

ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΜΕ ΘΕΜΑ

**Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ CORIOLIS  
ΣΤΗΝ ΤΥΡΒΗ ΓΙΑ ΡΟΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ  
ΑΚΤΙΝΙΚΕΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ**



ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ :

**ΑΝΑΣΤΑΣΟΠΟΥΛΟΣ ΣΠΥΡΟΣ  
ΛΑΠΠΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : **ΝΑΝΟΥΣΗΣ ΝΑΝΟΥΣΗΣ  
ΚΑΠΠΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**

ΠΑΤΡΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004

ΑΡΙΘΜΟΣ  
ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ

7142

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ...

## **0.1. ΜΕ ΤΙ ΑΣΧΟΛΕΙΤΑΙ ΑΥΤΗ Η ΠΤΥΧΙΑΚΗ.**

Η εργασία κινήθηκε γύρω απ' την μοντελοποίηση της τύρβης στο κομμάτι που αφορά την επίδραση της δύναμης Coriolis. Η δύναμη Coriolis (που εμφανίζεται όταν μελετάμε ένα φαινόμενο ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς) αλλάζει τις εξισώσεις της μέσης ροής, αλλά επιδρά με μη αναμενόμενο τρόπο και στην τύρβη αναγκάζοντάς μας να τροποποιήσουμε τη μοντελοποίησή της αν θέλουμε να έχουμε πιο σωστές προβλέψεις της ροής. Ανάλογο αποτέλεσμα έχει και η φυγόκεντρος δύναμη στην περίπτωση της *καμπυλότητας των γραμμών ροής*, που επίσης παρουσιάζει αρκετά μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον. Επειδή τα φαινόμενα είναι αντίστοιχα, πολλά απ' τα συμπεράσματα που θα βγουν από την επίδραση της Coriolis θα ισχύουν και για την καμπυλότητα, αλλά και για άλλες σχετικές περιπτώσεις.

Υπάρχουν πολλές διορθώσεις που τροποποιούν τα μοντέλα τύρβης στην προσπάθεια να λάβουν υπόψη τους την επίδραση της δύναμης Coriolis και να έχουν έτσι πιο ακριβείς προβλέψεις της ροής. Κάποιες απ' αυτές τις διορθώσεις εισήχθησαν σ' ένα πρόγραμμα υπολογισμού της ροής (διδιάστατος κώδικας Navier – Stokes με μοντέλο τύρβης  $k - \epsilon$  χαμηλών αριθμών Reynolds) και δοκιμάστηκαν σε διάφορες περιπτώσεις (test cases) με σκοπό κυρίως να συγκριθούν μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα εξετάστηκαν η κλασική, απλή διόρθωση του Bradshaw που τροποποιεί το μήκος ανάμιξης και παραλλαγές αυτής και η διόρθωση με τον όρο  $G_c$  που τροποποιεί τις εξισώσεις του  $k$  και του  $\epsilon$ . Η κάθε μια απ' αυτές για ένα μεγάλο εύρος τιμών των σταθερών τους. Οι περιπτώσεις στις οποίες δοκιμάστηκαν αυτές οι διορθώσεις αφορούσαν α) Ροή σε ένα κανάλι με σταθερή διατομή με άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο της ροής, β) Ροή σε κανάλι του πειράματος του Moore (όμοιο με πριν με αυξανόμενη διατομή κατάντι της ροής), γ) Ροή σ' ένα ακτινικό συμπίεστη.

### **0.1.1. Ποιος ο αρχικός σκοπός της πτυχιακής εργασίας:**

Ο αρχικός, πολύ αισιόδοξος σκοπός, ήταν να βρεθεί ποια διόρθωση θα είναι κατάλληλη για μικρούς ακτινικούς συμπίεστες που γυρίζουν με μεγάλες ταχύτητες περιστροφής. Πειραματικά δεδομένα για τέτοιες περιπτώσεις δεν υπάρχουν και επιπλέον η περίπτωση αυτή ξεπερνά τα όρια εφαρμογής των συνηθισμένων διορθώσεων. Όπως φάνηκε όμως, απαιτείται πολύ δουλειά για να γίνει κάτι τέτοιο.

Η πτυχιακή ανατέθηκε ανεπίσημα τον Απρίλιο του 2002, επίσημα τον ίδιο μήνα και ουσιαστικά η δουλειά άρχισε τον Ιούνιο του 2002. Ένα απ' τα ουσιαστικά προβλήματα που υπάρχουν κατά την τέλεσή της ήταν η απρόσμενη μη καταλληλότητα του προγράμματος (στο οποίο θα δοκιμάζονταν οι τροποποιήσεις που αρχικά ερευνήθηκαν (πείραμα Moore και κανάλι σταθερής διατομής)).

### **0.1.2. Τι ήταν έτοιμο και τι έγινε σ' αυτή τη Πτυχιακή.**

Έτοιμο ήταν το πρόγραμμα A.T.H.E.N.A. σε γλώσσα FORTRAN του εργαστηρίου θερμικών στροβιλομηχανών το οποίο και αποκλειστικά χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της ροής σε διάφορες περιπτώσεις. Επίσης προγράμματα για την πύκνωση και αραίωση πλεγμάτων που διευκολύνουν τη δημιουργία τους, καθώς και ένα πρόγραμμα γραφικών για να φαίνονται οι ισογραμμές κάποιου μεγέθους της ροής απ' αυτά που υπολογίζονται. Τη διόρθωση του  $G_c$  την είχε μέσα στο πρόγραμμα ο Γ. Σιδέρης (διδασκτορικός του εργαστηρίου του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, τον οποίο και

συμβουλευθήκαμε και τον ευχαριστούμε για αυτό) ο οποίος έδωσε και την γενική κατεύθυνση για το πώς θα μπου οι υπόλοιπες διορθώσεις. Όλες κι όλες οι γραμμές κώδικα που τροποποιούνταν δεν ήταν πάνω από 40. Η δουλειά που έγινε για την πτυχιακή ήταν να δοκιμαστούν αυτές οι διορθώσεις εκτελώντας το πρόγραμμα για διάφορες περιπτώσεις και να συναχθούν συμπεράσματα.

Σημαντική πρέπει να θεωρηθεί και η βιβλιογραφική αναζήτηση για δημοσιεύσεις επί του αντικειμένου της εργασίας καθώς και η παρουσίασή τους υπό μορφή θεωρίας στο τρίτο κεφάλαιο. Το τελευταίο περιέχει αρκετό καλό υλικό όσον αφορά τη μοντελοποίηση της τύρβης σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς που μπορεί να δοκιμαστεί, αν κριθεί απαραίτητο, μελλοντικά από το εργαστήριο, καθώς στην παρούσα εργασία δε στάθηκε δυνατό να δοκιμαστούν πολλά μοντέλα λόγω των προβλημάτων που υπήρχαν με τον κώδικα ATHENA.

## **0.2. ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ.**

Έχει καταβληθεί προσπάθεια ώστε οι γνώσεις που πρέπει να έχει κάποιος για να διαβάσει αυτή την εργασία να είναι οι ελάχιστες δυνατές. Ένας τελειόφοιτος μηχανολόγος ξέρει τα απαιτούμενα μαθηματικά και τη ρευστομηχανική ώστε να μην έχει κανένα πρόβλημα και μπορεί να παρακάμψει το πρώτο κεφάλαιο. Αυτό έχει μπει για λόγους πληρότητας και αυτοτέλειας, οπότε μπορεί να καταλάβει αρκετά πράγματα και κάποια άσχετος με τη μηχανολογία, έστω κι αν δεν ξέρει τα μαθηματικά εκτός των άλλων περιλαμβάνουν καλή γνώση της μαθηματικής ανάλυσης, ιδιαίτερα της διανυσματικής ανάλυσης και αυτής των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Δυστυχώς στο τρίτο κεφάλαιο δεν αποφεύχθηκε και ο τανυστικός συμβολισμός, λόγω της ευρείας χρήσης του στη βιβλιογραφία και τις διάφορες δημοσιεύσεις.

## **0.3. ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ.**

Σκόπιμα σ' αυτή την εργασία υπάρχει όσο γίνεται μεγαλύτερη θεμελίωση και αυτοτέλεια, με δεδομένο τον περιορισμένο χρόνο που υπήρχε για να γραφτεί. Αυτό, εκτός από τα προφανή οφέλη γι' αυτόν που διαβάζει, ιδίως αν έχει λίγες γνώσεις επί του αντικειμένου, βοηθάει και τον γράφοντα στην καλύτερη κατανόηση της θεωρίας.

Γενικά δε γράφονται οι πράξεις που δείχνουν πώς προκύπτουν οι διάφορες εξισώσεις από κάποιες άλλες, αναφέρεται όμως από πού προκύπτουν ώστε να υπάρχει η θεμελίωση και να μην αισθάνεται ο αναγνώστης αποκομμένος απ' αυτές, σα να ήταν κάτι άγνωστο και δυσνόητο. Γενικότερα στη πτυχιακή δεν υπάρχει σε μεγάλο βαθμό μαθηματική θεμελίωση (θα ήταν σχεδόν αδύνατο και μάλλον άχρηστο), αλλά υπάρχει φυσική θεμελίωση.

Η πτυχιακή χωρίζεται σε δύο μέρη. Την θεωρία (πρώτα κεφάλαια) και την πράξη, όπου ερευνούνται οι διάφορες διορθώσεις στις διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

Το 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναφέρει γενικά για τη ροή των ρευστών. Αναφέρονται κυρίως τα κομμάτια που θα χρειαστούν για το υπόλοιπο της διπλωματικής, ώστε να είναι πιο αυτόνομη και κατανοητή. Πρόκειται ουσιαστικά για μια περίληψη του τμήματος της μηχανικής των ρευστών που θα χρειαστεί παρακάτω.

Το 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναφέρεται γενικά στο οριακό στρώμα και τη μοντελοποίηση της τύρβης.

Το 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο γράφει για την επίδραση της Coriolis στην τύρβη και πώς μπορούμε να τη μοντελοποιήσουμε.

Το 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή κάποιων από τις διορθώσεις για τον υπολογισμό της ροής στην περίπτωση του καναλιού σταθερής διατομής και σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Το 5<sup>ο</sup> και τελευταίο κεφάλαιο εξετάζονται αντίστοιχα η περίπτωση του πειράματος του Moote και της ακτινικής μηχανής.

Τελειώνοντας αυτό το κεφάλαιο, ας αναφερθεί ότι το βιβλίο «ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ» του κυρίου Αθανασιάδη, εκτός από το πιο βασικό βιβλίο της βιβλιογραφίας ήταν και η κύρια πηγή έμπνευσης για την εμφάνιση και τη δομή της πτυχιακής. Απ' αυτό το βιβλίο έχουν ληφθεί και πολλά απ' τα σχήματα αυτής της πτυχιακής εργασίας.

# 1. Γενικά περί ροής ρευστών.

Ρευστά είναι τα υγρά και τα αέρια. Λέγονται έτσι επειδή έχουν τη δυνατότητα να ρέουν. Οι άνθρωποι ανέπτυξαν την επιστήμη μηχανική των ρευστών που ασχολείται με τους νόμους που διέπουν την κίνηση των ρευστών με κύριο σκοπό να τους βοηθήσει σε τεχνικές και μη εφαρμογές, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι για παράδειγμα οι σωληνώσεις, η ναυπηγική και αεροναυπηγική, οι αντλίες, η μετεωρολογία, οι στροβιλομηχανές. Οι νόμοι αυτοί βασίζονται στις θεμελιώδεις αρχές της κλασσικής φυσικής, δηλαδή στην αρχή της συνέχειας των θεμελιωδών μεγεθών χώρος και χρόνος και στην αρχή της διατήρησης της μάζας και της ενέργειας. Σ' αυτούς προστέθηκαν με την πάροδο των χρόνων και τη βοήθεια της εμπειρίας, των πειραμάτων και της θεωρητικής έρευνας και άλλοι νόμοι που με ικανοποιητική ακρίβεια διέπουν τις ροές.

Ο φυσικός χώρος όπου βρίσκεται ρευστό σε κίνηση λέγεται πεδίο ροής.

Γραμμές ροής του πεδίου ροής μια δεδομένη χρονική στιγμή λέγονται οι γραμμές που σχηματίζονται αν εκείνη τη στιγμή ζωγραφίσουμε για κάθε στοιχείο του πεδίου την κατεύθυνση του διανύσματος ταχύτητας του. Αν το πεδίο ροής δεν αλλάζει με το χρόνο, δηλαδή σε κάθε σημείο του κάθε ένα από τα φυσικά μεγέθη έχει σταθερή τιμή, τότε λέμε ότι έχουμε ένα μόνιμο πεδίο ροής και τότε οι γραμμές ροής συμπίπτουν με τις τροχιές των στοιχείων του ρευστού.

## 1.1. ΦΥΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ.

### 1.1.1. Συνέχεια.

Ξέρουμε ότι η ύλη είναι ασυνεχής, δηλαδή αποτελείται από μόρια, μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει τίποτε. Στην πράξη όμως μπορούμε να μελετήσουμε τα ρευστά στη μακροσκοπική κλίμακα, αφού η συμπεριφορά των μορίων παρουσιάζει μια στατιστική ομοιομορφία, θεωρούμε λοιπόν τα ρευστά μέσα συνεχή, δηλαδή μέσα σε κάθε στοιχείο όγκου τους  $dV$  οι φυσικές ποσότητες (π.χ. μάζα, ορμή) είναι συνεχώς κατανεμημένες. Επίσης στα συνεχή μέσα θεωρούμε ότι η μεταβολή καθενός από τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν την κατάσταση του ρευστού τοπικά ή χωρικά, είναι συνεχής συνάρτηση της θέσης και του χρόνου. Αν  $\rho$  η πυκνότητα μάζας του ρευστού στον όγκο  $dV$ , η μάζα που περιέχει το στοιχείο αυτό είναι  $dm = \rho dV$ . Η ποσότητα  $dm$  ονομάζεται στοιχείο μάζας ή απλά στοιχείο του ρευστού.

Άλλη σχετική με τη συνέχεια ιδιότητα είναι η ιδιότητα του ισότροπου, δηλαδή οι εκδηλώσεις των φυσικών ιδιοτήτων του ρευστού μέσα στο στοιχείο μάζας  $dm$  δεν εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του στοιχείου στο χώρο.

### 1.1.2. Συνεκτικότητα

Τα ρευστά, ως υλικά σώματα, υπόκεινται σε δυνάμεις. Έτσι, κάθε στοιχείο του ρευστού βρίσκεται συνεχώς σε μια εντατική κατάσταση που εξασκείται σ' αυτό από τα γειτονικά του στοιχεία. Σε αναλογία με τα στερεά, διακρίνουμε και στα ρευστά την ορθή εντατική κατάσταση και την διατμητική εντατική κατάσταση.

Την ορθή εντατική κατάσταση την χαρακτηρίζει η πίεση  $p$ . Αν σκεφτούμε ένα ρευστό σε ηρεμία, μια στοιχειώδης επιφάνεια του θα ισορροπεί κάτω απ' τη δράση δύο ίσων και αντίθετων κάθετων σ' αυτή δυνάμεων. Το πηλίκο μιας τέτοιας δύναμης προς τη στοιχειώδη επιφάνεια, είναι η πίεση, μέγεθος βαθμωτό, συνάρτηση της θέσης και του χρόνου. Η έννοια της πίεσης προεκτείνεται και για την περίπτωση κινούμενου ρευστού, όπως στη μηχανική του στερεού η δύναμη που ασκείται σε ακίνητο σώμα είναι ταυτόσημη ως έννοια με τη δύναμη ως παράγοντα κίνησης.

Η διατμητική εντατική κατάσταση προέρχεται από την ιδιότητα των ρευστών που ονομάζεται συνεκτικότητα ή ιξώδες ή εσωτερική τριβή και εμφανίζεται μόνο όταν το ρευστό κινείται. Συνεκτικότητα είναι η ιδιότητα των ρευστών να ανθίστανται στη διάτμηση τους, δηλαδή στην κίνηση του ενός στοιχείου ως προς το άλλο. Φαινομενολογικά μοιάζει με την τριβή δύο στερεών που κινούνται μεταξύ τους. Αν θεωρήσουμε δύο γειτονικά στοιχεία ρευστού σε κίνηση, με απόσταση μεταξύ τους  $dy \rightarrow 0$ , θα έχουν σχεδόν κοινή διεπιφάνεια  $dA$ . Λόγω συνεκτικότητας οι ταχύτητες τους δε θα είναι οι ίδιες (το ένα «φρενάρει» το άλλο), αλλά θα διαφέρουν ελάχιστα κατά  $dc$ . Τότε το ένα στοιχείο ρευστού θα ασκεί στο άλλο μια διατμητική δύναμη. Το πηλίκο αυτής της δύναμης με τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dA$  ονομάζεται διατμητική τάση, συμβολίζεται με  $\tau$  και δίνεται από μια σχέση που διατύπωσε ο Newton και είναι η εξής:

$$\tau = \mu \frac{dc}{dy} \quad (1.1)$$

Το  $\mu$  είναι το φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τη συνεκτικότητα ενός ρευστού και ονομάζεται δυναμική συνεκτικότητα. Εξαρτάται από το ποιο είναι το ρευστό, από τη θερμοκρασία του και πολύ λίγο από την πίεση. Για αέρα 20 βαθμών Κελσίου είναι περίπου  $17,9 \cdot 10^{-6}$  kg/ms. Χαμηλότερος συντελεστής  $\mu$  χαρακτηρίζει τα λεπτόρρευστα υγρά (νερό), από τα παχύρρευστα (μέλι). Ο νόμος αυτός είναι εμπειρικός, αλλά φάνηκε στην πράξη ότι περιγράφει πολύ καλά μια μεγάλη κατηγορία ρευστών και σχεδόν όλα τα ρευστά που χρησιμοποιούνται στην τεχνική. Όσα δεν υπακούουν αυτό το νόμο λέγονται μη νευτώνεια ρευστά (αίμα). Πιο πλήρης εξίσωση για τα νευτώνεια ρευστά υπάρχει στην §1.3.1.

Υπάρχουν περιπτώσεις που τα φαινόμενα συνεκτικότητας είναι πολύ περιορισμένα και η ροή μπορεί να περιγραφεί με αρκετή ακρίβεια θεωρώντας το ρευστό μη συνεκτικό, δηλαδή με τάση  $\tau$  ίση με μηδέν. Αυτό γίνεται διότι απλοποιεί πολύ τις εξισώσεις ροής. Παράδειγμα μη συνεκτικού ρευστού είναι ο αέρας μακριά από στερεά τοιχώματα.

### 1.1.3. Συμπιεστότητα

Έχει διαπιστωθεί ότι μεταβολή της ορθής εντατικής κατάστασης (πίεσης) σε κάποια περιοχή μέσα στο ρευστό έχει ως αποτέλεσμα την ομόσημη, γενικά, μεταβολή της πυκνότητας  $\rho$  στην περιοχή αυτή. Στα υγρά, επειδή τα μόρια είναι πολύ κοντά, η συμπιεστότητα είναι μικρή και θεωρούνται πρακτικά ασυμπίεστα στις περισσότερες εφαρμογές. Αντίθετα, στα αέρια είναι μεγάλη και μάλιστα στενά συνυφασμένη με την εμφάνιση θερμικών φαινομένων στην μάζα τους. Αυτό είναι γεγονός εξαιρετικής σημασίας για την τεχνική διότι κατέστη δυνατή η πρόσφορη μετατροπή της θερμικής ενέργειας σε μηχανικό έργο με τις θερμικές μηχανές.

Για τα περισσότερα αέρια μακριά από το σημείο υγροποίησης τους έχει διαπιστωθεί ότι ισχύει με ικανοποιητική για τεχνικές εφαρμογές προσέγγιση μια απλή σχέση που συνδέει την εντατική τους κατάσταση (πίεση) με τη θερμική τους κατάσταση (θερμοκρασία  $T$ ). Η σχέση αυτή λέγεται καταστατική εξίσωση τελείων αερίων και είναι η εξής:

$$\frac{P}{\rho} = RT \quad (1.2)$$

R είναι η ειδική σταθερά του αερίου, θεωρούμενη σταθερή για ένα αέριο ανεξαρτήτως της καταστάσεως του. Μάλιστα ισχύει η σχέση  $R=R\pi/MB$ , όπου  $R\pi$  είναι η παγκόσμια σταθερά τελείων αερίων (8,314 J/mol-grad) και MB είναι το μοριακό βάρος του αερίου. Για αέρα που έχει μοριακό βάρος 29 kg/kmol προκύπτει  $R=287$  J/kg-grad. Ο αέρας μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά ασυμπίεστος όταν οι ταχύτητες ροής είναι πολύ μικρές.

Άλλες φυσικές ιδιότητες των ρευστών είναι η θερμική αγωγιμότητα και η ηλεκτρική αγωγιμότητα.

## 1.2. ΘΕΜΕΛΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ.

Τρεις είναι οι θεμελιακές εξισώσεις της κλασικής μηχανικής, άρα και της μηχανικής των ρευστών:

1. Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, που στα ρευστά λέγεται (και) εξίσωση της συνέχειας και εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας, ότι ύλη ούτε καταστρέφεται ούτε δημιουργείται. Στα ρευστά η διατύπωση γίνεται με την παραδοχή ότι είναι μέσα συνεχή.

2. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής ή εξίσωση της ορμής, που εκφράζει το 2<sup>ο</sup> νόμο του Newton, ότι δύναμη είναι η ανά μονάδα του χρόνου μεταβολή της ποσότητας κίνησης (της ορμής δηλαδή).

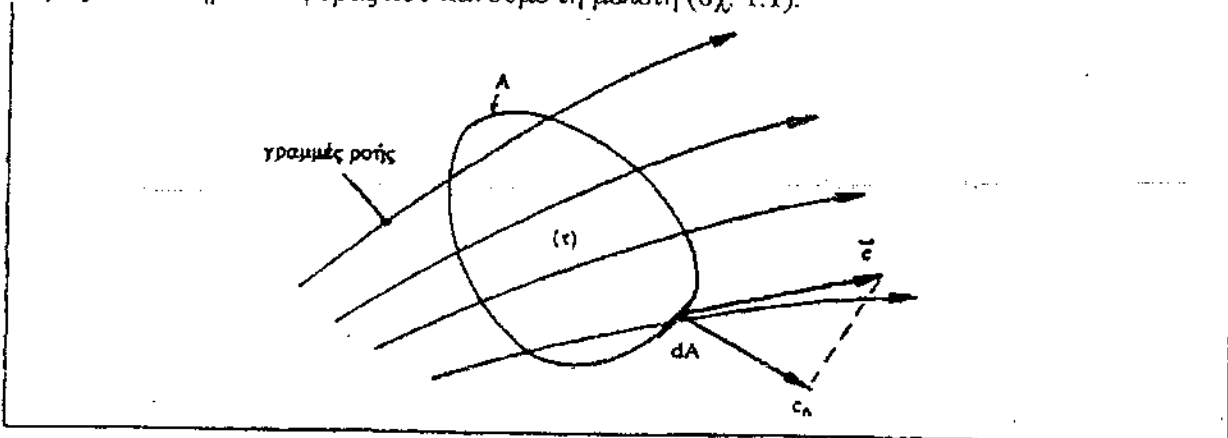
3. Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας ή εξίσωση της ενέργειας, που εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας, μ' απλά λόγια ότι η ενέργεια δε χάνεται. Είναι ουσιαστικά ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος, ότι ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας του συστήματος μείον το ρυθμό έργου που γίνεται (από το ρευστό σώμα) ισούται με το ρυθμό αύξησης της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος.

Οι εξισώσεις θα διατυπωθούν στη γενική τους μορφή, αλλά συνήθως εφαρμόζονται απλοποιημένες, λόγω των απλουστευτικών παραδοχών που κάνουμε σε κάθε περίπτωση.

Να σημειωθεί εδώ ότι όλες οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται στη Φυσική είναι τελικά εμπειρικές, δηλαδή προέρχονται από παρατηρήσεις του ανθρώπου στο φυσικό κόσμο. Μερικές απ' αυτές είναι θεμελιακές, θεωρείται ότι έχουν πλήρη και καθολική ισχύ με απόλυτη ακρίβεια σε όλες τις περιπτώσεις της κλασικής μηχανικής και αν μία απ' αυτές δεν ισχύσει σε κάποια περίπτωση καταστρέφεται όλο το οικοδόμημα της κλασικής μηχανικής. Αυτές είναι που λέγονται αξιώματα στη Φυσική.

### 1.2.1. Η εξίσωση διατήρησης της μάζας.

Έστω μια νοητή κλειστή επιφάνεια A που περικλείει χώρο τ πεδίου ροής, ακίνητη ως προς το σύστημα αναφοράς που κάνουμε τη μελέτη (σχ. 1.1).



Σχήμα 1.1. Ισολογισμός μάζας.

θεωρούμε μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ή στην επιφάνεια A από μέσα προς τα έξω, ο-

ότε  $c_n$  είναι η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο στοιχείο επιφάνειας  $dA$ . Τότε η εξίσωση διατήρησης της μάζας διατυπώνεται ως εξής (ολοκληρωματική μορφή):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_A \rho c_n dA = \sum_{i=1}^n \dot{m}_i \quad (1.3)$$

Η τελεία πάνω από ένα μέγεθος σημαίνει την παραγωγή του ως προς το χρόνο, στη συγκεκριμένη περίπτωση την παροχή μάζας. Το πρώτο ολοκλήρωμα θεωρείται ότι γίνεται στο χώρο (ουσιαστικά τριπλό ολοκλήρωμα) και το δεύτερο στην επιφάνεια.

Ο πρώτος όρος εκφράζει τη μεταβολή στη μονάδα του χρόνου της μάζας που περιβάλλει η επιφάνεια, ο δεύτερος τη μάζα που βγαίνει (ή μπαίνει) από την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου και ο τρίτος το άθροισμα της (παροχής) μάζας που εμφανίζεται λόγω  $n$  πηγών μάζας  $m_i$  (ή εξαφανίζεται λόγω καταβόθρων). Πολύ απλά η σχέση μας λέει ότι η μεταβολή μάζας που είναι μέσα, ισούται με τη μάζα που γεννιέται μείον τη μάζα που φεύγει.

Συνήθως πηγές ή καταβόθρες μάζας δεν υπάρχουν (καταβόθρα π.χ. θα ήταν μια μικρή τρύπα σε ένα σωλήνα, όταν για επιφάνεια  $A$  θεωρούμε τα όρια του σωλήνα), οπότε ο δεύτερος όρος είναι 0. Επίσης, σ' αυτή την εργασία (όπως συμβαίνει συχνά) μελετάμε μόνιμα πεδία, οπότε ο πρώτος όρος που έχει παράγωγο ως προς το χρόνο μηδενίζεται και η εξίσωση γίνεται:

$$\int_A \rho c_n dA = 0 \quad (1.3a)$$

Μάλιστα αν το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο, η  $\rho$  φεύγει από τη μέση.

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μάζας για ένα στοιχειώδη όγκο  $dV$  ή εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss στην εξ. (1.3) και θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν πηγές μάζας, προκύπτει η εξίσωση της συνέχειας σε διαφορική μορφή (« $u$ ,  $v$ ,  $w$  είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

που γράφεται πιο σύντομα ως:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{c}) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{c}) = 0 \quad (1.4)$$

Απ' τα παραπάνω φαίνεται με τι ισούται η απόκλιση διανύσματος  $\text{div}$  και πώς αναλύεται ο τελεστής του Euler  $\nabla$  (άθροισμα των μερικών παραγώγων των τριών συνιστωσών του διανύσματος ως προς τις αντίστοιχες κατευθύνσεις τους).

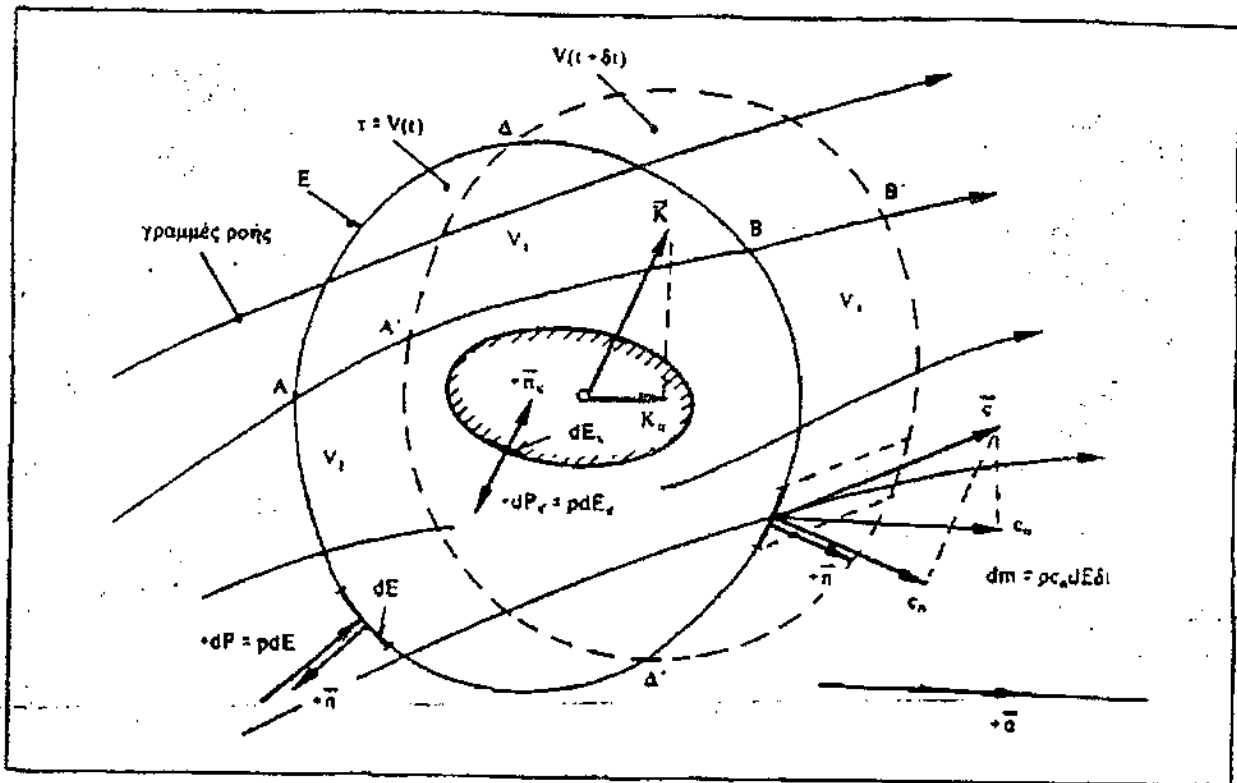
### 1.2.2. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής.

Με την εξίσωση της ορμής συσχετίζονται η κινηματική και η δυναμική κατάσταση του ρευστού μέσα στο πεδίο ροής του.

Έστω ένα πεδίο ροής μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$  και ότι μέσα στο πεδίο βρίσκεται ένα στερεό σώμα  $(K)$ . Έστω ότι μελετάμε τη ροή ως προς ένα σύστημα αναφοράς για το οποίο το σώμα είναι ακίνητο<sup>1</sup>, θα διατυπωθεί σχέση που συνδέει τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ροής με τη δύναμη  $K$  που το ρευστό ασκεί πάνω στο σώμα. Έστω κλειστή νοητή επιφάνεια  $E$  που περιβάλλει το σώμα  $(K)$  και είναι ακίνητη ως προς αυτό, σχ. 1.2. Στην επιφάνεια ορίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$  με κατεύθυνση από μέσα προς τα έξω, οπότε στη διεπιφάνεια ρευστού-στερεού θα κατευθύνεται προς το στερεό. Τη στιγμή  $t$  το ρευστό καταλαμβάνει χώρο  $\tau$  ίσο με  $V(t)$ , αλλά καθώς ρέει, σε λίγο χρόνο  $\delta t$  το ίδιο ρευστό καταλαμβάνει το χώρο  $V(t+\delta t)$ , που στο σχ. 1.2 παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή. Στη νέα θέση



το ρευστό έχει κοινό με πριν το χώρο  $V_1$  που ορίζεται απ' τα σημεία  $(\Delta B \Delta' A')$  έχει απομακρυνθεί από το χώρο  $V_2$   $(A \Delta A' \Delta')$ , και έχει καταλάβει και ένα κομμάτι του χώρου που δεν είχε πριν, τον  $V_3$   $(\Delta B \Delta' B)$ .



Σχήμα 1.2. Εφαρμογή του θεωρήματος της ορμής.

Το θεώρημα θα γραφτεί για μια κατεύθυνση  $\alpha$  η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατεύθυνση, όπως π.χ. μια απ' τις  $x, y, z$  των καρτεσιανών συνιστωσών.

Στη γενική της μορφή, η εξίσωση διατήρησης της ορμής έχει ως εξής:

$$P_\alpha + T_\alpha + G_\alpha + H_\alpha - K_\alpha = \frac{\partial J_\alpha}{\partial t} + S_\alpha$$

ή

$$\begin{aligned} - \int_E \rho c \cos(\vec{n}, \vec{\alpha}) dE + \int_E \tau \cos(\vec{\tau}, \vec{\alpha}) dE + \int_V \rho g_\alpha dV + H_\alpha + \int_{E_a} [\rho c \cos(\vec{n}_a, \vec{\alpha}) + \tau \cos(\vec{\tau}_a, \vec{\alpha})] dE_a = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c_\alpha dV + \int_E \rho c_\alpha c_n dE \end{aligned} \quad (1.5)$$

Στο πρώτο μέλος της εξίσωσης βρίσκεται το άθροισμα κατά την κατεύθυνση  $\alpha$  των δυνάμεων που ενεργούν στη μάζα του ρευστού που βρίσκεται στο χώρο ( $\tau$ ). Στο δεύτερο μέλος βρίσκεται η μεταβολή της ορμής της ίδιας μάζας ρευστού. Ουσιαστικά είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, που λέει ότι δύναμη ισούται με μεταβολή ορμής. Πιο συγκεκριμένα:

$P_\alpha$  είναι η δύναμη που ασκείται στο ρευστό λόγω ορθής εντατικής κατάστασης, δηλαδή λόγω πίεσης. Η στοιχειώδης δύναμη  $dP$  ασκείται από έξω προς τα μέσα, ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα η έχει αντίθετη φορά, γι' αυτό και υπάρχει το μείον μπροστά από το ολοκλήρωμα που εκφράζει το  $P_\alpha$  (σχ. 1.2). Επειδή γράφουμε την εξίσωση ως προς την κατεύθυνση  $\alpha$  παίρνουμε την προβολή της δύναμης  $dP$  σ' αυτή την κατεύθυνση, γι' αυτό υπάρχει και ο πολλαπλασιασμός με το συνημίτονο του μοναδιαίου  $\eta$  με την κατεύθυνση  $\alpha$ .

$T_\alpha$  είναι η δύναμη που ασκείται στο ρευστό λόγω διαμητικής εντατικής κατάστασης. Στην έκφραση του  $T_\alpha$ ,  $\tau$  είναι το μέτρο της διαμητικής τάσης πάνω στην επιφάνεια  $E$  και  $\tau$  το μοναδιαίο διάνυσμα της κατεύθυνσης της στοιχειώδους διαμητικής δύναμης που δρα στην εξωτερική πλευρά της  $E$ , οπότε και  $\tau_0 \perp n$ . Αν το ρευστό θεωρηθεί μη συνεκτικό, ο όρος  $T_\alpha$  μηδενίζεται.

$G_\alpha$  είναι οι δυνάμεις λόγω πεδίου βαρύτητας. Στην περίπτωση μας η έλξη της γης.

$H_a$  είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται λόγω ύπαρξης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Η ροή ρευστού που υπόκεινται σε τέτοιες δυνάμεις εξετάζεται από ειδικό κλάδο της ρευστομηχανικής, την *μαγνητούδροδυναμική*. Ρευστά στα οποία ασκούνται τέτοιες δυνάμεις μπορεί να είναι τα υγρά μέταλλα και τα ιονισμένα αέρια, όταν βρίσκονται σε *ηλεκτρομαγνητικό πεδίο*.

$K_a$  είναι η δύναμη που ασκεί το ρευστό στο σώμα (πάντα κατά την κατεύθυνση  $a$ ), οπότε στο ρευστό ασκείται μια αντίθετη δύναμη.  $E_k$  είναι η διεπιφάνεια ρευστού-στερεού και  $\eta_k$  το μοναδιαίο σ' αυτή την επιφάνεια (σχ. 1.2). Στο ολοκλήρωμα ο πρώτος όρος είναι η δύναμη που ασκεί το στερεό στο ρευστό λόγω ορθής εντατικής κατάστασης και ο δεύτερος λόγω διατμητικής. Οπότε αν θεωρούμε το ρευστό μη συνεκτικό ο δεύτερος όρος μηδενίζεται.

Στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης έχουμε τη μεταβολή της ορμής που προκαλείται απ' αυτές τις δυνάμεις (ή που συνεπάγεται αυτές τις δυνάμεις). Αυτή έχει δύο όρους:

Την εν θέση μεταβολή της ορμής  $dJ_a/dt$ . Αυτή εκφράζει τη μεταβολή της ορμής της μάζας που σε κάθε παρερχόμενη χρονική στιγμή βρίσκεται μέσα στην  $E$  (και όχι της μάζας του εξεταζόμενου ρευστού που σε λίγη ώρα θα καταλαμβάνει νέο χώρο  $V(t+\delta t)$ ).

Την ροή της ορμής  $S_a$ , που εκφράζει πόση «καινούρια» ορμή (δηλαδή μάζα επί την ταχύτητα της) μπήκε και πόση χάθηκε από την επιφάνεια αναφοράς. Το  $c_n$  είναι θετικό στο τμήμα  $(\Delta B \Delta')$  της επιφάνειας  $E$  (η μάζα εξέρχεται από την  $E$ ) και αρνητικό στο τμήμα  $(\Delta A \Delta')$ . 1.2.2.1.

#### 1.2.2.1. Εξίσωση της ορμής για κινούμενα συστήματα.

Αν το στερεό σώμα κινείται ως προς το σύστημα αναφοράς μας και μάλιστα όχι με σταθερή ταχύτητα, η εξίσωση αλλάζει όπως συμβαίνει και στην κλασσική μηχανική για μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς, οπότε μπαίνουν μέσα στην εξίσωση και επιπλέον όροι. Πολύ συνοπτικά θ' αναφερθεί αυτή η περίπτωση.

Θεωρούμε ότι το στερεό σώμα κινείται με ταχύτητα  $U$ . Τότε γράφουμε τις τρεις εξισώσεις της ορμής για σύστημα που κινείται κι αυτό όπως το σώμα (σχετικό σύστημα αναφοράς), οπότε οι συντεταγμένες του σώματος ως προς το σύστημα είναι σταθερές. Για ένα ακίνητο παρατηρητή όμως σε ένα αδρανειακό σύστημα (συνήθως η γη) η ταχύτητα του ρευστού θα ισούται με τη  $c$  που βάζουμε στους τύπους (η οποία είναι η σχετική τώρα) συν τη  $U$  του συστήματος αναφοράς. Το πρώτο μέλος της εξ. (1.5) μένει ίδιο, αφού οι δυνάμεις (θεωρώντας τις εδώ ως μέτρο αλληλεπίδρασης σωμάτων) δεν καταλαβαίνουν ως προς ποιο σύστημα ο άνθρωπος κάνει τη μελέτη. Στο δεύτερο μέλος όμως αλλάζουν οι όροι, κατά τα γνωστά από την κλασσική μηχανική για μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς (θ' αναφερθούν περισσότερα σε επόμενο κεφάλαιο) και παρουσιάζονται οι λεγόμενες ψευδοδυνάμεις. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

θεωρώντας κατεύθυνση  $a$  αυτή της ταχύτητας  $U$  τη δεδομένη στιγμή ισχύει:

$$P_a + T_a + G_a + H_a - K_a = \frac{\partial J_a}{\partial t} + S_a, \quad (1.5a)$$

γραμμένη όμως για το σχετικό σύστημα αυτή τη φορά με  $c$  τη σχετική ταχύτητα κα:

$$\frac{\partial J_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho c_a dV + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho U_a dV + 2 \int \rho \left[ \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot \vec{c} \right] dV \quad (1.6)$$

Οι τρεις όροι είναι αντίστοιχα η σχετική, η μετοχική και η Coriolis μεταβολή της ορμής θέσης. Η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα του σχετικού συστήματος είναι  $\omega = da/dt$ . Οι άλλες δύο κατευθύνσεις που θα εφαρμοστεί το θεώρημα της ορμής θα είναι κάθετες στην ταχύτητα  $U$  και ο τρίτος όρος της εξ. (1.6) δε θα υπάρχει.

Ειδική περίπτωση του θεωρήματος της ορμής για μη αδρανειακά συστήματα είναι και η περίπτωση όπου  $U = 0$  και  $\omega = 0$ , οπότε λέγεται θεώρημα της ροπής της ορμής. Παρόλη τη χρησιμότητα του δε θα γραφτεί εδώ, αφού αποτελεί ειδική περίπτωση των εξ. (1.5), εξ. (1.6).

### 1.2.2.2. Εξίσωση διατήρησης της ορμής σε διαφορική μορφή.

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις με το ρευστό.

Στην εξ. (1.5) μπορούμε να γράψουμε τις επιφανειακές δυνάμεις (ορθές και διατμητικές) που δρουν στην επιφάνεια  $E$  με ένα όρο  $F_s = P + T$ . Οπότε η εξ. (1.5) μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή (διανυσματική, περικλείονται και οι τρεις καρτεσιανές συνιστώσες):

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \bar{S} = \bar{G} + \bar{F}_s - \bar{K} \quad (1.5\beta)$$

Οι όροι των επιφανειακών δυνάμεων μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\bar{F}_s = \int_E \bar{i} dE \quad -\bar{K} = \int_{E_n} \bar{i} dE \quad (1.7)$$

όπου  $\bar{i}$  είναι το διάνυσμα των τάσεων και ισχύει:

$$\bar{i} = \sigma^T \bar{n} \quad (1.8)$$

όπου  $\sigma$  είναι ο τανυστής των τάσεων:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

και  $\sigma^T$  ο ανάστροφος του  $\sigma$  (οι γραμμές του ενός στήλες του άλλου).

Αν αντικαταστήσουμε στην εξ. (1.5β) τους όρους με τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, όπως κάναμε στην εξ. (1.5) και εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss που μετατρέπει τα επιφανειακά ολοκληρώματα σε ογκικά, προκύπτει εύκολα η επόμενη εξίσωση που είναι και η διατύπωση του θεωρήματος της ορμής σε διαφορική μορφή:

$$\frac{\partial(\rho \bar{c})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{c}) \bar{c} + \text{grad}^T \bar{c} \cdot \rho \bar{c} = \rho \bar{g} + \text{div} \sigma \quad (1.10)$$

Η κλίση διανύσματος  $\text{grad} \bar{c}$  είναι ένας πίνακας:

$$\text{grad} \bar{c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

και  $\text{grad}^T \bar{c}$  είναι ο ανάστροφος του  $\text{grad} \bar{c}$ .

Η απόκλιση πίνακα  $\text{div} \sigma$  ισούται με ένα διάνυσμα:

$$\text{div} \sigma = \nabla \cdot \sigma = \sigma^T \cdot \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Αν στην εξ. (1.10) βάλουμε την εξίσωση διατήρησης της μάζας εξ. (1.4), αυτή απλοποιείται και γράφεται ως εξής:

$$\rho \frac{D \bar{c}}{Dt} = \rho \bar{g} + \text{div} \sigma \quad (1.10\beta)$$

Για τον τελεστή  $D/Dt$  ισχύει:



από την  $E$  ενέργεια συν το άθροισμα των ισχύων που προσδίδονται στο ρευστό π.χ. από δυνάμεις. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{c^2}{2} + u \right) dV + \int_V \rho \left( \frac{c^2}{2} + u \right) \bar{c} d\bar{E} = -N_i + \int_V \rho \bar{c} \bar{g} dV + \int_V \sigma \bar{c} d\bar{E} - \int_V \bar{q} d\bar{E} + \int_V \rho w dV \quad (1.16)$$

Ο πρώτος όρος είναι η ανά μονάδα χρόνου αύξηση της ενέργειας που περικλείεται στο χώρο  $\tau$  και ο δεύτερος η ροή ισχύος (ανά μονάδα χρόνου εξερχόμενη ενέργεια) από την επιφάνεια  $E$ . Και οι δυο μαζί δείχνουν την ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της ενέργειας που υπήρχε στο χώρο  $\tau$  λόγω των παραγόντων του δεύτερου μέλους της εξίσωσης. Στην παρένθεση βρίσκεται το άθροισμα της ενέργειας ανά μονάδα μάζας και πιο συγκεκριμένα της κινητικής και της εσωτερικής. Για την εσωτερική ενέργεια ισχύει<sup>1</sup>:

$$u = c_v T \quad (1.17)$$

Το  $c_v$  είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο και ορίζεται στη θερμοδυναμική (ως πηλίκο διαφορικών θερμότητας και θερμοκρασίας για θερμοδυναμικό σύστημα που υφίσταται τη μεταβολή υπό σταθερό όγκο).

Στο δεύτερο μέλος οι όροι εκφράζουν κατά σειρά την ισχύ που δίνεται απ' το ρευστό στο στρόβιλο και φεύγει απ' το σύστημα μέσω της ατράκτου, την ισχύ της έλξης της γης, την ισχύ των επιφανειακών δυνάμεων (πίεσης και διάτμησης), τη ροή θερμότητας μέσω της επιφάνειας  $E$  και την παραγωγή θερμότητας μέσα στον χώρο  $\tau$  λόγω ύπαρξης πηγών θερμότητας όπως είναι μια εξώθερμος αντίδραση.

Τα αρνητικά πρόσημα στους δύο όρους υπάρχουν έτσι ώστε ό,τι δίνεται στο σύστημα να είναι θετικό (αν υπάρχει αύξηση της ενέργειας, το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι θετικό). Στη θέση που είναι η έλξη της γης μπορεί να μπει και οποιαδήποτε άλλη μαζική δύναμη. Το διάνυσμα  $q$  είναι η πυκνότητα θερμορροής. Στον τελευταίο όρο το  $w$  είναι το ποσό ενέργειας που εκλύεται από την αντίδραση ανά μονάδα μάζας και χρόνου. Φυσικά όλα αυτά τα ολοκληρώματα έτσι γενικά που είναι διατυπωμένα, δε βοηθάνε και πολύ στους υπολογισμούς, γι' αυτό θα πρέπει σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση να κοιτάμε με ποιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστοιχο όρο.

Σκόπιμο θα ήταν εδώ να αναφέρουμε ότι στη θερμοδυναμική ορίζεται το μέγεθος ενθαλπία που θα το συμβολίζουμε εδώ με  $i$ , για το οποίο ισχύει (η ενθαλπία εννοείται ανηγμένη στη μονάδα της μάζας, δηλαδή είναι η ειδική ενθαλπία):

$$i = u + \frac{p}{\rho} \quad (1.18)$$

Αν στην ενθαλπία προσθέσουμε και την κινητική ενεργεία, παίρνουμε ένα μέγεθος που λέγεται ολική ενθαλπία ή ενθαλπία ανακοπής και εκφράζει τη συνολική ενέργεια που έχει το ρευστό.

Η ενθαλπία συνδέεται με τη θερμοκρασία με την εξής σχέση:

$$di = c_p dT \quad (1.19)$$

όπου  $c_p$  είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση. Αυτή εξαρτάται από το αέριο, από τη θερμοκρασία του και ελάχιστα απ' την πίεση του.

Με εφαρμογή της πρότασης του Gauss στην εξ. (1.16) σε κάποιο σημείο που δεν υπάρχει μηχανή που να συναλλάσσει ενέργεια με το ρευστό, παίρνουμε τη διαφορική διατύπωση του θεωρήματος της ενέργειας που είναι η εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{c^2}{2} + u \right) \right] + \text{div} \left[ \rho \bar{c} \left( \frac{c^2}{2} + u \right) \right] = \rho \bar{c} \bar{g} + \text{div}(\sigma \bar{c}) - \text{div} \bar{q} + w \rho \quad (1.20)$$

Πρέπει εδώ να αναφερθεί ότι εκτός από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, υπάρχει και άλλος ένας βασικός νόμος που διέπει τις ενεργειακές μεταβολές και έχει πολύ σπουδαίο ρόλο στη φύση. Είναι ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος που δείχνει την πορεία των

φαινομένων. Αυτή πρέπει να είναι προς την κατεύθυνση που αυξάνεται η εντροπία. Η εντροπία είναι σπουδαιότατο θερμοδυναμικό μέγεθος, εξαρτώμενο μόνο από την κατάσταση του σώματος (χοντρικά όσο πιο μεγάλη η εντροπία, τόσο πιο μεγάλη η «αταξία» του συστήματος), που δίνει μια σαφή εικόνα για το βαθμό αναστρεψιμότητας μιας μεταβολής και το διαφορικό της ορίζεται (χωρίς να είναι χρήσιμος εδώ αυτός ο ορισμός) ως το πηλίκο διαφορικής θερμότητας που συναλλάχθηκε σ' ένα σύστημα με το περιβάλλον του προς τη θερμοκρασία στην οποία έγινε αυτή η συναλλαγή, της μεταβολής θεωρούμενης ως αντιστρεπτής. Για αληθινές, μη αντιστρεπτές μεταβολές, η  $ds$  (στοιχειώδης εντροπία ανά μονάδα μάζας) είναι πάντα μεγαλύτερη του πηλίκου. Ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος είναι αποτέλεσμα της δομής της φύσης. Ένας από τους παράγοντες που συμβάλλουν στην αύξηση της εντροπίας σε μια μεταβολή είναι και η ύπαρξη της συνεκτικότητας.

### 1.3. ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ.

Το συνηθισμένο πρόβλημα στη ρευστομηχανική είναι να βρούμε κάποια φυσικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν στην πράξη σε ένα χώρο όπου υπάρχει ρευστό, δηλαδή να επιλύσουμε το πεδίο ροής.

Τα φυσικά μεγέθη που συνήθως θεωρούμε άγνωστα στη ρευστομηχανική και μας ενδιαφέρουν στην πράξη, είναι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας  $M$ ,  $v$ ,  $w$ , η πυκνότητα  $\rho$  και η πίεση  $p$ . Αυτά ζητάμε να τα ξέρουμε σε κάθε θέση του πεδίου ροής για κάθε χρονική στιγμή. Μ' άλλα λόγια ζητάμε τη συνάρτηση καθενός απ' αυτά με τα μεγέθη  $(x, y, z, t)$ .

Για να υπολογίσουμε τα μεγέθη που θέλουμε, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις της φυσικής και τα μαθηματικά. Οι εξισώσεις συσχετίζουν τα μεγέθη μεταξύ τους ή/και με σταθερές. Οι σταθερές είναι όροι των εξισώσεων που έχουν κάποια σταθερή αριθμητική τιμή που έχει προκύψει απ' την πείρα των ανθρώπων για το συγκεκριμένο φαινόμενο. Στις εξισώσεις μπορεί κάποια μεγέθη να είναι γνωστά σε κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα και ζητάμε να βρούμε τα άλλα, που θεωρούνται άγνωστα. Για να μπορέσουμε να τα βρούμε πρέπει να έχουμε τόσες ανεξάρτητες μεταξύ τους εξισώσεις όσα είναι και τα άγνωστα μεγέθη (πλήρες σύστημα εξισώσεων).

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε αέρα σε συγκεκριμένο χώρο χωρίς στερεά τοιχώματα και ζητάμε να υπολογίσουμε το πεδίο ροής του. Έστω ότι δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες μάζας, ότι δεν υπάρχει ροή θερμότητας απ' τα όρια του χώρου, ότι δεν υπάρχει πηγή θερμότητας λόγω χημικής αντίδρασης, ότι δεν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και ότι ξέρουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας. Επειδή είμαστε μακριά από στερεά τοιχώματα μπορούμε να θεωρήσουμε το ρευστό μη συνεκτικό. Όλες αυτές οι παραδοχές είναι λογικές και έχει φανεί στην πράξη ότι το αποτέλεσμα που θα πάρουμε αν τις κάνουμε θα είναι αρκετά κοντά στην πραγματικότητα ώστε να είναι πρακτικά χρήσιμο. Έστω ότι μας ενδιαφέρουν τα μεγέθη που συνήθως μας ενδιαφέρουν σ' ένα πεδίο ροής, τα  $(u, v, w, \rho, p)$ . Για να τα υπολογίσουμε έχουμε μέχρι τώρα μία εξίσωση συνέχειας, τρεις εξισώσεις ορμής (μία για κάθε άξονα) και μια εξίσωση ενέργειας. Οι εξισώσεις αυτές εμπλέκουν τα μεγέθη που θέλουμε, αλλά και ένα άλλο μέγεθος, την εσωτερική ενέργεια  $M$ , που επίσης δεν την ξέρουμε<sup>2</sup>.

- Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο της εσωτερικής ενέργειας από τον όρο  $c_v T$  βάσει της εξ. (1.17), που ισχύει με καλή προσέγγιση για τον αέρα. Το  $c_v$  πρέπει επίσης να το ξέρουμε και είναι σταθερό για μια περιοχή θερμοκρασίας για κάθε αέριο. Αν προβλέπουμε ότι στην περίπτωση μας υπάρχουν μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές, πρέπει να ξέρουμε τη συνάρτηση της ειδικής θερμοχωρητικότητας με τη θερμοκρασία. Πάντως και αυτή η συνάρτηση υπάρχει και είναι γνωστή στους ανθρώπους, οπότε καταφέραμε αντί για την εσωτερική ενέργεια να έχουμε άγνωστο τη θερμοκρασία. Έχουμε δηλαδή 5 εξισώσεις με 6 αγνώστους. Για να λύσουμε το πρόβλημα μας, χρησιμοποιούμε άλλη μια εξίσωση που ξέρουμε ότι θα ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια στην περίπτωση μας, την καταστατική εξίσωση τελείων αερίων, εξ. (1.2). Αυτή δεν περιέχει κανένα πρόσθετο άγνωστο (το  $R$  είναι σταθερά

με τη συγκεκριμένη τιμή που αναγράφεται), οπότε έχουμε έξι εξισώσεις με έξι αγνώστους. Οι εξισώσεις είναι 3 ορμής, 1 συνέχειας, 1 ενέργειας, 1 καταστατική και οι άγνωστοι τα μεγέθη  $M$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ . Επειδή έχουμε διαφορικές εξισώσεις, πρέπει να ξέρουμε και τις οριακές συνθήκες για να λύσουμε το πρόβλημα μας. Οι οριακές συνθήκες στην περίπτωση μας μπορεί να είναι η γνώση της ροής (δηλαδή η γνώση όλων των φυσικών μεγεθών που αναφέραμε) στα όρια του χώρου τη στιγμή  $t=0$ .

Στις συνηθισμένες περιπτώσεις δε φτάνουν οι 5 θεμελιώδεις εξισώσεις για να υπολογίσουμε αυτά που θέλουμε σε ένα πεδίο ροής, όπως είδαμε και στο παράδειγμα. Στην §1.3 θα δούμε από πού θα πάρουμε τις επιπλέον εξισώσεις που χρειαζόμαστε καθώς και τι μορφή παίρνουν οι 5 θεμελιώδεις εξισώσεις για διάφορα είδη ρευστού και πιο συγκεκριμένα για τη γενική περίπτωση ενός νευτώνειου ρευστού (ορισμός αμέσως παρακάτω) που καλύπτει σχεδόν κάθε τεχνική εφαρμογή με πολύ μεγάλη ακρίβεια, για την περίπτωση μη συνεκτικού ρευστού (που αποτελεί ειδική περίπτωση της προηγούμενης) και για την περίπτωση μη συνεκτικού, ασυμπιέστου ρευστού και αστρόβιλου (ορισμός αμέσως παρακάτω), μόνιμου πεδίου ροής, που είναι η πιο απλή σε τεχνικές εφαρμογές. Ανάλογα με τις παραδοχές που κάνει καθένας που υπολογίζει ένα πεδίο ροής, πάει στην αντίστοιχη παράγραφο και βλέπει ποιες εξισώσεις διέπουν τη ροή του. Το παραπάνω παράδειγμα υποπίπτει στη δεύτερη περίπτωση, του μη συνεκτικού ρευστού.

Αν υποθέσουμε, όπως συμβαίνει συνήθως, ότι σε ένα πεδίο ροής δεν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικές δράσεις, πηγές μάζας και πηγές θερμότητας δια αντιδράσεως ( $w=0$ ), εύκολα βλέπουμε ότι οι 5 θεμελιακές εξισώσεις εξ. (1.4), εξ. (1.10), εξ. (1.20), έχουν 17 αγνώστους, τα μεγέθη  $\rho$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\sigma$ ,  $u$ ,  $q$ . θέλουμε λοιπόν επιπλέον εξισώσεις για να βρούμε κάποιο από τα παραπάνω μεγέθη. Παρατηρήστε ότι οι τρεις παραπάνω εξισώσεις στη μορφή που έχουν γραφεί δεν έχουν μέσα την πίεση, η οποία κρύβεται στον ταυστή των τάσεων  $\sigma$ . Οι επιπλέον εξισώσεις που χρειαζόμαστε είναι διάφορες και διαπιστώθηκε ότι μπορούν να καταταγούν σε δύο κατηγορίες, στις υλικές εξισώσεις και στις καταστατικές εξισώσεις.

Υλικές εξισώσεις. Είναι τέτοιες που συνδέουν μηχανικά μεγέθη. Γενική υλική εξίσωση είναι η:

$$\sigma = -pI + \tau \quad (1.21)$$

όπου ο πίνακας των διαμητικών τάσεων  $\tau$  είναι γνωστή συνάρτηση (για το κάθε συγκεκριμένο ρευστό) του ταυστή ρυθμού παραμορφώσεων  $D$ :

$$\tau = f_1(D) \quad (1.22)$$

Ο ρυθμός παραμόρφωσης είναι ο εξής:

$$D = \frac{1}{2}[(grad \bar{c})^T + grad \bar{c}] \quad (1.23)$$

Με το / συμβολίζεται ο μοναδιαίος πίνακας. Έχουμε λοιπόν εννιά εξισώσεις στην εξ. (1.21) με ένα άγνωστο ( $p$ ), αφού το  $\tau$  είναι γνωστό μέσω των εξ. (1.22) και εξ. (1.23). Τα υλικά που ακολουθούν την παραπάνω εξίσωση λέγονται υλικά Stokes.

Καταστατικές εξισώσεις. Συνδέουν θερμικά μεγέθη. Τυπικά γενικά παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων είναι:

$$p = f_2(T, \rho) \quad (1.24)$$

$$u = f_3(T, p) \quad (1.25)$$

$$\bar{q} = -\lambda grad T \quad (1.26)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι 5 και προστίθεται μόνο ένας άγνωστος ακόμη, η θερμοκρασία. Τα  $f_2$  και  $f_3$  υποτίθεται ότι είναι γνωστές συναρτήσεις. Παράδειγμα της εξ. (1.24) είναι η καταστατική εξίσωση τελείων αερίων, της εξ. (1.25) η εξ. (1.17) ή η  $u=cT$ , όπου  $c$  είναι ο συντελεστής θερμοχωρητικότητας, η οποία ισχύει για υγρά, ενώ η εξ. (1.26) είναι ο νόμος του Fourier για τη μετάδοση θερμότητας και  $\lambda$  ο συντελεστής μετάδοσης θερμότητας δι' αγωγιμότητας



Συνολικά με τις υλικές και καταστατικές εξισώσεις που έχουμε γράψει, υπάρχουν ακόμη 2 άγνωστοι (η πίεση και η θερμοκρασία) και 14 εξισώσεις, οπότε με το αρχικό σύστημα των 5 εξισώσεων και 17 αγνώστων έχουμε συνολικά 19 εξισώσεις με 19 αγνώστους, δηλαδή ένα πλήρες σύστημα. Οι εξισώσεις επίλυσης του πεδίου ροής λοιπόν είναι η διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας και κάποιες υλικές και καταστατικές εξισώσεις που κλείνουν το πρόβλημα. Το σύστημα αυτών των εξισώσεων στη γενικότητα του όπως έχει διατυπωθεί ως τώρα δεν έχει λυθεί μαθηματικά. Παρακάτω θα δούμε πιο ειδικές περιπτώσεις που έχουν πρακτική σημασία (όσο πιο γενική είναι μια εξίσωση τόσο μικρότερη πρακτική αξία έχει).

### 1.3.1. Νευτώνειο ρευστό. Εξισώσεις Navier - Stokes.

Τα συνήθη ρευστά και σχεδόν όλα τα ρευστά που χρησιμοποιούμε σε τεχνικές εφαρμογές αποτελούν μια ειδική περίπτωση των υλικών Stokes, καθώς παρουσιάζουν μια γραμμική συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα η υλική τους εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned} \sigma &= -pI + \tau \\ \text{όπου,} \quad \tau &= 2\mu D + \mu' \text{tr} D I \\ \text{όπου,} \quad \text{tr} D &= \text{div} \bar{c} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Το ίχνος (trace) ενός πίνακα, είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του. Το  $\mu$  είναι ο δυναμικός συντελεστής συνεκτικότητας ή ιξώδες και εξαρτάται απ' το ρευστό όπως είπαμε και στην §1.1.2 και το  $\mu'$  είναι το ιξώδες όγκου και συνήθως υπάρχει για κάθε ρευστό μια σχέση που το συνδέει με το  $\mu$ . Τα ρευστά που υπακούουν στην εξ. (1.27) λέγονται νευτώνεια ρευστά. Σε καρτεσιανές συνιστώσες η εξ. (1.27) γράφεται:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu' \text{div} \bar{c} & \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu' \text{div} \bar{c} & \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \mu' \text{div} \bar{c} & \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.27\beta)$$

Απ' τις υλικές εξισώσεις φαίνεται ότι τα νευτώνεια ρευστά είναι γραμμικά και ισότροπα

$$p_M = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (1.28)$$

με τη βοήθεια της εξ.(1.27β) βρίσκουμε ότι:

$$p_M = p - \left( \frac{2}{3}\mu + \mu' \right) \text{div} \bar{c} \quad (1.29)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η μηχανική πίεση εν γένει δε συμπίπτει με τη γνωστή από τη θερμοδυναμική πίεση (η οποία γι' αυτό το λόγο μπορεί να αναφέρεται και ως θερμοδυναμική πίεση). Οι δύο πιέσεις ταυτίζονται αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο (για ασυμπίεστο ρευστό προκύπτει ότι η απόκλιση της ταχύτητας είναι μηδέν), ή όταν το ρευστό είναι τέτοιο ώστε να ισχύει  $\mu' = -(2/3)\mu$ , πράγμα που είναι κοντά στην πραγματικότητα για τα περισσότερα ρευστά. Γι' αυτό παρακάτω έχουμε αντικαταστήσει το  $\mu'$  απ' αυτή τη σχέση και θεωρούμε τη μηχανική πίεση Ίση της θερμοδυναμικής, κάνοντας μια μικρή παραδοχή, ώστε να γράψουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes στη μορφή που είναι περισσότερο συνηθισμένες (οι περισσότεροι κάνουν αυτή την παραδοχή). Αν για ένα ρευστό ξέρουμε άλλη σχέση που να συνδέει  $\mu$  και  $\mu'$ , χρησιμοποιούμε μια άλλη μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes, που προκύπτει όμως με ακριβώς ίδιο τρόπο και δε θα αναφερθεί, αφού στην υπόλοιπη εργασία οι εξισώσεις Navier-Stokes χρησιμοποιούνται στη μορφή που γράφονται εδώ.

Αντικαθιστώντας τις υλικές εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες εξ.(1.27β) στις εξισώσεις διατήρησης της ορμής εξ.(1.10), μετά από απλοποίηση του πρώτου μέλους, με

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \bar{c}) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \bar{c}) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \bar{c})\end{aligned}\quad (1.30)$$

Ο τελεστής  $\Delta$  λέγεται τελεστής Laplace και ισχύει:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.31)$$

βοήθεια από την εξίσωση της συνέχειας εξ. (1.4) και θεωρώντας όπως γράφηκε αμέσως πριν ότι  $P=P_M$ , παίρνουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes που δημοσιεύτηκαν το 1845.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερας τάξεως και δεν έχουν επιλυθεί αναλυτικά (ούτε έχει αποδειχθεί η μοναδικότητα λύσης τους), παρά μόνο σε μερικές πολύ ειδικές περιπτώσεις. Ισχύουν με πολύ καλή ακρίβεια για τα δύο συνηθέστερα ρευστά των τεχνικών εφαρμογών, το νερό και τον αέρα (καθώς και για σχεδόν όλα τα υπόλοιπα) και γι' αυτό η σημασία τους είναι τεράστια για την ρευστομηχανική.

Είδαμε τι μορφή παίρνουν οι εξισώσεις ορμής για την περίπτωση του νευτώνειου ρευστού που εξετάζουμε. Η εξίσωση της συνέχειας μένει ακριβώς στην ίδια μορφή της εξ. (1.4) και η εξίσωση της ενέργειας παίρνει ύστερα από πράξεις την παρακάτω μορφή, αν θεωρήσουμε ενέργεια δι' αντιδράσεως  $w$  μηδενική:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \operatorname{div} \bar{c} + \Phi - \operatorname{div} \bar{q} \quad (1.32)$$

όπου  $\Phi$  είναι η συνάρτηση καταστροφής (dissipation) που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi = \operatorname{tr}(\tau^T \cdot \operatorname{grad} \bar{c}) \quad (1.33)$$

και στη συγκεκριμένη περίπτωση του νευτώνειου ρευστού ισούται με:

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2\end{aligned}\quad (1.34)$$

Η συνάρτηση καταστροφής εκφράζει το τμήμα της ισχύος των επιφανειακών δυνάμεων ανά μονάδα όγκου που μη αντιστρεπτά μετατρέπεται σε θερμότητα, αυξάνοντας έτσι την εντροπία του συστήματος. Είναι πάντα θετική (ή μηδέν, αν το ρευστό είναι μη συνεκτικό ή ακίνητο).

### 1.3.1.1. Ασυμπίεστο νευτώνειο ρευστό.

Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο, η πυκνότητα  $\rho$  είναι σταθερή και έχουμε μια ειδική περίπτωση των παραπάνω. Τότε η εξίσωση της συνέχειας γράφεται ως εξής:

$$\operatorname{div} \bar{c} = 0 \quad (1.35)$$

και της ορμής (δηλαδή οι εξισώσεις Navier-Stokes) γράφεται σε διανυσματική μορφή:

$$\rho \frac{D\bar{c}}{Dt} = \rho \bar{g} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \bar{c} \quad (1.36)$$

Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων εξ. (1.35) και εξ. (1.36) έχει τέσσερις αγνώστους (το  $\mu$  υποτίθεται γνωστό, δεδομένο για το συγκεκριμένο ρευστό για το οποίο θέλουμε να λύσουμε τη ροή), δηλαδή είναι πλήρες σύστημα. Δηλαδή το πεδίο ροής σ' αυτή την περίπτωση

μπορεί να επιλυθεί χωρίς να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την ενεργειακή εξίσωση (η λύση βέβαια θα πρέπει να την επαληθεύει). Δεν έχει αποδειχθεί η μοναδικότητα της λύσης σ' αυτό το πρόβλημα, για δεδομένες αρχικές και οριακές συνθήκες.

### 1.3.2. Μη συνεκτικό ρευστό. Εξισώσεις Euler.

Το μη συνεκτικό ρευστό είναι μια ειδική περίπτωση του νευτώνειου ρευστού της προηγούμενης παραγράφου, για  $\mu = \mu' = 0$ . Άρα οι εξισώσεις αυτής της παραγράφου προκύπτουν από την προηγούμενη, αν βάλουμε όπου  $\mu$  και  $\mu'$  την τιμή 0. Έτσι έχουμε:  
Υλική εξίσωση:

$$\sigma = -pI \quad (1.37)$$

Εξίσωση συνέχειας η ες (1.4). Εξίσωση ορμής:

$$\rho \frac{D\bar{c}}{Dt} = \rho \bar{g} - \text{grad } p \quad (1.38)$$

Εξίσωση ενέργειας:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \text{div } \bar{c} - \text{div } \bar{q} \quad (1.39)$$

Οι εξισώσεις ες (1.38) είναι γνωστές ως εξισώσεις του Euler (1750) και θυμίζουν έντονα το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Με την ες (1.37) αντικαθίστανται οι 9 άγνωστοι του πίνακα  $\sigma$  με ένα άγνωστο, την πίεση  $p$ .

Όπως βλέπουμε, σε κάθε περίπτωση οι σημαντικές εξισώσεις που αλλάζουν περισσότερο είναι οι εξισώσεις της ορμής και συχνά από το όνομα τους χαρακτηρίζεται το πρόβλημα. Λέμε δηλαδή «έχουμε να λύσουμε περίπτωση Euler» εννοώντας «έχουμε να λύσουμε πεδίο ροής μη συνεκτικού ρευστού».

### 1.3.3. Εξίσωση Bernoulli.

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις του Euler' για αστρόβιλο, μόνιμο πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού, παίρνουμε μια εξίσωση πολύ μεγάλης πρακτικής σημασίας, την εξίσωση Bernoulli (1738):

$$\frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \text{στα } \theta \quad (1.40)$$

όπου  $U$  είναι το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου ή οποιουδήποτε άλλου συντηρητικού πεδίου δυνάμεων:

$$\bar{g} = -\text{grad } U \quad (1.41)$$

Αστρόβιλο πεδίο ροής ή δυναμικό πεδίο ροής ή πεδίο ροής σταθερής ενέργειας λέγεται αυτό στο οποίο το διάνυσμα περιστροφής της ταχύτητας είναι μηδενικό, δηλαδή:

$$\text{rot } \bar{c} = 2\bar{\omega} = 0 \quad (1.42)$$

Η περιστροφή ενός διανύσματος ( $\text{rot}$ ) ισούται με ένα διάνυσμα:

$$\text{rot } \bar{c} = \nabla \times \bar{c} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \bar{k} \quad (1.43)$$

Αν το πεδίο είναι αστρόβιλο, βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα  $\omega = 0$ , οπότε τα στοιχεία του ρευστού έχουν μόνο μεταφορική κίνηση και δεν περιστρέφονται περί τον εαυτό τους, γι' αυτό άλλωστε και το πεδίο λέγεται έτσι. Το πεδίο ροής συνεκτικού ρευστού δε μπορεί να είναι αστρόβιλο.

Η εξίσωση του Bernoulli μαζί με την εξίσωση της συνέχειας στη μορφή της ες (1.35) επαρκούν για να υπολογίσουμε το πεδίο ροής.

Η εξίσωση του Bernoulli για το πεδίο βαρύτητας της γης μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\frac{\rho c^2}{2} + p + \rho g h = p_0 \quad (1.44)$$

όπου  $h$  είναι το ύψος από μια επιφάνεια αναφοράς. Η σταθερά  $p_0$  ονομάζεται πίεση ανακοπής ή ολική πίεση και είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η πίεση στο πεδίο (σε σημείο ανακοπής  $c=0$ ).

Η εξίσωση του Bernoulli συνδέει την κινηματική με τη δυναμική κατάσταση του ασυμπίεστου ρευστού σε αστρόβιλη ροή. Εκφράζει την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μέσα σε πεδίο βαρύτητας, με την μορφή ότι η ολική πίεση παραμένει σταθερή. Γι' αυτό το αστρόβιλο πεδίο είναι πεδίο ροής σταθερής ενέργειας (αρκεί να μην υπάρχουν μέσα του πηγές ενέργειας).

Ο πρώτος όρος της ες. (1.44) ονομάζεται δυναμική πίεση, ο δεύτερος στατική πίεση και ο τρίτος γεωστατική πίεση και σχετίζονται αντίστοιχα με την κινητική ενέργεια, με την ενέργεια εντατικής κατάστασης (που στην περίπτωση σαν κι αυτή που δεν έχουμε θερμικά φαινόμενα αντιπροσωπεύει την εσωτερική ενέργεια) και με την δυναμική ενέργεια.

Σε απλά πεδία ροής υγρών ή και αερίων όταν οι ταχύτητες είναι μικρές και δεν έχουμε θερμικά φαινόμενα, μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση Bernoulli με ικανοποιητική ακρίβεια. Αν το πεδίο είναι στρόβιλο, η εξίσωση ισχύει κατά μήκος μιας γραμμής ροής.

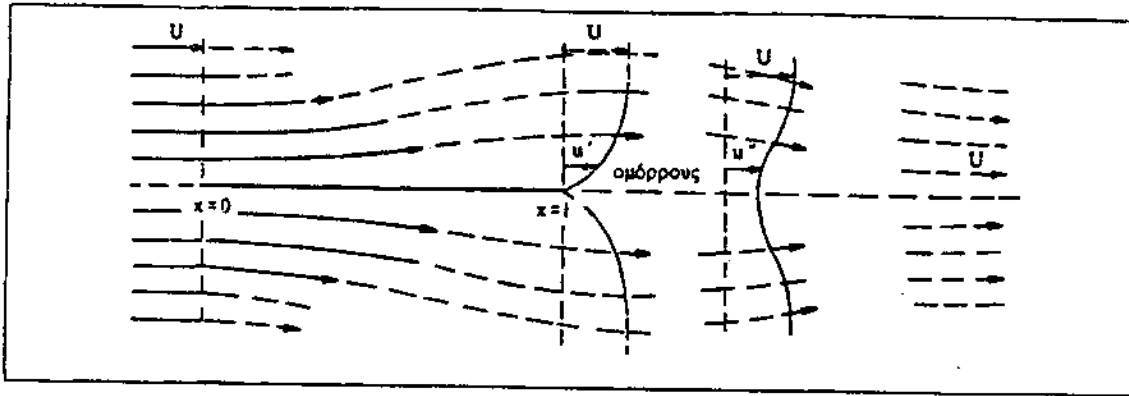
## 2. ΤΥΡΒΩΔΗ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ.

Ο τίτλος του κεφαλαίου θα μπορούσε να ήταν << οριακό στρώμα και τύρβη >>, αλλά δε θα ήταν ακριβής επειδή δε θα γίνει αναφορά στο στρωτό οριακό στρώμα που δε μας ενδιαφέρει σ' αυτή την εργασία. Ακόμη, με τον τωρινό τίτλο τονίζεται ότι τύρβη συναντάμε κυρίως στα οριακά στρώματα συνήθως είναι τυρβώδη, και αν κάπου έχουμε τυρβώδη ροή που μας ενδιαφέρει να τη μελετήσουμε για πρακτικούς σκοπούς, αυτή θα είναι μάλλον μέσα στο οριακό στρώμα. Η τύρβη και το οριακό στρώμα λοιπόν συνδέονται πολύ συχνά.

### 2.1. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ.

Παρατηρήθηκε ότι όταν ένα ρευστό ρέει γύρω από ένα στερεό σώμα, γύρω από το στερεό υπάρχει μια περιοχή χαμηλών ταχυτήτων του ρευστού σε σχέση με την ελεύθερη ( από την επίδραση του στερεού) ροή. Αυτή η μικρή περιοχή χαμηλών ταχυτήτων γύρω από στερεά που βρίσκονται σε πεδίο ροής λέγεται *οριακό στρώμα*. Το οριακό στρώμα παρουσιάζεται σε πραγματικά, συνεκτικά ρευστά, λόγω της συνεκτικότητας. Πιο συγκεκριμένα, πάνω στο στερεό λόγω της μη τέλειας με σπηλαιώσεις και ανωμαλίες επιφανείας του, τα μόρια του ρευστού παγιδεύονται και μηδενίζουν την ταχύτητά τους. Αυτή είναι η λεγόμενη *αρχή μη ολίσθησης*. Για άξονες λοιπόν  $x$  και  $y$  αντίστοιχα παράλληλο και κάθετο στην επιφάνεια, έχουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας  $0$ , δηλαδή  $x$  και  $y$  αντίστοιχα παράλληλο και κάθετο στην επιφάνεια, έχουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας  $0$ , δηλαδή  $u=0$  και  $v=0$ . Τα μόρια όμως κινούνται άδηλα και όπως κάποια μπάκαν στις σπηλαιώσεις, έτσι βγαίνουν μερικά και ξαναμπάνουν στη ροή <<φρενάροντας>>αυτά που βρίσκονται από πάνω τους (σε μεγαλύτερες τεταγμένες του άξονα  $y$ ), δηλαδή αφαιρώντας τους κινητική ενέργεια, ενώ τα ίδια επιταχύνονται, αφού τα προωθούν τα ταχύτερα κινούμενα που βρίσκονται από πάνω τους (σε μεγαλύτερες τεταγμένες του άξονα  $y$ ), δηλαδή αφαιρώντας τους κινητική ενέργεια, ενώ τα ίδια επιταχύνονται, αφού τα προωθούν τα ταχύτερα κινούμενα που βρίσκονται στο ανώτερο στρώμα. Το ίδιο συμβαίνει και στο επόμενο στρώμα, μέχρι που φτάνουμε πολύ γρήγορα στην *ελεύθερη ροή*, όπου το φαινόμενο έχει εξασθενήσει πλήρως. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι κοντά στο στερεό η ταχύτητα είναι μικρότερη από την ταχύτητα της ελεύθερης ροής (*έπ' άπειρο ταχύτητα* όπως λέγεται) και ποιο συγκεκριμένα πάνω στο στερεό είναι  $0$  και αυξάνει σταδιακά. Άρα το οριακό στρώμα μπορούμε να το προβλέψουμε χωρίς να το έχουμε παρατηρήσει στα πειράματα. Είπαμε ότι τα πάνω στρώματα επιταχύνουν τα κάτω και επιβραδύνονται απ' αυτά. Αυτό γίνεται προφανώς με την άσκηση δυνάμεων, αυτών που ονομάσαμε διατμητικές ή δυνάμεις συνεκτικότητας. Οπότε το παραπάνω φαινόμενο προέρχεται από (ή προκαλεί – ανάλογα πως θα το θεωρήσει κανείς) την συνεκτικότητα. Αν θέλουμε να θεωρήσουμε το ρευστό μη συνεκτικό, κάνουμε μια χονδροειδή προσέγγιση και δε θα υπάρχει οριακό στρώμα. Μπορούμε όμως να κάνουμε προσέγγιση μη συνεκτικού ρευστού αφού έχει αποκατασταθεί η ροή, μακριά από το σώμα, όπου εκεί δεν υπάρχουν μεγάλες μεταβολές ταχύτητας και τα συνεκτικά φαινόμενα είναι μικρής έκτασης.

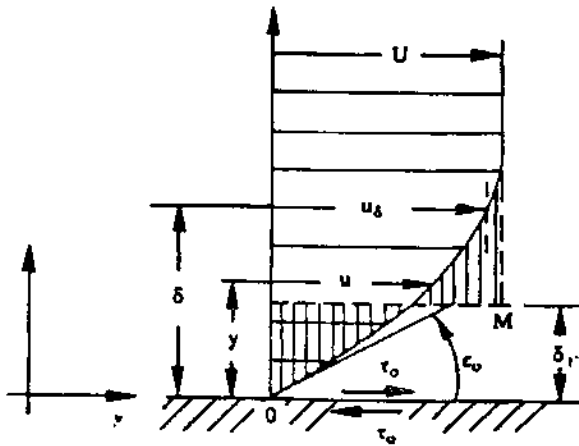
Κλασσική περίπτωση ανάπτυξης και μελέτης του οριακού στρώματος, αποτελεί η περίπτωση μιας λεπτής λείας επίπεδης πλάκας που τοποθετείται παράλληλα στις γραμμές ροής πεδίου ροής σταθερής ταχύτητας  $U$  που εκτείνεται ως το άπειρο (σχ. 2.1) .



Σχήμα 2.1. Ροή γύρω από επίπεδη πλάκα.

Αφού το πεδίο ροής εκτείνεται ως το άπειρο, η εισαγωγή της πεπερασμένης πλάκας δημιουργεί μια τοπική μόνο αναταραχή του πεδίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Πάνω στην πλάκα οι ταχύτητες είναι 0 και καθώς απομακρυνόμαστε αυξάνουν μέχρι να φτάσουν στην τιμή  $U$  της αδιατάρακτης ροής. Εκεί τελειώνει το οριακό στρώμα. Μετά το πέρας της πλάκας, προς τα κατάντι της ροής όπως λέμε, οι ταχύτητες πίσω απ' αυτήν είναι προφανώς μικρότερες της επ' άπειρον ταχύτητας και αποκαθίστανται σταδιακά. Η περιοχή αυτή πίσω από το στερεό σώμα όπου η ταχύτητα δεν έχει αποκατασταθεί ακόμη, καλείται *ομόρρους*.

Ας πάμε σε ένα σημείο  $x$  της πλάκας να δούμε περίπου πώς θα είναι η κατανομή ταχυτήτων καθώς απομακρυνόμαστε απ' αυτή, δηλαδή η  $u(y)$ . Ένα τυπικό τέτοιο *προφίλ ταχύτητας* όπως λέγεται, είναι αυτό του σχ. 2.2.



Σχήμα 2.2. Τυπική μορφή οριακού στρώματος.

Η απόσταση από την πλάκα  $y$  στην οποία η ταχύτητα έχει αποκατασταθεί κατά το 99% της ταχύτητας της αδιατάρακτης ροής, καλείται *πάχος του οριακού στρώματος* και συμβολίζεται με  $\delta$ . Είναι δηλαδή  $u_\delta = 0,99U$ . Το συμβατικό  $0,99U$  έχει ληφθεί βάσει της συνήθους ακρίβειας μέτρησης της ταχύτητας και από το γεγονός ότι οι μαθηματικές εκφράσεις που συνήθως περιγράφουν προφίλ ταχυτήτων οριακών στρωμάτων τείνουν ασυμπτωτικά στην  $U$ . Το  $\delta$  είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με μια τυπική διάσταση του σώματος.

Βάσει της εξ. (1.1), έχουμε ότι η διατμητική τάση πάνω στο τοίχωμα είναι:

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \cot \epsilon \quad (2.1)$$

όπου  $\epsilon_0$  η γωνία της πλάκας με την εφαπτομένη στο προφίλ ταχύτητας στο σημείο  $y=0$ .

Το στερεό ασκεί δηλαδή στο ρευστό μια δύναμη που το επιβραδύνει και το ρευστό ασκεί στο στερεό μια δύναμη που τείνει να το παρασύρει με τη ροή, μια ώθηση  $D$  προς τα κατάντι της ροής, η οποία ισούται με:

$$D = \int_S \tau \, ds \quad (2.2)$$

Όπου  $S$  είναι η συνολική επιφάνεια της πλάκας ( κι απ' τις δύο πλευρές ). Στην περίπτωση του σχ. 2.1 δηλαδή, εννοείται ότι κρατάμε με έναν πολύ λεπτό στέλεχος την πλάκα ( για να μην την παρασύρει η ροή ) με δύναμη  $D$  που αποτελεί και την αντίσταση της πλάκας στην ροή.

Όπως φαίνεται και στο σχ. 2.2, αλλά και όπως είναι αναμενόμενο, η κλίση της ταχύτητας μειώνεται από την πλάκα ώσπου να φτάσουμε στην εξωτερική ροή, ώσπου γίνεται 0 (καμία μεταβολή της ταχύτητας με το ύψος). Αυτό, βάσει της εξ.(1.1) σημαίνει ότι η μέγιστη διαμητική τάση βρίσκεται πάνω στο τοίχωμα.

### 2.1.1 Χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος.

Το πιο χρήσιμο χαρακτηριστικό μέγεθος του οριακού στρώματος μετά το πάχος του  $\delta$  που ορίστηκε παραπάνω, είναι το πάχος μετατόπισης  $\delta_1$ . Αυτό σχετίζεται με τη μορφή του προφίλ ταχυτήτων και παριστάνει την μετατόπιση ή απομάκρυνση της ροής από το τοίχωμα αν αυτή παρέμενε σταθερής ταχύτητας ώστε να έχουμε ίδια παροχή όγκου με την περίπτωση που έχουμε οριακό στρώμα. Στην περίπτωση του σχ. 2.2 για παράδειγμα, πρέπει η ταχύτητα να παραμείνει σταθερή ως το σημείο  $M$ , αν θέλουμε να περνά τόση παροχή όγκου όσο περνούσε και πριν, και να μην καταλάβει τίποτε η υπόλοιπη ροή. Η, διαφορετικά, θα έχουμε ισοδύναμο εξωτερικό πεδίο ροής αν προεκτείνουμε την πλάκα κατά πάχος  $\delta_1$  και θεωρήσουμε το ρευστό μη συνεκτικό σταθερής πυκνότητας. Εύκολα καταλαβαίνει κανείς ότι τα δύο γραμμωσκιασμένα εμβαδά του σχ. 2.2 θα είναι ίσα. Επίσης εύκολα προκύπτει ότι:

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (2.3)$$

Η ολοκλήρωση πρακτικά γίνεται ως το σημείο  $y=\delta$ .

Υπάρχουν άλλα δύο σχετικά μεγέθη που δείχνουν ένα μέτρο της απώλειας της ροής της ορμής και της απώλειας της κινητικής ενέργειας αντίστοιχα.

Το πάχος ορμής  $\delta_2$  δίνει την μετατόπιση, ως μέτρο της απώλειας της ροής της ορμής στο οριακό στρώμα, ανηγμένης στην  $U$ . Ισούται με:

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (2.4)$$

Το πάχος διάχυσης της ενέργειας δίνει την μετατόπιση ως μέτρο της απώλειας της κινητικής ενέργειας στο οριακό στρώμα ανηγμένης στην  $U$ . Ισχύει:

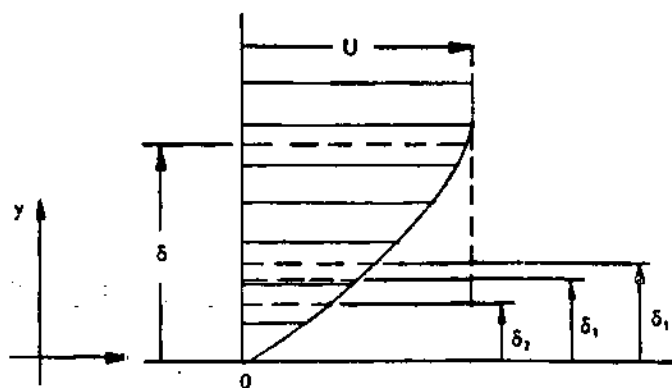
$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right)^2 dy \quad (2.5)$$

Τα τρία αυτά πάχη ονομάζονται *κινηματικά πάχη*. Φαίνονται στο σχ. 2.3 όπου δίνεται και ιδέα για το μέγεθός τους. Μερικές φορές, αν αναφερόμαστε σε συμπιεστό ρευστό, μπαίνει και η πυκνότητα στους τύπους.

Κατά την μελέτη των οριακών στρωμάτων χρησιμοποιούνται συχνά οι λόγοι των κινηματικών παχών που ονομάζονται *παράγοντες μορφής*. Δυο χρήσιμοι είναι οι:

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.6)$$

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2} \quad (2.7)$$



Σχήμα 2.3. Τέσσερα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος

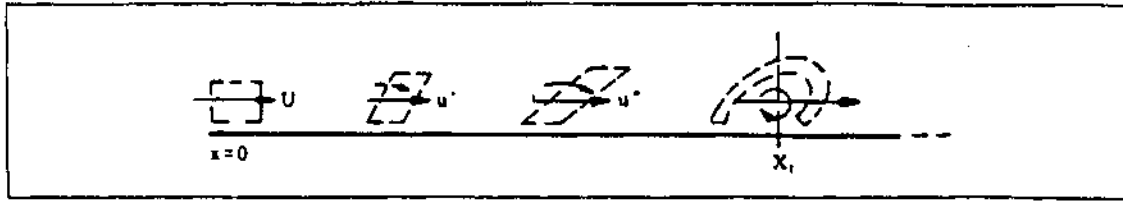
### 2.1.2 Ανάπτυξη του οριακού στρώματος κατά μήκος.

Για να δούμε πώς αναπτύσσεται το οριακό στρώμα κατά μήκος στερεού σώματος, θα θεωρήσουμε πάλι μια επίπεδη πλάκα σε παράλληλη ροή. Πολλά απ' τα συμπεράσματα θα ισχύουν και για γενικότερες περιπτώσεις σωμάτων. Καταλαβαίνουμε ότι στη μπροστινή άκρη της πλάκας, το οριακό στρώμα δεν θα έχει προλάβει να διαμορφωθεί, ή η ροή σχεδόν δεν έχει αντιληφθεί ακόμη την πλάκα, άρα εκεί το πάχος είναι 0. Πιο πίσω το πάχος δεν είναι 0, άρα περιμένουμε ότι αυξάνεται σταδιακά. Πράγματι, όσο προχωράμε προς τα πίσω, όλο και κάποια στοιχεία του ρευστού που βρίσκονται στην άκρη του οριακού στρώματος θα τύχει να ξεφύγουν λίγο πιο πάνω ώστε να φρενάρουν το πιο μακρινό στρώμα, οπότε καταλαβαίνουμε ότι το οριακό στρώμα θα αυξάνεται συνεχώς.

Βασικό χαρακτηριστικό των οριακών στρωμάτων είναι ότι η στατική πίεση παραμένει σταθερή στο εσωτερικό τους (εξισώσεις διδιάστατου οριακού στρώματος, §2.1.3), πράγμα που έχει επαληθευθεί και πειραματικά. Στην εξωτερική ροή εννοείται ότι παραμένει σταθερή η πίεση, πράγμα που μπορούμε να το καταλάβουμε γρήγορα από την εξίσωση του Bernoulli. Στο οριακό στρώμα τώρα, λόγω διατμητικών τάσεων παρουσιάζεται ενεργειακή απώλεια (το έργο των διατμητικών τάσεων γίνεται θερμότητα και αφαιρείται από τη ροή) η οποία, αφού η πίεση είναι σταθερή, εκδηλώνεται ως απώλεια κινητικής ενέργειας. Η όλο και αυξανόμενη απώλεια κινητικής ενέργειας μέσα στο οριακό στρώμα, μας κάνει να υποθέσουμε ότι αυτό μάλλον θα αυξάνεται και θα εκτείνεται η περιοχή χαμηλών ταχυτήτων οπότε οδηγούμαστε και με ένα δεύτερο τρόπο στο συμπέρασμα ότι όσο αυξάνεται το  $x$  αυξάνεται και το  $\delta$  η μετάβαση από την ταχύτητα 0 στην  $U$  γίνεται πιο ομαλά, η γωνία  $\epsilon_0$  αυξάνει (σχ. 2.5) και βάσει της εξ. (2.1) βλέπουμε ότι η  $\tau_0$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $x$ .

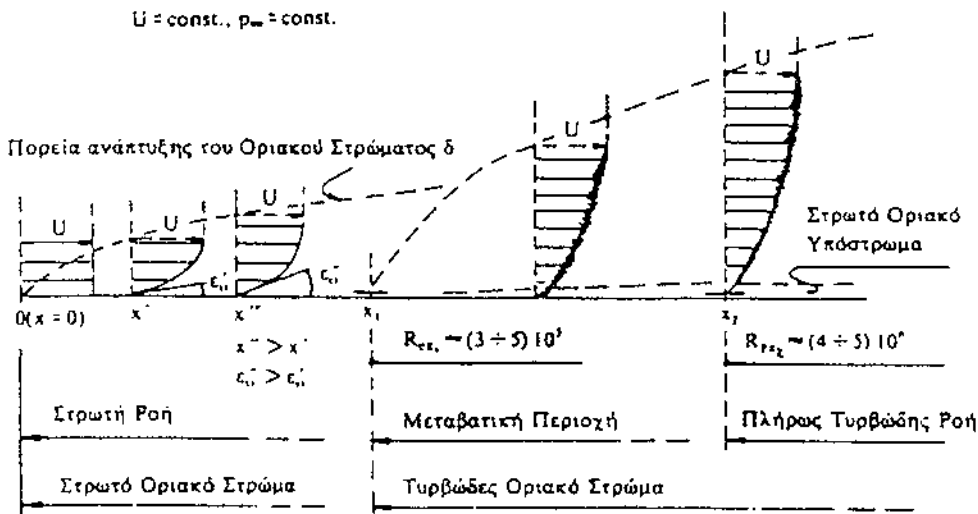
Στην αρχή της ανάπτυξης του οριακού στρώματος, η ροή είναι *στρωτή* ή *κατά στρώματα*, δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ότι διαμορφώνεται σε απείρους λεπτά στρώματα  $\delta_y$  που το ένα ολισθαίνει πάνω στο άλλο χωρίς ν' ανταλλάσσουν στοιχεία ρευστού μεταξύ τους. Αν σ' ένα στρωτό πεδίο ροής ρίχνουμε σ' ένα σημείο σωματίδια (π.χ. χρώμα σε υγρά ή καπνό σε αέρια), αυτά θα σχηματίσουν μια ομαλή γραμμή. Αν η πλάκα έχει μεγάλο μήκος, η ροή δε μπορεί να διατηρηθεί για πάντα στρωτή. Απλοποιώντας τα πράγματα μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι λόγω της συνεχούς πέδησης των στοιχείων του ρευστού που κινούνται κοντά στην πλάκα, περιμένουμε την ανατροπή τους σε κάποια απόσταση  $x_1$  από την αρχή  $x=0$  της πλάκας, σύμφωνα με το σχήμα σχ. 2.4. Περιμένουμε επίσης το σημείο αυτό να γίνει αίτιο γένεσης *δινών* ή *στροβίλων* που αναταράσσουν τη ροή και παρασύρονται απ' αυτή. Καταλαβαίνουμε ότι η ροή είναι πλέον πολύ ανακατεμένη για να χαρακτηριστεί στρωτή και ότι παύει να είναι μόνιμη αφού μια δίνη μπορεί να εμφανιστεί οπουδήποτε, να ατονήσει και να εξαφανιστεί διαχεόμενη αργότερα, να γίνει αίτιο δημιουργίας άλλων δινών παρασύροντας γειτονικά στοιχεία ρευστού με άδηλο τρόπο. Η ροή πλέον λέγεται *τυρβώδης* ή *στροβιλώδης*.





Σχήμα 2.4. Ανατροπή στοιχείου ρευστού και εμφάνιση δίνης.

Άρα και η ροή έγινε τυρβώδης, παρουσιάζει διακυμάνσεις της ταχύτητας προς όλες τις κατευθύνσεις σε κάθε θέση. Ένα στοιχείο ρευστού μπορεί πολύ ευκολότερα να βρεθεί σε άλλη θέση και έτσι οι διαδικασίες ανάμιξης που προκαλούν την διατμητική τάση και το οριακό στρώμα εντείνονται. Οι διατμητικές τάσεις είναι μεγαλύτερες. Οι απώλειες ενέργειας είναι κι αυτές μεγαλύτερες, το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνει πολύ ταχύτερα συναρτήσει του  $x$  απ' ότι στη στρωτή ροή, όπως φαίνεται και στο σχ. 2.5 που δίνει μια εικόνα των κατανομών ταχύτητας  $u$  για πλάκα αρκετά μεγάλου μήκους. Το οριακό στρώμα για την περιοχή από  $x=0$  ως  $x_1$  λέγεται *στρωτό οριακό στρώμα*, ενώ απ' εκεί και πέρα λέγεται *τυρβώδες οριακό στρώμα*.



Σχήμα 2.5. Ανάπτυξη του οριακού στρώματος

Συνήθως σε απλές περιπτώσεις ροών όπως αυτή της επίπεδης πλάκας, η τυρβώδης ροή αποκτά κάποτε μια *στατιστική ομοιομορφία* ως προς την κίνηση, την περιστροφή, την διάταξη και το μέγεθος των δινών. Μέχρι τότε βρισκόμαστε στη *μεταβατική περιοχή*, που εξελίσσονται ακατάστατα και το σημείο έναρξής της δεν προσδιορίζεται ούτε τοπικά ούτε χρονικά με ακρίβεια. Μετά την περιοχή αυτή (απόσταση  $x_2$ ) αρχίζει η *πλήρως τυρβώδης ροή*. Παρατηρήθηκε ότι στο τυρβώδες οριακό στρώμα τα στοιχεία του ρευστού που βρίσκονται πολύ κοντά στην πλάκα, δεν κυλίνουν απ' ευθείας πάνω σ' αυτήν, αλλά σε ένα μικρό στρώμα ρευστού που παρεμβάλλεται στο οποίο η ροή είναι στρωτή. Το στρώμα αυτό λέγεται *στρωτό οριακό υπόστρωμα* και σ' αυτό η ταχύτητα φαίνεται να είναι απευθείας ανάλογη της απόστασης από το τοίχωμα. Θεωρείται ότι διαμορφώνεται επίσης μεταξύ  $x_1$  και  $x_2$ .

Διαπιστώθηκε ότι σε όλες τις περιπτώσεις ροών σε επίπεδες πλάκες σαν κι αυτές στις οποίες έχουμε αναφερθεί σ' αυτό το κεφάλαιο, τα σημεία μετάβασης  $x_1$  και  $x_2$ , βρίσκονταν σε περίπου ίδιες τιμές ενός αδιάστατου αριθμού που λέγεται *τοπικός αριθμός Reynolds*, ανεξάρτητα από το ποιο είναι το ρευστό, πόση η τιμή της  $U$  ή της  $\nu$  ή της  $x$  κτλ. Ο τοπικός αριθμός Reynolds στη θέση  $x$  της πλάκας ορίζεται ως εξής:

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} \quad (2.8)$$

Όπου  $\nu$  είναι η κινηματική συνεκτικότητα που ορίζεται ως εξής:

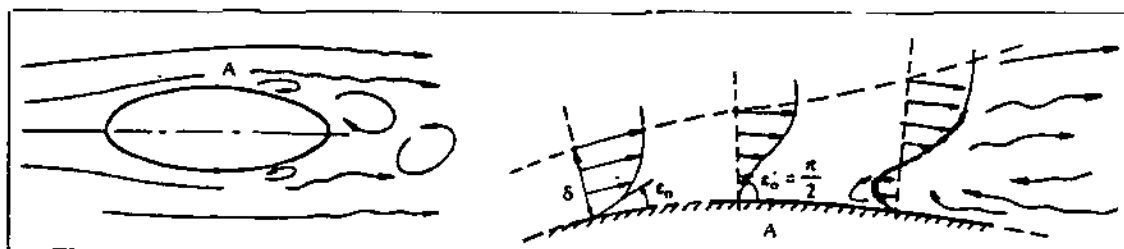
$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.9)$$

Από στατιστική πολλών πειραμάτων διαπιστώθηκε ότι για τους αριθμούς Reynolds των σημείων  $\chi_1$  και  $\chi_2$  ισχύει:

$$Re_{\chi_1} \approx (3 \div 5) \cdot 10^5 \quad Re_{\chi_2} \approx (3 \div 5) \cdot 10^6 \quad (2.10)$$

Ο  $Re_{\chi_1}$  λέγεται και κρίσιμος αριθμός Reynolds, αφού χαρακτηρίζει τη θέση μετατροπής της ροής από στρωτή σε τυρβώδη.

Η εμφάνιση και η εξέλιξη ως κάποιο σημείο του οριακού στρώματος στην επιφάνεια στερεών σωμάτων με πάχος μέσα σε παράλληλη ροή, είναι σε γενικές γραμμές ανάλογη με αυτή που είδαμε στην πλάκα. Ένας βασικός παράγοντας διαφοροποίησης μπορεί να είναι η μεταβολή της στατικής πίεσης, λόγω του σχήματος του στερεού. Έστω ότι έχουμε ένα σώμα της μορφής του σχ. 2.6 με τον άξονά του παράλληλο στη ροή. Η ροή στην συγκλίνει μέχρι περίπου το σημείο του μέγιστου πάχους του σώματος. Η σύγκλιση της ροής σημαίνει ότι γραμμές ροής πλησιάζουν μεταξύ τους και το ρευστό επιταχύνεται (αφού είναι σα να πρέπει να περάσει ίδια μάζα ρευστού από μικρότερη διατομή) ενώ ταυτόχρονα πέφτει η στατική του πίεση (αφού αυξήθηκε η κινητική ενέργεια κάποιο άλλο είδος πρέπει να μειώθηκε). Αυτά που γράφονται εδώ περιγραφικά μπορούν πολύ εύκολα να προκύψουν από την εξίσωση της συνέχειας η αύξηση της ταχύτητας και από την εξίσωση του Bernoulli (βασικά συμπεράσματα για την εξωτερική ροή μπορούμε να βγάλουμε απ' αυτήν την προσεγγιστική εξίσωση) η μείωση της στατικής πίεσης. Το οριακό στρώμα περιορίζεται κοντά στο σώμα και δεν εμποδίζει της παραπάνω διαδικασίες. Η εξωτερική ροή μη συνεκτικού ρευστού (ροή που θα προέκυπτε λύνοντας τις εξισώσεις Euler). Από το σημείο A και μετά, θα περίμενε κανείς ότι η ροή θα έχει την τάση ν' ανακτηθεί στατική πίεση. Πράγματι έτσι θα συνέβαινε αν το ρευστό ήταν μη συνεκτικό. Αν είναι συνεκτικό όμως, ιδίως αν οι ταχύτητες εξωτερικής ροής είναι μεγάλες, η διαδικασία μείωσης της ταχύτητας – ανάκτηση της στατικής πίεσης δεν έχει νόημα στο οριακό στρώμα που οι ταχύτητες είναι μικρές και δε μπορεί να γίνει. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η πλήρης αντιστροφή της φοράς ολόκληρης της ροής στο σώμα, η αποκόλληση της ροής όπως λέγεται, σχ. 2.6. Το σημείο A στο οποίο αρχίζει αυτή η αντιστροφή λέγεται σημείο αποκόλλησης της ροής.



Σχήμα 2.6. εικόνα αποκόλλησης της ροής

Πίσω από το σώμα εμφανίζονται μεγάλοι στροβιλισμοί. Η μεταφορά στοιχείων του ρευστού προς τα κει που πάει όλη η ροή δεν ισχύει κοντά στο σώμα μετά το σημείο αποκόλλησης (αφού κοντά στο σώμα η ροή πάει ανάποδα), δηλαδή είναι σα να έχει απομακρυνθεί ή αποκολληθεί η ροή από το σώμα, εξ' ου και το όνομα. Ανάκτηση της στατικής πίεσης δεν είναι πλέον δυνατή, μια και η μεταφορική ενέργεια των στοιχείων του ρευστού που διέρχονται από την περιοχή αυτή μετατρέπεται σε ενέργεια περιστροφής (ενέργεια μεγάλου στροβιλισμού και ενέργεια τύρβης). Η μη ανάκτηση της πίεσης στην πίσω από το σώμα περιοχή, έχει προφανώς ως συνέπεια την αύξηση της ώθησης που ασκεί το ρευστό στο σώμα. Έτσι η αντίσταση στη ροή ενός σώματος οφείλεται στις διατμητικές τάσεις όπως αναφέρθηκε παραπάνω για την πλάκα (αντίσταση τριβής) και κυρίως, στην επιβαλλόμενη από τους στροβιλισμούς διανομή της στατικής πίεσης γύρω από το σώμα, όπως είδαμε εδώ (αντίσταση μορφής).

### 2.1.3. Εξισώσεις διδιάστατου οριακού στρώματος.

Επαναλαμβάνεται ότι σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις ροών πρακτικού ενδιαφέροντος ισχύουν οι εξισώσεις Navier – Stokes εξ.(1.30) με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Ξαναγράφονται εδώ σε διανυσματική μορφή:

$$\rho \frac{D\bar{c}}{Dt} = \rho \bar{g} - \bar{V}\rho + \mu \Delta \bar{c} + \frac{\mu}{3} \bar{V} (\bar{V}c) \quad (2.11)$$

Συνοπτικά εκφράζουν την ισορροπία μεταξύ δυνάμεων αδρανείας απ' τη μια μεριά, και της βαρύτητας, της πίεσης και των συνεκτικών δυνάμεων από την άλλη. Αν ο αριθμός Reynolds (που όπως είπαμε λίγο παραπάνω εκφράζει το λόγο των δυνάμεων αδράνειας προς της συνεκτικές δυνάμεις) είναι μεγάλος, οι συνεκτικές δυνάμεις μπορούν να αμεληθούν σε σχέση με τις αδρανειακές και οι δύο τελευταίοι όροι των παραπάνω εξισώσεων δε λαμβάνονται υπόψη, οπότε καταλήγουμε ακριβώς στις εξισώσεις του Euler εξ. (1.38). Αυτό αν και μπορεί να θεωρηθεί πολύ συχνά αποδεκτό στην εξωτερική ροή, δε μπορεί να ισχύει στο οριακό στρώμα. Λαμβάνοντας όμως υπόψη μας ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι τουλάχιστον μια τάξη μεγέθους μικρότερο από μια τυπική διάσταση του στερεού σώματος μπορούμε με μικρές παραδοχές να απλοποιήσουμε τις εξ.(2.11) οι οποίες για την περίπτωση διδιάστατης, μόνιμης ροής ασυμπίεστου ρευστού (συνηθισμένη περίπτωση στην πράξη) καταλήγουν να γράφονται (μόνο μέσα στο οριακό στρώμα):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.12)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.13)$$

Βλέπουμε ότι η στατική πίεση μένει σταθερή μέσα στο οριακό στρώμα για μια συγκεκριμένη θέση  $x$ . Στην περίπτωση που έχουμε κάνει τις παραπάνω παραδοχές για τις οποίες ισχύουν οι εξισώσεις εξ.(2.12), εξ.(2.13), η εξίσωση της συνέχειας γράφεται στη μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Οι τρεις παραπάνω εξισώσεις (εξ.(2.12), εξ.(2.13) και εξ.(2.14) λέγοντας εξισώσεις διδιάστατου οριακού στρώματος και αρκούν για την περιγραφή του σε απλές περιπτώσεις. Παρατηρούμε ότι είναι γνωστή η κατανομή πίεσης στα άκρα του οριακού στρώματος, ή η κατανομή ταχύτητας αφού η μια προκύπτει άμεσα από την άλλη βάσει της εξίσωσης Bernoulli για την ελεύθερη ροή,

$$U \frac{dU}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (2.15)$$

Οι άγνωστοι στις εξισώσεις του οριακού στρώματος είναι δύο ( $u$  και  $v$ ) και αρκούν οι εξισώσεις εξ.(2.12) και εξ.(2.14) για να έχουμε ένα κλειστό σύστημα. Οπότε σε απλά στρωτά οριακά στρώματα μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο ροής και το μόνο πρόβλημα θα είναι η μαθηματική λύση των δύο αυτών εξισώσεων. Σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις βέβαια (για παράδειγμα κοντά σε αποκόλληση της ροής) οι παραδοχές που έχουν γίνει για να προκύψουν αυτές οι εξισώσεις δεν δίνουν επαρκώς καλές λύσεις και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άλλη μορφή των εξισώσεων πιο σωστή και πιο κοντινή στις εξισώσεις Navier – Stokes.

Για τη λύση των εξισώσεων διδιάστατου στρωτού οριακού στρώματος έχουν αναπτυχθεί διάφοροι τρόποι επίλυσης, αφού το πρόβλημα έχει ακόμη και σε αυτή την απλή μορφή πολλές μαθηματικές δυσκολίες. Πρώτος ο Blasius έλυσε τις εξισώσεις λίγα χρόνια μετά τη δημοσίευσή τους στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα.

Για τα τυρβώδη οριακά στρώματα οι εξισώσεις δεν ισχύουν μ' αυτή τη μορφή, αφού δεν ισχύουν οι παραδοχές που έγιναν για να προκύψουν. Υπάρχει και η μορφή τους για τυρβώδη

οριακά στρώματα, όπου οι εξισώσεις αφορούν μέσες τιμές φυσικών μεγεθών και υπάρχει στην εξ. (2.12) άλλος ένας όρος, οι τάσεις Reynolds, στις οποίες θα αναφερθούμε σε λίγο. Δεν θα επιμεινουμε άλλο σ' αυτές τις εξισώσεις, αφού σήμερα υπάρχει η δυνατότητα να λύνονται αριθμητικά οι εξισώσεις Navier – Stokes με λιγότερες παραδοχές και αυτό γίνεται στην πράξη. Η παράγραφος αυτή §2.1.3 θα μπορούσε και να λείπει χωρίς να φανεί πουθενά στα υπόλοιπα, αλλά, με την ύπαρξή της είναι πλήρης η αναφορά στο οριακό στρώμα.

## 2.2 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΤΥΡΒΗ.

Στην τύρβη πρώτοαναφερθήκαμε στην §2.1.2 αυτής της εργασίας, σελ.24 – 25, για να πούμε ότι η ροή δε μπορεί να διατηρηθεί για πάντα σε ένα οριακό στρώμα στρωτή, αλλά κάποτε εμφανίζονται δίνες στη ροή και αρχίζουν διακυμάνσεις της μέσης τιμής ταχύτητας προς όλες τις κατευθύνσεις.

Για να κατανοηθεί καλύτερα η έννοια της τύρβης, μπορούμε να φανταστούμε τη ροή του καπνού που εξέρχεται από μια καπνοδόχο ενός εργοστασίου ή τον καπνό του τσιγάρου, τη ροή πίσω από ένα αυτοκίνητο που τρέχει γρήγορα, τη ροή ενός ρηχού ορμητικού ποταμού. Στο τελευταίο παράδειγμα αν καθίσουμε στην όχθη και ρίχνουμε συνεχώς στο ποτάμι μιογιά θα δούμε ότι ακολουθεί μια τυχαία ανώμαλη πορεία σχηματίζοντας στροβιλισμούς. Τα χρωματιστά σχήματα που θα εμφανίζονται θα αλλάζουν από τη μια στιγμή στην άλλη (χαρακτηριστικό μη μόνιμης ροής). Μπορεί μάλιστα να βρεθεί μιογιά λίγα μέτρα πιο κάτω στην απέναντι όχθη, δηλαδή υπάρχει μεγάλη ανάμιξη σε μακροσκοπική κλίμακα των στοιχείων του ρευστού με τρόπο που θα μας φανεί τυχαίος, χωρίς οποιαδήποτε εύκολα αντιληπτή νομοτέλεια. Αν στο ποτάμι τα νερά έτρεχαν πολύ αργά και ήταν βαθύ και κυλούσε ομαλά και ρίχναμε μιογιά στη μέση, θα βλέπαμε ότι η μιογιά θα ακολουθούσε λίγο πολύ μια ευθεία γραμμή παράλληλη στην όχθη που δε θα είχε ενδιαφέρον να την κοιτάμε γιατί δε θα άλλαζε ποτέ (στρωτή ροή).

