που μελετήθηκε είναι αυτή μιας σταγόνας βενζίνης σε νερό $Re = 50$. Η θερμική διάχυση στη σταγόνα είναι ισχυρότερη για το σύστημα μεθανόλης – αέρα. Με το υγρό – υγρό σύστημα, οι ροϊκές γραμμές στο εσωτερικό της σταγόνας δεν είναι ισοθερμικές και η επιφάνεια της σταγόνας δε μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι σε μια ομοιόμορφη θερμοκρασία. Οι υπολογισμένοι συντελεστές οπισθέλκουσας συμφωνούν με τις προβλέψεις της εξίσωσης (4.74). Οι μεταβολές του μέσου αριθμού Nusselt σε συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου (διαβαθμίζεται από R/U_∞) αναπτύσσονται για $Pe = 300$, $\varphi_v = 1$ και $\varphi_a = 1$ και για τρία διαφορετικά σετ τιμών των Re , φ_μ και φ_k διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό από τα ημισταθερά αποτελέσματα που αναφέρθηκαν από τους Oliver & Chung, ειδικά κατά τη διάρκεια των ενδιάμεσων σταδίων της μεταφοράς. Ωστόσο για $Pe < 300$ οι ημισταθερές αναλύσεις φαίνεται να δίνουν αρκετά ορθά αποτελέσματα για τις ποσότητες της μεταφοράς. Για μια αέρια φυσαλίδα ($\varphi_\mu = 0$) τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ισχυρή εσωτερική κυκλοφορία και ένα πολύ χαμηλό φ_k γίνονται αιτία η θερμική αντίσταση να είναι σχεδόν εντελώς εσωτερικά της φυσαλίδας. Το πλάτος και η συχνότητα των ταλαντώσεων του αριθμού Nusselt σε μια φυσαλίδα αυξάνουν με

τον αριθμό Reynolds, αλλά ο σταθερής κατάστασης αριθμός Nusselt είναι σχεδόν ανεξάρτητος του αριθμού Reynolds.

4.3.3 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Σ' αυτή την παράγραφο μελετάμε καταστάσεις όπου τα υγρά σταγονίδια ή φυσαλίδες ατμού υπόκεινται σε αλλαγή φάσης στην επιφάνεια (εξάτμιση ή συμπύκνωση). Τέτοιες μελέτες είναι πολύ σημαντικές ειδικά όταν μια διαδικασία αλλαγής φάσης αυξάνει σημαντικά τους ρυθμούς μεταφοράς της θερμότητας και της μάζας. Μπορεί να σημειωθεί ότι όταν μια αλλαγή φάσης συμβαίνει στη διεπιφάνεια οι εξισώσεις ορμής και ενέργειας συνδέονται. Αυτή η σύνδεση προκύπτει εξ' αιτίας τόσο της εξάρτησης της θερμοκρασίας από τις ιδιότητες όσο και της παραγόμενης ροής στη διεπιφάνεια σε συνέπεια της αλλαγής φάσης.

ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗ ΜΙΑΣ ΦΥΣΑΛΙΔΑΣ ΑΤΜΟΥ

Η συμπύκνωση μιας φυσαλίδας ατμού σ' ένα υπόψυκτο (ψύξη κάτω του σημείου πήξης) υγρό είναι σπουδαίου ενδιαφέροντος στο περιβάλλον ροών δύο φάσεων. Με μια συμπυκνώσιμη φυσαλίδα ο βαθμός κατάρρευσης οδηγείται από δύο διαδικασίες: (i) τη μεταφορά θερμότητας στη διεπιφάνεια (ii) την αδράνεια της μάζας του υγρού που ρέει για να καταλάβει το κενό που δημιουργείται από το συμπυκνούμενο ατμό. Η πιο αργή απ' τις δύο διαδικασίες είναι η διαδικασία ελέγχου. Με μια μικρή ή μέτρια διαφορά θερμοκρασίας (μικρότερος βαθμός υπόψυξης του υγρού), η διαδικασία μεταφοράς θα ελέγχει το βαθμό κατάρρευσης. Απ' την άλλη πλευρά μ' ένα υψηλό βαθμό υπόψυξης ο βαθμός κατάρρευσης προσδιορίζεται από την αδράνεια του υγρού.

Μια πειραματική μελέτη της διεπιφανειακής μεταφοράς θερμότητας με μια συμπυκνούμενη φυσαλίδα παρουσιάζεται από τους Chen & Mayinger. Σ' αυτή την έρευνα βελτιωμένοι συσχετισμοί για το συντελεστή μεταφοράς θερμότητας και το χρόνο κατάρρευσης της φυσαλίδας έχουν παρουσιαστεί. Ολογραφική χρήση συμβόλων και υψηλής ταχύτητας κινηματογράφηση εφαρμόζονται για να προσδιορίσουν το πεδίο της θερμοκρασίας γύρω από μια συμπυκνούμενη φυσαλίδα ατμού μέσα σ' ένα υπόψυκτο υγρό ίδιας ουσίας με τη φυσαλίδα. Οι ουσίες που θεωρήθηκαν είναι η αιθανόλη, η προπανόλη, το ψυκτικό R113 και το νερό. Στο πείραμα η φυσαλίδα παράγεται με το φύσημα κορεσμένου ατμού διαμέσου ενός τριχοειδούς ακροφυσίου διαμέτρου 1,6 mm σ' ένα υπόψυκτο υγρό που κινείται αργά προς τα κάτω, έναντι του ακροφυσίου με μια ταχύτητα περίπου 2 cm s^{-1} . Η αργή προς τα κάτω κίνηση της υπόψυκτης συνεχούς φάσης επιβάλλεται έτσι ώστε να εγγραφεί ότι κάθε μελετούμενη απομονωμένη φυσαλίδα υπόκειται στις ίδιες υπόψυκτες συνθήκες. Αυτή η μικρή ταχύτητα προς τα κάτω δεν επηρεάζει την απόσπαση και την ανοδική ταχύτητα της φυσαλίδας. Η συνολική διαδικασία βασίζεται στην επίτευξη μιας πολυωνυμικής έκφρασης για το δείκτη διάθλασης του πεδίου στη συνεχή φάση που περιβάλλει την επιφάνεια της φυσαλίδας. Η έκφραση αυτή προέρχεται από ένα ελάχιστο τετράγωνο που προσαρμόζεται στο περιθώριο του δεδομένου της οπτικής παρεμβολής. Η προσέγγιση βασίζεται στην παρατήρηση ότι το περιθώριο παρεμβολής που δημιουργείται από την εναλλασσόμενη διαφορά της δέσμης φωτός που κινείται διαμέσου του υγρού θερμικού οριακού στρώματος. Με την πολυωνυμική έκφραση για το δείκτη διαθλάσεως του πεδίου n γνωστή, το d_n/dT χρησιμοποιείται

για να προσδιορίσει το πεδίο της θερμοκρασίας και τον τοπικό συντελεστή μεταφοράς θερμότητας της επιφάνειας. Η συμβολομετρική ανάλυση έχει διεξαχθεί με αξιοσημείωτη ανάλυση. Πρέπει να σημειωθεί ότι σ' αυτή την αναφορά η συνεχής φάση είναι το υγρό και η διασκορπισμένη φάση ο ατμός. Η συνήθης σημειογραφία (^) συνεχίζει να δηλώνει τη διασκορπισμένη φάση.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για χαμηλό $Ja = c_p (T_{sat} - T_{\infty}) / (\rho \lambda)$ κατά τη διάρκεια της αργής ανάπτυξης πριν την απόσπαση, ένα σταθερό στρωτό οριακό στρώμα υπάρχει γύρω από τη φυσαλίδα. Στην απόσπαση το οριακό στρώμα γίνεται λεπτότερο στην πάνω (ανώτερη) επιφάνεια ενώ τυρβώδεις στρόβιλοι δημιουργούνται στην κάτω (χαμηλότερη) επιφάνεια. Σ' ένα υψηλό αριθμό Jacob (υψηλός βαθμός υπόψυξης) η διεπιφανειακή φάση είναι ασταθής λόγω της τοπικής συμπύκνωσης - καμιά ανάπτυξη του οριακού στρώματος δεν παρατηρείται και η φυσαλίδα καταρρέει σε μια μικρή χρονική περίοδο. Πριν την απόσπαση της φυσαλίδας ο μέσος συντελεστής μεταφοράς θερμότητας γύρω από το άνω μισό της φυσαλίδας για $100 < Re < 1000$, $6 < Pr < 20$ και $5 < Ja < 40$ μπορεί να οριστεί από τη σχέση:

$$Nu = 0.6 Re^{0.6} Pr^{0.5}, \quad (4.124)$$

όπου $Re = \rho U_{rel} (2R) / \mu$, ρ είναι η πυκνότητα του υγρού και μ είναι το ιξώδες του υγρού. Εδώ U_{rel} είναι η διαφορά ανάμεσα στην ταχύτητα του κέντρου της φυσαλίδας και της προσεγγιστικής ταχύτητας του υγρού. Οι υποθέσεις που έγιναν είναι ότι η αντίσταση της μεταφοράς είναι μόνο στην υγρή πλευρά και ότι το σύστημα είναι καθαρό (χωρίς συμπυκνώματα).

Για μια ανερχόμενη φυσαλίδα ο μέσος συντελεστής μεταφοράς θερμότητας υπολογίζεται με βάση μια ισορροπία ενέργειας και δίνεται από τη σχέση:

$$h_m = \frac{2 \hat{\rho} \lambda \hat{V}_0}{\hat{S}_0 (T_{sat} - T_{\infty}) t_c}, \quad (4.125)$$

όπου \hat{V}_0 και \hat{S}_0 είναι ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας της φυσαλίδας στην απόσπαση και t_c είναι ο χρόνος κατάρρευσης. Ο χρόνος κατάρρευσης υπολογίζεται από τις υψηλής ταχύτητας φωτογραφίες. Οι φωτογραφίες αυτές δείχνουν ότι η φυσαλίδα φτάνει σε μια σταθερή τελική ταχύτητα αμέσως μετά την απόσπαση. Η διάμετρος της φυσαλίδας στην απόσπαση δίνεται από τη σχέση:

$$d_0 = \left(\frac{\zeta 6 \sigma d_n}{\rho \Delta \rho g} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.126)$$

όπου d_n είναι η διάμετρος του ακροφυσίου. Αυτή εφαρμόζεται σαν κλίμακα μήκους ώστε να διατυπωθεί:

$$Nu = 0.185 Re^{0.7} Pr^{0.5} \quad \text{για} \quad Re \leq 10^4 \quad (4.127)$$

Η συσχέτιση προτείνεται για χρήση με $Ja \leq 80$ εφόσον οι επιδράσεις της αδράνειας δεν παίζουν κυρίαρχο ρόλο. Η διάρκεια ζωής της φυσαλίδας δίνεται σε σχέση με τον αριθμό Fourier $Fo = 4at / d_0^2$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$Fo = 1.784Re^{-0.7} Pr^{-0.5} Ja^{-1} \quad \text{για} \quad Ja \leq 60 \quad (4.128)$$

Για $Ja > 80$ ο μετρούμενος αριθμός Fourier της κατάρρευσης δεν εξαρτάται από τον αριθμό Jakob δείχνοντας ότι πέραν αυτής της τιμής του αριθμού Jakob οι δυνάμεις αδρανείας γίνονται κυρίαρχες. Η χρονική μείωση της ακτίνας της φυσαλίδας συσχετίζεται για ένα εύρος τιμών $2 < Pr < 15$, $1 < Ja < 80$ και $R_0 < 3\text{mm}$ με την εξίσωση:

$$\frac{2R(t)}{d_n} = (1 - 0.56Re^{0.7} Pr^{0.5} JaFo)^{0.9} \quad (4.129)$$

ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΣΤΑΓΟΝΑ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

Η υδροδυναμική και η μεταφορά θερμότητας / μάζας που σχετίζονται με συμπύκνωση σ' ένα απομονωμένο κινούμενο σταγονίδιο με $Re = O(100)$ έχουν ερευνηθεί από τους Sundravajan & Ayyaswamy και από τους Huang & Ayyaswamy. Τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν από αυτές τις μελέτες είναι σπουδαίας πρακτικής σημασίας και αναφέρονται παρακάτω.

Στις παραπάνω αναφερόμενες μελέτες έχει θεωρηθεί μια σταγόνα κρύου νερού ακτίνας R_0 και αρχικής κύριας θερμοκρασίας T_0 . Η σταγόνα βρίσκεται σ' ένα μίγμα ατμού και ενός μη – συμπυκνώματος (αέρας). Το σταγονίδιο ρίπτεται με μια αρχική ταχύτητα U_0 και με γωνία έγχυσης β_0 σε σχέση με την κατακόρυφο. Το περιβάλλον μέσα στο οποίο βρίσκεται το σταγονίδιο καθορίζεται να έχει μια συνολική πίεση p_∞ και το κορεσμένο μίγμα παίρνεται σε μια θερμοκρασία $T_\infty > T_0$. Επιλέγεται ένα σύστημα συντεταγμένων του οποίου η αρχή του (αρχή των συντεταγμένων) συμπίπτει με το κέντρο της σταγόνας και που κινείται με τη στιγμιαία ταχύτητα μεταφοράς U_∞ . Ο στιγμιαίος αριθμός Reynolds παίρνεται να είναι από $O(100)$ έως $O(300)$. Οι αστάθειες στη ροή, όπως ταλαντώσεις της σταγόνας και διάχυση στροβίλου μπορεί να ακυρώσουν αυτές τις λύσεις για $Re > 300$. Ο αριθμός Weber και ο αριθμός Eotvos θεωρούνται ότι είναι μικροί γεγονός που υποδηλώνει ότι η παραμόρφωση της σταγόνας εξ' αιτίας τόσο των επιδράσεων της αδρανείας όσο και των επιδράσεων της άνωσης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Για παράδειγμα για ένα σταγονίδιο νερού διαμέτρου μικρότερης του 1mm που μεταφέρεται σε περιβάλλον ενδιάμεσου αριθμού Reynolds, $Eu < 0.4$ και $We < 0.3$. Για $Re = O(10^2)$ που θεωρήθηκε σ' αυτές τις μελέτες, ο αριθμός Re της κυκλοφορίας Re που βασίζεται στη μέγιστη ταχύτητα κυκλοφορίας στην επιφάνεια της σταγόνας U_s είναι επίσης $O(10^2)$. Από την ισορροπία της διατμητικής τάσης κατά μήκος της υγρής – αέριας διεπιφάνειας εκτιμάται ότι $U_s / U_\infty = O\left(\frac{\rho\mu}{\hat{\rho}\hat{\mu}}\right)^{1/3} \frac{g}{b}$ για $Re : O(10^2)$. Παρατηρώντας

ότι $Re/Re = O\left(\frac{\mu^2 \hat{\rho}}{\hat{\mu}^2 \rho}\right)^{2/3} \frac{g}{b}$ συμπεραίνεται ότι $Re : O(10^2)$. Γι' αυτό το λόγο ο τρόπος της ροής στο εσωτερικό της σταγόνας είναι ένας στρόβιλος Hill μειωμένου ισχύος. Εφόσον Pr είναι $O(10)$, ο αριθμός Peclet $Pe = U_s d$ της μεταφοράς θερμότητας μέσα στη σταγόνα είναι $O(10^3)$. Η συμπύκνωση προκαλεί μια περιφερειακή – ακτινική προς τα μέσα (εσωτερική) ροή κοντά στην επιφάνεια της σταγόνας. Η μη – μηδενική ροή μάζας στη διεπιφάνεια μεταβάλλει το πεδίο ροής της

μεταφοράς και τροποποιεί την οπισθέλκουσα στη σταγόνα. Επίσης η ακτινική ροή οδηγεί σε μια σταδιακή ανάπτυξη της μη συμπυκνώσιμης συγκέντρωσης κοντά στην επιφάνεια της σταγόνας πάνω από το επίπεδο συγκέντρωσης της ελεύθερης ροής. Η συγκέντρωση οδηγεί σε μια αντίσταση της μεταφοράς μάζας και σε μια επακόλουθη μείωση στους ρυθμούς μεταφοράς. Για $Re = O(10^2)$ η ροή διαχωρίζεται στο πίσω μέρος της σταγόνας. Ένα ανακυκλοφορούμενο απόρρευμα σχηματίζεται και η ακτινική ροή εξ' αιτίας της συμπύκνωσης μειώνει το μέγεθος του απορρευμάτος. Η ημισταθερή θεώρηση για τη μεταφορά στη συνεχή φάση και για τη ροή και στις δύο φάσεις που συμπεριλαμβάνεται σε κάποιες μελέτες που αναφέρονται παραπάνω, ενώ μια πλήρως μεταβατική ανάλυση εφαρμόζεται σε κάποιες άλλες μελέτες. Οι λύσεις της ροής και οι βαθμοί μεταφοράς στο σταγονίδιο επιτυγχάνονται σε σχέση με δύο αδιάστατες παραμέτρους: Re αναπαριστώντας τις ροϊκές συνθήκες και $W = \frac{1}{\kappa} - (m_{1,v} / m_{1,s}) \frac{\rho}{\rho_0}$ αναπαριστώντας τις θερμοδυναμικές συνθήκες. Εδώ m_1 είναι το μη συμπυκνούμενο κλάσμα μάζας.

Η τροχιά του σταγονιδίου καθορίζεται από την ισορροπία βαρύτητας – οπισθέλκουσας δύναμης. Οι στιγμιαίες οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας της σταγόνας παίρνονται ότι είναι U_h και U_v έτσι ώστε $U_v = iU_h + jU_v$. Οι αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης που καθορίζουν την τροχιά της σταγόνας δίνονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{dU_v^*}{dt^*} = \frac{R^2 g}{\alpha U_0} - \frac{3}{16} \frac{\rho}{\hat{\rho}} Pe C_D \frac{U_v}{U_0} \cos \beta \quad (4.130)$$

και

$$\frac{dU_h^*}{dt^*} = - \frac{3}{16} \frac{\rho}{\hat{\rho}} Pe C_D \frac{U_v}{U_0} \sin \beta \quad (4.131)$$

όπου οι αστερίσκοι δηλώνουν τις αδιάστατες ποσότητες, R είναι η στιγμιαία ακτίνα της σταγόνας, $U_v^* = U_v / U_0$, $U_h^* = U_h / U_0$ είναι οι αδιάστατες συνιστώσες της ταχύτητας, $t^* = \zeta_0^t (\alpha / R^2) dt$ είναι ο αδιάστατος χρόνος, g είναι η επιτάχυνση βαρύτητας, C_D είναι ο στιγμιαίος συνολικός συντελεστής οπισθέλκουσας και β είναι η στιγμιαία γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με την κατακόρυφο. Ο στιγμιαίος συνολικός συντελεστής οπισθέλκουσας είναι:

$$C_D = C_p + C_f + C_m, \quad (4.132)$$

όπου C_p , C_f και C_m είναι οι συντελεστές της οπισθέλκουσας πίεσης, της οπισθέλκουσας τριβής και της οπισθέλκουσας συμπύκνωσης αντίστοιχα. Ο συντελεστής της οπισθέλκουσας της πίεσης είναι:

$$C_p = \zeta_0^{\pi} \rho_s^* \sin 2\theta d\theta, \quad (4.133)$$

όπου η αδιάστατη πίεση είναι:

$$p_s^* = \frac{\rho_s(\theta) - \rho_{\infty}^0}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} \quad (4.134)$$

Το προφίλ της επιφανειακής πίεσης δίνεται από το $p_s(\theta)$. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας της τριβής ορίζεται από τη σχέση:

$$C_f = \frac{8}{\text{Re } C_0} \int_0^{\pi} \tau_{r\theta}^* \sin\theta - 2 \frac{u_r^*}{r^*} \Big|_{r^*=1} \cos\theta \sin\theta d\theta \quad (4.135)$$

Στην εξίσωση (4.135) η αδιάστατη επιφανειακή διατμητική τάση $\tau_{r\theta}^*$ και η ακτίνα r^* είναι:

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{\tau_{r\theta}}{\mu U_{\infty} / R} \quad \text{και} \quad r^* = \frac{r}{R} \quad (4.136)$$

Η επιφανειακή διατμητική τάση $\tau_{r\theta}$ είναι:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]_{r=R} \quad (4.137)$$

Στις εξισώσεις (4.135) και (4.136) οι συνιστώσες r και θ , της μέσης ταχύτητας της μάζας u , για το δυϊκό μίγμα αέρα και ατμού νερού παρουσιάζονται με τα u_r και u_{θ} αντίστοιχα. Αυτές διαβαθμίζονται με U_{∞} για να γίνουν u_r^* και u_{θ}^* . Η οπισθέλκουσα συμπύκνωσης C_m προκύπτει σε σχέση με την ορμή που σχετίζεται με την προς τα μέσα (εσωτερική) ακτινική ροή και είναι:

$$C_m = 4 C_0 \int_0^{\pi} u_c^* \cos\theta - u_{\theta}^* \sin\theta \sin\theta d\theta \quad (4.138)$$

Η αδιάστατη ταχύτητα συμπύκνωσης u_c^* και η επιφανειακή ταχύτητα u_{θ}^* είναι:

$$u_c^* = u_r^* \Big|_{r^*=1} \quad \text{και} \quad u_{\theta}^* = u_{\theta}^* \Big|_{r^*=1} \quad (4.139)$$

Αδιάστατες Εξισώσεις

Οι αδιάστατες εξισώσεις (παραλείπονται οι αστερίσκοι) για τη συνεχή φάση (οι ποσότητες που αναφέρονται στο αέριο μίγμα που σχηματίζει τη συνεχή φάση είναι χωρίς δείκτες, ενώ οι ποσότητες με δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στο μη συμπύκνωμα και τον ατμό, αντίστοιχα) είναι:

$$P \mu = 0, \quad (4.140)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} Pe u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{4} Pe \rho + Pr P^2 u, \quad (4.141)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{1}{2} Pe \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = P^2 \hat{T}, \quad (4.142)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{1}{2} Pe \hat{u} \frac{\partial T}{\partial x} = P^2 \omega, \quad (4.143)$$

όπου Pe και Pe^A είναι οι αριθμοί Peclet μεταφοράς θερμότητας και μάζας αντίστοιχα που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$Pe = \frac{2U_{\infty} R}{\alpha} \quad \text{και} \quad Pe^A = \frac{2U_{\infty} R}{D_{12}}. \quad (4.144)$$

Η πίεση p διαβαθμίζεται όπως ακριβώς η επιφανειακή τιμή p_s . Για την πλήρως μεταβατική διατύπωση, ο χρόνος t , η θερμοκρασία T και το κλάσμα μάζας m_1 αδιαστατοποιούνται όπως παρακάτω:

$$t^* = \zeta_0 \int_0^t (a/R^2) dt, \quad T^* = \frac{T}{T_{\infty}} \quad \text{και} \quad \omega_1^* = \frac{m_1}{m_{1,\infty}} \quad (4.145)$$

Οι αδιάστατες εξισώσεις για την υγρή φάση είναι:

$$P g \hat{u} = 0, \quad (4.146)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} Pe \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = -\frac{1}{4} Pe \hat{\rho} + Pr P^2 \hat{u}, \quad (4.147)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{1}{2} Pe \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = P^2 \hat{T}, \quad (4.148)$$

όπου οι αδιάστατες ποσότητες είναι:

$$t^* = \zeta_0 \int_0^t \frac{\hat{a}}{R^2} dt, \quad \hat{u}^* = \frac{\hat{u}}{U_{\infty}}, \quad \hat{\rho}^* = \frac{\hat{\rho} - \rho_{\infty}}{\frac{1}{2} \hat{\rho} U_{\infty}^2},$$

$$\hat{T}^* = \frac{\hat{T} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{\hat{T} - T_{\infty}}{\Delta T}, \quad \text{και} \quad Pe = \frac{2U_{\infty} R}{\hat{a}}.$$

Εδώ το T_0 είναι η αρχική θερμοκρασία της σταγόνας.

Αρχικές, Οριακές και Διεπιφανειακές Συνθήκες

Αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u &= e_{\beta_0}, & T &= \omega_1 = 1, & \text{για } r > 1, t = 0, \\ u &= 0, & \hat{T} &= 1, & \text{για } r < 1, t = 0, \end{aligned} \quad (4.149)$$

όπου e_{β_0} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του β_0 .

Διεπιφανειακές συνθήκες. Στη διεπιφάνεια ($r = 1$):

– Συνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας:

$$u_\theta = \hat{u}_\theta \quad (4.150)$$

– Συνέχεια της διαμητικής τάσης:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\zeta u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \varphi_\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\zeta \hat{u}_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} \quad (4.151)$$

– Συνέχεια της ροής μάζας:

$$\rho(u_r - R^{\dot{\theta}}) = \hat{\rho}(\hat{u}_r - R^{\dot{\theta}}), \quad (4.152)$$

όπου $R^{\dot{\theta}}$ είναι ο ρυθμός ανάπτυξης της σταγόνας. Στο περιβάλλον της θεώρησης σφαιρικού σχήματος, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε μια ομοιόμορφη ανάπτυξη της σταγόνας για όλες τις γωνίες και το $R^{\dot{\theta}}$ τότε δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(\bar{u}_r - R^{\dot{\theta}}) = -\hat{\rho}R^{\dot{\theta}} \quad (4.153)$$

όπου \bar{u}_r είναι η μέση ακτινική ταχύτητα της συνεχούς φάσης στη διεπιφάνεια. Η κάθετη ταχύτητα στην υγρή πλευρά της κινούμενης διεπιφάνειας κατά συνέπεια δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(u_r - \bar{u}_r) = \hat{\rho}\hat{u}_r. \quad (4.154)$$

Ωστόσο για $Re = O(10^2)$ και $\varphi_\rho = O(10^3)$ η \hat{u}_r στη διεπιφάνεια μπορεί να είναι ίση με το μηδέν για την εκτίμηση της ροής του υγρού χωρίς να χαθεί η ακρίβεια. Κάτω από αυτές τις περιστάσεις:

$$\hat{u}_r = 0. \quad (4.155)$$

– Συνέχεια της κάθετης τάσης:

Η εξίσωση για την ισορροπία της κάθετης τάσης δε χρειάζεται να εφαρμοστεί εάν η επιφανειακή τάση είναι μεγάλη και η σταγόνα θεωρείται ότι παραμένει σφαιρική. Η επιφανειακή τάση αφομοιώνει αποτελεσματικά τη μεταβολή της κάθετης τάσης.

