

Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
Τμήμα: Ηλεκτρολογίας

Πτυχιακή Έργασία
Αριθμός 218

**« Αυτόματη συμπίκνωση και επεξεργασία ψηφιακών
σημάτων μεγάλου μεγέθους - με σκοπό την δημιουργία νέων
σημάτων διαφορετικής πληροφορίας»**

Εισηγητής:
1. Α. Υφαντής

Σπουδαστές:
1. Ι. Βούτος
2. Β. Παπαζαχαρίας

Πάτρα - ΙΟΥ.97



PIOMOR
EATOFHE

2955



Ευχαριστίες

Η ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων καθώς και η επεξεργασία τους με Η/Υ αποτελούν μια ευρέως διαδεδομένη διαδικασία ελέγχου πολύπλοκων συστημάτων. Η πτυχιακή αυτή εργασία στηρίχθηκε στην μέθοδο, με την οποία έγινε η επεξεργασία ενός αναλογικού σήματος που παριστάνει την μεταβολή του δυναμικού σε σχέση με τον χρόνο. Βασιζόμενοι στους κανόνες της δειγματοληψίας, απεικονίσαμε το αναλογικό σήμα και εν συνεχεία δώσαμε τα στοιχεία στον Η/Υ χρησιμοποιώντας το πακέτο Matlab. Κάνοντας χρήση των εντολών του Matlab πήραμε τα αποτελέσματα της επεξεργασίας σημάτων.

Για την ολοκλήρωση της πτυχιακής μας εργασίας στάθηκε πολύτιμη η βοήθεια κάποιων ανθρώπων που θα ήταν σκόπιμο και πιστεύουμε απαραίτητο να αναφέρουμε.

Εκφράζουμε τις ευχαριστίες μας σ' αυτούς που μας έδωσαν υλικό για δειγματοληψία. Τον κ. Α. Υφαντή για τις υποδείξεις του καθώς και τους κ.κ. υπεύθυνους του υπολογιστικού κέντρου Pertek.

Ακόμα δεν μπορούμε να μην ευχαριστήσουμε όλους αυτούς που μας συμπαραστάθηκαν.

Μάρτιος 1997

Οι σπουδαστές

Ι. Βούτος

Β. Παπαζαχαρίας

Πρόλογος

Η ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων καθώς και η επεξεργασία τους με Η/Υ αποτελούν μια ευρέως διαδεδομένη διαδικασία ελέγχου πολύπλοκων συστημάτων.

Αναλογικά σήματα τα οποία παριστάνουν την μεταβολή του δυναμικού σε σχέση με τον χρόνο ελήφθησαν από το εργαστήριο μέτρησης Ηλεκτρικού Δυναμικού του κ. Α. Υφαντή. Τα σήματα αυτά αφού ψηφιοποιήθηκαν, δόθηκαν στον Η/Υ για την παρακάτω επεξεργασία.

Η πτυχιακή αυτή άσκηση ασχολείται με την μέθοδο την οποία γίνεται:

- η εισαγωγή της ψηφιοποιημένης πλέον πληροφορίας στο πακέτο επεξεργασίας Matlab.
- την αυτόματα συμπύκνωση και ένωση των ψηφιακών σημάτων (πληροφοριών).
- το φιλτράρισμα και την αξιοποίηση των νέων ψηφιακών σημάτων ως προς την πληροφορία τους.

Μέσα από την παραπάνω διαδικασία επιχειρείται και ο προγραμματισμός σε επίπεδο χρήστη, στο πακέτο επεξεργασίας, για την αυτοματοποίηση όλων των διαδικασιών επεξεργασίας μεγάλου πλήθους πληροφοριών.

Εισηγητής:

A. ΥΦΑΝΤΗΣ

Οι σπουδαστές:

I. ΒΟΥΤΟΣ

B. ΠΑΠΑΖΑΧΑΡΙΑΣ

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	1
Πρόλογος	2
Κεφάλαιο 1ο	5
Ανάλυση συστημάτων με στοχαστικά σήματα	5
1.1. Εισαγωγή	5
1.2. Ορισμοί	6
1.3. Η πιθανότητα	9
1. Κλασσικός ορισμός	9
2. Σχετική συχνότητα	10
3. Στατιστικός ορισμός	10
Κεφάλαιο 2ο	12
2.1. Γενικά	12
2.2. Ο δειγματολήπτης	16
2.3. Η δειγματοληπτική συνάρτηση	17
2.4. Αρμονική ανάλυση της δειγματοληπτικής συναρτήσεως	19
2.5. Ο Μετασχηματισμός Z	25
Κεφάλαιο 3ο	28
3.1. Αναλογικός σε ψηφιακό μετασχηματισμός	28
3.2. Απο ψηφιακό σε αναλογικό μετασχηματισμό	35
Κεφάλαιο 4ο	38
4.1. Τυχαίες συναρτήσεις	38
4.2. Ομοιόμορφες και κανονικές συναρτήσεις πυκνότητας	44
4.3. Συναρτήσεις πυκνότητας πολυμεταβλητής	51
4.4. Στάσιμες και εργοδικές ιδιότητες	54
4.5. Συναρτήσεις συσχέτισης	57
4.6. Φάσματα ισχύος και ενέργειας	66
4.7. Συναρτήσεις συσχέτισης και φάσματα ΔΥΝΑΜΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ	71

4.8. Τυχαίες επεξεργασίες συγκεκριμένου χρόνου και γραμμική διήθηση	79
4.9. Υπολογιστικές ρουτίνες	85
Κεφάλαιο 5ο	93
5.1. Χρωματιστές τυχαίες ακολουθίες από διηθημένο λευκό θόρυβο	93
5.2. Εκτιμήσεις φασματικής ισχύος	98
5.3. Αποδιαμόρφωση και μεθοδοι φίλτρου εκλεγμένης φασματικής εκτίμησης	102
5.4. Περιοδογραμμική μέθοδοι φασματικής εκτίμησης	106
5.5. Παραμετρικοί μέθοδοι φασματικής εκτίμησης	123
Κεφάλαιο 6ο	140
Εφαρμογή σε σήματα πραγματικού χρόνου	140
Πορεία εργασιών στο πακέτο επεξεργασίας Matlab	141

Κεφάλαιο 1ο

Ανάλυση συστημάτων με στοχαστικά σήματα

1.1. Εισαγωγή

Τα συστήματα, που μέχρι αυτή τη στιγμή μας απασχόλησαν, έχουμε θεωρήσει ότι διεγείρονται από ημιτονικά σήματα ή από σήματα απεριοδικά μεν, αλλά συγκεκριμένης μορφής, όπως είναι π.χ. η συνάρτηση μοναδιαίας κρούσεως (unique impulse function), η συνάρτηση βαθμίδας (step function), η συνάρτηση αναρριχήσεως (ramp function) κ.α. Στην πράξη, όμως, τα συστήματα διεγείρονται και από τυχαία (στοχαστικά) σήματα. Το γεγονός αυτό δεν αλλάζει φυσικά τη συμπεριφορά των (γραμμικών) συστημάτων, αλλά οδηγεί σε άλλες τεχνικές μελέτης αυτών.

Οι τεχνικές μελέτης, στην περίπτωση που εξετάζουμε, έχουν στατιστική βάση. Δηλαδή, για τον τρόπο της συμπεριφοράς ενός συστήματος, προσδιορίζουμε τα στατιστικά στοιχεία του σήματος εξόδου, όπως είναι: η μέση τιμή, η μέση τετραγωνική τιμή, η τυπική απόκλιση, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας. Των στοιχείων αυτών, στη συνέχεια, γίνεται χρήση κατά την εφαρμογή της τεχνικής, η οποία

χρησιμοποιεί την έννοια της "πυκνότητας του φάσματος ισχύος" και εκείνης, η οποία χρησιμοποιεί την έννοια των "συναρτήσεων συσχετίσεως".

Πιο κάτω δίνουμε μερικούς ορισμούς και την έννοια των όρων, που αναφέραμε, σε συνδυασμό με εφαρμογές στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

1.2. Ορισμοί

Εκτελούμε ένα πείραμα τύχης, π.χ. ρίχνουμε ένα κύβο (ζάρι) μια φορά. Η επάνω επιφάνεια του κύβου, όπως ξέρουμε, θα δείξει έναν από τους αριθμούς: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Καλούμε τότε:

1. Δυνατές περιπτώσεις: Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος, δηλαδή έτη.
2. Ευνοϊκές περιπτώσεις: Το σύνολο των αποτελεσμάτων που μας ενδιαφέρουν, δηλαδή ένα (ή τον αριθμό 1 ή τον αριθμό 2 ή ή τον αριθμό 6).
3. Ενδεχόμενο: Μία από τις δυνατές περιπτώσεις, δηλαδή την εμφάνιση του αριθμού 1 ή του 2 ή ... ή του 6.
4. Ενδεχόμενα αμοιβαίως αποκλειστικά ή ασυμβίβαστα: δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα τέτοια, ώστε η εμφάνιση του ενός να αποκλείει την ταυτόχρονη εμφάνιση του άλλου. Στο πείραμα μας, όλα τα ενδεχόμενα είναι μεταξύ τους ανά δύο αμοιβαίως

αποκλειστικά.

5. Ενδεχόμενα στατιστικώς ανεξάρτητα: Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα τέτοια, ώστε η εμφάνιση του ενός να είναι ανεξάρτητη από την εμφάνιση, ή μη του άλλου ενδεχομένου. Π.χ., αν ρίξουμε δύο κύβους, το ενδεχόμενο ο ένας κύβος να φέρει τον αριθμό 2 είναι ανεξάρτητο ενδεχόμενο από το ενδεχόμενο ο άλλος κύβος να φέρει οποιονδήποτε αριθμό μεταξύ του 1 και του 6.

6. Δειγματικό σημείο: Ένα ενδεχόμενο του πειράματος, π.χ. την εμφάνιση του αριθμού 4.

7. Δειγματικό χώρο: Το σύνολο των δειγματικών σημείων. Δηλαδή, αν με το S συμβολίσουμε το δειγματικό χώρο και με τα γράμματα A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 και A_6 συμβολίσουμε τα ενδεχόμενα του πειράματος μας (δειγματικά σημεία), θα είναι:

$$S = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

8. Πεπερασμένο δειγματικό χώρο: Το χώρο, που περιέχει πεπερασμένο πλήθος δειγματικών σημείων, όπως είναι π.χ. ο προηγούμενος χώρος των 6 σημείων.

9. Αριθμήσιμο άπειρο δειγματικό χώρο: Το χώρο που, περιέχει ένα άπειρο μεν, αλλά αριθμήσιμο πλήθος δειγματικών σημείων, δηλαδή ένα πλήθος σημείων, που μπορεί να τεθεί σε αντιστοιχία ένα προς ένα με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Σαν τέτοιος χώρος, μπορεί π.χ. να χαρακτηριστεί ο χώρος των

δευτερολέπτων της ώρας μέσα στο πεδίο του χρόνου.

10. Διακριτό δειγματικό χώρο: Το χώρο, που περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος δειγματικών σημείων ή ένα άπειρο πλήθος, αλλά αριθμήσιμο.

11. Συνεχή δειγματικό χώρο: Το χώρο, που περιέχει δειγματικά σημεία, τα οποία συνθέτουν ένα συνεχές σύνολο, όπως είναι π.χ. ο χώρος των μαθηματικών σημείων ενός τμήματος ευθείας γραμμής του επιπέδου.

12. Τυχαία ή στοχαστική μεταβλητή: Μια συνάρτηση $x(s)$, με πεδίο ορισμού ένα δειγματικό χώρο S και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Πρέπει να σημειωθεί ότι, όταν δοθεί ένας δειγματικός χώρος, μπορούν να ορισθούν περισσότερες από μία στοχαστικές μεταβλητές. Η στοχαστική μεταβλητή είναι συνεχής ή διακριτή.

Παράδειγμα 1.1. Στο παράδειγμα της ρίψεως του κύβου, ο δειγματικός χώρος μπορεί να συμβολιστεί έτσι:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Σαν μια στοχαστική μεταβλητή, τότε, μπορεί να θεωρηθεί η ακόλουθη: $x(s) = s$, όπου $s \in S$, δηλαδή η συνάρτηση, με πεδίο ορισμού τον προηγούμενο δειγματικό χώρο S και πεδίο τιμών το σύνολο:

$$W_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \equiv S$$

Επίσης, σαν μια άλλη στοχαστική μεταβλητή, μπορεί να θεωρηθεί η συνάρτηση $x(s) = s^2$, όπου $s \in S$, με πεδίο ορισμού τον ίδιο δειγματικό χώρο S και πεδίο τιμών το σύνολο:

$$W_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$

Σημείωση: Επειδή δεν μας ενδιαφέρει αποκλειστικά το θέμα "πιθανότητες και στατιστική", δεν επεκτεινόμαστε περισσότερο στους σχετικούς ορισμούς, με την επιφύλαξη να αναφέρουμε τους πλέον αναγκαίους από αυτούς, όταν τους χρειαστούμε πιο κάτω, σε συνδυασμό με εφαρμογές στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

1.3. Η πιθανότητα

1. Κλασσικός ορισμός

"Πιθανότητα" $P(A)$, εμφάνισης ενός ενδεχομένου A , είναι ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων προς τις δυνατές περιπτώσεις εμφάνισης αυτού του ενδεχομένου. Π.χ., στο παράδειγμα της ρίψεως του κύβου, οι ευνοϊκές περιπτώσεις εμφάνισης του αριθμού 3 είναι μία, ενώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι έξη. Έτσι, η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3, είναι $1/6$.

2. Σχετική συχνότητα

"Σχετική συχνότητα" f , εμφάνισης ενός ενδεχομένου A κατά την επανάληψη ενός πειράματος τύχης, καλείται ο λόγος:

$$f = \frac{N_A}{N} \quad (1.1)$$

όπου N_A είναι ο αριθμός εμφάνισης του ενδεχομένου A και N είναι ο αριθμός επαναλήψεως του πειράματος.

Παράδειγμα 1.2. Ρίχνουμε στον αέρα ένα νόμισμα 10 φορές και τις 4 φορές εμφανίζεται "κορώνα". Η συχνότητα εμφάνισης του ενδεχομένου "κορώνα" είναι $4/10$.

3. Στατιστικός ορισμός

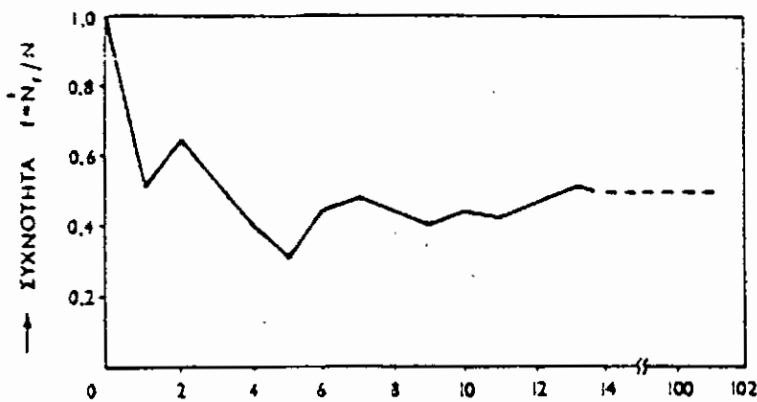
"Πιθανότητα" $P(A)$, εμφάνισης ενός ενδεχομένου A , καλείται η οριακή τιμή της σχετικής συχνότητας f , εμφάνισης του ενδεχομένου αυτού, όταν ο αριθμός N , επαναλήψεως του πειράματος, τείνει προς το άπειρο, δηλαδή είναι:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \quad (1.2)$$

Παρατήρηση: Από τον πιο πάνω ορισμό της πιθανότητας,

προκύπτει το συμπέρασμα ότι, σ' ένα πείραμα τύχης, η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου είναι περισσότερο ακριβής, όσο ο αριθμός επαναλήψεως του πειράματος γίνεται μεγαλύτερος (μεγαλύτερη στατιστική ακρίβεια). Η παρατήρηση αυτή γίνεται πολύ σαφής, αν κανείς προσέξει την καμπύλη του σχ. 1.1., που αναφέρεται στη μεταβολή της συχνότητας $f = \frac{N_r}{N}$

εμφάνισης του ενδεχομένου "γράμματα", σε συνάρτηση με τον αριθμό N της επαναλήψεως του πειράματος της ρίψης ενός νομίσματος στον αέρα ("κορώνα - γράμματα"): Παρατηρούμε ότι, καθώς ο αριθμός N της επαναλήψεως του πειράματος αυξάνει, η πιθανότητα του ενδεχομένου "γράμματα" τείνει προς το $1/2$.



Σχ. 1.1. Μεταβολή της σχετικής συχνότητας εμφάνισης του ενδεχομένου "γράμματα".

Κεφάλαιο 2ο

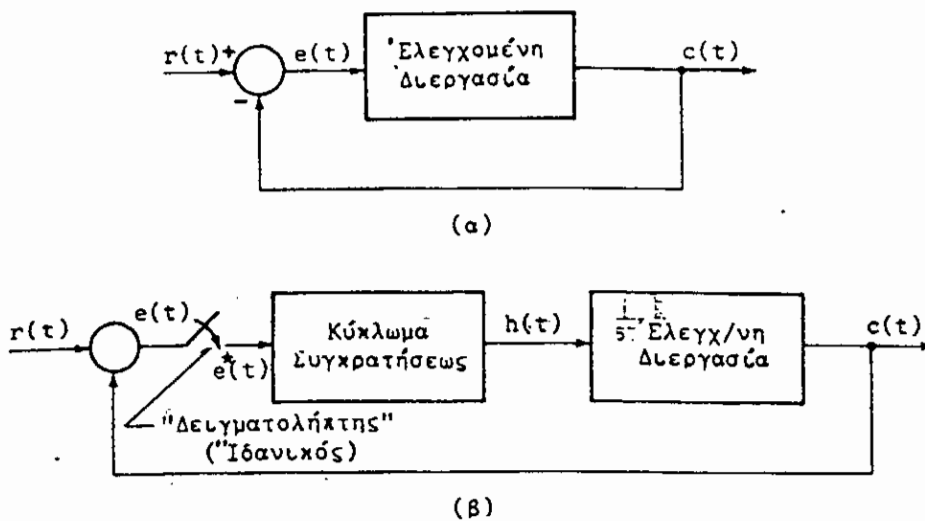
Συστήματα δειγματοληπτικών δεδομένων

2.1. Γενικά

Με τον όρο: "Συστήματα Δειγματοληπτικών Δεδομένων" (Σ.Δ.Δ.), εννοούμε τα συστήματα εκείνα, που λειτουργούν κατά ένα μέρος ή στο σύνολό τους με "διακριτά" σήματα και όχι με συνεχή σήματα σαν κι αυτά που συναντάμε στα συστήματα, που έχουμε εξετάσει μέχρι αυτό το Κεφάλαιο. Ένα Σ.Δ.Δ. είναι π.χ. το σύστημα εκπομπής - λήψεως ενός RADAR (παλμοί ορισμένης διάρκειας και ρυθμού επαναλήψεως), προς χάρη του οποίου αναπτύχθηκαν τα συστήματα αυτά κατά τη διάρκεια του Β΄ παγκοσμίου πολέμου. Άλλες πηγές εκπομπής δειγματοληπτικών δεδομένων είναι οι τεχνητοί δορυφόροι και τα αστροναυτικά - γενικά - οχήματα, τα οποία αποστέλλουν στη γη πληροφορίες περιοδικώς και κατά ορισμένα χρονικά διαστήματα, όπως είναι οι πληροφορίες, για την πορεία του οχήματος, για την επικρατούσα θερμοκρασία, για την ένταση της κοσμικής ακτινοβολίας, για την ένταση του μαγνητικού πεδίου κ.α.

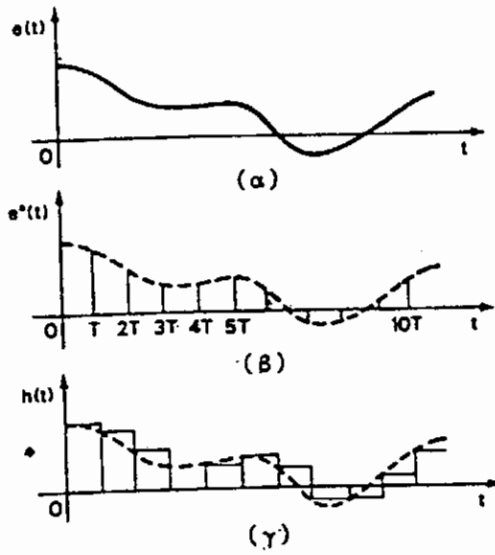
Στα Σ.Δ.Δ., εκεί όπου υπάρχουν συνεχή σήματα, χρησιμοποιείται μια διάταξη, που λέγεται "Δειγματολήπτης" (Sampler). Ο Δειγματολήπτης μετατρέπει το συνεχές σήμα σε διακριτό σήμα

(διακοπτόμενο με ορισμένο ρυθμό) σε συνάρτηση με το χρόνο. Μετά όμως το Δειγματολήπτη, για να διεγερθεί κάποια βαθμίδα του συστήματος, που λειτουργεί με συνεχές σήμα - που είναι δηλαδή αναλογικής συνθέσεως - είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί μια άλλη διάταξη, που ονομάζεται "Κύκλωμα συγκρατήσεως" (Hold Circuit), - συνοπτικά Κ.Σ. - και που μετατρέπει το διακριτό σήμα σε συνεχές σήμα κατά προσέγγιση. Στο σχ. 2.1. φαίνονται τα διαγράμματα βαθμίδων δύο συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, ενός Αναλογικού (α) και ενός Συστήματος Δειγματοληπτικών Δεδομένων (β). Επίσης, στο σχ. 2.2., φαίνονται οι διαδοχικές μορφές, που παίρνει ένα αναλογικό σήμα (α) στην έξοδο ενός ιδανικού Δειγματολήπτη (β) και στην έξοδο ενός Κ.Σ. (γ).

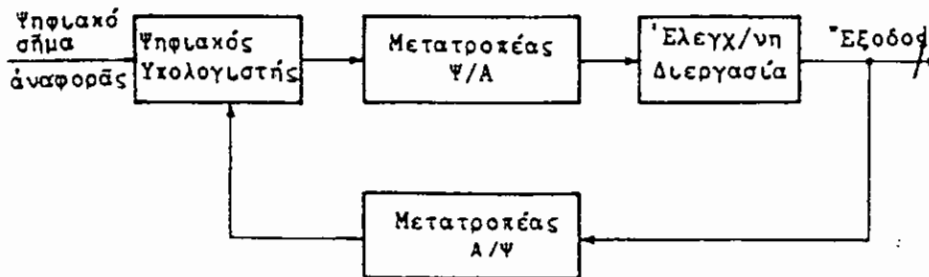


Σχ. 2.1. Αναλογικό σύστημα ελέγχου (α) και αντίστοιχο σύστημα δειγματοληπτικών δεδομένων (β).

Στα Σ.Δ.Δ., ο ρυθμός δειγματοληψίας μπορεί να είναι ή σταθερός ή μεταβλητός ή τυχαίος. Σ' αυτό το Κεφάλαιο, θα θεωρήσουμε το ρυθμό δειγματοληψίας σταθερό. Ανάλογα αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν και στην περίπτωση, που ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μεταβλητός ή τυχαίος. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι, με την πρόοδο των Ψηφιακών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, η ανάπτυξη των Σ.Δ.Δ. έχει αυξηθεί. Και τούτο, διότι, όπως είναι γνωστό, οι Ψηφιακοί Υπολογιστές, που λειτουργούν με σήματα παρόμοια με εκείνα των Σ.Δ.Δ. (χρονικοί παλμοί, που αντιστοιχούν στο δυαδικό π.χ. σύστημα αριθμώσεως), χάρη στις αυξημένες υπολογιστικές τους ικανότητες, έχουν αρχίσει τελευταία να εισχωρούν πάρα πολύ στη διαδικασία ελέγχου πολύπλοκων συστημάτων, στα οποία οι υπολογιστές αποτελούν βασική μονάδα των, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2. Έτσι, σ' ένα πολυσύνθετο σύστημα αυτομάτου ελέγχου με πολλές εισόδους, είναι δυνατό π.χ. να επιλέγονται περιοδικά (δειγματοληψία) σήματα διάφορων ελεγχόμενων μεγεθών (όπως πίεσεως, θερμοκρασίας, υγρασίας κ.λπ.), τα οποία, αφού μετατραπούν σε ψηφιακή μορφή, εισάγονται για επεξεργασία στην είσοδο Ηλεκτρονικού Υπολογιστή. Πάντως, η ανάλυση των Σ.Δ.Δ. εφαρμόζεται ανάλογα και στην περίπτωση των Ψηφιακών Συστημάτων Ελέγχου.



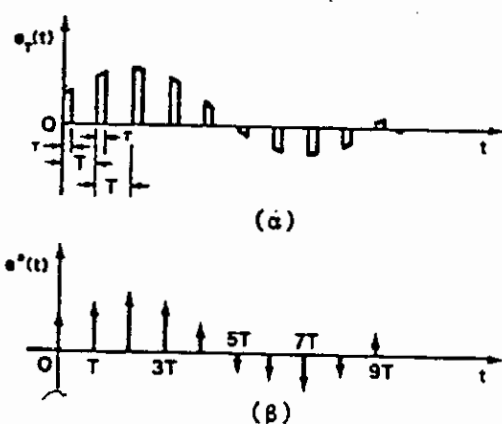
Σχ. 2.2. Αναλογικό σήμα (α), έξοδος Δειγματολήπτη (β) και έξοδος κυκλώματος συγκρατήσεως (γ).



Σχ. 2.3. Διάγραμμα Βαθμίδων συστήματος με ψηφιακό έλεγχο. Το Ψ/Α σημαίνει: από ψηφιακό σε αναλογικό, το δε Α/Ψ το αντίθετο.

2.2. Ο δειγματολήπτης

Όπως διαπιστώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μία από τις δύο βασικές βαθμίδες του Σ.Δ.Δ. είναι ο "Δειγματολήπτης" (Sampler). Βασικά πρόκειται για ένα διακόπτη, που σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα ίσα με T sec, επιτρέπει, για ένα πολύ μικρότερο του T χρονικό διάστημα τ sec, τη διέλευση του σήματος σφάλματος $e(t)$, $t \geq 0$ προς την επόμενη βαθμίδα. Η έξοδος ενός πραγματικού και ενός ιδανικού Δειγματολήπτη φαίνεται στο σχ. 2.4. Στην ιδανική δειγματοληπτική μορφή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι καταλήγουμε πρακτικά, όταν δεχθούμε ότι ο χρόνος τ , διάρκειας κάθε παλμού, είναι πολύ μικρότερος από την περίοδο T , επαναλήψεως των παλμών της δειγματοληψίας.



Σχ. 2.4. Έξοδος πραγματικού (α) και ιδανικού (β) Δειγματολήπτη.

2.3. Η δειγματοληπτική συνάρτηση

Προκειμένου τώρα να διατυπώσουμε τη μαθηματική σχέση, που εκφράζει τη συνάρτηση της δειγματοληψίας $f^*(t)$, όπου

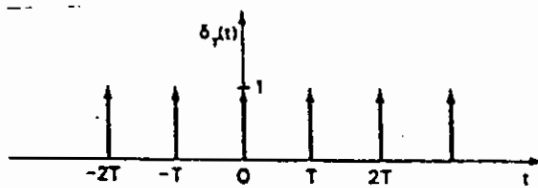
$$t \in \Delta_1 = \{\dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots\} \subseteq \mathfrak{R}$$

διατυπώνουμε αρχικά τη συνάρτηση $\delta_T(t), t \in \Delta_1 \subseteq \mathfrak{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχ. 2.5. Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο T , περιγράφει μια σειρά παλμωθήσεων, με εμβαδό κάθε παλμωθήσεων, με εμβαδό κάθε παλμωθήσεως ίσο με 1 (μια μονάδα επιφανείας) και, κατά συνέπεια, θα δίνεται από την έκφραση.

$$\dots + \delta(t+2T) + \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots$$

ή

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \quad t \in \Delta_1 \quad (2.1)$$



Σχ. 2.5. Παλμωθήσεις, εμβαδού ίσου με 1.

Η συνάρτηση f^* ορίζεται τότε σαν γινόμενο της f (συνεχούς μορφής) επί την περιοδική δ_T (των παλμωθήσεων), δηλαδή είναι:

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t), \quad t \in \Delta_T \subseteq \mathfrak{R} \quad (2.2)$$

Επειδή όμως η συνάρτηση συνεχούς μορφής $f(t)$ ισχύει για $t \geq 0$, με βάση την (2.1.), η δειγματοληπτική συνάρτηση (2.2.) γράφεται:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.3)$$

ή

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (2.4)$$

όπου $t \in \Delta = \{0, T, 2T, \dots, nT, \dots\} \subseteq \mathfrak{R}$

δηλαδή αναλυτικά γράφεται:

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + f(2T)\delta(t-2T) + \dots + f(nT)\delta(t-nT) + \dots \quad (2.5)$$

και έχει γραφική παράσταση (για $n \geq 0$) ανάλογη με εκείνη του σχ. 2.4β.

Ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως f^* είναι:

$$f^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

Η συνάρτηση f^* ορίζεται τότε σαν γινόμενο της f (συνεχούς μορφής) επί την περιοδική δ_T (των παλμωθήσεων), δηλαδή είναι:

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t), \quad t \in \Delta_1 \subseteq \mathfrak{R} \quad (2.2)$$

Επειδή όμως η συνάρτηση συνεχούς μορφής $f(t)$ ισχύει για $t \geq 0$, με βάση την (2.1.), η δειγματοληπτική συνάρτηση (2.2.) γράφεται:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.3)$$

ή

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT) \quad (2.4)$$

όπου $t \in \Delta = \{0, T, 2T, \dots, nT, \dots\} \subseteq \mathfrak{R}$

δηλαδή αναλυτικά γράφεται:

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t - T) + f(2T)\delta(t - 2T) + \dots + f(nT)\delta(t - nT) + \dots \quad (2.5)$$

και έχει γραφική παράσταση (για $n \geq 0$) ανάλογη με εκείνη του σχ. 2.4β.

Ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως f^* είναι:

$$f^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \int_0^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$\gamma_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (2.9)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)w(t)dt = w(0)$$

από την (2.9) παίρνουμε

$$\gamma = \frac{1}{T} e^{-jn\frac{2\pi}{T}0} = \frac{1}{T}$$

για κάθε $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

οπότε η συνάρτηση (2.7), στην οποία θέσαμε $f(t) = \delta_T(t)$, γράφεται:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}, \quad t \in \Delta_1 \quad (2.10)$$

Στη συνέχεια εισάγουμε την (2.10) στην (2.3.) και έχουμε:

$$f^*(t) = \frac{f^*(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}, \quad t \in \Delta \quad (2.11)$$

Η (2.11.) εκφράζει τη σειρά Fourier, σε μιγαδική μορφή, στην οποία αναλύεται η δειγματοληπτική συνάρτηση $f^*(t)$,

$$t \in \Delta = \{0, T, 2T, \dots\}.$$

2. Ο μετασχηματισμός LAPLACE της f^*

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τη δειγματοληπτική συνάρτηση υπό τη μορφή της (2.11.). Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_0^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f^*(t) \delta_T(t) e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f^*(t) e^{-\left(s - jn\frac{2\pi}{T}\right)t} dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

Το ολοκλήρωμα, που περιέχει η (2.12.), εκφράζει - με βάση το σχετικό ορισμό - το μετασχηματισμό Laplace της συναρτήσεως συνεχούς μορφής $f(t)$, $t \geq 0$, στο $s - jn\frac{2\pi}{T} \equiv w$ μιγαδικό επίπεδο,

δηλαδή εκφράζει τη συνάρτηση $F\left(s - jn\frac{2\pi}{T}\right)$. Επομένως είναι:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(s - jn\frac{2\pi}{T}\right) \quad (2.13)$$

Θέτουμε:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_s \quad (2.14)$$

και, δεδομένου ότι το n παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές, μπορούμε να γράψουμε για την (2.13).

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(s + jn\omega_s) \quad (2.15)$$

Η σχέση (2.15.) δίνει το μετασχηματισμό Laplace της

δειγματοληπτικής συναρτήσεως f^* υπό τη μορφή της (2.11.). Το μέγεθος T εδώ λέγεται "περίοδος δειγματοληψίας" και το μέγεθος ω_δ λέγεται "κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας".

3. Το φάσμα συχνοτήτων

Στη σχέση (2.15.) θέτουμε $s = j\omega$, δηλαδή θεωρούμε σαν πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $F^*(s)$ τον άξονα των φανταστικών αριθμών. Στη συνέχεια λαμβάνουμε κατά μέλη τα μέτρα των αντίστοιχων εκφράσεων και έχουμε:

$$|F^*(j\omega)| = \left| \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(j\{\omega + n\omega_\delta\}) \right| \quad (2.16)$$

Η σχέση (2.16) γράφεται αναλυτικά:

$$|F^*(j\omega)| = \frac{1}{T} \left| \dots + F(j\{\omega - 2\omega_\delta\}) + F(j\{\omega - \omega_\delta\}) + F(j\omega) + \right. \\ \left. + F(j\{\omega + \omega_\delta\}) + F(j\{\omega + 2\omega_\delta\}) + \dots \right| \quad (2.17)$$

Κάθε όρος της σειράς (2.17) ισχύει για ορισμένη ζώνη συχνοτήτων.

Κάτω μάλιστα από συγκεκριμένες συνθήκες, που αναφέρουμε στις παρατηρήσεις αυτής της παραγράφου, οι πιο πάνω ζώνες είναι μεταξύ τους ξένες (διαχωρίζονται). Μ' άλλα λόγια, στην περίπτωση που τα φάσματα διαχωρίζονται, για κάθε ζώνη συχνοτήτων (πεδίο ορισμού), η απόλυτη τιμή $|F^*(j\omega)|$ είναι ίση με

την απόλυτη τιμή $|F(j\{\omega \pm n\omega_\delta\})| \frac{1}{T}$ (όπου $n=0, 1, 2, \dots$) του αντίστοιχου όρου της (2.17) όπου:

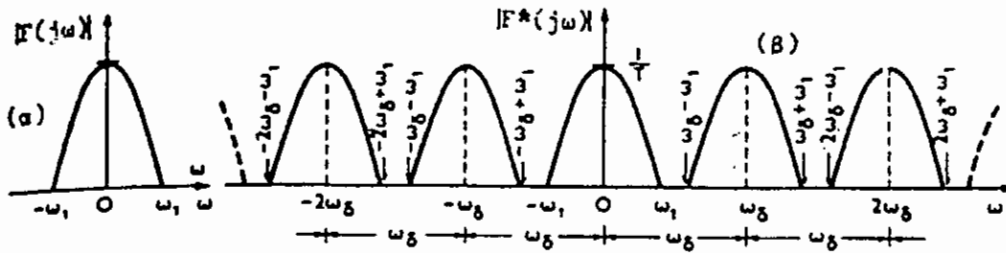
α) Η $|F^*(j\omega)|$ δίνει το φάσμα πλατών της δειγματοληπτικής συναρτήσεως $f^*(t)$, $t \in \Delta$.

β) Η $|F(j\omega)|$ δίνει το φάσμα πλατών της αρχικής (προ της δειγματοληψίας) συναρτήσεως $f(t)$, $t \geq 0$, συνεχούς μορφής, που εδώ είναι και η κεντρική συνιστώσα του φάσματος της f^* .

γ) Η $|F(j\{\omega \pm \omega_\delta\})|$ δίνει το φάσμα πλατών της f μετατοπισμένης κατά $\pm \omega_\delta$, δηλαδή κατά την κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας, επί του άξονος των συχνοτήτων.

δ) Η $|F(j\{\omega \pm 2\omega_\delta\})|$ δίνει το φάσμα πλατών της f με μετατόπιση ίση με $2\omega_\delta$ κοκ.

Εάν ω_1 είναι η υψηλότερη κυκλική συχνότητα του φάσματος πλατών της f , οι πιο πάνω εκφράσεις παριστάνονται γραφικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6β.



Σχ. 2.6. Φάσμα πλατών της συναρτήσεως f προ της δειγματοληψίας (α) και μετά από αυτήν (β).

Παρατηρήσεις

α) Το φάσμα πλατών της δειγματοληπτικής συναρτήσεως f^* αποτελείται από το ίδιο φάσμα πλατών της συναρτήσεως συνεχούς μορφής, επαναλαμβανόμενο απεριόριστα (θεωρητικά) κατά διαστήματα ίσα με την κυκλική δειγματοληπτική συχνότητα ω_δ .

β) Για να μη υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των διαφόρων επαναλαμβανόμενων τμημάτων του φάσματος, θα πρέπει η κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας, ω_δ , να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το διπλάσιο της υψηλότερης κυκλικής συχνότητας ω_1 του φάσματος πλατών της συναρτήσεως f , δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$\omega_\delta \geq 2\omega_1 \quad (2.18)$$

γ) Όταν δεν υπάρχει επικάλυψη των τμημάτων του φάσματος,

μπορούμε να αναπαράγουμε το φάσμα της αρχικής συναρτήσεως f , εάν, στο δρόμο του φάσματος της δειγματοληπτικής συναρτήσεως f^* , τοποθετήσουμε ένα κατάλληλο φίλτρο διελεύσεως χαμηλών συχνοτήτων, με εύρος διελεύσεως ίσο με ω_1 .

Οι δύο τελευταίες παρατηρήσεις αποτελούν και το περιεχόμενο του "Θεωρήματος Δειγματοληψίας".

δ) Η σχέση (2.15) δείχνει ότι η μετασχηματισμένη κατά Laplace δειγματοληπτική συνάρτηση, $F^*(s)$, εμφανίζεται σε μορφή σειράς. Το γεγονός αυτό δυσκολεύει το χειρισμό των συναρτήσεων τούτων και επομένως δυσκολεύει το χειρισμό των συναρτήσεων τούτων και επομένως δυσκολεύει τη μελέτη σε βάθος των συστημάτων δειγματοληπτικών δεδομένων. Τη λύση του προβλήματος αυτού διευκολύνει σημαντικά ο "Μετασχηματισμός z ", τον οποίο και εισάγουμε αμέσως στην επόμενη παράγραφο.

2.5. Ο Μετασχηματισμός Z

1. Ορισμός

Θέτουμε:

$$z = e^{sT}, \quad s \in C \quad (2.19a)$$

όπου T η περίοδος δειγματοληψίας, οπότε προκύπτει:

$$s = \frac{1}{T} \ln z, \quad |z| \neq 0 \quad (2.19\beta)$$

Ο μετασχηματισμός z μιας συναρτήσεως συνεχούς μορφής προκύπτει από τον σχηματισμό Laplace της αντίστοιχης συναρτήσεως δειγματοληπτικής μορφής, όταν στον τελευταίο εισαγάγουμε τις πιο πάνω σχέσεις. Π.χ. ο μετασχηματισμός z της συναρτήσεως $f(t)$ $t \geq 0$, συνεχούς μορφής, με βάση τη σχέση (3.6), δηλαδή το μετασχηματισμό Laplace της αντίστοιχης συναρτήσεως δειγματοληπτικής μορφής $f^*(t)$, $t \in \Delta = \{0, T, 2T, \dots, nT, \dots\} \subseteq \mathfrak{R}$, είναι:

$$Z[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \equiv F(z) \quad (2.20)$$

Δηλαδή ισχύει γενικά:

$$Z[f(t)] = F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} \equiv F(z) \quad (2.21)$$

όπου $z \in C$.

Παρατήρηση: Πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι ο μετασχηματισμός περιγράφει τη συμπεριφορά της δειγματοληπτικής συναρτήσεως μόνο κατά τις στιγμές της δειγματοληψίας, δηλαδή κατά τους χρόνους: $0, T, 2T, 3T, \dots$, όπου T η περίοδος της δειγματοληψίας. Επομένως, εάν σε μια συνάρτηση $f(t)$ $t \geq 0$,

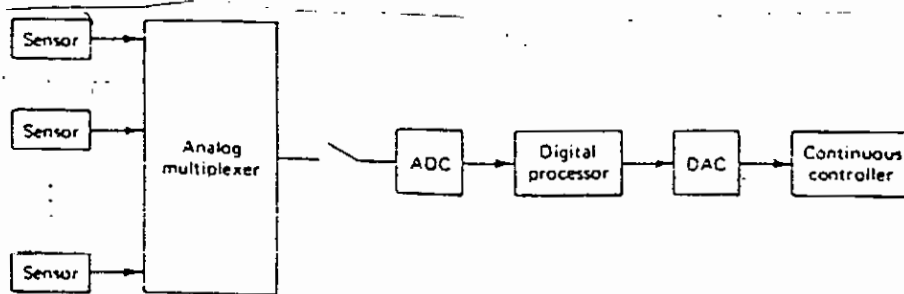
συνεχούς μορφής, προστεθεί μία άλλη συνάρτηση $\varphi(t)$ $t \geq 0$, επίσης συνεχούς μορφής, η οποία όμως να μηδενίζεται στις χρονικές στιγμές: $0, T, 2T, 3T$ κ.τ.λ. όπως π.χ. η $\varphi(t) = \eta\mu(2\pi/T)t$, ο μετασχηματισμός της f δεν θα αλλάξει, θα παραμείνει ο ίδιος. Δηλαδή οι συναρτήσεις f και $f(t) + \eta\mu(2\pi/T)t$, όταν η T συμπίπτει με την περίοδο δειγματοληψίας της f , έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό z .

Συμπέρασμα: Δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της χρονικής συναρτήσεως f , συνεχούς μορφής, και του μετασχηματισμού z αυτής.

Κεφάλαιο 3ο

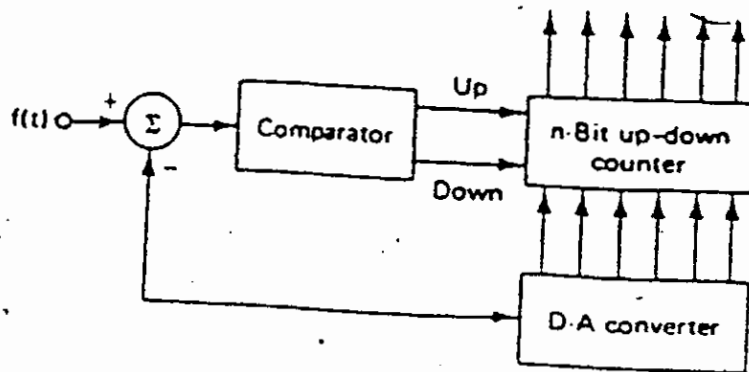
3.1. Αναλογικός σε ψηφιακό μετασχηματισμός

Ο ADC μετατρέπει σε ψηφία τα δείγματα της κυματομορφής και παρέχει είσοδο σ' ένα ψηφιακό επεξεργαστή σε αντίθεση μ' ένα συνεχόμενο επεξεργαστή. Ένα τυπικό ψηφιακό σύστημα ελέγχου με αρκετές εισόδους και μια μοναδική έξοδο εμφανίζεται στην Εικ. 3.1. Το σύστημα θα μπορούσε, για παράδειγμα, να είναι ένα σύστημα ελέγχου χημικής επεξεργασίας, ένας αυτόματος πιλότος ή ένα παρόμοιο σύστημα που απαιτεί αρκετούς ανιχνευτές. Οι γραμμές των ανιχνευτών σαρώνονται διαδοχικά από ένα αναλογικό πολυπλέκτη διαίρεσης χρόνου, δειγματολαμβάνονται και μετασχηματίζονται από τον ADC σε μια σειρά κωδικοποιημένων αριθμών. Καθώς τα μετατρεπόμενα σε ψηφία σήματα τυγχάνουν επεξεργασίας, ο DAC παράγει ένα συνεχές σήμα ελέγχου από την έξοδο του επεξεργαστή.



Σχ. 3.1. Τυπικό ψηφιακό σύστημα ελέγχου

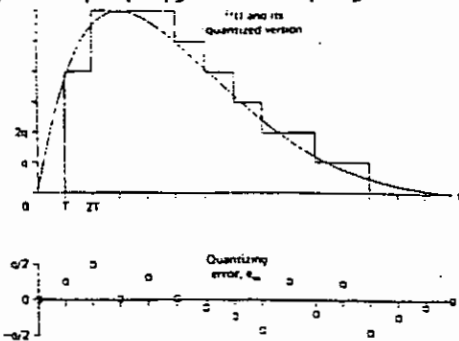
Τα σχέδια του ADC παίρνουν διαφορετικές μορφές, που εξαρτώνται από τις απαιτήσεις ταχύτητας και ακρίβειας. Υπάρχουν πολλά βιβλία αφιερωμένα στον σχεδιασμό των ADC και DAC [π.χ. Ο Hoeschele (1968) ή ο Schmid (1970)]. Το θέμα του σχεδιασμού, εντούτοις, τίθεται πέρα από το αντικείμενο της παρούσας ανάλυσης. Η Εικ. 3.2 παρέχει μια απλή απεικόνιση μιας μεθόδου αναλογικού - σε - ψηφιακό μετασχηματισμό. Υπάρχει μια μονάδα έγκρισης, η οποία προκαλεί έναν δυαδικό μετρητή ή - μετρητή δυαδικών ψηφίων να μετράει είτε προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω έτσι ώστε τα περιεχόμενα του μετρητή, όταν μετασχηματίζονται ξανά μέσω του DAC, να αντικατοπτρίζουν την τρέχουσα τιμή του $f(t)$. Το σύνολο δειγμάτων $[f_m]$ συναρμολογείται διαβάζοντας τα περιεχόμενα του μετρητή κάθε T δευτερόλεπτα.



Σχ. 3.2. Απλός αναλογικός σε ψηφιακό μετατροπέα

Όπως υποδεικνύεται από την Εικ. 3.2, κάθε δείγμα του $f(t)$ είναι ένα μήνυμα που μεταφέρει (n) μονάδες (bits) πληροφοριών όσον αφορά την τιμή του $f(t)$ σ' ένα συγκεκριμένο χρόνο. Έτσι, αφού το $f(t)$ θεωρείται ότι ποικίλει συνεχώς, υπάρχει πάντοτε ένα σφάλμα καταμερισμού όπως απεικονίζεται στην Εικ. 3.3. Όπως φαίνεται, το μέγιστο σφάλμα καταμερισμού είναι $q/2$, όπου το q είναι η τιμή της ελάχιστα σημαντικής μονάδας πληροφορίας του μετρητή. (Αυτό, φυσικά, προϋποθέτει ότι ο ADC πλησιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο στην σωστή τιμή του δείγματος). Για παράδειγμα, αν η κλίμακα ενός μετατροπέα 10 - μονάδων ($n=10$) αντιπροσωπεύει $10.24/2^{10}=0.01V$ και το μέγιστο σφάλμα καταμερισμού ($q/2$) είναι $0.005V$.

Γενικά, το σφάλμα καταμερισμού e_m αντιμετωπίζεται ως ένα τυχαίο σφάλμα περιγραφόμενο από την άποψη της πιθανότητας της συνάρτησης πυκνότητάς του.



Σχ. 3.3 Α/Ψ κβαντικού λάθους μετατροπέας

Το κεφάλαιο 3 συζητά τις τυχαίες συναρτήσεις και επιδεικνύει, για παράδειγμα, ότι αν όλες οι αξίες του e_m από την $-q/2$ και την $q/2$ είναι το ίδιο πιθανές τότε

average value of $e_m = 0$

$$\text{rms value of } e_m = \frac{q}{\sqrt{12}} \quad (3.1.)$$

Όταν η $f(t)$ περιέχει ενέργεια σε πολύ υψηλές συχνότητες και το ποσοστό δειγματοληψίας, I/T είναι αντίστοιχα υψηλό, το σφάλμα παρακολούθησης στόχου μετατρέπεται σε βασικό περιορισμό της απόδοσης ενός ADC. Ηλεκτρονικοί μετατροπείς υψηλής - ταχύτητας δεν παίρνουν, γενικά, την μορφή της Εικ. 3.2, αλλά πρέπει με κάποιο τρόπο ν' αποκτήσουν μερική από την ενέργεια της $f(t)$ κάθε φορά που λαμβάνεται ένα δείγμα. Επομένως, όπως στην Εικ. 3.4, μια αντίστοιχη σειρά αντίστασης εισόδου και χωρητικότητα διακλάδωσης είναι βασικές στον ADC. Μια απλή εκτίμηση του σφάλματος παρακολούθησης στόχου στην Εικ. 3.4 μπορεί ν' αναλυθεί ακολούθως: Αφήστε το $e_i(t)$ να είναι συνάρτηση ράμπας με κλίση e_i' και θεωρήστε ότι ο διακόπτης δειγματοληψίας είναι κλειστός σε $t=0$, στον οποίο χρόνο το e_i και το e_0 είναι ισότιμα.

Τότε θα ισχύει,

$$E_i(s) - E_o(s) = \frac{e'_i}{s^2} - \frac{(e'_i/s^2)(1/sC)}{R+1/sC}$$

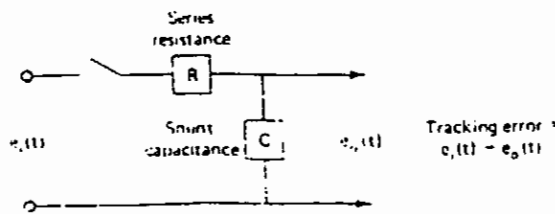
$$= \frac{e'_i}{s(s+1/RC)}$$

Επομένως

$$\text{tracking error} = e_i(t) - e_o(t) \quad (3.2.)$$

$$= RCe_f(1 - e^{-t/RC})$$

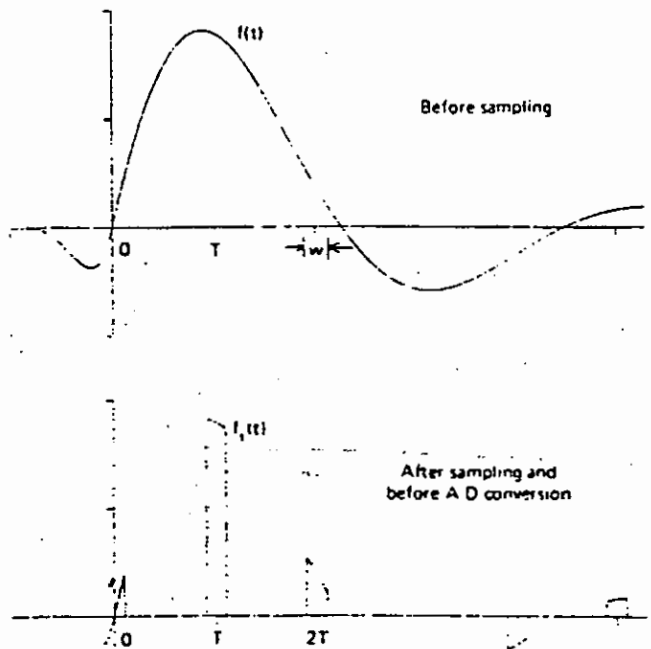
Δηλαδή, εάν ο διακόπτης δειγματοληψίας είναι κλειστός έτσι ώστε ν' ανιχνευθεί το e'_i στην νέα τιμή, το σφάλμα παρακολούθησης στόχου μεγαλώνει προς μια διαφορά σταθερής - κατάστασης ισότιμο στο RCe'_i .



Σχ.3.4. Αντίστοιχο κύκλωμα υπολογισμού του λάθους καταμερισμού σε έναν ΑΨ μετατροπέα

Το ερώτημα κατά πόσο ή όχι ο ADC μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένας δειγματολήπτης ώθησης πρέπει επίσης να ληφθεί υπ' όψιν.

Μερικές φορές (π.χ. στην περίπτωση της πολυπλέξεως) είναι βολικό να θεωρούμε τον μετατροπέα ως μια μηχανή η οποία εξετάζει την συνεχή συνάρτηση $f(t)$ κατά την διάρκεια ενός παραθύρου δειγματοληψίας πλάτους w που εκτείνεται από $t = mT - w/2$ σε $mT + w/2$, όπως στην Εικ. 3.5.

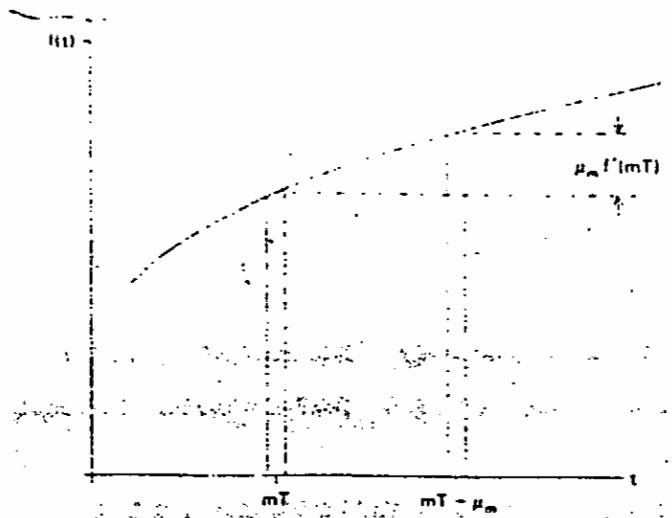


Σχ. 3.5 Δειγματοληψία μέσω ενός παραθύρου πλάτους W

Αν οι παλμοί στο $f_s(t)$ δεν είναι σχεδόν επίπεδοι, τότε η μέθοδος μετασχηματισμού πρέπει να εξεταστεί πιο προσεκτικά. Το πλάτος w έχει σχετικές επιδράσεις στο φάσμα του συνόλου δείγματος $[f_m]$ και το φάσμα του $f_s(t)$. Αυτές οι επιδράσεις συζητούνται στα επόμενα κεφάλαια.

Είναι επίσης πιθανό να συμβεί ένα σφάλμα ταλάντωσης στην από αναλογική σε ψηφιακή επεξεργασία. Μ' αυτό τον τύπο σφάλματος, το παράθυρο δειγματοληψίας κεντράρεται πάνω από χρόνο $mT + \mu_m$ αντί του mT . Δηλαδή, το παράθυρο είναι παρακαμπτήριο του ποσού μ_m όπως στην Εικ. 3.6. Ο Παππούλης (1966) έχει αποδείξει ότι ένα ανεξάρτητο σφάλμα ταλάντωσης είναι παρόμοιο με το σφάλμα καταμερισμού που έχει συζητηθεί παραπάνω. Από την Εικ. 3.6, αν η αξία του rms του μ_m είναι σ_m και αν η κλίση $f(t)$ είναι συνεχής αποτελεσματικά πάνω από το διάστημα τρέμουλου, τότε

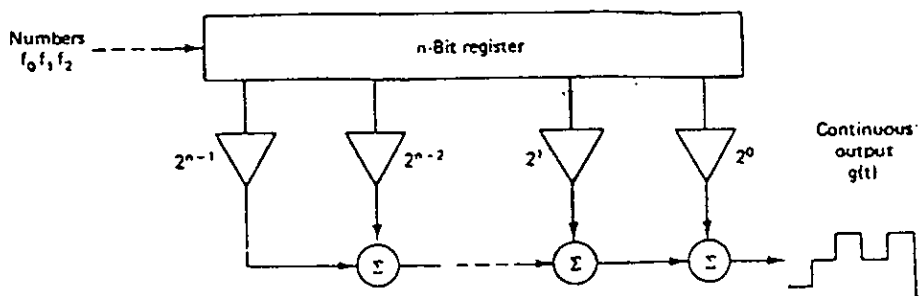
$$\text{rms jitter error} \leq \sigma_m \times \text{maximum value of } f(t)$$



Σχ. 3.6. Διάστημα τρέμουλου $\mu_m f(mT)$ που οφείλεται στο τμήμα ανιστάθμισης μ_m .

3.2 Από ψηφιακό σε αναλογικό μετασχηματισμό

Στο σύστημα επεξεργασίας ψηφιακού σήματος οι συναρτήσεις του DAC είναι διπλές του ADC. Μετασχηματίζει ένα σύνολο κωδικοποιημένων δειγμάτων $[f_m]$ σε μια συνεχώς ποικίλη τάση, ή θέση άξονα, ή παρόμοια ποσότητα. Στην πιο απλή μορφή του το DAC, που απεικονίζεται ως αντίληψη στην Εικ. 3.7, οι δυαδικές αξίες δείγματος $[f_m]$ τοποθετούνται επιτυχώς (f_0 σε $t=0$, f_1 σε $t=T$, κλπ) σε ένα δυαδικό μετρητή συγκεντρώνονται σύμφωνα με το βάρος τους έτσι ώστε η έξοδος $g(t)$, να είναι ένα συνεχές σήμα που αλλάζει τιμή μόνο στα σημεία δείγματος.



