

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

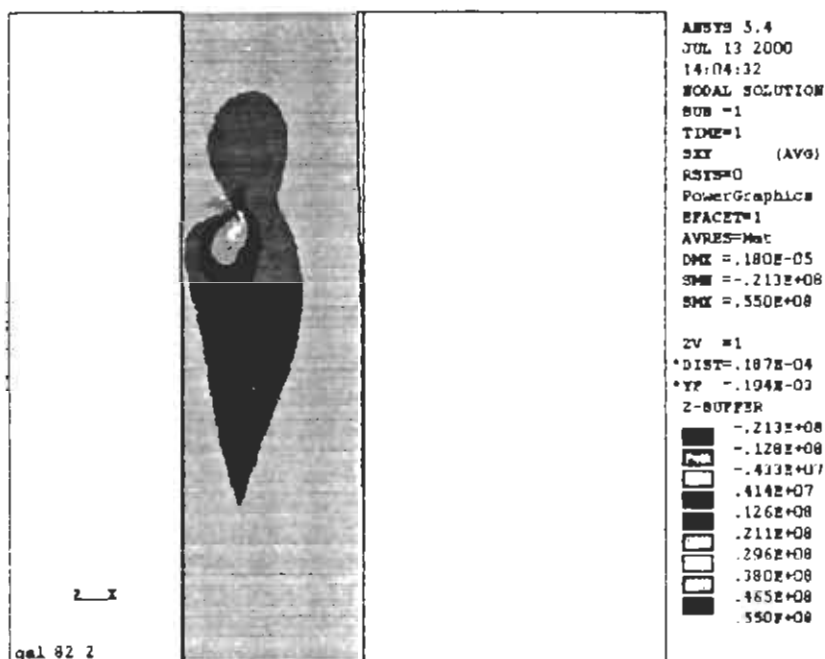
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

Μ. Αλεξάνδρου 1
26334 Κουκούλι, Πάτρα

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΕ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



Εισηγητής:

Δρ. Π.Α. Κακαβάς

Σπουδαστής:

Χρήστος Ανωγιάνης (ΑΜ. 2404)

ΠΑΤΡΑ 2001

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ	
----------------------	--

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ	3167
----------------------	------

Ο συγγραφέας της παρούσης πτυχιακής θέλει να εκφράσει τις ευχαριστίες του στον καθηγητή του Παν. Κακαβά για τις ατέλειωτες ώρες που αφιέρωσε για την λήψη των αριθμητικών δεδομένων αυτής της εργασίας και την συγγραφή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελ.
Πρόλογος	III
Κεφάλαιο 1^ο: Εισαγωγή στα Ινώδη Σύνθετα Υλικά	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Ορισμοί και Ταξινόμηση των Συνθέτων Υλικών	3
1.3 Φυσικά Σύνθετα Υλικά	8
Κεφάλαιο 2^ο: Μηχανικές Ιδιότητες Ενισχυμένων Σύνθετων Υλικών	9
2.1 Μελέτη Ενισχυμένων Ινωδών Συνθέτων Υλικών	9
2.2 Κατανομή των Εντατικών και Παραμορφωσιακών Πεδίων στα Άκρα των Ινών	20
2.3 Ελαστικές Ιδιότητες Κοντόινων Ινωδών Συνθέτων Υλικών	24
Κεφάλαιο 3^ο: Ιδιότητες των Συνθέτων Υλικών όπως Προσδιορίζονται από τις ιδιότητες τις Διεπιφάνειας-Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου από τη Ρητίνη στην Ίνα	28
3.1 Εισαγωγικά	28
3.2 Γενική Συμπεριφορά των Φάσεων	29
3.3 Ειδικές Περιπτώσεις	36
Κεφάλαιο 4^ο: Αριθμητική Μελέτη της Μεταφοράς Φορτίου σε Μονόινα Σύνθετα Υλικά	46
4.1 Εισαγωγικά	46
4.2 Το Πρότυπο	47
4.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα	49
Κεφάλαιο 5^ο: Βασικές Έννοιες Πεπερασμένων Στοιχείων	55
5.1 Εισαγωγικά	55
5.2 Σύστημα Συντεταγμένων	55

5.3 Το Βασικό Στοιχείο	58
5.4 Μέθοδοι για τη Δημιουργία Στοιχείων	60
5.4α Διακριτοποίηση της Αρχής του Δυνατού Έργου	63
5.5 Τριγωνικά Στοιχεία στην Κατάσταση Επίπεδης Έντασης	64
5.6 Τετράπλευρα Στοιχεία	72
5.7 Ισοπαραμετρική Ανάλυση	77
5.8 Βασικές Σχέσεις Ελαστικότητας	79
5.9 Ερμηνεία των Τασικών Πεδίων	82
Κεφάλαιο 6^ο: Εφαρμογή των Πεπερασμένων Στοιχείων σε Ινώδη Ενισχυμένα Σύνθετα Υλικά	84
6.1 Εισαγωγικά	84
6.2 Αναλυτικός Προσδιορισμός της Τάσης στην Ίνα και της Διατμητικής Τάσης στη Διεπιφάνεια Ρητίνης ίνας	85
Κεφάλαιο 7^ο: Ανάλυση των Τάσεων και παραμορφώσεων σε Μονόινα Σύνθετα Υλικά με Πεπερασμένα Στοιχεία	94
7.1 Εισαγωγικά	94
7.2 Κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων σε ινώδη σύνθετα υλικά όπου οι βάσεις των κυλινδρικών ινών είναι απόλυτα κάθετες προς την παράπλευρη επιφάνεια	97
7.3 Κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων σε ινώδη σύνθετα υλικά όταν η γωνία των βάσεων αναφορικά με την παράπλευρη επιφάνεια δεν είναι ορθή	110
7.4 Συμπεράσματα	
Βιβλιογραφία	B-1

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η επιστήμη και τεχνολογία των συνθέτων υλικών βασίζεται στην αντίληψη του σχεδιασμού ο οποίος είναι βασικά διαφορετικός από εκείνων των συμβατικών υλικών. Τα μεταλλικά κράματα, για παράδειγμα, γενικά δεικνύουν ένα ομοιόμορφο πεδίο ιδιοτήτων, οπότε μπορεί να επεξεργαστούν σαν ομοιογενή και ισότροπα υλικά. Τα ινώδη σύνθετα υλικά, από την άλλη πλευρά, δείχνουν έναν μεγάλο βαθμό μεταβολών στη μικροδομή τους, ο οποίος είναι αποτέλεσμα των ανομοιομορφων και ανισότροπων ιδιοτήτων. Επί πλέον, τα μεταλλικά υλικά μπορούν να διαμορφωθούν στα επιθυμητά γεωμετρικά σχήματα δια μέσου δευτερέων εργασιών, όπου η μακροσκοπική διαμόρφωση και μικροδομή του αντικειμένου συνδέεται με την πορεία της επεξεργασία του. Για τα ινώδη σύνθετα η σχέση ανάμεσα στη μικροδομή και στη μακροσκοπική κατάσταση, και η εξάρτηση της από τη διαδικασία παραγωγής είναι ισχυρότερη. Σαν αποτέλεσμα, η τεχνολογία των συνθέτων υλικών προσφέρει πολύ μεγάλο δυναμικό στο σχεδιασμό υλικών για τη τελική χρήση σε διαφορετικές εφαρμογές.

Σε μικροσκοπικό επίπεδο, η εσωτερική δομή ενός αντικειμένου μπορεί να ελεγχθεί μέσω της πορείας παραγωγής του. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η χύτευση κοντόινων συνθέτων όπου ο προσανατολισμός των ινών, το μήκος των ινών και η κατανομή τους μπορεί να ελεγχθεί για να παράγει τις επιθυμητές τοπικές ιδιότητες. Η επιθυμητή τοπική αντοχή, σκληρότητα, και άλλες ιδιότητες μπορεί να επιτευχθούν ελέγχοντας το τύπο των ινών και το επί τοις εκατό ποσοστό των ινών στην κατασκευή.

Το εξωτερικό γεωμετρικό σχήμα μιας κατασκευής από σύνθετα υλικά μπορεί επίσης να σχεδιαστεί. Σήμερα είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε τρισδιάστατα ινώδη αντικείμενα χρησιμοποιώντας προχωρημένη τεχνολογία νημάτων. Καθώς η βεβαιότητα να κατασκευάσουμε μεγαλύτερες και πολυπλοκότερες κατασκευές καθαρής μορφής είναι πλέον επαυξημένες μειώνεται όμως η απαίτηση για την μορφοποίηση και το συνδυασμό μεγάλου αριθμού από μικρά τμήματα.

Η ολοκλήρωση και προσέγγιση του συστήματος, κυμαινόμενη από τη μικροδομή μέχρι το καθαρό σχήμα του αντικειμένου, προσφέρει σχεδόν απεριόριστη δυνατότητα στην πορεία παραγωγής των συνθέτων υλικών.

Ο σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη ιδιοτήτων των ινωδών συνθέτων υλικών. Κατά τη μελέτη αυτών των υλικών θεωρήσαμε ότι ίνες μικρού μήκους, της τάξεως των 10^3 μm , είναι εμβαπτίζονται σε πολυμερικές ρητίνες, π.χ. εποξικές. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια ιστορική αναδρομή των συνθέτων υλικών, γίνεται αναφορά στα πρώτα σύνθετα υλικά που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος για διάφορες κατασκευές, καθώς επίσης και στα σύνθετα υλικά που υπάρχουν στη φύση. Τέλος δίνεται ο ορισμός των συνθέτων υλικών καθώς και οι κατηγορίες που διαχωρίζονται ανάλογα με τις εφαρμογές των. Οι προβλέψεις δείχνουν ότι θα υπάρξει μια μεγάλη ζήτηση σε σύνθετα υλικά με μεταλλικές ή κεραμικές ρητίνες ενισχυμένες με ίνες ή κόκκους.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιγράφει τις μηχανικές ιδιότητες των φάσεων (ρητίνης-ίνας) όπως ενεργούν και επηρεάζουν τη μελέτη των ινωδών συνθέτων υλικών. Εξηγεί τη σημασία του μήκους της ίνας (μακριές ή κοντές), καθώς πολλές φορές οφείλεται για την αστοχία του υλικού, μέσο της επίδειξης της κατανομής των τάσεων και των παραμορφώσεων στα άκρα των ινών (δηλαδή στην ένωση της ίνας με τη ρητίνη). Η χρήση των ιδιοτήτων της διεπιφάνειας βοηθά στον υπολογισμό της κατανομής των τάσεων και παραμορφώσεων μέσα στο σύνθετο. Η θεωρία του Cox για τον υπολογισμό της αξονικής τάσης μέσα στην ίνα και της διατμητικής στη διεπιφάνεια ίνας-ρητίνης περιγράφεται σ' αυτό το κεφάλαιο. Η κατανόηση της ανωτέρω εύρεσης των τάσεων κατά Cox μας δίνει μια προσεγγιστική αναλυτική επίλυση του προβλήματος της κατανομής των τάσεων μέσα και στην επιφάνεια των ινών. Η προσομοίωση του προβλήματος για την πρόβλεψη των πειραματικών δεδομένων απαιτεί μια καλύτερη θεωρία. Τέτοιες προχωρημένες θεωρίες έχουν ήδη προταθεί τα τελευταία χρόνια. Οποσδήποτε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι η πιο προχωρημένη για την επίλυση του προβλήματος. Αυτή ακριβώς την τεχνική εφαρμόσαμε σ' αυτή τη διατριβή για την εύρεση της κατανομής τάσεων στις ίνες.

Έχει παρατηρηθεί ότι η μέγιστη τιμή της τάσης σ' ένα σύνθετο υλικό με ίνες παρουσιάζεται στη διεπιφάνεια των φάσεων, άρα είναι πολύ σημαντικό να

μελετήσουμε αυτή τη παράμετρο που θα μας δώσει πληροφορίες για την ευστοχία των ιδιοτήτων του υπό μελέτη υλικού. Προσέγγιση αυτού δίνεται στο τρίτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας. Επίσης περιγράφεται ο μηχανισμός μεταφοράς του εφαρμοζόμενου φορτίου από τη ρητίνη στην ίνα. Στη συνέχεια γίνεται μελέτη για διαφορετικές περιπτώσεις πρόσφυσης της ίνας στη ρητίνη.

Το τέταρτο κεφάλαιο εστιάζεται στη μηχανική συμπεριφορά συνθέτων υλικών, αποτελούμενων από σκληρές ίνες εμβαπτιζόμενες σε ρητίνη, με τον άξονα της ίνας κατά τη διεύθυνση εφαρμογής της δύναμης. Η επίδραση των άκρων των ινών αποδεικνύεται ότι παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση κατανομής τάσεων σε σύνθετα με ασυνεχής ίνες. Με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών έχει μελετηθεί η επίδραση στο κρίσιμο μήκος, της πρόσφυσης και της διαφοράς των μέτρων ελαστικότητας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται στοιχεία και έννοιες των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση του υπό μελέτη προβλήματος. Για την κατανόηση της λειτουργίας του υπολογιστικού προγράμματος των πεπερασμένων στοιχείων ANSYS 5.4 είναι σκόπιμο να γνωρίζουμε το κώδικα των πεπερασμένων στοιχείων όσον αφορά τις συντεταγμένες, τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση του προβλήματος σε πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων, τις ιδιότητες των υλικών, την ερμηνεία των τασικών και παραμορφωσιακών πεδίων κ.τ.λ. Η παρουσίαση αυτών γίνεται με την απλούστερη ερμηνεία για τη καλύτερη κατανόηση αυτών.

Η εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων σε ινώδη ενισχυμένα σύνθετα υλικά παρουσιάζεται στο έκτο κεφάλαιο. Οι βέλτιστες μηχανικές ιδιότητες σε σύνθετα υλικά εξαρτώνται από την ικανότητα μεταφοράς φορτίου από τη ρητίνη στην ίνα. Επίσης στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ο αναλυτικός προσδιορισμός της τάσης στην ίνα και της διατμητικής τάσης στη διεπιφάνεια ρητίνης-ίνας.

Η ανάλυση των τάσεων και παραμορφώσεων σε κοντόινα σύνθετα μελετήθηκε από τον συγγραφέα της πτυχιακής σε στενή συνεργασία με τον καθηγητή-εισηγητή της παρούσης μελέτης. Εφαρμόστηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων με τη βοήθεια του επαγγελματικού προγράμματος ANSYS5.6. Λόγω της συγκέντρωσης

τάσεων στα άκρα της ίνας εφαρμόστηκε η τεχνική στρογγυλέματος της γωνίας ασυνέχειας της τάσης. Το σύστημα που μελετήθηκε είναι δύο φάσεων, δηλαδή ανθρακονήματα μέσα σε εποξική ρητίνη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην συνεχή απαίτηση για βελτίωση των υλικών με ικανότητες οι οποίες μπορούν να χαρακτηριστούν από ποικίλα κριτήρια, όπως ελαφρύτερη κατασκευή, μεγαλύτερη αντοχή και χαμηλότερο κόστος αυτή την περίοδο χρησιμοποιούνται τα σύνθετα υλικά που προσεγγίζουν αυτά τα όρια. Οι επιστήμονες, που ασχολούνται με την επιστήμη των υλικών, προσπαθούν να παράγουν υλικά τα οποία βελτιώνουν τα υπάρχοντα ή δημιουργούν νέα υλικά. Τα σύνθετα υλικά είναι ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας.

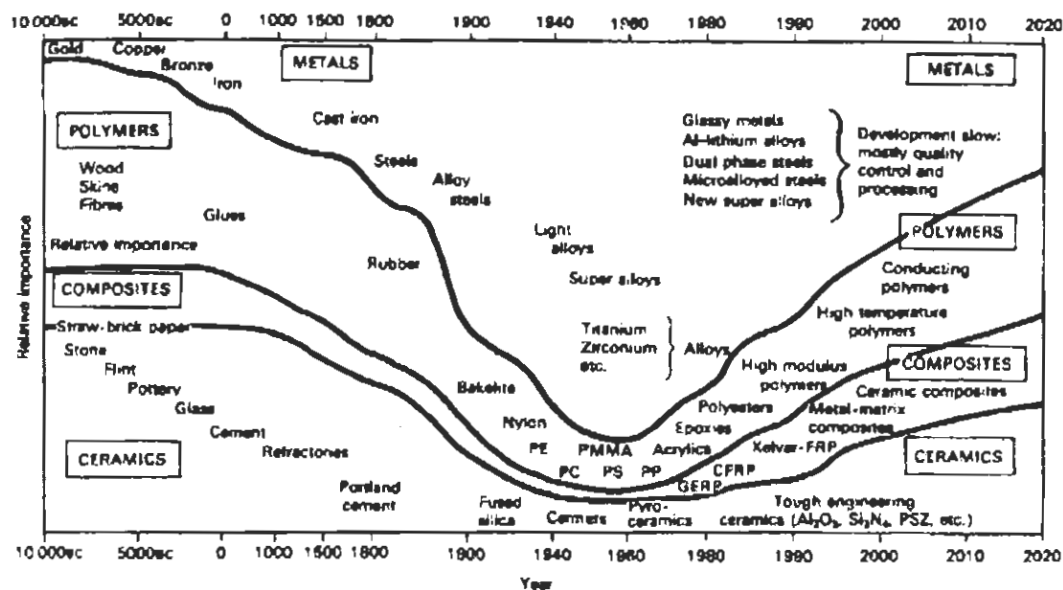
Ορίζουμε σαν ένα *σύνθετο υλικό* αυτό που αποτελείται από δύο ή περισσότερα διαφορετικά υλικά (φάσεις) και σ' αυτά μπορούν να υπαχθούν π.χ. οι πλίθες οι όπου γίνονται από λάσπη ενισχυμένες με καλάμια οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στον αρχαίο πολιτισμό, σαν σύνθετα υλικά. Ένα πολύ διαδεδομένο και σύνηθες σύνθετο υλικό, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές, είναι το *μπετό* το οποίο είναι ένα μίγμα από χαλίκια, που υποβαστάζονται μαζί από το τσιμέντο. Επί πλέον υπάρχουν *φυσικά σύνθετα* υλικά από τα οποία τα καλύτερα παράδειγμα είναι τα κόκαλα, και το ξύλο.

Τα τελευταία σαράντα χρόνια υπάρχει μια μεγάλη αύξηση στη παραγωγή συνθετικών υλικών, όπως για παράδειγμα εκείνα που περιλαμβάνουν μικρές ίνες σε διάφορα πλαστικά (πολυμερή) τα οποία είναι σε ευρεία κλίμακα διαδεδομένα στο εμπόριο. Οι προβλέψεις δείχνουν ότι θα υπάρξει μια μεγάλη ζήτηση σε σύνθετα υλικά με μεταλλικές ή κεραμικές ρητίνες ενισχυμένες με ίνες ή κόκκους, όπως δείχνει¹ το Σχ. 1.1.

Το προβάδισμα σ' αυτή την εξέλιξη της τεχνολογίας των συνθέτων υλικών, τις τελευταίες δεκαετίες, έχει η Αγγλία με την δημιουργία καρμπονικών ινών και οι ΗΠΑ

¹ F.L. Matthews and R.D. Rawlings, Composite Materials: Engineering and Science, Chapman & Hall (1994)

με την δημιουργία ινών από βόριο στις αρχές του '60. Αυτές οι νέες ίνες που έχουν υψηλές ελαστικές σταθερές έδωσαν μια σημαντική αύξηση στην στιβαρότητα των συνθέτων ενώ στα συμβατικά υλικά με ίνες ύαλου έγινε δυνατή η ευρεία εφαρμογή των συνθέτων υλικών.



Σχ. 1-1 Σχηματικό διάγραμμα όπου δείχνεται η σημασία τεσσάρων κατηγοριών υλικών (κεραμικά, σύνθετα, πολυμερή, μέταλλα) σε εφαρμογές κατασκευών σε συνάρτηση του χρόνου. Η κλίμακα του χρόνου είναι μη-γραμμική.

Ένας σημαντικός παράγοντας εφαρμογής των συνθέτων είναι ο υψηλός λόγος της στιβαρότητας ως προς το βάρος και ο λόγος της αντοχής ως προς το βάρος που χαρακτηρίζει αυτά τα νέα υλικά. Σήμερα κατασκευάζονται σύνθετα σε ευρεία κλίμακα εφαρμογών π.χ. στη βιομηχανία αθλητικών ειδών (ρακέτες τένις, ποδήλατα, αθλητικά παπούτσια), μικρής και μεγάλης κλίμακας αεροσκαφών, πλοίων κ.λ.π. Παρόμοια η ανάπτυξη μεγάλης αντοχής καρβιδίων πυριτίου, SiC, και αλουμίνας, Al₂O₃, ίνες που διατηρούν τις ιδιότητες τους με αυξανόμενη τη θερμοκρασία, κίνησαν το ενδιαφέρον σε σύνθετα με μεταλλικές ή κεραμικές ρητίνες.

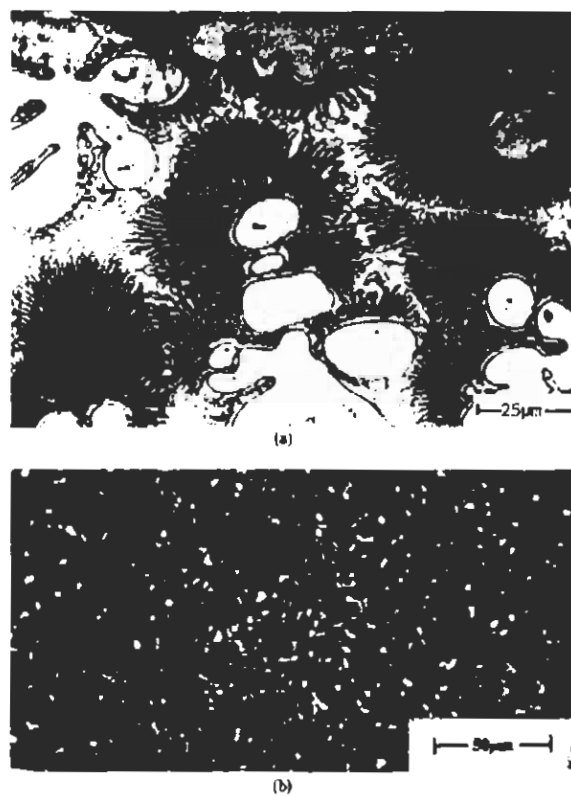
Τα σύνθετα υλικά μπορεί να μελετηθούν από διαφορετικές οπτικές γωνίες όπου καθεμία απαιτεί διαφορετικού είδους ειδικότητες. Ωστε, η εφαρμογή των συνθέτων για την προστασία των υλικών από διάβρωση ευρίσκεται μέσα στην περιοχή της

επιστήμης των υλικών και φυσικοχημείας. Σε αντίθεση, ο σχεδιασμός μιας κατασκευής υπό συνθήκες φόρτισης απαιτεί τη γνώση του μηχανικού. Οπότε είναι βασικό για τη μελέτη των συνθέτων υλικών και για την μελλοντική ανάπτυξή τους οι ειδικοί μιας επιστημονικής περιοχής να καταλαβαίνουν τα προβλήματα άλλων συναφών επιστημών. Η μελέτη των συνθέτων είναι αλληλοεπικαλύπτομενη από όλες τις θετικές επιστήμες.

1.2 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το σύνθετο είναι ένα μίγμα δύο ή περισσότερων διακριτών φάσεων. Αλλά αυτός ο ορισμός δεν είναι επαρκής, τρία άλλα κριτήρια πρέπει να ικανοποιηθούν πριν ένα υλικό πληρεί τις προϋποθέσεις να ονομάζεται *σύνθετο*. Πρώτα απ' όλα αμφοτέρως οι φάσεις πρέπει να είναι σε λογική αναλογία μέσα στο μίγμα, π.χ. μεγαλύτερη από 5%. Επίσης, εάν οι συνιστάμενες φάσεις έχουν διαφορετικές ιδιότητες και οι ιδιότητες του μίγματος είναι σημαντικά διαφορετικές από τις ιδιότητες των επιμέρους φάσεων τότε φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι αυτά τα υλικά χαρακτηρίζονται ως *σύνθετα*. Για παράδειγμα, τα πλαστικά μολονότι γενικά περιέχουν μικρές ποσότητες λιπαντικών, απορροφητές υπεριώδων ακτινών, και άλλες ουσίες για εμπορικούς σκοπούς π.χ. κόστος και εύκολη διαδικασία παραγωγής, δεν ικανοποιούν αυτά τα κριτήρια και κατ' ακολουθία δεν κατατάσσονται στην κατηγορία των συνθέτων. Ένα τεχνικό σύνθετο συνήθως παράγεται από την μίξη και το συνδυασμό επί μέρους υλικών. Έτσι, ένα κράμα συνίσταται από δυφασικές μικροδομές οι οποίες παράγονται κατά τη διάρκεια της στερεοποίησης από ομοιογενές τηκόμενο υλικό ή από παροχή θερμότητας στη στερεά φάση, συνήθως δεν υπάγεται στην κατηγορία των συνθέτων (Σχ. 1.2α).

Γνωρίζουμε ότι τα σύνθετα έχουν δύο ή περισσότερες χημικά διαχωρίσιμες φάσεις σε μικροσκοπική κλίμακα και διαχωρίζονται από διακριτές διεπιφάνειες, είναι σημαντικό να μπορέσουμε να χαρακτηρίσουμε αυτές τις φάσεις από τις οποίες αποτελείται το σύνθετο. Η φάση η οποία κατέχει το μεγαλύτερο ποσοστό του συνθέτου καλείται *ρητίνη*. Η κοινή αντίληψη είναι ότι οι ιδιότητες της ρητίνης βελτιώνονται σε συνεργασία με άλλη φάση (ίνες) για να παράγουν ένα σύνθετο υλικό. Τα σύνθετα μπορεί να αποτελούνται από κεραμική, πολυμερική ή μεταλλική μήτρα (ρητίνη).



Σχ. 1-2 (α) Μικρογραφία ενός κράματος $Co-Cr-Mo-Si$ με πολυφασική μικροδομή. (β) scanning electron micrograph ενός κράματος αλουμινίου(2014) ενισχυμένο με σωματίδια καρβιδίων του πυριτίου. Τα λευκά σωματίδια είναι η δεύτερη φάση στο κράμα αλουμινίου

Οι μηχανικές ιδιότητες αυτών των τριών ρητινών (μερικές φορές καλούνται βάσεις) δείχνονται στον Πίνακα 1.1. Ως γνωστόν τα πολυμερή έχουν χαμηλή αντοχή και μέτρο ελαστικότητας, τα κεραμικά είναι σκληρά, στιβαρά και ψαθυρά ενώ τα μέταλλα έχουν ενδιάμεσες τιμές αντοχής και μέτρο ελαστικότητας και είναι κυρίως όλκιμα. Η άλλη φάση του συνθέτου είναι γνωστή σαν ενισχυτική φάση η οποία προσδίδει στο τελικό υλικό καλύτερες μηχανικές ιδιότητες.

Στις περισσότερες περιπτώσεις η ενισχυτική φάση (δηλ. οι ίνες ή οι ενισχυτικοί κόκκοι) είναι σκληρότεροι, μεγαλύτερης αντοχής και στιβαρότητας από τη ρητίνη.

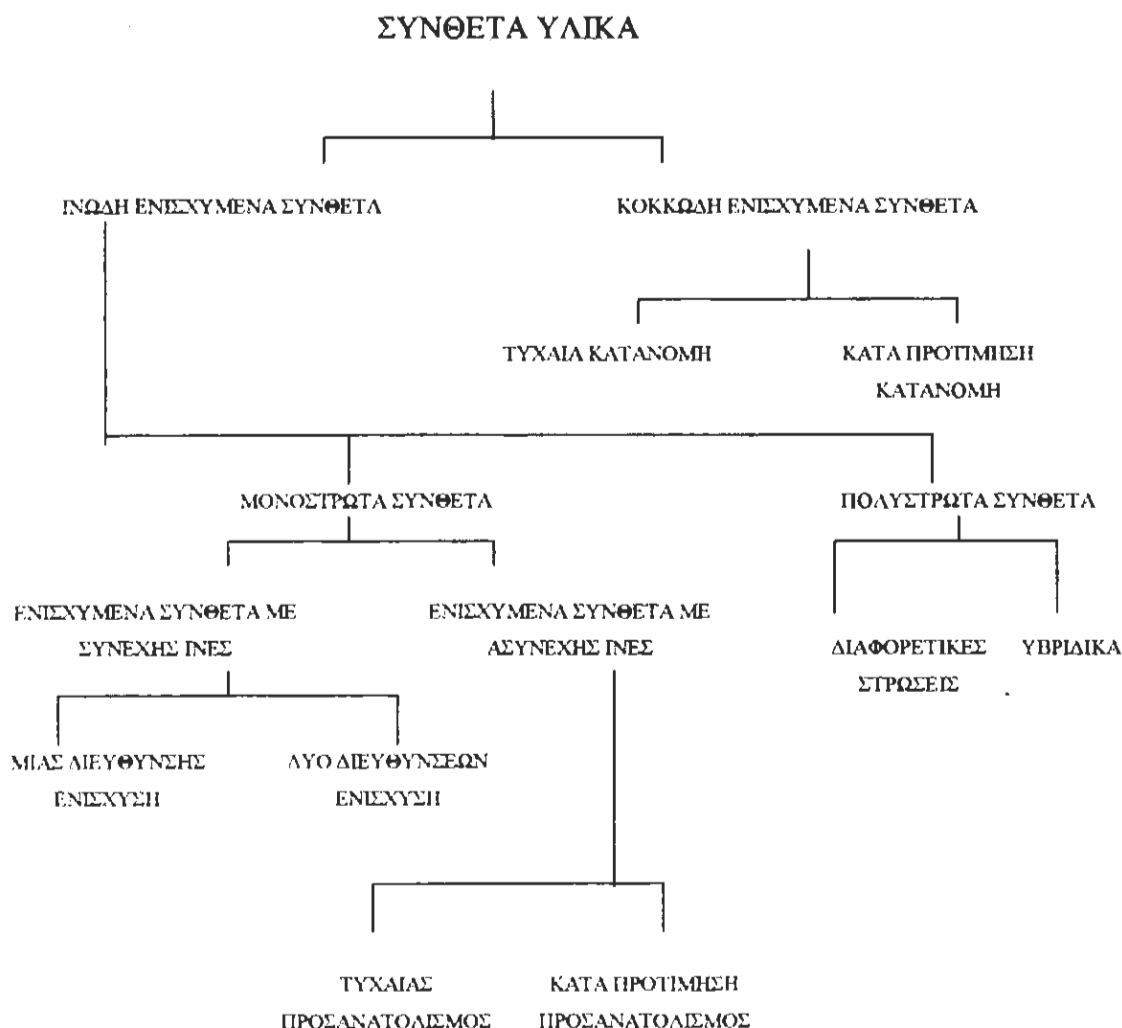
Πίνακας 1.1 Σύγκριση στη θερμοκρασία περιβάλλοντος των ιδιοτήτων των κεραμικών, μεταλλικών και πολυμερικών ρητινών

ΥΛΙΚΑ	Πυκνότητα (Mg/m ³)	Μέτρο Ελαστικότητας (Gra)	Αντοχή (Μρα)
ΚΕΡΑΜΙΚΑ			
Alumina	3.87	382	332
Magnesia	3.60	207	230
Zirconia	5.92	170	900
ΜΕΤΑΛΛΑ			
Aluminium	2.70	69	77
Nickel	8.18	204	1200
Titanium	4.56	112	792
ΠΟΛΥΜΕΡΗ			
Epoxy	1.12	4	50
Nylon 6.6	1.14	2	70
Polystyrene	1.05	3	50

Μολονότι, υπάρχουν μερικές εξαιρέσεις π.χ. όλκωμα μέταλλα τα οποία ενισχύουν τις κεραμικές ρητίνες και ελαστομερικοί κόκκοι οι οποίοι ενισχύουν ψαθυρές πολυμερικές ρητίνες. Μια από τις διαστάσεις των ενισχυτικών υλικών είναι μικρές, π.χ. μικρότερες από 500 μμ, και μερικές φορές της τάξης μερικών μικρών. Η γεωμετρία της ενισχυτικής φάσης είναι μια από της σημαντικές παραμέτρους που ορίζει την αποτελεσματικότητα της ενίσχυσης. Με άλλα λόγια οι μηχανικές ιδιότητες των συνθέτων είναι συνάρτηση του σχήματος και των διαστάσεων των ενισχυτικών υλικών. Συνήθως περιγράφουμε τα ενισχυτικά υλικά σαν ίνες ή μικρά σωματίδια (κόκκοι). Το Σχ. 1.3 παριστάνει μια κοινή εφαρμοζόμενη κατηγοριοποίηση των συνθέτων υλικών τα οποία χρησιμοποιούν αυτό το σχεδιασμό για την ενίσχυση.

Τα κοκκώδη ενισχυμένα υλικά έχουν διαστάσεις οι οποίες είναι προσεγγιστικά ίσες σε όλες τις διευθύνσεις. Το σχήμα των κόκκων μπορεί να είναι σφαιρικά καμπυλωτά, δισκοειδή, ή οποιαδήποτε κανονική ή ακανόνιστη γεωμετρία. Το σύνθετο που φαίνεται στο Σχ. 1.2β σε μικρογραφία έχει σφαιρικά σωματίδια της τάξης των 10 μμ. Η διάταξη των κοκκωδών ενισχυμένων μπορεί να είναι τυχαία ή με προτεινόμενη κατεύθυνση, και αυτό το χαρακτηριστικό είναι επίσης χρησιμοποιούμενο σαν τμήμα της ταξινόμησης. Στην πλειονότητα των κοκκωδών συνθέτων οι κατευθύνσεις των

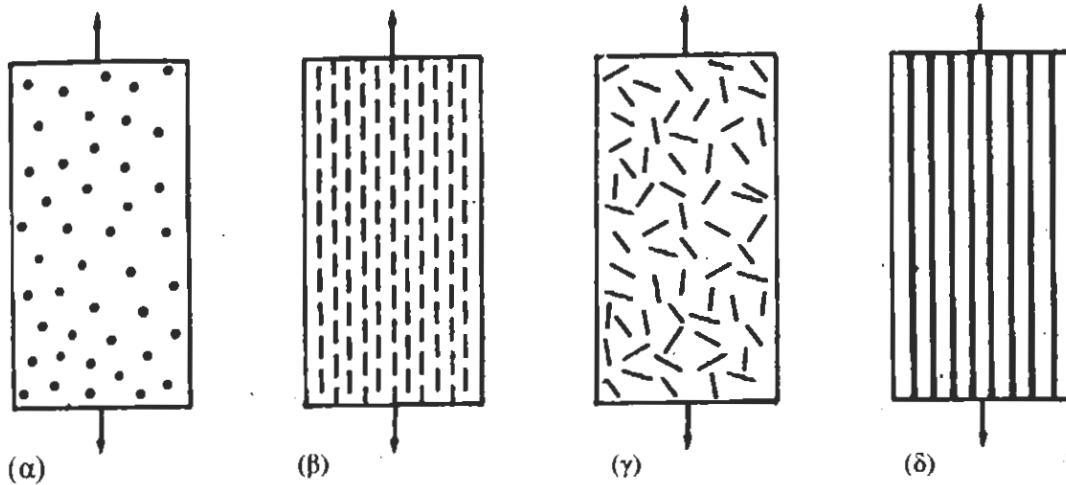
σωματιδίων θεωρούνται για πρακτικούς σκοπούς να είναι τυχαίες, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.4 α.



Σχ. 1-3 Ταξινόμηση των συνθέτων υλικών

Μια ενισχυτική ίνα χαρακτηρίζεται από το μήκος της το οποίο είναι πολύ μεγαλύτερο από την διατομή της. Οποσδήποτε όμως ο λόγος του μήκους προς την διατομή, ο οποίος είναι γνωστός σα τον ανοιγμένο λόγο, μπορεί να μεταβάλλεται σημαντικά. Σε σύνθετα μιας στρώσης μακριές ίνες με μεγάλο ανοιγμένο λόγο δίδει συνεχή ενισχυμένα ινώδη σύνθετα υλικά, ενώ ασυνεχής ενισχυμένα ινώδη σύνθετα υλικά παρασκευάζονται με τη χρήση κοντών ινών μικρού ανοιγμένου λόγου. Ο προσανατολισμός των ασυνεχών μπορεί να είναι τυχαίος ή κατ' επιλογή (Σχ. 1.4β,γ). Ο συνηθέστερος χρησιμοποιούμενος κατ' επιλογή προσανατολισμός των ινών στην

περίπτωση των συνεχών ινωδών συνθέτων ονομάζεται *μονοαξονικός* και η αντίστοιχη τυχαία κατάσταση μπορεί να προσεγγισθεί από *διαξονική* wooven ενίσχυση (Σχ. 1.4δ).



Σχ. 1-4 Παραδείγματα συνθέσεων: α) ξεχωριστά σωματίδια σε τυχαία διεύθυνση β) ασυνεχείς ίνες μιας κατεύθυνσης γ) ασυνεχείς ίνες σε τυχαία διεύθυνση δ) συνεχείς ίνες μιας κατεύθυνσης.

Τα πολύστρωτα σύνθετα είναι μια άλλη κατηγορία ινωδών ενισχυμένων υλικών. Αυτά ταξινομούνται είτε σαν *πολύστρωτα* είτε σαν *υβριδικά* (Σχ. 1.3). Τα πολύστρωτα υλικά παρασκευάζονται από φύλλα υλικού τοποθετούμενα το ένα πάνω στο άλλο. Ένα τυπικό πολύστρωτο μπορεί να περιλαμβάνει από τέσσερα μέχρι σαράντα φύλλα υλικού και ο προσανατολισμός των ινών μεταβάλλεται από στρώση σε στρώση με απλό τρόπο διαμέσου του πάχους του πολύστρωτου.

Τα *υβριδικά* σύνθετα είναι συνήθως πολύστρωτα σύνθετα υλικά με *ανάμικτες* ίνες και χρησιμοποιούνται σε ευρεία κλίμακα στις εφαρμογές. Οι ίνες μπορούν να αναμιχθούν σε μια στρώση ή διαφορετικές στρώσεις και αυτά τα σύνθετα σχεδιάζονται έτσι ώστε το τελικό προϊόν εξαρτάται από τις διαφορετικές ιδιότητες των χρησιμοποιούμενων ινών. Για παράδειγμα, ένα σύνθετο αποτελούμενο από ίνες ύαλου και καρβιδικές τοποθετούμενες σε μια πολυμερική ρητίνη δίδει σχετικά ένα φθηνό σύνθετο υλικό το οποίο οφείλεται στη φθηνή αγορά των ινών ύαλου, αλλά με μηχανικές ιδιότητες

επαυξανόμενες από την εξαιρετικά μεγάλη αντοχή των καρβιδικών ινών. Μερικά υβριδικά συστήματα αποτελούνται από μίγμα ινών και κόκκων.

1.3 ΦΥΣΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ

Το ξύλο είναι ένα ενδιαφέρον παράδειγμα ενός φυσικού συνθέτου υλικού, όπου τα αξονικά κελύφη του ξύλου σχηματίζονται από ελικοειδείς στρώσεις μεμβρανών με μεταβλητή γωνία ελίκωσης, οι οποίες είναι συγκολλημένες μαζί με lignin κατά την διάρκεια ανάπτυξης του δέντρου. Ένα πρότυπο καλού σχεδιασμού με σύνθετα υλικά είναι το medieval longbow. Τα οστά επίσης είναι σύνθετα υλικά τα οποία σχηματίζονται βασικά από οργανικές ίνες, μικρούς ανόργανους κρυστάλλους, νερό και λίπη. Η αναλογία αυτών των συστατικών μεταβάλλεται με τον τύπο των οστών, το είδος του ζώου και την ηλικία του. Ένα μακρύ οστό όπως για παράδειγμα το femur, έχει ένα εξωτερικό κέλυφος υψηλής πυκνότητας, χαμηλής περιεκτικότητας σε λίπος το οποίο ονομάζεται συμπαγές οστό. Αυτό το είδος του οστού έχει καλές μηχανικές ιδιότητες με αντοχή σε επιμήκυνση στην περιοχή των 46-156 Μρα και μέτρο ελαστικότητας περίπου 20 Gpa (Σχ. 1.5)



Σχ.1.5 Μικρογραφία, από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, ενός πορώδους οστού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

2.1 ΜΕΛΕΤΗ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στην μελέτη των ινωδών συνθέτων υλικών η μεταφορά τάσης στην διεπιφάνεια ρητίνης-ίνας από την ρητίνη στην ίνα είναι πολύ σημαντική. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διεπιφάνειας είναι δυνατό να υπολογίσουμε την κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων σε σύνθετα υλικά βάσει της γεωμετρίας, την κατανομή και το ποσοστό κατ' όγκο των ινών και τις ελαστικές ιδιότητες των ινών και της ρητίνης. Από την κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων μπορούμε να υπολογίσουμε τις ελαστικές ιδιότητες του συνθέτου.