- Στεγανότητα του μη συμπυκνώματος:

Αυτή η συνθήκη απαιτεί ότι στη διεπιφάνεια:

$$\frac{2(1-W)}{PeA} \frac{\omega_1}{r} = \frac{u_c^*}{PeA} = u_r|_{r=1}, \quad (4.156)$$

όπου u_c^* είναι η αδιάστατη ταχύτητα της συμπύκνωσης και δίνεται από τη σχέση $u_c^* = u_c / (D_{12} / 2R)$. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα η παράμετρος w που αναφέρεται σαν παράμετρος συμπύκνωσης δίνεται από τη σχέση $W = \frac{\eta}{\kappa} \left(\frac{m_{1,v}}{m_{1,s}} \right) \frac{\rho_s}{\rho_v}$. Είναι μια συνάρτηση των θερμοδυναμικών συνθηκών ρ_v , T_v και T_s και κυμαίνεται σ' ένα εύρος τιμών $0 \leq W \leq 1$. Το όριο μηδέν αντιστοιχεί σε μια μη συμπυκνούμενη κατάσταση και $w = 1$ αναφέρεται σ' ένα καθαρό περιβάλλον ατμού.

- Το κανονικοποιημένο κλάσμα της μάζας στη διεπιφάνεια είναι:

$$\omega_1 = \omega_s \quad (4.157)$$

όπου το ω_s μπορεί να εκτιμηθεί με την εξίσωση Clausius – Clapeyron με την υπόθεση τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας.

- Συνέχεια της θερμοκρασίας:

$$(T - 1) = \hat{T} \frac{\zeta \Delta T \phi}{\theta T_v} \quad (4.158)$$

- Συνέχεια της θερμότητας:

$$- Ja \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{2Le} \frac{u_c}{\kappa} + \frac{\rho \bar{u}_c}{\hat{\rho} - \rho_0} = - Ja \phi \kappa \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} \frac{\zeta \Delta T \phi}{\theta T_v} \quad (4.159)$$

όπου $Ja = c_p T_v$ είναι ο τροποποιημένος αριθμός Jakob, $Le = a / D_{12}$ είναι ο αριθμός Lewis για τη συνεχή φάση και η ποσότητα \bar{u}_c είναι η μέση τιμή της u_c , που δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{u}_c = \frac{1}{2} \zeta_0^\pi u_c \sin \theta d\theta. \quad (4.160)$$

Οριακές συνθήκες απομακρυσμένου ρεύματος. Οι συνθήκες στα όρια του πεδίου ($r \rightarrow \infty$) είναι:

– Ομοιόμορφη ταχύτητα:

$$u = e_\beta, \quad (4.161)$$

όπου e_β είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του β σε κάθε χρονική στιγμή.

– Οι συνθήκες στον κύριο όγκο του μίγματος είναι:

$$T = \omega_1 = 1, \quad (4.162)$$

Αξονικά Συμμετρικές Συνθήκες. Για $\theta = 0$ και $\theta = \pi$ έχουμε:

$$u_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = 0, \quad (4.163)$$

$$\hat{u}_\theta = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} = 0, \quad (4.164)$$

Παρατηρούμε ότι για ένα σωματίδιο στη συνεχή φάση, ο τυπικός χρόνος παραμονής δίπλα στην επιφάνεια της σταγόνας είναι $O(R/U_\Psi)$. Για ένα σωματίδιο στην υγρή φάση είναι $O(R/U_s)$. Εφόσον οι γρήγορες μεταφορές προκύπτουν λόγω της άμεσης επαφής ανάμεσα στις δύο φάσεις, αυτές οι εκτιμήσεις του χρόνου παραμονής είναι οι χαρακτηριστικοί χρόνοι για τις γρήγορες μεταφορικές διαδικασίες. Για μια σταγόνα νερού με εσωτερική κυκλοφορία σ' ένα μίγμα αερίου – ατμού (U_s/U_Ψ) είναι $O(10^{-1})$ ή μικρότερο. Γι' αυτό το λόγο η περίοδος κατά τη διάρκεια της οποίας οι γρήγορες μεταφορές συμβαίνουν είναι $O(R/U_s)$ και αντιστοιχεί σε μερικούς (λίγους) κύκλους κυκλοφορίας στο εσωτερικό της σταγόνας. Ακολουθώντας σ' αυτή την αρχική περίοδο των γρήγορων μεταφορών, αλλαγές στη ροή και τη μεταφορά λαμβάνουν χώρα σ' ένα πολύ πιο αργό ρυθμό μέχρι η σταγόνα να ισορροπήσει θερμικά με το εξωτερικό. Αυτή η δεύτερη περίοδος κατά τη διάρκεια της οποίας συμβαίνει το κύριο μέρος της συμπύκνωσης μπορεί γι' αυτό το λόγο να μελετηθεί από μια ημισταθερή ανάλυση. Η ολική ημισταθερή συμπεριφορά μπορεί επίσης να εξετασθεί συγκρίνοντας τις κλίμακες χρόνου των διάφορων διαδικασιών μεταγωγής και διάχυσης στις δύο φάσεις. Στη συνεχή φάση (εκτός του μακρινού απορρεύματος) ο χρόνος παραμονής (R/U_Ψ) ορίζει τις κλίμακες του χρόνου για τη μεταγωγή και τη διάχυση της ορμής, της ενέργειας και των συστατικών. Για την υγρή φάση ωστόσο πρέπει να γίνει μια διάκριση ανάμεσα στις ποσότητες στην κατά μήκος διεύθυνση και την κάθετη διεύθυνση. Στην κατά μήκος διεύθυνση η κλίμακα του χρόνου για τη μεταγωγή τόσο της θερμότητας όσο και της ορμής είναι R/U_s . Η κατά μήκος διάχυση μπορεί να αγνοηθεί εφόσον $\text{Re} : O(10^2)$. Για την κάθετη διεύθυνση όπου μόνο οι επιδράσεις της διάχυσης εμφανίζονται, οι κλίμακες του χρόνου για τη μεταφορά της ορμής και της θερμοκρασίας είναι $R^2/\hat{\nu}$ και $R^2/\hat{\alpha}$ αντίστοιχα. Η σύγκριση των διάφορων κλιμάκων του χρόνου σε αύξουσα σειρά είναι:

αέριας φάσης ροή και μεταφορά	μεταγωγή της ορμής και της θερμότητας στην κατά μήκος διεύθυνση στο υγρό	διάχυση της ορμής στην κάθετη διεύθυνση στο υγρό	διάχυση της θερμότητας στην κάθετη διεύθυνση στο υγρό
-------------------------------	--	--	---

$$\Gamma \frac{R}{U_{\Psi}} : \frac{R}{U_s} : \frac{R^2}{\hat{v}} : \frac{R^2}{\hat{a}}$$

Κλιμακώνοντας αυτούς τους λόγους με (R^2/\hat{a}) οι παραπάνω κλίμακες χρόνου γίνονται:

$$\frac{U_s}{U_{\Psi}} \frac{1}{Pe} : \frac{1}{Pe} : \frac{1}{Pe} : 1$$

Για $(U_s/U_{\Psi}) : O(10^{-1})$, $Pe : O(10^3)$ αυτοί είναι (οι λόγοι):

$$10^{-4} : 10^{-3} : 10^{-1} : 1$$

Συνεπώς, πέραν της αρχικής περιόδου των γρήγορων μεταφορών στην κλίμακα του χρόνου της θέρμανσης της σταγόνας, όλες οι άλλες διαδικασίες μπορεί να θεωρηθούν ημισταθερές.

Στις μελέτες της συμπύκνωσης συχνά θεωρείται ότι η στιγμιαία επιφανειακή θερμοκρασία της σταγόνας T_s είναι ομοιόμορφη σε όλη την επιφάνεια της σταγόνας.

Για αδιάστατους χρόνους μεγαλύτερους από $O(Pe^{-1})$ αυτή η υπόθεση μπορεί να

δικαιολογηθεί για υψηλούς αριθμούς Peclet της διασκορπισμένης φάσης. Η υπόθεση της ομοιόμορφης επιφανειακής θερμοκρασίας είναι χρήσιμη για την αποσύνδεση των ημισταθερών εξισώσεων από τη διατύπωση για την αύξηση της θερμότητας της σταγόνας. Στην υγρή φάση οι ροϊκές επιφάνειες συχνά θεωρούνται ισοθερμικές. Αυτό βασίζεται στην παρατήρηση ότι η κλίμακα του χρόνου της μεταγωγής της θερμότητας στο υγρό (κατά μήκος διεύθυνση) $O(Pe^{-1})$ είναι ισοδύναμη με την κλίμακα χρόνου

της κάθετης διάχυσης θερμότητας. Ωστόσο όπου οι πλήρως μεταβατικές λύσεις είναι επιθυμητές αυτή η υπόθεση μπορεί να μη χρησιμοποιηθεί.

Εκτός από αυτές, κάποιες άλλες υποθέσεις συνήθως συμπεριλαμβάνονται στις μελέτες συμπύκνωσης. Αυτές είναι:

- Η επιφανειακή τάση είναι μεγάλη και σταθερή στη διεπιφάνεια
- Τόσο το υγρό όσο και το μίγμα ατμού – αερίου είναι καθαρά συστήματα. Ρύποι οι οποίοι μεταβάλλουν τη διεπιφανειακή τάση ή εμποδίζουν τη συμπύκνωση δημιουργώντας διεπιφανειακή αντίσταση θεωρούνται ότι απουσιάζουν.

- Η διεπιφάνεια ατμού – υγρού είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία και οι επιδράσεις της μη ισορροπίας λόγω της συμπύκνωσης είναι αμελητέες. Η μερική πίεση του ατμού στη διεπιφάνεια είναι ίση με την πίεση του ατμού που αντιστοιχεί στην επιφανειακή θερμοκρασία της σταγόνας. Το μίγμα αερίου – ατμού συμπεριφέρεται σαν ένα ιδανικό αέριο μίγμα. Ο πεπερασμένος βαθμός συμπύκνωσης δε μεταβάλλει την πίεση του ατμού.
- Οι μεταβολές στην ιδιότητα με τη θερμοκρασία και τη συγκέντρωση των μη συμπυκνωμάτων δεν είναι σημαντικές.
- Η απώλεια ιξώδους και οι επιδράσεις της συμπίεστικότητας είναι αμελητέες.
- Η μεταφορά θερμότητας από τις επιδράσεις της ακτινοβολίας είναι ασήμαντη. Συνήθως οι τιμές των παραμέτρων που συναντούνται στις εφαρμογές, η μεταγωγή της αέριας φάσης και οι μεταφορές θερμότητας δι' ακτινοβολίας είναι πολύ μικρές με την παρουσία συμπύκνωσης και τα επίπεδα της θερμοκρασίας είναι τέτοια ώστε η μεταγωγική μεταφορά είναι μια τάξη μεγαλύτερη απ' ό,τι η συνεισφορά της ακτινοβολίας. Πρέπει να σημειωθεί ότι για πολύ μικρούς βαθμούς συμπύκνωσης η συνεισφορά της μεταγωγικής μεταφοράς θερμότητας της αέριας φάσης μπορεί να γίνει σημαντική.

Αριθμητικές Διαδικασίες

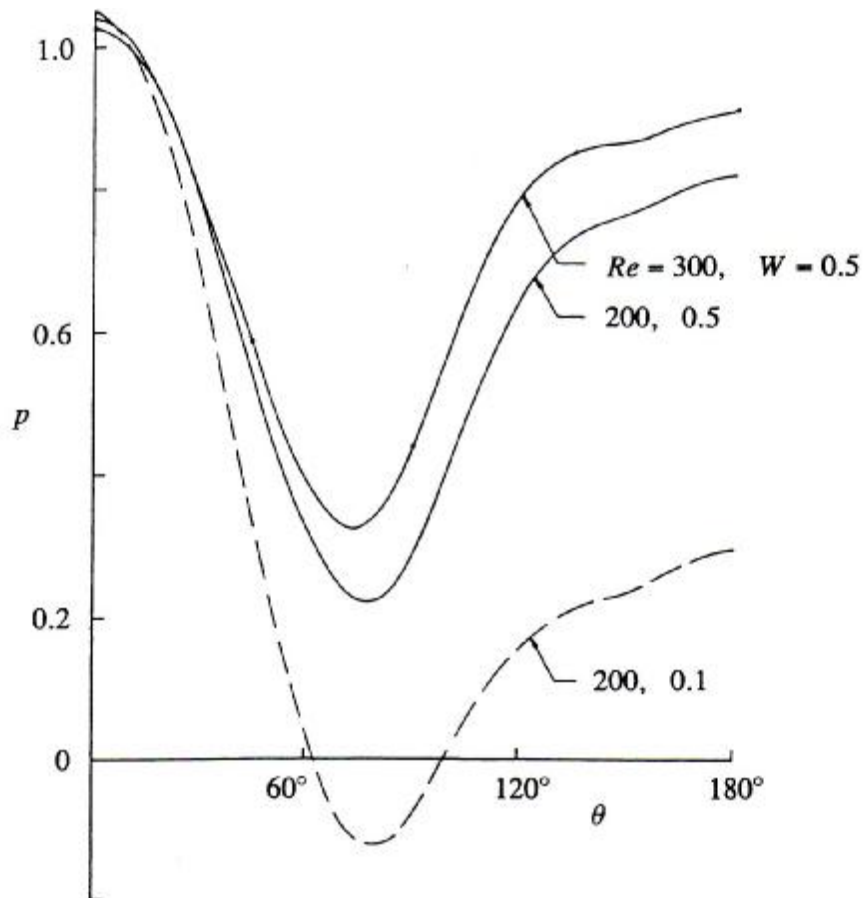
Οι ημισταθερές αναλύσεις και οι πλήρως μεταφορικές μελέτες γενικά εφαρμόζουν την ίδια αριθμητική διαδικασία. Οι κινητήριες εξισώσεις και οι οριακές συνθήκες μετασχηματίζονται στη διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης στροβιλισμού σε σχέση με την αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση ψ (διαβαθμίζεται με $U_{\infty} R^2$) και τον στροβιλισμό ζ (διαβαθμίζεται με U_{∞} / R). Οι κινητήριες εξισώσεις είναι ελλειπτικές και σα συνέπεια οι μακρινής ροής οριακές συνθήκες και ο καθορισμός των προδιαγραφών τους (λεπτομερής παρουσίαση) επηρεάζουν σημαντικά τις αριθμητικές λύσεις. Οι μακρινής ροής συνθήκες καθορίζονται από μια μεγάλη αλλά πεπερασμένη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r_{∞} . Η τιμή του r_{∞} επιλέγεται τέτοια ώστε οι συνθήκες ομοιόμορφης ροής ουσιαστικά να εφαρμόζονται εδώ. Αποτελεσματικά οι διαταραχές που προκαλούνται στην ομοιόμορφη ροή εξ' αιτίας της παρουσίας της σταγόνας και εξ' αιτίας της ακτινικής ροής πρέπει να είναι αμελητέα μικρές στο r_{∞} . Επίσης η λύση του πεδίου που ορίζεται από το r_{∞} πρέπει να συμπεριλαμβάνει τη σταγόνα, τα αέρια οριακά στρώματα και την περιοχή ανακυκλοφορίας του απορρεύματος. Οριακές λύσεις που αντιστοιχούν σε δυναμική ροή και καθαρή ακτινική ροή εφαρμόζονται στο r_{∞} για να εξακριβώσουν ότι οι απαιτούμενες συνθήκες ικανοποιούνται. Εκτιμήσεις για τα μεγέθη του απορρεύματος με την απουσία ακτινικής ροής δίνονται από τον Clift κ.α και χρησιμοποιούνται σαν προκαταρκτικές υποθέσεις διατήρησης για τον καθορισμό της τιμής του r_{∞} . Η λύση του πεδίου της συνεχούς φάσης χωρίζεται σ' ένα πλέγμα με μεταβλητό μέγεθος βήματος. Μια λεπτή διάταξη στο χώρο εφαρμόζεται κοντά στη σταγόνα εφόσον οι μεταβολές είναι απότομες στη γύρω περιοχή της σταγόνας. Μια τραχεία διάταξη φαίνεται να είναι επαρκής στη μακρινή ροή όπου οι μεταβολές είναι ασθενείς. Μία

διάταξη εκθετικού πλέγματος δημιουργείται ορίζοντας $r = e^{\xi}$ και θεωρώντας ισοδύναμη διάταξη στο ξ . Ένα σταθερό μέγεθος γωνιακού βήματος χρησιμοποιείται για τη συντεταγμένη θ και το $r_{\xi} = 10R$ φαίνεται να είναι επαρκές. Κανέναν μετασχηματισμός δε χρησιμοποιείται για το εσωτερικό της σταγόνας εφόσον οι αποστάσεις είναι μικρές. Ένα κεντρικής διαφοράς σχέδιο CDS με μια δευτέρου βαθμού ακρίβεια εφαρμόζεται κοντά στη σταγόνα αλλά δε χρησιμοποιείται σ' όλη τη λύση του πεδίου. Σε μια κατάσταση που η μεταγωγή είναι κυρίαρχη, οι κεντρικές διαφορές της παραγωγού της μεταγωγής (u_{θ}^P) προκαλούν αριθμητικές διακυμάνσεις εκτός εάν το μέγεθος του πλέγματος είναι πολύ μικρό. Η χρήση του CDS απ' την αρχή μέχρι το τέλος θα απαιτούσε πολύ μικρά μεγέθη βήματος ακόμα και στο μακρινό πεδίο κάτι που δε θα ήταν οικονομικό. Για να αντεπεξέλθουμε αυτή τη δυσκολία ένα UDS χρησιμοποιείται μακριά από τη σταγόνα. Το UDS δεν έχει περιορισμούς στο μέγεθος του κελιού για αριθμητική σταθερότητα. Ωστόσο σε ενδιάμεσους αριθμούς Reynolds η αριθμητική σταθερότητα μπορεί να μη σημαίνει τη σύγκλιση της λύσης. Επιπρόσθετα είναι επίσης γνωστό ότι το UDS υφίσταται «τεχνική διάχυση» και «λανθασμένη διαβάθμιση» και δε μπορεί να επιτύχει ακριβή αποτελέσματα κοντά στην επιφάνεια της σταγόνας. Στο υβριδικό σχέδιο που εφαρμόζεται στην αρχή κάθε επανάληψης που βασίζεται στις τρέχουσες υποθετικές λύσεις, οι συντελεστές για τους όρους μεταγωγής και διάχυσης εκτιμώνται σε κάθε σημείο του πλέγματος χρησιμοποιώντας το CDS. Το CDS διατηρείται όπου η συμβολή του συντελεστή της διάχυσης είναι μεγαλύτερη και το UDS εφαρμόζεται όταν ο συντελεστής της μεταγωγής γίνεται κυρίαρχος. Μια παρόμοια διαδικασία διαφόρισης χρησιμοποιείται για τη διεύθυνση θ . Για τα οριακά σημεία του πλέγματος όπου μόνο οι συνθήκες παραγωγίσης είναι κατάλληλες, η κατάλληλη διαφορική εξίσωση τροποποιείται με την ενσωμάτωση της οριακής συνθήκης. Αυτή η διαδικασία απαιτεί επίλυση κάποιων απροσδιόριστων μορφών με τον κανόνα του L' Hospital. Οι εξισώσεις του στροβιλισμού, της ενέργειας και των συστατικών λύνονται με μια γραμμή – γραμμή μέθοδο που χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο του Thomas. Ταχύτερη σύγκλιση επιτυγχάνεται εφόσον οι οριακές συνθήκες διαβιβάζονται αποτελεσματικά κατά μήκος μιας γραμμής. Η γραμμή – γραμμή διαδικασία εφαρμόζεται εναλλασσόμενα τόσο στην ακτινική όσο και στην γωνιακή διεύθυνση. Οι εξισώσεις της ροϊκής συνάρτησης επιλύονται από μια μέθοδο σημείο προς σημείο λαμβάνοντας υπ' όψη ότι τα μεγέθη της ροϊκής συνάρτησης αλλάζουν τάξη μεγέθους στο πεδίο ορισμού της λύσης. Μια γρήγορη διάδοση θορύβου παρατηρείται ότι προκαλεί αστάθεια. Παρατηρήθηκε ότι η χαλάρωση κάποιων από τις διεπιφανειακές συνθήκες (π.χ επιφανειακός στροβιλισμός) είναι αναγκαία για υπολογιστική σταθερότητα.

Η εξίσωση της ενέργειας της διασκορπισμένης φάσης επαναδιατυπώνεται εξ' αιτίας της ροϊκής συνάρτησης που βασίζεται στο σφαιρικό στρόβιλο Hill. Μια κανονικοποιημένη συντεταγμένη ροϊκής συνάρτησης m και μια ορθογωνική κατά μήκος συντεταγμένη $\hat{\xi}$ που δίνονται αργότερα στην εξίσωση (4.192) χρησιμοποιούνται. Στη σταγόνα χωρικές παράγωγοι είναι επίσης κεντρικά διαφορισμένες. Οι διαφορικές εξισώσεις διευθετούνται σε μια τρισδιάστατη μορφή (πίνακα) και επιλύονται. Μια διαδικασία Crack – Nickolson αποδίδει τα επιθυμητά αποτελέσματα για το πρόβλημα του αρχικού μεγέθους. Μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων διεξάγονται υπολογισμοί μέχρι οι αλλαγές στις προβλεπόμενες ποσότητες της μεταφοράς να είναι μικρότερες από 10^{-7} (απόλυτο σφάλμα) ή μικρότερες από 0,1% (σχετικό σφάλμα). Παρακάτω αναφέρουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα.

Σημαντικά Αποτελέσματα

Το σχήμα 4.2 δείχνει τη μεταβολή στο προφίλ της πίεσης της συνεχούς φάσης στην επιφάνεια της σταγόνας με τη συμπύκνωση.



ΣΧΗΜΑ 4.2: Επίδραση της συμπύκνωσης στο προφίλ της πίεσης

Για ροή γύρω από υγρές σφαίρες, με την απουσία συμπύκνωσης, υπάρχει μικρή ανάκτηση πίεσης στο πίσω μέρος. Με συμπύκνωση, υπάρχει μια μεγάλη ανάκτηση πίεσης. Αυτό το χαρακτηριστικό μπορεί να εξηγηθεί εξετάζοντας την εξίσωση για το προφίλ της πίεσης που αναπτύσσεται όπως παρακάτω.

Ξεκινώντας από την εξίσωσης ορμής:

$$P(u\mu + p) = 2u' \zeta - \frac{4}{Re} P' \zeta, \quad (4.165)$$

η στάσιμη πίεση p_0 της συνεχούς φάσης μπορεί να επιτευχθεί με την ολοκλήρωση της συνιστώσας r της εξίσωσης (4.165) για $\theta = 0$ έτσι ώστε:

$$p_0 = 1 + \frac{8}{Re} C_1 \int_{r_0}^r \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{d\theta} dr - u_c^2 \Big|_{\theta=0}, \quad (4.166)$$

όπου u_c είναι η αδιάστατη ταχύτητα συμπύκνωσης (διαβαθμίζεται από U_{∞}). Το επιφανειακό προφίλ της πίεσης p_s υπολογίζεται με την ολοκλήρωση της συνιστώσας θ της εξίσωσης (4.165) κατά μήκος της διεπιφάνειας δίνοντας:

$$p_s = p_0 + u_c^2 \Big|_{\theta=0} - (u_c^2 + u_\theta^2) + \zeta_0 \frac{\theta}{\kappa} 2u_c \zeta + \frac{4}{\text{Re}} \frac{\zeta}{\theta} + \frac{\int \zeta \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=1} d\theta}{\int r \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=1} d\theta} \quad (4.167)$$

Με $u_c = O(\text{Re}^{-1/2})$, $\zeta = O(\text{Re}^{1/2})$ και $u_\theta = O(10^{-1})$ προκύπτει από την εξίσωση (4.167) ότι το προφίλ της πίεσης κυρίως προσδιορίζεται από μια ισορροπία μεταξύ της διαχυτής και της μεταγωγικής μεταφοράς του στροβιλισμού. Για $u_c = 0$ (δεν έχουμε συμπύκνωση) η διάχυση του στροβιλισμού μακριά από τη σταγόνα προκαλεί απώλεια πίεσης στο πίσω μέρος. Με συμπύκνωση η ακτινική εσωτερική ροή αντισταθμίζει αυτή την εξωτερική διάχυση του στροβιλισμού. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας της πίεσης C_D γι' αυτό το λόγο μειώνεται με αυξανόμενη συμπύκνωση. Το κυμαινόμενο εμπόδιο στο προφίλ της πίεσης στο πίσω μέρος συμβαίνει λόγω της έντασης της ταχύτητας συμπύκνωσης που προκαλείται από την ανακυκλοφορία του απορρεύματος. Οι μεταβολές της πίεσης με τον αριθμό Reynolds (για σταθερό W) δείχνει ότι για υψηλότερους αριθμούς Reynolds η μεταγωγή του στροβιλισμού είναι πιο αποτελεσματική απ' ό,τι η διάχυση.