Σχ.3.7. Η αρχή λειτουργίας ενός Ψ/Α μετατροπέα

Αυτό αποκαλείται τύπος κράτησης μηδενικής τάξης μετασχηματισμού - κάθε τιμή δείγματος κρατιέται αμετάβλητο σε $g(t)$ μέχρι να φτάσει το επόμενο δείγμα.

Οι ποικίλες ηλεκτρικές ή μηχανικές πηγές σφάλματος στους DAC γενικώς κρατιούνται στο ελάχιστο μέσω επιλεγμένων συστατικών ακρίβειας, χρησιμοποιώντας αποθέματα ενέργειας ακρίβειας μειώνοντας την κλίμακα θερμοκρασίας λειτουργίας, κτλ.

Το σφάλμα κράτησης μηδενικής τάξης μπορεί (τουλάχιστον ως αρχή) να εκμηδενιστεί μικραίνοντας την έξοδο $g(t)$, όπως στην Εικόνα 3.8. Αν το $g(t)$ είναι όπως έχει περιγραφεί παραπάνω, τότε

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n [u(t - nT) - u(t - (n+1)T)] \quad (3.3)$$

όπου $u(t - nT)$ είναι το σήμα μονάδας σε $t = nT$.

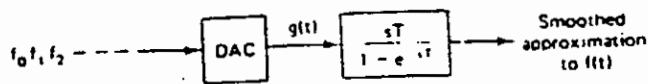
Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μεταβολής του Laplace στον κατάλογο Α, η μεταβολή $G(s)$ μπορεί να γραφεί

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{sT} \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-sT} (T) \quad (3.4)$$

Αν το βήμα μεγέθους T θεωρείται ως βήμα ολοκλήρωσης dt το ποσό στην Εικ. 3.6. γίνεται η μεταβολή $F(s)$. (Η ορθότητα αυτής της προσέγγισης συζητείται περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο).
Ετσι

$$G(s) \approx \frac{1 - e^{-sT}}{sT} F(s) \quad (3.5)$$

και έτσι η επιστροφή του $f(t)$ από την εκδοχή κράτησης μηδενικής τάξης, εμπεριέχει λίσανση με την συνάρτηση μεταβολής (δηλαδή, απλά χαμηλής διάβασης φίλτρα). Ο Παπούλης (1966) παρέχει μια πιο κατανοητή συζήτηση της επαναδημιουργίας του $f(t)$ και ο Davies (1971) συζητεί την διόρθωση της παραμόρφωσης της κράτησης μηδενικής τάξης, χρησιμοποιώντας ψηφιακό φιλτράρισμα. Ο Του (1959) συζητά το σφάλμα κράτησης μηδενικής τάξης ως αποτέλεσμα " σύσφιξης " του σήματος $f(t)$.



Σχ. 3.8. Η λίσανση της συνάρτησης μεταβολής κατά την διαδικασία προσέγγισης του $f(t)$

Κεφάλαιο 4ο

4.1. Τυχαίες συναρτήσεις

Δημιουργούνται καταστάσεις εξ' ολοκλήρου στις εφαρμογές της ανάλυσης σήματος, στην οποία μια συνάρτηση $f(t)$ δεν μπορεί να προσδιοριστεί επακριβώς ή δεν είναι ολοκληρωτικά προβλέψιμη. Μερικές φορές μια τέτοιου είδους συνάρτηση αποκαλείται θόρυβος για να υποδηλωθεί ότι είναι ανεπιθύμητη όπως και απρόβλεπτη, αλλά ένα απρόβλεπτο σήμα μπορεί επίσης να σημειωθεί όταν η αιτία ή γεννήτρια του σήματος δεν έχει προσδιοριστεί ολοκληρωτικά. Τέτοιου είδους συναρτήσεις αντιμετωπίζονται ως τυχαίες συναρτήσεις, έτσι ώστε οι στατιστικές τους ιδιότητες να χρησιμοποιούνται αντί των απροσδιόριστων πραγματικών αξιών τους.

Μερικές από τις θεμελιακές πλευρές αυτών των στατιστικών ιδιοτήτων εφαρμόσιμων στην παρούσα συζήτηση επανεξετάζονται σ' αυτό και στο επόμενο τμήμα. Οι τομείς της στατιστικής και της πιθανότητας είναι πολύ ευρείς καθώς επίσης και θεμελιώδεις για πολλούς κλάδους της επιστήμης και φυσικά δεν έχει γίνει ακόμα καμιά προσπάθεια εδώ για την παροχή μιας κάλυψης σε επίπεδο κατανόησης. Ο κατάλογος των πηγών περιέχει μερικά άριστα αναγνώσματα σ' αυτούς τους τομείς.

Η πιο σημαντική στατιστική ιδιότητα οποιασδήποτε τυχαίας συνάρτησης $f(t)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της, η οποία υποτίθεται πως είναι μέτρο της πιθανότητας εμφάνισης κάθε αξίας της $f(t)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της $f(t)$ ορίζεται στο μονοδιάστατο χώρο δείγματος της $f(t)$. Αυτό είναι απλώς μια γραμμή που περιλαμβάνει σημεία που αντιστοιχούν σ' όλες τις πιθανές αξίες της $f(t)$.

Για παράδειγμα, αν οι αξίες της $f(t)$ καθορίζονται ρίχνοντας ένα νόμισμα σε κάθε αξία του t , τότε ο χώρος του δείγματος αποτελείται από δύο σημεία που αντιπροσωπεύουν κορώνα και γράμματα. Η, αν η $f(t)$ είναι η γωνία κορυφής ενός ανεμοδείκτη, τότε ο χώρος του δείγματος είναι μια συνεχόμενη γραμμή από 0 έως 2π ακτίνια.

Αν ο χώρος δείγματος είναι συγκεκριμένος (περιλαμβάνει ένα αριθμό σημείων που μπορεί να μετρήσει) τότε η συνάρτηση πιθανότητας ορίζεται ως $P(f_n)$, έτσι ώστε

$$P(f_n) \geq 0 \text{ και } \sum_{n=1}^N P(f_n) = 1 \quad (4.1.)$$

όπου N , ο αριθμός των σημείων στον δειγματικό χώρο, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος και οι τιμές του (n) απαριθμούν τα σημεία (f_n) στον δειγματικό χώρο. Στο παραπάνω

παράδειγμα του νομίσματος αφήνοντας $n=1$ & 2 για κορόνα και γράμματα, $P(f_1)=1/2$ και $P(f_2)=1/2$ είναι οι αξίες της συνάρτησης πιθανότητας με $N=2$.

Στην περίπτωση του συνεχούς δειγματικού χώρου, ο οποίος έχει και μεγαλύτερο ενδιαφέρον εδώ, η συνάρτηση πιθανότητας γράφεται $p(f)$, ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας (*pdf*) και ορίζεται ως εξής

$$p(f) \geq 0 \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} p(f)df = 1 \quad (4.2)$$

μ' ένα τρόπο ανάλογο στην Εξισ. (4.1.). Σ' αυτό τον συμβολισμό ο ορισμός f δεν είναι $f(t)$ αλλά μάλλον μια πιθανή τιμή του $f(t)$, δηλαδή ένα σημείο στον χώρο δείγματος του $f(t)$. Αντίστοιχα, η πιθανότητα μερικής αξίας του $f(t)$ μεταξύ του $f = a$ και $f = b$ είναι

$$P\{a \leq f \leq b\} = \int_a^b p(f)df \quad (4.3)$$

Πριν την εξέταση σημαντικών συγκεκριμένων παραδειγμάτων της *pdf*, μερικές από τις θεμελιακές της ιδιότητες μπορούν να οριστούν με γενικούς ορισμούς. Παραδείγματα αυτών των ιδιοτήτων δίνονται παρακάτω μαζί με τα *pdf* παραδείγματα.

Πρωταρχικά, η μέση τιμή αξίας (αναμενόμενη αξία, μέση αξία) οποιασδήποτε αξίας του f , ας πούμε $g(f)$, ορίζεται

$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y(f)p(f)df \quad (4.4)$$

έτσι ώστε $E(y)$ είναι ουσιαστικά το άθροισμα όλων των αξιών του $y(f)$, κάθε αξία όντας ζυγισμένη με μια αντίστοιχη αξία του $p(f)$. Αν ο ακέραιος στην Εξίσ. (4.4) δεν συγκλίνει, τότε $y(f)$ δεν έχει μέση τιμή αξίας.

Δύο συγκεκριμένες συναρτήσεις μέσης τιμής αξίας είναι τόσο σημαντικές που τους δίνονται συγκεκριμένα σύμβολα. Το πρώτο είναι η μέση τιμή του ίδιου του f , του δίνεται το σύμβολο μ_f .

Από την Εξίσ. (4.4) με $y(f) = f$, η μέση τιμή αξίας του f είναι

$$\mu_f \equiv E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} fp(f)df \quad (4.5)$$

Επομένως μ_f είναι ουσιαστικά το άθροισμα των pdf ζυγισμένων αξιών του f , δηλαδή, η συντεταγμένη του "κέντρου μάζας".

Η δεύτερη σημαντική συνάρτηση αναμενόμενης αξίας είναι η μεταβλητότητα του f στην οποία δίνεται το σύμβολο σ_f^2 . Η μεταβλητότητα είναι το πιο κοινό μέτρο της μεταβλητότητας του $f(i)$ για την μέση τιμή του μ_f . Ορίζεται ως η αναμενόμενη τετραγωνισμένη απόκλιση της f από την μέση τιμή της αξίας, δηλαδή, σ_f^2 είναι η αναμενόμενη αξία της $y(f) = (f - \mu_f)^2$.
Ανάλογα,

$$\begin{aligned}
 \sigma_f^2 &\equiv E[(f - \mu_f)^2] \\
 \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f - \mu_f)^2 p(f) df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2 p(f) df - 2\mu_f \int_{-\infty}^{\infty} f p(f) df + \mu_f^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(f) df \\
 &= E(f^2) - 2\mu_f \mu_f + \mu_f^2
 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\sigma_f^2 = E(f^2) - \mu_f^2 \quad (4.6)$$

έτσι ώστε η μεταβλητότητα τελικά είναι η διαφορά μεταξύ της μέσης τετραγωνισμένης αξίας της f και το τετράγωνο του μ_f . Η τετραγωνική ρίζα του σ_f^2 , αποκαλείται η σταθερή απόκλιση της f και είναι το σταθερό μέτρο της απόκλισης του f από την μέση τιμή αξίας του, έχοντας ως μέτρο τις ίδιες μονάδες όπως το f .

Ένα σοβαρό θεμελιακό πρόβλημα που συχνά εμφανίζεται στην ανάλυση σήματος είναι αυτό του καθορισμού της pdf μιας συνάρτησης $y(f)$, δεδομένου $p(f)$. Αυτό το πρόβλημα λύεται γενικά θεωρώντας το προϊόν $p(f)df$ σαν την πιθανότητα ότι $f(t)$ κυμαίνεται μεταξύ f και $f + df$, δηλαδή, ως μια εντελώς μικρή αύξηση περιοχής πάνω από τον δειγματικό χώρο της f . Στην πιο απλή περίπτωση, που απεικονίζεται στην Εικ. (4.1) η $y(f)$ είναι ένα μοναδικό ένα προς ένα σχηματικό διάγραμμα μεταξύ

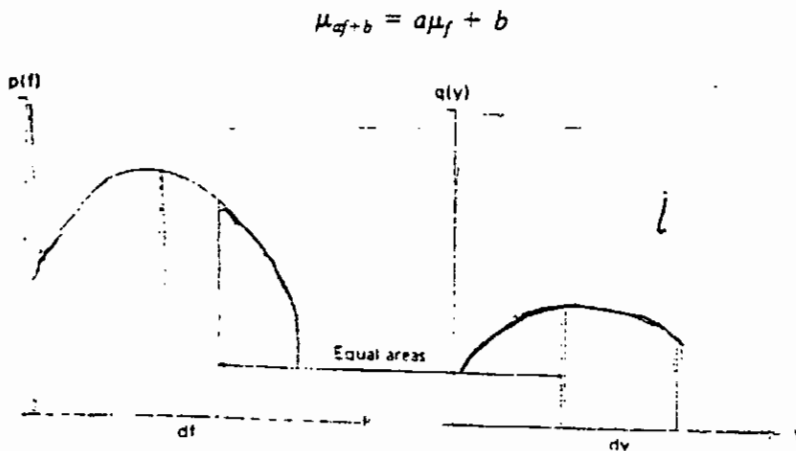
των f και y δειγματικών χώρων, έτσι ώστε $p(f)df$ και $q(y)dy$ είναι οι ίδιες πιθανότητες. Δηλαδή,

$$q(y)|dy| = p(f)|df| \quad (4.7)$$

ή, υποθέτοντας ότι η $y(f)$ έχει μια απόκλιση,

$$q[y(f)] = \frac{p(f)}{|dy/df|} \quad (4.8)$$

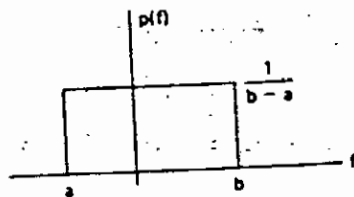
όπου $|dy/df|$ είναι η απόλυτη αξία της απόκλισης του $y(f)$.



Σχ. 4.1. Ένα προς ένα σχηματικό διάγραμμα μεταξύ των f και y δειγματικών χώρων.

4.2. Ομοιόμορφες και κανονικές συναρτήσεις πυκνότητας

Γυρνώντας τώρα στα ειδικά παραδείγματα της pdf , δύο μορφές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην ψηφιακή ανάλυση σήματος. Η πρώτη είναι η ομοιόμορφη pdf , που φαίνεται στην Εικ. (4.2). Η ομοιόμορφη pdf εκφράζει την υπόθεση ότι όλες οι αξίες της $f(t)$ μεταξύ των αξιών a και b είναι "ισότιμα πιθανές". ("Το ισότιμα πιθανές" έχει αληθινό νόημα μόνο στην συγκεκριμένη περίπτωση). Σημειώστε ξανά στην Εικ. (4.2) ότι ο δειγματικός χώρος είναι ο οριζόντιος (f) άξονας (το διάστημα από το a στο b), και ότι ο ακέραιος της $p(f)$ ικανοποιεί την Εξισ. (4.2). Όταν η $p(f)$ είναι ομοιόμορφη, η $f(t)$ ονομάζεται ομοιόμορφη μεταβλητή.



Σχ. 4.2. Ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας

Η μέση τιμή αξίας μιας ομοιόμορφης μεταβλητής διανεμημένης όπως στην Εικ. (4.2) είναι, σύμφωνα με την Εξισ. (4.5).

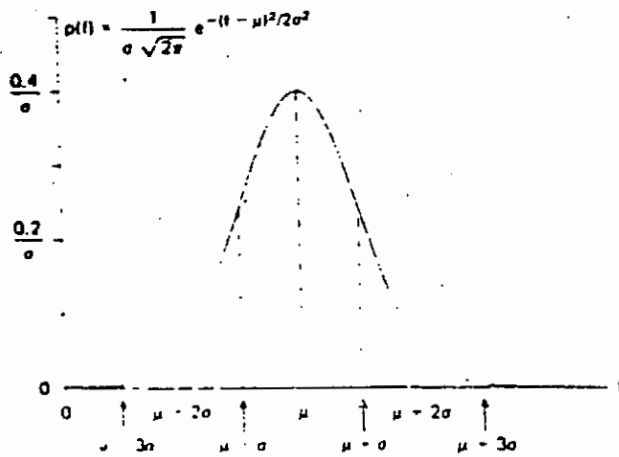
$$\begin{aligned}
 \mu_f &= \int_{-\infty}^{\infty} fp(f)df \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b fdf \\
 &= \frac{b+a}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Όπως αναμενόταν, η μέση τιμή αξίας βρίσκεται στα μισά μεταξύ του a και του b στην Εικ. (4.2). Η μεταβλητότητα της ομοιόμορφης μεταβλητής είναι από την Εξισ. (4.6),

$$\begin{aligned}
 \sigma_f^2 &= E(f)^2 - \mu_f^2 \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2 df - \frac{(b+a)^2}{4} \\
 &= \frac{(b-a)^2}{12}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Επομένως η σταθερή απόκλιση μιας ομοιόμορφης μεταβλητής είναι μόλις $1/\sqrt{12}$ φορές το συνολικό πεδίο τιμών αξιών, $b-a$.

Η δεύτερη ενδιαφέρουσα *pdf* είναι η Gaussian, ή κανονική πιθανότητα συνάρτησης πυκνότητας, απεικονιζόμενη στην Εικ. (4.3). Αυτή η συνάρτηση, ενδιαφέρει εδώ πρωταρχικά επειδή σε πολλές εφαρμογές της ανάλυσης σήματος, ο θόρυβος Gaussian είναι υποτιθέμενος, που σημαίνει ότι η *pdf* της συνάρτησης θορύβου είναι όπως φαίνεται στην Εικόνα (4.3).



Σχ. 4.3. Συνάρτηση πυκνότητας κανονικής πιθανότητας

Η γενική μορφή της κανονικής *pdf* είναι

$$N(\mu, \sigma) \equiv p(f) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.11)$$

στην οποία μ και σ είναι μ_f και σ_f , η μέση και σταθερή απόκλιση της f , όπως φαίνεται παρακάτω. Πρώτα, για να φανεί ότι $N(\mu, \sigma)$ έχει μια μονάδα ακεραίου όπως στην Εξίσ. (4.2) η αντικατάσταση $x = (f - \mu) / (\sigma\sqrt{2})$ μπορεί να γίνει έτσι ώστε ο ακέραιος να είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N(\mu, \sigma) df &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2}} df \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ο δεύτερος ακέραιος μπορεί να εκτιμηθεί, απλώς, εκτιμώντας το τετράγωνό του:

$$\begin{aligned}
 \left[\int_{-\infty}^{\infty} N(\mu, \sigma) df \right]^2 &= \frac{1}{\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

αποδεικνύοντας έτσι ότι $N(\mu, \sigma)$ έχει μονάδα ακεραίου. (Το αποτέλεσμα στην δεύτερη σειρά της Εξισ. (4.13) έχει αποκτηθεί αλλάζοντας από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή, $x^2 + y^2 = r^2$ και $dx dy = r dr d\theta$).

Η απόδειξη ότι μ είναι η μέση τιμή αξίας του f γίνεται τοποθετώντας την κανονική pdf στην Εξισ. (4.5) και ξανακάνοντας την αντικατάσταση, $x = (f - \mu) / (\sigma\sqrt{2})$:

$$\begin{aligned}
 \mu_f &= \int_{-\infty}^{\infty} f N(\mu, \sigma) df \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-(f-\mu)^2/2\sigma^2} df \\
 &= \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx \\
 &= \mu
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Στην τρίτη σειρά της εξίσωσης (4.14), ο πρώτος ακέραιος είναι μηδέν και ο δεύτερος, σύμφωνα με την Εξισ. (4.13), είναι ένα και

έτσι $\mu_f = \mu$. Παρομοίως, μπορεί να επιδειχθεί $\sigma_f = \sigma$. Αφήστε $\mu = 0$ έτσι ώστε η Εξίσ. (4.6) να δίνει $\sigma_f^2 = E(f^2)$ και η Εξίσ. (4.4) τότε να δίνει

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2 N(0, \sigma) df \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 e^{-f^2/2\sigma^2} df \\ &= \sigma^2\end{aligned}\tag{4.15}$$

με την ολοκλήρωση να γίνεται εδώ σε μερίδια.

Δυστυχώς, όταν $N(\mu, \sigma)$ είναι η *pdf* του f η πιθανότητα ότι η f κυμαίνεται ανάμεσα σε μερικά ζευγάρια τιμών (όπως ορίζεται στην Εξίσ. (4.3.) δεν μπορεί εύκολα να εκφραστεί όπως πρόφανώς μπορεί, για παράδειγμα, στην περίπτωση της ομοιόμορφης *pdf*. Επομένως ομαλοποιημένες ερμηνείες αυτής της πιθανότητας έχουν καταταχθεί σε πίνακες σε εγχειρίδια. [Βλέπε, για παράδειγμα το εγχειρίδιο του Buringhton (1965). Ο Buringhton κατατάσσει σε πίνακα το ακέραιο Φ στην Εξίσ. (4.16) καθώς και σχετικούς ακέραιους του $N(\mu, \sigma)$.]

Τυπικά, οι αξίες του ακέραιου του $N(0, 1)$ κατατάσσονται σε πίνακες. Δηλαδή, αν x διανέμεται σύμφωνα με $N(0, 1)$, οι αξίες της πιθανότητας ότι x είναι μικρότερο από κάποια αξία T ,

$$\begin{aligned}\phi(T) &= P\{x < T\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N(0, 1) dx\end{aligned}\quad (4.16)$$

κατατάσσονται σε πίνακες έναντι αξιών του T . Δεδομένων αυτών των καταταγμένων σε πίνακες αξιών η πιο γενική μορφή της $P\{a \leq f \leq b\}$ στην Εξίσ. (4.3), με $p(f) = N(\mu, \sigma)$ μπορεί να βρεθεί

$$x = (f - \mu)/\sigma \quad (4.17)$$

Όλα αυτά γίνονται πιο σαφή στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα

Αν οι τιμές μιας τυχαίας συνάρτησης $f(t)$ κατανέμονται έτσι ώστε $p(f) = N(1, 2)$ ποια είναι η πιθανότητα ότι η $f(t)$ είναι θετική;

Αφήνοντας

$$x = \frac{f - \mu_f}{\sigma_f} = \frac{f}{2} - \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

δίνει $\mu_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, και $\sigma_x = \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 1$, και έτσι η pdf του x είναι

$N(0, 1)$. Τότε, σύμφωνα με την Εξίσ. (4.18), το x είναι μεγαλύτερο

του $-\frac{1}{2}$ όταν το f είναι θετικό, και έτσι

$$\begin{aligned}
 P\{f > 0\} &= P\left\{x > -\frac{1}{2}\right\} \\
 &= 1 - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

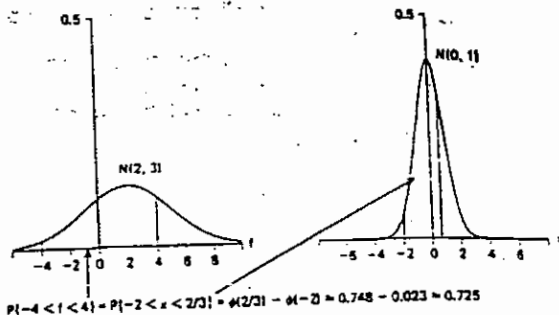
που, αν βρεθεί σε ένα εγχειρίδιο, είναι περίπου 0.69.

Παράδειγμα

Αν η *pdf* μιας συνάρτησης $f(t)$ είναι $N(2, 3)$, ποια είναι η πιθανότητα ότι $f(t)$ είναι μέσα στο διάστημα $(-4, +4)$; Αφήνοντας

$$x = \frac{f - \mu_f}{\sigma_f} = \frac{f - 2}{3}
 \tag{4.20}$$

οι Εξισ. $\mu_{af+b} = a\mu_{F+b}$ και $\sigma_{af+b}^2 = a^2\sigma_f^2$ δείχνουν ξανά ότι η *pdf* του x είναι $N(0, 1)$. Επίσης, αν f βρίσκεται μεταξύ του -4 και του $+4$, τότε το x πρέπει να βρίσκεται μεταξύ του -2 και του $+2/3$. Η κατάσταση απεικονίζεται στην Εικ. (4.4) και η απαιτούμενη πιθανότητα δίνεται στην εικόνα.



Σχ. 4.4. Πιθανότητες του παραδείγματος

4.3. Συναρτήσεις πυκνότητας πολυμεταβλητής

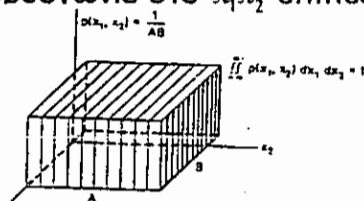
Η συζήτηση μέχρι στιγμής έχει ασχοληθεί με μια μοναδική τυχαία μεταβλητή της οποίας οι αξίες αντλούνται από ένα μονοδιάστατο χώρο δείγματος, δηλαδή, μια γραμμή. Η γενίκευση σε έναν n -διάστατο χώρο δείγματος για n τυχαίες μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n , ακολουθεί με ένα φυσιολογικό τρόπο. Για συνεχείς μεταβλητές, για παράδειγμα n πιθανότητα συνάρτησης πυκνότητας μπορεί να δηλωθεί $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και όπως για $n=1$ στην Εξίσ. (4.2),

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0,$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (4.21)$$

Μια απεικόνιση με $n=2$ δίνεται στην Εικ. (4.5). Σ' αυτή την περίπτωση ο χώρος δείγματος, το x_1, x_2 επίπεδο και $p(x_1, x_2)$ ονομάζεται η ένωση *pdf* του x_1 και x_2 και σ' αυτή την απεικόνιση είναι η ίδια για όλα τα ζευγάρια (x_1, x_2) μέσα στο σκιασμένο ορθογώνιο στο x_1, x_2 επίπεδο.



Σχ.4.5. Πιθανότητα συνάρτησης πυκνότητας

Αντίστοιχα στην Εξίσ. (4.3.), η ένωση πιθανότητας ότι x_1 είναι μεταξύ του a_1 και β_1 και x_2 είναι μεταξύ του a_2 και β_2 είναι

$$P\{a_1 \leq x_1 \leq \beta_1, a_2 \leq x_2 \leq \beta_2\} = \int_{a_1}^{\beta_1} \int_{a_2}^{\beta_2} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.22)$$

Αρκετές άλλες ιδιότητες της ένωσης *pdf* έχουν γενικό ενδιαφέρον. Για ν' απλουστεύσουμε την σημειογραφία αφήστε τις δύο μεταβλητές να είναι x και y και δηλώστε την *pdf* ως $p(x, y)$. Τότε, όπως στην Εξίσ. (4.22), η πιθανότητα ότι το x βρίσκεται μεταξύ x και $x+dx$ ενώ το y έχει οποιαδήποτε αξία είναι

$$P = \int_x^{x+dx} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy dx \quad (4.23)$$

Εφόσον το y μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή, η πιθανότητα στα αριστερά είναι στην πραγματικότητα μόνο η απεριόριστη πιθανότητα $q(x)dx$, το $q(x)$ όντας η *pdf* του x , ενώ ο ακέραιος στα δεξιά γίνεται απλώς ο ακέραιος του y φορές dx . Γι' αυτό, διαιρώντας με dx , η *pdf* του x είναι

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad (4.24)$$

Σημειώστε ότι x και y μπορούν να ανταλλαχθούν σ' αυτό τον τύπο και $q(y)$ είναι τότε η *pdf* του y .

Μπορεί οι μεταβλητές x και y να μην εξαρτώνται η μια από την

άλλη, έτσι ώστε η γνώση του x δεν βοηθάει να καθοριστεί η αξία του y και αντίστροφα. Οι μεταβλητές ονομάζονται ανεξάρτητες [ή "αμοιβαία ανεξάρτητες" (βλέπε Feller, 1957)] αν, για όλα τα x και y ,

$$p(x, y) = q(x)r(y) \quad (4.25)$$

όπου $q(x)$ είναι η *pdf* του x και του $r(x)$ είναι η *pdf* του y .

Ο ορισμός της αναμενόμενης αξίας οποιασδήποτε συνάρτησης $F(x, y)$ είναι ανάλογος στην Εξισ. (4.4). Χρησιμοποιώντας $E(F)$ για να αντιπροσωπευτεί αυτή η αναμενόμενη αξία,

$$E(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)p(x, y)dxdy \quad (4.26)$$

με την δεύτερη μορφή να εξάγεται από την χρήση των Εξισ. (4.24) και (4.26). Συνεπώς η συνμεταβλητότητα είναι διαφορά ανάμεσα στο αναμενόμενο προϊόν και το προϊόν των αναμενόμενων αξιών. Σημειώστε ότι αν x και y είναι ανεξάρτητα, τότε οι Εξισ. (4.25) και (4.26) δίνουν

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)p(x, y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y)dxdy - \mu_x \mu_y \\ &= E(xy) - \mu_x \mu_y \end{aligned} \quad (4.27)$$

και έτσι η συνάρτηση συνμεταβλητότητας είναι μηδενική αν οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

$$E(xy) = \mu_x \mu_y \quad (4.28)$$

Αυτές οι ιδιότητες της ένωσης *pdf* εφαρμόζονται σε ακόλουθες συζητήσεις και είναι γενικά εφαρμόσιμες όταν περισσότερες από μια τυχαίες συναρτήσεις λαμβάνονται υπ' όψιν ή όπου σχετίζονται ιδιότητες συσχέτισης.

4.4. Στάσιμες και εργοδικές ιδιότητες

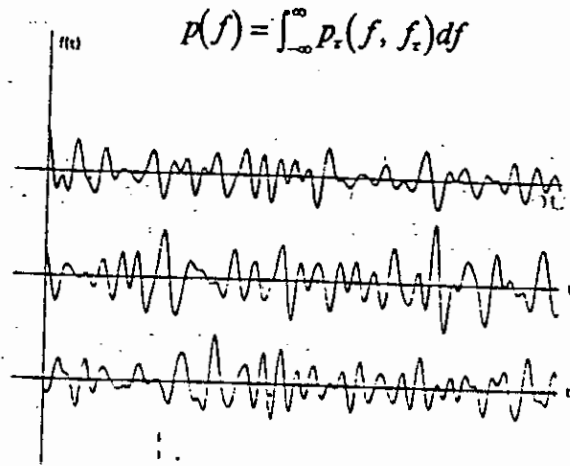
Σε εφαρμογή της θεωρίας πιθανότητας στην ανάλυση σήματος, ένα θεμελιακό και ενδιαφέρον ερώτημα προκύπτει όσον αφορά την "πραγματική" φύση του χώρου δείγματος στον οποίο ορίζεται μια συνάρτηση πιθανότητας ή μια *pdf*. Υποθέτοντας ότι τα δείγματα μιας τυχαίας συνάρτησης $f(t)$ αποσπώνται, αποσπώνται σε διαφορετικές αξίες του t , ή επιλέγονται διαφορετικές αξίες από ένα σύνολο συναρτήσεων στην ίδια αξία του t ; Αυτές οι επιλογές απεικονίζονται στην Εικ. (4.6). Η πρώτη δυνατότητα είναι ότι η δειγματοληψία μπορεί να συνεχίσει οριζόντια από $t=0$ έως οποιαδήποτε από τις $f(t)$, με δείγματα να έχουν παρθεί σε διαφορετικές αξίες του t . Η δεύτερη δυνατότητα είναι ότι η δειγματοληψία μπορούσε να συνεχίσει

κάθετα στην εικόνα, στο πλήθος (σύνολο) των $f(t)$, για την ίδια αξία του t . Περιπτώσεις ανάλογες και των δύο αυτών δυνατοτήτων όντως υπάρχουν στην πράξη. Παραδείγματα συνόλων τυχαίων συναρτήσεων είναι πίεση του αίματος έναντι ηλικίας σ' έναν πληθυσμό ανθρώπων [δηλαδή, για κάθε άτομο στον πληθυσμό, $f(t)$ = Πίεση του αίματος και t = ηλικία], θερμοκρασία έναντι χρόνου σ' ένα πληθυσμό στοιχείων καυσίμων σ' ένα αντιδραστήρα κ.ο.κ.

Οι στάσιμες και εργοδικές ιδιότητες, όπου και οι δύο υποτίθενται σε πολλές διαδικασίες ανάλυσης σήματος, ορίζονται εδώ από την άποψη του παραπάνω συνόλου συναρτήσεων. Υποθέστε ότι η pdf της $f(t)$, της $\mu(t)$, ορίζεται στο σύνολο των συναρτήσεων (κάθετα στην Εικ. (4.6)).

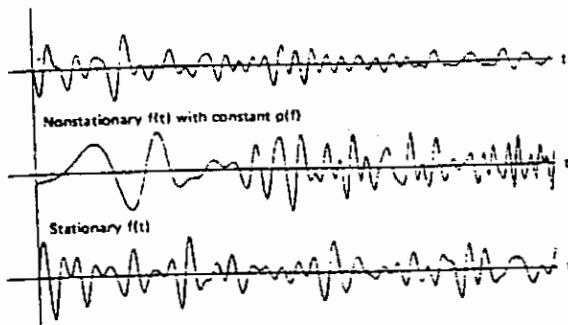
Τότε, όπως υποδεικνύεται στην Εικ. (4.6), η ίδια η $\mu(f)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση του t . Με παρόμοιο τρόπο η ένωση pdf , $p_t(f, f_t)$ είναι σταθερά στο t . Αυτό με την σειρά του συνεπάγεται ότι $\mu(f)$ είναι επίσης σταθερά στο t γιατί, όπως στην εξίσ. (4.24),

$$\mu(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p_t(f, f_t) df \quad (4.29)$$



Σχ. 4.6. Σύνολο τυχαίων συναρτήσεων

και η $P(f)$ είναι συνεπώς σταθερή στο t αν είναι σταθερό στο t . Η συνεπαγωγή δεν σταματάει αντίστροφα, εντούτοις, όπως απεικονίζεται στην Εικ. (4.7), η οποία επιδεικνύει πρώτα μια μη - στάσιμη $f(t)$ με $P(f)$ σταθερό, και τελικά, μια στάσιμη $f(t)$.



Σχ. 4.8. Παραδείγματα μη στάσιμων ή σταθερών τυχαίων συναρτήσεων

Η εντύπωση στην δεύτερη περίπτωση είναι ότι το περιεχόμενο

συχνότητας της $f(t)$ αλλάζει έστω και αν η $\rho(f)$ είναι σταθερή, και επομένως ότι η $\rho_r(f, f_r)$ πρέπει να έχει σχέση με το φάσμα της $f(t)$. Αυτή η σημαντική σχέση συζητείται στο δύο επόμενα τμήματα.

Αν $f(t)$ είναι εργοδική πρόσθετα στο ότι είναι στάσιμη τότε οποιαδήποτε από το σύνολο στην Εικ. (4.6) έχει στατιστικές ιδιότητες που είναι ίδιες μ' εκείνες όλου του συνόλου. Για παράδειγμα, ο μέσος χρόνος μιας στάσιμης εργοδικής $f(t)$ είναι ο ίδιος με τον μέσο που αποσπάζεται στο σύνολο των συναρτήσεων σε οποιαδήποτε αξία του t . Περισσότερο διεξοδικοί και ακριβείς ορισμοί των στάσιμων και εργοδικών ιδιοτήτων παρουσιάζονται με παραδείγματα από τους Laning και Battin (1956). Στην θεωρία που ακολουθεί, οι τυχαίες συναρτήσεις συνήθως υποτίθεται ότι έχουν τις στάσιμες και εργοδικές ιδιότητες για ένα ειδικευμένο διάστημα χρόνου.

4.5. Συναρτήσεις συσχέτισης

Όπως στο προηγούμενο τμήμα, υπάρχει συχνά μια ανάγκη να μετρήσουμε ή να συγκεκριμενοποιήσουμε την αλληλεξάρτηση ή τον συσχετισμό ανάμεσα στις αξίες σήματος - για να απαντήσουμε ερωτήματα όπως, "είναι η παρούσα αξία του $f(t)$ συσχετισμένη με ή εξαρτώμενη πάνω στις δικές της

πεπερασμένες αξίες, ή πάνω σε αξίες κάποιας άλλης συνάρτησης $g(t)$;" Συνεπώς είναι αναγκαίος ένας ποσοστιαίος δείκτης συσχέτισης μεταξύ των σημάτων.

Η συνάρτηση συσχέτισης που ορίζεται εδώ, είναι για να ικανοποιήσει αυτή την ανάγκη και για να είναι εφαρμόσιμη στις στάσιμες τυχαίες συναρτήσεις καθώς και στις καθοριστικές συναρτήσεις. Για τις καθοριστικές συναρτήσεις η ιδέα της στατιστικής εξάρτησης ή αλληλοεξάρτησης όπως ορίζεται στην Εξίσ. (4.25) δεν εφαρμόζει, εντούτοις, και η συνάρτηση συσχέτισης γίνεται περισσότερο ένα μέτρο ομοιότητας ανάμεσα στις συναρτήσεις.

Η συνάρτηση συσχέτισης ορίζεται με τον ίδιο τρόπο είτε για τις τυχαίες ή τις καθοριστικές συναρτήσεις. Είναι το μέσο προϊόν δύο συναρτήσεων, $f(t)$ και $g(t)$, σχετικά μετατοπισμένες η μια στην άλλη κατά το ποσό τ . Υποθέστε πρώτα ότι η $f(t)$ και η $g(t)$ είναι καθοριστικές συναρτήσεις. (Οι τυχαίες συναρτήσεις αντιμετωπίζονται παρακάτω). Ο τύπος για την συνάρτηση συσχέτισης της $f(t)$ και της $g(t)$ είναι

$$\phi_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t+\tau)dt \quad (4.30)$$

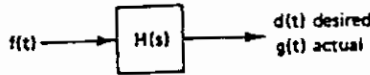
και $\phi_{fg}(\tau)$ είναι προφανώς το μέσο προϊόν που μόλις αναφέρθηκε.

Στην πραγματικότητα, αν $f(t)$ και $g(t+\tau)$ είναι ορθογώνια στο διάστημα του μήκους T για $t=0$, τότε $\phi_{fg}(\tau)$ είναι μηδέν. Συνεπώς $\phi_{fg}(\tau)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο ορθογωνιότητας της $f(t)$ και $g(t+\tau)$ σε ολόκληρο τον τομέα t . Η συνάρτηση συσχέτισης είναι επομένως καθορισμένη από όλες τις αξίες του $f(t)$ και $g(t)$ παρά από ένα ειδικό σύνολο αξιών.

Η θεμελιώδης φύση του $\phi_{fg}(\tau)$ παρουσιάζεται σαφώς από τον Τρυχαί (1955) ο οποίος επιδεικνύει ότι αν ένα γραμμικό σύστημα είναι να σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας το κριτήριο των ελάχιστων τετραγώνων, τότε τα σήματα εισόδου και εξόδου περιγράφονται επαρκώς διευκρινίζοντας μόνα τις συναρτήσεις συσχέτισής τους. [Στην πραγματικότητα αυτές οι ιδέες χρονολογούνται από τον Wiener (1930)]. Η παρουσίαση του Τρυχαί προχωρεί ακολούθως:

Υποθέστε το γραμμικό σύστημα δεδομένο από $H(s)$ στην Εικ. (4.8) είναι να σχεδιαστεί και ότι η επιθυμητή έξοδος $d(t)$ δεν μπορεί να επιτευχθεί επακριβώς, έτσι ώστε η διαδικασία σχεδιασμού εμπεριέχει ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού σφάλματος ανάμεσα στην $d(t)$ και $g(t)$, η δεύτερη όντας η πραγματική έξοδος. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε αυτή την περίπτωση είναι

$$E_{av}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [d(t) - g(t)]^2 dt \quad (4.31)$$



Σχ. 4.8. Γραμμικό σύστημα

Αλλά $g(t)$, η πραγματική έξοδος, μπορεί να δοθεί από την άποψη του ακεραίου περιπλοκότητας:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (4.32)$$

Όταν αυτός ο ακέραιος αντικαθίσταται στην Εξισ. 4.31 και η λειτουργία τετραγωνισμού εκτελείται, το αποτέλεσμα είναι

$$E_{av}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(t - x) dx \right) + d^2(t) - 2d(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \right] dt \quad (4.33)$$

όπου x χρησιμοποιείται ως εικονική μεταβολή για να αποφευχθεί το μπέρδεμα. Επομένως, οι όροι στην Εξισ. (4.33) ανακατατάσσονται ακολούθως:

$$\begin{aligned} E_{av}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(h(\tau) h(x) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t - \tau) f(t - x) dt \right) d\tau dx + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d^2(t) dt \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d(t) f(t - \tau) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(x) \varphi_{ff}(\tau - x) d\tau dx + \varphi_{dd}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \varphi_{fd}(\tau) d\tau \quad (4.34) \end{aligned}$$

με την τελευταία γραμμή να έχει αποκτηθεί χρησιμοποιώντας τον ορισμό από την συνάρτηση συσχέτισης στην Εξίσ. (4.30). Συνεπώς $f(t)$ και $d(t)$ εμφανίζονται στον τύπο για E_{av}^2 μόνο μέσω των συναρτήσεων τους συσχέτισης και η παραπάνω δήλωση αποδεικνύεται.

Σημειώστε ότι δύο από τις τρεις συναρτήσεις συσχέτισης στην Εξίσ. (4.34) έχουν επαναλαμβανόμενους δείκτες. Αυτές οι συναρτήσεις, της μορφής

$$\phi_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt \quad (4.35)$$

ονομάζονται συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης επειδή είναι μετρα της συσχέτισης μιας συνάρτησης με τις δικές της προηγούμενες, παρούσες ή μελλοντικές τιμές. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει αρκετές διακριτικές ιδιότητες:

1. Η $\phi_{ff}(\tau)$ είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή, $\phi_{ff}(\tau) = \phi_{ff}(-\tau)$. Αν $-\tau$ χρησιμοποιείται στην θέση του τ στην Εξίσ. (4.35) ο ακέραιος δεν αλλάζει - με αποτέλεσμα, οι δύο $f(t)$ μετατοπίζονται σε σχέση η μια με την άλλη κατά το ποσό τ .
2. $|\phi_{ff}(\tau)| = \phi_{ff}(0)$, δηλαδή, το μέσο προϊόν είναι μέγιστο όταν $f(t)$ πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του χωρίς να μετατοπίζεται. Για απόδειξη αυτής της ιδιότητας, βλέπε Τρυχαί (1955), ή Wiener (1930).

3. $\phi_{ff}(0)$ είναι μη μηδενικό μόνο για συναρτήσεις των οποίων οι ακέραιοι στο t δεν συγκλίνουν απόλυτα, επειδή προφανώς ο ακέραιος στην Εξισ. (4.35) πρέπει να αυξηθεί με T έτσι ώστε το $\phi_{ff}(\tau)$ να είναι μη μηδενικό στο όριο. Επομένως η Εξισ. (4.35) δεν είναι χρήσιμη αν $f(t)$ είναι μια μοναδική μετάβαση που φθίνει στο μηδέν με αύξοντα t . Μια εναλλακτική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης,

$$\rho_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \quad (4.36)$$

η οποία όταν συγκρίνεται με την Εξισ. (4.35), φαίνεται να είναι το συνολικό παρά το μέσο προϊόν της $f(t)$ και $f(t+\tau)$, είναι χρήσιμη σ' αυτές τις περιπτώσεις.

4. Το $\phi_{ff}(\tau)$ μεταφέρει πληροφορίες μηδενικής φάσης για την $f(t)$. Αυτό φαίνεται συνειδητοποιώντας ότι η Εξισ. 4.35 δίνει το ίδιο αποτέλεσμα για $f(t+a)$ όπως για $f(t)$, δηλαδή, ότι μια μετατόπιση στην $f(t)$ δεν αλλάζει το $\phi_{ff}(\tau)$.

5. $\phi_{ff}(0)$ είναι η μέση αξία της $f^2(t)$, όπως φαίνεται ορίζοντας $\tau=0$ στην Εξισ. 4.35. Αυτή η αξία ορίζεται να είναι η μέση ισχύς στην $f(t)$. Η χρήση της "ισχύος" για $f^2(t)$ είναι μια γενίκευση του φυσικού νοήματος του όρου. Αν $f(t)$ είναι ένα ηλεκτρικό δυναμικό ή τρέχων μετρημένο σε βόλτ και αμπέρ τότε $f^2(t)$ είναι

η στιγμιαία ισχύς σε βάρ που καταναλίσκεται σε μια αντίσταση $1-\Omega$ "που τροφοδοτείται" από την $f(t)$.

Αν και η Εξίσ. (4.35) είναι σε ισχύ για $\phi_{ff}(\tau)$ όταν $f(t)$ είναι καθοριστική και έχει μη μηδενική μέση ισχύ, υπάρχουν άλλες δύο μορφές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης που είναι επίσης σημαντικές. Πρώτον, όταν $f(t)$ είναι περιοδική, το προϊόν $f(t)f(t+\tau)$ μπορεί να υπολογιστεί το μέσο του σε μια μοναδική περίοδο μήκους $2\pi/\omega_0$, όπου ω_0 είναι η θεμελιακή συχνότητα όπως ακολουθεί:

$$\begin{aligned}
 f(t): \quad \phi_{ff}(\tau) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)f(t+\tau)dt \\
 &= c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \cos n\omega_0\tau \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Σ' αυτό το αποτέλεσμα οι c_n είναι οι περίπλοκοι συντελεστές Fourier και η δεύτερη γραμμή αποκτάται από την πρώτη αντικαθιστώντας την περίπλοκη σειρά Fourier για $f(t)$ και $f(t+\tau)$.

Δεύτερον, υποθέστε ότι $f(t)$ είναι μια στάτικη τυχαία συνάρτηση. Εφόσον εξ' ορισμού η $f(t)$ δεν είναι γνωστή επακριβώς σ' αυτή την περίπτωση, η Εξίσ. (4.35) δεν είναι επισήμως εφαρμόσιμη. Αντ' αυτού το μέσο προϊόν $f(t)f(t+\tau)$ μπορεί να θεωρηθεί ως

ένα αναμενόμενο προϊόν με την στατιστική έννοια. Όπως στο τμήμα (4.4), ας αφήσουμε το f να αντιπροσωπεύσει μια τιμή του $f(t)$, f_t μια τιμή της $f(t+\tau)$ και $p_\tau(f, f_t)$ η ένωση pdf της f και της f_t . Τότε, όπως στην Εξίσ. (4.26), η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$\phi_{ff}(\tau) = E(ff_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ff_\tau p_\tau(f, f_\tau) df df_\tau \quad (4.38)$$

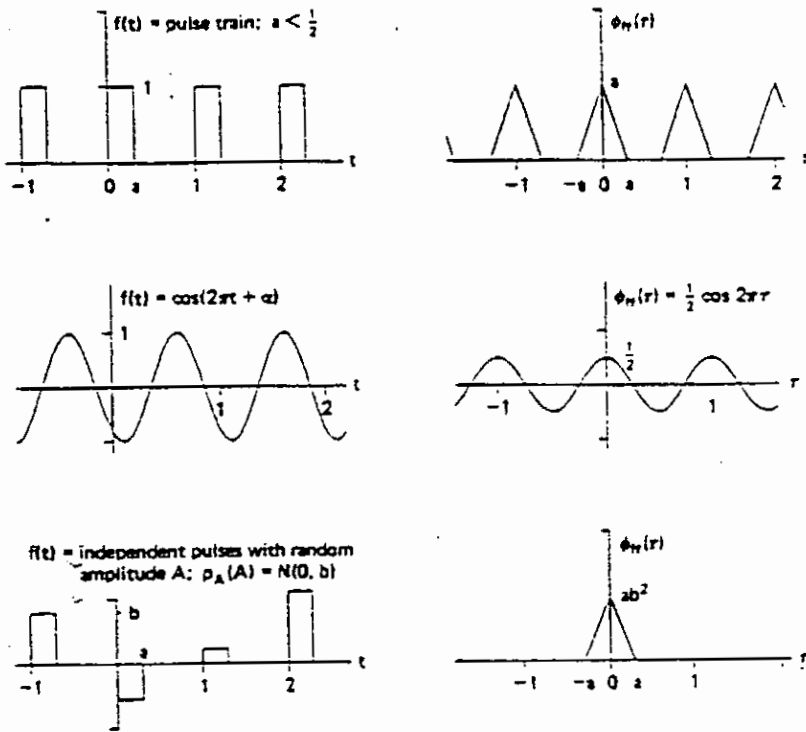
Αυτός είναι ο τύπος για την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας τυχαίας μεταβλητής. Αν f και f_t είναι ανεξάρτητες, τότε το $E(ff_\tau)$, ή μ_f^2 , όπως φαίνεται στην Εξίσ. (4.28). Επομένως η συμπεριφορά της $\phi_{ff}(\tau)$ για ένα ευρύ τ γίνεται ένα πιθανό τέστ για περιοδικό περιεχόμενο σε μια συνάρτηση, δηλαδή

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_{ff}(\tau) = \quad (4.39)$$

(Το τέστ γίνεται ασαφές για "σχεδόν περιοδικές" συναρτήσεις - βλέπε Wiener, 1930).

Μερικά παραδείγματα περιπτώσεων στις οποίες αυτές οι δύο μορφές της $\phi_{ff}(\tau)$ εφαρμόζουν απεικονίζονται στην Εικ. (4.9).

Στην πρώτη περίπτωση η Εξίσ. (4.35) εφαρμόζει άμεσα, και η εξίσ. (4.37) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην δεύτερη.



Σχ. Παραδείγματα συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης

Στο τρίτο παράδειγμα, η εφαρμογή των εξισώσεων (4.38) και (4.39) μπορεί να πραγματοποιηθεί ακόλουθα: Λάβετε υπ' όψιν οποιαδήποτε μονάδα διαστήματος του τ , για παράδειγμα, $(0, 1)$, $(1, 2)$, κ.ο.κ. Πρώτα, όταν τ είναι λιγότερο από a , πανομοιότυποι παλμοί της f και της f_r σ' αυτή την σύμπτωση διαστήματος για ένα μικρότερο διάστημα, $a - \tau$. Μέσα στα πλαίσια αυτού του μικρότερου διαστήματος το αναμενόμενο προϊόν $E(ff_r)$ είναι απλώς $E(A^2)$, ή b^2 , η μεταβλητότητα του A . Επομένως

$$\text{για } \tau < a, \quad E(ff_\tau) = \frac{a-\tau}{1}(\sigma_A^2) = b^2(a-\tau) \quad (4.40)$$

Συνεχίζοντας, όταν τ δεν είναι λιγότερο από a , ένας δεδομένος παλμός της f δεν μπορεί να επικαλύψει τον ίδιο παλμό στην f_t και έτσι, εφόσον τα πλάτη των παλμών είναι ανεξάρτητα και έχουν μηδενική μέση τιμή

$$\text{για } \tau > a, \quad E(ff_\tau) = E(f)E(f_\tau) = 0 \quad (4.41)$$

το αποτέλεσμα στις Εξισ. (4.40) και (4.41) είναι $\phi_{ff}(\tau)$ στο χαμηλά δεξιό μέρος στην Εικ. (4.9).

4.6. Φάσματα ισχύος και ενέργειας

Τα συνηθισμένα μέτρα ενέργειας και ισχύος έχουν στενή σχέση με την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Η ιδιότητα 5 παραπάνω δίνει $\phi_{ff}(0)$ ως την μέση τιμή της $f^2(t)$, ή μέση ισχύ στην $f(t)$.

Από την άλλη ακολουθεί ότι $\rho_{ff}(0)$ στην εξισ. (4.36) πρέπει να είναι η συνολική ενέργεια στην $f(t)$, επειδή, από την Εξ. (4.36)

$$\rho_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (4.42)$$

Προφανώς, αν $\rho_{ff}(0)$ είναι πεπερασμένη η μέση ισχύς είναι μηδέν και αντιστρόφως, αν $\phi_{ff}(0)$ είναι μη - μηδενική, η συνολική ενέργεια πρέπει να είναι άπειρη. Μια μετάβαση ορίζεται εδώ ως

μια συνάρτηση $f(t)$ έχοντας πεπερασμένη ενέργεια έτσι ώστε ο ακέραιος στην Εξίσ. (4.42) να συγκλίνει.

Για κυματομορφές μετάβασης ο μετασχηματισμός Fourier $F(j\omega)$ υπάρχει, όπως υπάρχει και ο μετασχηματισμός $R_{ff}(j\omega)$, της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $\rho_{ff}(\tau)$. Στην πραγματικότητα, ο δεύτερος μετασχηματισμός είναι

$$\begin{aligned} R_{ff}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx; \quad x = t + \tau \\ &= F(-j\omega)F(j\omega) = |F(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

με την τρίτη γραμμή να είναι αποκτηθείσα αντικαθιστώντας $x = t + \tau$ στον εσωτερικό ακέραιο στην δεύτερη γραμμή. Επομένως, η $R_{ff}(j\omega)$ αποδεικνύεται να είναι το τετράγωνο από το φάσμα πλάτους της $f(t)$. Από την άλλη, η $R_{ff}(j\omega)$ σχετίζεται επίσης με την συνολική ενέργεια, $\rho_{ff}(0)$ στην Εξίσ. (4.42), εφόσον

$$\rho_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (4.44)$$

και γι' αυτό

$$\rho_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (4.45)$$

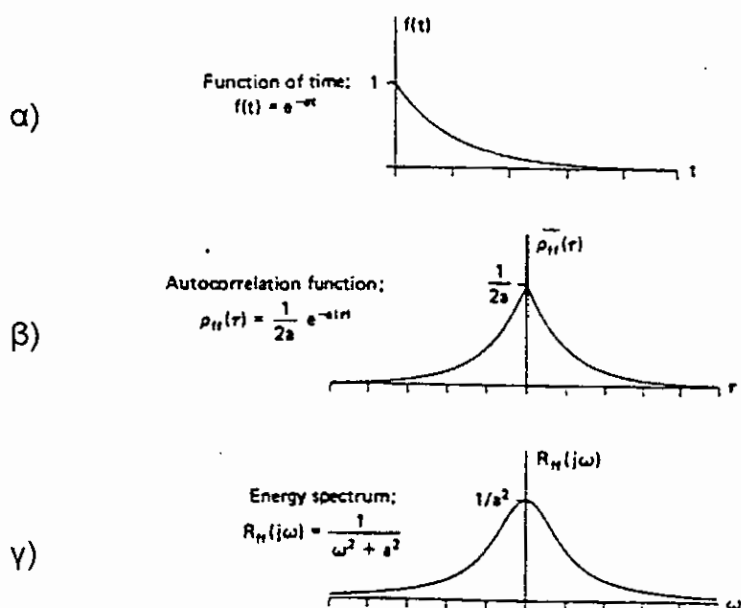
Εφόσον η συνολική ενέργεια $\rho_{ff}(0)$ στην $f(t)$ είναι $1/2\pi$ φορές ο ακέραιος της $R_{ff}(j\omega)$, $R_{ff}(j\omega) = |F(j\omega)|^2$ πρέπει να είναι το φάσμα ενέργειας ή η φασματική συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας της $f(t)$, δίνοντας την πυκνότητα ενέργειας σε μονάδες ενέργειας ανά hzt. (Οι μονάδες είναι "ανά hertz" γιατί $d\nu = d\omega/2\pi$ και $d\nu$ είναι σε hertz αν $d\omega$ είναι σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο). Εφόσον $|F(j\omega)|$ είναι το φάσμα πλάτους της $f(t)$, δεν είναι παράλογο να βρείτε ότι $|F(j\omega)|^2$ είναι το φάσμα ενέργειας. (Ο όρος "κέρδος ισχύος" χρησιμοποιείται επίσης για $|\tilde{F}(j\omega)|^2$ όταν $F(j\omega)$ είναι μια συνάρτηση μεταφοράς. Επομένως, το κέρδος ισχύος ενός φίλτρου είναι το φάσμα ενέργειας της αντίδρασης ώθησής του).

Παράδειγμα

Περιγράψτε την συνάρτηση συσχέτισης και το περιεχόμενο ενέργειας της μετάβασης $f(t) = e^{-at}$ για $t \geq 0$, που απεικονίζεται στην Εικ. (4.10). Πρώτα, η συνάρτηση μετάβασης αυτοσυσχέτισης είναι

$$\begin{aligned} \rho_{ff}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \\ &= \int_{\max(0, -\tau)}^{\infty} e^{-a(2t+\tau)} dt = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|} \end{aligned}$$

και απεικονίζεται επίσης στην Εικ. (4.10). Επομένως, η φασματική συνάρτηση ενέργειας υπολογισμένη είτε στον $R_{ff}(j\omega)$ ή $|F(j\omega)|^2$, είναι $1/(\omega^2 + a^2)$, επίσης όπως απεικονίζεται. Τελικά, η συνολική ενέργεια, $\rho_{ff}(0)$ είναι $1/2a$.



Σχ. 4.10. α) Συνάρτηση χρόνου, β) Συνάρτηση αυτοσυσκέτισης, γ) Ενεργειακό φάσμα

Η κατάσταση είναι ανάλογη για περιοδικές ή τυχαίες

κυματομορφές, εκτός του ότι εδώ η ενέργεια είναι άπειρη και έτσι η ισχύς πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην θέση της ενέργειας. Όπως ακριβώς το φάσμα της ενέργειας μιας συνάρτησης μετάβασης είναι $R(j\omega)$, το φάσμα ισχύος μιας τυχαίας συνάρτησης είναι

$$\phi_{ff}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.46)$$

Δηλαδή, το φάσμα ισχύος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

Η συνολική ισχύς στην $f(t)$ είναι

$$\begin{aligned} &= [f^2(t)]_{avg} = \phi_{ff}(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ff}(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.47)$$

η οποία ακολουθεί από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού όπως η Εξίσ. (4.45) ακολουθεί από την εξίσ. (4.44). Ξανά, οι μονάδες της $\phi_{ff}(j\omega)$ είναι μονάδες ισχύος ανά hertz, ανάλογες στις μονάδες ενέργειας ανά hertz για $R_{ff}(j\omega)$. Το αποτέλεσμα στην Εξίσ. (4.47) είναι γνωστό σαν το θεώρημα Parseval.