Καμιά φορά στα χοντρά κεριά γίνεται ατελής καύση και βγάζουν μαύρο καπνό. Συνήθως τότε στην αρχή ο καπνός ρέει στρωτά για 2 με 5 εκατοστά ακολουθώντας μια ομαλή και σταθερή πορεία μέχρι κάποιο σημείο που ξαφνικά εμφανίζονται με τυχαίο τρόπο δίνες και στροβιλισμοί δημιουργώντας διάφορα σχήματα που δε θα βαρεθούμε να βλέπουμε. Ενώ πριν ο καπνός πήγαινε απλά προς τα πάνω σχηματίζοντας μια απλή και λεπτή λουρίδα, τώρα μπορεί να βρεθεί καπνός και πολύ πέρα από τον άξονα του κεριού καθώς αναπτύσσονται, ανακατεύονται και σβήνουν δίνες διαφόρων μεγεθών σε διάφορα σημεία σε φαινομενικά τυχαίες στιγμές με φαινομενικά τυχαίες συχνότητες. Ήδη θα πρέπει να έχει δημιουργηθεί στον αναγνώστη μια άποψη για το τι είναι τύρβη, ακόμη κι αν δεν είχε ξανακούσει αυτή τη λέξη.

Στις τυρβώδεις ροές η ταχύτητα σε ένα σημείο μεταβάλλεται συνεχώς με φαινομενικά ακανόνιστο τρόπο. Γενικά όλα τα φυσικά μεγέθη παρουσιάζουν αντίστοιχες διακυμάνσεις και διαταραχές. Χαρακτηριστική ιδιότητα της τύρβης δεν είναι τόσο το ισχυρό στροβιλό πεδίο, όσο οι μεγάλες διαταραχές στο μέγεθος του στροβιλισμού. Η συχνότητα που γίνονται αυτές οι αλλαγές, ή αλλιώς, *συχνότητα της τύρβης*, μπορεί να είναι πολύ μεγάλη, της τάσεις των 10KHz (αρχίζοντας από λίγα Hz). Δηλαδή μπορεί σε ένα τυχαίο σημείο του πεδίου ροής π.χ. στο ποτάμι η ταχύτητα τη μια χρονική στιγμή να αυξάνει και σε ένα δεκάκις χιλιοστό του δευτερολέπτου να μειώνεται (λόγω της τύρβης). Το μέγεθος των στροβίλων κι αυτό μπορεί να είναι οποιοδήποτε και να συνυπάρχουν στο ίδιο πεδίο ροής διαφόρων μεγεθών στροβίλοι ή ένας πολύ μικρός στροβίλος μέσα σ' ένα μεγάλο κ.ο.κ. Δηλαδή πλήρης αναταραχή. Βέβαια στην πράξη οι δίνες που φαίνονται ή που επηρεάζουν ουσιαστικά τη ροή είναι περίπου ίδιας τάξης μεγέθους και το μέγεθός τους εμφανίζει κάποια σχέση με κάποιο τυπικό μέγεθος (*χαρακτηριστικό μήκος*) του πεδίου. Για παράδειγμα μέσα στο οριακό στρώμα δε μπορεί να έχουμε στροβιλισμούς μεγαλύτερους από το πάχος του οριακού στρώματος ή σε ένα σωλήνα οι μεγαλύτερες δίνες είναι όσο η διάμετρος του σωλήνα και οι μικρότερες το ένα χιλιοστό της.

Είναι εύκολο αντιληπτό ότι αν σε ένα πεδίο ροής υπάρχουν διαταραχές, η τύρβη είναι πιο εύκολο να εμφανιστεί. Για παράδειγμα η κάπνα του τσιγάρου μπορεί στην αρχή να ανεβαίνει

στρωτά προς τα πάνω, αλλά αν τη φυσήξουμε θα γίνει πιο εύκολα τυρβώδης. Αν στο χοντρό κερι που βγάζει αιθάλη βάλουμε από πάνω του ένα συρματάκι, η ροή θα γίνει πιο γρήγορα τυρβώδης. Στα φτερά των αεροπλάνων μερικές φορές θέλει ο κατασκευαστής να έχει τυρβώδη ροή και τότε βάζει μικρές λάμες στην επιφάνειά τους. Όμως δεν κανονίζουν οι διαταραχές μόνο αν θα εμφανιστεί τύρβη ή όχι. Σπουδαιότερο ρόλο παίζει ο αριθμός Reynolds. Στην εξ. (2.10) αναφέραμε τα όρια αυτού του αριθμού για να έχουμε στρωτή και τυρβώδη ροή. Έτσι αν έχουμε  $Re_x = 1000$ , οποιαδήποτε διαταραχή και να βάλουμε στο πεδίο, αυτό θα ξαναγυρίσει σε στρωτή ροή.

Το αποτέλεσμα της έντονα διαταραγμένης ροής, της τυρβώδους ροής, μοιάζει με το πεδίο ροής που θα είχαμε αν η συνεκτικότητα αυξανόταν κατά μερικές τάξεις μεγέθους. Αυτό συμβαίνει λόγω της μεγαλύτερης ανάμιξης. Τα στοιχεία του ρευστού όχι μόνο λόγω της άδηλης μοριακής κίνησης, αλλά κυρίως λόγω της τύρβης μεταφέρονται σε γειτονικά επίπεδα της ροής πράγμα που σημαίνει βάσει όσων είπαμε στην σελ. 21 στην αρχή της §2.1, ότι οι *διατμητικές τάσεις αυξάνονται* (πιο συχνή τάση στοιχείων του ρευστού να φρενάρουν ή να επιταχύνουν γειτονικά τους). Καταλαβαίνουμε λοιπόν και χωρίς να γράψουμε καθόλου εξισώσεις ότι θα ήταν καλή ιδέα να θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένας τυρβώδης συντελεστής συνεκτικότητας και να προσπαθήσουμε να τον εκφράσουμε συναρτήσει γνωστών μεγεθών της ροής και έτσι θα μπορούμε να λύνουμε τη ροή σα να ήταν στρωτή μόνο που αντί του απλού δυναμικού συντελεστή συνεκτικότητας, τώρα θα έχουμε επιπρόσθετα και τον τυρβώδη. Πράγματι όπως θα δούμε κάτι παρόμοιο συμβαίνει. Προφανώς αυτός ο συντελεστής θα είναι μεγαλύτερος αν η ανάμιξη ή οι δίνες ή η τύρβη είναι μεγαλύτερα. Βέβαια μ' αυτά που έχουν γραφεί ως τώρα τίποτε δε λέει ότι εκτός από τις διατμητικές δυνάμεις (ή το συντελεστή συνεκτικότητας) δε θα υπάρχει και κάτι άλλο που θα επηρεάζει η τύρβη, αφού έχει τόσα ακόμη χαρακτηριστικά. Όμως όλα τα χαρακτηριστικά (ή σχεδόν) καταλήγουν να έχουν ως αποτέλεσμα τη μεγαλύτερη ανάμιξη και αυτό μπορεί να φανεί μόνο στη διατμητική τάση απ' τα μακροσκοπικά φυσικά μεγέθη της ροής. Οπότε όλα συντείνουν ότι η παραπάνω ιδέα θα ήταν πολύ καλή. Μένει να βρούμε πως θα συνδέσουμε το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας με άλλα μεγέθη της ροής. Περισσότερα γι' αυτό παρακάτω, στη μοντελοποίηση της τύρβης. Μπορούμε όμως από τώρα να σκεφτούμε κάτι ακόμη. Με θεωρητική μόνο μελέτη των εξισώσεων δεν πρόκειται να βρούμε μια σχέση ακόμη για να κλείσουμε το πρόβλημά μας, αφού αυτό θα σήμαινε νομοτέλεια στην τύρβη. Πρέπει λοιπόν να διαισθανθούμε ή να παρατηρήσουμε σε πειράματα κάποια <<συνήθεια>> της τύρβης (που δε θα μπορούσε βέβαια πλήρως να εξηγήσουμε) ή κάποια νομοτέλεια επιμέρους χαρακτηριστικών της. Σίγουρα δηλαδή ό,τι και να κάνουμε να χρησιμοποιήσουμε εμπειρικές πληροφορίες από πειράματα.

Ίσως κάποιος σκεφτόταν ότι όλες οι ροές είναι τυρβώδεις, απλά οι στρωτές έχουν πάρα πολύ μικρή τύρβη ή ότι όλες είναι στρωτές, απλά οι τυρβώδεις έχουν πολύ μεγάλη ανάμιξη. Ακόμη ότι ο χωρισμός της ροής σε δύο είδη αντιτίθεται στον γενικό κανόνα ότι η φύση είναι απλή. Ο αντίλογος σ' αυτή τη σκέψη είναι ότι πραγματικά φαίνεται να αλλάζει η φύση της ροής. Γι' αυτή την αλλαγή της φύσης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη μίλησε πρώτη φορά ο Reynolds. Η στρωτή και η τυρβώδης ροή έχουν πολλές διαφορές μεταξύ τους και πολύ εύκολα να διακριθούν. Επιπλέον, αν οι συνθήκες δεν είναι κατάλληλες (αριθμός Reynolds, τραχύτητα επιφάνειας) δεν μπορούμε να έχουμε τυρβώδη ροή ακόμα και αν την προκαλέσουμε (το ίδιο ισχύει αντίστοιχα και για την στρωτή). Αυτά μας κάνουν να μιλάμε για δύο είδη ροών. Αν μπορούσαμε να λύσουμε τις πλήρεις μη μόνιμες εξισώσεις Navier – Stokes ίσως δε θα χρειαζόταν αναγκαστικά να χωρίσουμε τις ροές σε στρωτές και τυρβώδεις (αν και πάλι θα έμεναν οι όροι για πρακτικούς και ιστορικούς λόγους). Έχει όμως αποδειχθεί, όπως αναφέρεται στο [2], ότι ακόμη κι αν μπορούσαμε να λύσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις Navier – Stokes, μια μικρή αλλαγή ή διαταραχή σε ένα οποιοδήποτε σημείο της ροής θα επιδρούσε τελικά σε όλο το πεδίο ροής (*χαοτική συμπεριφορά*). Για τι λόγο αυτό ακόμη και θεωρητικά χρειάζεται να μιλάμε για μέσες χρονικά τιμές μεγεθών ροής, να χωρίζουμε τη ροή σε στρωτή και τυρβώδη και να προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε την τύρβη, αφού ναι μεν ξέρουμε σε ποιους νόμους υπακούει με ακρίβεια (εξισώσεις Navier –

Stokes), αλλά είναι τόσο περίπλοκοι που δεν έχει και πολύ μεγάλο πρακτικό νόημα που τους ξέρουμε. Σε επόμενες σελίδες θα εξετάσουμε πώς μελετάμε την τυρβώδη ροή κάνοντας χρήση μέσων χρονικά μεγεθών της ροής, ποιοι καινούριοι όροι εμφανίζονται μ' αυτό τον τρόπο και πώς τους εκφράζουμε συναρτήσει άλλων μεγεθών ώστε να κλείσουμε μαθηματικό πρόβλημα (μοντελοποίηση). Αν κοιτάξουμε τα πράγματα άκρως θεωρητικά και υποθέσουμε ότι μπορούμε να έχουμε πλήρη ακρίβεια στα δεδομένα μας και λύναμε τις εξισώσεις Navier – Stokes, τότε θα έπρεπε να μιλάμε για τύρβη (θα προέκυπτε μόνη της), ούτε για μεγαλύτερες διατμητικές τάσεις, αφού θα κοιτούσαμε τα πράγματα σε μικροσκοπική κλίμακα, δηλαδή την πραγματική μεταφορά ρευστού ενός στρόβιλου κατά την οποία ο στρόβιλος, ή καλύτερα τα στοιχεία ρευστού του, θα εμφάνιζαν κανονικές διατμητικές τάσεις με τα διπλανά τους (μακροσκοπικά η μεταφορά ρευστού από στρόβιλο δε μπορεί να διακριθεί από άδηλη μοριακή κίνηση και φαίνεται ν' αυξάνουν οι τάσεις, ή ο συντελεστής συνεκτικότητας  $\mu$ ). Οι (πλήρεις, μη μόνιμες) εξισώσεις Navier – Stokes δεν λύνονται ούτε αριθμητικά στα συνήθη πρακτικά προβλήματα, αφού για να πιάσουμε με ακρίβεια την τύρβη θέλουμε τόσο μικρά χρονικά και χωρικά βήματα, που απαιτείται πολύ μεγάλος αποθηκευτικό χώρος (μνήμη) μόνο για να κρατήσει τα δεδομένα ή τους ενδιάμεσους υπολογισμούς. Όσο για επεξεργασία αυτών των δεδομένων, οι απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ είναι τεράστιες και δεν προβλέπεται να καλυφτούν στο άμεσο μέλλον. Για να λύσουμε τις τυρβώδεις ροές λοιπόν, αναγκάζομαστε να χρησιμοποιήσουμε τις μέσες χρονικά τιμές των εξισώσεων Navier – Stokes όπως θα δούμε αργότερα (ενώ το σωστό θα ήταν να λύσουμε τις κανονικές, στιγμιαίες εξισώσεις και να παρουσιάσουμε τη μέση χρονικά τιμή των λύσεων).

Η έντονη ανάμιξη, χαρακτηριστικό των τυρβωδών ροών, είναι υπεύθυνη για τη μεγαλύτερη αντίσταση που εμφανίζουν αυτές οι ροές μέσα σε αγωγούς και σε μηχανές και για τις μεγαλύτερες απώλειες ενέργειας στις στροβιλομηχανές. Η ανάμιξη δημιουργεί μια ομογενοποίηση της ροής (αφού οι ανταλλαγές είναι έντονες) όσον αφορά την ορμή και τη θερμοκρασία. Έτσι μέσα στη ροή οι διαφορές θερμοκρασιών και ταχυτήτων εξομαλύνονται, ενώ κοντά στα στερεά τοιχώματα οι κλίσεις ταχύτητας και η συναλλαγή θερμότητας είναι αυξημένες. Η κινητική ενέργεια μέσα στα τυρβώδη οριακά στρώματα είναι επίσης αυξημένη. Συνεπώς ένα τυρβώδες οριακό στρώμα αποκολλάται πιο δύσκολα ή σε μεγαλύτερες κλίσεις πίεσης από ότι ένα στρωτό. Να σημειωθεί τέλος ότι ενώ η συνεκτικότητα και η θερμική αγωγιμότητα είναι ιδιότητες του ρευστού, η τύρβη σχετίζεται με την κίνηση του ρευστού και όχι μ' αυτό το ίδιο.

Στην πράξη, οι τυρβώδεις ροές έχουν έντονα τρισδιάστατο χαρακτήρα, δηλαδή υπάρχουν διαταραχές της ταχύτητας και στις τρεις κατευθύνσεις. Συχνά θεωρούμε όμως ότι η διαταραχή στην τρίτη διάσταση έχουν μέση τιμή μηδέν και λύνουμε διδιάστατα πεδία. Στα πρώτα οι στρόβιλοι υπακούουν μόνο σε μεταφορά και διάχυση της ροής, ενώ στα δεύτερα υπάρχει και η δράση της παραμόρφωσης του πεδίου ταχυτήτων.

Ποιες ροές είναι τυρβώδεις; Ροές μεγάλων ταχυτήτων, περίπλοκες ροές, ροές πρακτικού ενδιαφέροντος κοντά σε στερεά όρια, είναι τυρβώδεις τουλάχιστον στο μεγαλύτερο μέρος τους. Ροές σε οριακά στρώματα σε αεροσκάφη και στις στροβιλομηχανές είναι βασικά τυρβώδεις. Κίνηση αερίων μαζών στην ατμόσφαιρα, διάχυση καυσαερίων, ροή αίματος σε αρτηρίες και στην καρδιά είναι επίσης μερικά μη προφανή παραδείγματα.

Καθώς πλησιάζουμε προς το τέλος της §2.2, ας αναφερθεί ότι το θέμα της τύρβης είναι πολύ μεγάλο και ένα από τα πιο δύσκολα επιστημονικά θέματα του αιώνα μας. Μάλλον δεν έχουμε καταλάβει ακόμη το μηχανισμό της τύρβης, ίσως ούτε τι είναι τύρβη, ίσως ούτε ακόμη δεν πρέπει να μιλάμε για τύρβη. Δεν είναι γνωστό αν η μετάβαση της ροής σε τυρβώδη οφείλεται σε κάποια διαταραχή που έτυχε και παρουσιάστηκε στο πεδίο ή στη φύση των ροών των ρευστών (που εκφράζεται από τη μη γραμμικότητα των εξισώσεων Navier – Stokes). Μ' άλλα λόγια, θα μπορούσαμε έστω θεωρητικά να διατηρήσουμε επ' άπειρον τη ροή σε μια πλάκα στρωτή;

Μάλλον δεν είναι καλή ιδέα να προσπαθήσουμε να ορίσουμε την τύρβη, αλλά οι δύο παρακάτω ορισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κατακλείδα της παραγράφου:

<< Τύρβη είναι μια κατάσταση συνεχούς αστάθειας της ροής>>. [4]

<< Τύρβη είναι μια τρισδιάστατη χρονικά μεταβαλλόμενη ροή στην οποία η έκταση των δινοσωλήνων προκαλεί διαταραχές ταχύτητας σε όλες τις συχνότητες μεταξύ ελάχιστης που καθορίζεται από τις οριακές συνθήκες και μέγιστης που καθορίζεται από τη συνεκτικότητα του ρευστού>>. (Bradshaw) [4]

### 2.3 ΤΥΡΒΩΔΗ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούν οι (βασικές) εξισώσεις τυρβώδους ροής υιοθετώντας την κατά Reynolds περιγραφή της. Ευκαιρίας δοθείσης θα γραφούν και σκέψεις για το μηχανισμό παραγωγής, ανάπτυξης, μετάδοσης, διάχυσης, καταστροφής της τύρβης, λαμβάνοντας αφορμή κυρίως από τις εξισώσεις. Τέλος θα δοθεί το προφίλ ταχύτητας του τυρβώδους οριακού στρώματος για επίπεδη πλάκα, όπως προκύπτει από πολλά πειράματα.

#### 2.3.1 Περιγραφή τυρβωδών ροών κατά Reynolds.

Θεωρούμε ότι πεδίο ροής μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά αναλύοντας μια οποιαδήποτε συνιστώσα ταχύτητας σε μια μέση τιμή της και σε μια διακύμανση, η οποία υπάρχει λόγω τύρβης. Η μέση τιμή περιγράφει μια μακροσκοπικά ομαλή ροή, απαλλαγμένη από τις τυχαίες αλλαγές ταχύτητας στην μικροκλίμακα, τις οποίες προσθέτουμε για να βρούμε την ακριβή ταχύτητα σε μια δεδομένη στιγμή. Έτσι έχουμε:

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad (2.16)$$

Για την μέση τιμή έχουμε της συνιστώσας για παράδειγμα  $u$  της ταχύτητας ισχύει:

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt \quad (2.17)$$

Όμοια ορίζονται και οι υπόλοιπες μέσες τιμές. Η χρονική στιγμή  $t$  είναι αυτή για την οποία ενδιαφερόμαστε να μάθουμε ποια είναι η μέση τιμή. Το διάστημα χρόνου  $\Delta t$  πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από την μέγιστη περίοδο της τύρβης, ώστε να ολοκληρωθούν οι διακυμάνσεις της ταχύτητας και να πάρουμε μια μέση τιμή απαλλαγμένης τύρβης, η οποία θα είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου για μακροσκοπικά μόνιμο πεδίο ροής. Αν το πεδίο δεν είναι μακροσκοπικά μόνιμο, πρέπει επιπλέον το  $\Delta t$  να είναι αρκετά μικρότερο από την κλίμακα χρόνου που χαρακτηρίζει την τυπική χρονικά μεταβαλλόμενη συμπεριφορά του πεδίου ροής. Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι η μέση τιμή μιας διακύμανσης είναι 0. Η ανάλυση σε μέση τιμή και διακύμανση μπορεί να γραφεί για οποιοδήποτε μέγεθος του πεδίου ροής, όπως ταχύτητες, πίεση, θερμοκρασία, πυκνότητα κτλ. Οι διαταραχές ιδιοτήτων του ρευστού όπως είναι η συνεκτικότητα και η θερμική αγωγιμότητα θεωρούνται πολύ μικρές και συνήθως αμελούνται. Η λήψη μέσων τιμών με τον παραπάνω τρόπο (του Reynolds), είναι πολύ χρήσιμη για μελέτη των μέσων χρονικά εξισώσεων της ροής, στην περίπτωση του ασυμπίεστου ρευστού.

Οι μέσες τιμές των τετραγώνων των διακυμάνσεων των συνιστωσών της ταχύτητας φανερώνουν το μέγεθος της τύρβης. Γι' αυτό ορίζουμε την ένταση τύρβης (ή βαθμό τύρβης) ως εξής:

$$\tau_u = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{3}(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)} \quad (2.18)$$

Αν έχουμε ροή μακριά από στερεά όρια, ομογενούς και ισότροπου ρευστού, θεωρούμε ότι έχουμε ισότροπη τύρβη με την έννοια ότι:

$$\bar{u}'^2 = \bar{v}'^2 = \bar{w}'^2 \quad (2.19)$$

Σ' αυτή την περίπτωση, σε παράλληλη ροή  $U$ , η ένταση τύρβης γράφεται πιο απλά:

$$\tau_u = \frac{1}{U} \sqrt{\bar{u}'^2} \quad (2.20)$$

Μια τυπική τιμή έντασης τύρβης σε ελεύθερη ροή, π.χ. μέσα σε αεροδυναμική σήραγγα, είναι 0,005. Με ειδικές πειραματικές διατάξεις επιτυγχάνουμε πολύ χαμηλές τιμές της τάξης του 0,0001.

Αμέσως παρακάτω θα γραφούν καταρχήν οι μέσες χρονικά εκφράσεις των βασικών εξισώσεων της ροής (συνέχειας, ορμής, ενέργειας), δηλαδή οι εξισώσεις που αντί για στιγμιαία μεγέθη εμπλέκουν μέσες τιμές τους. Η γραφή αυτή μας βοηθάει όταν έχουμε τυρβώδεις ροές, αφού απαλασσόμαστε από τις διακυμάνσεις της ταχύτητας. Φυσικά χρησιμοποιώντας μέσες τιμές χάνουμε κάποιες πληροφορίες, που όμως δεν είναι χρήσιμες στην τεχνική πράξη. Ακόμη κάτι τέτοιο (χρησιμοποίηση μέσων τιμών) δε θα μπορούσε να γίνει χωρίς κάποιο τίμημα, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι κάποιοι νέοι όροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις Navier – Stokes που αφορούν τις κλίσεις των φαινομενικών τάσεων που συνδέονται με την τυρβώδη κίνηση. Από τις πληροφορίες που πετάμε, οι μόνοι όροι που μένουν είναι αυτοί, αλλά είναι άγνωστοι. Για να έχουμε ένα καλά σχηματισμένο μαθηματικά πρόβλημα (ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων), πρέπει να τους μοντελοποιήσουμε, δηλαδή να βρούμε σχέσεις στις οποίες να εμπλέκονται, ώστε να μπορέσουμε να τους υπολογίσουμε. Με τη λήψη των μέσων τιμών των εξισώσεων, είναι σα να αλλάζουμε τη χρονική κλίμακα μελέτης των φαινομένων. Αντί να κάνουμε τη μελέτη σε μικροκλίμακα υπολογίζοντας την παραμικρή πάλμωση της ταχύτητας που συμβαίνει εκατοντάδες φορές το δευτερόλεπτο, ικανοποιούμε να ξέρουμε τη μέση τιμή των μεγεθών, έχοντας πιο απλές εξισώσεις (αφού έχουν μεγαλύτερη χρονική κλίμακα) και έχοντας καινούργιους αγνώστους, τις τάσεις Reynolds όπως θα δούμε παρακάτω. Όλη η μοντελοποίηση της τύρβης και η προσπάθεια κατανόησής της, γίνεται για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε αυτούς τους επιπλέον όρους, τις τάσεις Reynolds.

Οι μέσες χρονικά εκφράσεις των εξισώσεων προκύπτουν αν πάρουμε τη μέση τιμή τους, δηλαδή πούμε ότι η μέση τιμή του πρώτου μέλους ισούται με τη μέση τιμή του δεύτερου μέλους, και μαθηματικές πράξεις βάσει των κανόνων μέσης τιμής. Θα γραφούν παρακάτω μόνο οι εξισώσεις για διδιάστατο πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού, για απλότητα. Για πιο γενικές περιπτώσεις μπορεί κανείς να κοιτάξει στο [2].

### 2.3.1.1 Εξίσωση συνέχειας.

Προκύπτει εύκολα ότι η εξίσωση της συνέχειας ισχύει σε αναλλοίωτη μορφή και για τις μέσες ταχύτητες:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

Το ίδιο ισχύει και για τις διακυμάνσεις των ταχυτήτων:

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = 0 \quad (2.22)$$

### 2.3.1.2. Εξίσωση διατήρησης της ορμής.

Στην γενική περίπτωση του νευτώνειου ρευστού, οι εξισώσεις ορμής είναι οι εξισώσεις Navier – Stokes. Στη μέση χρονικά έκφρασή τους είναι γνωστές και ως εξισώσεις Reynolds της ροής είναι:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \rho \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} - \rho \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y}$$

και

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \rho \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} - \rho \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial x}$$

Οι εξισώσεις αυτές μοιάζουν με τις εξισώσεις Navier – Stokes μόνο που αφορούν μέσες τιμές ταχυτήτων, δηλαδή έχουν πολύ μεγαλύτερη χρονική κλίμακα. Ακόμη έχουν κάποιους επιπλέον όρους και πιο συγκεκριμένα τους δύο τελευταίους κάθε εξίσωσης, στους οποίους εμπλέκονται οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων. Βλέπουμε δηλαδή ότι παρόλο που η μέση τιμή των διακυμάνσεων είναι μηδέν, τελικά αυτές έχουν κάποια επίδραση στη μακροσκοπική μέση ροή μέσω αυτών των όρων.



Φαίνεται εύκολα ότι οι όροι αυτοί παριστάνουν μεταβολή πίεσης ο πρώτος (κατά τη διεύθυνση  $x$  στην πρώτη εξίσωση και κατά την  $y$  στην δεύτερη) και μεταβολή διατμητικής τάσης ο δεύτερος. Οι όροι αυτοί ονομάζονται *τυρβώδεις τάσεις* ή *τάσεις Reynolds*. Φαινομενικά παρουσιάζονται ως επιπλέον τάσεις στο πεδίο, σα να είχε αυξηθεί αρκετές φορές ο συντελεστής συνεκτικότητας  $\mu$ . Όμως οι τυρβώδεις τάσεις δεν είναι ιξώδους μορφής, αλλά προέρχονται από αδρανειακούς όρους. Δηλαδή λόγω των διακυμάνσεων ταχύτητας, δημιουργείται μια επιπλέον μεταφορά ορμής που αντιστοιχεί σ' αυτές τις τάσεις. Οι τυρβώδεις τάσεις μηδενίζονται πάνω στα τοιχώματα, αφού εκεί και οι διακυμάνσεις της ταχύτητας είναι 0.

Μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή των τάσεων Reynolds ως εξής:

$$\tau_i = \left[ \frac{\rho \overline{u'^2}}{\rho \overline{u'v'}} \frac{\rho \overline{u'v'}}{\rho v'^2} \right] \quad (2.24)$$

Ο τανυστής αυτός είναι συμμετρικός. Ο όρος  $\rho \overline{u'v'}$  λέγεται *τυρβώδεις διατμητική τάση*. Στις τρεις διαστάσεις υπάρχουν άλλες δύο τέτοιες τάσεις. Η συνολική διατμητική τάση ισούται με την διατμητική τάση που ξέραμε ως τώρα συν την τυρβώδη διατμητική τάση.

Ας επαναληφθεί ότι επειδή ο τανυστής των τάσεων Reynolds αποτελεί επιπλέον αγνώστους στις εξισώσεις μας, το μαθηματικό πρόβλημα δεν είναι πλέον κλειστό και πρέπει να βρούμε και άλλες εξισώσεις. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να περιγράψουμε με κάποιο τρόπο συναρτήσει άλλων μεγεθών αυτούς τους όρους που προέρχονται από την τύρβη (μοντελοποίηση της τύρβης). Αυτός είναι ο βασικός λόγος που προσπαθούμε να κατανοήσουμε τους μηχανισμούς της τύρβης.

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι μια τυπική διαταραχή ταχύτητας είναι το 10% της μέσης ταχύτητας, προκύπτει εύκολα ότι στην τυρβώδη ροή οι τυρβώδεις τάσεις είναι τουλάχιστον μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από τις συνήθεις διατμητικές τάσεις που οφείλονται στην συνεκτικότητα του ρευστού. Για τι λόγο αυτό αρκετές φορές οι μη τυρβώδεις τάσεις αμελούνται. Έτσι στα στρωτά οριακά στρώματα οι διατμητικές τάσεις εξαρτώνται από το συντελεστή συνεκτικότητας, δηλαδή από τη φύση του ρευστού (ανταλλαγή ορμής σε μοριακή κλίμακα). Στα τυρβώδη οι τάσεις εξαρτώνται κυρίως από τη φύση της ροής (ανταλλαγή ορμής μεταξύ στοιχείων του ρευστού). Είναι αναμενόμενο λοιπόν το παρελθόν της ροής (τα ανάντι της ροής) να παίζει μεγαλύτερο ρόλο στην ανάπτυξη του οριακού στρώματος αν αυτό είναι τυρβώδες παρά αν είναι στρωτό.

### 2.3.1.3. Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.

Λαμβάνοντας την μέση τιμή κάθε μέλους της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας σε διαφορετική μορφή εξ. (1.20), αμελώντας τις δυνάμεις βαρύτητας, θεωρώντας ότι ισχύει ο νόμος του Fourier εξ. (1.26) για τη μετάδοση και αντικαθιστώντας τον όρο που εμπλέκει την εσωτερική ενέργεια με όρο που εμπλέκει τη θερμοκρασία, προκύπτει τελικά η κατά Reynolds εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (που όμως έχει μικρή πρακτική αξία):

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{\alpha} (\rho c_p \bar{T}) + \frac{\theta}{\alpha x} (\rho c_p \overline{Tu}) + \frac{\theta}{\theta y} (\rho c_p \overline{Tv}) = \\ & = \frac{\theta p}{\alpha} + u \frac{\theta p}{\alpha x} + v \frac{\theta p}{\theta y} + \overline{u' \theta p'} + \overline{v' \theta p'} + \frac{\theta}{\alpha x} \left( \lambda \frac{\theta \bar{T}}{\alpha x} - \rho c_p \overline{T'u'} \right) + \frac{\theta}{\theta y} \left( \lambda \frac{\theta \bar{T}}{\theta y} - \rho c_p \overline{T'v'} \right) + \overline{\Phi} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση καταστροφής  $\Phi$  έχει οριστεί στην § 1.3.1, σελ. 17.

Στις αμέσως επόμενες παραγράφους θα γραφούν ενεργειακές εξισώσεις που μας βοηθούν να καταλάβουμε μηχανισμούς της τύρβης.

### 2.3.2. Εξίσωση μεταφοράς κινητικής ενέργειας σε τυρβώδη ροή.

Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την εξίσωση διατήρησης της ορμής. Είναι γνωστό ότι αν πολλαπλασιάσουμε εξίσωση ορμής με ταχύτητα, οδηγούμαστε σε ενεργειακή εξίσωση. Μόνο που έτσι η ενεργειακή εξίσωση Reynolds, αμελώντας την βαρυτική έλξη και

πολλαπλασιάζοντας με την ταχύτητα κάθε μέλος, οδηγούμαστε τελικά στην παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 \rho \left[ \frac{\theta}{\theta} \left( \frac{\bar{c}^2}{2} \right) + \frac{\theta}{\theta x} \left( \frac{u \bar{c}^2}{2} \right) + \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{v \bar{c}^2}{2} \right) \right] &= - \left[ \frac{\theta}{\theta x} (\overline{up}) + \frac{\theta}{\theta y} (\overline{vp}) \right] + \\
 + \frac{\theta}{\theta x} \left[ 2\mu u \frac{\theta \bar{u}}{\theta x} \mu v \left( \frac{\theta \bar{u}}{\theta y} + \frac{\theta \bar{v}}{\theta x} \right) \right] &+ \frac{\theta}{\theta y} \left[ 2\mu v \frac{\theta \bar{v}}{\theta y} + \mu u \left( \frac{\theta \bar{u}}{\theta y} + \frac{\theta \bar{v}}{\theta x} \right) \right] - \\
 - \mu \left[ 2 \left( \frac{\theta \bar{u}}{\theta x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\theta \bar{v}}{\theta y} \right)^2 + \left( \frac{\theta \bar{u}}{\theta y} + \frac{\theta \bar{v}}{\theta x} \right) \left( \frac{\theta \bar{u}}{\theta x} + \frac{\theta \bar{v}}{\theta y} \right) \right] &- \\
 - \frac{\theta}{\theta x} \left[ \rho u'^2 u + \rho (\overline{u'v'}) v \right] - \frac{\theta}{\theta y} \left[ \rho v'^2 v + \rho (\overline{u'v'}) u \right] &+ \\
 + \rho \left[ u'^2 \frac{\theta \bar{u}}{\theta x} + v'^2 \frac{\theta \bar{v}}{\theta y} + u'v' \left( \frac{\theta \bar{v}}{\theta x} + \frac{\theta \bar{u}}{\theta y} \right) \right] & \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει τους μηχανισμούς μεταφοράς, διάχυσης και παραγωγής της κινητικής ενέργειας, όσο και της απώλειάς της και μετατροπής της σε τυρβώδη κινητική ενέργεια. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

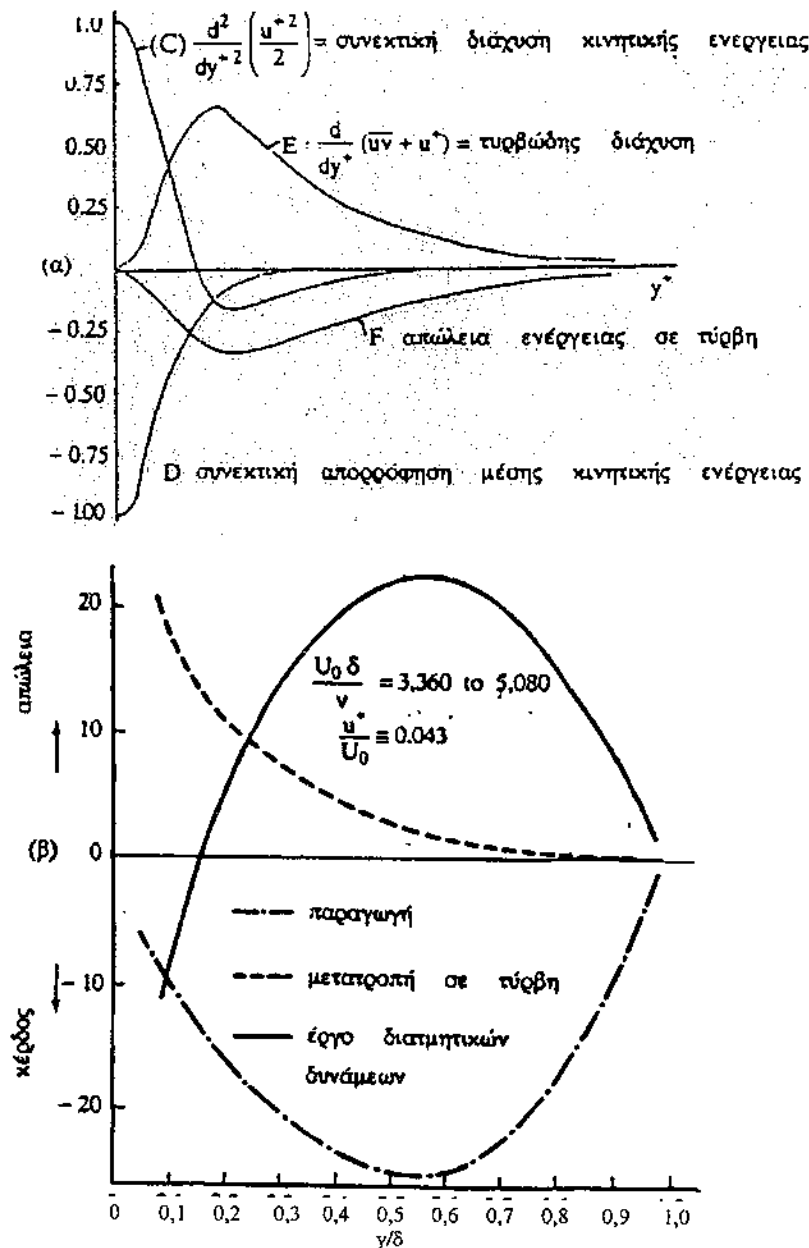
Ο ρυθμός αύξησης της μέσης κινητικής ενέργειας ενός στοιχείου του ρευστού (πρώτο μέλος) ισούται με (δεύτερο μέλος):

- Την ισχύ που δίνεται στο στοιχείο από τις δυνάμεις πίεσης (1<sup>η</sup> γραμμή).
- Την ισχύ που δίνεται από τις συνεκτικές δυνάμεις (2<sup>η</sup> γραμμή).
- Το ρυθμό καταστροφής της μηχανικής ενέργειας λόγω συνεκτικότητας (3<sup>η</sup> γραμμή).
- Την ισχύ που δίνεται από τις τάσεις Reynolds (4<sup>η</sup> γραμμή).
- Το ρυθμό καταστροφής της μηχανικής ενέργειας λόγω τύρβης (5<sup>η</sup> γραμμή). Δηλαδή την ενέργεια που παίρνει η τύρβη από τη μέση ροή.

Στην περίπτωση διδιάστατου οριακού στρώματος, μπορούμε με μικρές παραδοχές να γράψουμε το ισοζύγιο της κινητικής ενέργειας ως εξής:

$$\underbrace{\frac{u\theta u^2}{2\theta x} + \frac{v\theta u^2}{2\theta y}}_{(A)} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\theta}{\theta x} (\overline{up})}_{(B)} + \underbrace{\frac{\theta}{\theta y} \left( \overline{vu \frac{\theta u}{\theta y}} \right)}_{(C)} - \underbrace{v \left( \frac{\theta u}{\theta y} \right)^2}_{(D)} - \underbrace{\frac{\theta}{\theta y} (\overline{uu'v'})}_{(E)} + \underbrace{\frac{\theta u}{\theta y} \overline{u'v'}}_{(F)} \quad (2.27)$$

Στην περιοχή πολύ κοντά στον τοίχο, δηλαδή μέχρι 0,1 του πάχους του οριακού στρώματος, οι ταχύτητες είναι πολύ μικρές, άρα οι όροι μεταφοράς (A) αμελούνται. Στο στρωτό οριακό υπόστρωμα οι διακυμάνσεις της ταχύτητας είναι μικρές και εκεί το πεδίο ροής ελέγχεται από τις τάσεις συνεκτικότητας, δηλαδή B=C. Στο εξωτερικό άκρο της κοντινής στο στερεό όριο των τάσεων Reynolds είναι σημαντικά μεγαλύτερη και E=F. Ενδιάμεσα και οι τέσσερις αυτοί όροι παίζουν ρόλο στη διαμόρφωση της ροής, σχ. 2.7.



Σχῆμα 2.7. Ἰσοζύγιο μῆσης κινητικῆς ἐνεργείας κοντὰ (α) καὶ μακριὰ (β) ἀπὸ τοίχο

### 2.3.3. Εξίσωση μεταφοράς των τάσεων Reynolds.

Από τις μέσες χρονικά εξισώσεις της ορμής (εξισώσεις Reynolds ή μέσες εξισώσεις Navier – Stokes), μπορεί να προκύψει η επόμενη διαφορική εξίσωση που δείχνει το ενεργειακό ισοζύγιο της διατμητικής τάσης Reynolds  $\overline{\rho u'v'}$  όπως πριν είχαμε το ισοζύγιο της κινητικής ενέργειας. Αναφερόμαστε πάντα σε νευτώνειο ρευστό (εκτός και αν γράφεται κάτι διαφορετικό):

$$(1), (2) \quad \rho \left[ \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} \right] =$$

$$(3) \quad = -\rho \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'^2}) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'p'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'p'}) \right] -$$

(4),(5)

$$-\rho \left[ \overline{u'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{p' \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)} \right] + \mu \left[ u' \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) + v' \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \right]$$

Η φυσική έννοια της εξίσωσης είναι ότι: Ο ρυθμός μεταβολής της τάσης Reynolds (1) και η μεταφορά δια συναγωγής της τάσης Reynolds (2) ισούται με μεταφορά δια διαχύσεως (3) συν την παραγωγή τάσεων και πίεση παραμορφώσεων (4) συν την καταστροφή ενέργειας λόγω συνεκτικότητας (5). Αντίστοιχες εξισώσεις υπάρχουν και για τις υπόλοιπες τάσεις Reynolds και είναι γραμμένες όλες μαζί σε συνοπτική μορφή στην εξίσωση εξ. (3.100) για τη γενικότερη τρισδιάστατη περίπτωση.

#### 2.3.4. Εξίσωση μεταφοράς των τάσεων Reynolds.

Η *τυρβώδης κινητική ενέργεια*  $k$  ορίζεται ως εξής (αναφερόμαστε σε δύο διαστάσεις):

$$k = \frac{u'^2 + v'^2}{2} \quad (2.29)$$

Είναι λογικό άλλωστε να θεωρήσουμε την κινητική ενέργεια της τύρβης ως το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των διακυμάνσεων της ταχύτητας. Αν υπάρχει και  $w'$ , απλά προσθέτουμε το τετράγωνό της στον αριθμητή του παραπάνω κλάσματος.

Η εξίσωση μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας προκύπτει από την εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (που προκύπτει από τις εξισώσεις Navier – Stokes πολλαπλασιάζοντας με ταχύτητα) αν πάρουμε μέσες τιμές και αφαιρέσουμε την εξ. (2.26). Μπορεί επίσης να προκύψει από την εξίσωση μεταφοράς των τάσεων Reynolds. Ακόμη προκύπτει και από τις εξισώσεις Navier – Stokes των διακυμάνσεων (διαφορά των στιγμιαίων από τις μέσες Navier – Stokes) αν τις πολλαπλασιάσουμε με διακύμανση ταχύτητας, προσθέσουμε κατά μέλη και πάρουμε μέση τιμή. Είναι η εξής:

$$\begin{aligned} (1),(2) \quad & \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{k}u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{k}v)}{\partial y} = - \left[ \frac{\theta}{\rho} \left[ u' \left( \frac{p'}{\rho} + k \right) \right] + \frac{\theta}{\rho} \left[ v' \left( \frac{p'}{\rho} + k \right) \right] \right] - \\ (3),(4) \quad & - \left[ \overline{u'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \overline{u'v'} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial y^2} \right) \\ (5) \quad & - \nu \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Η εξ. (2.30) είναι ουσιαστικά ένας ισολογισμός της (μέσης χρονικά) εναλλαγής της ενέργειας της τύρβης ανά μονάδα χρόνου και ρέουσας μάζας. Έτσι για ένα διδιάστατο στοιχείο ρευστού οι παραπάνω όροι παριστάνουν:

Όρος (1): Το ρυθμό αύξησης της (μέσης) τυρβώδους κινητικής ενέργειας και την τυρβώδη κινητική ενέργεια που μεταφέρει η μέση ροή (συναγωγή).

Όρος (2): Τη μεταφορά τυρβώδους κινητικής και δυναμικής ενέργειας απ' την ίδια την τύρβη (διάχυση).

Όρος (3): Την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας από την μέση ροή.

Όρος (4): Την διάχυση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των συνεκτικών δυνάμεων που αναπτύσσονται από την ίδια την τυρβώδη κίνηση.

Όρος (5): Την καταστροφή (ή εκφυλισμό ή απώλεια ή απορρόφηση) της τυρβώδους κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα. Ο όρος αυτός συμβολίζεται με το  $\epsilon$ .

Ο τελευταίος όρος, η καταστροφή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $\epsilon$ , είναι πολύ σημαντικός διότι δίνει το μέτρο της απώλειας της μεταφορικής ενέργειας της ροής ασυμπίεστου ρευστού στο χώρο που προκαλείται από την γένεση και στη συνέχεια τον εκφυλισμό της τύρβης και τη μετατροπή της σε θερμότητα. Έτσι όταν αποκατασταθεί η ροή

μετά το στερεό σώμα θα έχει μικρότερη μεταφορική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και μεγαλύτερη ενθαλπία.

Κρατώντας μόνο τους σημαντικούς όρους από την παραπάνω εξίσωση, για απλές διδιάστατες περιπτώσεις μόνιμης ροής μπορεί να γραφεί:

$$\underbrace{\frac{-\theta \bar{k}}{u} + \frac{-\theta \bar{k}}{v}}_{(A)} + \underbrace{\left( \overline{u'^2 - v'^2} \right) \frac{\theta \bar{u}}{\theta x} + \overline{u'v'} \frac{\theta \bar{u}}{\theta y}}_{(B)} + \underbrace{\frac{\theta}{\theta y} v' \left( \frac{\bar{k}}{\rho} + \frac{p}{\rho} \right) - v \frac{\theta^2}{\theta y^2} \left( \overline{k + v'^2} \right)}_{(C)} + \underbrace{\varepsilon}_{(D)} = 0 \quad (2.31)$$

Οι όροι εκφράζουν κατά σειρά την μεταφορά τυρβώδους κινητικής ενέργειας από τη μέση ροή, την παραγωγή, την διάχυση και την απορρόφησή της.

Η απλότητα της εξίσωσης σε σχέση με την προηγούμενη, μας επιτρέπει να κάνουμε μερικά σχόλια.

Ο όρος (A) εκφράζει μεταφορά, γιατί είναι μεταβολή της  $k$  στο χώρο επί την ταχύτητα που γίνεται αυτή η μεταβολή. Είναι σα να μας λέει σε ένα στοιχειώδη όγκο πόση τυρβώδης κινητική ενέργεια μεταφέρεται. Έχει μονάδες ενέργειας που μεταφέρεται δια χρόνο.

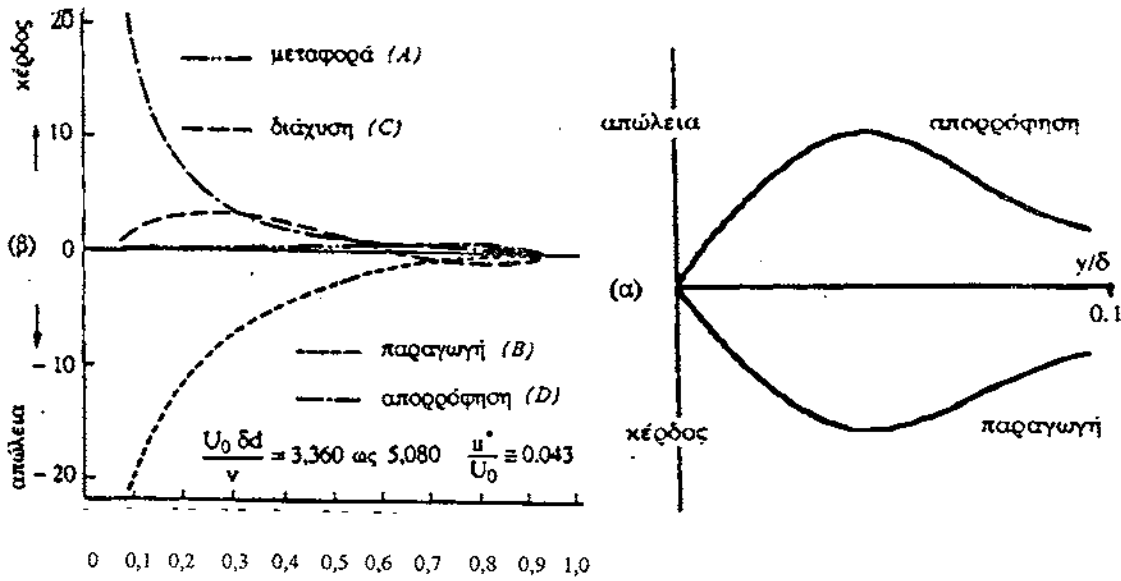
Ο όρος (B) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η παραγωγή της τυρβώδους ενέργειας προέρχεται από τη μεταβολή της ταχύτητας της μέσης ροής (αν οι κλίσεις ταχύτητας είναι 0, δεν υπάρχει παραγωγή). Επίσης βλέπουμε ότι οι όροι στον όρο (B) εκφράζουν ισχύ τυρβωδών τάσεων. Άρα, η μέση ροή, μέσω της δράσης των τυρβωδών τάσεων δίνει ενέργεια για να διατηρηθεί η τύρβη στο πεδίο ροής. Οι δύο πρώτοι όροι του όρου (B) είναι συνήθως μια τάξη μεγέθους μικρότεροι απ' τον τρίτο και μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να αμελούνται.

Στον όρο (C) βλέπουμε ότι η διάχυση γίνεται στον άξονα  $y$ , αφού υπάρχουν κλίσεις μεγεθών μόνο σ' αυτό τον άξονα. Ο δεύτερος όρος δίνει την ενέργεια που διαχέεται μέσω της συνεκτικότητας (που σχετίζεται με την άδηλη μοριακή κίνηση). Ο πρώτος όρος μπορεί να μεταφραστεί σαν μεταφορά των τυρβωδών ιδιοτήτων από το ίδιο το τυρβώδες πεδίο.

Ο όρος (D), η καταστροφή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $\varepsilon$ , είναι πάντα αρνητική ποσότητα, αφού είναι άθροισμα τετραγώνων με ένα αρνητικό πρόσημο μπροστά. Όλη η ενέργεια που μετατρέπεται σε τυρβώδη, αφού μεταφερθεί ή διαχυθεί με διάφορους τρόπους, τελικά θα καταστραφεί, θα μετατραπεί σε θερμότητα.

Από πειράματα που έχουν γίνει προκύπτει ότι οι σημαντικοί όροι στην εξίσωση εξ. (2.31) είναι οι όροι (B) και (D), δηλαδή οι όροι παραγωγής και καταστροφής. Οι άλλοι δύο όροι θα μπορούσαν χοντρικά να θεωρηθούν αμελητέοι ως προς αυτούς, ιδίως αν είμαστε κοντά στο στερεό όριο. Κοντά στον τοίχο λουπόν, παρατηρήθηκε ότι η παραγωγή και καταστροφή ενέργειας αυξάνονται (σε απόλυτη τιμή), έχουν ένα μέγιστο και μετά αρχίζουν να πέφτουν. Αυτό είναι λογικό, αφού η τύρβη (και η παραγωγή της) είναι 0 πάνω στον τοίχο και στο άκρο του οριακού στρώματος είναι πάλι 0, ενώ ενδιάμεσα υπάρχει τύρβη. Επειδή η παραγωγή  $k$  είναι απώλεια μέσης κινητικής ενέργειας, το ακρότατο πρέπει να βρίσκεται εκεί όπου οι τάσεις συνεκτικότητας ισούνται με τις τάσεις Reynolds.

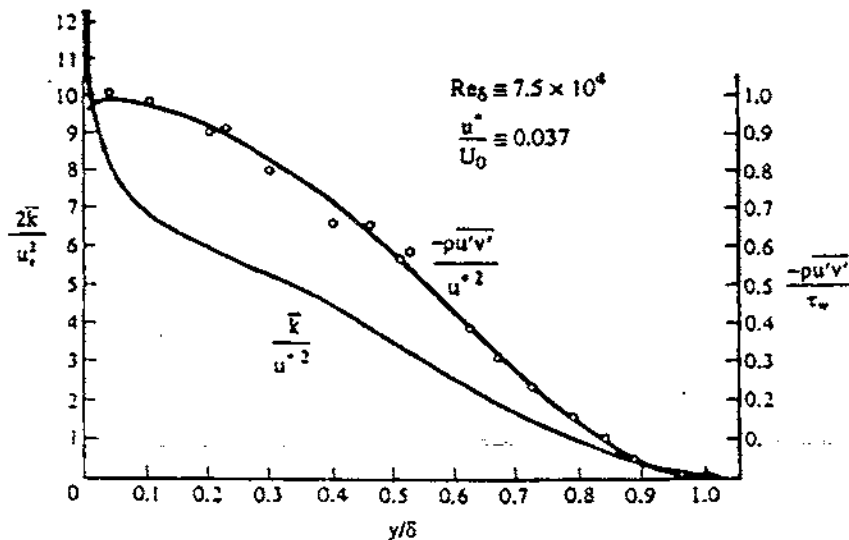
Οι όροι (A) και (C) είναι πολύ μικροί, αλλά μακριά από τον τοίχο ( $y/\delta > 0,1$  ή  $y^+ > 70$ ) κάνουν αισθητή την παρουσία τους. Ο όρος μεταφοράς, πιο μικρός από όλους, αυξάνεται όσο πάμε προς την ελεύθερη ροή, αφού εκεί είναι αρκετά μεγάλες οι ταχύτητες ώστε να είναι υπολογίσιμος. Στο σχ. 2.8 φαίνονται όλα αυτά που γράφτηκαν για το ισοζύγιο της τυρβώδους κινητικής ενέργειας κοντά και μακριά από τον τοίχο. Τα σχήματα αυτά προκύπτουν από πειράματα.



Σχήμα 2.8. Ισοζύγιο τωρβώδους κινητικής ενέργειας κοντά (α) και μακριά (β) από τον τοίχο

Στο σχήμα βλέπουμε ακόμη ότι η διάχυση αλλάζει πρόσημο από τη μέση περίπου του οριακού στρώματος και μετά, διότι πρέπει σε όλο το οριακό στρώμα να είναι μηδέν. Βλέπουμε λοιπόν ότι διαχέεται τύρβη από την εσωτερική προς την εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος (διάχυση μόνο στον άξονα  $y$  όπως είπαμε και πριν). Τέλος στο σχήμα παρατηρούμε ότι μόνο για  $y/\delta > 0,4$  και οι τέσσερις όροι γίνονται της ίδιας περίπου τάξης μεγέθους. Μπορεί λοιπόν κανείς να συμπεράνει ότι η ροή οριακού στρώματος είναι ροή καταστάσεως ισορροπίας γιατί η παραγωγή της τύρβης ισούται με την απορρόφηση της και έτσι η τοπική τωρβώδης κατάσταση δεν επηρεάζεται από μεταφορά η διάχυση της τύρβης.

Τέλος στο σχ. 2.9 φαίνεται η κατανομή της τωρβώδους κινητικής ενέργειας σε οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας.



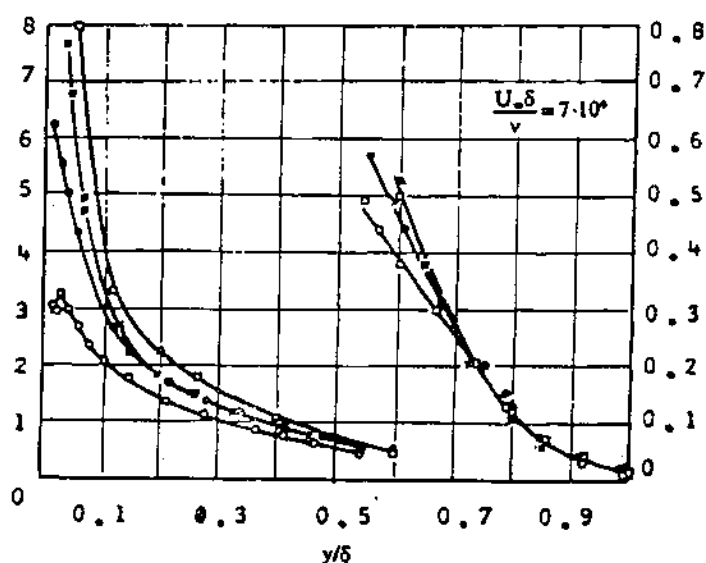
Σχήμα 2.9. Διανομή τωρβώδους κινητικής ενέργειας  $k$  και τωρβώδους διαμητρικής τάσης στο οριακό στρώμα

Παρατηρούμε ότι στο τέλος του οριακού στρώματος η  $k$  είναι 0, όπως είναι άλλωστε αναμενόμενο αφού εκεί δεν υπάρχει τύρβη, ενώ όσο πάμε προς τον τοίχο συνεχώς αυξάνεται με όλο και μεγαλύτερο ρυθμό μέσα στην κοντινή στον τοίχο περιοχή, ώσπου να φτάσει τη μέγιστη τιμή κοντά στο στερεό όριο και  $v'$  αρχίσει πάλι να πέφτει.

Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και η τάση Reynolds. Βλέπουμε ότι κι αυτή είναι 0 στην άκρη και αυξάνεται όσο πάμε προς το τοίχωμα (αφού κι αυτή είναι μια ένδειξη της τύρβης), με τη διαφορά ότι για  $y/\delta < 0,1$  η τάση Reynolds τείνει να σταθεροποιηθεί σε μια τιμή ίση με την  $\tau_w$ ,

τη διατμητική τάση δηλαδή στον τοίχο ( $\tau_w$ ). Το βασικό συμπέρασμα από αυτό το σχήμα είναι ότι η τήξη είναι μεγαλύτερη στις περιοχές πιο κοντά στο τοίχωμα.

Πριν φύγουμε απ' αυτή την παράγραφο, ας συνοψίσουμε κάποιες από τις διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στο οριακό στρώμα προσθέτοντας κάποια σχόλια. Η μέση ροή λοιπόν έχει κινητική ενέργεια. Αυτή εν μέρει καταστρέφεται (γίνεται θερμότητα δηλαδή) επί τόπου με απευθείας δράση της συνεκτικότητας και εν μέρει γίνεται τυρβώδης ενέργεια. Έτσι έχουμε μια συνεχή μετατροπή ατρισούς ροής σε συνεκτική και αναπληρώνεται η τυρβώδης ενέργεια που χάνεται (επίσης γίνεται θερμότητα όπως θα δούμε και πιο κάτω). Η μετατροπή της ενέργειας της μέσης ροής σε τυρβώδη οφείλεται στις κλίσεις του πεδίου ταχυτήτων και γίνεται μέσω της δράσης των διατμητικών τάσεων (μεγάλη ανάμιξη, άρα και μεταφορά ορμής και ενέργειας). Αυτή η ενέργεια αποθηκεύεται κυρίως σε μεγάλες δίνες, που τη μεταφέρουν με απευθείας δράση της συνεκτικότητας, με τις τυρβώδεις διακυμάνσεις της ταχύτητας και με τη μέση ροή. Οι δίνες αυτές διατηρούνται για μερικά πάχη οριακού στρώματος (μέχρι να εκφυλιστούν) προς τα κατάντι του μέρους που δημιουργήθηκαν και δίνουν γένεση σε μικρότερες δίνες πιο κοντά στον τοίχο και αυτές σε άλλες, μέχρι που η ενέργεια καταστρέφεται εντελώς στο σχ. 2.10 όπου υπάρχουν πειραματικά αποτελέσματα που αφορούν τους όρους του όρου καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $\epsilon$ . Βλέπουμε λοιπόν ότι οι όροι καταστροφής είναι πολύ μεγάλοι πολύ κοντά στον τοίχο, αφού εκεί κυρίως καταστρέφεται η ενέργεια, όπως άλλωστε έχουμε ήδη δει στο σχ. 2.8.

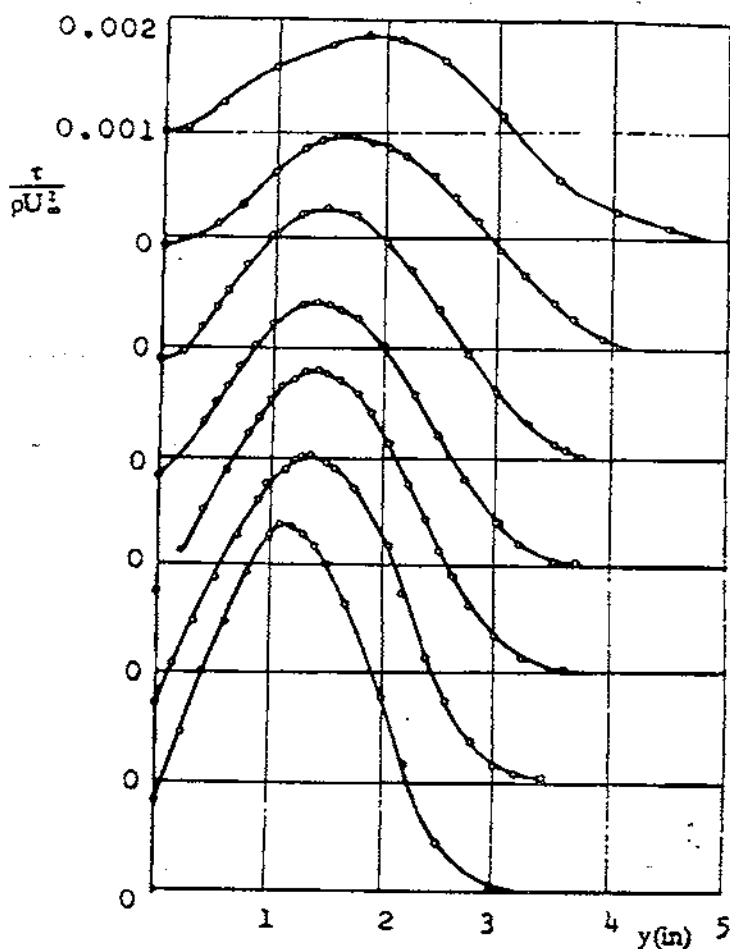


Σχήμα 2.10. Διανομή των όρων καταστροφής σε τυρβώδες οριακό στρώμα

Βλέπουμε ότι παρόλο που αναφερόμαστε σε διδιάστατο οριακό στρώμα, υπάρχει και μάλιστα μη αμελητέος όρος διακυμάνσεων ταχύτητας στην τρίτη διάσταση. Αυτό συμβαίνει στην πραγματικότητα σε όλες τις διδιάστατες περιπτώσεις και είναι προσέγγιση το να μη το λάβουμε υπόψη, όπως κάναμε μέχρι τώρα.

Στα τυρβώδη οριακά στρώματα το προφίλ των διατμητικών τάσεων έχει μόνο μέγιστο, που υπάρχει πάνω στον τοίχο για τα επιταχυνόμενα (πτώση πίεσης και αύξηση ταχύτητας ελεύθερης ροής προς τα κατάντι της ροής) και τα σταθερής πίεσης στρώματα και κάπου

μέσα στο οριακό στρώμα για τα επιβραδυνόμενα οριακά στρώματα. Αυτό φαίνεται στο σχήμα σχ. 2.11 όπου σε πειράματα σε διάφορα είδη στρωμάτων επιβεβαιώθηκε ότι υπάρχει μόνο ένα μέγιστο.



Σχήμα 2.11. Διανομή διατμητικών τάσεων διαφόρων οριακών στρωμάτων

Η αύξηση της διατμητικής τάσης όσο πάμε προς τα μέσα σχετίζεται άμεσα με τη μεταφορά ενέργειας από τη μέση ροή προς το εσωτερικό του οριακού στρώματος.

Είχαμε πει εκεί που μιλήσαμε για την αποκόλληση της ροής (§2.1.2, σελ 26) ότι κοντά στον τοίχο μέσα στο οριακό στρώμα μπορεί να μην υπάρχει αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να γίνει πίεση (αφού εκεί οι ταχύτητες είναι μικρές). Σ' αυτή την περίπτωση τα εξωτερικά στρώματα συμβαίνει πιο εύκολα αποκόλληση, αφού οι τάσεις είναι πιο μικρές (δεν υπάρχουν οι τυρβώδεις), ενώ επίσης και στα επιβραδυνόμενα στρώματα η αποκόλληση είναι πιο εύκολη.

### 2.3.5. Ο «νόμος του τοίχου».

Στην περιοχή του στερεού ορίου οι δίνες είναι πολύ μικρές και οι όροι μεταφοράς αμελητέοι. Εκεί έχει αποδειχθεί από πειράματα ότι κατά την κατεύθυνση της ροής η ταχύτητα εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $y$ , την πυκνότητα  $\rho$ , την συνεκτικότητα  $\mu$  και την τάση για  $y=0$  (δηλαδή την τάση στον τοίχο  $\tau_w$ ). Μ' άλλα λόγια  $u=f(y, \rho, \mu, \tau_w)$ . Αξιοσημείωτο είναι ότι δεν ανακατεύεται πουθενά κλίμακα μήκους του πεδίου ροής (π.χ. το  $\delta$ ) και αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα  $u$  κοντά στο τοίχωμα δεν επηρεάζεται από μεταφορά



ορμής από την εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος. Ακόμη η διανομή ταχύτητας δεν εξαρτάται από το τι συμβαίνει στα ανάντι. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η διανομή τύρβης στην περιοχή του τοίχου βρίσκεται σε *τοπική ισορροπία*, δηλαδή η διάρκεια ζωής μιας δίνης είναι μικρή συγκρινόμενη με το χρόνο που χρειάζεται για να συμβεί μεταβολή της ροής.

Από τα παραπάνω, με τη βοήθεια της *διαστατικής ανάλυσης* (οι φυσικές διαστάσεις του πρώτου μέλους πρέπει να ισούνται με αυτές του δεύτερου) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\rho u^2}{\tau_w} = f\left(\frac{\rho y^2}{\mu}\right) \quad (2.32)$$

Ορίζουμε ως *ταχύτητα τριβής*  $u_\tau$  τη ρίζα της διατμητικής τάσης στον τοίχο δια την πυκνότητα, που έχει διαστάσεις ταχύτητας:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.33)$$

Η ταχύτητα τριβής είναι ένα μέτρο για τις τυρβώδεις διακυμάνσεις της ταχύτητας και χρησιμοποιείται πολύ συχνά για αδιαστατοποίηση εξισώσεων (παράδειγμα η εξ. (2.32) που θα αδιαστατοποιηθεί σε λίγο). Καμιά φορά συμβολίζεται και ως  $u$ .

Ευκαιρία να ορίσουμε και τον *συντελεστή τριβής*  $c_f$ .

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_\infty^2} \quad (2.34)$$

Για να γράψουμε την εξ. (2.32) σε αδιάστατη μορφή, εισάγουμε τις εξής αδιάστατες μεταβλητές (για την ταχύτητα στον άξονα  $x$  και την απόσταση στον άξονα  $y$  αντίστοιχα):

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (2.35)$$

$$y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu} \quad (2.36)$$

Έτσι η εξ. (2.32) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$u^+ = f(y^+) \quad (2.37)$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως «νόμος του τοίχου» για λείες αδιαπέρατες επιφάνειες.

Είναι πειραματικά γνωστό ότι οι *τάσεις Reynolds* στην περιοχή του οριακού υποστρώματος μεταβάλλονται με τον κύβο της απόστασης από τον τοίχο. Επίσης, αν η κλίση πίεσης είναι μηδενική, από την εξίσωση της ορμής έχουμε ότι η *διατμητική τάση παραμένει σταθερή* (ανεξάρτητη της απόστασης  $y$ ), δηλαδή  $\tau = \tau_w$ . Βάσει αυτών μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση που δίνει τη διατμητική τάση

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \quad (2.38)$$

και να προκύψει ότι ταχύτητα ισούται με την αδιάστατη απόσταση συν όρους τετάρτης τάξης μεγέθους όσον αφορά την απόσταση, δηλαδή:

$$u^+ = y^+ + O(y^{+4}) \quad (2.39)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να προκύψει και θεωρητικά για την περιοχή πολύ κοντά στον τοίχο, από ανάλυση σε σειρά Taylor του νόμου του τοίχου εξ. (2.37). Βλέπουμε ότι οι τυρβώδεις διακυμάνσεις επηρεάζουν την κατανομή της μέσης ταχύτητας από την τετάρτη τάξη του  $y^+$  και άνω. Είναι λογικό λοιπόν να υπάρχει ένα πολύ μικρό  $y$  όπου ενώ υπάρχουν διακυμάνσεις ταχύτητας, έστω μικρές, οι τυρβώδεις τάσεις δεν ανακατεύονται καθόλου στη διαμόρφωση της ροής (αφού η ύψωση σε τέταρτη δύναμη κάνει το μικρό  $y$  μηδέν) και αυτή καθορίζεται μόνο από τις ιξώδεις τάσεις. Αυτό είναι το *στρωτό οριακό υπόστρωμα* το πάχος του οποίου συμβολίζεται με  $\delta_0$  και στο οποίο βάσει όσων είπαμε θα ισχύει:

$$u^+ = y^+ \quad (2.40)$$

Στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε και από το νόμο του τοίχου εξ. (2.37) σκεφτόμενοι ότι στην άμεση γειτονιά του τοίχου οι διαταραχές ταχύτητας δε μπορούν ν' αποκτήσουν

μεγάλα πλάτη λόγω της παρουσίας του αδιαπέραστου στερεού ορίου, οπότε οι τάσεις Reynolds μπορούν ν' αγνοηθούν. Σ' αυτή την περίπτωση η διανομή ταχύτητας θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη της πυκνότητας και ο μόνος τρόπος να ισχύει ο νόμος του τοίχου τότε είναι να έχει τη μορφή της εξ. (2.40).

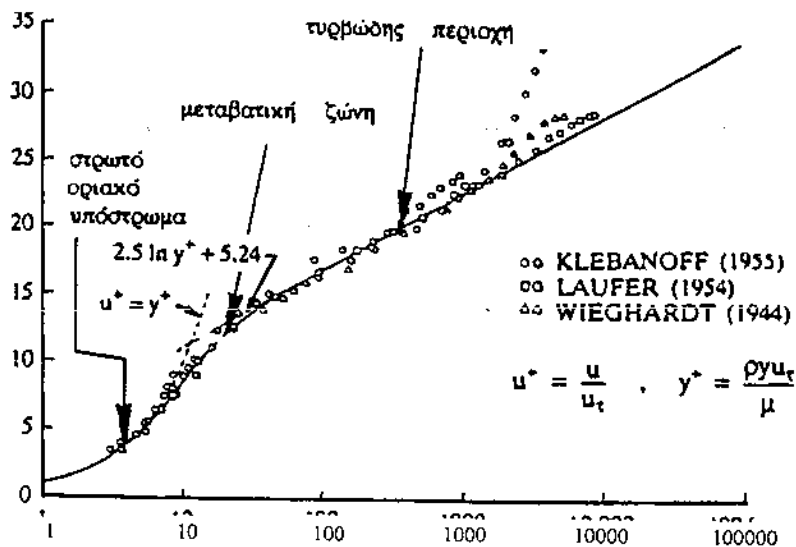
Το στρωτό οριακό υπόστρωμα εκτείνεται συνήθως ως  $y/\delta = [0,0001 - 0,01]$ . Όμως «περιοχή του τοίχου» στην οποία ισχύει ο νόμος του τοίχου μπορεί να χαρακτηριστεί μεγαλύτερη περιοχή, μέχρι  $y/\delta=0,1$  περίπου. Θα δούμε τι μορφή παίρνει ο νόμος του τοίχου στην υπόλοιπη περιοχή όπου ισχύει.

Από την εξ. (2.39) φαίνεται ότι η εξάρτηση της ταχύτητας από την απόσταση πάψει να είναι γραμμική (μόλις δηλαδή αρχίσουμε ν' απομακρυνόμαστε από το στρωτό οριακό υπόστρωμα), η απόκλιση γίνεται πολύ γρήγορη. Γρήγορα λοιπόν βρισκόμαστε στην λεγόμενη πλήρως τυρβώδη περιοχή όπου οι όροι των τάσεων Reynolds είναι πολύ μεγαλύτεροι από τους όρους στρωτής ροής (αντίθετα με ό,τι συμβαίνει στο υπόστρωμα) και έτσι η διανομή ταχυτήτων θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από την κινηματική συνεκτικότητα. Διαφορίζοντας το νόμο του τοίχου και ολοκληρώνοντάς τον λαμβάνοντας υπόψη ότι πρέπει να έχουμε ανεξαρτησία από την κινηματική συνεκτικότητα, παίρνουμε την εξίσωση (που είναι η μορφή που παίρνει ο νόμος του τοίχου στην πλήρως τυρβώδη περιοχή):

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (2.41)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η κατανομή ταχύτητας στην πλήρως τυρβώδη περιοχή είναι λογαριθμική. Αυτή η κατανομή (και η γραμμική του υποστρώματος) διαπιστώθηκε (ή προήλθε από το) ότι συμφωνεί σε μεγάλο βαθμό με τα πειράματα για διάφορα τυρβώδη οριακά στρώματα, γι' αυτό και τη χρησιμοποιούμε. Από τα πειράματα λοιπόν προκύπτουν και οι σταθερές της εξ. (2.41) και είναι:  $\kappa = 0,41$  (σταθερά Von Karman) και  $C = 5,5$ . Εννοείται ότι δεν πάμε αυτόματα από το στρωτό οριακό υπόστρωμα στην πλήρως τυρβώδη περιοχή, αλλά υπάρχει μια (μικρή) ενδιάμεση ζώνη που λέγεται μεταβατική περιοχή και στην οποία ισχύει η σχέση του Van Driest που εξομαλύνει τη μετάβαση από την γραμμική στη λογαριθμική σχέση χρησιμοποιώντας ένα παράγοντα της μορφής  $[1 - \exp(-y/A)]$ , όπου  $A = A^+ \nu(\tau_w / \rho)^{-0,5}$ , με  $A^+ = 26$ .

Η γραφική παράσταση του νόμου του τοίχου και τα όρια που εκτείνεται η κάθε περιοχή φαίνονται στο σχ. 2.12, που έχει προκύψει από διάφορα πειράματα διαφόρων τυρβωδών οριακών στρωμάτων. Διευκρινίζεται πάλι ότι σχήμα ισχύει για την εσωτερική περιοχή των οριακών στρωμάτων που είναι κοντά στο τοίχο.



Σχήμα 2.12. Διανομή ταχυτήτων σε τυρβώδη οριακά στρώματα επίπεδης πλάκας

## 2.4. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ.

Να επαναλάβουμε περιληπτικά ότι για να επιλύσουμε τα τυρβώδη πεδία ροής αναγκαστήκαμε να φτιάξουμε τις μέσες χρονικά εξισώσεις της ροής, αφού η λύση των εξισώσεων Navier – Stokes είναι αδύνατη. Σ' αυτές τις εξισώσεις υπάρχουν νεοεμφανιζόμενοι όροι που εμπλέκουν τις τάσεις Reynolds και καλούμαστε τώρα να βρούμε σχέσεις που να συνδέουν αυτούς τους όρους (τις τυρβώδεις τάσεις) με τα μεγέθη της μέσης ροής, δηλαδή να μοντελοποιήσουμε την τύρβη.

Έχουμε πει ότι οι τυρβώδεις τάσεις είναι σχετιζόμενες με τη ροή και η ιστορία της ροής είναι λογικό να τις επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό. Επίσης με τη μέθοδο των μέσων τιμών χάθηκε πληροφορία, μέρος της οποίας όμως κρύβεται στις τυρβώδεις εξισώσεις μεταφοράς, μια από τις οποίες καλό θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε. Τελικά όμως αυτά τα δύο δε συμβαίνουν στην πράξη, τουλάχιστον στις κλασσικές μεθόδους μοντελοποίησης. Αντίθετα, οι περισσότερες υποθέσεις τείνουν να σχετίσουν τις τυρβώδεις τάσεις με τοπικές παραμέτρους. Αυτό για να μην περιπλακεί ακόμη περισσότερο ένα πρόβλημα ήδη πολύ δύσκολο μαθηματικά ή διότι δεν είναι εύκολο ν' αναπτυχθούν πιο ακριβείς θεωρίες ή και διότι, ιδίως στα παλαιότερα χρόνια, δεν υπήρχε αρκετή υπολογιστική ισχύς ώστε να διαχειριστούμε πιο περίπλοκες περιπτώσεις. Έτσι είναι πολύ συνηθισμένη η περίπτωση να προσπαθούμε να συνδέσουμε τις τυρβώδεις τάσεις με την κατακόρυφη κλίση ταχύτητας. Εννοείται ότι όσο προχωράνε τα χρόνια και βελτιώνονται οι υπολογιστές αναπτύσσονται καινούριες μέθοδοι που αποδεικνύονται πιο ακριβείς.

### 2.4.1. Η τυρβώδης συνεκτικότητα. Υπόθεση Boussinesq.

Η ύπαρξη της τυρβώδους συνεκτικότητας έχει ήδη προφητευτεί από την §2.2, σελ.8 εκεί που μιλούσαμε για την τύρβη. Ας αναφέρουμε όμως πάλι εδώ ότι όπως οι συνεκτικοί όροι στις εξισώσεις Navier – Stokes εκφράζουν ρυθμό μεταφοράς ορμής λόγω άδηλης μοριακής κίνησης, έτσι και οι όροι των τάσεων Reynolds εκφράζουν ρυθμό μεταφοράς ορμής λόγω των τυρβωδών στροβιλισμών. Οπότε μπορούμε κατ' αναλογία με το συντελεστή συνεκτικότητας  $\mu$  να ορίσουμε ένα τυρβώδη συντελεστή συνεκτικότητας  $\mu_t$  ως λόγο τάσης Reynolds προς παραμόρφωση. Ο Boussinesq πρώτος διατύπωσε αυτή την ιδέα ήδη από το 1877.

Αν θεωρήσουμε το κλασσικό παράδειγμα ενός λεπτού ασυμπιέστου τυρβώδους οριακού στρώματος που αναπτύσσεται κατά μήκος μιας οριζόντιας επίπεδης πλάκας,  $x$  την κατεύθυνση της ροής και  $y$  την κάθετη στην πλάκα κατεύθυνση, η μοναδική ουσιαστικά τάση Reynolds που επιδρά στη διαμόρφωση του ροϊκού πεδίου είναι η τυρβώδης διατμητική τάση, ενώ η αντίστοιχη παραμόρφωση είναι η παραγωγός κατά  $y$  της ταχύτητας  $u$ . Τότε η τυρβώδης συνεκτικότητα ορίζεται ως:

$$\mu_t = \frac{-\overline{\rho u'v'}}{\overline{\theta y}} \quad (2.42)$$

Τι μας λέει όμως ότι από τις υπόλοιπες τάσεις Reynolds δε θα προκύψουν άλλες «τυρβώδεις συνεκτικότητας», διαφορετικές της  $\mu_t$  της εξ.(2.42); Θα έπρεπε ίσως να ορίσουμε ένα τανυστή τυρβωδών συνεκτικότητας σε κάθε θέση του πεδίου ροής, αντίστοιχο των τοπικών τανυστών τάσης και παραμόρφωσης; Κάτι τέτοιο κάνει φοβερά πολύπλοκο κατ' αναλογία με τη συνεκτικότητα της στρωτής ροής. Επαφίεται στο πείραμα να δείξει αν η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι πράγματι μία όπως έδειξε ότι είναι μια η στρωτή συνεκτικότητα και μέχρι τώρα τα πειράματα δείχνουν γενικά αποδεκτή μια τέτοια παραδοχή για απλά οριακά στρώματα, ενώ για περίπλοκες ροές δε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει απόλυτα.

Την αναλογία τυρβώδους και στρωτής συνεκτικότητας μπορούμε να τη δούμε και ενεργειακά. Και οι δύο προκαλούν απορρόφηση ενέργειας από τη μέση και τελικά καταστροφή της ως θερμότητα, και οι δύο προκαλούν αυξημένη διάχυση σε κατεύθυνση κάθετη της ροής.

Βάσει των παραπάνω, όπως είχαμε εκφράσει τον τανυστή των τάσεων συναρτήσει του  $\mu$  και των κλίσεων ταχύτητας του πεδίου ροής εξ.(1.27), έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τον τανυστή των τάσεων Reynolds εξ.(2.24) ως συνάρτηση του  $\mu_t$  και των κλίσεων ταχύτητας του μέσου πεδίου ροής:

$$\tau_i = 2\mu_t \bar{D} - \frac{2}{3} \mu_t \text{tr} \bar{D} I \quad (2.43)$$

Με τη μέση τιμή πίνακα εννοείται ο πίνακας της μέσης τιμής των στοιχείων του πίνακα. Στην περίπτωση απλού οριακού στρώματος, η εξ.(2.43) εκφυλίζεται στην εξ.(2.42).

Με την εξ.(2.42) (ή την εξ.(2.43) στην γενικότερη περίπτωση) κάνουμε το πρώτο βήμα για τη μοντελοποίηση της τύρβης. Μας μένει τώρα να εκφράσουμε το  $\mu_t$ , λογικό θα ήταν να υποθέσουμε ότι θα είναι κι αυτός ανάλογος στη μέση πυκνότητα του ρευστού, σε μια χαρακτηριστική ταχύτητα και σε ένα χαρακτηριστικό μήκος. Τα χαρακτηριστικά αυτά μεγέθη θα εξαρτώνται από την τύρβη. Τα χαρακτηριστικά αυτά μεγέθη θα εξαρτώνται επιτυχή έκφραση της τυρβώδους συνεκτικότητας, πράγμα δύσκολο.

Αν βάλουμε την εξ. (2.43) στις εξισώσεις Reynolds εξ. (2.23) (μέσες χρονικά εξισώσεις Navier – Stokes) φεύγουν οι όροι που έχουν τις τάσεις Reynolds και οι εξισώσεις έρχονται ακριβώς στην ίδια μορφή που έχουν οι εξισώσεις Navier – Stokes αν αντί για  $\mu$  βάλουμε  $\mu + \mu_t$  (που ονομάζεται και φαινομένη συνεκτικότητα  $\mu_{eff}$ ) και αν αντικαταστήσουμε τα εμπλεκόμενα φυσικά μεγέθη με τις μέσες χρονικά τιμές των μεγεθών αυτών. Βλέπουμε λοιπόν ότι αν ξέραμε το  $\mu_t$  έχουμε λύσει το πρόβλημά μας (υπολογισμός τυρβώδους πεδίου ροής). Να σημειωθεί ότι με τη χρησιμοποίηση του  $\mu_{eff}$  οι εξισώσεις τυρβώδους ροής έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με αυτές της στρωτής, αλλά στις πρώτες το  $\mu_{eff}$  δεν είναι σταθερή ποσότητα. Ήδη έχει γίνει κατανοητό ότι από τη στιγμή που δεχόμαστε την υπόθεση Boussinesq θεωρούμε ότι στο πεδίο έχουμε μια συνολική συνεκτικότητα που είναι άθροισμα της τυρβώδους και της στρωτής.

Η υπόθεση Boussinesq δεν είναι αποδεδειγμένο, ότι ισχύει πάντοτε. Μάλιστα υπάρχουν περιπτώσεις, ιδίως περίπλοκων ροών σε καμπύλες επιφάνειες ή σε περιπτώσεις όπου στο πεδίο ροής υπάρχουν πάνω από μία τάσεις Reynolds της ίδιας σπουδαιότητας, όπου το  $\mu_t$  φαίνεται να παρουσιάζει ανισότροπη συμπεριφορά. Τέλος, ενώ προλέγει για αποκόλληση τάση ίση με 0, αυτό δεν είναι γενικά πειραματικά επιβεβαιωμένο.

Μπορεί κάποιος να σκεφτεί ότι αφού ζητάμε τις τάσεις Reynolds, γιατί δε χρησιμοποιούμε τη διαφορική εξίσωση των τάσεων Reynolds εξ. (2.28) ή κάποια παρόμοια απ' αυτές που είδαμε πριν; Η απάντηση είναι ότι υπάρχουν νέοι άγνωστοι όροι γινομένου τριών διακυμάνσεων ταχύτητας (τριπλές συσχετίσεις) που για να τους βρούμε θα πρέπει να φτιάξουμε νέες εξισώσεις που όμως θα έχουν νέους αγνώστους όρους κτλ, οπότε δε γίνεται να κλείσει το πρόβλημά μας. Γι' αυτό πρέπει να βρούμε ένα τρόπο να περιγράψουμε την τύρβη ώστε να μοντελοποιήσουμε τους αγνώστους όρους και προς τα κει θα κατευθυνθούμε στα επόμενα. Αρχικά θα παρουσιάσουμε την ιδέα του Prandtl για το μήκος ανάμιξης και το πού οδηγούμαστε αν τη δεχτούμε και μετά θα δούμε δύο μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται σήμερα. Το πρώτο είναι των Baldwin – Lomax που χρησιμοποιεί την ιδέα του Prandtl, είναι χαρακτηριστικός εκπρόσωπος των μοντέλων μήκους ανάμιξης (ή αλγεβρικά μοντέλα τυρβώδους συνεκτικότητας) και προτιμάται στις στροβιλομηχανές, επειδή αποφεύγει να εμπλέξει στους υπολογισμούς το πάχος του οριακού στρώματος που είναι δύσκολο ή ακατόρθωτο να βρεθεί. Το δεύτερο είναι τι μοντέλο  $k - \epsilon$  που είναι αυτό που έχει γνωρίσει τη μεγαλύτερη αποδοχή και θα λέγαμε ότι έχει γίνει πλέον στάνταρ. Είναι χαρακτηριστικός εκπρόσωπος των μοντέλων δύο διαφορετικών εξισώσεων. Βασικός λόγος που παρουσιάζονται τα δύο συγκεκριμένα μοντέλα είναι ότι χρησιμοποιούνται από το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε σ' αυτή την πτυχιακή εργασία.

### 2.4.2. Το μήκος ανάμιξης κατά Prandtl.

Μέχρι τώρα έχουμε πει δύο πολύ καλές ιδέες. Την ύπαρξη της τυρβώδους συνεκτικότητας και το ότι είναι ανάλογη μιας μέσης πυκνότητας, μιας χαρακτηριστικής ταχύτητας και ενός χαρακτηριστικού μήκους. Ας διατυπώσουμε μαθηματικά το τελευταίο:

$$\mu_t = C_1 \rho l^2 \quad (2.44)$$

όπου  $C_1$  είναι μια σταθερά (συντελεστής αναλογίας),  $q$  είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα και  $l$  το χαρακτηριστικό μήκος.

Για το χαρακτηριστικό μήκος, που ονομάζεται μήκος ανάμιξης, πρώτος μίλησε ο Prandtl και θα πούμε περισσότερα γι' αυτό λίγο παρακάτω. Τώρα απλά ότι αυτό το μήκος περιμένουμε να έχει κάποια σχέση με το μέγεθος των δινών της τυρβής, ώστε να την χαρακτηρίζει. Άρα περιμένουμε να είναι πολύ μικρό κοντά στο τοίχωμα και ν' αυξάνει καθώς απομακρυνόμαστε απ' αυτό, ενώ πιο έξω να είναι πιο μεγάλο (αφού έχουμε πει ότι στο έξω μέρος του οριακού στρώματος υπάρχουν μεγάλες δίνες που μεταφέρουν τη μέση ορμή, ενώ πολύ κοντά στον τοίχο αυτές οι μεγάλες έχουν καταστραφεί και δίνουν γένεση σε μικρές που καταστρέφουν την τυρβώδη ενέργεια κάνοντάς τη θερμότητα). Ακόμη περιμένουμε αυτό το χαρακτηριστικό μήκος να συνδέεται με γνωστά μεγέθη ώστε να μπορούμε να το υπολογίσουμε (π.χ.  $y$ ). Επίσης ξέρουμε από τώρα ότι το μήκος αυτό δε γίνεται να είναι μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος, αφού δεν υπάρχουν τόσο μεγάλες δίνες.

Για την χαρακτηριστική ταχύτητα φάνηκε στην πράξη πολύ καλή ιδέα να τη συνδέσουμε κι αυτή με το μέγεθος των δινών, ή καλύτερα με το ίδιο μήκος ανάμιξης, και με την κλίση της μέσης ταχύτητας (σε απόλυτη τιμή). Έτσι χρησιμοποιούμε την εξής σχέση που έχει αποδειχτεί από την εμπειρία επιτυχής ( $C_2$  κατάλληλη σταθερά):

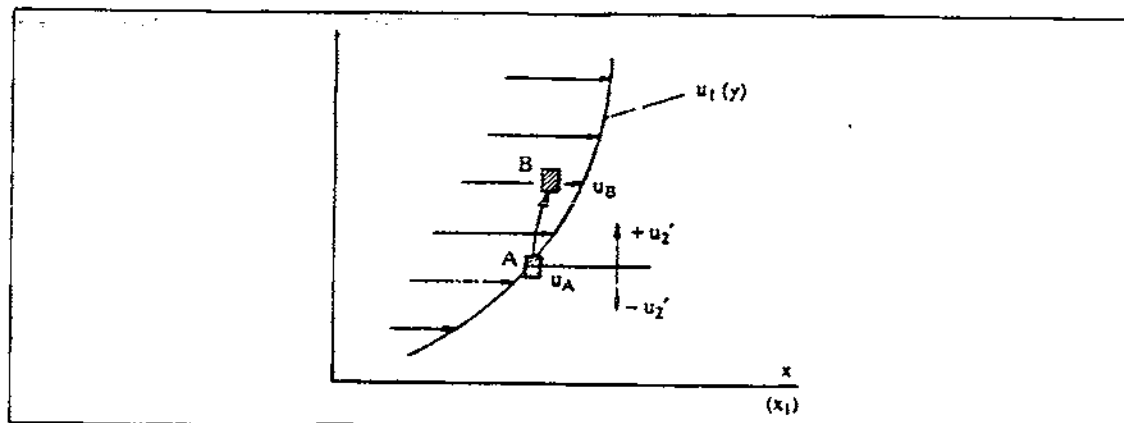
$$q = C_2 l \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (2.45)$$

Συνοψίζοντας τις εξ. (2.44), εξ. (2.45) παίρνουμε την εξής σημαντική εξίσωση:

$$\mu_t = C \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (2.46)$$

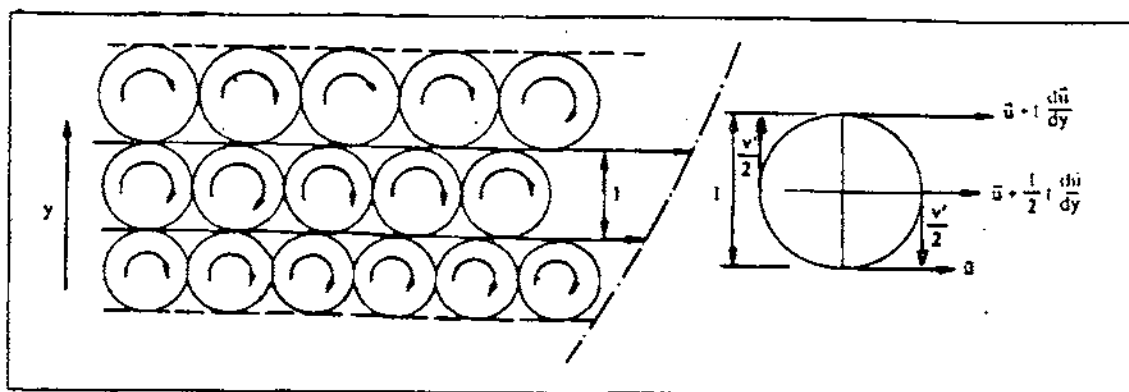
Μ' αυτή την εξίσωση έχουμε κάνει ένα τρίτο μεγάλο βήμα και αντί να έχουμε άγνωστο το  $\mu_t$  μήκος ανάμιξης, το οποίο αν βρούμε λύνουμε το πρόβλημά μας (έχοντας κάνει όμως όλες τις ενδιάμεσες παραδοχές).

Την εξ. (2.46) πρώτος διατύπωσε ο Prandtl το 1925. Αυτός θεώρησε ότι σβώλοι ρευστού κινούνται με τρόπο ανάλογο που κινούνται τα μόρια. Έτσι ένας σβώλος που βρίσκεται στο σημείο  $A$  του σχ. 2.13 μπορεί να βρεθεί στο σημείο  $B$  και ν' ανταλλάξει την ορμή του με το εκεί ρευστό. Οι σβώλοι μετά από λίγο χάνουν την ταυτότητά τους, εκφυλίζονται, αλλά νέοι δημιουργούνται συνεχώς. Η απόσταση που διανύουν ώσπου να χάσουν την ταυτότητά τους λέγεται μήκος ανάμιξης.



Σχήμα 2.13. Ορισμός μήκους ανάμιξης

Οι σκέψεις αυτές για του σβώλους είναι συμβατές με την ύπαρξη των δινών. Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταφορά συσσωματώσεων στοιχείων ρευστού γίνεται από τις δίνες και ότι το μήκος ανάμιξης είναι το μέγεθος των δινών ή η απόσταση που διανύουν στον κατακόρυφο άξονα μέχρι να εκφυλιστούν. Αν δούμε τα φαινόμενα μ' αυτή την οπτική γωνία, μπορούμε πολύ χοντρικά να θεωρήσουμε ότι το οριακό στρώμα χωρίζεται σε παράλληλα επίπεδα, σε κάθε ένα από τα οποία υπάρχουν περιστρεφόμενες δίνες που κυλίνουν ανάμεσα στις κυλιόμενες δίνες του κάτω και του άνω στρώματος (σχ. 2.14) και οι οποίες είναι υπεύθυνες για την ανάμιξη. Φυσικά στην πραγματικότητα η εμφάνιση και εκφυλισμός των δινών συμβαίνει με πολύ μεγάλη τυχαιότητα (και ως προς το χώρο και ως προς το χρόνο) και όχι όπως παρουσιάζει το σχήμα. Επίσης οι δίνες αλληλεπιδρούν πάντα μεταξύ τους, οπότε τα στρώματα δεν έχουν σαφή όρια.



Σχήμα 2.14. Περιγραφή του μήκους ανάμιξης βάση της προσέγγισης των κυλιόμενων δινών

Με την προσέγγιση των κυλιόμενων δινών μπορούμε να πούμε ότι μήκος ανάμιξης είναι η διάμετρος μιας δίνης, ή το πλάτος ενός στρώματος που περιστρέφονται οι δίνες. Προφανώς κοντύτερα στον τοίχο οι δίνες θα είναι πιο μικρές, όπως έχει ειπωθεί κι άλλες φορές ως τώρα.

Απ' το σχήμα είναι φανερό ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τη διακύμανση της ταχύτητας σε οποιοδήποτε από τους δύο άξονες χοντρικά ίση με το μήκος ανάμιξης επί την κλίση της ταχύτητας, οπότε θα ισχύει μια σχέση της μορφής:

$$|u'v| \approx l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (2.47)$$

Από την εξ. (2.47) προκύπτει (με τελείως διαφορετικό τρόπο) αμέσως η εξ. (2.46) αν πολλαπλασιάσουμε με την πυκνότητα και διαιρέσουμε με την κλίση της ταχύτητας. Αυτό αν θέλετε είναι μια θεωρητική ένδειξη ότι η εξ. (2.45) είναι αποδεκτή.

Αν θεωρήσουμε τώρα το τμήμα του ρευστού που κοντά στην πλάκα, θα ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης, οπότε οι δίνες δε μπορεί να κυλίνουν πάνω στο στερεό όριο. Δηλαδή θα υπάρχει ένα λεπτό στρώμα ρευστού χωρίς δίνες, πάνω στο οποίο θα κυλίνουν οι τελευταίες μικρές δίνες του οριακού στρώματος. Οδηγούμαστε λοιπόν και μ' αυτό το συλλογισμό στην ύπαρξη του στρωτού οριακού υποστρώματος. Εκεί έχουμε πει ότι υπάρχει διατμητική τάση (πράγμα λογικό και εξ' αιτίας του μικρού του πάχους) ίση με την τάση στο στερεό όριο. Δηλαδή, αν  $u_0$  η ταχύτητα στο άκρο οριακού υποστρώματος πάχους  $\delta_0$ , η διατμητική τάση  $\tau_{στ}$  παντού μέσα σ' αυτό είναι:

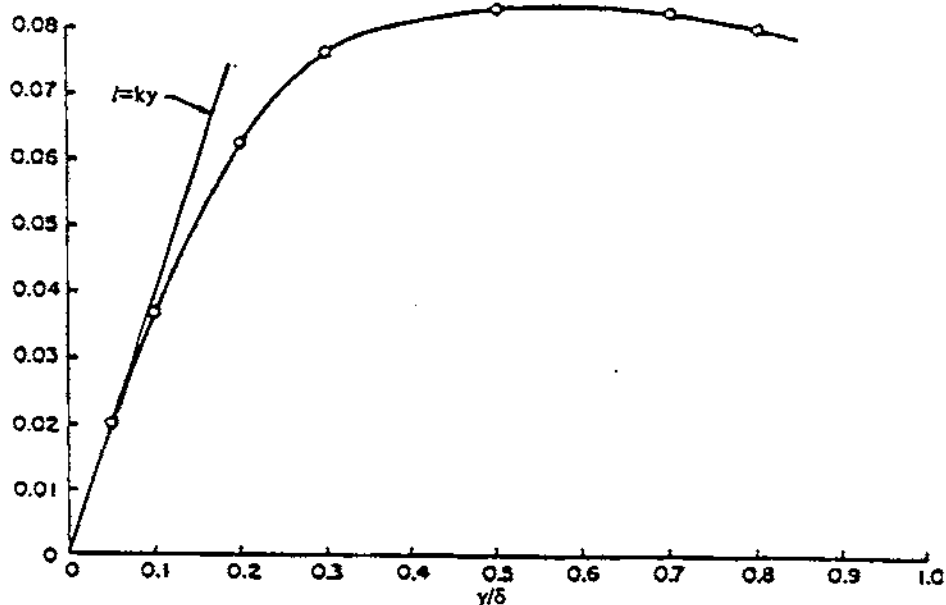
$$\tau_{στ} = \tau_w = \mu \frac{u_0}{\delta_0} \quad (2.48)$$

Επανερχόμαστε στην εξ. (2.46). Θέλουμε να βρούμε τρόπους υπολογισμού του μήκους ανάμιξης. Βάσει των όσων έχουμε πει φαίνεται πολύ λογικό να θεωρήσουμε ότι κοντά στην

πλάκα το μήκος ανάμιξης θα είναι ανάλογο της απόστασης απ' αυτή, αφού η πλάκα αποτελεί περιοριστικό παράγοντα στο μέγεθος των δινών (ή των μετακινήσεων σβώλων ρευστού). Αυτό αποτελεί μια δεύτερη υπόθεση που έκανε ο Prandtl. Από τα πειράματα φάνηκε ότι ο συντελεστής αναλογίας είναι η σταθερά Von Karman (από δω άρχισε και είδαμε ότι είναι η ίδια και στο λογαριθμικό νόμο όπως θα φανεί αμέσως παρακάτω που θα βρούμε πάλι το λογαριθμικό νόμο από άλλο δρόμο). Δηλαδή κοντά στον τοίχο έχουμε:

$$l = \kappa \quad (2.49)$$

Αυτό μπορούμε να το δούμε και στο σχ. 2.15 που έχει προκύψει από πειράματα που έκανε ο Klebanoff λίγο μετά το 1950.



Σχήμα 2.15. Τυπική κατανομή μήκους ανάμιξης στο τυρβώδες οριακό στρώμα

Η γραμμική εξάρτηση του  $l$  από το  $y$  ισχύει στη λεγόμενη εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, δηλαδή μέχρι  $y/\delta$  περίπου 0,15 ως 0,2.

Μακριά από τον τοίχο το ρευστό κινείται χωρίς να τον αντιλαμβάνεται άμεσα. Εκεί ίσως πρέπει να προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε το μήκος, και δεν έχουμε άλλο από το πάχος  $\delta$ . Πράγματι, από τα πειράματα προκύπτει ότι το μήκος ανάμιξης στην εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος είναι περίπου σταθερό και ίσο με ένα ποσοστό του πάχους  $\delta$  και συγκεκριμένα:

$$\frac{l}{\delta} = 0,075 \div 0,09 \quad (2.50)$$

Τέλος στο σχήμα παρατηρούμε ότι μήκος ανάμιξης φαίνεται να παρουσιάζει ένα μέγιστο περίπου στην περιοχή  $0,2 < y/\delta < 0,3$ .

Βλέπουμε ότι για να υπολογίσουμε το μήκος ανάμιξης χρησιμοποιήσαμε πολύ πληροφορία από τα πειράματα. Υπάρχουν και θεωρητικοί υπολογισμοί του μήκους ανάμιξης, αλλά με πιο περιορισμένο εύρος εφαρμογών. Παράδειγμα είναι η προσπάθεια του Von Karman που αναλύοντας την ταχύτητα σε σειρά Taylor κατά την κάθετη στον τοίχο απόσταση και με κάποιες παραδοχές κατέληξε στην εξής σχέση το 1930:

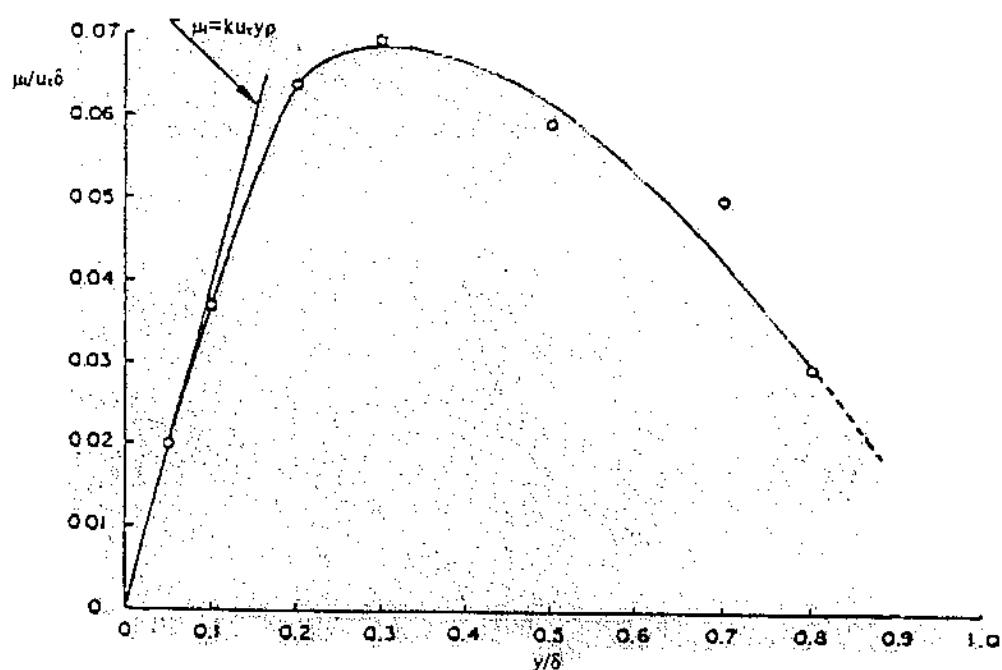
$$l = \kappa \left| \frac{\overline{\theta u} / \theta \gamma}{\theta^2 \overline{u} / \theta \gamma^2} \right| \quad (2.51)$$

Η σχέση αυτή ισχύει ικανοποιητικά μόνο για τυρβώδεις ροές που περιορίζονται από στερεά τοιχώματα.

Μπορούμε να πούμε ότι ουσιαστικά μέχρι τώρα έχει ήδη παρουσιαστεί ένα μοντέλο τύρβης, αυτό του Prandtl, αφού έχουμε πλήρως μοντελοποιήσει τις τάσεις Reynolds και μπορούμε να τις υπολογίσουμε συναρτήσει άλλων μεγεθών της ροής. Το μοντέλο αυτό δεν εισάγει νέους αγνώστους και γι' αυτό λέγεται μηδενικής τάξης.

Γενικά τα μοντέλα που περνάνε από την εξίσωση εξ. (2.46) λέγονται μοντέλα μήκους ανάμιξης. Έχουν αποδειχτεί στην πράξη επιτυχή και επειδή είναι απλά, επιτρέπουν εύκολα τροποποιήσεις και συμπληρώσεις ώστε να ταιριάζουν και σε πιο περίπλοκες ροές και κοστίζουν σχετικά λίγο σε χρόνο υπολογισμού. Επίσης έχουμε πολύ μεγάλη εμπειρία από τη χρήση τους. Βέβαια έχουν και μειονεκτήματα. Ο αλγεβρικός τους χαρακτήρας δεν επιτρέπει να ληφθεί υπόψη η ιστορία της τύρβης, είναι δηλαδή κατάλληλα για ροές «τοπικής ισορροπίας» μόνο αφού υπολογίζουν την τυρβώδη συνεκτικότητα συναρτήσει τοπικών μεγεθών μέσης ροής. Η παραδοχή του μήκους ανάμιξης δε λαμβάνει υπόψη τη μεταφορική κίνηση του ρευστού κατά τον άξονα  $x$ . Τέλος το μήκος ανάμιξης είναι δύσκολο να καθοριστεί σε ροές που έχουμε ανακυκλοφορία.

Στην ίδια περιοχή του σχ. 2.15 που το μήκος ανάμιξης παραμένει σταθερό, ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας φθίνει. Αυτό συμβαίνει διότι πολλαπλασιάζεται με την κλίση ταχύτητας που όσο πάμε προς την ελεύθερη ροή μειώνεται. Αυτό φαίνεται και στο σχ. 2.16 όπου παρουσιάζεται κατ' αναλογία με το σχ. 2.15 ο αδιάστατος συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας με την αδιάστατη απόσταση μέσα στο οριακό στρώμα.



Σχήμα 2.16. Κατανομή τυρβώδους συνεκτικότητας στο οριακό στρώμα

Καθώς πλησιάζουμε προς την αδιατάρακτη ροή η τύρβη αποκτά διακοπτόμενο χαρακτήρα, δηλαδή η ροή είναι τυρβώδης μόνο κλάσματα του χρόνου, γι' αυτό σ' αυτές τις περιοχές η έννοια μήκος ανάμιξης και τυρβώδης συνεκτικότητα δεν έχουν ακριβές νόημα και στα διαγράμματα τις φτιάχνουμε διακεκομμένες.

Στην περιοχή που το μήκος ανάμιξης μένει σταθερό και η τυρβώδης συνεκτικότητα πέφτει, η τυρβώδης τάση επίσης πέφτει, αφού πολλαπλασιάζεται σε σχέση με την τυρβώδη συνεκτικότητα με κάτι που μειώνεται, την κλίση πίεσης. Αυτό μπορούμε να το δούμε και στο σχ. 2.9 που αφορά οριακό στρώμα σταθερής πίεσης. Στο ίδιο σχήμα βλέπουμε ότι στην εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος η τάση παραμένει περίπου σταθερή. Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα δε συνεχίζεται μέχρι το μηδέν, αφού από κάποιο σημείο και κάτω υπάρχει το στρωτό υπόστρωμα. Τα πειράματα έχουν δείξει ότι σταθερή τάση του υποστρώματος ισούται με αυτή της πλήρως τυρβώδης περιοχής. Καθώς πάμε προς τον τοίχο δηλαδή η τυρβώδης τάση πέφτει και η άλλη αυξάνει ώστε το σύνολο να παραμένει σταθερό. Δηλαδή από το πείραμα έχουμε ότι η διατμητική τάση παραμένει σταθερή στην εσωτερική



περιοχή του οριακού στρώματος για σταθερής πίεσης οριακά στρώματα. Προς τα έξω βέβαια φθίνει διότι στην ελεύθερη ροή πρέπει να φτάσει στο μηδέν. Για το πώς είναι η τυρβώδης τάση σε επιβραδυνόμενα πεδία μπορούμε να ξαναδούμε το σχ. 2.11.

Στο παραπάνω συμπέρασμα είχαμε καταλήξει και θεωρητικά μιλώντας για το νόμο του τοίχου στη σελ. 18. Συγκεκριμένα από την εξίσωση της ορμής προκύπτει ότι στον τοίχο, αφού οι ταχύτητες είναι μηδέν, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της ολικής τάσης είναι μηδέν, άρα η ολική τάση είναι σταθερή κοντά στον τοίχο. Και αυτό είχε προβλέψει ο Prandtl κάνοντας έτσι την τρίτη πετυχημένη υπόθεσή του. Συνέπεια αυτού είναι ότι μπορούμε να γράψουμε για την πλήρως τυρβώδη περιοχή της εσωτερικής περιοχής ότι:

$$\tau_i = \mu_i \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \tau_w = \text{σταθ.} \quad (2.52)$$

Η παραπάνω σχέση αν ολοκληρωθεί μας δίνει:

$$u(y) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + \text{σταθ.} \quad (2.53)$$

Αυτή η σχέση αν αδιαστατοποιηθεί μας δίνει ακριβώς το *λογαριθμικό νόμο διανομής ταχύτητας* που ισχύει στην εσωτερική περιοχή τυρβωδών οριακών στρωμάτων σταθερής πίεσης, εξ. (2.41). Ο νόμος αυτός ισχύει από  $y^+ = 30$  μέχρι το πέρας της εσωτερικής περιοχής (περίπου για  $y$  0,15 ως 0,2 του  $\delta$ ). Στο σημείο αυτό αξίζει να ξαναρίξουμε μια ματιά στο σχ. 2.12. Ο νόμος αυτός μπορεί ν' αποδειχθεί και ως συνέπεια του νόμου τοίχου, όπως ήδη κάναμε στην αντίστοιχη παράγραφο. Βασικό στοιχείο και των δύο αποδείξεων είναι ότι η τυρβώδης τάση παραμένει σταθερή. Αν και για όση έκταση ισχύει αυτό σε κάποιο οριακό στρώμα θα ισχύει και ο νόμος. Και τα πειράματα έχουν δείξει ότι η ακρίβειά του είναι ικανοποιητική μέχρι και λίγο μετά από την εσωτερική περιοχή, όπως φαίνεται και στο σχ. 2.12, κυρίως για οριακά στρώματα με μηδενική ή θετική κλίση πίεσης προς τα κατάντι της ροής. Πιο έξω όπως είδαμε και στο σχ. 2.9 η τάση πέφτει, αφού πρέπει να γίνει μηδέν στην ελεύθερη ροή, και ο λογαριθμικός νόμος δεν ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια. Ας σημειωθεί εδώ ότι στα εξωτερικά μέρη του οριακού στρώματος η ιστορία της ροής παίζει μεγάλο ρόλο για τη διαμόρφωσή της, αφού εκεί επικρατούν οι δυνάμεις αδράνειας, ενώ στο εσωτερικό του οριακού στρώματος υπάρχει κυρίως ισορροπία μεταξύ των συνεκτικών δυνάμεων και των δυνάμεων πίεσης οπότε υπάρχει μεγάλη προσαρμοστικότητα στην τοπική κατάσταση της ροής, δηλαδή πληρείται η παραδοχή της τοπικής ισορροπίας που κάναμε εισάγοντας το μήκος ανάμιξης. Αυτός είναι ένας ακόμη λόγος που μας κάνει να περιμένουμε στο εσωτερικό του οριακού στρώματος να έχουν οι σχέσεις μας μεγάλη ακρίβεια και στο εξωτερικό μικρή.

