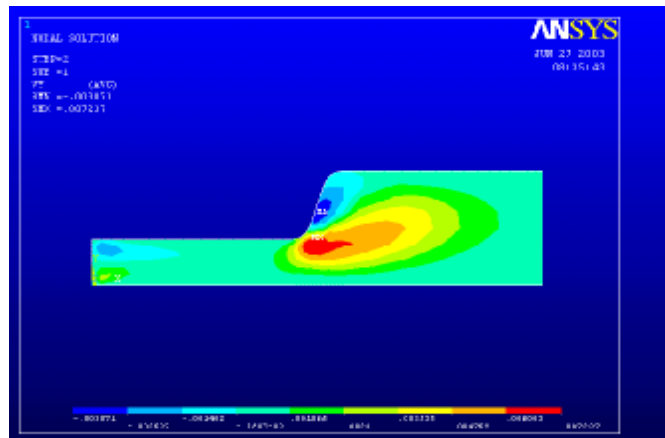


ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ ΔΙ΄
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ V.O.F.



Εισηγητής: Δρ Παν. Κακαβάς

Σπουδαστές: Παναγιώτης Λύγγας (AM 3317)
Φώτης Νικολετάκης (AM 3231)
Δημήτρης Τασούλας(AM 3344)

ΠΑΤΡΑ 2003

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

		Σελ.
	ΠΡΟΛΟΓΟΣ	
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	
1.1	ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ	1-1
	ΤΥΠΟΙ ΡΟΩΝ	1-4
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	
2.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	2-1
2.2	ΤΡΟΠΟΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΚΩΔΙΚΑ C.F.D.	2-3
2.2.1	ΠΡΟ-ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΤΗΣ	2-3
2.2.2	ΕΠΙΛΥΤΗΣ	2-4
2.2.3	ΜΕΤΑ-ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΤΗΣ	2-9
2.3	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	2-9
2.3.1	ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ	
2.3.2	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ	2-23
2.3.3	ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ	2-28
2.3.4	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ	2-38
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ ΜΕ ΤΗΝ	3-1
	ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ	
	ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ V.O.F.(VOLUME OF FLUID)	
4.1.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ	4-1
4.1.2	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ V.O.F	4-2
4.2	ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟΙ	4-3
	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ V.O.F	
4.3	ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ V.O.F	

		4-4
4.4	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΟΓΚΟΥ	4-4
4.5	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	4-5
4.6	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ	4-6
4.7	ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΒΑΘΜΩΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	4-6
4.8	ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΠΛΗΣΙΟΝ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	4-7
4.9	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ	4-7
4.10	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΟΤΗ-ΔΕΚΤΗ	4-9
4.11	Η ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER	4-11
4.12	Η ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ	4-12
4.13	ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΟΜΕΝΗ	4-12
4.14	ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΚΟΛΛΗΣΗ ΣΤΟ ΤΟΙΧΩΜΑ	4-13
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
5.1	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	5-1
5-2	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
5-3	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	

Πρόλογος

Η μελέτη της αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων Ρευστομηχανικής δι' εφαρμογής της μεθόδου VOF (όγκου ρευστού) σε συνδυασμό με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων ήταν το αντικείμενο της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της Μηχανικής των Ρευστών, δηλαδή οι εξισώσεις συνεχείας, θεώρημα του Bernoulli, η εξίσωση διατήρησης της ολικής ενέργειας ενός στοιχειώδους τμήματος του ρευστού και άλλες ουσιώδεις έννοιες που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων ροής των ρευστών. Οι βασικοί τύποι ροών, π.χ. στρωτή και τυρβώδης ροή καθώς και οι συνθήκες εφαρμογής των μαθηματικών εξισώσεων που περιγράφουν το κάθε είδος ροής περιγράφονται αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται οι έννοιες της υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων οι οποίες χρησιμοποιούνται σήμερα κατά κόρον για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων ρευστών, τα οποία είναι ουσιαστικά αδύνατο να επιλυθούν με αναλυτικές μεθόδους. Ο τρόπος λειτουργίας των επαγγελματικών κωδικών επίλυσης προβλημάτων Ρευστομηχανικής παρατίθεται περιληπτικά στο κεφάλαιο αυτό. Η βασικές μέθοδοι π.χ. Πεπερασμένων Διαφορών, Πεπερασμένων Στοιχείων, οι Φασματοσκοπικοί μέθοδοι και η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων περιγράφονται επίσης συνοπτικά για την πληρότητα της παρούσης εργασίας.

Η εφαρμογή του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ANSYS εφαρμόστηκε στο τρίτο κεφάλαιο για τη μελέτη στρωτής και τυρβώδης ροής σε αγωγό με διαφορετικές τιμές αριθμού Reynolds. Οι κατανομές των

κομβικών συνιστωσών της ταχύτητας και της πίεσης μέσα στον αγωγό παρουσιάζονται σε μορφή ισοΰψων καμπυλών. Για τη μελέτη της τυρβώδης ροής το μήκος του αγωγού επεκτάθηκε κατά πολύ για να μελετηθεί η πλήρης ανάπτυξη της μορφής αυτού του είδους του ρευστού. Μελετήθηκε και η επίδραση της πύκνωσης του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Επί πλέον δε παρέχεται και διαγραμματικά η σύγκλιση της λύσης για τυρβώδη και στρωτή ροή. Η παραμετρική ανάλυση ως προς την πυκνότητα και το ιξώδες του ρευστού μελετήθηκε στο κεφάλαιο αυτό για αμφοτέρους τύπους ροής. Η επίδραση των διατομών στα ακραία σημεία των αγωγών εισόδου και εκροής μελετήθηκε για στρωτή και τυρβώδη ροή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται το πρότυπο όγκου ρευστού (VOF) για την επίλυση προβλημάτων ρευστών που απαιτείται ο προσδιορισμός των οριακών στρωμάτων μικροδιακένων πλησίον στερεών εγκλεισμάτων κατά τη διεργασία χύτευσης διαφόρων αντικειμένων. Προβλήματα σε μόνιμη κατάσταση ή χρονικά εξαρτώμενα έχουν επιλυθεί με τη χρήση της μεθόδου VOF. Οι επιπρόσθετες εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων περιγράφονται αναλυτικά και σχηματικά στο κεφάλαιο αυτό. Η αριθμητική επίλυση αυτού του είδους προβλημάτων απαιτεί τη χρήση της μεθόδου Euler, η οποία δεν χρησιμοποιεί επαναληπτική λύση για την εξίσωση μεταφοράς.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα της εξομοίωσης της θλιπτικής ροής περί κυλινδρικών εγκλεισμάτων. Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος περιγράφονται στο κεφάλαιο αυτό καθώς και η σχετική εφαρμογή της πίεσης για την ομαλή χύτευση των

εγκλεισμάτων. Η χύτευση πραγματοποιήθηκε για διαφορετικές τιμές του ιξώδους του ρευστού το οποίο συνεπάγεται διαφορετικό τύπο ροής λόγω της μεταβολής του αριθμού Reynolds. Διαφορετικά προφίλ ταχυτήτων και πιέσεων μελετήθηκαν για την κατανόηση του φαινομένου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Εισαγωγικές έννοιες της Ρευστομηχανικής

1.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Θεωρούμε δύο τομείς 1 και 2 σωλήνα ροής όπου ένα υγρό ρέει με παροχή Q σε μόνιμη ροή. Η παροχή μάζας στις δύο διατομές είναι¹

$$Q_i = A_i V_i \quad (\text{όπου } i=1,2) \quad (1-1)$$

όπου A_i παριστάνει τις διατομές του σωλήνα στις θέσεις 1 και 2 αντίστοιχα και V_i είναι οι ταχύτητες του ρευστού στις αντίστοιχες διατομές. Οι παροχές μάζας στις δύο διατομές, σύμφωνα με την *εξίσωση συνέχειας* πρέπει να είναι ίσες, δηλ.

$$Q_i = \text{σταθερή} \quad (1-2)$$

Αν εφαρμοστεί η *θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής* σ' ένα μικρό πρίσμα του ρευστού με άξονα την γραμμή ροής, τότε, αν δεχτούμε ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβής, η ενέργεια του ρευστού σύμφωνα με το *θεώρημα του Bernoulli για ασυμπίεστα ρευστά σε μόνιμη ροή* ισούται με²

$$E_i = \frac{p_i}{\rho g} + z_i + \frac{V_i^2}{2g} \quad (1-3)$$

¹ N. Νανούσης, Μηχανική των Ρευστών Ι, εκδ. ΤΕΙ Πάτρας (1999)

² V. Streeter and E. Wylie, Fluid Mechanics, seventh edition, McGraw Hill, NY (1979)

Αν υπάρχουν τριβές, τότε έχουμε απώλεια ενέργειας της μονάδας βάρους του υγρού (ή απώλεια φορτίου) ΔE_{12} ανάμεσα στα σημεία 1 και 2 της γραμμής ροής. Αυτό εκφράζεται με τη σχέση :

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{12} \quad (1-4)$$

Η εξίσωση (1-4) εκφράζει τη *διατήρηση της ολικής ενέργειας* ενός στοιχειώδους τμήματος του ρευστού κατά τη διάρκεια της κίνησης του, E παριστάνει το ολικό ύψος ενέργειας Z ύψος θέσεως, $V^2/2g$ είναι η κινητική ενέργεια του ρευστού σε μονάδες μήκους, και $p/\rho g$ το πιεζομετρικό ύψος.

Αν εφαρμοστεί η θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής σε όλους τους στοιχειώδεις όρους που περιέχονται στον όγκο Ω του ρευστού που αποσπάται από την κλειστή επιφάνεια S και αν αθροιστούν όλες οι στοιχειώδεις εξισώσεις, τότε οι *εσωτερικές δυνάμεις* που ασκούνται από τα μέρη του ρευστού μεταξύ τους αλληλοαναιρούνται και μπορεί να γραφεί

$$\sum_e F = \sum_e m_e g \quad (1-5)$$

όπου m_e η μάζα του στοιχειώδους όγκου, g η επιτάχυνσή της βαρύτητας και F_e η εξωτερική δύναμη που εξασκείται στον στοιχειώδη όγκο ή εναλλακτικά

$$mg = m \frac{dV}{dt} = \frac{d(mV)}{dt} \quad (1-6)$$

Η εξίσωση λοιπόν (1.5) γράφεται :

$$\sum_e F_e = \sum \frac{d(mV)}{dt} \quad (1-7)$$

και μπορεί να εκφραστεί έτσι : *Η συνισταμένη των παραγώγων των ποσοτήτων κίνησης των μορίων του ρευστού που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας κλειστής επιφάνειας S, είναι ίση με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που τους εφαρμόζεται.*

Οι εξωτερικές δυνάμεις είναι :

- ∅ οι δυνάμεις επιφάνειας : πιέσεις και εφαπτομενικές τάσεις που εξασκούνται στην επιφάνεια S από το εξωτερικό ρευστό και από τα τοιχώματα
- ∅ οι δυνάμεις όγκου : γενικά είναι ο όγκος του ρευστού που περιέχεται στην S.

Αριθμός Reynolds και Froude

Οι ροές με ελεύθερη επιφάνεια, όπως και οι ροές υπό πίεση χαρακτηρίζονται επίσης από τον αριθμό *Reynolds* που χαρακτηρίζει την σχετική σπουδαιότητα των *δυνάμεων συνεκτικότητας*. Ακόμη είναι συναρτήσεις της αδιάστατης παραμέτρου που εκφράζει την επίδραση της

βαρύτητας και που ονομάζεται, όπως είδαμε, *αριθμός Froude*. Ο αριθμός Reynolds για τις ροές με ελεύθερη επιφάνεια γράφεται :

$$R_e = \frac{VR}{\nu} \quad (1-8)$$

όπου V είναι η μέση ταχύτητα του ρευστού R η υδραυλική ακτίνα και ν ο συντελεστής κινηματικού ιξώδους.

Για αγωγούς άπειρου πλάτους, $R = h$, όπου h είναι το βάθος του νερού. Αν στις ροές υπό πίεση είχαμε εκλέξει την υδραυλική ακτίνα σαν γραμμική παράμετρο, θα είχαμε τιμές του Re ίσες με το $\frac{1}{4}$ των συνηθισμένων τιμών, εφόσον η διάμετρος είναι ίση με τέσσερις φορές την υδραυλική ακτίνα : $D = 4R$.

Ο αριθμός του Froude, για τις ροές με ελεύθερη επιφάνεια, γράφεται :

$$F_r = \frac{V^2}{gh} \quad (1-9)$$

Αυτή η έκφραση ονομάζεται επίσης *κινητικός συντελεστής* και παριστάνει το διπλάσιο του λόγου : *κινητική ενέργεια / δυναμική ενέργεια της ροής*. Μερικοί συγγραφείς παίρνουν το μισό αυτής της τιμής, δηλ. το λόγο : *κινητική ενέργεια / δυναμική ενέργεια της ροής*.

1.2 Τύποι ροών

Στις ροές με ελεύθερη επιφάνεια, για τιμές αριθμού Reynolds, που ορίζεται από την εξίσωση (1-8), μικρότερες από 500 έχουμε στρωτή ροή. Η ροή αυτή δεν συμβαίνει παρά σε αγωγούς πολύ μικρούς ή με πολύ μικρές ταχύτητες και οι τεχνικές εφαρμογές της περιορίζονται σχεδόν αποκλειστικά στη θεωρία λίπανσης (lubrication theory). Για τις τιμές του αριθμού του Reynolds που ξεπερνούν την τιμή 500, η ροή γίνεται *τυρβώδης*. Η ταχύτητα *μικρών κυμάτων* σε ένα ορθογώνιο αγωγό απείρου πλάτους γράφεται :

$$V = \sqrt{gh} \quad (1-10)$$

Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται *κρίσιμη ταχύτητα*. Έτσι, σε έναν ανοιχτό αγωγό απείρου πλάτους, αν η μέση ταχύτητα του ρεύματος ξεπερνάει αυτήν την τιμή, δηλαδή αν ο αριθμός του Froude **Fr** είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, τα μικρά κύματα δεν μπορούν να διαδοθούν προς τα ανάντη και η ροή λέγεται χειμαρρώδης. Αν $U < \sqrt{gh}$, δηλαδή αν **Fr** < 1, τα μικρά κύματα μπορούν να διαδοθούν προς τα ανάντη και η ροή ονομάζεται ποτάμια.

Αν **Fr** = 1, η ροή ονομάζεται κρίσιμη. Παρακάτω θα δούμε νέους ορισμούς των χειμαρρωδών, ποτάμιων και κρίσιμων ροών που να βασίζονται στις έννοιες της ενέργειας και της ποσότητας κίνησης.

Αριθμός του Reynolds

Σε ροή υπό πίεση, οι δυνάμεις πίεσης και οι δυνάμεις συνεκτικότητας είναι οι μόνες που μπορούν να παίξουν κάποιο ρόλο. Άρα, η αδιάστατη

παράμετρος που χαρακτηρίζει τις ροές υπό πίεση είναι ο αριθμός του Reynolds

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{QD}{S\nu} \quad (1-11)$$

όπου ν είναι ο κινηματικός συντελεστής συνεκτικότητας, $V = \frac{Q}{S}$ η μέση ταχύτητα, Q η παροχή, S η διατομή και D η γραμμική παράμετρος που χαρακτηρίζει τη διατομή. Στην περίπτωση κυκλικών αγωγών, D είναι η διάμετρος ενώ για τους μη κυκλικούς αγωγούς το D είναι ίσο με το τετραπλάσιο της υδραυλικής ακτίνας.

Στρωτή και τυρβώδης κίνηση

Για μικρές τιμές του αριθμού του Reynolds ($\text{Re} < 2000$), τα υγρά μόρια μετακινούνται ακολουθώντας παράλληλα νήματα που δεν αναμιγνύονται κατά μήκος της ροής. Αυτός ο τύπος ροής ονομάζεται στρωτή ή συνεκτική ροή. Όταν ο αριθμός του Reynolds αυξάνει (για μια ορισμένη διάμετρο, αρκεί να αυξηθεί η παροχή), τότε διαπιστώνουμε ότι οι τροχιές των μορίων δεν είναι πια κανονικές και ευθύγραμμες. Αντίθετα, η ροή έχει μεταβληθεί κατά τρόπο που να προκαλέσει εγκάρσιες κινήσεις των μορίων. Σε ένα σημείο, η τιμή της ταχύτητας κυμαίνεται αυθαίρετα γύρω από μια μέση τιμή. Σε κάθε στρώση της ροής, στη μέση ταχύτητα προστίθενται συνιστώσες (διακυμάνσεις της ταχύτητας) που είναι κάθετες στη στρώση. Αυτός ο τύπος ροής ονομάζεται τυρβώδης. Εκτός από τις δυνάμεις συνεκτικότητας

που οφείλονται στις κατά μήκος κινήσεις, οι τριβές που οφείλονται στις εγκάρσιες εναλλαγές των ποσοτήτων κίνησης αντιτίθενται επίσης στην ροή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα σημαντικές απώλειες φορτίου. Ανάμεσα στη στρωτή και τυρβώδη ροή υπάρχει μια μεταβατική ζώνη που τα χαρακτηριστικά της μεταβάλλονται με την ταχύτητα των παρειών.

Κατανομή ταχυτήτων

Στην περίπτωση στρωτής ροής σε σωλήνα, η κατανομή ταχυτήτων ακολουθεί ένα παραβολικό νόμο. Η ταχύτητα είναι μηδενική κοντά στα τοιχώματα και μέγιστη στο κέντρο. Αν ο σωλήνας είναι κυκλικός, η ταχύτητα V_r σε απόσταση r από το κέντρο δίνεται από τον τύπο :

$$\frac{V_r}{2U} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (1-12)$$

όπου V_r είναι η μέση ταχύτητα και $R = \frac{D}{2}$ είναι η ακτίνα του αγωγού. Η

μέγιστη ταχύτητα έχει τιμή : $V_M = 2U$.

Η κατανομή των ταχυτήτων σε μια τυρβώδη ροή μεταβάλλεται συνεχώς εξαιτίας του τυρβώδους. Επομένως, δεν μπορούμε να μιλήσουμε παρά για μια μέση ταχύτητα στο χρόνο, σε κάθε σημείο. Οι εναλλαγές των ποσοτήτων κίνησης που οφείλονται σε εγκάρσιες κινήσεις υγρών μορίων τείνουν να αποκαταστήσουν ομοιόμορφη κατανομή ταχυτήτων. Η διαφορά ανάμεσα στη μέση και μέγιστη ταχύτητα είναι πιο μικρή για την τυρβώδη παρά για την στρωτή ροή. Ακόμα και για την τυρβώδη ροή, υπάρχει μια στρώση που ονομάζεται στρωτό οριακό υπόστρωμα όπου η ροή γίνεται

στρωτή. Για μια ορισμένη ταχύτητα, το πάχος του υποστρώματος μεταβάλλεται αντίστροφα από τον αριθμό του Reynolds. Στις υδραυλικές ροές, αυτό το πάχος είναι κανονικά πολύ μικρό της τάξης μερικών δεκάδων χιλιοστών. (Για έναν αριθμό του Reynolds της τάξης 10^6 το πάχος αυτό είναι της τάξης $2 \times 10^{-4} D$).

Απόλυτη και σχετική τραχύτητα

Η *απόλυτη τραχύτητα* δίνεται από τη μέτρηση του πάχους των ανωμαλιών στα τοιχώματα του σωλήνα. Η *σχετική τραχύτητα* $\frac{e}{D}$ είναι ο λόγος της απόλυτης τραχύτητας e προς τη διάμετρο του αγωγού D . Στην πράξη η απόλυτη τραχύτητα

δεν είναι ομοιόμορφη αλλά είναι δυνατόν να χαρακτηριστεί από μια μέση τιμή που από την άποψη απωλειών φορτίου είναι ισοδύναμη με μια ομοιόμορφη τραχύτητα. Έχει αναζητηθεί μια μέθοδος για τον άμεσο προσδιορισμό αυτών των τιμών. Τελικά, η πραγματική τιμή της ισοδύναμης ομοιόμορφης τραχύτητας που αντιστοιχεί σε ένα ορισμένο υλικό και ορισμένη λείανση βρίσκεται προς το παρόν με μετρήσεις πάνω σε σωλήνες και πραγματικούς αγωγούς. Ο προσδιορισμός του e είναι πολύ μεγάλης σημασίας, κυρίως για τους μεγάλους αγωγούς από μπετόν, σίδηρο ή ξύλο.

Σε αγωγούς από μπετόν η τιμή της απόλυτης τραχύτητας εξαρτάται κυρίως από τη λείανση, το πλήθος και τη διάταξη των αρμών. Σε μεταλλικούς συγκολλητούς αγωγούς, η τιμή του e εξαρτάται από τον τύπο και τον τρόπο εφαρμογής της επένδυσης. Σε μεταλλικούς καρφωτούς αγωγούς, η επένδυση έχει δευτερεύουσα σημασία. Ο κύριος συντελεστής είναι προπαντός οι ηλώσεις (αριθμός των ραφών και κατά μήκος και εγκάρσιες

αποστάσεις μεταξύ τους). Σε αγωγούς από ξύλο, είναι κυρίως η διάταξη των αρμών που έχει σημασία.

Λείοι και τραχείς σωλήνες

Όταν οι ανωμαλίες του τοιχώματος είναι μικρότερες από το πάχος του στρωτού οριακού υποστρώματος, η φύση τους δεν επηρεάζει την τυρβώδη περιοχή της ροής και τότε λέμε ότι η ροή γίνεται σε λείο σωλήνα. Όταν αντίθετα οι ανωμαλίες του τοιχώματος εισέρχονται στην τυρβώδη περιοχή της ροής, τότε εντείνουν το τυρβώδες και μεταβάλλουν την απώλεια ενέργειας. Λέμε τότε ότι η ροή γίνεται σε *τραχύ* σωλήνα. Επομένως η τυρβώδης ροή μπορεί να πραγματοποιηθεί σε λείους σωλήνες και ονομάζεται λεία τυρβώδης ροή ή σε τραχείς σωλήνες και ονομάζεται τραχεία τυρβώδης ροή.

Γραμμή φορτίου και Πιεζομετρική γραμμή

Σε έναν ευθύγραμμο αγωγό διατομής S και παροχής Q , η ολική ισχύς που διέρχεται από τη διατομή είναι το γινόμενο της παροχής βάρους και του ολικού φορτίου

$$E_i = z_i + \frac{p_i}{\omega} + \alpha \frac{V_i^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\omega} + \alpha \frac{Q^2}{2gS^2} \quad (1-13)$$

όπου οι πιέσεις και τα ύψη αναφέρονται σε επίπεδο αναφοράς καλά προσδιορισμένο.

Αν θεωρήσουμε δύο διατομές 1 και 2, όπου τα ολικά φορτία είναι αντίστοιχα E_1 και E_2 η διαφορά $\Delta E_{12} = E_1 - E_2$ παριστάνει, σύμφωνα με το θεώρημα του Bernoulli, την απώλεια φορτίου ανάμεσα στις διατομές 1 και 2. Αυτή η απώλεια φορτίου αντιστοιχεί στην ενέργεια που καταναλώνεται σε θερμότητα, από τις τριβές των υγρών μορίων μεταξύ τους και με τα τοιχώματα του σωλήνα ή στην ενέργεια που μετατρέπεται σε μηχανική από μια υδραυλική μηχανή.

Η ισχύς που καταναλώνεται ανάμεσα στις διατομές 1 και 2 είναι ίση με το γινόμενο

$$\Delta W = \bar{w}Q \cdot \Delta E_{12} \quad (1-14)$$

της παροχής βάρους επί την απώλεια φορτίου.

Οι απώλειες ενέργειας λόγω τριβής είναι δύο τύπων : γραμμικές απώλειες που οφείλονται σε στενώσεις, διαπλατύνσεις, αλλαγές διευθύνσεων κ.λ.π. Οι γραμμικές απώλειες ανάμεσα σε δύο διατομές α και β θα παριστάνονται πάντα με $\Delta H_{\alpha,\beta}$. Η γραμμική απώλεια ανά μέτρο μήκους του αγωγού θα παριστάνεται με i . Αν $L_{\alpha,\beta}$ είναι το μήκος του τμήματος α , β , τότε :

$$\Delta H_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} i \quad (1-15)$$

Οι τοπικές απώλειες στη διατομή c θα παριστάνονται με ΔH_c . Το άθροισμα των γραμμικών και τοπικών απωλειών ανάμεσα στο α και στο β θα

παριστάνεται με $\Delta H_{\alpha,\beta}$. Στην περίπτωση οριζόντιων ή σχεδόν οριζόντιων αγωγών, η γραμμή φορτίου έχει κλίση l που αντιστοιχεί στη γραμμική απώλεια φορτίου. Είναι $i \sim \varepsilon \varphi \alpha$ 3. Αν υπάρχουν τοπικές απώλειες, η γραμμή φορτίου κατέρχεται απότομα. Αν η διατομή είναι σταθερή, η πιεζομετρική γραμμή είναι παράλληλη στην γραμμή φορτίου και βρίσκεται κάτω από αυτήν και σε ίση απόσταση $\frac{V^2}{2g}$. Σε μια τοπική αύξηση της ταχύτητας (μείωση της διατομής), αντιστοιχεί μια πτώση της πιεζομετρικής γραμμής. Σε μια μείωση της ταχύτητας (αύξηση της διατομής) αντιστοιχεί μια ανύψωση της πιεζομετρικής γραμμής. Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στο σχήμα της γραμμής φορτίου και της πιεζομετρικής γραμμής στις περιπτώσεις διαπλάτυνσης ή στένωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Ø ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ (COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS C.F.D.)

Ø Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΓΚΩΝ (FLUIDS)

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η υπολογιστική Ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics, CFD) αποτελεί την τρίτη προσέγγιση στην μελέτη και εξέλιξη του συνόλου των αρχών της ρευστοδυναμικής. Οι βάσεις για την εξέλιξη της πειραματικής ρευστοδυναμικής τέθηκαν τον 17^ο αιώνα στην Γαλλία και την Αγγλία. Κατά τον 18^ο και 19^ο αιώνα παρατηρήθηκε μια σταδιακή ανάπτυξη της θεωρητικής ρευστοδυναμικής, κυρίως στην Ευρώπη. Κατά τον 20^ο αιώνα έλαβε χώρα η θεωρητική (χρησιμοποίηση των νόμων της Ρευστομηχανικής για την επίλυση απλών σχετικά προβλημάτων) και πρακτική εφαρμογή της θεωρίας (εκτέλεση πειραμάτων και απευθείας σύγκριση των αποτελεσμάτων με αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα). Η διδασκαλία της ρευστοδυναμικής μέχρι και σχετικά πρόσφατα (1960) περιελάμβανε επαφή και με τις δύο προσεγγίσεις (της θεωρίας και του πειράματος).

Παρόλα αυτά, η έλευση των ψηφιακών υπολογιστών υψηλής ταχύτητας πέτυχε την συνένωση και με την ανάπτυξη αριθμητικών αλγορίθμων ακριβείας για την λύση φυσικών προβλημάτων με αυτούς. Προκλήθηκε, δηλαδή, μια επανάσταση στον τρόπο μελέτης και εφαρμογής της ρευστοδυναμικής σήμερα. Έτσι παρουσιάστηκε μια νέα τρίτη προσέγγιση στη Ρευστοδυναμική -η προσέγγιση της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Η υπολογιστική Ρευστοδυναμική είναι σήμερα μια ισάξια προσέγγιση της

καθαρής θεωρίας και του πειράματος στην ανάλυση και λύση των ρευστοδυναμικών προβλημάτων. Αυτό δεν είναι κάτι παροδικό - η υπολογιστική Ρευστοδυναμική θα συνεχίσει να χρησιμοποιείται και βελτιώνεται συνεχώς.

Η υπολογιστική Ρευστοδυναμική παρέχει, όπως περιγράφηκε παραπάνω, μια νέα τρίτη προσέγγιση η οποία συμπληρώνει τις άλλες δυο προσεγγίσεις της θεωρίας και του πειράματος αλλά εκ των πραγμάτων δεν είναι σε θέση να αντικαταστήσει το πείραμα και τη θεωρία. Το μελλοντικό πλεονέκτημα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής έγκειται στην κατάλληλη ισορροπία των τριών προσεγγίσεων, με την υπολογιστική Ρευστοδυναμική να βοηθά στη μετάφραση και κατανόηση των αποτελεσμάτων της θεωρίας και του πειράματος και αντιστρόφως.

Τα αποτελέσματα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής είναι ανάλογα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από μια αεροσήραγγα στο εργαστήριο, και τα δυο αντιπροσωπεύουν σετ πληροφοριών για γνωστούς σχηματισμούς ροής με διαφορετικούς αριθμούς Mach, Reynolds κτλ. Ωστόσο αντίθετα με μια αεροσήραγγα η οποία είναι μια βαριά και δυσκίνητη συσκευή, ένα πρόγραμμα υπολογιστή είναι κάτι που μπορεί να μεταφερθεί εύκολα. Γι' αυτό ακριβώς το λόγο, ένας κώδικας σε υπολογιστή είναι ένα μεταφερόμενο εργαλείο, μια μεταφερόμενη αεροσήραγγα.

2.2 Τρόπος λειτουργίας κώδικα CFD

Οι κώδικες CFD είναι δομημένοι με αριθμητικούς αλγόριθμους που μπορούν να επιλύσουν προβλήματα ροής των ρευστών. Όλοι οι διατιθέμενοι κώδικες CFD περιέχουν εύχρηστο περιβάλλον εργασίας για

την εισαγωγή των παραμέτρων του προβλήματος και την εξέταση των αποτελεσμάτων. Τρία βασικά στοιχεία χαρακτηρίζουν τους εμπορικούς κώδικες:

- προ-επεξεργαστή
- επιλυτή
- μετα-επεξεργαστή

Κατωτέρω γίνεται περιληπτική εξέταση της λειτουργίας του κάθε στοιχείου.

2.2.1 Προ-επεξεργαστής (PRE-PROCESSOR)

Ο *προ-επεξεργαστής* αποτελείται από την είσοδο των δεδομένων ενός προβλήματος ροής, σ' ένα CFD πρόγραμμα, διαμέσου ενός φιλικού περιβάλλοντος για τον χειριστή και τον επακόλουθο μετασχηματισμό αυτών των δεδομένων σε μια μορφή κατάλληλη για χρήση. Οι ενέργειες του χειριστή στο στάδιο της προ-επεξεργασίας αφορούν:

- Καθορισμός της γεωμετρίας της περιοχής του ενδιαφέροντος, δηλαδή του υπολογιστικού χώρου.
- Δημιουργία του πλέγματος, δηλαδή η διαίρεση του χώρου σε μικρότερες περιοχές (όγκοι ελέγχου ή κελιά).
- Επιλογή των φυσικών και χημικών φαινομένων που θα εξομοιωθούν.
- Καθορισμός των ιδιοτήτων του ρευστού.
- Καθορισμός των οριακών συνθηκών στα κελιά που είναι στα όρια του υπολογιστικού χώρου.