Σημειώστε ότι $\phi_{ff}(j\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της $\phi_{ff}(\tau)$, δεν συγκλίνει αν $f(t)$ έχει περιοδικό περιεχόμενο, γιατί αν είναι έτσι η $\phi_{ff}(\tau)$ δεν εξαλείφεται με αυξανόμενο τ . Αν $f(t)$ είναι τυχαία με

μη μηδενική μέση τιμή θεωρείται πως έχει και τυχαίο και περιοδικό περιεχόμενο, το περιοδικό περιεχόμενο σ' αυτή την περίπτωση όντας απλώς ένα dc συστατικό.

Σε περιπτώσεις όπου $f(t)$ έχει και τυχαίο και περιοδικό περιεχόμενο, είναι χρήσιμο να ορίζουμε το φάσμα ισχύος της $f(t)$ ως την συνεχή συνάρτηση $\phi_{ff}(j\omega)$ συνδυασμένη με μια ή περισσότερες συναρτήσεις ώθησης με περιοχές $2\pi|c_n|^2$ σε συχνότητες $\pm n\omega_0$ έτσι ώστε η συνολική ισχύς στην $f(t)$ μπορεί επίσης να βρεθεί ως $1/2\pi$ φορές ο ακέραιος του φάσματος ισχύος όπως στην Εξίσ. (4.47). Απ' την άλλη μεριά, αν $f(t)$ είναι τυχαία με μηδενική μέση τιμή, τότε η Εξίσ. (4.47), δίνει την συνολική ισχύ σαν απλώς την μεταβλητότητα, σ_f^2 , της $f(t)$, εφόσον σ_f^2 είναι το μέσο της $f^2(t)$ σ' αυτή την περίπτωση. Συνεπώς, το φάσμα ισχύος $\phi_{ff}(j\omega)$ δίνει την διανομή της μεταβλητότητας της $f(t)$ στην συχνότητα.

4.7. Συναρτήσεις συσχέτισης και φάσματα ΔΥΝΑΜΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Η συνάρτηση συσχέτισης και το φάσμα δύναμης έχουν διαφορετικές αλλά ανάλογες μορφές όταν τα σήματα είναι δειγματοληπτικά. Όπως έχει δηλωθεί προηγουμένα, η συνάρτηση

συσχέτισης είναι μια συνάρτηση της μετατόπισης του χρόνου μεταξύ δύο σημάτων. Όταν τα σήματα είναι δειγματοληπτικά, οι μετατοπίσεις του χρόνου γίνονται συγκεκριμένα και είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου T του δείγματος. Επομένως η συνάρτηση συσχέτισης γίνεται συγκεκριμένη ή "δειγματοληπτική". Επομένως το φάσμα δύναμης (ή ενέργειας) το οποίο είναι η αλφαριθμητική συνάρτηση του Fourier παρά στο ολοκλήρωμα του Fourier. Όπως στα προηγούμενα τμήματα ο ορισμός της συσχέτισης διαφέρει ελαφρώς εξαρτώμενος από την φύση του σήματος.

Για μια καθοριστική σειρά δείγματος $[f_m]$, με απεριόριστη ενέργεια, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως εξής

$$\phi_{ff}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N f_m f_{m+n} \quad (4.48)$$

Αυτός ο ορισμός εφαρμόζει επίσης στις σταθερές τυχαίες επεξεργασίες, οι οποίες είναι εργοδικές, αφού σε τέτοιες περιπτώσεις ο μέσος όρος του χρόνου είναι ισότιμος στον μέσο όρο του συνόλου. Οι ακόλουθες ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, εδώ είναι παράλληλες με εκείνες στο τμήμα 4.5.

1. Η αυτοσυσχέτιση είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή

$$\phi_{ff}(-n) = \phi_{ff}(n) \quad (4.49)$$

2. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι μέγιστη στα $n=0$, έτσι ώστε

$$|\phi_{ff}(n)| \leq \phi_{ff}(0) \quad (4.50)$$

3. $\phi_{ff}(0)$ είναι μη - μηδενική μόνο για συναρτήσεις των οποίων οι αθροίσεις δεν συγκλίνουν. Για συναρτήσεις με πεπερασμένη ενέργεια μια εναλλακτική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης παρόμοια του (4.36) χρησιμοποιείται, δηλαδή

$$\rho_{ff}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m f_{m+n} \quad (4.51)$$

4. Για $[\phi_{ff}(n)]$ χωρίς περιοδικό περιεχόμενο,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_{ff}(n) = \mu_f^2 \quad (4.52)$$

5. $[\phi_{ff}(n)]$ μεταφέρει πληροφορίες μηδενικής φάσης για την $[f_m]$, δηλαδή, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $[f_{m+k}]$ είναι δίδυμη αυτής της $[f_m]$.

6. $\phi_{ff}(0)$ αντιπροσωπεύει το μέσο όρο ισχύος της $[f_m]$.

7. Αντίθετα με την $\phi_{ff}(\tau)$, η $[\phi_{ff}(n)]$ είναι συγκεκριμένη, δηλαδή, είναι ορισμένη μόνο για ακέραιες τιμές του ορίσματος n .

Για μια περιοδική σειρά, $[f_m]$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

ορίζεται ακολούθως:

$$\phi_{ff}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m f_{m+n} \quad (4.53)$$

όπου N είναι ο αριθμός δειγμάτων ανά περίοδο. Σ' αυτή την περίπτωση η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο N . Η περιοδικότητα επαληθεύεται εύκολα, αφήνοντας n ίσο με $n+N$ στον παραπάνω ορισμό και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $[f_m]$ είναι περιοδική.

Τελικά, για τις σταθερές τυχαίες επεξεργασίες, οι οποίες δεν είναι εργοδικές η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από το (4.38) με $\tau = nT$, δηλαδή

$$\phi_{ff}(n) = E(f_m f_{m+n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ff_{nT} p_{nT}(f, f_{nT}) \overline{df_{nT}} \quad (4.54)$$

όπου $p_{nT}(f, f_{nT})$ είναι η ένωση *pdf* του f και του f_{nT} .

Οι ορισμοί της διασταυρούμενης συσχέτισης ακολουθούν ένα ευθύ τρόπο από τους ορισμούς της αυτοσυσχέτισης παραπάνω. Για παράδειγμα, η διασταυρούμενη συσχέτιση μεταξύ δύο σταθερών τυχαίων επεξεργασιών $[f_m]$ και $[g_m]$ ορίζεται ως

$$\phi_{fg}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N f_m g_{m+n} \quad (4.55)$$

Αντίθετα με την αυτοσυσχέτιση, η διασταυρούμενη συσχέτιση δεν είναι, γενικά, μια άρτια συνάρτηση του n . Δηλαδή, ϕ_{fg} διάφορο του $\phi_{fg}(-n)$ γενικά. Εντούτοις, αν ανταλλάξουμε f και g , αλλάζουμε την κατεύθυνση της μετατόπισης και περαιτέρω

$$\phi_{fg}(n) = \phi_{gf}(-n) \quad (4.56)$$

Συνεπώς, για την διασταυρούμενη συσχέτιση η σειρά των δεικτών (η οποία καθορίζει ποια συνάρτηση μετατοπίζεται πριν από την άλλη) είναι σημαντική.

Το συγκεκριμένο φάσμα δύναμης βρίσκεται παίρνοντας την z -αλφαριθμητική συνάρτηση από την συνάρτηση συσχέτισης

$$\tilde{\phi}_{ff}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{ff}(n)z^{-n} \quad (4.57)$$

Αφήνοντας $z = e^{j\omega T}$ αποκτάμε το φάσμα δύναμης ως συνάρτηση συχνότητας

$$\tilde{\phi}_{ff}(e^{j\omega T}) = \bar{\phi}_{ff}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{ff}(n)e^{-j\omega n T} \quad (4.58)$$

το οποίο θεωρείται πως είναι η αλφαριθμητική συνάρτηση του Fourier της σειράς αυτοσυσχέτισης, $[\phi_{ff}(n)]$. Είναι συνηθισμένο να αναφερόμαστε και στα δύο $\tilde{\phi}_{ff}(z)$ και $\bar{\phi}_{ff}(j\omega)$ ως το "φάσμα δύναμης" της $[f_m]$, αφήνοντας το όρισμα, z ή $j\omega$, να ξεχωρίσει ανάμεσα στα δύο, στα πλαίσια των συμφραζομένων της

συζήτησης. Η αυτοσυσχέτιση μπορεί να ανευρεθεί χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αντίστροφη αλφαριθμητική συνάρτηση:

$$\phi_{ff}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{\phi}_{ff}(z) z^{n-1} dz \quad (4.59)$$

ή

$$\phi_{ff}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{\phi}_{ff}(j\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad (4.60)$$

Σημειώστε ότι όταν αυτές οι εκφράσεις εκτιμώνται στα $n=0$, το αποτέλεσμα είναι η συνολική ισχύς του σήματος, δηλαδή,

$$\begin{aligned} = \phi_{ff}(0) &= \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{\phi}_{ff}(z) dz/z \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{\phi}_{ff}(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.61)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\phi_{ff}(n)$ είναι μια άρτια συνάρτηση, κάποιος μπορεί εύκολα να επαληθεύσει την ακόλουθη ιδιότητα του φάσματος δύναμης:

$$\tilde{\phi}_{ff}(z) = \tilde{\phi}_{ff}(z^{-1}) \quad (4.62)$$

Αυτό, με την σειρά, συνεπάγεται ότι

$$\bar{\phi}_{ff}(j\omega) = \bar{\phi}_{ff}^*(j\omega) = \bar{\phi}_{ff}(-j\omega) \quad (4.63)$$

Επομένως η $\bar{\phi}_f(j\omega)$ είναι και πραγματική και άρτια. Επιπρόσθετα, επειδή η $\bar{\phi}_f(j\omega)$ είναι η αλφαριθμητική συνάρτηση του Fourier μιας σειράς δείγματος, αυτή η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδος ίση του ω_s , η συχνότητα δειγματοληψίας της $[f_m]$ και γι' αυτό το λόγο και της $[\phi_f(n)]$. Μια τελευταία σημαντική ιδιότητα της $\bar{\phi}_f(j\omega)$ είναι, πως είναι μη - αρνητική. Από το να αποδείξουμε επίσημα αυτή την ιδιότητα, απλά σημειώνουμε ότι οποιοδήποτε φάσμα δύναμης είναι μια κατανομή ισχύος (δηλαδή, μέση τετραγωνισμένη αξία) πάνω στην συχνότητα, και ότι η αρνητική ισχύς σε οποιαδήποτε θέση συχνοτήτων δεν είναι πρακτικά πραγματοποιήσιμη.

Πρέπει να δοθεί ειδική προσοχή στο συγκεκριμένο φάσμα δύναμης, όταν το δειγματοληπτικό σήμα έχει ένα μη - μηδενικό μέσο όρο ή ένα περιοδικό συστατικό. Σε τέτοιες περιπτώσεις η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν εξαφανίζεται για αύξηση του n και η άθροιση στο (4.58) δεν συγκλίνει. Είναι επίσης χρήσιμο σε τέτοιου είδους περιπτώσεις, να οριστεί το συγκεκριμένο φάσμα δύναμης αυτών των συστατικών στο $2\pi|\bar{c}_m|^2$, σε συχνότητες $\pm m\omega_0$ ($m=0$ για το συστατικό dc), όπου \bar{c}_m είναι ο συντελεστής σειρών του Fourier του δειγματοληπτικού περιοδικού σήματος. Μ' αυτό τον ορισμό για το φάσμα δύναμης, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι αντίστροφες αλφαριθμητικές συναρτήσεις

στο (4.60) για να αναληφθεί η $\phi_{ff}(n)$.

Το συγκεκριμένο φάσμα διασταυρούμενης δύναμης, βρίσκεται μετατρέποντας την συνάρτηση διασταυρούμενης συσχέτισης. Επομένως, όσον αφορά και τα δύο z και του ω , έχουμε

$$\tilde{\phi}_{fg}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{fg}(n) z^{-n} \quad (4.64)$$

$$\tilde{\phi}_{fg}(e^{j\omega T}) = \tilde{\phi}_{fg}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{fg}(n) e^{-jn\omega T} \quad (4.65)$$

Όπως και με την αυτοσυσχέτιση, η συνάρτηση διασταυρούμενης συσχέτισης μπορεί να ανευρεθεί από το φάσμα διασταυρούμενης δύναμης χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αντίστροφης αλφαριθμητικής συνάρτησης:

$$\phi_{fg}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{\phi}_{fg}(z) z^{n-1} dz \quad (4.66)$$

$$\phi_{fg}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \tilde{\phi}_{fg}(j\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad (4.67)$$

Εφόσον η συνάρτηση διασταυρούμενης συσχέτισης, γενικά δεν είναι μια άρτια συνάρτηση το φάσμα διασταυρούμενης δύναμης, παρουσιάζει ιδιότητες, κατά κάποιο τρόπο διαφορετικές από το αυτόματο φάσμα που ορίζεται παραπάνω χρησιμοποιώντας την σχέση (4.56), κάποιος μπορεί να δείξει ότι

$$\tilde{\phi}_{fg}(z) = \tilde{\phi}_{fg}(z^{-1}) \quad (4.68)$$

Αντίστοιχα, όσον αφορά την συχνότητα, έχουμε

$$\bar{\phi}_{fg}(j\omega) = \bar{\phi}_{gf}(-j\omega) = \bar{\phi}_{gf}^*(j\omega) \quad (4.69)$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι το φάσμα διασταυρούμενης δύναμης, γενικά θα έχει μια μη - μηδενική φάση και μπορεί πραγματικά να αναλάβει αρνητικές τιμές.

Οι ορισμοί των φασμάτων δύναμης που συζητήθηκαν εδώ μπορούν να εφαρμοστούν σε συναρτήσεις με πεπερασμένη ενέργεια χρησιμοποιώντας $\rho(n)$, στην θέση του $\phi(n)$. Σ' αυτή την περίπτωση το φάσμα είναι ένα φάσμα ενέργειας παρά ένα φάσμα δύναμης. Οι ιδιότητες του είναι ίδιες μ' εκείνες του φάσματος δύναμης που συζητήθηκαν παραπάνω. Το φάσμα δύναμης παρέχει την κατανομή της δύναμης του σήματος έναντι της συχνότητας και το φάσμα ενέργειας παρέχει την κατανομή ενέργειας του σήματος έναντι της συχνότητας.

4.8. Τυχαίες επεξεργασίες συγκεκριμένου χρόνου και γραμμική διήθηση

Σ' αυτό το τμήμα ερευνούμε την επίδραση της γραμμικής διήθησης στις συναρτήσεις συσχέτισης και στα φάσματα δύναμης τυχαίων επεξεργασιών συγκεκριμένου χρόνου. Για να απλουστεύσουμε την συζήτηση θα υποθέσουμε ότι όλα τα σήματα είναι σταθερά τυχαία σήματα, έτσι ώστε οι συναρτήσεις

συσχέτισης να μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τον αναμενόμενο τέλεστή αξίας. Τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν κάτω από αυτήν την υπόθεση μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε τύπο δειγματοληπτικού σήματος εφόσον χρησιμοποιηθεί ο κατάλληλος ορισμός συσχέτισης.

Λάβετε υπ' όψιν σας το λογικό διάγραμμα στην Εικ. 4.12, το οποίο δείχνει δύο σήματα $[x_m]$ και $[f_m]$ τα οποία περνιούνται μέσα από γραμμικά ψηφιακά φίλτρα αναλλοίωτα χρόνου $\tilde{D}(z)$ και $\tilde{H}(z)$ για να παράγουν εξόδους $[y_m]$ και $[g_m]$. Όπως έχουμε παρατηρήσει προηγούμενα, οι εξοδοί των φίλτρων έχουν σχέση με τις εισόδους μέσω των εξισώσεων περιπλοκότητας,

$$y_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l x_{m-l} \quad (4.70)$$

$$g_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l f_{m-l} \quad (4.71)$$

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις αυτόματης και διασταυρούμενης συσχέτισης ή, ισότιμα, τα φάσματα αυτόματης και διασταυρούμενης δύναμης των $[x_m]$ και $[f_m]$ είναι γνωστά. Αναζητάμε παραστάσεις που να σχετίζουν τις συναρτήσεις συσχέτισης και τα φάσματα δύναμης των σημάτων εξόδου.

Κατ' αρχήν αναπτύσσουμε μια παράσταση για την διασταυρούμενη συσχέτιση $\phi_{xg}(n)$. Εξ' ορισμού,

$$\phi_{xg}(n) = E[x_m g_{m+n}]$$

Αντικαθιστώντας το g από το (4.71) και απλουστεύοντας δίνει

$$\begin{aligned} \phi_{xg}(n) &= E\left[x_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l f_{m+n-1}\right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l E[x_m f_{m+n-1}] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \phi_{xf}(n-1) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Συνεπώς, η $\phi_{xg}(n)$ είναι η περιπλοκότητα της $\phi_{xf}(n)$ με την αντίδραση ώθησης του φίλτρου. Η περιπλοκότητα στον τομέα του χρόνου συνεπάγεται πολλαπλασιασμό στον τομέα μεταβολής και περαιτέρω το φάσμα δύναμης $\bar{\phi}_{xg}(z)$ δίνεται από

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{xg}(z) &= \tilde{H}(z) \tilde{\phi}_{xf}(z) \\ \tilde{H}(z) &= \tilde{G}(z) / \tilde{F}(z) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Αν αφήσουμε $x_m = f_m$ στις εξισώσεις (4.72) και (4.73), αποκτάμε παραστάσεις για την διασταυρούμενη συσχέτιση και το φάσμα διασταυρούμενης δύναμης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ενός γραμμικού φίλτρου συγκεκριμένου χρόνου:

$$\phi_{fg}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \phi_{ff}(n-1) \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{yg}(z) &= \bar{H}(z)\tilde{\phi}_{ff}(z) \\ \bar{H}(z) &= \bar{G}(z)/\bar{F}(z)\end{aligned}\quad (4.75)$$

Ακόλουθα αναπτύσσουμε μια παράσταση για την διασταυρούμενη συσχέτιση ανάμεσα στην $[y_m]$ και την $[g_m]$. Ξανά, εξ' ορισμού

$$\phi_{yg}(n) = E[y_m g_{m+n}]$$

Αντικαθιστώντας την y_m από την εξίσωση (4.70) και απλουστεύοντας, ανακαλύπτουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi_{yg}(n) &= E\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l x_{m-l} g_{m+n}\right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l E[x_{m-l} g_{m+n}] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \phi_{xg}(n+l)\end{aligned}\quad (4.76)$$

Σ' αυτό το αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας $-l = m$, έχουμε την πολυπλοκότητα της $[d_{-m}]$ με την συνάρτηση συσχέτισης $\phi_{xg}(m)$. Επομένως, το φάσμα διασταυρούμενης δύναμης δίνεται από

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{xg}(z) &= \tilde{D}(z^{-1})\tilde{\phi}_{xg}(z) \\ \tilde{D}(z) &= \tilde{Y}(z)/\tilde{X}(z)\end{aligned}\quad (4.77)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.73) την $\tilde{\phi}_{xg}(z)$ δίνει

$$\tilde{\phi}_{yg}(z) = \tilde{D}(z^{-1})\tilde{H}(z)\tilde{\phi}_{xf}(z) \quad (4.78)$$

Περαιτέρω, με $x_m = f_m$, $\tilde{D}(z) = \tilde{H}(z)$, και επομένως $y_m = g_m$, αποκτάμε την ακόλουθη παράσταση για το φάσμα δύναμης του $[g_m]$:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{gg}(z) &= \tilde{H}(z^{-1})\tilde{H}(z)\tilde{\phi}_{ff}(z) \\ \tilde{H}(z) &= \tilde{G}(z)/\tilde{F}(z) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Με $z = e^{j\omega T}$ αυτή η παράσταση γίνεται $\bar{\phi}_{gg}(j\omega) = |\bar{H}(j\omega)|^2 \bar{\phi}_{ff}(j\omega)$, και επομένως το φάσμα δύναμης ενός φίλτρου εξόδου είναι ίσο με το φάσμα δύναμης της εισόδου που επιβαρύνεται από την συνάρτηση κέρδους ισχύος του φίλτρου.

Το κέρδος ισχύος οποιουδήποτε γραμμικού ψηφιακού φίλτρου δόθηκε ως $|\bar{H}(j\omega)|^2$, και συνεπώς έχουμε:

$$\text{Κέρδος ισχυος} = \frac{\text{δυναμη εξοδου}}{\text{δυναμη εισοδου}}$$

$$\begin{aligned} \text{power gain} &= \frac{\bar{\phi}_{gg}(j\omega)}{\bar{\phi}_{ff}(j\omega)} \\ &= |\bar{H}(j\omega)|^2 \\ &= \tilde{H}(z)\tilde{H}(z^{-1}) \quad \text{και } z = e^{j\omega T} \\ &= |\bar{H}(z)|^2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Πίνακας

Σύνοψη Συγκεκριμένων Τύπων

Συνάρτηση Τύπος	Τύπος
Φάσμα δύναμης του $[f_m]$	$\tilde{\phi}_{ff}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{ff}(n) z^{-n}$
Φάσμα διασταυρούμενης δύναμης	$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{fg}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{fg}(n) z^{-n} \\ &= \tilde{\phi}_{gf}(z^{-1}) \end{aligned}$
Αυτοσυσχέτιση	$\phi_{ff}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{\phi}_{ff}(z) z^{n-1} dz$
Διασταυρούμενη συσχέτιση	$\phi_{fg}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{\phi}_{fg}(z) z^{n-1} dz$
Συνολική ισχύς	$\begin{aligned} E[f_m^2] &= \phi_{ff}(0) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{\phi}_{ff}(z) z^1 dz \end{aligned}$
Γραμμικό φίλτρο	$\begin{aligned} \tilde{G}(z) &= \tilde{H}(z)\tilde{F}(z) \\ \tilde{\phi}_{ff}(z) &= \tilde{H}(z)\tilde{H}(z^{-1})\tilde{\phi}_{ff}(z) \\ \tilde{\phi}_{fg}(z) &= \tilde{H}(z)\tilde{\phi}_{ff}(z) \\ &= \tilde{H}(z)\tilde{H}(z^{-1}) = \tilde{H}(e^{j\omega T}) ^2 \end{aligned}$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα και τις ιδιότητες που

αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο τμήμα, κάποιος μπορεί να αποκομίσει άλλες σχέσεις που εμπεριέχουν σήματα και συναρτήσεις μεταφοράς. Για παράδειγμα, το διασταυρούμενο φάσμα $\tilde{\phi}_{gx}(z)$ μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (4.73) και τις ιδιότητες στην (4.68). Το αποτέλεσμα είναι

$$\tilde{\phi}_{gx}(z) = \tilde{H}(z^{-1})\tilde{\phi}_{xf}(z^{-1}) = \tilde{H}(z^{-1})\tilde{\phi}_{fx}(z) \quad (4.81)$$

Ο Πίνακας περιέχει σύνοψη μερικών απ' τις πιο χρήσιμες σχέσεις και άλλους τύπους.

4.9. Υπολογιστικές ρουτίνες

Τρεις ρουτίνες που σχετίζονται μ' αυτό το κεφάλαιο συμπεριλαμβάνονται στον κατάλογο B και στην δισκέτα. Οι πρώτες δύο παράγουν δείγματα περίπου ομαλών μεταβολών καθώς και μεταβολών Gaussian και η τρίτη είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό ορισμένων συναρτήσεων αναμενόμενης αξίας. Και οι τρεις ρουτίνες είναι περισσότερο συναρτήσεις απ' ότι υπορουτίνες.

Οι πρώτες δύο ρουτίνες είναι γεννήτριες τυχαίων αριθμών:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ SPUNIF (ISEED)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ SPGAUS (ISEED)

SPUNIF = Δείγμα ομαλής τυχαίας μεταβολής που διανέμεται κατά το διάστημα (0.1)

SPGAUS = Δείγμα μεταβολής Gaussian με πυκνότητα πιθανότητας N (0.1)

ISEED = Σύνολο ακεραίων αρχικά σε οποιαδήποτε αξία, έπειτα χωρίς αξία.

Αυτές οι συναρτήσεις τυχαίου αριθμού είναι τυπικές εκείνων που βρέθηκαν σε αρχεία υπολογιστού, εκτός του ότι έχουν οριστεί να είναι φορητές και όχι εξαρτημένες του υπολογιστή. Εν' τούτοις για να επιτευχθεί ένα ικανό, μη - επαναλαμβανόμενο μήκος ακολουθίας, έχουμε υποθέσει ότι ο υπολογιστής επιτρέπει ακέραιους έως 2^{24} σε μέγεθος και έχει λέξεις διπλής ακρίβειας με τουλάχιστον 14 δεκαδικά ψηφία ακρίβειας.

Το μήκος ακολουθίας της SPUNIF είναι 2^{24} δείγματα. Η SPGAUS παράγει μια περίπου φυσιολογική μεταβολή, αθροίζοντας 12 ομαλά δείγματα, έτσι ώστε το αποτελεσματικό, εύχρηστο μήκος ακολουθίας να είναι $2^{24}/12$, ή 1.398.101 δείγματα. Έχουν πραγματοποιηθεί διάφορες εξετάσεις για να δοκιμαστούν αυτές οι συναρτήσεις, δύο εκ των οποίων παρουσιάζονται στα επόμενα παραδείγματα.

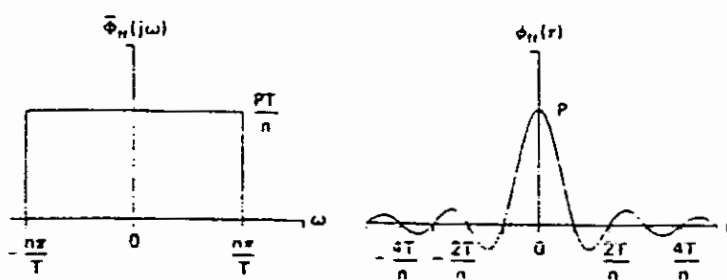
Δεδομένων των ιδιοτήτων που απεικονίζονται στην Εικόνα (4.14), τρεις σημαντικές αφαιρέσεις μπορούν να γίνουν που αφορούν στα χαρακτηριστικά οποιασδήποτε λευκής συνάρτησης θορύβου,

$f(t)$:

1. Εφ' όσον η $\phi_{ff}(mT) = 0$ όταν το m είναι οποιοσδήποτε ακέραιος (όχι το μηδέν), τα δείγματα της $f(t)$ πρέπει να είναι στατιστικά ανεξάρτητα. Δηλαδή, η $f[(m+1)T]$ είναι ανεξάρτητη της $f(mT)$, κτλ.

2. Αφού η $\phi_{ff}(\tau)$ πλησιάζει το μηδέν καθώς το $[\tau]$ αυξάνει, η κατανομή δείγματος της $f(t)$ πρέπει να έχει μέση αξία μηδέν. Κάποιος μπορεί να πει, περαιτέρω, ότι ο μέσος όρος της $f(t)$, μ_f , είναι μηδέν. Αυτή η ιδιότητα επιβεβαιώνεται στην εξίσωση (4.39).

3. Εφ' όσον η $\mu_f = 0$, η μέση τετραγωνισμένη αξία της $f(t)$ πρέπει να είναι η μεταβλητότητα σ_f^2 . Συνεπώς, η μέση ισχύς στην $f(t)$ είναι $P = \sigma_f^2$. (Φυσικά, αυτό είναι αληθές όπου $\mu_f = 0$, είτε το φάσμα δύναμης είναι επίπεδο είτε όχι).



Σχ. 4.12. Ιδιότητες λευκών συναρτήσεων φάσματος

Σημειώστε επίσης ότι το εναλασσόμενο n στην Εικ. (4.14), δεν επηρεάζει με κανέναν τρόπο αυτές τις ιδιότητες.

Στην επεξεργασία ψηφιακού σήματος, τα δείγματα της $f(t)$ παράγονται με την χρήση υπολογιστικής ρουτίνας όπως είναι η SPUNIF ή SPGAUS. Αυτοί οι αλγόριθμοι προκαλούν στατιστικά ανεξάρτητα δείγματα μιας ομαλής ή μιας Gaussian μεταβολής. Συνεπώς, αν οι ακολουθίες που παράγονται από αυτές τις ρουτίνες έχουν μηδενικό μέσο όρο, πιστοποιούνται ως λευκές ακολουθίες θορύβου.

Η έξοδος της SPGAUS έχει μηδενικό μέσο όρο και μονάδα μεταβλητότητας, δηλαδή μονάδα ισχύος. Ετσι, για να παράγουμε μια λευκή ακολουθία Gaussian με ισχύ P , θα πολλαπλασιάσαμε κάθε έξοδο με \sqrt{P} . Ομοίως, η έξοδος της SPUNIF έχει ένα μέσο όρο $\frac{1}{2}$ και με μεταβλητότητα $\frac{1}{12}$. Ετσι, για να παράγουμε μια

λευκή ομαλή ακολουθία με ισχύ P , θα αφαιρούσαμε $\frac{1}{2}$ από κάθε δείγμα και θα κλιμακώναμε το αποτέλεσμα με $\sqrt{12P}$. Συνοπτικά, με σύνολο ISEED αρχικά, οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι, για μια λευκή ακολουθία $[f_n]$ είναι

Λευκές ακολουθίες με ισχύ P

$$\text{Ομαλή} = f_n = \sqrt{12P} [SPUNIF(ISEED) - 0,5]$$

$$\text{Gaussian: } f_n = \sqrt{P} [SPGAUS(ISEED)] \quad (4.82)$$

Παράδειγμα 4.1

Δείξτε πως να χρησιμοποιηθεί η SPUNIF για να παράγει μια ομαλή λευκή ακολουθία με βήμα χρόνου $T=0.1s$ και μέση ισχύ $P=3$. Σχεδιάστε την θεωρητική πιθανότητα συνάρτησης πυκνότητας και το θεωρητικό φάσμα δύναμης. Σε συμφωνία με την εξίσωση (4.82), έχουμε

$$f_n = 6 [SPUNIF(ISEED) - 0,5] \quad (4.83)$$

Τα λευκά δείγματα θορύβου που βγαίνουν ως αποτελέσματα κατανέμονται από -3 έως $+3$ όπως φαίνεται στην Εικ. (4.14). Το φάσμα δύναμης $\tilde{\phi}_{ff}(j\omega)$ φαίνεται επίσης στην Εικόνα. Σημειώστε ότι το $\tilde{\phi}_{ff}(j\omega)$ είναι ίσο με το PT , έτσι ώστε ο ακέραιος του ϕ_{ff} να είναι $2\pi P$ ή 6π σ' αυτό το παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2

Δημιουργήστε ομαλά και Gaussian μήκη ακολουθίας 10^5 και ιστογράμματα γενικής εντολής με 20 διαστήματα. Ξεκινήστε με $ISEED = 123$. Το ακόλουθο πρόγραμμα θα προκαλούσε το ιστόγραμμα στον πίνακα H (0:19) για την ομαλή ακολουθία:

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ H (0:19)

ΔΕΔΟΜΕΝΑ H /20+01

ISEED = 123

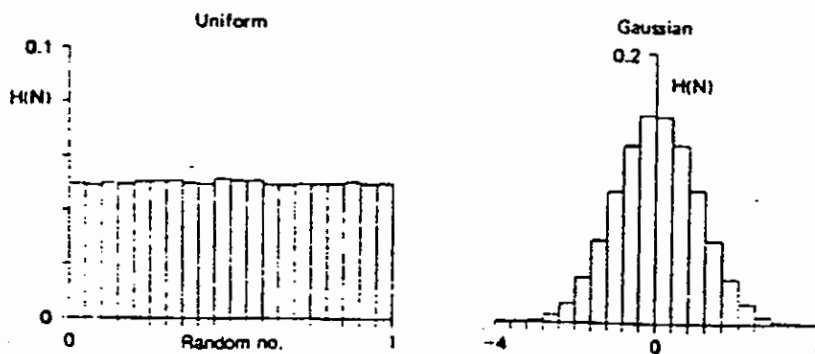
DO IK = 1.100.000

N = 20 + SPUNIF (ISEED)

H(N) = H (N) + 1E - 5

1 ΣΥΝΕΧΙΣΤΕ

Σ' αυτό το πρόγραμμα βλέπουμε ότι κάθε ομαλό τυχαίο δείγμα πολλαπλασιάζεται με το 20 για ν' αποκτήσει το διάστημα ιστογράμματος. Μια αξία ιστογράμματος, κατόπιν, προσαυξάνεται προς 0.00001, έτσι ώστε, με 10^5 δείγματα, το ποσό των αξιών ιστογράμματος θα ισούται με 1. Τα δύο ιστογράμματα που βγαίνουν ως αποτέλεσμα παρουσιάζονται στην Εικ. (4.13) και με 10^5 δείγματα, φαίνεται να πλησιάζουν στα θεωρητικά *pdf*'s.



Σχ. 4.13. Ιστογράμματα στο παράδειγμα που εξηγούν ομοιόμορφες κατά Gaussian συναρτήσεων πυκνότητας

Παράδειγμα 4.3

Υπολογίστε τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης αρκετών ακολουθιών Gaussian μήκους 25.000. Μετά την αρχική διάταξη ISEED, καθεμιά από τις ακολουθίες παράγεται ακόλουθα:

DO 1 K = 0.24999

F (K) = SPGAUS (ISEED)

1 ΣΥΝΕΧΙΣΤΕ

Υστερα, για να υπολογίσετε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, μια πεπερασμένη ερμηνεία της Εξίσωσης (4.48) χρησιμοποιείται:

$$\hat{\phi}_{ff}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{m=0}^{N-k-1} f_m f_{m+k} \quad k=0, \dots, k_{\max} \quad (4.82)$$

Σ' αυτό το παράδειγμα έχουμε $N=25.000$ και αφήνουμε $k_{\max}=5.000$. Κάθε αξία της $\hat{\phi}_{ff}(k)$ για $k=0$ μέσω του k_{\max} είναι, τότε, σε συμφωνία με την εξίσωση 13.87, το μέσο όρο των προϊόντων $f_m f_{m+k}$ και επομένως η πιο αμερόληπτη εκτίμηση της $\hat{\phi}_{ff}(k)$. Σχέδια της $\hat{\phi}_{ff}(k)$ για τρεις διαφορετικές ακολουθίες παρουσιάζονται στην Εικ. 13.14. Σημειώνουμε ότι η $\hat{\phi}_{ff}(0)$ σε κάθε περίπτωση είναι πλησίον του 1.0 γιατί $\sigma_f^2 = E[f^2] = 1,0$, και επίσης ότι η $\hat{\phi}_{ff}(k)$ είναι πλησίον του μηδενός για όλα τα $n > 0$. Αυτή η δεύτερη ιδιότητα ενδεικνύει ότι τα δείγματα στην $[f_m]$ είναι στατιστικά ανεξάρτητα και ότι η $[f_m]$ είναι μια λευκή ακολουθία

Gaussian.

Η τρίτη ρουτίνα, SPEXV, είναι μια συνάρτηση που χρησιμοποιείται για την απόκτηση οποιασδήποτε ροπής από οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία δεδομένων. Η ροπή i th της ακολουθίας $[x_m]$ βρίσκεται ως η αναμενόμενη αξία, $E[x_m^i]$. Επομένως η πρώτη ροπή είναι ο μέσος όρος, η δεύτερη είναι η μέση τετραγωνισμένη αξία κ.ο.κ. Αυτές οι αναμενόμενες αξίες υπολογίζονται ως

$$SPEXV = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m^i \quad (4.83)$$

Η συνάρτηση SPEXV ορίζεται ακόλουθα:

.. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ SPEXV (X.N.I.) -

SPEXV = Αναμενόμενη αξία ορισμένη στην Εξίσωση 4.83.

X(0:N-1) = Ακολουθία δεδομένων

I = Ροπή στην Εξίσωση (4.83) -1 για μέση αξία, 2 για τετραγωνισμένη μέση αξία κλπ.

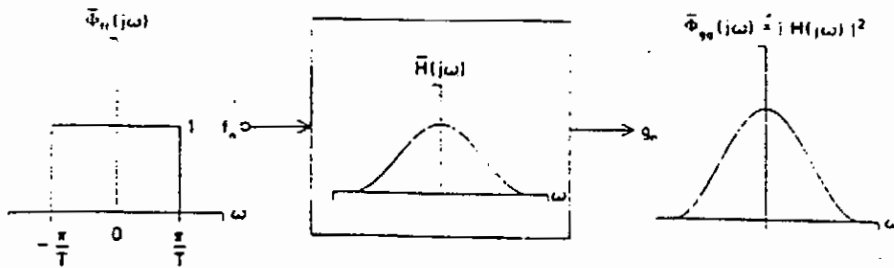
Κεφάλαιο 5ο

5.1. Χρωματιστές τυχαίες ακολουθίες από διηθημένο λευκό θόρυβο

Όταν στατιστικά ανεξάρτητα λευκά δείγματα θορύβου διηθούνται, το σχήμα του εξαγόμενου φάσματος δύναμης ή το "χρώμα" της εξαγόμενης ακολουθίας καθορίζεται από την συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου, όπως φαίνεται στην Εικ. (5.1). Ο ψηφιακός αλγόριθμος της διήθησης, γενικά, παράγει δείγματα που αντίθετα με τα λευκά δείγματα θορύβου, σχετίζονται με ένα εξαγόμενο μη - λευκό φάσμα.

Για την εξομοίωση μιας τυχαίας συνάρτησης, με ένα προκαθορισμένο φάσμα δύναμης, βοηθάει να κάνουμε την ισχύ πυκνότητας εισόδου ($\bar{\phi}_{ff}$ στην Εικ. (5.1)) ίση με κάποια, σε συχνότητες κάτω του ποσοστού του μισού του δείγματος. Αυτό ισοδυναμεί με τον καθορισμό της συνολικής ισχύς εισόδου, και από εκεί και πέρα της μεταβλητότητας των δειγμάτων εισόδου, όπως ακολουθεί:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{\phi}_{ff}(j\omega) d\omega = \frac{1}{T} \quad (5.1)$$



Σχ. 5.1. Μη λευκό φάσμα φιλτραρισμένο μέσω λευκού φάσματος

όπου T είναι το διάστημα δειγματοληψίας. Επομένως αν r_n είναι το n th ανεξάρτητο ομαλό τυχαίο δείγμα, μεταξύ 0 και 1 προερχόμενο από μια ρουτίνα αρχείου υπολογιστή, τότε

$$f_n = \sqrt{\frac{12}{T}} \left(r_n - \frac{1}{2} \right) \quad (5.2)$$

θα ήταν το κατάλληλο λευκό δείγμα θορύβου στην Εικ. 5.1. Με $\bar{\phi}_{ff} = 1$, το φάσμα δύναμης εξόδου $\bar{\phi}_{ee}$ είναι τότε

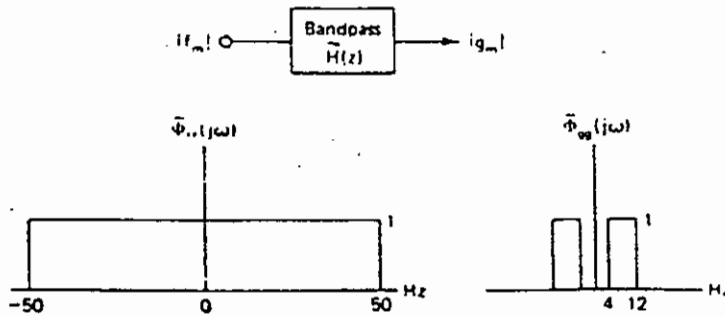
$$\bar{\phi}_{ee}(j\omega) = \bar{\phi}_{ff}(j\omega) |\bar{H}(j\omega)|^2 = |\bar{H}(j\omega)|^2 \quad (5.3)$$

δηλαδή, σ' αυτή την περίπτωση το φάσμα δύναμης της χρωματιστής τυχαίας συνάρτησης ισούται με το τετραγωνισμένο μέγεθος του φάσματος φίλτρου. Η συνολική ισχύς στην εξομειωτική συνάρτηση μπορεί να προσαρμοστεί απλά,

πολλαπλασιάζοντας $\bar{H}(j\omega)$ με μια σταθερά.

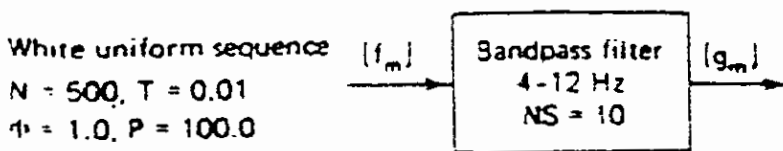
Παράδειγμα 5.1

Προκαλέστε μια τυχαία συνάρτηση με πυκνότητα ισχύς $= 1$ έχοντας όλη της την ισχύ συγκεντρωμένη σε συχνότητες μεταξύ των 4 και 12 Hz. Χρησιμοποιήστε το δειγματοληπτικό διάστημα $T=0.01s$. Αυτή η κατάσταση απαιτεί για μια ακραία ζώνη φίλτρου που απεικονίζεται στην Εικόνα (5.2). Σ' ένα υπολογιστή γενικής χρήσης, η επεξεργασία αρχίζει με την παραγωγή ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων $[r_m]$ στο διάστημα (0,1) σε μια υπορουτίνα αρχείου. Κάθε δείγμα r_m κατόπιν μετατρέπεται σε f_m όπως στην εξίσωση (5.2.), και μετά η f_m τροφοδοτείται μέσω της ακραίας ζώνης φίλτρου για να παράγει σταδιακά το επιθυμητό σύνολο δειγμάτων $[g_m]$.



Σχ. 5.2. Τυχαία ακολουθία παραγωγής στο παράδειγμα 5.1.

Κάνοντας χρήση της ρουτίνας ακραίας ζώνης φίλτρου SPFIL2 στον κατάλογο B με 5 περιοχές στον καταρράκτη, οι λεπτομέρειες της παραγωγικής επεξεργασίας της ακολουθίας φαίνονται στην Εικ. (5.3). Το πρόγραμμα προκαλεί την δημιουργία μιας λευκής ομαλής ακολουθίας και μετά την διήθηση της για να παράγει την ακολουθία $[g_m]$, η οποία έχει την επιθυμητή φασματική ιδιότητα. Σημειώστε ότι η SPFIL2 προκαλείται με συχνότητες 0.04 και 0.12 Hz-s και με NS = 10 διπολικές περιοχές.



```

REAL F(0:499), WORK(56)
ISEED=1234
DO 1 M=0,499
  F(M)=SQRT(12.0/0.01)*(SPUNIF(ISEED)-0.5)
1 CONTINUE
CALL SPFIL2(F,500,1,4.0*0.01,12.0*0.01,10,WORK,IE)
IF(IE.NE.0) PRINT '( " ERROR "')
  
```

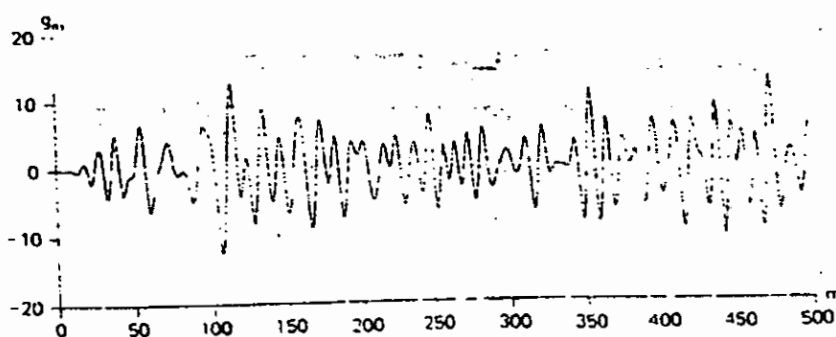
⋮

Program continues

Εικ. 5.3. Παραγωγή μη λευκών τυχαίων ακολουθειών

Ολόκληρη η ακολουθία $[g_m]$, μια τυχαία ακολουθία με όλη την ισχύ της συγκεντρωμένη μεταξύ 4 και 12 Hz, φαίνεται στην Εικ.

(5.4) με ευθείες γραμμές να συνοδεύουν τα σημεία δείγματος. Εφόσον οι μονάδες συχνότητας εδώ είναι hertz και όχι ακτίνια ανά δευτερόλεπτο, η συνολική ισχύς είναι ο ακέραιος του φάσματος στα δεξιά στην Εικ. (5.2), και έτσι η rms αξία της g_m θα πρέπει να είναι $\sqrt{16} = 4$. Σημειώστε ότι αυτή η αξία και συνεπώς η μέση ισχύ στην g_m , μειώνεται ελαφρά από την "επαναλειτουργία" της g_m , η οποία βγαίνει ως αποτέλεσμα από την αποθήκευση ενέργειας στο ψηφιακό φίλτρο στην έναρξη της επεξεργασίας διήθησης.



Σχ. 5.4. Τυχαίες ακολουθίες με ενέργεια που κατανέμεται ομοιόμορφα από 4 Hz σε 12 Hz. $N=500$, $T=0,01$

5.2. Εκτιμήσεις φασματικής ισχύος

Η εκτίμηση του πλάτους ταλάντωσης ή του φάσματος ισχύος μιας τυχαίας συνάρτησης είναι εκτεταμένο θέμα από μόνο του, εμπιριέχοντας μερικά κάπως προχωρημένα σημεία στην πιθανότητα και την στατιστική. Ο κατάλογος της βιβλιογραφίας περιέχει ολοκληρωμένα κείμενα γι' αυτό το θέμα. Σ' αυτήν την παράγραφο συζητούνται μερικοί πρακτικοί μέθοδοι για την εκτίμηση του φάσματος ισχύος χρησιμοποιώντας δειγματοληπτικά δεδομένα.

Η κλασσική θεωρία της φασματικής εκτίμησης και αναλογικής και ψηφιακής, δίδεται από τους Blackman και Tukey (1958). Συζητούν το ερώτημα του πόσο λεπτομερής και σαφής μπορεί να είναι η φασματική εκτίμηση ενός δοθέντος ποσού δεδομένων, ένα ερώτημα που έχει τεθεί ξανά από τους Jenkins και Watts (1968a) και άλλους συγγραφείς επίσης. Η Blackman - Tukey απάντησ' αυτό το ερώτημα έχει εκφραστεί όσον αφορά την R_x , το " x - τοις εκατό πιθανότητα" πεδίο τιμών, μετρώντας σε dB και εμπιριέχοντας τις υπολογισμένες και πραγματικές φασματικές αξίες με x - τοις εκατό πιθανότητα. (Η πραγματική φασματική αξία μπορεί να θεωρηθεί ως η αξία αποκτηθείσα από ένα πολύ μακροσκελές σταθερό αρχείο). Για παράδειγμα, αν $R_{90} = 3$ dB, η φασματική εκτίμηση για μια δοθείσα δέσμη συχνότητας με πιθανότητα 0.9, θα κυμανθεί στα πλαίσια ενός διαστήματος 3-dB

γύρω από την πραγματική φασματική αξία γι' αυτή την ίδια δέσμη συχνότητας.

Το πεδίο τιμών R_x , παρουσιάζεται από τους Blackman και Tukey να εξαρτάται από N/M , τον λόγο του συνολικού αριθμού δειγμάτων προς τον αριθμό των δεσμών συχνότητας, δηλαδή, ισότιμα κομμάτια του θετικού άξονα από 0 σε π/T . Υποθέτοντας ότι το σύνολο των N δειγμάτων αντιμετωπίζεται ως ένα μοναδικό κομμάτι δεδομένων [βλέπε Blackman και Tukey (1958)], η σχέση κατά προσέγγιση είναι

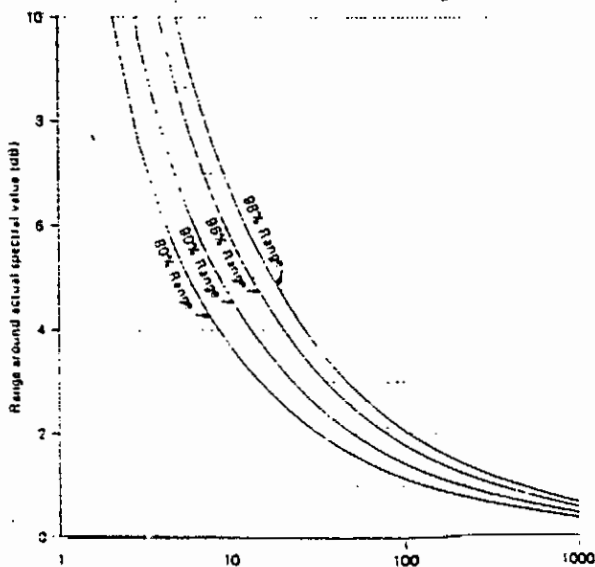
$$R_x \approx K(N/M - 0,833)^{-1/2} \quad (5.4)$$

x	80	90	96	98
K	11,2	14,1	17,7	20,5

Ετσι ώστε $K=11,2$ για το 80% του πεδίου τιμών κ.ο.κ. Το πεδίο τιμών R_x σχεδιάζεται ως μια συνάρτηση των N/M στην Εικ. (5.5). Καθώς το N/M διευρύνεται το πεδίο τιμών που δίνεται στην εικόνα ή στην Εξίσωση (5.4) επικεντρώνεται περίπου γύρω από την πραγματική φασματική αξία.

Οι καμπύλες στην Εικ. (5.5) δίνουν μια απάντηση στο ερώτημα γιατί κάποιος δεν μπορεί να υπολογίσει το φάσμα ισχύος μιας τυχαίας συνάρτησης, παίρνοντας απλά το τετραγωνισμένο

πλάτος ταλάντωσης του DFT της. Σ' αυτή την περίπτωση το M θα ισούται με $N/2$. επομένως, N/M θα είναι 2, και το διαστήμα εμπιστοσύνης (δηλαδή, το πεδίο τιμών R_x επικεντρωμένο περίπου γύρω από την εκτιμηθείσα φασματική αξία) για κάθε υπολογισμένη αξία DFT θα είναι πολύ μεγάλο. Σαφώς, κάποιος θα αποκομμούσε πολύ μικρή γνώση του πραγματικού φάσματος ισχύος χωρίς την "εξομάλυνση" του υπολογισμένου DFT κατά κάποιον τρόπο. Σ' αυτή την ιδέα της εξομάλυνσης της φασματικής εκτίμησης συν την επιθυμία να περιοριστεί ο χρόνος υπολογισμού για μακροσκελή αρχεία, οφείλεται το γεγονός ότι έχουμε οδηγηθεί σε σύγχρονες μεθόδους φασματικής εκτίμησης.



Σχ. 5.5. Διαστήματα εμπιστοσύνης διά φασματική εκτίμηση

Πριν προχωρήσουμε στο να εκτιμήσουμε το φάσμα και επιπλέον να διαλέξουμε τον αριθμό των δεσμίδων συχνότητας όπως έχει περιγραφεί παραπάνω, μερικές προφυλάξεις με τα ίδια τα δεδομένα είναι θεμιτές [βλέπε Bingham και λοιποί (1967)].

1. Η εκτίμηση θα πραγματοποιηθεί σαν οι ακολουθίες του χρόνου να ήταν σταθερές: συνεπώς αλλαγές στο περιεχόμενο της συχνότητας κατά την διάρκεια τρεξίματος του αρχείου δεδομένων μπορεί να δώσει παραπλανητικά αποτελέσματα.

2. Συνίσταται να περιορίσετε στο ελάχιστο την μέση αξία καθώς και οποιεσδήποτε σημαντικές "τάσεις" (αλλαγές ευθειών - γραμμών) στα δεδομένα πριν κάνετε την εκτίμηση. (Αν είναι απαραίτητο τα δεδομένα μπορούν να περαστούν υψηλά για να το καταφέρετε).

3. Πολλαπλασιάζοντας τις άκρες των καταμετρημένων ακολουθιών χρόνου με μια συνάρτηση εξομάλυνσης, ας πούμε ένα κουδούνι μισού ημιτονίου που εκτείνεται σε περίπου ένα δέκατο του αρχείου, κάποιος μπορεί να δημιουργήσει μια λεία μετάσταση στο μηδέν στις άκρες του συνόλου δείγματος και να μειώσει τους παραστατικούς κυμματισμούς στην περιοχή των φασματικών στιγμιαίων εξάρσεων τιμών.

Όσον αφορά τα τεμάχια 1 και 2, σημειώστε ότι μια ακολουθία χρόνου που έχει παραχθεί όπως στο παράδειγμα 5.1, αν είναι αρκετής χρονικής διάρκειας, θα έχει μέσο όρο και τάση κοντά στο

μηδέν, γιατί συστατικά κοντά στη μηδενική συχνότητα έχουν απορροφηθεί από το φίλτρο ακραίας ζώνης.

5.3. Αποδιαμόρφωση και μεθοδοι φίλτρου εκλεγμένης φασματικής εκτίμησης

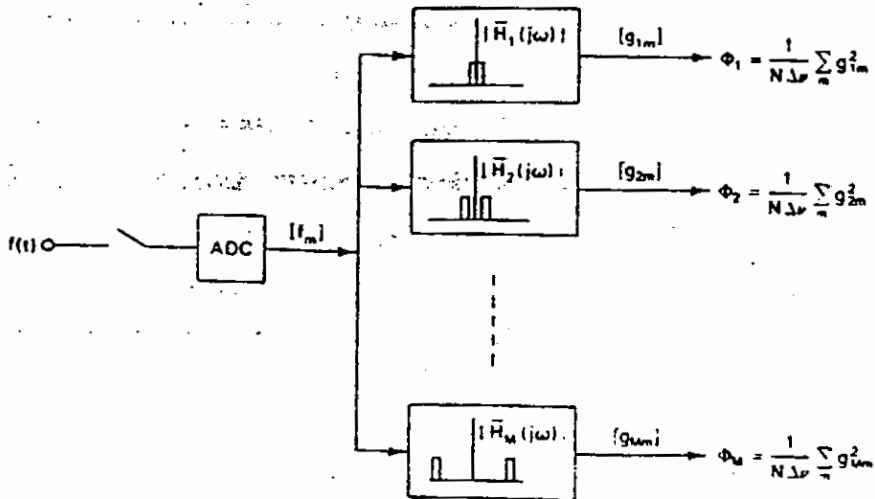
Μια μέθοδος φασματικής εκτίμησης εμπεριέχει πολυσύνθετη αποδιαμόρφωση [Bingham, Godfrey και Tukey (1967)]. Σ' αυτή τη μέθοδο οι σειρές χρόνου $f(t)$ πολλαπλασιάζονται με έναν ημιτονοειδή φορέα $e^{-j\beta t}$. Αυτή είναι μια συνηθισμένη διαμόρφωση πλάτους ταλάντωσης και έχει το αποτέλεσμα των συστατικών μετατόπισης γύρω από την συχνότητα β στην $f(t)$ εως γύρω από μηδενική συχνότητα στις αποδιαμορφωμένες ακολουθίες χρόνου. Υστερα, υπολογίζοντας τον μέσο όρο δύναμης εξόδου περασμένης χαμηλά ερμηνείας της $f(t)e^{-j\beta t}$, η ισχύς στην $f(t)$ στην δέσμη των συχνοτήτων γύρω από το β μπορούν να εκτιμηθούν.

Η μέθοδος φίλτρου που απεικονίζεται στην Εικ. (5.6) είναι, φανερά, αρκετά παρόμοια με την πολυσύνθετη αποδιαμόρφωση και χρησιμοποιείται τώρα, για σκοπούς διαφήμισης. Η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ η δημιουργία ακραίας ζώνης αντικαθιστά την αποδιαμόρφωση συν την δημιουργία χαμηλής ζώνης. Κάθε δόντι της χτένας είναι ένα φίλτρο ακραίας ζώνης του οποίου η

έξοδος τετραγωνίζεται και υπολογίζεται η μέση τιμή του για να αποκτηθεί η συνολική ισχύς στα πλαίσια της ακραίας ζώνης (σε αρνητικές καθώς και θετικές συχνότητες).

Κάθε έξοδος διαιρείται με το πλάτος δέσμης $\Delta\nu$ έτσι ώστε οι μονάδες της ϕ να είναι τετραγωνισμένο μέγεθος ανά hertz. Συνολικά υπάρχουν M υπολογισμένες φασματικές αξίες ϕ_k έως ϕ_M στην Εικ. (5.6). Επομένως το φάσμα ισχύος παράγεται με την μορφή ενός ιστογράμματος με M ράβδους. Σημειώστε ότι αυτό είναι ένα "θετικό φάσμα ισχύος", δηλαδή, όπως έχει παρατηρηθεί παραπάνω, κάθε ϕ_k αντιπροσωπεύει συνδυασμό ισχύος από αρνητικές και θετικές συχνότητες.