Έχουν βέβαια αναπτυχθεί μέθοδοι που δίνουν τη διανομή ταχύτητας σε όλο το οριακό στρώμα, βασισμένες σε ολοκληρωτικές σχέσεις, οι *ολοκληρωτικές μέθοδοι υπολογισμού οριακών στρωμάτων*. Οι μέθοδοι αυτές αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν κυρίως παλαιότερα επειδή δεν απαιτούσαν μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Σήμερα ξ' αξία τους είναι περισσότερο διδακτική παρά πρακτική και δε θ' αναφερθούμε σ' αυτές. Στο [2] αναφέρονται περισσότερα σ' αυτό το θέμα. Στην εποχή μας η ροή υπολογίζεται λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις Navier – Stokes για τη μέση ροή σε όλο το πεδίο ροής, βάζοντας όπου  $\mu$  το  $\mu + \mu_i$ , όπου το  $\mu_i$  υπολογίζεται από ένα μοντέλο τύρβης, όπως αυτά που θα δούμε αμέσως παρακάτω.

Θ' αναφερθούν τώρα μερικές σχέσεις για μεγέθη του οριακού στρώματος, που έχουν προκύψει από πειράματα ή και με τη βοήθεια του λογαριθμικού νόμου. Η ακρίβειά τους βέβαια είναι μικρή σε περιπτώσεις γενικότερες της επίπεδης πλάκας, αλλά μπορούν να μας δώσουν ταχύτητα τάξη μεγέθους των μεγεθών που ψάχνουμε.

Για το πάχος  $\delta_\theta$  του στρωτού υποστρώματος βρέθηκε ότι ισχύει:

$$\frac{\delta_\theta u_\tau}{\nu} \approx 10 \quad (2.54)$$

Ο όρος της παραπάνω εξίσωσης αναφέρεται και ως αριθμός Reynolds του στρωτού υποστρώματος.

Ο συντελεστής τριβής  $c_f$ , που ονομάζεται και τοπικός συντελεστής αντίστασης και τον ορίσαμε στην εξ. (2.34) εκφράζει την ανά μονάδα επιφάνειας της πλάκας ώθηση στη θέση  $x$  ως ποσοστό της δυναμικής πίεσης και βρέθηκε χρησιμοποιώντας το λογαριθμικό νόμο και πειράματα ότι μπορεί να δοθεί από την εξής σχέση:

$$c_f = (2 \log Re_x - 0,65)^{-2,3} \quad (2.55)$$

Ο τοπικός αριθμός Reynolds  $Re_x$  ορίστηκε στην εξ. (2.8). Επειδή ο λογαριθμικός νόμος αποκλίνει μακριά από την πλάκα, βρέθηκε εμπειρική μια ακριβέστερη σχέση:

$$c_f = 0,37(\log Re_x)^{-2,584} \quad (2.56)$$

Βασικό χαρακτηριστικό του συντελεστή τριβής είναι ότι όταν φτάσουμε σε αποκόλληση της ροής μηδενίζεται, όπως φαίνεται και από τον ορισμό του. Γι' αυτό είναι πολύ σημαντικό να τον ξέρουμε.

#### 2.4.2.1. Ο νόμος της εβδόμης ρίζας.

Ο νόμος της εβδόμης ρίζας δεν έχει καμία σχέση με το μήκος ανάμιξης ή με τη μοντελοποίηση της τύρβης, αλλά είναι η κατάλληλη στιγμή να πούμε γι' αυτόν, ώστε να έχουμε όλες τις εύκολες σχέσεις για τη τυρβώδες οριακό στρώμα μαζεμένες.

Ο νόμος της εβδόμης ρίζας δίνει το προφίλ ταχύτητας όπως και ο λογαριθμικός νόμος. Από πειράματα λοιπόν φάνηκε ότι στην περιοχή  $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$  ισχύει με ικανοποιητική προσέγγιση η εξής πολύ απλή σχέση:

$$\frac{\bar{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (2.57)$$

Η ακρίβειά της είναι πολύ καλή σε σχέση με την απλότητά της. Βλέπουμε ότι είναι ανεξάρτητη του  $x$ , δηλαδή οδηγεί σε όμοιες διανομές ταχύτητας κατά μήκος της πλάκας. Με τη βοήθειά της παίρνουμε και τις εξής σχέσεις που μας δίνουν το  $\delta$ , το  $\tau_w$  και το  $c_f$  αντίστοιχα:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{Re_x^{0,2}} \quad (2.58)$$

$$\tau_w = 0,0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{-0,25} \quad (2.59)$$

$$c_f = \frac{0,0592}{Re_x^{0,2}} \quad (2.60)$$

Στην περιοχή του  $Re_x$  που αναφέρθηκε, ο νόμος της εβδόμης ρίζας πολύ λίγο διαφέρει από το λογαριθμικό νόμο. Για μεγαλύτερες τιμές του τοπικού αριθμού Reynolds πιο κατάλληλος είναι ένας εκθέτης  $1/8$  και για ακόμη μεγαλύτερες τιμές ακόμη πιο μικρός εκθέτης.

#### 2.4.3. Το μοντέλο των Baldwin – Lomax.

Είναι ένα πολυχρησιμοποιημένο μοντέλο μήκους ανάμιξης. Παρουσιάστηκε το 1978 ως εξέλιξη του μοντέλου των Cabeci – Smith, με το οποίο έχει ακριβώς την ίδια φιλοσοφία με το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί για τη χρήση του τη γνώση του πάχους του οριακού στρώματος  $\delta$ , πράγμα που είναι μεγάλο πλεονέκτημα ιδίως στις στροβιλομηχανές.

Στο μοντέλο αυτό χωρίζεται το οριακό στρώμα σε δύο ζώνες, την εσωτερική και την εξωτερική, και σε κάθε μία έχουμε άλλο τρόπο προσδιορισμού της τυρβώδους συνεκτικότητας. Η απόσταση στην οποία χωρίζονται οι δύο ζώνες συμβολίζεται με  $y_c$ .

Στην εσωτερική ζώνη έχουμε:

$$\mu_i = \rho l^2 |2\omega| \quad (2.61)$$

$2\omega$  είναι ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας όπως ορίζεται στην εξ. (1.43) και το  $l$  δίνεται από τη σχέση του Van Driest:

$$l = \kappa y \left( 1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \quad (2.62)$$

Το  $A^+$  λαμβάνεται ίσο με 26.

Στην εξωτερική ζώνη έχουμε:

$$\mu_i = K C_{cp} \rho F_{WAKE} F_{KLEB} \quad (2.63)$$

Οι σταθερές  $K$  και  $C_{cp}$  έχουν τις τιμές 0,0168 και 1,6 αντίστοιχα. Οι δύο τελευταίοι όροι είναι συναρτήσεις. Η πρώτη λέγεται *συνάρτηση του ομόρου* και δίνεται από τη σχέση:

$$F_{WAKE} = \min \left( y_{max} F_{max}, C_{wk} y_{max} \frac{u_{diff}^2}{F_{max}} \right) \quad (2.64)$$

Είναι δηλαδή η πιο μικρή από αυτές τις δύο ποσότητες κάθε στιγμή. Η σταθερά  $C_{wk}$  ισούται με 0,25. Η  $F$  είναι μια συνάρτηση που δίνει την χαρακτηριστική ταχύτητα και ορίζεται ως εξής:

$$F(y) = y |2\omega| \left( 1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \quad (2.65)$$

Για κάθε θέση  $x$  υπάρχει μια απόσταση από τον τοίχο που συμβολίζεται  $y_{max}$  στην οποία η συνάρτηση αυτή έχει τη μέγιστή της τιμή  $F_{max}$ .

Η ποσότητα  $u_{diff}$  συμβολίζει τη διαφορά του μέγιστου και ελάχιστου μέτρου ταχύτητας σε κάθε «κάθετη» κατεύθυνση στον τοίχο. Το ελάχιστο μέτρο ταχύτητας μπορεί να μην είναι μηδέν, όταν για παράδειγμα είμαστε στον ομόρου οπότε θεωρούμε την εικονική ύπαρξη τοίχου για να εφαρμόσουμε το μοντέλο, μόνο που προφανώς δε θα ισχύει η αρχή μη ολίσθησης.

Τέλος, η  $F_{KLEB}$  λέγεται *συνάρτηση του Kabanoff* και δίνεται από τη σχέση:

$$F_{KLEB}(y) = \left[ 1 + 5,5 \left( \frac{y C_{KLEB}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (2.66)$$

όπου  $C_{KLEB}=0,3$ . Η διάκριση της εσωτερικής από την εξωτερική ζώνη γίνεται στην απόσταση εκείνη  $y_c$  όπου η τυρβώδης συνεκτικότητα της εξωτερικής ζώνης πάει να πάρει μεγαλύτερη τιμή απ' αυτήν της εσωτερικής.

Αξίζει εδώ να πούμε ότι το μοντέλο αυτό όπως και κάθε μοντέλο και όπως ό,τι έχουμε πει μέχρι τώρα, ισχύει αυστηρά μόνο για απλή ροή σε επίπεδη πλάκα και απλά ευχόμεστε να ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια και σε πιο σύνθετες περιπτώσεις, όπου κατά κανόνα το εφαρμόζουμε. Άλλωστε δε μπορούμε να κάνουμε και τίποτε καλύτερο. Στην πράξη έχει φανεί (και για άλλα μοντέλα) ότι ικανοποιεί. Οι δυσκολίες βρίσκονται κυρίως στην εφαρμογή του. Για παράδειγμα σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών είναι δύσκολο να ορίσουμε την κάθετη από τον τοίχο απόσταση, στη μέση δύο πτερυγίων δε συμπίπτουν οι διατμητικές τάσεις αφού έχουν ληφθεί με βάση άλλο τοίχο, κοντά στην αποκόλληση η συνάρτηση  $F$  μπορεί να έχει πολλά μέγιστα και δεν ξέρουμε ποιο να διαλέξουμε, το μοντέλο δεν ασχολείται με το αν έχουμε στρωτή ή τυρβώδη ροή και πού πρέπει να γίνει μετάβαση κτλ.

Για το τελευταίο πρέπει ή να εφαρμόζουμε το μοντέλο μόνο για τυρβώδεις ροές ή να ορίσουμε απ' έξω ένα σημείο πέρα από το οποίο το μοντέλο θα θεωρήσει τη ροή τυρβώδη. Όταν δημοσιεύθηκε το μοντέλο προτάθηκε να μηδενίζεται το  $\mu_i$  εκεί όπου ήταν μικρότερο από  $14\mu$ . Το κριτήριο αυτό είναι πολύ απλό και δεν έχει επιτυχία σε περίπλοκες ροές. Έκτοτε έχουν διατυπωθεί κι άλλα κριτήρια μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή.

Πριν περάσουμε στο μοντέλο τύρβης  $k - \epsilon$  που είναι δύο (διαφορικών) εξισώσεων, απλά να αναφέρουμε ότι υπάρχουν και τα μοντέλα μιας (διαφορικής) εξίσωσης. Αυτά εισάγουν

ένα ακόμη άγνωστο (γι' αυτό δεν είναι μηδενικής τάξης όπως τα μοντέλα μήκους ανάμιξης), την τυρβώδη κινητική ενέργεια  $k$ . Για να βρεθεί αυτός ο άγνωστος φτιάχνεται μια ακόμη διαφορική εξίσωση μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας εξ. (2.30), αφού απλοποιηθεί και μοντελοποιηθεί (δηλαδή οι άγνωστοι όροι της με γνωστές ποσότητες ή με μεγέθη που μπορούν να υπολογισθούν, έστω με βοήθεια πειραματικής εμπειρίας). Τέτοια μοντέλα είναι των Prandtl – Kolmogorov και του Bradshaw.

#### 2.4.4. Το μοντέλο τύρβης $k - \varepsilon$ .

Ήδη στα μοντέλα μιας εξίσωσης είχε προταθεί ν' αντικατασταθεί η χαρακτηριστική ταχύτητα  $q$  όχι με κάτι που εμπλέκει την κλίση της ταχύτητας, αλλά με μια ταχύτητα που χαρακτηρίζει την τύρβη, πράγμα που φαίνεται καλή ιδέα. Μια πολύ κατάλληλη τέτοια ταχύτητα είναι η ρίζα της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Έτσι και στο μοντέλο  $k - \varepsilon$  ισχύει:

$$q = k^{0.5} \quad (2.67)$$

Επίσης από ανάλυση πειραματικών δεδομένων είχε φανεί να υπάρχει μια σχέση μεταξύ παραγωγής και καταστροφής τυρβώδους ενέργειας, της μορφής:

$$l = c_{\mu} \frac{k^{1.5}}{\varepsilon} \quad (2.68)$$

Στη σταθερά αναλογίας δίνεται τιμή από επεξεργασία πολλών πειραμάτων. Η σχέση αυτή ισχύει και στο μοντέλο των Prandtl – Kolmogorov, με τη διαφορά ότι εκεί το χαρακτηριστικό μήκος θεωρείται γνωστό βάσει εμπειρικών σχέσεων και η σχέση χρησιμοποιείται για να βρεθεί το  $\varepsilon$  (που χρειάζεται στην εξίσωση υπολογισμού του  $k$ ). Στο μοντέλο  $k - \varepsilon$  θεωρείται άγνωστος και το  $\varepsilon$ , οπότε χρειάζεται και άλλη μία (διαφορική) εξίσωση για να το βρούμε ενώ το  $l$  δε χρειάζεται καν να το βρούμε, αφού αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις στην σχέση που δίνει το  $\mu_t$ , εξ. (2.44) παίρνουμε κατευθείαν την τυρβώδη συνεκτικότητα ως συνάρτηση των  $k$  και  $\varepsilon$ :

$$\mu_t = c_{\mu} \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.69)$$

Για το μοντέλο  $k - \varepsilon$  υψηλού αριθμού Reynolds (εξήγηση παρακάτω) ισχύει  $c_{\mu} = 0,09$ .

Αξιοσημείωτο είναι ότι για τα μοντέλα μιας εξίσωσης ταίριαζε καλύτερα τιμή της σταθεράς 0,08. Καταλαβαίνουμε ότι το μοντέλο  $k - \varepsilon$  μπορεί να θεωρηθεί ως εξέλιξη των μοντέλων μιας εξίσωσης. Λόγοι που ώθησαν στη δημιουργία του ήταν οι όχι ικανοποιητικές προβλέψεις των παραπάνω μοντέλων και η δυσκολία καθορισμού του χαρακτηριστικού μήκους ιδίως σε περιπτώσεις αντιστροφής της ροής μετά από αποκόλληση. Με το μοντέλο  $k - \varepsilon$ , που διατυπώθηκε βασικά από τους Harlow, Launder και Jones, απαλλασσόμαστε από το μήκος ανάμιξης και τις παραδοχές που το συνόδευαν. Αυτό, μαζί με το γεγονός ότι έχουμε ακόμη μία εξίσωση μας κάνει να πιστεύουμε ότι το μοντέλο αυτό έχει μια εγγενή δυνατότητα να μπορεί να πετύχει μεγαλύτερη ακρίβεια (αρκεί να μην συνοδεύεται από κακές παραδοχές ή κακή εφαρμογή). Πράγματι τα αποτελέσματα που έχει δώσει είναι ικανοποιητικά και φαίνεται να είναι το πιο αξιόπιστο από όλα τα ανταγωνιστικά του μοντέλα τύρβης. Ένα ακόμη πλεονέκτημά του είναι ότι δεν έχει ανάγκη της υπόθεσης ύπαρξης εξωτερικής αστρόβιλης ροής έξω από το οριακό στρώμα. Το μοντέλο όμως αυτό εξακολουθεί να βασίζεται στην υπόθεση Boussinesq που προλέγει τάση Reynolds μηδέν στην αποκόλληση, πράγμα που δε συμβαδίζει πάντα με το πείραμα. Πράγματι, π.χ. στις περιπτώσεις αντιστροφής της ροής με εμφάνιση στροβίλων μεγάλου μεγέθους, η προσέγγιση που δίνει το μοντέλο  $k - \varepsilon$  φαίνεται να μην είναι ικανοποιητική.

Η εξ. (2.69) ισχύει σε κάθε θέση του πεδίου ροής και υπολογίζει την τυρβώδη συνεκτικότητα από τις τιμές των μεταβλητών  $k$  και  $\varepsilon$  που πρέπει να έχουν ήδη υπολογισθεί διατυπώνοντας και επιλύοντας δύο διαφορετικές εξισώσεις γι' αυτά τα δύο μεγέθη, μα κατάλληλες οριακές συνθήκες.

Παρακάτω θα γίνει προσπάθεια να γραφούν οι βασικές ιδέες για το πώς προκύπτουν οι εξισώσεις του  $k$  και του  $\varepsilon$  του μοντέλου, καθώς και τις τελικές εξισώσεις για διδιάστατη ροή οριακού στρώματος.

Η εξίσωση του  $k$  είναι ουσιαστικά η εξίσωση μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $k$ , εξ. (2.30). Γι' αυτή την εξίσωση έχουμε:

Ο όρος (2) της διάχυσης είναι άγνωστη ποσότητα, γι' αυτό θα προσπαθήσουμε να τον προσεγγίσουμε με κάτι γνωστό (μοντελοποίηση του όρου). Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι μηχανισμοί διάχυσης στην τυρβώδη ροή και στη στρωτή γίνονται με αντίστοιχο τρόπο, ισχύει προσεγγιστικά:

$$\rho \nu \left( \overline{\frac{p'}{\rho} + k} \right) = \mu_t \frac{\theta k}{\theta y} \quad (2.70)$$

Το πρώτο μέλος του όρου (2) είναι αμελητέο στο οριακό στρώμα, όπως φαίνεται και στην εξ. (2.31) για διδιάστατο οριακό στρώμα.

Δεχόμενοι περίπου ισότροπη τύρβη, οι δύο πρώτοι όροι του όρου (3) αμελούνται λόγω της εξίσωσης της συνέχειας, ενώ ο τελευταίος έχει μόνο άγνωστο την τάση Reynolds που την έχουμε μοντελοποιήσει ως συνάρτηση της κλίσης ταχύτητας και του  $\mu_t$  βάσει της υπόθεσης Boussinesq:

$$\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\theta u}{\theta y} \quad (2.71)$$

Ο όρος (4) που αφορά τη διάχυση λόγω μοριακής συνεκτικότητας, θεωρείται πολύ μικρός σε σχέση με τους άλλους όρους και αμελείται (τα πειράματα συμφωνούν σ' αυτό).

Ο όρος (5) είναι το  $\varepsilon$ , που στο μοντέλο αυτό είναι ένας από τους αγνώστους που ψάχνουμε (όπως π.χ. η πυκνότητα) και δε θέλει μοντελοποίηση. Στα μοντέλα μιας εξίσωσης (που χρησιμοποιούν ακριβώς ίδια εξίσωση για το  $k$ ) πρέπει να μοντελοποιηθεί και αυτό γίνεται με χρήση της εξ. (2.68).

Έτσι, η εξίσωση του  $k$  για διδιάστατη ροή οριακού στρώματος είναι:

$$-u \frac{\theta k}{\theta x} + v \frac{\theta k}{\theta y} = \frac{\mu_t}{\rho} \left( \frac{\theta u}{\theta y} \right)^2 + \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\theta k}{\theta y} \right) - \quad (2.72)$$

Η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι συνάρτηση των  $\rho$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  βάσει της εξ. (2.69).

Στην παραπάνω εξίσωση οι όροι αναγνωρίζονται κατά σειρά ως μεταφορά, παραγωγή, διάχυση και καταστροφή τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

Η εξίσωση του  $\varepsilon$  προκύπτει με πιο δύσκολο τρόπο. Κάνουμε τις εξής ενέργειες (μπορούμε να θεωρήσουμε ως σκοπό τη δημιουργία όρου μεταφοράς για το  $\varepsilon$  για να καταλάβουμε λίγο το σκεπτικό τους):

Αρχίζουμε από τις εξισώσεις Navier - Stokes των διακυμάνσεων (που όπως έχουμε ξαναπεί προκύπτουν π.χ. από αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων Reynolds από τις εξισώσεις Navier - Stokes) και τις παραγωγίζουμε χωρικά. Μετά τις πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλη κλίση ταχύτητας και παίρνουμε τη μέση τιμή (ή ισοδύναμα ολοκληρώνουμε χρονικά). Προκύπτει μια εξίσωση που είναι δύσκολο να γραφεί χωρίς να χρησιμοποιηθεί τανυστικός συμβολισμός (χρησιμοποίηση δεικτών για όμοιους όρους που αθροίζονται) και δε θα γραφεί εδώ. Αυτή η εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί η αντίστοιχη της εξ. (2.30) για το  $\varepsilon$ . Φυσικά έχει πολλούς αγνώστους όρους που θέλουν μοντελοποίηση που δεν είναι ούτε τόσο εύκολη ούτε τόσο ευνόητη όπως αυτή της εξίσωσης του  $k$ . Μάλιστα το κεφάλαιο της μοντελοποίησης αυτής της εξίσωσης δεν έχει κλείσει ακόμη και σήμερα και διάφοροι ερευνητές προτείνουν χωρίς επαρκή δικαιολόγηση και κάποιοι άλλοι μοντελοποιούνται με τρόπο όμοιο των αντίστοιχων όρων της εξίσωσης του  $k$ . Η τελική εξίσωση που προκύπτει μετά απ' αυτή τη διαδικασία είναι (για την περίπτωση διδιάστατου οριακού στρώματος):

$$-u \frac{\theta \varepsilon}{\theta x} + v \frac{\theta \varepsilon}{\theta y} = 1,45k \left( \frac{\theta u}{\theta y} \right)^2 + \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{\mu_t}{\rho \sigma_\varepsilon} \frac{\theta \varepsilon}{\theta y} \right) - 0,18 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.73)$$

Λαμβάνουμε  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ . Παρατηρούμε κάποια αντιστοιχία όρων ανάμεσα στην εξίσωση του  $k$  και σ' αυτήν του  $\varepsilon$ . Υπάρχουν κι εδώ όροι μεταφοράς, παραγωγής, διάχυσης και καταστροφής.

Βλέπουμε ότι οι εξισώσεις του  $k$  και του  $\varepsilon$  είναι πεπλεγμένες, δηλαδή στην εξίσωση του  $k$  υπάρχει και το  $\varepsilon$  μέσα και αντίστροφα. Γι' αυτό δε μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα. Σε σχέση με τα άλλα μεγέθη της ροής βλέπουμε ότι κάποια απ' αυτά εμπλέκονται σ' αυτές (λογικό άλλωστε), οπότε πρέπει να λυθούν όλες οι εξισώσεις (2 ορμής, 1 συνέχειας, 1 ενεργειακή και οι 2 του  $k$  και του  $\varepsilon$ ) παράλληλα για να βρούμε τα μεγέθη που θέλουμε ( $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  στην διδιάστατη περίπτωση) και λύνουμε το πεδίο ροής. Στην πραγματικότητα οι δύο εξισώσεις του  $k$  και του  $\varepsilon$  είναι λίγο ανεξάρτητες από τις υπόλοιπες, δεν επηρεάζουν ούτε επηρεάζονται απ' αυτές πολύ άμεσα.

Αξίζει εδώ ν' αναφερθούν δυο σκέψεις για τη μοντελοποίηση μέσω του  $k$  και του  $\varepsilon$ .

Προσπαθώντας ν' απολλαγούμε από το πρόβλημα του χρονικά μεταβαλλόμενου χαρακτήρα των εξισώσεων Navier – Stokes που οφείλεται στην τύρβη, είδαμε με τη χρονική ολοκλήρωση την εμφάνιση της άγνωστης τάσης Reynolds που αφορά μέση τιμή γινόμενου διακυμάνσεων ταχυτήτων. Τώρα, με τη μοντελοποίηση που κάναμε, εκφράσαμε το γινόμενο αυτό συναρτήσει δύο άλλων μεγεθών που επίσης αφορούν διακυμάνσεις ταχυτήτων, αλλά για τα οποία καταφέραμε να φτιάξουμε δύο εξισώσεις για να τα υπολογίσουμε, πράγμα που δε μπορούμε να κάνουμε κατευθείαν για να τα υπολογίσουμε, πράγμα που δε μπορούσαμε να κάνουμε κατευθείαν για την τάση Reynolds. Οι εξισώσεις αυτές φτιάχτηκαν κάνοντας διάφορες πράξεις στις εξισώσεις Navier – Stokes ώστε να τις φέρουμε σε μια μορφή που να εξυπηρετούν κατά δύο τρόπους: 1) Να αφορούν τα μεγέθη που ψάχνουμε (π.χ. να είναι εξισώσεις μεταφοράς τους, όπως πράγματι συμβαίνει) και 2) Να έχουν όρους είτε γνωστούς είτε τέτοιους που να μπορούμε να τους περιγράψουμε συναρτήσει γνωστών όρων, έστω και με τη βοήθεια πειραμάτων. Αυτό δε συμβαίνει σε ικανοποιητικό βαθμό στην εξίσωση του  $\varepsilon$ , αφού οι όροι της δε μπορούν να μοντελοποιηθούν πιο εύκολα. Πρέπει βέβαια μια τέτοια εξίσωση να είναι ανεξάρτητη των άλλων. Τέλος ίσως υπάρχουν άλλα μεγέθη, που να αφορούν διακυμάνσεις ταχυτήτων, να συνδέονται με την τάση Reynolds και να είναι πιο εύκολο να φτιάξουμε και να μοντελοποιήσουμε εξισώσεις που τα αφορούν. Βέβαια όλα αυτά είναι πολύ θεωρητικά, τα  $k$  και  $\varepsilon$  είναι πολύ χαρακτηριστικά και πετυχημένα μεγέθη και οι εξισώσεις μεταφοράς τους πιθανότατα οι κατάλληλες για να τα υπολογίσουμε.

Ας αναφερθεί εδώ ότι υπάρχει δυνατότητα με χρήση παρόμοιων εξισώσεων σαν αυτή της μεταφοράς των τάσεων Reynolds να υπολογίσουμε τις τάσεις Reynolds απευθείας και χωριστά μεταξύ τους χωρίς να κάνουμε χρήση της υπόθεσης Boussinesq. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούν αυτή την μέθοδο είναι πιο σύγχρονα απ' όλα που έχουν αναφερθεί και λέγονται *μοντέλα τύρβης τάσεων Reynolds*. Αν χρησιμοποιηθούν για τριδιάστατη περίπτωση επιβαρύνουν τον υπολογισμό με ακόμη 6 διαφορετικές εξισώσεις. Πιστεύεται ότι στο μέλλον θα δίνουν καλύτερα αποτελέσματα από τα σημερινά μοντέλα (και ήδη σε μερικές περιπτώσεις δίνουν), αλλά η χρήση τους δεν είναι διαδεδομένη επειδή δεν είναι δοκιμασμένα, είναι δύσκολα, περίπλοκα και θέλουν πολύ χρόνο υπολογισμού.

Οι διαφορικές εξισώσεις όμως θέλουν και οριακές συνθήκες, και στην περίπτωση του μοντέλου μας  $k - \varepsilon$  έχουμε για  $y = \delta$  (ή  $y$  να τείνει στο άπειρο):

$$u_{\infty} \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)_{\infty} = -c_{\mu} \rho \left( \frac{k^2}{\mu_t} \right)_{\infty} \quad (2.74)$$

$$u_{\infty} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)_{\infty} = -0,18 \left( \frac{\varepsilon^2}{k} \right)_{\infty} \quad (2.75)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι οριακές συνθήκες των  $k$  και  $\varepsilon$  στα στερεά τοιχώματα του πεδίου ροής και θα γίνει μια αναφορά σ' αυτές τώρα.

Το σύστημα των εξισώσεων εξ. (2.69), εξ. (2.72), εξ. (2.73) ισχύει μέχρι την περιοχή της λογαριθμικής κατανομής της ταχύτητας, ενώ πολύ κοντά στον τοίχο οι εξισώσεις αυτές είναι ανεπαρκείς. Για το λόγο αυτό το παραπάνω μοντέλο όπως διατυπώθηκε ονομάζεται *μοντέλο  $k - \varepsilon$  υψηλών αριθμών Reynolds* (ισχύει όχι πολύ κοντά στον τοίχο όπου ο Reynolds είναι πολύ μικρός). Οπότε, αν τοποθετήσουμε στο πεδίο ροής κόμβους στους οποίους θέλουμε να βρούμε τα μεγέθη της ροής (κατά την αριθμητική επίλυση) πρέπει να μη βάλουμε κόμβους

ανάμεσα στη λογαριθμική περιοχή και το στερεό όριο, εκεί δε μπορούμε να λύσουμε τις (ανεπαρκείς) εξισώσεις. Αυτό βέβαια έχει το καλό ότι χρησιμοποιούμε λιγότερους κόμβους. Για να καλύψουμε το κενό, χρησιμοποιούμε ένα τοπικό μοντέλο, που ονομάζεται «συναρτήσεις τοίχου». Η τεχνική αυτή ουσιαστικά είναι η επιβολή οριακών συνθηκών όχι στο στερεό όριο, αλλά στους αμέσως γειτονικούς του κόμβους, σύμφωνα με φυσικές παραδοχές που ξέρουμε από τη θεωρία οριακών στρωμάτων:

Έστω ένας κόμβος  $M$  του στερεού ορίου και  $P$  ο γειτονικός του στη λογαριθμική περιοχή. Τότε όπως ξέρουμε η ταχύτητα τριβής  $u_\tau$  μένει σταθερή (π.χ. σελ. 19) ανάμεσα σ' αυτούς τους κόμβους. Επίσης στον  $P$  η παραγωγή της τυρβώδους ενέργειας ισούται περίπου με την καταστροφή της (αφού οι άλλοι όροι είναι αμελητέοι εκεί όπως έχουμε δει). Τέλος στον κόμβο  $P$  η διατμητική τάση  $\tau_w$  ισούται με τη διατμητική τάση Reynolds (π.χ. εξ. (2.52)). Αν γράψουμε τις σχέσεις για τις δύο παραπάνω προτάσεις και τις συνδυάσουμε, προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$k = \frac{u_\tau}{\sqrt{c_\mu}} \quad (2.76)$$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau}{ky} \quad (2.77)$$

Οι σχέσεις αυτές μας επιτρέπουν τον υπολογισμό των τιμών των  $k$  και  $\varepsilon$  στον κόμβο  $P$  αν ξέρουμε την ταχύτητα τριβής. Αυτή όμως είναι γνωστή από την προηγούμενη επανάληψη αν εφαρμόσουμε το λογαριθμικό νόμο για το σημείο  $P$  (ξέρουμε την απόσταση  $y$  του σημείου και την μέση ταχύτητα από τον υπολογισμό της ροής τη συγκεκριμένη επανάληψη, οπότε μόνος άγνωστος στο λογαριθμικό νόμο είναι η ταχύτητα τριβής). Παρατηρούμε ότι με την τεχνική συναρτήσεων τοίχου βρίσκουμε τις «οριακές τιμές» των  $k$  και  $\varepsilon$  χωρίς ν' αναμιχθεί ο κόμβος του στερεού ορίου.

Υπάρχει η δυνατότητα να τροποποιηθεί λίγο το μοντέλο ώστε να μπορεί να καλύψει και την περιοχή κοντά στο στερεό τοίχωμα (περιοχή χαμηλών αριθμών Reynolds). Το τροποποιημένο αυτό μοντέλο λέγεται *μοντέλο τύρβης  $k - \varepsilon$  χαμηλών αριθμών Reynolds* και διατυπώθηκε από τους Jones και Launder. Εν γένει προτιμάται. Σ' αυτό αλλάζει λίγο η έκφραση της τυρβώδους συνεκτικότητας (ας πούμε ότι η σταθερά της εξ. (2.69) δεν είναι πλέον σταθερά) και προστίθενται επιπλέον όροι στις εξισώσεις των  $k$  και  $\varepsilon$ . Έτσι οι εξισώσεις εξ. (2.69), εξ. (2.72), εξ. (2.73) διαμορφώνονται τώρα περίπου ως εξής:

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.78)$$

$$\frac{-\theta k}{\theta x} + \nu \frac{-\theta k}{\theta y} = \frac{\mu_t}{\rho} \left( \frac{\theta u}{\theta y} \right)^2 + \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\theta k}{\theta y} \right) - \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\theta \sqrt{k}}{\theta y} \right)^2 \quad (2.79)$$

$$\frac{-\theta \varepsilon}{\theta x} + \nu \frac{-\theta \varepsilon}{\theta y} = 1,45k \left( \frac{\theta u}{\theta y} \right)^2 + \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{\mu_t}{\rho \sigma_\varepsilon} \frac{\theta \varepsilon}{\theta y} \right) - 0,18 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + 2\nu \frac{\mu_t}{\rho} \left( \frac{\theta^2 u_t}{\theta y^2} \right)^2 \quad (2.80)$$

Για τις δύο νέες συναρτήσεις που εμφανίστηκαν ισχύει:

$$f_2 = 1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_\tau^2) \quad (2.81)$$

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-125}{50 + \text{Re}_\tau}\right) \quad (2.82)$$

Ο αριθμός Reynolds της τύρβης ισούται με:

$$\text{Re}_\tau = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon} \quad (2.83)$$

Όταν χρησιμοποιούμε το μοντέλο των χαμηλών αριθμών Reynolds η επίλυση φτάνει ως τον τοίχο και εκεί επιβάλλονται οριακές συνθήκες μηδενισμού των  $k$  και  $\varepsilon$ .

Για την είσοδο του πεδίου ροής απαιτούνται επίσης οριακές συνθήκες. Συνήθως για την οριακή συνθήκη του  $k$  θεωρούμε γνωστή την ένταση της τύρβης, οπότε:

$$k = \frac{3}{2} (\tau_u V)^2 \quad (2.84)$$

Τα μεγέθη θεωρούνται όλα στην είσοδο.  $V$  το μέτρο της ταχύτητας.

Για το  $\varepsilon$  είναι πιο δύσκολο να φτιάξουμε μια συνθήκη εισόδου. Συνήθως υποτίθεται στην είσοδο ένας λόγος τυρβώδους προς μοριακή συνεκτικότητα και έχουμε:

$$\varepsilon = c_\mu \rho \frac{k^2}{\mu} \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right) \quad (2.85)$$

Όλα τα μεγέθη θεωρούνται στην είσοδο.

Να σημειωθεί εδώ επειδή η μοντελοποίηση της τύρβης είναι ένα επιστημονικό θέμα που δεν έχει κλείσει, η ακριβής μορφή των εξισώσεων των μοντέλων τύρβης και οι τιμές των σταθερών που υπάρχουν σ' αυτές, διαφέρουν από ερευνητή σε ερευνητή. Παραπάνω έχουν γραφεί όπως παρουσιάζονται σε βιβλία της βιβλιογραφίας στο τέλος, ενώ για μορφές όπως τις χρησιμοποιούν οι ερευνητές πρέπει κανείς ν' απευθυνθεί σε κάποιες από τις δημοσιεύσεις που επίσης αναγράφονται στο τέλος. Κάποιες απ' αυτές αναφέρονται ευκαιρίας δοθείσης στο επόμενο κεφάλαιο. Ο σκοπός σ' αυτό το κεφάλαιο δεν είναι η εφαρμογή του μοντέλου και γενικότερα των εξισώσεων που γράφονται, αλλά η, σε κάποιο βαθμό, κατανόηση της φυσικής και της λογικής που τις διέπουν. Ευκαιρίας δοθείσης να ειπωθεί ότι στην μοντελοποίηση της τύρβης υπάρχει πολύ μεγάλος βαθμός εμπειρισμού. Υπάρχουν περιπτώσεις που ερευνητές δοκιμάζουν κάτι σχεδόν στην τύχη και αποδεικνύεται πετυχημένο. Άσχετα αν η πρόταση κάποιου επιστήμονα βασίζεται στην θεωρία ή στην εμπειρία, αν τα αποτελέσματα που δίνει είναι καλά (δηλαδή συμβαδίζουν με τα πειράματα), γίνεται αποδεκτή.

Η μοντελοποίηση της τύρβης γίνεται με την παραδοχή ότι ο αριθμός Reynolds της ροής είναι μεγάλος. Αυτό βοηθά στη θεωρητική ανάλυση, αλλά έχει ληφθεί υπόψη και στις τιμές των σταθερών των εξισώσεων. Αν έχουμε τυρβώδη ροή με χαμηλούς αριθμούς Reynolds (αυτό είναι δυνατόν σε περιπτώσεις που έχουμε πραγματικές, «ταλαιπωρημένες» ροές με μεγάλες κλίσεις πίεσης), τότε υπάρχουν επιπλέον επιδράσεις στην τύρβη και οι υπολογισμοί μπορεί να δημιουργήσουν σημαντικές αποκλίσεις από την πραγματικότητα. Φυσικά τέτοιες περιπτώσεις που κάτι επιδρά στην τύρβη και πρέπει να ληφθεί υπόψη υπάρχουν πολλές. Δυο παραδείγματα είναι η επίδραση απόκλισης ή σύγκλισης της ροής αν λύνουμε διδιάστατη ροή (μπορεί να θεωρηθεί τέτοια αφού πρακτικά το επίπεδο του προφίλ των τάσεων είναι ίδιο με αυτό του προφίλ της ταχύτητας), ή η επίδραση της δύναμης Coriolis, αν μελετάμε τη ροή σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς (περισσότερα στο επόμενο κεφάλαιο). Λέγοντας επίδραση στην τύρβη, εννοούμε ότι αλλάζει η δομή της (άρα και ο τρόπος που πρέπει να την περιγράψουμε, άρα και η μοντελοποίησή της), ή, ισοδύναμα, ότι έχουμε άλλες διακυμάνσεις ταχυτήτων σε σχέση με την περίπτωση που δεν υπήρχε η επίδραση.

Γενικά για την επίλυση προβλημάτων (ροής) υπάρχουν τρεις μέθοδοι, όπως είναι άλλωστε γνωστό. Η κλασσική αναλυτική, δηλαδή αναλυτική μαθηματική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, η πειραματική που κατέχει ιδιαίτερη σημασία κυρίως στον προσδιορισμό παραμέτρων και συντελεστών που δε μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά και η αριθμητική κατά την οποία βάζουμε στο χώρο που θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροή σημεία στα οποία (και μόνο σ' αυτά) θα βρούμε τα μεγέθη της ροής, αφού πρώτα μετατρέψουμε τις διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις διαφορών σύμφωνα με τον κλάδο της επιστήμης που λέγεται υπολογιστική ρευστομηχανική. Εργαλείο για να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία μέθοδο είναι ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, λόγω του τεράστιου πλήθους πράξεων που πρέπει να γίνουν (και μάλιστα ξανά και ξανά). Και οι τρεις μέθοδοι χρειάζονται και μπορεί να χρησιμοποιηθούν στο ίδιο πρόβλημα για να συμπληρώσουν, επιβεβαιώσουν ή δώσουν στοιχεία η μία στην άλλη. Εννοείται ότι οι σύγχρονες απαιτήσεις ακριβούς υπολογισμού της ροής απαιτούν επίλυση των (μέσων χρονικά) εξισώσεων Navier – Stokes που δεν έχει γίνει αναλυτικά, οπότε μιλάμε για αριθμητική επίλυση. Το ίδιο συμβαίνει και με τις εξισώσεις των



$k$  και  $\varepsilon$ , που μόνο αριθμητικά μπορούν να επιλυθούν. Φυσικά κάθε αριθμητική επίλυση έχει δυσκολίες στην εφαρμογή της και η προσπάθεια αριθμητικής επίλυσης της ροής με χρήση του μοντέλου  $k - \varepsilon$  είναι πολύπλοκη (αλλά και αποδοτική).

#### 2.4.5. Απλή αναφορά πιο σύγχρονων μοντέλων τύρβης.

Κάθε μοντέλο τύρβης, όπως κάθε μοντελοποίηση, έχει τους περιορισμούς του ως προς τις περιπτώσεις που μπορεί να εφαρμοστεί. Σε περίπλοκες ροές τα παραπάνω μοντέλα αρχίζουν να χάνουν σε ακρίβεια και αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε πιο περίπλοκα. Έτσι και στην περίπτωση επίδρασης επιπέδων δυνάμεων στο οριακό στρώμα, όπως η δύναμη Coriolis, συμβαίνει συχνά οι επιστήμονες να προσπαθούν με κάποιο από τους παρακάτω τρόπους να πετύχουν μεγαλύτερη ακρίβεια, ξεπερνώντας τους περιορισμούς που θέτουν κάποιες από τις παραδοχές των παραπάνω μοντέλων.

##### 2.4.5.1. Μοντέλο τάσεων Reynolds.

Ένας τρόπος που έχει ήδη αναφερθεί είναι τα μοντέλα τύρβης τάσεων Reynolds (στα αγγλικά Reynolds Stress Models ή RSM). Με τον τρόπο αυτό δεν έχουμε την παραδοχή του Boussinesq ότι οι τάσεις παρουσιάζουν ισότροπη συμπεριφορά, πράγμα που δεν ισχύει σε περίπλοκες ροές. Η μοντελοποίηση των εξισώσεων των τάσεων Reynolds είναι δύσκολη. Για να γίνει, αρχίζουμε από τις εξισώσεις των τάσεων Reynolds, εξ. (3.100), όπου στο δεύτερο μέλος υπάρχουν 4 όροι, παραγωγής, καταστροφής, «ανακατανομής» και διάχυσης. Ο όρος καταστροφής μοντελοποιείται θεωρώντας ότι οι μικροδίνες παρουσιάζουν ιστροπικό χαρακτήρα, οπότε σχετίζεται άμεσα με την ποσότητα  $\varepsilon$ . Η διάχυση των τάσεων έχει τρεις όρους, απ' τους οποίους υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι είναι πολύ μικροί και αμελούνται, ενώ ο τρίτος είναι όρος τριπλών συσχετίσεων ο οποίος (μετά από κοπώδη μαθηματική ανάλυση) αποδεικνύεται ότι μπορεί να συσχετισθεί με μια έκφραση που έχει μόνο διπλές συσχετίσεις ότι μπορεί να συσχετισθεί με μια έκφραση που έχει μόνο διπλές συσχετίσεις. Ο όρος παραγωγής δε χρειάζεται μοντελοποίηση. Η φυσική έννοια του όρου ανακατανομής είναι ότι ανακατανέμει το επίπεδο των τάσεων μεταφέροντας μια τάση μέσω αλληλεπίδρασης με τη μέση ροή σε άλλη τάση, οδηγώντας σε ισοτροπικότητα της τύρβης. Ο μηχανισμός που γίνεται αυτό δεν έχει κατανοηθεί πλήρως και για τη μοντελοποίηση του όρου υπάρχουν δυσκολίες και διαφωνίες, ενώ η κατάληξη είναι συνήθως μακροσκελείς μαθηματικές εκφράσεις.

Εκτός του ότι έχουμε μ' αυτό τον τρόπο να λύνουμε εκτός από τις βασικές εξισώσεις της ροής 6 διαφορικές εξισώσεις (στη γενική τριδιάστατη περίπτωση), υπάρχουν και αριθμητικά προβλήματα ευστάθειας της λύσης. Για την περίπτωση *διδιάστατων οριακών στρωμάτων*, μπορούμε να απλοποιήσουμε κάπως τα πράγματα. Η μόνη τάση που επιδρά σημαντικά στην ανάπτυξη της ροής τότε είναι η  $\overline{\rho u'v'}$ , οι άλλες δύο διατμητικές τάσεις θεωρούνται αμελητέες, ενώ οι ορθές τάσεις προσεγγίζονται ως ποσοστά της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Έτσι λύνονται συνολικά τρεις εξισώσεις (μια παραπάνω απ' το  $k - \varepsilon$ ), π.χ. οι εξής:

$$\frac{D\overline{u'v'}}{Dt} = -2,8 \left( \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'v'} + 0,7k \frac{\theta v}{\theta y} \right) + 0,08 \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\theta \overline{u'v'}}{\theta y} \right) \quad (2.86)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = -\overline{u'v'} \frac{\theta u}{\theta y} - \varepsilon + 0,004 \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\theta k}{\theta y} \right) \quad (2.87)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -1,45 \frac{\overline{u'v'} \theta u}{k \theta y} - \frac{2\varepsilon^2}{k} + 0,5 \cdot 0,13 \frac{\theta}{\theta y} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\theta \varepsilon}{\theta y} \right) \quad (2.88)$$

Όπως βλέπουμε δεν γίνεται χρήση της υπόθεσης Boussinesq, ενώ οι παραδοχές που έχουν γίνει θεωρούνται πιο εξευγενισμένες απ' αυτή. Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν εφαρμοστεί σε απλές περιπτώσεις και δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε ροές εκτός τοπικής ισορροπίας, όπου τα άλλα μοντέλα θα αστοχούσαν.

#### 2.4.5.2. Αλγεβρικό μοντέλο τάσεων Reynolds.

Το μειονέκτημα των δύσκολων διαφορικών εξισώσεων που θέλουν πολύ υπολογιστικό χρόνο, μετριάζεται σε μεγάλο βαθμό μ' αυτό το μοντέλο που αναφέρεται συχνά με τη συντομογραφία ARSM.

Οι όροι που κάνουν τις εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds διαφορικές, είναι οι όροι μεταφοράς και διάχυσης. Ο Rodi, [63], σκέφτηκε να τους συνδέσει με άλλες γνωστές ποσότητες, υποθέτοντας ότι η μεταφορά των τάσεων Reynolds είναι ανάλογη της μεταφοράς της κινητικής ενέργειας. Αυτό φέρνει τις εξισώσεις σε αλγεβρική μορφή, με προφανή οφέλη για το χρόνο υπολογισμού. Οι ακριβείς σχέσεις που γίνεται αυτό υπάρχουν στο [63] ή και στο [32]. Το μειονέκτημα του μοντέλου είναι τα προβλήματα αριθμητικής αστάθειας, που κάνουν πολλές φορές να εγκαταλείπονται οι προσπάθειες για εφαρμογή του.

#### 2.4.5.3. Το μοντέλο των μεγάλων δινών.

Έχουμε πει (π.χ. σελ 17) ότι οι δίνες μεγάλου μήκους περιέχουν την τυρβώδη κινητική ενέργεια, ενώ οι δίνες μικρού μήκους είναι υπεύθυνες για την απορρόφησή της. Ουσιαστικά στην ανάπτυξη του πεδίου ροής επιδρούν οι μεγάλες δίνες, άρα παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον για μοντελοποίηση. Άλλωστε οι μικροδίνες μπορούν να προσεγγιστούν πιο εύκολα, αφού παρουσιάζουν σε μεγάλο βαθμό ισοτροπικότητα.

Η ιδέα του μοντέλου είναι να εφαρμοστεί φιλτράρισμα στις δίνες ανάλογα με τη διάστασή τους (κάτι που ήδη εφαρμόζεται για πάρα πολλά χρόνια στα πειράματα). Οι σκέψεις αυτές ξεκίνησαν το 1973 από το National Center for Atmospheric Research του Κολοράντο και μετά πέρασαν στα χέρια του πανεπιστημίου Stanford. Το μοντέλο συναντάται με τη συντομογραφία LES (Large Eddy Simulation).

Κατ' αυτό, πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις Navier – Stokes με μια κατάλληλη συνάρτηση φίλτρου και παίρνουμε τις μέσες χωρικά τιμές τους. Έτσι έχουμε να λύσουμε πλήρεις εξισώσεις Navier – Stokes, μεταβαλλόμενες χρονικά, αλλά θεωρώντας ότι υπάρχουν μόνο μεγάλες δίνες, οπότε δε χρειάζεται να έχουμε υπερβολικά πυκνό πλέγμα (που θα χρειαζόταν αν δε βάζαμε το φίλτρο, για να «πιάσουμε» τις μικροδίνες, που έχουν πολύ μικρό μέγεθος). Η διάσταση του υπολογιστικού πλέγματος είναι περίπου ίδια με τη μικρότερη διάσταση των μεγάλων δινών, βάσει του φίλτρου. Με την παραπάνω διαδικασία, εμφανίζεται ένας όρος τάσεων Reynolds λόγω των μικρών δινών που πρέπει να μοντελοποιηθεί κατάλληλα και μοντελοποιείται με ανάλογο τρόπο της μοντελοποίησης Boussinesq, που όμως τώρα ισχύει με πολύ καλή προσέγγιση. Έτσι, παρόλο που κάναμε το φιλτράρισμα, δεν αγνοούνται οι μικρές δίνες, αφού μοντελοποιούνται, και μάλιστα με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Καταλαβαίνουμε ότι το μοντέλο αυτό είναι ένα βήμα πριν από την πλήρη (αριθμητική) επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes, οπότε θα έχει εκπληκτική ακρίβεια, αλλά και φοβερά μεγάλες απαιτήσεις σε χρόνο και μνήμη υπολογισμού, αφού λύνει τις εξισώσεις σε χρονικά μεταβαλλόμενη μορφή. Πράγματι, εκτός του ότι αναπτύσσεται ακόμη και δεν έχει ξεπεράσει τα προβλήματά του, έχει πολύ μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις και εφαρμόζεται κυρίως σε απλές περιπτώσεις με πολύ μεγάλους χρόνους αναμονής μέχρι να δώσει αποτελέσματα. Η ακρίβειά του όμως είναι τέτοια (ή είναι δυνατόν να γίνει τέτοια) ώστε να χρησιμοποιείται για έλεγχο των παραδοχών των άλλων μοντέλων ή ακόμη και για αντικατάσταση του πειράματος.

#### 2.4.5.4. Απευθείας αριθμητική επίλυση.

Αυτή η περίπτωση χαρακτηρίζεται οριακά μοντελοποίηση. Στα αγγλικά αναφέρεται ως Direct Numerical Simulation, η DNS.

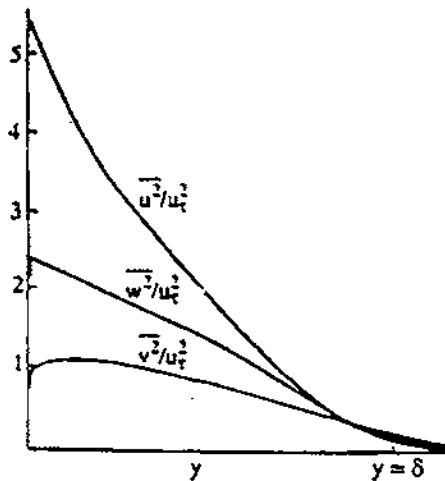
Η μεγάλη ανάπτυξη των υπολογιστών τα τελευταία χρόνια, έχει δώσει τη δυνατότητα να συζητάμε δειλά δειλά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes χωρίς καμία παραδοχή. Λύνονται με πολύ μικρό χρονικό βήμα, οπότε προκύπτει η ασταθής χρονικά λύση, από την οποία παίρνουμε τη μέση τιμή για να βρούμε τη μέση ροή. Δεν είναι καν αναγκαία η ύπαρξη της έννοιας της τύρβης. Είναι σα να λύνουμε στρωτή ροή, με το αποτέλεσμα ν' αλλάζει χρονικά. Φυσικά η ακρίβεια, ο χρόνος υπολογισμού και η

υπολογιστική ισχύς και μνήμη είναι τα μέγιστα που υπάρχουν. Η μέθοδος εφαρμόζεται προς το παρόν σε (για την εποχή μας) υπερυπολογιστές, κάνει πάρα πολύ καιρό να δώσει αποτελέσματα, εφαρμόζεται σε απλές περιπτώσεις με αραιό πλέγμα και θεωρείται ισοδύναμη πειράματος ακριβείας. Χρησιμοποιείται κυρίως αντί για πειράματα για μελάτη φαινομένων.

Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι για ακριβή υπολογισμό της ροής που αναπτύσσονται στις μέρες μας. Αναφέρθηκαν οι παραπάνω γιατί προβλέπεται ότι θα χρειαστούν στο επόμενο κεφάλαιο. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι λέγοντας «πιο σύγχρονα μοντέλα» είναι ουσιαστικά να λέμε «μοντέλα που απαιτούν περισσότερη υπολογιστική δύναμη». Αυτό ισχύει από την αρχή της μοντελοποίησης της τύρβης, όπου είχαμε αρχικά ολοκληρωτικές μεθόδους, μετά το μήκος ανάμιξης, μετά μοντέλα μιας εξίσωσης, μετά δύο, τώρα τριών, έξι, απευθείας λύση μη χρονικά σταθερών εξισώσεων Navier – Stokes. Παλιά που δεν είχαν υπολογιστική ισχύ οι άνθρωποι, κάθονταν κι έσπαγαν το κεφάλι τους να βρουν δεν είχαν έξυπνες ιδέες να καταλάβουν και να περιγράψουν την τύρβη, ενώ τώρα δε φαίνεται να συμβαίνει αυτό. Τα «σύγχρονα μοντέλα» δεν έχουν ωραίες ιδέες όπως τα παλιά, απλά απαιτούν ισχυρότερους υπολογιστές. Αυτό δε σημαίνει αναγκαστικά ότι σήμερα δεν υπάρχουν ιδέες. Ίσως κατευθύνονται στο αριθμητικό κομμάτι, πώς δηλαδή θα εκμεταλλευθούμε ένα μηχάνημα που μπορεί χωρίς παράπονα να κάνει αναρίθμητες πράξεις σε ελάχιστο χρόνο. Αναπτύσσονται έτσι άλλοι κλάδοι της επιστήμης (αριθμητική ανάλυση, υπολογιστική ρευστομηχανική), γιατί αυτοί χρειάζεται ν' αναπτυχθούν ώστε να κάνουμε τη δουλειά μας. Κάτι άλλο πολύ χρήσιμο που μπορούμε να πούμε εδώ, είναι η χρησιμότητα και αναγκαιότητα των υπολογιστών. Η πρόοδος της ρευστομηχανικής είναι άμεση συνάρτηση της ανάπτυξης των υπολογιστών. Αν είχαμε πανίσχυρους υπολογιστές, δε θα είχαμε (τόσα) προβλήματα ρευστομηχανικής.

#### 2.4.6. Φάσμα ενέργειας για τις ορθές τάσεις Reynolds.

Πολύ συχνά στο επιστημονικό πεδίο της μοντελοποίησης της τύρβης, υπάρχει ενδιαφέρον για την κατανομή των ποσοτήτων  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$ , δηλαδή των ορθών διατμητικών τάσεων, που έχουν διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα μάζας. Μια τυπική τέτοια κατανομή παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 2.17. Διανομή ορθών τάσεων Reynolds στο οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας

Βλέπουμε ότι οι τάσεις, όπως ήταν αναμενόμενο, γίνονται μηδέν έξω απ' το οριακό στρώμα και αυξάνονται προς τα μέσα για ν' αποκτήσουν μια μέγιστη τιμή κοντά στον τοίχο, πριν αρχίσουν να πέφτουν πάλι. Η περιοχή πολύ κοντά στον τοίχο δε φαίνεται καλά, αφού εκεί καταλληλότερες συντεταγμένες είναι οι συντεταγμένες «τοιχίου»  $y^+$ . Σ' αυτές τις συντεταγμένες φαίνεται μια τάση των καμπύλων να περάσουν απ' την αρχή των αξόνων.

Παρατηρούμε ότι η τάση του άξονα x είναι μεγαλύτερη απ' τις άλλες. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί με τη βοήθεια των εξισώσεων των τάσεων Reynolds. Στην παρούσα εξήγηση

βολεύει η μορφή των εξ. (3.17), εξ. (3.18), εξ. (3.19), (έστω  $\Omega=0$ ). Βλέπουμε ότι ο όρος παραγωγής  $-\overline{u'v'}/\theta$  δεν υπάρχει στις άλλες δύο τάσεις, άρα η κινητική ενέργεια απ' τη μέση ροή μετατρέπεται σε τύρβη μεταφερόμενη πρώτα στην συνιστώσα  $\overline{u'^2}$  και κατόπιν, με το μηχανισμό «σπασίματος» των δινών σε μικρότερες, μεταφέρεται και στις άλλες συνιστώσες.

Βλέπουμε ότι η τύρβη δεν είναι ισότροπη μέσα στο οριακό στρώμα. Οι λόγοι των τάσεων Reynolds όπως προκύπτουν από το παραπάνω και άλλα παρόμοια διαγράμματα, φαίνεται να έχουν μια σταθερή τιμή σε μεγάλο αριθμό οριακών στρωμάτων και αυτό το γεγονός χρησιμοποιείται συχνά ως πειραματικό δεδομένο π.χ. για καλιμπράρισμα διαφόρων συντελεστών για μοντέλα τύρβης.

### 3. Επίδραση της δύναμης Coriolis στην τύρβη.

Στην κλασσική φυσική, συχνά αναφέρεται η φράση «αδρανειακό σύστημα αναφοράς». Αν γράψουμε κάποιες εξισώσεις σε ένα σύστημα αναφοράς, θα ισχύουν (όσον αφορά τις ασκούμενες δυνάμεις) και οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό του, δηλαδή σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτό. Το μόνο που αλλάζει είναι οι χωρικές συντεταγμένες και οι πρώτες παράγωγοί τους, δηλαδή οι ταχύτητες. Αν όμως το άλλο σύστημα αναφοράς κινείται έτσι ώστε το διάνυσμα της ταχύτητάς του να μην είναι σταθερό, οι εξισώσεις εν γένει δεν θα είναι ίδιες. Παρουσιάζεται λοιπόν η ανάγκη ύπαρξης ενός συστήματος αναφοράς. Τέτοιο σύστημα αναφοράς θεωρείται από την κλασσική φυσική το *σύστημα αναφοράς των απλανών αστέρων*. Όλες οι εξισώσεις που έχουμε μάθει απ' το σχολείο ισχύουν γι' αυτό το σύστημα και για όσα κινούνται με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτά, θα έχει εν γένει διαφορετική μορφή. Οι απλανείς αστέρες είναι άστρα που βρίσκονται τόσο μακριά, που φαίνεται να μην κινούνται καθόλου και θεωρούνται ακίνητα από τους γήινους. Βέβαια καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχει αντικειμενικότητα στην επιλογή του αδρανειακού συστήματός μας, αφού αν ήμασταν δε άλλη περιοχή του σύμπαντος άλλο σύστημα αναφοράς θα διαλέγαμε, επιταχυνόμενο ως προς αυτό που έχουμε θεωρήσει τώρα. Το πρόβλημα αυτό όμως είναι καθαρά θεωρητικό και ξεπερνιέται με τη σύγχρονη φυσική (κβαντομηχανική) για όποιον θέλει να είναι συνεπής με τις επιστημονικές αρχές. Στην πράξη, το αδρανειακό σύστημα των απλανών αστέρων είναι επαρκέστατο και για τον πιο λεπτομερή υπολογισμό, αρκεί οι ταχύτητες που εμπλέκονται στο πρόβλημά μας να είναι μη σχετικιστικές, δηλαδή μακριά (π.χ. λιγότερο από 1%) από την ταχύτητα του φωτός, πράγμα που ισχύει σε πολύ μεγάλο βαθμό για οποιοδήποτε μηχανολογική κατασκευή της εποχής μας και του άμεσου μέλλοντος. Γι' αυτό οι μηχανολόγοι χρησιμοποιούν τις εξισώσεις της κλασσικής μηχανικής και δεν υπάρχει ο παραμικρός πρακτικός λόγος να μπλέκονται με τις εξισώσεις της σύγχρονης φυσικής. Μάλιστα, σε περιπτώσεις μελέτης ενός φαινομένου στην επιφάνεια της γης, συνήθως γίνεται η *παραδοχή* ότι η γη είναι αδρανειακό (εννοείται πάντα ως προς τους απλανείς αστέρες) σύστημα, γιατί οι διαφορές στους υπολογισμούς είναι πάρα πολύ μικρές και η περιπλοκότητα στις ακριβείς εξισώσεις πολύ μεγάλη. Η επιφάνεια της γης δεν είναι αδρανειακό σύστημα ως προς τους απλανείς, κυρίως γιατί περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της (αλλά και όλη μαζί μ' αυτόν γύρω από το κέντρο του γαλαξία, ο οποίος δεν είναι ακίνητος ως προς τους απλανείς). Για τις μελέτες ροής σε στροβιλομηχανές, σχεδόν πάντα θεωρείται αδρανειακό σύστημα αναφοράς η επιφάνεια της γης.

Αφού λοιπόν όλες οι εξισώσεις που ξέρουμε είναι γραμμένες ως προς τους απλανείς αστέρες εκτός κι αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, το ίδιο ισχύει και για τις εξισώσεις που έχουν γραφεί ως τώρα (αλλά και για σχεδόν όλες τις εξισώσεις που μαθαίνει ένας μηχανικός), εκτός από την εξίσωση εξ. (1.5α) στην οποία αναφέρεται σαφώς ότι είναι γραμμένη για *σχετικό* και συγκεκριμένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Έστω τώρα ότι έχουμε μια μηχανή η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και στην οποία ρέει ρευστό. Αυτός είναι ο κανόνας στις *υδροδυναμικές μηχανές* και στις *στροβιλομηχανές*. Παράδειγμα μιας τέτοιας μηχανής είναι μια αντλία νερού ή ένας ακτινικός συμπιεστής αέρα. Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε τη ροή σ' αυτή τη μηχανή. Ως προς απόλυτο σύστημα αναφοράς, που στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε τη γη, η ροή είναι

πολύ περίπλοκη και υπάρχουν σοβαρές δυσκολίες στον υπολογισμό της. Σίγουρα είναι μη μόνιμη, το στερεό όριο κινείται και οι οριακές συνθήκες είναι δύσκολο να καθοριστούν. Άλλο ένα πρόβλημα που πιθανόν να συναντήσουμε, είναι στην ανάπτυξη του οριακού στρώματος και τη μοντελοποίηση της τύρβης. Οι αντίστοιχες θεωρίες αναπτύχθηκαν για μακροσκοπικά μόνιμες ροές και ίσιο τοίχο, και όχι για τόσο περίπλοκη ροή και τοίχο που περιστρέφεται. Αντίθετα, ένας παρατηρητής που γυρίζει μαζί με τη μηχανή παρακολουθεί μια μακροσκοπικά σταθερή μέση ροή, ο τοίχος του φαίνεται ακίνητος και όλα μοιάζουν πιο απλά. Πράγματι, η μελέτη της ροής σε τέτοιες περιπτώσεις γίνεται στο *σχετικό σύστημα*, αυτό για το οποίο τα σταθερά όρια της μηχανής είναι ακίνητα. Οι επιστήμονες έχουν καταλήξει ότι αυτό είναι απλούστερο.

Αφού λοιπόν όλοι συμφωνούν να κάνουμε τη μελέτη στο σχετικό σύστημα, αυτό κάνουμε κι εμείς. Όπως είπαμε όμως ο κινούμενος παρατηρητής πρέπει να χρησιμοποιήσει διαφορετικές εξισώσεις από αυτές που χρησιμοποιεί ο ακίνητος παρατηρητής. Από τη φυσική ξέρουμε ακριβώς πώς αλλάζουν οι εξισώσεις. Στην περίπτωση ροής ρευστών που μελετάται σε σχετικό σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται (εννοείται ως προς την επιφάνεια της γης) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, αλλάζει η εξίσωση της ορμής που παίρνει τη μορφή της εξ. (1.5α) όπου οι δύο νέοι όροι είναι συναρτήσεις γνωστών ποσοτήτων, δηλαδή γνωστοί. Στην περίπτωση του νευτώνειου ρευστού, απλά προτίθενται οι δύο νέες γνωστές ποσότητες στις εξισώσεις Navier – Stokes.

Αυτό ήταν λοιπόν; Αλλάζουν λίγο οι εξισώσεις Navier – Stokes; Αν τις λύσουμε απευθείας (DNS) ναι. Δυστυχώς όμως, πήραμε τη μέση τιμή τους χρονικά και μοντελοποιήσαμε τους όρους που ήταν άγνωστοι (τάσεις Reynolds) με παραδοχές επίπεδης πλάκας που δεν ξέρουμε αν ισχύουν εδώ. Τίποτα δε μας λέει ότι η ανάπτυξη του οριακού στρώματος θα είναι αντίστοιχη της πλάκας, τώρα που οι εξισώσεις είναι διαφορετικές. Ή, ισοδύναμα, μπορεί οι ψευδοδυνάμεις (στοιχειώδης ορισμός λίγο παρακάτω) που αντιστοιχούν στους καινούργιους όρους που εμφανίστηκαν στις εξισώσεις να έχουν κάποια επίδραση στην δομή της τύρβης όπως την ξέρουμε από τα πειράματα: αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς, δεν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές μεθόδους μοντελοποίησης της τύρβης, γιατί τίποτα δε μας λέει ότι ισχύουν. Θα έπρεπε κανονικά να φτιάξουμε καινούργια μοντέλα για την περίπτωση που έχουμε επιπλέον δυνάμεις. Όμως, λογικό ήταν να προσπαθήσουν οι επιστήμονες να τροποποιήσουν τα *ήδη υπάρχοντα μοντέλα*, ώστε να τα κάνουν να έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια. Άλλωστε δε μιλάμε για κάποια τελείως άσχετη περίπτωση, αλλά για μια λίγο διαφοροποιημένη. Στην εργασία, και συγκεκριμένα σ' αυτό το κεφάλαιο, θα δούμε αρκετές τροποποιήσεις κάποιων μοντέλων τύρβης που προτείνουν διάφοροι ερευνητές ώστε αν τα εφαρμόσουμε για περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στην πρόλεξη της ροής. Λίγα, ουσιαστικά μόνο δύο, από αυτά τα διαφοροποιημένα μοντέλα δοκιμάστηκαν κατά τη διάρκεια της πτυχιακής (αυτή ήταν η κύρια ενασχόληση) και έγινε προσπάθεια να συγκριθούν τα αποτελέσματά τους σε διάφορες περιπτώσεις ροής. Να σημειωθεί εδώ, ότι και στην περίπτωση που θα κάναμε τη μελέτη ως προς το απόλυτο σύστημα αναφοράς, η μοντελοποίηση της τύρβης δε θα ίσχυε όπως την ξέρουμε, ή, ισοδύναμα, θα υπάρχουν αλλαγές στη δομή της τύρβης.

### 3.1. ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΔΥΝΑΜΗ CORIOLIS (ΑΠΟ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ).

Εστω δυο συστήματα αναφοράς που περιστρέφονται το ένα ως προς το άλλο, χωρίς όμως σχετική μεταφορική κίνηση. Για ευκολία θεωρούμε ότι τα δύο συστήματα έχουν κοινή αρχή. Εστω ότι έχουμε δύο παρατηρητές,  $O$  και  $O'$ , που βρίσκονται δεμένοι ο ένας στο ένα παρατηρητής  $O$  βλέπει τον  $O'$ , που βρίσκονται δεμένοι ο ένας στο ένα σύστημα (έστω  $X, Y, Z$ ) και ο άλλος στο άλλο (έστω  $X', Y', Z'$ ), όπως δείχνει το σχ. 3.1. Ο παρατηρητής  $O$  βλέπει τον  $O'$  και το σύστημά του να γυρίζουν με γωνιακή ταχύτητα  $-\omega$ .

Κάποια στιγμή, ένα σημείο  $A$  του χώρου στο οποίο βρίσκεται ένα σωματίδιο, προσδιορίζεται από την *επιβατική ακτίνα*  $r$ , που θα είναι στην περιπτώσή μας ίδια για τα δύο συστήματα, αφού έχουν κοινή αρχή. Η χρονική παράγωγος του διανύσματος της επιβατικής

ακτίνας είναι (εξ' ορισμού) η ταχύτητα. Η ταχύτητα του σωματιδίου  $A$  θα είναι διαφορετική για τα δύο συστήματα. Αν, για παράδειγμα, το  $A$  είναι ακίνητο για τον  $O'$ , για τον  $O$  θα διαγράφει κύκλο με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Αν, στη γενική περίπτωση, για τον  $O'$  έχει ταχύτητα  $V'$ , τότε ο  $O$  θα μετράει μια ταχύτητα

$$V = V' + \omega \times r \quad (3.1)$$

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι: Αν ο  $O'$  μετράει επιτάχυνση  $a'$ , ο  $O$  τι επιτάχυνση θα μετράει; Για να τη βρούμε, πρέπει να παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση ως προς τον παρατηρητή  $O$ , οπότε, αν το κάνουμε προσεκτικά, προκύπτει ότι:

$$a = a' + 2\omega \times V' + \omega \times (\omega \times r) \quad (3.2)$$

Ο δεύτερος όρος του δευτέρου μέλους είναι γνωστός ως επιτάχυνση Coriolis και ο τρίτος αντιστοιχεί σε μια κεντρομόλο επιτάχυνση. Η εξίσωση αυτή εξ. (3.2) συνδέει τις επιταχύνσεις που μετράνε δυο παρατηρητές που περιστρέφονται ο ένας ως προς τον άλλο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Βλέπουμε ότι δεν είναι, οπότε και μια εξίσωση που περιγράφει π.χ. ισορροπία δυνάμεων στο ένα σύστημα, δε θα έχει όμοια μορφή στο άλλο.

Ο δεύτερος όρος της επιτάχυνσης Coriolis έχει επικρατήσει να αναφέρεται με αυτό το ειδικό όνομα (από τον επιστήμονα που πρώτος μίλησε γι' αυτόν) επειδή είναι λίγο «παράξενος» και στην αρχή δεν είχε γίνει αντιληπτή η ύπαρξή του. Πράγματι, πολύ εύκολα μπορεί κανείς να κάνει την εξής λανθασμένη σκέψη: Αν το σωματίδιο  $A$  είναι ακίνητο για τον  $O'$ , για τον  $O$  έχει την κεντρομόλο επιτάχυνση  $\omega \times (\omega \times r)$ , οπότε αν για τον  $O'$  έχει επιτάχυνση  $a'$ , για τον  $O$  θα έχει  $a = a' + \omega \times (\omega \times r)$ , πράγμα που είναι λάθος. Βλέπουμε ότι μ' αυτή την επιτόλαιη σκέψη αγνοούμε εντελώς την επιτάχυνση Coriolis. Ο Gaspard Coriolis καλός μηχανικός και μαθηματικός που έζησε από το 1792 ως το 1843 ήταν αυτός που έφερε στο προσκήνιο αυτή τη δύναμη (κάθε επιτάχυνση αντιστοιχεί σε μία δύναμη, αν πολλαπλασιάσουμε με μάζα). Από τότε ο όρος αυτός φέρει το όνομά του, μάλλον κυρίως για πρακτικούς λόγους. Συμφέρει δηλαδή στην πράξη να λέμε «αν ένα σύστημα περιστρέφεται, τότε ασκείται και η φυγόκεντρος δύναμη και η δύναμη Coriolis» χωρίς να ψάχνουμε το γιατί, παρά να μπλέκουμε με εξισώσεις μη αδρανειακών συστημάτων.

Η εξ. (3.2) χρησιμεύει κυρίως όταν γράφεται για τον κινούμενο παρατηρητή, δηλαδή για τον  $O'$  αν θεωρήσουμε ότι ο  $O$  είναι αδρανειακός. Δηλαδή ξέρουμε την «απόλυτη», την «κανονική» δύναμη που ασκείται και ψάχνουμε να βρούμε τι δύναμη πρέπει να θεωρήσει ο κινούμενος για να εξηγήσει τα φαινόμενα που παρατηρεί. Αξίζει ν' αναφερθεί το πιο χρήσιμο και κλασσικό παράδειγμα της περιστροφής της γης, αφού άλλωστε από κει ξεκίνησαν όλα.

Θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση σώματος ως προς τη σφαίρα της γης. Εννοείται ότι σ' αυτή την περίπτωση δε μπορούμε να θεωρήσουμε αδρανειακό σύστημα την επιφάνεια της γης. Σε κάποιο σημείο  $A$  της επιφάνειας της γης, ο ακίνητος (ο προς τους απλανείς αστέρες) παρατηρητής μετράει επιτάχυνση της βαρύτητας  $g_0$ . Για τον ακίνητο παρατηρητή δηλαδή, η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας  $m$  είναι  $mg_0$  και αυτή είναι η «αληθινή» δύναμη, η δύναμη που ασκείται. Για μας που βρισκόμαστε στη γη όμως ( $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα της γης και  $V'$  η ταχύτητα του σώματος που βρίσκεται στο  $A$  όπως τη μετράμε από τη γη):

$$a' = g_0 - 2\omega \times V' - \omega \times (\omega \times r) \quad (3.3)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι για μας στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις: Η αληθινή δύναμη που προκύπτει από το νόμο της παγκόσμιας έλξης και δύο «ψευδοδυνάμεις», η δύναμη Coriolis και η φυγόκεντρος δύναμη. Ψευδοδυνάμεις καλούνται επειδή δεν πληρούν τον ορισμό της δύναμης ως μάζα επί επιτάχυνση ή ως μέτρο μεταβολής της ορμής, οπότε μπορούν να θεωρηθούν δυνάμεις (εξαρτώμενες σ' αυτή την περίπτωση από το σύστημα αναφοράς).

Η ύπαρξη αυτών των δυνάμεων είναι αντιληπτή στους γήινους. Για παράδειγμα, για ένα σχεδόν ακίνητο σώμα (οπότε η δύναμη Coriolis μηδενίζεται) η επιτάχυνση που μετράμε στη γη ότι του ασκείται λέγεται ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  και ισχύει:

$$g = g_0 - \omega \times (\omega \times r) \quad (3.4)$$

Αυτή είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας που έχουμε μάθει από το σχολείο ότι αλλάζει, ενώ η κανονική επιτάχυνση της βαρύτητας  $g_0$  προκύπτει από το νόμο της παγκόσμιας έλξης και έχει σταθερή τιμή. Άρα το ότι αλλάζει η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι συνέπεια της περιστροφής της γης και πιο συγκεκριμένα της φυγόκεντρου επιταχύνσεως λόγω της περιστροφής της γης. Άλλη μια συνέπεια του ίδιου πράγματος, είναι ότι η διεύθυνση της κατακορύφου, δηλαδή η διεύθυνση του νήματος της στάθμης, αποκλίνει ελαφρά από την ακτινική διεύθυνση της γης. Ακόμη, η φυγόκεντρος επιτάχυνση κάνει ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση να μετατοπίζεται ελαφρά από την ακτινική κατεύθυνση.

Αν ένα σώμα κινείται, τότε του ασκείται (όπως βλέπουμε τα πράγματα από τη γη) άλλη μια δύναμη, η δύναμη Coriolis. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση. Τότε, η εξ. (3.3), θα έχει μια επιπλέον επιτάχυνση λόγω του όρου Coriolis, η οποία μάλιστα θα δούμε ότι κατευθύνεται προς τα ανατολικά στο βόρειο ημισφαίριο και δυτικά στο νότιο. Για ένα πύραυλο πρέπει να ληφθεί υπόψη η απόκλιση της πορείας του λόγω του όρου Coriolis. Αποτέλεσμα του όρου αυτού είναι οι στροβιλισμοί του ανέμου. Αν για κάποιο λόγο δημιουργηθεί στην ατμόσφαιρα μια χαμηλή πίεση, αέριες μάζες πάνε να καλύψουν το κενό, οπότε αποκτούν μια ταχύτητα, οπότε τους ασκείται η δύναμη Coriolis δημιουργώντας μια απόκλιση προς τα δεξιά για το βόρειο ημισφαίριο. Αποτέλεσμα είναι τα στροβιλιζόμενα νέφη που βλέπουμε ως σπείρες στις φωτογραφίες από τους δορυφόρους, τα οποία στο βόρειο ημισφαίριο έχουν κατεύθυνση πάντα αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Το ίδιο γίνεται και στο νερό που μπαίνει σε ένα σιφόνι. Τα στοιχεία του ρευστού τρέχουν προς την τρύπα και αν δούμε τη φορά της δύναμης Coriolis είναι κάθετη στην πορεία του καθενός δημιουργώντας μια απόκλιση της πορείας του καθενός προς τα δεξιά και το αποτέλεσμα είναι ο στροβιλισμός τους, πάντα αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Άλλο εντυπωσιακό παράδειγμα επίδρασης της δύναμης Coriolis που οφείλεται στην περιστροφή της γης γύρω από τον εαυτό της είναι το εκκρεμές του Foucault. Αυτό ήταν ένα πολύ μακρύ εκκρεμές που διαπιστώθηκε ότι άλλαζε το επίπεδο ταλάντωσής του όσο περνούσαν οι ώρες. Άρα ασκούσαν κάποια δύναμη κάθετα στην πορεία του, που δεν ήταν άλλη από τη δύναμη Coriolis. Και μόνο αυτά τα παραδείγματα δείχνουν στους επιστήμονες ότι η γη περιστρέφεται και μάλιστα μπορεί να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα, από το εκκρεμές π.χ. του Foucault.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο κινούμενος παρατηρητής (άνθρωποι στη γη) θεωρεί, προκειμένου να εξηγήσει και να περιγράψει τα φαινόμενα που συμβαίνουν, την ύπαρξη κι άλλων δυνάμεων, που δεν υπάρχουν στο απόλυτο σύστημα αναφοράς. Στην πράξη τώρα, μπορεί να ξεχάσει τα περί συστημάτων αναφοράς και να πει ότι υπάρχουν στο φαινόμενο που μελετάει άλλες δύο δυνάμεις: η Coriolis και η φυγόκεντρος. Αυτό θα κάνουμε στα επόμενα.

Η μόνη περίπτωση πρακτικής αξίας μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς είναι αυτή που αναφέρθηκε, της περιστροφής με σταθερή ταχύτητα.

Ως περίληψη, γράφεται η ουσία της §3.1, το μόνο που θα χρειαστεί παρακάτω: «Ο περιστρεφόμενος και ο ακίνητος παρατηρητής μετράνε διαφορετικές επιταχύνσεις  $a'$  και  $a$  αντίστοιχα, που διαφέρουν κατά ένα όρο Coriolis κι ένα όρο κεντρομόλου επιτάχυνσης, εξ. (3.2)».

## 3.2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.

### 3.2.1. Θεμελιακές εξισώσεις ροής περιστρεφόμενο σύστημα.

Έστω ότι έχουμε μια περιστρεφόμενη με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μηχανή και θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροή μέσα της. Όπως είπαμε παραπάνω, συμφέρει να γράψουμε τις εξισώσεις στο σχετικό σύστημα, και να θεωρήσουμε αυτό ως σύστημα αναφοράς.

Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις Navier – Stokes που αφορούν ισορροπία δυνάμεων, θα έχουν μια λίγο διαφορετική μορφή βάσει όσων είπαμε παραπάνω.

Ας δούμε τις εξισώσεις Navier – Stokes, εξ. (1.30), ή καλύτερα εξ. (2.11). Ουσιαστικά μας λένε με τι ισούται η απόλυτη επιτάχυνση. Οπότε, βάσει της εξ. (3.2) και θεωρώντας το ρευστό ασυμπιεστο μπορούμε να καταλήξουμε στις παρακάτω εξισώσεις Navier – Stokes για



περιστροφόμενο σύστημα, όπου με  $\vec{W}$  συμβολίζεται το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας, δηλαδή της ταχύτητας όπως τη μετράει ο κινούμενος παρατηρητής:

$$\frac{D\vec{W}}{Dt} = -2\vec{\omega} \times \vec{W} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + f \quad (3.5)$$

Με  $f$  έχει συμβολιστεί η επιτάχυνση λόγω συνεκτικών δυνάμεων. Αυτή είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς. Να σημειωθεί ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι αυτή που μετράει ο ακίνητος (ως προς την επιφάνεια της γης) παρατηρητής για τον κινούμενο και το διάνυσμα της επιβατικής ακτίνας θεωρούμε ότι το ίδιο για τους δύο παρατηρητές αφού έχουμε θεωρήσει κοινή αρχή των αξόνων.

Ο όρος της κεντρομόλου επιταχύνσεως μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \nabla \left( \frac{-\omega^2 R^2}{2} \right) \quad (3.6)$$

$R$  είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

Η μορφή αυτή γραφής λέγεται *συντηρητική μορφή γραφής του όρου*. Ο όρος που βρίσκεται μέσα στο ανάδελτα, λέγεται *δυναμικό* (στη συγκεκριμένη περίπτωση της κεντρομόλου επιταχύνσεως). Για κάθε συντηρητική δύναμη μπορεί να βρεθεί ένα δυναμικό με την κλίση του οποίου θα ισούται. Συντηρητικές δυνάμεις είναι αυτές που το ολοκλήρωμα του έργου τους σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

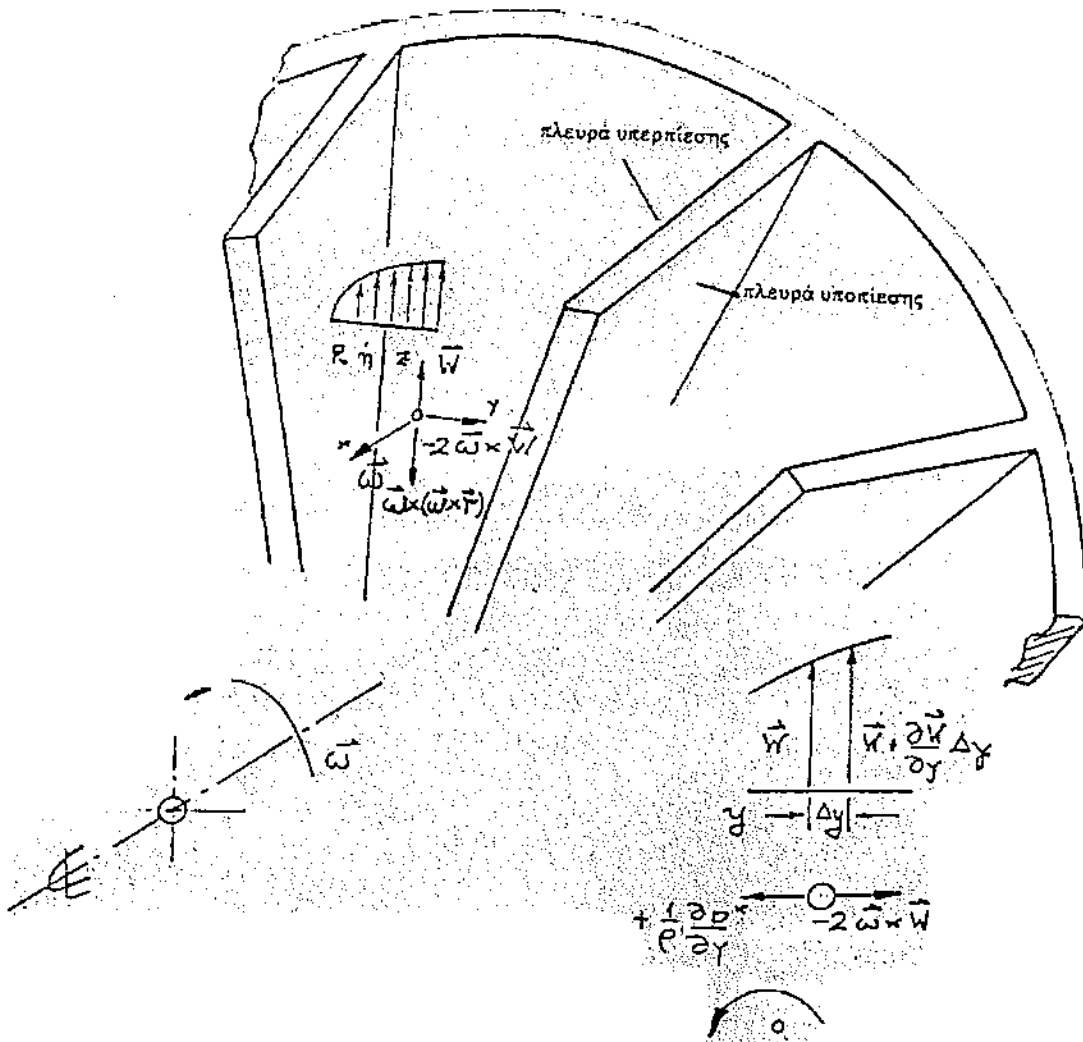
Λόγω της παραπάνω σχέσης, μπορεί ο όρος της κεντρομόλου να εισαχθεί στην κλίση της πίεσης. Έτσι, για ασυμπίεστο, μη συνεκτικό ρευστό (περίπτωση Euler) και θεωρώντας αμελητέα την επίδραση της βαρύτητας (πράγμα που ισχύει αν η ροή μας δεν έχει μεγάλες υψομετρικές διαφορές), οι παραπάνω εξισώσεις της ορμής για τον κινούμενο παρατηρητή εξ. (3.5) μπορούν να απλοποιηθούν:

$$\frac{D\vec{W}}{Dt} = -2\vec{\omega} \times \vec{W} - \frac{\nabla p^*}{\rho} \quad (3.7)$$

όπου

$$p^* = p - \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 \quad (3.8)$$

Στο σχ. 3.2 φαίνονται οι διευθύνσεις κάποιων από τα διανύσματα που συναντάμε στις παραπάνω εξισώσεις για την περίπτωση μιας ακτινικής στροβιλομηχανής



Σχήμα 3.2. Διεύθυνση της επιτάχυνσης Coriolis σε ακτινική μηχανή.

Όπως βλέπουμε από την εξ. (3.7), αλλά και από το σχήμα, η ύπαρξη του όρου Coriolis δημιουργεί την ανάγκη ύπαρξης μιας επιπλέον κλίσης πίεσης ώστε να τον εξισορροπήσει. Ακόμη, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι το πεδίο της κεντρομόλου (ή φυγοκέντρου αν βάλουμε και τι πρόσημο, ανάλογα σε ποιον παρατηρητή αναφερόμαστε) δύναμεις υπάρχει συνεχώς και εισάγει μια ακτινική κλίση, άσχετα αν κινείται το ρευστό ή όχι. Έτσι έχουμε μια αύξηση (για την περίπτωση ακτινικού συμπίεστή) της στατικής πίεσης κατά την ακτινική κατεύθυνση, χωρίς μάλιστα να υποβάλουμε σ' όλη αυτή την κλίση πίεσης το οριακό στρώμα. Αυτό φαίνεται πιο καθαρά με ένα ισολογισμό ενέργειας.

Πράγματι, θεωρώντας το έργο των δυνάμεων κατά μήκος μιας γραμμής ροής, φτάνουμε σε μια ενεργειακή εξίσωση που στην περίπτωση της μόνιμης, ισεντροπικής, ασυμπίεστης ροής με αμελητέα επίδραση βαρύτητας γράφεται (ο τόνος σημαίνει «κατά μήκος μιας γραμμής ροής»):

$$d' \left( \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) = 0 \quad (3.9)$$

ή

$$d' \left( \frac{W^2}{2} \right) = d' \left( \frac{p^*}{\rho} \right) \quad (3.10)$$

Βλέπουμε τώρα πιο καθαρά ότι η κλίση (στην περίπτωση του ακτινικού συμπίεστή αύξηση) πίεσης που έχει να αντιμετωπίσει το οριακό στρώμα μέσω της μετατροπής της κινητικής ενέργειας σε στατική πίεση, είναι η κλίση της μειωμένης πίεσης  $p$ , που είναι πάντα

πιο μικρή από την κανονική πίεση  $p$ , αφού προκύπτει από την κανονική πίεση με αφαίρεση θετικού όρου, όπως φαίνεται και από την εξ. (3.8).

Η αύξηση της στατικής πίεσης μέσω της φυγοκέντρου δυνάμεως είναι βασικά που δημιουργεί το μεγάλο λόγο πίεσης των ακτινικών συμπίεστων και μάλιστα χωρίς μεγάλες επιβραδύνσεις της ροής (επιβράδυνση ισοδυναμεί με αύξηση πίεσης, όπως έχουμε ξαναπεί και φαίνεται γρήγορα από την εξίσωση του Bernoulli). Μάλιστα, βάσει των εξ. (3.10) και εξ. (3.8) βλέπουμε ότι πιο μεγάλη είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και η ακτίνα της μηχανής, τόσο πιο μεγάλη αύξηση πίεσης (λόγος πίεσης εξόδου προς είσοδο, όπως λέμε στις στροβιλομηχανές) μπορούμε να πετύχουμε, ή για τον ίδιο λόγο πίεσης, τόσο λιγότερο θα πέσουμε το οριακό μας στρώμα (οπότε θα έχουμε περισσότερες πιθανότητες να μείνει προσκολλημένο).

Παρατηρούμε ότι η δύναμη Coriolis δεν ανακατεύεται στις ενεργειακές συναλλαγές. Αυτό συμβαίνει γιατί η διεύθυνσή της είναι πάντα κάθετη στη στιγμιαία ταχύτητα και ως γνωστόν δύναμη κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο. Όσον αφορά τις κλίσεις πίεσης που δημιουργεί, βλέπουμε στο σχήμα ότι δε δημιουργεί κλίσεις πίεσης στην κατεύθυνση της ροής (ακτινική) όπως η φυγόκεντρος, αλλά στην κατεύθυνση «από πτερύγιο σε πτερύγιο», και μάλιστα με φορά τέτοια που να ενισχύει το πεδίο πιέσεων που υπάρχει από αεροδυναμικούς λόγους, δηλαδή από την πλευρά υπερπίεσης (πλευρά υποπίεσης πτερυγίου στροβιλομηχανής είναι αυτή που έχει μικρότερη πίεση από την άλλη· οι δύο πλευρές του πτερυγίου έχουν διαφορετική πίεση και έτσι στο πτερύγιο ασκείται μια δύναμη, που είναι αυτή που δίνει το έργο, περίπτωση στροβίλου, που πρέπει να καταβάλουμε για να κάνουμε τη μηχανή να γυρίσει, περίπτωση συμπίεστή).

Ως τώρα είδαμε κυρίως στην §3.2 τι μορφή παίρνουν οι εξισώσεις Navier – Stokes στο περιστρεφόμενο σύστημα και κάναμε μερικά σχόλια. Όσον αφορά την εξίσωση της συνέχειας, αυτή μένει ίδια αν αναφερόμαστε σε μόνιμη ροή (εννοείται ότι ταχύτητες μπορούν και να αφορούν τα μεγέθη που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής).

Αρα είδαμε πώς έχουν οι εξισώσεις της ροής για τον περιστρεφόμενο παρατηρητή. Γράφει τις εξισώσεις όπως τις ξέρουμε, με τα μεγέθη όπως τα μετράει ο ίδιος αγνοώντας ότι περιστρέφεται, και απλά προσθέτει στις εξισώσεις Navier – Stokes δύο όρους στο δεύτερο μέλος: τον όρο Coriolis και τον όρο φυγόκέντρου επιταχύνσεως ή ισοδύναμα, βάζει μόνο τον όρο Coriolis και χρησιμοποιεί την μειωμένη πίεση όπως ορίζεται από την εξ. (3.8). Όπως όμως δε λύνονται οι απλές εξισώσεις Navier – Stokes, δε λύνονται ούτε αυτές, οπότε πρέπει πάλι να πάρουμε τη μέση τιμή τους. Αν το κάνουμε αυτό με ακριβώς ίδια διαδικασία, βλέπουμε ότι δεν προκύπτουν νέοι άγνωστοι όροι, εκτός από τις τάσεις Reynolds που είχαν προκύψει και για τον ακίνητο παρατηρητή. Δηλαδή οι μέσες εξισώσεις Navier – Stokes (εξισώσεις Reynolds) για τον κινούμενο παρατηρητή είναι ακριβώς ίδιες με του ακίνητου, απλά έχουν παραπάνω τους όρους Coriolis και φυγοκέντρου. Όμως, οι τάσεις Reynolds δεν μπορούν να υπολογιστούν πλέον με τον τρόπο που είχαμε κάνει για τον ακίνητο παρατηρητή, αλλά δεν είναι ακόμη καιρός να μιλήσουμε γι' αυτό. Ας δούμε αυτά που γράφτηκαν στις τελευταίες γραμμές για την απλή περίπτωση διδιάστατου οριακού στρώματος. Αν

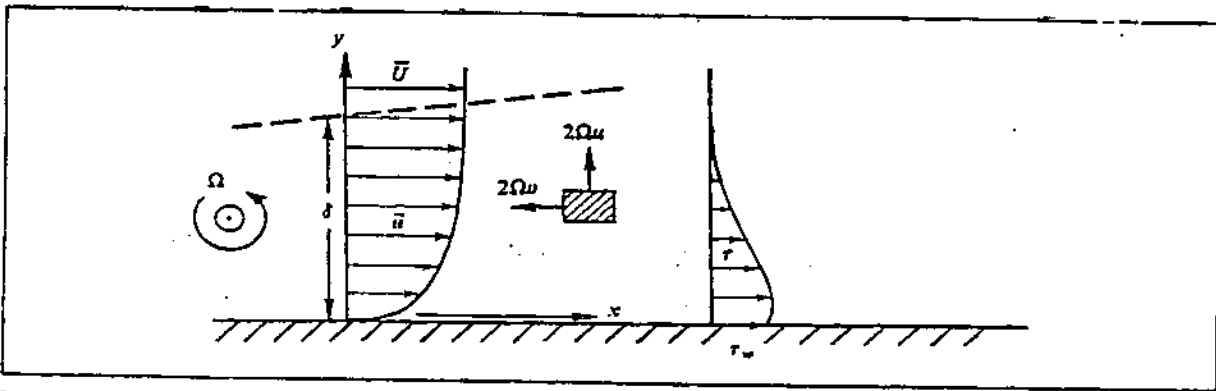
$$\tau = \mu \frac{\overline{\theta u}}{\theta y} - \overline{\rho u' v'} \quad (3.11)$$

οι μέσες χρονικά εξισώσεις Navier – Stokes γράφονται στο σχετικό σύστημα ως εξής για το οριακό στρώμα ασυμπίεστου ρευστού,

$$\frac{D\overline{u}}{Dt} - 2\Omega\overline{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\theta p^*}}{\theta x} + \frac{1}{\rho} \frac{\overline{\theta \tau}}{\theta y} \quad (3.12)$$

$$2\Omega\overline{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\theta p^*}}{\theta y} - \frac{\overline{\theta v'^2}}{\theta y} \quad (3.13)$$

$\Omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι διευθύνσεις των δύο επιταχύνσεων Coriolis που παρουσιάζονται στις παραπάνω εξισώσεις.



Σχήμα 3.3. Προφίλ μέσης ταχύτητας και διατμητικής τάσης σε διδιάστατο οριακό στρώμα σε περιστροφή.

Η εξίσωση της συνέχειας όπως είπαμε μένει ίδια, δηλαδή για διδιάστατο οριακό στρώμα ασυμπίεστου ρευστού θα είναι:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.14)$$

Αν αδιαστατοποιήσουμε την εξ. (3.12) και την κανονικοποιήσουμε έτσι ώστε  $D\bar{u}/Dt \approx 1$ , η επιτάχυνση Coriolis της εξίσωσης είναι της τάξης μεγέθους ενός χαρακτηριστικού αριθμού περιστροφής  $R_o$ , που μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$R_o = \frac{2|\Omega|\delta}{U} \quad (3.15)$$

όπου  $U$  η μέση ταχύτητα της ελεύθερης ροής. Το γεγονός ότι η επιτάχυνση Coriolis είναι της τάξης μεγέθους αυτού του αριθμού σε κανονικοποιημένη εξίσωση, μας κάνει να υποψιαστούμε ότι ο αριθμός αυτός θα παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη ροών σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς. Πράγματι, βλέπουμε ότι ο αριθμός αυτός αντιπροσωπεύει λόγο δύναμης Coriolis προς αδρανειακή δύναμη, άρα είναι χαρακτηριστικός για την ανάπτυξη της ροής σε περιστρεφόμενη μηχανή, μαζί με τον άλλο χαρακτηριστικό αριθμό, τον αριθμό Reynolds, που αντιπροσωπεύει λόγο αδρανειακών δυνάμεων προς συνεκτικές. Βέβαια, όπως συμβαίνει και με τον αριθμό Reynolds, έτσι και με τον αριθμό περιστροφής μπορεί να διαφέρουν οι ορισμοί, άλλος να θεωρεί κάποιο άλλο χαρακτηριστικό μήκος του οριακού στρώματος και όχι το  $\delta$ , άλλος να μη βάζει απόλυτη τιμή στο  $\Omega$ , άλλος να μη βάζει το 2 στον τύπο, κτλ. Πάντα όμως εκφράζει λόγο δυνάμεων περιστροφής προς αδρανειακές. Από τους πρώτους που υποστήριξαν emphatically τη χρήση αυτού του αριθμού για τη μελέτη ροής σε περιστρεφόμενες μηχανές ήταν ο Johnston, αλλά ο αντίστροφος αυτού του αριθμού προϋπήρχε, γνωστός ως αριθμός Rossby. Τυπική τιμή του αριθμού περιστροφής για ακτινική στροβιλομηχανή που περιστρέφεται με 20000 στροφές το λεπτό με μέση ταχύτητα ροής της τάξης του 250 m/s, με οριακό στρώμα πάχους περίπου 5 mm, είναι 0,08. Στα διάφορα πειράματα και δημοσιεύσεις που χρησιμοποιήθηκαν για τη διπλωματική, το ενδιαφέρον υπήρχε κυρίως για τις τιμές του  $R_o$  από 0,01 ως 0,02, οπότε μάλλον τιμές έξω από το εύρος δε θα έχουν πολύ μεγάλη πρακτική αξία.

Αξίζει να κάνουμε μια μικρή διερεύνηση στις εξ. (3.12), εξ.(3.13), με τη βοήθεια του αριθμού περιστροφής.

Για  $R_o \ll 0,01$  (που χαρακτηρίζεται ασθενής περιστροφή), είναι καλή προσέγγιση να διαγραφεί ο όρος Coriolis από την εξ. (3.12). Στην εξ. (3.13) ο όρος Coriolis είναι μικρότερος του τελευταίου όρου, ο οποίος είναι ήδη πολύ μικρός, αφού στα περισσότερα οριακά στρώματα ισχύει:

$$\overline{v'^2} \leq 0,01U^2 \quad (3.16)$$

Άρα οι ακριανοί όροι της εξ. (3.13) είναι αμελητέοι και η εξίσωση απλοποιείται και γίνεται ότι η κλίση της μειωμένης πίεσης είναι σταθερή.

Για  $0,1 < R_0 < 1$  (που χαρακτηρίζεται σχετικός ισχυρή περιστροφή), ο τελευταίος όρος της εξ. (3.13) αμελείται, αφού είναι μια τάξη μεγέθους πιο μικρός από τον όρο Coriolis της εξίσωσης. Σ' αυτή την περίπτωση η εξ. (3.13) μπορεί να ολοκληρωθεί και να εισαχθεί στην εξ. (3.12) και να έχουμε έτσι μια εξίσωση λιγότερη στο πρόβλημά μας.

### 3.2.2. Εξισώσεις τάσεων Reynolds και τυρβώδους ενέργειας σε περιστρεφόμενο σύστημα.

Βλέπουμε ότι τα πράγματα είναι σχετικά απλά, αν ξέραμε τις τάσεις Reynolds. Δυστυχώς όμως δεν τις ξέρουμε και η ύπαρξη των δυνάμεων λόγω περιστροφής τις κάνει να είναι διαφορετικές από την περίπτωση της πλάκας. Άραγε, πώς η περιστροφή επηρεάζει τις τάσεις Reynolds; Καιρός ν' αρχίσουμε να λέμε δυο λόγια γι' αυτό. Ας δούμε αρχικά τι μορφή παίρνουν οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds και η εξίσωση μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Για την περίπτωση του διδιάστατου οριακού στρώματος, οι εξισώσεις των τάσεων Reynolds αποδεικνύεται ότι έχουν τη μορφή:

$$\frac{D(-\overline{u'v'})}{Dt} = \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) 2\Omega + \dots \quad (3.17)$$

$$\frac{D(\overline{u'^2})}{Dt} = (-\overline{u'v'}) 2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - (-\overline{u'v'}) 4\Omega + \dots \quad (3.18)$$

$$\frac{D(\overline{v'^2})}{Dt} = 0 + (-\overline{u'v'}) 4\Omega + \dots \quad (3.19)$$

$$\frac{D(\overline{w'^2})}{Dt} = 0 + 0 + \dots \quad (3.20)$$

Στο αριστερό μέλος είναι οι όροι μεταφοράς, οι πρώτοι όροι στο δεξί μέλος είναι οι όροι παραγωγής (μη περιστροφής) και αμέσως μετά οι νέοι όροι που μπαίνουν λόγω της περιστροφής, οφείλονται στην επιτάχυνση Coriolis και μπορούν να θεωρηθούν όροι παραγωγής. Όλοι οι άλλοι όροι δεν έχουν γραφτεί εδώ και είναι απόλυτα ίδιοι με αυτούς της περίπτωσης που δεν έχουμε περιστροφή. Προσθέτοντας τις εξ. (3.17) και εξ. (3.18) κατά μέλη και διαιρώντας δια δύο, παίρνουμε την εξίσωση μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, και όπως βλέπουμε οι νέοι όροι λόγω της Coriolis αλληλοεξουδετερώνονται και η εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας θα είναι απόλυτα ίδια με αυτή της μη περιστρεφόμενης περίπτωσης. Φυσικά δεν πρέπει να βιαστεί κανείς και να πει ότι η περιστροφή δεν επιδρά στην εξίσωση της τυρβώδους ενέργειας. Η επιτάχυνση Coriolis δημιουργεί ανακατανομή ενέργειας ανάμεσα στους όρους της εξίσωσης. Πιο συγκεκριμένα, επηρεάζεται κυρίως ο όρος παραγωγής της εξίσωσης που εξαρτάται από τις τάσεις Reynolds που έχουμε πει ότι ίδιες τώρα που υπάρχει περιστροφή (δηλαδή επηρεάζονται από τη δύναμη Coriolis). Ακόμη επηρεάζεται ο όρος καταστροφής. Μπορούμε να φανταστούμε την ύπαρξη της δύναμης Coriolis σαν αντλία ενέργειας, που παίρνει ενέργεια μιας μορφής και την κάνει άλλης μορφής, χωρίς απώλειες. Από κάποιους ερευνητές υποστηρίζεται ότι η επιτάχυνση Coriolis σχετίζεται με μεταφορά τυρβώδους ενέργειας μεταξύ της κατεύθυνσης της ροής (x) και της κάθετης σ' αυτή (y). Το γεγονός ότι δεν φαίνεται πουθενά στην εξίσωση της τυρβώδους ενέργειας έπρεπε να ήταν αναμενόμενο, αφού η δύναμη Coriolis δεν παράγει έργο και μπορεί να θεωρηθεί συντηρητική.

Αξίζει να σχολιάσουμε ότι στις μέσες εξισώσεις της ροής (μέσες Navier - Stokes) ανακατεύονται και η δύναμη Coriolis και η φυγόκεντρο, στις εξισώσεις των τάσεων Reynolds μόνο η δύναμη Coriolis και στην εξίσωση μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας καμιά από τις δύο δυνάμεις.

Να διευκρινιστεί ότι οι όροι που αφορούν τις δυνάμεις λόγω περιστροφής δεν αποτελούν μοντελοποίηση, καθώς δεν εισάγουν νέους αγνώστους. Η επίδρασή τους είναι να μεταβάλουν τάσεις Reynolds. Το ότι αλλάζουν οι τάσεις Reynolds μπορούμε να το δούμε από τις

εξισώσεις εξ. (3.16), εξ. (3.17), εξ. (3.18), εξ. (3.19), στις οποίες υπάρχει μέσα η ταχύτητα περιστροφής. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο όρος που επιδρά στις τάσεις Reynolds είναι ο όρος της Coriolis και όχι αυτός της φυγοκέντρου. Δηλαδή από τις δυνάμεις λόγω περιστροφής μόνο η δύναμη Coriolis επιδρά στην τύρβη.

### 3.3 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ CORIOLIS ΣΤΗΝ ΤΥΡΒΗ.

Είδαμε ότι η δύναμη Coriolis επιδρά στη μέση ροή (π.χ. εξ. (3.12), εξ. (3.13)) και την αλλάζει. Οι επιστήμονες (π.χ. Bradshaw, παρατήρησαν όμως ότι η επίδραση που υπήρχε στη ροή ήταν πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι έδειχναν οι παραπάνω εξισώσεις. Για παράδειγμα, το μήκος ανάμιξης άλλαζε περίπου 10 φορές περισσότερο απ' ό,τι θα περίμενε κανείς βάσει των εξ. (3.12), εξ. (3.13). Αυτό ήταν που τους οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η δύναμη Coriolis επιδρά με κάποιο (πιο έμμεσο) τρόπο στην δομή της τύρβης και αλλάζει έτσι τις τάσεις Reynolds. Όταν λέμε ότι αλλάζει τις τάσεις Reynolds, εννοούμε ότι οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων θα είναι τέτοιες που οι μέσες των γινομένων τους να μην ισούνται με την περίπτωση μη περιστροφής, οπότε δε θα ισχύουν γι' αυτές (τις τάσεις) όσα είχαμε πει για την επίπεδη πλάκα και θα μπορούν να υπολογιστούν (έστω προσεγγιστικά) με τους ίδιους τύπους που είχαμε πει εκεί.

Μια ιδέα για το πώς μπορούν ν' αλλάξουν τα γινόμενα των διακυμάνσεων των ταχυτήτων λόγω της δύναμης Coriolis, μπορούμε να πάρουμε σκεφτόμενοι τα εξής: Αν για κάποιο λόγο δημιουργηθεί σε ένα στοιχείο του ρευστού αλλαγή στη  $u'$ , θα υπάρξει αντίστοιχη της αλλαγής επιτάχυνση Coriolis που δρα σε κάθετη κατεύθυνση, οπότε θα επηρεαστεί η  $v'$ , επίδραση που δε θα υπήρχε χωρίς την ύπαρξη της δύναμης Coriolis και η οποία προφανώς οδηγεί σε αλλαγή του όρου  $u'v'$ . Μια καλύτερη σκέψη είναι: Βλέπουμε από τις εξ. (3.17) και εξ. (3.18) ότι η τάση  $-u'v'$  δημιουργεί μια μεταφορά ενέργειας από τον όρο  $v'^2$  προς τον όρο  $u'^2$  (ή αντίστροφα, ανάλογα με τα πρόσημα), οπότε, βάσει της εξ. (3.16) επηρεάζεται πάλι η τάση  $-u'v'$  (π.χ. αυξάνεται) και αυτό δημιουργεί επιπλέον μεταφορά ανάμεσα στους δύο όρους που επηρεάζει πάλι αυτή την τάση κ.τ.λ. Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει ένας κύκλος επιδράσεων που μπορεί να ενισχύσει πολύ μια μικρή αλλαγή σε κάποια τάση. Αυτό μπορεί να δικαιολογήσει γιατί οι τάσεις Reynolds μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές όταν έχουμε περιστροφή, ακόμη κι αν το  $\Omega$  είναι σχετικά μικρό.

#### 3.3.1. Οι πρώτες πειραματικές ενδείξεις ότι υπάρχει επίδραση στη δομή της τύρβης.

Το φαινόμενο της επίδρασης στη ροή λόγω της δύναμης Coriolis είναι αντίστοιχο του φαινομένου της επίδρασης στη ροή λόγω καμπυλότητας των γραμμών ροής κατά την κατεύθυνση της ροής. Η καμπυλότητα αυτή είναι συνηθισμένη σε ροές σε καμπύλες επιφάνειες όπως πτέρυγες, πτερύγια στροβιλομηχανών, καμπύλη πλάκα. Οι αλλαγές στις εξισώσεις λόγω της δύναμης Coriolis είναι αντίστοιχες με τις αλλαγές λόγω καμπυλότητας των γραμμών ροής ή περίπου της επιφάνειας. Τα πειράματα επίσης δείχνουν να συμβαίνουν στο οριακό στρώμα αντίστοιχα φαινόμενα είτε επιδρά δύναμη Coriolis είτε φυγόκεντρος λόγω καμπυλότητας των γραμμών ροής. Γι' αυτό τα φαινόμενα αυτά θεωρήθηκαν αντίστοιχα και συχνά εξετάζονται παράλληλα. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από πειράματα για τη μια περίπτωση ισχύουν σε κάποιο μεγάλο βαθμό και για την άλλη, το ίδιο ισχύει και για τις θεωρητικές μελέτες, αλλά και για τα διορθωμένα μοντέλα τύρβης. Συνήθως μια διόρθωση που έχει φτιαχτεί για την περίπτωση της καμπυλότητας μπορεί με μικρές αλλαγές να προσαρμοστεί και για την περίπτωση της δύναμης Coriolis και αντίστροφα. Γι' αυτό παρακάτω μπορεί ν' αναφερθούμε και σε πειράματα που αφορούν καμπυλότητα θεωρώντας ότι φαινόμενα που παρατηρήθηκαν εκεί ισχύουν λίγο πολύ και για την περίπτωσή μας.

Οι περιπτώσεις καμπυλότητας και επίδρασης δύναμης Coriolis είναι συνηθισμένες στην πράξη και γι' αυτό έχουν γίνει πολλά πειράματα που τις αφορούν, ώστε να μελετηθούν τα φαινόμενα που παρουσιάζονται. Παραδείγματα χρησιμότητας της περίπτωσης που ασκείται δύναμη Coriolis είναι η περίπτωση ροής ακτινικού συμπιεστή (αυτό είναι που ενδιαφέρει και

τι εργαστήριό μας), η ροή στα κανάλια ψύξης πτερυγίων στροβίλων και η ροή στους περιστρεφόμενους δίσκους πτερυγίων στις αξονικές στροβιλομηχανές.

Πειράματα για την επίδραση π.χ. της καμπυλότητας εκτείνονται σε ένα βάθος 60 και πλέον χρόνων. Ήδη ο Reynolds το 1884 είχε διαπιστώσει ότι σε ροή πάνω από μια κυρτή (convex) επιφάνεια δημιουργούνται φαινόμενα που τείνουν να τη σταθεροποιήσουν και ότι πάνω από μια κοίλη η ροή γίνεται περισσότερο ασταθής. Αυτό είναι και πιο σημαντικό φαινόμενο που παρατηρείται. Αργότερα, ο Prandtl το 1929 έδωσε μια φυσική εξήγηση στο φαινόμενο και λίγο αργότερα διατύπωσε μια πρώτη προσπάθεια μοντελοποίησής του με απλή τροποποίηση του μήκους ανάμιξης. Κατοπινά πειράματα σε καμπυλωμένα κανάλια (Wattendorf, 1935, Eskinazi & Yeh, 1956, σχ. 3.5), επιβεβαίωσαν ότι στην κυρτή πλευρά υπήρχαν φαινόμενα σταθεροποίησης και στην κοίλη αποσταθεροποίησης. Αργότερα περιέργως δεν υπήρξε καμία γνωστή προσπάθεια για την ακρίβεια των υπολογιστών όσο περνούσαν τα χρόνια. Μόνο ο Bradshaw στις αρχές της δεκαετίας του 1970 έκανε σοβαρή προσπάθεια για να εισάγουν οι μηχανικοί τα φαινόμενα λόγω καμπυλότητας και Coriolis στον υπολογισμό της ροής. Προξενεί εντύπωση το πόσο αργά έγινε κάτι τέτοιο. Προξενεί εντύπωση το πόσο έγινε κάτι τέτοιο. Πιθανοί λόγοι είναι η μη νομοτελειακή συμπεριφορά του φαινομένου που δεν εμπνέει για μοντελοποίηση και ότι όπως σε όλα τα θέματα, κάποιος πρέπει να βρεθεί να κάνει την αρχή. Πράγματι, μετά τον Bradshaw υπήρξαν πολλοί που ασχολήθηκαν και εκείνη τη δεκαετία υπήρξε μεγάλη προσφορά για τον υπολογισμό της ροής συμπεριλαμβανομένων φαινομένων Coriolis και καμπυλότητας. Ο Bradshaw έκανε την αρχή παρατηρώντας την αναλογία των φαινομένων αυτών με τα αντίστοιχα της μετεωρολογίας, τα οποία υπολογίζονταν και μάλιστα πολλά χρόνια πριν απ' αυτόν. Την ίδια δεκαετία σημαντική ήταν και η προσφορά του Johnston, ο οποίος ίσως εξακολουθεί και σήμερα ν' ασχολείται με το θέμα. Από τότε έγιναν κι άλλα πολλά πειράματα και υπήρξαν πολλές μοντελοποιήσεις που αναπτύσσονταν παράλληλα με την ανάπτυξη των γενικών μοντέλων τύρβης. Σήμερα δηλαδή η ανάπτυξη της μοντελοποίησης των φαινομένων καμπυλότητας και Coriolis σχετίζεται άμεσα με την ανάπτυξη των μοντέλων τύρβης. Ονόματα αρκετών επιστημόνων που ασχολούνται ή έχουν ασχοληθεί με το θέμα θα βρει κανείς στο τέλος, στη βιβλιογραφία.

