

Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ

Σ.Τ.Ε.

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ :

«ΧΑΟΣ ΣΤΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ : Δ. Σκαλτσάς

Σαγιά Αγγελική

Αργυράκης Ευθύμιος

Ιούνιος 2004, Πάτρα



ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ	3643
----------------------	------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1.1 Ορισμοί

§ 1.2 Ο Χώρος των φάσεων

§ 1.3 Χώρος φάσεων απλών δυναμικών συστημάτων

§ 1.4 Βασική θεωρία ευστάθειας

§1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Σαν δυναμικό σύστημα ορίζουμε ό,τι εξελίσσεται χρονικά, με μαθηματική περιγραφή της εξέλιξης που δίνεται από μια διαφορική εξίσωση (ή εξισώσεις διαφορικών) με μεταβλητή, φυσικά τον χρόνο. Πολλές φορές το μαθηματικό του μοντέλο (εξίσωση) αναφέρεται σαν δυναμικό σύστημα, χωρίς αναφορά στο φυσικό σύστημα που περιγράφει.

Μη γραμμικό δυναμικό σύστημα είναι αυτό το οποίο η χρονική εξέλιξη περιγράφεται από μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα για τα οποία έχουμε συνύπαρξη στην ίδια εξίσωση, για διαφορετικές τιμές μιας παραμέτρου της, ενός φάσματος συμπεριφορών που εκτείνονται από την απόλυτη προβλεψιμότητα (αναισθησία στις αρχικές συνθήκες), έως πρακτική αδυναμία πρόβλεψης (υπερευαισθησία στις αρχικές συνθήκες). Αυτά ονομάζονται και **χαοτικά δυναμικά συστήματα**.

Κατάσταση του δυναμικού συστήματος είναι ένας αριθμός ή ένα διάνυσμα (δηλ. κατάλογος αριθμών) που το καθορίζει μοναδικά. Σε χωρικά εκτεταμένα συστήματα, η κατάσταση είναι ένα πεδίο.

Ο χώρος φάσεων ή καταστάσεων του δυναμικού συστήματος είναι το σύνολο των καταστάσεών του.

Δηλ. όταν λέμε δυναμικό σύστημα εννοούμε έναν αφηρημένο χώρο φάσεων ή καταστάσεων, του οποίου οι συντεταγμένες περιγράφουν την κατάστασή του, κάθε χρονική στιγμή και έναν δυναμικό κανόνα που καθορίζει λεπτομερώς την άμεση κατεύθυνση όλων των μεταβλητών της κατάστασης, δοσμένων μόνο των τωρινών τιμών.

Μαθηματικώς, ένα δυναμικό σύστημα περιγράφεται από ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

Το δυναμικό σύστημα (Δ.Σ.) μπορεί να έχει συνεχή ή διακριτό χρόνο. Η διακριτή περίπτωση καθορίζεται από μια απεικόνιση:

$$Z_{n+1} = f(Z_n) \quad (1)$$

η οποία δίνει την κατάσταση Z_{n+1} από την Z_n .

Η συνεχής περίπτωση καθορίζεται από μια διαφορική εξίσωση:

$$\dot{Z}(t) = f(Z,t) \quad (2)$$

η οποία δίνει την κατάσταση Z την χρονική στιγμή t , δοσμένης της Z σε $t=0$ δηλ. της $Z(0)$, δηλ. $Z(t)=\varphi(Z(0),t)$.

Είναι φανερό ό,τι η (1) περιγράφει μια διαδικασία που λαμβάνει χώρα σε τακτά χρονικά διαστήματα και άρα οι ενδιάμεσες χρονικές στιγμές δεν ενδιαφέρουν. Εδώ δηλαδή ο χρόνος μπορεί να θεωρηθεί κβαντισμένος με κβάντο το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο τιμών του Z . Δηλ. Z_n, Z_{n-1} είναι οι τιμές του μεγέθους Z στις διαδοχικές χρονικές στιγμές n και $n+1$.

§1.2 Ο ΧΩΡΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

Θα ξεκινήσουμε με των παρουσίαση του χώρου φάσεων για το δυναμικό σύστημα υλικό σημείο, σε μονοδιάστατη κίνηση (ένας βαθμός ελευθερίας).

Είναι γνωστό ό,τι η κίνησή του καθορίζεται από τον 2^ο νόμο του Newton:

$$m\ddot{x} = F(x,\dot{x},t) \quad (1)$$

όπου x η θέση του, δηλαδή η τετμημένη Ox .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $m=1$ και μελετάμε την περίπτωση με δύναμη $F(x,\dot{x})$, δηλαδή όχι ρητά εξαρτώμενη από το χρόνο.

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\ddot{x} = F(x,\dot{x}) \quad (2)$$

Κάθε δευτεροτάξια διαφορική εξίσωση της μορφής (2), μετατρέπεται σε ένα αυτόνομο (οι εξισώσεις του δεν έχουν ρητή εξάρτηση από το χρόνο (βλέπε και § 1.4, πιο κάτω)) σύστημα δύο πρωτοτάξιων διαφορικών εξισώσεων με την προφανή αντικατάσταση:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= F(x, \dot{x}) = F(x, y)\end{aligned}\quad (3)$$

και λύση την

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (4)$$

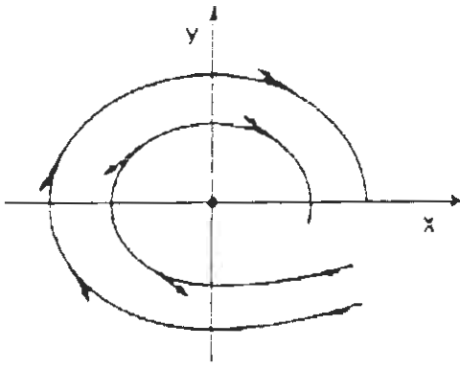
όπου, όπως είναι φανερό, η συνάρτηση $y=y(t)$ αντιστοιχεί στη ταχύτητα του υλικού σημείου.

Το επίπεδο που ορίζουν οι ορθογώνιοι άξονες Ox, Oy ονομάζεται χώρος των φάσεων ή καταστάσεων και επειδή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (\dot{x}, x) , εύλογα συμπεραίνεται ότι σαν κατάσταση του υλικού σημείου ορίζεται το μαθηματικό αντικείμενο (\dot{x}, x) .

Αν θεωρήσουμε σημείο $(x, y) \equiv (x_0, y_0)$ του χώρου των φάσεων σε $t=0$ δηλ. τις αρχικές συνθήκες για το σύστημα (3), τότε σε κάθε $t \neq 0$ αντιστοιχεί ένα σημείο (x, y) της λύσης του (4).

Έτσι σε κάθε κίνηση του υλικού σημείου (που προσδιορίζεται από τις δικές της αρχικές συνθήκες και το σύστημα (3)) αντιστοιχεί μια καμπύλη στο επίπεδο Oxy που ονομάζεται **τροχιά** (ή ακριβέστερα φασική τροχιά) και που δεν είναι τίποτε άλλο, παρά το σύνολο των σημείων (x, y) της λύσης (4).

Έστω, τώρα, μια τροχιά $x(t), y(t)$ που αντιστοιχεί σε μια κίνηση του συστήματος (4), δηλαδή σε μια κίνηση του υλικού σημείου. Η κατάσταση (x, y) κινείται, καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος, πάνω σε μια τροχιά με καθορισμένη φορά. Η «ταχύτητα» κίνησής του στο χώρο των φάσεων είναι προφανώς το διάνυσμα (\dot{x}, \dot{y}) . Έτσι σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων αντιστοιχεί ένα τέτοιο διάνυσμα $(\dot{x}, \dot{y}) = (y, F(\dot{x}, x))$ που σχηματίζει ένα διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ορίζοντας μια ροή που ονομάζεται φασική ροή.



Μαθηματικά φάσιως συστήματος με ένα δείκτη αλγεβρικής και η αντίστοιχη φασική τροχιά

ΣΧΟΛΙΑ

- (1) Είναι φανερό ότι η φασική τροχιά δεν είναι η τροχιά στο πραγματικό χρόνο αλλά μια μαθηματική καμπύλη που περιέχει τη γεωμετρική κωδικοποίηση των πληροφοριών του συστήματος (3).
- (2) Δύο φασικές τροχιές δεν τέμνονται, διότι το σημείο τομής τους θα ήταν οι αρχικές συνθήκες (ίδιες) για δύο διαφορετικές κινήσεις. Δηλαδή το σύστημα (3) θα έδινε για τις ίδιες αρχικές συνθήκες διαφορετικές λύσεις, που είναι άτοπο. Και επειδή μια φασική τροχιά δεν μπορεί να τέμνει τον εαυτό της, τότε στο επίπεδο τρία πράγματα μπορεί να συμβούν, να είναι κλειστή, σπειροειδής προς τα έξω, σπειροειδής προς τα μέσα.
- (3) Για εύρεση της λύσης (4) του συστήματος (3) και άρα για δυνατότητα κατασκευής της φασικής τροχιάς (οι εξισώσεις (4) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της με παράμετρο το χρόνο) μπορούμε, εκτός από το να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, να πάρουμε:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{F(x, y)}{y}$$

ή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{y} \quad (5)$$

Έτσι καταλήγουμε στην (5) που είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με ανεξάρτητη μεταβλητή το x , η οποία θα μας δώσει τις τροχιές υπό την μορφή $y = y(x)$ ή $f(x, y) = 0$.

(4) Αν οι μεταβλητές της κατάστασης (x, y) παίρνουν πραγματικές τιμές συνεχείς τότε η τροχιά είναι μια συνεχή καμπύλη, ενώ σε ένα σύστημα διακριτού χρόνου η τροχιά είναι μια ακολουθία σημείων.

(5) Σε ένα **μη αυτόνομο σύστημα** (όπου η απεικόνιση (2) της §1 εξαρτάται ρητά από το χρόνο). Δηλ.

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z, t) \quad (6)$$

πρέπει να συμπεριληφθεί και ο χρόνος σαν συντεταγμένη του χώρου των φάσεων, επειδή πρέπει να καθοριστεί η χρονική στιγμή για να γνωρίζουμε την επακολουθούσα κίνηση.

(6) **Διάσταση** του χώρου φάσεων είναι ο αριθμός των συντεταγμένων του. Έτσι για κίνηση υλικού σημείου σε άξονα x (μονοδιάστατος πραγματικός χώρος) σύμφωνα με τις εξισώσεις (3) αυτός είναι διδιάστατος. Για κίνηση υλικού σημείου σε επίπεδο θα είχαμε τις συντεταγμένες (x, y, \dot{x}, \dot{y}) και άρα ο χώρος των φάσεων θα ήταν τετραδιάστατος χωρίς, φυσικά, ορατή (χειροπιαστή) γεωμετρική απεικόνιση.

Τέλος για κίνηση του υλικού σημείου στο χώρο, οι συντεταγμένες γίνονται $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ δηλαδή ο φασικός χώρος είναι εξαδιάστατος.

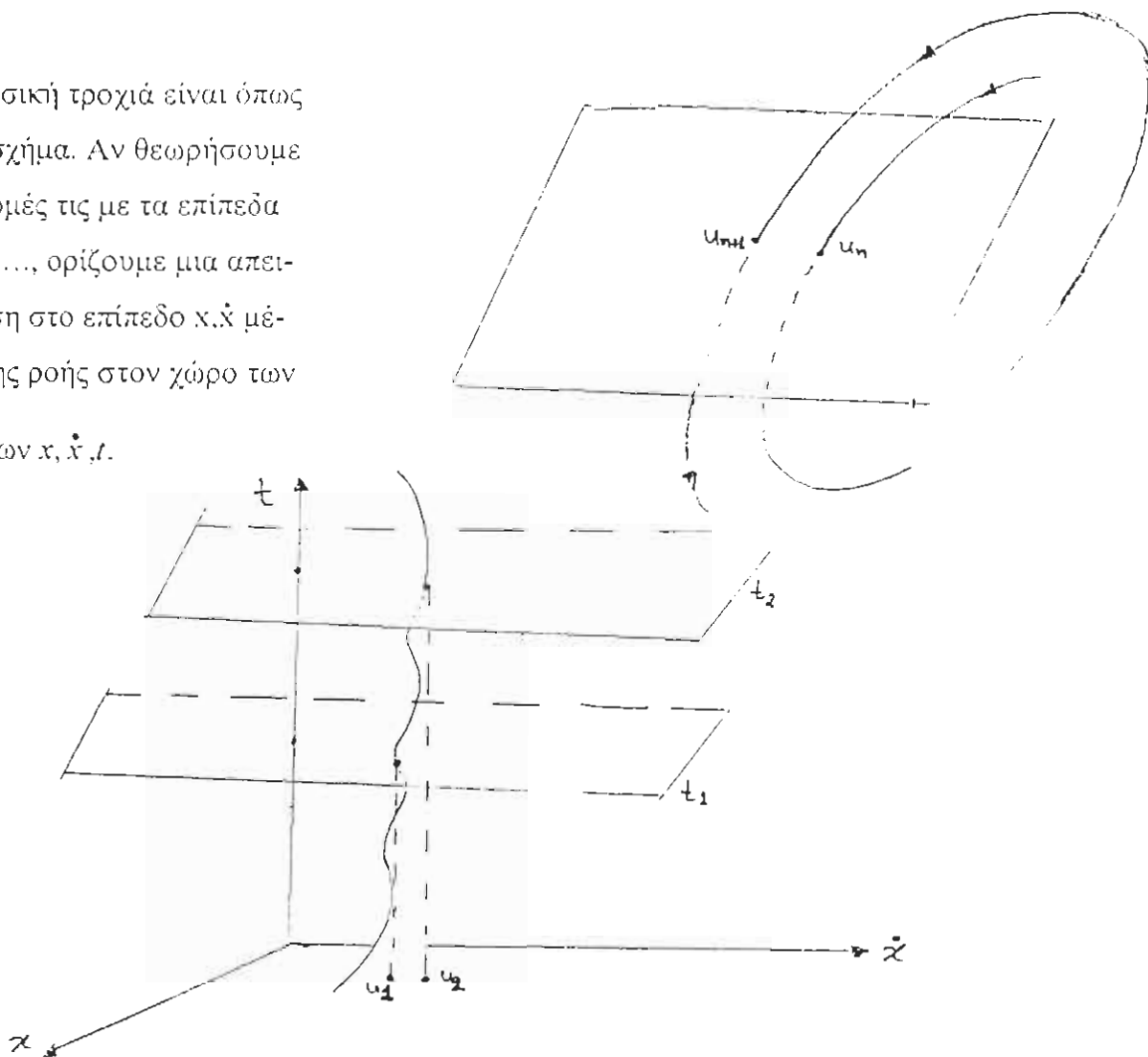
(7) **Απεικονίσεις Poincaré**

Είναι μια μαθηματική μέθοδος μελέτης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος που μετατρέπει μια συνεχή ροή στον χώρο των φάσεων σε διακριτή σε χώρο λιγότερων διαστάσεων [3].

Συγκεκριμένα, **διατομή Poincaré** είναι μια προσεκτικά επιλεγμένη επιφάνεια που τέμνεται από όλες τις τροχιές. Η **απεικόνιση Poincaré** (ή στροβοσκοπική) σχετίζει δύο διαδοχικά τέτοια σημεία τομής: $u_{n+1} = f(u_n)$.

Έστω ένα μη αυτόνομο δυναμικό σύστημα (ο χρόνος είναι τώρα συντεταγμένη) με συντεταγμένες (x, \dot{x}, t) .

Η φασική τροχιά είναι όπως στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε τις τομές τις με τα επίπεδα t_1, t_2, \dots , ορίζουμε μια απεικόνιση στο επίπεδο x, \dot{x} μέσω της ροής στον χώρο των φάσεων x, \dot{x}, t .



Έτσι η αρχική συνεχής ροή στον τρισδιάστατο φασικό χώρο x, \dot{x}, t μετατρέπεται σε διακριτή απεικόνιση στον δισδιάστατο x, \dot{x} .

Στην περίπτωση περιοδικής τροχιάς η καμπύλη θα επιστρέφει στο σημείο τομής από το οποίο ξεκίνησε. Άρα η απεικόνιση είναι ένα αμετάβλητο σημείο.

(8) Η ολοκληρωτική καμπύλη και η φασική τροχιά

Έστω το μη αυτόνομο δυναμικό σύστημα:

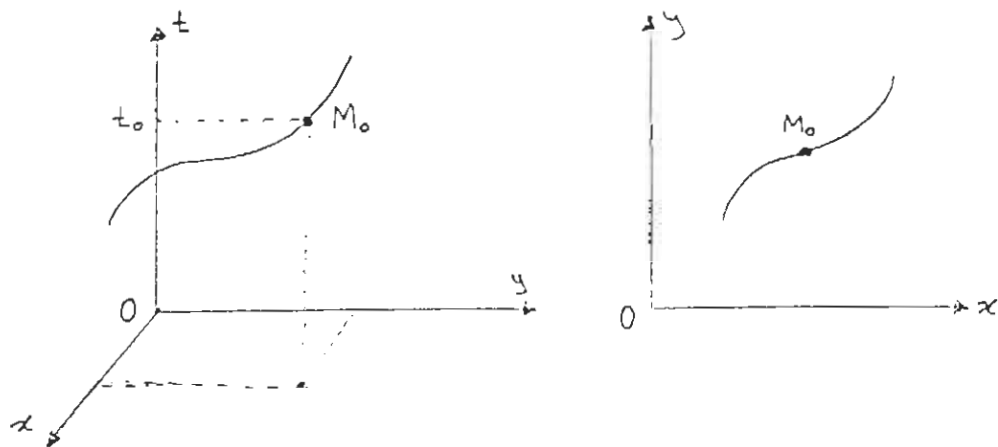
$$\dot{x} = f_1(x, y, t)$$

$$\dot{y} = f_2(x, y, t)$$

Θεωρούμε το ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Otxy$, με συντεταγμένες τις t, x, y . Η λύση $x=x(t), y=y(t)$ του συστήματος με x_0, y_0 σε $t=t_0$ ορίζει σε αυτό μια καμπύλη που περνά από το σημείο $M_0(x_0, y_0, t_0)$.

Αυτή ονομάζεται ολοκληρωτική καμπύλη του συστήματος.

Αν θεωρήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή t σαν παράμετρο και την λύση $x=x(t)$, $y=y(t)$ σαν τις παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης στο Oxy επίπεδο, τότε το Oxy επίπεδο είναι το φασικό επίπεδο. Η φασική τροχιά είναι η προβολή της ολοκληρωτικής καμπύλης στο φασικό επίπεδο.



§1.3 ΧΩΡΟΙ ΦΑΣΕΩΝ ΑΠΛΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

(1) Απλός αρμονικός ταλαντωτής.

Η διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{ή} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ η ιδιοσυχνότητα του. Με κατάλληλη επιλογή συστήματος μονάδων

μπορούμε να έχουμε $\omega_0 = 1$. Επειδή οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων ενός προβλήματος εξαρτώνται από το σύστημα των μονάδων για το μήκος την μάζα και χρόνο, είναι δυνατόν με κατάλληλη εκλογή αυτού του συστήματος να δώσουμε αυθαίρετες τιμές μέχρι και σε τρεις παραμέτρους.

Οπότε αυτή γίνεται:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (2)$$

Θέτοντας $\dot{x} = y$ έχουμε $\dot{y} = -x$, άρα η (2) μετασχηματίζεται στο αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = y \quad (3)$$

$$\dot{y} = -x \quad (3)$$

όπως αναφερθήκαμε στη προηγούμενη παράγραφο.

Από τις (3) έχουμε: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{x}{y}$

Η

$$\text{ή } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\text{ή } ydy + xdx = 0$$

$$\text{ή } d(x^2 + y^2) = 0$$

$$\text{ή } x^2 + y^2 = c.$$

Δηλαδή την εξίσωση των φασικών τροχιών:

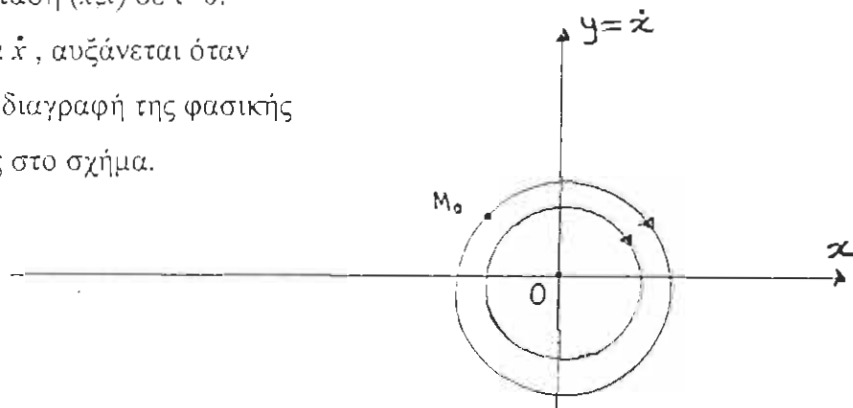
$$x^2 + y^2 = c^2, \quad c = (\sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2 \quad (4).$$

Άρα οι φασικές τροχιές είναι κύκλοι με κέντρο την αρχή $O(0,0)$.

Έστω M_0 η κατάσταση (\dot{x}, \dot{y}) σε $t=0$.

Επειδή η ταχύτητα \dot{x} , αυξάνεται όταν

η $|x|$ μικραίνει, η διαγραφή της φασικής τροχιάς είναι όπως στο σχήμα.



Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του συστήματος (3) παίρνονται από τη λύση της (2):

$$x = A\eta\mu(t+\varphi) \quad (5)$$

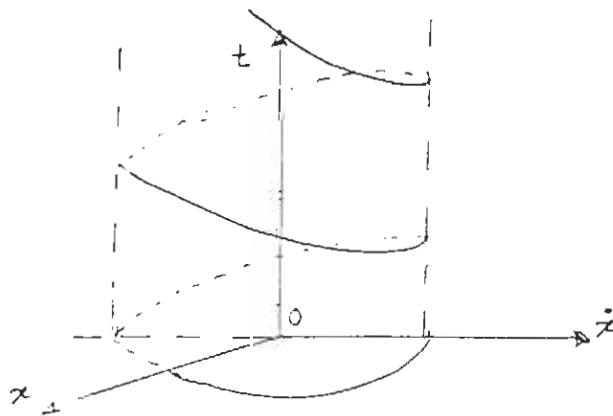
$$\text{Οπότε} \quad \dot{x} = y = A\sigma\upsilon\nu(t+\varphi) \quad (5)$$

Άρα αυτές είναι κυκλικές έλικες

βήματος 2π με κοινό άξονα $x=y=0$,

που είναι επίσης ολοκληρωτική

καμπύλη.



Γενικά η φασική τροχιά (βλέπε §1.4) είναι η προβολή της ολοκληρωτικής καμπύλης στο φασικό επίπεδο (O, x, \dot{x}) .

Αν δεν τεθεί $\omega_0=1$, είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} = \ddot{x} &= -\omega_0^2 x\end{aligned}$$

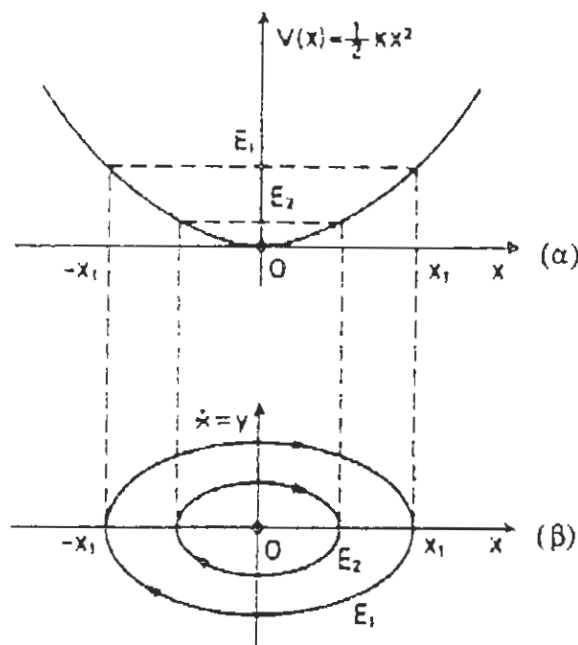
ή
$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}$$

ή
$$y^2 + \omega_0^2 x^2 = c^2, \quad c^2 = y_0^2 + \omega_0^2 x_0^2 \quad (6)$$

Και τελικά

$$x^2 / (c^2 / \omega_0^2) + y^2 / c^2 = 1 \quad (7)$$

Έτσι οι φασικές τροχιές είναι ελλείψεις με κέντρο το $O(0,0)$ και ημιάξονες κατά τον άξονα Ox , $a=c/2\omega_0$ και κατά τον Oy $b=c$.



Τα διάγραμμα φασικός της απλής αρμονικής ταλάντωσης και η ουσία της τροχιάς του με τα οριζα της κίνησης όπως δίνονται από το διάγραμμα των δυναμικών.

Για να έρθουμε σε πιο γνωστές μορφές από την Μηχανική, θέτουμε στην (6)

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \text{ οπότε έχουμε: } c^2 = y_0^2 + kx_0^2/m$$

ή
$$mc^2 = my_0^2 + kx_0^2$$

ή
$$mc_0^2/2 = my_0^2/2 + kx_0^2/2 \quad (8)$$

$$\text{Αλλά } m y_0^2/2 + k x_0^2/2 = E$$

όπου E η ολική ενέργεια του ταλαντωτή σε $t=0$, που επειδή αυτός είναι συντηρητικό σύστημα διατηρείται σταθερή.

$$\text{Άρα } E = m c^2/2$$

$$\text{ή } c = \sqrt{2E/m} \quad (10)$$

Θέτωντας στην (7) την τιμή του c από την (10) έχουμε:

$$x^2/(2E/k) + y^2/(2E/m) = 1. \quad (11)$$

(2) Απλό εκκρεμές

Απο το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\vec{F} = m d^2 \vec{r} / dt^2$$

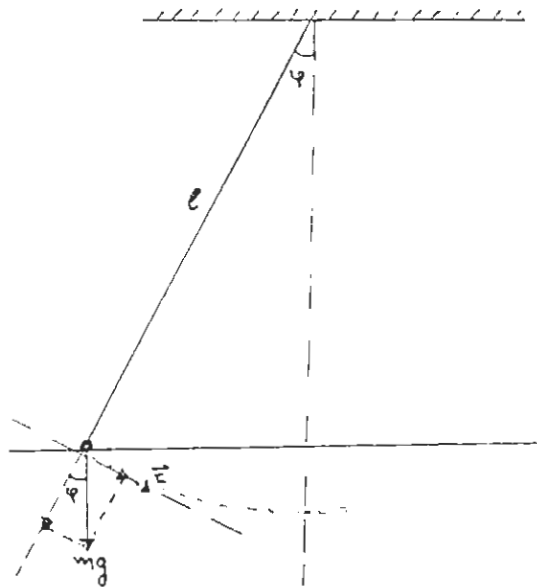
$$\text{ή } -mg \eta \mu \varphi \vec{e}_r = m (d^2 s / dt^2) \vec{e}_r \quad (12)$$

Και επειδή $s = l\varphi$ ή $\dot{s} = l\dot{\varphi}$, θα είναι:

$$\ddot{\varphi} + g \eta \mu \varphi / l = 0 \quad (13)$$

Αν τεθεί $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, έχουμε

$$T = 2\pi \sqrt{l/g} \quad (14)$$



Αν $\varphi \leq 3^\circ$ τότε μπορούμε να θέσουμε $\eta \mu \varphi \approx \varphi$ σε rad και άρα η (13) γίνεται:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (15)$$

που είναι μορφικά ίδια με την (1) για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή.

Ας σημειωθεί ότι υπάρχει πιο εύκολος τρόπος απόκτησης της (13), με χρήση του θεμελιώδη νόμου της περιστροφής.

$$\text{Έτσι θα είναι: } d\vec{L}/dt = \vec{M} \quad (16)$$

Όπου \vec{L} η στροφορμή και \vec{M} η συνολική ροπή.

Από το σχήμα είναι:

$$-mgl/\eta \mu \varphi = d(l\dot{\varphi})/dt = l\ddot{\varphi}.$$

Τελικά, με $I = ml^2$ για την ροπή αδρανείας, έχουμε: $\ddot{\varphi} - g \eta \mu \varphi / l = 0.$

Θέτοντας $\dot{\phi} = u(\varphi)$ έχουμε $\ddot{\phi} = \dot{\phi} du/d\varphi$ οπότε $\dot{\phi} du/d\varphi + \omega_0^2 \eta \mu \varphi = 0$

$$\text{ή } u du/d\varphi = -\omega_0^2 \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } \int_{u_0}^u u du = -\omega_0^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \eta \mu \varphi d\varphi$$

$$\text{ή } u^2 = 2\omega_0^2 (\sigma \nu \nu \varphi - \sigma \nu \nu \varphi_0)$$

$$\text{ή } u = \dot{\phi} = \pm 2\omega_0 (\eta \mu^2(\varphi_0/2) - \eta \mu^2(\varphi/2))^{1/2}$$

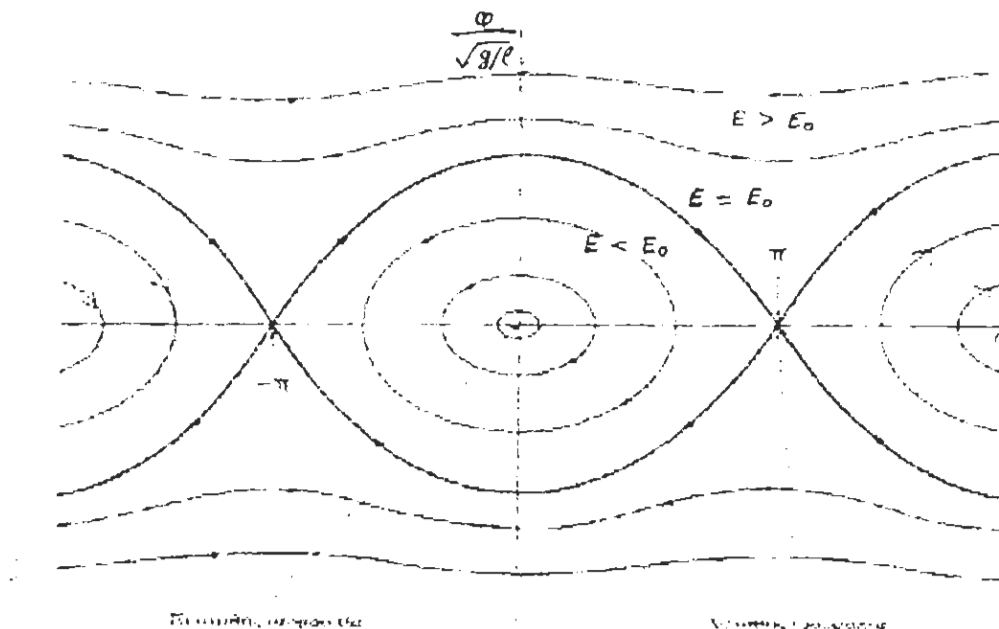
$$\text{ή } \dot{\phi} = 2(l/g)^{1/2} (\eta \mu^2(\varphi_0/2) - \eta \mu^2(\varphi/2))^{1/2}. \quad (17)$$

Από τη (17) και για μικρές γωνιές ($\eta \mu(\varphi/2) \approx \varphi/2$), έχουμε:

$$\dot{\phi}^2 = 4g(\varphi_0^2/4 - \varphi^2/4)/l$$

$$\text{ή } \dot{\phi}^2/(\varphi_0^2 g/l) + \varphi^2/\varphi_0^2 = 1 \quad (18)$$

με χώρο φάσεων αυτή του παρακάτω σχήματος. Το εκκρεμές είναι μη γραμμικό αλλά όχι και χαοτικό σύστημα.



Η ενέργεια του εκκρεμούς είναι:

$$\text{Κινητική: } T = mu^2/2 = ml^2 \dot{\phi}^2/2$$

$$\text{Δυναμική: } V = mgl(1 - \sigma \nu \nu \varphi)$$

$$\text{Ολική: } T+V = mgl(1 - \sigma \nu \nu \varphi_0) = 2mgl \eta \mu^2(\varphi_0/2).$$

Για $-\pi < \varphi < \pi$ και $E < 2mgl = E_0$, η κίνηση είναι περιορισμένη στην γωνία φ και οι φασικές τροχιές κλείστες καμπύλες.

Για $E > E_0$ το εκκρεμές εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από το σημείο στήριξης και η κίνηση του δεν είναι πλέον ταλάντωση, αλλά είναι περιοδική.

Για $E=E_0$, $\varphi_0=\pi$ είναι $\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sin(\varphi_0/2)$ και η φασική τροχιά είναι η διαχωρίζουσα καμπύλη του σχήματος.

§ 1.4. ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

(1) ΓΕΝΙΚΑ

Αρχικά θεωρούμε την εξάρτηση του προβλήματος Cauchy των διαφορικών εξισώσεων (ύπαρξης λύσης) από τις αρχικές συνθήκες.

Έστω η εξίσωση $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ (1)

Είναι γνωστό ότι αν η συνάρτηση $f(t,x)$ είναι συνεχής ως προς x,t και έχει φραγμένη παράγωγο $\partial f/\partial x$ σε ορισμένη περιοχή Ω τιμών των x,t , η οποία περιέχει το σημείο (t_0,x_0) , τότε η λύση της υπάρχει και είναι μοναδική.

Αν μεταβάλουμε τις τιμές των t_0,x_0 , η λύση αλλάζει. Το πρόβλημα που δημιουργείται είναι: πως μεταβάλλεται η λύση αυτή;

Το ζήτημα έχει σημαντική πρακτική σημασία, διότι αν κάποιο φυσικό πρόβλημα, μοντελοποιημένο μαθηματικώς, οδηγήσει στην παραπάνω εξίσωση (1), τότε για τις αρχικές τιμές, που βρίσκονται πειραματικά, κανείς δε μπορεί να εγγυηθεί την ακριβή τους μέτρηση.

Έτσι αν αμελητέες αλλαγές στα αρχικά δεδομένα, οδηγούν σε δραστική αλλαγή λύσης, το μαθηματικό μοντέλο καθίσταται "προβληματικό".

Είναι γνωστό, επίσης, ότι η λύση $x(t)=x(t,t_0,x_0)$, $t \in [a,\beta]$, της (1) εξαρτάται συνεχώς από τις αρχικές συνθήκες.

Δηλαδή αν μια λύση $x(t,t_0,x_0)$ περνά από το σημείο (t_0,x_0) τότε η λύση $\tilde{x}(t,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)$ που περνά από το σημείο $(\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)$, το οποίο είναι όσο κοντά επιθυμούμε στο (t_0,x_0) υπάρχει στο $[a,\beta]$ είναι επίσης πολύ κοντά στην $x(t)$ για κάθε $t \in [a,\beta]$.

Παρόμοια ισχύουν για το σύστημα:

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_n), \quad i=1,2,\dots,n \quad (2)$$

Το γεγονός ότι το διάστημα $[a,\beta]$ των μεταβολών του t , είναι, πεπερασμένο είναι ουσιώδες.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, μας ενδιαφέρουν οι σχέσεις λύσεων-αρχικών συνθηκών για διαστήματα της μορφής $[t_0,\infty)$.

