

Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ  
Σ.Τ.Ε.  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ



***Εξομοίωση δρομέα κατακόρυφου άξονα  
χρησιμοποιώντας τεχνικές  
Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής***

*Γεωργία Δημητροπούλου*

*Εισηγητής: Καθ. Ν. Δ. Νανούσης*



ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ	7141
----------------------	------

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. Ανεμογεννήτριες κατακόρυφου άξονα</b>	
1.1. Εισαγωγή	1
1.2. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα	3
1.3. Έρευνα και εφαρμογές των ΑΚΑ	4
1.4. Αρχή λειτουργίας των ΑΚΑ	5
1.5. Βασικά μέρη μιας ΑΚΑ	7
1.5.1. Ο δρομέας	7
1.5.2. Το σύστημα μετάδοσης της κίνησης	8
1.5.3. Ηλεκτρογεννήτρια	9
1.5.4. Το σύστημα στήριξης	10
1.5.5. Θεμελίωση της εγκατάστασης	10
1.5.6. Το σύστημα ελέγχου	11
<b>2. Αεροδυναμική ανάλυση δρομέα κατακόρυφου άξονα με ευθύγραμμα πτερύγια</b>	
2.1. Εισαγωγή	12
2.1.1. Απόδοση δρομέα και παράγοντες που την επηρεάζουν	13
2.2. Η θεωρία του απλού ροϊκού σωλήνα (single streamtube theory)	17
2.2.1. Εισαγωγή	17
2.2.2. Εφαρμογή του θεωρήματος της διατήρησης της ορμής στο ροϊκό σωλήνα	17
2.2.3. Εφαρμογή της πτερυγικής θεωρίας στο μοντέλο απλού ροϊκού σωλήνα	20
2.2.4. Αεροδυναμική απόδοση του δρομέα	25
2.3. Η θεωρία των πολλαπλών ροϊκών σωλήνων (multiple streamtubes theory)	27
2.3.1. Το αεροδυναμικό μοντέλο	27
2.3.2. Διατήρηση της ορμής	28
2.3.3. Δυνάμεις στα στοιχειώδη τμήματα της πτέρυγας	29
2.3.4. Το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας του ανέμου	30
2.3.5. Λύση της εξίσωσης της ορμής	31
2.3.6. Συντελεστής ισχύος του δρομέα	32
2.4. Η θεωρία του διπλού δίσκου επενέργειας	34
2.4.1. Η θεωρία της ορμής για διπλό δίσκο επενέργειας	35
2.4.2. Υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης για τον ανάντη δίσκο επενέργειας	37
2.4.3. Υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης για τον κατόντη δίσκο επενέργειας	38
2.5. Η θεωρία του διπλού επενέργειας με πολλαπλούς ροϊκούς σωλήνες	41
2.5.1. Εισαγωγή	41
2.5.2. Το ανάντη μέρος του δρομέα	41
2.5.3. Το κατόντη μέρος του δρομέα	44
2.5.4. Αεροδυναμικά φορτία στα πτερύγια και απόδοση του δρομέα	45
2.5.4.a. Υπολογισμός των δυνάμεων και της απόδοσης στην ανάντη πλευρά	46
2.5.4.b. Υπολογισμός των δυνάμεων και της απόδοσης στην κατόντη πλευρά	47
<b>3. Βασικές αρχές υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD)</b>	
3.1. Εισαγωγή	49
3.2. Θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής	50
3.2.1. Διατήρηση της μάζας στο χώρο	52
3.2.2. Ρυθμός μεταβολής για ένα ροϊκό σωματίδιο και ένα ροϊκό στοιχείο	54
3.2.3. Εξίσωσης της ορμής στο χώρο	56
3.2.4. Εξίσωση της ενέργειας στο χώρο	59

3.2.5. Καταστατική εξίσωση .....	60
3.3. Οι εξισώσεις των Navier-Stokes για ένα νευτωνικό ρευστό .....	61
3.4. Συντηρητική μορφή των βασικών εξισώσεων της ροής .....	64
3.5. Διαφορικές και ολοκληρωτικές μορφές της γενικής εξίσωσης μεταφοράς .....	64
3.6. Βοηθητικές συνθήκες για τις εξισώσεις της συνεκτικής ροής .....	67
3.7. Η τύρβη και η μοντελοποίηση της .....	68
3.7.1. Η φύση της τύρβης .....	69
3.7.2. Η επίδραση της τύρβης στις εξισώσεις Navier-Stokes στη μέση χρονικά μορφή τους .....	71
3.7.3. Τυρβώδη μοντέλα .....	77
3.7.4. Το μοντέλο του μήκους μίξης .....	80
3.7.5. Το μοντέλο k-ε .....	83
<b>4. Εξομοίωση δρομέα κατακόρυφου άξονα με χρήση του κώδικα CFD, Fluent</b>	
4.1. Εισαγωγή .....	93
4.2. Εξομοίωση της περιστροφικής κίνησης στον κώδικα FLUENT .....	94
4.2.1. Ροή σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς .....	95
4.2.2. Εξισώσεις σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς .....	95
4.2.3. Επίλυση σε ροή με περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς .....	96
4.2.4. Το μοντέλο των πολλαπλών συστημάτων αναφοράς (MRF) .....	97
4.2.4.a. Διαμόρφωση του μοντέλου MRF .....	98
4.2.5. Το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος .....	100
4.2.5.a. Η τεχνική του ολισθαίνοντος πλέγματος .....	101
4.2.5.b. Μορφή του διεπιφανειακού πλέγματος .....	102
4.2.5.c. Η θεωρία του ολισθαίνοντος πλέγματος .....	104
4.2.5.d. Ρύθμιση των παραμέτρων και επίλυση ενός προβλήματος με τη χρήση του μοντέλου του ολισθαίνοντος πλέγματος .....	106
4.3. Γεωμετρία και πλέγμα του προβλήματος .....	109
4.3.1. Απαιτήσεις από τη γεωμετρία και το πλέγμα .....	110
4.3.2. Γεωμετρία και πλέγμα του τρισδιάστατου μοντέλου .....	111
4.3.3. Γεωμετρία και πλέγμα του δισδιάστατου μοντέλου .....	116
4.4. Αρχικές και οριακές συνθήκες .....	118
4.5. Λοιποί αριθμητικοί αλγόριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν .....	119
4.6. Παρουσίαση αποτελεσμάτων .....	119
4.6.1. Αποτελέσματα της τρισδιάστατης ανάλυσης .....	120
4.6.1.a. Πεδίο της ταχύτητας .....	120
4.6.1.b. Πεδίο της πίεσης .....	123
4.6.2. Αποτελέσματα της δισδιάστατης ανάλυσης .....	126

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

## Ανεμογεννήτριες κατακόρυφου άξονα

---

### 1.1 Εισαγωγή

Οι Α/Γ ως μηχανές οι οποίες εξάγουν ή αλλιώς αφαιρούν ενέργεια από τον άνεμο μπορούν να καταταγούν σε δύο βασικές κατηγορίες. Τις:

- (α) Α/Γ οριζοντίου άξονα οι οποίες τυγχάνουν ευρείας διαδόσεως
- και (β) Α/Γ κατακόρυφου άξονα (εν συντομία ΑΚΑ).

Η τελευταία κατηγορία περιλαμβάνει τις κάτωθι μηχανές:

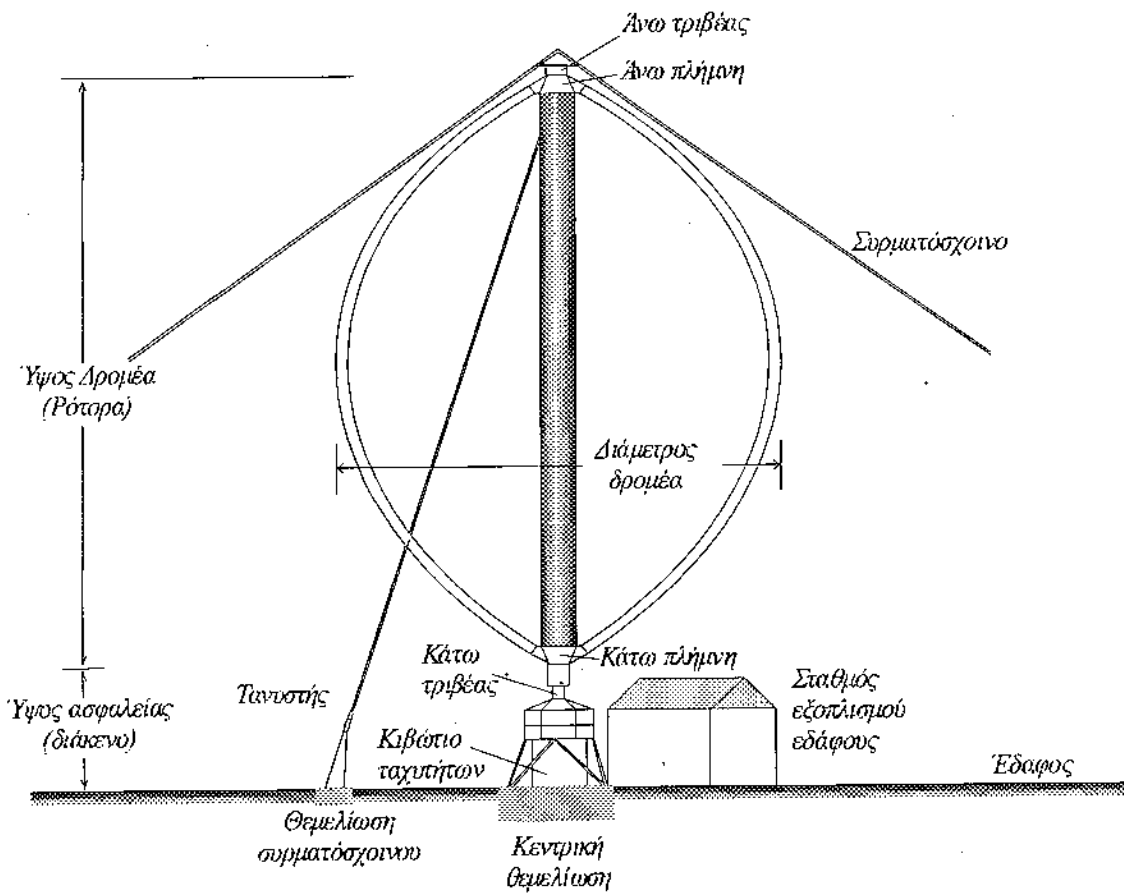
- (i) τις ΑΚΑ τύπου Dargieus
- (ii) τις ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια (οι οποίες αναφέρονται επίσης ως τύπου Η ή Giromill) που αποτελούν το αντικείμενο εξέτασης της παρούσης πτυχιακής εργασίας.
- (iii) τις ΑΚΑ τύπου Savonius
- και (iv) τις ΑΚΑ μεταβλητής γεωμετρίας (π.χ. Musgrove)

Εν συντομία, τα βασικά μέρη-εξαρτήματα μιας Α-Γ είναι:

- Ο δρομέας ο οποίος περιλαμβάνει τα πτερύγια τα οποία μετατρέπουν σε μηχανική ενέργεια τη διαθέσιμη αιολική ενέργεια.
- Ο πύργος στήριξης
- Το κιβώτιο ταχυτήτων το οποίο μετατρέπει και ρυθμίζει την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα έτσι ώστε η προκύπτουσα μηχανική ενέργεια να μπορεί να μετατραπεί σε ηλεκτρική.
- Την ηλεκτρογεννήτρια η οποία μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική
- Το σύστημα ελέγχου το οποίο παρακολουθεί τη λειτουργία μιας Α/Γ και ρυθμίζει διάφορες ενέργειες (όπως η έναρξη και ο τερματισμός λειτουργίας) έτσι ώστε το σύστημα να εργάζεται αυτόματα και απρόσκοπτα.
- Τη θεμελίωση η οποία χρησιμοποιείται για την αποτροπή της ανατροπής της Α/Γ.

Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο θα παρουσιαστεί διεξοδικά η αεροδυναμική των Α/Γ κατακόρυφου άξονα (ΑΚΑ). Στο σχήμα 1.1 παρουσιάζεται μια τυπική άποψη της ΑΚΑ Dargieus με τα χαρακτηριστικά καμπυλόγραμμα πτερύγια και η οποία οφείλει την ονομασία της στον ομώνυμο Γάλλο μηχανικό την οποία εφηύρε το 1930. Ο G. J. M. Dargieus, στην αρχική πρότασή του περιέλαβε και την ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια (γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία ως giromill) και η οποία αποτελεί το

αντικείμενο μελέτης της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Το πρώτο ουσιαστικό ενδιαφέρον για τις ΑΚΑ τύπου Darrieus, εκδηλώθηκε το 1966 από Καναδούς ερευνητές, οι οποίοι στα πλαίσια ερευνητικών προγραμμάτων μελέτησαν την αεροδυναμική και την εφαρμογή τους σε μεγάλη κλίμακα. Το ενδιαφέρον για τις ανεμογεννήτριες αυτού του τύπου αυξήθηκε κατακόρυφα μετά το 1970 στις ΗΠΑ, τον Καναδά και σε πολλά άλλα κράτη. Οι πειραματικές και θεωρητικές έρευνες, οι εφαρμογές και οι σχετικές επιστημονικές δημοσιεύσεις παρουσιάζουν εκθετικό ρυθμό αύξησης και σήμερα οι ΑΚΑ Darrieus κατατάσσονται ανάμεσα στους συμβατικούς τύπους Α/Γ σε εφάμιλλη θέση με τις Α/Γ οριζοντίου άξονα.



**Σχήμα 1.1:** Δρομέα κατακόρυφου άξονα τύπου Darrieus

Το κυριότερο χαρακτηριστικό των ΑΚΑ είναι ότι περιστρέφονται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα όπως παριστάνεται στο αντίστοιχο σχήμα. Τα πτερύγια μιας μηχανής τύπου Darrieus (συνήθως 2 ή 3) έχουν τα άκρα του προσαρμοσμένα στον άξονα περιστροφής και έχουν το καμπύλο σχήμα το οποίο θα ελάμβανε ένα εύκαμπτο υλικό (σχοινί) σταθερού μήκους κατά την περιστροφή υπό την επίδραση φυγοκεντρικών δυνάμεων. Τα πτερύγια είναι λοιπόν απαλλαγμένα από καμπτικές τάσεις λόγω περιστροφής και καταπονούνται μόνο εφελκυστικά. Η καμπύλη αυτή αποκαλείται ως σχοινοειδής ή έχουσα τη μορφή τροπόσχοινο (σε αντιστοιχία με τη διεθνή ονομασία troposkien). Η καμπύλη αυτή η οποία μπορεί να προσεγγίζει την ημιτονοειδή ή την

παραβολική μορφή. Το σχήμα της καμπύλης αυτή μπορεί να τροποποιηθεί ελαφρά έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των βαρυτικών δυνάμεων όπως άλλωστε συμβαίνει σε δρομείς μεγάλης διαμέτρου. Οι αεροδυναμικές δυνάμεις είναι συνήθως πολύ μικρές και δεν επιδρούν στη μεταβολή του επιθυμητού σχήματος. Η διατομή των πτερυγίων των ΑΚΑ είναι συνήθως συμμετρικής αεροτομής με σταθερή μικρή χορδή ως προς την ακτίνα του δρομέα (5-10% της  $R_{max}$ ) και κάθετη σ' αυτήν.

## 1.2 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα

Η Α/Γ Darrieus της οποίας η αρχή λειτουργίας περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζει μια σειρά πλεονεκτημάτων όπως:

1. Ανεξαρτησία από τη διεύθυνση του ανέμου και καλύτερη εκμετάλλευση ανέμων μεταβλητής διεύθυνσης καθώς δεν απαιτούνται συστήματα προσανατολισμού.
2. Υψηλή αεροδυναμική απόδοση λόγω της μεγάλης σχετικής ταχύτητας του πτερυγίου και της εκμετάλλευσης της αεροδυναμικής άνωσης και όχι της αντίστασης ως κινητήρια δύναμη.
3. Χαμηλό κόστος και απλή κατασκευή πτερυγίων
4. Η καθ' ύψος μεταβολή της ταχύτητας του ανέμου (ατμοσφαιρικό οριακό στρώμα) και το βάρος των πτερυγίων προκαλούν μόνο στατικές φορτίσεις. Οι αντίστοιχες μεταβολές σε Α/Γ οριζοντίου άξονα προκαλούν φορτίσεις δυναμικού χαρακτήρα.
5. Τοποθέτηση των συστημάτων μετάδοσης της κίνησης και ηλεκτροπαραγωγής στο έδαφος. Η στήριξη και η ανέγερση του δρομέα γίνεται με απλά μέσα ενώ δε, η συντήρηση του εξοπλισμού και η πρόσβαση σε αυτόν είναι εύκολη.
6. Στην περίπτωση σύγχρονης λειτουργίας της Α/Γ σε δίκτυο, κατάλληλη επιλογή της σταθερής ταχύτητας περιστροφής του δρομέα μπορεί να οδηγήσει σε χαρακτηριστική καμπύλη ισχύος ως προς την ταχύτητα ανέμου με σταθερή ή φθίνουσα ισχύ στις υψηλές ταχύτητες ανέμου χωρίς την ανάγκη συστημάτων ρύθμισης.
7. Ευνοϊκό κόστος παραγόμενης ενέργειας και απλή τεχνολογία κατασκευής.

Παράλληλα με τα προηγούμενα πλεονεκτήματα πρέπει να αναφερθούν ορισμένα δευτερεύοντα μειονεκτήματα.

1. Οι ΑΚΑ έχουν ασθενή ροπή εκκίνησης, δηλ. κατά κανόνα δεν αυτοεκκινούν. Συνήθως η γεννήτρια χρησιμοποιείται ως κινητήρας εκκίνησης. Σε μικρότερους δρομείς που προορίζονται συνήθως για αυτόνομη λειτουργία τοποθετούνται ομοαξονικά μικροί δρομείς τύπου Savonius, οι οποίοι διαθέτουν υψηλή ροπή εκκίνησης.

2. Λόγω της μεταβλητής γωνίας προσβολής των πτερυγίων παρατηρούνται εναλλασσόμενα φορτία που συνεπάγονται κόπωση των υλικών. Επίσης η παραγόμενη ροπή παρουσιάζει κάποια ταλάντωση, η οποία μπορεί όμως να αποσβεσθεί με κατάλληλο σχεδιασμό του υπολοίπου συστήματος (π.χ. με χρησιμοποίηση επαγωγικού τύπου γεννήτριας)

### 1.3 Έρευνα και εφαρμογές των ΑΚΑ

Οι συστηματικές έρευνες επί της Α/Γ τύπου Dargieus τα τελευταία έτη δεν οδήγησαν μόνο στην προαγωγή της επιστήμης σε ένα σύνθετο αεροδυναμικό φαινόμενο αλλά και στην κατασκευή, παραγωγή και λειτουργία μονάδων οι οποίες εργάσθηκαν με επιτυχία. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι η Α/Γ ισχύος 100kW η οποία αναπτύχθηκε στα εργαστήρια Sandia των ΗΠΑ και η μηχανή 230kW του Εθνικού Συμβουλίου Ερευνών (NRC) του Καναδά. Οι δύο προηγούμενοι φορείς συνέβαλαν σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη της τεχνολογία κατασκευής του συγκεκριμένου τύπου Α/Γ. Στον Ευρωπαϊκό χώρο αξίζει να αναφερθεί η γερμανική προσπάθεια κατασκευής Α/Γ Dargieus ισχύος 20kW με σκοπό την αυτόνομη λειτουργία της η οποία θα είναι συζευγμένη με δρομέα Savonius.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, εναλλακτική περίπτωση σχεδιασμού αποτελούν και οι ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια και παρόμοια λειτουργικά χαρακτηριστικά. Οι ΑΚΑ αυτής της μορφής διατηρώντας τα περισσότερα πλεονεκτήματα που αναφέρθηκαν, έχει το επιπρόσθετο πλεονέκτημα της απλούστερης κατασκευής των πτερυγίων τα οποία όμως υπόκεινται σε μεγάλες καμπτικές τάσεις εκ περιστροφής και είναι συνήθως κατάλληλη για συστήματα μικρότερης ισχύος. Οι ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια προσφέρουν περισσότερες δυνατότητες για τη ρύθμιση της λειτουργίας του δρομέα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ΑΚΑ μεταβλητής γεωμετρίας του Musgrove (σχήμα 2) η οποία διερευνάται συστηματικά στην Αγγλία από το 1976. Οι ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια προσφέρουν τη δυνατότητα ρύθμισης της γωνίας προσβολής των πτερυγίων κατά τη περιστροφή με σκοπό τη βελτίωση της απόδοσης, τη ρύθμιση της λειτουργίας και κυρίως την εκκίνηση του δρομέα.



Σχήμα 1.2:

Δρομέας ΑΚΑ τύπου Musgrove



Η μεγαλύτερη μονάδα του τύπου αυτού, που είναι γνωστή με την ονομασία Giromill, έχει ισχύ 125kW. Πρέπει να σημειωθεί ότι η ρύθμιση της γωνίας προσβολής καταργεί την ανεξαρτησία ως προς τη διεύθυνση του ανέμου και περιπλέκει κατά ένα μέρος την κατασκευή. Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζονται διάφορες διαμορφώσεις ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια.



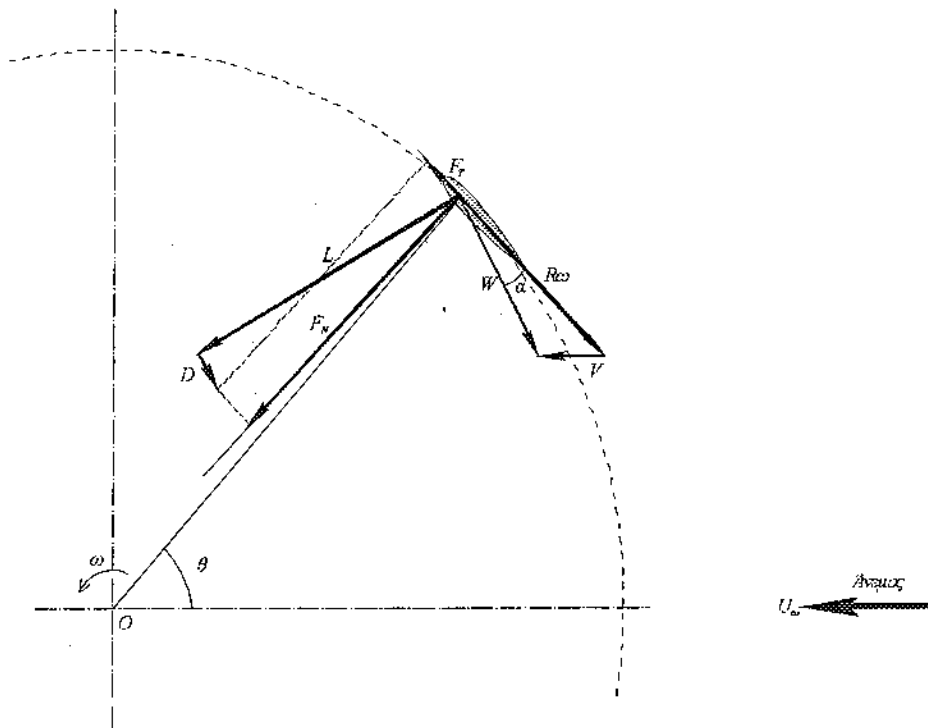
**Σχήμα 1.3:** Διαφορετικές διαμορφώσεις ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια

Μια άλλη κατηγορία των ΑΚΑ με ευθύγραμμα πτερύγια είναι αυτές που παρουσιάζουν μεγάλη στιβαρότητα (μεγάλος λόγος μήκους χορδής ως προς την ακτίνα του δρομέα). Η κατηγορία αυτή των ΑΚΑ χαρακτηρίζεται από την αναπτυσσόμενη ροπή εκκίνησης αλλά και από αρκετά χαμηλότερη απόδοση σε σχέση με τους προηγούμενους τύπους. Παρά τις μεταξύ τους διαφορές, όλοι οι τύποι των ΑΚΑ έχουν κοινά χαρακτηριστικά, ιδίως ως αναφορά την αεροδυναμική συμπεριφορά. Στις παραγράφους που ακολουθούν περιγράφεται η αρχή λειτουργίας των ΑΚΑ και οι κυριότερες παράμετροι που διέπουν τη γεωμετρία τους και τη λειτουργία τους.

#### 1.4 Αρχή λειτουργίας των ΑΚΑ

Η αρχή λειτουργίας των ΑΚΑ μπορεί να κατανοηθεί με τη βοήθεια του σχήματος 1.4 το οποίο δείχνει σε οριζόντια τομή το πτερύγιο του δρομέα σε μια τυχαία γωνιακή θέση. Η σχετική ταχύτητα  $W$ , η οποία προσβάλλει το πτερύγιο υπό γωνία πρόσπτωσης,  $\alpha$ , είναι το διανυσματικό άθροισμα της περιστροφικής ταχύτητας  $\omega R$  και της τοπικής ταχύτητας  $V$  του αέρα, η οποία διαφέρει από θέση σε θέση (και από την ταχύτητα  $U_\infty$  του αδιατάρακτου ρεύματος του ανέμου). Στο πτερύγιο αναπτύσσονται η δύναμη της ανώσεως  $L$  και η αντίσταση  $D$ . Η συνιστάμενη των δύο αυτών δυνάμεων κατά την εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς είναι η δύναμη που κινεί τον δρομέα και παράγει ωφέλιμο έργο εξάγοντας ενέργεια από τον άνεμο. Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται κατά την

περιστροφή, και παρά το γεγονός, ότι μπορεί να είναι αντίθετη προς τη φορά της κίνησης σε ορισμένες γωνίες αζιμουθίου (δηλαδή αρνητική), η μέση τιμή στη διάρκεια μιας περιστροφής είναι θετική (στην κανονική περιοχή λειτουργίας του δρομέα).



**Σχήμα 1.4:** Ταχύτητες και αεροδυναμικές δυνάμεις σε τομή περιστρεφόμενου πτερυγίου ΑΚΑ

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι για να λειτουργεί αποδοτικά ο δρομέας πρέπει η αεροτομή να λειτουργεί σε περιοχές γωνιών πρόσπτωσης με μεγάλο λόγο  $L/D$ . Λόγω των μικρών τιμών των βέλτιστων γωνιών πρόσπτωσης στις αεροτομές (τυπικά  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ), η Α/Γ αποδίδει σε περιοχή λόγων ταχυτήτων  $\omega R/U_\infty$  αρκετά μεγαλύτερων της μονάδας (τυπικά 3 – 6). Η απόδοση μειώνεται σε μεγαλύτερους λόγους ταχυτήτων, επειδή υπερισχύει η αντίσταση έναντι της ανώσεως. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται σε μικρότερους λόγους ταχυτήτων λόγω της αποκόλλησης της ροής.

Η σύντομη αυτή παρουσίαση δείχνει, ότι το πεδίο ροής περί του πτερυγίου των ΑΚΑ μεταβάλλεται συνεχώς κατά τη διάρκεια της περιστροφής, αντίθετα με το αντίστοιχο πεδίο που παρατηρείται σε μια Α/Γ οριζοντίου άξονα. Η ροή γύρω από την πτέρυγα μπορεί να παραλληλισθεί με τη ροή γύρω από ταλαντούμενη αεροτομή (καθώς  $\omega R/U \gg 1$ ) και χαρακτηρίζεται από την παρουσία φαινομένων μη μόνιμης αεροδυναμικής. Σε μικρότερους λόγους ταχυτήτων, καθώς αυξάνεται η μέγιστη γωνία πρόσπτωσης, εμφανίζεται αποκόλληση της ροής, η οποία συνοδεύεται από έντονα δυναμικά φαινόμενα, δηλ δυναμική απώλεια της στήριξης (dynamic stall). Αν στα προηγούμενα προστεθεί η αλληλεπίδραση των πτερυγίων, το τρισδιάστατο της ροής και άλλα ειδικά φαινόμενα

(φαινόμενα καμπυλότητας της ροής, φυγόκεντρων δυνάμεων στο οριακό στρώμα του πτερυγίου κτλ.), αντιλαμβάνεται κανείς ότι η λειτουργία των ΑΚΑ στηρίζεται σε ένα πολύ σύνθετο αεροδυναμικό φαινόμενο που παρουσιάζει δυσχέρειες, τόσο στην πειραματική όσο και στη θεωρητική διερεύνηση του.

## 1.5 Βασικά μέρη μιας ΑΚΑ

Στην παράγραφο αυτή περιγράφονται τα βασικά υποσυστήματα μιας ανεμογεννήτριας κατακόρυφου άξονα για τα οποία έγινε αναφορά στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου. Παρά το γεγονός ότι ο σχεδιασμός μιας Α/Γ έχει ως βασική προτεραιότητα τη μεγιστοποίηση της εξαγόμενης ενέργειας άλλοι παράγοντες που υπεισέρχονται στη διαδικασία (κόστος, περιβαλλοντικές συνθήκες κλπ.) είναι δυνατόν να μεταβάλλουν τη σύνθεση των εξαρτημάτων που συνιστούν μια ΑΚΑ. Η περιγραφή των εξαρτημάτων που ακολουθεί δεν είναι εξαντλητική αλλά περιλαμβάνει αυτά που αναμένονται να απαντηθούν σε μια τυπική μηχανή.

### 1.5.1 Ο δρομέας

Τα βασικά εξαρτήματα του δρομέα είναι τα πτερύγια τα οποία συνδέονται στην περιστρεφόμενη στήλη στην άνω και κάτω πλήμνη. Χρησιμοποιούνται συνήθως συμμετρικές αεροτομές καθώς απαιτείται συμμετρία στις αεροδυναμικές ιδιότητες. Στην περίπτωση των ΑΚΑ τύπου Darrieus τα πτερύγια έχουν παραβολική συνήθως μορφή χωρίς να είναι σπάνιες διαφορετικές διαμορφώσεις. Τα πτερύγια είναι σταθερά και ο έλεγχος της ισχύος γίνεται αεροδυναμικά (stall control). Έχουν χρησιμοποιηθεί και συστήματα με τα οποία γίνεται έλεγχος του βήματος του πτερυγίου τα οποία όμως δεν έχουν αποδώσει τα αναμενόμενα.

Καθώς η ροπή εκκίνησης είναι χαμηλή στις μηχανές κατακόρυφου άξονα η έναρξη της λειτουργίας της γίνεται με χρήση κινητήρα. Η μικρή ροπή εκκίνησης οφείλεται στο γεγονός ότι οι αεροδυναμικές δυνάμεις αναπτύσσονται εξαιτίας της περιφερειακής συνιστώσας της ταχύτητας καθώς η επίδραση της αξονικής συνιστώσας είναι ανεπαρκής. Ο κινητήρας ελέγχεται από το σύστημα ελέγχου το οποίο τον εκκινεί και τον παύει. Η παύση της περιστροφής του δρομέα γίνεται με χρήση φρένων (συνήθως δισκόφρενων) αν και έχουν χρησιμοποιηθεί και μεταπτερύγια (flaps) γι' αυτόν το σκοπό.

Το υλικό κατασκευής των πτερυγίων είναι κράμα αλουμινίου. Τα πτερύγια συνδέονται με κοχλίες στις πλήμνες οι οποίες είναι σταθερά συνδεδεμένες με την περιστρεφόμενη στήλη του δρομέα. Συνεπώς η ροπή που παράγεται, μεταφέρεται στο σύστημα μετάδοσης της κίνησης (κιβώτιο ταχυτήτων) και στη συνέχεια στην ηλεκτρογεννήτρια.

### 1.5.2 Το σύστημα μετάδοσης της κίνησης

Το σύστημα μετάδοσης της κίνησης σε σύστημα ΑΚΑ διαφοροποιείται σε σχέση με τις Α/Γ οριζοντίου άξονα στα εξής σημεία:

- (i) Είναι τοποθετημένο πλησίον του εδάφους με αποτέλεσμα η εγκατάσταση και η συντήρηση να διευκολύνονται σημαντικά.
- (ii) Ο άξονας καταπονείται με στρεπτικά και αξονικά φορτία ενώ απουσιάζουν τα καμπτικά.
- (iii) Η ικανότητα του συστήματος πέδησης είναι μεγαλύτερη καθώς απαιτείται η χρήση του όταν η μηχανή εργάζεται σε μέγιστο φορτίο.

Το σύστημα μετάδοσης της κίνησης περιλαμβάνει μια σειρά μηχανικών και ηλεκτρικών εξαρτημάτων τα οποία μεταφέρουν την ηλεκτρική ισχύ στην ηλεκτρογεννήτρια. Ένα τυπικό σύστημα περιλαμβάνει τον άξονα του δρομέα (ο οποίος συνήθως αποκαλείται βασικός ή άξονας χαμηλής ταχύτητας), το κιβώτιο ταχυτήτων το οποίο πολλαπλασιάζει την ταχύτητα περιστροφής, τον άξονα της γεννήτριας (συνήθως αποκαλούμενος ως δευτερεύων ή υψηλής ταχύτητας), το σύστημα πέδησης και άλλα βοηθητικά εξαρτήματα που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο, τη λίπανση και τη ψύξη του συστήματος.

Ο άξονας του δρομέα είναι ένα από τα πλέον σημαντικά εξαρτήματα μιας αιολικής μηχανής εξαιτίας του διττού του χαρακτήρα ως δομικό και μηχανικό μέρος. Ο σχεδιασμός αυτού του μέρους της μηχανής το οποίο υπόκειται σε διαρκή κόπωση γίνεται έτσι ώστε η διάρκεια ζωής του να είναι η μέγιστη δυνατή. Τα φορτία τα οποία ασκούνται είναι το βάρος του δρομέα, ωστικές, καμπτικές και στρεπτικές δυνάμεις. Επιπροσθέτως του βασικού εξοπλισμού του άξονα (τριβείς, συστήματα λίπανσης, συστήματα σύζευξης κ.α.), περιλαμβάνονται συστήματα ελέγχου και ασφάλειας όπως αισθητήρες, φρένα, καλωδιώσεις και σωληνώσεις.

Εκ των δύο αξόνων ο βασικός πρέπει να χαρακτηρίζεται από στιβαρότητα αλλά και από στρεπτική ευελιξία έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η απόσβεση διακυμάνσεων της ροπής πριν από το κιβώτιο ταχυτήτων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται δύο ομόκεντροι άξονες εκ των οποίων ο εξωτερικός παραλαμβάνει τα φορτία ενώ ο εσωτερικός μεταβιβάζει την αναπτυσσόμενη ροπή στο κιβώτιο ταχυτήτων.

Το κιβώτιο ταχυτήτων μιας Α/Γ χαρακτηρίζεται από υψηλό λόγο μετάδοσης της κίνησης ο οποίος για μεγάλου μεγέθους μηχανές μπορεί να πάρει την τιμή του 100. Σε μια Α/Γ χρησιμοποιούνται κιβώτια παραλλήλων αξόνων, επικυκλικά ή πλανητικά καθώς και υβριδικοί σχεδιασμοί. Τα κιβώτια παραλλήλων αξόνων είναι ευρέως διαθέσιμα, απλούστερα και φθηνότερα. Επίσης παρέχουν καλύτερη πρόσβαση στο βασικό άξονα (μέσω του άξονα της πρώτης βαθμίδας

μετάδοσης). Απαιτούν όμως περισσότερο χώρο και στιβαρή υποστήριξη. Στην περίπτωση που στο σύστημα δεν προβλέπεται κοίλος άξονας, το κιβώτιο μπορεί να στηρίζεται σε ελατήρια ή υδραυλικούς αποσβεστήρες για την αντιμετώπιση των στρεπτικών ταλαντώσεων.

Ο άξονας της Η/Γ είναι ένα συμβατικό στοιχείο μηχανών, το οποίο φέρει φλάντζες συνδεδεμένες με κοχλίες στα δύο άκρα του. Εάν το σύστημα μετάδοσης της κίνησης περιλαμβάνει λειτουργία πέδησης, τότε αυτή μπορεί να εγκατασταθεί σ' αυτόν τον άξονα καθώς η δύναμη πέδησης είναι ίση με το τετράγωνο του λόγου μετάδοσης.

### 1.5.3 Ηλεκτρογεννήτρια

Χρησιμοποιούνται σχεδόν όλα τα είδη ηλεκτρογεννητριών. Για μικρής κλίμακας εγκαταστάσεις χρησιμοποιούνται μικρής ταχύτητας εναλλάκτες και γεννήτριες συνεχούς ρεύματος, ελαχιστοποιώντας κατ' αυτό τον τρόπο την ανάγκη ελέγχου της ταχύτητας περιστροφής. Σε μεσαίου και μεγάλου μεγέθους συστήματα χρησιμοποιούνται γεννήτριες AC. Οι απαιτήσεις σε μέγεθος, βάρος, απόδοση και διάρκεια ικανοποιούνται με τροποποίηση, εμπορικά διαθέσιμων Η/Γ. Τα κριτήρια επιλογής που συχνά τίθενται από τους σχεδιαστές συστημάτων είναι το κόστος, η ποιότητα της παραγόμενης ενέργειας (αρμονική παραμόρφωση), ο συντελεστής ισχύος και η απόσβεση των στρεπτικών ταλαντώσεων.

Οι επαγωγικές γεννήτριες AC (ασύγχρονες) συχνά επιλέγονται εξαιτίας της εγγενούς ικανότητας απόσβεσης των ταλαντώσεων δια της ολίσθησεως και για το μικρό κόστος τους. Οι επαγωγικές γεννήτριες AC υψηλής ολίσθησης παρέχουν ταχύτερη απόσβεση με μειωμένη όμως απόδοση. Οι σύγχρονες γεννήτριες AC παρέχουν ηλεκτρική ισχύ υψηλότερης ποιότητας και απόδοσης αλλά η χρήση τους απαιτεί εξωτερικούς ρυθμιστές της τάσης ενώ η συμπεριφορά τους όσον αφορά την απόσβεση των ταλαντώσεων είναι υποδεέστερη.

Συστήματα μεταβλητής ταχύτητας – σταθερής συχνότητας (VSCF) παρέχουν υψηλότερη απόσβεση από έναν επαγωγικό κινητήρα υψηλής ολίσθησης συνδυάζοντας την απόδοση και την υψηλή ποιότητα ισχύος μιας σύγχρονης μηχανής. Επίσης είναι δυνατός ο έλεγχος της ταχύτητας περιστροφής του δρομέα για μέγιστη αεροδυναμική απόδοση. Χρησιμοποιούνται δύο είδη συστημάτων VSCF. Ο πρώτος τύπος κάνει χρήση διπλών τυλιγμάτων (στο στάτορα και στο ρότορα) και το μεγαλύτερο μέρος της ισχύς που παράγεται στο στάτορα στη συχνότητα λειτουργίας. Το κλάσμα της ισχύος που παράγεται στο δρομέα είναι ισοδύναμο με το λόγο της συχνότητας ολίσθησης προς τη συχνότητα λειτουργίας. Η ισχύς του ρότορα της Η/Γ παράγεται με χρήση ηλεκτρονικών από τη συχνότητα λειτουργίας μέσω ενός κυκλομετατροπέα. Ο δεύτερος

τύπος συστήματος VSCF χρησιμοποιεί μια συμβατική σύγχρονη μηχανή και η συχνότητα της παραγόμενης ισχύος οδηγείται στην τιμή λειτουργίας μέσω AC – DC – AC μετατροπής.

#### 1.5.4 Το σύστημα στήριξης

Το σύστημα στήριξης μιας εγκατάστασης ΑΚΑ περιλαμβάνει τους άνω και κάτω τριβείς, καλώδια υποστήριξης με τις απαραίτητες συσκευές για τον τανυσμό τους και τη βάση στήριξης. Οι δρομείς τύπου Dargieus περιλαμβάνουν τρία ή τέσσερα καλώδια ενώ δρομείς με κατακόρυφα πτερύγια είναι συνήθως αυτοστηριζόμενοι. Τα καλώδια αυτά εκτείνονται από το ανώτερο τμήμα του πύργου στήριξης έως τις αγκυρώσεις που βρίσκονται στο έδαφος με γωνία η οποία κυμαίνεται από 30° έως 40°. Ο τανυσμός των καλωδίων προκαλεί ωστική φόρτιση στον ανώτερο τριβέα ίση με το μισό ή και παραπάνω του συνολικού φορτίου τανυσμού των καλωδίων. Το φορτίο αυτό, το οποίο έχει φορά προς το έδαφος, περνά από τη στήλη προσάρτησης του δρομέα, τον κατώτερο τριβέα, τη βάση στήριξης και τελικά φθάνει στην θεμελίωση. Ανάλογα με το σχεδιασμό είναι πιθανόν οι δύο πλήμνες του δρομέα να υπόκεινται και αυτές σε θλιπτικά φορτία.

Το βασικό σύστημα συχνοτήτων μιας μηχανής ΑΚΑ καθορίζεται βάσει του μήκους και της έντασης τανυσμού των καλωδίων, καθώς αυτά δρουν ως ελατήρια απόσβεσης τα οποία περιορίζουν την κίνηση του κέντρου μάζας ενός δρομέα ΑΚΑ. Τα καλώδια μπορούν να παρέχουν δύσκαμπτη ή εύκαμπτη υποστήριξη στο δρομέα ανάλογα με το μηχανολογικό σχεδιασμό. Συνήθως προτιμάται η εύκαμπτη διαμόρφωση, η οποία οδηγεί σε ένα βασικό σύστημα συχνοτήτων μεγαλύτερο από την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα αλλά μικρότερο από τη συχνότητα διαβάσεων των πτερυγίων (δηλ. ο αριθμός των πτερυγίων επί την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα).

Το ύψος της βάσης στήριξης είναι ίσο με την αναγκαία απόσταση από το έδαφος. Η ελάχιστη απόσταση ασφαλείας είναι πολύ μικρότερη για μια ΑΚΑ σε σχέση με μια Α/Γ οριζοντίου άξονα επειδή η ταχύτητα περιστροφής της πτέρυγας είναι σχετικά μικρή. Η αύξηση του ύψους της βάσης στήριξης εξαρτάται από δύο παραμέτρους: το πρόσθετο κόστος εγκατάστασης και το αναμενόμενο ενεργειακό κέρδος. Το πρόσθετο κόστος μπορεί να είναι μεγαλύτερο του αναμενόμενου καθώς απαιτείται πρόσθετη μελέτη για τη διαμόρφωση των καλωδίων αφού μεταβάλλεται το σύστημα των συχνοτήτων.

#### 1.5.5 Θεμελίωση της εγκατάστασης

Η θεμελίωση περιλαμβάνει ένα βασικό θεμέλιο κάτω από τη βάση στήριξης και τις θεμελιώσεις των αγκυρώσεων των καλωδίων συγκράτησης. Καθώς η βασική θεμελίωση δεν υπόκειται σε ανωστικά φορτία ή πολύ μεγάλα φορτία που τείνουν να ανατρέψουν την εγκατάσταση, το βάρος

και ο οπλισμός της είναι μικρότερο μιας εγκατάστασης Α/Γ οριζοντίου άξονα. Οι θεμελιώσεις των αγκυρώσεων φέρουν βαρύ οπλισμό έτσι ώστε να ανθίστανται των ασκούμενων εφελκυστικών φορτίων και υπολογίζονται έτσι ώστε να αποτρέπουν την ανασήκωση ή τη μετατόπιση που θα επέφεραν απώλεια του τανυσμού των καλωδίων.

#### 1.5.6 Το σύστημα ελέγχου

Το σύστημα ελέγχου μιας ΑΚΑ είναι συνδεδεμένο με διατάξεις συνεχούς μέτρησης της ταχύτητας του ανέμου (ανεμόμετρο). Όταν η ταχύτητα του ανέμου είναι αρκετά μεγάλη και υπερβαίνει τις αντιστάσεις του συστήματος μετάδοσης της κίνησης, το σύστημα ελέγχου επιτρέπει στο δρομέα να περιστραφεί. Αυτή είναι η ταχύτητα έναρξης λειτουργίας (cut – in velocity) και κυμαίνεται στα  $4 - 5m/sec$ . Κάθε σύστημά χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα λειτουργίας στην οποία αποδίδει τη μέγιστη ισχύ (τυπική τιμή  $15m/sec$ ). Εάν η ταχύτητα του ανέμου υπερβεί την ταχύτητα λειτουργίας, το σύστημα ελέγχου παρεμβαίνει ενεργοποιώντας τα συστήματα πέδησης (δισκόφρενα, αεροδυναμικά φρένα, κ.τ.λ.). Σε περίπτωση που η ταχύτητα υπερβεί τη μέγιστη ταχύτητα λειτουργίας η ταχύτητα εξόδου το σύστημα ελέγχου παύει τη λειτουργία της μηχανής (τυπική τιμή  $25m/sec$ ).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

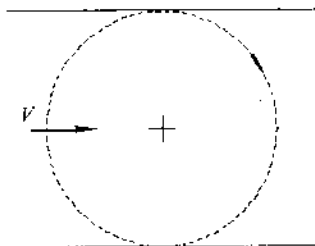
## Αεροδυναμική ανάλυση δρομέα κατακόρυφου άξονα με ευθύγραμμο πτερύγια

### 2.1 Εισαγωγή

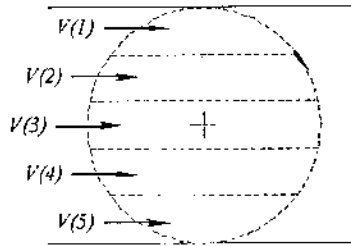
Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται διαφορετικές προσεγγίσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί για την αεροδυναμική ανάλυση ενός δρομέα μιας Α/Γ κατακόρυφου άξονα. Κατά τη μελέτη του συγκεκριμένου τύπου δρομέα, τα τελευταία 30 χρόνια, έχει προταθεί ένας μεγάλος αριθμός μοντέλων τα οποία μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις ομάδες:

- Τα μοντέλα ανάλυσης ροϊκών σωλήνων (streamtube models)
- Τα μοντέλα δινών με σταθερό απόρευμα (fixed wake vortex models)
- Τα μοντέλα ελευθέρων δινών (free-vortex models)

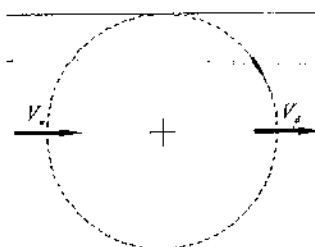
Τα μοντέλα που εντάσσονται στις ανωτέρω κατηγορίες διαφοροποιούνται ως προς την αντιμετώπιση της ροής και έως τώρα δεν υπάρχει κάποια διαθέσιμη προσέγγιση η οποία να καλύπτει επαρκώς όταν τα σημαντικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε όλο το επιχειρησιακό εύρος μιας ΑΚΑ. Τα μοντέλα της πρώτης κατηγορίας εξετάζονται αναλυτικά σε αυτό το κεφάλαιο καθώς διακρίνονται για την απλότητά τους και το μειωμένο υπολογιστικό κόστος που συνδέεται με την επίλυση, σε σχέση με τα μοντέλα των δύο άλλων κατηγοριών.



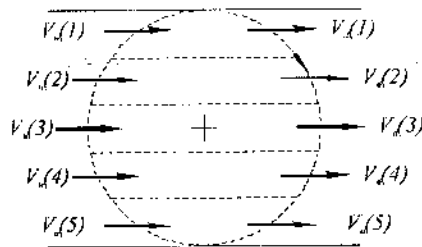
(α) απλός ροϊκός σωλήνας με ένα δίσκο επενέργειας



(β) πολλαπλοί ροϊκοί σωλήνες με ένα δίσκο επενέργειας



(γ) απλός ροϊκός σωλήνας με δύο δίσκους επενέργειας



(δ) πολλαπλοί ροϊκοί σωλήνες με δύο δίσκους επενέργειας

Σχήμα 2.1: Διαφορετικές εκδοχές μοντέλων ροϊκού σωλήνα



Τα μοντέλα ανάλυσης ροϊκών σωλήνων υπολογίζουν την επαγόμενη ταχύτητα στο δρομέα εξισώνοντας τη χρονικά μέση τιμή της δύναμης στα πτερύγια με τη μέση ροή της ορμής διαμέσου ενός ροϊκού σωλήνα ο οποίος έχει σταθερές διαστάσεις και θέση στο πεδίο. Οι διαφορετικές προσεγγίσεις αυτής της ομάδας μοντέλων χρησιμοποιούν έναν ή πολλούς ροϊκούς σωλήνες και μια ή δύο επιφάνειες επενέργειας. Στο σχήμα (2.1) παρουσιάζονται γραφικά τέσσερις εκδοχές μοντέλων ροϊκού σωλήνα που θα αναλυθούν στη συνέχεια. Τα μοντέλα της κατηγορίας αυτής, εκτός ορισμένων περιπτώσεων, υπολογίζουν συμμετρικά τις ροϊκές ποσότητες. Οι αεροδυναμικές δυνάμεις υπολογίζονται μέσω των τοπικών γωνιών πρόσπτωσης και σχετικών ταχυτήτων, αντλώντας πειραματικά δεδομένα για τους συντελεστές άωσης και αντίστασης. Παρά το γεγονός ότι η προσέγγιση αυτή έχει μειωμένη ακρίβεια στους υπολογισμούς της ισχύος και της ώσης σε μέρος του εύρους λειτουργίας μιας ΑΚΑ, το υπολογιστικό κόστος είναι πολύ μικρότερο συγκρινόμενο με τις διάφορες θεωρίες δινών.

### 2.1.1 Απόδοση δρομέα και παράγοντες που την επηρεάζουν

Η επίδραση διαφόρων παραμέτρων στην τιμή του συντελεστή ισχύος μπορεί να βρεθεί ποιοτικά χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση. Ο συντελεστής ισχύος ορίζεται από τη σχέση:

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^3 S} = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^3 H D}$$

Οι πιθανές παράμετροι που επηρεάζουν την απόδοση και οι διαστάσεις των συναρτήσεων των αντίστοιχων θεμελιωδών [M], [L] και [T] δίδονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Πίνακας 1: Παράμετροι που επηρεάζουν την απόδοση και θεμελιώδεις διαστάσεις				
Μέγεθος	Ερμηνεία	Θεμελιώδεις Διαστάσεις		
		[M]	[L]	[T]
$\omega$	Γωνιακή ταχύτητα του δρομέα	0	0	-1
$V_\infty$	Ταχύτητα του ανέμου	0	1	1
$c$	Μήκος της χορδής της αεροτομής	0	1	0
$D$	Διάμετρος του δρομέα	0	1	0
$H$	Ύψος του δρομέα	0	1	0
$\mu$	Μοριακή συνεκτικότητα του αέρα	1	-1	-1
$\rho$	Πυκνότητα του αέρα	1	-3	0
$k$	Πλήθος των πτερυγίων	0	0	0

Ο αριθμός των παραμέτρων είναι  $n = 9$  (συμπεριλαμβανομένου και του συντελεστή απόδοσης  $C_p$ ) και οι θεμελιώδεις διαστάσεις είναι  $m = 3$ . Αναζητούμε δηλαδή  $n - m = 6$  όρους  $\pi$ . Σαν επαναλαμβανόμενες διαστάσεις επιλέγουμε τη διάμετρο  $D$  με διαστάσεις  $[L^{-1}]$ , την ταχύτητα  $V_\infty$  με διαστάσεις  $[LT^{-1}]$  και την πυκνότητα  $\rho$  με διαστάσεις  $[ML^{-3}]$ . Μετά την εύρεση των  $\pi$  όρων η γενική εξίσωση:

$$f(C_p, \omega, V_\infty, c, D, H, \mu, \rho, k) = 0$$

θα έχει λύση:

$$\dots \varphi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) = 0$$

$$\text{ή} \quad \pi_1 = \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$$

Ο όρος  $\pi_1$  προκύπτει από το συνδυασμό του συντελεστή απόδοσης  $C_p [M^0 L^0 T^0]$  με τις τρεις επαναλαμβανόμενες μεταβλητές:

$$[L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [M^0 L^0 T^0] = [M^0 L^0 T^0]$$

για τη διάσταση  $M$ :  $c = 0$

για τη διάσταση  $L$ :  $a + b - 3c = 0$

για τη διάσταση  $T$ :  $-b = 0$

προκύπτει  $a = b = c = 0$  συνεπώς

$$\pi_1 = D^0 V_\infty^0 \rho^0 C_p = C_p$$

Για τον όρο  $\pi_2$  (ο οποίος αφορά τη γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  με διαστάσεις  $[T^{-1}]$ ) έχουμε:

$$[L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [T^{-1}] = [M^0 L^0 T^0]$$

για τη διάσταση  $M$ :  $c = 0$

για τη διάσταση  $L$ :  $a + b - 3c = 0$

για τη διάσταση  $T$ :  $b = -1$

ή  $a = 1, b = -1, c = 0$ . Συνεπώς:

$$\pi_2 = D^1 V_\infty^{-1} \omega = \frac{\omega D}{V_\infty}$$

Ο όρος  $\pi_3$  συνδέεται με το μήκος της χορδής  $c[L]$ . Είναι:

$$[L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [L] = [M^0 L^0 T^0]$$

για τη διάσταση  $M$ :  $c = 0$

για τη διάσταση  $L$ :  $a + b - 3c + 1 = 0$

για τη διάσταση  $T$ :  $b = 0$

ή  $a = -1, b = 0, c = 0$ . Συνεπώς:

$$\pi_3 = D^1 c = \frac{c}{D}$$

Ο όρος  $\pi_4$  αφορά το ύψος του δρομέα  $H$  του οποίου οι διαστάσεις είναι  $[L]$  όπως και της χορδής  $c$ . Συνεπώς θα ισχύει:

$$\pi_4 = \frac{H}{D}$$

Για τον όρο  $\pi_5$  (σχετίζεται με το μοριακό ιξώδες  $\mu$  με διαστάσεις  $[ML^{-1}T^{-1}]$ ) θα είναι:

$$[L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [ML^{-1}T^{-1}] = [M^0 L^0 T^0]$$

για τη διάσταση  $M$ :  $c + 1 = 0$

για τη διάσταση  $L$ :  $a + b - 3c - 1 = 0$

για τη διάσταση  $T$ :  $-b - 1 = 0$

ή  $a = -1, b = -1, c = -1$ . Συνεπώς:

$$\pi_5 = D^{-1} V_{\infty}^{-1} \rho^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V_{\infty} D}$$

Ο όρος  $\pi_6$  (το πλήθος πτερυγίων  $k$  το οποίο είναι αδιάστατο μέγεθος) είναι προφανώς:

$$\pi_6 = k$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης:

$$f(C_p, \omega, V_{\infty}, c, D, H, \mu, \rho, k) = 0$$

είναι η

$$\varphi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) = 0$$

Καθώς επιτρέπεται η αναδιάταξη των αδιάστατων ομάδων  $\pi$  δια του μεταξύ των πολλαπλασιασμό ή διαίρεση μπορούμε να τροποποιήσουμε τα αποτελέσματα έτσι ώστε αυτά να μετατραπούν σε καταλληλότερη μορφή. Διαιρώντας τις ομάδες  $\pi_4$  και  $\pi_3$  προκύπτει η νέα ομάδα  $\pi'_4$ :

$$\pi'_4 = \frac{\pi_4}{\pi_3} = \frac{H/D}{c/D} = \frac{H}{c}$$

Ομοίως, με διαίρεση των ομάδων  $\pi_3$  και  $\pi_5$  προκύπτει η νέα ομάδα  $\pi'_5$ :

$$\pi'_5 = \frac{\pi_3}{\pi_5} = \frac{c/D}{\mu/\rho V_\infty D} = \frac{\rho V_\infty c}{\mu}$$

Κατά συνέπεια μια νέα λύση της  $f$  αποτελεί η:

$$\varphi_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi'_4, \pi'_5, \pi_6) = 0$$

η οποία εναλλακτικά μπορεί να γραφεί:

$$C_p = \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi'_4, \pi'_5, \pi_6)$$

$$\text{ή } C_p = \varphi\left(\frac{\omega D}{V_\infty}, \frac{c}{D}, \frac{H}{c}, \frac{\rho V_\infty c}{\mu}, k\right)$$

Αναλύοντας τις αδιάστατες ομάδες που προέκυψαν παρατηρούμε ότι η  $\pi_2$  συνδέεται με το λόγο ταχύτητας ακροπτερυγίου  $\lambda$ , η  $\pi_3$  με τη στιβαρότητα (ή στερεότητα) του δρομέα, η  $\pi'_4$  με το διάταμα της πτέρυγας, η  $\pi'_5$  με τον αριθμό Reynolds της αεροτομής ενώ η  $\pi_6$  ισούται με το πλήθος των πτερυγίων της Α/Γ. Όπως θα φανεί και από τη θεωρητική ανάλυση των επόμενων παραγράφων οι προηγούμενες ποσότητες επηρεάζουν σημαντικά την απόδοση μιας Α/Γ.