Το πρώτο πράγμα λοιπόν που μάθαμε απ' τα πειράματα ήταν ότι η επίδραση έχει διαφορετικό πρόσημο ανάλογα με το αν έχουμε πλευρά υποπίεσης ή υπερπίεσης. Στην πλευρά υποπίεσης (suction side) η τύρβη να μειωθεί και λέμε ότι έχουμε φαινόμενα σταθεροποίησης της ροής (stabilization). Το ίδιο συμβαίνει και στην κυρτή επιφάνεια. Στην πλευρά υπερπίεσης (pressure side) παρατηρείται το αντίθετο και η ροή τείνει να γίνει πιο ασταθής και έχουμε αποσταθεροποίηση (destabilization) όπως και στην περίπτωση της κοίλης επιφάνειας. Στην περίπτωση αποσταθεροποίησης τα πειράματα δείχνουν αύξηση του μήκους ανάμιξης, αύξηση της έντασης της τύρβης, αύξηση της διατμητικής τάσης Reynolds, αύξηση του πάχους του οριακού στρώματος, με άλλα λόγια αύξηση της τύρβης. Το αντίθετο παρατηρείται στην περίπτωση που έχουμε σταθεροποίηση. Επειδή αυτή η διαφορετική συμπεριφορά είναι σημαντική για τα επόμενα, υπάρχει λίγο παρακάτω το σχ. 3.4 που την εικονίζει. Το ίδιο σχήμα θα χρησιμοποιηθεί και για τη φυσική εξήγηση του φαινομένου.





γραμμίες στον Prandtl, αλλά έγινε γνωστή από τον Von Karman που την πρωτοδιατύπωσε επίσημα το 1934.

Ας δούμε τώρα και την εξήγηση για την περίπτωση της δύναμης Coriolis.

Έστω ένα τοίχωμα που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και παράλληλα σ' αυτό ροή, φαίνεται στο σχ. 3.4. Ας θεωρήσουμε την πλευρά υπερπίεσης (αριστερή). Έστω ότι σε ένα σημείο A βρίσκεται ένα στοιχείο ρευστού μάζας  $dm$ . Έστω ότι κατά την κατεύθυνση της ροής  $x$  η (μέση) σχετική ταχύτητα του A είναι  $W_A$  και ότι μπορούμε προς στιγμήν γι' απλότητα να τη θεωρήσουμε σταθερή. Τότε ο περιστρεφόμενος παρατηρητής βλέπει το  $dm$  να μην έχει επιτάχυνση, οπότε για τον ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται στο απόλυτο σύστημα αναφοράς το στοιχείο αναφοράς το στοιχείο του ρευστού δέχεται δύναμη

$$F = dm[2\omega \times W + \omega \times (\omega \times r)] \quad (3.21)$$

Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην κεντρομόλο δύναμη, ενώ ο πρώτος στον όρο Coriolis, που λίγο παρακάτω θα συμβολίζεται με  $f$ .

Αν για κάποιο λόγο το στοιχείο απομακρυνθεί από το τοίχωμα και πάει π.χ. στο σημείο B, εκεί θα βρίσκεται σε ένα περιβάλλον που ασκείται μεγαλύτερη δύναμη Coriolis, αφού  $W_B > W_A$ . Το στοιχείο δε μπορεί να ισορροπήσει σ' αυτό το περιβάλλον και αφού η ταχύτητα του αντιστοιχεί σε μικρότερη δύναμη, η μεγαλύτερη δύναμη που ασκείται εκεί (μέσω του γειτονικού περιβάλλοντος, δηλαδή τελικά της πίεσης) το σπρώχνει προς την κατεύθυνσή της κατά ποσό που είναι μεγαλύτερη ( $f_B - f_A$ ). Έτσι το στοιχείο τείνει να απομακρυνθεί κι άλλο από τον τοίχο. Δηλαδή μια διαταραχή ενισχύεται και έχουμε φαινόμενο αποσταθεροποίησης της ροής και αύξηση της τύρβης.

Αν υποθέσουμε ότι το στοιχείο βρίσκεται για κάποιο λόγο στο σημείο Γ, τότε η δύναμη που αντιστοιχεί εκεί είναι μικρότερη και το στοιχείο δε μπορεί να ισορροπήσει, αφού έχει ταχύτητα που αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη δύναμη. Το στοιχείο σπρώχνεται από τα περιβάλλοντα στοιχεία με μια δύναμη ( $f_\Gamma - f_A$ ) που είναι αρνητική, δηλαδή με φορά προς το τοίχωμα, οπότε πάλι επαληθεύεται ότι σ' αυτή την πλευρά, την πλευρά υπερπίεσης, μια μικρή διαταραχή ενισχύεται.

Με όμοιο τρόπο εξηγείται και το φαινόμενο της σταθεροποίησης στην πλευρά υποπίεσης. Αν για παράδειγμα το στοιχείο τείνει ν' απομακρυνθεί από τον τοίχο, στη νέα θέση η δύναμη Coriolis είναι μεγαλύτερη και περισσεύει δύναμη ώστε να το επιταχύνει προς την κατεύθυνσή της, δηλαδή τον τοίχο, όπως βλέπουμε στο σχ. 3.4. Έτσι η πλευρά υποπίεσης δεν ευνοεί τις διαταραχές ταχύτητας και έτσι μειώνει την τύρβη.

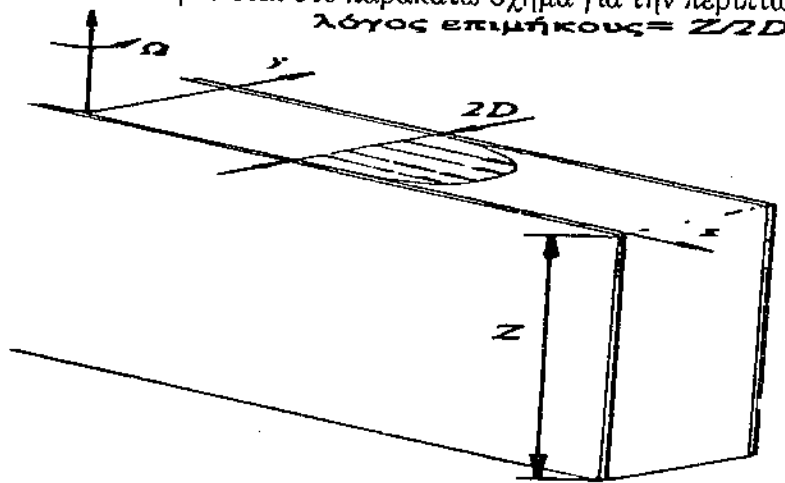
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι γι' αυτή την εξήγηση σημαντικό ρόλο παίζουν οι διαταραχές μόνο στον άξονα  $y$ . Ακόμη, μερικοί ερευνητές θεωρούν ότι είναι απλοποιημένη και ότι θα ταίριαζε καλύτερα σε στρωτή ροή παρά σε τυρβώδη.

Απ' το σχ. 3.4 μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα γιατί π.χ. η πλευρά υπερπίεσης αντιστοιχεί σε κοίλη επιφάνεια. Για τον ακίνητο παρατηρητή το τοίχωμα σε λίγο θα έχει γυρίσει και το οριακό στρώμα θα έχει κάποιο στερεό εμπόδιο (με κάποια κλίση) μπροστά του και θ' αναγκαστεί ν' ακολουθήσει καμπύλη τροχιά (όπως φαίνεται με την διακεκομμένη γραμμή στο σχ. 3.4), όπως ακριβώς και στην περίπτωση της κοίλης επιφάνειας.

Τώρα όμως που δώσαμε την εξήγηση του φαινομένου, μπορούμε να καταβάλουμε ότι η αντιστοιχία καμπυλότητας και περιστροφής δεν είναι απόλυτη. Στην περίπτωση της περιστροφής υπάρχει μια δύναμη που δεν υπάρχει σ' αυτή της καμπυλότητας. Είναι η Coriolis που αντιστοιχεί στη συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα  $y$ . Αν ν αυτή η συνιστώσα (όπως τη μετράει ο κινούμενος παρατηρητής), τότε θα υπάρχει μια δύναμη όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα και δεν θα έχει σημαντική επίδραση, αλλά η ύπαρξή της φτάνει να μας κάνει να πούμε ότι η αντιστοιχία καμπυλότητας και Coriolis δεν είναι πλήρης. Άλλωστε σε κάποιες ροές μπορεί αυτός ο όρος να είναι σημαντικός.

### 3.3.3. Περισσότερα πειραματικά δεδομένα.

Συνήθως για τη μελέτη τέτοιων φαινομένων που συζητάμε εδώ γίνονται πειράματα σε οριακά στρώματα που αναπτύσσονται σε παράλληλης διατομής αγωγούς μεγάλου λόγου επιμήκους. Ο λόγος επιμήκους είναι το πηλίκο της διάστασης του καναλιού στον άξονα  $z$  προς τη διάστασή του στον άξονα  $y$ , όπου  $x$  είναι η κύρια κατεύθυνση της ροής, και  $xy$  το επίπεδο των κλίσεως της ταχύτητας. Μ' αυτό προσπαθούν να επιτύχουν διδιάστατη. Τυπική μορφή τέτοιου καναλιού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για την περίπτωση της περιστροφής.



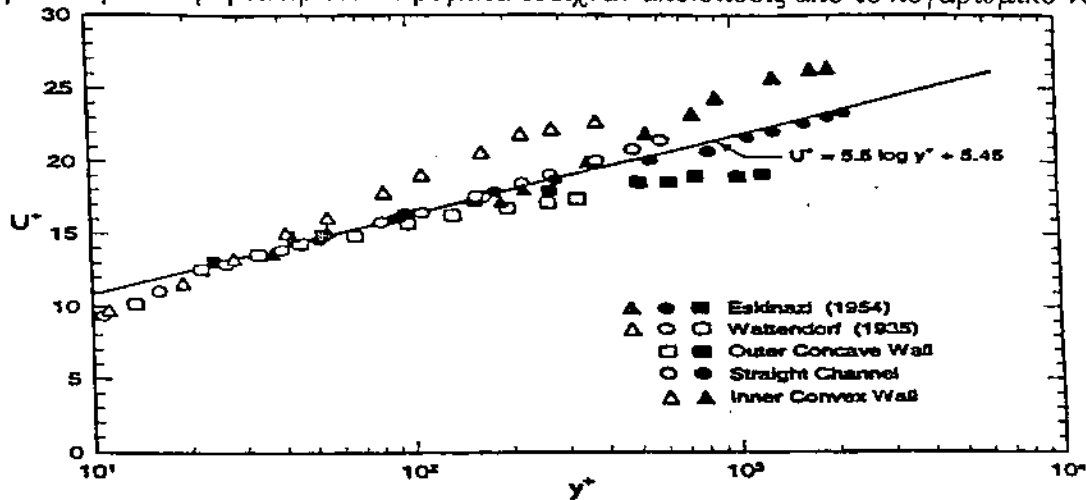
Σχήμα 3.5. Τυπική μορφή καναλιού για μελέτη της επίδρασης Coriolis.

Ακόμη συνηθίζεται να μετριοούνται πλήρως ανεπτυγμένες ροές (γι' αυτό τα κανάλια έχουν γενικά πολύ μεγάλο μήκος) ώστε να μην επιδρούν φαινόμενα ανάπτυξης οριακού στρώματος πάνω στα φαινόμενα καμπυλότητας ή Coriolis, και να είναι πιο άμεσες οι συγκρίσεις με και χωρίς καμπυλότητα / περιστροφή. Αφού έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη ροή, ο πιο χαρακτηριστικός αριθμός Reynolds είναι αυτός που ορίζεται βάσει του πλάτους  $2D$  του καναλιού,  $Re=2DU/v$ , όπου  $U$  μια χαρακτηριστική ταχύτητα, για παράδειγμα η μέση ταχύτητα εισόδου στο κανάλι. Μ' αυτό το χαρακτηριστικό Reynolds συγκρίνουν οι ερευνητές τα αποτελέσματα που βγάζουν ο ένας με τον άλλο. Αφού η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη, το πλάτος του καναλιού είναι χαρακτηριστικό μέγεθος του οριακού στρώματος όπως το  $\delta$  (το οποίο μάλιστα είναι πολύ δύσκολο να οριστεί σ' αυτή την περίπτωση) και μπορεί να το αντικαταστήσει, οπότε ο χαρακτηριστικός αριθμός περιστροφής συνήθως ορίζεται ως  $R_0=2\Omega D / U$  (το  $\Omega$  θεωρείται σε απόλυτη τιμή). Έτσι υπάρχουν δύο μόνο σταθεροί αριθμοί που χαρακτηρίζουν σε μεγάλο βαθμό την πειραματική περίπτωση και από πλευράς (ανάπτυξης) του οριακού στρώματος ( $Re$ ) και από πλευράς επίδρασης λόγω των δυνάμεων Coriolis ( $R_0$ ).

#### 3.3.3.1. Επίδραση στα προφίλ ταχύτητας.

Μετά απ' αυτές τις γενικές παρατηρήσεις για τα πειράματα που έχουν γίνει, ας δούμε κάποια από τα πειραματικά δεδομένα. Το πρώτο πράγμα που θα κοιτούσαμε είναι τα προφίλ ταχύτητας. Θα ισχύει ο νόμος του τοίχου εξ. (2.39); θα ισχύει το σχ. 2.12; Στο σχ. 3.6

βλέπουμε ότι ήδη τα πρώτα πειράματα έδειχναν αποκλίσεις από το λογαριθμικό νόμο.

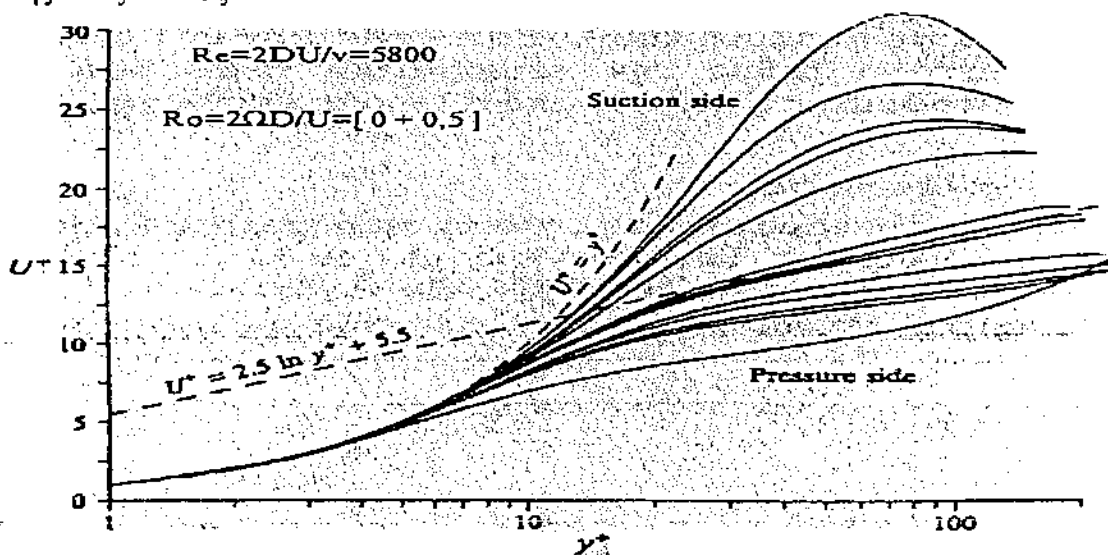


Σχήμα 3.6. Αλλαγή στο νόμο του τοίχου λόγω επίδρασης της καμπυλότητας.

Τα πειράματα αυτά έγιναν σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή με μηδενική κατά μήκος κλίση πίεσης και δείχνουν μια απόκλιση από το γνωστό νόμο εξ. (2.41) όσο απομακρυνόμαστε από τον τοίχο, που μάλιστα είναι προς τα πάνω για κυρτή επιφάνεια και προς τα κάτω για κοίλη. Ακόμη βλέπουμε ότι οι αποκλίσεις δεν είναι συμμετρικές, αφού στην κυρτή επιφάνεια η διαφορά σε σχέση με το ευθύ κανάλι είναι μεγαλύτερη και αρχίζει από πιο νωρίς. Αυτό επαληθεύτηκε απ' όλα τα επόμενα πειράματα, που έδειξαν ότι πράγματι η επίδραση στην κυρτή επιφάνεια είναι μεγαλύτερη απ' αυτή της κοίλης.

Το επόμενο σχήμα αφορά περίπτωση περιστροφής και είναι από εργασία των Kristoffersen, Andersson, 1993, που έκαναν πρόσφατα απευθείας αριθμητική επίλυση (DNS) σε ένα κανάλι για αριθμούς περιστροφής που έφταναν μέχρι το 0,5, τιμή αρκετά μεγάλη. Ας θυμηθούμε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι η απευθείας αριθμητική επίλυση επέχει θέση πειράματος λόγω της μεγάλης της ακρίβειας. Στο σχ. 3.7 βλέπουμε πάλι απόκλιση από το νόμο του τοίχου, για την περίπτωση της περιστροφής αυτή τη φορά.

Το σχήμα αυτό, όπως και το προηγούμενο, αφορούν συγκεκριμένες περιπτώσεις και εδώ μπαίνουν ως ένδειξη ότι τα πειράματα δείχνουν απόκλιση από τις καμπύλες της περίπτωσης της ίσιας πλάκας.



Σχήμα 3.7. Προφίλ αδιάστατης μέσης ταχύτητας για διάφορους αριθμούς περιστροφής.

Από τα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι στην περίπτωση που αυξάνεται η τύρβη (π.χ. πλευρά υπερπίεσης) το προφίλ της αδιάστατης ταχύτητας (ορισμός στη σελ 41) έχει πιο μικρές τιμές. Πράγματι, η μέση ταχύτητα της ροής μένει περίπου σταθερή στο κανάλι με την

τύρβη και το προφίλ γίνεται περισσότερο τυρβώδες. Τα αντίστροφα συμβαίνουν στην άλλη περίπτωση.

Εκτός του ότι η επίδραση στην πλευρά υπερπίεσης είναι αντίθετη απ' αυτή της άλλης πλευράς, βλέπουμε ότι και το ποσό της απόκλισης διαφέρει και είναι πιο μικρό. Δηλαδή η επίδραση είναι τελείως διαφορετική στις δύο περιπτώσεις όχι μόνο ποιοτικά αλλά και ποσοτικά.

Έχουν γίνει κάποιες προσπάθειες να τροποποιηθεί ο νόμος του τοίχου ώστε να λαμβάνει υπόψη του φαινόμενα καμπυλότητας ή Coriolis και να ισχύει έτσι για μεγαλύτερη απόσταση από τον τοίχο. Ο Patel, στο δεύτερο μισό της δεκαετίας του 1960, διαπίστωσε κάποια κοινά στοιχεία της καμπυλότητας με την περίπτωση που έχουμε κατά μήκος κλίση πίεσης. Ο Rotta (1967) διατύπωσε μια πρώτη σχέση διορθωμένου νόμου για καμπυλότητα, βασισμένος στην ισότητα παραγωγής και καταστροφής της τύρβης σ' εκείνη την περιοχή και βάζοντας άλλο ένα όρο στην παραγωγή λόγω της καμπυλότητας. Ο So (1975) βρήκε μια άλλη σχέση χρησιμοποιώντας τη διόρθωση του μήκους ανάμιξης στην περίπτωση της καμπυλότητας.

Επίσης διαβάζουμε ότι δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρο αν και κατά πόσο ο νόμος του τοίχου αλλάζει. Πειράματα σαν αυτά του σχ. 3.6 χρησιμοποιούν την ισχύ του νόμου του τοίχου για να προσδιορίζουν πειραματικά το συντελεστή τριβής (σελ. 41) και ο συντελεστής τριβής χρησιμοποιείται για να φτιαχτεί το σχήμα (μέσω του  $u_\tau$ ) οπότε δεν μπορούμε να ξέρουμε πόσο αξιόπιστο είναι το σχήμα (που μας λέει ότι ο νόμος του τοίχου φαίνεται να μην αλλάζει σε κάποια περιοχή κοντά στον τοίχο). Ερευνητές (Gibson, 1985, Chen, Guo,) υποστήριξαν ότι ο νόμος του τοίχου αλλάζει σε ποσό που δε μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο. Γενικά πάντως, κοιτώντας τις δημοσιεύσεις που υπάρχουν στο τέλος της εργασίας, δεν διαπιστώνουμε σοβαρή ανησυχία των περισσότερων ερευνητών γι' αυτό το θέμα. Σήμερα η ροή υπολογίζεται αριθμητικά με τέτοιο τρόπο (μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds που επιλύουν τη ροή μέχρι τον τοίχο) που συνήθως δεν χρησιμοποιείται πουθενά ο νόμος του τοίχου.

Αυτή η τελευταία περίπτωση είναι περίπτωση χαμηλού Reynolds, όπου όπως είπαμε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου υπάρχουν επιδράσεις στην τύρβη που κάνουν να μην ισχύουν τα κλασικά μοντέλα. Γενικά υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον των ερευνητών για περιπτώσεις χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Αυτό μάλλον δε σημαίνει ότι είναι πιο συχνοί στην τεχνική (κάθε άλλο), αλλά ότι παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον λόγω της αυξημένης περιπλοκότητας. Ακόμη, οι ροές χαμηλών αριθμών Reynolds επηρεάζονται περισσότερο από την περιστροφή. Για ν' αποκτηθεί σιγά σιγά μια εμπειρία, ας πούμε ότι περιπτώσεις με  $Re$  μικρότερο από 10000 είναι περιπτώσεις χαμηλών Reynolds.

### 3.3.3.2. Άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη.

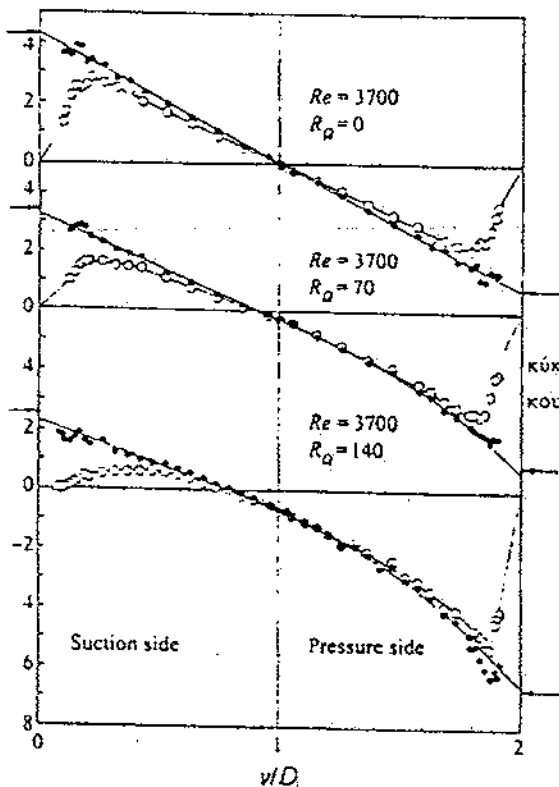
Συχνά αντί να χρησιμοποιηθεί ο Reynolds όπως ορίστηκε παραπάνω, θεωρείται πιο χαρακτηριστικός ο  $Re_\tau = u_\tau D / \nu$  και αντί για τον αριθμό περιστροφής θεωρείται ότι ο  $Ro_\tau = 2\Omega D / u_\tau$  περιγράφει καλύτερα τα φαινόμενα. Έτσι έχουμε σύνδεση των αδιάστατων αριθμών με μια χαρακτηριστική ταχύτητα του οριακού στρώματος, την ταχύτητα τριβής. Αν έχουμε πιο τυρβώδη περίπτωση, ο  $Re_\tau$  θα είναι μεγαλύτερος, αφού όσο πιο τυρβώδες είναι το οριακό στρώμα τόσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα τριβής. Γενικά μεγαλύτεροι  $Re$  σημαίνει και μεγαλύτεροι  $Re_\tau$ . Χοντρικά μπορούμε να πούμε ότι για  $Ro_\tau$  θα είναι μικρότερο, αφού η σχετική επίδραση της δύναμης Coriolis θα είναι πιο μικρή. Τιμές του  $Ro_\tau$  πάνω από 4 θα λέγαμε χοντρικά ότι είναι μεγάλες. Το πρόβλημα με τους παραπάνω ορισμούς είναι ότι πρέπει να ξέρουμε την ταχύτητα τριβής και αυτό είναι πιο δύσκολο από το να ξέρουμε την μέση ταχύτητα.

Υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί που χαρακτηρίζουν σε μεγάλο βαθμό τη ροή. Η παράμετρος Coriolis  $\Omega \nu / u_\tau^2$  θεωρείται ότι μαζί με τον αριθμό  $Re_\tau$  και την αδιάστατη απόσταση  $y^+$  μπορεί να προσδιορίσει μονοσήμαντα την αδιάστατη ταχύτητα. Επίσης υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά μήκη, η κλίμακα μήκους συνεκτικών φαινομένων  $\delta_\nu = \nu / u_\tau$  και η κλίμακα μήκους φαινομένων Coriolis,  $\delta_c = u_\tau / \Omega$ ,  $\Omega$  σε απόλυτη τιμή, που είναι ένα μέτρο της απόστασης από τον τοίχο πέρα από την οποία τα φαινόμενα Coriolis αρχίζουν και γίνονται πολύ σημαντικά. Άλλος αριθμός που χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις μελέτης ροών σε

στρεφόμενο σύστημα αναφοράς είναι ο αδιάστατος αριθμός Reynolds της περιστροφής,  $Re = 4D^2\Omega/\nu$ , που τον θεωρούμε θετικό, βάζοντας το  $\Omega$  σε απόλυτη τιμή.

### 3.3.3.3. Επίδραση στα προφίλ των τάσεων.

Όπως αλλάζει το προφίλ ταχύτητας μεταξύ ακίνητου και περιστρεφόμενου καναλιού, έτσι αλλάζει και το προφίλ διατμητικών τάσεων. Για παράδειγμα, ας δούμε το παρακάτω σχήμα σχ. 3.8 που είναι από πειράματα των Nakabayashi, Kitoh, 1996. Οι πάνω γραμμές, που είναι για ακίνητο κανάλι, είναι ευθείες γιατί έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη ροή. Το ότι οι τάσεις είναι αρνητικές στη πλευρά είναι θέμα ορισμού του άξονα  $y$ . Βλέπουμε ότι η διατμητική τάση Reynolds έχει κατεύθυνση προς το 0 όσο πλησιάζει στον τοίχο, ενώ η ολική τάση κοντά στον τοίχο μένει περίπου σταθερή, όπως έχουμε πει σε προηγούμενο κεφάλαιο. Ακόμη βλέπουμε ότι όπως ξέρουμε, η τάση λόγω συνεκτικότητας έχει μη αμελητέες τιμές μόνο κοντά στον τοίχο, ενώ πιο πέρα η τυρβώδης τάση σχεδόν ταυτίζεται με την ολική.



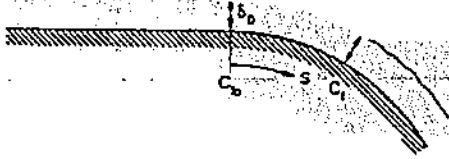
Σχήμα 3.8. Διανομή διατμητικής τάσης με και χωρίς περιστροφή.

Όσο αυξάνει η ταχύτητα περιστροφής (δύο κάτω διαγράμματα) βλέπουμε κατ' αρχήν το βασικό φαινόμενο, ότι η τύρβη (άρα και η τυρβώδης διατμητική τάση) αυξάνεται στην πλευρά υπερπίεσης, ενώ μειώνεται στην πλευρά υποπίεσης. Ακόμη, γίνεται πιο απότομο το προφίλ τυρβώδους τάσης στην πλευρά υπερπίεσης και ομαλό στην πλευρά υποπίεσης, πράγμα λογικό αν σκεφτούμε ότι στη μέση του καναλιού η τάση δεν είναι πλέον 0 και αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κλίση έχει διαπιστωθεί ότι έχει την τιμή  $2\Omega$ . Στην κάτω περίπτωση ( $Re=140$ ) ο αριθμός περιστροφής ήταν  $Ro=0.0378$  και στην πλευρά υποπίεσης βλέπουμε το προφίλ να τείνει να γίνει επίπεδο. Πράγματι, από πολλά πειράματα έχει διαπιστωθεί ότι στην πλευρά υποπίεσης μπορεί να παρατηρηθεί επαναστρωτοποίηση της ροής, δηλαδή υποβαθμίζεται τόσο πολύ η τύρβη, που ουσιαστικά εξαφανίζεται και πλέον η ροή γίνεται πάλι στρωτή. Το φαινόμενο αυτό είναι πολύ εντυπωσιακό και η πρόβλεψή του από αριθμητικό επιλύτη ροής είναι πολύ δύσκολη. Προφανώς όσο πιο μεγάλος ο αριθμός περιστροφής τόσο περισσότερες είναι οι πιθανότητες να παρατηρηθεί, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν παρουσιάζεται και για μέσους  $Ro$ . Τέλος στο σχήμα βλέπουμε να καμπυλώνεται η γραμμή του προφίλ των τάσεων, παρόλο που έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη ροή. Αυτό θα μπορούσε να εξηγηθεί αν δεχτούμε την ύπαρξη τρισδιάστατων φαινομένων.

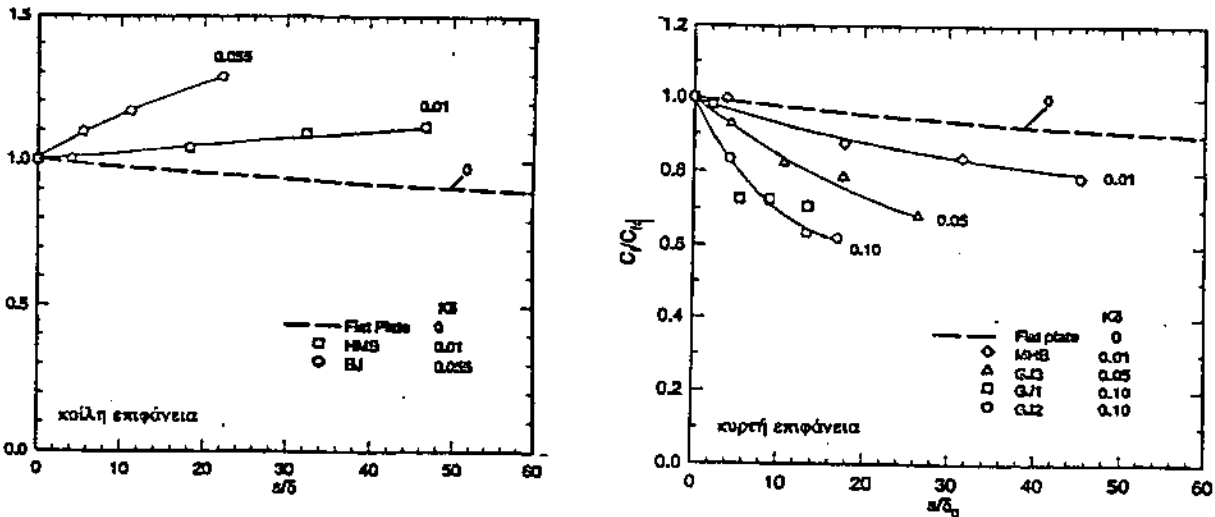
Πράγματι, σε πολλά πειράματα έχουν παρατηρηθεί αντίστοιχα φαινόμενα και φαίνεται να σχηματίζονται μεγάλου μεγέθους δίνες μορφής τυλιγμένου χαλιού με άξονα παράλληλο στον άξονα  $x$ . Οι δίνες αυτές παρουσιάζονται στην πλευρά υπερπίεσης κυρίως για μεγαλύτερους αριθμούς  $Re_0$ . Μοιάζουν με τις δίνες Taylor – Görtler, και στα πειράματα παρουσιάζεται πάντα κάποιος μικρός αριθμός αντιστροφόμενων ζευγών απ' αυτές. Το φαινόμενο είναι πολύ εντυπωσιακό, γιατί η ροή υποτίθεται ότι είναι διδιάστατη. Παρακάτω θα πούμε περισσότερα σε μια ειδική αναφορά σ' αυτό.

### 3.3.3.4. Επίδραση στο συντελεστή τριβής.

Αφού είδαμε τι γίνεται με την τυρβώδη τάση, να δούμε πόσο αλλάζει ο συντελεστής τριβής  $c_f$  (ορισμός εξ(2.34)) καθώς προχωράμε προς την κατεύθυνση της ροής. Αυτό έχει μεγάλη πρακτική αξία, γιατί εκεί που μηδενίζεται ο συντελεστής τριβής έχουμε αποκόλληση της ροής. Καταρχήν σε επίπεδη πλάκα πέφτει όσο προχωράμε, αφού όσο περισσότερο αναπτύσσεται ένα οριακό στρώμα τόσο πλησιάζει προς την αποκόλληση και κανένα δε θα μπορούσε να μείνει για πάντα προσκολλημένο. Γι' αυτό η διακεκομμένη γραμμή στο επόμενο σχήμα σχ. 3.9 έχει φθίνουσα πορεία. Για να είναι πιο άμεσες οι συγκρίσεις, ο συντελεστής τριβής αδιαστατοποιείται με την τιμή που είχε λίγο πριν αρχίσει η καμπυλότητα. Έτσι μπορούμε να βάλουμε στο ίδιο διάγραμμα πειράματα διαφορετικών αριθμών Reynolds.



HMB=Πείραμα του Hoffman, Muck και Bradshaw, (1985).

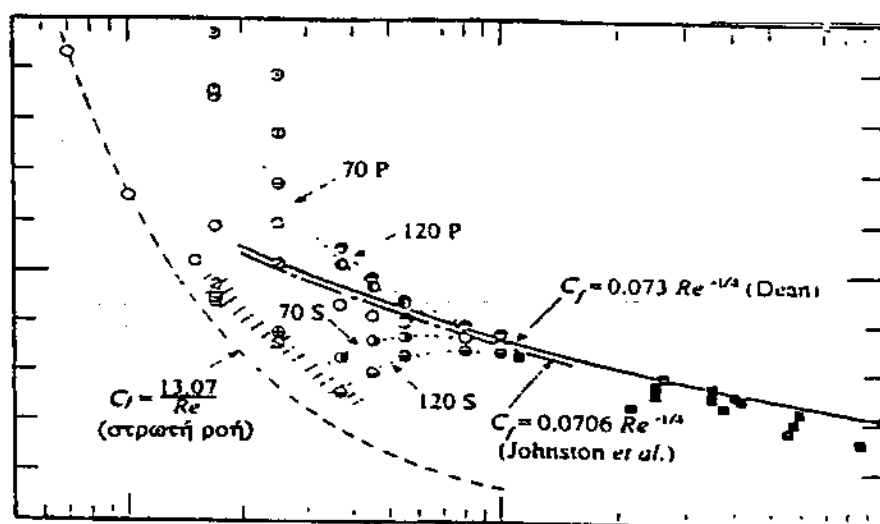


Σχήμα 3.9. Αλλαγές στο συντελεστή τριβής σε καμπύλη ροή σε σχέση με την πλάκα.

Στην περίπτωση της κυρτής επιφάνειας η φυσική μας διαίσθηση μας λέει ότι το ρευστό θα δυσκολεύεται ν' ακολουθήσει την καμπυλότητα και θα έχει μεγαλύτερη τάση αποκόλλησης απ' ό,τι στην επίπεδη πλάκα και πράγματι αυτό συμβαίνει, σε τόσο μεγαλύτερο βαθμό όσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα (η καμπυλότητα μιας επιφάνειας συμβολίζεται με  $K=1/R$ ). Η μείωση του συντελεστή τριβής είναι πιο μεγάλη για μεγαλύτερη καμπυλότητα, αλλά όχι ανάλογα μ' αυτήν. Ακόμη, όσο διαρκεί η καμπύλη πέφτει μεν το  $c_f$ , αλλά με μειούμενους ρυθμούς.

Στην περίπτωση της κοίλης επιφάνειας παρατηρούνται τα συμμετρικά φαινόμενα. Βλέπουμε ότι και μικρή καμπυλότητα αρκεί να κάνει το συντελεστή τριβής ν' αυξάνει προς τα κατάντι αντί να μειώνεται, όπως θα συνέβαινε με την πλάκα. Η αύξηση της τύρβης κάνει τι οριακό στρώμα πιο δύσκολο ν' αποκολληθεί. Φαινόμενα σαν κι αυτά που περιγράφονται εδώ για καμπυλότητα, ισχύουν και ένα περιστρεφόμενο κανάλι, πριν αποκατασταθεί πλήρως ανεπτυγμένη ροή.

Αν έχουμε ανεπτυγμένη ροή το  $c_f$  δεν αλλάζει με την απόσταση. Σε κάθε κανάλι που έχει πλήρως ανεπτυγμένη ροή όμως ο συντελεστής τριβής θα είναι διαφορετικός, γι' αυτό θα παρουσίαζε ενδιαφέρον ένα διάγραμμά του με τον Reynolds ( $=2DU/v$ ). Ένα τέτοιο διάγραμμα για την περίπτωση της περιστροφής φαίνεται στο επόμενο σχήμα σχ. 3.10. Βλέπουμε ότι στην πλευρά υπερπίεσης έχουμε αύξηση τύρβης, η διατμητική τάση στο στερεό όριο αυξάνει (ή ισοδύναμα, απομακρυνόμαστε από αποκόλληση) και ο συντελεστής τριβής αυξάνει. Αντίθετα φαινόμενα συμβαίνουν στην περίπτωση της πλευράς υποπίεσης. Από τέτοια διαγράμματα προκύπτει ότι στην πλήρως τυρβώδη περιοχή ο συντελεστής τριβής σε κανάλια φαίνεται να σχετίζεται με το Reynolds με μια απλή σχέση της μορφής (Dean, 1978).

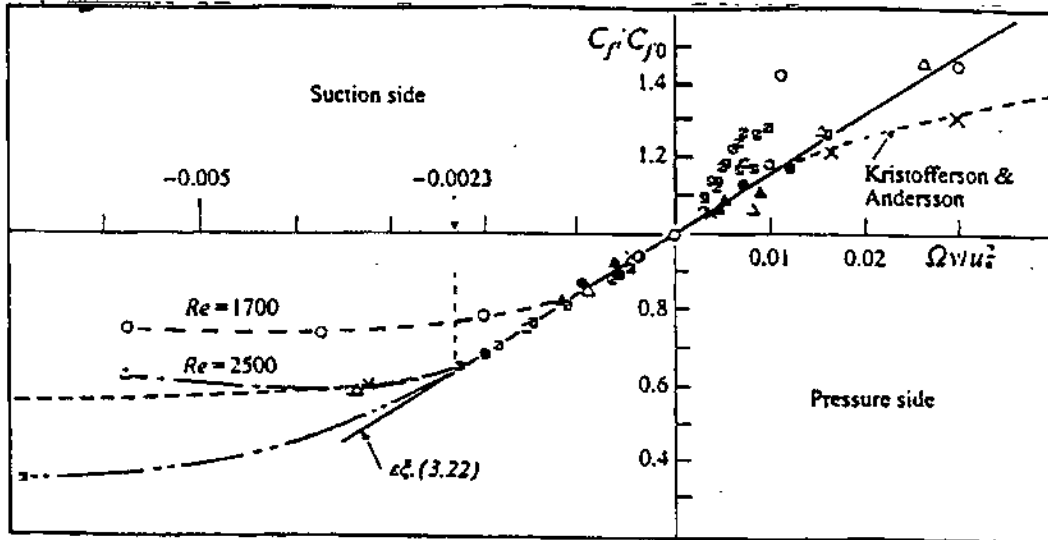


Σχήμα 3.10. Συντελεστής τριβής συναρτήσει Reynolds σε κανάλια με και χωρίς περιστροφή.

Το σχήμα αυτό είναι από τα πειράματα των Nakabayashi, Kitoh, που έγιναν για αριθμό Reynolds μέχρι 10000. Τα σημεία πιο δεξιά είναι από άλλους ερευνητές. Οι σκέτοι κύκλοι είναι για μη περιστροφή και βλέπουμε τη μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή για Reynolds γύρω στο 1700.

Βλέπουμε ότι όσο αυξάνει η περιστροφή, η απόκλιση από το ακίνητο κανάλι είναι μεγαλύτερη, αφού οι καμπύλες για  $R_\Omega=120$  απέχουν περισσότερο απ' την περίπτωση μηδενικής περιστροφής απ' ότι αυτές με  $R_\Omega=70$ . Στην πλευρά υποπίεσης (S) η κλίση της καμπύλης  $c_f(Re)$  μπορεί ν' αντιστραφεί και να έχουμε αύξηση του  $c_f$  με αύξηση του Reynolds, ενώ κανονικά συμβαίνει το ανάποδο.

Ο ρυθμός απόκλισης αυξάνει όσο προχωράμε προς μικρότερους αριθμούς Reynolds, και αυτό σημαίνει ότι το φαινόμενο της επίδρασης Coriolis στην τύρβη έχει εξάρτηση από τον αριθμό Reynolds. Συγκεκριμένα όσο μικραίνει ο αριθμός Reynolds τόσο περισσότερο εντείνεται το φαινόμενο. Η φυσική εξήγηση αυτού είναι ότι όσο πιο μικρό αριθμό Reynolds έχουμε τόσο πιο αδύναμη είναι η τύρβη, άρα είναι πιο εύκολο να μετατραπεί λόγω φαινομένων επίδρασης δύναμης Coriolis. Ενδιαφέρον για τη μελέτη του  $c_f$  παρουσιάζουν οι άξονες του παρακάτω σχήματος. Υπάρχουν δεδομένα από το κλασικό πείραμα των Johnston, Halleen, Lezius και από την αριθμητική επίλυση DNS. Ο συντελεστής τριβής με το δείκτη  $\theta$  που χρησιμοποιείται γι' αδιαστατοποίηση είναι αυτός της περίπτωσης χωρίς περιστροφή, με ίδιες τις λοιπές συνθήκες.



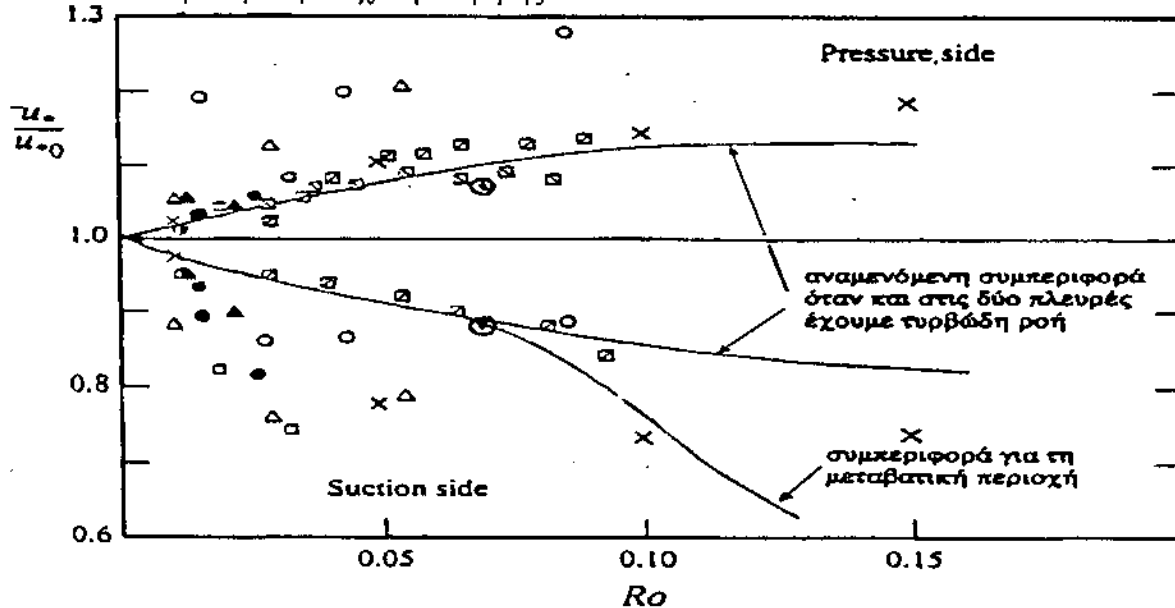
Σχήμα 3.11. Κανονικοποιημένος συντελεστής τριβής ως προς την παράμετρο Coriolis.

Στο σχήμα φαίνεται μια ευθεία γραμμή. Αυτή έχει εξίσωση:

$$\frac{c_f}{c_{f_0}} = 1 + 160 \frac{\Omega}{u_*^2} \quad (3.22)$$

και φαίνεται να συμπίπτει ικανοποιητικά με πολλά πειραματικά δεδομένα γύρω από το κέντρο των αξόνων, κυρίως στην πλευρά υποπίεσης. Γι' αυτό οι συγκεκριμένοι άξονες προτείνονται για μελέτη τέτοιων φαινομένων. Το σημειωμένο νούμερο στην πλευρά υποπίεσης (-0,0023) είναι ένα χαρακτηριστικό νούμερο κάτω απ' το οποίο σύμφωνα με τους συγγραφείς είναι πιθανό να συμβεί επαναστρωτοποίηση. Η περίπτωση  $Re=1700$  σ' όλα τους τα διαγράμματα φαίνεται λίγο παράταιρη και μάλλον πρέπει ν' αγνοηθεί εντελώς, αφού είναι πολύ κοντά στο να μη χαρακτηριστεί πλήρως τυρβώδης.

### 3.3.3.5. Επίδραση στην ταχύτητα τριβής.



Σχήμα 3.12. Επίδραση της περιστροφής στην ταχύτητα τριβής.

Προφανώς αφού αλλάζει ο συντελεστής τριβής, θ' αλλάζει και η ταχύτητα τριβής, αφού συνδέονται άμεσα (συνδυάζοντας εξ. (2.33) και εξ. (2.34) προκύπτει  $c_f=2(u_w/U)^2$ , όπου  $U$  η ταχύτητα της εξωτερικής ροής, ή στην περίπτωση του καναλιού συνήθως η μέση ταχύτητα. Μάλιστα στο προηγούμενο σχήμα σχ. 3.11 θα μπορούσαμε στον άξονα  $y$  να είχαμε  $(u_w/u_{w0})^2$ . Συνηθίζεται όμως από τους ερευνητές να παρουσιάζεται το διάγραμμα της ταχύτητας τριβής (αδιαστατοποιημένης με την ταχύτητα τριβής γωσίς περιστροφή) ως προς τον αριθμό

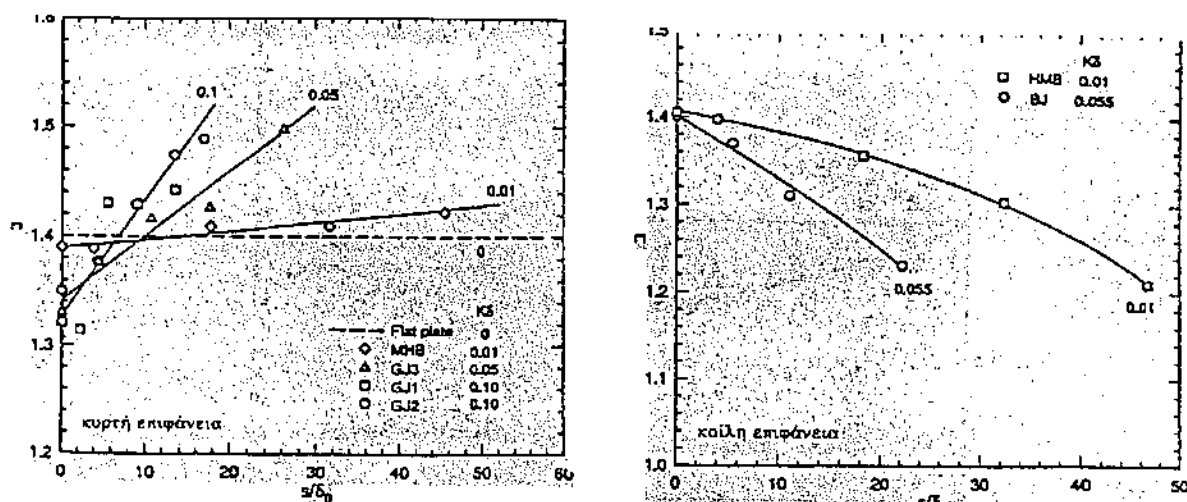


περιστροφής. Το διάγραμμα αυτό πιστεύεται ότι έχει σε κάποιο βαθμό ανεξαρτησία από τον αριθμό Reynolds και αν βάλουμε πάνω του σημεία από διάφορα πειράματα θα φαίνεται να σχηματίζονται κάποιες γραμμές. Ένα τέτοιο διάγραμμα φαίνεται στο σχ. 3.12.

Βλέπουμε το γνωστό πλέον, ότι στην πλευρά υπερπίεσης αυξάνει η ταχύτητα τριβής και το αντίθετο συμβαίνει στην πλευρά υποπίεσης. Οι συνεχείς γραμμές θεωρείται ότι προσεγγίζουν τις περισσότερες από τις πειραματικές περιπτώσεις και είναι από τον Johnston. Παρόλο που όπως είπαμε τα φαινόμενα των δύο πλευρών είναι διαφορετικά και δεν πρέπει να θεωρηθούν αντίστοιχα, βλέπουμε ότι τυχαίνει εδώ να υπάρχει κάποια συμμετρία. Το ίδιο μπορεί να πει κανείς και παρατηρώντας τις δύο περιπτώσεις του σχ. 3.9, που δεν είναι για κανάλι, αλλά για ελεύθερη ροή. Θα λέγαμε ότι η συνεχής γραμμή είναι μια καλή προσέγγιση για περιπτώσεις υψηλών αριθμών Reynolds (Kristoffersen, Nakabayashi) υπάρχουν αποκλίσεις που μάλιστα είναι τόσο μεγαλύτερες όσο μικρότερος είναι ο αριθμός Reynolds. Μάλιστα οι αποκλίσεις είναι προς την κατεύθυνση αύξησης της διαφοράς σε σχέση με την περίπτωση μη περιστροφής διότι όπως είπαμε και πριν, όσο πιο αδύναμη η τύρβη, τόσο πιο ευπαθής σε επιπλέον επιδράσεις.

### 3.3.3.6. Επίδραση στον παράγοντα μορφής $H_{12}$ .

Ο παράγοντας μορφής εξ. (2.6) χαρακτηρίζει σε μεγάλο βαθμό ένα οριακό στρώμα. Γενικά, όσο πιο τυρβώδες είναι ένα οριακό στρώμα, τόσο μικρότερος είναι. Στο σχ. 3.13 φαίνεται το  $H_{12}$  όπως προκύπτει από πειράματα για ελεύθερη ροή πάνω από καμπυλωμένες πλάκες. Το σχήμα είναι αντίστοιχο του σχ. 3.9.



Σχήμα 3.13. Παράγοντας μορφής μετά από επιβολή καμπυλότητας σε ίσια πλάκα.

Το πρώτο πράγμα που κάνει εντύπωση είναι η άμεση απόκριση του οριακού στρώματος στην περίπτωση της κυρτής καμπυλότητας. Πράγματι κι από άλλα πειράματα επαληθεύεται ότι η κυρτή καμπυλότητα (ή αντίστοιχα η πλευρά υποπίεσης) αντιλαμβάνεται πιο γρήγορα από την κοίλη την αλλαγή (ή επίδραση είναι πιο άμεση). Ακόμη βλέπουμε ότι φαίνεται να υπάρχει εξάρτηση του παράγοντα μορφής με την απόσταση για μια συγκεκριμένη καμπυλότητα και κάνει εντύπωση ότι η ευθεία συνεχίζεται και για μεγάλες αποστάσεις. Όσο αυξάνει η καμπυλότητα η κλίση της ευθείας αυτής αυξάνει. Τέλος, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην κυρτή επιφάνεια η πρώτη, άμεση αντίδραση είναι μια πτώση του  $H_{12}$  (που μάλιστα είναι τόσο μεγάλη όσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα) πριν αρχίσει ν' αυξάνει και να ξεπεράσει σε λίγα πάχη οριακού στρώματος αυτόν της ίσιας πλάκας.

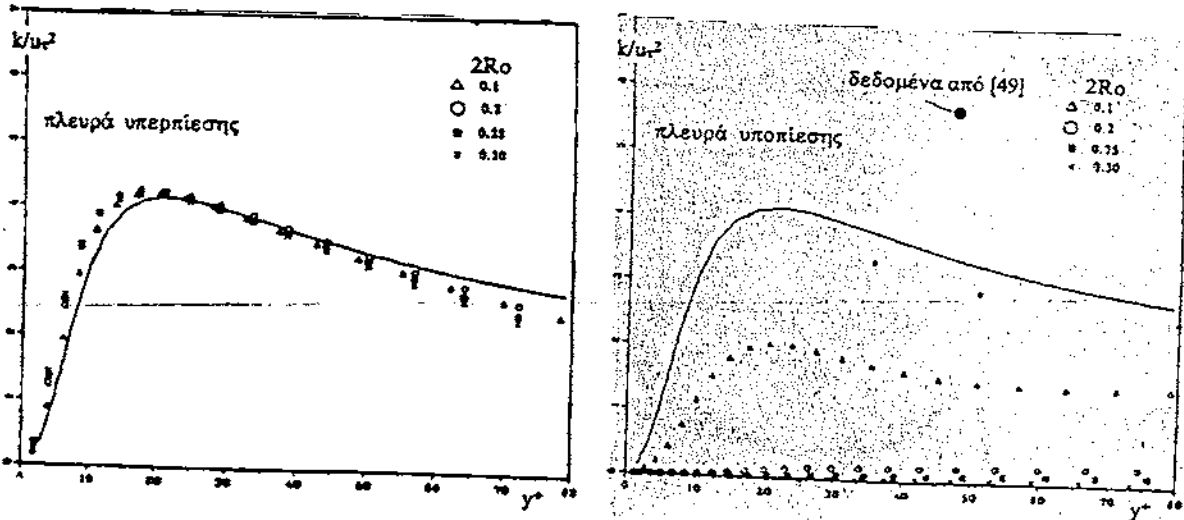
Στην περίπτωση της ίσιας πλάκας, ο συντελεστής τριβής έχει μια γραμμική σχέση με τον παράγοντα μορφής τέτοια ώστε όσο αυξάνει ο ένας ν' αυξάνει ο άλλος. Στην περίπτωση της κυρτής βλέπουμε να μειώνεται το  $c_f$  καθώς αυξάνει το  $H_{12}$  και υπάρχει μεταξύ τους πάλι μια γραμμική σχέση αλλά με αντίθετη κλίση απ' ότι θα

περιμέναμε από γνώσεις οριακών στρωμάτων επίπεδης πλάκας.

### 3.3.3.7. Επίδραση στην τυρβώδη κινητική ενέργεια.

Αφού στην πλευρά υποπίεσης υπάρχει μείωση της τύρβης, περιμένουμε το μέτρο της ενέργειας της τύρβης, η τυρβώδης κινητική ενέργεια  $k$ , να πέφτει. Το αντίθετο θα συμβαίνει για την πλευρά υπερπίεσης. Στο παρακάτω σχήμα σχ. 3.14 φαίνεται η τυρβώδης κινητική ενέργεια αδιαστατοποιημένη με την (αντίστοιχη της) ταχύτητα ως συνάρτηση της απόστασης.

Οι συνεχείς γραμμές δηλώνουν την περίπτωση που δεν υπάρχει περιστροφή. Παρόλο που το σχήμα εικονίζει την περιοχή πολύ κοντά στον τοίχο όπου υποτίθεται ότι η επίδραση Coriolis δεν είναι πάρα πολύ μεγάλη, βλέπουμε σημαντικές αλλαγές, ιδίως στην πλευρά υποπίεσης. Εκεί, για αριθμό περιστροφής πάνω από 0,1 η τύρβη πέφτει πολύ που το προφίλ



Σχήμα 3.14. Προφίλ τυρβώδους κινητικής ενέργειας στις δύο πλευρές περιστρεφόμενου καναλιού.

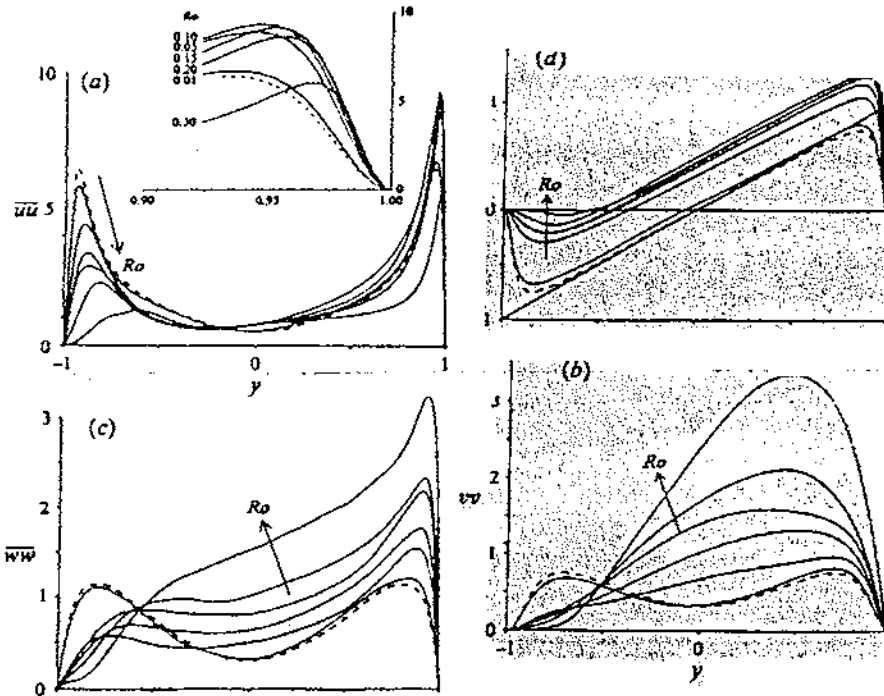
χαρακτηριστική κορυφή του. Η ροή γίνεται πλέον ξανά στρωτή. Στην πλευρά υπερπίεσης βλέπουμε με τους συγκεκριμένους άξονες σημαντικά μικρότερες διαφορές απ' ό,τι σ' αυτήν της υποπίεσης. Αυτό είναι μια ένδειξη γι' αυτό έχει επιβεβαιωθεί από πολλά πειράματα, ότι στην πλευρά υποπίεσης (ή στην κυρτή πλευρά στην περίπτωση της καμπυλότητας) οι αλλαγές που προξενούνται στην τύρβη είναι πιο σημαντικές.

Γενικότερα θα λέγαμε ότι ισχύει ο παρακάτω κανόνας: «η επίδραση στην τύρβη εξαρτάται και απ' την ίδια την τύρβη». Αν έχουμε «παλιό» οριακό στρώμα, δεν καταλαβαίνει και πολλά από επιπλέον επιδράσεις, ενώ ένα αδύναμο με πρόσφατα δημιουργημένη τύρβη είναι πιο ευπαθείς και εύπλαστο. Αυτό εξηγεί την μεγαλύτερη ευαισθησία σε περιπτώσεις χαμηλών αριθμών Reynolds και στην περίπτωση της πλευράς υποπίεσης (λόγω της επίδρασης μειώνεται η τύρβη και η μειωμένη τύρβη είναι πιο ευπαθείς στην επίδραση δημιουργώντας έτσι ένα κύκλο αλλαγών). Πάντως λέγοντας ότι η επίδραση στην τύρβη εξαρτάται από τον Reynolds, καλύπτουμε εν μέρει τον παραπάνω κανόνα.

Για να ξαναγυρίσουμε στο σχήμα τώρα, ας δούμε πάλι την πλευρά υπερπίεσης. Να σημειωθεί ότι η  $k$  αυξάνεται όσο αυξάνεται ο  $Re$ . Στο διάγραμμα φαίνεται περίπου σταθερή διότι είναι διαιρεμένη με το τετράγωνο της ταχύτητας τριβής (που όπως είδαμε πριν, αυξάνεται όσο αυξάνεται το  $Re$ ). Και πάλι βέβαια η διαφορά σε σχέση με τη μεταβολή που υπάρχει στην πλευρά υποπίεσης είναι μεγάλη. Παρόλη την αδιαστατοποίηση, παρατηρούμε όσο ανεβαίνει ο αριθμός περιστροφής μια αύξηση της μέγιστης τιμής με ταυτόχρονη μετατόπισή της προς την πλευρά του τοίχου (αύξηση της τύρβης κοντά στον τοίχο, ισοδύναμο με την αύξηση της ταχύτητας τριβής). Όπως και σε άλλα διαγράμματα που είδαμε ή θα δούμε σ' αυτό το κεφάλαιο, οι καμπύλες στην πλευρά υπερπίεσης τείνουν ν' αποκτήσουν οξύτερα ακρότατα και μεγαλύτερες κλίσεις όσο αυξάνει η ταχύτητα περιστροφής, ενώ στην πλευρά υποπίεσης υπάρχει η τάση να γίνουν επίπεδες.

### 3.3.3.8. Επίδραση στις τάσεις Reynolds.

Είδαμε νωρίτερα τι επίδραση έχει η περιστροφή στην διατμητική τάση Reynolds. Τι συμβαίνει όμως με τις υπόλοιπες τάσεις. Απ' αυτές, οι μόνες μη μηδενικές είναι οι κύριες τάσεις στη διδιάστατη περίπτωση. Φυσικά περιμένουμε σαν γενική συμπεριφορά πτώση τους στην πλευρά υποπίεσης και αύξησή τους στην πλευρά υπερπίεσης. Πράγματι συμβαίνει αυτό, αλλά με όχι τόσο μονότονο και προβλέψιμο τρόπο όπως στην περίπτωση π.χ. της διατμητικής τάσης. Παρακάτω, στο σχ. 3.15, βλέπουμε ένα παράδειγμα μεταβολής των προφίλ των τάσεων Reynolds με αυξανόμενο αριθμό περιστροφής σε ένα κανάλι με πλήρως ανεπτυγμένη ροή.

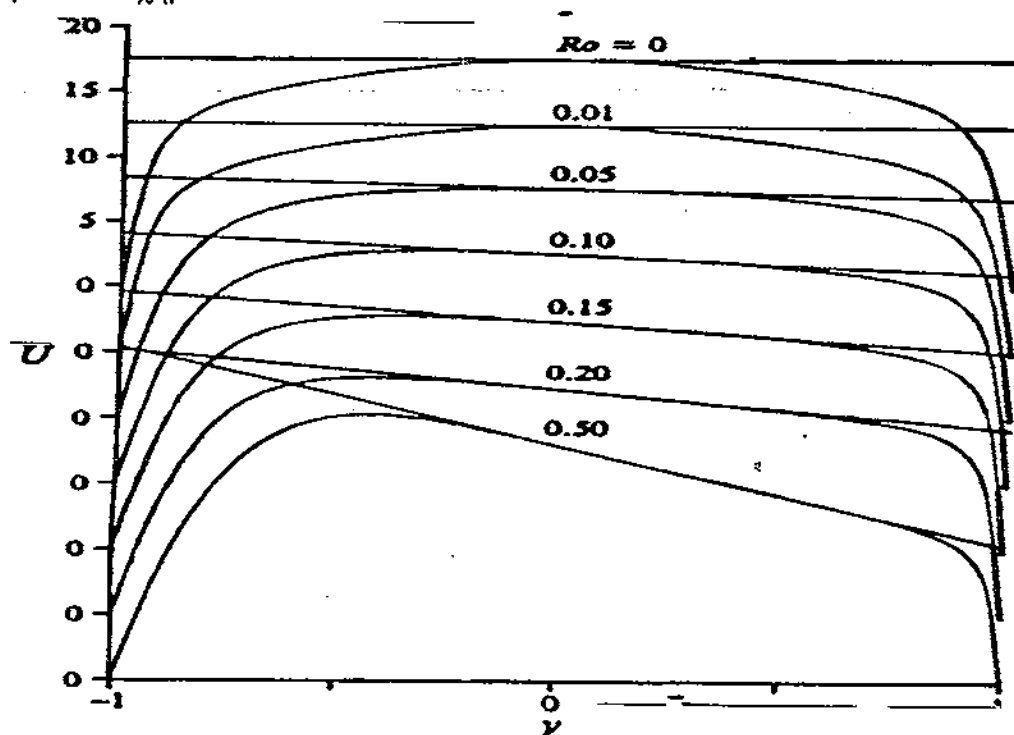


Σχήμα 3.15. Προφίλ κανονικοποιημένων τάσεων Reynolds για διάφορους αριθμούς περιστροφής.

Η πλευρά υποπίεσης είναι στα αρνητικά  $y$ . Οι τάσεις έχουν διαιρεθεί με το τετράγωνο της ταχύτητας τριβής ως αδιαστατοποίηση. Παρατηρούμε ότι στα διαγράμματα υπάρχει μεγαλύτερος βαθμός τυχαιότητας απ' ότι στα προηγούμενα διαγράμματα. Το (d) είναι όμοιο με το σχ. 3.8 δε θα ξανασχολιαστεί. Και στα τέσσερα ισχύει ότι για αριθμό περιστροφής 0,01 είμαστε πολύ κοντά στην διακεκομμένη γραμμή που αφορά ακίνητο κανάλι. Άρα τα φαινόμενα Coriolis παρουσιάζουν κυρίως για αριθμό περιστροφής μεγαλύτερο από 0,01 όπως και νωρίτερα. Στην προσπάθεια να κερδίσουμε κάτι απ' τα παραπάνω διαγράμματα, θα μας βοηθήσουν (πάλι) οι εξισώσεις εξ. (3.16) ως εξ. (3.19) που είναι οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds για την περίπτωση περιστρεφόμενου συστήματος. Βλέπουμε απ' αυτές ότι δεν υπάρχει απευθείας παραγωγή κανενός των  $v'^2$ ,  $w'^2$ , αλλά η ενέργεια μεταφέρεται σ' αυτούς τους όρους μέσω αλληλεπίδρασης τάσεων και πίεσης. Για την περίπτωση των σχημάτων όπου  $\Omega < 0$ , οι εξισώσεις δείχνουν ότι απευθείας επίδραση της Coriolis στην πλευρά υποπίεσης προκαλεί μεταφορά ενέργειας από τον άξονα  $y$  και  $x$  και άρα μια τάση αύξησης της  $u'^2$ . Στο σχ. 3.15α όμως βλέπουμε ότι υπάρχει μείωση της συγκεκριμένης τάσης, άρα η γενική μείωση των τάσεων λόγω της επίδρασης σταθεροποίησης της Coriolis υπερσχύει του παραπάνω μηχανισμού. Δηλαδή, στην εξίσωση εξ. (3.17) η μείωση του πρώτου όρου παραγωγής λόγω της μείωσης της διατμητικής τάσης Reynolds (απ' την οποία εξαρτάται) είναι μεγαλύτερη από την αύξηση που προσφέρει ο δεύτερος όρος (Coriolis). Λόγω της αντίθετης προσφοράς των δύο όρων, αυτή η τάση Reynolds δε δείχνει τελικά να

επηρεάζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την περιστροφή, όπως συμβαίνει με την τάση  $\overline{v'^2}$  που τη βλέπουμε στο διπλανό διάγραμμα (b). Στην εξίσωσή της εξ. (3.18) βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ο πρώτος όρος παραγωγής και ο όρος Coriolis επιδρά απευθείας πάνω της και τη μειώνει στην πλευρά υποπίεσης αυξάνοντάς της σ' αυτήν, της υπερπίεσης. Παρατηρούμε στο (c) ότι και η τάση  $\overline{w'^2}$  έχει ανάλογη συμπεριφορά, παρόλο που στην εξίσωσή της εξ. (3.19) δεν υπάρχει κανένας όρος παραγωγής που να δείχνει να την κάνει να εξαρτάται από την περιστροφή. Η συμπεριφορά αυτή όμως δικαιολογείται λόγω του ότι η γενική μείωση (ή αύξηση) της τύρβης επηρεάζεται τελικά κι αυτή τη συνιστώσα. Για παράδειγμα, στην πλευρά υποπίεσης αφού μειώνονται οι δύο άλλες κύριες τάσεις, λιγότερη ενέργεια είναι διαθέσιμη για  $v'$  αναδιανεμηθεί στον άξονα z. Στα διαγράμματα αυτά η μεγαλύτερη παραφωνία φαίνεται να είναι στο διάγραμμα (α) η μείωση της τάσης στην πλευρά υπερπίεσης για  $Ro=0,5$ . Αυτό οφείλεται σύμφωνα με τους συγγραφείς στην αλλαγή προσήμου του όρου παραγωγής Coriolis της εξ. (3.16) που σχετίζεται με την αύξηση της ζώνης με κλίση  $2\Omega$  στο κέντρο του καναλιού.

Έχει παρατηρηθεί ότι σε τέτοια κανάλια παρουσιάζεται στο κέντρο μια ζώνη με ευθεία μεταβολή της ταχύτητας με την απόσταση από τα τοιχώματα, με κλίση  $2\Omega$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.16. Προφίλ ταχύτητας σε κανάλι με πλήρως ανεπτυγμένη ροή για διάφορους αριθμούς περιστροφής.

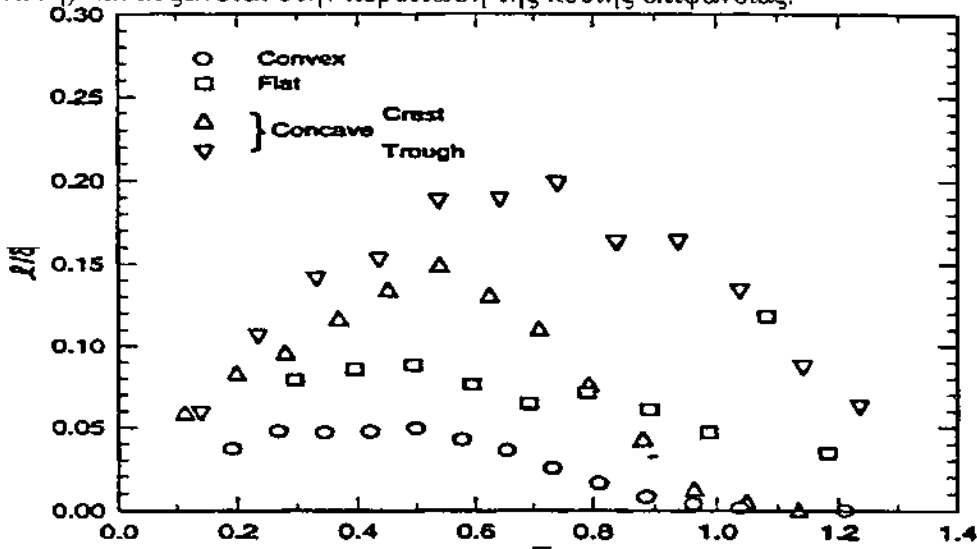
Στη ζώνη αυτή ισχύει  $2\Omega - \frac{dU}{dy} = 0$ , οπότε τα στοιχεία του ρευστού που βρίσκονται εκεί

έχουν συνολική στροβιλότητα μηδέν (για το απόλυτο αναφοράς). Η παράμετρος ευστάθειας  $S$  γίνεται  $-1$ , οπότε έχουμε ουδέτερη ευστάθεια, ούτε αύξηση ούτε μείωση τύρβης. Στην ζώνη αυτή τα προφίλ γίνονται ευθύγραμμα και το πλάτος της αυξάνει όσο πάμε σε μεγαλύτερους αριθμούς περιστροφής. Παρόμοιες ζώνες ουδέτερης ευστάθειας έχουν παρατηρηθεί και για την περίπτωση της καμπυλότητας, ήδη από τα πρώτα πειράματα (Wattendorf, 1935), αλλά και για περίπτωση ροών γύρω από κυλίνδρους.

Καλό είναι εδώ  $v'$  αναφερθεί μια χρήσιμη εμπειρική σχέση του Dean (1978) για πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε κανάλια που συνδέει την ταχύτητα στον κεντρικό άξονα  $U_c$  με τη μέση ταχύτητα  $U_m$ :  $U_c / U_m = 1,28 Re^{-0,0116}$ . Ακόμη μια τοπική τιμή του λόγου  $U_m / u_\tau$  είναι 15,6 (Kim και συνεργάτες, 1987).

### 3.3.3.9. Επίδραση στο μήκος ανάμιξης.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ότι το μήκος ανάμιξης, ως χαρακτηριστικό μήκος των δινών της τύρβης, μειώνεται εκεί που έχουμε σταθεροποίηση (κυρτή επιφάνεια στη συγκεκριμένη περίπτωση) και αυξάνεται στην περίπτωση της κοίλης επιφάνειας.



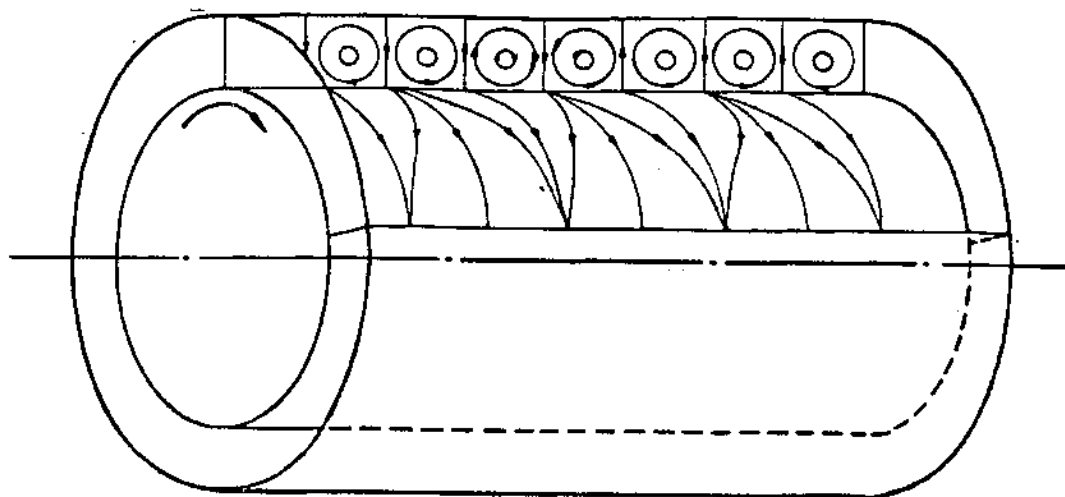
Σχήμα 3.17. Αλλαγές στο μήκος ανάμιξης σε καμπύλες πλάκες σε σχέση με επίπεδη.

Το σχήμα αυτό είναι από τους Hoffmann, Muck, Bradshaw (1985). Απ' αυτό και άλλα πειράματα παρατηρείται ότι στην περίπτωση που έχουμε μείωση της τύρβης (κυρτή επιφάνεια ή πλευρά υποπίεσης) το μήκος ανάμιξης πλησιάζει το 0 πολύ νωρίτερα απ' ότι στην επίπεδη πλάκα. Μ' άλλα λόγια, το πάχος του οριακού στρώματος μικραίνει. Αυτή η μείωση του πάχους του οριακού στρώματος είναι πολύ άμεση και φαινόταν εντυπωσιακή στους πρώτους ερευνητές. Ακόμη, έχει παρατηρηθεί σε πειράματα ν' αρχίσει να γίνεται στρωτό το οριακό στρώμα από έξω προς τα μέσα. Δηλαδή μετρήθηκε μηδενικός τυρβώδης συντελεστής συνεκτικότητας ενώ υπάρχουν ακόμη κλίσεις ταχύτητας και βρισκόμαστε μέσα στο οριακό στρώμα. Στην περίπτωση της κοίλης επιφάνειας το μήκος ανάμιξης αυξάνεται, οι κλίσεις του γίνονται μεγαλύτερες και το μέγιστο του μετατοπίζεται προς το εξωτερικό μέρος του οριακού στρώματος. Η αύξηση του τελευταίου όμως δεν είναι τόσο εντυπωσιακή όπως η μείωση στην περίπτωση της σταθεροποίησης.

### 3.3.4. Δίνες μορφής Taylor – Görtler στην πλευρά αποσταθεροποίησης.

Πολλοί ερευνητές στα πειράματά τους παρατηρούν ή υποψιάζονται ύπαρξη μεγάλων δινών μορφής διπλωμένου χαλιού με άξονα παράλληλο στον κύριο άξονα της ροής. Οι δίνες αυτές παρουσιάζονται στις περιπτώσεις επιδράσεων που ενισχύουν την τύρβη (πλευρά υπερπίεσης ή κοίλη επιφάνεια) και μάλιστα συνήθως όταν υπάρχει μεγάλη επίδραση, άρα και μεγάλη αστάθεια. Το επίπεδο στο οποίο παρουσιάζονται οι στροβιλισμοί είναι το κάθετο στον άξονα x, άρα μιλάμε για ένα τριδιάστατο φαινόμενο, που μάλιστα εμφανίζεται και σε αγωγούς με μεγάλο λόγο επιμήκους. Αντίστοιχη τάση μετάβασης από διδιάστατη ροή σε τριδιάστατη δεν υπάρχει στην πλευρά υποπίεσης και αυτή είναι μια σημαντική διαφορά.

Ο Taylor το 1923 ήταν ο πρώτος που διαπίστωσε στροβίλους αυτής της μορφής σε στρωτή ροή ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κυλίνδρους απ' τους οποίους ο εσωτερικός περιστρέφεται, σχ. 3.18.



Σχήμα 3.18. Δίνες Taylor (στρωτή ροή ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κυλίνδρους).

Παρατηρούμε στο σχήμα ότι οι δίνες παρουσιάζονται κατά αντιπεριστροφόμενα ζεύγη (αναμενόμενο απ' τη ρευστομηχανική έτσι ώστε η συνολική στροβιλότητα να είναι μηδέν, όση ήταν και στην αρχή, πριν αρχίσει η περιστροφή του εσωτερικού κυλίνδρου). Οι γραμμές ροής στην επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου αφορούν τα στοιχεία του ρευστού που βρίσκονται πολύ κοντά σ' αυτόν.

Ο Görtler το 1940 έδειξε ότι ένα διδιάστατο στρωτό σε κοίλη επιφάνεια είναι ασταθές πάνω από κάποιο Reynolds και ότι η αστάθεια οδηγούσε στη δημιουργία ενός συστήματος αντιπεριστροφόμενων σταθερών στροβίλων μορφής όμοιας με των δινών Taylor. Έκτοτε πολλοί επιστήμονες όπου διαπιστώνουν δίνες τέτοιας μορφής σε οριακό στρώμα τις αναφέρουν δίνες μορφής Taylor – Görtler, ακόμη κι αν παρουσιάζονται σε τυρβώδεις ροές.

Ο Görtler το 1940 έδειξε ότι ένα διδιάστατο στρωτό οριακό στρώμα σε κοίλη επιφάνεια είναι ασταθές πάνω από κάποιο Reynolds και ότι η αστάθεια οδηγούσε στη δημιουργία ενός συστήματος αντιπεριστροφόμενων σταθερών στροβίλων μορφής όμοιας με των δινών Taylor. Έκτοτε πολλοί επιστήμονες όπου διαπιστώνουν δίνες τέτοιας μορφής σε οριακό στρώμα τις αναφέρουν δίνες μορφής Taylor – Görtler, ακόμη κι αν παρουσιάζονται σε τυρβώδεις ροές.

Ο Görtler όρισε μια παράμετρο χαρακτηριστική του φαινομένου, την  $Gr$ :

$$Gr = Re_{\theta} \sqrt{K\delta_2} \quad (3.23)$$

όπου  $Re_{\theta}$  είναι ο αριθμός Reynolds που βασίζεται στο χαρακτηριστικό μήκος του πάχους ορμής  $\delta_2$  και  $K$  η καμπυλότητα. Διαπιστώθηκε ότι αν γίνει μεγαλύτερη από 0,6 σχηματίζεται οι δίνες. Συνήθως για τιμές της παραμέτρου μέχρι 7 η ροή γίνεται τυρβώδης, οπότε σε ένα μεγάλο πλήθος στρωτών ροών παρουσιάζονται οι εν λόγω δίνες.

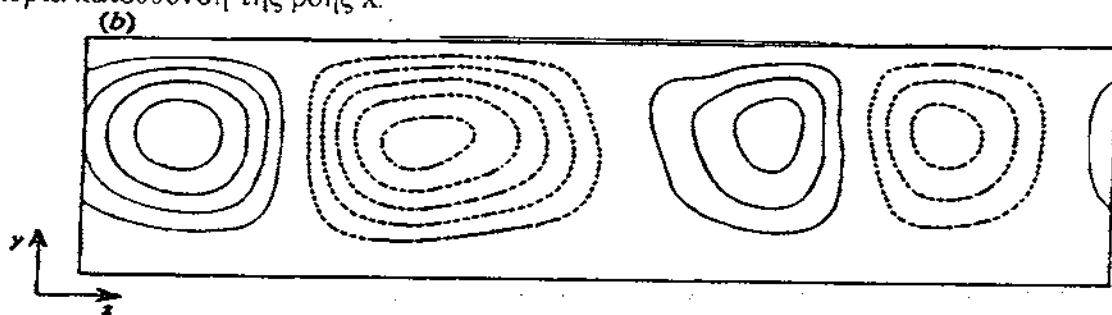
Πρώτος ο Tani το 1962, παρατήρησε μεταβολές της μέσης ταχύτητας κατά τον άξονα  $z$  σε τυρβώδη ροή πάνω από κοίλη επιφάνεια και εξέφρασε την πιθανότητα ύπαρξης δινών τύπου Taylor – Görtler σε τυρβώδεις ροές. Από τότε πολλοί ερευνητές παρατήρησαν όμοια φαινόμενα. Μάλιστα πιστεύεται ότι ακόμη και οι μεγάλες κλίμακας «δρόμοι» που σχηματίζουν τα σύννεφα όπως τους βλέπουμε στις φωτογραφίες από τους δορυφόρους, πιθανόν να οφείλονται σε αστάθειες που προκαλούνται από δίνες μορφής Taylor – Görtler στην ατμόσφαιρα της γης.

Μεταβολές στα μετρούμενα μεγέθη κατά τον άξονα των  $z$  παρουσιάζονται σε πολλά πειράματα και συνήθως αποδίδονται στην ύπαρξη δινών μορφής Taylor – Görtler. Τέτοιες δίνες παρατηρήθηκαν και με οπτικοποίηση της ροής, όπως για παράδειγμα από το κλασικό πείραμα των Johnston, Halleen, Lezius (στη δημοσίευσή τους υπάρχουν σχετικές φωτογραφίες). Παρόλη την αύξηση της τύρβης και παρόλο που δημιουργούν αστάθεια στην (διδιάστατη) ροή, οι ίδιες οι δίνες είναι σταθερές στη θέση και το μέγεθός τους. Οι θέσεις τους στον άξονα  $z$  φαίνεται να είναι τυχαίες, αλλά παρόλα αυτά είναι πάντα οι ίδιες για το

ίδιο πείραμα. Για παράδειγμα το πείραμα των Meroney & Bradshaw, ξανάγινε μερικές μέρες αργότερα και έδειξε πάλι στις ίδιες μη νομοτελειακές θέσεις των δινών. Ίσως υπάρχει κάποια μη προφανής εξάρτηση των θέσεων από ανωμαλίες στην είσοδο ή στα στερεά όρια (ή τα στερεά όρια πριν την είσοδο, π.χ. πτερύγια στροφής σε αεροδυναμική σήραγγα) και από το σημείο μετάβασης στην τυρβώδη ροή. Το μέγεθος των δινών είναι περίπου της τάξης του πάχους του οριακού στρώματος. Οι δίνες επδρούν δευτερογενώς στην τύρβη και δημιουργούν επιπλέον αλλαγές. Μπορεί να αλλάζουν αρκετά τα προφίλ των τάσεων στον άξονα  $z$ , αλλά οι αντίστοιχες μεταβολές στην ταχύτητα να μην είναι μεγάλες.

Παρόλο που σε πολλά πειράματα παρουσιάζονται δίνες μορφής Taylor – Görtler, δεν είναι εύκολο να τις προβλέψουμε. Οι συνθήκες κάτω απ' τις οποίες εμφανίζονται δεν είναι γνωστές. Ακόμη, υπάρχουν και πειράματα στα οποία δεν παρατηρείται τίποτε αξιοπερίεργο στον άξονα  $z$ . Ίσως στις περιπτώσεις που δεν υπάρχουν ανωμαλίες και ανομοιομορφίες στον άξονα  $z$  να μην είναι τόσο σαφής η δημιουργία τέτοιων δινών. Οι Barlow & Johnston δεν παρατήρησαν σταθερούς και τόσο οργανωμένους στρόβιλους σαν τους Taylor – Görtler και θεωρούν ότι δε μπορούμε να τους ονομάσουμε έτσι, αφού ούτε το μήκος τους είναι πολύ μεγάλο (10 φορές τουλάχιστον του πλάτους τους) ώστε να χαρακτηριστούν διαμήκεις, ούτε η στροβιλότητά τους είναι πολύ μεγάλη στην κεντρική τους περιοχή ώστε να δημιουργήσουν κάμπουσες περιστροφές των στοιχείων του ρευστού πριν χάσουν την ταυτότητά τους ως στρόβιλοι. Οι Hoffmann, Muck, Bradshaw έδειξαν ότι στρόβιλοι μορφής Taylor – Görtler μπορούν να «κλειδώσουν» σε συγκεκριμένες θέσεις με τεχνική δημιουργία στρόβιλων. Σε άλλο πείραμα παρατηρήθηκε ότι στρόβιλοι που υπήρχαν πριν την καμπυλότητα, εξελίχθηκαν σε δίνες μορφής Taylor – Görtler στην κοίλη επιφάνεια που ακολουθούσε. Αυτά ίσως σημαίνουν ότι πάντα τέτοιες διαμήκεις δίνες σχετίζονται με κάποια ασυνέχεια που υπάρχει εκ των προτέρων, και αν είχαμε μια τέλεια ροή δε θα εμφανίζονταν. Η αλήθεια είναι ότι συχνά στις ροές όπου έχουμε μια τέλεια ροή δε θα εμφανίζονταν. Η αλήθεια είναι ότι συχνά στις ροές όπου έχουμε φαινόμενα αύξησης τύρβης, υπάρχουν τριδιάστατες δευτερεύουσες ροές που τουλάχιστον μοιάζουν με δίνες Taylor – Görtler είναι δύσκολη, γιατί παρόλο που δημιουργούν μεταβολές σε διάφορες ποσότητες εγκάρσια στο επίπεδο της ροής, οι ίδιοι στροβιλισμοί είναι μάλλον αδύναμοι και δύσκολο να μετρηθούν απ' ευθείας. Γι' αυτό σε πολλά πειράματα η ύπαρξή τους απλά συμπεραίνεται μόνο ποιοτικά (π.χ. οπτικοποίηση της ροής).

Παρακάτω είναι ένα σχήμα από την αριθμητική επίλυση των Kristoffersen, Andersson όπου φαίνονται σχηματισμοί μορφής δινών Taylor – Görtler. Το επίπεδο του σχήματος στην κύρια κατεύθυνση της ροής  $x$ .



Σχήμα 3.19. Δίνες μορφής Taylor – Görtler.

Το σχήμα αφορά αριθμό περιστροφής 0,15.

Το σχήμα αφορά μέσες ποσότητες και είναι οι γραμμές ροής της δευτερεύουσας ροής. Οι συνεχείς γραμμές υποδηλώνουν περιστροφή σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού και το αντίστροφο οι διακεκομμένες. Η θέση και ο αριθμός των ζευγών δεν είναι προβλέψιμα μεγέθη. Βλέπουμε ότι οι δίνες είναι ελαφρά μετατοπισμένες προς την πλευρά που εδώ είναι η πλευρά υπερπίεσης. Αξιοσημείωτο είναι ότι (όπως βλέπουμε από την πυκνότητα γραμμών ροής) η ροή που απομακρύνει ρευστό από την πλευρά υπερπίεσης είναι πιο ισχυρή σε σχέση μ' αυτή που επιστρέφει ρευστό. Έτσι υπάρχει μια τροφοδοσία της κεντρικής περιοχής του

καναλιού με ρευστό χαμηλών ταχυτήτων από την εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος. Δεν διαπιστώθηκε τάση αλλαγής θέσης των στροβίλων, αλλά όπως πολύ σωστά επισημαίνουν οι συγγραφείς, κάτι τέτοιο δεν ξέρουμε σίγουρα ότι δε θα συμβεί μετά την πάροδο αρκετού χρόνου και το ίδιο ισχύει και για τα πειράματα. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι με αύξηση του αριθμού περιστροφής, ο αριθμός των δινών αυξάνεται κι αυτές μετατοπίζονται περισσότερο προς την πλευρά υπερπίεσης.

### 3.4. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΥΡΒΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.

Απ' τα παραπάνω φάνηκε ποια είναι η επίδραση της Coriolis στην τύρβη. Το ζήτημα τώρα είναι πώς θα καταφέρουμε να εισάγουμε αυτή την επίδραση στον υπολογισμό της ροής ώστε να είναι πιο σωστός. Όπως γράφτηκε και πρωτότερα, η συνήθης πρακτική που εφαρμόζεται είναι να τροποποιηθούν λίγο τα ήδη υπάρχοντα μοντέλα τύρβης με κάποιες διορθώσεις ώστε να λαμβάνεται υπόψη και η περιστροφή. Το ίδιο ισχύει βέβαια και για την περίπτωση της καμπυλότητας και μάλιστα κάθε τροποποιημένο μοντέλο τύρβης για περιστροφή έχει το αντίστοιχό του για καμπυλότητα και το αντίστροφο.

#### 3.4.1. Μοντέλα που τροποποιούν το μήκος ανάμιξης.

Με τους κλασσικούς (και παλιούς πλέον) τρόπους μοντελοποίησης της τύρβης, γίνεται η υπόθεση Boussinesq και εισάγεται η τυρβώδης συνεκτικότητα (§2.4.1 και εξής). Για την με θεωρείται ότι ανάλογη μιας χαρακτηριστικής ταχύτητας κι ενός χαρακτηριστικού μήκους όπως είναι το μήκος ανάμιξης  $l$  του Prandtl. Οι πρώτες διορθώσεις μοντέλων τύρβης που έγιναν αφορούσαν το μήκος ανάμιξης, αφού αυτό ήταν που μοντελοποιούνταν τότε με τη βοήθεια πειραμάτων και πειράματα έδειχναν ότι αλλάζει αν έχουμε καμπυλότητα ή περιστροφή (π.χ. σχ. 3.17).

Ένας κατάλληλος, αδιάστατος αριθμός που μπορεί να μας βοηθήσει να γράψουμε μια τροποποιημένη σχέση για το μήκος ανάμιξης, είναι η παράμετρος ευστάθειας:

$$S = -\frac{2\Omega}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (3.24)$$

Η  $u$  εννοείται ότι είναι η μέση ταχύτητα. Εδώ και στα επόμενα θα παραλείπεται η επιγραφή της μέσης τιμής, για συντομία και για να μην φορτώνονται οι εξισώσεις.

Η  $S$  εκφράζει το λόγο της επιπλέον παραμόρφωσης (ή στροβιλότητας) που εισάγεται στο πρόβλημα λόγω της επιπλέον παραμόρφωση. Άρα είναι ένας χαρακτηριστικός για το πρόβλημά μας αριθμός. Σε κάθε σημείο του πεδίου ροής είναι διαφορετικός για το πρόβλημά μας αριθμός. Σε κάθε σημείο του πεδίου ροής είναι διαφορετικός και εκεί που είναι θετικός (π.χ. πλευρά υποπίεσης) έχουμε φαινόμενα σταθεροποίησης. Παράμετρος ευστάθειας ορίζεται αντίστοιχα και για την καμπυλότητα (εκεί πρωτοεμφανίστηκε) αν όπου  $\Omega$  βάλουμε  $(-u/R)$  όπου  $R$  η ακτίνα καμπυλότητας. Γενικά στις διορθώσεις κάνοντας αντικαταστάσεις παρόμοιες με αυτή μπορούμε να μεταπίπτουμε από την περίπτωση της καμπυλότητας σ' αυτήν της επίδρασης Coriolis ή το αντίστροφο.

Ο Prandtl το 1929 ήταν ο πρώτος που έγραψε μια διόρθωση του μήκους ανάμιξης για την περίπτωση της καμπυλότητας:  $l/l_0=1-0,25S$ , όπου  $l_0$  είναι το μήκος ανάμιξης χωρίς καμπυλότητα. Μ' αυτό τον τρόπο, υπολογίζουμε τα πάντα σα να έχουμε επίπεδη πλάκα, αλλά όταν βρούμε το μήκος ανάμιξης το πολλαπλασιάζουμε μ' ένα συντελεστή  $(1-0,25S)$  και συνεχίζουμε τον υπολογισμό της ροής. Έτσι λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση της καμπυλότητας. Αυτή η διόρθωση είναι απλή και δίνει αποτελέσματα προς τη σωστή κατεύθυνση (μείωση τύρβης στην πλευρά υποπίεσης ή στην κυρτή επιφάνεια), αλλά ποσοτικά είναι τελείως λανθασμένη υποεκτιμά σε πολύ μεγάλο βαθμό την επίδραση της



τύρβης, κι αυτό δείχνει ότι εκείνη δεν είχε διαπιστωθεί η πολύ σημαντική επίδραση των «πρόσθετων παραμορφώσεων» (ορολογία Bradshaw).

Τα επόμενα χρόνια οι μηχανικοί ασχολούνταν μόνο πειραματικά με το φαινόμενο όπως ξαναγράφτηκε και πριν. Η προσπάθεια για μοντελοποίηση του ξανάρχισε με τον Bradshaw το 1969, όταν δημοσίευσε μια εργασία για την καμπυλότητα. Το 1973 κυκλοφόρησε ένα τεύχος της AGARD, γραμμένο από τον ίδιο όπου δημοσίευσε τις ως τότε γνώσεις του για το φαινόμενο και όλα τα σχετικά φαινόμενα που περιλαμβάνουν και άλλες περιπτώσεις εκτός από την περιστροφή. Αυτό το βιβλίο ήταν σημαντική πηγή για αρκετούς απ' τους επόμενους ερευνητές. Ο πρώτος ίσως απ' αυτούς ήταν ο Johnston, που πολύ γρήγορα μετά το 1969 συστηματοποίησε με κατανοητό και πρακτικό τρόπο τη διόρθωση του Bradshaw και μάλιστα πρόσφερε σημαντικά και με τα πειράματα που έκανε ή στα οποία επέβλεπε. Μέχρι και πολύ πρόσφατα συνέχιζε ν' ασχολείται με το θέμα. Αυτοί οι δύο ερευνητές πρέπει να θεωρηθούν πρωτοπόροι για την αρχή της συστηματικής μελέτης τέτοιων φαινομένων.

Ο Bradshaw, για να παρουσιάσει τις διορθώσεις στο μήκος ανάμιξης που πρότεινε τότε, βασίστηκε σε αντίστοιχη δουλειά που είχε στη μετεωρολογία. Εκεί χρησιμοποιούνταν μια συχνότητα χαρακτηριστική του φαινομένου, η συχνότητα Brunt - Väisälä  $\omega_{BV}$  αυτής της ταλάντωσης μπορεί να υπολογιστεί και αυτό το κάνει ο Bradshaw. Τελικά για την περίπτωση της περιστροφής προκύπτει ότι:

$$\omega_{BV}^2 = 2\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega \right) \quad (3.25)$$

Αν το τετράγωνο της συχνότητας είναι θετικό έχουμε περίπτωση σταθεροποίησης, ενώ αν είναι αρνητικό, το στοιχείο του ρευστού που ταρακουνήθηκε τείνει ν' απομακρυνθεί ακόμη περισσότερο κι έχουμε αποσταθεροποίηση που συνεπάγεται αύξηση της τύρβης.

Στη μετεωρολογία ο λόγος της συχνότητας Brunt - Väisälä προς μια τυπική κλίμακα χρόνου της ροής ορίζει μια πολυχρησιμοποιούμενη μετεωρολογική παράμετρο, τον αριθμό Richardson. Ο Bradshaw ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει έναν αντίστοιχο αριθμό Richardson  $Ri$  ως χαρακτηριστικό αριθμό φαινομένων σαν αυτά της καμπυλότητας. Έτσι σε αντιστοιχία με τη μετεωρολογία, ο ποιοτικός ορισμός του αριθμού Richardson θα είναι:  $Ri = (\text{συχνότητα Brunt - Väisälä} / \text{τυπική συχνότητα τύρβης})$ . Αυτός ο Richardson εκφράζει το λόγο μιας μαζικής δύναμης προς μια τυπική αδρανειακή δύναμη. Μαζική δύναμη στην περίπτωσή μας είναι η άνωση ή η φυγόκεντρος ή η δύναμη Coriolis. Υπενθυμίζεται ότι λόγο δύναμης Coriolis προς αδρανειακή εκφράζει κι ο αριθμός περιστροφής και πράγματι, όπως θα φανεί καθαρότερα σε λίγο υπάρχει μια αντιστοιχία, με τη διαφορά ότι ο  $R_0$  είναι ένας για το κανάλι, χαρακτηριστικός του πειράματος, ενώ ο Richardson αλλάζει, χαρακτηριστικός της ευστάθειας ή αστάθειας που επικρατεί στο συγκεκριμένο σημείο (όπως και η  $S$ ). Ο Bradshaw θεώρησε ως χαρακτηριστική συχνότητα την κλίση της ταχύτητας, οπότε βάσει των παραπάνω ο αριθμός Richardson του Bradshaw για την περίπτωση της Coriolis είναι:

$$Ri = \frac{-2\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega \right)}{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \quad (3.26)$$

Φάνηκε ότι ο ορισμός του Richardson κατά Bradshaw (που τόσο χρησιμοποιήθηκε από τους επιστήμονες τα επόμενα χρόνια) δεν είναι αυθαίρετος, αλλά βασίζεται σε κάποια λογική και συγκεκριμένα στην ανάλυση ευστάθειας ενός στοιχείου που φεύγει από τη θέση του, πράγμα που οδηγεί στον υπολογισμό μιας χαρακτηριστικής για το φαινόμενο συχνότητας, της συχνότητας Brunt - Väisälä. Απ' την ανάλυση για τον υπολογισμό της τελευταίας, γίνεται φανερό ότι αν το τετράγωνό της είναι θετικό έχουμε περίπτωση σταθεροποίησης και το αντίστροφο αν είναι αρνητικό (τότε η συχνότητα Brunt - Väisälä είναι φανταστικός αριθμός). Οπότε, κοιτώντας την εξ. (3.26) βλέπουμε ότι αν  $Ri > 0$ , έχουμε μείωση τύρβης και

το αντίστροφο αν είναι μικρότερος απ' το 0. Ο Richardson λοιπόν έχει μεγάλη αξία γιατί μόνο απ' το πρόσημό του καταλαβαίνουμε αν έχουμε περίπτωση αποσταθεροποίησης ή όχι.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι ο αριθμός Richardson συνδέεται με την παράμετρο ευστάθειας με την παρακάτω σχέση:

$$Ri = S(1 + S) \quad (3.27)$$

Γίνεται κατανοητό ότι  $S$  μεταξύ  $-1$  και  $0$  έχουμε αρνητικούς Richardson, άρα αστάθεια. Κοντά στο στερεό τοίχωμα που είναι η περιοχή που παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, όπου η παραγωγή και η καταστροφή της τυρβώδους ενέργειας έχουν τη μεγαλύτερη τιμή, η κλίση της ταχύτητας είναι πολύ μεγάλη και το  $S$  γύρω στο  $0$ , οπότε τότε ισούται περίπου με τον Richardson:  $Ri \approx S$ . Αυτό δεν ισχύει μόνο στην εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, γι' αυτό στην πράξη πολλοί χρησιμοποιούν για αριθμό Richardson τον  $S$ . Τέλος ν' αναφέρουμε ότι μια τάξη μεγέθους του  $S$  (ή του  $Ri$ ) που υπάρχει κατά μέσο όρο στο οριακό στρώμα, αποκτά κανείς απ' τον  $R_0$ , αφού μια πρώτη προσέγγιση της κλίσης της ταχύτητας στο οριακό στρώμα είναι η  $U/\delta$ .

Ο Bradshaw, απ' τη στιγμή που όρισε τον Richardson, είχε ένα χαρακτηριστικό του φαινομένου αριθμό στα χεριά του και έμενε μόνο να τον χρησιμοποιήσει με κατάλληλο τρόπο. Πάλι χρησιμοποίησε την εμπειρία απ' τη μετεωρολογία και συγκεκριμένα ευρέως στο ατμοσφαιρικό οριακό στρώμα. Τελικά μπορούμε να πούμε ότι προτείνει το εξής (όπως αναφέρεται κλασσικά στη βιβλιογραφία):

$$\frac{l}{l_0} = 1 - \beta Ri \quad (3.28)$$

όπου  $\beta$  είναι μια σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί πειραματικά. Ο Bradshaw της έδωσε κάποιες τιμές για να ταιριάζει με πειραματικά δεδομένα που είχε. Αυτές οι τιμές είναι  $\beta=7$  για  $Ri>0$ , δηλαδή για πλευρά σταθεροποίησης και  $\beta=4,5$  για  $Ri<0$ , για περίπτωση που έχουμε αστάθεια. Η εξίσωση είναι ουσιαστικά ίδια με αυτή του Prandtl, αφού  $Ri \approx S$ , μόνο που διαφέρει τάξεις μεγέθους η σταθερά που έβαλε ο ένας κι ο άλλος. Βλέπουμε ότι στην πλευρά αποσταθεροποίησης έχουμε αύξηση του μήκους ανάμιξης και μείωση στην άλλη πλευρά, άρα η διόρθωση είναι κατ' αρχήν προς την σωστή κατεύθυνση. Ακόμη, όπως είχε ειπωθεί και στις πειραματικές διαπιστώσεις, η επίδραση στην πλευρά υποπίεσης και υπερπίεσης διαφέρει και ποσοτικά και μόνο ποιοτικά, γι' αυτό ο εμπειρικός συντελεστής  $\beta$  έχει διαφορετικές τιμές. Μάλιστα βλέπουμε ότι στην πλευρά σταθεροποίησης η Coriolis επιδρά περισσότερο. Αυτό σχετίζεται με την πειραματική παρατήρηση που προαναφέρθηκε, ότι στην κυρτή επιφάνεια η απόκριση στην επίδραση είναι μεγαλύτερη.

Μια γραμμική διόρθωση στο μήκος ανάμιξης όπως αυτή της εξ. (3.28) είναι η πιο απλή σκέψη που μπορεί να κάνει κανείς για να λάβει υπόψη του φαινόμενα καμπυλότητας ή Coriolis. Βέβαια με την μικρή ανάλυση που έκανε ο Bradshaw και την εισαγωγή του αριθμού Richardson επιπλέον της παραμέτρου ευστάθειας η πρότασή του αποκτά κάποια στοιχειώδη θεμελίωση και γίνεται πιο αξιόπιστη θεωρητικά. Ο Bradshaw υποστήριξε τότε ότι δεν υπάρχουν αρκετά δεδομένα για να προσπαθήσουμε να εισάγουμε στους υπολογισμούς μας φαινόμενα καμπυλότητας ή Coriolis. Βέβαια με την μικρή ανάλυση που έκανε ο Bradshaw και την εισαγωγή του αριθμού Richardson επιπλέον της παραμέτρου ευστάθειας η πρότασή του αποκτά κάποια στοιχειώδη θεμελίωση και γίνεται πιο αξιόπιστη θεωρητικά. Ο Bradshaw υποστήριξε τότε ότι δεν υπάρχουν αρκετά δεδομένα για να προσπαθήσουμε να εισάγουμε στους υπολογισμούς μας φαινόμενα καμπυλότητας ή Coriolis με χρήση κάποιας πιο περίπλοκης σχέσης από μια γραμμική συσχέτιση της μορφής της εξ. (3.28). Απ' την άλλη μεριά, παραδέχεται ότι δεν θα ήταν αξιόπιστη η εφαρμογή της σε περιπτώσεις μεγάλης καμπυλότητας ή αριθμού περιστροφής, όπου το νέο μήκος ανάμιξης θα διαφέρει περισσότερο από 50% απ' το παλιό σε μεγάλη περιοχή του οριακού στρώματος. Διότι, όπως λέει, το εύρος είναι το μόνο που μπορεί κανείς να εμπιστευτεί για ένα διορθωτικό παράγοντα γραμμικής μορφής. Πράγματι, η διόρθωση του Bradshaw και όλες οι σχετικές φαίνεται να έχουν αρκετή ακρίβεια για μικρές τιμές του Richardson ή της παραμέτρου ευστάθειας ή του  $R_0$ , αλλά για μεγαλύτερες η ακρίβεια μειώνεται σημαντικά.

Διορθώσεις παρόμοιες με την παραπάνω μπορούν να υπάρξουν πολλές. Κατ' αρχήν μπορούν ν' αμφισβητηθούν οι τιμές των σταθερών. Μπορούμε αντί Richardson να βάλουμε  $S$ , ή να γράψουμε την εξ. (3.28) με άλλη μορφή, όπως η εξής:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{1}{1 + \beta Ri} \quad (3.29)$$

Ξέρουμε από τα μαθηματικά ότι για μικρές τιμές του  $\beta Ri$ , (δηλαδή για μικρές τιμές του Taylor). Δηλαδή οι εκφράσεις των εξισώσεων εξ. (3.28) και εξ. (3.29) είναι πρακτικά ισοδύναμες για την περιοχή που ενδιαφέρει, κοντά στον τοίχο. Ο Johnston που προσπάθησε να ταιριάσει πειραματικά δεδομένα μ' αυτή τη σχέση, διαπίστωσε ότι για ένα συγκεκριμένο αριθμό περιστροφής έδινε καλά αποτελέσματα για κάποιο συγκεκριμένο  $\beta$  και ότι για άλλο αριθμό περιστροφής, άλλο  $\beta$  έδινε αποτελέσματα που να ταιριάζουν με τα πειράματα. Τελικά δηλαδή, όπως διαπιστώθηκε κι από μεταγενέστερα πειράματα, δεν υπάρχει ένα σταθερό  $\beta$  που να κάνει για όλες τις περιπτώσεις, αλλά το  $\beta$  είναι συνάρτηση τουλάχιστον της έντασης του φαινομένου. Μ' άλλα λόγια η γραμμική σχέση δεν είναι και η πραγματική, αλλά μια προσέγγισή της.

Ο Johnston είδε ότι οι τιμές του  $\beta$  που ταιριάζουν με τα πειραματικά του κάλυπταν ένα εύρος απ' το 4 μέχρι το 8. Βλέπουμε εδώ να υπάρχει μια συμφωνία με τις τιμές που προτείνει ο Bradshaw, αφού είναι μέσα σ' αυτό το εύρος. Γενικά οι περισσότεροι ερευνητές που ήθελαν ως τώρα να βάλουν με κάποιο τρόπο και επίδραση (ασθενούς) Coriolis στον υπολογισμό της ροής, χρησιμοποίησαν την εξ. (3.28) με τις σταθερές του Bradshaw για το  $\beta$  (7 στη υποπίεσης, 4,5 στην υπερπίεσης), είτε με μια ενιαία τιμή 6 (το μέσο όρο του καλιμπραρίσματος του Johnston). Άλλες τιμές που προτείνονται είναι 7 και 4 για την πλευρά υποπίεσης και υπερπίεσης αντίστοιχα ή 7 και στις δύο πλευρές. Ο So, 1975, ισχυρίζεται ότι το  $\beta$  έχει τιμές απ' το 2 ως το 7 με πιο πιθανές απ' το 4 ως το 6. Οι Nakabayashi & Kitoh, είδαν ότι απ' το 3 ως το 4 ήταν κατάλληλες για να συμφωνήσουν με τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους που έγιναν σε χαμηλό αριθμό Reynolds. Οι Adams και Johnston προτίμησαν την τιμή 5.

Βάσει της εξ. (3.28), στην πλευρά σταθεροποίησης μπορεί να προκύψει  $1 = \beta Ri$  και να μηδενιστεί το μήκος ανάμιξης ή και να γίνει αρνητικό για ακόμη μεγαλύτερες τιμές του  $\beta Ri$ , πράγμα που δεν στέκει από φυσική άποψη. Για ν' αποφευχθεί αυτό μπορεί στην πλευρά υποπίεσης η διόρθωση να γραφεί ως  $l/l_0 = 1/(1 + \beta Ri)$ , όπως δηλαδή στην εξ. (3.29). Το αντίστροφο συμφέρει στην τελευταία για την πλευρά υπερπίεσης, όπου υπάρχει πιθανότητα απροσδιοριστίας λόγω διαίρεσης με μηδέν. Τελικά δηλαδή για να μην υπάρχουν σίγουρα προβλήματα μηδενισμών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πλευρά αστάθειας η μορφή της εξ. (3.28) και σ' αυτήν της ευστάθειας αυτή της εξ. (3.29).