Η λύση ενός προβλήματος ροής (ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία, κτλ) καθορίζεται σε κόμβους σε κάθε κελί. Η ακρίβεια μιας CFD λύσης εξαρτάται από τον αριθμό των κελιών στο πλέγμα. Γενικά, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των κελιών τόσο ακριβέστερη είναι η λύση. Η ακρίβεια της λύσης και το κόστος αυτής (απαραίτητο computer hardware και χρόνος υπολογισμού) εξαρτώνται από την ποιότητα του πλέγματος. Πάνω από το 50% του χρόνου που ξοδεύεται στη βιομηχανία σ' ένα CFD πρόβλημα αφοσιώνεται στον καθορισμό της γεωμετρίας και την κατασκευή του πλέγματος. Με σκοπό να μεγιστοποιηθεί η παραγωγικότητα του προσωπικού που δουλεύει σ' ένα CFD πρόβλημα, όλοι οι βασικοί κώδικες περιέχουν το δικό τους CAD-style περιβάλλον και/ή ευκολία στην εισαγωγή δεδομένων από διαμορφωτές επιφανειών και κατασκευαστές πλέγματος όπως τους PATRAN και I-DEAS. Ακόμη οι τωρινοί προ-επεξεργαστές δίνουν στο χειριστή πρόσβαση σε βιβλιοθήκες που περιέχουν τις υλικές ιδιότητες συνηθισμένων ρευστών και την ευκολία να επικαλεστούν ειδικά φυσικά και χημικά μοντέλα (τυρβώδη μοντέλα, μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία, μοντέλα καύσης) μαζί με τις εξισώσεις της κύριας ροής του ρευστού.

2.2.2 Επιλυτής (SOLVER)

Υπάρχουν τρία διακεκριμένα ρεύματα αριθμητικών τεχνικών για τη λύση ενός προβλήματος CFD: πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων και φασματική μέθοδος. Γενικά οι αριθμητικές μέθοδοι που σχηματίζουν τη βάση του επιλυτή πραγματοποιούν τα παρακάτω βήματα:

- Προσέγγιση των αγνώστων μεταβλητών της ροής μέσα από απλές διεργασίες.
- Διακριτοποίηση με αντικατάσταση των προσεγγίσεων στις εξισώσεις της κύριας ροής και τους επακόλουθους μαθηματικούς χειρισμούς.
- Λύση των αλγεβρικών εξισώσεων.

Οι βασικές διαφορές μεταξύ των τριών ξεχωριστών ρευμάτων σχετίζονται με τον τρόπο με τον οποίο οι μεταβλητές της ροής υπολογίζονται και με τις διαδικασίες διακριτοποίησης.

∅ Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών: Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών περιγράφουν τις άγνωστες ποσότητες Φ του προβλήματος ροής διαμέσου σημείων-δειγμάτων στα κομβικά σημεία του πλέγματος των ισότιμων γραμμών. Τα δυο πρώτα μέλη των σειρών Taylor χρησιμοποιούνται συχνά για να δημιουργήσουν προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών των παραγώγων του Φ σε όρους σημείων-δειγμάτων του Φ σε κάθε σημείο του πλέγματος και τους άμεσους γείτονές του. Αυτές οι παράγωγοι εμφανιζόμενες στις κύριες εξισώσεις αντικαθίστανται από πεπερασμένες διαφορές που παράγουν έναν αλγεβρικό υπολογισμό για τις τιμές του Φ σε κάθε σημείο του πλέγματος.

∅ Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων: Οι μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούν εύκολες διεργασίες για να περιγράψουν τις τυπικές μεταβολές των αγνώστων μεταβλητών ροής Φ . Η κύρια εξίσωση ικανοποιείται ακριβώς από την ακριβή λύση για το Φ . Αν οι προσεγγιστικές διαδικασίες αλλάξουν μέσα στην εξίσωση δεν θα έχουμε ακριβή υπολογισμό και ορίζεται ένα υπόλοιπο για να μετρώνται

τα λάθη. Κατόπιν τα υπόλοιπα (ως εκ τούτου και τα λάθη) ελαχιστοποιούνται αισθητά πολλαπλασιάζοντας τα με μια σειρά από βαρύνουσες διαδικασίες και ολοκληρώνοντας. Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε μια σειρά από αλγεβρικές εξισώσεις για τους άγνωστους συντελεστές των προσεγγιστικών διαδικασιών. Η θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων αναπτύχθηκε αρχικά για ανάλυση της καταπόνησης της δομής.

∅ Φασματικές μέθοδοι: Οι φασματικές μέθοδοι προσεγγίζουν τους άγνωστους διαμέσου των κομμένων σειρών Fourier και Chebyshev. Σε αντίθεση με τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών και στοιχείων οι προσεγγίσεις δεν είναι τοπικές αλλά έγκυρες σε όλο τον υπολογιστικό χώρο. Αντικαθιστούμε ξανά τους αγνώστους στην κύρια εξίσωση με τις σειρές που αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι περιορισμοί που οδηγούν σε μια αλγεβρική επίλυση για τους συντελεστές των σειρών Fourier και Chebyshev δίνονται από τα σημαίνοντα υπόλοιπα, όπως και στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ή κάνοντας τις προσεγγιστικές διαδικασίες να συμπέσουν με την ακριβή λύση σ' ένα αριθμό των σημείων του πλέγματος.

∅ Μέθοδοι Πεπερασμένων Όγκων: Οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων αρχικά εξελίχθηκαν σαν μια ειδική φόρμουλα των πεπερασμένων διαφορών. Ο αριθμητικός της αλγόριθμος αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

- Τυπική ολοκλήρωση των κυρίων εξισώσεων της ροής του ρευστού σε όλους τους (πεπερασμένους) όγκους ελέγχου του χώρου λύσης.
- Διακριτοποίηση, η οποία περιλαμβάνει την αντικατάσταση αρκετών

προσεγγίσεων τύπου πεπερασμένων διαφορών ώστε η ολοκληρωμένη εξίσωση να αναπαριστά διαδικασίες ροής όπως συναγωγή, διάχυση και πηγές. Αυτό μετατρέπει τις ακέραιες εξισώσεις σ' ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.

- Λύση των αλγεβρικών εξισώσεων με μια επαναληπτική μέθοδο.

Το πρώτο βήμα, η ολοκλήρωση του όγκου ελέγχου ξεχωρίζει την μέθοδο πεπερασμένων όγκων από όλες τις άλλες CFD τεχνικές. Τα απορρέοντα στοιχεία δείχνουν την ακριβή διατήρηση των σχετικών ιδιοτήτων του κάθε κελιού με πεπερασμένο μέγεθος. Αυτή η καθαρή σχέση ανάμεσα στον αριθμητικό αλγόριθμο και τη διατήρηση των αρχών της Φυσικής είναι μια από τις κύριες έλξεις της μεθόδου πεπερασμένων όγκων και κάνει τα περιεχόμενά της πολύ πιο εύκολα κατανοητά από τους μηχανικούς απ' ότι οι άλλες μέθοδοι.

Η διατήρηση μιας γενικής μεταβλητής ροής Φ , για παράδειγμα η ταχύτητα των συστατικών μερών ή η ενθαλπία μέσα σ' ένα όγκο ελέγχου μπορεί να εκφραστεί σαν το ισοζύγιο μεταξύ των διαφόρων διαδικασιών που τείνουν να αυξήσουν ή να μειώσουν αυτή (βλ. Πίνακα 1-1).

Οι κώδικες CFD περιέχουν τεχνικές διακριτοποίησης κατάλληλες για το χειρισμό του κλειδιού-φαινομένου μεταφοράς, συναγωγής (μεταφορά λόγω της ροής του ρευστού) και διάχυσης (μεταφορά λόγω των διαφορών της ποσότητας Φ από σημείο σε σημείο) όπως και όρους πηγής (συνδέεται με τη δημιουργία ή με την καταστροφή του Φ) και το ρυθμό μεταβολής σε σχέση με το χρόνο. Τα φυσικά φαινόμενα είναι πολύπλοκά και μη-γραμμικά έτσι απαιτείται μια προσέγγιση με επαναληπτική λύση.

Πίνακας 1-1

		<i>Αμιγής ροή της ποσότητας Φ στον</i>
		<i>όγκο ελέγχου λόγω βαθμίδας</i>
		<i>πίεσης</i>
		+
<i>Ρυθμός μεταβολής της ποσότητας</i>		<i>Αμιγής ροή της ποσότητας Φ λόγω</i>
		<i>όγκο ελέγχου με διάχυση ή</i>
	=	<i>καταστροφή της ποσότητας</i>
+		
<i>Μεταφορά ποσότητας Φ στον</i>		+
<i>όγκο ελέγχου με μεταφορά</i>		<i>Αμιγής ρυθμός της δημιουργίας Φ</i>
		<i>Αμιγής ρυθμός της δημιουργίας Φ</i>

2.2.3 Μετά-επεξεργαστής (POST-PROCESSOR)

Λόγω της αυξανόμενης ζήτησης μηχανολογικών πακέτων εργασίας, πολλά εκ των οποίων έχουν εκπληκτικές ικανότητες για γραφική απεικόνιση, τα κύρια CFD πακέτα έχουν εφοδιαστεί με οπτικά εργαλεία πολλών χρήσεων. Αυτά περιλαμβάνουν:

- Γεωμετρία χώρου και προβολή του πλέγματος.
- Χάραξη διανυσμάτων.
- Χάραξη γραμμών και σκιασμένων περιμέτρων.
- Χάραξη επιφανειών 2D και 3D.
- Ανίχνευση μορίων.

- Χειρισμός εικόνας (μετάφραση, περιστροφή κτλ).
- Έγχρωμη απόδοση στην έξοδο.

Οι παραπάνω υπηρεσίες μπορεί ακόμα να περιέχουν animation για δυναμική προβολή των αποτελεσμάτων και επιπλέον μαζί με τα γραφικά όλοι οι κώδικες παράγουν αξιόπιστα αλφαριθμητικά στοιχεία και υπάρχει η δυνατότητα για εξαγωγή δεδομένων για επεξεργασία αυτών εξωτερικά του κώδικα.

2.3 Βασικές εξισώσεις

2.3.1 Ουσιαστική παράγωγος

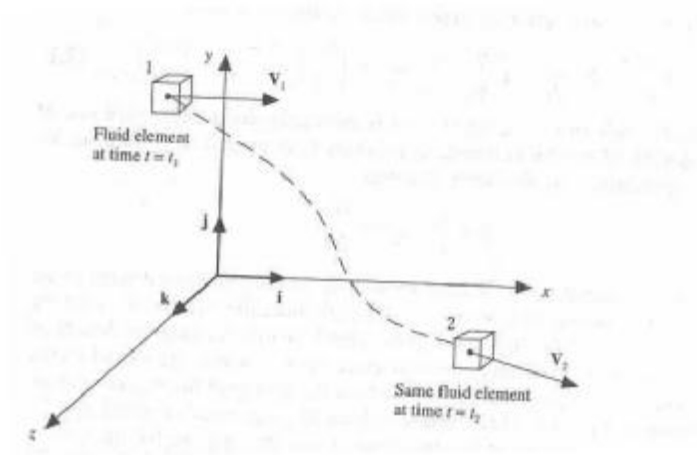
Πριν την παραγωγή των εξισώσεων, είναι ανάγκη να εξηγηθεί η σημασία της ουσιαστικής παραγωγού που χρησιμοποιείται ευρέως στην υπολογιστική ρευστομηχανική. Η επιπρόσθετος ή η ουσιαστική παράγωγος έχει πολύ σπουδαία φυσική σημασία η σημασία της οποίας δεν εκτιμάται πλήρως.

Σαν μοντέλο ροής υιοθετείται ένα απειροελάχιστο μικρό ρευστό στοιχείο που μεταφέρεται με τη ροή και του οποίου η κίνηση απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.

Εδώ το ρευστό στοιχείο κινείται σε καρτεσιανό χώρο. Οι μοναδιαίοι δείκτες για τους άξονες x , y , z είναι i , j , k αντίστοιχα. Ο δείκτης της ταχύτητας του πεδίου στον καρτεσιανό χώρο είναι:

$$V = u i + v j + w k \quad (2-1)$$

όπου οι εξισώσεις της ταχύτητας είναι αντίστοιχα:



Σχήμα 2-1 Η απεικόνιση του ρευστού στοιχείου για την ουσιαστική παράγωγο

$$u = u(x, y, z, t) \quad (2-2)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (2-3)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (2-4)$$

Ας σημειωθεί ότι ερευνάται μια γενικά ασταθή ροή, όπου τα u , v , και w είναι λειτουργίες του χώρου και του χρόνου. Επίσης το διαβαθμισμένο πεδίο της πυκνότητας είναι:

$$\tilde{n} = \tilde{n}(x, y, z, t) \quad (2-5)$$

Τη χρονική στιγμή t_1 , το ρευστό στοιχείο βρίσκεται στο σημείο 2. Σε αυτό το σημείο, αυτή τη στιγμή, η πυκνότητα του ρευστού στοιχείου είναι:

$$\tilde{n}_1 = \tilde{n}(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad (2-6)$$

Στη μεταγενέστερη στιγμή t_2 , το ρευστό στοιχείο έχει μετακινηθεί στο σημείο 2, ως εκ τούτου η πυκνότητα του ρευστού στοιχείου εκεί είναι:

$$\tilde{n}_2 = \tilde{n}(x_2, y_2, z_2, t_2) \quad (2-7)$$

Από τη στιγμή που η πυκνότητα είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου $\rho = \rho(x, y, z, t)$ μπορούμε να αναπτυχθεί γι' αυτή μια σειρά Taylor για το σημείο 1:

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + \text{όρους ανωτέρας τάξης} \quad (2-8)$$

Διαιρώντας με $t_2 - t_1$ και αγνοώντας τους όρους ανωτέρας τάξης δίνεται:

$$\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \right) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2-9)$$

Η εξέταση του αριστερού μέλους της εξίσωσης δείχνει την ύπαρξη ενός μέσου ρυθμού μεταβολής της πυκνότητας του ρευστού στοιχείου καθώς αυτό κινείται από το σημείο 1 στο σημείο 2. Το όριο αυτού του όρου για $t_2 \rightarrow t_1$ θα δώσει:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{Dr}{Dt} \quad (2-10)$$

Εδώ το σύμβολο Dr / Dt αναφέρεται στον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας του ρευστού στοιχείου καθώς αυτό διέρχεται από το σημείο 2. Εξ' ορισμού καλείται ουσιαστική παράγωγος D / Dt . Να σημειωθεί ότι η Dr / Dt είναι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του γνωστού ρευστού στοιχείου καθώς αυτό κινείται στο χώρο. Εδώ η προσοχή επικεντρώνεται στο στοιχείο, καθώς αυτό κινείται, και παρακολουθείται η μεταβολή της πυκνότητας του στοιχείου που περνά από το σημείο 2. Η μερική παράγωγος $(\partial r / \partial x)_1$ αντιπροσωπεύει το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας του στοιχείου στο συγκεκριμένο σημείο 2. Για την μερική παράγωγο $(\partial r / \partial x)_1$ επικεντρώνεται η προσοχή στο σταθερό σημείο 1 και παρακολουθείται η μεταβολή της πυκνότητας που οφείλεται στις

παροδικές διακυμάνσεις του πεδίου ροής. Συνεπώς $D\mathbf{r} / Dt$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ είναι αριθμητικά και φυσικά διαφορετικές ποσότητες. Στην εξίσωση 2-9 ο

όρος $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ μπορεί να αντικατασταθεί με την ταχύτητα u :

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \equiv u \quad (2-11)$$

Ομοίως και με τους υπολοίπους όρους:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \equiv v \quad (2-12)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \equiv w \quad (2-13)$$

Άρα για το όριο της εξίσωσης με $t_2 \rightarrow t_1$ δίνεται:

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2-14)$$

Εξετάζοντας προσεκτικά την παραπάνω εξίσωση, μπορεί να οριστεί μια έκφραση για την ουσιαστική παράγωγο σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2-15)$$

Είναι γνωστό ότι για τις καρτεσιανές συντεταγμένες ο δείκτης λειτουργίας ∇ (γνωστός και ως τελεστής Laplace) ορίζεται ως εξής:

$$\nabla \equiv i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2-16)$$

Ως εκ τούτου η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \quad (2-17)$$

Από τα παραπάνω παρατηρείται ότι η D / Dt είναι η ουσιαστική παράγωγος, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους για ένα ρευστό στοιχείο κινούμενο στο χώρο, η $\partial / \partial t$ καλείται τοπική παράγωγος το οποίο είναι ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους σε συγκεκριμένο σημείο και το γινόμενο $(V \cdot \nabla)$ ονομάζεται διαχυτική παράγωγος που είναι ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους το οποίο οφείλεται στην κίνηση του στοιχείου από σημείο σε σημείο στο πεδίο ροής, όπου οι ιδιότητες του ρευστού είναι χωρικά διαφορετικές. Η ουσιαστική παράγωγος μπορεί να εφαρμοστεί σε

οποιαδήποτε μεταβλητή του πεδίου ροής, για παράδειγμα $D\rho / Dt$, DT / Dt , Du / Dt κ.τ.λ. όπου ρ και T είναι η στατική πίεση και θερμοκρασία αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2-18)$$

Όπου $\frac{DT}{Dt}$: ουσιαστική παράγωγος, $\frac{\partial T}{\partial t}$: τοπική παράγωγος, $(\mathbf{V} \cdot \nabla)$:

διαχυτική παράγωγος.

Η φυσική σημασία της εξίσωσης αυτής είναι ότι η θερμοκρασία του ρευστού στοιχείου μεταβάλλεται καθώς αυτό περνά από ένα σημείο στη ροή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η θερμοκρασία του πεδίου ροής μπορεί να έχει διακυμάνσεις (τοπική παράγωγος) και επίσης γιατί το ρευστό κινείται προς ένα άλλο σημείο στο πεδίο ροής όπου η θερμοκρασία είναι διαφορετική (παράγωγος μεταφοράς).

Υπάρχει η δυνατότητα παράκάμψης των παραπάνω αναγνωρίζοντας ότι η ουσιαστική παράγωγος είναι ουσιαστικά η ίδια με την ολική διαφορική μορφή από τον παρακάτω υπολογισμό της ολικής παραγώγου:

$$\tilde{n} = \tilde{n}(x, y, z, t) \quad (2-19)$$

τότε:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz + \frac{\partial r}{\partial t} dt \quad \Rightarrow \div dt$$

Διαιρώντας με dt προκύπτει:

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2-20)$$

και εφόσον $dx/dt = u$, $dy/dt = v$ και $dz/dt = w$ τότε:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial r}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial r}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2-21)$$

Η συνολική δύναμη στη διεύθυνση x F_x , δίνεται από το άθροισμα των δύο παραπάνω εξισώσεων, έτσι λαμβάνεται:

$$F_x = \left[-\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + r f_x dx dy dz \quad (2-22)$$

Για την επεξήγηση της σημασίας της δύναμης που ασκείται στο ρευστό στοιχείο, δείχνεται στον παρακάτω πίνακα ο δεύτερος νόμος του Newton:

$$F = m a$$

(2-23)

Δυνάμεις		Στοιχείου	Επιφανειακές δυνάμεις	
Δύναμη	Βάρους	Ηλεκτρομαγνητικές	Δυνάμεις	δυνάμεις
		Δυνάμεις	Πίεσης	Ιξώδους
			Εφελκυστικές (τ_{xx}, \dots)	Διατμητικές (τ_{yx}, \dots)

Η μελέτη του δεξιού μέλους της αρχικής εξίσωσης ($F = m a$) υπενθυμίζει ότι η μάζα του ρευστού στοιχείου είναι σταθερή και ίση με:

$$m = \rho \, dx \, dy \, dz$$

(2-24)

Ενώ η επιτάχυνση του στοιχείου είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του. Άρα η συνιστώσα της επιτάχυνσης στην διεύθυνση x , σημειώνεται σαν a_x , είναι απλά ο ρυθμός μεταβολής της u από τη στιγμή που παρατηρείται ένα κινούμενο ρευστό στοιχείο, ο ρυθμός μεταβολής δίνεται από την ουσιαστική παράγωγο. Άρα:

$$a_x = \frac{Du}{Dt}$$

(2-25)

Έτσι σχηματίζεται η παρακάτω εξίσωση:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2-26)$$

η οποία είναι το μέρος της εξίσωσης ορμής για την διεύθυνση x, για ιξώδη ροή.

Κατά τον ίδιο τρόπο προσδιορίζονται τα μέρη της εξίσωσης για την διεύθυνση y και z:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (2-27)$$

και

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho f_z \quad (2-28)$$

Να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις αυτές είναι σε μερική διαφορική μορφή που παρήχθησαν από την απευθείας εφαρμογή της φυσικής αρχής σε ένα απειροελάχιστα μικρό στοιχείο. Επίσης καθώς πρόκειται για στοιχείο κινούμενο με την ροή οι εξισώσεις αυτές αποτελούν την μη συντηρητική μορφή τους. Είναι κλιμακωτές εξισώσεις και ονομάζονται Navier - Stokes.

Οι εξισώσεις Navier - Stokes μπορούν να γραφούν σε συντηρητική μορφή με τον ακόλουθο τρόπο, γράφοντας το αριστερό μέλος της κάθε εξίσωσης με την βοήθεια του ορισμού της ουσιαστικής παραγώγου.

$$r \frac{Du}{Dt} = r \frac{\partial u}{\partial t} + r \cdot V \cdot \nabla u \quad (2-29)$$

είναι γνωστό ότι: $\frac{\partial (r u)}{\partial t} = r \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (r u)}{\partial t} - u \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2-30)$$

Επίσης η ταυτότητα για την απόκλιση μεγέθους επί ένα κλιμακωτό δείκτη, δίνει:

$$\nabla(\rho u V) = u \nabla(\rho V) + (\rho V) \nabla u \Rightarrow$$

$$\rho V \nabla u = \nabla(\rho u V) - u \nabla(\rho V) \quad (2-31)$$

Με αντικατάσταση δίνει:

$$\begin{aligned}
 r \frac{Du}{Dt} &= \frac{\rho(ru)}{\rho t} - u \frac{\rho r}{\rho t} - u \nabla \cdot (ruV) \\
 &= \frac{\rho(ru)}{\rho t} - u \left[\frac{\rho r}{\rho t} + \nabla \cdot (rV) \right] + \nabla \cdot (ruV)
 \end{aligned} \tag{2-32}$$

Ο όρος στην αγκύλη είναι το αριστερό μέλος της εξίσωσης συνέχειας και κατά συνέπεια είναι μηδέν. Άρα η προηγούμενη εξίσωση γίνεται ως εξής :

$$r \frac{Du}{Dt} = \frac{\rho(ru)}{\rho t} + \nabla \cdot (ruV) \tag{2-33}$$

Άρα με αντικατάσταση δίνονται τα παρακάτω:

$$\frac{\rho(ru)}{\rho t} + \nabla \cdot (ruV) = -\frac{\rho p}{\rho x} + \frac{\rho t_{xx}}{\rho x} + \frac{\rho t_{yx}}{\rho y} + \frac{\rho t_{zx}}{\rho z} + r f_x \tag{2-34}$$

$$\frac{\rho(rv)}{\rho t} + \nabla \cdot (rvV) = -\frac{\rho p}{\rho y} + \frac{\rho t_{yy}}{\rho y} + \frac{\rho t_{xy}}{\rho x} + \frac{\rho t_{zy}}{\rho z} + r f_y \tag{2-35}$$

$$\frac{\rho(rw)}{\rho t} + \nabla \cdot (rwV) = -\frac{\rho p}{\rho z} + \frac{\rho t_{zz}}{\rho z} + \frac{\rho t_{xz}}{\rho x} + \frac{\rho t_{yz}}{\rho y} + r f_z \tag{2-36}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι σε συντηρητική μορφή. Για τα νευτόνια ρευστά, για τα οποία οι διατμητικές τάσεις είναι ανάλογες με την κλίση της ταχύτητας τους, ο Stokes έδωσε τα εξής:

$$t_{xx} = l(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-37)$$

$$t_{yy} = l(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-38)$$

$$t_{zz} = l(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2-39)$$

$$t_{xy} = t_{yx} = m \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2-40)$$

Το σύνολο της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, στηρίζεται στις βασικές κυρίαρχες εξισώσεις της ρευστοδυναμικής - εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας. Είναι οι μαθηματικές εκφράσεις των τριών θεμελιωδών φυσικών αρχών πάνω στις οποίες στηρίζεται όλη η ρευστοδυναμική:

- αρχή διατήρησης μάζας
- δεύτερος νόμος του Newton $F = m a$
- αρχή διατήρησης ενέργειας.

2.3.2 Η εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση που απορρέει από την εφαρμογή της φυσικής αρχής διατήρησης μάζας ονομάζεται εξίσωση συνέχειας. Η εφαρμογή μπορεί να γίνει για τέσσερα διαφορετικά μοντέλα ροής, στην συγκεκριμένη περίπτωση όμως θα γίνει για ένα, μιας και η εξίσωση δεν αλλάζει ουσιαστικά μορφή είναι δηλαδή η ίδια για όλα τα μοντέλα.

Θεωρούμε ένα απειροελάχιστο μικρό στοιχείο σταθερό στο χώρο, με το ρευστό να διέρχεται μέσα από αυτό. Εδώ για διευκόλυνση υιοθετούμε ένα κατερσιανό σύστημα συντεταγμένων, όπου η ταχύτητα και η πυκνότητα είναι λειτουργίες του χώρου (x, y, z) και του χρόνου t . Το στοιχείο του ρευστού που είναι σταθερό στο χώρο (x, y, z) έχει πλευρές dx, dy και dz . Η αρχή που εφαρμόζουμε μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{array}{l} \text{καθαρή εκροή ρευστού από} \\ \text{τον όγκο έλεγχου μέσω} \\ \text{επιφάνειας ελέγχου } S \end{array} = \begin{array}{l} \text{ρυθμός μείωσης της} \\ \text{μάζας μέσα στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array}$$

Για το ρευστό στοιχείο που είναι σταθερό στο χώρο υπάρχει ροή μάζας όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε την αριστερή και δεξιά επιφάνεια του στοιχείου που είναι κάθετες στον x άξονα. Οι επιφάνειες αυτές έχουν εμβαδόν $dydz$. Η ροή μάζας από την αριστερή πλευρά είναι $(\rho u)dydz$. Από τη στιγμή που η ταχύτητα και η πυκνότητα είναι λειτουργίες του χώρου, εξαρτώνται δηλαδή από τον χωρικό προσδιορισμό τους, τα μεγέθη της ροής μάζας από τη δεξιά πλευρά θα είναι διαφορετικά από την αριστερή πλευρά και φυσικά η διαφορά αυτή ανάμεσα στις δύο επιφάνειες θα είναι:

$$\left[\rho u + \frac{\rho(u^2)}{\rho x} \cdot dx \right] \cdot dydz \quad (2-41)$$

Κατά συνέπεια, η ροή της μάζας από τη δεξιά πλευρά μπορεί να γραφτεί ως:

$$\left[\rho u + \frac{\rho(u^2)}{\rho x} \cdot dx \right] \cdot dydz \quad (2-42)$$

Με τον ίδιο τρόπο, η ροή της μάζας διαμέσου της κάτω και πάνω επιφάνειας που είναι κάθετες στον άξονα y θα είναι:

$$(\rho v) \cdot dx dz \quad (2-43)$$

και

$$\left[\rho v + \frac{\rho(v^2)}{\rho y} \cdot dy \right] \cdot dx dz \quad (2-44)$$

αντίστοιχα.

Τέλος, η ροή της μάζας μέσω της εμπρός και πίσω επιφάνειας που είναι κάθετες στον άξονα z θα είναι:

$$(pw) \cdot dx dy \quad (2-45)$$

και

$$\left[pw + \frac{\rho(pw)}{\rho_z} \cdot dz \right] \cdot dx dy \quad (2-46)$$

αντίστοιχα.

Να σημειωθεί ότι οι συνιστώσες u , v και w είναι θετικές, κατά συνθήκη, με τις θετικές φορές των x , y , z αντίστοιχα. Ως εκ τούτου τα βέλη του σχήματος αναπαριστούν τις συνεισφορές στην εισροή και εκροή της μάζας μέσω των επιφανειών του στοιχείου. Εάν θεωρηθεί η εκροή της μάζας ως θετική ποσότητα τότε θα δίνει:

Καθαρή εκροή στον άξονα x :

$$\left[ru + \frac{\rho(pu)}{\rho_x} \cdot dx \right] \cdot dy dz - (pu) \cdot dy dz = \frac{\rho(pu)}{\rho_x} \cdot dx dy dz \quad (2-47)$$

Καθαρή εκροή στον άξονα y :

$$\left[pv + \frac{\rho(pv)}{\rho_y} \cdot dy \right] \cdot dx dz - (pv) \cdot dx dz = \frac{\rho(pv)}{\rho_y} \cdot dx dy dz \quad (2-48)$$

Καθαρή εκροή στον άξονα z:

$$\left[pw + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \cdot dz \right] \cdot dxdy - (pw) \cdot dxdy = \frac{\partial(pw)}{\partial z} \cdot dxdydz \quad (2-49)$$

Άρα η συνολική καθαρή εκροή μάζας από το στοιχείο είναι:

$$\text{συνολική καθαρή εκροή} = \left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right] \cdot dxdydz \quad (2-50)$$

Η συνολική μάζα του στοιχείου είναι $p(dxdydz)$ άρα ο ρυθμός μείωσης αυτής δίνεται από τη σχέση:

$$\text{ρυθμός μείωσης μάζας} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot (dxdydz) \quad (2-51)$$

Εάν οριστεί η μείωση της μάζας μέσα στο στοιχείο σαν μια αρνητική ποσότητα, τότε από όλα τα παραπάνω δίνεται:

$$\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right] \cdot dx dy dz = - \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dx dy dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right] = 0 \quad (2-52)$$

Οι όροι στην αγκύλη είναι το $\nabla(p\vec{V})$ άρα η εξίσωση γράφεται:

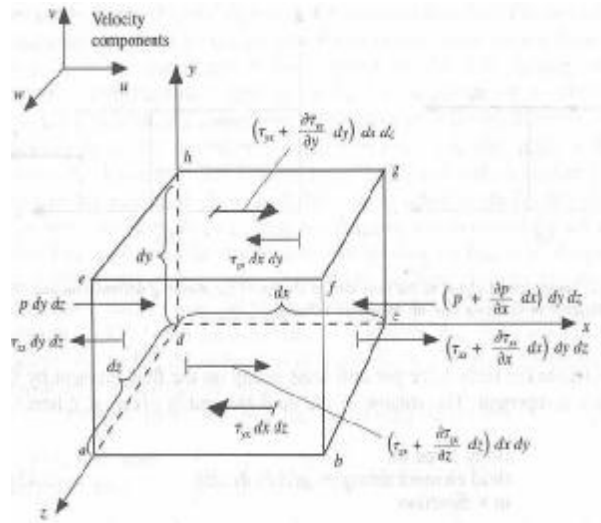
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(p\vec{V}) = 0 \quad (2-53)$$

Αυτή η εξίσωση αποτελεί την μερική διαφορική μορφή της εξίσωσης συνέχειας. Η μορφή αυτή καλείται και συντηρητική γιατί εξήχθη με την εφαρμογή της φυσικής αρχής σε απειροελάχιστο μικρό στοιχείο σταθερό στο χώρο.