Οι αλλαγές στην εσωτερική και εξωτερική δομή της ροής που προκαλούνται από την παρουσία της συμπύκνωσης, αποκαλύπτουν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Οι ροϊκές γραμμές για μια μη συμπυκνούμενη ($W = 0$) και μια τυπική κατάσταση συμπύκνωσης ($W = 0.7$) για $\text{Re} = 300$ δείχνονται στις αναφορές. Για $W = 0$ ένα διαχωρισμένο ανακυκλοφορούμενο απόρρευμα παρουσιάζεται στην αέρια φάση στο πίσω μέρος της σταγόνας. Στο εσωτερικό της σταγόνας, παρουσιάζονται ένας κύριος υγρός στρόβιλος που δημιουργείται από τη θετική διατμητική τάση στο μπροστινό τμήμα της σταγόνας και ένας δευτερεύον στρόβιλος που δημιουργείται από την αρνητική διατμητική τάση στο πίσω μέρος της σταγόνας. Η ισχύς του κύριου στροβίλου είναι πολύ μεγαλύτερη απ' αυτή του δευτερεύοντος στροβίλου και η σημασία της κυκλοφορίας είναι αντίθετη. Το μήκος και ο όγκος του απορρεύματος μειώνονται με την παρουσία συμπύκνωσης. Τα ρευστά σωματίδια είτε συμπυκνώνονται είτε ανακυκλοφορούν εντός της περιοχής που ορίζεται από την διαιρούμενη ροή επιφάνεια. Για τη συμπυκνούμενη κατάσταση ο εσωτερικός στρόβιλος είναι μεγάλης ισχύος λόγω της αυξημένης διεπιφανειακής διατμητικής τάσης που προκαλείται από την εφαρμογή των ροϊκών επιφανειών της αέριας φάσης στη σταγόνα. Ο δευτερεύον εσωτερικός στρόβιλος δεν υφίσταται σε υψηλούς βαθμούς συμπύκνωσης. Το κέντρο του κύριου στροβίλου παρατηρείται ότι αλλάζει θέση σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο της σταγόνας με αυξανόμενο W , και η ασυμμετρία κατά μήκος του εσωτερικού στροβίλου μειώνεται.

Ο αδιάστατος ρυθμός ανάπτυξης μιας σταγόνας που υφίσταται συμπύκνωση εκφράζεται με τη σχέση:

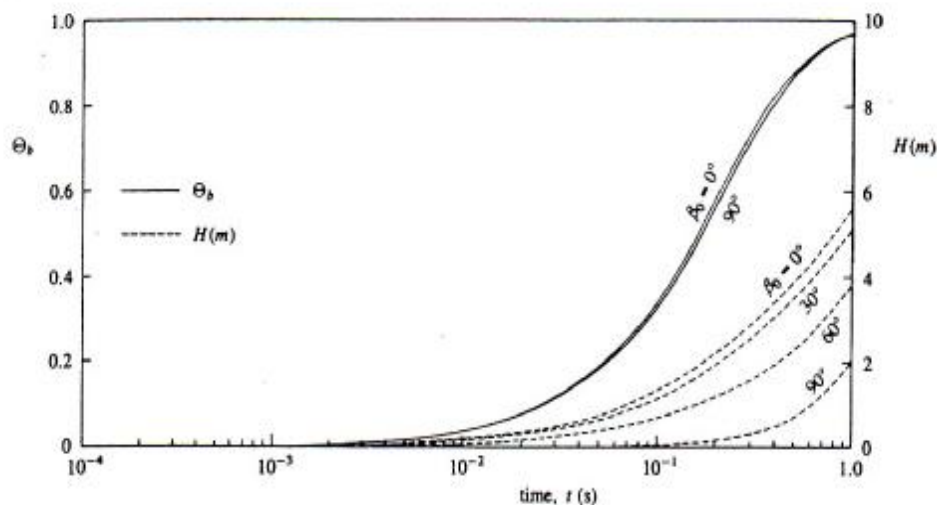
$$\frac{1}{\hat{R}} \frac{d\hat{R}}{dt} = - \frac{1}{\varphi_p} \frac{D_{12}}{2\hat{a}} \bar{u}_c, \quad (4.168)$$

όπου R διαβαθμίζεται από R_0 και \bar{u}_c είναι η μέση ταχύτητα συμπύκνωσης. Ο βαθμός ανάπτυξης είναι γραμμικά ανάλογος στη διαφορά θερμοκρασίας $\Delta \hat{T} = (T_{\infty} - T_0)$. Το

μέγεθος της σταγόνας στο τέλος της συμπύκνωσης (\hat{R}_f) μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση:

$$\hat{R}_f = 1 + \frac{\hat{c}_p \Delta \hat{T}}{3\lambda}. \quad (4.169)$$

Αυτή η εκτίμηση είναι σε συμφωνία με τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας συμπύκνωσης, ο βαθμός ανάπτυξης της σταγόνας είναι στενά συνδεδεμένος με το βαθμό αύξησης της θερμότητας της σταγόνας. Γι' αυτό το λόγο η μεταβολή του \hat{R} με το $\Delta \hat{T}$ και το R_0 μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι απευθείας συνέπεια της φύσης της μεταφορικής εξέλιξης του εσωτερικού προφίλ της θερμοκρασίας της σταγόνας.



ΣΧΗΜΑ 4.3: Η επίδραση της γωνίας έγχυσης του σταγονιδίου στη μεταφορά θερμότητας

$$\rho_{\infty} = 300 \text{ kPa}, \quad T_{\infty} = 100^{\circ} \text{C}, \quad U_0 = 15 \text{ ms}^{-1}, \quad T_0 = 37^{\circ} \text{C}, \quad R_0 = 250 \mu \text{m} \quad \text{και} \quad W_0 = 0.23$$

Το σχήμα 4.3 δείχνει την επίδραση της γωνίας έγχυσης του σταγονιδίου στη μεταφορά θερμότητας. Για ένα δεδομένο μέγεθος σταγόνας ο βαθμός αύξησης της κύριας θερμοκρασίας με το χρόνο είναι ουσιαστικά ανεξάρτητος από τη γωνία ψεκασμού. Ωστόσο το ύψος της κατακόρυφης πτώσης της σταγόνας H πριν επιτευχθεί η θερμική ισορροπία αλλάζει σημαντικά με τη γωνία ψεκασμού.

Για μια σταγόνα που υφίσταται συμπύκνωση, σχέσεις για το C_D και τη \bar{u}_c για ένα εύρος των παραμέτρων $30 < \text{Re} < 300$, $0 < W < 0.9$, $\varphi_{\mu} : 40$ και $\varphi_{\rho} : 10^3$ έχουν προταθεί από τους Huang & Ayyaswamy και τους Sundararajan & Ayyaswamy. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας C_D δίνεται από τη σχέση:

$$C_D = f_1(y)x^2 + f_2(y)x + f_3(y), \quad (4.170)$$

όπου $y = Re^{-1/2}$, $x = \ln(1 - W)$ και

$$f_1(y) = 11303y^3 - 3304.6y^2 + 300.37y - 8.8029, \quad (4.171)$$

$$f_2(y) = 8890.1y^3 - 2598.2y^2 + 228.73y - 6.0811, \quad (4.172)$$

$$f_3(y) = 11303y^3 - 731.69y^2 + 74.335y - 2.0658. \quad (4.173)$$

Η σχέση για τη μέση ταχύτητα συμπύκνωσης είναι:

$$\frac{\bar{u}_c}{u_{c,0}} = 1 + 0.261Re^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}} (1 - W)^{-\frac{1}{5}} \quad \text{για } W < 1, \quad (4.174)$$

όπου η $u_{c,0}$ είναι:

$$u_{c,0} = 2\ln(1 - W) \quad \text{για } W < 1. \quad (4.175)$$

Οι αριθμητικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι η αδιάστατη μέση ροή θερμότητας $\bar{\phi}$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2} \zeta_0 \int_0^\pi \phi_s \sin d\theta \quad (4.176)$$

αυξάνει αναλογικά με τα $\ln(1 - W)$ και $Re^{1/2}$. Σ' αυτή τη βάση, μια σχέση για το \bar{q} για μία κινούμενη σταγόνα που υφίσταται συμπύκνωση που υπολογίζεται για την παρουσία ενός μη συμπυκνώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\phi} = \frac{\bar{u}_c}{2Le} \quad (4.177)$$

για $W < 1$.

Περιοδικά τα σημαντικά συμπεράσματα από αυτές τις αριθμητικές μελέτες είναι:

- Η ταχύτητα συμπύκνωσης στο μπροστινό μέρος της σταγόνας έχει μια προσεγγιστική μεταβολή συνημίτονου με τη γωνία.
- Ο μέγιστος βαθμός συμπύκνωσης που συμβαίνει στο μπροστινό στάσιμο σημείο είναι περίπου δύο φορές ο μέσος βαθμός συμπύκνωσης του σταγονιδίου. Γι' αυτό το λόγο χρήσιμα όρια για τους βαθμούς μεταφοράς μπορεί να εξαχθούν από αναλύσεις που αναπτύσσονται για τη στάσιμη περιοχή.
- Η περιοχή ανακυκλοφορίας του απορρεύματος στο πίσω μέρος της σταγόνας εντείνει τη μεταφορά και με αύξηση του αριθμού Reynolds αυτή η επίδραση γίνεται ισχυρότερη.
- Με αύξηση της συμπύκνωσης, η διαμητική τάση και ο συντελεστής της οπισθέλκουσας της τριβής αυξάνουν. Ωστόσο η συνιστώσα της

- οπισθέλκουσας λόγω της πίεσης μειώνεται γρήγορα με τη συμπύκνωση λόγω μιας μεγάλης ανάκτησης πίεσης στο πίσω μέρος της σταγόνας. Η σχετική σημασία της οπισθέλκουσας πίεσης συγκρινόμενη με την οπισθέλκουσα της τριβής αυξάνει με το μέγεθος της σταγόνας ή τη διαφορά της θερμοκρασίας. Η συμβολή της γραμμικής ορμής της εσωτερικής ροής στη συνολική οπισθέλκουσα είναι σημαντική μόνο σε πολύ υψηλούς βαθμούς συμπύκνωσης και για πολύ μικρές σταγόνες.
- Η οπισθέλκουσα της σταγόνας μειώνεται σε μεγάλο βαθμό για υψηλά επίπεδα συμπύκνωσης. Για πολύ μεγάλα μεγέθη σταγόνας, η οπισθέλκουσα δύναμη μπορεί να μην είναι αρκετή ώστε να εξισορροπήσει το βάρος της σταγόνας και η ωφέλιμη δύναμη μπορεί να οδηγήσει σε υπερβολική επιτάχυνση και ενδεχόμενα σε διάλυση της σταγόνας.
 - Οι αριθμητικοί υπολογισμοί προβλέπουν μια προσεγγιστική συνολική λύση της μορφής $\frac{(\bar{u}_c / u_{c,0}) - 1}{\frac{10}{\text{Pe}}}$ για $\text{Re} = O(100)$. Καθώς η \bar{u}_c εξαρτάται απευθείας από τη μέση μεταβολή της διεπιφανειακής συγκέντρωσης του μη συμπυκνώματος, αυτή η τετραγωνικής ρίζας εξάρτηση μπορεί να αποδοθεί σε μια μεταβολή στον τύπο του ολικού οριακού στρώματος για τη συγκέντρωση του μη συμπυκνώματος.

Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds περιοχές απότομων μεταβολών της ακτινικής ταχύτητας, θερμοκρασίας και συγκέντρωσης του μη συμπυκνώματος στη συνεχή φάση υπάρχουν κοντά στην επιφάνεια της σταγόνας. Αυτές μπορεί να παρουσιάζονται από λεπτά οριακά στρώματα πάχους $O(\text{Re}^{-1/2})$ ή $O(\text{Pe}^{-1/2})$. Για τυπικές τιμές όπως $R: 1\text{mm}$ και $U_\infty: 1\text{ms}^{-1}$, τα οριακά στρώματα θα δημιουργηθούν εντός μερικών χιλιοστών του δευτερόλεπτου (milliseconds) μετά τη σύσταση της σταγόνας. Αυτό το θέμα αναφέρεται από τους Sundararajan & Ayyaswamy.

ΥΨΗΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ REYNOLDS ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ

Όπως αναφέρθηκε, σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, περιοχές απότομων ακτινικών μεταβολών της ταχύτητας, της θερμοκρασίας και της συγκέντρωσης του μη συμπυκνώματος στη φάση αερίου – ατμού υπάρχουν κοντά στην επιφάνεια της σταγόνας. Αυτές οι περιοχές μπορεί να παρουσιάζονται από λεπτά οριακά στρώματα. Τώρα αναφέρουμε την ανάπτυξη της θεωρίας του οριακού στρώματος που εξήχθη από τους Sundararajan & Ayyaswamy.

Για το μίγμα ατμού – αέρα που θεωρήθηκε, τα οριακά στρώματα της συνεχούς φάσης έχουν την ίδια τάξη πάχους $\delta = O(\text{Re}^{-1/2})$. Ο χρόνος που απαιτείται για τη δημιουργία αυτών των οριακών στρωμάτων είναι $O(R/U_\infty)$. Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, εκτός για μία πολύ μικρή μεταβατική περίοδο, είναι λογικό να θεωρηθεί η δημιουργία ημισταθερών οριακών στρωμάτων στη συνεχή φάση για ολόκληρη τη διάρκεια της συμπύκνωσης, και να εκτιμηθούν οι ποσότητες της μεταφοράς στη βάση της θεωρίας του οριακού στρώματος. Ωστόσο λόγω του διαχωρισμού της ροής και της ανακυκλοφορίας του απορρεύματος, η θεωρία είναι ανεφάρμοστη στο πίσω μέρος της σταγόνας. Εφόσον η μεταφορά είναι μέγιστη στη μπροστινή περιοχή, όρια για τους βαθμούς μεταφοράς και προσεγγιστικά αποτελέσματα για ολόκληρη τη μεταφορά μπορεί να εξαχθούν. Επιπρόσθετα, η χρησιμότητα των πλήρως αριθμητικών λύσεων μπορεί να επιβεβαιωθεί με τη

σύγκριση με τα αποτελέσματα που επιτυγχάνονται από την οριακού στρώματος διατύπωση. Οι ημισταθερές εξισώσεις της συνεχούς φάσης αποσυνδέονται από εκείνες για την υγρή φάση περιγράφοντας τόσο μια κατάλληλη ταχύτητα επιφανειακής κυκλοφορίας όσο και την επιφανειακή θερμοκρασία διαμέσου της παραμέτρου συμπύκνωσης W . Η περιγραφή του $m_{1,s}$ καθορίζει την επιφανειακή θερμοκρασία T_s διαμέσου της απαιτούμενης θερμοδυναμικής ισορροπίας. Η θεώρηση της συνεχούς φάσης βασίζεται στη διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης στροβιλισμού. Η περιοχή της δυναμικής ροής έξω από το οριακό στρώμα θεωρείται ομοιόμορφης θερμοκρασίας και συγκέντρωσης. Κατά συνέπεια για τη δυναμική ροή η κινητήρια εξίσωση είναι:

$$L_{-1}\psi = 0, \quad (4.178)$$

όπου το L_{-1} έχει οριστεί στην εξίσωση $L_{-1} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$. Οι οριακές και διεπιφανειακές συνθήκες είναι:

$$\psi = 0 \quad \text{για} \quad \bar{\mu} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{για} \quad \bar{\mu} = -1, \quad (4.179)$$

και

$$u_c = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mu}} = \varphi(\bar{\mu}) \quad \text{καθώς} \quad r = 1, \quad \psi = \frac{1}{2} r^2 (1 - \bar{\mu}^2) \quad \text{καθώς} \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.180)$$

Η συνάρτηση $\varphi(\bar{\mu})$ που εμφανίζεται στην κανονική συνθήκη ροής υπολογίζεται από τη σύνδεση με την λύση του οριακού στρώματος.

Η θεωρία του οριακού στρώματος της συνεχούς φάσης αναπτύσσεται στη βάση ότι το δ είναι $O(Re^{-1/2})$ και στην παρουσία μιας οριακού στρώματος συντεταγμένης y που ορίζεται από τη σχέση:

$$y = (r - 1)Re^{1/2}. \quad (4.181)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι παρακάτω επιπρόσθετες αδιάστατες ποσότητες:

$$F = \frac{\zeta}{r \sin\theta} \quad (\text{αδιάστατος στροβιλισμός}) \quad (4.182)$$

$$\omega_1 = \frac{\zeta (m_1 - m_{1,\infty})}{m_{1,s} - m_{1,\infty}} \quad (\text{κανονικοποιημένο κλάσμα μάζας}) \quad (4.183)$$

$$\Theta = \frac{\zeta (T - T_\infty)}{T_s - T_\infty} \quad \hat{\Theta} = \frac{\zeta (\hat{T} - T_0)}{T_\infty - T_0} \quad (4.184)$$

Παρατηρώντας ότι $\psi = O(\text{Re}^{-1/2})$, $F = O(\text{Re}^{1/2})$, $\omega_1 = O(1)$ και $\Theta = O(1)$ τα παρακάτω αναπτύγματα για την αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση παρουσιάζονται στις κινητήριες εξισώσεις διατήρησης:

$$\begin{aligned}\psi(y, \bar{\mu}) &= \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \psi^{(1)}(y, \bar{\mu}) + \text{Re}^{-1} \psi^{(2)}(y, \bar{\mu}) + \dots \\ F(y, \bar{\mu}) &= \text{Re}^{\frac{1}{2}} F^{(1)}(y, \bar{\mu}) + F^{(2)}(y, \bar{\mu}) + \dots \\ \omega_1(y, \bar{\mu}) &= \omega_1^{(1)}(y, \bar{\mu}) + \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \omega_1^{(2)}(y, \bar{\mu}) + \dots \\ \Theta(y, \bar{\mu}) &= \Theta^{(1)}(y, \bar{\mu}) + \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \Theta^{(2)}(y, \bar{\mu}) + \dots\end{aligned}$$

Διατηρώντας μόνο τους κύριους όρους, οι εξισώσεις απλοποιούνται στο παρακάτω παραβολικό σετ εξισώσεων:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2FQ_1(\bar{\mu}), \quad (4.185)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mu}} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}} = 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad (4.186)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mu}} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{\mu}} = \frac{2}{Sc} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2}, \quad (4.187)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mu}} \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\mu}} = \frac{2}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \quad (4.188)$$

όπου $Q_n(\bar{\mu})$ είναι το ολοκλήρωμα του πολυωνύμου Legendre σειράς n . Οι καθορισμένες τιμές των u_θ και W τώρα εκφράζονται με τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -0.1(1 + 0.1\bar{\mu})Q_1(\bar{\mu}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mu}} = \frac{2W}{Sc} \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \quad \omega_1 = \Theta = 1 \quad \text{για } y = 0, \quad (4.189)$$

και

$$\psi = 0, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}} \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\mu}} \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{\mu}} \right| < \infty \quad \text{για } \bar{\mu} = 1. \quad (4.190)$$

Στη συζευγμένη περιοχή:

$$\psi_{bl}|_{y \rightarrow \infty} \approx \psi_{pot}|_{r \rightarrow 1}, \quad \Theta \approx 0, \quad \omega_1 \approx 0, \quad F \approx 0. \quad (4.191)$$

Για τη διασκορπισμένη φάση η εσωτερική ροή παίρνεται ότι είναι ένας στρόβιλος Hill μειωμένης ισχύος A. Ο ασταθής όρος στην εξίσωση ενέργειας διατηρείται και όπως έγινε και προηγουμένως με το χειρισμό του εσωτερικού προβλήματος, επαναδιατυπώνεται σε σχέση μ' ένα σύστημα συντεταγμένων ροϊκής συνάρτησης (m, ξ) που δίνεται από τις σχέσεις:

$$m = 4r^2(1 - r^2)\sin^2 \theta \quad \text{και} \quad \hat{\xi} = \frac{r^4 \cos^4 \theta}{2r^2 - 1} \quad (4.192)$$

Η εξίσωση ενέργειας τότε εκφράζεται με τη σχέση:

$$\int_{\mathcal{C}} h_m h_\xi h_\varphi d\xi \frac{\bar{\Theta}}{t} = \frac{\int_{\mathcal{C}} h_\xi h_\varphi d\xi}{h_m} \frac{\bar{\Theta}}{m} \quad (4.193)$$

όπου h_m , h_ξ , h_φ είναι μετρικοί συντελεστές στο νέο σύστημα συντεταγμένων και η κατά μήκος μέση θερμοκρασία του υγρού είναι $\bar{\Theta}$. Η ολοκλήρωση είναι γύρω από ένα σχήμα κλειστής ροϊκής γραμμής. Αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\Theta} = \frac{\int_{\mathcal{C}} \bar{\Theta} h_m h_\xi h_\varphi d\xi}{\int_{\mathcal{C}} h_m h_\xi h_\varphi d\xi} \quad (4.194)$$

Αυτές υπόκεινται στις οριακές συνθήκες συνέχειας της ροής θερμότητας στη διεπιφάνεια και πεπερασμένης θερμοκρασίας και ροής θερμότητας στο κέντρο του στρόβιλου.

Στην μπροστινή στάσιμη περιοχή της σταγόνας, ένας παρόμοιος μετασχηματισμός εφαρμόζεται για να απλοποιήσει τις εξισώσεις του οριακού στρώματος της συνεχούς φάσης σ' ένα σύστημα απλών διαφορικών εξισώσεων. Μια παρόμοια λύση αναπτύσσεται γι' αυτή την περιοχή. Για ολόκληρη την περιοχή του οριακού στρώματος, μια διαδικασία σειράς με αναπτύγματα σε σχέση με πολυώνυμα Legendre εφαρμόζεται για να αναπτύξει απλές διαφορικές εξισώσεις. Αυτά λύνονται με αριθμητική μελέτη. Για το εσωτερικό της σταγόνας χρησιμοποιείται η διαδικασία Crank – Nicolson. Οι λύσεις της συνεχούς φάσης συνδυάζονται με τις λύσεις της διασκορπισμένης φάσης διαμέσου των διεπιφανειακών συνθηκών. Κάποιες λεπτομέρειες της διαδικασίας επίλυσης αναφέρονται εδώ. Στο οριακό στρώμα, η ροϊκή συνάρτηση Ψ_{bl} , επεκτείνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\psi = \psi_{bl} = \sum_{n=0}^N \xi_n(y) Q_n(\bar{\mu}), \quad (4.195)$$

όπου

$$Q_0(\bar{\mu}) = \int_0^{\bar{\mu}} P_0(\bar{\mu}) d\bar{\mu}, \quad (4.196)$$

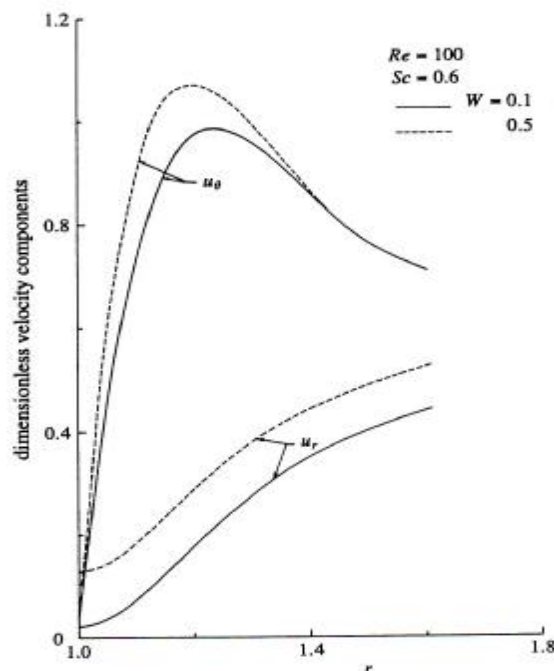
$$Q_n(\bar{\mu}) = \int_1^{\bar{\mu}} P_n(\bar{\mu}) d\bar{\mu} \quad \text{για} \quad n \geq 1. \quad (4.197)$$

Αυτή το ανάπτυγμα της σειράς ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες για πεπερασμένο N . Στην περιοχή γύρω από το μπροστινό στάσιμο σημείο, για μικρές τιμές του θ , η συνάρτηση Q_n προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$Q_n \approx -\frac{1}{2}\theta^2 \quad \text{για } n = 0, \dots, \infty \quad \text{και} \quad \psi_{bl} = \theta^2 \xi(y). \quad (4.198)$$

Αυτό οδηγεί στην απαίτηση ότι η F είναι συνάρτηση μόνο του y στην μπροστινή στάσιμη περιοχή. Όλες οι άλλες μεταβλητές δείχνουν παρόμοια εξάρτηση από το y . Οι αυτόμοιες εξισώσεις που παράγονται μ' αυτόν τον τρόπο, λύνονται από μια απ' ευθείας αριθμητική διαδικασία.

Για ολόκληρη την περιοχή του οριακού στρώματος, χρησιμοποιείται η ημιαναλυτική μέθοδος σειράς. Εδώ, επιπλέον του Ψ_{bl} , οι μεταβλητές F , Θ και ω_1 επεκτείνονται με όρους πολυωνύμου Legendre $P_n(\bar{\mu})$ όμοια με την εξίσωση (4.195). Η αντικατάσταση αυτών των αναπτυγμάτων στις εξισώσεις του οριακού στρώματος οδηγεί σ' ένα σύστημα μη γραμμικών απλών διαφορικών εξισώσεων για τους συντελεστές της επέκτασης. Αυτές με τη σειρά τους λύνονται υποκειμένες σε κατάλληλες οριακές συνθήκες χρησιμοποιώντας ένα κεντρικής διαφοράς αριθμητικό σχέδιο (διάταξη). Κάποια από τα σημαντικά αποτελέσματα της ανάλυσης του οριακού στρώματος αναφέρονται παρακάτω.