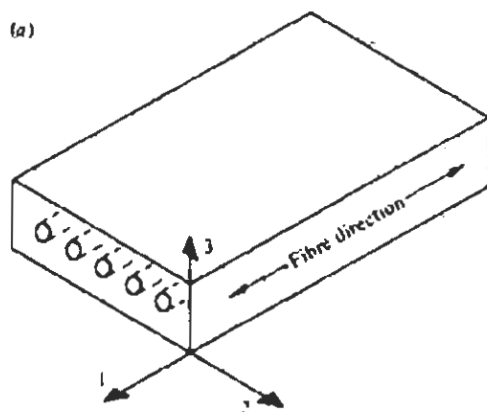
Εάν η σύνδεση μεταξύ ίνας και ρητίνης είναι *τέλεια* τότε όταν μια εφελκυστική ή θλιπτική δύναμη εφαρμόζεται παράλληλα προς τις ίνες σε ένα μονοαξονικό πολύστρωτο υλικό η παραμόρφωση στην ρητίνη, ϵ_i , θα ισούται με εκείνη στην ίνα. Εάν αμφότερα τα υλικά, ρητίνη και ίνα, συμπεριφέρονται ελαστικά τότε οι αντίστοιχες τάσεις δίδονται από την σχέση¹

¹ D. Hull, An Introduction to Composite Materials, Cambridge University Press (1981)

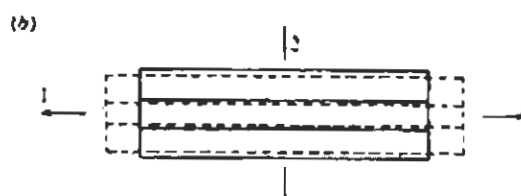
$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m \quad (2.1)$$

Είναι φανερό ότι εάν $E_f > E_m$ τότε η τάση στις ίνες είναι μεγαλύτερη από εκείνη στην ρητίνη. Αυτό αποτελεί την βάση για τα ενισχυμένα υλικά καθ' όσον οι ίνες παίρνουν το κύριο μέρος του εφαρμοζόμενου φορτίου P (Σχ. 2-1 α,β)



Σχ. 2-1α Προσδιορισμός των κύριων διευθύνσεων σε ένα πολυστρωτο υλικό μιας κατεύθυνσης



Σχ.2-1β Η παραμόρφωση σε ένα πολυστρωτο μιας διεύθυνσης υπό την επίδραση ενός εφελκυστικού φορτίου στην 1-διεύθυνση

Για ένα σύνθετο υλικό συνολικής επιφάνειας A , η μέση τάση είναι

$$P = \sigma_c A = P_f + P_m = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (2.2)$$

όπου A_f και A_m είναι οι διατομές της ίνας και ρητίνης αντίστοιχα, P_f και P_m είναι τα αντίστοιχα φορτία. Εφ' όσον $\sigma_c = E_c \epsilon_c$, από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου ισούται με

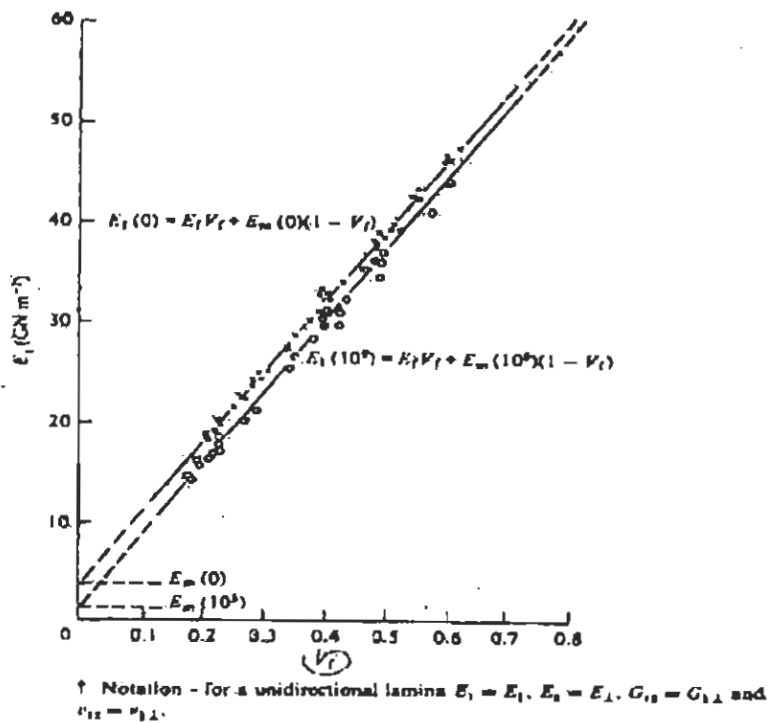
$$E_c = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} \quad (2.3)$$

Επειδή οι κατ' όγκο περιεκτικότητες των ινών στη ρητίνη ισούται με

$$V_f = \frac{A_f}{A}, V_m = \frac{A_m}{A} \text{ το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου ισούται με}$$

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2.4)$$

Η ανωτέρω σχέση συνήθως καλείται ο *νόμος των μεγμάτων*. Η ανάλυση βασίζεται στην υπόθεση ότι ισχύει η εξίσωση (2.1). Αυτό όμως δεν ισχύει απολύτως διότι ο λόγος Poisson της ρητίνης και της ίνας είναι διαφορετικός και δίδει στο σύνθετο επί πρόσθετες τάσεις οι οποίες δεν έχουν υπολογισθεί στη παρούσα ανάλυση. Οπωσδήποτε όμως το σφάλμα στον υπολογισμό του αξονικού μέτρου ελαστικότητας είναι μικρότερο από 1-2% περίπου και η πειραματική επαλήθευση της εξίσωσης (2.4) έχει γίνει για πολλά συστήματα ίνας-ρητίνης. Ένα παράδειγμα δίδεται στο Σχ. 2-2.



Σχ. 2-2 Μέτρο Ελαστικότητας συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε ίνες

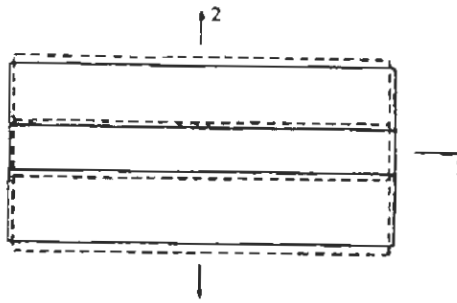
Τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα κυμαίνονται για περιεκτικότητες επί τοις εκατό σε ίνες v_f 2%-6%, αλλά σύμφωνα με την εξ. (2.4) τα δεδομένα μπορεί να επεκταθούν στο E_m για $v_f=0$ και στο E_f για $v_f=1$.

Το απλούστερο μοντέλο ενός συνθέτου παρουσιάζεται στο Σχ. 2.3 όπου μια τομή κόβεται παράλληλα στην διεύθυνση των ινών. Το εφαρμοζόμενο φορτίο εγκάρσια των ινών ενεργεί εξ' ίσου στην ίνα και στην ρητίνη και ισχύει η υπόθεση ότι $\sigma_f = \sigma_m$. Οι αντίστοιχες παραμορφώσεις είναι

$$\varepsilon_f = \sigma_2 / E_f, \varepsilon_m = \sigma_2 / E_m \quad (2.5)$$

Ωστε η παραμόρφωση ε_2 δίδεται από τον τύπο

$$\varepsilon_2 = v_f \varepsilon_f + v_m \varepsilon_m \quad (2.6)$$

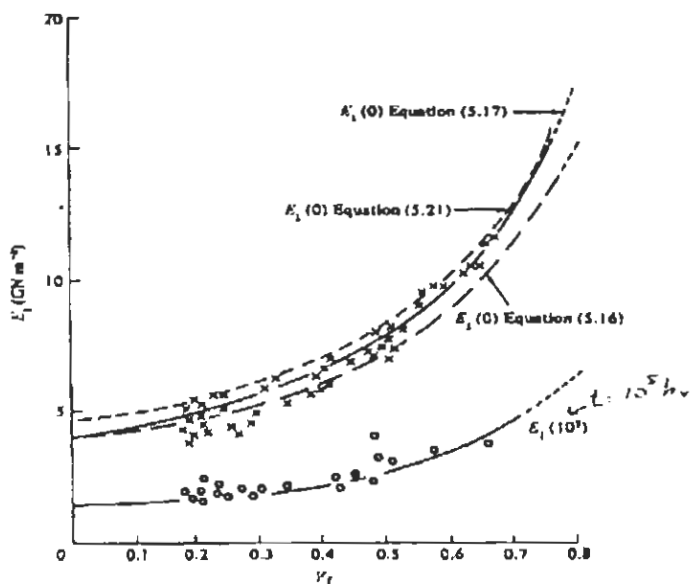


Σχ. 2-3 Η παραμόρφωση σ' ένα πολύστρωτο μιας διεύθυνσης υπό την επίδραση ενός εφελκυστικού φορτίου στην 2-διεύθυνση

Η αντικατάσταση της (2.5) στην (2.6) δίδει

$$E_{\perp} = \frac{E_f E_m}{E_f (1 - v_f) + E_m v_f} \quad (2.7)$$

Η γενική μορφή αυτής της εξίσωσης είναι σε συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα του Σχ. 2-4 για την μεταβολή της E_{\perp} συναρτήσει του v_f για το σύνθετο με ίνες υαλοβάμβακα (Eglass) και ρητίνη πολυεστέρα (Polyester). Μια ακριβέστερη έκφραση υπολογισμού του E_{\perp} δίδεται κατωτέρω



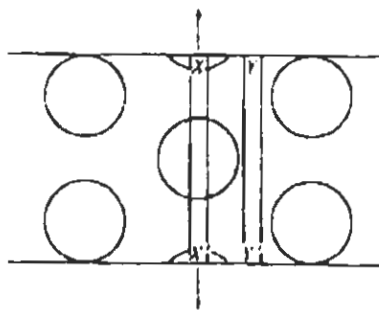
Σχ. 2.4 Μέτρο Ελαστικότητας στην εγκάρσια διεύθυνση συναρτήσει του V_f

$$E_{\perp} = \frac{E_f E_m^*}{E_f (1 - \nu_f) + E_m^* \nu_f} \tag{2.8}$$

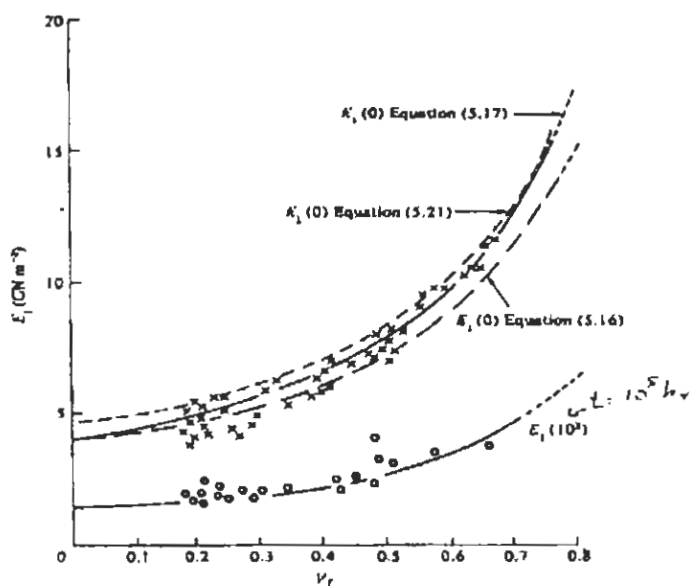
όπου $E_m^* = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2}$

Η ανωτέρω εξίσωση δίδει καλύτερα αποτελέσματα για τον υπολογισμό του E_{\perp} όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.4. Τα αποτελέσματα του Σχ. 2.4 φανερώνουν την κύρια επίδραση των ιδιοτήτων της ρητίνης στον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας του συνθέτου.

Οι εξισώσεις (2.7) και (2.8) είναι βασικές για τον σχεδιασμό των πολύστρωτων κατασκευών αλλά δεν παρέχουν πολλές πληροφορίες σχετικά με την φυσική ερμηνεία της τάσης και παραμόρφωσης γύρω από τις ίνες οι οποίες απαιτούνται για την επεξήγηση της εγκάρσιας αστοχίας του υλικού. Η υπόθεση, ότι $\sigma_f = \sigma_m$ και επί πλέον ότι σε κάθε φάση η παραμόρφωση είναι ομοιόμορφη, είναι μη-ρεαλιστική διότι οι ίνες δεν μπορεί να αντιπροσωπεύσουν φύλλα όπως φαίνεται στο Σχ.2-3. Αυτό γίνεται φανερό στο Σχ. 2-5 το οποίο δείχνει μια ιδανική εξαγωνική διεύθυνση των ινών σε ένα σύνθετο το οποίο υφίσταται μια ομοιόμορφη εφαρμοζόμενη εξωτερικά παραμόρφωση. Το κύριο ποσοστό της παραμόρφωσης στην τομή XX' η οποία αντιστοιχεί στο φύλλο του Σχ. 2-5 λαμβάνεται από την ρητίνη εφ' όσον $E_f \gg E_m$. Οι παραμορφώσεις στην τομή YY' η οποία βρίσκεται ολοκληρωτικά μέσα στην ρητίνη θα είναι καθ' ολοκληρία ομοιόμορφες και η μέση παραμόρφωση θα είναι πολύ μικρότερη απ' ό τι στην ρητίνη στην τομή XX' . Με άλλα λόγια θα υπάρχει μια μεγέθυνση στην παραμόρφωση στην ρητίνη μεταξύ των ινών. Οι διαφορετικές παραμορφώσεις σε διαφορετικά τμήματα της ρητίνης οδηγεί σε επιπρόσθετες τάσεις και ακολούθως σε μία ανομοιόμορφη κατανομή τάσεων.



Σχ.2-5 Σχηματική αναπαράσταση της τάσης σ ' ένα πολύστρωτο μιας διεύθυνσης σε διαμητικό φορτίο



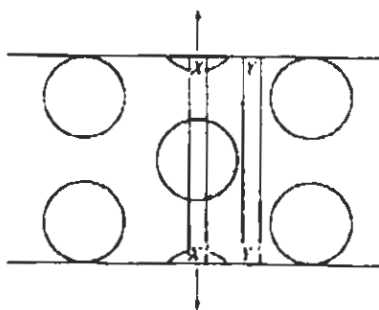
Σχ. 2.4 Μέτρο Ελαστικότητας στην εγκάρσια διεύθυνση συναρτήσει του V_f

$$E_L = \frac{E_f E_m^*}{E_f (1 - \nu_f) + E_m^* \nu_f} \quad (2.8)$$

όπου $E_m^* = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2}$

Η ανωτέρω εξίσωση δίνει καλύτερα αποτελέσματα για τον υπολογισμό του E_L όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.4. Τα αποτελέσματα του Σχ. 2.4 φανερώνουν την κύρια επίδραση των ιδιοτήτων της ρητίνης στον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας του συνθέτου.

Οι εξισώσεις (2.7) και (2.8) είναι βασικές για τον σχεδιασμό των πολύστρωτων κατασκευών αλλά δεν παρέχουν πολλές πληροφορίες σχετικά με την φυσική ερμηνεία της τάσης και παραμόρφωσης γύρω από τις ίνες οι οποίες απαιτούνται για την επεξήγηση της *εγκάρσιας αστοχίας* του υλικού. Η υπόθεση, ότι $\sigma_f = \sigma_m$ και επί πλέον ότι σε κάθε φάση η παραμόρφωση είναι ομοιόμορφη, είναι μη-ρεαλιστική διότι οι ίνες δεν μπορεί να αντιπροσωπεύσουν φύλλα όπως φαίνεται στο Σχ. 2-3. Αυτό γίνεται φανερό στο Σχ. 2-5 το οποίο δείχνει μια ιδανική εξαγωνική διεύθετη των ινών σε ένα σύνθετο το οποίο υφίσταται μια ομοιόμορφη εφαρμοζόμενη εξωτερικά παραμόρφωση. Το κύριο ποσοστό της παραμόρφωσης στην τομή XX' η οποία αντιστοιχεί στο φύλλο του Σχ. 2-5 λαμβάνεται από την ρητίνη εφ' όσον $E_f \gg E_m$. Οι παραμορφώσεις στην τομή YY' η οποία βρίσκεται ολοκληρωτικά μέσα στην ρητίνη θα είναι καθ' ολοκληρία ομοιόμορφες και η μέση παραμόρφωση θα είναι πολύ μικρότερη απ' ότι στην ρητίνη στην τομή XX' . Με άλλα λόγια θα υπάρχει μια μεγέθυνση στην παραμόρφωση στην ρητίνη μεταξύ των ινών. Οι διαφορετικές παραμορφώσεις σε διαφορετικά τμήματα της ρητίνης οδηγεί σε επιπρόσθετες τάσεις και ακολούθως σε μία ανομοιόμορφη κατανομή τάσεων.



Σχ.2-5 Σχηματική αναπαράσταση της τάσης σ' ένα πολύστρωτο μιας διεύθυνσης σε διατμητικό φορτίο

Η θεωρία ελαστικότητας και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχουν χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της E_{\perp} και άλλων μέτρων ελαστικότητας χρησιμοποιώντας περισσότερο ρεαλιστικές υποθέσεις. Μια απλοποίηση των εξισώσεων υπολογισμού της E_{\perp} έχουν προταθεί από τους Halpin & Tsai² όπου αυτές οι εξισώσεις είναι χρήσιμες για την πρόβλεψη των ιδιοτήτων των συνθέτων υλικών. Η εξίσωση των Halpin και Tsai χρησιμοποιείται περισσότερο γενικά απ' ό τι η (2.8) και έχει την μορφή

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= E_f v_f + E_m (1 - v_f) \\ \nu_{\parallel\perp} &= \nu_f v_f + \nu_m (1 - v_f) \end{aligned} \quad (2.9)$$

και

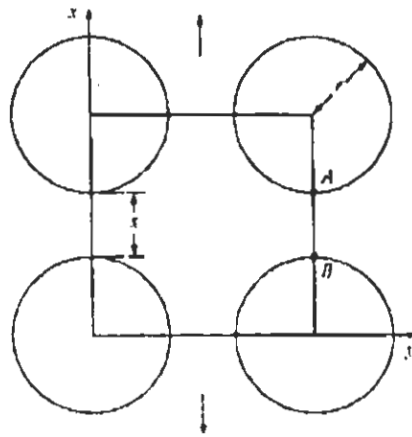
$$\begin{aligned} M / M_m &= (1 + \xi \eta v_f) / (1 - \eta v_f) \\ \eta &= \left[\frac{M_f}{M_m} - 1 \right] / \left(\frac{M_f}{M_m} + \xi \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

όπου M παριστάνει το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_{\perp} ή το διατμητικό μέτρο ελαστικότητας G ή το ν_{23} . Οι ποσότητες $M_f, M_m, \nu_f, G_f, G_m, \nu_m$ παριστάνουν τις ιδιότητες της ίνας και της ρητίνης. Η παράμετρος ξ εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των δύο φάσεων π.χ. το σχήμα και το λόγο L/d (L =μήκος, d =διάμετρος) των ινών, και από τις συνθήκες φόρτισης του υλικού. Η παράμετρος ξ προσδιορίζεται εμπειρικά με προσομοίωση των πειραματικών δεδομένων.

² Halpin J.C. and Tsai S.W. Environmental factors in Composite Materials Design, in Force Materials Labs Technical Report AFML-TR-67-423 (1967)

Για παράδειγμα τα αποτελέσματα του Σχ. 2.4 εάν προσομοιωθούν με την (2.9) δίδουν $\xi=0.2$.

Μια από τις αρχικές ποσοτικές μελέτες για τον προσδιορισμό της ανομοιόμορφης κατανομής των παραμορφώσεων στην ρητίνη μεταξύ των ινών προτάθηκε από τον Kies³ ο οποίος χρησιμοποίησε ένα απλό μοντέλο τετραγωνικής διεύθεσης των ινών όπως δείχνει το Σχ. 2-6.



Σχ. 2.6 Απλό μοντέλο τετραγωνικής διεύθεσης των ινών

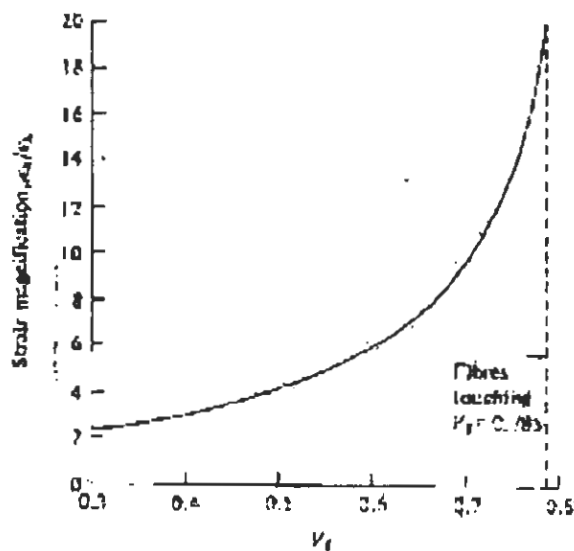
Όταν η τετραγωνική διάταξη υφίσταται την επίδραση μιας απλής παραμόρφωσης $\bar{\epsilon}_x$, τότε η παραμορφωσιακή μεγέθυνση στην ρητίνη κατά μήκος της γραμμής AB ισούται με

³ Kies J.A. Maximum strain in the resin of fiber glass composites, US Naval Research Lab Report NRL 5752 (1962)

$$\varepsilon_x / \bar{\varepsilon}_x = (2 + \frac{s}{r}) / [\frac{s}{r} + 2(\frac{E_m}{E_f})] \quad (2.11)$$

όπου s και r ορίζονται στο Σχ. 2-6.

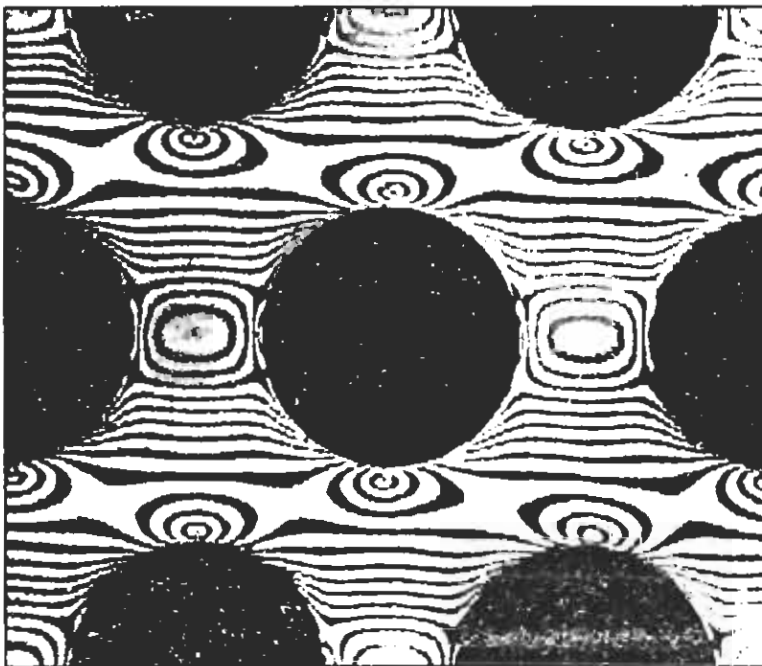
Οι ανωτέρω εξισώσεις μπορούν να συνδυαστούν για να υπολογίσουν την μεταβολή της παραμορφωσιακής μεγέθυνσης συναρτήσει του v_f . Μια τυπική καμπύλη του λόγου $\varepsilon_x / \bar{\varepsilon}_x$ φαίνεται στο Σχ. 2-7 το οποίο αντιστοιχεί στο σύστημα ίνες γυαλιού εμβαπτισμένες σε πολυεστερική ρητίνη ($E_f/E_m=20$).



Σχ 2-7 Διάγραμμα τάσεως συναρτήσει του V_f σύμφωνα με την εξίσωση (2.11) για σύστημα ίαλον(ίνα)-πολυεστέρα(ρητίνη)

Μια εναλλακτική μέθοδος για να καταλάβουμε την ανομοιόμορφη κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων σε πολύστρωτα υλικά τα οποία υπόκεινται σε εγκάρσια φορτία

είναι η εφαρμογή της φωτοελαστικότητας. Το Σχ. 2.8 δεικνύει τις ισοχρωματικές καμπύλες που δημιουργούνται σε ένα σύνθετο στο οποίο οι κύκλοι δεικνύουν τις ίνες εμβαπτιζόμενες στην ρητίνη. Οι ισοχρωματικές καμπύλες φαίνονται όταν το σύνθετο υφίσταται εγκάρσια τάση στην εγκάρσια διεύθυνση και προσπίπτει επ' αυτού πολωμένο φως. Κάθε καμπύλη είναι η θέση στην ρητίνη η οποία έχει την ίδια διαφορά κυρίων τάσεων. Είναι δυνατόν να υπολογισθεί η τάση και παραμόρφωση από το πρότυπο της



Σχ. 2-8 Κροσσοί φωτοελαστικότητας από ίνες εμβαπτισμένες σε ρητίνη

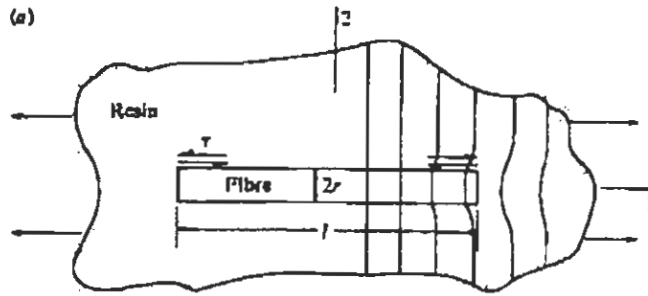
θέσης και την τάξη των “κροσσών”. Είναι ικανό να γνωρίζουμε ότι το πρότυπο είναι σύνθετο και δεικνύει ότι το μέγεθος και η διεύθυνση της τάσης μεταβάλλεται μέσα στη ρητίνη. Εξαρτάται, για μια δεδομένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ίνες, από την *διευθέτηση των ινών* και από τον *βαθμό συμμετρίας*. Μέσα στην ρητίνη δημιουργούνται

διαξονικά και τριαξονικά εντατικά πεδία και το μέγεθός τους εξαρτάται από το λόγο των μέτρων ελαστικότητας της ίνας και ρητίνης.

2.2 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΕΝΤΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΤΩΝ ΙΝΩΝ

Στις προηγούμενες ενότητες για την ερμηνεία των ελαστικών ιδιοτήτων υποθέσαμε ότι οι ίνες είναι άπειρες σε μήκος εκτός από τις επιφάνειες των πολύστρωτων ή ότι οι ίνες είναι πολύ μακριές ώστε επιδράσεις που σχετίζονται με τα άκρα των ινών μπορεί να αμεληθούν. Αλλά, καθώς ο λόγος $L/2l$ των ινών ελαττώνεται οι επιδράσεις των άκρων γίνονται σημαντικές καθώς η *ασυνέχεια* στα άκρα επηρεάζει τα εντατικά και παραμορφωσιακά πεδία μέσα στην ρητίνη. Η ικανότητα των ινών στην στιβαρότητα και ενίσχυση της ρητίνης εξασθενεί καθώς ελαττώνεται το μήκος των ινών. Τα άκρα των ινών παίζουν σημαντικό ρόλο στην αστοχία κοντόινων συνθέτων και επίσης σε συνεχή ινώδη σύνθετα καθ' όσον μακριές ίνες μπορεί να τεμαχιστούν σε μικρά τμήματα.

Θεωρούμε μια ίνα, μήκους L η οποία εμβαπτίζεται σε ρητίνη μικρότερου μέτρου ελαστικότητας καθώς φαίνεται στο Σχ. 2.9. Εάν η ίνα έχει καλή πρόσφυση με την ρητίνη τότε η εφαρμοζόμενη τάση στην ρητίνη θα μεταφερθεί εγκάρσια στην ίνα κατά μήκος της διεπιφάνειας. Στην περιοχή των άκρων της ίνας η παραμόρφωση στην ίνα θα είναι μικρότερη απ' ότι στη ρητίνη. Το πεδίο των μετατοπίσεων στη ρητίνη φαίνεται στο Σχ. 2.9α.



Σχ. 2.9α Ίνα εμβαπτισμένη σε ρητίνη

Αυτό το πρόβλημα έχει λυθεί αναλυτικά από τον Cox⁴ ο οποίος χρησιμοποίησε την γνωστή 'διαμηκτικής καθυστέρησης' (shear-lag analysis) ανάλυση.

Η ανάλυση του Cox υποθέτει ότι αμφότερα τα υλικά ίνα και ρητίνη παραμένουν ελαστικά. Στο άρθρο το οποίο δημοσιεύθηκε από τον Cox το 1952 έδειξε ότι για μια εφαρμοζόμενη τάση στη ρητίνη παράλληλα με την διεύθυνση των ινών η εφελκυστική τάση μέσα στην ίνα δίδεται από την σχέση

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_m \left\{ 1 - \frac{\cosh[\beta(L/2 - x)]}{\cosh[\beta(L/2)]} \right\} \quad (2.12)$$

όπου ο συντελεστής β ισούται με $\beta = \sqrt{\frac{2G_m}{E_f r^2 \ln(R/r)}}$ ($2R$ αντιπροσωπεύει την απόσταση

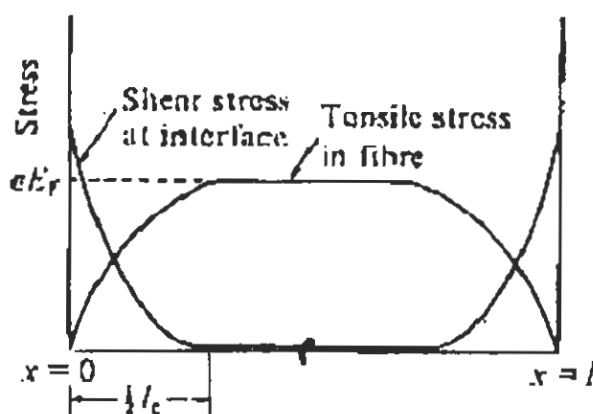
μεταξύ των ινών). Η εφελκυστική τάση στην ίνα μηδενίζεται στα άκρα της ίνας και

⁴ Cox H.I. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials, Br. J. Appl. Phys. 3, 72-79 (1952)

παίρνει μέγιστη τιμή στο κέντρο της, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.9β. Η διατμητική τάση στη διεπιφάνεια δίδεται από τον τύπο

$$\tau(x) = E_r \varepsilon_m \gamma \frac{\sinh \beta(L/2 - x)}{\cosh \beta(L/2)} \quad (2.13)$$

όπου $\gamma = \beta r / 2$. Η σχηματική παράσταση της (2.13) δεικνύεται στο Σχ. 2.9β.



Σχ.2.9β Κατανομή των τάσεων στη διεπιφάνεια ρητίνης-ίνας

Η διατμητική τάση στη διεπιφάνεια παίρνει μέγιστη τιμή στα άκρα των ινών και σχεδόν μηδενίζεται στο κέντρο. Αυτά τα αποτελέσματα φανερώνουν ότι υπάρχουν περιοχές στα άκρα των ινών τα οποία δεν μεταφέρουν το συνολικό φορτίο, έτσι ώστε η μέση τιμή της τάσης στις ίνες μήκους L είναι μικρότερη από ότι σε μία συνεχή ίνα η οποία υφίσταται τις ίδιες εξωτερικές συνθήκες φόρτισης.

Η απόδοση της ενίσχυσης ελαττώνεται καθώς το μέσο μήκος της ίνας ελαττώνεται διότι ένα μεγαλύτερο μέρος του συνολικού μήκους της ίνας δεν φορτίζεται πλήρως. Η μεγαλύτερη πιθανή τιμή της παραμόρφωσης στην ίνα είναι η παραμόρφωση ε η οποία εφαρμόζεται στο σύνθετο έτσι ώστε η μέγιστη τάση στην ίνα είναι εE_f . Για να επιτευχθεί η μέγιστη τάση το μήκος της ίνας πρέπει να είναι μεγαλύτερο από την κρίσιμη τιμή L_c . Το Σχ. 2-9β δείχνει ότι για ίνες μεγαλύτερου μήκους απ' ότι το L_c οι περιοχές στα άκρα των ινών οι οποίες δεν είναι πλήρως φορτισμένες έχουν μήκος $L_c/2$.

Θα γίνει προφανές ότι η απόδοση της ενίσχυσης εξαρτάται από της αντοχή της διεπιφάνειας εφ' όσον η μεταφορά φορτίου απαιτεί ένα ισχυρό διεπιφανειακό δεσμό. Η μεγάλη τιμή της *διατμητικής τάσης* στα άκρα των ινών συνεπάγεται (1) διατμητική αποκόλληση στη διεπιφάνεια (2) αστοχία της ρητίνης (3) αστοχία της ίνας και (4) διατμητική υποχώρηση της ρητίνης η οποία εξαρτάται από τη σχετική αντοχή η οποία συνδέεται με αυτές τις διαδικασίες. Ένας άλλος παράγοντας που περιορίζει την απόδοση της ενίσχυσης είναι η *αντοχή* της ίνας. Ο λόγος της μέγιστης διεπιφανειακής διατμητικής τάσης στα άκρα της ίνας προς την μέγιστη τάση στο κέντρο της ίνας μπορεί να υπολογιστεί από τις εξισώσεις (2.12) και (2.13), δηλαδή

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{f,\max}} = \sqrt{\frac{G_m}{2E_f \ln(R/r)}} \coth(\beta L/4) \quad (2.14)$$

Ο λόγος αυτός για μακρόινα σύνθετα υλικά δίδει

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{f,\max}} = \sqrt{\frac{G_m}{2E_f \ln(R/r)}} \quad (2.15)$$

Για τέσσερα διαφορετικά σύνθετα υλικά ο λόγος $\tau_{max}/\sigma_{f,max}$ δίδεται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1 Τιμές του λόγου $\tau_{max}/\sigma_{f,max}$ για κάποια τυπικά σύνθετα υλικά

Υλικά	G_m/E_f	V_f	$\tau_{max}/\sigma_{f,max}$
Glass-Polyester	0.017	0.3	0.13
Carbon-Epoxy	0.005	0.3	0.07
Glass-Nylon	0.010	0.3	0.10
Kevlar 49- Epoxy	0.014	0.3	0.12

Πρέπει να σημειωθεί ότι η παρούσα ανάλυση δεν είναι ακριβής. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και πειραματικά δεδομένα προτρέπουν ότι η ανωτέρω ανάλυση του Cox υποβαθμίζει τη *διατμητική συγκέντρωση τάσης* στα άκρα των ινών κατά $1/2$.

2.3 ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΟΝΤΟΙΝΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Εφ' όσον η απόδοση ενίσχυσης των κοντίνων συνθέτων είναι μικρότερη απ' αυτή των μακρόινων συνεπάγεται ότι το ενεργό μέτρο ελαστικότητας των κοντίνων υλικών θα είναι επίσης μικρότερο. Σ' αυτή την περίπτωση ένα υλικό έχει τρισδιάστατη κατανομή προσανατολισμού ινών και κατανομή μηκών των ινών. Δεν υπάρχει μια ικανοποιητική περιγραφή των ελαστικών ιδιοτήτων σε συνάρτηση αυτών των παραμέτρων.

Για ένα σύνθετο στο οποίο οι ίνες μήκους L κατευθύνονται σε μία διεύθυνση ο κανόνας των μιγμάτων μπορεί να τροποποιηθεί από την εισαγωγή του παράγοντα μήκους η έτσι ώστε,

$$E_{||} = \eta E_f v_f + E_m (1 - v_f) \quad (2.16)$$

Σύμφωνα με την θεωρία Cox ο συντελεστής η δίδεται από τη σχέση

$$\eta = 1 - \frac{\tanh(\beta L / 2)}{\beta L / 2} \quad (2.17)$$

όπου η παράμετρος β έχει ορισθεί προηγούμενα. Ο συνδυασμός των σχέσεων (2.4), (2.16) και (2.17) δείχνει ότι εάν $E_f \gg E_m$ το *ανηγμένο μέτρο ελαστικότητας* για κοντόινα υλικά συγκρινόμενο με εκείνο των συνεχών ινωδών υλικών είναι

$$E(\text{κοντοίνα}) / E(\text{συνεχές}) = \eta \quad (2.18)$$

Μερικές τιμές του η για τρεις διαφορετικές τιμές του μήκους των ινών 0.1, 1.0 και 10 mm για δύο σύνθετα δίδονται στον Πίνακα 2.2

Πίνακας 2.2 Τιμές του διορθωτικού συντελεστή μήκους η για δύο διαφορετικά σύνθετα

Υλικά	L(mm)	G_w/E_f	R(μm)	V_f	H
Carbon-Epoxy	0.1	0.005	8	0.3	0.20
	1.0	0.005	8	0.3	0.89
	10	0.005	8	0.3	0.99
Glass-nylon	0.1	0.010	11	0.3	0.21
	1.0	0.010	11	0.3	0.89
	10	0.010	11	0.3	0.99

Μια εναλλακτική έκφραση της (2.16) η οποία προτάθηκε από τους Halpin & Tsai⁵ και φέρει το όνομά τους, εκφράζεται από τον τύπο

$$E_{||} = E_m \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (2.19)$$

όπου $\xi = L/r$ και η δίδεται από την σχέση (2.17).

Η ανωτέρω εξίσωση υπολογίζει το αξονικό μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου. Όταν υπάρχει μια κατανομή στον προσανατολισμό των ινών η απόδοση της ενίσχυσης των ινών ελαττώνεται περαιτέρω. Ο Cox έβαλε έναν ακόμη όρο στην εξίσωση (2.16) για να πάρει στο λογαριασμό την επίδραση του προσανατολισμού των ινών, δηλαδή

⁵ Halpin J.C. Stiffness and expansion estimates for oriented short fiber composites, J. Composite Materials, 3, pp. 732-734 (1969)

$$E = \eta_o \eta_l E_f v_f + E_m (1 - v_f) \quad (2.20)$$

όπου η_o είναι ο συντελεστής ικανότητας προσανατολισμού.

Οι τιμές του η_o έχουν υπολογισθεί για διαφορετικές κατανομές προσανατολισμού των ινών, υποθέτοντας ότι η ρητίνη και οι ίνες παραμορφώνονται ελαστικά και ότι οι παραμορφώσεις είναι ίδιες σε αμφότερες τις φάσεις. Μια ομάδα παραλλήλων ινών με συνολική διατομή Δa_f οι οποίες είναι προσανατολισμένες κατά γωνία θ σχετικά με το εφαρμοζόμενο φορτίο είναι ισοδύναμες με μία δέσμη ινών διατομής Δa^*_f οι οποίες είναι προσανατολισμένες στη διεύθυνση του φορτίου, όπου

$$\Delta a^*_f = \Delta a_f \cos^4(\theta) \quad (2.21)$$

Για δέσμη διαφορετικών προσανατολισμένων ινών η ισοδύναμη επιφάνεια του συνολικού ενισχυμένου υλικού είναι

$$\alpha^*_f = \sum \Delta a_f \cos^4(\theta) \quad (2.22)$$

Ο παράγοντας ικανότητας προσανατολισμού η_o ορίζεται από τη σχέση $\eta_o = \alpha^*_f / \alpha_f$.