Το πέρασμα από το $[a,\beta]$ στο $[t_0,\infty)$ είναι που αλλάζει ουσιαστικά τα πράγματα.

(ii) ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΤΑ LYAPUNOV

(A) Εξισώσεις

Έστω η εξίσωση $\dot{x} = f(t, x)$, (3)

όπου η $f(t, x)$ είναι ορισμένη και συνεχής για $t \in [a, \infty)$ και για x σε ορισμένη περιοχή D και έχει φραγμένη την μερική παράγωγο $\partial f / \partial x$.

Έστω, ότι η (3) έχει λύση την $x = \varphi(t)$, με $x_0 = \varphi(t_0)$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η συνάρτηση $x = x(t)$ με $x_0 = x(t_0)$ είναι επίσης λύση της. Τέλος υποθέτουμε ότι και οι δύο λύσεις είναι ορισμένες κάθε $t \geq t_0$.

Ορισμός: Η λύση $x = \varphi(t)$ της (3) είναι ευσταθής (κατά Lyapunov) καθώς $t \rightarrow \infty$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε λύση $x = x(t)$ αυτής της εξίσωσης η ανίσωση:

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \tag{4}$$

να συνεπάγεται την ανίσωση

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \tag{5}$$

για κάθε $t \geq t_0$.

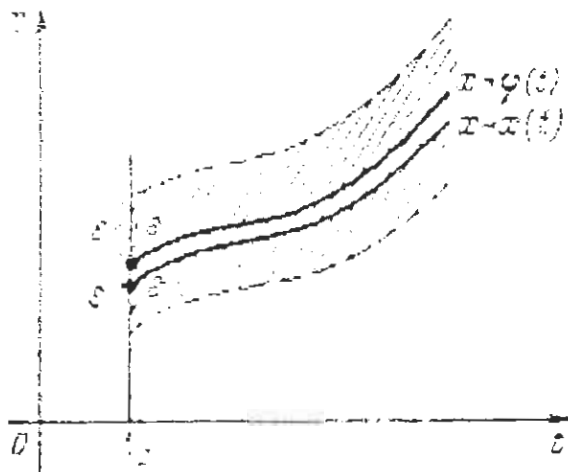
Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις που είναι κοντά στην $x = \varphi(t)$, στην αρχή, παραμένουν κοντά για κάθε $t \geq t_0$.

Γεωμετρικά έχουμε την

εικόνα του διπλανού σχήματος.

Δηλαδή η $x = \varphi(t)$ είναι σταθερή,

όσο στενή και αν είναι η ε -ταινία,



που περιέχει τη καμπύλη $x = \varphi(t)$, όλες οι ολοκληρωτικές καμπύλες $x = x(t)$ της εξίσωσης (3), που είναι πολύ κοντά στην $x = \varphi(t)$ την αρχική χρονική στιγμή $t = t_0$, παραμένουν εντός της ε -ταινίας για κάθε $t \geq t_0$.

Διαφορετικά η $x = \varphi(t)$ είναι ασταθής.

Ορισμός: Η λύση $x = \varphi(t)$ της εξίσωσης (3) ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθής** (i) αν είναι ευσταθής (ii) υπάρχει $\delta_1 > 0$, έτσι ώστε για κάθε λύση $x = x(t)$ της (3), που ικανοποιεί τη συνθήκη $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta_1$, έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι λύσεις $x=x(t)$, που είναι κοντά στην ασυμπτωτικά σταθερή $x=\varphi(t)$, αρχικά, όχι μόνο παραμένουν κοντά για $t \geq t_0$, αλλά πλησιάζουν απείρως κοντά σε αυτήν καθώς $t \rightarrow \infty$.

Εφαρμογή 1: Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια της η λύση της:

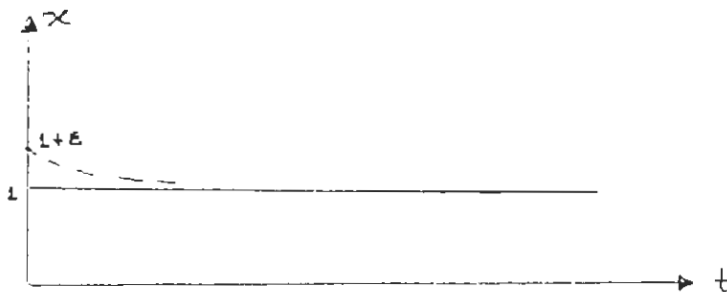
$$\dot{x}+x = 1, \quad x(0) = 1 \quad (6)$$

Απάντηση: Η γενική λύση είναι

$$x(t) = 1 + e^{-t-c}$$

Με $x(0)=1$ έχουμε $e^c=0$ και άρα $x(t)=1, \forall t \in \mathbb{R}_+$ (7)

η λύση της (6).



Με $x(0) = 1 + \varepsilon$ έχουμε:

$$1 + \varepsilon = 1 + e^c \quad \text{ή} \quad e^c = \varepsilon \quad \text{ή} \quad x = 1 + \varepsilon e^{-t} \quad (8)$$

Από την (8) είναι: $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 1$, δηλαδή η (6) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Εφαρμογή 2: Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια της η λύση της:

$$\dot{x}-x = 1, \quad x(0) = -1 \quad (9)$$

Απάντηση: Η γενική λύση είναι

$$x(t) = -1 + e^{t+c}$$

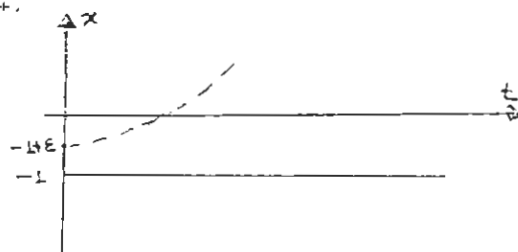
Με $x(0)=-1$ έχουμε $x=-1, \forall t \in \mathbb{R}_+$ (10α)

Με $x(0)=-1+\varepsilon$, έχουμε:

$$x = \varepsilon e^t - 1 \quad (10)$$

και $\lim_{t \rightarrow \infty} x = \infty$, δηλαδή

η (10) ασυμπτωτικά ασταθής.



Β) Συστήματα

Έστω το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Όπου οι συναρτήσεις f_i είναι ορισμένες για $t \in [a, \infty)$ και για x_1, x_2, \dots, x_n σε κάποια περιοχή D και ικανοποιούν τα κριτήρια για ύπαρξη μοναδικής λύσης του συστήματος. Επίσης υποθέτουμε ότι οι λύσεις μπορούν να επεκταθούν επ' άπειρο για $t > t_0 > a$.

Ευσταθής είναι μια λύση του συστήματος αν όλες οι άλλες που ήταν αρχικά όσο θέλουμε κοντά της, παραμένουν για $t \rightarrow \infty$. Όμοια ορίζεται η ασυμπτωτική ευστάθεια.

Εφαρμογή: Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια η λύση του συστήματος $\dot{x}=y, \dot{y}=-x$ με $x(0)=0, y(0)=0$

Απάντηση: Είναι, για $x(0)=0, y(0)=0, x(t)=0$ και $y(t)=0$ (12)

Για $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y(t) &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{aligned} \quad (13)$$

Η (12) είναι ευσταθής, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(Γ) ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΑΥΤΟΝΟΜΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ-ΕΙΔΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Ορισμός 1: Ένα δυναμικό σύστημα (σύστημα διαφορικών εξισώσεων)

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (14)$$

ονομάζεται αυτόνομο αν οι συναρτήσεις f_i , δεν εξαρτώνται εκπεφρασμένα (ή ρητά) από το χρόνο.

Παράδειγμα: $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

Ορισμός 2: Έστω ότι υπάρχει σύνολο αριθμών (a_1, a_2, \dots, a_n) με $f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, i=1, 2, \dots, n$. Το σύστημα των συναρτήσεων $x_i(t) = a_i, i=1, 2, \dots, n$ είναι μια λύση του (14). Το σημείο (a_1, a_2, \dots, a_n) στον χώρο των φάσεων (x_1, x_2, \dots, x_n) ονομάζεται **σημείο ισορροπίας** (ή ηρεμίας) ή **κρίσιμο σημείο**.

Έστω ότι $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0, i=1, 2, \dots, n$, δηλαδή το σημείο $x_i = 0, i=1, 2, \dots, n$ είναι σημείο ισορροπίας.

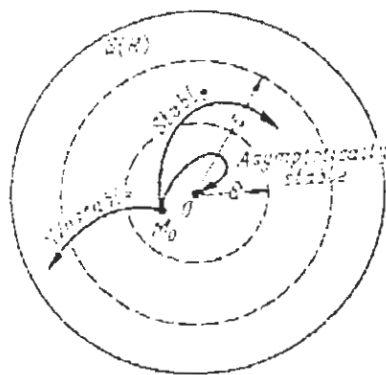
Ορισμός 3: Το σημείο ισορροπίας $x_i = 0, i=1, 2, \dots, n$, του συστήματος (14) είναι **ευσταθές** αν για κάθε $\varepsilon > 0$, όπου ε εντός της σφαίρας $S(R)$ με $R = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, υπάρχει

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε κάθε φασική τροχιά του συστήματος, η οποία ξεκινά σε $t = t_0$ από σημείο M_0 εντός της σφαίρας $S(\delta)$, παραμένει όλο το χρόνο εντός της $S(\varepsilon)$.

Για να είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές** πρέπει:

- (i) Να είναι ευσταθές
- (ii) Κάθε τροχιά που ξεκινά μέσα από τη σφαίρα $S(\delta)$, να το πλησιάζει για $t \rightarrow \infty$.

Γεωμετρική απεικόνιση



Παράδειγμα 1: Έστω το σύστημα $\dot{x} = y, y = -x$. Οι φασικές του τροχιές είναι $x^2 + y^2 = c^2$ δηλαδή κύκλοι γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (0, 0)$. Αυτό είναι ευσταθές, διότι για $t \rightarrow \infty$ οι τροχιές ούτε το προσεγγίζουν ούτε απομακρύνονται από αυτό.

Παράδειγμα 2: Έστω το σύστημα $\dot{x} = -y, \dot{y} = -y$.

Η λύση είναι

$$x = Ae^{-t},$$

$$y = Be^{-t}$$

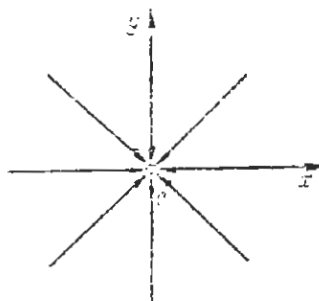
και οι φασικές τροχιές

$y/x = B/A$, δηλαδή ακτίνες που

προσεγγίζουν το $(0, 0)$ και

άρα αυτό είναι ασυμπτωτικά

ευσταθές.



Παράδειγμα3: Έστω το σύστημα $\dot{x}=x$, $\dot{y}=y$.

Η λύση του είναι:

$$x=Ae^t, y=Be^t$$

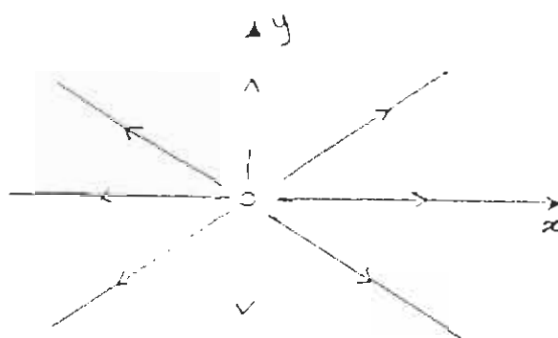
και οι φασικές τροχιές

$y/x=B/A$, δηλαδή

ακτίνες που απομακρύνονται

από το $(0,0)$ και άρα αυτό

είναι ασταθές.



Επειδή το αυτόνομο δυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \quad (15)$$

Εμφανίζεται πολύ συχνά σε εφαρμογές, θα μελετηθεί το σημείο ισορροπίας του $(x,y)=(0,0)$

Αναζητώντας λύσεις της μορφής $x=ae^{\lambda t}, y=be^{\lambda t}$ για το (15) καταλήγουμε στην εύρεση του λ δηλ. (λ_1, λ_2) από τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

και για την εύρεση των α, β στο σύστημα

$$(a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0, \quad a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta = 0 \quad (17)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

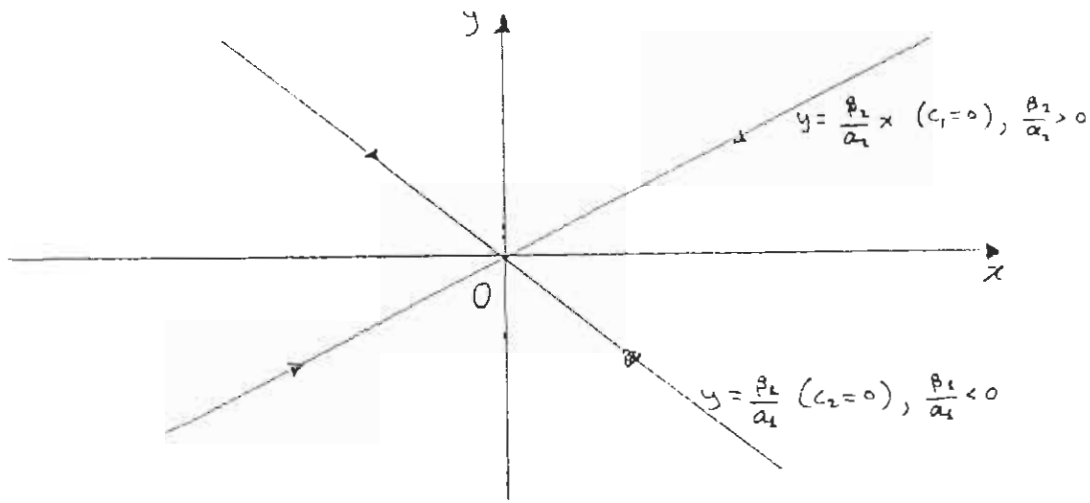
(A) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Η γενική λύση του συστήματος (15) είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (18)$$

(A₁) Έστω $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Αν $c_1=0$ ή $c_2=0$ έχουμε κίνηση σε μια διάσταση

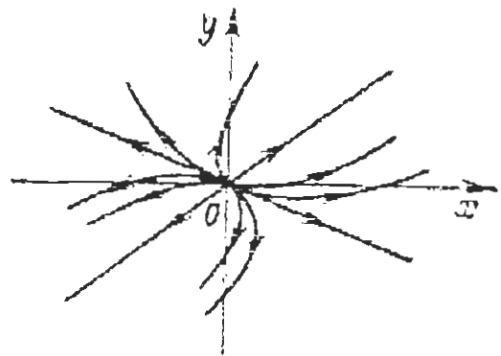
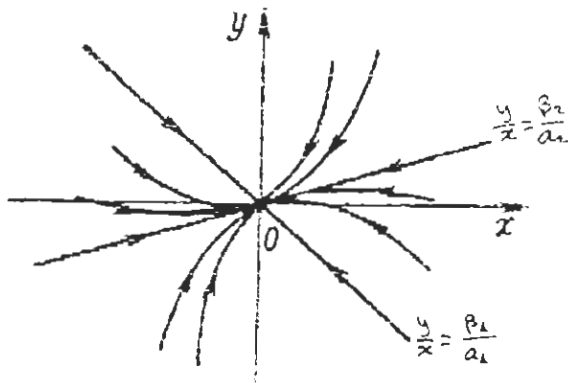


και καθώς για $t \rightarrow \infty$ έχουμε $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$

Αν $c_1, c_2 \neq 0$ τότε από τη (18) έχουμε

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 a_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 a_2 e^{\lambda_2 t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\beta_2}{a_2}$$

δηλαδή όλες οι τροχιές (έκτος των ακτίνων $y = \beta_1 x / a_1$) έχουν την κλίση της ακτίνας $y = \beta_2 x / a_2$ στη γειτονιά του $O(0,0)$.



Επειδή για $t \rightarrow \infty$ έχουμε $x, y \rightarrow 0$, οι τροχιές πλησιάζουν στο $O(0,0)$

Ένα τέτοιου είδους σημείο ισορροπίας, ονομάζεται **ευσταθές κομβικό σημείο** ή **ευσταθής κόμβος**.

(A₂) Έστω $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

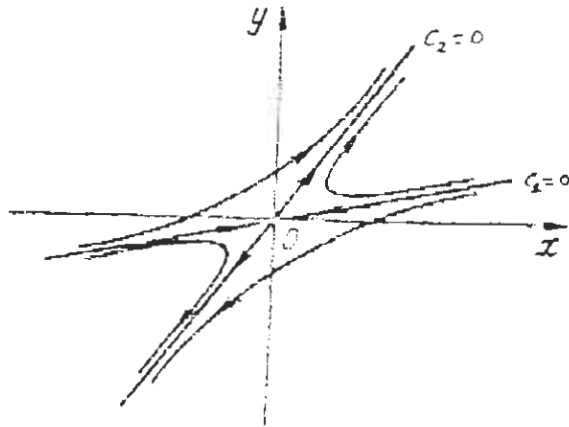
Τότε ισχύουν τα ίδια με τη διαφορά ότι οι τροχιές απομακρύνονται από το $O(0,0)$ που τώρα ονομάζεται **ασταθές κομβικό σημείο**.

(A₃) Έστω $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

Για $c_2 = 0$ έχουμε $x = c_1 a_1 e^{\lambda_1 t}, y = c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t}$

Με αύξηση του t , έχουμε κίνηση κατά την ακτίνα $y = \beta_1 x / a_1$ από το $O(0,0)$, επειδή $\lambda_1 > 0$.

Για $c_1=0$, έχουμε $x=c_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}$, $y=c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}$. Με αύξηση τώρα του t , έχουμε κίνηση κατά την



ακτίνα $y=\beta_2 x/\alpha_2$ προς το $O(0,0)$, επειδή $\lambda_2 < 0$. Αν $c_1, c_2 \neq 0$ τότε για $t \rightarrow \pm\infty$, οι τροχιές αφήνουν την γειτονιά του $O(0,0)$. Το $O(0,0)$ αυτού του είδους ονομάζεται **σαγματικό** σημείο και είναι φυσικά ασταθές.

Παράδειγμα 1: Έστω το δυναμικό σύστημα:

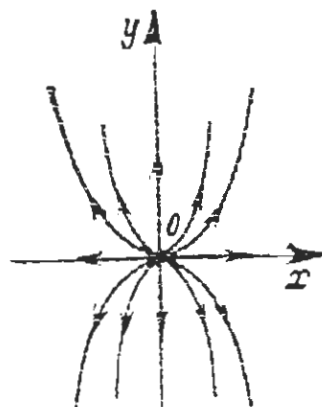
$$\dot{x} = x, \dot{y} = 2y \quad (19)$$

Το $O(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας του.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

με ρίζες $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Έτσι το $O(0,0)$ είναι ασταθής κόμβος. Οι φασικές τροχιές έχουν εξίσωση $y=cx^2$ και άρα έχουμε το παρακάτω σχήμα.



Παράδειγμα 2: Έστω το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = -x, \dot{y} = y \quad (20)$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

με $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ και η εξίσωση των φασικών τροχιών $xy = c$. Άρα το σημείο $O(0,0)$ είναι σαγματικό και οι τροχιές ισοσκελείς υπερβολές και ακτίνες που συμπίπτουν με τους ημιάξονες των συντεταγμένων.

(B) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 = \lambda_2$

Η γενική λύση αυτού του συστήματος (15) είναι:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = (c_1^* + c_2^* t) e^{\lambda_1 t}$$

((B)) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Το σημείο ισορροπίας $O(0,0)$, (λόγω της παρουσίας του όρου $e^{\lambda_1 t}, \lambda_1 < 0$, οι λύσεις $x(t), y(t)$ τείνουν στο μηδέν

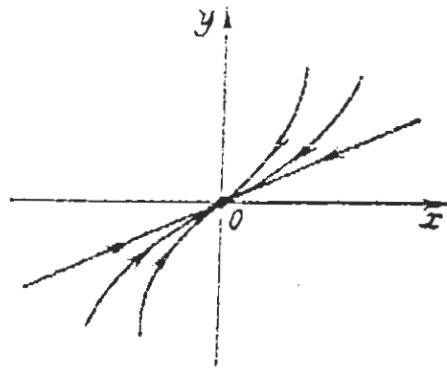
με $t \rightarrow \infty$) είναι

ασυμτωτικά ευσταθές

και ονομάζεται ευσταθής

εκφυλισμένος κόμβος.

Διαφέρει από το κόμβο της A_1



κατά το ότι εκεί μια τροχιά είχε εφαπτομένη διαφορετική από όλες τις άλλες.

(B₂) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

Όπως και προηγούμενα, αλλά με τροχιές σε αντίθετη κατεύθυνση. Δηλαδή έχουμε **άσταθό κόμβο**.

Παράδειγμα: Έστω το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = x, \dot{y} = x + y \quad (22)$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

με διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και εξίσωση τροχιών:

$$y = x(\ln|x| + c) \quad (23)$$

Έτσι έχουμε $\lim_{t \rightarrow 0} y(x)=0, \lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(x)=-\sigma$

(Γ) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} (\lambda_{1,2} = p + iq, q \neq 0)$

Η γενική λύση είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{pt}(c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) \\ y(t) &= e^{pt}(c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt) \end{aligned} \quad (24)$$

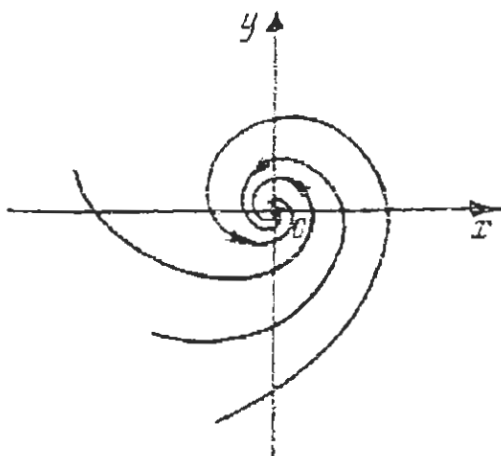
όπου c_1, c_2 σταθερές και c_1^*, c_2^* γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των σταθερών.

(Γ1) $p < 0$

Τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{pt} = 0$, ενώ οι δεύτεροι παράγοντες των γινομένων των λύσεων στις σχέσεις

(24) είναι φραγμένες περιοδικές συναρτήσεις.

Οι τροχιές είναι σπειροειδείς, το σημείο $O(0,0)$ ασυμπτωτικά σταθερό και ονομάζεται ευσταθές εστιακό σημείο.

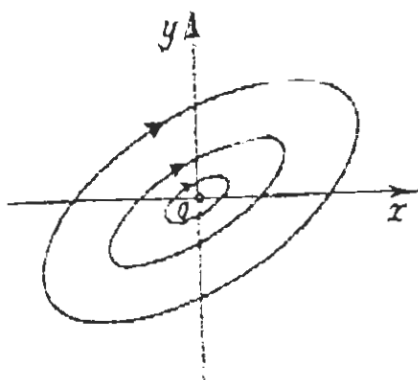


(Γ2) $p > 0$

Τώρα, εύλογα, έχουμε ασταθές εστιακό σημείο.

(Γ3) $p = 0$

Οι λύσεις είναι περιοδικές και οι τροχιές κλειστές καμπύλες. Το $O(0,0)$ είναι ευσταθές και ονομάζεται ελλειπτικό σημείο ισορροπίας.



Παράδειγμα: Έστω αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση. Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0, \quad m = k = 1 \quad (25)$$

Με $\dot{x} = y$ έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - bx \quad (26)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$$

με ρίζες $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}$ (27)

Αν $0 < b < 2$, τότε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ δηλαδή μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Έτσι το σημείο ισορροπίας $O(0,0)$ είναι ευσταθές εστιακό.

(Δ) ΣΧΟΛΙΑ

(1) Οι λύσεις του συστήματος:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i=1,2,\dots,n \quad (28)$$

είναι όλες ταυτόχρονα ευσταθείς ή ασταθείς.

Αυτό δεν ισχύει σε μη γραμμικά συστήματα, όπου είναι δυνατόν μερικές λύσεις να είναι ευσταθείς και άλλες ασταθείς.

(2) Η γενική μορφή των αυτόνομων συστημάτων δύο διαστάσεων είναι:

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \quad x,y,t \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Η λύση είναι $y=y(t), x=x(t), t \in [t_1, t_2]$ (30)

με διανυσματικό πεδίο κατευθύνσεων

$$dy/dx = Q(x,y)/P(x,y) \quad (31)$$

και σημεία ισορροπίας όπου $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ή

$$P(x,y) = 0, \quad Q(x,y) = 0 \quad (32)$$

με λύση $x=\bar{x}, y=\bar{y}$

Αν οι συναρτήσεις $P(x,y), Q(x,y)$, είναι μη γραμμικές τότε μπορεί, όπως αναφέρθηκε ήδη, να έχουμε περισσότερα του ενός σημεία ισορροπίας (\bar{x}, \bar{y}) . Κοντά όμως σε αυτά αν αναπτυχθούν οι P, Q σε δυνάμεις των $(x-\bar{x}), (y-\bar{y})$, οι μη γραμμικοί όροι μπορούν να παραληφθούν και έτσι καθίσταται σημαντική η μελέτη των γραμμικών συστημάτων:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \quad (33)$$

Επίσης, με κατάλληλες μεταφορές των αξόνων μπορούμε να φέρουμε το σημείο ισορροπίας στο κέντρο των συντεταγμένων $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$. Για αυτό μελετήθηκε το σύστημα (33) με σημείο ισορροπίας το $O(0,0)$.

(3) Μια γενικότερη και πιο συνοπτική θεώρηση των κρίσιμων σημείων των αυτόνομων δυναμικών συστημάτων με δύο μεταβλητές οδηγεί στο σύστημα:

$$\dot{x} = P(x,y), \dot{y} = Q(x,y) \quad (34)$$

με P, Q δοσμένες και γενικά μη γραμμικές συναρτήσεις των x, y .

Και εδώ ο προσδιορισμός των κρίσιμων σημείων γίνεται από την λύση του αλγεβρικού συστήματος:

$$P(x,y)=0, Q(x,y)=0 \quad (35)$$

που δίνει $x = \bar{x}, y = \bar{y}$

Η μελέτη της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας (\bar{x}, \bar{y}) γίνεται με μελέτη των κινήσεων πολύ κοντά σε αυτό. Αν δηλαδή το σημείο απομακρυνθεί πολύ λίγο από το (\bar{x}, \bar{y}) και επιστρέψει είναι ευσταθές, αλλιώς είναι ασταθές. Μαθηματικώς παίρνουμε

$$x = \bar{x} + u, y = \bar{y} + v \quad (36)$$

Αναπτύσσουμε σε σειρές Taylor τις συναρτήσεις

$$P(x,y) = P(\bar{x}+u, \bar{y}+v), Q(x,y) = Q(\bar{x}+u, \bar{y}+v)$$

και δεδομένου ότι $P(\bar{x}, \bar{y}) = Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha_{11} u + \alpha_{12} v \\ \dot{v} &= \alpha_{21} u + \alpha_{22} v \end{aligned} \quad (37)$$

με ορίζουσα συντελεστών

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Οπότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις

(α) Οι ιδιοτιμές της A είναι **αρνητικοί πραγματικοί ή μιγαδικοί με αρνητικό πραγματικό μέρος**. Τότε οι δύο συναρτήσεις $u(t), v(t)$ περιέχουν εκθετικούς όρους και άρα για $t \rightarrow \infty$ μηδενίζονται. Έτσι οι μικρές μετακινήσεις τελικά μηδενίζονται και το σύστημα επανέρχεται στο σημείο ισορροπίας του (\bar{x}, \bar{y}) που είναι άρα ευσταθές.

(β) Μια από τις ιδιοτιμές της A είναι **θετική πραγματική** και αν είναι μιγαδικές μια έχει **θετικό πραγματικό μέρος**. Τότε εύκολα φαίνεται ότι το (\bar{x}, \bar{y}) είναι **ασταθές**.

(γ) Οι ιδιοτιμές της A φανταστικοί αριθμοί. τότε οι $u(t)$, $v(t)$ είναι ημιτονοειδείς και έχουν ασυμπτωτική ευστάθεια (με την έννοια ότι το σύστημα ούτε απομακρύνεται, ούτε πλησιάζει το σημείο ισορροπίας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 :

ΧΑΟΣ

§ 2.1 Μια πρώτη γνωριμία με το Χάος – Η λογιστική εξίσωση

§ 2.2 Ελκυστές

§ 2.3 Χαοτικοί και παράξενοι ελκυστές

§ 2.4 Fractals

§ 2.5 Διαστάσεις

§ 2.6 Σταθερή Feigenbaum

§ 2.7 Άλλοι μηχανισμοί που οδηγούν στο Χάος

§ 2.8 Έλεγχος του Χάους

§ 2.1 ΠΡΩΤΗ ΓΝΩΡΙΜΙΑ – ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Α) ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Τα μαθηματικά μοντέλα (συνήθως διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διάφορες που αναπαράγουν τα παρατηρησιακά ή πειραματικά δεδομένα) της χρονικής εξέλιξης των πληθυσμών, διαφόρων βιολογικών ειδών, συνήθως οδηγούν σε μη γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες παρουσιάζουν «ορατές με γυμνό μάτι» όλες τις μαθηματικές συμπεριφορές που ενδιαφέρουν την μη γραμμική δυναμική.

Το απλούστερο μαθηματικό μοντέλο πληθυσμιακής δυναμικής οδηγεί στην λεγόμενη **λογιστική εξίσωση**. Αφορά σε πραγματικό (βιολογικό) επίπεδο την μεταβολή του πληθυσμού ενός μόνο είδους, δηλαδή χωρίς ανταγωνιστές στο ίδιο φυσικό περιβάλλον.

Αν τα αποθέματα τροφής του συγκεκριμένου περιβάλλοντος ήταν απεριόριστα, τότε θα είχαμε διαρκή αύξηση του πληθυσμού του βιολογικού είδους που ζει σε αυτό.

Λογικό είναι να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού θα είναι ανάλογος με τον αριθμό των υπαρχόντων εκείνη την χρονική στιγμή μελών του.

Δηλαδή :

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = \lambda * N \quad (1)$$

Η σταθερή (για το συγκεκριμένο μοντέλο) λ εκφράζει την ποσοστιαία αύξηση του πληθυσμού ανά μονάδα χρόνου, όπως προκύπτει από την (1). Πράγματι

$$\lambda = \frac{(dN/N)}{dt}$$

Αν πάρουμε υπόψη μας και τους θανάτους, τότε μια πρώτη τροποποίηση της (1) είναι :

$$\dot{N} = (\lambda - \mu)N \quad (2)$$

Η λύση της (2) είναι :

$$N = N_0 e^{(\lambda - \mu)t} \quad (3)$$

που θα οδηγούσε σε :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N = \infty \text{ αν } \lambda > \mu$$

Και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N = 0 \text{ αν } \lambda < \mu$$

Επειδή όταν ο αριθμός των μελών του συστήματος είναι μεγάλος, εξαντλούνται τα αποθέματα διατροφής είναι πιο ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι αυτό οδηγεί με αύξηση του ρυθμού θανάτων και μείωση του ρυθμού αύξησης με απλούστερη μορφή.

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 N, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 N \quad (4)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, θετικές σταθερές.

Οπότε

$$\lambda - \mu = (\lambda_1 - \mu_1) - (\lambda_2 + \mu_2) N = a - bN \quad (5)$$

Όπου

$$a = \lambda_1 - \mu_1, \quad b = \lambda_2 + \mu_2$$

Τελικά η (2) γίνεται :

$$\dot{N} = (a - bN) N \quad (6)$$

Που είναι γνωστή σαν λογιστική εξίσωση και είναι θεμελιώδης στην μαθηματική θεωρία της οικολογίας. Επίσης χρησιμοποιείται στην μαθηματική θεωρία διάδοσης φημών, ασθενειών. κ.τ.λ.

Η (6) είναι πρωτοτάξια μη γραμμική διαφορική εξίσωση με διαχωριζόμενες μεταβλητές και περιέχει δύο σταθερές a, b που βρίσκονται εύκολα, αν γνωρίζουμε, πειραματικά, σε t_1, t_2 τους πληθυσμούς N_1, N_2 .

Από την (6) και για $\dot{N}=0$, μπορούμε να βρούμε ένα πληθυσμό ισορροπίας

$$N_{\infty} = a / b \quad (7)$$

οπότε η (6) γράφεται

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{N}{N_{\infty}} \right) N \quad (8)$$

από την (8) είναι φανερό ότι αν $N(0) < N_{\infty}$, δηλαδή αν ο αρχικός ($t = 0$) πληθυσμός είναι μικρότερος του N_{∞} τότε τείνει να αυξάνεται και αντίστροφα.

Γεωμετρικά όλα

αυτά

απεικονίζονται

από το διπλανό

διάγραμμα $N - t$,

όπου φαίνεται

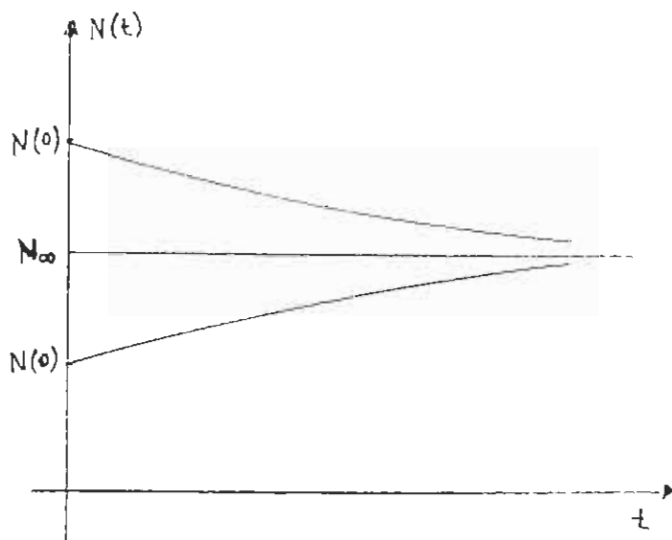
ότι ανεξάρτητα

από την τιμή

εκκίνησης

(αρχικός πληθυσμός)

θα καταλήξουμε στον ίδιο σταθερό τελικό αριθμό ατόμων.



Για ευκολότερη περαιτέρω μαθηματική επεξεργασία της (6) εκτελούμε τον μετασχηματισμό $\chi = N / N_{\infty}$, οπότε αυτή γράφεται :

$$\dot{\chi} = r\chi(1 - \chi) \quad (9)$$

Το $\chi(t)$ είναι τώρα το ποσοστό του τελικού πληθυσμού N_{∞} σε χρόνο t , ενώ απλά τέθηκε $\alpha = r$.

Η εξίσωση (9) όπως είπαμε είναι πρώτης τάξεως διαφορική με διαχωριζόμενες μεταβλητές και έχει λύση :

$$\chi(t) = \frac{\chi_0}{\chi_0 + (1 - \chi_0) e^{-r t}} \quad (10)$$

όπου χ_0 είναι το αρχικό ($t=0$) ποσοστό του τελικού πληθυσμού. Είναι φανερό ότι

$$\chi_{\infty} = N_{\infty} / N_{\infty} = 1$$

τέλος τα σημεία ισορροπίας της (9) δηλαδή όπου $\dot{\chi} = 0$ είναι :

$$\chi_1 = 0, \chi_2 = 1$$

όπου το χ_1 είναι ασταθές, ενώ το χ_2 ευσταθές.