Στην Εικ. (5.6) έχει υποτεθεί ότι η φασματική εκτίμηση πρέπει να βασισθεί σε N δείγματα της $f(t)$, έτσι ώστε κάθε δόντι εξόδου να τετραγωνίζεται, ν' αθροίζεται και κατόπιν να διατηρείται με το N για να αποκομιθεί η φασματική εκτίμηση. Κάθε άθροισμα θα πρέπει να περιλαμβάνει όλες τις μηδενικές εξόδους του φίλτρου. Συνεπώς μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από N περίοδοι σε κάθε άθροισμα για να επιτρέψει σε οποιαδήποτε υπολοιπόμενη ενέργεια αποθηκευμένη στο φίλτρο μετά από τα N δείγματα της $f(t)$ που έχουν εισαχθεί. (Αυτό είναι παρόμοιο του να οριστεί $f_m = 0$ για $m > N$ και κατόπιν να αφηθεί το m να φύγει από 0 σε ∞ σε κάθε άθροισμα στην Εικόνα (5.6).



Σχ. 5.6. Μέθοδος φίλτρου για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού φάσματος που επεξηγεί το αποτέλεσμα πολυσύνθετης αποδιαμόρφωσης.

Για υπολογιστική αποδοτικότητα, η αποδιαμόρφωση συν η δημιουργία χαμηλής ζώνης είναι γενικά προτιμότερη από την δημιουργία ακραίας ζώνης. Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό και των δύο μεθόδων, εντούτοις, είναι ότι είναι εύκολο να παραλαχθεί το N , ο αριθμός των περιόδων που χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθεί το ϕ στην Εικ. (5.6). Συνεπώς κάποιος μπορεί να προσαρμόσει το N για να κάνει είτε τοπικές εκτιμήσεις ενός εναλλασόμενου φάσματος ισχύος ή σφαιρικές εκτιμήσεις ενός φάσματος υποτιθέμενου σταθερού. Επίσης, σε αντίθεση με την επόμενη μέθοδο που θα συζητηθεί, είναι εύκολο εδώ να κοιτάζουμε μόνο σε συγκεκριμένα τμήματα του φάσματος,

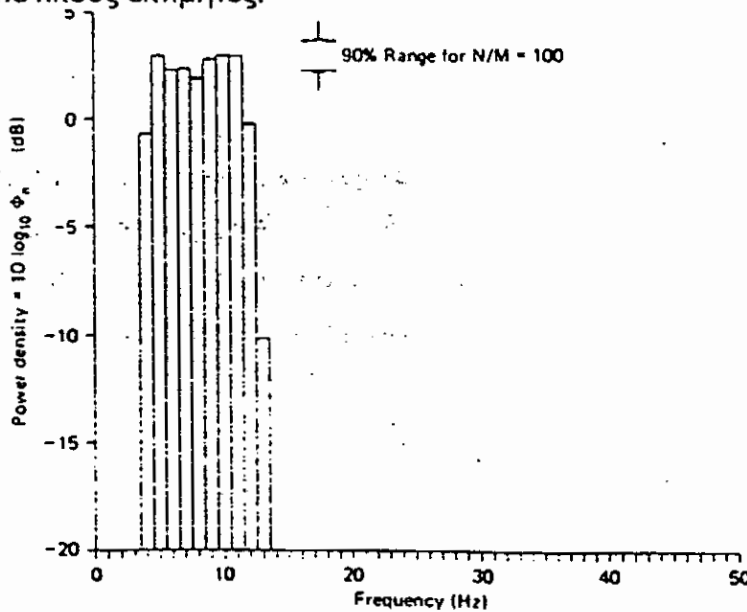
δηλαδή να παραλείψουμε κάποιες από τις ακραίες ζώνες στην Εικ. (5.6) και επίσης να χρησιμοποιήσουμε ακραίες ζώνες διαφόρων πλατών, συνεπώς να παρέχουμε διάφορους βαθμούς φασματικής μέσης τιμής.

Παράδειγμα 5.2

Μετρήστε το φάσμα δύναμης της παραγόμενης ακολουθίας όπως στην Εικ. (5.2), εφαρμόζοντας $T=0.01s$ και $N=5.000$ δείγματα της τυχαίας ακολουθίας. Αν το σχήμα στην Εικ. (5.6) έχει εφαρμοστεί με $\Delta\nu=1\text{ Hz}$, τότε, εφόσον η συχνότητα Nyquist είναι 50 Hz σ' αυτή την περίπτωση, ο συνολικός αριθμός των δεσμίδων πρέπει να είναι $M=50$. Επομένως, $N/M=100$ και η Εικ. (5.5) δίνει το 90% του πεδίου τιμών περίπου στα 1.42 dB . Ένα τυπικό αποτέλεσμα εμφανίζεται στην Εικόνα (5.7). Όπως ήταν αναμενόμενο, ο υπολογισμός δείχνει την περισσότερη ισχύ να είναι συγκεντρωμένη στα 4 έως 12 Hz, γύρω στις 2 τετραγωνισμένες μονάδες πλάτους ανά hertz (δηλαδή, 3 dB), όλη η ισχύς όντας σε θετικές συχνότητες, όπως εξηγήθηκε παραπάνω. Ένα ελάχιστο σημείο είναι ότι το πραγματικό φάσμα δεν είναι ακριβώς ορθογώνιο σ' αυτή την περίπτωση, έχοντας η ακολουθία παραχθεί από το ψηφιακό φίλτρο που επιδεικνύεται στην Εικ. (5.3). Το πραγματικό φάσμα ισχύος είναι κατά 1 % κάτω από (ή 20dB χαμηλότερα) τη μέγιστη τιμή του γύρω στα 3.5 Hz και γύρω στα 13.5 Hz, απ' ότι στα 4 και 12 Hz επακριβώς.

5.4. Περιοδογραμμική μέθοδοι φασματικής εκτίμησης

Άλλοι μέθοδοι για να εκτιμηθούν τα φάσματα ισχύος των δειγματοληπτικών σημάτων μερικές φορές αποκαλούνται περιοδογραμμικές μέθοδοι. Αυτές οι μέθοδοι είναι αποτελεσματικά ίδιες όπως εκείνες παραπάνω, αλλά διαφέρουν στην διαδικασία. Έχουν ως κίνητρο τον ορισμό του φάσματος ισχύος στην Εξίσ. (4.58). Η προσέγγιση είναι βασικά, να εκτιμηθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης σ' ένα αριθμό καθυστερημάτων και έπειτα να μετασχηματιστεί η εξαγόμενη ακολουθία. Σ' αυτή την παράγραφο συζητούμε αρκετές περιοδογραμμικές μεθόδους. Συγκρίνονται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα μέτρα απόδοσης για στατιστικούς εκτιμητές.



Σχ. 5.7. Εκτίμηση ενεργειακού φάσματος στο παράδειγμα 5.2.

Οι δύο ποσότητες που χρησιμοποιούνται συχνότερα στην μέτρηση της απόδοσης ή της ακρίβειας μιας στατιστικής εκτίμησης είναι το δυναμικό και η μεταβλητότητα. Στο πλαίσιο των φασματικών εκτιμητών αυτές οι ποσότητες ορίζονται

$$= B(\hat{\phi}(j\omega)) = \bar{\phi}(j\omega) - E[\hat{\phi}(j\omega)] \quad (5.5)$$

και

$$= V(\hat{\phi}(j\omega)) = E\left[\hat{\phi}(j\omega) - E[\hat{\phi}(j\omega)]^2\right] \quad (5.6)$$

όπου $\hat{\phi}(j\omega)$ δηλώνει την εκτίμηση, η $\bar{\phi}(j\omega)$ το αληθινό φάσμα δύναμης, και $E[\cdot]$ δηλώνει την αναμενόμενη αξία. Η μεταβλητότητα εξεικονίζει τον ίδιο τύπο πληροφορίας για την εκτίμηση όπως τα διαστήματα εμπιστοσύνης που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Οι εκτιμήσεις που έχουν μια ευρεία μεταβλητότητα θα έχουν επίσης και ένα ευρύ διάστημα εμπιστοσύνης. Είναι θεμιτό και το δυναμικό και η μεταβλητότητα m είναι όσο το δυνατό πιο μικρά. Μια εκτίμηση θεωρείται αρμονική αν καθώς ο αριθμός των δειγμάτων μεγαλώνει, το δυναμικό και η μεταβλητότητα να τείνουν προς το μηδέν. Τα μέτρα του δυναμικού και της μεταβλητότητας για τους εκτιμητές που αναφέρονται σ' αυτό το κεφάλαιο είναι συχνά εξαρτώμενα του σήματος και είναι πολύ δύσκολο να αποκτηθούν. Σε πολλές περιπτώσεις οι διαδικασίες που απαιτούνται για να αποκτηθούν αυτά τα μέτρα βρίσκονται εκτός πεδίου αναφοράς αυτού του

βιβλίου. Τα αποτελέσματα, εντούτοις, είναι πολύ διδακτικά και θα παρουσιαστούν εδώ (κυρίως χωρίς εξαγωγή) για να παρέχουν μια βάση για σύγκριση.

Η βάση για όλες τις μεθόδους εκτίμησης που αναφέρονται σ' αυτή την παράγραφο είναι το περιοδόγραμμα. Για μια ακολουθία δεδομένων $[x_m]$ N - σημείων, το περιοδόγραμμα ορίζεται ως εξής:

$$\bar{I}_N(j\omega) = \frac{1}{N} |\bar{X}_N(j\omega)|^2 \quad (5.7)$$

όπου

$$\bar{X}_N(j\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-jm\omega T} \quad (5.8)$$

Είναι εύκολο να επιδειχθεί ότι $\bar{I}_N(j\omega)$ είναι αντίστοιχο του μετασχηματισμού Fourier μιας κόλουρης εκτίμησης αυτοσυσχέτισης. Ειδικότερα, αν $\hat{\phi}_{xx}(l)$ δίδεται από

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{xx}(l) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-l-1} x_m x_{m+l}, & 0 \leq l < N \\ \hat{\phi}_{xx}(l) &= \hat{\phi}_{xx}(-l) & -N < l \leq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

τότε μπορεί να επιδειχθεί ότι

$$\bar{I}_N(j\omega) = \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \hat{\phi}_{xx}(l) e^{-jl\omega T} \quad (5.10)$$

Μόνο του το περιοδόγραμμα μπορεί μερικές φορές να

υπηρετήσει ως χρήσιμη εκτίμηση του φάσματος ισχύος, αν και όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η εμπιστοσύνη μας σ' αυτή την μέθοδο είναι πολύ περιορισμένη. Ας δημιουργήσουμε εκφράσεις για το δυναμικό και την μεταβλητότητα του $\bar{I}_N(j\omega)$ αρχίζοντας πρώτα με την εκτίμηση αυτοσυσχέτισης. Το δυναμικό του $\hat{\phi}_{xx}(l)$ βρίσκεται εύκολα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.5) και (5.9).

$$\begin{aligned} B[\hat{\phi}_{xx}(l)] &= \phi_{xx}(l) - E\left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-l-1} x_m x_{m+l}\right] \\ &= \phi_{xx}(l) - \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-l-1} \phi_{xx}(l) \\ &= \phi_{xx}(l) \left[\frac{1}{N}\right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Σημειώστε ότι καθώς το $N \rightarrow \infty$ το δυναμικό προσεγγίζει το μηδέν, έτσι αυτή η εκτίμηση είναι ασυμπτωματικά αμερόληπτη. Μια έκφραση κατά προσέγγιση για την μεταβλητότητα της εκτίμησης συσχέτισης δίδεται από τους Jenkins και Watts (1974):

$$V[\hat{\phi}_{xx}(l)] \approx \frac{1}{N} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\phi_{xx}^2(p) + \phi_{xx}(p+1)\phi_{xx}(p-1)] \quad (5.12)$$

Αυτή η έκφραση ισχύει όταν $N \gg l$. Σημειώστε ότι καθώς $N \rightarrow \infty$, η μεταβλητότητα προσεγγίζει το μηδέν, έτσι η εκτίμηση συσχέτισης είναι αρμονική.

Για το περιοδόγραμμα το δυναμικό μπορεί να καθοριστεί

παίρνοντας την αναμενόμενη αξία του $\bar{I}_N(j\omega)$. Εφαρμόζοντας την σχέση στην (5.10) και το παραπάνω συμπέρασμα, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} E[\bar{I}_N(j\omega)] &= E\left[\sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \hat{\phi}_{xx}(l)e^{-j\omega T}\right] \\ &= \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \left[\frac{N-|l|}{N}\right] \phi_{xx}(l)e^{-j\omega T} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Αυτό δεν είναι ίσο με το αληθινό φάσμα $\bar{\phi}(j\omega)$, εξαιτίας της $\frac{N-|l|}{N}$ περιόδου και της πεπερασμένης διάρκειας της άθροισης. Εντούτοις, καθώς $N \rightarrow \infty$, $E[\bar{I}_N(j\omega)]$ προσεγγίζει το $\bar{\phi}(j\omega)$, έτσι η εκτίμηση είναι ασυμπτωματικά αμερόληπτη.

Από την Εξισ. (5.13) βλέπουμε ότι $E[\bar{I}_N(j\omega)]$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ο μετασχηματισμός του Fourier της αληθινής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης πολλαπλασιασμένη με μια συνάρτηση παράθυρο της μορφής

$$w_l = \frac{N-|l|}{N}, \quad |l| < N$$

Αυτή είναι η συνάρτηση παραθύρου του Barlett. Συνεπώς, η φασματική εκτίμηση που αποκτήθηκε χρησιμοποιώντας το περιοδόγραμμα μπορεί να θεωρηθεί ως η πολυπλοκότητα του αληθινού φάσματος ισχύος με την φασματική αντίδραση του παραθύρου Barlett, δηλαδή,

$$E[\bar{I}_N(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\phi}_{xx}(j\alpha) \bar{W}_{BT}(j(\omega - a)) da \quad (5.14)$$

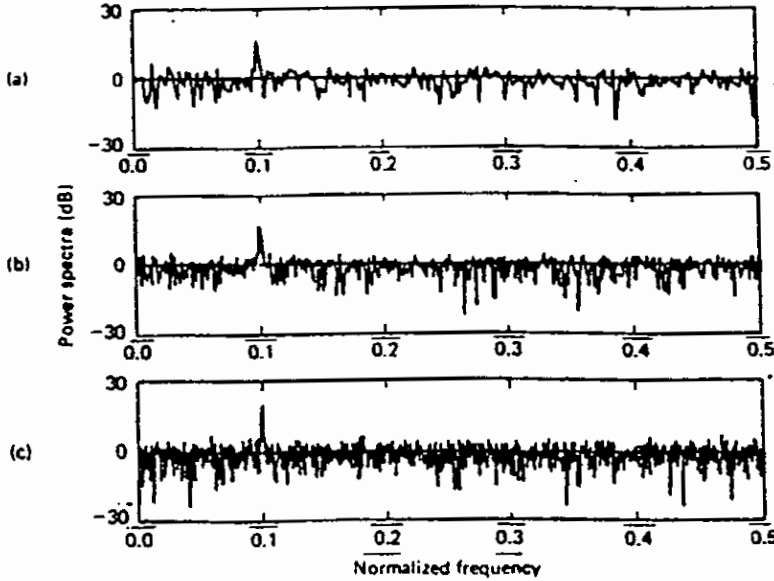
Αυτή η πολυπλοκότητα έχει ως αποτέλεσμα μια εξομάλυνση του αληθινού φάσματος και μια κυματοειδής επίδραση πλησίον των μεταβάσεων γνωστών ως το φαινόμενο Gibb's.

Μια γενική παράσταση για την μεταβλητότητα του περιοδογράμματος είναι δύσκολο ν' αποκτηθεί. Εντούτοις, αν και υποτεθεί πως είναι μια πραγματική, μηδενικής μέσης τιμής, επεξεργασία Gaussian παραγώμενη από το πέρασμα λευκού θορύβου μέσα σ' ένα γραμμικό φίλτρο, οι Jenkins και Matts έχουν

$$V[\bar{I}_N(j\omega)] = \bar{\phi}_{xx}^2(j\omega) \left[1 + \left(\frac{\sin(N\omega T)}{N \sin \omega T} \right)^2 \right] \quad (5.15)$$

Σημειώστε ότι αυτή η συνάρτηση δεν μειώνεται και το N αυξάνεται. Αυτό φαίνεται στην Εικ. (5.8), όπου περιοδογράμματα ενός ημιτονίου συν λευκού θορύβου παρουσιάζονται για $N = 512, 1024$ και 2048 .

Η μεταβλητότητα μιας εκτίμησης (η οποία είναι μέτρο της μεταβολής της εκτίμησης γύρω από την αληθινή αξία 0 dB) δεν προσεγγίζει το μηδέν για μεγαλύτερες αξίες του N . Επομένως, το περιοδογράμμα δεν είναι μια αρμονική εκτίμηση.



Σχ. 5.8. Περιοδιαγράμματα κυματοειδούς επίδρασης σε λευκό θόρυβο χρησιμοποιώντας α) $N=512$, β) $N=1024$, γ) $N=2048$ dp

Μια συνηθισμένη μέθοδος για την μείωση της μεταβλητότητας είναι να βρεθεί η μέση τιμή της εκτίμησης από αρκετές ανεξάρτητες δοκιμές. Η μέθοδος των μέσων περιοδογραμμάτων που ακολουθεί συχνά αποδίδεται στον Barlett. Η ακολουθία δεδομένων N - μήκους διαχωρίζεται σε N - σύνολα στοιχείων, καθένα απ' αυτά μήκους M (έτσι $N=KM$). Μέλη του i th συνόλου έχουν δηλωθεί

$$x_m^i = x_{m+(i-1)M}, \quad 0 \leq m \leq M-1, 1 \leq i \leq K \quad (5.16)$$

Ενα περιοδόγραμμα υπολογίζεται για κάθε σύνολο στοιχείων

$$\bar{I}_M^i(j\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{m=0}^{M-1} x_m^i e^{-jm\omega T} \right|^2, \quad l \leq i \leq K \quad (5.17)$$

έπειτα τα περιοδογράμματα υπολογίζονται ως μέσες τιμές για να παράγουν μια φασματική εκτίμηση,

$$\hat{\phi}_{xx}(j\omega) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \bar{I}_M^i(j\omega) \quad (5.18)$$

Αν υποθέσουμε ότι τα περιοδογράμματα $\bar{I}_M^i(j\omega)$ είναι ανεξάρτητα, που είναι μια λογική υπόθεση αν $\phi_{xx}(l)$ είναι μικρή για $l > M$, τότε η αναμενόμενη αξία της εκτίμησης δίδεται από

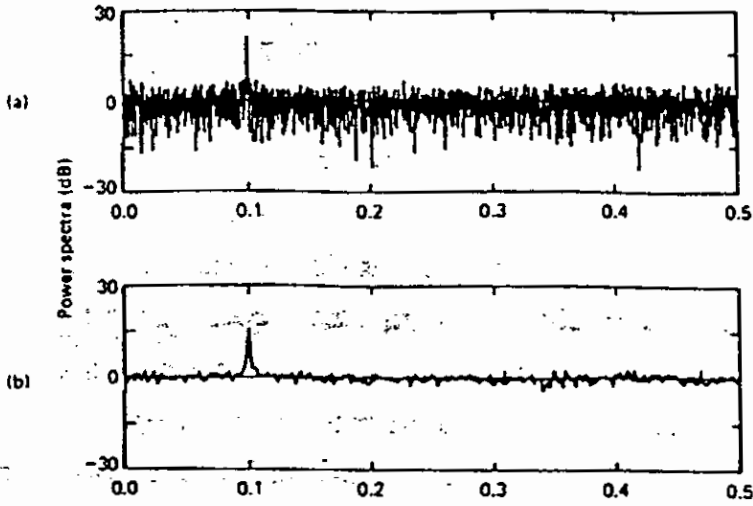
$$\begin{aligned} E[\hat{\phi}_{xx}(j\omega)] &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K E[\bar{I}_M^i(j\omega)] \\ &= E[\bar{I}_M(j\omega)] \\ &= \sum_{l=-(M-1)}^{M-1} \left[\frac{M-|l|}{M} \right] \phi_{xx}(l) e^{-jl\omega T} \end{aligned} \quad (5.19)$$

που είναι παρόμοια της παραστάσεως στην Εξισ. (5.13) εκτός του ότι $M < N$. Η μεταβλητότητα είναι περίπου (Jenkins και Watts, 1979)

$$\begin{aligned} V[\hat{\phi}_{xx}(j\omega)] &= \frac{1}{K} V[\bar{I}_M(j\omega)] \\ &= \frac{1}{K} \bar{\phi}_{xx}^2(j\omega) \left[1 + \left(\frac{\sin(M\omega T)}{M \sin \omega T} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

Καθώς $K \rightarrow \infty$ η μεταβλητότητα προσεγγίζει το 0, έτσι ώστε υπολογίζοντας την μέση τιμή των περιοδογραμμάτων έχουμε αποκτήσει μια αρμονική εκτίμηση. Αυτό φαίνεται στην Εικ. (5.9). Εδώ το περιοδόγραμμα ενός ημιτονίου - συν - λευκού - θορύβου ακολουθίας μήκους $N=4096$ συγκρίνεται με μια εκτίμηση αποκτηθείσα από τον υπολογισμό μέσης τιμής οκτώ περιοδογραμμάτων, τα οποία έχουν υπολογιστεί από οκτώ διακεκριμένα σύνολα στοιχείων μήκους $M=512$. Η μείωση στην μεταβλητότητα είναι προφανής.

Αν και ο υπολογισμός της μέσης τιμής έχει μειώσει την μεταβλητότητα, έχει επίσης προκαλέσει και μια αύξηση στο δυναμικό όπως φαίνεται στην Εξισ. (5.13), και μια μείωση στην φασματική ευκρίνεια. Το δεύτερο αποτέλεσμα σχετίζεται με το αυξημένο πλάτος του κυρίως λοβού του φάσματος παραθύρου, που έχει προέλθει από την μείωση του αριθμού των σημείων δεδομένων (από το N στο M) στον υπολογισμό του περιοδογράμματος. Αντικατοπτρίζεται από το άνοιγμα της ημιτονοειδούς ακίδας στην Εικ. (5.9).



Σχ. 5.9. Περιοδιαγράμματα ενός 4096 *dp* συχνότητα και φασματική εκτίμηση που σχηματίστηκε από το μέσο όρο 8 περιοδιαγραμμάτων μήκους 512 *dp*.

Εχουμε δείξει ότι από τον υπολογισμό της μέσης τιμής των περιοδογραμμάτων, η μεταβλητότητα της φασματικής εκτίμησης μπορεί να μειωθεί σε βάρος μιας αύξησης στο δυναμικό και μιας μείωσης στην φασματική ευκρίνεια. Τώρα θα δείξουμε ότι η παραθυροποίηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιτευχθεί ουσιαστικά το ίδιο αποτέλεσμα. Η βασική ιδέα είναι να υπολογίσουμε ένα μοναδικό περιοδόγραμμα εφαρμόζοντας ολόκληρη την ακολουθία δεδομένων N μήκους, έπειτα να περιπλέξουμε το περιοδόγραμμα με μια συνάρτηση παραθύρου για να αποκτήσουμε το εκτιμώμενο φάσμα ισχύος:

$$\widehat{\phi}_{xx}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{I}_N(ja) \overline{W}_M(j(\omega-a)) da \quad (5.21)$$

όπου $\overline{W}_M(j\omega)$ αντιπροσωπεύει το φάσμα ενός παραθύρου δεδομένων μήκους $2M-1$ με $M < N$. Αντίστοιχα, μπορούμε να υπολογίσουμε την εκτίμηση αυτοσυσχέτισης στην Εξίσ. (5.9), να την πολλαπλασιάσουμε με την ακολουθία παραθύρου και έπειτα να την μετασχηματίσουμε, ακολούθως:

$$\widehat{\phi}_{xx}(j\omega) = \sum_{l=-(M-1)}^{M-1} \widehat{\phi}_{xx}(l) w_l e^{-j\omega T} \quad (5.22)$$

Αυτό είναι γνωστό ως ο φασματικός εκτιμητής Blackman - Tukey. Με τυχαία σήματα είναι ακριβές όταν η ακολουθία παραθύρου, μήκους $2M-1$ είναι αρκετά μακροσκελής για να καλύψει ουσιαστικά όλα τα μη - μηδενικά τμήματα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

Για να μελετήσουμε την επίδραση της παραθυροποίησης στο δυναμικό της φασματικής εκτίμησης εξετάζουμε την αναμενόμενη αξία της Εξίσ. (5.21), η οποία είναι:

$$\begin{aligned} E[\widehat{\phi}_{xx}(j\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E[\bar{I}_N(ja)] \overline{W}_M(j(\omega-a)) da \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\phi}_{xx}(j\beta) \overline{W}_{BT}(j(a-\beta)) \overline{W}_M(j(\omega-a)) d\beta da \quad (5.23) \end{aligned}$$

η οποία είναι μια διπλή περίπλεξη περιλαμβάνοντας το φάσμα παραθύρου του Barlett (το οποίο προκύπτει φυσικά, οφειλόμενο

στον πεπερασμένο αριθμό των σημείων δεδομένων στην εκτίμηση αυτοσυσχέτισης), και το φάσμα παραθύρου της επιλογής μας. Αν M είναι μικρό συγκρινόμενο με το N , τότε ο κυρίως λωβός του $\overline{W}_M(j\omega)$ θα είναι ευρύς συγκρινόμενος με το $\overline{W}_{BT}(j\omega)$, και η παράσταση παραπάνω μπορεί να είναι περίπου έτσι

$$E[\widehat{\phi}_{xx}(j\omega)] \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\phi}_{xx}(ja) \overline{W}_M(j(\omega-a)) da \quad (5.24)$$

Αυτό το αποτέλεσμα θα πρέπει να συγκριθεί με την Εξ. (5.14) για το μη παραθυροποιημένο περιοδόγραμμα. Όπως και με την προηγούμενη μέθοδο, σημειώνουμε μια αύξηση στο δυναμικό της εκτίμησης που οφείλεται στην αύξηση πλάτους του κυρίως λωβού της συνάρτησης παραθύρου.

Μια προσεγγιστική παράσταση για την μεταβλητότητα της $\widehat{\phi}_{xx}(j\omega)$ είναι στενό σε σχέση με την μεταβολή στην $\overline{\phi}(j\omega)$, ενώ στην ίδια στιγμή το εύρος συγκρίνεται με την συνάρτηση $(\sin[\omega TN/2]/\sin[\omega T/2])^2$, τότε η μεταβλητότητα μπορεί να υπολογιστεί κατά προσέγγιση ως

$$V[\widehat{\phi}_{xx}(j\omega)] \approx \frac{1}{2\pi N} \overline{\phi}_{xx}^2(j\omega) \int_{-\pi}^{\pi} \overline{W}_M^2(ja) da \quad (5.25)$$

Αυτή η παράσταση θα πρέπει να συγκριθεί με την Εξ. (5.15) για το περιοδόγραμμα. Για ένα ευρύ N , η παράσταση στην Εξ.

(5.15) είναι κατά προσέγγιση $\bar{\phi}_{xx}^2(j\omega)$. Ο λόγος της Εξ. (5.25) σ' αυτό τον κατά προσέγγιση υπολογισμό αποκαλείται ο λόγος μεταβλητότητας:

$$= \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{W}_M^2(j\omega) d\omega \quad (5.26)$$

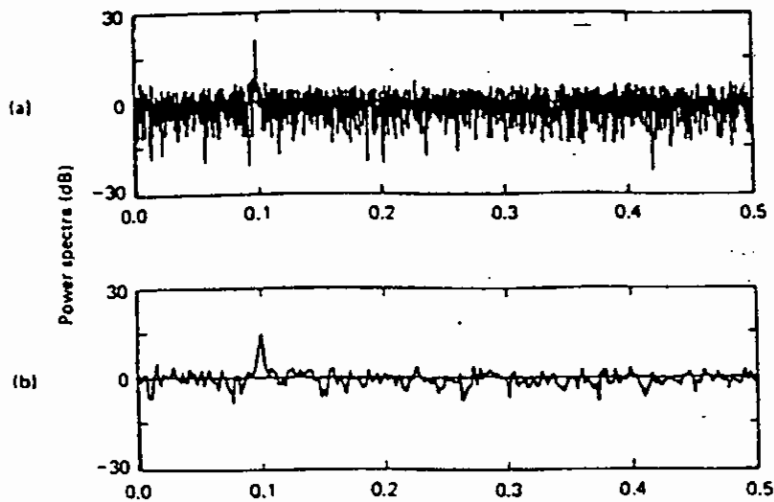
Για να πραγματοποιήσουμε μείωση στην μεταβλητότητα, ο λόγος μεταβλητότητας πρέπει να είναι λιγότερος από 1. Όπως φαίνεται στον Πίνακα (5.1), με την κατάλληλη επιλογή του M , ο λόγος μπορεί να γίνει λιγότερος 2 από 1 και μια μείωση στην μεταβλητότητα μπορεί να αποκτηθεί. Μια μείωση στην μεταβλητότητα απεικονίζεται στην Εικ. (5.10), η οποία δείχνει το περιοδόγραμμα από μια ακολουθία 4096 σημείων (ημιτόνιο συν λευκός θόρυβος όπως πριν), μορφοποιημένου, μετασχηματίζοντας την εκτίμηση αυτοσυσχέτισης, συγκρινόμενο με την φασματική εκτίμηση αποκτηθείσα χρησιμοποιώντας την Blackman - Tukey μέθοδο με ένα Hanning παράθυρο μήκους 1025.

Η μέθοδος του Welch (1967) συνδυάζει τις ιδέες υπολογισμού μέσης τιμής και παραθυροποίησης σε μια μοναδική ενοποιητική προσέγγιση.

Δειγματικές αναλογίες για κάποιες διάσημες συναρτήσεις παραθύρων

Window	Approximate Variance Ratio $\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{W^2}(\omega) d\omega$
Rectangular	$\frac{2M}{N}$
Bartlett	$\frac{2M}{3N}$
Hanning	$\frac{3M}{4N}$
Hamming	$\frac{4M}{5N}$

Τυχαίες συναρτήσεις και φασματική εκτίμηση



Σχ.5.10. Πεδιόγραμμα ενός 4096 δρ συνάρτησης και εκτίμηση φάσματος χρησιμοποιώντας την μέθοδο Blackman -Tukey με την Hanning συνάρτηση παραθύρου μήκους 1025 δρ.

Όπως στην μέθοδο του Barlett, τα δεδομένα διαχωρίζονται σε K σύνολα στοιχείων μήκους M . Έπειτα, εντούτοις, η συνάρτηση παραθύρου εφαρμόζεται άμεσα σε κάθε σύνολο δεδομένων. Για κάθε σύνολο, ένα τροποποιημένο περιοδόγραμμα μορφοποιείται ακολούθως:

$$\bar{P}_M^i(j\omega) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_n^i w_n e^{-jn\omega T} \right|^2, \quad i=1, 2, \dots, K \quad (5.27)$$

όπου

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w_n^2 \quad (5.28)$$

Ο παράγοντας U είναι ένας παράγοντας κλιμάκωσης ίσος με την μέση τιμή ισχύος στην συνάρτηση παραθύρου. Έπειτα, όπως πριν, η φασματική εκτίμηση μορφοποιείται υπολογίζοντας την μέση τιμή των τροποποιημένων περιοδογραμμμάτων:

$$\hat{\bar{\phi}}_{xx}(j\omega) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \bar{P}_M^i(j\omega) \quad (5.29)$$

Η αναμενόμενη αξία αυτής της φασματικής εκτίμησης είναι

$$E[\hat{\bar{\phi}}_{xx}(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\phi}_{xx}(ja) \bar{W}(j(\omega - a)) da \quad (5.30)$$

η οποία είναι πανομοιότυπη του αποτελέσματος στην Εξισ. (5.14) για το περιοδόγραμμα εκτός του ότι

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w_n e^{-jn\omega T} \right|^2 \quad (5.31)$$

είναι το τωρινό τετράγωνο του φάσματος παραθύρου,

ομαλοποιημένο από τον παράγοντα MU στην Εξίσ. (5.28). Ο ομαλοποιητικός παράγοντας MU , είναι απαραίτητος ώστε η εκτίμηση να είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη. Επίσης, όταν η ακολουθία δεδομένων διαχωρίζεται σε σύνολα χωρίς επικάλυψη, ο Welch (1967) έχει δείξει ότι η μεταβλητότητα της φασματικής εκτίμησης είναι

$$V[\hat{\phi}_{xx}(j\omega)] \approx \frac{\bar{\phi}_{xx}^2(j\omega)}{K} \quad (5.32)$$

Συνεπώς η εκτίμηση είναι αρμονική.

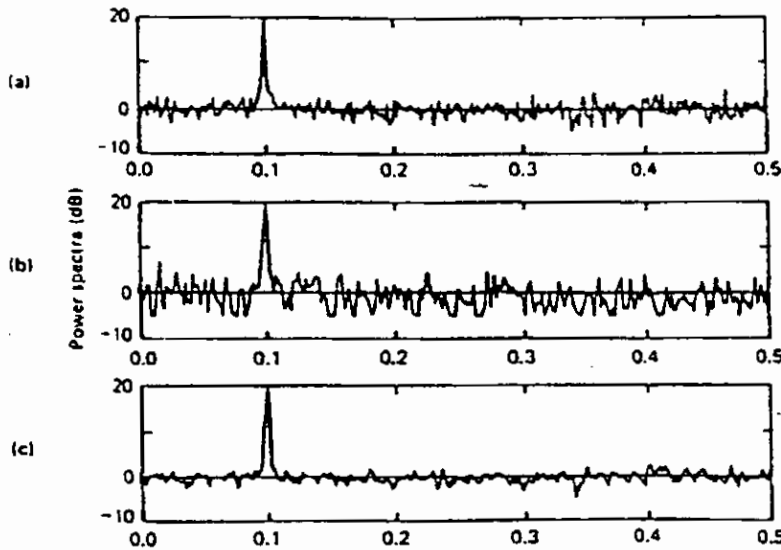
Ο Welch επιδεικνύει ότι για έναν καθορισμένο αριθμό N σημείων δεδομένων, είναι δυνατόν να αυξηθεί η μείωση στην μεταβλητότητα, υπερκαλύπτοντας τα σύνολα. Σ' αυτή την περίπτωση η παράσταση στην Εξίσ. (5.32) γίνεται

$$V[\hat{\phi}_{xx}(j\omega)] \approx A \frac{\bar{\phi}_{xx}^2(j\omega)}{K} \quad (5.33)$$

όπου A είναι μια θετική σταθερά ελαφρώς μεγαλύτερη από 1 η οποία εξαρτάται από το ποσό της επικάλυψης. Η μεταβλητότητα στην Εξ. (5.33) είναι γενικά μικρότερη απ' αυτή στην Εξ. (5.32) γιατί υπάρχουν περισσότερα σύνολα και συνεπώς η αξία του K είναι μεγαλύτερη όταν εφαρμόζεται υπερκάλυψη. Συνεπώς, έχουμε δει ότι η μέθοδος του Welch είναι μια αρμονική εκτίμηση που παρέχει μερικό έλεγχο στην διαρροή μέσω της επιλογής μιας συνάρτησης παραθύρου.

Ένα παράδειγμα σύγκρισης ανάμεσα στην μέθοδο Welch και την μέθοδο υπολογισμού μέσης τιμής περιοδογράμματος και την

μέθοδο Blackman - Tukey παρουσιάζεται στην Εικ. (5.11). Σε όλες τις τρεις περιπτώσεις ένα σύνολο 4096 σημείων δεδομένων χρησιμοποιούνται. Και η μέθοδος Welch και η μέθοδος υπολογισμού μέσης τιμής περιοδογράμματος διαχωρίζουν τα δεδομένα σε σύνολα μεγέθους 512. Στην μέθοδο του Welch τα σύνολα επικαλύπτονται κατά το 50%. Και η μέθοδος Welch και η μέθοδος Blackman - Tukey εφαρμόζουν το παράθυρο Hanning. Η μέθοδος Welch φαίνεται σ' αυτό το παράδειγμα να είναι η καλύτερη στην μείωση της μεταβλητότητας και παρόλα αυτά διατηρεί καλή φασματική ευκρίνεια.



Σχ. 5.11. Φασματικές εκτιμήσεις μίας 4096 *dp* συνάρτησης χρησιμοποιώντας α) μια μέση τιμή περιοδιαγραμματικής μεθόδου με 8 παραμέτρους των 512 *dp*. β) τη μέθοδο Blackman - Tukey με ένα 1025 Hanning παράθυρο και γ) με τη μέθοδο Welch με παραμέτρους που μεταβάλλονται κατά 50% χρησιμοποιώντας ένα παράθυρο Hanning.

5.5. Παραμετρικοί μέθοδοι φασματικής εκτίμησης

Σ' αυτό το τμήμα συζητούμε τις παραμετρικές μεθόδους της φασματικής εκτίμησης. Αυτές οι μέθοδοι είναι ευδιάκριτα διαφορετικές από εκείνες στα δύο προηγούμενα τμήματα στο ότι υιοθετούν ένα συγκεκριμένο μοντέλο για το φάσμα σήματος. Δηλαδή, το φάσμα σήματος υιοθετείται για να αναλάβει μια συγκεκριμένη συναρτησιακή μορφή, οι παράμετροι της οποίας είναι άγνωστοι. Το πρόβλημα της φασματικής εκτίμησης τότε, είναι αυτό της εκτίμησης των άγνωστων παραμέτρων του μοντέλου παρά αυτό της εκτίμησης του ίδιου του φάσματος. Το φάσμα μορφοποιείται αντικαθιστώντας αυτές τις παραμέτρους στο μοντέλο.

Τα πιο δημοφιλή μοντέλα που χρησιμοποιούνται στην φασματική εκτίμηση είναι ρητά μοντέλα πεπερασμένης παραμέτρου της μορφής

$$\widehat{\Phi}(j\omega) = \sigma^2 \left| \frac{1 + b_1 e^{-j\omega T} + b_2 e^{-j2\omega T} + \dots + b_q e^{-jq\omega T}}{1 + a_1 e^{-j\omega T} + a_2 e^{-j2\omega T} + \dots + a_p e^{-jp\omega T}} \right|^2 \quad (5.34)$$

όπου σ^2 είναι μια σταθερά και οι b_i και a_i συντελεστές είναι οι $p+q$ άγνωστοι παράμετροι που θα εκτιμηθούν από τα δεδομένα.

Αντίστοιχα, αυτά τα μοντέλα μπορούν να εκφραστούν

$$\widehat{\phi}(j\omega) = \sigma^2 \left| \widetilde{H}(z) \right|_{z=e^{j\omega T}}^2 \quad (5.35)$$

όπου

$$\widetilde{H}(z) = \frac{\widetilde{B}(z)}{\widetilde{A}(z)} \quad (5.36)$$

και

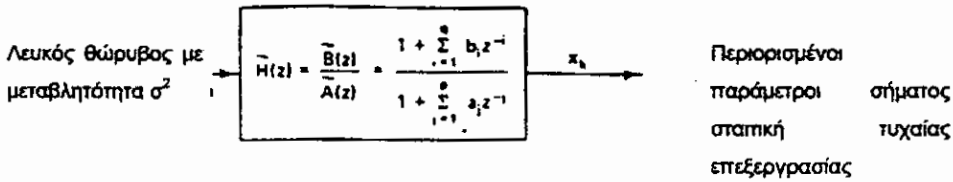
$$\begin{aligned} \widetilde{B}(z) &= 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q} \\ \widetilde{A}(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Μπορούμε να δούμε ότι αυτό το μοντέλο είναι αντιπροσωπευτικό του φάσματος ενός συγκεκριμένου χρόνου τυχαίας επεξεργασίας προκληθείσας από το πέρασμα λευκού θορύβου με μεταβλητότητα σ^2 μέσα από ένα γραμμικό φίλτρο όπως επιδεικνύεται στην Εικ. (5.12). Αυτή είναι ακριβώς η μέθοδος που έχει συζητηθεί προηγουμένως στο τμήμα 5.1 για τις παραγόμενες χρωματικές τυχαίες επεξεργασίες. Το $\widetilde{H}(z)$ συχνά αποκαλείται ένα "κοφτερό" γιατί καθορίζει το φασματικό σχήμα της τυχαίας επεξεργασίας. Η εξίσωση διαφοράς που περιγράφει την σχέση εισόδου - εξόδου για αυτή την επεξεργασία δίνεται από

$$\begin{aligned} x_n = w_n + b_1 w_{n-1} + b_2 w_{n-2} + \dots + b_q w_{n-q} - a_1 x_{n-1} \\ - a_2 x_{n-2} - \dots - a_p x_{n-p} \end{aligned} \quad (5.38)$$

όπου $[w_n]$ είναι μια επεξεργασία λευκού θορύβου με

μεταβλητότητα σ^2 .

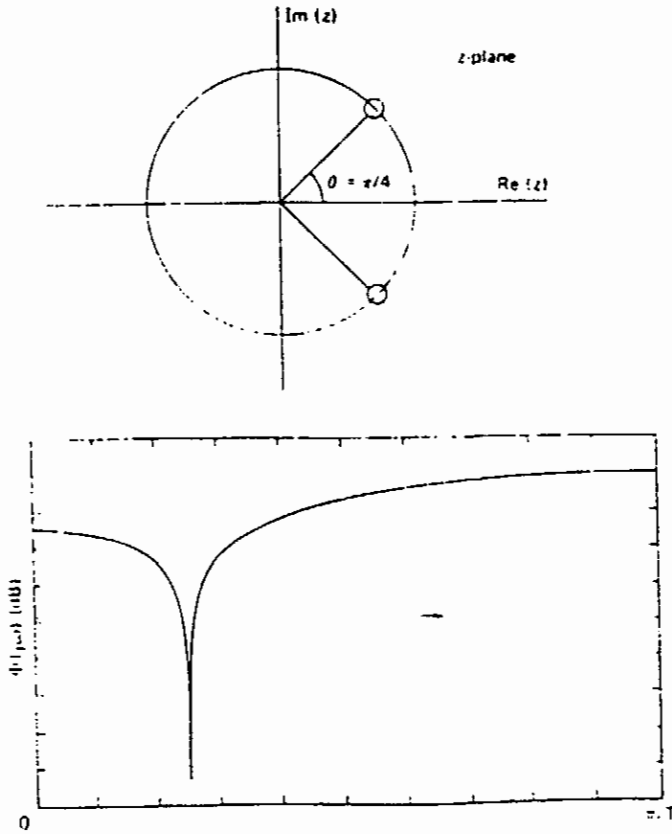


Σχ. 5.12. Παραμετρικοί μέθοδοι για την εκτίμηση φάσματος

Τρεις διαφορετικοί τύποι φασματικών μοντέλων μπορούν να διαχωρισθούν από την Εξισ. (5.34), εξαρτώμενοι από την φύση των συντελεστών του αριθμητή και του παρονομαστή. Τα μοντέλα για τα οποία οι a_i συντελεστές είναι μηδέν ονομάζονται κινούμενα μοντέλα μέσης τιμής (MA). Εκείνα για τα οποία οι b_i συντελεστές είναι μηδέν ονομάζονται αυτοπαλινδρομικά μοντέλα (AR). Μοντέλα για τα οποία κανείς συντελεστής δεν είναι μηδέν (μερικά από τα δύο είναι μηδενικά) ονομάζονται αυτοπαλινδρομικά κινούμενα μέσης τιμής (ARMA) μοντέλα. Στην πράξη, η εκλογή μοντέλου θα πρέπει να βασίζεται σε προηγούμενη γνώση του τρόπου με τον οποίο το σήμα προκαλείται. Δυστυχώς, συχνά δεν έχουμε αυτή την γνώση. Εντούτοις, συχνά γνωρίζουμε το βασικό φασματικό σχήμα του σήματος, και αυτή η γνώση του σήματος και αυτή η γνώση προσφέρει στο να μας βοηθήσει να επιλέξουμε ένα καλό μοντέλο σήματος. Για να το δούμε αυτό, ας κοιτάξουμε εκτενέστερα καθένα από τα τρία μοντέλα.

Τα MA μοντέλα είναι τα πιο ικανά να αντιπροσωπεύουν σήματα

(5.15).

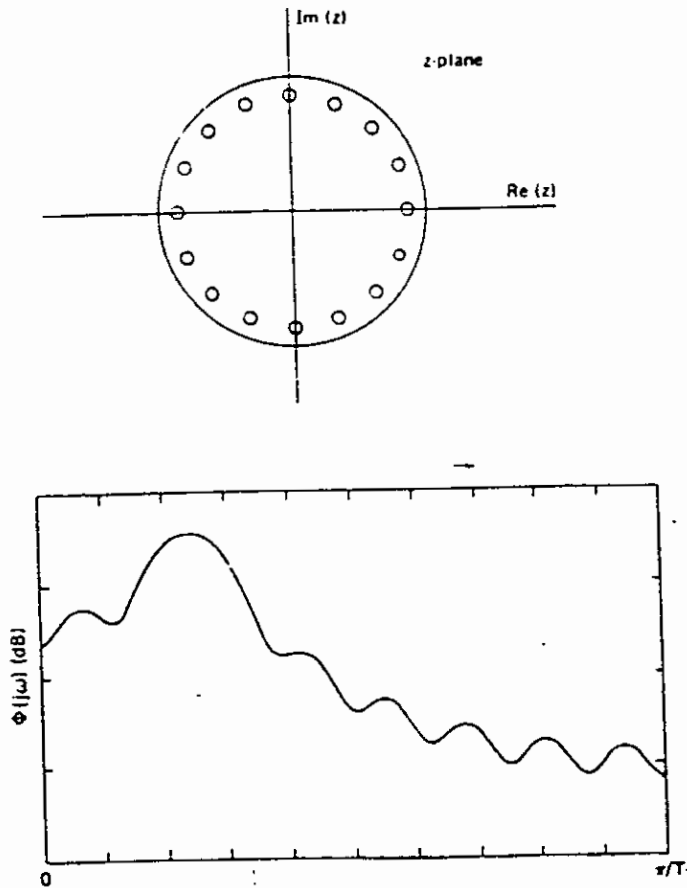


Σχ. 5.14. Αντιπροσωπεύοντας σήματα με φασματικές χαράξεις χρησιμοποιώντας ένα MA μοντέλο με ένα μηδενικό ζευγάρι σε έναν κύκλο μονάδας.

Τυχαίες συναρτήσεις και φασματική εκτίμηση

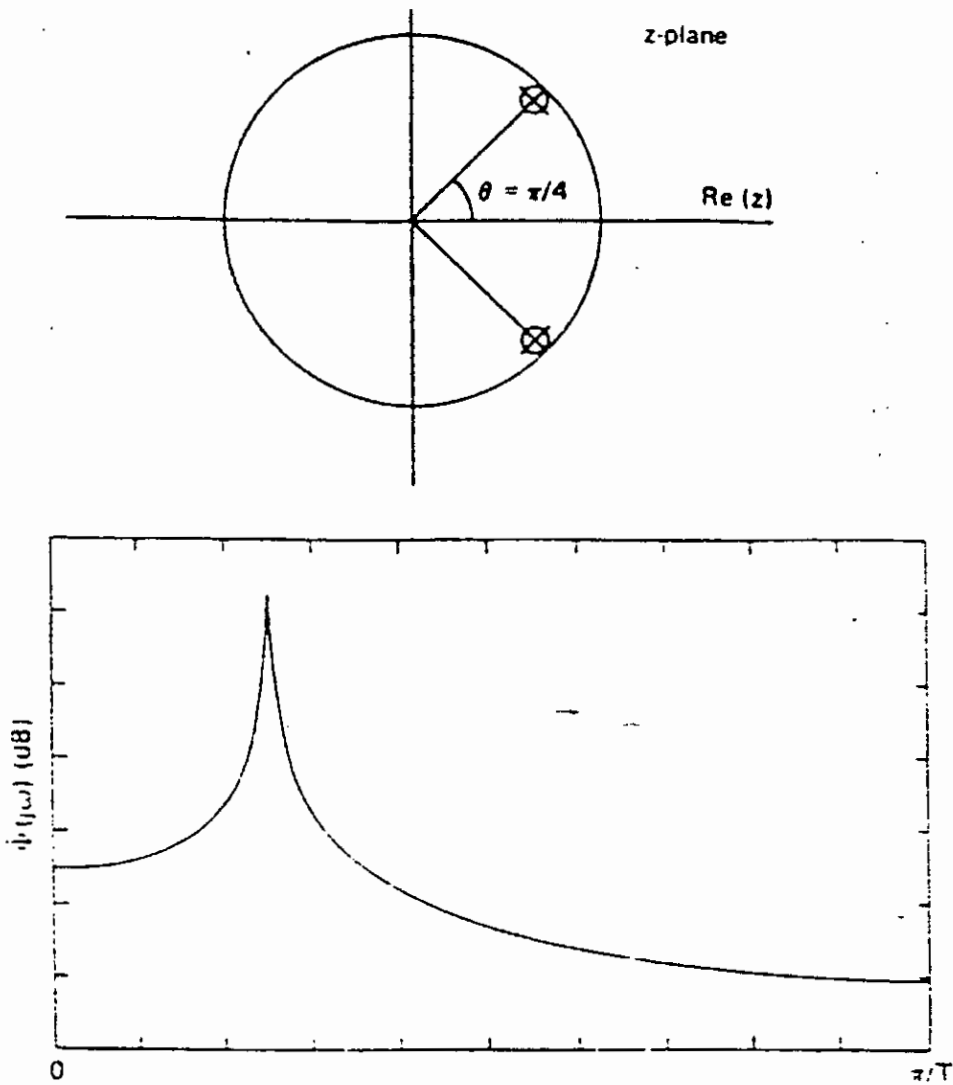
Τα σήματα ευρείας ζώνης μπορούν επίσης να μορφοποιηθούν με ένα AR φίλτρο αλλά, όπως με τα MA μοντέλα, ο συνδυασμός

συστατικών ευρείας στενής περιοχής είναι πιο δύσκολος να σχηματιστεί και γενικά απαιτεί περισσότερους συντελεστές. Αιχμηρές χαράξεις είναι επίσης δύσκολο να μορφοποιηθούν με ένα "όλο - πολικό" μοντέλο.



Σχ. 5.15 χρησιμοποιώντας ένα MA μοντέλο για να αντιπροσωπεύσει ένα σήμα μικρού φάσματος

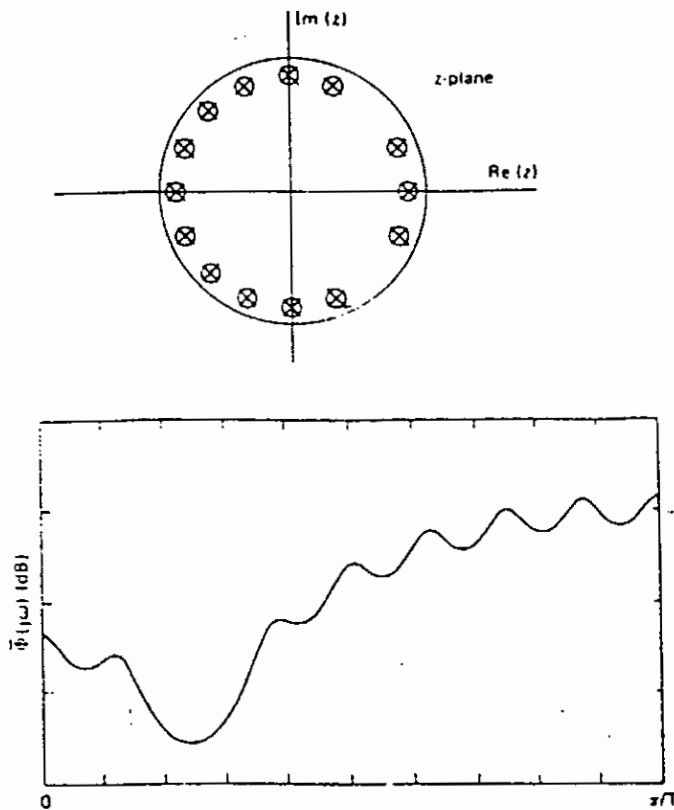
Παραμετρικοί μέθοδοι φασματικής εκτίμησης



Σχ. 5.16. Αντιπροσωπεύοντας ένα σήμα μικρού φάσματος χρησιμοποιώντας ένα AR μοντέλο με ένα πολικό ζευγάρι κοντά σε ένα κύκλο μοναδος

Αρκετοί πόλοι απαιτούνται για να σχηματιστεί με ακρίβεια μια μοναδική χάραξη, όπως επιδεικνύονται στην Εικ. (5.16).

Τα ARMA μοντέλα (πολικά - μηδενικά) μοντέλα είναι γενικά τα πιο εφαρμόσιμα μοντέλα. Είναι ικανά να χαρακτηρίσουν ουσιαστικά όλους τους τύπους των σημάτων. Εντούτοις, οι συντελεστές των ARMA μοντέλων είναι αυτά που αποκτούνται δυσκολότερα.



Σχ. 5.17. Χρησιμοποιώντας ένα AR μοντέλο για να αναπαραστήσει μια φασματική χάραξη.

Στην πράξη, η εκλογή κάποιου φασματικού μοντέλου συχνά κυβερνάται από το ποσό του υπολογισμού που απαιτείται για να σχηματισθεί η εκτίμηση και από την ανθεκτικότητα της μεθόδου που εφαρμόζεται, παρά από τη φύση του ίδιου του σήματος. Τα AR μοντέλα είναι τα πιο εύκολα να αποκτηθούν. Οι εκτιμήσεις των AR παραμέτρων έχουν καθοριστεί, επιλύοντας ένα σύνολο ταυτόχρονων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, όπως θα δούμε. Τα MA μοντέλα είναι πιο δύσκολο ν' αποκτηθούν. Αρκετές μέθοδοι είναι διαθέσιμες για τον υπολογισμό των παραμέτρων του MA μοντέλου, μια από τις οποίες εμπεριέχει να βρεθούν οι ρίζες του q th πολυώνυμου τάξης, μια εργασία που μπορεί να είναι πολύ δύσκολη ακόμα και για πολυώνυμα χαμηλής τάξης. Τα ARMA μοντέλα είναι ακόμα πιο δύσκολο ν' αποκτηθούν. Ξανά, μια ποικιλία μεθόδων είναι διαθέσιμη για να υπολογίζονται οι παράμετροι του μοντέλου. Μια προσέγγιση χρησιμοποιεί μη - γραμμική βελτιστοποίηση αλγόριθμων, οι οποίοι περιπλέκονται σε ασταθείς χρόνους, για να ερευνήσουν για το καλύτερο σύνολο παραμέτρων.

Εφόσον είμαστε αναγκασμένοι να προτιμήσουμε απλές και αυθεντικές μεθόδους, το μοντέλο που χρησιμοποιείται μπορεί να μην είναι αντιπροσωπευτικό του αληθινού τρόπου με τον οποίο προκαλείται το σήμα. Συνεπώς είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οποιοδήποτε ARMA ή MA μοντέλο μπορεί να αντιπροσωπευτεί από ένα οποιοδήποτε AR μοντέλο μιας

αποδοτικής (πιθανώς απειρης) τάξης, και παρομοίως ότι οποιαδήποτε ARMA ή AR επεξεργασία μπορεί να αντιπροσωπευτεί από ένα MA μοντέλο αποδοτικής (πιθανώς απειρης) τάξης.

Αυτές οι ιδιότητες μας βεβαιώνουν ότι ένα λογικό φασματικό μοντέλο μπορεί να αποκτηθεί χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις απλούστερες μεθόδους AR ή MA, αρκεί να διαλέξουμε το αρκετά μεγάλο μέγεθος παραμέτρου.

