

(34)

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

“Νόμοι διατήρησης, Οριακές Συνθήκες, Τύρβη και η μοντελοποίησή της ”

Εισηγητές:

Dr. Μαυρίδης Κων/νος
Ιωάννης Γιαννάκης

Σπουδαστής: Γκοτσόπουλος Χρήστος

ΠΑΤΡΑ, ΜΑΙΟΣ 2000

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ	3771
----------------------	------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Τι είναι CFD ;

Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD) είναι η ανάλυση συστημάτων που περιλαμβάνουν την ροή των ρευστών, την μετάδοση της θερμότητας, και σχετικά φαινόμενα όπως οι χημικές αντιδράσεις με την βοήθεια μιας υπολογιστικής προσομείωσης. Η τεχνική αυτή είναι πολύ δυναμική και καλύπτει ένα μεγάλο φάσμα των των βιομηχανικών και της μη εφαρμογών.

Μερικά παραδείγματα είναι:

- Η αεροδυναμική των αεροσκαφών και των οχημάτων: η άνωση και οπισθέλκουσα.
- Η υδροδυναμική των πλοίων.
- Καύση σε μηχανές IC και σε αεριοστροβίλους
- Στροβιλοδυναμική : ροές διαμέσου περιστρεφόμενων διόδων, διαχύτες κλπ.
- Ψύξη ηλεκτρικών συσκευών
- Την διαδικασία της χημικής μηχανικής: την μίξη και τον διαχωρισμό, την διάσπαση πολυμερών.
- Το εξωτερικό και εσωτερικό περιβάλλον των κτιρίων
- Μηχανική των πλοίων
Την περιβαλλοντική μηχανική
- Την υδρολογία και την ωκεανογραφία: τις ροές των ποταμών, τις εκβολές των ποταμών, τους ωκεανούς.
- Την μετεωρολογία: την πρόβλεψη του καιρού.
- Την Βιοιατρική μηχανική: την ροή του αίματος μέσω των αρτηριών και των φλεβών.

Ο κύριος στόχος των εξελίξεων στο πεδίο των CFD είναι να παρέχει μια δυνατότητα συγκρίσιμη προς τα άλλα εργαλεία των CAE (Computer-Aided Engineering) όπως τους κώδικες ανάλυσης της τάσης. Ο κύριος λόγος που έχει μείνει πίσω η CFD είναι η τρομερή πολυπλοκότητα της βαθύτερης συμπεριφοράς τους, η οποία εμποδίζει μια περιγραφή των ροών, η οποία είναι πρέπει ταυτόχρονα να είναι ικανοποιητική και οικονομική. Η διαθεσιμότητα υψηλής απόδοσης εξοπλισμού υπολογιστών σε υποφερτές τιμές και οι ευκολίες των τωρινών λογισμικών επιτρέπουν μόλις πρόσφατα να έχουμε μια ραγδαία ανάπτυξη των CFD. Υπολογίζουμε το ελάχιστο κόστος ενός κατάλληλου Hardware να βρίσκεται μεταξύ των 2.500.000 – 5.000.000 δραχμών (συν το ετήσιο κόστος συντήρησης). Φαίνεται καθαρά ότι το κόστος επένδυσης μιας δυνατότητας των CFD δεν είναι μικρή, αλλά τα κανονικά συνολικά έξοδα δεν είναι τόσο μεγάλα όσο το κόστος για μια υψηλής ποιότητας πειραματική εγκατάσταση. Επιπλέον, υπάρχουν πολλά και μοναδικά πλεονεκτήματα των CFD έναντι των πειραματικών προσεγγίσεων όπως:

- Σημαντική μείωση του απαιτούμενου χρόνου και κόστους των νέων σχεδίων.

- Η ικανότητα να μελετηθούν συστήματα όπου τα ελεγχόμενα πειράματα είναι δύσκολα ή απίθανα να εκτελεστούν (π.χ τα πολύ μεγάλα συστήματα).
- Η ικανότητα να μελετηθούν συστήματα, κάτω από επικίνδυνες συνθήκες στα όρια και πέρα από την ομαλή λειτουργία τους (π.χ μελέτες ασφαλείας και σεμινάρια ατυχημάτων).
- Πρακτικά έχουμε απεριόριστο επίπεδο λεπτομερειών και αποτελεσμάτων.

Το μεταβλητό κόστος ενός πειράματος, από την άποψη της ενοικίασης εγκαταστάσεων / ανθρώπινο κόστος είναι ανάλογο στον αριθμό των δεδομένων στοιχείων και του εξεταζόμενου αριθμού διαμόρφωσης. Σε αντίθεση, οι κώδικες των CFD μπορούν να παράγουν υπερβολικά μεγάλους όγκους αποτελεσμάτων με μηδενική δαπάνη και είναι πολύ φτηνή η εκτέλεση των παραμέτρων μιας μελέτης.

Σημειώνουμε επίσης ότι εκτός από την δαπάνη μιας σημαντικής επένδυσης, ένας οργανισμός χρειάζεται κατάλληλους ανθρώπους για να τρέξουν τους κώδικες και να μεταδώσουν τα αποτελέσματα τους και εν συντομία να μελετήσουν τις ικανότητες μοντελοποίησης που απαιτούνται από τους χρήστες του CFD.

1.2 Πως λειτουργεί ένας κώδικας CFD

Οι CFD κώδικες συγκροτούνται γύρω από αριθμητικούς αλγορίθμους που μπορούν να λύσουν τα προβλήματα της ροής των ρευστών. Όλοι οι κώδικες περιλαμβάνουν 3 στοιχεία:

1. Έναν προ-επεξεργαστή
2. Έναν λύτη
3. Έναν μετα-επεξεργαστή

Προ-επεξεργαστής

Η προ-επεξεργασία αποτελείται από την εισαγωγή ενός προβλήματος ροής μέσα σε ένα πρόγραμμα CFD με την βοήθεια μιας διασύνδεσης φιλικής προς τον χειριστή και η επόμενη μετατροπή αυτής της εισαγωγής να γίνει μέσα σε έναν κατάλληλο τύπο για την χρησιμοποίηση της από τον λύτη. Οι δραστηριότητες του χρήστη στο στάδιο της προ-επεξεργασίας περιλαμβάνουν τα εξής:

- Τον καθορισμό της γεωμετρίας μιας ενδιαφερόμενης περιοχής: Η υπολογιστική περιοχή.
- Την δημιουργία πλέγματος- την υποδιαίρεση μιας περιοχής σε έναν μικρότερο αριθμό, μη-καλυπτόμενων υπό-περιοχών: ένα πλέγμα ή κελιά ή όγκους ελέγχου.
- Την επιλογή των φυσικών και χημικών φαινομένων που χρειάζονται μοντελοποίηση.
- Τον καθορισμό των ιδιοτήτων των ρευστών

- Την προδιαγραφή κατάλληλων οριακών συνθηκών στα κελιά που συμπίπτουν με ή αγγίζουν την οριακή περιοχή.

Η λύση ενός προβλήματος ροής (ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία κ.λ.π.) καθορίζεται σε κόμβους στο εσωτερικό κάθε κελιού. Η ακρίβεια μιας λύσης CFD εξαρτάται από τον αριθμό των κελιών στο πλέγμα. Γενικώς, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των κελιών τόσο καλύτερη θα είναι η ακρίβεια της λύσης. Η ακρίβεια και το κόστος μιας λύσης σχετικά με το αναγκαίο hardware του υπολογιστή μαζί με τον χρόνο υπολογισμού εξαρτώνται και τα δυο μαζί από την λεπτότητα του πλέγματος. Τα βέλτιστα πλέγματα συνήθως είναι ανομοιομορφα: λεπτότερα είναι σε περιοχές όπου συμβαίνει να έχουμε μεγαλύτερες μεταβολές από σημείο σε σημείο και λιγότερο λεπτό σε σημεία όπου υπάρχουν σχετικά λιγιστές μεταβολές. Προσπαθούμε με κάθε τρόπο να αναπτύξουμε τους κώδικες των CFD με μια μέθοδο της αυτοπροσαρμοζόμενης δυνατότητας πλεγμάτων. Τελικά τέτοιου είδους προγράμματα θα βελτιώσουν αυτομάτως το πλέγμα σε περιοχές ταχύτατων μεταβολών. Μέχρι τώρα αυτό είναι πάνω στις ικανότητες των χρηστών του CFD να σχεδιάσουν ένα πλέγμα που να είναι κατάλληλα συμβιβαστό ανάμεσα στη ζητούμενη ακρίβεια και στο κόστος λύσης .

Πάνω από το 50% του χρόνου που δαπανάται στη βιομηχανία για ένα πρόγραμμα CFD είναι αφιερωμένο για τον καθορισμό της γεωμετρικής περιοχής και για τη παραγωγή του πλέγματος. Με σκοπό να μεγιστοποιηθεί η παραγωγικότητα του προσωπικού των CFD όλοι οι κύριοι κώδικες τώρα περιλαμβάνουν το δικό τους στυλ διασύνδεσης CAD με ή χωρίς ευκολίες για να εισάγουν πληροφορίες από μοντελοποιητές επιφανείας και παραγωγούς πλεγμάτων όπως οι PATRAN και IDEAS. Σύγχρονοι προ-επεξεργαστές επίσης δίνουν στον χρήστη την ευκολία να χρησιμοποιήσει τις βιβλιοθήκες των ιδιοτήτων των υλικών για τα κοινά ρευστά καθώς και μια ευκολία για να επικαλούνται ειδικά φυσικά και χημικά μοντέλα (π.χ τυρβώδη μοντέλα, μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία, μοντέλα καύσης) παραπλεύρως στις κύριες εξισώσεις ροής των ρευστών.

Ο λύτης

Υπάρχουν 3 διαφορετικά ρεύματα για την τεχνική μιας αριθμητικής λύσης: η πεπερασμένη διαφορά, το πεπερασμένο στοιχείο και οι μέθοδοι των φασμάτων. Σε γενικές γραμμές ο βασικός τύπος του λύτη των αριθμητικών μεθόδων εκτελεί τα ακόλουθα βήματα:

- Την προσέγγιση των άγνωστων μεταβλητών της ροής με απλές μαθηματικές σχέσεις
- Την διακριτοποίηση με αντικατάσταση των προσεγγίσεων μέσα στις κύριες εξισώσεις των ροών και με επιπλέον μαθηματικούς χειρισμούς.
- Την λύση των αλγεβρικών εξισώσεων.

Οι κύριες διαφορές ανάμεσα στα τρία αυτά διαφορετικά ρεύματα είναι ο τρόπος προσέγγισης των μεταβλητών της ροής και με τις διαδικασίες διακριτοποίησης.

Μετα-επεξεργασία

Όπως στην προ-επεξεργασία ένα μεγάλο μέρος της εργασίας έχει τοποθετηθεί ακριβώς στην περιοχή της μετα-επεξεργασίας. Η αυξανόμενη δημοτικότητα των σταθμών εργασίας, πολλοί από τους οποίους έχουν εξαιρετικές δυνατότητες γραφικών, τα κύρια πακέτα των CFD είναι τώρα εξοπλισμένα με εύχρηστα και ευκολομετάβλητα εργαλεία οπτικοποίησης των δεδομένων. Αυτά περιλαμβάνουν:

- Την γεωμετρία του χώρου και την επίδειξη του πλέγματος
- Τις ανυσματικές παραστάσεις.
- Τις γραμμοσκιασμένες παραστάσεις περιγραμμάτων.
- Τις δισδιάστατες και τρισδιάστατες επιφανειακές παραστάσεις
- Τον χειρισμό όψεων
- Την παραγωγή έγχρωμων γραφημάτων από τους CFD κώδικες.

Πολύ πρόσφατα αυτές οι ευκολίες θα περιλαμβάνουν animation για την δυναμική επίδειξη ενός αποτελέσματος και εκτός από τα σχεδιαγράμματα, όλοι οι κώδικες να αλφαριθμητικά αποτελέσματα και αυτά με κατάλληλα πρωτόκολλα επικοινωνίας να εισάγονται σε άλλα προγράμματα τύπου CAE και έτσι να βελτιώνεται και η εμφάνιση των αποτελεσμάτων αλλά και η εύκολη προσαρμογή με τα αντικείμενα των CFD και ανθρώπων μη-ειδικών με τα θέματα που αυτά πραγματεύονται.

1.3 Λύση των προβλημάτων με CFD

Στην λύση των προβλημάτων της ροής των ρευστών χρειάζεται να ξέρουμε ότι η εμπλεκόμενη φυσική είναι πολύπλοκη και τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από έναν κώδικα CFD είναι τόσο καλύτερα όσο καλύτερα έχουμε εισάγει τη φυσική και τα φυσικά φαινόμενα στα δεδομένα του κώδικα. Ο χρήστης πρέπει να έχει καλή γνώση αριθμητικών μεθόδων και να μπορεί να κατανοεί τα δεδομένα που πρέπει να εισαχθούν, τις παραδοχές που πρέπει να κάνει και να τοποθετεί σωστά τις οριακές συνθήκες του προβλήματος έτσι ώστε η λύση που θα πάρει να είναι όσον το δυνατό πλησιέστερα στην πραγματικότητα. Τυπικές αποφάσεις που ίσως χρειαστούν να γίνουν είναι εάν το μοντέλο ενός προβλήματος γίνει σε δύο ή τρεις διαστάσεις, εάν αποκλειστούν οι επιρροές των μεταβλητών θερμοκρασιών και πιέσεων που περιέχονται στην πυκνότητα μιας ροής αέρος. Για να γίνουν σωστές επιλογές απαιτούνται καλές ικανότητες μοντελοποίησης γι' αυτό σε όλα τα προβλήματα εκτός από τα απλούστερα πρέπει να κάνουμε κάποιες υποθέσεις για την μείωση της

περιπλοκότητας σε κάποιο επίπεδο, ενώ διατηρούμε σταθερά τα προεξέχοντα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Εισάγοντας στο στάδιο αυτό την κατάλληλη απλοποίηση τουλάχιστον μπορούμε εν μέρει να κατευθύνουμε την ποιότητα των πληροφοριών που παράγονται από το CFD και έτσι ο χρήστης θα πρέπει να είναι συνεχώς ενήμερος.

Μια καλή κατανόηση των λύσεων αριθμητικού αλγόριθμου είναι επίσης πολύ σημαντική. Τρεις μαθηματικές απόψεις είναι χρήσιμες για τον καθορισμό της επιτυχίας ή όχι τέτοιων αλγόριθμων: η σύγκλιση, η ευστάθεια και η σταθερότητα. Η σύγκλιση είναι η ιδιότητα μιας αριθμητικής μεθόδου να παράγει μια λύση η οποία να προσεγγίζει την ακριβή λύση, καθώς το μέγεθος του πλέγματος, το μέγεθος του όγκου ελέγχου ή το μέγεθος του στοιχείου να μειώνεται προς το μηδέν. Οι αριθμητικές μελέτες για την συνακολογία παράγουν συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων που μπορούν να περιγράψουν ισοδύναμα την αρχική διέπουσα εξίσωση καθώς και την διαχώριση του πλέγματος που τείνει προς το μηδέν. Η ευστάθεια είναι συνδεδεμένη με την απόσβεση των λαθών καθώς προχωρά η αριθμητική μέθοδος. Εάν μια τεχνική δεν είναι σταθερή ακόμα τότε τα σφάλματα λόγω στρογγυλέματος των αρχικών δεδομένων μπορούν να προκαλέσουν αποκλίσεις.

Η σύγκλιση συνήθως είναι πολύ δύσκολη να αποδειχθεί θεωρητικά και πρακτικά χρησιμοποιούμε το θεώρημα της ισοδυναμίας του Lax το οποίο δηλώνει ότι για γραμμικά προβλήματα απαραίτητη και ικανοποιητική συνθήκη για τη σύγκλιση είναι ότι η κάθε μέθοδος πρέπει να είναι σταθερή και ευσταθής ταυτόχρονα. Στις μεθόδους του CFD αυτό το θεώρημα είναι περιορισμένης λύσης καθώς θα δούμε ότι οι εξισώσεις που κυριαρχούν είναι μη γραμμικές. Σε τέτοια προβλήματα η σταθερότητα και η ευστάθεια είναι απαραίτητες για την σύγκλιση, αλλά όχι επαρκείς.

Τα σφάλματα στρογγυλοποίησης θα κατάκλυζαν τη λύση πραγματικά πολύ πριν πλησιάσει στο μηδέν ένας διαχωρισμός πλέγματος. Οι μηχανικοί χρειάζονται τους κώδικες των CFD, οι οποίοι παράγουν τα φυσικά αποτελέσματα ρεαλιστικά με καλή ακρίβεια στις προσομιώσεις με πεπερασμένα (και μερικές φορές αρκετά χονδρά) πλέγματα. Για να εκτελέσουμε τον υπολογισμό των πραγματικών CFD, απαιτούνται από τους ίδιους τους χειριστές ικανότητες διαφορετικής κατηγορίας. Ο καθορισμός της γεωμετρικής περιοχής και ο σχεδιασμός του πλέγματος είναι τα κύρια καθήκοντα τους στο στάδιο της εισαγωγής και μεταγενέστερα ο χρήστης χρειάζεται να αποκτήσει ένα επιτυχές αποτέλεσμα μιας προσομείωσης. Οι δυο απόψεις που χαρακτηρίζουν αυτόν τον χαρακτηρισμό ενός τέτοιου αποτελέσματος είναι η διαδικασία της επαναλαμβανόμενης σύγκλισης και της ανεξαρτησίας του πλέγματος. Η λύση αλγορίθμων επαναλαμβάνεται στην φύση και μέσα από μια συγκλίνουσα λύση των επονομαζόμενων μετρήσεων των υπελειμμάτων της συνολικής διατήρησης των ιδιοτήτων της ροής και είναι πολύ μικρή. Η εξέλιξη προς μια συγκλίνουσα λύση μπορεί να βοηθηθεί πολύ από την προσεκτική επιλογή του περιβάλλοντος των πολλών παραγόντων χαλάρωσης των συσκευών επιτάχυνσης. Δεν υπάρχουν ειλικρινείς οδηγίες για

την κατασκευή εκείνων των επιλογών εφόσον τα προβλήματα είναι εξαρτημένα. Η βέλτιστη λύση της ταχύτητας χρειάζεται αρκετή εμπειρία με τον ίδιο κωδικό, την οποία μπορεί να την αποκτήσει φυσικά μόνο με την συνεχή χρήση. Δεν υπάρχει επίσημος τρόπος να υπολογίζονται τα σφάλματα τα οποία εισάγονται από ανεπαρκές σχεδιασμούς πλεγμάτων για μια ροή γενικά. Ένας καλός αρχικός σχεδιασμός πλέγματος εξαρτάται κατά πολύ από την βαθιά γνώση των ιδιοτήτων της ροής. Στο τέλος μιας προσομοίωσης ο χρήστης πρέπει να κρίνει εάν τα αποτελέσματα είναι «αρκετά καλά». Είναι πιθανόν να προσδιοριστεί το κύρος των φυσικών και χημικών προτύπων που είναι ενσωματωμένα σε ένα πρόγραμμα τόσο πολύπλοκο, όπως είναι ένας κώδικας CFD ή την ακρίβεια των τελικών τους αποτελεσμάτων με άλλους τρόπους εκτός από την σύγκριση με πειράματα που δοκιμάζονται κατά την λειτουργία τους. Όποιος επιθυμεί να χρησιμοποιήσει το CFD σε μία σοβαρή θέση πρέπει να καταλάβει ότι δεν αντικαθιστά πειραματισμούς, αλλά ένα πολύ δυναμικό προσθετικό εργαλείο για τη λύση των προβλημάτων. Η εγκυρότητα ενός κώδικα CFD χρειάζεται υπερβολικά λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με τις οριακές συνθήκες ενός προβλήματος και να παράγει μεγάλους όγκους αποτελεσμάτων. Για να επικυρωθούν αυτά σε μία σημαντική θέση είναι απαραίτητο να παρουσιασθούν εμπειρικά δεδομένα. Αυτό μπορεί να συνεπάγεται με ένα πρόγραμμα μέτρησης ενός σημείου της ταχύτητας μιας ροής, με ανεμόμετρα συσκευής **hot - wire** ή με ανεμόμετρα συσκευής **laser - Doppler**. Όμως εάν το περιβάλλον είναι επίσης εχθρικό για ένα τέτοιο ευαίσθητο είδος εργαστηριακού εξοπλισμού ή εάν αυτό απλά δεν είναι διαθέσιμο, τότε η στατική πίεση και οι μετρήσεις της θερμοκρασίας συμπληρώνονται από το πέρασμα της ροής μέσα από τον στατικό σωλήνα **Pitot** και μπορούν επίσης να είναι χρήσιμοι και να επικυρωθούν μερικές απόψεις για το πεδίο μιας ροής.

Μερικές φορές οι εγκαταστάσεις που χρειάζονται για την πειραματική έρευνα ίσως να μην υπάρχουν (ακόμα), και σ' αυτή τη περίπτωση ο χρήστης του CFD πρέπει να βασιστεί (i) στην προηγούμενη πείρα του, (ii) στις συγκρίσεις με αναλυτικές λύσεις παρόμοιων αλλά απλούστερων ροών και (iii) στις συγκρίσεις με υψηλής ποιότητας πληροφοριών από προσεχτικά σχετιζόμενα προβλήματα που είναι καταγραμμένα στο ειδικό έντυπο. Εξαιρετικές πηγές πληροφόρησης της τελευταίας περίπτωσης μπορούν να βρεθούν στο **TRANSACTIONS OF THE ASME** (συγκεκριμένα το περιοδικό της Ρευστομηχανικής, το περιοδικό της Μηχανικής για αεροστροβίλους και Ενέργειας και το περιοδικό **Heat Transfer**), το περιοδικό **AIAA**, το περιοδικό της Μηχανικής των Ρευστών και της ενέργειας του **I Mech E**.

Ο υπολογισμός των CFD περιλαμβάνει και τη δημιουργία μιας σειράς αριθμών όπου συγκροτούν μια ρεαλιστική προσέγγιση ενός πραγματικού ζωντανού συστήματος.

Ένα από τα πλεονεκτήματα που έχει ο χρήστης του CFD είναι μια σχεδόν άπειρη επιλογή του αριθμού λεπτομερειών των αποτελεσμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσουμε τη μαθηματική βάση για ένα γενικά κατανοητό μοντέλο για τη ροή ρευστών και μετάδοση θερμότητας από τις βασικές αρχές της διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας. Αυτό οδηγεί στις βασικές εξισώσεις ροής ρευστών και στην ανάπτυξη των απαραίτητων βοηθητικών συνθηκών, αρχικές και οριακές συνθήκες. Τα κύρια θέματα που καλύπτονται σε αυτό το κεφάλαιο είναι:

- Η παραγωγή του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDEs) που διέπουν τις ροές στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, z, y) .
- Θερμοδυναμικές εξισώσεις κατάστασης.
- Μοντέλο του Νεύτωνα για ιξώδεις τάσεις που οδηγούν στις εξισώσεις Navier- Stokes
- Κοινά ανάμεσα στις βασικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs) και ο ορισμός της εξίσωσης μεταφοράς.
- Ολοκληρωματικοί τύποι της εξίσωσης μεταφοράς σε ένα διάστημα πεπερασμένου χρόνου και σε έναν πεπερασμένο όγκο ελέγχου.
- Κατάταξη των φυσικών συμπεριφορών σε τρεις κατηγορίες: ελλειπτικές, παραβολικές, υπερβολικές.
- Κατάλληλες οριακές συνθήκες για κάθε κατηγορία.
- Κατάταξη της ροής ρευστών.
- Βοηθητικές συνθήκες των ιξώδων ροών των ρευστών.
- Προβλήματα στον καθορισμό οριακών συνθηκών σε υψηλές ροές των αριθμών Reynolds και Mach.

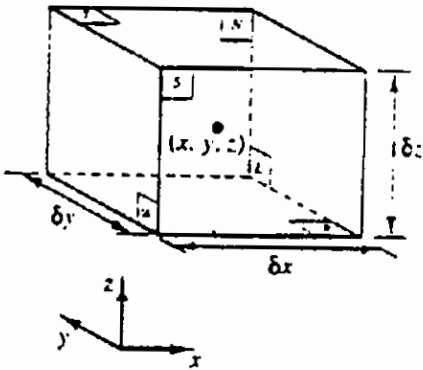
2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ.

Οι βασικές εξισώσεις της ροής ρευστών αντιπροσωπεύουν τον μαθηματικό τρόπο έκφρασης των νομών διατήρησης στη φυσική.

- Η μάζα ενός ρευστού διατηρείται.
- Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται σε ρευστό σωματίδιο ($2^{\text{ος}}$ νόμος του Νεύτωνα).
- Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, ισούται με το άθροισμα του ποσοστού της θερμότητας συν το ποσοστό του έργου που παράγεται σε ρευστό σωματίδιο ($1^{\text{ος}}$ νόμος Θερμοδυναμικής).

Το ρευστό θα θεωρηθεί ως συνεχές. Για την ανάλυση των ροών ρευστού σε μακροσκοπικές κλίμακες μήκους (π.χ 1μm και μεγαλύτερο) η μοριακή δομή της ύλης και οι μοριακές κινήσεις μπορούν να αγνοηθούν. Περιγράφουμε την συμπεριφορά του ρευστού σε σχέση με μακροσκοπικές ιδιότητες, όπως η ταχύτητα, η πίεση, η πυκνότητα και η θερμοκρασία, και τα παράγωγα τους στο χώρο και χρόνο. Αυτά μπορούν να θεωρηθούν ως οι μέσοι όροι αρκετά μεγάλων αριθμών μορίων. Ένα ρευστό σωματίδιο ή σημείο στο ρευστό είναι, επομένως, το μικρότερο πιθανό στοιχείο του ρευστού του οποίου οι μακροσκοπικές ιδιότητες δεν επηρεάζονται από ξεχωριστά μόρια.

Εξετάζουμε, λοιπόν, ένα τόσο μικρό ρευστό στοιχείο με πλευρές δx , δy και δz (Εικόνα 2.1):



Εικόνα 2.1. Στοιχείο Ρευστού για νόμους διατήρησης

Οι έξι όψεις ονομάζονται N, S, E, W, T, B, δηλαδή βορράς, νότος, ανατολή, δύση, πάνω και κάτω.

Οι θετικές κατευθύνσεις στους άξονες συντεταγμένων επίσης δίδονται.

Το κέντρο του στοιχείου εντοπίζεται στη θέση (xyz) . Ένας συστηματικός λογαριασμός αλλαγών στον όγκο, ορμή και ενέργεια του ρευστού στοιχείου λόγω της ροής του ρευστού πάνω στα όρια και, εκεί όπου είναι απαραίτητο, λόγω της δραστηριότητας των πηγών μέσα στο στοιχείο, οδηγεί στις εξισώσεις ροής ρευστών.

Όλες οι ρευστές ιδιότητες είναι λειτουργίες του χώρου και του χρόνου και έτσι είναι αυστηρώς απαραίτητο να γράψουμε $\rho(x,y,z,t)$, $p(x,y,z,t)$, $t(x,y,z,t)$, $u(x,y,z,t)$ για την πυκνότητα, την πίεση, θερμοκρασία και το διάνυσμα της ταχύτητας αντίστοιχα.

Για να αποφύγουμε μια υπερβολικά μεγάλη επεξήγηση δεν θα δηλώσουμε κατηγορηματικά την εξάρτηση των συντεταγμένων χώρου και χρόνου. Για παράδειγμα, η πυκνότητα στο κέντρο (x,y,z) ενός ρευστού στοιχείου στο χρόνο t , φαίνεται από το ρ και x παραγωγό του, ας πούμε, της πίεσης p στα (x,y,z) και του χρόνου t με $\partial p/\partial x$. Αυτή η πρακτική θα συνεχιστεί με όλες τις ιδιότητες.

Το στοιχείο που εξετάζουμε είναι τόσο μικρό που οι ρευστές ιδιότητες στις όψεις μπορούν να εκφραστούν ακριβώς με τους δυο πρώτους όρους του αναπτύγματος της σειράς Taylor. Έτσι για παράδειγμα, η πίεση στις όψεις E (ανατολή) και W (δύση) οι οποίες και οι δυο είναι σε απόσταση $1/2 \delta x$ από το κέντρο του στοιχείου, μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$p - \frac{\theta p}{\theta x} \frac{1}{2} \delta x \quad \text{και} \quad p + \frac{\theta p}{\theta x} \frac{1}{2} \delta x$$

2.1.1 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Το πρώτο βήμα στην παραγωγή της εξίσωσης μαζικής διατήρησης είναι να γραφεί η ισορροπία μάζας για το ρευστό στοιχείο.

Ρυθμός αύξησης της μάζας σε ένα ρευστό στοιχείο	=	Καθαρός Ρυθμός της ροής μάζας σε ρευστό στοιχείο
---	---	--

Ο ρυθμός αύξησης της μάζας στο ρευστό στοιχείο είναι:

$$\frac{\theta}{\theta t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\theta \rho}{\theta t} \delta x \delta y \delta z \quad (2.1)$$

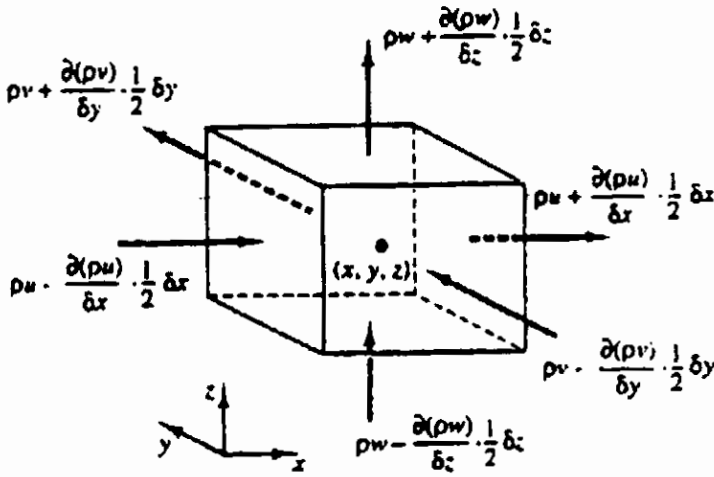
Τώρα πρέπει να λογαριάσουμε το ρυθμό ροής της μάζας πάνω από την όψη στοιχείου το οποίο δίνεται από το προϊόν πυκνότητας, εμβαδόν (επιφάνειας) και τη συνιστώσα ταχύτητας που είναι ομαλή προς την όψη. Από την εικόνα 2.2 φαίνεται ότι ο καθαρός ρυθμός ροής της μάζας μέσα στο στοιχείο πάνω από τα όρια του δίνεται με:

$$\begin{aligned} & (\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x) \delta y \delta z - (\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x) \delta y \delta z \\ & + (\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y) \delta x \delta z - (\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y) \delta x \delta z \\ & + (\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z) \delta x \delta y - (\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z) \delta x \delta y \end{aligned} \quad (2.2)$$

Οι ροές που κατευθύνονται μέσα στο στοιχείο παράγουν μια αύξηση της μάζας μέσα στο στοιχείο και παίρνουν θετικό πρόσημο και εκείνες οι ροές που φεύγουν / εγκαταλείπουν το στοιχείο δίνονται με αρνητικό πρόσημο.

Ο ρυθμός αύξησης της μάζας μέσα στο στοιχείο (2.1) ισούται με τον καθαρό ρυθμό της ροής της μάζας μέσα στο στοιχείο πάνω από τις όψεις του (2.2). Όλες οι συνθήκες της τελικής ισορροπίας της μάζας τοποθετούνται στο αριστερό σημείο του σύμβολου ίσον και το αποτέλεσμα διαιρείται με το στοιχείο μάζας $\delta x \delta y \delta z$. Αυτό αποδίδει:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$



Εικόνα 2.2. Μάζα ρέει μέσα και έξω από το στοιχείο του ρευστού.

Η σε πιο συμπαγή μορφή ανύσματος.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.4)$$

Η εξίσωση (2.4) είναι η εξίσωση συνέχειας ενός συμπιεστού ρευστού σε ένα σημείο στις 3 διαστάσεις. Ο πρώτος όρος στην αριστερή πλευρά είναι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας στο χρόνο (μάζα ανά μονάδα όγκου). Ο δεύτερος όρος περιγράφει την καθαρή ροή της μάζας έξω από το στοιχείο πάνω από τα όρια και ονομάζεται όρος μεταφοράς. Για ένα ρευστό που δεν είναι συμπιεστό (π.χ ένα υγρό) η πυκνότητα ρ είναι σταθερή και η εξίσωση (2.4) γίνεται:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

Η πιο αναλυτικά:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

2.1.2 Ρυθμοί μεταβολής ακολουθώντας ένα ρευστό σωματίδιο και για ένα ρευστό στοιχείο

Οι νόμοι διατήρησης ορμής και ενέργειας δηλώνουν σχετικά τις αλλαγές ιδιοτήτων ενός ρευστού σωματιδίου. Κάθε ιδιότητα τέτοιου είδους σωματιδίου είναι παράγοντας του σημείου (x, y, z) , του σωματιδίου και του χρόνου t . Ας επιτρέψουμε την τιμή μιας ιδιότητας ανά μονάδα μάζας να εμφανισθεί με ϕ . Το σύνολο η ουσιαστικό παραγωγό του ϕ αντίστοιχα με το χρόνο που ακολουθείται από ρευστό σωματίδιο και συμβολίζεται με: $D\phi/dt$ είναι:

$$\frac{D\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Ένα ρευστό σωματίδιο ακολουθεί τη ροή, έτσι έχουμε: $dx/dt=u$, $dy/dt=v$ και $dz/dt=w$. Τώρα το ουσιαστικό παραγωγό του ϕ δίνεται με:

$$\boxed{\frac{D\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \text{grad } \phi} \quad (2.7)$$

Το $D\phi/dt$ καθορίζει το ρυθμό μεταβολής της ιδιότητας ϕ ανά μονάδα μάζας. Στην περίπτωση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας ενδιαφερόμαστε να αναπτύξουμε εξισώσεις για ρυθμούς μεταβολής ανά μονάδα όγκου. Ο ρυθμός μεταβολής της ιδιότητας ϕ ανά μονάδα όγκου για ένα ρευστό σωματίδιο δίνεται από το προϊόν του $D\phi/Dt$ επι πυκνότητα ρ , έτσι:

$$\boxed{\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \text{grad } \phi \right)} \quad (2.8)$$

Οι πιο χρήσιμοι από τους νόμους διατήρησης για τον υπολογισμό της ροής ρευστού. σχετίζονται με τις μεταβολές μιας ρευστής ιδιότητας για ένα ρευστό σωματίδιο το οποίο είναι σταθερό στο χώρο. Η σχέση ανάμεσα στο ουσιαστικό παραγωγό του ϕ , που ακολουθεί ρευστό στοιχείο και οι βαθμοί αλλαγής του ϕ , για ρευστό στοιχείο τώρα έχει δημιουργηθεί. Η εξίσωση της μαζικής διατήρησης περιέχει τη μάζα ανά μονάδα όγκου (π.χ την πυκνότητα ρ) ως διατηρημένη ποσότητα. Το σύνολο του ρυθμού μεταβολής της πυκνότητας και ο όρος μεταφοράς στην εξίσωση της διατήρησης της μάζας (2.4) για ένα ρευστό στοιχείο είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u)$$

Η γενίκευση αυτών των όρων για μια αυθαίρετη ιδιότητα διατήρησης είναι:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi u)} \quad (2.9)$$

Η εξίσωση (2.9) εκφράζει το ρυθμό αλλαγής του ϕ ανά μονάδα όγκου συν την καθαρή ροή του ϕ του ρευστού στοιχείου ανά μονάδα όγκου. Τώρα το ξαναγράφουμε για να απεικονίσουμε τη σχέση του με το ουσιαστικό παραγωγό του ϕ :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi u) = \rho \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \text{grad}\phi \right] + \phi \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) \right] = \rho \frac{D\phi}{Dt}} \quad (2.10)$$

Ο όρος $\phi[\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho u)]$ ισούται με το μηδέν λόγω της μαζικής διατήρησης (2.4). Με λόγια, η σχέση (2.10) δηλώνει:

Ρυθμός αύξησης του Φ του ρευστού στοιχείου	+	Καθαρός βαθμός ροής του Φ έξω από το ρευστό στοιχείο	=	Ρυθμός αύξησης του Φ για ρευστό σωματίδιο
---	---	---	---	---

Για να κατασκευαστούν τα τρία στοιχεία της εξίσωσης ορμής και της εξίσωσης ενέργειας οι σχετικές εισαγωγές του Φ και οι ρυθμοί αλλαγής τους ανά μονάδα όγκου όπως εξηγείται στο (2.8) και (2.10) δίνονται παρακάτω:

x- ορμή	u	$\rho \frac{Du}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u u)$
y-ορμή	v	$\rho \frac{Dv}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v u)$
z-ορμή	w	$\rho \frac{Dw}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w u)$
Ενέργεια	E	$\rho \frac{DE}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E u)$

Μαζί και ο τύπος διατήρησης ή απόκλισης όπως και ο τύπος μη-διατήρησης του ρυθμού της αλλαγής μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εναλλακτικές λύσεις για να εκφραστεί η διατήρηση μιας φυσικής ποσότητας. Οι τύποι μη - διατήρησης χρησιμοποιούνται στα παράγωγα της εξίσωσης ορμής και στην εξίσωση ενέργειας για μια ροή ρευστού στα τμήματα 2.4 και 2.5 για συντομία της εξήγησης και για να δοθεί έμφαση στο ότι οι νόμοι διατήρησης βασικά συλλαμβάνονται ως δηλώσεις που απευθύνονται σε ένα σωματίδιο ενός ρευστού.