Σχήμα 4.4: Η επίδραση της συμπύκνωσης στο προφίλ της ταχύτητας κατά μήκος του οριακού στρώματος.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν περιλαμβάνουν πίνακες που περιέχουν διεπιφανειακές τιμές των συναρτήσεων επέκτασης για τα Ψ και Θ για διάφορες τιμές του W . Οι ρυθμοί μεταφοράς θερμότητας και μάζας μπορούν να προβλεφθούν με τη χρήση αυτών των συναρτήσεων. Η αδιάστατη εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας και η αδιάστατη ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας (U_θ και U_r) κατά μήκος

του οριακού στρώματος της αέριας φάσης σημειώνονται στο σχήμα 4.4 για μια συγκεκριμένη γωνιακή θέση, $\theta=45^\circ$. Η επιλογή της γωνιακής θέσης δεν είναι σημαντική, δεδομένου ότι η θ είναι μικρότερη από την γωνία που αντιστοιχεί στο σημείο διαχωρισμού. Το προφίλ της εφαιπτομενικής ταχύτητας επιτυγχάνει μέγιστη τιμή στην περιοχή σύνδεσης ανάμεσα στο οριακό στρώμα και τη δυναμική ροή. Η ταχύτητα αυξάνει μέσα στο οριακό στρώμα από μια πολύ μικρή επιφανειακή τιμή σε μια μεγάλη τιμή στην άκρη του οριακού στρώματος. Αυτή μειώνεται διαρκώς στην περιοχή δυναμικής ροής και παίρνει την τιμή της μακρινής ροής. Η ταχύτητα στην περιοχή σύνδεσης είναι υψηλότερη σε σχέση με την τιμή της στη μακρινή ροή εξαιτίας της παρέκκλισης των ροϊκών επιφανειών γύρω από την σταγόνα. Τα στοιχεία του ρευστού επιταχύνουν κατά μήκος της εφαιπτομενικής διεύθυνσης καθώς υπερπηδούν τη σταγόνα. Η ακτινική θέση της μέγιστης ταχύτητας μπορεί να ληφθεί για να οριστεί το πάχος του οριακού στρώματος. Για υψηλότερο W , εμφανίζεται υψηλότερη εφαιπτομενική μεταφορά ορμής εξαιτίας του υψηλότερου επιπέδου συμπύκνωσης και το οριακό στρώμα είναι λεπτότερο. Το σχήμα δείχνει επίσης, τη μεταβολή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας u_r . Έχει ενδιαφέρον η αντίθεση στην συμπεριφορά των u_θ και u_r στην περιοχή της δυναμικής ροής. Με την αύξηση του W , η u_θ παραμένει ουσιαστικά ανεπηρέαστη στις περιοχές δυναμικής ροής, ενώ η u_r αλλάζει σημαντικά. Πράγματι η u_θ θα άλλαζε επίσης με το W , αλλά ουσιαστικά με μικρότερα ποσά. Αυτό μπορεί ν' αποκαλυφθεί από μια διαδικασία επέκτασης σε αριθμούς Reynolds υψηλότερης τάξης σε σχέση με αυτούς που αναπτύσσονται εδώ. Πρέπει να σημειωθεί ότι η u_r αυξάνει συνέχεια από την επιφανειακή τιμή στην τιμή που έχει στη μακρινή ροή όπου είναι και η μέγιστη. Επίσης σε υψηλότερες τιμές του W η u_r είναι υψηλότερη. Κάτι που είναι αναμενόμενο. Η ανάλυση οριακού στρώματος της συμπύκνωσης αποκαλύπτει ότι:

- Μια πολύ καλή εκτίμηση της μέγιστης μεταφοράς μπορεί να ληφθεί από μια ανάλυση ομοιότητας που εφαρμόζεται στη μπροστινή σταθερή περιοχή της σταγόνας.
- Η ανάλυση σειράς παρέχει καλές προβλέψεις για τη μέγιστη και τη μέση μεταφορά στη σταγόνα. Καλές εκτιμήσεις για το προφίλ της ταχύτητας συμπύκνωσης και προσεγγιστικές εκτιμήσεις για το προφίλ της διατμητικής τάσης μπορούν επίσης να ληφθούν από αυτή την ανάλυση.
- Σε γενικές γραμμές, τα αποτελέσματα του οριακού στρώματος υπερεκτιμούν τις ποσότητες μεταφοράς. Αυτές οι υπερεκτιμήσεις είναι συνέπεια της σύνδεσης με τη λύση της εξωτερικής δυναμικής ροής.

Επίδραση των Ακαθαρσιών στη Συμπύκνωση

Όπως σημειώθηκε νωρίτερα, η παρουσία επιφανειακά ενεργών ακαθαρσιών μειώνει την εσωτερική κυκλοφορία στη σταγόνα. Αυτό με τη σειρά του έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση των ρυθμών μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Ακόμα και στοιχειώδεις ποσότητες ακαθαρσιών μπορούν να διαφοροποιήσουν σημαντικά τη ροή και τη μεταφορά. Δύο μελέτες σχετικές με την επίδραση των ακαθαρσιών στη συμπύκνωση εξετάζονται στη συνέχεια. Η πρώτη είναι μια ανάλυση του οριακού στρώματος, ενώ η δεύτερη είναι μια πλήρως αριθμητική μελέτη.

Η επίδραση στην εσωτερική κυκλοφορία μιας σταγόνας που υφίσταται συμπύκνωση σε ροή με υψηλό αριθμό Re , λόγω της παρουσίας αδιάλυτης μονοστρωματικής ακαθαρσίας στην επιφάνεια, ερευνήθηκε στη βάση μιας ανάλυσης οριακού στρώματος από τους Chang και Chung για ακτίνα σταγονιδίου που

κυμαίνεται μεταξύ 100 και 1000 μm . Η επιφανειακή διαχυτότητα της ακαθαρσίας κυμαίνεται από 10^{-9} σε 10^{-3} m^2/s . Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ακαθαρσίες με χαμηλότερους συντελεστές επιφανειακής διάχυσης εξασθενούν πιο αποτελεσματικά την ισχύ του εσωτερικού στροβίλου. Η ισχύς της εσωτερικής κυκλοφορίας φαίνεται να κινείται σε ένα φάσμα τιμών μιας τάξης μεγέθους μικρότερη από την ταχύτητα της ελεύθερης ροής για ελαφριά ρύπανση από ακαθαρσίες, έως σχεδόν πλήρη παύση της κίνησης για υψηλή συγκέντρωση ακαθαρσιών.

Η επίδραση των αδιάλυτων ακαθαρσιών στη συμπύκνωση μιας κινούμενης σταγόνας έχει μελετηθεί αριθμητικά από τους Huang και Ayyaswamy. Η κίνηση του σταγονιδίου θεωρείται ότι γίνεται στην ενδιάμεση περιοχή αριθμών Reynolds και γίνεται η υπόθεση ότι αδιάλυτη μονοστρωματική ακαθαρσία ρυπαίνει αρχικά τη σταγόνα. Το περιβάλλον της σταγόνας θεωρείται ότι αποτελείται από τον ίδιο της τον ατμό και από ένα μη συμπύκνωμα. Η πίεση του περιβάλλοντος είναι 1 atm. Η διατύπωση συνεπάγεται την ταυτόχρονη λύση των ημι - σταθερών ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων για το πεδίο ροής και μεταφοράς στην αέρια φάση και την κίνηση μέσα στην σταγόνα. Η μεταφορά θερμότητας μέσα στην σταγόνα αντιμετωπίζεται σα μεταφορική διαδικασία. Η αριθμητική μέθοδος βασίζεται στο υβριδικής διαφοράς σχέδιο. Υπολογίζονται η μεταβολή της ισχύος της επιφανειακής τάσης που προκαλείται από τις ακαθαρσίες και η διατμητική τάση από τη σχετική κίνηση μεταξύ του σταγονιδίου και του πεδίου της εξωτερικής ταχύτητας. Έτσι προκύπτουν αποτελέσματα για την διεπιφανειακή ταχύτητα, την οπισθέλκουσα, τον στροβιλισμό επιφανείας, την δομή της εξωτερικής και εσωτερικής ροής, τη συγκέντρωση της ακαθαρσίας κατά μήκος της επιφάνειας του σταγονιδίου και τους αριθμούς Nusselt και Sherwood. Βασιζόμενοι σ' ένα μοντέλο σταθερής ισορροπίας μεταγωγής διάχυσης υπολογίζεται η δύναμη του $F_\sigma(\theta)$ που προκαλείται. Για μία αδιάλυτη ακαθαρσία η συνθήκη διατήρησης στη διεπιφάνεια δίνεται από τη σχέση:

$$P \frac{\partial}{\partial \theta} (Y u_s) - P \frac{\partial}{\partial \theta} (D_s P Y) = 0, \quad (4.199)$$

όπου u_s είναι το διάνυσμα της επιφανειακής ταχύτητας, Y είναι η επιφανειακή συγκέντρωση ακαθαρσιών και D_s είναι ο συντελεστής επιφανειακής διάχυσης (θεωρείται σαν μία σταθερά). Για σφαιρικό σταγονίδιο, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (Y \hat{u}_\theta \sin \theta) = \frac{D_s}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\zeta}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) \quad (4.200)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση από $\theta = 0$ ως θ λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{R Y}{D_s} \hat{u}_\theta. \quad (4.201)$$

Από τη σχέση $(\frac{\partial \sigma}{\partial Y}) = - R \hat{T}_s$ η επιφανειακή δύναμη που εφαρμόζεται μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$F_\sigma(\theta) = - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = \frac{R \hat{T}_s Y}{D_s} \hat{u}_\theta \Big|_{r=R}. \quad (4.202)$$

Εδώ το R είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων. Αυτή η εφαρμοζόμενη δύναμη της ακαθαρσίας διαμορφώνει την ισορροπία διατμητικής τάσης στην επιφάνεια της σταγόνας όπως εκφράζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{\mu} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta \hat{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + F_\sigma R Y_0 = \mu \frac{1}{\kappa} \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (4.203)$$

όπου Y_0 είναι η ορισμένη συγκέντρωση ακαθαρσίας για $\theta = \pi$. Η επιφανειακή συγκέντρωση Y παράγεται από την ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.201) από θ ως π έτσι ώστε:

$$\ln(Y) = - \frac{1}{2} Pe_s \int_0^\pi \hat{u}_\theta d\theta, \quad (4.204)$$

όπου $Pe_s = U_\infty d / D_s$. Το υπόλοιπο της ημι – σταθερής διατύπωσης και η διαδικασία επίλυσης για το πρόβλημα της συμπύκνωσης εδώ παραμένουν ίδια όπως αναφέρθηκαν νωρίτερα για τη συμπύκνωση σε μια καθαρή σταγόνα. Με τα Θ και ω_1 να καθορίζονται από τις εξισώσεις (4.184) και (4.183) οι αριθμοί Nusselt και Sherwood μπορούν να εκφραστούν με τις σχέσεις:

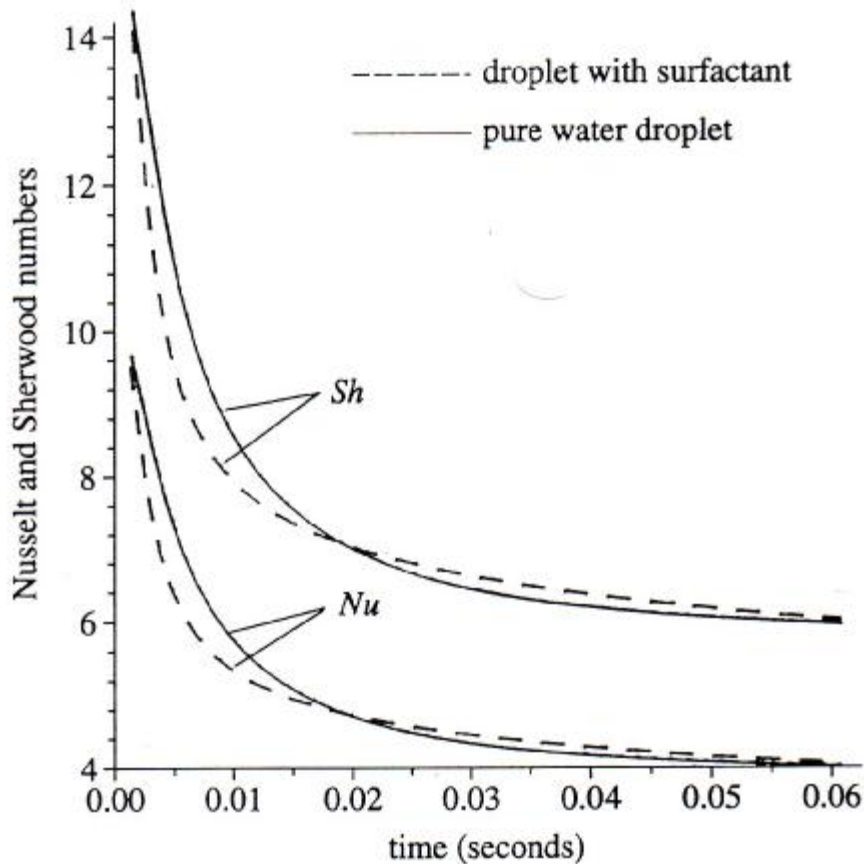
$$Nu = - \int_0^\pi \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\Theta_s} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \bigg|_{\hat{r}=1} \sin \theta d\theta, \quad (4.205)$$

και

$$Sh = - \int_0^\pi \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\omega_{1,s}} \frac{\partial \omega_1}{\partial r} \bigg|_{\hat{r}=1} \sin \theta d\theta, \quad (4.206)$$

αντίστοιχα. Κάποια σημαντικά αποτελέσματα από την αριθμητική μελέτη θεωρούνται στη συνέχεια.

Οι συνέπειες της παρουσίας ακαθαρσιών στις μεταφορικές μεταβολές της θερμότητας και της μάζας φαίνονται στο σχήμα 4.5. Οι ρυθμοί μεταφοράς για ακριβώς ίδιες συνθήκες περιβάλλοντος υπολογίζονται για ένα καθαρό σταγονίδιο και ένα σταγονίδιο με μονό στρώμα ακαθαρσίας και τα αποτελέσματα παρέχονται για σύγκριση. Η ακαθαρσία εμποδίζει την εσωτερική κυκλοφορία κι έτσι μειώνει την αποτελεσματικότητα της μεταφοράς. Οι αριθμοί Nusselt και Sherwood είναι σχετικά χαμηλότεροι για μολυσμένη σταγόνα.



ΣΧΗΜΑ 4.5: Χρονική εξέλιξη των αριθμών Nusselt και Sherwood
 $R_0 = 0.2mm$, $T_0 = 313K$, $T_\infty = 368K$, $p_\infty = 100kPa$,
 $\gamma_0 = 3 \cdot 10^{-7} g \text{ mole } m^{-2}$, $Re = 100$ και $D_s = 5 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$.

Συνοπτικά, τα σημαντικά συμπεράσματα από την μελέτη των Huang και Ayyaswamy είναι:

- Η μεταβολή της συγκέντρωσης στη διεπιφάνεια αυξάνει με την αύξηση του αριθμού Reynolds. Για χαμηλούς αριθμούς Reynolds η μέγιστη συγκέντρωση ακαθαρσιών συμβαίνει για $\theta = \pi$. Η γωνιακή θέση αυτού του μέγιστου μετακινείται μπροστά με την αύξηση του αριθμού Reynolds.
- Η αύξηση της συγκέντρωσης ακαθαρσιών στην επιφάνεια μειώνει την ισχύ του εσωτερικού στροβίλου όπως και την επιφανειακή ταχύτητα.
- Η συγκέντρωση ακαθαρσιών στη διεπιφάνεια επηρεάζεται σημαντικά από την διαχυτότητα των ακαθαρσιών. Η αύξηση της διαχυτότητας οδηγεί σε αύξηση της γωνίας κάλυψης των ακαθαρσιών στην επιφάνεια.
- Κατά τα πρώτα στάδια της συμπύκνωσης οι αριθμοί Nusselt και Sherwood είναι χαμηλότεροι για μια μολυσμένη σταγόνα σε σύγκριση με αυτούς για μία καθαρή σταγόνα.

ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗ Σ' ΕΝΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟ ΣΤΑΓΟΝΙΔΙΟ

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, για σταγονίδια νερού με μέγεθος διαμέτρου 1mm ή μικρότερα ($E_0 < 0.4$ και $We < 0.3$), η παραμόρφωση της σταγόνας εξ' αιτίας των επιδράσεων της αδράνειας και της άνωσης μπορεί να θεωρηθεί μικρή. Σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds ωστόσο, οι δυνάμεις αδρανείας συνεισφέρουν σημαντικά στην κάθετη ισορροπία της τάσης και ένα σφαιρικό σταγονίδιο νερού κινούμενο σε μίγμα αέρα – ατμού σταδιακά παραμορφώνεται σε ένα περίπου επίμηκες σφαιροειδές. Ωστόσο, για σταγονίδιο που υφίσταται συμπίκνωση, μια τέτοια παραμόρφωση είναι σχετικά μικρότερη συγκρινόμενη με μια σταγόνα που δεν υφίσταται συμπίκνωση σε συνθήκες κατά τ' άλλα ταυτόσημες. Η ανάκτηση υψηλότερης πίεσης στο πίσω μέρος της σταγόνας που υφίσταται συμπίκνωση εμποδίζει την παραμόρφωση. Η παραμόρφωση μπορεί ωστόσο, να είναι σημαντική παρ' όλη την ανάκτηση υψηλότερης πίεσης για $Re = O(100)$. Φωτογραφίες σταγονιδίων νερού που παραμορφώνονται πέφτοντας δια μέσου του αέρα παρουσιάζονται από τον LeClair κ.α και τους Pruppacher & Pitter. Η επίδραση των προφίλ της πίεσης στην παραμόρφωση σταγονιδίων φαίνεται στην κατοπινή μελέτη. Στη συνέχεια αναφέρουμε μια πειραματική διερεύνηση της συμπίκνωσης πάνω σε σταγονίδιο και την μοντελοποίηση των παρατηρήσεων.

Η συμπίκνωση μέσω απ' ευθείας επαφής σε ψυκτικό (R113) και ένα σταγονίδιο μεθανόλης για υψηλό αριθμό Reynolds ($Re \sim 10^4$) μοντελοποιούνται ημι – εμπειρικά, λαμβάνοντας υπ' όψη την παραμόρφωση και την ταλάντωση και έχουν επίσης ερευνηθεί πειραματικά από τους Hijikata, Mori και Kawaguchi. Για να υπολογιστεί η συχνότητα της ταλάντωσης f χρησιμοποιείται η θεωρία των μικρών ταλαντώσεων γύρω από ένα σφαιρικό σχήμα, όπως περιγράφεται από τον Lamb. Αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$f = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)(n+2)\sigma}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho} \frac{1}{U}, \quad (4.207)$$

όπου το n είναι η τάξη της αρμονικής της επιφάνειας και R_0 η μέση χρονικά ακτίνα. Θεωρείται ότι ο πιο σημαντικός τρόπος ταλάντωσης είναι αυτός για τον οποίον $n = 2$. Η μεταβολή στο σχήμα του σταγονιδίου δίνεται από τη σχέση:

$$R(\bar{\mu}, t) = R_0 \left[1 + 2\varepsilon(t)P_2(\bar{\mu}) \right] \quad (4.208)$$

όπου το ε είναι το αδιάστατο πλάτος της ταλάντωσης. Οι συνιστώσες της ταχύτητας μέσα στο σταγονίδιο δίνονται από τις σχέσεις:

$$u_r = U(1 - r^2)\cos\theta + u(t)r(3\cos^2\theta - 1), \quad (4.209)$$

$$u_\theta = -U(1 - 2r^2)\sin\theta - 3u(t)r\sin\theta\cos\theta, \quad (4.210)$$

όπου:

$$u(t) = R_0 \frac{\zeta}{U} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.211)$$

Οι πρώτοι όροι κάθε συνιστώσας της ταχύτητας αντιστοιχούν στο στρόβιλο Hill και οι δεύτεροι όροι αντιπροσωπεύουν την επίδραση της ταλάντωσης. Η εξίσωση ενέργειας που βασίζεται σε αυτές τις συνιστώσες της ταχύτητας εκφράζεται σε σχέση με τις κανονικοποιημένες συντεταγμένες της ροϊκής συνάρτησης με την θερμοκρασία αδιαστατοποιημένη στη μορφή $\hat{\Theta} = (T - T_0)/(T_s - T_0)$. Η συνάρτηση θερμοκρασίας χωρίζεται σε μέσες χρονικά κυμαινόμενες μεταβλητές και επεκτείνεται σε μια κανονική σειρά διαταραχής με το $(1/\text{Pr})$ σαν την παράμετρο διαταραχής. Από την εξίσωση ενέργειας που έχει αναδιατυπωθεί έτσι, λαμβάνεται η μέση χρονική τιμή της σε έναν κύκλο ταλάντωσης και η εξίσωση που προκύπτει ολοκληρώνεται στις κλειστές ροϊκές γραμμές. Η εξίσωση ολοκλήρωσης που έχει αναπτυχθεί έτσι λύνεται με τη χρήση μιας κλειστής συνθήκης που συσχετίζει τη θερμοκρασία διαταραχής με τη μεταβολή της μέσης χρονικά θερμοκρασίας με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιείται στις μικτές θεωρίες στροβιλισμού. Δείχνεται ότι ο αριθμός Nusselt είναι συνάρτηση του εύρους της παραμόρφωσης του σταγονιδίου, της γωνιακής ταχύτητας της παραμόρφωσης και της θερμικής διαχυτότητας της διασκορπισμένης φάσης. Η μεταφορά προς το σταγονίδιο εντείνεται εξ' αιτίας της παραμόρφωσης του σταγονιδίου και της ταλάντωσης. Το εσωτερικό του σταγονιδίου υφίσταται πρόσθετη ανάμιξη εξαιτίας των ταλαντώσεων. Τα πειραματικά αποτελέσματα αποδίδουν ένα συντελεστή μεταφοράς θερμότητας περίπου δέκα φορές μεγαλύτερο από αυτόν μιας στερεής σφαίρας και περίπου τέσσερις φορές μεγαλύτερο από το θεωρητικό αποτέλεσμα για ένα σφαιρικό σταγονίδιο. Οι προβλέψεις του μοντέλου που υπολογίζει την ταλάντωση και την παραμόρφωση φαίνονται να είναι αρκετά κοντά με τα πειραματικά αποτελέσματα.

ΕΞΑΤΜΙΣΗ ΣΤΑΓΟΝΙΔΙΟΥ ΣΕ ΑΕΡΙΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Όπως αναφέρθηκε, για σταγονίδιο ψεκασμού καυσίμου μικρότερο από 30 μm , το καθεστώς ροής βρίσκεται σε χαμηλούς μεταφορικούς αριθμούς Reynolds κατά τη διάρκεια του χρόνου ζωής του σταγονιδίου. Ωστόσο για μεγαλύτερες σταγόνες που εξατμίζονται ($> 100\mu\text{m}$) ο αριθμός Reynolds βάσει της σχετικής ταχύτητας αερίου σταγονιδίου, της ακτίνας του σταγονιδίου και των ιδιοτήτων του αερίου μπορεί να είναι μεγάλος ($\text{Re} : O(100)$) κατά τη διάρκεια σημαντικού μέρους του χρόνου ζωής του σταγονιδίου. Ο αριθμός Reynolds θα ελαττωθεί με το χρόνο. Η μη ομοιόμορφη κίνηση λόγω της εξάτμισης θα εμποδίσει τη μεταφορά στη σταγόνα και θα επηρεάσει τις συνιστώσες της οπισθέλκουσας δύναμης κατά περίπλοκο τρόπο. Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, μπορούμε να υποθέσουμε λεπτά οριακά στρώματα για την αποτελεσματική μεταφορά ορμής, θερμότητας και μάζας τόσο εξωτερικά όσο και εσωτερικά της επιφάνειας του σταγονιδίου. Η εικόνα ολοκληρώνεται με διαχωρισμένα κοντινά απορρεύματα στο εξωτερικό, εσωτερικό απόρρευμα και ροή στον πυρήνα. Η υπόθεση της αξονικής συμμετρίας συνήθως γίνεται στη βάση της παρατήρησης ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος για μια αλλαγή στη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας είναι μεγάλος σε σύγκριση με το χρόνο παραμονής για ένα στοιχείο αερίου ώστε να κινηθεί περνώντας το σταγονίδιο ακόμα και όταν το σταγονίδιο αλλάζει τη διεύθυνση της κίνησής του. Προσεγγιστικές αναλύσεις οριακού στρώματος και πλήρως αριθμητικές λύσεις χρησιμοποιούνται στην προσπάθεια να προβλεφτεί ο ρυθμός εξάτμισης για κίνηση σε υψηλούς και ενδιάμεσους αριθμούς Reynolds.