2.3.3 Οι εξισώσεις της ορμής

Η φυσική αρχή που θα χρησιμοποιηθεί εδώ είναι ο δεύτερος νόμος του Newton: $F = m \cdot g$. Η εξίσωση που θα προκύψει ονομάζεται εξίσωση ορμής. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το μοντέλο ροής που θα αξιοποιηθεί είναι αυτό ενός απειροελάχιστου μικρού ρευστού στοιχείου που κινείται με τη ροή και αυτό γιατί είναι ιδιαίτερα βολικό για τη παραγωγή της εξίσωσης της ορμής καθώς και της εξίσωσης της ενέργειας που θα δούμε παρακάτω. Το ρευστό στοιχείο φαίνεται παρακάτω, παρόλα αυτά όμως δεν πρέπει να ξεχνάτε ότι η εξίσωση της ορμής και της ενέργειας μπορούν να παραχθούν

με τη χρησιμοποίηση και των άλλων τριών μοντέλων ροής που θα μας οδηγήσουν σε άλλες μορφές των εξισώσεων.



Σχήμα 2-2: Κινούμενο ρευστό σημείο. Είναι σχεδιασμένες μόνο οι δυνάμεις στην κατεύθυνση x.

Η έκφραση του δεύτερου νόμου του Newton όταν εφαρμοσθεί σε κινούμενο ρευστό στοιχείο μας λέει ότι η καθαρή δύναμη που ασκείται στο στοιχείο ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση του. Είναι μια σχέση συνιστωσών και κατά συνέπεια μπορεί να χωριστεί σε τρεις κλιμακωτές σχέσεις για τους άξονες x, y και z. Η συνιστώσα της συνολικής δύναμης που ασκείται στο ροϊκό πεδίο είναι η ακόλουθη.

$$F_x = m \cdot a_x$$

Όπου F_x και a_x είναι οι συνιστώσες της δύναμης και της επιτάχυνσης, αντίστοιχα. Αρχικά ας σκεφτούμε την F_x , την δύναμη στη διεύθυνση x , που προέρχεται από δυο πηγές:

2. Δυνάμεις του στοιχείου, που ενεργούν άμεσα στην ογκομετρική μάζα του ρευστού στοιχείου. Αυτές οι δυνάμεις ενεργούν από απόσταση όπως π.χ. δυνάμεις βαρύτητας, ηλεκτρικές και μαγνητικές.

2. Επιφανειακές δυνάμεις, που ενεργούν στην επιφάνεια του ρευστού στοιχείου.

Αυτές οφείλονται σε δυο μόνο λόγους :

- στη κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια η οποία προκαλείται από το ρευστό περιβάλλον και

- στις διατμητικές και εφελκυστικές τάσεις που κατανέμονται στην επιφάνεια, επίσης προκαλούνται από το ρευστό το οποίο περιβάλλει το στοιχείο και που 'εφελκύει' ή 'πιέζει' την επιφάνεια υπό την έννοια της τριβής.

Η ανηγμένη μορφή της δύναμης στη μάζα του στοιχείου, δηλαδή η δύναμη ανά μονάδα μάζας στη διεύθυνση x , f_x ορίζεται ως εξής: $(\rho f_x dx dy dz)$, όπου $(dx dy dz)$ είναι ο όγκος του στοιχείου.

Οι διατμητικές και εφελκυστικές τάσεις στο ρευστό σχετίζονται με το ρυθμό μεταβολής της παραμόρφωσης του στοιχείου για το x, y επίπεδο. Οι διατμητικές τάσεις σημειώνονται ως τ_{xy} και σχετίζονται με το ρυθμό μεταβολής της διατμητικής παραμόρφωσης του στοιχείου, ενώ οι εφελκυστικές τάσεις σημειώνονται ως τ_{xx} και σχετίζονται με το ρυθμό μεταβολής του όγκου του στοιχείου. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι και οι δυο

διατμητικές και εφελκυστικές τάσεις εξαρτώνται από τη κλίση της ταχύτητας ροής που θα καθοριστεί αργότερα. Στις περισσότερες ιξώδεις ροές, οι εφελκυστικές τάσεις είναι κατά πολύ μικρότερες από τις διατμητικές και πολλές φορές αγνοούνται. Οι παραπάνω γίνονται σημαντικές όταν η κλίση της ταχύτητας ροής είναι πολύ μεγάλη, που συμβαίνει για παράδειγμα σε ένα εσωτερικό κρουστικό κύμα.

Οι δυνάμεις επιφάνειας που ασκούνται στο ρευστό στοιχείο στη διεύθυνση x φαίνονται στο σχήμα 2. Η συνθήκη που χρησιμοποιείται εδώ αφορά το t_{ij} που δηλώνει τάση στη διεύθυνση j που ασκείται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα i . Στην επιφάνεια $abcd$ η μόνη δύναμη στη διεύθυνση x οφείλεται στη διατμητική δύναμη $T_{yx}dx dz$. Στην επιφάνεια $efgh$ μεσολαβεί μια απόσταση από την $abcd$, dy άρα η διατμητική δύναμη στη διεύθυνση x για

το $efgh$ είναι $\left[t_{yx} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} dy \right] dx dz$. Στην επιφάνεια $dcgh$ η T_{zx} ενεργεί κατά

την αρνητική διεύθυνση του x , καθώς στην επιφάνεια $abfe$ η $t_{zx} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} dz$

ενεργεί κατά τη θετική διεύθυνση του x . Για την επιφάνεια $adhe$ που είναι κάθετη στον άξονα x οι μόνες δυνάμεις κατά τη διεύθυνση x είναι η δύναμη της πίεσης $p dy dz$ και η οποία έχει φορά πάντα προς το εσωτερικό του ρευστού στοιχείου και η $T_{xx} dy dz$ που ενεργεί αρνητικά. Στην επιφάνεια τώρα

$bcgf$, η δύναμη πίεσης είναι $\left[p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] dy dz$ με φορά προς το εσωτερικό

του στοιχείου, καθώς επίσης ασκείται και η εφελκυστική δύναμη

$\left[t_{xx} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} dx \right] dy dz$ με θετική φορά. Οι φορές των δυνάμεων οφείλονται

στην συνθήκη που υπαγορεύει ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας u , v και w αυξάνονται κατά τη θετική φορά των αξόνων στους οποίους αναφέρονται. Λαμβάνοντας υπ' όψη τα παραπάνω, μπορεί να γραφτεί για το κινούμενο ρευστό στοιχείο το εξής:

Καθαρή επιφανειακή δύναμη στον άξονα $x =$

$$\left[r - p + \frac{\partial r}{\partial x} dx \right] dydz + \left[\left(t_{xx} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} dx \right) - t_{xx} \right] dydz + \left[\left(t_{yx} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} dy \right) - t_{yx} \right] dx dz + \left[\left(t_{zx} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} dz \right) - t_{zx} \right] dx dy \quad (2-54)$$

Η συνολική δύναμη στη διεύθυνση x F_x , δίνεται από το άθροισμα των δύο παραπάνω εξισώσεων, έτσι δίνεται:

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + r f_x dx dy dz \quad (2-55)$$

Έλεγχος του δεξιού μέλους της αρχικής εξίσωσης ($F = ma$) δείχνει ότι η μάζα του ρευστού στοιχείου είναι σταθερή και ίση με:

$$m = \rho dx dy dz \quad (2-56)$$

ενώ η επιτάχυνση του στοιχείου είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του. Άρα η συνιστώσα της επιτάχυνσης στη διεύθυνση x , σημειώνεται σαν a_x , είναι απλά ο ρυθμός μεταβολής της u , από τη στιγμή που παρατηρείται ένα κινούμενο ρευστό στοιχείο, ο ρυθμός μεταβολής δίνεται από την ουσιαστική παράγωγο. Άρα:

$$a_x = Du/Dt \quad (2-57)$$

Έτσι σχηματίζεται η εξίσωση:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2-58)$$

που είναι το μέρος της εξίσωσης ορμής για την διεύθυνση x , για ιξώδη ροή.

Κατά τον ίδιο τρόπο προσδιορίζουμε τα μέρη της εξίσωσης για την διεύθυνση y και z :

$$r \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + r f_y \quad (2-59)$$

Να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις αυτές είναι σε μερική διαφορική μορφή παρήχθησαν από την απευθείας εφαρμογή της φυσικής αρχής σε ένα απειροελάχιστα μικρό στοιχείο, επίσης καθώς πρόκειται για στοιχείο

κινούμενο με τη ροή οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τη μη συντηρητική μορφή τους. Είναι κλιμακωτές εξισώσεις και ονομάζονται εξισώσεις Navier-Stokes.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να γραφούν σε συντηρητική μορφή με τον ακόλουθο τρόπο, γράφοντας το αριστερό μέλος της κάθε εξίσωσης με τη βοήθεια του ορισμού της ουσιαστικής παραγώγου:

$$r \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + rf_z \quad (2-60)$$

είναι γνωστό ότι:

$$r \frac{Du}{Dt} = r \frac{\partial u}{\partial t} + rV \cdot \nabla u \quad (2-61)$$

Επίσης από την ταυτότητα για την απόκλιση μεγέθους επί ένα κλιμακωτό δείκτη, δίνεται:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial t} = r \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2-62)$$

Με αντικατάσταση η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$r \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(ru)}{\partial t} - u \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2-63)$$

Ο όρος στην αγκύλη είναι το αριστερό μέλος της εξίσωσης της συνέχειας και κατά συνέπεια είναι μηδέν. Άρα η προηγούμενη γίνεται:

$$r \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(ru)}{\partial t} + \nabla \cdot (ruV) \quad (2-64)$$

Άρα με αντικατάσταση δίνει:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial t} + \nabla \cdot (ruV) = -\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + pf_x \quad (2-65 \alpha)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial t} + \nabla \cdot (rvV) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + pf_y \quad (2-65 \beta)$$

$$\frac{\partial(rw)}{\partial t} + \nabla \cdot (rwV) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + pf_z \quad (2-65 \gamma)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι σε συντηρητική μορφή. Για τα νευτώνεια ρευστά για τα οποία οι διατμητικές τάσεις είναι ανάλογες με το ρυθμό μεταβολής της κλίσης της ταχύτητας τους, ο Stokes έδωσε τα εξής :

$$t_{xx} = I(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$t_{yy} = I(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$t_{zz} = I(\nabla \cdot V) + 2m \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$t_{yz} = t_{zy} = m \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$t_{xz} = t_{zx} = m \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$t_{xy} = t_{yx} = m \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2-66)$$

Το σύνολο της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, στηρίζεται στις βασικές (κυρίαρχες) εξισώσεις της ρευστοδυναμικής - εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας. Είναι οι μαθηματικές εκφράσεις των τριών θεμελιωδών φυσικών αρχών πάνω στις οποίες στηρίζεται όλη η Ρευστοδυναμική:

αρχή διατήρησης ενέργειας

δεύτερος νόμος του Newton $F = m a$

αρχή διατήρησης μάζας.

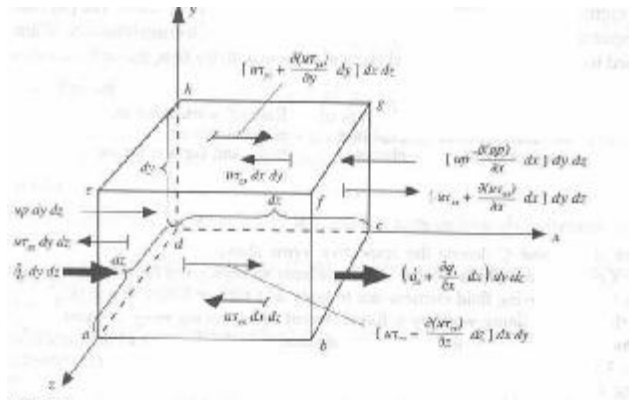
2.3.4 Η εξίσωση ενέργειας

Η φυσική αρχή που θα χρησιμοποιηθεί εδώ είναι η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Επίσης εδώ θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο μοντέλο ροής όπως με την εξίσωση ορμής, δηλαδή ένα απειροελάχιστα μικρό στοιχείο ρευστού που κινείται με τη ροή. Η φυσική αυτή αρχή δεν είναι τίποτα παραπάνω από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο. Με εφαρμογή στο μοντέλο ροής που υπάρχει δίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \text{ρυθμός} && \text{Καθαρή} && \text{ρυθμός του παραγόμενου} \\
 & \text{μεταβολής} && \text{εκροή} && \\
 & \text{της ενέργειας} & = & \text{Θερμότητας} & \cdot & \text{έργου οφειλόμενου σε} \\
 & \text{μέσα στο} & & \text{Από το} & & \text{επιφανειακές και} \\
 & \text{στοιχείο} & & \text{στοιχείο} & & \text{σωματιδιακές} \\
 & & & & & \text{Δυνάμεις}
 \end{aligned}$$

ή

$$A = B + C$$



Σχήμα 2-3 Η μεταβολή της ενέργειας σε ένα απειροελάχιστα κινούμενο ρευστό στοιχείο

Ο υπολογισμός αρχικά του C , δίνει μια έκφραση για τον ρυθμό παραγωγής έργου του κινούμενου ρευστού στοιχείου που οφείλεται σε επιφανειακές και σωματιδιακές δυνάμεις. Αποδεικνύεται ότι ο ρυθμός παραγωγής έργου από μια δύναμη που ασκείται σε κινούμενο σώμα ισούται με το γινόμενο της δύναμης και της συνιστώσας της ταχύτητας στην διεύθυνση της δύναμης. Άρα ο ρυθμός παραγωγής έργου της σωματιδιακής δύναμης στο κινούμενο ρευστό στοιχείο με ταχύτητα V είναι:

$$p \cdot f \cdot v(dx dy dz) \quad (2-67)$$

Με αντιστοίχιση στις επιφανειακές δυνάμεις, εξετάζονται αυτές που ασκούνται μόνο κατά τη διεύθυνση x . Ο ρυθμός του παραγόμενου έργου στο κινούμενο στοιχείο από τις πιεστικές και διατμητικές δυνάμεις στη διεύθυνση x , που φαίνονται στο σχήμα είναι το γινόμενο της x συνιστώσας της ταχύτητας επί τις δυνάμεις. Στην επιφάνεια $abcd$ ο ρυθμός παραγωγής έργου από την $\tau_{xy} dx dz$ είναι $u_{yx} dx dz$, με ανάλογες εκφράσεις για τις υπόλοιπες επιφάνειες. Για τον υπολογισμό του ρυθμού παραγωγής καθαρού έργου για το ρευστό στοιχείο από τις επιφανειακές δυνάμεις, να σημειωθεί ότι οι θετικές δυνάμεις για το x άξονα παράγουν έργο ενώ οι αρνητικές καταναλώνουν έργο. Κατά συνέπεια συγκρίνοντας τις πιεστικές δυνάμεις στην επιφάνεια $adhe$ και $bcgf$ ο ρυθμός παραγωγής καθαρού έργου είναι για τη διεύθυνση x :

$$\left[ur - \left(ur + \frac{\eta(ur)}{\eta_x} dx \right) \right] dydz = -\frac{\eta(ur)}{\eta_x} dx dy dz \quad (2-68)$$

Ομοίως ο ρυθμός παραγωγής καθαρού έργου που λαμβάνεται από τις διατμητικές τάσεις στη διεύθυνση x για τις επιφάνειες abcd και efgh είναι:

$$\left[\left(ut_{yx} + \frac{\eta(ut_{yx})}{\eta_y} dy \right) - ut_{yx} \right] dx dz = \frac{\eta(ut_{yx})}{\eta_y} dx dy dz \quad (2-69)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη όλες τις επιφανειακές δυνάμεις, ο ρυθμός παραγωγής καθαρού έργου που οφείλεται σ' αυτές τις δυνάμεις είναι:

$$\left[-\frac{\eta(up)}{\eta_x} + \frac{\eta(ut_{xx})}{\eta_x} + \frac{\eta(ut_{yx})}{\eta_y} + \frac{\eta(ut_{zx})}{\eta_z} \right] dx dy dz \quad (2-70)$$

Η παραπάνω έκφραση αφορά μόνο την διεύθυνση x. Όταν οι επιφανειακές δυνάμεις για τις διευθύνσεις y και z περιληφθούν, παράγονται ανάλογες εκφράσεις. Συνολικά ο ρυθμός παραγωγής καθαρού έργου στο ρευστό στοιχείο είναι το άθροισμα των συνεισφορών των επιφανειακών δυνάμεων των αξόνων x, y και z καθώς και η συνεισφορά των σωματιδιακών δυνάμεων. Οπότε το C από την αρχική εξίσωση ισούται με:

C=

$$= \left[\begin{array}{l} -\left(\frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho)}{\partial z} \right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \\ \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \end{array} \right] dx dy dz + \rho f_v dx dy dz \quad (2-71)$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι τρεις πρώτοι όροι στην παρένθεση είναι το

$$\nabla(\rho v).$$

Η επεξεργασία του όρου B, δίδει την καθαρή εκροή θερμότητας από το στοιχείο. Αυτή η θερμική ροή οφείλεται κατά πρώτο λόγο στην ογκομετρική θερμότητα όπως απορρόφηση ή εκπομπή ακτινοβολίας και κατά δεύτερο λόγο στη μεταφορά θερμότητας από την επιφάνεια λόγω της κλίσης της θερμοκρασίας (θερμική αγωγή). Ορίζεται σαν \dot{q} ο ρυθμός της ογκομετρικής θερμικής άθροισης ανά μονάδα μάζας. Σημειωτέον η μάζα του ρευστού στοιχείου είναι $\rho dx dy dz$, άρα δίνεται:

$$\text{Ογκομετρική θερμότητα στοιχείου} = \dot{q} \cdot \rho dx dy dz \quad (2-72)$$

Στο Σχήμα 2-3 η θερμότητα που μεταφέρεται με αγωγή στο ρευστό στοιχείο από την επιφάνεια adhe είναι $\dot{q}_x dy dz$, όπου \dot{q}_x είναι η μεταφερόμενη θερμότητα στη διεύθυνση x, ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, με αγωγή. Η θερμότητα που μεταφέρεται εκτός του στοιχείου μέσω της επιφάνειας bcgf είναι:

$$\left[\dot{q}_x + \frac{\nabla \dot{q}_x}{\nabla x} dx \right] dydz \quad (2-73)$$

Άρα η καθαρή μεταφορά θερμότητας στη διεύθυνση x στο ρευστό στοιχείο λόγω αγωγής είναι:

$$\left[\dot{q}_x - \left(\dot{q}_x + \frac{\nabla \dot{q}_x}{\nabla x} dx \right) \right] dydz = - \frac{\nabla \dot{q}_x}{\nabla x} dx dydz \quad (2-74)$$

Υπολογίζοντας και τη μεταφορά θερμότητας στις διευθύνσεις y και z μέσω των επιφανειών δίνεται:

$$\text{θερμότητα στοιχείου λόγω αγωγής} = - \left(\frac{\nabla \dot{q}_x}{\nabla x} + \frac{\nabla \dot{q}_y}{\nabla y} + \frac{\nabla \dot{q}_z}{\nabla z} \right) dx dy dz \quad (2-75)$$

Ο όρος B είναι το άθροισμα της ογκομετρικής θερμότητας του στοιχείου και της θερμότητας λόγω αγωγής:

$$B \equiv \left[p \dot{q} - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (2-76)$$

Η ροή θερμότητας λόγω αγωγής, από το νόμο της θερμικής αγωγής του Fourier είναι ανάλογη με την τοπική κλίση της θερμοκρασίας:

$$\dot{q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dot{q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \dot{q}_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2-77)$$

όπου k η θερμική αγωγιμότητα. Άρα ο όρος B γράφεται ως εξής:

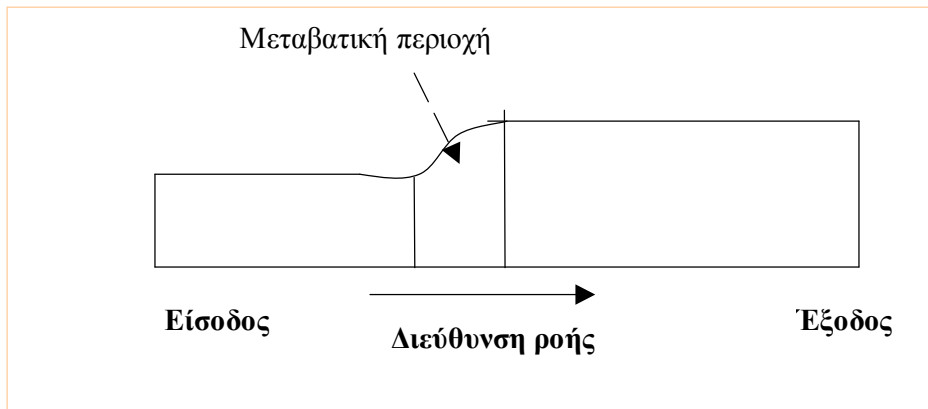
$$B \equiv \left[p \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (2-78)$$

Τέλος ο όρος A δηλώνει το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του ρευστού στοιχείου. Στην περίπτωση αυτή από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο περιγράφει τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας σε συνάρτηση του παραγόμενου έργου και της προστιθέμενης ή αφαιρούμενης θερμότητας. Ως εκ τούτου το ρευστό στοιχείο έχει δυο συνεισφορές στην εσωτερική του ενέργεια:

Κεφάλαιο 3^ο

ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ANSYS

Μελέτη: Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιεί τη ροή του αέρα σε ένα δισδιάστατο αγωγό. Αρχικά εισάγεται μία αυθαίρετη ταχύτητα εισόδου, για να προσομοιώσει τη *στρωτή* ροή, όταν ο αριθμός Reynolds ισούται με 85. Εφ' όσον έχει επιτευχθεί η λύση του προβλήματος, η ταχύτητα εισόδου μεταβάλλεται, και μια νέα λύση επιτυγχάνεται από την επανεκκίνηση της προηγούμενης λύσης. Στην επόμενη φάση της λύσης, μεγαλώνουμε την περιοχή της ροής του ρευστού και πραγματοποιούμε τη λύση για *τυρβώδη* ροή στον αγωγό (βλ. Σχ. 3-1)



Σχ. 3-1 Ροή ρευστού σε σωλήνα

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί το υπολογιστικό πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων ANSYS με τύπο στοιχείων Fluid 141 και θα πραγματοποιηθούν τρεις λύσεις:

Στρωτή ροή του αέρα με αριθμό Reynolds ίσο με 85.

Στρωτή ροή του αέρα με μεγαλύτερη ταχύτητα εισόδου

Τυρβώδη ροή του αέρα με αριθμό Reynolds ίσο με 255.000

Σε όλες τις περιπτώσεις, μια ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας εφαρμόζεται στην είσοδο του αγωγού το οποίο σημαίνει ότι η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας στην είσοδο είναι μηδέν. Συνθήκες μηδενικής ολίσθησης εφαρμόζονται κατά μήκος των τοιχωμάτων. Το ρευστό θεωρείται ότι είναι *ασυμπίεστο* και οι ιδιότητες του θεωρούνται σταθερές. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μόνο η σχετική τιμή της πίεσης είναι σημαντική, και στην έξοδο του αγωγού εφαρμόζεται μηδενική σχετική πίεση.

Για την αρχική ανάλυση, το ρευστό θεωρείται ότι είναι στην στρωτή περιοχή το

οποίο μπορεί να επαλυθευτεί υπολογίζοντας τον αριθμό Reynolds του ρευστού από τον τύπο⁴

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (3-1)$$

όπου ρ, V, μ παριστάνουν την πυκνότητα, την ταχύτητα εισόδου και το ιξώδες του ρευστού, ενώ d και h είναι η υδραυλική διάμετρος του αγωγού αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι για δισδιάστατη γεωμετρία η υδραυλική διάμετρος είναι διπλάσια του ύψους εισόδου.

Κατόπιν, η ταχύτητα εισόδου αυξάνεται με ένα συντελεστή δέκα και η επίλυση του προβλήματος αρχίζει από την προηγούμενη λύση. Για εσωτερική ροή, η μετάβαση στην τυρβώδη ροή γίνεται όταν ο αριθμό Reynolds παίρνει τιμές μεταξύ 2000-3000. Οπότε για την τρίτη περίπτωση ροής του αέρα σε αγωγό, η ροή θα είναι *τυρβώδη*. Για την τυρβώδη ανάλυση, θα εφαρμοσθεί μια επέκταση στον αγωγό έτσι ώστε να αναπτυχθεί πλήρως η τυρβώδη ροή. Το όνομα του προγράμματος πρέπει να μεταβληθεί πριν την επίλυση έτσι ώστε το αρχείο των αποτελεσμάτων του προγράμματος FLOTRAN δεν θα χρησιμοποιηθεί όταν η λύση αρχίσει από την αρχή.

Τα δεδομένα του προβλήματος περιγράφονται στον Πίνακα Ι.

Περίληψη των βημάτων επίλυσης του προβλήματος με το ANSYS

A. Preprocessor/Προεπεξεργαστής(Laminar Analysis/Στρωτή ροή)

⁴ V. L. Streeter and E. B. Wylie, Fluid Mechanics, 7th edition, McGraw Hill Book Company, NY (1979)

Επιλογές à FLOTRAN CFD (Computational Fluid Dynamics)

Ορίζουμε τον τύπο των στοιχείων à FLUID141

Δημιουργούμε ένα παραλληλόγραμμο για την περιοχή εισόδου και εξόδου και δημιουργούμε επίσης και τη μεταβατική περιοχή μεταξύ των παραλληλογράμμων (Σημ. για την κατασκευή της εφαπτομένης ακολουθούμε τα εξής στάδια preproc.à modelingà createà linesà tan to 2 lines)

Κατασκευάζουμε το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες (MM à Preproc. à Loads à Apply à Fluid/CDF à velocity or pressure on lines)

Πίνακα I:

Διαστάσεις και Ιδιότητες	Τιμές των σταθερών	Τιμές των σταθερών στο σύστημα BIN (Bl,in)	Τιμές των σταθερών στο σύστημα MKS (m,Kg,sec)
Μήκος εισόδου	4 inches		$10.16 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Ύψος εισόδου	1 inch		$2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Μεταβατικό μήκος	2 inches		$5.08 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Ύψος εξόδου	2.5 inches		$6.35 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Αρχικό μήκος εξόδου	4 inches		$10.16 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Προσθηθένο μήκος εξόδου	15 inches		$38.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Πυκνότητα του αέρα ⁵	$1.21 \cdot 10^{-7} \text{ lb}_f \text{ s}^2/\text{in}^4$		$0.129 \text{ Kg}/\text{m}^3$
Ιξώδες του αέρα ⁶	$2.642 \cdot 10^{-9} \text{ lb}_f \text{ s}/\text{in}^2$		$1.92 \cdot 10^{-5} \text{ Kg}/\text{s m}$
Ταχύτητα εισόδου	1 in/sec		$2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m}/\text{s}$
Πίεση εξόδου	0 psi		0 Pa

B. Επίλυση του προβλήματος – Solution για Στρωτή Ποή (Laminar Analysis)

Εισάγουμε τις ιδιότητες του ρευστού

Εισάγουμε ρυθμιστές επίλυσης

⁵ V. Streeter and E. Wylie, Fluid Mechanics, 7th edition, McGraw Hill Book Co., NY (1979)

⁶ $1 \text{ lb}_m = 0.4536 \text{ Kg}$, $1 \text{ lb}_f = 4.448 \text{ N}$, $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$, $1 \text{ psi} = \text{Pa} (\text{N}/\text{m}^2)$

Μεταβάλλουμε τις συνθήκες αναφοράς

Εκτελούμε την εντολή FLOTRAN για την επίλυση του προβλήματος

Γ. Μεταεπεξεργαστής (Postprocessor-Laminar Analysis)

Διαβάζουμε τα αποτελέσματα από τον μεταεπεξεργαστή

Σχεδιάζουμε τα διανύσματα των ταχυτήτων

Δ. Λύση (Στρωτή ανάλυση με μεταβολή της ταχύτητας εισόδου)

Αυξάνουμε την ταχύτητα εισόδου

Επιλύουμε το πρόβλημα από την αρχή

Ε. Προεπεξεργαστής (Turbulent Analysis-Τυρβώδη Ανάλυσης)

Διαγράφουμε τις οριακές συνθήκες για τη πίεση

Κατασκευάζουμε επί πλέον περιοχή εξόδου

Καθιερώνουμε υποδιαιρέσεις για το νέο παραλληλόγραμμο και κατασκευάζουμε το πλέγμα

Εφαρμόζουμε οριακές συνθήκες στη νέα περιοχή και μεταβάλλουμε την ταχύτητα εισόδου

ΣΤ Λύση για Τυρβώδη ροή (Turbulence flow)

Μεταβάλλουμε τις επιλογές της λύσης FLOTRAN και τους ρυθμιστές επίλυσης

Μεταβάλλουμε το όνομα της εργασίας και προβαίνουμε στην επίλυση του προβλήματος

Η. Μεταεπεξεργαστής (Τυρβώδη ροή)

Διαβάζουμε τα νέα αποτελέσματα και σχεδιάζουμε τα διανύσματα των ταχυτήτων.

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα της ταχύτητας στην έξοδο.

Κατασκευάζουμε τις καμπύλες ίσης πίεσης.

Έξοδος από το ANSYS.