2.1.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΟΡΜΗΣ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δηλώνει ότι ο ρυθμός αλλαγής της ορμής ενός ρευστού σωματιδίου ισούται με το σύνολο των δυνάμεων πάνω στο σωματίδιο.

Ρυθμός αύξησης της ορμής ενός ρευστού σωματιδίου	=	Άθροισμα δυνάμεων πάνω στο ρευστό σωματίδιο
--	---	---

Ο ρυθμός αύξησης της x -, y -, και z - ορμής ανά μονάδα όγκου ενός ρευστού σωματιδίου δίνονται από τους τύπους:

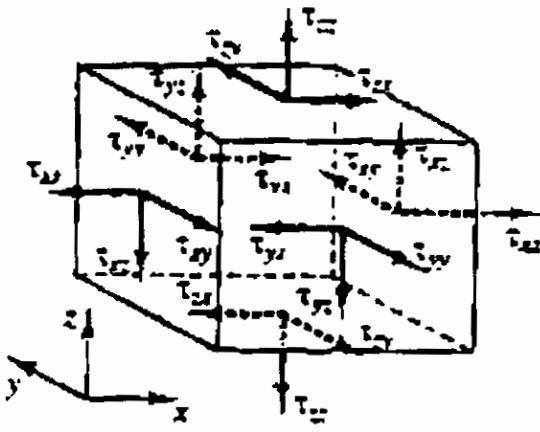
$$\rho \frac{Du}{Dt} , \rho \frac{Dv}{Dt} , \rho \frac{Dw}{Dt} \quad (2.11)$$

Διακρίνουμε δυο είδη δυνάμεων στα ρευστά σωματίδια:

- Επιφανειακές δυνάμεις : δυνάμεις πίεσης, ιξώδεις δυνάμεις
- Βαρυτικές δυνάμεις: δύναμη βαρύτητας, φυγόκεντρος δύναμη, δύναμη Coriolis, ηλεκτρομαγνητική δύναμη

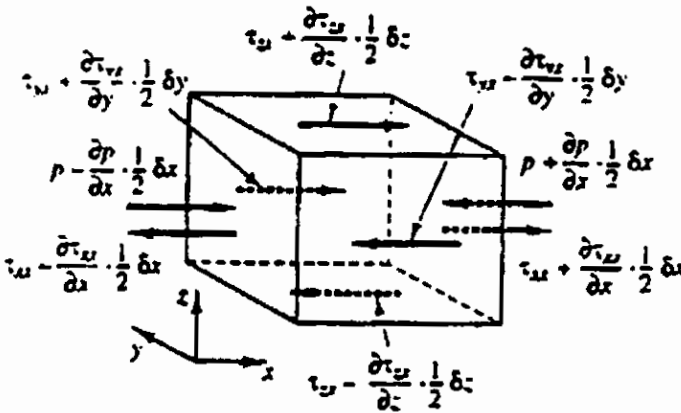
Είναι κοινή πρακτική να τονίζουμε την συμβολή λόγω των επιφανειακών δυνάμεων ως ξεχωριστούς όρους στην εξίσωση ορμής και να συμπεριληφθούν οι επιρροές των βαρυτικών δυνάμεων ως όροι πηγών. Η κατάσταση τάσης ενός ρευστού στοιχείου καθορίζεται ανάλογα από τα 9 στοιχεία τάσης ρευστότητας όπως φαίνονται στην εικόνα 2.3.

Η πίεση, μια κανονική τάση σημειώνεται με p . Οι τάσεις ρευστότητας σημειώνονται με τ . Η συνήθης συντομογραφία τ_{ij} εφαρμόζεται για να φανεί η κατεύθυνση των τάσεων ρευστότητας. Οι δείκτες i και j στο τ_{ij} δείχνουν ότι το στοιχείο τάσης ενεργεί προς την κατεύθυνση j σε μια επιφάνεια ομαλή προς την κατεύθυνση i .



Εικόνα 2.3. Συστατικά τάσεων στα τρεις όψεις του ρευστού σωματιδίου

Αρχικά λαμβάνουμε υπόψη τα στοιχεία x των δυνάμεων λόγω της πίεσης p και στοιχεία πίεσης τ_{xx} , τ_{yx} , τ_{zx} όπως φαίνονται στην εικόνα 2.4. Το μέγεθος μιας δύναμης που προκύπτει από επιφανειακή τάση είναι το προϊόν της τάσης και του εμβαδόν. Οι τάσεις που ευθυγραμμίζονται με τη κατεύθυνση του άξονα συντεταγμένων παίρνουν θετικό πρόσημο και αυτά που βρίσκονται στην αντίθετη κατεύθυνση αρνητικό πρόσημο. Η καθαρή δύναμη στην x - κατεύθυνση είναι το σύνολο των στοιχείων δύναμης που ενεργούν πάνω στο ρευστό στοιχείο.



Εικόνα 2.4. Συστατικά τάσης στην x- διεύθυνση

Στο ζευγάρι των όψεων (E. W) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\
 & + \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\
 & = \left(- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z
 \end{aligned} \tag{2.12a}$$

Η καθαρή δύναμη στη x-κατεύθυνση στις όψεις (N, S) είναι:

$$-(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y) \delta x \delta z + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.12b)$$

Στο τέλος η καθαρή δύναμη στη x - κατεύθυνση στις όψεις T και B δίνεται από την εξίσωση:

$$-(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z) \delta x \delta y + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.12c)$$

Η συνολική δύναμη ανά μονάδα όγκου στο ρευστό λόγω αυτών των επιφανειακών τάσεων ισούται με το σύνολο (2.12a), (2.12b), (2.12c) που διαιρούνται με τον όγκο $\delta x \delta y \delta z$:

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.13)$$

Χωρίς να εξετάζουμε περισσότερο τις βαρυτικές δυνάμεις λεπτομερώς, η ολική τους επιρροή μπορεί να συμπεριληφθεί με τον τύπο S_{Mx} της x - ορμής ανά μονάδα όγκου. Το x - στοιχείο της εξίσωσης της ορμής βρίσκεται ρυθμίζοντας το ρυθμό αλλαγής της x - ορμής του ρευστού σωματιδίου (2.11) να ισούται με την ολική δύναμη στην x - κατεύθυνση πάνω στο στοιχείο λόγω των επιφανειακών τάσεων (2.3) συν το βαθμό αύξησης της x - ορμής λόγω των πηγών:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (2.14a)$$

Δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι το y-στοιχείο της εξίσωσης φοράς δίνεται από :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{My} \quad (2.14b)$$

και το z-στοιχείο της εξίσωσης φοράς από:

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + S_{Mz} \quad (2.14c)$$

Το πρόσθετο που συνδέεται με την πίεση είναι αντίθετο από αυτό που συνδέεται με την κανονική ιξώδη τάση, γιατί η συνηθισμένη αλλαγή στο σύμβολο παίρνει μια τάση εφελκυσμού να είναι η θετική ομαλή τάση έτσι ώστε η πίεση, που είναι και από τον ορισμό μια συμπιεστή κανονική τάση

έχει το πρόσημο το μείον. Οι επιρροές των επιφανειακών τάσεων σαφώς συνυπολογίζονται, οι τύποι των όρων S_{Mx} , S_{My} και S_{Mz} στο (2.14a-c), συμπεριλαμβάνουν συνεισφορές λόγω των βαρυτικών δυνάμεων μόνον. Για παράδειγμα η βαρυτική δύναμη λόγω της βαρύτητας θα διαμορφωνόταν από $S_{Mx}= 0$, $S_{My}= 0$, $S_{Mz}= -\rho g$.

2.1.4 Εξίσωση ενέργειας σε τρεις διαστάσεις

Η εξίσωση ενέργειας παράγεται από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής που δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ενός ρευστού σωματιδίου ισούται με το άθροισμα του ποσοστού της θερμότητας στο ρευστό σωματίδιο συν το ποσοστό του έργου που παράχθηκε στο σωματίδιο.

Ρυθμός αύξησης της ενέργειας ενός ρευστού σωματιδίου	=	Καθαρός ρυθμός της Θερμότητας που προστίθεται στο ρευστό σωματίδιο	+	Καθαρός ρυθμός έργου που παράγεται στο ρευστό σωματίδιο
--	---	--	---	---

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως, θα παραχθεί μια εξίσωση για το ρυθμό αύξησης ενέργειας ενός ρευστού σωματιδίου ανά μονάδα όγκου που δίνεται από:

$$\rho \frac{D E}{D t} \tag{2.15}$$

ΕΡΓΟ ΠΟΥ ΠΑΡΑΓΕΤΑΙ ΑΠΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ο ρυθμός του έργου που παράγεται στο ρευστό σωματίδιο μέσα στο στοιχείο από επιφανειακή τάση είναι ίσο με το προϊόν της δύναμης. Για παράδειγμα, όλες οι δυνάμεις που δίνονται στα (2.12a-c) ενεργούν στην x-κατεύθυνση. Το έργο που παράγεται από αυτές τις δυνάμεις δίνεται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left[\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\tau_{xx} u - \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\tau_{xx} u + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z$$

$$+[-(\tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y) + (\tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y)] \delta x \delta z$$

$$+[-(\tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z) + (\tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z)] \delta x \delta y$$

Ο καθαρός ρυθμός του έργου που παράγεται από αυτές τις δυνάμεις που ενεργούν στην κατεύθυνση δίνεται από:

$$\boxed{\left[\frac{\partial(u(-p + \tau_{xx}))}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z} \quad (2.16a)$$

Στοιχεία επιφανειακής τάσης στην y και z - κατεύθυνση επίσης λειτουργούν στο ρευστό σωματίδιο. Μια επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας δίνει επιπρόσθετους ρυθμούς του έργου που παράγεται στο ρευστό σωματίδιο από αυτές τις επιφανειακές δυνάμεις:

$$\boxed{\left[\frac{\partial(v(-p + \tau_{yy}))}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z} \quad (2.16b)$$

$$\boxed{\left[\frac{\partial(w(-p + \tau_{zz}))}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} \right] \delta x \delta y \delta z} \quad (2.16c)$$

Ο συνολικός ρυθμός έργου που παράγεται ανά μονάδα όγκου στο ρευστό σωματίδιο απ' όλες τις επιφανειακές δυνάμεις δίνεται από το σύνολο των (2.16a-c) και διαιρείται από τον όγκο $\delta x \delta y \delta z$. Οι όροι που συμπεριλαμβάνουν πίεση μπορούν να συγκεντρωθούν μαζί και να γραφτούν πιο συνοπτικά σε τύπο ανύσματος:

$$-\frac{\partial(Up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} = -div(pu)$$

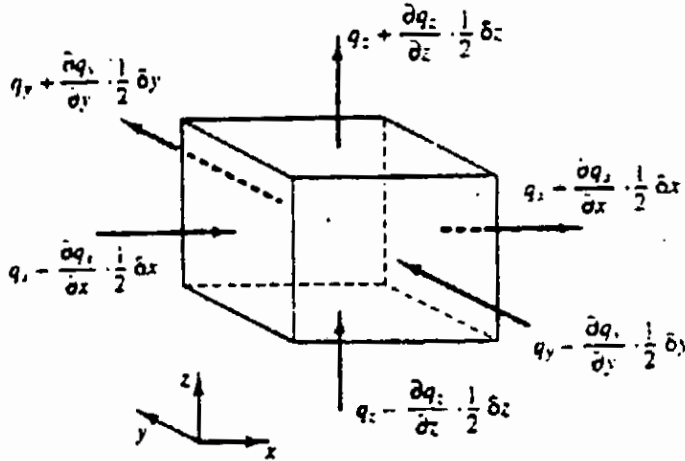
Αυτό αποδίδει τον ακόλουθο συνολικό ρυθμό έργου που παράγεται στο ρευστό σωματίδιο από επιφανειακές τάσεις.

$$[-div(pu)] + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \right]$$

$$+ \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}] \quad (2.17)$$

ΡΟΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΛΟΓΩ ΑΓΩΓΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ.

Το άνυσμα ροής θερμότητας q έχει τρία στοιχεία q_x , q_y , και q_z (εικόνα 2.5).



Εικόνα 2.5. Στοιχεία του ανύσματος ροής θερμότητας

Ο καθαρός ρυθμός της μεταφοράς θερμότητας στο ρευστό σωματίδιο λόγω της ροής θερμότητας στην x - κατεύθυνση δίνεται από τη διαφορά ανάμεσα στο ρυθμό εισφοράς της θερμότητας πάνω από την όψη W και το ρυθμό απώλειας της θερμότητας στη όψη E :

$$\left[\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2.18a)$$

Παρομοίως, οι καθαροί ρυθμοί μετάδοσης θερμότητας στο ρευστό λόγω ροών θερμότητας στην y - και z κατεύθυνση είναι:

$$- \frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad \text{και} \quad - \frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.18b-c)$$

Ο ολικός ρυθμός προστιθέμενης θερμότητας στο ρευστό σωματίδιο ανά μονάδα όγκου, λόγω της ροής θερμότητας πάνω από τα σύνορα του είναι το σύνολο των (2.18 a - c) που διαιρείται με τον όγκο $\delta x \delta y \delta z$.

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\text{div}(q) \quad (2.19)$$

Ο νόμος Fourier για την αγωγή θερμότητας συνδέει τη ροή θερμότητας στην τοπική κλίση θερμοκρασίας. Έτσι:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί σε τύπο ανύσματος όπως φαίνεται:

$$q = -k \text{grad}(T) \quad (2.20)$$

Συνδέοντας την (2.19) και την (2.20) αποδίδει τον τελικό τύπο του ρυθμού της προστιθέμενης θερμότητας στο ρευστό στοιχείο λόγω αγωγής στα όρια των στοιχείων.

$$-\text{div}(q) = \text{div}(k \text{grad}(T)) \quad (2.21)$$

Εξίσωση ενέργειας

Μέχρι τώρα δεν έχουμε καθορίσει τη συγκεκριμένη ενέργεια E ενός ρευστού. Συχνά η ενέργεια ενός ρευστού καθορίζεται ως το σύνολο της εσωτερικής ενέργειας i , κινητικής ενέργειας

$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Αυτός ο καθορισμός δηλώνει ότι το ρευστό

στοιχείο αποθηκεύει την δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας. Επίσης είναι πιθανό να θεωρήσουμε τη βαρυτική δύναμη ως δύναμη, το οποίο λειτουργεί στο ρευστό στοιχείο καθώς κινείται μέσα από το πεδίο της βαρύτητας.

Εδώ θα εξετάσουμε την τελευταία άποψη και θα συμπεριλάβουμε τις επιδράσεις των αλλαγών της δυναμικής ενέργειας ως τυπικό όρο. Όπως προηγουμένως, καθορίσαμε έναν τύπο ενέργειας S_E ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου.

Η διατήρηση ενέργειας του ρευστού σωματιδίου εξασφαλίζεται εξισώνοντας το ρυθμό μεταβολής ενέργειας του ρευστού σωματιδίου (2.15) στο τελικό σύνολο του καθαρού ρυθμού του έργου που παράγεται στο ρευστό σωματίδιο (2.17) και τον καθαρό ρυθμό της προστιθέμενης θερμότητας στο ρευστό (2.21) και τον ρυθμό αύξησης της ενέργειας λόγω των πηγών. Η εξίσωση ενέργειας είναι:

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\text{div}(pu) + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + \text{div}(k\text{grad}(T)) + S_E \quad (2.22)$$

Στην εξίσωση (2.22) έχουμε $E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$. Ενώ η (2.22) είναι μια αρκετά ικανοποιητική εξίσωση ενέργειας, είναι κοινή πρακτική να εξάγουμε τις αλλαγές της (μηχανικής) κινητικής ενέργειας για να αποκτήσουμε μια εξίσωση για εσωτερική ενέργεια i η θερμοκρασία T .

Το τμήμα της εξίσωσης ενέργειας που έχει αποδοθεί στην κινητική ενέργεια μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.14a) της x - ορμής επί το στοιχείο τάχυνσης u , την εξίσωση (2.14b) της y - ορμής επί v και την εξίσωση (2.14c) της z - ορμής επί w προσθέτοντας τα αποτελέσματα όλα μαζί. Φαίνεται ότι αυτό αποδίδει την ακόλουθη εξίσωση διατήρησης για την κινητική ενέργεια:

$$\rho \frac{D[\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)]}{Dt} = -u \cdot \text{grad}(p) + u \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right) + u \cdot S_M \quad (2.23)$$

Αφαιρώντας (2.23) από την (2.22) και καθορίζοντας νέο όρο πηγής ως $S_i = S_E - u \cdot S_M$ αποδίδει την εσωτερική εξίσωση της ενέργειας:

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \text{div}(u) + \text{div}(k\text{grad}(T)) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (2.24)$$

Στην ειδική περίπτωση ενός μη - συμπίεστου ρευστού έχουμε $i=cT$ όπου c είναι η ειδική θερμότητα και $\text{div} u = 0$. Αυτό μας επιτρέπει να ξαναβάλουμε την εξίσωση (2.24), σε εξίσωση θερμοκρασίας.

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \text{div}(k \text{grad}(T)) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (2.25)$$

Για συμπιεστά ρευστά η εξίσωση (2.22) συχνά γράφεται με άλλο τρόπο για να δοθεί εξίσωση ενθαλπίας. Η ειδική ενθαλπία h και η ειδική συνολική ενθαλπία h_o ενός ρευστού καθορίζονται ως εξής:

$$h = i + \frac{P}{\rho} \quad \text{και} \quad h_o = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

Συνδυάζοντας αυτούς τους δυο ορισμούς με την ειδική ενέργεια E έχουμε:

$$h_o = i + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = E + \frac{P}{\rho} \quad (2.26)$$

Αντικατάσταση της (2.26) στην εξίσωση (2.22) και μερική ανακατάταξη αποδίδει την **ολική εξίσωση ενθαλπίας**.

$$\frac{\partial(\rho h_o)}{\partial t} + \text{div}(\rho h_o u) = \text{div}(k \text{grad}(T)) + \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + S_h \quad (2.27)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι εξισώσεις (2.24), (2.25) και (2.27) δεν είναι νέοι επιπλέον νόμοι διατήρησης παρά μόνον εναλλακτικοί τύποι της εξίσωσης ενέργειας (2.22).

2.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Η κίνηση ενός ρευστού σε τρεις διαστάσεις περιγράφεται από ένα σύστημα από πιντε διαφορικές εξισώσεις: διατήρηση μάζας (2.4), εξισώσεις x -, y -, και z - ορμής (2.14a-c) και εξίσωση ενέργειας (2.22).

Ανάμεσα στα άγνωστα είναι τέσσερις θερμοδυναμικές μεταβλητές: ρ , p , i και T . Σ'αυτή τη περιληπτική συζήτηση θα τονίσουμε τη σχέση ανάμεσα σε αυτές τις τέσσερις μεταβλητές. Οι σχέσεις ανάμεσα στις θερμοδυναμικές μεταβλητές μπορούν να αποκτηθούν μέσα από τις υποθέσεις

της **θερμοδυναμικής ισορροπίας**. Οι ταχύτητες των ρευστών μπορεί να είναι μεγάλες, αλλά συνήθως είναι τόσο μικρές που, ενώ οι ιδιότητες του ρευστού σωματιδίου αλλάζουν ταχύτητα από σημείο σε σημείο, το ρευστό μπορεί θερμοδυναμικά να προσαρμοστεί σε νέες συνθήκες τόσο γρήγορα που οι αλλαγές είναι πραγματικά ακαριαίες. Πάντως, το ρευστό πάντοτε παραμένει σε θερμοδυναμική ισορροπία. Οι μόνες εξαιρέσεις είναι συγκεκριμένες ροές με δυνατά κρουστικά κύματα, αλλά ακόμα και μερικά από αυτά συχνά υπολογίζονται από παραδοχές ισορροπιών.

Μπορούμε να περιγράψουμε την κατάσταση μιας αλλαγής σε θερμοδυναμική ισορροπία με μόνο δυο μεταβλητές κατάστασης. Εξισώσεις κατάστασης σχετίζουν τις άλλες μεταβλητές με τις δυο μεταβλητές κατάστασης. Αν χρησιμοποιήσουμε ρ και T ως μεταβλητές κατάστασης έχουμε εξισώσεις κατάστασης για την πίεση p και συγκεκριμένη εσωτερική ενέργεια i :

$$p = p(\rho, T) \quad i = i(\rho, T) \quad (2.28)$$

Για ένα τέλειο αέριο οι ακόλουθες πολύ γνωστές εξισώσεις κατάστασης είναι χρήσιμες:

$$p = \rho R T \quad i = C_v T \quad (2.29)$$

Η υπόθεση της θερμοδυναμικής ισορροπίας εξαλείφει όλες εκτός από δυο μεταβλητές κατάστασης. Στη ροή των συμπιεστών ρευστών οι εξισώσεις κατάστασης παρέχουν την σύνδεση μεταξύ της εξίσωσης ενέργειας από τη μια μεριά και διατήρηση μάζας και εξισώσεις ορμής από την άλλη. Η σύνδεση βγαίνει από την πιθανότητα των μεταβολών πυκνότητας ως αποτέλεσμα των μεταβολών πίεσης και θερμοκρασίας στο πεδίο ροής.

Υγρά και αέρια που ρέουν σε χαμηλές ταχύτητες δρουν ως μη συμπιεστά ρευστά. Χωρίς τις μεταβολές της πυκνότητας δεν υπάρχει σύνδεση ροή μεταξύ της εξίσωσης ενέργειας; στη μια μεριά και των εξισώσεων διατήρησης της μάζας και της ορμής στην άλλη. Το πεδίο ροής μπορεί συχνά να λυθεί λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και της ορμής. Η εξίσωση ενέργειας μπορεί να αναλυθεί παραπλεύρως των άλλων μόνον όταν το πρόβλημα εμπλέκεται με την μετάδοση θερμότητας.

2.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES ΓΙΑ ΕΝΑ ΝΕΥΤΩΝΙΟ ΡΕΥΣΤΟ

Οι γενικές εξισώσεις συμπεριλαμβάνουν και περαιτέρω άγνωστα, στοιχεία τάσεων ιξώδους τ_{ij} . Οι πιο χρήσιμοι τύποι των εξισώσεων διατήρησης για ροές ρευστών αποκτώνται εισάγοντας ένα κατάλληλο μοντέλο για τ_{ij} . Σε πολλές ροές ρευστών οι ιξώδεις τάσεις μπορούν να εκθραστούν ως

λειτουργίες του ρυθμού έντασης μιας τοπικής παραμόρφωσης. Σε τρισδιάστατες ροές η τιμή της τοπικής παραμόρφωσης συνδέεται από την τιμή της γραμμικής παραμόρφωσης και την τιμή της ογκομετρικής παραμόρφωσης.

Όλα τα αέρια και πολλά υγρά θεωρούμε ότι είναι ισοτροπικά. Η τιμή της γραμμικής παραμόρφωσης ενός ρευστού στοιχείου έχει εννέα στοιχεία σε τρεις διαστάσεις έξι από τα οποία είναι ανεξάρτητα σε ισοτροπικά ρευστά. Σημειώνονται με το σύμβολο e_{ij} . Το τελικό σύστημα είναι όμοιο με αυτό από τα στοιχεία τάσεων (βλέπε 2.4). Υπάρχουν τρία γραμμικά επιμηκυνόμενα στοιχεία παραμόρφωσης.

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.30a)$$

Υπάρχουν επίσης έξι διατμητικά γραμμικά στοιχεία παραμόρφωσης.

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.30b)$$

Η ογκομετρική παραμόρφωση δίνεται από :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}(u) \quad (2.30c)$$

Σε ένα Νευτώνιο ρευστό οι ιξώδεις τάσεις είναι αναλογικές στους ρυθμούς της παραμόρφωσης. Ο τρισδιάστατος τύπος του νόμου του Νεύτωνα ιξώδους των συμπιεστών ροών συμπεριλαμβάνει δυο σταθερές αναλογίας: την πρώτη (δυναμικό ιξώδες) μ , να συνδεθούν τάσεις στην γραμμική παραμόρφωση και το δεύτερο ιξώδες λ , για να συνδέσει τάσεις με την ογκομετρική παραμόρφωση. Τα εννέα στοιχεία τάσης ιξώδους των οποίων τα έξι είναι ανεξάρτητα είναι:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div}(u) \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \text{div}(u) \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \text{div}(u)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.31)$$

Δεν γνωρίζουμε πολλά για το δεύτερο ιξώδες λ επειδή η επιρροή είναι μικρή πρακτικά. Για τα αέρια ένας καλός, εφαρμοσμένος υπολογισμός μπορεί να αποκτηθεί παίρνοντας τη τιμή

$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ (Schlichting 1979). Τα υγρά είναι μη - συμπιεστά έτσι ώστε η εξίσωση της διατήρησης

της μάζας να είναι $\text{div } u = 0$ και οι ιξώδεις τάσεις είναι ακριβώς δυο φορές μεγαλύτερες του τοπικού ρυθμού γραμμικής παραμορφώσεως φορές τη δυναμική παραμόρφωση.

Αντικατάσταση των παραπάνω τάσεων διάτμησης (2.31) στις (2.14a-c) αποδίδει τις αποκαλούμενες εξισώσεις Navier-Stokew που ονομάστηκαν από δυο επιστήμονες του 19^{ου} αιώνα και επιλύθηκαν ανεξάρτητα:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div}(u) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{M_x} \quad (2.32a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \text{div}(u) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{M_y} \quad (2.32b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \text{div}(u) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{M_z} \quad (2.32c)$$

Συχνά είναι χρήσιμο να ανακατατάξουμε τους όρους της ιξώδους τάσεως όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div}(u) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \text{div}(u)) = \text{div}(\mu \text{grad}(u)) + s_{M_x} \end{aligned}$$

Οι ιξώδεις τάσεις στις εξισώσεις των στοιχείων y- και z- μπορούν να διατυπωθούν με παρόμοιο τρόπο. Προσπαθούμε να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις ορμής, “κρύβοντας” τις δυο μικρότερες εισφορές στους όρους της τάσης ρευστότητας στον τύπο ορμής. Καθορίζουμε έναν νέο τύπο με:

$$S_M = S_M + s_M \quad (2.33)$$

όπου οι εξισώσεις NAVIER - STOKES μπορούν να γραφτούν με τον πιο χρήσιμο τύπο για την ανάπτυξη της μεθόδου πεπερασμένου όγκου:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div} (\mu \text{grad} (u)) + S_{M_x} \quad (2.34a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div} (\mu \text{grad} (v)) + S_{M_y} \quad (2.34b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div} (\mu \text{grad} (w)) + S_{M_z} \quad (2.34c)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του Νεύτωνα για τις ιξώδεις τάσεις στην εξίσωση εσωτερικής ενέργειας (2.24) αποκτούμε μετά από κάποια ανακατάταξη.

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \text{div}(u) + \text{div}(k \text{grad}(T)) + \Phi + S, \quad (2.35)$$

Όλα τα αποτελέσματα λόγω των τάσεων ιξώδους σε αυτή την εξίσωση εσωτερικής ενέργειας, περιγράφονται από τη έκφραση του όρου Φ , η οποία μετά από σημαντικές αλγεβρικές πράξεις, μπορεί να φανεί να ισούται με:

$$\begin{aligned} \Phi = & \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\text{div}(u))^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Η έκφραση αυτή είναι μη - αρνητική αφού συμπεριλαμβάνει μόνο τετραγωνισμένους όρους και αντιπροσωπεύει έναν τύπο εσωτερικής ενέργειας λόγω του έργου παραμόρφωσης στο ρευστό σωματίδιο. Αυτό το έργο εξάγεται από τον μηχανικό παράγοντα το οποίο προκαλεί την κίνηση και μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια η θερμότητα.

2.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΟΗΣ ΕΝΟΣ ΡΕΥΣΤΟΥ.

Για να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε μέχρι τώρα, αναφέρουμε στον πίνακα 2.1 τη μορφή διατήρησης ή μορφή απόκλισης του συστήματος των εξισώσεων που διέπει την χρόνο - εξαρτημένη τρισδιάστατη ροή ρευστού και την μετάδοση της θερμότητας ενός συμπιεστού Νευτώνιου ρευστού.

Μάζα	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0$	(2.4)
X – ορμή	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad}(u)) + S_{M_x}$	(2.37a)
Y – ορμή	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad}(v)) + S_{M_y}$	(2.37b)
Z – ορμή	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w u) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad}(w)) + S_{M_z}$	(2.37c)
Εσωτερική ενέργεια	$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \text{div}(\rho i u) = -p \text{div}(u) + \text{div}(k \text{grad}(T)) + \Phi + S_i$	(2.38)
Εξίσ. Κατάστασης	$p = p(\rho, T)$ και $i = i(\rho, T)$	(2.28)
	π.χ για ιδανικά αέρια $p = \rho R T$ και $i = C_v T$	(2.29)

Πίνακας 2.1 Κυρίαρχες εξισώσεις της ροής ενός συμπιεστού Νευτωνικού ρευστού.

Ο όρος πηγής ορμής S_M και η συνάρτηση Φ καθορίζονται από τις εξισώσεις (2.33) και (2.36) αντίστοιχα.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η υπόθεση της θερμοδυναμικής ισορροπίας της παραγράφου 2.2 έχει συμπληρώσει τις 5 εξισώσεις ροής (PDEs) με δυο περαιτέρω αλγεβρικές εξισώσεις. Η περαιτέρω εισαγωγή του Νευτωνικού μοντέλου, η οποία εκφράζει τις τάσεις των ρευστών από την άποψη του βαθμού κλίσης των στοιχείων ταχύτητας έχει σαν αποτέλεσμα ένα σύστημα επτά εξισώσεων με επτά αγνώστους. Με ένα ίσο αριθμό εξισώσεων και άγνωστων αυτό το σύστημα έχει κλείσει μαθηματικά π.χ μπορεί να λυθεί με τη προϋπόθεση ότι συμπεριλαμβάνονται κατάλληλες βοηθητικές συνθήκες, κύριες και οριακές συνθήκες.

2.5 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Φαίνεται καθαρά από τον πίνακα 2.1 ότι υπάρχουν συγκεκριμένα κοινά ανάμεσα των διάφορων εξισώσεων. Εάν εισάγουμε ένα γενικό παράγοντα ϕ , ο συντηρητικός τύπος όλων των εξισώσεων των ρευστών ροών, συμπεριλαμβανομένου των εξισώσεων μονομετρικών ποσοτήτων όπως η θερμοκρασία και η συγκέντρωση ρυπαντών κ.λ.π., μπορούν να γραφτούν κατά χρήσιμο τρόπο ως εξής:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi u) = \text{div}(\Gamma \text{grad}(\Phi)) + S_{\Phi} \quad (2.39)$$

Με λόγια είναι:

Ρυθμός αύξησης του Φ ενός ρευστού στοιχείου	+	Καθαρός ρυθμός της ροής του Φ έξω από το ρευστό στοιχείο	=	Ρυθμό αύξησης του Φ λόγω διάχυσης	+	Ρυθμό αύξησης του Φ λόγω πηγών
---	---	--	---	--	---	---

Η εξίσωση (2.39) είναι η λεγόμενη εξίσωση μεταφοράς της ιδιότητας Φ . Τονίζει καθαρά τις ποικίλες διαδικασίες μεταφοράς: Ο όρος ρυθμός μεταβολής και ο συμβατικός όρος στην αριστερή μεριά και ο διαχυτικός όρος (Γ = συντελεστής διάχυσης) και ο όρος της πηγής, αντίστοιχα στο δεξί μέρος. Για να παρουσιάσουμε τα κοινά χαρακτηριστικά, έπρεπε βέβαια να κρύψουμε τους όρους που δεν μοιράζονται οι εξισώσεις στους όρους των πηγών. Σημειώστε ότι οι εξισώσεις (2.39) μπορούν να μετατραπούν έτσι ώστε να λειτουργήσουν για την εξίσωση εσωτερικής ενέργειας αλλάζοντας το i σε T με μια εξίσωση κατάστασης.

Η εξίσωση (2.39) χρησιμοποιείται ως το αρχικό σημείο στις υπολογιστικές διαδικασίες στη μέθοδο πεπερασμένου όγκου ρυθμίζοντας το Φ να ισούται με u , v , w και i (ή T ή h_0) και επιλέγοντας τις κατάλληλες τιμές για τον συντελεστή διάχυσης, Γ και τους όρους των πηγών, παίρνοντας τους ειδικούς τύπους από τον πίνακα 2.1 για κάθε μια από τις 5 διαφορικές εξισώσεις για την διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας.

Το βήμα κλειδί της μεθόδου πεπερασμένου όγκου είναι η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.39) πάνω σε ένα τρισδιάστατο ελεγχόμενο όγκο (CV):

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi u) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad}(\phi)) dV + \int_{CV} S_{\Phi} dV \quad (2.40)$$

Τα ολοκληρώματα όγκου στον δεύτερο όρο στην αριστερή πλευρά, ο συντηρητικός όρος και στον πρώτο όρο στη δεξιά πλευρά, ο διαχυτικός όρος ξαναγράφονται ως ολοκληρώματα πάνω από όλη τη δεσμευμένη επιφάνεια του ελεγχόμενου όγκου χρησιμοποιώντας τη θεωρία απόκλισης του GAUSS. Για ένα άνυσμα a αυτή η θεωρία δηλώνει

$$\int_{CV} \text{div} (a) dV = \int_A n \cdot a dA \quad (2.41)$$

Η φυσική ερμηνεία του $n \cdot a$ είναι το στοιχείο ενός ανύσματος a προς την κατεύθυνση του ανύσματος n που είναι ομαλό στη στοιχειώδη επιφάνεια dA . Έτσι το ολοκλήρωμα μιας απόκλισης ενός ανύσματος a πάνω από ένα όγκο είναι ίσο με το στοιχείο a στη κατεύθυνση που είναι ομαλή προς την επιφάνεια που δεσμεύει τον όγκο που αθροίζεται (ολοκληρώνοντας) πάνω από όλη τη δεσμευμένη επιφάνεια A .

Εφαρμόζοντας τη θεωρία απόκλισης του CAUSS, η εξίσωση (2.40) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho \phi dV \right) + \int_A n \cdot (\rho \phi u) dA = \int_A n \cdot (\Gamma \text{grad}(\phi) dA) + \int_{CV} S_\phi dV \quad (2.42)$$

Η σειρά της ολοκλήρωσης και του διαφορισμού έχει αλλάξει στον πρώτο όρο στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης (2.42), για να απεικονιστεί η φυσική της έννοια. Αυτός ο όρος δηλώνει το ρυθμό μεταβολής της συνολικής ποσότητας της ρευστής ιδιότητας ϕ στον ελεγχόμενο όγκο. Το γινόμενο $n \cdot (\rho \phi u)$ εκφράζει την ιδιότητα ϕ μιας ροής ενός στοιχείου λόγω της ροής ρευστού παραπλεύρως του εξωτερικού ομαλού ανύσματος n , έτσι ο δεύτερος όρος στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης (2.42), ο όρος μεταφοράς είναι λοιπόν η καθαρή τιμή μείωσης της ρευστής ιδιότητας ϕ του ρευστού στοιχείου λόγω της διάδοσης θερμότητας.