Στην περίπτωση σταθερής εξάτμισης μιας καθαρής υγρής σταγόνας σε χαμηλή θερμοκρασία έτσι ώστε η επίδραση της συγκέντρωσης ατμού να είναι αμελητέα και για $Re < 2000$, η ακόλουθη σχέση που βασίζεται στις μελέτες των Frossling και Ranz & Marshall προτείνεται από τους Yuen & Chen:

$$Nu = 2 + 0.6Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}. \quad (4.212)$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή σαν συσχέτιση Ranz – Marshall. Μπορεί να εφαρμοστεί στη μεταφορά μάζας αντικαθιστώντας το Pr με Sc και το Nu με Sh . Οι ιδιότητες υπολογίζονται στις συνθήκες του film. Μια άλλη σχέση που συνήθως εφαρμόζεται είναι η σχέση Spalding:

$$\frac{\bar{m}d}{\mu} = 0.53B^{\frac{3}{5}}Re^{\frac{1}{2}}, \quad (4.213)$$

όπου $B = c_p(T_s - T_{\infty})/\lambda$ είναι ο αριθμός μεταφοράς

Η σχέση Ranz – Marshall (4.212) βασίζεται σε συγκεκριμένες ημι - σταθερές όπως, σταθερή ακτίνα, πορώδες, πειράματα σε υγρή σφαίρα και είναι κατάλληλη μόνο για μικρές τιμές του B . Η σχέση Spalding βασίζεται σε πειράματα όπου $800 < Re < 4000$ και προτείνεται για $0.6 < B < 5$. Καμία από τις σχέσεις δεν υπολογίζει τη μεταφορική θέρμανση της διασκορπισμένης φάσης, την παλινδρομούσα διεπιφάνεια και την εσωτερική κυκλοφορία. Για την εξάτμιση σταγονιδίων νερού στον αέρα, πειραματικές σχέσεις παρουσιάζονται από τους Beard & Pruppacher, Pruppacher & Rasmussen, Yao & Schrock, και Yuen & Chen. Για σταγονίδια νερού στον αέρα, η διαδικασία εξάτμισης έχει αριθμητικά ερευνηθεί από τους Woo & Hamielec. Οι αναλυτικές και αριθμητικές μελέτες που σχετίζονται με τα παραπάνω θέματα μαζί με συγκρίσεις με πειραματικά αποτελέσματα αναφέρονται στη συνέχεια. Πρόσφατες μελέτες της εξάτμισης των σταγονιδίων, ειδικά των σταγονιδίων καυσίμων, έχουν συμβάλει στην ανάπτυξη καλύτερης γνώσης των βασικών μηχανισμών και έτσι είναι διαθέσιμος ένας αριθμός καινούργιων και περιεκτικών σχέσεων.

ΕΞΑΤΜΙΣΗ ΣΤΑΓΟΝΑΣ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

Οι αριθμητικές μελέτες της εξάτμισης σταγονιδίου χρησιμοποιούν ως επί το πλείστον τεχνικές πεπερασμένης διαφοράς, και οι αρχικές μεταβλητές της αέριας φάσης (συνιστώσες ταχύτητας, θερμοκρασία, πίεση και κλάσματα μάζας) υπολογίζονται απ' ευθείας χωρίς μετασχηματισμό σε άλλες μεταβλητές. Η αξονικά συμμετρική, ασταθής μορφή των κινητήριων εξισώσεων λύνεται με άκαμπτες οριακές συνθήκες στην αντίθετη κατεύθυνση της ροής και μηδενικής παραγωγού οριακές συνθήκες στην κατεύθυνση της ροής. Η υγρή και αέρια ροή συνδέονται στην επιφάνεια του σφαιρικού σταγονιδίου με συνθήκες συνέχειας της θερμοκρασίας των συστατικών και γενικά με κάθετες ροές μάζας, κάθετες ροές θερμότητας μαζί με την ισορροπία της κάθετης και επαπτομενικής δύναμης. Η μέθοδος της ροϊκής συνάρτησης στροβιλισμού τυπικά χρησιμοποιείται για το ασυμπύεστο υγρό.

Πειραματικά αποτελέσματα για ρυθμούς μεταφοράς θερμότητας σε προσομοιωμένα και σε ελεύθερα αιωρούμενα σταγονίδια νερού, μεθανόλης και επτανίου αναφέρονται από τους Renksizbulut και Yuen. Ο πειραματισμός γίνεται για ένα εύρος τιμών $25 < Re < 2000$ και $0.07 < B < 2.79$ όπου:

$$B = \frac{c_p (T_s - T_\infty)}{\lambda} \left(1 + \frac{\mathcal{Q}_R \phi}{\mathcal{Q}_R} \right) \quad (4.214)$$

Εδώ το \mathcal{Q}_R είναι η ροή θερμότητας μέσω ακτινοβολίας στην σταγόνα. Τα δεδομένα δείχνουν ότι σε ψηλότερες θερμοκρασίες η εξάτμιση μειώνει τους ρυθμούς μεταφοράς θερμότητας κατά έναν παράγοντα ίσο με $(1 + B_f)^{0.7}$ όπου ο δείκτης f δείχνει την κατάσταση της μεμβράνης, δηλαδή την μέση αριθμητική μοριακή συγκέντρωση και τη θερμοκρασία. Από τους Renksizbulut και Yuen, παρέχονται αριθμητικές λύσεις για τους ρυθμούς εξάτμισης εξ' αιτίας της ροής αέρα υψηλής θερμοκρασίας πάνω από σταγονίδια νερού, μεθανόλης και στερεών σφαιρών και της ροής υπέρθερμου ατμού πάνω από σταγονίδια νερού. Η αριθμητική διαδικασία βασίζεται σε μια μέθοδο πεπερασμένης διαφοράς που εφαρμόζει τη διατύπωση της ροϊκής συνάρτησης στροβιλισμού. Οι θερμοκρασίες κυμαίνονται από 600 ως 1000 K και $10 < Re < 100$. Η αέρια φάση θεωρείται σαν διμερές μίγμα ιδανικών αερίων ίσων μοριακών βαρών και ίσων και σταθερών ειδικών θερμοτήτων. Η υπόθεση της ίσης ειδικής θερμότητας έχει αμφισβητηθεί από τους Abramzon και Sirignano. Μια σταθερής θερμοκρασίας υγρή φάση έχει θεωρηθεί και η κίνηση της υγρής φάσης και η θέρμανση του πυρήνα θεωρούνται αμελητέες. Το μοντέλο του θερμαινόμενου υγρού υπολογίζει τις επιπτώσεις της κίνησης του υγρού μέσω της χρήσης της δραστικής θερμικής αγωγιμότητας. Οι υποθέσεις της υγρής φάσης είναι επίσης δύσκολο να δικαιολογηθούν. Σε πιέσεις υψηλότερες από 10 bar, οι ρυθμοί επιφανειακής παλινδρόμησης είναι υψηλότεροι και οι ασταθείς επιδράσεις στην αέρια φάση θεωρούνται σημαντικές. Τα σημαντικά αποτελέσματα περιλαμβάνουν σχέσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ένα ημι – σταθερό τρόπο για να προβλέψουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά σταγονιδίου για πιέσεις του συστήματος μέχρι 10 bar. Αυτές οι σχέσεις βασίζονται σε μελέτες της εξάτμισης σταγόνας σε αέρια ρεύματα μέχρι 1059K, $10 < Re_m < 2000$ μαζί με ένα μοντέλο απλής διάχυσης για θέρμανση της υγρής φάσης. Συγκεκριμένα, για οπισθέλκουσα σταγονιδίου ($10 < Re_m < 300$):

$$C_D (1 + B_{Hf})^{0.2} = 24 Re_m^{-1} + 4.8 Re_m^{-0.37}, \quad (4.215)$$

και για μεταφορά θερμότητας ($10 < Re_m < 2000$):

$$Nu_f (1 + B_{Hf})^{0.7} = 2 + 0.57 Re_m^{\frac{1}{2}} Pr_f^{\frac{1}{3}}, \quad (4.216)$$

όπου C_D είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας, $B_{Hf} = (T_\infty - T_s) c_p / \lambda$ είναι ο αριθμός μεταφοράς και η διακύμανση του είναι $0.07 < B_{Hf} < 2.79$. Όλες οι ιδιότητες υπολογίζονται σε συνθήκες μεμβράνης εκτός από την πυκνότητα του αριθμού Reynolds που παίρνει την τιμή που έχει στην ελεύθερη ροή και αυτός ο αριθμός Reynolds δηλώνεται με Re_m . Οι αριθμητικές λύσεις δείχνουν ότι η ροή αέρα στην διεπιφάνεια αυξάνει τον συντελεστή οπισθέλκουσας, C_D , συμφωνώντας με τις πειραματικές παρατηρήσεις. Αυτό το συμπέρασμα, ωστόσο, είναι σε πλήρη ασυμφωνία με τα αριθμητικά αποτελέσματα των Dwyer & Sanderts που δείχνουν ότι ο C_D μειώνεται σημαντικά καθώς το σταγονίδιο εξατμίζεται και η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στο σταγονίδιο και το αέριο μειώνεται. Μπορεί ωστόσο να σημειωθεί ότι η υπόθεση σταθερής ιδιότητας που επικαλείται είναι αμφισβητούμενη. Πιο εξελιγμένες

αριθμητικές τεχνικές έχουν χρησιμοποιηθεί από τον Renksizbulut κ.α. για να επιλύσουν τα προβλήματα εξάτμισης.

Η μεταφορική εξάτμιση ενός σφαιρικού σταγονιδίου καυσίμου n-επτανίου σε υπέρθερμα ρεύματα n-επτανίου στους 800K και σε πίεση από 1 ως 10 bar έχει μελετηθεί από τους Renksizbulut & Haywood χρησιμοποιώντας την αριθμητική μέθοδο που βασίζεται στον πεπερασμένο όγκο. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα που επιτυγχάνονται δεν είναι εφαρμόσιμα στη συνήθη κατάσταση ενός περιβάλλοντος (χωρίς ατμούς) όπου η διάχυση μπορεί να είναι ο ρυθμιστικός παράγοντας (παράγοντας ελέγχου). Οι Haywood, Nafziger, & Renksizbulut έχουν επεκτείνει την πρώιμη ανάλυση για την περίπτωση σταγονιδίου n-επτανίου που εξατμίζεται στον αέρα σε συνθήκες 800K και 1atm. Το σταγονίδιο είναι αρχικά σε μια ομοιόμορφη θερμοκρασία 298K χωρίς εσωτερική κίνηση και έχει ένα αρχικό αριθμό Reynolds 100 βάσει των θερμοφυσικών ιδιοτήτων της ελεύθερης ροής. Οι επιδράσεις όλων των μεταβατικών και μεταβλητών ιδιοτήτων τόσο στην αέρια όσο και στην υγρή φάση συμπεριλαμβάνονται. Η επίδραση της επιφανειακής παλινδρόμησης και η επιβράδυνση του σταγονιδίου κάτω από την επίδραση της ίδιας του της οπισθέλκουσας εξετάζονται. Εκτιμάται ότι οι επιδράσεις της αυξημένης επιφανειακής κίνησης και οι δεύτερης τάξης επιδράσεις της οπισθέλκουσας μπορεί να καθιστούν τις εξισώσεις συσχέτισης (4.215) και (4.216) μη εφαρμόσιμες σε υψηλότερες πιέσεις. Ωστόσο, ο μεταβατικός συντελεστής οπισθέλκουσας και εξελίξεις των αριθμών Nusselt και Sherwood που υπολογίζονται από το πλήρως μεταβατικό αριθμητικό μοντέλο που περιγράφηκε από τον Haywood κ.α. προβλέπονται καλά από τις ημι-σταθερές σχέσεις (4.215) και (4.216) με κατάλληλες διορθώσεις για την επίδραση των μεταβλητών ιδιοτήτων και τη θέρμανση της υγρής φάσης. Οι σχέσεις που προτείνονται από τους Haywood κ.α. για τον C_D και για τον αριθμό Nusselt είναι οι ίδιες με τις εξισώσεις (4.215) και (4.216) αντίστοιχα εκτός από το ότι τώρα ο αριθμός μεταφοράς πρέπει να τροποποιηθεί ως εξής:

$$B_{Mf}^A = B_{Mf} \left(1 - \frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}} + \frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}} \right) \quad (4.217)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το \dot{Q}_R / \dot{Q} είναι το κλάσμα της μεταφοράς θερμότητας στην υγρή φάση και \dot{Q}_R / \dot{Q} είναι η αναλογία του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας μέσω θερμικής ακτινοβολίας στην διεπιφάνεια προς τον ρυθμό μεταφοράς θερμότητας της αέριας φάσης. Η μεταβατική θέρμανση της υγρής φάσης πρέπει να μοντελοποιηθεί έτσι ώστε να επιτευχθούν η επιφανειακή θερμοκρασία και ο ρυθμός θέρμανσης του υγρού για να εισαχθούν στον αριθμό μεταφοράς που εμφανίζεται στις σχέσεις. Για μεταφορά μάζας, η ακόλουθη εξίσωση προτείνεται από τους Renksizbulut, Nafziger, & Li:

$$Sh_f (1 + B_{Mf})^{0.7} = 2 + 0.87 Re_m^{1/2} Sc_f^{1/3}, \quad 10 \leq Re_m \leq 2000 \quad (4.218)$$

όπου:

$$B_{Mf} = \frac{\bar{Y}_{F,s} - Y_{F,\infty}}{1 - \bar{Y}_{F,s}} \quad (4.219)$$

Η αδιάστατη παράμετρος $Sh_f = 2Rh_M / (\rho_f D_f)$ είναι ο αριθμός Sherwood και $Sc_f = \mu_f / (\rho_f D_f)$ είναι ο αριθμός Schmidt. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας και τα αποτελέσματα μεταφοράς για ημι – σταθερή εξάτμιση ενός σταγονιδίου n-επτανίου στον αέρα που υπολογίζονται από τους Huang & Ayyaswamy με τη χρήση μιας αριθμητικής διαδικασίας που βασίζεται σ' ένα υβριδικής διαφοράς σχέδιο, συμφωνούν πολύ καλά με τις προβλέψεις του Haywood κ.α. και του Renksizbulut κ.α. Κάποια αλλά συμπεράσματα από τις παραπάνω μελέτες είναι:

- Η αδιάστατη ακτίνα του σταγονιδίου, (R/R_0) , είναι γραμμική συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου (tU_{∞} / R_0) , εκτός από την πολύ αρχική φάση της μετάβασης.
- Το σταγονίδιο βρίσκεται για μεγάλο μέρος του χρόνου ζωής του σε σχετικά υψηλούς αριθμούς Reynolds όπου οι επιδράσεις της μεταφοράς θερμότητας δι' αγωγή είναι κυρίαρχη. Ωστόσο, αργότερα οι στιγμιαίοι αριθμοί Reynolds είναι μικροί και οι προσεγγίσεις του οριακού στρώματος μπορεί να είναι ακατάλληλες.
- Η θέρμανση υγρού είναι σημαντική για περίπου το πρώτο μισό του χρόνου ζωής του σταγονιδίου. Σε ανυψωμένες πιέσεις, η θέρμανση του υγρού θα διαρκεί για μεγαλύτερο τμήμα του χρόνου ζωής.
- Εκτός από μια γρήγορη μείωση στην πρώιμη μεταβατική περίοδο, ο ολικός συντελεστής οπισθέλκουσας αυξάνει καθώς ο αριθμός Reynolds του σταγονιδίου μειώνεται. Η πρώιμη μείωση αποδίδεται στην άμεση μείωση της διατμητικής τάσης και του ιξώδους του μίγματος με την έναρξη της εξάτμισης. Αργότερα, αυτές οι επιδράσεις χάνουν τη σημασία τους και άλλοι μηχανισμοί όπως η κυριαρχία της οπισθέλκουσας της πίεσης γίνονται σημαντικοί.
- Η μεταβατική δυναμική τόσο της μεταφοράς μάζας όσο και της μεταφοράς θερμότητας είναι παρόμοιες. Τα διογκωμένα οριακά στρώματα και οι τροποποιημένες ιδιότητες που συνοδεύουν την έναρξη της εξάτμισης (μειωμένη θερμική αγωγιμότητα και η πλούσια σε καύσιμο περιοχή κοντά στην επιφάνεια) εμποδίζουν τη μεταφορά θερμότητας και μάζας στην επιφάνεια. Μια απότομη αρχική πτώση παρατηρείται για τους αριθμούς Nusselt και Sherwood. Αργότερα με τις μειωμένες επιδράσεις μεταφοράς δι' αγωγή, αυτοί οι αριθμοί συνεχίζουν να μειώνονται αλλά με πολύ μικρότερους ρυθμούς.
- Αγνοώντας τη συνεισφορά από τη περιοχή του απορρεύματος (οριζόμενη από $\theta^3 > 120^\circ$) μπορεί να παρουσιαστούν σφάλματα της τάξης του 10% στις προβλέψεις για τους μέσους αριθμούς Nusslet και Sherwood.

Όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις περιορίζονται στην εξάτμιση απομονωμένων σταγονιδίων. Πιο πρόσφατα, έχουν χρησιμοποιηθεί κάποιες εξελιγμένες αριθμητικές μέθοδοι για να ερευνηθούν τα απομονωμένα σταγονίδια και για να εξεταστεί η αλληλεπίδραση των σταγονιδίων στα πλαίσια της εξάτμισης. Μελέτες απομονωμένων, όπως και αλληλεπιδρώντων εξατμιζομένων σταγονιδίων καυσίμου περιγράφονται από τους Chiang, Raju & Sirignano και τους Chiang & Sirignano. Οι μεταβαλλόμενες ιδιότητες και η εσωτερική κυκλοφορία στη σταγόνα λαμβάνονται υπ' όψη. Η συνεχής φάση περιγράφεται σε σχέση με ένα αξονικά συμμετρικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, z) , ενώ για τη διασκορπισμένη

φάση χρησιμοποιείται ένα αξονικά συμμετρικό σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Η επιλογή του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων αναφέρεται για να διευκολύνει τον αριθμητικό υπολογισμό, ιδιαίτερα για την περιγραφή των συνθηκών εισροής και εκροής. Η συνεχής φάση αντιμετωπίζεται σε σχέση με αρχικές μεταβλητές ενώ οι εξισώσεις της διασκορπισμένης φάσης αναδιατυπώνονται σε σχέση με τη ροϊκή συνάρτηση και το στροβιλισμό. Η ανάλυση ορίζει πέντε διαφορετικές κλίμακες χρόνου. Αυτές είναι: (1) ο χρόνος αέριας – θερμικής διάχυσης $\tau_{Eg} = tk_{\psi} / R_0^2 \rho_{\psi} c_{p\psi}$, (2) ο χρόνος υγρής – θερμικής διάχυσης $\tau_{El} = t\hat{k}_0 / R_0^2 \hat{\rho}_0 \hat{c}_{p0}$, (3) ο χρόνος αέριας – υδροδυναμικής διάχυσης $\tau_{Hg} = t\mu_{\psi} / R_0^2 \rho_{\psi}$ (4) ο χρόνος υγρής – υδροδυναμικής διάχυσης $\tau_{Hl} = t\hat{\mu}_0 / R_0^2 \hat{\rho}_0$ και (5) ο χρόνος αέριας – διάχυσης των συστατικών $\tau_S = tD_{\psi} / R_0^2$.

ΜΕΛΕΤΕΣ ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΣΤΑΓΟΝΙΔΙΩΝ

Για τη μελέτη ενός απομονωμένου σταγονιδίου, η αξονικά συμμετρική εξίσωση Navier – Stokes, η εξίσωση ενέργειας και η εξίσωση των συστατικών, επιλύονται επαναληπτικά χρησιμοποιώντας ένα ενδεχόμενο σχέδιο πεπερασμένης – διαφοράς με δημιουργία προσαρμοσμένου στα όρια πλέγματος. Το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς για την αριθμητική εκτίμηση είναι το κέντρο του σταγονιδίου και είναι μη αδρανειακό. Η σχετική ταχύτητα μεταξύ της ελεύθερης ροής και της σταγόνας αλλάζει σε κάθε χρονικό βήμα εξαιτίας της οπισθέλκουσας που εφαρμόζεται από τη σταγόνα. Προκειμένου να επανέλθει η ταχύτητα της σταγόνας στο μηδέν στον αριθμητικό υπολογισμό, είναι αναγκαίο να επιβραδυνθεί το πεδίο ροής της συνεχούς φάσης. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας την αντίθετη δύναμη αδράνειας D' Alembert εξ' αιτίας της οπισθέλκουσας της σταγόνας, ομοιόμορφα σε όλη την συνεχή φάση για κάθε χρονικό βήμα. Αυτή η διαδικασία υπολογίζει σωστά την ψευδο – επιβράδυνση του πεδίου ροής που οφείλεται στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Η αλλαγή της σχετικής ταχύτητα μεταξύ της ελεύθερης ροής και του σταγονιδίου ορίζεται από τη σχέση:

$$\Delta U_{rel} = \Delta t_{Hg} \frac{dU}{dt_{Hg}} \quad (4.220)$$

όπου U είναι η στιγμιαία ταχύτητα του σταγονιδίου. Η ταχύτητα της συνεχούς φάσης σε ολόκληρο το πεδίο προσαρμόζεται αριθμητικά έτσι ώστε να λαμβάνεται υπ' όψη η επίδραση της ανεστραμμένης αδράνειας θέτοντας :

$$U(r, z, t + \Delta t) = U(r, z, t) + \Delta U_{rel}. \quad (4.221)$$

Οι κινητήριες εξισώσεις της συνεχούς φάσης μετασχηματίζονται από ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (t, r, z) σε ένα ομοιόμορφα χωρικό πλέγμα στο υπολογιστικό πεδίο (τ, η, ξ) εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} n_t &= -J(r_{\tau} z_{\xi} - r_{\xi} z_{\tau}), & \xi_t &= J(r_{\tau} z_n - r_n z_{\tau}), \\ n_r &= Jz_{\xi}, & \xi_r &= -Jz_n, & n_z &= -Jr_{\xi}, & \xi_z &= Jr_n, \end{aligned} \quad (4.222)$$

όπου:

$$J = \frac{\eta(t, n, \xi)}{\eta(t, r, z)} \quad (4.223)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός διευκολύνει την αυθαίρετη κίνηση του ορίου. Οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται σε ορθογώνιο πλέγμα με $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Η τροποποιημένη αριθμητική συνεχής μέθοδος Euler (Implicit – Continuous – Eulerian method – ICE) χρησιμοποιείται για την επίλυση του πεδίου ροής στη συνεχή φάση. Στην τροποποιημένη διαδικασία όλες οι ποσότητες εκτός από τις u_r , u_z , p και ρ υπολογίζονται σαφώς από τις τιμές που προκύπτουν στο αμέσως προηγούμενο βήμα επανάληψης. Ωστόσο, αντί να εκτιμηθεί η πίεση από την παράγωγο της εξίσωσης πίεσης, για να ρυθμιστεί το πεδίο πίεσης χρησιμοποιείται η διόρθωση της πίεσης σε σύνδεση με την μέθοδο πρόβλεψης – διόρθωσης εναλλασσόμενης διεύθυνσης (alternate direction predictor – corrector method ή ADPC). Όταν το διορθωμένο πεδίο πίεσης που υπολογίζεται έτσι, αντικατασταθεί στις εξισώσεις ορμής, το πεδίο ταχύτητας που προκύπτει ικανοποιεί αυτόματα την συνθήκη συνέχειας. Η μέθοδος ADPC χρησιμοποιείται επίσης για τη επίλυση των εξισώσεων στροβιλισμού και ενέργειας στην διασκορπισμένη φάση. Η πλήρως ICE μέθοδος επιλέγεται για τα σύμφυτα σταθεροποιητικά χαρακτηριστικά της.

Η μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς χρησιμοποιεί ένα σχέδιο κεντρικής διαφοράς για τις χωρικές παραγώγους και είναι επομένως δεύτερης τάξης ακρίβειας. Η ελλειπτική φύση της ροϊκής συνάρτησης και των εξισώσεων διόρθωσης πίεσης τις καθιστά υποκείμενες σε αποτελεσματική λύση από τη διαδοχική μέθοδο υπέρ - χαλάρωσης.