Μια άλλη εικόνα της (9) έχουμε μέσω του χώρου των φάσεων της, ο οποίος είναι, φυσικά, μονοδιάστατος.

Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα σημεία ισορροπίας μελετώντας την τοπική συμπεριφορά της $\chi(t)$ κοντά στα χ_1, χ_2 . Έτσι γραμμικοποιούμε την διαφορική εξίσωση κοντά σε αυτά τα σημεία. Για παράδειγμα, όταν $\chi(t)$ είναι κοντά στο μηδέν (0), παίρνουμε $\chi(t) = \varepsilon(t)$ και προσεγγίζουμε την ακριβή διαφορική εξίσωση με την

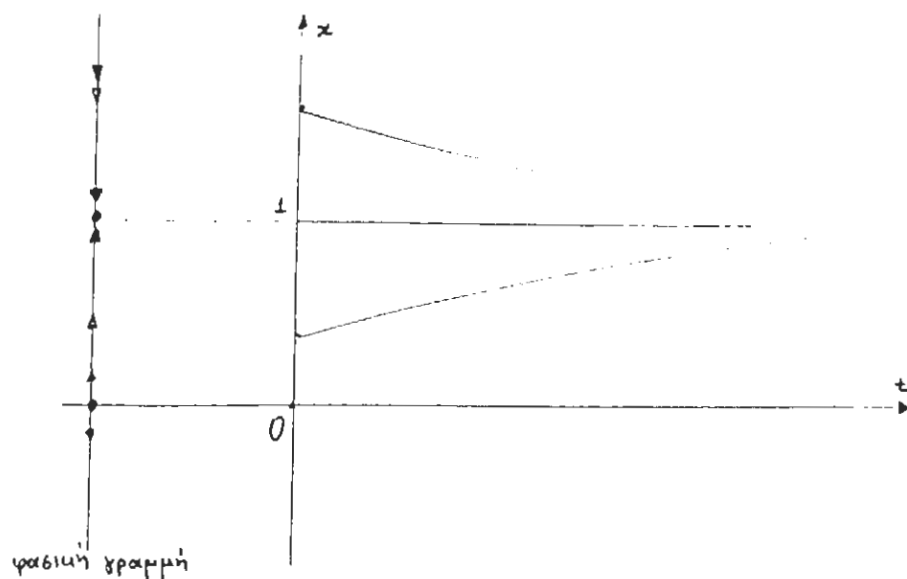
$$\dot{\varepsilon} = r\varepsilon$$

η οποία έχει λύσεις αύξουσες εκθετικά. Έτσι το σημείο $\chi = 0$ είναι ασταθές.

Όταν είμαστε κοντά στο 1 τότε παίρνουμε: $\chi(t) = 1 + \varepsilon(t)$ και προσεγγίζουμε την ακριβή διαφορική εξίσωση με την

$$\dot{\varepsilon} = -r\varepsilon$$

η οποία έχει λύσεις φθίνουσες εκθετικά και άρα το σημείο 1 είναι ευσταθές



Όπως φαίνεται από το σχήμα, το σημείο 1 είναι ευσταθής κόμβος, ενώ το 0 ασταθής.

B) ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

B₁) ΓΕΝΙΚΑ

Οι μεταβολές του πληθυσμού δεν συμβαίνουν βέβαια, συνεχώς, αλλά ασυνεχώς με στοιχειώδη χρονική μονάδα το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών γενεών του πληθυσμού.

Μαθηματικώς η περιγραφή της χρονικής του εξέλιξης πρέπει να γίνει όχι μέσω της συνεχούς συνάρτησης $\chi(t)$ αλλά μέσω της ακολουθίας χ_n .

Έτσι ακολουθία που αντιστοιχεί στην λογιστική εξίσωση είναι :

$$\chi_{n+1} = r(1 - \chi_n)\chi_n \quad (11)$$

όπου χ_n, χ_{n+1} ο αριθμός των ατόμων του πληθυσμού στις διαδοχικές χρονικές στιγμές και $n, n+1$ και r ο μέσος σχετικός ρυθμός (ανά περίοδο) μεταβολής του πληθυσμού.

Η εύρεση των σημείων ισορροπίας της (11) γίνεται υποθέτοντας, κατά αρχήν, την ύπαρξη τους, δηλαδή ότι υπάρχει :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{n+1} = w \quad (12)$$

Τότε από τις (11), (12) έχουμε

$$w = r(1-w)w \quad (13)$$

από την τελευταία έχουμε

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1 - 1/r \quad (14)$$

αξίζει να σημειωθεί ότι για σχέσεις της μορφής :

$$\chi_{n+1} = f(\chi_n) \quad (15)$$

υπάρχει γενική μέθοδος εύρεσης των σημείων ισορροπίας τους καθώς και της ευστάθειάς τους ή μη.

Πράγματι η εύρεση τους γίνεται μέσω της υπόθεσης της ύπαρξής τους, όπως παραπάνω, δηλαδή :

$$\chi_{n+1} = \chi_n = w = \text{σταθερό.}$$

Και άρα ^{είναι} οι λύσεις της εξίσωσης :

$$w = f(w)$$

Η μελέτη της σταθερότητας τους γίνεται με την αντικατάσταση, δηλαδή την γραμμικοποίηση της (15) :

$$\chi_n = w + y_n \quad (17)$$

όπου y_n πολύ μικρή απόκλιση από το σημείο ισορροπίας. Έτσι έχουμε :

$$y_{n+1} = f'(w) y_n \quad (18)$$

Αν $|f'(w)| < 1$, δηλαδή αν οι μικρές αποκλίσεις y_n από το σημείο ισορροπίας w

γίνονται μικρότερες ($|y_{n+1}| < |y_n|$) τότε αυτό είναι ευσταθές.

Αν $|f'(w)| > 1$, το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Με $f(w) = r w(1-w)$ της διακριτής λογιστικής έχουμε:

1. $0 < r < 1$: Το $w_1 = 0$ ευσταθές, το $w_2 = 1 - 1/r$ ασταθές.

2. $1 < r < 3$: Το $w_1=0$ ασταθές, το $w_2 = 1-1 / r$ ευσταθές.

3. $r > 3$: Και τα δύο σημεία ισορροπίας w_1, w_2 ασταθή.

Είναι φανερό ότι στο διακριτό μοντέλο έχουμε δραστική απόκλιση αποτελεσμάτων από το συνεχές του αντίστοιχο.

Όμως αυτό δίνει αποτελέσματα σύμφωνα με την παρατήρηση. Πράγματι, αν $r < 1$, δηλαδή οι θάνατοι είναι περισσότεροι των γεννήσεων τότε κάθε μικρός πληθυσμός (y_n κοντά στο w_1) τείνει στο $w_1=0$, δηλαδή εξαφανίζεται. Άρα το $w_1=0$ είναι ευσταθές.

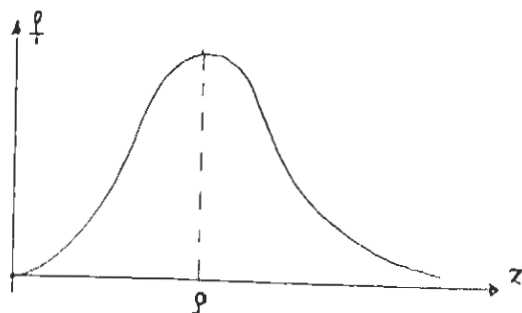
Αν $1 < r < 3$ έχουμε γεννήσεις περισσότερες των θανάτων και άρα αύξηση του πληθυσμού μέχρι ενός σημείου ισορροπίας $w_2 = 1-1 / r$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση $r > 3$. Εδώ ο πληθυσμός δεν ισορροπεί, διότι έχουμε πολύ μεγάλη αύξησή του ανά περίοδο με συνέπεια την μείωση της τροφής, που σημαίνει μείωση του πληθυσμού στην συνέχεια, οδηγώντας έτσι σε μια ταλαντωτική συμπεριφορά του.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί, ότι μη γραμμικές σχέσεις της μορφής

$$x_{n+1} = r f(x_n) \quad (19)$$

Χρησιμοποιούνται γενικότερα στην πληθυσμιακή δυναμική, όπου x_n ο πληθυσμός στην n γεννεά. Οι συναρτήσεις f έχουν συνήθως την μορφή του σχήματος λόγω βιολογικών περιορισμών.



Πράγματι όταν οι πληθυσμοί αυξάνονται συναντούν πλέον δυσκολίες στην εύρεση της διατροφής κ.λ.π. αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση τους.

Οι συνήθεις συναρτήσεις f κοντά στο μέγιστο ρ (ή στο ελάχιστο) παρουσιάζουν τετραγωνικούς όρους (μη γραμμικότητα), όπως φαίνεται από την ανάλυση Taylor γύρω από το σημείο αυτό :

$$f(x) = f(\rho) + \frac{f'(\rho)}{1!}(x - \rho) + \frac{f''(\rho)}{2!}(x - \rho)^2 + \dots \quad (20)$$

Είναι φανερό ότι η πρώτη μελέτη της μη γραμμικότητας θα είναι αυτή των τετραγωνικών απεικονίσεων.

Η λογιστική απεικόνιση $x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$ είναι η απλούστερη και ενσωματώνει ποσοτικά και ποιοτικά τις ιδιαίτερες ιδιότητες της μη γραμμικότητας.

B₂) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Για διάφορες τιμές της σταθερής r εφαρμόζουμε τον τύπο της διακριτής λογιστικής:

$$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$$

επαναληπτικά.

Για $r = 2$ και $x_0 = 0,02$ έχουμε την ακολουθία τιμών του x_n :

0,02

0,032

0,0753267

0,139305

0,239794

0,36459

0,463328

0,49731

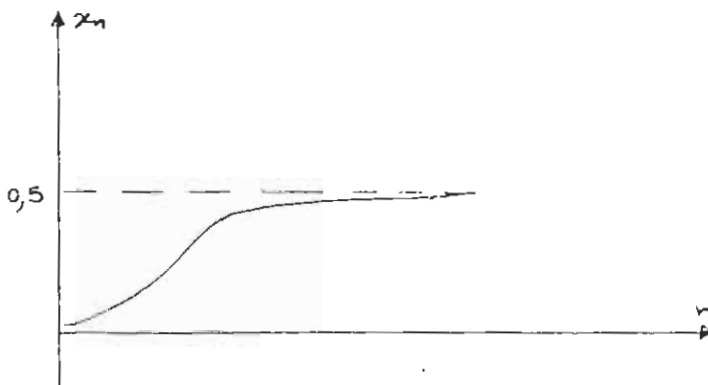
0,499986

0,5

0,5

0,5

ή το γράφημα



Όπως φαίνεται η ακολουθία τιμών της x_n γρήγορα συγκλίνει στην θέση $x = 0,5$.

Υπάρχει, όπως λέμε, ένας **σημειακός ελκυστής**, δηλαδή μια **μόνιμη ευσταθής κατάσταση**.

Αν $x_n = 0,5$, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$x_{n+1} = r(1-x_n)x_n = 0,5$$

επίσης

για $r = 0.4$ και $x_0 = 0.8$ έχουμε την ακολουθία τιμών του x_n :

0.8

0.064

0.0239616

0.00935498

0.00370698

0.0014773

0.000590046

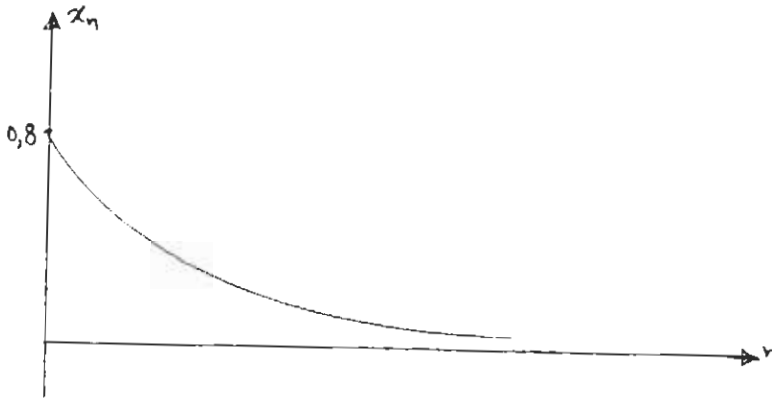
0.000235879

0.0000943294

0.0000377282

0.0000150907

ή το γράφημα

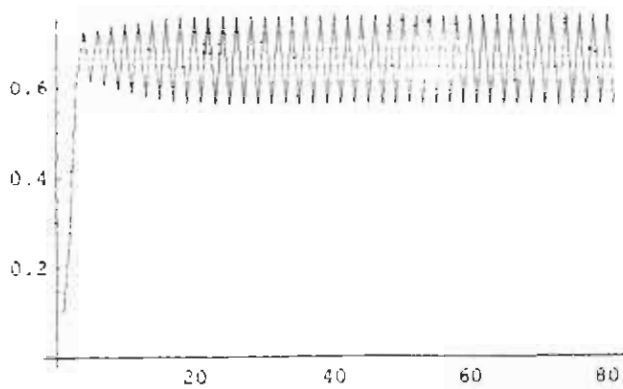


Όπως φαίνεται η ακολουθία x_n τείνει τώρα στο ευσταθές σημείο $x = 0$.

Για $r = 3,1$, $x_0 = 0,1$: έχουμε για την ακολουθία τιμών x_n :

{0.1, 0.279, 0.623593, 0.727647, 0.614348, 0.734466, 0.60458, 0.741095, 0.594806,
0.747136, 0.585663, 0.752252, 0.577744, 0.756263, 0.571421, 0.759187,
0.566748, 0.761189, 0.56352, 0.762492, 0.561403, 0.763312, 0.560067, 0.763815,
0.559245, 0.764119, 0.558748, 0.764301, 0.558449, 0.764409, 0.558272,
0.764474, 0.558166, 0.764512, 0.558104, 0.764534, 0.558067, 0.764547,
0.558045, 0.764555, 0.558033, 0.76456, 0.558025, 0.764563, 0.558021, 0.764564,
0.558018, 0.764565, 0.558016, 0.764566, 0.558015, 0.764566, 0.558015,
0.764566, 0.558015, 0.764566, 0.558014, 0.764566, 0.558014, 0.764566,
0.558014, 0.764566, 0.558014, 0.764566, 0.558014, 0.764567, 0.558014,
0.764567, 0.558014, 0.764567, 0.558014, 0.764567, 0.558014, 0.764567,
0.558014, 0.764567, 0.558014, 0.764567, 0.558014, 0.764567, 0.558014}

Και το αντίστοιχο διάγραμμα x_n η



Τώρα, όπως περιμέναμε, η ακολουθία x_n δεν συγκλίνει. Ύστερα από ένα μεταβατικό στάδιο, το σύστημα ταλαντώνεται μεταξύ των τιμών 0.558014 και 0.764567 με περίοδο 2.

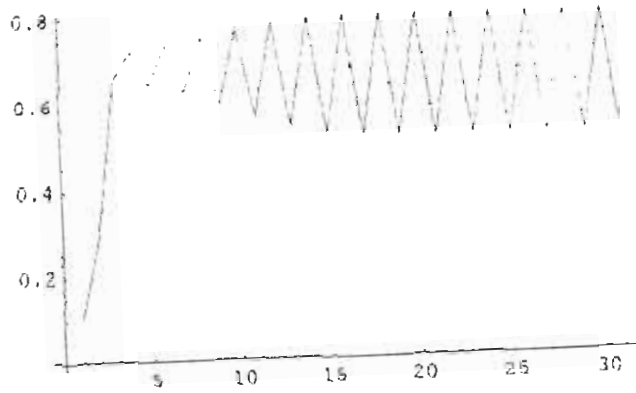
Πως επηρεάζουν τη ακολουθία x_n οι τιμές των r και x_0 ;

Κρατώντας σταθερή την r στην τιμή 3,1 και αλλάζοντας ελαφρά την αρχική τιμή x_0 , παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες δεν φαίνεται να έχουν σημασία.

Για την μελέτη του ρόλου της παραμέτρου r κρατάμε σταθερή την αρχική τιμή της ακολουθίας $x_0 = 1$ και αλλάζουμε την r . Έτσι για $x_0 = 0.1$ και $r = 3.2$ παίρνουμε τιμές x_n :

{0.1, 0.288, 0.656179, 0.721946, 0.642369, 0.73514, 0.623069, 0.751533, 0.59754, 0.769555, 0.567489, 0.785425, 0.539304, 0.795057, 0.521413, 0.798533, 0.51481, 0.799298, 0.513346, 0.79943, 0.513093, 0.799451, 0.513052, 0.799455, 0.513046, 0.799455, 0.513045, 0.799455, 0.513046, 0.799455, 0.513045}

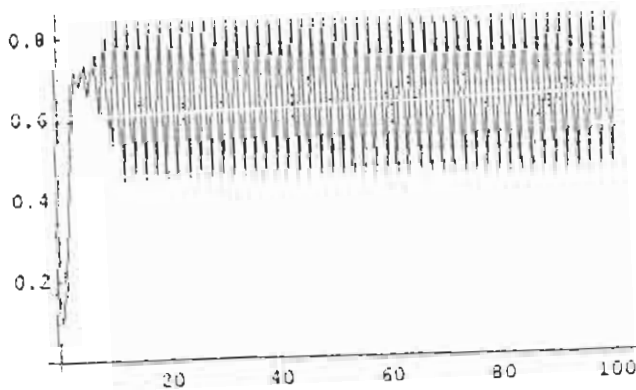
Γράφημα x_n - n :



Για $\omega = 0.1$ και $\gamma = 3.4$ έχουμε τιμές x_n :

{0.1, 0.306, 0.722039, 0.682378, 0.736911, 0.65917, 0.763861, 0.613283, 0.806368,
 0.530972, 0.84676, 0.441176, 0.938235, 0.461029, 0.844936, 0.445699, 0.939975,
 0.457019, 0.843719, 0.449315, 0.940917, 0.454936, 0.843065, 0.449842,
 0.841446, 0.453609, 0.842683, 0.450733, 0.841747, 0.45291, 0.84246, 0.451251,
 0.84192, 0.452509, 0.842332, 0.451551, 0.842019, 0.452278, 0.842257, 0.451725,
 0.842076, 0.452145, 0.842214, 0.451826, 0.842109, 0.452068, 0.842189, 0.451934,
 0.842128, 0.452024, 0.842174, 0.451917, 0.842139, 0.451993, 0.842166, 0.451937,
 0.842146, 0.451983, 0.842161, 0.451943, 0.842149, 0.451975, 0.842158,
 0.451954, 0.842152, 0.45197, 0.842157, 0.451958, 0.842153, 0.451967, 0.842156,
 0.45196, 0.842153, 0.451965, 0.842155, 0.451962, 0.842154, 0.451965, 0.842155,
 0.451962, 0.842154, 0.451964, 0.842155, 0.451963, 0.842154, 0.451964,
 0.842155, 0.451963, 0.842154, 0.451963, 0.842154, 0.451963, 0.842154, 0.451963,
 0.842154, 0.451963, 0.842154, 0.451963, 0.842154, 0.451963, 0.842154}

Γράφημα x_n - n



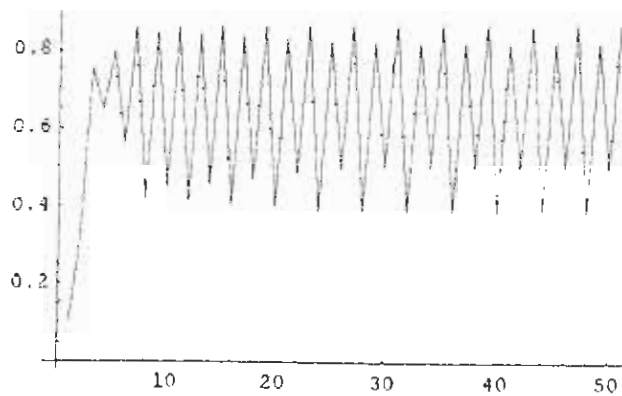
Όπως βλέπουμε, έχουμε τα ίδια ποιοτικά αποτελέσματα δηλαδή μια σταθερή τελική ταλάντωση περιόδου 2, με λίγο αλλαγμένο πλάτος.

Όμως η πρώτη «έκπληξη» έρχεται στην τιμή $r = 3.5$. οπότε έχουμε :

Τιμές χ_n :

{ 0.1, 0.315, 0.755213, 0.647033, 0.799335, 0.561396, 0.961907, 0.416935,
0.850793, 0.444306, 0.864144, 0.410898, 0.847213, 0.453051, 0.867285,
0.402856, 0.84197, 0.465697, 0.870892, 0.393564, 0.83535, 0.481392, 0.873798,
0.385989, 0.829505, 0.494993, 0.874912, 0.383043, 0.827124, 0.500466,
0.874999, 0.382814, 0.826936, 0.500894, 0.874997, 0.38282, 0.826941,
0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500894, 0.874997, 0.38282,
0.826941, 0.500884, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.500884, 0.874997 }

Γράφημα χ_{n-n}



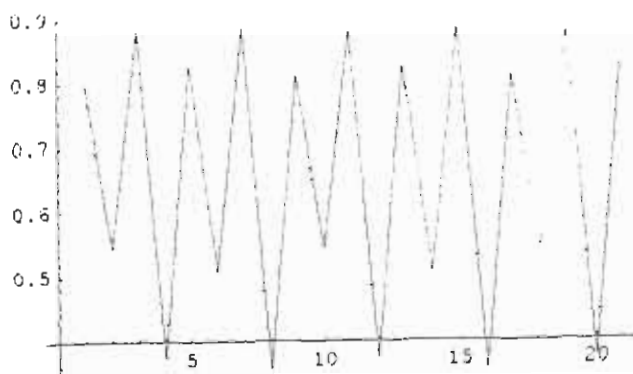
Τώρα η περίοδος της ταλάντωσης διπλασιάστηκε και έγινε 4. Πράγματι από πίνακα τιμών και το γράφημα φαίνεται ότι $\chi_n = \chi_{n+4}$ (μετά το μεταβατικό στάδιο).

Για $r = 3.55$ έχουμε πάλι διπλασιασμό περιόδου που έγινε τώρα 8 (αποφεύγουμε το μεταβατικό στάδιο που δεν ενδιαφέρει)

Τιμές χ_n :

{ 0.812656, 0.540475, 0.881684, 0.370326, 0.827805, 0.50603, 0.887371,
0.3548, 0.812656, 0.540475, 0.881684, 0.370326, 0.827805, 0.50603,
0.887371, 0.3548, 0.812656, 0.540475, 0.881684, 0.370326, 0.827805 }

Γράφημα x_{n+1}



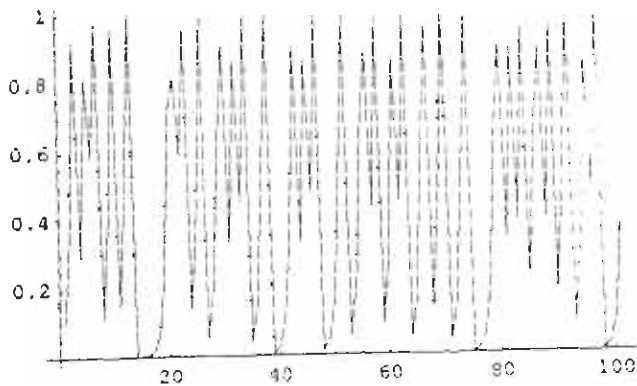
Το φαινόμενο του διπλασιασμού της περιόδου είναι γνωστό σαν **διακλάδωση** (bifurcation) και αναφέρεται σε κάθε **ποιοτική αλλαγή** των λύσεων προβλήματος, όταν μια παράμετρος του υπερβαίνει μια ορισμένη τιμή.

Αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε την παράμετρο r θα παρατηρήσουμε ότι οι διακλαδώσεις (διπλασιασμοί περιόδου) συνεχίζονται μέχρι την τιμή $r = 3.57$. Δηλαδή μέχρι αυτή την τιμή διατηρείται ^{φ} περιοδικός χαρακτήρας των λύσεων της διακριτής λογιστικής εξίσωσης.

Δίνουμε τώρα τιμή $r = 4$ οι 100 πρώτες τιμές x_n είναι :

```
{0.1, 0.36, 0.9216, 0.299014, 0.821939, 0.589421, 0.970813, 0.113339, 0.401974,
0.961563, 0.147837, 0.503924, 0.999939, 0.000246305, 0.000984976, 0.00393603,
0.0156821, 0.0617448, 0.23173, 0.712124, 0.820014, 0.590364, 0.967337,
0.126384, 0.441645, 0.986379, 0.053742, 0.203415, 0.64815, 0.912207, 0.320342,
0.870893, 0.449754, 0.989902, 0.039986, 0.153548, 0.519885, 0.998418,
0.00631654, 0.0251066, 0.0979049, 0.353278, 0.913891, 0.314778, 0.862771,
0.473588, 0.99721, 0.0111304, 0.0440261, 0.168351, 0.560037, 0.985582,
0.0568391, 0.214434, 0.673808, 0.879163, 0.42494, 0.977464, 0.0881121,
0.321393, 0.872399, 0.445277, 0.988022, 0.0473394, 0.180394, 0.591407,
0.966579, 0.129216, 0.450078, 0.990031, 0.039479, 0.191679, 0.514697,
0.999137, 0.00344849, 0.0137463, 0.0542395, 0.205155, 0.652265, 0.907262,
0.336551, 0.893138, 0.38177, 0.944087, 0.211148, 0.666258, 0.889433,
0.393367, 0.954517, 0.173656, 0.573999, 0.978096, 0.0856952, 0.313406,
0.860731, 0.479493, 0.998318, 0.00671752, 0.0266896, 0.103909, 0.372447}
```

Και το γράφημα x_{n+1} :



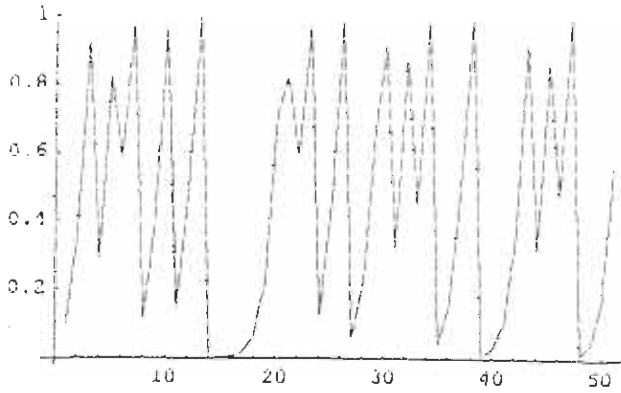
Η εικόνα είναι τώρα εντελώς διαφορετική από τις προηγούμενες.

Έχουμε, αρχικά, πλήρη έλλειψη περιοδικότητας κάτι που γίνεται φανερό και από τον πίνακα των αριθμητικών τιμών και από το γράφημα.

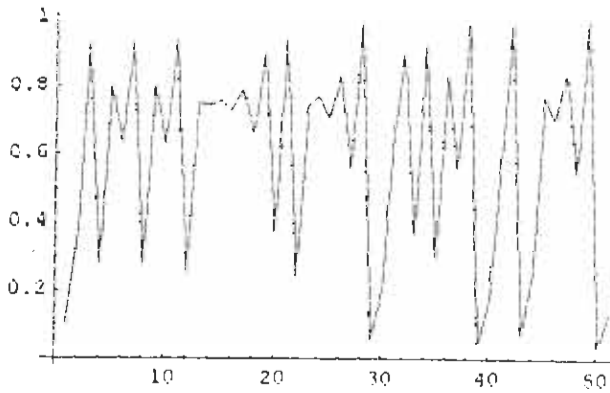
Όμως είναι άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της περιοχής τιμών (της ακολουθίας τιμών x_n , για $r > 3.57$ που ονομάζεται και **χαοτική περιοχή**, είναι η εξαιρετική ευαισθησία των τιμών της για μικρές μεταβολές της αρχικής τιμής x_0 .

Παίρνουμε τις 50 πρώτες τιμές της ακολουθίας n για $x_0 = 0.1$ και για $x_0 = 0.101$, παραπετώντας και τα αντίστοιχα γραφήματα

(0.1, 0.36, 0.9216, 0.289014, 0.821939, 0.585421, 0.970813, 0.113339, 0.401974,
 0.961563, 0.147837, 0.903924, 0.999938, 0.000246305, 0.000984976, 0.00393603,
 0.0156821, 0.0617448, 0.23173, 0.712124, 0.820014, 0.590364, 0.967337,
 0.126384, 0.441645, 0.986378, 0.063742, 0.203415, 0.64815, 0.912207,
 0.320342, 0.070093, 0.440734, 0.909902, 0.039980, 0.153540, 0.519005,
 0.999418, 0.00631654, 0.0261066, 0.0979049, 0.353278, 0.913891, 0.314778,
 0.862771, 0.473588, 0.99721, 0.0111304, 0.0440261, 0.168351, 0.560037)



(0.101, 0.363106, 0.925139, 0.277028, 0.801135, 0.637271, 0.924626, 0.27877,
 0.804229, 0.629778, 0.93263, 0.251324, 0.752642, 0.744689, 0.760509, 0.72954,
 0.791078, 0.661095, 0.896194, 0.372121, 0.934588, 0.244535, 0.73895,
 0.771611, 0.704909, 0.832049, 0.558973, 0.986089, 0.0548704, 0.207439,
 0.657631, 0.90061, 0.358048, 0.919398, 0.296421, 0.834222, 0.553182,
 0.989687, 0.0447411, 0.170957, 0.588924, 0.982085, 0.070377, 0.261696,
 0.772845, 0.702222, 0.836425, 0.547273, 0.991061, 0.0354359, 0.136721)



Παρατηρούμε ότι η αρχικά πολύ μικρή διαφορά των τιμών $\chi_0=0.1$, $\chi_0=0.101$ γρήγορα μεγεθύνεται για να καταλήξουμε μετά πενήντα επαναλήψεις σε πολύ διαφορετικές τιμές.

Αυτό είναι γνωστό και σαν «φαινόμενο της πεταλούδας». Δηλαδή το πέταγμα μιας πεταλούδας εδώ, μπορεί να προκαλέσει καταιγίδα κάπου πολύ μακριά επειδή μπορεί να μεγεθυνθεί πολύ η διαταραχή στην ατμόσφαιρα, που προκάλεσε το πέταγμα της. Τα μετεωρολογικά φαινόμενα εμφανίζουν χάος (είναι τα πρώτα στα οποία άλλωστε παρατηρήθηκε).

B₃) ΣΧΟΛΙΑ

(1) ΧΑΟΣ – ΠΡΟΒΛΕΨΙΜΟΤΗΤΑ

Οι αρχικές συνθήκες σε κάθε μαθηματικό μοντέλο ενός φυσικού (και όχι μόνο) προβλήματος αποκτώνται πειραματικά. Είναι φανερό ότι, στα όρια του πειραματικού σφάλματος, σε ένα μοντέλο με εξισώσεις υπερευαίσθητες στις αρχικές συνθήκες αδυνατούμε πρακτικά να έχουμε προβλέψεις.

(2) Οι απόψεις για το τι είναι χάος δίστανται. Η εντελώς άναρχη μορφή των παρουσιαζομένων στην χαοτική περιοχή, γραφημάτων, είναι μια άποψη. Η υπερευαίσθησία (αστάθεια) των λύσεων για πολύ μικρές μεταβολές στις αρχικές συνθήκες που καθιστά τις προβλέψεις πρακτικά αδύνατες είναι άλλη άποψη. Τέλος ο συνδυασμός και των δυο είναι η επικρατούσα.

(3) Ο διπλασιασμός της περιόδου (στην περιοχή των τιμών της παραμέτρου r που συμβαίνει) γίνεται, καθώς αυξάνεται η παράμετρος ολοένα και δυσδιάκριτος. Ανάλογα με την αριθμητική ακρίβεια του υπολογιστικού μηχανήματος που διαθέτουμε μπορούμε και να τον παρακολουθήσουμε.

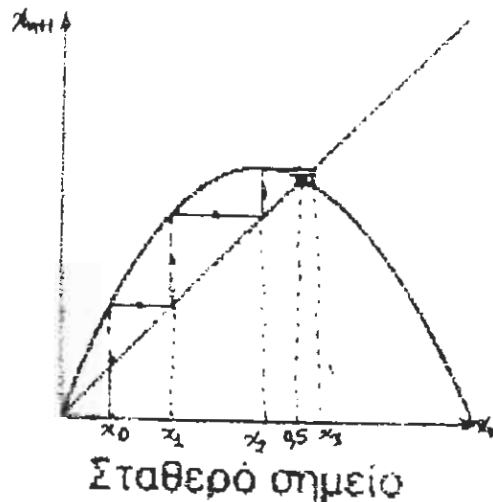
Επίσης η περιοδικότητα εξαρτάται από το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων των τιμών της ακολουθίας χ_n που θεωρούμε σημαντικά.

(4) Ένας άλλος τρόπος (γεωμετρικός) μελέτης της διακριτής λογιστικής είναι με χρήση του ιστογράμματος $\chi_{n+1} - \chi_n$.

Έστω $r = 2$, οπότε τα σημεία ισορροπίας της $\chi_{n+1} = 2(1 - \chi_n)\chi_n$

είναι, όπως γνωρίζουμε, $w_1 = 0$, $w_2 = 0.5$

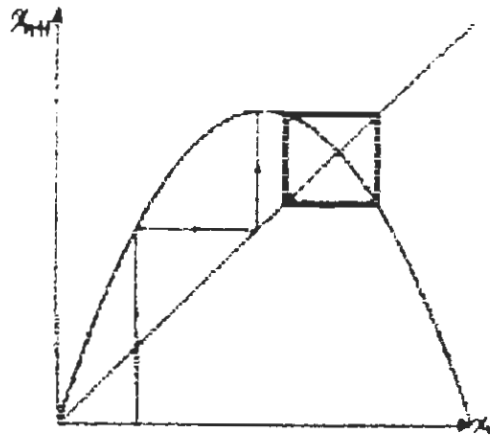
Σχεδιάζουμε πρώτα την καμπύλη $y = 2(1 - \chi)\chi$ (παραβολή). Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάζουμε την ευθεία $y = x$. Ξεκινάμε την επαναληπτική διαδικασία με τιμή εκκίνησης χ_0 , φέροντας κατακόρυφη γραμμή μέχρι που να τμήσει την παραβολή. Από το σημείο αυτό φέρουμε οριζόντια γραμμή μέχρι που να τμήσει την ευθεία. Το σημείο αυτό έχει τετμημένη χ_1 . Συνεχίζοντας όμοια, βρίσκουμε το σημείο χ_2, χ_3, \dots



Παρατηρούμε ότι δημιουργείται ένας ιστός που στρέφεται σπειροειδώς προς τα μέσα (ευσταθές σημείο).

- ❖ Για $1 < r < 3$ συμβαίνει πάντα το ίδιο.