Μια διαχυτική ροή είναι θετική προς την κατεύθυνση του a ενώ κατά τον βαθμό κλίσης της ρευστής ιδιότητας ϕ , π.χ. κατά την κατεύθυνση $-\text{grad } \phi$. Για παράδειγμα η θερμότητα ανάγεται προς την κατεύθυνση αρνητικών βαθμών κλίσεων θερμοκρασίας. Έτσι το γινόμενο $n \cdot (-\Gamma \text{grad } \phi)$ είναι το στοιχείο διαχυτικής ροής προς το εξωτερικό ομαλό άνυσμα και έτσι έξω από το ρευστό στοιχείο.

Παρομοίως το προϊόν $n \cdot (\Gamma \cdot \text{grad } \phi)$, το οποίο είναι ίσο με $\Gamma \cdot (-n \cdot (-\text{grad } \phi))$ μπορεί να ερμηνευτεί ως μια θετική διαχυτική ροή προς την κατεύθυνση του εσωτερικού ομαλού ανύσματος $-n$, π.χ. μέσα στο ρευστό στοιχείο. Ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (2.42), ο διαχυτικός όρος, συνδέεται με μια ροπή μέσα στο στοιχείο και αντιπροσωπεύει την καθαρή διατιμή αύξησης της ρευστής ιδιότητας ϕ του ρευστού λόγω της διάχυσης. Ο τελικός όρος στη δεξιά πλευρά αυτής της εξίσωσης δίνει τη τιμή αύξησης της ιδιότητας ϕ ως αποτέλεσμα των πηγών μέσα στο ρευστό στοιχείο. Με λόγια, η σχέση (2.42) για το ρευστό στον ελεγχόμενο όγκο, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

		Καθαρό ρυθμό αύξησης του ϕ λόγω μεταφοράς πάνω από τα όρια.	=	Ρυθμός αύξησης του ϕ λόγω διάχυσης πάνω από τα όρια.	+	Καθαρός ρυθμός δημιουργίας του ϕ .
Ρυθμός αύξησης του ϕ .	+					

Αυτή η συζήτηση διευκρινίζει ότι η ολοκλήρωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων παράγει μια δήλωση για τη διατήρηση μιας ρευστής ιδιότητας για ένα πεπερασμένου μεγέθους (μακροσκοπικά) ενός ελεγχόμενου όγκου.

Σε προβλήματα σταθερής κατάστασης ο όρος του ρυθμού μεταβολής της εξίσωσης (2.42) ισούται με μηδέν. Αυτό οδηγεί στον ολοκληρωματικό τύπο της εξίσωσης σταθερής μεταφοράς

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad}(\varphi) dA) + \int_{CV} S_\varphi dV \quad (2.43)$$

Σε προβλήματα που εξαρτώνται από τον χρόνο, είναι επίσης απαραίτητο να ολοκληρώσουμε σε σχέση με το χρόνο t , πάνω σε ένα μικρό διάστημα, Δt , από t μέχρι $t + \Delta t$. Αυτό αποδίδει τον πιο γενικό ολοκληρωμένο τύπο για την εξίσωση μεταφοράς.

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} (\rho \varphi) dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dA dt \\ & = \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma_\varphi \text{grad}(\varphi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{CV} S_\varphi dV dt \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.6 ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

Τώρα που έχουν παραχθεί οι εξισώσεις διατήρησης για τις ροές ρευστών, ήρθε η στιγμή να στρέψουμε τη προσοχή μας στο θέμα των αρχικών οριακών συνθηκών, οι οποίες χρειάζονται σε συνδυασμό με τις εξισώσεις για να κατασκευάσουμε ένα καλοστημένο μαθηματικό πρότυπο της ροής ρευστού. Πρώτα θα ξεχωρίσουμε δύο κύριες κατηγορίες φυσικής συμπεριφοράς.

- Προβλήματα ισορροπίας.
- Προβλήματα διάδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

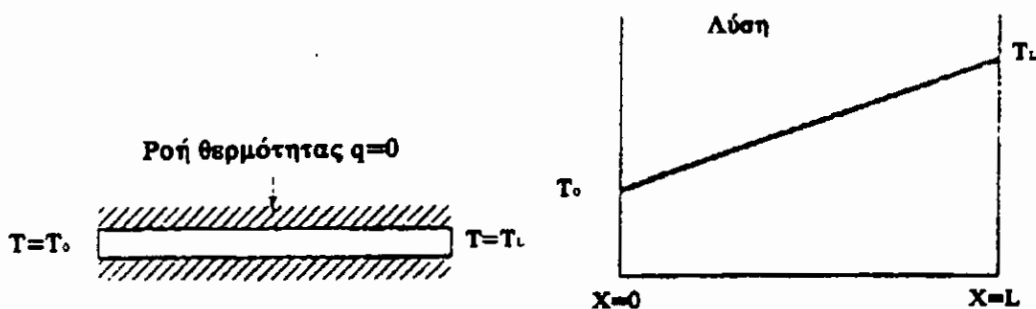
Τα προβλήματα της πρώτης κατηγορίας, είναι περιπτώσεις σταθερής κατάστασης, π.χ. η σταθερή κατάσταση της κατανομής της θερμοκρασίας, σε μια ράβδο στερεού υλικού, η κατανομή της τάσης ισορροπίας ενός στερεού αντικειμένου κάτω από ένα εφαρμοσμένο φορτίο, καθώς και πολλές σταθερές ροές ρευστών. Αυτές και πολλά άλλα προβλήματα σταθερής κατάστασης, διέπονται από ελλειπτικές εξισώσεις.

Το πρότυπο της ελλειπτικής εξίσωσης είναι η εξίσωση του LAPLACE, η οποία περιγράφει την irrotational ροή ενός μη-συμπίεστου ρευστού και σταθερής κατάστασης αγωγής της μετάδοσης θερμότητας. Σε δύο διαστάσεις έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.45)$$

Ένα πολύ απλό παράδειγμα ενός προβλήματος ισορροπίας, είναι η σταθερή κατάσταση της αγωγής θερμότητας, (όπου $\Phi=T$ στην εξίσωση (2.45)), σε μια μονωμένη ράβδο μέταλλου της οποίας τα άκρα $x=0$ και $x=L$, είναι σταθερές, αλλά διαφορετικές θερμοκρασίες T_0 και T_L (εικόνα 2.6). Αυτό το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο και διέπεται από την εξίσωση $kd^2 T/dx^2=0$.

Χαρακτηριστικό πρόβλημα



Εικόνα 2.6: Σταθερή κατάσταση κατανομής θερμοκρασίας μιας μονωμένης ράβδου

Κάτω από αυτές τις οριακές συνθήκες η κατανομή της θερμοκρασίας στην x -κατεύθυνση, θα είναι βέβαια μια ίσια γραμμή. Μια μοναδική λύση σε αυτό και για όλα τα ελλειπτικά προβλήματα, μπορούν να αποκτηθούν ορίζοντας συνθήκες με εξαρτημένες μεταβλητές, (σε αυτή την περίπτωση είναι η θερμοκρασία ή το ομαλό του παράγωγο, ή τη ροή της θερμοκρασίας), σε όλα τα όρια των περιοχών λύσεων. Προβλήματα που χρειάζονται πληροφορίες σε όλο το όριο ονομάζονται προβλήματα οριακών τιμών.

Μια σημαντική λεπτομέρεια των ελλειπτικών προβλημάτων είναι ότι μια διαταραχή στο εσωτερικό ενός διαλύματος, για παράδειγμα μια αλλαγή στη θερμοκρασία λόγω ξαφνικής εμφάνισης μικρής πηγής θερμότητας, αλλάζει το διάλυμα παντού. Σήματα διαταραχής μετακινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις στο εσωτερικό του διαλύματος. Συνεπώς, τα διαλύματα των φυσικών προβλημάτων που περιγράφονται από ελλειπτικές εξισώσεις είναι πάντα λείες και ακόμη και αν οι οριακές συνθήκες δεν είναι συνεχείς, που είναι μεγάλο πλεονέκτημα στον σχεδιαστή των αριθμητικών μεθόδων. Για να εξασφαλιστεί ότι οι πληροφορίες θα διαδοθούν σε όλες τις κατευθύνσεις, οι αριθμητικές τεχνικές για ελλειπτικά προβλήματα θα πρέπει να επιτρέψουν γεγονότα σε κάθε σημείο επηρεάζονται από τα γειτονικά στοιχεία τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

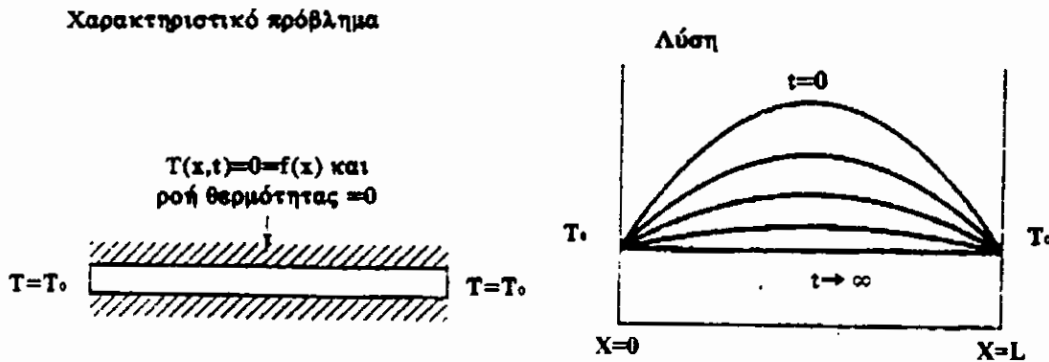
Η παροδική μετάδοση της θερμότητας, όλες οι ασταθείς ροές και τα φαινόμενα κυμάτων είναι παραδείγματα στη δεύτερη κατηγορία, τα προβλήματα διάδοσης. Αυτά τα προβλήματα διέπονται από παραβολικές ή υπερβολικές εξισώσεις. Όμως, δεν είναι όλα τα προβλήματα διάδοσης ασταθή. Θα δούμε παρακάτω ότι μερικές σταθερές ροές περιγράφονται ως παραβολικές ή υπερβολικές εξισώσεις. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η κατεύθυνση της ροής ενεργεί ως ομότιμη κατά μήκος του χρόνου, όπου η πορεία είναι πιθανή.

Οι παραβολικές εξισώσεις περιγράφουν προβλήματα χρονοεξάρτησης που περιλαμβάνουν συγκεκριμένες ποσότητες διάδοσης. Παραδείγματα είναι οι ασταθείς ιξώδεις ροές και η ασταθής θερμική μετάδοση. Το πρωτότυπο της παραβολικής εξίσωσης είναι η εξίσωση διάδοσης.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.46)$$

Η παροδική κατανομή της θερμότητας (ξανά $\Phi=T$) σε μια μονωμένη ράβδο ενός μετάλλου της οποίας τα άκρα $x=0$ και $x=L$ διατηρούνται σε σταθερή και ίση θερμοκρασία T_0 , διέπεται από την εξίσωση διάχυσης.

Αυτό το πρόβλημα παρουσιάστηκε όταν η ράβδος κρυώσει μετά από μια αρχική ομοιόμορφη πηγή που τείνει σε χρόνο $t=0$. Η κατανομή θερμοκρασίας στην αρχή είναι μια παραβολή με μέγιστο $x=L/2$. (Εικόνα 2.7).



Εικόνα 2.7 Κατανομή μετάβασης θερμοκρασίας σε μονωμένο ράβδο

Η σταθερή κατάσταση περιλαμβάνει μια ομοιόμορφη κατανομή θερμοκρασίας $T = T_0$ σε όλη τη ράβδο.

Η λύση της εξίσωσης διάχυσης (2.46) αποδίδει την εκθετική φθορά της αρχικής δευτεροβάθμιας κατανομής της θερμοκρασίας. Αρχικές ρυθμίσεις χρειάζονται σε όλη τη ράβδο και ρυθμίσεις σε όλα τα όρια του, είναι απαραίτητες για όλους τους χρόνους $t > 0$. Τέτοιου τύπου προβλήματος ορίζεται ως ένα αρχικό - οριακό - πρόβλημα τιμής.

Μια διαταραχή σε ένα σημείο στο εσωτερικό της περιοχής του διαλύματος (π.χ. $0 < x < L$ και χρόνος $t_1 > 0$) μπορεί να επηρεάσει κάποια συμβάντα σε χρόνους αργότερα $t > t_1$ (εκτός αν επιτρέψουμε διαδρομή μέσα στο χρόνο. Οι

λύσεις προχωρούν μέσα στο χρόνο και διαχέονται στον χώρο. Το συμβάν των διαλυτικών επιφανειών επιβεβαιώνει ότι τα διαλύματα είναι πάντα λεία στο εσωτερικό σε χρόνους $t > 0$ ακόμα και αν οι αρχικές συνθήκες συμπεριλαμβάνουν διακοπές. Η σταθερή κατάσταση φτάνει σε χρόνο $t \rightarrow \infty$ και είναι ελλειπτική.

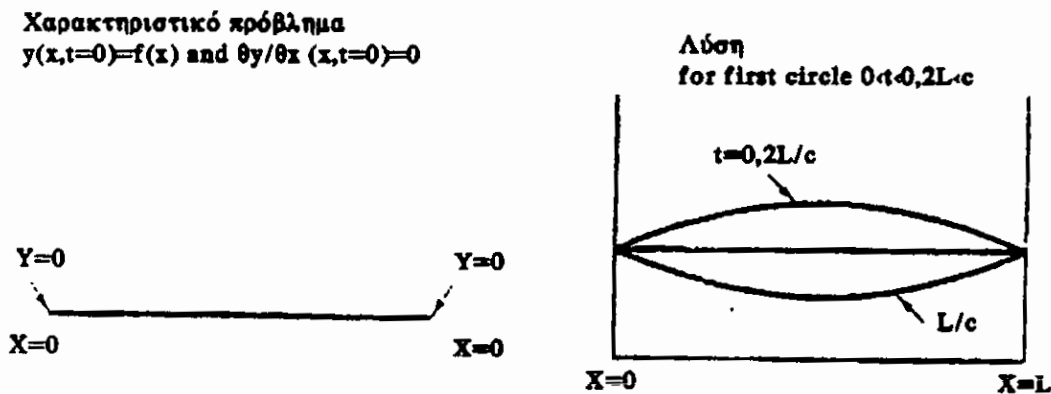
Αυτή η αλλαγή χαρακτήρα φαίνεται καθαρά ρυθμίζοντας $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ στην εξίσωση (2.46). Η γενική εξίσωση

τώρα ισούται με την πρώτη γενική εξίσωση της κατανομής της σταθερής θερμοκρασίας μέσα στη ράβδο.

Στις υπερβολικές εξισώσεις κυριαρχεί η ανάλυση των προβλημάτων ταλάντωσης. Γενικά εμφανίζονται σε χρονοεξαρτώμενες διαδικασίες με μηδαμινές ποσότητες διασκορπισμού. Το πρωτοτυπο της υπερβολικής εξίσωσης είναι η εξίσωση κύματος.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.47)$$

Ο παραπάνω τύπος της εξίσωσης διέπει την εγκάρσια μετακίνηση, ($\varphi=y$) μιας χορδής κάτω από μια πίεση κατά τη διάρκεια μικρού εύρους κραδασμών και επίσης ακουστικών ταλαντώσεων. Η σταθερά c είναι η ταχύτητα του κύματος. Είναι σχετικά απλό να υπολογίσουμε το χρόνο εξέλιξης του βασικού τύπου ενός κραδασμού μιας χορδής ενός μήκους l , χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.47).



Εικόνα 2.8: Κραδασμός μιας χορδής υπό τάση

Οι λύσεις για την εξίσωση κύματος (2.47) και άλλες υπερβολικές εξισώσεις μπορούν να αποκτηθούν ορίζοντας δύο κύριες συνθήκες στην μετατόπιση της χορδής y και μια συνθήκη σε όλα τα σημεία για χρόνους $t > 0$. Έτσι τα υπερβολικά προβλήματα είναι επίσης αρχικά οριακά - προβλημάτων τιμών. Εάν το αρχικό εύρος δίνεται με a , η λύση του προβλήματος είναι:

$$y(x,t) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Η λύση δείχνει ότι το εύρος του κραδασμού παραμένει σταθερό και αποδεικνύει την έλλειψη απόσβεσης στο σύστημα. Αυτή η έλλειψη απόσβεσης έχει μια ακόμα σημαντική συνέπεια. Σκεφτείτε για παράδειγμα, τις αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν σε ένα αρχικό όχημα σχεδόν τριγωνικό του οποίου η κορυφή είναι τμήμα ενός κύκλου με πολύ μικρή ακτίνα καμπυλότητας. Αυτό το αρχικό σχήμα έχει έντονη ασυνοχή στην κορυφή, αλλά μπορεί να παρουσιαστεί από μια σειρά Fourier ως συνδυασμό από κύματα ημιτόνων. Η διέπουσα εξίσωση είναι γραμμική, έτσι λοιπόν κάθε ένα από τα στοιχεία Fourier θα παραμένουν στο χρόνο χωρίς αλλαγή στο εύρος τους. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι ότι η ασυνοχή παραμένει αμείωτη λόγω της αποχής ενός μηχανισμού σκέδασης για να αφαιρεθεί το τύλιγμα στην κλίση.

Συμπεστές ροής ρευστών σε ταχύτητες που πλησιάζουν ή υπερβαίνουν την ταχύτητα του ήχου εμφανίζουν κύματα εκρήξεων, με αποτέλεσμα οι εξισώσεις αγλοίων ροών να είναι υπερβολικές σε αυτές τις ταχύτητες. Η διακοπή των κρουστικών κυμάτων είναι εκδήλωση υπερβολικής φύσεως τέτοιων ροών. Υπολογιστικοί αλγόριθμοι για υπερβολικά προβλήματα διαμορφώνονται από την ανάγκη να επιτραπεί η πιθανή ύπαρξη διακοπών στο εσωτερικό του διαλύματος. Παρακάτω θα φανεί ότι οι διαταραχές σε ένα σημείο μπορούν να επηρεάσουν μόνο μια ορισμένη περιοχή στο χώρο. Η ταχύτητα διάδοσης διαταραχών μέσα σε ένα υπερβολικό πρόβλημα είναι περασμένη και ίση με την ταχύτητα κύματος c . Σε αντίθεση τα παραβολικά και ελλειπτικά πρότυπα υποθέτουν άπειρες διαδεδομένες ταχύτητες.

2.7 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι υπερβολικές εξισώσεις έχουν μία ιδιαίτερη συμπεριφορά με την οποία συνδέονται με την πεπερασμένη ταχύτητα, δηλαδή εκεί η ταχύτητα του κύματος, όπου οι πληροφορίες μετακινούνται μέσω του προβλήματος. Αυτό είναι που ξεχωρίζει τις υπερβολικές εξισώσεις, από τους άλλους δύο τύπους εξισώσεων. Για να αναπτύξουμε τις ιδέες για το ρόλο των χαρακτηριστικών γραμμών σε υπερβολικά προβλήματα, λαμβάνουμε υπόψη ξανά ένα τέτοιο υπερβολικό πρόβλημα που να περιγράφεται από την εξίσωση κύματος (2.47). Μπορεί να απεικονιστεί ότι μια αλλαγή των μεταβλητών στο $z=x-t$ και στο $\eta=x+ct$ μεταβάλλει την εξίσωση του κύματος στην παρακάτω σταθερή συνθήκη.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (2.48)$$

Η μεταβολή αυτή απαιτεί μια επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του αλυσωτού κανόνα των διαφορίσεων και να εκφραστούν τα παράγωγα της εξίσωσης (2.47) στα πλαίσια των παράγωγων των μεταβλητών μετατόπισης. Η εξίσωση (2.48) μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα. Η λύση βέβαια, είναι $\Phi(\zeta, \eta) = F_1(\zeta)F_2(\eta)$ όπου F_1 και F_2 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε συντελεστής. Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, αποδίδουμε την γενική λύση της εξίσωσης (2.47), ως εξής:

$$\Phi(x,t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \quad (2.49)$$

Το πρώτο στοιχείο της λύσης, ο συντελεστής F_1 , είναι σταθερός, εάν $x-ct$ είναι σταθερό, και από δω και πέρα κατά μήκος των γραμμών της κλίσης $dt/dx = 1/c$ στο επίπεδο $x-t$. Ο δεύτερος συντελεστής F_2 είναι σταθερός εάν $x+ct$ είναι σταθερό, έτσι κατά μήκος των γραμμών της κλίσης $dt/dx = -1/c$. Οι γραμμές $x-ct = \text{const}$ και $x+ct = \text{const}$ ονομάζονται χαρακτηριστικά. Οι λειτουργίες των F_1 και F_2 αντιπροσωπεύουν τις έτσι λεγόμενες λύσεις απλού κύματος του προβλήματος που είναι κύματα μετακίνησης με ταχύτητες $+c$ και $-c$ χωρίς αλλαγή του σχήματος ή του εύρους τους. Οι συγκεκριμένες μορφές F_1 και F_2 μπορούν να αποκτηθούν από αρχικές και από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Ας λάβουμε υπόψη μια πολύ μακριά χορδή ($-\infty < x < \infty$) και οι ακόλουθες συνθήκες να είναι:

$$\phi(x,0) = f(x) \quad \text{και} \quad \partial\phi/\partial t(x,0) = g(x) \quad (2.50)$$

Συνδυάζοντας την (2.49) και (2.50) έχουμε:

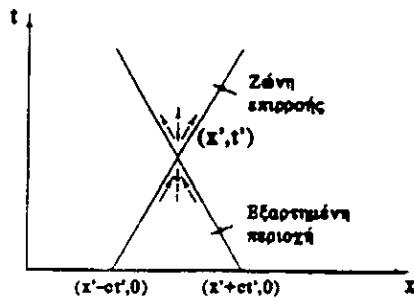
$$F_1(x) + F_2(x) = f(x) \quad \text{και} \quad -cF_1'(x) + cF_2'(x) = g(x) \quad (2.51)$$

Μπορεί να απεικονιστεί ότι η συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης κύματος (2.47) με αρχικές συνθήκες (2.50) δίνεται από:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2.52)$$

Ο προσεκτικός έλεγχος του τύπου (2.52) δείχνει το ϕ στο σημείο (x,t) στην περιοχή λύσης η οποία εξαρτάται μόνο από τις αρχικές συνθήκες στο διάστημα $(x-ct, x+ct)$. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτό υποδηλώνει ότι η λύση στο (x,t) δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εκτός του διαστήματος αυτού.

Η εικόνα 2.9 απεικονίζει αυτό το σημείο. Τα χαρακτηριστικά $x-ct = \text{σταθερό}$ και $x+ct = \text{σταθερό}$ μέσα από το σημείο (x',t') που διασταυρώνουν τον άξονα x στα σημεία $(x'-ct',0)$ και $(x'+ct',0)$ αντίστοιχα. Η περιοχή μέσα στο επίπεδο $x-t$ που περικυκλώνεται από τον άξονα των x και τα δύο χαρακτηριστικά ορίζεται ως **εξαρτημένη περιοχή**.

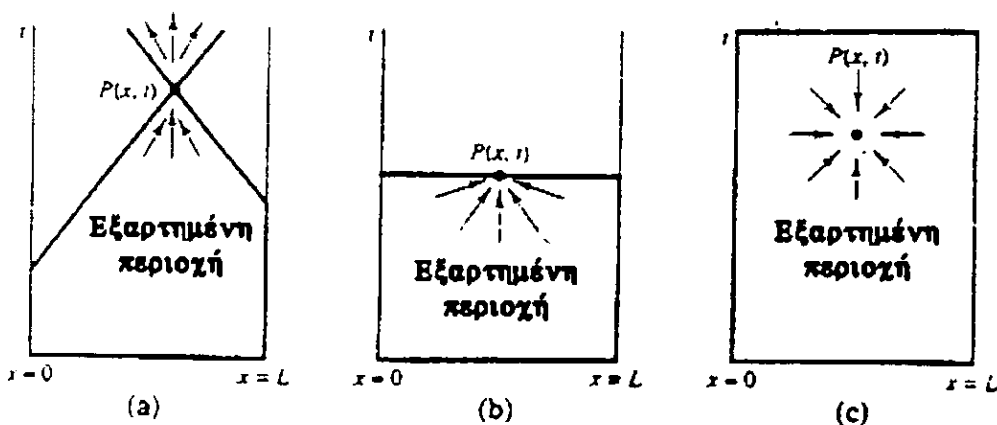


Εικόνα 2.9: Η εξαρτημένη περιοχή και ζώνη επιρροής για ένα υπερβολικό πρόβλημα

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.52) η λύση (x', t') επηρεάζεται μόνο από γεγονότα μέσα από την εξαρτημένη περιοχή και όχι από αυτά που βρίσκονται έξω. Φυσικά αυτό προκαλείται από περιορισμένη ταχύτητα διάδοσης (ίση με την ταχύτητα κύματος c) των αμοιβαίων επιρροών μέσα από την περιοχή λύσης. Αλλαγές στο σημείο (x', t') επηρεάζουν αργότερα γεγονότα μέσα από τη ζώνη επιρροής που φαίνεται στην εικόνα 2.9, που και πάλι δεσμεύεται από τα χαρακτηριστικά.

Η εικόνα 2.10α δείχνει τη κατάσταση για τις ταλαντώσεις μιας χορδής ρυθμιζόμενη στο $x=0$ και $x=L$.

Για σημεία που είναι πολύ κοντά στον x άξονα η εξαρτημένη περιοχή περικλείεται από δυο χαρακτηριστικά που προέρχονται από σημεία στον x -άξονα. Τα χαρακτηριστικά σημεία φαίνονται όπως το τετράγωνο σημείο P του οριακού προβλήματος.



Εικόνα 2.10: Περιοχές εξάρτησης για (α) Υπερβολικό, (β) Παραβολικό, (γ) Ελλειπτικό πρόβλημα

Η εξαρτημένη περιοχή του P δεσμεύεται από εκείνες τις δύο χαρακτηριστικές και τις γραμμές $t=0$, $x=0$, $x=L$.

Η μορφή των εξαρτημένων περιοχών (βλέπε εικόνα 2.10 (β) και (γ)) σε παραβολικά και ελλειπτικά προβλήματα είναι διαφορετική επειδή η ταχύτητα μετάδοσης πληροφοριών υποθέσαμε ότι είναι άπειρη. Οι έντονες γραμμές διαχωρίζουν τα όρια κάθε εξαρτημένης περιοχής δίνοντας τα σημεία όπου για κάθε μια από τις αρχικές οριακές συνθήκες που χρειάζονται με σκοπό να παραχθεί μια ικανή λύση στο σημείο $P(x,t)$ σε κάθε περίπτωση.

Ο τρόπος όπου οι αλλαγές σε ένα σημείο επηρεάζουν γεγονότα σε άλλα σημεία εξαρτάται είτε από ένα φυσικό πρόβλημα που αντιπροσωπεύει μια σταθερή κατάσταση ή μένα να μεταβατικό φαινόμενο και είτε ταχύτητα μετάδοσης των διαταραχών είναι πεπερασμένη ή άπειρη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την κατάταξη των φυσικών συμπεριφορών από τώρα των ακολούθων μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDEs) σε ελλειπτικά, παραβολικά και υπερβολικά προβλήματα. Τα χαρακτηριστικά διακρίνονται σε κάθε μια κατηγορία όπως έχουν απεικονιστεί λαμβάνοντας υπόψη τις τρεις απλές πρωτότυπες δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Στα παρακάτω θέματα να συζητήσουμε μεθόδους κατατάσσοντας πολύ περισσότερο πολύπλοκες μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs) και εν συντομία θα δηλώσουμε τους περιορισμούς των υπολογιστικών μεθόδων, τα οποία θα αναπτύξουμε αργότερα σ' αυτό το κείμενο σχετικά με την κατάταξη των προβλημάτων της ροής που είναι υπό λύση. Μια σύνοψη των κυριότερων χαρακτηριστικών που έχουν αναγνωριστεί μέχρι τώρα δίνονται στον πίνακα 2.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2: Ταξινόμηση των φυσικών συμπεριφορών

ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	ΤΥΠΟΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	ΠΡΩΤΟΤΥΠΗ ΕΞΙΣΩΣΗ	ΣΥΝΘΗΚΕΣ	ΠΕΡΙΟΧΗ ΛΥΣΗΣ	ΛΕΙΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ
Προβλήματα Ισορροπίας	Ελλειπτική	$\text{Div grad } \phi = 0$	Οριακές Συνθήκες	Κλειστή Περιοχή	Πάντα Λεία
Προβλήματα Διάδοσης με Σκέδαση	Παραβολική	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \text{div grad } \Phi$	Αρχικές και οριακές συνθήκες	Ανοιχτή Περιοχή	Πάντα Λεία
Προβλήματα διάδοσης χωρίς σκέδαση	Υπερβολική	$\frac{\partial \phi^2}{\partial t^2} = c^2 \text{div grad } \Phi$	Αρχικές και οριακές συνθήκες	Ανοιχτή Περιοχή	Ίσως να διακόπτεται

2.8 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΑΠΛΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μια πρακτική μέθοδος ταξινόμησης των μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDEs) αναπτύσσεται για μια γενική δευτεροβάθμια μερική διαφορική εξίσωση σε δύο συντεταγμένες x και y . θεωρούμε:

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f \varphi + g = 0 \quad (2.53)$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι η εξίσωση είναι γραμμική και a, b, g, d, e, f και g είναι σταθερές.

Η ταξινόμηση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης (PDEs) διέπεται από την συμπεριφορά των υψηλότερων όρων των παραγώγων, έτσι λοιπόν λαμβάνουμε υπόψη μόνο τα παράγωγα δεύτερου βαθμού. Η τάξη μιας δεύτερου βαθμού μερικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να αναγνωρισθεί ψάχνοντας για πιθανές απλές λύσεις κυμάτων. Εάν υπάρχουν, αυτό υποδεικνύει μια υπερβολική εξίσωση, εάν δεν υπάρχουν, η εξίσωση είναι υπερβολική ή ελλειπτική. Οι απλές λύσεις κυμάτων συμβαίνουν εάν η χαρακτηριστική εξίσωση (2.54) έχει παρακάτω δύο πραγματικές ρίζες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3 Ταξινόμηση γραμμικών δευτεροβάθμιων PDEs

$b^2 - 4ac$	ΤΥΠΟΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ
> 0	Υπερβολική	Δύο πραγματικά χαρακτηριστικά
$= 0$	Παραβολική	Ένα πραγματικό χαρακτηριστικό
< 0	Ελλειπτική	Κανένα χαρακτηριστικό

Πραγματικές ρίζες:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = 0 \quad (2.54)$$

Η ύπαρξη των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης εξαρτάται από την τιμή της διακρίνουσας ($b^2 - 4ac$). Ο πίνακας 2.3 περιγράφει τις τρεις περιπτώσεις. Η μέθοδος ταξινόμησης για τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης επίσης ισχύει εάν οι συντελεστές a , b και c είναι συναρτήσεις του x και y ή εάν η εξίσωση είναι μη-γραμμική. Στην τελευταία περίπτωση τα a, b και c μπορεί να είναι συναρτήσεις του εξαρτημένου μεταβλητή Φ ή των πρώτων παραγώγων. Είναι τώρα πιθανόν να διαφέρει ο τύπος της εξίσωσης σε διάφορες περιοχές του πεδίου λύσης. Σαν ένα παράδειγμα θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση:

$$y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.55)$$

Βλέπουμε την συμπεριφορά μέσα στην περιοχή $-1 < y < 1$. Από εδώ έχω $a = a(x, y) = y$, $b = 0$ και $c = 1$. Η τιμή της διακρίνουσας ($b^2 - 4ac$) ισούται με $-4y$.

Πρέπει να ξεχωρίσουμε τις τρεις περιπτώσεις:

- Αν $y < 0$, $b^2 - 4ac > 0$ τότε η εξίσωση είναι υπερβολική

- Αν $y = 0, b^2 - 4ac = 0$ τότε η εξίσωση είναι παραβολική
- Αν $y > 0, b^2 - 4ac < 0$ τότε η εξίσωση είναι ελλειπτική

Η εξίσωση (2.55) είναι μικτού τύπου. Η εξίσωση είναι τοπικά υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική ανάλογα με την τιμή του y . Για την μη-γραμμική περίπτωση απαιτείται παρόμοια παρατήρηση.

Η ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων εξαρτώνται από τις τοπικές τιμές a, b και c .

Οι δεύτερου βαθμού μερικές διαφορικές εξισώσεις σε N ανεξάρτητες μεταβλητές (x_1, x_2, \dots, x_N) , μπορούν να ταξινομηθούν ξαναγράφοντας αυτούς στον παρακάτω τύπο με $A_{jk} = A_{kj}$.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0 \quad (2.56)$$

Ο Fletcher (1991) εξηγεί ότι η εξίσωση μπορεί να ταξινομηθεί με βάση των ιδιοτήτων ενός πίνακα με καταχωρήσεις A_{jk} . Από εδώ πρέπει να βρούμε τιμές για το

$$\det[A_{jk} - \lambda I] = 0 \quad (2.57)$$

Οι κανόνες ταξινόμησης είναι:

- αν για κάθε τιμή $\lambda = 0$, η εξίσωση είναι παραβολική
- αν για όλες τις τιμές, το $\lambda \neq 0$ και όλες οι τιμές αυτές έχουν το ίδιο πρόσημο, τότε η εξίσωση είναι ελλειπτική.
- αν για όλες τις τιμές το $\lambda \neq 0$ και όλες οι τιμές εκτός από μια έχουν το ίδιο πρόσημο, τότε η εξίσωση είναι υπερβολική

Στις περιπτώσεις της εξίσωσης Laplace, της εξίσωσης διάχυσης και της κυματικής εξίσωσης, είναι απλή επαλήθευση ότι αυτή η μέθοδος αποδίδει τα ίδια αποτελέσματα όπως η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.54).

2.9 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΟΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

Τα συστήματα των πρωτοβάθμιων μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDEs) με παρισπάζω από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ίδια με τύπου πίνακα. Η ταξινόμηση συμπεριλαμβάνει την εύρεση των ιδιοτιμών που να προκύπτει ο πίνακας.

Συστήματα δευτεροβάθμιων μερικών διαφορικών εξισώσεων ή μια πρώτης και δεύτερης τάξης μερικών διαφορικών εξισώσεων μπορούν επίσης να καταταχτούν με την ίδια μέθοδο. Το πρώτο στάδιο της μεθόδου συμπεριλαμβάνει την εισαγωγή των βοηθητικών μεταβλητών που μετατρέπουν κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση, σε πρωτοβάθμια εξίσωση.

Με προσοχή πρέπει να επιλέξουμε τους βοηθητικούς μεταβλητές με τέτοιο τρόπο, ώστε ο πίνακας που εμφανίζεται να μην είναι μη-τετραγωνικός.

Η εξίσωση NAVIER-STOKES και οι τύποι των περιορισμών αυτών μπορούν να ταξινομηθούν χρησιμοποιώντας μια τέτοια προσέγγιση του πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4 Ταξινόμηση των κυριότερων κατηγοριών των ροών

	ΣΤΑΘΕΡΗ ΡΟΗ	ΑΣΤΑΘΗΣ ΡΟΗ
ΙΞΩΔΗΣ ΡΟΗ	ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ	ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ
ΑΝΙΞΩΔΗΣ ΡΟΗ	$M < 1$ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ	ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ
	$M > 1$ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ	
ΛΕΠΤΑ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ	ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ	ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ

Στον πίνακα 2.4 είναι επίσημες κατατάξεις των εξισώσεων ροής. Στην πρακτική πολλές ρευστές ροές συμπεριφέρονται κατά πολύπλοκο τρόπο. Οι σταθερές εξισώσεις Navier-Stokes και οι εξισώσεις ενέργειας (ή ενθαλπίας) είναι βασικά ελλειπτικές και οι ασταθείς εξισώσεις είναι παραβολικές.