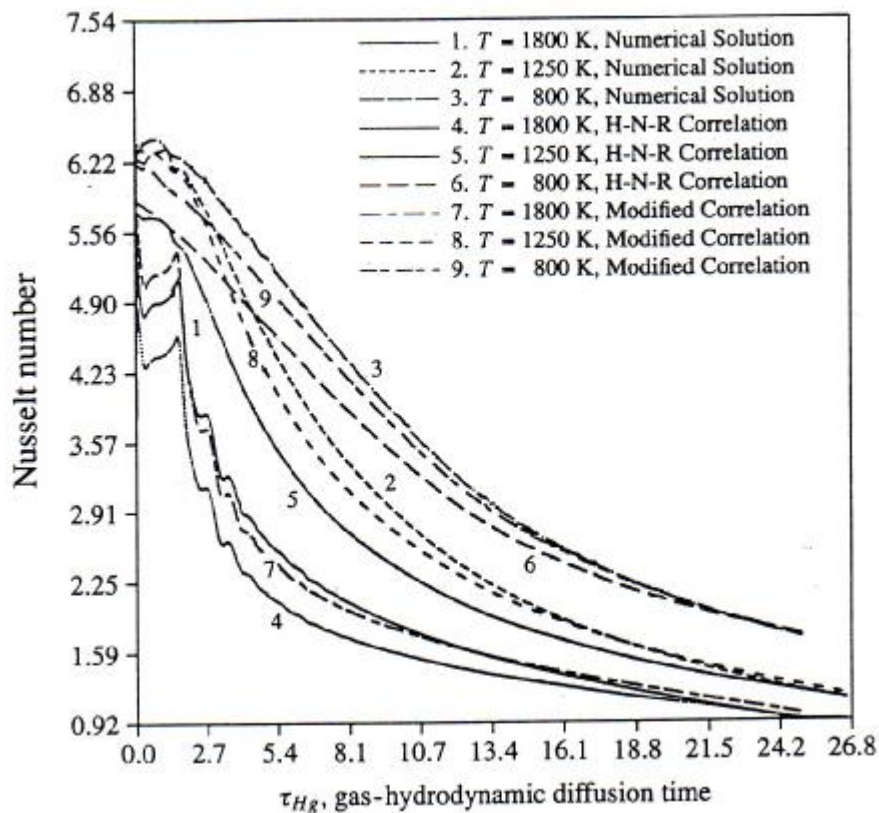
Οι διεπιφανειακές συνθήκες σε αυτό το πρόβλημα είναι μη γραμμικές και στενά συνδεδεμένες με τις μεταβλητές T , Y_f , ρ , u_n και u_θ . Για να ελαχιστοποιηθούν οι επιδράσεις αυτής της σύνδεσης χρησιμοποιείται μια τεχνική ημι - γραμμικοποίησης και οι παράγωγοι στην διεπιφάνεια υπολογίζονται από διαγράμματα ακρίβειας δεύτερης τάξης. Ένα σχέδιο κεντρικής διαφοράς δύο σημείων χρησιμοποιείται στην διεύθυνση ξ ενώ η μιας πλευράς διαφορά τριών σημείων χρησιμοποιείται στη διεύθυνση η . Οι εξισώσεις που προκύπτουν λύνονται από μια διαδικασία αντιστροφής τρι - διαγώνιου πίνακα. Με τη θεώρηση των οριακών συνθηκών εισροής και εκροής, περιγράφονται οι συνθήκες εισροής Dirichlet. Οι συνθήκες εκροής απαιτούν ειδική θεώρηση. Σε περιεκτικές αριθμητικές μελέτες οι Ryskin και Leal έχουν δείξει ότι η αριθμητική ταλάντωση στην κατεύθυνση της ροής που οφείλεται στη χρήση ενός σχήματος κεντρικής διαφοράς, μπορεί να ελαχιστοποιηθεί μειώνοντας το μέγεθος του πλέγματος και εφαρμόζοντας συνθήκες Neumann στο όριο της εκροής. Οι συνολικές συνθήκες παραγώγων που εκφράζονται από τη σχέση:

$$\frac{D(u_r)^2}{Dt} = \frac{D(u_z)}{Dt} = \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} = \frac{DY_f}{Dt} = 0 \quad (4.224)$$

στο όριο εκροής, είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές στον έλεγχο της αριθμητικής διάχυσης. Η θέση του εξωτερικού ορίου r_Ψ στο υπολογιστικό πεδίο δίνεται για:

$$r_\Psi = 16.6R.$$

Τα αποτελέσματα δείχνουν συγκρινόμενα, ότι οι μεταβλητής πυκνότητας, αλλά σταθερών ιδιοτήτων κατά τ' άλλα υπολογισμοί των Patnaik, Sirignano, Dwyer και Sanders πιθανόν να υπερεκτιμάνε τους συντελεστές οπισθέλκουσας μέχρι και 20%. Η οπισθέλκουσα του ιξώδους είναι ουσιαστικά μειωμένη σε υψηλότερες τιμές επιφανειακής ροής. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας πίεσης αυξάνει σταθερά σαν αποτέλεσμα των μειώσεων στην ταχύτητα της ροής. Η οπισθέλκουσα ώση γίνεται σημαντική σε υψηλούς αριθμούς μεταφοράς. Υπολογίζεται ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να ηρεμήσει το πεδίο ροής από την αρχική αυθόρμητη κίνηση είναι $\Delta t : 2R/U_{\infty} : 0.4$ των χρόνων διάχυσης και κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, ο συντελεστής οπισθέλκουσας μειώνεται γρήγορα, με πιο απότομες μεταβολές σε υψηλότερες θερμοκρασίες περιβάλλοντος. Στη συνέχεια το C_D αυξάνει σαν αποτέλεσμα της μείωσης του αριθμού Reynolds. Τα αποτελέσματα που αναφέρονται για την οπισθέλκουσα διαφέρουν ως και 20% από τις προβλέψεις των συσχετίσεων που περιγράφονται από τον Haywood κ.α.



ΣΧΗΜΑ 4.6: Ο αριθμός Nusselt συναρτήσει του χρόνου για διαφορετικές θερμοκρασίες περιβάλλοντος, αριθμητικά αποτελέσματα και συσχετίσεις.

Το σχήμα 4.6 δείχνει τους μέσους αριθμούς Nusselt σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες περιβάλλοντος και τις συγκρίσεις με τις προβλέψεις του Haywood κ.α. (συσχετίσεις H-N-R). Και πάλι υπάρχει απόκλιση ανάμεσα στις δύο προβλέψεις, αν και η ασυμφωνία γίνεται μικρότερη αργότερα όταν η επιφανειακή θερμοκρασία προσεγγίζει τη θερμοκρασία υγρού βολβού. Παρόμοιες τάσεις επικρατούν για τις μεταβολές στον αριθμό Sherwood. Τα αριθμητικά αποτελέσματα των Chiang & Sirignano οδηγούν στην ακόλουθη σειρά συσχετίσεων:

$$C_D (1 + B_{ff}^A)^{0.27} = 24.432 \text{Re}_m^{-0.721}, \quad (4.225)$$

$$\text{Nu}_f (1 + B_{ff}^A)^{0.678} = 1.275 \text{Re}_m^{0.438} \text{Pe}_f^{0.619}, \quad (4.226)$$

$$\text{Sh} (1 + B_{mf}^A)^{0.568} = 1.224 \text{Re}_m^{0.385} \text{Sc}_f^{0.492}, \quad (4.227)$$

όπου $0.4 \leq B_{ff}^A \leq 13$, $0.2 \leq B_{mf}^A \leq 6.5$, $25 \leq \text{Re}_m \leq 200$, $0.7 \leq \text{Pr}_m \leq 1.0$ και $0.4 \leq \text{Sc}_m \leq 2.2$.

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΩΝΤΑ ΣΤΑΓΟΝΙΔΙΑ

Η αριθμητική διαδικασία για να αντιμετωπιστούν δύο εξαμιζόμενα σταγονίδια που κινούνται σε σειρά απαιτεί να γίνουν δύο πρόσθετες θεωρήσεις, η μία για τον υπολογισμό των μεταβολών της απόστασης του σταγονιδίου και η άλλη για τη δημιουργία του πλέγματος. Η μεταβολή της απόστασης καθορίζεται από τη σχετική επιτάχυνση (ή επιβράδυνση) μεταξύ των σταγονιδίων και δίνεται από:

$$\text{τρέχουσα απόσταση} = \text{προηγούμενη απόσταση} + \frac{1}{2} \text{Re}_{\zeta_0}^{\Delta T_{Hg}} U_{\text{ακολουθούντος σταγονιδίου}} dt_{Hg} \quad (4.228)$$

Το κέντρο του προπορευόμενου σταγονιδίου είναι η αρχή που επιλέγεται για το μη αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς. Μια κατάλληλη διόρθωση D' Alembert γίνεται για το πεδίο ροής της συνεχούς φάσης για να υπολογίσει αυτή την επιλογή του πλαισίου αναφοράς. Επιπρόσθετα πρέπει να υπάρχει προσοχή ενώ εφαρμόζονται οι διεπιφανειακές συνθήκες στο σταγονίδιο που ακολουθεί του οποίου το κέντρο δεν είναι σταθερό σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς. Η δημιουργία του υπολογιστικού πλέγματος για το πρόβλημα των δύο σταγονιδίων χρειάζεται ειδική θεώρηση. Εδώ ένα προσαρμοσμένο οριακό σύστημα συντεταγμένων δημιουργείται, στο οποίο οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι λύσεις ενός ελλειπτικού μερικά διαφορικού συστήματος στο φυσικό επίπεδο. Το σύστημα έχει οριακές συνθήκες Dirichlet σε όλα τα όρια με μια συντεταγμένη σταθερή για κάθε όριο. Για την άλλη συντεταγμένη γύρω από το κάθε όριο ορίζεται μια μονότονη μεταβολή. Τα μεταβαλλόμενα οριακά σχήματα εξ' αιτίας της παλινδρόμησης της επιφάνειας του σταγονιδίου και της μεταβαλλόμενης απόστασης του σταγονιδίου, υπολογίζονται με τη χρήση του κώδικα TOMCAT. Το σύστημα πλέγματος σχεδιάζεται για να απεικονίσει με ακρίβεια τις γρήγορες μεταβολές στο οριακό στρώμα και για να εξασφαλίζει την ανάλυση στην περιοχή του απορρεύματος ανάμεσα στα δύο σταγονίδια. Το σύστημα εξισώσεων Poisson που προκύπτει λύνεται από την διακριτοποίηση της πεπερασμένης διαφοράς χρησιμοποιώντας την τεχνική SOR.

Αποτελέσματα για την απόσταση μεταξύ των κέντρων για δύο αλληλεπιδρώντα σταγονίδια σε συνάρτηση του χρόνου, για διάφορες αρχικές αποστάσεις καθώς και για διάφορες αρχικές αναλογίες των ακτινών των σταγονιδίων, παρέχονται από τους Chiang & Sirignano. Αποδεικνύεται ότι μπορεί να υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της αρχικής αναλογίας ακτινών των σταγονιδίων που διαχωρίζει την αύξηση της απόστασης, από τη μείωση της απόστασης με το χρόνο. Νέες

συσχετίσεις για το συντελεστή οπισθέλκουσας, τον αριθμό Nusselt και τον αριθμό Sherwood για το προπορευόμενο σταγονίδιο και το σταγονίδιο που κινείται στη ροή του ρεύματος δίνονται επίσης από τους Chiang & Sirignano.

ΕΞΑΤΜΙΣΗ ΣΤΑΓΟΝΙΔΙΟΥ ΠΟΥ ΥΦΙΣΤΑΤΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

Σ' ένα καυστήρα ψεκασμού υδρογονανθράκων, ένα τυπικό σταγονίδιο μπορεί να έχει έναν αρχικό αριθμό Reynolds $Re \sim 110$ και έναν αρχικό αριθμό Weber $We \sim 2$. Τα σταγονίδια σε αυτόν τον αριθμό Weber είναι πιθανό να παραμορφωθούν σημαντικά. Μια αριθμητική μέθοδος πεπερασμένου όγκου που χρησιμοποιεί ένα μη ορθογωνικό προσαρμοζόμενο πλέγμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς τόσο των σταγονιδίων που υφίστανται σταθερή παραμόρφωση, όσο και αυτών που υφίστανται μεταφορική παραμόρφωση, έχει περιγραφεί από τους Haywood, Renksizbulut & Raithby. Οι ακόλουθες αναφορές βασίζονται στην αναθεώρηση του Ayyaswamy .

Εξίσωση	Φ	Γ_Φ	S_Φ
Συνέχεια	1	0	S_c
Αξονική Ορμή	u_z	$2\mu/Re_{\gamma,0}$	S_{u_z}
Ακτινική Ορμή	u_r	$2\mu/Re_{\gamma,0}$	S_{u_r}
Ενέργεια	T	$2k/(c_p Re_{\gamma,0} Pr_\gamma)$	S_E
Συστατικά	Y_F	$2\rho D_{FA}/(Re_{\gamma,0} Sc_\gamma)$	S_Y

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1: Ταυτοποίηση παραμέτρων στην γενικευμένη εξίσωση (4.229)

Η βάση της μεθόδου πεπερασμένου όγκου που παρουσιάζεται είναι η ολοκλήρωση των εξισώσεων μεταφοράς κατά μήκος διακριτών όγκων ελέγχου και διακριτών χρονικών βημάτων και η έκφραση της διατήρησης της "γενικής" ποσότητας Φ (μάζας, αξονικής ορμής, ακτινικής ορμής, ενέργειας, ή συστατικών) σε σχέση με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για το Φ που σχετίζουν την τιμή του σε οποιαδήποτε θέση με τις τιμές του στα γειτονικά σημεία. Οι εξισώσεις μεταφοράς επαναδιατυπώνονται για κυλινδρικές συντεταγμένες (r, z) σε μορφές κατάλληλες για ανάλυση με χρήση όγκου ελέγχου με την εφαρμογή του κανόνα του Leibnitz και του θεωρήματος απόκλισης του Gauss. Η επιλογή κυλινδρικών συντεταγμένων διευκολύνει την αριθμητική ανάλυση καθώς το σταγονίδιο θεωρείται μη σφαιρικό αλλά συμμετρικό ως προς τον άξονα. Οι εξισώσεις συνοπτικά παρουσιάζονται όπως παρακάτω:

$$\frac{d}{dt} \zeta_V (\rho\phi) dV + \zeta_S \rho(u - u_s) g \Phi dA = \zeta_S \Gamma_\Phi P \Phi g n dA + S_\Phi, \quad (4.229)$$

όπου Γ είναι ο γενικός συντελεστής μεταφοράς, τα V και S εκφράζουν τον όγκο ελέγχου και την επιφάνεια του αντίστοιχα και το S_ϕ είναι ο όρος πηγής. Παρ' όλο που καμία από τις εξισώσεις μεταφοράς δεν έχει σαφείς όρους πηγής στην αυθεντική τους μορφή, πηγές προκύπτουν σε αυτήν τη διατύπωση εξ' αιτίας της επιλογής της αδιαστατοποίησης και της μορφοποίησης των εξισώσεων. Οι διάφορες παράμετροι στην εξίσωση (4.229) που είναι κατάλληλες στις αντίστοιχες κινητήριες εξισώσεις δίνονται στον πίνακα 4.1 όπου:

$$Sc = 0,$$

$$S_{u_z} = \frac{2}{Re_{\gamma,0}} \zeta_S (\tau : ne_z - \mu P u_z gn) dA + \zeta_V \int_V P \rho g_e z + \rho \frac{dU_{\gamma,0}}{dt} dV,$$

$$S_{u_r} = \frac{2}{Re_{\gamma,0}} \zeta_S (\tau : ne_r - \mu P u_r gn) dA + \zeta_V (-P \rho g_r) dV,$$

$$S_E = \zeta_V \int_V \frac{2k}{Re_{\gamma,0} Pr_{\gamma} c_p^2} (P T g c_p) + \frac{2k}{Re_{\gamma,0} Sc_{\gamma}} \int_V \frac{c_{p,F} - c_{p,A}}{c_p} \rho D (P T g Y_F) dV.$$

Ο δείκτης A δηλώνει τα αέρια συστατικά (π.χ. αέρας) και ο δείκτης F τα συστατικά του σταγονιδίου (π.χ. καύσιμο). Για να λυθεί το παραπάνω σύστημα, που υπόκειται στις κατάλληλες οριακές και διεπιφανειακές συνθήκες, χρησιμοποιείται ένα μη ορθογωνικό, αλγεβρικά παραγόμενο σύστημα πλέγματος με τις συντεταγμένες να προσδιορίζονται από τα η και ξ για την «ακτινική» και την «εφαπτομενική» διεύθυνση. Στην παραμορφωμένη διασκορπισμένη φάση, οι γραμμές του πλέγματος ξεκινούν από το μέσο της γραμμής που συνδέει τα σημεία στασιμότητας του ανερχόμενου και του κατερχόμενου ρεύματος της ροής. Στη συνεχή φάση, η απόσταση του πλέγματος στην ακτινική διεύθυνση αυξάνεται γεωμετρικά με κανονικό ρυθμό που εξαρτάται από την επιλεγμένη θέση του ορίου της μακρινής ροής. Όγκοι ελέγχου μηδενικού πάχους χρησιμοποιούνται στην διεπιφάνεια, στην αρχή του συστήματος του πλέγματος και κατά μήκος του άξονα συμμετρίας για να διευκολυνθούν οι κατάλληλες διεπιφανειακές και οριακές συνθήκες. Οι όροι της μεταγωγής διακριτοποιούνται χρησιμοποιώντας ένα σχέδιο κεντρικής διαφοράς. Οι μεταβατικοί όροι χρησιμοποιούν ένα σχέδιο πίσω διαφορών που διαμορφώνεται με τη χρήση της εξίσωσης συνέχειας. Έχοντας υπ' όψη την παραμόρφωση του σταγονιδίου, υπολογίζουμε κάθε φορά που το πλέγμα επανατοποθετείται, το εμβαδόν επιφανείας και τα κάθετα διανύσματα της επιφάνειας για κάθε όγκο ελέγχου. Η τελική μορφή της γενικής διακριτοποιημένης εξίσωσης είναι:

$$a_P \Phi_P = a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + b_P, \quad (4.230)$$

όπου N , S , E , W και P είναι δείκτες σχετιζόμενοι με τα κομβικά σημεία του όγκου ελέγχου και τα a 's και b_P είναι συντελεστές που είναι συναρτήσεις των ρών μάζας του πλέγματος και των μετρικών του μετασχηματισμού. Ένα αριθμητικό σχέδιο πίεσης – ταχύτητας χρησιμοποιείται για να ελαχιστοποιηθεί ο υπολογιστικός χρόνος

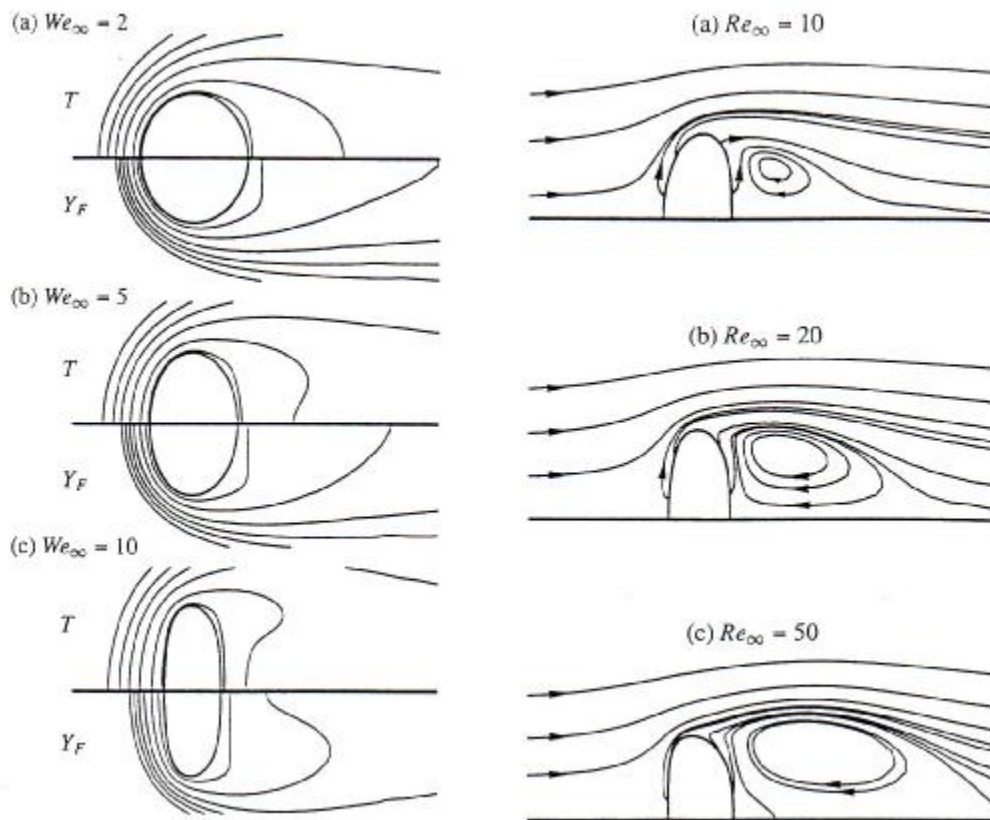
που σχετίζεται με την επαναλαμβανόμενη δημιουργία του πλέγματος (βλέπε Peric, Kessler και Scheurer). Με μια εξατμιζόμενη και παραμορφώμενη διεπιφάνεια, είναι κρίσιμο να προσδιοριστεί με ακρίβεια το σχήμα της και ο ρυθμός παλινδρόμησης κάτι το οποίο αποτελεί μια σοβαρή υπολογιστική πρόκληση. Εδώ, η εξίσωση της κάθετης τάσης χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί η κατανομή των δυνάμεων που δρουν στη σταγόνα. Η ανταπόκριση (αντίδραση) σε αυτές τις δυνάμεις καθορίζει την ταχύτητα και τη θέση της διεπιφάνειας. Η συνθήκη συνέχειας της τάσης δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{l}{\kappa} \hat{\rho} \hat{u} (\hat{u} - u_s) + \hat{\rho} l - \frac{2}{\text{Re}_{\gamma,0}} \hat{\tau} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{t}} = \frac{l}{\kappa} \rho u (u - u_s) + \rho l - \frac{2}{\text{Re}_{\gamma,0}} \tau \frac{\partial g}{\partial t} \quad (4.231)$$

$$+ \frac{l}{\kappa} \frac{4}{\text{We}_{\gamma,0}} (\sigma H + 1) + \frac{\zeta}{\theta} \hat{\rho} \frac{dU_{\gamma}}{dt} + (\hat{\rho} - 1) G \frac{\partial \omega}{\partial \hat{t}} - \frac{2}{\text{We}_{\gamma,0}} P_s \sigma,$$

όπου τ είναι ο τανυστής της τάσης του ιξώδους, $G = 3C_{D,R} / 8(\varphi_p - 1)$ είναι η φαινόμενη επιτάχυνση βαρύτητας και $P_s = (1 - nn)P$. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας $C_{D,R}$, είναι η τιμή του C_D που βασίζεται στην μπροστινή περιοχή μιας ισοδύναμης σφαίρας. Η κάθετη συνιστώσα της παραπάνω εξίσωσης καθορίζει την πίεση του υγρού. Η χρήση αυτής της συνθήκης πίεσης στην εξίσωση ορμής της διασκορπισμένης φάσης μαζί με τον περιορισμό της συνέχειας της μάζας καθορίζει τη νέα θέση και την ταχύτητα της ελεύθερης επιφάνειας. Οι σχετικές διεπιφανειακές εξισώσεις για τους διάφορους όγκους ελέγχου λύνονται χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton και μία λύση τριδιαγώνιου πίνακα. Επαναληπτικές λύσεις χρησιμοποιούνται για τις διακριτές αλγεβρικές εξισώσεις που είναι κατάλληλες στις μεταβλητές του πεδίου μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση εκτός από την πίεση της διασκορπισμένης φάσης. Γι' αυτή την τελευταία μεταβλητή, χρησιμοποιείται μια απ' ευθείας λύση για να εξασφαλιστεί η αριθμητική σταθερότητα και η αυστηρότερη δυνατή εφαρμογή της διατήρησης μάζας.

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης δείχνουν ότι οι ρυθμοί μεταφοράς σε εξατμιζόμενα σταγονίδια δεν επηρεάζονται σημαντικά από την παραμόρφωση του σχήματος. Αυτό αποδίδεται στην επίδραση του επιφανειακού ρεύματος της εξατμίσσης. Οι συνήθεις εξισώσεις συσχέτισης με διαμορφωμένα χαρακτηριστικά μήκη και εμβαδά αναφέρεται ότι προβλέπουν ικανοποιητικά τους ρυθμούς μεταφοράς και την οπισθέλκουσα. Τα σχήματα 4.7 και 4.8 δείχνουν ότι τα σταγονίδια παραμορφώνονται σε πεπλατυσμένα ελλειψοειδή με τους κύριους άξονες τους κάθετους στη μέση διεύθυνση ροής. Παρατηρείται ότι γενικά η παραμόρφωση αυξάνεται με την αύξηση του We και την μείωση του Re . Οι υπολογισμοί της σταθερής – κατάστασης εξάτμισης σταγονιδίου n-επτανίου σε αέρα υψηλής θερμοκρασίας, $T_{\gamma} = 1000K$, $10 \leq Re \leq 100$, $We \leq 10$, δείχνουν παραμορφωμένα πεπλατυσμένα σχήματα με τους κύριους άξονες κάθετους στη μέση διεύθυνση ροής.



ΣΧΗΜΑ 4.7: (αριστερά) Σταθερά παραμορφούμενα σταγονίδια σε $Re_{\infty} = 20$ και α) $We_{\infty} = 2$, β) $We_{\infty} = 5$, γ) $We_{\infty} = 10$. Ισόθερμες καμπύλες (πάνω μισό του σχήματος) $T=0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$ Ισοβαρείς καμπύλες (κάτω μισό) $Y_F=0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02$. Οι τιμές παίρνονται από την εσωτερική θέση.

ΣΧΗΜΑ 4.8: (δεξιά) Σταθερά παραμορφούμενα σταγονίδια σε $We_{\infty} = 10$. [Καμπύλες ροϊκών γραμμών]: α) $Re_{\infty} = 10$, β) $Re_{\infty} = 20$ και γ) $Re_{\infty} = 50$.

Στην αριθμητική μελέτη, η κίνηση της υγρής φάσης και η θέρμανση αγνοούνται. Αυτό είναι δύσκολο να δικαιολογηθεί, παρόλο που η επίδραση των ακαθαρσιών σε πραγματικές καταστάσεις είναι πιθανό να μειώσει το ρόλο που παίζει η κίνηση της υγρής φάσης. Παρατηρείται γενικά, ότι τα σταγονίδια γίνονται πιο πεπλατυσμένα με την αύξηση του αριθμού Weber και τη μείωση του αριθμού Reynolds, παρ' όλο που αυτή η τάση μπορεί να μην ισχύει σε υψηλούς αριθμούς Weber π.χ. : 10. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ρυθμοί μεταφοράς των εξατμιζόμενων σταγονιδίων δεν επηρεάζονται από αλλαγές στο σχήμα εξ' αιτίας της επίδρασης του ρεύματος της ροής της εξάτμισης στην επιφάνεια του σταγονιδίου. Οι ημι – σταθερές συσχετίσεις για τους αριθμούς Nusselt και Sherwood που δίνονται στις εξισώσεις (4.216) και (4.218) και βασίζονται σε μία διάμετρο ισοδύναμου όγκου, φαίνεται να προβλέπουν ικανοποιητικά τους ρυθμούς μεταφοράς για σταθερά παραμορφωμένα σταγονίδια. Η οπισθέλκουσα φαίνεται ότι εκτιμάται ικανοποιητικά από την ημι – σταθερή εξίσωση συσχέτισης της οπισθέλκουσας (4.215), υπό τον όρο ότι η μετωπική περιοχή της σφαίρας ισοδύναμου όγκου χρησιμοποιείται στους

υπολογισμούς. Πρέπει να σημειωθεί ότι η ανάπτυξη των εξισώσεων (4.215), (4.216) και (4.218) βασίζεται σε μελέτες που έχουν αγνοήσει την κίνηση της υγρής φάσης.