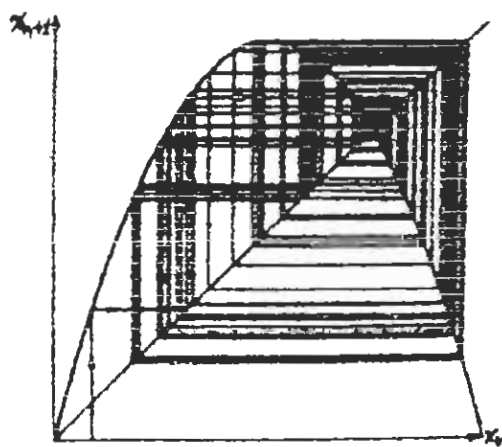
- ❖ Για $r = 3$ το ευσταθές σημείο γίνεται «οριακά ευσταθές» και η σύγκλιση προς αυτό είναι εξαιρετικά αργή (σημάδι ότι βρισκόμαστε μπροστά σε σημαντική ποιοτική αλλαγή συμπεριφοράς).
- ❖ Για $r > 3$, π.χ. $r = 3.2$ η κίνηση συγκλίνει σε ένα τετράγωνο δείχνοντας ότι η τιμή x_n μεταπηδά συνεχώς ανάμεσα σε δυο αριθμούς.



Περίοδος 2

Αυτό σημαίνει «κύκλο» περιόδου 2. Το σύστημα αρχίζει να ταλαντώνεται.

- ❖ Για $r = 3.5$ έχουμε «κύκλο» με περίοδο 4 κ.τ.λ.
- ❖ Για $r = 3.57$ η περίοδος έχει διπλασιαστεί άπειρες φορές και περνάμε στην χαοτική περιοχή.



Χάος

(5) Τάξη μέσα στο Χάος.

Το μέχρι στιγμής σχήμα για την συμπεριφορά των λύσεων της διακριτής λογιστικής, με διαρκώς αυξανόμενη την τιμή της σταθερής r , είναι :

μόνιμη κατάσταση \rightarrow περιοδική \rightarrow χάος

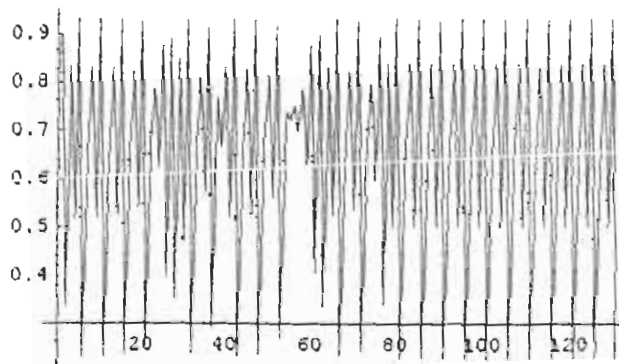
με μηχανισμό ^{10⁴} αυξανόμενο συνεχής διπλασιασμό περιόδου.

Εστω ότι τώρα παίρνουμε $r = 3.739$ και $x_0 = 0.9$.

Οι τιμές x_n είναι:

{0.9, 0.33651, 0.83481, 0.515616, 0.933838, 0.231012, 0.664216, 0.833921,
0.51784, 0.93356, 0.231914, 0.666028, 0.931684, 0.523408, 0.932701, 0.234695,
0.671575, 0.824682, 0.540591, 0.928589, 0.247937, 0.69719, 0.789363, 0.62168,
0.87939, 0.39657, 0.894751, 0.352107, 0.85297, 0.468917, 0.931138, 0.239746,
0.681499, 0.81158, 0.571761, 0.915496, 0.289261, 0.768698, 0.664799, 0.833204,
0.519629, 0.933309, 0.232726, 0.667654, 0.829655, 0.528424, 0.931729,
0.237837, 0.677772, 0.816587, 0.559999, 0.92129, 0.271133, 0.7389, 0.721353,
0.75155, 0.698156, 0.787935, 0.624762, 0.876551, 0.404596, 0.900718,
0.334362, 0.832167, 0.522209, 0.932906, 0.234034, 0.67026, 0.826362,
0.536501, 0.929769, 0.244153, 0.690004, 0.799767, 0.598763, 0.89828,
0.341645, 0.84099, 0.500001, 0.93475, 0.228051, 0.658227, 0.841141, 0.499615,
0.934749, 0.228053, 0.658231, 0.841137, 0.499626, 0.934749, 0.228052,
0.65823, 0.841137, 0.499626, 0.934749, 0.228052, 0.65823, 0.841137, 0.499626,
0.934749, 0.228052, 0.65823, 0.841137, 0.499626, 0.934749, 0.228052, 0.65823,
0.841137, 0.499626, 0.934749, 0.228052, 0.65823, 0.841137, 0.499626, 0.934749,
0.228052, 0.65823, 0.841137, 0.499626, 0.934749, 0.228052, 0.65823, 0.841137,
0.499626, 0.934749, 0.228052, 0.65823, 0.841137, 0.499626, 0.934749, 0.228052}

Το αντίστοιχο γράφημα x_n -n :

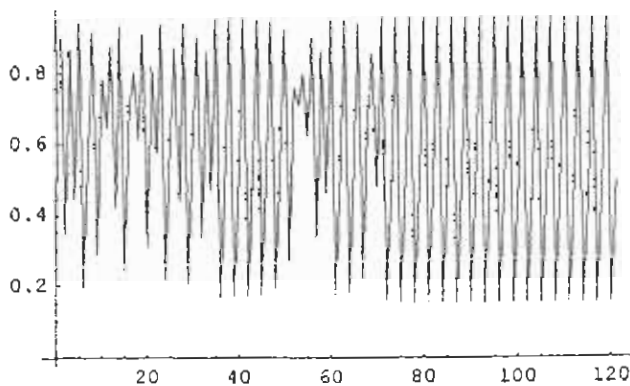


Όπως φαίνεται για τις πρώτες 90 περίπου επαναλήψεις όλα είναι όπως τα περιγράψαμε μέχρι τώρα και ενώ είμαστε στην χαοτική περιοχή ξαφνικά εμφανίζεται ξανά περιοδικότητα περιόδου 5 με πρώτη εμφάνιση στον αριθμό 0.841137.

Στο γράφημα τα πάντα γίνονται πιο φανερά. Όμοια, αν δοκιμάσουμε την τιμή $r = 3.835$, με $\omega = 0.9$, έχουμε για τις τιμές x_n :

```
(0.9, 0.34515, 0.866792, 0.442802, 0.946203, 0.195211, 0.602493, 0.918464,
0.287196, 0.785079, 0.647079, 0.875791, 0.417177, 0.932443, 0.241578,
0.702642, 0.80127, 0.610671, 0.911779, 0.308481, 0.818085, 0.570733, 0.939563,
0.217768, 0.653274, 0.868654, 0.43755, 0.943794, 0.203436, 0.621461, 0.902173,
0.338466, 0.858682, 0.465367, 0.95415, 0.167772, 0.535461, 0.953928, 0.168547,
0.537433, 0.953376, 0.170466, 0.542296, 0.951889, 0.175628, 0.555242,
0.947047, 0.192322, 0.595707, 0.923622, 0.270538, 0.756826, 0.705796,
0.796331, 0.621992, 0.901678, 0.339992, 0.860565, 0.460174, 0.952667,
0.172929, 0.5485, 0.949729, 0.183098, 0.573612, 0.937969, 0.223132, 0.664775,
0.854627, 0.476458, 0.956625, 0.159129, 0.51315, 0.958087, 0.154, 0.49964,
0.95875, 0.15167, 0.493435, 0.958585, 0.15225, 0.494983, 0.958653, 0.152008,
0.494337, 0.958627, 0.152101, 0.494585, 0.958638, 0.152064, 0.494486, 0.958633,
0.152078, 0.494525, 0.958635, 0.152073, 0.49451, 0.958634, 0.152075, 0.494516,
0.958635, 0.152074, 0.494514, 0.958635, 0.152074, 0.494515, 0.958635,
0.152074, 0.494514, 0.958635, 0.152074, 0.494514, 0.958635, 0.152074,
0.494514, 0.958635, 0.152074, 0.494514, 0.958635, 0.152074, 0.494514)
```

Το αντίστοιχο γράφημα είναι:



Εδώ η περιοδικότητα εμφανίζεται πάλι μέσα στην χαοτική περιοχή από την τιμή $\chi_n = 0.152074$ και ο κύκλος έχει περίοδο 3.

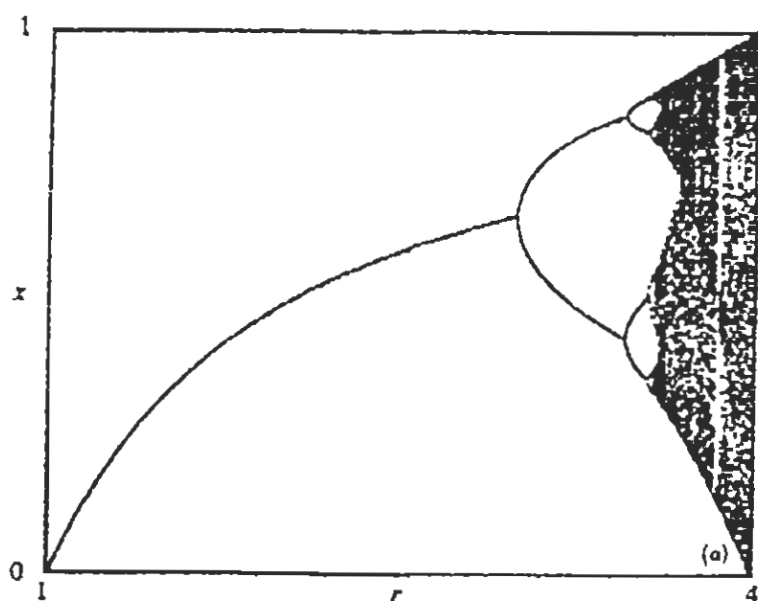
Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχουν περιοχές τάξης μέσα στο χάος.

(6) Το διάγραμμα Διακλαδώσεων

Υπάρχει τρόπος να πάρουμε την συνολική εικόνα της δυναμικής συμπεριφοράς της λογιστικής εξίσωσης, για όλες τις τιμές του r ;

Η απάντηση είναι ναι και αυτό γίνεται με το λεγόμενο διάγραμμα διακλαδώσεων.

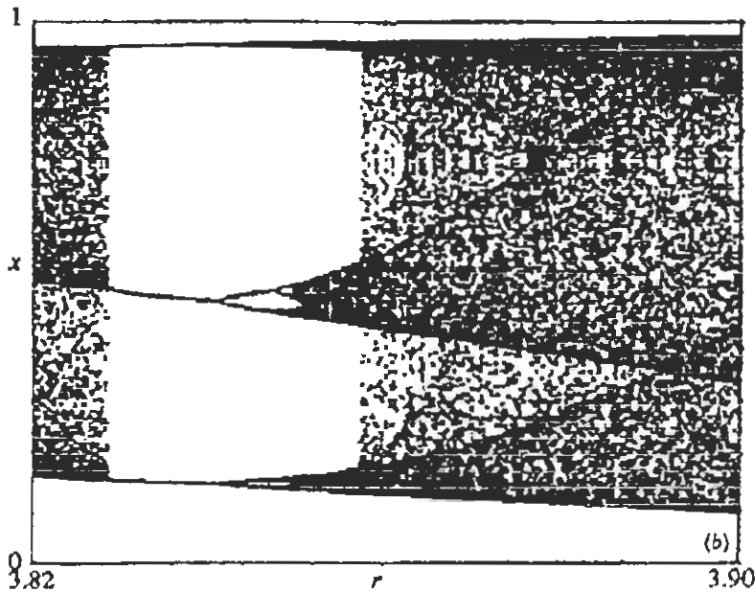
Το παρακάτω γράφημα δημιουργείται δίνοντας στο r τιμές από το 0 έως 4 με βήματα 0.2. Για κάθε βήμα (τιμή του r) εφαρμόζουμε την επαναληπτική διαδικασία της λογιστικής εξίσωσης και σχεδιάζουμε κατακόρυφα τις τιμές του χ .



Στο $r = 3$ έχουμε διακλάδωση της απλής καμπύλης και καθώς το r μεγαλώνει οι διακλαδώσεις επαναλαμβάνονται συνέχεια. Στο $r = 3.57$, έχουμε άπειρες διακλαδώσεις, δηλαδή πέρασμα στο χάος. Το διάγραμμα είναι γεμάτο τυχαίες κουκκίδες.

Βλέπουμε όμως ότι στην χαοτική περιοχή υπάρχουν λεπτές λευκές λουρίδες.
Είναι στις τιμές του r όπου έχουμε περιοδικές τροχιές.

Στο $r = 3.835$ περίπου, με περίοδο 3, το παράθυρο περιέχει τρία μικρά σύνολα διακλαδώσεων (Feigenbaum)



Αν επιλεγεί ένα από αυτά και μεγεθυνθεί θα δούμε ότι καταλήγει και αυτό σε ζώνες χάους. Μέσα σε αυτές τις ζώνες υπάρχουν πάλι λευκές λωρίδες...

Έτσι σε κάθε παράθυρο υπάρχει ένα ακριβές αντίγραφο ολόκληρης της εικόνας.
Αυτό το χαρακτηριστικό ονομάζεται αυτοομοιότητα

(7) Στην λογιστική εξίσωση ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιοχές μεταβολών $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq r \leq 4$, διότι έξω από αυτά τα διαστήματα η απεικόνιση αποκλίνει γρήγορα.

(8) Το χάος που παρέχει η λογιστική απεικόνιση ονομάζεται ντετερμινιστικό χάος (deterministic chaos). Αυτό σημαίνει ότι αν επαναλάβουμε τους υπολογισμούς για r στην χαοτική περιοχή, με ίδια x_0 και στον ίδιο υπολογιστή, τότε παίρνουμε την ίδια ακολουθία αριθμών.

§2.2 ΕΛΚΥΣΤΕΣ

Η έννοια χρησιμοποιείται στην μηχανική γενικότερα και σημαίνει την κατάσταση στην οποία «έλκεται» ένα φυσικό σύστημα. Για παράδειγμα το απλό εκκρεμές, ύστερα από μια ώθηση του, «έλκεται» στην θέση ισορροπίας του. Δεν έχουν όλα τα συστήματα τέτοιο σημείο.

Στην κλασσική μηχανική υπάρχουν τρεις τύποι ελκυστών: μεμονωμένα σημεία (χαρακτηρίζουν σταθερές καταστάσεις), κλειστοί βρόγχοι (περιοδικές κινήσεις), δακτύλιοι (συνδυασμοί περιοδικών κινήσεων).

Το δυναμικό σύστημα, αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση όπως δείξαμε στην §1.4 (Βασική θεωρία ευστάθειας) έχει σημείο ισορροπίας (αν $b > 0$) ευσταθές εστιακό. Το σημείο αυτό συμπεριφέρεται σαν ελκυστής, δηλαδή κάθε φασική τροχιά που ξεκινά από τυχόν σημείο του χώρου των φάσεων, ελκύεται προς αυτό. Ο σημειακός ελκυστής έχει διάσταση μηδέν.

Το δυναμικό σύστημα :

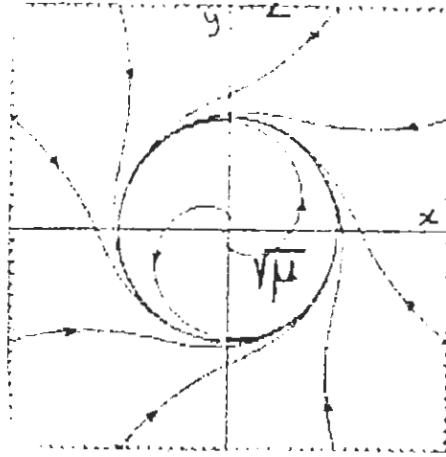
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \mu y - x - y(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{1}$$

$\mu > 0$

σε πολικές συντεταγμένες $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$

$$\text{γράφεται } \dot{r} = r(\mu - r^2), \dot{\theta} = 1\tag{2}$$

για το τελευταίο εκτός του σημείου ισορροπίας $r = 0$, υπάρχει και το $r = \sqrt{\mu}$, που αντιστοιχεί σε ένα κύκλο.



Ένα πιο «πραγματικό» παράδειγμα είναι ο ταλαντωτής Van der Pol με εξίσωση

$$\ddot{\chi} + \mu(\chi^2 - 1)\dot{\chi} + \chi = 0 \quad (3)$$

Που ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\dot{\chi} = y, \quad \dot{y} = -\chi - \mu(\chi^2 - 1)y \quad (4)$$

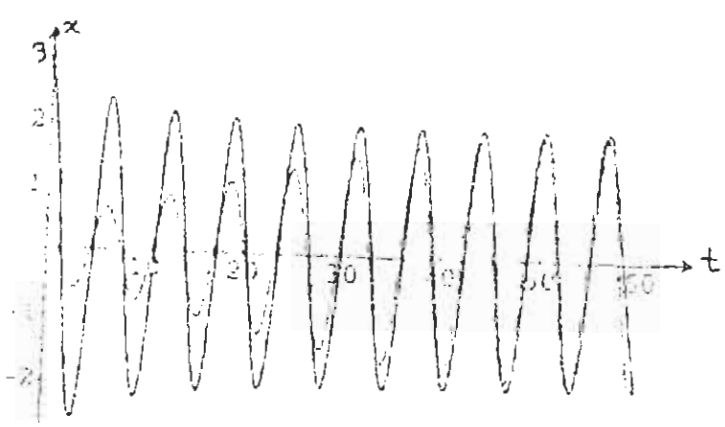
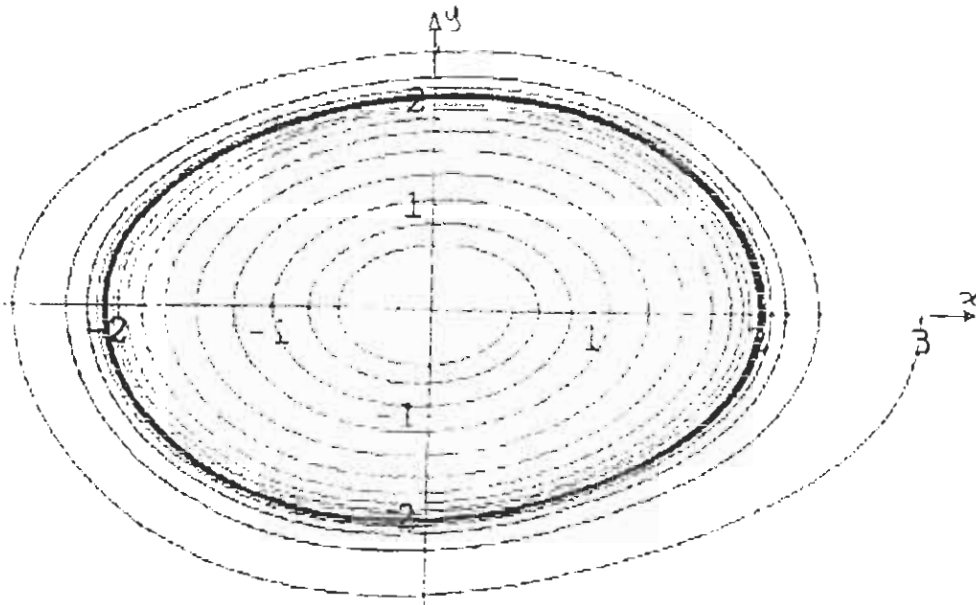
Πραγμάτωση αυτού του δυναμικού συστήματος σε φυσικά συστήματα θα δούμε στο Κεφάλαιο 3.

Θέτοντας $\dot{\chi} = \dot{y} = 0$, βρίσκουμε το $(\chi, y) = (0, 0)$ σαν σημείο ισορροπίας του το οποίο με τον έλεγχο της §1.4 αποδεικνύεται ασταθές.

Στον χώρο των φάσεων οι φασικές τροχιές από όπου και να ξεκινούν καταλήγουν στην ίδια κλειστή καμπύλη που ονομάζουμε **οριακό κύκλο** (δεν πρόκειται περί του γνωστού από την Ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά περί κλειστής καμπύλης).

Η σύγκλιση των φασικών τροχιών σε μια σταθερή κλειστή καμπύλη είναι η γεωμετρική εικόνα της εξέλιξης της κίνησης σε σταθερή περιοδική τέτοια.

Σε διάγραμμα $x-t$ για την (3), θα είχαμε το παρακάτω σχήμα. Δηλαδή με όποιο x_0 καταλήγουμε στην ίδια ταλάντωση. Ο οριακός κύκλος έχει διάσταση 2. Είναι φανερό ότι για να υπάρχει ελκυστής το δυναμικό σύστημα πρέπει να είναι καταναλωτικό (dissipative), δηλαδή να παρουσιάζει «τριβή».



§2.3 ΧΑΟΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΞΕΝΟΙ ΕΛΚΥΣΤΕΣ

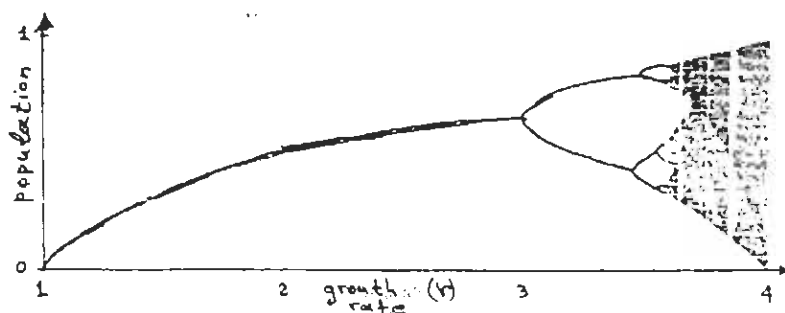
Το χαοτικό δυναμικό σύστημα της λογιστικής απεικόνισης είδαμε ότι καταλήγει (για $r > 3.57$) στην χαοτική περιοχή που αποτελείται από ζώνες χάους και τάξης. Αυτή η περιοχή είναι ο ελκυστής αυτού του συστήματος και ονομάζεται χαοτικός ελκυστής.

Πράγματι σε αυτή την περιοχή το διάγραμμα των διακλαδώσεων είναι σχεδόν γεμάτο με κουκκίδες σε εντελώς ακανόνιστες θέσεις.

Το φαινόμενο είναι γενικό στα χαοτικά συστήματα δηλαδή οι ελκυστές αυτών των συστημάτων είναι περιοχές με περίπλοκη δομή.

Αν η περιοχή αυτή παρουσιάζει και γεωμετρική δομή **Fractal** τότε ονομάζεται παράξενος ελκυστής. Συχνά ο όρος παράξενος ελκυστής χρησιμοποιείται για κάθε χαοτικό τέτοιο, λανθασμένα. Υπάρχουν επίσης παράξενοι, αλλά όχι χαοτικοί ελκυστές.

Στην χαοτική περιοχή η ακολουθία x_n μπορεί να περνά από οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος $(0,1)$. Δικτυωμένα μεταξύ των σημείων που επισκέπτεται υπάρχει ένα αριθμήσιμο άπειρο σύνολο σημείων και περιοδικών σημείων με κάθε περίοδο.



Επιπλέον οι χαοτικές τροχιές επιδεικνύουν ευαισθησία στην εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, έτσι που δύο γειτονικά, αρχικά, σημεία θα αποκλίνουν στις τροχιές τους πολύ γρήγορα.

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία χαοτικών και παράξενων ελκυστών πολλοί από τους οποίους φέρουν τα ονόματα των ερευνητών που τους ανακάλυψαν.

Μια γενικότερη θεώρηση μπορεί να γίνει με μελέτη της εξίσωσης **Duffing** :

$$\ddot{\chi} + \delta \dot{\chi} + \chi^3 + \chi - \gamma \sin t = 0 \quad (1)$$

Είναι γνωστό ότι στα αυτόνομα συστήματα της μορφής:

$$\ddot{\chi} = f(\chi, \dot{\chi}) \quad (2)$$

δηλαδή όπου f δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο, το τυχόν σημείο $\chi_0, \dot{\chi}_0 = y$ του χώρου των φάσεων ορίζει ακριβώς τις αρχικές συνθήκες και άρα την φασική τροχιά που περνά από αυτό, που είναι και ανεξάρτητη του χ_0 . Οι φασικές τροχιές δεν τέμνονται και από κάθε σημείο χ, y περνά μόνο μία τροχιά.

Στα μη αυτόνομα συστήματα της μορφής :

$$\ddot{\chi} = f(\chi, \dot{\chi}, t) \quad (3)$$

η τροχιά δεν καθορίζεται μονοσήμαντα από το σημείο $\chi, y = \dot{\chi}$, διότι αυτή εξαρτάται από την χρονική στιγμή t_0 .

Στην περίπτωση αυτή ο χώρος των φάσεων είναι τρισδιάστατος με διαστάσεις χ, y, t . Έτσι ένα σημείο χ_0, y_0, t_0 καθορίζει τις αρχικές συνθήκες και πάλι οι φασικές τροχιές δεν τέμνονται.

Οι προβολές τους όμως στο επίπεδο $\chi, \dot{\chi}$ μπορούν να τέμνονται. (Απεικόνιση Poincaré).

Η εξίσωση Duffing χωρίς τριβή, δηλαδή με $\delta = 0$ και χωρίς εξωτερική διέγερση ($\gamma = 0$) (μπορεί να θεωρηθεί και σαν εξίσωση αναρμονικού ταλαντωτή με τριβή και εξωτερική περιοδική διέγερση) είναι:

$$\ddot{\chi} = \chi - \chi^3 \quad (4)$$

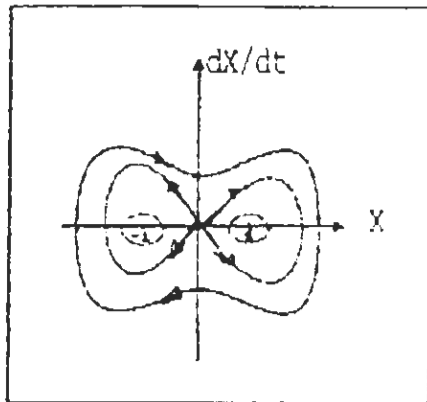
ισοδύναμη με το σύστημα :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 \end{aligned} \tag{5}$$

η εξίσωση (4) έχει τρία σημεία ισορροπίας (0,0), (1,0), (-1,0), τα οποία είναι ασταθή.

Το φασικό διάγραμμα του

Αυτόνομου συστήματος (5) είναι το παρακάτω και είναι δύο διαστάσεων όπως αναμένεται.



Το διάγραμμα γίνεται της εξισώσεως Duffing για τις τιμές $\gamma=0, \delta=0$.

Αν $\gamma = 0, \delta > 0$, το σύστημα εξακολουθεί να είναι αυτόνομο, αλλά όχι συντηρητικό.

Γραμμικοποιούμε την εξίσωση :

$$\ddot{x} = x - x^3 - \delta \dot{x} \tag{6}$$

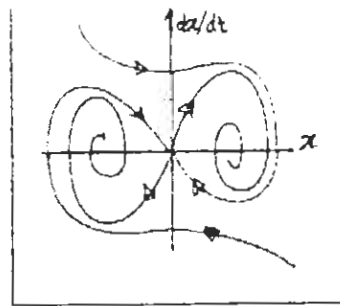
στην περιοχή των σημείων ισορροπίας (1,0), (-1,0) και έχουμε:

$$\ddot{x} = -2x - \delta \dot{x} \tag{7}$$

που είναι αυτή του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.

Τα σημεία ισορροπίας (1,0), (-1,0) είναι τώρα ασυμπτωματικά ευσταθή.

Και το φασικό
διάγραμμα του
συστήματος



$$\dot{x} = y$$

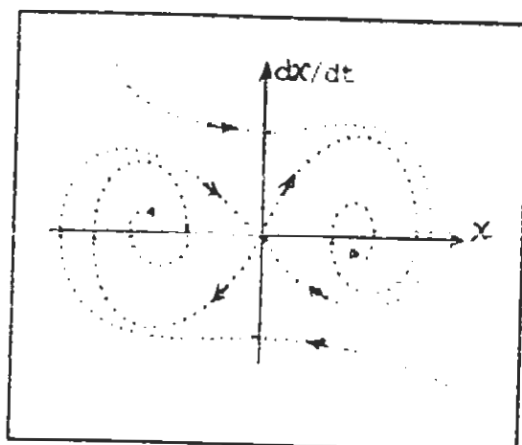
$$\dot{y} = -2x - \delta y$$

είναι το διπλανό.

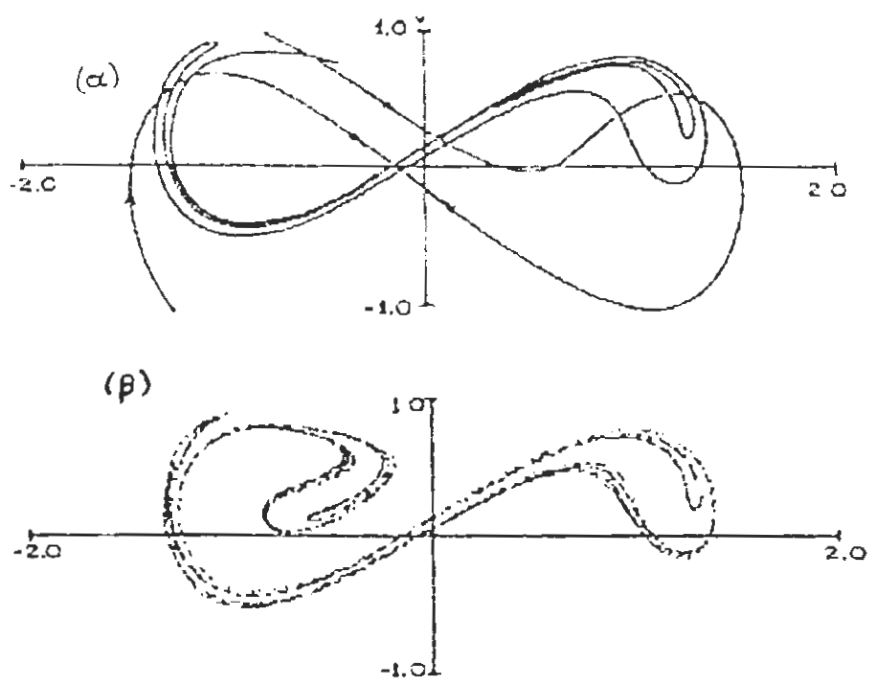
Αν, τέλος, για $\gamma > 0$, $\delta > 0$ ο χώρος των φάσεων είναι όπως αναφέρθηκε, τριών διαστάσεων x, \dot{x}, t . Επειδή η εξάρτηση του δυναμικού συστήματος από τον χρόνο γίνεται μέσω της περιοδικής συνάρτησης $\cos t$, περιόδου 2π , η εξίσωση (1) παραμένει αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό $t \rightarrow t + 2\pi$ και άρα οι αρχικές συνθήκες

$((x_0, \dot{x}_0, t), (x_0, \dot{x}_0, t + 2\pi))$ δίνουν την ίδια φασική τροχιά.

Παραθέτουμε τώρα τις απεικονίσεις Poincaré για διάφορες τιμές της σταθερής γ . Για $\gamma = 0$ η απεικόνιση Poincaré απεικονίζει τις καμπύλες του σχήματος στον εαυτό τους (αναλλοίωτες καμπύλες) για $|\gamma| \ll 1$ η απεικόνιση δεν διαφέρει σημαντικά από την ίδια με $\gamma = 0$.



Η απεικόνιση Poincaré της εξισώσεως Duffing για την περίπτωση όπου η εξίσωση δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο, $\gamma = 0$.



Σχήμα 5.10: Η απεικόνιση Poincaré της εξίσωσης Duffing για τις τιμές των παραμέτρων $\gamma=0.30$ και $\delta=0.20$. Εμφανίζεται ο χαοτικός έλκτης, στον οποίο καταλήγουν όλες οι τροχιές, οι οποίες ξεκινούν από μια ευρύτερη περιοχή. Στο σχήμα (α) παρουσιάζονται τροχιές οι οποίες ξεκινούν από διάφορα σημεία του χώρου των φάσεων, για μικρό χρονικό διάστημα, και στο σχήμα (β) παρουσιάζεται ο χαοτικός έλκτης στον οποίο καταλήγουν.

Για μεγαλύτερες τιμές της γ όμως, οι αναλλοίωτες καμπύλες διαλύονται και εμφανίζονται περιοχές στον χώρο των φάσεων που λειτουργούν σαν ελκυστές.

Η περιοχή αυτή δεν είναι σημείο ή οριακός κύκλος αλλά σύνολο σημείων με μη ακέραια διάσταση.

§2.4 FRACTALS

Μια πρώτη προσέγγιση είναι να ορίσουμε τα fractals σαν σύνολα τα οποία δεν μοιάζουν, με κάποιο ευκλείδειο αντικείμενο, δηλαδή το σημείο, γραμμή, επίπεδο κ.τ.λ., από όσο κοντά και να τα κοιτάζουμε.

Για παράδειγμα η Ευκλείδεια ευθεία (μαθηματική γραμμή) όσο μικρό τμήμα της και να πάρουμε, πάλι ευθεία θα φαίνεται.

Τα fractals, επίσης περιγράφουν πολλά αντικείμενα του πραγματικού κόσμου όπως σύννεφα, βουνά, ακτές, κλαδιά δένδρων, φλέβες...

Κατά τον ορισμό του Mandelbrot, ένα γεωμετρικό σχήμα ή ένα πραγματικό αντικείμενο λέμε ότι είναι fractal, αν συνδυάζει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Τα μέρη του έχουν ίδια δομή με το όλο
- Το σχήμα του είναι εξαιρετικά ακανόνιστο ή εξαιρετικά θρυμματισμένο και παραμένει έτσι σε όποια κλίμακα εξέτασής του.
- Περιέχει «διαφορετικά στοιχεία» των οποίων οι κλίμακες είναι πολύ μεταβαλλόμενες και καλύπτουν μια μεγάλη περιοχή τιμών.

Η σχέση των fractals με το χάος βρίσκεται στο ότι τα χαοτικά δυναμικά συστήματα συχνά έχουν να επιδείξουν fractal δομές στο φασικό τους χώρο. Δεν φαίνεται όμως άμεση σχέση τους.

Πραγματικά υπάρχουν χαοτικά συστήματα που δεν έχουν οριακά σύνολα (ελκυστές) με δομή fractal, ενώ δομές fractal εμφανίζονται και στην μη χαοτική δυναμική.

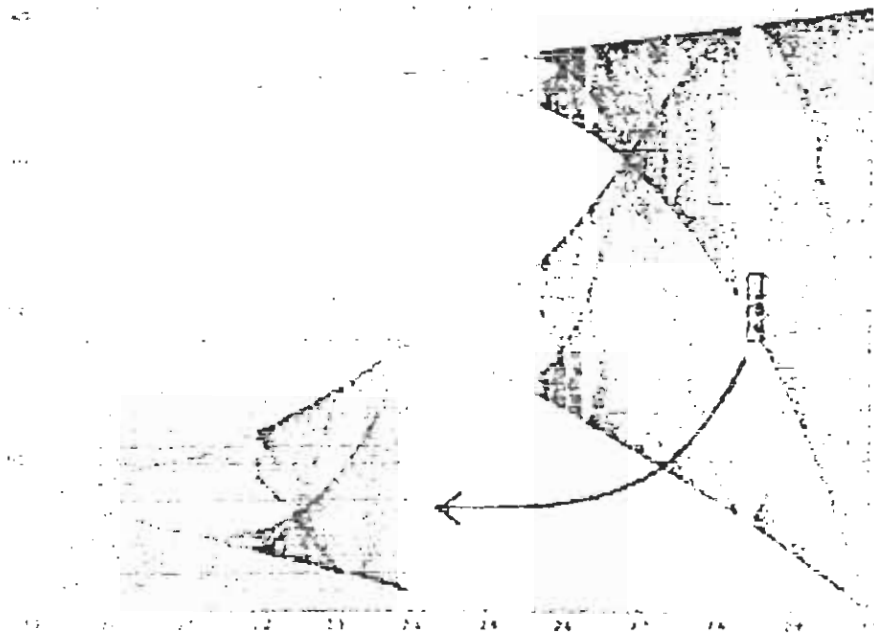
Τα fractals, τελικά εμφανίζονται στην επιστήμη με δύο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτον σαν παραστατικό μέσο για την μελέτη μη κανονικών μορφών και

διαδικασιών. Δεύτερον σαν μαθηματική περιγραφή χαοτικών δυναμικών συστημάτων.