Το κλειδί για την λύση των παραμέτρων στα AR, MA και ARMA μοντέλα βρίσκεται στις εξισώσεις Yule - Walker των Yule (1927) και Walker (1931), τις οποίες τώρα παράγουμε. Αν θέσουμε $a_0 = b_0 = 1$, η εξίσ. (5.36) μπορεί να ξαναγραφτεί

$$\sum_{i=0}^p a_i x_{n-i} = \sum_{j=0}^q b_j w_{n-j} \quad (5.39)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με x_{n-i} και παίρνοντας αναμενόμενες αξίες δίνει

$$\sum_{i=0}^p a_i E[x_{n-i} x_{n-i}] = \sum_{j=0}^q b_j E[x_{n-i} x_{n-j}]$$

$$\text{ή} \quad (5.40)$$

$$\sum_{i=0}^p a_i \phi_{xx}(l-i) = \sum_{j=0}^q b_j \phi_{xw}(l-j)$$

Από την Εξίσ. (4.74) γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\phi_{xw}(k)$ της διασταυρούμενης συσχέτισης μπορεί να γραφεί

$$\phi_{xw}(k) = \phi_{wx}(-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \phi_{ww}(-k-m) \quad (5.41)$$

όπου h_m είναι η αντίδραση ώθησης του σχηματικού φίλτρου. Υποθέτουμε ότι $\tilde{H}(z)$ είναι αιτιατό έτσι ώστε h_m είναι μηδέν για $m < 0$. Εφόσον w_n είναι μια ακολουθία λευκού θορύβου, η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης δίνεται από

$$\phi_{ww}(i) = \sigma^2 \delta(i) \quad (5.42)$$

Με αυτό το αποτέλεσμα, η Εξ. (5.41) γίνεται

$$\phi_{xw}(k) = \sigma^2 h_{-k} \quad (5.43)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (5.43) στην εξίσωση (5.40) δίνει

$$\sum_{i=0}^p a_i \phi_{xx}(l-i) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q b_j h_{l-j} \quad (5.44)$$

Αυτές οι εξισώσεις για την μεταβλητή l είναι γνωστές ως οι εξισώσεις Yule - Walker. Στην φασματική εκτίμηση η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(l)$ υποτίθεται ότι είναι γνωστή (στην πραγματικότητα, εκτιμάται από τα δεδομένα) και οι άγνωστοι είναι τα a_i και b_i και η αντίδραση ώθησης $[h_m]$ (η οποία από μόνη της είναι μια συνάρτηση των a_i και b_i). Όπως έχει διατυπωθεί νωρίτερα, η επίλυση των ARMA συντελεστών (δηλαδή, και τους

a_i και τους b_i) είναι δύσκολη. Οι μέθοδοι για τις λύσεις ARMA βρίσκονται εκτός πεδίου αυτού του κειμένου. Λύοντας για τους συντελεστές ενός μοντέλου MA, ενώ δεν είναι το ίδιο δύσκολο, απαιτεί επίσης μεθόδους που δεν θα συζητήσουμε εδώ.

Εκτεταμένες επεξεργασίες αυτών των μεθόδων μπορούν να βρεθούν στον κατάλογο πηγών. Για το μοντέλο AR, εντούτοις, μια μοναδική εκτίμηση μπορεί γενικά να βρεθεί επιλύοντας ένα σύνολο $p+1$ γραμμικών εξισώσεων με $p+1$ αγνώστους. Επομένως, υπολογιστικά, η AR μέθοδος είναι κατά πολύ η πλέον απλούστερη των τριών και θα εστιάσουμε σ' αυτή την μέθοδο στο υπόλοιπο αυτού του τμήματος.

Το AR φασματικό μοντέλο μορφοποιείται επιλύοντας τις εξισώσεις Yule - Walker για τις άγνωστες παραμέτρους a_i και b_i μέσω του h_q συνόλου στο μηδέν, και έπειτα αντικαθιστώντας την λύση στην εξίσωση (5.34). Θέτοντας τις b_i παραμέτρους στο μηδέν στην Εξίσ. (5.44) δίνει

$$\sum_{i=0}^p a_i \phi_{xx}(l-i) = \sigma^2 h_{-1} \quad (5.45)$$

Θυμίζουμε ότι h_m είναι αιτιατό έτσι ώστε $h_m = 0$ για $m < 0$. Επιπλέον, βρίσκουμε ότι $h_0 = 1$ χρησιμοποιώντας $a_0 = b_0 = 1$ στις εξισώσεις (5.34) και (5.36). Επομένως, η εξ. (5.45) μπορεί να γραφτεί

$$\sum_{i=0}^p a_i \phi_{xx}(l-i) = \sigma^2, \quad l=0$$

$$= 0, \quad l > 0 \quad (5.46)$$

Αν αξιολογήσουμε αυτή την εξίσωση για $l=0, 1, \dots, p$, αποκτάμε $p+1$ γραμμικές εξισώσεις στους $p+1$ αγνώστους. (Στην πράξη, σ^2 είναι επίσης, μια άγνωστος). Εφόσον η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(l)$ είναι συμμετρική, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν στον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \dots & \phi_{xx}(p) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \dots & \phi_{xx}(p-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \phi_{xx}(p) & \phi_{xx}(p-1) & \dots & \dots & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό πίνακα έχουμε

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & P^T \\ P & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

όπου

$$A^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p]$$

$$P^T = [\phi_{xx}(1) \quad \phi_{xx}(2) \quad \dots \quad \phi_{xx}(p)] \quad (5.49)$$

και

$$R = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \dots & \phi_{xx}(p-1) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \dots & \phi_{xx}(p-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \phi_{xx}(p-1) & \phi_{xx}(p-2) & \dots & \dots & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό του Πίνακα στην Εξίσ. 15.48 παραπάνω δίνει

$$\phi_{xx}(0) + P^T A = \sigma^2 \quad (5.51)$$

$$P + RA = 0 \quad (5.52)$$

Λύνοντας την Εξίσ. (5.52) για τον άγνωστο συντελεστή ανύσματος A παράγει

$$RA = -P \quad \text{ή} \quad A = -R^{-1}P \quad (5.53)$$

Η AR φασματική εκτίμηση στην Εξ. 15.37 τότε παίρνει την μορφή

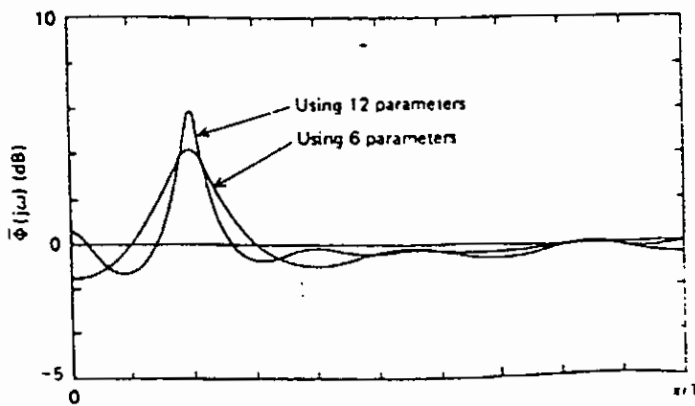
$$\hat{\phi}(j\omega) = \frac{\phi_{xx}(0) + P^T A}{|1 + a_1 e^{-j\omega T} + a_2 e^{-j2\omega T} + \dots + a_p e^{-jp\omega T}|^2} \quad (5.54)$$

Συνοπτικά, τα ακόλουθα βήματα απαιτούνται για να σχηματιστεί η AR φασματική εκτίμηση:

1. Χρησιμοποιήστε τα δείγματα δεδομένων για να υπολογίσετε μια εκτίμηση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $\hat{\phi}_{xx}(l)$, για $0 \leq l \leq p$.

2. Χρησιμοποιήστε τις εκτιμήσεις αυτοσχέτισης στην εξίσωση (5.53) για να επιλύσετε για τους AR συντελεστές.
3. Αντικαταστήστε τους εξαγόμενους AR συντελεστές στην παράσταση της Εξ. (5.54) για να αποκτήσετε την φασματική εκτίμηση.

Ένα παράδειγμα μιας AR φασματικής εκτίμησης για ένα ημιτόνιο σε λευκό θόρυβο φαίνεται στην Εικ. (5.17). Η εκτίμηση γίνεται πιο ακριβής καθώς ο αριθμός των παραμέτρων (AR συντελεστές) αυξάνεται, αλλά ακόμα και με ένα μικρό αριθμό παραμέτρων η φύση του φάσματος σήματος είναι καταφανής. Όταν συγκρίνεται με τις εκτιμήσεις που βασίζονται στο περιοδόγραμμα στο προηγούμενο τμήμα, η AR εκτίμηση φαίνεται να είναι πιο λεία, ενώ οι μέθοδοι περιοδογράμματος αποκαλύπτουν περισσότερες λεπτομέρειες στο φάσμα.



Σχ. 5.19. Τυχαίες συναρτήσεις και εκτίμηση φάσματος

Όπως έχει σημειωθεί προηγούμενα, υπάρχει ικανή ομοιότητα μεταξύ των βημάτων 1 και 2 της μεθόδου για την επίλυση του προβλήματος σχεδιασμού μη επαναλαμβανόμενων ελάχιστων τετραγώνων. Στην πραγματικότητα, εκτός μιας διαφοράς στο σήμα, οι AR συντελεστές είναι πανομοιότυποι με την λύση ελάχιστων τετραγώνων για τα βάρη μιας πρόγνωσης ενός βήματος. Γι' αυτό το λόγο η AR μέθοδος για τον υπολογισμό της φασματικής εκτίμησης ονομάζεται επίσης η γραμμική μέθοδος πρόγνωσης. Αυτή η ίδια φασματική εκτίμηση μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις και επομένως της δίνονται αρκετά διαφορετικά ονόματα στην βιβλιογραφία. Η πιο συνηθισμένη είναι η μέθοδος γραμμικής πρόγνωσης, η μέγιστη (ME) μέθοδος ευτροπείας και η μέγιστη πιο πιθανή μέθοδος (ML). Παραγωγές που χρησιμοποιούν την προσέγγιση μέγιστης ευτροπείας μπορούν να απαντηθούν στον Burg (1975), στον Haykin (1979), στον Kay (1987) και στον Marple (1987), και εκείνες που χρησιμοποιούν την μέγιστη πιο πιθανή προσέγγιση στους Lim και Oppenheim (1988), στον Kay (1987) και στον Marple (1987).

Είναι δύσκολο ν' απαιτήσουμε μια γενική αναλυτική παράσταση για τις στατιστικές ιδιότητες του AR μοντέλου. Ο Kromer (1970), εντούτοις έχει μελετήσει τις ασυμπτωτικές ιδιότητες του και έχει δείξει ότι όταν p και N (ο αριθμός των δειγμάτων που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό της συσχετικής εκτίμησης)

είναι αρκετά ευρείς και το αληθινό φάσμα είναι λογικά λείο, η AR φασματική εκτίμηση είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη. Περαιτέρω, η μεταβλητότητα έχει δειχθεί να είναι

$$V[\hat{\phi}(j\omega)] = \frac{2p}{N} \hat{\phi}(j\omega)^2 \quad (5.55)$$

Αυτή η παράσταση φαίνεται να προσεγγίζει το μηδέν καθώς το N αυξάνει. Ετσι, όπως περισσότερες από τις μεθόδους περιοδογράμματος στην προηγούμενη παράγραφο, το AR μοντέλο παράγει μια αρμονική εκτίμηση.

Κεφάλαιο 6^ο

Εφαρμογή σε σήματα πραγματικού χρόνου

Πορεία εργασιών στο πακέτο επεξεργασίας Matlab

Το χρονικό διάστημα που εκπονήθηκε η πτυχιακή εργασία έγινε εφαρμογή του θεωρητικού μέρους σε σήματα πραγματικού χρόνου για το διάστημα από 12/06/93 έως 12/08/93.

Το παραπάνω χρονικό διάστημα για το οποίο ελήφθησαν οι μετρήσεις και έγινε επεξεργασία των σημάτων δεν είναι τυχαίο.

Στο διάστημα αυτό ανήκει και η ημερομηνία 15/07/93 για την οποία 5 κανάλια μετρήσεων κατέγραφαν επί 24 ώρες τις μεταβολές τάσεων στα ηλεκτρόδια τους που προκάλούσε η σεισμική δόνηση των 5,4ριχτερ που σημειώθηκε στην ευρύτερη περιοχή των Πατρών.

Οι μετρήσεις ελήφθησαν από τα συστήματα του Πρόδρομου Ινστιτούτου Γεωλογικών Ερευνών του πανεπιστημίου Πατρών με την βοήθεια και την καθοδήγηση του καθηγητή κ.Α.Υφαντη.

Η διάταξη των συστημάτων μέτρησης του Ινστιτούτου περιληπτικά αποτελείται από 5 ηλεκτρόδια εμφυτευμένα σε επιλεγμένα σημεία της πόλης και σε μεγάλο βάθος .

Τα ηλεκτρόδια αυτά μεταβιβάζουν τις μεταβολές τις τάσης ως προς το δυναμικό της γης που προκαλούνται κατά την διάρκεια σεισμικών δονήσεων.

Οι μεταβολές αυτές μετρούνται και καταγράφονται από ειδικές

μονάδες μέτρησης και καταγραφής ενώ παράλληλα ένας μετατροπέας A/D αναλαμβάνει την μετατροπή των αναλογικών σημάτων (καναλιών) σε ψηφιακά σήματα και την εισαγωγή αυτών στον Η/Υ για την παρακάτω επεξεργασία.

Τα ψηφιακά πλέον σήματα τα οποία μεταφράζονται ως σημεία αποθηκεύονται σε μονάδα σκληρού δίσκου στον Η/Υ σε αρχεία ανά ημέρα της μορφής (12063 π.χ. για την ημέρα 12/06/93) με συχνότητα δειγματοληψίας 4320 σημείων ανά ημέρα.

****DIRECTORY: C:\MATLAB\SYMATA**

Επειδή ο όγκος της πληροφορίας που μεταφέρουν τα αρχεία αυτά είναι υπερβολικά μεγάλος για επεξεργασία τα αρχεία τροποποιήθηκαν με την βοήθεια του προγράμματος RW_6C.EXE ώστε να μπορούν να εισαχθούν στο πρόγραμμα Matlab για επεξεργασία.

Το πρόγραμμα αυτό παραχωρήθηκε στους σπουδαστές που πραγματοποίησαν την πτυχιακή εργασία από τον καθηγητή κ.Α. Υφαντη.

Σκοπός του προγράμματος είναι να διαχωρίσει τα 4320 σημεία δειγματοληψίας ανά ημέρα του κάθε αρχείου σε 5 κανάλια δειγματοληψίας που αντιστοιχούν στα 5 ηλεκτρόδια που περιγράψαμε παραπάνω.

Έτσι δημιουργήθηκαν αρχεία της μορφής

s120630 που αντιστοιχεί στα σήματα που κατέγραψε το κανάλι 0 στις 12/06/93.

Αντίστοιχα για την ίδια ημερομηνία τροποποιήθηκαν τα υπόλοιπα κανάλια μετρήσεων από 1 έως 4.

Η παραπάνω διαδικασία επαναλήφθηκε για όλο το χρονικό διάστημα που αναφέρονται οι μετρήσεις δηλαδή από 12/06/93 έως 12/08/93.

Η συμβολή του προγράμματος για την εκτέλεση του παραπάνω διαχωρισμού ήταν σημαντική αν και αρκετά επίπονη λόγω της επαναληπτικής διαδικασίας που απαιτούσε.

Τα τροποποιημένα πλέον αρχεία (κανάλια) είναι έτοιμα για εισαγωγή και επεξεργασία στο πρόγραμμα ανάλυσης Matlab.

****DIRECTORY :C:\MTLAB\SYMATA1**

λόγω απουσίας μετρήσεων ορισμένων ημερών που αντιστοιχούν

στα αρχεία	ΗΜ/ΝΙΑ	ΚΑΝΑΛΙΑ
------------	--------	---------

s19063	0 - 4	
--------	-------	--

s14073	"	
--------	---	--

s14073β	"	
---------	---	--

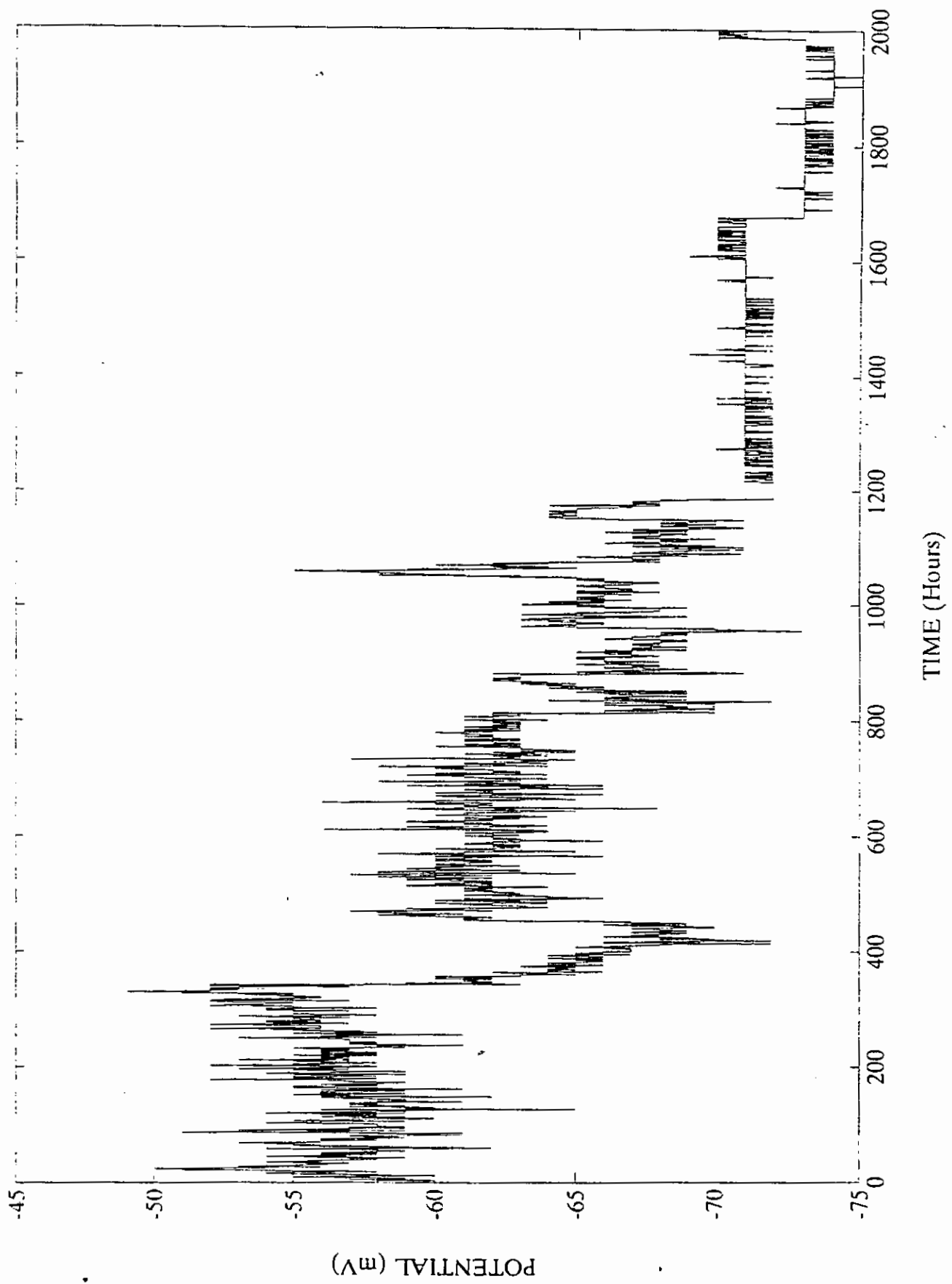
s23073α	"	
---------	---	--

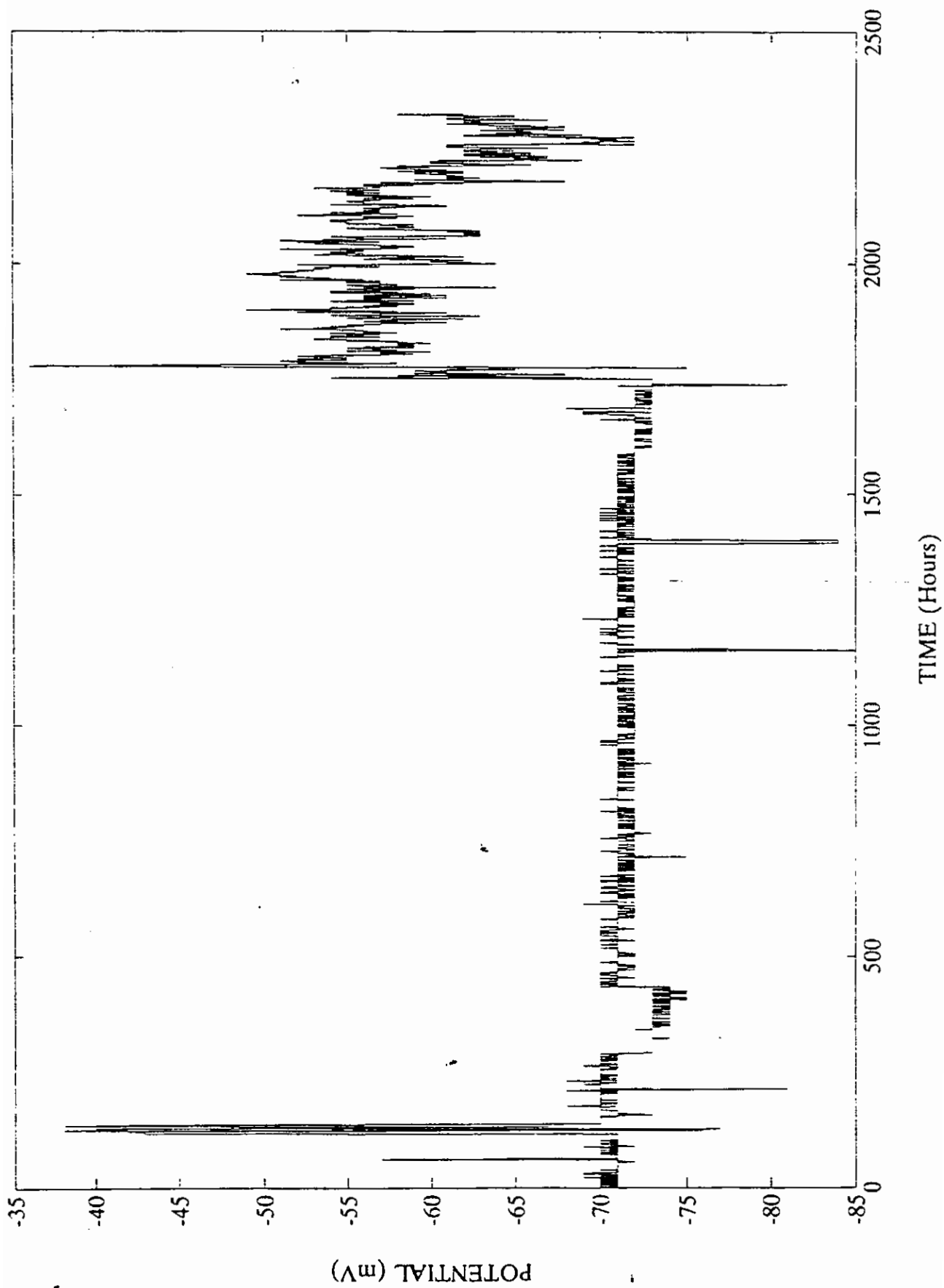
s23073	"	
--------	---	--

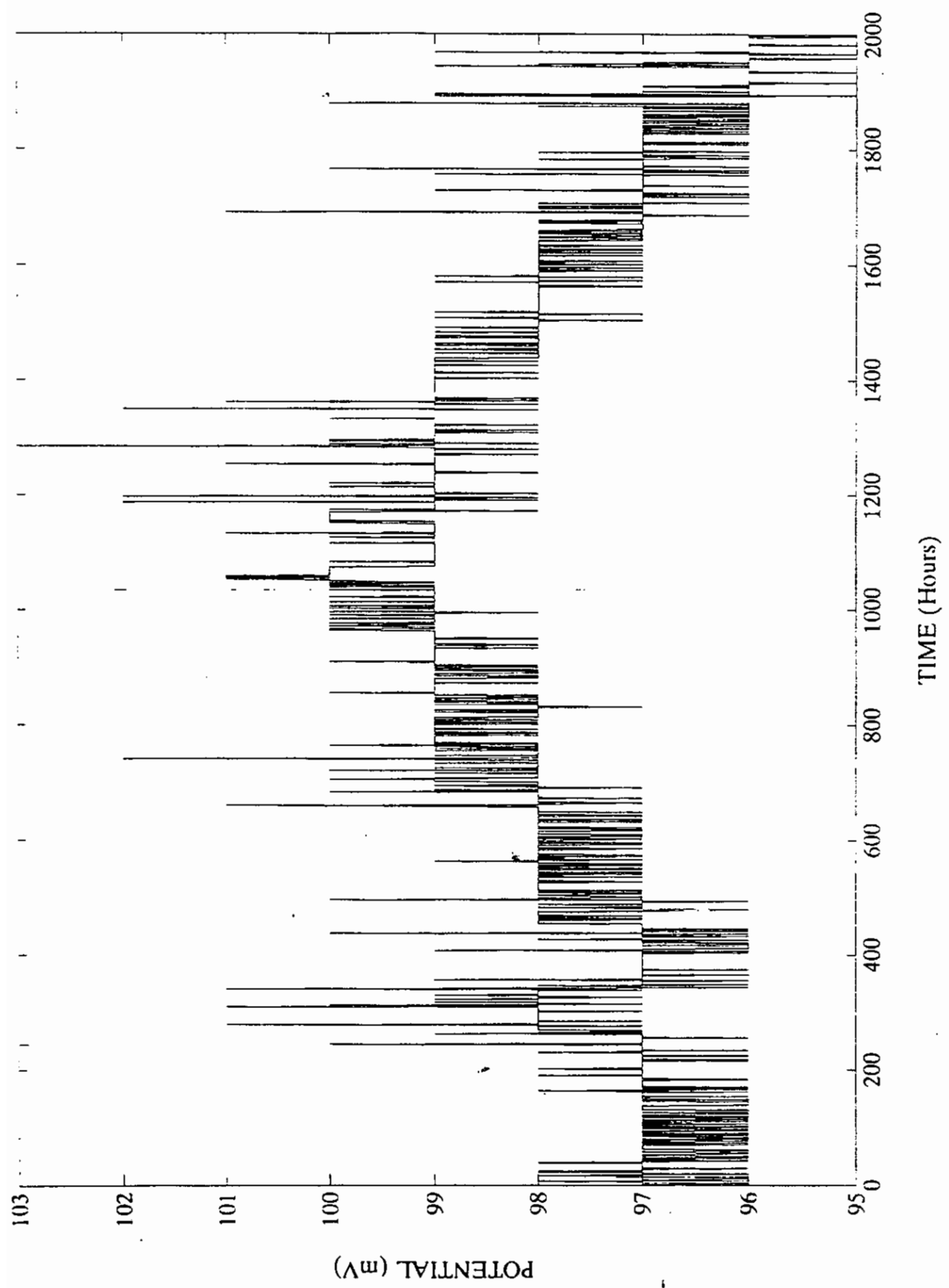
s03083	"	
--------	---	--

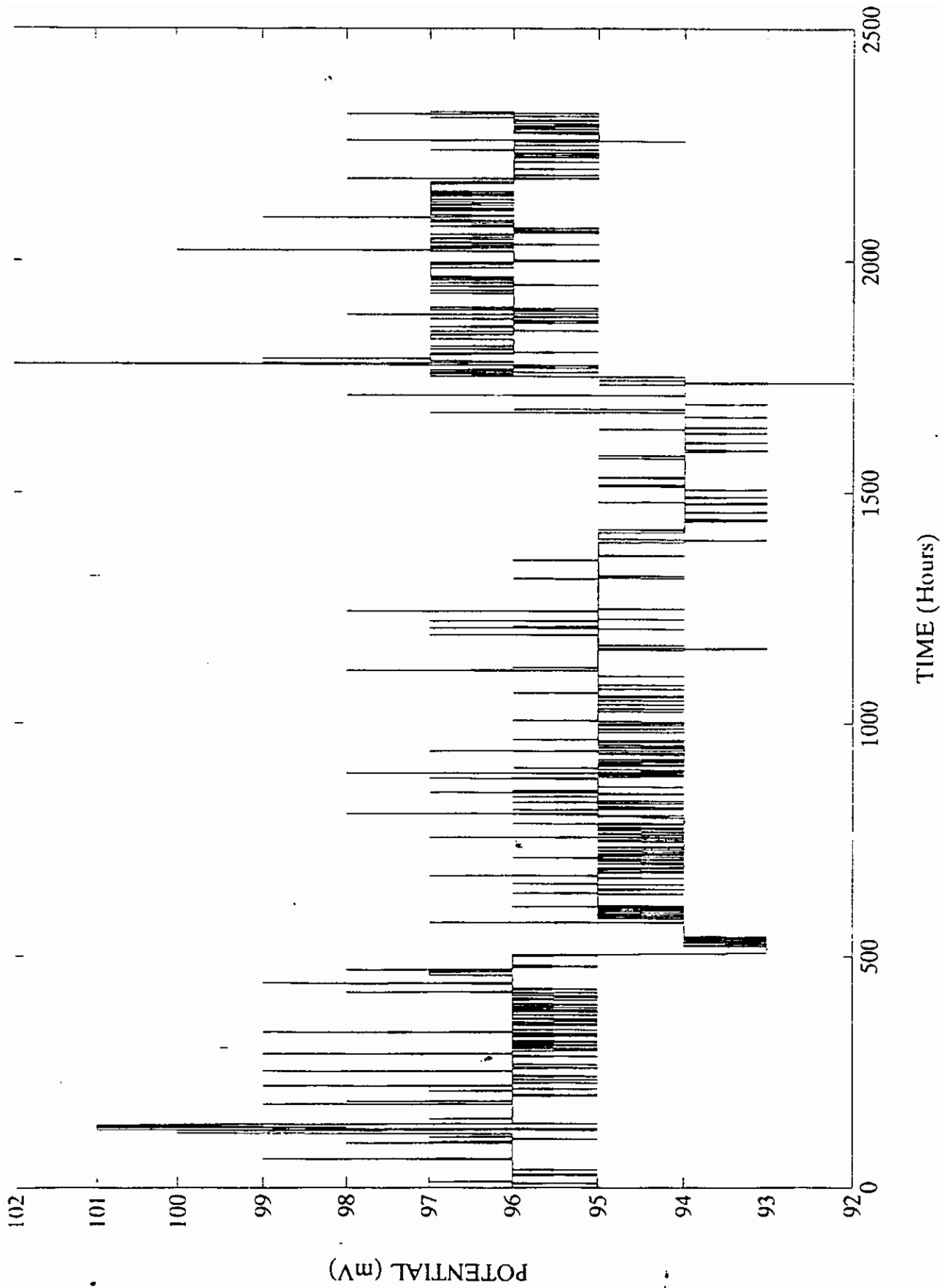
δημιουργήθηκαν έξι (6) αρχεία με τιμές που ορίζονται από τις πλησιέστερες ήμερομηνίες των χαμένων αρχείων.

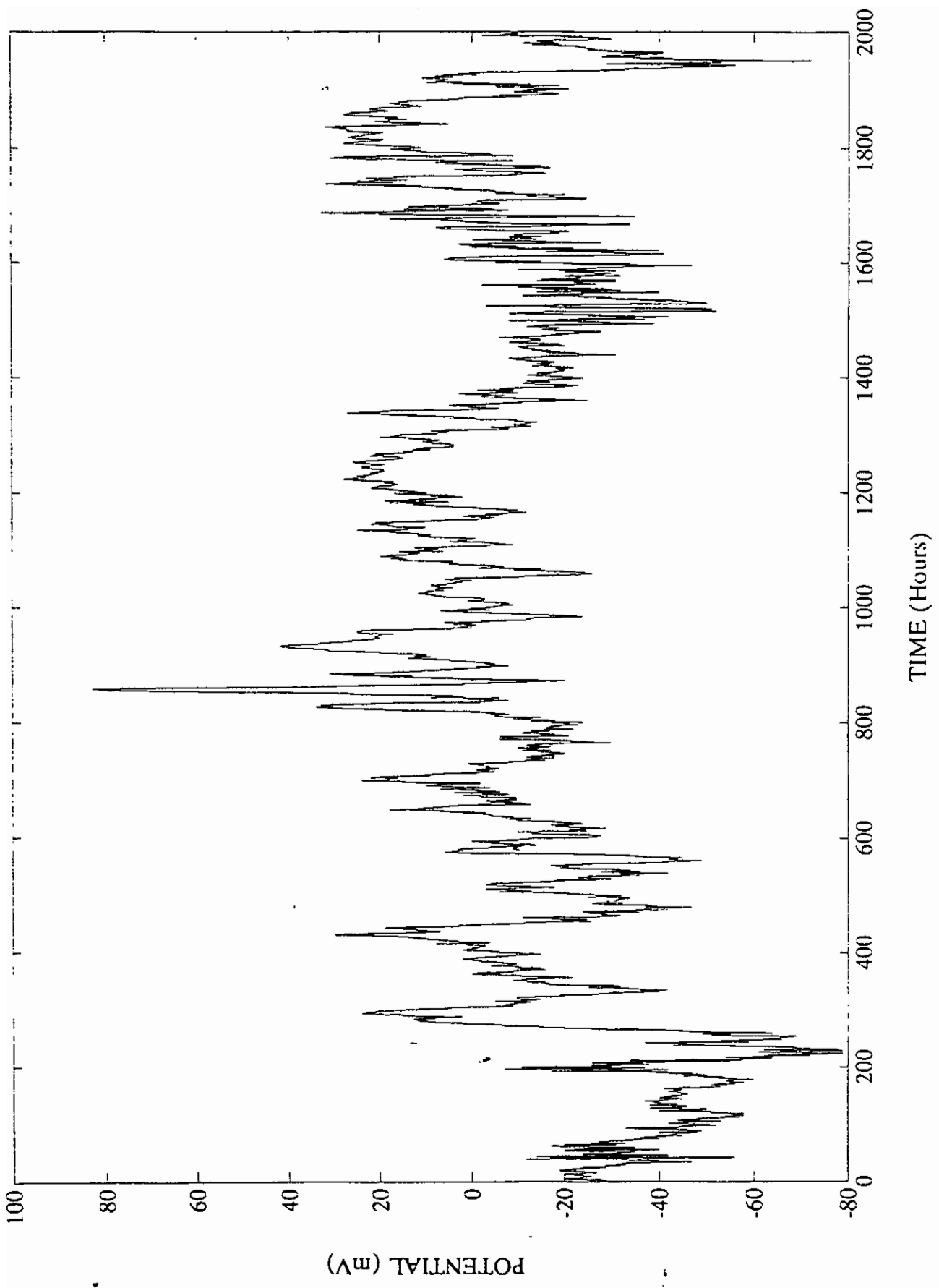
Οι κυματομορφές μέρους των αρχείων αυτών φαίνονται στις επόμενες εκτυπώσεις.