Διαλογική λύση βήμα-βήμα

Προεργασία/ Preprocessing για στρωτή ροή

Επιλέγουμε το πρόγραμμα FLOTRAN CFD για την επίλυση του προβλήματος με την h-μέθοδο⁷

Επιλέγουμε τον τύπο των Πεπερασμένων Στοιχείων τα οποία είναι FLUID141 2-D (δισδιάστατα)⁸

Δημιουργούμε το πρότυπο με τη βοήθεια των εντολών

Preprocessing-> Modeling->Create->Areas Rectangle->By dimensions

Περίπτωση 1: Επίλυση του προβλήματος για Στρωτή ροή

Η πυκνότητα και το ιξώδες του αέρα δίδονται από τον κάτωθι πίνακα

Πυκνότητα του αέρα	$1.21 \times 10^{-7} \text{ lb}_f \text{ s}^2/\text{in}^4$	$1.293 \text{ Kg}/\text{m}^3$
Ιξώδες του αέρα ⁹	$2.642 \times 10^{-9} \text{ lb}_f \text{ s}/\text{in}^2$	$1.92 \cdot 10^{-5} \text{ Kg}/\text{s m}$

I. Στρωτή Ροή

(α) Ταχύτητα εισόδου του ρευστού $V_x = 2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$

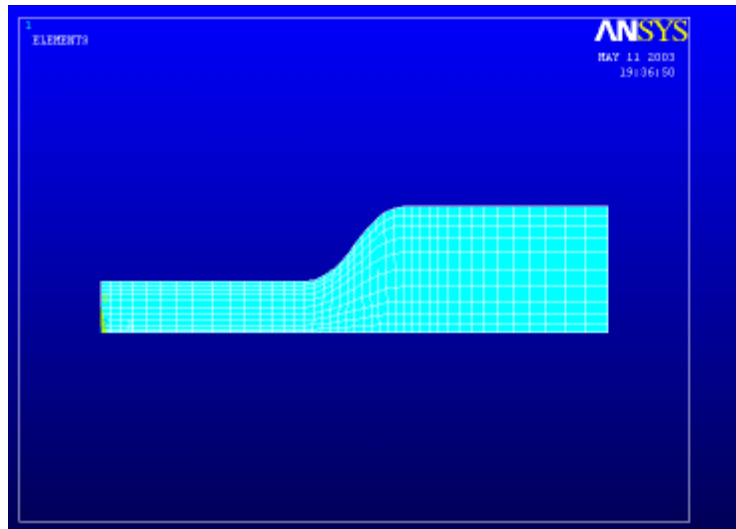
Η γεωμετρία και το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος δείχνονται στο Σχ. 3-2. Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούμε το ANSYS5.7. Το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων έγινε με τα δισδιάστατα στοιχεία Fluid141. Η περιγραφή των στοιχείων αυτών δίδετε στα εγχειρίδια του ANSYS. Το πλέγμα περιλαμβάνει 420 στοιχεία Fluid141 με 473 κόμβους. Η ταχύτητα εισόδου του ρευστού είναι $1 \text{ in}/\text{sec}$ ή $2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ και μηδενικές συνιστώσες της ταχύτητας στα τοιχώματα του

⁷ ANSYS reference manual

⁸ Σχετικά με την περιγραφή των στοιχείων FLUID141 μπορούμε να συμβουλευτούμε τα εγχειρίδια του ANSYS που περιγράφουν τη βιβλιοθήκη των στοιχείων

⁹ $1 \text{ lb}_f = 4.448 \text{ N}$, $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$, $1 \text{ psi} = 6894.76 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$.

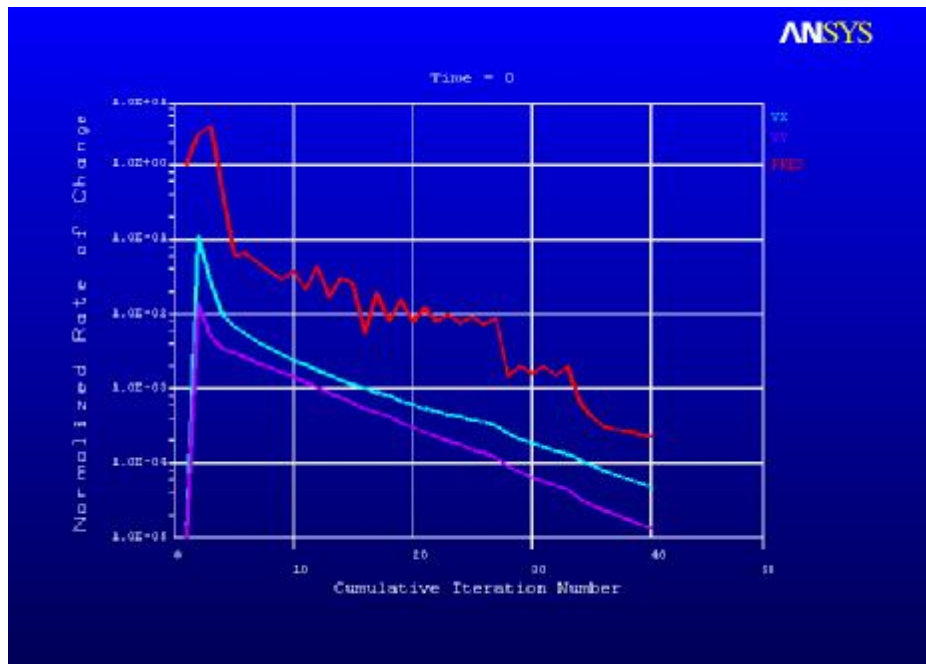
αγωγού. Η πίεση θεωρείται μηδενική στην έξοδο του αγωγού. Για την επίλυση του προβλήματος με στρωτή ροή, δηλ. μικρές τιμές του αριθμού Reynolds, πρέπει αρχικά να εισάγουμε τις ιδιότητες του αέρα, όπως έχουν περιγραφεί στον ανωτέρω πίνακα. Για τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί κανείς εύκολα να υπολογίσει τον αριθμό Reynolds, οποίος είναι περίπου 80. Ο έλεγχος εκτέλεσης του προβλήματος περιλαμβάνει τον βηματών που απαιτούνται για τον τερματισμό της ανάλυσης και τα κριτήρια σύγκλισης. Στην προκειμένη περίπτωση ο αριθμός των βημάτων καθορίζεται στα 40 και το κριτήριο της πίεσης και της ενέργειας είναι αμφότερα 10^{-8} . Το κριτήριο της ταχύτητας είναι 0.01 m/sec. Η συνθήκες του περιβάλλοντος είναι 101 KPa και η θερμοκρασία 25°C. Εφ' όσον το ANSYS θα επιλύσει το πρόγραμμα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων



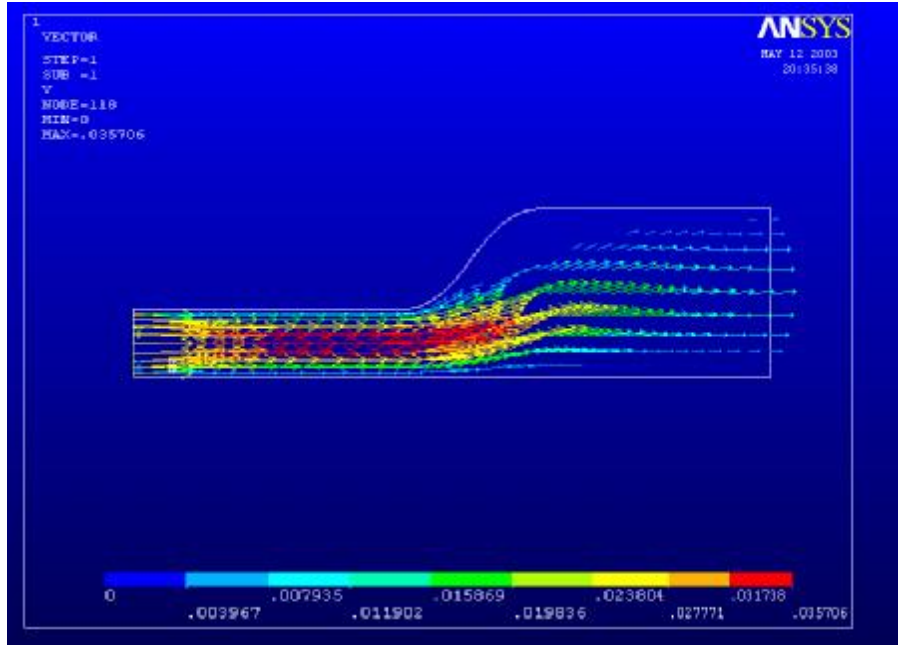
Σχ. 3-2 Το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων (στρωτή ροή)

Αριθμητικά αποτελέσματα στρωτής ροής

Το *διάγραμμα σύγκλισης* της λύσης φαίνεται στο Σχ. 3-3, το οποίο περιλαμβάνει τα κριτήρια της ταχύτητας και της πίεσης όπως έχουν προκαθοριστεί ανωτέρω. Η σύγκλιση επιτυγχάνεται σχετικά γρήγορα. Ο κατακόρυφος άξονας παριστάνει το μέτρο μεταβολής της ταχύτητα ή της πίεσης σε συνάρτηση του συνολικού αριθμού των βημάτων.

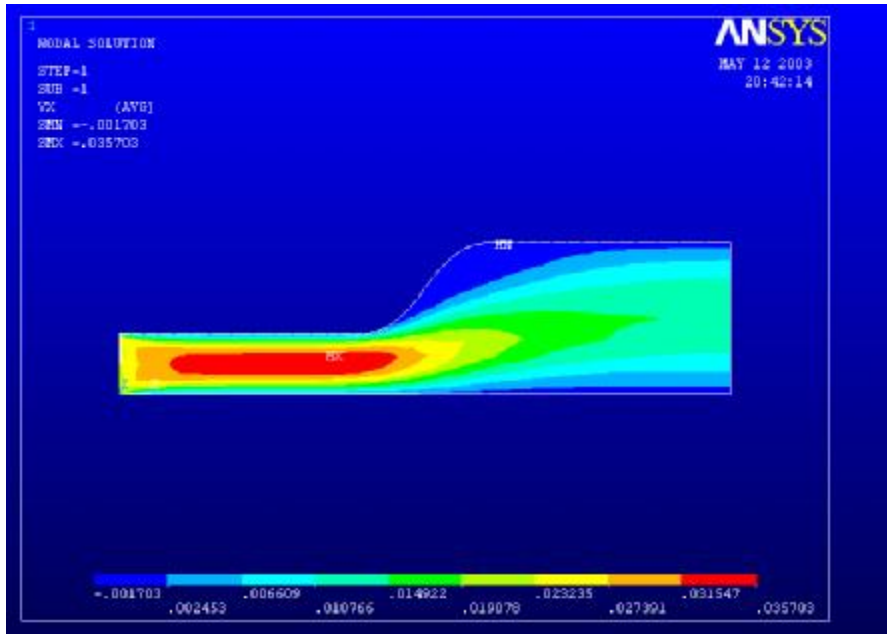


Σχ. 3-3 Διάγραμμα σύγκλισης της λύσης του προβλήματος ροής(στρωτή ροή)

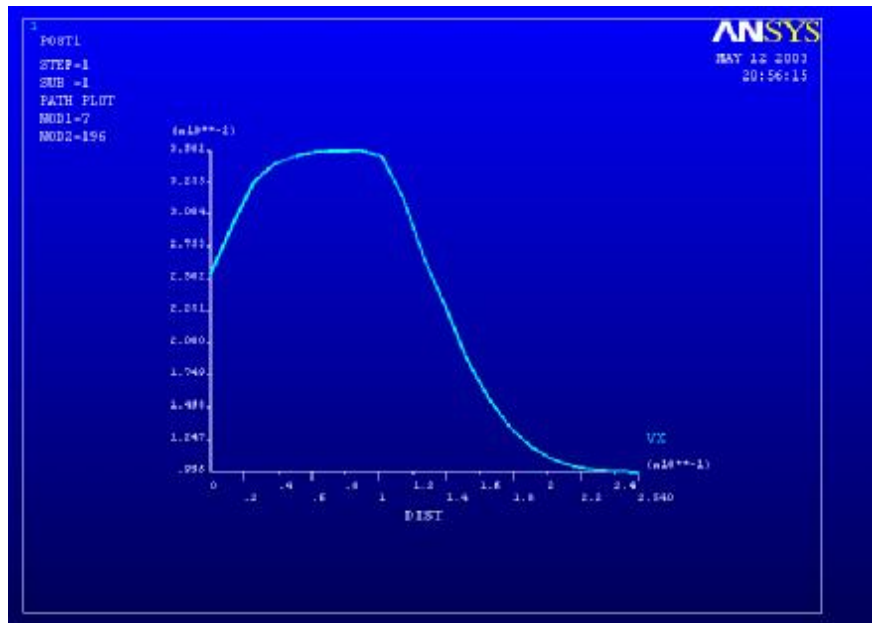


Σχ. 3-4: Περιγραφή του προφίλ της ταχύτητας μέσα στον αγωγό για στρωτή ροή με $V_{εις} = 2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ (στρωτή ροή).

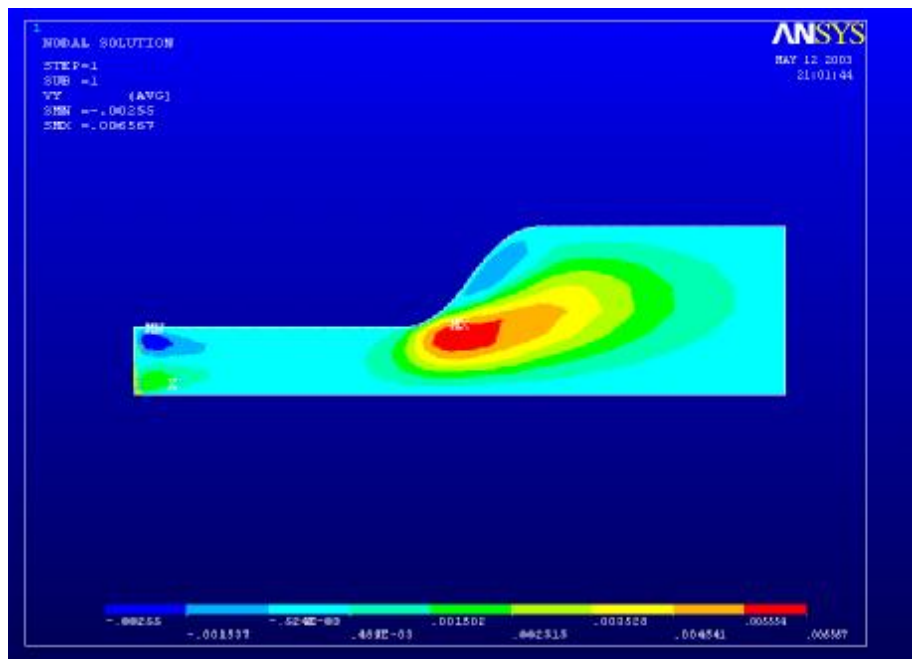
Το Σχ. 3-4 δείχνει την διανυσματική x-συνιστώσα της ταχύτητας. Παρατηρούμε ότι κοντά στα τοιχώματα του αγωγού το ρευστό έχει μηδενική τιμή λόγω των οριακών συνθηκών, και έχει μέγιστη τιμή $3.5706 \cdot 10^{-2} \text{ m/sec}$ στην κεντρική περιοχή του αγωγού. Η μέγιστη ταχύτητα αναπτύσσεται λίγο μετά από την είσοδο του αγωγού μέχρι την μεταβατική περιοχή και κατόπιν μειώνεται προς μικρές τιμές. Η διανυσματική συνιστώσα της ταχύτητας ορίζεται από την σχέση $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. Οι κομβικές τιμές της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση x δείχνονται στο Σχ. 3-5α. Από το σχήμα αυτό φαίνεται καθαρά η περιοχή της μέγιστης ταχύτητας V_x . Το Σχ. 3-5β δείχνει την κατανομή της ταχύτητας κατά μήκος της ευθείας AB, η οποία δηλώνει την απόσταση εισόδου-εξόδου περίπου στο μέσο του υδραυλικού ύψους.



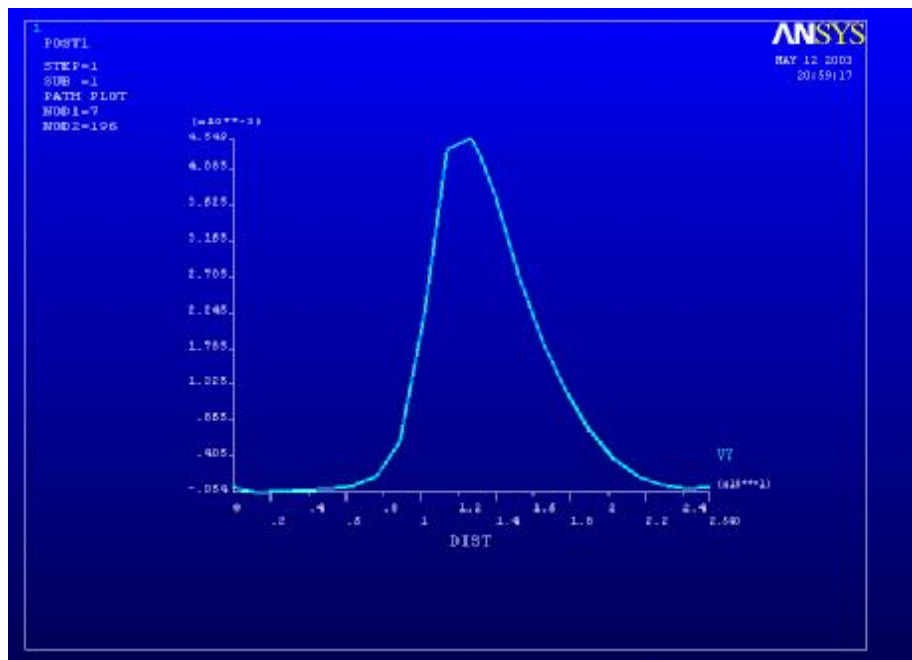
Σχ. 3-5α Κατανομή της κομβικής συνιστώσας της ταχύτητας στον αγωγό ($V_{εις}=2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$) (στρωτή ροή)..



Σχ. 3-5β. Κατανομή της V_x κατά μήκος της ευθείας που συνδέει την είσοδο με την έξοδο του αγωγού στο μισό του ύψους ($V_{εις}=2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$) (στρωτή ροή).

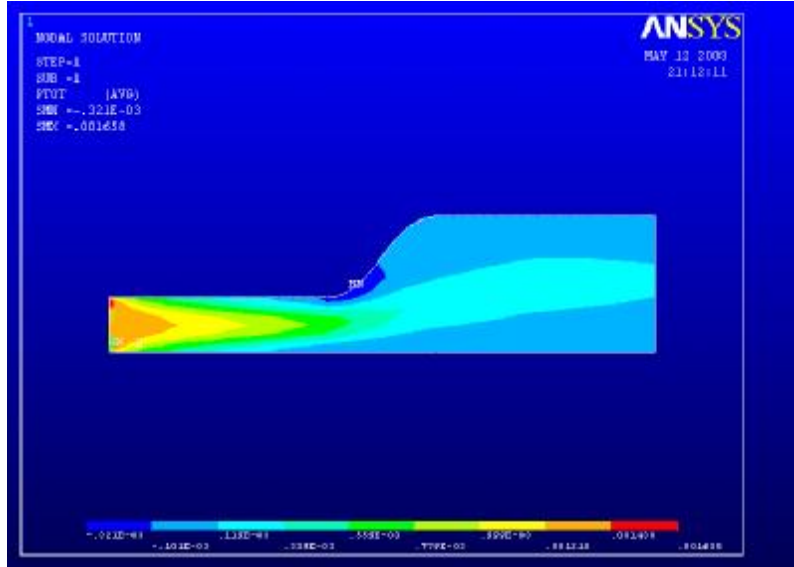


Σχ 3-6α. Κομβική κατανομή της V_y ($V_{\text{εισ}}=2.54 \cdot 10^2 \text{ m/s}$) (στρωτή ροή).

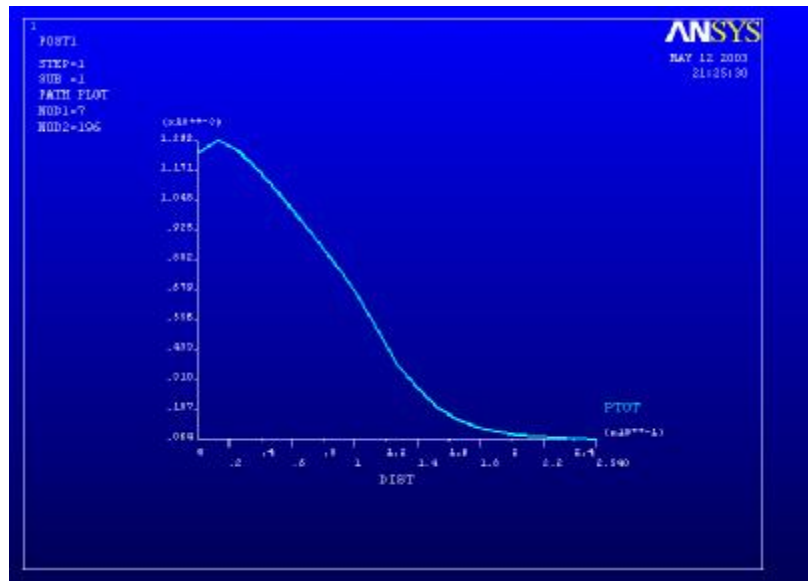


Σχ. 3-6β Κατανομή της V_y στην ίδια ευθεία με το αποτέλεσμα του Σχ. 6^α για στρωτή ροή ($V_{εισ} = 2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$)

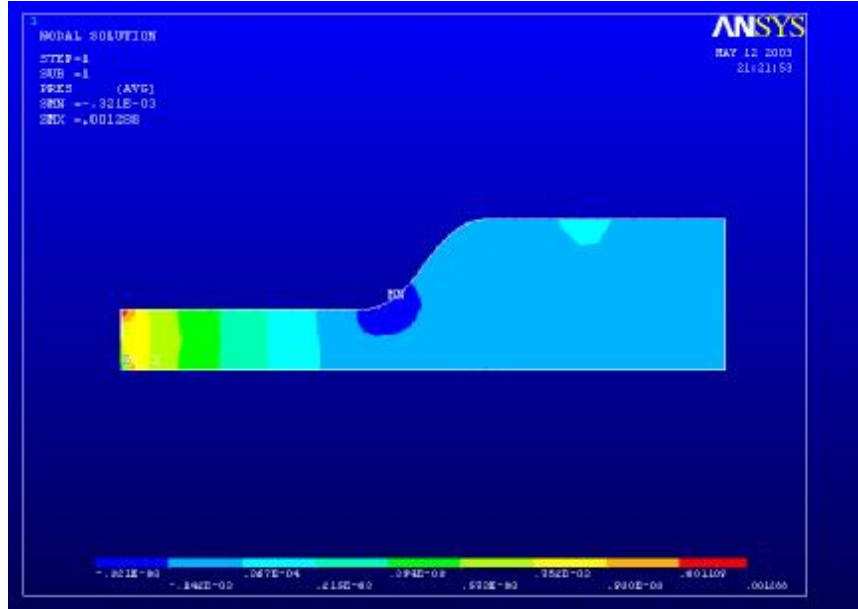
Η κατανομή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού δίδετε από το Σχ. 7.



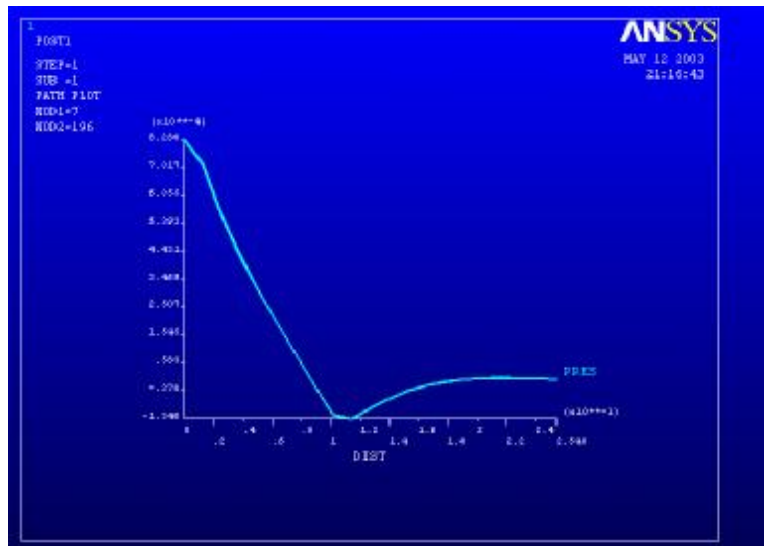
Σχ. 3-7α. Κομβικές τιμές της συνολικής πίεσης μέσα στον αγωγό (στρωτή ροή).



Σχ. 3-7β Κατανομή της ολικής πίεσης κατά μήκος της γραμμής ροής AB (στρωτή ροή).



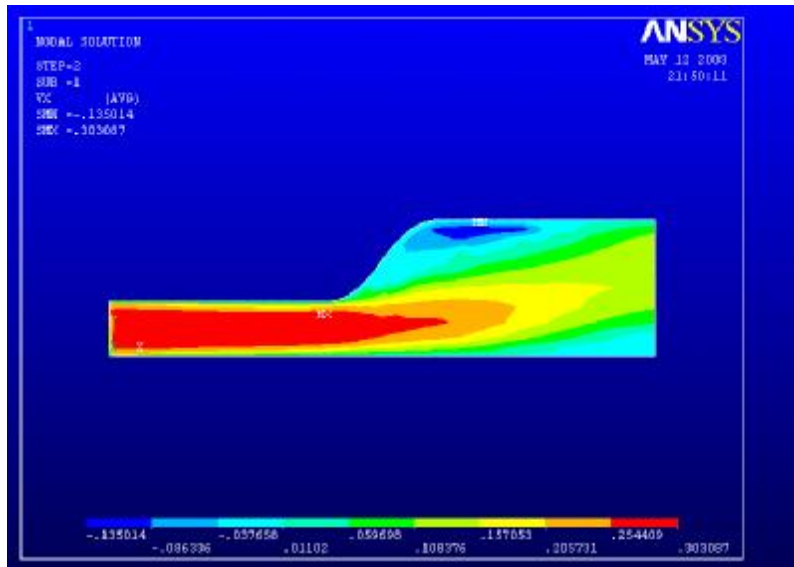
Σχ. 3-8α Κατανομή της μέσης πίεσης (στρωτή ροή).



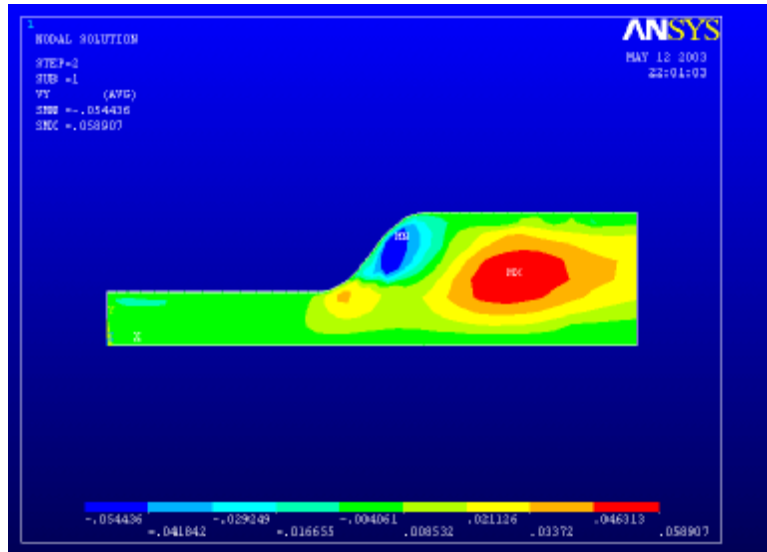
Σχ. 3-8β Κατανομή της μέσης πίεσης κατά μήκος της ροικής γραμμής AB (στρωτή ροή).

(β) Ταχύτητα εισόδου του ρευστού δεκαπλάσια από την προηγούμενη περίπτωση (δηλ. $V_x=2.54 \cdot 10^{-1}$ m/sec).

Η αύξηση της ταχύτητας προφανώς θα αλλάξει τον αριθμό Reynolds κατά δέκα φορές καθ' όσον δεκαπλασιάζεται η ταχύτητα του ρευστού, δηλ. $Re=800$, το οποίο δηλώνει ότι η ροή είναι ακόμη στρωτή. Το Σχ. 9 δείχνει την κατανομή της ταχύτητας V_x εντός του αγωγού για $V_{\text{εισ}}=0.254$ m/s. Προφανώς το σχήμα αυτό έχει την ίδια μορφή με το Σχ. 3-5α, με τη διαφορά ότι η μέγιστη ταχύτητα έχει τιμή 0.303087 m/sec, δηλ. δεκαπλάσια της αντίστοιχης του Σχ. 3-5α. Η όλη συμπεριφορά της V_x είναι ως και προηγουμένως διότι η ροή παραμένει στρωτή. Η κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας φαίνεται στο Σχ. 10. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας μετατοπίζεται από την μεταβατική περιοχή προς την περιοχή εξόδου του ρευστού.

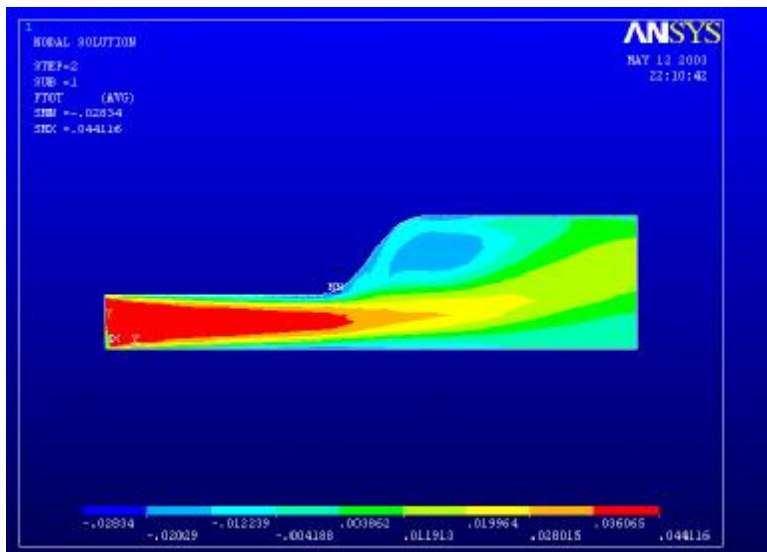


Σχ. 3-9: V_x κατανομή για $V_{\text{εισ}} = 0.254$ m/sec (στρωτή ροή)



Σχ. 3-10 Κατανομή της V_y για $V_{εισ} = 0.254 \text{ m/sec}$ (στρωτή ροή)

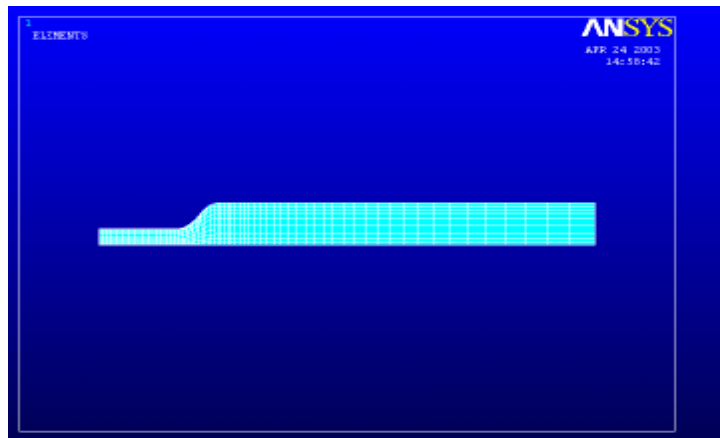
Επίσης είναι φανερό από το σχήμα ότι υπάρχει μια μικρή περιοχή μέσα στην μεταβατική περιοχή όπου η πίεση αλλάζει πρόσημο, το οποίο δηλώνει ότι σ' αυτή την περιοχή υπάρχει μεγάλη πιθανότητα για στροβιλισμό (βλ. Σχ. 3-11).