Ένα χαρακτηριστικό τους είναι η κλασματική τους διάσταση. Επειδή το ζήτημα της διάστασης μπορεί να προκαλεί σύγχυση, θα αναφερθούμε σε αυτό με λεπτομέρειες πιο κάτω.

Ο χαοτικός ελκυστής της λογιστικής εξίσωσης είναι το λεγόμενο fractal του Feigenbaum.

Στο σχήμα φαίνεται ο ίδιος και δείγμα της αυτοομοιότητας που παρουσιάζει.



Τέλος παραθέτουμε το πιο γνωστό, ιστορικά, fractal που είναι ο ελκυστής του Lorenz.

Ο Ε. Ν. Lorenz είναι ο πρώτος που «παρατήρησε» χαοτική εξέλιξη.

Δοκιμάζοντας ένα ατμοσφαιρικό μαθηματικό μοντέλο το 1961 σε ένα υπολογιστή παρατήρησε, ότι πολύ μικρές διαφορές στις αρχικές τιμές των μεταβλητών των διαφορικών εξισώσεων, που χρησιμοποιούσε, κατέληγαν γρήγορα σε μεγάλες αποκλίσεις των λύσεων.



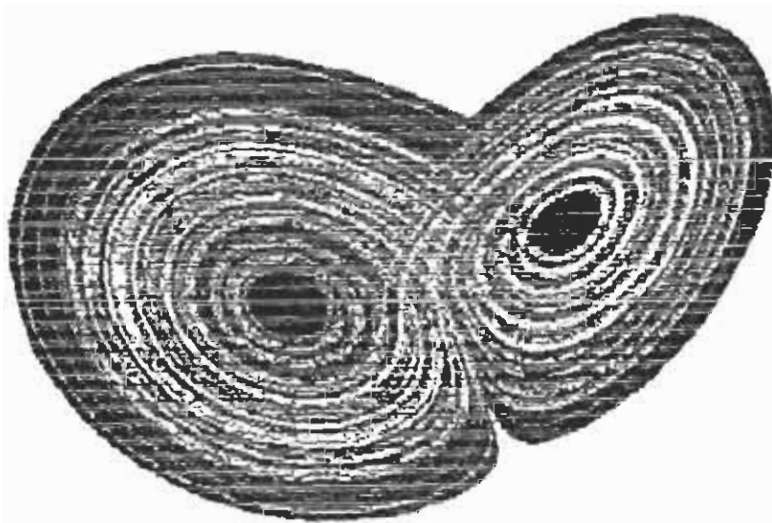
Η εικόνα φαίνεται μια εκτύπωση που πήρε ο Lorenz το 1961. Από το ίδιο σημείο εκκίνησης ο Lorenz σε ένα κομμάτι που έδωσε ο υπολογιστής της IBM να δημιουργεί σχήματα που εξελίσσονται όλο και πιο διαφορετικά, με κάθε ομοιότητα εξαφανίζεται.

Στην εικόνα φαίνεται μια εκτύπωση που πήρε ο Lorenz. Από το ίδιο περίπου σημείο εκκίνησης, ο υπολογιστής δημιουργεί σχήματα που εξελίσσονται όλο και πιο διαφορετικά, μέχρι που κάθε ομοιότητα εξαφανίζεται.

Οι εξισώσεις του Lorenz, απλοποιημένες, είναι:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x) \\
 \dot{y} &= \rho x - y - xz \\
 \dot{z} &= xy - z
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Κάθε στιγμή οι τρεις μεταβλητές προσδιορίζουν ένα σημείο στον φασικό χώρο του συστήματος. Καθώς το σύστημα μεταβάλλεται το σημείο (x, y, z) κινείται δημιουργώντας την φασική τροχιά. Το σύστημα θα καταλήξει στον φασικό χώρο του σχήματος (φαίνεται δισδιάστατη απεικόνιση, αφού οι φασικές τροχιές δεν τέμνονται).



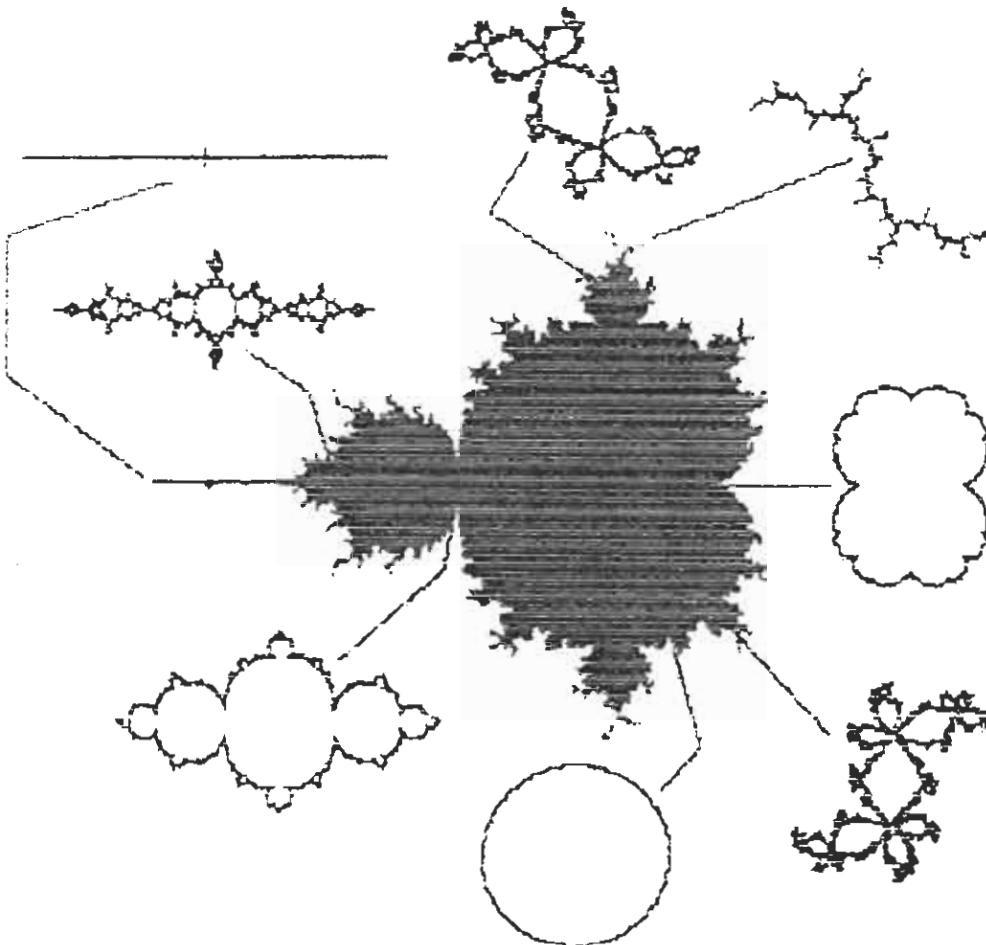
Το σχήμα φανερώνει καθαρή αταξία αλλά και μια νέα τάξη είναι φανερή.

Παρατίθενται, τέλος, δύο ακόμη τυπικά παραδείγματα fractal το σύνολο Mandelbrot, που είναι ένας κατάλογος των συνόλων Julia, δημιουργείται από τον αναδρομικό τύπο.

$$z_{n+1} = z_n^2 + k \quad (2)$$

όπου z_n μιγαδικός και k μια μιγαδική σταθερά.

Τα σημεία $z_0, z_1, z_2, z_3 \dots$ που παραμένουν σε κύκλο με ακτίνα 2 ανήκουν στο σύνολο Mandelbrot που φαίνεται στο σχήμα με οχτώ σύνολα Julia να το συνοδεύουν.



Η διαφορά των Mandelbrot και Julia συνόλων βρίσκεται στο ότι το σύνολο Mandelbrot είναι το σύνολο των σημείων της $z_{n+1} = z_n^2 + c$, όπου z αρχίζει από το μηδέν, με μεταβλητό c , ενώ το σύνολο Julia επαναλαμβάνει το $z_n^2 + c$ για σταθερό c και μεταβαλλόμενη αρχική τιμή του z .

§2.5 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Είναι καλώς γνωστή η λεγόμενη **Ευκλείδεια διάσταση**, σαν ο ελάχιστος αριθμός παραμέτρων για τον καθορισμό θέσης σημείου. Έτσι η ευθεία έχει διάσταση ένα. Το επίπεδο είναι δισδιάστατος χώρος και ^οσυνήθης γεωμετρικός χώρος που ζούμε τρισδιάστατος.

Στην φυσική και άλλες επιστήμες η έννοια του χώρου επεκτείνεται. Έτσι μπορούμε να έχουμε πολυδιάστατους μαθηματικούς χώρους χωρίς φυσικά, γεωμετρική απεικόνιση.

Έτσι η κατάσταση ενός ιδανικού αερίου περιγράφεται επαρκώς με γνώση της πίεσης του (P), του όγκου (V), της θερμοκρασίας του (T) και της μάζας του (m).

Οι καταστάσεις του φυσικού συστήματος ιδανικού αερίου είναι σημεία του τετραδιάστατου μαθηματικού χώρου των διατεταγμένων τετράδων (P, V, T, m), που όπως είναι φανερό αντιστοιχεί στον χώρο των φάσεων του υλικού σημείου.

Η ιδέα της αυτοομοιότητας σε αλλαγή κλίμακας οδηγεί την έννοια της διάστασης παραπέρα και φέρνει την **κλασματική διάσταση** που είναι χαρακτηριστικό των Fractals .

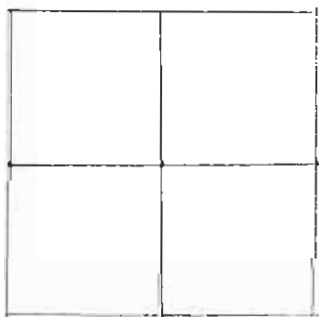
Έστω ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1. Αν το κόψουμε στην μέση για να ξαναπάρουμε αντίγραφο του αρχικού θα πρέπει να το μεγεθύνουμε κατά τον παράγοντα 2.

Έστω τώρα τετράγωνο πλευράς 1. Αν κόψουμε την κάθε πλευρά στην μέση παίρνουμε τέσσερα μικρά τετράγωνα

Αν πάρουμε ένα από τα μικρά τετράγωνα

και θελήσουμε να

φτιάξουμε ξανά το αρχικό,



θα πρέπει να προσθέσουμε τέσσερα αντίγραφα του.

Έστω τώρα κύβος ακμής 1. Αν κόψουμε την κάθε ακμή στην μέση, δημιουργούμε οχτώ μικρούς κύβους.

Αν θέλουμε να φτιάξουμε τον αρχικό κύβο από ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1/2 αρκεί να το διπλασιάσουμε, δηλαδή να το μεγεθύνουμε κατά 2. Αν, όμως, επιθυμούμε να τον φτιάξουμε από τους μικρούς κύβους, χρειαζόμαστε 8.

Έτσι έχουμε για την ευθεία μεγέθυνση κατά 2 με 2 αντίγραφα. Για το τετράγωνο μεγέθυνση κατά 2 με αντίγραφα 4. Τέλος για τον κύβο, μεγέθυνση κατά 2 με αντίγραφα 8.

Άρα, γενικεύοντας, διάσταση είναι η δύναμη στην οποία πρέπει να υψωθεί η μεγέθυνση ώστε να έχουμε τον αριθμό των αντιγράφων.

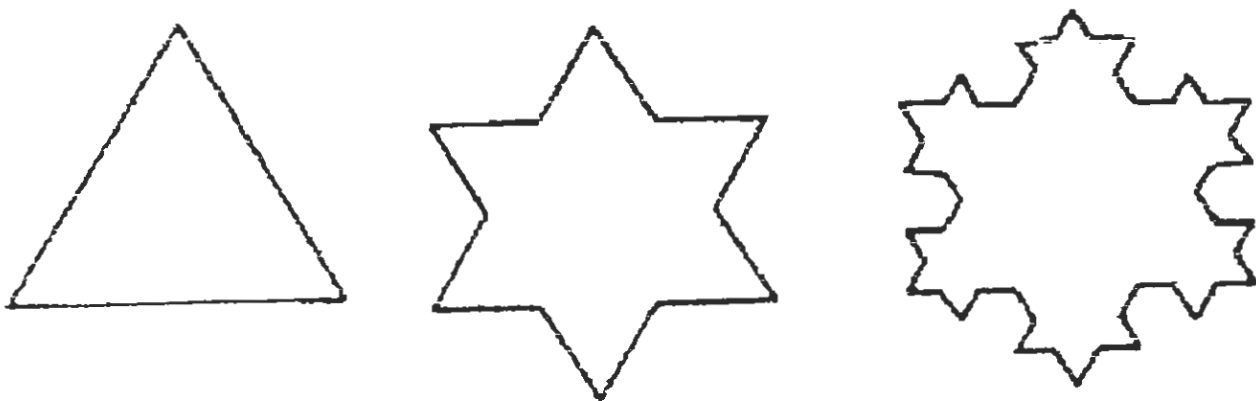
$$c = b^d \quad \text{ή} \quad d = \frac{\ln c}{\ln b} \quad (1)$$

Όπου d η διάσταση, b η μεγέθυνση και c ο αριθμός των αντιγράφων.

Είναι φανερό ότι η ευθεία έχει διάσταση 1, το τετράγωνο 2 και ο κύβος 3, όπως γνωρίσαμε ήδη.

Δηλαδή ο νέος ορισμός της διάστασης αναπαράγει, σαν γενικότερος, τις Ευκλείδειες διαστάσεις, όπως τις γνωρίζουμε.

Έστω τώρα για παράδειγμα το fractal που είναι γνωστό σαν νιφάδα του Koch.



Προκύπτει όταν σε ισόπλευρο τρίγωνο, στο κεντρικό τμήμα κάθε πλευράς μήκους l τοποθετηθεί ένα όμοιο τρίγωνο πλευράς $l/3$ και η διαδικασία επαναληφθεί επ' άπειρο. Το τελικό σχήμα έχει άπειρο μήκος αλλά περικλείει πεπερασμένο εμβαδόν και μάλιστα μικρότερο του περιγεγραμμένου στο αρχικό τρίγωνο κύκλου.

Εδώ η περίμετρος κάθε σχήματος αυξάνει σε σχέση με αυτήν του αμέσως προηγούμενου κατά τον λόγο $4/3$.

Η fractal διάσταση d είναι η δύναμη στην οποία πρέπει να υψωθεί το 3 για να δώσει το 4 , δηλαδή

$$3^d = 4 \text{ ή } d = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26.$$

Δηλαδή αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα και το αντικαταστήσουμε όπως στο σχήμα



Τότε κάθε ένα από τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα του νέου σχήματος έχει μήκος $l/3$. Έτσι μεγεθύνοντας την καμπύλη της νιφάδας κατά 3 έχουμε νέα που είναι 4 φορές μεγαλύτερη (καθένα από τα παλιά τμήματα της νιφάδας αντικαθίσταται με ένα άλλο που έχει τέσσερα τμήματα).

Επειδή η διάσταση 1.26 είναι μεγαλύτερη από την διάσταση 1 των ευθύγραμμων τμημάτων που συγκροτούν την νιφάδα, λέμε ότι αυτή είναι fractal.

§2.6 ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΤΗΤΑ – ΣΤΑΘΕΡΕΣ FEIGENBAUM

Από το διάγραμμα των διακλαδώσεων της λογιστικής βλέπουμε ότι η πρώτη διακλάδωση συμβαίνει όταν $r = 3$, η δεύτερη όταν $r = 3.4495\dots$, η τρίτη όταν $r = 3.5441\dots$, και τέταρτη όταν $r = 3.56644$ κ.λ.π.

Γενικά αν ορίσουμε σαν r_n την τιμή της παραμέτρου r για την οποία έχουμε την n -οστή διακλάδωση (διπλασιασμό περιόδου και άρα για r_n να έχουμε $2^n T$, όπου T η πρώτη περίοδος) τότε για μεγάλα n και ενώ οι διακλαδώσεις συνεχίζονται (έπ' άπειρον, δηλαδή για $n \rightarrow \infty$), η ακολουθία r_n συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο όριο.

Ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n+1}}{r_{n+1} - r_{n+2}} \equiv \delta = 4.669 \dots \quad (1)$$

Ο σταθερός αριθμός δ ονομάζεται (πρώτη) σταθερή του Feigenbaum, προς τιμή του M.FEIGENBAUM που την ανακάλυψε.

Η σταθερή Feigenbaum, είναι άρρητος αριθμός και επιδειχνει **παγκοσμιότητα**, ανάλογη αυτής του π .

Ο αριθμός δ είναι ο ίδιος για όλα τα δυναμικά συστήματα της μορφής :

$\chi_{n+1} = F(\chi_n)$, που παρουσιάζουν τοπικό μέγιστο.

Έτσι οι απεικονίσεις

$$\chi_{n+1} = r \sin \chi_n,$$

$$\chi_{n+1} = r \chi_n^3 (1 - \chi_n),$$

$$\chi_{n+1} = r [1 - (2\chi_n - 1)^4],$$

$$\chi_{n+1} = r \chi_n (1 - \chi_n^2)$$

κ.τ.λ. έχουν τον ίδιο αριθμό Feigenbaum όπως η λογιστική.

Η παγκοσμιότητα των τιμών Feigenbaum είναι σχετική. Η τιμή της είναι 4.669... μόνο για απεικονίσεις, που όπως οι παραπάνω εμφανίζουν το κύρτωμα που μοιάζει με

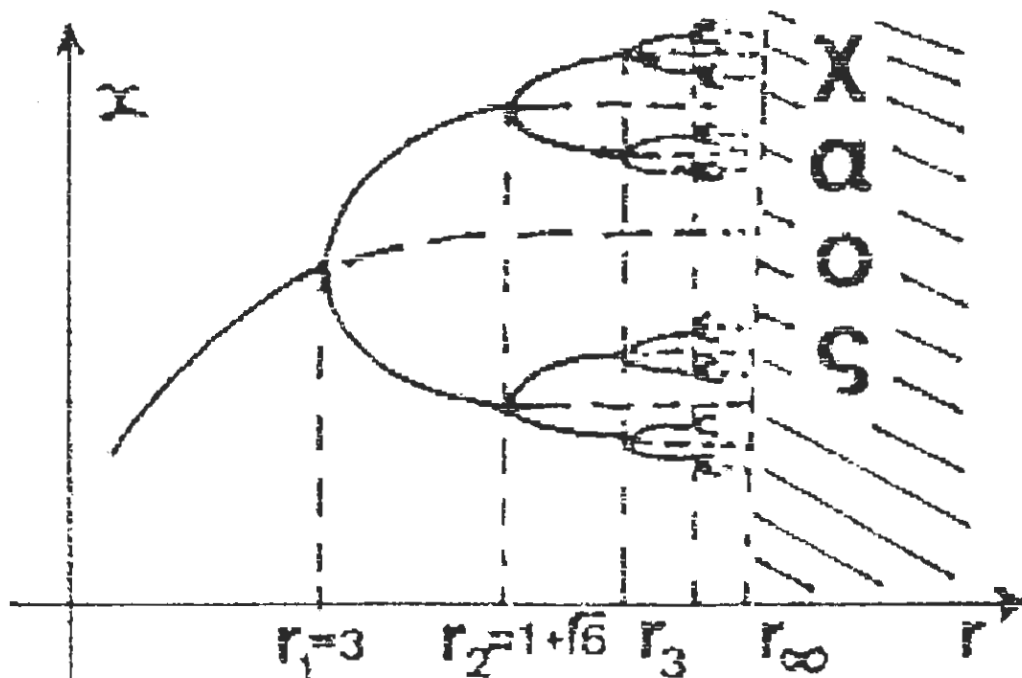
παραβολή. Για άλλου είδους απεικονίσεις η τιμή της είναι διαφορετική αλλά και εδώ υπάρχει μια άλλη κατηγορία απεικονίσεων με τον ίδιο αριθμό Feigenbaum. Δηλαδή το σύνολο των απεικονίσεων μπορεί να διαχωριστεί σε κατηγορίες, ^{6^ο}εσωτερικό των οποίων ο λόγος δ παραμένει σταθερός. Όπως φαίνεται από την (1) ο αριθμός δ δίνει τον ρυθμό αλλαγής (διπλασιασμού) της περιόδου για την κλάση των απεικονίσεων που περιγράφει και μας φανερώνει ότι καθώς το n αυξάνει, κάθε περιοδική περιοχή είναι μικρότερη της προηγούμενης κατά τον παράγοντα 4.669...

Η δεύτερη σταθερή Feigenbaum έχει να κάνει με τον ρυθμό αλλαγής των αποστάσεων των πλησιέστερων σημείων μιας τροχιάς από μια διακλάδωση στην επόμενη.

Αν d_n η αλγεβρική απόσταση μεταξύ των πλησιέστερων σημείων της τροχιάς με περίοδο 2^n , τότε έχουμε

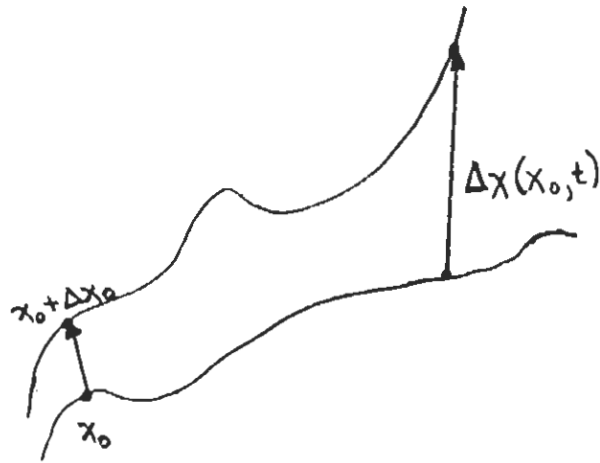
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \equiv a = 2.5029 \dots$$

δηλαδή βλέπουμε ότι η απόσταση αυτή ελαττώνεται σταθερά από τον ένα διπλασιασμό (περιόδου) στον επόμενο.



§2.7 ΕΚΘΕΤΕΣ LYAPUNOV

Έστω δύο σημεία x_0 και $x_0 + \Delta x_0$ στον χώρο των φάσεων, καθένα από τα οποία ^{είναι} αρχικό μιας τροχιάς ενός δυναμικού συστήματος. Θεωρώντας τις τροχιές σαν παραμετρικές συναρτήσεις του χρόνου, η απόσταση τους θα είναι επίσης χρονική συνάρτηση.



Λόγω της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες ορισμένων δυναμικών συστημάτων, όπως της λογιστικής εξίσωσης, αυτή η απόσταση θα έχει την μορφή $\Delta \chi(x_0, t)$.

Στα συστήματα με ελκυστές σημεία ή «κύκλους» η απόσταση $\Delta \chi(x_0, t)$ ελαττώνεται ασυμπτωτικά με τον χρόνο.

Στις χαοτικές περιοχές, η συνάρτηση $\Delta \chi(x_0, t)$ συμπεριφέρεται ακανόνιστα.

Η μελέτη του μέσου ρυθμού της εκθετικής απόκλισης, δύο αρχικών γειτονικών τροχιών γίνεται με χρήση του μεγέθους:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{|\Delta \chi(x_0, t)|}{|\Delta x_0|} \quad (1)$$

$|\Delta x_0| \rightarrow 0$

το οποίο ονομάζεται εκθέτης Lyapunov.

Αν $\lambda < 0$, η τροχιά γρήγορα έλκεται από σημείο ισορροπίας ή περιοδική τροχιά. Είναι χαρακτηριστικό των μη συντηρητικών συστημάτων (αρμονικός ταλαντωτής με τριβή).

Αν $\lambda=0$, έχουμε συντηρητικά συστήματα όπως ο αρμονικός ταλαντωτής χωρίς τριβή.

Αν $\lambda>0$, η τροχιά είναι ασταθής και χαοτική. Τροχιές από κοντινά σημεία θα αποκλίνουν γρήγορα και πολύ.

Μια τροχιά επισκέπτεται όλες τις γειτονιές του σημείου του χώρου των φάσεων και για τα συστήματα διακριτού χρόνου η τροχιές μοιάζουν σαν το «χιόνι» στην οθόνη της τηλεόρασης με ενδεχόμενα οργανωμένες περιοχές. Για τα συστήματα συνεχούς χρόνου, ο φασικός χώρος θα είναι σαν θάλασσα με κυματιστές γραμμές.

Ένας προσεγγιστικός τύπος για τον εκθέτη Lyapunov είναι :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 \left| \frac{d\chi_{n+1}}{d\chi_n} \right| \quad (2)$$

ο οποίος στην περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης γίνεται :

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 |r - 2r\chi_n| \quad \text{όπου } \chi_n = r\chi_{n-1}(1-\chi_{n-1}) \quad (3)$$

με κατάλληλα εκλεγμένη μεγάλη τιμή του N.

Για κάθε σύστημα υπάρχουν τόσοι εκθέτες Lyapunov, όσες και οι διαστάσεις του φασικού χώρου, αλλά μόνο ο μεγαλύτερος που ορίστηκε εδώ είναι ο πιο σπουδαίος.

Γενικά οι υπολογισμοί των εκθετών Lyapunov δεν είναι εύκολοι. Υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού. Ο πρώτος προϋποθέτει ότι διαθέτουμε κάποια χρονοσειρά (πειραματικές τιμές σε αντίστοιχους χρόνους), οπότε παίρνοντας δύο αρχικά γειτονικά σημεία, μετράμε την αύξηση του ρυθμού μεταβολής της απόστασης μεταξύ τους.

Ο άλλος τρόπος μέτρησης συνιστάται στην μέτρηση της αύξησης του ρυθμού μεταβολής των κλίσεων των εφαπτομενικών διανυσμάτων δθσμένης τροχιάς και δεν θα συζητηθεί περαιτέρω.

§2.8 ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

Υπάρχουν πάρα πολλά πραγματικά συστήματα με χαοτική συμπεριφορά. Για παράδειγμα στην Αεροδυναμική, όπου τα πτερύγια των αεροσκαφών υπόκεινται σε ταλαντώσεις με αποτέλεσμα την μείωση της απόδοσης της επιφάνειάς τους κ.τ.λ. Είναι φανερή η σημασία της μελέτης της χαοτικής συμπεριφοράς και του ελέγχου του χάους σε βιομηχανικές, επιστημονικές και άλλες εφαρμογές.

Με τον όρο «έλεγχος του χάους» αναφερόμαστε στην διαδικασία όπου μια μικρή διαταραχή εφαρμόζεται σε ένα χαοτικό σύστημα ώστε αυτό να πραγματοποιήσει μια επιθυμητή (χαοτική, περιοδική ή στάσιμη) σε μας συμπεριφορά.

Διάφορες κλάσεις μεθόδων έχουν προταθεί για τον χαοτικό έλεγχο. Αναφέρουμε τις δύο πιο διαδεδομένες. Η πρώτη (Ott, Grebogi, York) (OGY) βασίζεται στο γεγονός ότι με πολύ μικρές διορθώσεις των παραμέτρων του συστήματος έχουμε πολύ σημαντικές αλλαγές στην συμπεριφορά του.

Η δεύτερη επεμβαίνει στις μεταβλητές του συστήματος για να το ελέγξει.

Σε γενικές γραμμές η πρώτη μέθοδος έχει ως εξής : έστω το προς έλεγχο δυναμικό σύστημα

$$\dot{\chi} = F(\chi, u) \quad (1)$$

όπου $\chi \in R^n$, $u \in R$

συνήθως η μεταβλητή u παριστάνει μια παράμετρο του συστήματος που μπορούμε να αλλάζουμε.

Έστω ότι η τροχιά που επιθυμούμε είναι η $\chi_1(t)$ που είναι η λύση της (1) με $u = 0$. Η τροχιά αυτή μπορεί να είναι περιοδική ή χαοτική. Παίρνεται η τομή Poincaré

$$s = \{\chi : s(\chi) = 0\} \quad (2)$$

που περιέχει το σημείο $\chi_0 = \chi_1(0)$ και θεωρούμε την απεικόνιση $\chi \rightarrow P(\chi, \mathbf{u})$, όπου $P(\chi, \mathbf{u})$ είναι το σημείο της πρώτης επιστροφής στην Σ της λύσης της (1) με σταθερή \mathbf{u} αρχίζοντας από το χ .

Η απεικόνιση του $\chi \rightarrow P(\chi, \mathbf{u})$ ονομάζεται «η ελεγχόμενη απεικόνιση Poincaré». Είναι καλά ορισμένη τουλάχιστον σε κάποια γειτονιά του χ_0 .

Διακριτοποιώντας την απεικόνιση έχουμε :

$$\chi_{n+1} = P(\chi_n, u_n) \quad (3)$$

Όπου $\chi_n = \chi(t_n)$, με t_n την n -οστή τομή και u_n την τιμή της $\mathbf{u}(t)$ μεταξύ t_n, t_{n+1} .

Στην συνέχεια το αρχικό σύστημα (1), γραμμικοποιείται στο:

$$\tilde{\chi}_{n+1} = A \tilde{\chi}_n + B u_n \quad (4)$$

όπου $\tilde{\chi}_n = \chi_n - \chi_0$, και βρίσκεται ο ελεγχτής σταθεροποίησης για την (3)

$$u_n = C \tilde{\chi}_n \quad (5)$$

Τελικά, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου είναι :

$$u_n = \begin{cases} C \tilde{\chi}_n, & \text{αν } |\tilde{\chi}_n| < \Delta \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το σημείο κλειδί της μεθόδου είναι η εφαρμογή του ελέγχου μόνο σε κάποια γειτονιά της επιθυμητής τροχιάς, εισάγοντας μια εξωτερική νεκρή ζώνη.

Έστω η λογιστική απεικόνιση :

$$\chi_{n+1} = f(\chi_n, r) = r \chi_n (1 - \chi_n) \quad (6)$$

Και έστω $r = 3.8$ όπου το δυναμικό σύστημα (6), είναι χαοτικό και άρα βρίσκεται στην περιοχή του χαοτικού ελκυστή Feigenbaum. Το κύριο χαρακτηριστικό των χαοτικών ελκυστών είναι ότι περιέχουν έναν άπειρο αριθμό ασταθών περιοδικών τροχιών. Έστω ότι θέλουμε να αποφύγουμε το χάος στην τιμή $r = 3.8$ και θέλουμε για

τυχαία επιλογή της χ_0 , να είναι το σύστημα όσο γίνεται πιο κοντά στη τροχιά με περίοδο 2.

Έστω ότι η παράμετρος r μπορεί να μεταβάλλεται σε πολύ, μικρή περιοχή γύρω από την τιμή $r_0 = 3.8$, δηλαδή $r \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta]$, όπου $\delta \ll 1$. Λόγω της χαοτικής φύσης του ελκυστή, μια τροχιά που ξεκινά από αυθαίρετη τιμή χ_0 θα πέσει αργότερα, με πιθανότητα 1, στην γειτονιά της τροχιάς με περίοδο 2, αλλά γρήγορα θα ξαναφύγει αν δεν επέμβουμε.

Ο σκοπός μας είναι να ^{∂} π ^{∂r} γραμμίσουμε την μεταβολή της παραμέτρου ελέγχου ώστε η τροχιά να παραμείνει στην γειτονιά της περιόδου 2, όσο φυσικά ο έλεγχος υπάρχει.

Εξυπακούεται ότι οι μεγάλες αλλαγές της r μπορούν να βγάλουν το σύστημα από την χαοτική περιοχή και άρα δεν ενδιαφέρουν.

Η λογιστική απεικόνιση μπορεί να γραμμικοποιηθεί στην γειτονιά μιας περιοδικής τροχιάς

Έστω η m -περιοδική τροχιά ότι είναι η τροχιά στόχος με $\chi(i)$, $i=1, \dots, m$, $\chi(i+1)=f(\chi(i))$ και $\chi(m+1)=\chi(1)$.

Υποθέτουμε ότι σε χρόνο n , η τροχιά πέφτει στην γειτονιά της συνιστώσας i της περιοδικής τροχιάς.

Η γραμμικοποιημένη δυναμική στην περιοχή της $i+1$ είναι:

$$\begin{aligned} \chi_{n+1} - \chi(i+1) &= \\ \frac{\partial f}{\partial \chi} [\chi_n - \chi(i)] + \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r_n &= \end{aligned} \quad (7)$$

$$r_0 [1 - 2\chi(i)] [\chi_n - \chi_i] + \chi(i) [1 - \chi(i)] \Delta r_n$$

όπου οι μερικές παράγωγοι έχουν υπολογιστεί στα $\chi = \chi(i)$, $r = r_0$.

Θέλουμε η χ_n να παραμένει στην γειτονιά της $\chi(i+1)$. Έτσι θέτουμε :

$$\chi_{n+1} - \chi(i+1) = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\Delta r_n = r_0 \frac{[2\chi(i) - 1][\chi_n - \chi(i)]}{\chi(i)[1 - \chi(i)]} \quad (8)$$

Η (8) ισχύει μόνο όταν η τροχιά χ_n εισέρχεται σε πολύ γειτονικά σημεία της m -τροχιάς, δηλαδή όπου $|\chi_n - \chi(i)| \ll 1$ και έτσι πρέπει η διαταραχή της παραμέτρου Δr_n να είναι μικρή.

Έστω το εύρος του διαστήματος που ορίζει την γειτονιά της m -τροχιάς ότι είναι 2ε . Γενικά, η απαιτούμενη μέγιστη διαταραχή δ , της παραμέτρου είναι ανάλογη του ε . Επειδή το ε μπορεί να εκλεγεί ^{οσοδήποτε} μικρό, το δ μπορεί επίσης να γίνει ^{οσοδήποτε} μικρό.

Ο μέσος χρόνος μετάβασης στην γειτονιά της τροχιάς στόχου εξαρτάται από το ε (ή δ).

Όταν η τροχιά είναι έξω από την γειτονιά της τροχιάς στόχου, δεν εφαρμόζουμε καμιά διαταραχή της παραμέτρου και θέτουμε $\Delta r_n = 0$ όταν $\Delta r_n > \delta$.