ΕΞΑΤΜΙΣΗ ΣΕ ΥΨΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

Μια λύση των συνδεδεμένων εξισώσεων οριακού στρώματος της κίνησης, της ενέργειας και της συγκέντρωσης των συστατικών στην αέρια και υγρή φάση θα αποδώσει τον ρυθμό εξάτμισης με ικανοποιητική ακρίβεια σε υψηλούς αριθμούς Reynolds. Οι συνήθεις προσεγγίσεις της θεωρίας του οριακού στρώματος χρησιμοποιούνται σε τέτοιες διατυπώσεις.

Η εξάτμιση σταγονιδίου νερού σε ξηρό αέρα υψηλής θερμοκρασίας ή σε καθαρό ατμό, έχει ερευνηθεί από τον Harpole. Οι εξισώσεις του στρωτού οριακού στρώματος σε ένα αξονικά συμμετρικό σταθερό σημείο λύνονται γι' αυτό το λόγο. Φαίνεται ότι η μεταφορά σε όλη τη σταγόνα μπορεί να υπολογιστεί με κατάλληλες διορθώσεις στη λύση του σταθερού σημείου. Αυτός ο ισχυρισμός περιγράφεται και δικαιολογείται από έναν αριθμό συσχετίσεων, αλλά η εγκυρότητα του έχει σοβαρά αμφισβητηθεί από τους Renksizbulut & Yuen.

Η θεωρία του οριακού στρώματος για την εξάτμιση μιας σταγόνας ενός συστατικού σε θερμό αδρανειακό περιβάλλον έχει αναπτυχθεί από τους Prakash & Sirignano. Η θεωρία για ένα σταγονίδιο περισσότερων συστατικών έχει περιγραφεί από τους Law, Prakash, & Sirignano και από τους Lara-Urbaneja & Sirignano. Θα αναφέρουμε μόνο την ανάλυση οριακού στρώματος όπως παρουσιάζεται από τους Prakash & Sirignano όπου οι ειδικές θερμότητες c_{pi} και οι συντελεστές δυαδικής διάχυσης D_{ij} όλων των συστατικών της αέριας φάσης θεωρούνται ίσοι και ο αριθμός Lewis θεωρείται ίσος με τη μονάδα. Σε καθεστώς υψηλού αριθμού Reynolds, η ροή του αερίου είναι ουσιαστικά ασταθής λόγω της χρονικής μεταβολής του μεγέθους του σταγονιδίου. Ωστόσο, ο χαρακτηριστικός χρόνος για αλλαγές στην αέρια φάση είναι ο χρόνος παραμονής ενός αερίου σωματιδίου γύρω από το σταγονίδιο. Για ένα σταγονίδιο διαμέτρου 100μm σε ταχύτητα ελεύθερης ροής 10ms⁻¹ αυτός ο χρόνος είναι της τάξης ($d/U_{\infty} : 10\mu s$). Αυτός ο χρόνος είναι πολύ μικρότερος από τον χρόνο ζωής του σταγονιδίου, ο οποίος υπολογίζεται εμπειρικά ότι είναι:

$$\tau_L = \frac{\zeta R^2}{k_{evap}} \left(1 + 0.3 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{2}} \right)$$

όπου k_{evap} είναι η σταθερά εξάτμισης ($: 10^{-7} m^2 s^{-1}$). Ο χρόνος ζωής τυπικά είναι O(5ms) για ένα σταγονίδιο αυτού του μεγέθους που εξατμίζεται σε ένα μεταγωγικό πεδίο. Στη χρονική κλίμακα της θέρμανσης της σταγόνας το δραστικό τμήμα της συνεχούς φάσης γι' αυτό το λόγο θεωρείται ότι αποτελείται από ημι - σταθερή ορμή και θερμικά οριακά στρώματα κοντά στην επιφάνεια. Η ροή της διασκορπισμένης φάσης επίσης θεωρείται σαν ημι - σταθερή εφ' όσον ο χρόνος ζωής του σταγονιδίου είναι τουλάχιστον μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερος από το χρόνο διάχυσης του στροβιλισμού $\hat{\tau}_{\text{διάχυσης στροβιλισμού}} = R^2 / \hat{\nu}$. Η μεταφορά μέσα στη σταγόνα θεωρείται σαν μια μεταβατική διαδικασία. Η κατανομή ταχύτητας και πίεσης έξω από το οριακό στρώμα της ορμής θεωρούνται ότι είναι όπως αυτές για δυναμική ροή γύρω από μία σφαίρα. Αυτές οι υποθέσεις εμποδίζουν τον καθορισμό του ακριβή συντελεστή συνολικής οπισθέλκουσας. Σε πολλές περιπτώσεις οι επιδράσεις της οπισθέλκουσας

δύναμης είναι τέτοιες ώστε να μειώνουν γρήγορα τον αριθμό Reynolds της ροής με το χρόνο κάτι το οποίο ακυρώνει τις υποθέσεις του οριακού στρώματος πέρα από ένα μικρό τμήμα του χρόνου ζωής του σταγονιδίου.

Όπως αναφέρθηκε, η πραγμάτευση της συνεχούς φάσης γίνεται απλά. Η τεχνική ολοκλήρωσης Karman-Pohlhausen χρησιμοποιείται με πολυωνυμικές παραστάσεις τετάρτου βαθμού για τη ταχύτητα, τη θερμοκρασία και τη συγκέντρωση. Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος εκφρασμένες σε προσαρμοσμένες στο σώμα συντεταγμένες (χ, y) ολοκληρώνονται κατά μήκος του πάχους του οριακού στρώματος. Οι εξισώσεις της συνεχούς φάσης συνδέονται όλες μεταξύ τους εξ' αιτίας της συμπίεστικότητας και της εξάτμισης στη διεπιφάνεια. Το πρόβλημα της συνεχούς φάσης συνδέεται με την διασκορπισμένη φάση με δύο τρόπους: (1) διαμέσου των μεταβλητών του πεδίου στην διεπιφάνεια, δηλαδή, u_s, T_s, Y_{Fs} , όπου u είναι η συνιστώσα χ της ταχύτητας στο οριακό στρώμα και (2) διαμέσου της διατήρησης της ροής μάζας και θερμότητας στην διεπιφάνεια. Οι τελευταίες συνθήκες είναι:

Ροή μάζας :

$$\int_0^{\zeta} \rho D \frac{\partial Y_F}{\partial y} \Big|_s = (\rho u)_s (Y_F - 1)_s \quad (4.232)$$

Ροή θερμότητας:

$$\int_0^{\zeta} \frac{k}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_s = (\rho u)_s \lambda + \int_0^{\zeta} \hat{k} \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \Big|_s, \quad (4.233)$$

όπου u είναι η συνιστώσα χ της ταχύτητας στη συνεχή φάση και h είναι η ενθαλπία της συνεχούς φάσης. Με τη διατμητική τάση και τη ροή θερμότητας από την λύση της συνεχούς φάσης σαν δεδομένα, τα προβλήματα για τα ιξώδη και θερμικά οριακά στρώματα της διασκορπισμένης φάσης και τα προβλήματα θερμικού πυρήνα επαναλύονται. Επαναφέρουμε ότι η μηχανική ρευστών της διασκορπισμένης φάσης έχει αναφερθεί νωρίτερα στην παράγραφο 4.2.2 και η πραγμάτευση της μεταφοράς στο εσωτερικό της σταγόνας είναι όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 4.3.2. Οι λύσεις της συνεχούς και διασκορπισμένης φάσης που προκύπτουν έτσι επαναλαμβάνονται μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση. Σ' αυτό το σημείο η νέα ακτίνα του σταγονιδίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dR(t)}{dt} = - \frac{1}{2\bar{\rho}} \zeta_0^{\theta_s} \bar{m}_s \sin \theta d\theta. \quad (4.234)$$

Εδώ \bar{m}_s είναι η ροή μάζας της εξάτμισης και η ολοκλήρωση γίνεται μέχρι το σημείο διαχωρισμού θ_s . Η μεταφορά θερμότητας και μάζας στην εξωτερική περιοχή του απορρεύματος θεωρείται αμελητέα. Κάποια σημαντικά αποτελέσματα αναφέρονται στη συνέχεια (βλέπε επίσης Ayyaswamy).

Τα αποτελέσματα για την εξάτμιση σταγονιδίων n-εξανίου, n-δεκανίου και n-δεκαεξανίου σε αέρα 1000K και 10 atm (μεγάλο φάσμα τιμών πτητικότητας) δείχνουν ότι οι ροές της θερμότητας και της εξατμιζόμενης μάζας συνεχώς μειώνονται στην κατεύθυνση του καθοδικού ρεύματος, και είναι της τάξης του 20% της τιμής τους στην μπροστινή περιοχή στασιμότητας κοντά στο σημείο διαχωρισμού του οριακού

στρώματος. Η μεταβολή της αδιάστατης ακτίνας υψωμένης στην 3/2, $(R / R_0)^{3/2}$, με τον αδιάστατο χρόνο, $t\hat{a} / R_0^2$, είναι γραμμική εκτός από την αρχική περίοδο εξάτμισης όταν η μεταφορική θέρμανση του υγρού είναι σημαντική και η εξάτμιση είναι μικρή. Τα αποτελέσματα φαίνεται να συγκρίνονται καλά με τις προβλέψεις της εξίσωσης (4.212) κατά τη διάρκεια του αρχικού μέρους του χρόνου ζωής και με την εξίσωση (4.213) κατά τη διάρκεια του υπολοίπου μέρους του χρόνου ζωής. Στην εφαρμογή των συσχετίσεων, έχει χρησιμοποιηθεί η ποσότητα λ_{eff} . Η ποσότητα αυτή, λ_{eff} , έχει ορισθεί να είναι μικρότερη του λ κατά ένα μέγεθος ίσο με τη αύξηση της θερμότητας του υγρού. Κατά το τέλος του χρόνου ζωής του σταγονιδίου, οι προβλέψεις της θεωρίας του οριακού στρώματος είναι μικρότερες από τις τιμές των δύο συσχετίσεων και αυτή η ασυμφωνία αποδίδεται στις αμελητέες επιδράσεις του απορρευόμενου.

Τα μοντέλα εξάτμισης που περιγράφονται από τους Lara-Urbaneja & Sirignano και τους Prakash & Sirignano είναι πολύ περίπλοκα για να ενσωματωθούν σε προγράμματα ψεκασμού. Απλοποιημένα μοντέλα που βασίζονται γι' αυτό το σκοπό σε διάφορες υποθέσεις έχουν προταθεί από τον Sirignano και τους συνεργάτες του. Κατά την εφαρμογή αυτών των μοντέλων πρέπει να θυμόμαστε ότι ο συντελεστής οπισθέλκουσας του σταγονιδίου δε μπορεί ούτε καν να προσεγγιστεί από αυτές τις απλοποιημένες αναλύσεις. Εμπειρικές συσχετίσεις πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της δύναμης οπισθέλκουσας. Θα αναφέρουμε στη συνέχεια μερικά από αυτά τα μοντέλα. Το πρόβλημα σε υψηλούς αριθμούς Reynolds και μοναδιαίο αριθμό Lewis με χημεία ενός βήματος έχει μελετηθεί από τους Tong & Sirignano. Για τη συνεχή φάση, αναπτύσσονται δύο χωριστές αναλύσεις οριακού στρώματος, η μια για την περιοχή στασιμότητας ($r = x$ και $U_e = ax$ όπου a είναι η σταθερά καμπυλότητας της ροής στο στάσιμο σημείο) και η άλλη για την «περιοχή ώμου» $\theta = \frac{1}{2}\pi, r = R, U_e = \frac{3}{2}U_\infty$ όπου η μεταβολή της πίεσης είναι μηδενική και η ροή συμπεριφέρεται τοπικά σαν να γίνεται κοντά σε επίπεδη πλάκα. Η διαφορική εξίσωση Blasius λύνεται και ο ρυθμός εξάτμισης ανά μονάδα επιφανείας εκφράζεται σε σχέση με την εξίσωση Blasius, f :

$$\rho u|_s = - Af(0, B, u_s / u_e), \quad (4.235)$$

όπου:

$$A = (2a\rho_e\mu_e)^{\frac{1}{2}} \quad \text{για τη ροή στο στάσιμο σημείο} \quad (4.236)$$

$$A = \rho_e\mu_e \frac{1}{2\zeta_0} \frac{u_e}{x} \quad \text{για την «περιοχή ώμου»} \quad (4.237)$$

Το μοντέλο υποθέτει ότι η περισσότερη μεταφορά λαμβάνει χώρα στο μπροστινό μέρος ή στους «ώμους» του σταγονιδίου. Η μεταφορά στο πίσω μέρος του σταγονιδίου θεωρείται σχετικά μικρή και δεν λαμβάνεται υπ' όψη. Για την υγρή φάση θεωρείται η παρακάτω εξίσωση για τη διάχυση θερμότητας που αναπτύχθηκε από τους Prakash & Sirignano:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} + b \frac{\partial \hat{T}}{\partial \varphi}, \quad (4.238)$$

όπου:

$$a(\varphi, \tau) = \frac{f_1(\varphi)}{R^2} \quad \text{και} \quad b(\varphi, \tau) = \frac{f_2(\varphi)}{R^2} + \frac{f_3(\varphi)}{R^2} \frac{dR}{dt}, \quad (4.239)$$

με τα f_1 , f_2 , και f_3 να αποτελούν γνωστές συναρτήσεις. Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω εξίσωση και η αντίστοιχη εξίσωση διάχυσης μάζας μπορούν αμφότερες να απλοποιηθούν όταν η αλλαγή στην ακτίνα του σταγονιδίου εξ' αιτίας της εξάτμισης συμβαίνει αργά σε σύγκριση με τις αλλαγές στη θερμοκρασία του υγρού. Σε αυτήν την περίπτωση, οι μη γραμμικές σχέσεις που εισάγονται από τους συντελεστές στην εξίσωση (4.238) μπορεί να διαμορφωθούν έτσι ώστε να δώσουν μια κατά προσέγγιση γραμμική συμπεριφορά της εξίσωσης. Μία ανάλυση της συνάρτησης του Green απλοποιεί την εξίσωση σε μια μορφή ολοκληρώματος, από το οποίο ένας τετραγωνισμός δίνει την θερμοκρασία του υγρού σε κάθε σημείο σαν συνάρτηση της επιφανειακής ροής θερμότητας. Αυτή η διαδικασία καταλήγει στην ανάπτυξη μιας εξίσωσης ολοκλήρωσης τύπου Volterra που συσχετίζει την επιφανειακή θερμοκρασία με την επιφανειακή ροή θερμότητας. Ο τύπος της εξίσωσης ολοκλήρωσης ουσιαστικά μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα απλών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, οι οποίες λύνονται με τις κατάλληλες συνθήκες στην διεπιφάνεια σύμφωνα με τη μέθοδο Runge-Kutta, προσφέροντας έτσι σημαντική υπολογιστική απλότητα.

Από τις αναλύσεις των Tong - Sirignano μπορούν ν' αναπτυχθούν οι παρακάτω σχέσεις που είναι εφαρμόσιμες για εξάτμιση σε υψηλούς αριθμούς Reynolds:

$$Nu = \frac{k_\lambda f(0, B, u_s / u_e)}{B} Re^{\frac{1}{2}}, \quad (4.240)$$

όπου k είναι ένας μοναδιαίος αδιάστατος συντελεστής. Ο συντελεστής k καθορίζεται από τον μέσο όρο της ροής θερμότητας πάνω στην επιφάνεια του σταγονιδίου που βρίσκεται με έναν προσεγγιστικό τρόπο (με βάση τις δύο τοπικές λύσεις για την περιοχή στασιμότητας και την περιοχή των «ώμων»). Μια παρόμοια διαδικασία εξαγωγής μέσου όρου για τον ρυθμό εξάτμισης οδηγεί στην εξίσωση:

$$\dot{m} = \mu_e R \frac{k_\lambda f(0, B, u_s / u_e)}{\lambda} Re^{\frac{1}{2}}. \quad (4.241)$$

Ένα μοντέλο για εξάτμιση σταγονιδίου που καλύπτει ένα ευρύ φάσμα αριθμών Reynolds & Lewis για τη συνεχή και τη διασκορπισμένη φάση, περιγράφεται από τους Abramzon & Sirignano. Θεωρείται ότι η αέρια φάση είναι ημι – σταθερή και η πτώση πίεσης στο αέριο είναι αμελητέα. Οι θερμοφυσικές ιδιότητες υπολογίζονται με τον κανόνα του 1/3. Οι υπολογισμοί της αέριας φάσης βασίζονται στη θεωρία της αντίστασης απλού μονοδιάστατου λεπτού φιλμ μεταφοράς θερμότητας / μάζας. Η θερμοκρασία και οι συγκεντρώσεις ατμού στην επιφάνεια του σταγονιδίου θεωρούνται ομοιόμορφες. Αυτό μπορεί να είναι ένας λόγος για την υποτίμηση του ρυθμού εξάτμισης. Οι τιμές για το πάχος του φιλμ που προκύπτουν έτσι,

«διορθώνονται» στη συνέχεια (ονομάζεται θεωρία του «μοντέλου εκτεταμένου φιλμ») για να εξηγηθεί η παρουσία ροής Stefan (η οποία στην περίπτωση της εξάτμισης θα έχει επίδραση στην αύξηση του πάχους). Οι διορθώσεις που βασίζονται στη θεώρηση ενός φάσματος λύσεων Falkner-Skan για ροή πέρα από μια εξατμιζόμενη σφήνα, χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των μέσων ρυθμών μεταφοράς κατά μήκος του αέριου οριακού στρώματος στην επιφάνεια του σταγονιδίου. Η μεταφορική θέρμανση του υγρού μέσα στο σταγονίδιο υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ένα «αποτελεσματικό» μοντέλο θερμικής διάχυσης το οποίο υπολογίζει προσεγγιστικά τον χαρακτηριστικό χρόνο θέρμανσης και τη θερμοχωρητικότητα του υγρού. Η αποτελεσματική θερμική διαχυτότητα ορίζεται από $\hat{a}_{eff} = \chi \hat{a}$ όπου το χ εξαρτάται από τον στιγμιαίο αριθμό Peclet της διασκορπισμένης φάσης. Η τιμή του χ αναπτύσσεται προσαρμόζοντας τα δεδομένα των Johns & Beckmann έτσι ώστε:

$$\chi = 1.86 + 0.86 \tanh\left(\frac{1}{2.225 \ln\left(\frac{\zeta}{0.30} \frac{1}{Pe_{\delta}}\right)}\right) \quad (4.242)$$

Με αυτό το \hat{a}_{eff} , ένα πεδίο «σφαιρικά συμμετρικής ψευδο – θερμοκρασίας» στο υγρό λύνεται χρησιμοποιώντας μια μονοδιάστατη εξίσωση διάχυσης για την διασκορπισμένη φάση. Πρέπει να σημειωθεί ότι παρ' όλο που η επιφανειακή θερμοκρασία μπορεί λογικά να προβλεφθεί με αυτές τις υποθέσεις που γίνονται για το συγκεκριμένο σκοπό, οι λεπτομέρειες του εσωτερικού πεδίου της θερμοκρασίας μπορεί να είναι σημαντικά λανθασμένες. Με $B_H = (h_e - h_s)/\lambda_{eff}$, και $B_M = (Y_{Fs} - Y_{F\infty})/(1 - Y_{Fs})$, οι ακόλουθες σχέσεις για τον αριθμό Nusselt και τον ρυθμό εξάτμισης, που βασίζονται στη μελέτη των Abramzon και Sirignano, δίνονται από τον Sirignano:

$$Nu = \frac{2 \ln(1 + B_H) \frac{1}{\kappa} + \frac{\zeta k_0 Pr^{1/3} Re^{1/2} \frac{1}{\delta}}{0.2 \psi F(B_H) \frac{1}{\delta}}}{B_H} \quad (4.243)$$

Μια παρόμοια εξίσωση εφαρμόζεται για τον αριθμό Sherwood με το B_M να αντικαθιστά το B_H και το Sc να αντικαθιστά το Pr . Επίσης έχουμε:

$$\dot{m} = 4\pi \frac{\lambda R}{c_p} \ln(1 + B_H) \frac{1}{\kappa} + \frac{\zeta k_0 Pr^{1/3} Re^{1/2} \frac{1}{\delta}}{0.2 \psi F(B_H) \frac{1}{\delta}} = 4\pi DR \ln(1 + B_M) \frac{1}{\kappa} + \frac{\zeta k_0 Pr^{1/3} Re^{1/2} \frac{1}{\delta}}{0.2 \psi F(B_M) \frac{1}{\delta}} \quad (4.244)$$

όπου

$$B_H = B_M, \quad \text{για } Le = 1, \quad (4.245)$$

$$B_H = (1 + B_M)^a - 1, \quad \text{για } Le \neq 1. \quad (4.246)$$

Εδώ:

$$a \Gamma \frac{c_{pF} \zeta \left(1 + \frac{1}{2} k \text{Re}^2 F(B_M) \right)}{c_{pP} \theta \text{Le} \left(1 + \frac{1}{2} k \text{Re}^2 F(B_H) \right)} \quad (4.247)$$

στο οποίο:

$$F(B) = (1 + B)^{0.7} \frac{\ln(1 + B)}{B} \quad (4.248)$$

για

$0 \leq B_H, B_M \leq 20$, και $1 \leq \text{Pr}, \text{Sc} \leq 3$. Τα αποτελέσματα από αυτές τις εξισώσεις διαφέρουν σημαντικά από τις προβλέψεις της συσχέτισης Ranz-Marshall και ο λόγος αποδίδεται στο μικρό φάσμα των τιμών του B στις οποίες βασίζεται η συσχέτιση Ranz-Marshall.

Μια ανάλυση οριακού στρώματος έχει χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση της μικτής μεταγωγικής εξάτμισης και ανάφλεξης ενός σταγονιδίου δεκαεξανίου στον αέρα σε έναν προκαθορισμένο αριθμό Reynolds από τους Rangel & Fernandez – Pello. Όλες οι φυσικές ιδιότητες έχουν θεωρηθεί σταθερές εκτός από την πυκνότητα. Για το υγρό σταγονίδιο, απαιτείται ότι για την περίπτωση μικτής μεταφοράς, η ισχύς του στροβίλου μπορεί να ληφθεί από τη σχέση:

$$A = \frac{3}{2} C_{v\%} \text{Re}^{\frac{1}{2}} \frac{(1 + \varphi^2)^{\frac{1}{4}}}{R^3} \quad (4.249)$$

όπου η σταθερά C καθορίζεται από τους συνδεόμενους στροβιλισμούς ανάμεσα στο υγρό οριακό στρώμα και τον στρόβιλο Hill. Στην εξίσωση (4.249) το $\varphi = \text{Gr} / \left(\frac{3}{2} \text{Re}^{\frac{3}{2}} \right)$ ορίζεται σαν ο ρυθμός μικτής μεταγωγής όπου $\text{Gr} = R^3 g (T_s - T_{\%}) / (T_{\%} v_{\%}^2)$ είναι ο αριθμός Grashof. Έτσι το $\varphi \ll 0$ αντιστοιχεί στο όριο εξαναγκασμένης μεταγωγής και $\varphi \gg 1$ στο όριο ελεύθερης μεταγωγής. Κάτω από τις διάφορες συνθήκες που είναι κατάλληλες σ' αυτή την ανάλυση, ο ρυθμός καύσης του σταγονιδίου δίνεται από τους Fernandez-Pello με τη σχέση:

$$\frac{dR^2}{dt} = 0.2 \frac{\zeta k_{\%} g \eta^3}{\rho c_p \theta^2} \text{Re}^{\frac{1}{2}} (1 + \varphi^2)^{\frac{1}{8}} B, \quad (4.250)$$

όπου

$$B = \frac{1}{\lambda} \frac{Y_{\%} Q}{M_o v_o} - c_p (T_s - T_{\%}) \quad (4.251)$$

και Q είναι η θερμότητα ανά γραμμάριο οξειδωτικού. Δηλώνεται ότι η εξάρτηση του ρυθμού καύσης από τα Re και B που δίνονται από την εξίσωση (4.250) συμφωνούν ποιοτικά με τις πειραματικές παρατηρήσεις των Eisenklam, Arunachalam, & Weston, Faeth, και Natarajan & Brzustowski.

ΕΞΑΤΜΙΣΗ ΣΤΑΓΟΝΙΔΙΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΥΣΤΑΤΙΚΩΝ

Τα περισσότερα καύσιμα υδρογονάνθρακα που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή ισχύος είναι αναμίξιμα υγρά πολλαπλών συστατικών και για το σχεδιασμό συστημάτων καύσης είναι σημαντικό να μπορούμε να προβλέψουμε τα χαρακτηριστικά εξάτμισης σταγονιδίων πολλαπλών συστατικών. Η εξάτμιση σταγονιδίων πολλαπλών συστατικών γενικά καθορίζεται όχι μόνο από την πτητικότητα των συστατικών αλλά επίσης από το ρυθμό διάχυσης των συστατικών, την παλινδρόμηση της επιφάνειας του σταγονιδίου και την εσωτερική κυκλοφορία. Επίσης η παρουσία πτητικών συστατικών στην σταγόνα μπορεί να οδηγήσει σε μικροέκρηξη ή θρυμματισμό (διάλυση) του σταγονιδίου. Η διατύπωση του προβλήματος της εξάτμισης σταγονιδίου πολλαπλών συστατικών απαιτεί, πέρα από τις περιγραφές του πεδίου ροής, τις ταυτόχρονες λύσεις των εξισώσεων συνέχειας των συστατικών της υγρής φάσης, τις σχέσεις ισορροπίας της φάσης των πολλαπλών συστατικών (τυπικά ο νόμος του Raoult) και τις εξισώσεις συνέχειας της ενέργειας και των σωματιδίων των πολλαπλών συστατικών της αέριας φάσης. Η διάχυση μάζας της υγρής φάσης είναι συνήθως πολύ βραδύτερη από τη διάχυση θερμότητας της υγρής φάσης έτσι ώστε λεπτά στρώματα διάχυσης μπορούν να προκύψουν κοντά στην επιφάνεια, ειδικά σε υψηλές θερμοκρασίες περιβάλλοντος όταν ο ρυθμός της επιφανειακής παλινδρόμησης είναι μεγάλος.