## 2.2 Η θεωρία του απλού ροϊκού σωλήνα (single streamtube theory)

### 2.2.1 Εισαγωγή

Σε αυτή τη προσέγγιση εξετάζονται οι δυνάμεις και η αντίστοιχη συναλλαγή ορμής εντός ενός ροϊκού σωλήνα που περιβάλλει το δρομέα. Πρόκειται για την απλούστερη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για την ανάλυση μιας ΑΚΑ. Μέσω της θεώρησης αυτής είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι συντελεστές απόδοσης και αντίστασης για δρομέα δεδομένης γεωμετρίας. Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται χρησιμοποιούνται συνήθως για την εξέταση της απόδοσης συναρτήσει λειτουργικών χαρακτηριστικών του δρομέα όπως ο λόγος ταχύτητας ακροπερυγίου, η στιβαρότητα (στερεότητα) του δρομέα, ο τύπος αεροτομής κλπ.

Το μοντέλο αυτό είναι σε θέση να εκτιμήσει με ακρίβεια την απόδοση του δρομέα ως συνάρτηση του λόγου ύψους/ διάμετρο και της στερεότητας αυτού. Τα αποτελέσματα που έχουν ληφθεί μέσω της θεωρίας του απλού ροϊκού σωλήνα συμφωνούν με αντίστοιχα πειράματα που έχουν πραγματοποιηθεί σε αεροσήραγγες. Παρ' όλα αυτά, η θεωρία αυτή φαίνεται να υπερεκτιμά την εξαγόμενη ισχύ για ένα μικρό εύρος του λόγου ταχυτήτων της πτέρυγας πλησίον της περιοχής απώλειας στήριξης. Παρατηρείται επίσης υπερεκτίμηση της αντίστασης που προβάλλει ο δρομέας, για διαμορφώσεις μεγάλης στιβαρότητας, στην περιοχή χαμηλής φόρτισης όταν αυτός περιστρέφεται με ταχύτητα πλησίον της μέγιστης.

### 2.2.2 Εφαρμογή του θεωρήματος της διατήρησης της ορμής στο ροϊκό σωλήνα

Θεωρούμε δρομέα ΑΚΑ ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και είναι εκτεθειμένος σε άνεμο ταχύτητας  $V_\infty$ . Εάν η ακτίνα του δρομέα είναι  $R$  τότε η περιφερειακή ταχύτητα  $U$  θα είναι:

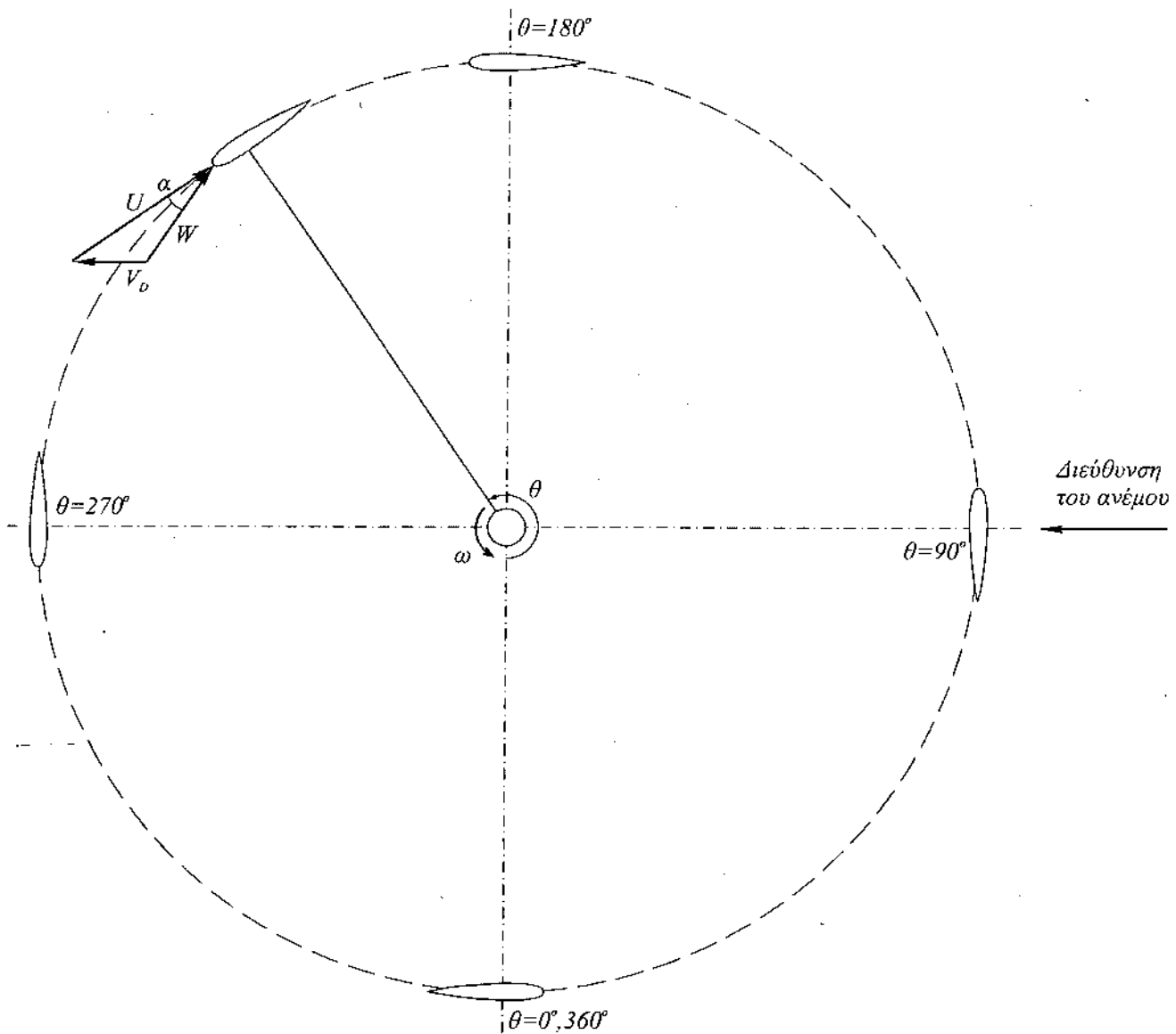
$$U = R\omega \quad (2.2.2.1)$$

Ο άνεμος ο οποίος κινείται στο ροϊκό σωλήνα που περιβάλλει το δρομέα επιβραδύνεται εξαιτίας της παρουσίας αυτού, με αποτέλεσμα η ταχύτητα που τελικά φθάνει σε αυτόν να είναι  $V_D$ . Για τις ανάγκες της ανάλυσης αυτής της παραγράφου, θα θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα  $V_\infty$  είναι σταθερή ως προς το χρόνο και η κατεύθυνσή της παραμένει αμετάβλητη. Ομοίως η ταχύτητα  $V_D$  κατανέμεται ομοιόμορφα στην πτερύγωση της μηχανής.

Η μείωση της ταχύτητας από  $V_\infty$  σε  $V_D$  είναι δυνατό να εκφραστεί μέσω του συντελεστή επιβράδυνσης  $a$  (ο οποίος συχνά καλείται και συντελεστής επαγωγής). Είναι:

$$V_D = V_\infty (1 - a) \quad (2.2.2.2)$$

Ο συντελεστής επιβράδυνσης εκφράζει δηλαδή την ποσοστιαία μείωση της ταχύτητας του ελεύθερου ρεύματος. Καθώς η επαγόμενη στο δρομέα ταχύτητα  $V_D$  είναι σταθερή, προκύπτει ότι και η τιμή του  $a$  παραμένει ομοίως αμετάβλητη.



**Σχήμα 2.2:** Γωνίες και τρίγωνα ταχυτήτων σε ΑΚΑ με ευθύγραμμο πτερόγυια

Μια επισκόπηση του σχήματος 2.2 δείχνει το πεδίο στο οποίο είναι βυθισμένη η πτέρυγα ενός δρομέα ΑΚΑ. Το πεδίο αυτό συντίθεται από δύο διαφορετικές ταχύτητας: την ταχύτητα  $V_D$  και την περιφερειακή  $U$ . Το διανυσματικό τους άθροισμα δίδει τη σχετική ταχύτητα η οποία προσπίπτει στην πτέρυγα:

$$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}_D \quad (2.2.2.3)$$

Εξαιτίας της σχετικής ταχύτητας αναπτύσσεται μια αεροδυναμική δύναμη η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την άνωση  $L$  και την αντίσταση  $D$ . Η συνιστώσα της αεροδυναμικής δύναμης η οποία είναι παράλληλη της χορδής (εφαπτόμενη στην περιφέρεια) με φορά ίδια της περιστροφής

είναι υπεύθυνη για την παραγωγή χρήσιμου έργου, μέσω της προκαλούμενης ροπής, από τον δρομέα και διαφοροποιείται συναρτήσει της αξιμουθιακής γωνίας του πτερυγίου (γωνία θέσεως)  $\theta$ . Για ορισμένο εύρος τιμών της  $\theta$  λαμβάνει αρνητικές τιμές η μέση τιμή της όμως της παραγόμενης ροπής είναι θετική με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η εξαγωγή ενέργειας από τον άνεμο. Είναι επίσης φανερό ότι η εκάστοτε γωνία προσπτώσεως μεταβάλλεται χρονικά και κυμαίνεται μεταξύ δύο ακραίων τιμών.

Η δύναμη της αντίστασης που προβάλλει ο δρομέας στη ροή υπολογίζεται μέσω του θεωρήματος μεταβολής της ορμής στην αξονική διεύθυνση. Θεωρώντας ότι η μεταβολή της ορμής λαμβάνει χώρα στο δρομέα, η αξονική ροή της ορμής ανάντη και κατόντη αυτού είναι:

$$\dot{m}V_{\infty} \text{ και } \dot{m}V_D$$

Η μαζική παροχή θα είναι:

$$\dot{m} = \rho S V_D \quad (2.2.2.4)$$

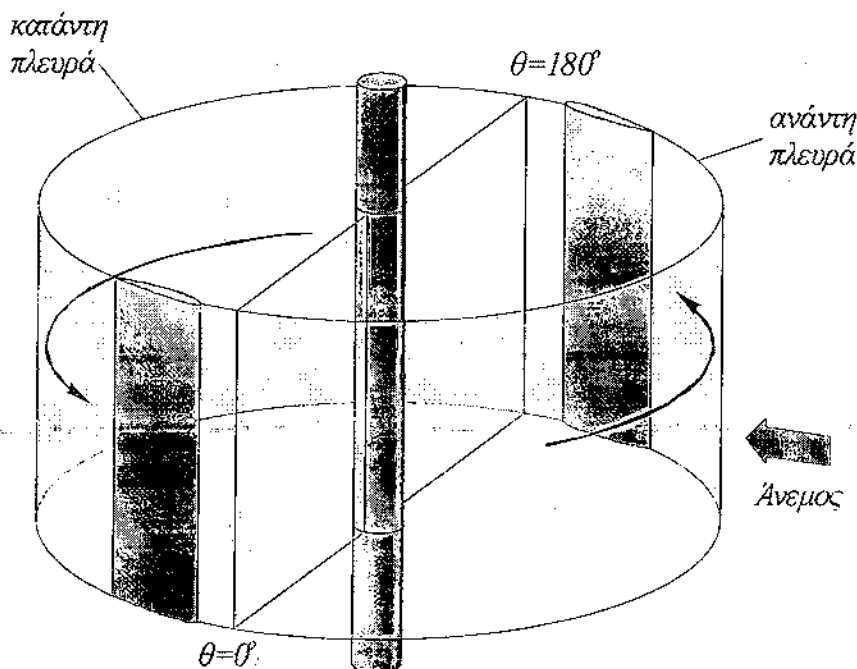
όπου  $S$  η προβαλλόμενη επιφάνεια του δρομέα

και  $\rho$  η πυκνότητα του αέρα

Συνεπώς η αντίσταση που προβάλλουν οι δύο επιφάνειες (βλ. σχήμα 2.3) του δρομέα που αλληλεπιδρούν με τον άνεμο είναι:

$$F_D = 2\dot{m}(V_{\infty} - V_D) = 2\rho S V_D (V_{\infty} - V_D) \quad (2.2.2.5)$$

Ο συντελεστής αντίστασης του δρομέα βάσει της δυναμικής πίεσης που ασκείται σε αυτόν και της επιφάνειας  $S$  θα είναι:



**Σχήμα 2.3:** Οι δύο επιφάνειες (ανάντη και κατόντη πλευρά) του δρομέα που αλληλεπιδρούν με τον άνεμο.

$$C_{F_{D0}} = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V_D^2 S} = \frac{2\rho S V_D (V_\infty - V_D)}{\frac{1}{2}\rho V_D^2 S} = 4 \left( \frac{V_\infty}{V_D} - 1 \right) \quad (2.2.2.6)$$

Συνεπώς:

$$\frac{V_\infty}{V_D} = 1 + \frac{1}{4} C_{F_{D0}} \quad (2.2.2.7)$$

Συνήθως χρησιμοποιείται και ένας συντελεστής αντιστάσεως ο οποίος βασίζεται στη δυναμική πίεση του περιβάλλοντος:

$$C_{F_D} = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{2\rho S V_D (V_\infty - V_D)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = 4 \left( \frac{V_D}{V_\infty} \right)^2 \left( \frac{V_\infty}{V_D} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$C_{F_D} = C_{F_{D0}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{4} C_{F_{D0}} \right)^2} \quad (2.2.2.8)$$

### 2.2.3 Εφαρμογή της πτερυγικής θεωρίας στο μοντέλο απλού ροϊκού σωλήνα

Για μια δεδομένη γεωμετρία ενός δρομέα ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , η αεροδυναμική απόδοση, η ισχύς της γεννήτριας και η αντίσταση που προβάλλει ο δρομέας υπολογίζονται βάσει της πτερυγικής θεωρίας. Για τον υπολογισμό του συντελεστή αντιστάσεως του δρομέα απαιτείται η ολοκλήρωση των δυνάμεων που ασκούνται στα πτερύγια του δρομέα για μια πλήρη περιστροφή.

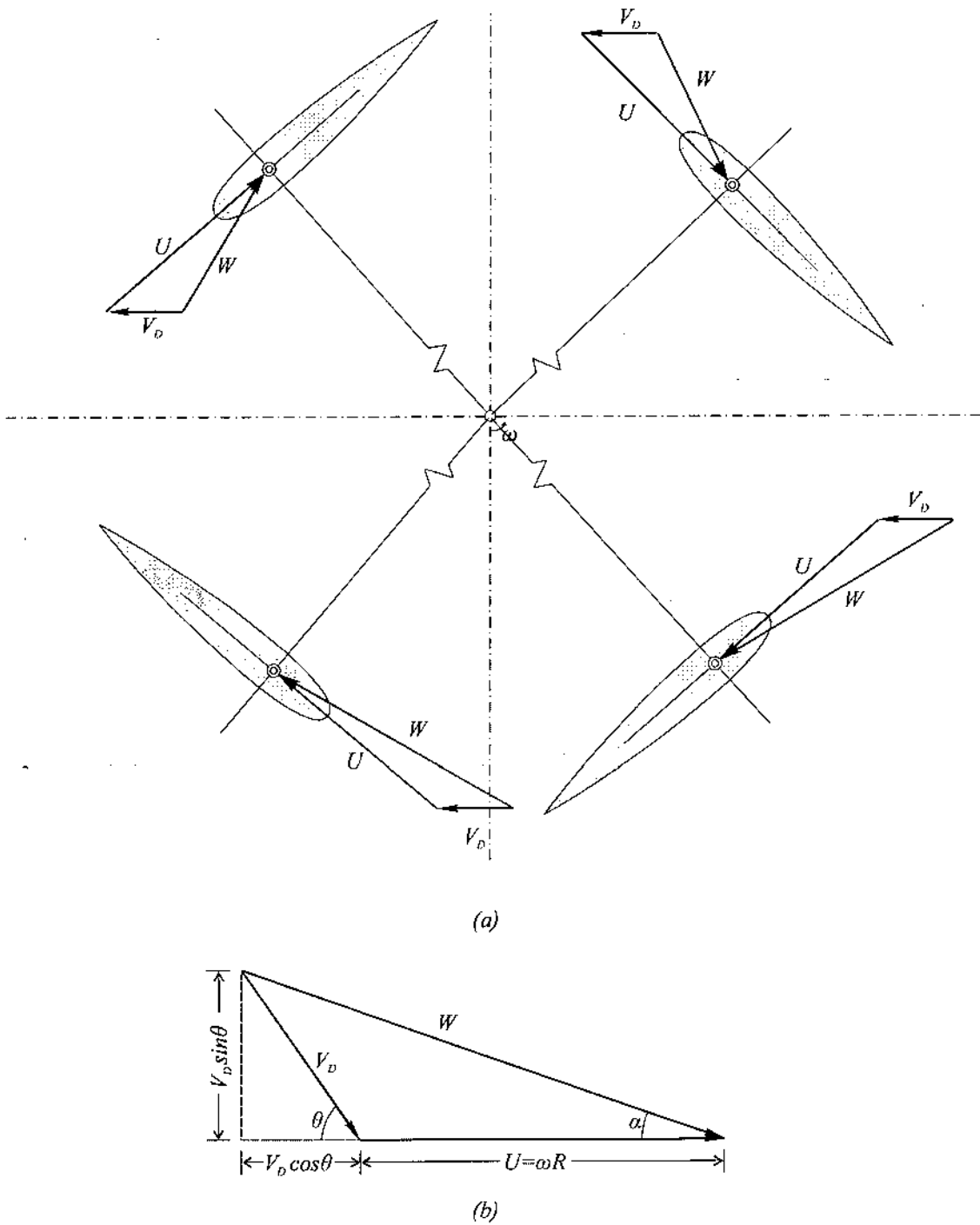
Για τον υπολογισμό των δυνάμεων που ασκούνται επί της πτέρυγας είναι αναγκαία η γνώση της τοπικής γωνίας πρόσπτωσης και η τοπική σχετική δυναμική πίεση. Το προκύπτον διάνυσμα της ταχύτητας, σε σχέση με μια κινούμενη πτέρυγα αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες: μια παράλληλη στη διεύθυνση του πτερυγίου και μια κάθετη σε αυτή (δηλαδή σε μια τομή της πτέρυγας). Η πρώτη εκ των ανωτέρω συνιστωσών δεν έχει επίδραση στις αναπτυσσόμενες αεροδυναμικές δυνάμεις και παρουσιάζεται σε δρομείς τύπου Darrieus. Σε δρομείς με κατακόρυφα πτερύγια το μέτρο της είναι μηδενικό. Η τοπική γωνία προσπτώσεως,  $\alpha$ , και η τοπική σχετική δυναμική πίεση είναι αποκλειστικά συνάρτηση της θέσης του πτερυγίου και του μέτρου των συνιστωσών της ταχύτητας στο επίπεδο της αεροτομής της πτέρυγας.

Θεωρώντας το σχήμα (2.4) και το αντίστοιχο τρίγωνο ταχυτήτων λαμβάνουμε:

$$\tan \alpha = \frac{V_D \sin \theta}{\omega R + V_D \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{\omega R}{V_D} + \cos \theta} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{\frac{\omega R}{V_D} + \cos \theta} \quad (2.2.3.1)$$



και 
$$W^2 = (\omega R + V_D \cos \theta)^2 + V_D^2 \sin^2 \theta = \left[ \left( \frac{\omega R}{V_D} + \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \right] V_D^2 \quad (2.2.3.2)$$



**Σχήμα 2.4:** (a) Τρίγωνα ταχυτήτων για διάφορες γωνίες αζιμουθίου  
(b) Ανάλυση τριγώνου ταχυτήτων για μια θέση του περυγίου

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η τοπική δυναμική πίεση  $q$  είναι ίση με:

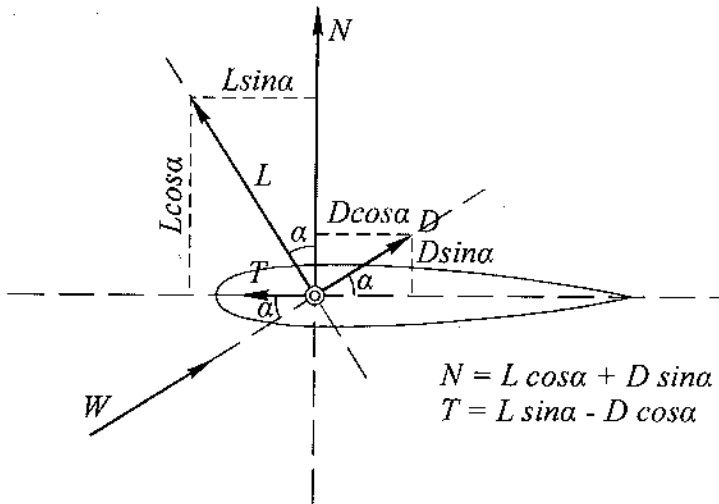
$$q = \frac{1}{2} \rho W^2 \quad (2.2.3.3)$$

προκύπτει ότι η σχετική (αδιάστατη) δυναμική πίεση είναι:

$$\frac{q}{\frac{1}{2}\rho V_D^2} = \left( \frac{\omega R}{V_D + \cos\theta} \right)^2 + \sin^2\theta \quad (2.2.3.4)$$

Η αζιμουθιακή γωνία,  $\theta$ , μεταβάλλεται από  $0^\circ$  έως  $180^\circ$  για την ανάντη πλευρά και από  $180^\circ$  έως  $360^\circ$  για την κατόντη πλευρά του δρομέα. Βάσει του ανωτέρω ορισμού, η γωνία προσπτώσεως  $\alpha$  είναι θετική για  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  και αρνητική για  $180^\circ < \theta < 360^\circ$ . Όταν η ταχύτητα του ανέμου είναι εφαπτόμενη της επιφάνειας που σαρώνει ο δρομέας, τότε  $\alpha = 0^\circ$ .

Θεωρώντας ότι οι στιγμιαίες τοπικές τιμές της άνωσης και της αντίστασης είναι συνάρτηση της γωνίας προσπτώσεως και εξετάζοντας το σχήμα που ακολουθεί, υπολογίζονται η κάθετη και εφαπτομενική δύναμη σ' ένα πτερύγιο.



**Σχήμα 2.5:** Ανάλυση των δυνάμεων που ασκούνται σε πτερύγα

$$N = L \cos \alpha + D \sin \alpha \quad (2.2.3.5)$$

$$T = L \sin \alpha - D \cos \alpha \quad (2.2.3.6)$$

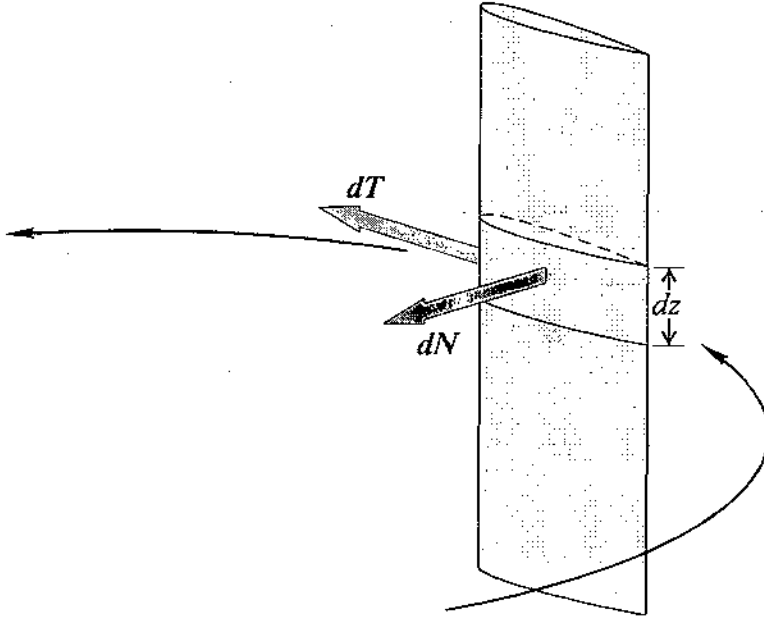
Διαιρώντας τις ανωτέρω σχέσεις με τη δυναμική πίεση προκύπτουν οι εξισώσεις που συνδέουν τους συντελεστές των δυνάμεων που ασκούνται επί της πτέρυγας με τους αεροδυναμικούς συντελεστές:

$$C_N = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \quad (2.2.3.7)$$

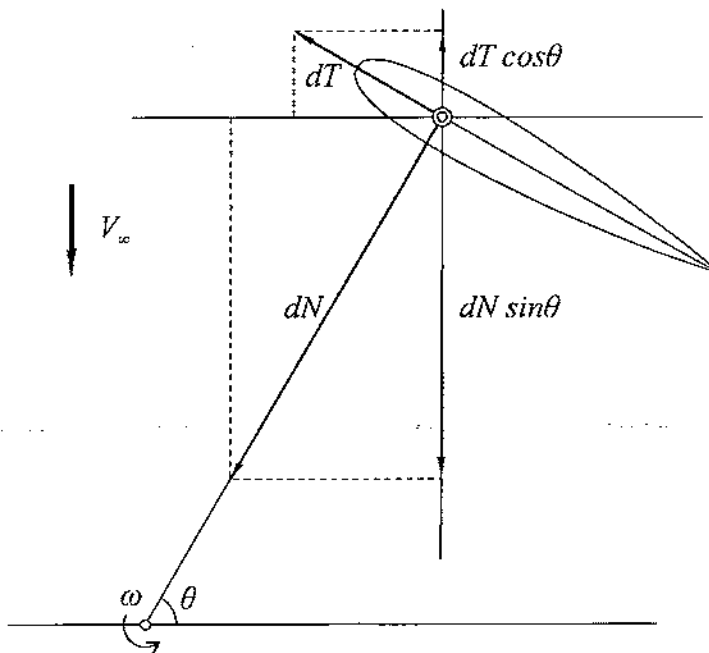
$$C_T = C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha \quad (2.2.3.8)$$

όπου  $C_N$  και  $C_T$  οι συντελεστές της καθέτου και εφαπτομενικής δύναμης αντίστοιχα. Ενώ ως  $C_L$  και  $C_D$  σημειώνονται οι συντελεστές ανώσεως και οπισθέλκουσας (αντίστασης).

Η υπόθεση για την ισχύ της δισδιάστατης πτερυγικής θεωρίας στηρίζεται στο γεγονός ότι ο λόγος της διαμέτρου προς το μήκος της χορδής συχνά υπερβαίνει την τιμή του 100.



Σχήμα 2.6: Στοιχειώδεις δυνάμεις σε τμήμα της πτέρυγας πλάτους  $dz$



Σχήμα 2.7: Υπολογισμός της στοιχειώδους αντίστασης του δρομέα για μια τυχαία γωνία αζιμουθίου

Ένα στοιχειώδες τμήμα της πτέρυγας ύψους  $dz$  (βλ. σχήμα 2.6) υπόκειται στις δυνάμεις:

$$dN = C_N qc dz \quad (2.2.3.9\alpha)$$

και  $dT = C_T qc dz \quad (2.2.3.9\beta)$

Η στοιχειώδης δύναμη της **αντίστασης του δρομέα** (βλ. σχήμα 2.7) θα είναι:

$$dF_D = dN \sin \theta - dT \cos \theta = qc (C_N \sin \theta - C_T \cos \theta) dz \quad (2.2.3.10)$$

Η συνολική αντίσταση που προβάλλει ο δρομέας στο επερχόμενο ρεύμα αέρα προκύπτει με ολοκλήρωση της ανωτέρω σχέσεως για μια πλήρη περιστροφή του δρομέα και καθ' όλο το ύψος της πτέρυγας. Για δρομέα ο οποίος φέρει  $k$  πτερύγια, η αντίσταση θα είναι:

$$F_D = \frac{kc}{2\pi} \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} q (C_N \sin \theta - C_T \cos \theta) d\theta dz \quad (2.2.3.11)$$

Καθώς τα πτερύγια του δρομέα είναι ευθύγραμμα, η ανωτέρω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$F_D = \frac{kc}{2\pi} (2H) \int_0^{2\pi} q (C_N \sin \theta - C_T \cos \theta) d\theta \quad (2.2.3.12)$$

Για τον εν λόγω δρομέα, το οποίου η προβαλλόμενη επιφάνεια είναι

$$S = (2H)(2R) = 4HR \quad (2.2.3.13)$$

ο συντελεστής αντίστασης του δρομέα προκύπτει από το αποτέλεσμα της παράστασης που ακολουθεί:

$$C_{F_{\text{ωο}}} = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V_D^2 S} = \frac{kc}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{q}{\frac{1}{2} \rho V_D^2} (C_N \sin \theta - C_T \cos \theta) d\theta \quad (2.2.3.14)$$

Το ολοκλήρωμα της ανωτέρω σχέσεως υπολογίζεται αριθμητικά χωρίζοντας την περιφέρεια σε διαστήματα πλάτους  $\Delta\theta$  και υπολογίζοντας τη συνάρτηση  $F_1$  στο μέσο του κάθε διαστήματος. Η συνάρτηση  $F_1$  ορίζεται ως:

$$F_1 = \frac{q}{\frac{1}{2} \rho V_D^2} (C_N \sin \theta - C_T \cos \theta) \quad (2.2.3.15)$$

Εάν το πλήθος των διαστημάτων είναι  $n$  τότε το αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης θα είναι:

$$\int_0^{2\pi} \frac{q}{\frac{1}{2} \rho V_D^2} (C_N \sin \theta - C_T \cos \theta) = \sum_{i=1}^n (F_1(\theta) \Delta\theta) =$$

$$\left[ F_1(\theta_1) \frac{2\pi}{n} + F_1(\theta_2) \frac{2\pi}{n} + \dots + F_1(\theta_n) \frac{2\pi}{n} \right] = 2\pi \frac{[F_1(\theta_1) + F_1(\theta_2) + \dots + F_1(\theta_n)]}{n} = 2\pi \bar{F}_1$$

$$\eta \int_0^{2\pi} \frac{q}{\frac{1}{2}\rho V_D^2} (C_N \sin \theta - C_T \cos \theta) = 2\pi \overline{F_1} \quad (2.2.3.16)$$

όπου  $\overline{F_1}$  είναι η μέση τιμή της συνάρτησης  $F_1$ . Ο συντελεστής αντίστασης του δρομέα θα είναι συνεπώς:

$$C_{F_{db}} = \frac{kc}{4\pi R} 2\pi \overline{F_1} = \frac{1}{2} \frac{kc}{R} \overline{F_1} \quad (2.2.3.17)$$

Ο λόγος ταχύτητας ακροπτερυγίου του δρομέα θα είναι:

$$\lambda = \frac{\omega R}{V_\infty} = \frac{\omega R}{V_D} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{4} C_{F_{db}}} \right) \quad (2.2.3.18)$$

#### 2.2.4 Αεροδυναμική απόδοση του δρομέα

Η ροπή που μπορεί να αξιοποιηθεί από το δρομέα παράγεται αποκλειστικά από την εφαπτομενική συνιστώσα της δύναμης στα πτερύγιά του. Για στοιχειώδες τμήμα ύψους  $dz$  η αναπτυσσόμενη ροπή θα είναι:

$$dT_s = C_T q R c dz \quad (2.2.4.1)$$

Η ροπή μεταβάλλεται συναρτήσει της αξιμουθιακής γωνίας  $\theta$  με ολοκλήρωση της προηγούμενης σχέσης. Για  $k$  πτερύγια και ύψος δρομέα  $2H$  είναι:

$$T_B = \frac{kc}{2\pi} 2HR \int_0^{2\pi} q C_T d\theta \quad (2.2.4.2)$$

Η αναπτυσσόμενη ισχύ στον άξονα του δρομέα θα είναι:

$$P = \omega T_B = \frac{kc}{\pi} HR \omega \int_0^{2\pi} q C_T d\theta \quad (2.2.4.3)$$

Η μέγιστη ισχύς του ανέμου που μπορεί να αξιοποιηθεί είναι:

$$P_{\max} = \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho V_\infty^3 S \quad (2.2.4.4)$$

Η ανωτέρω έκφραση απορρέει από τον νόμο του Betz. Για δρομέα με ευθύγραμμο πτερύγια είναι:

$$P_{\max} = \frac{16}{27} \left( \frac{1}{2} \rho V_\infty^3 \right) (4RH) = \frac{64}{27} \left( \frac{1}{2} \rho V_\infty^3 \right) RH \quad (2.2.4.5)$$

Ο συντελεστής ισχύος της μηχανής,  $C_p$ , ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της ισχύος που εξάγεται προς τη μέγιστη τιμή που μπορεί να αξιοποιηθεί είναι:

$$C_p = \frac{P}{P_{\max}} = \frac{27}{64} \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^3 RH} \frac{kc}{\pi} RH \omega \int_0^{2\pi} C_T q d\theta \Rightarrow$$

$$C_p = \frac{27}{64} \frac{1}{\pi} \frac{k\omega}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^3} \int_0^{2\pi} q C_T d\theta$$

$$\text{ή} \quad C_p = \frac{27}{64} \frac{1}{\pi} \frac{k\omega}{V_D} \left(\frac{V_D}{V_\infty}\right)^3 \int_0^{2\pi} \frac{q C_T}{\frac{1}{2}\rho V_D^2} d\theta \quad (2.2.4.6)$$

Για μια δεδομένη γεωμετρία του δρομέα και με χρήση των αποτελεσμάτων των υπολογισμών που περιγράφηκαν προηγουμένως, είναι δυνατή η αποτίμηση του συντελεστή ισχύος μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης. Πρέπει, φυσικά, να προηγηθεί ο υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης του δρομέα έτσι ώστε να καταστεί γνωστή η τιμή του όρου  $V_D/V_\infty$ .

Για την αριθμητική ολοκλήρωση θεωρούμε συνάρτηση  $F_2$  ως εξής:

$$F_2 = \frac{q C_T}{\frac{1}{2}\rho V_D^2} \quad (2.2.4.7)$$

Η  $F_2$  υπολογίζεται στο μέσο των διαστημάτων και γίνεται κατά τρόπο παρόμοιο με την περίπτωση του συντελεστή αντίστασης:

$$\int_0^{2\pi} \frac{q C_T}{\frac{1}{2}\rho V_D^2} d\theta \cong \sum_{i=1}^n [F_2(\theta) \Delta\theta] = \left[ F_2(\theta_1) \frac{2\pi}{n} + F_2(\theta_2) \frac{2\pi}{n} + \dots + F_2(\theta_n) \frac{2\pi}{n} \right] =$$

$$2\pi \frac{F_2(\theta_1) + F_2(\theta_2) + \dots + F_2(\theta_n)}{n} = 2\pi \overline{F_2}$$

$$\text{ή} \quad \int_0^{2\pi} \frac{q C_T}{\frac{1}{2}\rho V_D^2} d\theta = 2\pi \overline{F_2} \quad (2.2.4.8)$$

με  $\overline{F_2}$  τη μέση τιμή της συνάρτησης  $F_2$ . Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης και με αναδιάταξη των όρων ο συντελεστής ισχύος γίνεται:

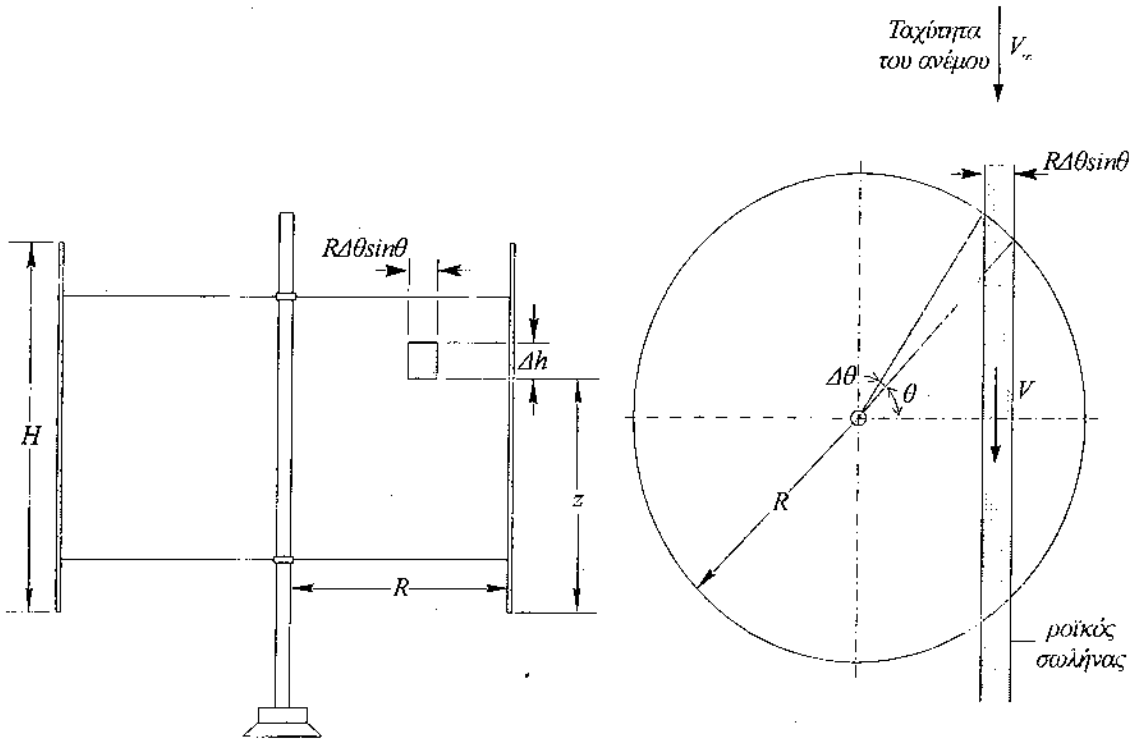
$$C_p = \frac{27}{64} \frac{1}{\pi} \frac{k\omega}{V_D} \left(\frac{V_D}{V_\infty}\right)^3 2\pi \overline{F_2} = \frac{27}{32} \frac{k\omega}{R} \frac{R\omega}{V_D} \left(\frac{V_D}{V_\infty}\right)^3 \overline{F_2} \Rightarrow$$

$$C_p = \frac{27}{32} \frac{k\omega}{R} \frac{R\omega}{V_D} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{4} C_{F_{DD}}} \right)^3 \overline{F_2} \quad (2.2.4.9)$$

## 2.3 Η θεωρία των πολλαπλών ροϊκών σωλήνων (multiple streamtubes theory)

### 2.3.1 Το αεροδυναμικό μοντέλο

Μια πιο ακριβής πρόβλεψη των μεταβολών της ταχύτητας κατά μήκος ενός δρομέα κατακόρυφου άξονα, σε σχέση με τη θεωρία του απλού ροϊκού σωλήνα, μπορεί να επιτευχθεί με την προσέγγιση των πολλαπλών ροϊκών σωλήνων. Η ανάλυση για τον υπολογισμό της απόδοσης βασίζεται σε ένα απλοποιημένο αεροδυναμικό μοντέλο το οποίο είναι προσαρμογή της περυγικής θεωρίας του Glauert. Η θεώρηση αυτή, κάνει χρήση της εξίσωσης της ορμής στη διεύθυνση του ρεύματος του ανέμου και εξισώνει τις δυνάμεις (στην ίδια διεύθυνση) που ασκούνται στα πτερύγια με τη μεταβολή της ορμής του ρευστού που κινείται διαμέσου του δρομέα. Οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται για έναν αριθμό ροϊκών σωλήνων που περνούν από το δρομέα και οδηγούν σε μια μη ομοιόμορφη κατανομή των ταχυτήτων του ρευστού στο δρομέα.



Σχήμα 2.8: Απεικόνιση ροϊκού σωλήνα στο δρομέα

Στο σχήμα 2.8 απεικονίζεται ένας τυπικός σωλήνας που περνά από το δρομέα. Η επιφάνεια της διατομής του ροϊκού σωλήνα δίδεται από τη σχέση

$$A_s = \Delta h R \Delta \theta \sin \theta \quad (2.3.1.1)$$

όπου  $\Delta h$  είναι το κατακόρυφο ύψος,

$R$  η ακτίνα του δρομέα,

$\theta$  η γωνία αζιμουθίου της τομής του ροϊκού σωλήνα με την επιφάνεια σάρωσης του δρομέα.

και  $\Delta\theta$  το βήμα της γωνίας (το οποίο παραμένει σταθερό).

Η επιφάνεια της διατομής κάθε ροϊκού σωλήνα θεωρείται ότι παραμένει σταθερή καθώς περνά διαμέσου του δρομέα (στην πραγματικότητα αυξάνεται). Η ταχύτητα του ρευστού στο δρομέα συμβολίζεται με  $V$  και είναι συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  (για δρομείς τύπου Dargieus είναι συνάρτηση και της κατακόρυφης συνιστώσας  $z$ ).

### 2.3.2 Διατήρηση της ορμής

Καθώς αφαιρείται ενέργεια από τα στοιχειώδη τμήματα της πτέρυγας, τα οποία περνούν μέσα από ένα ροϊκό σωλήνα, η ταχύτητα σ' αυτόν  $V$  είναι μικρότερη από την ταχύτητα του αδιατάρακτου ελεύθερου ρεύματος  $V_\infty$ . Η εξίσωση της ορμής, στη χρονικά μέση της μορφή και κατά τη διεύθυνση του ανέμου, χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την εξίσωση του Bernoulli για το συσχετισμό των ταχυτήτων  $V$  και  $V_\infty$  με τη μέση τιμή της δύναμης  $F_x$  που ασκείται από τα τμήματα της πτέρυγας που περνούν από το ροϊκό σωλήνα. Η έκφραση που προκύπτει είναι:

$$\bar{F}_x = 2\rho A_s V (V_\infty - V) \quad (2.3.2.1)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και  $A_s$  η επιφάνεια της διατομής του ροϊκού σωλήνα όπως ορίστηκε προηγουμένως.

Κατά την περιστροφή του δρομέα, κάθε πτερύγιο αλληλεπιδρά δύο φορές με κάθε ροϊκό σωλήνα, μια στην ανάντη και μια στην κατάντη πλευρά αυτού. Για μια πλήρη περιστροφή του δρομέα ( $2\pi$ ), η πτέρυγα βρίσκεται εντός του δρομέα για διάστημα  $2\Delta\theta$ . Σε ποσοστιαία δηλαδή αναλογία, η αλληλεπίδραση ενός πτερυγίου με το δρομέα για μια πλήρη περιστροφή, είναι

$$\frac{2\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\Delta\theta}{\pi}$$

Εάν ο δρομέας φέρει  $k$  πτερύγια, τότε η μέση τιμή της αξονικής δύναμης,  $\bar{F}_x$ , μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της αξονικής δύναμης  $F_x$  που ασκείται σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του πτερυγίου:

$$\bar{F}_x = kF_x \frac{\Delta\theta}{\pi} \quad (2.3.2.2)$$

Απαλείφοντας την  $\bar{F}_x$  από τις εξισώσεις (2.3.2.1) και (2.3.2.2) προκύπτει:

$$\frac{kF_x}{2\rho R \Delta h \sin \theta V_\infty^2} = \frac{V}{V_\infty} \left( 1 - \frac{V}{V_\infty} \right) \quad (2.3.2.3)$$



Για την απλοποίηση των υπολογισμών, το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.3.2.3) συμβολίζεται με  $F_x^*$ :

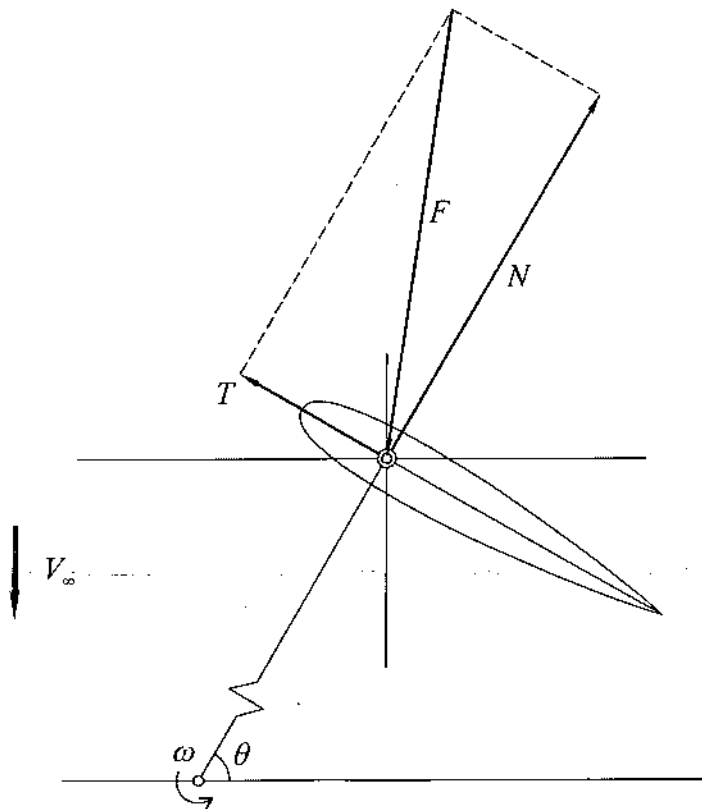
$$F_x^* = \frac{kF_x}{2\pi\rho R\Delta h \sin\theta V_\infty^2} \quad (2.3.2.4)$$

### 2.3.3 Δυνάμεις στα στοιχειώδη τμήματα της πτέρυγας

Η εξέταση της εξίσωσης (2.3.2.3) υποδεικνύει ότι πρέπει να βρεθεί η δύναμη  $F_x$  που ασκείται στα στοιχειώδη τμήματα της πτέρυγας από το ρευστό, για να υπολογιστεί ο λόγος  $V/V_\infty$ . Επιπροσθέτως η δύναμη  $T$ , η οποία δρα κατά μήκος της χορδής της αεροτομής και εφαπτομενικά στην τροχιά περιστροφής του στοιχειώδους τμήματος της πτέρυγας, πρέπει να βρεθεί έτσι ώστε να καταστούν δυνατοί οι υπολογισμοί της ροπής που προκαλείται στον άξονα του δρομέα και της εξαγόμενης ισχύος από ένα στοιχειώδες τμήμα της πτέρυγας που περνά από ένα ροϊκό σωλήνα. Εκτός της εφαπτομενικής δύναμης  $T$ , υπάρχει και η δύναμη  $N$  που δρα κάθετα στη χορδή.

Οι δυνάμεις  $N$  και  $T$  μαζί με τη συνισταμένη τους δύναμη  $F_x$  δείχνονται στο σχήμα (2.9). Από το συγκεκριμένο σχήμα προκύπτει:

$$F_x = -(N \sin\theta + T \cos\theta) \quad (2.3.3.1)$$



Σχήμα 2.9: Δυνάμεις σε στοιχείο της πτέρυγας

Οι δυνάμεις  $N$  και  $T$  μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της πυκνότητας  $\rho$ , της επιφάνειας της πτέρυγας  $\Delta hc$  (όπου  $c$  το μήκος της χορδής της αεροτομής) και της σχετικής ταχύτητας  $W$  που προσπίπτει στην αεροτομή:

$$T = \frac{1}{2} C_T \rho (\Delta hc) W^2 \quad (2.3.3.2\alpha)$$

$$N = -\frac{1}{2} C_N \rho (\Delta hc) W^2 \quad (2.3.3.2\beta)$$

Σε αδιάστατη μορφή, οι δυνάμεις αυτές γράφονται:

$$T^* = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho \Delta hc U^2} = C_T \left( \frac{W}{U} \right)^2 \quad (2.3.3.3\alpha)$$

$$N^* = \frac{-N}{\frac{1}{2} \rho \Delta hc U^2} = C_N \left( \frac{W}{U} \right)^2 \quad (2.3.3.3\beta)$$

όπου  $U = \omega R$  η περιφερειακή ταχύτητα.

Οι συντελεστές  $C_T$  και  $C_N$  συνδέονται με τους γνωστούς αεροδυναμικούς συντελεστές  $C_L$  και  $C_D$  μέσω των σχέσεων:

$$C_T = C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha \quad (2.3.3.4\alpha)$$

$$\text{και } C_N = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \quad (2.3.3.4\beta)$$

όπου  $\alpha$  η γωνία προσπτώσεως.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3.2.4), (2.3.3.1) και (2.3.3.2α,β) η αδιάστατη δύναμη  $F_x^*$  θα είναι:

$$F_x^* = \frac{kc}{4\pi R} \left( \frac{W}{V_\infty} \right)^2 \left( C_N - C_T \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad (2.3.3.5)$$

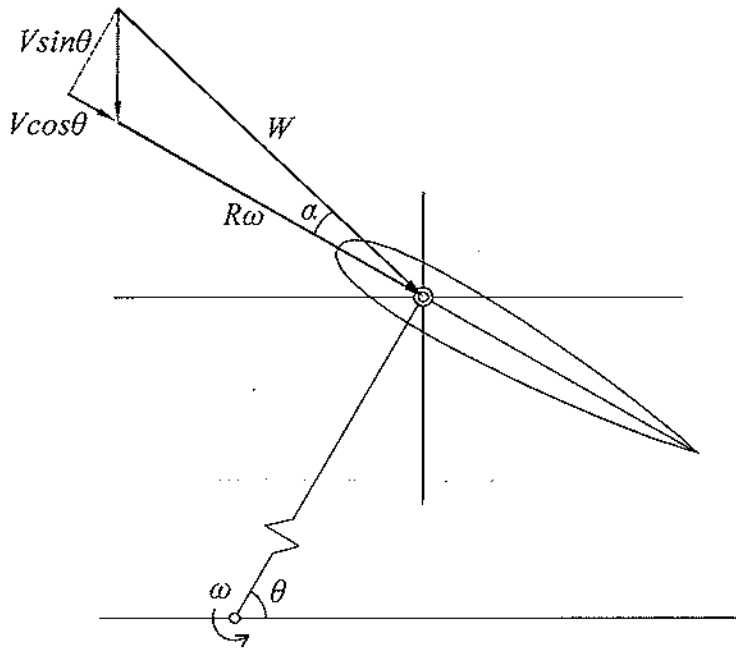
### 2.3.4 Το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας του ανέμου

Με επισκόπηση του σχήματος (2.10) μπορεί να βρεθεί η σχετική ταχύτητα στο επίπεδο της αεροτομής του πτερυγίου καθώς και η γωνία πρόσπτωσης αυτής στην πτέρυγα. Η γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  είναι:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V \sin \theta}{V \cos \theta + U} = \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{U}{V}} \quad (2.3.4.1)$$

Η σχετική ταχύτητα  $W$  στο επίπεδο της αεροτομής της πτέρυγας βρίσκεται από την ισότητα:

$$W \sin \alpha = V \sin \theta \quad (2.3.4.2)$$



**Σχήμα 2.10:** Διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας

### 2.3.5 Λύση της εξίσωσης της ορμής

Ορίζοντας το συντελεστή επιβράδυνσης ως

$$a = 1 - \frac{V}{V_\infty} \quad (2.3.5.1)$$

και σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.3.2.3) και (2.3.2.4), η εξίσωση της ορμής μπορεί να γραφεί ως:

$$F_x^* = \frac{V}{V_\infty} \left( 1 - \frac{V}{V_\infty} \right) = (1 - a)a = a - a^2 \Rightarrow$$

$$a = F_x^* + a^2 \quad (2.3.5.2)$$

Η εξίσωση (2.3.5.2) αποτελεί τη βάση για την επαναληπτική λύση της εξίσωσης της ορμής. Η ποσότητα  $F_x^*$  είναι σύνθετη συνάρτηση του συντελεστή επιβράδυνσης  $a$  με αποτέλεσμα η απευθείας λύση να καθίσταται αδύνατη. Η διαδικασία της επίλυσης για κάθε ροϊκό σωλήνα έχει ως εξής:

- i. ο συντελεστής επιβράδυνσης τίθεται ίσος με το 0 με αποτέλεσμα  $V = V_\infty$
- ii. υπολογίζεται η γωνία προσπτώσεως,  $\alpha$ , μέσω της εξίσωσης (2.3.4.1)
- iii. υπολογίζονται οι συντελεστές  $C_N$  και  $C_T$  από διαθέσιμα πειραματικά διαστάτα δεδομένα αεροτομών
- iv. υπολογίζεται η σχετική ταχύτητα  $W$  από την εξίσωση (2.3.4.2)
- v. υπολογίζεται η αδιάστατη δύναμη  $F_x^*$  από την εξίσωση (2.3.3.5)

- vi. αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των  $a$  και  $F_x^*$  στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.3.5.2), υπολογίζεται η νέα τιμή του συντελεστή επιβράδυνσης
- vii. υπολογίζεται ο λόγος  $V/V_\infty$  μέσω της εξίσωσης (2.3.5.1)
- viii. η διαδικασία επαναλαμβάνεται χρησιμοποιώντας όμως την τιμή του συντελεστή επιβράδυνσης που υπολογίστηκε στο βήμα (vi) έως ότου επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια

Η ανωτέρω επαναληπτική διαδικασία αποδίδει το λόγο  $V/V_\infty$  για κάθε ροϊκό σωλήνα. Συνήθως, η διαδικασία της σύγκλισης είναι ταχύτατη.