Σχ. 3-11 Κατανομή της πίεσης για μεγαλύτερο αριθμό Reynolds (στρωτή ροή).

II Τυρβώδη ροή

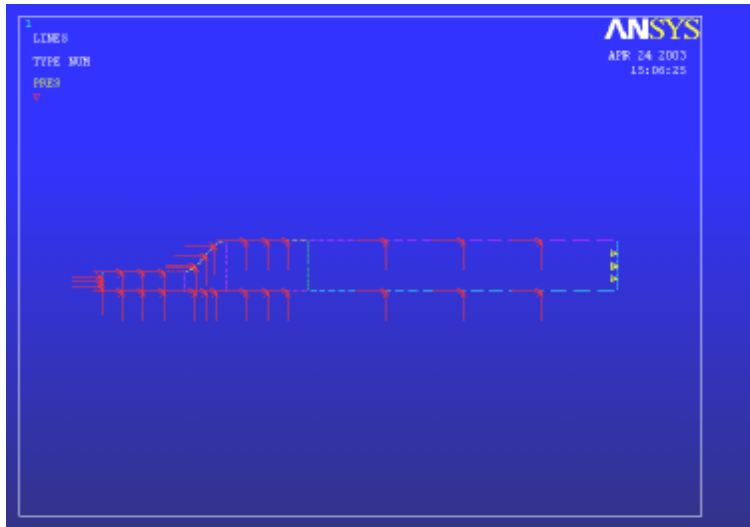
Τα αποτελέσματα για μικρότερες τιμές του Re δείχνουν ότι η περιοχή επανακυκλοφορίας έχει υπερβεί την έξοδο. Εάν επιθυμούμε να επιτρέψουμε στην ροή να αναπτυχθεί πλήρως πριν να φθάσει στην έξοδο πρέπει να της δώσουμε περισσότερο διαθέσιμο χώρο. Η διαδικασία εφαρμογής της τυρβώδους ροής ακολουθεί εκείνη της στρωτής ροής. Διαγράφουμε τις οριακές συνθήκες που αναφέρονται στην πίεση και προσθέτουμε επιπλέον μήκος 15 inches (38,1 cm) στην περιοχή εξόδου. Δημιουργούμε ένα νέο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο συγχωνεύουμε με την υπάρχουσα περιοχή εξόδου. Αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή `preprocessor->numbering controls-> merge items`. Κατασκευάζουμε το νέο πλέγμα το οποίο δείχνεται στο Σχ. 3-12, το οποίο αποτελείται από 620 πεπερασμένα στοιχεία (Fluid 141¹⁰).



Σχ. 3-12 Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων για το νέο πρόβλημα με την τροποποιημένη περιοχή εξόδου για τη μελέτη της τυρβώδους ροής.

¹⁰ ANSYS 5.7 Manual

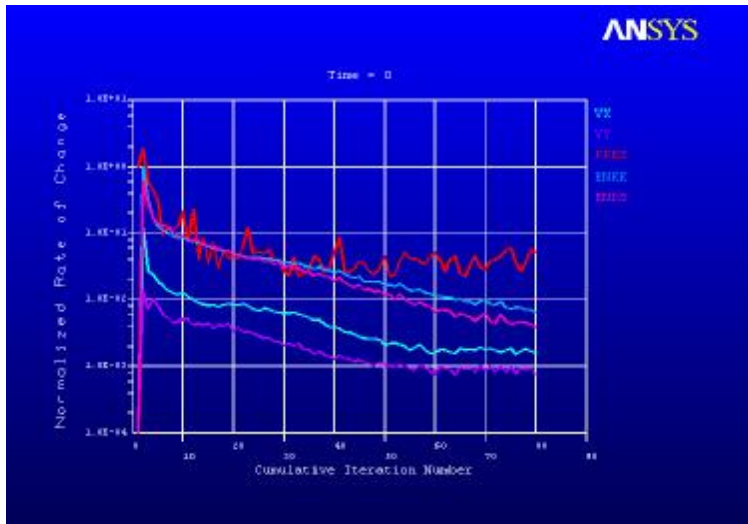
Εφαρμόζονται οι νέες οριακές συνθήκες, δηλ. μηδενικές ταχύτητες στις x και y διευθύνσεις στα τοιχώματα του αγωγού και την κεντρική γραμμή συμμετρίας καθώς και μηδενική πίεση στην έξοδο του ρευστού. Η αξονική ταχύτητα εισόδου στην περίπτωση αυτή αυξάνεται στις 3000 in/sec (76.2 m/sec). Οι νέες οριακές συνθήκες του προβλήματος φαίνονται στο Σχ. 3-13. Μεταβάλλουμε την ροή από στρωτή σε τυρβώδη με τη βοήθεια της εντολής `soln->flotran set up->soln options`. Η ροή θεωρείται *σταθερή* και *αδιαβατική*, ενώ το ρευστό είναι *ασυμπίεστο*. Αυξανόμενη της τύρβης σαν αποτέλεσμα



Σχ. 3-13 *Νέες οριακές συνθήκες για τυρβώδη ροή.*

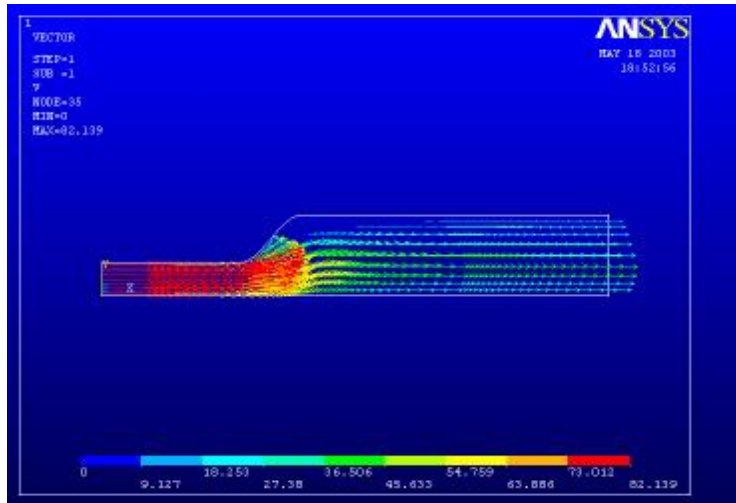
του μικρού ιξώδους, οι μη γραμμικές επιδράσεις είναι έντονες και απαιτούνται περισσότερα βήματα για ακριβή λύση. Από 40 βήματα που απαιτούνται για την στρωτή ροή τα αυξάνουμε στο διπλάσιο αριθμό μέσω της εντολής `execution ctrl`. Στο σημείο αυτό αλλάζουμε το όνομα του αρχείου σε `turb.db` για να αποθηκευτούν τα αποτελέσματα σε νέο αρχείο διαφορετικό απ' εκείνο της στρωτής ροής. Η σύγκλιση της λύσης δεικνύετε στο Σχ. 3-14. Η κατανομή της διανυσματικής ταχύτητας στην αξονική διεύθυνση για τυρβώδη ροή

δείχνετε στο Σχ. 3-18. Η μέγιστη τιμή της διανυσματικής ταχύτητας, δηλ. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$) αναπτύσσεται στην περιοχή εισόδου και μέσα στην μεταβατική περιοχή του αγωγού. Στην περιοχή εξόδου η ταχύτητα ελαττώνεται περίπου εννέα φορές από την μέγιστη, η οποία είναι περίπου ίση με την ταχύτητα εισόδου.

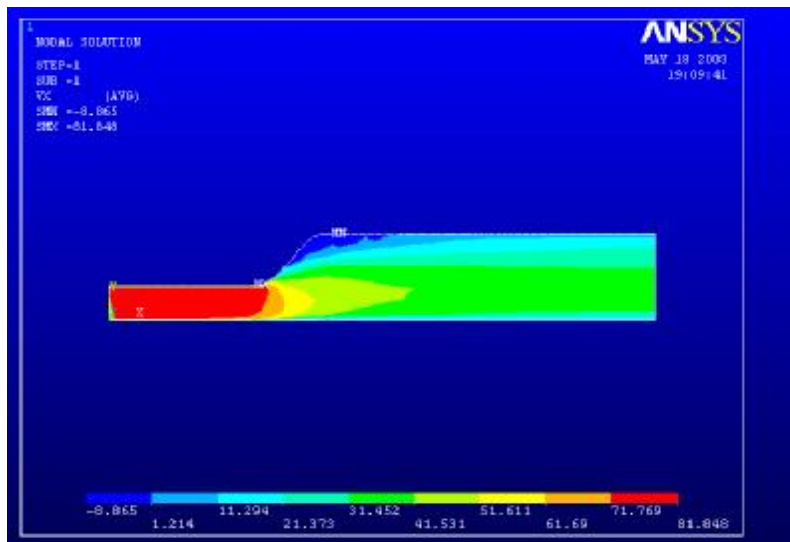


Σχ. 3-14 Διάγραμμα σύγκλισης της λύσης με τυρβώδη ροή

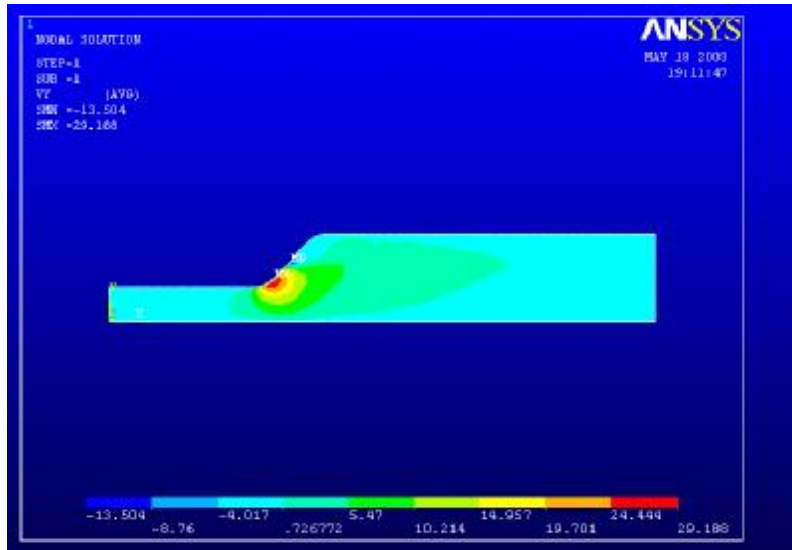
Η κατανομή της κομβικής ταχύτητας κατά την αξονική διεύθυνση δείχνεται στο Σχ. 3-16α και η αντίστοιχη κατανομή στην εγκάρσια διεύθυνση φαίνεται στο Σχ. 3-16β.



Σχ. 3-15 Διανυσματική κατανομή της ταχύτητας του ρευστού μέσα στον αγωγό(τυρβώδη ροή)

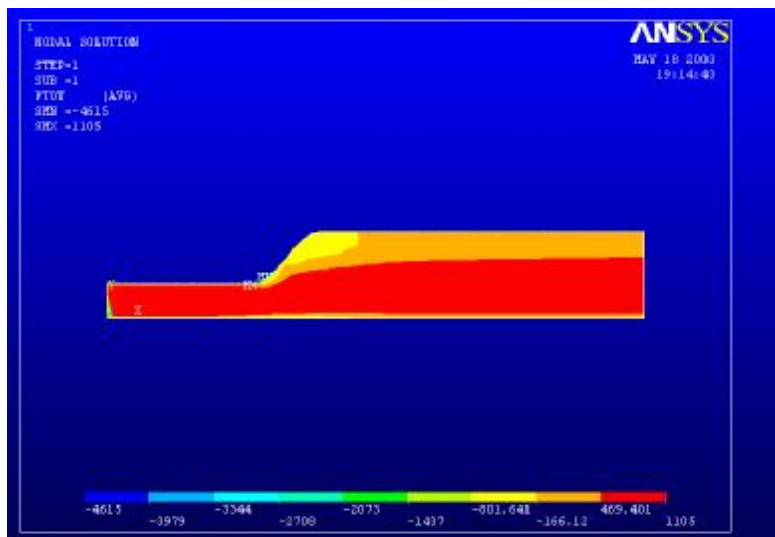


Σχ. 3-16α Κατανομή της V_x για τυρβώδη ροή

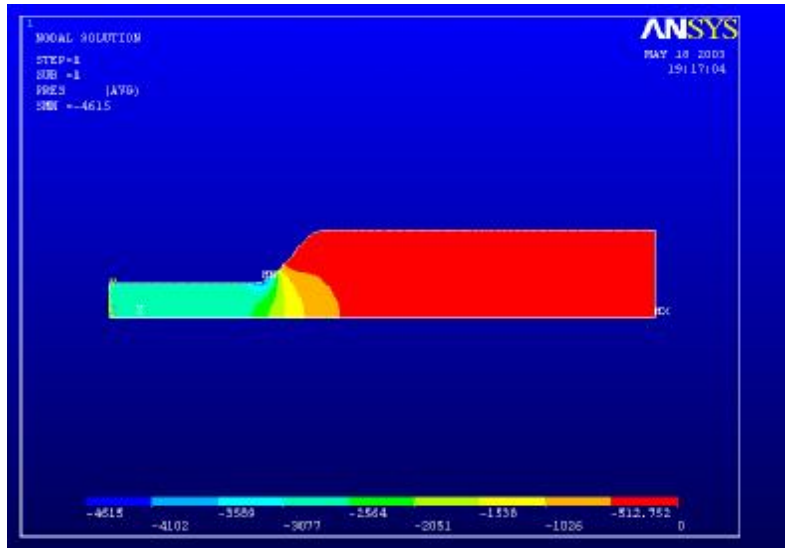


Σχ. 3-16β Κατανομή της V_y για τυρβώδη ροή

Η κατανομή της ολικής πίεσης φαίνεται στο Σχ. 3-17.



Σχ. 3-17 Κατανομή της ολικής πίεσης (τυρβώδη ροή)



Σχ. 3-18 Κατανομή της μέσης πίεσης (τυρβώδη ροή)

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΙΞΩΔΕΣ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

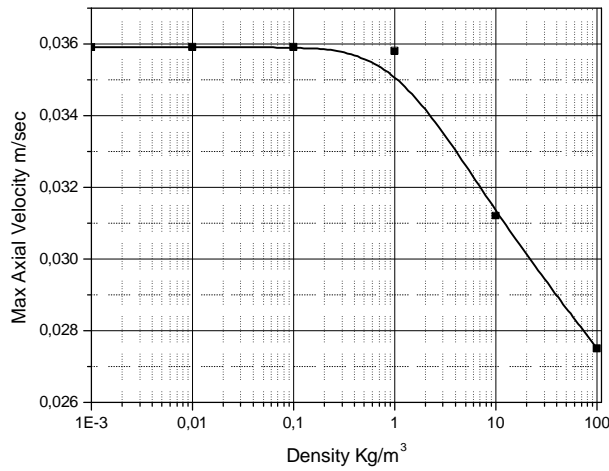
Α. Παραμετρική ανάλυση σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού
για σταθερό ιξώδες στην στρωτή ροή

Κατά την εκτέλεση αριθμητικών πειραμάτων με το πρόγραμμα ANSYS προέκυψε ότι στην περίπτωση στρωτής ροής η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού μέσα στον αγωγό παραμένει σταθερά για μικρές τιμές της πυκνότητας και ελαττώνεται γραμμικά σε ημιλογαριθμικό διάγραμμα, διατηρώντας το ιξώδες του ρευστού σταθερό (βλ. Πίνακα Ι και Σχ. 3-19).

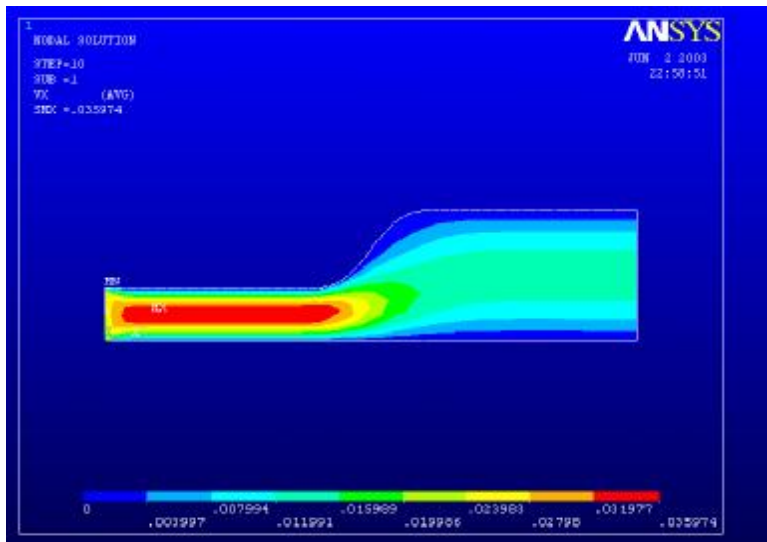
Πυκνότητα (Kg/m ³)	10 ²	10 ¹	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³
Μέγιστη ταχύτητα (m/sec)	0.0275	0.0312	0.0358	0.0359	0.0359	0.0359

Πίνακας Ι. Μέγιστη αξονική ταχύτητα για στρωτή ροή σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού για $\mu=1,92 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m sec}$

Το Σχ. 3-20 δείχνει την κατανομή της αξονικής ταχύτητας μέσα στον αγωγό για μικρές τιμές της πυκνότητας $\rho=10^{-3} \text{ Kg/m}^3$. Το ιξώδες διατηρείται σταθερό ίσο με $\mu=1,92 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m sec}$.



Σχ. 3-19 Μεταβολή της μέγιστης αξονικής ταχύτητας μέσα στον αγωγό σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού, για σταθερό ιξώδες $\mu=1,92 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m sec}$.



Σχ. 3-20 Προφίλ της αξονικής ταχύτητας (στρωτή ροή)

Για στρωτή ροή σταθερού ιξώδους η πυκνότητα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 102 Kg/m^3 καθ' ο αριθμός Reynolds παίρνει τιμές μεγαλύτερες από την κρίσιμη τιμή όπου η ροή από στρωτή γίνεται τυρβώδης.

B. Παραμετρική ανάλυση σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού για σταθερό ιξώδες στην τυρβώδη ροή

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία στα αέρια η πυκνότητα ελαττώνεται, βάση της καταστατικής εξίσωσης των αερίων, ενώ το ιξώδες αυξάνεται¹¹ αυξανόμενης της θερμοκρασίας. Οπότε είναι σκόπιμο να μεταβάλλουμε την πυκνότητα και το ιξώδες παραμετρικά όπως δηλώνουν οι νόμοι της φυσικοχημείας. Αρχικά θεωρούμε ότι το ιξώδες παραμένει σταθερό και μεταβάλλεται η πυκνότητα. Η μελέτη της μεταβολής της μέγιστης

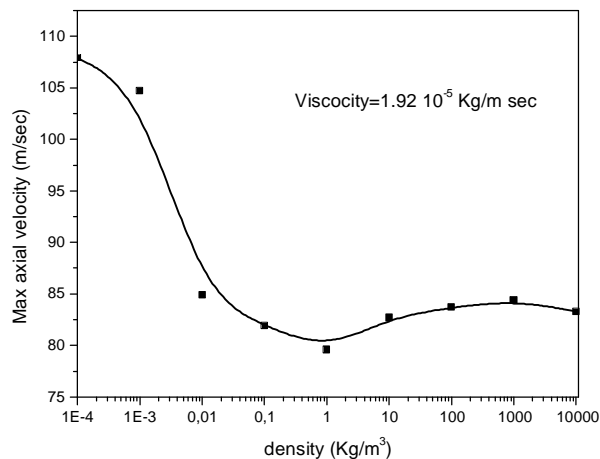
¹¹ Handbook of Chemistry and Physics, 49th edition, 1968

διανυσματικής ταχύτητας σε συνάρτηση της πυκνότητας του αερίου δείχνεται στον κάτωθι πίνακα.

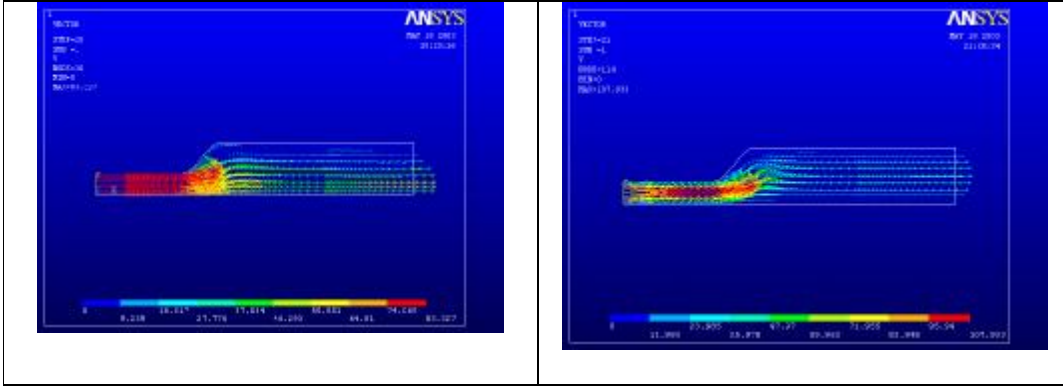
Πυκνότητα (Kg/m ³)	10 ⁴	10 ³	10 ²	10 ¹	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴
Μέγιστη ταχύτητα (m/sec)	83,3	84,4	83,7	82,7	79,6	81,9	84,9	104,7	107,9

Πίνακας Ι. Μέγιστη αξονική ταχύτητα για τυρβώδη ροή σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού για $\mu=1,92 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m sec}$

Το Σχ. 3-21 δείχνει την μεταβολή της μέγιστης ταχύτητας κατά την χ-διεύθυνση για διαφορετικές τιμές της πυκνότητας. Η σύγκριση των κατανομών σε μικρές και μεγάλες πυκνότητες φαίνεται στο Σχ.3-21.



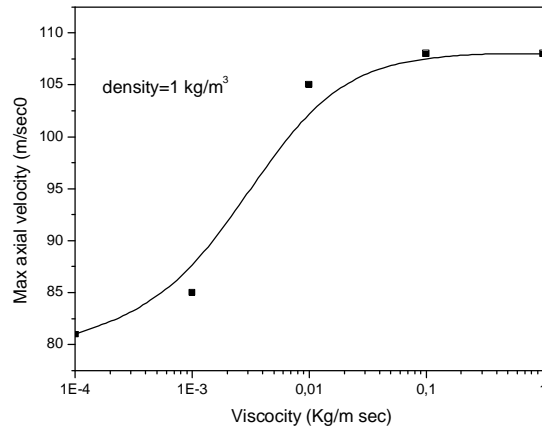
Σχ. 3-21: Μεταβολή της πυκνότητας – μέγιστη ταχύτητα για σταθερό ιξώδες και τυρβώδη ροή



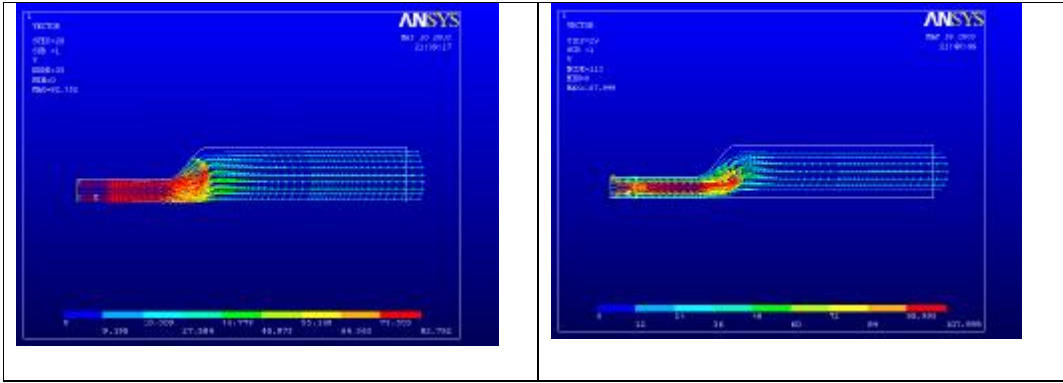
(a) $\rho = 10^4 \text{ Kg/m}^3$

(β) $\rho = 10^{-4} \text{ Kg/m}^3$

Σχ. 3-22 Σύγκριση της κατανομής της αξονικής ταχύτητας V_x , για δύο διαφορετικές τιμές της πυκνότητας.



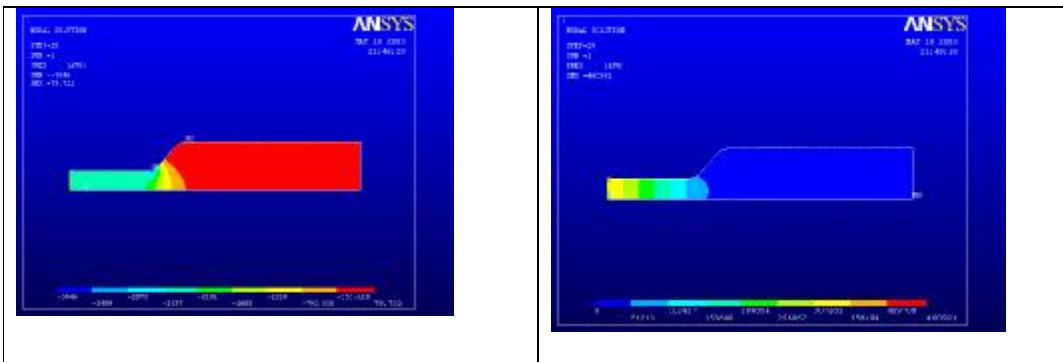
Σχ. 3-23 Μεταβολή ης αξονικής ταχύτητας σε συνάρτηση του ιξώδους (για $d=1 \text{ Kg/m}^3$)



(α) $\mu = 1.92 \cdot 10^{-4} \text{ Kg/m sec}$

(β) $\mu = 1.92 \text{ Kg/m sec}$

Σχ. 3-24α Αξονική ταχύτητα V_x , για δύο διαφορετικές τιμές του ιξώδους



(α) $\mu = 1.92 \cdot 10^{-4} \text{ Kg/m sec}$

(β) $\mu = 1.92 \text{ Kg/m sec}$

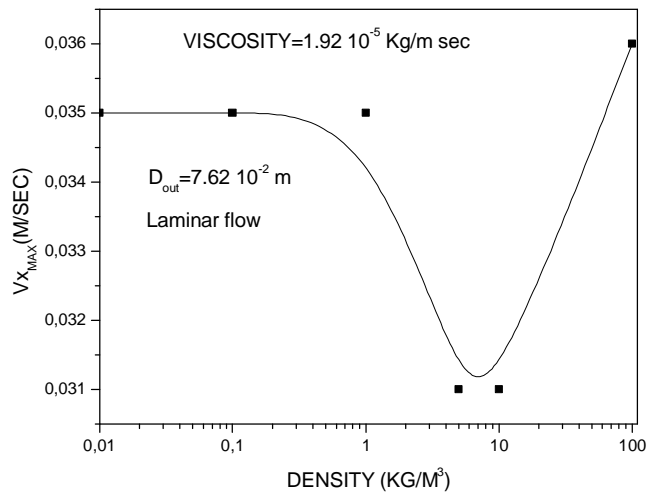
Σχ. 3-24β Μέση πίεση για δύο διαφορετικές τιμές του ιξώδους

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΣΤΑ ΑΚΡΑΙΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

Στην περίπτωση αυτή η διάμετρος εξόδου του αγωγού μεταβάλλεται καθώς και το μήκος του ανάλογα εάν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης.

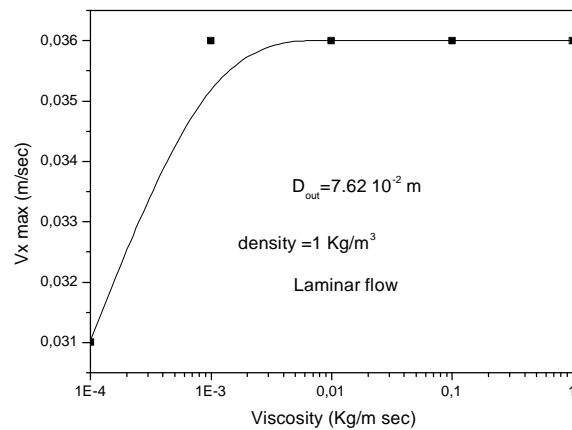
Περίπτωση 1^η: Στρωτή ροή

Το ύψος της περιοχής εξόδου του αγωγού μεταβάλλεται από 2,5 in σε 3 in ή $7,62 \cdot 10^{-2}$ m. Η μεταβολή της μέγιστης αξονικής τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση της πυκνότητας δείχνεται στο Σχ. 3-25. Παρατηρούμε ότι το προφίλ της V_{max} είναι διαφορετικό όταν η διάμετρος της εξόδου αυξάνεται κατά 0.5 in.



Σχ. 3-25 Μεταβολή της μέγιστης αξονικής ταχύτητας σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού (το ιξώδες είναι σταθερό $1.92 \cdot 10^{-2}$ Kg/m sec και η $D_{out}=7.62$ m).

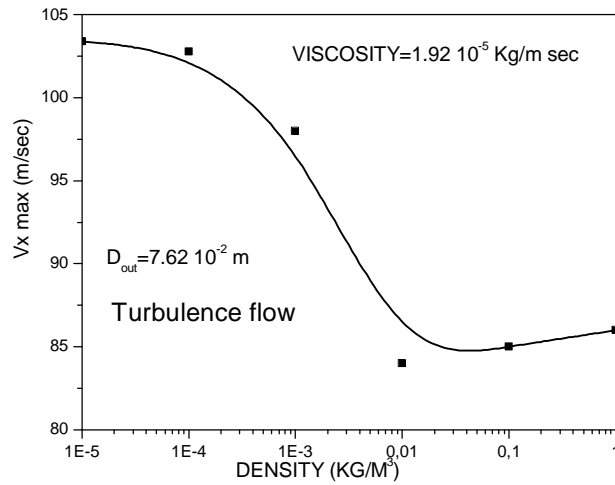
Για μικρές τιμές της πυκνότητας η μέγιστη αξονική τιμή της ταχύτητας παραμένει σταθερή ενώ για τιμές της πυκνότητας ($\rho \sim 10 \text{ Kg/m}^3$) η $V_x(\text{max})$ παίρνει μικρές τιμές και αυξάνει για μεγαλύτερες τιμές της πυκνότητας.



Σχ. 3-26 Μεταβολή της μέγιστης αξονικής ταχύτητας σε συνάρτηση του ιξώδους του ρευστού (η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή 1 Kg/m^3 και η $D_{out}=7.62 \text{ m}$).