Για πολύστρωτα υλικά φορτιζόμενα σε μία διεύθυνση, όταν το φορτίο είναι παράλληλο με τις ίνες ισχύει $\eta_o=1$, και όταν το φορτίο είναι κάθετο ως προς τον προσανατολισμό των ινών ισχύει $\eta_o=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΟΠΩΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ - ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗ ΡΗΤΙΝΗ ΣΤΗΝ ΙΝΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Οι μηχανικές ιδιότητες των κοντόινων ενισχυμένων υλικών επηρεάζονται από την ανακατανομή του τασικού πεδίου και την ολίσθηση στα άκρα των ινών. Ο μηχανισμός μεταφοράς φορτίου από τη ρητίνη στην ίνα έχει μελετηθεί σε πολλά δημοσιευμένα άρθρα από τις αρχές του 1950. Χαρακτηριστικές είναι οι θεωρίες που έχουν προταθεί από τους Cox¹, Outwater², Dow³, Rosen⁴ και Kelly-Tyson⁵. Η μέθοδος των *πεπερασμένων στοιχείων* έχει εφαρμοστεί από τους Wood⁶ και Carrara-McGarry⁷ για την ανάλυση ινωδών συνθέτων υλικών. Πειραματικά αποτελέσματα έχουν ληφθεί με τη βοήθεια των μεθόδων (i) φωτοελαστικότητας (ii) ποίρε-πλέγμα (iii) ακτίνων Χ.

Όλες οι θεωρητικές μελέτες βασίζονται στην υπόθεση ότι η *πρόσφυση* μεταξύ των φάσεων, δηλαδή ίνας και ρητίνης, είναι τέλεια και δεν υπάρχει ολίσθηση κατά μήκος της διεπιφάνειας. Υπάρχει μια ομοιότητα μεταξύ των σχέσεων που έχουν προταθεί από τους Cox, Dow και Rosen για την αξονική κατανομή της τάσης κατά μήκος της ίνας, μολονότι διαφορετικές βασικές υποθέσεις έχουν γίνει από τον καθένα χωριστά. Οι προτεινόμενες σχέσεις προτρέπουν μια βαθμιαία αύξηση της τάσης στην ίνα και μια βαθμιαία ελάττωση της διατμητικής τάσης, σύμφωνα με υπερβολικές συναρτήσεις ημίτονου και συνημίτονου.

¹ H.L. Cox, Brit. J. Appl. Phys., vol. 3, p.72 (1952)

² J.O. Outwater Jr., Modern Plastics, March, vol. 56, (1956)

³ H.F. Dow, G.E.C. Missile and Space Div. Report No. R. 63SD61

⁴ B.W. Rosen, Fiber Composite Materials, ASM Publications (1965)

⁵ A. Kelly and W.R. Tyson, J. Mech. Phys. Solids, No. 6, 329

⁶ M.G. Iremonger and W.G. Wood, Paper Presented to the Inst. Of Phys. And Phys. Soc. Conf. Cranfield, Sept.(1968)

⁷ A.S. Carrara and F.J. McGarry, J. Comp. Materials, vol. 2 p. 222 (1968)

Οι εξισώσεις οι οποίες έχουν προταθεί από τον Outwater για τα σημεία μετά από το όριο διαρροής της ρητίνης (post matrix yield) και από τους Kelly και Tyson για πλαστική ρητίνη έχουν δείξει μια γραμμική αύξηση της τάσης στην ίνα η οποία φθάνει στη μέγιστη τιμή της και ισούται με το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας της ίνας και της γενικευμένης παραμόρφωσης.

Η γενική μορφή των κατανομών τάσεως που έχουν προταθεί από τους Cox, Dow και Rosen είναι σύμφωνες με τα πειραματικά αποτελέσματα, αλλά υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στις τιμές της διατμητικής τάσης στα άκρα των ινών. Οι θεωρίες δίδουν μικρότερες τιμές που οφείλεται στην επίδραση της συγκέντρωσης τάσης στα άκρα των ινών, όπου αγνοείται από τις θεωρητικές μελέτες.

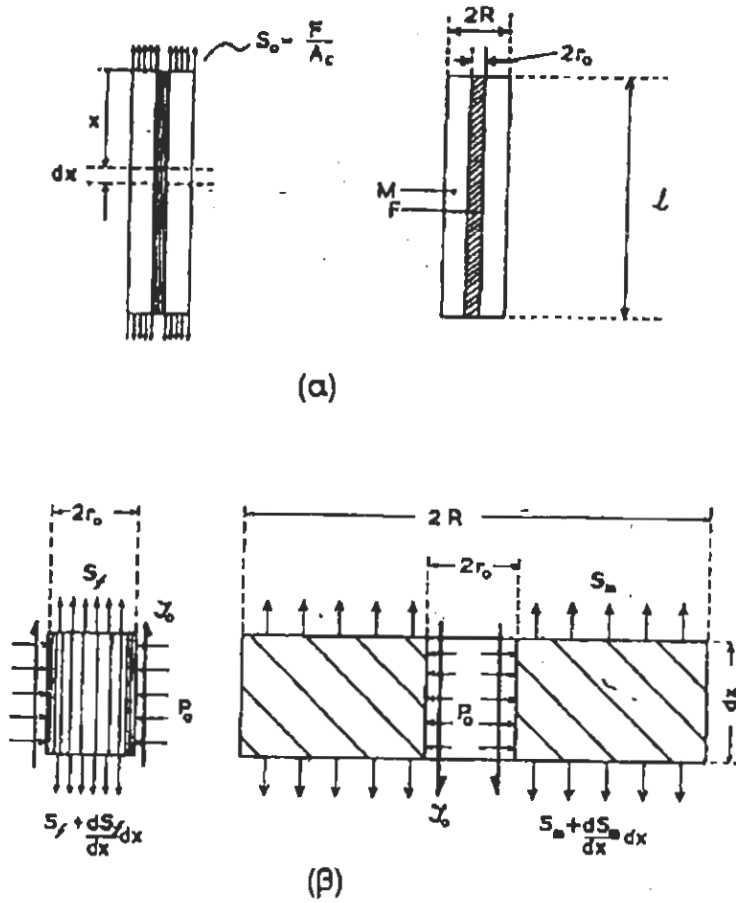
3.2 ΓΕΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

Ενδιαφέρουσες απόψεις της συμπεριφοράς ενός ενισχυμένου συστήματος μπορεί να μελετηθεί από τη συμπεριφορά μια απλής μονάδας όγκου της ίνας και της ρητίνης. Η απλή μονάδα όγκου συνίσταται από μια ομοιόμορφη ασυνεχή ίνα η οποία εμβαπτίζεται σε μια κυλινδρική ρητίνη που μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή δεσμού μεταξύ των φάσεων (Σχ. 3-1α).

Η ίνα και η ρητίνη θεωρούνται ιστροπικά γραμμικά ελαστικά υλικά τα οποία υπόκεινται σε μικρές παραμορφώσεις κατά τη διάρκεια φόρτισης του συστήματος. Λόγω της γραμμικότητας του υλικού μπορεί να εφαρμοσθεί η αρχή της υπέρθεσης οπότε η ολική μετατόπιση κάθε σημείου ισούται με το άθροισμα των μετατοπίσεων που προκαλούνται από διαφορετικές τάσεις. Όταν μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, F , εφαρμόζεται στη διατομή της ρητίνης, λόγω των διαφορετικών αξονικών παραμορφώσεων και την εγκάρσια συστολή στις πλευρές θα αναπτυχθεί στη διεπιφάνεια μια διατμητική τάση τ_0 και πίεση P_0 . Αυτό δεικνύετε στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος στο στοιχείο ανάμεσα στο x και $x+dx$ (Σχ. 3-1β).

Η ισορροπία του στοιχείου απαιτεί ότι:

$$A_r S_r + A_m S_m = F \quad (3.1\alpha)$$



Σχ 3-1 Μια απλή εμβυπτιζόμενη ίνα σε κυλινδρική ρητίνη

ή ισοδύναμα

$$2\pi r_0 \tau_0 dx + \pi r_0^2 S_f - \pi r_0^2 (S_f + \frac{dS_f}{dx} dx) = 0$$

η οποία συνεπάγεται

$$\tau_0 = \frac{r_0}{2} \frac{dS_f}{dx} \tag{3.1\beta}$$

όπου S_f και S_m παριστάνουν τις αξονικές τάσεις στην ίνα και ρητίνη αντίστοιχα.

Εάν θεωρήσουμε ισορροπία ενός κυλινδρικού τμήματος της ρητίνης (Σχ. 3-2α), τότε η *διατμητική* τάση στη ρητίνη τ_m για κάθε ακτίνα δίδεται από τη σχέση:

$$\tau_m = \tau_0 \frac{r_0}{r} \left[1 - \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \frac{A_r}{A_m} \right] \quad (3.2)$$

Η *διατμητική* τάση θα προκαλέσει παραμόρφωση στο στοιχείο ανάμεσα στο $r=r$ και $r=r+dr$, ενός ποσού ίσου με:

$$d\delta_m = \frac{\tau_m}{G_m} dr \quad (3.3)$$

όπου G_m είναι το μέτρο *διάτμησης* της ρητίνης.

Η ολική μετατόπιση στη διεπιφάνεια συγκρινόμενη με εκείνη της εξωτερικής στρώσης μπορεί να ευρεθεί με ολοκλήρωση της σχέσης (3.3), μεταξύ των r_0 και R :

$$\delta_m = \tau_0 r_0 \left[\frac{\alpha + 1}{\alpha} \ln(\alpha + 1) - 1 \right] / 2G_m \quad (3.4)$$

Εάν ορίσουμε ως

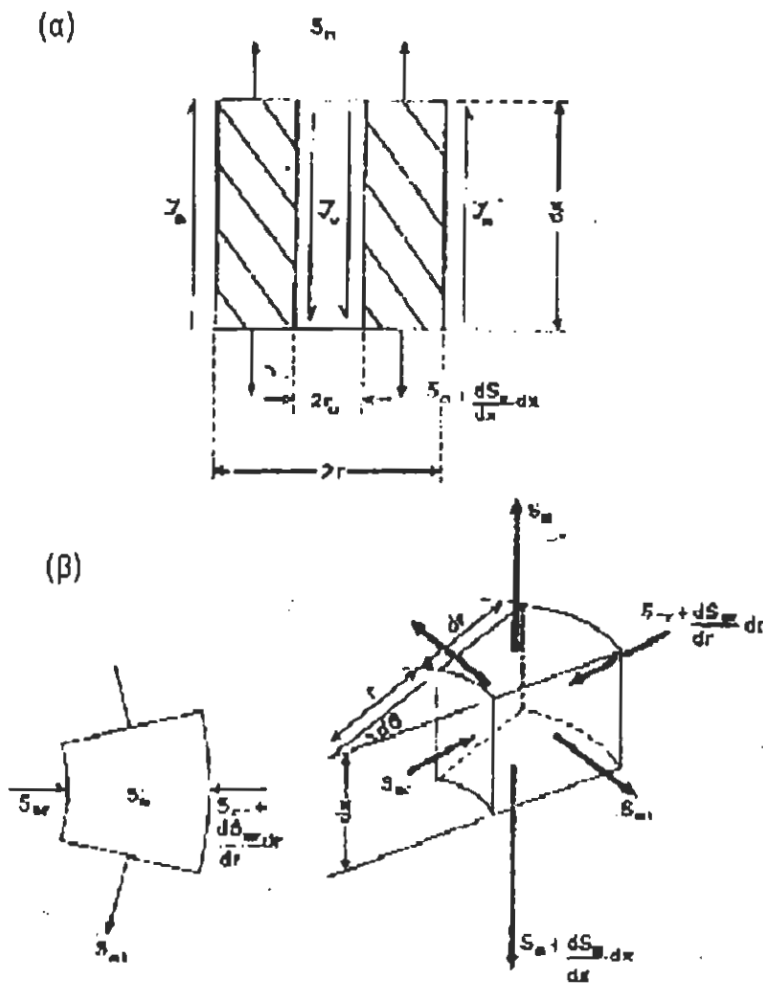
$$K_1 = r_0 \left[\frac{\alpha + 1}{\alpha} \ln(\alpha + 1) - 1 \right] / 2G_m \quad (3.5)$$

τότε

$$\delta_m = K_1 \tau_0 \quad (3.6)$$

Όμοια η ισορροπία στο στοιχείο δίδει την κατανομή της *διατμητικής* τάσης κατά μήκος της ίνας, δηλαδή

$$\tau_f = \tau_0 r / r_0 \quad (3.7)$$



Σχ.3-2 (α) Διατμητική τάση στη ρητίνη τ_m και στην ίνα τ_f (β) Ισορροπία τάσεων σε ένα απομονωμένο κυλινδρικό τμήμα του υλικού

το οποίο προκαλεί μια συνολική παραμόρφωση της ίνας στη διεπιφάνεια, η οποία δίδεται από την σχέση

$$\delta_r = K_2 \tau_0 \tag{3.8\alpha}$$

όπου

$$K_2 = r_0 / 2G_r \tag{3.8\beta}$$

και G_f είναι το μέτρο διάτμησης της ίνας.

Η πίεση P_0 μπορεί να υπολογισθεί εάν πάρουμε στον υπολογισμό τη συμβατότητα της ακτινικής μετατόπισης στη διεπιφάνεια, δηλαδή

$$\bar{\delta}_f + \bar{\delta}_{P_0} = \bar{\delta}_{mF} - \bar{\delta}_{mP_0} \quad (3.9)$$

όπου f και m αναφέρονται στην ίνα και στη ρητίνη αντίστοιχα, το F παριστάνει τις μετατοπίσεις που οφείλονται στο αξονικό φορτίο και το P_0 παριστάνει τη μετατόπιση υπό την επίδραση της πίεσης. Αντικατάσταση του $\bar{\delta}_s$ από την εξίσωση όπως δίδεται σε βιβλία εφαρμοσμένης μηχανικής⁸, χρησιμοποιώντας $b=E_m/E_f$ και c σαν το λόγο του λόγου Poisson (σ_m) της ρητίνης και του αντίστοιχου της ίνας (σ_f) εκφράζοντας S_m συναρτήσει της ολικής δύναμης και της τάσης στην ίνα από την εξίσωση (3.1α) έχουμε

$$P_0 = K_3 F - K_4 S_f \quad (3.10\alpha)$$

όπου

$$K_3 = \frac{1}{A_m \left[b \frac{1 - \sigma_f}{\sigma_m} + \frac{\alpha + 2}{\alpha \sigma_m} + 1 \right]} \quad (3.10\beta)$$

και

$$K_4 = \frac{ab/c + 1}{\alpha \left[b \frac{1 - \sigma_f}{\sigma_m} + \frac{\alpha + 2}{\alpha \sigma_m} + 1 \right]} \quad (3.10\gamma)$$

⁸ S. P. Timosenko & J.N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw Hill (1970)

Η πίεση θα προκαλέσει τη ρητίνη να υφίσταται τις ακόλουθες ακτινικές και εφαπτομενικές παραμορφώσεις⁹

$$\varepsilon_m = P_0 \frac{1 - R^2 / r^2}{\alpha E_m} \quad (3.11\alpha)$$

$$\varepsilon_m = P_0 \frac{1 + R^2 / r^2}{\alpha E_m} \quad (3.11\beta)$$

όπου E_m παριστάνει το μέτρο ελαστικότητας της ρητίνης (βλ. Σχ. 3-2β). Σαν αποτέλεσμα αυτών των παραμορφώσεων η ρητίνη θα έχει εγκάρσια παραμόρφωση ίση με

$$\varepsilon_m = -2P_0 \frac{\sigma_m}{\alpha E_m} \quad (3.12)$$

αποτέλεσμα τις οποίας πρέπει να αθροιστεί αλγεβρικά στη παραμόρφωση που προκαλείται από την αξονική τάση. Τελικά θα δώσει το καθαρό ποσό της παραμόρφωσης στη ρητίνη κατά την εγκάρσια διεύθυνση.

$$\varepsilon_m = \frac{S}{E_m} - 2P_0 \frac{\sigma_m}{\alpha E_m} \quad (3.13)$$

Αντικατάσταση του P_0 από την (3.10α) μαζί με την (3.1 α) δίδει

$$\varepsilon_m = K_5 F - K_6 S_f \quad (3.14\alpha)$$

όπου οι σταθερές K_5 και K_6 δίδονται από τις σχέσεις

$$K_5 = \frac{1}{A_m E_m} \left[1 - \frac{2\sigma_m}{\alpha \left[b \frac{1 - \sigma_f}{\sigma_m} + \frac{\alpha - 2}{\alpha \sigma_m} + 1 \right]} \right] \quad (3.14\beta)$$

⁹ J. Anirbayat and J.W. S. Hearle, Fibre Science and technology vo. 2, pp. 123-141 (1969)

και

$$K_6 = \frac{1}{\alpha E_m} \left[1 - \frac{2\sigma_m(\alpha b/c + 1)}{\alpha \left[b \frac{1-\sigma_f}{\sigma_m} + \frac{\alpha+2}{\alpha\sigma_m} + 1 \right]} \right] \quad (3.14\gamma)$$

Όταν η ίνα βρίσκεται υπό υδροστατική πίεση αναπτύσσεται μια εγκάρσια παραμόρφωση η οποία ισούται με:

$$\varepsilon_{r1} = 2P_0 \frac{\sigma_f}{E_f} \quad (3.15)$$

λόγω αυτής της πίεσης. Η καθαρή εγκάρσια παραμόρφωση δίδεται από την σχέση

$$\varepsilon_r = \frac{S_f}{E_f} + 2P_0 \frac{\sigma_f}{E_f} \quad (3.16\alpha)$$

ή ισοδύναμα

$$\varepsilon_r = K_7 F + K_8 S_f \quad (3.16\beta)$$

όπου

$$K_7 = \frac{2\sigma_f}{E_f A_m \left[b \frac{1-\sigma_f}{\sigma_m} + \frac{\alpha+2}{\alpha\sigma_m} + 1 \right]} \quad (3.16\gamma)$$

$$K_8 = \frac{1}{E_f} \left[1 - \frac{2\sigma_f(\alpha b/c + 1)}{\alpha \left[b \frac{1-\sigma_f}{\sigma_m} + \frac{\alpha+2}{\alpha\sigma_m} + 1 \right]} \right] \quad (3.16\delta)$$

Εάν υποθέσουμε ότι ABCD (Σχ. 3-3α) είναι η αρχική θέση της γραμμής που σχεδιάζεται κατά μήκος του προτύπου που περνά από τον άξονα της ίνας, τότε η

γραμμή αυτή θα μετατοπισθεί σε μια ασυνεχή θέση (A'B', B'B'', B''C'', C''C', C'D') μετά την εφαρμογή μιας εξωτερικής δύναμης. Η κατακόρυφη μετατόπιση U_s οφείλεται στις εγκάρσιες παραμορφώσεις και στην καμπυλότητα (επάνω για την ίνα και κάτω για τη ρητίνη) δηλαδή είναι απλά διατμητικές παραμορφώσεις.

Από τη γεωμετρία μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\Delta = (U_m - U_r) - (\delta_m + \delta_r) \quad (3.17)$$

όπου Δ παριστάνει την ολική σχετική ολίσθηση στη διεπιφάνεια.

Παραγωγίζοντας αναφορικά με το x και θέτοντας $\frac{dU}{dx} = -\varepsilon$ (το x παίρνεται σε θετικό προς τα κάτω) παράγει την σχέση

$$\frac{d\Delta}{dx} = (\varepsilon_m - \varepsilon_r) - \frac{d}{dx}(\delta_m + \delta_r) \quad (3.18)$$

Η αντικατάσταση για δ_s και ε_s δίδει

$$\frac{d\Delta}{dx} = (K_7 - K_5)F + (K_8 + K_6)S_r - \frac{r_0}{2}(K_1 + K_2) \frac{d^2 S_r}{dx^2} \quad (3.19)$$

Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση η οποία σχετίζει τις δυνάμεις, τάσεις στην ίνα και τη δεύτερη παράγωγο με το μέτρο ολίσθησης κατά μήκος της ίνας.

3.3 ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Εφ' όσον δεν έχουν γίνει υποθέσεις για τη διεπιφάνεια της ρητίνης και της ίνας κατά την εξαγωγή της σχέσης (3.19) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε τύπο ιδιοτήτων διεπιφάνειας, εάν η κατάλληλη πληροφορία εισάγεται γι' αυτό. Η απλούστερη συνθήκη διεπιφάνειας ρητίνης-ίνας μπορεί να τυποποιηθούν στις εξής κατηγορίες:

- Όχι δεσμό, όχι τριβή
- Τέλεια πρόσφυση
- Η ενδιάμεση κατάσταση, περιορισμένη τριβή

(α) χωρίς δεσμό-χωρίς τριβή

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει διαμητική τάση, οπότε δεν μπορεί να γίνει μεταφορά φορτίου ($\tau_0=0$). Η ίνα θα περιορίσει τη ρητίνη από την ελεύθερη εγκάρσια μετατόπιση της. Εάν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει φορτίο στα άκρα της ίνας ο δεύτερος και ο τρίτος όρος στα δεξιά σκέλος της (3.19) είναι μηδέν,

$$\frac{d\Delta}{dx} + (K_3 - K_7)F = 0 \quad (3.20)$$

Η ολοκλήρωση παράγει μια γραμμική αύξηση της ολικής ολίσθησης η οποία θα αρχίσει από το μέσο της ίνας, $x=l/2$.

(β) τέλεια πρόσφυση

Όπως είναι φανερό από το Σχ. 3-3β τα σημεία στη διεπιφάνεια παραμένουν συνδεδεμένα για οποιοδήποτε φορτίο μικρότερο από μια κρίσιμη τιμή η οποία προκαλεί τη θραύση του δεσμού. Δεν θα υπάρξει ολίσθηση μεταξύ των δύο φάσεων (δηλ. ρητίνης-ίνας): $\Delta=0$ και $d\Delta/dx=0$

Αντικατάσταση στην (3.19) δίδει

$$\frac{d^2 S_f}{dx^2} - K_9 S_f + K_{10} F = 0 \quad (3.21)$$

Η λύση της (3.21), υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει φορτίο στα άκρα της ίνας, είναι:

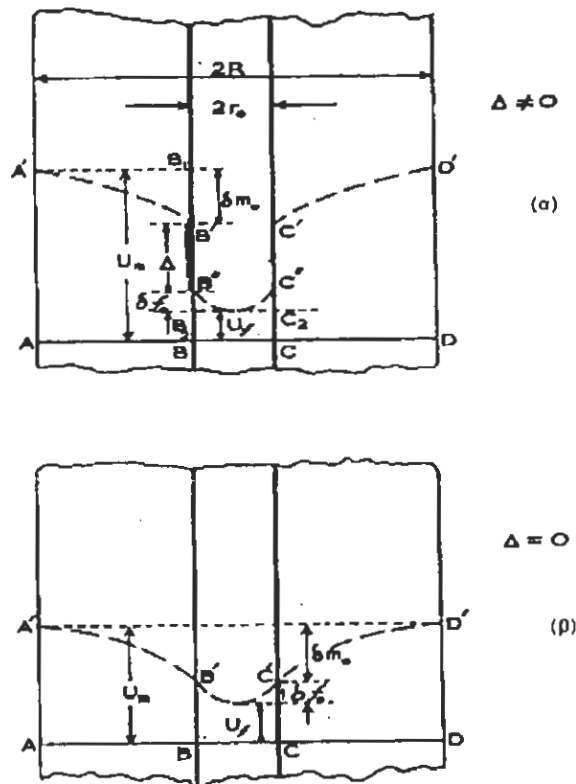
$$S_f = \frac{K_{10} F}{K_9} \left(1 - \frac{\cosh K_9^{1/2} (l/2 - x)}{\cosh K_9^{1/2} l/2} \right) \quad (3.21\beta)$$

Η τάση στην ίνα που δίδεται από την (3.21β) έχει την ίδια κατανομή σαν εκείνη που προτάθηκε από τους Cox, Dow και Rosen αλλά με διαφορετικές σταθερές.

Οι σχέσεις για την διεπιφανειακή πίεση και διάτμηση χρησιμοποιώντας τις (3.17) – (3.2)-(3.6) αντίστοιχα θα είναι

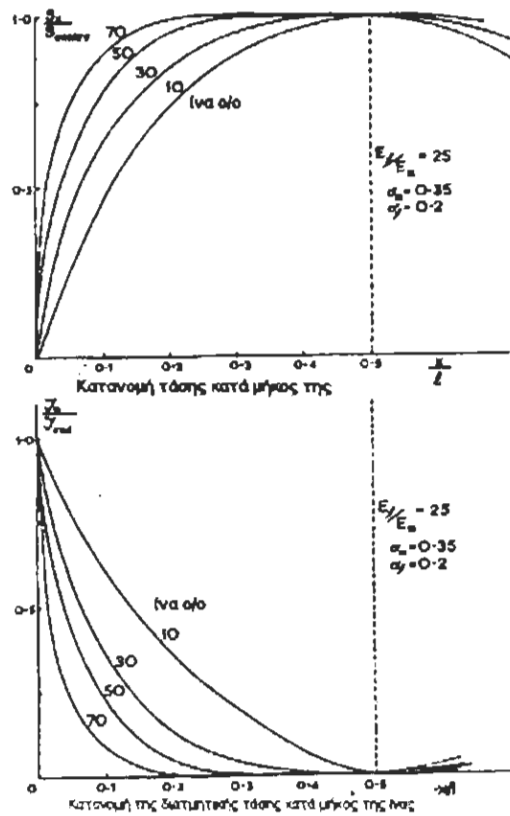
$$P_0 = F [K_3 - K_4 \frac{K_{10}}{K_9} (1 - \frac{\cosh K_9 \frac{1}{2}(1/2 - x)}{\cosh K_9 \frac{1}{2}})] \quad (3.21\gamma)$$

$$\tau_0 = F \frac{r_0}{2} \frac{K_{10}}{K_9} \frac{\sinh K_9 \frac{1}{2}(1/2 - x)}{\cosh K_9 \frac{1}{2}} \quad (3.21\delta)$$



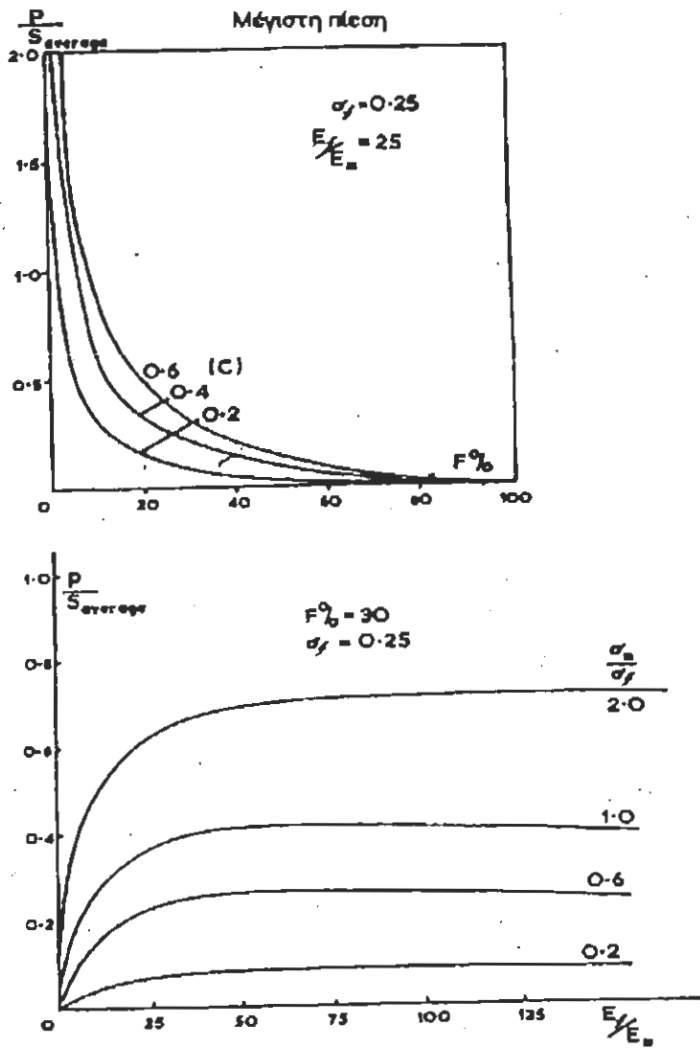
Σχ. 3- 3 (α) Χωρίς δεσμό και τριβή (β) τέλεια πρόσφυση

Το Σχήμα 3-4 δείχνει την θεωρητική κατανομή της τάσης στην ίνα και της διατμητικής τάσης κατά μήκος του υποθετικού μοναδιαίου συνθέτου. Το Σχήμα 3-5 δείχνει τα υπολογιζόμενα αποτελέσματα για την μέγιστη διεπιφανειακή πίεση (στο



Σχ. 3-4 Κατανομή ορθής και διατμητικής τάσης κατά μήκος της ίνας

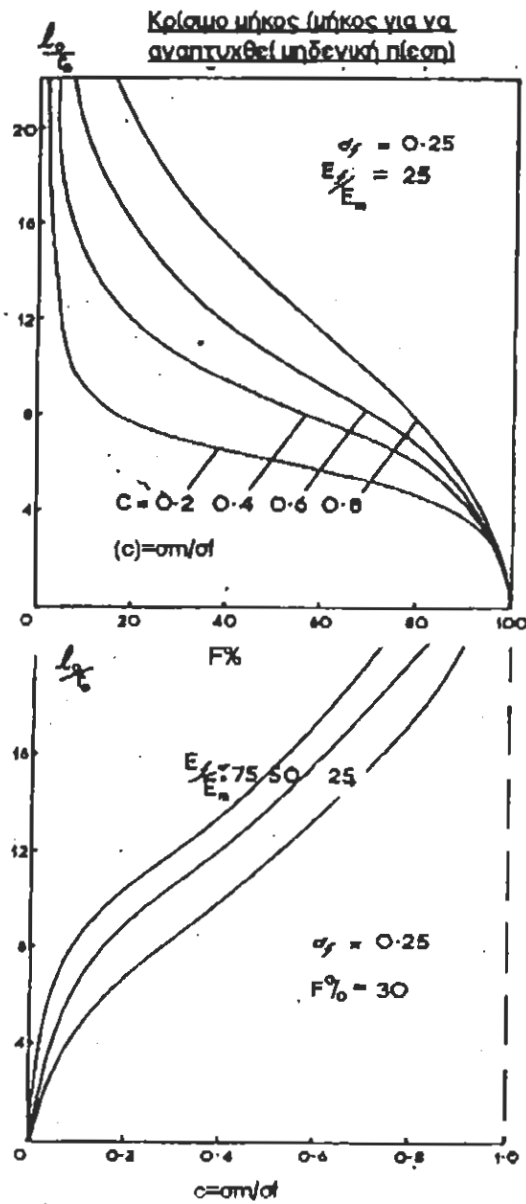
σημείο $x=0$) συναρτήσει διαφορετικών μεταβλητών του συστήματος. Εάν ο λόγος Poisson της ρητίνης είναι μικρότερος από εκείνο της ίνας τότε η (3.21γ) οδηγεί σε μία αρνητική πίεση, η οποία προσπαθεί να αποκολλήσει την διεπιφάνεια των δύο φάσεων. Αυτή η αρνητική πίεση δεν εμφανίζεται κοντά στα άκρα των ινών, λόγω της μικρότερης επιμήκυνσης στην ίνα, αλλά μπορεί να συμβεί στο κεντρικό μέρος της ίνας. Οι συνθήκες αυτές οδηγούν σε μια αρνητική πίεση στο κέντρο της ίνας όπως φαίνεται στο Σχ. 3-6.



Σχ. 3-5 Μέγιστη διεπιφανειακή πίεση (στο σημείο $x=0$) συναρτήσει διαφορετικών μεταβλητών του συστήματος

(γ) Περιορισμένη τριβή (χωρίς δεσμό)

Αυτή είναι η μεσαία συνθήκη ανάμεσα σε αυτά που αναφέρθηκαν ανωτέρω: μπορεί να συμβεί είτε με χωρίς αρχικό δεσμό ή μετά από την θραύση του δεσμού. Σ'αυτή την περίπτωση διατμητική τάση δημιουργείται από δυνάμεις τριβής προκαλούμενη από εγκάρσια συστολή της ρητίνης και όχι από τη πίεση συρίκνωσης όπως έχει προταθεί από προηγούμενες μελέτες, δηλαδή

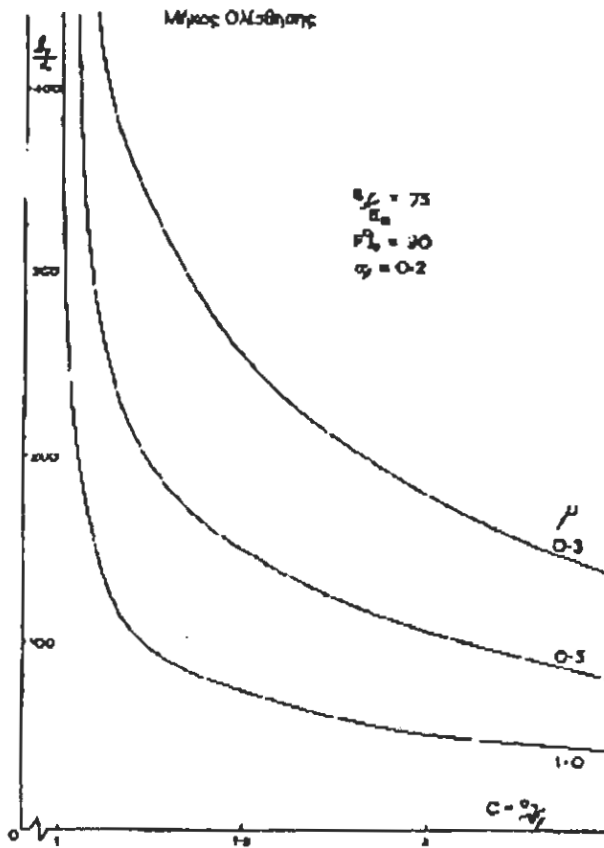


Σχ. 3-6 Κρίσιμο μήκος σε συνάρτηση του % ποσοστού σε ίνες και του λόγου $c = \sigma_m/\sigma_f$

$$\tau_0 = \mu P_0 \tag{3.22}$$

Αντικατάσταση για τ_0 και P_0 από τις (3.1β) και (3.10α) δίδει

$$\frac{dS_f}{dx} + \frac{2\mu}{r_0} K_4 S_f = \frac{2\mu}{r_0} K_3 F \tag{3.23}$$



Σχ. 3.7 Επίδραση του λόγου Poisson και του συντελεστή τριβής

Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν φορτία στα άκρα της ίνας η εξίσωση που περιγράφει την κατανομή των τάσεων γίνεται

$$S_r = \frac{K_3}{K_4} F[1 - \exp(-2\mu K_4 x / r_0)] \quad (3.24)$$

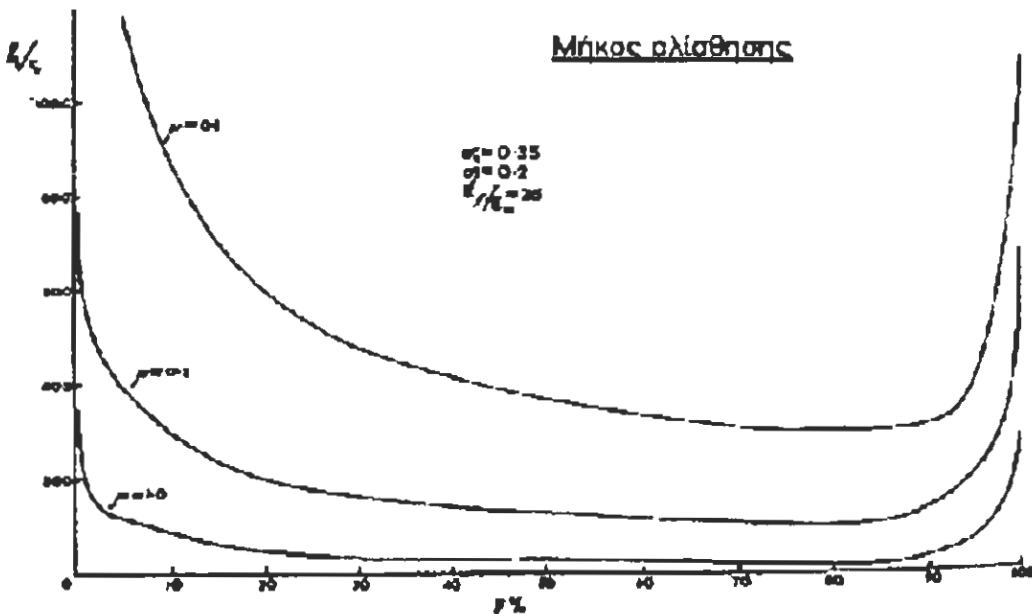
Για τυπικές τιμές του συντελεστή μ ($0.1 \leq \mu \leq 1$) η (3.24) δίνει μικρότερη τάση για κάθε τιμή του x η οποία λαμβάνεται από την (3.21β).

Η συνθήκη για μηδενική ολίσθηση έχει ήδη περιγραφεί στην (3.21). Αναλογικά κανείς μπορεί να εξάγει μια απόσταση x_0 από το άκρο της ίνας όπου δεν μπορεί να γίνει ολίσθηση, δηλαδή

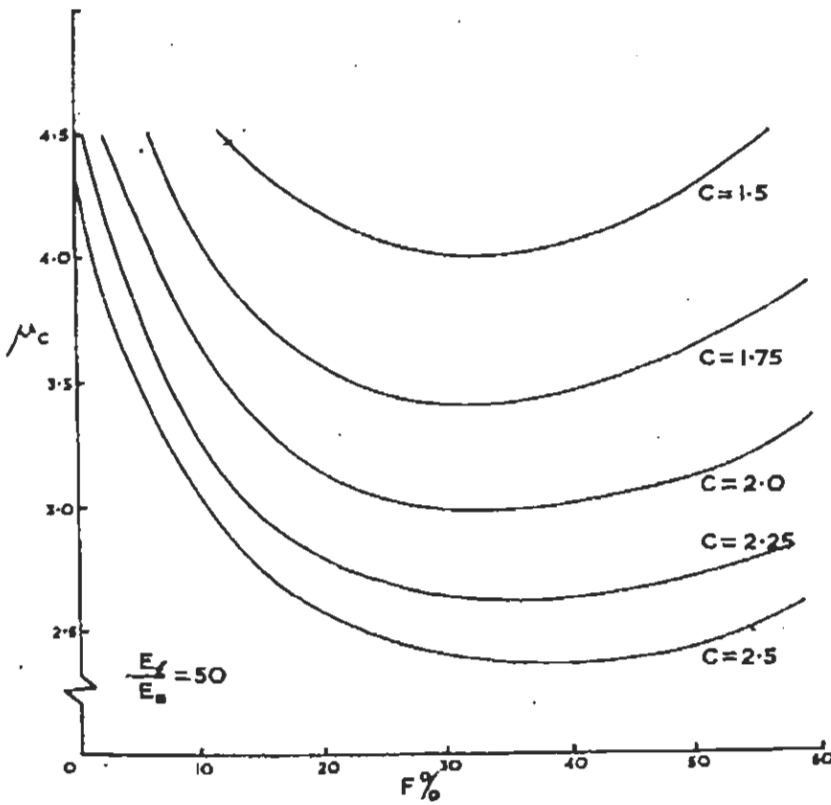
$$x_0 = \frac{r_0}{2\mu K_4} \ln \left[\frac{1 - \left(\frac{2\mu}{r_0}\right)^2 \frac{K_4}{K_9}}{1 - \frac{K_4}{K_3} \frac{K_{10}}{K_9}} \right] \quad (3.25)$$

Η τελευταία εξίσωση δίνει την απόσταση από το άκρο της ίνας όπου η ίνα βρίσκεται σε ικανοποιητική εντατική κατάσταση για να ακολουθήσει τη ρητίνη στη διεπιφάνεια. Τα Σχήματα 3-7 και 3-8 παριστάνουν τις υπολογιζόμενες τιμές των αδιάστατων μηκών ολίσθησης ($l_0/r_0=2x_0/r_0$) συναρτήσει διαφορετικών ιδιοτήτων του συστήματος. Τα διαγράμματα δείχνουν την συνεισφορά των λόγων Poisson και του συντελεστή τριβής.

Κανείς μπορεί ακόμη να εξετάσει τις συνθήκες στις οποίες η ολίσθηση δεν αρχίζει ποτέ ($x_0=0$), ακόμη και στην περίπτωση μη τέλειας πρόσφυσης. Η λύση για $x_0=0$ από την (3.25) δίνει δύο τιμές του συντελεστή μ : $\mu = \infty$ και $\mu = \mu_c$ το οποίο έχει μια πεπερασμένη τιμή.