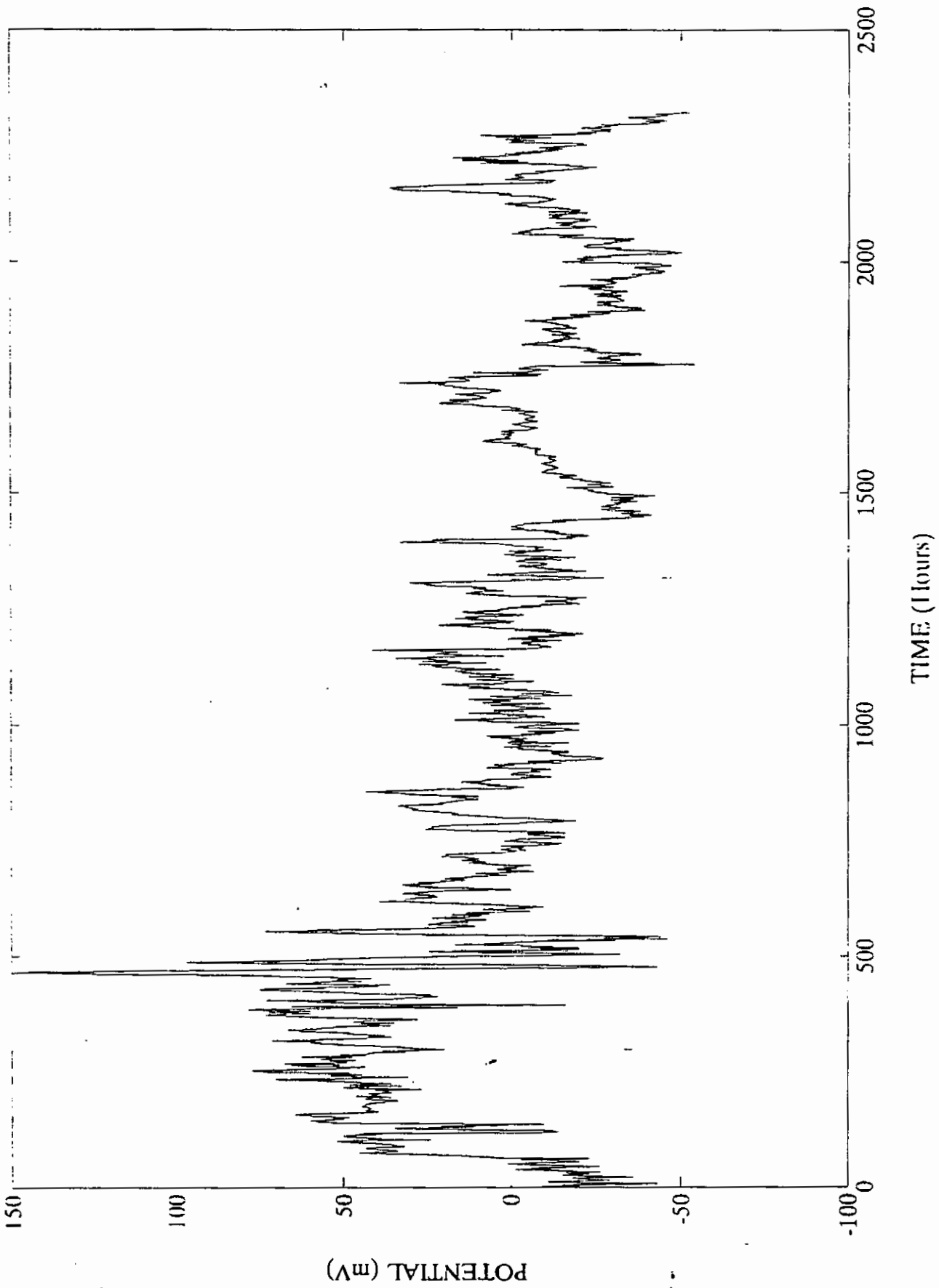


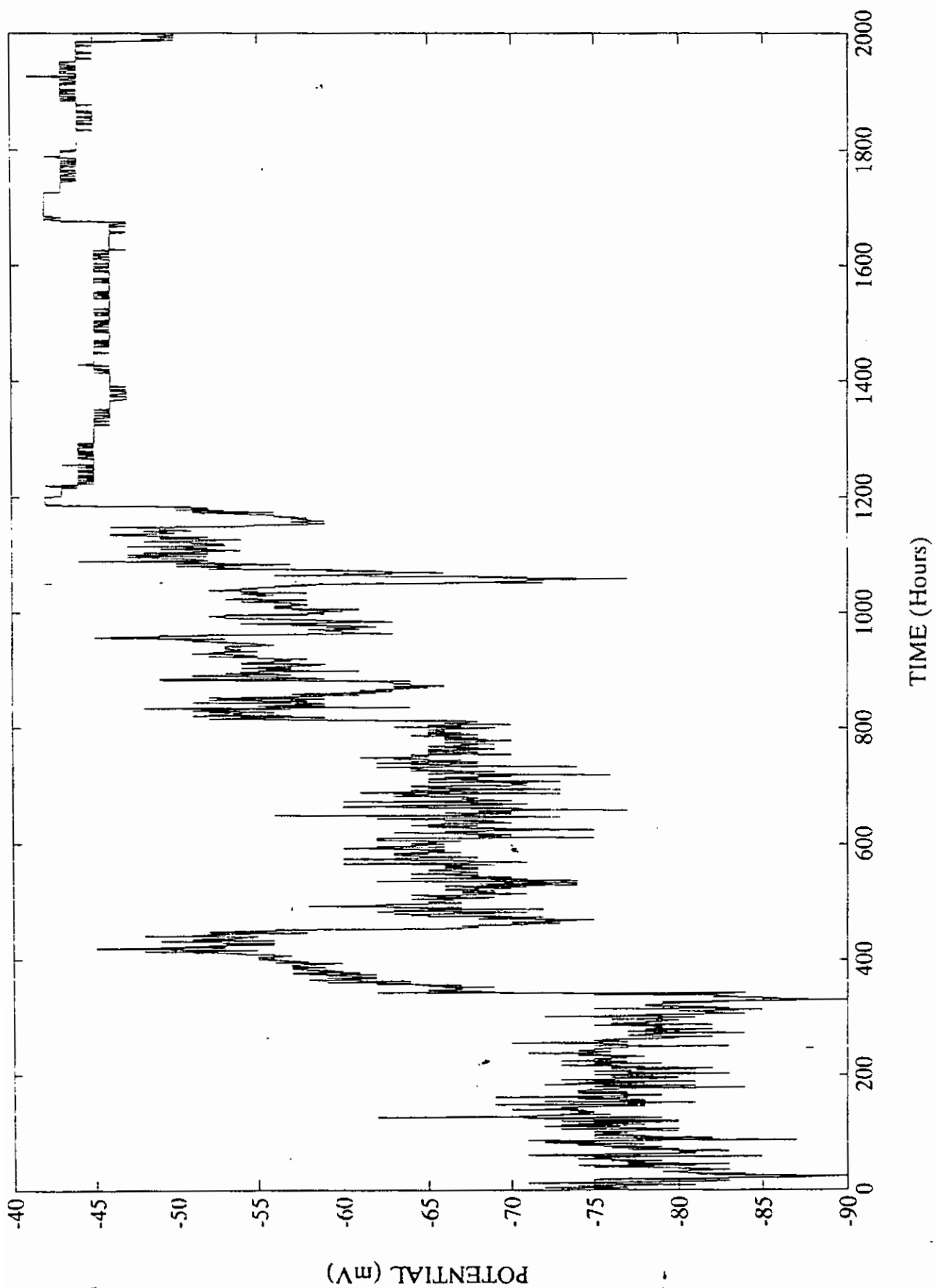


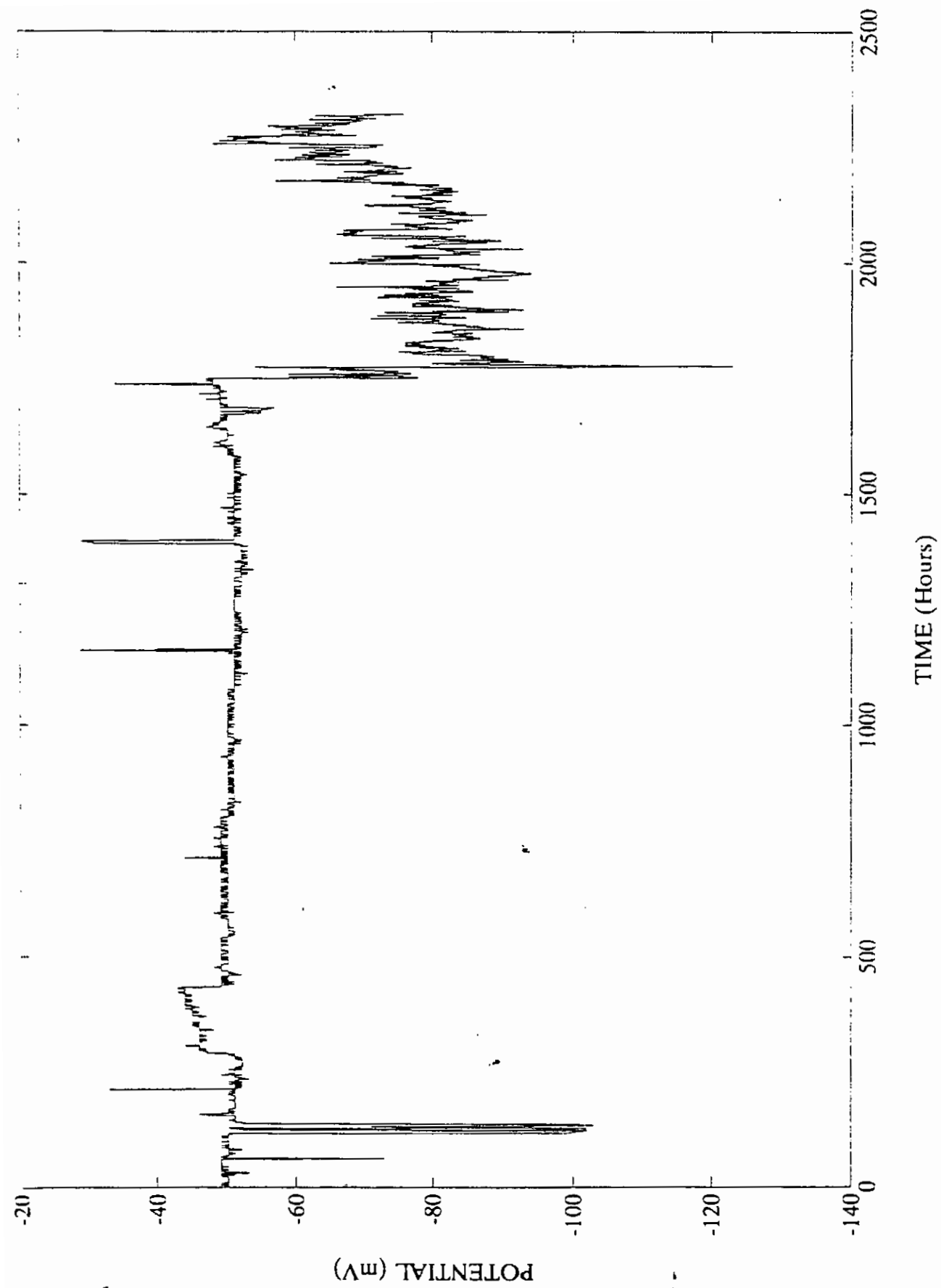


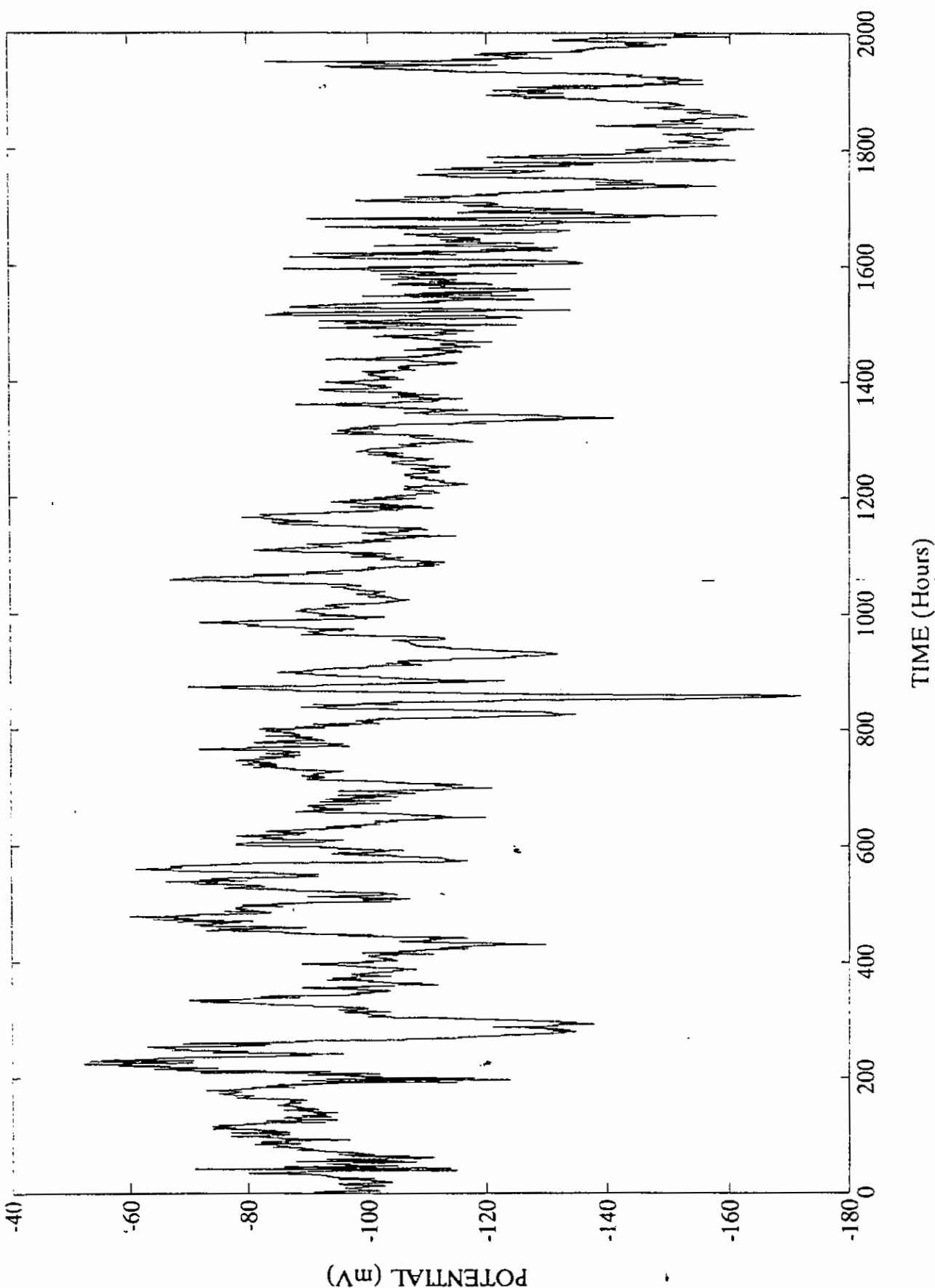


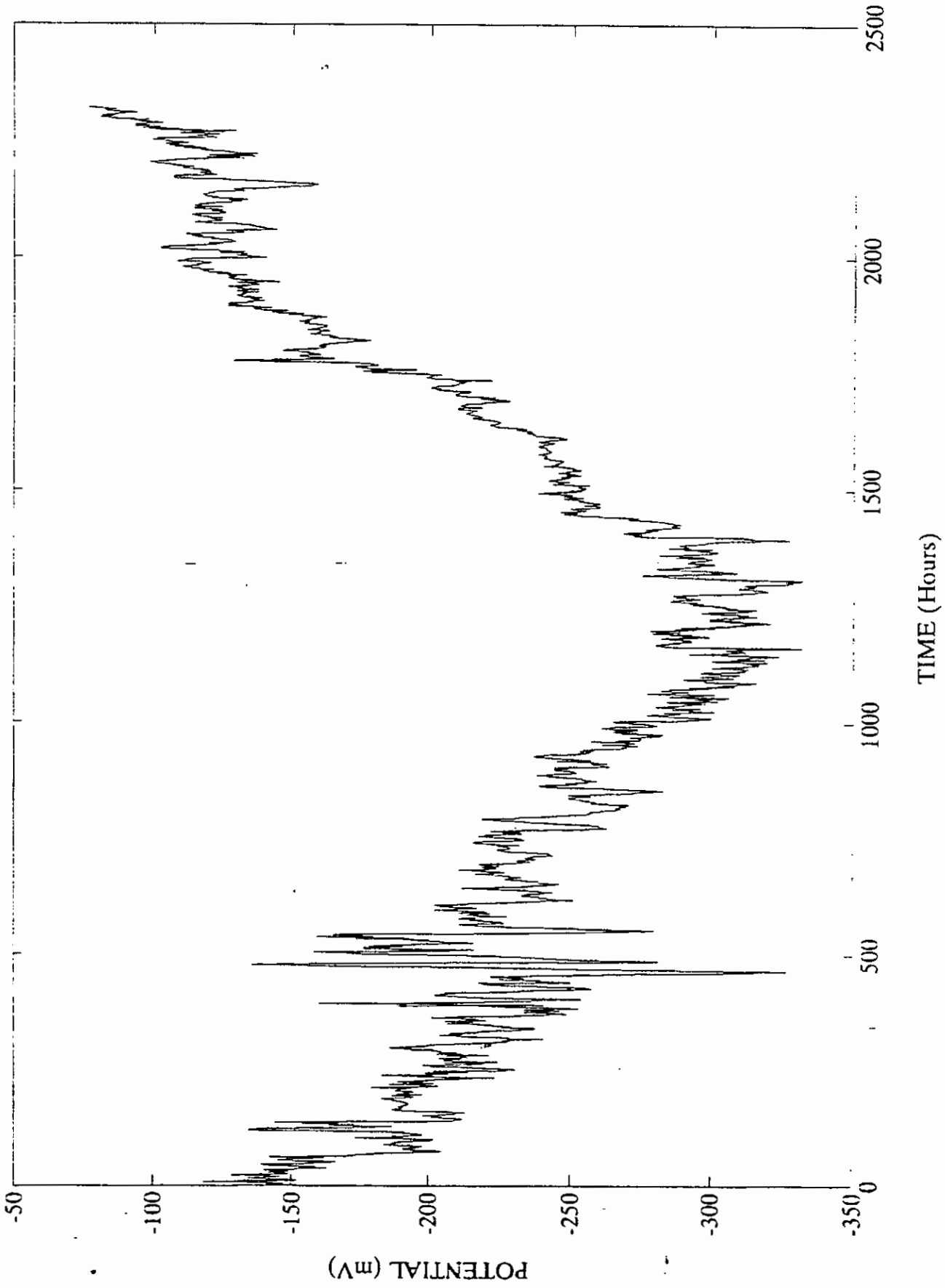


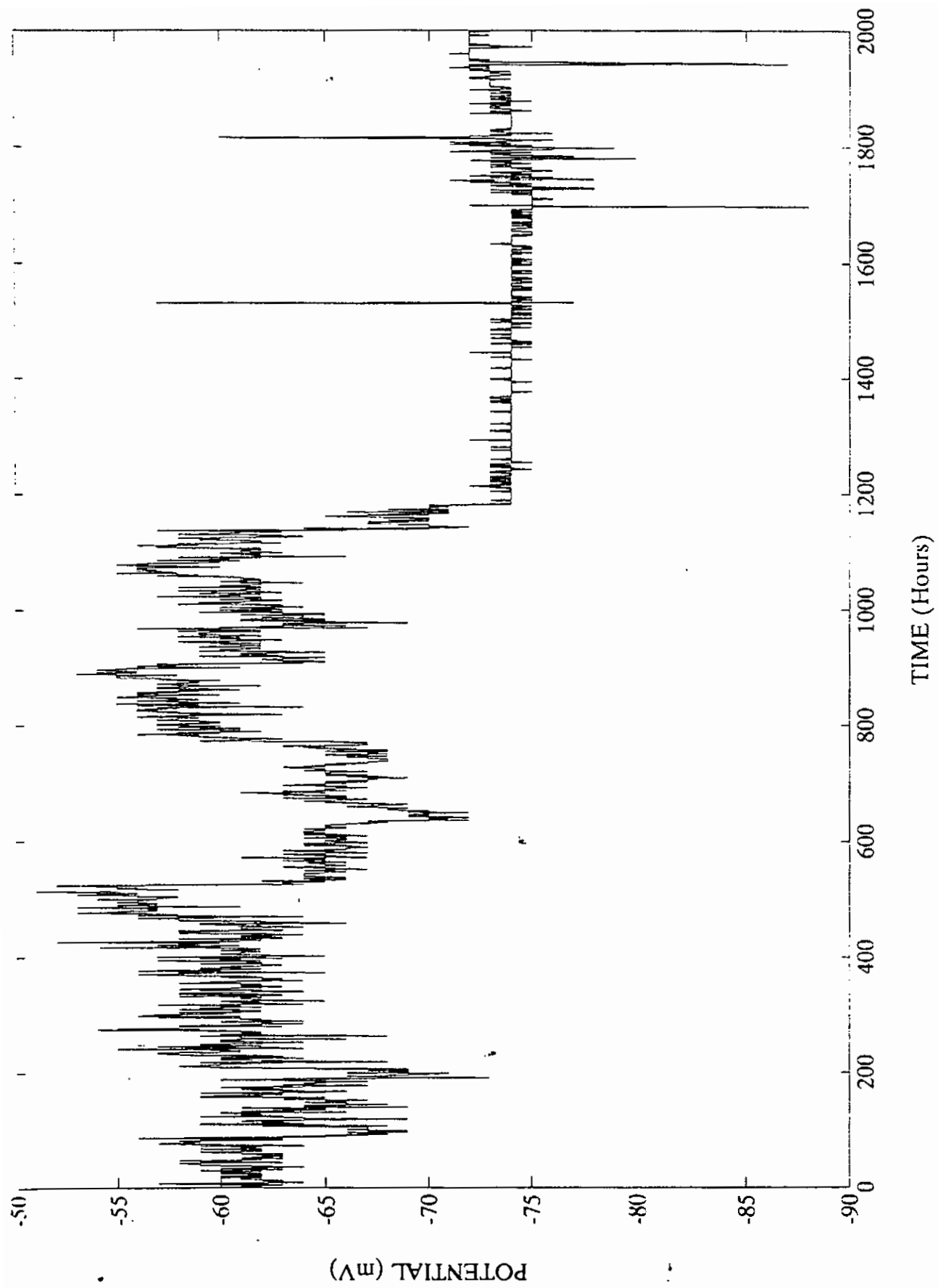


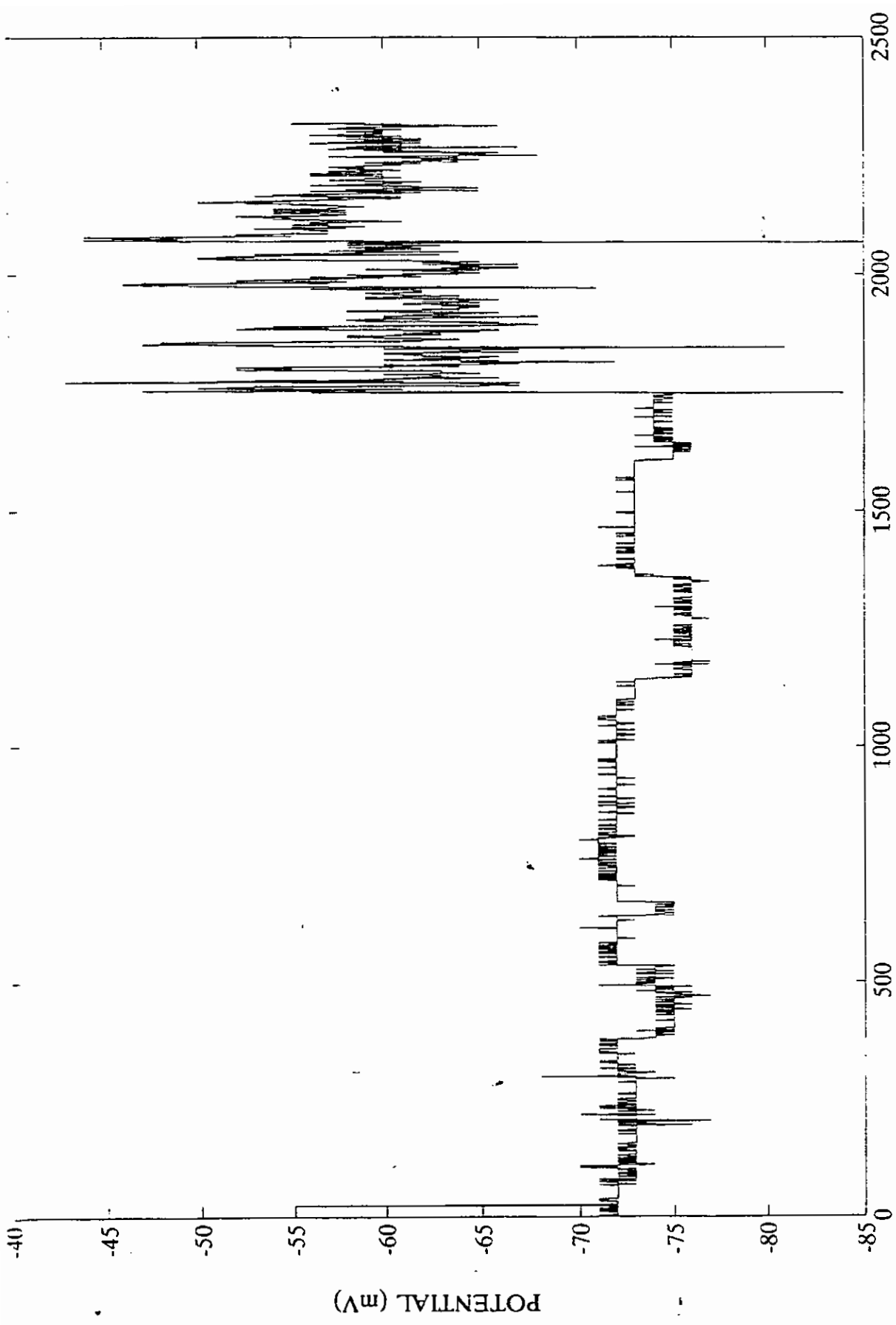




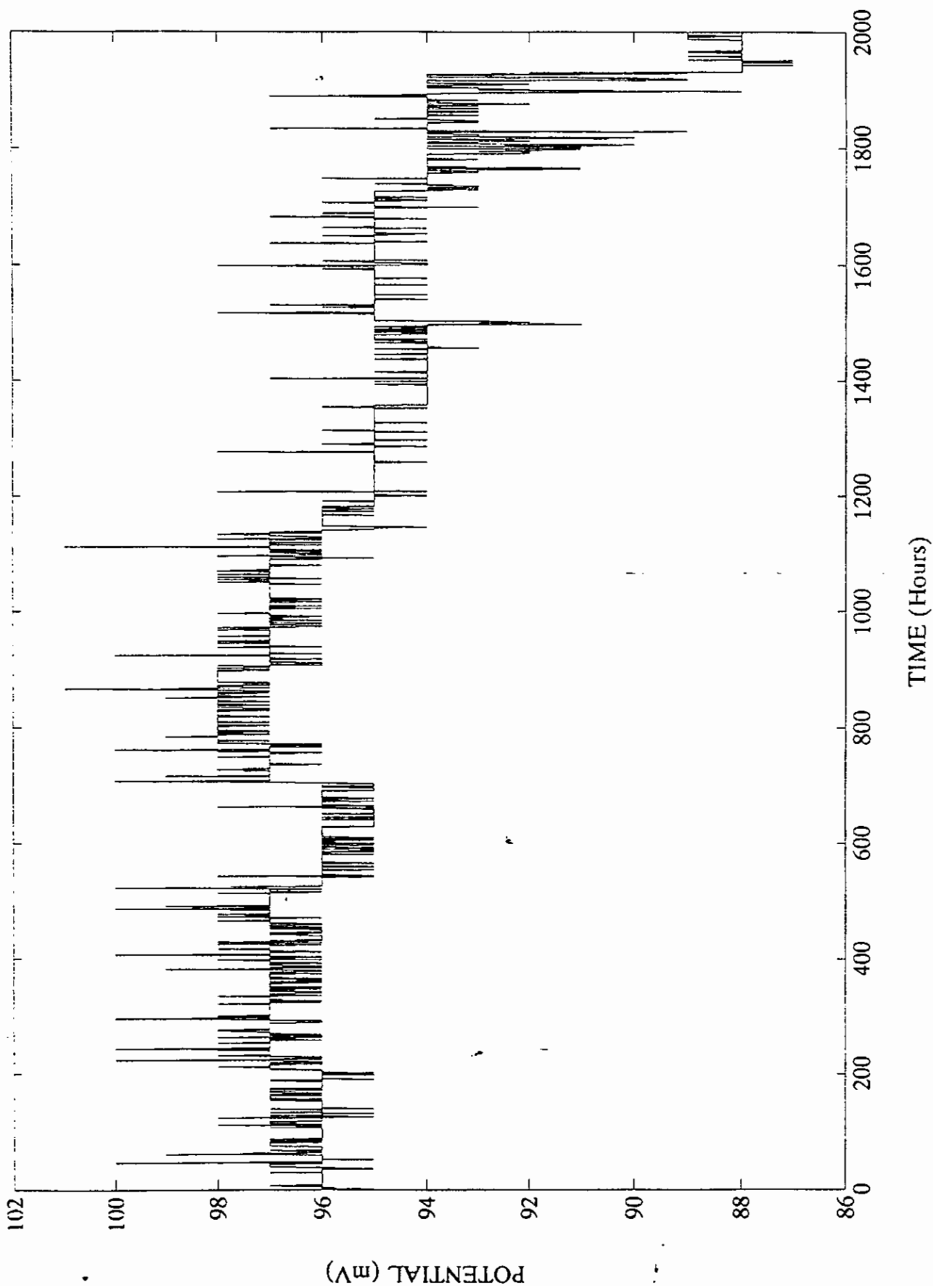


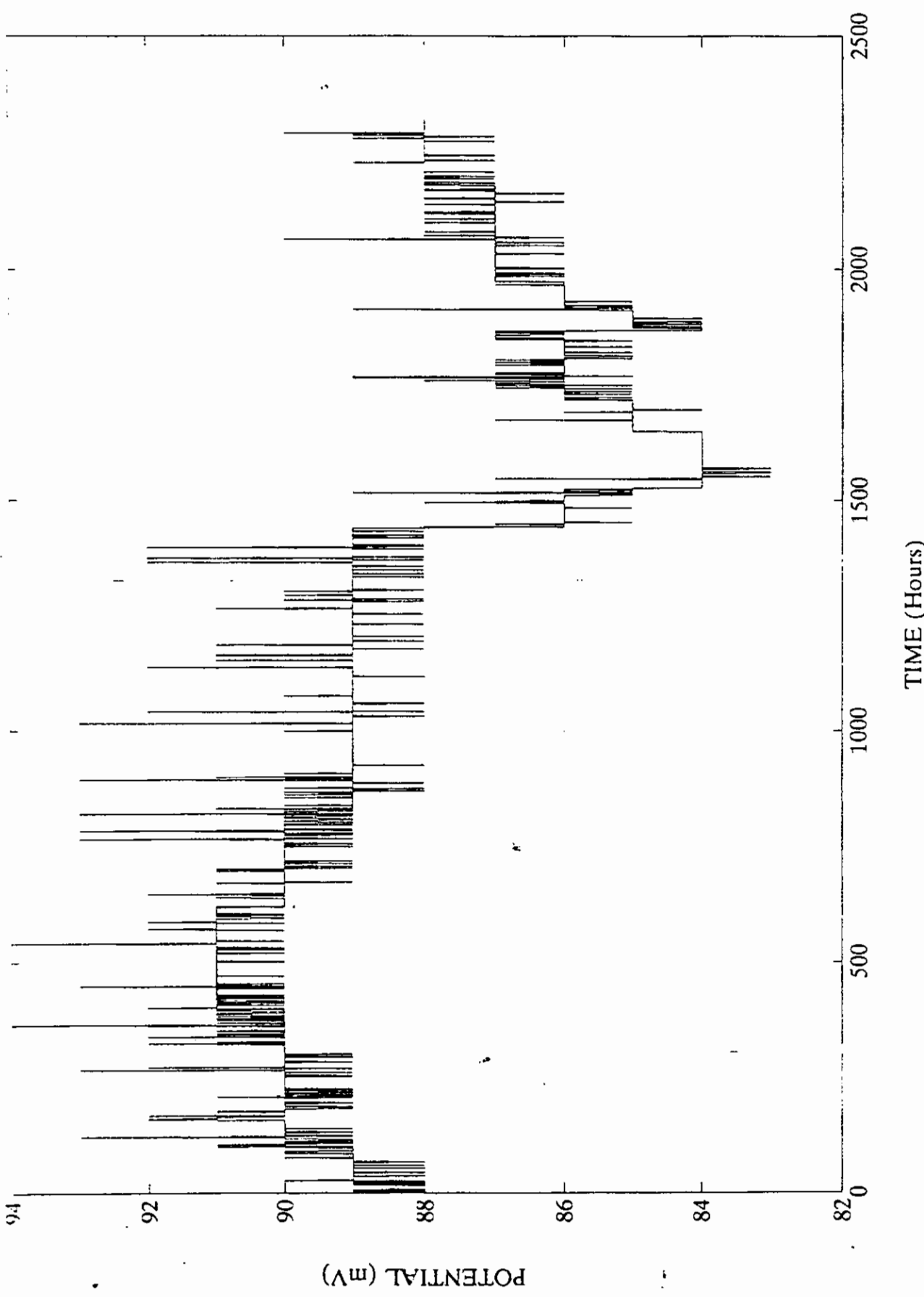




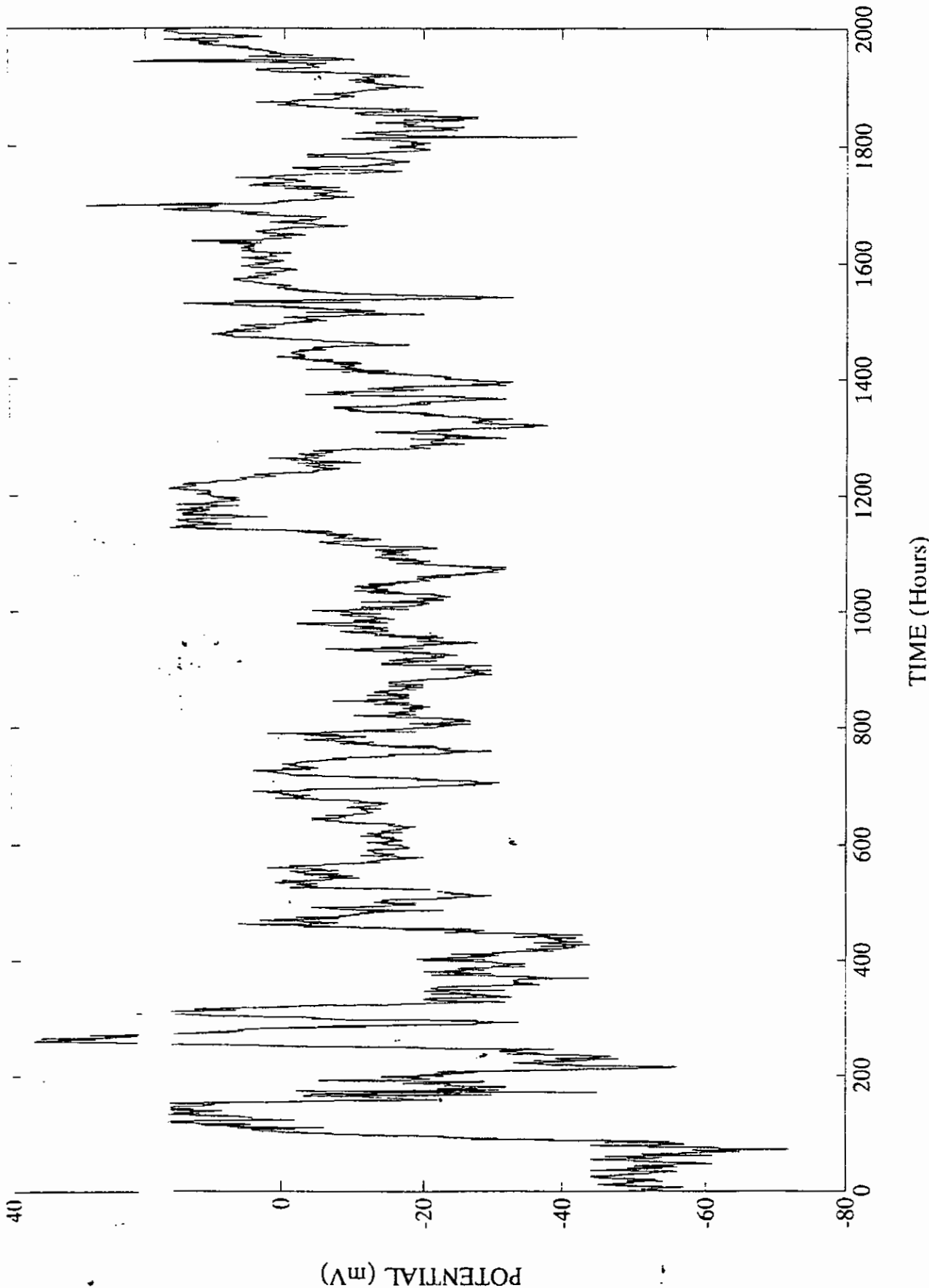


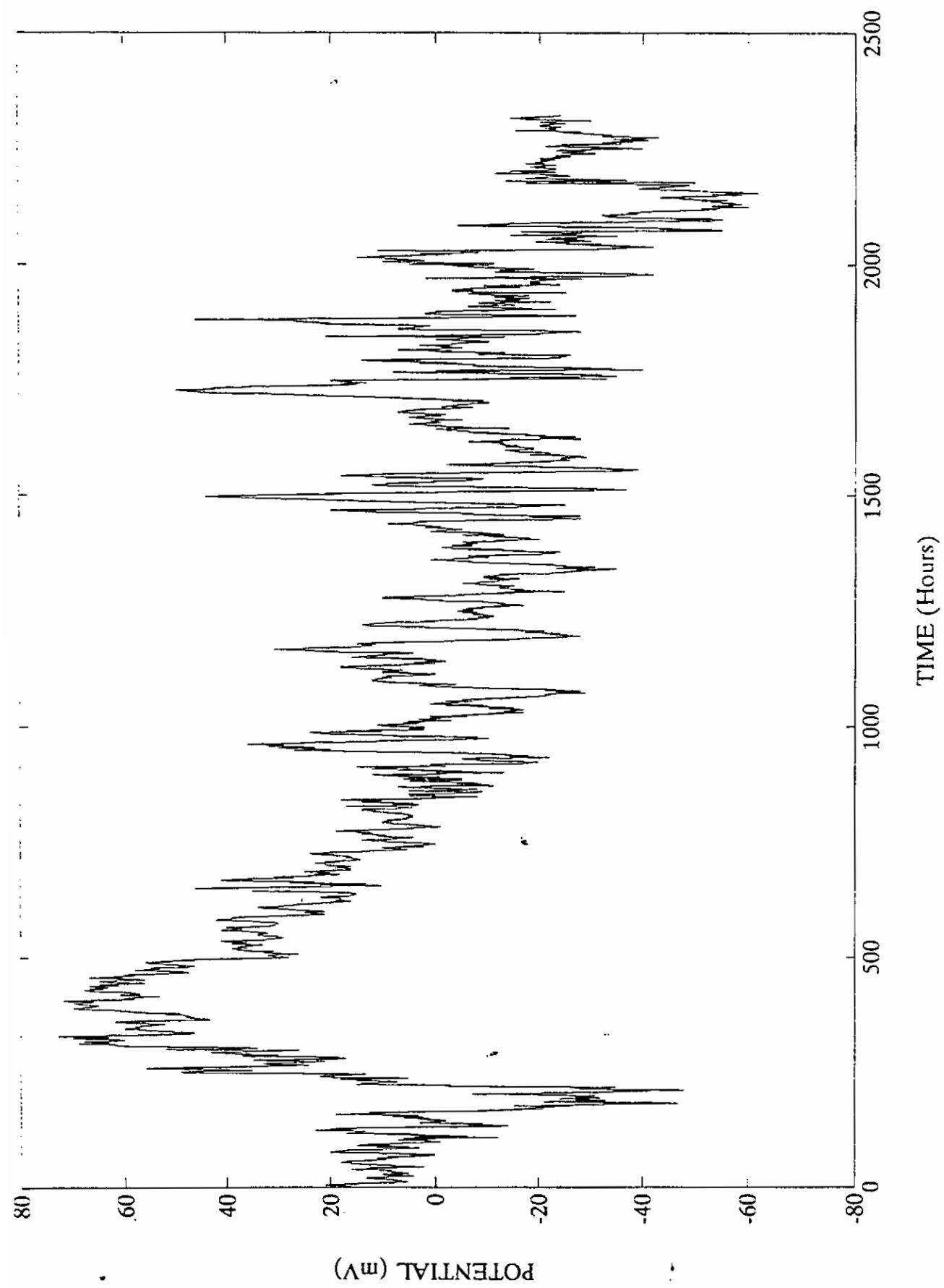
POTENTIAL (mV)

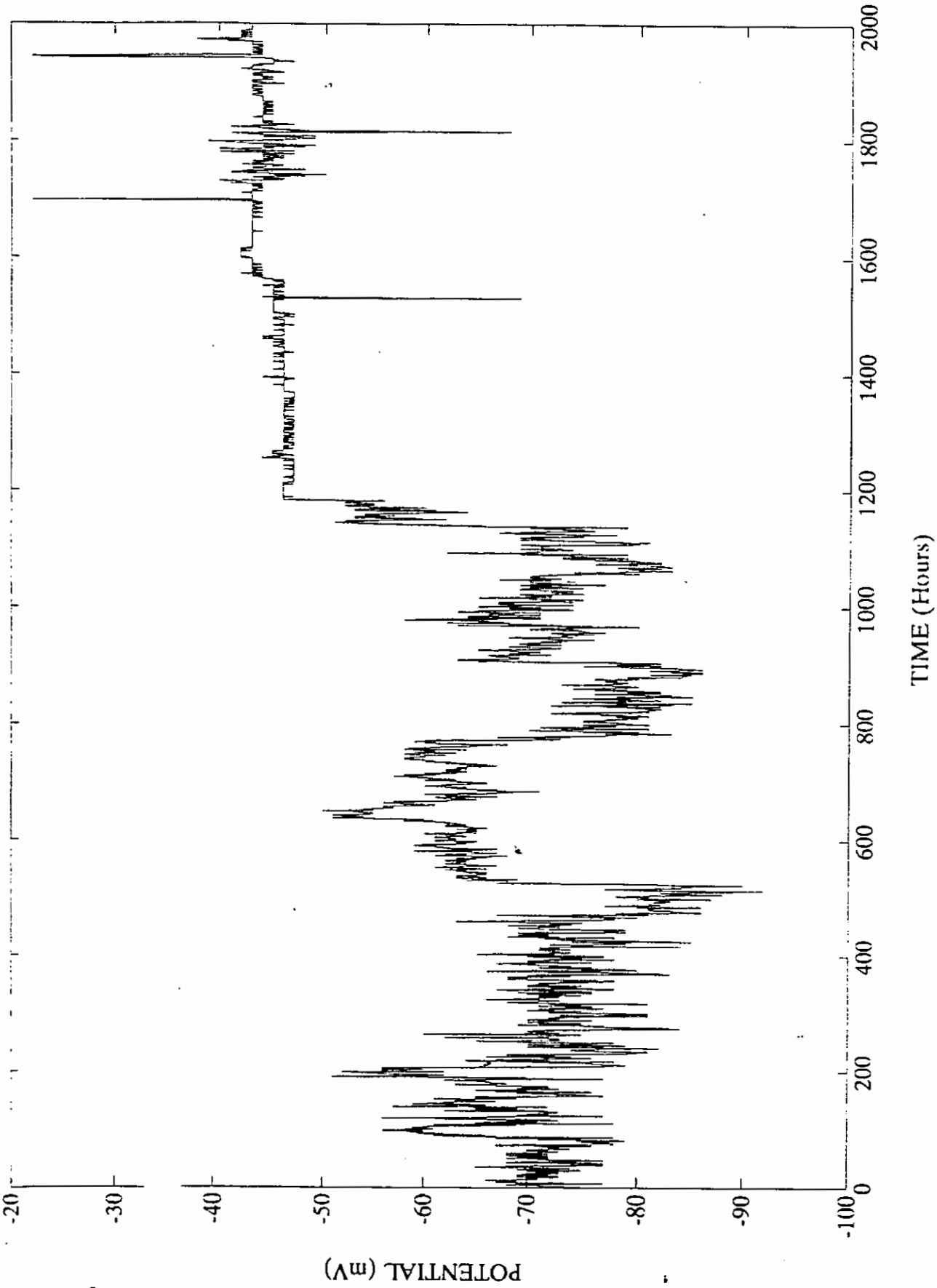


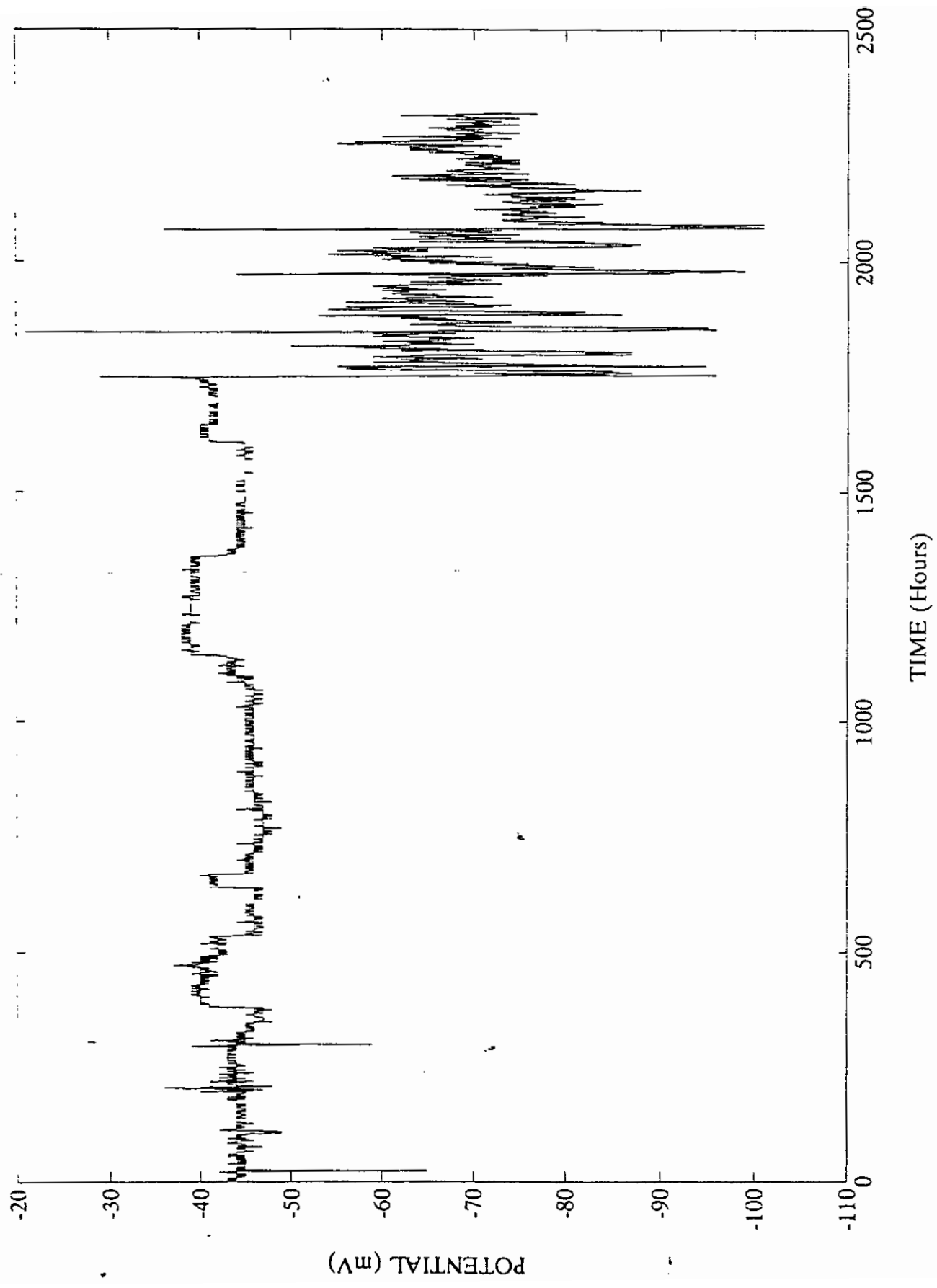


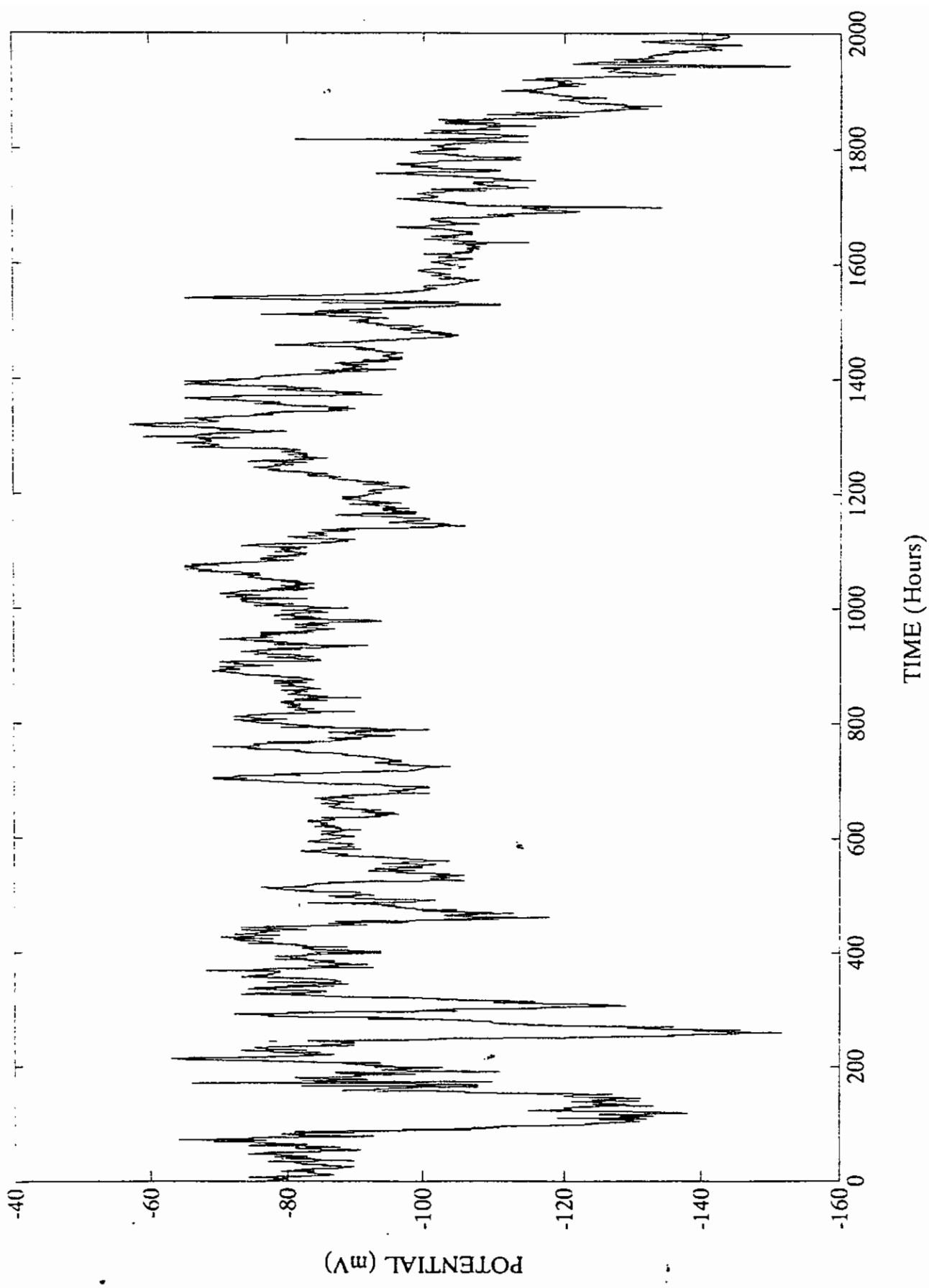
TIME (Hours)

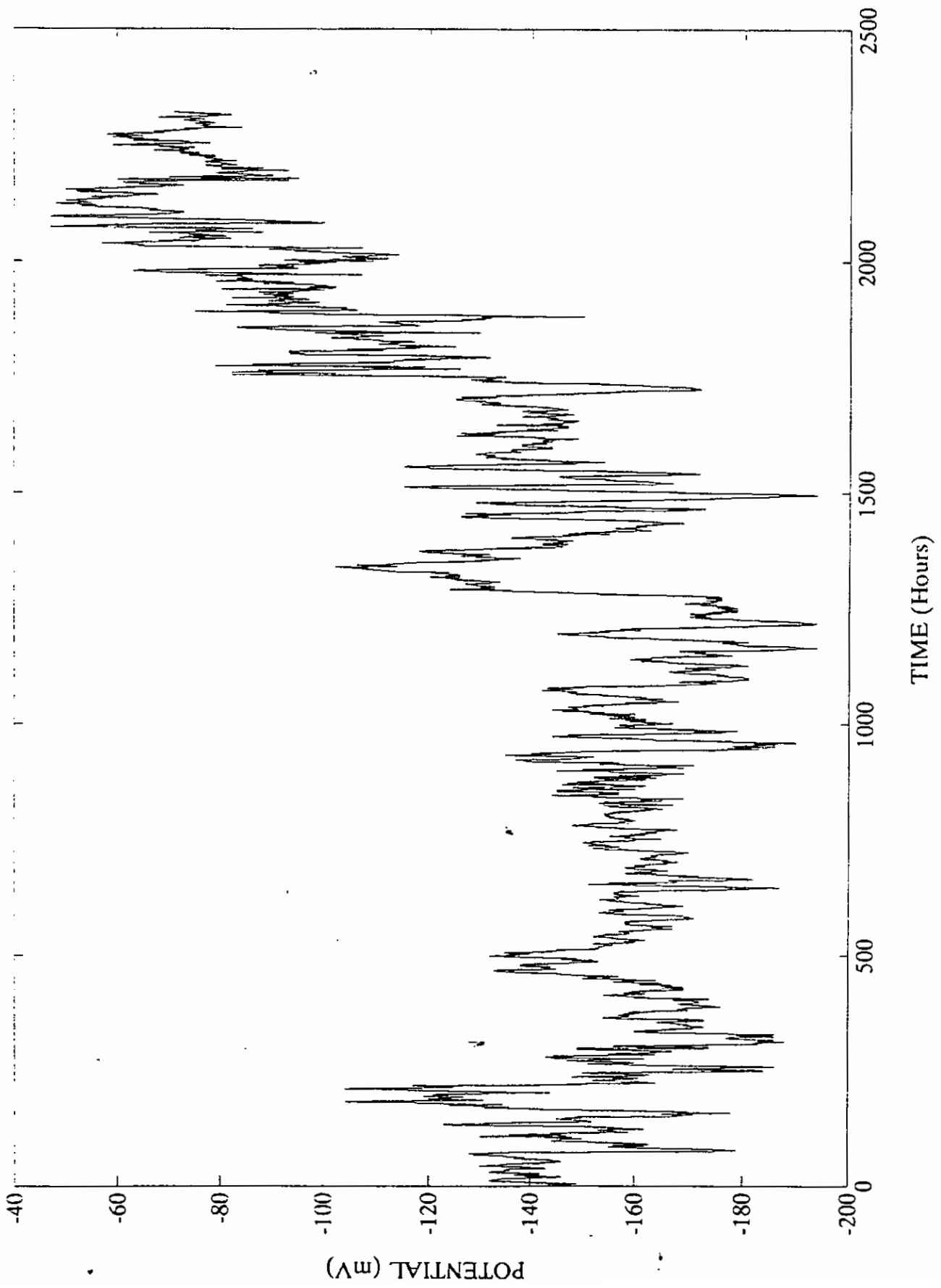


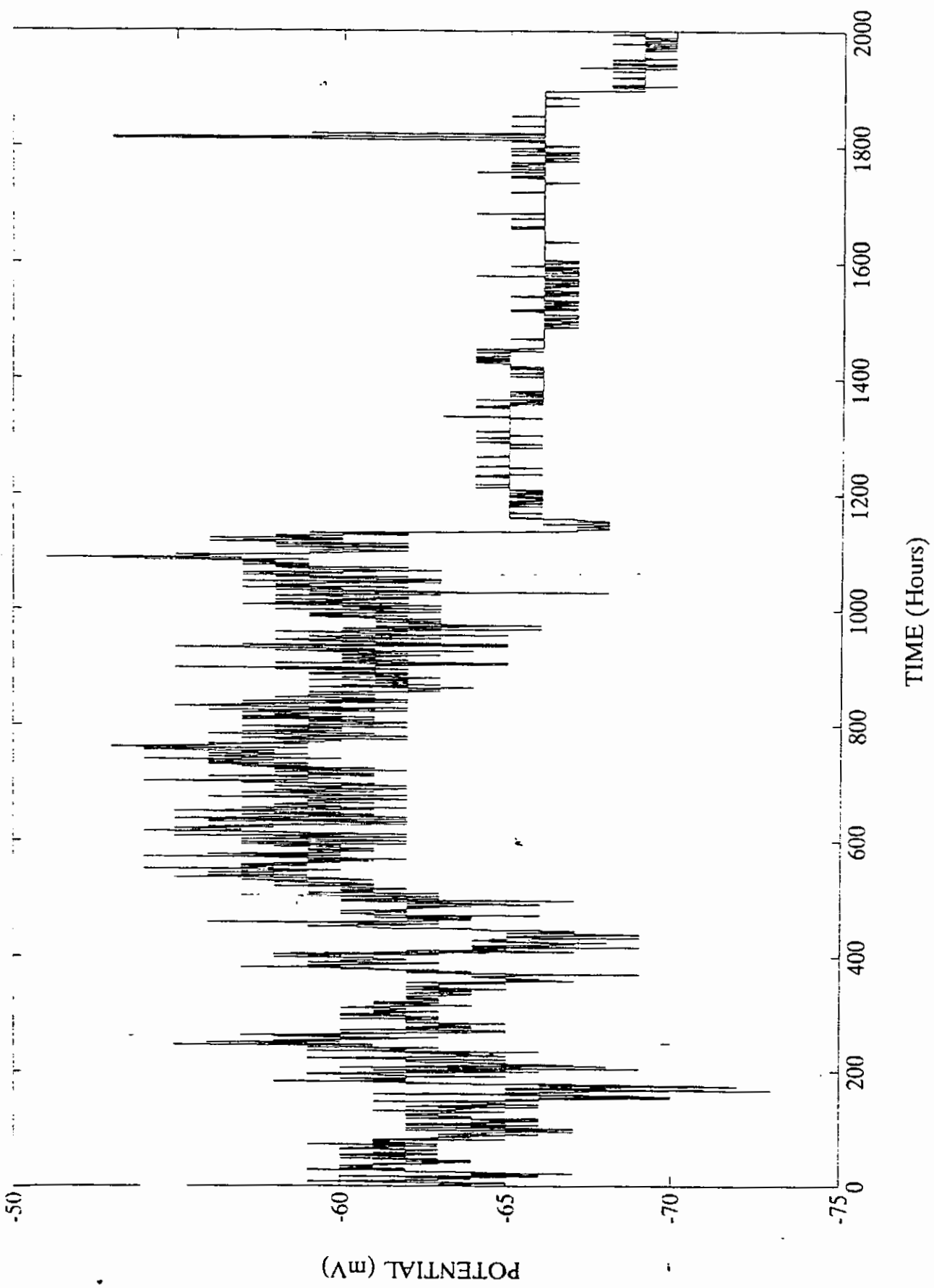


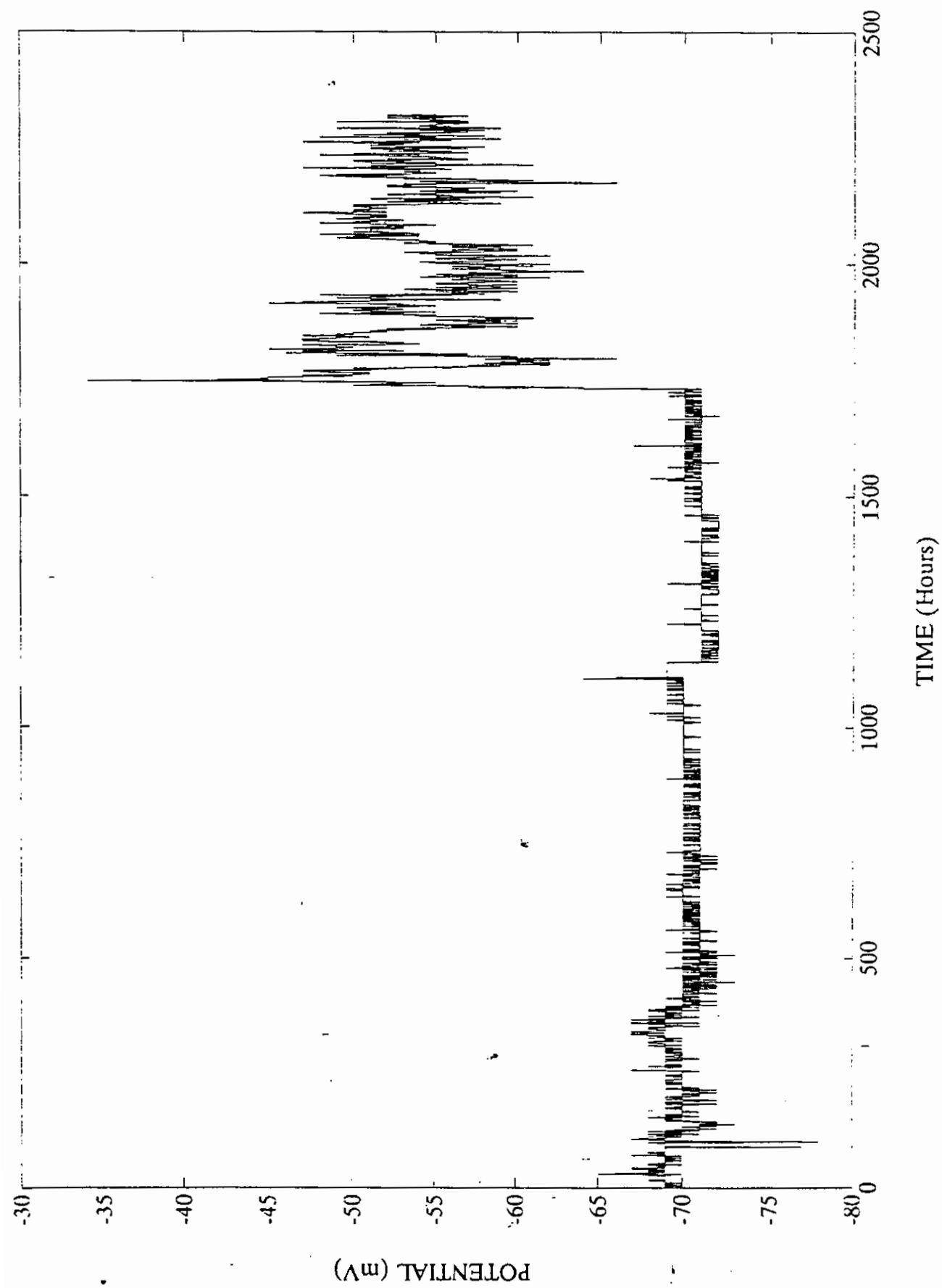


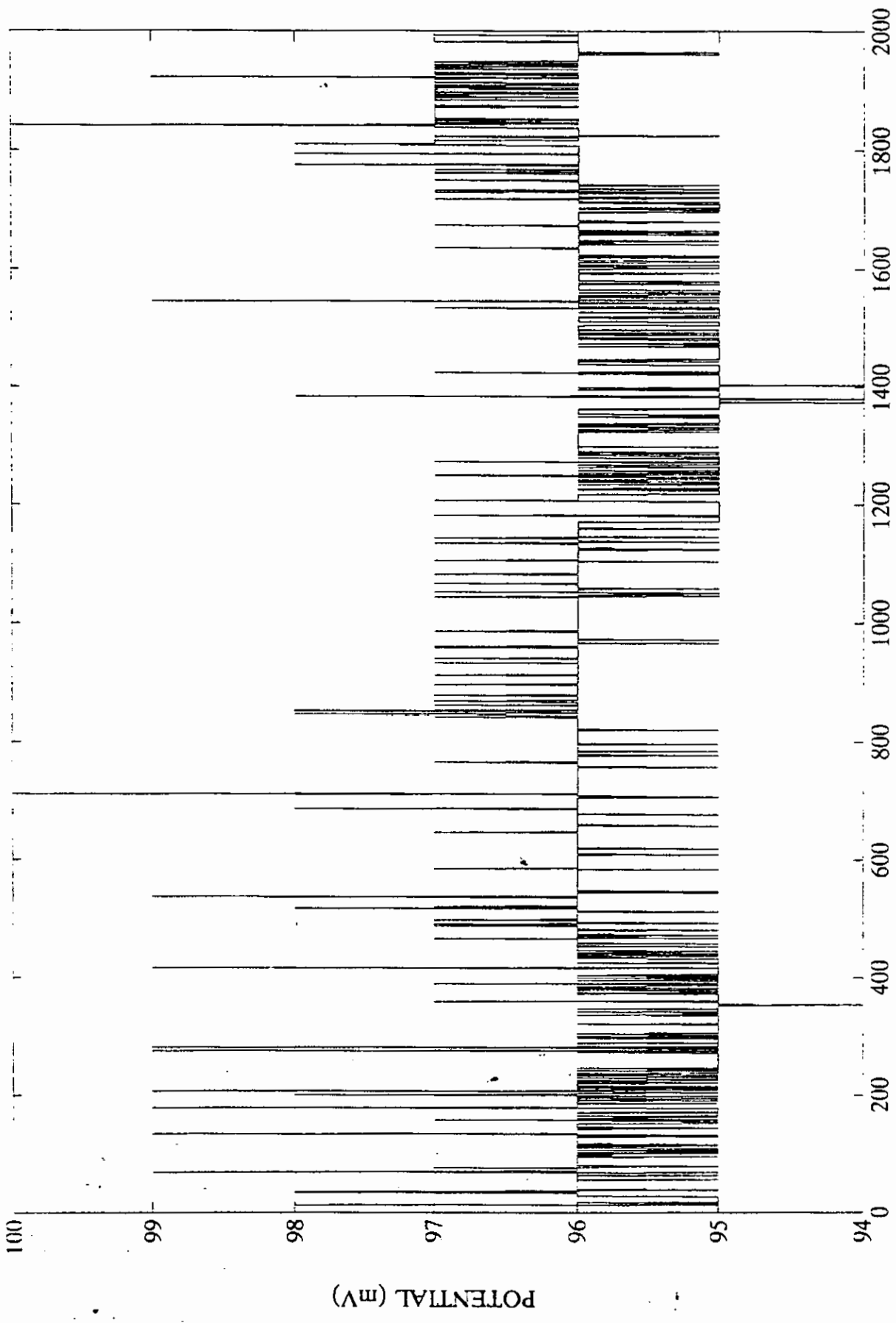






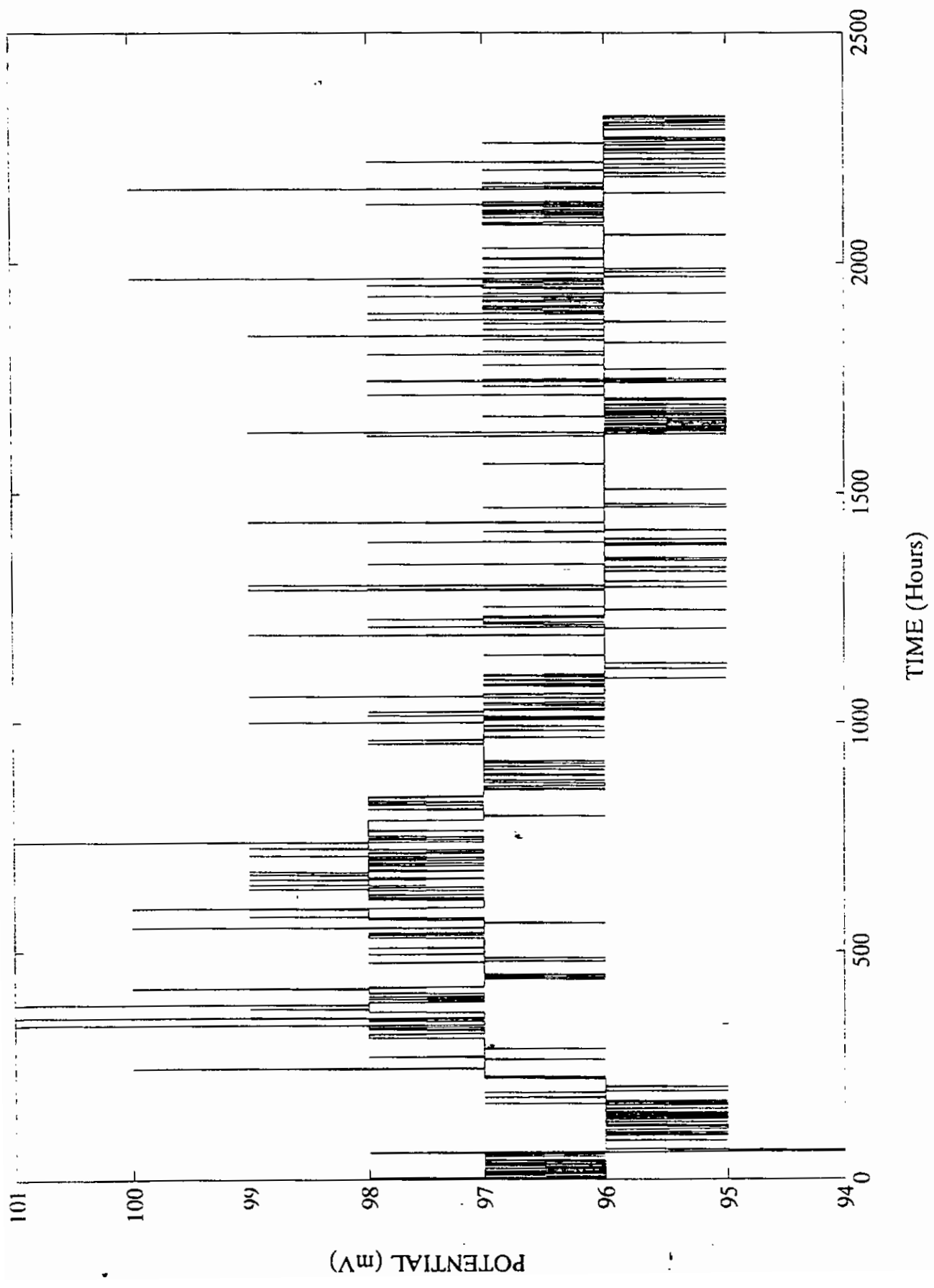


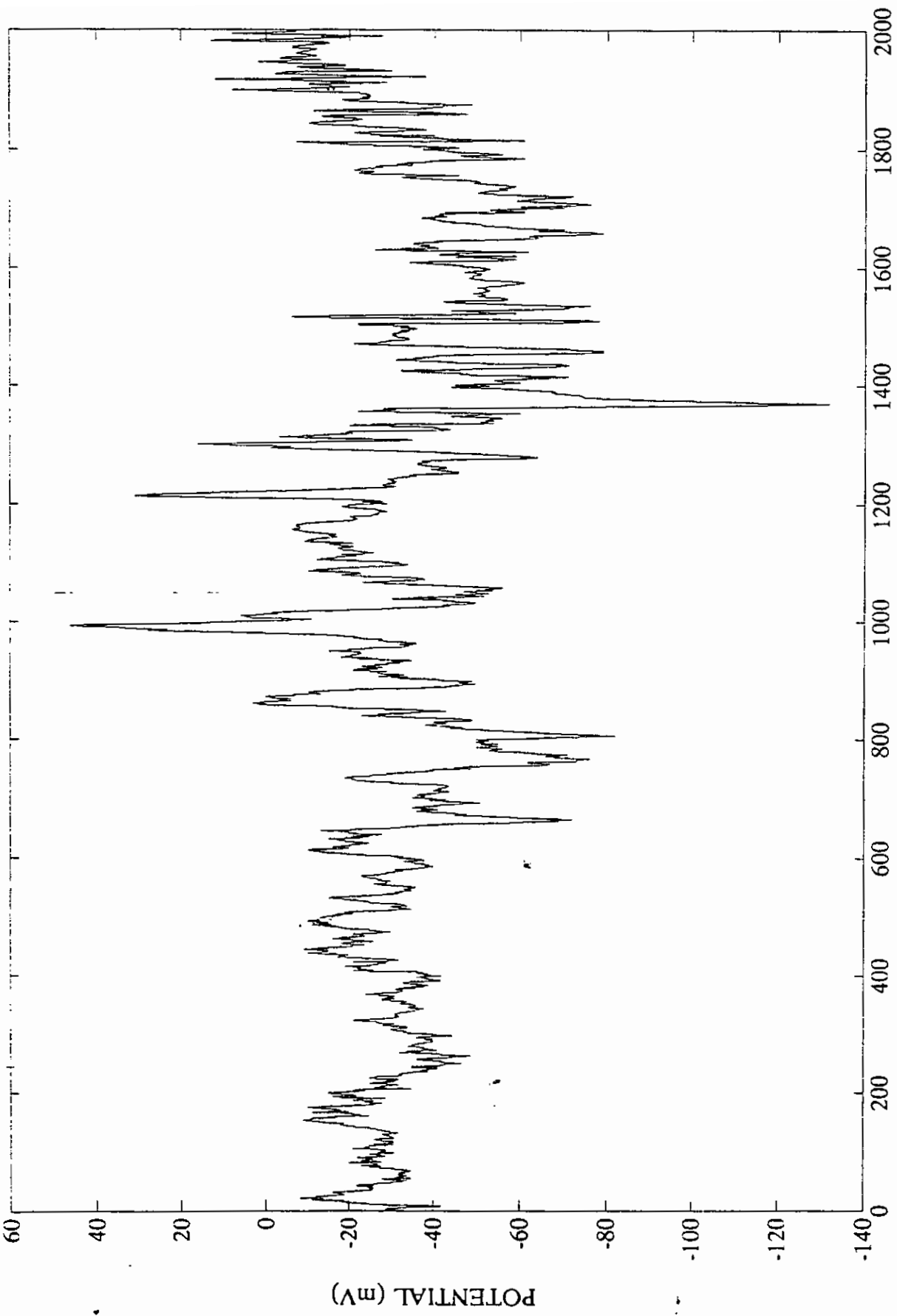




POTENTIAL (mV)

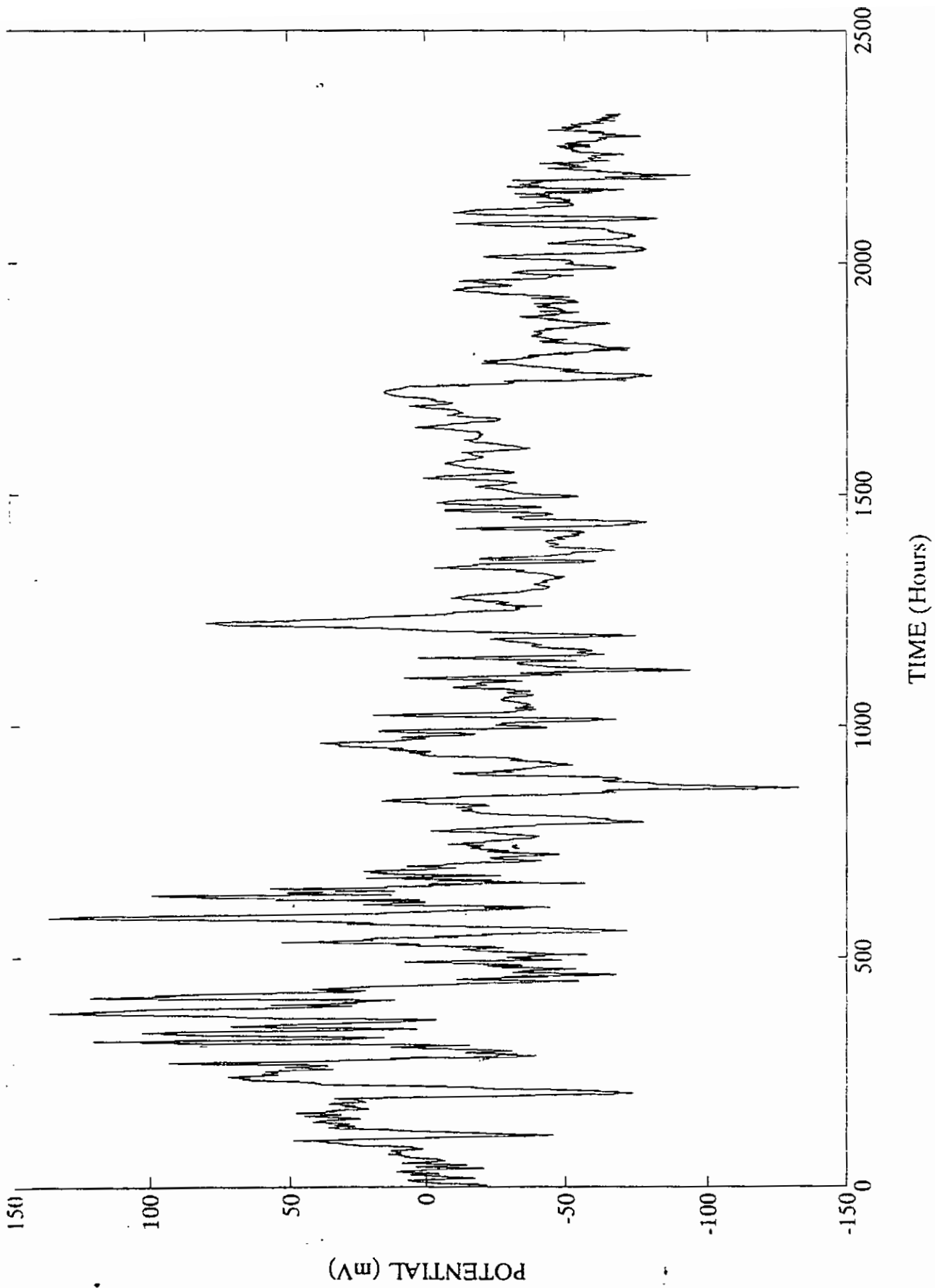
TIME (Hours)