Συχνά θεωρείται το Richardson της εξ. (3.28) ή της εξ. (3.29) στην πιο απλή του μορφή που ισούται με το  $S$ . Είτε με τον ένα είτε με τον άλλο τρόπο, προς το τέλος του οριακού στρώματος όπου το  $du/dy$  τείνει στο 0, ο αριθμός Richardson αυξάνει (σε απόλυτη τιμή) πολύ και παίρνουμε απαράδεκτα από φυσικής πλευράς αποτελέσματα με χρήση των παραπάνω εξισώσεων. Πρέπει με κάποιο τρόπο να περιορίσουμε τη διόρθωση να μην ισχύει σε τέτοιες περιοχές ή να την τροποποιήσουν ώστε να μην βγάξει παράλογα αποτελέσματα στο τέλος του οριακού στρώματος. Μια απλή λύση θα ήταν να λάβουμε σοβαρά υπόψη αυτό που είτε ο Bradshaw ότι δεν θα πρέπει να εμπιστευθούμε διορθώσεις που δημιουργούν το μήκος ανάμιξης χωρίς να λάβουμε υπόψη την Coriolis ή την καμπυλότητα. Αυτό δουλεύει καλά αν η περιοχή στην οποία η διόρθωση αρχίζει και γίνεται μεγάλη είναι προς το τέλος του οριακού στρώματος, οπότε πλέον δεν έχει μεγάλη σημασία το μήκος ανάμιξης για τη διαμόρφωση της ροής (η τυρβώδης συνεκτικότητα πέφτει εκεί σε πολύ χαμηλές τιμές έτσι κι αλλιώς λόγω της μικρής ταχύτητας). Αν όμως η καμπυλότητα ή η περιστροφή είναι μεγαλύτερες, οι μεταβολές στο μήκος ανάμιξης είναι μεγάλες και με τον παραπάνω τρόπο θ' απορρίψουμε τη διόρθωση και μέσα στο οριακό στρώμα, όπου θα έπρεπε να υπάρχει. Γι' αυτό χρειάζεται προσοχή στην εφαρμογή αυτής της λύσης. Η δεύτερη, πιο κομψή, λύση είναι αυτή που προτείνει ο Johnston, να θεωρήσουμε από κάποιο σημείο και μετά σταθερή

την κλίση της ταχύτητας και ίση με  $0,3u/\delta$ . Το σκεπτικό του είναι ότι θα πρέπει να μένει λίγο πολύ σταθερό το μήκος ανάμιξης από κάποιο σημείο και μετά, όπως συμβαίνει και με την πλάκα. Το πρόβλημα που έχει αυτή η μέθοδος είναι ότι καθώς υπολογίζουμε τη ροή δεν είναι γνωστό το πάχος του οριακού στρώματος, αν και δεν έχει σημασία η μεγάλη ακρίβεια αφού είμαστε μακριά απ' τον τοίχο και υπάρχει σημαντική αναισθησία της ροής σε μεταβολές του μήκους ανάμιξης.

Με βάση μια σχέση του Rotta για να ληφθούν υπόψη και φαινόμενα συμπεστότητας, παρουσιάζεται μια διορθωμένη σχέση Monin – Oboukhov:

$$\frac{l_0}{l} = 1 + \beta Ri \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (3.30)$$

$M$  είναι ο αριθμός  $M_{max}$  της ροής που ορίζεται ως το πηλίκο της ταχύτητας προς την ταχύτητα του ήχου στο συγκεκριμένο μέσο στις δεδομένες συνθήκες. Το  $\gamma$  συμβολίζει το λόγο  $c_p/c_v$  και για αέρα έχει τιμή περίπου 1,4. Βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός  $M_{max}$ , οι επιδράσεις στην τύρβη γίνονται μεγαλύτερες.

Χρησιμοποιώντας τη διόρθωση του μήκους ανάμιξης του Bradshaw, οι Παπαηλιού, Nurzia, Satta ανέπτυξαν μια επιτυχημένη διόρθωση κατάλληλη για ολοκληρωτικές μεθόδους υπολογισμού οριακών στρωμάτων. Δε θ' αναπτυχθεί εδώ καθώς στην παρούσα εργασία δεν ενδιαφέρουν οι ολοκληρωτικές μέθοδοι. Σύνοψη της μεθόδου βρίσκεται και σε άλλα συγγράμματα του κ. Παπαηλιού.

Οι Nakabayashi, Kitoh ορίζουν στο πεδίο ροής τρεις περιοχές, την πολύ κοντά στον τοίχο όπου δεν έχουν κάνει την εμφάνισή τους φαινόμενα επίδρασης Coriolis, την περιοχή στην οποία η επίδραση Coriolis κυριαρχεί και την κεντρική περιοχή, γύρω από τον κεντρικό άξονα του καναλιού. Σε κάθε περιοχή εφαρμόζουν διαστατική ανάλυση και καταλήγουν σε τροποποιημένες μορφές του νόμου του τοίχου. Στην περιοχή Coriolis χρησιμοποιείται ο συντελεστής του Bradshaw  $\beta$  (που αναφέρεται και ως συντελεστής Monin – Oboukhov) και γι' αυτό έγινε αναφορά της μεθόδου σ' αυτό το σημείο της εργασίας. Περισσότερα δε θα παρουσιαστούν εδώ καθώς δε μπορούν να εφαρμοστούν ως τροποποίηση σε κάποιο υπάρχον μοντέλο τύρβης.

Οι Adams, Johnston διατυπώνουν μια μικρή εξέλιξη του μοντέλου του Bradshaw για κυρτές επιφάνειες. Στην εσωτερική περιοχή οι διορθώσεις μένουν οι ίδιες, αλλά στην εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, διαπιστώθηκε από πειράματα για μέτρια καμπυλότητα ότι ισχύει προσεγγιστικά:  $l/R=0,0025$ . Αυτό μπορεί να συνδυαστεί με το γεγονός ότι σε απουσία καμπυλότητας (ευθύγραμμη πλάκα) ισχύει προσεγγιστικά  $l_0=0,086\delta$ , και να έχουμε μια ενιαία σχέση ανεξάρτητη του μεγέθους της καμπυλότητας, όπως η προτεινόμενη απ' τους συγγραφείς:

$$\frac{l}{R} = 0,0025 \tanh \left( 34,5 \frac{\delta}{R} \right) \quad (3.31)$$

Με  $\tanh$  συμβολίζεται η υπερβολική εφαπτομένη. Η σχέση αυτή ισχύει για την εξωτερική περιοχή οριακού στρώματος κυρτής επιφάνειας. Για την υπόλοιπη περιοχή που είναι κοντά στον τοίχο, ισχύει το κλασσικό μοντέλο του Bradshaw. Διαπιστώθηκε από τους συγγραφείς ότι το μοντέλο για την εξωτερική περιοχή κυριαρχεί στη διαμόρφωση των αποτελεσμάτων όταν  $\delta/R > 0,05$ , ενώ όταν  $\delta/R < 0,01$  δεν παίζει σχεδόν κανένα ρόλο.

Τα μοντέλα διόρθωσης του μήκους ανάμιξης (που ουσιαστικά είναι ένα, η εξ. (3.28)) δεν εξελίχθηκαν περισσότερο αφού συνδέονταν με τα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης μηδενικής τάξης που η ακρίβειά τους ήταν πεπερασμένη. Η μεγάλη εξάπλωση των μοντέλων δύο εξισώσεων και πιο συγκεκριμένα του μοντέλου  $k - \epsilon$  οδήγησε τους ερευνητές να προσπαθήσουν να τροποποιήσουν για επίδραση Coriolis ή καμπυλότητας αυτό το μοντέλο, όπως κι έγινε. Το μόνο που μπορεί να θεωρηθεί εξέλιξη είναι η χρήση της εξίσωσης εξ. (3.28), αλλά με διαφορετικό ορισμό του Richardson. Πράγματι, σήμερα αμφισβητείται η καταλληλότητα των ορισμών του Richardson βάσει των παραπάνω εξισώσεων και προτείνονται νέοι αριθμοί μορφής Richardson μερικοί απ' τους οποίους βασίζονται μόνο σε τοπικές παραμέτρους της ροής (στροβιλότητα) και δεν ανακατεύουν τη γωνιακή ταχύτητα.

Αυτοί οι Richardson θεωρείται ότι είναι καταλληλότεροι για να περιγράψουν την ευστάθεια ενός στοιχείου του ρευστού, αφού αυτό «καταλαβαίνει» μόνο τι γίνεται γύρω του και όχι την γωνιακή ταχύτητα του καναλιού. Οι πρώτοι που όρισαν ένα διαφορετικό Richardson ήταν οι Launder, Priddin, Sharma το 1977, όπως θα δούμε παρακάτω. Χρησιμοποιώντας το δικό τους Richardson, μια τυπική τιμή του  $\beta$  είναι το 0,2 και αυτό ισχύει και για άλλους «σύγχρονους» Richardson. Περισσότερα γι' αυτά θ' αναφερθούν παρακάτω.

### 3.4.2. Το μοντέλο του $S_0$ που τροποποιεί την χαρακτηριστική ταχύτητα.

Μπορεί το μοντέλο του  $S_0$  να μην χρησιμοποιήθηκε πολύ και ν' αποδεικνύεται τελικά σχετιζόμενο με το μοντέλο του Bradshaw, αλλά παρουσιάζει ενδιαφέρον. Η αρχική του σκέψη ήταν να θεωρήσουμε ότι το χαρακτηριστικό μήκος της εξ. (2.44) δεν επηρεάζεται από καμπυλότητα ή περιστροφή, αλλά επηρεάζεται η χαρακτηριστική ταχύτητα.

Ο  $S_0$  (1975) πήρε τις εξισώσεις των τάσεων Reynolds και τις μοντελοποίησε χρησιμοποιώντας προτάσεις των Rotta (1951) και Mellor & Haring (1973). Κάνοντας υποθέσεις διδιάστατου οριακού στρώματος και θεωρώντας ότι η παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας ισούται με την καταστροφή της κατέληξε σε αλγεβρικές σχέσεις για τον υπολογισμό των τάσεων Reynolds (των τριών κυρίων τάσεων και της διατμητικής) που είναι γραμμένες για την γενικότερη περίπτωση που έχουμε και καμπυλότητα και περιστροφή. Απ' τις σχέσεις αυτές μπορεί να προκύψει αλγεβρικά η διατμητική τάση Reynolds ως συνάρτηση της καμπυλότητας  $K$ , του  $\Omega$  και των μέσων ποσοτήτων της ροής:

$$-\overline{u'v'} = l_0^2 \left( 1 - \beta \frac{\frac{Ku}{1+Ky} - \Omega \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{Ku}{1+Ky} - 2\Omega}{\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{Ku}{1+Ky}} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{Ku}{1+Ky} \right)^2 \quad (3.32)$$

όπου

$$l_0^2 = \left[ l_1 \Lambda^{\frac{1}{3}} \left( 1 - 6 \frac{l_1}{\Lambda} \right) \right]^2 \quad (3.33)$$

$$\beta = \frac{72 \frac{l_1}{\Lambda}}{1 - 6 \frac{l_1}{\Lambda}} \quad (3.34)$$

Το  $l_1$  είναι εμπειρική κλίμακα μήκους και το  $\Lambda$  είναι η κλίμακα μήκους καταστροφής ενέργειας.

Για μηδενική καμπυλότητα και περιστροφή βλέπουμε ότι στην παραπάνω σχέση εξ. (3.32) μηδενίζονται όλοι οι όροι των παρενθέσεων και μένει μόνο η κλίση της ταχύτητας, καταλήγουμε δηλαδή στην περίπτωση της επίπεδης πλάκας με  $l_0$  το μήκος ανάμιξης. Επίσης το  $\beta$  είναι συντελεστής αντίστοιχος του συντελεστή Monin - Oboukhov, όπως θα φανεί παρακάτω ότι έχει τιμή γύρω στο 6.

Στη συνέχεια γίνεται ότι η χαρακτηριστική ταχύτητα ισούται με το μήκος ανάμιξης επί την κλίση της ταχύτητας εξ. (2.45). Διαιρώντας την διατμητική τάση Reynolds με και χωρίς καμπυλότητα βρίσκουμε τελικά, σύμφωνα με τον  $S_0$ , τον λόγο των χαρακτηριστικών με χωρίς φαινόμενα καμπυλότητας και Coriolis:

$$\frac{q}{q_0} = \frac{\nu}{\nu_{10}} = \frac{\left( 1 - \beta \frac{Ri}{2} \right)^2}{1 + \frac{S_c}{2}} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0} \quad (3.35)$$

$$Ri = S(1+S) \quad (3.36)$$

$$S = 2 \frac{\frac{Ku}{1+Ky} - \Omega}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{Ku}{1+Ky}} \quad (3.37)$$

$S_0$  είναι το  $S$  για  $\Omega=0$ . Με  $\nu_i$  συμβολίζεται η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα. Ο δείκτης  $\theta$  υποδηλώνει αντίστοιχα μεγέθη της ακίνητης επίπεδης πλάκας. Βλέπουμε ότι η εισαγωγή του αριθμού Richardson και της παραμέτρου λαμβάνεται  $1+Ky=1$  με καλή προσέγγιση. Η πρώτη ισότητα στην εξ. (3.35) πηγάζει απ' το γεγονός ότι ο  $S_0$  θεωρεί εδώ ότι η κλίμακα μήκους δεν αλλάζει λόγω καμπυλότητας ή Coriolis, αλλ' αλλάζει μόνο κλίμακα ταχύτητας.

Μπορούμε όμως ισοδύναμα από πλευράς μαθηματικών, να θεωρήσουμε ότι αλλάζει η κλίμακα μήκους. Έτσι, με τη βοήθεια π.χ. της εξ. (3.33) μπορεί να προκύψει η εξής σχέση:

$$\frac{l}{l_0} = \left(1 - \beta \frac{Ri}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (3.38)$$

Έχουμε ουσιαστικά καταλήξει παρόμοια διόρθωση μ' αυτή του Bradshaw, με άλλο εκθέτη (0,75 ο ένας, 1 0 άλλος). Ο  $S_0$  διαπίστωσε ότι με τον παραπάνω τύπο, αν το  $\beta$  ήταν 6 έπαιρνε μια καλή πρόβλεψη φαινομένων μετεωρολογίας και καμπυλότητας και Coriolis. Ακόμη, φάνηκε μικρότερη ευαισθησία του συντελεστή απ' ότι στον τύπο του Bradshaw (μια περίπου σταθερή τιμή με την εξ. (3.28) εξηγείται εν μέρει λόγω του μικρότερου εκθέτη που αμβλύνει τις διαφορές.

Στη διόρθωση του  $S_0$  έχει ενδιαφέρον ο τρόπος που προέκυψε. Χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds που μας δίνουν πίσω κάποια απ' την πληροφορία που χάθηκε όταν πήραμε το μέσο όρο των εξισώσεων Navier - Stokes. Καταλήξαμε πάλι σε μια σχέση που θυμίζει τη μορφή Monin - Oboukhov, παρόμοια μ' αυτή του Bradshaw. Η προσπάθεια του  $S_0$  (και  $S_0$  & Mellor, 1972) ίσως ήταν η πρώτη που χρησιμοποίησε τις εξισώσεις μεταφοράς των εξισώσεων τάσεων Reynolds. Αυτή η πρακτική ακολουθήθηκε αργότερα κι από άλλους ερευνητές, για να βρεθούν διορθώσεις για τα μοντέλα τύρβης  $k - \epsilon$ .

Το γεγονός ότι η διόρθωση του  $S_0$  μοιάζει με του Bradshaw με άλλο εκθέτη, γεννάει τις σκέψεις να δοκιμαστούν και ενδιάμεσοι εκθέτες ή ακόμη κι άλλη συνάρτηση του Richardson που περίπου τα ίδια αποτελέσματα. Βέβαια τέτοιες σχέσεις θα είναι καθαρά εμπειρικές. Ο αντίλογος σ' αυτό είναι να δοκιμαστεί κάτι περίπλοκο από γραμμική σχέση σε τόσο προσεγγιστικές μεθόδους όπως η μοντελοποίηση με το μήκος ανάμιξης.

Σύνοψη της διόρθωσης του  $S_0$ :  $l/l_0 = (1 - \beta Ri/2)^{0,75}$ .

Σήμερα υπάρχουν και χρησιμοποιούνται, ιδιαίτερα στην αεροδυναμική, μοντέλα τύρβης μιας διαφορικής εξίσωσης όπως αυτά των Baldwin και Barth (1991), ή των Spalart και Allmaras (1994). Αυτά τα μοντέλα λύνουν μια εξίσωση μεταφοράς για μια ποσότητα σαν την τυρβώδη συνεκτικότητα. Δεν υπάρχουν όμως σοβαρές προσπάθειες για να ληφθούν υπόψη φαινόμενα καμπυλότητας (η περιστροφή συνήθως δεν ενδιαφέρει στην αεροδυναμική) με χρήση αυτών των μοντέλων. Οπότε μεταβαίνουμε κατευθείαν σε μοντέλα δύο διαφορικών εξισώσεων.

### 3.4.3. Το τροποποιημένο μοντέλο $k - \omega$ των Wilcox - Chambers.

Ένα απ' τα μοντέλα δύο διαφορικών εξισώσεων είναι και το μοντέλο  $k - \omega$  που μοιάζει σε γενικές γραμμές με το  $k - \epsilon$  αλλά αντί για μια εξίσωση μεταφοράς του  $\epsilon$  λύνει μια εξίσωση για το  $\omega$  το οποίο είναι αντίστοιχο του  $\epsilon/k$  και αναφέρεται συχνά με τον όρο «ψευδοστρωβιλότητα».

Οι παραπάνω ερευνητές έκαναν μια προσπάθεια να διατυπώσουν ένα μοντέλο τύρβης που να λαμβάνει υπόψη του φαινόμενα Coriolis και καμπυλότητας με όσο γίνεται μη εμπειρικό

τρόπο. Υποστηρίζουν ότι διορθώσεις του μήκους ανάμιξης είναι τελείως εμπειρικές κι αυτό είναι λογικό, αφού η ίδια και χρησιμοποίηση του μήκους ανάμιξης είναι εμπειρική. Γι' αυτό και δε μπορούμε να εμπιστευθούμε τέτοιες διορθώσεις για ροές πέρα απ' αυτές για τις οποίες καλιμπραρίστηκαν. Το τροποποιημένο μοντέλο βασίζεται σ' αυτό των Wilcox, Traci (1976).

Για να προκύψει δίνεται σημασία στην αξία του όρου  $\overline{v'^2}$  και στη φυσική εξήγηση του φαινομένου.

Για τον ορισμό του  $k$  σε οριακό στρώμα χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$k = \frac{9}{4} \overline{v'^2} \quad (3.39)$$

Οι συγγραφείς δε θεωρούν την ποσότητα αυτή ίδια με την τυρβώδη κινητική ενέργεια, της δίνουν άλλο όνομα και σύμβολο. Λένε ότι ισούται με την τυρβώδη κινητική ενέργεια μόνο για ισότροπη τύρβη, ενώ στο οριακό στρώμα είναι ανισότροπη και ο παραπάνω ορισμός είναι καταλληλότερος. Ο συντελεστής  $9/4$  προκύπτει από (όλα τα) πειράματα για την περιοχή ισχύος του νόμου του τοίχου:

$$\omega = \frac{3\nu}{0,09} \frac{\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2}{\overline{v'^2}} \quad (3.40)$$

Για να καταλήξουν σ' αυτό συνέκριναν την μορφή που παίρνει η εξίσωση του  $k$  για ροή πολύ κοντά σε επίπεδη επιφάνεια με την εξίσωση του  $\overline{v'^2}$  στην ίδια περίπτωση και είδαν ότι οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται αν ισχύει η παραπάνω σχέση.

Οι Wilcox, Chambers έδωσαν μεγάλη σημασία στην κλασική εξήγηση του φαινομένου §3.3.2. Σ' αυτήν φαίνεται καθαρά ότι τον κύριο λόγο για φαινόμενα καμπυλότητας ή Coriolis παίζουν οι διακυμάνσεις ταχύτητας κάθετα στον τοίχο, δηλαδή ο όρος  $\overline{v'^2}$ . Άρα αυτός ο όρος είναι η κατάλληλη κλίμακα ταχύτητας για τέτοιου είδους φαινόμενα.

Απ' την εξ. (3.39) για το  $k$  βλέπουμε ότι εξαρτάται άμεσα απ' αυτή την κλίμακα ταχύτητας και άρα θα αλλάξει στην περίπτωση π.χ. της καμπυλότητας. Αντίθετα, το  $\omega$ , αν υποθέσουμε περίπου ίσες μεταβολές στους δύο όρους του δευτέρου κλάσματος, δεν θα μεταβάλλεται.

Οπότε θα υπάρχει μια αλλαγή μόνο στην εξίσωση μεταφοράς του  $k$ . Επειδή στην εξίσωση μεταφοράς της τάσης  $\overline{v'^2}$  εξ. (3.18) ο νέος όρος λόγω της δύναμης Coriolis είναι ο  $4\Omega\tau_i$ , οι Wilcox, Chambers λένε ότι στην εξίσωση μεταφοράς του  $k$  που συνδέεται με το  $\overline{v'^2}$  με το συντελεστή  $9/4$ , εξ. (3.39), ο νέος όρος λόγω της δύναμης Coriolis θα είναι ο  $9\Omega\tau_i$ . Μεταφέροντας αυτό τον όρο στο πρώτο μέλος αποκτά αρνητικό πρόσημο, οπότε οι τελικές εξισώσεις ρευστό θα έχουν ως εξής:

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} - 9\Omega v_i \frac{\partial u}{\partial y} = \left( a \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - 0,09\omega \right) k + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + 0,5v_i) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad (3.41)$$

$$u \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^2}{\partial y} = \left\{ a \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - \left[ \frac{3}{20} + 2 \cdot 0,5 \left( \frac{\partial l}{\partial y} \right)^2 \right] \omega \right\} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + 0,5v_i) \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right] \quad (3.42)$$

όπου

$$v_i = \frac{k}{\omega} \quad (3.43)$$

$$l = \frac{\sqrt{k}}{\omega} \quad (3.44)$$

και για τις σταθερές (όσες δεν έχουν αντικατασταθεί στις εξισώσεις) ισχύει:

$$a = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{10}{11} \exp(-2 \text{Re}_\tau) \right] \quad (3.45)$$

$$a^* = \frac{3}{10} \left[ 1 - \frac{10}{11} \exp\left(-\frac{\text{Re}_T}{2}\right) \right] \quad (3.46)$$

όπου  $\exp(x)$  είναι η συνάρτηση  $e^x$  και  $\text{Re}_T$  είναι ο τυρβώδης αριθμός Reynolds:

$$\text{Re}_T = \frac{\sqrt{kl}}{\nu} \quad (3.47)$$

Ακριβώς οι ίδιες παραπάνω εξισώσεις χωρίς τον όρο  $-9\Omega\tau$ , αποτελούν το μοντέλο  $k - \omega$  των Wilcox, Traci. Το αξιοσημείωτο είναι ότι το  $9$  δεν αποτελεί εμπειρικό συντελεστή, αλλά προκύπτει απ' την εξ. (3.39) (η οποία όμως βασίζει το συντελεστή της σε γενικά αποδεκτή, αλλά πάντα πειραματική αλήθεια). Στην περίπτωση που έχουμε καμπυλότητα κι όχι περιστροφή, η εξ. (3.41) αντικαθίσταται απ' την παρακάτω:

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{9}{2} \frac{u}{R} v' \frac{\partial u}{\partial y} = \left( a^* \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R} \right| - 0,09\omega \right) k + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + 0,5\nu_t) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad (3.48)$$

Για την περίπτωση που έχουμε συμπίεστο ρευστό, οι ίδιοι μελετητές προτείνουν πάλι, το 1976 τις ίδιες εξισώσεις πολλαπλασιασμένες και στα δύο μέλη με το  $\rho$  και τη χρήση του  $\rho\omega$  αντί του  $\omega$ .

Το συγκεκριμένο τροποποιημένο μοντέλο μάλλον δε γνώρισε μεγάλη απήχηση αφού το μοντέλο  $k - \omega$  δεν είναι τόσο διαδεδομένο όσο το  $k - \varepsilon$  παρόλο που (ή λόγω του ότι) είναι παρόμοια. Πολύ μεγάλη χρήση έγινε όμως στην «έκδοση» της διόρθωσης για το μοντέλο  $k - \varepsilon$  που θα δούμε αμέσως παρακάτω.

### 3.3.3. Το διορθωμένο μοντέλο $k - \varepsilon$ με την προσθήκη του όρου $G_c$

Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό και με το όνομα  $k - \varepsilon - \text{cm}$ .

Οι Howard, Patankar και Bordinuik, στην κλασική δημοσίευση, 1980, προεκτείνουν τη μελέτη και την πρόταση των Wilcox, Chambers στο μοντέλο  $k - \varepsilon$ . Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα λόγω των κοινών στοιχείων των δύο μοντέλων.

Έτσι, στην εξίσωση του  $k$  προσθέτουν ακριβώς τον ίδιο όρο που τον ονομάζουν  $G_c$ . Δεν γράφουν γιατί διάλεξαν αυτό το σύμβολο, αλλά μάλλον σημαίνει «όρος παραγωγής τυρβώδους ενέργειας ( $G$  απ' το Generation) λόγω της δύναμης Coriolis (δείκτης  $c$  απ' το Coriolis)». Για την εξίσωση του  $\varepsilon$  πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το  $\omega$  δεν αλλάζει και ότι το  $\omega$  αντιστοιχεί στο  $\varepsilon/k$ , οπότε στην εξίσωση του  $\varepsilon$  πρέπει να προστεθεί ο όρος  $G_c \varepsilon/k$ . Κατόπιν τούτων, οι τελικές εξισώσεις για τα  $k$  και  $\varepsilon$  λαμβανομένης υπόψη και της περιστροφής, θα είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v k) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w k) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G - \rho \varepsilon + G_c \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_1 \frac{\varepsilon G}{k} - C_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} + G_c \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.50), \text{ όπου:}$$

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.51)$$

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \quad (3.52)$$

$$G_c = 9\Omega \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.53)$$

Οι σταθερές  $C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  ισούνται αντίστοιχα 0,09, 1,44, 1,92, 1,0, 1,3.

Το παραπάνω μοντέλο για  $G_c=0$  είναι ένα κλασικό μοντέλο  $k - \varepsilon$ . Η διόρθωση με τον όρο  $G_c$  μπορεί να μπει σε οποιοδήποτε μοντέλο  $k - \varepsilon$ , απλά προσθέτοντας στο τέλος των (όποιων) εξισώσεων του  $k$  και του  $\varepsilon$  τους αντίστοιχους όρους.



Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε για την καμπυλότητα. Πάλι χρησιμοποιούμε τον πρόσθετο όρο του Wilcox που φαίνεται στην εξ. (3.48).

### 3.4.5. Το τροποποιημένο μοντέλο $k - \epsilon$ των Launder, Priddin, Sharma.

Οι Launder, Priddin, Sharma, 1977, τροποποίησαν το κλασσικό μοντέλο  $k - \epsilon$  χαμηλών αριθμών Reynolds των Jones & Launder (1972) για να ληφθούν υπόψη φαινόμενα καμπυλότητας, αλλά η τροποποίηση ισχύει και χρησιμοποιείται αυτούσια για οποιοδήποτε μοντέλο  $k - \epsilon$  και για περιστροφή.

Όπως αναφέρουν οι εν λόγω ερευνητές, ο άμεσος καθορισμός του μήκους ανάμιξης σε ροή με καμπυλότητα βάσει του τοπικού Richardson, δεν είναι συμβατός με το μοντέλο  $k - \epsilon$ , όπου η κλίμακα μήκους προκύπτει εκ των υστέρων, από εξισώσεις μεταφοράς τυρβωδών ποσοτήτων. Πιο συνεπής με το μοντέλο φαίνεται η ιδέα να εξαρτώνται απ' το Richardson ένας ή παραπάνω συντελεστής των εξισώσεων του  $k$  και του  $\epsilon$ . Επιλέχθηκε να μείνει ανέπαφη η εξίσωση του  $k$  και η αλλαγή να γίνει μόνο στην εξίσωση του  $\epsilon$ , η οποία όμως είναι περισσότερο ακατανόητη και δύσκολη και δεν είναι φανερό σε ποιον ή ποιους όρους της πρέπει να γίνει τροποποίηση. Επιπλέον υπάρχει το ερώτημα κατά πόσο θα μπορούσαν να μείνουν ανέπαφοι οι όροι που εξαρτώνται απ' το Reynolds που μπήκαν για να γίνει το μοντέλο χαμηλών Reynolds.

Η απόφαση που πάρθηκε ήταν ν' αναζητηθεί στην εξίσωση του  $\epsilon$  η απλούστερη δυνατή διόρθωση. Ως τέτοια θεωρήθηκε η τροποποίηση του  $C_2$  ώστε να εξαρτάται απ' τον αριθμό Richardson. Ακόμη αγνοήθηκαν τα φαινόμενα καμπυλότητας σε χαμηλούς Reynolds, δηλαδή κοντά στον τοίχο, διότι απ' τα πειράματα δε φαίνεται να μεταβάλλεται πολύ ο λογαριθμικός νόμος πολύ κοντά στον τοίχο, όπως έχει προαναφερθεί.

Οι Launder, Priddin, Sharma θεώρησαν καλή ιδέα ν' αλλάξουν και τον παραδοσιακό Richardson με κάτι που ταίριαζε καλύτερα στην περίπτωση. Όπως γράφεται στην σελ. 92 και αναφέρει κι ο Bradshaw, στον παρανομαστή του Richardson υπάρχει μια τυπική συχνότητα τύρβης (υψωμένη στο τετράγωνο). Τέτοια ο Bradshaw είχε θεωρήσει την κλίση της μέσης ταχύτητας που είναι και τόσο χαρακτηριστική της τύρβης, οπότε εδώ προτιμάται μια πραγματική συχνότητα τύρβης και συγκεκριμένα η  $k/\epsilon$ . Έτσι ορίζεται ένας Richardson που επικράτησε να λέγεται τυρβώδης αριθμός Richardson  $Ri_t$  ο οποίος για την περίπτωση της καμπυλότητας θα είναι:

$$Ri_t = \left(\frac{k}{\epsilon}\right)^2 S(1+S) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (3.54)$$

Το  $S$  είναι στην απλή περίπτωση  $2Ku/(du/dy)$ , αλλά για μεγαλύτερη ακρίβεια μπορεί να ληφθεί απ' την εξ. (3.38). Για περίπτωση της περιστροφής προκύπτει:

$$Ri_t = -2\Omega \left(\frac{k}{\epsilon}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega\right) \quad (3.55)$$

Μετά την εισαγωγή του τυρβώδους αριθμού Richardson, στη θέση του  $C_2$  μπαίνει το  $C_2(1 - C_c Ri_t)$ , όπου  $C_c$  προσδιορίσιμη σταθερά. Έτσι οι τελικές εξισώσεις του μοντέλου Jones - Launder αν εισάγουμε αυτή τη μετατροπή θα είναι με τανυστικό συμβολισμό:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.56)$$

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho \epsilon - 2\mu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 \quad (3.57)$$

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} + \mu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \mu_t \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - C_2 (1 - C_c Ri_t) \frac{\rho \epsilon^2}{k} + C_3 \nu \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 \quad (3.58)$$

Ως τυρβώδης κλίμακα μήκους  $\Lambda$  έχει θεωρηθεί κλασσικά η  $k/\varepsilon$ . Με  $\tau$  συμβολίζεται το ίχνος του πίνακα, όπως προαναφέρθηκε στη σελ. 16. Για την αδιάστατη στροβιλότητα  $\omega$  (διαφορετικό απ' το  $\omega$  του μοντέλου  $k-\omega$ ) ισχύει:

$$\omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{-2tr(\Omega^2)} \quad (3.64)$$

Για τα στοιχεία των πινάκων του μέσου τανυστή των παραμορφώσεων  $S$  και του μέσου τανυστή της απόλυτης στροβιλότητας  $\Omega$  ισχύουν (ως προς απόλυτο σύστημα αναφοράς):

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.65)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.66)$$

Στις τρεις διαστάσεις τα  $i$  και  $j$  μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε από τις τιμές 1, 2, 3, οπότε βάσει των παραπάνω σχέσεων ορίζονται τα 9 στοιχεία των πινάκων, δηλαδή οι πίνακες.

Στις περιστρεφόμενες συντεταγμένες το  $\partial u_i / \partial x_j$  αντικαθίσταται στην εξ. (3.66) απ' το  $\partial u_i / \partial x_j + \varepsilon_{ijk} \Omega_k$ , όπου το μεταθετικό σύμβολο (ή δεύτερο σύμβολο του Kronecker) ισούται με 1 αν τα  $i, j, k$  είναι κυκλική μετάθεση των 1,2,3, ισούται με -1 αν τα  $i, j, k$  είναι κυκλική μετάθεση των 3,2,1 και ισούται με 0 αν δύο ή τρία από τα  $i, j, k$  συμπίπτουν. Η εξ. (3.65) είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς.

Αυτός ο ορισμός του Richardson έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητος από το σύστημα αναφοράς (πιθανότατα γι' αυτό έβαλαν οι δημιουργοί του δείκτη  $i$ , απ' την αγγλική λέξη invariant), καθώς το ίχνος ενός πίνακα λέγεται και (πρώτη) αναλλοίωτη του τανυστή. Στην περίπτωση ροής σε περιστρεφόμενο κανάλι η εξ. (3.62) γίνεται:

$$Ri_i' = -2\Omega \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \Omega \right) \quad (3.67)$$

Κοντά στον τοίχο η εξ. (3.67) δίνει ίδια σχεδόν αποτελέσματα με την εξ. (3.55), αφού εκεί οι κλίσεις της ταχύτητας είναι μεγάλες.

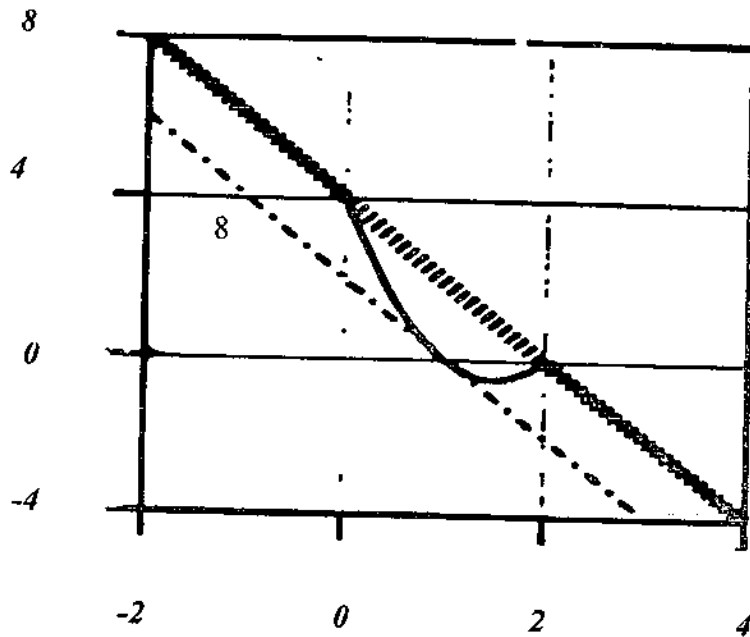
Η εξίσωση εξ. (3.67) έχει μεγάλο μειονέκτημα ότι δε μηδενίζεται για μηδενική απόλυτη στροβιλότητα. Γι' αυτό οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν ένα βελτιωμένο ορισμό που συνίσταται να χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτός είναι:

$$Ri_i' = -\omega(s - \omega) \quad (3.68)$$

Για την περίπτωση του στρεφόμενου καναλιού, η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$Ri_i' = -\left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega \right| \cdot \left( \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - \left| \frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega \right| \right) \quad (3.69)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η συσχέτιση των τριών τυρβωδών Richardson που έχουμε ορίσει ως τώρα, όσον αφορά τη μορφή που παίρνουν σε περιστρεφόμενο κανάλι. Με τις παράλληλες μικρές γραμμές φαίνεται ο κλασσικός ορισμός του Launder εξ. (3.35), με τη συνεχή ο πιο σύγχρονος που είναι κι αυτός που προτείνεται, εξ. (3.69) και με την αξονική η εξ. (3.62).



### 3.4.7. Το μοντέλο του Hellsten.

Ο Hellsten βασίστηκε στο μοντέλο  $k - \omega$  του Menter και άλλαξε τον όρο πηγής βάζοντας αντί για τη σταθερά  $C_2$  μια άλλη που είναι:

$$C_2' = \frac{C_2}{1 + 3,6 Ri} \quad (3.70)$$

Το Richardson το όρισε ως εξής:

$$Ri = \frac{|\Omega_y| \left( \left( \frac{|\Omega_y|}{|S_y|} - 1 \right) \right)}{|S_y|} \quad (3.71)$$

όπου

$$|\Omega_y| = \sqrt{2\Omega_y \Omega_y} \quad (3.72)$$

$$|S_y| = \sqrt{2S_y S_y} \quad (3.73)$$

Το παραπάνω Richardson έτσι που είναι ορισμένο, δεν παίρνει τιμές κάτω από  $-1/4$ .

Επαναλαμβάνεται ότι η παραπάνω διόρθωση αφορά μοντέλο  $k - \omega$ .

Ο Hellsten είχε ενθαρρυντικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας το και ο Ojala με τους συνεργάτες του ισχυρίζονται ότι πρέπει να του δοθεί σημασία και να δοκιμαστεί περαιτέρω. Βλέπουμε ότι κι αυτό το μοντέλο είναι παρόμοιο με την κλασική λογική που άρχισε με τον Bradshaw, που θέλει διορθώσεις της μορφής (1-σταθερά-Richardson).

### 3.4.8. Τα Richardson του Myong.

Στις τελευταίες σελίδες έχουμε δει πολλά καινούργια Richardson και είναι η κατάλληλη στιγμή να δούμε άλλο ένα. Οι διάφοροι Richardson που παρουσιάζονται έχουν και μεγάλη πρακτική σημασία, γιατί για κάθε ένα απ' αυτούς έχουμε πολλές καινούργιες εισαγοντάς τον σε μοντέλα τύρβης που εμπλέκουν αυτό τον αριθμό.

Ο Myong παρατήρησε ότι οι Launder και συνεργάτες το 1977 άλλαξαν τον παρανομαστή του Richardson του Bradshaw για να φτιάξουν τον τυρβώδη Richardson που χρησιμοποιήθηκε πολύ στα μοντέλα τύρβης. Ο αριθμητής όμως έμεινε ίδιος, η συχνότητα Brunt - Väisälä, η οποία έχει το μειονέκτημα να μην προσδιορίζεται εύκολα σε τυχαίες ροές. Ειδικά στην περίπτωση της καμπυλότητας απαιτεί καμπυλόγραμμες συντεταγμένες για να οριστεί και αυτό είναι μια επιπλέον δυσκολία.

Ο τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης  $S$ , εξ. (3.65) και ο τανυστής της απόλυτης στροβιλότητας  $\Omega$ , έχουν περίπου την ίδια συχνότητα (ή κλίμακα χρόνου) σε απλές ροές όπου υπάρχει ένας βασικός ρυθμός παραμόρφωσης. Σε περίπλοκες, τριδιάστατες ροές με πρόσθετες παραμορφώσεις λόγω καμπυλότητας ή επιπλέον κλίσεων πίεσης οι κλίμακες χρόνου των δύο πινάκων θα διαφέρουν λόγω της ανισοτροπίας που θα υπάρχει. Μάλιστα όσο μεγαλύτερη η ανισοτροπία, τόσο μεγαλύτερη η διαφορά τους. Γι' αυτό ο Myong προτείνει ως χαρακτηριστική συχνότητα αντί την Brunt - Väisälä, την:

$$\omega_M^2 = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (3.74)$$

Την επιλογή του στηρίζει και στον καθοριστικό ρόλο που παίζει η παραπάνω παράμετρος στην εξίσωση Poisson για τη μέση πίεση σε ασυμπίεστη τυρβώδη ροή.

Η νέα χαρακτηριστική συχνότητα είναι γραμμένη σε τέτοια τανυστική μορφή ώστε να μην εξαρτάται απ' το σύστημα συντεταγμένων (tensorially invariant) και αυτό είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα.

Διαιρώντας με μια χαρακτηριστική συχνότητα της ροής που να έχει γενικότητα, π.χ. τον τανυστή των παραμορφώσεων, έχουμε τον (πρώτο) Richardson του Myong:

$$Ri_M = \frac{\omega_M}{2S_{ij}S_{ij}} = \frac{(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})}{2S_{nm}S_{nm}} \quad (3.75)$$

Μπορεί κατ' αντιστοιχία με τον τυρβώδη Richardson να οριστεί και εδώ τυρβώδης Richardson του Myong:

$$Ri_{M'} = \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (3.76)$$

Για την περίπτωση του στρεφόμενου καναλιού, ο παραπάνω τύπος οδηγεί στη σχέση:

$$Ri_{M'} = -2\Omega \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \Omega\right) \quad (3.77)$$

Ο τύπος αυτός είναι ολόιδιος με την εξ. (3.67) και γενικότερα το Richardson του Myong είναι πολύ ίδιο μ' αυτό των Hirsch & Khodak χωρίς ο ίδιος να φαίνεται να το γνωρίζει. Το γεγονός βέβαια να φτάσουν δύο ερευνητές ανεξάρτητα στο ίδιο αποτέλεσμα στηρίζει αυτό το αποτέλεσμα. Ακόμη, στην εξ. (3.26) για παράδειγμα, έχουμε πει ότι καμιά φορά αμελείται το  $-2\Omega$  και στη θέση του μπαίνει 0, οπότε η μέση λύση που δίνεται παραπάνω, να μπει το  $-\Omega$  φαίνεται ως καλή πρόταση. Απ' την άλλη μεριά βέβαια δεν δίνει αποτέλεσμα 0 για απόλυτη στροβιλότητα 0.

Γενικά βλέπουμε πολλούς νέους αριθμούς που καλούνται να παίξουν το ρόλο του Richardson τα τελευταία χρόνια. Τ' αποτελέσματα που δίνουν σε απλές ροές είναι παρόμοια μ' αυτά των «παλιών» Richardson, αλλά έχουν το πλεονέκτημα να μπορούν να γενικευτούν σε περιπλοκότερες ροές και (τουλάχιστον οι περισσότεροι απ' αυτούς) να είναι ανεξάρτητοι του συστήματος συντεταγμένων λόγω της κατάλληλης έκφρασης τους με χρήση τανυστών.

### 3.4.9. Το διορθωμένο μοντέλο $k - \varepsilon$ του Gibson για την καμπυλότητα.

Ο Gibson, το 1978, διατύπωσε μια διορθωση που μάλλον δε βρήκε μεγάλη απήχηση και ισχύει μόνο για διδιάστατο απλό οριακό στρώμα.

Όπως και λίγα χρόνια πριν ο So, ο Gibson άρχισε από τις εξισώσεις των τάσεων Reynolds για να καταλήξει σε αλγεβρικές τους εκφράσεις χρησιμοποιώντας προτάσεις των Launder, Reece και Rodi, 1975, Gibson και Launder, 1978 και Rodi, 1976. Έτσι μπορούν να ληφθούν οι εξής εξισώσεις για τις τάσεις Reynolds:

$$\frac{\overline{v'^2}}{k} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 + 2\phi_s} \left(1 - \frac{P_k}{\varepsilon} \phi_2\right) - \frac{4S}{1 - S} \frac{\phi_2}{1 + 2\phi_s} \frac{P_k}{\varepsilon} \quad (3.78)$$

$$\frac{\overline{u'^2}}{k} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{P_k}{\varepsilon} \phi_4\right) + \phi_s \frac{\overline{v'^2}}{k} + \frac{4S}{1 - S} \frac{P_k}{\varepsilon} \phi_3 \quad (3.79)$$

$$-\overline{u'v'} = \left\{ \phi_1 \left[ 1 - \left( \frac{2\overline{u'^2}}{v'^2} - 1 \right) S \right] \frac{v'^2}{k} \right\} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.80)$$

Η  $P_k$  είναι παραγωγή του  $k$  και οι συντελεστές  $\phi_i$  δίνονται στη δημοσίευση του Gibson, 1978. Το  $S$  είναι η γνωστή παράμετρος ευστάθειας για καμπυλότητα. Αντικαθιστώντας στην τυρβώδη συνεκτικότητα την διατμητική τάση Reynolds από την εξ. (3.80) και λαμβάνοντας με τα  $k - \epsilon$  και μια σταθερά, βλέπουμε ότι πρέπει η σταθερά να έχει την τιμή:

$$C_\mu = \frac{\phi_1}{1-S} \left[ 1 - \left( \frac{2\overline{u'^2}}{v'^2} - 1 \right) S \right] \frac{v'^2}{k} \quad (3.81)$$

Άρα κατά Gibson, το  $k - \epsilon$  ισχύει κανονικά, μόνο που αντί για την σταθερά 0,09 χρησιμοποιούμε την παραπάνω τιμή.

### 3.4.10. Η διόρθωση των Leschziner, Rodi και άλλες διορθώσεις.

Το μοντέλο των Leschziner, Rodi διατυπώθηκε το 1981. Αυτό το μοντέλο περιγράφεται συνοπτικά ως βελτίωση του προηγούμενου μοντέλου. Αντί όμως να χρησιμοποιηθεί η πρόταση του Rodi για όρους μεταφοράς, αγνοήθηκαν όλοι οι όροι συναγωγής με την υπόθεση ότι υπάρχει τοπική ισορροπία. Οι τελικές αλγεβρικές σχέσεις απλοποιούνται και προκύπτει για την τυρβώδη διατμητική τάση η σχέση:

$$-\overline{u'v'} = \frac{-K_1 K_2}{1 + 8K_2' \frac{k^2}{\epsilon^2} S(1+S) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \frac{k^2}{\epsilon} (1-S) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.82)$$

Για τις σταθερές προτείνονται οι τιμές  $K_1=0,266$ ,  $K_2=-0,489$ . Σύγκριση της εξ. (2.69) με την εξ. (2.82) μας δίνει αντικαθιστώντας τις σταθερές με τις τιμές τους και κάνοντας χρήση του τυρβώδους Richardson του Launder:

$$C_\mu = \frac{0,13}{1 + 0,57 Ri_t} \quad (3.83)$$

Οπότε χρησιμοποιούμε κανονικά το  $k - \epsilon$ , με μόνη την παραπάνω τροποποίηση στη σταθερά της εξίσωσης εξ. (2.69).

Για Richardson μικρότερο από  $-1,75$  παίρνουμε αρνητικές τιμές για τη συνεκτικότητα, κάτι που δε στέκει φυσικά, αλλά δημιουργεί και προβλήματα αστάθειας της αριθμητικής λύσης. Γι' αυτό πρέπει με κάποιο τρόπο να μπει ένας φραγμός.

Ακόμη, σε απευθείας χρήση μαζί με το μοντέλο  $k - \epsilon$ , υπάρχει σύγκρουση των σταθερών 0,13 με την κλασσική σταθερά των μοντέλων  $k - \epsilon$ , δηλαδή την 0,09. Γι' αυτό προτείνεται απ' τους δημιουργούς του μοντέλου αντικατάσταση του 0,13 με το 0,09 σ' αυτές τις περιπτώσεις.

Βελτίωση στο μοντέλο του Gibson έκαναν και οι Pourahmadi, Humphrey, 1983. Εφάρμοσαν ακριβώς την ίδια μοντελοποίηση, αλλά χωρίς τόσες παραδοχές και κατέληξαν σε μια σχέση παρόμοια με την εξ. (3.81), αλλά πολύ πιο περίπλοκη. Έτσι, μετά από κοπιώδεις πράξεις προκύπτει:

$$C_\mu^{0,5} = 2Q^{0,5} \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} (RQ^{-2/3}) \right] - \frac{S}{3} \quad (3.84)$$

Τα  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  είναι περίπλοκες αλγεβρικές εκφράσεις που εξαρτώνται από κλίσεις ταχύτητας, τη συνάρτηση τοίχου  $f$  (που ορίζεται ο λόγος  $G/\epsilon$  ( $G$  είναι ο όρος παραγωγής στην εξίσωση του  $k$ ) και σταθερές του μοντέλου τύρβης. Στην περίπτωση που έχουμε ροή με πολύ μικρό πάχος οριακού στρώματος παρουσία καμπυλωμένου στερεού ορίου, τα πράγματα απλοποιούνται πολύ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται της μορφής:

$$C_\mu = 0,056 [1 - 12,17\Pi + O(\Pi^2)] \quad (3.85)$$

Π είναι η επιπλέον παραμόρφωση λόγω καμπυλότητας που ισούται περίπου με το μισό της παραμέτρου ευστάθειας. Βλέπουμε ότι αν δεν υπάρχουν επιπλέον επιδράσεις παίρνουμε την τιμή 0,056 που είναι μέσα στο εύρος τιμών που έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς σ' αυτό το συντελεστή για να καλύπτει όλα τα είδη ροών. Θεωρώντας ότι η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι ανάλογη του χαρακτηριστικού μήκους, η αγκύλη της εξίσωσης εξ. (3.85) μπορεί να θεωρηθεί ως διόρθωση του μήκους ανάμιξης, οπότε το 12,17 αντιστοιχεί στο  $2\beta$ , τιμή πάλι μέσα στα όρια που κατά καιρούς έχουν δοθεί για το συντελεστή  $\beta$ .

### 3.4.11. Η διόρθωση που εφάρμοσαν οι Chen, Guo.

Αυτοί, δεν έκαναν τίποτε ουσιαστικά καινούργιο εφάρμοσαν μια διόρθωση στην σταθερά  $C_2$  της εξίσωσης του  $\varepsilon$ , όπως οι Launder και συνεργάτες. Μόνο που της έδωσαν λίγο διαφορετική μορφή. Ακόμη, βασίστηκαν στο μοντέλο χαμηλών Reynolds του Chien που έχει δώσει καλά αποτελέσματα και εφαρμόζεται από αρκετούς. Για τους συγκεκριμένους συγγραφείς, αν έχουμε περιστροφή δεν είναι σωστή η χρήση συναρτήσεων τοίχου, αφού η επαναστρατοποίηση της ροής είναι τελείως ασύμβατη με το λογαριθμικό νόμο.

Παρακάτω δίνονται όλες οι εξισώσεις του πλήρους προβλήματος. Ο όρος της διόρθωσης είναι μόνο αυτός που συμβολίζεται  $Ri^*$ . Για  $\Omega=0$ , έχουμε ένα πλήρες μοντέλο  $k - \varepsilon$  χαμηλών Reynolds, αυτό του Chien.

Συνέχεια:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.86)$$

Μέσες εξισώσεις Navier - Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k - (\Omega_j x_j \Omega_i - \Omega_j x_i \Omega_j) \quad (3.87)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι λόγω των δυνάμεων Coriolis και φυγοκέντρου αντίστοιχα.

Υπόθεση Boussinesq:

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.88)$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (3.89)$$

Τα δελτία του Kronecker στο τέλος της εξ. (3.88) παίρνει τιμές 1 αν  $i=j$  και 0 στις άλλες περιπτώσεις. Ο τανυστής παραμορφώσεων δίνεται απ' την εξ. (3.65).

Για την μοντελοποίηση της τύρβης έχουμε:

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.90)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + D = \varepsilon + D \quad (3.91)$$

$$D = -2\nu \frac{k}{y^2} \quad (3.92)$$

$$f_\mu = 1 - \exp(-0,0115 y^+) \quad (3.93)$$

Για την εύρεση των  $k$  και  $\varepsilon$  έχουμε:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + D \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_2 (f_2 + Ri^*) \frac{\varepsilon^2}{k} + E$$

(3.95)

$$Ri^* = \gamma_1 \Omega_k (\omega_k + \gamma_2 \Omega_k) \frac{k^2}{\varepsilon^2} \quad (3.96)$$

Η τοπική μέση στροβιλότητα είναι:

$$\omega_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.97)$$

Στις σταθερές  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  δόθηκαν ως πιο κατάλληλες οι τιμές  $-0,32$  και  $-24,6$  αντίστοιχα. Απ' τον Chien λαμβάνονται οι τιμές των υπόλοιπων σταθερών:

$$C_\mu = 0,09, C_1 = 1,35, C_2 = 1,80, \sigma_\varepsilon = 1,0, f_1 = 1,0$$

και

$$f_2 = 1,0 - 0,22 \exp\left[-\left(\frac{Re_T}{6}\right)^2\right] \quad (3.98)$$

$$E = -2\nu \frac{\varepsilon}{y^2} \exp(-0,5y^+) \quad (3.99)$$

Ο  $Re_T$  δίνεται απ' τη σχέση εξ. (3.47) και ισούται με  $k^2/\nu\varepsilon$ .

### 3.4.12. Το μοντέλο των Cheng, Farokhi για $k - \varepsilon$ .

Οι ερευνητές αυτοί το 1992, αρχίζουν από τις εξισώσεις των τάσεων Reynolds για να πάρουν τελικά μια αλγεβρική έκφραση για την τυρβώδη συνεκτικότητα που λαμβάνει και την καμπυλότητα υπόψη της.

Οι εξισώσεις των τάσεων Reynolds στην περίπτωση που δεν έχουμε περιστροφή μπορούν να γραφούν για ρευστό ενιαίας πυκνότητας:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = & - \left( \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) - \left[ 2\nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) + \left[ \frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \right] \quad (3.100) \end{aligned}$$

Οι όροι ονομάζονται κατά σειρά συναγωγής, παραγωγής, καταστροφής, «αναδιανομής», διάχυσης.

Οι Cheng, Farokhi, χρησιμοποιούν το αλγεβρικό μοντέλο τάσεων Reynolds του Rodi, 1976. Η βασική του ιδέα είναι ότι η μεταφορά των τάσεων Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  είναι ανάλογη της μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, δηλαδή:

$$C_{ij} - D_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (C_k - D_k) \quad (3.101)$$

Οι δύο πρώτοι όροι του αριστερού μέλους είναι αντίστοιχα ο όρος συναγωγής και ο όρος διάχυσης των εξισώσεων των τάσεων Reynolds. Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την εξίσωση του  $k$  και κάνοντας χρήση του μοντέλου τάσεων Reynolds των Launder, Reece, Rodi, 1975, μπορούμε να πάρουμε μια αλγεβρική έκφραση των τάσεων Reynolds, της μορφής:

$$\frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} = \frac{\varphi}{\varepsilon} \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_r \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (3.102)$$

όπου

$$\varphi = \frac{1 - c_2}{c_1 - 1 + \frac{P_r}{\varepsilon}} \quad (3.103)$$

Το  $P_{ij}$  είναι ο ρυθμός παραγωγής της τάσης Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . Στις σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  δόθηκαν οι τιμές 1,5 και 0,76 όπως θα φανεί παρακάτω. Το  $P_r$  είναι ο ρυθμός παραγωγής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας:

$$P_r = \frac{\mu_t}{\rho} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (3.104)$$

Η εξ. (3.102) δεν ισχύει ικανοποιητικά εκεί που το πρώτο μέλος της μεταβάλλεται πολύ γρήγορα, δηλαδή κοντά στον τοίχο. Το μειονέκτημα αυτό μπορεί ν' αποφευχθεί με χρήση συναρτήσεων τοίχου.

Κρατώντας μόνο τους κύριους ρυθμούς παραμόρφωσης  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial y$  και με κάποιες παραδοχές, φτάνουμε για την διατμητική τάση Reynolds στη σχέση:

$$-\overline{u'v'} = \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{2}{3} \varphi \left( 1 - R_{\frac{\sigma}{\rho}} - \varphi \frac{P_r}{\varepsilon} \frac{R_{\frac{\sigma}{\rho}}^2 + 4R_{\frac{\sigma}{\rho}} + 1}{1 + R_{\frac{\sigma}{\rho}}} \right) \quad (3.105)$$

όπου:

$$R_{\frac{\sigma}{\rho}} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (3.106)$$

θυμίζει το Richardson «ροής» (flux) που τον όρισε ο Bradshaw ως  $Ri_{\frac{\sigma}{\rho}} = -(\text{παραγωγή ενέργειας της συνιστώσας } \omega \text{ λόγω της μαζικής δύναμης} / \text{παραγωγή ενέργειας της συνιστώσας } u)$  και ισχύει:

$$Ri_{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{S}{1+S} = 2R_{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (3.107)$$

οπότε μπορούμε να προεκτείνουμε την παραπάνω διόρθωση και για περιστροφή βάζοντας για Richardson ροής αυτόν που ορίζεται απ' την παράμετρο ευστάθειας  $S$  για περιστροφή.

Οι Cheng, Fagokhi αντικατέστησαν την εξίσωση εξ. (3.105) στον ορισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας και πήραν έτσι μια έκφραση για το  $\mu_t$ . Ισοδύναμα όμως, μπορούμε να εισάγουμε τη διόρθωσή τους στο συντελεστή  $C_\mu$  οπότε έχουμε:

$$C_\mu = \frac{2}{3} \varphi \left( 1 - R_{\frac{\sigma}{\rho}} - \varphi \frac{P_r}{\varepsilon} \frac{R_{\frac{\sigma}{\rho}}^2 + 4R_{\frac{\sigma}{\rho}} + 1}{1 + R_{\frac{\sigma}{\rho}}} \right) \quad (3.108)$$

Απ' την ανάγκη να ισούται με 0,09 αν δεν έχουμε καμπυλότητα προσδιορίστηκαν οι τιμές των σταθερών  $c_1$  και  $c_2$ .

Όπως σημειώνουν οι συγγραφείς, αν έχουμε καμπυλότητα και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων με συνιστώσα  $s$  την κατεύθυνση της ροής και  $n$  την κάθετη σ' αυτή, πάλι ισχύει η εξ. (3.106) μόνο που τώρα έχουμε:

$$R_{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{2 \frac{u}{R}}{\left( 1 + \frac{n}{R} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{u}{R}} \quad (3.109)$$

Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν αυτό το μοντέλο για επίλυση ροής σε αγωγό με απότομη αύξηση διατομής και σε καμπύλους αγωγούς. Στην πρώτη περίπτωση δεν προσδιορίστηκε σωστά το σημείο επανακόλλησης της ροής και στους καμπύλους αγωγούς η ακρίβειά του ήταν καλή.

### 3.4.13. Το μοντέλο των Park και Chung.



Έχει φανεί πειραματικά (Smits, 1979, Muck, 1985, Castro & Bradshaw, 1976) ότι οι τριπλές συσχετίσεις των διακυμάνσεων των ταχυτήτων έχουν διαφορετική χρονική κλίμακα απ' ότι οι τάσεις Reynolds (διπλές συσχετίσεις) σε κυρτή επιφάνεια. Οι παραπάνω ερευνητές το 1989, έλαβαν αυτό υπόψη τους και μοντελοποίησαν τους όρους τριπλών συσχετίσεων ώστε να υπάρχει εξάρτηση και από την καμπυλότητα, πράγμα που δεν έχει γίνει σε άλλο μοντέλο.

Έτσι, γράφοντας τις εξισώσεις του  $k$  και του  $\varepsilon$  πριν μοντελοποιηθούν οι όροι τριπλών συσχετίσεων, έχουμε:

$$\frac{Dk}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u'_j \left( \frac{u'_j u'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right] - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.110)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{\varepsilon' u'_j}) - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.111)$$

Το  $\varepsilon'$  είναι το  $\varepsilon$  χωρίς τη μέση τιμή:

$$\varepsilon' = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \quad (3.112)$$

Η μοντελοποίηση των όρων τριπλών συσχετίσεων γίνεται πλέον ως εξής (για τη δικαιολόγηση της μοντελοποίησης οι συγγραφείς παραπέμπουν σε παλιότερη εργασία τους, 1987):

$$-\overline{u'_j \left( \frac{u'_j u'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} = \frac{C_\mu}{\sigma_k} \left( \frac{1}{1 + \alpha \tau_v / \tau_c} \right) k^2 \frac{\partial k}{\varepsilon \partial x_j} \quad (3.113)$$

$$-\overline{\varepsilon' u'_j} = \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{1}{1 + \alpha \tau_v / \tau_c} \right) k^2 \frac{\partial \varepsilon}{\varepsilon \partial x_j} \quad (3.114)$$

Η παραπάνω μοντελοποίηση για  $\alpha=0$  γίνεται η κλασική μοντελοποίηση που ισχύει σε όλα τα άλλα μοντέλα  $k - \varepsilon$ . Στη σταθερά αυτή δόθηκε τελικά η τιμή  $\alpha=0,12$ .

Η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται με τον κλασικό τρόπο για μοντέλο  $k - \varepsilon$ , από την εξ. (2.69) με τη σταθερά να έχει την κλασική της τιμή, 0,09.

Το  $\tau_v$  είναι μια κλίμακα χρόνου «ταχύτητας» που λαμβάνεται  $k/\varepsilon$ , όσο δηλαδή η τυρβώδης κλίμακα χρόνου. Το  $\tau_c$  είναι μια κλίμακα χρόνου καμπυλότητας που λαμβάνεται:

$$\tau_c = \frac{\frac{\varepsilon}{k}}{S(1+S) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \quad (3.115)$$

Το μοντέλο των Park και Chung αλλάζει και κάτι ακόμη στις εξισώσεις του  $k$  και του  $\varepsilon$ . Αυτό είναι η σταθερά  $C_2$ . Ο ρυθμός που καταστρέφεται η ενέργεια αλλάζει ισχυρίζονται, οπότε πρέπει και η σταθερά αυτού του ρυθμού  $\nu'$  αλλάξει. Οπότε χρησιμοποιούν την εξής σταθερά:

$$C'_2 = \frac{C_2}{1 + b \tau_v \tau_c} \quad (3.116)$$

Για το  $b$  βρήκαν ως προτιμότερη τιμή το 0,5.

Βλέπουμε ότι ισχύει  $\tau_v / \tau_c = Ri_t$ , οπότε μπορούμε να μεταφέρουμε εύκολα τη διόρθωση και για την περίπτωση της περιστροφής, απλά χρησιμοποιώντας Richardson της περιστροφής.

Οι Park και Chung χρησιμοποίησαν άλλη λογική, αλλά η τελική διόρθωση θυμίζει σε κάποια σημεία άλλες διορθώσεις. Για παράδειγμα η διόρθωση του  $C_2$  δεν είναι ουσιαστικά άλλη απ' τη γνωστή διόρθωση του  $C_2$  των Launder et al. (1977) γραμμένη με λίγο

διαφορετική μορφή (έχουμε ξαναπεί ότι  $1/(1+a) \approx 1-a$ ) και με άλλη τιμή στη σταθερά. Ακόμη, στη μοντελοποίηση π.χ. της εξ. (3.113) είναι σα να έχουμε κλασσική μοντελοποίηση, αλλά με άλλη σταθερά  $C_\mu = 0,09/(1+0,12Ri_i)$ , (και τη σταθερά της εξ. (2.69) να παραμείνει 0,09), πράγμα που θυμίζει άλλες διορθώσεις αυτού του συντελεστή, όπως π.χ. την εξ. (3.83) που έχει προκύψει από τελείως διαφορετικό τρόπο. Βέβαια πάλι είναι διαφορετικές οι σταθερές, αλλά αυτό δικαιολογείται γιατί οι Park και Chung χρησιμοποιούν και τα δύο σε συνδυασμό.

Γενικότερα θα μπορούσε κανείς να πει ότι πολλοί ερευνητές, από τελείως διαφορετικούς δρόμους καταλήγουν σε διορθώσεις που μοιάζουν μεταξύ τους σε αρκετά σημεία και πολλές απ' αυτές σχετίζονται με ένα όρο της μορφής  $(1 - \text{σταθερά} \cdot \text{Richardson})$  είτε μέσα είτε έξω απ' τις εξισώσεις των  $k$  και  $\varepsilon$ . Αυτό πιθανότατα σημαίνει εκτός των άλλων και ότι στο συγκεκριμένο επίπεδο μοντελοποίησης της τύρβης για το οποίο μιλάμε (μοντέλα έως δύο εξισώσεων) ίσως δε μπορούμε να πετύχουμε κάτι πολύ καλύτερο απ' αυτό που έχει ήδη επιτευχθεί, αφού και νέες προσπάθειες συχνά καταλήγουν να θυμίζουν στο τελικό αποτέλεσμα παλιές. Για καλύτερα αποτελέσματα ίσως πρέπει να περάσουμε σε πιο εξελιγμένα μοντέλα τύρβης πλέον.

#### 3.4.14. Το μοντέλο του Shih και συνεργατών.

Το μοντέλο αυτό είναι ένα πιο ανεπτυγμένο μοντέλο τύρβης, βελτίωση του  $k - \varepsilon$ . Δεν αναπτύχθηκε για ν' αντιμετωπίζει ροές με περιστροφή, αλλά τα καταφέρνει πολύ καλά ακόμα και σ' αυτή την περίπτωση, όπου τα άλλα μοντέλα  $k - \varepsilon$  αποτυγχάνουν. Είναι κλασσικό παράδειγμα του ισχυρισμού ότι πλέον δεν έχει νόημα η ανάπτυξη καλύτερων διορθώσεων για μοντέλα τύρβης, αλλά η ανάπτυξη καλύτερων μοντέλων τύρβης, τα οποία είναι τόσο καλά φτιαγμένα που δε χρειάζονται «διόρθωση» αλλά λαμβάνουν εγγενώς υπόψη τους οποιοσδήποτε ανισοτροπίες (ή επιπλέον επιδράσεις ή κλίσεις πίεσης ή μαζικές δυνάμεις ή παραμορφώσεις...). Λέγοντας ανισοτροπία εννοούμε ότι δεν ισχύει η υπόθεση Boussinesq που θέλει όλες τις τυρβώδεις συνεκτικότητες σε όλες τις κατευθύνσεις ίδιες. Αν έχουμε επιπλέον επιδράσεις όπως η δύναμη Coriolis, ο τανυστής των παραμορφώσεων δεν έχει πλέον γραμμική σχέση μ' αυτόν των τάσεων και αυτός είναι ο κύριος λόγος που το μοντέλο  $k - \varepsilon$  και άλλα μοντέλα δεν έχουν εγγενή δυνατότητα να λαμβάνουν επιπλέον επιδράσεις υπόψη τους. Η αδυναμία του  $k - \varepsilon$  σε περιπτώσεις ροών χωρίς μετατροπή. Νεότερα μοντέλα  $k - \varepsilon$ , απομακρύνονται από την υπόθεση Boussinesq και λέγονται μη γραμμικά μοντέλα  $k - \varepsilon$ .

Ακολουθώντας μια πρόταση του W. C. Reynolds, 1987 και των Shih et al., 1994, οι Shih, Liou, Shabbir, Yang, Zhu, στο 1995 προτείνουν την εξής σχέση:

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_3 U^{(*)} \frac{k}{\varepsilon}} \quad (3.117)$$

Για να προκύψει αυτή η σχέση γίνεται χρήση συνθηκών φυσικής συμβατότητας, ώστε οι φυσικές ποσότητές μας να έχουν πάντα φυσικό νόημα. Αυτές είναι:

Οι κύριες τάσεις Reynolds να μη γίνουν αρνητικές:

$$\overline{u_1^2} \geq 0 \quad \overline{u_2^2} \geq 0 \quad \overline{u_3^2} \geq 0 \quad (3.118)$$

Και η ανισότητα του Schwartz που ισχύει για οποιοσδήποτε διακυμάνσεις ποσοτήτων  $a$ ,  $b$ , άρα και για τις διακυμάνσεις ταχυτήτων:

$$\left| \frac{\overline{ab}}{\sqrt{\overline{a^2} \overline{b^2}}} \right| \leq 1 \quad (3.119)$$

Για τα σύμβολα της εξίσωσης εξ. (3.117) ισχύει ότι το  $A_0$  είναι 4,0 και:

$$A_s = \sqrt{6} \cos \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W) \quad (3.120)$$

$$W = \frac{S_{ij} S_{jk} S_{ki}}{\tilde{S}^3}, \quad \tilde{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (3.121)$$

$$U^{(*)} = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij} \tilde{\Omega}_{ij}} \quad (3.122)$$

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_k \quad (3.123)$$

$$\bar{\Omega}_{ij} = \tilde{\Omega}_{ij} - \varepsilon_{ijk} \Omega_k \quad (3.124)$$

$\bar{\Omega}_{ij}$  είναι η μέση στροβιλότητα όπως τη βλέπει ο κινούμενος παρατηρητής γωνιακής ταχύτητας  $\Omega_k$  (αν υπάρχει).

Οι εκφράσεις είναι γραμμένες έτσι που να μην αλλάζουν με αλλαγή του συστήματος αναφοράς (tensorially invariant) και αυτό είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα που γενικεύει τη χρήση του μοντέλου.

Οι ίδιοι συγγραφείς προτείνουν μια άλλη εξίσωση για το  $\varepsilon$ , που δε θ' αναφερθεί εδώ.

Ο Ojala και συνεργάτες που δοκίμασαν το μοντέλο σε στρεφόμενο κανάλι είδαν ότι τα αποτελέσματα του ήταν απ' τα καλύτερα. Απ' την άλλη, οι Khodak, Hirsch αναφέρουν ότι ακόμη και τα μη γραμμικά  $k - \varepsilon$  υποεκτιμούν την επίδραση της Coriolis.

### 3.4.15. Θεωρητικοί νόμοι κι ένα μοντέλο απ' τον Speziale.

Ο Speziale το 1989, δείχνει ότι τα περισσότερα μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται για περιστροφή, δεν πληρούν κάποιους θεωρητικούς νόμους που θα έπρεπε.

Αρχίζει γράφοντας τις εξισώσεις Navier - Stokes για ασυμπίεστο ρευστό σε τυχαίο επιταχυνόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς (G. Batchelor, 1967). Είναι ίδιες με π.χ. τις εξ. (3.5), αλλά έχουν και ένα όρο με τη χρονική μεταβολή του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας  $\Omega$ , και τον όρο της επιτάχυνσης της αρχής των συντεταγμένων του κινούμενου συστήματος. Παίρνοντας μέσες τιμές **λαμβάνουμε τις μέσες εξισώσεις Navier - Stokes**, ίδιες με την περίπτωση του αδρανειακού συστήματος, μόνο που εδώ έχουμε και τους τέσσερις μη αδρανειακούς όρους. Δηλαδή πάλι ο μόνος άγνωστος που προστίθεται είναι οι τάσεις Reynolds. Αν αφαιρέσουμε απ' τις στιγμιαίες εξισώσεις Navier - Stokes τις μέσες, παίρνουμε μια εξίσωση που αφορά τις διακυμάνσεις ταχυτήτων, απ' την οποία φαίνεται ξεκάθαρα ότι για ένα συγκεκριμένο πεδίο μέσης ροής, ο μόνος όρος που επηρεάζει τις διακυμάνσεις ταχύτητας είναι η επιτάχυνση Coriolis. Οι άλλοι (π.χ. φυγόκεντρος) επιδρούν έμμεσα μέσω της αλλαγής του μέσου πεδίου ροής.

Εισάγοντας στις εξισώσεις Navier - Stokes των διακυμάνσεων τον τελεστή του Oldroyd:

$$\frac{D_c}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + u \nabla(\cdot) - (\cdot) \nabla u \quad (3.125)$$

που είναι ανεξάρτητος συστήματος αναφοράς και εισάγοντας και την απόλυτη στροβιλότητα που την είδαμε και παραπάνω, μπορούμε να τις γράψουμε σε μορφή που δεν εξαρτάται απ' το σύστημα αναφοράς. Απ' αυτή τη μορφή γίνεται φανερό ότι «η μόνη επίδραση που έχει οποιοδήποτε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς στις διακυμάνσεις ταχυτήτων (και άρα και στις τάσεις Reynolds, τις τριπλές συσχετίσεις ταχυτήτων κ.τ.λ.) είναι μέσω της απόλυτης στροβιλότητας» (πρώτος νόμος).

Ο Speziale γράφει και για άλλους «νόμους» σαν τον παραπάνω που μας κάνουν να μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα μοντέλο τύρβης στέκει θεωρητικά ή όχι. Ο ίδιος έχει αποδείξει το 1981 και αργότερα το 1983 ότι (παρόλο που στις τρεις διαστάσεις υπάρχει εξάρτηση του μοντέλου τύρβης που κλείνει το πρόβλημα), στις δύο διαστάσεις «τα μοντέλα τύρβης για τον τανυστή των τάσεων Reynolds πρέπει να είναι της ίδιας μορφής, άσχετα με το αν το σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό ή όχι» (δεύτερος νόμος).

Τρίτος νόμος είναι ουσιαστικά το θεώρημα Taylor – Proudman, που αναφέρεται από τον Tritton (1997). Σύμφωνα με αυτό μόνιμες ατριβείς ροές σε ταχέως περιστρεφόμενα συστήματα είναι διδιάστατες, δηλαδή ανεξάρτητες της συντεταγμένης κατά μήκος του άξονα περιστροφής του ρευστού. Ο Speziale δείχνει, πολλαπλασιάζοντας τις μέσες εξισώσεις Navier – Stokes με  $x$  (παίρνοντας δηλαδή την περιστροφή, τοι, των διανυσμάτων των εξισώσεων), ότι στο όριο που το  $\Omega$  τείνει στο άπειρο, η λύση της εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο δύο εκ των τριών συντεταγμένων του χώρου. Δηλαδή το θεώρημα Taylor – Proudman ισχύει και για στατιστικά μόνιμες τυρβώδεις ροές.

Βάσει των παραπάνω νόμων αποδεικνύεται ότι όλα τα γνωστά τότε (1989) μοντέλα τύρβης για περιστροφή έχουν εγγενής μειονέκτημα τη μη συμφωνία με τη θεωρία οπότε θα έχουν σίγουρα πεπερασμένη ακρίβεια. Για παράδειγμα, η εισαγωγή συντελεστών που εξαρτώνται ρητά απ' τον πρώτο νόμο που σημαίνει ότι τα μοντέλα αυτά είναι ασύμβατα με τις εξισώσεις Navier – Stokes. Μ' αυτό το σκεπτικό οι σύγχρονοι Richardson, που δεν εξαρτώνται ρητά απ' τη γωνιακή ταχύτητα αλλά από την απόλυτη στροβιλότητα είναι προτιμότεροι να χρησιμοποιηθούν και δίνουν υποσχέσεις για μεγαλύτερες ακρίβειες.

Ο Speziale ήδη από το 1987 είχε προτείνει ένα μη γραμμικό μοντέλο  $k - \varepsilon$  (απλοποίηση του μοντέλου του Yoshizawa, 1984, ώστε να καλύπτει κάποιους από τους παραπάνω νόμους). Βασιζόμενος σ' αυτό, προτείνει μια τροποποίηση στο μοντέλο  $k - \varepsilon$ , σύμφωνα με την οποία τα στοιχεία του τανυστή των τάσεων Reynolds υπολογίζονται από την εξής σχέση:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \sqrt{k}lS_{ij} = 1,68l^2 \left( \dot{S}_{ij} + S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{3}S_{nm}S_{nm}\delta_{ij} + 2\Omega_{ik}S_{kj} + 2\Omega_{jk}S_{ki} \right) \quad (3.126)$$

Με το χαρακτηριστικό μήκος να δίνεται απ' την εξίσωση:

$$l = 2C_\mu \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (3.127)$$

και

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + u\nabla S_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) S_{kj} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) S_{ki} \quad (3.128)$$

είναι ανεξάρτητος από το σύστημα αναφοράς τελεστής Jaumann. Το  $u$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας. Για την απόλυτη στροβιλότητα ισχύει:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_{kij}\Omega_k \quad (3.129)$$

Τέλος ο Speziale προτείνει και μια καινούργια μοντελοποίηση για την εξίσωση του  $\varepsilon$  που να είναι συμβατή με ένα τέταρτο νόμο που αναφέρει, που λέει ότι πρέπει να υπάρχει σημαντική μείωση στην καταστροφή τύρβης που συμβαίνει σε μεγάλες ταχύτητες περιστροφής για ισότροπη καταστροφή.

### 3.4.16. Το μοντέλο των Galmes, Lakshminarayana.

Το μοντέλο αυτό παρουσιάζεται το 1984, κάνει χρήση των αλγεβρικών σχέσεων του Rodi για τις τάσεις Reynolds και χρησιμοποιείται και από τους Warfield, Lakshminarayana, 1987, όπου αναφέρεται με πιο κατανοητό τρόπο και γράφεται και στην απλοποιημένη μορφή, για διδιάστατη ροή σε περιστρεφόμενο κανάλι.

Χρήση αλγεβρικών εκφράσεων για τις τάσεις Reynolds έχουμε δει μέχρι τώρα να κάνουν για παράδειγμα οι So, Gibson, Cheng et al., Pourahmadi et al.

Στην περίπτωση των Galmes, Lakshminarayana, όπως συμβαίνει και με άλλες περιπτώσεις που γίνεται χρήση αλγεβρικών εκφράσεων για τις τάσεις Reynolds, μπορούμε τελικά να έχουμε ένα μοντέλο  $k - \varepsilon$  που λαμβάνει υπόψη του την ανισοτροπία (μη γραμμικό μοντέλο  $k - \varepsilon$ ). Οι εξισώσεις του  $k - \varepsilon$  λύνονται κανονικά, αλλά στο τέλος δεν υπολογίζουμε ένα και μοναδικό  $\mu$ , αλλά βρίσκουμε με αλγεβρικές σχέσεις (που περιέχουν τα  $k$  και  $\varepsilon$ ) κάθε μια από τις τάσεις Reynolds ξεχωριστά. Έτσι δε γίνεται χρήση της υπόθεσης Boussinesq, ότι ο

τανυστής των τάσεων έχει γραμμική σχέση μ' αυτόν των παραμορφώσεων. Όπως σημειώνεται, η χρήση των αλγεβρικών μοντέλων τάσεων Reynolds, όπως το παρόν, επιτρέπουν να ληφθεί υπόψη σε μεγαλύτερο βαθμό η φυσική της ροής.

Πιο πάνω γίνεται χρήση του μοντέλου  $k - \varepsilon$  των Jones - Launder, και γίνεται και σ' αυτό μια τροποποίηση, πριν εισαχθούν οι αλγεβρικές εξισώσεις για τις τάσεις Reynolds. Οι συγγραφείς προτιμούν ν' αλλάξουν τον όρο παραγωγής και όχι αυτόν της καταστροφής στην εξίσωση του  $\varepsilon$  κάνοντας μια ανάλυση στην εξίσωση του  $\varepsilon$ . Έτσι προτείνουν αντί της σταθεράς  $C_1$  του όρου παραγωγής μια νέα σταθερά, της μορφής:

$$C'_1 = C_1 [1 + 0,3(1 - Ri_c) \exp(-Re_T^2)] \quad (3.130)$$

όπου

$$Ri_c = -2 \frac{\varepsilon_{ij} \Omega_p}{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (3.131)$$

Αυτή η αλλαγή θα μπορούσε ίσως ν' αποτελέσει και μόνη της μια απλή διόρθωση για το μοντέλο  $k - \varepsilon$ , όπως η διόρθωση που αλλάζει το συντελεστή  $C_2$ .

Για τις εξισώσεις των τάσεων Reynolds ακολουθούνται οι προτάσεις του Rodi, μόνο που τώρα υπάρχει και περιστροφή μέσα. Οι τελικές σχέσεις για τις τάσεις Reynolds σε περίπτωση που έχουμε και περιστροφή είναι:

$$\frac{\overline{u'_i u'_k}}{k} = \frac{2}{3} \delta_{ik} + \frac{R_{ik} \frac{2 - c_2}{2} + (1 - c_2) \left( P_{ik} - 2P \frac{\delta_{ik}}{3} \right)}{P + \varepsilon(c_1 - 1)} \quad (3.132)$$

όπου  $c_1 = 1,5$ ,  $c_2 = 0,6$  και

$$P_{ij} = \left( -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad 2P = P_{ii} \quad (3.133)$$

$$R_{ik} = -2\Omega_p \left( \varepsilon_{ij} \overline{u'_i u'_j} + \varepsilon_{kij} \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (3.134)$$

Για γωνιακή ταχύτητα μηδέν, παίρνουμε ακριβώς τις σχέσεις του Rodi.

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν, όταν η μεταφορά του  $\overline{u'_i u'_k}$  δεν είναι πολύ μεγάλη, όπως λέγαμε και σχολιάζοντας την εξ. (3.102). Απ' την άλλη, όλα τα φαινόμενα που εισάγονται στις εξισώσεις των τάσεων Reynolds όπως περιστροφή, καμπυλότητα, ανισότροπα πεδία παραμορφώσεων, γειτνίαση τοίχου, αντικατοπτρίζονται και απ' αυτό το μοντέλο.

Οι Warfield, Lakshminarayana συνεχίζουν αναφέροντας ότι για τις σημαντικές περιστρεφόμενες ροές και θεωρώντας ότι η κατεύθυνση  $x_1$  είναι η κύρια κατεύθυνση της ροής όπου το Reynolds είναι μεγάλο, ισχύουν τα εξής: Για διδιάστατη περιστρεφόμενη ροή, μόνη σημαντική κλίση ταχύτητας είναι η  $\partial u / \partial y$ . Για περιστρεφόμενο αγωγό σημαντικές είναι μόνο οι κλίσεις  $\partial u / \partial y$ ,  $\partial u / \partial z$ ,  $\partial v / \partial z$ . Μ' αυτές τις παραδοχές, οι εξ. (3.132) αναλύονται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ενώ παρακάτω θα παρουσιαστεί μόνο το πώς γίνεται το μοντέλο για την απλούστερη περίπτωση της διδιάστατης περιστρεφόμενης ροής:

$$C_\mu = -\frac{\frac{2}{3}(c_2 - 1) \left( c_2 \frac{P}{\varepsilon} + c_1 - 1 \right)}{D_1 + D_2} \quad (3.135)$$

με

$$D_1 = \left( \frac{P}{\varepsilon} \right)^2 + 2 \left( \frac{P}{\varepsilon} \right) (c_1 - 1) + (c_1 - 1)^2 \quad (3.136)$$

$$D_2 = \left[ 4 \frac{k\Omega}{\varepsilon} \frac{(2 - c_2)}{2} \right]^2 + 4\Omega(c_2 - 1)(2 - c_2) \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.137)$$

Χρησιμοποιώντας τις κλασσικές σταθερές  $c_1=1,5$ ,  $c_2=0,6$ , προκύπτει για την περίπτωση μη περιστροφής απ' την εξ. (3.135) μια τιμή 0,13 αντί της συνηθισμένης 0,09. Η τιμή 0,13 μας θυμίζει την εξ. (3.83) των Leschziner, Rodi, παρόλο που η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την αλγεβρική έκφραση των εξισώσεων των τάσεων Reynolds είναι διαφορετική στις δύο περιπτώσεις. Τελικά όπως και εκεί, έτσι και σ' αυτή την περίπτωση προτείνεται η βεβιασμένη αντικατάσταση του συντελεστή 0,13 με 0,09, οπότε η εξ. (3.135) πολλαπλασιάζεται με τον όρο 0,09/0,13.

Στη χρήση της εξ. (3.135) προτείνεται να μπει κάποιο όριο στις τιμές που μπορεί να πάρει η σταθερά  $C_\mu$  και συγκεκριμένα να περιοριστεί μεταξύ των τιμών 0,025 και 0,2, ώστε να μην πάρει για κάποιο λόγο καμιά παράλογα μικρή ή μεγάλη τιμή.

Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, η χρήση αλγεβρικών εξισώσεων τάσεων Reynolds παρουσιάζει προβλήματα αριθμητικής ευστάθειας. Γι' αυτό προτείνεται και μια πολύ απλή τροποποίηση του συντελεστή της εξ. (2.69) ως εξής:

$$C_\mu = 0,09 + \frac{\Omega}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (3.138)$$

Το αλγεβρικό μοντέλο που παρουσιάστηκε παραπάνω δοκιμάστηκε με πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα από πολλές πλευρές (ευστάθειας λύσης, ευκολία εφαρμογής σε μοντέλο  $k - \varepsilon$ , καλή πρόλεξη ροών) από τους Warfield, Lakshminarayana.

### 3.4.17. Μοντέλα τάσεων Reynolds.

Τα μοντέλα τύρβης  $k - \varepsilon$  και γενικότερα τα μοντέλα δύο εξισώσεων, δε μπορούν ν' αντιμετωπίσουν περίπλοκες ροές μ' έντονα φαινόμενα ανισοτροπίας όπως ροές με καμπυλότητα γραμμών ροής ή ροές σε περιστρεφόμενες μηχανές. Πολλές από τις διορθώσεις που παρουσιάστηκαν ως τώρα και χρησιμοποιήθηκαν κατά καιρούς ώστε να μετριαστεί αυτό το εγγενές μειονέκτημα των μοντέλων τύρβης δύο εξισώσεων, προήλθαν από μελέτη των εξισώσεων μεταφοράς των τάσεων Reynolds (RST: Reynolds Stress Transport equations). Αυτό οδηγεί στο φυσιολογικό συμπέρασμα ότι αν χρησιμοποιούσαμε κατευθείαν τις εξισώσεις των τάσεων Reynolds, θα έχουμε πολύ καλύτερα αποτελέσματα και μάλιστα δε θα χρειαζόμασταν «διορθώσεις» για να ληφθούν υπόψη φαινόμενα καμπυλότητας και Coriolis. Πράγματι, βλέπουμε ότι οι εξισώσεις τάσεων Reynolds υπάρχουν εγγενώς μέσα τους π.χ. όροι Coriolis για την περίπτωση της περιστροφής (εξ. (3.16) και εξής). Αν λύναμε κατευθείαν τις εξισώσεις αυτές θα είχαμε διαφορετικές εν γένει τάσεις Reynolds και θα είχε εγγενώς ληφθεί υπόψη η ανισοτροπία.

Βλέπουμε και πάλι λοιπόν ότι το πρόβλημα της επίδρασης της Coriolis στην τύρβη είναι ένα πρόβλημα μοντελοποίησης της τύρβης. Η μελέτη του «πώς θα μοντελοποιήσουμε καλύτερα την τύρβη» (το οποίο όπως είπαμε στο κεφάλαιο 2 σχετίζεται άμεσα με το πρόβλημα «πώς θα φτιάξουμε ικανότερους υπολογιστές»). Τώρα ίσως αρχίζει σιγά σιγά να φαντάζει ξεπερασμένος ο τίτλος αυτού του κεφαλαίου, αφού με πολύ καλή μοντελοποίηση δε χρειάζεται να μιλάμε πλέον για «επίδραση στην τύρβη» (οποιασδήποτε δύναμης), αφού όλα λαμβάνονται υπόψη απ' το μοντέλο και προκύπτουν απ' αυτό. Αυτό ισχύει ακόμη περισσότερο αν σκεφτούμε ακόμη περισσότερο αν σκεφτούμε ακόμη πιο σύγχρονες μεθόδους υπολογισμού, μοντέλα μεγάλων δυνάμεων ή απευθείας επίλυση των ασταθών εξισώσεων Navier – Stokes.

Βέβαια τα μοντέλα τάσεων Reynolds είναι πιο δύσχρηστα, πιο σπάνια, έχουμε μικρή εμπειρία απ' αυτά και κυρίως απαιτούν πολύ χρόνο υπολογισμού και δε χρησιμοποιούνται ευρέως, π.χ. στη βιομηχανία. Γι' αυτό οι παραπάνω διορθώσεις που γράψαμε είναι (ακόμη) χρήσιμες. Ένας καλός συμβιβασμός προς το παρόν είναι τα μη γραμμικά μοντέλα δύο εξισώσεων που χρησιμοποιούν αλγεβρικές σχέσεις τάσεων Reynolds για να εισαχθούν φαινόμενα ανισοτροπίας, γιατί με λίγο παραπάνω χρόνο απ' τα κλασσικά μοντέλα δίνουν καλύτερα αποτελέσματα.

Οποιοδήποτε (σωστό) μοντέλο τάσεων Reynolds υποτίθεται ότι μπορεί ν' αντιμετωπίσει και περίπλοκες ροές χωρίς «διορθώσεις». Κατά καιρούς διάφοροι ερευνητές προσπάθησαν να το επαληθεύσουν αυτό προσπαθώντας να υπολογίσουν περιστρεφόμενες ροές με μοντέλο τάσεων Reynolds. Η πιο γνωστή τέτοια προσπάθεια είναι των Launder, Tselepidakis, Younis, 1987, που πέτυχαν καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα του Johnston και συνεργατών. Άλλες πετυχημένες επιλύσεις των Kristoffersen, Nilsen & Andersson, 1990, Launder & Tselepidakis, 1993, για περίπτωση πλήρως ανεπτυγμένης ροής περιστρεφόμενου καναλιού, και Nilsen & Andersson, 1990, Galperin & Mellor, 1991, Shima, 1993, για την περίπτωση αναπτυσσόμενης ροής σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

Τα μοντέλα τάσεων Reynolds βέβαια δεν είναι πανάκεια. Είναι απλά ένα βήμα παραπέρα. Για μεγαλύτερη ακρίβεια πρέπει να πάμε σε ακόμη πιο προχωρημένα μοντέλα τύρβης, μοντέλα μεγάλων δινών (LES) ή απευθείας αριθμητική επίλυση (DNS). Να σημειωθεί ότι στην περίπτωση των μοντέλων μεγάλων δινών υπάρχει ένα ερώτημα του κατά πόσο στη μοντελοποίηση των μικρών δινών (sub-grid-scale model, SGS) θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η περιστροφή ή όχι (π.χ. Thomas & Takhar, 1988). Για να έχουμε όμως αρκετή υπολογιστική ικανότητα ώστε να είναι βιώσιμη η ευρεία χρήση τέτοιων μοντέλων για πρακτικούς σκοπούς, ο αριθμός των δεκαετιών που πρέπει να περάσουν μάλλον υπερβαίνει το 1, με τους προβλεπόμενους ρυθμούς εξέλιξης της τεχνολογίας. LES για περιστρεφόμενα κανάλια έχουν κάνει οι Kim, (1983,  $Re=24600$ ,  $Ro=0,068$ ,  $Re_\tau=640$ ,  $Ro_\tau=1,47$ ), Miyake & Kajishima, (1986,  $Re=0,165$ ,  $Ro=0,165$ ,  $Re_\tau=250$ ,  $Ro_\tau=3,0$ ) και DNS οι Kristoffersen & Andersson, (1993,  $Re=5800$ ,  $Ro=0,5$ ,  $Re_\tau=194$ ,  $Ro_\tau=7,5$ ). Οι περιπτώσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πειράματα για να ελεγχθεί η ακρίβεια υποδεέστερων μοντέλων τύρβης.

Στην επόμενη παράγραφο §3.4.18 έχει ενσωματωθεί ένα μοντέλο τάσεων Reynolds και μπορεί κανείς να πάρει μια ιδέα γι' αυτό το επίπεδο μοντελοποίησης. Για περισσότερα μπορεί κανείς να κατευθύνει σε συγγράμματα σχετικά με προχωρημένη μοντελοποίηση τύρβης (που μπορούν να είναι και καμπυλότητα και περιστροφή). Να σημειωθεί εδώ ότι γίνεται μια σύντομη παρουσίαση μοντέλων τάσεων Reynolds με έμφαση τη χρήση στην περίπτωση καμπυλότητας. Επίσης μπορεί κανείς να βρει μια κλασσική μοντελοποίηση των εξισώσεων μεταφοράς τάσεων Reynolds όπως χρησιμοποιήθηκε από τους συγγραφείς του στην περίπτωση εφαρμογής μοντέλου τάσεων Reynolds σ' ένα στρεφόμενο κανάλι.

### 3.4.18. Η διόρθωση των Park, Choi για μοντέλο τάσεων Reynolds.

Γράφτηκε παραπάνω ότι τα μοντέλα τάσεων Reynolds πιστεύεται ότι χρειάζονται μετατροπή για να ληφθούν υπόψη φαινόμενα καμπυλότητας και Coriolis και ότι έχουν χρησιμοποιηθεί μοντέλα χωρίς καμιά διόρθωση με ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Το μοντέλο του Park και συνεργατών είναι μάλλον το μόνο που περιέχει σαφώς «διόρθωση» για φαινόμενα καμπυλότητας.

Ουσιαστικά αυτό που γίνεται είναι να θεωρηθεί ότι κλασσικοί τρόποι που μοντελοποιούνται οι εξισώσεις δεν είναι ακριβείς για την περίπτωση της καμπυλότητας και οι συγγραφείς αλλάζουν λίγο τη μοντελοποίηση με πλήρως αντίστοιχο τρόπο όπως είχαν αλλάξει παλιότερα τη μοντελοποίηση των τριπλών συσχετίσεων των όρων των εξισώσεων  $k$  και  $\epsilon$ . Η δικαιολογία και τι σκεπτικό που γίνεται αυτό είναι ίδια με της παραγράφου §3.4.13.

Με την ευκαιρία της παρουσίασης της διόρθωσης των Park et al., φαίνεται και ένα μοντέλο τάσεων Reynolds, συνοπτικά βέβαια, χωρίς εξηγήσεις για το πώς μοντελοποιήθηκαν οι όροι.

Οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds, είναι για παράδειγμα αυτές των εξ. (3.100). Όλοι οι όροι που αφορούν μέσες τιμές διαφορετικές από τις τάσεις Reynolds είναι άγνωστοι και αφορούν μέσες τιμές διαφορετικές από τις τάσεις Reynolds είναι άγνωστοι και πρέπει να μοντελοποιηθούν (με τη βοήθεια της φυσικής έννοιας του καθενός). Πρέπει δηλαδή να τους αντικαταστήσουμε με άλλους όρους που να εμπλέκουν γνωστές ποσότητες όπως κλίσεις ταχυτήτων, το  $\epsilon$  ( που υπολογίζεται απ' τη δική του γνωστή εξίσωση), οι τάσεις

Reynolds. Μια τέτοια μοντελοποίηση είναι και η παρακάτω του Nobuyuki που χρησιμοποίησαν οι Park et al.

Σύμφωνα μ' αυτή, οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds μπορούν να γραφούν με καλή προσέγγιση με την παρακάτω μορφή:

$$\frac{Du'_j}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u'_i u'_j u_i} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i} \right) + P_{ij} + E_{ij} + R_{ij} + R_{wij} \quad (3.139)$$

όπου

$$-\overline{u'_i u'_j u'_i} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u'_i u'_m} \frac{\partial \overline{u'_j u'_i}}{\partial x_m} + \overline{u'_j u'_m} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_m} + \overline{u'_i u'_m} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_m} \right) \quad (3.140)$$

$$P_{ij} = \left( \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \overline{u'_i u'_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.141)$$

$$E_{ij} = -\frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i u'_j} \quad (3.142)$$

$$R_{ij} = -c_1^* \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - \frac{c_2 + 8}{11} \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) - \frac{30c_2 - 2}{55} k \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{8c_2 - 2}{11} \left( D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (3.143)$$

$$D_{ij} = -\left( \overline{u'_i u'_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (3.144)$$

$$P = -\overline{u'_i u'_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m}, \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (3.145)$$

$$R_{wij} = \left[ 0,45 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) - 0,03 \left( D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) + 0,08 k \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] f_w \quad (3.146)$$

$$f_w = \exp \left[ - \left( 0,015 \sqrt{k} \frac{y}{\nu} \right)^4 \right] \quad (3.147)$$

$$c_1^* = c_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{c_1} \right) \phi_{iw} \right], \quad c_1 = 1,5, \quad c_2 = 0,4 \quad C_s = 0,11 \quad (3.148)$$

Στη συμβατική μοντελοποίηση των τριπλών συσχετίσεων των διακυμάνσεων της ταχύτητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια εξάρτηση από μια κλίμακα χρόνου  $\tau_v = k/\varepsilon$  η οποία είναι ανεξάρτητη από την καμπυλότητα. Οι συγκεκριμένοι συγγραφείς όμως δίνουν μεγάλη σημασία στο γεγονός ότι από πολλά πειράματα φαίνεται να υπάρχει εξάρτηση της κλίμακας χρόνου από την καμπυλότητα και θεωρούν ότι αυτό πρέπει να ληφθεί εξάρτηση της κλίμακας χρόνου από την καμπυλότητα και θεωρούν ότι αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη στη μοντελοποίηση των τριπλών συσχετίσεων. Έτσι προτείνουν την αντικατάσταση της σταθεράς  $C_s$  του μοντέλου των τάσεων Reynolds από μια άλλη σταθερά:

$$C'_s = \frac{C_s}{1 + 0,12(\tau_v / \tau_c)} \quad (3.149)$$

Για την κλίμακα χρόνου καμπυλότητας ισχύει  $\tau_c = \varepsilon / (N_c^2 k)$ , όπου  $N_c$  είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων ενός στοιχείου ρευστού που μετατοπίζεται ακτινικά όσον αφορά την καμπυλότητα των γραμμών ροής, δηλαδή η συχνότητα Brunt - Väisälä, οπότε καταλαβαίνουμε εύκολα ότι ισχύει

$$\frac{\tau_v}{\tau_c} = Ri, \quad (3.150)$$



οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη διόρθωση και για περιστροφή, βάζοντας το αντίστοιχο Richardson.

Παρακάτω γίνεται τροποποίηση της εξίσωσης της καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, δηλαδή του  $\varepsilon$ . Η τροποποίηση είναι ουσιαστικά η ίδια με της §3.4.13, αλλά γραμμένη με λίγο διαφορετικό τρόπο. Έτσι γίνεται τροποποίηση στην εξίσωση του  $\varepsilon$  όπως προτείνεται απ' τους Hanjalic, Launder:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\varepsilon' u'_i} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 f_\varepsilon \frac{\varepsilon \varepsilon}{k} + \varphi \quad (3.151)$$

όπου

$$-\overline{\varepsilon' u'_i} = C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_i u'_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \quad (3.152)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.153)$$

$$f_\varepsilon = 1,0 - \frac{0,4}{1,8} \exp \left( \frac{-Re_T^2}{36} \right) \quad (3.154)$$

$$\varphi = C_3 \nu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_m} \quad (3.155)$$

και οι σταθερές  $C_\varepsilon, C_1, C_2, C_3$  έχουν αντίστοιχα τις τιμές 0,15, 1,44, 1,9, 2,0.

Η τροποποίηση γίνεται στις σταθερές  $C_\varepsilon, C_2$ , επειδή η πρώτη αφορά τον όρο τριπλών συσχετίσεων που τα πειράματα δείχνουν ότι εξαρτώνται από την καμπυλότητα και η δεύτερη τον όρο καταστροφής ο οποίος επίσης εξαρτάται από την καμπυλότητα:

$$C'_\varepsilon = C_\varepsilon \left[ \frac{1}{1 + 0,5(\tau_v / \tau_c)} \right] \quad (3.156)$$

$$C'_2 = C_2 \left[ \frac{1}{1 + 0,5(\tau_v / \tau_c)} \right] \quad (3.157)$$

Στον ομόρρο, όπου δεν υπάρχει στερεό τοίχωμα, το  $C_3$  τίθεται ίσο με 0. Για να προσομοιωθεί σωστά η μετάβαση απ' το υπόστρωμα του τοίχου στον πλήρη τυρβώδη ομόρρο, οι συναρτήσεις  $f_\varepsilon, f_w, \bar{\varepsilon}/\varepsilon$ , πρέπει να μετατραπούν. Αλλιώς, κάνουμε παραδοχή όπως έκαναν και οι συγγραφείς και θεωρούμε τις τρεις παραπάνω συναρτήσεις ίσες με τη μονάδα στον ομόρρο.

Το παραπάνω μοντέλο όπως διατυπώθηκε δοκιμάστηκε σε ροή γύρω από αξισυμμετρικό σώμα και τα πήγε πολύ καλά, καλύτερα από το  $k-\varepsilon$ .

Εδώ τελειώνει η αναφορά στη μοντελοποίηση της τύρβης για την περίπτωση που βρισκόμαστε σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς (οπότε έχουμε επίδραση της δύναμης Coriolis) ή για την περίπτωση που έχουμε καμπυλότητα των γραμμών ροής. Σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι το θέμα έχει εξαντληθεί πλήρως σ' αυτές τις σελίδες. Οι δημοσιεύσεις που βρίσκονται στη βιβλιογραφία στο τέλος αποτελούν σημαντικό οδηγό για κάποιον που θέλει ν' ασχοληθεί περισσότερο.

## 4. Υπολογισμός της ροής στο περιστρεφόμενο κανάλι.

Ένα περιστρεφόμενο κανάλι σταθερής διατομής είναι η πιο κλασσική και απλή περίπτωση για μελέτη του φαινομένου της επίδρασης της δύναμης Coriolis στην τύρβη. Γι' αυτό θα δούμε ότι οι περισσότερες ερευνητικές δημοσιεύσεις, είτε ασχολούνται με πειραματικές μετρήσεις είτε με τον υπολογισμό της ροής, αναφέρονται σε ένα ορθογωνικής διατομής αγωγό που περιστρέφεται, όπως φαίνεται στο σχήμα σχ. 3.5. Συνήθως οι μελέτες αφορούν αγωγούς με μεγάλο λόγο επιμήκους, στους οποίους έχει αποκατασταθεί πλήρως ανεπτυγμένη ροή, αλλά στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν σ' αυτή την εργασία έγιναν υπολογισμοί γι' ανεπτυσσόμενα οριακά στρώματα στον αγωγό.

Να διευκρινιστεί ότι στα σχήματα αυτού του κεφαλαίου απλά συγκρίνονται οι διορθώσεις μεταξύ τους χωρίς να ξέρουμε ποια διόρθωση δίνει καλύτερα αποτελέσματα, αφού δεν έχουμε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

### 4.1. ΓΕΝΙΚΑ.

Αυτές οι γενικές πληροφορίες που θα γραφούν παρακάτω ισχύουν και για τα άλλα δύο κεφάλαια.

#### 4.1.1. Σχετικά με τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν.

Για τη πτυχιακή ο κώδικας υπολογισμού της ροής που χρησιμοποιήθηκε ήταν εν πολλοίς ένα «μαύρο κουτί» το οποίο υπολόγιζε τη ροή σε δεδομένη γεωμετρία και δεδομένες οριακές συνθήκες. Επειδή πρόκειται για κώδικα πολλών χιλιάδων γραμμών θα ήταν πολύ δύσκολη η πλήρης κατανόηση της λειτουργίας του στα περιορισμένα πλαίσια μια διπλωματικής. Αυτό που ενδιέφερε ήταν να δοκιμαστεί για διάφορες περιπτώσεις ώστε να βγουν συμπεράσματα σχετικά με τις διορθώσεις Coriolis. Εννοείται ότι στην αρχική του μορφή δεν λαμβάνει υπόψη του την επίδραση Coriolis και χρειάστηκε να δημιουργηθούν παραλλαγές του προγράμματος που να έχουν κάποιες από τις διορθώσεις μοντελοποίησης της τύρβης που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Πρέπει όμως να γίνει μια πρόχειρη αναφορά στον κώδικα ώστε να κατανοηθούν καλύτερα τα επόμενα και ειδικά κάποιες επιλογές που έγιναν κατά τη διάρκεια της διπλωματικής.

Ο υπολογισμός της ροής έγινε με χρησιμοποίηση ενός προγράμματος του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών που λέγεται ATHENA. Το πρόγραμμα αυτό λύνει διδιάστατη ροή. Ανάλογα με το τι θα επιλέξει ο χρήστης, υπάρχει δυνατότητα υπολογισμού για

περίπτωση Euler (μη συνεκτικό ρευστό) ή με τη χρήση των μέσων χρονικά εξισώσεων Navier-Stokes. Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει δυνατότητα επιλογής του μοντέλου τύρβης που θα χρησιμοποιηθεί, μεταξύ των μοντέλων Baldwin-Lomax και k-ε χαμηλών Reynolds των Jones & Launder, [62]. Τα μοντέλα αυτά περιγράφονται συνοπτικά στη θεωρία. Φυσικά για τη διπλωματική ενδιέφερε περίπτωση συνεκτικού ρευστού οπότε η επιλογή για περίπτωση Euler εν γένει δεν χρησιμοποιήθηκε. Επίσης, απ' τα μοντέλα τύρβης υπήρχε προτίμηση στο k-ε που είναι και ακριβέστερο.

Το πρόγραμμα γράφτηκε ώστε να έχει τη δυνατότητα να υπολογίζει ροές μεγάλων αριθμών  $Max$  και επειδή για υπερηχητικές ροές οι εξισώσεις έχουν υπερβολική μορφή<sup>1</sup> υπάρχει πρόβλημα στο να υπολογίσει ροές πολύ μικρών αριθμών  $Max$  όπου δεν εκδηλώνεται η συμπεριφορά των ρευστών. Αυτό έθεσε κάποιους περιορισμούς στη χρήση του κατά τη διάρκεια της διπλωματικής.

Το πρόγραμμα λαμβάνει κάποια δεδομένα. Ένα απ' αυτά είναι το πλέγμα, απ' το οποίο φαίνεται και η γεωμετρία του πεδίου στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροή. Σε κάθε κόμβο του πλέγματος υπολογίζονται τα μεγέθη της ροής. Επειδή το k-ε χαμηλών Reynolds που κυρίως χρησιμοποιήθηκε λύνει τη ροή μέχρι τον τοίχο, χρειάζονται πάρα πολλά σημεία σ' αυτή την περιοχή, και μάλιστα όσο πλησιάζουμε στο στερεό όριο τόσο πιο πυκνά πρέπει να είναι. Για να έχει πολλές πιθανότητες ένα πλέγμα να είναι πετυχημένο πρέπει να υπάρχει μια ομαλή μείωση της απόστασης δύο συνεχόμενων κόμβων όσο πλησιάζουμε προς το τοίχωμα, και το πιο κοντινό σημείο στον τοίχο να προκύπτει από τη λύση ότι έχει  $y^+$  περίπου μεταξύ 1 και 10, ώστε να υπάρχει ένα αλλά όχι πολλά σημεία στο στρωτό οριακό υπόστρωμα. Δηλαδή δεν ξέρει κανείς από πριν αν ένα πλέγμα θα του βγει πετυχημένο ή όχι παρά μόνο εκ των υστέρων, εκτός κι αν έχει πολύ εμπειρία. Αν το πλέγμα είναι πολύ αραιό μπορεί να υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης του προγράμματος ή να δοθεί λύση που να απέχει πολύ απ' την πραγματικότητα. Αν είναι πάρα πολύ πυκνό πάλι μπορεί να υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης, γι' αριθμητικούς λόγους επειδή πλησιάζουν τόσο πολύ οι κόμβοι μεταξύ τους (στην περιοχή κοντά στον τοίχο) ώστε να μην υπάρχει αριθμητική διαφορά στις τιμές τους. Επίσης το πυκνότερο πλέγμα κάνει περισσότερο χρόνο να δώσει αποτελέσματα, αφού γίνονται οι υπολογισμοί σε περισσότερα σημεία. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να εξασφαλιστεί ότι η λύση είναι ανεξάρτητη πλέγματος. Αυτό σημαίνει ότι δοκιμάζοντας πιο πυκνό πλέγμα δίνει ίδια αποτελέσματα, πράγμα που θα πει ότι το πλέγμα μας πλέον είναι αρκετά πυκνό ώστε να αντιλαμβάνεται όλες τις μεταβολές στις ποσότητες της μέσης ροής. Τότε λέμε ότι το πρόγραμμα υπολόγισε τη ροή και ο\* υπολογισμός είναι τόσο ακριβής όσο οι εξισώσεις που λύνονται. Το πλέγμα που θα δοθεί πρέπει να είναι σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

Υπάρχουν και άλλα δεδομένα που πρέπει να δοθούν που δε χρειάζεται ν' αναφερθούν, όπως αριθμός επαναλήψεων, χρονικό βήμα (το πρόγραμμα υπολογίζει μόνιμη ροή, αλλά για να πάει απ' τη μια επανάληψη στην άλλη πολλαπλασιάζει τις εξισώσεις με ένα μικρό χρονικό βήμα  $dt$ ), τιμές σταθερών, επιλογές, ονόματα αρχείων και άλλα που δεν ενδιαφέρουν πολύ. Το μόνο που ενδιαφέρει είναι τα δεδομένα που αφορούν ρευστομηχανικά μεγέθη.

Αν έχουμε μονοδιάστατη ροή αρκούν 5 μεγέθη σε κάποια θέση για να καθορίσουν όλες τις φυσικές ποσότητες που ενδιαφέρουν τη ρευστομηχανική στη θέση αυτή (π.χ. [7]). Τέτοια μεγέθη είναι για παράδειγμα η διατομή, οι ολικές πίεση και θερμοκρασία, η γωνία εισόδου και η παροχή μάζας, ή οποιαδήποτε άλλη πεντάδα μεγεθών. Έτσι και στο πρόγραμμα πρέπει να καθοριστούν κάποια απ' αυτά τα μεγέθη ως οριακές συνθήκες. Στην περίπτωση μας του στρεφόμενου καναλιού θα μπορούσαν να καθοριστούν τα μεγέθη στην είσοδο, οπότε η ροή για δεδομένη είσοδο και γεωμετρία είναι πλήρως ορισμένη. Όμως στο πρόγραμμα αυτό καθορίζονται κάποια μεγέθη στην είσοδο, αλλά το πιο βασικό είναι η στατική πίεση που καθορίζεται στην έξοδο. Όλος ο υπολογισμός γίνεται γι' αυτή την πίεση την οποία δεν τροποποιεί με κανένα τρόπο μόνο του το πρόγραμμα. Για τα υπόλοιπα μεγέθη υπάρχουν δύο δυνατότητες επιλογής. Η μία είναι ο καθορισμός στην είσοδο των ολικών πίεσης και θερμοκρασίας, του  $Max$  εισόδου και της γωνίας εισόδου και η άλλη έχει αντί το  $Max$  το λόγο

ολικής πίεσης εξόδου προς είσοδο.

Το γεγονός ότι καθορίζεται η πίεση στην έξοδο θέτει κάποιους περιορισμούς. Συνήθως από τα πειράματα που γίνονται ξέρουμε την είσοδο και όχι την έξοδο, ή, στην περίπτωση αυτού του κεφαλαίου που δεν υπάρχει σύγκριση με πειραματικά δεδομένα, ξέρουμε αυτό που θέλουμε στην είσοδο του καναλιού και μέσα στο κανάλι και όχι την έξοδο που ουσιαστικά δε μας ενδιαφέρει. Οπότε γίνεται ένας πρόχειρος μονοδιάστατος υπολογισμός για να βρούμε από την είσοδο (που ξέρουμε ή θέλουμε) τι πίεση θα βγει στην έξοδο. Φυσικά ο μονοδιάστατος υπολογισμός είναι προσεγγιστικός και απ' το αποτέλεσμα που θα βγει αφού «τρέξεν» το πρόγραμμα θα δούμε αν έχουμε μέσα στο κανάλι αυτό που θέλουμε ή όχι. Συνήθως βέβαια δεν τυχαίνει να πετύχουμε αμέσως και πρέπει να ξαναδοκιμάσουμε άλλη πίεση εξόδου, να περιμένουμε να συγκλίνει το πρόγραμμα, να ξαναδοούμε αν το αποτέλεσμα είναι στην είσοδο αυτό που θέλουμε κτλ. Εν γένει δε μπορούμε να πετύχουμε ποτέ ακριβώς αυτό που θέλουμε και αρκούμαστε σε μια προσέγγιση του. Στην συγκεκριμένη περίπτωση του στρεφόμενου καναλιού που δεν έχουμε να συγκρίνουμε με πειραματικά δεδομένα δεν υπάρχει λόγος να πετύχουμε μεγάλη ακρίβεια με τις αρχικές μας προσδοκίες και αυτό είναι ένα πλεονέκτημα.