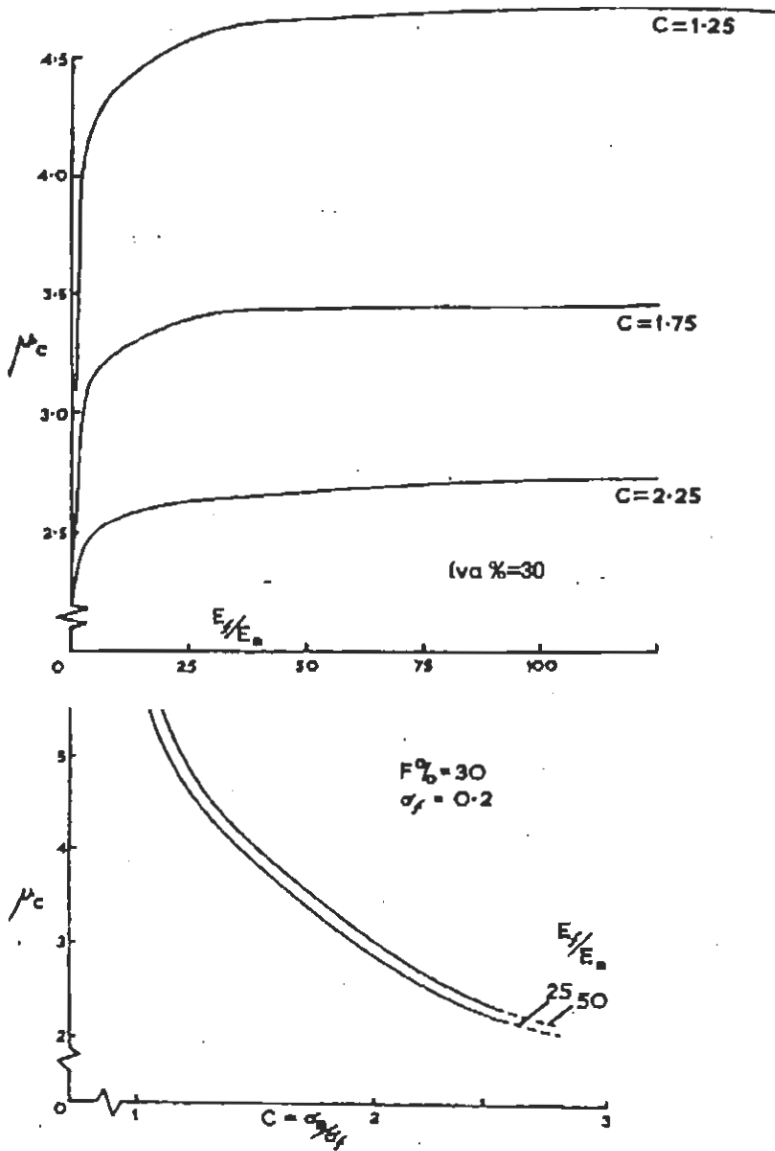


Σχ. 3.8 Επίδραση του % περιεκτικότητας σε ίνες και του συντελεστή τριβής



Σχ. 3.9 Επίδραση της % περιεκτικότητας και του λόγου Poisson στον κρίσιμο συντελεστή τριβής

Τα Σχήματα (3-9) και (3-10) δείχνουν τα αριθμητικά αποτελέσματα για μ_c όπως υπολογίσθηκαν από το λόγο σιβαρότητας, το ποσοστό των ινών και διαφορετικές τιμές του λόγου Poisson. Οι τιμές του κρίσιμου συντελεστή τριβής δοσμένα από τα σχήματα είναι σχετικά υψηλές, αλλά εάν θεωρήσουμε τον παράγοντα τριβής των ινωδών υλικών, είναι πραγματικές.



Σχ. 3-10 Επίδραση του λόγου στιβαρότητας και του λόγου Poisson στον κρίσιμο συντελεστή τριβής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΕ ΜΟΝΟ-ΙΝΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Τα ενισχυμένα ινώδη υλικά κερδίζουν καθημερινά μεγάλο ενδιαφέρον τεχνολογικά διότι έχουν μεγάλες πρακτικές εφαρμογές. Τα υλικά αυτά συνίσταται από σκληρές ίνες εμβαπτιζόμενες σε μια ρητίνη με τον άξονα της ίνας κατά την διεύθυνση της εφαρμοζόμενης δύναμης. Εφ' όσον το μέτρο ελαστικότητας της ίνας είναι τυπικά πολύ μεγαλύτερο απ' εκείνο της ρητίνης, οι αξονικές ελαστικές παραμορφώσεις των δύο συνισταμένων υλικών είναι πολύ διαφορετικές. Με το σκοπό να σχεδιασθεί ένα ενισχυμένο σύνθετο υλικό, είναι σημαντικό να έχουμε μια λεπτομερική γνώση της κατανομής της τάσης σαν αποτέλεσμα του εφαρμοζόμενου φορτίου. Πράγματι όταν ασυνεχής ίνες χρησιμοποιούνται οι καλές ιδιότητες εξαρτώνται από την ικανότητα της μεταφοράς τάσης μεταξύ ίνας και ρητίνης. Η ικανότητα αυτή συχνά χαρακτηρίζεται από το κρίσιμο μήκος l_c της ίνας για να λάβει μέγιστη τάση ίση με εκείνη που θα λάμβανε μια ίνα απείρου μήκους. Το μήκος είναι στενά συνδεδεμένο με το κρίσιμο μήκος που προσδιορίζεται από πειράματα εξόλκισης ινών.

Αναλυτικές εξισώσεις για την μεταβολή της τάσης κατά μήκος ασυνεχών ινών σ' ένα κυλινδρικό συμμετρικό πρότυπο έχει παραχθεί από τον Cox¹ και Dow². Αμφότερες οι μελέτες δεν παίρνουν στον υπολογισμό την πρόσφυση κατά μήκος των άκρων των ινών και δεν λαμβάνουν υπ' όψιν την συγκέντρωση τάσεων στα άκρα των ινών. Η σημασία αυτών των παραγόντων έχει μελετηθεί με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων^{3, 4, 5}.

¹ H.L. Cox, Brit. J. Applied Phys. vol. 3 p. 72 (1952)

² N.F. Dow, G.E.C. Rep. R63 SD61 (1963)

³ A.S. Carrara and F.J. McGarry, J. Comp. Mat. Vol. 2 p.222 (1968)

⁴ R.A. Lander and C.W. Beadle, J. Comp. Mat. Vol. 10, p. 21 (1976)

⁵ E.D. Ready, J. Comp. Mat. Vol. 18, p. 595 (1984)

Η μέθοδος των *πεπερασμένων διαφορών*⁶ έχει εφαρμοσθεί για τη μελέτη όλων αυτών των προβλημάτων. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο το υλικό παριστάνεται από ένα ορθογώνιο τρισδιάστατο πλέγμα του οποίου τα γειτονικά κομβικά σημεία συνδέονται με δεσμούς έχοντας διαφορετικές ελαστικές σταθερές για την ίνα και τη ρητίνη. Για μια δεδομένη εξωτερική παραμόρφωση, αυτοί οι κόμβοι είναι σε χαλάρωση προς την τοπική μηχανική ισορροπία με τα γειτονικά σημεία με μια συστηματική ακολουθία λειτουργιών, οι οποίες σταθερά ελαττώνουν την καθαρή παραμένουσα δύναμη που ενεργεί σε κάθε κόμβο. Το κεφάλαιο αυτό κυρίως πραγματεύεται με την μελέτη μιας ίνας εμβαπτισμένη σε μια απείρου μήκους ρητίνη. Η επίδραση των άκρων της ίνας έχει μελετηθεί και παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση. Η επίδραση του *κρίσιμου μήκους*, της *πρόσφυσης* και η *διαφορά* των μέτρων ελαστικότητας της ίνας και ρητίνης μελετώνται με την μέθοδο των *πεπερασμένων διαφορών* και οι προβλέψεις του μοντέλου συγκρίνονται με πειραματικά δεδομένα.

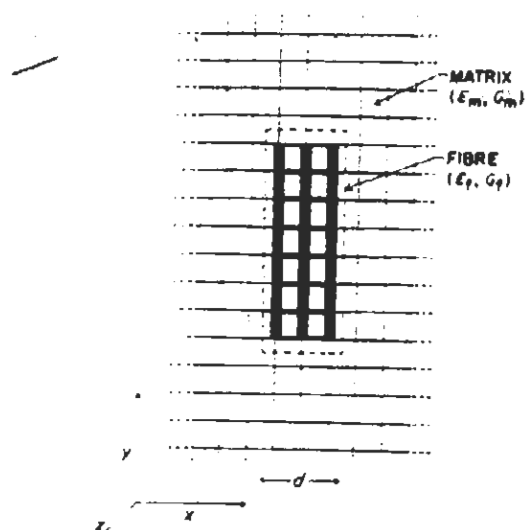
4.2 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

Αρχίζουμε με την εισαγωγή του προτύπου με μια απλή ίνα εμβαπτιζόμενη σε μια άπειρη τριών διαστάσεων ρητίνη. Το Σχήμα 4-1 δεικνύει μια δισδιάστατη παράσταση του πλέγματος στο x-y επίπεδο το οποίο περνά από το κέντρο της ίνας. Το πλέγμα είναι απλό κυβικό αποτελούμενο από 300 κόμβους κατά μήκος της y-διεύθυνσης και 33 κόμβους κατά μήκος των εγκάρσιων x και z διευθύνσεων. Αυτές οι διευθύνσεις θεωρούνται ικανοποιητικά μεγάλες έτσι ώστε τα αποτελέσματα να θεωρούνται ανεξάρτητα από το μέγεθος. Η διάμετρος της ίνας θεωρείται ότι είναι ίση με 3 μονάδες του πλέγματος. Τα μέτρα ελαστικότητας της ίνας και της ρητίνης σημειώνονται με E_f και E_m αντίστοιχα.

Το πλέγμα παραμορφώνεται κατά 1% κατά μήκος της y-διεύθυνσης. Αυτό οδηγεί σε μετατόπιση των κόμβων κατά μήκος των διαφορετικών αξόνων. Για να προσδιορίσουμε τις μετατοπίσεις κάθε κόμβος χαλαρώνεται προς την μηχανική ισορροπία με τους γειτονικούς κόμβους μηδενίζοντας την καθαρή παραμένουσα δύναμη που ενεργεί σ' αυτό τον κόμβο. Η κινητικότητα αυτών των παραμένωνων

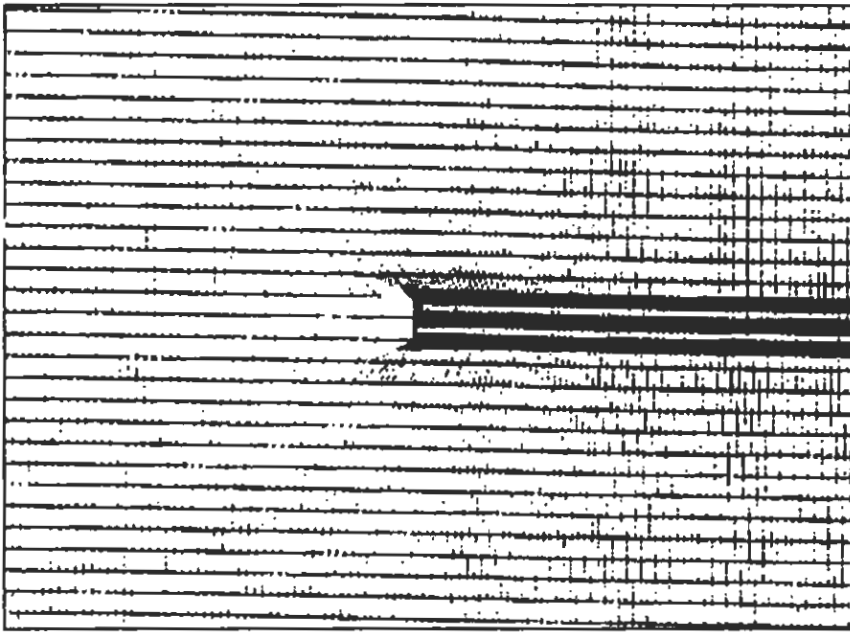
⁶ Y. Termonia, J. Mat. Sci., vol. 22, pp. 504-508 (1987)

τάσεων σχηματίζεται με τη χρήση δύο πολύ γνωστών υπολογιστικών μηχανών οι οποίες επιταχύνουν τη λύση.



Σχ. 4-1 Δισδιάστατη παράσταση του πλέγματος των κόμβων στο x - y επίπεδο το οποίο περνά από το κέντρο της ίνας.

Μια δισδιάστατη παράσταση της γενικής μετατόπισης του προτύπου με δεδομένο το λόγο $E_f / E_m = 40$ δείχνεται στο Σχ. 4-2. Η ίνα και η ρητίνη θεωρούνται ισοτροπικές. Εφ' όσον το μέτρο ελαστικότητας της ίνας είναι πολύ μεγαλύτερο από εκείνο της ρητίνης οι αξονικές ελαστικές παραμορφώσεις των δύο φάσεων είναι πολύ διαφορετικές. Το Σχήμα 4-2 δείχνει μια σημαντική κάμψη των ακτινικών γραμμών στις περιοχές κοντά στα άκρα της ίνας. Πολύ μακριά από τα άκρα της ίνας οι ακτινικές γραμμές επανακτούν την αρχική τους διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση του άξονα της ίνας το οποίο υποδηλώνει ότι προσεγγίζεται το όριο μιας πολύ μακριάς ίνας μέσα στην άπειρη ρητίνη.



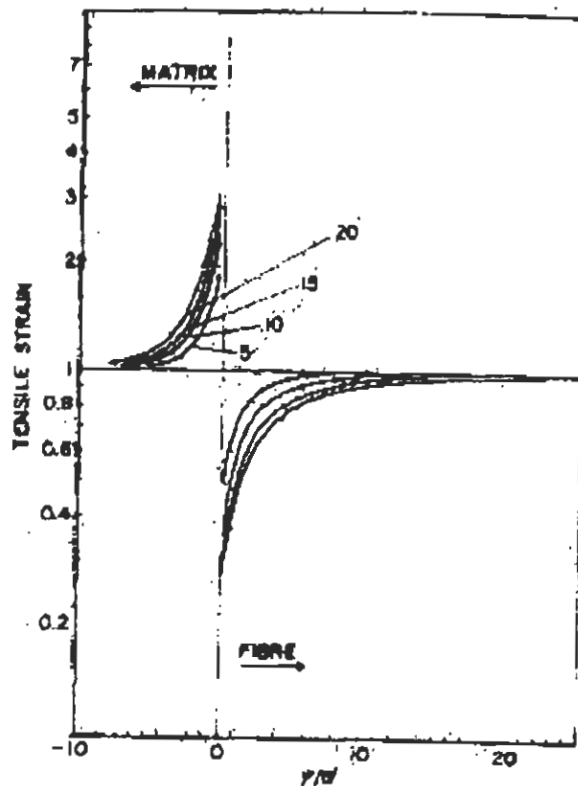
Σχ. 4-2 Γενική παράσταση του μοντέλου στο x - y επίπεδο, για λόγο E_f/E_m 40. Η y -κλίμακα έχει επιμηκυνθεί έτσι ώστε οι επιδράσεις μπορούν εύκολα να γίνουν κατανοητές.

4.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το Σχήμα 4-3 δείχνει τα αποτελέσματα της εφελκυστικής παραμόρφωσης κατά μήκος του y άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της ίνας. Η παραμόρφωση είναι σε μονάδες της ολικής παραμόρφωσης στο σύνθετο. Εφ' όσον η ανάλυση είναι πλήρως ελαστική, η τιμή της εξωτερικής παραμόρφωσης δεν έχει πραγματική σημασία και η συγκέντρωση τάσης είναι ανεξάρτητη απ' αυτή. Το Σχήμα 4.3 δεικνύει τα αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές του λόγου E_f/E_m , υποθέτοντας τέλεια πρόσφυση, δηλαδή δεν υπάρχει θραύση του δεσμού στη διεπιφάνεια ίνας-ρητινης. Για λόγους ευκολίας θεωρούμε ότι τα δύο υλικά είναι ιστροπικά και ο λόγος Poisson είναι 0.35 για αμφότερα τα υλικά. Το Σχήμα δείχνει ότι η αύξηση της αξονικής παραμόρφωσης στην ίνα γίνεται λιγότερη σημαντική καθώς ο λόγος E_f/E_m ελαττώνεται. Η παραμόρφωση στην ίνα δεν αρχίζει από το μηδέν λόγο της

μεταφοράς φορτίου από τη ρητίνη κατά μήκος του άκρου της ίνας. Η μεταφορά φορτίου φαίνεται να είναι σημαντική και υπολογίζεται περισσότερο από 25% της μέγιστης παραμόρφωσης της ίνας.

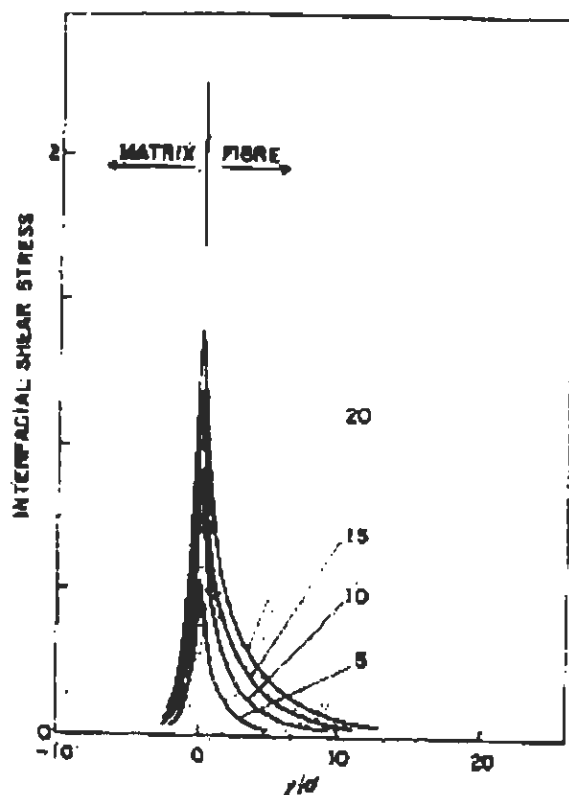
Τα αποτελέσματα για την διατμητική τάση που αντιστοιχεί στις περιπτώσεις του Σχήματος 4.3 δίδονται στο Σχ. 4-4 Το Σχήμα δείχνει μια μεγάλη μεταβολή στη διατμητική τάση μέσα στην περιοχή ίση με 2 έως 4 διαμέτρους της ίνας από το άκρο της ίνας. Το Σχ. 4-5 συνοψίζει τα αποτελέσματα για την επίδραση του λόγου E_f/E_m



Σχ. 4-3 Εφελκυστική παραμόρφωση κοντά στα άκρα της ίνας, κατά μήκος του γ -άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο της ίνας.

στο κρίσιμο μήκος l_c δηλαδή το αναγκαίο μήκος της ίνας να αποκτήσει μια μέγιστη παραμόρφωση ίση με το 97% μιας απείρου μήκους ίνας. Η γνώση του l_c είναι πολύ σημαντική για να διασφαλίσει μια ικανοποιητική ενίσχυση από την ίνα. Το l_c είναι σε μονάδες της διαμέτρου της ίνας. Το Σχ. 4-5 δείχνει ότι το κρίσιμο μήκος αυξάνεται

σχεδόν γραμμικά με την αύξηση του E_f . Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε αντίθεση με την πρόβλεψη αναλυτικών μοντέλων⁷ όπου $l_c \propto E_f^{1/2}$. Ο Galiotis et. al⁷ έχει μετρήσει πειραματικά το κρίσιμο μήκος ενός πολυ-διασπηλίτη μονοκρυστάλλου σε μια άπειρη ρητίνη. Ο λόγος E_f/E_m ήταν περίπου 16 και το κρίσιμο μήκος μετρήθηκε να είναι 27 διαμέτρους ίνας. Αυτές οι τιμές είναι σε συμφωνία με της



Σχ. 4-4 Διατμητική τάση στην διεπιφάνεια των δύο υλικών πλησίον του άκρου της ίνας

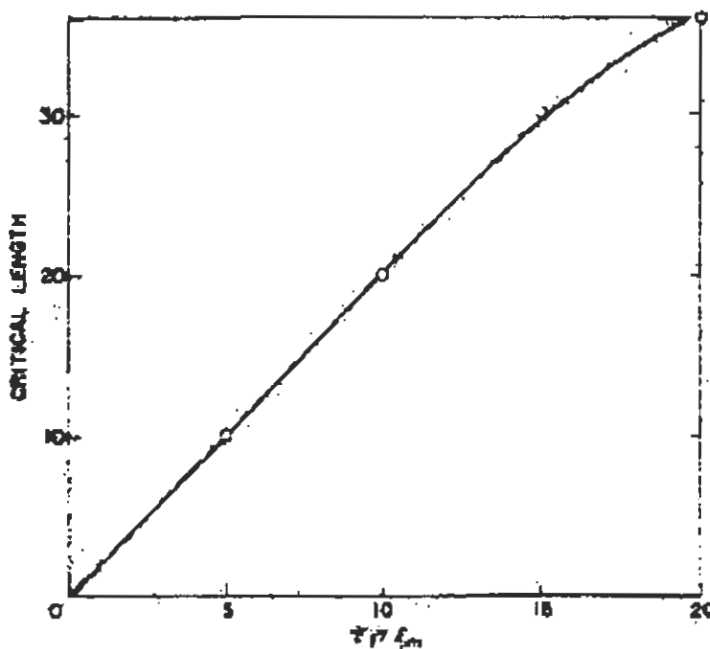
προσδιοριζόμενες στο Σχ. 4-5, οι οποίες ελήφθησαν υπό την υπόθεση ότι υπάρχει τέλεια πρόσφυση μεταξύ ρητίνης και ίνας. Σημειώσετε ότι τα πειραματικά δεδομένα⁸

⁷ C. Galiotis, R. Young, P.H. Yeung, and D. Batchelder, J. Mat. Sci., vol. 19, p. 3640 (1984)

⁸ W.R. Tyson and G. J. Davies, Brit. J. Appl. Phys. 16, p. 199 (1965)

επίσης δεικνύουν ότι η αξονική παραμόρφωση στην ίνα σε μια απόσταση l μακριά από τα άκρα της ($l \gg l_c$) είναι μικρότερη από την ολική παραμόρφωση του συνθέτου, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του Σχ. 4-3. Ωστε η διαφορά οφείλεται στο φαινόμενο λυγισμού της ίνας κατά την διάρκεια της στιγμιαίας πορείας.

Για λόγο $E_f/E_m=15$ και $d=1$ μονάδα πλέγματος η επίδραση της πρόσφυσης στο κρίσιμο μήκος δείχνεται στο Σχ. 4-6. Μεταβάλλοντας την πρόσφυση στο πρότυπο αντιλαμβανόμαστε ότι γίνεται θραύση των δεσμών στη διεπιφάνεια της ίνας – ρητίνης με πιθανότητα (1-συντελεστή πρόσφυσης). Μια ελάττωση στη πρόσφυση φαίνεται να αυξάνει το κρίσιμο μήκος. Η αύξηση είναι δραματική όταν η πρόσφυση γίνεται μικρότερη από 30%. Εναλλακτικά ο πειραματικός προσδιορισμός του κρίσιμου μήκους σε αυτά τα σύνθετα θα μπορούσε να δώσει με τη βοήθεια του Σχ. 4-6 χρήσιμο προσδιορισμό των βαθμών της πρόσφυσης ανάμεσα στην ίνα και ρητίνη. Τα αποτελέσματα του Σχ. 4-6 εξαρτώνται από το πάχος της διεπιφάνειας η οποία ισούται με τη διάμετρο της ίνας. Οποιαδήποτε ελάττωση του πάχους της διεπιφάνειας θα ελαττώσει την πρόσφυση στην οποία παρατηρείται μια δραματική αύξηση του l_c .

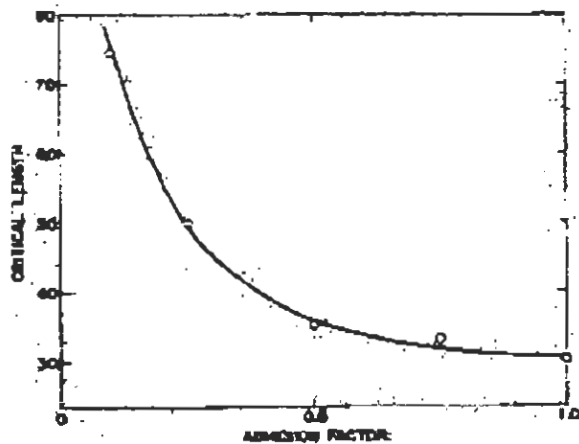


Σχ. 4-5 Η εξάρτηση του κρίσιμου μήκους στο λόγο E_f/E_m για τις περιπτώσεις που μελετήσαμε στο Σχ. 4-3

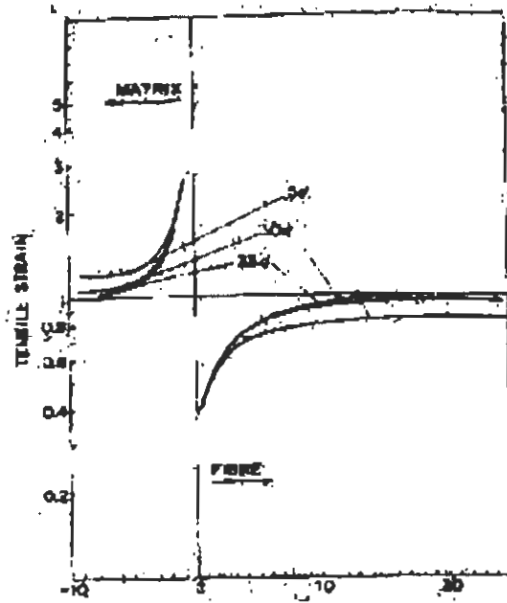
Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν μέχρι εδώ ήσαν για μια απλή ίνα μήκους 33 φορές την διάμετρο της ίνας. Η επίδραση ελάττωσης στην διάμετρο της ρητίνης στη δημιουργία της παραμόρφωσης στην ίνα δείχνεται στο Σχ. 4.7 για λόγο $E_f/E_m=15$.

Μια ελάττωση στη διάμετρο της ίνας από 5 σε 10d φαίνεται να οδηγείται σε μια πολύ μικρή παραμόρφωση και μικρή ικανότητα της μεταφοράς φορτίου από τη ρητίνη στην ίνα. Αυτό το αποτέλεσμα επεξηγεί γιατί η λύση με πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιώντας πλέγμα διαμέτρου ίσο με 10d αποτυγχάνει να φθάσει την κατάσταση της μεγίστης παραμόρφωσης στη μέση της ίνας.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών μπορεί να αποτελέσει μια χρήσιμη τεχνική για την μελέτη των παραγόντων που περιορίζουν τις μηχανικές ιδιότητες των ινωδών ενισχυμένων υλικών.



Σχ. 4-6 Εξάρτηση του κρίσιμου μήκους από το συντελεστή πρόσφυσης για $E_f/E_m=15$



Σχ 4-7 Εφέλκυστική παραμόρφωση κοντά στα άκρα της ίνας για διαφορετικές τιμές της διαμέτρου της ρητίνης. Ο λόγος E_f/E_m ισούται με 15 και η διάμετρος της ίνας ισούται με μια μονάδα του πλέγματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

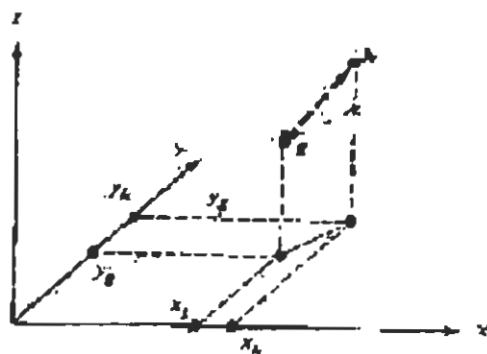
Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε εισαγωγή στην τεχνική της μεθόδου των *Πεπερασμένων Στοιχείων*, θα δοθούν ορισμοί, συμβολισμοί και διαδικασίες που προέρχονται από την θεωρία των πινάκων και εφαρμόζονται στις κατασκευές¹. Αρχικά, περιγράφονται τα κύρια συστήματα συντεταγμένων, καθώς και οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση. Θα μελετήσουμε την σχέση μεταξύ της αναλυτικής παράστασης μιας κατασκευής με *πεπερασμένα στοιχεία* (ΠΣ) και της συμπεριφοράς μιας πραγματικής κατασκευής η οποία έχει χωρισθεί σε πεπερασμένα στοιχεία. Οι *συντελεστές επίδρασης* των μελών της κατασκευής, ορίζονται βάσει της απόκρισης του *φορτίου-μετατόπισης* σε διακριτά σημεία πάνω στα μέλη της. Έτσι προκύπτει ο ορισμός της *ενέργειας* και του *έργου*, που εκφράζονται με τους *συντελεστές επίδρασης* και *συμμετρίας*. Τέλος θα ασχοληθούμε με το μετασχηματισμό αυτών των συντελεστών επίδρασης π.χ. *συντελεστές επίδρασης των μετατοπίσεων*, *βαθμούς ελευθερίας της δύναμης* κ.λ.π. Τέτοιες λειτουργίες είναι σημαντικές στην σχεδιαστική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Επί πλέον περιγράφεται η δημιουργία των *πινάκων δυσκαμψίας* των στοιχείων για τον ορισμό του αριθμού των μετατοπίσεων του στερεού σώματος.

5.2 ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Η εφαρμογή των δυνάμεων, σε μία ελαστική κατασκευή, προκαλεί μετατοπίσεις των σημείων του σώματος, καθώς και μετατόπιση των σημείων σχετικά μεταξύ τους. Η ολική συμπεριφορά των στοιχείων της κατασκευής όπως ορίζονται από τις μετατοπίσεις των σημείων στο στερεό θα μελετηθούν υπό την επίδραση των δυνάμεων που εφαρμόζονται στα σημεία αυτά

¹ Π. Κακαβάς, Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (2001)

Μία ομάδα *ορθογωνίων* αξόνων $\{x,y,z\}$ ορίζεται στην μη-παραμορφωμένη κατάσταση της υπό μελέτη κατασκευής (Σχ. 5.1). Οι άξονες παραμένουν σταθεροί κατά την παραμόρφωση της κατασκευής, και κατά την μετατόπιση των σημείων του στερεού σώματος που αναφέρονται σ' αυτό το σύστημα αξόνων. Όταν μια δύναμη εφαρμόζεται σε ένα σωματίδιο **A**, τότε οι συνιστώσες της δύναμης (F_{gx}, F_{gy}, F_{gz}) , μετατοπίζουν το σωματίδιο στη θέση **h** έτσι ώστε: $u_g = x_h - x_g, v_g = y_h - y_g, w_g = z_h - z_g$. Εάν η συμπεριφορά της κατασκευής είναι *γραμμική*, τότε η ανωτέρω περιγραφή μεταξύ δύναμης και μετατόπισης σημαίνει ότι οι συνιστώσες της δύναμης παραμένουν αμετάβλητες, καθώς το σωματίδιο κινείται από το σημείο **A** προς το **h**. Από μηχανικής συμπεριφοράς, το *έργο* που παράγεται από την συνιστώσα της δύναμης που ενεργεί στο σωματίδιο, δια μέσου των μετατοπίσεων u_A, v_A, w_A δεν εξαρτάται από τον δρόμο που διαγράφεται από το σημείο **A** προς το **B**.



Σχ. 5.1 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Όταν μια κατασκευή αποτελείται από δοκούς, ράβδους, πλάκες ή κελύφη μικρού πάχους και εφαρμόζεται δύναμη **F**, η ανάλυση υποθέτει ότι μια γραμμή που σχεδιάζεται κάθετα στην μεσαία γραμμή ή μεσαία επιφάνεια της παραμορφούμενης κατασκευής, παραμένει κάθετη προς αυτήν και μετά την παραμόρφωση. Η μέτρηση της *μετατόπισης* σε σημεία μίας κατασκευής είναι η περιστροφή της κάθετης γραμμής, σχετικά με την μη-παραμορφούμενη κατάσταση, που συνήθως υποθέτουμε ότι είναι ίση με την κλίση της

μεσαίας γραμμής ή επιφάνειας. Η συνολική περιγραφή μίας κατασκευής σ' ένα πεπερασμένο στοιχείο, επιτυγχάνεται δια μέσου του υλικού με τις συνιστώσες της δύναμης και παραμόρφωσης στα σημεία του σώματος. Τέτοια σημεία συνήθως ονομάζονται *κόμβοι* ή *σύνδεσμοι*, διότι στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων παριστάνουν σημεία σύνδεσης των στοιχείων που σχηματίζουν το *συνολικό* ή *καθολικό* αναλυτικό πρότυπο της κατασκευής. Οι δυνάμεις και οι μετατοπίσεις παριστάνονται από διανύσματα της μορφής $\{f\}$ και $\{u\}$ αντίστοιχα, και συμβολίζονται ως κάτωθι:

$$\{f\} = \{f_{xg}, f_{yg}, f_{zg}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}\}^T, \{u\} = \{u_g, v_g, w_g, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}\}^T \quad (5.1)$$

όπου T παριστάνει το *ανάστροφο* των διανυσμάτων $\{f\}$ και $\{u\}$, M_{ij} ορίζει τις συνιστώσες της *ροπής* λόγω της επίδρασης της δύναμης, θ_{ij} είναι οι *γωνιακές μετατοπίσεις*. Ένα επι μέρους στοιχείο από τις n μετατοπίσεις, π.χ. u_i , ορίζεται σαν ο i^{th} βαθμός ελευθερίας.

Αρχικά για τον σχηματισμό των διανυσμάτων *δύναμης* και *μετατόπισης* πρέπει να ορίσουμε τους κόμβους και την θέση τους αναφορικά με το σύστημα συντεταγμένων. Στην εφαρμογή της μεθόδου των *πεπερασμένων στοιχείων* διαχωρίζουμε το σύστημα αξόνων ως *καθολικό*, *τοπικό* ή *συνδρασμένο* και ορίζονται ως εξής:

- (α) Οι *καθολικοί* άξονες, ορίζονται για ολόκληρη την κατασκευή η οποία διαχωρίζεται σε πολλά πεπερασμένα στοιχεία
- (β) Οι *τοπικοί* άξονες ή άξονες στοιχείου προσαρμόζονται στα αντίστοιχα στοιχεία και γενικά είναι διαφορετικά προσανατολισμένοι από στοιχείο σε στοιχείο.
- (γ) Οι *συνδρασμένοι* άξονες ορίζονται στους συνδέσμους των στοιχείων και γενικά έχουν διαφορετικό προσανατολισμό στους κρίκους σύνδεσης.

5.3 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Για να αντιληφθούμε την σημασία των διαφόρων μεθόδων στην κατασκευή των πεπερασμένων στοιχείων, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε την *σχέση* μεταξύ της συμπεριφοράς ενός απλού *προτύπου* στοιχείου και την συμπεριφορά μιας πραγματικής κατασκευής. Η προσέγγιση της ανάλυσης των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην *ενέργεια* ή στην *αρχή των μεταβολών*. Για μια πραγματική κατασκευή σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο, αντιστοιχεί μια κατανομή τάσεων, για να σχηματισθεί ένα μαθηματικό *υπόδειγμα* ή *πρότυπο* οι τάσεις αυτές πρέπει να αντιπροσωπεύονται από δυνάμεις στους κόμβους των στοιχείων. Οι μετατοπίσεις των κόμβων και γενικά οι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν στους κόμβους (π.χ. μετατοπίσεις, περιστροφές κ.λ.π.) εφαρμόζονται χωριστά για κάθε στοιχείο.

- **Η μέθοδος ζύγισης των υπολοίπων**

Η μέθοδος ζύγισης των υπολοίπων έχει σχεδόν απεριόριστες δυνατότητες, π.χ ένας τύπος αυτής της μεθόδου παράγει τεχνικές που είναι ταυτόσημες εκείνων που εφαρμόζονται στην εφαρμογή της *αρχής των μεταβολών*. Όπως επίσης για ορισμένα μη-γραμμικά προβλήματα η μέθοδος ζύγισης του υπολοίπου μπορεί να εφαρμοσθεί για την παραγωγή σχέσεων που δεν μπορούν να ληφθούν με την χρήση των παραδοσιακών μεθόδων μεταβολών. Τέλος εξυπηρετεί στο να κατανοήσουμε την φυσική των μεταβολών π.χ. το *δυναμικό* και την *αρχή της συμπληρωματικής ενέργειας*. Η ανάπτυξη των σχέσεων της καταστατικής ανάλυσης αφιερώνεται στο σχηματισμό των πινάκων δυσκαμψίας στη βάση των πεδίων μετατοπίσεων. Η μέθοδος που θα περιγραφεί κατωτέρω δεν είναι περιορισμένη στην εφαρμογή αυτών των τύπων αλλά εφαρμόζεται για τον σχηματισμό οποιασδήποτε σχέσης στοιχείου στην βάση των μετατοπίσεων και των *τασικών πεδίων* και εφαρμόζονται σε μια ευρεία κλίμακα *μη-κατασκευαστικών* προβλημάτων.

- **Η άμεση μέθοδος**

Η άμεση μέθοδος με τη χρήση, σε συνδυασμό, τριών ομάδων εξισώσεων ελαστικότητας (α) ισορροπίας (β) παραμόρφωσης-μετατόπισης και (γ) καταστατικές σχέσεις, επιτυγχάνει τον σχηματισμό των σχέσεων για τα στοιχεία με σκοπό να δείξει την σχέση ανάμεσα στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και της υπ' ανάλυση πραγματικής κατασκευής. Η τεχνική αυτή εισάγει κοινά χαρακτηριστικά απ' όλες τις μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων. Ιδιαίτερα όμως τους μετασχηματισμούς από τάση σε δύναμη και από βαθμό ελευθερίας σε παραμόρφωση.

Για την ανάπτυξη των εξισώσεων *δυσκαμψίας* ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Στο πεδίο μετατοπίσεων του στοιχείου, $\{u\}$, το οποίο εκφράζεται σε όρους ενός πεπερασμένου αριθμού παραμέτρων $\{a\}$ και είναι κατά προτίμηση *βαθμοί ελευθερίας* του στοιχείου στα σημεία σύνδεσης (εάν αρχικά δεν έχουν φυσική σημασία, τότε ένας μετασχηματισμός μπορεί να τους συνδέσει με άλλους βαθμούς ελευθερίας που έχουν φυσική έννοια).

2. Η παραγωγή του πεδίου των μετατοπίσεων, σύμφωνα με τις εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης της θεωρίας της ελαστικότητας, εκφράζει το πεδίο παραμορφώσεων ϵ , συναρτήσει των βαθμών ελευθερίας των μετατοπίσεων, $\{u\}$

3. Από την θεωρία της ελαστικότητας γνωρίζουμε ότι ο καταστατικός νόμος μεταξύ των τάσεων και παραμορφώσεων είναι: $\{\sigma\} = [E](\{\epsilon\} - \{\epsilon\}^{αυτ})$, όπου $[E]$ είναι ο πίνακας του μέτρου ελαστικότητας του υλικού, οπότε ο ανωτέρω νόμος καθορίζει την σχέση μεταξύ του τασικού πεδίου και των βαθμών ελευθερίας $\{u\}$ των μετατοπίσεων.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν στα στοιχεία τις δυνάμεις $\{F\}$ συναρτήσει του πεδίου των τάσεων $\{\sigma\}$, κατασκευάζονται ορίζοντας τις δυνάμεις σαν το στατικό ισοδύναμο των τάσεων που ενεργούν στα όρια του στοιχείου. Εφ' όσον οι εξισώσεις για τις τάσεις $\{\sigma\}$ είναι συναρτήσει του $\{u\}$ είναι δυνατό να σχετίσουμε το $\{F\}$ με το $\{u\}$. Οι εξισώσεις αυτές ορίζουν τις εξισώσεις *δυσκαμψίας* του στοιχείου.