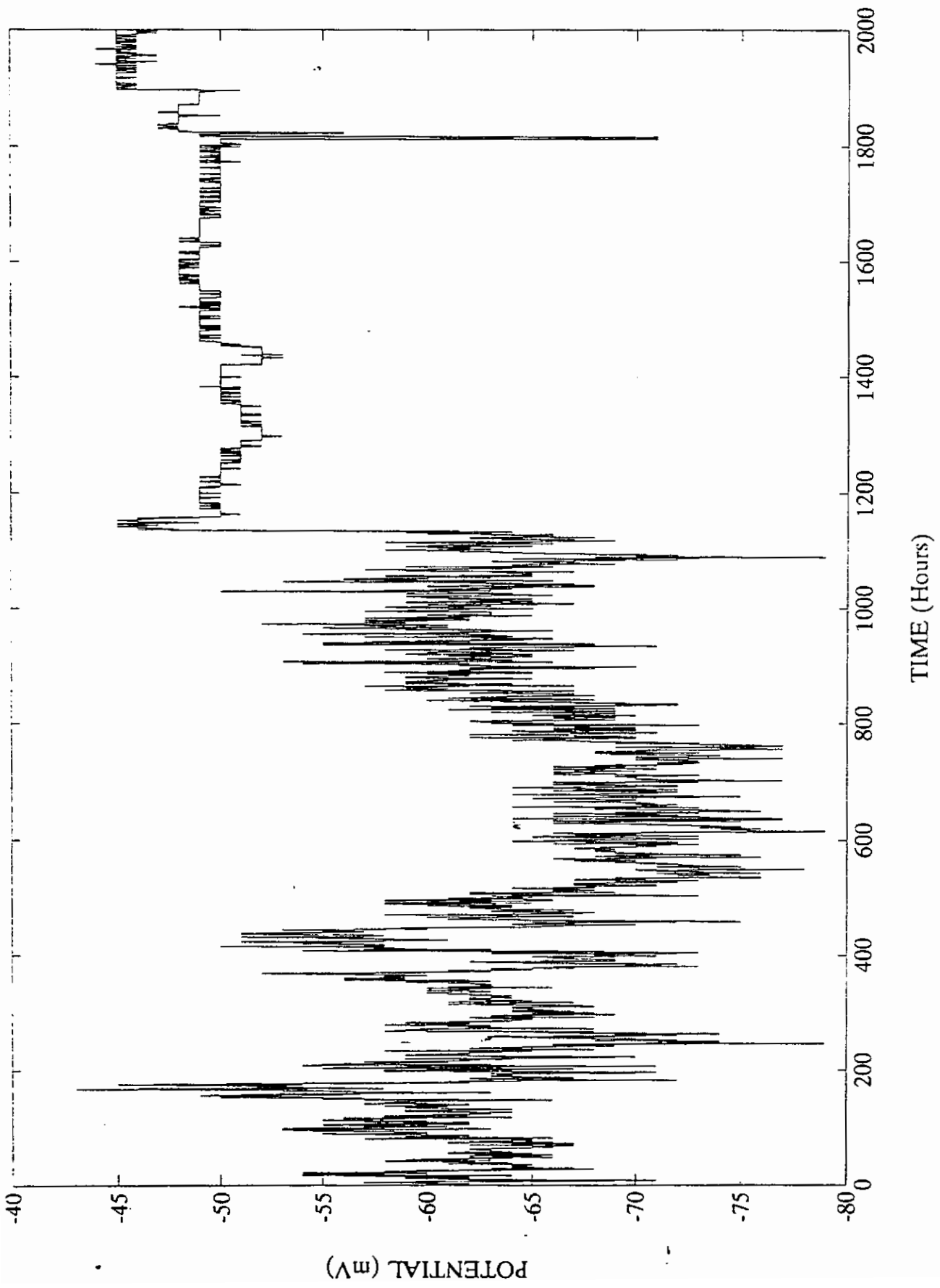


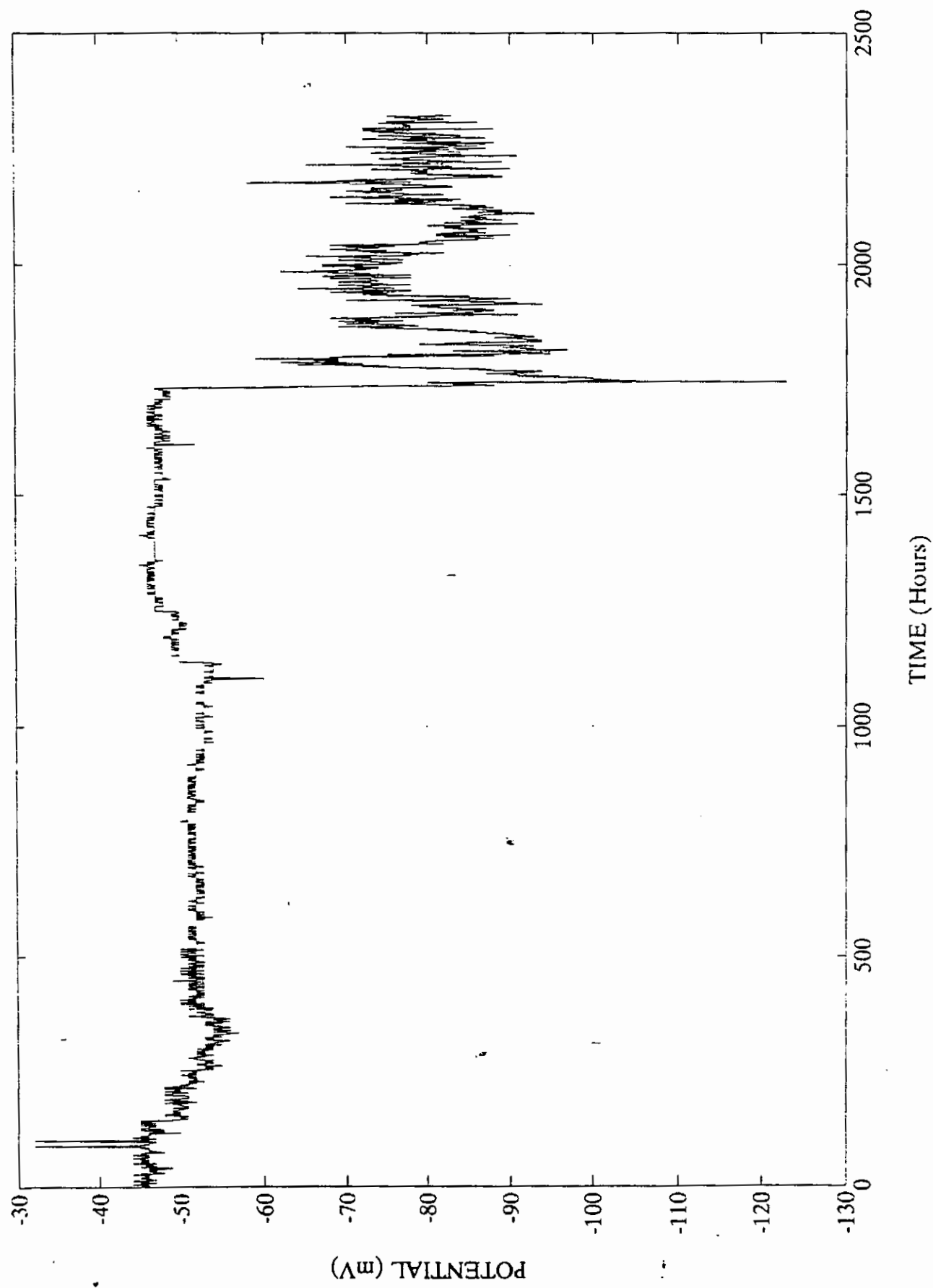


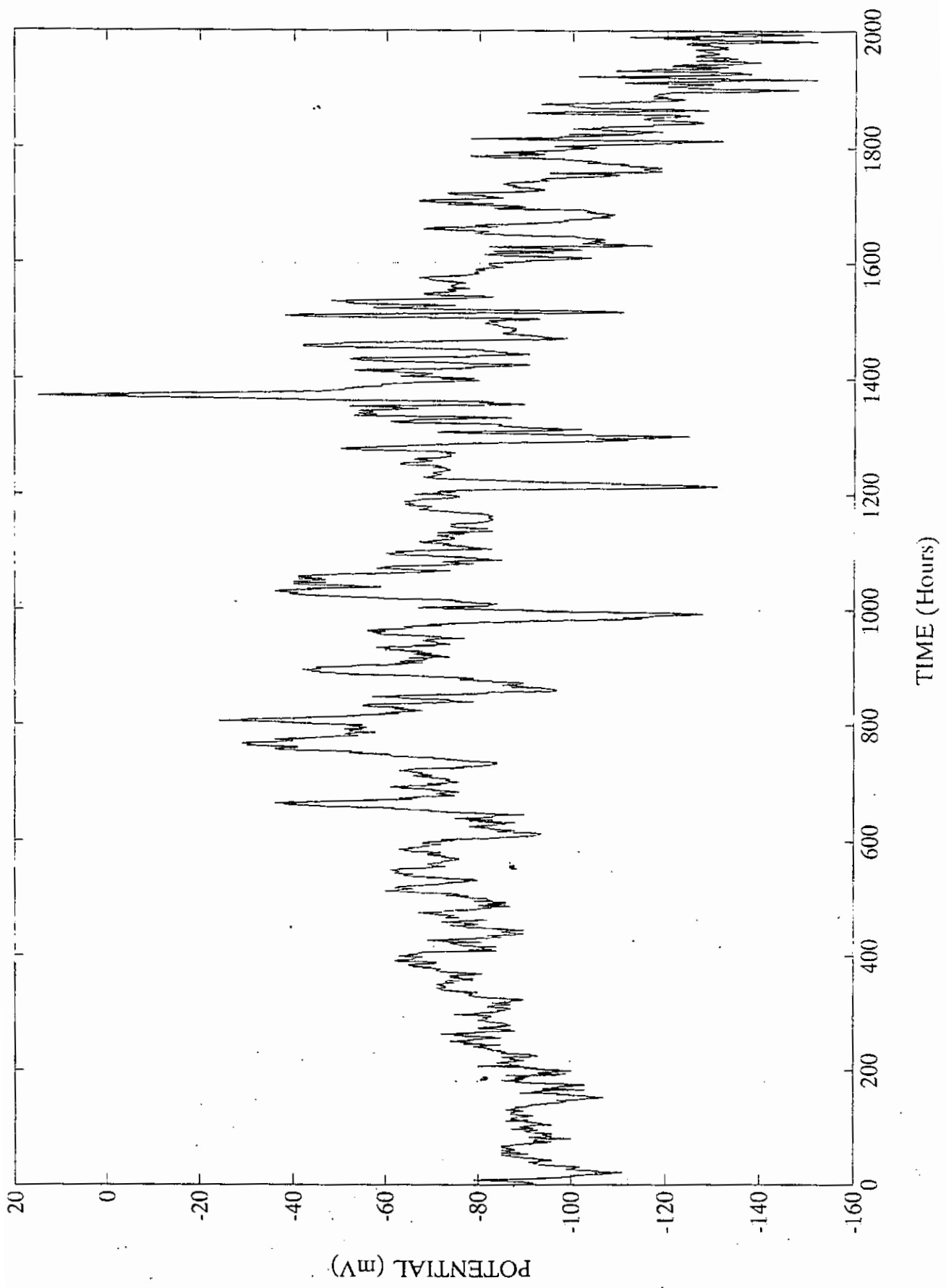
POTENTIAL (mV)

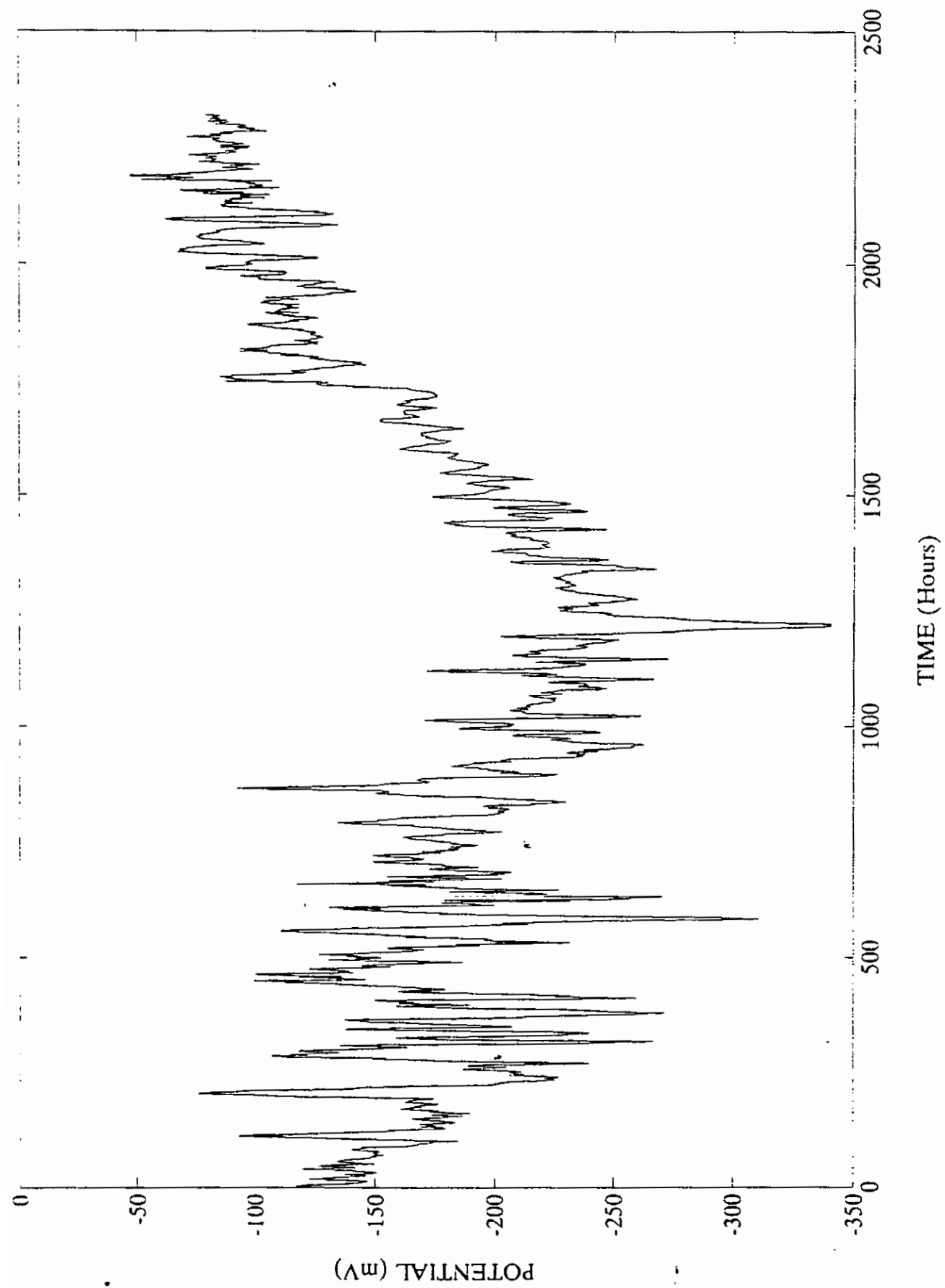
TIME (Hours)