### 2.3.6 Συντελεστής ισχύος του δρομέα

Η λύση της εξίσωσης της ορμής σε κάθε ροϊκό σωλήνα επιτρέπει τον υπολογισμό της παραγόμενης ροπής από ένα στοιχειώδες τμήμα της πτέρυγας που περνά μέσα από ένα ροϊκό σωλήνα μέσω της σχέσης:

$$T_s = T \cdot R = \frac{1}{2} \rho R C_T c \Delta h W^2 \quad (2.3.6.1)$$

Για τον υπολογισμό της συνολικής ροπής που οφείλεται στην πτέρυγα για μια συγκεκριμένη τιμή της γωνίας  $\theta$ , η  $T_s$  πρέπει να ολοκληρωθεί (στην περίπτωση μας να αθροιστεί) για το σύνολο των στοιχειωδών τμημάτων  $N_s$  που απαρτίζουν την πτέρυγα. Κάθε τμήμα της πτέρυγας θεωρείται ότι έχει ύψος  $\Delta h$  και η  $T_s$  υπολογίζεται στο μέσο κάθε τμήματος. Η συνολική ροπή στην πτέρυγα δίδεται συνεπώς από τη σχέση:

$$T_B = \sum_1^{N_s} T_s \quad (2.3.6.2)$$

Για τον υπολογισμό της μέσης ροπής στο δρομέα η οποία προκαλείται από  $N$  πτερύγια, βρίσκεται η μέση χρονικά τιμή της  $T_B$  η οποία επιπροσθέτως πολλαπλασιάζεται με το πλήθος των πτερυγίων  $k$ . Εάν η  $T_s$  υπολογίζεται για  $N_t$  τιμές της γωνίας  $\theta$  σε διαστήματα  $\pi/N_t$ , τότε η μέση τιμή της ροπής στο δρομέα θα είναι:

$$\bar{T} = \frac{k}{N_t} \sum_1^{N_t} \left( \sum_1^{N_s} T_s \right) \quad (2.3.6.3)$$

Τυπικές τιμές των  $\Delta\theta$  και  $\Delta h$  είναι  $10^\circ$  και  $h/10$  αντίστοιχα. Δηλαδή είναι  $N_t = 19$  και  $N_s = 10$ .

Ο συντελεστής ισχύος του δρομέα υπολογίζεται από τη μέση ροπή του δρομέα από τη σχέση:

$$C_p = \frac{\bar{T}\omega}{\frac{1}{2}\rho AV_\infty^3} \quad (2.3.6.4)$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (2.3.6.1-4) δίδει:

$$C_p = \frac{\frac{k}{N_t} \sum_1^{N_t} \left\{ \sum_1^{N_s} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho R C_T c \Delta h W^2 \right) \omega \right] \right\}}{\frac{1}{2} \rho A V_\infty^3}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιφάνεια που προβάλλει ο δρομέας κάθετα στο επερχόμενο ρεύμα του αέρα είναι  $A = 2RH$  ο συντελεστής ισχύος είναι:

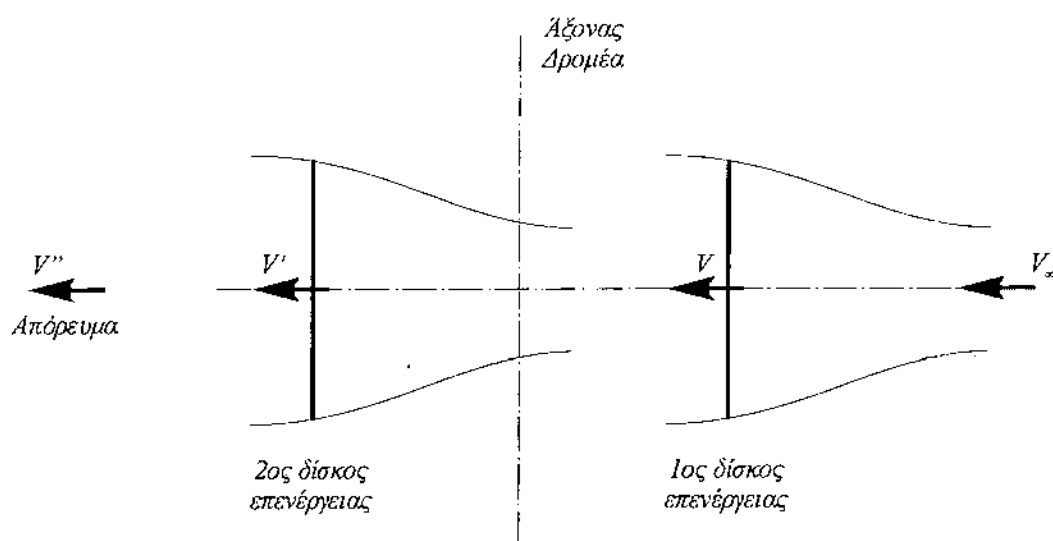
$$C_p = \frac{k}{N_t} \sum_1^{N_t} \left[ \sum_1^{N_s} \frac{(R C_T c \Delta h W^2) \omega}{(2RH) V_\infty^3} \right]$$

ή

$$C_p = \frac{1}{N_s N_t} \frac{kC}{2R} \sum_1^{N_t} \left[ \sum_1^{N_s} C_T \left( \frac{W}{V_\infty} \right)^2 \left( \frac{U}{V_\infty} \right) \right] \quad (2.3.6.5)$$

## 2.4 Η θεωρία του διπλού δίσκου επενέργειας

Στις ανεμογεννήτριες κατακορύφου άξονα, ο άνεμος περνά από την επιφάνεια που σαρώνει ο δρομέας δύο φορές με αποτέλεσμα οι επαγόμενες ταχύτητες στο ανάντη και κατάντη μισό να διαφοροποιούνται. Η αναπαράσταση μίας ΑΚΑ μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ένα ζεύγος δίσκων επενέργειας διαδοχικά τοποθετημένους σε κάθε επίπεδο του δρομέα (βλ. σχήμα 2.11). Ο πρώτος δίσκος αναπαριστά το ανάντη μισό της επιφάνειας του δρομέα ενώ ο δεύτερος δίσκος το κατάντη μισό. Το μοντέλο αυτό αποτελεί βελτίωση των αρχικών προτάσεων που έχουν έως τώρα παρουσιαστεί και αφορούν τα μοντέλα του απλού δίσκου επενέργειας για ένα ροϊκό σωλήνα ή για πολλαπλούς ροϊκούς σωλήνες. Παρ' όλα αυτά η ανάλυση που θα ακολουθήσει, δείχνει ότι οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από τις διαθέσιμες εξισώσεις. Το πρόβλημα αυτό, μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας την πτερυγική θεωρία.

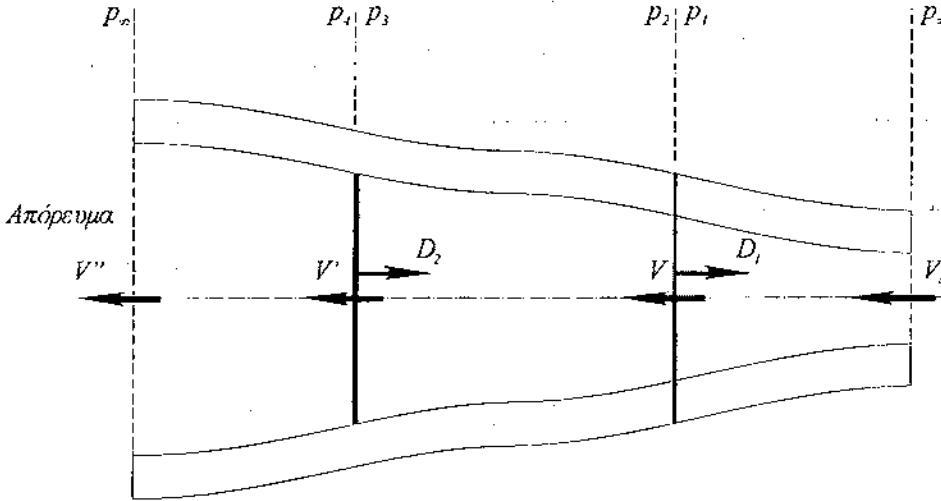


Σχήμα 2.11: Ζεύγος διαδοχικών δίσκων επενέργειας

Θεωρούμε ότι οι επαγόμενες ταχύτητες στην ανάντη επιφάνεια,  $V$  και στην αντίστοιχη κατάντη,  $V'$ , παραμένουν σταθερές στις επιφάνειες που δρουν. Οι συντελεστές αντίστασης των δύο επιφανειών,  $C_{D_1}$  και  $C_{D_2}$ , υπολογίζονται μέσω της πτερυγικής θεωρίας χρησιμοποιώντας τις ταχύτητες όπως ορίστηκαν προηγουμένως. Οι συντελεστές αντίστασης μπορούν επίσης να υπολογιστούν μέσω της θεωρίας της ορμής και να συγκριθούν με τους αντίστοιχους που έχουν υπολογιστεί μέσω της πτερυγικής θεωρίας. Όταν οι δύο θεωρητικές προσεγγίσεις συγκλίνουν τότε εκκινείται μια επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση της λύσης. Ο υπολογισμός των επαγόμενων ταχυτήτων και των συντελεστών αντίστασης σε κάθε δίσκο επιτρέπει τον καθορισμό των φορτίων και της απόδοσης σε ένα δρομέα ΑΚΑ.

### 2.4.1 Η θεωρία της ορμής για διπλό δίσκο επενέργειας

Θεωρούμε ροή η οποία είναι άτριβη, μόνιμη, μονοδιάστατη και χωρίς περιδίνηση. Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες υποθέσεις έχειδειχθεί ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει ο συντελεστής ισχύος για διπλό δίσκο επενέργειας είναι  $C_{p_{max}} = 16/25 = 0.64$ . Η τιμή αυτή υπερβαίνει το όριο του Betz ( $C_{p_{max}} = 16/27 = 0.593$ ), το οποίο όμως υπολογίζεται με θεώρηση ενός δίσκου επενέργειας.



**Σχήμα 2.12:** Διάταξη των ρευματικών γραμμών σύμφωνα με την θεωρία του διπλού δίσκου επενέργειας

Η στατική πίεση και η ταχύτητα στο επερχόμενο αδιατάρακτο ρεύμα είναι  $p_\infty$  και  $V_\infty$  αντίστοιχα. Η διάταξη των ρευματικών γραμμών όπως αυτές διαμορφώνονται στη θεώρηση του διπλού επενέργειας δείχνεται στο σχήμα (2.12). Ως αποτέλεσμα της δράσης του πρώτου δίσκου η πίεση μειώνεται από  $p_1$  σε  $p_2$  ενώ η αντίσταση που αυτός προβάλλει σημειώνεται με  $D_1$ . Κατ' όμοιο τρόπο στο δεύτερο δίσκο η πίεση μειώνεται από  $p_3$  σε  $p_4$  και η αντίσταση του δεύτερου δρομέα είναι  $D_2$ . Η εξίσωση της ορμής εφαρμόζεται σε πέντε όγκους ελέγχου που δείχνονται στα δύο σχήματα που ακολουθούν. Οι εξισώσεις που προκύπτουν παρουσιάζονται αναλυτικά στη συνέχεια.

#### 1<sup>ος</sup> όγκος ελέγχου

Εξίσωση της συνέχειας:

$$(S_{A_0} - S_{a_0})V_\infty = (S_A - S_a)V = (S_{A_2} - S_{a_2})V_\Omega \quad (2.4.1.1)$$

Εξίσωση του Bernoulli:

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p_1 + \frac{\rho V^2}{2} \quad (2.4.1.2)$$

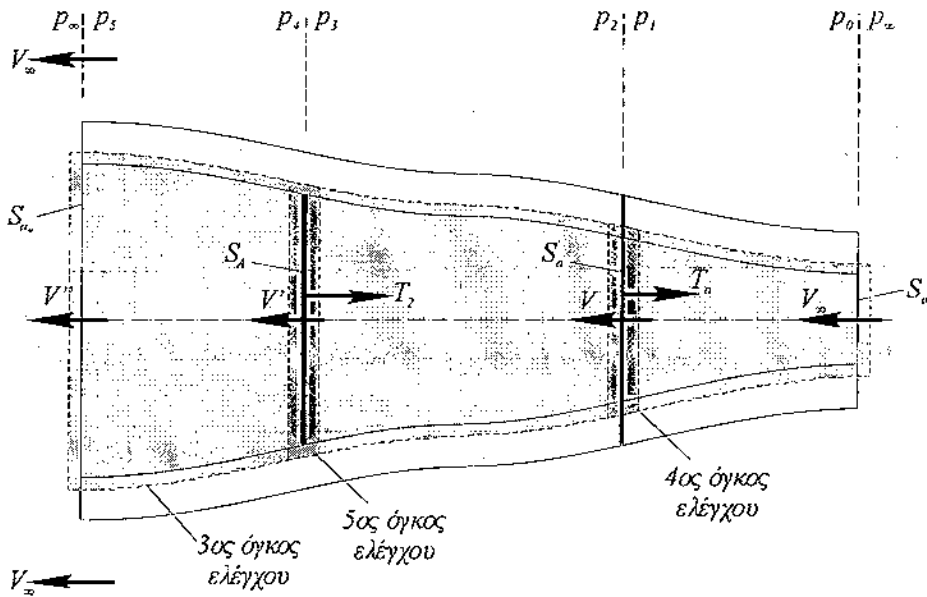
$$p_2 + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\Omega^2 \quad (2.4.1.3)$$





από 4 έως 5

$$p_4 + \frac{\rho V^2}{2} = p_5 + \frac{\rho V'^2}{2} \quad (2.4.1.10)$$



Σχήμα 2.14: Οι όγκοι ελέγχου 3, 4 και 5

#### 4<sup>ος</sup> όγκος ελέγχου

Εξίσωση της ορμής:

$$(p_1 - p_2)S_a = T_a \quad (2.4.1.11)$$

#### 5<sup>ος</sup> όγκος ελέγχου

Εξίσωση της ορμής:

$$(p_3 - p_4)S_A = T_2 \quad (2.4.1.12)$$

### 2.4.2 Υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης για τον ανάντη δίσκο επενέργειας

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.4.1.4) και (2.4.1.5) προκύπτει:

$$p_1 - p_2 = \rho V (V_\infty - V_\Omega) \quad (2.4.2.1)$$

ενώ από τις (2.4.1.2) και (2.4.1.3):

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho (V_\infty^2 - V_\Omega^2)}{2} \quad (2.4.2.2)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη λαμβάνουμε:

$$V = \frac{V_\infty + V_\Omega}{2} \quad (2.4.2.3)$$

Από τις εξισώσεις (2.4.2.2) και (2.4.1.11) μπορεί να υπολογιστεί η ώση στην επιφάνεια  $S_a$ :

$$T_a = \frac{\rho S_a}{2} (V_\infty^2 - V_\Omega^2) \quad (2.4.2.4)$$

Από την (2.4.2.3) η  $V_\Omega$  είναι:

$$V_\Omega = 2V - V_\infty$$

χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση και αξιοποιώντας την (2.4.1.6) για να αντικαταστήσουμε την τιμή της  $S_a$ , η  $T_a$  έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{\rho S_a}{2} [V_\infty^2 - (2V - V_\infty)^2] = \frac{\rho S_a}{2} (V_\infty^2 - 4V^2 + 4VV_\infty - V_\infty^2) = 2\rho S_a V (V_\infty - V) \Rightarrow \\ T_a &= 2\rho S_A V' (V_\infty - V) \end{aligned} \quad (2.4.2.5)$$

Από την εξίσωση της ορμής για τον 1<sup>ο</sup> όγκο ελέγχου (2.4.1.4) και έχοντας υπολογίσει την ώση  $T_a$  μπορεί να πλέον να υπολογιστεί η ώση σε ολόκληρο το δίσκο:

$$\begin{aligned} T_1 - T_a &= \rho (S_A - S_a) V (V_\infty - V_\Omega) = \rho (S_A - S_a) V (V_\infty - 2V + V_\infty) \Rightarrow \\ T_1 - T_a &= 2\rho (S_A - S_a) V (V_\infty - V) \Rightarrow \\ T_1 &= 2\rho S_a V (V_\infty - V) + 2\rho (S_A - S_a) V (V_\infty - V) \Rightarrow \\ T_1 &= 2\rho S_A V (V_\infty - V) \end{aligned}$$

Καθώς καμιά άλλη δύναμη δεν επενεργεί στο δρομέα είναι,  $T_1 = D_1$  και

$$D_1 = 2\rho S_A V (V_\infty - V) \quad (2.4.2.6)$$

Από τον ορισμό του συντελεστή αντίστασης του ανάντη δίσκου επενέργειας:

$$C_{D_1} = \frac{D_1}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S_A} \quad (2.4.2.7)$$

λαμβάνουμε:

$$C_{D_1} = \frac{2\rho S_A V (V_\infty - V)}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S_A} = 4 \frac{V}{V_\infty} \left( 1 - \frac{V}{V_\infty} \right) \quad (2.4.2.8)$$

### 2.4.3 Υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης για τον κατάντη δίσκο επενέργειας

Συνδυάζοντας την εξίσωση της ορμής για τον 3<sup>ο</sup> όγκο ελέγχου (εξ. 2.4.1.7) και τις εξισώσεις (2.4.1.12) και (2.4.2.5) λαμβάνουμε:

$$T_a + T_2 = \rho S_A V' (V_\infty - V'') \Rightarrow$$

$$[2\rho S_A V'(V_\infty - V)] + [(p_3 - p_4)S_A] = \rho S_A V'(V_\infty - V'') \quad (2.4.3.1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (2.4.1.8-10) μπορεί να βρεθεί η τιμή της διαφοράς των πιέσεων  $p_3$  και  $p_4$ :

$$p_2 + p_4 + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p_1 + p_3 + \frac{1}{2}\rho V''^2 \Rightarrow$$

$$p_3 - p_4 = -(p_1 - p_2) + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho V''^2 \quad (2.4.3.2)$$

Αντικαθιστώντας τη διαφορά των  $p_1$  και  $p_2$  από την εξ.(2.4.2.2) η εξ.(2.4.3.2) γίνεται:

$$p_3 - p_4 = -\frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - V_\Omega^2) + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho V''^2 = \frac{1}{2}\rho V_\Omega^2 - \frac{1}{2}\rho V''^2$$

αλλά  $V_\Omega = 2V - V_\infty$  με αποτέλεσμα:

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{2}\rho(2V - V_\infty)^2 - \frac{1}{2}\rho V''^2 \Rightarrow$$

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{2}\rho(4V^2 + V_\infty^2 - 4VV_\infty) - \frac{1}{2}\rho V''^2 \quad (2.4.3.3)$$

Αντικαθιστώντας τη διαφορά  $p_3 - p_4$  στην εξ.(2.4.3.1) και με αναδιάταξη των όρων προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς τη  $V''$ :

$$V''^2 - 2V'V'' + 4V(V' - V + V_\infty) - V_\infty(2V' + V_\infty) = 0 \quad (2.4.3.4)$$

της οποίας οι ρίζες είναι:

$$V'' = V' \pm [V'^2 + 4V(V - V' - V_\infty) + V_\infty(V_\infty + 2V')]^{1/2}$$

Η ρίζα

$$V'' = V' + [V'^2 + 4V(V - V' - V_\infty) + V_\infty(V_\infty + 2V')]^{1/2}$$

απορρίπτεται καθώς η αποδοχή της οδηγεί στο συμπέρασμα ότι  $V'' > V'$  πράγμα αδύνατο καθώς το ρεύμα του αέρα επιβραδύνεται περισσότερο περνώντας από την κατάντη επιφάνεια. Συνεπώς:

$$V'' = V' - [V'^2 + 4V(V - V' - V_\infty) + V_\infty(V_\infty + 2V')]^{1/2} \quad (2.4.3.5)$$

Για τον 2<sup>ο</sup> δίσκο επενέργειας είναι:

$$T_2 = D_2$$

και με χρήση των εξισώσεων (2.4.1.7) και (2.4.2.5) υπολογίζεται η αντίσταση που προβάλλει ο κατάντη δίσκος επενέργειας:

$$D_2 = \rho S_A V'(V_\infty - V'') - 2\rho S_A V'(V_\infty - V) \Rightarrow$$

$$D_2 = \rho S_A V'(2V - V_\infty - V'') \quad (2.4.3.6)$$

ο συντελεστής αντίστασης  $C_{D_2}$  θα είναι:

$$C_{D_2} = \frac{D_2}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S_A} \quad (2.4.3.7)$$

ή

$$C_{D_2} = \frac{\rho S_A V' (2V - V_\infty - V'')}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S_A} = \frac{2V' (2V - V_\infty - V'')}{V_\infty^2} \Rightarrow$$

$$C_{D_2} = \frac{2V'}{V_\infty^2} \left\{ 2V - V_\infty - V' + [V'^2 + 4V(V - V' - V_\infty) + V_\infty(2V' + V_\infty)]^{1/2} \right\} \Rightarrow$$

$$C_{D_2} = \frac{2V'}{V_\infty} \left\{ 2 \frac{V}{V_\infty} - 1 - \frac{V'}{V_\infty} + \left[ \frac{V'^2 + 4V(V - V' - V_\infty) + V_\infty(2V' + V_\infty)}{V_\infty^2} \right]^{1/2} \right\} \Rightarrow$$

$$C_{D_2} = 2 \frac{V'}{V_\infty} \left\{ 2 \frac{V}{V_\infty} - 1 - \frac{V'}{V_\infty} + \left[ \left( \frac{V'}{V_\infty} \right)^2 + 4 \frac{V}{V_\infty} \left( \frac{V}{V_\infty} - \frac{V'}{V_\infty} - 1 \right) + 2 \frac{V'}{V_\infty} + 1 \right]^{1/2} \right\} \quad (2.4.3.8)$$

Σημειώνεται ότι ο συντελεστής αντίστασης του ανάντη δίσκου είναι συνάρτηση του λόγου  $V/V_\infty$  ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής για τον κατόντη δίσκο είναι συνάρτηση των λόγων  $V/V_\infty$  και  $V'/V_\infty$ .

Η συνολική αντίσταση που προβάλλει ο δρομέας στον άνεμο προκύπτει από την άθροιση των επιμέρους αντιστάσεων. Σε μορφή συντελεστών θα είναι:

$$C_D = C_{D_1} + C_{D_2} \quad (2.4.3.9)$$

Από την εξίσωση (2.4.2.8) μπορεί να βρεθεί ο λόγος  $V/V_\infty$  συναρτήσει του συντελεστή αντίστασης  $C_{D_1}$ :

$$\frac{V}{V_\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_{D_1}}$$

Η μέγιστη θεωρητική τιμή του συντελεστή αντίστασης είναι  $C_{D_1, \max} = 1.0$  και αντιστοιχεί σε λόγο ταχυτήτων  $V/V_\infty = 0.5$ .

## 2.5 Η θεωρία του διπλού επενέργειας με πολλαπλούς ροϊκούς σωλήνες

### 2.5.1 Εισαγωγή

Ο υπολογισμός των επαγόμενων στο δρομέα ταχυτήτων βασίζεται στην αρχή των δύο δίσκων επενέργειας οι οποίοι είναι διαδοχικά τοποθετημένοι σε κάθε επίπεδο του δρομέα. Αυτή η αναλυτική μέθοδος κάνει χρήση της προσέγγισης των πολλαπλών ροϊκών σωλήνων δύο φορές: μια για το ανάντη ημικύκλιο του δρομέα και μια για το κατόντη. Ο χειρισμός των ανάντη και κατόντη πεδίων γίνεται διακριτά ενώ είναι δυνατή η ενσωμάτωση στο μοντέλο των κατακόρυφων μεταβολών της ταχύτητας του ελευθέρου ρεύματος. Η κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας στο επερχόμενο ρεύμα δίδεται από τη γνωστή εμπειρική εκθετική σχέση:

$$\frac{V_{\infty i}}{V_{\infty}} = \left( \frac{z_i}{z_{EQ}} \right)^{a_w} \quad (2.5.1.1)$$

Η ανάντη συνιστώσα της ταχύτητας,  $V$ , υπολείπεται της τοπικής αδιατάρακτης ταχύτητας του ανέμου  $V_{\infty i}$  ( $V < V_{\infty i}$ ) και στο επίπεδο το ευρισκόμενο ανάμεσα στους δύο δίσκους επενέργειας αναπτύσσεται η επαγόμενη ταχύτητα ισοστάθμισης  $V_e$  ( $V_e < V$ ). Η επαγόμενη ταχύτητα στο ροϊκό σωλήνα μειώνεται διαρκώς στην κατόντη διεύθυνση, με αποτέλεσμα και η ταχύτητα  $V'$  στο δεύτερο δίσκο να είναι μικρότερη αυτής της ισοστάθμισης ( $V' < V_e$ ).

Για το ανάντη ημικύκλιο του δρομέα, η τοπική ταχύτητα του ανέμου  $V$  μειώνεται σύμφωνα με το συντελεστή επιβράδυνσης  $u < 1$  και η επαγόμενη ταχύτητα γίνεται:

$$V = uV_{\infty i} \quad (2.5.1.2)$$

ενώ η επαγόμενη ταχύτητα ισοστάθμισης:

$$V_e = (2u - 1)V_{\infty i} \quad (2.5.1.3)$$

Η ταχύτητα που προσεγγίζει τον κατόντη δίσκο είναι η  $V_e$  η οποία μετά το δίσκο επενέργειας γίνεται:

$$V' = u'(2u - 1)V_{\infty i} \quad (2.5.1.4)$$

όπου  $u' = V'/V_e$  είναι ο δεύτερος συντελεστής επιβράδυνσης και ισχύει  $u' < u$ . Υπό αυτές τις συνθήκες, οι επαγόμενες ταχύτητες στο ροϊκό σωλήνα υπολογίζονται μέσω μιας διπλής επαναληπτικής διαδικασίας, δηλαδή μια για το ανάντη και μια για το κατόντη μέρος του δρομέα.

### 2.5.2 Το ανάντη μέρος του δρομέα

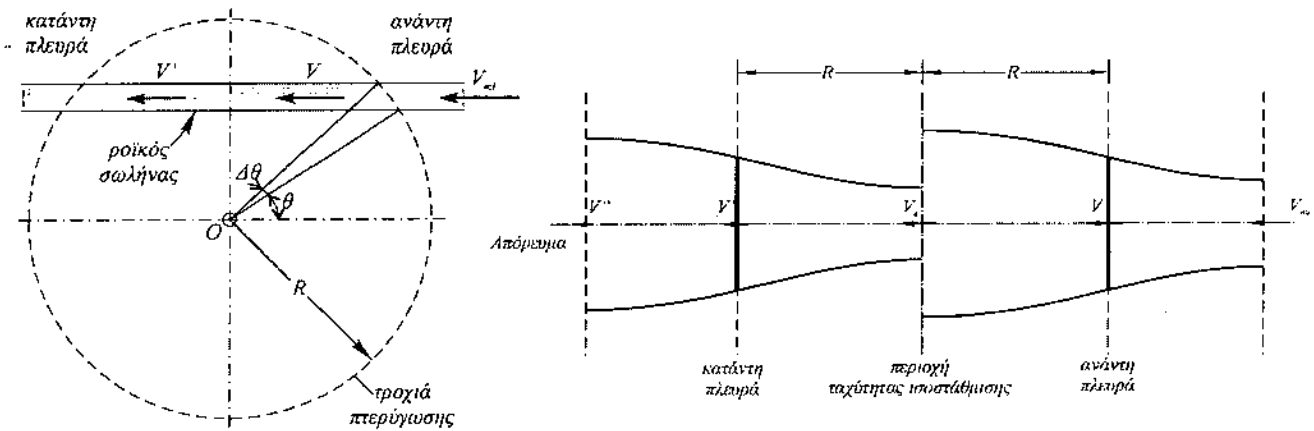
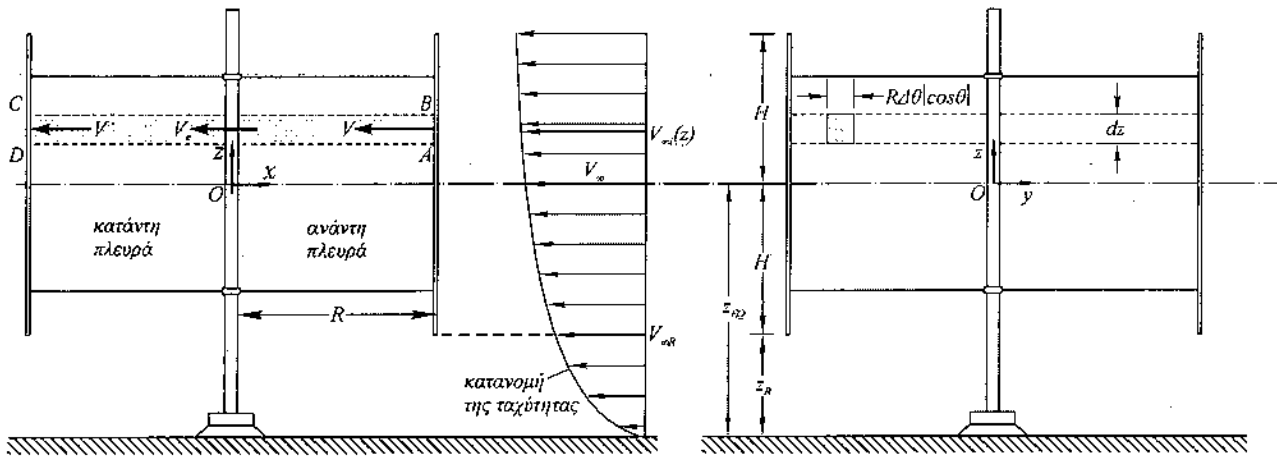
Η τοπική σχετική ταχύτητα για το ανάντη ημικύκλιο του δρομέα ( $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ) υπολογίζεται κάνοντας χρήση του διαγράμματος ταχυτήτων του σχήματος 2.16:

$$W^2 = V^2 \left[ (X - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \right] \quad (2.5.2.1)$$

όπου  $X = R\omega/V$  ο λόγος ταχύτητας ακροπτερυγίου.

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει η σχέση υπολογισμού της τοπικής γωνίας πρόσπτωσης:

$$\alpha = \sin^{-1} \left[ \frac{\cos \theta}{\sqrt{(X - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta}} \right] \quad (2.5.2.2)$$



**Σχήμα 2.15:** Γεωμετρία του μοντέλου διπλού δίσκου επενέργειας – πολλαπλών ροϊκών σωλήνων

Χρησιμοποιώντας την πτερυγική θεωρία και την εξίσωση της ορμής για κάθε ροϊκό σωλήνα υπολογίζεται ο συντελεστής αντίστασης. Εξισώνοντας τις δύο παραστάσεις και λαμβάνοντας υπόψη την κατακόρυφη μεταβολή του προκύπτει:

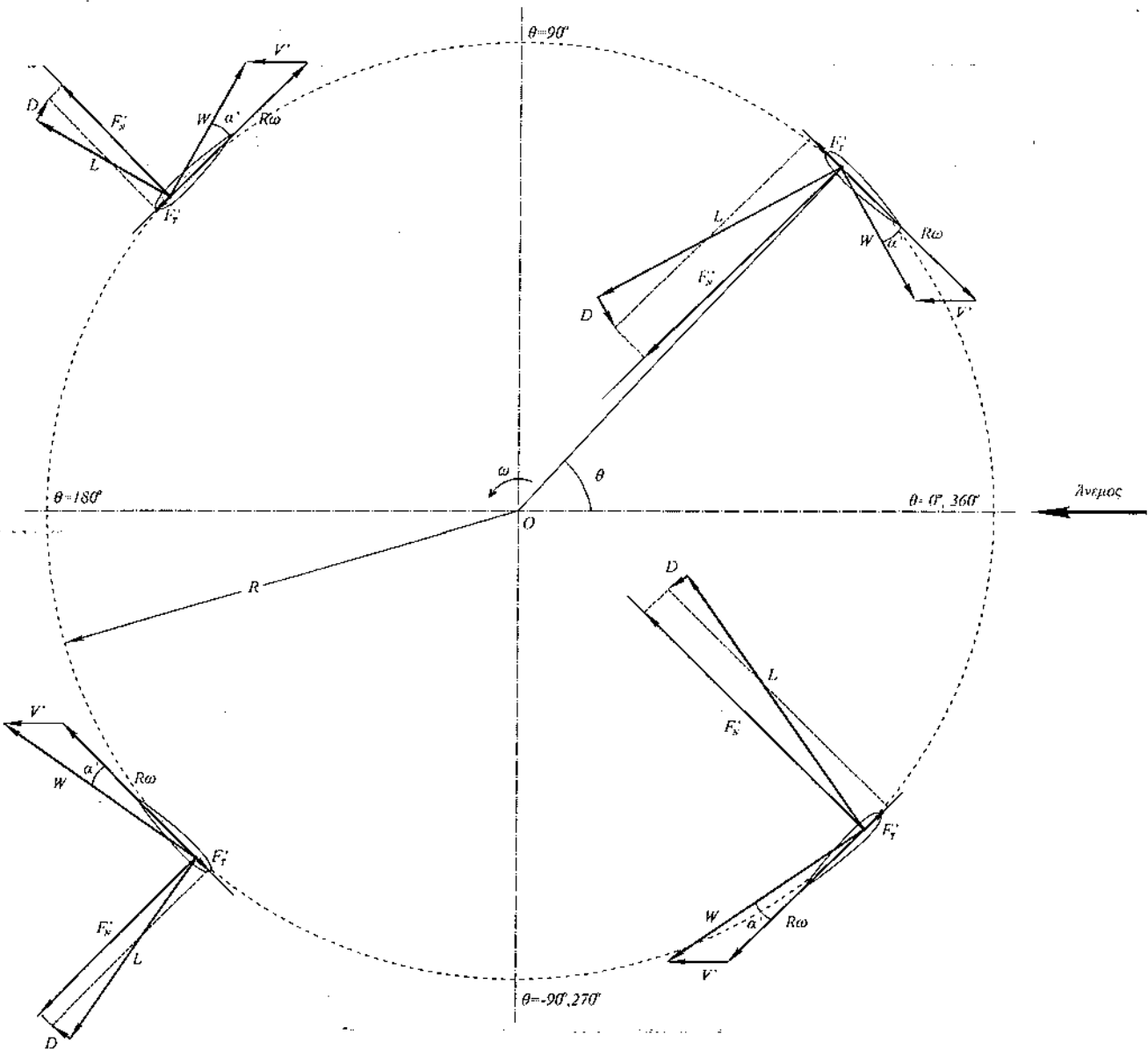
$$f_{ip} (V/V_\infty)^2 = \pi (V/V_\infty) [(V_{oi}/V_\infty) - (V/V_\infty)] \quad (2.5.2.3)$$

ή συναρτήσει των συντελεστών επιβράδυνσης:

$$f_{ip} u = \pi (1 - u) \quad (2.5.2.4)$$

όπου  $f_{up}$  είναι η ανάντη συνάρτηση η οποία χαρακτηρίζει το ανάντη ημικύκλιο του δρομέα για το τμήμα της πτέρυγας που περιστρέφεται στην υπό εξέταση ζώνη. Η συνάρτηση  $f_{up}$  δίδεται από την εξίσωση:

$$f_{up} = \frac{kc}{8\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( C_N \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} - C_T \frac{\sin\theta}{|\cos\theta|} \right) \left( \frac{W}{V} \right)^2 d\theta \quad (2.5.2.5)$$



Σχήμα 2.16: Γωνίες, δυνάμεις και τρίγωνα ταχυτήτων

όπου  $C_N = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha$  (2.5.2.6α)

και  $C_T = C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha$  (2.5.2.6β)

Οι συντελεστές ανώσεως και αντιστάσεως,  $C_L$  και  $C_D$ , λαμβάνονται με παρεμβολή από διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα για τις τοπικές τιμές της γωνίας προσπτώσεως και του αριθμού Reynolds.

Ο αριθμός Reynolds τοπικά στην πτέρυγα δίδεται από τη σχέση:

$$Re_b = \frac{Wc}{\nu} \quad (2.5.2.7)$$

Αντικαθιστώντας την τοπική σχετική ταχύτητα από την εξίσωση (2.5.2.1) ο αριθμός Reynolds δύναται να εκφραστεί τοπικά ως συνάρτηση της ανάντη επαγόμενης ταχύτητας  $V$  για κάθε περιστρεφόμενο στοιχείο της πτέρυγας.

Ορίζοντας τον αριθμό Reynolds  $Re_r$ , του οποίου η κλίμακα της ταχύτητας είναι η περιφερειακή ταχύτητα  $U = R\omega$ , ως:

$$Re_r = \frac{R\omega c}{\nu} \quad (2.5.2.8)$$

προκύπτει η ακόλουθη σχέση η οποία συνδέει τους  $Re_b$  και  $Re_r$ ,

$$Re_b = (Re_r / X) \sqrt{(X - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} \quad (2.5.2.9)$$

Για μια δεδομένη γεωμετρία ενός δρομέα ο οποίος περιστρέφεται με ταχύτητα  $\omega$  και για τον οποίο είναι γνωστή η ταχύτητα  $V_{\infty}$ , είναι δυνατός ο υπολογισμός του λόγου ταχύτητας ακροπτερυγίου  $X$  θεωρώντας αρχικά ότι  $u = 1$ . Καθίσταται κατ' αυτόν τον τρόπο δυνατή η πρώτη προσέγγιση της γωνίας προσπτώσεως  $\alpha$  και του τοπικού αριθμού Reynolds. Προσδιορίζονται στη συνέχεια οι συντελεστές  $C_L$  και  $C_D$  σύμφωνα με τα προηγούμενα. Αφού προηγηθεί ο υπολογισμός των συντελεστών  $C_N$  και  $C_T$  με χρήση των εξισώσεων (2.5.2.6α) και (2.5.2.6β) υπολογίζεται η τιμή της ανάντη συνάρτησης  $f_{up}$ . Κάνοντας χρήση του τελευταίου υπολογισμού επαναπροσδιορίζεται ο συντελεστής επιβράδυνσης (εξ. 2.5.2.5).

Η επαναληπτική διαδικασία που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο συνεχίζεται έως ότου επιτευχθεί η σύγκλιση με την επιθυμητή ακρίβεια. Η σύγκλιση είναι συνήθως ταχεία ενώ ο αριθμός των απαιτούμενων επαναλήψεων αυξάνεται για μεγάλες ταχύτητες ακροπτερυγίου. Όταν καταστεί γνωστή η τελική τιμή της ταχύτητας  $V$  υπολογίζεται η σχετική ταχύτητα  $W$  (εξ. 2.5.2.1) και η πραγματική τιμή της γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha$ .

### 2.5.3 Κατάντη μέρος του δρομέα

Στο κατάντη μέρος του δρομέα ( $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ ) η τοπική σχετική ταχύτητα  $W'$  υπολογίζεται γραφικά από το σχήμα 2.16.



$$W'^2 = V'^2 \left[ (X' - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \right] \quad (2.5.3.1)$$

όπου  $X' = R\omega/V'$  είναι ο τοπικός λόγος ταχύτητας ακροπτερυγίου για την κατάντη πλευρά του δρομέα. Η τοπική γωνία πρόσπτωσης  $\alpha'$  υπολογίζεται ομοίως γεωμετρικά συναρτήσει τοπικών παραμέτρων:

$$\alpha' = \sin^{-1} \left[ \frac{\cos \theta}{\sqrt{(X' - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta}} \right] \quad (2.5.3.2)$$

Η επαγόμενη ταχύτητα  $V'$  στο κατάντη μέρος είναι συνάρτηση και των δύο συντελεστών επιβράδυνσης  $u$  και  $u'$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας είναι δυνατή η σύνδεσή τους συναρτήσει των αντιστοίχων ταχυτήτων σε κάθε επίπεδο του δρομέα.

Ακολουθώντας διαδικασία παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για το ανάντη μέρος του δρομέα, θεωρούμε ότι η επερχόμενη ταχύτητα στον κατάντη δίσκο επενέργειας είναι η  $V_e$  για κάθε ροϊκό σωλήνα. Η νέα επαναληπτική διαδικασία εκκινείται θέτοντας  $u' = u$ , όπου ως  $u$  χρησιμοποιείται η τελική τιμή που έχει προκύψει βάσει των βημάτων που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Υπολογίζοντας το συντελεστή αντίστασης μέσω της πτερυγικής θεωρίας και του θεωρήματος της ορμής και τελικώς εξισώνοντας τις δύο παραστάσεις που προκύπτουν, βρίσκεται η σχέση:

$$f_{dw} u' = \pi (1 - u') \quad (2.5.3.3)$$

Η επαγόμενη ταχύτητα  $V'$  υπολογίζεται συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.5.1.4) και (2.5.3.3):

$$V' = \pi (2u - 1) V_{\text{cor}} / (f_{dw} + \pi) \quad (2.5.3.4)$$

με την  $f_{dw}$  να δίδεται από τη σχέση:

$$f_{dw} = \frac{kc}{8\pi R} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left( C'_N \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} - C'_T \frac{\sin \theta}{|\cos \theta|} \right) \left( \frac{W'}{V'} \right)^2 d\theta \quad (2.5.3.5)$$

#### 2.5.4 Αεροδυναμικά φορτία στα πτερύγια και απόδοση του δρομέα

Για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων που ασκούνται στα πτερύγια με σκοπό τον υπολογισμό της αντοχής του δρομέα με χρήση καταλλήλου λογισμικού απαιτείται ένα ταχύ και ακριβές αεροδυναμικό μοντέλο. Το μοντέλο του διπλού δίσκου επενέργειας με πολλαπλούς ροϊκούς σωλήνες που περιγράφηκε σε αυτή την ενότητα και λαμβάνει υπόψη την διαφοροποίηση των επαγόμενων ταχυτήτων τόσο στο ανάντη όσο και στο κατάντη μέρος του δρομέα μπορεί να

χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων που αναπτύσσονται στα πτερύγια.

#### α. Υπολογισμός των δυνάμεων και της απόδοσης στην ανάντη πλευρά

Η δύναμη που ασκείται στην πτέρυγα κατά τη διεύθυνση της ροής, όπως επίσης η εφαπτομενική και κάθετος συνιστώσα της δύναμης σε αυτή, είναι δυνατόν να αποτιμηθεί για κάθε ροϊκό σωλήνα συναρτήσει της θέσης της πτέρυγας. Η ροπή και η ισχύς για το ανάντη μέρος του δρομέα υπολογίζονται λαμβάνοντας τη μέση τιμή των ποσοτήτων αυτών για κάθε ροϊκό σωλήνα που βρίσκεται στο ανάντη μισό του δρομέα. Για κάθε πτέρυγα ευρισκόμενη στο ανάντη μέρος, οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτήν δίδονται σε αδιάστατη μορφή συναρτήσει της γωνίας αζιμουθίου από τις σχέσεις:

$$F_N(\theta) = \frac{cH}{S} \int_{-1}^1 CF_N(\zeta) d\zeta \quad (2.5.4.1)$$

$$\text{με } CF_N(\zeta) = C_N \left( \frac{W}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.5.4.2)$$

$$\text{και } F_T(\theta) = \frac{cH}{S} \int_{-1}^1 CF_T(\zeta) d\zeta \quad (2.5.4.3)$$

$$\text{με } CF_T(\zeta) = C_T \left( \frac{W}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.5.4.4)$$

$$\text{όπου } \zeta = z/H \quad (2.5.4.5)$$

Οι εξισώσεις (2.5.4.1) και (2.5.4.3) επιτρέπουν τον υπολογισμό της κατανομής των φορτίων για μια πτέρυγα σε διάφορες θέσεις της γωνίας αζιμουθίου ενώ με χρήση των εξισώσεων (2.5.4.2) και (2.5.4.4) είναι δυνατή η εκτίμηση της κατακόρυφης μεταβολής τους.

Η παραγόμενη ροπή από κάθε στοιχείο της πτέρυγας υπολογίζεται στο κέντρο κάθε στοιχείου. Η ολοκλήρωση κατά μήκος της πτέρυγας, δίνει τη συνολική ροπή σ' αυτή ως συνάρτηση της γωνίας αζιμουθίου:

$$T_{up}(\theta) = \frac{1}{2} \rho c R H \int_{-1}^1 C_T W^2 d\zeta \quad (2.5.4.6)$$

Η μέση ροπή της ανάντη πλευράς η οποία προκαλείται από  $k/2$  εκ των  $k$  συνολικά πτερυγίων δίδεται από τη σχέση:

$$\bar{T}_{up} = \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_{up}(\theta) d\theta \quad (2.5.4.7)$$

ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής που συνδέεται με τη ροπή στο ανάντη μισό του δρομέα είναι:

$$\bar{C}_{Q_1} = \frac{\bar{T}_{up}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 SR} \quad (2.5.4.8)$$

ο οποίος μετά από χρήση των εξισώσεων (2.5.4.6) και (2.5.4.7) γίνεται:

$$\bar{C}_{Q_1} = \frac{kcH}{2\pi S} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 C_T (W/V_{\infty})^2 d\zeta d\theta \quad (2.5.4.9)$$

Έτσι ο αντίστοιχος συντελεστής ισχύος θα δίδεται από τη σχέση:

$$C_{P_1} = \frac{R\omega}{V_{\infty}} \bar{C}_{Q_1} = X \bar{C}_{Q_1} \quad (2.5.4.10)$$

όπου  $X$  ο λόγος ταχύτητας ακροπτερυγίου.

### β. Υπολογισμός των δυνάμεων και της απόδοσης στην κατάντη πλευρά

Για το κατάντη μισό του δρομέα, η αδιάστατη κάθετη δύναμη στην πτέρυγα ως συνάρτηση της γωνίας αζιμουθίου είναι:

$$F'_N(\theta) = \frac{cH}{S} \int_{-1}^1 CF'_N(\zeta) d\zeta \quad (2.5.4.11)$$

$$\text{όπου } CF'_N(\zeta) = C'_N \left( \frac{W'}{V_{\infty}} \right)^2 \quad (2.5.4.12)$$

Η αντίστοιχη αδιάστατη εφαπτομενική δύναμη είναι:

$$F'_T(\theta) = \frac{cH}{S} \int_{-1}^1 CF'_T(\zeta) d\zeta \quad (2.5.4.13)$$

$$\text{με } CF'_T(\zeta) = C'_T \left( \frac{W'}{V_{\infty}} \right)^2 \quad (2.5.4.14)$$

Η προκαλούμενη ροπή από μια πτέρυγα ευρισκόμενη στο κατάντη μέρος του δρομέα συναρτήσει της γωνίας αζιμουθίου  $\theta$  είναι:

$$T'_{dw}(\theta) = \frac{1}{2} \rho c R H \int_{-1}^1 C'_T W'^2 d\zeta \quad (2.5.4.15)$$

και η μέση ροπή για μια πτέρυγα όταν αυτή κινείται στο κατάντη μισό του δρομέα είναι:

$$\bar{T}_{dw} = \frac{k}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} T'_{dw}(\theta) d\theta \quad (2.5.4.16)$$

Ο συντελεστής ροπής θα είναι:

$$\bar{C}_{Q_2} = \frac{\bar{T}_{dw}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 SR} \quad (2.5.4.17)$$

$$\dot{\eta} \quad \bar{C}_{Q_2} = \frac{kcH}{2\pi S} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-1}^1 C_T' (W'/V_\infty)^2 d\zeta d\theta \quad (2.5.4.18)$$

Ο συντελεστής ισχύος πλέον μπορεί να υπολογιστεί και είναι:

$$C_{P_2} = \left( \frac{R\omega}{V_\infty} \right) \bar{C}_{Q_2} = X \bar{C}_{Q_2} \quad (2.5.4.19)$$

Ο συνολικός συντελεστής ισχύος του δρομέα θα είναι:

$$C_P = C_{P_1} + C_{P_2} \quad (2.5.4.20)$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

## Βασικές αρχές Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD)

---

### 3.1 Εισαγωγή

Ως *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική* ορίζεται η ανάλυση συστημάτων τα οποία περιλαμβάνουν ροή ρευστού, μετάδοση θερμότητας και άλλα συναφή φαινόμενα (όπως χημική αντίδραση) μέσω εξομοίωσης με χρήση υπολογιστή. Η τεχνική αυτή είναι ιδιαίτερα ισχυρή και καλύπτει ένα μεγάλο εύρος βιομηχανικών και μη εφαρμογών. Μερικά παραδείγματα είναι:

- **Αεροδυναμική αεροπλάνων και οχημάτων:** υπολογισμός άνωσης και οπισθέλκουσας.
- **Υδροδυναμική πλοίων.**
- **Ενεργειακές εγκαταστάσεις:** καύση σε μηχανές εσωτερικής καύσης και αεροστρόβιλοι.
- **Στροβιλομηχανές:** ροές σε περιστρεφόμενα διάκενα, διάχυτες κτλ.
- **Ηλεκτρική και ηλεκτρονική μηχανική:** ψύξη σε εξοπλισμό που περιλαμβάνει μικροκυκλώματα.
- **Μηχανική των χημικών διεργασιών:** μίξη και διαχωρισμός, χύτευση πολυμερών.
- **Εσωτερικό, εξωτερικό περιβάλλον κτηρίων:** υπολογισμός φορτίων από τον άνεμο, θέρμανση και αερισμός.
- **Θαλάσσια μηχανική:** φορτία σε θαλάσσιες κατασκευές
- **Περιβαλλοντική μηχανική:** κατανομή μολυντών και αποβλήτων.
- **Υδρολογία και ωκεανογραφία:** ροές σε ποτάμια, κόλπους και ωκεανούς.
- **Μετεωρολογία:** πρόβλεψη καιρού
- **Ενδοβιορευστομηχανική:** Ροές αίματος σε αρτηρίες και φλέβες.

Παρά το γεγονός ότι το θεωρητικό μέρος των αριθμητικών μεθόδων που αποτελούν τη βάση της μεθοδολογίας CFD ήταν γνωστό από τις αρχές του αιώνα μόλις τη δεκαετία του '60 η αεροναυπηγική βιομηχανική άρχισε να συμπεριλαμβάνει τεχνικές CFD στο σχεδιασμό, έρευνα και ανάπτυξη και κατασκευή αεροσκαφών και μηχανών αεριωθούμενων. Πρόσφατα οι μεθοδολογίες αυτές έχουν ευρεία εφαρμογή στο σχεδιασμό μηχανών εσωτερικής καύσης, θαλάμων καύσης αεροστρόβιλων και κλιβάνων. Η εφαρμογή της τεχνικής στη βιομηχανία οχημάτων χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των δυνάμεων αντίστασης, εσωτερικών ροών σε αυτοκίνητα (και γενικότερα στο εσωτερικό περιβάλλον ενός αυτοκινήτου). Η μεθοδολογία της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής χρησιμοποιείται αυξανόμενα ως βασικό εργαλείο για το σχεδιασμό βιομηχανικών προϊόντων και διεργασιών.

Ο απόλυτος σκοπός της εξέλιξης στο πεδίο της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής είναι η ικανότητα ανάλυσης με τρόπο συγκρίσιμο των άλλων μεθόδων CAE όπως οι κώδικες ανάλυσης τάσεων (FEM). Ο βασικός λόγος υστέρησης είναι η υπερβολική πολυπλοκότητα των εμπλεκόμενων φαινομένων η οποία αποκλείει ροές για τις οποίες μια πλήρη περιγραφή απαιτεί πάρα πολλούς υπολογιστικούς πόρους. Η διαθεσιμότητα οικονομικού υπολογιστικού εξοπλισμού καθώς και η χρήση υπολογιστικών περιβαλλόντων φιλικών προς το χρήστη έχουν οδηγήσει στην πρόσφατη ανανέωση του ενδιαφέροντος για την μεθοδολογία σε CFD με αποτέλεσμα αυτή να κάνει την εμφάνισή της στην ευρύτερη βιομηχανική κοινότητα τη δεκαετία του '90.

Τα βασικά πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η μέθοδος CFD σε σύγκριση με πειραματικές μεθοδολογίες είναι :

- Σημαντική μείωση του χρόνου παράδοσης και του κόστους νέων σχεδιασμών
- Ικανότητα μελέτης συστημάτων για τα οποία τα ελεγχόμενα πειράματα είναι δύσκολα ή αδύνατο να εκτελεστούν (π.χ. πολύ μεγάλα συστήματα )
- Ικανότητα μελέτης συστημάτων τα οποία λαμβάνουν χώρα κάτω από αντίξοες συνθήκες (και πέραν των ορίων κανονικής λειτουργίας) όπως για παράδειγμα μια μελέτη ασφάλειας και σενάρια ατυχημάτων.
- Πρακτικά υπάρχει δυνατότητα πολύ μεγάλης ακρίβειας αποτελεσμάτων.