5.4 ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

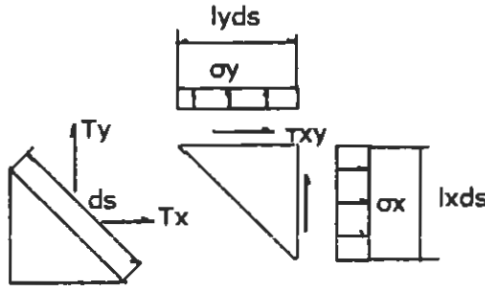
Η μέθοδος των μεταβολών, στην μηχανική των κατασκευών, αποτελεί μια πολύ ισχυρή μέθοδο για την δημιουργία των σχέσεων πεπερασμένων στοιχείων. Η περιγραφή της εφαρμογή της αρχής των μεταβολών για την δημιουργία των εξισώσεων σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο έχει ως εκκίνηση την άποψη ότι οι εξισώσεις δόναμης-μετατόπισης μπορούν να γραφούν για κάθε πεπερασμένο στοιχείο και η δημιουργία των καθολικών εξισώσεων είναι μια χωριστή διεργασία. Η ενεργειακή μέθοδος επιτρέπει μια διαφορετική ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, σύμφωνα με την οποία οι ολικές εξισώσεις εξάγονται από το άθροισμα όλων των ενεργειών των πεπερασμένων στοιχείων.

Η αρχή των δυνατών έργων είναι μια υποπερίπτωση της αρχής των μεταβολών είναι μια τεχνική δημιουργίας των εξισώσεων των πεπερασμένων στοιχείων. Υπάρχουν δυο τύποι της γενικής αρχής, (α) δυνατές μετατοπίσεις και (β) δυνατές δυνάμεις, οι οποίοι οδηγούν στις συμβατικές αρχές του μόνιμου δυναμικού και συμπληρωματικής ενέργειας.

Όταν ένα σώμα στην θέση ισορροπίας δεχτεί την επίδραση εφαρμοζόμενων εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων υφίσταται μια κατάσταση δυνατής μετατόπισης η οποία σε κάθε σημείο περιγράφεται από τις συνιστώσες du, dv, dw . Οι δυνατές μετατοπίσεις πρέπει να είναι συνεχής συναρτήσεις των χωρικών συντεταγμένων και να ικανοποιούν τις κινηματικές οριακές συνθήκες στο τμήμα της επιφάνειας στο οποίο αναφέρονται αυτές οι συνθήκες.

Βάσει της αρχής των δυνατών μετατοπίσεων το άθροισμα του δυναμικού, δV , που οφείλεται στις εφαρμοζόμενες δυνάμεις και η αποθηκευμένη ενέργεια παραμόρφωσης κατά την διάρκεια των δυνατών μετατοπίσεων, δU , ισούται με το μηδέν, δηλ.

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (5.2)$$



Σχ. 5.2 Επίπεδο τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο στο οποίο εφαρμόζονται επιφανειακές τάσεις

- Εφαρμογή των επιφανειακών δυνάμεων

Ο συνηθέστερος τρόπος εφαρμογής των επιφανειακών δυνάμεων είναι τέτοιος ώστε εκφράζονται σαν x και y κατευθύνουσες δυνάμεις ανά μονάδα εμβαδού της επιφάνειας η οποία από μόνη της είναι υπό γωνία αναφορικά με τις διευθύνσεις x και y . Εάν ds είναι το μήκος της περιοχής AB στην κατάσταση επίπεδης έντασης, όπου το πάχος έχει θεωρηθεί μοναδιαίο, τότε το μήκος ds ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν της επιφάνειας. Από την ισορροπία στην x - διεύθυνση έχουμε:

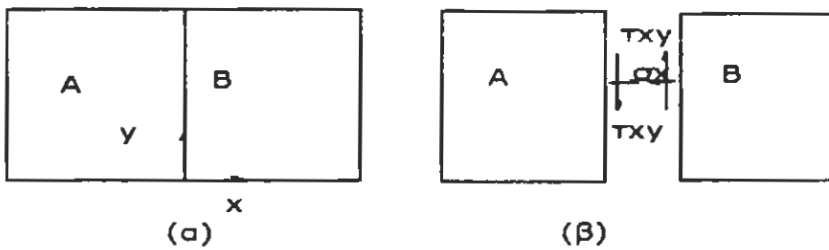
$$\bar{T}_x ds = \sigma_x (l_x ds) + \tau_{xy} (l_y ds) \Leftrightarrow \bar{T}_x = \sigma_x l_x + \tau_{xy} l_y \quad (5.3)$$

και παρόμοια για την y διεύθυνση έχουμε:

$$\bar{T}_y ds = \sigma_y (l_y ds) + \tau_{xy} (l_x ds) \Leftrightarrow \bar{T}_y = \sigma_y l_y + \tau_{xy} l_x \quad (5.4)$$

Στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων διαπραγματευόμαστε με τις *συνθήκες ισορροπίας*, όχι μόνο στο εσωτερικό της κατασκευής και στις εξωτερικές επιφάνειες,

αλλά και στις διεπιφάνειες των παρακείμενων στοιχείων. Στην διεπιφάνεια των στοιχείων υπάρχει μια τασική κατάσταση και οι εξ. (5.3-5.4) εφαρμόζονται σε κάθε πλευρά της διεπιφάνειας (Σχ.5.3)



Σχ. 5.3 Παρακείμενα στοιχεία των οποίων η διεπιφάνεια βρίσκεται κατά μήκος του y άξονα

Λόγω του προσανατολισμού της διεπιφάνειας $l_x=1$ και $l_y=0$, οι εξ. (5.3-5.4) δίδουν:

$$\bar{T}_x = \sigma_x \text{ και } \bar{T}_y = \tau_{xy} \tag{5.5}$$

Οι εξ. (5.5) δείχνουν ότι όταν η διεπιφάνεια είναι παράλληλη με τον y άξονα, τότε για να έχουμε ισορροπία, πρέπει κατά μήκος της διεπιφάνειας η κάθετη και η διατμητική συνιστώσα των τάσεων να είναι *συνεχής*. Όταν ενεργεί η τάση σ_y , τότε επιτρέπεται να είναι ασυνεχής η μεταβολή της στην x διεύθυνση. Όταν ο προσανατολισμός της διεπιφάνειας είναι υπό γωνία με τους άξονες x και y , οι συνιστώσες των ελκτικών δυνάμεων κάθετα και εφαπτομενικά μιας αφόρτιστης διεπιφάνειας πρέπει να είναι *συνεχής* κατά μήκος της. Είναι χρήσιμο να διαχωρίζουμε ανάμεσα στο τμήμα της επιφάνειας όπου εφαρμόζονται δυνάμεις και στο τμήμα στο οποίο εφαρμόζονται μετατοπίσεις.

5.4α ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΤΟΥ ΕΡΓΟΥ

Η γενική πορεία ανάπτυξης του πίνακα δυσκαμψίας των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην αρχή του *δυνατού έργου*. Η σχέση μετατόπισης-κομβικών μετατοπίσεων είναι:

$$\{u\}^T = [N]\{\hat{u}\} \quad (5.6)$$

όπου $\{u\} = \{u, v, w\}$ δηλώνει το διάνυσμα των μετατοπίσεων μέσα στο στοιχείο, $[N]$ είναι το μητρώο των συναρτήσεων μορφής του επιλεγμένου πεπερασμένου στοιχείου, $\{\hat{u}\}$ είναι το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων του στοιχείου. Με εφαρμογή της σχέσης μετατόπισης-παραμόρφωσης έχουμε:

$$\{\epsilon\} = [D]\{u\} \quad (5.7)$$

Η κατανομή των δυνατών μετατοπίσεων και δυνατών παραμορφώσεων δίδεται από την μεταβολή των τελευταίων εξισώσεων, δηλ.

$$\{\delta u\}^T = [N]\{\delta \hat{u}\} \quad (5.8\alpha)$$

$$\{\delta \epsilon\} = [D]\{\delta \hat{u}\} \quad (5.8\beta)$$

Η καταστατική εξίσωση, στην περίπτωση που εφαρμόζονται φορτία, και η αρχική παραμόρφωση στην κατασκευή, δίδεται από την σχέση

$$\{\sigma\} = [E](\{\epsilon\} - \{\epsilon^{απλ}\}) \quad (5.9)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι εφαρμόζονται δυνάμεις F_i στην κατασκευή, τότε το δυναμικό που οφείλεται σε αυτές τις δυνάμεις είναι

$$\delta V = -\{\delta u\}^T \{F\} \quad (5.10)$$

Ο υπολογισμός του δυναμικού που οφείλεται στις εσωτερικές δυνάμεις $\{\Phi\}$, δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$- \int_V \{\delta u\}^T \{\Phi\} dV \quad (5.11)$$

εφ' όσον $\{\delta u\} = [N] \{\delta \hat{u}\}$ έχουμε

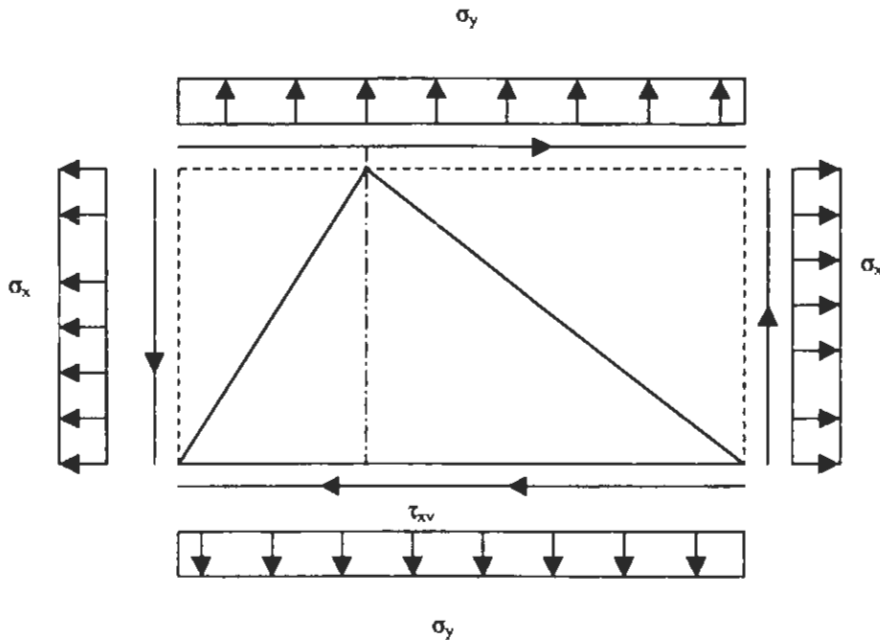
$$\{F^b\} = \int_V [N]^T \{\Phi\} dV \text{ (διάνυσμα των body δυνάμεων για το στοιχείο)} \quad (5.12)$$

5.5 ΤΡΙΓΩΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ

Ένα απλό τριγωνικό στοιχείο σταθερού πάχους που αποτελείται από ένα ιστροπικό υλικό φαίνεται στο Σχ. 5-4. Για απλούστευση της ανάλυσης, η μία πλευρά του τριγώνου τοποθετείτε κατά μήκος του x-άξονα. Οι τελικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό των πινάκων δυσκαμψίας οδηγούν στην προσεγγιστική λύση των διαφόρων εξισώσεων οι οποίες καλύπτουν προβλήματα καθολικής ανάλυσης.

Η συμπεριφορά του τριγωνικού στοιχείου περιγράφεται από έξη βαθμούς ελευθερίας, δηλ. το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων δίδεται από την σχέση:

$$\{u\} = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}^T \quad (5.13)$$



Σχ. 5.4 Ένα απλό τριγωνικό στοιχείο με παράσταση των πλευρικών τάσεων με σκοπό να υπολογιστούν οι δυνάμεις σύνδεσης.

Η περιγραφή της μεταβολής των μετατοπίσεων u και v , στις x, y διευθύνσεις είναι²:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \tag{5.14}$$

Οι κομβικές μετατοπίσεις στην x - διεύθυνση ισούται με:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}_{[B_1]} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [B_1] \{a\} \tag{5.15}$$

² W.Weaver & Johnston, Finite Element For Structural Anal, Prentice Hall, E.Cliffs, NJ (1984)

Η πρώτη των εξισώσεων (5.14) γράφεται ως εξής:

$$u(x, y) = \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [B_1]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (5.16\alpha)$$

όπου οι συναρτήσεις N_1, N_2, N_3 παριστάνουν τις *συναρτήσεις μορφής* του απλού *τριγωνικού* στοιχείου και αντικαθιστώντας τον αντίστροφο του πίνακα $[B]$ από την εξ. (5.15) λαμβάνουμε τις κάτωθι εξισώσεις:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x_2 y_3} (x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y) \\ \frac{1}{x_2 y_3} (x y_3 - x_3 y) \\ \frac{y}{y_3} \end{Bmatrix} \quad (5.16\beta)$$

Στο κόμβο $i=1$, όπου $x=x_1=0$ και $y=y_1=0$ η συνάρτηση μορφής $N_1(x,y)$ ισούται με την μονάδα ενώ οι άλλες συναρτήσεις N_2 και N_3 στον κόμβο $i=1$ ισούται με το μηδέν. Ίδιες ιδιότητες ισχύουν για τις συναρτήσεις N_2, N_3 στους κόμβους $i=2$ και $i=3$. Η μετατόπιση στην διεύθυνση- y είναι:

$$v(x, y) = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

όπου οι συναρτήσεις N_1, N_2, N_3 δίνονται από τις εξισώσεις (5.16β).

Οι σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης για επίπεδα προβλήματα δίνονται:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.18)$$

Αντικατάσταση των εξισώσεων (5.16α), (5.17) στην (5.18) δίδει το διάνυσμα των παραμορφώσεων δηλ.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \end{bmatrix}}_{[D]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

ή ισοδύναμα

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad (5.20)$$

$N_{i,x}$, $N_{i,y}$ ($i=1,2,3$) δηλώνουν τις παραγώγους των συναρτήσεων μορφής στις διευθύνσεις x και y . Το μητρώο $[E]$ για προβλήματα επίπεδης τάσης δίδεται από την σχέση²:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

όπου E και ν είναι το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson, αντίστοιχα.

Οι κομβικές δυνάμεις υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} F_{x1} &= \frac{t}{2}(-y_3\sigma_x + (x_3 - x_2)\tau_{xy}), & F_{x2} &= \frac{t}{2}(y_3\sigma_x - x_3\tau_{xy}), & F_{x3} &= \frac{t}{2}(x_2\tau_{xy}) \\ F_{y1} &= \frac{t}{2}((x_3 - x_2)\sigma_y - y_3\tau_{xy}), & F_{y2} &= \frac{t}{2}(-x_3\sigma_y + y_3\tau_{xy}), & F_{y3} &= \frac{t}{2}(x_2\sigma_y) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ο μετασχηματισμός της τάσης σε κομβικές δυνάμεις δίνεται

$$\{F_{x1}, F_{x2}, F_{x3}, F_{y1}, F_{y2}, F_{y3}\}^T = [A] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

όπου ο πίνακας [A] ισούται με:

$$[A] = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & (x_3 - x_2) \\ y_3 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & (x_3 - x_2) & -y_3 \\ 0 & -x_3 & y_3 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

όπου t είναι το πάχος του στοιχείου και ο πίνακας *δυσκαμψίας* για ένα απλό τρικομβικό τριγωνικό στοιχείο δίνεται από την σχέση $[k]=[A][E][D]$. Οι πίνακες [D], [E], [A] δίνονται από τις σχέσεις (5.20),(5.21) και (5.24) αντίστοιχα.

Η αντικατάσταση των ανωτέρω πινάκων στην σχέση $[k]=[A][E][D]$ δίνει τον *πίνακα δυσκαμψίας* στον τοπικό σύστημα αξόνων. Οι παραμορφώσεις μέσα στο *τριγωνικό στοιχείο* είναι σταθερές διότι προέρχονται από παραγωγή του γραμμικού πεδίου των μετατοπίσεων. Επίσης οι τάσεις, που σχετίζονται με τις παραμορφώσεις μέσω των ελαστικών σταθερών, είναι κι αυτές σταθερές.

Η σχέση *τάσης-παραμόρφωσης* είναι:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} \quad (5.25)$$

όπου το διάνυσμα της παραμόρφωσης $\{\epsilon\}$ δίδεται από την σχέση (5.20), και η σχέση (5.25) γράφεται ως εξής:

$$\{\sigma\} = \underbrace{[E][D]}_{[S]}\{u\} \quad (5.26\alpha)$$

όπου ο πίνακας $[S]$ δίδεται από την σχέση

$$[S] = \frac{E}{(1-\nu^2)x_2y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & y_3 & 0 & \nu(x_3-x_2) & -\nu x_3 & \nu x_2 \\ -\nu y_3 & \nu y_3 & 0 & x_3-x_2 & -x_3 & x_2 \\ \frac{1-\nu}{2}(x_3-x_2) & \frac{1-\nu}{2}x_3 & \frac{1-\nu}{2}x_2 & -\frac{1-\nu}{2}y_3 & \frac{1-\nu}{2}y_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26\beta)$$

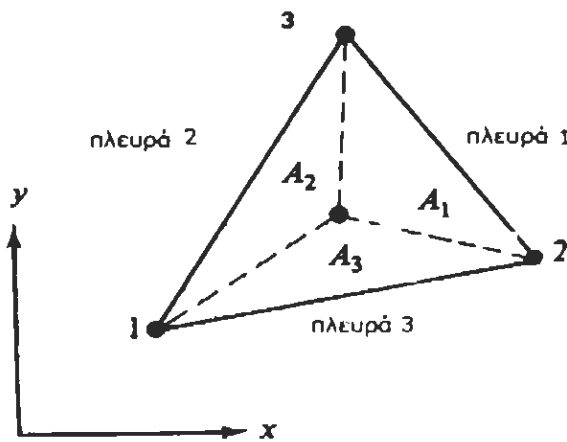
Ο πίνακας $[S]$ δεν είναι *συμμετρικός* και συνδέει τα διανύσματα των τάσεων με τις κομβικές μετατοπίσεις. Στην κατάσταση της επίπεδης τάσης για τα απλά τριγωνικά στοιχεία αμφότερες οι συνθήκες *ισορροπίας* και *συμβατότητας* ικανοποιούνται μέσα στο στοιχείο. Κατά μήκος των πλευρών ικανοποιείται η συνθήκη της *συνέχειας* των μετατοπίσεων και η ισορροπία των πλευρικών δυνάμεων (με την έννοια της μέσης τιμής στους κόμβους). Οι συνθήκες *ισορροπίας* δεν ικανοποιούνται κατά μήκος των πλευρών του στοιχείου. Η εξ. (5.25) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των αγνώστων κομβικών μετατοπίσεων $\{u\}$, δηλ. $[k]\{u\} = \{F\}$ και οι εξ. (5.26α,β) δίνουν το *τασικό πεδίο* σε κάθε σημείο του τριγωνικού στοιχείου.

Ο περιορισμός στην μέθοδο των μετατοπίσεων βρίσκεται στην *συνέχεια* της μετατόπισης μέσα στο στοιχείο, η οποία μπορεί να ικανοποιηθεί από την εκλογή των συναρτήσεων μορφής του στοιχείου. Ένας άλλος περιορισμός της μεθόδου αυτής διατηρεί τα κατανεμημένα φορτία, τις αρχικές παραμορφώσεις και άλλα φαινόμενα π.χ. ελαστικές αστάθειες. Οι συντεταγμένες ενός τριγωνικού στοιχείου χρησιμοποιούνται πρώτον για τον σχηματισμό των *συναρτήσεων μορφής*, οι οποίες αναφέρονται στους κομβικούς βαθμούς ελευθερίας, και δεύτερον περιλαμβάνει μια συστηματική μέθοδο για τον σχεδιασμό των κομβικών σημείων κάθε στοιχείου. Το Σχ. 5.5 δεικνύει ένα *τριγωνικό*

στοιχείο με τρεις κόμβους στις κορυφές του. Ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου με συντεταγμένες (x,y) , το χωρίζει σε τρία υποτρίγωνα επιφανειών A_1, A_2, A_3 , όπου

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \quad (5.27)$$

Το A ισούται με την ολική επιφάνεια του τριγώνου.



Σχ 5.5 Τριγωνικό στοιχείο με κόμβους μόνο στις κορυφές

Οι τριγωνικές συντεταγμένες L_i ($i = 1-3$) ορίζονται ως ο λόγος της επιφάνειας A_i σχετικά με την ολική επιφάνεια A , δηλαδή,

$$L_i = A_i / A \quad (i = 1,2,3) \quad (5.28)$$

Προφανώς, συνδυασμός των σχέσεων (5.27) και (5.28) δίδει ότι το άθροισμα όλων των τριγωνικών συντεταγμένων L_i ισούται με την μονάδα, δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^3 L_i = 1 \quad (5.29)$$

Για ένα τυχαίο σημείο μέσα στο τρίγωνο το οποίο ορίζεται από τις συντεταγμένες (x,y), ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^3 L_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^3 L_i y_i \end{aligned} \tag{5.30}$$

όπου x_i, y_i είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου. Εάν το τυχαίο σημείο (x,y) μετακινηθεί σε μια από τις κορυφές, π.χ. στην κορυφή 1, τότε ισχύει $L_1=A_1/A=A/A=1$, $L_2=L_3=0$, δηλαδή, το L_1 πληρεί όλες τις προϋποθέσεις της *συνάρτησης μορφής* N_1 που αντιστοιχεί στον κόμβο 1. Οπότε γενικά τα L_i παριστάνουν τις συναρτήσεις μορφής του τριγωνικού στοιχείου. Οι εξισώσεις (5.29) και (5.30) σε μητρωϊκή μορφή μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \tag{5.31}$$

Η αντιστροφή της ανωτέρω εξίσωσης δίνει:

$$L_i = (\beta_{0i} + \beta_{1i}x + \beta_{2i}y) / 2A \tag{5.32}$$

όπου

$$\begin{aligned} \beta_{0i} &= x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1} \\ \beta_{1i} &= y_{i+1} - y_{i+2} \\ \beta_{2i} &= x_{i+2} - x_{i+1} \end{aligned} \tag{5.33}$$

και $i=1,2,3$ παίρνονται κυκλικά και η συνολική επιφάνεια του τριγώνου ισούται με^{1,2}

$$A = (x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3) / 2 \quad (5.34)$$

όπου x_i και y_i ($i=1,2,3$) παριστάνουν τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

5.6 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Θεωρούμε ένα τετράπλευρο με κόμβους μόνο στις τέσσερις κορυφές του, όπως φαίνεται το Σχ. 5-6. Το πεδίο των μετατοπίσεων είναι γραμμικό στην x και y διεύθυνση και έχει την κάτωθι μορφή:

$$u(x, y) = N_{1x} N_{1y} u_1 + N_{2x} N_{1y} u_2 + N_{2x} N_{2y} u_3 + N_{1x} N_{2y} u_4 \quad (5.35)$$

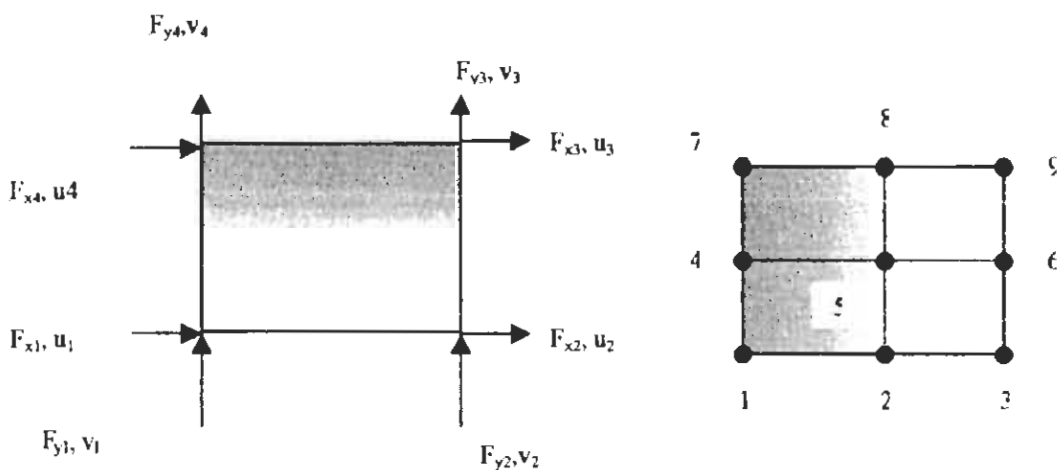
όπου οι συναρτήσεις μορφής $N_{ix}(\xi, \eta)$, $N_{iy}(\xi, \eta)$ ($i=1,2$) δίδονται από τις σχέσεις:

$$N_{1x} = (1 - \xi), N_{1y} = (1 - \eta), N_{2x} = \xi, N_{2y} = \eta \quad (5.36)$$

όπου οι αδιάστατες μεταβλητές ξ και η ισούται με $\xi=x/x_2$, $\eta=y/y_2$ ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$).

Σε μητρωική μορφή οι εξισώσεις (5.35) και (5.36) γράφονται ως εξής:

$$u(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_4 \\ u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \eta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (5.37)$$



(α) Ορθογωνικό στοιχείο πρώτου βαθμού (β) Ορθογωνικό στοιχείο δευτέρου βαθμού

Σχ 5.6 Τετράπλευρα στοιχεία με παρεμβολή Lagrange στις διευθύνσεις x και y

Θεωρούμε ένα τετράπλευρο στοιχείο με κόμβους στα μέσα των κατακόρυφων πλευρών καθώς και στο κέντρο του στοιχείου, όπως δείχνει το Σχ. 5-6β. Η παρεμβολή στην περίπτωση αυτή έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) = & N_{1x} N_{1y} u_1 + N_{2x} N_{1y} u_2 + N_{2x} N_{2y} u_3 + N_{1x} N_{2y} u_4 \\
 & + N_{2x} N_{2y} u_5 + N_{3x} N_{2y} u_6 + N_{1x} N_{3y} u_7 + N_{2x} N_{3y} u_8 \\
 & + N_{3x} N_{3y} u_9
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

όπου οι συναρτήσεις μορφής N_{ix}, N_{iy} ($i = 1-3$) ορίζονται από τον δευτεροβάθμιο τύπο παρεμβολής σύμφωνα με την μέθοδο Lagrange, δηλαδή,

$$N_{1x}(\xi, \eta) = \frac{(x - 2x_2)(x - x_2)}{2x_2^2} = \frac{(2 - \xi)(1 - \xi)}{2} \quad \text{κ.ο.κ}
 \tag{5.39}$$

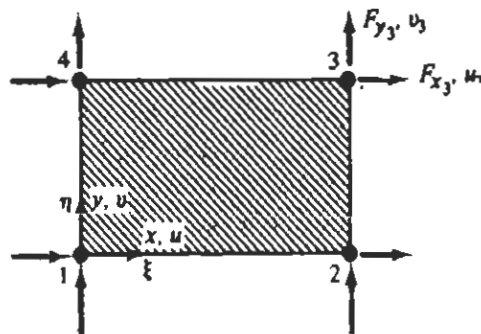
όπου $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Οι όροι μιας πολυωνυμικής σειράς με διγραμμική ή δευτεροβάθμια κ.ο.κ παρεμβολής δίδονται από το τρίγωνο Pascal.

Στο τετράπλευρο του Σχ. 5-6 δύο κόμβοι στην x διεύθυνση και τρεις κόμβοι στην y διεύθυνση ορίζουν γραμμική παρεμβολή στην x-διεύθυνση και δευτεροβάθμια στην y διεύθυνση, αντίστοιχα. Οι πολυωνυμικοί όροι που αντιστοιχούν σε αυτή την παρεμβολή δίδονται από το Σχ. 5-6β. Εάν χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις μορφής γραμμικής παρεμβολής στην x διεύθυνση και δευτεροβάθμια στη y διεύθυνση τότε η (5.37) γράφεται ως κάτωθι

$$[R] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

Υπό συνθήκες επίπεδης έντασης με κόμβους μόνο στις τέσσερις κορυφές (Σχ. 5.7), μπορεί να δημιουργήσει έναν αριθμό εναλλακτικών πινάκων δυσκαμψίας.



Σχ. 5.7 Τετράπλευρο στοιχείο επίπεδης έντασης.

Ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων, στην δημιουργία της βασικής κατάστασης παραμόρφωσης, ισούται με τον συνολικό αριθμό των γενικευμένων συντεταγμένων μείον τον αριθμό των ανεξάρτητων κινήσεων του ελεύθερου σώματος. Στην περίπτωση αυτή έχουμε οκτώ γενικευμένες συνιστώσες, u και v μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο και

τρεις τρόπους κίνησης του ελεύθερου σώματος. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν πέντε βαθμοί ελευθερίας για τον ορισμό της παραμορφούμενης κατάστασης.

Για την ανάπτυξη του πίνακα δυσκαμψίας ενός τετράπλευρου στοιχείου θεωρούμε ότι τα πεδία των μετατοπίσεων u και v μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των πλευρών των στοιχείων. Η συνθήκη της *συνέχειας* των μετατοπίσεων μεταξύ των στοιχείων μπορεί να ικανοποιηθεί εφ' όσον συνδυαστούν τέτοια στοιχεία για να σχηματίσουν μια επίπεδη κατασκευή ή εάν τα στοιχεία ενώνονται με τριγωνικά στοιχεία σταθερής μετατόπισης. Τα πεδία των μετατοπίσεων μπορούν να γραφούν ως εξής: $\{u\} = [N]\{\hat{u}\}$, $\{v\} = [N]\{\hat{v}\}$. Οι συναρτήσεις μορφής είναι:

$$[N] = \{(1 - \xi)(1 - \eta), \xi(1 - \eta), \xi\eta, (1 - \xi)\eta\} \quad (5.41\alpha)$$

$$\{u\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}^T, \{v\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}^T \quad (5.41\beta)$$

Δι' εφαρμογής των σχέσεων *παραμόρφωσης-μετατόπισης* λαμβάνουμε τον πίνακα $[D]$ του οποίου οι συντελεστές είναι:

$$\frac{\partial N}{\partial \{x\}} = \frac{1}{x_2} \{-(1 - \eta), (1 - \eta), \eta, -\eta\}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \{y\}} = \frac{1}{y_3} \{-(1 - \eta), (1 - \eta), \eta, -\eta\} \quad (5.42)$$

Από τις σχέσεις (5.42) ο πίνακας $[D]$ είναι γνωστός, καθώς και ο πίνακας των υλικών ιδιοτήτων $[E]$, οπότε ο πίνακας δυσκαμψίας μπορεί να υπολογισθεί ως την εξίσωση

$$[k] = \int_A [D]^T [E] [D] t dA.$$

Το πεδίο των μετατοπίσεων είναι *συνεχές* σε όλο το χώρο του στοιχείου. Όσον αφορά την συνθήκη της ισορροπίας, με αντικατάσταση των σχέσεων για τις μετατοπίσεις u και v , στις σχέσεις ισορροπίας βρίσκουμε ότι:

Ισορροπία στην x- διεύθυνση,

$$\frac{E}{2(1-\nu)x_2y_3}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \quad (5.43\alpha)$$

Ισορροπία στην y- διεύθυνση,

$$\frac{E}{2(1-\nu)x_2y_3}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \quad (5.43\beta)$$

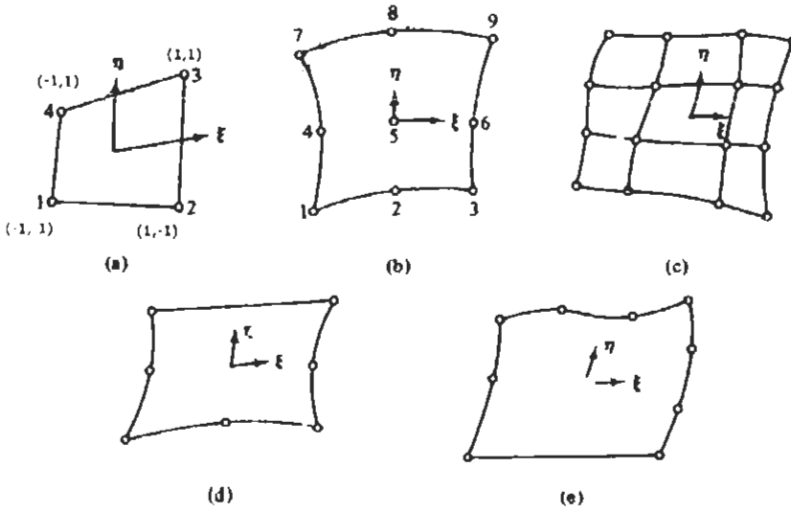
Εάν η μετατόπιση γίνεται ομοιόμορφη, δηλ. $u_1=u_4, u_2=u_3, v_1=v_2, v_3=v_4$, τότε οι ανωτέρω σχέσεις ικανοποιούνται πλήρως. Η απόκλιση από την ισορροπία είναι ανάλογη της διατμητικής συμπεριφοράς.

5.7 ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ως *ισοπαραμετρικά* στοιχεία καλούμε τα στοιχεία για τα οποία η συναρτησιακή παράσταση της μετατοπισιακής συμπεριφοράς εφαρμόζεται και στην παράσταση της γεωμετρίας των στοιχείων. Η κατασκευή των *ισοπαραμετρικών στοιχείων* παριστάνει την *απεικόνιση* αδιάστατων τετράπλευρων στοιχείων με καθορισμένο αριθμό κόμβων σε πραγματικά στοιχεία και με καμπύλες οριακές επιφάνειες του ίδιου αριθμού κόμβων. Εάν η συναρτησιακή παράσταση ενός πεδίου μετατοπίσεων, βάσει της αρχής της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, είναι ένα απλό πολυώνυμο τρίτου βαθμού τότε οι πλευρές του στοιχείου απεικονείζονται από τις ίδιες κυβικές συναρτήσεις. Επί πλέον, εάν συμβατά πεδία μετατοπίσεων εκλέγονται μέσα στα στοιχεία για την γεωμετρική απεικόνιση, τότε τα παραμορφούμενα στοιχεία θα ταυτίζονται με οποιοδήποτε παρακείμενο στοιχείο χωρίς *ασυνέχεια* στην γεωμετρική απεικόνιση του συναρμολογούμενου αναλυτικού μοντέλου.

Σύμφωνα με την δυσδιάστατη ανάλυση το απλούστερο *ισοπαραμετρικό* στοιχείο τεσσάρων πλευρών, όπως δείχνει το Σχ. 5-8a, είναι εκείνο στο οποίο το *γραμμικό πεδίο*

χρησιμοποιείται για να γενικεύσει τον τετράπλευρο χαρακτήρα σ' ένα αυθαίρετο στοιχείο δευτέρου βαθμού.



Σχ. 5.8 Ισοπαραμετρικά στοιχεία

Η προσομοίωση των καμπύλων οριακών γραμμών επιτυγχάνεται με στοιχεία υψηλότερας τάξης, όπως δείχνουν τα Σχ. 5-8b, και 5-8c, όπου ο δευτεροβάθμιος και τριτοβάθμιος χαρακτήρας της μετατόπισης εφαρμόζεται στην απεικόνιση των οριακών γραμμών. Στοιχεία μικτού χαρακτήρα, π.χ. Σχ. 5-8d και 5-8e, με διαφορετικό αριθμό κόμβων σε κάθε πλευρά και με ή χωρίς εσωτερικούς κόμβους έχουν επίσης πρακτικό ενδιαφέρον.

Το γεγονός ότι η ίδια συναρτησιακή παράσταση για την μετατόπιση χρησιμοποιείται και για την παράσταση της γεωμετρίας δεν είναι ουσιώδης. Όταν η γεωμετρική παράσταση είναι χαμηλότερης τάξης από εκείνης της μετατόπισης ο σχηματισμός στοιχείου καλείται υπο-παραμετρικός. Εάν όμως η γεωμετρική παράσταση είναι υψηλότερης τάξης τότε ο σχηματισμός στοιχείου καλείται υπερ-παραμετρικός.

Για την περιγραφή *ισοπαραμετρικών* παραστάσεων είναι ικανοποιητικό να θεωρήσουμε την περίπτωση προβλημάτων δύο διαστάσεων (2-D). Αρχικά, πρέπει να ορίσουμε το αδιάστατο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) με αρχή το κέντρο του στοιχείου. Όταν έχουμε ένα επίπεδο τετράπλευρο στοιχείο οι αδιάστατες συντεταγμένες ξ και η δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_c)/(x_c - x_1) \\ \eta &= (y - y_c)/(y_c - y_1) \end{aligned} \quad (5.44)$$

όπου (x_c, y_c) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου του τετραπλεύρου, και (x_1, y_1) είναι οι συντεταγμένες του σημείου στο κατώτερο αριστερό σημείο. Οι αδιάστατες συντεταγμένες ενός στοιχείου με τέσσερις κορυφές ισούται με ± 1 , όπως δεικνύετε στο Σχ. 5-8a.

Στην περίπτωση δευτεροβάθμιας προσομοίωσης οι συναρτήσεις μορφής $\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$, συναρτήσει των αδιάστατων συντεταγμένων (ξ, η) ισούται με:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (5.45)$$

Οι συντεταγμένες x και y του στοιχείου εκφράζονται ως εξής:

$$x = [N]\{x\}, \quad y = [N]\{y\} \quad (5.46)$$

όπου $\{x\}$ και $\{y\}$ είναι οι *κομβικές* συντεταγμένες, δηλαδή, $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T$ και $\{y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$.

Τα αντίστοιχα πεδία των μετατοπίσεων (u, v) μπορεί να προσεγγισθούν ως εξής:

$$u = [N]\{u\}, \quad v = [N]\{v\} \quad (5.47)$$

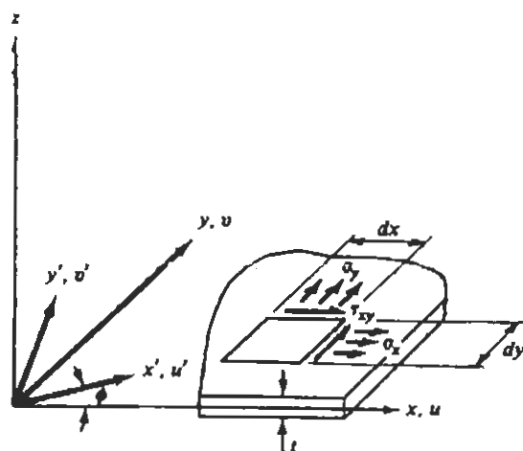
όπου οι κομβικές μετατοπίσεις ισούνται με: $\{u\} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}^T$ και $\{v\} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}^T$.

Η δημιουργία του πίνακα *δυσκαμψίας* προϋποθέτει τον υπολογισμό των παραμορφώσεων, οι οποίες ισούνται με τις παραγώγους των μετατοπίσεων συναρτήσεων των αξόνων x και y . Οι μετατοπίσεις είναι συναρτήσεις των αδιάστατων συντεταγμένων ξ και η . Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε την σχέση μεταξύ των παραγώγων συναρτήσεων των x και y και των παραγώγων συναρτήσεων των ξ και η . Αυτό γίνεται με την βοήθεια του αλυσιδωτού κανόνα παραγώγισης.

5.8 ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε στοιχεία για *λεπτές επίπεδες πλάκες* οι οποίες βρίσκονται σε συνθήκες *επίπεδης έντασης* στο επίπεδο, δηλ. υπό την επίδραση εγκάρσιων και διατμητικών τάσεων. Οι συνθήκες *επίπεδης έντασης* είναι η απλούστερη μορφή συμπεριφοράς μιας κατασκευής συνεχούς μέσου και συναντάται συχνά στην πράξη. Οι βασικές σχέσεις για προβλήματα *επίπεδης έντασης* χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη ποικίλων θεμελιωδών θεωρητικών σχέσεων. Ο γεωμετρικός τύπος είναι η περισσότερο σημαντική διαχωριστική άποψη των στοιχείων *επίπεδης έντασης* (π.χ. τριγωνικά, τετράπλευρα κ.τ.λ. στοιχεία).

Η βάση των *τριγωνικών* στοιχείων για προβλήματα *επίπεδης έντασης* είναι στα υποτιθέμενα πεδία μετατοπίσεων και στο ολοκλήρωμα της δυναμικής ενέργειας. Η μεταχείριση τετράπλευρων στοιχείων *επίπεδης έντασης*, εξάγεται με την τη χρήση των συμβατών σχέσεων για το πεδίο των μετατοπίσεων μεταξύ των στοιχείων. Θεωρούμε μια λεπτή πλάκα σε κατάσταση *επίπεδης έντασης*, όπως δείχνει το Σχ. 5-9, με τους άξονες x και y να αντιστοιχούν στο μεσαίο επίπεδο της πλάκας, έπειτα εφαρμόζονται τάσεις σ_x , σ_y , τ_{xy} στο επίπεδο οι οποίες είναι σταθερές κατά μήκος του πάχους. Η *ορθή* τάση σ_z και οι *διατμητικές* τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} θεωρούνται ότι είναι αμελητέες.