Είπαμε ότι τα πέντε μεγέθη αρκούν για μονοδιάστατη ροή, ενώ το πρόγραμμα είναι διδιάστατο. Γι' αυτό κανονικά πρέπει να δίνουμε π.χ. την πίεση για κάθε κόμβο εξόδου και τα μεγέθη εισόδου για κάθε κόμβο εισόδου και το πρόγραμμα παρέχει αυτή τη δυνατότητα. Παρέχει όμως και τη δυνατότητα να δώσουμε μόνο 5 μεγέθη σα να ήταν μονοδιάστατη ροή και να θεωρηθούν ίδια σε όλους τους κόμβους (εισόδου και εξόδου αντίστοιχα). Αυτό βέβαια εν γένει δεν είναι ακριβές, αλλά συνήθως στις στροβιλομηχανές φτιάχνονται πλέγματα που προεκτείνονται μπρος και πίσω από τη μηχανή τόσο ώστε να θεωρηθεί ότι και η είσοδος και η έξοδος είναι ομοιόμορφη. Άλλωστε δε μπορούμε να κάνουμε κάτι καλύτερο, αφού οι κατανομές των μεγεθών στην είσοδο και την έξοδο είναι και άγνωστες και πολύ δύσκολο να εκτιμηθούν.

Το πρόγραμμα δημιουργεί κάποια αρχεία αποτελεσμάτων. Στο ένα υπάρχει ο υπολογισμός του συντελεστή τριβής και λέγεται 'cfdata', σε ένα άλλο υπάρχουν τα  $y^+$  των κόμβων κοντά στον τοίχο και απ' αυτό μπορούμε ν' αποκτήσουμε μια ένδειξη κατά πόσο είναι πετυχημένο το πλέγμα μας σύμφωνα με όσα γράφτηκαν παραπάνω, σ' ένα άλλο γράφονται το σφάλμα κάθε επανάληψης για τις 6 διαφορετικές εξισώσεις που λύνονται και απ' αυτό μπορούμε να δούμε αν έχει συγκλίνει ή όχι το πρόγραμμα. Αν έχει συγκλίνει, το σφάλμα (η διαφορά από την προηγούμενη επανάληψη) πρέπει να έχει πέσει μερικές τάξεις μεγέθους απ' ότι ήταν στην αρχή. Στην πράξη έχει φανεί από παλαιότερες χρήσεις του προγράμματος στο πεδίο των στροβιλομηχανών, ότι δεν αλλάζει η λύση αν το σφάλμα έχει φτάσει περίπου 3 τάξεις μεγέθους ή περισσότερο πιο κάτω από το αρχικό. Το αρχείο αυτό έχει το όνομα 'conver' και τ' αποτελέσματα του είναι εκθέτες του 10. Δηλαδή όταν γράφει -6 εννοεί  $10^{-6}$ . Αυτό ισχύει και για τα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν και δε θα γράφεται κάθε φορά. Το βασικό αρχείο αποτελεσμάτων είναι ένα που λέγεται συνήθως 'result' και εκεί γράφονται για κάθε κόμβο τα μεγέθη του πεδίου ροής που υπολογίζονται. Περισσότερα για το πρόγραμμα θ' αναφέρονται αν χρειάζεται παρακάτω όποτε δίνεται ευκαιρία.

Άλλα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν προγράμματα που διευκολύνουν τη δημιουργία πλεγμάτων στα οποία δε θ' αναφερθούμε. Απλά να πούμε ότι για κάθε γεωμετρία που θέλουμε να εξετάσουμε πρέπει να κατασκευαστεί ένα απλό πλέγμα σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Το πλέγμα μπορεί να περαστεί από πρόγραμμα (ονόματι 'bgod4') να πυκνώσουν οι γραμμές κοντά στον τοίχο και ν' αραιώσουν στο κέντρο του πεδίου ροής, να γίνει όσο γίνεται ορθογώνιο (δηλαδή να τέμνονται κάθετα οι ισογραμμές του) κυρίως κοντά στον τοίχο και να γίνει ένα δεύτερο πυκνώμα επίσης στην περιοχή κοντά στον τοίχο. Αυτές οι διαδικασίες δε γίνονται ταυτόχρονα ούτε πετυχαίνουν με την πρώτη και χρειάζεται κάποια εμπειρία για να βγει ένα πετυχημένο πλέγμα γρήγορα. Εκτός από το αρχικό πλέγμα για την περίπτωση του Moore, τα άλλα τα έφτιαξε ο διδακτορικός Γ. Σιέρος που ήταν ο κυριότερος συνεργάτης, επιβλέπων και βοηθός κατά τη διάρκεια της διπλωματικής. Τέλος χρειάστηκε να φτιαχτούν κάποια μικρά βοηθητικά προγράμματα που δεν είναι άξια λόγου.

Να σημειωθεί ότι έχουν γίνει πάρα πολλές δοκιμές και έχουν τρέξει τα διάφορα προγράμματα εκατοντάδες φορές και δεν είναι δυνατόν να παρουσιαστούν όλα αυτά που έγιναν, δεδομένου ότι πολλά έχουν ξεχαστεί. Σε μεγάλο βαθμό θα παραλειφθούν προβλήματα και δυσκολίες που παρουσιάστηκαν και ο τρόπος που αντιμετωπιζόνταν. Πολλοί υπολογισμοί δεν οδηγούσαν σε χρήσιμα συμπεράσματα για τις διορθώσεις, μπορούν να θεωρηθούν προβληματικοί είτε λόγω δεδομένων είτε λόγω συμπεριφοράς του προγράμματος και πολλοί απ' αυτούς δε θα παρουσιαστούν ούτε τους δόθηκε σημασία. Αυτά ισχύουν κυρίως για την περίπτωση του Μοογε που ήταν και η πρώτη που εξετάστηκε.

#### 4.1.2. Τι εξοπλισμός χρησιμοποιήθηκε

Αρχικά υπήρξε η δυνατότητα χρήσης ενός υπολογιστή του εργαστηρίου που λέγεται `saronikos.ltt.mech.ntua.gr` και είναι ένας σταθμός εργασίας Control Data 9100 με ένα επεξεργαστή R4000 στα 50 MHz τεχνολογίας RISC και εκτιμώμενης ισχύος 10MFlops (εκατομμύρια πράξεις το δευτερόλεπτο) και 48 MB μνήμη. Αυτός έμεινε μέχρι το τέλος της διπλωματικής ο βασικός υπολογιστής και εκεί είναι αποθηκευμένα τη στιγμή που γράφονται αυτές οι γραμμές όλα τ' αποτελέσματα που έχουν κρατηθεί από τη διπλωματική. Εκεί αρχικά έτρεχαν κι όλα τα προγράμματα που δοκιμάζονταν από αρχές Νοεμβρίου 1997 για αρκετούς μήνες. Επειδή όμως το πρόγραμμα ήθελε πολλές μέρες για να συγκλίνει, αναζητήθηκαν άλλες λύσεις και έτσι δόθηκε η δυνατότητα να γίνει χρήση άλλων δύο υπολογιστών για να τρέχουν τα προγράμματα, τ' αποτελέσματα των οποίων θα έπρεπε πάντα να μεταφερθούν στο Σαρωνικό. Οι άλλοι δύο υπολογιστές ήταν ο `hermes.central.ntua.gr` με 16 επεξεργαστές R4400 στα 100 MHz ισχύος 20MF ο καθένας και η `terpsi.hpc.ntua.gr` με 14 επεξεργαστές R8000 στα 75 MHz θεωρητικής μέγιστης ισχύος αιχμής 300MF ο καθένας. Και οι δύο είναι της εταιρίας Silicon Graphics. Ο τελευταίος είναι ο ισχυρότερος υπολογιστής που υπάρχει στο Πολυτεχνείο. Ο Ερμής δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί πρωτύτερα λόγω του μικρού αποθηκευτικού χώρου που είχε διατεθεί. Το πρόγραμμα ATHENA είναι περίπου μισό Mbyte μεταφρασμένο σε γλώσσα μηχανής και το βασικό αρχείο αποτελεσμάτων `resul1` ήταν στη διπλωματική από 1 μέχρι 2 Mbytes. Ένα βασικό πρόβλημα που υπήρχε ήταν ότι λόγω του όγκου των αρχείων αποτελεσμάτων δε μπορούσαν να κρατηθούν στους υπολογιστές στους οποίους πλέον έτρεχαν τα προγράμματα (Ερμής και Τέρψη), αλλά έπρεπε κάθε φορά να μεταφέρονται (μέσω δικτύου εννοείται) στο Σαρωνικό, οπότε δεδομένου ότι το πρόγραμμα χρησιμοποιήθηκε εκατοντάδες φορές υπήρξαν πολλές χρονοβόρες μεταφορές αρχείων. Καθώς προχωρούσε ο καιρός γίνονταν και αλλαγές στο πρόγραμμα ώστε να βγάζει μικρότερα αρχεία αποτελεσμάτων (τα οποία βέβαια είχαν λιγότερη πληροφορία μέσα). Πρόβλημα χώρου υπήρχε από κάτω σημείο και έπειτα και στο Σαρωνικό, οπότε πολλά αρχεία συμπέζονταν με αποτέλεσμα όταν χρειαζόνταν να πρέπει ν' αποσυμπεστούν, να χρησιμοποιηθούν και μετά να συμπεστούν πάλι, διαδικασίες που επίσης απαιτούσαν χάσιμο χρόνου. Βλέπουμε και πάλι αυτό που έχει αναφερθεί πολλές φορές ως τώρα, ότι η πρόοδος της επιστήμης στο κομμάτι που αφορά τον υπολογισμό της ροής είναι άμεση συνάρτηση της προόδου των υπολογιστών.

Να διευκρινιστεί ότι στους παραπάνω υπολογιστές με πολλούς επεξεργαστές το πρόγραμμα έτρεχε σ' ένα απ' αυτούς, οπότε αυτό που ενδιαφέρει πρακτικά είναι η ισχύς ενός επεξεργαστή και όχι του συνόλου των επεξεργαστών. Στην πράξη διαπιστώθηκε ότι ένας επεξεργαστής του Ερμή είναι λίγο πιο γρήγορος από αυτόν του Σαρωνικού και ένας της Τέρψης (μόνο) 3 φορές πιο γρήγορος. Εννοείται ότι η σύγκριση γίνεται για 100% χρήση του επεξεργαστή, πράγμα που προϋποθέτει ότι δεν υπάρχουν πολλοί χρήστες που να τρέχουν πολλά «βαριά» προγράμματα (οπότε το μηχάνημα έχει μεγάλο φορτίο όπως λέμε). Κατά τη διάρκεια του ενός χρόνου που χρησιμοποιούνταν ο Ερμής και η Τέρψη στον Ερμή το φορτίο ήταν κάτω από  $16^2$  περίπου το 80% των φορών που ελέγχθηκε και στην Τέρψη κάτω από 14 περίπου το 40% των φορών που ελέγχθηκε. Στην Τέρψη τα προγράμματα έτρεχαν συνήθως με παραχώρηση προτεραιότητας στους άλλους χρήστες, επειδή συνήθως αυτό το μηχάνημα το χρησιμοποιούν απόφοιτοι και διδακτορικοί που πιθανότατα έκαναν πιο σοβαρή δουλειά, ώστε να μην καθυστερούν. Στην περίπτωση αυτή, αν

το φορτίο ήταν πολύ χρησιμοποιούνταν μόνο το 4% ενός επεξεργαστή, αλλιώς, όσο το φορτίο ήταν κάτω από 14 το 100%. Το μεγάλο πλεονέκτημα για τη διπλωματική ήταν ότι λόγω των δύο υπολογιστών και των πολλών επεξεργασιών, μπορούσαν να δοκιμάζονται πάνω από ένα πρόγραμμα την ίδια στιγμή και έτσι υπήρχε κέρδος χρόνου.

Όσο για το πόσο χρόνο κάνει ένα πρόγραμμα μέχρι να συγκλίνει, αυτό εξαρτάται από πολλούς παράγοντες κυριότεροι των οποίων είναι η ταχύτητα του υπολογιστή, το φορτίο του υπολογιστή, η περίπτωση για την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροή, ο αριθμός σημείων του πλέγματος, οι επαναλήψεις που θα γίνουν, ποια έκδοση του προγράμματος τρέχει. Μια τυπική περίπτωση είναι χρήση της Τέρνις με φορτίο κάτω από 14 (με πάνω από 14 συνήθως δε χρησιμοποιούνταν επειδή αργούσε πολύ λόγω της παραχώρησης προτεραιότητας στους άλλους χρήστες), ροή στο περιστρεφόμενο κανάλι που εξετάζεται σ' αυτό το κεφάλαιο, χρήση ενός πλέγματος ονόματος 'gri' με 6100 σημεία και χρησιμοποίηση του προγράμματος χωρίς διόρθωση Coriolis με μοντέλο τύρβης k-ε. Σ' αυτή την περίπτωση ένας τυπικός χρόνος ήταν περίπου 20 ώρες. Τα προγράμματα με διόρθωση Coriolis θέλανε λίγο περισσότερο χρόνο.

Το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα να επιλεγεί το χρονικό βήμα μέσω των αριθμών cfl στο αρχείο pmth.IRS2. Μικρό cfl θα πει περισσότερη ώρα για να συγκλίνει αλλά πιο μεγάλη αριθμητική ευστάθεια. Επειδή σε κάθε περίπτωση στην αρχή υπήρχαν προβλήματα, επιλεγόταν συχνά μικρό cfl μέχρι να ξεπεραστούν και μετά πάντα όλα τα προγράμματα τρέχανε με μέσο cfl=0,5, που αποδείχτηκε καλός συμβιβασμός μεταξύ ταχύτητας και ευστάθειας. Όλα τ' αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν και στα τρία κεφάλαια έχουν cfl=0,5. Μια φορά δοκιμάστηκε σε μια τυπική περίπτωση (στρεφόμενο κανάλι, με το πλέγμα gri) cfl=0,9 για να διαπιστωθεί πόσος χρόνος μπορούσε να κερδηθεί. Φάνηκε ότι το σφάλμα είχε πέσει το ίδιο για 70000 επαναλήψεις αντί 100000, άρα υπήρχε ένα κέρδος χρόνου 30%. Συνεχίστηκαν να τρέχουν όμως όλα τα προγράμματα με cfl=0,5 για να είναι συγκρίσιμα όλα τ' αποτελέσματα όσον αφορά τον ρυθμό σύγκλισης. Άλλωστε, αφού και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα δινόταν την επόμενη μέρα, δεν είχε νόημα η μεγαλύτερη ταχύτητα.

Το αποτέλεσμα που θα βγει από την εφαρμογή του ίδιου προγράμματος σε διαφορετικούς υπολογιστές δεν είναι απόλυτα ταυτόσημο, αλλά οι διαφορές είναι αμελητέες στα προφίλ. Αυτό δοκιμάστηκε στον Ερμή και την Τέρνις. Αντίθετα, δυο φορές στον Ερμή που έτρεξε το ίδιο πρόγραμμα επειδή είχε γίνει ένα λάθος, τ' αποτελέσματα ήταν απόλυτα ταυτόσημα μέχρι και το τελευταίο δεκαδικό.

#### 4.1.3. Ποιες διορθώσεις δοκιμάστηκαν και σχόλια.

Δοκιμάστηκαν ουσιαστικά δύο διορθώσεις, η κλασική του Bradshaw που διορθώνει το μήκος ανάμιξης και η διόρθωση των Wilcox, Traci, που προσθέτει τον όρο  $G_c$  στις εξισώσεις του k και του ε.

Η δεύτερη διόρθωση υπήρχε σε μια παραλλαγή του προγράμματος πριν αρχίσει η διπλωματική και δεν πειράχτηκε καθόλου. Είναι αυτή που αναφέρει ο Howard et al., πχ στην §3.4.4.

##### *4.1.3.1. Το ζήτημα του εκθέτη για τη διόρθωση του Bradshaw.*

Η πρώτη διόρθωση μπήκε αρχικά στη μορφή που είναι γραμμένη στο [6], δηλαδή το μήκος ανάμιξης πολλαπλασιάζεται με ένα αριθμό της μορφής  $(1-\beta Ri)$ . Η διόρθωση έπρεπε να εφαρμοστεί για μοντέλο k-ε, ενώ αυτή αφορούσε το μήκος ανάμιξης. Ο τρόπος να γίνει αυτό ήταν να διορθωθεί ο συντελεστής συνεκτικότητας  $\mu_t$ . Στην αρχή επιλέχθηκε να μεταφερθεί αυτούσια η διόρθωση του μήκους ανάμιξης σα να ήταν διόρθωση του τυρβώδους συντελεστή συνεκτικότητας, οπότε είχαμε  $\mu_t' = \mu_t(1-\beta Ri)$ . Αυτό επιλέχθηκε να γίνει για τους εξής λόγους. Πρώτον ήταν το πιο απλό που μπορεί να κάνει κανείς. Δεύτερον η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι χαρακτηριστική ταχύτητα επί χαρακτηριστικό μήκος και άρα η διόρθωση του χαρακτηριστικού μήκους μπαίνει αυτούσια στην τυρβώδη συνεκτικότητα. Τρίτον, βάσει της εξ. (2.68) που λέει ότι  $lock^{1,5}/\epsilon$  και της εξ. (2.69)  $\mu_t \propto k^2/\epsilon$ , βλέπουμε ότι είναι μια καλή λύση αυτή που επιλέχθηκε, αφού έτσι κι αλλιώς δεν υπάρχει κανείς καταλληλότερος εκθέτης αντί για το 1 για να υψώσουμε τη διόρθωση του  $\mu_t$ .

Πολύ αργότερα υπήρξε η σκέψη μήπως θα ήταν καλύτερη ιδέα να υψωθεί η διόρθωση στο τετράγωνο, βάσει του τύπου εξ. (2.46). Αφού η διόρθωση αφορά μοντέλα μήκους ανάμιξης και σ' αυτά ισχύει αυτός ο τύπος, θα πει ότι αν θέλουμε να διορθώσουμε την τυρβώδη συνεκτικότητα απευθείας θα πρέπει να το κάνουμε υψώνοντας την διόρθωση του Bradshaw στο τετράγωνο. Τότε μόνο θα είμαστε συμβατοί με τον Bradshaw και τις τιμές που έχει δώσει στις σταθερές. Ο Σιέρος συνέστησε το ίδιο οπότε αποφασίστηκε να δοκιμαστεί και αυτή η διόρθωση. Η δοκιμή έγινε στο στρεφόμενο κανάλι, λόγω του ότι αυτή η περίπτωση έχει δώσει τα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Το αποτέλεσμα ήταν φυσικά να είναι λίγο μεγαλύτερη η διόρθωση στην περίπτωση που ο εκθέτης ήταν το 2. Ακόμη, υπήρχε μεγαλύτερη συμφωνία με την άλλη διόρθωση του  $G_c$  και αυτό ήταν μια ένδειξη ότι ο εκθέτης 2 είναι καταλληλότερος και ότι και οι δύο διορθώσεις είναι γενικά αξιόπιστες, αφού συμφωνούν. Επίσης η διόρθωση με τον εκθέτη 2 φάνηκε ότι είναι πιο ευαίσθητη σε αλλαγές της σταθεράς της, όπως είναι αναμενόμενο αφού η μεταβολή αν υψωθεί στο τετράγωνο γίνεται ακόμη μεγαλύτερη. Επίσης αυτή η διόρθωση φαινόταν να ταιριάζει καλύτερα με το πρόγραμμα, έδινε πιο ομαλά προφίλ τυρβώδους συνεκτικότητας και κέρδιζε την εμπιστοσύνη. Γι' αυτό, όπως προέκυψε και από τις δοκιμές στο στρεφόμενο κανάλι, προτείνεται η εξής διόρθωση για το  $\mu_t = \mu_t(1-\beta Ri)^{0.2}$ . Από τότε που διαπιστώθηκαν τα παραπάνω χρησιμοποιούνταν αυτή η διόρθωση ως διόρθωση του Bradshaw. Επειδή όμως υπήρχαν και πολλά αποτελέσματα με την παλιά διόρθωση με εκθέτη 1, μπορεί παρακάτω να παρουσιαστούν στα διαγράμματα και τέτοια. Αν γίνει αυτό θ' αναφέρεται με σαφήνεια.

Σχετικά με το ποιος εκθέτης είναι κατάλληλος για την τυρβώδη συνεκτικότητα αν χρησιμοποιούμε διόρθωση μήκους ανάμιξης μπορεί να γίνει μεγάλη συζήτηση. Για παράδειγμα ο Ojala και συνεργάτες στο [19] κατέληξαν να χρησιμοποιήσουν τη διόρθωση με εκθέτη 1, αντίθετα με ότι προτείνεται σ' αυτή τη διπλωματική. Βέβαια αυτοί χρησιμοποιούν άλλο Richardson και άλλο  $\beta$  και έτσι ίσως μπορεί να δικαιολογηθεί αυτό. Δηλαδή με το Richardson του Bradshaw και τις σταθερές του Bradshaw καλύτερη διόρθωση φαίνεται να είναι η υψωμένη στο τετράγωνο, ενώ με τα νέα Richardson ίσως είναι καλύτερη η λύση που εφάρμοσαν οι Ojala και συνεργάτες. Ακόμη πρέπει να θυμηθούμε τον So, §3.4.2 που μάλλον θα μας πρότεινε να βάζαμε εκθέτη 1,5 σύμφωνα μ' αυτά που γράφει, λύση που φαίνεται αρκετά ελκυστική ανάμεσα στο δίλημμα «εκθέτη 1 ή 2». Ας θυμηθούμε και αυτά που γράφονται στη σελ. 103.

#### 4.1.3.2. Ποιο φίλτρο είναι το κατάλληλο για τη διόρθωση του Bradshaw.

Ένα πρόβλημα που φάνηκε αμέσως ήταν ότι για μηδενική κλίση ταχύτητας υπήρχε διαίρεση με το 0 και «κολλούσε» το πρόγραμμα. Οπότε, για να βάλουμε κι ένα φίλτρο στη διόρθωση ώστε να μη φτάσει να δίνει αρνητικούς συντελεστές συνεκτικότητας ή να δίνει 5 και 10 φορές μεγαλύτερες συνεκτικότητες, όπως έχουμε αναφέρει και στη θεωρία, επιλέχθηκε αρχικά να γυρίζουμε στον παλιό συντελεστή συνεκτικότητας τον χωρίς διόρθωση αν η κλίση ταχύτητας ήταν πάνω από κάποια τιμή. Αυτό δούλεψε καλά, αλλά φάνηκε ότι κάθε φορά που αλλάζαμε την εξεταζόμενη περίπτωση έπρεπε ν' αλλάζουμε και το φίλτρο, οπότε επιλέχθηκε να μπει ένα φίλτρο που θα είναι ανεξάρτητο από κάθε εξεταζόμενη περίπτωση. Επιλέχθηκε να είναι το εξής: «Αν το μήκος ανάμιξης γίνεται μικρότερο από 0,5 φορές της τιμής του χωρίς διόρθωση ή μεγαλύτερο από 1,5 φορές της τιμής του χωρίς διόρθωση, να παίρνει πάλι την παλιά του τιμή». Το φίλτρο δηλαδή περιορίζει τις τιμές της διόρθωσης στο εύρος [0,5-1,5]. Μετά που άλλαξε ο εκθέτης της διόρθωσης δοκιμάστηκε στην αρχή να μείνει το φίλτρο για το μήκος ανάμιξης, οπότε για το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας γινόταν [0,25-2,25], αλλά τελικά επιλέχθηκε να κρατηθεί το αρχικό φίλτρο και να μην αφήσουμε το  $\mu_t$  πλέον να μεταβάλλεται πάνω από 50%. Τα δύο φίλτρα έχουν μικρή διαφορά μεταξύ τους ως προς το σε ποιο σημείο κόβουν το συντελεστή (ένα ή δύο σημεία του πλέγματος διαφορά για τις 100 στροφές το λεπτό<sup>1</sup>). Πάντως περιορίζοντας το  $\mu_t$  με το πιο στενό φίλτρο, δίνει σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα στο προφίλ ταχυτήτων που δίνει με το ίδιο φίλτρο και εκθέτη 1. Δηλαδή η αύξηση του  $\mu_t$  στην περιοχή που γίνεται αίρεται σε κάποιο

βαθμό από το ότι ο συντελεστής πέφτει λίγο πιο νωρίς στην παλιά του τιμή. Φυσικά η πτώση στην παλιά τιμή γίνεται στο εξωτερικό μέρος του οριακού στρώματος.

Γενικά διαπιστώθηκε ότι η αύξηση του συντελεστή στα εξωτερικά μέρη του οριακού στρώματος μπορεί ν' αλλάξει αισθητά τα προφίλ ταχυτήτων γι' αυτό προτείνεται *μεγάλη προσοχή στην επιλογή του φίλτρου* στην περίπτωση που εφαρμόζεται διόρθωση κατά Bradshaw. Το αν το φίλτρο που επιλέχθηκε είναι καλό ή όχι μπορεί να φανεί εκ του αποτελέσματος και αυτό θα γίνει περισσότερο κατανοητό στα διαγράμματα που θ' ακολουθήσουν. Αν το φίλτρο είναι καλό, στην πλευρά υπερπίεσης θα υπάρχει ομαλή μετάβαση από τη διορθωμένη τιμή στην τιμή χωρίς διόρθωση, προς το τέλος του οριακού στρώματος. Αν γίνονται σκαμπανεβάσματα του προφίλ με μέσα στο οριακό στρώμα αυτό θα πει ότι είναι πολύ περιοριστικό το φίλτρο και πρέπει ν' αυξήσουμε το εύρος του και αν πέφτει απότομα μετά το οριακό στρώμα, θα πει ότι πρέπει να το κάνουμε πιο στενό. Αντίστοιχα συμπεράσματα μπορούμε να πάρουμε και από την πλευρά υποπίεσης. Σ' αυτήν, το προφίλ με έχει ένα χαρακτηριστικό «σκαλί», όπως θα φανεί από επόμενα διαγράμματα. Αν βάλουμε στο ίδιο διάγραμμα τον υπολογισμό της ροής με διόρθωση του  $G_c$  και μ' αυτή τη διόρθωση, πρέπει το σκαλί να κόβεται στη μέση από το προφίλ με της περίπτωσης με διόρθωση του  $G_c$  για να είναι επιτυχημένο το φίλτρο. Αυτά τα συμπεράσματα βγήκαν από την περίπτωση του στρεφόμενου καναλιού και δε μπορεί να εγγυηθεί η γενικότερη ισχύς τους. Πάντως σίγουρα το φίλτρο παίζει σημαντικό ρόλο και μπορεί να ελεγχθεί αν ήταν πετυχημένο εκ των υστέρων.

Ένα ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι γιατί να πέφτει το  $\mu_t$  στην παλιά του τιμή αν ξεπεράσει το όριο του φίλτρου και να μην σταθεροποιείται στην τιμή 0,5 $\mu$ , για την πλευρά υποπίεσης και 1,5 $\mu$  για την υπερπίεση. Αυτό φαίνεται πολύ καλή ιδέα και έχει το εξής μεγάλο πλεονέκτημα, που αναφέρεται στο [29]: στο εξωτερικό μέρος του οριακού στρώματος πρέπει το μήκος ανάμιξης να μένει περίπου σταθερό βάσει όσων ξέρουμε, και φυσικά να είναι π.χ. μεγαλύτερο στην πλευρά υποπίεσης απ' ότι στην περίπτωση χωρίς διόρθωση Coriolis. Η παραπάνω ιδέα πληροί και τους δύο αυτούς περιορισμούς. Γι' αυτό άλλωστε και εφαρμόστηκε από πολύ νωρίς και έγιναν σοβαρές προσπάθειες να προωθηθεί. Τελικά όμως στην πράξη άλλα φάνηκαν. Το σημαντικότερο πρόβλημα είναι ότι μ' αυτό τον τρόπο δημιουργείται μια ασυνέχεια κάπου μέσα στο κανάλι, εκεί που γίνεται η μετάβαση από την πλευρά υποπίεσης στην υπερπίεση, δηλαδή εκεί που αλλάζει τιμή ο Richardson. Η ασυνέχεια αυτή στο προφίλ με είναι πολύ μεγάλη, μπορεί να επηρεάζει πάνω από δύο κόμβους και φαίνεται τελείως παράταιρη και λανθασμένη. Επιπλέον, συγκρίνοντας κανείς τα προφίλ με των δύο περιπτώσεων που συζητάμε (κρατώντας τις τιμές 1,5 $\mu$  και 0,5 $\mu$  ή αφήνοντας την παλιά τιμή 1, 0 $\mu$ ) με την διόρθωση του  $G_c$ , βλέπει ότι η περίπτωση που κρατάμε την παλιά τιμή είναι σαφώς πιο κοντά μέσα στο κανάλι. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι παρόλες τις αλλαγές στο  $\mu_t$ , τα προφίλ ταχύτητας των δύο περιπτώσεων που συζητάμε ήταν σχεδόν ταυτόσημα, οπότε η τελική επιλογή και αυτό που προτείνεται είναι έξω από τα όρια που λείει το φίλτρο, το  $\mu$ , να παίρνει την τιμή που θα έπαιρνε χωρίς διόρθωση. Αξίζει πάντως να θυμηθούμε τη λύση που αναφέρεται στο [29] για φίλτρο, που είναι πιο κομψή και δε χρειάζεται ποτέ αλλαγή φίλτρου, αλλά δε δοκιμάστηκε επειδή το πάχος του οριακού στρώματος δε μπορεί να εκτιμηθεί πριν υπολογιστεί η ροή. Η λύση αυτή περιγράφεται συνοπτικά και στη σελ. 95.

#### 4.1.3.3. Ποιο Richardson χρησιμοποιήθηκε.

Για Richardson επιλέχτηκε η απλοποιημένη του μορφή. Αυτό έγινε γιατί στο [6] στο σημείο που δίνονται οι τιμές της σταθεράς  $\beta$  γράφεται η διόρθωση με αντικατεστημένο το  $\bullet$  Richardson από την απλή του μορφή (που ισούται με την παράμετρο ευστάθειας). Πιθανότατα λοιπόν οι σταθερές να έχουν καλμπραριστεί για το απλό Richardson και έτσι θα ήταν πιο λογικό να χρησιμοποιηθεί αυτό. Επιπλέον, λόγω της ύπαρξης του φίλτρου, η διόρθωση έχει ισχύ μόνο σε περιοχές όπου οι κλίσεις ταχύτητας έχουν πολύ μεγάλη τιμή και εκεί όπως έχει γραφτεί ισχύει ουσιαστικά  $Ri=S$ .

#### 4.1.3.4. Μορφή της διόρθωσης στην πλευρά υποπίεσης και στην πλευρά υπερπίεσης.

Από πολύ νωρίς όταν δοκιμάστηκε η διόρθωση, αποφασίστηκε να γράφεται στην πλευρά υποπίεσης στη μορφή  $1/(1+\beta Ri)$ , ώστε να μην υπάρχει ποτέ πρόβλημα απροσδιοριστίας ή αρνητικού μήκους ανάμιξης. Αυτή η μορφή είχε ληφθεί από δημοσιεύσεις του Johnston αλλά αναφέρεται και στο [6] ως προτιμώμενη στην περίπτωση που θέλουμε ν' αποφύγουμε αυτό το



Οπότε τελικά, η μορφή που παίρνει η διόρθωση του Bradshaw και δούλεψε καλύτερα απ' όλες τις άλλες που δοκιμάστηκαν και προτείνεται για παράλληλα κανάλια στην περίπτωση που κάποιος θέλει να διορθώσει το μήκος ανάμιξης χρησιμοποιώντας κλασικό Richardson, είναι η εξής:

Πλευρά υπερπίεσης:  $\mu/\mu_0 = (1 + 4,5Ri)^2$ ,  $Ri$  σε απόλυτη τιμή (πάντα θετικό στον τύπο).

Πλευρά υποπίεσης:  $\mu/\mu_0 = 1/(1 + 7Ri)^2$ ,  $Ri$  σε απόλυτη τιμή (πάντα θετικό στον τύπο).

Το Richardson από τον τύπο:  $Ri = 2\Omega/(\partial u/\partial y)$ .

#### 4.1.3.5. Τι άλλες δοκιμές έγιναν.

Έγιναν και κάποιες άλλες δοκιμές. Σε μία στην πλευρά υπερπίεσης επιλέχθηκε η σταθερά που προτείνεται στα [9], [10], [11], δηλαδή 4 αντί 4,5. Σε μια άλλη δοκιμή αλλάχθηκε ο τύπος στην πλευρά υποπίεσης. Συγκεκριμένα αναλύθηκε το  $(1-7Ri)$  σε σειρά Taylor με πρώτο όρο το  $1/(1+7Ri)$  και προστέθηκαν και όροι μεγαλύτερης δύναμης, μέχρι εβδόμης. Και στις δύο περιπτώσεις τα προφίλ ταχυτήτων δεν άλλαξαν καθόλου και στα προφίλ  $\mu$  να μην υπήρχε αλλαγή προς την αναμενόμενη κατεύθυνση σε κάθε περίπτωση, αλλά ήταν απειροελάχιστη και δεν έχει νόημα να παρουσιαστούν τα αντίστοιχα διαγράμματα. Από αυτές τις δύο δοκιμές βγαίνουν τα εξής συμπεράσματα: 1) Μια μικρή αλλαγή στην σταθερά  $\beta$  δεν παίζει μεγάλο ρόλο και δε θα πρέπει να μας απασχολεί πολύ η ακριβής της τιμή. 2) Επιβεβαιώθηκε ότι οι διατυπώσεις εξ. (3.28) και εξ. (3.29) για τη διόρθωση του Bradshaw είναι πρακτικά ισοδύναμες. Αυτό ισχύει βέβαια αν έχει μπει κάποιο φίλτρο που να μην αφήνει τη διόρθωση να κάνει πολύ μεγάλες αλλαγές. Τέλος, να ειπωθεί ότι και αυτές οι περιπτώσεις ήταν με τη διόρθωση με εκθέτη 1 και συγκρίθηκαν πάλι με διόρθωση με εκθέτη 1.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πλευρά υποπίεσης στο στρεφόμενο κανάλι υπήρχε μεγάλη αναισθησία του προφίλ ταχυτήτων από τις αλλαγές των προφίλ  $\mu$  (πράγμα που ισχύει και για την πλευρά υπερπίεσης, αλλά σε μικρότερο βαθμό). Η αναισθησία του προφίλ ταχυτήτων παρόλες τις αλλαγές του  $\mu$  αναφέρεται και στο [15]. Ακόμη, γενικότερα σε όλες τις περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν δεν διαπιστώθηκε ποτέ να επηρεαστεί η μια πλευρά από κάτι που συμβαίνει στην άλλη.

Έγιναν και πολλές δοκιμές πολλαπλασιάζοντας και υποπολλαπλασιάζοντας εικονικά για την διόρθωση την ταχύτητα περιστροφής. Αυτό έγινε και στη διόρθωση του  $G_c$  και σ' αυτή του Bradshaw με εκθέτη στο  $\mu$  1 και 2. Ειδικά για τη διόρθωση του Bradshaw, η εικονική αύξηση του αριθμού περιστροφής ισοδυναμεί με ίδια αύξηση στον συντελεστή  $\beta$ . Βλέπουμε έτσι τι ευαισθησία έχει η διόρθωση ανάλογα με την τιμή της σταθεράς. Τα συμπεράσματα από αυτές τις δοκιμές που ήταν πολλές θα γραφούν στα σχόλια των διαγραμμάτων. Γενικά να πούμε ότι για την διόρθωση του Bradshaw η επίδραση στο  $\mu$  είναι ανάλογη του εικονικού αριθμού περιστροφής (δυσπλασιασμός του  $\Omega$  μόνο μέσα στον όρο διόρθωσης δίνει δυσπλάσια διόρθωση και δυσπλάσιο μέγιστο  $\mu$ ) ενώ στη διόρθωση του  $G_c$  δυσπλασιασμός π.χ. του  $\Omega$  δίνει περισσότερο από δυσπλάσιο  $\mu$ . Για τη διόρθωση του Bradshaw είναι αναμενόμενη η συμπεριφορά αφού επιδρά κατευθείαν στο  $\mu$ . Επίσης, δυσπλασιασμός της γωνιακής ταχύτητας με χρήση της διόρθωσης του Bradshaw και εκθέτη 1, έχει ως αποτέλεσμα λιγότερο από δυσπλάσια αλλαγή στα μέγιστα  $\mu$ . Άρα πιο ευαίσθητη διόρθωση είναι αυτή του  $G_c$ , αφού με ίδια αύξηση γωνιακής ταχύτητας συνεπάγεται μεγαλύτερη (αναλογικά με της κανονικής γωνιακής ταχύτητας) μεταβολή του μεγίστου  $\mu$ . Έπεται σε ευαισθησία η διόρθωση του Bradshaw με εκθέτη 2 και μετά αυτή με εκθέτη 1. Για τις δύο τελευταίες αυτό είναι αναμενόμενο από τα μαθηματικά. Για να είναι συγκρίσιμα τ' αποτελέσματα των διορθώσεων του Bradshaw με πολλαπλασιασμένο συντελεστή και με κανονικό συντελεστή, επιλέχθηκε φίλτρο τέτοιο ώστε να «κόβεται» η διόρθωση στον ίδιο κόμβο που κόβεται και στην περίπτωση που έχουμε κανονικό συντελεστή.

Βλέπουμε ότι και η διόρθωση του  $G_c$  παρουσιάζει ομαλή αύξηση με αλλαγή του  $\Omega$ . Αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσαμε προσεγγιστικά να τη χρησιμοποιήσουμε και έξω από τις διαφορικές εξισώσεις, κατευθείαν στο  $\mu$ . Αυτό θυμίζει και στηρίζει τη σκέψη που είχαν οι Khodak & Hirsch, [21], σελ. 101, να πάρουν μια διόρθωση που είχε φτιαχτεί για να μπει μέσα

στην εξίσωση του  $\epsilon$  και να την εφαρμόσουν κατευθείαν στο μήκος ανάμιξης  $l$ . Δηλαδή τελικά οι διορθώσεις είτε μπαίνουν μέσα στις διαφορικές εξισώσεις είτε έξω, φαίνεται να επηρεάζουν άμεσα το  $\mu$ .

Κάποια εποχή υπήρχε η σκέψη πώς μπορεί να ληφθεί υπόψη σε μια απλή διόρθωση όπως αυτή του Bradshaw το γεγονός ότι η διόρθωση εξαρτάται από την ίδια την τύρβη (σελ. 83) και άρχισαν να δοκιμάζονται παραλλαγές της διόρθωσης. Χωρίς να έχει γίνει και κάτι πολύ σπουδαίο, βρέθηκε ότι υπάρχουν πολλές συναρτήσεις που δίνουν περίπου τα ίδια αποτελέσματα με τον τύπο  $(1-\beta Ri)$ . Έτσι δοκιμάστηκαν τελείως ανιχνευτικά δύο απ' αυτές. Οι συγκρίσεις έγιναν με εκθέτη 1 στη διόρθωση του  $\mu$ .

Η πρώτη απ' αυτές τις διορθώσεις είναι η εξής:

Πλευρά υπερπίεσης:  $\mu/\mu_0 = (1+0,45Ri)^{10}$  (Richardson σε απόλυτη τιμή).

Πλευρά υποπίεσης:  $\mu/\mu_0 = 1/(1+0,7Ri)^{10}$  (Richardson σε απόλυτη τιμή).

Η δεύτερη διόρθωση επιλέχθηκε για απλότητα να έχει ίδιο τύπο για τις δύο πλευρές και είναι:

Πλευρά υπερπίεσης:  $\mu/\mu_0 = 1+30 \log(1+0,5Ki)$ . (Richardson σε απόλυτη τιμή).

Πλευρά υποπίεσης:  $\mu/\mu_0 = 1/[1+30 \log(1+0,5Ki)]$ . (Richardson σε απόλυτη τιμή).

Οι δύο αυτές διορθώσεις χρησιμοποιήθηκαν με το ίδιο φίλτρο που χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση του Bradshaw. Τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

Η πρώτη διόρθωση δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τη διόρθωση του Bradshaw, πράγμα που αναμενόταν αφού η συγκεκριμένη συνάρτηση επιλέχθηκε ακριβώς επειδή δίνει τις ίδιες τιμές. Η δεύτερη κινείται στα ίδια πλαίσια, αλλά υπερεκτιμά την επίδραση της Coriolis σε σχέση μ' αυτήν του Bradshaw. Αυτό συμβαίνει γιατί οι σταθερές της επιλέχθηκαν πιο βιαστικά. Με λίγη προσπάθεια μπορούν να συμπέσουν τ' αποτελέσματα.

Αν όμως παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε κάτι διαφορετικό, γι' αυτό άλλωστε και δε δόθηκε συνέχεια σ' αυτή την προσπάθεια. Πιθανά οφέλη από μια τέτοια εργασία θα είναι να φτιαχτεί μια διόρθωση που θα έχει μεγαλύτερη αναισθησία στις επιδράσεις του φίλτρου και στην μεταβολή της σταθεράς της, ώστε να μην παίζει ρόλο ο ακριβής προσδιορισμός τους. Πράγματι, οι δύο παραπάνω διορθώσεις φάνηκε ότι παρουσιάζουν διαφορετική ευαισθησία στην αλλαγή του συντελεστή τους (το νούμερο που βρίσκεται μπροστά στο Richardson) και συγκεκριμένα είναι περισσότερο ευαίσθητες από αυτή του Bradshaw. Επιπλέον διαπιστώθηκε ότι η συνάρτηση με το λογάριθμο είχε πολύ ομαλή συμπεριφορά σε σχέση με τις άλλες δύο, ιδίως μ' αυτή της ύψωσης στη δεκάτη δύναμη και αυτό είναι ένα πλεονέκτημα της. Αποφασίστηκε όμως ότι δεν αξίζει να χάνεται χρόνος με διορθώσεις τέτοιου τύπου και αυτό προτείνεται ως συμπέρασμα απ' αυτή την ιστορία.

## 4.2. ΤΟ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΚΑΝΑΛΙ.

### 4.2.1. Αγωγός διαστάσεων 10cm x 1cm.

Για τη γεωμετρία του καναλιού και τις στροφές που θα περιστρέφεται δε δόθηκε πολύ σημασία στην αρχή. Επιλέχθηκε να έχει μήκος 10 εκατοστά, ο άξονας περιστροφής να έχει απόσταση 5 εκατοστά από την είσοδο του και το πλάτος του να είναι 1 εκατοστό. Για ταχύτητα περιστροφής θεωρήθηκαν 10000 RPM και Max εισόδου περίπου 0,6.

Πρέπει ήδη να έχει γίνει κατανοητό ότι σε ένα τέτοιο κανάλι δεν θα έχει αποκατασταθεί ανεπτυγμένη ροή. Υπήρχε η σκέψη ότι για να δούμε πόσο αλλάζει το οριακό στρώμα θα πρέπει τα δύο στρώματα της πλευράς υποπίεσης και υπερπίεσης να είναι ανεξάρτητα και να μην ανακατεύεται το ένα με το άλλο και δε μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα. Τότε δεν ήταν γνωστό ότι οι περισσότεροι ερευνητές μελετάνε πλήρως ανεπτυγμένη ροή, αλλιώς μπορεί να γινόταν και εδώ αυτή η επιλογή. Πάντως στην περίπτωση μας που έχουμε αναπτυσσόμενο οριακό στρώμα δεν υπάρχει (όπως φάνηκε από όλα τα τρεξίματα στο στρεφόμενο κανάλι) καμία επίδραση της μιας πλευράς στην άλλη.

Από ένα μονοδιάστατο υπολογισμό που έγινε προέκυψε ότι η πίεση εξόδου είναι περίπου 94700 Pa για ατμοσφαιρική είσοδο. Τελικά για μια τιμή 95000 Pa το πρόγραμμα δούλεψε

η διόρθωση του Bradshaw, οπότε τα οριακά στρώματα μεγάλωσαν παράλογα πολύ. Επειδή τα προφίλ  $\mu$  που προέκυπταν δεν φαινόταν για τυρβώδη, δοκιμάστηκε και το μοντέλο Baldwin Lomax που εκ κατασκευής βγάζει τυρβώδη προφίλ  $\mu$ , και φάνηκε ότι μάλλον το πρόβλημα ήταν ότι η ροή δεν ήταν τυρβώδης μέσα σε ένα τέτοιο κανάλι. Όταν επιλέχθηκε δε δόθηκε πολύ σημασία σ' αυτό το γεγονός, αφού στο πεδίο των στροβιλομηχανών στο οποίο χρησιμοποιούνταν συνήθως το πρόγραμμα οι ροές είναι τυρβώδεις. Παρόλο που δεν πρέπει να κάνουμε παραβολή με την περίπτωση της πλάκας, μπορούμε ν' αποκτήσουμε κάποια ένδειξη απ' την τιμή του κρίσιμου Reynolds που ισχύει σ' αυτή. Έτσι στο κανάλι μας με ταχύτητα μέσα του περίπου σταθερή 180 m/s, μέγιστο μήκος 0,1 m και για μια τυπική τιμή του  $\nu$   $15 \cdot 10^{-6}$ , προκύπτει Reynolds  $1,2 \cdot 10^6$ , δηλαδή ακόμη και στην άκρη του καναλιού δεν έχουμε φτάσει στην πλήρως τυρβώδη περιοχή (περίπου για Reynolds μεγαλύτερο από  $4 \cdot 10^6$ ). Αυτό πρέπει βέβαια να θεωρηθεί ένδειξη και όχι απόδειξη, αφού το στρεφόμενο κανάλι δεν είναι πλάκα.

Παρότι τ' αποτελέσματα απ' το κανάλι αυτό πρέπει να θεωρηθούν άχρηστα, δε μπορούμε να μη σχολιάσουμε το εξής γεγονός: Με τη διόρθωση Coriolis του  $G_c$ , τ' αποτελέσματα είναι σχεδόν ταυτόσημα με αυτά χωρίς διόρθωση, ενώ με τη διόρθωση του Bradshaw υπάρχει τεράστια διαφορά και η ροή γίνεται τυρβώδης. Αυτό είναι κάτι ανεξήγητο και πρέπει να σημειωθεί. Ένα άλλο συμπέρασμα που βγαίνει από την περίπτωση του καναλιού αυτού είναι ότι καλύτερα να κάνει κανείς αργά και σίγουρα και ελεγμένα βήματα. Βέβαια πολλές φορές κάτι τέτοιο είναι πολύ δύσκολο και απλά δοκιμάζεται κάτι και απ' το αποτέλεσμα φαίνεται αν είναι πετυχημένο ή όχι.

#### 4.2.2. Αγωγός διαστάσεων 10m x 1m.

Αφού στο μικρό κανάλι δημιουργήθηκε η σοβαρή υποψία ότι η ροή είναι στρωτή, η άμεση αντίδραση ήταν να μεγάλωσουμε το κανάλι ώστε ν' αυξηθεί ο Reynolds και να έχουμε τυρβώδη ροή, εκτός ίσως από κάποιους αρχικούς κόμβους στην άκρη του καναλιού. Επιλέχθηκε να γίνει μεγένθυση 100X, οπότε το τελικό κανάλι είχε μήκος 10 μέτρα και γωνιακή ταχύτητα 100 RPM, ώστε να κρατηθούν τα τρίγωνα ταχυτήτων τα ίδια. Ο μονοδιάστατος υπολογισμός ήταν ο ίδιος και πάλι η πίεση εξόδου 95000 Pa έδινε καλά αποτελέσματα, με τυρβώδη προφίλ  $\mu$ , αυτή τη φορά. Αρχικά κρατήθηκε το παλιό πλέγμα, αλλά υπήρχαν υποψίες ότι δεν επαρκεί η πυκνότητα του για την περίπτωση του μεγάλου καναλιού και έτσι, αφού δοκιμάστηκαν τα προγράμματα με το παλιό πλέγμα, φτιάχτηκε και ένα καινούριο πιο πυκνό και η λύση ήταν διαφορετική, οπότε πράγματι το παλιό πλέγμα (με όνομα 'grid', 100X41 σημεία) ήταν αραιό. Να σημειωθεί ότι με το νέο πλέγμα, που του δόθηκε το όνομα 'gri', ο χρόνος υπολογισμού της ροής σχεδόν διπλασιάστηκε. Μ' αυτό το πλέγμα έγιναν οι υπολογισμοί που θεωρούνται «σωστοί» που είναι και οι περισσότεροι.

Πρέπει να σημειωθεί όμως το εξής. Αφού έγιναν αρκετοί υπολογισμοί με το νέο πλέγμα και όλα πήγαιναν καλά, αναζητήθηκε να βρεθεί αν υπάρχει ανεξαρτησία πλέγματος. Φτιάχτηκε λοιπόν ένα ακόμη πυκνότερο πλέγμα, ονόματι 'gri-moredens' (131X71 σημεία) με το οποίο φάνηκαν πολλά προβλήματα. Παρόλο που το πλέγμα δεν ήταν απαγορευτικά πυκνό βάσει των τιμών του  $y$ , φάνηκαν τα εξής: όσο προχωρούσαν οι επαναλήψεις παρουσιάζονταν διακυμάνσεις στα προφίλ  $\mu$  τα οποία άλλοτε γίνονταν στρωτά και άλλοτε τυρβώδη<sup>1</sup>. Κάτι τέτοιο δικαιολογείται για λίγες επαναλήψεις, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση υπήρχε και διαφορά μεταξύ 90000 και 100000 επαναλήψεων (στην μια περίπτωση τυρβώδες προφίλ στην πλευρά υποπίεσης και στην άλλη στρωτό) που υποτίθεται ότι θα έπρεπε να είχε συγκλίνει. Για να ξεκαθαριστεί τι συμβαίνει αφέθηκε το πρόγραμμα να τρέξει μέχρι να φτάσει τη μέγιστη ακρίβεια που μπορούσε και φάνηκε ότι το προφίλ στην πλευρά υποπίεσης σταθεροποιήθηκε σε στρωτό (δηλαδή δείχνει ότι υπάρχει στρωτή ροή εκεί). Φυσικά η λύση αυτή καμία σχέση δεν είχε με τη λύση του άλλου πλέγματος, είναι τελείως ανεξήγητη και παράλογη και βάζει ερωτήματα για την αξιοπιστία του προγράμματος. Πιθανόν να γίνει και αργότερα αναφορά σ' αυτό το θέμα. Αυτό που έχει σημασία για τώρα είναι ότι δεν έχει εξασφαλιστεί ανεξαρτησία πλέγματος για τις λύσεις που θα παρουσιαστούν.

Από την εμπειρία βέβαια που αποκτήθηκε από τις εκατοντάδες φορές που χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα, μπορούμε να πούμε ότι οι περιπτώσεις του στρεφόμενου καναλιού με χρήση του πλέγματος 'gri' (100X61 σημεία) φαίνεται να είναι «σωστά» τρεξίματα. Το αρχείο σύγκλισης δείχνει πολύ ομαλή σύγκλιση σε όλες τις περιπτώσεις, που συνεχίζει να κατεβάζει το σφάλμα μέχρι και πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων και τ' αποτελέσματα που παίρνουμε είναι λογικά. Βέβαια τα αναπάντητα ερωτηματικά σχετικά με την απρόσμενη συμπεριφορά του προγράμματος και η μη αποδεδειγμένη ανεξαρτησία πλέγματος δε μπορούν να μας κάνουν να θεωρήσουμε ότι οι λύσεις που έχει δώσει το πρόγραμμα είναι σίγουρα και οι πραγματικές. Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις συγκρίσεις των διαφόρων αποτελεσμάτων μεταξύ τους θα είναι σε γενικές γραμμές σωστά. Ακόμη και αν υπάρχει π.χ. αλλαγή σε άλλο πλέγμα, αυτή θα ισχύει για όλες τις περιπτώσεις, οπότε πάλι οι συσχετισμοί δεν θα τροποποιηθούν πολύ.

Με το πλέγμα 'gri' φάνηκε ότι δεν άλλαξε η λύση μετά τις περίπου 70000 επαναλήψεις, όσο και συνέκλινε ακόμη το πρόγραμμα. Γι' αυτό επιλέχθηκε να δοκιμάζονται όλα τα τρεξίματα με 100000 επαναλήψεις ώστε να είναι και απ' αυτής της πλευράς άμεσα συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Όπως θα φανεί και από τα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν, οι αλλαγές στο προφίλ ταχυτήτων με και χωρίς διόρθωση είναι πολύ μικρές, γι' αυτό και για να γίνει σύγκριση των διαφόρων διορθώσεων χρησιμοποιούνται τα προφίλ του  $\mu t$ . Πράγματι, αν δούμε τι τιμές παίρνει ο αριθμός περιστροφής, διαπιστώνουμε ότι για γωνιακή ταχύτητα 100 RPM, ταχύτητα εξωτερικής ροής 170 m/s και πάχος του οριακού στρώματος μέσα στο κανάλι όπως προκύπτει από 0,01 ως 0,25 m, ο αριθμός περιστροφής  $Ro$  βάσει του ορισμού της σελίδας σελ. 68, προκύπτει από 0,0012 ως 0,03, που μπορεί να θεωρηθεί στο μεγαλύτερο μέρος του καναλιού σχετικά χαμηλός. Γι' αυτό δοκιμάστηκε και η περίπτωση των 200 RPM, όπου σε γενικές γραμμές η επίδραση θα είναι δυο φορές μεγαλύτερη και ο αριθμός περιστροφής από 0,0024 ως 0,06. Έγιναν και πολλές προσπάθειες να δοκιμαστεί ταχύτητα περιστροφής 1000 RPM, αλλά στην καλύτερη των περιπτώσεων το πρόγραμμα έπαυε να τρέχει μετά από μερικές επαναλήψεις. Να σημειωθεί πάντως ότι στην περίπτωση αυτή το απόλυτο  $Max$  εισόδου είναι πολύ μεγαλύτερο της μονάδας και ίσως αυτό να δημιουργεί κάποιο πρόβλημα. Ακόμη, η σχετική ταχύτητα στην έξοδο του καναλιού έχει πέσει σε πολύ χαμηλές τιμές (κάτω από 10 m/s).

Στις 200 RPM υπήρχε δυσκολία να βρεθεί μια κατάλληλη πίεση εξόδου που να δίνει μέσα στο κανάλι ροή περίπου ίδιου Reynolds με την περίπτωση των 100 RPM, δηλαδή να υπάρχει στην είσοδο μια ταχύτητα της τάξης των 200 m/s. Στον πρώτο μονοδιάστατο υπολογισμό που έγινε, θεωρήθηκε πολυτροπικός βαθμός απόδοσης 0,9, τιμή που από την εμπειρία που είχε αποκτηθεί ως τότε φαινόταν λογική. Απ' αυτή προέκυπτε πίεση εξόδου 127500 Pa. Αυτή η πίεση όμως έδινε υπερηχητική ροή σε μεγάλο μέρος του καναλιού. Μετά από διαδοχικές προσπάθειες, η ροή φάνηκε ότι γινόταν υποηχητική και περίπου στα πλαίσια που θέλουμε για 141000 Pa. Τελικά βέλτιστη λύση φάνηκε αυτή που έδινε ο μονοδιάστατος υπολογισμός για πολυτροπικό βαθμό απόδοσης 0,97, δηλαδή 142350 Pa. Εντύπωση κάνει (σε σχέση με την μικρή εμπειρία που είχε αποκτηθεί ως τότε) το πόσο μακριά από τον αρχικό υπολογισμό ήταν η τελική επιλογή της πίεσης και σε πόσο μεγάλο πολυτροπικό βαθμό απόδοσης αντιστοιχεί. Το πρόγραμμα όμως μ' αυτές τις τιμές συμφωνεί και μ' αυτές τα τρεξίματα φαίνονται «σωστά», το πλέγμα κατάλληλο και η σύγκλιση προχωρά ομαλά μέχρι πολύ μικρό σφάλμα. Σε αυτή την περίπτωση το  $Min$  δόθηκε 0,607.

Το πρόγραμμα έτρεξε και με 0 RPM ώστε να έχουμε, αν χρειαστεί, κάποια σύγκριση των τιμών της περιστροφής μ' αυτές της μη περιστροφής. Εδώ ο καθορισμός της πίεσης εξόδου έπρεπε να γίνει πραγματικά με δοκιμές, αφού για το μονοδιάστατο υπολογισμό, και ισεντροπική ροή όλα τα μεγέθη μένουν ίδια σε ένα τέτοιο κανάλι απ' την αρχή μέχρι το τέλος. Τελικά για πίεση εξόδου 80000 Pa φάνηκε το Reynolds να είναι αντίστοιχο των περιπτώσεων που είχαν δοκιμαστεί, των 100 και 200 στροφών.

Επειδή το πρόγραμμα είναι φτιαγμένο για να χρησιμοποιείται κυρίως σε ακτινικές στροβιλομηχανές, παρουσιάζει κάποιες δυσκολίες ή προσπάθεια εφαρμογής του σε άλλες πιο απλές περιπτώσεις όπως αυτή του στρεφόμενου καναλιού. Ένα πρόβλημα είναι ότι για το

πρόγραμμα το κανάλι είναι μια στροβιλομηχανή που έχει πτερύγια, σα να υπήρχαν περιφερειακά πολλά κανάλια το ένα κολλητά με το άλλο. Καταλαβαίνουμε ότι σε μια τέτοια στροβιλομηχανή το πάχος των πτερυγίων είναι μηδενικό. Αυτό δεν είναι ακόμη γνωστό μήπως δημιουργεί κάποιο πρόβλημα στους υπολογισμούς που γίνονται. Επιπλέον, δημιουργεί τη δυσκολία ότι πρέπει η ροή να μπαίνει εντελώς παράλληλα στο κανάλι, αλλιώς υπάρχει πολύ μεγάλη πιθανότητα να δημιουργηθεί αποκόλληση απ' την αρχή του αγωγού. Αυτό είχε φανεί στην εξέταση του πειράματος του Moore<sup>1</sup> που είχε προηγηθεί και στην οποία είχαν δοκιμαστεί πολλές λύσεις, όπως το να δημιουργηθεί ένα μικρό πάχος για τα πτερύγια, να μην υπάρχει πλέγμα μπροστά και πίσω αλλά να αρχίζει και να τελειώνει μαζί με το κανάλι κτλ. Τελικά αποφασίστηκε για το στρεφόμενο κανάλι η απλούστερη λύση, μηδενικό πάχος πτερυγίων και καθόλου πλέγμα πριν και μετά. Αν υπήρχαν προβλήματα θα άλλαζε εκ των υστέρων. Έτσι επιλέχθηκε το πλέγμα 'gr1' το οποίο φάνηκε να δουλεύει πολύ καλά. Αναφέρονται αυτά εδώ διότι ίσως αποδειχτεί στο μέλλον ότι π.χ. το να δίνεται σταθερή πίεση εξόδου κατά πλάτος ακριβώς στην έξοδο του καναλιού δημιουργεί πρόβλημα και ίσως μπορεί να εξηγήσει σε κάποιο βαθμό κάποια από τα απροσδόκητα αποτελέσματα που έδινε κατά καιρούς το πρόγραμμα. Ευκαιρίας δοθείσης ν' αναφερθεί ότι αν αποφασιστεί να υπάρχει προέκταση του χώρου που υπολογίζεται η ροή πριν και μετά, υπάρχει το πρόβλημα ότι το κανάλι (μαζί με τον ελεύθερο χώρο πριν και μετά) γίνεται πλέον πολύ μακρύ και μπορεί π.χ. η συγκεκριμένη παροχή μάζας που πρέπει να περάσουμε από μέσα ώστε να πάρουμε το Reynolds που θέλουμε, να μην μπορεί να περάσει λόγω της μικρής διατομής μπροστά. Τότε το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα να αυξήσουμε το ύψος του καναλιού (άξονας Z) μπροστά και αντίστοιχα πρέπει να το μειώσουμε μετά το πέρας του καναλιού, αλλά και αυτές οι διαδικασίες έχουν κάποιο όριο.

Το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα να συνεχιστούν οι επαναλήψεις αρχίζοντας από κάποιο προηγούμενο αρχείο αποτελεσμάτων 'resuli'. Πολύ συχνά παρουσιαζόταν κατά τη διάρκεια της διπλωματικής το πρόβλημα να σταματάει να τρέχει το πρόγραμμα μετά από λίγες επαναλήψεις. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, αν δεν υπάρχει κάποιο λάθος στα δεδομένα, απλά επειδή αρχίζει από τυχαίο πεδίο ροής μπορεί κάπου να βγει ένα μη αποδεκτό νούμερο. Τότε πρέπει να πούμε στο πρόγραμμα ν' αρχίσει από ένα άλλο αρχείο αποτελεσμάτων που είναι πιο κοντά στη λύση. Αυτό το πρόβλημα υπήρχε πάντα στο στρεφόμενο κανάλι και επιλέχθηκε ως αρχείο αποτελεσμάτων εισόδου ένα με όνομα 'resuli.n'. Αυτό προέκυψε αφού έγιναν 30 επαναλήψεις με ακριβώς ίδια δεδομένα και μηδενική ταχύτητα περιστροφής. Όλα τ' αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στο στρεφόμενο κανάλι με το πλέγμα 'gr1' ανεξαρτήτως ταχύτητας περιστροφής έχουν αρχίσει από αυτό το αρχείο. Αυτό αναφέρεται γιατί (όπως εκτός απρόοπτου θ' αναφερθεί κι αργότερα), παρόλο που υποτίθεται ότι άπαξ κι έχει συγκλίνει το πρόγραμμα δεν έχει σημασία από που άρχισε, διαπιστώθηκε σε κάποια περίπτωση ότι αρχίζοντας από λίγο διαφορετικά αρχεία αποτελεσμάτων πολλών χιλιάδων επαναλήψεων, τ' αποτελέσματα ήταν σαφώς διαφορετικά ακόμα και μετά από εκατοντάδες χιλιάδες επαναλήψεις και πάωση του σφάλματος πολλές τάξεις μεγέθους. Σα να θυμάται δηλαδή με κάποιο τρόπο το πρόγραμμα από πού άρχισε και να μην μπορεί να το ξεπεράσει ποτέ. Γι' αυτό, τουλάχιστον μέχρι να ξεκαθαριστεί η κατάσταση, θεωρείται σκόπιμο ν' αναφέρεται από ποιο αρχείο άρχισε η κάθε περίπτωση που εξετάστηκε και αυτό το αρχείο για όλες τις περιπτώσεις αυτού του κεφαλαίου με το πλέγμα 'gr1' ήταν το resuli.n.

Όταν διαπιστώθηκε ότι υπάρχει εξάρτηση από το αρχείο εισόδου σε κάποια περίπτωση που θ' αναφερθεί παρακάτω, αποφασίστηκε να διαπιστωθεί αν υπήρχε αυτό το πρόβλημα στην περίπτωση μας, του καναλιού. Επιπλέον στο αρχείο εισόδου resuli.n που είχε εφαρμοστεί κατά κόρον, διαπιστώθηκε ότι από λάθος υπήρχε ως δεδομένο  $L_{ref}=100$ , δηλαδή πολλαπλασιασμός όλων των διαστάσεων του καναλιού με 100. Αυτό στην πράξη κάνει την ροή πιο τυρβώδη, λόγω αύξησης του Reynolds. Δοκιμάστηκαν λοιπόν άλλα 4 αρχεία εισόδου με  $L_{ref}=1$  και αρχή από 7, 30, 500 επαναλήψεις τα τρία πρώτα και για τέταρτο λήφθηκε το αποτέλεσμα των 200 RPM. Όλα δοκιμάστηκαν για την περίπτωση των 100 στροφών και έπρεπε να δώσουν τα ίδια αποτελέσματα για να πούμε ότι υπάρχει ανεξαρτησία από το αυτή η ανεξαρτησία επαληθεύτηκε, με τη διαφορά ότι το αρχείο εισόδου επηρεάζει το ρυθμό σύγκλισης. Έτσι διαπιστώθηκε ότι το resuli.n είχε ταχύτερο ρυθμό σύγκλισης από τα άλλα τρία με  $L_{ref}=1$ . Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί γιατί μ' αυτό το αρχείο η ροή είναι εξαρχής τυρβώδης και τα προφίλ  $\mu_t$  είναι τυρβώδη, ενώ στην περίπτωση των τριών άλλων τα προφίλ στην αρχή δεν

είναι τυρβώδη και χάνονται δεκάδες χιλιάδες επαναλήψεις μέχρι να γίνουν. Επιπλέον, ακόμη και όταν γίνουν η σύγκλιση συνεχίζεται με τον ίδιο αργό ρυθμό και δεν επιταχύνεται ποτέ, απ' ό,τι φάνηκε με τα παραπάνω τρεξίματα. Έτσι το λάθος να ξεχαστεί το  $L_{ref}=100$  αποδείχθηκε ωφέλιμο. Απ' αυτή την ιστορία βγαίνει το συμπέρασμα ότι χρειάζεται προσοχή στο αρχικό αρχείο αποτελεσμάτων που θα δοθεί στο πρόγραμμα, τουλάχιστον για να πετύχουμε γρηγορότερη σύγκλιση. Προτείνεται στην περίπτωση που ξέρουμε ότι η ροή είναι τυρβώδης, να μην αρχίσουμε το πρόγραμμα από την αρχή, αλλά να το βάλουμε να συνεχίσει από μερικές δεκάδες επαναλήψεις που θα έχουν γίνει με μεγαλύτερο  $L_{ref}$ , π.χ. 100. Αν το κάνουμε αυτό, τουλάχιστον απ' ό,τι φάνηκε κατά τη διάρκεια της διπλωματικής, θα έχουμε ταχύτερη σύγκλιση και θα πάρουμε σωστό αποτέλεσμα π.χ. στις 100000 επαναλήψεις αντί στις 150000. Αυτό συμβαίνει διότι δίνεται ένα σωστότερο προφίλ  $\mu t$ , πράγμα που απ' ό,τι φάνηκε είναι πολύ σημαντικό. Το  $L_{ref}$  δηλώνεται σε ένα αρχείο εισόδου του προγράμματος, στο οποίο δηλώνεται και ο αριθμός των επαναλήψεων και λέγεται 'tmth.IRS2'.

Γενικά το πρόγραμμα παρουσιάζει κάποια δυσκολία να βρίσκει σωστά το  $\mu t$ . Πρέπει βέβαια να θυμηθούμε και ότι οι εξισώσεις απ' τις οποίες υπολογίζεται, του  $k$  και του  $\varepsilon$  είναι περισσότερο προσεγγιστικές από τις άλλες, ιδίως του  $\varepsilon$ . Γι' αυτό φάνηκε και στο συγκεκριμένο πρόγραμμα ότι πρώτη παύει να συγκλίνει η εξίσωση του  $\varepsilon$  και μετά από μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες χιλιάδες επαναλήψεις επηρεάζονται και οι υπόλοιπες εξισώσεις και παύουν να συγκλίνουν.

Ακόμη φάνηκε ότι ένα κακό προφίλ  $\mu t$  μπορεί να διαιωνιστεί και να μην φτιαχτεί ποτέ, ακόμη και αν το σφάλμα π.χ. της παροχής μάζας πέσει 6 τάξεις μεγέθους. Γι' αυτό έχουν μεγάλη σημασία τα δεδομένα απ' τα οποία θ' αρχίσει το πρόγραμμα και προτείνεται να δίνεται ως αρχή αρχείο με τυρβώδη προφίλ  $\mu t$ .

Δοκιμάστηκε τελείως ανιχνευτικά να μπει η διόρθωση του Bradshaw και στο μοντέλο των Baldwin-Lomax, αφού και η διόρθωση και το μοντέλο είναι μήκους ανάμιξης. Έτσι στις γραμμές του προγράμματος που υπολογίζεται το μήκος ανάμιξης προστέθηκαν οι διορθώσεις του Bradshaw. Η προσπάθεια αυτή δεν τελεσφόρησε, αφού τ' αποτελέσματα που έδωσε το μοντέλο με και χωρίς διόρθωση δεν είχαν διαφορά και πρέπει κάπου να έχει γίνει λάθος το οποίο δεν βρέθηκε. Το σημαντικό συμπέρασμα όμως απ' αυτή την προσπάθεια είναι ότι το μοντέλο Baldwin-Lomax έδωσε διαφορετικά αποτελέσματα από το  $k-\varepsilon$ . Το πλέγμα βέβαια  $g_{grid}$  είναι πολύ πυκνό γι' αυτό το μοντέλο, αλλά και με το αραιό πλέγμα  $g_{grid}$  πάλι τ' αποτελέσματα είναι διαφορετικά και πιστεύεται ότι ακόμη και με το σωστότερο πλέγμα το Baldwin-Lomax θα δίνει διαφορετικά αποτελέσματα. Αυτό βέβαια είναι ένα ακόμη μειονέκτημα για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Τέλος πάντων αυτή η προσπάθεια δε συνεχίστηκε, το Baldwin-Lomax αγνοήθηκε και θεωρήθηκε ότι το  $k-\varepsilon$  δίνει τα σωστά αποτελέσματα.

Απ' τις τρεις περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν σ' αυτά τα τελευταία κεφάλαια, αυτή του στρεφόμενου καναλιού ήταν η πιο ωφέλιμη και πιο αξιόπιστη, γι' αυτό το παρόν κεφάλαιο θα έχει μεγαλύτερη έκταση από τα άλλα.

### 4.3. ΣΧΗΜΑΤΑ ΑΠ' ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥΣ.

Από δω και στο εξής απέναντι από κάθε σχήμα θα γίνεται σχολιασμός του και πολλά σχήματα θα δείξουν κάποια απ' αυτά που ειπώθηκαν προωτέρα, ενώ για άλλα τα σχόλια θα εμφανίζονται για πρώτη φορά και συμπληρώνουν αυτά που έχουν γραφεί ως τώρα στο κεφάλαιο 4.

Τα σχήματα έγιναν από τα αρχεία αποτελεσμάτων του προγράμματος, και συγκεκριμένα από τα αρχεία 'resuli' και 'conver' που παρουσιάζουν τους υπολογισμούς και τη σύγκλιση αντίστοιχα<sup>1</sup>. Τα αρχεία αυτά περιέχουν αριθμούς βέβαια, και για να φτιαχτούν απ' αυτούς τα σχήματα χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα 'gnu plot', συνηθισμένο πρόγραμμα του UNIX για τέτοιες ανάγκες.

Για μερικά σχήματα δεν είναι φανερό σε ποια περίπτωση αναφέρονται και πρέπει να διαβαστούν οι διευκρινιστικές πληροφορίες στο σχολιασμό τους.

Για τα σχήματα που ακολουθούν παρακάτω πρέπει να γνωρίζουμε τα εξής:

Για τα προγράμματα που δεν έχουν διόρθωση χρησιμοποιείται το χαρακτηριστικό 'new'.

Όσα έχουν διόρθωση με το G<sub>c</sub> έχουν το όνομα 'newcof'.

Όσα έχουν διόρθωση του Bradshaw (με εκθέτη 2) ονομάζονται 'newk'.

Όσα έχουν το όνομα 'newkl' έχουν διόρθωση του Bradshaw με εκθέτη 1.

Το 'nel' είναι παλιότερο πρόγραμμα και μπορεί να θεωρηθεί για το παρόν ίδιο με το newkl.

Το X2 (π.χ. 'newcox2') θα πει ότι έχει πολλαπλασιαστεί η ταχύτητα περιστροφής επί δύο για τη διόρθωση (σα να έχει διπλασιαστεί ο εμπειρικός συντελεστής της διόρθωσης). Το ίδιο ισχύει και για τους άλλους πολλαπλασιαστές.

Η λέξη 'profil' ακολουθούμενη από κάποιο αριθμό, σημαίνει ότι έχουν ληφθεί οι τιμές κατά μήκος μιας γραμμής  $i=σταθ.$ , δηλαδή προσεγγιστικά κατά μήκος του άξονας. Πρόκειται δηλαδή για το προφίλ π.χ. της ταχύτητας. Τα προφίλ που θεωρήθηκαν ως πιο χρήσιμα και παρουσιάζονται εδώ είναι αυτά της ταχύτητας και του συντελεστή  $\mu t$ . Ο αριθμός δηλώνει τον κόμβο  $i$  για τον οποίο έχει ληφθεί το προφίλ. Για τις περιπτώσεις του πλέγματος  $gr1$  που είναι και οι περισσότερες, επειδή το πλέγμα έχει 100 σημεία στην ακτινική κατεύθυνση και μήκος 10 m, το profil30 π.χ. αναφέρεται στο 30% του καναλιού κατά μήκος ή στα 30 cm από την αρχή του καναλιού.

Τα 0, 100, 200 που μπορεί να υπάρχουν στην αρχή δηλώνουν τις RPM.

Ένας αριθμός μετά από τελεία στο τέλος ενός ονόματος δηλώνει τον αριθμό των επαναλήψεων. Αν ακολουθεί το 'Pa' δηλώνει την πίεση εξόδου.

Το 'cfdatag' αφορά το συντελεστή τριβής.

Το χαρακτηριστικό 'PP' όπου μπαίνει, αφορά έναρξη του προγράμματος δίνοντας το λόγο πύσεων.

Το 'η' όπου μπαίνει, αφορά το αρχείο έναρξης (30 επαναλήψεις με 0 RPM και  $L_{ref}=100$ )

Το 'BL' θα πει ότι αντί για  $k-\epsilon$  χρησιμοποιήθηκε Baldwin-Lomax μοντέλο τύρβης.

Το 'cont' αφορά περιπτώσεις που έχουν συνεχιστεί οι επαναλήψεις για πολύ μεγάλο αριθμό.

## Σχήμα 4.1.

Βλέπουμε από πάνω προς τα κάτω το πλέγμα gr1 που χρησιμοποιήθηκε και τ' αποτελέσματα για 0, 100, 200 στροφές το λεπτό χωρίς διόρθωση Coriolis.

Λόγω του ότι το πλέγμα είναι σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (ενώ το κανάλι είναι ορθογώνιο) οι γραμμές στον άξονας είναι καμπύλες. Το κυρτό μέρος (κάτω μέρος της απέναντι σελίδας) είναι η αρχή του καναλιού που βρίσκεται σε απόσταση 5 μέτρα από τον άξονα περιστροφής και το κοίλο η έξοδος του αγωγού που βρίσκεται σε απόσταση 15 μέτρα από τον άξονα περιστροφής. Το πλέγμα φαίνεται επαρκώς πυκνό για μια τόσο απλή γεωμετρία και αυτό επιβεβαιώνεται και αν κοιτάξουμε κοντύτερα στον τοίχο (επειδή τα σημεία είναι πολύ πυκνά εκεί δε φαίνονται- υπάρχουν 61 σημεία συνολικά στον άξονας).

Στα άλλα τρία διαγράμματα παρουσιάζονται οι ισογραμμές της σχετικής ταχύτητας  $M$ .

Έτσι που κοιτάμε το φύλλο η φορά περιστροφής είναι αντίθετη της φοράς του ρολογιού για τα δύο τελευταία σχήματα.

Οι σημειωμένες περιοχές είναι περιοχές στις οποίες η ταχύτητα είναι περίπου 180 μέτρα το δευτερόλεπτο.

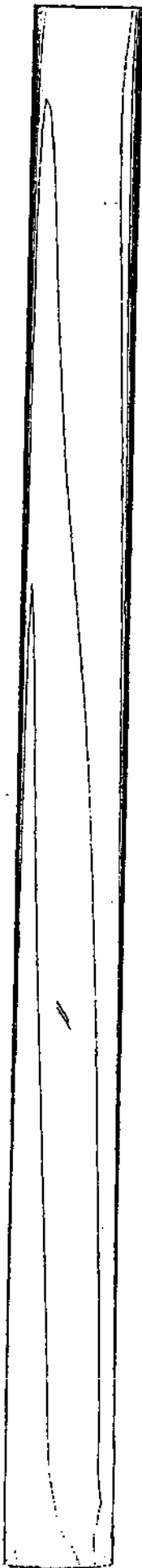
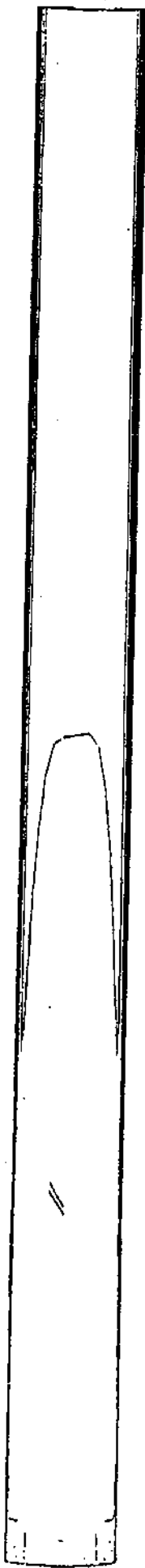
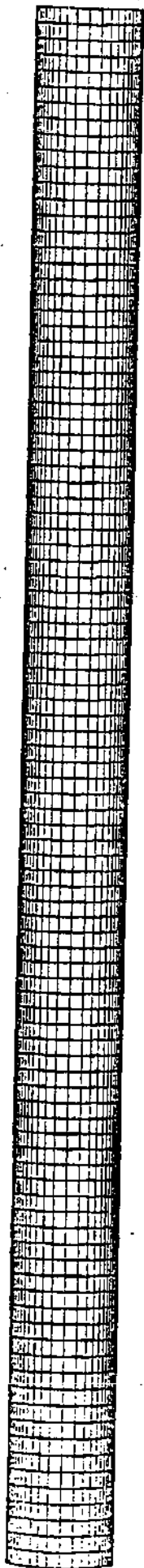
Για τη μηδενική ταχύτητα περιστροφής βλέπουμε ότι η ταχύτητα μένει σχεδόν σταθερή σε όλο το μήκος του καναλιού, ενώ όσο αυξάνει η ταχύτητα περιστροφής πέφτει όσο πάμε προς τα πίσω. Στις 200 στροφές για παράδειγμα, στην έξοδο είναι λιγότερο από 140 m/s ενώ στην είσοδο ήταν 200 m/s. Αυτά είναι αναμενόμενα και από τους μονοδιάστατους υπολογισμούς.

Στις εισόδους των καναλιών βλέπουμε μικροανωμαλίες, λόγω της επιβολής των οριακών συνθηκών ακριβώς με το που αρχίζει το στερεό τοίχωμα.

Από την πυκνότητα των ισογραμμών στην περίπτωση των 200 στροφών, καταλαβαίνουμε ότι σε ένα προφίλ ταχύτητας για μια συγκεκριμένη θέση  $\chi$  του καναλιού, η κλίση της ταχύτητας θα είναι μεγαλύτερη απ' ότι στην περίπτωση των 100 στροφών. Αυτό επαληθεύεται και παρακάτω.

Τέλος απ' τα σχήματα αυτά παίρνουμε μια εικόνα για την ανάπτυξη των οριακών στρωμάτων.





## Σχήμα 4.2.

Ο άξονας των τετημένων δείχνει την απόσταση  $y$  σε μέτρα, και των τεταγμένων την συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  όπως τη βλέπει ο κινούμενος παρατηρητής σε μέτρα το δευτερόλεπτο.

Το σχήμα που φαίνεται στην απέναντι σελίδα αφορά την περίπτωση 0 RPM.

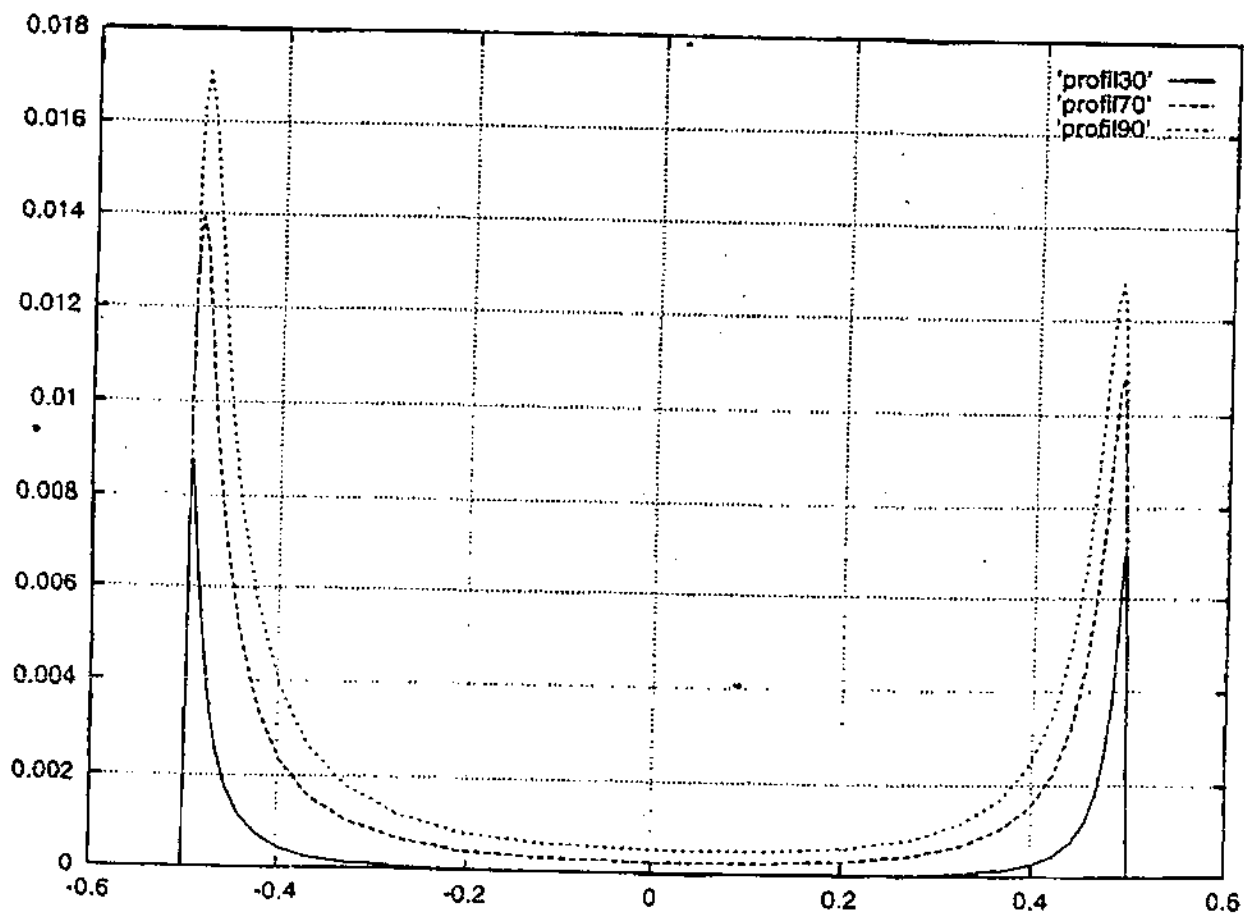
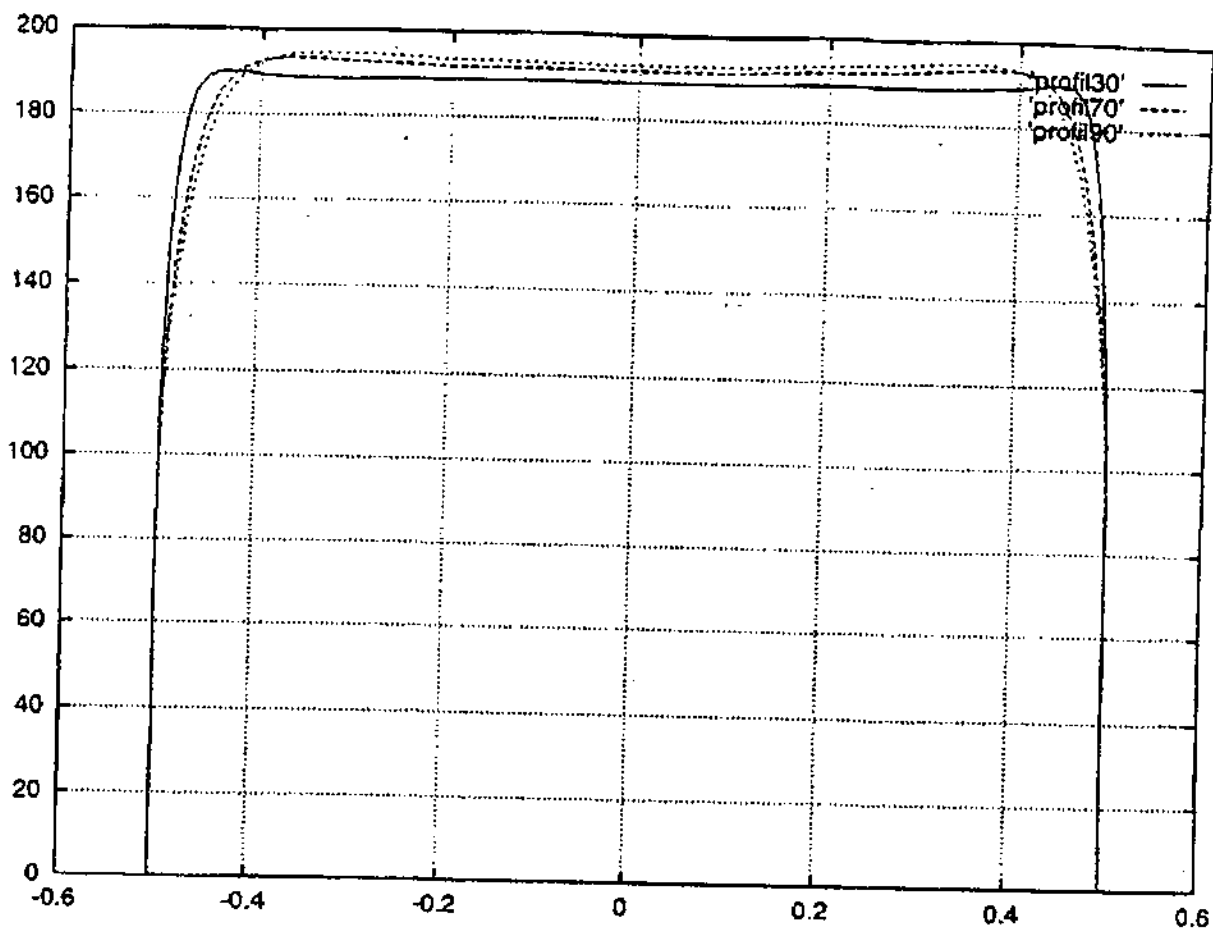
Βλέπουμε ότι όσο πάμε προς τα πίσω στο κανάλι (απ' το 30% προς το 90% του μήκους του) η μέση ταχύτητα μένει περίπου σταθερή και το οριακό στρώμα αυξάνει. Αυτά φυσικά ήταν αναμενόμενα αλλά δίνονται για να υπάρχει μια ποσοτική εικόνα, χαρακτηριστική όλων των επόμενων περιπτώσεων.

## Σχήμα 4.3.

Εδώ φαίνονται πάλι για την περίπτωση 0 RPM τα προφίλ της τυρβώδους συνεκτικότητας σε  $\text{Kgr} / \text{m} \cdot \text{s}$ . Όσο πάμε προς τα πίσω αυξάνει το  $\mu\text{t}$  λόγω του ότι η ροή γίνεται περισσότερο τυρβώδης όπως ξέρουμε και από την ευθύγραμμη πλάκα. Ακόμη βλέπουμε ότι τα προφίλ έχουν το σωστό σχήμα που ξέρουμε από τη θεωρία και είναι τυρβώδη, αφού το στρωτό  $\mu$  για αέρα είναι περίπου  $1,7 \cdot 10^{-6}$  για τις θερμοκρασίες που αναφερόμαστε (κοντά στην κανονική ατμοσφαιρική).

Παρατηρείται ότι δεν είναι συμμετρικά τα προφίλ της τυρβώδους συνεκτικότητας παρόλο που δεν υπάρχει κανένας λόγος να γίνει αυτό, ούτε θεωρητικός ούτε αριθμητικός. Τα προφίλ αυτά διαμορφώθηκαν έτσι από πολύ πριν τις 100000 επαναλήψεις και το πρόγραμμα είχε συγκλίνει από τότε. Για σιγουριά συνεχίστηκε η σύγκλιση μέχρι τις 270000 επαναλήψεις όπου το σφάλμα είχε πέσει πολλές τάξεις μεγέθους και στις έξι εξισώσεις (4 η ορμή και η συνέχεια και 2 του  $k-\epsilon$ ) και δεν υπήρξε καμία απολύτως μεταβολή στα αποτελέσματα. Βάσει αυτού λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι το  $\mu\text{t}$  που υπολογίζει το πρόγραμμα έχει ένα σφάλμα τουλάχιστον 25%, αφού στις δύο πλευρές με ίδια δεδομένα δίνει περίπου 25% διαφορετικό αποτέλεσμα όπως βλέπουμε στο απέναντι σχήμα.

Ακόμη βλέπουμε αυτό που έχει συζητηθεί και νωρίτερα, την αναισθησία του προφίλ ταχύτητας (πάνω σχήμα) στις αλλαγές του  $\mu\text{t}$ . Γι' αυτό και δεν δόθηκε περισσότερη σημασία στα ασύμμετρα προφίλ  $\mu\text{t}$  στην περίπτωση αυτή που έπρεπε να είναι συμμετρικά.



## Σχήμα 4.4.

Βλέπουμε ότι για τις 0, 100 και 200 RPM επιλέχθηκε το Reynolds μέσα στο κανάλι να είναι περίπου το ίδιο (και αφού μιλάμε για αέρα σε όλες τις περιπτώσεις και ίδια γεωμετρία, οι ταχύτητες να είναι ίδιες). Βέβαια αυτό δεν μπορεί να διατηρηθεί για όλο το κανάλι, αφού στην περίπτωση των 0 RPM η ταχύτητα είναι μέχρι το τέλος σταθερή ενώ στις 200 RPM πέφτει περίπου 30%.

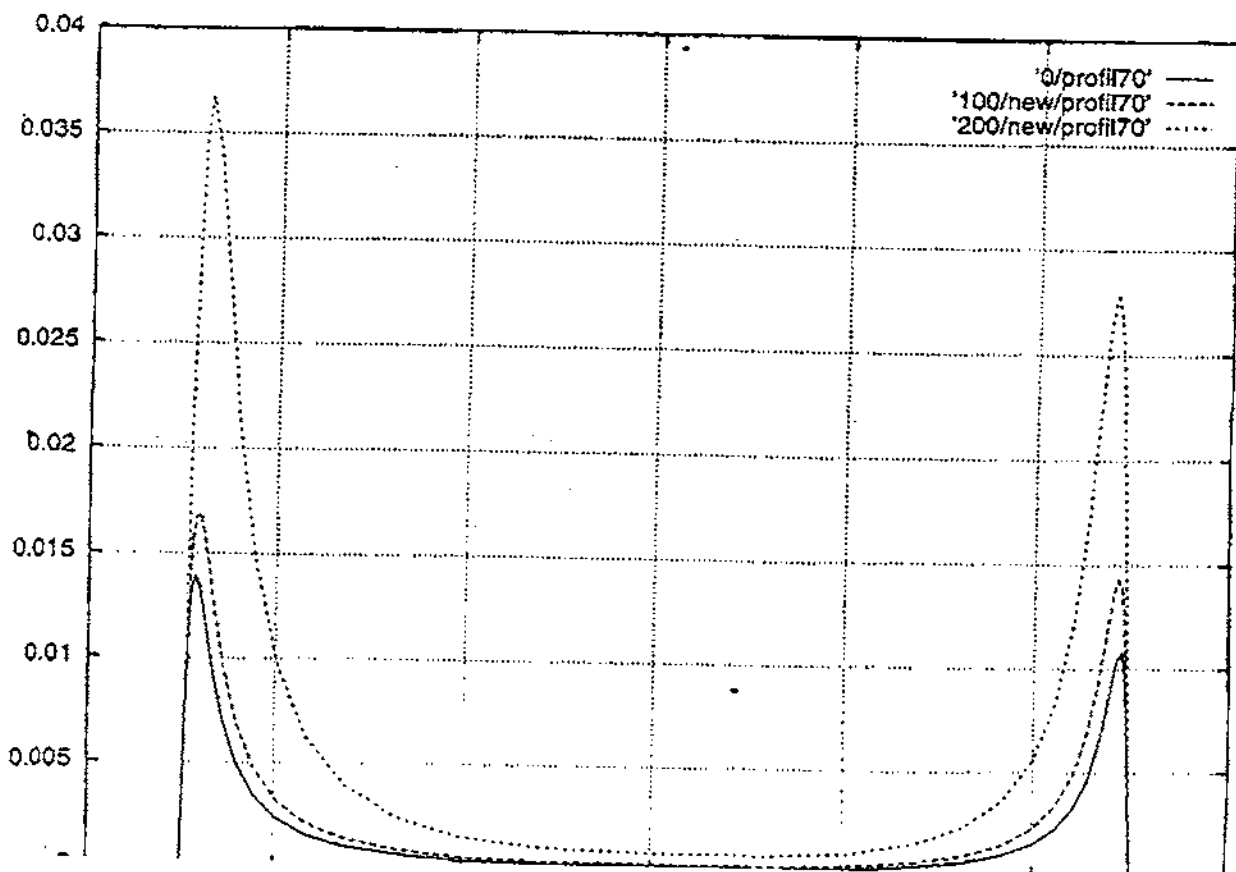
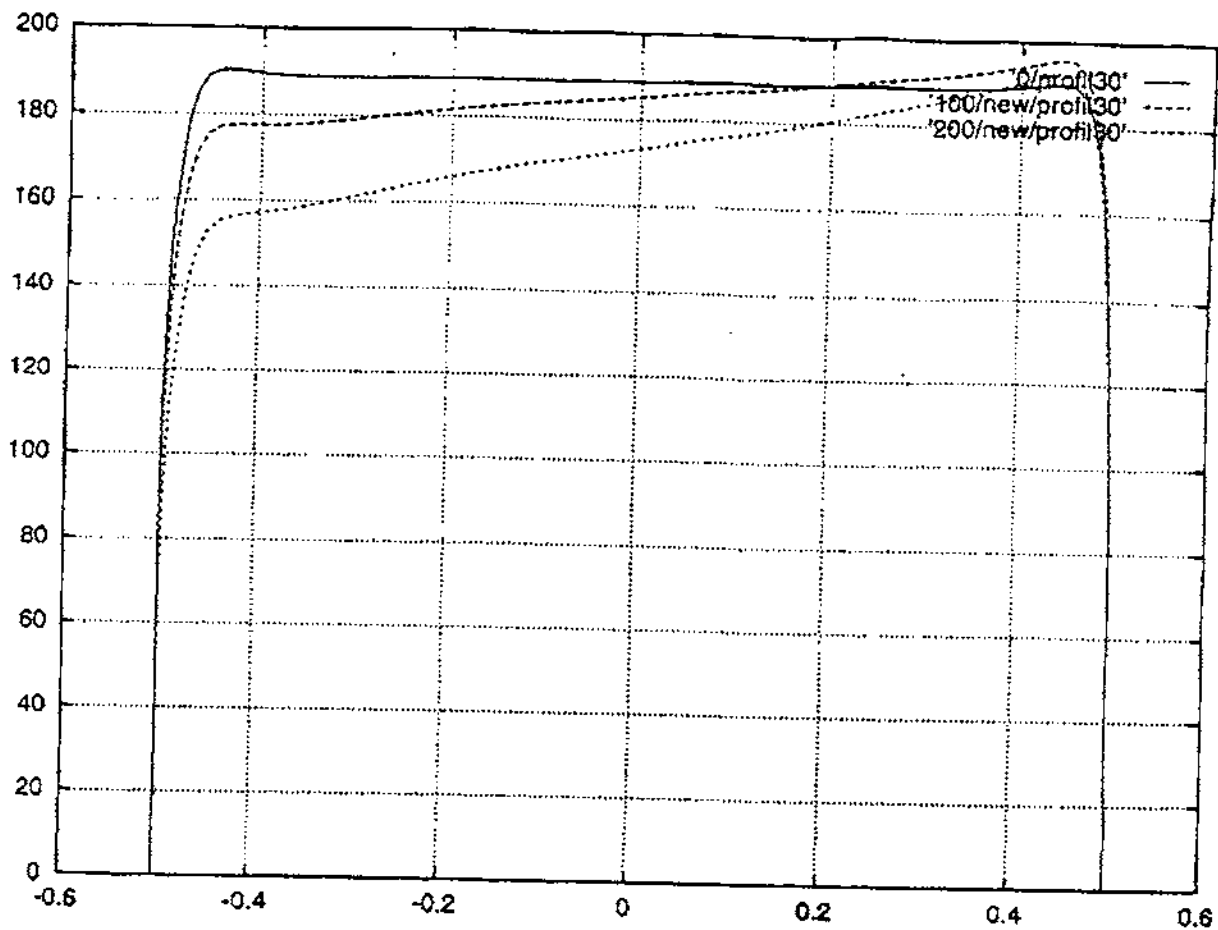
Απ' αυτό το διάγραμμα βλέπουμε και ότι με αύξηση της ταχύτητας περιστροφής αυξάνει η κλίση της ταχύτητας στην κεντρική περιοχή του καναλιού κι αυτό θυμίζει το σχ. 3.16. Βέβαια εδώ τα διαγράμματα είναι χωρίς διόρθωση Coriolis αλλά αλλάζουν πολύ λίγο ακόμη και με τη διόρθωση.

Να θυμηθούμε ότι στην περίπτωση των 100 RPM το  $Ro$  (ορισμένο με βάσει το πάχος του οριακού στρώματος όπως προκύπτει από το πρόγραμμα και όχι με βάσει το πλάτος του καναλιού, αφού δεν έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη ροή) φτάνει μέχρι 0,03 ενώ των 200 RPM μέχρι 0,06.

## Σχήμα 4.5.

Εδώ παρουσιάζονται τα προφίλ του τυρβώδους συντελεστή συνεκτικότητας για τις διάφορες ταχύτητες περιστροφής. Βλέπουμε ότι όσο αυξάνει το  $\Omega$  υπάρχει μια αύξηση που ειδικά στην περίπτωση των 200 RPM είναι πολύ μεγάλη, μεγαλύτερη απ' ότι οι αυξήσεις και μειώσεις λόγω εισαγωγής διόρθωσης στο πρόγραμμα (που θα τις δούμε παρακάτω). Η αύξηση δικαιολογείται λόγω του ότι το στρεφόμενο κανάλι είναι πλέον μια μηχανή που παράγει έργο και αλλάζουν μέσα της οι κλίσεις πίεσης σε σχέση με την περίπτωση που δεν έχουμε περιστροφή.

Το σημαντικό που προκύπτει συγκρίνοντας και με επόμενα σχήματα είναι ότι οι αλλαγές λόγω της περιστροφής οι άσχετες με την Coriolis, μπορεί να είναι πιο σημαντικές από τις αλλαγές λόγω της επίδρασης της Coriolis.



## Σχήμα 4.6.

Στα δύο αυτά σχήματα παρουσιάζεται ο συντελεστής τριβής (αδιάστατος αριθμός); ό-σο προχωράμε κατά μήκος του καναλιού, αφού έχουν αφαιρεθεί μερικά σημεία στην αρχή που είχαν πολύ μεγάλες τιμές. Να σημειωθεί ότι έχει φανεί από προηγούμενη χρήση του προγράμματος ότι οι τιμές του συντελεστή μπορεί να μην είναι ακριβείς και αυτό που μετράει είναι οι μεταβολές του. Πράγματι, σε μερικές εκδόσεις του προγράμματος στις οποίες υπολογίζεται ο συντελεστής τριβής και με ένα δεύτερο τρόπο, φάνηκε σημαντική διαφορά στις τιμές, αλλά μηδαμινή στις κλίσεις.

Στην περίπτωση των 0 RPM έπρεπε οι τιμές στις δύο πλευρές να συμπίπτουν, και η διαφορά που παρουσιάζεται δίνει μια ένδειξη του ποσού του σφάλματος στον υπολογισμό του συντελεστή τριβής. Αυτή η συμπεριφορά ήταν αναμενόμενη μετά το σχ. 4.3. Βλέπουμε όμως ότι οι κλίσεις είναι ίδιες και στις δύο πλευρές, πράγμα σωστό. Άρα σε τέτοια διαγράμματα θα κοιτάμε τις κλίσεις στο εξής.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι όσο προχωράμε προς τα πίσω μειώνονται οι τιμές του συντελεστή, πράγμα αναμενόμενο που έχει σχολιαστεί στη θεωρία.

Όσο αυξάνονται οι στροφές, ο συντελεστής τριβής πέφτει με ταχύτερους ρυθμούς. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού με αύξηση της ταχύτητας περιστροφής αυξάνεται ο ρυθμός ανάπτυξης των οριακών στρωμάτων, όπως φαίνεται από προηγούμενα σχήματα και πηγαίνουμε πιο γρήγορα προς αποκόλληση.

Υπενθυμίζεται ότι 'new' θα πει χωρίς διόρθωση.

Τέλος βλέπουμε ότι ακόμη και με περιστροφή, η κλίση μένει για συγκεκριμένο  $\Omega$  ίδια και στις δύο πλευρές.

## Σχήμα 4.7.

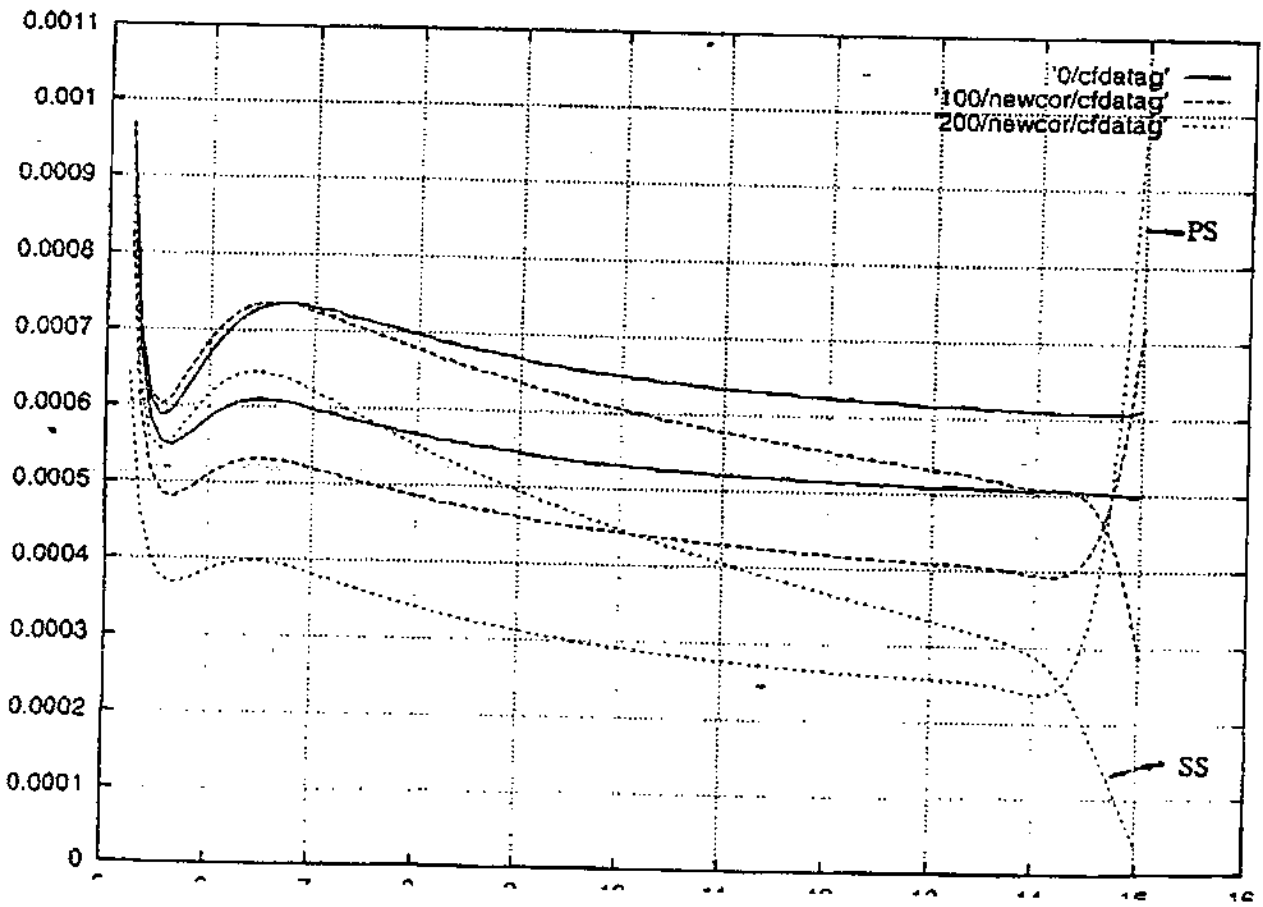
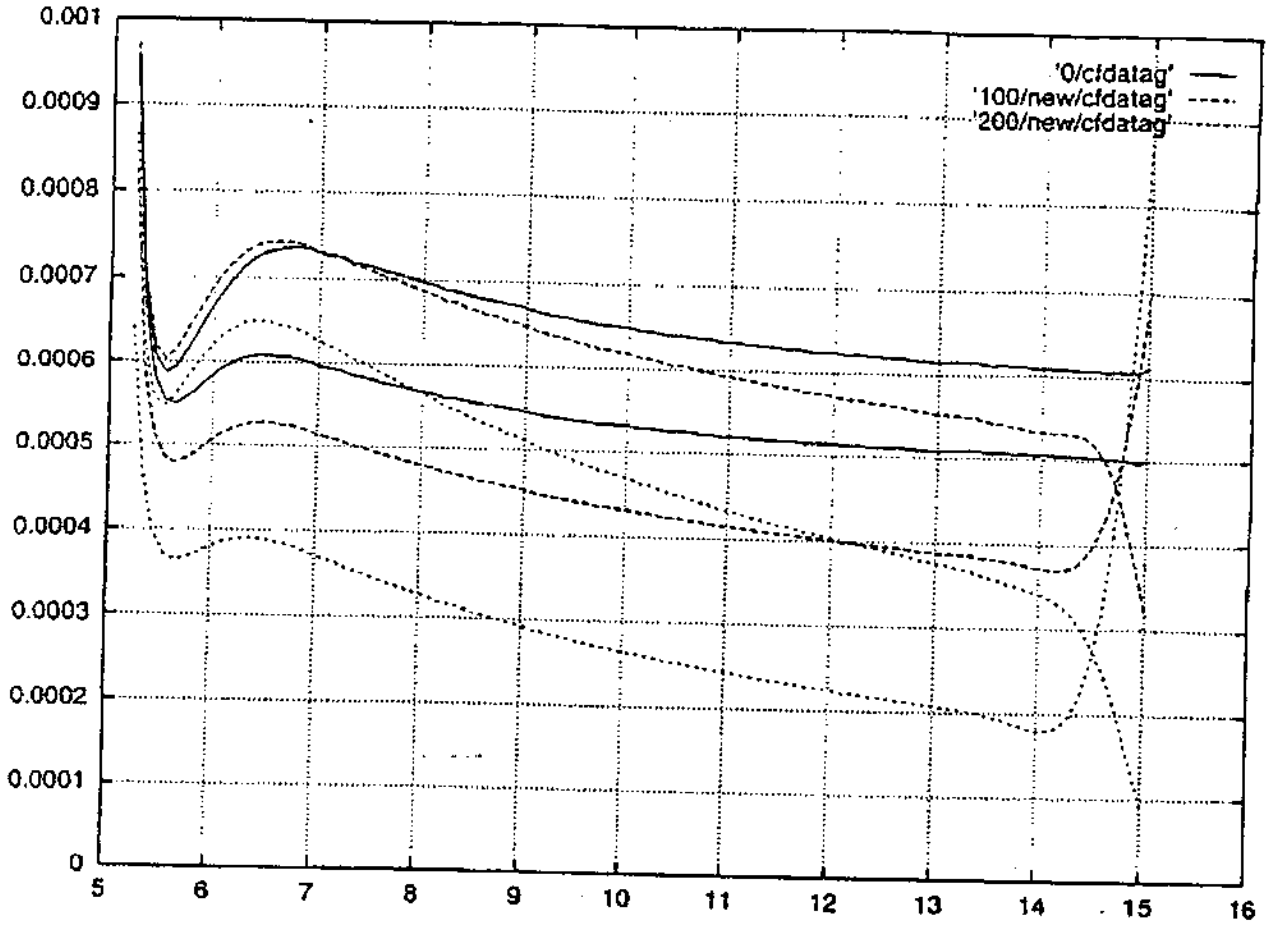
Εδώ παρουσιάζεται το πρώτο διάγραμμα στο οποίο έχει ληφθεί υπόψη η επίδραση Coriolis. Το newcor είναι το πρόγραμμα που έχει διόρθωση Coriolis με τον όρο  $G_c$  μέσα στις εξισώσεις του k-ε. Σε γενικές γραμμές από όλες τις διορθώσεις που δοκιμάστηκαν (του Bradshaw και παραλλαγές), η διόρθωση με το  $G_c$  ήταν πάντα πιο σταθερή και απροβλημάτιστη και μπορεί να θεωρηθεί πιο αξιόπιστη.

Συγκρίνοντας και με το προηγούμενο σχήμα, βλέπουμε ότι η επίδραση της Coriolis είναι φανερή. Όσο αυξάνει η ταχύτητα περιστροφής η επίδραση γίνεται μεγαλύτερη, όπως βλέπουμε από το ότι οι γραμμές που αντιστοιχούν στις δύο πλευρές πλησιάζουν μεταξύ τους τόσο περισσότερο όσο μεγαλύτερο είναι το  $\Omega$ . Άρα το πρόγραμμα δίνει λογικά αποτελέσματα προς τη σωστή κατεύθυνση.

Η πλευρά υποπίεσης αντιστοιχεί στην πάνω γραμμή από το ζεύγος γραμμών που αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη ταχύτητα περιστροφής. Βλέπουμε ότι επειδή σε αυτή την πλευρά η τύρβη πέφτει, η κλίση αυξάνεται σε σχέση με την περίπτωση ίδιας  $\Omega$  χωρίς διόρθωση (πάνω σχήμα). Αυτό συμβαίνει γιατί πάμε προς πιο στρωτό οριακό στρώμα που είναι πιο ευαίσθητο σε αποκόλληση. Μάλιστα παρατηρούμε ότι αν συνεχιζόταν λίγο ακόμη το κανάλι, πιθανόν να είχαμε αποκόλληση της ροής στην πλευρά υποπίεσης για τις 200 RPM.