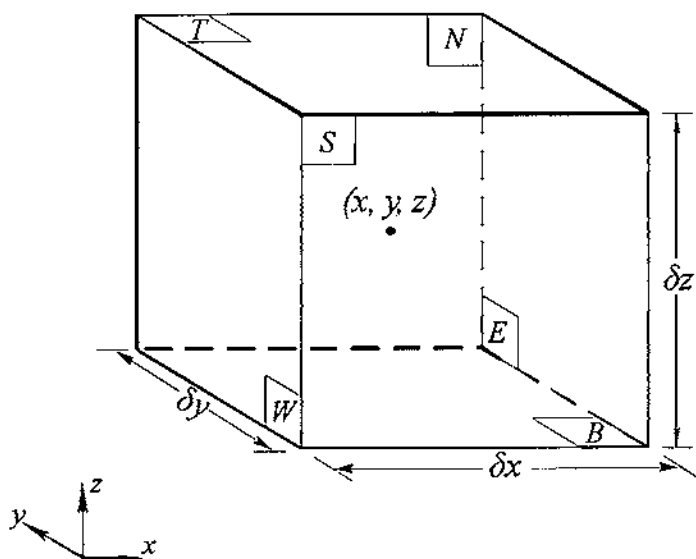
Το κόστος εκτέλεσης ενός πειράματος εξαρτάται από τον εμπλεκόμενο εξοπλισμό, τις ανθρωποώρες απασχόλησης, τον αριθμό των σταθμών μετρήσεως και τον αριθμό των ελεγχόμενων διαμορφώσεων. Αντιθέτως οι κώδικες CFD παρέχουν λεπτομερή αποτελέσματα χωρίς σημαντικό επιπρόσθετο κόστος και γενικά είναι σχετικά εύκολη η εκτέλεση παραμετρικών μελετών (για παράδειγμα η βελτιστοποίηση της απόδοσης μιας εγκατάστασης). Η χρήση της μεθοδολογίας CFD απαιτεί, εκτός από την αρχική επένδυση σε εξοπλισμό την ύπαρξη εξειδικευμένων επιστημόνων οι οποίοι θα αναλάβουν τη χρήση τους, την εκτίμηση και επεξήγηση των αποτελεσμάτων τους.

### 3.2 Θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδειχθούν και παρατεθούν οι μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν γενικά τη ροή ενός ρευστού χρησιμοποιώντας τις βασικές αρχές διατήρησης μάζας και ορμής. Οι βασικές εξισώσεις της ροής ρευστών απορρέουν από τις μαθηματικές εκφράσεις νόμων της φυσικής που σχετίζονται με τη διατήρηση φυσικών μεγεθών. Πιο συγκεκριμένες η εξίσωση της συνέχειας προκύπτει, όπως θα φανεί στη συνέχεια, από την αρχή διατήρησης της μάζας ενώ οι εξισώσεις της ορμής λαμβάνονται θεωρώντας το ισοζύγιο του ρυθμού μεταβολής της

ορμής και εξισώνοντας το με το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο υπό εξέταση σύστημα.

Για τις ανάγκες της ανάλυσης που θα ακολουθήσει το ρευστό θα θεωρηθεί ως συνεχές μέσο. Όταν η ανάλυση ροών ρευστού λαμβάνει χώρα σε μακροσκοπική κλίμακα (π.χ. για  $1\mu m$  και άνω) η μοριακή δομή της ύλης και μοριακά φαινόμενα είναι δυνατό να αγνοηθούν. Η συμπεριφορά του ρευστού περιγράφεται από τις μακροσκοπικές του ιδιότητες όπως η ταχύτητα, η πίεση, η πυκνότητα και η θερμοκρασία και από τις παραγώγους των ανωτέρω μεγεθών στο χώρο και στο χρόνο. Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως μέσες τιμές για έναν ικανά μεγάλο αριθμό μορίων. Συνεπώς, ένα ροϊκό σωματίδιο ή ένα σημείο σε ένα ρευστό είναι η μικρότερη δυνατή ποσότητα ρευστού της οποίας οι μακροσκοπικές ιδιότητες είναι ανεπηρέαστες από διακριτά μόρια.



**Σχήμα 3.1:** Ροϊκό στοιχείο

Θεωρούμε ένα τέτοιο, μικρό, ροϊκό στοιχείο του οποίου οι πλευρές έχουν διαστάσεις  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  και  $\Delta z$ . Αυτές σημειώνονται με τους συμβολισμούς  $N$ ,  $S$ ,  $E$ ,  $W$ ,  $T$  και  $B$  και δείχνονται στο σχήμα 3.1. Οι συντεταγμένες του κέντρου του ροϊκού στοιχείου είναι οι  $x$ ,  $y$  και  $z$  οι οποίες δείχνονται ομοίως στο σχήμα. Ο συστηματικός υπολογισμός της μεταβολής της μάζας, ορμής και ενέργειας στο ροϊκό στοιχείο εξαιτίας της ροής ρευστού κατά μήκος των ορίων του και (όταν είναι αναγκαίο) εξαιτίας της δράσης των πηγών εντός του στοιχείου, οδηγεί στις εξισώσεις που διέπουν τη ροή ρευστών.

Όλες οι ιδιότητες ενός ρευστού είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου έτσι είναι αναγκαίος ο συμβολισμός ως  $\rho(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$ ,  $T(x, y, z, t)$  και  $u(x, y, z, t)$  για την πυκνότητα, πίεση,

θερμοκρασία και το διάνυσμα της ταχύτητας αντίστοιχα. Για να αποφευχθεί η πολύπλοκη σημειολογία θα αποφύγουμε την απ' ευθείας έκφραση της εξάρτησης από τις συντεταγμένες του χώρου και του χρόνου. Για παράδειγμα, η πυκνότητα στο κέντρο  $(x, y, z)$  ενός ροϊκού σωματιδίου σε χρόνο  $t$  συμβολίζεται με  $\rho$  και η παράγωγος στον άξονα  $x$  της πίεσης  $p(x, y, z)$  και σε χρόνο  $t$  με  $\partial p / \partial x$ . Αύτη η πρακτική θα ακολουθηθεί για όλες τις ιδιότητες του ρευστού.

Το υπό μελέτη στοιχείο είναι τόσο μικρό ώστε οι ιδιότητες του ρευστού σε επιφάνειες μπορεί να εκφραστούν με σχετική ακρίβεια με τους δυο πρώτους όρους της σειράς Taylor. Για παράδειγμα η πίεση στις πλευρές  $E$  και  $W$ , οι οποίες απέχουν κατά  $\frac{1}{2} \delta x$  από το κέντρο του στοιχείου μπορούν να εκφραστούν ως:

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \quad \text{και} \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x$$

### 3.2.1 Διατήρηση της μάζας στο χώρο

Το πρώτο βήμα για την απόδειξη της εξίσωσης διατήρησης της μάζας είναι ο υπολογισμός του ισοζυγίου της μάζας σ' ένα ροϊκό στοιχείο. Είναι προφανές ότι:

<i>Ρυθμός αύξησης της μάζας εντός του ροϊκού στοιχείου</i>	=	<i>Συνολικός ρυθμός εισροής μάζας στο ροϊκό στοιχείο</i>
--	---	--

Ο ρυθμός αύξησης της μάζας στο ροϊκό στοιχείο είναι ίσος με:

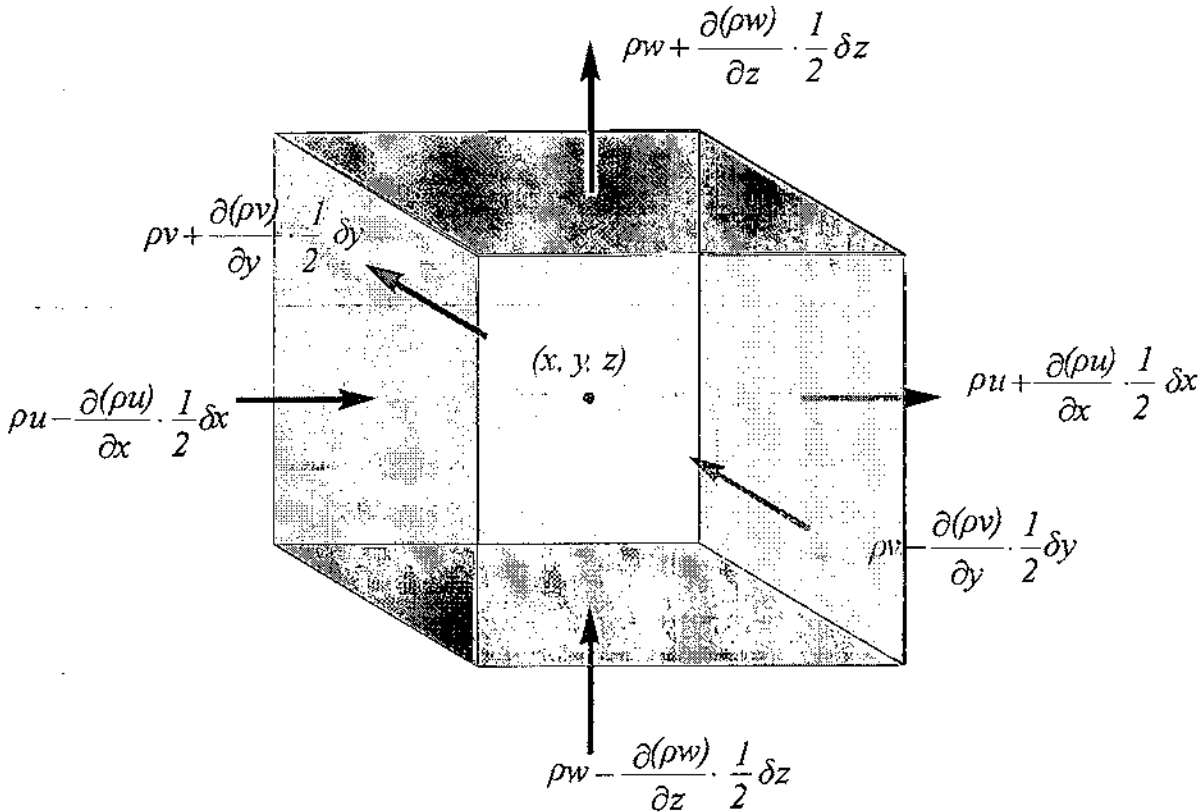
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \tag{3.2.1.1}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η μαζική εισροή διαμέσου μιας επιφάνειας του στοιχείου η οποία δίδεται από το γινόμενο της πυκνότητας, της επιφάνειας και της συνιστώσας της ταχύτητας η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια. Από το σχήμα μπορεί να φανεί ότι ο ρυθμός της συνολικής εισροής μάζας στο στοιχείο από τα σύνορα του δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} & \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z + \\ & + \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \\ & + \left( \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned} \tag{3.2.1.2}$$



Οι ροές οι οποίες κατευθύνονται εντός του στοιχείου προκαλούν αύξηση της μάζας στο στοιχείο και λαμβάνουν θετικό πρόσημο και οι ροές οι οποίες κατευθύνονται εκτός του στοιχείου σημειώνονται με αρνητικό πρόσημο.



**Σχήμα 3.2:** Ροές μάζας εντός και εκτός του ροϊκού στοιχείου

Ο ρυθμός αύξησης της μάζας στο στοιχείο ισούται με το ρυθμό εισροής μάζας στο στοιχείο από τις επιφάνειες του. Όλοι οι όροι τοποθετούνται στο αριστερό μέρος της εξίσωσης και η έκφραση που προκύπτει διαιρείται με τον όγκο του ροϊκού στοιχείου  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Αυτό δίνει:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.2.1.3)$$

ή στη πιο σύντομη διανυσματική έκφραση:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.2.1.4)$$

Η εξίσωση (3.2.1.4) είναι η μη μόνιμη τρισδιάστατη εξίσωση διατήρησης της μάζας (γνωστή ως εξίσωση συνέχειας) σ' ένα σημείο σε ένα συμπιεστό ρευστό. Ο πρώτος όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (3.2.1.4) είναι η μεταβολή της πυκνότητας με το χρόνο (ή μεταβολή της μάζας ανά μονάδα όγκου). Ο δεύτερος όρος περιγράφει την καθαρή εισροή μάζας από το στοιχείο από τα σύνορα του και καλείται ο όρος της συναγωγής (ή αλλιώς όρος της μεταφοράς).

Για ένα ασυμπίεστο ρευστό (π.χ. ένα υγρό) η πυκνότητα  $\rho$  είναι σταθερή και επομένως η εξίσωση (3.2.1.4) γίνεται:

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad (3.2.1.5)$$

ή στην εκτεταμένη της μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.1.6)$$

### 3.2.2 Ρυθμός μεταβολής για ένα ροϊκό σωματίδιο και ένα ροϊκό στοιχείο

Οι νόμοι της διατήρησης ορμής και ενέργειας εκφράζονται υπολογίζοντας τις μεταβολές των ιδιοτήτων ενός σωματιδίου ρευστού. Κάθε ιδιότητα ενός τέτοιου σωματιδίου είναι συνάρτηση της θέσης  $(x, y, z)$  του σωματιδίου και του χρόνου  $t$ . Έστω ότι η τιμή μιας ιδιότητας ανά μονάδα μάζας συμβολίζεται με  $\phi$ . Η ολική παράγωγος του  $\phi$  ως προς το χρόνο κατά τη μετακίνηση ενός σωματιδίου ρευστού (ή οποία συμβολίζεται με  $D\phi/Dt$ ) είναι:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.2.2.1)$$

Για ένα ροϊκό σωματίδιο το οποίο ακολουθεί τη ροή θα είναι:

$$u = dx/dt, \quad v = dy/dt \quad \text{και} \quad w = dz/dt$$

Συνεπώς η ολική παράγωγος του  $\phi$  δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad}\phi \quad (3.2.2.2)$$

η ποσότητα  $D\phi/Dt$  καθορίζει το ρυθμό μεταβολής της ποσότητας  $\phi$  ανά μονάδα μάζας. Όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας ενδιαφερόμαστε για την εξαγωγή εξισώσεων για τους ρυθμούς μεταβολής ανά μονάδα όγκου. Ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας ανά μονάδα όγκου δίδεται από το γινόμενο της ολικής παραγώγου  $D\phi/Dt$  και της πυκνότητας  $\rho$ , ήτοι:

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad}\phi \right) \quad (3.2.2.3)$$

Οι πιο χρήσιμες μορφές των νόμων διατήρησης για τους υπολογισμούς ροής ρευστού συνδέονται με μεταβολές μιας ιδιότητας της ροής για ροϊκό στοιχείο το οποίο είναι ακίνητο στο χώρο. Η σχέση μεταξύ της ολικής παραγώγου του  $\phi$ , για ροϊκό σωματίδιο το οποίο μετακινείται και του ρυθμού μεταβολής του  $\phi$  για ένα ροϊκό στοιχείο, θα αναπτυχθεί στη συνέχεια.

Για την εξίσωση διατήρησης της μάζας, η ποσότητα που διατηρείται είναι η μάζα ανά μονάδα όγκου (δηλ. η πυκνότητα). Το άθροισμα του ρυθμού μεταβολής της πυκνότητας και του όρου της συναγωγής (convective term) στην εξίσωση διατήρησης της μάζας για ένα ροϊκό στοιχείο είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u})$$

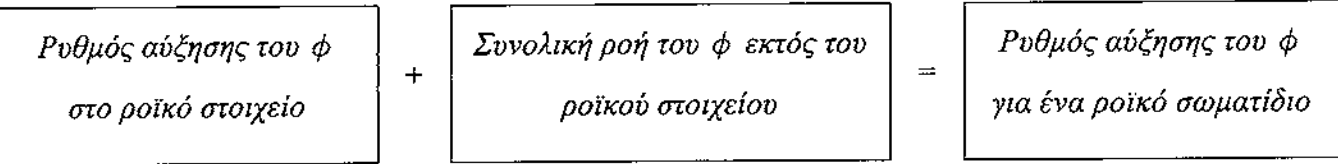
Η γενίκευση των ανωτέρω όρων για μια αυθαίρετη ποσότητα η οποία διατηρείται θα δώσει:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\vec{u}) \quad (3.2.2.4)$$

Η ανωτέρα εξίσωση εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $\phi$  ανά μονάδα όγκου συν τη συνολική ροή του  $\phi$  εκτός του ροϊκού στοιχείου ανά μονάδα όγκου. Η εξίσωση (3.2.2.4) θα γραφεί στη συνέχεια σε μορφή η οποία θα καταδείξει τη σχέση που υπάρχει με την ολική παράγωγο του  $\phi$ :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\vec{u}) = \rho \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}\phi \right] + \phi \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}) \right] = \rho \frac{D\phi}{Dt} \quad (3.2.2.5)$$

Ο όρος  $\rho \left[ \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) + \text{div}(\rho\vec{u}) \right]$  είναι ίσος με το μηδέν εξαιτίας της διατήρησης της μάζας. Η σχέση (3.2.2.5) εκφράζει:



Για την έκφραση των τριών συνιστωσών της εξίσωσης της ορμής και της εξίσωσης της ενέργειας θα γίνει αντικατάσταση του  $\phi$  με τις συνιστώσες της ταχύτητας και την ενέργεια. Οι όροι που προκύπτουν παρουσιάζονται στη συνέχεια:

Ορμή στον άξονα $x$	$u$	$\rho \frac{Du}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{u})$
Ορμή στον άξονα $y$	$v$	$\rho \frac{Dv}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \vec{u})$
Ορμή στον άξονα $z$	$w$	$\rho \frac{Dw}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \vec{u})$
Ενέργεια	$E$	$\rho \frac{DE}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \vec{u})$

Και οι δύο μορφές του ρυθμού μεταβολής, η συντηρητική μορφή (ή της απόκλισης) και η μη συντηρητική, μπορεί να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά για να εκφραστεί η διατήρηση μιας φυσικής ποσότητας. Οι μη συντηρητικές μορφές θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για την εξαγωγή των

εξισώσεων ορμής και συνέχειας για τη ροή ρευστού (με αυτό τον τρόπο η εξαγωγή των εξισώσεων είναι πιο σύντομη). Με αυτή τη μεθοδολογία θα δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι οι νόμοι διατήρησης λαμβάνονται πρωταρχικά ως εκφράσεις που εφαρμόζονται στο ροϊκό σωματίδιο.

### 3.2.3 Εξίσωσης της ορμής στο χώρο

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα αναφέρει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο σωματίδιο.

<i>Ρυθμός αύξησης της ορμής του ροϊκού σωματιδίου</i>	=	<i>Άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο ροϊκό σωματίδιο</i>
---	---	--

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$  ανά μονάδα όγκου για ένα ροϊκό σωματίδιο δίδεται από τις σχέσεις:

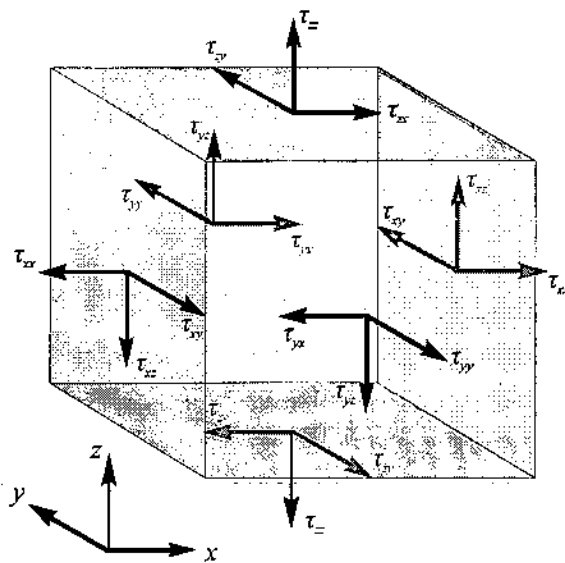
$$\rho \frac{Du}{Dt}, \rho \frac{Dv}{Dt} \text{ και } \rho \frac{Dw}{Dt} \tag{3.2.3.1}$$

Υπάρχουν δύο είδη δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα ροϊκό σωματίδιο:

- **Επιφανειακές δυνάμεις**
  - δυνάμεις πίεσεως
  - συνεκτικές δυνάμεις
- **Καθολικές δυνάμεις**
  - δύναμη βαρύτητας
  - φυγόκεντρη δύναμη
  - δύναμη Coriolis
  - ηλεκτρομαγνητική δύναμη

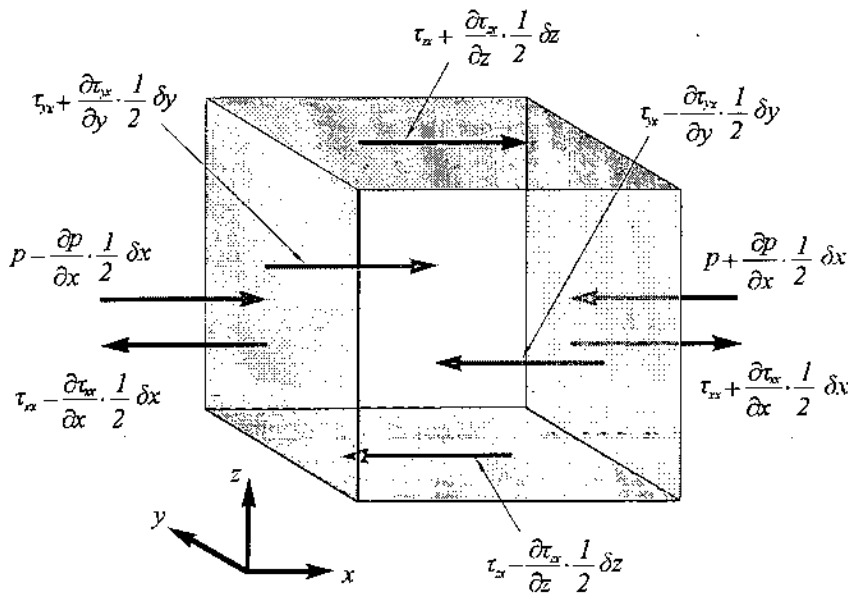
Είναι κοινή πρακτική να γίνεται διαχωρισμός των επιφανειακών δυνάμεων ως ξεχωριστοί όροι στην εξίσωση της ορμής. Η επίδραση των καθολικών δυνάμεων υπολογίζεται στους πηγαιίους όρους (source terms) της εξίσωσης της ορμής.

Η καταπόνηση ενός ροϊκού στοιχείου δια των επιφανειακών δυνάμεων πραγματοποιείται μέσω της πίεσης και των εννέα συνιστωσών της διατμητικής τάσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η πίεση, μια κάθετη στην επιφάνεια τάση, συμβολίζεται με  $p$ . Οι συνεκτικές τάσεις συμβολίζονται με  $\tau$ . Η συνήθης σημειολογία  $\tau_{ij}$  εφαρμόζεται για την υπόδειξη της κατεύθυνσης των διατμητικών τάσεων. Οι δείκτες  $i$  και  $j$  στην έκφραση  $\tau_{ij}$  δείχνουν ότι η συνιστώσα δρα στην διεύθυνση  $j$  σε μια επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση  $i$ .



**Σχήμα 3.3:** Συνιστώσες των επιφανειακών τάσεων σε ένα ροϊκό στοιχείο

Αρχικά θα εξεταστούν οι συνιστώσες των δυνάμεων που δρουν κατά μήκος του άξονα  $x$  ως αποτέλεσμα της πίεσης  $p$  και των συνιστωσών των τάσεων  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  και  $\tau_{zx}$  που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα. Το μέτρο της δύναμης η οποία προκύπτει από μια επιφανειακή τάση είναι το γινόμενο της τάσης επί την επιφάνεια στην οποία δρα. Οι δυνάμεις οι οποίες έχουν την ίδια κατεύθυνση με τον άξονα των συντεταγμένων στο οποίο δρουν λαμβάνουν θετικό πρόσημο ενώ αυτές που δρουν στην αντίθετη κατεύθυνση λαμβάνουν αρνητικό πρόσημο. Η συνολική δύναμη που δρα στην διεύθυνση  $x$  είναι το άθροισμα των συνιστωσών των δυνάμεων που δρουν, σ' αυτήν την διεύθυνση, επί του ροϊκού στοιχείου.



**Σχήμα 3.4:** Επιφανειακές τάσεις που δρουν κατά την  $x$  διεύθυνση

Για το ζεύγος των επιφανειών  $E$  και  $W$ , οι δυνάμεις οι οποίες δρουν κατά την  $x$  διεύθυνση είναι:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z + \\
& + \left[ - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = \\
& = \left( - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z
\end{aligned} \tag{3.2.3.2}$$

Ομοίως η συνολική δύναμη στον άξονα  $x$  στο ζεύγος των επιφανειών  $(N,S)$  είναι:

$$- \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \tag{3.2.3.3}$$

Τελικά η συνολική δύναμη στον άξονα  $x$  στις επιφάνειες  $T$  και  $B$  δίνεται από τη σχέση:

$$- \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \tag{3.2.3.4}$$

Η συνολική δύναμη ανά μονάδα όγκου του ρευστού που οφείλεται στη δράση των επιφανειακών τάσεων είναι ίση με το άθροισμα των ποσοτήτων (3.2.3.2), (3.2.3.3), (3.2.3.4) όταν αυτό διαιρεθεί με τον όγκο  $\delta x \delta y \delta z$ :

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{3.2.3.5}$$

Χωρίς να λάβουμε περαιτέρω υπ' όψιν μας τις καθολικές δυνάμεις, η συνολική τους δράση περιγράφεται με τον ορισμό ενός πηγαιίου όρου  $S_{M_x}$  για την ορμή στον άξονα  $x$  ανά μονάδα όγκου και χρόνου.

Η εξίσωση της ορμής στον άξονα  $x$  βρίσκεται εξισώνοντας τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του ροϊκού σωματιδίου στον άξονα  $x$  με την συνολική δύναμη που ασκείται στο ροϊκό στοιχείο εξαιτίας της δράσης των επιφανειακών τάσεων συν το ρυθμό μεταβολής της ορμής εξαιτίας των πηγών:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{M_x} \tag{3.2.3.6}$$

Κατά όμοιο τρόπο η συνιστώσα της εξίσωσης ορμής στον άξονα  $y$  δίνεται από τη σχέση:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{M_y} \tag{3.2.3.7}$$

Εν τέλει για τον άξονα  $z$  η εξίσωση της ορμής θα είναι:

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{M_z} \tag{3.2.3.8}$$

Το πρόσημο της πίεσης είναι αντίθετο με το αντίστοιχο της κάθετης διαμητικής τάσης καθώς συνηθίζεται μια εφελκυστική τάση να έχει θετικό πρόσημο ενώ αντιθέτως για θλιπτικές τάσεις όπως η πίεση χρησιμοποιείται αρνητικό πρόσημο.

Μέσω των υπολογισμών που προηγήθηκαν, η δράση των επιφανειακών τάσεων υπολογίστηκε επακριβώς. Στους πηγαίους όρους  $S_{M_x}$ ,  $S_{M_y}$ ,  $S_{M_z}$  περιλαμβάνονται οι συνεισφορές των καθολικών δυνάμεων. Για παράδειγμα, η καθολική δύναμη εξαιτίας της βαρύτητας μπορεί να μοντελοποιηθεί θέτοντας  $S_{M_x} = 0$ ,  $S_{M_y} = 0$  και  $S_{M_z} = -\rho g$ .

### 3.2.4 Εξίσωση της ενέργειας στο χώρο

Η εξίσωση της ενέργειας προκύπτει από την εφαρμογή του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής ο οποίος αναφέρει ότι: ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ενός σωματιδίου ρευστού ισούται με το άθροισμα του ρυθμού αύξησης της θερμότητας στο ροϊκό σωματίδιο συν το εκτελούμενο έργο στο σωματίδιο.

*Ρυθμός αύξησης της ενέργειας ενός ροϊκού σωματιδίου*

=

*Συνολικός ρυθμός αύξησης της προστιθέμενης θερμότητας στο ροϊκό σωματίδιο*

+

*Συνολικός ρυθμός του εκτελούμενου έργου στο ροϊκό σωματίδιο*

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διατήρηση της ενέργειας προκύπτει υιοθετώντας την τακτική που ακολουθήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση εξισώνεται ο ρυθμός αύξησης της ενέργειας του σωματιδίου ανά μονάδα όγκου  $\rho dE / Dt$  με το εκτελούμενο έργο από τις επιφανειακές δυνάμεις συν την θερμότητα που προστίθεται στο σωματίδιο δια της αγωγής θερμότητας. Στους δύο τελευταίους όρους προστίθεται και ο πηγαίος όρος  $S_E$  ο οποίος περιγράφει πιθανές πηγές θερμότητας. Η εξίσωση της ενέργειας όπως προκύπτει από εφαρμογή των ανωτέρω γράφεται ως εξής:

$$\rho \frac{dE}{dt} = -\text{div}(\rho \mathbf{u}) + \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + \text{div}(k \text{ grad } T) + S_E \quad (3.2.4.1)$$

όπου  $E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ , το άθροισμα δηλαδή της εσωτερικής ενέργειας  $i$  και της κινητικής ενέργειας. Αφαιρώντας από την εξίσωση (3.2.4.1) το μέρος που αφορά την κινητική

ενέργεια είναι δυνατό να ληφθεί μια εξίσωση η οποία θα περιγράψει τη διατήρηση της εσωτερικής ενέργειας  $i$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Di}{Dt} = & -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ & + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \end{aligned} \quad (3.2.4.2)$$

Για την ειδική περίπτωση ενός ασυμπίεστου ρευστού ισχύει  $i = cT$  και  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Οι προηγούμενες συνθήκες επιτρέπουν την αναδιαμόρφωση της εξίσωσης (3.2.4.2) σε εξίσωση θερμοκρασίας:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{DT}{Dt} = & \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ & + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \end{aligned} \quad (3.2.4.3)$$

Για συμπίεστες ροές η εξίσωση (3.2.4.1) αναδιατάσσεται σε εξίσωση για την ενθαλπία. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ειδική ενθαλπία  $h$  και η συνολική ειδική ενθαλπία  $h_0$  ενός ρευστού δίδονται από τις σχέσεις:

$$h = i + \frac{p}{\rho}$$

$$\text{και } h_0 = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = i + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = E + \frac{p}{\rho}$$

η (3.2.4.1) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho h_0)}{dt} + \operatorname{div}(\rho h_0 \mathbf{u}) = & \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \\ & + \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ \frac{\partial (u \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial (u \tau_{zx})}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\partial (v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (v \tau_{zy})}{\partial y} + \\ & \left. + \frac{\partial (w \tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial (w \tau_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial (w \tau_{zz})}{\partial z} \right] + S_h \end{aligned} \quad (3.2.4.4)$$

### 3.2.5 Καταστατική εξίσωση

Η κίνηση ενός ρευστού στις τρεις διαστάσεις περιγράφεται από ένα σύστημα πέντε μερικών διαφορικών εξισώσεων: εξίσωση διατήρησης της μάζας, εξισώσεις της ορμής στους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$  και την εξίσωση της ενέργειας. Στους αγνώστους προστίθενται και οι θερμοδυναμικές μεταβλητές  $\rho$ ,  $p$ ,  $i$  και  $T$  στην περίπτωση που το υπό εξέταση ρευστό είναι αέριο ή/και η ροή δεν είναι ισόθερμη. Θεωρώντας το αέριο ως ιδανικό η καταστατική εξίσωση παρέχει τη σύνδεση των



αγνώστων αυτών ποσοτήτων με τις βασικές εξισώσεις του προβλήματος. Η καταστατική εξίσωση για ένα ιδανικό αέριο εκφράζεται ως:

$$p = \rho RT \quad (3.2.5.1)$$

### 3.3 Οι εξισώσεις των Navier-Stokes για ένα νευτώνικό ρευστό

Οι βασικές εξισώσεις περιέχουν ως επιπλέον αγνώστους τις συνιστώσες των συνεκτικών τάσεων  $\tau_{ij}$ . Οι πιο χρήσιμες μορφές των εξισώσεων διατήρησης για ροές ρευστών λαμβάνονται με την υιοθέτηση ενός κατάλληλου μοντέλου για τις συνεκτικές τάσεις  $\tau_{ij}$ . Σε πολλές ροές, οι συνεκτικές τάσεις μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις του τοπικού ρυθμού παραμόρφωσης. Σε τρισδιάστατες ροές ο τοπικός ρυθμός παραμόρφωσης συντίθεται από το γραμμικό ρυθμό παραμόρφωσης και τον ογκομετρικό ρυθμό παραμόρφωσης.

Όλα τα αέρια και τα περισσότερα ρευστά είναι ισοτροπικά. Τα υγρά τα οποία περιέχουν σημαντικές ποσότητες μορίων πολυμερούς επιδεικνύουν ανισοτροπικές ή κατευθυνόμενες ιδιότητες των συνεκτικών τάσεων ως αποτέλεσμα της ευθυγράμμισης των μορίων του πολυμερούς σε μορφή αλυσίδας, με τη ροή. Τα ρευστά αυτής της κατηγορίας δεν πρόκειται να αναλυθούν στη συνέχεια και θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην ανάπτυξη των σχέσεων που διέπουν την κίνηση ενός ρευστού υποθέτοντας ότι αυτό είναι ισοτροπικό.

Ο ρυθμός της γραμμικής παραμόρφωσης ενός ροϊκού στοιχείου έχει εννέα συνιστώσες στις τρεις διαστάσεις, έξι εκ των οποίων είναι ανεξάρτητες σε ισοτροπικά ρευστά. Συμβολίζονται με το σύμβολο  $e_{ij}$ . Το σύστημα των δεικτών είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιείται για τις συνιστώσες των συνεκτικών τάσεων. Υπάρχουν τρεις γραμμικές εφελκυστικές συνιστώσες της παραμόρφωσης:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.3.1)$$

Υπάρχουν επίσης έξι διατμητικές συνιστώσες της παραμόρφωσης:

$$\begin{aligned} e_{xy} = e_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ e_{xz} = e_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ e_{yz} = e_{zy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Η ογκομετρική παραμόρφωση δίδεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{u} \quad (3.3.3)$$

Σ' ένα νευτωνικό ρευστό οι συνεκτικές τάσεις είναι ανάλογες με το ρυθμούς παραμόρφωσης. Η τρισδιάστατη μορφή του νόμου του Νεύτωνα για συμπιεστά ρευστά περιέχει δυο σταθερές αναλογίας: το δυναμικό ιξώδες,  $\mu$ , η οποία συσχετίζει τις τάσεις με τις γραμμικές παραμορφώσεις και τη δεύτερη συνεκτικότητα (ή συνεκτικότητα όγκου),  $\lambda$ , η οποία συνδέει τις τάσεις με την ογκομετρική παραμόρφωση. Οι εννέα συνιστώσες των συνεκτικών τάσεων, εκ των οποίων οι έξι είναι ανεξάρτητες είναι:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div } \mathbf{u}, \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \text{div } \mathbf{u}, \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \text{div } \mathbf{u}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.3.4)$$

Η δράση της δευτέρας συνεκτικότητας,  $\lambda$ , δεν είναι επακριβώς γνωστή καθώς η επίδραση της είναι μικρή. Για την περίπτωση των αερίων μια καλή προσέγγιση λαμβάνεται θεωρώντας  $\lambda = -2\mu/3$ .

Τα υγρά είναι ασυμπίεστα με αποτέλεσμα  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  και ως συνέπεια αυτού οι συνεκτικές τάσεις είναι διπλάσιες του τοπικού ρυθμού παραμόρφωσης επί το δυναμικό ιξώδες. Αντικατάσταση των ανωτέρω συνεκτικών τάσεων (3.3.4) στις εξισώσεις της ορμής δίδει τις λεγόμενες εξισώσεις Navier – Stokes. Οι εξισώσεις αυτές οφείλουν το όνομά τους στους δυο φυσικούς του 19ου αιώνα που τις παρήγαγαν ανεξάρτητα:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{M_x} \quad (3.3.5a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{M_y} \quad (3.3.5b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \right] + S_{M_z} \quad (3.3.5c)$$

Συχνά είναι χρήσιμη η αναδιάταξη των όρων των συνεκτικών τάσεων. Για την εξίσωση (3.3.5a) η διαδικασία αυτή έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) = \\
& = \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} u) + s_{M_x}
\end{aligned}$$

Οι συνεκτικές τάσεις στις εξισώσεις στις  $y$  και  $z$  διευθύνσεις μπορούν να τακτοποιηθούν με παρόμοιο τρόπο. Σκοπός αυτής της διαδικασίας είναι η απλοποίηση των εξισώσεων της ορμής αποκρύπτοντας τις δυο μικρότερες συνεισφορές των όρων των συνεκτικών τάσεων στο και να τις συμπεριλάβουμε στον πηγιαίο όρο της ορμής. Ορίζοντας ένα νέο πηγιαίο όρο στην εξίσωση της ορμής ως:

$$S_M = S_M + s_M \quad (3.3.6)$$

οι εξισώσεις των Navier-Stokes μπορούν να γραφούν σε πιο χρήσιμη μορφή για την ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} u) + S_{M_x} \quad (3.3.7a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} v) + S_{M_y} \quad (3.3.7b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} w) + S_{M_z} \quad (3.3.7c)$$

Θεωρώντας ότι το ρευστό είναι νευτώνικό, η εξίσωση της εσωτερικής ενέργειας  $i$ , μετά από αναδιάταξη, μπορεί να γραφεί:

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p + \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \Phi + S_i \quad (3.3.8)$$

Η επίδραση των συνεκτικών τάσεων στην εξίσωση της εσωτερικής περιγράφονται από τη συνάρτηση σκέδασης  $\Phi$  η οποία ισούται με:

$$\begin{aligned}
\Phi = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\
\left. + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2
\end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Η συνάρτηση της σκέδασης είναι πάντοτε θετική καθώς περιέχει όρους υψωμένους στο τετράγωνο και αναπαριστά τον όρο της εσωτερικής ενέργειας ο οποίος οφείλεται στο έργο της παραμόρφωσης

στο ροϊκό σωματίδιο. Το έργο αυτό εξάγεται από την μηχανική ενέργεια η οποία προκαλεί την κίνηση και στη συνέχεια μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια ή θερμότητα.

**3.4 Συντηρητική μορφή των βασικών εξισώσεων της ροής**

Στον πίνακα που ακολουθεί συνοψίζονται τα ευρήματα της ανάλυσης που έγινε στις προηγούμενες παραγράφους. Οι εξισώσεις που δίδονται είναι σε συντηρητική μορφή και περιγράφουν την τρισδιάστατη χρονικά μεταβαλλόμενη και μη ισόθερμη ροή ενός ρευστού το οποίο θεωρείται ως νευτώνικό:

Μάζα	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$
Ορμή στον άξονα x	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{M_x}$
Ορμή στον άξονα y	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{M_y}$
Ορμή στον άξονα z	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{M_z}$
Εσωτερική ενέργεια	$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \text{div}(\rho i \mathbf{u}) = -p \text{div} \mathbf{u} + \text{div}(k \text{grad } T) + \Phi + S_i$
Καταστατική εξίσωση	$p = p(\rho, T)$ και $i = i(\rho, T)$ για ιδανικά αέρια είναι: $p = \rho R T$ και $i = C_v T$

Εξετάζοντας την ομάδα των εξισώσεων που παρουσιάζονται στον πίνακα παρατηρούμε ότι οι άγνωστες μεταβλητές είναι επτά. Οι διαθέσιμες εξισώσεις είναι επίσης επτά (πέντε διαφορικές εξισώσεις και 2 αλγεβρικές από την υπόθεση της θερμοδυναμικής ισορροπίας) γεγονός που επιτρέπει το κλείσιμο του συστήματος. Είναι δηλαδή η λύση εφικτή εφ’ όσον παρέχονται οι κατάλληλες βοηθητικές συνθήκες (αρχικές και οριακές συνθήκες).

**3.5 Διαφορικές και ολοκληρωτικές μορφές της γενικής εξίσωσης μεταφοράς**

Είναι προφανές από τον πίνακα της προηγούμενης παραγράφου ότι υπάρχουν σημαντικές ομοιότητες μεταξύ των διαφόρων εξισώσεων. Εάν εισάγουμε μια γενική μεταβλητή  $\phi$ , η συντηρητική μορφή όλων των εξισώσεων της ροής ρευστού, συμπεριλαμβανομένων των εξισώσεων βαθμωτών ποσοτήτων όπως η θερμοκρασία ή η συγκέντρωση ρυπαντών κ.τ.λ μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi \mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \tag{3.5.1}$$

ή περιγραφικά

ρυθμός αύξησης του $\phi$ εντός του ροϊκού στοιχείου	+	συνολική εκροή του $\phi$ από το ροϊκό στοιχείο	=	ρυθμός αύξησης του $\phi$ εξαιτίας της διάχυσης	+	ρυθμός αύξησης του $\phi$ εξαιτίας των πηγών
--	---	---	---	---	---	--

Η εξίσωση (3.5.1) είναι η λεγόμενη *εξίσωση μεταφοράς* για μια ιδιότητα του πεδίου  $\phi$ . Δείχνει καθαρά τις διάφορες μεταφορικές διαδικασίες: τον όρο του ρυθμού μεταβολής και τον όρο της συναγωγής στο αριστερό μέρος της εξίσωσης και τον όρο της διάχυσης ( $\Gamma$  = συντελεστής διαχύσεως) και τους πηγαίους όρους στο δεξιό μέρος της εξίσωσης. Με σκοπό να επιδείξουμε τα κοινά χαρακτηριστικά πρέπει να αποκρύψουμε τους όρους οι οποίοι δεν είναι κοινοί στους πηγαίους όρους. Η εξίσωση (3.5.1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την θερμοκρασία αντικαθιστώντας το  $i$  με το  $T$  χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση.

Η εξίσωση (3.5.1) χρησιμοποιείται σαν το σημείο εκκίνησης για τις υπολογιστικές διαδικασίες στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Εξισώνοντας την τιμή του  $\phi$  με τις ποσότητες  $1, u, v, w$  και  $i$  (ή  $T$  ή  $h_0$ ) και επιλέγοντας τις κατάλληλες τιμές για το συντελεστή διαχύσεως  $\Gamma$  και τους πηγαίους όρους λαμβάνουμε τις εξισώσεις του πίνακα της παραγράφου 3.4 για κάθε μια από τις πέντε μερικές διαφορικές εξισώσεις για τη διατήρηση της μάζας, ορμής και ενέργειας. Το βασικό βήμα για τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων είναι η ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.5.1) για ένα τρισδιάστατο όγκο έλεγχου CV η οποία θα δώσει:

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV \quad (3.5.2)$$

Τα χωρικά ολοκληρώματα του δεύτερου όρου στο αριστερό μέρος της εξίσωσης, του όρου της συναγωγής και του πρώτου όρου στο δεξιό μέρος της εξίσωσης, του όρου της διαχύσεως, μπορούν να γραφτούν ως επιφανειακά ολοκληρώματα και υπολογίζονται για ολόκληρη την επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο έλεγχου χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης του Gauss. Για μια διανυσματική ποσότητα  $\mathbf{a}$  το θεώρημα αυτό αναφέρει:

$$\int_{CV} \text{div} \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA \quad (3.5.3)$$

Το εσωτερικό γινόμενο  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$  είναι το μέτρο της συνιστώσας του διανύσματος  $\mathbf{a}$  στη διεύθυνση του διανύσματος  $\mathbf{n}$  το οποίο είναι κάθετο στην στοιχειώδη επιφάνεια  $dA$ . Συνεπώς το ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός διανύσματος  $\mathbf{a}$  σ' ένα όγκο είναι ίσο με την συνιστώσα του  $\mathbf{a}$  σε διεύθυνση η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια που περιβάλλει τον προς ολοκλήρωση όγκο σε όλη την περιβάλλουσα επιφάνεια  $A$ . Με εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης του Gauss η εξίσωση (3.5.2) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} \rho \Phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \Phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \Phi) dA + \int_{CV} S_\Phi dV \quad (3.5.4)$$

Η σειρά της ολοκλήρωσης και διαφορίσης στον πρώτο όρο στο αριστερό μέρος της εξίσωσης έχει εναλλαγεί, έτσι ώστε να επιδειχθεί η φυσική του σημασία. Αυτός ο όρος δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της συνολικής ποσότητας της ιδιότητας του ρευστού  $\phi$  στον όγκο ελέγχου. Το γινόμενο  $\mathbf{n} \cdot (\rho \Phi \mathbf{u})$  εκφράζει την συνιστώσα της ροής της ιδιότητας  $\phi$  εξαιτίας της ροής ρευστού κατά μήκος του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$  (η φορά του  $\mathbf{n}$  είναι πάντα προς τα έξω). Δηλαδή ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (3.5.4), ο όρος της συναγωγής, εκφράζει το συνολικό ρυθμό μείωσης της ποσότητας  $\phi$  στο ροϊκό στοιχείο εξαιτίας της συναγωγής.

Η διαχυτική ροή είναι θετική στη διεύθυνση μίας αρνητικής κλίσης μιας ρευστομηχανικής ποσότητας  $\phi$ , δηλαδή κατά την διεύθυνση  $-\text{grad } \phi$ . Για παράδειγμα, η θερμότητα μεταδίδεται δια της αγωγής κατά την διεύθυνση αρνητικών θερμοκρασιακών κλίσεων. Συνεπώς το γινόμενο  $\mathbf{n} \cdot (-\Gamma \text{grad } \phi)$  είναι η συνιστώσα της διαχυτικής ροής κατά μήκος του διανύσματος που είναι κάθετο στην επιφάνεια (με φορά προς τα έξω) και συνεπώς εκτός του ροϊκού στοιχείου. Παρομοίως, το γινόμενο  $\mathbf{n} \cdot (\text{grad } \phi)$  το οποίο είναι ίσο με την ποσότητα  $\Gamma(-\mathbf{n} \cdot (-\text{grad } \phi))$ , μπορεί να ερμηνευτεί ως μια θετική διαχυτική ροή στην διεύθυνση του διανύσματος το οποίο βρίσκεται κάθετα στην επιφάνεια με φορά προς μέσα,  $-\mathbf{n}$ , δηλαδή εντός του ροϊκού στοιχείου. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης (3.5.4), ο διαχυτικός όρος, συνδέεται με την ροή εντός του στοιχείου και αναπαριστά το συνολικό ρυθμό της αύξησης της ιδιότητας  $\phi$  του ροϊκού στοιχείου εξαιτίας της διάχυσης. Ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης δίδει το ρυθμό αύξησης της ποσότητας  $\phi$  ως αποτέλεσμα των πηγών που βρίσκονται στο εσωτερικό του ροϊκού στοιχείου.

Περιγραφικά η σχέση (3.5.4) για το ρευστό που βρίσκεται στον όγκο ελέγχου μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

ρυθμός αύξησης του $\phi$	+	συνολικός ρυθμός μείωσης του $\phi$ δια της συναγωγής από τα όρια	=	ρυθμός αύξησης του $\phi$ εξαιτίας της διάχυσης από τα όρια	+	συνολικός ρυθμός παραγωγής του $\phi$
------------------------------	---	--	---	--	---	--

Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι η ολοκλήρωση της μερικής διαφορικής εξίσωσης για τη μεταφορά μιας βαθμωτής ποσότητας  $\phi$  οδηγεί σε μια έκφραση για τη διατήρηση της

συγκεκριμένης ιδιότητας ενός ρευστού για ένα όγκο έλεγχου πεπερασμένου μεγέθους (δηλ. με μακροσκοπική θεώρηση).

Για μόνιμα προβλήματα ο όρος του ρυθμού μεταβολής στην εξίσωση (3.5.4) είναι μηδενικός. Αυτό οδηγεί στην ολοκληρωτική μορφή της μόνιμης εξίσωσης μεταφοράς:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \Phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad} \Phi) dA + \int_{CV} S_\Phi dV \quad (3.5.5)$$

Σε χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα είναι επίσης αναγκαία η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο  $t$  για ένα μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$  (π.χ. από  $t$  ως  $t + \Delta t$ ). Αυτό θα δώσει την πιο γενική ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς:

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} (\rho \Phi) dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \Phi \mathbf{n}) dA dt = \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma_\Phi \text{grad} \Phi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{CV} S_\Phi dV dt \quad (3.5.6)$$

### 3.6 Βοηθητικές συνθήκες για τις εξισώσεις της συνεκτικής ροής

Ο πολύπλοκος συνδυασμός ελλειπτικών, παραβολικών και υπερβολικών τύπων συμπεριφοράς ενέχει πολυπλοκότητες για τον τρόπο κατά τον οποίο καθορίζονται οι οριακές συνθήκες σ' ένα ρευστομηχανικό πρόβλημα, ειδικότερα για τις περιοχές που αποτελούν τα όρια του ροϊκού πεδίου. Δυστυχώς δεν υπάρχουν πολλά θεωρητικά αποτελέσματα για το εύρος των επιτρεπόμενων οριακών συνθηκών για συμπιεστές ροές. Η τεχνική CFD χρησιμοποιεί οριακές συνθήκες οι οποίες στηρίζονται αφ' ενός σε φυσικά δεδομένα ενώ αφ' ετέρου οι εξομοιώσεις που τις αξιοποιούν είναι επιτυχείς. Οι οριακές συνθήκες για συμπιεστές συνεκτικές ροές δίνονται στο παρακάτω πίνακα.

---

#### Αρχικές συνθήκες για μη μόνιμες ροές:

Απαιτείται καθορισμός των  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  και  $T$  για όλο το ροϊκό πεδίο την χρονική στιγμή  $t = 0$

---

#### Οριακές συνθήκες για μόνιμες και μεταβατικές ροές :

Σε στερεά τοιχώματα:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w$  (συνθήκη μη ολίσθησης)

$T = T_w$  (σταθερή θερμοκρασία)

$k \partial T / \partial n = -q_w$  (σταθερή ροή θερμότητας)

---

Σε ρευστά όρια Είσοδος:  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  και  $T$  (πρέπει να είναι γνωστή η χωρική κατανομή τους)

Εξοδος:  $-p + \mu \partial u_n / \partial n = F_n$  και

$\mu \partial u_t / \partial t = F_t$  (συνέχεια των τάσεων)

---

Στον πίνακα οι δείκτες  $n$  και  $t$  δείχνουν κατευθύνσεις κάθετες (προς τα έξω) και εφαπτομενικά στην οριακή περιοχή αντίστοιχα. Ως  $F$  συμβολίζεται η δεδομένη επιφανειακή τάση. Δεν είναι αναγκαίο να καθοριστούν οριακές συνθήκες για την πυκνότητα εξαιτίας του ειδικού χαρακτήρα της εξίσωσης της συνέχειας η οποία περιγράφει τις μεταβολές της πυκνότητας σ' ένα ροϊκό σωματίδιο κατά μήκος της διαδρομής του για ένα δεδομένο πεδίο ταχυτήτων. Η πυκνότητα πρέπει να καθορίζεται μόνο στην είσοδο του πεδίου. Οπουδήποτε αλλού η τιμή της πυκνότητας προκύπτει ως μέρος της λύσης με αποτέλεσμα να μην χρειάζεται καθορισμός σε άλλες συνοριακές περιοχές. Για μια ασυμπίεστη συνεκτική ροή δεν υπάρχουν συνθήκες για την πυκνότητα αλλά όλες οι ανωτέρω συνθήκες εφαρμόζονται δίχως μεταβολή.

Οριακές συνθήκες εξόδου χρησιμοποιούνται σε περιοχές όπου η ροή είναι σχεδόν ομοιόμορφη και οι επιφανειακές τάσεις λαμβάνουν γνωστές τιμές. Για ροές μεγάλων αριθμών Reynolds μακριά από στερεά αντικείμενα σε μια εξωτερική ροή ή σε μια πλήρως αναπτυγμένη ροή εξόδου από ένα αγωγό δεν υπάρχει μεταβολή σε καμία από συνιστώσες της ταχύτητας κατά μήκος του ορίου με αποτέλεσμα να ισχύει  $F_n = -p$  και  $F_t = 0$ . Οι ανωτέρω συνθήκες περιγράφουν την οριακή συνθήκη εξόδου η οποία χρησιμοποιείται εκτεταμένα στην μέθοδο των πεπερασμένων όγκων :

$$\text{καθορισμένη πίεση, } \partial u_n / \partial n \text{ και } \partial T / \partial n = 0$$

Παρότι πολλές φορές δεν ισχύει ότι η συνθήκη  $\partial u_n / \partial n$  η εφαρμογή αυτής της μεθόδου έχει αποδειχθεί αρκετά επιτυχημένη καθότι είναι η απλούστερη και η λιγότερο «δαπανηρή» όταν συγκρίνεται με πιο τεκμηριωμένες θεωρητικά λύσεις.

Επιπρόσθετες οριακές συνθήκες, όπως συμμετρία και κυκλική συμπεριφορά χρησιμοποιούνται ώστε να αξιοποιηθούν ειδικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πεδίου επίλυσης :

$$\text{Οριακές συνθήκες συμμετρίας : } \partial \phi / \partial n = 0$$

$$\text{Κυκλικές οριακές συνθήκες : } \phi_1 = \phi_2$$

### 3.7 Η τύρβη και η μοντελοποίησή της

Όλες οι ροές που παρουσιάζονται σε μηχανολογικό περιβάλλον, απλές όπως δισδιάστατες δίνες, απορεύματα, ροές σε σωλήνες, οριακά στρώματα σε επίπεδες πλάκες αλλά και πιο σύνθετες όπως τρισδιάστατες, γίνονται ασταθείς όταν υπερβαίνουν ένα συγκεκριμένο αριθμό Reynolds ( $Re = UL/\nu$  όπου  $U$  και  $L$  είναι οι κλίμακες του μήκους και της ταχύτητας της μέσης ροής και  $\nu$  είναι το κινηματικό ιξώδες). Σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds η ροή είναι στρωτή. Σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds παρατηρείται ότι οι ροές γίνονται τυρβώδεις. Τότε αναπτύσσεται



μια χαοτική και τυχαία κατάσταση της κίνησης στην οποία η ταχύτητα και η πίεση μεταβάλλονται συνεχώς συναρτήσει του χρόνου σε σημαντικά τμήματα της ροής.