Ας σημειωθεί ότι η διαταραχή της παραμέτρου Δr_n εξαρτάται από την χ_n και είναι μεταβαλλόμενη χρονικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Δυναμική εμβόλου σε ιδανικό αέριο : ταλάντωση και προσέγγιση στην ισορροπία
- Εξαναγκασμένο σφαιρικό εκκρεμές
- Χαοτική καύση στην ανάφλεξη σπινθήρων των μηχανών
- Η χρήση του χαμηλού διαστατικού μηχανολογικού μοντέλου
- Καύση

Δυναμική εμβόλου σε ιδανικό αέριο: Ταλάντωση και προσέγγιση στην ισορροπία

Περίληψη

Μελετήθηκε υπολογιστικά και θεωρητικά η εξέλιξη του χρόνου σε περιορισμένο αέριο μέσα σε κύβο με διαστάσεις L^3 το οποίο είναι χωρισμένο σε δύο μέρη από ένα πιστόνι με μάζα $M_L=L^2$ το οποίο μπορεί να μετακινηθεί μόνο στον άξονα x . Αρχίζοντας με μία ομοιόμορφη «double-peaked» κατανομή του αερίου και ενός στατικού πιστονιού, βρήκαμε ότι μετά από μια αρχική περίοδο το σύστημα γίνεται ασταθές και το πιστόνι παρουσιάζει μια μικρή ταλάντωση. Επίσης υπάρχουν κάποιοι θερμικοί παράγοντες που οδηγούν στη κατανομή κατά Maxwell των ταχυτήτων του αερίου.

Παρουσίαση

Εφαρμόζουμε σε αυτό το σύστημα τις πιο απλές αρχικές συνθήκες. Οι θέσεις και οι ταχύτητες των μορίων του αερίου έχουν παρθεί για $t=0$ από επεξεργασία μερικών εξισώσεων θεωρούνται ότι εξαρτώνται από τυχαία μεταβλητότητα από μια δοσμένη κατανομή $p(u)=p(-u)$ και από μια σταθερή χωρητικότητα μέσα στον κύβο. Το πιστόνι έχει επιφάνεια L^2 και για $X(0)=L/2$ η ταχύτητα του είναι $X'(0)=0$.

Μπορεί να θεωρηθεί ότι οι τυχαίες διακυμάνσεις της ταχύτητας του πιστονιού, εξαιτίας των τυχαίων θέσεων και ταχυτήτων των μορίων του αερίου, θα είναι μικρές όταν το L θα είναι μεγάλο και ότι εμφανίζονται σε ένα μεγάλο υδροδυναμικό όριο ($L \rightarrow \infty$) του χρόνου, του χώρου και της μάζας του πιστονιού. Αποδεικνύεται σε αυτή τη μελέτη ότι για αυτές τις αρχικές κατανομές η δυναμική του πιστονιού σε αυτά τα υδροδυναμικά όρια εκφράζεται από μια ντετερμινιστική εξίσωση μέχρι να συγκρουστούν τα μόρια του αερίου με την επιφάνεια του πιστονιού όχι πάνω από δύο φορές. Μετά από αυτή τη περίοδο δεν μπορούμε να ελέγξουμε τις τυχαίες διακυμάνσεις των μορίων. Είναι ξεκάθαρο όμως ότι για μια αρχική κατάσταση η οποία είναι χωρικά ομοιόμορφη και έχει την ίδια κατανομή ταχυτήτων και από τις δύο πλευρές του πιστονιού, η μικροσκοπική ντετερμινιστική εξέλιξη θα προέβλεπε ότι η θέση του πιστονιού θα παρέμενε στατική για πάντα.

Από την άλλη πλευρά όταν η αρχική κατανομή των ταχυτήτων των μορίων δεν είναι κατά Maxwell το σύστημα δεν είναι σε θερμική ισορροπία και περιμένουμε με

κάποιο τρόπο να αναπτύξουμε ισορροπία για κάθε σχεδόν αρχική διαμόρφωση. Αυτό είναι πράγματι που βρήκαμε για κάθε αρχική κατανομή. Το σύστημα αποδείχθηκε να είναι ευαίσθητο στην αρχική κατανομή.

Βρήκαμε ότι η ήρεμη κατάσταση γίνεται ασταθής μετά από 5-10 αναπηδήσεις για κάθε μόριο του αερίου με το πιστόνι. Τα σύστημα τότε αναπτύσσει μια μεγάλη ταλάντωση η οποία διαρκεί για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Οι ταλαντώσεις αυτές μοιάζουν με αρμονικές με σχεδόν σταθερό πλάτος και η ταχύτητα του πιστονιού είναι ανάλογη των μορίων του αερίου. Τελικά οι ταλαντώσεις κάποια στιγμή εξαφανίζονται και το σύστημα τείνει προς μια σταθερή κατάσταση ισορροπίας με σταθερή πυκνότητα του αερίου και κατανομή ταχυτήτων κατά Maxwell.

Τα κυρίως συμπεράσματα από την αριθμητική έρευνα είναι τα εξής

- 1) Καθώς η δυναμική δεν είναι χασοτική στο τεχνικό μέρος δεν υπάρχει θετικός εκθέτης Lyapunov. Υπάρχουν τυπικές αρχικές συνθήκες με αρκετές αλληλεπιδράσεις που φέρνουν σύστημα σε ισορροπία από μη συνηθισμένα μονοπάτια.
- 2) Στην αρχή του χρόνου της αστάθειας εξελίσσεται με $L, L \log L$. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και στα υδροδυναμικά όρια $t=l/L$, ντετερμινιστική συμπεριφορά δεν συμβαίνει στα χωρικά όρια $Y=X/L$ θα παραμένει έγκυρη όταν $L \rightarrow \infty$

Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρώντας έναν κύβο διαστάσεων $L_L = [0, L] * [0, L] * [0, L]$ γεμάτο με ιδανικό αέριο με αριθμό μορίων N . Ο κύβος είναι χωρισμένος σε δύο τμήματα από ένα τείχος (πιστόνι) ορθογώνιο σε οριζόντιο άξονα. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το τείχος απελευθερώνεται και τότε μπορεί να κινηθεί ελεύθερα στον οριζόντιο άξονα (τριβές αμελητέες), κάτω από τη δράση ελαστικής σύγκρουσης με τα μόρια του αερίου καθένα από τα οποία έχει ίδια μάζα. Θεωρούμε ότι η μάζα του αερίου είναι $M_L = b m L^2$ με $m=1, b=2$.

Η συνισταμένη των ταχυτήτων των μορίων δεν παίζουν κανένα ρόλο στη δυναμική του πιστονιού. Θεωρούμε ότι κάθε μόριο έχει συνισταμένη u με διεύθυνση τον άξονα X . Κάθε μόριο μπορεί να προσδιοριστεί από τις συντεταγμένες (x_i, u_i) όπου $i=1, \dots, N$. Θα πάρουμε τον ολικό αριθμό των N και την ολική κινητική ενέργεια του

συστήματος ανάλογα του L^3 και θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος για $L \gg l$.

Έχουμε:

$$P(x, u) = L^2 p(u)$$

Για κάθε $D \subset [0, L] \times \mathbb{R}^2$ ο αριθμός των σωματιδίων στο D , $N_D = \#\{i: (x_i, u_i) \in D\}$ έχουν κατανομή:

$$\lambda_D = L^2 \int_D p(u) dx du$$

$$\text{Για κάθε } K \geq 0 \text{ είναι } P(N_D = K) = \frac{\lambda_D^K}{k!} e^{-\lambda_D}.$$

Η εξίσωση $P(u) = P(-u)$ παίρνει αξία μόνο όταν ο συντελεστής L^2 είναι σε μια απομακρυσμένη περιοχή του όγκου Λ_L . Το πιστόνι είναι αρχικά σε θέση $X(0) = L/2$, με $V(0) = 0$ και η θέση και η ταχύτητα έχουν έννοια μόνο για $0 < X < L$.

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των σωματιδίων του αερίου αρχικά είναι τυχαίος. Οπότε αριστερά και δεξιά του πιστονιού ο αριθμός του αερίου θα είναι N_-, N_+ αντίστοιχα.

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος $\frac{1}{2} \sum m u_i^2$ είναι επίσης τυχαία μεταβαλλόμενη. Οι τιμές N_-, N_+ και η ολική κινητική ενέργεια (αερίου+πιστονιού) είναι ολοκλήρωμα της κίνησης.

Τα σωματίδια του αερίου και το πιστόνι κινούνται ελεύθερα μεταξύ ελαστικής σύγκρουσης των σωματιδίων με το πιστόνι και τα τοιχώματα. Όταν ένα σωματίδιο συγκρουστεί με τα τοιχώματα η ταχύτητα του απλά αντιστρέφεται. Εάν όμως έχει ταχύτητα u και συγκρουστεί με το πιστόνι το οποίο έχει ταχύτητα V τότε οι ταχύτητες τους θα είναι u και V αντίστοιχα.

$$V' = (1-\varepsilon)V + \varepsilon u$$

$$u' = -(1-\varepsilon)u + (2-\varepsilon)V$$

$$\text{οπου } \varepsilon = \frac{\lambda m}{M + m} = \frac{2}{b L^2 + 1}$$

Για να αποφύγουμε αναπηδήσεις των σωματιδίων με το πιστόνι θέτουμε $P(u) = 0$, $|u| \geq u_{max}$ ή $|u| \leq u_{min}$ με $0 < u_{min} < u_{max} < \infty$.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, θα υπάρχει ένα αρχικό διάστημα μήκους στο οποίο κάθε μόριο του αερίου χτυπάει το πιστόνι και στη συνέχεια θα πρέπει να μετακινείται μέχρι το τείχος και πάλι θα γυρίζει προς το πιστόνι χωρίς όμως να το ξαναχτυπάει. Το

διάστημα αυτό το ονομάζουμε zero-recollisions. Στη περίπτωση όπου το πιστόνι χτυπάει για δεύτερη φορά το πιστόνι το διάστημα αυτό ονομάζεται one-recollisions.

Τα υδροδυναμικά όρια τώρα είναι $Y=X/L$, $0 < Y < 1$ και $\tau=t/L$. Οι καινούργιες συντεταγμένες του χρόνου είναι γ.τ στο zero-recollisions είναι $(0, \tau)$ και του one-recollisions είναι (τ_0, τ_1) .

Για $(0, \tau_1)$ έχουμε τις συναρτήσεις $Y_L=X(\tau L)/L$, $W_L(\tau)=dY_L/d\tau=V(\tau L)$ οι οποίες τείνουν για $L \rightarrow \infty$ ομαλά και πιθανότατα σε ντετερμινιστικές εξισώσεις $Y(\tau)$, $W(\tau)$.

Αριθμητικά αποτελέσματα

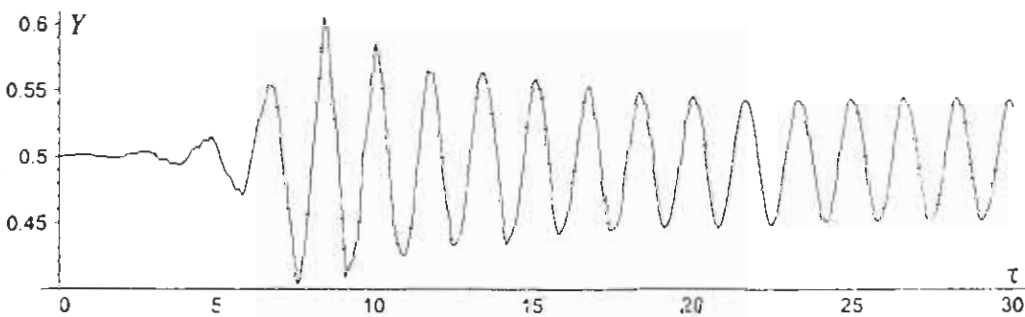
Στο κομπιούτερ έχουμε:

$$P(x, u) = P(u) = 1 \quad \text{για } 0.5 \leq |u| \leq 1$$

$$P(u) = 0 \quad \text{για κάθε } u$$

Οπότε $u_{min}=0.5$, $u_{max}=1$. Έχουμε συντεταγμένες x , u για $0 < x < L$ και $u_{min} \leq |u| \leq u_{max}$. Θεωρούμε N αριθμό σωματιδίων του αερίου, με (x_i, u_i) , $1 < i < N$. Τα όρια του L στον υπολογιστή μας είναι $L=30 \rightarrow L=300$. Για $L=300$ το σύστημα περιέχει $L^3=27000000$ σωματίδια.

Στο διάγραμμα 1 παρουσιάζεται μια τυπική τροχιά του πιστονιού. Με $L=100$ η θέση και ο χρόνος μετριοούνται σε μεταβλητά υδροδυναμικά όρια $Y=X/L$, $0 < Y < 1$ και $\tau=t/L$.

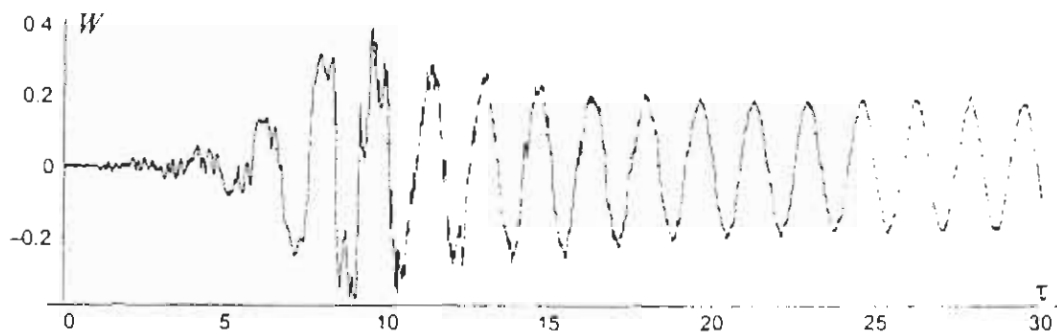


Διάγραμμα 1

Αρχικά το πιστόνι κινείται στο σημείο ισορροπίας του. Σημειώνουμε ότι η υδροδυναμική τροχιά του πιστονιού είναι $Y(\tau)=0.5$ για $\tau > 0$ και κρατάει μέχρι $\tau < 2$ για $L \rightarrow \infty$. Για χρόνο μεταξύ 3 και 5 η ταλάντωση του πιστονιού μεγαλώνει και γίνεται ορατή στον άξονα ψ. Στη συνέχεια το πιστόνι απομακρύνεται από την ισορροπία $Y=0.5$ και πολύ σύντομα για $\tau=\tau_{\alpha_{max}}=8$, η ταλάντωση του πιστονιού φτάνει το μέγιστο $(\Delta Y)_{max}=\max Y(\tau)-0.5 \approx 0.1$. Η ταλάντωση τείνει να σταθεροποιηθεί με

πλάτος $A=0.04$. Την ίδια στιγμή η τροχιά κινείται ομαλά και αποκτάει περίοδο $\tau_{per}=1.63$.

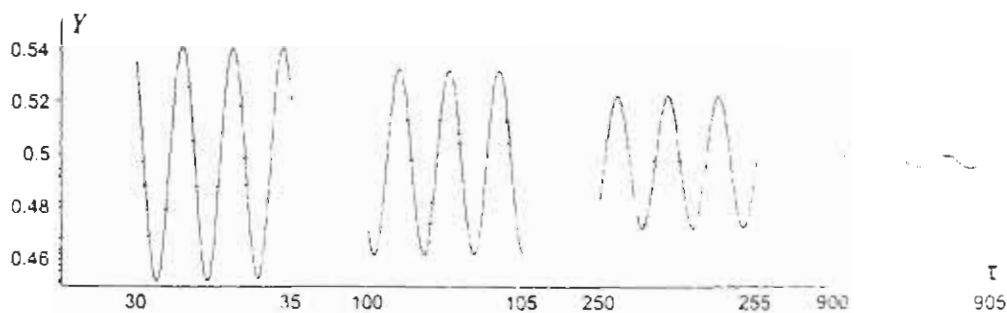
Η ταχύτητα του πιστονιού $W(\tau)$ ακολουθεί μια παρόμοια μορφή. Η τυχαία διακύμανση μεγαλώνει μετά από $\tau=2.5$ και φτάνει τη μέγιστη τιμή $W_{max}=\max|W(\tau)|\approx 0.4$ στο χρόνο $\tau=9.5$.



Διάγραμμα 2

Από εκεί και πέρα αρχίζει να σταθεροποιείται. Λέξουμε να σημειώσουμε ότι το γράφημα $Y(\tau)$ δείχνει πιο ομαλό από του $W(\tau)$ όπως θα περιμέναμε αφού η $Y(\tau)$ είναι ολοκλήρωμα του $W(\tau)$. Το ενδιαφέρον είναι ότι και οι δύο συναρτήσεις εξομαλύνονται όσο περνάει ο χρόνος.

Αυτός ο κύκλος κίνησης των μορίων του αερίου μεταξύ του τείχους και της επιφάνειας του πιστονιού συνεχίζεται για αρκετό χρόνο με την ίδια περίοδο $\tau_{per}=1.63$ ανεξάρτητα από το L αλλά το πλάτος των $Y(\tau)$, $W(\tau)$ μειώνεται σταδιακά.



Διάγραμμα 3

Η ταλάντωση του πιστονιού με εξασθετισμένο πλάτος μπορεί να περιγραφεί για διάστημα $30 < \tau < 1000$ κατά προσέγγιση:

$$Y_1(\tau) = A e^{-\lambda(\tau-20)} \sin(\tau - \alpha) \quad (1)$$

με $A=0.046$, $\lambda > 0$.

Ισοδύναμα $W(\tau) = \frac{dY_1}{d\tau}$ στο ίδιο διάστημα $30 < \tau < 1000$ έχουμε:

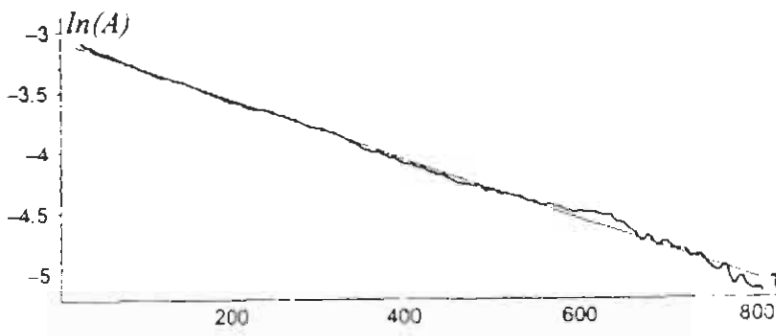
$$W_1(\tau) = -\lambda Y_1 + A e^{-\lambda(\tau-20)} \omega \cos \omega(\tau-a)$$

$$W_1(\tau) = A_1 e^{-\lambda(\tau-20)} \sin(\tau-\beta) \quad (2)$$

με $A_1 = \sqrt{\omega^2 + \dots}$ με β να ανήκει στο a .

Για να ελέγξουμε πόσο καλά ανταποκρίνεται η (1) με τα στοιχεία μας, υπολογίσαμε το πλάτος $A(\tau)$ σαν συνάρτηση του χρόνου εφαρμόζοντας μια ημιτονοειδής συνάρτηση $Y_0(\tau) = A \sin \omega(\tau-a)$, τοπικά στο διάστημα $(\tau-s, \tau+s)$ για κάθε τ .

Το σχεδιάγραμμα 4 δείχνει το $A(\tau)$ σε λογαριθμική κλίμακα να είναι γραμμικό στο διάστημα $30 < \tau < 300$.



Διάγραμμα 4

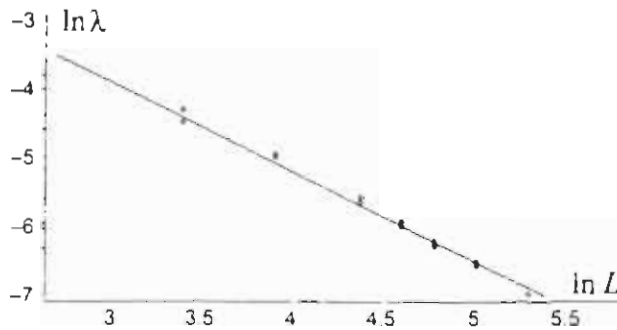
Εξάρτηση της χρονικής εξέλιξης στο σύστημα

Πολλά χαρακτηριστικά της τροχιάς του πιστονιού περιγράφονται από τις παραμέτρους $(\Delta Y)_{\max}$, W_{\max} , A , τ_{per} οι οποίες είναι ανεξάρτητα από το L . Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει υπολογισμένες τιμές για όλες αυτές τις παραμέτρους για διαφορετικά L .

L	$(\Delta Y)_{\max}$	W_{\max}	A	τ_{per}
30	0.114	0.40	0.042	1.70
50	0.121	0.39	0.045	1.65
80	0.105	0.37	0.042	1.65
100	0.100	0.34	0.041	1.64
120	0.122	0.39	0.041	1.62
150	0.111	0.37	0.045	1.62
200	0.102	0.37	0.037	1.62
250	0.100	0.41	0.042	1.61
300	0.122	0.42	0.045	1.65

Πίνακας

Σε κάθε περίπτωση υπολογίσαμε μερικές πειραματικές τροχιές. Υπάρχουν κάποιες ποσότητες όπως τ_{\max} , $\tau_{1/2}$ και το λ οι οποίες εξαρτώνται από το L . Πρακτικά υπολογίσαμε ότι $\tau_{1/2} = L^{1.3}$, $\lambda = L^{-1.3}$.



Διάγραμμα 5

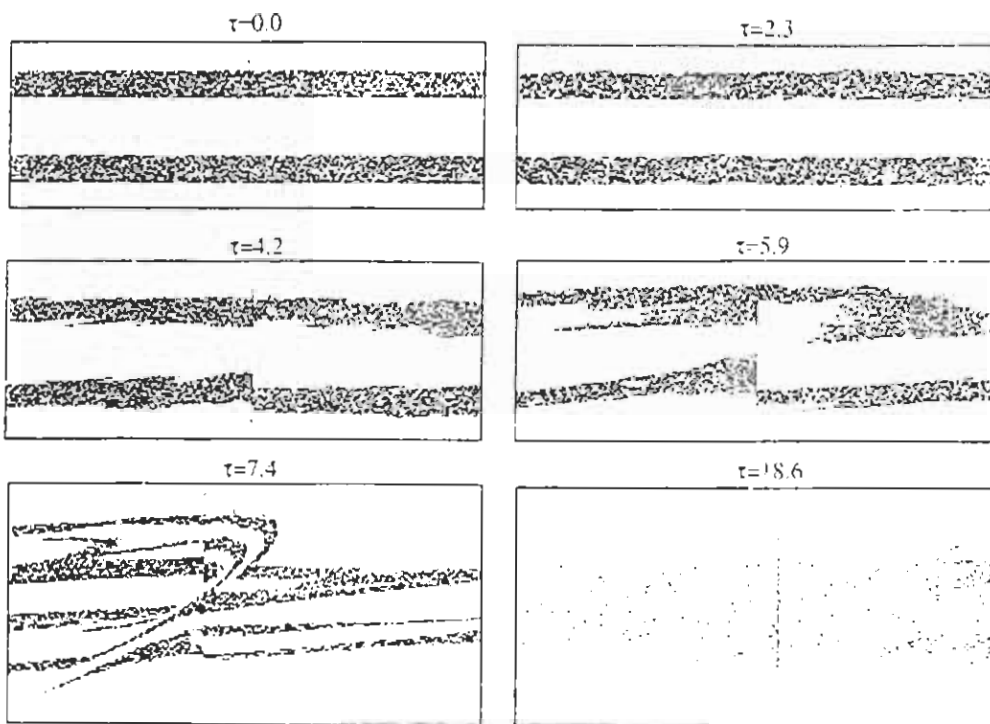
Επίσης παρατηρήσαμε ότι για μεγάλα L ($L=150, 200$) ο εκθέτης λ αλλάζει με το χρόνο. Είναι μεγαλύτερος για $\tau < 100$ και μικρότερος για $\tau > 100$.

Αλλά το πιο σημαντικό, ο χρόνος της μεγαλύτερης ταλάντωσης τ_{\max} και ο ανεξάρτητος χρόνος στην αρχή της αστάθειας τ_c , φαίνονται να μεγαλώνουν αργά συναρτήσει του L και πολύ πιθανών με $\log L$. Για να κατανοήσουμε αυτό το γεγονός, διευκρινίσαμε το μηχανισμό δημιουργίας των τυχαίων διακυμάνσεων των θέσεων και ταχυτήτων του πιστονιού οι οποίες καταλήγουν σε μια αρμονική ταλάντωση. Σχεδιάσαμε ένα ιστόγραμμα της πυκνότητας των μορίων του αερίου σε διάφορους χρόνους $0 < \tau < 30$.

Η αρχική πυκνότητα (σε χρόνο 0) είναι σχεδόν ομοιόμορφη στην περιοχή $0 < X < L$ και $u_{\min} \leq |u| \leq u_{\max}$. Τότε για $0 < \tau < 1$ το πιστόνι τυχαία συγκρούεται με τα σωματίδια και αποκτάει $M_i^{-1/2} = O(1/L)$. Αυτές οι μικρές διακυμάνσεις στην ταχύτητα του πιστονιού είναι αποτέλεσμα της αλλαγής των ταχυτήτων του αερίου τα οποία

αφήνουν μετά τη σύγκρουση. Κατά συνέπεια στην έξοδο τα σωματίδια από τη δεξιά πλευρά του πιστονιού έχουν ταχύτητες στο διάστημα $(u_{min} + 2W(\tau), u_{max} + 2W(\tau))$, ενώ από την αριστερή πλευρά έχουν ταχύτητες στο διάστημα $(-u_{min} + 2W(\tau), -u_{max} + 2W(\tau))$. Τα σωματίδια που έχουν συγκρουστεί με το πιστόνι μετακινούνται στο τείχος και γυρίζουν πάλι στο πιστόνι. Τώρα η πυκνότητα (κατανομή) είναι λιγότερο κανονικές από ότι ήταν αρχικά, στις περιοχές όπου η πυκνότητα είναι θετική είναι καμπυλοειδής. Όταν τα σωματίδια χτυπούν το πιστόνι και από τις δύο πλευρές του το ταρακουνούν περισσότερο από πριν. Αυτό συμβαίνει γιατί οι ταχύτητες των σωματιδίων της εισόδου στην αντίθετη πλευρά είναι αρνητικά ορισμένες. Όταν τα σωματίδια στη δεξιά πλευρά κινούνται γρήγορα τότε τα σωματίδια στην αριστερή θα κινούνται αργά και απομακρυσμένα. Αυτή η κατάσταση αποσταθεροποιεί το πιστόνι δραματικά και η ταχύτητα του πιστονιού $W(\tau)$ αποκτάει μεγαλύτερες διακυμάνσεις από πριν. Οι ταχύτητες των σωματιδίων τώρα στην έξοδο θα πηγαινοέρχονται στην αντίθετη κατεύθυνση με μεγαλύτερη κλίμακα.

Καθώς ο χρόνος θα περάσει, τα παραπάνω φαινόμενα θα επαναλαμβάνονται συνέχεια με μεγαλύτερες διακυμάνσεις των ταχυτήτων του πιστονιού και των σωματιδίων μέχρις ότου η κατανομή του αερίου να διαλυθεί τελείως. Για $\tau=10$ δύο μεγάλες ομάδες σωματιδίων σχηματίζονται σε κάθε πλευρά του πιστονιού. Όταν η μία ομάδα βομβαρδίζει το πιστόνι, η άλλη απομακρύνεται χτυπώντας το τείχος και στη συνέχεια εναλλάσσουν τους ρόλους τους. Οι ομάδες αυτές κυμαίνονται από 0.3-0.5 στον άξονα ψ και οι ταχύτητες τους (των σωματιδίων) από 0.2-1. Ο μέσος όρος των ταχυτήτων κυμαίνεται από 0.5-0.6 οπότε οι ομάδες σφυροκοπούν το πιστόνι περιοδικά με περίοδο 1.6-2.0 η οποία είναι κοντά στην πειραματική περίοδο της ταλάντωσης του πιστονιού.



Φάσεις

Τα παραπάνω στιγμιότυπα δείχνουν τη πυκνότητα του αερίου σε διαφορετικούς χρόνους. Για $\tau=0$ το αέριο γεμίζει δύο ορθογώνια $\{(y,u): 0.5 < |u| < 1, 0 < y < 1\}$.

Για $\tau=2.3$ μπορούμε να δούμε κάποιες κυματοειδείς κινήσεις στα όρια των ορθογώνιων. Για $\tau=4.2$ οι μη κανονικότητες μεγαλώνουν και για $\tau=5.9$ τα ορθογώνια καταστρέφονται. Δύο μεγάλες ομάδες σχηματίζονται οι οποίες εμφανίζονται σε ένα ανώτερο μισό πλάνο, αυτή τη στιγμή και οι δύο ομάδες μετακινούνται προς τα δεξιά (η μια κατευθυνόμενη προς το πιστόνι και η άλλη απομακρυσόμενη). Αργότερα η πυκνότητα παρουσιάζει παράξενους σχηματισμούς ($\tau=7.4$) αλλά τελικά εξισορροπείται και παρουσιάζει μια αργή διαδικασία σύγκλισης κατά Maxwell ($\tau=18.6$). Παρατηρείστε μια στενή λεπτή γραμμή ($u=0$) όπου σημαίνει ότι δεν υπάρχουν κινούμενα σωματίδια για $\tau=18.6$.

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να προτείνει ότι αυτές οι διακυμάνσεις της ταχύτητας του πιστονιού αυξάνονται χονδρικά από ένα σταθερό συντελεστή κατά τη διάρκεια κάθε διαστήματος. Πράγματι οι αρχικές τυχαίες διακυμάνσεις $W_a = O(1/L)$ απορρέουν από πρόσθετες αλλαγές των ταχυτήτων του αερίου στην έξοδο με $2W_a$. Όταν τα σωματίδια επανέρχονται στο πιστόνι ($\Delta\tau=1$) εκτινάσσουν την το μέτρο της ταχύτητας στο επίπεδο $2W_a$. Τότε στην καινούργια έξοδο τα σωματίδια αποκτούν ταχύτητα $4W_a$ κ.ο.κ.

Στη διάρκεια κάθε διαστήματος οι διακυμάνσεις διπλασιάζουν το μέγεθος τους:

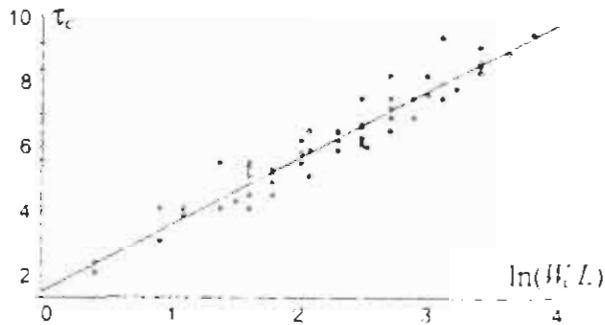
$$W_a(\tau) = \frac{c R^t}{L}$$

Όπου $W_a(\tau)$ είναι οι τυπικές διακυμάνσεις της ταχύτητας του πιστονιού σε χρόνο τa και $C, R > 0$ είναι σταθερές.

Δοκιμάσαμε τον παραπάνω τύπο ως ακολούθως: για $W_c > 0$ και $\tau_c = \inf\{\tau > 0: |W(\tau)| \geq W_c\}$ αυτός ο χρόνος παίζει το ρόλο της έναρξης των μεγάλων διακυμάνσεων της ταχύτητας του πιστονιού.

$$T_c = \ln(W_c L / C) / \ln R$$

Το τ_c μεγαλώνει συναρτήσει του $\ln L$ όσο το L αυξάνεται. Βρήκαμε πειραματικά ότι για $W_c = 0.1$, $W_c = 0.15$ και διαπιστώσαμε ότι συμφωνούν με τα στοιχεία μας.



Διάγραμμα 6

Προσέγγιση στην ισορροπία

Εξερευνούμε την σύγκλιση της κατανομής των ταχυτήτων κατά Maxwell.

Για κάθε δοσμένο χρόνο $\tau > 0$:

$$F_\tau(u) = \#\{i: u_i < u\} / N$$

Στην ισορροπία μάλλον συγκλίνει σε μια κανονική κατανομή $\Phi(x)$. Σαν μέτρηση αυτής της προσέγγισης έχουμε:

$$D_\tau = \sup |F_\tau(u) - \Phi(u)|$$

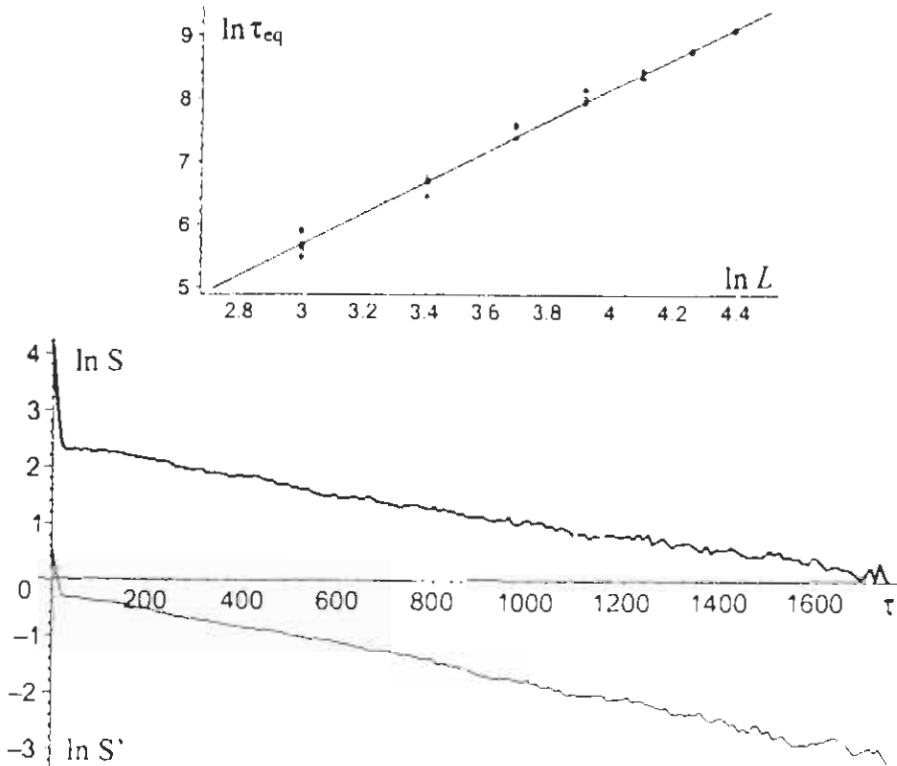
Αρχικά D_0 για την επιλογή μας $P(u)$. Μπορείς να περιμένεις ότι το D_τ συγκλίνει στο 0 καθώς το τ μεγαλώνει όταν το N είναι μεγάλο. Στη πραγματικότητα εάν οι ταχύτητες u_i ήταν ανεξάρτητες και είχαν κατανομή κατά Maxwell τότε το D_τ δεν θα ήταν $O(1/\sqrt{N})$ και το γινόμενο $D_\tau \sqrt{N}$ θα είχε ένα καθορισμένο όριο κατανομής.

Πράγματι είναι γνωστό ότι κατά Maxwell η πιθανότητα είναι $P(D_\tau \sqrt{N} > 1) = 0.2$.

Πάνω σε αυτό καθορίσαμε το χρόνο της σύγκλισης στην ισορροπία από:

$$Teq \inf\{\tau > 0: D\tau\sqrt{N} < 1\}$$

Εδώ η σταθερά 1 σαν κρίσιμη τιμή επιλέχθηκε αυθαίρετα. Υπολογίσαμε το teq για διάφορα L και βρήκαμε $\tau_{eq} = ab^2$ με σταθερές $a, b > 0$. Βρήκαμε $a = 0.18$, $b = 2.47$.