Η μεταγωγική εξάτμιση των διμερών σταγονιδίων δεκανίου – δεκαεξανίου και εξανίου – δεκανίου σε αριθμό Reynolds $Re \sim 200$, 10atm , και 1000K μελετήθηκε με τη διατύπωση του οριακού στρώματος από τους Lara-Urbaneja & Sirignano. Η μεταφορά θερμότητας και μάζας της υγρής φάσης θεωρούνται σαν μεταφορικές διαδικασίες ενώ όλες οι άλλες θεωρούνται ημι – σταθερές. Οι διαδικασίες ακολουθούν πιστά τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν από τους Prakash & Sirignano. Σημειώνεται η ύπαρξη σημαντικών μεταβολών της θερμοκρασίας και του κλάσματος μάζας παρά την ισχυρή εσωτερική κυκλοφορία. Το κλάσμα μάζας στο κέντρο του εσωτερικού στροβίλου παραμένει κοντά στην αρχική του τιμή για ολόκληρη τη διάρκεια της ζωής του σταγονιδίου. Η μεταφορά μάζας από αυτή τη θέση στην επιφάνεια του σταγονιδίου πραγματοποιείται υπό μορφή διάχυσης κατά μήκος των ροϊκών γραμμών του στροβίλου ομοιόμορφης συγκέντρωσης. Τα πιο πτητικά συστατικά εξατμίζονται νωρίς από την επιφάνεια, αλλά παραμένουν παρόντα στον πυρήνα του σταγονιδίου εξ' αιτίας του υψηλού αριθμού Schmidt. Η χρονική εξέλιξη της θερμοκρασίας καθορίζεται από το βαρύτερο συστατικό, κάτι που μπορεί να συνεπάγεται θερμοκρασίες υψηλότερες από το σημείο βρασμού του ελαφρύτερου συστατικού.

Το πρόβλημα του σταγονιδίου πολλαπλών συστατικών έχει επανεξεταστεί με τη χρήση απλοποιημένων μοντέλων (ένα μοντέλο στροβίλου υγρής φάσης με ένα μονοδιάστατο μοντέλο αέριας φάσης που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο) από τους Tong & Sirignano. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτές τις απλοποιημένες αναλύσεις είναι μεταξύ αυτών που προκύπτουν από τα μοντέλα γρήγορης ανάμιξης και καθαρής διάχυσης. Ένα διμερές σταγονίδιο με υψηλότερη αρχική συγκέντρωση του λιγότερου πτητικού συστατικού βρίσκεται ότι

έχει μικρότερο χρόνο ζωής εξ' αιτίας των υψηλότερων ρυθμών θέρμανσης του υγρού. Οι επιδράσεις της διαφοροποίησης της πτητικότητας εξετάζονται με τη σύγκριση των ρυθμών εξάτμισης ενός σταγονιδίου 50% δεκανίου - 50% βενζενίου (κατά μάζα) και ενός σταγονιδίου 50% οκτανίου - 50% βενζενίου. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η προνομιακή εξάτμιση του βενζενίου είναι πιο σαφής και μια μικροέκρηξη είναι πιθανόν πιο ευδιάκριτη με το σταγονίδιο δεκανίου - βενζενίου που έχει μεγαλύτερη διαφοροποίηση πτητικότητας. Ο συντελεστής συνολικής οπισθέλκουσας C_D του σταγονιδίου προβλέπεται αρχικά να μειωθεί καθώς ο αριθμός Reynolds μειώνεται περίπου στο 65 από την αρχική του τιμή 100. Στη συνέχεια αρχίζει να αυξάνεται. Τα αποτελέσματα της οπισθέλκουσας δείχνουν επίσης πολύ μεγάλες μειώσεις στην οπισθέλκουσα (πάνω από 50%) συγκρινόμενη με μια στερεή σφαίρα στον ίδιο αριθμό Reynolds. Αυτά τα χαρακτηριστικά της οπισθέλκουσας διαφέρουν σημαντικά από τις προβλέψεις των Renksizbulut & Bussmann που αναφέρονται στη συνέχεια.

Από τους Renksizbulut & Bussmann χρησιμοποιείται μια συντηρητική αριθμητική τεχνική ελέγχου του όγκου για να μελετηθεί η εξάτμιση ενός σταγονιδίου δεκανίου - δεκαεξανίου στον αέρα. Η αριθμητική μελέτη παίρνει υπ' όψη όλες τις μεταβατικές επιδράσεις που περιλαμβάνουν τις μεταβολές του μεγέθους του σταγονιδίου και της ταχύτητας, τη μεταφορά θερμότητας και μάζας στην υγρή φάση και τις μεταβολές της θερμοφυσικής ιδιότητας με τη θερμοκρασία και τη συγκέντρωση και στις δύο φάσεις. Η μέθοδος πεπερασμένου όγκου που περιγράφηκε προηγουμένως χρησιμοποιείται, μόνο που η εφαρμογή της γίνεται σε αξονικά συμμετρικές σφαιρικές συντεταγμένες λαμβάνοντας υπ' όψη την υπόθεση της σφαιρικότητας του σταγονιδίου. Οι αδιάστατες κινητήριες εξισώσεις διατυπώνονται ως εξής:

$$\frac{d}{dt}(\rho U_\infty R \Phi) + U_\infty^2 P \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{2\mu}{Re_{\infty,0}} \frac{dR}{dr} \right) + u_\theta e_\theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{2\mu}{Re_{\infty,0}} \frac{dR}{d\theta} \right) \right] - \frac{r}{U_\infty} \frac{dR}{dt} e_r + u_\theta e_\theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{2\mu}{Re_{\infty,0}} \frac{dR}{d\theta} \right) \quad (4.252)$$

$$= \frac{U_\infty}{R} P \left[\Gamma_\Phi P \Phi \right] + S_\Phi.$$

Για ένα σταγονίδιο πολλαπλών συστατικών η πραγμάτευση της μεταφοράς μάζας απαιτεί προσεκτικές θεωρήσεις και η διατύπωση για μια σταγόνα ενός συστατικού πρέπει να είναι ουσιαστικά τροποποιημένη. Οι αλλαγές από τον πίνακα 4.1 που παρουσιάστηκαν προηγουμένως στην εξέταση της εξάτμισης ενός παραμορφωμένου σταγονιδίου ενός συστατικού, δίνονται στον πίνακα 4.2.

Εξίσωση	Φ	Γ_Φ	S_Φ
Εφαπτομενική ορμή	u_θ	$2\mu / Re_{\infty,0}$	S_{u_θ}
Συστατικά	Y_i	$2\rho D_{im} / (Re_{\infty,0} Sc_\infty)$	S_Y

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2: Ταυτοποίηση των παραμέτρων της εξίσωσης (4.252)

Οι βασικές συνθήκες είναι:

$$S_c = \rho R \frac{dU_\infty}{dt} - 2\rho U_\infty \frac{dR}{dt}, \quad (4.253)$$

$$S_{u_r} = U_\infty^2 \frac{\rho}{\mu} \frac{d(\rho u u_r)}{dt} - \frac{\rho}{\mu} \frac{d(\rho u u)}{dt} \frac{\omega}{R} \frac{2U_\infty}{\text{Re}_{\infty,0}} \frac{\rho}{\mu} \frac{dU_\infty}{dt} u_r - \left(\frac{\rho}{\mu} \frac{dU_\infty}{dt} \right) \frac{\omega}{R} \frac{2U_\infty}{\text{Re}_{\infty,0}} \frac{\rho}{\mu} \frac{dU_\infty}{dt} u_r - 2\rho U_\infty u_r \frac{dR}{dt} - \frac{\rho}{\mu} \frac{dp}{dr} - \rho R \cos \theta \frac{dU_\infty}{dt}, \quad (4.254)$$

$$S_{u_\theta} = U_\infty^2 \frac{\rho}{\mu} \frac{d(\rho u u_\theta)}{dt} - \frac{\rho}{\mu} \frac{d(\rho u u)}{dt} \frac{\omega}{R} \frac{2U_\infty}{\text{Re}_{\infty,0}} \frac{\rho}{\mu} \frac{dU_\infty}{dt} u_\theta - \left(\frac{\rho}{\mu} \frac{dU_\infty}{dt} \right) \frac{\omega}{R} \frac{2U_\infty}{\text{Re}_{\infty,0}} \frac{\rho}{\mu} \frac{dU_\infty}{dt} u_\theta - 2\rho U_\infty u_\theta \frac{dR}{dt} - \frac{\rho}{\mu} \frac{dp}{d\theta} - \rho R \sin \theta \frac{dU_\infty}{dt}, \quad (4.255)$$

$$S_E = \rho T R \frac{dU_\infty}{dt} - 2\rho T U_\infty \frac{dR}{dt} + \frac{2U_\infty}{\text{Re}_{\infty,0}} \frac{k}{\text{Pr}_\infty} \frac{1}{R} \frac{dU_\infty}{dt} (\rho T \frac{dU_\infty}{dt} c_p) + \frac{2\rho U_\infty}{\text{Re}_{\infty,0}} \frac{k}{\text{Pr}_\infty} \frac{1}{R} \frac{dU_\infty}{dt} \sum_{i=1}^n c_{pi} D_{im} \frac{dY_i}{dt} \quad (4.256)$$

$$S_{Y_i} = \rho Y_i R \frac{dU_\infty}{dt} - 2\rho Y_i U_\infty \frac{dR}{dt}. \quad (4.257)$$

Οι οριακές συνθήκες πρέπει επίσης να τροποποιηθούν για να εκφράσουν την εξαέρωση πολλαπλών συστατικών. Οι αλλαγές σε σύγκριση με τη διατύπωση για σταγόνα ενός συστατικού εμφανίζονται στις ακόλουθες συνθήκες:

Διεπιφάνεια αερίου – υγρού: ($r = 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$)

$$\hat{m}_i \hat{Y}_i - \frac{2\hat{\rho} \hat{D}_{im}}{\text{Re}_{\infty,0} \text{Sc}_\infty} \frac{\hat{Y}_i}{R} = \hat{m}_i \hat{Y}_i - \frac{2\rho D_{im}}{\text{Re}_{\infty,0} \text{Sc}_\infty} \frac{Y_i}{R} \quad (4.258)$$

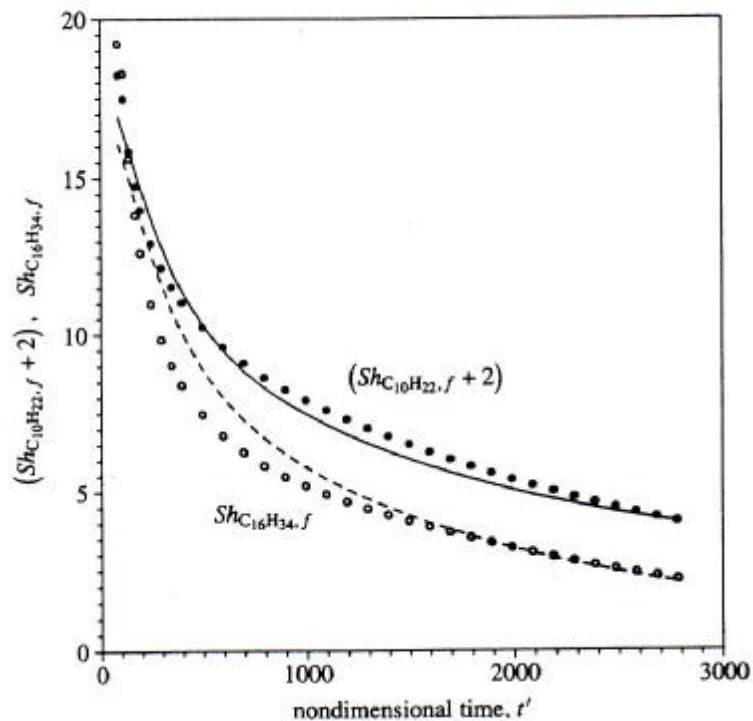
$$x_i = \frac{\hat{x}_i \rho_i^*(T^*)}{\rho_\infty^*}, \quad (4.259)$$

όπου το * δηλώνει τις διαστατικές ποσότητες. Οι ρυθμοί μεταφοράς θερμότητας και μάζας αναπαριστώνται από τους αριθμούς Nusselt και Sherwood αντίστοιχα:

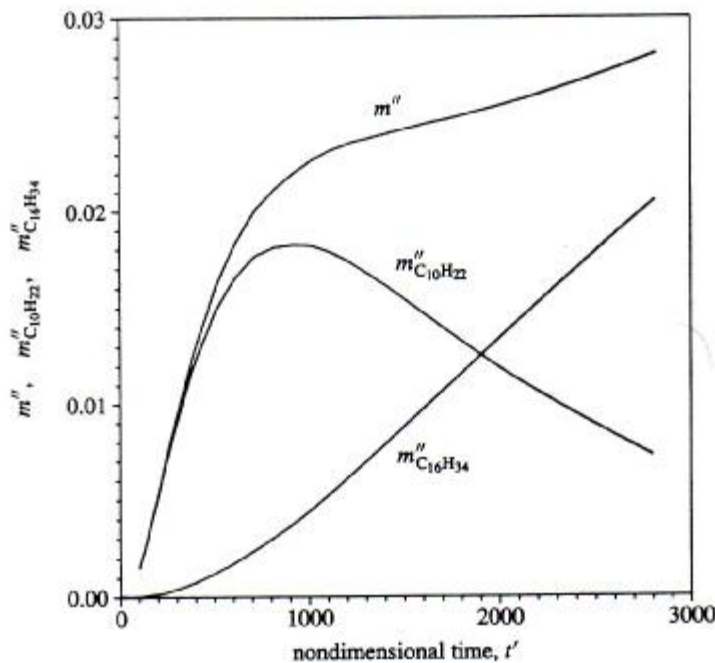
$$Nu_\infty = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{2k}{\text{Pr}_\infty} \frac{dT}{T} \frac{1}{R} \sin \theta d\theta, \quad (4.260)$$

$$Sc_\infty = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{2\rho D_{im}}{\text{Pr}_\infty - Y_i} \frac{dY_i}{Y_i} \frac{1}{R} \sin \theta d\theta. \quad (4.261)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις για τους αριθμούς Nusselt και Sherwood, τα διάφορα μεγέθη είναι αδιαστατοποιημένα από τις τιμές τους στην ελεύθερη ροή. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για την εξάτμιση ενός σταγονιδίου δεκανίου-δεκαεξανίου στον αέρα σε 1000K και 10atm. Αρχικά, η υγρή φάση είναι ακίνητη στους 300K με ομογενή συγκέντρωση συστατικών 50% δεκανίου- 50% δεκαεξανίου κατά μάζα. Ο αρχικός αριθμός Reynolds είναι 100. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η θέρμανση του υγρού διαρκεί για ολόκληρο το χρόνο ζωής. Για παράδειγμα, ακόμα και όταν έχει απομείνει μόνο το 28% της μάζας του σταγονιδίου, η θέρμανση του υγρού ακόμα υπολογίζει κατά 50% την ενέργεια που μεταφέρεται στην επιφάνεια. Αυτό οφείλεται στη χαμηλή πητικότητα του μίγματος, που χαρακτηρίζεται ιδιαίτερα από τα υψηλότερα σημεία βρασμού των συστατικών στις 10 atm. Ο συντελεστής συνολικής οπισθέλκουσας C_D προβλέπεται να αυξηθεί με μια μείωση στον αριθμό Reynolds. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι συσχετίσεις για το συντελεστή οπισθέλκουσας, τον αριθμό Sherwood και τον αριθμό Nusselt που αναπτύχθηκαν αρχικά για σταγονίδια ενός συστατικού από τον Renksizbulut κ.α. μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξ' ίσου για σταγονίδια πολλαπλών συστατικών. Το σχήμα 4.9 δείχνει την σύγκριση ανάμεσα στις προβλέψεις της αριθμητικής ανάλυσης και της εξίσωσης συσχέτισης για την χρονική εξέλιξη των αριθμών Sherwood της αέριας φάσης για δεκάνιο και δεκαεξανίο. Η συσχέτιση είναι περισσότερο ακριβής στις προβλέψεις για το κυρίαρχα εξατμιζόμενο συστατικό του καυσίμου. Η χρονική εξέλιξη των συστατικών της υγρής φάσης και οι ολικοί ρυθμοί μεταφοράς μάζας φαίνονται στο σχήμα 4.10.



ΣΧΗΜΑ 4.9: Χρονική εξέλιξη των αριθμών Sherwood της αέριας φάσης. Σύμβολα: Αριθμητικά αποτελέσματα. Στίγματα και συμπαγείς γραμμές: Nafziger-Renksizbulut συσχέτιση.



ΣΧΗΜΑ 4.10: Χρονική εξέλιξη των συστατικών και των συνολικών ρυθμών μεταφοράς μάζας.

Καθώς η θερμοκρασία του υγρού αυξάνει, η διαχυτότητα της μάζας αυξάνει και με την πάροδο του χρόνου η συγκέντρωση δεκανίου στο κέντρο του στροβίλου αρχίζει να μειώνεται. Ωστόσο, η διάχυση του δεκανίου από αυτή τη θέση στην επιφάνεια του σταγονιδίου δεν είναι αρκετά γρήγορη για να αναπληρώσει όλο το δεκάνιο που εξατμίζεται. Σύντομα (σε αδιάστατο χρόνο περίπου $\gg 1000$) η επιφανειακή συγκέντρωση του δεκανίου είναι τόσο χαμηλή που παρά την αυξανόμενη επιφανειακή θερμοκρασία, η ροή μάζας αρχίζει να μειώνεται. Σε αντίθεση, η ροή μάζας του δεκαεξανίου αυξάνει σταθερά σε ολόκληρο τον χρόνο ζωής του σταγονιδίου. Αυτό είναι ένα τέλειο παράδειγμα των περίπλοκων ζητημάτων που σχετίζονται με την εξάτμιση σταγονιδίου πολλαπλών συστατικών.

ΟΙ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΜΕ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΔΙ' ΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΦΛΕΞΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΞΑΛΕΙΨΗ ΤΟΥ ΣΤΑΓΟΝΙΔΙΟΥ

Περιγράφουμε συνοπτικά τώρα τις επιδράσεις της ροής με μεταφορά δι' αγωγής στην ανάφλεξη και την εξάλειψη του σταγονιδίου. Επαναφέρουμε ότι η ανάφλεξη μπορεί να συμβεί όταν ο χρόνος διάχυσης είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τον χρόνο αντίδρασης. Η εξάλειψη μπορεί να προκύψει από την μείωση του D μέσα στη φλόγα εξ' αιτίας αυξημένης ροής διάχυσης ή ροής με μεταφορά δι' αγωγής. Έχουν διερευνηθεί αριθμητικά η χρονικά εξαρτώμενη ανάφλεξη και η καύση ενός καθαρού σφαιρικού σταγονιδίου δεκανίου σε περιβάλλον θερμού αέρα και ένα μονό σταγονίδιο με ταυτόσημη κινητική αντίδραση. Η λύση επιτυγχάνεται με μια μέθοδο διαχωρισμού δυο βημάτων όπου οι εξισώσεις μεταφοράς και ορμής λύνονται αρχικά και μια διόρθωση πίεσης εισάγεται αργότερα.

Τα αποτελέσματα για την ανάφλεξη παρουσιάζονται για $Re = 0, 10, 100$ βασισμένα σε διάμετρο $d = 100\mu\text{m}$. Για $Re = 10$, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ανάφλεξη ξεκινάει στο μπροστινό σταθερό σημείο και η φλόγα διαδίδεται σχετικά γρήγορα γύρω από το πίσω σταθερό σημείο. Ο αδιάστατος χρόνος, $\tau = at/R_0^2$ που απαιτείται ώστε η φλόγα να κινηθεί γύρω από το σταγονίδιο είναι μικρότερος από 0,1. Για $Re = 100$, κατά τη διάρκεια ολόκληρης της χρονικά εξαρτώμενης ανάπτυξης της ροής, καμία σημαντική απελευθέρωση θερμότητας δεν παρατηρείται στο μπροστινό τμήμα της ροής. Η ανάφλεξη ξεκινάει πολύ κοντά στο πίσω σταθερό σημείο και διαδίδεται προοδευτικά προς τη ροή του ρεύματος. Η φλόγα θα μπορούσε να σταθεροποιηθεί μόνο στην αρνητική περιοχή επέκτασης του απορρεύματος. Δεν υπάρχει σημαντική καύση μπροστά από το πίσω σταθερό σημείο. Κατά τη διάδοση της φλόγας, τόσο η σχετική ταχύτητα του σταγονιδίου, όσο και η διάμετρος του έχουν θεωρηθεί σταθερές στην αριθμητική μέθοδο. Έτσι οι πραγματικές επιδράσεις της οπισθέλκουσας δύναμης και της αλλαγής στη διάμετρο του σταγονιδίου μπορεί να μην έχουν ληφθεί υπ' όψη.

Οι επιδράσεις της μεταφοράς δι' αγωγής στην εξάλειψη έχουν ερευνηθεί αναλυτικά σε πολλές μελέτες. Οι περισσότερες από αυτές βασίζονται στην ΑΕΑ. Ο αριθμός εξάλειψης Damkohler D μπορεί να υπολογιστεί από διάφορα διαγράμματα που παρουσιάζονται και τα οποία βασίζονται σε δευτερεύουσες παραμέτρους που εκφράζονται σε σχέση με τέσσερις κύριες παραμέτρους, δηλαδή το κλάσμα μάζας του οξειδωτικού, η θερμοκρασία της επιφάνειας του καυσίμου, η θερμοκρασία της εξωτερικής ροής και ο λόγος της θερμότητας εξαέρωσης προς τη θερμότητα της ανάφλεξης. Κριτήρια εξάλειψης για την άνωση της ροής οριακού στρώματος στο σημείο στασιμότητας πάνω από ένα καιόμενο σωματίδιο καυσίμου. Η ευαισθησία της εξάλειψης φαίνεται να μεταβάλλεται αντίστροφα με τη διάμετρο του σωματιδίου και την πίεση του συστήματος. Σαφείς εκφράσεις για τον κρίσιμο αριθμό Damkohler για την εξάλειψη στο σημείο στασιμότητας ενός σωματιδίου καυσίμου σε μικτή ροή με μεταφορά δι' αγωγής αναφέρονται. Φαίνεται ότι η μικτή ροή με μεταφορά δι' αγωγής δεν εισάγει κανένα νέο χαρακτηριστικό σε σχέση με την εξάλειψη στο σημείο στασιμότητας.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] B. Abramzon & W.A. Sirignano. Droplet vaporization model for spray combustion calculations. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32:1605-1618, 1989.
- [2] P.S. Ayyaswamy. Combustion dynamics of moving droplets. In *Encyclopedia of Environmental Control Technology* (Ed.: P.N. Cheremisinoff), chapter 20, pages 479-532. Gulf Publishing, Houston, TX, 1989.
- [3] P.S. Ayyaswamy. Direct contact transfer processes with moving liquid droplets. In *Advances in Heat Transfer* (Eds.: J.P. Hartnett, T.F. Irvine Jr., & Y.I. Cho), volume 26, pages 1-104. Academic Press, New York, 1995.
- [4] P.S. Ayyaswamy. Mathematical methods in direct-contact transfer studies with droplets. In *Annual Review of Heat Transfer* (Ed.: C.L. Tien), volume 7. Begell House, New York, 1996.
- [5] P.S. Ayyaswamy, S.S. Sadhal, & L.J. Huang. Effect of internal circulation on the transport to a moving liquid drop. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 17:689-702, 1990.
- [6] Y. M. Chen & F. Mayinger. Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles. *Int. J. Multiphase Flow*, 18(6):877-890, 1992.
- [7] C. H. Chiang, M.S. Raju, & W.A. Sirignano. Numerical analysis of convecting, vaporizing fuel droplet with variable properties. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35:1307-1324, 1992.
- [8] C. H. Chiang & W.A. Sirignano. Interacting, convecting, vaporizing fuel droplets with variable properties. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36(4):875-886, 1993.
- [9] D.S. Dandy & L.G. Leal. Buoyancy-driven motion of a deformable drop through a quiescent liquid at intermediate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 208:161-192, 1989.
- [10] R.J. Haywood, M. Renksizbulut, & G.D. Raithby. Numerical solution of deforming evaporating droplets at intermediate Reynolds numbers. *Numer. Heat Transfer, Part A*, 26:253-272, 1994.
- [11] R.J. Haywood, M. Renksizbulut, & G.D. Raithby. Transient deformation and evaporation of droplets at intermediate Reynolds numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37:1401-1410, 1994.
- [12] L.J. Huang & P.S. Ayyaswamy. Effect of insoluble surfactants in condensation on a moving drop. *ASME J. Heat Transfer*, 113(1):232-236, 1991.

- [13] M.A. Jog, P.S. Ayyaswamy, & I.M. Cohen. Evaporation and combustion of a slowly moving liquid fuel droplet: Higher order theory. *J. Fluid Mech.*, 307:135-165,1996.
- [14] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1980.