Η μαθηματική ταξινόμηση των εξισώσεων ανιξώδων ροών είναι διαφορετική από τις εξισώσεις Navier-Stokes και από τις εξισώσεις ενέργειας λόγω της πλήρους αποχής των όρων υψηλότερου βαθμού του ιξώδους. Η ταξινόμηση και η τοποθέτηση της εξίσωσης των αποτελεσμάτων εξαρτάται από την έκταση του ρόλου τους συμπεριεκτικότητα της ροής και συνεπώς από το μέγεθος του αριθμού Mach M . Η φύση της ελλειπτικής των ανιξωδών ροών με αριθμούς Mach κάτω από 1 προέρχεται από τη δράση της πίεσης. Εάν $M < 1$ η πίεση μπορεί να μεταδώσει διαταραχές στην ταχύτητα του ήχου που είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα της ροής. Αν όμως $M > 1$ η ταχύτητα του ρευστού είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα μετάδοσης των διαταραχών και η πίεση δεν μπορεί να επηρεάσει γεγονότα κατά την κατεύθυνση αντίθετα του ρεύματος. Τα όρια στην ζώνη επιρροής είναι το χαρακτηριστικό στοιχείο στα υπερβολικά φαινόμενα, έτσι οι εξισώσεις των υπερηχητικών ανιξωδών ροών είναι υπερβολικές. Παρακάτω θα δούμε ένα απλό παράδειγμα που απεικονίζει αυτή την συμπεριφορά.

Σε λεπτές στοιβάδες διαμήκων ροών όλα τα παράγωγα της ταχύτητας στην κατεύθυνση ροής (x, y) είναι πολύ μικρότερα από αυτά στην κατεύθυνσή των και κατά μήκος των στρωμάτων ρεύματος. Οριακά ρεύματα καθώς επίσης και ανάμειξη, στοιβάδων και πλήρως ανεπτυγμένοι αγωγοί ροών μπαίνουν σε αυτήν την κατηγορία. Σε

αυτές τις συνθήκες οι κύριες εξισώσεις περιέχουν μόνο έναν (δεύτερης τάξης) όρο διάδοσης και κατατάσσονται ως παραβολικές.

Ως μια επεξήγηση των περιπτώσεων που ίσως να εμφανιστούν σε ανιζώδεις ροές αναλύουμε την ενδεχόμενη εξίσωση που διέπει μια σταθερή ισοτροπική ανιζώδης συμπίεστικότητα πέρα από ένα λεπτό σώμα με ελεύθερο ρεύμα αριθμού Mach M_∞ .

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.58)$$

Παίρνοντας $x_1 = x$ και $x_2 = y$ στην εξίσωση (2.56) έχουμε στοιχεία πίνακα Matrix $A_{11} = 1 - M_\infty^2$, $A_{12} = A_{21} = 0$ και $A_{22} = 1$.

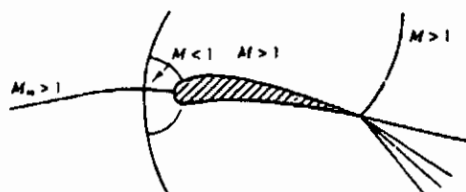
Για να κατατάξουμε την εξίσωση πρέπει να λύσουμε

$$\det \begin{vmatrix} (1 - M_\infty^2) - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Οι δύο λύσεις είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1 - M_\infty^2$. Εάν το ελεύθερο ρεύμα του αριθμού Mach είναι μικρότερο από 1 (υποηχητική ροή) και οι δύο ιδιότητες είναι μεγαλύτερες του 0 τότε η ροή είναι ελλειπτική. Εάν ο αριθμός του Mach είναι μεγαλύτερος του 1 και η δεύτερη ιδιοτιμή είναι αρνητική τότε η ροή είναι υπερβολική. Αφήνεται ο αναγνώστης να δείξει τα ότι αυτά τα αποτελέσματα είναι όμοια με αυτά που αποκτήθηκαν υπολογίζοντας την διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.54).

Μια ενδιαφέρουσα σημείωση είναι ότι έχουμε ανακαλύψει ένα σημείο της υπερβολικής συμπεριφοράς σε μια σταθερή ροή όπου και οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι συντεταγμένες του χώρου. Η κατεύθυνση ροής συμπεριφέρεται με την φορά του χρόνου σε υπερβολικές ιζώδεις ροές και επίσης σε περιβαλλοντικά λεπτά διαμήκη στρώματα. Αυτά τα προβλήματα είναι τύπου εξέλιξης και οι ροές υπολογίζονται από την εξέλιξη προς την κατεύθυνση της φοράς του χρόνου αυξάνοντας το x .

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει την εξάρτηση της ταξινόμησης της συμπεστικότητας της ροής με την παράμετρο M_∞ ροών στη παράμετρο M_∞ . Οι γενικές εξισώσεις των ιζώδων ροών συμπεστικότητας (εξισώσεις Euler) δείχνουν παρόμοια συμπεριφορά, αλλά η ταξινόμηση των παραμέτρων είναι τώρα ο τοπικός αριθμός Mach 'M'. Αυτό περιπλέκει τα ζητήματά μας αρκετά όταν οι ροές γύρω και πάνω από $M=1$ πρόκειται να υπολογιστούν. τέτοιες ροές μπορεί να περιέχουν πλήγματα ασυνέχειας και οι περιοχές με υποηχητική (ελλειπτική) ροή και υπερηχητική (υπερβολική) ροή των οποίων η ακριβείς τοποθεσίες δεν είναι γνωστές από πριν. Η εικόνα 2.11 μας δείχνει ένα σκαρίφημα μιας ροής γύρω από μια αεροτομή με αριθμό Mach λίγο μεγαλύτερο του 1.



ΕΙΚΟΝΑ 2.11 Σκαρίφημα της ροής γύρω από μια αεροτομή σε υπερηχητική ταχύτητα του Mach του ελεύθερου ρεύματος

2.10 ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΩΝ ΤΩΝ ΙΞΩΔΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Το περίπλοκο μίγμα των ελλειπτικών παραβολικών και υπερβολικών συμπεριφορών έχει ελλπτώσεις για τον τρόπο με τον οποίο οι οριακές συνθήκες εισάγονται σε ένα πρόβλημα ροής, συγκεκριμένα σε τοποθεσίες όπου οι ροές δεσμεύονται από τα όρια των ρευστών. Δυστυχώς ελάχιστα είναι τα αποτελέσματα σχετικά με πεδία των επιτρεπτών οριακών συνθηκών που είναι διαθέσιμα για την συμπεστικότητα των ροών. Η πρακτική των CFD οδηγείται εδώ από φυσικούς ισχυρισμούς και την επιτυχία των ομοιωμάτων. Οι οριακές συνθήκες για μια συμπεστή ιξώδη ροή δίνονται στον πίνακα 2.5.

Στον πίνακα οι δείκτες n και t δείχνουν ομαλές κατευθύνσεις (προς τα έξω) και εφαπτομενικές στο όριο αντιστοίχως και F είναι η δεδομένη επιφανειακή τάση.

Δεν είναι απαραίτητο να προδιαγράψουμε τις συνθήκες εξόδων ή τα όρια των στέρεων τοιχωμάτων για πυκνότητα λόγω ειδικού χαρακτήρα της εξίσωσης της συνέχειας η οποία περιγράφει τις αλλαγές μιας πεπειραμένης πυκνότητας από ένα μόριο του ρευστού κατά μήκος της διαδρομής του για ένα γνωστό πεδίο ταχύτητας. Στη είσοδο η πυκνότητα πρέπει να είναι γνωστή. Οπουδήποτε αλλού η πυκνότητα φαίνεται να είναι τμήμα (της λύσης) και οριακή τιμή δεν χρειάζεται να καθοριστεί. Για μια ασυμπίεστη ιξώδη ροή δεν υπάρχουν συνθήκες για την πυκνότητα, αλλά όλες οι παραπάνω συνθήκες ισχύουν χωρίς τροποποίηση. Συνήθως τα όρια των εκροών τοποθετούνται σε σημεία όπου η ροή είναι περίπου μη κατευθυντική και όπου η επιφανειακές τάσεις παίρνουν γνωστές τιμές.

Για υψηλές ροές αριθμών Reynolds μακριά από στέρεα αντικείμενα σε μια εξωτερική ροή ή στην πλήρη ανεπτυγμένη ροή έξω από τον αγωγό δεν υπάρχει αλλαγή σε κανένα από τα στοιχεία ταχύτητας προς την κατεύθυνση κατά μήκος των ορίων και $F_1=0$. Αυτό μας δίνει την συνθήκη εκροής που χρησιμοποιείται σχεδόν παγκοσμίως στην μέθοδο πεπερασμένου όγκου:

Καθορισμένη πίεση:

$$\partial u_n / \partial n = 0 \quad \text{και} \quad \partial T / \partial n = 0$$

Αρχικές συνθήκες για ασταθείς ροές:

- Παντού στην περιοχή λύσης το ρ , u και T πρέπει να δίνονται στο χρόνο $t=0$

Οριακές συνθήκες για ασταθείς και σταθερές ροές

- Σε στερεά τοιχώματα $u = u_w$ (προϋπόθεση να μη γλιστρά)

$$T = T_w \text{ (ορισμένη θερμοκρασία) ή } k\partial T / \partial n = -qw \text{ (ορισμένη ροή θερμότητας)}$$

- Στα όρια ρευστών: Είσοδος: ρ , u και T πρέπει να είναι γνωστά ως συνάρτηση θέσης

$$\text{Εξοδος: } -\rho + \mu\partial u_n / \partial n = F_n \quad \text{και} \quad \mu\partial u_t / \partial n = F_t \text{ (τάση σκιστικής)}$$

Πίνακας 2.5 Οριακές συνθήκες για συμπιεστές ιξώδεις ροές

Ο Gresho (1991) ανασκοπεί τις περιπλοκές για τις ανοιχτές οριακές συνθήκες σε συμπιεστή ροή και δηλώνει ότι υπάρχουν μερικοί «θεωρητικοί ισχυρισμοί» σχετικά με τις ανοιχτές οριακές συνθήκες χρησιμοποιούν

$\partial u_n / \partial n = 0$ όμως η επιτυχία του στην πρακτική του CFD τον αφήνει να συστήσει ως την απλούστερη και φθηνότερη μορφή όταν συγκρίνεται με τις θεωρητικά πιο ικανοποιητικές επιλογές.

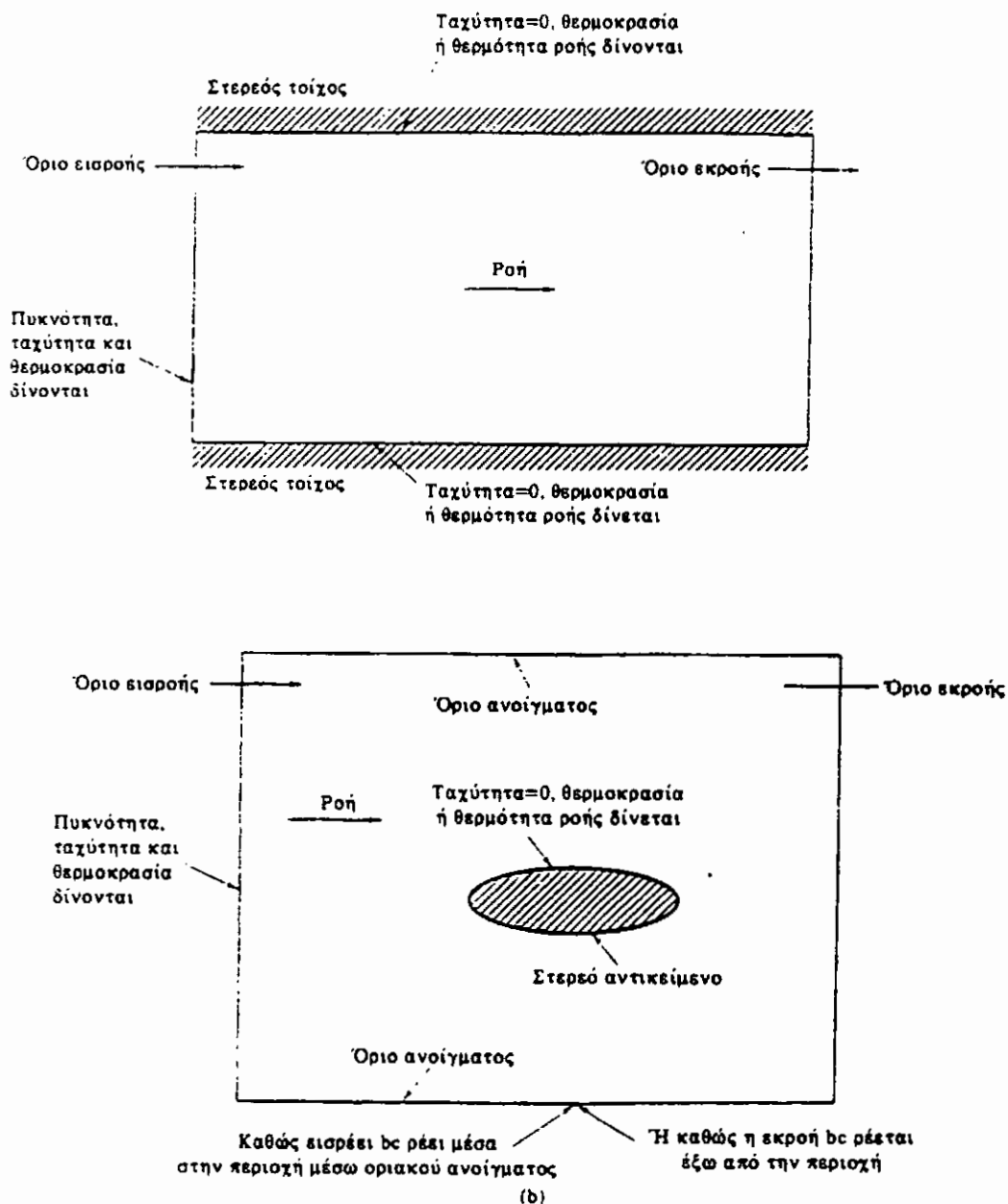
Η εικόνα 2.12 δείχνει την εφαρμογή των οριακών συνθηκών για μια τοπική και εξωτερική ιξώδης ροή. Ο γενικός σκοπός του κώδικα του CFD συχνά συμπεριλαμβάνει πιέσεις στην είσοδο και στην έξοδο των οριακών συνθηκών. Οι πιέσεις ρυθμίζονται σε πάγιες τιμές και πηγές και καταβόθρες της μάζας που τοποθετείται στα όρια για να μεταφερθεί στη σωστή ροή μάζας και έξω κατά μήκος της περιοχής του διαλύματος πάνω από τις σταθερές οριακές πιέσεις. Επιπλέον συμμετρικές και κυκλικές οριακές συνθήκες δίνονται για να επωφεληθούν πλήρως τα ειδικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της περιοχής λύσης:

- Οριακή συνθήκη συμμετρίας: $\partial\phi / \partial n = 0$
- Κυκλική οριακή συνθήκη $\phi_1 = \phi_2$

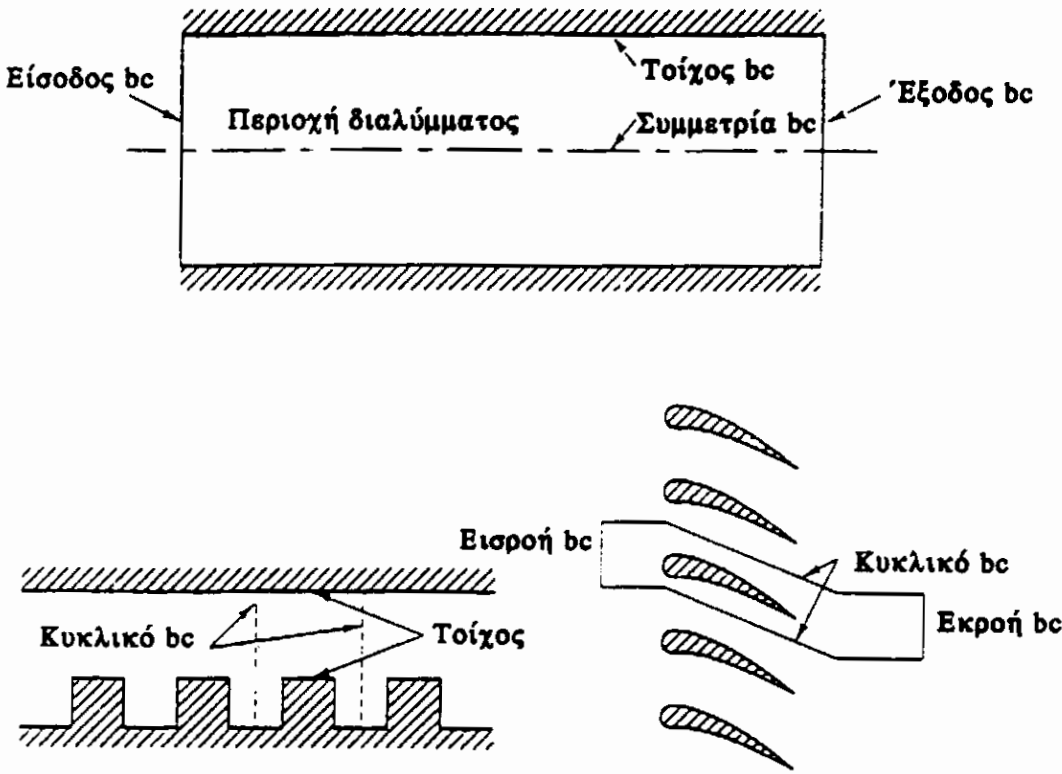
Η εικόνα 2.13 δείχνει τυπικές οριακές συνθήκες γεωμετρίας όπου οι συμμετρικές και κυκλικές οριακές συνθήκες (bc) θα είναι χρήσιμες.

2.11 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΥΠΕΡΗΧΗΤΙΚΕΣ ΣΥΜΠΕΣΤΕΣ ΡΟΕΣ

Δυσκολίες βγαίνουν στην επιφάνεια όταν υπολογίζονται ροές σε ταχύτητες που είναι κοντά και πάνω από την ταχύτητα ήχου. Σε αυτές τις ταχύτητες ο αριθμός Reynolds είναι συνήθως πολύ υψηλός και το ιξώδες της ροής στην περιοχή είναι συνήθως πολύ αραιό. Η ροή σε ένα μεγάλο τμήμα της περιοχής



ΕΙΚΟΝΑ 2.12 (α) Οριακές συνθήκες για εσωτερικό πρόβλημα ροής (β) Οριακή συνθήκη για εξωτερικό πρόβλημα ροής



Εικόνα 2.13 Παραδείγματα ορίων ροών με συμμετρικές και κυκλικές συνθήκες

της λύσης συμπεριφέρεται πραγματικά σαν ανιζώδεις. Αυτό προκαλεί προβλήματα σε εξωτερικές ροές επειδή στο τμήμα της ροής όπου οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται, συμπεριφέρονται ως μια ανιζώδη, κατάσταση, που διαφέρει από την ιζώδη περιοχή της ροής στην οποία είναι βασισμένη ολόκληρη η ταξινόμηση.

Ο σταθερός απλός αλγόριθμος της διόρθωσης της πίεσης για υπολογισμούς χρειάζεται να γίνει παρασκευαστικό για να κάνει χρήση πύ ενοϊκά στους χαρακτήρες των παραβολικών διαδικασιών.

Είναι απαραίτητο να εξασφαλίσουμε την περιορισμένη περιοχή εξάρτησης από πραγματικά ανιζώδεις (υπερβολικές) ροές σε αριθμούς Mach μεγαλύτερους από 1 μοντελοποιούνται κατάλληλα. Το άνοιγμα (μακρινό πεδίο) των οριακών συνθηκών δημιουργεί το πιο σοβαρό πρόβλημα για τον σχεδιαστή του γενικού σκοπού του κώδικα CFD.

Οι εξισώσεις της υποηχητικής συμπεστότητας της ροής χρειάζονται λιγότερες συνθήκες εισόδου (συνήθως μόνο p και u καθορίζονται) από τις εξισώσεις ιζώδων ροών και μόνο την συνθήκη διεξόδου (σε μια τυπική καθορισμένη πίεση). Υπερηχητικές ανιζώδεις ροές απαιτούν τον ίδιο αριθμό οριακών συνθηκών εισόδου όπως στις ιζώδεις ροές αλλά δεν επιτρέπουν καμία εκροή οριακών συνθηκών επειδή η ροή είναι υπερβολική.

Χωρίς να γνωρίζουμε πολλά σχετικά με τη ροή πριν λύσουμε ένα πρόβλημα είναι πολύ δύσκολο να καθορίσουμε τον ακριβή αριθμό και την φύση των επιτρεπτών οριακών συνθηκών σε οποιοδήποτε ρευστό ή όριο ρευστού στο μακρινό πεδίο. Το έργο του Issa & Lockwood (1977) αναφέρει τη λύση ενός προβλήματος αλληλεπίδρασης για μια στοιβάδα κρούσης/ οριακής όπου ένα τμήμα από τις οριακές συνθήκες στο μακρινό

πεδίο αποκτάται από ένα ανιζώδες διάλυμα που είναι πριν από το διάλυμα ιζώδους. Η συνήθως ιζώδης συνθήκη διεξόδου $\partial(\rho u_n)/\partial n$ εφαρμόζεται στο υπόλοιπο σύνορο του μακρινού πεδίου.

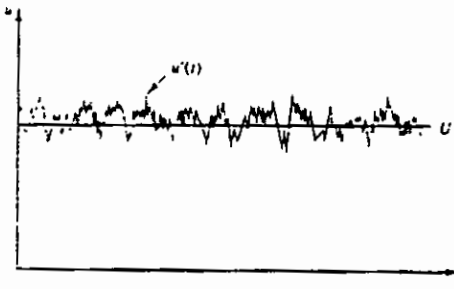
Ο Fletcher (1991) αναφέρει ότι ο υποκαθορισμός των οριακών συνθηκών συνήθως οδηγεί στην αποτυχία ενός ιδανικού διαλύματος. Η υπερκαθόριση, στο όριο όπου η συνθήκη εφαρμόζεται. Εάν η τοποθεσία των ορίων διεξόδου ή του μακρινού πεδίου έχουν διαλεχθεί αρκετά μακριά από το σημείο μελέτης μέσα στην περιοχή λύσης υπάρχει πιθανότητα φυσικά να έχουμε σημαντικά αποτελέσματα. Πολλές λύσεις δοκιμάζουν προσεχτικά από την ευαισθησία στο εσωτερικό του διαλύματος μέχρι την τοποθεσία των ορίων των εκροών και των μακρινών πεδίων. Εάν τα αποτελέσματα δεν αλλάξουν εσωτερικά, οι οριακές συνθήκες θα είναι διαφανείς και τα αποτελέσματα θα είναι αποδεκτά.

Αυτές οι περιπτώσεις κάνουν το γενικό σκοπό του κώδικα του CFD για το πεπερασμένο όγκο πιο δύσκολο να αντιμετωπισθεί γενικά υποηχητικές, υπερηχητικές ή/και υπερηχητικές ιζώδεις ροές. Ενώ όλοι οι εμπειρικά διαθέσιμοι κώδικες ισχυρίζονται ότι είναι ικανοί να κάνουν υπολογισμούς σε όλους τους αγωγούς ροής αυτοί εκτελούν περισσότερο αποτελεσματικά καλά στους αριθμούς Mach κάτω του 1 σαν συνέπεια όλων των προβλημάτων που περιγράψαμε παραπάνω.

Η ΤΥΡΒΗ ΚΑΙ Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ

3.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΤΥΡΒΗ;

Εδώ θα δούμε συνοπτικά τα κύρια χαρακτηριστικά των τυρβωδών ροών. Ο αριθμός Reynolds μιας ροής μας δίνει το μέτρο για τη σχετική σημασία των δυνάμεων αδράνειας και τις δυνάμεις ιξώδους. Σε πειράματα ρευστών συστημάτων παρατηρείται ότι οι τιμές κάτω από τον λεγόμενο αριθμό Reynolds Re_{crit} η ροή είναι ομαλή και οι γειτονικές στιβάδες του ρευστού γλιστρούν πέραν της μιας με την άλλη με έναν τρόπο μεθοδικό. Εάν οι εφαρμοσμένες οριακές συνθήκες δεν αλλάξουν με το χρόνο η ροή είναι σταθερή. Αυτή η αγωγή ονομάζεται στρωτή ροή. Σε τιμές αριθμού Reynolds πάνω από Re_{crit} προκαλείται μια πολύπλοκη σειρά γεγονότων που σιγά – σιγά οδηγεί στη ριζική αλλαγή του χαρακτήρα της ροής. Η κίνηση γίνεται εσωτερικά ασταθής ακόμα και με την εκμετάλλευση συνεχών οριακών συνθηκών. Η ταχύτητα και όλες οι υπόλοιπες ιδιότητες ροής ποικίλουν με τυχαίο και χαοτικό τρόπο. Αυτή η αγωγή ονομάζεται τυρβώδης ροή. Ένα τυπικό σημείο στην μέτρηση της ταχύτητας μπορεί να φανεί στην μορφή που φαίνεται στην εικόνα 3.1.



Εικόνα 3.1 Τυπικό σημείο μέτρησης της ταχύτητας σε τυρβώδη ροή.

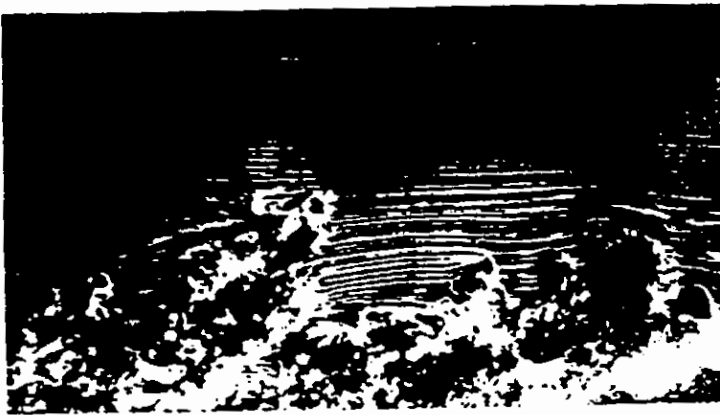
Η τυχαία φύση μιας τυρβώδους ροής εμποδίζει υπολογισμούς που βασίζονται σε μια πλήρη περιγραφή της κίνησης σε όλα τα ρευστά σωματίδια. Αντίθετα η ταχύτητα στην εικόνα 3.1 μπορεί να αναλυθεί σε μια σταθερή τιμή U με κυμαινόμενο στοιχείο $u'(t)$ που υπερτίθεται σε αυτό: $u(t) = U + u'(t)$. Γενικά είναι πολύ ενδιαφέρον να χαρακτηρίσουμε τη τυρβώδη ροή από τις μέσες τιμές των ιδιοτήτων ροής (U, V, W, P κ.λπ.) και τις στατιστικές ιδιότητες των διακυμάνσεών τους (u', v', w', p' κ.λπ.).

Ακόμα σε ροές όπου οι μέσες ταχύτητες και πιέσεις ποικίλουν σε χώρους με μόνο μια ή δυο διαστάσεις, οι τυρβώδεις διακυμάνσεις πάντα έχουν στο χώρο τρισδιάστατο χαρακτήρα. Εκτός τούτου, οπτικές εικόνες για στρωτά ροές εμφανίζουν δομές περιστροφικής ροής, οι λεγόμενες δίνες, με μια πλατιά έκταση της

κλίμακας μήκους. Η εικόνα 3.2, που απεικονίζει μια διατομική όψη οριακής στρώσης τυρβής σε λεία πλάκα, δείχνει δίνες όπου η κλίμακα μήκους είναι συγκρίσιμη σε αυτή των οριακών ροών τόσο καλά: όσο και οι δίνες που είναι ενδιάμεσες και μικρού μεγέθους.

Τα σωματίδια ρευστού που αρχικά χωρίζονται σε μια μακρινή απόσταση μπορούν να έρθουν μαζί από τις δυνικές κινήσεις στις **τυρβώδεις** ροές. Κατά συνέπεια, η θερμότητα, η μάζα και η ορμή ανταλλάσσονται. Για παράδειγμα, μια δόση χρώματος που εισάγεται σε ένα σημείο της στροβιλώδους ροής διαλύεται ταχύτατα και μπορεί να διασκορπιστεί κατά μήκος όλης της ροής. Τέτοια δραστική μίξη δημιουργεί υψηλές τιμές των συντελεστών διαχύσεως για τη μάζα, ορμή και θερμότητα.

Οι μεγαλύτερες δίνες αλληλεπιδρούν και εξαγουν ενέργεια από τη μέση ροή με μια μέθοδο που ονομάζεται τέντωμα στροβίλου. Η παρουσία των βαθμίδων μέσης ταχύτητας σε ροές που έχουν χαθεί διςτεβλώνουν τις περιστροφικές δίνες στροβίλωσης, κατάλληλες ευθυγραμμισμένες δίνες απλώνονται επειδή το ένα άκρο αναγκάζεται να κινείται πιο γρήγορα από το άλλο. Στο τελικό στάδιο η συμπεριφορά της ροής είναι πηχία και χαώδης.



Εικόνα 3.2 Οπτικοποίηση ενός τυρβώδους οριακού στρώματος

Η χαρακτηριστική ταχύτητα u και το χαρακτηριστικό μήκος l των μεγαλύτερων δινών είναι τα ίδια με την κλίμακα της ταχύτητας U και κλίμακας μήκους L της μέσης ροής. Όμως ο αριθμός Reynolds ($Re = Ul/\nu$) μιας μεγάλης δίνης που διαμορφώνεται συνδυάζοντας τις κλίμακες των δινών, με το κινηματικό ιξώδες θα είναι μεγάλος σε όλες τις στροβιλώδεις ροές (εφόσον UL/ν είναι επίσης μεγάλη). Έτσι αυτές οι μεγάλες δίνες που κυριαρχούνται από αδρανείς επιρροές και επιρροές ιξώδους είναι αμελητέες.

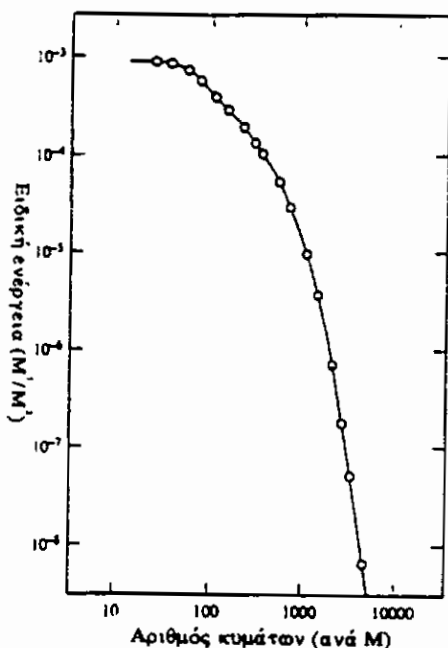
Οι μεγάλες δίνες είναι πραγματικά ανιξώδεις και επομένως η γωνιακή ορμή διατηρείται κατά το τέντωμα της δίνης. Αυτό προκαλεί στον ρυθμό περιστροφής να αυξηθεί και η ακτίνα των διατομών τους να μειώνεται. Σ' αυτή τη διαδικασία δημιουργούνται κινήσεις που είναι μικρότερες στα εγκάρσια μήκη της κλίμακας και επίσης

μικρότερες στις κλίμακες του χρόνου. Το τέντωμα που παράγεται από την μέση ροή σε μεγάλες δίνες εφοδιάζει με ενέργεια που διατηρεί τον στροβιλισμό.

Μικρότερες δίνες αναπτύσσουν τους εαυτούς τους αποφασιστικά από κάπως μεγαλύτερες δίνες και πιο αδύνατα από την μέση ροή. Με αυτόν τον τρόπο η κινητική ενέργεια μεταβιβάζεται από μεγάλες δίνες σε προοδευτικά μικρότερες και στις μικρότερες δίνες. Όλες οι κυμαινόμενες ιδιότητες μιας τυφώδους ροής περιλαμβάνουν μια ενέργεια κατά μήκος μιας πλατιάς γραμμής των συχνοτήτων ή των κυματικών αριθμών ($= 2\pi f/\lambda$ όπου f = συχνότητα). Αυτό παρουσιάζεται στην εικόνα 3.3, η οποία δείχνει την ενέργεια ενός φάσματος μιας τύρβης κατεβαίνοντας σε ένα πλέγμα.

Η μικρότερη κλίμακα κίνησης που μπορεί να συμβεί σε στροβιλώδη ροή υπαγορεύεται από το ιξώδες. Ο αριθμός Reynolds των μικρότερων δινών βασίζεται πάνω στην χαρακτηριστική τους ταχύτητα U και το χαρακτηριστικό μήκος η ($= u/\nu$) ισούται με 1. Σ' αυτές τις κλίμακες (μήκη από 0.1 έως 0.01 mm και συχνότητες γύρω στα 10 kHz σε συνηθισμένες στροβιλώδεις μηχανικές ροές) οι επιρροές του ιξώδους έχουν μεγάλη σημασία. Το έργο παράγεται αντίθετα των ενεργειών των τάσεων του ιξώδους, έτσι η ενέργεια σε συνδυασμό με τις κινήσεις δίνης διαλύεται και μετατρέπεται σε εσωτερική θερμική ενέργεια. Αυτή η διάλυση έχει σαν αποτέλεσμα την αυξημένη απώλεια ενέργειας σε συνδυασμό με τις στροβιλώδεις ροές.

Η δομή των μεγαλύτερων δινών είναι πολύ ανισοτροπική (κατευθυντική) και εξαρτάται η ροή λόγω της μεγάλης αλληλεπίδρασής τους με τη μέση ροή. Η διαχυτική δράση του ιξώδους τείνει να εξαλείφει την κατευθυντικότητα στις μικρές κλίμακες. Η υψηλή μέση ροή των αριθμών Reynolds, οι μικρότερες δίνες σε μια στροβιλώδη ροή είναι, λοιπόν, ιστροπικές (μη κατευθυντικές).



Εικόνα 3.3 Φάσμα της ενέργειας της τύρβης πίσω από πλέγμα.

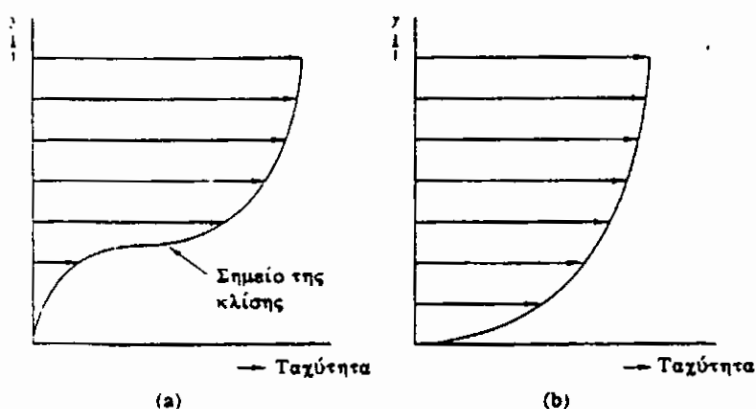
3.2 ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΤΡΩΤΗ ΣΤΗΝ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ

Η κύρια αιτία της μετάβασης στην τύρβη μπορεί να εξηγηθεί θεωρώντας την ευστάθεια των στοιβακών ροών σε μικρές διαταραχές. Σε πολλές σχετικές περιπτώσεις η μετάβαση στην τύρβη συνδυάζεται με ροές διατμήσεως. Η θεωρία της γραμμικής υδροδυναμικής ευστάθειας προσπαθεί να εντοπίσει τις συνθήκες που προκαλούν την ανάπτυξη διαταραχών. Στο γενικό πλαίσιο της μηχανικής εκείνο που είναι ενδιαφέρον είναι η πρόβλεψη των τιμών των αριθμών Reynolds $Re_{crit} (= U_{crit}/\nu)$ όπου οι διαταραχές επεκτείνονται και $Re_{tr} (= U_{tr}/\nu)$ στον οποίο η μετάβαση γίνεται σε πλήρη τυρβώδεις ροές.

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΡΩΤΩΝ ΡΟΩΝ

Δυο βασικοί διαφορετικοί μηχανισμοί αστάθειας λειτουργούν, οι οποίοι συνδέονται με το σχήμα του προφίλ δισδιάστατης στρωτής ταχύτητας της βασικής ροής. Ροές με μια κατανομή ταχύτητας που περιλαμβάνουν σημείο της κλίσης όπως φαίνεται στην εικόνα 3.4.α είναι πάντα ασταθείς σε σχέση με τις επειροελάχιστες διαταραχές, εάν ο αριθμός Reynolds είναι αρκετά μεγάλος. Αυτή η αστάθεια πρώτο εντοπίστηκε κάνοντας μια υπόθεση χωρίς ιξώδες στις εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη της διαταραχής. Μεταγενέστερη λεπτολογία της θεωρίας με τον συνυπολογισμό της επιρροής του ιξώδους αλλάζει τα συμπεράσματά της πολύ λίγο, έτσι τέτοιου είδους αστάθεια είναι γνωστή ως **ανιξώδης αστάθεια**.