Στην πλευρά υπερπίεσης συμβαίνουν τα αντίθετα φαινόμενα, όπως το περίμενε κανείς από τη θεωρία. Η τύρβη αυξάνεται και το αντίθετο κάνει η κλίση στα διαγράμματα.

Το γεγονός που έχει επισημανθεί στα πειράματα ότι στην πλευρά υποπίεσης η απόκριση είναι πιο γρήγορη, δεν παρατηρείται εδώ, αφού-δεν υπάρχει κάποιος μηχανισμός να περνάει μια τέτοια πληροφορία στο πρόγραμμα.



## Σχήμα 4.8.

Το σχήμα αυτό είναι πολύ βασικό. Δείχνει αντίστοιχα τα προφίλ  $\mu t$  χωρίς διόρθωση, με διόρθωση του  $G_c$  και με τη διόρθωση  $\mu t / \mu_{t0} = (1 - \beta Ri)^2$  και φίλτρο τέτοιο ώστε να μην φεύγει ο λόγος έξω από το πλαίσιο [0,5-1,5], σύμφωνα με όσα γράφηκαν και προηγουμένως.

Κατ' αρχήν βλέπουμε ότι οι αλλαγές με και χωρίς διόρθωση είναι μικρές λόγω του σχετικά μικρού  $Ro$ , γι' αυτό άλλωστε παρουσιάζονται και τα προφίλ  $\mu t$  και όχι ταχύτητων, τα οποία δεν έχουν καμία διαφορά. Το  $Ro$  είναι περίπου 0,02 στο 70% του μήκους του καναλιού, απ' όπου και τα διαγράμματα.

Βλέπουμε ότι σε γενικές γραμμές οι διορθώσεις συμφωνούν. Αυτή του Bradshaw δίνει λίγο μικρότερες διαφορές. Παρατηρούμε ότι στην πλευρά υπερπίεσης αυξάνεται το  $\mu t$  όπως ήταν αναμενόμενο αφού έχουμε αποσταθεροποίηση και στην υποπίεσης συμβαίνει το αντίθετο. Επίσης το πάχος των οριακών στρωμάτων αυξάνεται στην πλευρά υπερπίεσης και μειώνεται στην πλευρά υποπίεσης.

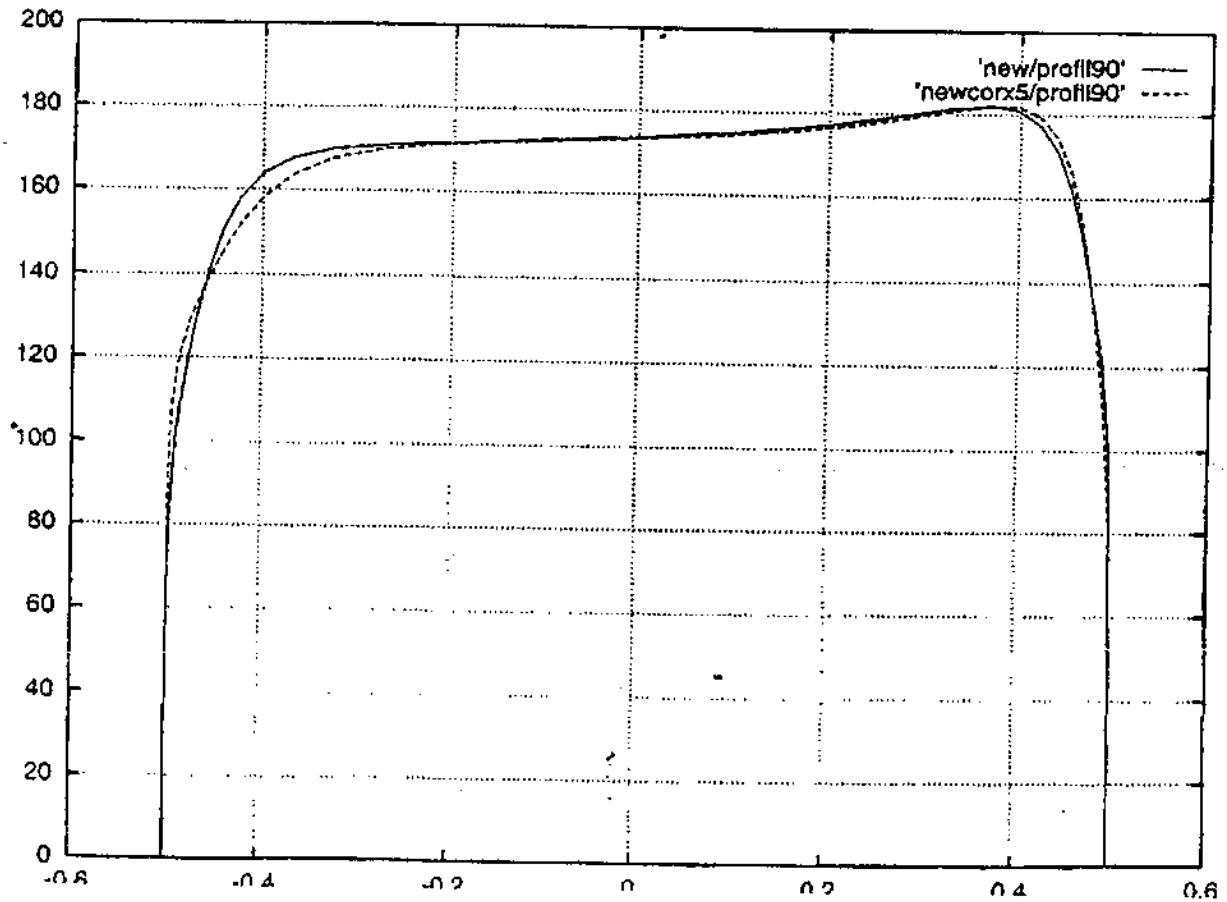
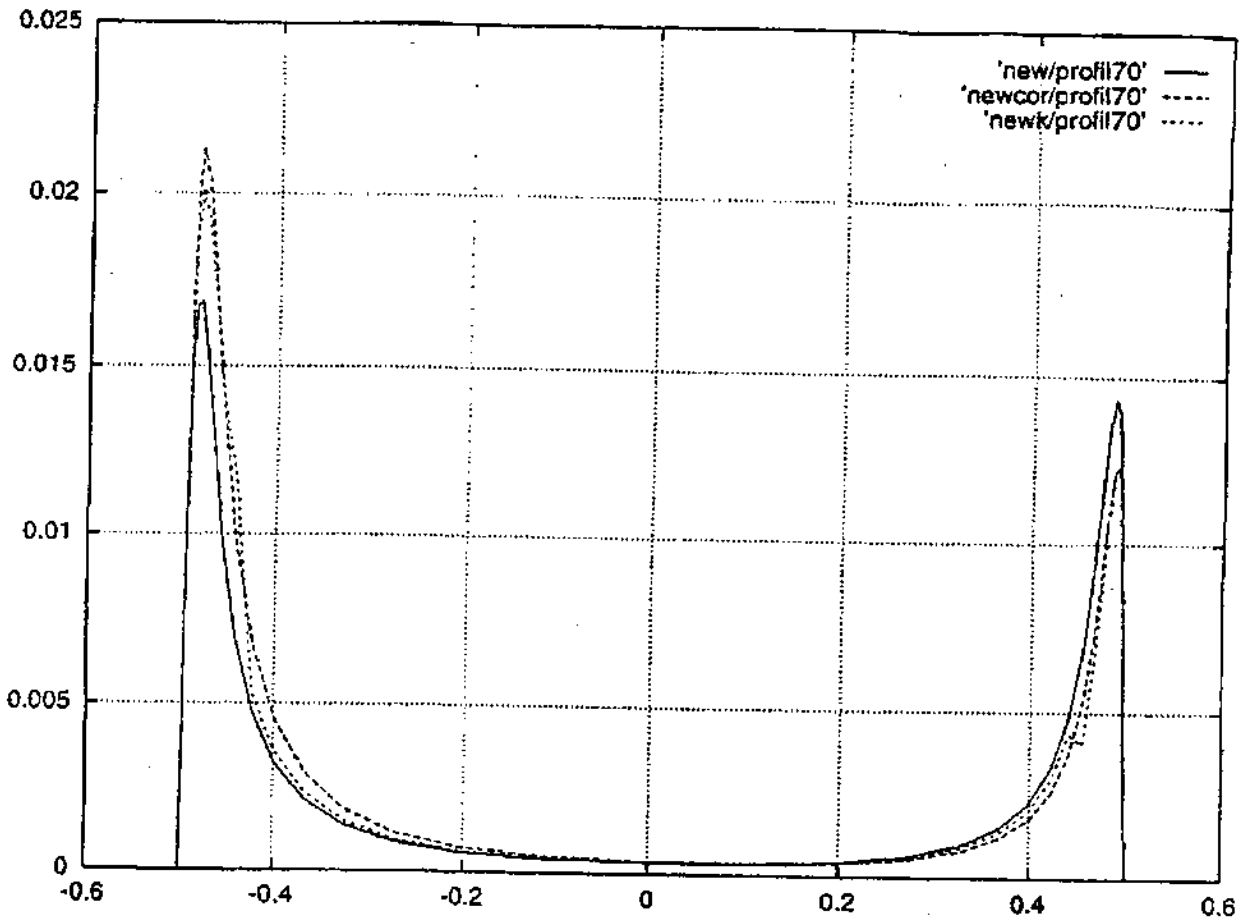
Στην πλευρά υποπίεσης παρατηρούμε το χαρακτηριστικό σκαλάκι και το ότι κόβεται από την διόρθωση του  $G_c$ . Το σημείο που επιδρά το φίλτρο φαίνεται και στην πλευρά υπερπίεσης όπου το προφίλ αλλάζει λίγο απότομα. Αν επιλέγαμε να μένει το μήκος ανάμιξης σταθερό στο εξωτερικό μέρος του οριακού στρώματος και όχι να γυρίζει στην παλιά του τιμή (βλ. προηγούμενες σελίδες) θα υπήρχε ένα πολύ μεγαλύτερο σκαλί κοντά στην πλευρά υποπίεσης που θα ήταν περισσότερο άσχημο. Δε βρέθηκε κάποιος τρόπος να εξομαλυνθούν αυτές οι διακυμάνσεις, αλλά δε δημιουργούν πρόβλημα στην σύγκλιση.

## Σχήμα 4.9.

Είπαμε ότι τα προφίλ ταχύτητας δεν αλλάζουν με και χωρίς διόρθωση. Για να δούμε κάποια αλλαγή πρέπει να πάμε πολύ πίσω στο κανάλι (90% του μήκους του) και να πενταπλασιάσουμε την επίδραση της διόρθωσης, π.χ. του  $G_c$  όπως εδώ.

Βλέπουμε τα αναμενόμενα, ότι στην πλευρά υπερπίεσης το οριακό στρώμα αποκτά περισσότερο τυρβώδες προφίλ και γίνεται μεγαλύτερο ενώ στην πλευρά υποπίεσης το προφίλ γίνεται πιο στρωτό και το πάχος του οριακού στρώματος μειώνεται. Στην πλευρά υπερπίεσης η αλλαγή στο προφίλ ταχύτητας γίνεται περισσότερο αισθητή.





## Σχήμα 4.10.

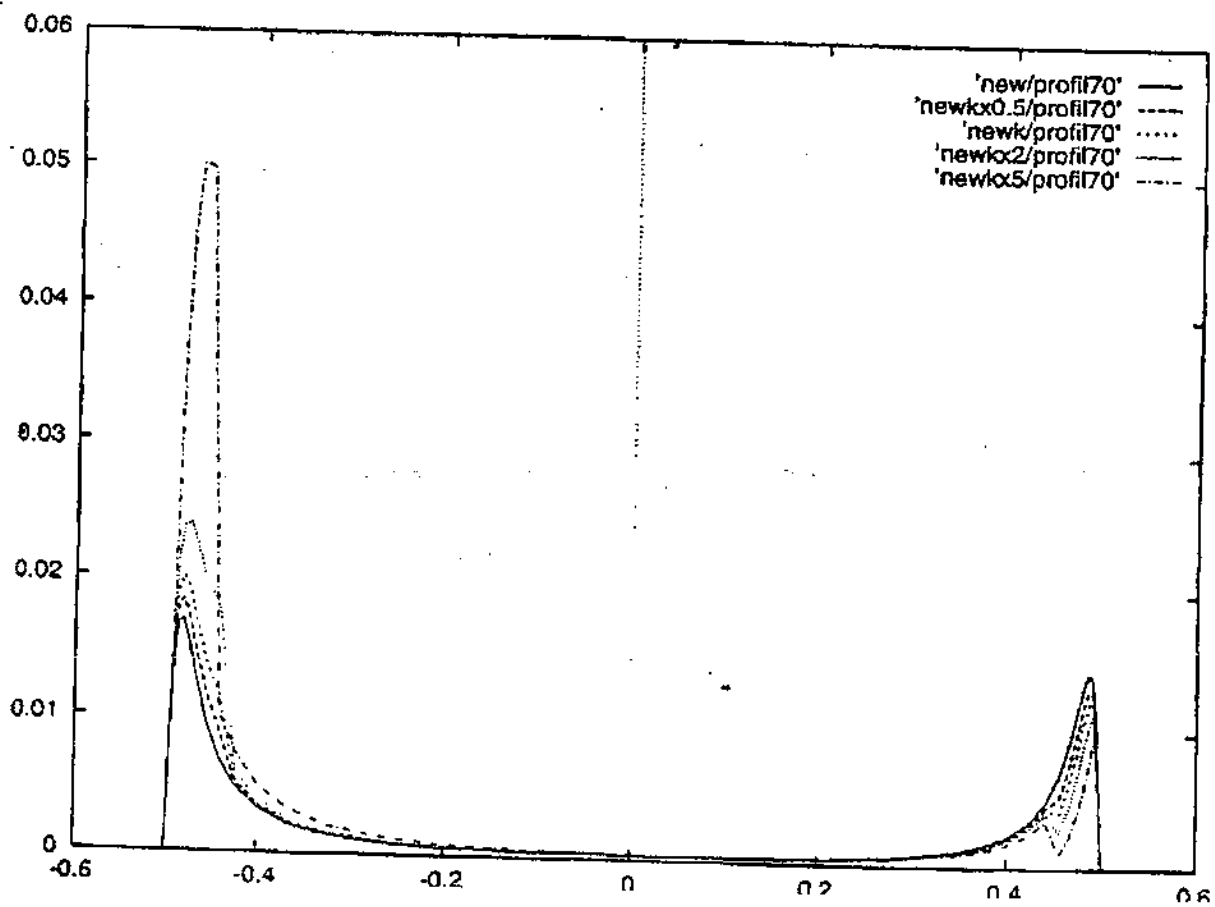
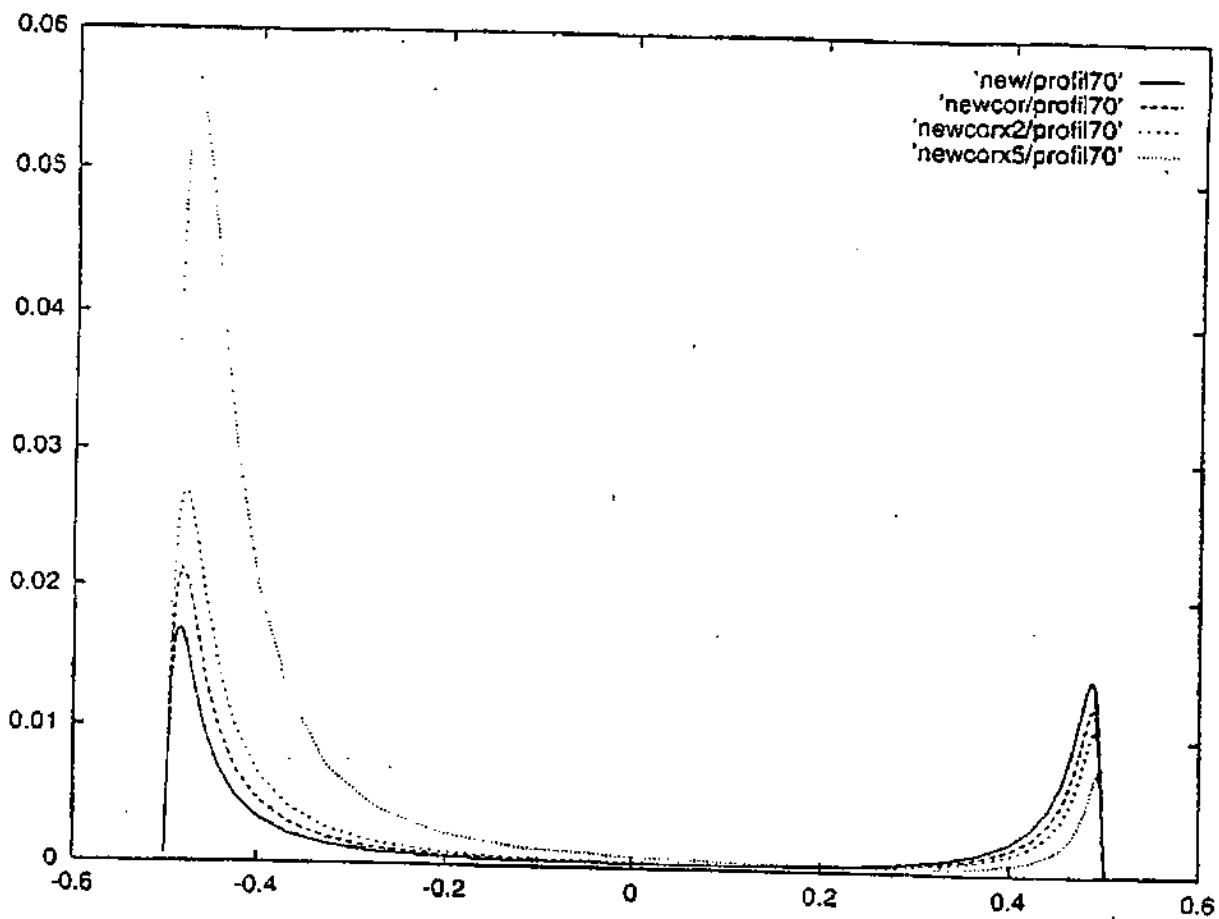
Στο σχήμα αυτό συγκρίνονται τ' αποτελέσματα για διάφορους πολλαπλασιαστές στη διόρθωση του  $G_c$ . Τα  $\chi_2$  και  $\chi_5$  ισοδυναμούν με διπλάσια και πενταπλάσια διόρθωση απ' ό,τι κανονικά. Είναι σα να έχουμε πολλαπλασιάζει τη γωνιακή ταχύτητα δύο ή πέντε φορές αντίστοιχα μόνο για τη διόρθωση. Η, ισοδύναμα, είναι σα να έχουμε βάλει αντί 9 στον τύπο του  $G_c$ , 18 στην πρώτη περίπτωση και 45 στη δεύτερη. Προφανώς η διόρθωση θα γίνει μ' αυτές τις αλλαγές ακόμη μεγαλύτερη, αλλά το σημαντικό που φαίνεται απ' αυτό το διάγραμμα είναι ότι η αύξηση που γίνεται στη διόρθωση είναι ομαλή, ανάλογη της εικονικής αύξησης της γωνιακής ταχύτητας. Δηλαδή κάποιος που ξέρει τα διαγράμματα για 1X και 2X μπορεί να προβλέψει το διάγραμμα για 5X. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται π.χ. μια αύξηση της διόρθωσης του  $\mu_t$  στην πλευρά υπερπίεσης 3,5 φορές μεγαλύτερη για κάθε διπλασιασμό του συντελεστή 9 του όρου  $G_c$ . Αυτό επαληθεύτηκε και για την περίπτωση που μειώθηκε στο μισό η διόρθωση (0,5X) και για την περίπτωση 10X. Λόγω του ότι εικονικός διπλασιασμός των γωνιακής ταχύτητας επιφέρει περισσότερο από δυο φορές επίδραση στο  $\mu_t$ , λέμε ότι η διόρθωση του  $G_c$  είναι πολύ ευαίσθητη (στην γωνιακή ταχύτητα ή στην ακριβή τιμή του 9).

## Σχήμα 4.11.

Το σχήμα αυτό είναι το αντίστοιχο του προηγούμενου για την διόρθωση του Bradshaw με εκθέτη 2. Εδώ το φίλτρο έχει κρατηθεί τέτοιο ώστε να κόβει τις διορθώσεις στον ίδιο κόμβο και όχι αν υπερβούν κάποια τιμή, ώστε να γίνει εφικτή η σύγκριση. Ο πολλαπλασιαστής είναι σα να πηγαίνει στη σταθερά  $\beta$ . Δηλαδή η περίπτωση 2X είναι σα να έχει στην πλευρά υποπίεσης  $\beta=14$  αντί για 7.

Βλέπουμε ότι μέχρι τον πενταπλασιασμό του  $\beta$  υπάρχει επίσης μια αναλογική αύξηση του  $\mu_t$ . Μάλιστα εδώ αν μετρήσει κανείς θα δει ότι διπλασιασμός του  $\beta$  δίνει διπλάσια διόρθωση στο  $\mu_t$ . Η άμεση επίδραση στο  $\mu_t$  είναι αναμενόμενη, αφού εδώ η διόρθωση γίνεται απ' ευθείας πάνω στο  $\mu_t$  και όχι μέσω των διαφορικών εξισώσεων όπως στο  $G_c$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι για να δούμε κάποια σοβαρή διαφορά στα προφίλ των  $\mu_t$  πρέπει να διπλασιάσουμε π.χ. το  $\beta$  (ή την εικονική γωνιακή ταχύτητα- εικονική λέγεται γιατί διπλασιάζεται μόνο εσωτερικά, για τη διόρθωση). Δηλαδή μικρές μεταβολές του  $\beta$  δεν παίζουν μεγάλο ρόλο.



Σχήμα 4.12.

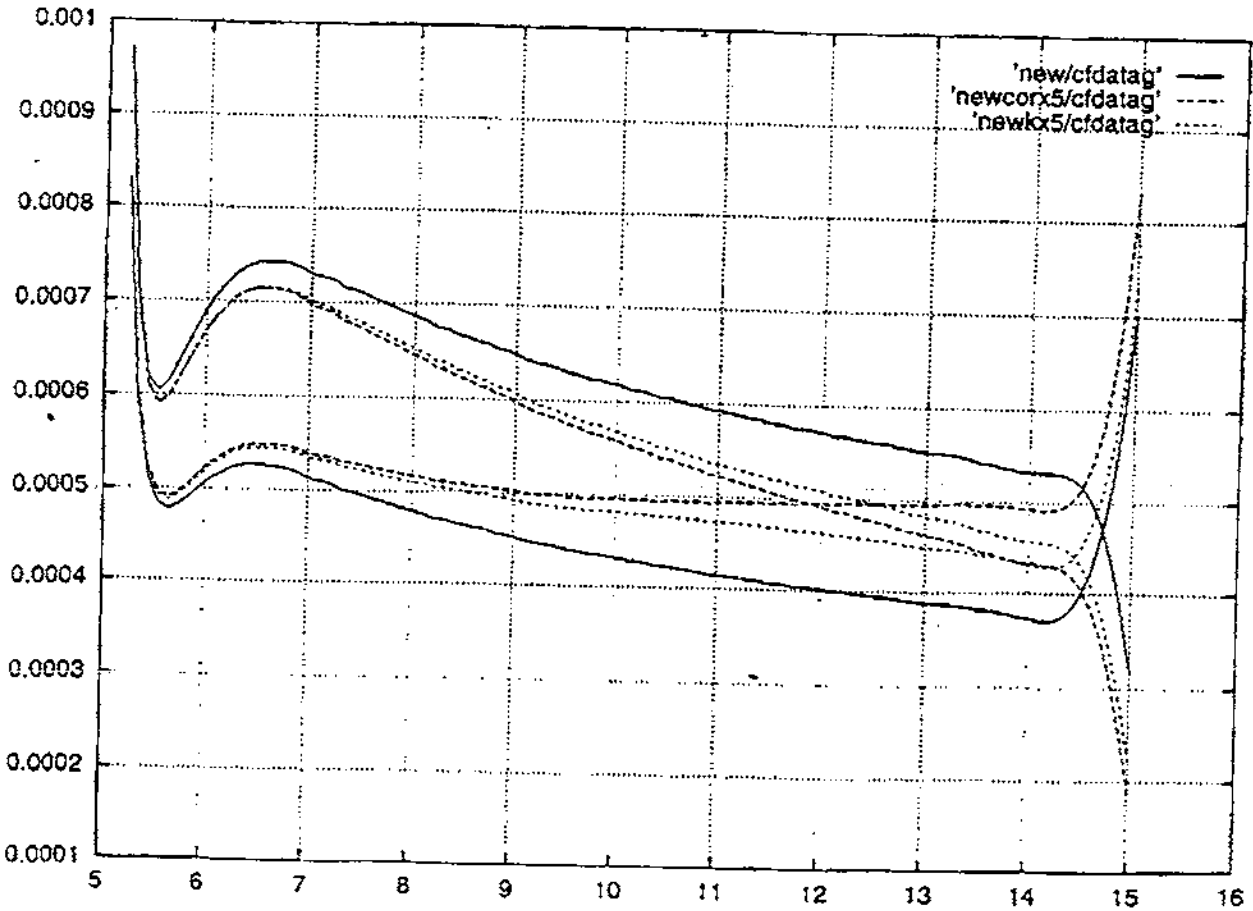
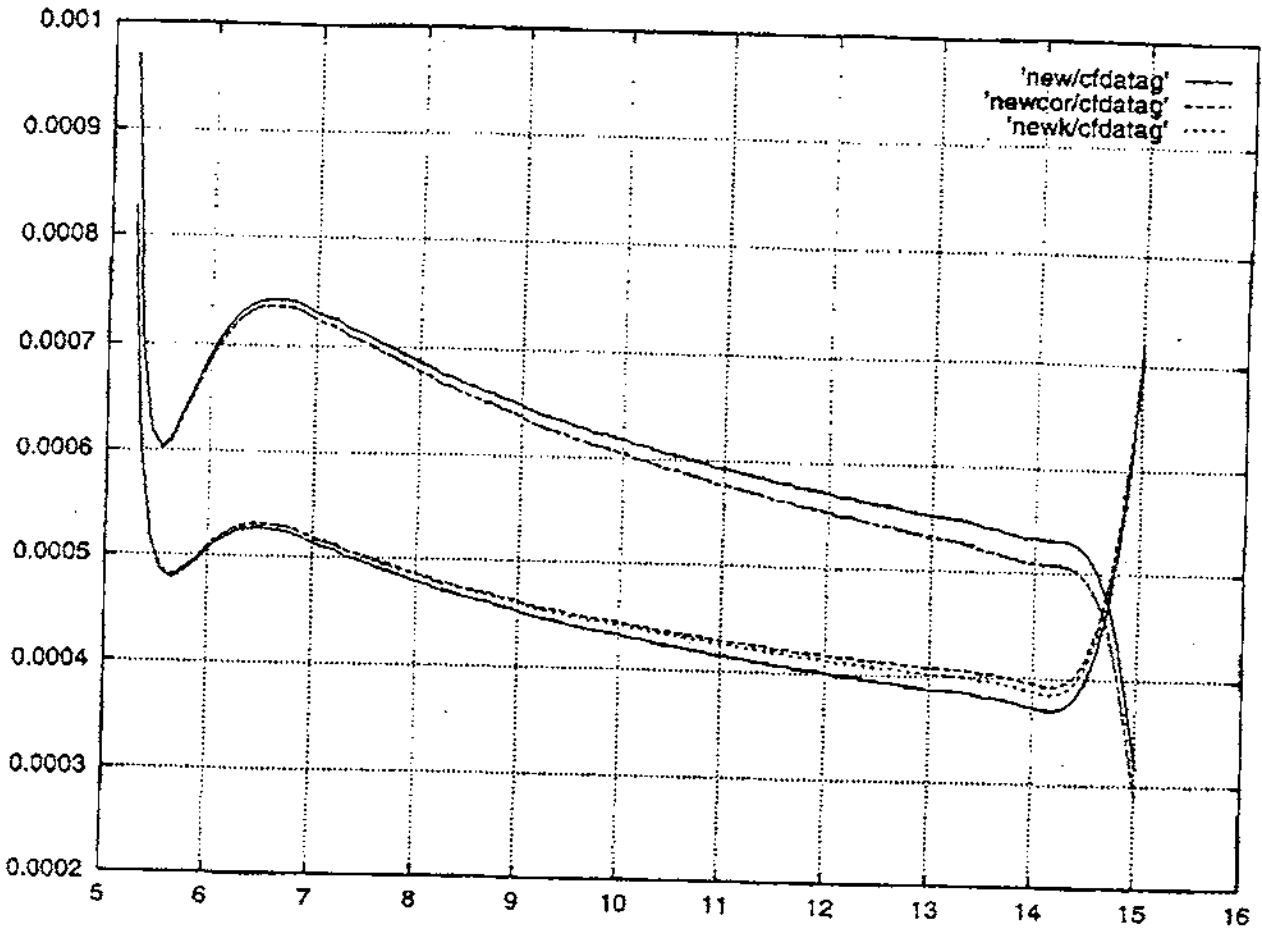
Εδώ βλέπουμε το συντελεστή τριβής που δίνουν οι δύο διορθώσεις συγκρινόμενο με την περίπτωση που δεν υπάρχει διόρθωση στο πρόγραμμα. Βλέπουμε τις κλίσεις ν' αλλάζουν προς τη σωστή κατεύθυνση, όπως έχουμε πει στο σχ. 4.7. Οι δύο διορθώσεις δίνουν αποτελέσματα που είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και μάλιστα στην πλευρά υποπίεσης τ' αποτελέσματα ταυτίζονται. Στην πλευρά υπερπίεσης η διόρθωση με το  $G_c$  διορθώνει λίγο περισσότερο όπως έχει προαναφερθεί.

Σχήμα 4.13.

Το σχήμα αυτό είναι αντίστοιχο με το προηγούμενο, με τις διορθώσεις να έχουν πενταπλασιαστεί.

Βλέπουμε ότι πλέον τ' αποτελέσματα που δίνουν οι δύο διορθώσεις απέχουν περισσότερο και αυτό οφείλεται στη διαφορετική ευαισθησία τους στο  $\Omega$ . Αυτή του  $G_c$  για την ίδια μεταβολή του  $\Omega$  αυξάνει περισσότερο τη διόρθωση.

Στην πλευρά υπερπίεσης για την περίπτωση με διόρθωση του  $G_c$  5X, βλέπουμε ότι έχει μηδενιστεί η κλίση. Ας θυμηθούμε από τη θεωρία ότι υπάρχει και η περίπτωση ν' αντιστραφεί αν το φαινόμενο είναι πολύ έντονο.



Σχήμα 4.14.

Εδώ βλέπουμε τη σύγκλιση του προγράμματος. Στον οριζόντιο άξονα είναι ο αριθμός των επαναλήψεων και στον κατακόρυφο είναι το σφάλμα της παροχής μάζας σε εκθέτες του 10. Οι απεικονίσεις της σύγκλισης των άλλων πέντε διαφορικών εξισώσεων είναι ίδιες. Γενικά αν συγκρίνει ένα πρόγραμμα τα σφάλματα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων πέφτουν με τον ίδιο τρόπο και το ίδιο ισχύει συνήθως και για τα σφάλματα των εξισώσεων  $k-\varepsilon$ . Πάντως συνήθως πρώτο παύει να συγκρίνει το σφάλμα της εξίσωσης του  $\varepsilon$  και μετά επηρεάζει κι όλα τ' άλλα. Αν κάποια εξίσωση δε συγκρίνει, συνήθως είναι αυτή του  $\varepsilon$ .

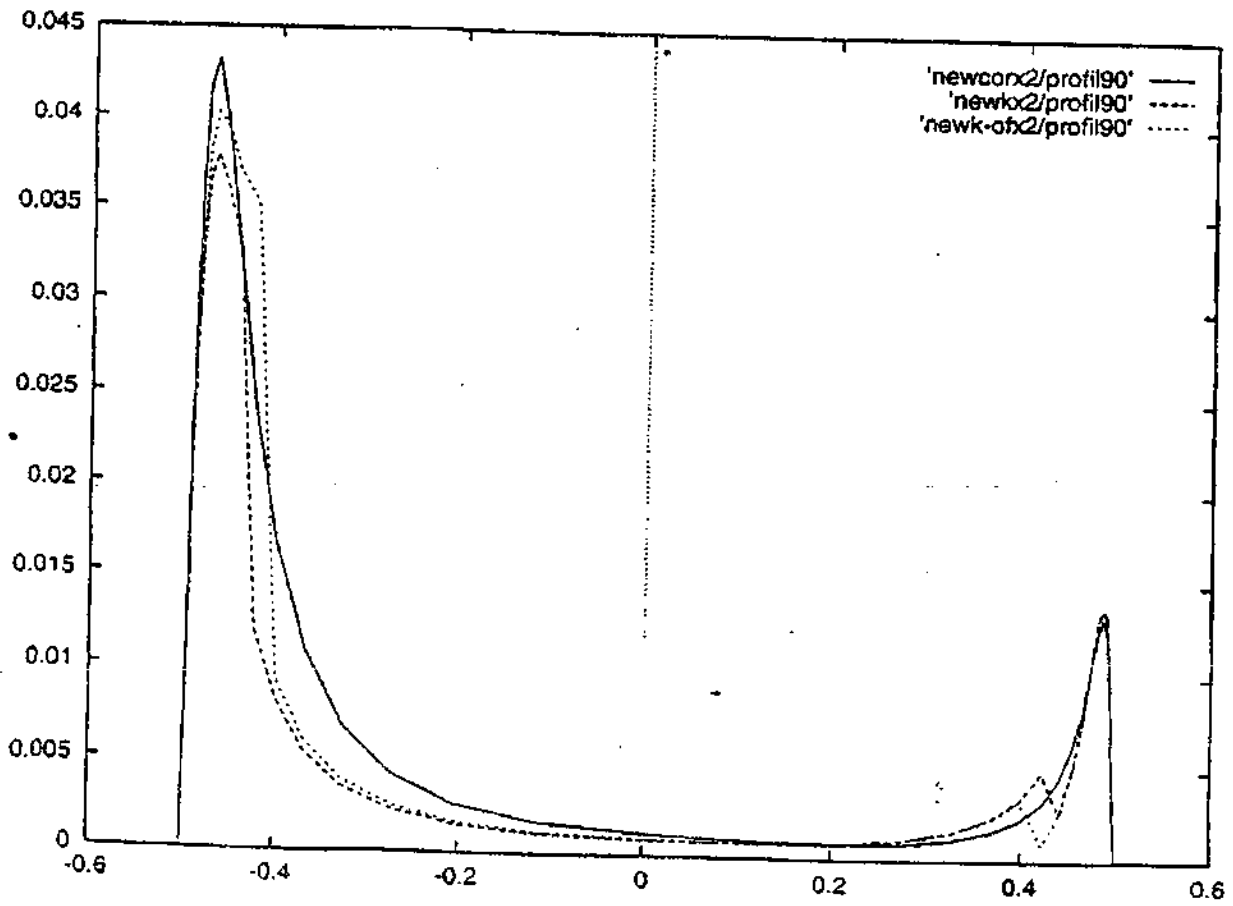
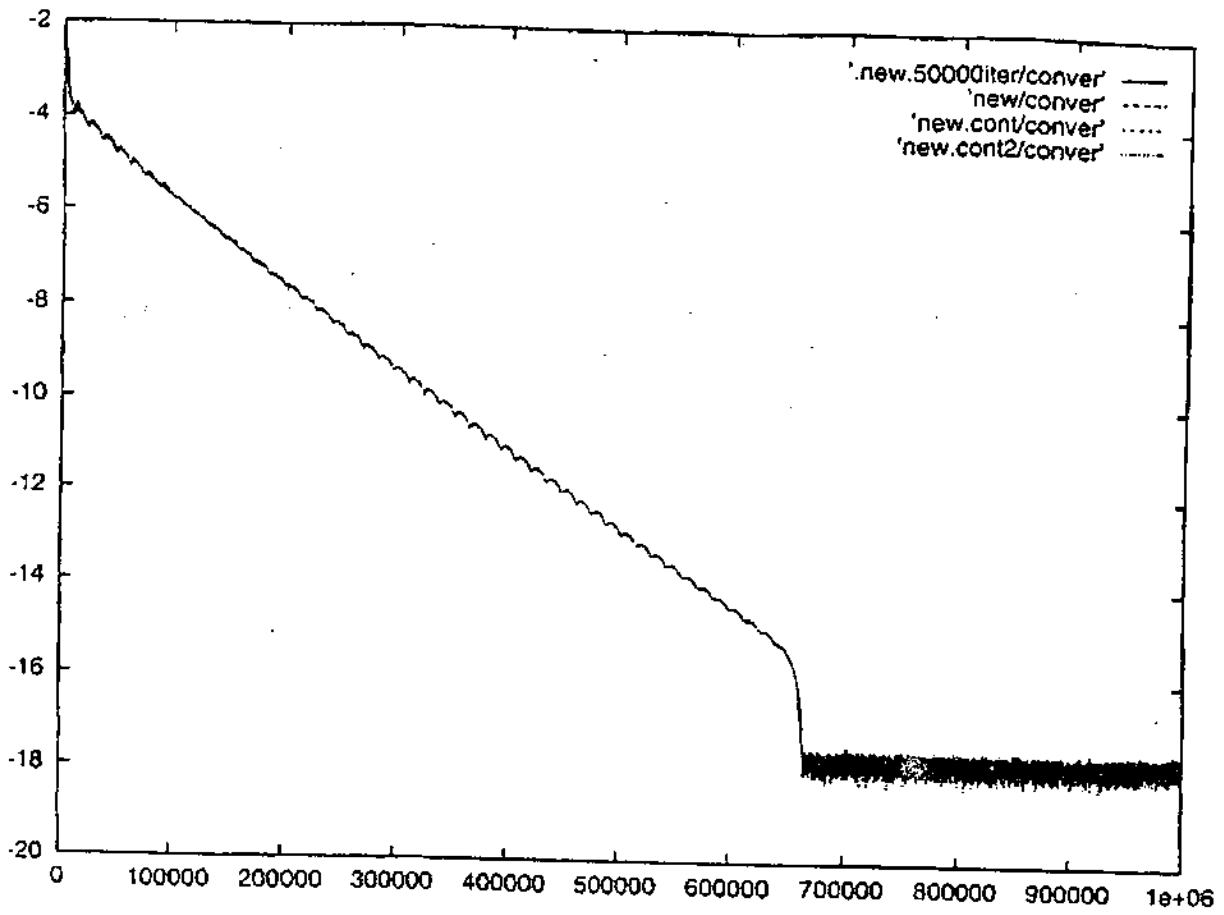
Η διπλανή απεικόνιση αφορά την περίπτωση χωρίς διόρθωση, αλλά όλες οι περιπτώσεις που ελέγχθηκαν με το πλέγμα  $gr1$  και 100RPM είχαν πολύ όμοια σύγκλιση.

Βλέπουμε ότι το σφάλμα έπεσε 15 τάξεις μεγέθους (από  $10^{-3}$  ως  $10^{-8}$ ). Περισσότερο δε μπορεί να συγκρίνει λόγω του ότι οι πράξεις που γίνονται μέσα στον υπολογιστή έχουν κάποια πεπερασμένη ακρίβεια. Λέμε τότε ότι έχουμε φτάσει σε ακρίβεια μηχανής. Αυτό δεν έχουμε λόγο να το κάνουμε, γιατί το πληρώνουμε σε χρόνο υπολογισμού. Στην συγκεκριμένη περίπτωση τα προφίλ δεν άλλαξαν καθόλου μετά τις περίπου 70000 επαναλήψεις (από και μετά απλά σταθεροποιούνται περισσότερο δεκαδικά), οπότε επιλέχθηκε τα υπόλοιπα προγράμματα να τρέχουν μέχρι τις 100000 επαναλήψεις. Τότε το σφάλμα είχε πέσει περίπου 3 τάξεις μεγέθους, γι' αυτό λέμε ότι συνήθως αν πέσει περίπου 3 τάξεις έχει συγκρίνει και δεν έχουμε λόγο να πάμε παρακάτω.

Σχήμα 4.15.

Το  $newk-ox2$  έχει φίλτρο πιο χαλαρό απ' το άλλο ( $[0,25-3]$  έναντι  $[0,5-1,5]$ ). Βλέπουμε ότι επέδρασε μόνο ένα κόμβο πιο έξω από το τοίχωμα σε σχέση με το άλλο φίλτρο. Επειδή όμως εκεί οι κόμβοι απέχουν αρκετά μεταξύ τους (σε σχέση με κοντά στον τοίχο) υπάρχει περίπτωση να σημειωθεί σημαντική διαφορά στα προφίλ. Γι' αυτό χρειάζεται προσοχή στην επιλογή του φίλτρου.

Το συγκεκριμένο διάγραμμα έγινε για να διαπιστωθεί αν διπλασιάζοντας την ταχύτητα περιστροφής για τη διόρθωση είναι προτιμότερο να κρατήσουμε το φίλτρο στο πλαίσιο  $[0,5-1,5]$  ( $newkx2$ ) ή να το αφήσουμε να κόβει στο ίδιο σημείο που έκοβε και με την περίπτωση του κανονικού  $\Omega$  ( $newk-ox2$ ). Τελικά επιλέχθηκε η δεύτερη περίπτωση που ταίριαζε καλύτερα με τη διόρθωση του  $G_c$  όπως δείχνει το σχήμα. Επιπλέον, για να φτιαχτεί το σχ. 4.11 έπρεπε το φίλτρο να δρα στο ίδιο σημείο σε όλες τις περιπτώσεις, ώστε να υπάρχει σύγκριση. Έτσι η περίπτωση  $newk-ox2$  μετονομάστηκε σε  $newkx2$  και αυτή μπήκε στο σχ. 4.11.



Σχήμα 4.16.

Εδώ συγκρίνονται ουσιαστικά οι διορθώσεις με εκθέτη 1 (newkl) και 2. Τα αποτελέσματα είναι τ' αναμενόμενα, η διόρθωση με εκθέτη 1 διορθώνει λιγότερο. Μάλιστα βλέπουμε ότι βρίσκεται περίπου ανάμεσα στην περίπτωση χωρίς διόρθωση και σ' αυτήν με εκθέτη 2. Καταλαβαίνουμε ότι η απόσταση της από τη διόρθωση του  $G_c$  θα είναι μεγαλύτερη απ' όση αυτής με εκθέτη 2, και αν θεωρήσουμε τη διόρθωση με  $G_c$  πιο ακριβή όπως γενικά πιστεύεται και στη βιβλιογραφία, η διόρθωση του Bradshaw με εκθέτη (αν την εφαρμόσουμε κατευθείαν στο  $\mu$ ) 2, είναι ακριβέστερη αυτής με εκθέτη 1.

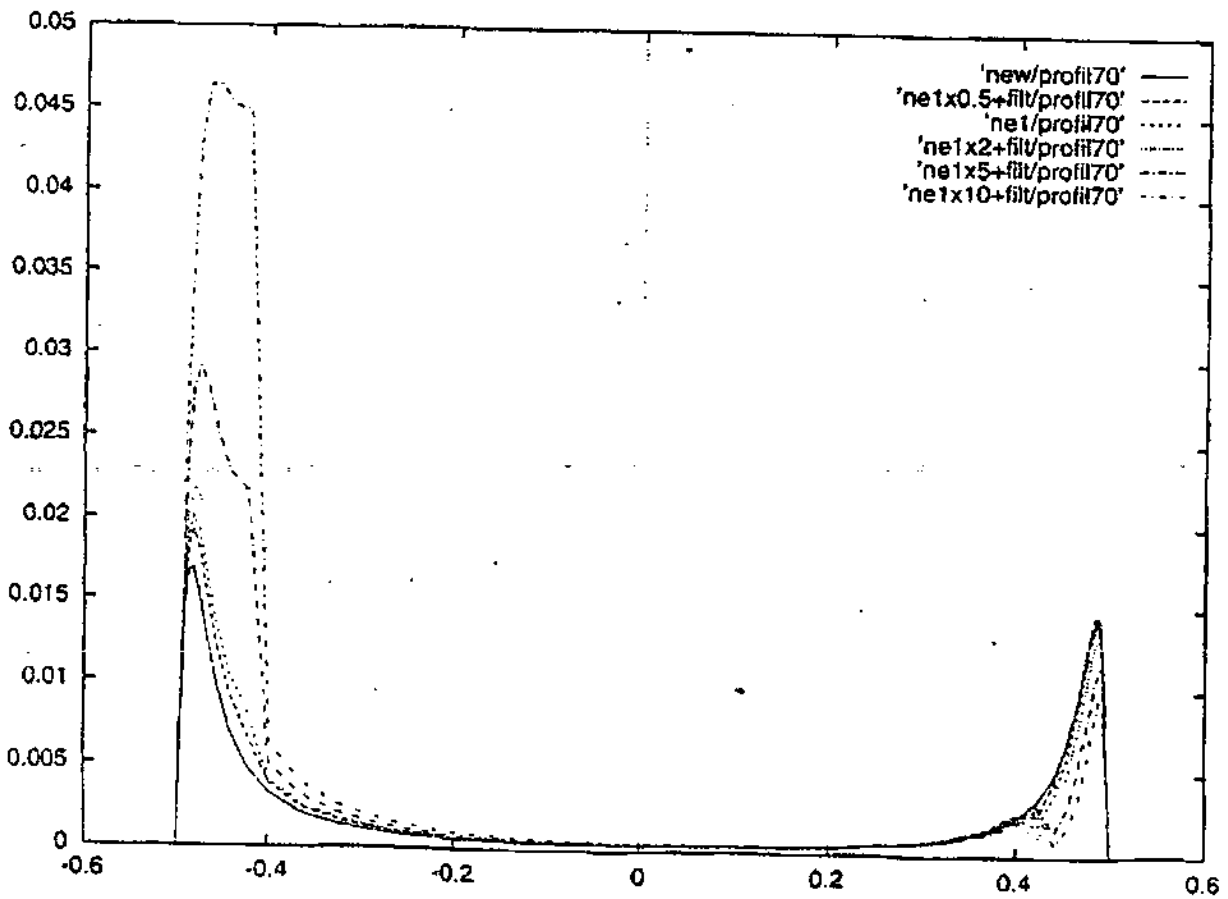
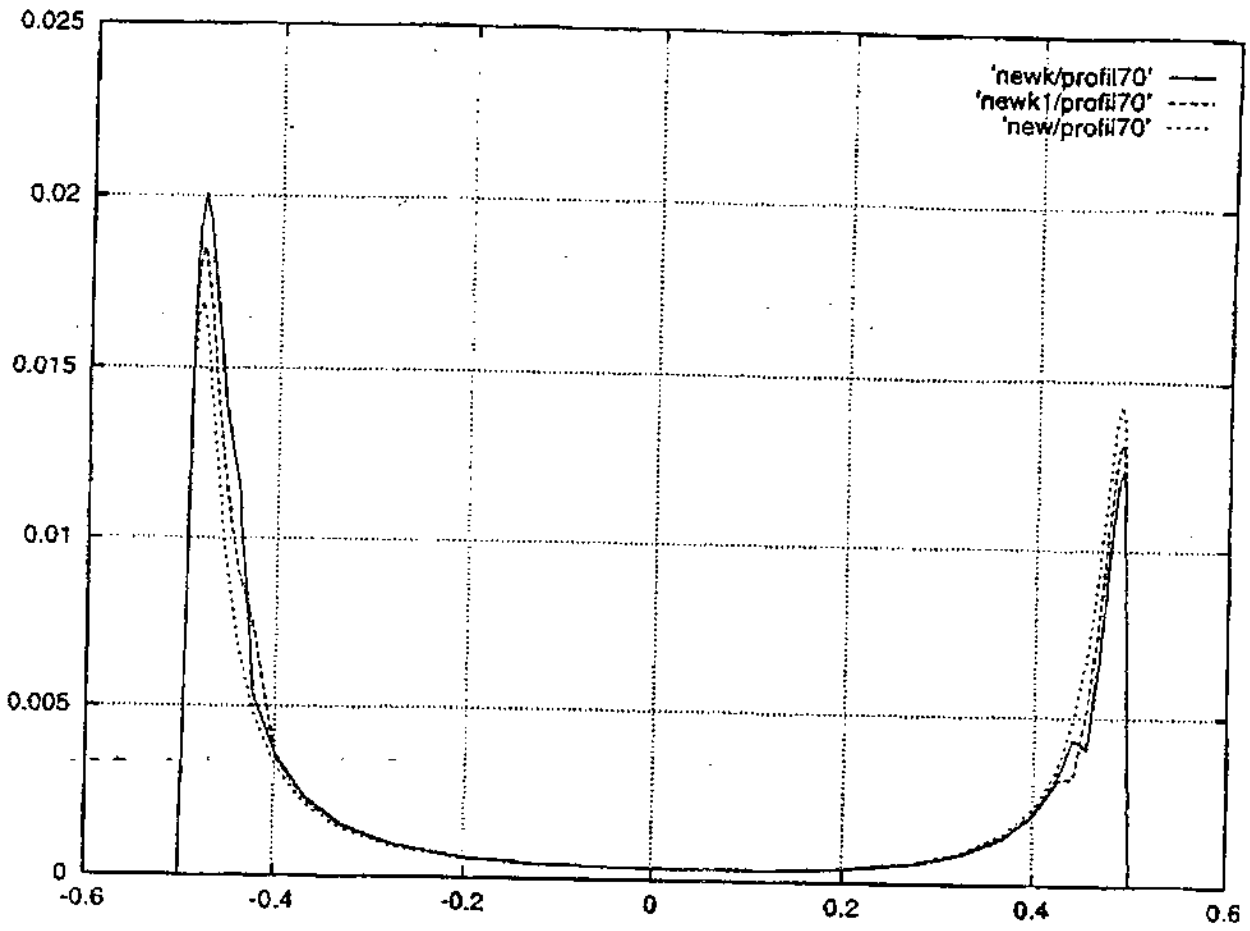
Σχήμα 4.17.

Εδώ συγκρίνονται διορθώσεις με δείκτη 1 ως προς την ευαισθησία. Βλέπουμε σε γενικές γραμμές πάλι να υπάρχει μια αναλογία, που όμως δεν είναι τόσο ξεκάθαρη όσο των άλλων δύο περιπτώσεων ( $G_c$  και Bradshaw με εκθέτη 2).

Η ευαισθησία είναι μικρότερη των άλλων δύο διορθώσεων (διπλασιασμός του  $\Omega$  δίνει λιγότερο από διπλάσια μεταβολή στο  $\mu$ ).

Να σημειωθεί ότι στο σχήμα αυτό τα προγράμματα έχουν σταματήσει στις 50000 επαναλήψεις χωρίς να έχουν συγκλίνει απόλυτα και κάποιες μικροαλλαγές μπορεί να γίνονταν μέχρι τη σύγκλιση. Ίσως έτσι δικαιολογείται ότι στην πλευρά υποπίεσης στην περίπτωση που η διόρθωση έχει πολλαπλασιαστεί  $X0,5$ , σε ένα κομμάτι του οριακού στρώματος το αποτέλεσμα είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση (αύξηση του  $\mu$ ).





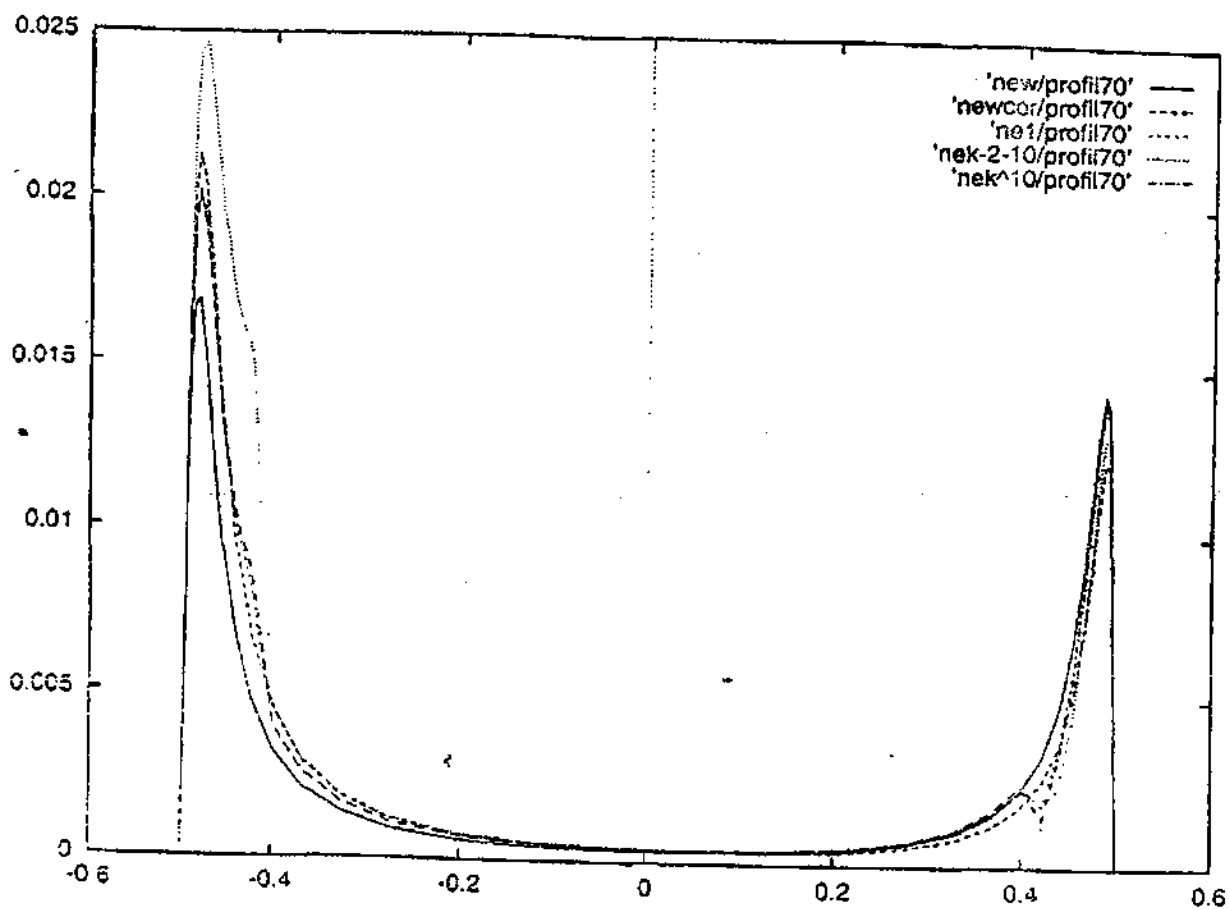
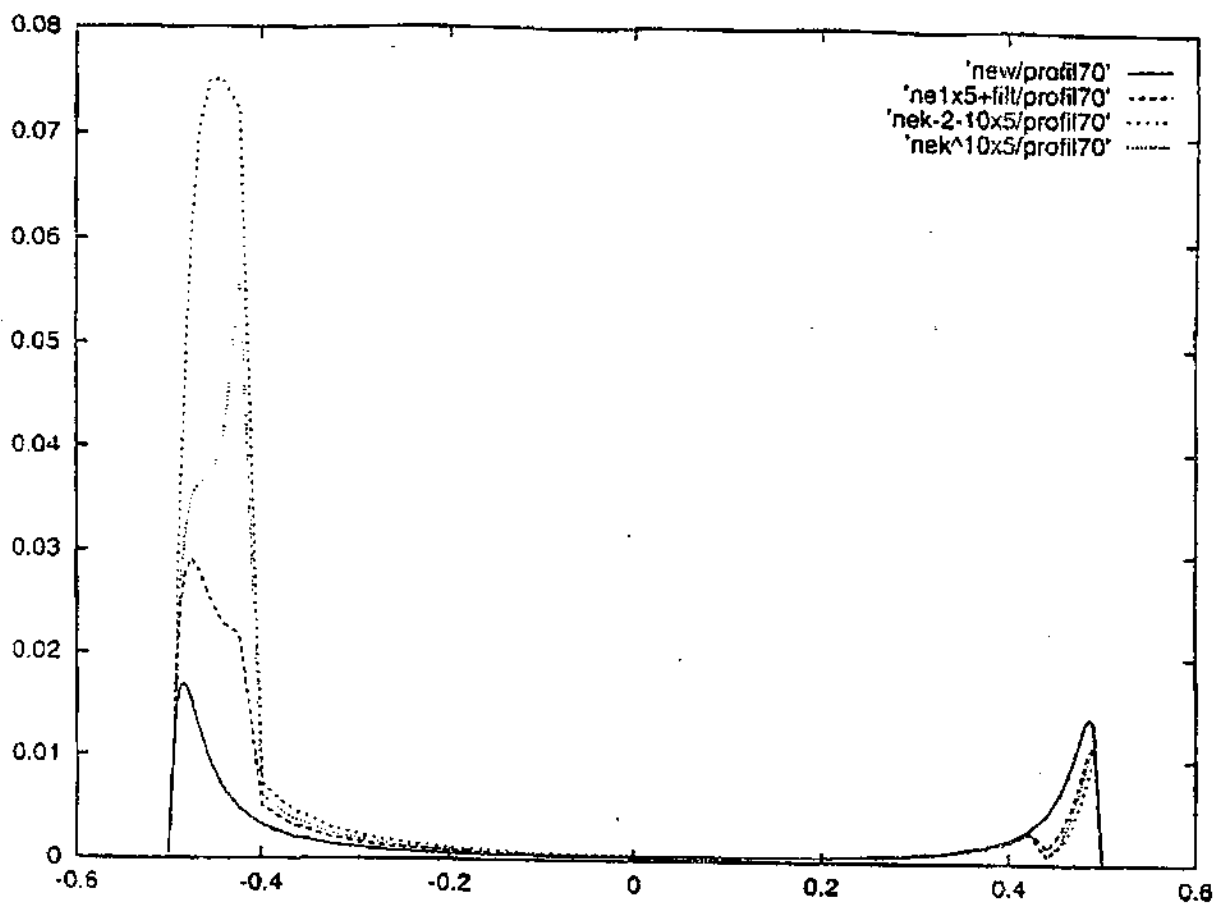
## Σχήμα 4.18.

Στο σχήμα αυτό και στο επόμενο, φαίνονται κάποια αποτελέσματα από δύο προσπάθειες που έγιναν να γραφεί η διόρθωση του Bradshaw με άλλο τρόπο, όπως γράφεται νωρίτερα στο κεφάλαιο 4. Η 'nek-2-10' είναι αυτή με το λογάριθμο και η 'nek^10' είναι αυτή με την ύψωση στη δεκάτη δύναμη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση με το λογάριθμο παρουσιάζει πολύ μεγάλη ευαισθησία και αυτή με την ύψωση στη δεκάτη δύναμη μεγαλύτερη από την κλασική του Bradshaw, παρόλο που δίνουν ακριβώς ίδια αποτελέσματα στο κανονικό  $\Omega$ . Και τα δύο αποτελέσματα είναι αναμενόμενα από τους μαθηματικούς τύπους των δύο διορθώσεων. Δεν αξίζει να επιμείνουμε περισσότερο στα συγκεκριμένα διαγράμματα.

## Σχήμα 4.19.

Το σχήμα αυτό, όπως και το προηγούμενο, αφορούν 50000 επαναλήψεις, που τα προγράμματα δεν είχαν συγκλίνει εντελώς. Βέβαια τα συγκριτικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται ισχύουν σε μεγάλο βαθμό.

Βλέπουμε ότι οι διορθώσεις του Bradshaw (με εκθέτη 1) και αυτή με την ύψωση στη δεκάτη δύναμη, δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Η συνάρτηση με το λογάριθμο δίνει τη μεγαλύτερη διόρθωση στην πλευρά υπερπίεσης και μια μέση διόρθωση στην πλευρά υποπίεσης, αλλά αν αλλάξει λίγο ο συντελεστής της (το 0,5) και γίνει διαφορετικός στις δύο πλευρές θα βγάλει πιο σωστά αποτελέσματα.



## Σχήμα 4.20.

Το 'dens' αφορά το πυκνότερο πλέγμα με τα 131X71 σημεία που φτιάχτηκε να δούμε αν υπάρχει ανεξαρτησία πλέγματος. Το προφίλ του κόμβου 92 αυτού αντιστοιχεί στο 70% του μήκους του καναλιού. Η επόμενη ομάδα σχημάτων (μέχρι και το σχ. 4.27) αφορά υπολογισμό χωρίς διόρθωση (πρόγραμμα new) και παρουσιάζεται για να γίνουν κάποια σχόλια για το πρόγραμμα.

Τ' αποτελέσματα που έβγαλε όπως βλέπουμε είναι διαφορετικά, ιδίως στην πλευρά υποπίεσης. Στην πλευρά αυτή όμως όπως θα δούμε παρακάτω υπήρχε ένα ανεξήγητο πρόβλημα με τον υπολογισμό του  $μτ$ , οπότε αν θεωρήσουμε ότι για κάποιους άγνωστους λόγους το πρόγραμμα δεν υπολόγισε καλά μόνο τη μια πλευρά αλλά υπολόγισε καλά την άλλη, συγκρίνοντας τα προφίλ ταχυτήτων μόνο στην πλευρά υπερπίεσης, βλέπουμε ότι ούτε αυτά δε συμπίπτουν, οπότε δεν έχουμε λύση ανεξάρτητη πλέγματος. Βέβαια ας έχουμε υπόψη μας ότι τα προφίλ στην πλευρά υπερπίεσης είναι περίπου ίδιας μορφής και ότι απόλυτη ανεξαρτησία πλέγματος σχεδόν ποτέ δεν μπορεί να επιτευχθεί.

## Σχήμα 4.21.

Εδώ βλέπουμε γιατί είναι διαφορετικά τ' αποτελέσματα του προφίλ ταχυτήτων του παραπάνω σχήματος στην πλευρά υποπίεσης. Ο λόγος είναι ότι στην πλευρά αυτή η ροή στο πυκνό πλέγμα είναι στρωτή, αφού το  $μτ$  έχει μηδενιστεί. Φυσικά δε μπορεί η ροή σε τόσο μεγάλο Reynolds σε στρεφόμενο κανάλι να είναι στρωτή μέσα στο οριακό στρώμα (αυτό το είδαμε σε όλες τις περιπτώσεις ως τώρα και το βλέπουμε και στην απέναντι πλευρά), άρα το πρόγραμμα δεν έχει υπολογίσει σωστά στη συγκεκριμένη περίπτωση. Όπως θα φανεί και από τα παρακάτω σχήματα αυτή η συμπεριφορά του προγράμματος είναι αδικαιολόγητη και η διερεύνηση των αιτιών που τη δημιουργούν έχει μεγάλη σημασία για την αξιοπιστία του κώδικα. Παρόμοια προβλήματα με το πρόγραμμα υπήρξαν σημαντικός παράγοντας καθυστέρησης.

## Σχήμα 4.22.

Ο ATHENA παρέχει δυνατότητα αντί να δοθεί στις οριακές συνθήκες το Max εισόδου, να δοθεί ο λόγος πύσεων (ολικών) εξόδου προς εισόδο. Φυσικά τ' αποτελέσματα πρέπει να είναι ίδια, αφού υποτίθεται ότι τις τιμές αυτές τις χρησιμοποιεί το πρόγραμμα για έναρξη και μετά από μερικές εκατοντάδες επαναλήψεις έχουν αλλάξει.

Το διυλιανό σχήμα είναι με αυτό τον τρόπο έναρξης στο πυκνό πλέγμα. Στις 400000 επαναλήψεις έπαυσε ν' αλλάζει και το τελευταίο δεκαδικό και βλέπουμε ότι ενώ υποτίθεται ότι έπρεπε να βγάλει ίδια αποτελέσματα με το προηγούμενο σχήμα τελικά κατέληξε στην εντελώς αντίθετη περίπτωση, έβγαλε στρωτή ροή στην πλευρά υπερπίεσης αντί στην πλευρά υποπίεσης. Βέβαια και αυτό είναι λάθος. Το σωστό είναι τυρβώδης ροή και στις δύο πλευρές. Βλέπουμε πάντως ότι για το τι αποτέλεσμα θα βγει παίζει ρόλο το από πού ξεκινάει το πρόγραμμα.

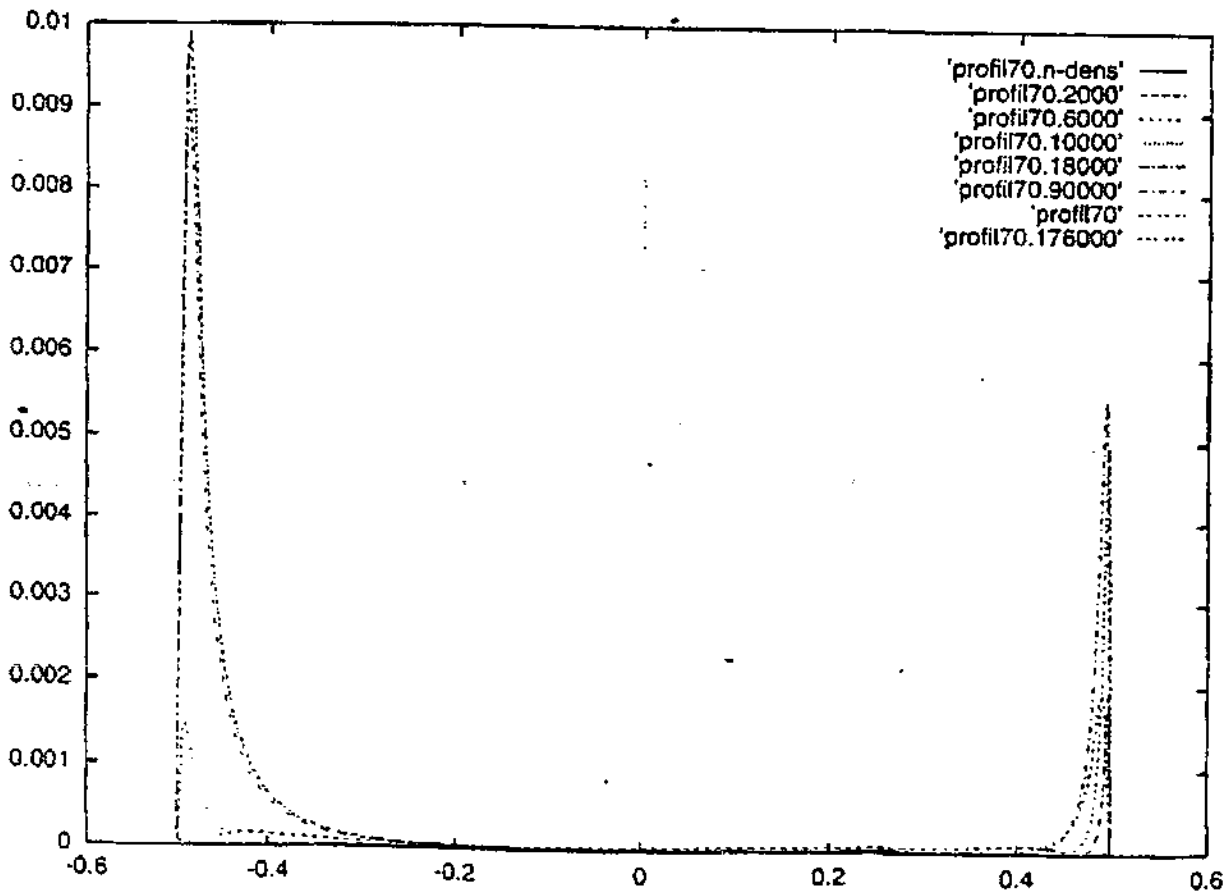
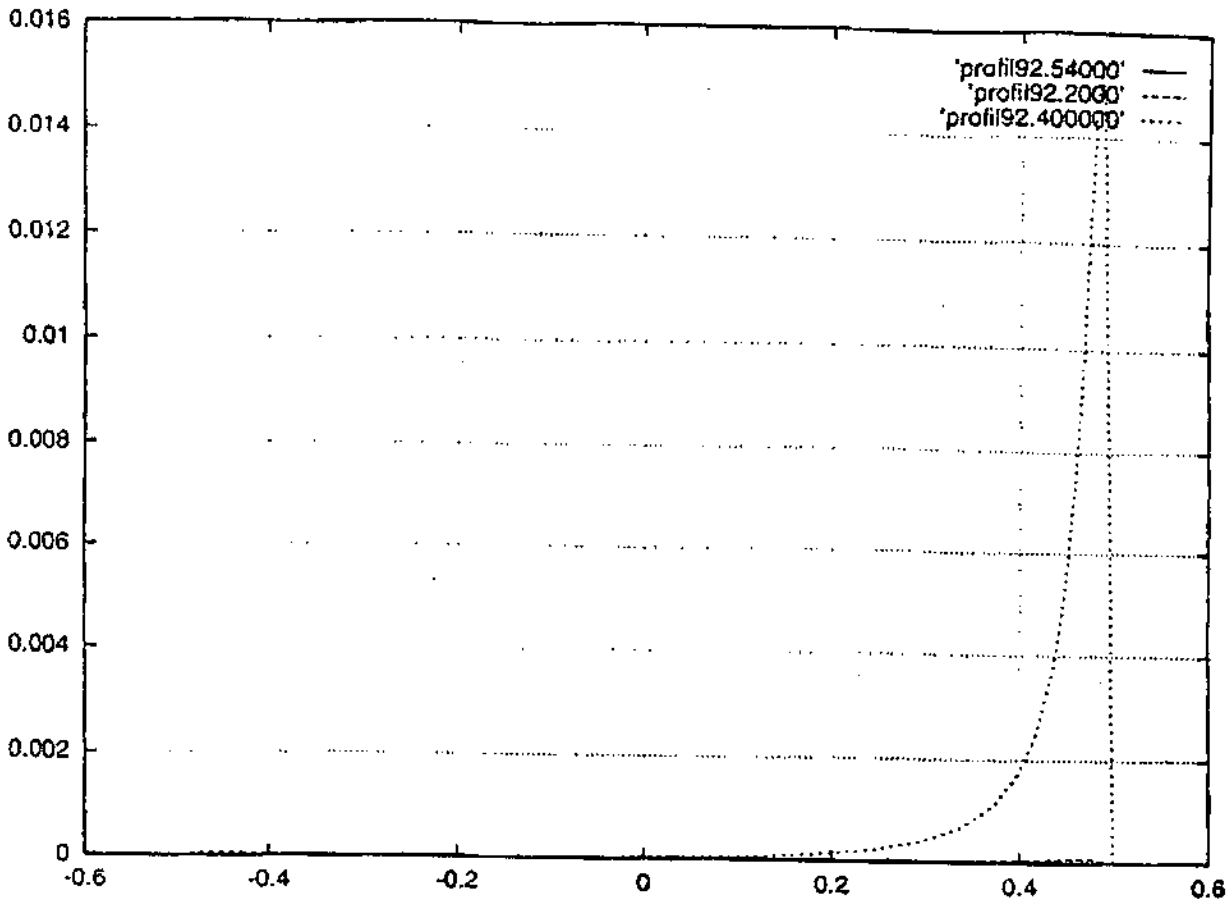
Αυτό το συμπέρασμα είναι γενικό, θα το δούμε και παρακάτω και αφορά κυρίως περιπτώσεις που κάτι δεν πήγε καλά. Αν βγει το ίδιο αποτέλεσμα με διαφορετικούς τρόπους έναρξης τότε όλα πάνε καλά. Μπορεί όμως με κάποιο άλλο τρόπο έναρξης να βγει λάθος αποτέλεσμα, και συγκεκριμένα στρωτή ροή σε κάποια πλευρά. Ακόμη, αν μας βγει ένα λάθος αποτέλεσμα, ίσως με άλλο τρόπο έναρξης μπορεί να βγει σωστό. Αυτά είναι γενικά συμπεράσματα που φάνηκαν από πολλές δοκιμές στο στρεφόμενο κανάλι κατά τη διάρκεια της διπλωματικής και θα στηριχτούν καλύτερα με επόμενα διαγράμματα. Βέβαια υπάρχει πάντα το ερώτημα μήπως όλα τ' αποτελέσματα που δίνει το πρόγραμμα είναι λάθος και απλά σε μερικά αυτό φαίνεται πολύ και σε άλλα όχι. Πιστεύεται πάντως ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει, απλά κάποιες φορές κάτι πάει στραβά.

Στο σχήμα βλέπουμε και τα προφίλ του ίδιου προγράμματος για 2000 και 54000 επαναλήψεις. Στις 2000 (αρχή σύγκλισης) έχουν αρχίσει να γίνονται λίγο τυρβώδη τα προφίλ, αλλά στις 54000 (μέσο σύγκλισης) είναι και από τις δύο μεριές στρωτή η ροή.

## Σχήμα 4.23.

Υπήρχε η σκέψη ότι πιθανόν αν αρχίσει το πρόγραμμα με τελείως λανθασμένο προφίλ  $\mu$ , αυτό μπορεί να δημιουργεί πρόβλημα και να μη μπορεί το πρόγραμμα να κάνει εύκολα μετάβαση στα τυρβώδη προφίλ. Με το σχήμα αυτό όμως και τα δύο επόμενα αυτό απορρίπτεται.

Στο συγκεκριμένο σχήμα βλέπουμε αρχής γενομένης απ' το αρχείο εισόδου (.n-dens) που αφορά 30 επαναλήψεις χωρίς περιστροφή, πώς εξελίσσονται τα προφίλ του  $\mu$ , όσο περνάνε οι επαναλήψεις (για την περίπτωση των σχημάτων 4.20, 4.21, με έναρξη από το Max εισόδου). Η ουσία είναι ότι υπάρχει μια αδικαιολόγητη αυξομείωση στο  $\mu$  στην πλευρά υποπίεσης που συχνά φτάνει μέχρι την τιμή 0 που αντιστοιχεί σε στρωτό οριακό στρώμα. Το γεγονός ότι σε κάποιες περιπτώσεις είχε αυξηθεί το  $\mu$ , σε φυσιολογικές τιμές εκεί που στο τελικό αποτέλεσμα ήταν μηδέν δείχνει ότι δεν υπήρχε πρόβλημα έναρξης από τελείως λανθασμένο  $\mu$ . Άλλωστε το αρχείο εισόδου είχε  $L_{ref}=100$  και είχε ήδη αρχίσει να διαμορφώνει τυρβώδη προφίλ (φαίνονται ίσα - ίσα στο σχήμα, κάτω κάτω στις άκρες).



## Σχήμα 4.24.

Εδώ φαίνεται πιο καθαρά ότι κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων περάσαμε από στάδια που ήταν το προφίλ στρωτό (λανθασμένο δηλαδή) είτε δεξιά είτε αριστερά. Η διακεκομμένη γραμμή αφορά 100000 επαναλήψεις.

Η συγκεκριμένη περίπτωση που φαίνεται στο σχήμα είχε εξεταστεί με αρχείο εισόδου που είχε  $L_{ref}=1$  (δοκιμάστηκε κι αυτό). Το συμπέρασμα ήταν ότι άργησε λίγο περισσότερο να φτιάξει τυρβώδη προφίλ  $\mu t$ , αλλά αφού έγινε αυτό (ένα-δύο δεκάδες χιλιάδες επαναλήψεις) η συμπεριφορά ήταν απόλυτα όμοια με αυτή της έναρξης από αρχείο με  $L_{ref}=100$ . Το πρόγραμμα δεν είχε νόημα να συνεχιστεί για περισσότερες από 100000 επαναλήψεις αφού έδινε ίδια αποτελέσματα.

## Σχήμα 4.25

Ίδιο «τρέξιμο» με του σχ. 4.23. Βλέπουμε πάλι, το ασταθές  $\mu t$ . Επιπλέον έχουμε:

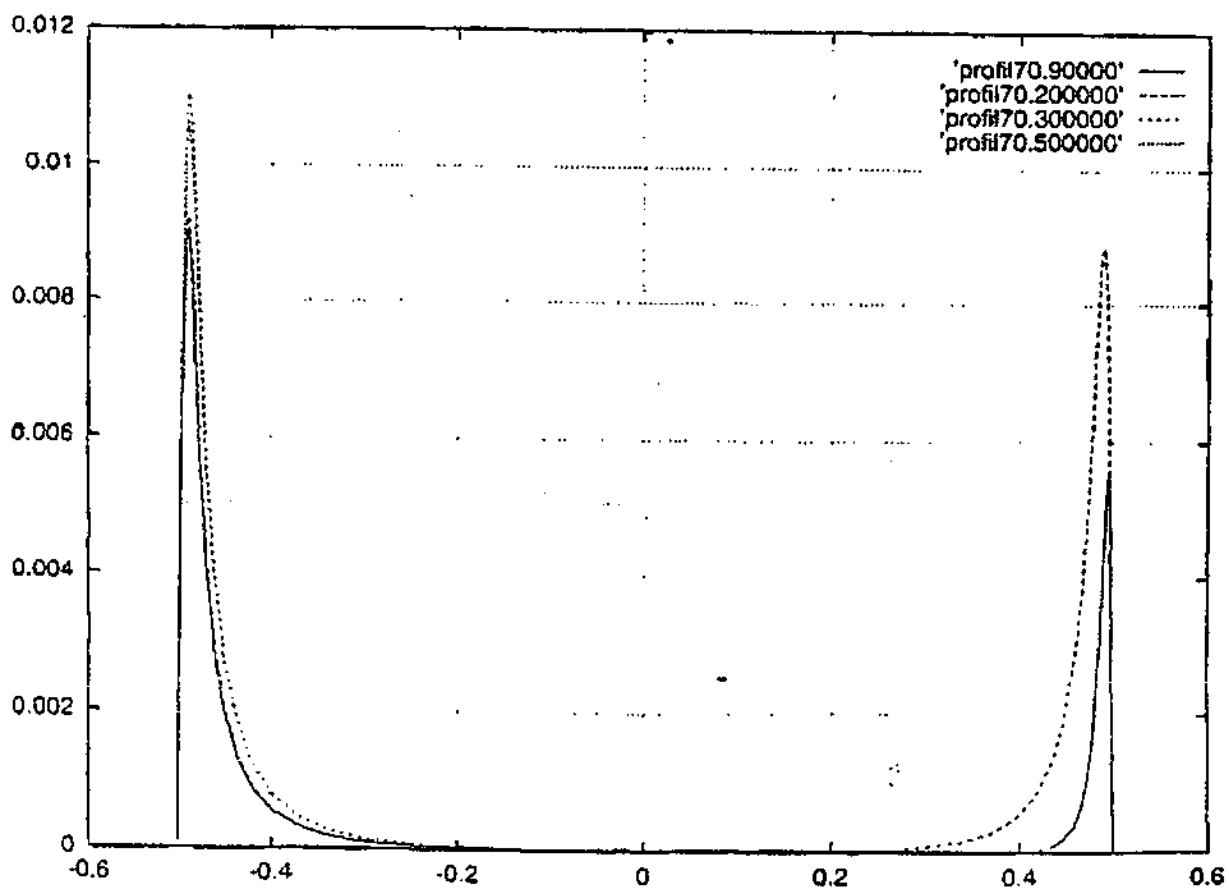
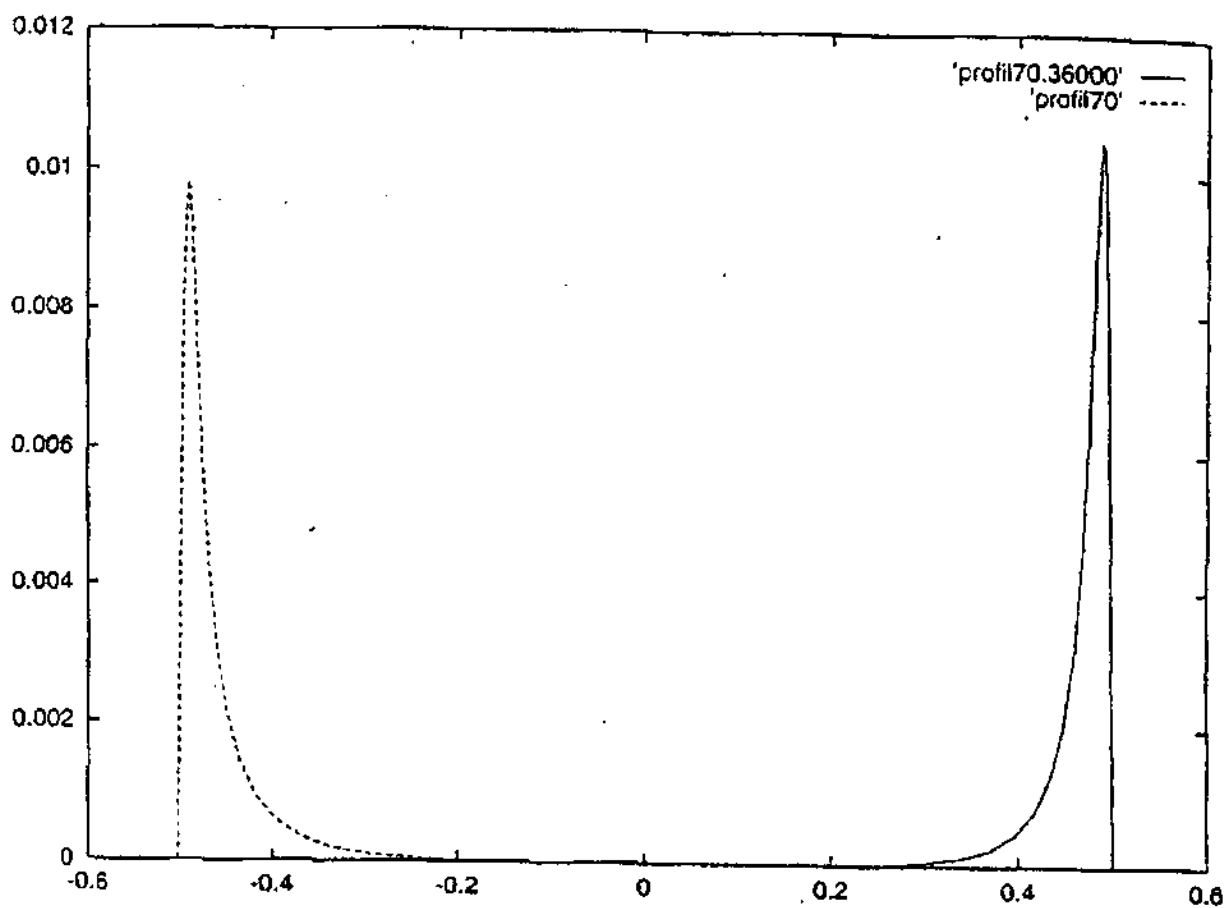
Απ' τις 300000 επαναλήψεις και μετά (επιτέλους) σταμάτησε να αλλάζει το αποτέλεσμα και σταθεροποιήθηκε σε λάθος τιμή (στρωτό προφίλ δεξιά). Το ίδιο έγινε μέχρι τις 1000000 επαναλήψεις που είχε γίνει φανερό ότι δε συνέκλινε περισσότερο το πρόγραμμα.

Στο σχήμα αυτό βλέπουμε και κάτι άλλο πολύ ενδιαφέρον:

Στις 200000 επαναλήψεις τα προφίλ  $\mu t$  είναι τυρβώδη. Δηλαδή το πρόγραμμα κάποτε πέρασε καθώς προχωρούσαν οι επαναλήψεις από μια αποδεκτή λύση, αλλά συνέχισε και πήγε πάλι σε λάθος λύση. Μάλιστα αν δούμε το σχήμα της σύγκλισης του προγράμματος, σχ. 4.26, στις 200000 επαναλήψεις το σφάλμα είχε πέσει περισσότερο από 3 τάξεις μεγέθους.

Αυτό είναι σημαντικό. Αν τύχαινε να σταματήσουμε το πρόγραμμα στις 200000 επαναλήψεις και βλέπαμε τα προφίλ που βγάζει και τη σύγκλιση να κυλάει ομαλά και το σφάλμα να έχει πέσει, θα λέγαμε ότι όλα πάνε μια χαρά και ότι «αυτό το αποτέλεσμα έβγαλε το πρόγραμμα». Αυτό είναι λάθος. Γι' αυτό χρειάζεται προσοχή. Επιπλέον τώρα δεν ξέρουμε μήπως σε οποιαδήποτε περίπτωση μπορεί να συμβεί αυτό. Δηλαδή σε κάποιο πρόγραμμα που το σταματήσαμε στις 100000 επαναλήψεις επειδή όλα πηγαίνανε καλά, μπορεί τελικά να συμβαίνει το εξής: ν' αυξομειώνονται τα  $\mu t$  καθώς περνάνε οι επαναλήψεις και να έτυχε να το κόψουμε σε μια περίπτωση που τα  $\mu t$  είχαν λογικές τιμές. Βάσει αυτών που γράφονται εδώ, οποιοδήποτε αποτέλεσμα βγάλει το πρόγραμμα, μπορεί να μην είναι αξιόπιστο.

Βέβαια αν αποκτηθεί περισσότερη εμπειρία από τη χρήση του προγράμματος αυτού και εφόσον δεν έχει κάποιο λάθος στη συγγραφή του, θα γίνεται φανερό ποια αποτελέσματα είναι αξιόπιστα και ποια όχι. Πχ από τη διπλωματική αυτή φάνηκε πρόβλημα μόνο όσον αφορά τις τιμές του  $\mu t$ . Αν οι τιμές του  $\mu$ , μεταβάλλονται φυσιολογικά καθώς προχωρά η σύγκλιση και η τελική τιμή είναι λογική, δε φαίνεται να υπάρχει πρόβλημα. Επιπλέον, στα 'καλά' αποτελέσματα η σύγκλιση είναι πιο καλή απ' αυτή του σχ. 4.26.





## Σχήμα 4.26.

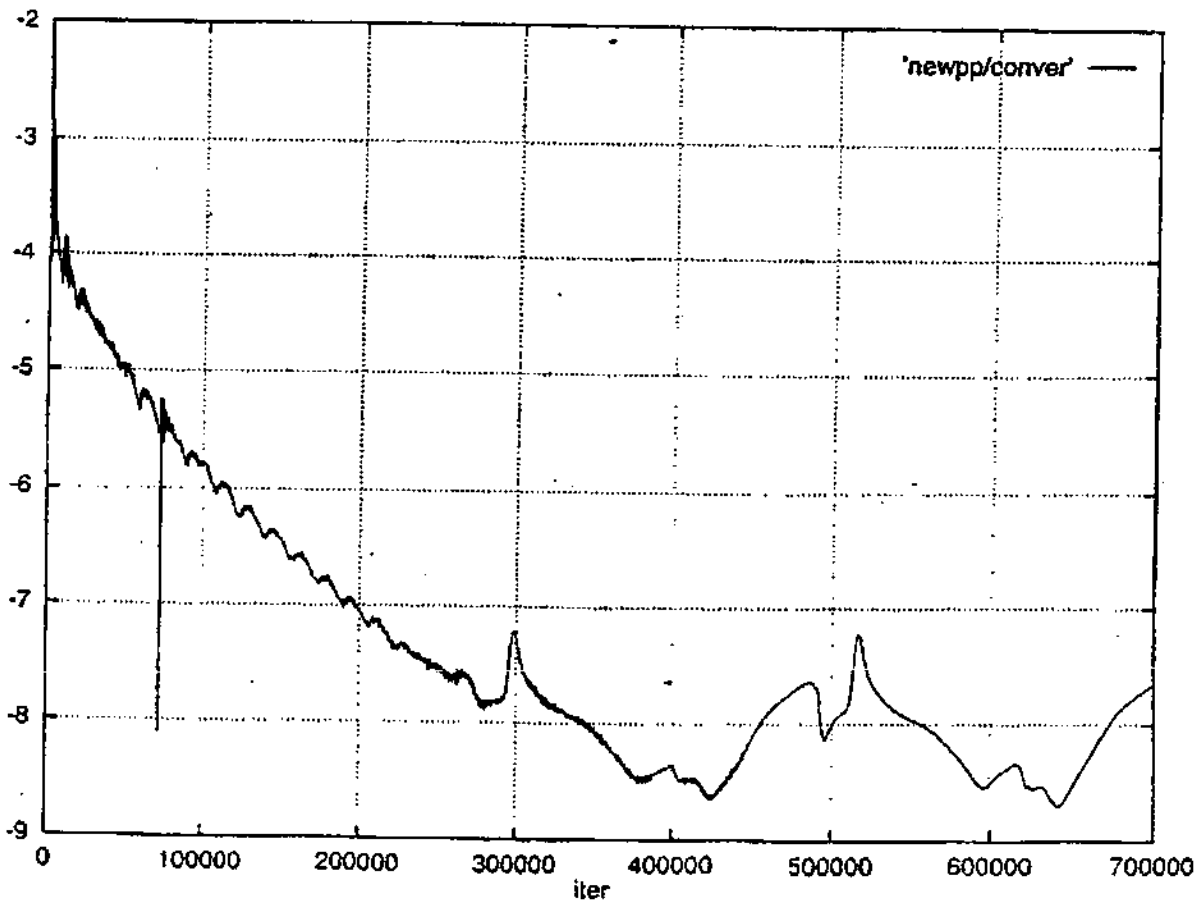
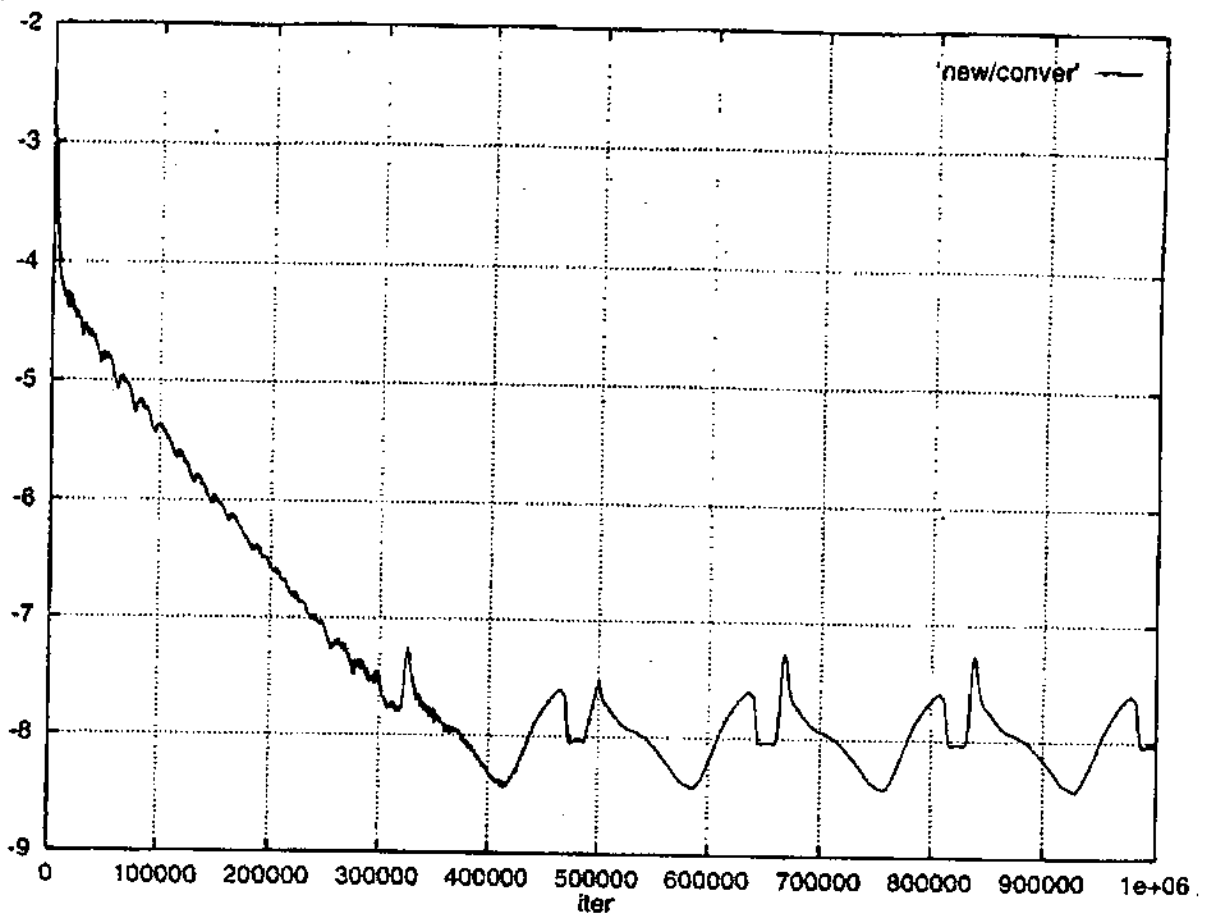
Εδώ φαίνεται η σύγκλιση του προγράμματος με το πυκνό πλέγμα.

Βλέπουμε ότι στις 1000000 επαναλήψεις το σφάλμα έχει πέσει σχεδόν 5 τάξεις μεγέθους. Βέβαια αυτό είναι λίγο σε σχέση με τις 15 που έπεσε στο πλέγμα 'gpi'. Επιπλέον η διακύμανση του σφάλματος όταν δε μπορούσε να συγκλίνει άλλο, είναι μεγαλύτερη και πιο ακανόνιστη. Αυτά μπορούν να είναι υποψίες ότι κάτι δεν πάει καλά και δεν μπορούμε να εμπιστευθούμε το αποτέλεσμα. Μπαίνουν όμως τα ερωτηματικά πότε συμβαίνει αυτό; Μπορεί να προβλεφθεί; (μάλλον όχι). Αφού υπάρχουν τόσες αβεβαιότητες πρέπει πάντα να φτάνουμε σε ακρίβεια μηχανής για να διαπιστωθούν (που σημαίνει ένα εκατομμύριο επαναλήψεις περίπου, δηλαδή στην καλύτερη περίπτωση πάνω από 10 μέρες στον ισχυρότερο υπολογιστή του Πολυτεχνείου); Μήπως υπάρχει περίπτωση κάτι να μην πάει καλά και να μην είναι ανιχνεύσιμο από τη σύγκλιση (οπότε υπάρχει πιθανότητα να χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα ως σωστό και να μην είναι); Αυτά δείχνουν ότι δεν είναι και τόσο φιλική η συμπεριφορά αυτού του προγράμματος ούτε τόσο εύκολη η χρήση του. Συγκεκριμένα για το τελευταίο ε-ρώτημα πρέπει να θυμηθούμε την περίπτωση των 0 RPM που η σύγκλιση ήταν γρήγορη, το σφάλμα έπεφτε ομαλά σε ευθεία γραμμή και όταν διακόπηκε το πρόγραμμα είχε πέσει πάνω από 6 τάξεις μεγέθους, αλλά παρόλα αυτά το  $\mu t$  ήταν ασύμμετρο αριστερά και δεξιά.

Ας σημειωθεί τέλος ότι αφού το πρόγραμμα δυσκολεύεται στο σωστό υπολογισμό του  $\mu t$  είναι καλή ιδέα να το αρχίζουμε βάζοντας το να συνεχίσει από ένα προφίλ με πολύ τυρβώδη  $\mu t$ . Για παράδειγμα ίσως ήταν καλή ιδέα να δούμε τι θα βγάλει το συγκεκριμένο πλέγμα, αν του βάλουμε έναρξη από αποτέλεσμα 30 επαναλήψεων, 0 στροφών, με  $L_{ref} = 100000$  (δε δοκιμάστηκε).

## Σχήμα 4.27

Εδώ βλέπουμε τη σύγκλιση για την περίπτωση που έγινε έναρξη με λόγο πιέσεων. Ισχύουν τα ίδια με το προηγούμενο σχήμα και βλέπουμε όμοια σύγκλιση. Το τελικό αποτέλεσμα όμως ήταν τελείως αντίθετο.



## Σχήμα 4.28.

Τώρα περνάμε στην περίπτωση των 200 RPM και βλέπουμε ότι όσο πάμε προς τα πίσω στο κανάλι πέφτει η παροχή και αυξάνουν τα πάχη των οριακών στρωμάτων. Η κλίση της ταχύτητας μέσα στο κανάλι είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στην περίπτωση 100 RPM.

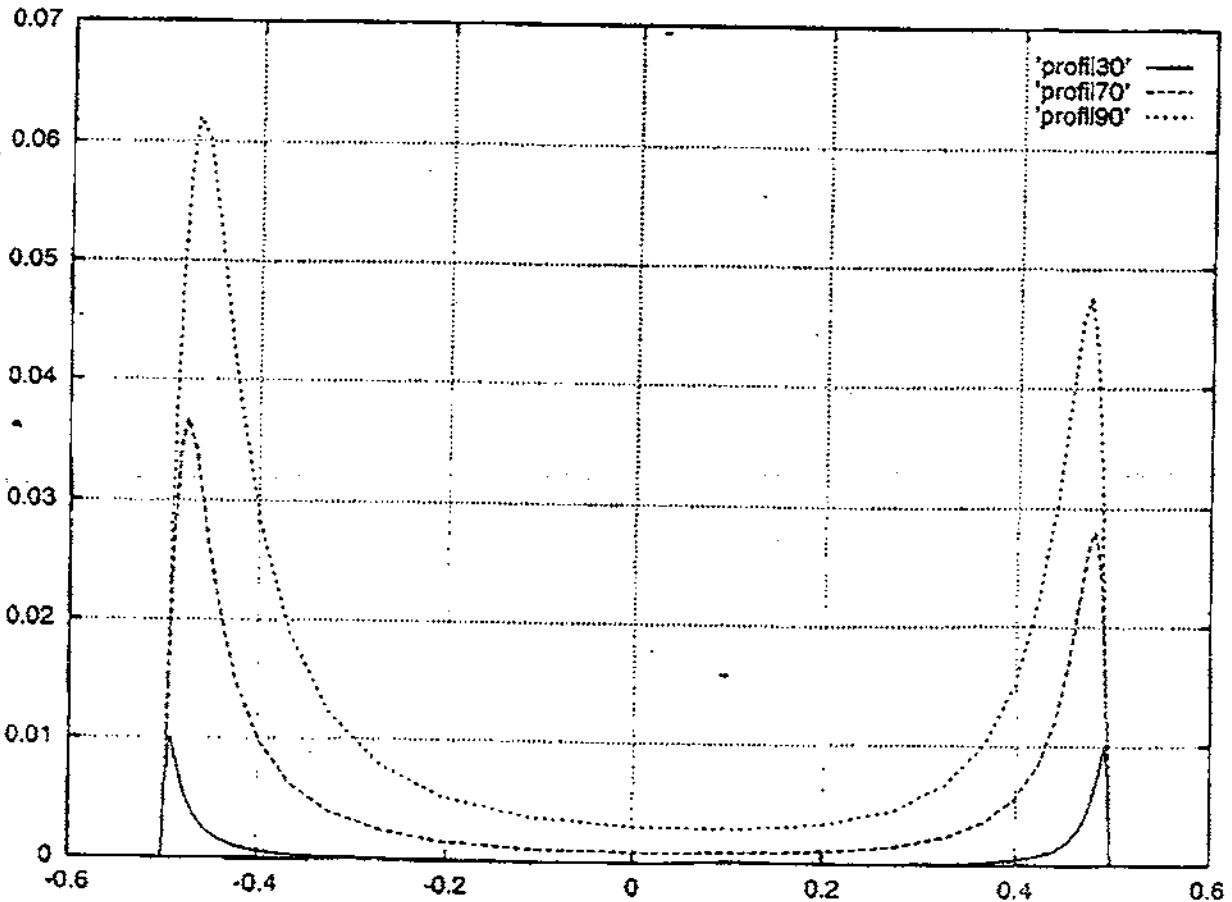
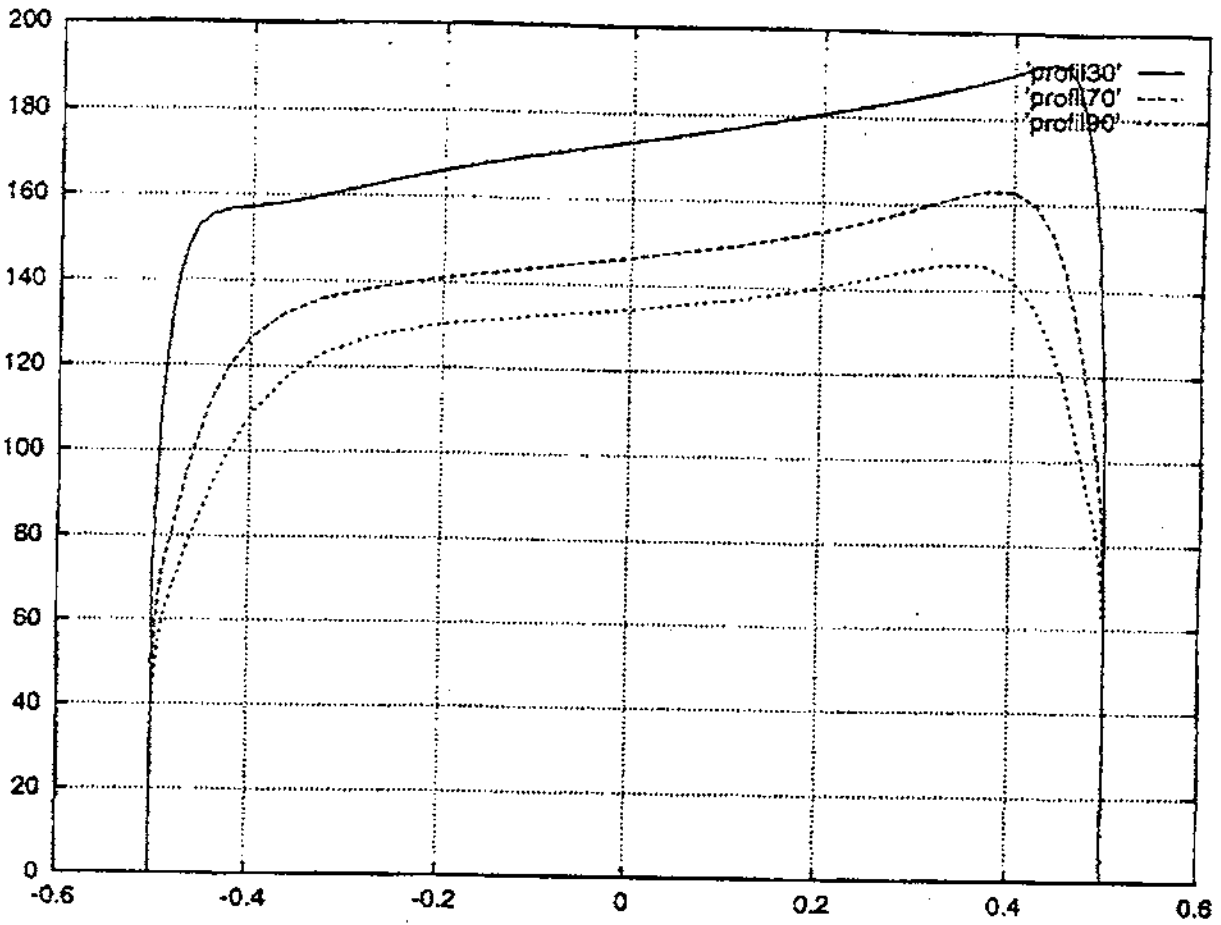
Τα προγράμματα στις 200 RPM συνέκλιναν ομαλά μέχρι μεγάλο αριθμό επαναλήψεων και το σφάλμα είχε πέσει επαρκώς. Τ' αποτελέσματα παρουσιάζονται για 100000 επαναλήψεις.

Πάλι χρησιμοποιήθηκε αρχείο έναρξης με  $L_{ref}=1$  αυτή τη φορά και δεν υπήρχε πρόβλημα. Δοκιμάστηκε έναρξη και από άλλο αρχείο (200 αντί 30 επαναλήψεων) και έδωσε ίδια αποτελέσματα.

## Σχήμα 4.29.

Φαίνονται τα προφίλ της τυρβώδους συνεκτικότητας όσο προχωράμε προς τα πίσω, για την περίπτωση χωρίς διόρθωση εννοείται. Είναι περίπου όμοια γεωμετρικά και στα επόμενα σχήματα συγκρίνονται τα προφίλ στο 70% του καναλιού.

Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα δείχνει πιο γρήγορη αύξηση του οριακού στρώματος στην πλευρά υπερπίεσης.



## Σχήμα 4.30.

Το σχήμα αυτό δείχνεται ως παράδειγμα σχετικό με την επίδραση του φίλτρου και το ποια είναι η κατάλληλη επιλογή φίλτρου.

Εδώ έγινε προσπάθεια να εφαρμοστεί η διόρθωση του Bradshaw ακριβώς όπως είχε εφαρμοστεί πριν για τις 100 RPM και τ' αποτελέσματα ήταν αυτά που φαίνονται. Η διόρθωση δεν έδινε στην πλευρά υπερπίεσης αύξηση τύρβης. Το ίδιο και όταν διπλασιάστηκε. Όμως, είχε πολλές διακυμάνσεις των τιμών μέσα στο οριακό στρώμα, άρα ήταν φανερό ότι πήγαινε να δημιουργηθεί κάποια διαφορά στο  $\mu$ , αλλά κοβόταν απ' το φίλτρο. Δεδομένου και ότι στην περίπτωση αυτή η διόρθωση αναμενόταν μεγαλύτερη από τις 100 RPM λόγω υπερδιπλασιασμού του  $Ro$ , έπρεπε το φίλτρο να είναι πιο χαλαρό. Η τελική επιλογή ήταν ν' αλλάξει μόνο το φίλτρο στην πλευρά υπερπίεσης (στην πλευρά υποπίεσης πιο χαλαρό φίλτρο δεν έδινε καλά αποτελέσματα), που έγινε ως εξής:

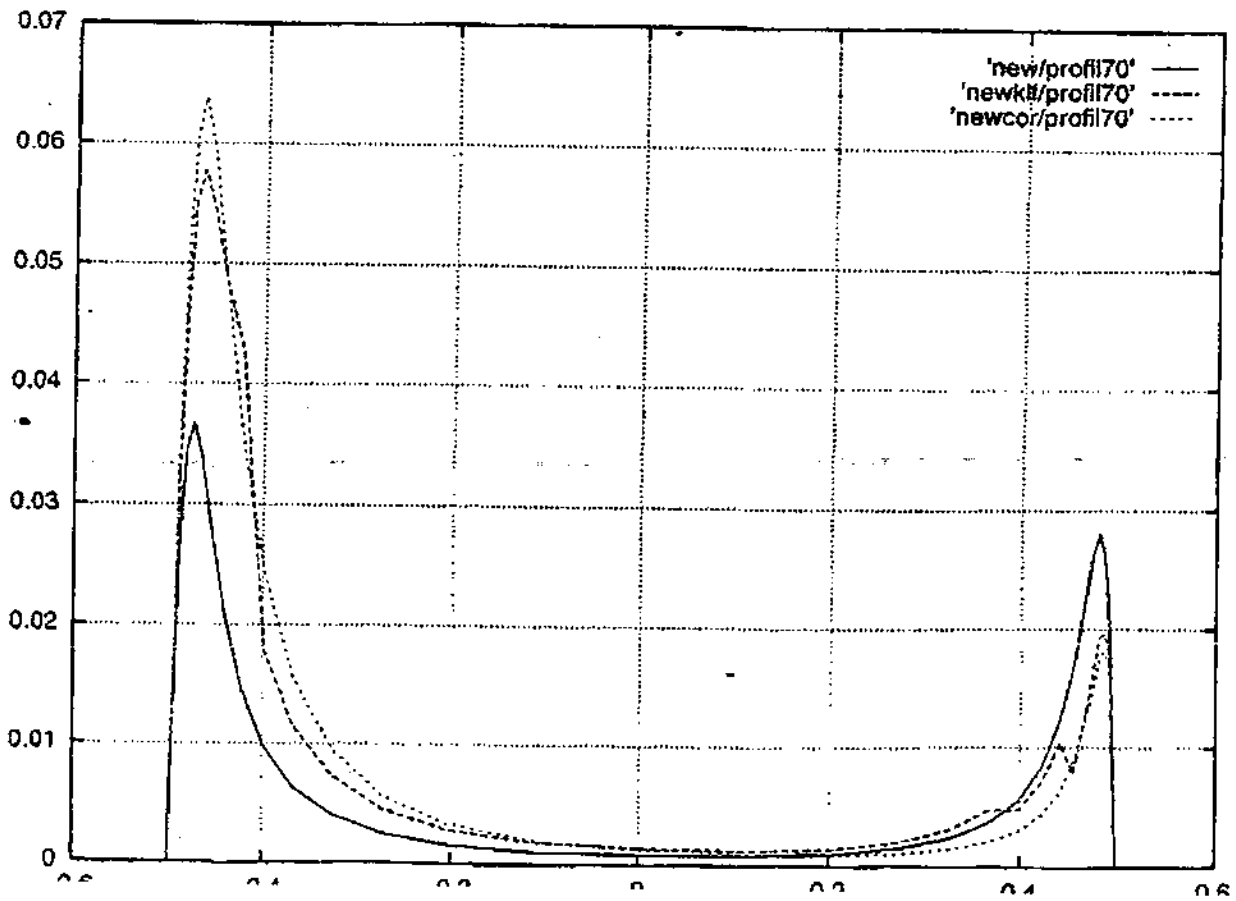
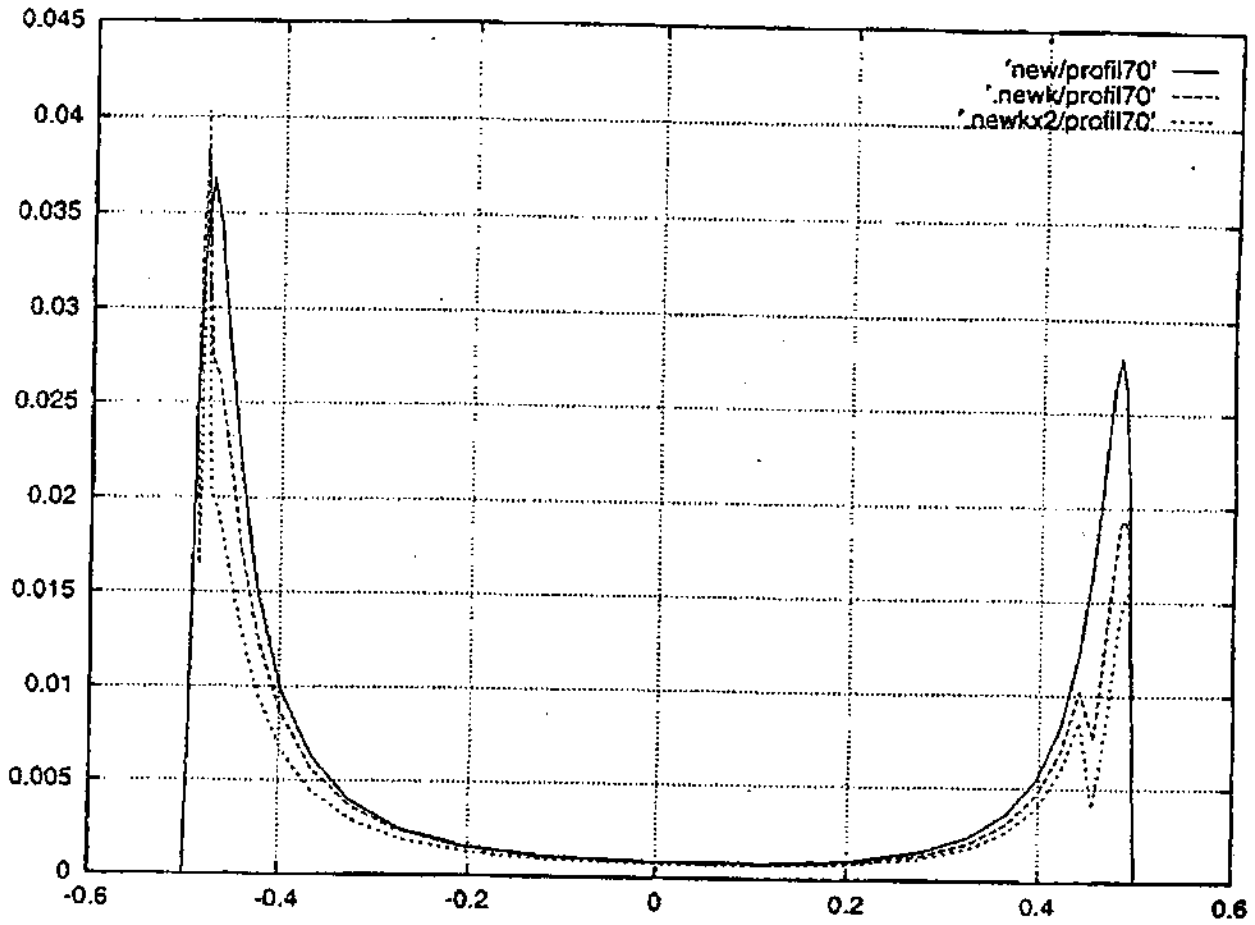
«Αν το  $\mu$  πήγαινε να περάσει την τιμή  $2,5\mu\text{m}$ , η τιμή σταθεροποιούνταν στην  $1,5\mu\text{m}$ ».