Διαγράμματα 7,8

Το σχεδιάγραμμα του γινομένου $S = D\tau\sqrt{N}$ συναρτήσει του τ δίνεται παρακάτω (σχεδιάγραμμα 9). Δείχνει ότι μετά από μια απότομη μείωση για $0 < \tau < 20$ το στατιστικό S μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ένα άλλο κοινό στοιχείο είναι S'

$$S' = 3 - \frac{M_4}{M_2^2}$$

Όπου M_2 και M_4 είναι η δεύτερη και η τέταρτη χρονική στιγμή αντίστοιχα από την εμπειρική κατανομή της ταχύτητας.

Θεωρητική προσέγγιση

Σημειώσαμε ότι η ολική ενέργεια E και ο ολικός αριθμός των σωματιδίων του αερίου είναι ολοκλήρωμα της κίνησης. Με αυτές τις ποσότητες το μοντέλο μπορεί να αναχθεί σε σύστημα μπιλιάρδου μέσα σε ένα πολύεδρο από στάνταρ τεχνικές.

Θεωρούμε $\{x_j\}=1, \dots, N$ την x -συντεταγμένη για τα σωματίδια από την δεξιά πλευρά του πιστονιού και $\{x_j\}=-1, \dots, -N$ για την αριστερή πλευρά. Τοποθετώντας $x_0=x\sqrt{M}$ όπου M η μάζα του πιστονιού. Τότε το αρχικό σχήμα διαμόρφωσης του πιστονιού είναι πολυεδρικό $Q \subset R^{N+1}$:

$$0 \leq x_{-N}, \dots, x_{-1} \leq x_0/\sqrt{M} \leq x_1, \dots, x_N \leq L$$

Είναι γνωστό ότι η δυναμική του μηχανικού μας συστήματος (αέριο και πιστόνι) ανταποκρίνεται στο σύστημα του μπιλιάρδου Q . Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι:

$$P = q = \{u_{-N}, \dots, u_{-1}, V\sqrt{M}, u_1, \dots, u_N\}$$

Έχει σταθερό μήκος μέχρι $\|p\|^2 = 2E = const$. Ο χώρος των φάσεων του συστήματος του μπιλιάρδου είναι $M=Q S_p^N$ όπου S_p^N η σφαιρική διάσταση (N) με ακτίνα $\rho = \sqrt{2E}$.

Το σύστημα του μπιλιάρδου έχει μια φυσική κατάσταση ισορροπίας, δοσμένη από του Liouville. Οι ιδιότητες της δυναμικής του μπιλιάρδου εξαρτώνται αρκετά από την καμπυλότητα των ορίων ∂Q . Στη περίπτωση μας το Q είναι πολύεδρο και ως εκ τούτου τα όρια του συνίσταται σε επίπεδες πλευρές με μηδενική καμπυλότητα.

Θεωρούμε ότι το σύστημα μας είναι εργοτικό ή πολύ κοντά στο να είναι εργοτικό. Σχεδόν κάθε τροχιά τελικά συμπεριφέρεται σύμφωνα με το διαιρέτη μ ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση. Πρακτικά για κάθε αρχική πυκνότητα του αερίου και κάθε κατανομή ταχυτήτων το υδροδυναμικό σύστημα είναι έγκυρο μόνο για καθορισμένο L και καθορισμένο χρονικό διάστημα και τελικά το σύστημα θα κατακαθίσει στην ισορροπία. Πώς λοιπόν αυτός ο χρόνος εξαρτάται από το L

Στην ισορροπία οι κατανομή των συντεταγμένων x_i, u_i είναι καθορισμένες από τον διαιρέτη μ του Liouville ο οποίος είναι ομοιόμορφος στο χώρο.

Πράγματι κάθε ταχύτητα συγκλίνει σε κατανομή Maxwell με μηδενικό μέσο όρο και διακύμανση $\frac{2E}{N} = const$. Τα ίδια θα ισχύουν και για τη συνισταμένη ταχύτητα του

πιστονιού $x_0 = V\sqrt{M}$ με μηδενικό μέσο όρο και απόκλιση $\frac{const}{\sqrt{M}} = \frac{const}{L}$ με $L \rightarrow \infty$.

Στη περίπτωση μας η V έχει στάνταρ απόκλιση $\sqrt{\frac{7}{24}}/L = 0.5/L$ αυτό το

συμπέρασμα συμπίπτει με τα αριθμητικά στοιχεία μας.

Η ισορροπία του πιστονιού στη συντεταγμένη x είναι επίσης καθορισμένη από την προβολή του διαιρέτη dq στο Q πάνω στον άξονα x . Μια απλή αλλαγή της μεταβλητής $x = \chi_0 / \sqrt{M}$ μας επιτρέπει να επανακαθορίσουμε το Q :

$$0 \leq \chi_{N^*}, \dots, \chi_{-1}, \leq \chi \leq \chi_1, \dots, \chi_{N^*} \leq 1$$

Επίσης $Y = \chi/L$ και $Y_i = \chi_i/L$ μας δίνει μια πιο απλή μορφή του Q .

$$0 \leq Y_{N^*}, \dots, Y_{-1}, \leq Y \leq Y_1, \dots, Y_{N^*} \leq 1$$

Τελικά: $f(Y) = C Y^N (1-Y)^N$, για $0 < Y < 1$.

Βάζοντας $z = (Y - 0.5) \sqrt{8K}$ η πυκνότητα του z δίνεται ασυμπτωτικά από τη σχέση gaussian με μέσο όρο 0.5 και διαφορά $(4N)^{-1} = (4L^3)^{-1}$.

$$\text{Επομένως: } |Y - 0.5| = \frac{1}{2L\sqrt{L}} = \frac{1}{2\sqrt{L}}$$

Σχόλια

Δοκιμάσαμε την εξάρτηση της ταλάντωσης του πιστονιού με το συντελεστή b όπου βρίσκεται στον τύπο $M_L = b m L^2$. Θυμηθείτε ότι θέσαμε $b=2$ στο βασικό μας πείραμα. Όταν το αλλάξαμε σε $b=20$ τότε οι ταλαντώσεις άρχισαν αργότερα και το πλάτος τους ήταν κάπως μεγαλύτερο όμως παρόλα αυτά η μορφή του ήταν σχεδόν η ίδια. Όταν αλλάξαμε το b σε 0.2 τότε οι ταλαντώσεις άρχιζαν την ίδια στιγμή όπως για $b=2$ όμως τότε εξασθενιζόντουσαν γρηγορότερα.

Επίσης προσπαθήσαμε να αλλάξουμε τη μάζα του πιστονιού. Όταν τη θέσαμε σε L^3 εμφανίστηκε ταλάντωση η οποία άρχισε μετά από μεγάλη αρχική περίοδο. Σε αντίθεση όταν θέσαμε $M_L = L$ τότε μια μεγάλη ταλάντωση άρχισε πολύ σύντομα, όμως πολύ γρήγορα αποδυναμώθηκε και εξαφανίστηκε.

Σημειώσαμε ότι η $W(\tau) = A_1 e^{-\lambda(\tau-20)} \sin \omega(\tau - \beta)$ περιγράφει την εξέλιξη του χρόνου για φθίνουσα αρμονική ταλάντωση.

Χρησιμοποιώντας την μεταβλητή t και $X(t)$ γράφουμε:

$$M_L = \frac{d^2 x_L}{dt^2} + K_L \left(x_L - \frac{L}{2}\right) + n_L \frac{dx_L}{dt} = 0$$

Η οποία έχει λύση $X_L = L/2 = e^{at}$ με $a = -\frac{n_L}{2M_L} \pm i \sqrt{\frac{K_L}{M_L} \left[1 - \frac{n_L^2}{4K_L M_L}\right]}$

Ο συντελεστής $n_L = 4L\lambda_L$ με λ_L βρέθηκε πειραματικά να μειώνεται με $\lambda_L = L^{-\gamma}$ με $\gamma = 1.3$.

Συμπεράσματα

Εδώ παρουσιάσαμε υπολογιστικά αποτελέσματα της εξέλιξης του χρόνου του συστήματος με πολλούς βαθμούς ελευθερίας (πάνω από 27000000) με ποιόν σημαντικό τη θέση του πιστονιού. Αρχίζοντας με την αρχική κατανομή του αερίου που περιγράφεται από την εξίσωση (1) βρήκαμε δύο κρουστικά χαρακτηριστικά της εξέλιξης.

- 1) Η κατανομή των ταχυτήτων του αερίου προσεγγίζει την κατά Maxwell και το σύστημα οδηγείτε σε θερμική ισορροπία.
- 2) Μετά από κάποια αρχική περίοδο όπου η αρμονική ταλάντωση σβήνει σε ένα διευρυμένο χρονικό διάστημα η εξέλιξη του χρόνου του πιστονιού ακολουθεί στενά την αρχική ταλάντωση με μέγεθος το $1/10$ του συστήματος

Για λόγους απλότητας, θεωρήσαμε ότι $p(x,u)=p(|u|)$ και $x(0)=L/2$, $V(0)=0$. Σε αυτή τη περίπτωση δεν υπάρχει τάση του πιστονιού να μετακινηθεί και όπως έχει ήδη σημειωθεί οι υδροδυναμικές εξισώσεις προβλέπουν ότι για $L \rightarrow \infty$ το σύστημα θα παραμείνει ακίνητο στην αρχική κατάσταση $Y(\tau)=Y(0)=0.5$ και $W(\tau)=W(0)=0$ για $\tau > 0$. Η πυκνότητα $p(x,u,t)$ θα παραμείνει επίσης σταθερή στο χρόνο. Τι γίνεται όμως για μεγάλο L στο σύστημα του αερίου? Πώς συμπεριφέρεται το πιστόνι και το αέριο με τις ταχύτητες του αερίου να συγκλίνουν στην Maxwell κατανομή?

Για να απαντήσεις σε αυτήν την ερώτηση, σημειώνουμε ότι η αρχική διαμόρφωση είναι τυχαία παραγόμενη με πυκνότητα $p(x,u,t)=p(|u|)$.

Εξαναγκασμένο σφαιρικό εκκρεμές

Η κίνηση ενός απλού σφαιρικού εκκρεμούς περιγράφεται από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (1)$$

όπου θ είναι η γωνιακή μετατόπιση, l είναι το μήκος του εκκρεμούς, g η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ms^2 .

Ο όρος $\sin\theta$ προκαλεί τη μη γραμμικότητα της παραπάνω εξίσωσης. Όμως για μικρή γωνιακή μετατόπιση μπορεί να θεωρηθεί ότι $\sin\theta = \theta$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

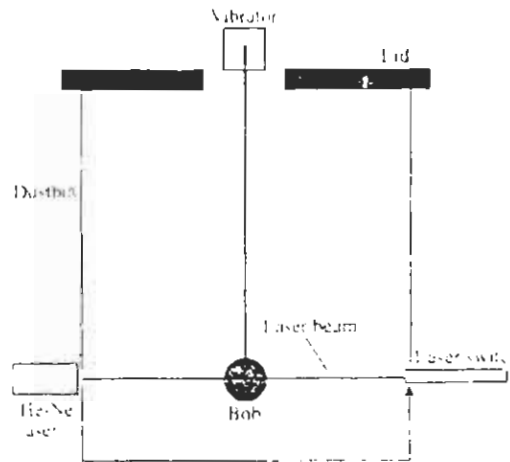
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2)$$

Η (2) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση, όπου το εκκρεμές ταλαντώνεται με μια σταθερή περίοδο $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Σε αυτή τη περίπτωση το εκκρεμές ταλαντώνεται ημιτονωειδώς. Εάν η συχνότητα έχει τιμή πολύ κοντά στη φυσική συχνότητα του εκκρεμούς τότε το εύρος ταλάντωσης γίνεται αρκετά μεγάλο. Η θεώρηση $\sin\theta = \theta$ δεν κρατάει για πολύ, με αποτέλεσμα η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη κίνηση να είναι μη γραμμική. Ο Miles έδειξε θεωρητικά ότι εάν το εκκρεμές οδηγείτε από συχνότητα που η τιμή της είναι πολύ κοντά στη φυσική συχνότητα τότε μπορεί να αναπτύξει κατακόρυφη κίνηση σε σχέση με τη διεύθυνση ταλάντωσης, σαν αποτέλεσμα της μη γραμμικότητας της εξίσωσης. Ο συνδιασμός λοιπόν αυτών των κινήσεων έχει σαν αποτέλεσμα μια πολύπλοκη κίνηση όπου ο γεωμετρικός τόπος αυτής, δεν είναι ένα τόξο όπως αρχικά θα περιμέναμε, αλλά μοιάζει περισσότερο με σφαιρική επιφάνεια. Αυτή λοιπόν η κίνηση μπορεί να είναι περιοδική ή χαοτική, εξαρτάται από τη συχνότητα. Έτσι λοιπόν ο Miles βρήκε ότι σε πολύ κοντινή τιμή της φυσικής συχνότητας παρουσιάζονται ποικίλες κινήσεις, όπως τροχιές, πολύπλοκες, μη προβλέψιμες κ.λ.π.

Πειραματική μέθοδος

Η πειραματική συσκευή απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Το εκκρεμές αποτελείται από μια χάλκινη σφαίρα δεμένη στο τέλος ενός μακριού και λεπτού σχοινοῦ. Στην ἄλλη ἄκρη του σχοινοῦ ἔχει δεθεῖ μια λεπτή μεταλλική ράβδος ἡ οποία συνεργάζεται με ἓναν μηχανικό ταλαντωτή. Ο οποίος χρησιμοποιεῖται για να ταλαντώνει ημιτονοειδῶς το εκκρεμές μέσω μιας ηλεκτρικῆς γεννήτριας.

Ἡ φυσικὴ συχνότητα f_0 εἶναι υπολογισμένη ἀπὸ τὴ περίοδο T χρησιμοποιώντας φωτογραφικὸ χρονομετρητὴ. Τὸ εκκρεμές ἔχει μετατοπιστεῖ με μικρὴ γωνία με τὸ χεῖρ για νὰ διατηρήσουμε τὴ γραμικότητα τῆς συστήματος καὶ ἔχει ἀφεθεῖ νὰ ταλαντώνεται με τὴ φυσικὴ του συχνότητα $f_0=1/T$.

Για νὰ ἔχουμε ποσοτικὰ αποτελέσματα ὁ χρονομετρητὴς μετράει τὴ συχνότητα με τὴ βοήθεια ακτίνων laser. Τὸ laser εἶναι τοποθετημένο ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι σε θέση νὰ μετράει τὴ συχνότητα σε οποιαδήποτε κίνηση τοῦ εκκρεμοῦς (πολύπλοκη, τροχιακὴ, επίπεδη κ.λ.π). Στὴ συνέχεια τὰ δεδομένα αὐτὰ τὰ επεξεργάζεται ὁ υπολογιστὴς ὁ οποίος μπορεῖ νὰ τὰ ἀποδώσει γραφικὰ.

Φυσικὰ για νὰ ελαχιστοποιηθοῦν οἱ ἐξωτερικὲς ἐπιρροές στο σύστημα ὅπως, πχ τὰ ρεύματα αέρα, ἔχουν ληφθεῖ τὰ κατάλληλα μέτρα.

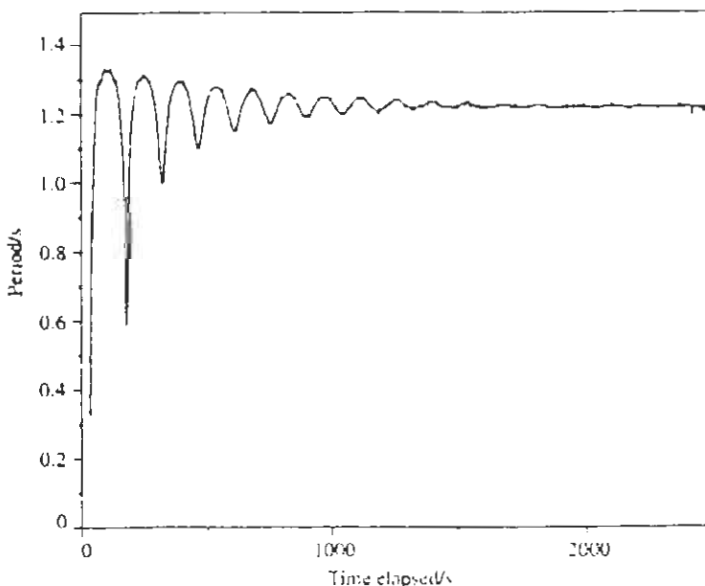
Αποτελέσματα

Τὸ εκκρεμές ἐξαναγκάζεται σε ταλάντωση που οἱ τιμές τους κυμαίνονται ἀπὸ $0,96f_0$ - $1,04f_0$. Οἱ τιμές τῆς κάθε περιόδου καταγράφονται για 30 λεπτά για κάθε δοσμένη συχνότητα. Ὄταν τὸ εκκρεμές ἐξαναγκάζεται σε ταλάντωση με συχνότητες πολὺ κοντὰ στὴ φυσικὴ, πράγματι κινεῖται κατακόρυφα καὶ ὀριζόντια. Αὐτὴ ἡ μέθοδος δείχνει τὶς αποκλίσεις τῆς περιόδου για κάθε δοσμένη συχνότητα.

Επεξεργασία

Ο Tritton βρήκε ότι σε συχνότητες $0.979 < f/f_0 < 1.028$ το εκκρεμές μη οριζόντια κίνηση. Το εκκρεμές παρουσιάζει ποσοτικά διαφορετική συμπεριφορά εξαναγκασμένο σε συχνότητες ελάχιστα διαφορετικές μεταξύ τους οι οποίες ανήκουν στα παραπάνω όρια. Η συμπεριφορά του εκκρεμούς σε κάθε συχνότητα δε μπορεί να ταξινομηθεί σαν χαοτική καθαρά. Η πολύπλοκη κίνηση μπορεί να είναι περιοδική ακόμα και αν δεν είναι προβλέψιμη. Ελπίζουμε τα στοιχεία που συλλέχθηκαν να επιτρέψουν τη ταξινόμηση της συμπεριφοράς του εκκρεμούς. Όπως μπορούμε να δούμε από τα διαγράμματα 3 και 4 η συμπεριφορά του εκκρεμούς είναι διαφορετική σε διαφορετικές συχνότητες.

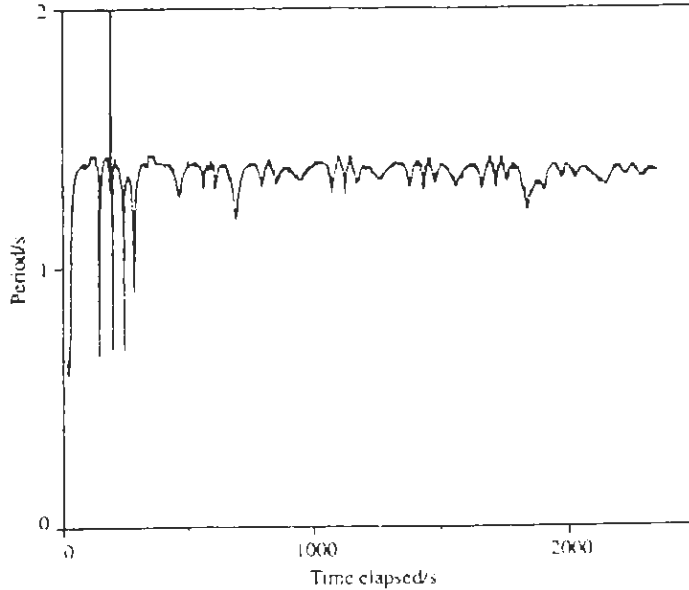
Το διάγραμμα 3 μας δείχνει την απόκλιση της περιόδου του χρόνου στη φυσική συχνότητα του εκκρεμούς. Το σύστημα αρχικά έχει μια μάλλον μεγάλη περίοδο, όμως θέλει λίγο χρόνο για να πυκνώσουν οι τιμές της περιόδου. Έτσι στην αρχή ταλαντώνεται με ένα μεγάλο εύρος τιμών την περίοδο όπου η κίνηση περιγράφεται από μια μη γραμμική εξίσωση και τελικά σταθεροποιείτε σε μια περιοδική συμπεριφορά αποτελούμενη από κυκλικές τροχιές με σταθερή περίοδο.



Σχεδιάγραμμα 1

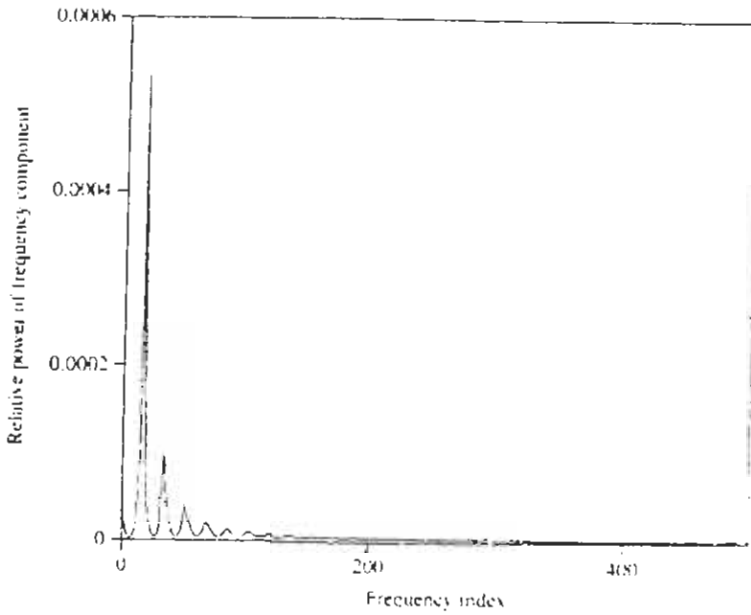
Στο διάγραμμα 4 δείχνεται η απόκλιση της περιόδου όταν η συχνότητα έχει τιμή $0.998f_0$. Η περίοδος του εκκρεμούς ποικίλει αρκετά, ακόμα και μετά το πέρασμα των 30 λεπτών που έχουν οριστεί. Αυτό συμφωνεί με τη φυσική συμπεριφορά του εκκρεμούς το οποίο παρουσιάζει μια ποικιλία τροχιών, όπως ελλείψεις σε διάφορα

σχήματα και οριζόντιες κινήσεις σε διάφορες γωνίες. Μερικά σημεία της περιόδου κατά τη διάρκεια του χρόνου σε διάφορες συχνότητες εξετάστηκαν για να συγκριθούν μεταξύ τους.



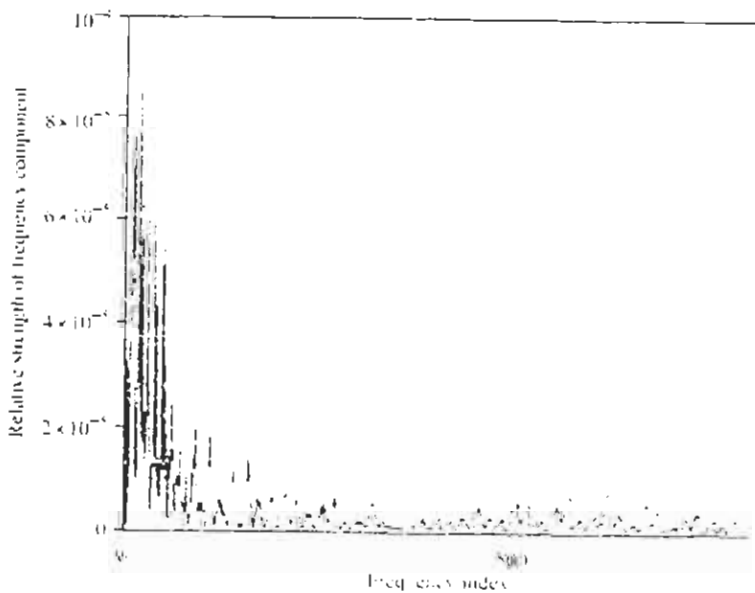
Σχεδιάγραμμα 2

Στο πεδίο τιμών μέσω του μετασχηματισμού Fourier υπολογίστηκαν τα στοιχεία (ληφθείσες τιμές) με σκοπό να διερευνηθούν στοιχεία χαοτικής κίνησης. Η φασματική ανάλυση είναι μια τεχνική για τον προσδιορισμό του χάους. Εάν το πεδίο τιμών παρουσιάζει ένα ή μερικά απομακρυσμένα σημεία, αυτό δείχνει ότι το εκκρεμές ταλαντώνεται με μια συχνότητα ή φαινομενικά περιοδικά. Εάν το πεδίο τιμών περιέχει ένα πλατύ φάσμα τιμών με σχετικά χαμηλής δυναμικότητας στοιχεία είναι ένας αξιόπιστος δείκτης του χάους. Τα διαγράμματα 5 και 6 δείχνουν τα στοιχεία για συχνότητες f_0 και $0.998f_0$ αντίστοιχα.



Σχεδιάγραμμα 3

Το πεδίο τιμών του εκκρεμούς όταν έχει συχνότητα f_0 δείχνει ένα πολύ απομακρυσμένο σημείο και μερικά λιγότερα απομακρυσμένα τα οποία είναι διασκορπισμένα που διαχωρίζονται μεταξύ τους αφήνοντας ένα πλατύ φάσμα τιμών από τις υψηλότερες συχνότητες. Είναι να καθορίσεις την σπουδαιότητα αυτών των δευτερευόντων σημείων όπως είναι μικρότερα από το κύριο σημείο. Όμως αυτά μπορεί να δείξουν φαινομενικά περιοδική κίνηση ακόμα και στη φυσική συχνότητα, και να προκαλέσουν το εύρος της ταλάντωση του εκκρεμούς να είναι πολύ μεγάλο, ως εκ τούτου η μη γραμμικότητα στην εξίσωση να γίνει σημαντική.



Σχεδιάγραμμα 4

Το πεδίο τιμών του εκκρεμούς για συχνότητα $0.998f_0$ είναι πολύ διαφορετική. Περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό σχετικά απομακρυσμένων σημείων στις αρχικές τιμές του άξονα (χ') και στη συνέχεια λιγότερων απομακρυσμένων και σκορπισμένων αλλά ασήμαντων.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από την απόκλιση της περιόδου του εκκρεμούς με το χρόνο και του πεδίου τιμών ότι η κίνηση του εκκρεμούς είναι χαοτική στις εξής τιμές των συχνοτήτων, $0.985f_0$, $0.990f_0$, $0.998f_0$.

Συμπεράσματα

Το σφαιρικό εκκρεμές λοιπόν όταν έχει συχνότητες σε πολύ κοντινές περιοχές από τη φυσική συχνότητα f_0 τότε παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, αυτές οι τιμές είναι $0.985f_0$, $0.990f_0$, $0.998f_0$. Αυτές οι τιμές της συχνότητας περιλαμβάνονται μέσα σε εκείνες τις τιμές όπου η χαοτική συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί και το χάος έχει προβλεφθεί θεωρητικά.

Η συσκευή περιέχεται σε ειδικό κάλυμμα το οποίο μειώνει αισθητά τις εξωτερικές επιρροές όπως τα αέρια ρεύματα. Όμως το χάος, είναι δύσκολο να μην επηρεάζεται από το θόρυβο.

Το σφαιρικό εκκρεμές είναι μια εξαιρετική παρουσίαση χαοτικής συμπεριφοράς, όπου δείχνει ότι ένα πολύ απλό σύστημα μπορεί να περάσει από κανονική σε χαοτική συμπεριφορά αλλάζοντας τις παραμέτρους ελάχιστα. Αυτό δείχνει την δυσκολία να προβλέψεις τη συμπεριφορά σε μεγάλα και πολύπλοκα συστήματα όπως είναι ο καιρός.

Χαοτική καύση στην ανάφλεξη σπινθήρων των Μηχανών

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι η κυκλική μεταβλητότητα καύσης είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά για την ανάφλεξη σπινθήρων (SI) στις μηχανές. Οι κυκλικές παραλλαγές στη διαδικασία καύσης (SI) οι μηχανές έχουν αποτελέσει ένα αντικείμενο μιας εντατικής έρευνας τα τελευταία 40 έτη. Πρόσφατα, στα πλαίσια του ελέγχου μηχανών, εμφανίστηκαν πολλά έγγραφα για τους δυναμικούς προσδιορισμούς φαινομένου και για τις προβλέψεις της συμπεριφοράς μηχανών.

Πολλοί από αυτούς συζητούν το πρόβλημα ενός υψηλού επιπέδου του θορύβου που καθιστούν τη μηχανή δύσκολη να τον ελέγξει. Δεδομένου ότι η καύση των αερίων στον κύλινδρο μπορεί να αντιμετωπισθεί ως μη γραμμική δυναμική διαδικασία μπορεί να μελετηθεί από τα εργαλεία που ανήκουν στη θεωρία των μη γραμμικών συστημάτων. Οι παραλλαγές να δημιουργηθούν στη μη γραμμική εξάρτηση της μέγιστης θερμοκρασίας και των πιέσεων κύκλων στους αρχικούς όρους στην αρχική συμπίεση λόγω της επανακυκλοφορίας εξάτμισης και μιας διαδικασίας προετοιμασιών μιγμάτων. Τέτοια μη γραμμική προσέγγιση έχει αρχίσει από τον *Daw et al* όπου πρότεινε την πιθανή χαοτική φύση της καύσης.

Χαοτικές ταλαντώσεις της εσωτερικής πίεσης

Η συχνότητα στροφαλοφόρων αξόνων επιλέχτηκε για να είναι $\theta = 14.17 \text{ Hz}$ ($\Theta = 850 \text{ RPM}$) σαν μη σπασχόλησης ταχύτητα της μηχανής. Σε μια διαδικασία καύσης μόνο ένα από το κάθε δύο κύκλοι της περιστροφής στροφαλοφόρων αξόνων συμπίπτουν με την καύση που οδηγεί στην ταλάντωση πίεσης με μια περίοδο $2/\Theta = 0.141 \text{ s}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι ανάλογα με το συγχρονισμό ανάφλεξης ($\Delta\alpha_z$) το σύστημα συμπεριφέρεται διαφορετικά. Αρχίζοντας από $\Delta\alpha_z = 5^\circ$ παρατηρούμε την αρχική περιοδική ταλάντωση. Αύξηση $\Delta\alpha_z$ κατά 20° η κατάσταση δεν αλλάζει πάρα πολύ. Για να αυξηθεί κατά μια μεγαλύτερη αξία του σπινθήρα προώθησε τη γωνία $\Delta\alpha_z = 30^\circ$ αλλάζει τη συμπεριφορά του συστήματος εντελώς. Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα έχει χάσει την αρχική περιοδική φύση του που υποβάλλεται

σε έναν πιο περίπλοκο τύπο κίνησης. Στην τελευταία παρουσιάζουμε φάσμα δύναμης για αυτήν την ενδιαφέρουσα περίπτωση. Το φάσμα δείχνει ότι το σύστημα μπορεί να είναι σε ένα χάος για τη χαοτική καύση και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για stroboscopic χάρτης. Η εσωτερική πίεση συνέπεσε με τη θέση της γωνίας περιστροφής στροφαλοφόρων αξόνων. ο στροφαλοφόρος άξονάς μας διαιρέθηκε σε 512 γωνίες. Αυτοί δίνουν 1024 σημεία μέτρησης ανά δύο κύκλους μιας περιστροφής στροφαλοφόρων αξόνων αντιστοιχία σε έναν κύκλο της καύσης. Η κρίσιμη περιοχή της διαμόρφωσης βρέθηκε πίσω από τη μέγιστη αιχμή πίεσης αφήνοντας την αξία του $P_{max}(\Phi)$ για τη μεγαλύτερη αξία $\Delta\alpha_z$ ($\Delta\alpha_z = 20^\circ$) εκείνη η κρίσιμη περιοχή έχει κινηθεί προς τις μέγιστες προκαλώντας αισθητές αλλαγές πίεσης της μέγιστης αξίας πίεσης Αυτές οι αλλαγές γίνονται για $\Delta\alpha_z = 30^\circ$ όπου οι διαμορφώσεις της πίεσης υπερβαίνουν τη μέση αξία της. Αλλαγή της παραμέτρου $\Delta\alpha_z$ όπου μπορεί να θεωρηθεί ως παράμετρος διακλάδωσης, βλέπουμε ότι ο ελκυστής που ήταν σε γενικές γραμμές δύο διαστάσεις διευρύνει την διαστατικότητα με την αύξηση $\Delta\alpha_z$. Η αναμενόμενη ελάχιστη διάσταση ενσωμάτωσης ήταν επιλεγμένη αυθαίρετη για να είναι ίση με 3 όπως στη βάση ότι είναι η μικρότερη διαστατικότητα που επιτρέπει τις χαοτικές λύσεις. Η χαρακτηριστική αξία χρονικής καθυστέρησης $\tau = 0.138s$ επιλέχτηκε απλά ως αριθμός μικρότερος από τη χαρακτηριστική περίοδο στο σύστημα $2/\Theta = 0.141s$, $2/\theta$ όπως μια περίοδος παραμετρικής διέγερσης είναι από τις αλλαγές της παραμέτρου διακλάδωσης $\Delta\alpha_z$. Αρχίζοντας από την βασική δομή του ελκυστή στις διαστάσεις δέντρων κάποιος μπορεί να ακολουθήσει τις μικρές αλλαγές από το $\Delta\alpha_z = 20^\circ$ και μια μεγάλη ποιοτική αλλαγή για $\Delta\alpha_z = 30^\circ$.

Στις ταλαντώσεις της εσωτερικής πίεσης καύσης, φάνηκε ότι, σε μερικές συνθήκες, η διακοπή είναι ικανή για το σύστημα στη χαοτική περιοχή. Έχουμε δείξει ότι η αλλαγή μιας γωνίας προόδου σπινθήρων $\Delta\alpha_z$, κάνει μια σημαντική επίδραση στη δυναμική καύσης. Είναι σαφές ότι επηρεάζει άμεσα τη φάση έναρξης φλογών που εμφανίζεται σε ένα μεγαλύτερο χρόνο-ποσοστό για μια αυξανόμενη πρόοδο σπινθήρων. Κατ' αυτό τον τρόπο οι κυκλικές παραλλαγές γίνονται ένα έμφυτο φαινόμενο στον χρόνο και στο διάστημα. Χαοτική φύση της καύσης στο SI, οι μηχανές εμφανίζουν ισχυρή ευαισθησία σε τέτοιες συνθήκες. Αξίζει να σημειωθεί για $\Delta\alpha_z = 30^\circ$ μπορούμε να συνδεθούμε εύκολα με μια χαοτική διαδικασία, αλλά ακόμη και για τη γωνία προόδου $\Delta\alpha_z = 20^\circ$ οι κύριες αστάθειες εμφανίζονται. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο μηχανισμός της μετάβασης στο χάος πρέπει να βασιστεί στο φαινόμενο Intermittency.