Προφίλ ταχύτητας αυτού του τύπου φαίνεται στην εικόνα 3.4.α που συνδυάζεται με δέσμες ροών, με αναμίξεις στοιβάδων και απορρεύματα και επίσης με οριακές στιβάδες πάνω από επίπεδες πλάκες κάτω από την επιρροή ενός δυσμενή βαθμού κλίσης πίεσης ($\theta_r/\theta_x > 0$).



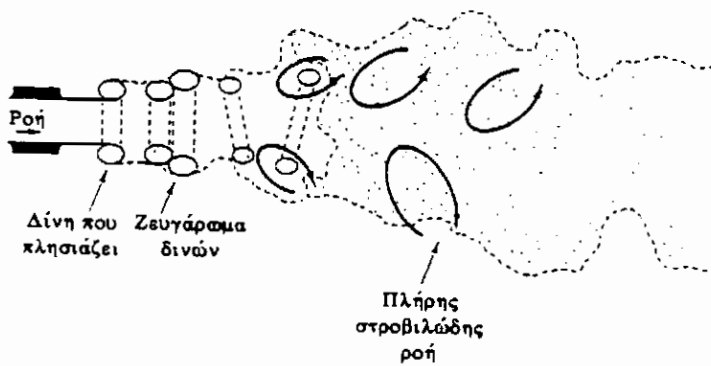
Εικόνα 3.4 Προφίλ ταχύτητας επιρρεπή στην α)Ανιξώδη β)Ιξώδη αστάθεια

Οι ροές με κατανομές στρωτής ταχύτητας χωρίς ένα σημείο κλίσης όπως στο προφίλ που φαίνεται στην εικόνα 3.4.β είναι επιρρεπείς στην ιξώδη αστάθεια. Η κατά προσέγγιση θεωρία των ανιξιδίων προβλέπει ανεπαφύλακτη ευστάθεια για αυτά τα προφίλ ταχυτήτων που συνδέονται αμετάβλητα με ροές που βρίσκονται κοντά σε στερεά τοιχώματα, όπως των σωλήνων, διόδων και οριακών στρώσεων ροής χωρίς διακριτούς βαθμούς κλίσης της πίεσης ($\theta_r/\theta_x \leq 0$) και υψηλούς αριθμούς Reynolds αλλά συνεισφέροντας στην αεριοσταθεροποίηση των ροών σε μεσαίους αριθμούς Reynolds.

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΣΤΗΝ ΤΥΡΒΗ

Το σημείο όπου η αστάθεια αρχίζει να συμβαίνει είναι πάντα αντίθετο του ρεύματος από το σημείο μετάβασης των πλήρως τυρβωδών ροών. Η απόσταση μεταξύ του σημείου της αστάθειας όπου ο αριθμός Reynolds ισούται με $Re_{\text{κατ}}$ και το σημείο της μεταβατικής διαδικασίας μπορεί να προβλεφθεί με τη γραμμική θεωρία της υδροδυναμικής αστάθειας. Δεν υπάρχει οπωσδήποτε καμία θεωρία σχετικά με την κύρια πορεία από αρχικές αστάθειες ως τις πλήρως τυρβώδεις ροές. Παρακάτω περιγράφουμε τα κύρια πειραματικώς παρατηρούμενα χαρακτηριστικά τριών απλών ροών: των jet, τις επίπεδες πλάκες των οριακών στρωμάτων και τις ροές σωλήνων.

Ροή jet: Οι ροές που κατέχουν ένα ή περισσότερα σημεία κλίσης ενισχύουν μακριά τα κυματικά μήκη των διαταραχών σε όλους τους αριθμούς Reynolds χαρακτηριστικά πάνω περίπου από 10. Η μεταβατική διαδικασία εξηγείται λαμβάνοντας υπόψη το σκίτσο για την ροή jet (εικόνα 3.5)

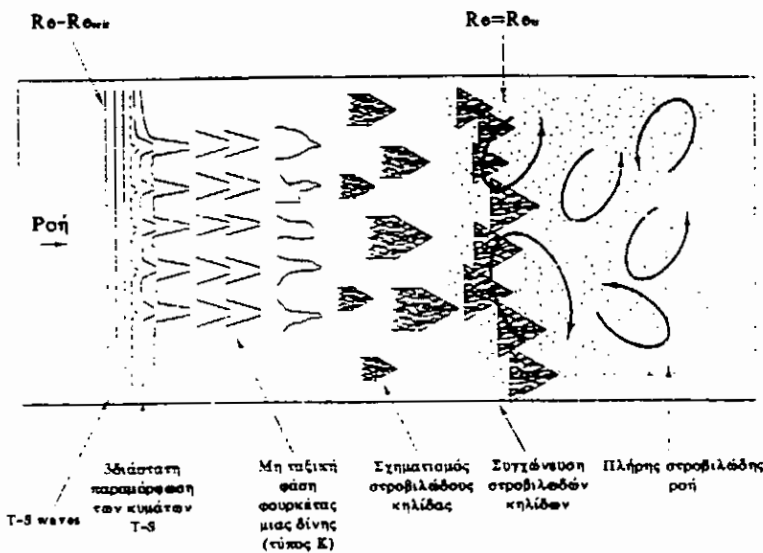


Εικόνα 3.5 Μετάβαση σε μια ροή jet

Μετά την προβολή της ροής από το στόμιο, στην έξοδο της στρωτής ροής δημιουργείται ένα τύλιγμα δίνης αρκετά κοντά στο στόμιο. Επακόλουθη ενίσχυση συμπεριλαμβάνει τη μορφοποίηση μιας απλής δίνης

μεγαλύτερης δύναμης μέσω της ζευγάρωσης των δινών. Λίγο παρακάτω οι τρισδιάστατες διαταραχές κάνουν τις δίνες να γίνονται βαριά παραμορφωμένες και λιγότερο ευδιάκριτες. Η ροή διασπάται σε ένα μεγάλο αριθμό μικρών κλιμακωτών δινών και υφίστανται μια γρήγορη μετάβαση στην πλήρες στροβιλώδη ογωγή. Η ανάμιξη των στιβάδων και των απορευμάτων πίσω από εμπόδια-σώματα επιδεικνύοντας μια παρόμοια σειρά γεγονότων που οδηγούν στην μετάβαση και στην τυρβώδη ροή.

Οριακό στρώμα: Σε ροές όπου η κατανομή της ταχύτητας χωρίς ένα σημείο ανάκαμψης, της ιξώδους αστάθειας η θεωρία προβλέπει ότι υπάρχει μια πεπερασμένη περιοχή αριθμών Reynolds γύρω στο $Re_{\delta} = 1000$ ($\delta =$ πάχος οριακού στρώματος) όπου διευρύνονται οι απειροστές διαταραχές. Η ροή που αναπτύσσεται πάνω σε μια επίπεδη πλάκα, είναι μια τέτοια ροή και η μετάβαση της διαδικασίας έχει εκτεταμένα ερευνηθεί για αυτή την περίπτωση. Η ακριβής σειρά γεγονότων είναι ευκρίνητη προς το επίπεδο διαταραχής της εισερχόμενης ροής. Εάν και το σύστημα της ροής δημιουργεί αρκετά λείες συνθήκες, η αστάθεια του οριακού στρώματος να ρέει σχετικά μακριά τα μήκη κυμάτων των διαταραχών που μπορούν εύκολα να εντοπισθούν. Ένα σκίτσο της διαδικασίας που οδηγεί στην μετάβαση και στην πλήρες στροβιλώδη ροή δίνεται στην εικόνα 3.6.

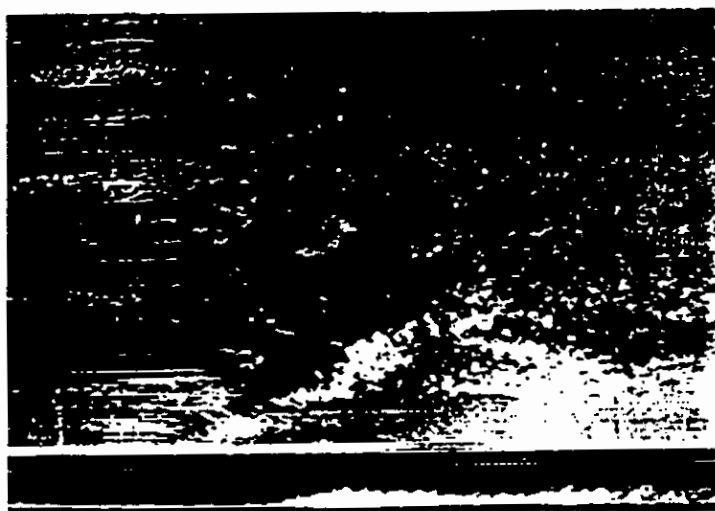


Εικόνα 3.6 Πλάγια όψη της μεταβατικής διαδικασίας σε οριακό στρώμα πάνω από μια επίπεδη πλάκα

Εάν η εισερχόμενη ροή είναι στρωτή, πολυάριθμα πειράματα βεβαιώνουν τις προβλέψεις της θεωρίας ότι η αρχική γραμμική αστάθεια συμβαίνει γύρω στο $Re_{crit} = 91000$. Οι ασταθείς δισδιάστατες διαταραχές ονομάζονται κύματα Tollmien - Schlichting (T-S). Αυτές οι διαταραχές διευρύνονται προς την κατεύθυνση της ροής. Η επακόλουθη εξέλιξη εξαρτάται από την έκταση των κυμάτων στην μέγιστη (γραμμική) διεύρυνση. Εφόσον η διεύρυνση συμβαίνει σε περιορισμένα πεδία των αριθμών Reynolds πιθανότατα τα ενισχυμένα κύματα εξασθενούν παρακάτω και η ροή να παραμένει ελασματική. Εάν η επέκταση είναι αρκετά μεγάλη τότε ένας δευτερεύων - γραμμικός μηχανισμός αστάθειας προξενούν τα Tollmien - Schlichting κύματα γίνονται

τρισετάσιατα και τελικά να εξελιχθούν σε υψηλές Λ - δίνες. Στο πιο κοινό μηχανισμό της μετάβασης η λεγόμενη K- τύπου μετάβασης οι ψηλές δίνες ευθυγραμμίζονται.

Πάνω από τις φουρκέτες των δινών προκαλείται ένα υψηλό πεδίο διάτμησης, το οποίο επακόλουθως εντείνεται, προεκτείνεται και τυλίγεται. Περαιτέρω στάδια της διαδικασίας της μετάβασης περιλαμβάνουν μια διάσπωση των cascading των υψηλών σταβάδων διάτμησης μέσα σε μικρές μονάδες με τα φάσματα συχρότητας των μετρήσιμων προσεγγίσεων των παραμέτρων της ροής να είναι τυχαία. Περιοχές έντονης και υψηλά περιορισμένων αλλαγών συμβαίνουν σε τυχαίους χρόνους και θέσεις κοντά σε στερεό τοίχο. Οι τριγωνικές στροβιλώδης κηλίδες σκάνε από την ροή και μεγαλώνουν καθώς απλώνονται λοξά και το οποίο προκίλει αύξηση του συνόλου του στρωτού ρευστού για να πάρει μέρος στην στροβιλώδη κίνηση.



Εικόνα 3.7. Τυρβώδη σημεία και μετάβαση στην τύρβη σε ένα οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας

Η μετάβαση μιας επίπεδης πλάκας μιας οριακής σταβάδας περιλαμβάνει τη μορφοποίηση των στροβιλώδων κηλίδων σε ενεργά σημεία και η επακόλουθη συγχώνευση των διαφόρων στροβιλώδων κηλίδων καθοδικά από την ροή. Αυτό παίρνει μέρος σε αριθμούς Reynolds $Re_{x_{cm}} \approx 10^6$. Η εικόνα 3.7 είναι ένα στιγμιότυπο του σχεδιασμού της όψης μιας οριακής σταβάδας μιας επίπεδης πλάκας και επεξηγεί αυτή την διαδικασία.

Μετάβαση ροών σωλήνα : Η μετάβαση σε μια ροή σωλήνα παρουσιάζει ένα παράδειγμα ειδικής κατηγορίας ροών χωρίς σημείο ανάκαμψης. Η θεωρία ιξώδους στην υδροδυναμική ευστάθεια προβλέπει ότι αυτές οι ροές είναι ανεπαφύλακτα σταθερές στις απειροστές διαταραχές όλων των αριθμών Reynolds. Στην πρακτική η μετάβαση στην τύρβη παίρνει μέρος μεταξύ $Re (= UD/\nu)$ 2000 και 10^5 . Πολλές λεπτομέρειες είναι ακόμη ασαφείς, οι οποίες διευκρινίζουν περιορισμούς στις σύγχρονες θεωρίες ευστάθειας.

Ο λόγος της φανεράς αποτυχίας της θεωρίας είναι επειδή ο ρόλος που παίζουν οι παραμορφώσεις στο προφίλ της εισόδου ταχύτητας και οι πεπερασμένες επεκτάσεις των διαταραχών λόγω των επιρροών εισαγωγής. Τα πειράματα δείχνουν ότι οι ροές στους σωλήνες όπως και στις επίπεδες πλάκες οριακών στρωμάτων, οι στροβιλώδεις κηλίδες εμφανίζονται στην πλησιέστερη περιοχή του τοιχώματος. Αυτές μεγαλώνουν, συγχωνεύονται με τελικό επακόλουθο να γεμίζουν τμήμα του σωλήνα και να διαμορφώνουν τις στροβιλώδεις περιοχές.

Σε βιομηχανικές σωληνοροές η διακοπτόμενη μορφοποίηση των στροβιλωδών περιοχών συμβαίνει στους αριθμούς Reynolds γύρω στο 2000 και δημιουργεί εναλλασσόμενες στροβιλώσεις σε στρωτές περιοχές κατά μήκος του μήκους του σωλήνα. Σε αριθμούς Reynolds πάνω από 2300 οι στροβιλώδεις περιοχές ενώνονται και όλος ο σωλήνας γεμίζει με τυρβώδη ροή.

Σχολιασμός:

Είναι φανερό από τις παραπάνω περιγραφές μετάβασης σε jets, σε επίπεδες πλάκες οριακών στρωμάτων και σωληνοροές, ότι υπάρχει ένας αριθμός κοινών χαρακτηριστικών στην διαδικασία της μετάβασης.

- i) ενίσχυση κυρίως των μικρών διαταραχών
- ii) η ανάπτυξη των περιοχών με έντονες περιστροφικές δομές
- iii) η μορφοποίηση έντονων μικρών κλιμακωτών κινήσεων και
- iv) η ανάπτυξη και συγχώνευση αυτών των περιοχών των μικρών κλιμακωτών κινήσεων σε πλήρη τυρβώδεις ροές.

Η μετάβαση στην τύρβη επηρεάζεται έντονα από παράγοντες όπως την κλίση της πίεσης, τα επίπεδα διαταραχών, την τραχύτητα τοιχώματος και τη μετάδοση θερμότητας. Αυτές οι παρατηρήσεις αφορούν μόνο τις ασυμπίεστες υποηχητικές ροές. Η εμφάνιση σημαντικών επιρροών συμπεστικότητας σε ροές αριθμών Mach πάνω από 0.7 περιπλέκει τα κατά πολύ τη θεωρία της ευστάθειας.

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι ενώ έχουμε μάθει πολλά από τις απλές ροές δεν υπάρχει καμία κατανοητή θεωρία για τη μετάβαση. Με πρόσφατες προσπάθειες που έχουν γίνει στην τεχνολογία των υπερυπολογιστών η δυνατότητα να προσομοιωθούν τα γεγονότα που οδηγούν στη μετάβαση, περιλαμβάνοντας τη μορφοποίηση των τυρβωδών κηλίδων λύνουν πλήρως τις χρονο-εξαρτημένες εξισώσεις των NAVIER – STOKES σε μέτριους αριθμούς Reynolds για έναν αριθμό με πολύ απλή γεωμετρία. Οι Kleiser και Zang (1991) δίνουν μια

κριτική της κατάστασης του τεχνάσματος, το οποίο είναι αποκορύφωμα πολλών ευνοϊκών συμφωνιών μεταξύ των πειραμάτων και των (υπερβολικά ακριβή) υπολογισμών.

Για μηχανικούς σκοπούς η κύρια περίπτωση όπου η μεταβατική διαδικασία επηρεάζει ένα αρκετά μεγάλο κλάσμα της ροής είναι αυτή στο εξωτερικό τοίχωμα της οριακής στιβάδας της ροής σε ένα μέσο αριθμό Reynolds. Αυτό συμβαίνει κυρίως στις τουρμπομηχανές, σε ρότορες ελικοπτέρων και σε μερικά φτερά αεροσκαφών χαμηλής ταχύτητας.

Ο Cebeci (1989) παρουσιάζει μια μέθοδο μηχανικού υπολογισμού που βασίζεται σε ένα συνδυασμό υπολογισμών για τα ανιζώδη μακρινά πεδία και τις οριακές στιβάδες που συνδέονται με την ανάλυση γραμμικής ευστάθειας για να εντοπισθούν οι κρίσιμοι και μεταβατικοί αριθμοί Reynolds. Η μετάβαση θεωρείται ότι έχει συμβεί στο σημείο όπου βρίσκεται ένας (αυθαίρετος) παράγοντας ενίσχυσης ($e^9 \approx 8000$) των αρχικών διαταραχών. Η διαδικασία που περιλαμβάνει ένα πρότυπο μίγμα μήκους για το πλήρες κομμάτι του στροβιλισμού της οριακής στιβάδας, έχει αποδειχθεί πολύ αποτελεσματική για τους αεροδυναμικούς υπολογισμούς, αλλά χρειάζεται σημαντική ποσότητα εμπειρικής εισφοράς επομένως η γενίκευση είναι ελλιπής. Οι εμπορικά διαθέσιμοι γενικοί κώδικες CFD αγνοούν συχνά τη μετάβαση εντελώς και θεωρούν τις ροές ως στρωτές ή πλήρως τυρβώδεις. Η μεταβατική περιοχή συχνά περιλαμβάνει μόνο ένα μικρό κλάσμα του μεγέθους της περιοχής της ροής και σε εκείνες τις περιπτώσεις θεωρείται ότι τα λάθη που γίνονται από την παράβλεψη αυτή είναι πολύ λίγα.

3.3 ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΡΟΝΟΥ-ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ NAVIER-STOKES

Η κρίσιμη διαφορά ανάμεσα στην οπτικοποίηση των στρωτών και τυρβωδών ροών είναι η εμφάνιση δυναμικών κινήσεων σε ένα πλατύ πεδίο της κλίμακας του μήκους στις στροβιλώδεις ροές. Μια τυπική περιοχή της ροής από 0,1 επί 0,1m με ένα υψηλό αριθμό Reynolds στην στροβιλώδη ροή. Θα πρέπει να περιλαμβάνει δίνες ταξινομημένες από 10 έως 100μm. Θα χρειαζόμασταν να υπολογίσουμε τα ικανά σημεία των πλεγμάτων από 10^9 έως 10^{12} που μπορούν να περιγράψουν διαδικασίες σε όλη την κλίμακα του μήκους. Τα πιο γρήγορα γεγονότα συμβαίνουν στην συχνότητα γύρω 10kHz και έτσι θα χρειαζόμασταν να ξεχωρίσουμε το χρόνο σε κλίμακες των 100μs περίπου. Ο Speziale (1991) δηλώνει ότι η ακριβής προσομοίωση μιας στροβιλώδης σωληνοροής σε αριθμό Reynolds Reynolds περίπου στα 500.000 χρειάζεται έναν υπολογιστή που θα είναι 10 εκατομμύρια φορές πιο γρήγορος από την τρέχων παραγόμενο υπερυπολογιστή GRAY.

Με τη σύγχρονη υπολογιστική δύναμη τώρα τελευταία υπάρχει η δυνατότητα να παρακολοθηθούν τις δίνες της δυναμικής σε πολύ απλές ροές στους μεταβατικούς αριθμούς Reynolds. Οι υπολογιστικές ανάγκες για την άμεση λύση των χρόνο-εξαρτημένων εξισώσεων NAVIER-STOKES των πλήρως τυρβωδών ροών σε υψηλούς αριθμούς Reynolds είναι καθαρά φαινομενικές και πρέπει να γίνουν αρκετές αναβαθμίσεις στη τεχνολογία των υπολογιστών.

Εν τω μεταξύ οι μηχανικοί χρειάζονται υπολογιστικές διαδικασίες που μπορούν να ξώσουν επαρκείς πληροφορίες για τις στροβιλώδεις αλλά χωρίς την ανάγκη να προβλέπεται η επαρροή κάθε δίνης στη ροή. Ευτυχώς αυτή η κατηγορία των χρηστών CFD δίνει σχεδόν πάντα ικανοποιημένη με τις πληροφορίες των ιδιοτήτων του μέσου χρόνου της ροής (π.χ μέσες ταχύτητες, μέσες πιέσεις και μέσες τάσεις κ.λ.π.).

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ REYNOLDS

Πρώτα καθορίζουμε την μέση τιμή Φ μιας ιδιότητας ϕ της ροής ως εξής :

$$\Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \phi(t) dt \quad (3.1)$$

Θεωρητικά θα πρέπει να πάρουμε το όριο του χρονικού διαστήματος Δt που προσεγγίζει το άπειρο αλλά και το Δt είναι αρκετά μεγάλο αν υπερβεί τις χρονικές κλίμακες των πιο αργών μεταβολών (λόγο των μεγαλύτερων δυνάμεων) της ιδιότητας ϕ . Αυτός ο ορισμός της μέσης τιμής μιας ιδιότητας της ροής είναι κατάλληλη για μέσες σταθερές ροές. Σε χρόνο-εξαρτημένες ροές μιας ιδιότητας σε χρόνο t λαμβάνεται ως ο μέσος όρος των ακαριαίων τιμών της [πειραμάτων το λεγόμενο μέσος όρος του συνόλου]. Η ιδιότητα της ροής ϕ εξαρτάται από το χρόνο και μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο του σταθερού μέσου στοιχείου ϕ και ένα χρόνο-μεταβλητό στοιχείο ανάκαμψης ϕ' με μέση τιμή το 0, όπου $\phi(t) = \Phi + \phi'(t)$.

Από τώρα και στο εξής δεν θα γράφουμε τη χρόνο-εξάρτηση του ϕ και ϕ' σαφώς έτσι εμείς θα γράφουμε μόνο $\phi = \Phi + \phi'$. Ο μέσος όρος του χρόνου μιας ταλάντωσης ϕ' είναι εξ'ορισμού μηδέν.

$$\overline{\phi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \phi'(t) dt = 0 \quad (3.2)$$

Πληροφορίες σχετικά με το κυμαινόμενο κομμάτι της ροής μπορούν για παράδειγμα να αποκτηθούν από την ρίζα του μέσου τετραγώνου (rms) της διακύμανσης :

$$\phi_{rms} = \sqrt{\overline{(\phi')^2}} = \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\phi')^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

Οι τιμές της ρίζας του μέσου τετραγώνου (rms) των στοιχείων της ταχύτητας είναι ιδιαίτερα σημαντικές αφού μπορούν εύκολα να μετρηθούν με ταχύτητα που διερευνά ευαίσθητα τις στροβιλώδεις διακυμάνσεις (π.χ ένα ανεμόμετρο θερμού σύρματος) και μια απλή ηλεκτρική circuitry. Η κινητική ενέργεια K (ανά μιονίδα μάζας) σε συνδυασμό με το στροβιλισμό καθορίζεται ως :

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{\omega^2}) \quad (3.4)$$

Η στροβιλώδης ένταση T_i είναι συνδεδεμένη με την κινητική ενέργεια και μια αναφορά της μέσης ταχύτητας

U_{ref} της ροής είναι ως εξής :

$$T_i = \frac{\left(\frac{2}{3}k\right)^{\frac{1}{2}}}{U_{ref}} \quad (3.5)$$

Πριν βρεθούν οι εξισώσεις μέσης τιμής της ροής για μια στροβιλώδης ροή συνοψίζουμε τους ακόλουθους κανόνες που διέπουν του μέσου όρους του χρόνου των ιδιοτήτων διακύμανσης $\phi = \Phi + \phi'$ και $\psi = \Psi + \psi'$ και τους συνδυασμούς τους, τα παράγωγα και τα ολοκληρώματα τους:

$$\overline{\phi'} = \overline{\psi'} = 0, \quad \overline{\Phi} = \Phi, \quad \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad \overline{\int \phi ds} = \int \Phi ds$$

$$\overline{\phi + \psi} = \Phi + \Psi, \quad \overline{\phi\psi} = \Phi\Psi + \overline{\phi'\psi'}, \quad \overline{\phi\Psi} = \Phi\Psi, \quad \overline{\phi'\Psi} = 0 \quad (3.6)$$

Αυτές οι σχέσεις εύκολα επαληθεύονται από τις εφαρμογές των (3.1) και (3.2) παρατηρώντας ότι time-averaging είναι από μόνο του ολοκλήρωμα και επομένως η σειρά της time-averaging και μια ολοκλήρωση ή διαφορισμός μπορεί να ανταλλάσσονται.

Αφού div και grad είναι διαφορίσεις οι παραπάνω κανόνες μπορούν να επεκταθούν σε ένα $a = a' + A$ και οι συνδυασμοί τους με τη κλιμακωτή διακύμανση $\phi = \Phi + \phi'$ κυμαινόμενο άνυσμα ποσότητας.

$$\overline{div a} = \overline{div A}; \quad \overline{div(\phi a)} = \overline{div(\Phi A)} + \overline{div(\phi' a')} = \overline{div(\phi a)} \quad (3.7)$$

$$\overline{div grad \phi} = \overline{div grad \Phi}$$

Για να διευκρινίσουμε την επιρροή των τυρβωδών διακυμάνσεων της μέσης ροής υπολογίσουμε την συνέχεια και τις εξισώσεις Navier - Stokes για μια ασυμπίεστη ροή με σταθερό ιξώδες. Αυτό απλοποιεί τους υπολογισμούς στην άλγεβρα αρκετά χωρίς να ξεφεύγουμε από το κύριο θέμα. Ως συνήθως παίρνουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες έτσι ώστε το άνυσμα της ταχύτητας u να έχει κατά το x - το συστατικό u , κατά το y - το συστατικό v και κατά τον z - το συστατικό w :

$$div u = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \overline{div(uu)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \overline{div(grad(u))} \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \overline{div(vu)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \overline{div(grad(v))} \quad (3.9b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \overline{div(wu)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \overline{div(grad(w))} \quad (3.9c)$$

Για να ερευνήσουμε τις επιρροές των διακυμάνσεων αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (3.8) και (3.9 a-c) της ροής της μεταβλητές του u (επίσης v , w) και p το σύνολο της μέσης τιμής του κυμαινόμενου συστατικού. Έτσι έχουμε:

$$u = U + u' ; v = V + v' ; w = W + w' ; p = P + p'$$

Τότε η αναλογία του χρόνου είναι έτοιμη εφαρμοστεί με τους νόμους στην (3.7). λαμβάνοντας υπ' όψιν την εξίσωση της συνέχειας (3.8) πρώτα εμείς σημειώνουμε ότι $\overline{div u} = div U$. Αυτό δείχνεται στην εξίσωση της συνέχειας για την μέση ροή

$$div U = 0 \quad (3.10)$$

Μια παρόμοια διαδικασία πραγματοποιείται κατά χ- φορά στην εξίσωση (3.9α).

Οι χρονικές αναλογίες των ανεξάρτητων όρων σε αυτή την εξίσωση μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u}{\partial t}} &= \frac{\partial U}{\partial t} & \overline{div(uu)} &= div(UU) + \overline{div(u'u')} \\ \overline{\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}} &= -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} & \overline{v div(grad(u))} &= v div(grad(U)) \end{aligned}$$

Αντικατάσταση των αποτελεσμάτων αυτών δίνονται την αναλογία του χρόνου κατά την χ- φορά της εξίσωσης:

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial t}} + \overline{div(UU)} + \overline{div(u'u')} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial y} + v \overline{div(grad(U))} \quad (3.11a)$$

Επανάληψη αυτής της διαδικασίας στις εξισώσεις (3.9b) και (3.9c) αποδίδει στις εξισώσεις την αναλογία του χρόνου - φοράς και z- φοράς.

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial t}} + \overline{div(VU)} + \overline{div(v'u')} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial y} + v \overline{div(grad(V))} \quad (3.11b)$$

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} + \overline{div(WU)} + \overline{div(w'u')} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial z} + v \overline{div(grad(W))} \quad (3.11c)$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι όροι (I), (II), (IV), (V) στις εξισώσεις (3.11a-c) επίσης εμφανίζονται στις ακαριαίες εξισώσεις (3.9a-c) αλλά η διαδικασία της αναλογικής του χρόνου έχει εισάγει νέους όρους (III) προκύπτοντας μια αναλογία του χρόνου κατά τη φορά της εξίσωσης. Οι όροι συμπεριλαμβάνουν προϊόντα κυμαινόμενων ταχυτήτων και συγκροτούν την μεταγωγική μετάδοση της φοράς μέσω της ταχύτητας διακυμάνσεως. Συνηθίζεται να τοποθετούνται οι όροι στην δεξιά πλευρά των εξισώσεων (3.11a-c) για να εκφράσουν το ρόλο τους ως συμπληρωματική τάση στον στροβιλισμό στην μέση ταχύτητα των συστατικών u, v και w.

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial t}} + \overline{div(UU)} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} + v \overline{div(grad(U))} + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial z} \right] \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad}(V)) + \left[-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial z} \right] \quad (3.12b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad}(W)) + \left[-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right] \quad (3.12c)$$

Οι επιπλέον όροι της τάσης έχουν γραφτεί πλήρως σε κανονική γραφή για να αποσαφηνισθεί η δομή τους. Αυτές προκύπτουν από τις 6 επιπρόσθετες τάσεις, 3 κανονικές και 3 διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{xx} = -\overline{\rho u'^2} \quad \tau_{yy} = -\overline{\rho v'^2} \quad \tau_{zz} = -\overline{\rho w'^2} \quad (3.13)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\overline{\rho u'v'} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \overline{\rho u'w'} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\overline{\rho w'v'}$$

Αυτές οι πρόσθετες στροβιλώδεις τάσεις ορίζονται ως τάσεις Reynolds. Σε τυρβώδεις ροές οι κανονικές τάσεις $-\overline{\rho u'^2}$, $-\overline{\rho v'^2}$, $-\overline{\rho w'^2}$ είναι πάντα μη-μηδενικές επειδή περιέχουν τετραγωνισμένες ταχύτητες διακυμάνσεων. Οι διατμηματικές τάσεις $-\overline{\rho u'v'}$, $-\overline{\rho u'w'}$, $-\overline{\rho v'w'}$ συνδέονται με συσχετισμούς που υπάρχουν ανάμεσα των διάφορων συστατικών της ταχύτητας. Εάν για παράδειγμα u' και v' ήταν διακυμάνσεις στατικά ανεξάρτητες, η χρονική αναλογία του προϊόντος $\overline{u'v'}$ θα ήταν μηδέν. Όμως οι στροβιλώδεις τάσεις διάτμησης είναι επίσης μη μηδενικές και συνήθως πολύ μεγαλύτερες συγκρινόμενες με τις εξώδεις τάσεις στη στροβιλώδη ροή. Το σύστημα των εξισώσεων (3.12a-c) ονομάζονται **εξισώσεις Reynolds**. Παρόμοιοι επιπλέον όροι μεταφοράς γαίνονται όταν παραχθεί μια μεταφορική εξίσωση για μια αυθαίρετη κλιμακωτή ποσότητα. Το σύστημα εξισώσεων (3.12a-c) ονομάζεται εξισώσεις Reynolds.

Η αναλογία του χρόνου στην μεταφορική εξίσωση για το κλιμάκωνα Φ είναι:

$$\frac{\Phi}{\nu} + \text{div}(\Phi U) = \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad}(\Phi)) + \left[-\frac{\partial \overline{u'\Phi}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'\Phi}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'\Phi}}{\partial z} \right] + S_{\Phi} \quad (3.14)$$

Έχρι τώρα, έχουμε υποθέσει ότι η ρευστή πυκνότητα είναι συνεχής, αλλά σε πρακτικές ροές η μέση τιμή κνότητας μπορεί να ποικίλει και η ακαριαία πυκνότητα πάντα εκθέτει στροβιλώδεις διακυμάνσεις. Ο Idshaw et al (1981) δηλώνει ότι μικρές διακυμάνσεις πυκνότητας δεν φαίνονται να επηρεάζουν τη ροή ιαντικά. Εάν οι ρίζες του μέσου τετραγώνου της ταχύτητας διακυμάνσεως είναι της τάξης του 5% της μέσης ύτητας, αυτοί δείχνουν ότι η διακύμανση της πυκνότητας είναι ασήμαντη πάνω στους αριθμούς Mach από 3 5. Στις ελεύθερες στροβιλώδεις ροές θα δούμε ότι οι διακυμάνσεις της ταχύτητας μπαρούν εύκολα να πεγγίσουν τιμές γύρω στο 20% της μέσης ταχύτητας. Σε μια τέτοια περίπτωση οι διακυμάνσεις της ότητας αρχίζουν να επηρεάζουν τον στροβιλισμό σε αριθμούς Mach γύρω στο 1. Για να συνοψίσουμε τα ελέσματα Αυτός ο τύπος χρησιμοποιείται ευρύτατα σε εμπορικά πακέτα CFD. Το σύμβολο " ρ " ολιζει τη μέση πυκνότητα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1. Εξισώσεις τυρβώδους ροής για συμπιεστές ροές.

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(pU) = 0 \quad (3.15)$$

Εξισώσεις Reynolds

$$\frac{\partial(pU)}{\partial t} + \text{div}(pUU) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad}U) + \left[-\frac{\partial(\overline{pu'^2})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pu'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{pw'u'})}{\partial z} \right] + S_{m_x} \quad (3.16b)$$

$$\frac{\partial(pV)}{\partial t} + \text{div}(pVU) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad}(V)) + \left[-\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'v'^2})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'v'})}{\partial z} \right] + S_{m_y} \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial(pw)}{\partial t} + \text{div}(pWU) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad}(W)) + \left[-\frac{\partial(\overline{uw'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'w'^2})}{\partial z} \right] + S_{m_z} \quad (3.17)$$

Βαθμωτή εξίσωση μετάβασης:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi U) = \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad}(\Phi)) + \left[-\frac{\partial(\overline{u'\Phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'\Phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'\Phi'})}{\partial z} \right] + S_{\Phi}$$

Πρόβλημα κλεισίματος (closure problem) – η ανάγκη για μοντελοποίηση της τύρβης

Η συνέχεια και οι εξισώσεις (3.8) και (3.9a-c) των Navier - Stokes διαμορφώνουν μια κλειστή σειρά τέσσερα εξισώσεων με τέσσερα άγνωστα στοιχεία u , v , w και p . Στην εισαγωγή της παραγράφου αποδείξαμε ότι αυτές οι εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν κατευθείαν στο εγγύς μέλλον.

Οι μηχανικοί είναι πρόθυμοι να συγκεντρώσουν την προσοχή τους σε συγκεκριμένες μέσες ποσότητες. Όμως εκτελώντας αυτή την πράξη της αναλογίας του χρόνου στις εξισώσεις ορμής παραλείπουμε όλες τις λεπτομέρειες σχετικά με την κατάσταση ροής που περιέχεται στις ακαριαίες διακυμάνσεις. Από ένα υποτέλεσμα αποκτούμε έξι επιπρόσθετους αγνώστους, τις τάσεις Reynolds, στις εξισώσεις φοράς του αναλογούμενου χρόνου. Παρόμοια, ένας μέσος χρόνος σε κλιμακωτές εξισώσεις μεταφοράς δείχνουν ότι εριέχονται επιπρόσθετοι όροι - $u'\Phi'$, $v'\Phi'$, $w'\Phi'$.