Τα επόμενα διαγράμματα είναι μ' αυτό το φίλτρο και το πρόγραμμα στο οποίο μπήκε ονομάστηκε 'newklf (απ' το loose filter).

## Σχήμα 4.31.

Βλέπουμε σύγκριση των διορθώσεων του Bradshaw και του  $G_c$ . Κατ' αρχήν ας παρατηρήσουμε τη μεγαλύτερη διόρθωση που γίνεται στις 200 RPM σε σχέση με το σχ. 4.8 που αφορά 100 RPM. Όσο αυξάνει η ταχύτητα περιστροφής, η επίδραση της Coriolis στην τύρβη γίνεται πιο σημαντική. Η μεγαλύτερη επίδραση ήταν που ανάγκασε και την αλλαγή του φίλτρου. Ευκαιρία να θυμηθούμε ότι η διόρθωση του Bradshaw έχει ένα περιορισμένο εύρος εφαρμογής και σε πολύ μεγάλα  $Ro$  δεν ισχύει. Η περίπτωση μας όμως είναι μέσου  $Ro$ , αφού αυτό είναι περίπου 0,05 στο 70% του καναλιού.

Πάλι οι διορθώσεις του Bradshaw και του  $G_c$  είναι αρκετά κοντά. Σε απόλυτη τιμή του  $\mu$  η απόστασή τους έχει αυξηθεί σε σχέση με την περίπτωση των 100 RPM. Ας παρατηρήσουμε κοντά στην πλευρά υποπίεσης και ένα δεύτερο σκαλί λόγω του νέου φίλτρου (στο δεύτερο σκαλί η τιμή πάει απ' το  $1,5\mu\text{m}$  στο  $1,0\mu\text{m}$ ).



## Σχήμα 4.32.

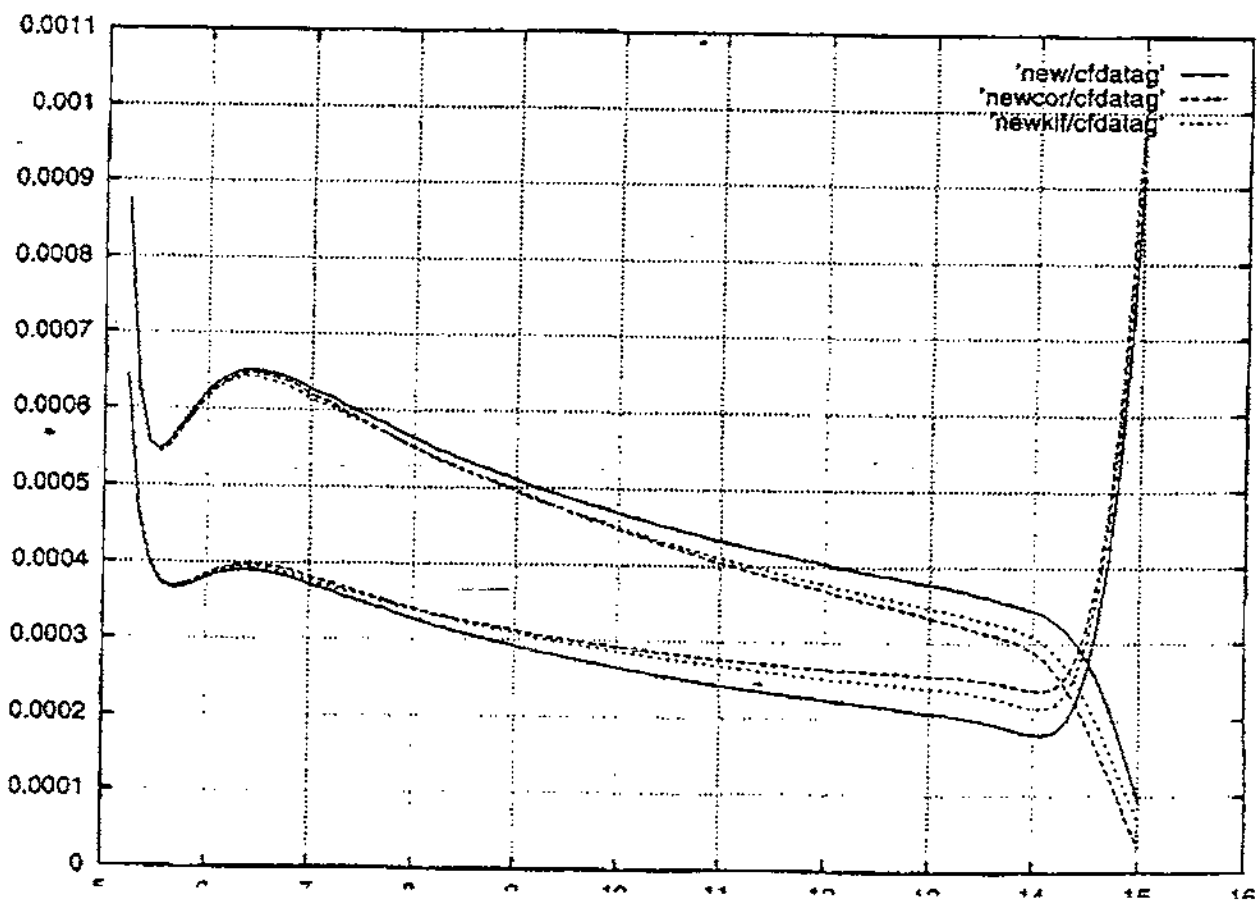
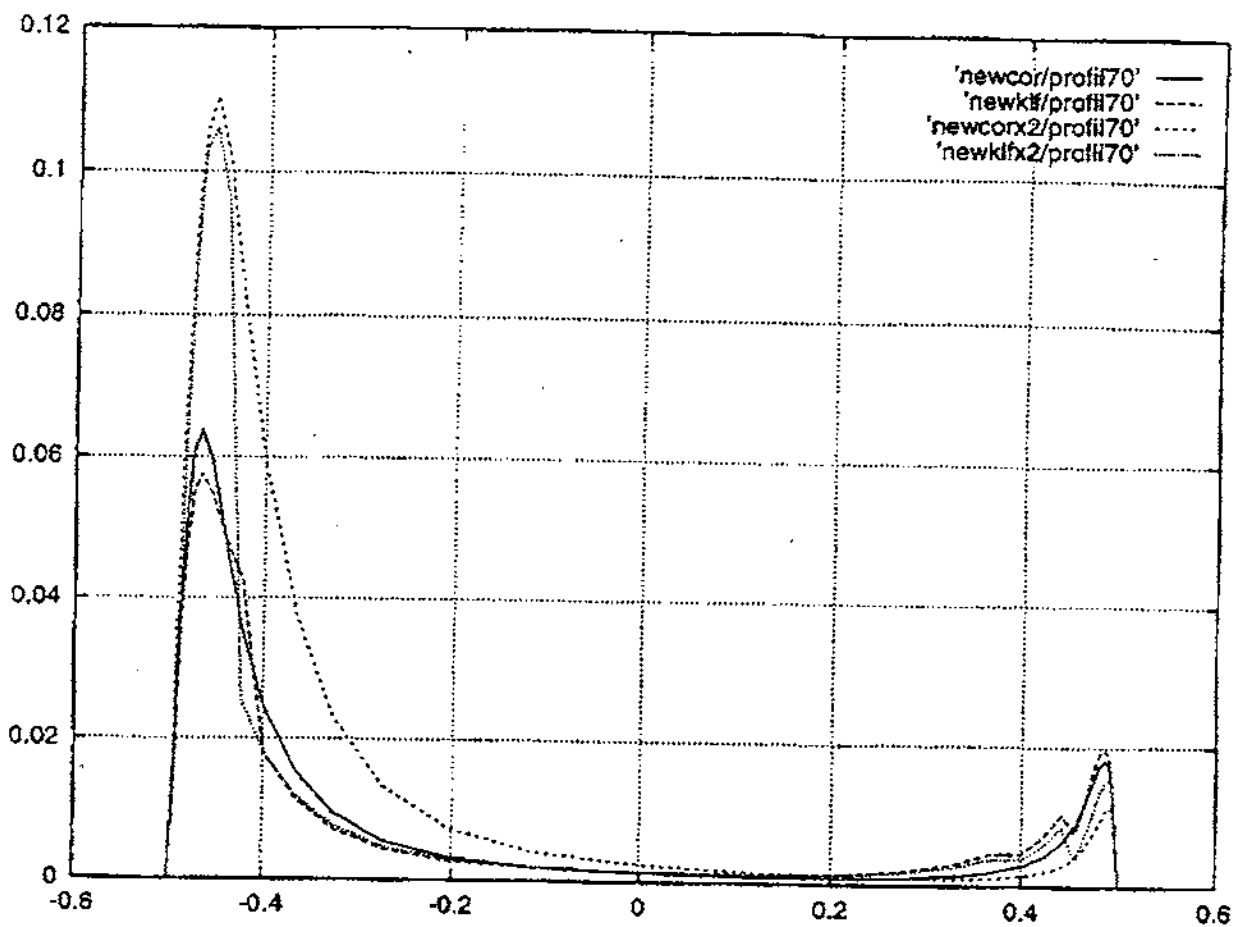
Πάλι δοκιμάστηκε εικονικός διπλασιασμός της γωνιακής ταχύτητας μέσα στη διόρθωση και τ' αποτελέσματα φαίνονται στο απέναντι σχήμα.

Διαπιστώθηκαν τα ίδια που είχαν διαπιστωθεί και για τις 100 RPM, ότι υπάρχει προφανώς εξάρτηση, και η αύξηση της διόρθωσης είναι ανάλογη του πολλαπλασιαστή της γωνιακής ταχύτητας. Εδώ και στη διόρθωση του Bradshaw ο συντελεστής αναλογίας είναι πάνω από 1 (ενώ στις 100 RPM αυτό συνέβαινε μόνο για τη διόρθωση του  $G_c$ ).

Ακόμη βλέπουμε ότι στην πλευρά υποπίεσης έχει αυξηθεί σημαντικά η διαφορά των δύο διορθώσεων μετά τον εικονικό πολλαπλασιασμό της γωνιακής ταχύτητας.

## Σχήμα 4.33.

Βλέπουμε τι συντελεστή τριβής δίνουν οι δύο διορθώσεις κατά μήκος του καναλιού. Επιδρούν περισσότερο απ' ότι στην περίπτωση των 100 RPM και η απόσταση μεταξύ τους έχει αυξηθεί. Φαίνεται καθαρά ότι η διόρθωση του  $G_c$  διορθώνει περισσότερο. Ακόμη, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η επίδραση και των δύο διορθώσεων στη μία και στην άλλη πλευρά είναι περίπου ίσες.





Σχήμα 4.34.

Το σχήμα αυτό αφορά την περίπτωση των 100 RPM, πλέγμα 'gr1', πρόγραμμα χωρίς διόρθωση.

Φαίνεται η αρχή της σύγκλισης με διαφορετικούς τρόπους εκκίνησης του προγράμματος. Τα 1c, 2c, 3c είχαν  $L_{ref}=1$  και διαφορετικές επαναλήψεις με 0 RPM (7, 30, 500) και έδωσαν ίδια αποτελέσματα και περίπου ίδιο ρυθμό σύγκλισης. Το new είναι η γνωστή μας περίπτωση με  $L_{ref}=100$  και έδωσε ταχύτερο ρυθμό σύγκλισης λόγω της έναρξης από σωστά προφίλ με (τυρβώδη δηλαδή) και το 4c αφορά έναρξη από το αποτέλεσμα των 200 RPM. Αυτό είχε ακόμη ταχύτερο ρυθμό σύγκλισης, κατά πάσα πιθανότητα επειδή ήταν ακόμη περισσότερο τυρβώδη τα προφίλ με.

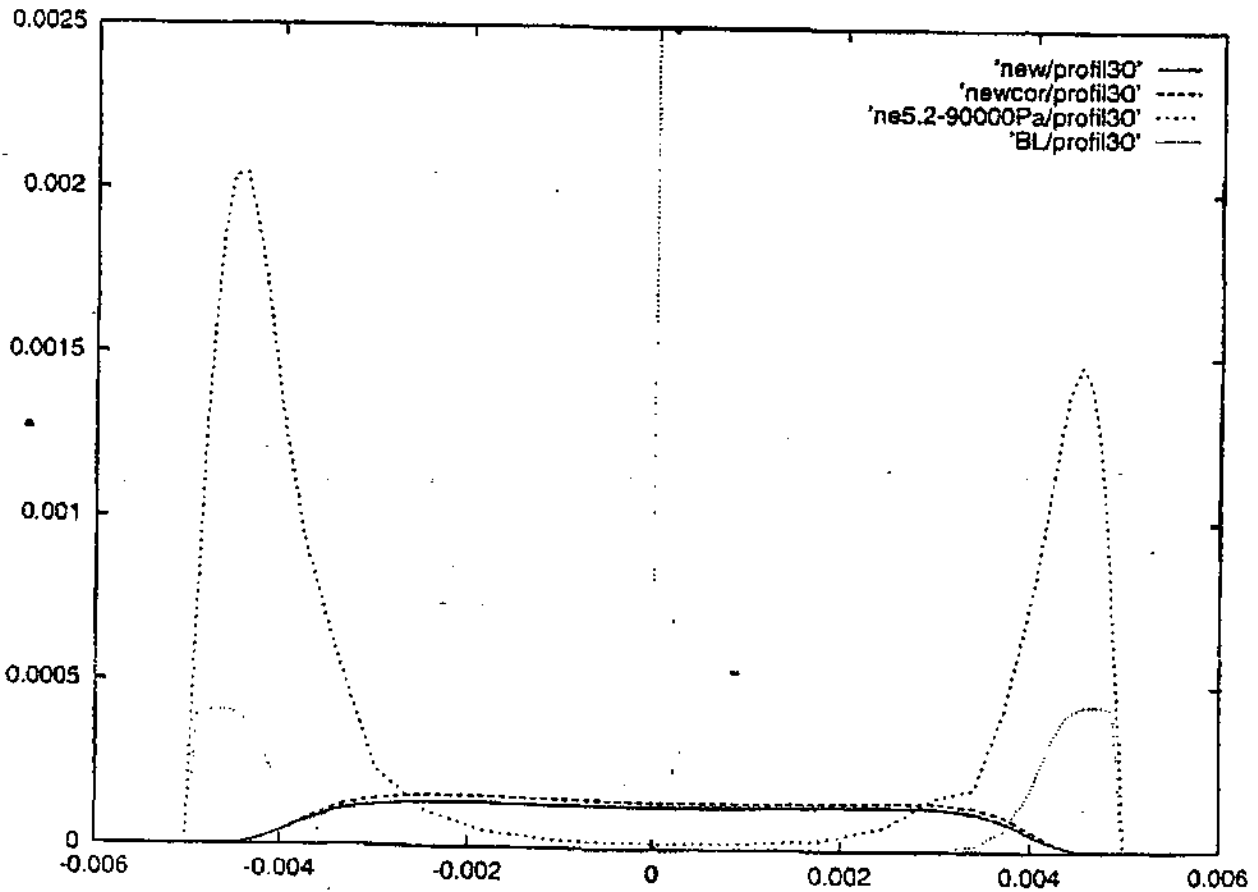
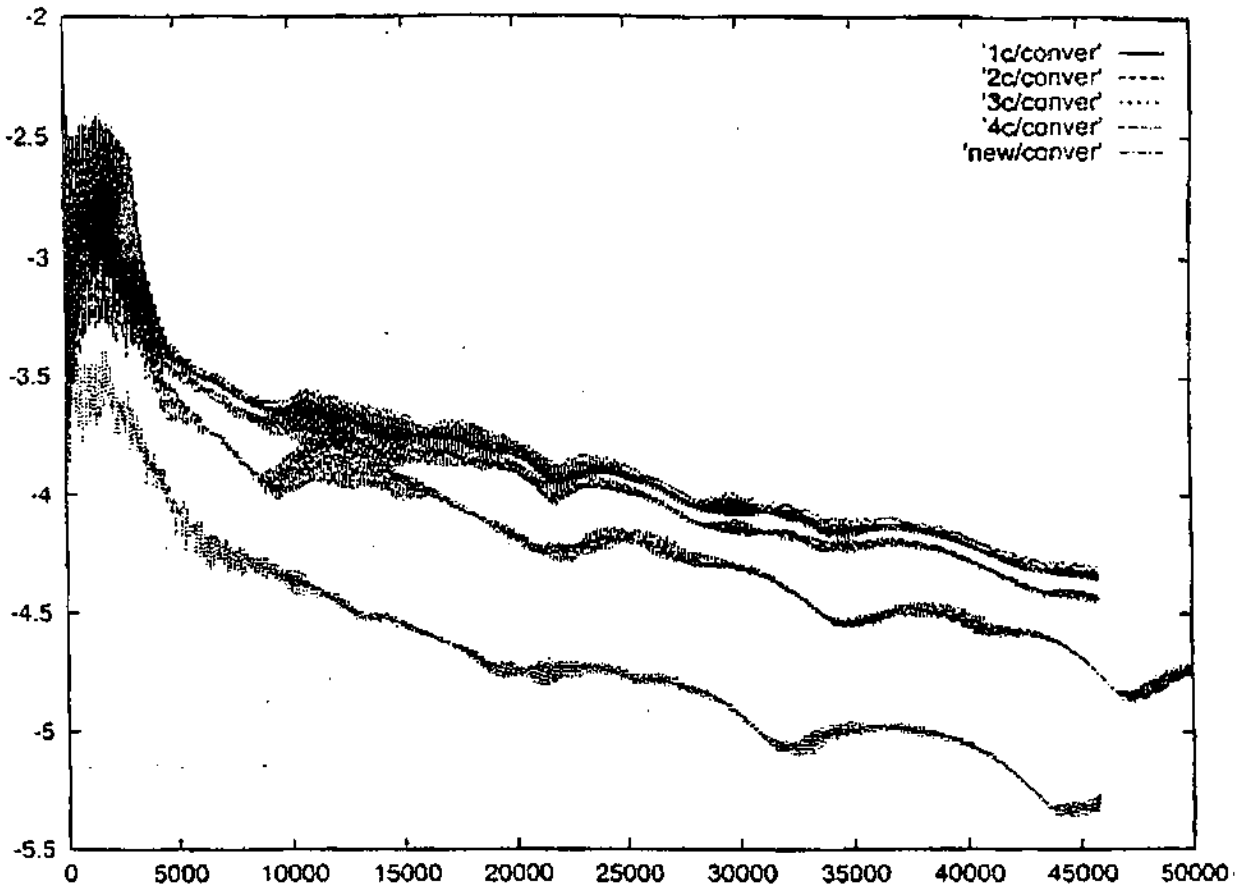
Βλέπουμε ότι το αρχείο απ' το οποίο θα συνεχιστούν οι υπολογισμοί παίζει ρόλο. Αυτό διαπιστώθηκε και γενικότερα. Προτείνεται για έναρξη αρχείο αποτελεσμάτων που θα έχει πολύ μεγάλες τιμές με μέσα στο οριακό στρώμα.

Σχήμα 4.35.

Εδώ βλέπουμε το μικρό κανάλι των 10 εκατοστών, όπως μπορούμε να καταλάβουμε από τον άξονα  $y$ . Το ne 5.2 είναι με διόρθωση του Bradshaw στην πρώτη δύναμη και φίλτρο στην κλίση ταχύτητας (τέτοιο ώστε να μην αφήνει να δρα η διόρθωση έξω από το οριακό στρώμα-συγκεκριμένα αν η κλίση της ταχύτητας γίνει μικρότερη από 20000).

Βλέπουμε ότι χωρίς διόρθωση (αλλά και με τη διόρθωση του  $G_0$ ), το με είναι μηδέν στα οριακά στρώματα, δηλαδή η ροή είναι στρωτή. Το μοντέλο Baldwin-Lomax πάντα βγάζει εκ κατασκευής τυρβώδη προφίλ σαν κι αυτά που φαίνονται στο σχήμα.

Το περίεργο είναι που με τη διόρθωση του Bradshaw τα προφίλ βγαίνουν τυρβώδη, ενώ λόγω της ύπαρξης του φίλτρου δε θα έπρεπε να υπάρχει μεγάλη διαφορά απ' την περίπτωση χωρίς διόρθωση. Αυτό είναι ανεξήγητο και ίσως να εμπίπτει κι αυτό στην απρόβλεπτη συμπεριφορά του προγράμματος. Τέλος πάντων, αυτή η περίπτωση του μικρού καναλιού εγκαταλείφθηκε αφού έβγαζε άχρηστα αποτελέσματα.



Σχήμα 4.36.

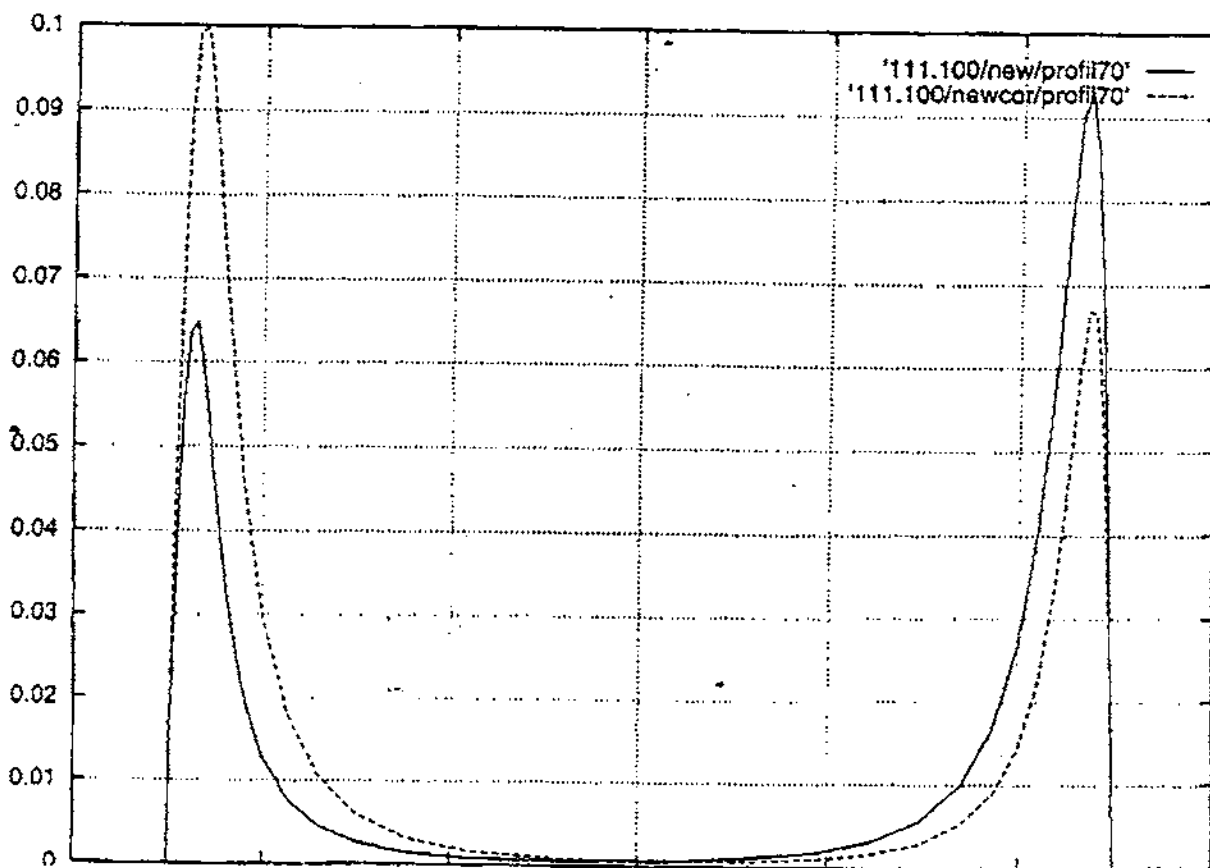
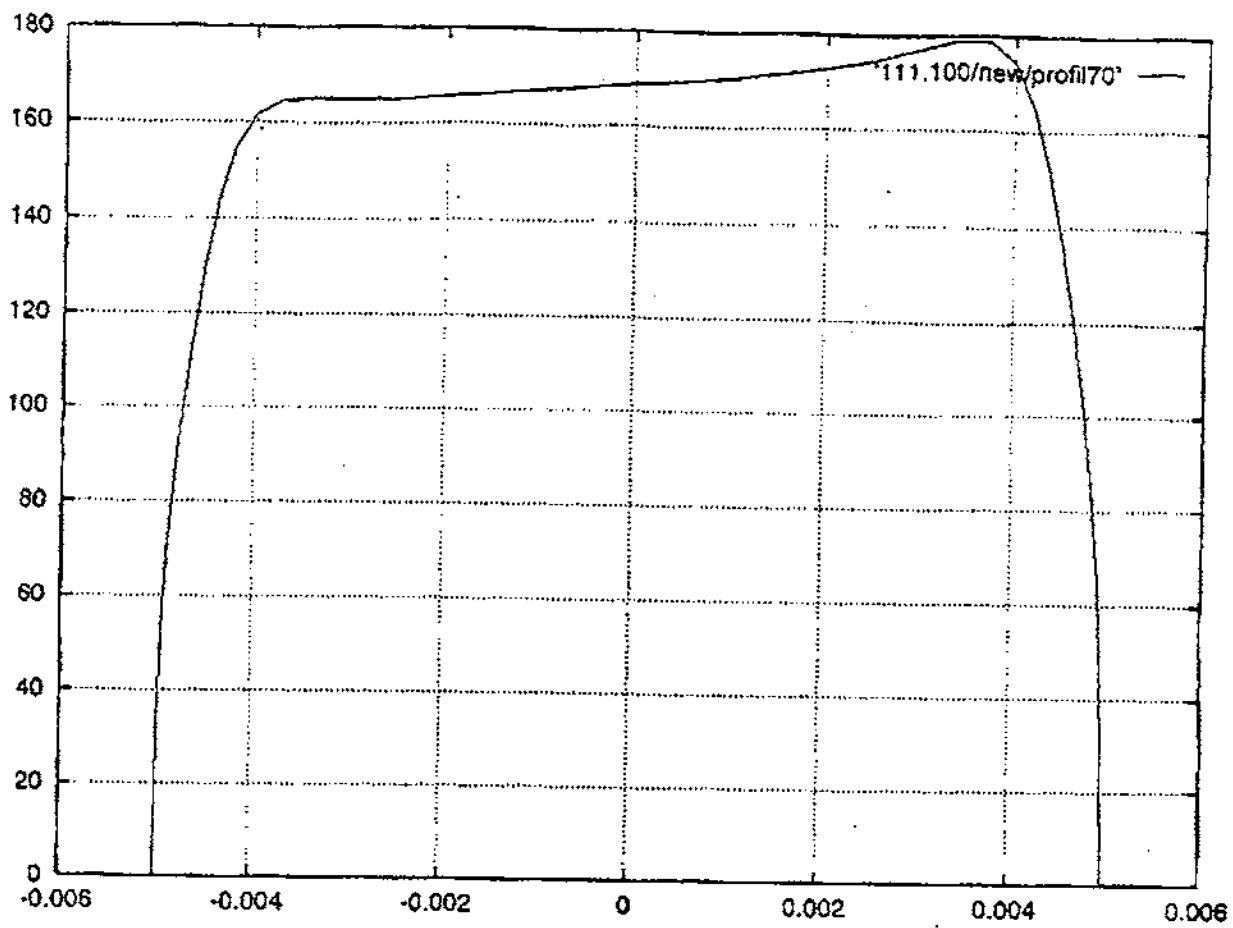
Το '111.100' αναφέρεται στο παλιό πλέγμα grid (100x41 σημεία). Στην αρχή χρησιμοποιήθηκε αυτό για το μεγάλο κανάλι κι έδωσε το δυσιανό αποτέλεσμα. Ο άξονας y είναι του μικρού καναλιού γιατί είχε χρησιμοποιηθεί το δικό του πλέγμα με  $L_{ref}=100$ .

Συγκρίνοντας π.χ. με την συνεχή γραμμή του σχ. 4.20 βλέπουμε ότι στο αραιό πλέγμα τα οριακά στρώματα είναι πιο μεγάλα. Το πλέγμα αυτό ήταν πολύ αραιό λυιτόν και δεν έδινε ακριβή αποτελέσματα. Σε γενικές γραμμές πάντως όσο πυκνώνει το πλέγμα μικραίνουν τα οριακά στρώματα μέχρι να φτάσουμε σε ανεξαρτησία πλέγματος, οπότε πλέον δεν υπάρχουν (σημαντικές) αλλαγές.

Σχήμα 4.37

Στο αραιό πλέγμα είχε δοκιμαστεί μεταξύ άλλων και η διόρθωση Coriolis. Φυσικά δούλεψε προς τη σωστή κατεύθυνση και στο συγκεκριμένο προφίλ βλέπουμε ότι ενώ χωρίς διόρθωση είναι μεγαλύτερο το  $\mu t$  στην πλευρά υποπίεσης, με διόρθωση είναι μεγαλύτερο (και μάλιστα συμμετρικά) στην πλευρά υπερπίεσης.

Συγκρίνοντας π.χ. με το σχ. 4.8 έχουμε ότι το  $\mu t$  με το αραιό πλέγμα είναι μεγαλύτερο πάνω από δύο φορές ασχέτως αν έχουμε βάλει διόρθωση ή όχι. Γενικά όσο πυκνώνει το πλέγμα τόσο μικρότερο  $\mu t$  βγαίνει, μέχρι ν' αποκτηθεί ανεξαρτησία πλέγματος. Επιπλέον βλέπουμε ότι στο αραιότερο πλέγμα υπάρχει μεγαλύτερη επίδραση της διόρθωσης. Τέλος, βλέπουμε ότι στην περίπτωση χωρίς διόρθωση, στο αραιότερο πλέγμα είναι το  $\mu t$  μεγαλύτερο στην πλευρά υποπίεσης ενώ στο πυκνότερο στην πλευρά υπερπίεσης. Αν υποθέσουμε ότι αυτή η συμπεριφορά συνεχίζεται και για τα πυκνότερα πλέγματα, θα περιμέναμε σε ένα πυκνότερο πλέγμα να είναι μικρότερα τα  $\mu t$  και στις δύο πλευρές, με αυτή της υποπίεσης σε ακόμη μεγαλύτερη μείωση. Έτσι θα μπορούσε κάποιος να προβλέψει ότι στην περίπτωση του πολύ πυκνού πλέγματος grid-moredens ο κίνδυνος να βγει σε κάποια πλευρά το  $\mu t$  μηδενικό υπάρχει για την πλευρά υποπίεσης περισσότερο απ' ότι για την πλευρά υπερπίεσης. Το γιατί όμως υπάρχει η συγκεκριμένη συμπεριφορά με την πυκνωση των πλεγμάτων δεν είναι γνωστό.



## Σχήμα 4.38.

Το σχήμα αυτό και τα επόμενα 5 μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, αφορούν περίπτωση που έγινε η έναρξη του προγράμματος από το λόγο πίεσεων (και 100 RPM με το πλέγμα gri, χωρίς διόρθωση).

Απ' την αρχή που χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα είχε επιλεγεί και χρησιμοποιούνταν ο τρόπος έναρξης με το Max. Κάποια δοκιμή που δοκιμάστηκε ο τρόπος έναρξης με το λόγο πίεσεων, διαπιστώθηκε το εξής συνταρακτικό: έδινε άλλα αποτελέσματα. Αυτό είναι σημαντικό, γιατί υποτίθεται ότι η έναρξη δεν παίζει κανένα ρόλο πέρα από μερικές αρχικές επαναλήψεις.

Πιο συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα για το προφίλ ταχύτητας ήταν αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα (newpp). Συγκρίνοντας με την περίπτωση έναρξης από το Max, βλέπουμε ότι στη μια πλευρά υπάρχει απόλυτη ταύτιση και στην άλλη τα προφίλ ταχύτητας είναι εντελώς διαφορετικά.

Ο λόγος πίεσεων που χρησιμοποιήθηκε ως δεδομένο είναι 1,28, τιμή που είναι πολύ κοντά στην πραγματική τελική τιμή.

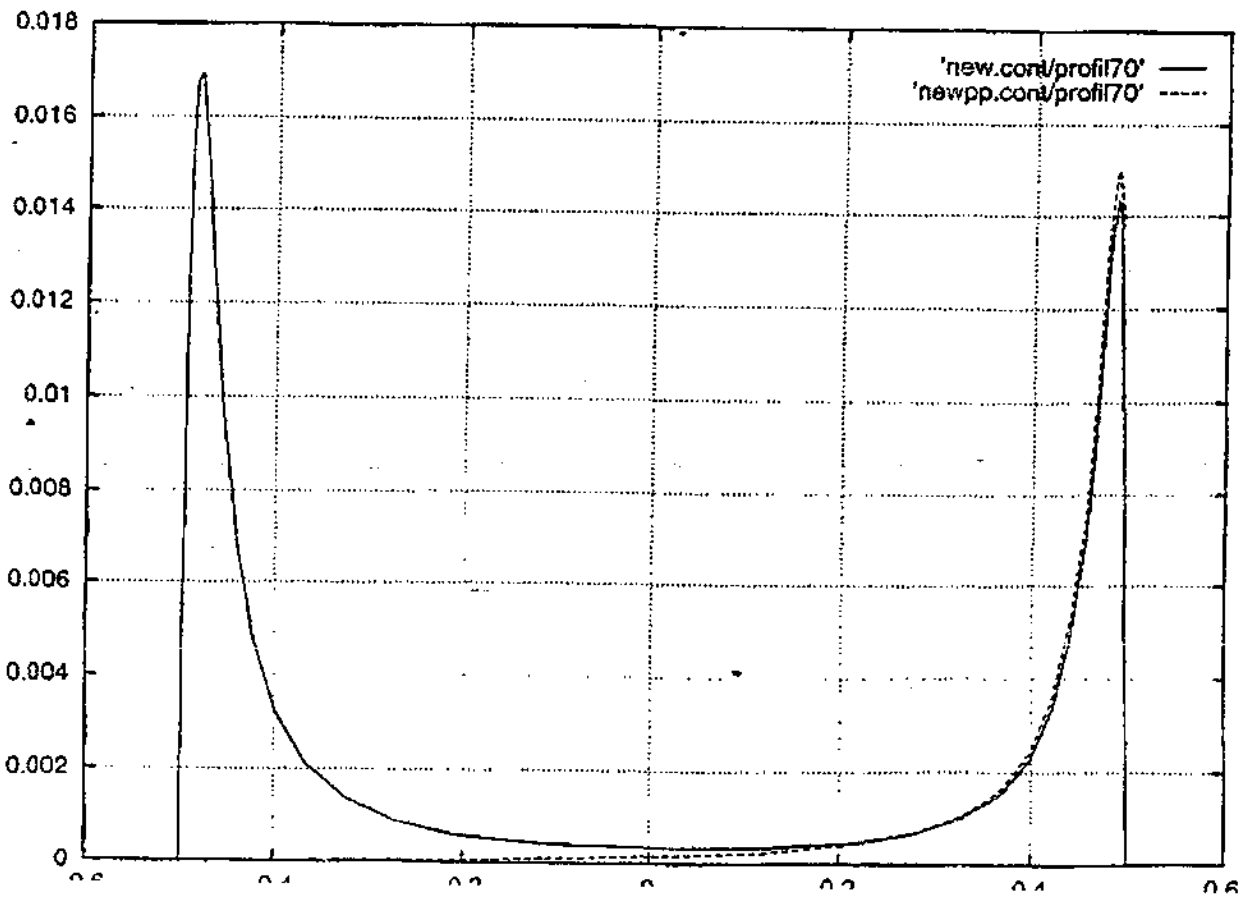
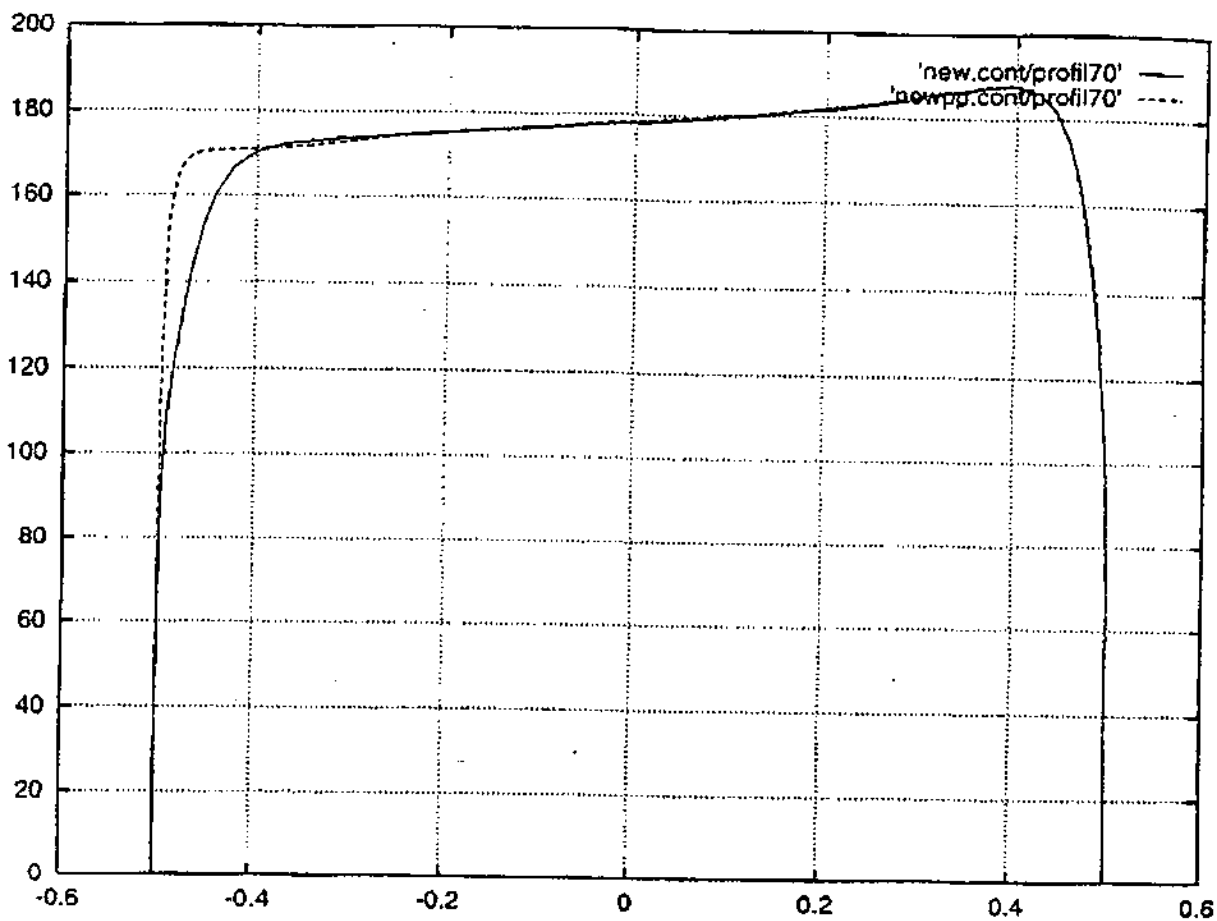
## Σχήμα 4.39.

Εδώ φαίνεται γιατί συμβαίνει αυτό που είδαμε στο προηγούμενο σχήμα. Φταίνε οι τιμές του  $\mu t$ , και συγκεκριμένα στη λάθος πλευρά το  $\mu t$  είναι μηδέν.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δύο προγράμματα έτρεξαν στην αρχή για 50000 επαναλήψεις και μετά έγινε συνέχεια από κει που είχαν μείνει. Όταν γίνεται επανεκκίνηση του προγράμματος από προηγούμενο αρχείο αποτελεσμάτων, δεν δίνονται πάλι δεδομένα στην είσοδο, οπότε το πρόγραμμα δε μπορούσε να ξέρει από ποιο τρόπο έναρξης είχε αρχίσει το κάθε αρχείο αποτελεσμάτων. Παρόλα αυτά συνεχίζοντας από το ένα και από το άλλο αρχείο βγήκαν διαφορετικά αποτελέσματα.

Η μόνη άλλη περίπτωση που εξετάστηκε με λόγο πίεσης εξόδου προς είσοδο ήταν αυτή του gri-moredens (π.χ. σχ. 4.22) που πάλι έδωσε στην πλευρά υπερπίεσης στρωτή ροή.

Το σημαντικό είναι ότι στην περίπτωση αυτού του σχήματος, το σφάλμα έχει πέσει πολύ και δε φαίνεται κάτι πολύ στραβό από τη σύγκλιση. Εκτός πια και αν πρέπει να έχουμε πτώση του σφάλματος πάνω από δέκα τάξεις μεγέθους για να ξέρουμε (;) ότι όλα πάνε καλά.

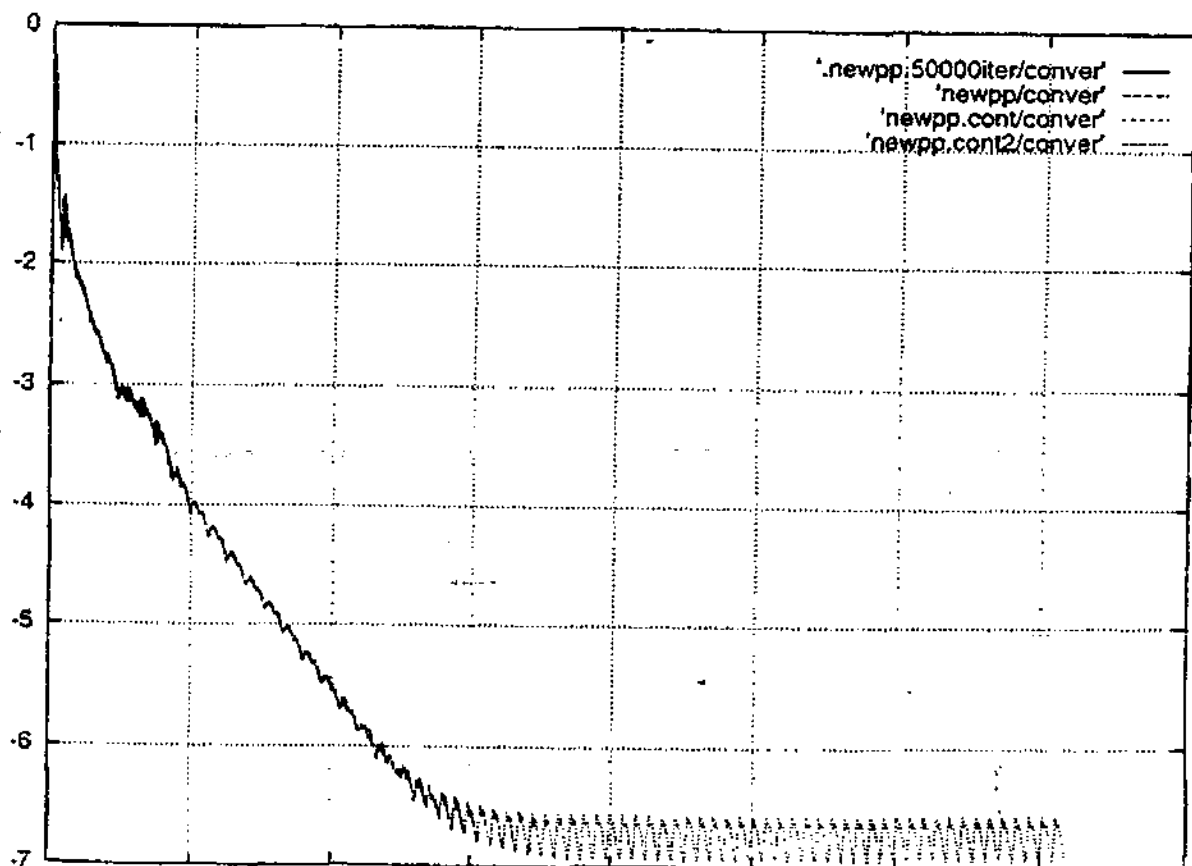
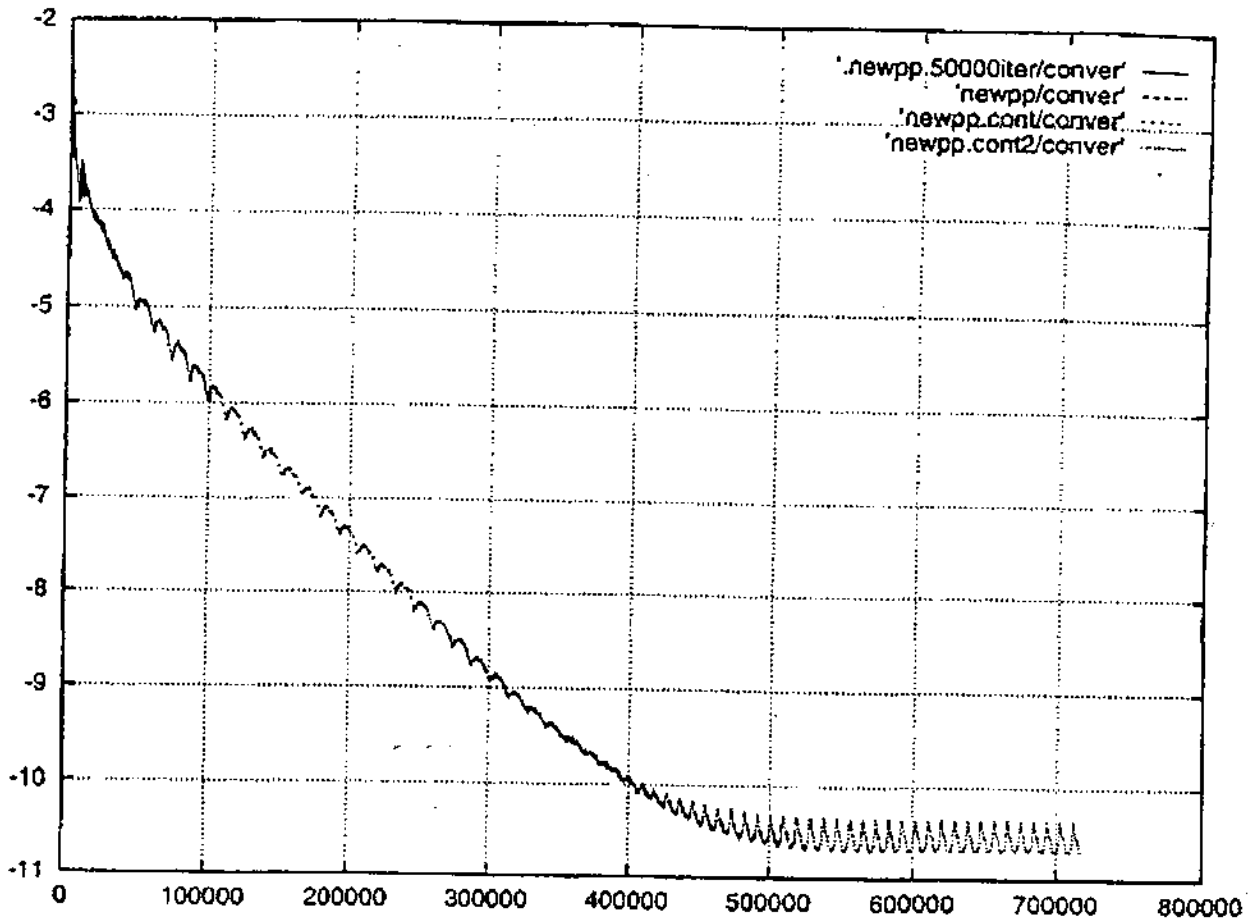


Σχήμα 4.40.

Παρουσιάζεται η σύγκλιση για την περίπτωση έναρξης από λόγο πιέσεων. Μετά τις 500000 επαναλήψεις έπαψε να πέφτει το σφάλμα. Συνολικά έπεσε πάνω από 7 τάξεις μεγέθους, αλλά τελικά το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. Αυτό κάνει εντύπωση, γιατί η περίπτωση των 100 στροφών με το πλέγμα gr1 ήταν η πιο σταθερή και σωστή με τα πιο αποδεκτά και αξιόπιστα αποτελέσματα από όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν επί ενάμιση χρόνο. Παρόλα αυτά, αλλάζοντας απλά τον τρόπο έναρξης του προγράμματος με ένα ισοδύναμο τρόπο έναρξης δημιουργήθηκε στρωτή ροή στη μια μεριά, πράγμα που σημαίνει προβληματική συμπεριφορά του προγράμματος.

Σχήμα 4.41.

Εδώ παρουσιάζεται το σφάλμα της εξίσωσης του  $\epsilon$  για την ίδια περίπτωση. Βλέπουμε ότι σταμάτησε να πέφτει στις 300000 επαναλήψεις και μάλιστα η διακύμανση της εξίσωσης του  $\epsilon$  πέρασε τελικά με όμοια μορφή στις άλλες εξισώσεις (π.χ. της συνέχειας, που φαίνεται στο πάνω σχήμα). Γενικά σε όλες τις περιπτώσεις πρώτη παύει να συγκλίνει η εξίσωση του  $\epsilon$ .





## Σχήμα 4.42.

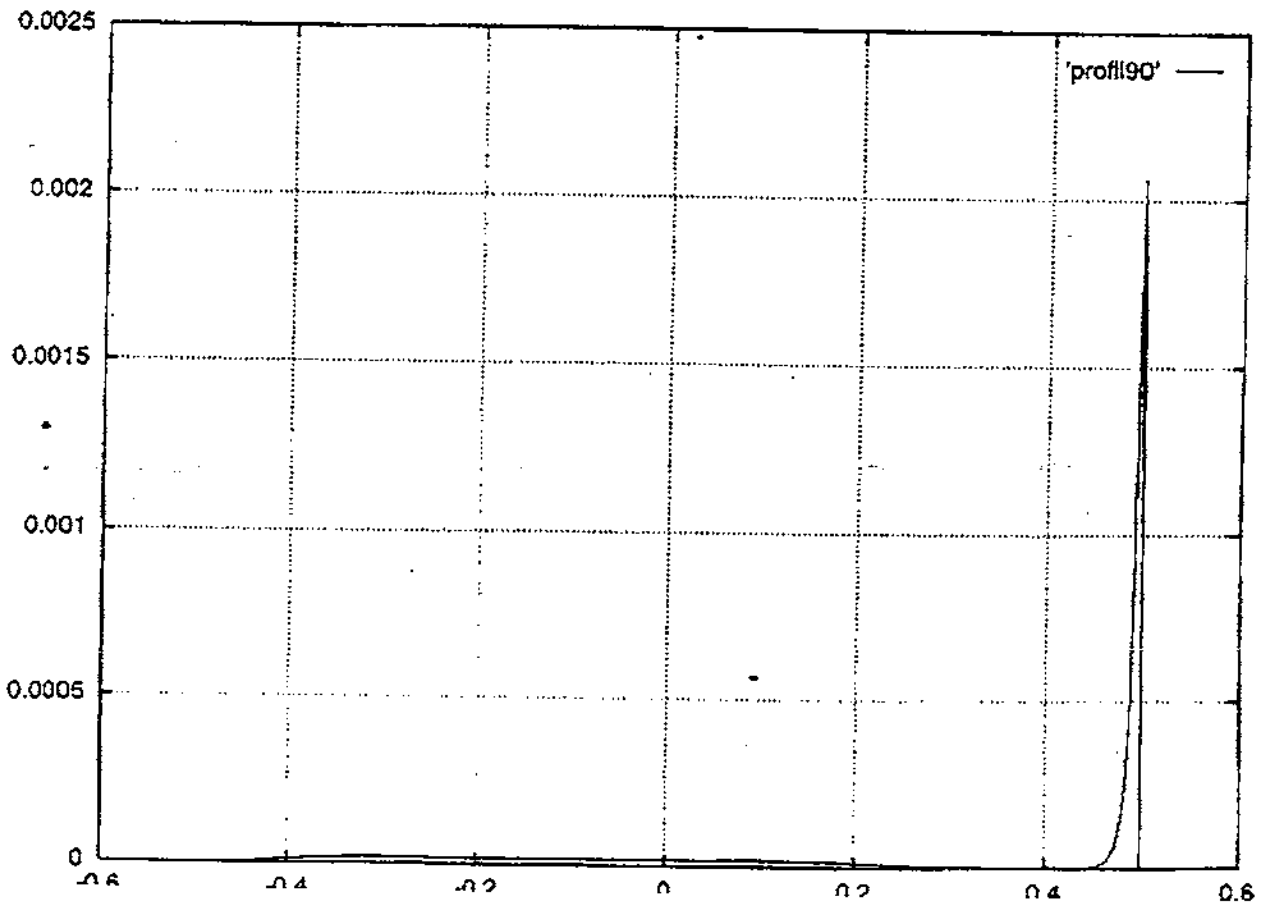
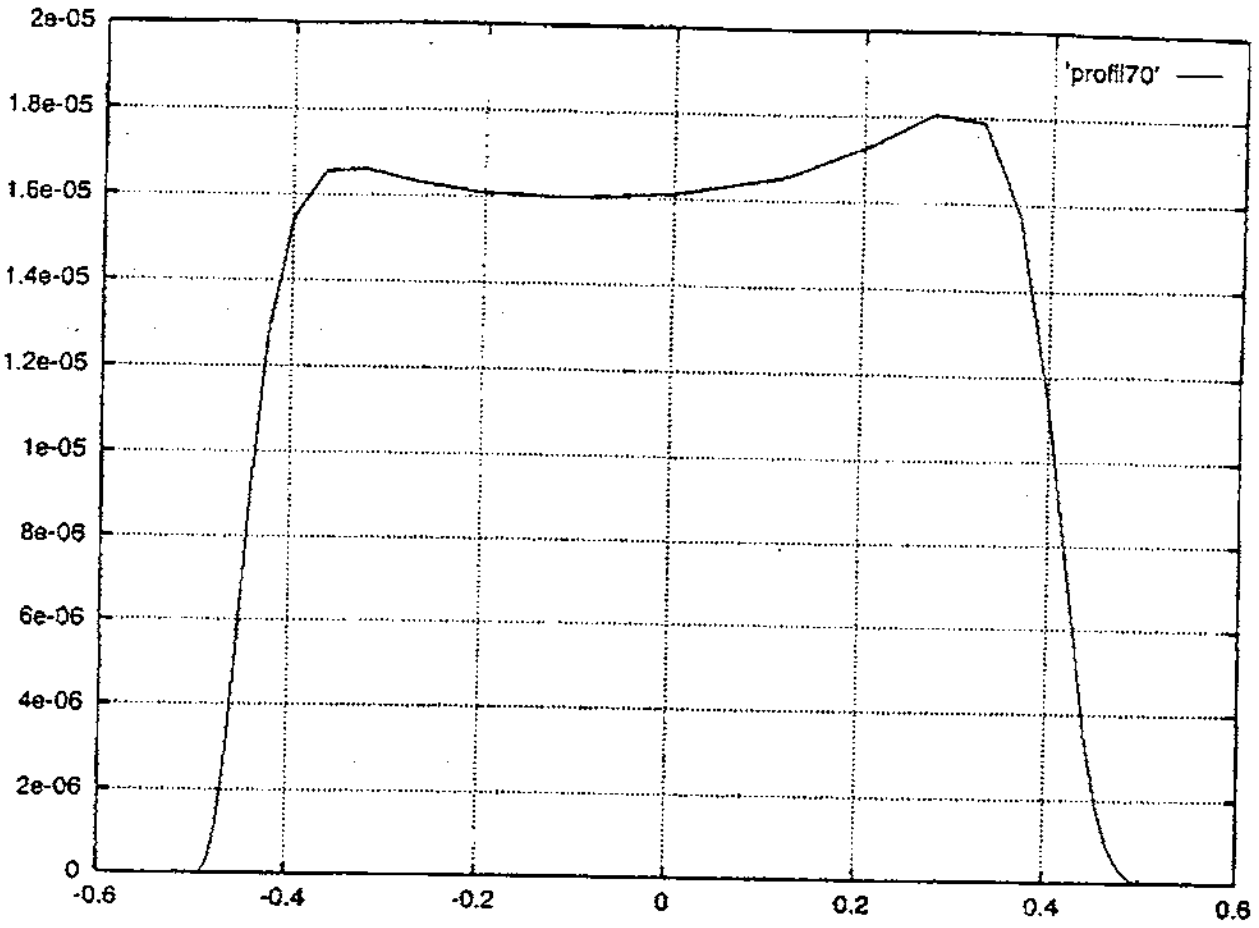
Το σχήμα αυτό και το επόμενο έχουν μπει μήπως και πάρουμε κάποια πληροφορία παραπάνω σχετικά με το γιατί και πώς μπορεί να κάνει λάθος το πρόγραμμα στον υπολογισμό του μή στη μία πλευρά.

Αφορούν περίπτωση έναρξης από λόγο πιέσεων, όμοια με τα αμέσως προηγούμενα σχήματα, μόνο που εδώ οι επαναλήψεις είναι 50000.

Στο απέναντι σχήμα βλέπουμε ότι στις 50000 επαναλήψεις έχουμε ακόμη στρωτή ροή. Στην περίπτωση αυτή το πρόγραμμα παρουσιάζει προφίλ αυτής της μορφής. Αν δούμε τις τιμές βλέπουμε ότι είναι πολύ χαμηλές: μέσα στο κανάλι είναι περίπου  $1,7 \cdot 10^{-5}$ , όσο είναι στη στρωτή ροή.

## Σχήμα 4.43.

Πηγαίνοντας όμως στην ίδια επανάληψη προς τα πίσω στο κανάλι, βλέπουμε μόλις 20 κόμβους πίσω να έχει αρχίσει το προφίλ να γίνεται τυρβώδες απ' τη μια μεριά. Μετά αυτό το τυρβώδες προφίλ μεταφέρεται προς τα μπρος (μικρότερα  $x$ ) στο κανάλι και όλη η πλευρά γίνεται τυρβώδης, όπως είναι και στην πραγματικότητα. Πιθανόν για κάποιο λόγο σε κάποιες περιπτώσεις να μην εμφανίζεται κάποια στιγμή «πέταγμα» στο μή και να παραμένει στρωτό όσο κι αν προχωρήσουν οι επαναλήψεις (ιδίως αν έχουμε έναρξη από λόγο πιέσεων, άγνωστο το γιατί). Αυτό είναι βέβαια μειονέκτημα του προγράμματος. Ακόμη κι αν συμβαίνει, δε μπορεί να δικαιολογήσει το γιατί στο πυκνό πλέγμα, παρόλο που έγιναν και στις δυο μεριές τα προφίλ τυρβώδη, τελικά στη μια μεριά η κατάληξη ήταν προφίλ που αντιστοιχεί σε στρωτή ροή.



Στην απέναντι σελίδα φαίνεται η διόρθωση Coriolis του Bradshaw όπως μπήκε στο πρόγραμμα.

Η σελίδα δείχνει πιο συγκεκριμένα τις διαφορές που έχει το πρόγραμμα με διόρθωση σε σχέση μ' αυτό χωρίς διόρθωση και σε ποια γραμμή εμφανίζονται.

Όσες γραμμές αρχίζουν με c δε μεταφράζονται απ' τον υπολογιστή και είναι σχόλια για μας. Το σχόλιο πάνω πάνω θα εξηγηθεί αργότερα και αφορά τον πρώτο έλεγχο if που γίνεται λίγες γραμμές παρακάτω. Βλέπουμε τα φίλτρα (1,5, 0,5), την ύψωση της διόρθωσης του Bradshaw στο τετράγωνο, τη μορφή  $1/1+\beta Ri$  στην πλευρά υποπίεσης. Η διόρθωση αυτή μπαίνει σε σημείο του προγράμματος που υπολογίζει το  $\mu$  ώστε να το διορθώσει μόλις υπολογιστεί. Από άλλο σημείο του προγράμματος πρέπει να φροντίσουμε να έχουμε κρατήσει την κλίση ταχύτητας που χρειάζεται για τον τύπο του Bradshaw.

Στην μεθεπόμενη σελίδα υπάρχει ένα τυπικό αρχείο nmth.IRS2 (που δίνει δεδομένα έναρξης στο πρόγραμμα) για την περίπτωση του στρεφόμενου καναλιού.

[ m , theta ] - DATA FILE

## VERSION

Lam.( &lt; 0 ) - EULER( 0 ) - Turb.Lommax( 1 ) - Turb.k-e( &gt; 1 )

2 keST Expl.( &lt; 1 ) - Impl( 0 = Taylor, &gt; 1 = Newton)

0.0 FLOW

Rg Cp/Cv Pr Prt 287.04 1.4 .72 9

PtAl TtAl alfa Tu (mt/ml)inlet 101325. 288. 27.6 .010 10. Reynolds rpm

1. 100. 0. 0. Tstat(wall) constant.ml

0. 0

TIME

Iterations Iterations/Storage

50000 2000

CFL(1) - CFL(2) - CFL(3) - CFL(4) CFL(5) - CFL(6)

0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

Dt-multi (1. for Global Dt)

1.d5 IRS-iter IRS-smi IRS-ADI-diag IRS-GMRES-mt

0 2.5 11. 0

IRS-ON-Eq( 0/1/2 ) : ( 1 ) - ( 2 ) - ( 3 ) - ( 4 ) ( 5 ) - ( 6 )

0 0 0 0 0 0

PARAMS

ittr ( 0 for constant. TtR )

1

ak2(csi) ak2(eta) ak4(csi) ak4(eta)

.25 .25 .01 .01

akke2(csi) akke2(eta) akke4(csi) akke4(eta)

.20 .20 .01 .01

tiny

1.d-20

Gel Ce2 Cm Prk Pre 1.44 1.92 .09 1.0 1.3

visl trel tsl ... Sutherlands law 1.711d-5 273.15 110. alpha beta ci ... Exit Extrapolation

scheme

2.dO -1.dO 0.dO DISPLAY

imon jmon 90 1 RMS-error( 0/1 ) MAX-error( 0/1 ) Monitor( -1/0/1 )

0 - 1

Negative-k/e( -1/0/1 )

0 REFERENCE

Lref RHOfref Vref Rgref nref 1. 1. 1. 1.

```

> c correction reversed at decolation
> c
2875a2876,2899
> c --- Correction ( 2 ) for Coriolis
> c
> c omega in rad/s
> c
>     omloc=omega
>     if(((omega*aco(l).gt.O.dO).and.(aco2(1).gt.O.dO))or.
> & ((omega*aco(l).lt.O.dO).and.(aco2(1).lt.O.dO)))then !PS
>     if(((1.d0+9.*dabs(omloc)/dabs(aco(l)))**2).gt.1.5) then
>     visct(1)=visct(1)
>     else
>     visct(1)=visct(1)
> & *(1.d0+9.*dabs(omloc)/dabs(aco(l)))**2
>     endif
>     else ! Suction Side
>     if(((1/(1.d0+14.*dabs(omloc)/dabs(aco(l)))**2).lt.O.5)
> & then
>     visct(1)=visct(1)
>     else
>     visct(1)=visct(1)
> & /(1.d0+14.*dabs(omloc)/dabs(aco(l)))**2
>     endif
>     endif
>
> c --- End Correction ( 2 )
4848a4873,4877
> c --- Addition ( 1 + ) - Store the Du/Dy value AND U (Wm)
>     aco(1)=duxy
>     aco2(1)=ux
> c     aco(1)=txy
> c --- End Addition ( 1 + )

```

## 5. Υπολογισμός της ροής του ακτινικού συμπιεστή.

### 5.1. ΛΙΓΕΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΥΨ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ.

Η περίπτωση του ακτινικού συμπιεστή ήταν η τελευταία που εξετάστηκε και της αφιερώθηκε πολύ λιγότερος χρόνος από τις άλλες.

Αυτή η περίπτωση πριν δοθεί για τους σκοπούς της πτυχιακής εργασίας ήταν ελεγμένο ότι συγκλίνει και έτσι δε θα χρειαζόταν να γίνουν πολλά. Απλά δοκιμάστηκαν οι διορθώσεις να δούμε τι αποτελέσματα θα δώσουν σε τόσο δύσκολη ροή.

Το πλέγμα, ο μονοδιάστατος υπολογισμός και πολλά ακόμη θεωρήθηκαν δεδομένα και δεν πειράχτηκαν.

Στη μηχανή αυτή έχουν θεωρηθεί ατμοσφαιρική είσοδος και πίεση εξόδου 425000 Pa. Περιστρέφεται με 86000 RPM και πρόκειται για ένα μικρό συμπιεστή. Στο ακτινικό τμήμα της μηχανής υπάρχει κι ένα μικρό πτερύγιο μεταξύ κάθε δύο μεγάλων, όπως συμβαίνει συχνά σε ακτινικούς συμπιεστές.

Φυσικά η ροή μέσα του είναι τριδιάστατη. Όταν κάνουμε διδιάστατο υπολογισμό ελπίζουμε να πετύχουμε τη ροή στη συγκεκριμένη «φέτα» που εξετάζουμε. Με μετρικούς διδιάστατους υπολογισμούς έχουμε μια εικόνα για την τριδιάστατη ροή.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται διδιάστατος υπολογισμός στο επίπεδο από πτερύγιο σε πτερύγιο όπως φαίνεται και από το πλέγμα σε επόμενη σελίδα. Η συγκεκριμένη «φέτα» που έχει θεωρηθεί βρίσκεται κοντά στο εξωτερικό κέλυφος της μηχανής. Ειδικά στο ακτινικό κομμάτι πρέπει να φανεί επίδραση της δύναμης Coriolis, αφού αυτή δρα στο συγκεκριμένο επίπεδο. Γι' αυτό μπορεί διδιάστατοι υπολογισμοί να φανούν πολύ χρήσιμοι και για τέτοιες τρισδιάστατες ροές.

Απ' την εφαρμογή των διορθώσεων βλέπουμε ότι η κατεύθυνση στην οποία επιδρά η διόρθωση δεν έχει σταθερή φορά σε όλο το πτερύγιο. Μπορεί στο μισό να δίνει αύξηση και στο άλλο μισό μείωση τύρβης. Αυτό συμβαίνει λόγω της περιπλοκότητας της ροής. Πάντως τουλάχιστον στο ακτινικό κομμάτι θα περιμέναμε μεταβολή προς τη γνωστή κατεύθυνση, δηλαδή αύξηση τύρβης στην πλευρά υπερπίεσης και μείωση στην πλευρά υποπίεσης. Αυτό πράγματι ισχύει για την περίπτωση της διόρθωσης του G. Με τη διόρθωση του Bradshaw συμβαίνουν δύο περιέργα: πρώτον δεν έχει μεγάλη διαφορά από το αποτέλεσμα χωρίς διόρθωση και δεύτερον αυτή η μικρή διαφορά είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση. Τα αίτια αυτής της συμπεριφοράς δε διερευνήθηκαν συστηματικά, αλλά έγιναν πολλοί έλεγχοι στη διόρθωση και αυτή πρέπει να έχει μπει σωστά στο πρόγραμμα. Περισσότερα γι' αυτό στο σχολιασμό των αντίστοιχων σχημάτων.

Πάντως πρέπει να θυμηθούμε ότι η διόρθωση του Bradshaw δεν προτείνεται για περίπλοκες ροές όπως αυτή.

### 5.2. ΣΧΗΜΑΤΑ ΑΠ' ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥΣ.

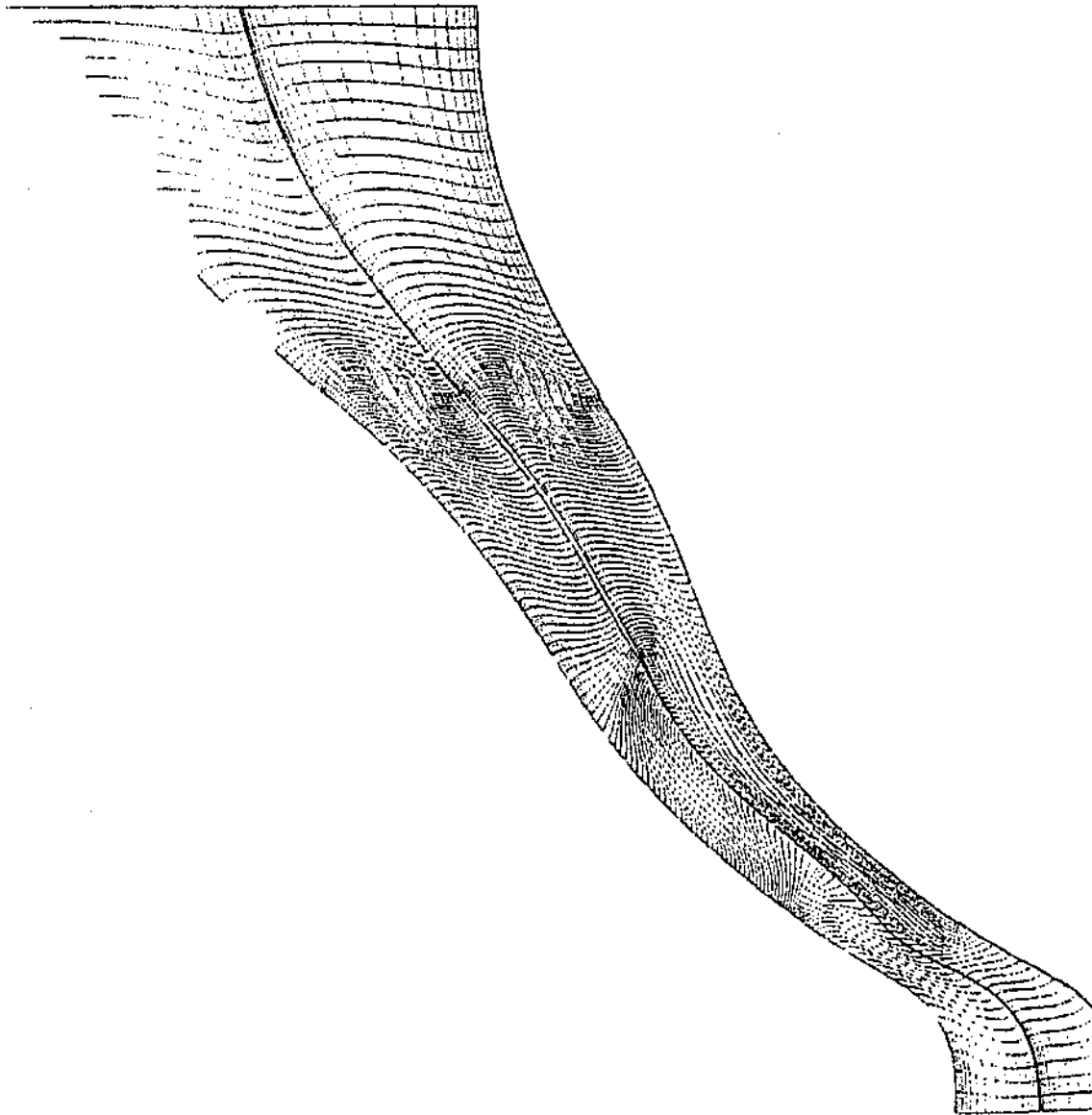
Ακολουθούν κάποια σχήματα που δείχνουν τι αποτελέσματα πήραμε για την περίπτωση του ακτινικού συμπιεστή.

Επειδή το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε είναι διαφορετικό λόγω της ύπαρξης του μεσαίου πτερυγίου, έχει προστεθεί ένα χαρακτηριστικό 'n' στα ονόματα ώστε να ξεχωρίζει από τα προγράμματα των προηγούμενων κεφαλαίων.

Σχήμα 5.1.

Απέναντι βλέπουμε το πλέγμα. Έχει 160X58 σημεία. Φαίνεται καθαρά το μεσαίο πτερύγιο. Ακόμη βλέπουμε ότι το πλέγμα απέχει πολύ απ' το να χαρακτηριστεί ορθογώνιο. Λόγω της περίπλοκης γεωμετρίας και της ύπαρξης του μεσαίου πτερυγίου κάτι τέτοιο είναι αδύνατο. Γι' αυτό και τα προφίλ που θα παρουσιαστούν έχουν αξία κυρίως για σύγκριση των αποτελεσμάτων με και χωρίς διόρθωση.

Ο κόμβος 100 βρίσκεται περίπου στα τρία τέταρτα προς τα πίσω του μικρού πτερυγίου και ο 130 στο τέλος του.



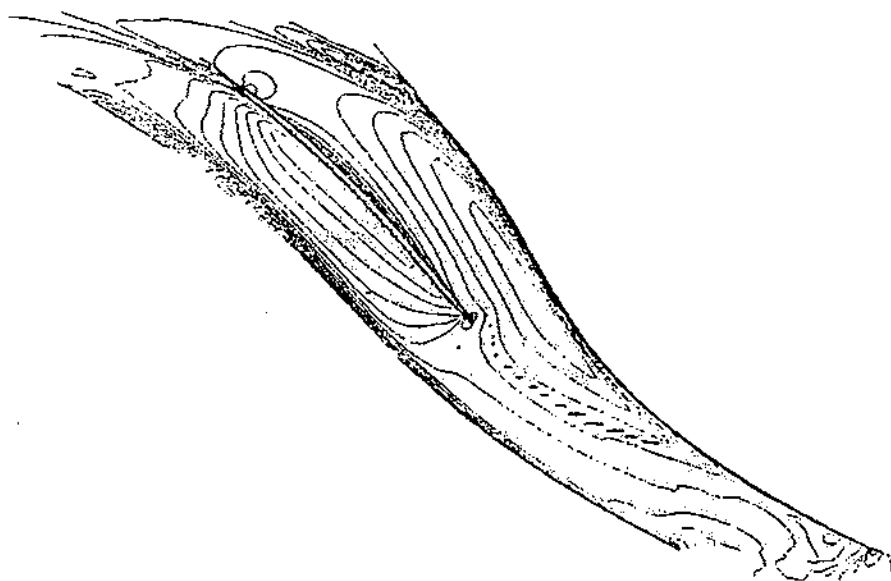
Σχήμα 5.2

Εδώ βλέπουμε τις ισογραμμές της ταχύτητας  $u$ . Κάθε γραμμή απέχει από την άλλη περίπου  $15 \text{ m/s}$  και η σημειωμένη περιοχή αντιστοιχεί σε περίπου  $200 \text{ m/s}$ .

Τ' αποτελέσματα με και χωρίς διόρθωση Coriolis ήταν πολύ κοντά, γι' αυτό παρουσιάζεται μόνο ένα σχήμα.



Η περιστροφή εδώ είναι από τα' αριστερά προς τα δεξιά έτσι που κοιτάμε το χαρτί.  
Η είσοδος της ροής είναι από κάτω.



#### Σχήμα 5.3

Το πρόγραμμα συνέκλινε και το σφάλμα στις 150000 επαναλήψεις είχε πέσει 4 τάξεις μεγέθους. Τα αποτελέσματα από τις 60000 επαναλήψεις και μετά δεν άλλαξαν καθόλου και γι' αυτό επιλέχθηκε να σταματάνε τα προγράμματα εκεί.

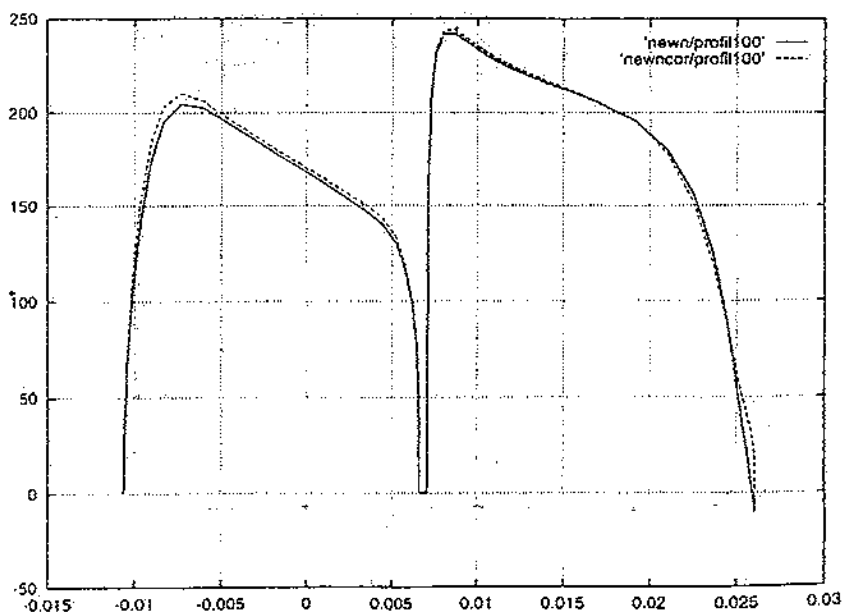
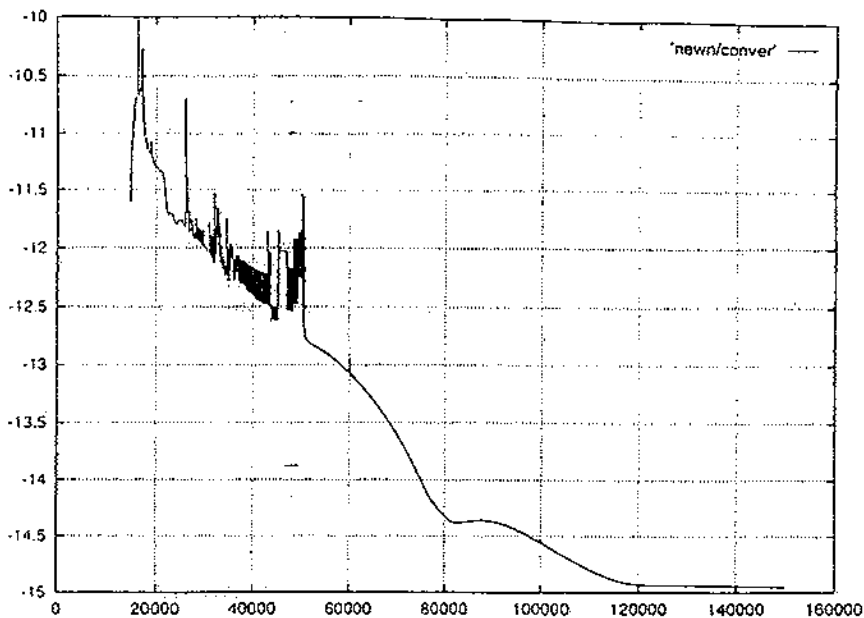
#### Σχήμα 5.4

Στη μέση υπάρχει το μικρό πτερυγίο, γι' αυτό το προφίλ είναι δυιλό. Εννοείται ότι έχουμε δύο πλευρές υποπίεσης (του μικρού και μεγάλου πτερυγίου) και δύο υπερπίεσης. Από τα δεξιά προς τ' αριστερά έχουμε αντίστοιχα πλευρά υπερπίεσης, υποπίεσης, υπερπίεσης και υποπίεσης.

Η διόρθωση είναι προς τη σωστή κατεύθυνση. Για παράδειγμα στην πλευρά υπερπίεσης του μεγάλου πτερυγίου (τέρμα δεξιά) υπήρχε αποκόλληση που έφυγε με τη διόρθωση. Ακόμη το προφίλ έγινε πιο τυρβώδες και το πάχος μεγάλωσε. Αισθητή

είναι και η διαφορά στην πλευρά υποπίεσης του μεγάλου πτερυγίου όπου το  $\delta$  μικρύνει.

6.3



6.4

Σχήμα 5.5.

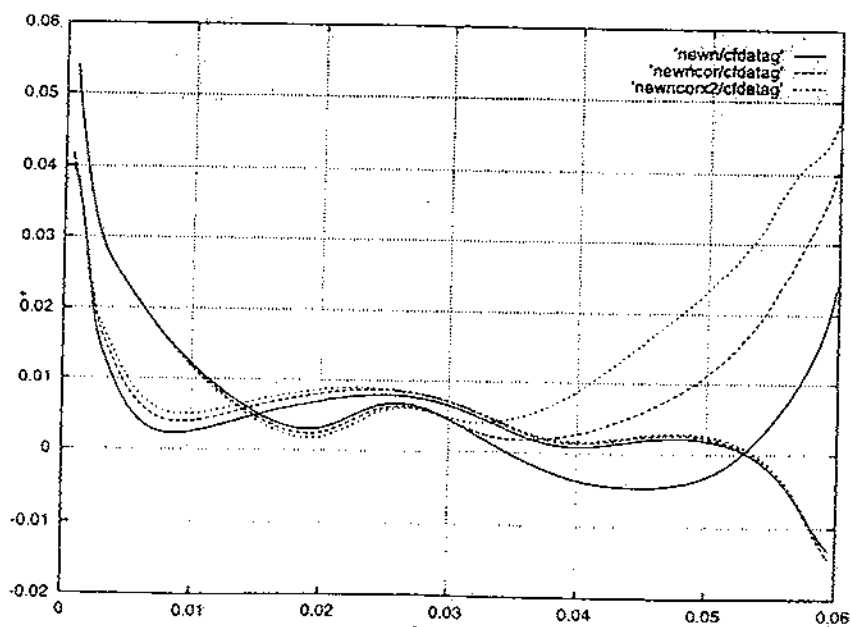
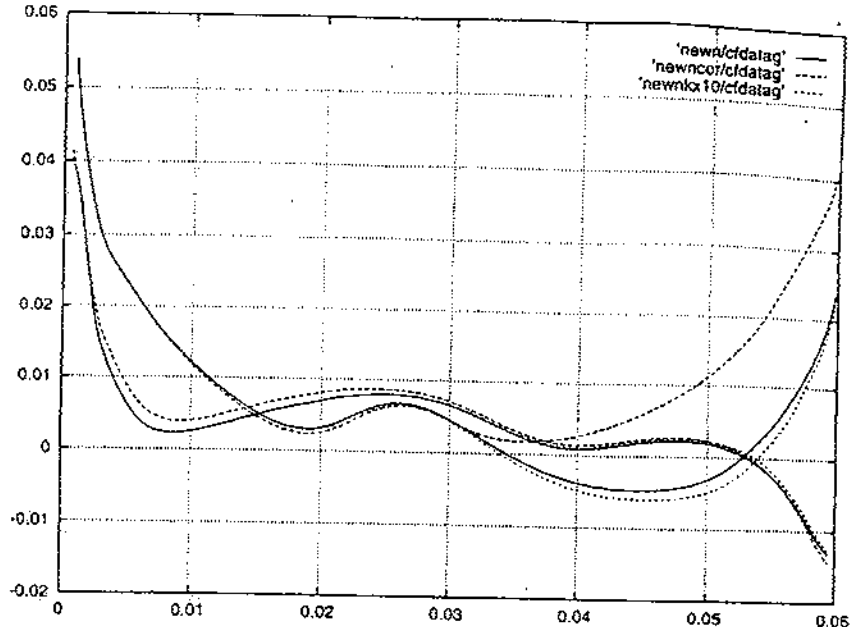
Εδώ συγκρίνονται συντελεστές τριβής. Ας δούμε καταρχήν αυτόν με τη διόρθωση του  $G_c$ . Στην πλευρά υπερπίεσης ενώ υπήρχε αποκόλληση σε μεγάλο μέρος του καναλιού, με τη διόρθωση Coriolis έπαψε να υπάρχει. Αυτή είναι και η πιο σημαντική αλλαγή που γίνεται. Αν κοιτάξουμε λίγο πιο προσεκτικά θα δούμε ότι δεν είναι παντού η αλλαγή που γίνεται. Αν κοιτάξουμε λίγο πιο προσεκτικά θα δούμε ότι δεν είναι παντού η αλλαγή προς την αναμενόμενη κατεύθυνση. Στην πλευρά υποπίεσης για παράδειγμα, με τη διόρθωση του  $G_c$ , αυξάνεται ο συντελεστής τριβής ενώ έπρεπε να μειώνεται. Βέβαια η διαφορά σε σχέση με την περίπτωση μη διόρθωσης είναι μικρή.

Η άλλη διόρθωση είναι αυτή του Bradshaw *πολλαπλασιασμένη επί 10*. Βλέπουμε ότι αυτή δίνει λίγο μεγαλύτερη αποκόλληση από την περίπτωση μη διόρθωσης και σε γενικές γραμμές κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση από τη διόρθωση του  $G_c$ . Πάντως το σίγουρο είναι ότι διορθώνει ελάχιστα. Η συμπεριφορά αυτή δεν έχει δικαιολογηθεί.

Σχήμα 5.6.

Εδώ βλέπουμε και τη διόρθωση του  $G_c$  *πολλαπλασιασμένη επί δύο*. Τα αποτελέσματα είναι τα αναμενόμενα, περίπου διπλασιάστηκε η διόρθωση προς την ίδια κατεύθυνση.

6.5.



6.6.

### Σχήμα 5.7

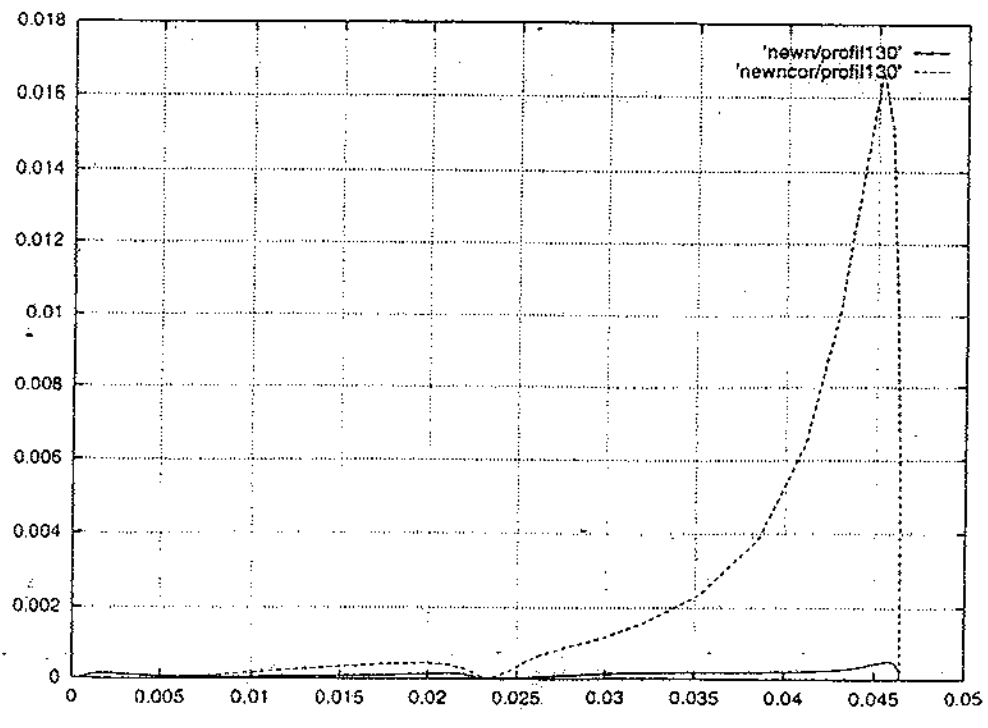
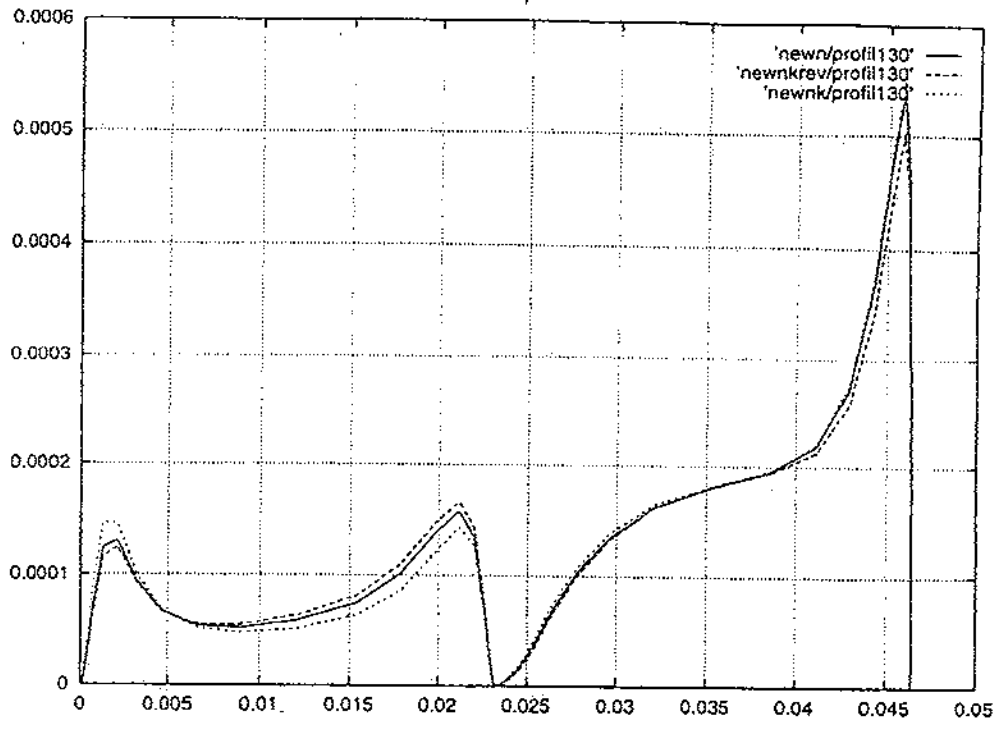
Επειδή η διόρθωση του Bradshaw έδινε αποτελέσματα σε αντίθετη κατεύθυνση απ' αυτή του  $G_c$ , δοκιμάστηκε ν' αντιστραφεί η διόρθωση (rev) και πράγματι έδωσε αποτελέσματα προς τη σωστή κατεύθυνση. Πιθανόν λοιπόν να έχει γίνει κάποιο λάθος που έχει ξεφύγει της αντίληψής μας και η σωστή διόρθωση να είναι η 'newpkrev' που δίνει αποτελέσματα προς τη σωστή κατεύθυνση. Πάντως το πρόβλημα του γιατί διορθώνει τόσο λίγο παραμένει.

Στο απέναντι σχήμα βέβαια παρουσιάζεται το  $\mu_i$ .

### Σχήμα 5.8.

Το ότι οι διορθώσεις του Bradshaw διορθώνουν λίγο φαίνεται αν συγκρίνουμε το προηγούμενο σχήμα μ' αυτό. Βλέπουμε πολύ μεγάλη αλλαγή του  $\mu_i$  και γι' αυτό έχουν αλλάξει και τα προφίλ ταχυτήτων. Απ' την άλλη μεριά βέβαια στο σχήμα αυτό είναι τόσο μεγάλη η μεταβολή του  $\mu_i$  που βάζει ερωτήματα του κατά πόσο πρέπει να γίνει δεκτή τόσο μεγάλη διόρθωση.

6.7.



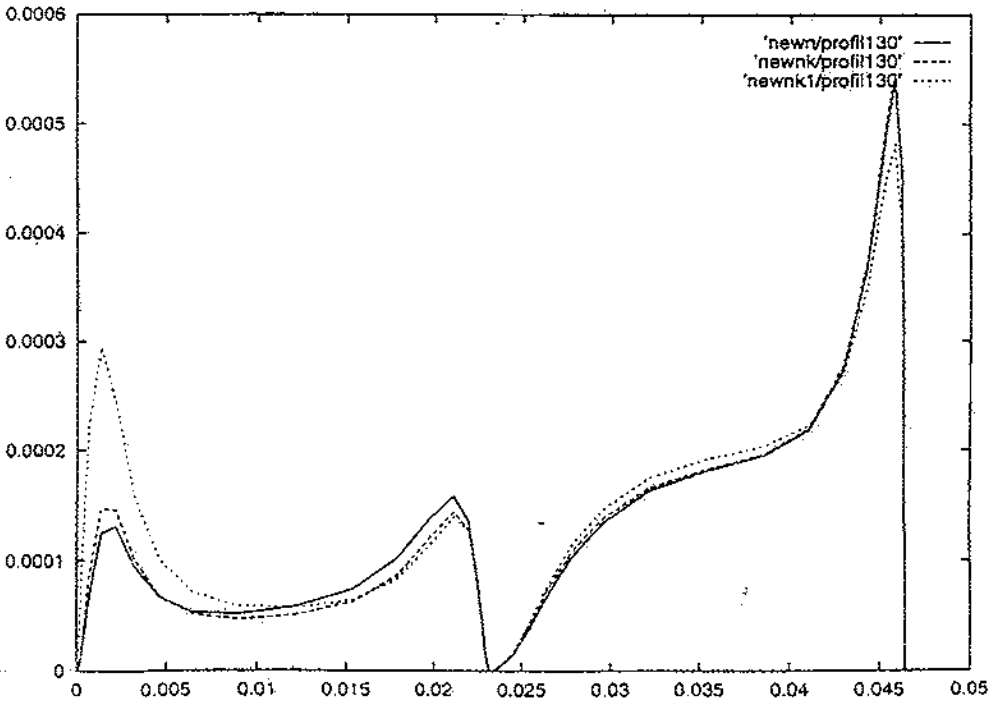
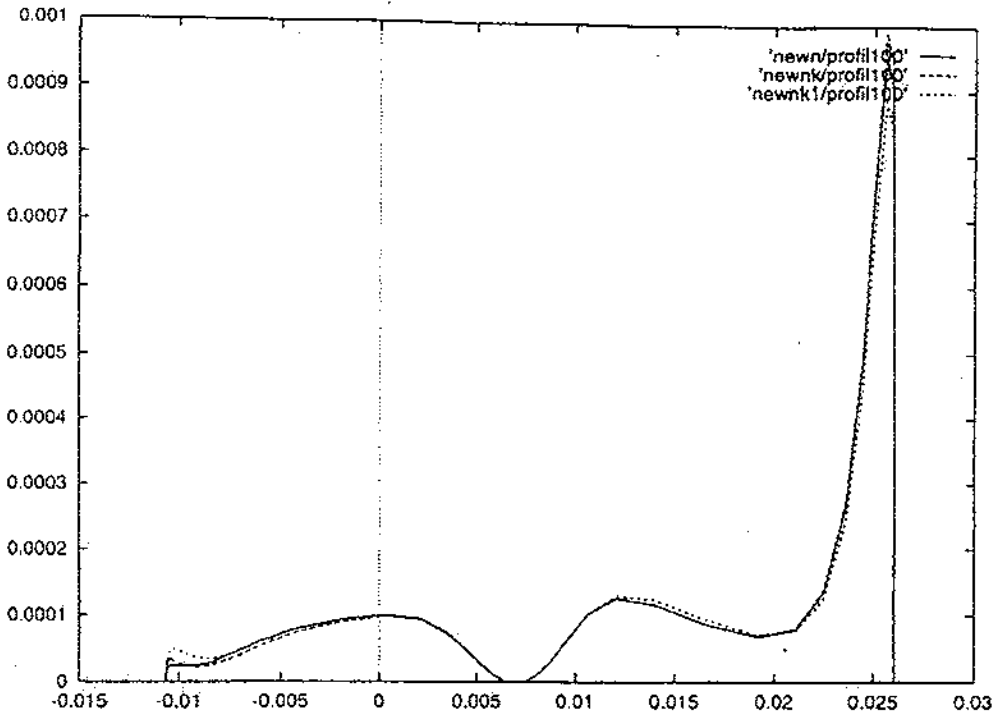
Σχήμα 5.9.

Εδώ συγκρίνονται οι διορθώσεις με εκθέτη 1 και 2 του Bradshaw στα προφίλ  $\mu_i$ . Βλέπουμε ότι και οι δύο διορθώνουν λίγο μάλιστα στην πλευρά υπερπίεσης του μεγάλου πτερυγίου και προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Σχήμα 5.10.

Εδώ βλέπουμε το ίδιο προηγούμενο σχήμα ακόμη πιο πίσω στη μηχανή, όπου οι διαφορές των διορθώσεων είναι μεγαλύτερη. Εντύπωση κάνει που η διόρθωση με εκθέτη 1 διορθώνει περισσότερο, ενώ περιμέναμε το αντίθετο.





Συμπεράσματα για τα τρία τελευταία κεφάλαια έχουν αναφερθεί μέσα στο κείμενο και το σχολιασμό των διαγραμμάτων. Κυρίως έχουν γραφεί με πλάγια γράμματα.

Γενικό συμπέρασμα είναι ότι λόγω αναπάντητων ερωτηματικών που υπάρχουν για τη συμπεριφορά του προγράμματος, δε μπορούν να διατυπωθούν γενικά συμπεράσματα για τις διορθώσεις που να έχουν αξιοπιστία.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:	1 – 2
0.1 ΜΕ ΤΙ ΑΣΧΟΛΕΙΤΑΙ ΑΥΤΗ Η ΠΤΥΧΙΑΚΗ.	1 – 2
§0.1.1. Ποιος ο αρχικός σκοπός της πτυχιακής εργασίας.	σελ. 1
§0.1.2. Τι ήταν έτοιμο και τι έγινε σ' αυτή την πτυχιακή.	σελ. 1 – 2
0.2 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ	2
0.3 ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ	2
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΡΟΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ.	3 – 18
ΕΙΣΑΓΩΓΗ:	σελ. 3
§1.1.1. Συνέχεια	σελ. 3
§1.1.2. Συνεκτικότητα	σελ. 4
§1.1.3. Συμπίεστικότητα	σελ. 4 – 5
1.2. ΘΕΜΕΛΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ.	5 – 13
§1.2.1. Η εξίσωση διατήρησης της μάζας	σελ. 5 – 6
§1.2.2. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής	σελ. 6 – 9
§1.2.2.1. Εξίσωση διατήρησης της ορμής σε διαφορική μορφή	σελ. 10 – 11
§1.2.3. Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας	σελ. 11 – 13
1.3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ	13 – 18
§1.3.1. Νευτώνειο ρευστό. Εξισώσεις Navier – Stokes	σελ. 13 – 16
§1.3.1.1. Ασυμπίεστο νευτώνειο ρευστό	σελ. 16 – 17
§1.3.2. Μη συνεκτικό ρευστό. Εξισώσεις Euler	σελ. 17
§1.3.3. Εξισώσεις Bernoulli	σελ. 17 – 18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΤΥΡΒΩΔΗ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ	19 – 58
ΕΙΣΑΓΩΓΗ:	σελ. 19
2.1. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ	σελ. 19 – 26
ΕΙΣΑΓΩΓΗ:	σελ. 19 – 21
§2.1.1. Χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος	σελ. 21 – 22
§2.1.2. Ανάπτυξη του οριακού στρώματος κατά μήκος	σελ. 22 – 24
§2.1.3. Εξισώσεις διδιάστατου οριακού στρώματος	σελ. 25 – 26
2.2. ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΤΥΡΒΗ	σελ. 26 – 29
2.3. ΤΥΡΒΩΔΗ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ	σελ. 29 – 40
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	σελ. 29
§2.3.1. Περιγραφή τυρβωδών ροών κατά Reynolds	σελ. 29 – 30
§2.3.1.1. Εξίσωση συνέχειας	σελ. 30
§2.3.1.2. Εξίσωση διατήρησης της ορμής	σελ. 30 – 31
§2.3.1.3. Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας	σελ. 31
§2.3.2. Εξίσωση μεταφοράς κινητικής ενέργειας σε τυρβώδη ροή	σελ. 31 – 33
§2.3.3 Εξίσωση μεταφοράς των τάσεων Reynolds	σελ. 33 – 34
§2.3.5.Ο «νόμος του τοίχου»	σελ. 38 – 40
2.4. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ	σελ. 41 – 58
ΕΙΣΑΓΩΓΗ:	σελ. 41
§2.4.1. Η τυρβώδης συνεκτικότητα. Υπόθεση Boussinesq	σελ. 41 – 42
§2.4.2. Το μήκος ανάμιξης κατά Prandtl	σελ. 43 – 48
§2.4.2.1. Ο νόμος της έβδομης ρίζας	σελ. 48
§2.4.3. Το μοντέλο των Van Driest – Lomax	σελ. 48 – 50
§2.4.4. Το μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$	σελ. 50 – 55

§4.1.1. Σχετικά με τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν	σελ. 113 – 116
§4.1.2. Τι εξοπλισμός χρησιμοποιήθηκε	σελ. 116 – 117
§4.1.3. Ποιες διορθώσεις δοκιμάστηκαν και σχόλια	σελ. 117
§4.1.3.1. Το ζήτημα του εκθέτη για τη διόρθωση του Bradshaw	σελ. 117 – 118
§4.1.3.2. Ποιο φίλτρο είναι το κατάλληλο για την διόρθωση του Bradshaw	σελ. 118 – 119
§4.1.3.3. Ποιο Richardson χρησιμοποιήθηκε	σελ. 119
§4.1.3.4. Μορφή της διόρθωσης στην πλευρά υποπίεσης και στην πλευρά υπερπίεσης	σελ. 119 – 120
§4.1.3.5. Τι άλλες δοκιμές έγιναν	σελ. 120 – 121
4.2. ΤΟ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΚΑΝΑΛΙ	σελ. 121 – 125
§4.2.1. Αγωγός διαστάσεων 10cm x 1cm	σελ. 121 – 122
§4.2.2. Αγωγός διαστάσεων 10cm x 1cm	σελ. 122 – 125
4.3. ΣΧΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥΣ	σελ. 126 – 173
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: ΣΧΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΑΚΤΙΝΙΚΟΥ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ	σελ. 174 – 186
5.1. ΛΙΓΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙ' ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	σελ. 174
5.2. ΣΧΗΜΑΤΑ ΑΠ' ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥΣ	σελ. 174 - 186

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κατά την διάρκεια της πτυχιακής βοήθησαν πολύ τα παρακάτω βιβλία (γραμμένα κατά σειρά, με πρώτα αυτά που χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο):

- [1] «Μηχανική ρευστών», Νικολάου Α. Αθανασιάδη, ομότιμου καθηγητού Ε.Μ.Π. Εκδόσεις Συμewών, 1989.
- [2] «Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές», Κ. Γιαννάκογλου, λέκτορα Ε.Μ.Π. 1991.
- [3] «Μηχανική ρευστών», Σ. Τσαγγάρη, επίκ. καθηγητή Ε.Μ.Π. Έκδοση Ε.Μ.Π. 1991.
- [4] «Υπολογιστική ρευστομηχανική», Γ. Μπεργελέ, καθηγητή Ε.Μ.Π. Εκδόσεις Συμewών.
- [5] «Turbulent boundary layers», Κ. Παπαηλίου, Von Kármán Institute for fluid dynamics, course note 87, 1972.
- [6] «Effects of streamline curvature on turbulent flow», P. Bradshaw. AGARDDograph no. 169, Advisory Group for Aerospace & Development, North Atlantic Treaty Organization, 1973.
- [7] «Εισαγωγή στις θερμικές στροβιλομηχανές», Κ. Δ. Παπαηλίου, Κ. Μ. Μαθιουδάκη, Κ. Χ. Γιαννάκογλου. Έκδοση Ε.Μ.Π. 1996.
- [8] «Θεμελιώδης πανεπιστημιακή φυσική», Alonso, Finn (μετάφραση Ρεσβάνη, Φίλιππα, 1981), Addison - Wesley publishing company.
- [9] «Separated flows in turbomachinery componets. Le Foll' s method and the calculation of attached and separated two dimensional boundary layers», Κ. D. Papailiou, Von Kármán Institute for fluid dynamics, lecture series 1981 - 1. Σελ. 88 - 101 (The effects of Coriolis and 'centrifugal' forces).
- [10] «Viscous flow inside the impeller», από σύγγραμμα του κ. Παπαηλίου.
- [11] «The Coriolis force influence when we calculate turbulent boundary layers in centrifugal compressors», Κ. Papailiou.
- [12] «Μηχανική παραμορφωσίμων σωμάτων Ι», Γ. Τσαμασφύρου, αν. Καθηγητού Ε.Μ.Π. εκδόσεις Συμewρία, 1991.
- [13] «Ρευστομηχανική Ι, ΙΙ», Ν. Νανούση, Καθηγητού Τ.Ε.Ι. Πάτρας του τμήματος μηχανολογίας.

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1. Ισολογισμός μάζας.	σελ. 5
Σχήμα 1.2. Εφαρμογή του θεωρήματος της ορμής.	σελ. 8
Σχήμα 1.3. Ισολογισμός ενέργειας.	σελ. 11
Σχήμα 2.1. Ροή γύρω από επίπεδη πλάκα.	σελ. 20
Σχήμα 2.2. Τυπική μορφή οριακού στρώματος.	σελ. 20
Σχήμα 2.3. Τέσσερα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος.	σελ. 22
Σχήμα 2.4. Ανατροπή στοιχείου ρευστού και εμφάνιση δίνης.	σελ. 23
Σχήμα 2.5. Ανάπτυξη του οριακού στρώματος.	σελ. 23
Σχήμα 2.6. Εικόνα αποκόλλησης της ροής.	σελ. 24
Σχήμα 2.7. Ισοζύγιο μέσης κινητικής ενέργειας κοντά (α) και μακριά (β) από τον τοίχο.	σελ. 33
Σχήμα 2.8. Ισοζύγιο τυρβώδους κινητικής ενέργειας κοντά (α) και μακριά (β) από τον τοίχο.	σελ. 36
Σχήμα 2.9. Διανομή τυρβώδους κινητικής ενέργειας $k$ και τυρβώδους διατμητικής τάσης σε διδιάστατο οριακό στρώμα σε περιστροφή.	σελ. 36
Σχήμα 2.10. Διανομή των όρων καταστροφής σε τυρβώδες οριακό στρώμα.	σελ. 37
Σχήμα 2.11. Διανομή διατμητικών τάσεων διάφορων οριακών στρωμάτων.	σελ. 38
Σχήμα 2.12. Διανομή ταχυτήτων σε τυρβώδη οριακά στρώματα επίπεδης πλάκας.	σελ. 40
Σχήμα 2.13. Ορισμός μήκους ανάμιξης.	σελ. 43
Σχήμα 2.14. Περιγραφή του μήκους ανάμιξης βάσει της προσέγγισης των κυλιόμενων δινών.	σελ. 44
Σχήμα 2.15. Τυπική κατανομή μήκους ανάμιξης στο τυρβώδες οριακό στρώμα.	σελ. 45
Σχήμα 2.16. Κατανομή τυρβώδους συνεκτικότητας στο οριακό στρώμα.	σελ. 46
Σχήμα 2.17. Διανομή ορθών τάσεων Reynolds στο οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας.	σελ. 57
Σχήμα 3.2. Διεύθυνση της επιτάχυνσης Coriolis σε ακτινική μηχανή.	σελ. 64
Σχήμα 3.3. Προφίλ μέσης ταχύτητας και διατμητικής τάσης σε διδιάστατο οριακό στρώμα σε περιστροφή	σελ. 66
Σχήμα 3.4. Σταθεροποιητική και αποσταθεροποιητική επίδραση στην τύρβη και εξήγηση του φαινομένου.	σελ. 70
Σχήμα 3.5. Τυπική μορφή καναλιού για μελέτη της επίδρασης Coriolis.	σελ. 72
Σχήμα 3.6. Αλλαγή στο νόμο του τοίχου λόγω επίδρασης της καμπυλότητας.	σελ. 73
Σχήμα 3.7. Προφίλ αδιάστατης μέσης ταχύτητας για διάφορους αριθμούς περιστροφής.	σελ. 73
Σχήμα 3.8. Διανομή διατμητικής τάσης με και χωρίς περιστροφή.	σελ. 75
Σχήμα 3.9. Αλλαγές στο συντελεστή τριβής σε κομπύλη ροή σε σχέση με την πλάκα.	σελ. 76
Σχήμα 3.10. Συντελεστής τριβής συναρτήσει Reynolds σε κανάλια με και χωρίς περιστροφή.	σελ. 77
Σχήμα 3.11. Κανονικοποιημένος συντελεστής τριβής ως προς την παράμετρο Coriolis.	σελ. 78
Σχήμα 3.12. Επίδραση της περιστροφής στην ταχύτητα τριβής.	σελ. 78
Σχήμα 3.13. Παράγοντας μορφής μετά από επιβολή καμπυλότητας σε ίσια πλάκα.	σελ. 79
Σχήμα 3.14. Προφίλ τυρβώδους κινητικής ενέργειας στις δύο πλευρές περιστρεφόμενου καναλιού.	σελ. 80
Σχήμα 3.15. Προφίλ κανονικοποιημένων τάσεων Reynolds για διάφορους αριθμούς περιστροφής.	σελ. 81
Σχήμα 3.16. Προφίλ ταχύτητας σε κανάλι με πλήρως ανεπτυγμένη ροή για διάφορους αριθμούς περιστροφής.	σελ. 82
Σχήμα 3.17. Αλλαγές στο μήκος ανάμιξης σε κομπύλες πλάκες σε σχέση με επίπεδη.	σελ. 83
Σχήμα 3.18. Δίνες Taylor (στρωτή ροή ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κυλίνδρους).	σελ. 84
Σχήμα 3.19. Δίνες μορφής Taylor - Görtler.	σελ. 85
Σχήμα 3.20. Σύγκριση τιμών διάφορων τυρβωδών Richardson.	σελ. 98