Σχ. 5-9 Βασική παράσταση επίπεδης έντασης

Συνήθως για προβλήματα ορθοτροπικών υλικών δεν χρειάζονται οι καταστατικές εξισώσεις για επίπεδη ένταση. Στην περίπτωση όπου έχουμε αρχικές παραμορφώσεις $\epsilon_x^{αρχ}, \epsilon_y^{αρχ}, \gamma_{xy}^{αρχ}$ οι καταστατικές εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$P\{\sigma\} = [E](\{\epsilon\} - \{\epsilon\}^{αρχ}) \tag{5.48}$$

όπου

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T, \{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \tag{5.49}$$

και ο πίνακας των υλικών ιδιοτήτων δίδετε από την σχέση

$$[E] = \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{yx}E_x & 0 \\ \nu_{xy}E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης. $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ παριστάνουν τα μέτρα ελαστικότητας και λόγους Poisson στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα, για τα οποία ισχύει

$$\frac{E_x}{\nu_{xy}} = \frac{E_y}{\nu_{yx}} \quad (5.51)$$

Για ορθοτροπικά υλικά οι καταστατικές εξισώσεις συνήθως δίδονται αναφορικά με τους καθολικούς άξονες (x,y) και ο σχηματισμός στοιχείων πρέπει να γίνει στους άξονες των στοιχείων (x',y'). Εάν η γωνία μεταξύ των καθολικών αξόνων και εκείνων του στοιχείου είναι φ (Σχ. 5-9), ο μετασχηματισμός των τάσεων από το καθολικό στο σύστημα του στοιχείου είναι:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

όπου $c=\cos(\varphi), s=\sin(\varphi)$

και ο μετασχηματισμός για τις παραμορφώσεις είναι:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^* \\ \epsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

Οι οριακές συνθήκες για τις τάσεις στις διευθύνσεις x και y είναι

$$\bar{T}_x = l_x \sigma_x + l_y \tau_{xy}, \bar{T}_y = l_y \sigma_y + l_x \tau_{xy} \quad (5.54)$$

ενώ για τις μετατοπίσεις είναι

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \quad (5.55)$$

όπου l_x, l_y παριστάνουν τα *συννημίτονα κατευθύνσεων* αναφορικά με τους άξονες x και y .

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \tag{5.56}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Η διαφορική εξίσωση *συμβατότητας* σχετικά με τις τάσεις είναι

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x - \nu \sigma_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_y - \nu \sigma_x)}{\partial x^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{5.57}$$

όπου ν παριστάνει το λόγο Poisson του υλικού

5.9 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΤΑΣΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

Η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, η οποία βασίζεται στο πεδίο των μετατοπίσεων, απορρέει από την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Γενικά, η *βηματική* ισορροπία ικανοποιείται μέσα στο στοιχείο ή κατά μήκος των οριακών γραμμών των στοιχείων. Αξιοπρόσεχτες είναι οι λεπτομέρειες του υπολογισμού των τάσεων όταν υπάρχουν επιδράσεις, όπως για παράδειγμα, οι αρχικές παραμορφώσεις, τα κατανεμημένα φορτία και οι δυνάμεις αδράνειας. Το τασικό πεδίο $\{\sigma\}$ σε κάθε στοιχείο μπορεί να υπολογισθεί από το διάνυσμα των μετατοπίσεων στο στοιχείο $\{u\}$, από την σχέση $\{\sigma\} = \underbrace{[E][D]}_{[S]}\{u\} = [S]\{u\}$. Εάν υπάρχουν *αρχικές παραμορφώσεις*, τότε η

καταστατική εξίσωση *τάσης-παραμόρφωσης* γράφεται ως $\{\sigma\} = [E](\{\epsilon\} - \{\epsilon\}^{αρχ})$ ή επειδή $\{\epsilon\} = [D]\{u\}$, έχουμε

$$\{\sigma\} = \underbrace{[E][D]}_{[S]}\{u\} - [E]\{\varepsilon\}^{αα} = [S]\{u\} - [E]\{\varepsilon\}^{αα} \quad (5.58)$$

Η κομβική δύναμη μεταφέρεται τοπικά στην τάση όπου είναι μια μονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στην συνιστώσα της κομβικής δύναμης και της συνιστώσας της τάσης. Για προβλήματα επίπεδης έντασης υπάρχουν τρεις συνιστώσες της τάσης και μόνο δύο δυνάμεις σε κάθε κόμβο.

Κάτω από ορισμένες συνθήκες σε ένα συνεχές μέσο η ακριβή κατανομή των τάσεων μπορεί να υπολογισθεί, αλλά πρακτικά αυτό μπορεί να προκαλέσει τον ορισμό προσεγγιστικών τύπων *ιστογραμμάτων* της κατανομής τάσεων όπου η τάση ορίζεται με *ασυνεχή* τρόπο κατά μήκος των πλευρών του στοιχείου. Σε περιπτώσεις όπως σε τριγωνικά στοιχεία σταθεράς παραμόρφωσης, κατασκευές που υπόκεινται σε *συγκεντρωτικές* δυνάμεις η αριθμητική λύση βασικά δίδει έναν ασυνεχή ορισμό της συνολικής κατανομής της τάσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΙΝΩΔΗ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Οι βέλτιστες μηχανικές ιδιότητες σε *Σύνθετα Υλικά* εξαρτώνται από την ικανότητα μεταφοράς φορτίου από τη ρητίνη στην ίνα. Η ικανότητα της μεταφοράς ορίζει ένα *κρίσιμο μήκος* L_c για την ίνα όπου πάνω απ' αυτή τη τιμή μπορεί να φορτιστεί με πλήρες φορτίο, οπότε κάνει το υλικό σκληρότερο. Κάτω απ' αυτή την *κρίσιμη τιμή* του μήκους, η ικανότητα φόρτισης της ίνας ελαττώνεται και η ίνα μάλλον ενεργεί σαν ένας καταστροφικός μηχανισμός στο υλικό. Οπότε είναι πολύ σημαντικό από τεχνολογικής άποψης να καταλάβουμε πως το κρίσιμο μήκος εξαρτάται από τη μεταφορά τάσης στις ίνες. Παράγοντες οι οποίοι είναι γνωστοί για την επίδραση στη μεταφορά της τάσης είναι η δομή και οι ιδιότητες της ρητίνης, της ίνας και της διεπιφάνειας. Ιδιαίτερα σημαντικές είναι οι ιδιότητες τις διεπιφάνειας, διότι οι τάσεις που παράγονται από τη διαφορά ανάμεσα στις ελαστικές ιδιότητες της ρητίνης και της ίνας, πρέπει να μεταφερθούν μέσω της διεπιφάνειας. Η τελική δομή και οι ιδιότητες της ρητίνης, της ίνας και της διεπιφάνειας μπορεί να χαρακτηριστούν από ένα μέτρο ελαστικότητας E_a ενέργεια συνοχής U_a , και ένα ιξωδοελαστικό συντελεστή η_a για κάθε μια συνιστώσα χωριστά, δηλαδή *ρητίνη-ίνα-διεπιφάνεια*.

Το πρόβλημα μεταφοράς τάσης από τη ρητίνη στην ίνα έχει μελετηθεί αναλυτικά¹ και είναι γνωστό σαν η θεωρία διατμητικής *καθυστέρησης*. Αυτή η θεωρία χρησιμοποιεί τις εξής υποθέσεις;

1. Αμφότερες οι συνιστώσες ίνα-ρητίνη παραμένουν ελαστικές
2. Η διεπιφάνεια είναι πολύ μικρού πάχους

¹ H.L Cox, Brit. J. Applied Phys. Vol. 3 (1952)

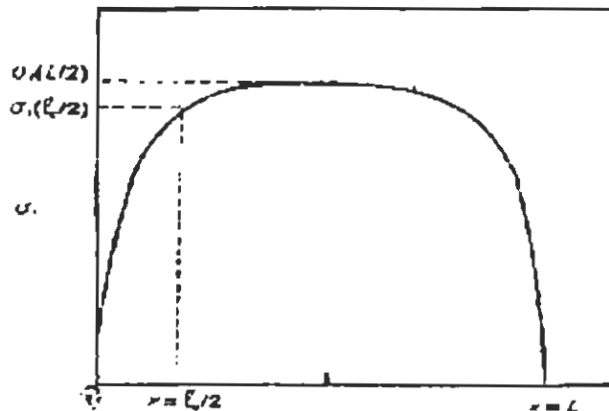
3. Δεν υπάρχουν ασυνέχειες στην παραμόρφωση κατά μήκος της διεπιφάνειας, δηλαδή η πρόσφυση μεταξύ ίνας και ρητίνης είναι τέλεια.
4. Δεν υπάρχει συγκόλληση μεταξύ της ρητίνης και των άκρων της ίνας.

Η θεωρία του Cox¹ έχει δύο κύρια μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι δεν παίρνει στον υπολογισμό τη μεγέθυνση τάσης στα άκρα της ίνας. Η μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων έχει δείξει ότι το κρίσιμο μήκος εξαρτάται από την υπόθεση ότι δημιουργείται τοπική συγκέντρωση τάσεων. Πειραματικές μετρήσεις προτείνουν ότι η ανάλυση με βάση τη *διατμητική καθυστέρηση* υποβαθμίζει τη συγκέντρωση της διατμητικής τάσης στα άκρα της ίνας. Επί πλέον αυτές οι μελέτες έχουν δείξει ότι η *ενταπική κατάσταση* καθώς και η συγκέντρωση τάσης εξαρτάται επίσης από τη γεωμετρία των άκρων της ίνας. Το δεύτερο μειονέκτημα της θεωρίας του Cox¹ είναι ότι δεν έχει ληφθεί υπ' όψιν στους υπολογισμούς η πρόσφυση στα άκρα της ίνας. Από τους δύο αναφερθέντες περιορισμούς, η μεγέθυνση της τάσης είναι η πλέον σημαντική, απ' ότι η παράβλεψη της πρόσφυσης στα άκρα της ίνας. Αυτό οφείλεται στο ότι σε πολλά συστήματά που μελετούνται πειραματικά (εποξική ρητίνη/ίνες υάλου) οι ίνες είναι συνήθως κολλημένες με συγκολλητικές ουσίες και τότε κόβονται σε μικρά τεμάχια.

Ο ορισμός του *κρίσιμου μήκους* L_c (ή το κρίσιμο ανηγμένο μήκος L_c/d , όπου d είναι η διάμετρος της ίνας) σε *κοντόινα υλικά* είναι κατά κάποιο τρόπο αυθαίρετος. Το Σχ. 6-1 παριστάνει την εφελκυστική τάση κατά μήκος μιας μεμενομένης ίνας εμβαπτιζόμενης σε κάποια ρητίνη. Εάν L παριστάνει το μήκος της ίνας, $L/2$ ισούται με το μισό του κρίσιμου μήκους (το οποίο συνήθως καλείται αδρανές μήκος), $\sigma_f (x=L/2)$ είναι η τάση στο μέσο της ίνας και $\sigma_f (x=L/2)$ είναι η τάση στην ίνα σε απόσταση $L/2$ από το άκρο της ίνας.

6.2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΙΝΑ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗΣ ΤΑΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΡΗΤΙΝΗΣ-ΙΝΑΣ

Το *κρίσιμο μήκος* συνήθως ορίζεται σαν το μήκος πέραν του οποίου η ίνα μπορεί να πάρει τη μέγιστη παραμόρφωση (παραμόρφωση που εφαρμόζεται στο σύνθετο, δηλ.



Σχ. 6-1 Διάγραμμα της εφελκυστικής τάσης, σ , σε συνάρτηση του x .

ίνα-ρητίνη, ϵ_0) και μέγιστη τάση ($\epsilon_0 E_f$). Μια άλλη προσέγγιση είναι να ορίσουμε το κρίσιμο μήκος σαν την απόσταση από το άκρο της ίνας μέχρι το σημείο στο οποίο η τάση στην ίνα είναι ένας καθορισμένος λόγος της τάσης απείρου μήκους ίνας. Ο Rosen² χρησιμοποίησε μια μέθοδο η οποία βασίστηκε στη θεωρία της διατμητικής καθυστέρησης με ένα λόγο 0,9 και έλαβε την κάτωθι εξίσωση για το κρίσιμο ανοηγμένο λόγο l/d

$$\frac{l_c}{d} = \sqrt{\frac{E_f(1 - \nu_f^{1/2})}{2G_m \nu_f^{1/2}}} \tag{6-1}$$

όπου G_m είναι το μέτρο διάτμησης της ρητίνης, ν_m είναι ο λόγος Poisson της ρητίνης, ν_f παριστάνει το επί τοις εκατό ποσοστό των ινών στη ρητίνη. Από τον ανωτέρω ορισμό φαίνεται ο ανηγμένος κρίσιμος λόγος είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του λόγου E_f/E_m

² B.W. Rosen, Fiber Composite Materials, ASM Publications (1965)

$$\frac{l_c}{d} \propto \sqrt{\frac{E_f}{E_m}} \tag{6-2}$$

Ανάλογα αποτελέσματα με την εξίσωση (6-2) για μεγάλες τιμές του E_f συγκριτικά με το E_m ($E_f \gg E_m$) έχουν βρεθεί από το Γαλιώτη³ και συνεργάτες του χρησιμοποιώντας τη θεωρία της *διατμητικής καθυστέρησης*. Έτσι έχουν ορίσει το *κρίσιμο μήκος* να ισούται με $\sigma_f(l_c/2) = \sigma_f(L/2)/e$ όπου $e=2,73$ η βάση του νεπέριου λογαρίθμου. Άλλοι ερευνητές όπως για παράδειγμα ο Termonia⁴ έχουν ορίσει το κρίσιμο μήκος να ισούται με το μήκος στο οποίο η παραμόρφωση στην ίνα ισούται με 97% της παραμόρφωσης ίνας απείρου μήκους. Με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών η οποία αποφεύγει τους περιορισμούς της θεωρίας διατμητικής καθυστέρησης και περιλαμβάνει τη συγκέντρωση τάσεων και την πρόσφυση στα άκρα της ίνας, βρέθηκε ότι

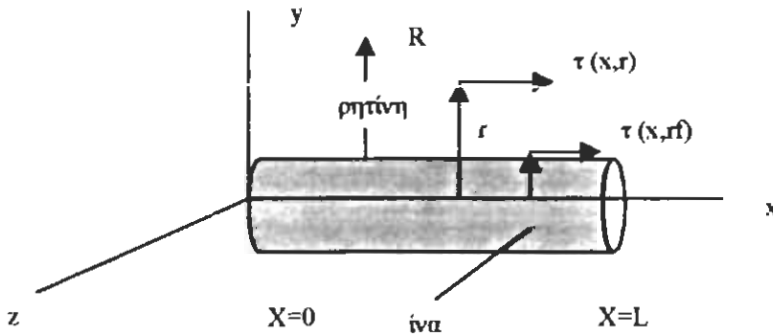
$$\frac{l_c}{d} \propto \frac{E_f}{E_m} \tag{6-3}$$

δηλαδή το *ανηγμένο κρίσιμο μήκος* είναι γραμμικά εξαρτώμενο από το λόγο E_f/E_m .

Ας θεωρήσουμε μια απλή ίνα μέτρου ελαστικότητας E_f ακτίνας R_f και ενέργειας συνοχής U_f η οποία είναι εμβαπτισμένη σε ρητίνη μικρού μέτρου ελαστικότητας E_m , λόγου Poisson ν_m και ενέργειας συνοχής U_m όπως φαίνεται στο Σχ. 6-2. Το R παριστάνει τη μισή απόσταση μεταξύ των ινών, $\tau(x,r)$ είναι η διατμητική τάση στη ρητίνη, $\tau(x,r_f) = \tau_i(x)$ είναι η διατμητική τάση σε μια ορισμένη απόσταση κατά μήκος της διεπιφάνειας ίνας-ρητίνης. Σύμφωνα με την θεωρία του Cox μπορούμε να ισοροπήσουμε τις διατμητικές δυνάμεις στη ρητίνη $\tau(x,r)$ με τις διατμητικές δυνάμεις στη διεπιφάνεια ίνας-ρητίνης $\tau_i(x)$, δηλαδή για 3-D προβλήματα $2\pi r \tau_i(x,r=r_f) dx = 2\pi \tau(x,r) dx$ ή ισοδύναμα $\tau(x,r) = r_f \tau_i(x)/r$. Εφ' όσον ισχύει ότι $\tau = G_m \gamma_m = G_m du/dz$ λαμβάνουμε για την μετατόπιση $u(x,r)$ την κάτωθι διαφορική εξίσωση

³ C. Galiotis, R. Young, P.H. Yeung and D. Batchelder, J. Mat. Sci., vol. 19, p. 36-40 (1984)

⁴ Y. Termonia, J. Mat. Sci., vol. 22, pp. 504-508 (1987)



Σχ. 6.2 Περιγραφή ίνας μέσα σε ρητίνη

$$\frac{du}{dr} = \frac{\tau(x,r)}{G_m} = \frac{r_f \tau_f(x)}{r G_m} \tag{6-4}$$

Ολοκληρώνοντας την ανωτέρω εξίσωση (6-4) από r_f μέχρι R έχουμε

$$u(x,R) - u(x,r_f) = \frac{r_f \tau_f(x)}{G_m} \ln(R/r_f) \tag{6-5}$$

$$\tau_f(x) = \frac{[u(x,R) - u(x,r_f)] E_m}{2 r_f (1 + \nu_m) \ln(R/r_f)} \tag{6-6}$$

Εξισώνοντας τις διατμητικές δυνάμεις, στη διεπιφάνεια ρητίνης-ίνας, με τις εφελκυστικές δυνάμεις στην ίνα για κάποιο στοιχειώδες τμήμα dx λαμβάνουμε την κάτωθι εξίσωση για 3-D

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = - \frac{2\tau_f(x)}{r_f} \tag{6-7}$$

Η παραγωγή της (6-7) δίνει την εξής σχέση

$$\frac{d^2 \sigma_f}{dx^2} = \frac{[\sigma(x) - \epsilon_m E_f] E_m}{E_f r_f^2 (1 + \nu_m) \ln(R/r_f)} \quad (6-8)$$

όπου $\epsilon_m = du(x, R)/dx$ και $\epsilon_f = du(x, r_f)/dx = \sigma_f/E_f$. Η λύση της (6-8) η οποία παριστάνει την εφελκυστική τάση κατά μήκος της ίνας μαζί με τις οριακές συνθήκες $\sigma_f(x=0) = \sigma_f(x=L) = 0$ δίδετε από την σχέση

$$\sigma_f(x) = \frac{E_f}{E_m} \sigma_m \left[1 - \frac{\cosh \beta(x - L/2)/r_f}{\cosh(\beta L/2r_f)} \right] \quad (6-9)$$

όπου

$$\beta = \sqrt{\frac{E_m}{2E_f (1 + \nu_m) \ln(R/r_f)}} \quad (6-10\alpha)$$

Για 2-D προβλήματα μπορεί να αποδειχθεί ότι το β ισούται με

$$\beta = \sqrt{\frac{E_m}{2E_f (1 + \nu_m) (R/r_f - 1)}} \quad (6-10\beta)$$

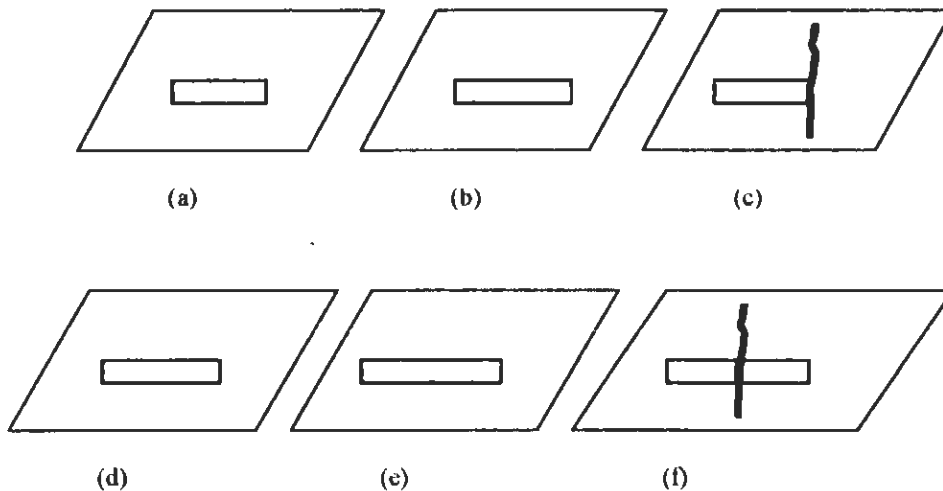
Η διατμητική τάση στη διεπιφάνεια ίνας-ρητίνης για 3-D προβλήματα είναι

$$\tau_f(x) = \frac{\beta E_f}{2E_m} \sigma_m \left[\frac{\sinh \beta(x - L/2)/r_f}{\cosh(\beta L/2r_f)} \right] \quad (6-11\alpha)$$

ενώ στην περίπτωση 2-D ισχύει

$$\tau_i(x) = \frac{\beta E_f}{2E_m} \sigma_m \left[\frac{\sinh \beta(x - L/2)/r_f}{\cosh(\beta L/2r_f)} \right] \quad (6-11\beta)$$

Κατωτέρω δίδονται μερικά αριθμητικά αποτελέσματα από την εργασία των ερευνητών L. Monette κ.λ.π⁵. Το *κρίσιμο μήκος* μετρήθηκε ακολουθώντας το μοντέλο με τον εξής τρόπο. Μια ίνα μήκους l τοποθετείται στο κέντρο ενός τριγωνικού πλέγματος και το σύστημα ρητίνης (πλέγμα)/ ίνας παραμορφώνεται μέχρι την καταστροφική αστοχία του συνθέτου. Εάν η αστοχία αρχίζει από τη ρητίνη μια νέα ίνα, μήκους $l' > l$, τοποθετείται στο κέντρο του πλέγματος και το πείραμα επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η αστοχία αρχίσει από την ίνα. Στο σημείο αυτό το μήκος της ίνας ελαττώνεται και το πείραμα επαναλαμβάνεται για μήκη μεταξύ των l και $l+1$, έτσι ώστε για μήκος ίνας l , η αστοχία αρχίζει από τη ρητίνη. Για μήκος ίνας $l+1$, η αστοχία αρχίζει από την ίνα καθώς φαίνεται στο Σχ. 6-3. Το *κρίσιμο μήκος* l_c δίδεται από το μήκος $l \pm 1$. Σύμφωνα με την προσομοίωση που εφαρμόστηκε παρατηρείτε ότι οι δεσμοί της ρητίνης, στα άκρα της ίνας, πάντοτε σπάζουν πριν συμβεί καταστροφική αστοχία του υλικού.



Σχ. 6-3. Παραστατική απεικόνιση της μορφολογίας θραύσης μιας υπό-κρίσιμης ίνας (a,b,c) και μιας υπερ-κρίσιμης ίνας (d,,e,f)

⁵ L.Monette , M.P. Anderson, S. Ling & G.S. Grest, Effect of Modulus and the Cohesive energy on critical fiber length in fiber reinforced composites, J. Mat. Sci. 27 pp. 4393-4405 (1992)

Λόγω της εφαρμογής των περιοδικών οριακών συνθηκών στη διεύθυνση της εφαρμοζόμενης εφελκυστικής παραμόρφωσης θα προσδοκούσαμε την επίδραση του πεπερασμένου μήκους της ίνας ιδιαίτερα για μεγάλες τιμές του λόγου E_f/E_m όπου η τάση και παραμόρφωση στα άκρα της ίνας είναι μεγάλες. Για σύγκριση των μετρήσεων κρίσιμου μήκους πραγματοποιήθηκαν για συστήματα διαστάσεων $L_x=300$ mm και $L_y=50$ mm (x είναι η διεύθυνση εφαρμογής της παραμόρφωσης), έτσι ώστε αυξάνοντας τις διαστάσεις του πλέγματος δεν παρατηρείται καμία επιπρόσθετη επίδραση στη μέτρηση του κρίσιμου μήκους. Οι τιμές του λόγου E_f/E_m κείται μεταξύ του 2 και 100 το οποίο καλύπτει όλο το φάσμα τιμών για σύνθετα με πολυμερική ή κεραμική ρητίνη.

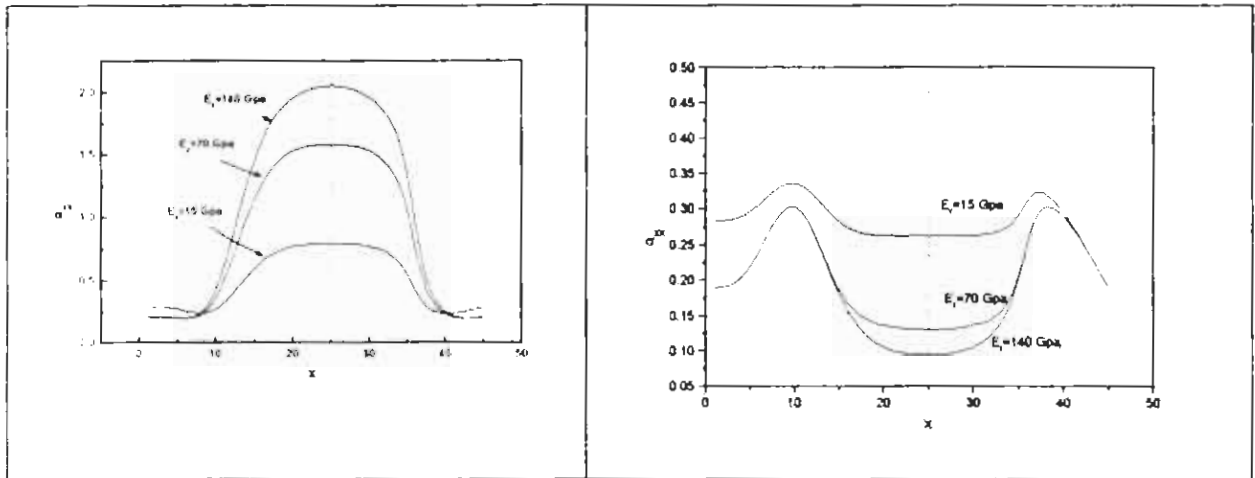
Η *εφελκυστική τάση* κατά τη διεύθυνση εφαρμογής της παραμόρφωσης σ_x σε συνάρτηση του μήκους x κατά μήκος της διεπιφάνειας σχεδιάζεται στο Σχ. 6-4α ενώ η αντίστοιχη τάση κατά μήκος μιας ευθείας παράλληλης στην ίνα μέσα στη ρητίνη παρουσιάζεται στο Σχ. 6-4β. Η *διατμητική τάση* κατά μήκος της γραμμής που κείται στη ρητίνη παρουσιάζεται στο Σχ. 6-4γ. Τα δεδομένα για τα Σχ. 6-4α,β,γ είναι: $E_f=15,70,140$ Gpa, το μήκος της ίνας ισούται με $L=27$ mm. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα των Σχ. 6-4α,β,γ έχουν σχεδιαστεί πριν από την *καταστροφική αστοχία* του υλικού.

Μπορούμε από το Σχ. 6-4α να παρατηρήσουμε ότι :

- Η τάση στην ίνα αυξάνεται με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας της ίνας ή με το λόγο E_f/E_m το οποίο δεικνύει ότι η ίνα είναι σκληρότερη καθώς αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας. Αυτό είναι σε συμφωνία επιτρέποντας ένα δεσμό να σπάσει σύμφωνα με μια σταθερή ενέργεια συνοχής και όχι σύμφωνα μιας σταθερής τιμής εφελκυστικής ή διατμητικής τάσης αστοχίας.
- Η τιμή της τάσης στη ρητίνη σε αμφότερες τις πλευρές της ίνας ελαττώνεται καθώς αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας της ίνας σε συμφωνία με την ελάττωση της παραμόρφωσης στην αστοχία του συνθέτου.

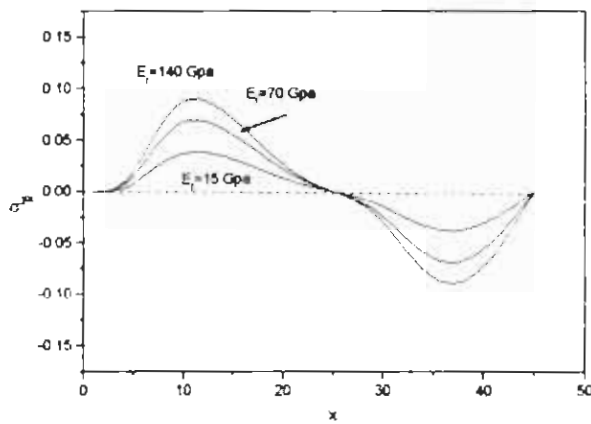
Επίσης μπορούμε από το Σχ. 6-4β να παρατηρήσουμε ότι :

- Η τάση στη ρητίνη σε αμφότερες τις πλευρές της ίνας ελαττώνεται καθώς το μέτρο ελαστικότητας της ίνας αυξάνεται, αλλά επιπρόσθετα παρατηρούμε



(α)

(β)



(γ)

Σχ. 6-4 (α) Εφελκυστική τάση κατά μήκος της ίνας συναρτήσει της αξονικής απόστασης x
 (β) Εφελκυστική τάση μέσα στη ρητίνη συναρτήσει της αξονικής απόστασης x (γ)
 Διατμητική τάση κατά μήκος της ρητίνης συναρτήσει της αξονικής απόστασης x

συγκέντρωση τάσης στα άκρα της ίνας. Η συγκέντρωση τάσης στα άκρα την ίνας δεν λαμβάνεται υπ' όψιν από την θεωρία της διατμητικής καθυστέρησης.

- Η τάση στα άκρα της ίνας είναι ένας συνδυασμός της τάσης από τους δεσμούς σε εφελκυσμό και σε διάτμηση και είναι περίπου το ίδιο για όλες τις καμπύλες του Σχ. 6-4β διότι αυτά τα συστήματα είναι πλησίον της αστοχίας.
- Η τάση στη ρητίνη σε αμφότερες τις πλευρές ελαττώνεται καθώς το μέτρο ελαστικότητας της ίνας αυξάνεται, όπου υποδηλώνει καλύτερη μεταφορά φορτίου με αυξανόμενο το λόγο E_f/E_m .

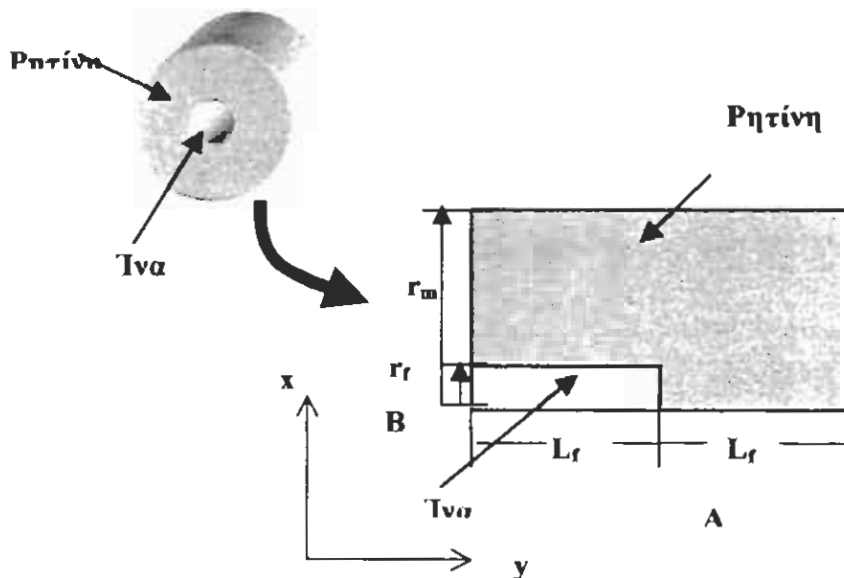
Το Σχ. 6-4γ δείχνει ότι η διατμητική τάση στα άκρα της ίνας αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο λόγος E_f/E_m .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΕ ΜΟΝΟ-ΙΝΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Για την ανάλυση ενός προτύπου μονόινου συνθέτου υλικού χρησιμοποιούμε την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, όπως περιγράφηκε στο Κεφ. 5. Το Σχ. 7-1 δείχνει ένα



Σχ. 7-1 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου ενός μονόινου ενισχυμένου συνθέτου.

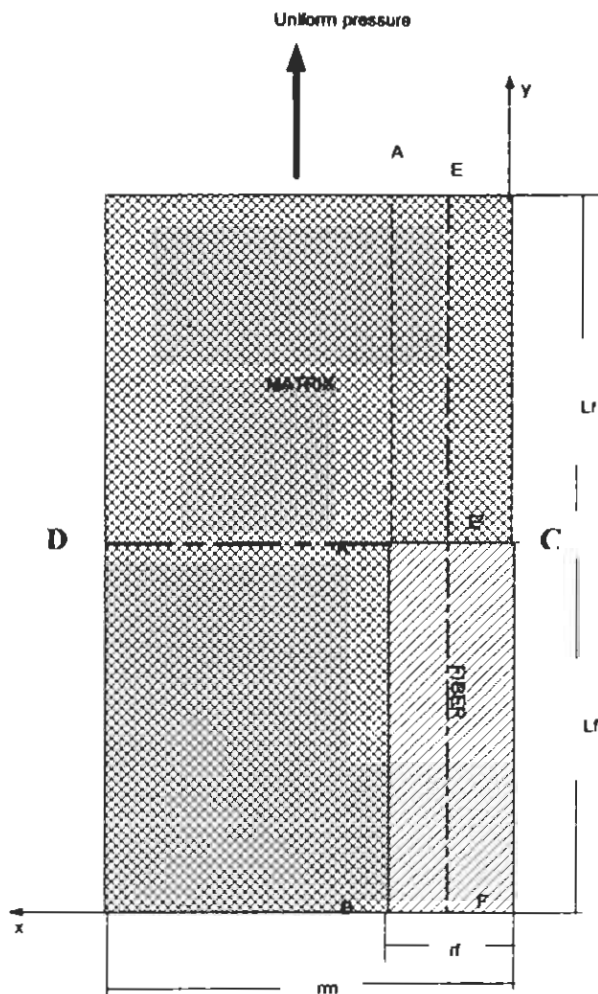
σύστημα ίνας-ρητίνης με το αντίστοιχο πρότυπο που χρησιμοποιούμε για την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Λόγω της αξονοσυμμετρίας μόνο το ένα τέταρτο του αντιπροσωπευτικού απαιτείται για την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Η ακτίνα της ίνας σημειώνεται με r_f ενώ της ρητίνης με r_m , αντίστοιχα. Το μήκος της ίνας ισούται με

L_f και το αντίστοιχο της ρητίνης είναι $L_m=2L_f$. Κατά μήκος της αξονικής διεύθυνσης y , εφαρμόζουμε οριακές συνθήκες κύλισης, καθώς επίσης και κατά την ακτινική διεύθυνση x . Με άλλα λόγια $u_x=0$ ($x=0$) και $u_y=0$ ($y=0$). Κατά μήκος της πλευράς $y=2L_f$ εφαρμόζουμε ομοιόμορφη εφελκυστική πίεση μέτρου τέτοιου ώστε η τελική παραμόρφωση του δοκιμίου κατά την y διεύθυνση να μην υπερβαίνει το 3%, δηλαδή να ισχύει η γραμμική θεωρία ελαστικότητας. Για να αποφεύγει κανείς μεγάλες τιμές των τάσεων στο άκρο της ίνας, δηλ. σημείο Α', στρογγυλεύουμε το άκρο της ίνας, το οποίο από πρακτικής πλευράς είναι λογικό καθ' όσον καμία ίνα δεν σχηματίζει απολύτως ορθή γωνία.

Η ανάλυση του προβλήματος έγινε με το πρόγραμμα ANSYS 5.4 στο οποίο για την προτυποποίηση του μοντέλου ακολουθούμε τα κάτωθι βήματα:

1. Ορίζουμε σημεία κλειδιά.
2. Ενώνουμε τα σημεία κλειδιά με γραμμές.
3. Με κάποια ειδική εντολή κατασκευάζουμε το τόξο που αντιπροσωπεύει την διεπιφάνεια εγκλείσματος-ρητίνης.
4. Κατασκευάζουμε τις επιφάνειες.
5. Ορίζουμε τον τύπο στοιχείων που θα χρειαστούμε για την ανάλυση (plane 82).
6. Ορίζουμε τις ιδιότητες των υλικών.
7. Αποδίδουμε σε κάθε υλικό τις ιδιότητές του.
8. Συνδέουμε τις επιφάνειες ίνας-ρητίνης στην περιοχή που γειτνιάζουν με κατάλληλη εντολή.
9. Διαχωρίζουμε τις γραμμές έτσι ώστε να επιτύχουμε μεγαλύτερη πύκνωση στην περιοχή της διεπιφάνειας καθώς και ισομεγέθη στοιχεία.
10. Σχηματισμός του κανάβου πεπερασμένων στοιχείων.
11. Ορισμός οριακών συνθηκών στις γραμμές.
12. Οριακές συνθήκες για την μετακίνηση.
13. Εφαρμογή εξωτερικών φορτίων.
14. Λύση του προβλήματος βάσει της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων με το ANSYS.
15. Ανάλυση των αποτελεσμάτων με τον μεταεπεξεργαστή του ANSYS.

Στην παρούσα μελέτη το σύστημα αναλύεται σε οκτακομβικά επίπεδα πεπερασμένα στοιχεία. Η περιγραφή αυτών των στοιχείων έχει ήδη δοθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο (Κεφ. 5). Το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων του υπό ανάλυση μοντέλου φαίνεται στο σχήμα 7-2. Το παρόν σχήμα δείχνει την ανάλυση του χώρου με στοιχεία μόνο πλησίον της γωνίας Α'.



Σχ. 7-1 Γεωμετρική απεικόνιση του υπό μελέτη προβλήματος μονόινων συνθέτων υλικών

Τα υπό ανάλυση δοκίμια αποτελούνται από ίνες άνθρακα (ανθρακονήματα) εμβαπτισμένες σε εποξική ρητίνη των οποίων οι ιδιότητες περιγράφονται στον κάτωθι πίνακα.

Πίνακας 7-1: Ιδιότητες των επιμέρους υλικών

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας, Gpa	Λόγος Poisson
Ανθρακονήματα	392	0,2
Εποξική ρητίνη	3,3	0,35

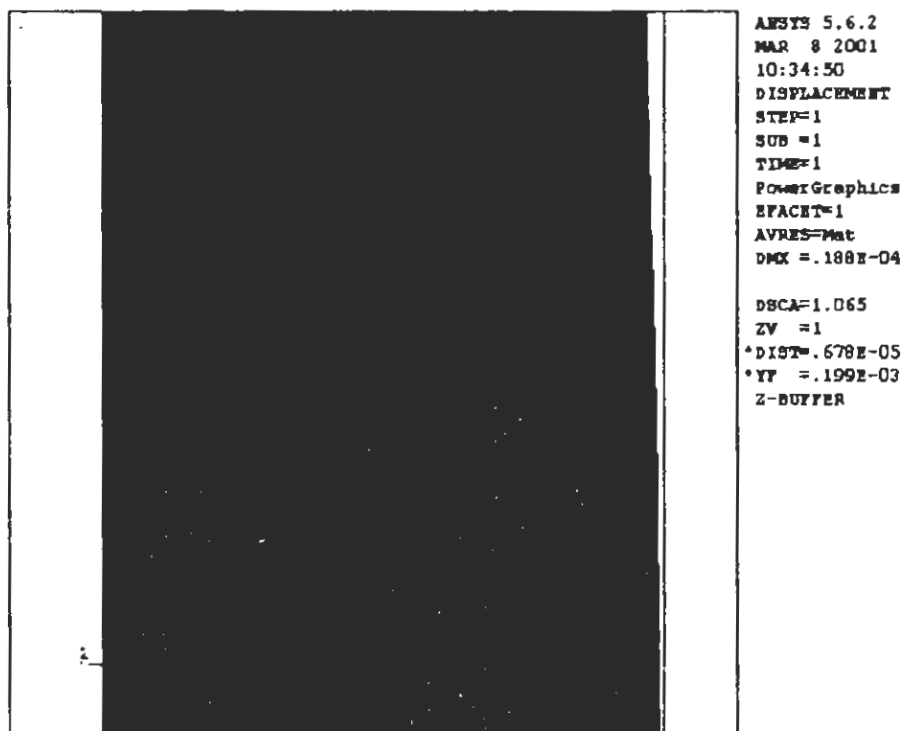
Μια εκτενής περιγραφή των υλικών αυτών μπορεί να βρεθεί σε βιβλία, όπως για παράδειγμα στο βιβλίο του Hull¹.