Η πολυπλοκότητα της τύρβης συνήθως αποκλείει απλές φόρμουλες για τις συμπληρωματικές τάσεις και τους ιραχώδης κλιμακωτούς όρους μεταφορών. Το κυριότερο "καθήκον" της μοντελοποίησης της τύρβης είναι να απτυχθούν υπολογιστικές μέθοδοι επαρκούς ακρίβειας και γενικότητας για να προβλέψουν οι μηχανικοί σεις Reynolds και βαθμωτούς όρους μεταφοράς.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΠΛΩΝ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΡΟΩΝ

ερισσότερη θεωρία της τυρβώδους ροής και της μοντελοποίησης της αναπτύχθηκε αρχικά από προσεκτική αση της δομής του στροβίλου των λεπτών διαμηθικών επιπέδων. Σε τέτοιες ροές μεγάλες μεταβολές της ητητας είναι συγκεντρωμένες στις λεπτές περιοχές. Εκφράζοντας πιο τυπικά ο ρυθμός μεταβολής των

μεταβλητών της ροής προς στην x - διεύθυνση της ροής είναι αμελητέος συγκρινόμενος με τον ρυθμό μεταβολής του ρεύματος ροής κατά την y - διεύθυνση ($\theta/\theta_x \ll \theta/\theta_y$).

Επίσης, το πλάτος του ρεύματος ροής διασταυρωμένου δ της περιοχής πάνω στην οποία γίνονται οι αλλαγές πάντα μικρό συγκρίνεται με της σύντομης εισαγωγής εξετάζουμε τα γενικά χαρακτηριστικά: μερικών απλών διαστάσεων ασυμπίεστων τυρβωδών ροών με συνεχή επαβαλλόμενη πίεση. Οι παρακάτω ροές θα μελετηθούν εδώ:

Ελεύθερες τυρβώδεις ροές

- επίπεδο μίξης
- jet (δέσμη)
- wakes (απορρεύματα)

Οριακά στρώματα κοντά σε στερεά τοιχώματα

- οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας
- ροή σε σωλήνα

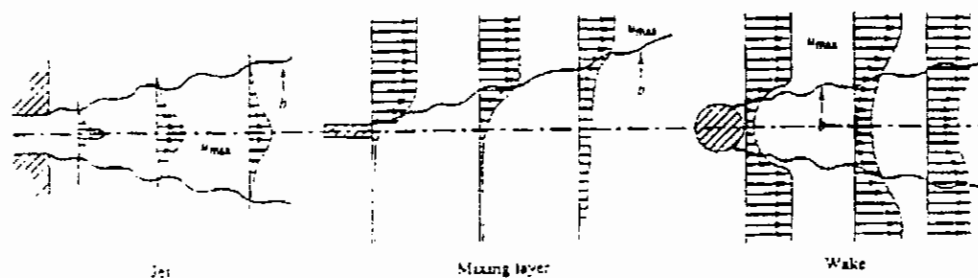
Δίνοντας ένα αναγνωρισμένο ενδιαφέρον των μηχανικών για τις μέσες τιμές ποσότητας (ανασκοπούμε τις πληροφορίες για την κατανομή μέσων τιμών της ταχύτητας $U=U(y)$, και τις αρμόζουσες τάσεις Reynolds $-\rho \overline{w'^2}$, $-\rho \overline{u'^2}$, $-\rho \overline{v'^2}$, $-\rho \overline{u'v'}$). Τοπικές τιμές των προαναφερομένων ποσοτήτων μπορούν να μετρηθούν αποτελεσματικά με την μέθοδο ανεμομετρίας θερμού- σύρματος μέσω των τιμών ροής και τύρβης.

3.4.1 Ελεύθερες τυρβώδεις ροές

Μεταξύ των απλούστερων ροών μεγάλης σημασίας είναι αυτές στην κατηγορία των ελεύθερων τυρβωδών ροών: στρώματα αναμίξεως, jet και απόρρευματα. Η μια στοιβάδα αναμίξεως διαμορφώνεται στην περιοχή σύνδεσης των δύο περιοχών: με μια γρήγορη και άλλη με αργή κίνηση ρευστών. Σε ένα jet μια περιοχής υψηλής ταχύτητας της ροής είναι τελείως περικυκλωμένη από στάσιμα ρευστά. Ένα απόρρευμα διαμορφώνεται πίσω από ένα αντικείμενο σε μια ροή. Η εικόνα 3.8 απεικονίζει την εξέλιξη της κατανομής μέσης ταχύτητας στη κατεύθυνση streamwise για αυτές τις ελεύθερες τυρβώδεις ροές.

Φαίνεται καθαρά ότι οι αλλαγές της ταχύτητας διαμέσου μιας αρχικής λεπτής στιβάδας είναι σημαντικές και στις τρεις ροές: η μετάβαση στο στροβιλισμό συμβαίνει μετά από μια πολύ μικρή απόσταση στην κατεύθυνση της ροής από το σημείο όπου διαφορετικά ρεύματα αρχικώς συναντήθηκαν, και ο στροβιλισμός προκαλεί κανονική ανάμιξη στις γειτονικές ρευστές στιβάδες και ταχεία πλάτυνση της περιοχής δια μέσου της οποίας συμβαίνουν οι αλλαγές στην ταχύτητα.

Η εικόνα 3.9 δείχνει μια οπτική εικόνα ενός jet. Αμέσως φαίνεται ότι το στροβιλώδες τμήμα της ροής περιέχει μία μεγάλη ποικιλία της κλίμακος μηκών. Οι μεγάλες δίνες με ένα μέγεθος συγκρίσιμο στο πλάτος δια μέσου της ροής είναι σύμφωνες με παραπλεύρως δίνες πολύ μικρότερων μεγεθών.



Εικόνα 3.8 Ελεύθερες τυρβώδεις ροές

Η οπτική εικόνα προτείνει σωστά ότι η ροή εσωτερικά του πεδίου εκτόξευσης είναι σε πλήρη στροβίλωση, αλλά η ροή στο εξωτερικό πεδίο που βρίσκεται μακριά από τον αναβλυστήρα είναι λεία και τελείως ανεπηρέαστη από το στροβιλισμό. Η θέση του άκρου στη στροβιλώδη ζώνη είναι καθορισμένη από το (χρόνο-εξαρτημένο) πέρασμα των ξεχωριστών μεγάλων δινών. Κοντά στο άκρο αυτό θα εισχωρήσει στο περιβάλλον πεδίο. Κατά τη διάρκεια του αποτελέσματος της έκρηξης της στροβιλώδους δραστηριότητας στη εξωτερική περιοχή που ονομάζεται ενδιάμεσο- ρευστό από το περιβάλλον είναι τραβηγμένο στη στροβιλώδη ζώνη. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται εισαγωγή και είναι ο κύριος λόγος που απλώνονται οι στροβιλώδεις ροές (περιλαμβανομένων και των τοιχωμάτων των οριακών στιβάδων) προς την κατεύθυνση ροής.

Αρχικά το ρευστό εκτόξευσης που κινείται γρήγορα θα χάσει την φορά της επιτάχυνσης στο ακίνητο ρευστό περιβάλλον. Λόγω της εισαγωγής του περιβάλλοντος ρευστού οι βαθμίδες ταχύτητας μειώνονται κατά μέγεθος κατά κατεύθυνση της ροής. Αυτό προκαλεί μείωση της μέσης ταχύτητας του στο κέντρο. Παρομοίως η διαφορά μεταξύ της ταχύτητας του ομοίων ρευστού και τα υπερκίνητα περιβάλλοντα του θα μειωθούν προς την κατεύθυνση ροής. Σε στιβάδες αναμιξεως το πλάτος της στιβάδας που περιέχει τη μεταβολή της τάχυνσης συνεχίζει να αυξάνεται προς την κατεύθυνση ροής αλλά η ολική διαφορά της ταχύτητας μεταξύ των δύο εξωτερικών περιοχών είναι αμετάβλητη.

Πειραματικές μετρήσεις πολλών τέτοιων τυρβωδών ροών δείχνουν ότι μετά από κάποια απόσταση η δομή τους γίνεται ανεξάρτητη της ακριβής φύσης της πηγής της ροής. Μόνο το τοπικό περιβάλλον φαίνεται να ελέγχει την στροβίλωση στη ροή. Η κατάλληλη κλίμακα μήκους είναι το πλάτος του διαρεύματος (ή μισό πλάτος) b . Βρίσκουμε ότι εάν y είναι η απόσταση στη κατεύθυνση του διαρεύματος

$$\frac{U - U_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}} = f\left(\frac{y}{b}\right) \quad (\text{για επίπεδα αναμιξεως})$$

$$\frac{U}{U_{\max}} = g\left(\frac{y}{b}\right) \quad (\text{για jets})$$

$$\frac{U_{\max} - U}{U_{\max} - U_{\min}} = h\left(\frac{y}{b}\right) \text{ (για απορεύματα)}$$

Σε αυτές τις φόρμουλες U_{\max} και U_{\min} αντιπροσωπεύουν το μέγιστο και το ελάχιστο της μέσης ταχύτητας σε μια απόσταση h του κατηφορικού ρεύματος της πηγής (βλέπε εικόνα 3.8).



Εικόνα 3.8. Οπτικοποίηση ροής ενός jet.

Τότε λοιπόν, εάν αυτές οι κλιμακωτές της τοπικής μέσης ταχύτητας είναι επιλεγμένες και ο χ είναι αρκετά μεγάλος, οι συναρτήσεις f , g , και h είναι ανεξάρτητες της απόστασης χ προς την κατεύθυνση ροής. Έτσι οι ροές αυτές ονομάζονται αυτοσυντηρούμενες.

Η δομή της στροβίλωσης επίσης φτάνει σε κατάσταση αυτοσυντηρούμενη απόσταση από τη πηγή ροής σε σχέση με τη μέση ταχύτητα. Τότε:

$$\frac{\overline{u'^2}}{U_{ref}^2} = f_1\left(\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\overline{v'^2}}{U_{ref}^2} = f_2\left(\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\overline{w'^2}}{U_{ref}^2} = f_3\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{\overline{u'v'}}{U_{ref}^2} = f_4\left(\frac{y}{b}\right)$$

Η κλίμακα της ταχύτητας U_{ref} είναι όπως παρακάτω ($U_{max} - U_{min}$) για μια στιβάδα αναμίξεως και τα απορρεύματα της U_{max} για jet. Ο ακριβής τύπος των συναρτήσεων f , g , h , και f_i ποικίλει από ροή σε ροή. Η εικόνα 3.10 μας δίνει τη μέση ταχύτητα και τα στοιχεία στροβίλωσης για μια στιβάδα αναμίξεως. Οι μεγαλύτερες τιμές των $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ και $-\overline{u'v'}$ στην περιοχή όπου ο λόγος μεταβολής μέσης ταχύτητας $\frac{\partial U}{\partial y}$

είναι μεγαλύτερος ο τονισμός στενών σχέσεων μεταξύ της παραγωγής του στροβιλισμού και τις διατμημένες μέσες ροές. Στις ροές που φαίνονται παραπάνω το στοιχείο u' δίνει τη μεγαλύτερη από τις ομαλές τάσεις - η τιμή μέσου τετραγώνου έχει μέγιστο 15-40% του τοπικού μέγιστου της μέσης ταχύτητας της ροής. Το γεγονός ότι οι κυμαινόμενες ταχύτητες δεν είναι ίσες, σημαίνει μια ανισοτροπική δομή του στροβιλισμού.

Καθώς το $[y/b]$ αυξάνεται ο βαθμός πίσω της μέσης ταχύτητας τείνει να μηδενιστεί και παρομοίως οι τιμές των ιδιοτήτων του στροβιλισμού πέφτουν στο μηδέν. Η απουσία της διάτμησης σημαίνει ότι ο στροβιλισμός δεν μπορεί να συγκρατηθεί σε αυτή τη περιοχή.

Ο λόγος μεταβολής της μέσης ταχύτητας είναι επίσης μηδέν στον κεντρικό άξονα των απορρευμάτων ενώ εδώ δεν έχουμε παραγωγή στροβιλισμού. Ωστόσο οι τιμές $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ δεν μειώνονται ιδιαίτερα επειδή η ισχυρή ανάμιξη των δινών μεταφέρει το στροβιλώδες ρευστό από κοντινές περιοχές σε υψηλής παραγωγής στροβίλωσης προς τα πάνω από τον κεντρικό άξονα. Από τη συμμετρία η τιμή $-\overline{u'v'}$ πρέπει να μηδενιστεί στο κεντρικό άξονα των ροών jet εφόσον πρέπει να αλλάξει σύμβολο η διατμητική τάση εδώ.

3.4.2 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΚΑΙ ΡΟΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ

Εδώ θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά δυο στροβιλωδών ροών που βρίσκονται κοντά σε στερεά τοιχώματα. Λόγω της παρουσίας του στερεού ορίου, η συμπεριφορά της ροής και η δομή της στροβίλωσης διαφέρουν αρκετά από τις ελεύθερες στροβιλώδεις ροές. Η ανάλυση της διάστασης έχει βοηθήσει πολύ στη συσχέτιση των πειραματικών δεδομένων. Στις στροβιλώδεις ροές λεπτής διατμημένης στιβάδας, ένας αριθμός Reynolds βασισμένος στη κλίμακα μήκους L προς την κατεύθυνση ροής (η ακτίνα του σωλήνα), Re_L , είναι πάντα πολύ

μεγάλος (π.χ. $U = 1\text{m/s}$ $L = 0.1\text{m}$ και $\nu = 10^{-6}\text{ m}^2$ δίνει $Re_L = 10^5$). Αυτό σημαίνει ότι οι αδρανείς δυνάμεις είναι συντριπτικά πολύ μεγαλύτερες από τις τάσεις ιξώδους σε αυτές κλίμακες.

Εάν διαμορφώσουμε έναν αριθμό Reynolds βασιζόμενος σε μια παραπάνω τάξη απόσταση y μακριά από το τοίχωμα ($Re_y = Uy / \nu$) βλέπουμε ότι εάν η τιμή y είναι του μήκους L , τότε αυτή η θεωρία είναι δεκτή. Οι αδρανείς ροές επικρατούν μέσα στη ροή, μακριά από το τοίχωμα. Καθώς ο y μειώνεται στο μηδέν, ένας αριθμός Reynolds βασιζόμενος στον y θα μειωθεί επίσης στο μηδέν. Πριν ο y φτάσει στο μηδέν θα πρέπει μια σειρά τιμών του y όπου ο Re_y να είναι στη τάξη του 1. Οι μεγαλύτερες τιμές των $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ και $-\overline{u'v'}$ βρίσκονται στην περιοχή όπου ο λόγος μεταβολής της μέσης ταχύτητας du/dy είναι μεγαλύτερος ο τονισμός στενών σχέσεων μεταξύ της παραγωγής του στροβιλισμού και τις διατημημένες μέσες ροές. Για να συνοψίσουμε σε ροές που βρίσκονται κατά μήκος των στερεών ορίων, συνήθως υπάρχει μια ουσιαστικής περιοχής αδρανοεπικρατούμενων επιρροών μακριά από το τοίχωμα και μια λεπτή στοιβάδα ενδιάμεσα όπου οι ροές του ιξώδους είναι σημαντικές. Κοντά στο τοίχωμα η ροή επηρεάζεται από τις επιρροές του ιξώδους και δεν εξαρτάται από τους παραμέτρους ελεύθερου ρεύματος.

Η μέση ταχύτητα της ροής εξαρτάται μόνο από την απόσταση y από το τοίχωμα τη πυκνότητα του ρευστού ρ το ιξώδες μ και τη διατμητική τάση του τοιχώματος τ_w . Έτσι $U = f(y, \rho, \mu, \tau_w)$.

Η διαστατική ανάλυση δείχνει:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} \quad (3.18)$$

Η φόρμουλα (3.18) ονομάζεται ο νόμος του τοιχώματος και περιέχει ορισμούς δύο σημαντικών ομάδων διαστασιολόγησης u^+ και y^+ . Σημειώστε ότι η κατάλληλη κλίμακα της ταχύτητας είναι $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ η λεγόμενη ταχύτητα τριβής.

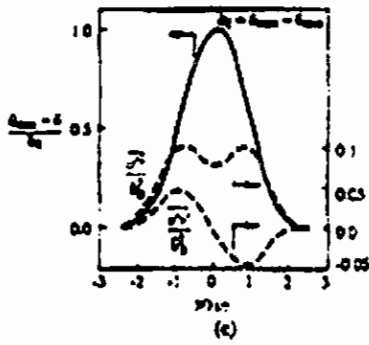
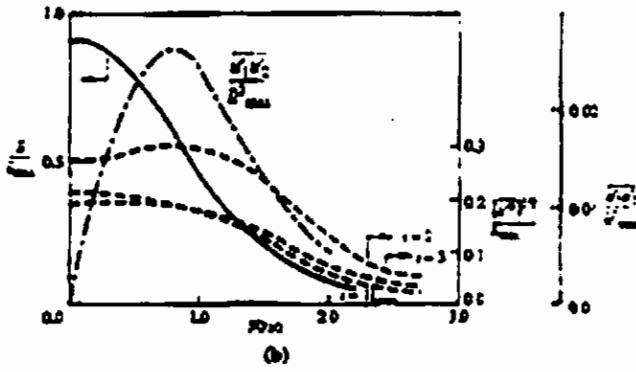
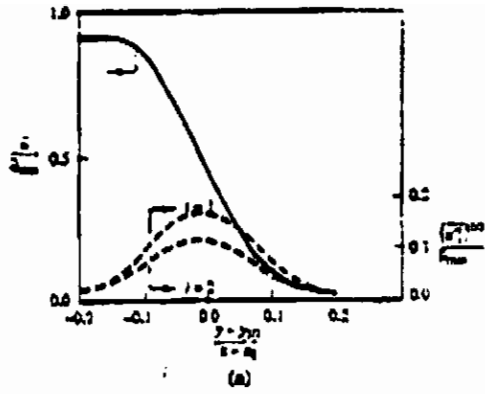
Μακριά από το τοίχωμα υποθέτουμε ότι η ταχύτητα σε ένα σημείο από την επιβραδυντική επιρροή του τοιχώματος μέσω της τιμής της διατμητικής τάσης του τοιχώματος αλλά όχι από το ίδιο το ιξώδες. Η κατάλληλη κλίμακα μήκους σε αυτή την περιοχή είναι το πάχος δ της οριακής στιβάδας. Στη περιοχή αυτή έχουμε $U = g(y, \delta, \rho, \tau_w)$

$$\text{Η διαστατική ανάλυση αποδίδει } u^+ = \frac{U}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Ο πιο χρήσιμος τύπος εμφανίζεται αν δούμε τη διατμητική τάση του τοιχώματος ως αιτία της διαφοράς της ταχύτητας $U_{\max} - U$ που μειώνεται όσο πλησιάζουμε το άκρο της οριακής στιβάδας ή το κεντρικό άξονα του σωλήνα.

$$\frac{U_{\max} - U}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (3.19)$$

Αυτή η φόρμουλα ονομάζεται ο νόμος της μειούμενης ταχύτητας.



Εικόνα 3.10 Κατανομές μέσης ταχύτητας και ιδιοτήτων τύρβης για: α) διδιάστατο επίπεδο ανάμιξης β) επίπεδο τυρβώδες jet γ) απόρρευμα πίσω από στερεή λωρίδα

Γραμμική υποστιβάδα – η στιβάδα ρευστού σε επαφή με λείο τοίχωμα.

Η στερεή επιφάνεια το ρευστό είναι σταθερό, στροβιλωδείς δυναμικές κινήσεις πρέπει να σταματήσουν πολύ κοντά στο τοίχωμα. Στην αποχή των στροβιλωδών επιρροών της διατμητικής τάσης (Reynolds) το ρευστό που βρίσκεται πλησιέστερα στο τοίχωμα επηρεάζεται από την ιξώδη διάτμηση. Αυτή η στιβάδα στην πραγματικότητα είναι πολύ λεπτή ($y^+ < 5$) και μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διατμητική τάση είναι κατά προσέγγιση σταθερή και ίση με την διατμητική τάση του τοιχώματος τ_w σε όλη τη στιβάδα. Τότε:

$$\tau(y) = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \cong \tau_w$$

Μετά την ολοκλήρωση σε σχέση με το y και την εφαρμογή της οριακής συνθήκης $U = 0$ εάν $y = 0$ αποκτούμε μια γραμμική σχέση ανάμεσα στη μέση ταχύτητα και την απόσταση από το τοίχωμα

$$U = \frac{\tau_w y}{\mu}$$

Μετά από λίγη απλή άλγεβρα και κάνοντας χρήση των ορισμών u^+ και y^+ οδηγούμαστε στο τύπο:

$$u^+ = y^+ \quad (3.20)$$

Όπως της γραμμικής σχέσης ανάμεσα στη ταχύτητα και την απόσταση από το τοίχωμα, η γειτονική ρευστή στιβάδα στο τοίχωμα, συχνά ονομάζεται γραμμική υποστιβάδα.

Νόμος λογαριθμικής υποστιβάδας – η τυρβώδης περιοχή κοντά σε λείο τοίχωμα

Κοντά από τη ιξώδη υποστιβάδα ($30 < y^+ < 500$) υπάρχει περιοχή όπου το ιξώδες και στροβιλωδείς επιρροές είναι οι δυο σημαντικές. Η διατμητική τάση τ μεταβάλλεται σταδιακά με μια απόσταση από το τοίχωμα και μέσα στην εσωτερική περιοχή όπου θεωρείται σταθερή.

Περαιτέρω υπόθεση αναφέρει τη κλίμακα μήκους του στροβιλισμού (μήκος ανάμιξης $l_m = ky$) μας θέλει να βρούμε ένα σωστό τύπο της λειτουργικής σχέσης ανάμεσα u^+ και y^+ .

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B = \frac{1}{k} \ln(Ey^+) \quad (3.21)$$

Οριστικές τιμές για τις σταθερές βρίσκονται από μετρήσεις. Βρίσκουμε $k = 0.4$ και $B = 5.5$ (ή $E = 9.8$) για λεία τοίχωμα – η τραχύτητα τοιχωμάτων προκαλεί μείωση στη τιμή του B . Οι τιμές k και B είναι παγκόσμιες τιμές που ισχύουν για όλες τις στροβιλωδείς ροές πέραν των λείων τοιχωμάτων σε υψηλό αριθμό Reynolds. Η σχέση λογαριθμικής σχέσης μεταξύ u^+ και y^+ , η φόρμουλα (3.21) συχνά ονομάζεται **λογαριθμικός νόμος της υποστιβάδας** όπου ο y^+ παίρνει τιμές μεταξύ 30 και 500, ο **λογαριθμικός νόμος της στιβάδας**.

Εξωτερική στρώση – η κατεχόμενη από αδράνειας περιοχή μακριά από το τοίχωμα.

Οι πειραματικές μετρήσεις δείχνουν ότι ο λογαριθμικός νόμος ισχύει στην περιοχή $0.02 < y/\delta < 0.2$. Για μεγαλύτερες τιμές του y , νόμος ελαττωμένης ταχύτητας (3.19) δίνει το σωστό τύπο. Στην περιοχή υπερκάλυψης ο λογαριθμικός νόμος και ο νόμος ελαττωματικής ταχύτητας πρέπει να γίνουν ίσες. Ο Tennekes και ο Lumley (1972) δείχνουν ότι μια προσαρμοσμένη υπερκάλυψη αποκτάται εάν υποθέσουμε τον παρακάτω λογαριθμικό τύπο:

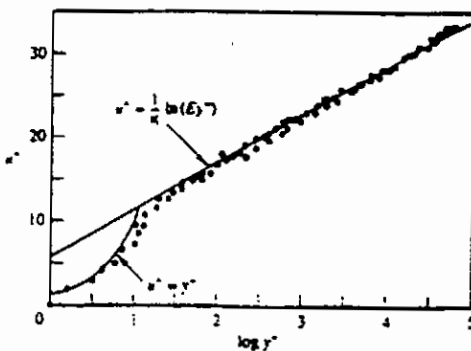
$$\frac{U_{\max} - U}{u_{\tau}} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right) + A \quad (3.22)$$

όπου ο A είναι μια σταθερά. Αυτός ο νόμος ελαττωμένης ταχύτητας συχνά ονομάζεται ο νόμος του απορρεύματος.

Η εικόνα 3.11 από τον SCHLICHTING (1979) δείχνει τη εγγύς συμφωνία των θεωρητικών αξιιώσεων (3.20) και (3.21) στις αντίστοιχες περιοχές ισχύ και πειραματικών δεδομένων.

Η γειτονική τυρβώδης οριακή στρώση σε μια στερεή επιφάνεια αποτελείται από δυο περιοχές:

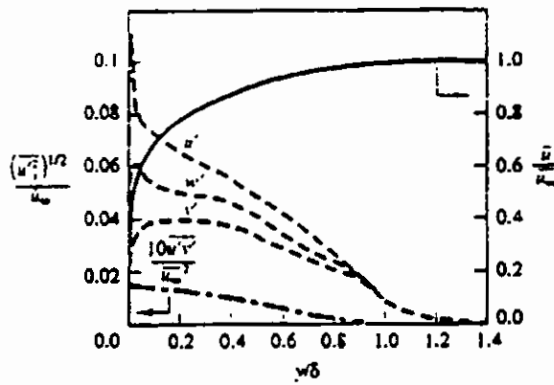
- Την εσωτερική περιοχή : 10 ως 20 % του ολικού πάχους της στρώσης τοιχώματος, η διατμητική τάση είναι (σχεδόν) σταθερή και ίση με τη διατμητική τάση του τοιχώματος τ_w . Μέσα σ' αυτή τη περιοχή υπάρχουν τρεις ζώνες, με τη σειρά της αυξανόμενης απόστασης από το τοίχωμα έχουμε:
 1. Τη γραμμική υποστρώση: οι τάσεις ιξώδους επικρατούν στη ροή γειτονικά της επιφάνειας.
 2. Buffer στρώση: οι ιξώδεις και στροβιλώδεις τάσεις έχουν παρόμοια μεγέθη.
 3. Η στρώση λογαριθμικού νόμου : επικρατούν στροβιλώδεις τάσεις(Reynolds).
- Την εξωτερική περιοχή ή την στρώση του νόμου των απορρευμάτων ο αδρανo- κατεχόμενος πυρήνας της ροής μακριά από το τοίχωμα – ελεύθερο από άμεσες επιρροές ιξώδους.



Εικόνα 3.11 Κατανομή ταχύτητας κοντά σε στερεό τοίχωμα

Η εικόνα 3.12 δείχνει τη μέση ταχύτητα και τα στοιχεία κατανομής των ιδιοτήτων στροβίλωσης για οριακή στιβάδα μιας επίπεδης πλάκας με μια επιβαλλόμενη σταθερή πίεση.

Η μέση ταχύτητα είναι σε ένα μέγιστο μακριά από το τοίχωμα και μειώνεται απότομα στην περιοχή $y/\delta \leq 0.2$ λόγω της μη ολισθητικής συνθήκης. Υψηλές τιμές των $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ και $-\overline{u'v'}$ βρίσκονται δίπλα στο τοίχωμα όπου οι μεγάλες βαθμίδες μέσης ταχύτητας εξασφαλίζουν να είναι υψηλή η παραγωγή της στροβίλωσης. Οι δυναμικές κινήσεις και σχετικές διακυμάνσεις ταχύτητας είναι οπωσδήποτε επίσης θέμα για τη μη ολισθητική συνθήκη στο τοίχωμα. Επομένως, όλες οι στροβιλώδεις τάσεις μειώνονται απότομα στο μηδέν σ' αυτή την περιοχή. Ο στροβιλισμός είναι ανισοτροπικός κοντά στο τοίχωμα εφόσον η διαδικασία παραγωγής δημιουργείται κυρίως από το στοιχείο u'^2 , αυτό επιβεβαιώθηκε από το γεγονός το ότι είναι πολύ μεγαλύτερο από τις μέσες τετραγωνισμένες διακυμάνσεις στην εικόνα 3.12.



Εικόνα 3.12 Κατανομή μέσης ταχύτητας και ιδιότητες τύρβης για ένα οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας σε μηδέν βαθμίδα πίεσης.

Στην περίπτωση της επίπεδης πλάκας οριακής στιβάδας οι στροβιλώδεις ιδιότητες τείνουν ασυμπτωτικά προς το μηδέν καθώς το y/δ αυξάνεται πάνω από μια τιμή των 0.8. Οι τιμές της ρίζας μέσου τετράγωνου όλων των κυμαινόμενων ταχυτήτων γίνονται σχεδόν ίσες εδώ που σημαίνει η δομή στροβιλισμού γίνεται περισσότερο ανισοτροπική μακριά από το τοίχωμα.

Σε ροές σωλήνα οι δυναμικές κινήσεις μεταφέρουν τον στροβιλισμό δια μέσου κεντρικού άξονα από περιοχές υψηλής παραγωγής. Επομένως, οι διακυμάνσεις των ριζών του μέσου τετράγωνου παραμένουν συγκριτικά μεγάλες στο κέντρο μιας σωλήνας. Συμμετρικά, η τιμή του $-\overline{u'v'}$ πρέπει να πάει στο μηδέν και να αλλάξει σύμβολο στο κεντρικό άξονα.

Η δομή της πολύ - στιβάδας είναι ένα παγκόσμιο χαρακτηριστικό των στροβιλωδών οριακών στιβάδων κοντά σε στέρεες επιφάνειες. Ο Monin και ο Yaglom (1971) αποτύπωσαν τα δεδομένα από τον Klebanoff και Laufer

στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα, και βρήκαν όχι μόνο την παγκόσμια κατανομή της μέσης ταχύτητας αλλά επίσης ότι τα στοιχεία για τις τάσεις Reynolds για επίπεδες πλάκες και σωλήνες καταρρέουν πάνω σε μια καμπύλη εάν είναι μη – διαστασιολογημένες- με τη κατάλληλη κλίμακα ταχύτητας, u^+ .

Ανάμεσα σ' αυτές τις συγκεκριμένες στιβάδες υπάρχουν ενδιάμεσες ζώνες που επιβεβαιώνουν ότι οι ποικίλοι νόμοι κατανομής της ταχύτητας συγχωνεύονται ομαλώς. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες πρέπει να βρουν περαιτέρω λεπτομέρειες συμπεριλαμβανομένου και φόρμουλες, οι οποίες να καλύπτουν ολόκληρη την εσωτερική περιοχή και τον λογαριθμικό νόμο ή τον νόμο της στιβάδας των απορρευμάτων του Schlichting (1979) και του White (1991).

3.5 ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ

Ένα μοντέλο τύρβης είναι μια υπολογιστική μέθοδος για να κλείσει το σύστημα των εξισώσεων μέσης ροής (3.15), (3.16 a-c) και (3.17) έτσι ώστε μια περισσότερο ή λιγότερο ευρεία ποικιλία των προβλημάτων της ροής να μπορούν να υπολογισθούν. Για τους περισσότερους σκοπούς της μηχανικής δεν είναι απαραίτητο να αναλύσουμε τις λεπτομέρειες των στροβιλωδών διακυμάνσεων. Μόνο οι επιρροές του στροβιλισμού στη μέση ροή είναι συνήθως αναζητούμενες. Συγκεκριμένα, πάντα χρειαζόμαστε εκφράσεις για τις τάσεις Reynolds στις εξισώσεις (3.16 a-c) και τη στροβιλώδη μονομετρική μεταφορά των όρων στην εξίσωση (3.17). Για να είναι χρήσιμο το πρότυπο τύρβης σε ένα γενικού σκοπού κώδικα CFD πρέπει να είναι πολύ εφαρμόσιμος, να είναι ακριβής, απλός και οικονομικός στη χρήση. Τα πιο κοινά μοντέλα τύρβης είναι κατανομημένα στον πίνακα 3.2

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 : Μοντέλα τύρβης

Κλασικά μοντέλα	Βασίζονται στις εξισώσεις Reynolds. 1. μοντέλο μηδενικής εξίσωσης – πρότυπο ανάμιξης μήκους. 2. μοντέλο δυο εξισώσεων – πρότυπο k-ε 3. μοντέλο εξισώσεων τάσεων Reynolds 4. μοντέλο αλγεβρικής τάσης
Προσομείωση μεγάλων Δινών (LES)	Βασίζονται σε εξισώσεις φιλτραρισμένες στο χώρο

Τα κλασικά μοντέλα χρησιμοποιούν τις εξισώσεις Reynolds που αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.3 και διαμορφώνουν τη βάση των στροβιλωδών υπολογισμών στους προσφάτως εμπορικά διαθέσιμους κώδικες

FD. LES είναι μοντέλα τύρβης όπου οι χρονο - εξαρτημένες εξισώσεις της ροής είναι λυμένες για τη μέση ροή και τις μεγαλύτερες δίνες, και όπου οι επιρροές των μικρότερων δινών προτυποποιούνται. Συζητήθηκε προηγουμένως, ότι οι μεγαλύτερες δίνες, αλληλεπιδρούν έντονα με τη μέση ροή και περιέχουν τη περισσότερη ενέργεια, επομένως αυτή η προσέγγιση αποτελεί ένα καλό πρότυπο για τις κύριες επιρροές της στροβίλωσης. LES είναι στο στάδιο μελέτης προς το παρόν και οι υπολογισμοί είναι πολύ δαπανηροί ως αξία της μελέτης σε γενικούς σκοπούς της υπολογιστικής κατά το παρόν. Αν και προβλέπουμε τις βελτιώσεις στο hardware των υπολογιστών θα πρέπει να αλλάξουμε αυτή την προοπτική του μέλλοντος που δεν θα συζητούμε περαιτέρω για κείνα τα μοντέλα: το ενδιαφέρον του αναγνώστη θα πρέπει να βρίσκεται σε μια σύντομη εισαγωγή προς κείνα και σε άλλα περισσότερα προηγμένα μοντέλα τύρβης.

Όσο τα κλασικά μοντέλα της ανάμιξης μήκους και τα παρόν K-ε πρότυπα είναι κατά πολύ πιο ευρείας χρήσης και έγκρισης. Βασίζονται στην υπόθεση ότι εκεί υπάρχει μια αναλογία μεταξύ της δράσης των τάσεων ιξώδους και των τάσεων Reynolds στη μέση ροή. Και οι δυο τάσεις εμφανίζονται στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης ορμής και ο νόμος του Newton της ρευστότητας τάσεων ιξώδους, είναι ανάλογες στο ρυθμό παραμόρφωσης των ρευστών στοιχείων. Για ένα ασυμπίεστο ρευστό δίνεται:

$$\tau_{ij} = \mu e_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.21)$$

Με σκοπό να απλοποιήσουμε τη παράσταση, ο λεγόμενος υποδείκτης παράστασης έχει χρησιμοποιηθεί εδώ. Η συμβατικότητα της παράστασης είναι ότι το i ή $j = 1$ αντιστοιχεί στη x -κατεύθυνση ο i ή $j = 2$ στην y κατεύθυνση ο i ή $j = 3$ στην z κατεύθυνση. Για παράδειγμα:

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.22)$$

Παρατηρείται πειραματικά, ότι η στροβίλωση παραικμάζει εκτός αν υπάρχει διάτμηση σε ισοθερμικές ημιπίεστες ροές. Επίσης, οι στροβιλώδεις τάσεις βρίσκονται να αυξάνονται καθώς η μέση τιμή παραμόρφωσης αυξάνεται. Προτάθηκε από τον Boussinesq το 1877 ότι οι τάσεις Reynolds μπορούν να σχεθούν με τις μέσες τιμές παραμόρφωσης. Χρησιμοποιώντας τον υποδείκτη σημειογραφία, έχουμε:

$$\overline{-\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.23)$$

Η μ_t πλευρά είναι ανάλογη στη φόρμουλα (2.31) εκτός από την εμφάνιση της στροβίλωσης ή δυναμικού μ_t (διαστάσεις Pa s). Επίσης υπάρχει μια κινηματική στροβίλωση ή δυναμική που δέχεται από $(\nu_t = \mu_t / \rho)$, με διαστάσεις m^2/s .

Προσποιείται παρόμοια η στροβιλώδης μετάβαση της θερμότητας, της μάζας και άλλων κλιμακωτών ποσοτήτων. Η φόρμουλα (3.23) δείχνει ότι η στροβιλώδης μετάβαση της ορμής θεωρείται ανάλογη των μέσων βαθμίδας της ταχύτητας (π.χ. βαθμίδες ορμής ανά μονάδα μάζας) από αναλογία η στροβιλώδης

ετάβαση μιας κλιμάκωσης είναι ανάλογη στη βαθμίδα της μέσης τιμής της μεταβιβασμένης ποσότητας. Σαν είκτη παίρνουμε:

$$\overline{\rho u' \phi'} = \Gamma + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (3.24)$$

που Γ_i είναι η στροβιλώδης διαχυτικότητα.