Οι στρωτές ροές περιγράφονται πλήρως από τις εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για απλές ροές οι εξισώσεις της συνέχειας και οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Πιο πολύπλοκες ροές μπορούν να χειριστούν αριθμητικά με τεχνικές CFD, όπως η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων, δίχως περαιτέρω προσεγγίσεις.

Πολλές αν όχι οι περισσότερες ροές πρακτικού ενδιαφέροντος είναι τυρβώδεις, με αποτέλεσμα η τυρβώδης κατάσταση να μην αποτελεί αντικείμενο μόνο θεωρητικής ενασχόλησης. Οι ρευστομηχανικοί πρέπει να έχουν πρόσβαση σε «εργαλεία» ικανά να υπολογίσουν και να εκτιμήσουν τις επιδράσεις της τύρβης. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα δοθεί μια σύντομη εισαγωγή στην φυσική της τύρβης και την μοντελοποίηση της με τη τεχνική CFD.

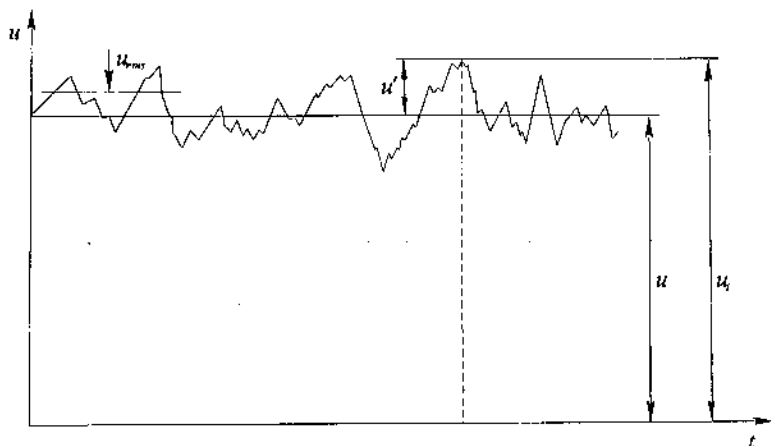
### 3.7.1 Η φύση της τύρβης

Στην συνέχεια θα γίνει μια σύντομη επισκόπηση των βασικών χαρακτηριστικών των τυρβωδών ροών. Ο αριθμός Reynolds μιας ροής δίνει το μέτρο της σχετικής επίδρασης των δυνάμεων αδράνειας (οι οποίες συνδέονται με φαινόμενα μεταφοράς) και των συνεκτικών δυνάμεων (συνδέονται με φαινόμενα διάχυσης). Πειράματα σε ρευστομηχανικά συστήματα υποδεικνύουν ότι για τιμές μικρότερες μιας συγκεκριμένης τιμής του αριθμού Reynolds, τη λεγόμενη κρίσιμη τιμή  $Re_{crit}$ , η ροή είναι ομαλή ενώ παράλληλα και γειτονικά στρώματα του ρευστού ρέουν σε «τάξη». Εάν οι εφαρμοζόμενες οριακές συνθήκες δεν μεταβληθούν με το χρόνο η ροή είναι μόνιμη. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται στρωτή ροή.

Τιμές του αριθμού Reynolds μεγαλύτερες της τιμής  $Re_{crit}$  οδηγούν σε μια πολύπλοκη σειρά γεγονότων η οποία οδηγεί σε έντονη μεταβολή του χαρακτήρα της ροής. Στην τελική κατάσταση, η συμπεριφορά της ροής είναι τυχαία και χαοτική. Η κίνηση γίνεται ασταθής ακόμα και όταν εφαρμόζονται μόνιμες οριακές συνθήκες. Η ταχύτητα και οι άλλες ιδιότητες της ροής γίνονται ομοίως τυχαίες και χαοτικές. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται τυρβώδη ροή. Μια τυπική σημειακή μέτρηση της ταχύτητας μπορεί να έχει τη μορφή που δείχνεται στο σχήμα 3.5.

Η τυχαία φύση της τυρβώδους ροής αποκλείει υπολογισμούς οι οποίοι θα βασίζονται σε μια πλήρη περιγραφή της κίνησης όλων των ροϊκών σωματιδίων. Αντιθέτως η ταχύτητα που παριστάνεται στο σχήμα μπορεί να αναλυθεί σε μια μόνιμη μέση τιμή  $U$  με μια κυμαινόμενη συνιστώσα  $u'(t)$  η

οποία υπερτίθεται σ' αυτή:  $u(t) = U + u'(t)$ . Γενικά είναι περισσότερο πρακτικός ο χαρακτηρισμός μια τυρβώδους ροής δια μέσου των μέσων τιμών των ιδιοτήτων της ροής ( $U, V, W, P$  κ.τ.λ.) και των στατιστικών ιδιοτήτων των διακυμάνσεων ( $u', v', w', p'$  κ.τ.λ.).



**Σχήμα 3.5:** Τυπική μεταβολή της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου σε ένα σημείο του πεδίου

Ακόμα και στις ροές όπου οι μέσες ταχύτητες και πιέσεις μεταβάλλονται σε μια ή δυο διαστάσεις του χώρου οι τυρβώδεις διακυμάνσεις έχουν πάντοτε ένα τρισδιάστατο χαρακτήρα. Επιπρόσθετα οπτικοποιήσεις τυρβωδών ροών αποκαλύπτουν περιστροφικές ροϊκές δομές, τις λεγόμενες τυρβώδεις δίνες, σε ένα μεγάλο εύρος χωροκλιμάκων. Σωματίδια του ρευστού τα οποία αρχικά βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μπορούν να βρεθούν σε μικρή απόσταση εξαιτίας του στροβιλισμού της ροής και ως αποτέλεσμα αυτής της διεργασίας παρατηρείται αυξημένη συναλλαγή θερμότητας μάζας και ορμής. Για παράδειγμα η χρωστική που εισάγεται σ' ένα σημείο σε μια τυρβώδη ροή σύντομα θα «διασπαστεί» και θα διασκορπιστεί κατάντη της ροής. Αυτή η δραστική ανάμιξη οδηγεί σε αύξηση των τιμών των συντελεστών διαχύσεως για τη μάζα, ορμή και θερμότητα.

Οι μεγαλύτερες τυρβώδεις δίνες αλληλεπιδρούν και εξάγουν ενέργεια από τη μέση ροή μέσω μιας διαδικασίας η οποία καλείται τανυσμός των στροβίλων. Η παρουσία κλίσεων της μέσης ταχύτητας σε διατμητικές ροές παραμορφώνει τις περιστρεφόμενες τυρβώδεις δίνες. Ομοίως ευθυγραμμισμένες δίνες τανύζονται διότι το ένα άκρο αναγκάζεται να μετακινείται γοργότερα από το άλλο.

Η χαρακτηριστική ταχύτητα  $v$  και το χαρακτηριστικό μήκος  $\ell$  των μεγαλύτερων δινών είναι της ίδιας τάξεως με τη κλίμακα της ταχύτητας  $U$  και του μήκους  $L$  της μέσης ροής. Ένας αριθμός Reynolds των μεγάλων δινών ( $= v\ell/\nu$ ) ο οποίος σχηματίζεται συνδυάζοντας τις κλίμακες των

μεγάλων δινών με το κινηματικό ιξώδες θα είναι πάντοτε μεγάλος σε όλες τις τυρβώδες ροές, συνεπώς οι μεγάλοι στρόβιλοι χαρακτηρίζονται από αδρανειακά φαινόμενα ενώ τα συνεκτικά φαινόμενα είναι αμελητέα.

Οι μεγάλες δίνες είναι συνεπώς άτριβες και η γωνιακή ορμή διατηρείται μέσω διαδικασίας του τανυσμού των στροβίλων. Αυτό προκαλεί την αύξηση του ρυθμού περιστροφής και τη μείωση της ακτίνας περιστροφής. Συνεπώς αυτή η διαδικασία παράγει κίνηση σε μικρότερη εγκάρσια κλίμακα μήκους και επίσης σε μικρότερες χρονοκλίμακες. Το έργο του τανυσμού που προκαλείται από τη μέση ροή και μεταφέρεται σε μεγάλες δίνες δίδει την ενέργεια η οποία διατηρεί την τύρβη.

Οι μικρότερες δίνες τανύζονται έντονα από τις μεγαλύτερες και ασθενέστερα από τη μέση ροή. Με αυτό τον τρόπο η κινητική ενέργεια μεταδίδεται από τις μεγάλες δίνες σταδιακά σε μικρότερες, μικρότερες δίνες με μια διαδικασία η οποία ονομάζεται «ενεργειακή βαθμίδα» (energy cascade). Όλες οι κυμαινόμενες ποσότητες μιας τυρβώδης ροής περιέχουν σε ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων ( $= 2\pi f / U$  όπου  $f =$  συχνότητα).

Η μικρότερη κλίμακα κίνησης η οποία μπορεί να λάβει χώρα σε μια τυρβώδη ροή καθορίζεται από το ιξώδες. Ο αριθμός Reynolds των μικρότερων στροβίλων βασιζόμενος στην χαρακτηριστική ταχύτητα  $v$  και το χαρακτηριστικό μήκος  $\eta$  ( $= v\eta / \nu$ ) είναι ίσος με μονάδα. Σ' αυτές τις κλίμακες (για μήκη της τάξης των 0.1 ή 0.01mm και συχνότητες περίπου ίσες με 10kHz σε τυπικές τυρβώδεις ροές) τα φαινόμενα συνοχής γίνονται σημαντικά. Το έργο παράγεται ενάντια στην δράση των συνεκτικών τάσεων, με αποτέλεσμα η ενέργεια που συνδέεται με τις κινήσεις στροβιλισμού διαχέεται και μετατρέπεται σε εσωτερική θερμική ενέργεια. Η διάχυση αυτή οδηγεί σε αυξημένες ενεργειακές απώλειες οι οποίες συνδέονται με τυρβώδεις ροές.

Η δομή των μεγαλύτερων ροών είναι έντονα ανισοτροπική και εξαρτώμενη από τη ροή εξαιτίας της ισχυρής αλληλεπίδρασης με τη μέση ροή. Η διαχυτική δράση του ιξώδους οδηγεί σε ισοτροπική συμπεριφορά στις μικρότερες κλίμακες. Δηλαδή σε μεγάλους αριθμούς Reynolds της μέσης ροής, οι μικρότερες δίνες είναι ισοτροπικές (μη ευθυγράμμισμένες).

### 3.7.2 Η επίδραση της τύρβης στις εξισώσεις Navier-Stokes στη μέση χρονικά μορφή τους

Η βασική διαφορά που παρατηρείται σε οπτικοποιήσεις στρωτής και τυρβώδης ροής είναι η εμφάνιση κινήσεων στροβιλισμών σ' ένα μεγάλο εύρος χωροκλιμάκων στις τυρβώδεις ροές. Ένα τυπικό πεδίο ροής διαστάσεων της τάξης του 0.1 επί 0.1m με ένα υψηλό αριθμό Re περιέχει στρόβιλους με μέγεθος από 10 έως 100μm. Για την πλήρη περιγραφή των φαινομένων που

λαμβάνουν χώρα σ' όλες τις χωρικές κλίμακες απαιτούνται υπολογιστικά πλέγματα που αποτελούνται από  $10^9$  έως  $10^{12}$  σημεία. Τα ταχύτερα γεγονότα μεταβάλλονται με μια συχνότητα της τάξης των  $10\text{kHz}$  οπότε η χρονική διακριτοποίηση απαιτεί βήματα της τάξης των  $100\mu\text{sec}$ . Ο Spreziale αναφέρει ότι η απευθείας εξομοίωση της τυρβώδους ροής σε σωλήνα σ' ένα αριθμό  $Re$  της τάξης των 500,000 απαιτεί υπολογιστή 100 εκατομμύρια φορές πιο γρήγορο από το σημερινό υπέρ-υπολογιστή CRAY.

Με την υπολογιστική ισχύ που είναι διαθέσιμη σήμερα, έγινε μόλις τώρα εφικτή η παρακολούθηση της δυναμικής των στροβιλισμών σε πολύ απλές ροές σε μεταβατικούς αριθμούς  $Re$ . Οι υπολογιστικές απαιτήσεις για την απευθείας επίλυση των χρονικά εξαρτώμενων εξισώσεων Navier-Stokes σε πλήρως τυρβώδεις ροές με υψηλούς αριθμούς  $Re$  είναι τεράστιες και απαιτείται πολύ σημαντική εξέλιξη στην τεχνολογία των υπολογιστών.

Παρόλα αυτά οι μηχανικοί σήμερα απαιτούν υπολογιστικές διαδικασίες οι οποίες μπορούν να παρέχουν αρκετές πληροφορίες για τις τυρβώδεις διεργασίες οι οποίες όμως δεν θα χρειάζεται να προβλέψουν την επίδραση του κάθε στροβίλου στη ροή. Η κατηγορία αυτή των χρηστών CFD ικανοποιείται με πληροφορίες για χρονικά μέσες ιδιότητες της ροής (π.χ. μέση ταχύτητα, μέση πίεση, μέσες τάσεις κ.τ.λ.). Στα κατωτέρω θα εξετάσουμε την επίδραση της εμφάνισης τυρβωδών διακυμάνσεων στις ιδιότητες της μέσης ροής.

### Οι εξισώσεις Reynolds

Αρχικά ορίζουμε τη μέση τιμή  $\Phi$  της ιδιότητας της ροής  $\varphi$  ως ακολούθως:

$$\Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi(t) dt \quad (3.7.2.1)$$

Θεωρητικά, το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  πρέπει να προσεγγίζει το άπειρο, αλλά εάν το  $\Delta t$  είναι αρκετά μεγάλο εφ' όσον υπερβαίνει τις χρονοκλίμακες των πιο αργών μεταβολών (εξαιτίας της δράσης των μεγάλων δινών) της ποσότητας  $\varphi$ . Αυτός ο ορισμός της μέσης τιμής μιας ιδιότητας της ροής είναι επαρκής για μόνιμες ροές. Σε χρονικά μεταβαλλόμενες ροές η μέση τιμή μιας ιδιότητας τη χρονική στιγμή  $t$  λαμβάνεται ως η μέση τιμή των στιγμιαίων τιμών της ιδιότητας για ένα μεγάλο αριθμό επαναλαμβανόμενων πειραμάτων: είναι η λεγόμενη «σύνθετη μέση τιμή».

Η ιδιότητα της ροής  $\varphi$  είναι χρονικά εξαρτώμενη και μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα μιας σταθερής μόνιμης συνιστώσας  $\Phi$  και μιας χρονικά εξαρτώμενης κυμαινόμενης συνιστώσας  $\varphi'$  με μηδενική μέση τιμή. Συνεπώς  $\varphi(t) = \Phi + \varphi'(t)$ . Στη συνέχεια δεν θα δηλώνεται ρητά η χρονική

εξάρτηση των  $\varphi$  και  $\varphi'$ , και η προηγούμενη έκφραση θα γράφεται  $\varphi = \Phi + \varphi'$ . Η χρονικά μέση τιμή των διακυμάνσεων  $\varphi'$  είναι εξ'ορισμού μηδέν:

$$\overline{\varphi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t) dt = 0 \quad (3.7.2.2)$$

Πληροφορίες σχετικά με το κυμαινόμενο μέρος της ροής μπορεί να ληφθεί με την τετραγωνική ρίζα των τετραγώνων των διακυμάνσεων (root-mean-square = rms):

$$\varphi_{rms} = \sqrt{(\overline{\varphi'^2})} = \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\varphi')^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.7.2.3)$$

Οι rms-τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας έχουν ιδιαίτερη σημασία καθώς μπορούν εύκολα να μετρηθούν με μετρητές ταχύτητας, ευαίσθητους στις τυρβώδεις διακυμάνσεις (π.χ. με ανεμομετρία θερμού νήματος). Η κινητική ενέργεια  $k$  (ανά μονάδα μάζας) που συνδέεται με την τύρβη ορίζεται ως:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (3.7.2.4)$$

Η ένταση της τύρβης  $T_i$  η οποία συνδέεται με την κινητική ενέργεια και μια μέση ταχύτητα ροής αναφοράς  $U_{ref}$  είναι:

$$T_i = \frac{\left( \frac{2}{3} k \right)^{1/2}}{U_{ref}} \quad (3.7.2.5)$$

Προτού αποδειχθούν οι εξισώσεις της μέσης ροής για μια τυρβώδη ροή θα γίνει μια σύντομη επισκόπηση των κανόνων που καθορίζουν τις χρονικά μέσες τιμές των κυμαινόμενων ποσοτήτων  $\varphi = \Phi + \varphi'$  και  $\psi = \Psi + \psi'$  και των συνδυασμών τους, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων τους:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi'} = \overline{\psi'} = 0, \quad \overline{\Phi} = \Phi, \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad \overline{\int \varphi ds} = \int \Phi ds, \quad \overline{\varphi + \psi} = \Phi + \Psi \\ \overline{\varphi\psi} = \Phi\Psi + \overline{\varphi'\psi'}, \quad \overline{\varphi\Psi} = \Phi\Psi, \quad \overline{\varphi'\Psi} = 0 \end{aligned} \quad (3.7.2.6)$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν εύκολα να επιβεβαιωθούν με εφαρμογή των σχέσεων (3.7.2.1) και (3.7.2.2). Σημειώνεται ότι η διαδικασία λήψης της μέσης τιμής είναι από μόνη της μια ολοκλήρωση και συνεπώς η σειρά της διαδικασίας της λήψης της μέσης τιμής και μιας επιπλέον ολοκλήρωσης ή διαφορίσης μπορούν να εναλλαχθούν.

Καθώς οι τελεστές *div* και *grad* αναφέρονται σε διαφορίση οι ανωτέρω κανόνες μπορούν να επεκταθούν για μια κυμαινόμενη διανυσματική ποσότητα  $\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}'$  και τους συνδυασμούς της με μια κυμαινόμενη βαθμωτή ποσότητα  $\varphi = \Phi + \varphi'$ :

$$\overline{div \mathbf{a}} = div \mathbf{A}, \quad \overline{div(\varphi \mathbf{a})} = div(\overline{\varphi \mathbf{a}}) = div(\Phi \mathbf{A}) + div(\overline{\varphi' \mathbf{a}'}),$$

$$\overline{div grad \varphi} = div grad \Phi \quad (3.7.2.7)$$

Για την κατανόηση της επίδρασης των τυρβωδών διακυμάνσεων στη μέση ροή θεωρούμε τις εξισώσεις της συνέχειας και Navier-Stokes στην στιγμιαία μορφή τους για ένα ασυμπιεστο ρευστό με σταθερό ιξώδες. Η διαδικασία αυτή απλοποιεί τις αλγεβρικές πράξεις που απαιτούνται δίχως να αφαιρεί το νόημα. Ως συνήθως θα χρησιμοποιηθούν καρτεσιανές συντεταγμένες έτσι ώστε το διάνυσμα της ταχύτητας  $\mathbf{u}$  να έχει συνιστώσες τις  $u, v$  και  $w$ . Οι εξισώσεις όπως προκύπτουν από τα ανωτέρω είναι:

$$div \mathbf{u} = 0 \quad (3.7.2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(u\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu div grad u \quad (3.7.2.9a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + div(v\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu div grad v \quad (3.7.2.9b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div(w\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu div grad w \quad (3.7.2.9c)$$

Για τη διερεύνηση της επίδρασης των διακυμάνσεων αντικαθιστούμε στις εξισώσεις (3.7.2.8) και (3.7.2.9a-c) τις συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{u}$  (δηλαδή τις  $u, v$  και  $w$ ) και την πίεση  $p$  με το άθροισμα της μέσης και της κυμαινόμενης συνιστώσας. Δηλαδή:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}': \quad u = U + u', \quad v = V + v' \quad \text{και} \quad w = W + w', \quad p = P + p'$$

Στη συνέχεια η χρονικά μέση τιμή λαμβάνεται εφαρμόζοντας τους κανόνες που αναφέρονται στις εξισώσεις (3.7.2.7). Όσον αφορά την εξίσωση της συνέχειας (3.7.2.8) παρατηρούμε ότι  $\overline{div \mathbf{u}} = div \mathbf{U}$ . Αυτό θα δώσει την εξίσωση της συνέχειας για τη μέση ροή:

$$div \mathbf{U} = 0 \quad (3.7.2.10)$$

Παρόμοια διαδικασία θα ακολουθηθεί για την εξίσωση της ορμής στον άξονα  $x$ . Οι χρονικά μέσες τιμές των επιμέρους όρων σ' αυτή την εξίσωση μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \overline{div(u\mathbf{u})} = div(U\mathbf{U}) + div(\overline{u'u'}),$$

$$\overline{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \overline{\nu div grad u} = \nu div grad U$$

Αντικατάσταση αυτών των αποτελεσμάτων δίνει την χρονικά μέση τιμή της εξίσωσης της ορμής στον  $x$ -άξονα.

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}_I + \underbrace{div(U\mathbf{U})}_{II} + \underbrace{div(\overline{u'u'})}_{III} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}}_{IV} + \underbrace{\nu div grad U}_V \quad (3.7.2.11a)$$

Επανάληψη αυτής της διαδικασίας για τις εξισώσεις (3.7.2.9b) και (3.7.2.9c) θα δώσει τις χρονικά μέσες μορφές των εξισώσεων της ορμής στους άξονες  $y$  και  $z$ :

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_I + \underbrace{div(VU)}_{II} + \underbrace{div(\overline{v'u'})}_{III} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}}_{IV} + \underbrace{\nu \frac{div \text{grad } V}{V}}_V \quad (3.7.2.11b)$$

$$\underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_I + \underbrace{div(WU)}_{II} + \underbrace{div(\overline{w'u'})}_{III} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}}_{IV} + \underbrace{\nu \frac{div \text{grad } W}{V}}_V \quad (3.7.2.11c)$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι όροι (I), (II), (IV) και (V) στις εξισώσεις (3.7.2.11a-c) εμφανίζονται επίσης στις αντίστοιχες εξισώσεις στη στιγμιαία τους μορφή (3.7.2.9a-c), αλλά η διαδικασία της λήψης της χρονικά μέσης τιμής έχει εισάγει νέους όρους (III) στις εξισώσεις που προκύπτουν. Οι όροι αυτοί περιλαμβάνουν γινόμενα κυμαινόμενων ταχυτήτων και περιγράφουν την συναλλαγή ορμής μέσω συναγωγής εξαιτίας των διακυμάνσεων της ταχύτητας. Συνηθίζεται η τοποθέτηση αυτών των όρων να γίνεται στο δεξιό μέρος των εξισώσεων (3.3.11a-c) έτσι ώστε να δειχθεί ο ρόλος τους ως επιπλέον τυρβώδεις τάσεις που επιδρούν σε συνιστώσες της μέσης ταχύτητας  $U$ ,  $V$  και  $W$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + div(UU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{div \text{grad } U} + \left[ -\frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial z} \right] \quad (3.7.2.12a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + div(VU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{div \text{grad } V} + \left[ -\frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial z} \right] \quad (3.7.2.12b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div(WU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \frac{div \text{grad } W} + \left[ -\frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial z} \right] \quad (3.7.2.12c)$$

Οι επιπλέον αυτοί όροι των τάσεων έχουν γραφεί σε αναλυτική μορφή έτσι ώστε να γίνει αντιληπτή η δομή τους. Προκύπτουν έξι επιπρόσθετες τάσεις, τρεις κάθετες τάσεις και τρεις διατμητικές:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\overline{\rho u'^2}, \quad \tau_{yy} = -\overline{\rho v'^2}, \quad \tau_{zz} = -\overline{\rho w'^2} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\overline{\rho u'v'}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\overline{\rho u'w'}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\overline{\rho v'w'} \end{aligned} \quad (3.7.2.13)$$

Οι επιπλέον αυτές τάσεις ονομάζονται τάσεις Reynolds. Σε τυρβώδεις ροές οι κάθετες τάσεις  $-\overline{\rho u'^2}$ ,  $-\overline{\rho v'^2}$  και  $-\overline{\rho w'^2}$  είναι πάντοτε μη μηδενικές καθώς περιέχουν τις διακυμάνσεις της ταχύτητας υψωμένες στο τετράγωνο. Οι διατμητικές τάσεις  $-\overline{\rho u'v'}$ ,  $-\overline{\rho u'w'}$  και  $-\overline{\rho v'w'}$  είναι συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών συνιστωσών της ταχύτητας. Εάν, για παράδειγμα, οι  $u'$  και  $v'$  ήταν στατιστικώς ανεξάρτητες διακυμάνσεις, η χρονικά μέση τιμή των γινομένων τους  $\overline{u'v'}$  θα ήταν μηδέν. Παρ' όλα αυτά οι τυρβώδεις διατμητικές τάσεις είναι επίσης μη μηδενικές και είναι επίσης μεγαλύτερες συγκρινόμενες με τις συνεκτικές τάσεις σε μια τυρβώδη ροή. Το σύνολο των εξισώσεων (3.7.2.12a-c) καλούνται **εξισώσεις Reynolds**.

Παρόμοιοι επιπλέον όροι τυρβώδους μεταφοράς προκύπτουν όταν παράγεται η εξίσωση μεταφοράς για μια τυχαία βαθμωτή ποσότητα. Η χρονικά μέση μορφή της εξίσωσης μεταφοράς για μια βαθμωτή ποσότητα  $\varphi$  είναι:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi \mathbf{U}) = \text{div}(\Gamma_{\Phi}^* \text{grad} \Phi) + \left[ -\frac{\partial \overline{u'\varphi'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'\varphi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'\varphi'}}{\partial z} \right] + S_{\Phi} \quad (3.7.2.14)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε υποθέσει ότι η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή, αλλά στις πραγματικές ροές η μέση πυκνότητα μπορεί να μεταβάλλεται και η στιγμιαία τιμή της πυκνότητας επιδεικνύει πάντοτε τυρβώδεις διακυμάνσεις. Ο Bradshaw αναφέρει ότι οι μικρές διακυμάνσεις της πυκνότητας δεν επηρεάζουν την ροή σημαντικά. Εάν οι rms διακυμάνσεις της ταχύτητας είναι 5% της μέσης ταχύτητας της ροής αποδεικνύεται ότι οι διακυμάνσεις της πυκνότητας είναι ασήμαντες σε ροές με αριθμό Mach από 3 έως 5. Σε ελεύθερες τυρβώδεις ροές, οι διακυμάνσεις της ταχύτητας μπορούν να προσεγγίσουν το 20% της μέσης ταχύτητας. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι διακυμάνσεις της πυκνότητας αρχίζουν να επηρεάζουν την τύρβη σε αριθμούς Mach πλησίον της μονάδας. Στη συνέχεια δίδονται οι εξισώσεις της μέσης ροής, βεβαρημένες με την πυκνότητα (μέση τιμή κατά Favre) για συμπιεστές τυρβώδεις ροές όπου οι επιδράσεις των διακυμάνσεων της πυκνότητας είναι πολύ μικρές αλλά οι μεταβολές της μέσης πυκνότητας είναι σημαντικές. Αυτή η μορφή χρησιμοποιείται εκτεταμένα σε εμπορικούς κώδικες CFD.

*Εξίσωση της συνέχειας*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (3.7.2.15)$$

*Εξισώσεις Reynolds*

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad} U) + \left[ \frac{\partial(\overline{\rho u'^2})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\rho u'w'})}{\partial z} \right] + S_{Mx} \quad (3.7.2.16a)$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \text{div}(\rho V \mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad} V) + \left[ \frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho v'^2})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\rho v'w'})}{\partial z} \right] + S_{My} \quad (3.7.2.16b)$$

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \text{div}(\rho W \mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad} W) + \left[ \frac{\partial(\overline{\rho u'w'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho v'w'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\rho w'^2})}{\partial z} \right] + S_{Mz} \quad (3.7.2.16c)$$

*Εξίσωση μεταφοράς βαθμωτού*

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \Phi \mathbf{U}) = \text{div}(\Gamma_{\Phi}^* \text{grad} \Phi) + \left[ -\frac{\partial(\overline{\rho u'\varphi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho v'\varphi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\rho w'\varphi'})}{\partial z} \right] + S_{\Phi} \quad (3.7.2.17)$$



### Το πρόβλημα του κλεισίματος του συστήματος - η ανάγκη για την τυρβώδη μοντελοποίηση

Οι εξισώσεις της συνέχειας και Navier-Stokes στην στιγμιαία τους μορφή σχηματίζουν ένα κλειστό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους:  $u$ ,  $v$ ,  $w$  και  $p$ . Στην εισαγωγή αυτού του τμήματος δείχθηκε ότι αυτές οι εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν απ' ευθείας στο άμεσο μέλλον.

Οι μηχανικοί αρκούνται στη γνώση συγκεκριμένων μέσων ποσοτήτων για γενικά βιομηχανικά προβλήματα. Παρ' όλα αυτά, η διαδικασία της λήψης της χρονικά μέσης μορφής των εξισώσεων της ορμής θα αποκλείσει όλες τις λεπτομέρειες που αφορούν την κατάσταση της ροής και οφείλονται στις στιγμιαίες διακυμάνσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την λήψη έξι επιπλέον αγνώστων, τις τάσεις Reynolds, στις εξισώσεις της ορμής στην χρονικά μέση μορφή τους. Ομοίως οι εξισώσεις μεταφοράς βαθμωτού στη χρονικά μέση μορφή τους έχουν επιπλέον όρους που περιέχουν τις ποσότητες  $\overline{u' \varphi'}$ ,  $\overline{v' \varphi'}$  και  $\overline{w' \varphi'}$ . Η πολυπλοκότητα της τύρβης αποκλείει τη χρήση απλών εξισώσεων για τις επιπλέον τάσεις και τους όρους τυρβώδους μεταφοράς βαθμωτού. Ο βασικός στόχος της τυρβώδους μοντελοποίησης είναι η ανάπτυξη υπολογιστικών διεργασιών επαρκούς ακρίβειας και γενικότητας οι οποίες θα επιτρέψουν σε μηχανικούς να προβλέπουν τις τάσεις Reynolds και τους όρους μεταφοράς των βαθμωτών ποσοτήτων της ροής.

### 3.7.3. Τυρβώδη μοντέλα

Ένα τυρβώδες μοντέλο είναι μια υπολογιστική διαδικασία που χρησιμοποιείται για το κλείσιμο του συστήματος των εξισώσεων της μέσης ροής κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ενός σχετικά μεγάλου αριθμού προβλημάτων. Για τα περισσότερα προβλήματα των μηχανικών η ανάλυση των τυρβωδών διακυμάνσεων δεν είναι αναγκαία. Μόνο η επίδραση της τύρβης στη μέση ροή είναι αναγκαία. Συγκεκριμένα είναι αναγκαίες σχέσεις για τις τάσεις Reynolds και τους τυρβώδεις βαθμωτούς μεταφερόμενους όρους. Ένα τυρβώδες μοντέλο για να είναι χρήσιμο σε υπολογισμούς CFD πρέπει να είναι εφαρμόσιμο, ακριβές, απλό και «οικονομικό» σε υπολογιστικούς πόρους κατά τη χρήση του. Τα πιο κοινά τυρβώδη μοντέλα κατηγοριοποιούνται στον πίνακα που ακολουθεί:

Κλασσικά μοντέλα	Βασισμένα στις εξισώσεις Reynolds (στη χρονικά μέση μορφή τους) <ol style="list-style-type: none"><li>1. Μοντέλα μηδενικής εξίσωσης (μοντέλα μήκους μίξης)</li><li>2. Μοντέλα δύο εξισώσεων (μοντέλα k-ε)</li><li>3. Μοντέλα εξισώσεων τάσεων Reynolds</li><li>4. Μοντέλα αλγεβρικών τάσεων</li></ol>
Εξομοίωση των μεγάλων δινών (LES)	Βασισμένα σε εξισώσεις που χρησιμοποιούν χωρικά φίλτρα

Τα κλασσικά μοντέλα χρησιμοποιούν τις εξισώσεις Reynolds και αποτελούν τη βάση των υπολογισμών της τύρβης στους περισσότερους εμπορικούς κώδικες CFD. Οι εξομοιώσεις των μεγάλων δινών είναι τυρβώδη μοντέλα στα οποία οι χρονικά εξαρτώμενες εξισώσεις της ροής λύνονται για τη μέση ροή και τις μεγάλες δίνες και οι επιδράσεις των μικρότερων στροβίλων μοντελοποιούνται. Καθώς οι μεγάλοι στρόβιλοι αλληλεπιδρούν έντονα με τη μέση ροή και περιέχουν το μεγαλύτερο μέρος ενέργειας, η προσέγγιση αυτή αποτελεί μια καλή λύση για τις βασικές επιδράσεις της τύρβης. Οι εξομοιώσεις των μεγάλων δινών είναι προς το παρόν σε ερευνητικό στάδιο και οι υπολογισμοί είναι εξαιρετικά δαπανηροί ώστε να χρησιμοποιηθούν για γενικούς υπολογισμούς.

Από τα κλασσικά μοντέλα αυτό του μήκους μίξης και το  $k-\varepsilon$  είναι μακράν τα πιο χρησιμοποιούμενα και πιστοποιημένα. Βασίζονται στη προϋπόθεση ότι υπάρχει αναλογία μεταξύ της δράσης των συνεκτικών τάσεων και των τάσεων Reynolds στη μέση ροή. Και οι δύο τάσεις τοποθετούνται στο δεξιό μέρος της εξίσωσης της ορμής και στο νόμο του ιξώδους του Newton οι συνεκτικές τάσεις λαμβάνονται να είναι ανάλογες με το ρυθμό παραμόρφωσης των ροϊκών στοιχείων. Για ένα ασυμπίεστο ρευστό αυτό δίδει:

$$\tau_{ij} = \mu e_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7.3.1)$$

Έχει παρατηρηθεί πειραματικά σε ισόθερμες ροές ότι η τύρβη σκεδάζεται εφόσον δεν υπάρχει παρουσία διάτμησης. Επιπλέον οι τυρβώδεις τάσεις βρέθηκαν να αυξάνονται συναρτήσει του μέσου ρυθμού παραμόρφωσης. Το 1877 ο Boussinesq πρότεινε να συνδεθούν οι τάσεις Reynolds με τους μέσους ρυθμούς παραμόρφωσης:

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7.3.2)$$

Το δεξιό μέρος της εξίσωσης είναι ανάλογο με αυτό της εξίσωσης για τις συνεκτικές τάσεις. Στη θέση της μοριακής συνεκτικότητας  $\mu$ , τοποθετείται η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\mu_t$ . Η κινηματική τυρβώδης συνεκτικότητα ορίζεται ως  $\nu_t = \mu_t / \rho$ .

Η μοντελοποίηση της τυρβώδους μεταφοράς της θερμότητας, μάζας και των άλλων βαθμωτών ποσοτήτων γίνεται κατά ανάλογο τρόπο. Η προηγούμενη εξίσωση δείχνει ότι η τυρβώδης μεταφορά ορμής θεωρείται ανάλογη με τις μέσες κλίσεις της ταχύτητας (δηλ. κλίσεις της ορμής ανά μονάδα μάζας). Ανάλογα, η τυρβώδης μεταφορά ενός βαθμωτού λαμβάνεται να είναι ανάλογη με τη κλίση της μέσης τιμής της μεταφερόμενης ποσότητας, δηλ.

$$-\overline{\rho u_i' \varphi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.7.3.3)$$

όπου  $\Gamma_t$  είναι η τυρβώδης διαχυτότητα.

Καθώς η τυρβώδης μεταφορά της ορμής, θερμότητας ή μάζας λαμβάνει χώρα εξαιτίας του ίδιου μηχανισμού, αναμένουμε ότι η τιμή της τυρβώδης διαχυτότητας  $\Gamma_t$  να είναι πλησίον της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\mu_t$ . Γι' αυτό το λόγο εισάγεται η έννοια του τυρβώδους αριθμού Prandtl/Schmidt ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_t = \frac{\mu_t}{\Gamma_t} \quad (3.7.3.4)$$

Πειράματα έχουν δείξει ότι ο λόγος αυτός είναι συχνά σχεδόν σταθερός με αποτέλεσμα πολλοί κώδικες CFD να λαμβάνουν το  $\sigma_t$  ίσο με τη μονάδα.

Από την ανάλυση απλών ροών έχει προκύψει ότι τα επίπεδα της τύρβης και οι τυρβώδεις τάσεις μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο σε μια τυρβώδη ροή. Τα μοντέλα μήκους μίξης επιχειρούν να περιγράψουν τις τάσεις μέσω απλών αλγεβρικών εξισώσεων για το  $\mu_t$  ως συνάρτηση της θέσεως. Το μοντέλο  $k - \varepsilon$  είναι πιο πολύπλοκο και γενικό αλλά είναι πιο δαπανηρό σε υπολογιστικούς πόρους. Περιγράφει την μεταφορά και διάχυση της τύρβης στη μέση ροή και την παραγωγή και καταστροφή της τύρβης. Λύνονται γι' αυτό το σκοπό δύο επιπλέον εξισώσεις μεταφοράς (μερικές διαφορικές εξισώσεις - ΜΔΕ), μια για την τυρβώδη κινητική ενέργεια  $k$  και μια για την σκέδαση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $\varepsilon$ .

Η βασική υπόθεση γι' αυτά τα δύο μοντέλα είναι ότι η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\mu_t$  είναι ισοτροπική ή με άλλα λόγια ότι ο λόγος μεταξύ των τάσεων Reynolds και του μέσου ρυθμού παραμόρφωσης είναι ο ίδιος σε όλες τις διευθύνσεις. Αυτή η υπόθεση αποτυγχάνει συχνά σε αρκετές κατηγορίες ροών και οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα. Σε αυτή την περίπτωση είναι αναγκαία η λύση των εξισώσεων των τάσεων Reynolds. Παρά το γεγονός ότι φαίνεται παράλογη η μεταφορά των τάσεων σε ένα ροϊκό πεδίο, πρέπει να σημειωθεί ότι η συναλλαγή ορμής με μεταφορά οφείλεται στις τυρβώδεις διακυμάνσεις. Η ορμή του ρευστού (η οποία περιλαμβάνει τη μέση ορμή και τη κυμαινόμενη ορμή) μπορεί να μεταφερθεί μέσω των ροϊκών σωματιδίων και συνεπώς, ανάλογα, μπορεί να μεταφερθούν και οι τάσεις Reynolds.

Οι έξι εξισώσεις μεταφοράς, μια για κάθε τάση Reynolds, περιέχουν τους όρους διάχυσης, παραμόρφωσης εξαιτίας της δράσης της πίεσης και σκέδασης των οποίων η δράση είναι άγνωστη και δεν μπορεί να μετρηθεί. Στα μοντέλα των τάσεων Reynolds (τα οποία στη βιβλιογραφία είναι

γνωστά ως μοντέλα 2ας τάξεως) γίνονται υποθέσεις για τους αγνώστους όρους και οι ΜΔΕ που προκύπτουν, λύνονται σε σύζευξη με την εξίσωση μεταφοράς του ρυθμού σκέδασης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $\varepsilon$ . Ο σχεδιασμός μοντέλων τάσεων Reynolds είναι σε ερευνητική φάση και ακόμα δεν έχουν πιστοποιηθεί στον ίδιο βαθμό με τα μοντέλα μήκους μίξης και  $k-\varepsilon$  με αποτέλεσμα η χρήση τους να περιορίζεται στην ακαδημαϊκή κοινότητα.

Ένα ακόμα σύνολο υποθέσεων μειώνει τον αριθμό των ΜΔΕ, συνδέοντας την μεταφορά των τάσεων Reynolds με αλγεβρικές εξισώσεις οι οποίες λύνονται ταυτόχρονα με τις εξισώσεις των  $k$  και  $\varepsilon$  στο μοντέλο  $k-\varepsilon$ . Αυτή η προσέγγιση οδηγεί στα μοντέλα αλγεβρικών τάσεων τα οποία είναι λιγότερο δαπανηρά από τα μοντέλα των τάσεων Reynolds και ικανά να εισάγουν τις ανισοτροπικές επιδράσεις της τύρβης σε εξομοιώσεις CFD.

### 3.7.4 Το μοντέλο του μήκους μίξης

Με χρήση της διαστατικής ανάλυσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κινηματική τυρβώδης συνεκτικότητα (διαστάσεις  $m^2/s$ ) μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο μια τυρβώδους κλίμακας ταχύτητας  $\vartheta$  (διαστάσεις  $m/s$ ) και μιας κλίμακας μήκους  $\ell$  ( $m$ ). Εάν για την περιγραφή της τύρβης αρκεί η γνώση μιας κλίμακας ταχύτητας και μιας κλίμακας μήκους, η διαστατική ανάλυση δίνει:

$$\nu_t = C\vartheta\ell \quad (3.7.4.1)$$

όπου το  $C$  είναι μια αδιάστατη σταθερά αναλογίας. Κατά όμοιο τρόπο υπολογίζεται η τυρβώδης μοριακή συνεκτικότητα:

$$\mu_t = C\rho\vartheta\ell$$

Το μεγαλύτερο μέρος της τυρβώδους κινητικής ενέργειας περιέχεται στους μεγάλους στροβίλους και συνεπώς η κλίμακα μήκους  $\ell$  είναι αυτή των μεγάλων στροβίλων που αλληλεπιδρούν με τη μέση ροή. Εάν δεχθούμε ότι υπάρχει ισχυρή σχέση μεταξύ της μέσης ροής και της συμπεριφοράς των μεγάλων στροβίλων μπορεί να επιχειρηθεί η σύνδεση της χαρακτηριστικής κλίμακας της ταχύτητας τους με τις ιδιότητες της μέσης ροής. Αυτή η υπόθεση έχει καλά αποτελέσματα σε διδιάστατες τυρβώδεις ροές όπου η μόνη σημαντική τυρβώδης τάση είναι η

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho\overline{u'v'}$$

και η μόνη σημαντική κλίση της ταχύτητας είναι η  $\partial U / \partial y$ . Για αυτές τις ροές, είναι τουλάχιστον διαστατικά ορθό να αναφέρουμε ότι:

$$\vartheta = cl \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.7.4.2)$$

όπου  $c$  είναι μια αδιάστατη σταθερά. Λαμβάνοντας την απόλυτη τιμή, εξασφαλίζεται ότι η κλίμακα της ταχύτητας είναι πάντοτε θετική ποσότητα ανεξάρτητα από το πρόσημο της κλίσης της ταχύτητας.

Συνδυασμός της προηγούμενης εξίσωσης με αυτή της τυρβώδους κινηματικής συνεκτικότητας και συμπεριλαμβάνοντας τις σταθερές  $c$  και  $C$  στη κλίμακα μήκους  $l_m$  λαμβάνουμε:

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.7.4.3)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί το **μοντέλο μήκους μίξης του Prandtl**. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η  $\partial U / \partial y$  είναι η μόνη σημαντική κλίση της μέσης ταχύτητας η τυρβώδης τάση Reynolds δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = -\overline{\rho u'v'} = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.7.4.4)$$

Η τύρβη είναι συνάρτηση της ροής και εφόσον υπάρχουν μεταβολές της, είναι αναγκαίο να υπάρχει συνυπολογισμός της επίδρασης στο μοντέλο μήκους μίξης με μεταβολή του  $\ell_m$ . Για μια σημαντική κατηγορία απλών τυρβωδών ροών η οποία περιλαμβάνει τις ελεύθερες τυρβώδεις ροές και ροές οριακών στρωμάτων, αυτή η διαδικασία μπορεί να επιτευχθεί με χρήση απλών αλγεβρικών εξισώσεων. Μερικά παραδείγματα παρατίθενται στον κατωτέρω πίνακα.

Τύπος ροής	Μήκος μίξης $\ell_m$	$L$
Στρώματα μίξης	$0.07L$	Πλάτος στρώματος
Δίνη	$0.09L$	Μισό πλάτος δίνης
Απόρευμα	$0.16L$	Μισό πλάτος απορεύματος
Αξονοσυμμετρική δίνη	$0.075L$	Μισό πλάτος δίνης
Οριακό στρώμα ( $\partial p / \partial x = 0$ ), στρωτό υπόστρωμα και στρώμα ισχύος λογαριθμικού νόμου ( $y/L \leq 0.22$ )	$\kappa y [1 - \exp(-y^+ / 26)]$	Πλάτος οριακού στρώματος
Οριακό στρώμα ( $\partial p / \partial x = 0$ ), εξωτερικό στρώμα ( $y/L \geq 0.22$ )	$0.09L$	Πλάτος οριακού στρώματος
Σωλήνες και κανάλια (πλήρως ανεπτυγμένη ροή)	$L \left[ 0.14 - 0.08 \left( 1 - \frac{y}{L} \right)^2 - 0.06 \left( 1 - \frac{y}{L} \right)^4 \right]$	Ακτίνα σωλήνα η μισό πλάτος καναλιού

Στο παραπάνω πίνακα η ποσότητα  $y$  αναπαριστά την απόσταση από το τοίχωμα και  $\kappa = 0.41$  η σταθερά του von Karman. Οι εκφράσεις αυτές δίνουν καλή συμφωνία μεταξύ των υπολογισμών και

πειραματικών αποτελεσμάτων για τις μέσες κατανομές της ταχύτητας, του συντελεστή τριβής στο τοίχωμα και άλλων ιδιοτήτων της ροής όπως συντελεστής μετάδοσης θερμότητας κλπ. σε απλές διδιάστατες ροές.

Το μοντέλο μήκους μίξης μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την πρόγνωση της τυρβώδους μεταφοράς βαθμωτών ποσοτήτων. Ο μόνος βαθμωτός όρος ο οποίος έχει σημασία σε μια διδιάστατη ροή και μπορεί να υπολογιστεί από το μοντέλο μήκους μίξης, υπολογίζεται ως εξής:

$$-\rho \overline{v' \varphi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.7.4.5)$$

όπου  $\Gamma_t = \mu_t / \sigma_t$ . Η ποσότητα  $\mu_t$  υπολογίζεται σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις. Οι προτεινόμενες τιμές για το  $\sigma_t$  είναι 0.9 για ροές πλησίον τοιχωμάτων, 0.5 για ροές δινών και 0.7 για αξονοσυμμετρικές ροές δινών.

Το μοντέλο μήκους μίξης είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε ροές όπου οι ιδιότητες της τύρβης αναπτύσσονται αναλογικά με τη κλίμακα μήκους της μέσης ροής, έτσι ώστε το  $\ell_m$  να μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση της θέσης με απλές αλγεβρικές εξισώσεις. Αυτό εξηγεί τη γενική αποδοχή του μοντέλου για ροές σε πτέρυγες. Υπάρχουν επίσης βελτιωμένες μετατροπές των εξισώσεων του  $\ell_m$  για την περιγραφή των επιδράσεων των βαθμίδων πίεσης, την αποκόλληση σε μικρή κλίμακα και έγχυση ή αναρρόφηση σε οριακό στρώμα. Μοντέλα μήκους μίξης όπως αυτά των Baldwin και Lomax, των Cebeci και Smith είναι ευρέως χρησιμοποιούμενα σε υπολογισμούς εξωτερικής αεροδυναμικής στην αεροδιαστημική βιομηχανία.

Στον παρακάτω πίνακα γίνεται ένας σύντομος απολογισμός των δυνατοτήτων του μοντέλου μήκους μίξης.

---

#### Πλεονεκτήματα

- Εύκολη εφαρμογή και εξαιρετικά «φθηνό» σε υπολογιστικούς πόρους
- Καλές προβλέψεις για λεπτά στρώματα διάτμησης: δίνες, στρώματα μίξης, απορεύματα και οριακά στρώματα
- Καλά πιστοποιημένο

---

#### Μειονεκτήματα

- Τελείως ανίκανο να περιγράψει ροές με αποκόλληση και ανακυκλοφορία
  - Υπολογίζει μόνο τις ιδιότητες της μέσης ροής και τις τυρβώδεις διατμητικές τάσεις
-

### 3.7.5 Το μοντέλο k-ε

Σε λεπτά δισδιάστατα οριακά στρώματα οι μεταβολές στη διεύθυνση της ροής είναι πάντοτε τόσο αργές με αποτέλεσμα η τύρβη να προσαρμόζεται στις τοπικές συνθήκες. Εάν τα φαινόμενα της συναγωγής και της διάχυσης μπορούν να απορριφθούν είναι πιθανό η έκφραση της επιρροής της τύρβης στη μέση ροή να γίνει μέσω του μήκους μίξης. Εάν η συναγωγή και διάχυση δεν μπορούν να παραληφθούν – όπως για παράδειγμα στη περίπτωση ροών με ανακυκλοφορία – μια αλγεβρική σχέση για το μήκος μίξης πλέον δεν επαρκεί. Το μοντέλο μήκους μίξης δεν έχει αυτή τη γενική ικανότητα περιγραφής ροών. Το επόμενο βήμα είναι να ληφθούν υπόψη καταστάσεις που σχετίζονται με τη δυναμική της τύρβης. Το μοντέλο  $k - \varepsilon$  εστιάζει στους μηχανισμούς αυτούς που επηρεάζουν την τυρβώδη κινητική ενέργεια.

Η στιγμιαία κινητική ενέργεια  $k(t)$  μιας τυρβώδους ροής είναι το άθροισμα της μέσης κινητικής ενέργειας  $K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2)$  και της τυρβώδους κινητικής ενέργειας

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}):$$

$$k(t) = K + k$$

Στην ανάπτυξη που θα ακολουθήσει θα χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα ο ρυθμός της παραμόρφωσης και οι τυρβώδεις τάσεις. Για την διευκόλυνση των υπολογισμών που θα ακολουθήσουν είναι συχνή η αναγραφή των συνιστωσών του ρυθμού παραμόρφωσης  $e_{ij}$  και των τάσεων  $\tau_{ij}$  σε μορφή τανυστών.

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \text{ και } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Η ανάλυση του ρυθμού παραμόρφωσης ενός ροϊκού στοιχείου σε μια τυρβώδη ροή σε μια μέση και μια κυμαινόμενη συνιστώσα,  $e_{ij}(t) = E_{ij} + e'_{ij}$ , δίνει τα κατωτέρω στοιχεία του πίνακα:

$$e_{xx}(t) = E_{xx} + e'_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$e_{yy}(t) = E_{yy} + e'_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y}$$

$$e_{zz}(t) = E_{zz} + e'_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z}$$

$$e_{xy}(t) = E_{xy} + e'_{xy} = e_{yx}(t) = E_{yx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right]$$

$$e_{xz}(t) = E_{xz} + e'_{xz} = e_{zx}(t) = E_{zx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right]$$

$$e_{yz}(t) = E_{yz} + e'_{yz} = e_{zy}(t) = E_{zy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right]$$

Το γινόμενο ενός διανύσματος  $\mathbf{a}$  με ένα ταυυστή  $b_{ij}$  είναι ένα διάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες μπορούν να υπολογιστούν με εφαρμογή των βασικών κανόνων της άλγεβρας:

$$\mathbf{a} b_{ij} \equiv a_i b_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & a_3 b_{13} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & a_3 b_{23} \\ a_1 b_{31} & a_2 b_{32} & a_3 b_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}^T = c_j = \mathbf{c}$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο ταυυστών  $a_{ij}$  και  $b_{ij}$  υπολογίζεται σύμφωνα με τα κατωτέρω:

$$a_{ij} \cdot b_{ij} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}$$

*Η βασική εξίσωση για τη κινητική ενέργεια της μέσης ροής K*

Η εξίσωση της κινητικής ενέργειας μπορεί να ληφθεί πολλαπλασιάζοντας την  $x$ -συνιστώσα της εξίσωσης του Reynolds με τη ταχύτητα  $U$ , τη  $y$ -συνιστώσα με την ταχύτητα  $V$  και τη  $z$ -συνιστώσα με τη ταχύτητα  $W$ . Με άθροισμα των γινομένων και αλγεβρικές τροποποιήσεις προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση για τη μέση κινητική ενέργεια της ροής:

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \text{div}(\rho K \mathbf{U}) = \text{div} \left( \underbrace{-P\mathbf{U}}_{(I)} + \underbrace{2\mu \mathbf{U} E_{ij}}_{(II)} - \underbrace{\rho \mathbf{U} \overline{u'_i u'_j}}_{(V)} \right) - \underbrace{2\mu E_{ij} \cdot E_{ij}}_{(VI)} + \underbrace{\overline{\rho u'_i u'_j} \cdot E_{ij}}_{(VII)} \quad (3.7.5.1)$$

ή

ρυθμός μεταβολής του $K$	+	μεταφορά του $K$ με συναγωγή	=	μεταφορά του $K$ εξαιτίας της πίεσεως	+	μεταφορά του $K$ δια των συνεκτικών τάσεων	+	μεταφορά του $K$ δια των τάσεων Reynolds
				-	ρυθμός σκέδασης του $K$	+	τυρβώδης παραγωγή	

Οι όροι μεταφοράς (III), (IV) και (V) χαρακτηρίζονται από την εμφάνιση του διαφορικού τελεστή  $\text{div}$  και αποτελεί κοινή πρακτική να τοποθετούνται μαζί εντός παρενθέσεων. Η επίδραση των συνεκτικών τάσεων στο  $K$  έχουν χωριστεί σε δύο μέρη: τον όρο (IV), δηλ. τη μεταφορά του  $K$  εξαιτίας των συνεκτικών τάσεων και τον όρο (VI) δηλ. την συνεκτική σκέδαση της μέσης κινητικής



ενέργειας  $K$ . Οι δύο όροι που περιέχουν τις τάσεις Reynolds  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$  περιγράφουν τις επιδράσεις της τύρβης: ο όρος (V) είναι η τυρβώδης μεταφορά του  $K$  μέσω των τάσεων Reynolds και ο όρος (VII) περιγράφει την τυρβώδη παραγωγή ή τη συνολική μείωση του  $K$  εξαιτίας του έργου παραμόρφωσης από τη παραγωγή των τάσεων Reynolds. Σε ροές με μεγάλους αριθμούς Reynolds οι τυρβώδεις όροι (V) και (VII) είναι πάντοτε μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους συνεκτικούς όρους (IV) και (VI).