Τα προκαταρκτικά αποτελέσματά μας δείχνουν ότι ο θόρυβος SI οι μηχανές οφείλουν να είναι με τη μη γραμμική δυναμική. Επιπλέον αναλύοντας τη διαδικασία καύσης για τις διαφορετικές παραμέτρους συστημάτων παρατηρήσαμε την παρόμοια συμπεριφορά. Πρέπει να σημειωθεί, ότι στα παραμετρικά συστήματα με μια πρόσθετη διέγερση το πρόβλημα μεταξύ των χαοτικών και πολύ σχεδόν-περιοδικών κινήσεων συχνότητας δεν είναι ένας εύκολος στόχος.

Η χρήση του χαμηλού διαστατικού μηχανολογικού μοντέλου

Δυναμικά συστήματα

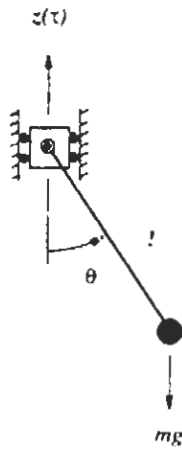
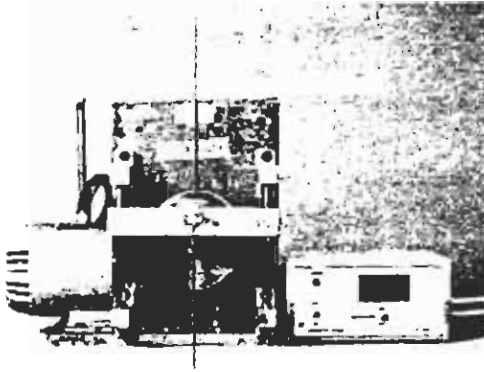
Επιπτώσεις εφαρμοσμένης μηχανικής του χάους

Η πρόσφατη έρευνα στη συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων έχει κατευθυνθεί προς τις γεωμετρικές έννοιες που έχουν υποκινήσει τις νέες μεθόδους και τις τεχνικές για να ερευνηθούν τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Αυτή η μετατόπιση είναι η προφανέστερη στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων εφαρμοσμένης μηχανικής για τα οποία η γραμμική δυναμική έχει εξουσιάσει παραδοσιακά τις μεθόδους λύσης. Οι σχετικές κινήσεις ενός χαοτικού συστήματος είναι απρόβλεπτες μακροπρόθεσμα και μπορούν να οδηγήσουν στην απροσδόκητη αποτυχία αυτό που ήταν ειδιάλλως ένα πιθανό ασφαλές σύστημα. Αυτό δημιουργεί σαφώς τις δυσκολίες για τον μηχανικό που προσπαθεί να σχεδιάσει ένα ασφαλές σύστημα. Εντούτοις τα συστήματα που επιδεικνύουν το χάος δεν είναι χαοτικά σύμφωνα με την καθημερινή έννοια αλλά περιέχουν καλά διαταγμένα, αν και κλασματική δομή. Η ευαίσθητη εξάρτηση ενός χαοτικού συστήματος χαρακτηρίζεται από τον Lyapunov εκθέτη, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δείκτης του χάους, ενώ το σύστημα δείχνει ευαισθησία η οποία οδηγεί πολύ - μη προβλεψιμότητα του όρου. Τα χαοτικά συστήματα είναι ακόμα πιο περίπλοκα αλλά σε πολλές περιπτώσεις είναι μόνο η ύπαρξη των λύσεων, εκτός από τη γραμμική απάντηση, η οποία οδηγεί συχνά στη διακοπή του συστήματος μέσω μιας παροδικής κίνησης. Οι διακλαδώσεις που οδηγούν στο σύστημα ακριβώς σε ένα κλασματικό όριο λεκανών μπορούν να οδηγήσουν στο σύστημα που περνά αμέσως από μια σταθερή λύση σε μια που οδηγεί στην αποτυχία.

Σε μερικές περιπτώσεις ο μηχανισμός αποτυχίας ενός συστήματος εφαρμοσμένης μηχανικής μπορεί να είναι απλός σε μια ιδιαίτερη ατέλεια στο σχέδιο (όπως στο Tahoma στενεύει τη γέφυρα) ή τη φτωχή κατασκευή. Ο ρόλος του μηχανικού είναι να επικοινωνήσει με τους αρχιτέκτονες και να συμφωνήσει σχετικά με μια δομή (ή το σύστημα) που επιτυγχάνουν όλες τις αισθητικές ιδιότητες και το σκοπό σχεδίου, αποτελεσματικά και ακίνδυνα. Για να σχεδιάσει και ως εκ τούτου να προστατεύσει από την αποτυχία, ο μηχανικός πρέπει να είναι σε θέση να προβλέψει τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα αποτυγχάνει. Θα εξετάσουμε δύο χωριστές περιπτώσεις μελετών που εξηγούν πώς αυτό το ενδιαφέρον για το χάος που επιδεικνύεται στα χαμηλά διαστατικά πρότυπα παρέχει τη νέα διορατικότητα στη δυναμική απάντηση των συστημάτων εφαρμοσμένης μηχανικής. Σε πρώτο στάδιο ένα τέτοιο πρότυπο μιμείται ακριβώς ένα μηχανικό σύστημα με λεπτομέρειες κλίμακας. Δεν είναι σαφές στις πιο σύνθετες ρυθμίσεις, όμως πολλές από αυτές τις λεπτομέρειες θα είναι προφανείς. Στο δεύτερο παράδειγμα το πρόβλημα είναι πραγματικής φυσικής σημασίας ενώ το πρότυπό μας επιτρέπει να δούμε μόνο τις βασικές δυναμικές αλλαγές.

Παραμετρική διέγερση του εκκρεμές

Όταν ένα σύστημα εκκρεμών αναγκάζεται μπορεί να εκθέσει όλα τα συνηθισμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μη γραμμικών ταλαντωτών συμπεριλαμβανομένων των περιοδικών λύσεων, του σπασίματος συμμετρίας, του διπλασιασμού της περιόδου και του χάους. Πρόσφατα η προσοχή έχει στραφεί στη χαοτική συμπεριφορά. Η κλασική υπόθεση μιας μάζας m στο τέλος μιας λεπτής ράβδου οδηγεί σε ένα χαμηλό διαστατικό σύνολο συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων. Οι κινήσεις που υποβάλλονται στις μεγάλες εκτροπές γίνονται μη γραμμικές. Εξετάζουμε συγκεκριμένα εδώ ένα εκκρεμές που μπορεί να κινηθεί μέσα σε ένα αεροπλάνο και το σημείο του άξονα του διεγείρεται κάθετα από μια μηχανή παράγοντας έναν ημιτονοειδή καταναγκασμό. Μια μάζα m που αναστέλλεται επάνω σε μια ράβδο. Στην πράξη, δεδομένου ότι σκοπεύουμε την εξέταση των

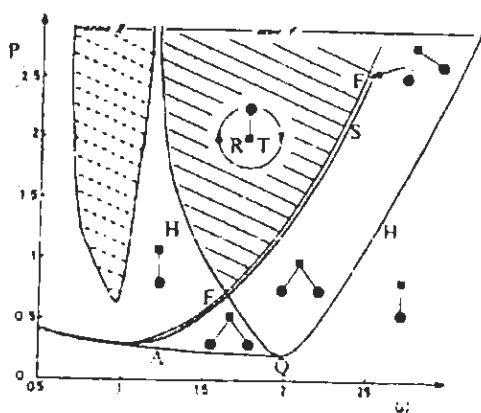


ταλαντώσεων που υπερβαίνουν το γραμμικό συμπεριλαμβανομένων των περιστροφών για τον άξονα, μια ράβδος που χρησιμοποιείται είναι αρκετά άκαμπτη ώστε να αποφευχθεί η κάμψη κατά τη διάρκεια των δυναμικών κινήσεων. Η εξίσωση της κίνησης για τη γωνιακή θέση θ είναι:

$$l^2 \theta'' + \frac{d}{m} \theta' + l(z'' + g) \sin \theta = 0$$

όπου οι παύλες αντιπροσωπεύουν τη διαφοροποίηση όσον αφορά το χρόνο t και όπου g είναι η συνηθισμένη σταθερά της βαρύτητας. Ο συντελεστής d εξηγεί την σπατάλη ενέργειας από την τριβή και την αντίσταση του αέρα. Στην πράξη, για μικρές ταλαντώσεις, περίπου, η απόσβεση οφείλεται κυρίως στην τριβή και διαμορφώνεται καλύτερα από μια δύναμη τύπων του Coulomb, ενώ για μεγάλες ταλαντώσεις και περιστροφές η ρευστή απόσβεση είναι πιθανότερο να είναι της τετραγωνικής μορφής, αλλά εδώ για απλότητα υποθέτουμε μια γραμμική ιξώδη

προσέγγιση σε όλη τη δυναμική κίνηση. Η αντιστοιχία στο φυσικό πείραμα είναι ο όρος c απόσβεσης ο οποίος παραμένει συνήθως σταθερός (εδώ παίρνει την τιμή $c = 0.1$) ενώ p και ω μπορεί να ποικίλλουν, παράγοντας τους διάφορους τύπους λύσεων. Αν και αναγκάζεται, από την άποψη της γωνιακής μετατόπισης υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας μια σταθερή ισορροπία στη θέση ένωσης $\theta = 0$ και μια ασταθής θέση $\theta = \pi$. Καθώς η κινητήρια αλλάζει την θέση ένωσης μπορεί να χάσει τη σταθερότητά της κοντά στο $\omega = 2$ (παρόμοια με την αστάθεια στη γραμμική έκδοση της εξίσωσης - η εξίσωση του Mathieu) έτσι οι διαταραχές κοντά στο $\theta = 0$ τώρα έχει σαν αποτέλεσμα στις ταλαντώσεις για τη θέση ένωσης δύο φορές την περίοδο της κατευθυντήριας δύναμης. Αρχικά αυτές οι ταλαντώσεις είναι συμμετρικές για $\theta = 0$ αλλά για μια περαιτέρω αύξηση σε μια από τις πθαραμέτρους, p το σύστημα υποβάλλεται σε μια συμμετρία-σπάζοντας την διακλάδωση στη γραμμή έτσι ώστε τώρα η ταλάντευση των εκκρεμών να είναι υψηλότερη σε μια πλευρά από την άλλη, στη δεξιόστροφη κατεύθυνση. Στην πράξη οι πειραματικές έρευνες υποβάλλονται συχνά σε μια σύνθετη παροδική κίνηση που εναλλάσσεται μεταξύ αυτών των δύο λύσεων με το σύστημα που σπάνια εγκαθίσταται σε μια τέλεια σταθερή πρόταση. Αριθμητικά, δεδομένου ότι p ποικίλει, η ταλαντευμένη κίνηση υποβάλλεται χαρακτηριστικά σε μια ακολουθία περιόδου που διπλασιάζει τις διακλαδώσεις που οδηγεί σε μια χαοτική ταλαντευμένη κίνηση. Μια σφαιρική διακλάδωση βλέπει το τέλος αυτής της χαοτικής κίνησης (πάλι πολύ κοντά στη γραμμή F) πέρα από την οποία όλες οι κινήσεις οδηγούν τώρα στις τροχιές που υπερβαίνουν $\theta = \pi$ μέσα στη σκιασμένη περιοχή.



Σε πολλά συστήματα εφαρμοσμένης μηχανικής για τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε ένα πρότυπο παρόμοιο με το παραμετρικά διεγείρουν εκκρεμές, οποιαδήποτε ταλάντωση σχεδόν όλες οδηγούν σε σοβαρές λειτουργικές δυσκολίες (π.χ. εξετάστε τη συμπεριφορά ενός γερανού που τοποθετείται σε μια μαούνα που οδηγείται από τα

κύματα) έτσι ώστε αυτή η μεγάλη ταλάντευση εύρους θα κρινόταν απραγματοποίητη ή καταστροφική. Μόλις επιτραπούμε σε για να εξετάσουμε τις λύσεις που υπερβαίνουν $\theta = \pi$ κατόπιν η σημαντική περαιτέρω πολυπλοκότητα αντιμετωπίζεται.

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι περιοδικών κινήσεων που πρέπει να εξεταστούν:

Εκείνοι που περιστρέφονται συνεχώς ή εκείνοι όποιοι μπορούν να περιστρέφονται σε μια κατεύθυνση πριν από το σημάδι αλλαγών ταχύτητας και το σύστημα

περιστρέφεται στην αντίθετη κατεύθυνση. Η τελευταία κίνηση, καλείται tumbling, μπορεί πρόσθετα να συμπεριλάβει μερικές ταλαντώσεις μέσα στον περιοδικό χρόνο

περίοδος. περιστρεφόμενος και συμπεριφορές tumbling πριν γίνει σταθερό. Όσον αφορά τις περιοδικές tumbling κινήσεις, οι οποίες μέχρι σήμερα είναι αδύνατον να

πραγματοποιηθούν πειραματικά, ακόμη και αριθμητικά δεν είναι τετριμμένο να βρεθούν αυτές οι λύσεις που είναι κυρίως ασταθείς. Εντούτοις, οι μικρές αλλαγές

στο σύστημα πέρα από την ταλαντευόμενη χαοτική κίνηση οδηγούν στο σύστημα που εγκαθιστά αμετάβλητα σε μια tumbling χαοτική κίνηση Στην περίπτωση του

εκκρεμούς που διεγείρεται παραμετρικά, μια στρατηγική ελέγχου μπορεί να οργανωθεί που επιτρέπει μια εύκαμπτη επιλογή για την έκβαση συστημάτων για τις

περαιτέρω λεπτομέρειες και τις αναφορές). Το σύστημα εκκρεμών τίθεται στις τιμές παραμέτρου μέσα στη ζώνη χάους tumbling. Για παράδειγμα $\rho = 2$ και $\omega = 2$.

Όταν τα συστήματα πλησιάσουν ένα σημείο που αντιστοιχεί σε μια επαθυμητή περιοδική τροχιά μετά η διαδικασία ελέγχου ενεργοποιείται για να σταθεροποιήσει

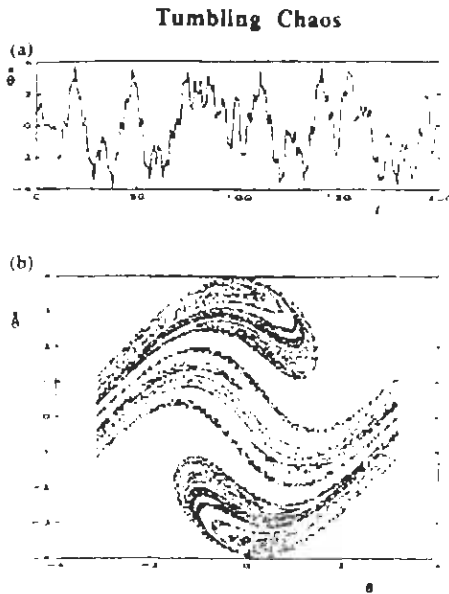
την ασταθή λύση. Είμαστε σε θέση (θεωρητικά τουλάχιστον) να ρυθμίζουμε το σύστημα προς οποιοδήποτε αριθμό λύσεων του διαφορετικού τύπου χωρίς

οποιαδήποτε ανάγκη να γίνουν οι σφαιρικές αλλαγές στις παραμέτρους συστημάτων.

Προσομοίωση της εύκαμπτης μετατροπής ελέγχου από το χάος tumbling σε:

- μια κίνηση περιστροφής που ολοκληρώνεται 1 δεξιόστροφη περιστροφή σε μια πλήρη περιστροφή,
- μια περιστρεφόμενη κίνηση που ολοκληρώνονται 5 δεξιόστροφες περιστροφές μέσα σε 5 περιόδους (αλλά δεν επαναλαμβάνει λιγότερο από 5 περιόδους).
- μια tumbling κίνηση που οι 5 περίοδοι πραγματοποιούν 2 δεξιόστροφες περιστροφές, και τελικά,
- μια ταλαντευόμενη κίνηση που επαναλαμβάνει σε 2 κινητήριες περιόδους.

Οι μέθοδοι ελέγχου, που χρησιμοποιούνται για να αναγκάσουν το σύστημα επάνω στις ιδιαίτερες λύσεις έχουν ερευνηθεί και πραγματοποιηθεί σε μερικές περιπτώσεις πειραματικά αν και καμία συγκεκριμένη εφαρμογή δεν έχει προταθεί μέχρι σήμερα.



Ανάφλεξη πυρκαγιάς σε κτίρια

Η ανάφλεξη πυρκαγιάς είναι το φαινόμενο με το οποίο μια πυρκαγιά μέσα σε ένα δωμάτιο υποβάλλεται σε μια γρήγορη αύξηση στο μέγεθος και την ένταση. Χαρακτηριστικά η ανάφλεξη πυρκαγιάς οδηγεί στις υψηλές θερμοκρασίες και τις φλόγες αφήνοντας το δωμάτιο σε μια ενδεχομένως επικίνδυνη κατάσταση δεδομένου ότι αυτό οδηγεί συχνά στην πυρκαγιά που διαδίδεται στις γειτονικές περιοχές. Μέσα στο δωμάτιο είναι το τμήμα μεταφοράς θερμότητας που διαδραματίζει έναν κρίσιμο ρόλο. Η θερμοκρασία μεταφέρεται και από τη μεταφορά και από τη διεξαγωγή, ανάλογα, προς την άνοδο της θερμοκρασίας. Η θερμότητα που μεταφέρεται μέσω ενός μηχανισμού ανατροφοδότησης ακτινοβολίας από ένα καυτό αέριο το στρώμα που ενισχύει κάτω από αυτό το ανώτατο όριο είναι ανάλογο προς τη θερμοκρασία στην τέταρτη δύναμη - μια ιδιαίτερα μη γραμμική διαδικασία. Μια αυστηρή αξιολόγηση της πλήρους διαδικασίας καψίματος και του καπνού οδηγεί σε ένα σύνολο από μερικές διαφορικές εξισώσεις. Αν είναι απαραίτητο να αποκαλύψει ότι η

λεπτή λεπτομέρεια της διάδοσης της πυρκαγιάς μετά η λύση σε αυτούς που διέπουν τις εξισώσεις δίνεται μέσω ενός κατάλληλου προγράμματος υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.

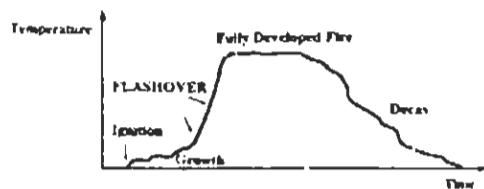
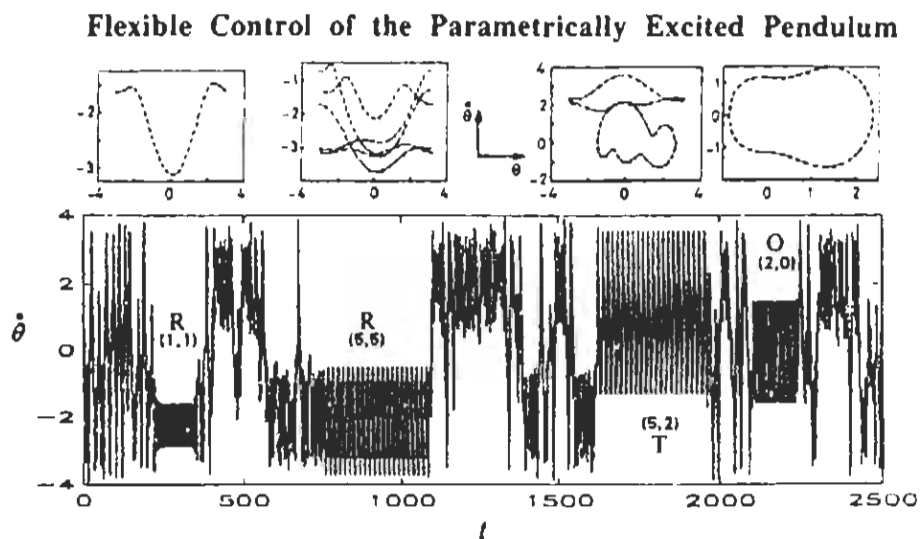
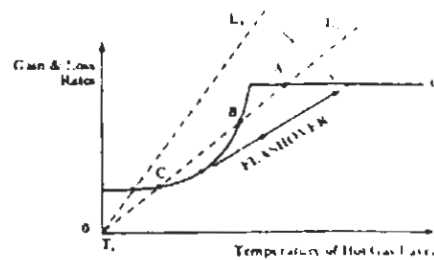
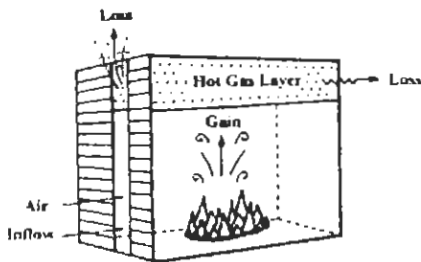


FIG. 6. Stages in the growth of a room fire.

Χαρακτηριστικά τέτοια προγράμματα διαιρούν το δωμάτιο σε πολλά (χιλιάδες) από τους μικρούς όγκους ελέγχου και για κάθε έναν, κατόπιν εξετάζουν τις τοπικές εξισώσεις για τη συντήρηση της μάζας, της ορμής, της ενέργειας, και των χημικών ειδών. Μια τέτοια προσέγγιση αποκαλύπτει τη λεπτομερή γνώση της εξέλιξης συστημάτων αλλά συνήθως περιλαμβάνει την ιδιαίτερη προσπάθεια υπολογισμού. Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι μέσω ενός αποκαλούμενου προτύπου ζώνης. Η

ιδέα είναι εδώ να χρησιμοποιηθούν μόνο μερικοί όγκοι ελέγχου. Χαρακτηριστικά τα πρότυπα ζώνης περιέχουν πολλές υποθέσεις και έτσι μπορεί να γίνει συγκεκριμένο το ιδιαίτερο πρόβλημα. Τα πλεονεκτήματα μια τέτοιας προσέγγισης είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί γρήγορα και εύκολα ανάμειξη λίγου υπολογιστικού χρόνου.

Μια βασική προσέγγιση για μια πυρκαγιά σε ένα εξιδανικευμένο δωμάτιο με ένα ενιαίο άνοιγμα είναι διευκρινισμένη διαγραμματικά στον αριθμό 7. Εάν εξετάζουμε την ενεργειακή ισορροπία του καυτού στρώματος αερίου έπειτα όπου το γ είναι το ποσοστό κέρδους στην ενέργεια στο καυτό στρώμα αερίου λόγω της πυρκαγιάς και του λ είναι το ποσοστό απώλειας ενέργειας που διαμορφώνεται από τις εκ μεταφοράς απώλειες μέσω του ανοίγματος (εδώ το πλήρες ύψος του δωματίου) και η διεξαγωγή μέσω των τοίχων. Δεδομένου ότι η θερμοκρασία αυξάνεται ο μηχανισμός ανατροφοδότησης ακτινοβολίας ασκεί την επιρροή του και τις αυξήσεις κέρδους γρήγορα



Οι απώλειες ενέργειας από το καυτό στρώμα αερίου είναι βασικά οδηγημένες από τις διαφορές θερμοκρασίας μεταξύ του στρώματος και τα περίχωρά του και μια γραμμική προσέγγιση γίνονται μια έγκυρη υπόθεση.



Χάος στη μηχανή

Ο πιο γρήγορος τρόπος να μειώσει τα καύσιμα για να αυξήσει την απώλεια ενέργειας από τις μηχανές, και μια από τις λιγότερο-αποδοτικές μηχανές είναι η μηχανή εσωτερική καύση. Μια αιτία αυτή της απώλειας είναι το κτύπημα - κτυπά την παραλλαγή παροχή ηλεκτρικό ρεύμα από κάθε έμβολο

Ερευνητές στο τεχνικό ίδρυμα Lublin (Πολωνία) βρήκαν ενδείξεις που μπορούν να βοηθήσουν στη μείωση του. Χρησιμοποιώντας ένα οπτικό –βασισμένο σύστημα μέτρησης πίεσης ινών, έλαβαν τις συνεχείς καταγραφές της πίεσης στον κύλινδρο που έγιναν χασοτικοί. Η χασοτική μεταβλητότητα αν και μη τυχαία, χαρακτηρίζεται από μια έντονα καμία περιοδική μεταβλητότητα που είναι δύσκολο να ελεγχθεί από οποιοδήποτε συμβατικό μηχανισμό ανατροφοδότησης. Η βασική παράμετρος στην αρχή του χάους που ανακαλύφθηκε από την ομάδα του Lublin ήταν η γωνία προόδου ανάφλεξης που ορίστηκε ως η διαφορά στη γωνιακή θέση του στροφαλοφόρος άξονας μεταξύ του χρόνου ότι ο σπινθήρας αναφλέγει την καύση και το χρόνο της μέγιστης συμπίεσης. Όσο μεγαλύτερη η πρόοδος γωνία, τόσο υψηλότερη η ροπή και τόσο μεγαλύτερη η αποδοτικότητα της ενεργειακής μετατροπής άλλοι παράγοντες που είναι ίσοι. Αλλά η ομάδα διαπίστωσε ότι οι μεγαλύτερες γωνίες προόδου οδήγησαν επίσης στην αυξανόμενη μεταβλητότητα και τελικά χασοτική στη λειτουργία εκείνη η αποδοτικότητα περικοπών. Σε μια γωνία προόδου 5° , που είναι λιγότερο από αυτό που χρησιμοποιείται γενικά για την αργόστροφη λειτουργία, η συμπίεση είναι πλήρως επαναλαμβανόμενη και η μεταβλητότητα είναι μικρή. Σε 20° , κάπως περισσότερο από η χαρακτηριστική γωνία,

οι αστάθειες θέτουν μέσα και περιοδικά αλλαγή μέγιστη πίεση κατά 50% ή περισσότεροι. Η αληθινή χαοτική συμπεριφορά εμφανίζεται σε 30°, μια γωνία που μπορεί να επιτευχθεί στη μεγάλη λειτουργία ή επιτάχυνση, με τη μέγιστη πίεση τόσο όσο και το τριπλάσιο η μέση αξία. Η παραλλαγή πίεσης εκθέτει σε αυτό το σημείο την παράξενη συμπεριφορά ελκυστή που στερείται την κανονική ταλάντωση —που είναι χαρακτηριστική των χαοτικών συστημάτων. Η βελτίωση της αποδοτικότητας μηχανών απαιτεί μια μεγαλύτερη γωνία προόδου χωρίς μακριά η χαοτική συμπεριφορά. " Υπάρχουν διάφοροι τρόποι τη χαοτική συμπεριφορά, "εξηγεί ο Grzegorz Litak, ένας από τους ερευνητές. : "Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε υψηλότερη ενέργεια σπινθήρων, στροβιλίζεται τον εισερχόμενο αέρα γρηγορότερα, ή η άμεση έγχυση βενζίνης χρήσης δυστυχώς, όλες αυτές οι λύσεις είναι ακριβές."

Καύση

Μείωση εκπομπών μηχανών diesel/ Αποδοτικότητα μηχανών diesel

Εκπυρσοκρότηση και καύση στα κλειστά διαμερίσματα •Επιλεγμένη

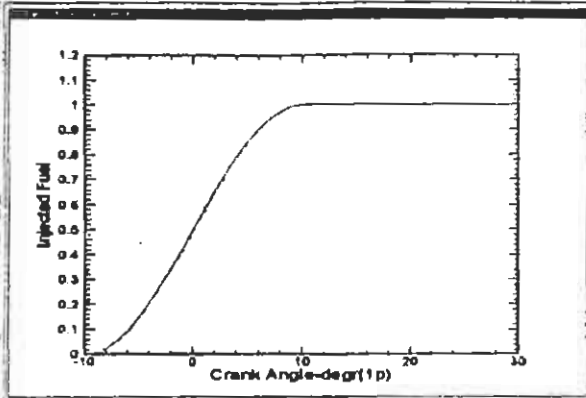
βιβλιογραφία •Στοιχεία επαφής MP-CFD Home Diesel μηχανή Μείωση/ Μηχανή diesel Αποδοτικότητα

•Αποτελέσματα της θερμικής ακτινοβολίας

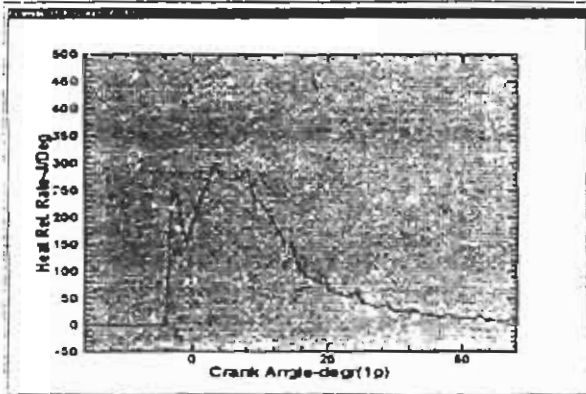
•Χάος στην καύση diesel

Αποτελέσματα της θερμικής ακτινοβολίας

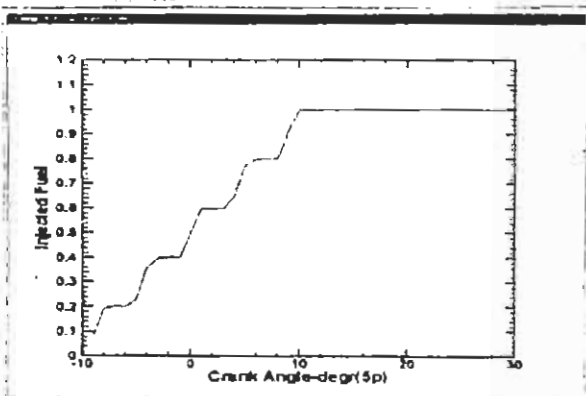
The MP-CFD η ομάδα έχει πραγματοποιήσει την εφαρμοσμένη έρευνα στον τομέα της μείωσης των εκπομπών εξάτμισης diesel και της βελτίωσης της αποδοτικότητας των μηχανών diesel. Οι αρχικές εκπομπές εξάτμισης της ανησυχίας είναι αιθάλη και NOx. Έχουμε ερευνήσει το ρόλο της θερμικής ακτινοβολίας στο σχηματισμό NO χρησιμοποιήση KIVA3-V κώδικας καύσης diesel. Οι ακόλουθοι τρεις αριθμοί παρουσιάζουν συμμετρικό τμήμα 60 βαθμού ενός όγκου κυλίνδρων μηχανών diesel μεταξύ του προσώπου εμβόλων και του κεφαλιού κυλίνδρων. Η γωνία ασταθών αξόνων είναι περίπου 1 βαθμός κάτω από το κορυφαίος-νεκρός-κέντρο. Σε κάθε αριθμό, το πρόσωπο εμβόλων είναι η κατώτατη επιφάνεια, και το κεφάλι κυλίνδρων είναι η κορυφαία επιφάνεια.



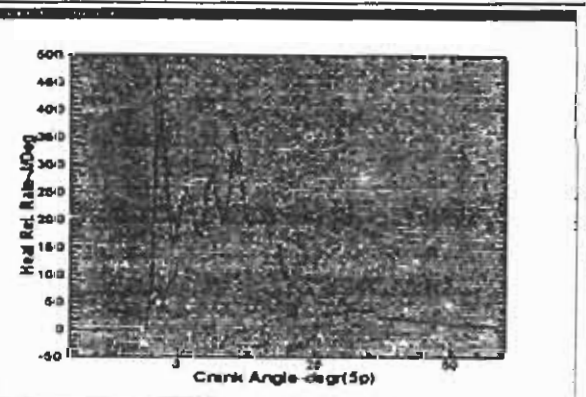
This figure shows fuel being injected in a single pulse starting at a crank shaft angle of -10.5 deg (0 deg is top-dead-center).



This figure shows the heat release as a function of crank shaft angle for the single pulse fuel injection. NOx and soot production are strong functions of the peaks in heat release. Suitable modifications to the heat release map caused by multiple pulse fuel injection can reduce the NOx and soot produced.



This figure shows fuel injected over the same dwell angle as the single pulse case, but in five, equally spaced pulses. The amount of fuel injected is the same as in the single pulse case.



This figure shows the heat release for the fuel injected in multiple pulses. More fuel spray fronts provide better diffusion flame burn characteristics in the cylinder, which favor soot oxidation, and reduce NOx production.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- (1) Σ. Τραχανάς : «Mathematica και εφαρμογές», Π.Ε.Κ. 2001
- (2) J. D. Meiss: «Frequently Asked Questions about Nonlinear Science»,
<http://amath.colorado.edu/appm/faculty/jdm/faq.html>
- (3) Ι. Δ. Χατζηδημητρίου: «Θεωρητική μηχανική» Τόμος Α', εκδ. Γιαχούδη –
Γιαπούλη, Θεσ/νίκη 2000
- (4) Α. Χ. Μπούντης: «Δυναμικά συστήματα και χάος», Βούλγαρης, Πάτρα 1989.
- (5) Κ. Τσιγκάνος: «Κλασσική Μηχανική» Σταμούλης, Αθήνα 2001
- (6) Μ. L. Krasnov: «Ordinary Differential Equations» Mir, Moscow 1987
- (7) V. I. Arnol'd: «Ordinary Differential Equations» Springer-Verlag, Berlin 1992
- (8) Α. Χ. Μπούντης: «Μη γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις», Πνευματικός,
Αθήνα 1997
- (9) I. Stewart: «Παίζει ο Θεός ζάρια; » Π. Τραυλός, Αθήνα 1998
- (10) S. Boccaletti et.al: «The control of chaos: Theory and applications», Physics
Reports 329 (2000) 103-197
- (11) N. Chernov, J. L. Lebowitz « Dynamics of a massive piston in an ideal gas:
Oscillatory motion and approach to equilibrium», December 30. 2002, 1 – 19
- (12) S J Martin and P J Ford «A simple experimental demonstration of chaos in a
Driven pendulum» 108 – 114
- (13) M. WENDERECK, G. LITAC, J. CHZARNIGOWSKI AND SLABELSKI
«Chaotic combustion in spark ignition», 20-618
- (14) Steven R. Bishop: «The use of low dimensional models of engineering dynamical
Systems», Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 3:1 (2000) 71-80
- (15) EFD coordinator «Ccombustion», NSWCCDefWeb@nswccd.navy.mil

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

	<u>ΣΕΛΙΔΕΣ</u>
§ 1.1 Ορισμοί	2
§ 1.2 Ο Χώρος των φάσεων	3
§ 1.3 Χώρος φάσεων απλών δυναμικών συστημάτων	8
§ 1.4 Βασική θεωρία ευστάθειας	13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΧΑΟΣ

§ 2.1 Μια πρώτη γνωριμία με το Χάος – Η λογιστική εξίσωση	27
§ 2.2 Ελκυστές	50
§ 2.3 Χαοτικοί και παράξενοι ελκυστές	53
§ 2.4 Fractals	59
§ 2.5 Διαστάσεις	64
§ 2.6 Σταθερή Feigenbaum	67
§ 2.7 Άλλοι μηχανισμοί που οδηγούν στο Χάος	69
§ 2.8 Έλεγχος του Χάους	71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

§ 3.1 Δυναμική εμβόλου σε ιδανικό αέριο: Ταλάντωση και προσέγγιση στην ισορροπία	76
§ 3.2 Εξαναγκασμένο σφαιρικό εκκρεμές	90
§ 3.3 Χαοτική καύση στην ανάφλεξη σπινθήρων των Μηχανών	96
§ 3.4 Η χρήση του χαμηλού διαστατικού μηχανολογικού μοντέλου	98
§ 3.5 Καύση	108