φόσον η στροβιλώδης μετάβαση της ορμής και της θερμότητας ή της μάζας γίνεται λόγω του ίδιου μηχανισμού – ανάμιξη δινών – εμείς αναμένουμε ότι η τιμή της στροβιλώδης διαχυτικότητας Γ_i είναι στα πλαίσια της στροβιλώδους ιξώδους μ_t . Παρουσιάζουμε έναν στροβιλώδη αριθμό του Prandtl/ Schmidt που αθορίζεται ως εξής:

$$\sigma_t = \mu_t / \Gamma_t \quad (3.25)$$

ειράματα σε πολλές ροές έχουν αποδείξει ότι αυτή η αναλογία είναι σχεδόν πάντα σταθερή. Οι περισσότερες διαδικασίες των CFD υποθέτουν ότι αυτό ισχύει, και χρησιμοποιούν τιμές του σ_t γύρω στο 1.

αίνεται καθαρά από τις αναλύσεις στροβιλωδών ροών της παραγράφου 3.4 ότι τα επίπεδα στροβιλισμού και στροβιλώδεις τάσεις μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο μέσα σε μια ροή. Τα πρότυπα μήκη αναμίξεως επιχειρούν να περιγράψουν τάσεις με την σημασία απλών αλγεβρικών τύπων για το μ_t σαν ένας συντελεστής έσης.

ο πρότυπο K-ε είναι ένα πιο εξεζητημένο και γενικό, αλλά επίσης και πιο δαπανηρή περιγραφή του στροβιλισμού που επιτρέπει τις επιρροές της μετάβασης των ιδιοτήτων του στροβιλισμού από την μέση ροή και διάχυση και για την παραγωγή και την καταστροφή του στροβιλισμού. Δυο εξισώσεις μεταφοράς (μερικές φορικές εξισώσεις η PDEs) μια για τη στροβιλώδη κινητική ενέργεια k και επιπλέον μια άλλη για το βαθμό έλειας της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας E οι οποίες λύνονται.

καλύτερη υπόθεση αυτών των πρότυπων είναι ότι η ρευστότητα του στροβιλισμού μ_t είναι ιστροπική, χδή, ότι η αναλογία ανάμεσα στη τάση Reynolds και του μέσου ρυθμού παραμόρφωσης είναι ίδιο σε όλες κατευθύνσεις. Αυτή όμως η υπόθεση αποτυγχάνετε σε πολλές κατηγορίες της ροής όπου αυτό οδηγεί σε ασμένες προβλέψεις για τη ροή. Εδώ είναι απαραίτητο να παραχθούν και να λυθούν εξισώσεις μεταφοράς ε ίδιες τους τις τάσεις Reynolds. Μπορεί αρχικά να φανεί περίεργο να σκέφτεται κανείς ότι η τάση είναι το στη μετάβαση. Όμως το μόνο που απαραίτητα πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι οι τάσεις Reynolds ίζονται αρχικά στην αριστερή πλευρά των εξισώσεων ορμής και φυσικά θα υποβληθούν σε αλλαγές γγκικής φοράς ως αποτέλεσμα των στροβιλώδων διακυμάνσεων της ταχύτητας. Η ορμή των ρευστών – ορμή καθώς και η ορμή των διακυμάνσεων μπορεί να μεταβιβαστεί από τα ρευστά σωματίδια επομένως ες Reynolds μπορούν επίσης να μεταβιβαστούν.

ώσεις μεταφοράς, μια για κάθε τάση Reynolds περιέχουν την διάχυση, την ένταση της πίεσης και απώλειες των οποίων οι ανεξάρτητες επιρροές είναι άγνωστες και δεν μπορούν να μετρηθούν.

Στις εξισώσεις των τάσεων Reynolds τα πρότυπα (γνωστά επίσης στην λογοτεχνία σαν πρότυπα εφαρμογής δευτέρου βαθμού ή στιγμιαίου δευτερολέπτου) είναι φτιαγμένα με υποθέσεις σχετικά με εκείνους τους άγνωστους όρους και το αποτέλεσμα των μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDES) σε σχέση με την εξίσωση μεταφοράς είναι να λυθεί ο βαθμός απώλειας της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας ϵ . Ο υπολογισμός της τάσης μιας εξίσωσης Reynolds ενός προτύπου ερευνείται σε μια δραστήρια περιοχή όπου τα πρότυπα δεν έχουν ισχυροποιηθεί τόσο πολύ όπως το πρότυπο της ανάμιξης του μήκους και το πρότυπο του K- ϵ . Λύνοντας τις επτά έξτρα μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDES) προκαλείται μια σημαντική αύξηση του κόστους της απομύμησης του CFD, όταν συγκριθεί με το πρότυπο k- ϵ , και έτσι η εφαρμογή της τάσης Reynolds σε μια εξίσωση ενός εξωτερικού προτύπου της ακαδημαϊκής αδελφοσύνης είναι σχετικά πρόσφατη.

Μια περισσότερο ανυπολόγιστης σημασίας σειρά υποθέσεων για την προτύπωση μειώνει τις μερικές διαφορικές εξισώσεις και περιγράφει τη μετάβαση της τάσης Reynolds στις αλγεβρικές εξισώσεις k και ϵ του προτύπου k- ϵ . Αυτή η προσέγγιση οδηγεί στα πρότυπα αλγεβρικής τάσης που είναι οι πιο οικονομικοί τύποι των προτύπων της τάσης Reynolds που είναι ικανή να εισάγει τις ανισοτροπικές στροβιλώδεις επιρροές μέσα στις απομύμησης του CFD. Στις παρακάτω παραγράφους θα συζητηθούν λεπτομερώς τα πρότυπα της ανάμιξης του μήκους και του k- ϵ και θα περιγραφούν τα κύρια χαρακτηριστικά των εξισώσεων της τάσης Reynolds και τα πρότυπα των αλγεβρικών τάσεων. Επιπλέον τα αποτελέσματα μερικών τρέχοντων ερευνών τα οποία είναι εν συντομία μελετημένα και πιθανόν να επιδρούν στην βιομηχανική μοντελοποίηση του στροβιλισμού στο άμεσο μέλλον.

3.5.1 Μοντέλο μήκους ανάμιξης

Σε διαστασιολογικά επίπεδα υποθέτουμε ότι το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες, το οποίο έχει διαστάσεις m^2/s , μπορεί να εκφραστεί ως ένα προϊόν του στροβιλισμού ενός βαθμολογημένου κανόνα μιας ταχύτητας Θ (m/sec) και ενός βαθμολογημένου κανόνα του μήκους l (m). Εάν ένας βαθμολογημένος κανόνας της ταχύτητας και ένας βαθμολογημένος κανόνας του μήκους επαρκούν να περιγράψουν τις επιρροές του στροβιλισμού ή στατική ανάλυση αποδίδει

$$\nu_t = C\theta l \quad (3.26)$$

που C είναι μια αδιάστατη σταθερά αναλογίας. Βέβαια το τυρβώδες δυναμικό ιξώδες δίνεται: $\mu_t = C\rho\theta l$. περισσότερη κινητική ενέργεια της στροβιλώσεως περιέχεται στις μεγαλύτερες δίνες και η κλίμακα του μήκους στροβιλώσεως l είναι χαρακτηριστική αυτών των δινών που αλληλεπιδρούν με τη μέση ροή. Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει δυνατή σχέση ανάμεσα στη μέση ροή και στη συμπεριφορά των μεγαλύτερων δινών, τότε μπορούμε να προσπαθήσουμε να συνδέσουμε τη χαρακτηριστική κλίμακα ταχύτητας των δινών με τις ταχύτητες της μέσης ροής. Αυτή έχει βρεθεί να λειτουργεί καλά σε διαδιάστατες στροβιλώδεις ροές όπου η μόνη χαρακτηριστική τάση Reynolds είναι:

$$Re = \frac{\rho U_m l}{\mu} = - \rho u' v'$$

και ο μόνος συγκεκριμένος λόγος μεταβολής της μέσης ταχύτητας είναι $\frac{\partial U}{\partial y}$. Για τέτοιες ροές, είναι

τουλάχιστον διαστασιολογικά σωστά να δηλώσουμε, ότι εάν η κλίμακα του μήκους της δίνης είναι l ,

$$\theta = c \cdot l \cdot \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.27)$$

Όπου ο c είναι μια σταθερά αδιάστατη. Λαμβάνουμε την απόλυτη τιμή για να επιβεβαιώσουμε ότι η κλίμακα τάχυνσης είναι πάντα θετική ποσότητα ανεξάρτητα του συμβόλου (αν είναι συν ή πλην) του λόγου μεταβολής της ταχύτητας.

Συνδυάζοντας την εξίσωση (3.26) και (3.27) και τις δυο σταθερές C και c που εμφανίζονται σε αυτές τις φόρμουλες έχουμε μια νέα κλίμακα μήκους l_m

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.28)$$

Αυτό είναι το πρότυπο μήκους αναμίξεως του PRANDTL. Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα (3.23) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\partial U}{\partial y}$ είναι ο μόνος λόγος μεταβολής της μέσης ταχύτητας, η στροβιλώδης πίση Reynolds περιγράφεται με:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.29)$$

Ο στροβιλισμός είναι συντελεστής της ροής και αν αλλάξει ο στροβιλισμός πρέπει να υπολογίσουμε και αυτό στο πρότυπο μήκους αναμίξεως μεταβάλλοντας το l_m . Για μια σημαντική κατηγορία απλών στροβιλωδών ροών που συμπεριλαμβάνουν τις ελεύθερες ροές και τοιχώματα οριακών στιβάδων που συζητήθηκαν στην παράγραφο 3.4 μπορεί να επιτευχθεί από την έννοια των απλών αλγεβρικών φόρμουλων.

Με μερικά παραδείγματα δίνονται στον πίνακα 3.3.

Το πρότυπο μήκους αναμίξεως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της στροβιλώδης μετάβασης της κλίμακας ποσοτήτων. Ο μόνος όρος στροβιλώδης μετάβασης που είναι χρήσιμος σε διδιάστατες ροές όπου το μήκος αναμίξεως είναι χρήσιμος μοτελοποιείται ως εξής:

$$-\rho \overline{v'\phi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.30)$$

Όπου $\Gamma_t = \mu_t / \sigma_t$ και ν_t βρίσκεται από την εξίσωση (3.28). Ο RODI (1980) συνιστά τιμές για τον σ_t που είναι 0.9 σε ροές κοντά στα τοιχώματα 0.5 για jet και στοιβάδες αναμίξεως και 0.7 αξονο συμμετρικό jet.

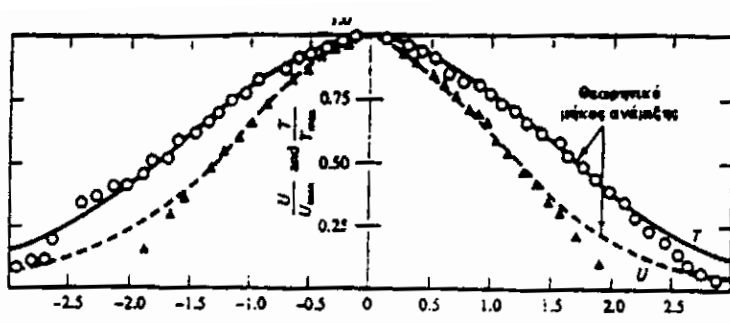
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 Μήκη ανάμιξης για διδιάστατες τυρβώδεις ροές

Ροή	Μήκος ανάμιξης l_m	L
Επίπεδο ανάμιξης	0,07 L	Πλάτος στιβάδας
Jet	0,09 L	Μισό πλάτος του Jet
Απόρρευμα	0,16 L	Μισό πλάτος του απορεύματος
Αξονοσυμμετρικό Jet	0,075 L	Μισό πλάτος του Jet
Οριακό στρώμα ($\theta_p / \theta_w = 0$) ιξώδης υποστιβάδα και στιβάδα λογαριθμικού νόμου $y/c \leq 0,22$	$k y [1 - \exp(-y^+ / 26)]$	Πάχος οριακού στρώματος
Εξωτερική στιβάδα	0,09 L	
Σωλήνες και κανάλια (τέλειες αναπτυγμένες ροές)	$L [0,14 - 0,08 (1 - y/L)^2 - 0,06 (1 - y/L)^4]$	Ακτίνα σωλήνα ή το μισό πλάτος του καναλιού

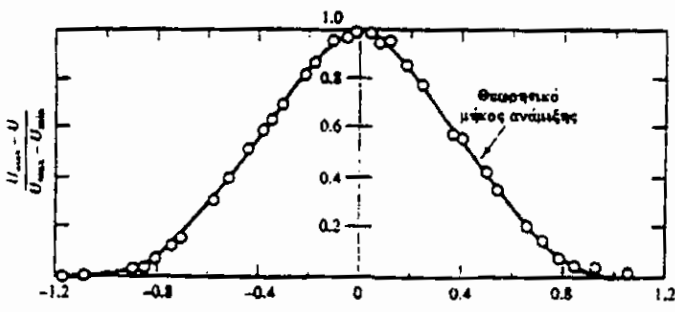
Στον πίνακα, ο y αντιπροσωπεύει την απόσταση από το τοίχωμα και ο $k = 0.41$ είναι σταθερή του Von Karman. Οι παραστάσεις δίνουν μια πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των υπολογιστικών αποτελεσμάτων και των πειραμάτων για τις κατανομές της μέσης ταχύτητας για τους συντελεστές τριβής του τοιχώματος και για άλλες ιδιότητες της ροής, όπως οι συντελεστές μετάδοσης της θερμότητας κ.λπ. σε απλές διδιάστατες ροές.

Τα αποτελέσματα δυο ροών από τον Schlichting (1979) δίνονται στην εικόνα 3.1a και b.

Το μήκος αναμίξεως είναι καθαρά πολύ χρήσιμο σε ροές όπου οι στροβιλώδεις ιδιότητες εξελίσσονται σε μια αναλογία με την κλίμακα του μήκους της μέσης ροής έτσι ώστε ο l_m να μπορεί να περιγραφεί ως συντελεστής θέσης με την σημασία μιας απλής αλγεβρικής φόρμουλας. Αυτό εξηγεί τη παγκόσμια δημοτικότητα σε υπολογισμούς ροών γύρω από τομές περύγων. Εξεζητημένες τροποποιήσεις γίνονται στη φόρμουλα για το l_m να περιγράφει τις επιρροές της καμπύλης πίεσεως σε μικρές κλίμακες διαχωρισμού, όταν είναι διαθέσιμο το φύσημα ή η αναρρόφηση της οριακής στιβάδας. Τα πρότυπα μήκους ανάμιξης όπως αυτά που ανέπτυξαν οι Baldwin - Lomax (1978) και οι Cebeci- Smith (1974) χρησιμοποιούνται ευρέως σαν στροβιλώδη πρότυπα για υπολογισμούς εξωτερικής αεροδυναμικής στην αστροδυναμική βιομηχανία.



(a)



(b)

Εικόνα 3.13: Αποτελέσματα των υπολογισμών χρησιμοποιώντας το μοντέλο μήκους αναμίξεως για:
 Α) Επίπεδο Jet Β) Απορεύμα πίσω από ένα μακρύ λεπτό κυκλικό κύλινδρο

Πίνακας 3.4. Μοντέλο μήκους ανάμιξης

Πλεονεκτήματα

- Εύκολο να εφαρμόζεται και φθινό σε όρους των υπολογιστικών πόρων.
- Καλές προβλέψεις για λεπτές στιβάδες διάτμησης: jets, στιβάδες ανάμιξης, απορεύματα και οριζικά στρώματα
- Καλά μελετημένο

Μειονεκτήματα

- Εντελώς ανίκανο στην περιγραφή ροών με διαχωρισμούς και ανακυκλοφορίες.
- Υπολογίζει μόνο τις ιδιότητες της μέσης ροής και τυρβώδη διατμητική τάση.

3.5.2.ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ k-ε

Σε δισδιάστατες λεπτές στιβάδες διάτμησης οι αλλαγές στη κατεύθυνση της ροής είναι πάντα τόσο αργές που ο στρόβιλος από μόνος του μπορεί να ρυθμίζει τις τοπικές συνθήκες. Εάν οι ιδιότητες του στρόβιλου της μετάδοσης της θερμότητας της και διάχυσης μπορούν να παραλειφθούν τότε υπάρχει πιθανότητα να εκφραστεί η επιρροή της στροβιλώδους στη μέση ροή μέσω του μήκους αναμίξεως. Εάν η μετάδοση της θερμότητας και η

διάχυση δεν είναι αμελητέες- όπως είναι στην περίπτωση για παράδειγμα η ανακυκλοφορία των ροών - τότε μια συμφωνία της αλγεβρικής εντολής για το μήκος ανάμιξης στερείται αυτή την ιδιότητα της γενίκευσης. Η προς τα μπρος οδός είναι να μελετήσουμε εκθέσεις που αναφέρονται στην δυναμική του στροβιλισμού. Το πρότυπο κ-ε επικεντρώνεται στους μηχανισμούς που επηρεάζουν την στροβιλώδη κινητική ενέργεια. Πρώτα απαιτούνται μερικοί προκαταρκτικοί ορισμοί. Έτσι η στιγμιαία κινητική ενέργεια $k(t)$ της στροβιλώδους ροής

είναι το άθροισμα της μέσης κινητικής ενέργειας $K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2)$ και της στροβιλώδους κινητικής

$$\text{ενέργειας } k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

$$k(t) = K + k$$

Στις παρακάτω αναπτύξεις είναι απαραίτητο πολύ να χρησιμοποιήσουμε το βαθμό παραμόρφωσης και τις στροβιλώδεις τάσεις. Για να διευκολύνονται οι μεταγενέστεροι υπολογισμοί, συνηθίζεται να γράφονται τα στοιχεία του βαθμού παραμόρφωσης e_{ij} και τις τάσεις τ_{ij} σε μορφή Πίνακα

$$e_{ij} \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \text{ και } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Η αποσύνθεση του βαθμού παραμόρφωσης ενός ρευστού στοιχείου σε μια στροβιλώδη ροή μέσα σε ένα μέσο και ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο, $e_{ij}(t) = e_{ij} + e'_{ij}$, είναι τα ακόλουθα στοιχεία του πίνακα $\text{mat}z \text{ ix}$.

$$e_{xx}(t) = E_{xx} + e'_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$e_{zz}(t) = E_{zz} + e'_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z}$$

$$e_{yy}(t) = E_{yy} + e'_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y}$$

$$e_{xy}(t) = E_{xy} + e'_{xy} = e_{yx}(t) = E_{yx} + e'_{yx} = 1/2 \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right]$$

$$e_{xz}(t) = E_{xz} + e'_{xz} = e_{zx}(t) = E_{zx} + e'_{zx} = 1/2 \left[\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right]$$

$$e_{yz}(t) = E_{yz} + e'_{zy} = e_{zy}(t) = E_{zy} + e'_{zy} = 1/2 \left[\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right]$$

Το προϊόν ενός ανύσματος \mathbf{a} και ενός τανύσματος b_{ij} είναι ένα άνυσμα \mathbf{c} του οποίου τα στο χείρα μπορούν να υπολογιστούν με την εφαρμογή των συνηθισμένων κανόνων της άλγεβρας των πινάκων.

$$a_j b_j = \alpha_i b_{ij} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_{11} + \alpha_2 b_{21} + \alpha_3 b_{31} \\ \alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{22} + \alpha_3 b_{32} \\ \alpha_1 b_{13} + \alpha_2 b_{23} + \alpha_3 b_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}^T = c_j = c$$

Το μονομετρικό ποίον των δύο τανυσμάτων a_{ij} και b_{ij} υπολογίζεται ως εξής:

$$a_{ij} b_{ij} = \alpha_{11} b_{11} + \alpha_{12} b_{12} + \alpha_{13} b_{13} + \alpha_{21} b_{21} + \alpha_{22} b_{22} + \alpha_{23} b_{23} + \alpha_{31} b_{31} + \alpha_{32} b_{32} + \alpha_{33} b_{33}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει το τύπο της παραγωγικής κατάληξης της σημείωσης όπου η x -κατεύθυνση να δηλώνεται από την εισφορά του 1, η y -κατεύθυνση από το 2 και η z -κατεύθυνση από το 3. Φαίνεται ότι τα προϊόντα μορφοποιούνται παίρνοντας το άθροισμα όλων των πιθανών τιμών κάθε μια επαναλαμβανόμενης παραγωγικής κατάληξης.

Γενική εξίσωση για τη μέση κινητική ενέργεια K της ροής

Μια εξίσωση για τη μέση κινητική ενέργεια K μπορεί να αποκτηθεί πολλαπλασιάζοντας το x -στοιχείο της εξίσωσης Reynolds (3.12a) επί u το y -στοιχείο της εξίσωσης (3.12b) επί v , και το z -στοιχείο της εξίσωσης (3.12c) επί w . Αφού προστεθούν τα αποτελέσματα και μαζί με αρκετή άλγεβρα, φαίνεται ότι ο χρονικός μέσος όρος της εξίσωσης που διέπει την μέση κινητική ενέργεια της ροής είναι ως εξής (Tennekes και Lumley, 1972).

$\frac{\partial(pK)}{\partial t}$	$+ \text{div}(pKU)$	$= \text{div}(-PU + 2\mu UE_{ij} - pU\overline{u'_i u'_j}) - 2\mu E_{ij} E_{ij} + p\overline{u'_i u'_j} E_{ij}$	(3.31)
(I)	(II)	(III) (IV) (V) (VI) (VII)	

Ή με άλλα λόγια, για τη μέση κινητική ενέργεια K έχουμε:

Ποσοστό	+	Μεταφορά	=	Μεταφορά	+	Μεταφορά	+	Μεταφορά	-	Ποσοστό	+	Παραγωγή
μεταβολής		του K από		του K από		του K από		του K από		διάχυσης		τήξης
του K		διάδοση		πίεση		ιξώδεις		τάσεις		του K		
		θερμότητας				τάσεις		Reynolds				

Οι όροι μεταφοράς (III) (IV) και (V) χαρακτηρισμένοι από την εμφάνιση του div και συνηθίζεται πρακτικά να τοποθετούνται εσωτερικά ενός ζευγαριού από παρενθέσεις. Οι επιρροές των τάσεων ιξώδους στο K έχουν χωριστεί σε δύο μέρη: ο όρος (IV), η μετάβαση του K λόγω των τάσεων ιξώδους, και ο όρος (VI), δείχνει του ιξώδους κινητικής ενέργειας K . Οι δύο όροι που περιέχουν τις τάσεις Reynolds $-p\overline{u'_i u'_j}$ εστιάζονται για τις στροβιλώδεις επιρροές: ο όρος (V) είναι η στροβιλώδης μεταφορά του K μέσω των τάσεων Reynolds παραγωγή των τάσεων Reynolds. Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, οι ροές των στροβιλωδών όρων (V) και είναι πάντα πολύ μεγαλύτεροι από τα ιξώδη αντίγραφα τους (IV) και (VI), (VII)

Εξίσωση για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k.

Ο πολλαπλασιαστής καθ' εξίσωσης (3.9a-c) των Navier - Stokes με την κατάλληλη μεταβαλλόμενη ταχύτητα των στοιχείων (πχ η εξίσωση του χ - στοιχείου πολλαπλασιάζεται με το u' κλπ) και πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων, που ακολουθούν την επανάληψη αυτής της διαδικασίας στις εξισώσεις Reynolds (3.12a-c), αφαίρεση των δύο τελικών εξισώσεων και μια πολύ σημαντική ανακατάταξη αποδίδει την εξίσωση για την στροβιλώδη κινητική ενέργεια και (Tennekes και Lumley, 1972):

$$\frac{\partial(pk)}{\partial t} + \text{div}(pkU) = \text{div}(-\overline{p'u'}) + 2\overline{\mu u'e'_{ij}} - \overline{p1/2u'_i u'_i u'_j} - 2\overline{\mu e'_{ij}} - \overline{\rho u'_i u'_j E_{ij}} \quad (3.32)$$

(I) (II) (III) (IV) (V) (VI) (VII)

Με άλλα λόγια, για την στροβιλώδη κινητική ενέργεια K, έχουμε:

Ποσοστό	+	Μεταφορά	=	Μεταφορά	+	Μεταφορά	+	Μεταφορά	-	Ποσοστό	+	Παραγωγή
μεταβολής		του K από		του K από		του K από		του K από		διάχυσης		τύρβης
του K		διάδοση		πίεση		ιξώδεις		τάσεις		του K		
		θερμότητας				τάσεις		Reynolds				

Οι εξισώσεις (3.31) και (3.32) μοιάζουν σε πολλές απόψεις: όπως η εμφάνιση κυρίων ποσοτήτων στην δεξιά πλευρά της κ- εξίσωσης που δείχνει ότι οι αλλαγές στην στροβιλώδη κινητική ενέργεια διέπνυται κυρίως από στροβιλώδεις αλληλεπιδράσεις. Οι όροι (VII) και στις εξισώσεις είναι ίσοι σε μέγεθος, αλλά αντίθετοι στο σύμβολο. Σε διαδιάστατες λεπτές στιβάδες διάτμησης βρήκαμε (βλέπε παρ.3.4) ότι η μόνη συγκεκριμένη τάση Reynolds $\overline{\rho u' v'}$ ήταν συνήθως θετική εάν ο κύριος όρος του E_{ij} σε μια τέτοια ροή, ο λόγος μεταβολής της μέσης ταχύτητας $\overline{u}/\overline{\theta y}$, είναι θετικός. Από εδώ ο όρος (VII) δίνει μια θετική συνεισφορά στην κ- εξίσωση και αντιπροσωπεύει έναν όρο παραγωγής. Όμως στην κ- εξίσωση, ο όρος είναι αρνητικός, επομένως εκεί καταστρέφεται η κινητική ενέργεια της μέσης ροής. Αυτό εκφράζεται μαθηματικός σαν την μετατροπή της μέσης κινητικής ενέργειας σε στροβιλώδη κινητική ενέργεια.

Ο όρος (V) της διάχυσης του ιξώδους

$$-2\overline{\mu e'_{ij} e'_{ij}} = -2\overline{\mu(e'^2_{11} + e'^2_{22} + e'^2_{33} + 2e'^2_{12} + 2e'^2_{13} + 2e'^2_{23})}$$

δίνει μια αρνητική συνεισφορά στην (3.32) λόγω της εμφάνισης του αθροίσματος τετραγωνισμένων ρυθμών μεταβαλλόμενης παραμόρφωσης e_{ij} . Η διάχυση της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας προκαλείται από το έργο που παράχθηκε από τις μικρότερες δίνες κατά των τάσεων ιξώδους, ρυθμός διάχυσης ανά μονάδα μάζας, της οποίας οι διαστάσεις είναι m^2/s^3 , έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη της δυναμικής του στροβιλισμού και εκφράζεται από:

$$\epsilon = 2\nu \overline{e'_{ij} e'_{ij}} \quad (3.33)$$

Είναι πάντα ο κύριος όρος καταστροφής στην εξίσωση της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας. μεγέθους μια παρόμοιας τάξης με τον όρο παραγωγής και τότε δεν παραλείπεται. Σε αντίθεση, όταν ο αριθμός Reynolds είναι υψηλός, ο όρος μεταφοράς του ιξώδους (IV) στην (3.32) είναι πάντα πολύ μικρότερος συγκρινόμενος με τον όρο της στροβιλώδης μεταφοράς (VI).

Οι εξισώσεις του μοντέλου K-ε.

Υπάρχει η πιθανότητα να αναπτύξουμε παρόμοιες εξισώσεις μεταφοράς για όλες τις άλλες στροβιλώδεις ποσότητες περιλαμβάνοντας και το ρυθμό διάχυσης του ιξώδους ε . Η ακριβής εξίσωση του ε περιλαμβάνει πολλούς αγνώστους και μη μετρήσιμους όρους. Το πρότυπο K-ε (Launder και Spalding) έχει δύο πρότυπα εξίσωσης, ένα για το K και ένα για το ε , που βασίζονται στις καλύτερες γνώσεις μας των σχετικών διαδικασιών που προκαλούν αυτές τις αλλαγές στους μεταβλητές.

Χρησιμοποιούμε το K και το ε ως αντιπροσωπευτικούς για να καθορίσουμε την κλίμακα της ταχύτητας θ και την κλίμακα του μήκους l στην μεγάλη κλίμακα του στροβιλισμού όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\theta = k^{\frac{1}{2}} \quad l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

Κάποιος θα μπορούσε να ρωτήσει για την εγκυρότητα της χρήσης του μεταβλητού ε της “μικρής δίνης” για να καθοριστεί η κλίμακα l στην “μεγάλη δίνη”. Επιτρέπουμε να το κάνουμε αυτό, επειδή στους υψηλούς αριθμούς Reynolds, το ποσοστό στο οποίο οι μεγάλες δίνες ελευθερώνουν ενέργεια από την μέση ροή, παριάζει ακριβώς με εκείνο το ποσοστό ενέργειας που μεταφέρεται μέσω της ενέργειας του φάσματος σε μικρές, διασκορπιζόμενες δίνες.

Εάν δεν γινόταν έτσι, η ενέργεια σε κάποιες κλίμακες του στροβιλισμού θα μπορούσε να αυξηθεί ή να μειωθεί χωρίς όρια. Αυτό δεν συμβαίνει στην πράξη και δικαιολογείτε η χρήση του ε στον καθορισμό του l . Εφαρμόζοντας την ίδια προσέγγιση όπως στο πρότυπο μήκους αναμίξεως εντοπίζουμε το δυναμικό ιξώδες όπως παρακάτω

$$\mu_t = C_p \theta l = p C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.34)$$

Όπου C_μ είναι μια αδιάστατη σταθερά.

Το σταθερό πρότυπο χρησιμοποιεί τις ακόλουθες μεταβατικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για το K και το ε .

Με άλλα λόγια οι εξισώσεις είναι:

$$\frac{\partial(pk)}{\partial t} + \text{div}(pkU) = \text{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad}(k) + 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - p\varepsilon\right] \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial(p\varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(p\varepsilon U) = \text{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad}(\varepsilon) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\varepsilon} p \frac{\varepsilon^2}{k}\right] \quad (3.36)$$

Οι εξισώσεις με λόγια είναι:

Ποσοστό μεταβολής του K ή του ε	+	Μεταφορά του K ή του ε από διάδοση θερμότητας	=	Μεταφορά του K ή του ε από διάχυση	-	Ποσοστό διάχυσης του k ή του ε	+	Ποσοστό καταστροφής του k ή του ε
---------------------------------	---	---	---	------------------------------------	---	--------------------------------	---	-----------------------------------

Οι σταθερές εξισώσεις περιέχουν 5 προσαρμοσμένες σταθερές C_{μ} , σ_k , σ_ε , $C_{1\varepsilon}$ και $C_{2\varepsilon}$. Το συνηθισμένο μοντέλο του χρησιμοποιεί τιμές για τις σταθερές που φθάνουν στην πιο κατάλληλη εφαρμογή των δεδομένων για ένα ευρύ πεδίο των στροβιλωδών ροών.

$$C_{\mu} = 0,09; \sigma_k = 1,00; \sigma_\varepsilon = 1,30; C_{1\varepsilon} = 1,44; C_{2\varepsilon} = 1,92 \quad (3.37)$$

Ο όρος παραγωγής στο πρότυπο της k-ε εξίσωσης παράγεται από τον ακριβή όρο παραγωγής στην (3.32) με αντικατάσταση της (3.23).

Μια μοντελοποιημένη μορφή των κυρίως μεταβατικών διαδικασιών στην εξίσωση των k και ε, εμφανίζεται στην δεξιά πλευρά. Οι όροι στροβιλωδών μεταβάσεων αντιπροσωπεύουν την χρήση της νέας του βαθμού μεταβολής της διάχυσης που συζητήθηκε νωρίτερα στο κείμενο της κλίμακα μετάβαση (βλέπε εξίσωση 3.24).

Οι αριθμοί PRANDTL σ_k , σ_ε συνοδεύουν τις διαχυτικότητες του k και ε στο δυναμικό ιξώδες μ_t . Ο όρος της πίεσης (III) της ακριβούς εξίσωσης του k δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα. Η επίδραση αυτού είναι υπολογισμένη για την εξίσωση (3.35) μέσα από τον όρο μεταβολής της διάχυσης.

Η παραγωγή και η καταστροφή της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας συνδέονται πάντα στενά. Το ποσοστό διάχυσης ε είναι μεγάλο, όπου η παραγωγή του k είναι μεγάλη. Το πρότυπο της εξίσωσης (3.36) για το ε υποθέτει ότι οι όροι της παραγωγής και της καταστροφής είναι ανάλογοι στους όρους παραγωγής και καταστροφής της εξίσωσης του K (3.35). Η αποδοχή τέτοιων μορφών επιβεβαιώνει ότι ο ε ιαξάνει ταχύτατα εάν το k αυξάνει ταχύτατα και ότι το ε μειώνεται αρκετά γρήγορα να αποφύγει (μη φυσικές) αρνητικές τιμές της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας εάν το k μειώνεται. Ο παράγοντας ε/k στους όρους παραγωγής και καταστροφής σημαίνει ότι αυτοί οι όροι είναι διαστασιολογικά σωστοί στην εξίσωση του ε.

Για να υπολογιστούν οι τάσεις Reynolds με το πρότυπο του K-ε (3.34-3.36) χρησιμοποιείται μια επεκταμένη σχέση του BOUSSINESQ:

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - 2/3 \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t E_{ij} - 2/3 \rho k \delta_{ij} \quad (3.38)$$

Η σύγκριση με την εξίσωση (3.23) δείχνει ότι αυτό ο τύπος έχει έναν επιπλέον όρο στη δεξιά μεριά που εμπλέκει το δ_{ij} , το δέλτα του Kronecker ($\delta_{ij}=1$ εάν $i=j$ και $\delta_{ij}=0$ εάν $i \neq j$). Ο όρος αυτός βοηθάει να κάνει την φόρμουλα εφαρμόσιμη στις ομαλές τάσεις Reynolds για τις οποίες $i=j$, και από εδώ

$\tau_{xx} = -\rho \overline{u'^2}$, $\tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2}$ και $\tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2}$. Εξετάζουμε μια ασυμπίεστη ροή και ερευνάμε τη συμπεριφορά του πρώτου τμήματος της (3.38) μόνη της. Εάν το αθροίσουμε από πάνω από όλες τις ομαλές τάσεις (πχ ως είναι ο $i = 1, 2$ και $3 \text{ } i = j$) βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας την συνέχεια ότι είναι μηδέν, εφόσον:

$$2\mu_+ E_{ij} = 2\mu_+ \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] = 2\mu_+ \text{div}U = 0$$

Φαίνεται καθαρά ότι σε οποιαδήποτε ροή το άθροισμα των ομαλών τάσεων

$-\rho(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ ισούται με μείον δύο φορές τη στροβιλώδη κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου ($-2\rho K$).

Ένα τρίτο ισόπαλο επαμερίζεται σε κάθε στοιχείο ομαλής τάσης για να επιβεβαιώσει ότι το άθροισμα τους θα έχει πάντα τη σωστή φυσική τιμή. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό υπονοεί μια ισοτροπική υπόθεση για τις ομαλές τάσεις Reynolds, των οποίων τα στοιχεία στη παράγραφο 3.4 έχουν αποδείξει ότι είναι ανακριβή ακόμα και σε απλές δισδιάστατες ροές.