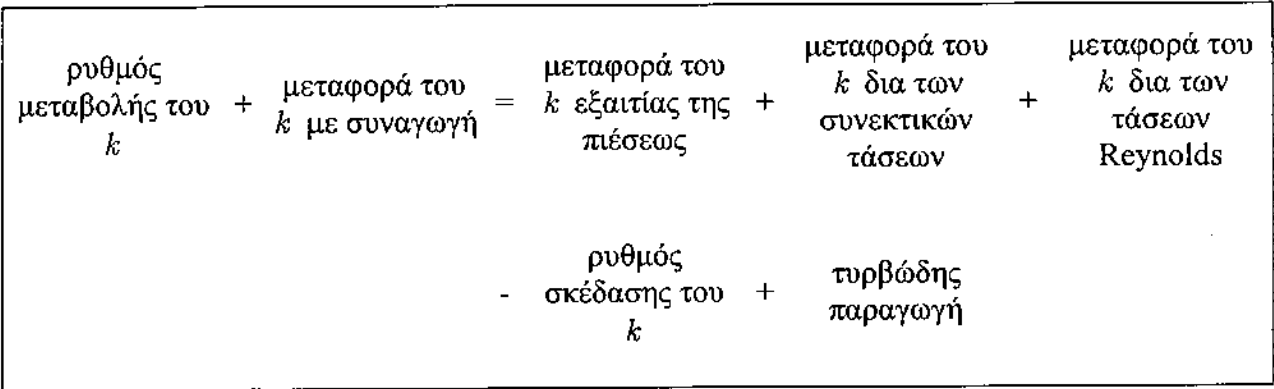
**Βασική εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $k$**

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού κάθε μιας από τις εξισώσεις Navier-Stokes με τη κατάλληλη συνιστώσα της κυμαινόμενης ταχύτητας (π.χ. την εξίσωση της ορμής στον άξονα  $x$  με τη  $u'$  κλπ.) και στη συνέχεια πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων η οποία ακολουθείται με επανάληψη της διαδικασίας για τις εξισώσεις Reynolds, αφαίρεση των δύο αποτελεσμάτων και αναδιάταξη των όρων θα δώσει την εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left( -\overline{p' \mathbf{u}'} + 2\mu \overline{e'_{ij}} - \rho \frac{1}{2} \overline{u'_i \cdot u'_i u'_j} \right) - 2\mu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} - \overline{\rho u'_i u'_j \cdot E_{ij}} \quad (3.7.5.2)$$

(I)            (II)            (III)    (IV)            (V)            (VI)            (VII)

ή



Οι εξισώσεις για τη κινητική ενέργεια  $K$  και την τυρβώδη κινητική ενέργεια  $k$  παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες. Παρόλα αυτά, η παρουσία των διακυμάνσεων της ταχύτητας στη δεύτερη εξίσωση δείχνει ότι η τυρβώδης κινητική ενέργεια εξαρτάται κυρίως από τις αλληλεπιδράσεις της τύρβης. Οι έβδομοι όροι και στις δύο εξισώσεις έχουν το ίδιο μέγεθος αλλά αντίθετο πρόσημο. Σε λεπτά διδιάστατα στρώματα διάτμησης έχει βρεθεί ότι η μόνη σημαντική τάση Reynolds  $-\overline{\rho u'v'}$  είναι συνήθως θετική εάν ο βασικός όρος του  $E_{ij}$  σε μια τέτοια ροή, η κλίση της μέσης ταχύτητας  $\partial U / \partial y$ , είναι θετικός. Συνεπώς ο όρος (VII) δίδει μια θετική συνεισφορά στην εξίσωση του  $k$ , και αναπαριστά όρο παραγωγής. Στη εξίσωση του  $K$ , ο όρος αυτός είναι αρνητικός, γεγονός που

ερμηνεύεται με καταστροφή της κινητικής ενέργειας της μέσης ροής. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται με μετατροπή της μέσης κινητικής ενέργειας σε τυρβώδη κινητική ενέργεια.

Ο όρος της συνεκτικής σκέδασης (V)

$$-2\mu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} = -2\mu (\overline{e'^2_{11}} + \overline{e'^2_{22}} + \overline{e'^2_{33}} + 2\overline{e'^2_{12}} + 2\overline{e'^2_{13}} + 2\overline{e'^2_{23}})$$

δίδει μια αρνητική συνεισφορά στην εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας εξαιτίας της εμφάνισης του αθροίσματος των τετραγώνων των κυμαινόμενων ρυθμών παραμόρφωσης  $e'_{ij}$ . Η σκέδαση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας προκαλείται από το έργο των μικρότερων στροβίλων ενάντια στις συνεκτικές τάσεις. Ο ρυθμός σκέδασης ανά μονάδα μάζας, με διαστάσεις  $m^2 / s^3$ , έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη της δυναμικής της τύρβης και συμβολίζεται με:

$$\varepsilon = 2\nu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} \quad (3.7.5.3)$$

Είναι ο κυριότερος όρος καταστροφής στην εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, παρόμοιας τάξης μεγέθους με τον όρο της παραγωγής της τύρβης και ποτέ αμελητέος. Εν αντιθέσει, όταν ο αριθμός Reynolds είναι πολύ μεγάλος, ο όρος της συνεκτικής μεταφοράς (IV) είναι πάντοτε πολύ μικρός συγκρινόμενος με τον όρο της τυρβώδους μεταφοράς.

Οι εξισώσεις του μοντέλου  $k - \varepsilon$

Είναι πιθανό να αναπτυχθούν παρόμοιες εξισώσεις μεταφοράς για τις υπόλοιπες τυρβώδεις ποσότητες συμπεριλαμβανομένου της συνεκτικής σκέδασης  $\varepsilon$ . Η εξίσωση που προκύπτει, παρόλα αυτά, περιέχει πολλούς άγνωστους όρους που δεν μπορούν να μετρηθούν. Το μοντέλο “standard  $k - \varepsilon$ ” έχει δύο εξισώσεις, μια για το  $k$  και μια για το  $\varepsilon$ , οι οποίες βασίζονται στις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες για τις σχετικές διεργασίες που προκαλούν τη μεταβολή αυτών των δύο ποσοτήτων.

Το  $k$  και το  $\varepsilon$  χρησιμοποιούνται για τον ορισμό της κλίμακας της ταχύτητας  $\vartheta$  και της κλίμακας μήκους  $\ell$ , που αντιπροσωπεύουν τη τύρβη μεγάλης κλίμακας ως εξής:

$$\vartheta = k^{1/2} \text{ και } \ell = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

Παρόλα αυτά αναγείρεται το ερώτημα για την εγκυρότητα της χρήσης της ποσότητας  $\varepsilon$  (που είναι χαρακτηριστικό των μικρών στροβίλων) για τον ορισμό της κλίμακας  $\ell$  των μεγάλων στροβίλων. Αυτό επιτρέπεται γιατί σε μεγάλους αριθμούς Reynolds ο ρυθμός με τον οποίο εξάγεται ενέργεια από τη μέση ροή είναι ίσος με το ρυθμό της ενέργειας που μεταφέρεται διαμέσου του ενεργειακού φάσματος στους μικρούς σκεδαζόμενους στροβίλους. Εάν δεν ίσχυε η προηγούμενη συνθήκη, η ενέργεια σε μερικές κλίμακες της τύρβης θα αυξανόταν χωρίς περιορισμό ή θα εξαφανιζόταν

τελείως. Αυτό δεν λαμβάνει χώρα στη πραγματικότητα και επιβεβαιώνει τη χρήση του  $\varepsilon$  στον ορισμό της κλίμακας μήκους  $\ell$ .

Εφαρμόζοντας την ίδια τακτική όπως στο μοντέλο μήκους μίξης ορίζουμε το τυρβώδες ιξώδες:

$$\mu_t = C_\mu \rho \nu \ell = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.7.5.4}$$

όπου  $C_\mu$  αδιάστατη μεταβλητή.

Το τυπικό μοντέλο  $k - \varepsilon$  χρησιμοποιεί τις κατωτέρω εξισώσεις μεταφοράς για το  $k$  και το  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad } k \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \tag{3.7.5.5}$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{3.7.5.6}$$

ή

ρυθμός μεταβολής του $k$ ή $\varepsilon$	+	μεταφορά του $k$ ή $\varepsilon$ με συναγωγή	=	μεταφορά του $k$ ή $\varepsilon$ με διάχυση	+	ρυθμός παραγωγής του $k$ ή $\varepsilon$
- ρυθμός καταστροφής του $k$ ή $\varepsilon$						

Οι εξισώσεις περιέχουν πέντε ρυθμιζόμενες μεταβλητές τις  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$  και  $C_{2\varepsilon}$ . Το τυπικό μοντέλο  $k - \varepsilon$  χρησιμοποιεί τιμές για τις μεταβλητές αυτές που προέρχονται από παρεμβολή πειραματικών αποτελεσμάτων από μεγάλο αριθμό πειραμάτων που καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος τυρβωδών ροών. Οι τιμές των μεταβλητών αυτών έχουν ως εξής:

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.00, \sigma_\varepsilon = 1.30, C_{1\varepsilon} = 1.44, C_{2\varepsilon} = 1.92 \tag{3.7.5.7}$$

Ο όρος παραγωγής στην εξίσωση για το  $k$  προέρχεται από την ακριβή εξίσωση που αναφέρεται προηγουμένως. Μια μοντελοποιημένη μορφή των βασικών διεργασιών μεταφοράς εμφανίζεται στο δεξιό μέρος της εξίσωσης. Οι όροι της τυρβώδους μεταφοράς αναπαριστούνται χρησιμοποιώντας την αρχή της διάχυσης η οποία εισήχθηκε προηγουμένως με τη μορφή της βαθμωτής μεταφοράς. Οι αριθμοί Prandtl  $\sigma_k$  και  $\sigma_\varepsilon$  συνδέουν την διαχυτότητα των  $k$  και  $\varepsilon$  με την τυρβώδη συνεκτικότητα  $\mu_t$ . Ο όρος της πίεσεως στην αρχική εξίσωση δεν μπορεί να μετρηθεί επακριβώς. Η δράση του περιλαμβάνεται στην εξίσωση του  $k$  στον όρο της κλίσης της διαχύσεως.

Η παραγωγή και η σκέδαση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας συνδέονται στενά. Ο ρυθμός σκέδασης  $\varepsilon$  είναι μεγάλος εκεί που η παραγωγή του  $k$  είναι μεγάλη. Η εξίσωση του  $\varepsilon$  υποθέτει ότι οι όροι παραγωγής και καταστροφής είναι ανάλογοι με τους αντίστοιχους όρους παραγωγής και καταστροφής στην εξίσωση του  $k$ . Υιοθέτηση αυτής της πρακτικής επιβεβαιώνει ότι αύξηση του  $k$  θα συνοδεύεται από αύξηση του  $\varepsilon$  και ανάλογη μείωση του  $k$  θα συνοδεύεται από μείωση του  $\varepsilon$ . Ο λόγος  $\varepsilon/k$  στους όρους παραγωγής και καταστροφής καθιστά τους όρους αυτούς διαστατικά ορθούς στην εξίσωση του  $\varepsilon$ .

Για τον υπολογισμό των τάσεων Reynolds με το μοντέλο  $k - \varepsilon$  χρησιμοποιείται η εκτεταμένη εξίσωση του Boussinesq:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t E_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.7.5.8)$$

Σύγκριση με τη σχέση (3.7.3.2) δείχνει ότι αυτή η μορφή έχει ένα επιπλέον όρο στο δεξιό μέρος το  $\delta_{ij}$ , το δέλτα του Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  όταν  $i = j$  και  $\delta_{ij} = 0$  όταν  $i \neq j$ ). Αυτός ο όρος χρησιμοποιείται για να κάνει την εξίσωση εφαρμόσιμη στις κάθετες τάσεις Reynolds όταν  $i = j$  και συνεπώς  $\tau_{xx} = -\rho \overline{u'^2}$ ,  $\tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2}$  και  $\tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2}$ . Θεωρούμε μια ασυμπίεστη ροή και ερευνούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης (3.7.5.8). Εάν προσθέσουμε όλες τις κάθετες τάσεις και χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της συνέχειας, έχουμε:

$$2\mu_t E_{ii} = 2\mu_t \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] = 2\mu_t \text{div} \mathbf{U} = 0$$

Σε κάθε ροή το άθροισμα των καθέτων τάσεων  $-\rho(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  είναι ίσο με την αρνητική τιμή του διπλασίου της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ( $-2\rho k$ ). Το ένα τρίτο της ποσότητας αντιστοιχεί σε κάθε κάθετη τάση έτσι ώστε το άθροισμα τους να έχει πάντοτε τη φυσικά ορθή τιμή. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτό συνεπάγεται μια ισοτροπική συμπεριφορά για τις κάθετες τάσεις Reynolds, για τις οποίες πειραματικά δεδομένα έχουν δείξει ότι αυτό είναι λανθασμένο ακόμα και για απλές δισδιάστατες ροές.

### Οριακές συνθήκες

Οι εξισώσεις του μοντέλου  $k - \varepsilon$  είναι ελλειπτικές από τη φύση τους εξαιτίας του όρου της διάχυσης. Η συμπεριφορά τους είναι παρόμοια με τις άλλες ελλειπτικές ρευστομηχανικές εξισώσεις, με αποτέλεσμα να υπάρχει η ανάγκη για την επιβολή των παρακάτω οριακών συνθηκών:

- Είσοδος (inlet): πρέπει να δίδονται οι κατανομές των  $k$  και  $\varepsilon$
- Έξοδος ή άξονας συμμετρίας:  $\partial k / \partial n = 0$  και  $\partial \varepsilon / \partial n = 0$

- ελεύθερο ρεύμα:  $k = 0$  και  $\varepsilon = 0$
- στερεά τοιχώματα: η προσέγγιση εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds

Σε διερευνητικούς υπολογισμούς σχεδιασμών, οι λεπτομερείς οριακές συνθήκες που απαιτούνται για τη λειτουργία του μοντέλου, μπορεί να μην είναι διαθέσιμες. Οι χρήστες κωδίκων CFD στη βιομηχανία σπάνια έχουν στη διάθεση τους μετρήσεις για τα  $k$  και  $\varepsilon$ . Συνήθως χρησιμοποιούνται στοιχεία διαθέσιμα από τη βιβλιογραφία και στη συνέχεια ακολουθεί έλεγχος της ευαισθησίας των αποτελεσμάτων από τις τιμές στην είσοδο. Εάν δεν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία, αρχικές προσεγγίσεις για το  $k$  και το  $\varepsilon$  μπορούν να γίνουν μέσω της έντασης της τύρβης  $T_i$  και μίας χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους  $L$ , μέσω των απλών εξισώσεων που παρατίθενται στη συνέχεια:

$$k = \frac{3}{2} (U_{ref} T_i)^2, \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad \text{και} \quad l = 0.07L$$

Οι σχέσεις αυτές, συνδέονται στενά με τις εξισώσεις του μοντέλου μήκους μίξης και τις γενικές κατανομές πλησίον ενός στερεού τοιχώματος.

Σε μεγάλους αριθμούς Reynolds το τυπικό μοντέλο  $k - \varepsilon$  αποφεύγει την ανάγκη ολοκλήρωσης των εξισώσεων του μοντέλου έως την περιοχή του στερεού τοιχώματος, κάνοντας χρήση της γενικής συμπεριφοράς των ροών πλησίον τοιχωμάτων. Εάν  $y$  είναι η κάθετη απόσταση από το τοίχωμα, η μέση ταχύτητα σε ένα σημείο που απέχει απόσταση  $y_p$  όταν  $30 < y_p^+ < 500$ , ικανοποιεί το λογαριθμικό νόμο. Μετρήσεις της τυρβώδους κινητικής ενέργειας επιβεβαιώνουν ότι ο ρυθμός τυρβώδους παραγωγής είναι ίσος με αυτόν της σκέδασής της. Χρησιμοποιώντας αυτές τις υποθέσεις και την εξίσωση της τυρβώδους συνεκτικότητας είναι δυνατό να αναπτυχθούν οι παρακάτω εξισώσεις για τη περιοχή του τοιχώματος:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_p^+), \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{και} \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (3.7.5.9)$$

όπου  $\kappa = 0.41$  είναι η σταθερά του Von Karman και  $E = 0.98$  η παράμετρος της τραχύτητας του τοιχώματος. Για την περίπτωση τραχών τοιχωμάτων υπάρχουν διαθέσιμες τιμές του  $E$  από τον Schlichting.

Για την περίπτωση που υπάρχει μετάδοση θερμότητας χρησιμοποιείται η γενική κατανομή της θερμοκρασίας πλησίον τοιχωμάτων η οποία ισχύει για υψηλούς αριθμούς Reynolds:

$$T^+ \equiv -\frac{(T - T_w) C_p \rho u_\tau}{q_w} = \sigma_{T,t} \left[ u^+ + P \left( \frac{\sigma_{T,t}}{\sigma_{T,t}} \right) \right] \quad (3.7.5.10)$$

όπου:  $T_p$  = θερμοκρασία στο σημείο  $y_p$  πλησίον του τοιχώματος

$T_w$  = θερμοκρασία του τοιχώματος

$q_w$  = ροή θερμοκρασίας στο τοίχωμα

$C_p$  = ειδική θερμότητα του ρευστού υπό σταθερή πίεση

$\sigma_{T,t}$  = τυρβώδης αριθμός Prandtl

$\sigma_{T,l} = \mu C_p / \Gamma_T =$  αριθμός Prandtl

$\Gamma_T$  = θερμική αγωγιμότητα

Η ποσότητα  $P$  είναι η συνάρτηση  $Pr_{eff}$ , η οποία αποτελεί μια συνάρτηση διόρθωσης που εξαρτάται από το λόγο του στρωτού προς τον τυρβώδη αριθμό Prandtl.

Σε μικρούς αριθμούς Reynolds ο λογαριθμικός νόμος δεν ισχύει και οι ανωτέρω οριακές συνθήκες δεν μπορούν πλέον να χρησιμοποιηθούν. Χρειάζονται πλέον τροποποιήσεις στις εξισώσεις του μοντέλου  $k - \varepsilon$ , που θα καταστήσουν δυνατή τη χρήση του σε μικρούς αριθμούς Reynolds. Χρειάζεται να γίνει απόσβεση στο τοίχωμα έτσι ώστε να επιβληθεί ότι οι συνεκτικές τάσεις θα υπερισχύσουν των αντίστοιχων τυρβωδών σε μικρούς αριθμούς Reynolds στο συνεκτικό υπόστρωμα πλησίον των στερεών τοιχωμάτων.

Οι εξισώσεις του μοντέλου  $k - \varepsilon$  για μικρούς αριθμούς Reynolds οι οποίες αντικαθιστούν τις κανονικές δίνονται στη συνέχεια:

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.7.5.11)$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad } k \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \quad (3.7.5.12)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad } \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} f_1 \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon} f_2 \rho \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.7.5.13)$$

Η πιο εμφανής μεταβολή, είναι η ύπαρξη ενός όρου για τη συνεκτική συνεισφορά στους όρους της διάχυσης. Οι σταθερές  $C_\mu$ ,  $C_{1\varepsilon}$  και  $C_{2\varepsilon}$  στο τυπικό μοντέλο  $k - \varepsilon$  πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις αποσβέσεως στο τοίχωμα,  $f_\mu$ ,  $f_1$  και  $f_2$  αντίστοιχα, οι οποίες εξαρτώνται από τον τυρβώδη αριθμό Reynolds ( $= \theta l / \nu = k^2 / (\varepsilon \nu)$ ) και παρόμοιες παραμέτρους. Στη συνέχεια παρατίθενται οι εξισώσεις της απόσβεσης στο τοίχωμα των Lam και Bremhorst:

$$f_\mu = \left[ 1 - \exp(-0.0165 \text{Re}_y) \right]^2 \left( 1 + \frac{20.5}{\text{Re}_t} \right),$$

$$f_1 = \left(1 + \frac{0.05}{f_\mu}\right)^3, f_2 = 1 - \exp(-Re_t^2) \quad (3.7.5.14)$$

Στη συνάρτηση  $f_\mu$  η παράμετρος  $Re_y$  ορίζεται ως  $k^{1/2}y/\nu$ . Οι Lam και Brehmhorst χρησιμοποιούν ως οριακή συνθήκη τη σχέση  $\partial\varepsilon/\partial y = 0$ .

#### Αποτίμηση της απόδοσης του μοντέλου

Το μοντέλο k-ε είναι το πιο ευρέως διαδεδομένο και πιστοποιημένο τυρβώδες μοντέλο. Έχει σημειώσει σημαντική επιτυχία στον υπολογισμό μιας μεγάλης ποικιλίας ροών με λεπτά στρώματα διάτμησης και ροές ανακυκλοφορίας χωρίς να χρειάζεται ο προκαθορισμός και η ρύθμιση των σταθερών του μοντέλου. Το μοντέλο αποδίδει καλά σε περιορισμένες ροές όπου οι διατμητικές τάσεις Reynolds είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Αυτές περιλαμβάνουν ένα μεγάλο αριθμό ροών βιομηχανικού ενδιαφέροντος εξηγώντας έτσι το γεγονός ότι είναι εξαιρετικά δημοφιλείς. Υπάρχουν επίσης διαφορετικές εκδόσεις του μοντέλου για την περίπτωση ανωστικών ροών. Τέτοια μοντέλα χρησιμοποιούνται για τη μελέτη περιβαλλοντικών ροών όπως διάχυση ρυπαντών στην ατμόσφαιρα και λίμνες και για τη μοντελοποίηση πυρκαγιών.

Παρά το γεγονός ότι είναι επιτυχημένο σε ορισμένες ροές, παρουσιάζει μέτρια επιτυχία σε εξωτερικές ροές. Έχει αναφερθεί ότι το μοντέλο δεν αποδίδει καλά σε ασθενή στρώματα διάτμησης (μακρά απορεύματα και στρώματα μίξης) και στον υπολογισμό του ρυθμού διασκορπισμού αξονοσυμμετρικών δινών σε στάσιμο περιβάλλον, ο οποίος υπερεκτιμάται. Σε μεγάλα μέρη αυτών των ροών ο ρυθμός παραγωγής είναι πολύ μικρότερος από τον ρυθμό σκέδασης και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται αντιμετωπίζονται με πρόσθετες ρυθμίσεις στις σταθερές  $C$  του μοντέλου.

Έχει αναφερθεί ότι η πρακτική εισαγωγή των όρων μεταφοράς της πίεσης, της ακριβής εξίσωσης του  $k$  στον όρο της διαχύσεως της εξίσωσης του μοντέλου, φαίνεται να είναι αποδεκτή εξαιτίας του γεγονότος ότι ο όρος της πίεσεως είναι μερικές φορές τόσο μικρός ώστε να γίνεται υπολογισμός του ισοζυγίου της τυρβώδους κινητικής ενέργειας χωρίς αυτόν. Παρόλα αυτά αρκετές μετρήσεις περιέχουν σημαντικά σφάλματα και γενικά είναι αναληθές ότι οι επιδράσεις της διάχυσης της πίεσεως είναι πάντοτε αμελητέες.

Το μοντέλο παρουσιάζει, επίσης, προβλήματα σε ροές στροβιλισμού και σε ροές με μεγάλες, επιπλέον, παραμορφώσεις (πχ. οριακά στρώματα με έντονες κλίσεις και σε αποκλίνοντες διόδους) καθώς δεν περιέχει περιγραφή των επιδράσεων για διαμήκη (κατά τη κατεύθυνση της ροής) κλίση της τύρβης. Δευτερογενείς ροές σε επιμήκεις μη κυκλικούς αγωγούς, οι οποίες επηρεάζονται από

ανισοτροπικές κάθετες τάσεις Reynolds, δεν μπορούν να επιλυθούν με ακρίβεια εξαιτίας της αδυναμίας του μοντέλου  $k - \epsilon$ , να υπολογίσει τις κάθετες τάσεις. Εν τέλει, το μοντέλο είναι ανακριβές στην περίπτωση ύπαρξης καθολικών δυνάμεων εξαιτίας της περιστροφής του συστήματος αναφοράς.

Στον παρακάτω πίνακα γίνεται ένας σύντομος απολογισμός των δυνατοτήτων του μοντέλου  $k - \epsilon$ .

---

### **Πλεονεκτήματα**

- Το απλούστερο τυρβώδες μοντέλο για το οποίο χρειάζονται να καθοριστούν μόνο οι αρχικές και οριακές συνθήκες
- Άριστη απόδοση για πολλές ροές βιομηχανικού ενδιαφέροντος
- Καλά πιστοποιημένο

---

### **Μειονεκτήματα**

- Πιο δαπανηρό στην εφαρμογή από το μοντέλο μήκους μίξης (δύο επιπλέον ΜΔΕ)
  - Κακή απόδοση σε μια ποικιλία σημαντικών περιπτώσεων όπως:
    1. Μερικές εξωτερικές ροές
    2. Ροές με μεγάλες επιπλέον παραμορφώσεις
    3. Περιστρεφόμενες ροές
    4. Πλήρως ανεπτυγμένες ροές σε μη κυκλικούς αγωγούς
-



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

## Εξομοίωση δρομέα κατακόρυφου άξονα με χρήση του κώδικα CFD, Fluent

---

### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθεί η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την εξομοίωση της ροής για δρομέα ανεμογεννήτριας κατακόρυφου άξονα με ευθύγραμμο πτερύγιο. Θα περιγραφούν η γεωμετρία και το πλέγμα του υπολογιστικού πεδίου, τα υπολογιστικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για την εξομοίωση της περιστροφικής κίνησης, οι επιμέρους αλγόριθμοι των οποίων έγινε χρήση, οι οριακές και άλλες συνθήκες και τελικά θα παρουσιαστούν τα ευρήματα των υπολογισμών.

Για τις ανάγκες της εξομοίωσης θεωρήθηκε δρομέας με διαμόρφωση που περιγράφεται από τα κατωτέρω στοιχεία:

Διάμετρος περιστροφής:	$D = 4.8m$
Ύψος πτερυγίων:	$H = 2.4m$
Ταχύτητα περιστροφής:	$\omega = 13rad / sec$
Ταχύτητα ανέμου:	$V_{\infty} = 10m / sec$
Ένταση της τύρβης:	$T_i = 10\%$
Αεροτομή:	NACA 0012
Μήκος χορδής:	$c = 0.4m$
Αριθμός πτερυγίων:	$N = 2$
Λόγος ταχύτητας ακροπτερυγίου:	$\lambda = \omega R / V_{\infty} = 3.12$
Στιβαρότητα δρομέα:	$\sigma = Nc / 2R = 0.166$

Δυο βασικές αναλύσεις έλαβαν χώρα. Στην πρώτη εξομοιώθηκε ο δρομέας ως τρισδιάστατος για μόνιμη ροή ενώ η δεύτερη θεώρησε το πεδίο δισδιάστατο ως προς τον χώρο και το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε ως χρονικά μεταβαλλόμενο. Φυσικά, μια πλήρης ανάλυση θα απαιτούσε τη μελέτη του δρομέα στο χώρο και τη ροή μεταβατική. Παρ' όλα αυτά, μια τέτοια απόπειρα απαιτεί εξαιρετικά μεγάλους υπολογιστικούς πόρους και ξεφεύγει από τις ανάγκες της παρούσας πτυχιακής εργασίας.

## 4.2 Εξομοίωση της περιστροφικής κίνησης στον κώδικα FLUENT

Η επίλυση προβλημάτων τα οποία περιλαμβάνουν περιοχές του πεδίου που βρίσκονται υπό κίνηση γίνεται χρησιμοποιώντας τη δυνατότητα κινούμενης ζώνης κελιών (moving cell zone) του FLUENT. Τα προβλήματα που μπορούν να αντιμετωπιστούν υπάγονται στις εξής κατηγορίες:

1. Ροή σε ένα (απλό) περιστρεφόμενο σύστημα
2. Ροή σε πολλαπλά περιστρεφόμενα και / ή μετακινούμενα συστήματα αναφοράς

Περιπτώσεις που υπάγονται στην πρώτη κατηγορία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξομοίωση ροών σε στροβιλομηχανές, δεξαμενές αναμείξεως κα. Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, η ροή είναι χρονικά μεταβαλλόμενη σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, καθώς ο δρομέας ή η πτερωτή «σαρώνει» περιοδικά το πεδίο. Παρ' όλα αυτά εάν δεν υπάρχει στάτορας είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν υπολογισμοί σε σύστημα που περιστρέφεται με την ίδια ταχύτητα με το περιστρεφόμενο μέρος. Οι υπολογισμοί τότε απλοποιούνται καθώς η ροή είναι μόνιμη ως προς το περιστρεφόμενο (και πλέον μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς.

Εάν το πρόβλημα που πρόκειται να εξομοιωθεί περιλαμβάνει στάτορα, περίβλημα ή κάποιο άλλο αντικείμενο το οποίο δεν περιστρέφεται, τότε το πρόβλημα δε μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας ένα περιστρεφόμενο και μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται σε προβλήματα στροβιλομηχανικής στα οποία ο δρομέας και ο στάτορας βρίσκονται σε μικρή απόσταση με αποτέλεσμα η αλληλεπίδρασή τους να καθίσταται σημαντική. Ο κώδικας FLUENT παρέχει τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση αυτής της κλάσης προβλημάτων:

- Το μοντέλο πολλαπλών συστημάτων αναφοράς (multiple reference frame-MRF)
- Το μοντέλο των επιπέδων ανάμιξης
- Το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος

Τα δύο πρώτα μοντέλα θεωρούν το ροϊκό πεδίο μόνιμο ενώ φαινόμενα όπως η αλληλεπίδραση δρομέα-στάτορα υπολογίζονται προσεγγιστικά. Η ακρίβεια των μοντέλων αυτών μπορεί να θεωρηθεί αποδεκτή όταν η αλληλεπίδραση των περιστρεφόμενων μερών με τα ακίνητα είναι ασθενής. Το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος θεωρεί τη ροή χρονικά μεταβαλλόμενη και συνεπώς εξομοιώνει τις εν λόγω αλληλεπιδράσεις με απόλυτη πιστότητα. Το μοντέλο αυτό επιλέγεται εφ' όσον απαιτείται ακριβέστερος υπολογισμός του πεδίου και στις περιπτώσεις κατά τις οποίες οι αλληλεπιδράσεις δρομέα-στάτορα είναι ισχυρές. Το γεγονός ότι το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος απαιτεί μη-μόνιμη αριθμητική επίλυση το καθιστά υπολογιστικά πιο απαιτητικό σε σχέση με το μοντέλο MRF ή το μοντέλο των επιπέδων ανάμιξης. Στην εργασία αυτή γίνεται χρήση του μοντέλου MRF και του μοντέλου του ολισθαίνοντος πλέγματος. Τα δύο αυτά μοντέλα θα παρουσιαστούν αναλυτικά στη συνέχεια.

#### 4.2.1 Ροή σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

Η μοντελοποίηση της ροής με τη χρήση του FLUENT γίνεται συνήθως σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (δηλ. σε ένα μη επιταχυνόμενο σύστημα συντεταγμένων). Το FLUENT έχει την ικανότητα να μοντελοποιήσει ροές σε ένα σύστημα υπό επιτάχυνση ενσωματώνοντας την επιτάχυνση στις εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή. Ένα σύνηθες παράδειγμα επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς είναι η ροή εντός περιστρεφόμενων μηχανών. Ροές αυτής της κατηγορίας μπορούν να μοντελοποιηθούν θεωρώντας ότι το σύστημα συντεταγμένων μετακινείται μαζί με τον περιστρεφόμενο εξοπλισμό και κατ' αυτόν τον τρόπο υφίσταται μια σταθερή επιτάχυνση κατά την ακτινική διεύθυνση.

Μερικά παραδείγματα προβλημάτων που μπορούν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς είναι:

- Πτερωτές σε δεξαμενές ανάμιξης
- Περιστρεφόμενα πτερύγια στροβιλομηχανών (φυγοκεντρικές αντλίες, αξονικοί ανεμιστήρες κλπ.)
- Ροές σε περιστρεφόμενες διαβάσεις (π.χ. κανάλια ψύξης, δευτερεύοντα κυκλώματα ροής αέρα, κοιλότητες σε περιστρεφόμενες μηχανές κλπ.)

Όταν προβλήματα που εντάσσονται στις ανωτέρω κατηγορίες ορίζονται σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, τα περιστρεφόμενα όρια καθίστανται ακίνητα σε σχέση με το περιστρεφόμενο σύστημα καθώς περιστρέφονται με την ίδια ταχύτητα με το σύστημα αναφοράς. Προβλήματα στα οποία το κινούμενο μέρος περικλείεται από ακίνητο περίβλημα και ταυτόχρονα αναμένεται ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ ρότορα και στάτορα δεν μπορούν να επιλυθούν με έναν απλό μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων.

#### 4.2.2 Εξισώσεις σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

Όταν οι εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά της ροής λύνονται σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση του ρευστού ενισχύεται από επιπρόσθετους όρους που εμφανίζονται στις εξισώσεις της ορμής. Ο κώδικας επιτρέπει την επίλυση προβλημάτων σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς χρησιμοποιώντας είτε την απόλυτη ταχύτητα  $\vec{v}$  είτε τη σχετική ταχύτητα  $\vec{v}_r$  ως την εξαρτώμενη μεταβλητή. Οι δύο αυτές ταχύτητες συνδέονται μέσω της σχέσεως:

$$\vec{v}_r = \vec{v} - (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (4.2.2.1)$$

όπου  $\vec{\Omega}$  είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας (δηλ. η γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς) και  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα θέσεως στο περιστρεφόμενο σύστημα.

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης της ορμής σε ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) \quad (4.2.2.2)$$

Για ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς και εφ' όσον χρησιμοποιηθεί η απόλυτη ταχύτητα, η προηγούμενη παράσταση γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla \cdot (\rho\vec{v}_r\vec{v}) + \rho(\vec{\Omega} \times \vec{v}) \quad (4.2.2.3)$$

Ενώ συναρτήσει των σχετικών ταχυτήτων η ίδια παράσταση γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}_r) + \nabla \cdot (\rho\vec{v}_r\vec{v}_r) + \rho(2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \rho \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \times \vec{r} \quad (4.2.2.4)$$

όπου  $\rho(2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r)$  είναι η δύναμη Coriolis. Ο όρος  $\rho \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \times \vec{r}$  δεν επιλύεται από το FLUENT με αποτέλεσμα ροές με μεταβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα δεν μοντελοποιούνται με ακρίβεια χρησιμοποιώντας τη διαμόρφωση της σχετικής ταχύτητας.

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, για ροές σε περιστρεφόμενα πεδία, γράφεται χρησιμοποιώντας την έννοια της σχετικής ταχύτητας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}_r) = S_m \quad (4.2.2.5)$$

Η διαμόρφωση κατά την οποία η ταχύτητα εκφράζεται στην απόλυτή της μορφή προτιμάται σε εφαρμογές στις οποίες η ροή στο μεγαλύτερο μέρος του πεδίου δεν περιστρέφεται (π.χ. ανεμιστήρας τοποθετημένος σε μεγάλο δωμάτιο). Η διαμόρφωση της σχετικής ταχύτητας είναι κατάλληλη όταν το μεγαλύτερο μέρος του ρευστού περιστρέφεται, όπως στην περίπτωση μιας πτερωτής σε δεξαμενή ανάμειξης.

### 4.2.3 Επίλυση σε ροή με περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

Οι δυσκολίες που παρουσιάζονται στην επίλυση προβλημάτων σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς είναι παρόμοιας φύσεως με τα αντίστοιχα προβλήματα για αξονομετρική περιδίνηση ή ροές υπό περιστροφή. Το βασικό πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί είναι ο υψηλός βαθμός

αλληλεπίδρασης των εξισώσεων της ορμής όταν η επίδραση των περιστροφικών όρων είναι μεγάλη. Η υψηλή ταχύτητα περιστροφής επιφέρει μια μεγάλη ακτινική κλίση στην πίεση η οποία κατευθύνει την ροή στην αξονική και ακτινική διεύθυνση. Κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργείται η κατανομή της περιδίνησης ή περιστροφής στο πεδίο. Η έντονη αλληλεπίδραση των εξισώσεων της ορμής είναι δυνατό να οδηγήσει σε αστάθειες στην επίλυση και συνεπώς απαιτείται ειδικός χειρισμός για την επίτευξη της σύγκλισης. Μερικές τεχνικές που μπορούν να υποβοηθήσουν είναι:

- Για τη σύνδεση των πεδίων ταχύτητας και πίεσης να χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος PRESTO η χρήση του οποίου ενδείκνυται για έντονες κλίσεις της πίεσης.
- Το πλέγμα πρέπει να είναι πυκνότερο έτσι ώστε να μπορούν να αναλυθούν επαρκώς οι μεγάλες κλίσεις της περιστροφικής ταχύτητας και της πίεσης.
- Οι συντελεστές υπο-χαλάρωσης των συνιστωσών της ταχύτητας πρέπει να κυμαίνονται μεταξύ του 0.3 και 0.5. Εν ανάγκη μπορούν να λάβουν και ακόμα μικρότερες τιμές.
- Προτείνεται η εκκίνηση των υπολογισμών να γίνεται με χαμηλή ταχύτητα περιστροφής η οποία σταδιακά θα αυξάνεται έως ότου προσεγγίσει την επιθυμητή τιμή. Η διαδικασία αυτή αναλυτικά έχει ως εξής:
  - ο Το πρόβλημα ρυθμίζεται αρχικά έτσι ώστε η ταχύτητα περιστροφής να έχει χαμηλή τιμή τόσο στις οριακές συνθήκες όσο και στα περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς. Μια ενδεικτική τιμή είναι το 10% της αντίστοιχης επιθυμητής.
  - ο Ακολουθεί η λύση του προβλήματος και αποθήκευση της.
  - ο Στη συνέχεια γίνεται διόρθωση των οριακών συνθηκών και της ταχύτητας περιστροφής στις υπό περιστροφή ζώνες. Η ταχύτητα περιστροφής διπλασιάζεται.
  - ο Συνεχίζονται οι υπολογισμοί και ως αρχική προσέγγιση του πεδίου λαμβάνεται η προηγούμενη λύση.

Η επαναληπτική αυτή διαδικασία συνεχίζεται έως ότου η ταχύτητα περιστροφής λάβει την πραγματική της τιμή.

#### 4.2.4 Το μοντέλο των πολλαπλών συστημάτων αναφοράς (MRF)

Το μοντέλο MRF αποτελεί την απλούστερη προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων στα οποία λαμβάνει χώρα μετακίνηση ή περιστροφή μια ζώνης. Αποτελεί μια μόνιμη ως προς το χρόνο προσέγγιση κατά την οποία κάθε ζώνη κελιών κινείται με διαφορετική μεταφορική ή περιστροφική ταχύτητα. Η προσέγγιση αυτή ενδείκνυται όταν η ροή στα όρια μεταξύ των ζωνών είναι σχεδόν ομοιόμορφη.

Παρά το γεγονός ότι το μοντέλο MRF δίδει μια προσεγγιστική λύση σε σχέση με τη πραγματική μορφή της ροής, είναι σε θέση να παρέχει μια ικανοποιητική προσέγγιση της μέσης χρονικά ροής

για πολλές εφαρμογές. Ένα παράδειγμα κλάσης εφαρμογών στις οποίες το μοντέλο MRF μπορεί να χρησιμοποιηθεί, είναι τα προβλήματα στροβιλομηχανικής στα οποία η αλληλεπίδραση δρομέα-στάτορα δεν είναι σημαντική. Ομοίως, σε δεξαμενές ανάμιξης όπου η αλληλεπίδραση της πτερωτής με τα τοιχώματα της δεξαμενής είναι ασθενής, δεν εμφανίζονται χρονικά μεταβαλλόμενα φαινόμενα μεγάλης κλίμακας με αποτέλεσμα να είναι αποδεκτή η χρήση του μοντέλου MRF. Γενικά, τα προβλήματα στα οποία η εμφάνιση χρονικά μεταβαλλόμενων φαινομένων δεν σχετίζεται με αλληλεπίδραση στάτορα-ρότορα, είναι υποψήφια για την υιοθέτηση του μοντέλου MRF.

Το μοντέλο MRF παρουσιάζει κατά τη χρήση του περιορισμούς οι οποίοι συνοψίζονται στα κατωτέρω:

- Η χρήση του μοντέλου τύρβης «realizable k-ε» δε συνίσταται
- Τα όρια τα οποία διαχωρίζουν τη μετακινούμενη περιοχή από τις γειτονικές πρέπει να έχουν διευθετηθεί κατά τέτοιον τρόπο έτσι ώστε η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο όριο να είναι μηδενική. Για μια περιστρεφόμενη ζώνη το σχήμα της πρέπει να είναι κυκλικό ενώ για μια ζώνη η οποία βρίσκεται σε μεταφορική κίνηση το διάνυσμα της ταχύτητας πρέπει να είναι παράλληλο με τα όρια της ζώνης.
- Η χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου θα δώσει λογικά αποτελέσματα μόνο για μόνιμες ροές. Ο κώδικας, παρ' όλα αυτά, επιτρέπει τη χρησιμοποίηση του και για χρονικά μεταβαλλόμενες ροές. Σε αυτή την περίπτωση οι όροι της χρονικά μεταβαλλόμενης ροής προστίθενται στις βασικές εξισώσεις μεταφοράς. Σε κάθε περίπτωση η χρήση του μοντέλου MRF πρέπει να γίνεται με περίσκεψη λαμβανομένου υπόψη ότι το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος θα δώσει ακριβέστερα αποτελέσματα για μη μόνιμη ροή.
- Δεν επιτρέπεται η μεταβολή της γωνιακής και της μεταφορικής ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου.

#### 4.2.4.a Διαμόρφωση του μοντέλου MRF

Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται το μοντέλο διαφοροποιείται ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται η ταχύτητα στις υπό μετακίνηση ζώνες, δηλαδή αυτή διατυπώνεται σε σχετική ή απόλυτη μορφή.

##### *Διαμόρφωση όταν η ταχύτητα εκφράζεται σε σχετική μορφή*

Η εφαρμογή του μοντέλου MRF στο FLUENT προϋποθέτει τη διαίρεση του υπολογιστικού πεδίου σε υπο-πεδία. Κάθε ένα από αυτά τα υπο-πεδία είναι δυνατό να είναι ακίνητο ή να εκτελεί μεταφορική ή περιστροφική κίνηση σε σχέση ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Οι βασικές

εξισώσεις σε κάθε υπο-πεδίο εκφράζονται συναρτήσει του τύπου του συστήματος αναφοράς του υπο-πεδίου. Συνεπώς, η ροή σε σταθερά και μεταφερόμενα υπο-πεδία εκφράζεται από τις γνωστές βασικές εξισώσεις (εξισώσεις Navier-Stokes) ενώ για υπο-πεδία τα οποία περιστρέφονται οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή είναι αυτές που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

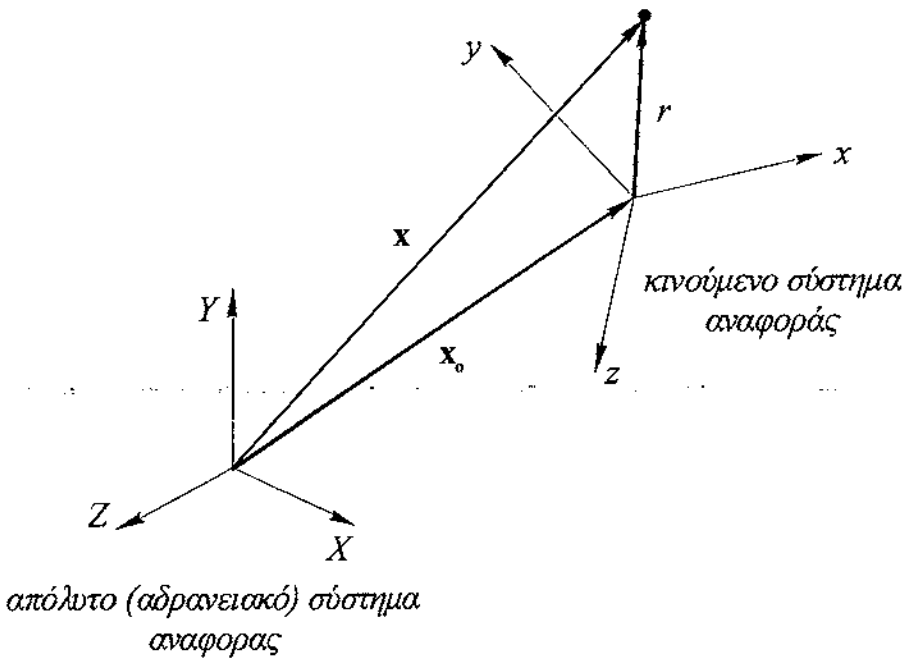
Στα όρια μεταξύ δύο υπο-πεδίων, ο υπολογισμός των όρων της διάχυσης (και πιθανόν άλλοι) στις βασικές εξισώσεις της ροής ενός υπο-πεδίου απαιτεί τη γνώση της τιμής της ταχύτητας στο γειτονικό υπο-πεδίο. Η εφαρμογή της εξίσωσης της συνέχειας για την απόλυτη τιμή της ταχύτητας χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συνοριακής τιμής για το υπο-πεδίο που εξετάζεται.

Όταν χρησιμοποιείται η διατύπωση της ταχύτητας στη σχετική της μορφή, οι ταχύτητες σε κάθε υπο-πεδίο υπολογίζονται σε σχέση με τη κίνηση που εκτελεί κάθε ένα από αυτά. Οι τιμές των ταχυτήτων και των κλίσεων της μετατρέπονται για ένα απόλυτο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων σύμφωνα με τα κατωτέρω.

Το διάνυσμα θέσης ενός σημείου σε σχέση με την αρχή του άξονα περί του οποίου περιστρέφεται η υπό μελέτη ζώνη ορίζεται ως:

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

όπου  $\vec{x}$  είναι η θέση του σημείου σε απόλυτες καρτεσιανές συντεταγμένες και  $\vec{x}_0$  είναι η αρχή του άξονα περιστροφής της ζώνης (βλ. σχήμα 4.1)



Σχήμα 4.1: Σχέση κινούμενου-αδρανειακού συστήματος αναφοράς

Η σχετική ταχύτητα στην περιστρεφόμενη ζώνη μπορεί να γραφεί για ένα απόλυτο σύστημα αναφοράς χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{u}_i$$

όπου  $\vec{v}$  είναι η ταχύτητα στο απόλυτο αδρανειακό σύστημα αναφοράς,  $\vec{v}_r$  είναι η ταχύτητα στο σχετικό και μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς και  $\vec{u}_i$  είναι η μεταφορική ταχύτητα σε ένα μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό για την απόλυτη ταχύτητα, η κλίση της δίδεται από την εξίσωση:

$$\nabla \vec{v} = \nabla \vec{v}_r + \nabla (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

*Διαμόρφωση όταν η ταχύτητα εκφράζεται σε απόλυτη μορφή*

Όταν η ταχύτητα εκφράζεται σε απόλυτη μορφή, οι βασικές εξισώσεις της ροής σε κάθε υπο-πεδίο λύνονται ανάλογα με το σύστημα αναφοράς σε αυτό. Παρ' όλα οι ταχύτητες αποθηκεύονται στην απόλυτη μορφή τους και έτσι δεν απαιτείται ειδικός μετασχηματισμός στη διεπιφάνεια την ευρισκόμενη ανάμεσα σε δύο υποπεδία.

#### 4.2.5 Το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος

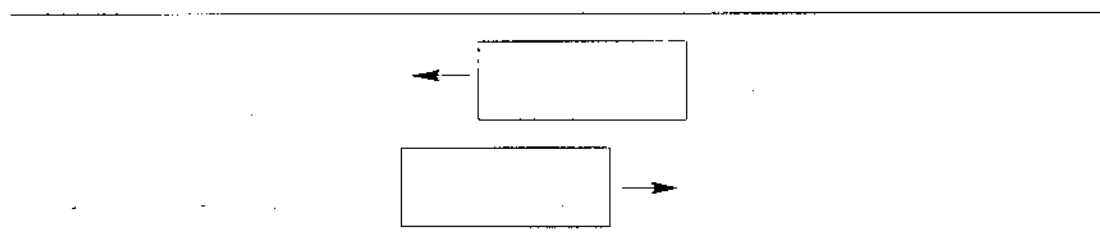
Στις περιπτώσεις για τις οποίες απαιτείται μια χρονικά ακριβής λύση για την αλληλεπίδραση δρομέα-στάτορα (και όχι μια μέση χρονικά λύση), ενδείκνυται η χρήση του μοντέλου του ολισθαίνοντος πλέγματος για τον υπολογισμό του ασταθούς πεδίου. Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος αποτελεί την ακριβέστερη προσέγγιση για την εξομοίωση ροών σε πολλαπλά κινούμενα συστήματα αναφορών αλλά ταυτόχρονα και το πιο δαπανηρό όσον αφορά τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο.

Στις πλείστες των περιπτώσεων, μια μη-μόνιμη λύση ενός προβλήματος το οποίο εξομοιώνεται με χρήση του μοντέλου του ολισθαίνοντος πλέγματος είναι χρονικά περιοδική. Δηλαδή, η χρονικά μεταβαλλόμενη λύση επαναλαμβάνεται με μια περίοδο η οποία σχετίζεται με το πεδίο ταχυτήτων. Παρ' όλα αυτά είναι δυνατή η λύση και άλλων μορφών χρονικά μεταβαλλόμενων προβλημάτων όπως ζώνες με ολισθαίνοντα πλέγματα που εκτελούν μεταφορική κίνηση (π.χ. δύο αυτοκίνητα ή τραίνα τα οποία περνούν μέσα από μια σήραγγα βλ. σχ. 4.2)

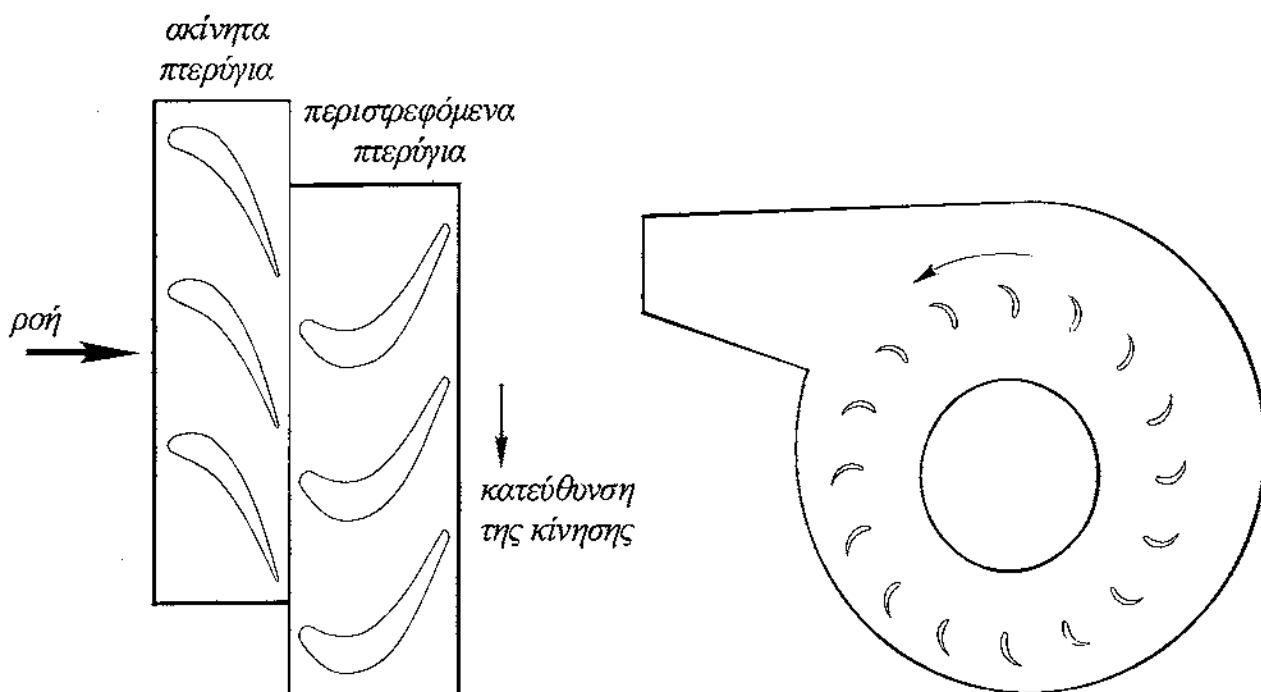
Για καταστάσεις της ροής στις οποίες δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ μετακινούμενων και ακίνητων μερών (π.χ. όταν εξομοιώνεται μόνο ο δρομέας), το υπολογιστικό πεδίο μπορεί να



θεωρηθεί ακίνητο χρησιμοποιώντας ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Στο σχήμα 4.3 δείχνονται παραδείγματα εφαρμογών στα οποία υπάρχει αλληλεπίδραση στάτορα-δρομέα και για τα οποία μπορεί να ληφθεί μια χρονικά μεταβαλλόμενη λύση χρησιμοποιώντας το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος.