7.2 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΕ ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΟΠΟΥ ΟΙ ΒΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ ΙΝΩΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΛΥΤΑ ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΑΡΑΠΛΕΥΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Αρχικά το πρόβλημα λύθηκε αριθμητικά θεωρώντας ότι η παράπλευρη επιφάνεια των ινών είναι κάθετη στην άνω και κάτω επιφάνεια των βάσεων, δηλαδή η μεταξύ των γωνία είναι ενενήντα μοίρες ($\varphi = \pi/2$). Ως γνωστόν από την μηχανική παρουσιάζεται συγκέντρωση τάσης στην κορυφή της γωνίας. Το πρόβλημα αυτό από αναλυτικής σκοπιάς έχει μελετηθεί από τον καθηγητή Max Williams². Κατωτέρω παραθέτουμε αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα ενισχυμένων ινωδών συνθέτων υλικών κατά μήκος της διεπιφάνειας των δύο φάσεων. Ο διαχωρισμός του προτύπου σε πεπερασμένα στοιχεία δείχνεται στο Σχ. 7-2. Για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων απαιτείται μια πύκνωση του πλέγματος κοντά στη γωνία A'. Το πλέγμα με το οποίο διακριτικοποιείται ο χώρος αποτελείται από 58201 κόμβους και 19200 πεπερασμένα στοιχεία.

¹ D. Hull. An Introduction to Composite Materials, Cambridge Univ. Press (1993)

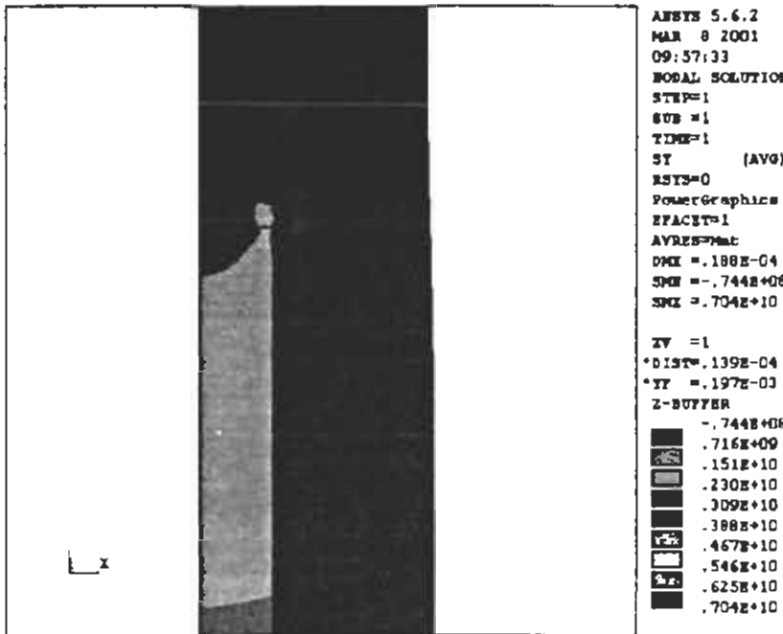
² M. Williams and R. Schapery, Int. J. of Fracture Mechanics, 1, 64 (1965)



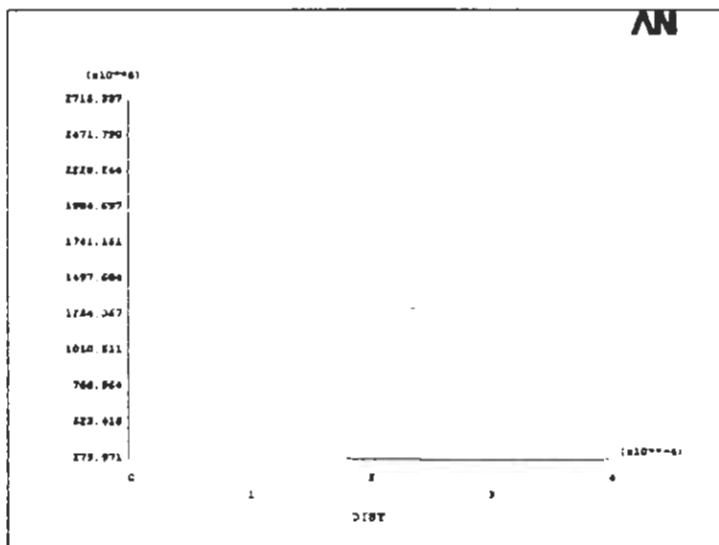
Σχ. 7-2 Ανάλυση του χώρου κοντά στη γωνία ίνας-ρητίνης με πεπερασμένα στοιχεία

Οι ισοτασικές επιφάνειες της αξονικής συνιστώσας της τάσης S_y , μέσα στο δοκίμιο φαίνεται στο Σχ. 7-3α. Η μέγιστη τιμή της S_y όπως είναι φανερό από το χρωματικό κώδικα, παρατηρείται στην κορυφή της γωνίας A' και ισούται με 7.04 Gra. Στην κορυφή A' μαθηματικά προσδοκούμε συγκέντρωση τάσης. Η αξονική συνιστώσα της τάσης S_y κατά μήκος της διεπιφάνειας ρητίνης-ίνας $AA'B$ (Σχ. 7-1) δείχνεται γραφικά στο Σχ. 7-3β. Μέσα στη ρητίνη, κατά μήκος της γραμμής AA' , η αξονική συνιστώσα της τάσης έχει σταθερή τιμή ίση με 0,27 Gra, η οποία αυξάνεται δραστικά στην κορυφή A' , όπου έχουμε συγκέντρωση τάσης όπως προφανώς προσδοκούμε βάσει της θεωρίας ελαστικότητας. Η τιμή της μέγιστης τάσης στην κορυφή A' ισούται με 2,70 Gra, δηλαδή μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη απ' αυτή μέσα στη ρητίνη. Κατά μήκος της ίνας η S_y παίρνει σταθερή τιμή περίπου ίση με 1,25 Gra. Τα εξαγόμενα αριθμητικά αποτελέσματα

είναι σε συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα τα οποία εξάγονται με τη βοήθεια της φασματοσκοπίας Raman³.



Σχ. 7-3α Ισοτασική αξονική συνιστώσα της τάσης S_y

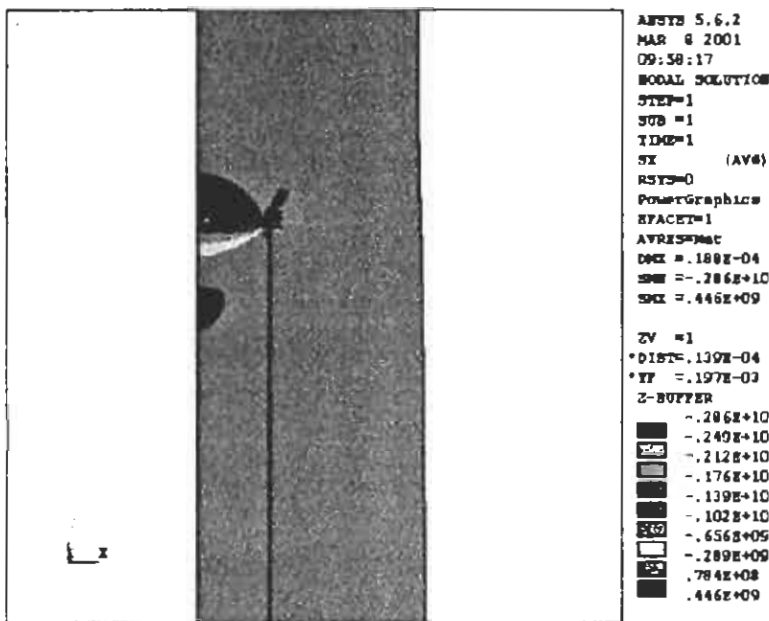


Σχ. 7-3β Αξονική συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της γραμμής AA'B (οριζόντιος άξονας σε m, κατακόρυφος σε Pa=N/m²)

³ C. Galiotis, Interfacial Studies on Model Composites by Laser Raman Spectroscopy, Comp. Sci. Tech., 42, 125-150 (1991)

Τα πειραματικά όμως αποτελέσματα δεν δεικνύουν συγκέντρωση τάσεων στα άκρα της ίνας, καθ' όσον η δέσμη των ακτίνων laser στη φασματοσκοπία Raman δεν μπορεί να παρακολουθήσει την μαθηματική ασυνέχεια των τάσεων, αλλά μας δίνει την ακριβή εξέλιξη του φαινομένου μέσα στο δοκίμιο.

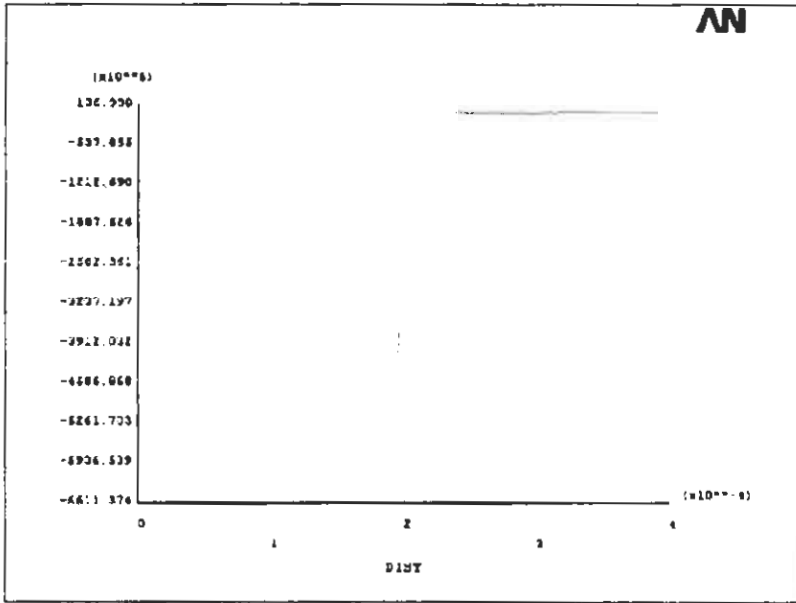
Η αντίστοιχη συνιστώσα της τάσης κατά την ακτινική διεύθυνση δείχνεται στα Σχ. 7-4 α,β. Εδώ παρατηρούμε, ότι η S_x παίρνει μια μεγάλη αρνητική τιμή στην κορυφή Α'.



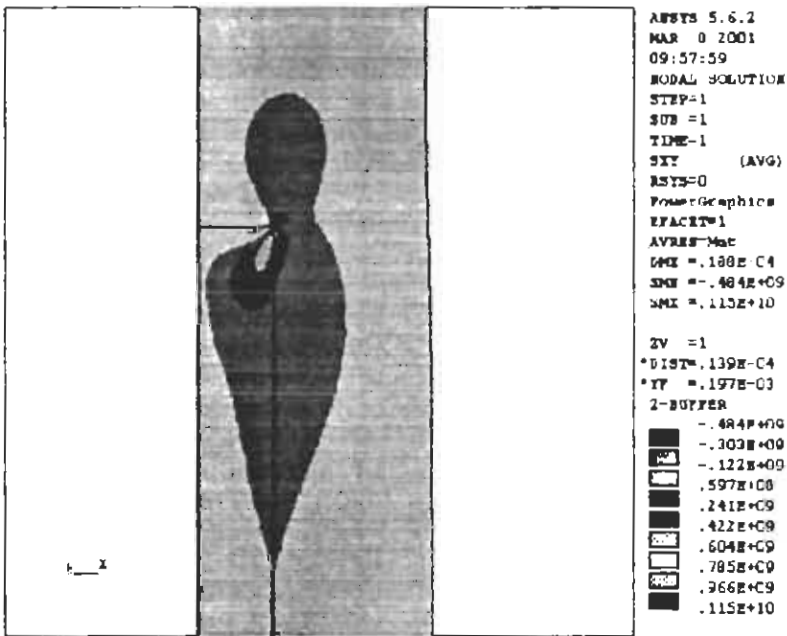
Σχ. 7-4α Ισοστασική Ακτινική κατανομή της τάσης κατά μήκος της γραμμής AA'B (Οι μονάδες τάσης είναι σε Pa)

Η διατμητική τάση δείχνεται στα Σχ. 7-5 α, β. Παρατηρούμε ότι η S_{xy} παίρνει μια μεγάλη θετική τιμή στην κορυφή Α', ίση με 1,15 Gpa, και ελαττώνεται εκθετικά κατά μήκος της ίνας. Στο κέντρο της ίνας η διατμητική τάση περίπου μηδενίζεται. Αυτό ισχύει και για την κατανομή της τάσης μέσα στη ρητίνη. Η ισοδύναμες ισοστασικές καμπύλες φαίνονται στο Σχ. 7-6α, β όπου παρατηρείται μια μεγάλη τιμή της S_{eqn} στην κορυφή. Η μορφή του S_{eqn} είναι ίδια με εκείνη της αξονικής τάσης S_y .

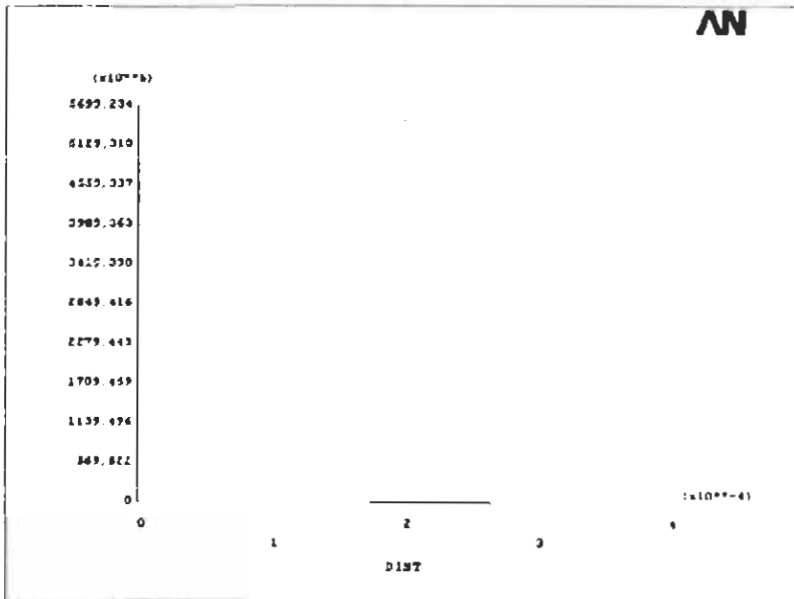
T.E.I. ΠΑΤΡΑΣ
BIBLIΟΘΗΚΗ



Σχ. 7-4β Sx συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της AA'B (οριζόντιος άξονας σε m, κατακόρυφος σε Pa = N/m²)

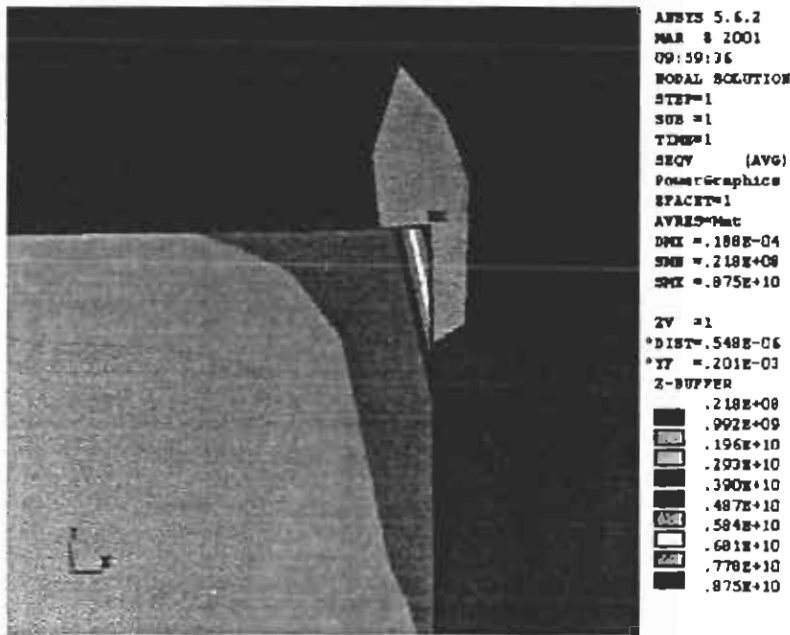


Σχ. 7-5 α Διατμητική ισοασική καμπύλη (Οι μονάδες τάσης είναι σε Pa)

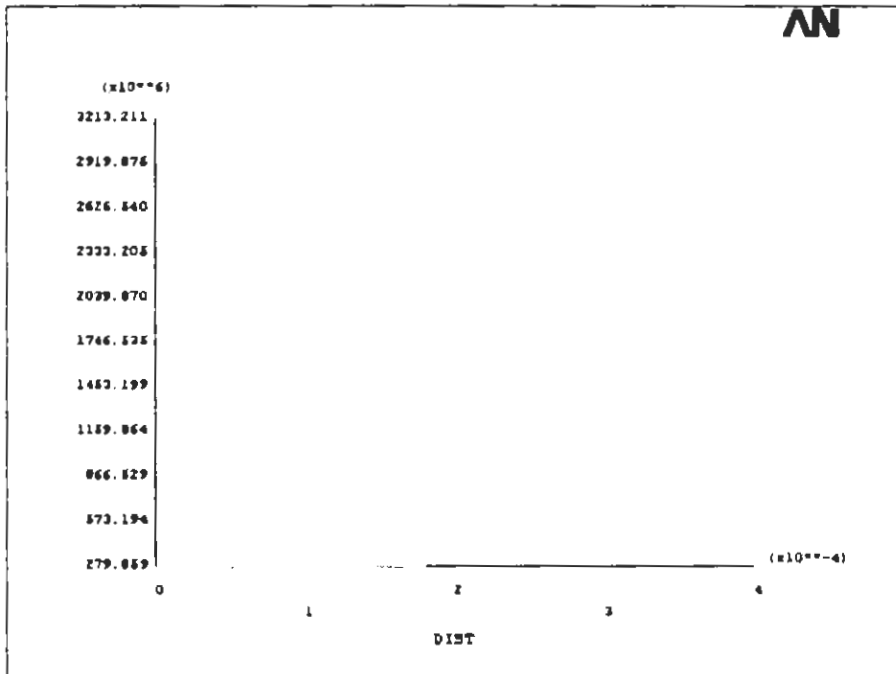


Σχ. 7-5β Διατμητική τάση κατά μήκος της AA'B (οριζόντιος άξονας σε m, κατακόρυφος σε Pa $N m^{-2}$)

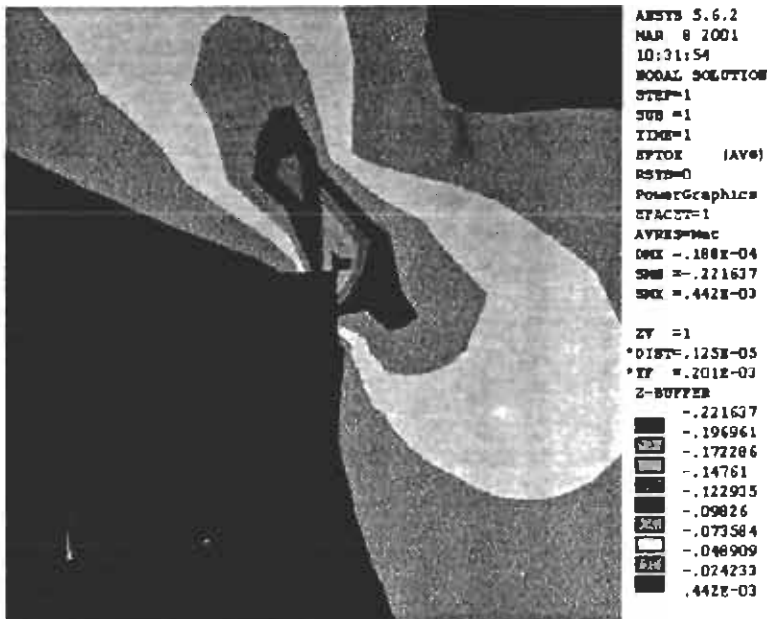
Η ισοδύναμες ισοτασικές καμπύλες φαίνονται στο Σχ. 7-6α, β όπου παρατηρείται μια μεγάλη τιμή της σ_{eqn} στην κορυφή. Η μορφή του σ_{eqn} είναι ίδια με εκείνη της αξονικής τάσης σ_y . Τα παραμορφωσιακά πεδία κατά την αξονική και ακτινική διεύθυνση δείχνονται στα Σχ. 7-7α, β ενώ η διατμητική συνιστώσα της παραμόρφωσης δείχνεται στο Σχ. 7-7γ. Οι μετατοπίσεις σε μορφή X-Y απεικόνιση δείχνεται στο Σχ. 7-7 ε, στ. Παρατηρούμε μια μεγάλη μεταβολή της ακτινικής συνιστώσας της παραμόρφωσης στην κορυφή Α', όπως ήδη αναμενόταν από τη θεωρία ελαστικότητας. Η μεταβολή της u_y κατά μήκος της AA' είναι γραμμική με διαφορετική κλίση απ' εκείνης κατά μήκος της A'B, το οποίο οφείλεται στο διαφορετικό μέτρο ελαστικότητας των υλικών. Η κλίση της καμπύλης στο τμήμα AA' είναι περίπου $10^{-2} m^{-1}$ ενώ κατά μήκος της A'B είναι $5,35 \cdot 10^{-4} m^{-1}$ η οποία είναι κατά πολύ μικρότερη της κλίσης στο πρώτο τμήμα της διαδρομής. Από φυσικής σκοπιάς σημαίνει ότι η παραμόρφωση του υλικού κατά την y διεύθυνση μέσα στη ρητίνη είναι κατά πολύ μεγαλύτερη εκείνης στη διεπιφάνεια ρητίνης-ίνας.



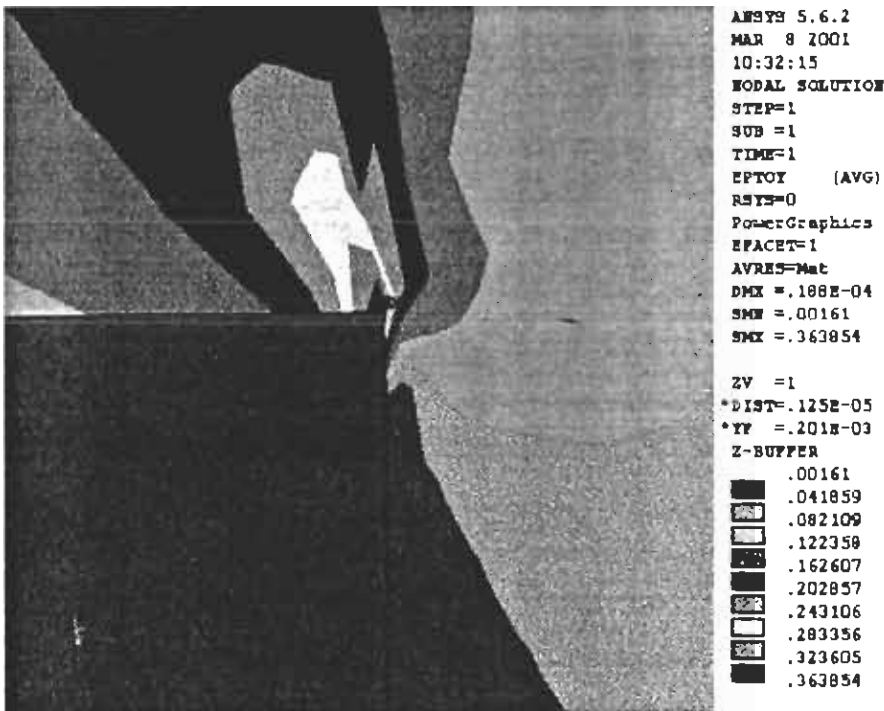
Σχ. 7-6α Ισοτασικές καμπύλες Seqv (Οι μονάδες τάσης είναι σε Pa)



Σχ. 7-6β Seqv σε συνάρτηση της απόστασης κατά μήκος της διεπιφάνειας (οριζόντιος άξονας σε m, κατακόρυφος σε Pa=N/m²)

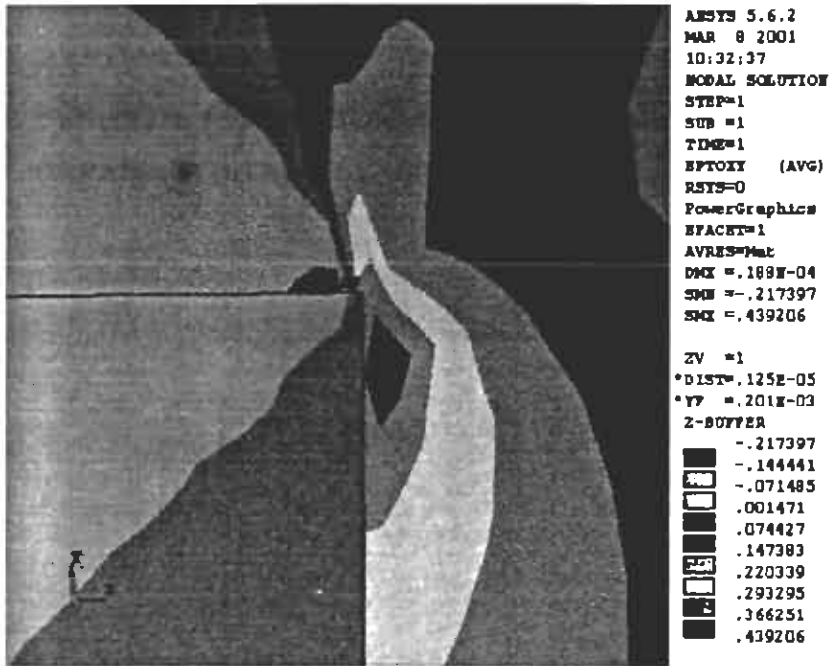


Σχ. 7-7α Παραμορφωσιακό πεδίο κατά την ακτινική διεύθυνση (Οι μονάδες τάσης είναι σε Pa)

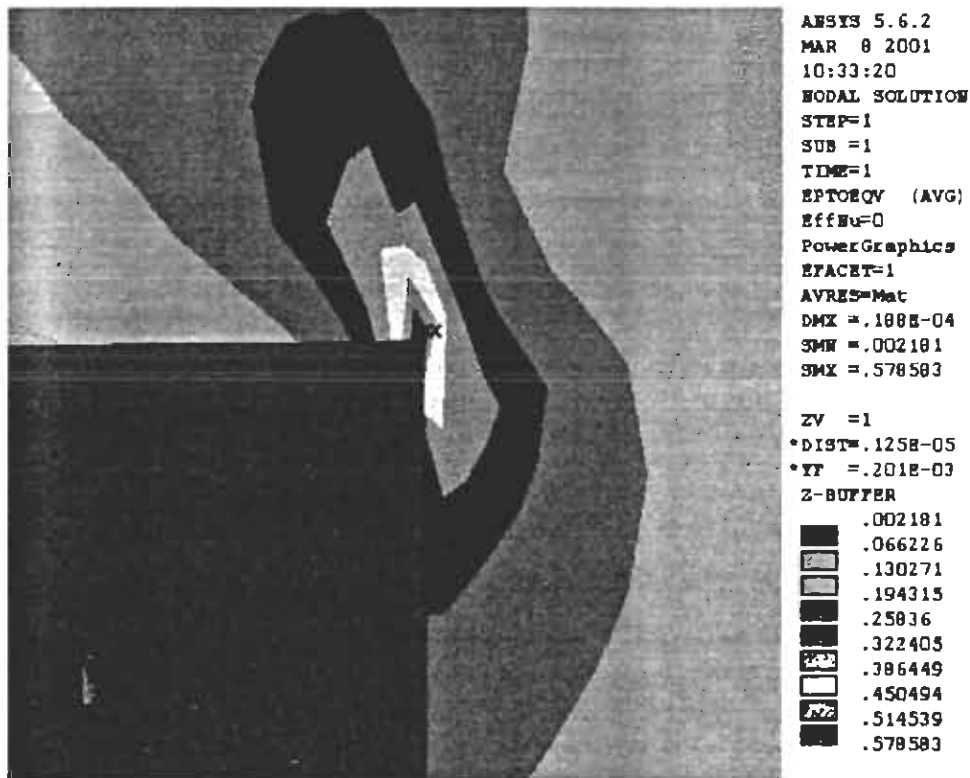


Σχ. 7-

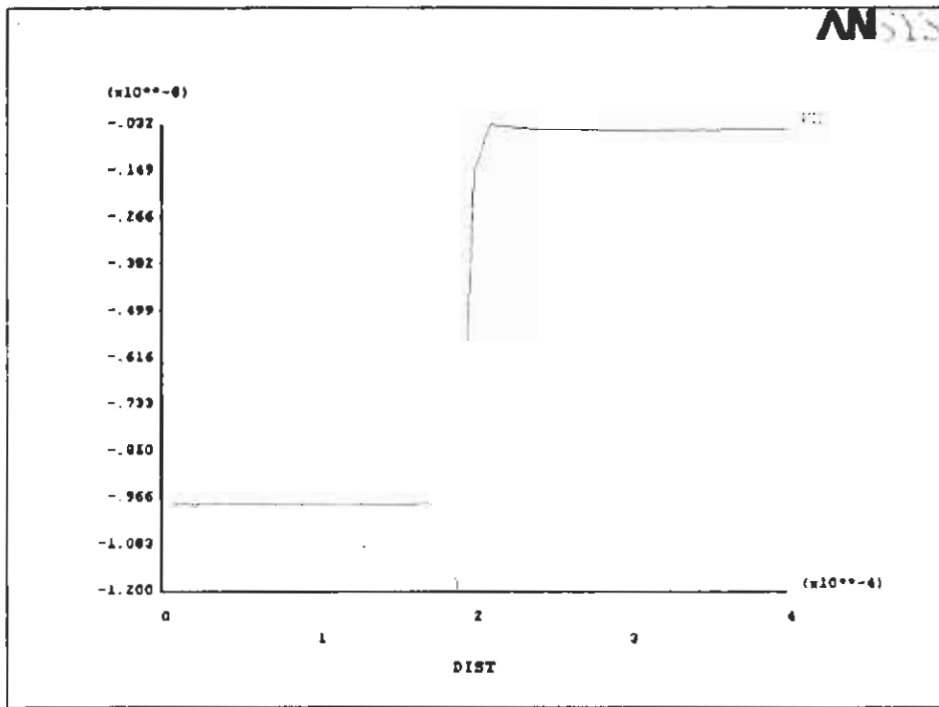
7β Παραμορφωσιακό πεδίο κατά την αξονική διεύθυνση (Οι μονάδες τάσης είναι σε Pa)



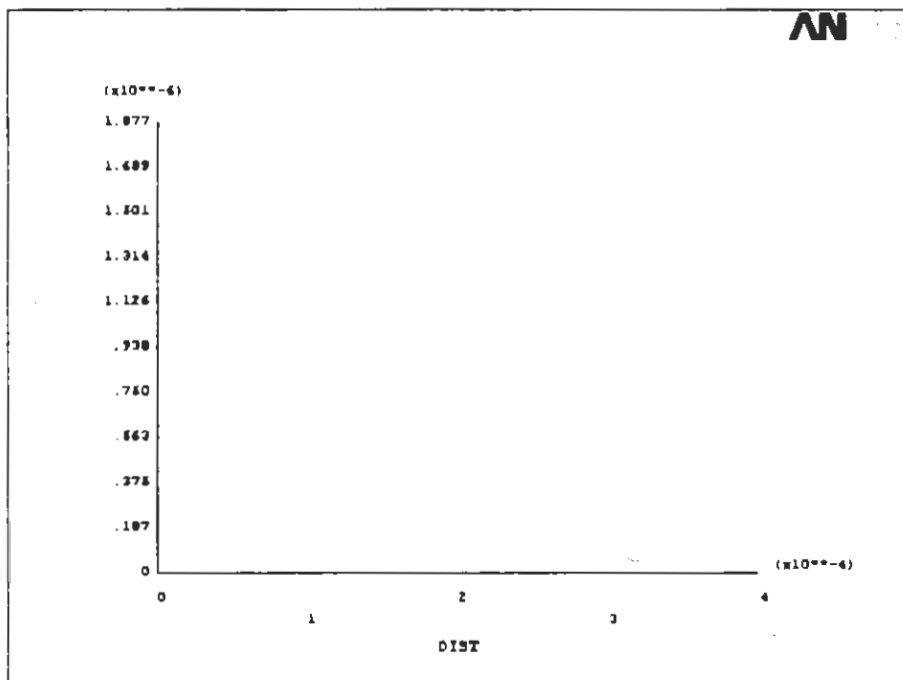
Σχ. 7-7γ Διατμητική παραμόρφωση (Οι μονάδες τάσης είναι σε Pa)



Σχ. 7-7δ E_{eff} μέσα στο δοκίμιο (Οι μονάδες τάσης είναι σε Pa)



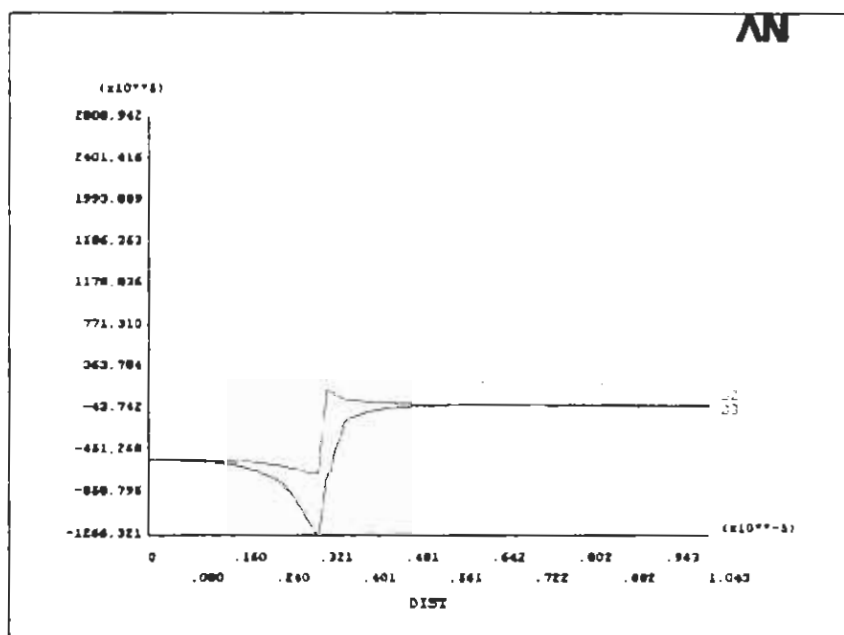
Σχ. 7-7 ε Μετατόπιση κατά την x διεύθυνση κατά μήκος της διεπιφάνειας AA'B



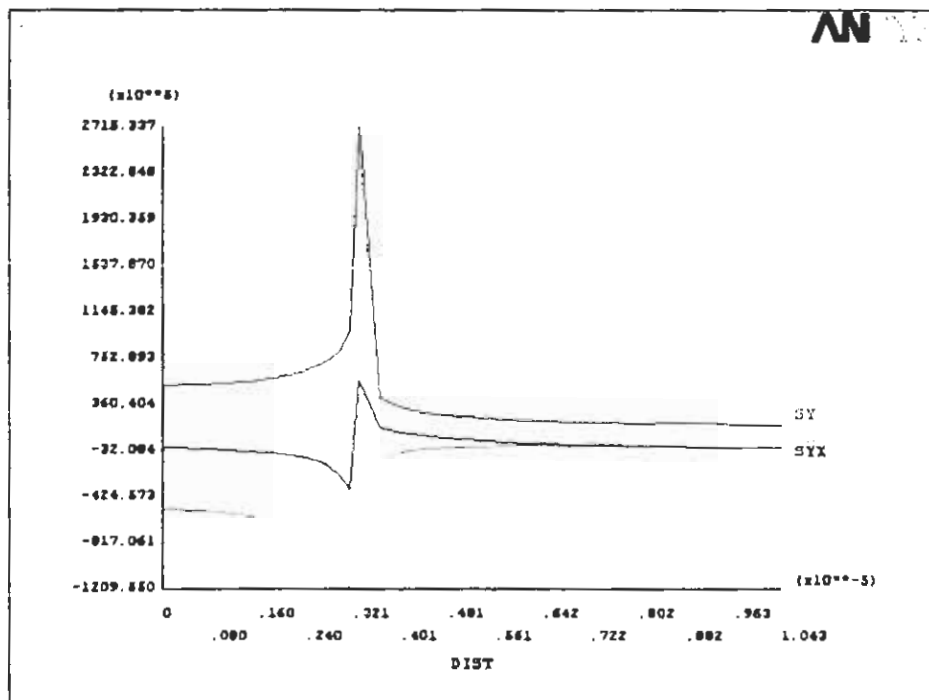
Σχ. 7-7 στ Μετατόπιση κατά την y διεύθυνση κατά μήκος της διεπιφάνειας AA'B

• ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ CD

Οι κύριες τάσεις S_1, S_2, S_3 κατά μήκος της γραμμής CA'D δείχνονται στο Σχ. 7-8. Παρατηρούμε ότι η S_1 έχει μια σταθερή τιμή, περίπου 56 MPa κατά μήκος της διεπιφάνειας CA', η οποία αρχίζει να αυξάνει κοντά στο σημείο A' λόγω της συγκέντρωσης τάσης. Κατόπιν η τάση S_1 εφ' όσον περάσει από τη μέγιστη τιμή της ελαττώνεται εκθετικά και σε μικρή απόσταση από το σημείο A' παίρνει σταθερή τιμή περίπου το μισό της τιμής της στη γραμμή CA'. Η κύρια τάση S_2 , η οποία είναι κατά μήκος της CA'D διευθύνσεις, αρχίζει με αρνητική τιμή ίση με περίπου 50 MPa αυξάνεται στην κορυφή A' και κατόπιν παίρνει τιμή περίπου μηδέν κατά μήκος της A'D, δηλαδή μέσα στη ρητίνη. Αυτό είναι προφανές καθ' όσον η εφαρμογή της φόρτισης είναι κατά την y διεύθυνση. Η συνιστώσα της κύριας τάσης κατά την S_3 διεύθυνση έχει την ίδια κατανομή με την S_2 αλλά κοντά στην κορυφή παίρνει μια μεγαλύτερη αρνητική τιμή ίση με 126 MPa



Σχ. 7-8 Κατανομές των κυρίων τάσεων S_1, S_2 και S_3 συναρτήσει της απόστασης CA'D (Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι σε N/m^2 ενώ του οριζόντιου άξονα είναι σε m)

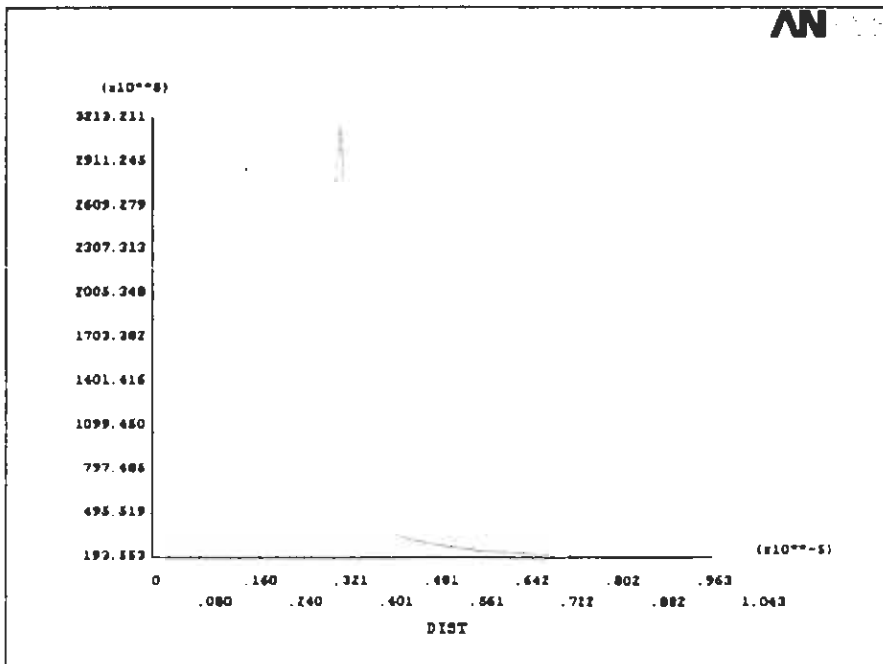


Σχ. 7-9 Κατανομές των τάσεων S_x , S_y και S_z κατά μήκος της $CA'D$ (Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι σε N/m^2 ενώ του οριζόντιου άξονα είναι σε m)

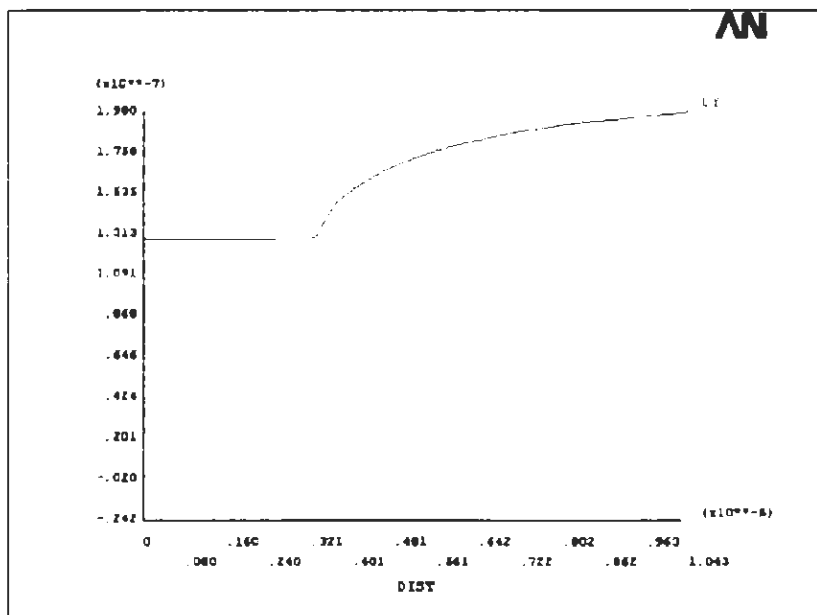
Οι κατανομές των τάσεων S_x , S_y και S_{xy} κατά μήκος της ευθείας $CA'D$ δείχνεται στο Σχ. 7-9 όπου παρατηρούμε ότι οι κατανομές αυτές έχουν περίπου την ίδια μορφή με τις κατανομές των κυρίων τάσεων του Σχ. 7-8. Η ισοδύναμη τάση S_{eqn} δείχνεται στο Σχ. 7-10. Όπως και για την προηγούμενη περίπτωση, η ισοδύναμη τάση ισούται με

$$s_{eqn} = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2}$$

Η έκφραση αυτή της ισοδύναμης τάσης παρέχει μια παραστατική εικόνα ανάπτυξης όλων των τάσεων μέσα στο δοκίμιο. Οι μετατοπίσεις U_y και U_x δείχνονται στο Σχ. 7-11. Η συνιστώσα της μετατόπισης U_y κατά τη διεύθυνση εφαρμογής της δύναμης είναι σταθερή ίση με $1.313 \cdot 10^{-7} m$ κατά μήκος της CA' και αυξάνεται εκθετικά επάνω στη γραμμή $A'D$ η οποία βρίσκεται ολοκληρωτικά μέσα στη ρητίνη. Αντίστοιχα η κατανομή της U_x είναι σταθερή ίση με $-0.02 \cdot 10^{-7} m$ στη γραμμή CA' και ελαττώνεται εκθετικά στη γραμμή $A'D$.