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι εξισώσεις των μοντέλων για το k και το ε είναι ελλειπτικές λόγω του όρου μεταβολής της διάχυσης. Η συμπεριφορά τους είναι παρόμοια σε άλλες ελλειπτικές εξισώσεις ροής, που δημιουργεί την ανάγκη για τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

- Είσοδος: πρέπει να δοθούν οι κατανομές του K και του ε
- Έξοδος ή συμμετρικός άξονας: $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$ και $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$
- Ελεύθερο ρεύμα: $K=0$ και $\varepsilon=0$
- Στερεά τοιχώματα: η προσέγγιση εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds

Στους υπολογισμούς του διερευνητικού σχήματος οι λεπτομερείς πληροφορίες της οριακής συνθήκης που απαιτείται για τη λειτουργία του προτύπου μπορεί να μην είναι διαθέσιμες. Χρήστες βιομηχανικών CFD σπάνια έχουν τις μετρήσεις των k και ε στη διάθεση τους. Η εξέλιξη μπορεί να γίνει εισάγοντας τιμές του k και ε από το γραπτό υλικό (πχ εκδόσεις που προαναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.4) και με αυτά ερευνούμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων σε εκείνες τις κατανομές της εισόδου. Εάν κάποια πληροφορία από όλες δεν είναι διαθέσιμη, πρόχειρες προσεγγίσεις για τις κατανομές του k και του ε σε εσωτερικές ροές μπορούν να αποκτηθούν από την ένταση του στροβιλισμού T_i και ενός χαρακτηριστικού μήκους L του εξοπλισμού (ισοδύναμο με την ακτίνα ενός σωλήνα), με τη βοήθεια των παρακάτω απλών υποθετικών τύπων:

$$k = \frac{3}{2} (U_{ref} \cdot T_i)^2$$

$$\varepsilon = C\mu^{3/4} \cdot \frac{k^{3/2}}{l}$$

$$l = 0,07L$$

Οι φόρμουλες συγγενεύουν πολύ με τις φόρμουλες του μήκους αναμίξεως στην παράγραφο 3.5.1 και τις παγκόσμιες κατανομές κοντά σε ένα στέρεο τοίχωμα δίνονται παρακάτω.

Σε υψηλό αριθμό Reynolds το κανονικό πρότυπο K-ε (Launder και Spalding, 1974) αποφεύγει την ανάγκη να ολοκληρώσει σωστά τις εξισώσεις του προτύπου μέσα στο τοίχωμα χρησιμοποιώντας τη παγκόσμια συμπεριφορά όπως ροής κοντά στο τοίχωμα όπως συζητήθηκε στην παράγραφο 3.4. Έτσι ο y είναι η συντεταγμένη της ομαλής κατεύθυνσης προς το στερεό τοίχωμα, η μέση ταχύτητα σε ένα σημείο y_p με $30 < y_p^+ < 500$ ικανοποιεί τον λογαριθμικό νόμο (3.21) και οι μετρήσεις των προτύπολογισμών της στροβιλώδους κινητικής ενέργειας δείχνει το ποσοστό παραγωγής της στροβιλώδης ισούται με το ποσοστό διάχυσης. Χρησιμοποιώντας αυτές τις υποθέσεις και το τύπο του δυναμικού ιξώδους (3.34) είναι πιθανόν να αναπτυχθούν οι ακόλουθοι συντελεστές τοιχώματος:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln[E_{yp}^+] \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{ky} \quad (3.39)$$

Η σταθερά του Von Karman $k=0,41$ και η παράμετρος τραχύτητας του τοιχώματος $E=9,8$ για λεία τοιχώματα.

Ο Schlichting (1979) δίνει τιμές για το E που ισχύουν για τραχύ τοίχωμα.

Για τη μετάδοση θερμότητας χρησιμοποιούμε την παγκόσμια κατανομή της θερμότητας που ισχύει για υψηλούς αριθμούς Reynolds κοντά στο τοίχωμα (Launder + Spalding 1974).

$$T^+ = T^+ \equiv \frac{(T - T_w)C_p \rho u_\tau}{q_w} = \sigma_{T,i} [u^+ + P(\frac{\sigma_{T,i}}{\sigma_{T,i}})] \quad (3.40)$$

Με T_p = θερμοκρασία σημείου y_p κοντά στο τοίχωμα.

T_w = θερμοκρασία τοιχώματος

q_w = ροή θερμότητας τοιχώματος

C_p = ειδική ρευστή θερμότητα σε σταθερή πίεση

$\sigma_{T,i}$ = στροβιλώδης αριθμός Prandtl

$\sigma_{T,i}$ = $\mu C_p / \Gamma_T$ αριθμός Prandtl

Γ_T = θερμική αγωγιμότητα.

Τέλος ο P είναι ο Pe_ε - συντελεστής, ένας συντελεστής διόρθωσης που εξαρτάται από την αναλογία ελασματικού προς στροβιλώδεις αριθμούς Prandtl (Launder - Spalding 1974).

Σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds ο λογαριθμικός νόμος δεν ισχύει, έτσι λοιπόν οι προαναφερόμενες οριακές συνθήκες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Οι τροποποιήσεις του προτύπου k-ε για να μπορέσει να αντιμετωπίσει τις ροές σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds, εξετάζονται στον Patel (1985). Η απόσβεση του τοιχώματος χρειάζεται να εφαρμοστεί για να εγγυηθεί ότι οι ιξώδεις τάσεις καταλαμβάνονται από τις

στροβιλώδεις τάσεις Reynolds, σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds και μέσα στις γειτονικές υποστιβάδες του ιξώδους προς τα στερεά τοιχώματα.

Οι εξισώσεις του χαμηλού αριθμού Reynolds του προτύπου κ-ε, οι οποίες αντικαθιστούν τις (3.34-3.36) δίνονται παρακάτω

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \text{grad}(k)\right] + 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - \rho \varepsilon \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \text{grad}(\varepsilon)\right] + C_{1\varepsilon} f_1 \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\varepsilon} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.43)$$

Η πιο εμφανής τροποποίηση η οποία είναι γενικά παραδεκτή είναι να συμπεριληφθεί μια κατανομή του ιξώδους στους όρους διάχυσης στις εξισώσεις (3.42-3.43). Οι σταθερές C_μ , $C_{1\varepsilon}$ και $C_{2\varepsilon}$ στο κανονικό πρότυπο του κ-ε πολλαπλασιάζονται με τους συντελεστές απόσβεσης των τοιχωμάτων f_μ , f_1 και f_2 αντίστοιχα, που είναι και αυτοί συντελεστές του αριθμού Reynolds στον στροβιλισμό [= $\theta l/\nu = k^2/(\varepsilon \nu)$] ή παρόμοιοι παράμετροι. Σαν ένα παράδειγμα που παραθέτουμε είναι οι συντελεστές απόσβεσης των τοιχωμάτων του Law και Brehmhorst (1981) οι οποίοι είναι γενικά αποδεκτοί.

$$f_\mu = [1 - \exp(-0,0165 R_{e_w})]^2 \left(1 + \frac{20,5}{R_{e_w}}\right); \quad (3.44)$$

$$f_1 = \left(1 + \frac{0,05}{f_\mu}\right)^3; \quad f_2 = 1 - \exp(-R_{e_w}^2)$$

Στον συντελεστή f_μ , η παράμετρος Re_y καθορίζεται από $k^{1/2} y/\nu$. Ο Law και Brehmhorst χρησιμοποιούν $\theta_x/\theta_y = 0$ ως μία οριακή συνθήκη.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Το πρότυπο του κ-ε είναι το πιο πολυχρησιμοποιημένο και έγκυρο πρότυπο στροβιλισμού. Έχει κατορθώσει σημαντικές επιτυχίες στην υπολογιστική μιας μεγάλης ποικιλίας λεπτών στιβάδων διάτμησης και στην ανακυκλοφορία των ροών χωρίς την ανάγκη ρύθμισης περίπτωση με περίπτωση των σταθερών του προτύπου.

Το πρότυπο εκπληρεί ιδιαίτερα καλά σε περιορισμένες ροές όπου οι τάσεις διάτμησης Reynolds είναι πολύ σημαντικές. Αυτό περιλαμβάνει μια μεγάλη σειρά ροών με βιομηχανικές μηχανικές εφαρμογές που εξηγεί και τη δημοτικότητα του. Παραδείγματα των εφαρμογών του προτύπου κ-ε σε μια σχετικά βιομηχανικά σειρά ροών δίνονται στον πίνακα 10. Οι εκδοχές του προτύπου είναι διαθέσιμες οι οποίες ενσωματώνουν τις επιρροές λόγω ανώσεως Rodi (1980). Τέτοιου είδους πρότυπου χρησιμοποιούνται για να μελετηθούν οι περιβαλλοντικές ροές όπως σαν η διασκόρπιση των μολύνσεων στην ατμόσφαιρα και σε λίμνες και στις τυποποιημένες φωτιές.

Παρά τις αριθμητικές επιτυχίες το κανονικό πρότυπο κ-ε εμφανίζει μόνο μέτριες συμφωνίες σε απεριόριστες

ροές. Το πρότυπο αναφέρθηκε όχι για την καλή εκτέλεση του στις ασθενείς στιβάδες διίτιμησης (μακριά απορρεύματα και στιβάδες ανάμιξης) αλλά και του ποσοστού διάδοσης των αξονοσυμμετρικών jet στα υπερπροβλεπόμενα στάσιμα περιβάλλοντα που είναι σοβαρά. Σε μεγάλα τμήματα αυτών των ροών ο ρυθμός παραγωγής της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας είναι πολύ μικρότερος από το ρυθμό διάχυσης και οι δυσκολίες μπορούν να ξεπεραστούν μόνο από την κατασκευή ειδικών ρυθμίσεων της σταθεράς C του προτύπου.

Ο Bradshaw et al (1981) δηλώνει ότι η πρακτική της συγχώνευσης του όρου μετάβαση της πίεσης της ακριβής εξίσωσης του κ στην έκφραση του λόγου μεταβολής της διάχυσης στην εξίσωση του προτύπου θεωρήθηκε αποδεκτή υπό το λόγο ότι ο όρος της πίεσης είναι μερικές φορές τόσο μικρός όσο η μετρίσιμη στροβιλώδης κινητική ενέργεια χωρίς να ισοσκελίζει τους προτύπολογισμούς αυτού. Σημειώνουν επίσης ότι πολλές από αυτές τις μετρήσεις περιέχουν ουσιαστικά λάθη και αυτό κυρίως δεν είναι γενικά αλήθεια το ότι οι επιρροές της διάχυσης στην πίεση είναι αμελητέες.

Το πρότυπο έχει επίσης προβλήματα σε στροβιλιζόμενες ροές και σε φορές με μεγάλες ταχύτητες επιπέδων τάσεις (πχ σε πού καμπυλωτές οριακές στιβάδες και σε εκτροπές διόδων) εφόσον δεν περιλαμβάνει μια περιγραφή των ευαίσθητων επιρροών της αεροδυναμικής σφαιρικότητας του στροβιλισμού. Οι δευτερεύουσες ροές σε μακρινούς μη κυκλικούς αγωγούς, οι οποίοι οδηγούνται από φυσικές ανισοτροπικές τάσεις Reynolds, δεν μπορούν επίσης να προβλεφτούν εξ' αιτίας της έλλειψης μετάχειρίσης των φυσικών τάσεων μέσα στο πρότυπο κ-ε. Τελικά, το πρότυπο λησμόνησε την σωματική δύναμη λόγω της περιστροφής του πλαισίου αναφοράς. Μια περίληψη του προσδιορισμού της απόδοσης για ένα κανονικό πρότυπο κ-ε δίνεται στον πίνακα 3.5

Πίνακας 3.5 Εξέταση του μοντέλου Κ-ε

Πλεονεκτήματα:

Απλούστατο μοντέλο τύρβης για το οποίο μόνο οι κύριες οριακές συνθήκες χρειάζονται να κυλιφθούν
Άριστη απόδοση για πολλές βιομηχανικά σχετικές ροές
Πολύ καλοστημένο, το πιο έγκυρο μοντέλο τύρβης

Μειονεκτήματα:

Πιο ακριβό για να εφαρμοστεί από το πρότυπο μήκους αναμίξεως (χρειάζεται δύο επιπέδων PDE.)
Κακή απόδοση σε μια ποικιλία σημαντικών περιπτώσεων όπως σαν:

- I. μερικές άνευ περιορισμών ροές
- II. ροές με μεγάλους περιορισμούς
- III. περιστροφικές ροές
- IV. πλήρως αναπτυγμένες ροές σε μη-κυκλικούς αγωγούς

3.5.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΑΣΕΩΝ REYNOLDS

Το πιο πολύπλοκο κλασικό πρότυπο του στροβιλισμού είναι το πρότυπο εξίσωσης τάσης Reynolds, (RSM), επίσης ονομάζεται δευτέρας διαλογής η δευτέρας σημασίας πρότυπο εφαρμογής. Αφκετά σημαντικά μειονεκτήματα προκύπτουν στο πρότυπο κ-ε, όταν προσπαθεί να προβλέψει ροές με πολύπλοκο πεδίο έντασης ή συγκεκριμένες σωματικές δυνάμεις. Κάτω από τέτοιες συνθήκες οι χαρακτηριστικές τάσεις Reynolds παρουσιάζονται από τη φόρμουλα (3.38) ακόμα και εάν η στροβιλώδης κινητική ενέργεια υπολογίστηκε για λογική ακρίβεια. Η ακριβής εξίσωση μεταφοράς της τάσης Reynolds αφ' ετέρου μπορεί να εξηγήσει για τις κατευθυντικές επιρροές του πεδίου της τάσης Reynolds.

Η στρατηγική της προτυποποίησης προέρχεται από την εργασία που αναφέρεται ο Launder et al (1975).

Ακολουθούμε την ήδη βεβαιωμένη πρακτική στη λογοτεχνία επικαλώντας τάση Reynolds $R_{ij} = -\tau_{ij} / \rho = \overline{u'_i u'_j}$ αλλά ο όρος της κινηματικής τάση Reynolds θα μπορούσε να είναι πιο ακριβής. Η ακριβής εξίσωση για τη μεταφορά του R_{ij} παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} - \epsilon_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij} \quad (3.45)$$

Ποσοστό μεταβολής του $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$	+	Μεταφορά του R_{ij} από μετάδοση θερμότητας	=	Ποσοστό παραγωγής του R_{ij}	+	Μεταφορά του R_{ij} από διάχυση	-	Ποσοστό απώλειας του R_{ij}	+	Μεταφορά του R_{ij} λόγω της τυρβώδους πίεσης από έντονες αλληλεπιδράσεις	+	Μεταφορά του R_{ij} λόγω περιστροφής
---	---	---	---	--------------------------------	---	-----------------------------------	---	-------------------------------	---	---	---	--

Η εξίσωση (3.45) περιγράφει έξι μερικές διαφορικές εξισώσεις: μια μετάβαση για την καθεμία από τις έξι εξισώσεις ανεξάρτητες τάσεις Reynolds ($\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$, $\overline{u_1 u_2}$, $\overline{u_1 u_3}$ και $\overline{u_2 u_3}$, αφού $\overline{u_1 u_1} = \overline{u_1^2}$, $\overline{u_2 u_2} = \overline{u_2^2}$, $\overline{u_3 u_3} = \overline{u_3^2}$ και $\overline{u_3 u_2} = \overline{u_2 u_3}$)

Εάν συγκριθεί με την ακριβή εξίσωση μετάδοσης για τη στροβιλώδης κινητική ενέργεια (3.32) δυο νέες φυσικές διαδικασίες εμφανίζονται στις εξισώσεις Reynolds. Η συσχέτιση του όρου της έντασης πίεσης D_{ij} , του οποίου η επιρροή στην κινητική ενέργεια μπορεί να φαίνεται ότι γίνεται μηδέν, και ο όρος περιστροφή Ω_{ij} .

Οι υπολογισμοί των CFD με τις εξισώσεις μετάβασης της τάσης Reynolds διατηρούν τον όρο παραγωγής στην ακριβή του μορφή:

$$P_{ij} = -\left(R_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m}\right) \quad (3.46)$$

Για να αποκτήσουμε ένα τύπο της (3.45) που μπορεί να λυθεί χρειαζόμαστε πρότυπα για το ποσοστό διάχυσης και απώλειας και τους όρους συσχέτισης στη δεξιά πλευρά. Οι Launder et al (1975) και Rodi (1980) δίνουν

ατανοητές λεπτομέρειες για τα πιο γενικά πρότυπα. Για χάρη της απλότητας παραθέτουμε κυρίως τα πρότυπα του προέρχονται από αυτή τη προσέγγιση και χρησιμοποιούνται σε μερικούς εμπορικούς κώδικες CFD. Αυτά τα πρότυπα στερούνται μιας μικρής λεπτομέρειας, αλλά η δομή τους είναι πιο εύκολη να κατανοηθεί και το κύριο μήνυμά να είναι ανέπαφο σε όλες τις περιπτώσεις.

Ο όρος διάχυσης D_{ij} μπορεί να προτυποποιηθεί με την υπόθεση ότι το ποσοστό μετάβασης των τάσεων Reynolds από την διάχυση να είναι ανάλογο στο λόγο μεταβολής των τάσεων Reynolds. Αυτή η ιδέα του λόγου μεταβολής της διάχυσης επανεμφανίζεται μέσα από την προτυποποίηση του στροβιλισμού. Οι εμπορικοί κώδικες CFD συχνά επιθυμούν την απλούστερη μορφή:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) = \text{div} \left(\frac{v_i}{\sigma_k} \text{grad}(R_{ij}) \right) \quad (3.47)$$

με $v_i = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$; $C_\mu = 0,09$ και $\sigma_k = 1,0$

Το ποσοστό απώλειας ε_{ij} προτυποποιήθηκε από την υποθετική ιστροπία των μικρών διασκορπιζόμενων δινών. Αυτό τοποθετείται έτσι ώστε να επηρεάσει τις ομαλές τάσεις Reynolds ($i=j$) μόνον και μέσα στην ίδια μέτρηση.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (3.48)$$

όπου ε είναι το ποσοστό απώλειας της στροβιλώδους κινητικής ενέργειας που καθορίζεται από (3.33). Τα δελτία του Kronecker δ_{ij} δίνονται από $\delta_{ij} = 1$ εάν $i=j$ και $\delta_{ij} = 0$ εάν $i \neq j$.

Οι αλληλεπιδράσεις της τάσης-πίεσεως αποτελούν την ίδια ώρα τον πιο δύσκολο όρο στην (3.45) και τον πιο σημαντικό όρο για να είναι ακριβές ένα πρότυπο. Η επιρροή τους τις τάσεις Reynolds προκύπτει από δύο ξεχωριστές διαδικασίες: διακύμανσης πίεσεως διαμέσου δύο δινών που αλληλεπιδρούν με κάθε άλλη και διακυμάνσεις πίεσεως διαμέσου αλληλεπίδρασης μιας δίνης με μια περιοχή ροής διαφορετικής μέσης ταχύτητας. Η ολική επιρροή του όρου τάσης-πίεσης είναι να ανακατανεμηθεί η ενέργεια μεταξύ των ομαλών τάσεων Reynolds ($i=j$) έτσι ώστε να κάνουν αυτές να μειώσουν τις διατημηματικές τάσεις Reynolds $i \neq j$.

Χρειάζεται διορθώσεις για να υπολογιστεί η επιρροή της αμεσότητας του τοιχώματος στους όρους της πίεσης. Αυτές οι διορθώσεις είναι διαφορετικές στη φύση από τους συντελεστές απόσβεσης του τοιχώματος που εντοπίζουμε κ-ε πρότυπο και χρειάζεται να εφαρμοστούν ανεξαρτήτως τιμής της μέσης ροής του αριθμού Reynolds. Οι μετρήσεις δείχνουν ότι η επιρροή του τοιχώματος αυξάνει την ανισοτροπία των ομαλών τάσεων Reynolds αποσβένοντας τις διακυμάνσεις στις κατευθύνσεις που είναι ομαλές προς το τοίχωμα και μειώνει το μέγεθος των τάσεων διάτμησης Reynolds. Ένα κατανοητό πρότυπο που εξηγεί όλες τις επιρροές δίνεται από τον Launder et al (1975). Επίσης δίνουν τον παρακάτω απλοποιημένο τύπο αυτού, που είναι από τους μερικούς διαθέσιμους εμπορικούς κώδικες CFD.

$$\Pi_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} (R_{ij} - 2/3k\delta_{ij}) - C_2 (P_{ij} - 2/3P\delta_{ij}) \quad (3.49)$$

Με $C_1 = 1,8$ και $C_2 = 0,6$

Ο περιστροφικός όρος δίνεται από

$$\Omega_{ij} = -2\omega_k (R_{jm} e_{ikm} + R_{im} e_{jkm}) \quad (3.50)$$

Εδώ το ω_k είναι το περιστροφικό άνωσμα και e_{ijk} είναι το εναλλασσόμενο σύμβολο $e_{ijk} = +1$ εάν i και j και k είναι διαφορετικοί και σε κυκλική σειρά $e_{ijk} = -1$ εάν i και j και k είναι διαφορετικοί και σε αντικυκλική σειρά και $e_{ijk} = 0$ εάν οποιοδήποτε από τους δύο δείκτες είναι όμοιοι.

Η στροβιλώδης κινητική ενέργεια k χρειάζεται στις παραπάνω φόρμουλες και μπορεί να βρεθεί προσθέτοντας τις τρεις ομαλές τάσεις μαζί:

$$k = \frac{1}{2} (R_{11} + R_{22} + R_{33}) = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$$

Οι έξι εξισώσεις για τη μετάβαση της τάσης, Reynolds λύνονται μαζί με το πρότυπο εξίσωσης για το ποσοστό της μονομετρικής απώλειας ϵ . Και πάλι ένας πιο ακριβής τύπος βρίσκεται στον Launder et al (1975), αλλά ο τύπος της εξίσωσης για το κανονικό πρότυπο κ-ε χρησιμοποιείται στα εμπορικά CFD για χάρη απλοποίησης.

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \text{div} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad}(\epsilon) \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} 2\nu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.51)$$

όπου $C_{1\epsilon} = 1,44$ και $C_{2\epsilon} = 1,92$

Ποσοστό μεταβολής του ϵ	+	Μεταφορά του ϵ από την μετάδοση θερμότητας	=	Μεταφορά από ϵ από την διάχυση	+	Ποσοστό παραγωγής του ϵ	-	Ποσοστό καταστροφής του ϵ
----------------------------------	---	---	---	---	---	----------------------------------	---	------------------------------------

Οι συνήθεις οριακές συνθήκες για ελλειπτικές ροές που απαιτούνται για τη λύση των εξισώσεων μετάβασης των τάσεων Reynolds είναι οι εξής:

- Είσοδος: καθορισμένες κατανομές του R_{ij} και ϵ
- Έξοδος και συμμετρία: $\theta R_{ij}/\theta n = 0$ και $\theta \epsilon/\theta n = 0$
- Ελεύθερο ρεύμα: $R_{ij} = 0$ και $\epsilon = 0$
- Στερεό τοίχωμα: συντελεστές τοιχώματος

Στην απουσία καθεμίας πληροφορίας να προσεγγίζει της κατανομές είσοδο για το R_{ij} θα πρέπει να υπολογιστεί από την τάση στροβιλισμού T_1 και από ένα χαρακτηριστικό μήκος L του εξοπλισμού (ισοδύναμο με την ακτίνα του σωλήνα) με τη βοήθεια των παρακάτω θεωρουμένων σχέσεων.

$$K = \frac{3}{2} (U_{ref} T_1)^2 \quad \epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad l = 0,07L \overline{u_1'^2} = k \quad \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = \frac{1}{2} k \quad \overline{u'_i u'_j} = 0$$

(i≠j)

Τέτοιου είδους εκφράσεις δεν θα έπρεπε να χρησιμοποιούνται χωρίς ένα σημαντικό τεστ των αποτελεσμάτων ευαισθησίας, στις θεωρούμενες οριακές συνθήκες εισόδου.

Για τους υπολογισμούς σε υψηλούς αριθμούς Reynolds του τύπου του συντελεστή τοιχώματος οριακών συνθηκών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όποια είναι πολύ όμοια προς εκείνο του προτύπου κ-ε. Οι τιμές των τάσεων Reynolds κοντά στο τοίχωμα υπολογίζονται από τις φόρμουλες όπως $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = c_{ij} k$ όπου το c_{ij} αποκτάται από τις μετρήσεις. Τροποποιήσεις των προτύπων για χαμηλούς αριθμούς Reynolds μπορούν να αναγνωρίσουν τις επιρροές της μοριακής ρευστότητας στους όρους διάχυσης και να εξηγήσουν για την ανισορροπία στο όρο του ποσοστού απώλειας στις εξισώσεις R_{ij} .

Οι συντελεστές απόσβεσης του τοιχώματος για να προσαρμόσουν τις σταθερές της εξίσωσης του ε και μιας τροποποιημένης μεταβλητής του ποσοστού απώλειας $\bar{\varepsilon} [\equiv \varepsilon - 2\nu(\partial k^{1/2} / \partial y)^2]$ δίνουν μια πιο πραγματική προτυποποιημένη κοντά σε στέρεα τοιχώματα. Έτσι οι άλλοι (1991) δίνουν ένα πρόσφατο απολογισμό της επεξεργασίας της λειτουργίας. Κοντά στο τοίχωμα, όπου οι λεπτομέρειες θα πρέπει να ανακαλυφθούν.

Όμοια πρότυπα που περιπλέκουν περαιτέρω τρεις μερικές διαφορικές εξισώσεις προτύπων- μια για κάθε κλίμακα στροβιλώδης ροής $\overline{u'_i \varphi'}$ της εξίσωσης (3.17) που είναι διαθέσιμες για την μετάβαση της κλίμακας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται για περαιτέρω υλικό στον Rodi (1980). Οι εμπορικές κώδικες των CFD χρησιμοποιούν την απλή μέθοδο της πρόσθεσης ενός συντελεστή της στροβιλώδης διάχυσης $\Gamma_+ = \mu / \sigma_\varphi$ στον ελασματικό συντελεστή διάχυσης, με τους αριθμούς σ_φ του Prandtl και Schmidt να ισούται με 0,7 για όλες τις κλίμακες. Πολύ λίγοι γνωρίζουν σχετικά με τις τροποποιήσεις των χαμηλών αριθμών Reynolds στις κλίμακες των ροών εξισώσεων μεταφοράς κοντά σε τοιχώματα.

Τα RSMs είναι φανερά αρκετά πολύπλοκα, αλλά είναι γενικώς αποδεκτά και είναι οι "απλούστεροι" τύποι προτύπου με την δυνατότητα να περιγράφουν όλες τις ιδιότητες της μέσης ροής και των τάσεων Reynolds χωρίς να γίνει ρύθμιση σε κάθε μια περίπτωση (πίνακας 3.6). Το RSM με κανένα τρόπο δεν είναι τόσο καλά έγκυρο όσο το πρότυπο κ-ε και γενικώς λόγω του υψηλού κόστους των υπολογιστών του δεν είναι ευρύτερα χρησιμοποιημένο στους υπολογισμούς της βιομηχανικής ροής. Η επέκταση και η βελτίωση εκείνων των προτύπων είναι μια περιοχή πολύ δραστήρια για έρευνα. Μια φορά σχετικά με τον ακριβή τίπο του στοιχείου ενός προτύπου που έχει φτάσει σε κοινή συναίνεση, είναι πιθανόν η διαθεσιμότητα του πιο δυναμικού hardware της υπολογιστικής θα έφερνε αυτόν τον τύπο της προτυποποίησης του στροβιλισμού που μπορεί να έφθανε μέχρι του βιομηχανικούς χρησιμοποιούντες στο όχι επίσης μακρινό μέλλον.

Πίνακας 3.6: Μοντέλο εξισώσεων τάσεων- Reynolds

Πλεονεκτήματα

- Ενδεχομένως το πιο γενικό από όλα τα κλασικά μοντέλα τύρβης
- Μόνο οι κύριες ή οριακές συνθήκες είναι απαραίτητες να καλυφθούν
- Πολύ ακριβής υπολογισμός των ιδιοτήτων της μέσης ροής και όλων των τάσεων Reynolds για πιο απλές και πιο πολύπλοκες ροές (περιλαμβάνοντας τοιχώματα jet, ασυμμετρικούς αγωγούς και ροές μη κυκλικών αγωγών και καμπυλωτές ροές).

Μειονεκτήματα

- Πολύ μεγάλο το υπολογιστικό κόστος (εκτός μερικές διαφορικές εξισώσεις επιπέδων)
- Όχι τόσο ευρείας έγκυρο, όσο το μήκος αναμίξεως του προτύπου K-ε
- Εκτελεί τόσο άσχημα όσο το πρότυπο κ-ε σε μερικές ροές λόγω του ίδιου προβλήματος με την προτύπωση της εξίσωσης κ-ε (πχ αξονοσυμμετρικά jet και απεριόριστες ανακυκλοφορούμενες).

3.5.4 ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ - ΤΑΣΗΣ

Το αλγεβρικό της τάσης (ASM) είναι μία οικονομική μέθοδος υπολογισμού για την ανισοτροπία των τάσεων Reynolds χωρίς να πρόκειται για πλήρη διάρκεια της λύσης των εξισώσεων μετάβασης της τάσης Reynolds. Το πελώριο υπολογιστικό κόστος της λύσης RSM αιτιολογείται από το γεγονός του βαθμού κλίσης των τάσεων Reynolds R_{ij} κλπ όπου εμφανίζονται οι μεταγωγικοί (D/D_i) και διαχυτικοί όροι μεταφοράς D_{ij} της 3.47 και 3.48 αντίστοιχα. Ο Rodi πρότεινε την ιδέα ότι εάν οι όροι μεταγωγής και διάχυσης της μετάβασης επομακρυνθούν ή να προτυποποιηθούν οι εξισώσεις των τάσεων Reynolds μειώνονται σε μια σειρά αλγεβρικές εξισώσεις. Η απλούστερη μέθοδος είναι να αγνοηθούν τελείως οι μεταγωγικοί και διαχυτικοί όροι. Σε μερικές περιπτώσεις η εμφάνιση αυτού γίνεται αρκετά ακριβής (Naut k' Rodi 1983, Demuzeu k' Rodi 1984).

Μία εφαρμόσιμη μέθοδος είναι να υποθέσουμε ότι το άθροισμα των μεταγωγικών και διαχυτικών όρων των τάσεων Reynolds είναι ανάλογο του αθροίσματος των όρων μεταγωγής και διάχυσης της στροβιλώδης κινητικής ενέργειας. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_j u'_i}}{Dt} - D_{ij} &\approx \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} - [k - \text{μεταφορικοί όροι (πχ div)}] \right) \\ &= \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (-\overline{u'_i u'_j} E_{ij} - \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Οι όροι στις παρενθέσεις στη δεξιά πλευρά περιλαμβάνουν το άθροισμα του ποσοστού παραγωγής και του ποσοστού διάχυσης στη στροβιλώδη κινητική ενέργεια από την ακριβή εξίσωση 3.32. Οι τάσεις Reynolds και η στροβιλώδης κινητική ενέργεια είναι ιδιότητες του στροβιλισμού και πολύ στενά συγγενεύουν. Έτσι η (3.52) είναι πολύ πιθανόν να γίνει κακή προσέγγιση μόνο αν ο λόγος $\overline{u'_i u'_j}/k$ δεν μεταβληθεί πολύ γρήγορα πάνω

από τη ροή. Περαιτέρω λεπτολογία θα πρέπει να αποκτηθούν από την αφήγηση της μετάβασης λόγω μεταγωγής και διάχυσης ανεξαρτησίας της μετάβασης λόγω στροβιλώδης κινητικής ενέργειας.

Εισάγοντας την προσέγγιση (3.52) στην εξίσωση μεταφοράς (3.45) της τάσης Reynolds με τον όρο παραγωγής P_{ij} (3.46) προτυποποιώντας τον όρο του ποσοστού διάχυσης (3.50) και τον όρο συσχέτισης τάσης πίεσεως (3.49) στη δεξιά πλευρά αποδίδει μετά από κάποια ανακατάταξη το παρακάτω πρότυπο αλγεβρικής τάσης.

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = 2/3k\delta_{ij} + \left(\frac{C_D}{P} \right) (P_{ij} - 2/3P\delta_{ij}) \frac{k}{\varepsilon} \quad (3.53)$$

Οι τάσεις Reynolds εμφανίζονται και στις δύο πλευρές της εξίσωσης- στη δεξιά πλευρά περιέχονται μέσα στο P_{ij} - έτσι η (3.53) είναι μια σειρά ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων για τις έξι άγνωστες τάσεις Reynolds P_{ij} οι οποίες μπορούν να λυθούν με αντιστροφή του πίνακα Matzix ή με επαναλαμβανόμενες τεχνικές τα κ και ε είναι γνωστά. Επομένως οι φόρμουλες είναι λυμένες σε συνδυασμό με τις εξισώσεις του κανονικού προτύπου κ-ε. (3.34-3.37)

Η σταθερή C_D ρυθμίζεται για να καλύψει το φυσικό "χάσιμο" στην προσέγγιση. Ένας εμπορικός κώδικας CFD συνιστά ASM για στροβιλιζόμενες ροές με τις ακόλουθες σταθερές:

$$C_D = 0,55 \text{ και } C_1 = 2,2$$

Μια κλίμακα στροβιλώδης μετάβασης μπορεί επίσης να περιγραφεί από αλγεβρικά πρότυπα, τα οποία προέρχονται από τις εξισώσεις της πλήρους μετάβασης τους στις οποίες εμείς αναφερθήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Ο Rodi (1980) πάλι δίνει περαιτέρω πληροφορίες για κάθε ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

Ο Demuren (1984) και Rodi αναφέρουν την υπολογιστική για τη δευτερεύουσα ροή σε μη - κυκλικούς αγωγούς με μια κάπως πιο αναβαθμιζόμενη έκδοση του προτύπου αυτού που περιλαμβάνει διυρθώσεις τοιχώματος για τον όρο τάσης - πίεσεως και τροποποιημένες τιμές των ρυθμιζόμενων σταθερών για να πετύχουν καλό ταίριασμα με τα μετρημένα δεδομένα σε στενά ομοιογενείς ροές και διαμήσεις και ροές αγωγών. Κατόρθωσαν να βρουν ρεαλιστικές προβλέψεις των αρχικών παραμορφωμένων ροών και δευτερεύουσας ροής σε τετραγωνισμένους και ορθογώνιους αγωγούς.

Αυτές οι επιρροές προκαλούνται από την ανισοτροπία των ομαλών τάσεων Reynolds και επομένως δεν μπορούν να παρουσιαστούν σε ομοιώματα της ίδιας κατηγορίας με το κανονικό πρότυπο κ-ε.

Το αλγεβρικό πρότυπο τάσης είναι μια οικονομική μέθοδος ενσωματωμένων επιρροών της ανισοροπίας μέσα στην υπολογιστική των τάσεων Reynolds. Το πρότυπο αυτό δεν εγκρίνεται τόσο καλό όσο το πρότυπο κ-ε αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ροές όπου είναι γνωστό το πρόσφατο (πρότυπο) να εκλείψει άσχημα και όπου οι μεταβατικές υποθέσεις δεν αρκούνται πολύ σοβαρά στον συμβιβασμό τους με την υπολογιστική ακρίβεια. (πίνακας 3.7). Πρόσφατες αναπτύξεις στον σχεδιασμό του ανισοτροπικού δυναμικού εξόδου του προτύπου κ-ε έχουν προκαλέσει μια μέτρια απώλεια στην δημοτικότητα του ASM.

Πίνακας 3.7 Αλγεβρικό πρότυπο- τάσης

Πλεονεκτήματα

- Φθηνή μέθοδος για τον υπολογισμό ανισορροπίας της τάσης Reynolds
- Ενδεχομένως συνδυάζει τη γενίκευση της προσέγγισης του προτύπου τάσης Reynolds RSM (Καλή προτύπωση της ζωνάνιας και κατάλληλο για τις επιρροές της περιστροφής) με την οικονομία του K-ε προτύπου.
- Εφαρμόζεται επιτυχημένο σε ισοθερμικές και σε επιπλέον λεπτές στιβάδες διάτμησης
- Αν είναι αμελητέοι οι όροι μεταγωγής και διάχυσης το ASM επιδρά ισάξια με το RSM.

Μειονεκτήματα

- Σχεδόν λίγο πιο ακριβό από το πρότυπο κ-ε (δύο PDEs και ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.)
 - Δεν εγκρίνεται τόσο πολύ, όπως τα πρότυπα του μήκους αναμίξεως και το κ-ε
 - Ισχύουν τα ίδια μειονεκτήματα όπως του RSM
 - Το πρότυπο περιορίζεται πολύ σε ροές όπου οι υποθέσεις μετάβασης για τις μεταγωγικές και τις διαχυτικές επιρροές δεν εμφανίζονται - η έγκριση είναι απαραίτητη για να καθοριστούν τα όρια εκτέλεσης.
-