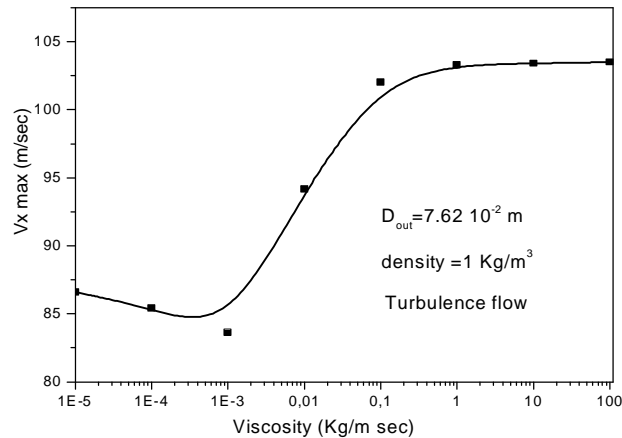
Περίπτωση 2^η: Τυρβώδη ροή

Στο κάτωθι Σχ. 3-27 παριστάνουμε την μεταβολή της $V_x (\text{max})$ σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού. Η ροή είναι τυρβώδης και η διάμετρος του σωλήνα στην έξοδο είναι $7.62 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ (3 in) σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση όπου η διάμετρος εξόδου ήταν (2,5 in).



Σχ.3-27 Μεταβολή της μέγιστης αξονικής ταχύτητας σε συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού ($\mu=1.92 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m sec}$, τυρβώδη ροή)

Το Σχ. 3-28 δείχνει τη μεταβολή της μέγιστης αξονικής ταχύτητας σε συνάρτηση του ιξώδους του ρευστού όταν διατηρείται η πυκνότητα σταθερή.

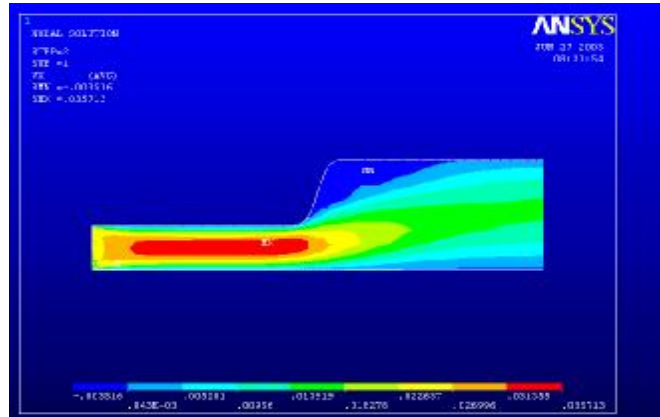


Σχ. 3-28 Μεταβολή της μέγιστης αξονικής ταχύτητας σε συνάρτηση του ιξώδους του ρευστού ($\rho=1 \text{ Kg/m}^3$, τυρβώδη ροή)

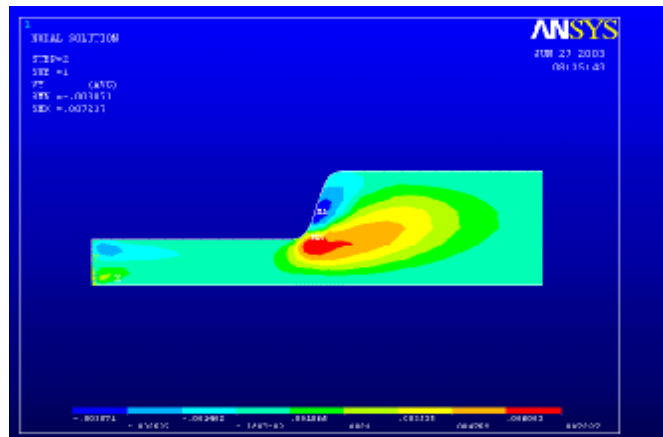
Μελέτη του προβλήματος για διαφορετικά μήκη της ενδιάμεσης περιοχής

Ø Στρωτή Ροή

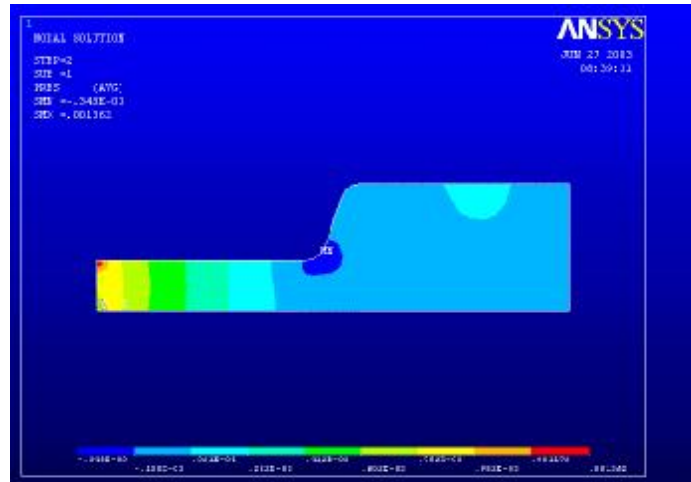
Αρχικά η ενδιάμεση στρώση ήταν 4 in ή 9,16 cm, η οποία τροποποιήθηκε σε 8" ή 18,32 cm. Οπότε για στρωτή ροή η κατανομή των ταχυτήτων και πιέσεων παρίστανται στα Σχήματα 3-29 α,β,γ.



(α) V_x (m/sec). Το πλάτος της μεταβατικής περιοχής έχει μειωθεί κατά το ήμισυ του αρχικού και η ροή είναι στρωτή.

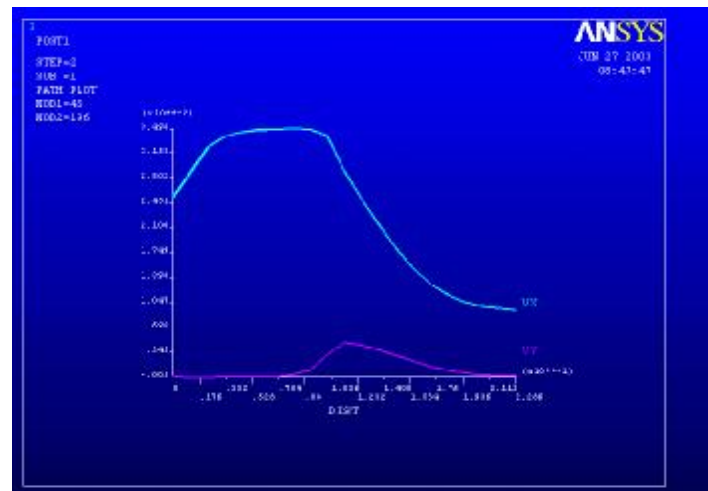


(β) V_y (m/sec). Το πλάτος της μεταβατικής περιοχής έχει μειωθεί κατά το ήμισυ του αρχικού και η ροή είναι στρωτή.

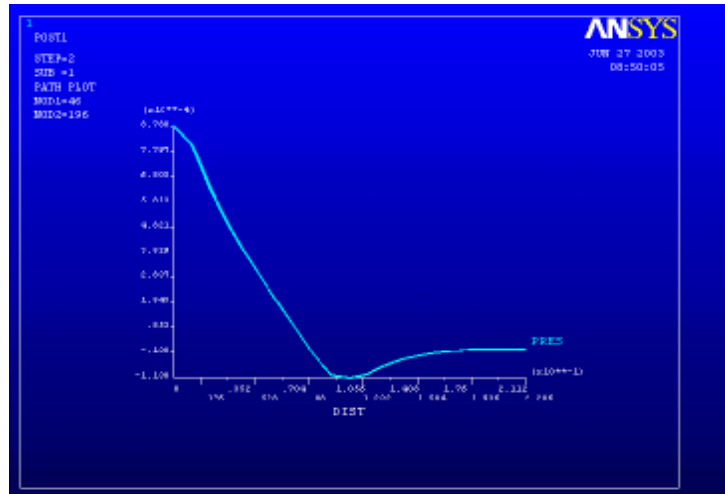


(c) Πίεση (σε Pa). Το πλάτος της μεταβατικής περιοχής έχει μειωθεί κατά το ήμισυ του αρχικού και η ροή είναι στρωτή.

Σχ. 3-29 Μεταβολή της αξονικής της εγκάρσιας ταχύτητας και της πίεσης μέσα στον αγωγό (στρωτή ροή)



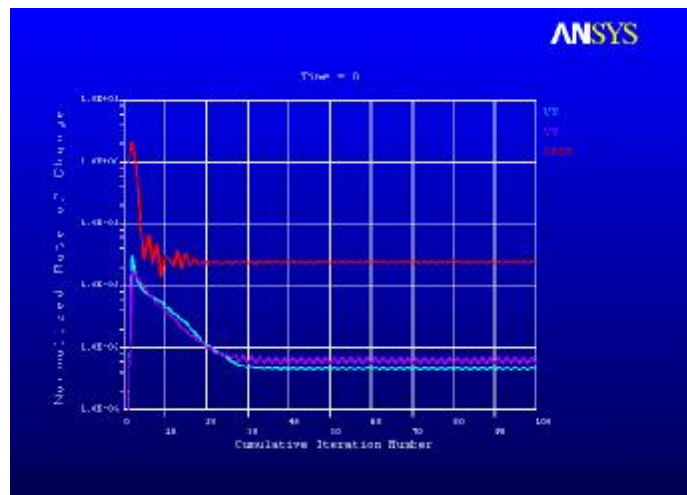
Σχ. 3-30 Μεταβολή της αξονικής και εγκάρσιας συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού στο ήμισυ του ακτίνας, δηλ. για $y=R/2$. Το πλάτος της μεταβατικής περιοχής είναι το ήμισυ του αρχικού.



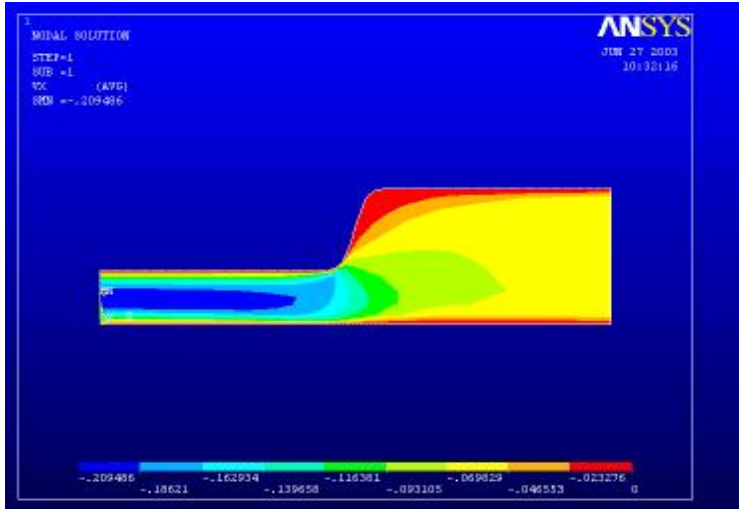
Σχ. 3-31 Μεταβολή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού στο ήμισυ του ακτίνας, δηλ. για $y=R/2$. Το πλάτος της μεταβατικής περιοχής είναι το ήμισυ του αρχικού.

Το πλάτος της μεταβατικής περιοχής δεν μεταβάλλει ουσιαστικά την κατανομή της ταχύτητας στην αξονική και εγκάρσια διεύθυνση καθώς και την κατανομή της πίεσης μέσα στον αγωγό.

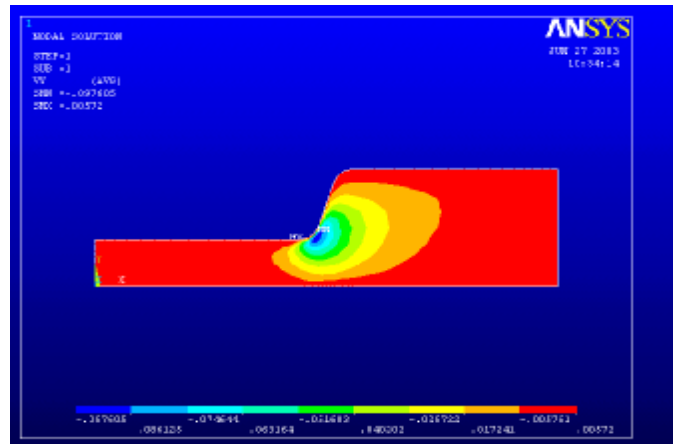
Ø Στρωτή ροή



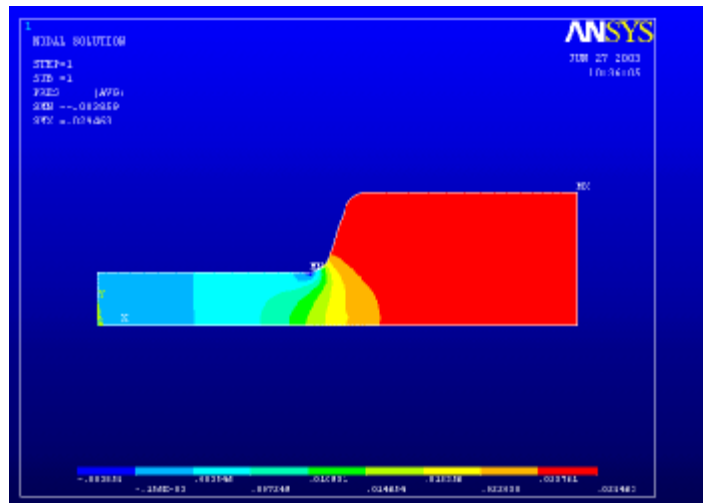
Σχ. 3-32 Σύγκλιση της λύσης για αντιστρεπτή ροή (στρωτή ροή)



Σχ. 3-33 Κατανομή της αξονικής ταχύτητας μέσα στον αγωγό για στρωτή ροή ($V_{\text{εις}}=0.0635 \text{ m/sec}$). Το πλάτος της μεταβατικής ζώνης είναι το ήμισυ του αρχικού.

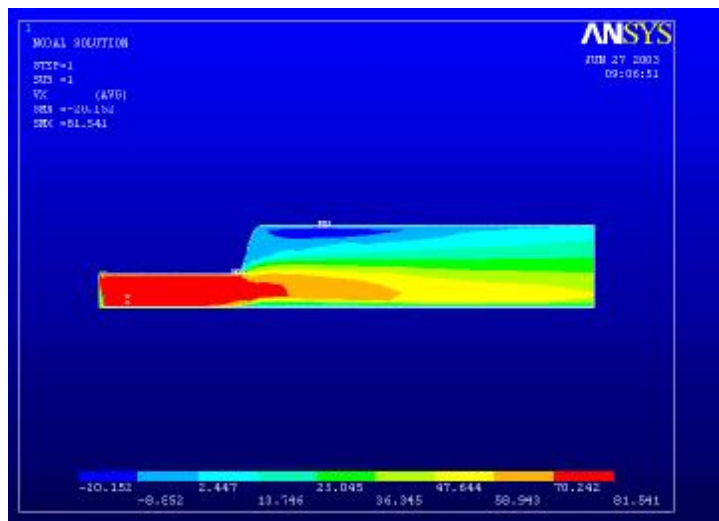


Σχ. 3-34 Κατανομή της εγκάρσιας ταχύτητας μέσα στον αγωγό για στρωτή ροή ($V_{\text{εις}}=0.0635 \text{ m/sec}$). Το πλάτος της μεταβατικής ζώνης είναι το ήμισυ του αρχικού.

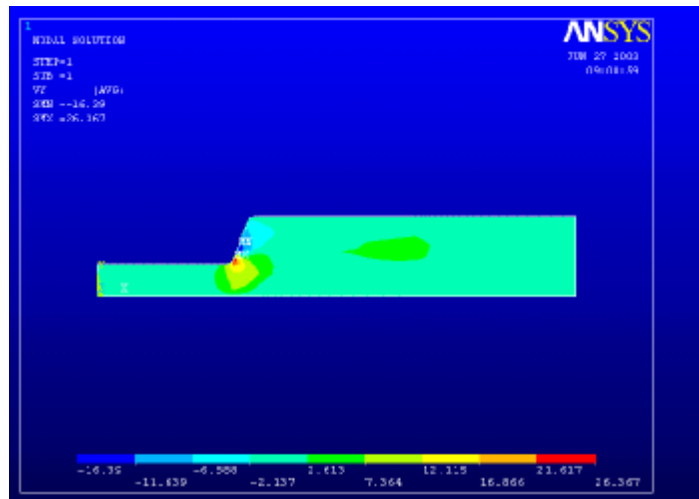


Σχ. 3-35 Κατανομή της πίεσης μέσα στον αγωγό για στρωτή ροή ($V_{\text{εις}}=0.0635$ m/sec). Το πλάτος της μεταβατικής ζώνης είναι το ήμισυ του αρχικού.

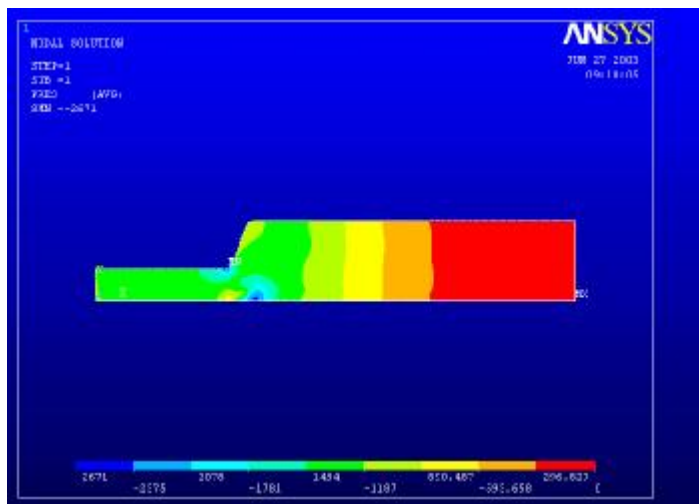
Ø Τυρβώδη Ροή



Σχ. 3-36 Κατανομή της αξονικής ταχύτητας μέσα στον αγωγό για τυρβώδη ροή. Το πλάτος της μεταβατικής ζώνης είναι το ήμισυ του αρχικού.



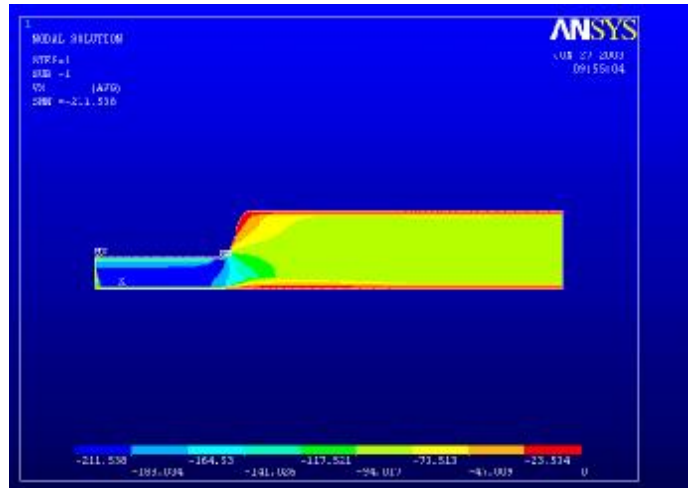
Σχ. 3-37 Κατανομή της εγκάρσιας ταχύτητας μέσα στον αγωγό για τυρβώδη ροή. Το πλάτος της μεταβατικής ζώνης είναι το ήμισυ του αρχικού.



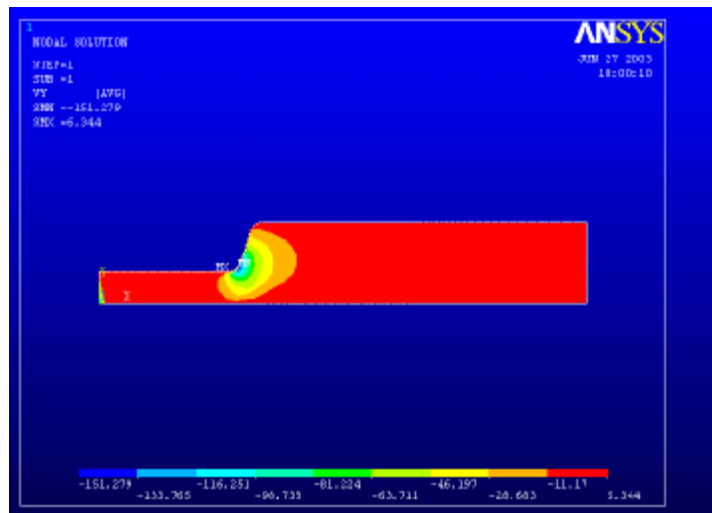
Σχ. 3-38 Κατανομή της πίεσης μέσα στον αγωγό για τυρβώδη ροή. Το πλάτος της μεταβατικής ζώνης είναι το ήμισυ του αρχικού.

Αλλαγή της φοράς εισόδου του ρευστού

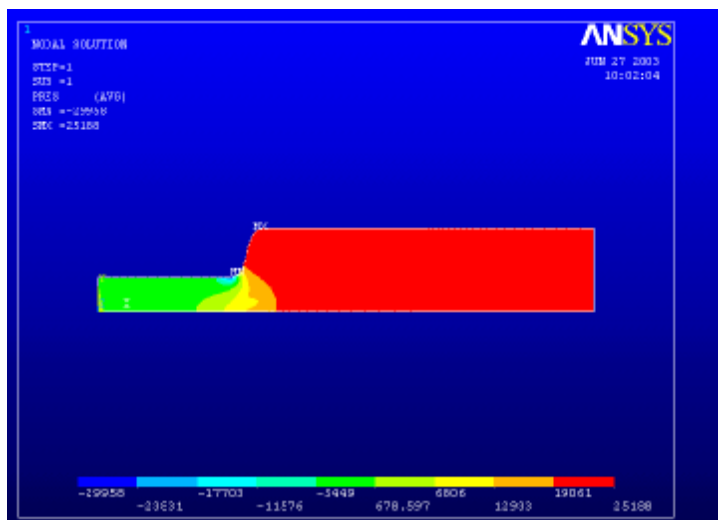
Ø Τυρβώδη ροή



Σχ. 3-39 Κατανομή της αξονικής ταχύτητας V_x για τυρβώδη ροή όταν η ροή του ρευστού αντιστρέφεται και το ρευστό ρέει μέσω συστολής ($V_x = -3000 \text{ in/sec} = -76,2 \text{ m/sec}$)



Σχ. 3-40 Κατανομή της εγκάρσιας ταχύτητας V_y για τυρβώδη ροή όταν η ροή του ρευστού αντιστρέφεται και το ρευστό ρέει μέσω συστολής ($V_x = -3000 \text{ in/sec} = -76,2 \text{ m/sec}$)



Σχ. 3-41 Κατανομή της πίεσης P για τυρβώδη ροή όταν η ροή του ρευστού αντιστρέφεται και το ρευστό ρέει μέσω συστολής ($V_x = -3000$ in/sec = $-76,2$ m/sec)

Συμπεράσματα

Από την ανωτέρω μελέτη μπορούμε να συμπεράνουμε τα κάτωθι:

- Ø Στην περίπτωση στρωτής ροής ρευστού μέσα σε αγωγό με συστολή η κατανομή της αξονικής ταχύτητας εμφανίζει υψηλές τιμές στην περιοχή του αγωγού με τη μικρή διάμετρο και μέσα στη μεταβατική ζώνη. Η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας εμφανίζει υψηλές τιμές εντός της μεταβατικής ζώνης, ενώ η πίεση έχει υψηλές τιμές στην είσοδο του ρευστού. Όταν η ταχύτητα εισόδου δεκαπλασιάζεται χωρίς να αλλάξει η φύση της ροής, δηλαδή παραμένει στρωτή, τότε εντός της μεταβατικής ζώνης η πίεση αλλάζει πρόσημο και η ροή γίνεται ασταθής. Στο σημείο αυτό η ροή από στρωτή θα γίνει τυρβώδης.
- Ø Στην περίπτωση τυρβώδους ροής η λύση επιτυγχάνεται με μεγαλύτερο αριθμό βημάτων καθ' όσον η χρονική διάρκεια για σύγκλιση της λύσης είναι κατά πολύ μεγαλύτερη. Εντός της μεταβατικής ζώνης η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας παρουσιάζει αυξημένες τιμές με αποτέλεσμα τη δημιουργία στροβίλων. Μεγάλες τιμές της πίεσης μεταφέρονται στην περιοχή εξόδου το οποίο συνηγορεί στην ανάπτυξη στροβιλισμών εντός αυτής της περιοχής.

- ∅ Για στρωτή ροή η πυκνότητα του ρευστού επιδρά στην κατανομή της ταχύτητας και όπως είναι φανερό από το σχετικό διάγραμμα η ταχύτητα παραμένει σταθερά μέχρι τιμές της πυκνότητας 0.1 Kg/m^3 ενώ για μεγαλύτερες τιμές της πυκνότητας ελαττώνεται δραστικά. Το ιξώδες παραμένει σταθερό. Σε αντίθεση για τυρβώδη ροή η αξονική ταχύτητα ελαττώνεται καθ' όσον αυξάνεται η πυκνότητα του ρευστού, διατηρώντας όμως το ιξώδες σταθερό. Πέραν της τιμής $0,1 \text{ Kg/m}^3$ η κατανομή της ταχύτητας είναι σταθερή.
- ∅ Η μελέτη της επίδρασης του ιξώδους στην κατανομή της ταχύτητας, για σταθερή τιμή της πυκνότητας, έδειξε ότι η αξονική ταχύτητα αυξάνεται μέχρι $\mu=0,01 \text{ Kg/m sec}$ και πέραν αυτής της τιμής η ταχύτητα παραμένει σταθερή.
- ∅ Όταν η διάμετρος του αγωγού εξόδου αυξάνεται η επίδραση της πυκνότητας είναι αμελητέα μέχρι 1 Kg/m^3 ελαττώνεται δραστικά για $\rho=10 \text{ kg/m}^3$ και κατόπιν αυξάνεται εκ' νέου. Αυτό ισχύει για την περίπτωση στρωτής ροής.
- ∅ Η επίδραση του ιξώδους έδειξε ότι για μικρές τιμές η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά και κατόπιν διατηρεί σταθερή τιμή για στρωτή ροή.
- ∅ Για τυρβώδη ροή, η επίδραση της πυκνότητας, για αγωγούς με μεγάλο άνοιγμα εξόδου, έδειξε ότι η αξονική ταχύτητα ελαττώνεται γραμμικά μέχρι $\rho=0.01 \text{ Kg/m}^3$ και κατόπιν παραμένει σταθερή. Η επίδραση του ιξώδους παρουσιάζει αντίθετη συμπεριφορά, καθ' όσον μέχρι $\mu=0,001 \text{ Kg/m sec}$ η συνιστώσα V_x της ταχύτητας είναι σταθερή και για μεγαλύτερες τιμές του μ αυξάνεται γραμμικά μέχρι $\mu=0,1 \text{ kg/m sec}$, ενώ για μεγαλύτερες τιμές παραμένει σταθερή.
- ∅ Η συρρίκνωση της μεταβατικής ζώνης έδειξε ότι δεν μεταβάλλει κατά πολύ τα αποτελέσματα για την κατανομή των ταχυτήτων και πίεσης μέσα στον αγωγό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

4.1 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ V.O.F. (VOLUME OF FLUID)

4.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

Τρία μοντέλα για την εξομοίωση της διφασικής ροής είναι διαθέσιμα στο FLUENT¹² όταν δύο ρευστά είναι παρόντα: το πρότυπο του κλάσματος όγκου του ρευστού (VOF), το πρότυπο της σπηλαίωσης και το πρότυπο μίξης της αλγεβρικής ολίσθησης. Το πρότυπο VOF είναι μια τεχνική προκαθορισμένου πλέγματος σχεδιασμένη για δύο ή περισσότερα αναμίξιμα ρευστά όπου η θέση της διεπιφάνειας μεταξύ των ρευστών μας ενδιαφέρει. Στο πρότυπο VOF χρησιμοποιείται μια ομάδα εξισώσεων ορμής από τα παρόντα ρευστά και το κλάσμα του όγκου κάθε ρευστού σε κάθε υπολογιστικό κελί προσδιορίζεται σε όλο τον υπολογιστικό χώρο (computational domain). Εφαρμογές που χρησιμοποιούν το πρότυπο VOF περιλαμβάνουν την πρόβλεψη διάσπασης της δίνης, την κίνηση μεγάλων φυσαλίδων σε ένα υγρό, την κίνηση του υγρού μετά από κατάρρευση φράγματος και εντοπισμό του σταθερής ή μεταβαλλόμενης διεπιφάνειας υγρού - αερίου.

Το πρότυπο σπηλαίωσης, είναι σχεδιασμένο για δύο διεισδύοντα ρευστά, χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της δημιουργίας φυσαλίδων όταν η τοπική πίεση γίνεται μικρότερη από την πίεση εξάτμισης. Το πρότυπο σπηλαίωσης επιλύει μια ομάδα εξισώσεων που χρησιμοποιούνται από τα ρευστά και η εξίσωση συνέχειας για την βασική φάση. Αντίθετα από το πρότυπο V.O.F., περιλαμβάνει τη μεταφορά μάζας μεταξύ των ρευστών. Οι

¹² Fluent, Commercial computer program (2002)

ροές σπηλαιώσης είναι σημαντικές για τις υδραυλικές εφαρμογές, επειδή η σπηλαιώση γύρω από την υδροτομή μπορεί να επιδράσει σημαντικά στην αξιοπιστία των υδραυλικών συστημάτων.

Το πρότυπο μίξης της αλγεβρικής ολίσθησης είναι σχεδιασμένο για δύο φάσεις (ρευστό ή σωματίδιο). Διαφέρει από το πρότυπο VOF και της σπηλαιώσης στη χρησιμοποίηση μεικτών εξισώσεων κλασμάτων και στον προκαθορισμό της σχετικής ταχύτητας για τη περιγραφή των μεμονωμένων φάσεων. Αυτό επιτρέπει την μοντελοποίηση των φάσεων με διαφορετικές ταχύτητες. Οι εφαρμογές του πρότυπου μίξης της αλγεβρικής ολίσθησης περιλαμβάνουν ροές σωματιδίων, ροές φυσαλίδων των οποίων η το κενό κλάσμα είναι σχετικά χαμηλό, διαστρωματώσεις και διαχωριστές κυκλωνισμού.

4.1.2 Περιορισμοί του προτύπου VOF¹³

Οι ακόλουθοι περιορισμοί εφαρμόζονται από το πρότυπο VOF στο FLUENT: Πρέπει να χρησιμοποιείται ο επιλυτής μεμονωμένης λύσης. Το πρότυπο VOF δεν είναι διαθέσιμο για χρήση με κανένα από τους επιλυτές συνδυασμένης λύσης. Όλοι οι όγκοι έλεγχου πρέπει να είναι συμπληρωμένοι είτε με μια φάση ή με συνδυασμό φάσεων. Το πρότυπο VOF δεν επιτρέπει την ύπαρξη κενών περιοχών όπου κανένα ρευστό δεν είναι παρόν.