Σχήμα 4.2: Αντικείμενα που εκτελούν μεταφορική κίνηση

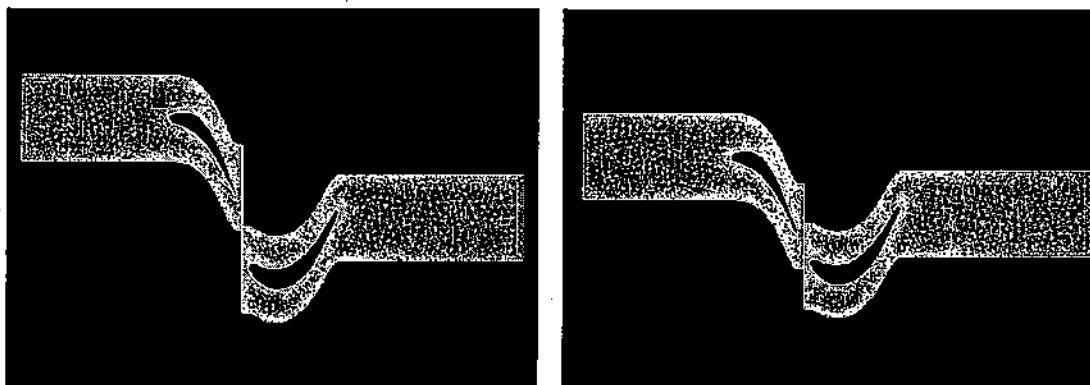


Σχήμα 4.3: Παραδείγματα εφαρμογών με ισχυρή αλληλεπίδραση στάτορα-ρότορα

#### 4.2.5.a Η τεχνική του ολισθαίνοντος πλέγματος

Η χρήση της τεχνικής του ολισθαίνοντος πλέγματος απαιτεί την ύπαρξη δύο η περισσότερων ζωνών κελιών. Κάθε ζώνη κελιών περιβάλλεται από μια τουλάχιστον διεπιφανειακή ζώνη η οποία παρεμβάλλεται μεταξύ δυο γειτονικών ζωνών κελιών. Οι διεπιφανειακές ζώνες δύο γειτονικών ζωνών κελιών συνδέονται μεταξύ σχηματίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο ένα διεπιφανειακό πλέγμα. Δύο τέτοιες οι οποίες κινούνται σχετικά η μια προς την άλλη «ολισθαίνουν» κατά μήκος του

διεπιφανειακού πλέγματος (σημείωση: Το πλέγμα στη διεπιφάνεια πρέπει να τοποθετηθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχουν κελιά ρευστού και από τις δύο πλευρές του. Παραδείγματος χάριν, το διεπιφανειακό πλέγμα στο σχήμα 4.4 πρέπει να τοποθετηθεί στην περιοχή του ρευστού που βρίσκεται ανάμεσα στο στάτορα και το δρομέα).



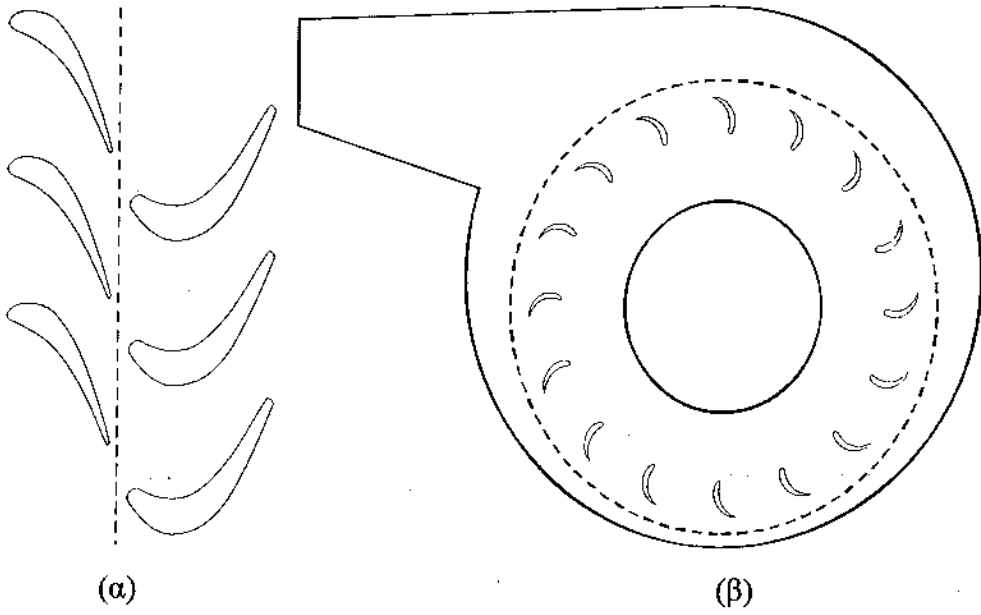
**Σχήμα 4.4:** Ζώνες πεδίου οι οποίες εκτελούν μεταφορική κίνηση και διαχωρίζονται με διεπιφανειακό πλέγμα

Κατά τη διάρκεια των υπολογισμών, οι ζώνες κελιών του πεδίου ολισθαίνουν (δηλ. εκτελούν μεταφορική ή περιστροφική κίνηση) σε σχέση η μια με την άλλη κατά μήκος της διεπιφάνειας με διακριτά βήματα. Στο σχήμα 4.4 φαίνεται (α) η αρχική θέση δύο πλεγμάτων και (β) η θέση τους μετά μερικά βήματα κατά τα οποία έχει εκτελεστεί μεταφορική κίνηση. Κατά τη διάρκεια της περιστροφής ή μετακίνησης, δεν απαιτείται ταύτιση των κόμβων της διεπιφάνειας. Καθώς η ροή είναι εγγενώς ασταθής, είναι απαραίτητη μια χρονικά εξαρτώμενη λύση.

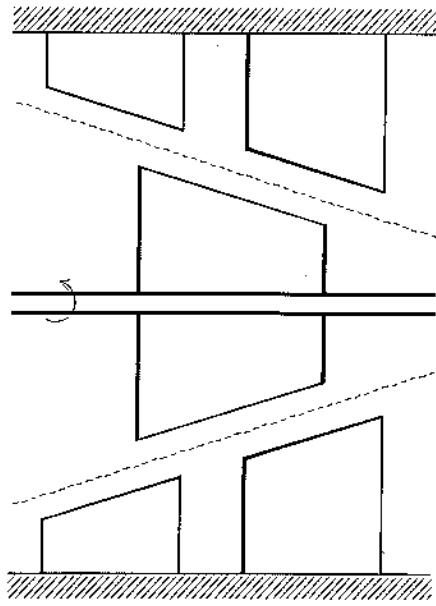
#### 4.2.5.b Μορφή του διεπιφανειακού πλέγματος

Το διεπιφανειακό πλέγμα και οι συνδεδεμένες με αυτό ζώνες μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε σχήμα με την προϋπόθεση ότι τα όρια των δύο ζωνών στη διεπιφάνεια βασίζονται στην ίδια γεωμετρία. Στο σχήμα (4.5) που ακολουθεί απεικονίζονται ένα γραμμικό και ένα κυκλικό διεπιφανειακό πλέγμα (η διεπιφάνεια δείχνεται με διακεκομμένη γραμμή).

Η εξώθηση του σχήματος (4.5α) στο χώρο θα έδινε μια επίπεδη ολισθαίνουσα διεπιφάνεια ενώ η αντίστοιχη εξώθηση του σχήματος (4.5β) θα έδινε μια ολισθαίνουσα διεπιφάνεια με μορφή κυλίνδρου. Το σχήμα 4.6 απεικονίζει μια άλλη πιθανή διαμόρφωση στην οποία η διεπιφάνεια έχει κωνικό σχήμα (οι κεκλιμένες διακεκομμένες γραμμές αναπαριστούν την τομή της κωνικής διεπιφάνειας με ένα δισδιάστατο επίπεδο).

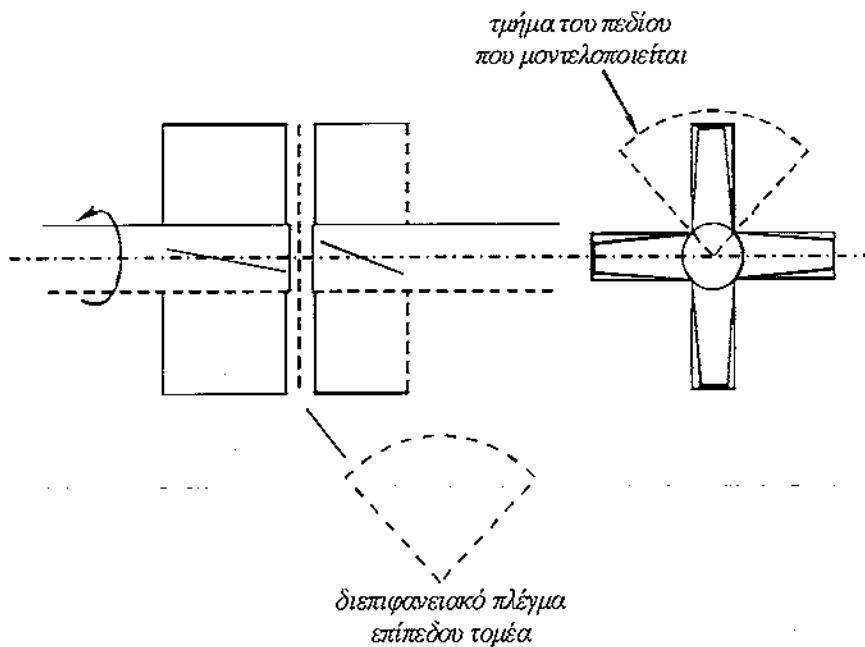


**Σχήμα 4.5:** (α) γραμμικό διεπιφανειακό πλέγμα (β) κυκλικό διεπιφανειακό πλέγμα



**Σχήμα 4.6:** Κωνική διεπιφάνεια

Για μια διαμόρφωση η οποία περιλαμβάνει έναν αξονικό δρομέα και στάτορα και στην οποία τα σταθερά και περιστρεφόμενα μέρη είναι αξονικά ευθυγραμμισμένα (και όχι έκκεντρα) η διεπιφάνεια θα έχει τη μορφή ενός επίπεδου κυκλικού τομέα. Ο κυκλικός αυτός τομέας είναι μια κάθετη τομή του πεδίου σε μια διαμήκη θέση ευρισκόμενη ανάμεσα στο δρομέα και το στάτορα (βλ. σχ. 4.7).



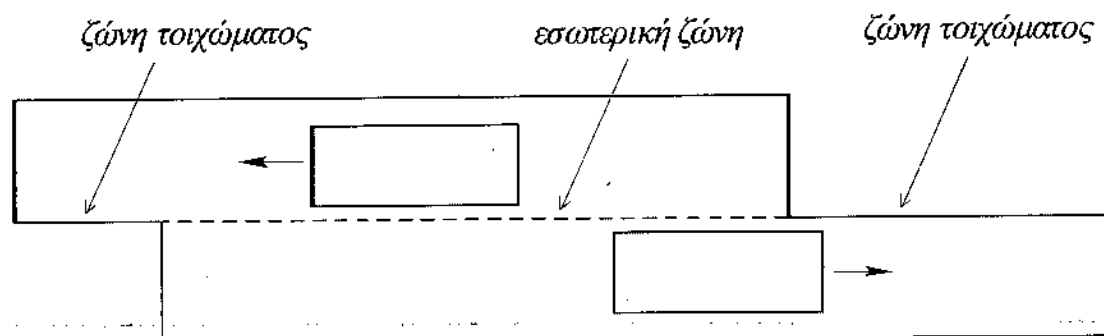
**Σχήμα 4.7:** Διεπιφανειακό πλέγμα σε τρισδιάστατο κυκλικό τομέα

#### 4.2.5.c Η θεωρία του ολισθαίνοντος πλέγματος

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο το μοντέλο του ολισθαίνοντος πλέγματος επιτρέπει σε γειτονικά πλέγματα να μετακινούνται το ένα σχετικά στο άλλο. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι πλευρές των κελιών του πλέγματος δε χρειάζεται να είναι ευθυγραμμισμένες κατά μήκος του διεπιφανειακού πλέγματος. Η συγκεκριμένη διαδικασία που ακολουθείται απαιτεί την ύπαρξη μιας μεθοδολογίας για τον υπολογισμό των ροών δια μέσου δύο μη σύμμορφων διεπιφανειακών ζωνών κάθε διεπιφανειακού πλέγματος.

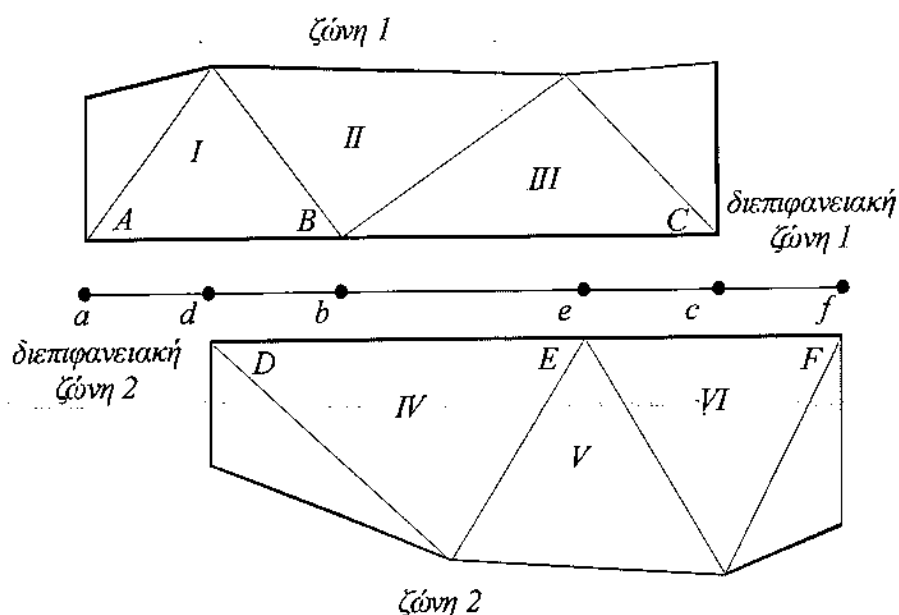
Για τον υπολογισμό των ροών στη διεπιφάνεια, καθορίζεται η τομή των δύο ζωνών που βρίσκονται εκατέρωθεν της διεπιφάνειας σε κάθε χρονικό βήμα. Το αποτέλεσμα αυτής της τομής είναι μια εσωτερική ζώνη (μια ζώνη η οποία έχει κελιά ρευστού σε κάθε της πλευρά) και μια ή περισσότερες περιοδικές ζώνες. Εάν το πρόβλημα δεν είναι περιοδικό, η τομή παράγει μια εσωτερική ζώνη και ένα ζεύγος ζωνών τοιχώματος (το οποίο θα είναι κενό εάν οι δύο ζώνες εφάπτονται ακριβώς) όπως δείχνεται στο σχήμα 4.8 (θα χρειαστεί να αλλάξει ο τύπος αυτών των ζωνών σε κάποιον άλλο κατάλληλο τύπο οριακής συνθήκης). Η προκύπτουσα εσωτερική ζώνη αντιστοιχεί στην περιοχή όπου οι δύο ζώνες επικαλύπτονται. Η περιοδική ζώνη που προκύπτει αντιστοιχεί στην περιοχή όπου δεν επικαλύπτονται. Ο αριθμός των επιφανειών των κελιών στις ζώνες που προκύπτουν από την τομή μεταβάλλεται καθώς κάθε ζώνη κινείται σχετικά με την άλλη. Επί το πλείστον, οι ροές διαμέσου του διεπιφανειακού πλέγματος υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις πλευρές των κελιών

που προκύπτουν από την τομή των δύο ζωνών εκατέρωθεν της διεπιφάνειας, παρά από τις ίδιες τις διεπιφανειακές ζώνες.



**Σχήμα 4.8:** Ζώνες που δημιουργούνται από την τομή των διεπιφανειών για μη περιοδικό πρόβλημα

Στο παράδειγμα που δείχνεται στο σχήμα 4.9, οι διεπιφανειακές ζώνες συνίσταται από τις πλευρές των κελιών A-B και B-C (ζώνη 1) και από τις πλευρές D-E και E-F. Η τομή αυτών των ζωνών οδηγεί στη δημιουργία των επιφανειών a-d, d-b, b-e κλπ. Οι επιφάνειες που αντιστοιχούν στις περιοχές που επικαλύπτονται (d-b, b-e και e-c) ομαδοποιούνται με σκοπό τη δημιουργία μιας εσωτερικής ζώνης ενώ οι υπολειπόμενες επιφάνειες συνδυάζονται για να σχηματίσουν μια περιοδική ζώνη. Παραδείγματος χάριν, για να υπολογιστούν οι ροές διαμέσου της διεπιφάνειας στο κελί IV, αγνοείται η πλευρά D-E και αντί αυτής χρησιμοποιούνται οι πλευρές d-b και b-e, μεταφέροντας πληροφορίες στο κελί IV από τα κελιά I και III αντίστοιχα.



**Σχήμα 4.9:** Δισδιάστατο διεπιφανειακό πλέγμα

#### 4.2.5.d Ρύθμιση των παραμέτρων και επίλυση ενός προβλήματος με τη χρήση του μοντέλου του ολισθαίνοντος πλέγματος

##### *Απαιτήσεις του πλέγματος*

Προτού γίνει η ρύθμιση των παραμέτρων του προβλήματος πρέπει να γίνει έλεγχος για το κατά πόσο το πλέγμα πληροί τις ακόλουθες απαιτήσεις:

- Για κάθε ζώνη του πεδίου που ολισθαίνει με διαφορετική ταχύτητα πρέπει να υφίσταται μια διακριτή ζώνη.
- Το διεπιφανειακό πλέγμα πρέπει να είναι τοποθετημένο κατάλληλα έτσι ώστε η κίνηση που εκτελείται να είναι εφαπτομενική προς αυτό.
- Το διεπιφανειακό πλέγμα μπορεί να είναι οποιουδήποτε σχήματος αρκεί οι δύο ζώνες εκατέρωθεν αυτού να έχουν την ίδια γεωμετρία. Εάν υπάρχουν αιχμηρά χαρακτηριστικά πρέπει και οι δύο ζώνες να ακολουθούν το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.
- Εάν δημιουργηθεί ένα πλέγμα το οποίο περιέχει πολλαπλές ζώνες κελιών, πρέπει η κάθε ζώνη κελιών είναι σε άμεση γειτονία με μια ολισθαίνουσα ζώνη να συνορεύει με αυτή μέσω μιας διακριτής επιφανειακής ζώνης. Οι επιφανειακές ζώνες για δύο γειτονικές ζώνες κελιών πρέπει να έχουν την ίδια θέση και σχήμα και να βρίσκονται σε άμεση αντιστοιχία. Είναι, επίσης, δυνατό να δημιουργηθεί ένα ξεχωριστό αρχείο πλέγματος για κάθε ζώνη και στη συνέχεια να ακολουθήσει συγχώνευσή τους.
- Εάν το υπό εξομοίωση πρόβλημα περιλαμβάνει γεωμετρία δρομέα/στάτορα η οποία παρουσιάζει περιοδικότητα, η περιοδική γωνία του πλέγματος περί των πτερυγίων του δρομέα πρέπει να είναι ίδιου μεγέθους με την αντίστοιχη γωνία του πλέγματος για το σταθερό τμήμα.
- Όλες οι περιοδικές ζώνες πρέπει να είναι ορθά προσανατολισμένες προτού δημιουργηθεί το διεπιφανειακό πλέγμα.

Για τρισδιάστατα προβλήματα, εάν η διεπιφάνεια είναι περιοδική, μόνο ένα ζεύγος περιοδικών συνόρων μπορούν να βρίσκονται πλησίον της διεπιφάνειας.

##### *Ρύθμιση των απαραίτητων παραμέτρων για τη χρήση του μοντέλου*

Τα βήματα που απαιτούνται για να είναι δυνατή η χρήση του μοντέλου είναι τα εξής:

- 1 Ενεργοποίηση της επιλογής για τη μοντελοποίηση ασταθούς ροής.
- 2 Ορισμός οριακών συνθηκών για τη ενέργεια της ολίσθησης.
  - Μεταβολή του τύπου της ζώνης για τις διεπιφανειακές ζώνες στον τύπο *διεπιφάνεια*
  - Για τις κινούμενες ρευστές ή στερεές ζώνες ο τύπος της ζώνης που πρέπει να επιλεγεί είναι αυτός του κινούμενου πλέγματος (*moving mesh*). Ορίζεται επίσης η περιστροφική ή

η μεταφορική ταχύτητα (μια στερεά ζώνη δε μπορεί να κινείται με διαφορετική ταχύτητα από αυτή της ζώνης του ρευστού). Ταυτόχρονη μεταφορική και περιστροφική ταχύτητα μπορεί μόνο να μοντελοποιηθεί εφ' όσον ο άξονας της περιστροφής ταυτίζεται με τη διεύθυνση κατά την οποία εκτελείται η μεταφορική κίνηση.

Εξ' ορισμού η ταχύτητα ενός τοιχώματος ορίζεται ως μηδενική σε σχέση με τη κίνηση του παρακείμενου πλέγματος. Για τοιχώματα τα οποία περικλείουν ένα κινούμενο πλέγμα η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με αυτή της μη-ολίσθησης στο πλαίσιο αναφοράς του πλέγματος. Συνεπώς, οι οριακές συνθήκες του τοιχώματος δε χρειάζονται τροποποίηση εκτός εάν το τοίχωμα είναι ακίνητο σε σχέση με το απόλυτο σύστημα αναφοράς δηλ. κινούμενο σε σχέση με το αντίστοιχο κινούμενο σύστημα.

### 3 Ορισμός των διεπιφανειακών πλεγμάτων

- Αρχικά δίδεται μια ονομασία για τη διεπιφάνεια
- Καθορίζονται στη συνέχεια οι δύο διεπιφανειακές ζώνες που συνιστούν το διεπιφανειακό πλέγμα.
- Καθορίζεται ο τύπος της διεπιφάνειας εάν αυτό είναι απαραίτητο. Οι δύο διαθέσιμες επιλογές είναι:
  - περιοδικός τύπος (για περιοδικά προβλήματα).
  - τύπος σύζευξης (εάν η διεπιφάνεια κείται ανάμεσα σε μια στερεά και μια ρευστή ζώνη).
- Δημιουργείται το διεπιφανειακό πλέγμα εφ' όσον έχουν ολοκληρωθεί επιτυχώς τα προηγούμενα βήματα.

Για όλους τους τύπους των διεπιφανειών ο κώδικας θα δημιουργήσει οριακές ζώνες για τη διεπιφάνεια το είδος των οποίων μπορεί να μεταβληθεί στη συνέχεια. Εάν έχει επιλεγθεί ο τύπος σύζευξης, ο κώδικας θα δημιουργήσει ζώνες τοιχώματος για τη διεπιφάνεια.

Με την ολοκλήρωση των ρυθμίσεων του προβλήματος, πρέπει να αποθηκευθεί η αρχική περίπτωση (case file) έτσι ώστε η επιστροφή στην αρχική κατάσταση να είναι εύκολη. Η θέση του πλέγματος αποθηκεύεται στο αρχείο περίπτωσης, με αποτέλεσμα αρχεία που αποθηκεύονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια των μη-μόνιμων υπολογισμών να περιέχουν πλέγματα σε διαφορετικές θέσεις.

### *Επίλυση του προβλήματος*

Η εκκίνηση της επίλυσης γίνεται με αρχικοποίηση του πεδίου ενώ στη συνέχεια καθορίζεται το χρονικό βήμα και ο αριθμός των χρονικών βημάτων. Ο κώδικας θα εκτελέσει τους υπολογισμούς για το τρέχον χρονικό βήμα έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση ή προσεγγιστεί ο μέγιστος αριθμός

επαναλήψεων που έχει τεθεί. Όταν γίνει η μετάβαση στο επόμενο χρονικό βήμα, οι ζώνες κελιών και τοιχωμάτων θα μετακινηθούν αυτόματα σύμφωνα με τις προκαθορισμένες ταχύτητες περιστροφής ή μεταφοράς. Οι νέες τομές διεπιφανειών-ζωνών θα υπολογιστούν αυτόματα και οι προκύπτουσες εσωτερικές, περιοδικές ή εξωτερικές ζώνες θα ενημερωθούν.

### Χρονικά περιοδικές λύσεις

Για μερικά προβλήματα (όπως αλληλεπίδραση δρομέα-στάτορα) μπορεί να απαιτηθεί μια χρονικά περιοδική λύση. Δηλαδή, η χρονικά μεταβαλλόμενη συμπεριφορά της ροής κατά την εκκίνηση δεν εξετάζεται. Όταν η φάση της εκκίνησης περατωθεί, η ροή θα επιδείξει περιοδικότητα ως προς το χρόνο. Εάν  $T$  είναι η περίοδος, τότε για κάποια ποσότητα της ροής  $\phi$  σε ένα δεδομένο σημείο του πεδίου θα ισχύει:

$$\phi(t) = \phi(t + NT) \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

Για προβλήματα περιστροφής, η περίοδος μπορεί να υπολογιστεί διαιρώντας τη γωνία τομέα του πεδίου (rad) με την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα (rad/sec):

$$T = \theta / \Omega$$

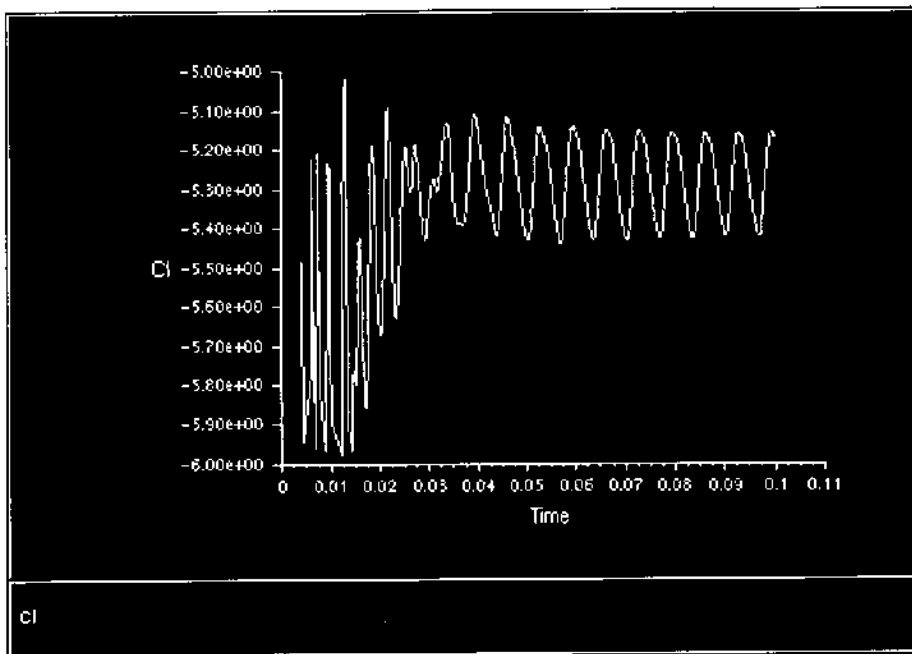
Για δισδιάστατα προβλήματα στροβιλομηχανών, η περίοδος θα είναι:

$$T = P / v_b$$

όπου,  $P$ , το βήμα της πτέρυγας και  $v_b$  είναι η ταχύτητα της πτέρυγας. Ο αριθμός των χρονικών βημάτων εντός μιας περιόδου μπορούν να προσδιοριστεί διαιρώντας την περίοδο με το χρονικό βήμα. Όταν το πεδίο που προκύπτει από τη λύση δε μεταβάλλεται από περίοδο σε περίοδο (ή η μεταβολή είναι μικρή π.χ. 5%) τότε έχει προσεγγιστεί μια χρονικά περιοδική λύση.

Για την εύρεση της χρονικής μεταβολής της λύσης, πρέπει να γίνει σύγκριση της λύσης σε κάποιο σημείο του πεδίου για δύο περιόδους. Παραδείγματος χάριν, εάν η περίοδος είναι 10sec και η χρονική στιγμή για την οποία πραγματοποιείται δειγματοληψία είναι  $t_1 = 22\text{sec}$  τότε ο έλεγχος πρέπει να γίνει όταν  $t_2 = 32\text{sec}$ . Εάν δεν έχει επιτευχθεί λύση τότε η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου επέλθει η περιοδική σύγκλιση. Η παρακολούθηση των μεταβολών μπορεί να γίνει, πέραν των βαθμωτών που μεταφέρονται και για λοιπές ιδιότητες του πεδίου όπως οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης ή η μαζική παροχή κλπ. Στο σχήμα 4.10 φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή ανώσεως για μια χρονικά περιοδική λύση.





**Σχήμα 4.10:** Χρονική μεταβολή του συντελεστή ανώσεως

Η τελική περιοδική λύση είναι ανεξάρτητη των χρονικών βημάτων που απαιτούνται για το αρχικό στάδιο της επίλυσης. Συνεπώς, μπορούν να οριστούν μεγάλα χρονικά βήματα έως ότου ξεπεραστεί η αρχική φάση της λύσης για την περίπτωση όπου δεν υπάρχει ενδιαφέρον για την αρχική μεταβατική κατάσταση της ροής. Κατ' αυτόν τον τρόπο η περιοδικότητα της ροής επέρχεται ταχύτερα. Όταν η ροή αρχίσει να γίνεται περιοδική, μπορεί να μειωθεί το χρονικό βήμα έτσι ώστε να ληφθεί μια χρονικά ακριβέστερη λύση.

Για την περίπτωση κατά την οποία έχει επιλεγεί δευτέρας τάξεως ακρίβεια ως προς το χρόνο, η χρονική ακρίβεια θα επηρεαστεί ένα μεταβληθεί το χρονικό βήμα κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Η μεταβολή του χρονικού βήματος δεν πρέπει να υπερβαίνει το 20% σε σχέση με την αρχική τιμή. Επίσης το χρονικό βήμα δεν πρέπει να μεταβληθεί καθόλου κατά τις τελευταίες επαναλήψεις έτσι ώστε να επιβεβαιωθεί το γεγονός ότι η λύση έχει προσεγγίσει μια χρονικά περιοδική λύση.

### 4.3 Γεωμετρία και πλέγμα του προβλήματος

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η εξομοίωση του δρομέα έγινε τόσο στο χώρο όσο και στις δύο διαστάσεις. Η κάθε μια από τις δύο προσεγγίσεις που ακολουθήθηκαν έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Εκ, τούτου κατέστη αναγκαία η υλοποίηση δύο διαφορετικών διαμορφώσεων γεωμετρίας και πλέγματος. Για κάθε μια από αυτές, τα κριτήρια σχεδιασμού που ελήφθησαν υπόψη διαφοροποιήθηκαν ανάλογα με τα ζητούμενα της κάθε περίπτωσης. Στην

παράγραφο αυτή θα αναλυθεί η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη δημιουργία της γεωμετρίας και του πλέγματος που χρησιμοποιήθηκαν για αναλύσεις. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν ο προ-επεξεργαστής GAMBIT 2.0 του κώδικα FLUENT.

#### 4.3.1 Απαιτήσεις από τη γεωμετρία και το πλέγμα

Η ακρίβεια μιας ανάλυσης CFD επηρεάζεται από πλήθος παραγόντων. Ένας από τους βασικούς παράγοντες που καθορίζουν την πιστότητα των εξαγόμενων είναι η γεωμετρία του πεδίου και κατ'επέκταση το υπολογιστικό πλέγμα το οποίο «κτίζεται» πάνω σε αυτή. Η ακρίβεια με την οποία παριστάνεται το φυσικό αντικείμενο καθορίζει εν πολλοίς και την ακρίβεια των εξαγόμενων. Θα πρέπει φυσικά να υπάρχει ισορροπία στην ποσότητα των λεπτομερειών που θα αποτυπωθούν στη γεωμετρία του προβλήματος. Πιστή αποτύπωση της πραγματικής γεωμετρίας συνεπάγεται αύξηση του χρόνου που απαιτείται για την προετοιμασία του πλέγματος αλλά και αυξημένο υπολογιστικό κόστος για την επίλυση του προβλήματος. Η υπεραπλούστευση της γεωμετρίας, όμως, είναι δυνατό να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα ιδίως αν η γεωμετρία στερείται βασικών χαρακτηριστικών που διαμορφώνουν το τελικό αποτέλεσμα.

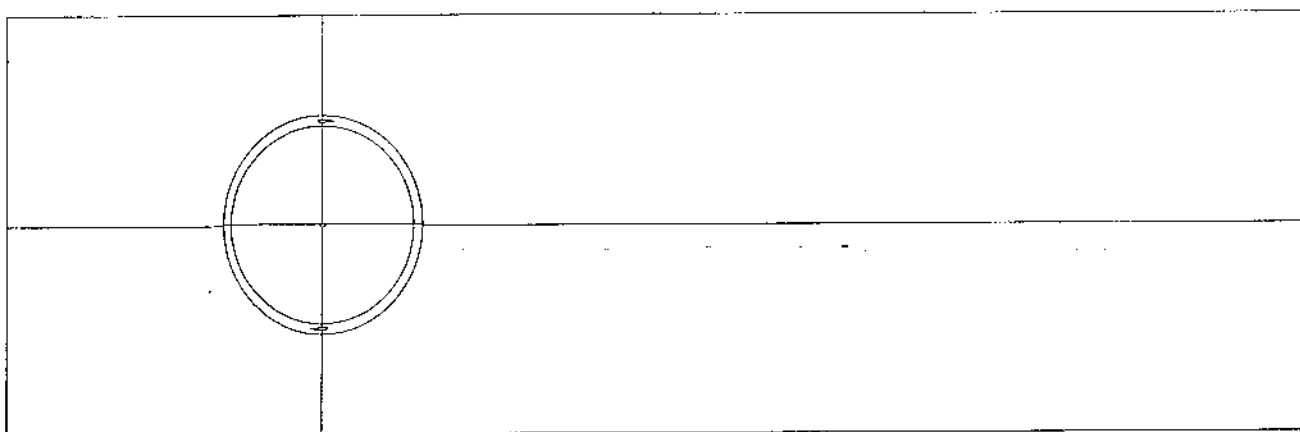
Στη δημιουργία του πλέγματος και της γεωμετρίας και για τις δύο περιπτώσεις ακολουθήθηκε ή «μέση οδός». Μοντελοποιήθηκαν τα δύο βασικά μέρη του δρομέα που επηρεάζουν την αεροδυναμική του, η πτερύγωση και ο πύργος στήριξης της. Κατ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η μελέτη της επίδρασης διαφόρων αεροδυναμικών διαμορφώσεων (τύπος αεροτομής, διάμετρος και ύψος του δρομέα, λόγος ταχύτητας ακροπτερυγίου και στιβαρότητα του δρομέα κτλ.) αλλά και η αλληλεπίδραση της πτερύγωσης με το δρομέα. Δευτερεύοντα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (λεπτομέρειες του πύργου στήριξης, βραχίονες συγκράτησης της πτερύγωσης κλπ.) δε μοντελοποιήθηκαν καθώς θα απαιτούσε, πέραν του επιπρόσθετου χρόνου σχεδιασμού, πυκνότερο πλέγμα στις περιοχές αυτές άρα και μεγαλύτερους υπολογιστικούς πόρους. Προτιμήθηκε η κατανομή του πλέγματος να γίνει σε περιοχές άμεσου αεροδυναμικού ενδιαφέροντος. Εξ' άλλου, τα δευτερεύοντα γεωμετρικά χαρακτηριστικά διαφοροποιούνται για κάθε κατασκευαστή και δεν αποτελούν συνήθως κοινό χαρακτηριστικό όλων των δρομέων αυτού του τύπου.

Ως περιοχές άμεσου ενδιαφέροντος είναι αυτές που επηρεάζουν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Πρέπει να ξεκαθαριστεί ότι καθώς η χωρητικότητα ενός υπολογιστικού συστήματος και η επεξεργαστική του ικανότητα είναι πεπερασμένου μεγέθους πρέπει εξαρχής να καθοριστεί το μέρος του πεδίου το οποίο θα μελετηθεί. Φυσικά, είναι επιθυμητή μια πλήρης ανάλυση του δρομέα αλλά τα πρακτικά όρια που αναφέρθηκαν προηγουμένως καθιστούν αυτήν την επιλογή αδύνατη. Το πλήθος των προβλημάτων τα οποία χρήζουν συστηματικής μελέτης και συνδέονται με ένα δρομέα

Α/Γ κατακόρυφου άξονα είναι πολλά. Περιληπτικά μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής: αεροδυναμική του δρομέα, απόρευμα του δρομέα, αλληλεπίδραση δρομέα-στάτορα, αλληλεπίδραση πολλών δρομέων χωροθετημένων σε αιολικό πάρκο κλπ. Αντικείμενο της παρούσης εργασίας είναι η αεροδυναμική του δρομέα. Είναι αναμενόμενη η εστίαση του ενδιαφέροντος στα πτερύγια του δρομέα καθώς αυτά αποτελούν το βασικό μηχανισμό δια των οποίων εξάγεται η ενέργεια από τον άνεμο και μετατρέπεται σε μορφή εύκολα εκμεταλλεύσιμη. Επίσης καθώς τα πτερύγια περιστρέφονται, στη νοητή ζώνη που σχηματίζεται από την περιστροφή της πτέρυγας κατανέμονται περισσότερα κελιά. Στην περιοχή ανάμεσα στον πύργο στήριξης και τη ζώνη περιστροφής σκεδάζεται το απόρευμα μιας εκ των πτερύγων που βρίσκεται στην ανάντη πλευρά. Το μέρος αυτό του πεδίου προσπίπτει στην κατάντη πτέρυγα και οδηγεί στην εμφάνιση του φαινομένου της δυναμικής απώλειας στήριξης. Καθώς το φαινόμενο αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό και δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί μέσω των κλασικών αναλυτικών μεθοδολογιών, καλή ανάλυση της περιοχής αυτής θα βοηθήσει στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τη φύση της ροής αλλά και βελτιώσει στην ακρίβεια των υπολογισμών.

#### 4.3.2 Γεωμετρία και πλέγμα του τρισδιάστατου μοντέλου

Η γεωμετρία ενός δρομέα κατακόρυφου άξονα με ευθύγραμμα πτερύγια κρίνεται ως απλή συγκρινόμενη με άλλους δρομείς όπως Darrieus, Savonius κλπ. Η απλότητα αυτή επιτρέπει το σχεδιασμό των δισδιάστατων χαρακτηριστικών και στη συνέχεια την εξώθηση τους (extrusion) στον άξονα  $z$ . Τα χαρακτηριστικά τα οποία σχεδιάζονται είναι οι αεροτομές, ο πύργος στήριξης, η ζώνη περιστροφής και το πεδίο στο οποίο θα λυθεί το πρόβλημα (βλ. σχ.4.11). Το πεδίο εκτείνεται 6 διαμέτρους κατάντη και  $1.5D$  ανάντη. Οι διαστάσεις αυτές επιλέγονται με εμπειρικά κριτήρια και έχουν να κάνουν με την εξέλιξη του απορευμάτος τόσο ανάντη όσο και κατάντη.



Σχήμα 4.11: Γενική διάταξη της γεωμετρίας στο επίπεδο  $x - y$

Η διαδικασία δημιουργίας της γεωμετρίας συνίσταται από τα εξής βήματα:

- Σχεδιάζονται αρχικά οι οντότητες μηδενικής διάστασης (σημεία). Τα σημεία αυτά τοποθετούνται σε χαρακτηριστικές θέσεις που περιγράφουν το περίγραμμα της γεωμετρίας.
- Στη συνέχεια ακολουθούν οι γεωμετρικές οντότητες μιας διάστασης όπως γραμμές, τόξα καμπύλες κλπ. Οι γεωμετρικές αυτές οντότητες βασίζονται στις οντότητες  $0 - D$  που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο βήμα.
- Οι επιφάνειες της γεωμετρίας (οντότητες  $2 - D$ ) προκύπτουν με συνένωση των γεωμετρικών στοιχείων  $1 - D$ . Επίσης είναι δυνατόν ορισμένες από αυτές να προκύψουν με εκμετάλλευση των οντοτήτων  $0 - D$  παρακάμπτοντας κατ' αυτόν τον τρόπο το προηγούμενο βήμα.
- Στην τελική φάση του σχεδιασμού δημιουργούνται οι όγκοι που συνιστούν το υπολογιστικό πεδίο. Ως επί το πλείστον προκύπτουν με συνένωση  $2 - D$  γεωμετρικών οντοτήτων αλλά είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν και στοιχεία χαμηλότερων διαστάσεων.

Η διαδικασία σχεδιασμού που αναλύθηκε στα παραπάνω είναι γνωστή ως «bottom-up» και όπως μπορεί να φανεί βασική της αρχή είναι η σχεδίαση οντοτήτων μικρότερων διαστάσεων με σταδιακή χρήση στοιχείων μεγαλύτερης διάστασης.

Η αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε ήταν η συμμετρική *NACA0012*. Οι συντεταγμένες που περιγράφουν τη μορφή της λαμβάνονται από τις παρακάτω αναλυτικές σχέσεις κατάλληλες για αεροτομές *NACA* τεσσάρων ψηφίων:

$$y_t = \frac{t}{0.2} \left( 0.2969\sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4 \right) \quad (4.3.2.1)$$

και 
$$y_c = \frac{m}{p^2} (2px - x^2), \forall x < y_{\max} \quad (4.3.2.2)$$

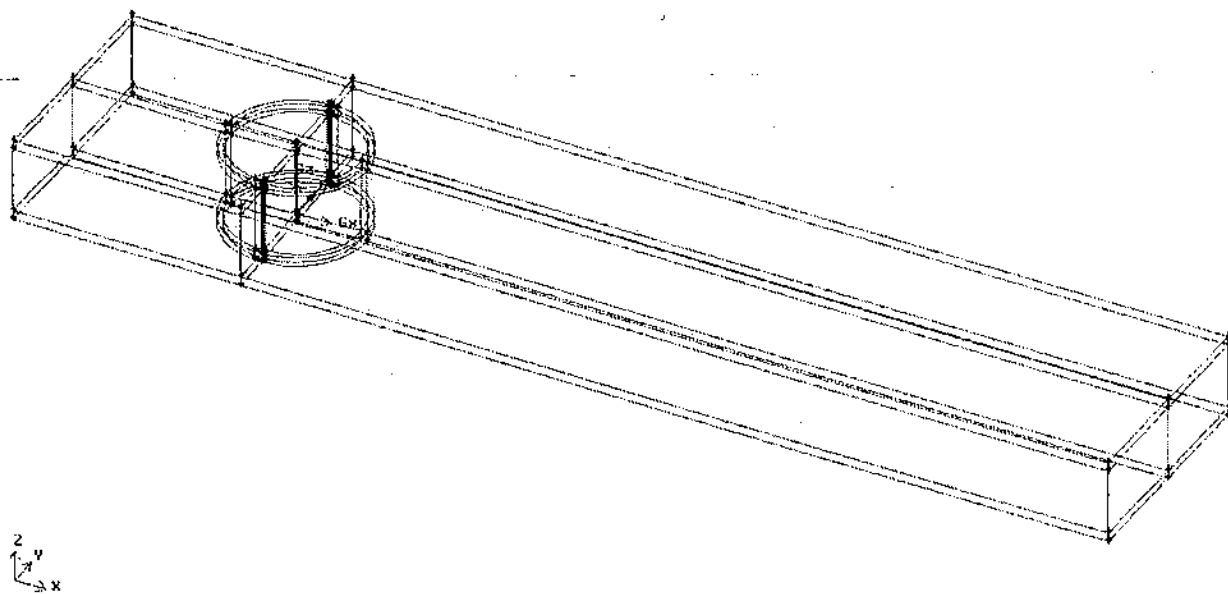
$$y_c = \frac{m}{(1-p)^2} \left[ (1-2p) + 2px - x^2 \right] \forall x \geq y_{\max} \quad (4.3.2.3)$$

όπου  $t$  μέγιστο πάχος εκπεφρασμένο ως κλάσμα της χορδής  
 $m$  μέγιστη απομάκρυνση της μέσης γραμμής εκπεφρασμένη ως κλάσμα της χορδής  
 $p$  θέση στην οποία μεγιστοποιείται η απομάκρυνση της μέσης γραμμής

Τα ζεύγη των σημείων που προκύπτουν είναι σε κανονικοποιημένη μορφή δηλαδή περιγράφουν μια αεροτομή μοναδιαίου πλάτους. Για την εύρεση της ζητούμενης γεωμετρίας γίνεται

πολλαπλασιασμός των συντεταγμένων με το μήκος της χορδής της εκάστοτε αεροτομής. Οι καμπύλες που προκύπτουν μεταφέρονται στη συνέχεια σε κατάλληλη θέση στο πεδίο.

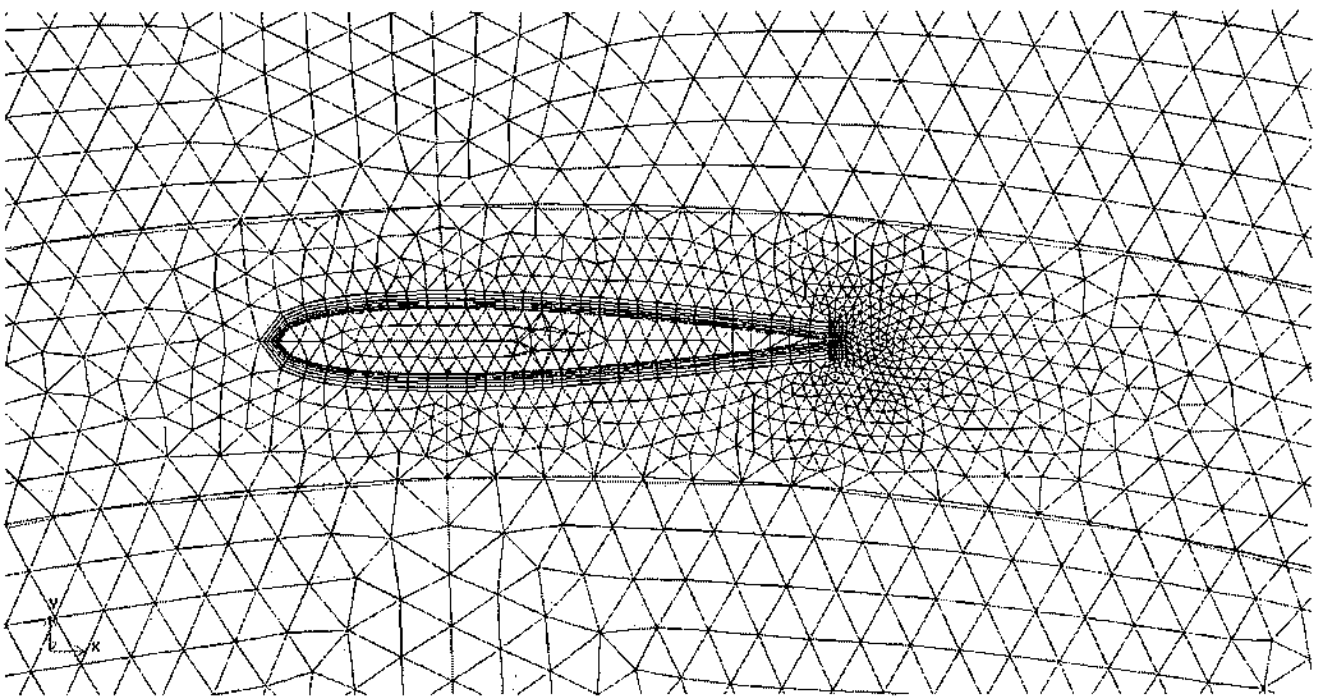
Αφού σχεδιαστούν οι υπόλοιπες γεωμετρικές οντότητες του πεδίου στο επίπεδο, μπορούν να μετατραπούν σε τρισδιάστατες είτε με εξώθηση ή με ένωση τους. Το γεωμετρικό μοντέλο που προκύπτει ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



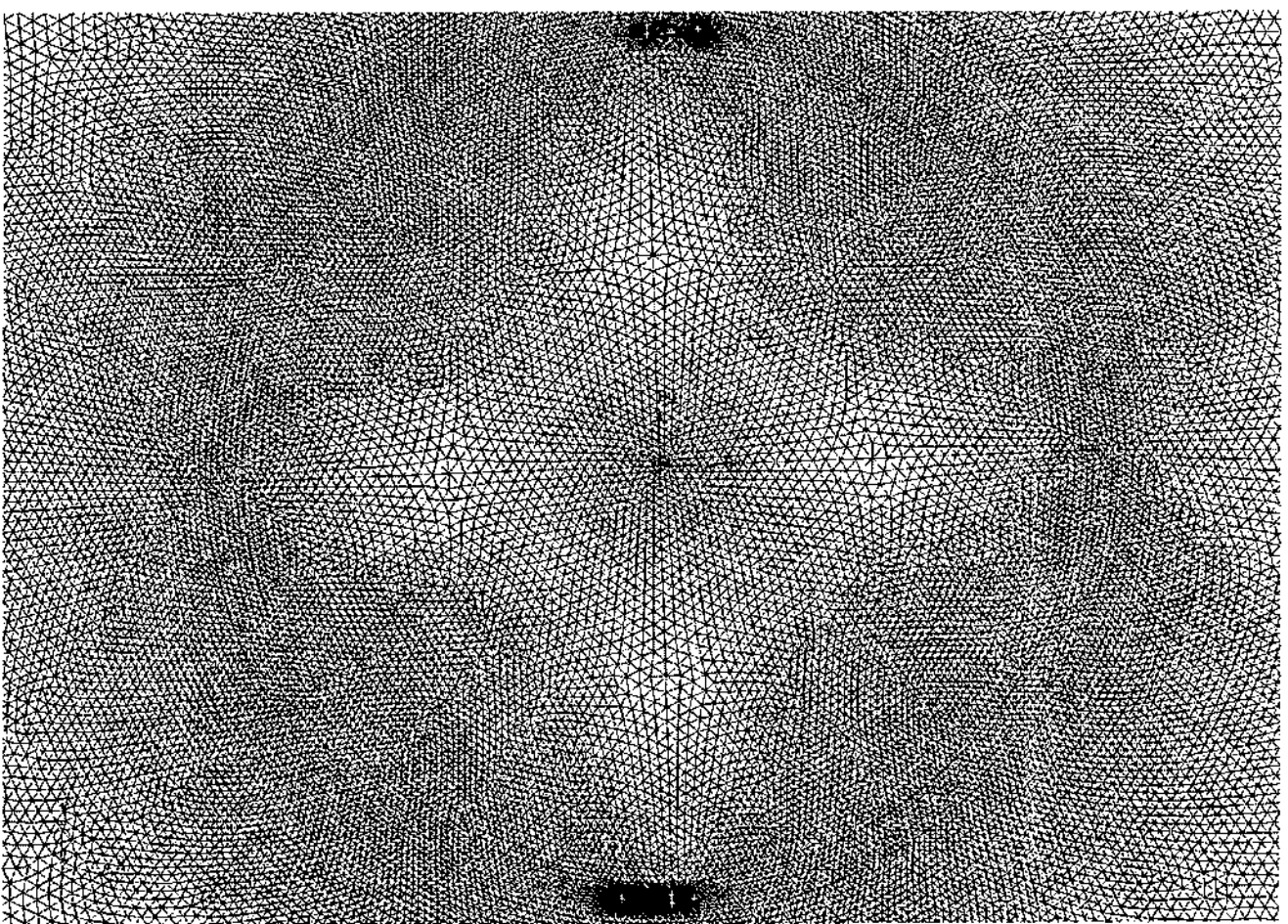
**Σχήμα 4.12:** Γεωμετρία του τρισδιάστατου μοντέλου

Το τρισδιάστατο μοντέλο που προέκυψε χρησιμοποιήθηκε για τη μόνιμη ανάλυση του πεδίου και ως εκ τούτου το μοντέλο για την περιστροφική κίνηση του οποίου έγινε χρήση ήταν το MRF. Το μοντέλο αυτό, όπως υποδηλώνει το όνομα του και αναλύθηκε εκτεταμένα στην παράγραφο 4.2, απαιτεί τη δήλωση των ζωνών που εκτελούν κίνηση μεταφορική ή περιστροφική. Στο σχήμα 4.12 μπορεί να φανεί η περιστρεφόμενη ζώνη ή οποία έχει κυλινδρική μορφή και εντός της οποίας περιστρέφονται τα πτερύγια.

Το πλέγμα των όγκων που προέκυψαν και συνιστούν το πεδίο δημιουργείται κατ' ανάλογο τρόπο με αυτόν της γεωμετρίας. Δηλαδή, δημιουργείται το πλέγμα σε δισδιάστατο χώρο (στο επίπεδο  $z = 0$ ) και αυτό αντιγράφεται σε παράλληλα προς αυτό επίπεδα. Όπως εξηγήθηκε στην παράγραφο (4.3.1) η περιοχή κυρίου ενδιαφέροντος είναι αυτή που γειτνιάζει άμεσα με τη πτερυγώση, η περιστρεφόμενη ζώνη και η περιοχή εντός αυτής. Στα σχήματα που ακολουθούν δείχνεται το πλέγμα σε αυτές τις περιοχές για το επίπεδο  $z = 0$ .