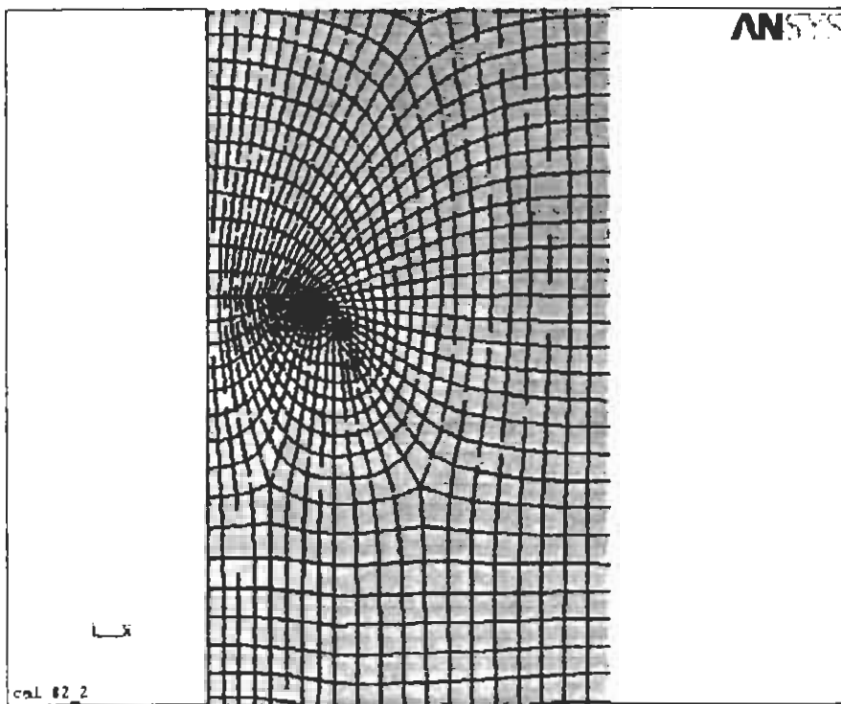
Σχ. 7-10 Κατανομή της ισοδύναμης τάσης στη γραμμή CA'D (Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι σε N/m^2 ενώ του οριζόντιου άξονα είναι σε m)



Σχ. 7-11 Κατανομή των μετατοπίσεων κατά μήκος της CA'D.

7.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΕ ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΟΤΑΝ Η ΓΩΝΙΑ ΤΩΝ ΒΑΣΕΩΝ ΑΝΑΦΟΡΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΠΛΕΥΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΗ

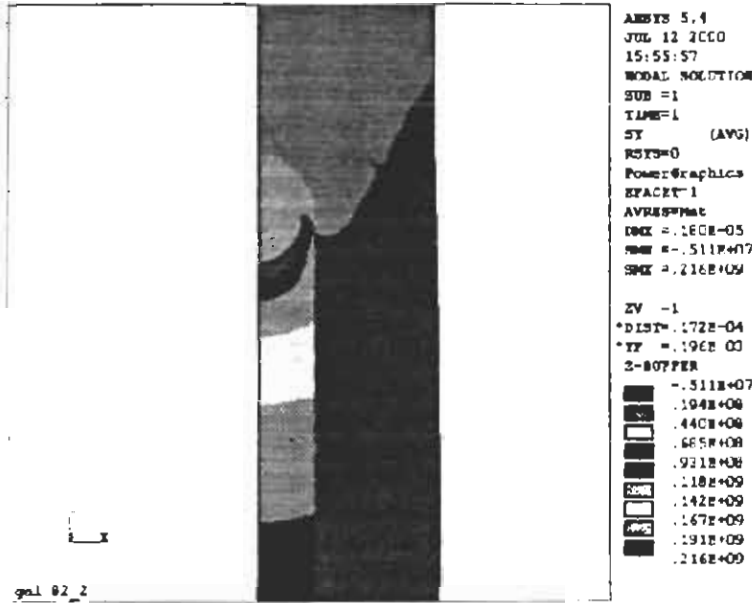
Το Σχ. 7-12 δείχνει το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων κοντά στη γωνία Α' η οποία έχει στρογγυλευθεί για να αποφύγουμε τη συγκέντρωση τάσεων.



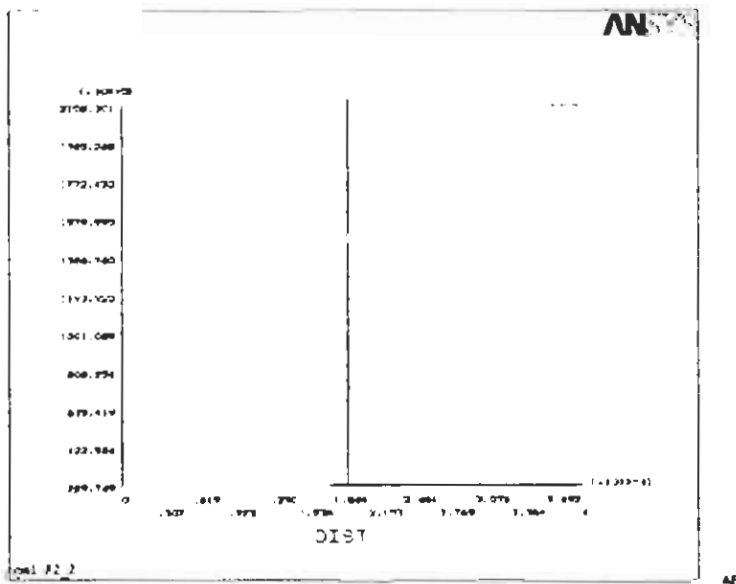
Σχ. 7-12. Ανάλυση του χώρου κοντά στη στρογγυλεμένη γωνία ίνας-ρητινης με πεπερασμένα στοιχεία

Κατά μήκος της γραμμής AA'B η κατανομή της αξονικής τάσης δείχνεται στα Σχ. 7-13α,β. Το ολικό μήκος του δοκιμίου ισούται με 800 μm. Η μοντελοποίηση του δοκιμίου λόγω συμμετρίας έχει γίνει στο μισό μήκος. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η αξονική συνιστώσα της τάσης s_x μέσα στη ρητίνη, δηλαδή AA', η τάση είναι σταθερή ίση με 22,97 Μpa και αρχίζει να αυξάνεται λίγο πριν από το σημείο A'. Στη συνέχεια στη διεπιφάνεια A'B

διεπιφάνεια Α'Β ρητίνης-ίνας η τάση σ_y αυξάνεται μέχρι το κρίσιμο μήκος της ίνας l_c (βλ. Κεφ.6) το οποίο ισούται με 46,2 μm και έκτοτε η τάση παραμένει σταθερή ίση με 215,81 Μpa.

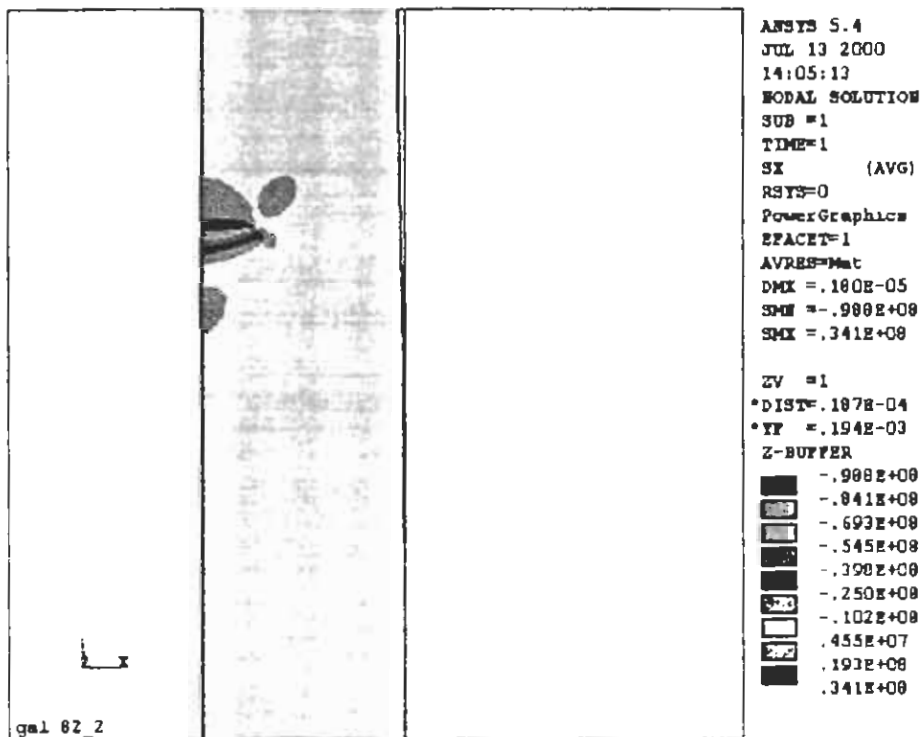


Σχ. 7-13α Ισοτασική Αξονική συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της γραμμής ΑΑ'Β

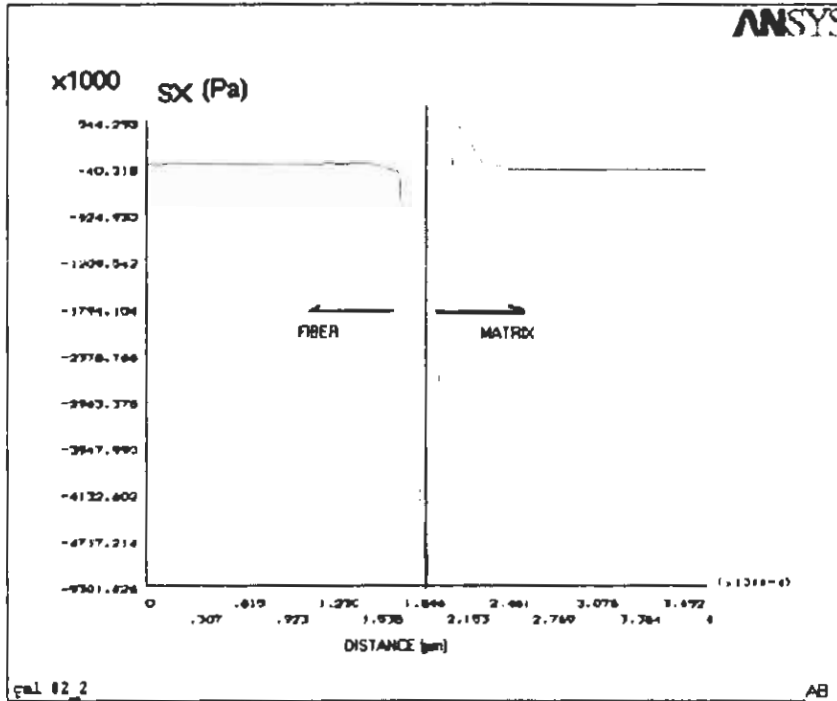


Σχ. 7-13β Αξονική συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της γραμμής ΑΑ'Β (Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι σε N m^2 ενώ του οριζόντιου άξονα είναι σε m)

Η ακτινική συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της γραμμής AA'B δείχνεται στα Σχ. 7-14α,β. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι η τάση είναι περίπου μηδέν μέσα στη ρητίνη δηλ. AA' ενώ όταν πλησιάζει την κορυφή της ίνας (σημείο A') η ακτινική τάση s_x παίρνει αρνητικές τιμές μέχρι την μέγιστη τιμή της η οποία ισούται με 5,3 Μpa. Εν' συνεχεία καθώς πορευόμαστε στη διεπιφάνεια ίνας-ρητίνης η ακτινική τάση s_x ελαττώνεται και παίρνει θετικές τιμές πλησίον του κρίσιμου μήκους της ίνας και περαιτέρω μηδενίζεται. Οπότε συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η ακτινική συνιστώσα της τάσης κατά μήκος τις διεπιφάνειας είναι αμελητέα εκτός πλησίον της κορυφής της ίνας όπου παίρνει μια μεγάλη θλιπτική τιμή.

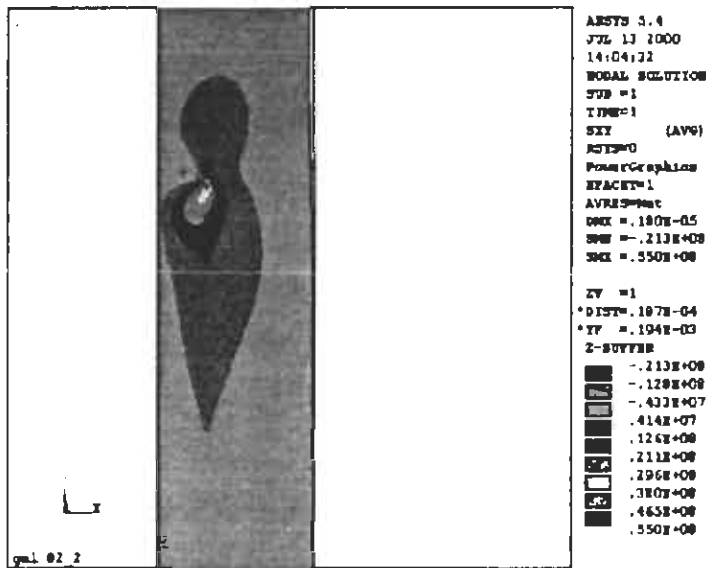


Σχ. 7-14α Ισοτασική Ακτινική κατανομή της τάσης κατά μήκος της γραμμής AA'B

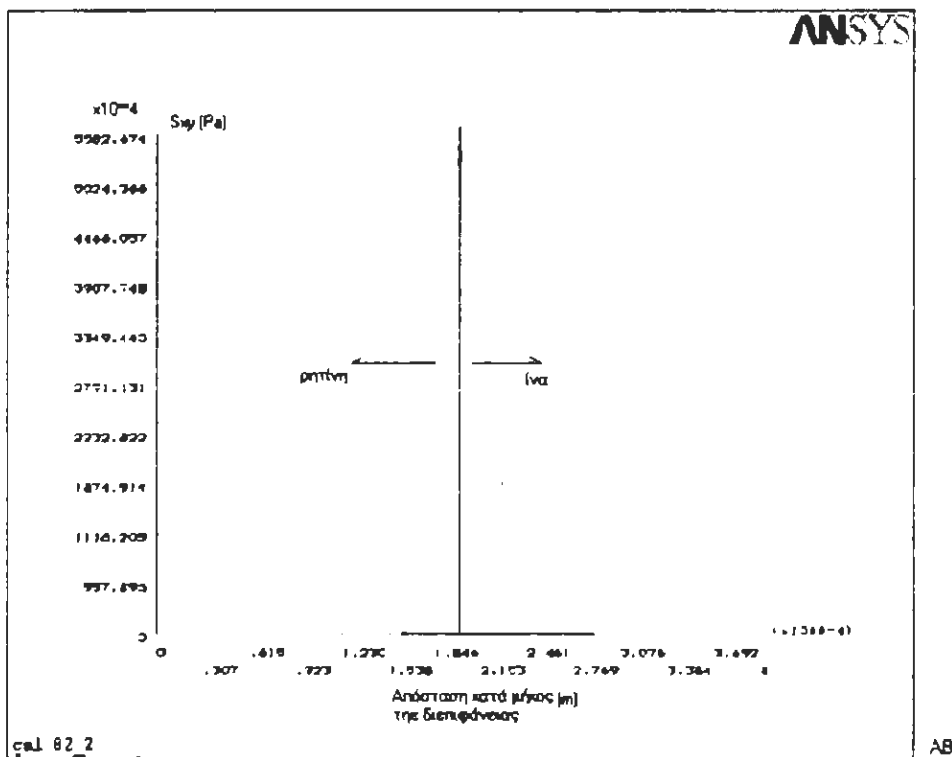


Σχ. 7-14β Ακτινική κατανομή της τάσης κατά μήκος της γραμμής AA'B (Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι σε N/m^2 ενώ του οριζόντιου άξονα είναι σε m)

Η ισοστασικές διατμητικές καμπύλες της τάσης κατά μήκος της απόστασης AA' μέσα στη ρητίνη και της A'B στη διεπιφάνεια ρητίνης-ίνας δείχνεται στο Σχ. 7-15α, ενώ η κατανομή της διατμητικής τάσης κατά μήκος της απόστασης AA' και A'B δείχνεται Σχ. 7-15β. Παρατηρούμε ότι στην κορυφή A' η διατμητική τάση παίρνει τη μέγιστη τιμή της ίση με 55 Mpa αυξανόμενη εκθετικά μέσα στη ρητίνη καθώς πλησιάζουμε την κορυφή A', ενώ ελαττώνεται εκθετικά καθώς απομακρυνόμαστε από την κορυφή A' κατά μήκος της διεπιφάνειας. Η διατμητική τάση μηδενίζεται σε απόσταση 52 μm από την κορυφή A' κατά μήκος της διεπιφάνειας A'B. Εντός όμως της ρητίνης η διατμητική τάση ήταν μηδέν από το σημείο A μέχρι την απόσταση 15 μm πριν την κορυφή A' όποτε αρχίζει να αυξάνεται εκθετικά και παίρνει τη μέγιστη τιμή της ακριβώς πάνω στο σημείο A'. Αυτό άλλωστε έχει παρατηρηθεί και πειραματικά σε μία σειρά άρθρων που έχουν ήδη δημοσιευτεί³. Η αξονική τάση S_y , κατά μήκος της γραμμής EF, δείχνεται στο Σχ. 7-16α που παρατηρούμε η μέγιστη τάση εμφανίζεται στο σημείο E' το οποίο βρίσκεται στη

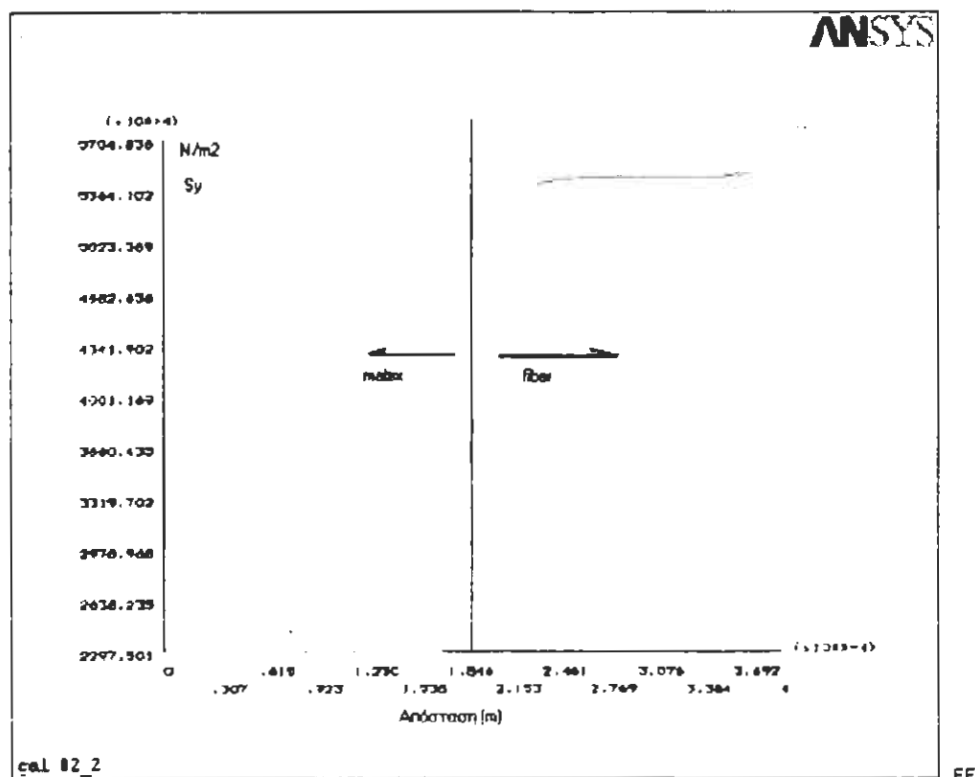


Σχ. 7-15α Διατμητική συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της διεπιφάνειας.



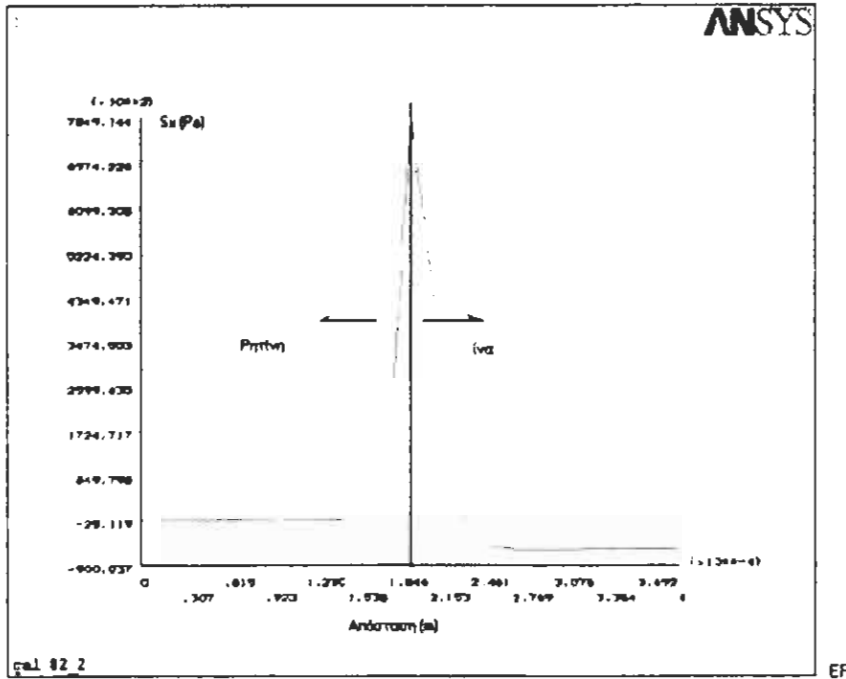
Σχ. 7-15β Διατμητική κατανομή της τάσης κατά μήκος της γραμμής AA'B (Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι σε N/m² ενώ του οριζόντιου άξονα είναι σε m)

διεπιφάνεια A'C και η τιμή της είναι κατά μία τάξη μεγέθους μικρότερη απ' εκείνη στην κορυφή A'. Η συνιστώσα της ακτινικής τάσης S_x κατά μήκος της ίδιας γραμμής δείχνεται στο Σχ. 7-16β. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της S_x εμφανίζεται στη διεπιφάνεια A'C και η τιμή της σε αντίθεση με εκείνη στη γραμμή AB είναι θετική και ισούται με 0.78 Μpa. Η διατμητική συνιστώσα κατά μήκος της γραμμής EF δείχνεται στο Σχ. 7-16γ η οποία έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με την αντίστοιχη καμπύλη κατά μήκος της γραμμής AB.

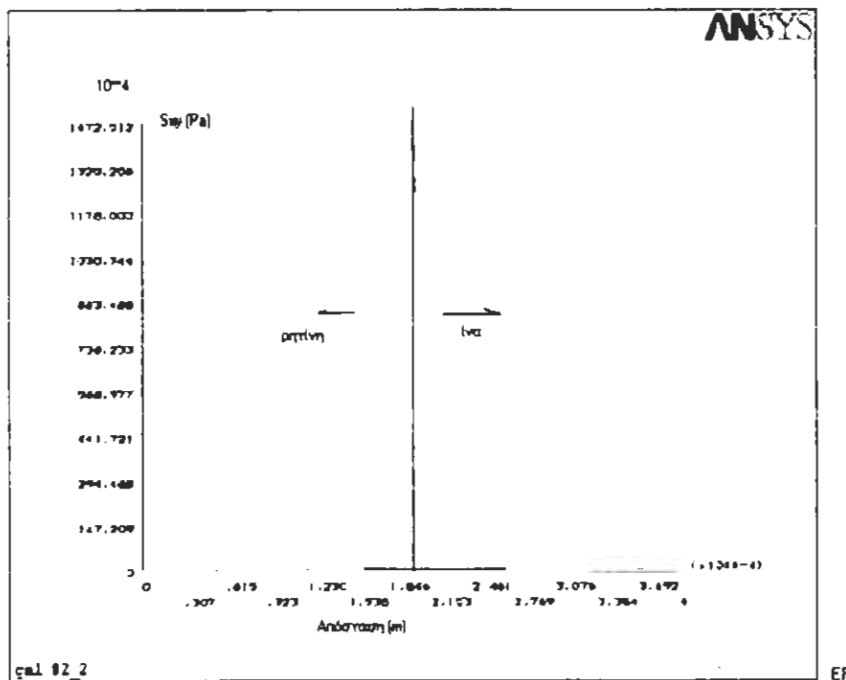


Σχ. 7-16α Αξονική συνιστώσα της τάσης S_y , κατά μήκος της γραμμής EF (Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι σε N/m^2 ενώ του οριζόντιου άξονα είναι σε m).

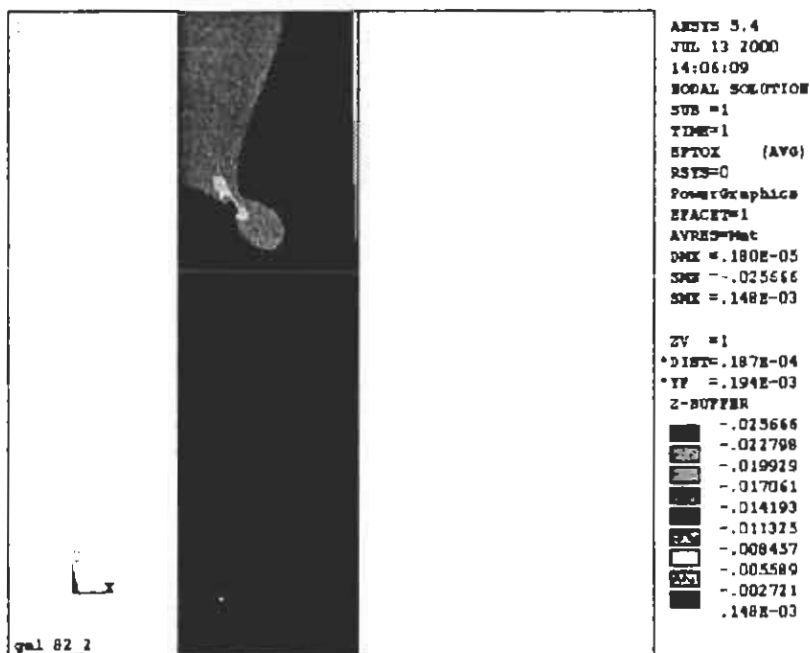
Οι ισοτασικές καμπύλες των παραμορφώσεων κατά την αξονική και ακτινική διεύθυνση δείχνονται στα Σχ. 7-17α,β, ενώ η διατμητική συνιστώσα δείχνεται στο Σχ. 7-17γ.



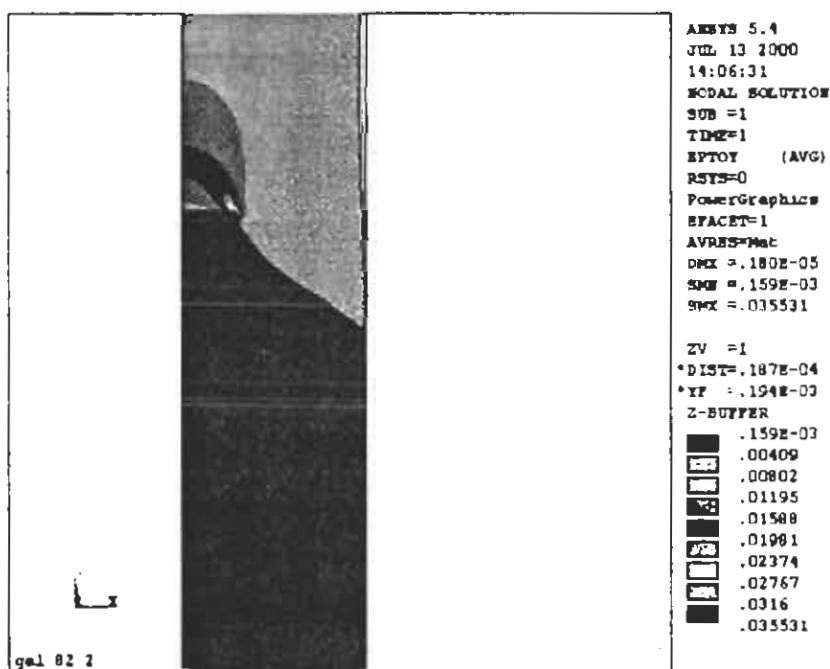
Σχ. 7-16β Ακτινική συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της γραμμής EF.



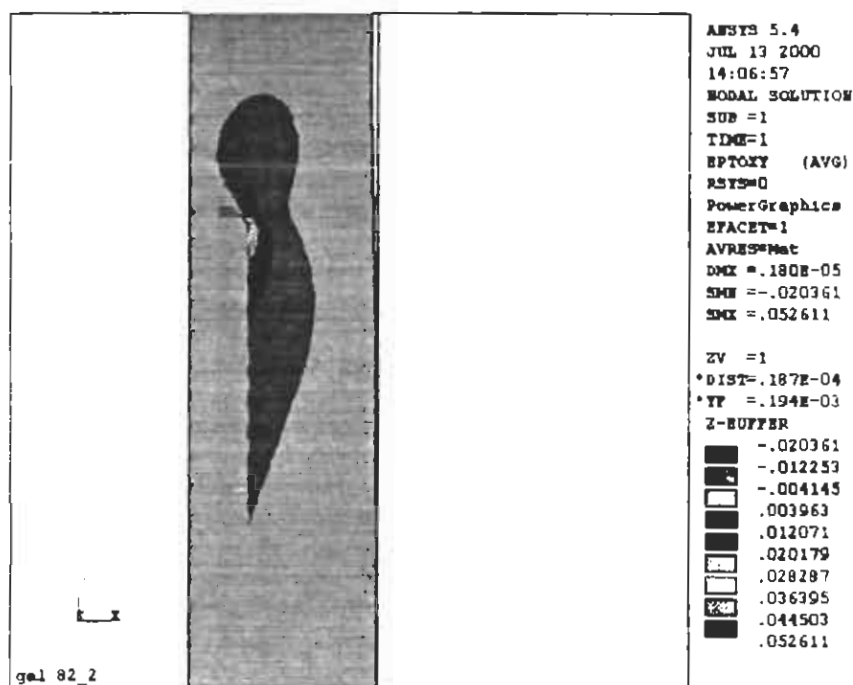
Σχ. 7-16γ Διατμητική τάση κατά μήκος της γραμμής EF



Σχ. 7-17α Ισοτασικές καμπύλες παραμορφώσεων κατά την ακτινική διεύθυνση



Σχ. 7-17α Ισοτασικές καμπύλες παραμορφώσεων κατά την αξονική διεύθυνση



Σχ. 7-17α Διαμητικές ισοτασικές καμπύλες παραμορφώσεων

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων έδωσε ουσιαστικές πληροφορίες για την κατανομή των τάσεων μέσα στην ίνα καθώς κατά μήκος της διεπιφάνειας. Κατ' αρχάς το πρόβλημα προσεγγίστηκε θεωρώντας ότι η γωνία της ίνας Α' είναι ορθή, οπότε βάσει της θεωρίας ελαστικότητας παρατηρείται συγκέντρωση τάσεων όσο πλησιάζουμε στην κορυφή. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η αξονική τάση παίρνει μεγάλη τιμή στην γωνία Α' και κατόπιν σταθεροποιείται καθ' όλο το μήκος της ίνας. Η μορφή της καμπύλης ακολουθεί ακριβώς την κατανομή της αξονικής τάσης βάσει των πειραματικών μετρήσεων με φασματοσκοπία Raman. Η εγκάρσια συνιστώσα της τάσης κατά μήκος της διεπιφάνειας ίνας-ρητίνης δείχνει μια σταθερή τιμή περίπου μηδέν εκτός από την περιοχή κοντά στην κορυφή της ίνας. Η

διατμητική τάση στη διεπιφάνεια δείχνει μια μέγιστη τιμή στην κορυφή της ίνας και όσο προχωράμε προς το κέντρο η τάση αυτή ελαττώνεται εκθετικά. Για την καλύτερη οπτική απεικόνιση των τάσεων έχουν σχεδιαστεί οι ισοτασικές επιφάνειες μέσα στο σύνθετο. Τα παραμορφωσιακά πεδία κοντά στη γωνία δείχνουν συγκέντρωση τάσεων κατά την ακτινική και αξονική διεύθυνση. Η αξονική συνιστώσα της μετατόπισης μέσα στη ρητίνη δείχνει μια εκθετική πτώση η οποία ελαττώνεται γραμμικά κατά μήκος της διεπιφάνειας. Η εγκάρσια όμως παραμόρφωση έχει σταθερή τιμή μέσα στη ρητίνη ενώ κατά μήκος της ίνας μηδενίζεται. Αυτό οφείλεται στο ότι η ίνα είναι πολύ σκληρή έναντι της ρητίνης.

Κατά μήκος του άκρου της ίνας CD η κύρια τάση S_1 , παίρνει μέγιστη θετική τιμή στο άκρο της ίνας και περίπου μηδενίζεται όσο προχωράμε προς τον άξονα της ίνας. Οι τάσεις όμως S_2 και S_3 στην κορυφή παίρνει μέγιστη αρνητική τιμή και μηδενίζονται κατά μήκος του άκρου CD. Ο συνδυασμός όλων των κύριων τάσεων αντιπροσωπεύεται από την ισοδύναμη τάση η οποία έχει μεγάλη τιμή στην ακμή της ίνας και ελαττώνεται εκθετικά προς το κέντρο.

Η αποφυγή της συγκέντρωσης τάσης στην κορυφή της ίνας επιτυγχάνεται με το στριγγύλεβμα τη ίνας στο άκρο της. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν καλύτερη κατανομή η οποία ταιριάζει καλύτερα με τα πειραματικά δεδομένα για αυτό το πρόβλημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κεφάλαιο 1

1. F.L. Matthews and R.D. Rawlings, Composite Materials: Engineering and Science, Chapman & Hall (1994)

Κεφάλαιο 2

1. Halpin J.C. and Tsai S.W. Enviromental factors in Composite Materials Design, Air Force Materials Labs Technical Report AFML-TR-67-423 (1967)
2. Kies J.A. Maximum strain in the resin of fiber glass composites, US Naval Research Lab Report NRL 5752 (1962)
3. Cox H.L The elasticity and strength of paper and other fibrous materials, Br. J. Appl. Phys. 3, 72-79 (1952)
4. Halpin J.C. Stiffness and expansion estimatesfor oriented short fiber composites, J. Composite Materials, 3, pp. 732-734 (1969)
5. D. Hull, An Introduction to Composite Materials, Cambridge University Press (1981)

Κεφάλαιο 3

1. H.L. Cox, Brit. J. Appl. Phys., vol. 3, p.72 (1952)
2. J.O. Outwater Jr., Modern Plastics, March, vol. 56, (1956)
3. H.F. Dow, G.E.C. Missile and Space Div. Report No. R. 63SD61
4. B.W. Rosen, Fiber Composite Materials, ASM Publications (1965)
5. A. Kelly and W.R. Tyson, J. Mech. Phys. Solids, No. 6, 329
6. M.G. Iremonger and W.G. Wood, Paper Presented to the Inst. Of Phys. And Phys. Soc. Conf. Cranfield, Sept.(1968)
7. A.S. Carrara and F.J. McGarry, J. Comp. Materials, vol. 2 p. 222 (1968)
8. Timosenko, Theory of Elasticity, McGraw Hill (1970)
9. J. Amirbayat and J.W. S. Hearle, Fibre Science and technology vo. 2, pp. 123-141 (1969)

Κεφάλαιο 4

1. H.L. Cox, Brit. J. Applied Phys. vol. 3 p. 72 (1952)
2. N.F. Dow, G.E.C. Rep. R63 SD61 (1963)
3. A.S. Carrara and F.J. McGarry, J. Comp. Mat. Vol. 2 p.222 (1968)
4. R.A. Lander and C.W. Beadle, J. Comp. Mat. Vol. 10, p. 2I (1976)
5. E.D. Ready, J. Comp. Mat. Vol. 18, p. 595 (1984)
6. Y. Termonia, J. Mat. Sci., vol. 22,pp. 504-508 (1987)
7. C. Galiotis , R. Young , P.H. Yeung, and D. Batchelder, J. Mat. Sci., vol. 19, p. 3640 (1984)
8. R. Tyson and G. J. Davies, Brit. J. Appl. Phys. 16, p. 199 (1965)

Κεφάλαιο 5

1. Π.Α. Κακαβάς, Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (2000)
2. W.Weaver & Johnston, Finite Element For Structural Anal, Prentice Hall, E.Cliffs, NJ (1984)

Κεφάλαιο 6

1. H.L. Cox, Brit. J. Appl. Phys., vol. 3, p.72 (1952)
2. L.Monette , M.P. Anderson, S. Ling & G.S. Grest, Effect of Modulus and the Cohesive energy on critical fiber length in fiber reinforced composites, J. Mat. Sci. 27 pp. 4393-4405 (1992).
3. B.W. Rosen, Fiber Composite Materials, ASM Publications (1965)
4. C. Galiotis, R. Young, P.H. Yeung and D. Batchelder, J. Mat. Sci., vol. 19, p. 36-40 (1984).
5. Y. Termonia, J. Mat. Sci., vol. 22,pp. 504-508 (1987)