Η ροή πρέπει να είναι ασυμπίεστη.

Η μοντελοποίηση της μεταφοράς θερμότητας δεν είναι διαθέσιμη με το πρότυπο VOF.

Ροή που εμφανίζει περιοδικότητα κατά μήκος του ροϊκού πεδίου (πρέπει να καθοριστεί ο ρυθμός μαζικής εισροής ή να καθοριστεί η πτώση πίεσης) δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί όταν το πρότυπο VOF χρησιμοποιείται. Ροές μίξης ειδών και αντιδρώσες ροές δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν όταν το πρότυπο VOF χρησιμοποιείται. Το τυρβώδες πρότυπο της Προσομοίωσης Μεγάλων Δινών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με το πρότυπο VOF. Το πρότυπο μεταβολής φάσης για φαινόμενα ψύξης και τήξης δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με το πρότυπο VOF.

4.2 Σταθερή κατάσταση και χρονικά μεταβαλλόμενοι υπολογισμοί VOF

Η χρησιμοποίηση του VOF στο FLUENT γενικά χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό χρονικά μεταβαλλόμενων προβλημάτων, αλλά για προβλήματα στα οποία αναζητάτε μια μόνιμη λύση (steady state) αυτό είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί. Μια μόνιμη λύση χρησιμοποιώντας το πρότυπο V.O.F. είναι λογική όταν η λύση είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών και υπάρχουν διακριτά όρια εισαγωγής για κάθε μια από τις δύο φάσεις. Για παράδειγμα, το σχήμα μιας ελεύθερης επιφάνειας στο εσωτερικό ενός περιστρεφόμενου δοχείου εξαρτάται από την αρχική στάθμη του ρευστού. Ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας την χρονικά εξαρτώμενη διαμόρφωση. Από την άλλη η ταυτόχρονη ροή ενός ρευστού με αέρα σε ένα κανάλι, μπορεί να λυθεί με την μόνιμη διαμόρφωση.

4.3 Θεωρία του πρότυπου V.O.F.

Η διαμόρφωση του πρότυπου VOF βασίζεται στο γεγονός ότι δύο ή περισσότερα ρευστά (ή φάσεις) δεν είναι αναμίξιμα. Για κάθε επιπρόσθετη φάση που προστίθεται στο πρότυπο, εισάγεται μία σταθερά: το κλάσμα όγκου της φάσης στο υπολογιστικό κελί. Σε κάθε όγκο ελέγχου, τα κλάσματα όγκου όλων των φάσεων αθροίζεται στη μονάδα. Τα πεδία όλων των μεταβλητών όπως και οι ιδιότητες είναι κοινές για όλες τις φάσεις και αντιπροσωπεύουν την μέση τιμή της ιδιότητας για κάθε κελί, εφόσον η τιμή κάθε φάσης είναι γνωστή σε κάθε περιοχή του υπολογιστικού χώρου. Έτσι οι μεταβλητές και οι ιδιότητες σε ένα δεδομένο κελί είναι είτε καθαρά αντιπροσωπευτικά για κάθε μια από τις φάσεις και εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμές των κλασμάτων όγκου. Με άλλα λόγια, αν είναι γνωστή η τιμή του κλάσματος όγκου του n -οστού ρευστού τότε είναι πιθανές τρεις καταστάσεις:

$a_n = 0$ το κελί είναι άδειο (του n -οστού ρευστού)

$a_n = 1$ το κελί είναι γεμάτο (από το n -οστό ρευστό)

$0 < a_n < 1$ το κελί περιέχει την διεπιφάνεια ανάμεσα στα ρευστά

Βασιζόμενοι στην τοπική τιμή του a_n , οι απαραίτητες τιμές και ιδιότητες θα αποτιμούνται για κάθε όγκο ελέγχου στον υπολογιστικό χώρο.

4.4 Η εξίσωση του κλάσματος όγκου

Ο εντοπισμός της διεπιφάνειας μεταξύ των φάσεων επιτυγχάνεται με τη λύση μιας εξίσωσης της συνέχειας για το κλάσμα όγκου μιας ή περισσοτέρων φάσεων. Για τη n-οστή φάση, η εξίσωση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} + u_i \frac{\partial a_n}{\partial x_i} = S_{an} \quad (4.1)$$

Ο όρος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης είναι μηδενικός για το πρότυπο VOF. Η μοντελοποίηση ενός μη μηδενικού όρου (πχ. για τη περίπτωση μεταφοράς μάζας) προτείνεται η χρήση του πρότυπου σπηλαίωσης.

Η εξίσωση του κλάσματος όγκου δεν επιλύεται για τη βασική φάση. Το κλάσμα όγκου της βασικής φάσης υπολογίζεται βάσει της παρακάτω εξίσωσης:

$$\sum_{n=1}^k a_n = 1 \quad (4.2)$$

4.5 Ιδιότητες

Οι ιδιότητες που εμφανίζονται στην εξίσωση μεταφοράς είναι καθορισμένες από την παρουσία των συστατικών φάσεων σε κάθε όγκο

ελέγχου. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα δύο φάσεων, αν οι φάσεις συμβολίζονται από τους δείκτες 1 και 2, και υπολογίζεται το κλάσμα όγκου του δευτέρου η πυκνότητα σε κάθε κελί δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$r = a_2 r_2 + (1 - a_2) r_1 \quad (4.4.1)$$

Γενικά, για ένα σύστημα με k φάσεις ο μέσος όρος της πυκνότητας του κλάσματος όγκου βρίσκεται ως εξής:

$$r = \sum a_n r_n \quad (4.4.2)$$

Όλες οι άλλες ιδιότητες (π.χ το ιξώδες) υπολογίζονται παρομοίως.

4.6 Η εξίσωση της ορμής

Μια εξίσωση ορμής λύνεται για όλες τις φάσεις στον υπολογιστικό χώρο και το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει ισχύει για όλες τις φάσεις. Η εξίσωση ορμής, όπως φαίνεται παρακάτω, εξαρτάται από το κλάσμα όγκου όλων των φάσεων μέσω των ιδιοτήτων ρ και μ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i u_j = - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_j + F_j \quad (4.4)$$

Ένας περιορισμός του διαμοιρασμού των πεδίων είναι ότι σε περιπτώσεις όπου υπάρχει μεγάλη διαφορά των ταχυτήτων των αντιστοίχων φάσεων, η ακρίβεια των ταχυτήτων η οποία υπολογίζεται κοντά στη διεπιφάνεια συνήθως διαφέρει από την πραγματική.

4.7 Επιπρόσθετες βαθμωτές εξισώσεις

Βασιζόμενοι στον ορισμό κάθε προβλήματος, επιπρόσθετες βαθμωτές εξισώσεις μπορούν να συμπεριληφθούν στην λύση. Στην περίπτωση τυρβωδών ποσοτήτων, μια ομάδα εξισώσεων επιλύεται και οι σταθερές k και ϵ ή οι τάσεις Reynolds διαμοιράζονται από τις φάσεις σε όλο το πεδίο.

4.8 Γραμμική παρεμβολή πλησίον της διεπιφάνειας

Η διαμόρφωση του όγκου ελέγχου στο Fluent απαιτεί τον υπολογισμό των ροών που οφείλονται σε μεταφορά και διάχυση διαμέσου των επιφανειών οι οποίες εξισορροπούνται με τους πηγαίους όρους εντός του όγκου ελέγχου. Υπάρχουν τέσσερις μέθοδοι στο Fluent για τον υπολογισμό των επιφανειακών ροών μέσω του πρότυπου VOF: η μέθοδος της γεωμετρικής αναδόμησης, η μέθοδος δότη-δέκτη, η ανεξάρτητη μέθοδος του Euler και η εξαρτημένη μέθοδος (του Euler).

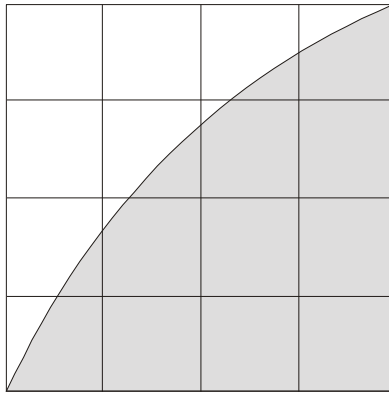
Στη μέθοδο της γεωμετρικής αναδόμησης και στη μέθοδο δότη-δέκτη το FLUENT εφαρμόζει μια ειδική μέθοδο παρεμβολής για τα κελιά τα οποία

βρίσκονται κοντά στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο φάσεις. Το σχήμα (3-1) δείχνει τη μορφή μιας πραγματικής διεπιφάνειας κατά τη διάρκεια υπολογισμών με βάση τις δύο αυτές μεθόδους.

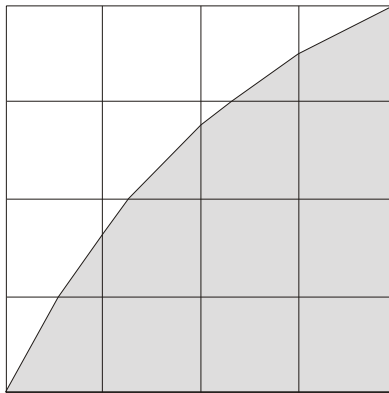
Η ανεξάρτητη μέθοδος του Euler (Euler explicit scheme) όπως και η εξαρτημένη μεταχειρίζεται τα κελιά αυτά ως κελιά τα οποία εξ ολοκλήρου περιέχουν τη μία ή την άλλη φάση χωρίς να εφαρμόζεται κάποια ειδική μέθοδος.

4.9 Η μέθοδος της γεωμετρικής αναδόμησης.

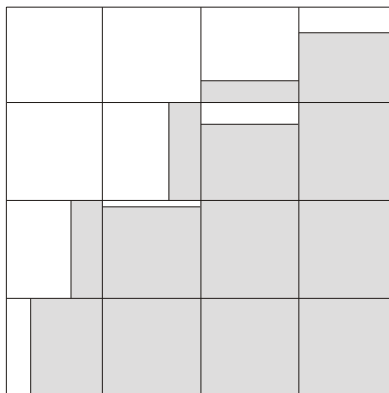
Στην προσέγγιση της γεωμετρικής αναδόμησης, τα τυπικά μοντέλα παρεμβολής που περιλαμβάνονται στο υπολογιστικό πρόγραμμα Fluent χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουν τις επιφανειακές ροές όταν ένα κελί είναι γεμάτο με μία από τις φάσεις. Όταν ένα κελί είναι κοντά στη διεπιφάνεια που σχηματίζεται από δύο φάσεις, χρησιμοποιείται η μέθοδος της γεωμετρικής αναδόμησης.



1. Πραγματική μορφή διεπιφάνειας



2. Μορφή της διεπιφάνειας όπως παρουσιάζεται μέσω του αλγορίθμου της γεωμετρικής αναδόμησης (τμηματική γραμμική αναπαράσταση)



3. Μορφή της διεπιφάνειας όπως αυτή παρουσιάζεται με τον αλγόριθμο δότη-δέκτη.

Σχήμα 3-1 Ο υπολογισμός της διεπιφάνειας

Το πρότυπο της γεωμετρικής αναδόμησης εκπροσωπεί την διεπιφάνεια μεταξύ των ρευστών χρησιμοποιώντας μια τμηματική μέθοδο γραμμικής παρεμβολής. Στο FLUENT το πρότυπο αυτό, είναι το πιο ακριβές και

μπορεί να εφαρμοστεί για μη δομημένα πλέγματα. Υποθέτει ότι η διεπιφάνεια μεταξύ δυο ρευστών παρουσιάζει μία γραμμική κλίση σε κάθε κελί, και χρησιμοποιεί αυτό το γραμμικό σχήμα για τον υπολογισμό της μεταφοράς του ρευστού μέσω της επιφάνειας του κελιού.

Το πρώτο βήμα που ακολουθείται στο πρότυπο αναδόμησης είναι ο υπολογισμός της θέσης της γραμμικής διεπιφάνειας σε σχέση με το κέντρο του κάθε μερικώς γεμάτου κελιού, βασιζόμενοι σε πληροφορίες σχετικά με το κλάσμα όγκου και την παραγωγή του στο κελί. Το δεύτερο βήμα είναι ο υπολογισμός της ποσότητας του ρευστού που μεταφέρεται διαμέσου της επιφάνειας χρησιμοποιώντας την ήδη υπολογισμένη γραμμική αναπαράσταση της διεπιφάνειας όπως και πληροφορίες για τη κατανομή της καθέτου και εφαπτομενικής κατανομής της ταχύτητας στην επιφάνεια. Το τρίτο βήμα είναι ο υπολογισμός του κλάσματος όγκου σε κάθε κελί χρησιμοποιώντας το ισοζύγιο ροών κατά τη διάρκεια του προηγούμενου βήματος.

Όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος της γεωμετρικής αναδόμησης, μια χρονικά μεταβαλλόμενη λύση πρέπει να υπολογίζεται. Επίσης εάν χρησιμοποιείται ένα προσαρμοσμένο πλέγμα πρέπει να διασφαλισθεί ότι δεν υπάρχουν κελιά με διπλά τοιχώματα στον υπολογιστικό χώρο.

4.10 Η μέθοδος δότη – δέκτη

Στην προσέγγιση δότη–δέκτη, οι τυπικές μέθοδοι παρεμβολής που περιλαμβάνονται στο FLUENT χρησιμοποιούνται στον προσδιορισμό των επιφανειακών ροών όπου ένα κελί είναι γεμάτο με μια από τις παρούσες φάσεις. Όταν το κελί είναι κοντά στην διεπιφάνεια μεταξύ των δύο φάσεων, η μέθοδος «δότη – δέκτη» χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό της ποσότητας του ρευστού που μεταφέρεται στην επιφάνεια. Αυτή η μέθοδος προσδιορίζει ένα κελί σαν δότη μιας ποσότητας ρευστού μιας φάσης και ένα άλλο γειτονικό κελί σαν τον δέκτη της ίδιας ποσότητας ρευστού και χρησιμοποιείται για να εμποδίσει την αριθμητική διάχυση στην διεπιφάνεια. Η ποσότητα του ρευστού από τη μια φάση που μπορεί να μεταδοθεί μέσω ενός συνοριακού κελιού περιορίζεται στο ελάχιστο από δύο τιμές: τον όγκο της κύριας φάσης στο κελί του δότη ή τον ελεύθερο όγκο στο κελί του δέκτη.

Ο προσανατολισμός της διεπιφάνειας χρησιμοποιείται επίσης στο να προσδιορίσει την επιφανειακή ροή. Ο προσανατολισμός της διεπιφάνειας είναι είτε οριζόντιος είτε κάθετος και εξαρτάται από την κατεύθυνση της κλίσης του κλάσματος όγκου της n-οστής φάσης μέσα στο κελί και στο γειτονικό κελί που μοιράζεται τη ζητούμενη επιφάνεια. Βασιζόμενοι στον προσανατολισμό της διεπιφάνειας (όπως και στην κίνηση της) οι τιμές της ροής λαμβάνονται από τη κατάντη ή την ανάντη τιμή της ταχύτητας ή από συνδυασμό και των δύο.

Όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος του δότη – δέκτη, πρέπει να υπολογίζεται μια χρονικά εξαρτημένη λύση. Επίσης η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο με τετράεδρα ή εξαέδρα πλέγματα. Στην περίπτωση χρησιμοποίησης προσαρμοσμένου πλέγματος πρέπει να διασφαλιστεί ότι δεν υπάρχουν κελιά με διπλά τοιχώματα στον υπολογιστικό χώρο.

4.11 Η ανεξάρτητη μέθοδος του Euler

Στην ανεξάρτητη προσέγγιση του Euler, η τυπική μέθοδος πεπερασμένων διαφορών του FLUENT εφαρμόζεται στην τιμή του κλάσματος όγκου όπως αυτές είχαν υπολογιστεί στο προηγούμενο χρονικό βήμα.

$$\frac{a_n^{k+1} - a_n^k}{\Delta t} V + \Delta(U_f^k a_{nf}^k) = 0 \quad (4.5)$$

όπου $k+1$ = δείκτης για το νέο χρονικό βήμα

k = δείκτης για το προηγούμενο χρονικό βήμα

a_{nf} = επιφανειακή τιμή του n-οστού κλάσματος όγκου, το οποίο έχει

υπολογιστεί με ανάντη μέθοδο πρώτης ή δευτέρας τάξεως

V = όγκος

U_f = ογκομετρική παροχή διαμέσου της επιφάνειας

Αυτός ο τύπος δεν απαιτεί επαναληπτική λύση για την εξίσωση μεταφοράς σε κάθε βήμα, όπως χρειάζεται για την εξαρτημένη μέθοδο.

Όταν χρησιμοποιείται η ανεξάρτητη μέθοδος του Euler πρέπει να χρησιμοποιείται μια χρονικά μεταβαλλόμενη λύση.

4.12 Η εξαρτημένη μέθοδος

Στην εξαρτημένη προσέγγιση του Euler, μια τυπική μέθοδος πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται στο FLUENT εφαρμόζεται για τον προσδιορισμό των επιφανειακών ροών για όλα τα κελιά, συμπεριλαμβάνοντας και αυτά που είναι κοντά στην διεπιφάνεια.

$$\frac{a_n^{k+1} - a_n^k}{\Delta t} V + \Delta(U_f^{k+1} a_f^{k+1}) = 0 \quad (4.6)$$

Αφού η εξίσωση απαιτεί την τιμή του κλάσματος όγκου για το τρέχον χρονικό βήμα, μια τυπική βαθμωτή εξίσωση μεταφοράς λύνεται επαναληπτικά για κάθε δευτερεύουσα φάση του κλάσματος όγκου για κάθε χρονικό βήμα.

Η εξαρτημένη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό και για χρονικά μεταβαλλόμενη κατάσταση και για σταθερή κατάσταση.

4.13 Χρονικά μεταβαλλόμενη

Για τον υπολογισμό του VOF με τη χρονικά μεταβαλλόμενη μέθοδο, η εξίσωση επιλύεται χρησιμοποιώντας μία ανεξάρτητη χρονικά βηματική μέθοδο (explicit time-marching). Το FLUENT αυτόματα επαναπροσδιορίζει το χρονικό βήμα για την ολοκλήρωση της εξίσωσης του κλάσματος όγκου αλλά μπορεί να επηρεαστεί ο υπολογισμός αυτού του χρονικού βήματος με τροποποίηση του αριθμού Courant. Μπορούμε να επιλέξουμε την ενημέρωση του κλάσματος όγκου μια φορά για κάθε χρονικό βήμα ή μια φορά για κάθε επανάληψη μέσα σε κάθε χρονικό βήμα.

4.14 Επιφανειακή τάση και προσκόλληση στο τοίχωμα

Το πρότυπο VOF μπορεί επίσης να συμπεριλάβει την επίδραση επιφανειακών τάσεων στη διεπιφάνεια μεταξύ των ρευστών. Η ακρίβεια του πρότυπου μπορεί να αυξηθεί με τον επιπρόσθετο καθορισμό των εφαπτόμενων γωνιών μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων.

Ο κώδικας FLUENT δεν μπορεί να εξομοιώσει ροές με επιφανειακή τάση χρησιμοποιώντας το VOF όταν είναι παρόντα παραπάνω από δύο ρευστά.

Επιφανειακή τάση

Οι επιφανειακές τάσεις εμφανίζονται σαν αποτέλεσμα των ελκτικών δυνάμεων μεταξύ των μορίων του ρευστού. Για παράδειγμα θεωρήστε το σχήμα που παίρνει μια φυσαλίδα αέρα στο νερό. Μέσα στη φυσαλίδα η

συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα μόριο από τα γειτονικά του είναι μηδέν. Στην επιφάνεια όμως η συνολική ακτινική δύναμη έχει φορά προς τα εσωτερικό της φυσαλίδας και το συνδυασμένο αποτέλεσμα των ακτινικών συνιστωσών των δυνάμεων σε ολόκληρη την σφαιρική επιφάνεια είναι η δημιουργία μιας αντίθετης δυνάμεως η οποία αυξάνει την πίεση στα κοίλα πλευρά της επιφάνειας.

Η επιφανειακή τάση είναι μια δύναμη που επιδρά μόνο στην επιφάνεια· αυτό απαιτείται για την διατήρηση της ισορροπίας σε τέτοιες περιπτώσεις. Δρα έτσι ώστε να υπάρξει ισορροπήσει την ακτινική εσωτερική διαμοριακή δύναμη με την ακτινική εξωτερική βαθμίδα πίεσης που δρα στην επιφάνεια. Σε περιοχές όπου υπάρχει διαχωρισμός των ρευστών, αλλά ένα από αυτά δεν έχει το σχήμα σφαιρικής φυσαλίδας, η επιφανειακή τάση ενεργεί στο να μειώσει την περιοχή της διεπιφάνειας.

Το πρότυπο της επιφανειακής τάσης στο FLUENT είναι το πρότυπο της συνεχούς επιφανειακής δύναμης όπως έχει προταθεί από τον Brackbill et al. Με αυτό το πρότυπο, η επίδραση της επιφανειακής τάσης στον υπολογισμό του VOF υπολογίζεται με τη χρήση ενός πηγαίου όρου στην εξίσωση της ορμής. Για την κατανόηση της προέλευσης του πηγαίου όρου θεωρήστε την ειδική κατάσταση όπου η επιφανειακή τάση είναι σταθερή στην επιφάνεια και όπου λαμβάνονται υπόψη μόνο οι δυνάμεις οι οποίες είναι κάθετες στην διεπιφάνεια. Μπορεί να δειχθεί ότι η πτώση πίεσης στην επιφάνεια, εξαρτάται από τον συντελεστή επιφανειακής τάσης, σ , και την

καμπυλότητα της επιφάνειας όπως αυτή μετράται με τη χρήση δύο ακτίνων R_1 και R_2 σε απόσταση κάθετη στην διεπιφάνεια.

$$p_2 - p_1 = s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.7)$$

όπου p_1 και p_2 είναι οι πιέσεις των δύο ρευστών στις πλευρές τις διεπιφάνειας.

Στο FLUENT, χρησιμοποιείται μια μορφή του πρότυπου CSF, όταν η επιφανειακή καμπυλότητα υπολογίζεται από την τοπική κλίση στην επιφάνεια η οποία είναι κάθετη στην διεπιφάνεια. Έστω n το διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια και ορίζεται ως η κλίση στην a_2 δηλ. το κλάσμα όγκου της δευτερεύουσας φάσης.

$$n = \nabla a_2$$

(4.8)

Η καμπυλότητα, κ , ορίζεται συναρτήσει της απόκλισης του διανύσματος το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια, \hat{n} :

$$k = \nabla \cdot \hat{h} = \frac{1}{|n|} \left[\left(\frac{n}{|n|} \cdot \nabla \right) |n| - (\nabla \cdot n) \right] \quad (4.9)$$

όπου

$$\hat{n} = \frac{n}{|n|}$$

(4.10)

Η επιφανειακή τάση μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της βηματικής μεταβολή της πίεσης στην επιφάνεια. Η δύναμη στην επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί σαν δύναμη που δρα στον όγκο χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης. Είναι αυτή η δύναμη της οποίας η δράση προστίθεται σαν όρος πηγής στην εξίσωση της ορμής. Έχει την ακόλουθη μορφή:

$$F_{vol}(x) = 2sk(x)a_2 \nabla a_2 \quad (4.11)$$

Ο πηγαίος όρος προστίθεται μόνο στη μια πλευρά της διεπιφάνειας: στην πλευρά την οποία υπολογίζεται το κλάσμα όγκου. Στο FLUENT το πρότυπο VOF ανταποκρίνεται στη δευτερογενή φάση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η εξομοίωση της θλιπτικής ροής περί κυλινδρικών εγκλεισμάτων, η φύση της οποίας εξετάστηκε διεξοδικά στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι το αντικείμενο της παρούσας μελέτης. Για τις ανάγκες επίλυσης του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε ο γενικός κώδικας πεπερασμένων στοιχείων ANSYS και συγκεκριμένα η έκδοση 5.6.

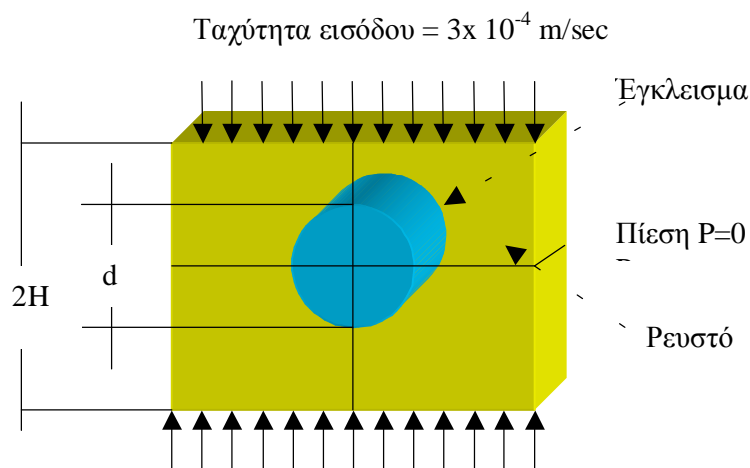
Το προς μελέτη πρόβλημα συνίσταται στη μελέτη της ροής συμπίεσης ρευστού εντός της μήτρας η οποία δρα σε κυλινδρικής μορφής έγκλεισμα. Στο ανώτερο και κατώτερο όριο του φυσικού χώρου υπάρχει μόνιμη ροή ρευστού. Η ταχύτητα *εισροής* στο πεδίο είναι ιδιαίτερα μικρή καθώς μεγάλες ταχύτητες συνδέονται με αυξημένες ενεργειακές απώλειες λόγω των *διατμητικών τάσεων* που αναπτύσσονται.

Τα όρια, δεξιά και αριστερά του φυσικού χώρου, αποτελούν την περιοχή προκαθορισμένης πίεσης. Η τιμή της ασκούμενης πίεσης είναι ουσιαστικά ο ρυθμιστικός παράγοντας για την δημιουργία κοιλότητας περί του οριζοντίου επιπέδου συμμετρίας. Στην περίπτωση υποπίεσης (η πίεση στο όριο να είναι μικρότερη στατική πίεση του ρευστού) αυξάνεται η μαζική εκροή από τα κατακόρυφα όρια του χώρου. Παρατηρείται δε το φαινόμενο, η εκροή να κινείται πριν το κύριο μέρος του ρευστού να πλησιάσει το υπό μελέτη έγκλεισμα. Στην περίπτωση υπερπίεσης (η πίεση στο όριο να είναι μεγαλύτερη από την στατική πίεση του ρευστού) ασκείται επιπλέον συμπίεση στη περιοχή της μήτρας με αποτέλεσμα να μειώνεται η κατακόρυφη εκροή με αποτέλεσμα να μειώνεται αισθητά ή και να εξαφανίζεται η κοιλότητα στον ισήμερινό του προβλήματος.

Το πρόβλημα παρουσιάζει δύο επίπεδα συμμετρίας και συνεπώς ο υπολογιστικός χώρος περιορίζεται στο ένα τέταρτο του φυσικού χώρου προς εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου και πόρων. Συνεπώς οι οριακές συνθήκες του προβλήματος, όπως προκύπτουν από την εξέταση της φύσης τους, είναι:

<p>Οριακή συνθήκη εισόδου στο άνω όριο του υπολογιστικού. Το βαθμωτό μέγεθος του οποίου η τιμή πρέπει να οριστεί είναι η ταχύτητα. Εναλλακτικά και ανάλογα με τον χρησιμοποιούμενο κώδικα, ορίζεται η μαζική ή η ογκομετρική παροχή. Στο υπό εξέταση πρόβλημα η ταχύτητα είναι -3×10^{-4} m/sec. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει κίνηση με διεύθυνση αντίθετη προς το ορισμένο σύστημα συντεταγμένων.</p>	<p>Οριακές συνθήκες συμμετρίας στο αριστερό και κάτω όριο του υπολογιστικού χώρου. Οι οριακές αυτές συνθήκες εφαρμόζονται υπολογιστικά εξασφαλίζοντας ότι δεν υπάρχει εγκάρσια μετακίνηση μάζας κατά μήκος του ορίου, δηλ $V_x=0$ στο κατακόρυφο αριστερό όριο, $V_y=0$ στο οριζόντιο κάτω όριο.</p>
<p>Οριακή συνθήκη προκαθορισμένης στατικής πίεσης στο δεξιό κατακόρυφο όριο. Το βαθμωτό μέγεθος το οποίο πρέπει να οριστεί είναι η τιμή της στατικής πίεσης. Στο πρόβλημα η τιμή της στατικής στο όριο είναι 0 Pa. Επίσης το πεδίο αρχικοποιείται με την ίδια τιμή με αποτέλεσμα η βαθμίδα της πίεσης κατά μήκος του ορίου να είναι μηδενική.</p>	<p>Οριακές συνθήκες μη ολίσθησης (wall ή no slip boundary conditions). Εφαρμόζονται στην επιφάνεια του τεταρτοκυκλίου. Εφαρμόζονται υπολογιστικά θέτοντας ως μηδενικές τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας: $V_x=0, V_y=0$.</p>

Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 5-0 Γεωμετρική περιγραφή του υπό μελέτη προβλήματος

Το ρευστό λαμβάνεται ως έχον Νευτωνική συμπεριφορά, δηλ. Γραμμική σχέση κλίσης ταχύτητας και διατμητικής τάσης. Καθώς δεν μελετήθηκε η διαδικασία μεταβολή της φάσης, δεν λήφθηκε υπόψη η μεταβολή των ανωτέρω ιδιοτήτων συναρτήσει της θερμοκρασίας.

Οι αρχικές φυσικές ιδιότητες του υπό εξέταση ρευστού είναι:

- Πυκνότητα, $\rho=1800$ kg/m³
- Μοριακό ιξώδες, $\mu=1$ Pa sec (1 Pa=1 N/m²)

Αφού εξάγουμε τα αποτελέσματα που θέλουμε θα μεταβάλλουμε την τιμή του ιξώδους για

- $\mu=0,1$ Pa sec
- $\mu=10$ Pa sec
- $\mu=100$ Pa sec

διατηρώντας την τιμή της πυκνότητας σταθερή.

Η ανάλυση της ροής είναι δισδιάστατη και ισόθερμη. Για την εύρεση της σχηματιζόμενης διεπιφάνειας η ροή θεωρείται ως διφασική. Το χρησιμοποιούμενο μοντέλο είναι το V.O.F (volume of fluid). Το μοντέλο αυτό συνίσταται στην επίλυση μιας επιπλέον εξίσωσης μεταφοράς για ένα βαθμωτό μέγεθος, ϕ , που περιγράφει την κατάσταση της φάσης στο πεδίο. Από τις τιμές που λαμβάνει κατά τη λύση, είναι δυνατός ο προσδιορισμός της διεπιφάνειας. Στην συγκεκριμένη ανάλυση όταν:

$\phi=1$, το στοιχείο είναι πλήρες

$\varphi=0$, το στοιχείο είναι κενό

$0<\varphi<1$, το στοιχείο βρίσκεται στην διεπιφάνεια.