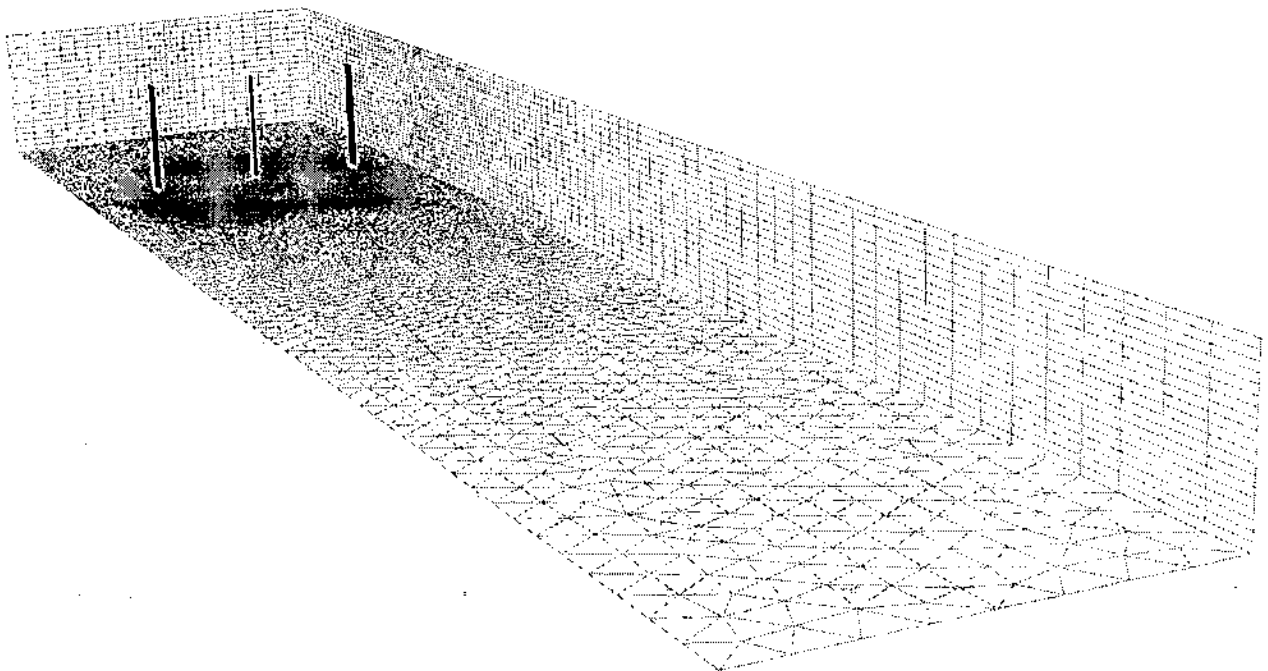
Σχήμα 4.13: Το πλέγμα περί της αεροτομής



Σχήμα 4.14: Το πλέγμα στην περιστρεφόμενη ζώνη και στην περιοχή που περικλείει



**Σχήμα 4.15:** Τρισδιάστατο πλέγμα στην πτέρυγα



**Σχήμα 4.16:** Το πλέγμα του πεδίου

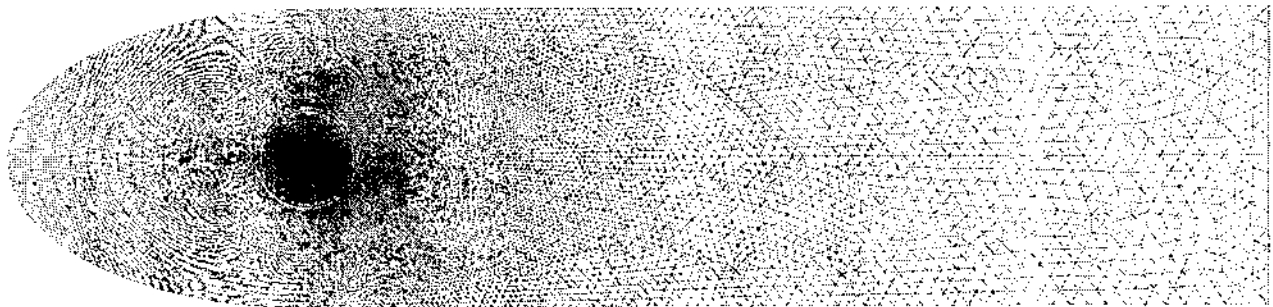
Επιγραμματικά αναφέρονται στη συνέχεια ορισμένα στοιχεία για το πλέγμα:

- Πλήθος κελιών στην περιστρεφόμενη ζώνη: 143460
- Πλήθος κελιών στην εσωτερική ζώνη: 268530

- Πλήθος κελιών στο υπόλοιπο πεδίο: 836218
- Συνολικός αριθμός κελιών: 1248208
- Συνολικός αριθμός κόμβων: 676384
- Συνολικός αριθμός πλευρών: 3205606

#### 4.3.3 Γεωμετρία και πλέγμα του δισδιάστατου μοντέλου

Ο σχεδιασμός της γεωμετρίας και η κατανομή του πλέγματος στις επί μέρους περιοχές του πεδίου πραγματοποιήθηκε ακολουθώντας την πρακτική της προηγούμενης παραγράφου και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχές που διασαφηνίσθηκαν στην παράγραφο 4.3.1 . Το γεγονός ότι το πρόβλημα λύνεται ως δισδιάστατο επιτρέπει πυκνότερη κατανομή των κόμβων στις περιοχές άμεσου ενδιαφέροντος γεγονός που συνδέεται με λήψη πιο αξιόπιστων αποτελεσμάτων. Επίσης, για την απόφυγή «σπατάλης» υπολογιστικού χώρου προτιμήθηκε αυτή τη φορά η γεωμετρία της εισόδου στο πεδίο να έχει ελλειπτική μορφή. Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζεται το πλέγμα της δισδιάστατης ανάλυσης.

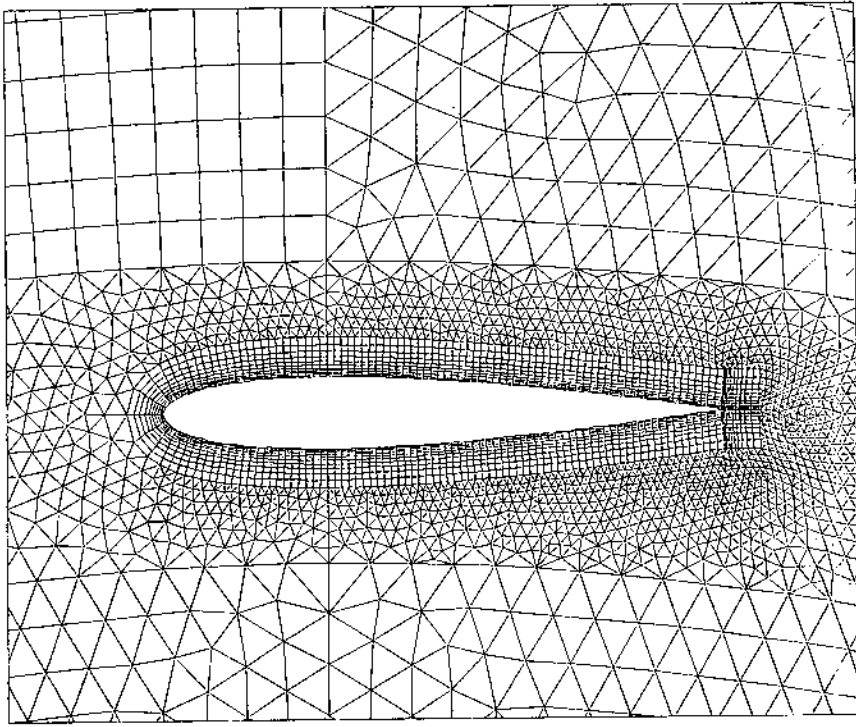


**Σχήμα 4.17:** Γενική άποψη δισδιάστατου πεδίου

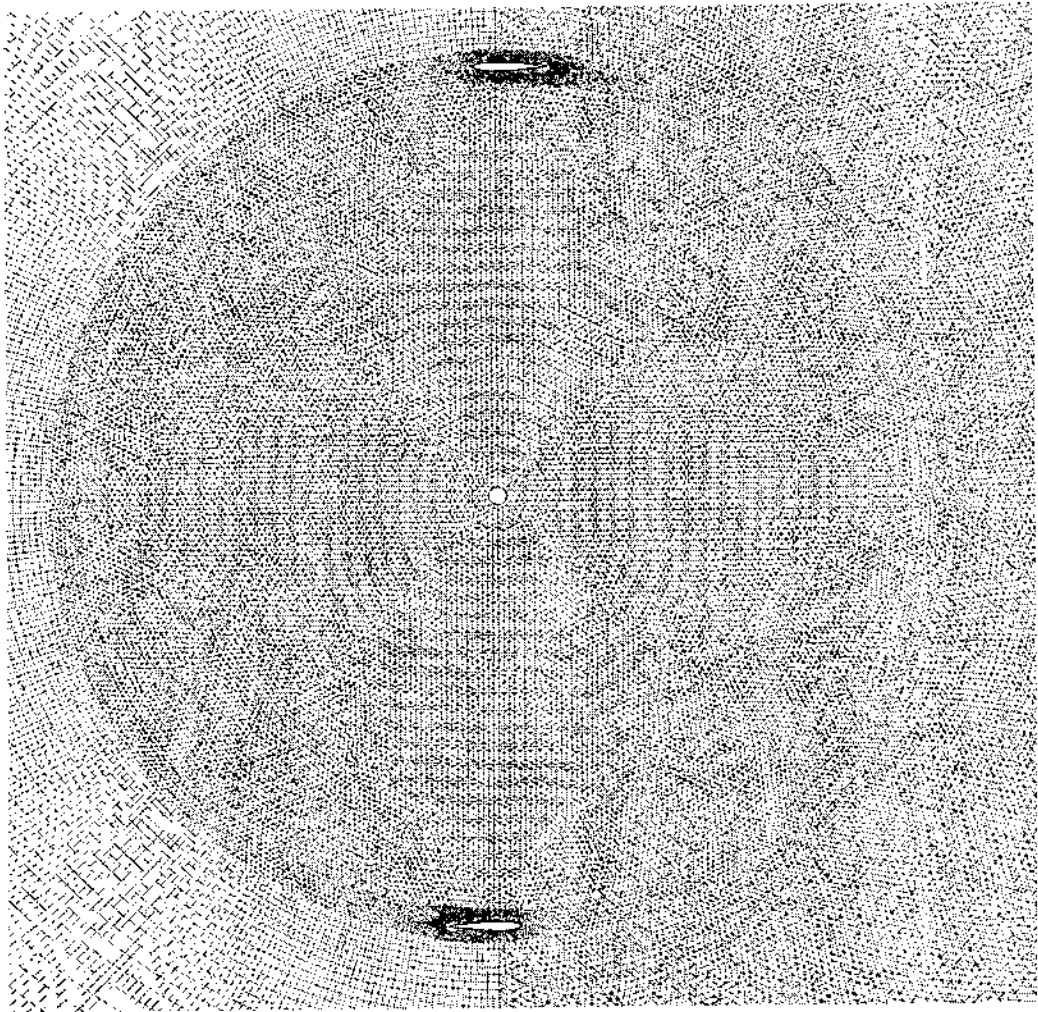
Όπως φαίνεται και από το προηγούμενο σχήμα το μεγαλύτερο μέρος των κελιών κατανέμεται στην περιοχή του δρομέα και εντός αυτής ενώ ταυτόχρονα έχει διακριτοποιηθεί καλύτερα η περιοχή περιφερειακά και κατάντη του δρομέα όπου εμφανίζεται ένα στρώμα διάτμησης. Επίσης φαίνεται ότι ανάντη του δρομέα έχουν χρησιμοποιηθεί τετραγωνικά κελιά ενώ κατάντη τριγωνικά. Η χρήση τριγωνικών κελιών επιτρέπει καλύτερη προσαρμογή στις τοπικές ανάγκες του πλέγματος παρά το γεγονός ότι αυτά υπολείπονται των αντίστοιχων τετραγωνικών σε τομείς όπως η αριθμητική διάχυση και τήρηση των ιδιοτήτων διατήρησης εντός αυτών.

Στα σχήματα που ακολουθούν δίδεται μια λεπτομερέστερη άποψη του πλέγματος στην περιοχή της πτέρυγας και στην περιστρεφόμενη ζώνη.





Σχήμα 4.18: Το πλέγμα στην περιοχή της αεροτομής



Σχήμα 4.19: Το πλέγμα στην περιστρεφόμενη ζώνη και το δρομέα

#### 4.4 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Από την ανάλυση που έγινε στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο διαπιστώθηκε ότι η ελλειπτική φύση των βασικών εξισώσεων της ροής επιβάλλει τον ορισμό οριακών και αρχικών συνθηκών. Οι βοηθητικές αυτές συνθήκες χρησιμοποιούνται για το λεγόμενο «κλείσιμο» των εξισώσεων της ροής. Στις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν χρησιμοποιήθηκαν οι κάτωθι οριακές συνθήκες:

- **Ο.Σ. εισόδου (velocity inlet):** χρησιμοποιήθηκε στην είσοδο του πεδίου και στα πλευρικά του όρια. Η οριακή αυτή συνθήκη προϋποθέτει τη γνώση των βαθμωτών ποσοτήτων για τις εξισώσεις μεταφοράς που επιλύονται, δηλαδή τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας  $u, v$  και  $w$  και τις παραμέτρους που ορίζουν τα επίπεδα της τύρβης  $k$  και  $\epsilon$ . Εάν δεν είναι γνωστή η τυρβώδης κινητική ενέργεια και η σκέδασή της είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά η ένταση της τύρβης  $T_i$  και μια κλίμακα μήκους  $l$ . Στην ανάλυση που πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές:

$$u = 10m/sec$$

$$v = 0m/sec$$

$$w = 0m/sec \text{ (μόνο για την τρισδιάστατη ανάλυση)}$$

$$T_i = 10\% \text{ και}$$

$$l = 0.01m$$

- **Ο.Σ. εξόδου πίεσης (pressure outlet):** χρησιμοποιήθηκε στην έξοδο του πεδίου. Αν και συνήθως χρησιμοποιείται η Ο.Σ. εξόδου ροής (outflow) στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί καθώς αυτή επιβάλλει τη συνθήκη  $\partial\phi/\partial x = 0$ . Καθώς σε απόσταση  $6D$  κατάντη (δηλαδή στο όριο του πεδίου) υπάρχει ακόμα περιστροφή του απορεύματος, η εφαρμογή αυτής της συνθήκης θα οδηγούσε σε λήψη λανθασμένων αποτελεσμάτων. Συνεπώς η σωστή εφαρμογή της Ο.Σ. εξόδου ροής θα απαιτούσε επέκταση του υπολογιστικού πεδίου έως την απόσταση όπου παύει η περιστροφή του απορεύματος και ομογενοποιείται η ροή. Αντί αυτή, όπως προλέχθηκε, η οριακή συνθήκη εξόδου πίεσης απαιτεί μόνο τη γνώση της τιμής της στατικής πίεσης, η οποία είναι ίση με την ατμοσφαιρική (απόλυτη τιμή 101325Pa ή σχετική τιμή 0Pa).
- **Ο.Σ. τοιχωμάτων (wall functions):** Η οριακή συνθήκη (γνωστή και ως συνθήκη μη ολίσθησης) εφαρμόζεται στα στερεά όρια του πεδίου δηλαδή στα πτερύγια και στον πύργο στήριξης. Με την εφαρμογή της, αυτόματα τίθενται όλες οι συνιστώσες της ταχύτητας ίσες με το μηδέν. Η αντιμετώπιση της ροής πλησίον των τοιχωμάτων γίνεται με τυπικές συναρτήσεις τοιχώματος (standard wall functions).

#### 4.5 Λοιποί αριθμητικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν

Πέραν της γεωμετρίας, του πλέγματος και των οριακών συνθηκών πρέπει να οριστούν διάφοροι αριθμητικοί αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιηθούν για την λύση του προβλήματος. Αυτοί αφορούν τη λύση του συστήματος των εξισώσεων, τις παραμέτρους του επιλύτη κλπ και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

##### *Επιλύτης*

Χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος απομονωμένης επίλυσης. Οι εξισώσεις λύνονται μια προς μια για κάθε επανάληψη και όχι συνδυασμένα. Η μορφή που επιλέχθηκε ήταν η πεπλεγμένη (σε αντίθεση με τη ρητή) καθώς χρησιμοποιούνται δεδομένα από γειτονικά κελιά που δεν είναι εξ αρχής γνωστά.

##### *Τυρβώδης μοντελοποίηση*

Χρησιμοποιήθηκε το τυπικό μοντέλο  $k - \epsilon$  που αναλύθηκε στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

##### *Διακριτοποίηση*

Για την εξίσωση της συνέχειας χρησιμοποιήθηκε ο τυπικός αλγόριθμος διακριτοποίησης ενώ για τις εξισώσεις της ορμής και της τύρβης επιλέχθηκε ο αλγόριθμός 1<sup>ης</sup> τάξης ανάντη (first order upwind).

##### *Συντελεστές υπο-χαλάρωσης (under relaxation factors)*

Οι τιμές που έλαβαν οι συντελεστές αυτοί έχουν ως εξής: πίεση 0.3, πυκνότητα 1, καθολικές δυνάμεις 1, ορμή 0.7, TKE 0.8, σκέδαση της TKE 0.8, τυρβώδης συνεκτικότητα 1.

##### *Σύζευξη πεδίων πίεσης-ταχύτητας*

Χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμός SIMPLE

#### 4.6 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

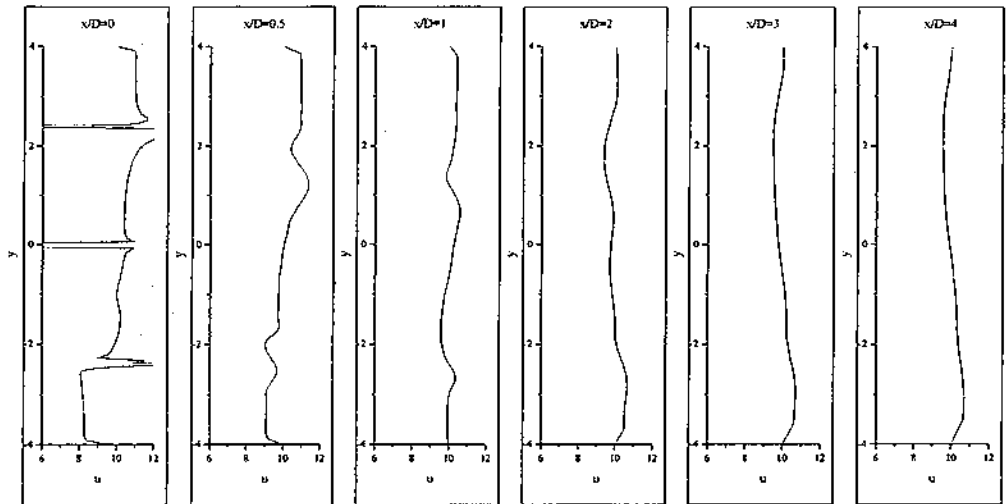
Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν ορισμένα από τα αποτελέσματα που ελήφθησαν από τις δύο αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν. Καθώς ο όγκος των αποτελεσμάτων είναι εξαιρετικά μεγάλος θα δειχθούν τα βασικότερα από αυτά με βασικό κριτήριο την επίδειξη των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων της ροής. Επίσης θα επιχειρηθεί η ερμηνεία και η επεξήγηση τους και η σύνδεση με τη θεωρία που παρουσιάστηκε στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Τα αποτελέσματα θα κατηγοριοποιηθούν με βάση την ανάλυση και το πεδίο που παρουσιάζεται.

### 4.6.1 Αποτελέσματα της τρισδιάστατης ανάλυσης

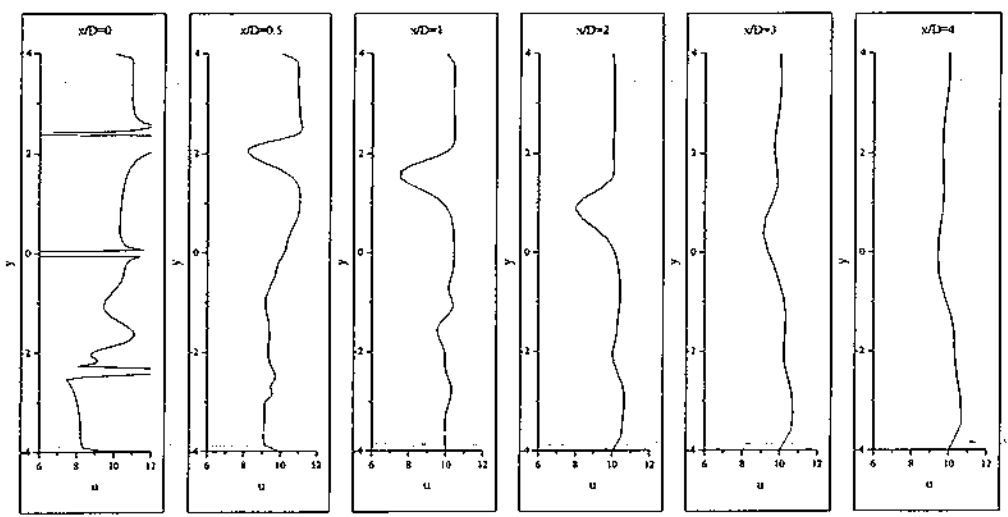
Θα πρέπει να διασαφηνιστεί ότι καθώς η ροή είναι μόνιμη ως προς το χρόνο τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν τις μέσες τιμές του πεδίου. Η μεταβολή του πεδίου με το χρόνο θα φανεί στη δισδιάστατη ανάλυση.

#### 4.6.1.a Πεδίο της ταχύτητας

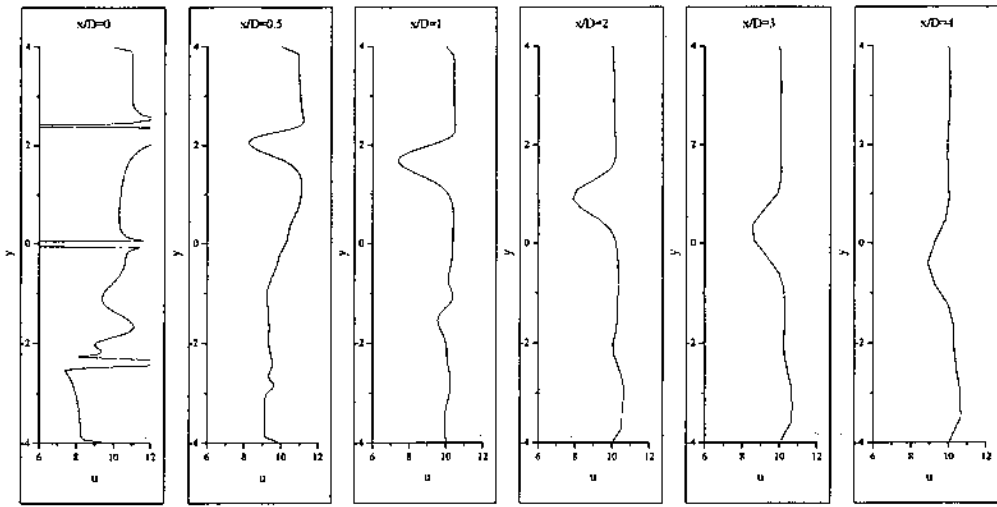
Στα γραφήματα που ακολουθούν απεικονίζεται η μεταβολή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας σε σταθμούς κατάντη του δρομέα και σε διαφορετικά ύψη.



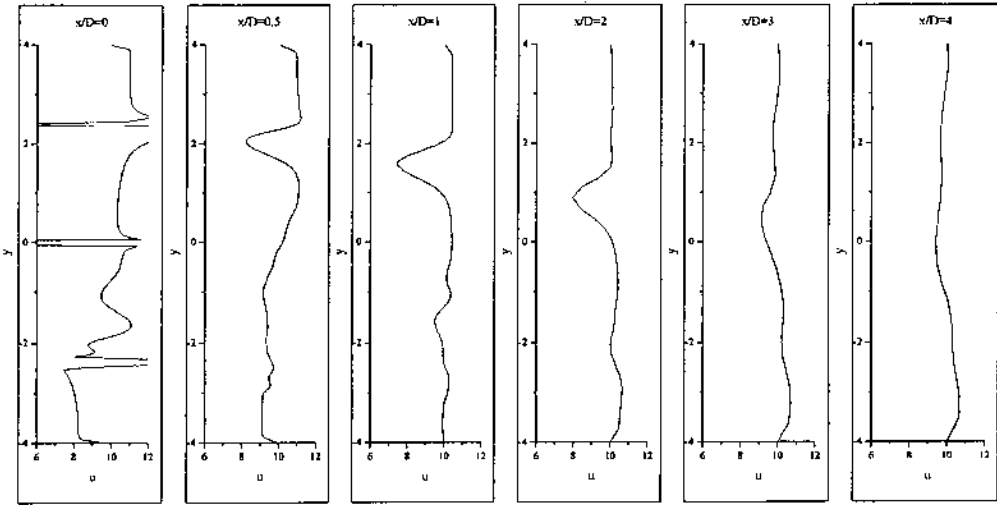
Σχήμα 4.20: Κατανομή της  $u$  συνιστώσας της ταχύτητας σε ύψος  $z = 0m$



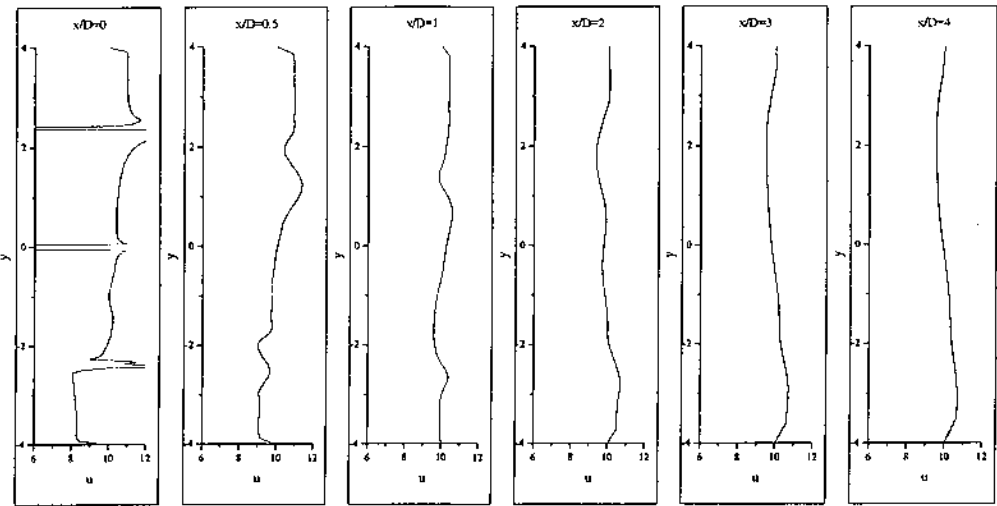
Σχήμα 4.21: Κατανομή της  $u$  συνιστώσας της ταχύτητας σε ύψος  $z = 0.6m$



Σχήμα 4.22: Κατανομή της  $u$  συνιστώσας της ταχύτητας σε ύψος  $z = 1.2m$

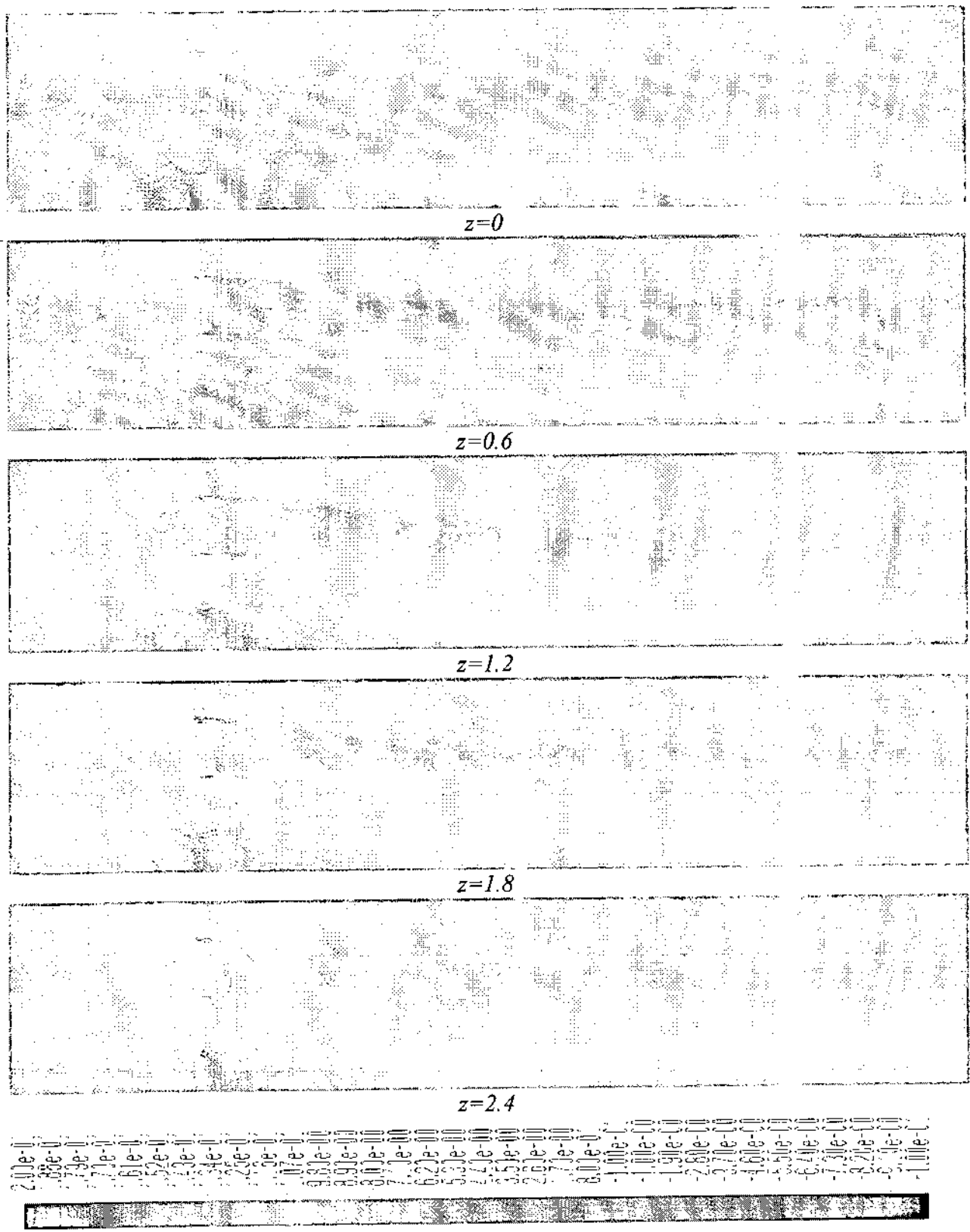


Σχήμα 4.23: Κατανομή της  $u$  συνιστώσας της ταχύτητας σε ύψος  $z = 1.8m$



Σχήμα 4.24: Κατανομή της  $u$  συνιστώσας της ταχύτητας σε ύψος  $z = 2.4m$

Μια συνολική άποψη για τη συνολική μεταβολή της αξονικής ταχύτητας στο πεδίο μπορεί να φανεί από τα ισοϋψή διαγράμματα που ακολουθούν.



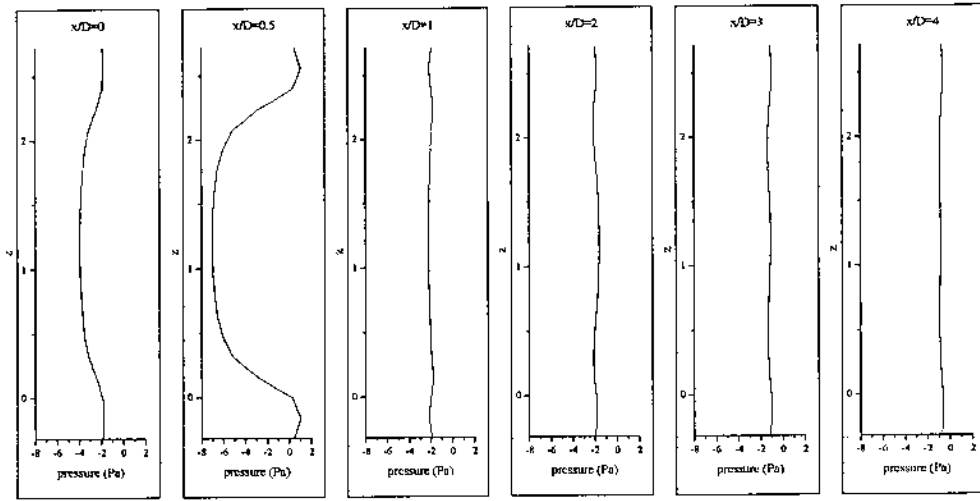
Σχήμα 4.25: Μεταβολή της ταχύτητας  $u$  στο υπολογιστικό πεδίο

Τα γραφήματα (4.20-4.24) δείχνουν τη μεταβολή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας στο απόρευμα του δρομέα. Μπορεί να φανεί το έλλειμμα της ταχύτητας το οποίο προκαλείται από τη διεύρυνση του ροϊκού σωλήνα που περιβάλλει το δρομέα. Από διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα διαπιστώνεται ότι ενώ υπάρχει συμφωνία ως προς τη μορφή της κατανομής της ταχύτητας κατάντη του δρομέα ταυτόχρονα το έλλειμμα της ταχύτητας είναι μικρότερο σε σχέση με το πραγματικό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το κατάντη όριο του πεδίου είναι τοποθετημένο πολύ κοντά στο δρομέα. Η οριακή συνθήκη που χρησιμοποιήθηκε (καθορισμός της πίεσης εξόδου ίση με την ατμοσφαιρική) «επιβάλλει» μια συγκεκριμένη τιμή στη στατική πίεση με αποτέλεσμα τον εσφαλμένο υπολογισμό του πεδίου της ταχύτητας. Επεκτείνοντας τα κατάντη όρια του πεδίου είναι δυνατή η λήψη ακριβέστερων αποτελεσμάτων αυξάνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο το υπολογιστικό κόστος.

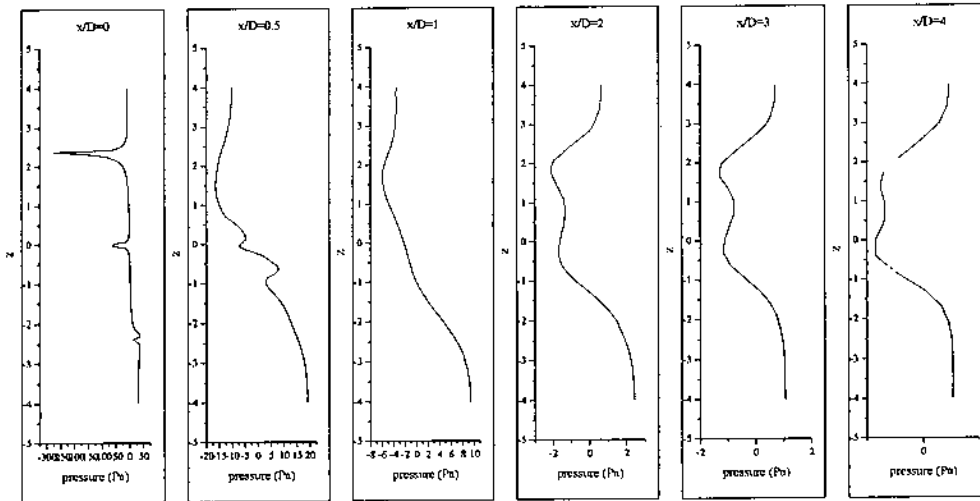
Η μικρή απόσταση του κατάντη ορίου επηρεάζει κυρίως την ακρίβεια στην περιοχή του απορεύματος. Οι υπολογισμοί στην περιοχή του δρομέα παρουσιάζουν μεγαλύτερη ακρίβεια. Τα αποτελέσματα που έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον, κυρίως για το σχεδιασμό μιας Α/Γ, είναι η κατανομή της πίεσης στα πτερύγια και το αεροδυναμικό πεδίο στην πτέρυγα. Η κατανομή της πίεσης λαμβάνεται υπόψη στο δομικό σχεδιασμό της μηχανής και στην επιλογή της διαμόρφωσης της πτέρυγας (χρησιμοποιούμενα υλικά, τύπος διατομής κλπ.). Η γνώση του αεροδυναμικού πεδίου συνδέεται άμεσα με τη μεγιστοποίηση της εξαγόμενης ενέργειας από τον άνεμο. Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε παραμετρικές μελέτες για την επιλογή της κατάλληλης διαμόρφωσης του δρομέα (τύπος αεροτομής, μήκος χορδής κλπ.).

#### **4.6.1.b Πεδίο της πίεσης**

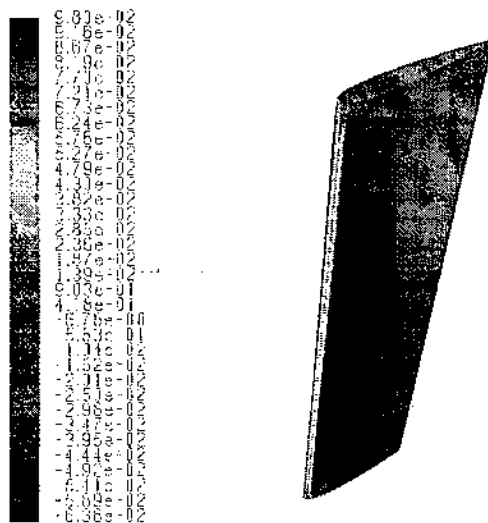
Η κατακόρυφη μεταβολή της πίεσης παρουσιάζεται στο σχήμα 4.26. Η πτώση πίεσης που παρατηρείται στο απόρευμα συνδέεται με την μείωση της αξονικής ορμής και στην απώλεια ενέργειας του ρεύματος του ανέμου η οποία μεταβιβάζεται στην περιστρεφόμενη μηχανή. Παρατηρούμε ότι πτώση πίεσης μεγιστοποιείται αμέσως κατάντη του δρομέα ( $x/D=0.5$ ). Στην περιοχή αυτή η στατική πίεση είναι μικρότερη της ατμοσφαιρικής. Αυτό προκαλεί την εισροή ανέμου από την περιβάλλουσα περιοχή στο απόρευμα με αποτέλεσμα περαιτέρω κατάντη η πίεση να επανέρχεται στα ατμοσφαιρικά όρια. Τα αποτελέσματα για το πεδίο της πίεσης στο απόρευμα ελέγχονται για την ακρίβεια τους λόγω της θέσης του κατάντη ορίου του πεδίου όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα. Στα σχήματα 4.27 και 4.28 φαίνονται αντίστοιχα η εγκάρσια μεταβολή της στατικής πίεσης στο απόρευμα και η κατανομή της πίεση σε μια εκ των δύο πτερύγων του δρομέα.



Σχήμα 4.26: Κατακόρυφη μεταβολή της πίεσης κατάντη του δρομέα



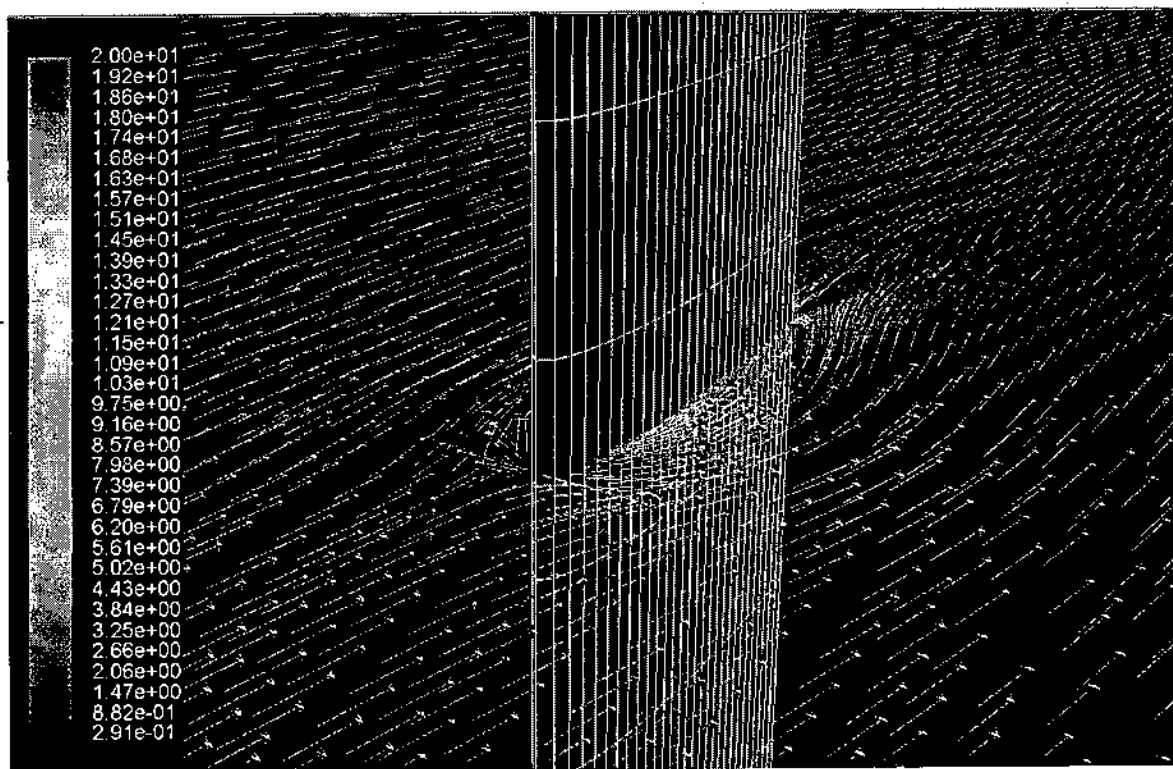
Σχήμα 4.27: Εγκάρσια κατανομή της πίεσης κατάντη του δρομέα



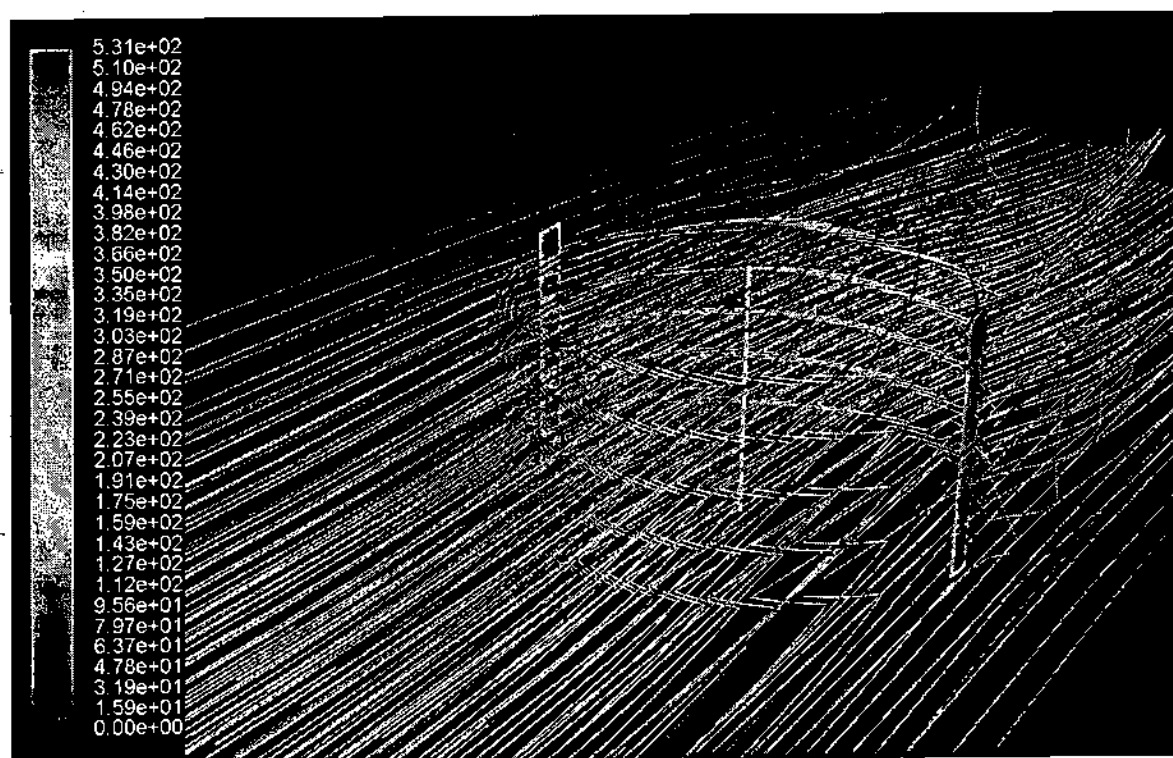
Σχήμα 4.28: Κατανομή της πίεσης στην πτέρυγα του δρομέα



Στα γραφήματα που ακολουθούν φαίνονται ορισμένα αποτελέσματα από την μεθεπεξεργασία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης.



Σχήμα 4.29: Διανυσματικό πεδίο στην πτέρυγα



Σχήμα 4.30: Ρευματικές γραμμές στο τρισδιάστατο πεδίο

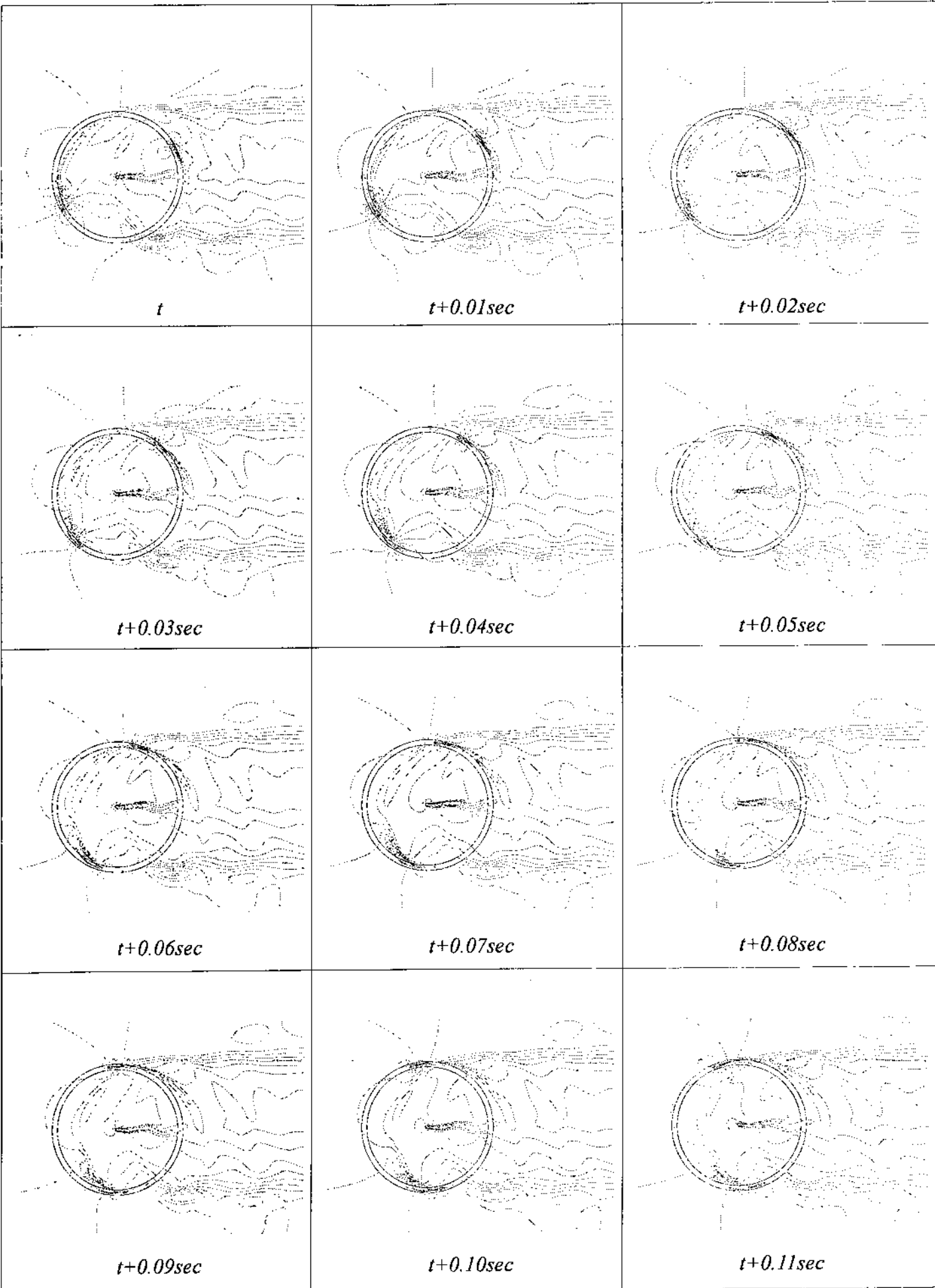
#### 4.6.2 Αποτελέσματα της δισδιάστατης ανάλυσης

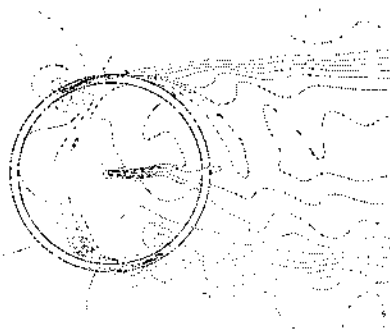
Στην δισδιάστατη ανάλυση που πραγματοποιήθηκε οι εξισώσεις της ροής λύθηκαν στη χρονικά εξαρτώμενη μορφή τους. Η ανάλυση αυτή επιτρέπει τη μελέτη της διακύμανσης του πεδίου για μια πλήρη περιστροφή του δρομέα. Μια τέτοια ανάλυση απαιτεί σημαντικά περισσότερους υπολογιστικούς πόρους καθώς οι εξισώσεις της ροής λύνονται για κάθε χρονικό βήμα. Το χρονικό βήμα της ανάλυσης ήταν 0.001sec και η ροή λύθηκε για 8 περίπου δευτερόλεπτα. Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτήθηκε ξεπέρασε τον ένα μήνα. Στις επόμενες δύο σελίδες παρουσιάζονται ισοϋψή διαγράμματα της συνιστώσας  $u$  της ταχύτητας. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν μια περιστροφή 180° του δρομέα (εξαιτίας της συμμετρίας δεν απαιτείται η παρουσίαση του πεδίου για μια πλήρη περιστροφή).

Εξαιτίας της περιστροφής των πτερυγίων μεταβάλλεται η γωνία πρόσπτωσης τόσο στο μέτρο όσο και στο πρόσημο. Επίσης καθώς η ταχύτητα που προσπίπτει στο πτερόγιο εξαρτάται από την αζιμουθιακή γωνία του πτερυγίου, όπως δείχθηκε στην αεροδυναμική ανάλυση του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου, το μέτρο της μεταβάλλεται συνεχώς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη διαρκή μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών κατά την περιστροφή του δρομέα. Το πεδίο που προκύπτει είναι εξαιρετικά σύνθετο με αποτέλεσμα οι αναλυτικές θεωρίες να είναι ακριβείς για ένα περιορισμένο εύρος του λεγόμενου «επιχειρησιακού φακέλου» της μηχανής.

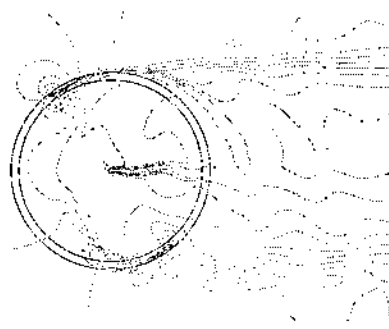
Το φαινόμενο της δυναμικής απώλειας στήριξης το οποίο παρουσιάζεται αποκλειστικά στις ανεμογεννήτριες κατακόρυφου άξονα είναι δυνατό να παρατηρηθεί. Κατά τη κίνηση του πτερυγίου για ένα ορισμένο εύρος γωνιών αζιμουθίου η ροή μένει προσκολλημένη στην πτέρυγα. Σταδιακά σχηματίζεται ένας μικρός θύλακας ανακυκλοφορίας στο χείλος προσβολής στην επάνω πλευρά της πτέρυγας. Ο στρόβιλος αυτός αφού προκαλέσει μια στιγμιαία αύξηση στην άνωση απορρίπτεται στο απόρρευμα. Στην συνέχεια δημιουργείται στρόβιλος με αντίθετη φορά περιστροφής στο χείλος εκφυγής ο οποίος αλληλεπιδρά με τον αρχικό. Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η μείωση του χρόνου στον οποίο η ροή παραμένει προσκολλημένη στην πτέρυγα. Το εν λόγω σύστημα των στροβίλων μεταβάλλει τις δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στην πτέρυγα με αποτέλεσμα την εμφάνιση δυναμικών καταπονήσεων σε αυτή.

Η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε παρέχει πέραν των ακριβέστερων αποτελεσμάτων και τη δυνατότητα μελέτης φαινομένων όπως η αλληλεπίδραση του δρομέα με τον πύργο στήριξης της μηχανής. Αυτό φαίνεται με εξέταση του πεδίου για τα χρονικά βήματα από  $t + 0.18sec$  έως  $t + 0.22sec$  όπου το απόρρευμα του πύργου στήριξης προσπίπτει στην κατάντη πτέρυγα.





$t+0.12\text{sec}$



$t+0.13\text{sec}$



$t+0.14\text{sec}$



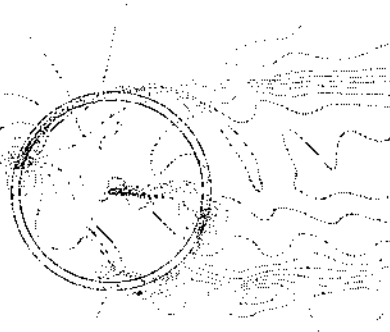
$t+0.15\text{sec}$



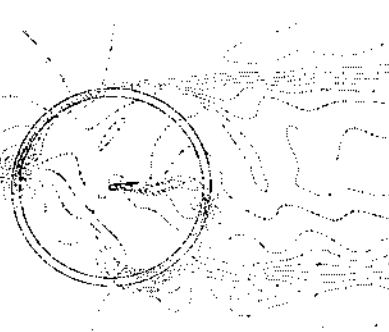
$t+0.16\text{sec}$



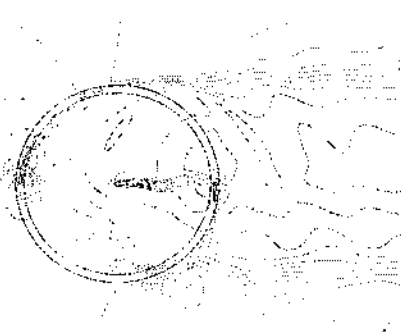
$t+0.17\text{sec}$



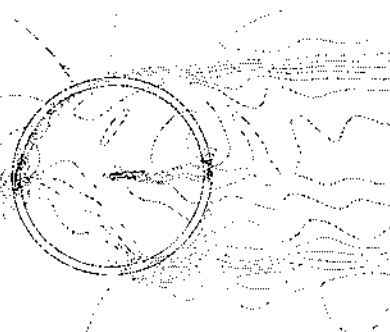
$t+0.18\text{sec}$



$t+0.19\text{sec}$



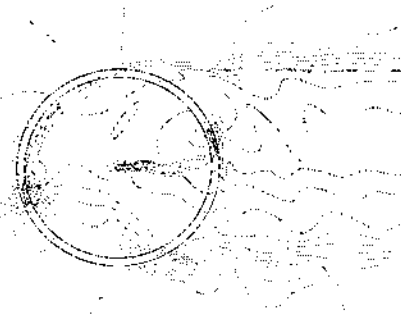
$t+0.20\text{sec}$



$t+0.21\text{sec}$



$t+0.22\text{sec}$



$t+0.23\text{sec}$

PHOTOGRAPHED AT  
11-2-1951