Η χρήση του μοντέλου V.O.F. επιβάλλει την θεώρηση του προβλήματος ως χρονικά μεταβαλλόμενου (transient). Η επιλογή της αριθμητικής τιμής του χρονικού βήματος είναι καθοριστικής σημασίας. Μεγάλες τιμές αυτού οδηγούν σε αριθμητική αστάθεια, αφετέρου δεν επιτρέπουν την παρακολούθηση της μεταβολής της θέσης της διεπιφάνειας. Υπερβολικά μικρές τιμές αυξάνουν τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος, παρά το γεγονός ότι δεν παρουσιάζονται προβλήματα

αστάθειας. Η τιμή που επιλέχθηκε για τη χρονική διακριτοποίηση είναι 0,2 sec η οποία αντιστοιχεί σε μια κάθοδο της διεπιφάνειας στον υπολογιστικό χώρο κατά:

$$\Delta y = V_y \cdot \Delta t = (3 \cdot 10^{-4} \text{ m/sec}) \cdot (0.2 \text{ sec}) = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

Δεδομένου ότι το μήκος του υπολογιστικού χώρου που πρέπει να διανύσει το ρευστό είναι 0,1 m γίνεται αντιληπτό ότι ο απαιτούμενος αριθμός των χρονικών βημάτων είναι εξαιρετικά μεγάλος. Ο αριθμός των ενδιάμεσων επαναλήψεων σε κάθε χρονικό βήμα είναι 200. Η τιμή αυτή εξασφαλίζει τη σύγκλιση της λύσης σε κάθε χρονικό βήμα για το συγκεκριμένο πρόβλημα και το μηδενισμό της πιθανότητας εμφάνισης αριθμητικής διάχυσης στο υπολογιστικό πεδίο.

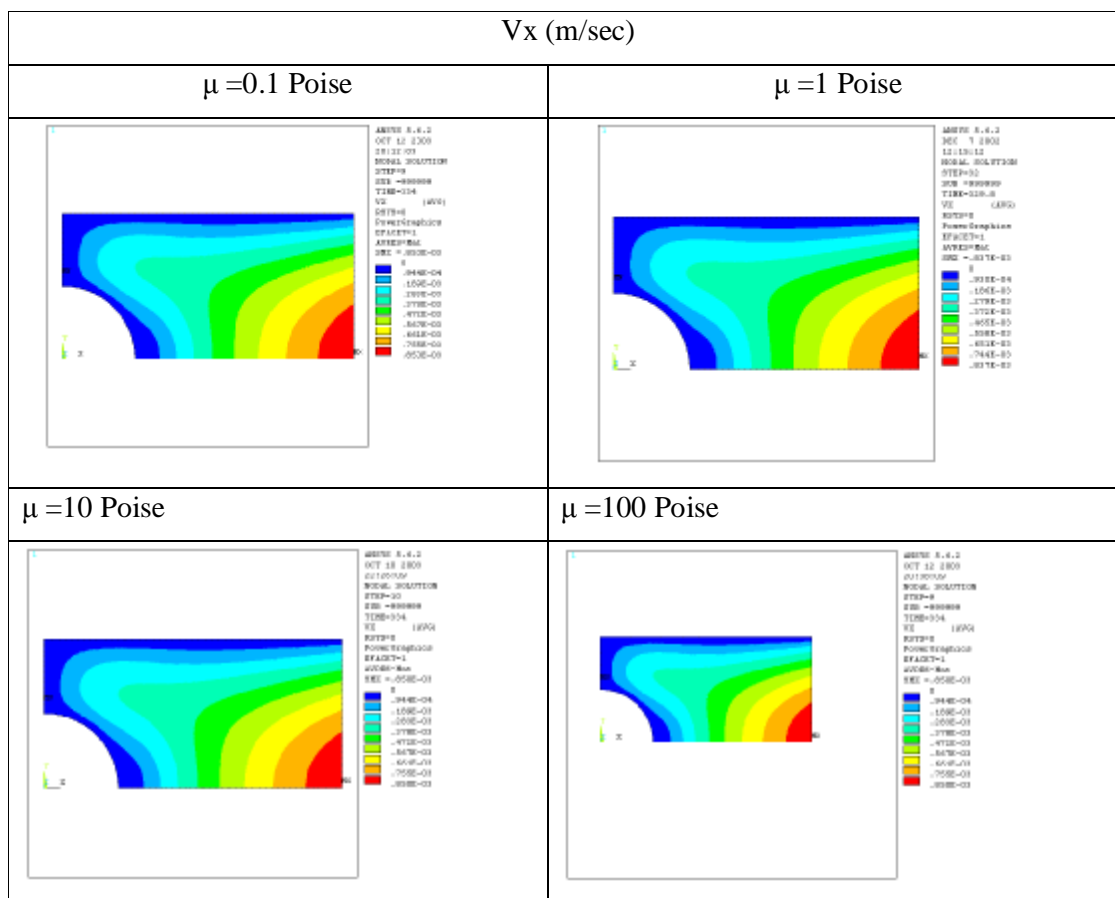
Κατωτέρω υπολογίζουμε την τιμή του αριθμού Reynolds Re , για τις διαφορετικές τιμές του *ιξώδους* και για $V_y = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/sec}$

- $\mu = 0,1 \text{ Pa sec}$ → $Re = 0.54$
- $\mu = 1 \text{ Pa sec}$ → $Re = 0.054$
- $\mu = 10 \text{ Pa sec}$ → $Re = 0.0054$
- $\mu = 100 \text{ Pa sec}$ → $Re = 0.00054$

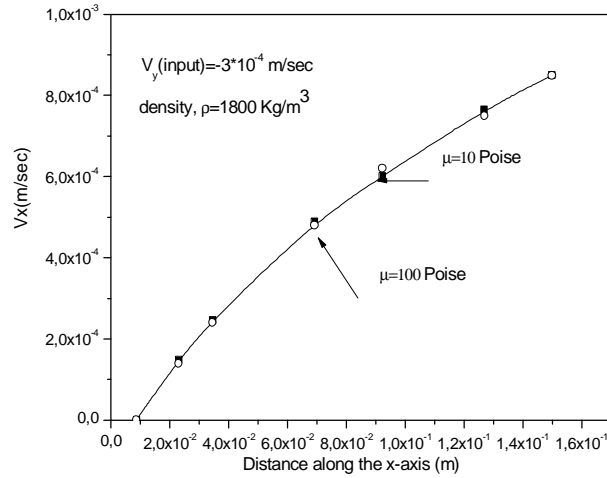
Παρατηρούμε ότι οι τιμές του αριθμού Reynolds είναι εξαιρετικά μικρές. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ροή χαρακτηρίζεται ως *γραμμική*, με αποτέλεσμα τα συνεκτικά φαινόμενα να υπερτερούν των αντίστοιχων αδρανειακών.

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

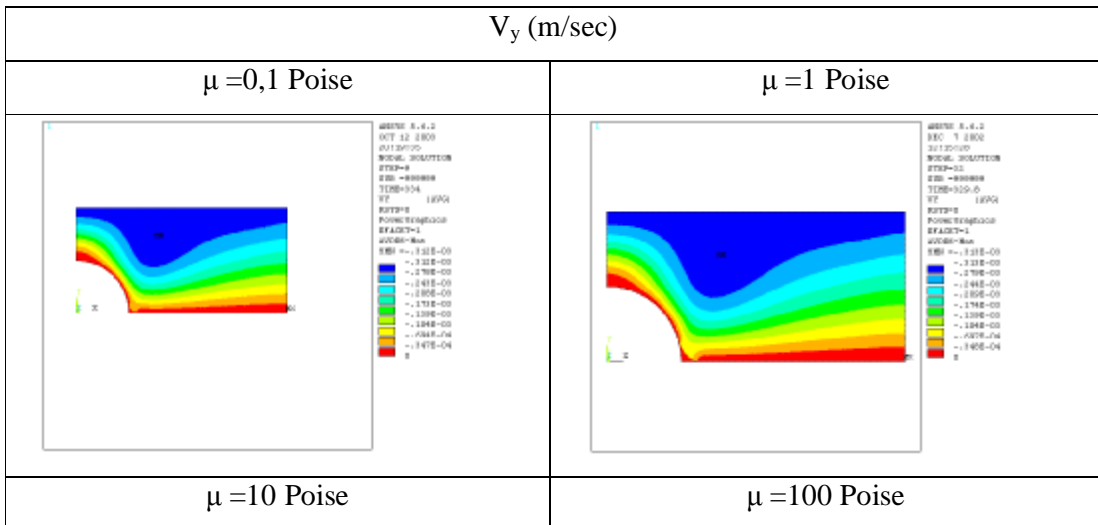
Σε αυτήν την παράγραφο θα παραθέσουμε όλα τα αποτελέσματα που εξάγαμε από την μελέτη που κάναμε. Στο σχήμα 5-1 φαίνονται οι κατανομές των ταχυτήτων κατά τον χ-άξονα. Όπως παρατηρούμε η μεταβολή του ιξώδους δεν επιφέρει σημαντικές μεταβολές στην κατανομή της V_x . Παρατηρούμε ότι η V_x είναι μηδέν στο άνω επίπεδο της περιοχής που ρέει το ρευστό και γύρω από το έγκλεισμα. Αυτό οφείλεται στις δεδομένες οριακές συνθήκες του προβλήματος. Οι μεγαλύτερες τιμές της V_x αναπτύσσονται σε μικρές αποστάσεις από την οριζόντια αξονική γραμμή.

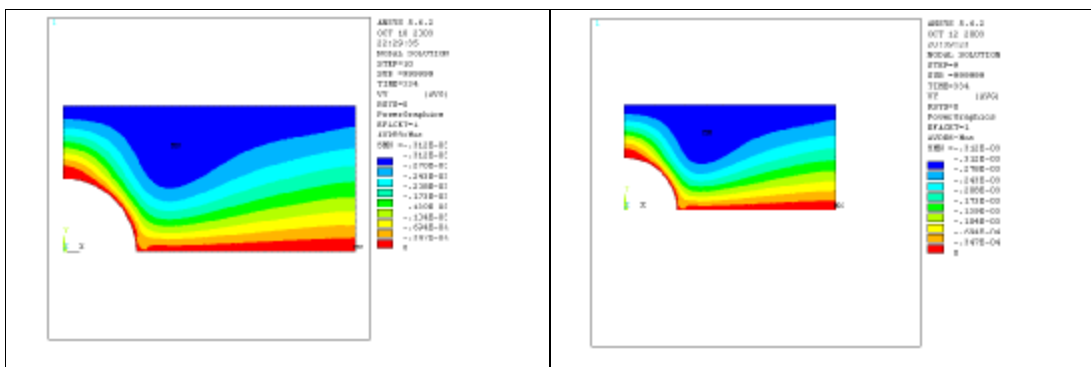


Σχ.5-1 Κατανομές των V_x για τις διάφορες τιμές του ιξώδους



Σχ. 5-2 Μεταβολή της ταχύτητας V_x κατά μήκος του άξονα $y=0$
 Στο σχήμα 5-2 παρουσιάζεται η αύξηση της V_x του ρευστού κατά μήκος της οριζόντιας γραμμής συμμετρίας για δύο τιμές του ιξώδους, μια για $\mu=10 \text{ Pa sec}$ και μια για $\mu=100 \text{ Pa sec}$. Η V_x έχει μηδενική τιμή πλησίον του εγκλείσματος και αυξάνεται γραμμικά καθώς απομακρύνεται από το εγκλείσμα. Από το σχήμα 5-2 μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέγεθος του κενού όπου στην περίπτωση μας για $V_y=3 \cdot 10^{-4} \text{ m/sec}$ και για τις διαφορετικές τιμές του ιξώδους μ το μέγεθος του κενού ισούται με $0,01 \text{ m}$.

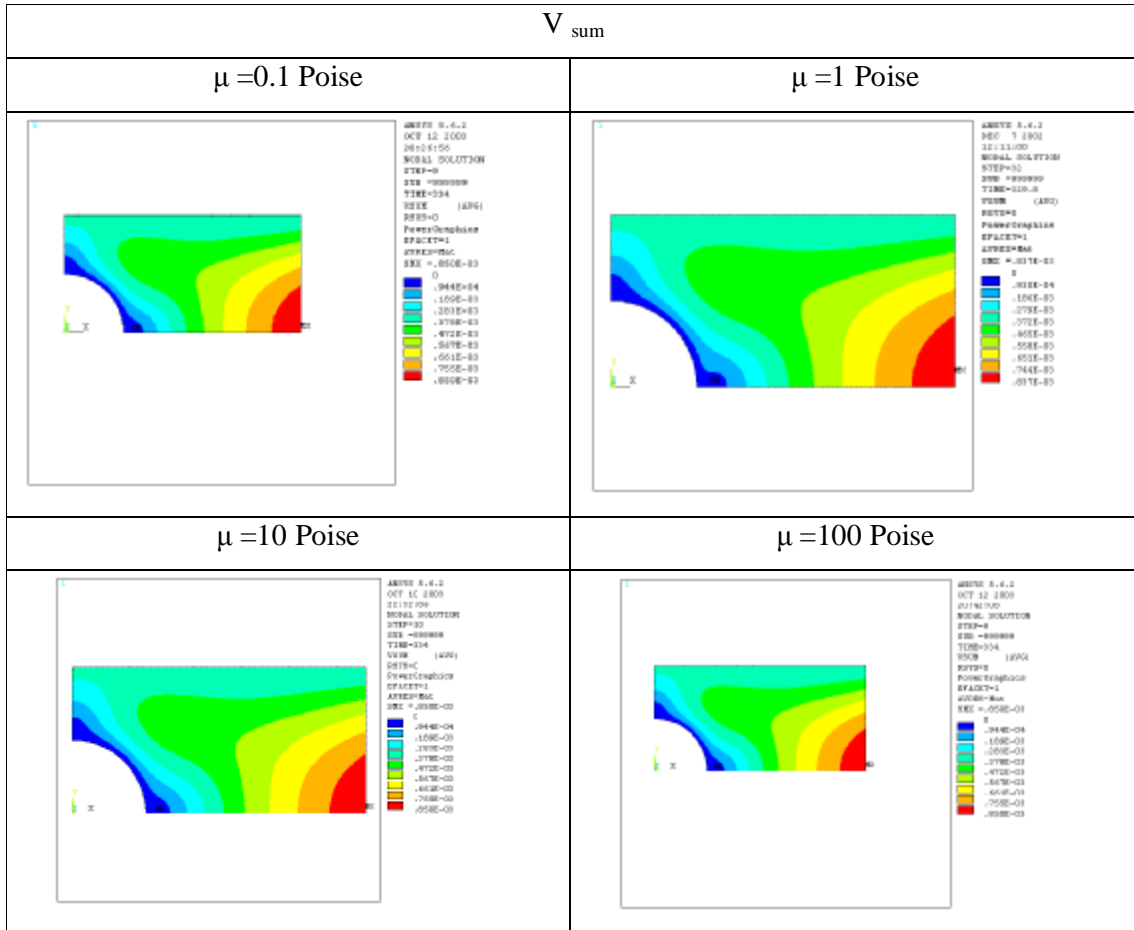




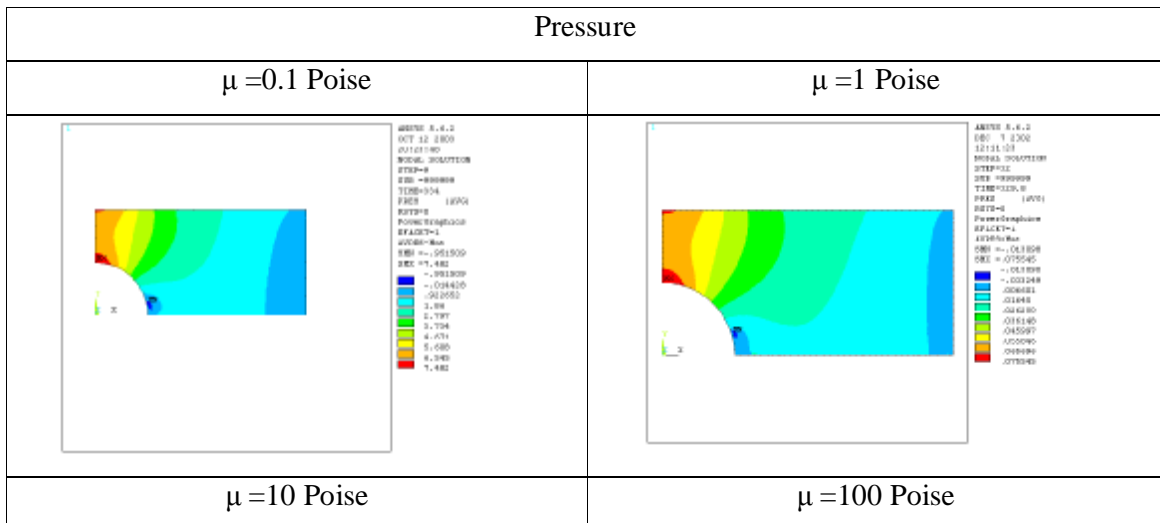
Σχ. 5-3 Κατανομές των V_y για τις διάφορες τιμές του ιξώδους

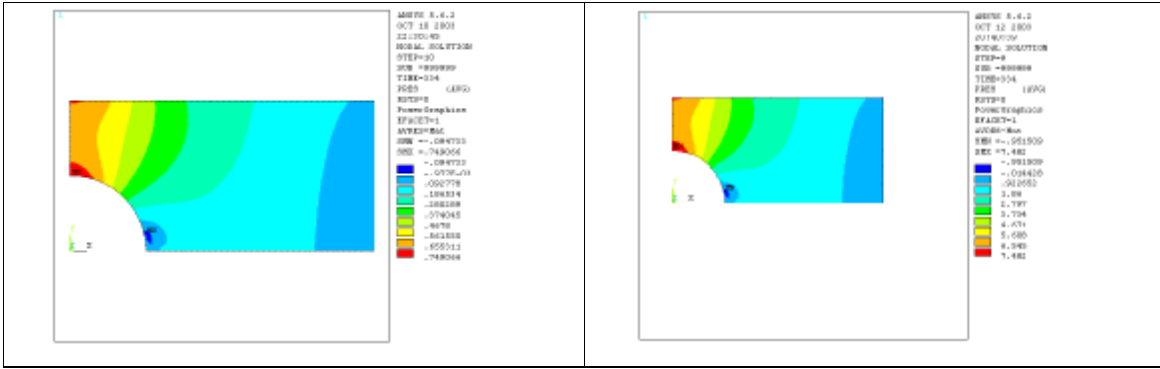
Στο σχήμα 5-3 φαίνονται οι κατανομές των ταχυτήτων V_y για τις διάφορες τιμές του ιξώδους, οι οποίες είναι περίπου ίδιες για όλες τις τιμές του ιξώδους. Εδώ βλέπουμε ότι η συνιστώσα αυτή έχει μέγιστη τιμή στο άνω επίπεδο ροής του ρευστού και μηδενίζεται γύρω από το έγκλεισμα και στο οριζόντιο επίπεδο συμμετρίας του προβλήματος. Η μηδενική τιμή της V_y από το έγκλεισμα δημιουργεί την περιοχή ανάπτυξης των κενών αέρος (voids).

Από τις δύο ταχύτητες V_x, V_y μπορούμε να πάρουμε το διανυσματικό άθροισμα αυτών $V_{sum} = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2}$. Οι κατανομές των V_{sum} , οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 5-5, είναι ίδιες για όλες τις τιμές του ιξώδους που εξετάσαμε και αυτό είναι ευνόητο αφού οι κατανομές των δύο συνιστωσών τους είναι ίδιες. Στο σχήμα αυτό βλέπουμε πως γύρω από το έγκλεισμα δημιουργείται μικρή αλλά καλώς ορισμένη στρώση κενού αέρος. Στο Σχήμα 5-5 παριστάνονται οι τιμές της πίεσης για τις διάφορες τιμές του ιξώδους. Από το σχήμα καταλαβαίνουμε ότι για δεκαπλασιασμό του ιξώδους η πίεση υποδεκαπλασιάζεται. Επίσης παρατηρούμε πως η πίεση κατά μήκος της κατακόρυφης συμμετρικής γραμμής μεταβάλλεται σχεδόν *παραβολικά* από μια μέγιστη τιμή, περνά από μια ελάχιστη τιμή και αυξάνεται μέχρι μια μέγιστη στην επιφάνεια του εγκλείσματος. Αυτό συνηγορεί ότι από τον πόλο του εγκλείσματος αρχίζει να εμφανίζεται η στρώση του κενού, δηλαδή το ρευστό αρχίζει να αποκολλείται από το έγκλεισμα από τον πόλο του. Στο σχήμα 5-6 παρουσιάζεται η κατανομή της πίεσης κατά μήκος της αριστερής



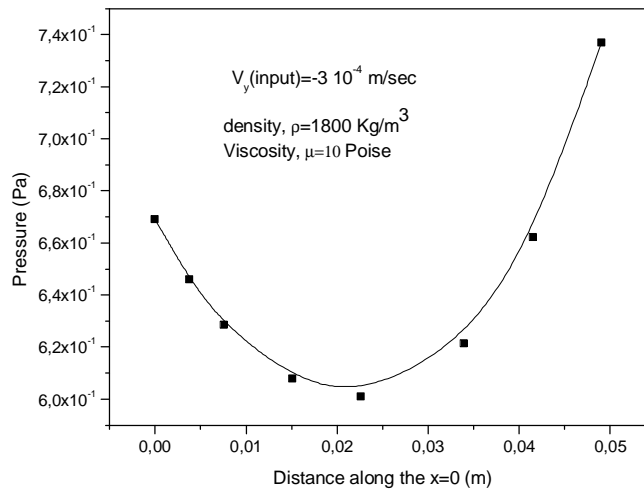
Σχ.5-4 Κατανομές των V_{sum} για τις διάφορες τιμές του ιξώδους





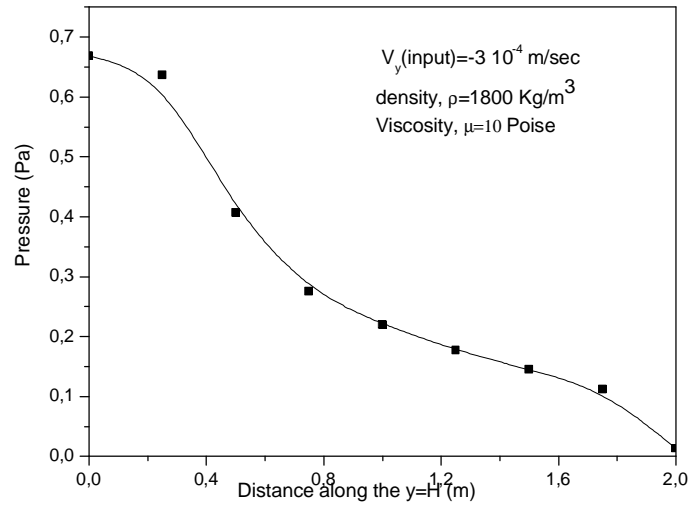
Σχ.5-5 Κατανομή της πίεσης για τις διάφορες τιμές του ιξώδους

συμμετρικής γραμμής του δοκιμίου. Το σχήμα 5-7 μας δείχνει την κατανομή της πίεσης κατά μήκος της άνω επιφάνειας του δοκιμίου, δηλαδή για $y=H$.

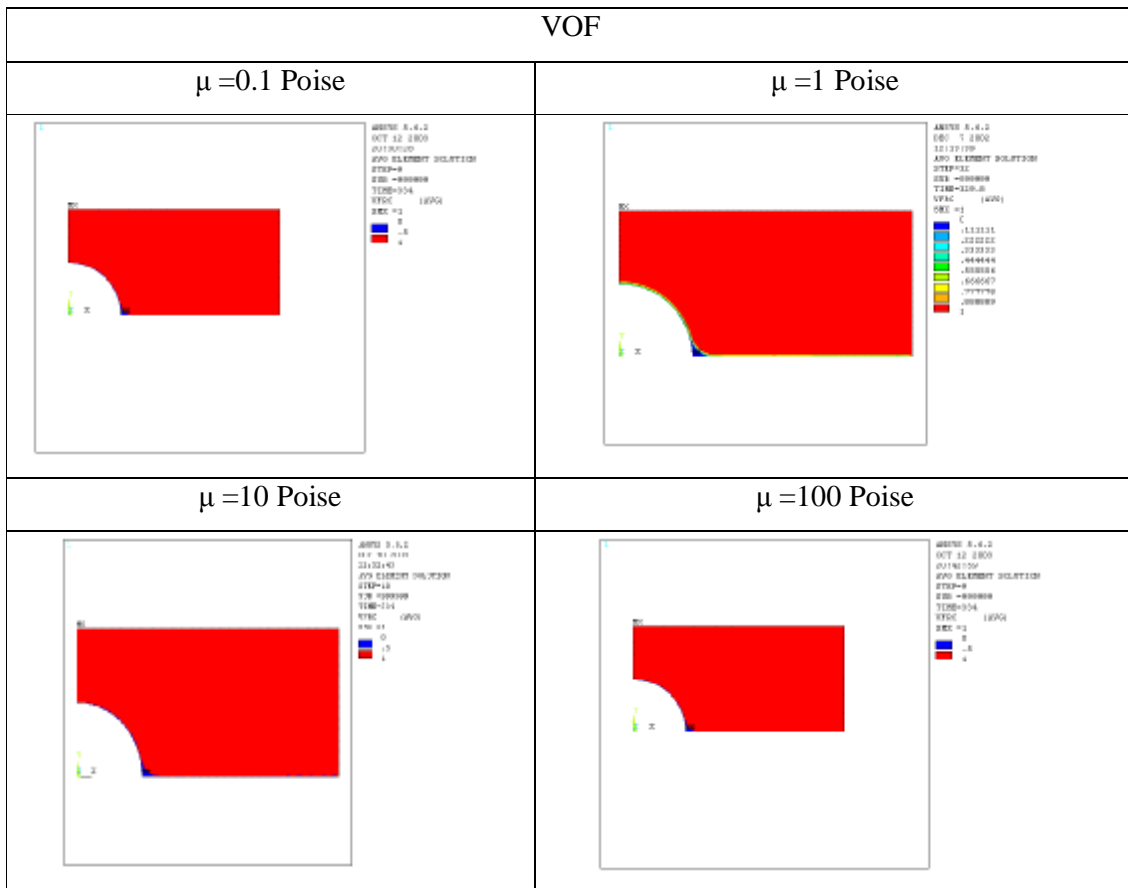


Σχ.5-6 Κατανομή της πίεσης κατά μήκος της αριστερής συμμετρικής γραμμής του δοκιμίου

Τα σχήματα 5-6, 5-7 αναφέρονται για τιμή του ιξώδους $\mu=10$ Poise



Σχ.5-7 Κατανομή της πίεσης κατά μήκος της άνω επιφάνειας του δοκιμίου



Σχ.5-8 Κατανομή του V.O.F

Η κατανομή του V.O.F δηλαδή του ποσοστού του όγκου του ρευστού μέσα στο δοκίμιο φαίνεται στο Σχήμα 5-8.

5.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Είναι προφανές από τα αριθμητικά αποτελέσματα (Σχ. 5-1), ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά την εγκάρσια διεύθυνση ως προς τη διεύθυνση εισροής του ρευστού, το ιξώδες δεν μεταβάλλει ουσιαστικά την ταχύτητα αυτή. Η περιοχή μεταβολής του ιξώδους είναι από 0.1 Poise έως 100 Poise. Το άνοιγμα του οριακού στρώματος των διακένων γύρω από το έγκλεισμα (το οποίο είναι μέγιστο στον ισημερινό του εγκλείσματος) είναι περίπου 5% της ολικής απόστασης του δοκιμίου κατά την x -διεύθυνση. Είναι φανερό από τα αποτελέσματα ότι το ιξώδες δεν επηρεάζει την ταχύτητα κατά την x -διεύθυνση θεωρώντας ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα εισροής είναι σταθερά. Το ιξώδες του ρευστού δεν επηρεάζει την κατανομή της αξονικής ταχύτητας του ρευστού (V_y). Αυτό επαληθεύεται και από τα διαγράμματα της ολικής ταχύτητας του ρευστού. Το ιξώδες επηρεάζει, όχι σημαντικά, την μεταβολή της πίεσης του ρευστού γύρω από το έγκλεισμα. Για σταθερά V_y , πυκνότητα, ιξώδες η κατανομή της πίεσης κατά μήκος του y -άξονα έχει παραβολική μορφή με ελάχιστο σε απόσταση 0.025 m από τον πόλο του εγκλείσματος. Η κατανομή της πίεσης στο επίπεδο εισροής του ρευστού παρουσιάζει μια εκθετική μείωση η οποία μηδενίζεται στην ελεύθερη επιφάνεια του δοκιμίου. Σύμφωνα με την τεχνική VOF αποδείχθηκε ότι η κατανομή του οριακού στρώματος των κενών γύρω από το έγκλεισμα παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από τη μεταβολή του ιξώδους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd edition, McGraw Hill (1977)
2. R. Gallagher, Finite Element Analysis Fundamentals, Prentice Hall (1975)
3. J. E. Akin, Application and Implementation of Finite Element Methods, Academic Press (1982)
4. R. Bird, W. Stewart and E. Lightfoot, Transport Phenomena, John Wiley and Sons (1960)
5. J. G. Rice and R.J. Schnopke, A monotone streamline upwind finite element method for convection dominated flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 48 (1985) 313-327
6. F. P Preparata and M. I. Shamos, Computational Geometry: An Introduction. Springer Verlag, New York, 1985
7. S. Yap, Towards exact geometric computation, Comput. Geom. Theory Appl. Vol. 7 (1997).
8. M. Greco, O. Faltinsen and M. Landrini, Numerical Simulation of Heavy Water Shipping, www.roww.com/soft/special
9. <http://www.mie.utoronto.ca/labs/mfl/free-surface.htm>
10. ANSYS manual, Theory reference, chapter 7. Fluid Flow, 7.3. Volume of fluid method for free surface flows (2003)
11. Jyi-Tyan Yeh, A VOF-FEM and Coupled Inkjet Simulation, Proceedings of ASME FEDSM'01, 2001 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, New Orleans, Louisiana, May 29-June 1, (2001)
12. D. Pan and C.H. Chang, A free Surface Capturing Method for Incompressible Multi-Fluid Flows, ASME, FEDSM99-7105 (1999)
13. B.D. Nichols, C.W. Hirt and R.S. Hotchkiss, SOLA-VOF: a solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-8355 (1980)
14. C.W. Hirt and B.D. Nichols, Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Comput. Phys., vol. 39, No. 1, pp. 201-225 (1981).