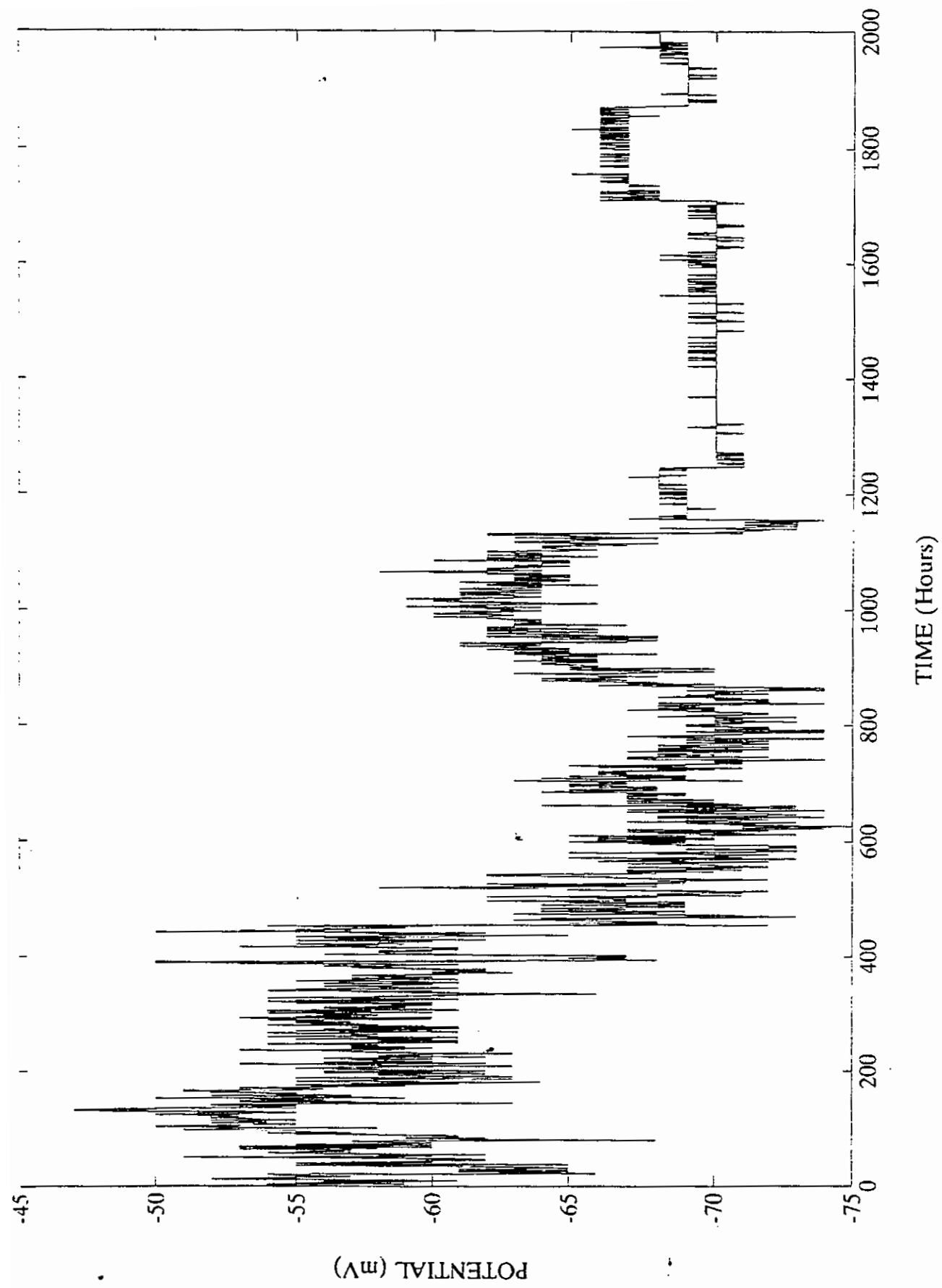


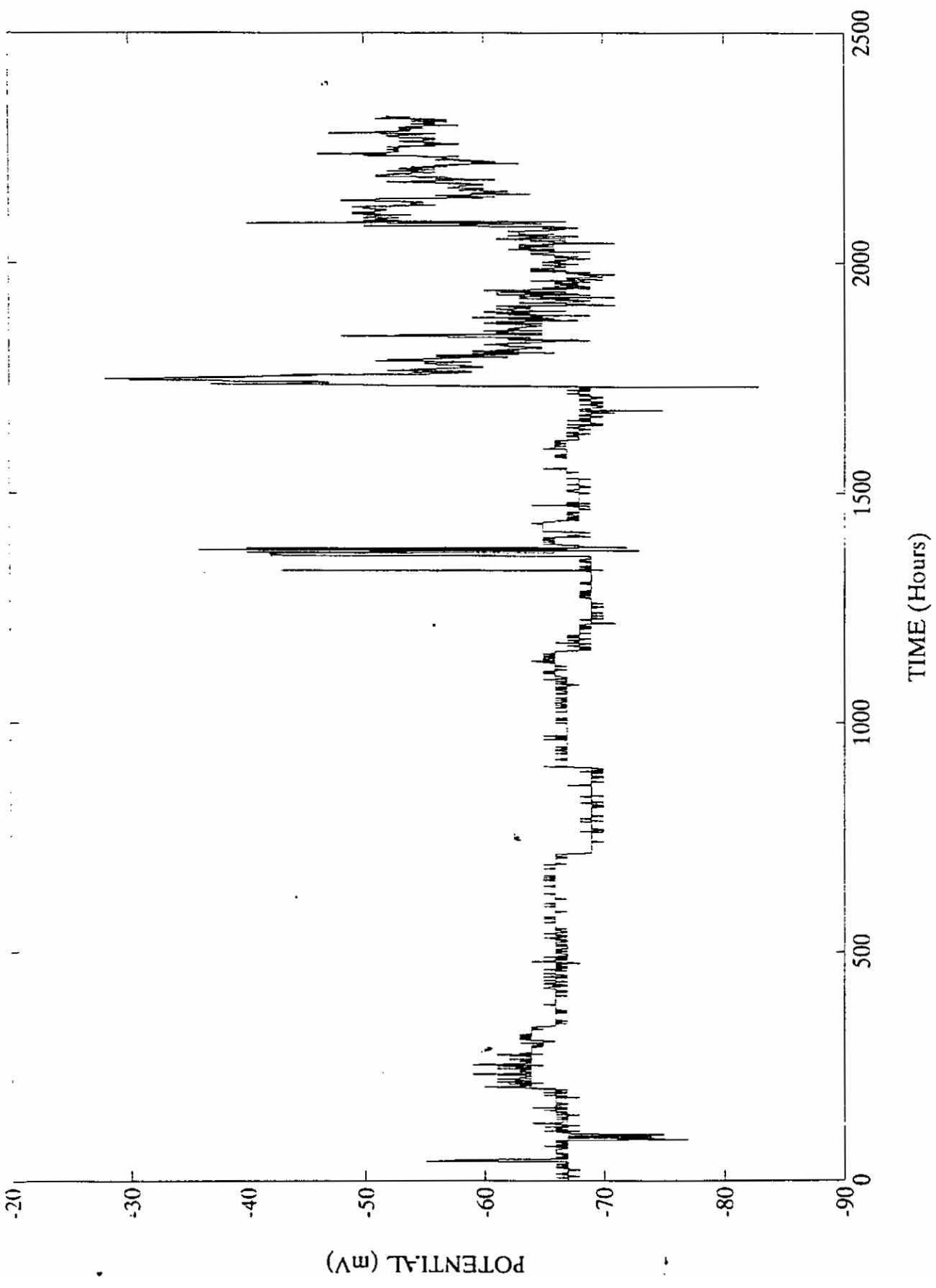


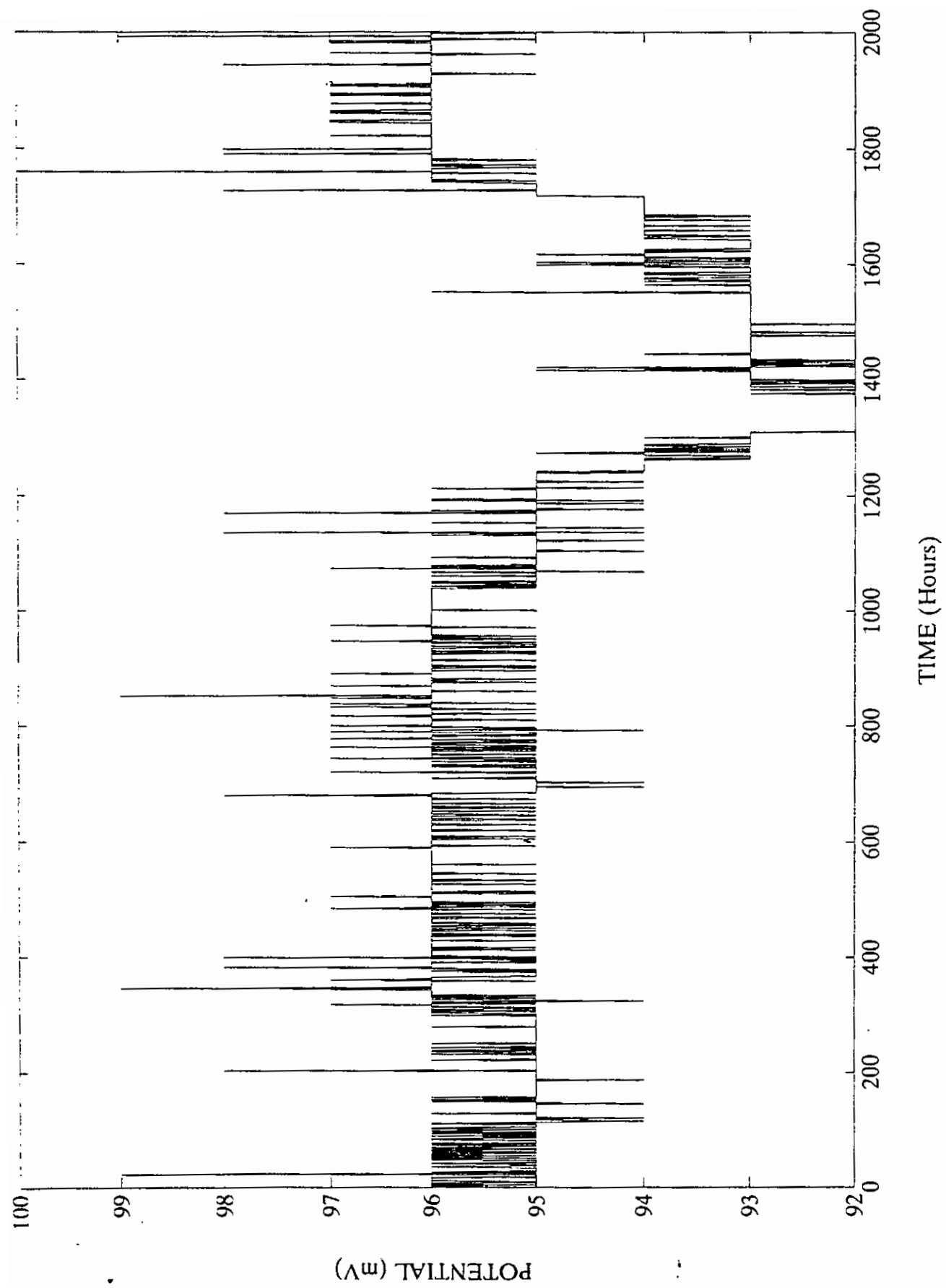


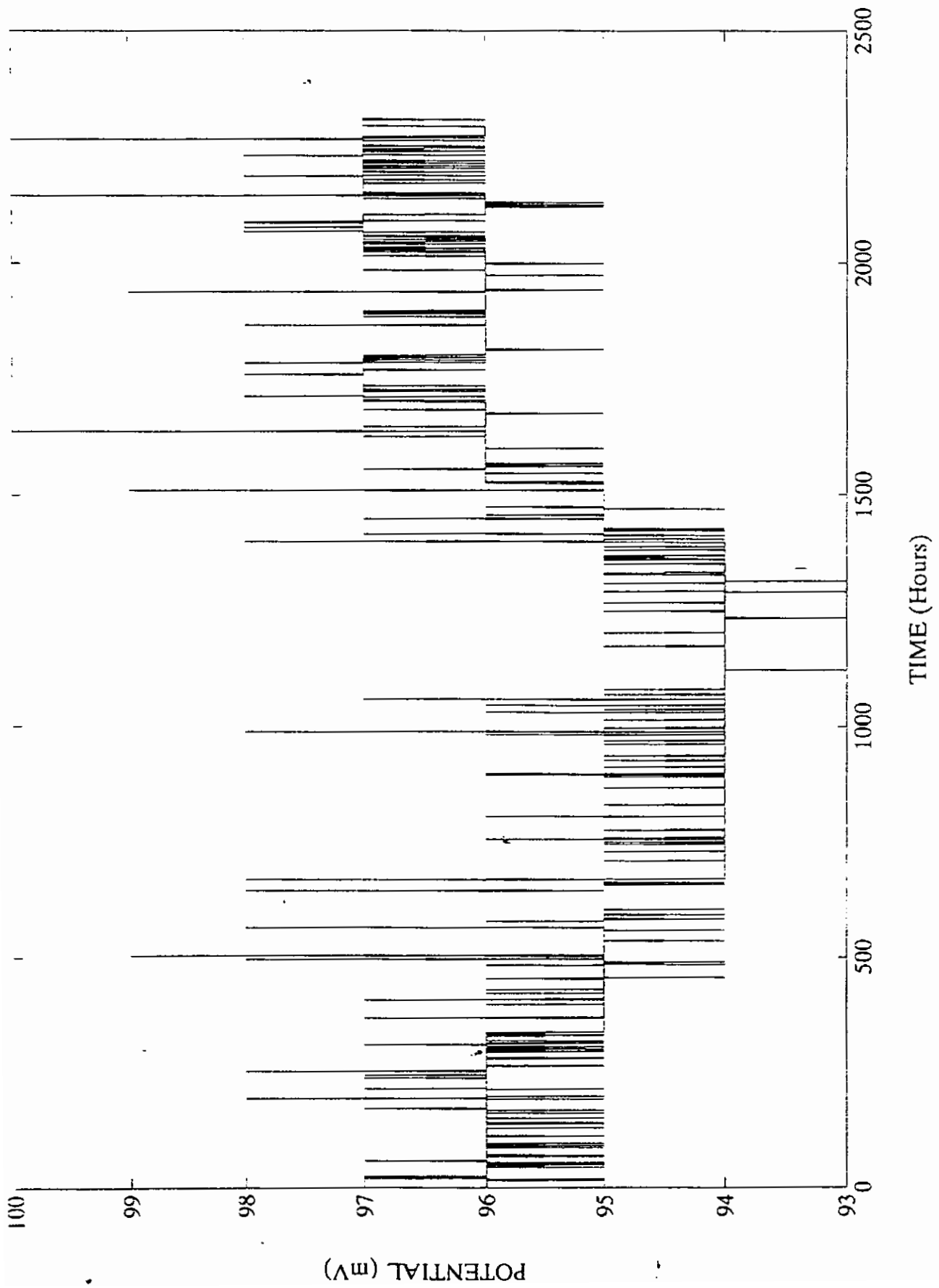


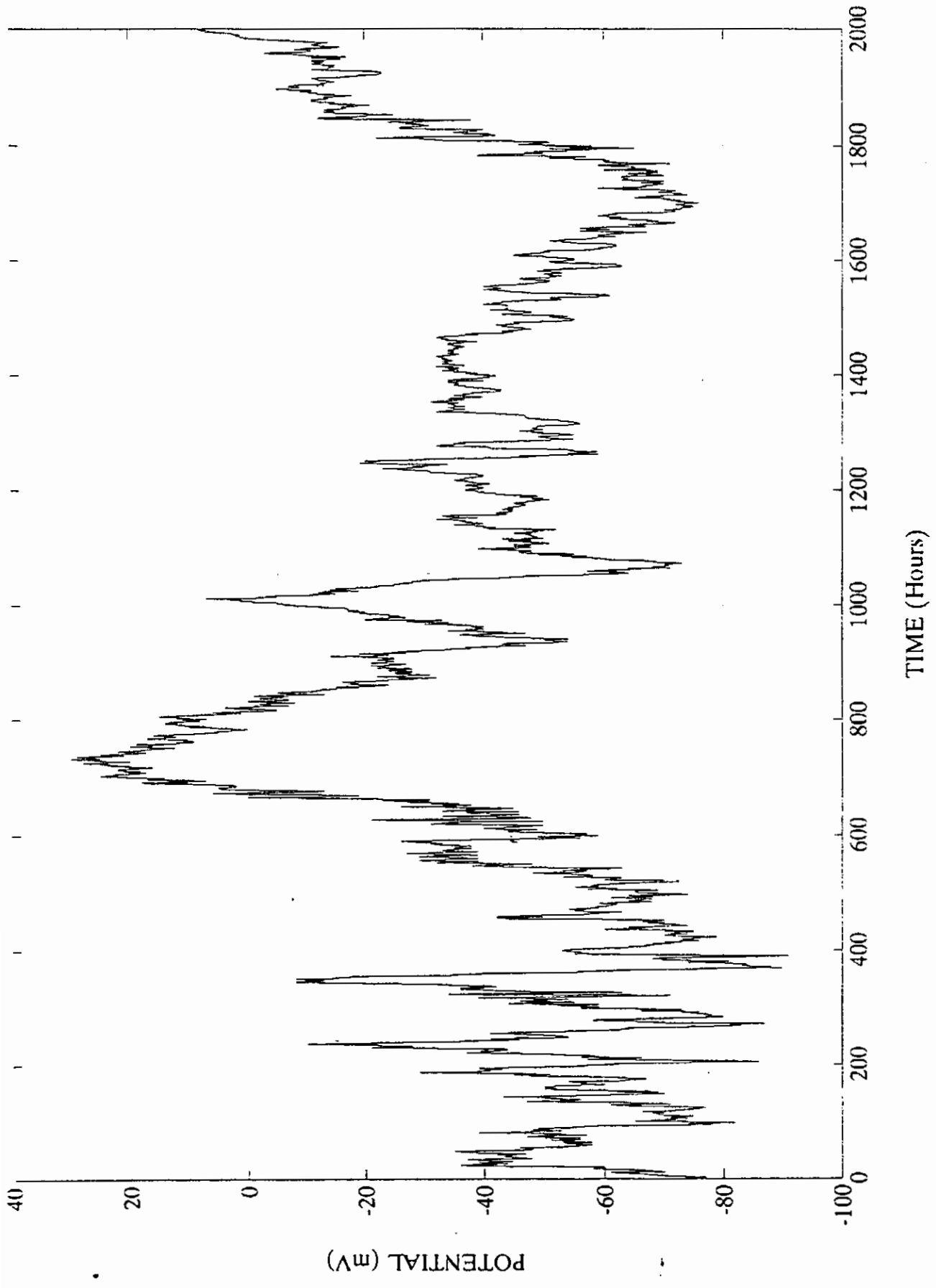


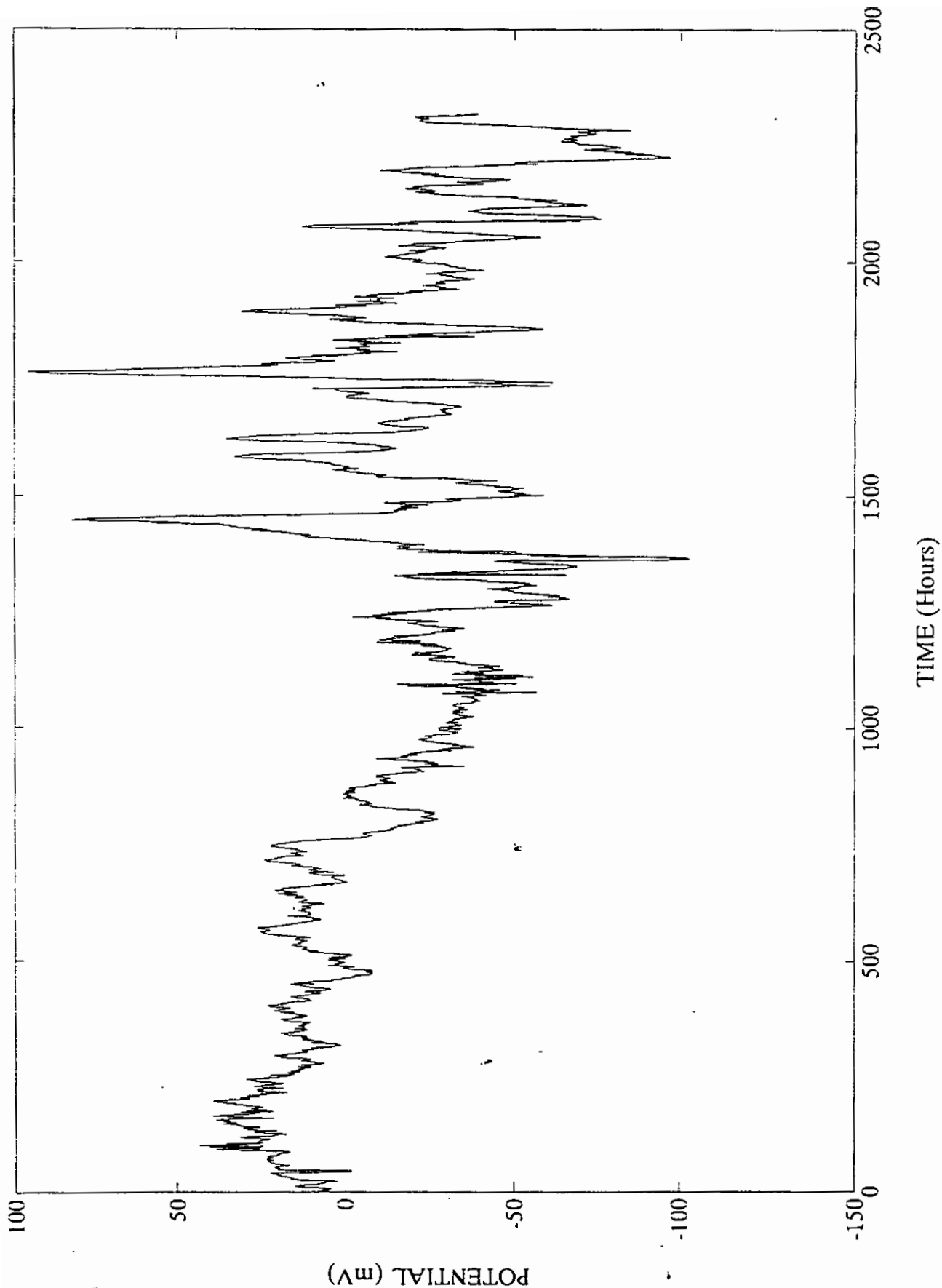


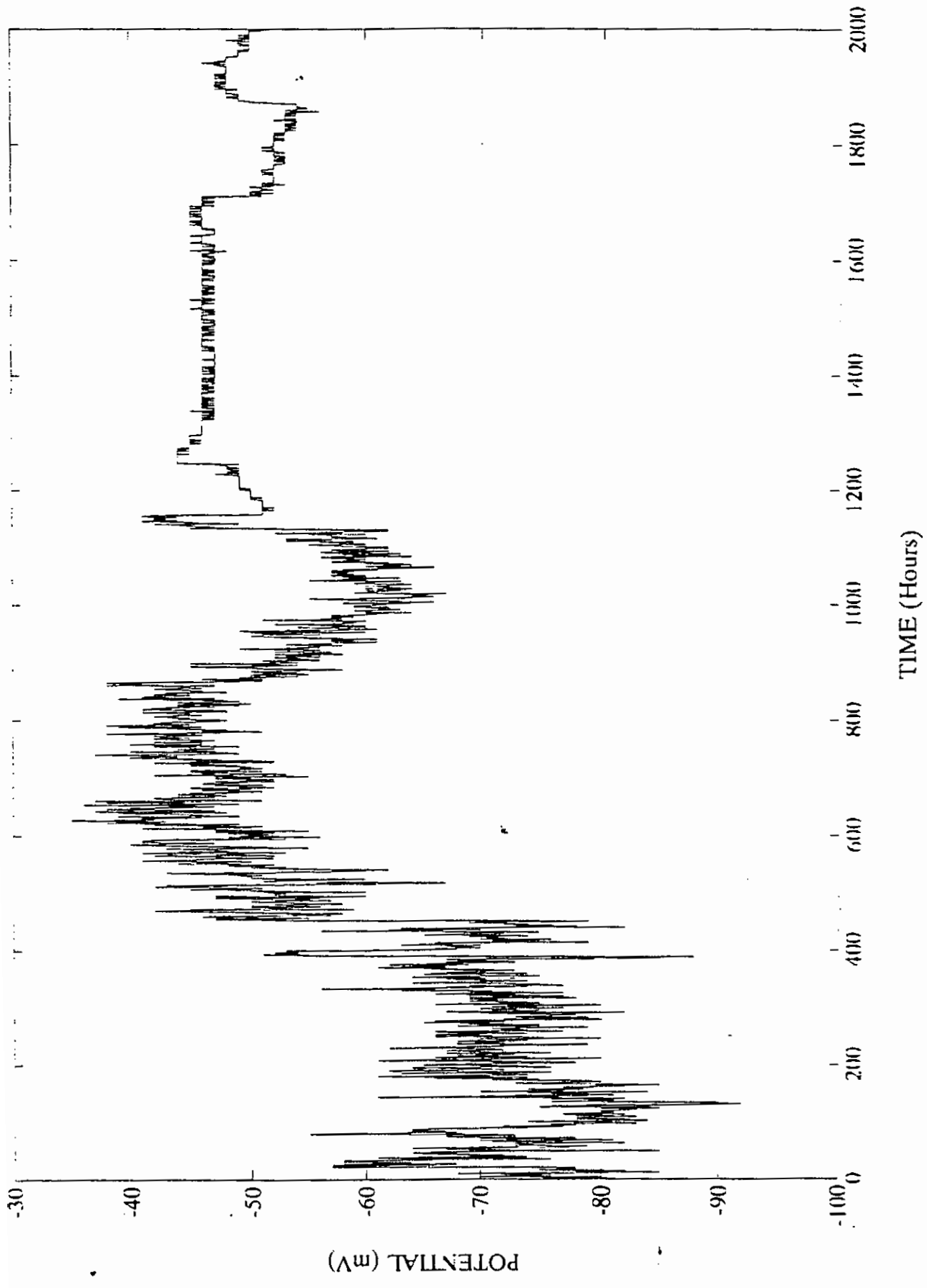


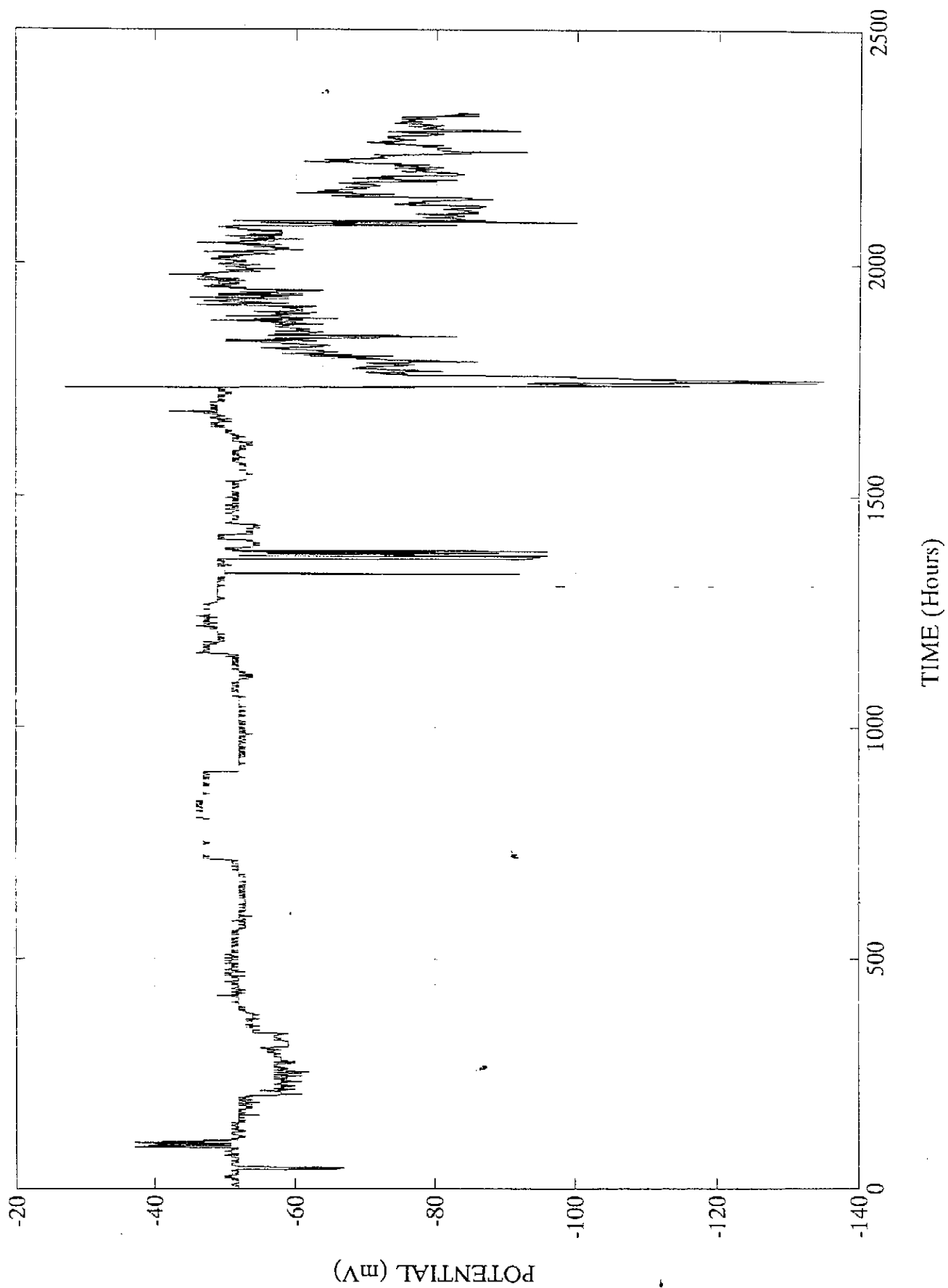


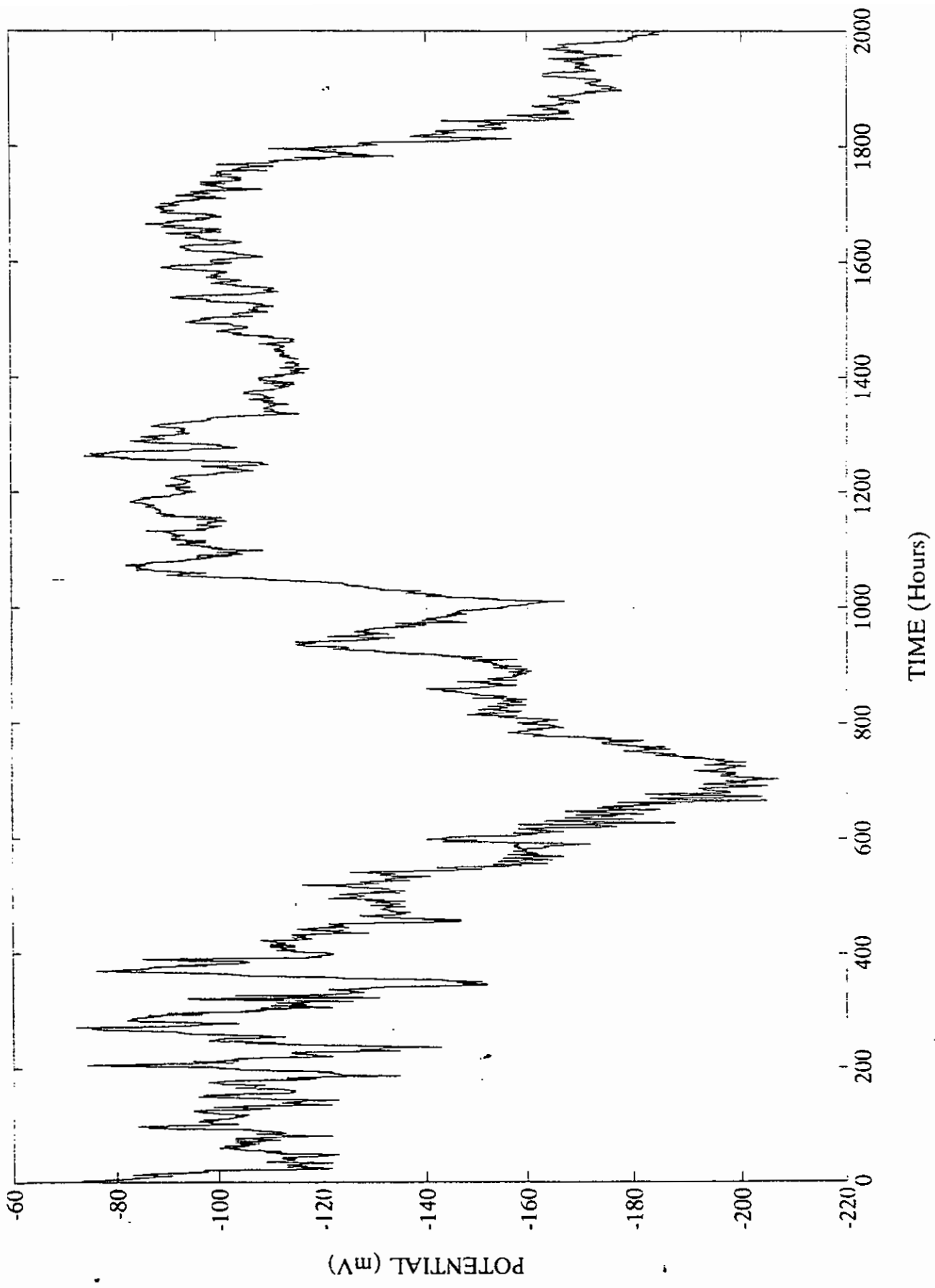


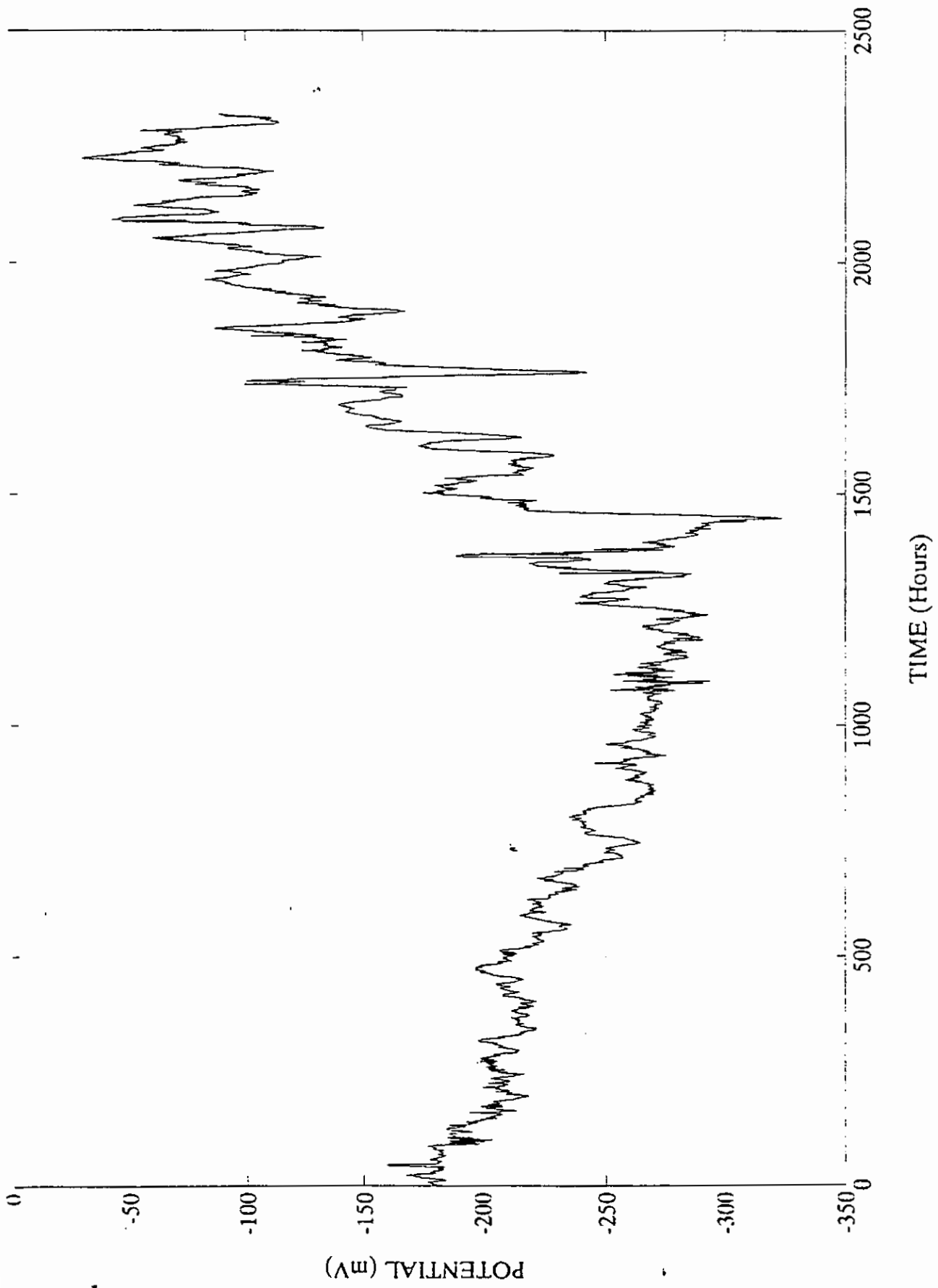


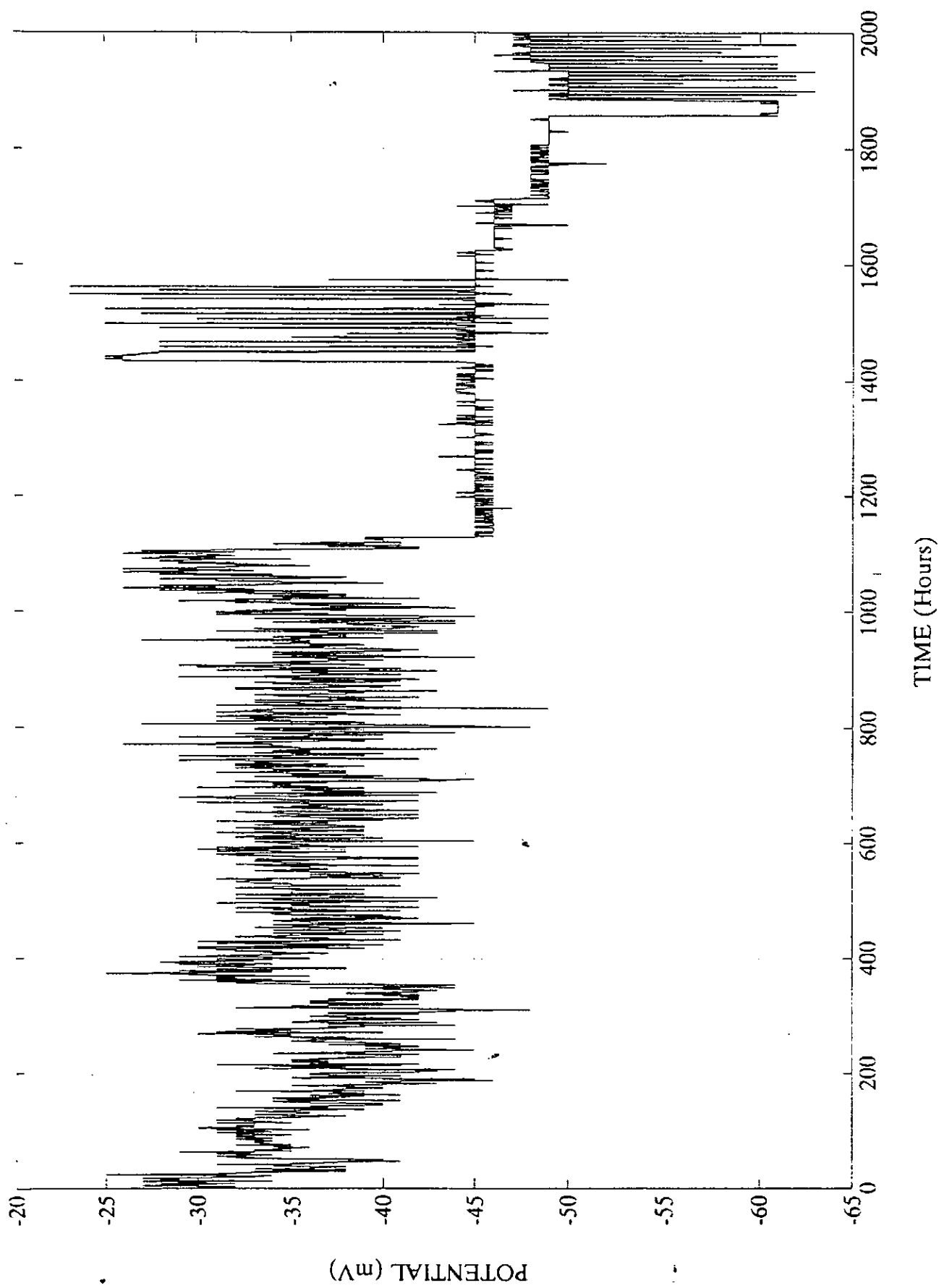


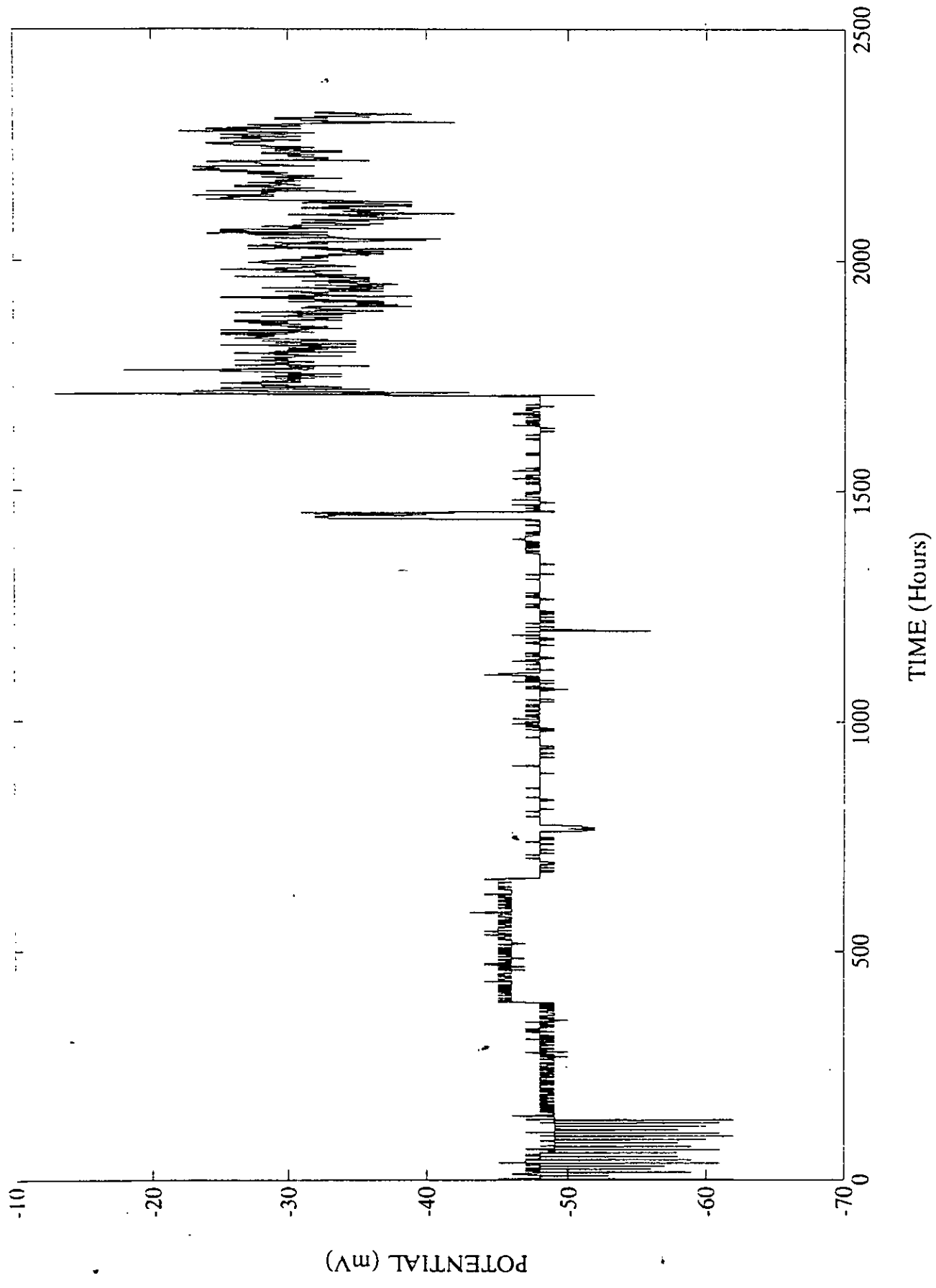


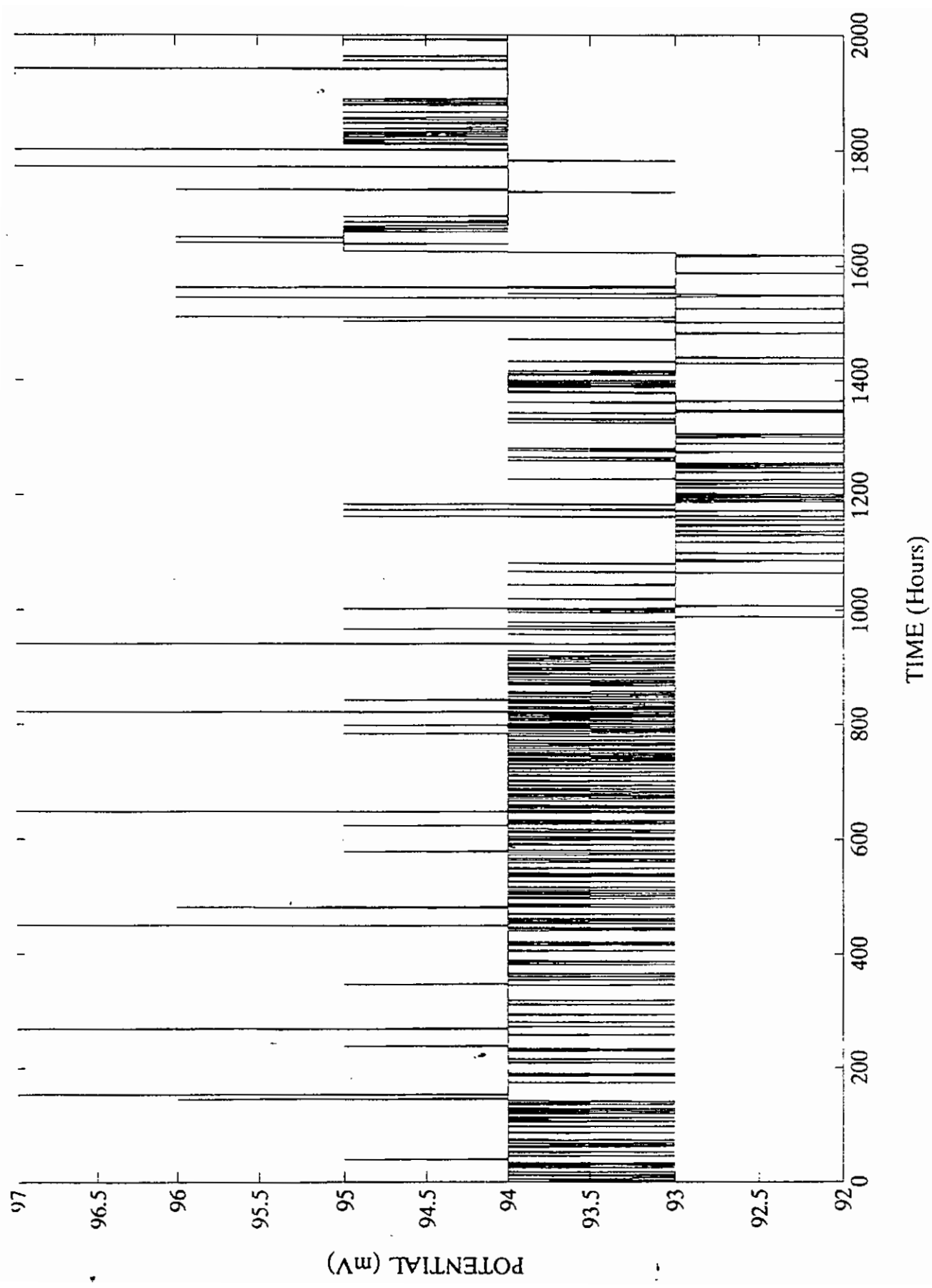


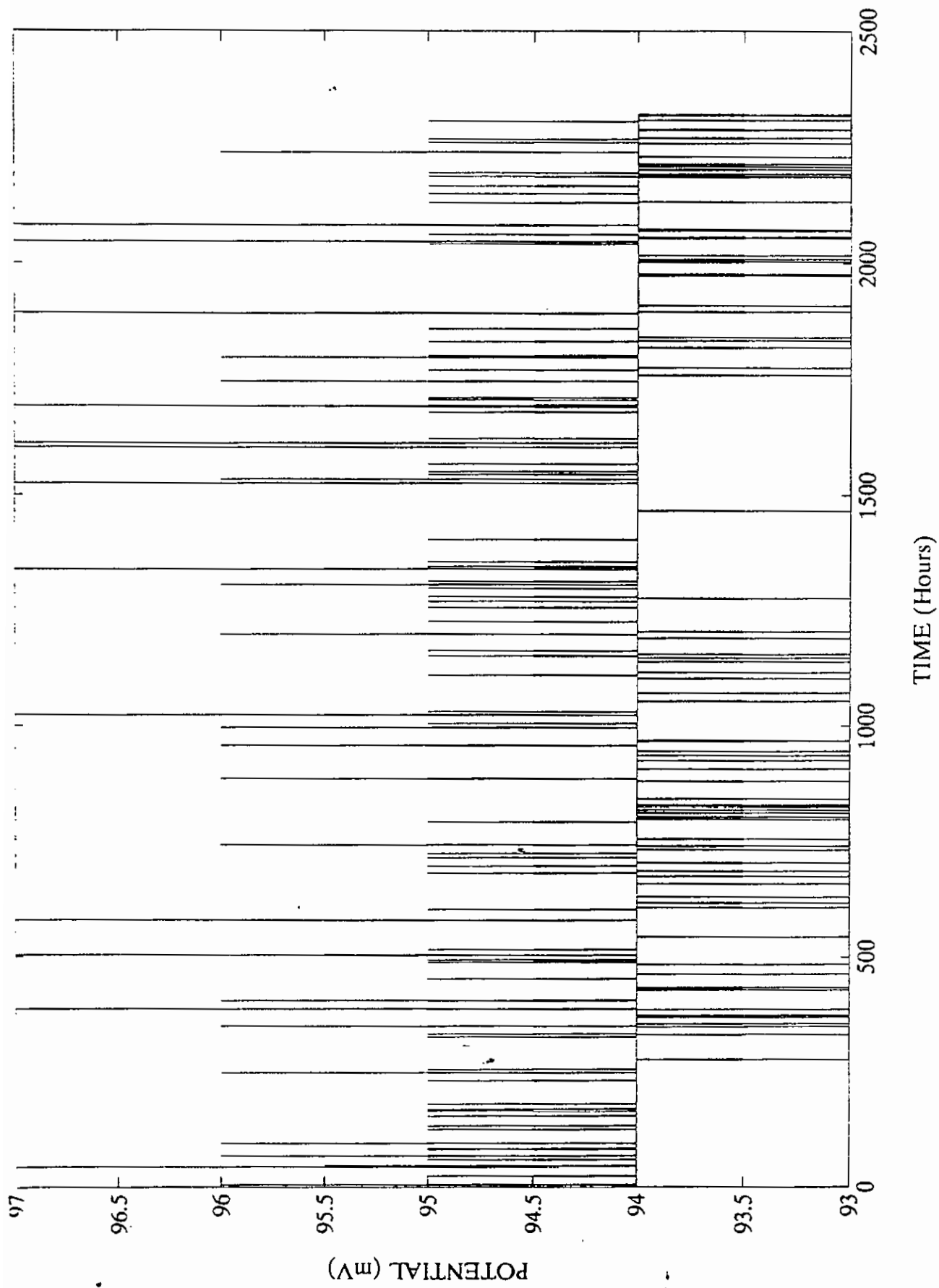


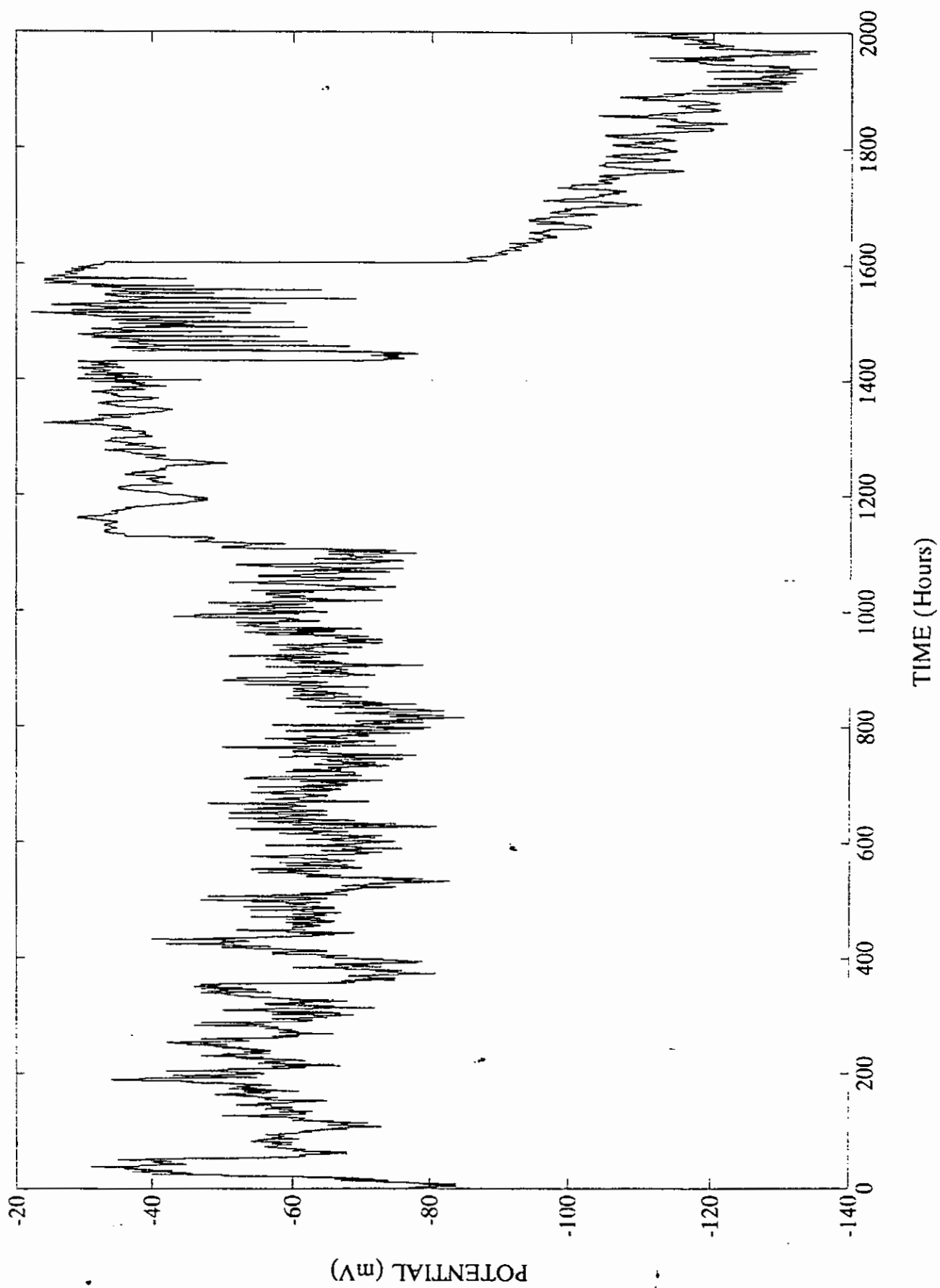


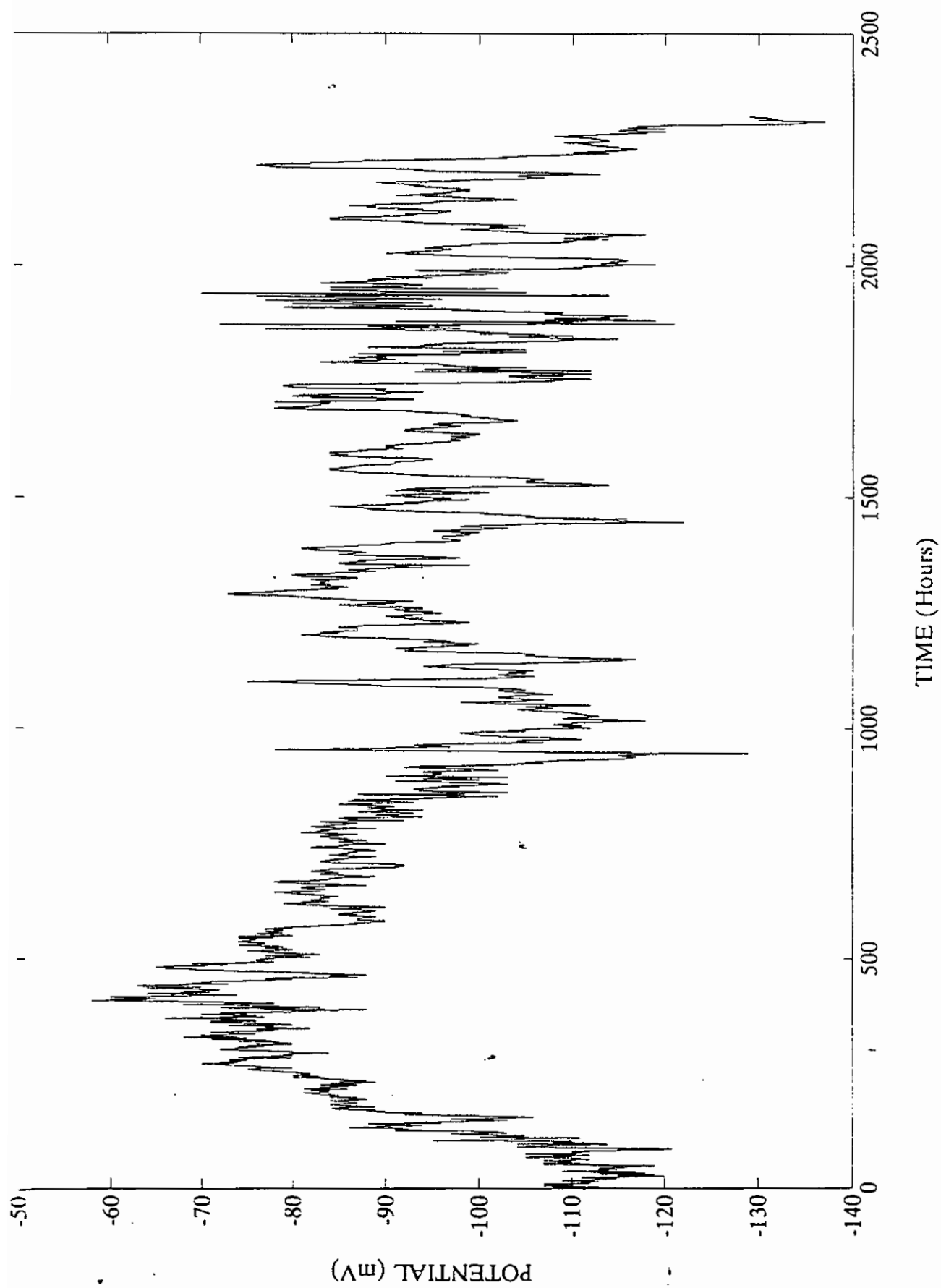


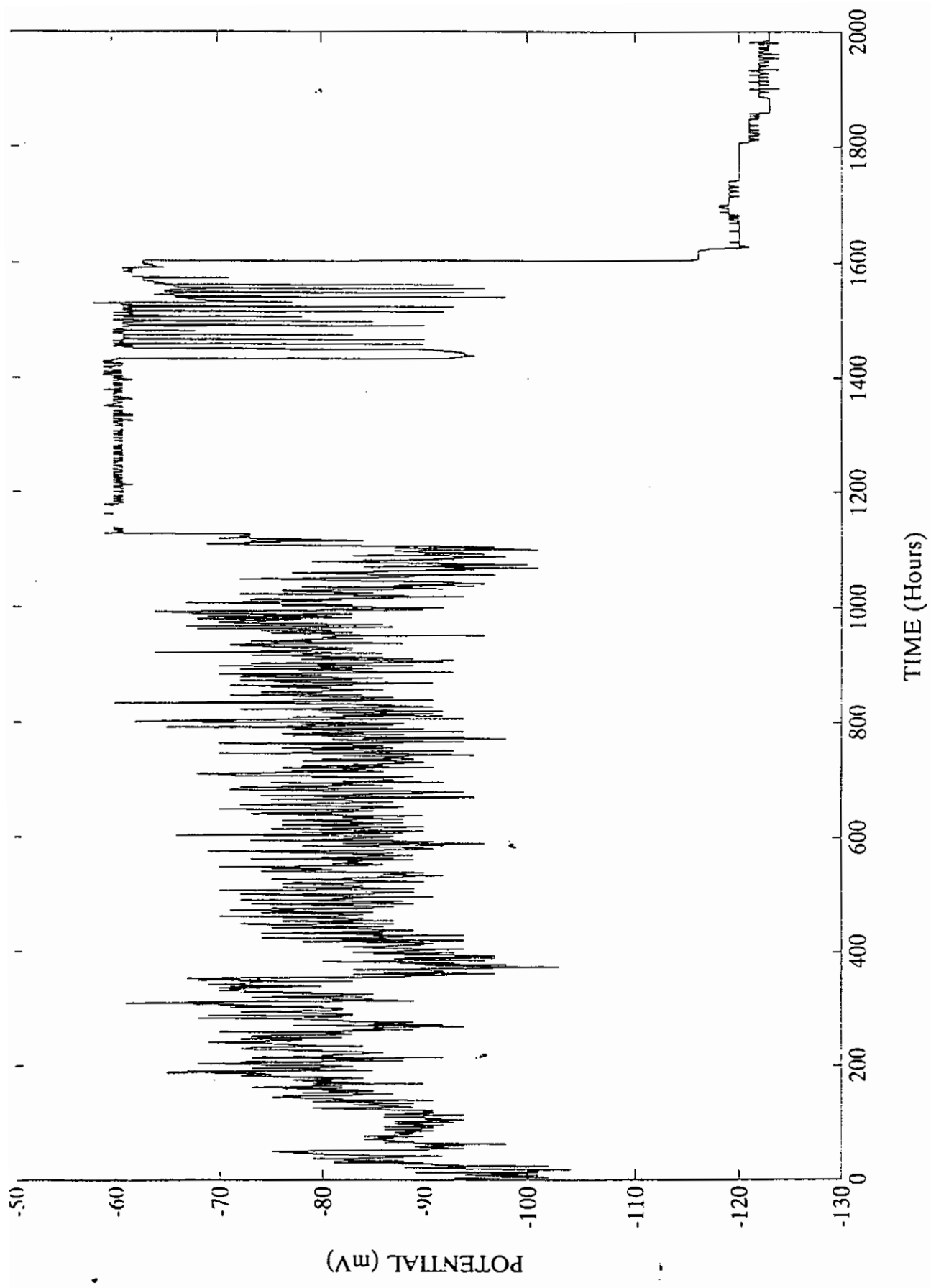


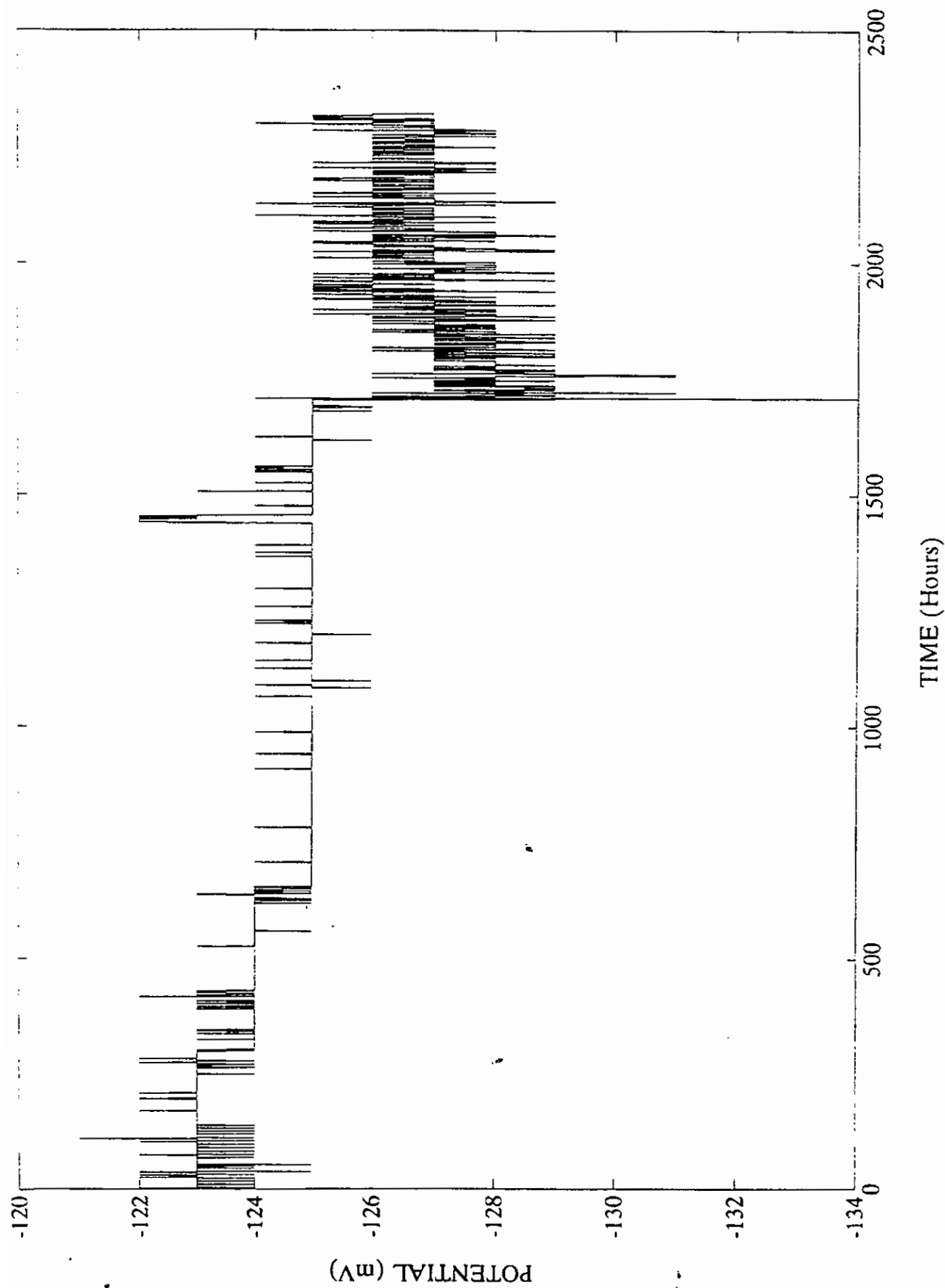


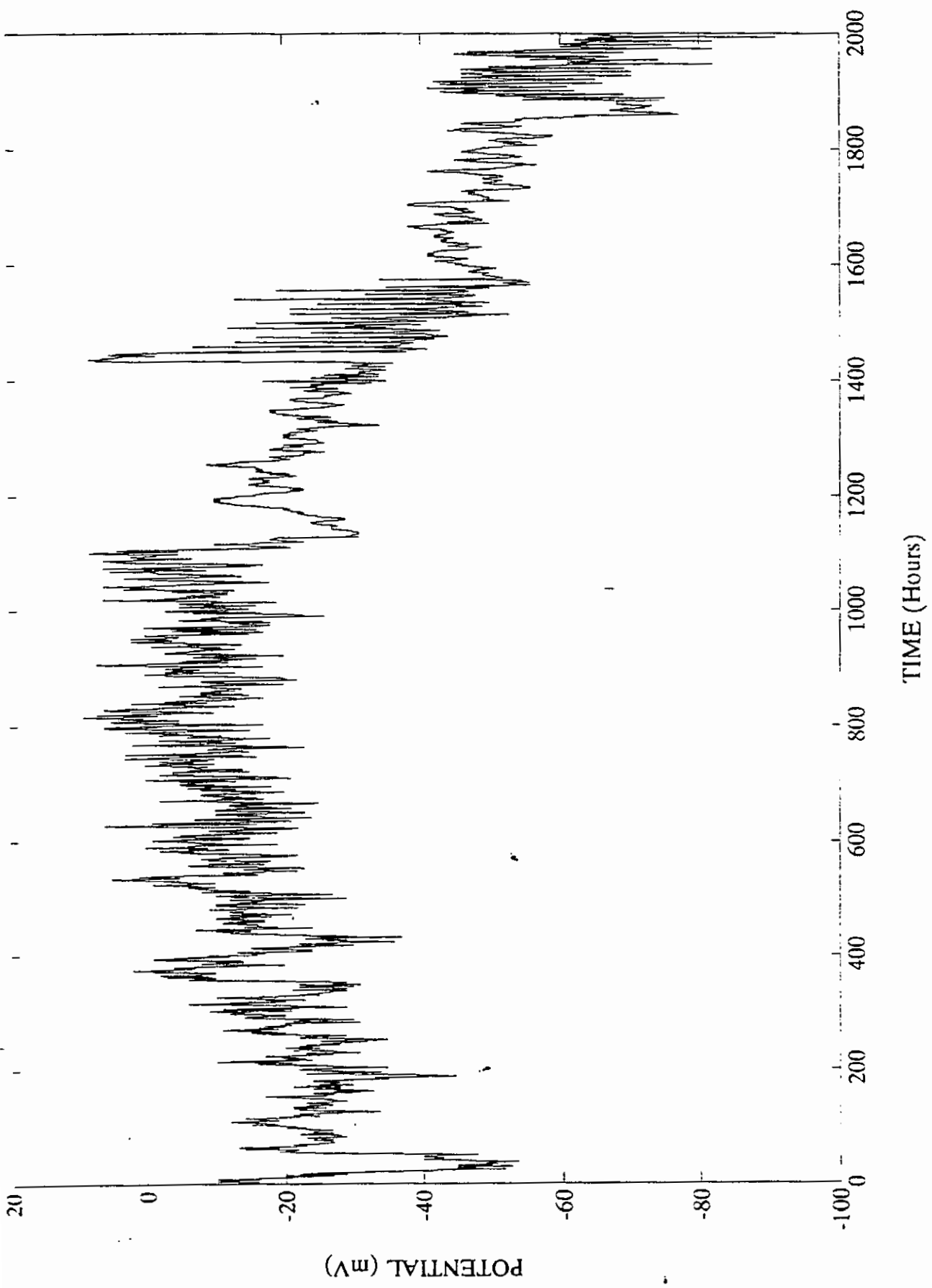


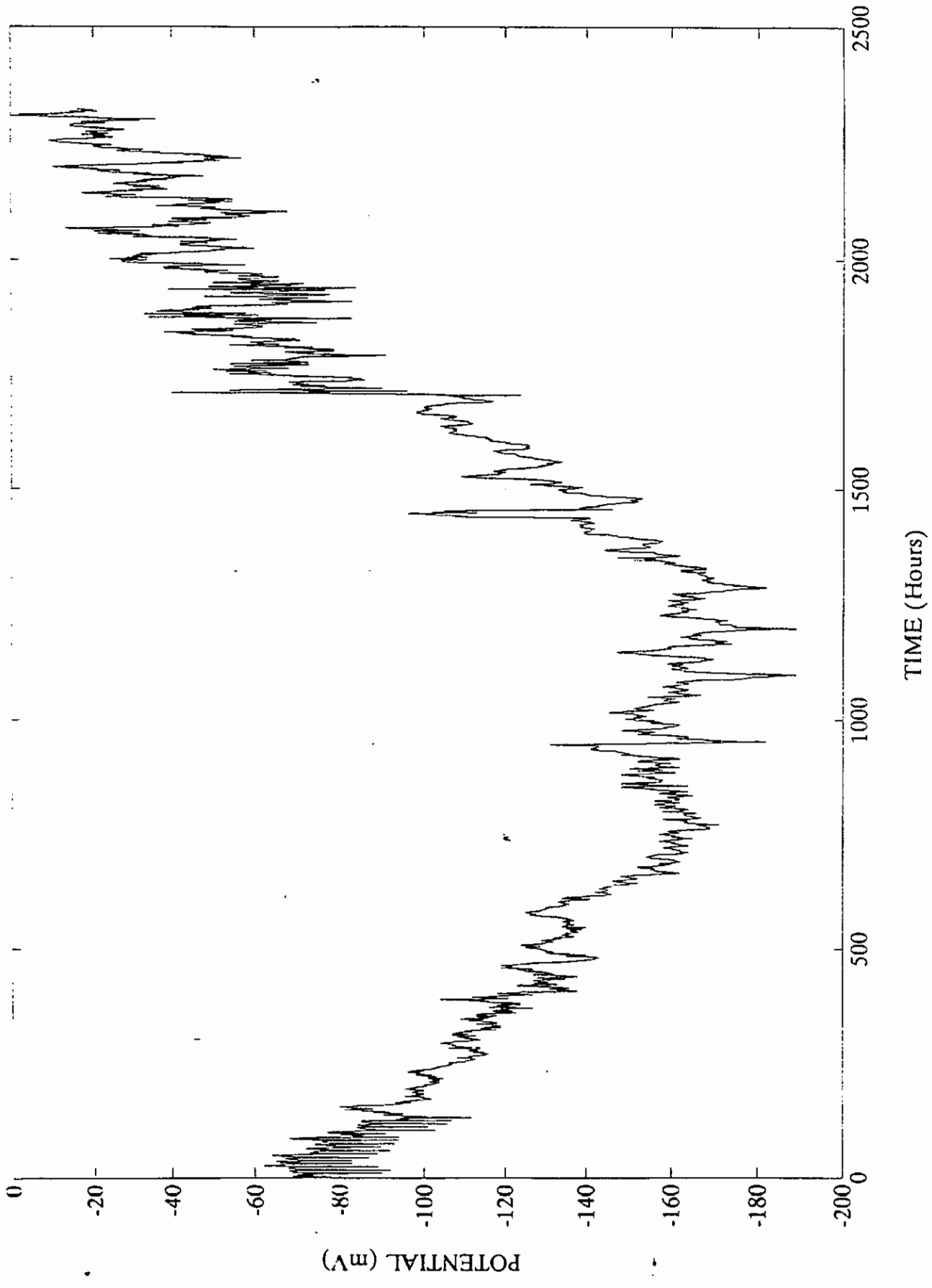


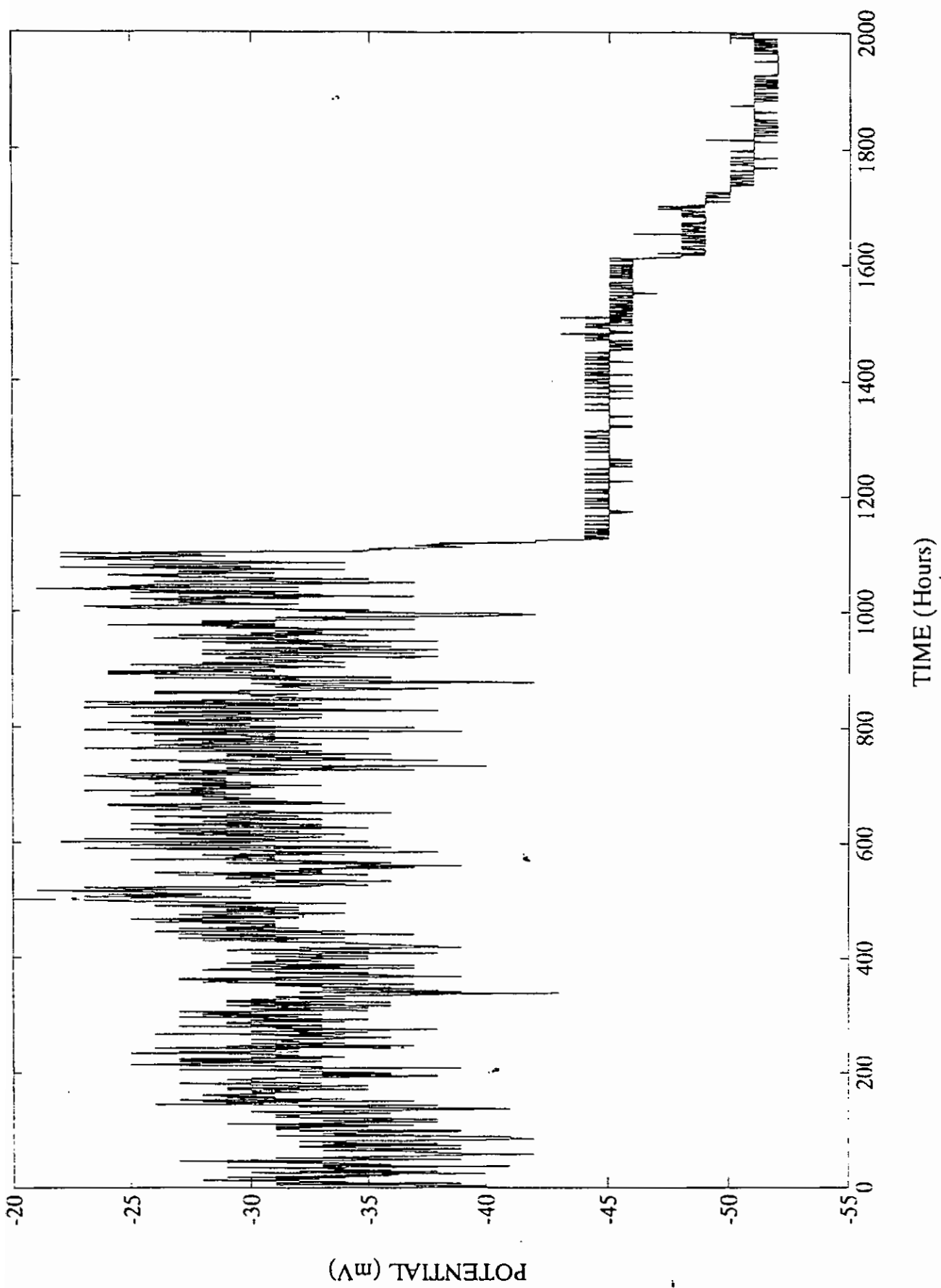


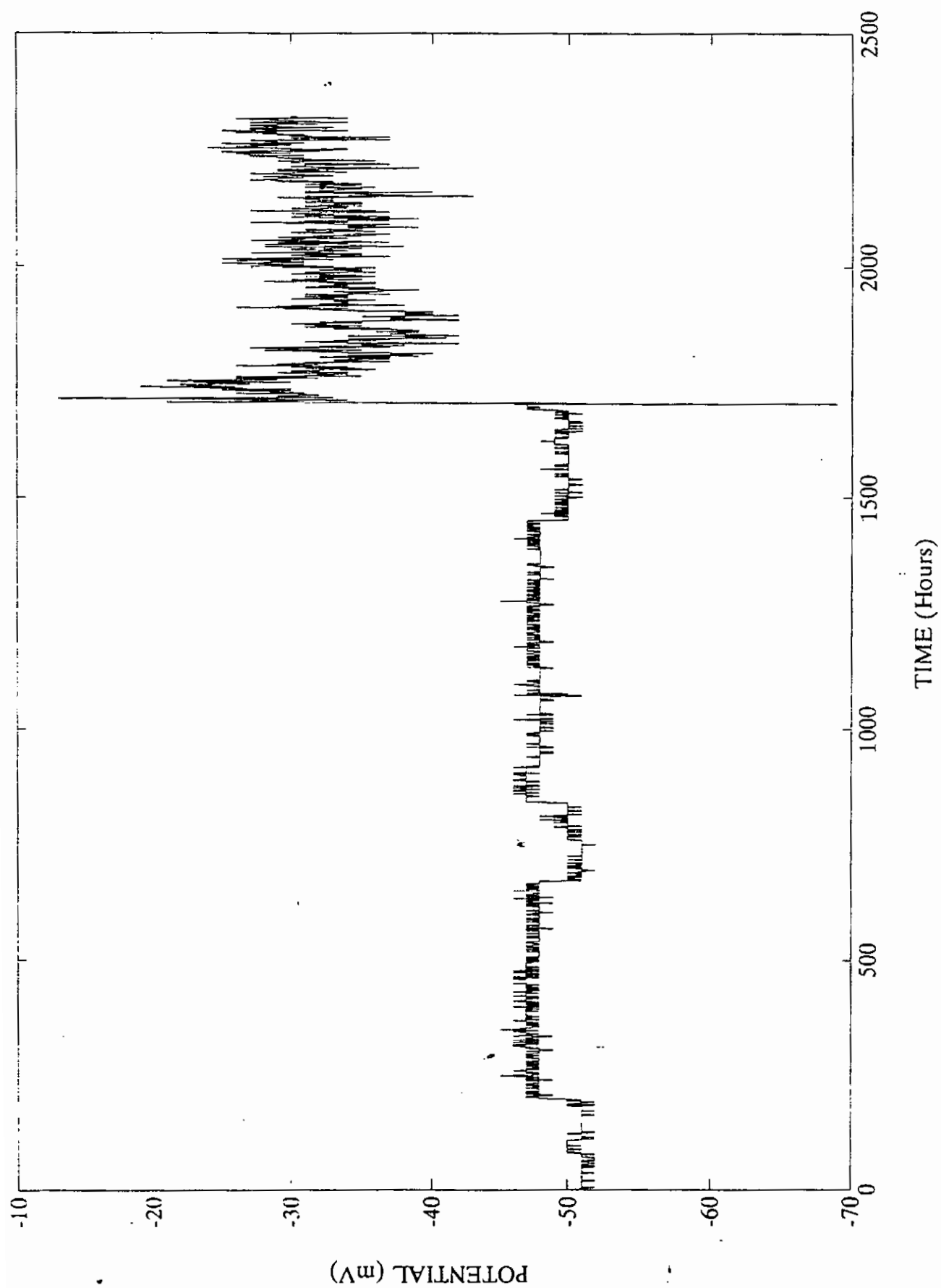






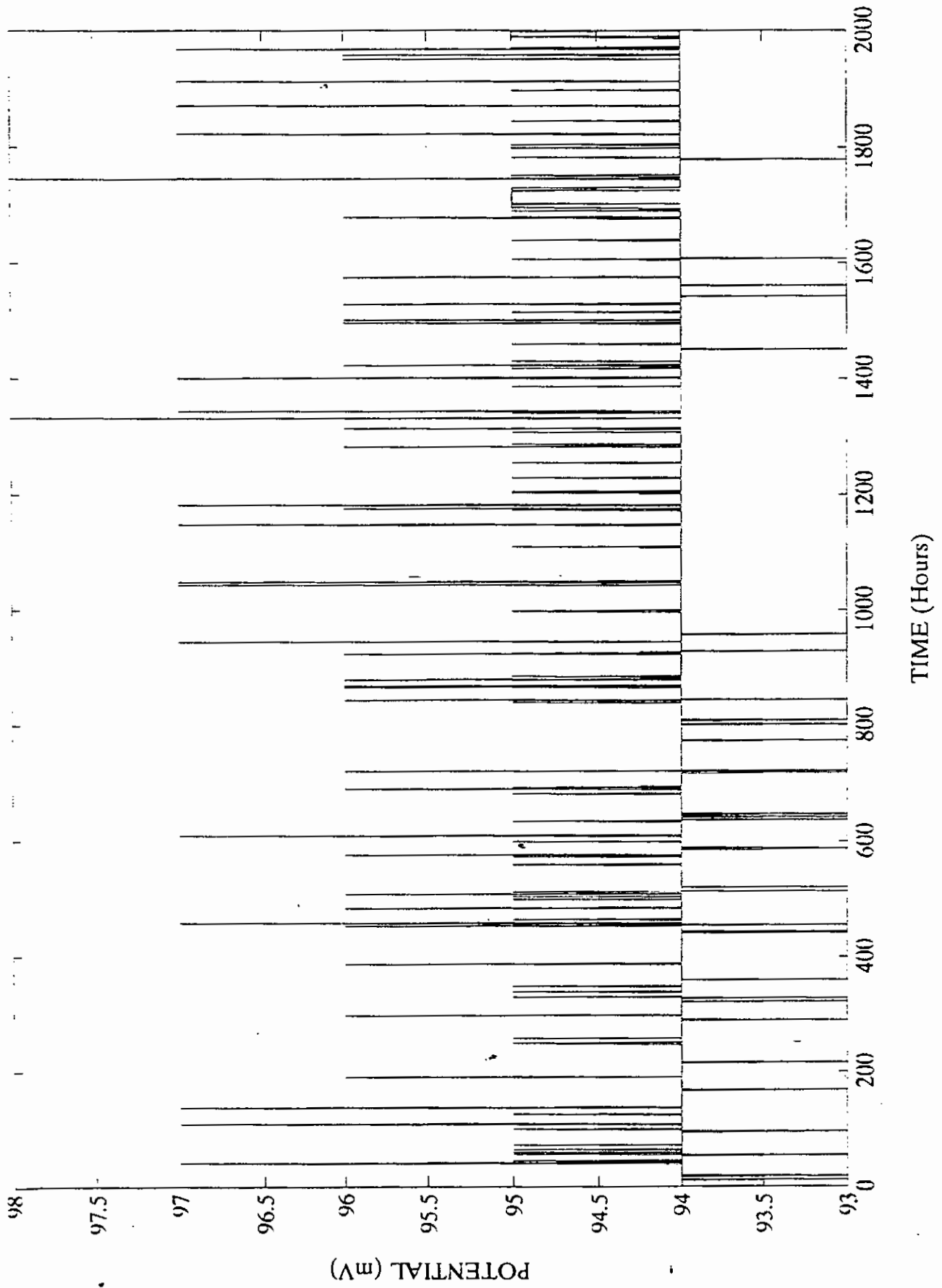


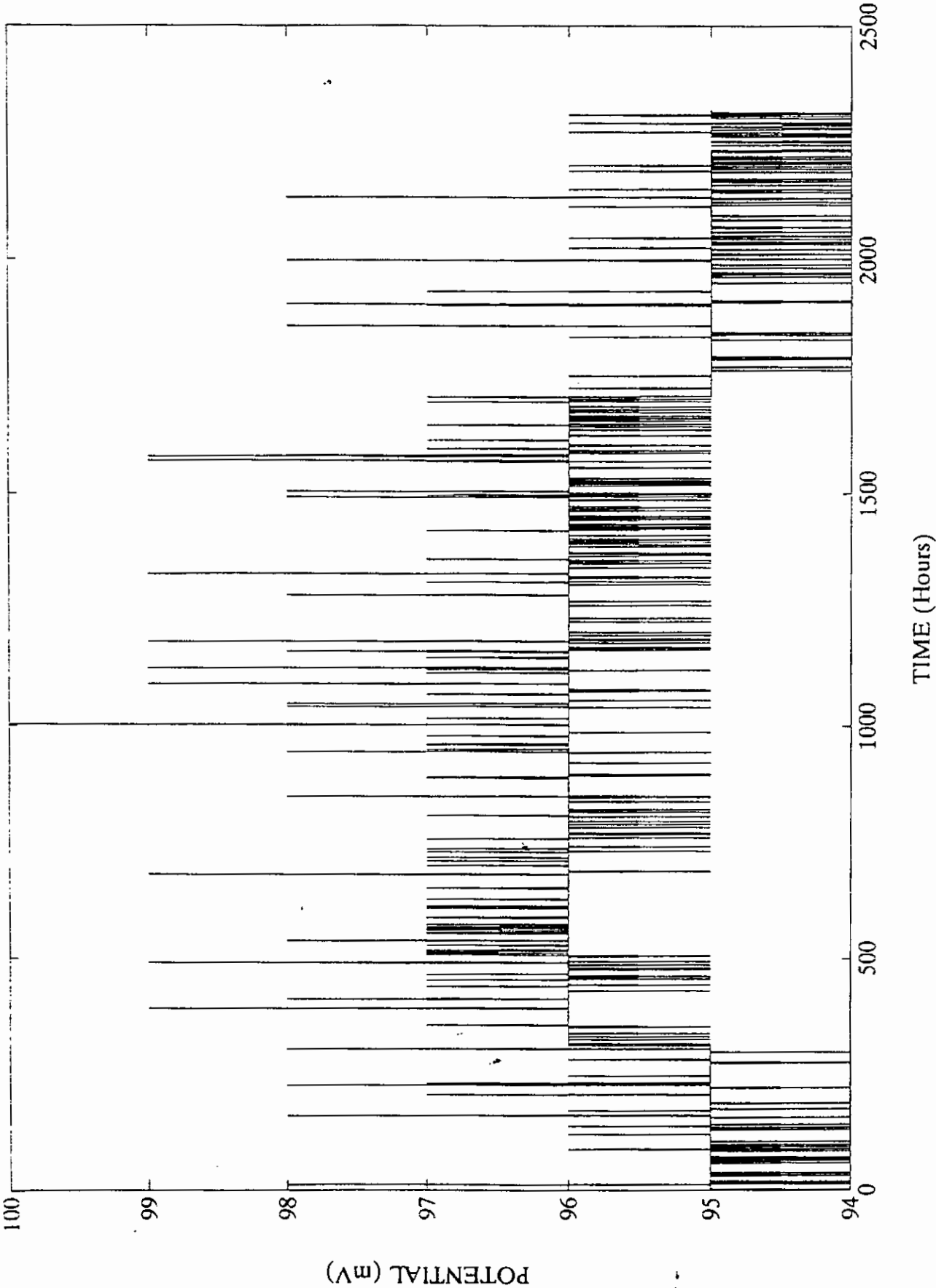




15123914
Agonium

Gjfgkjfyklugi,tu9ityi,tyityi,tyityity

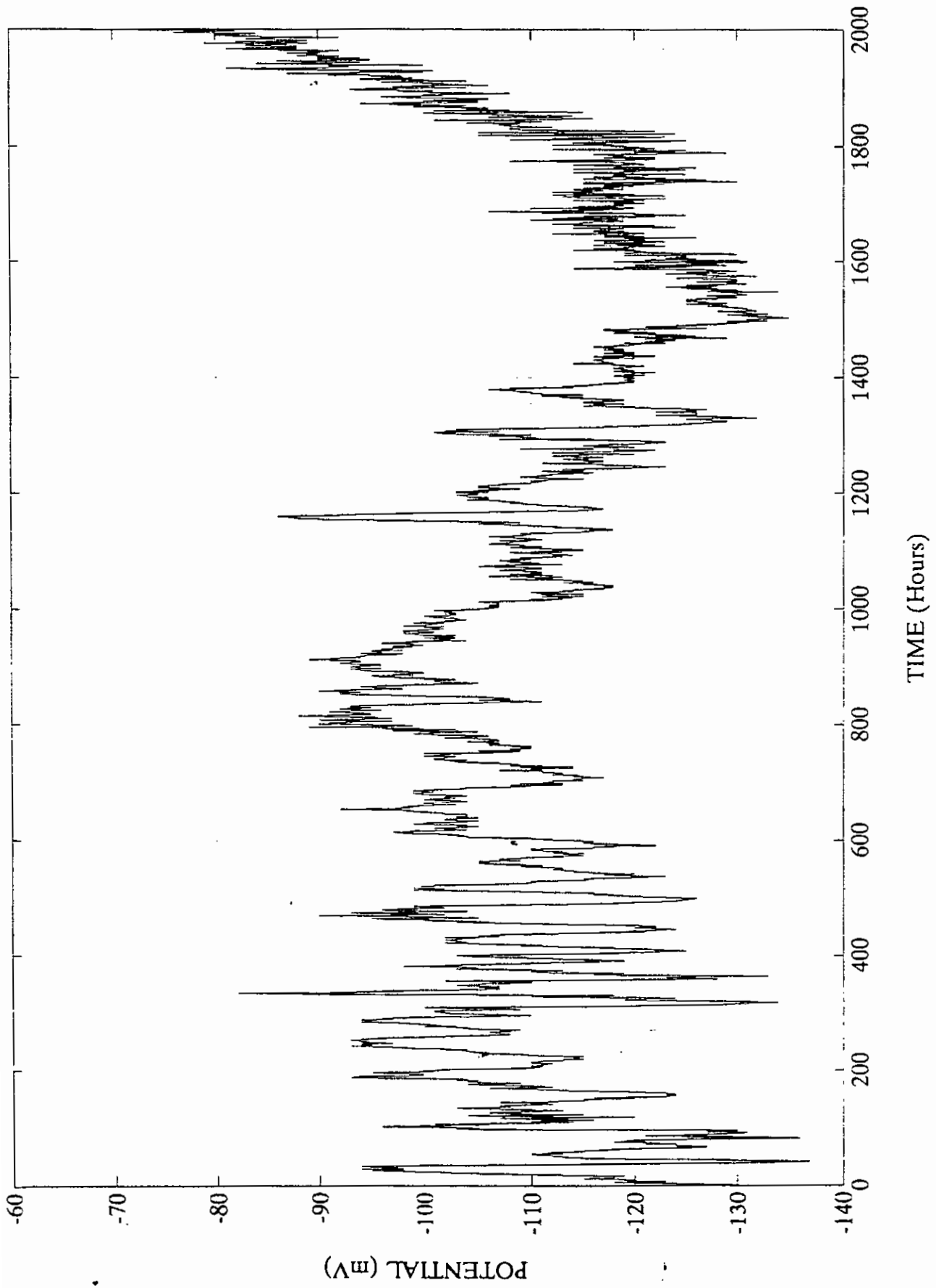




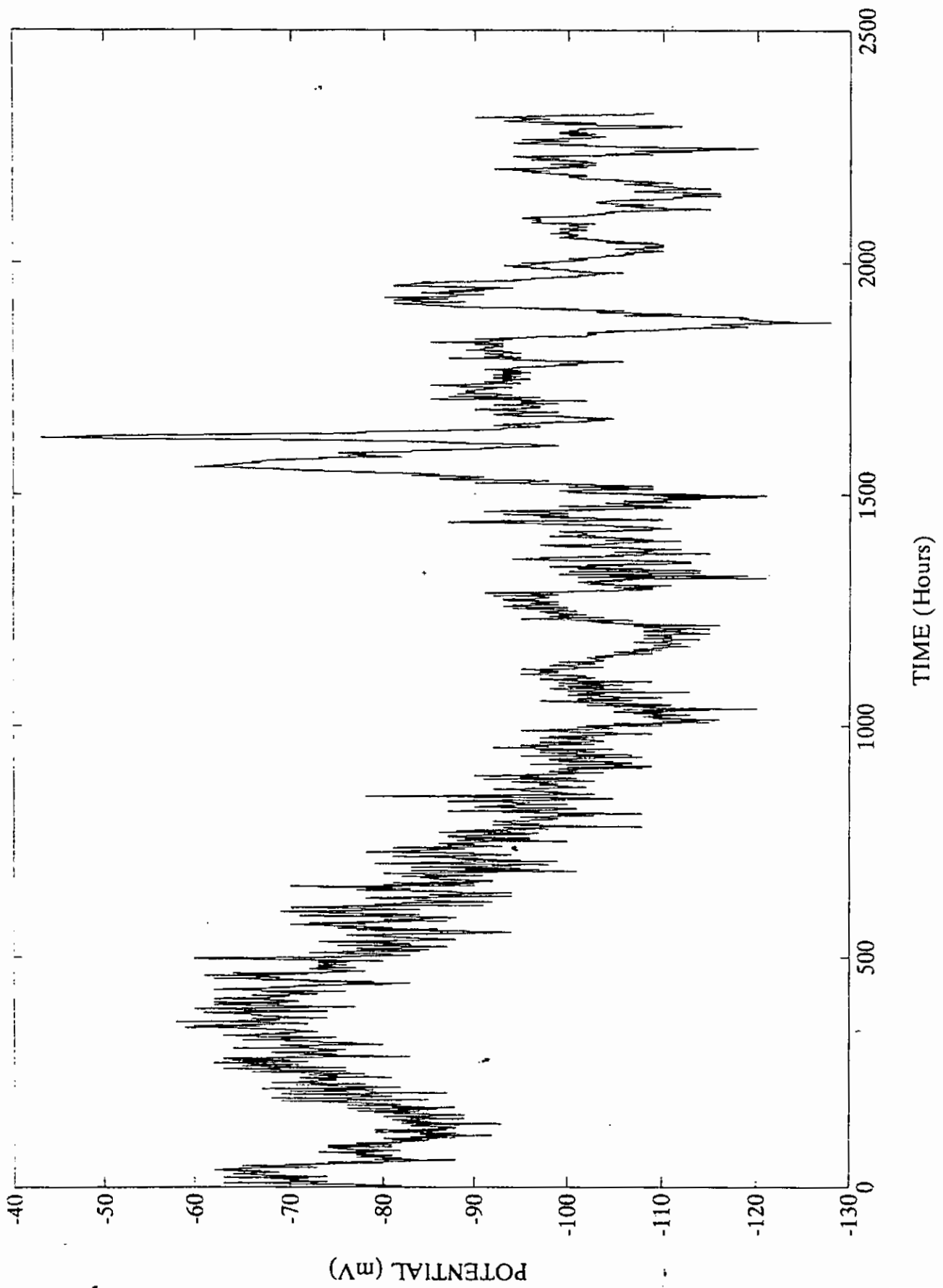
TIME (Hours)

POTENTIAL (mV)

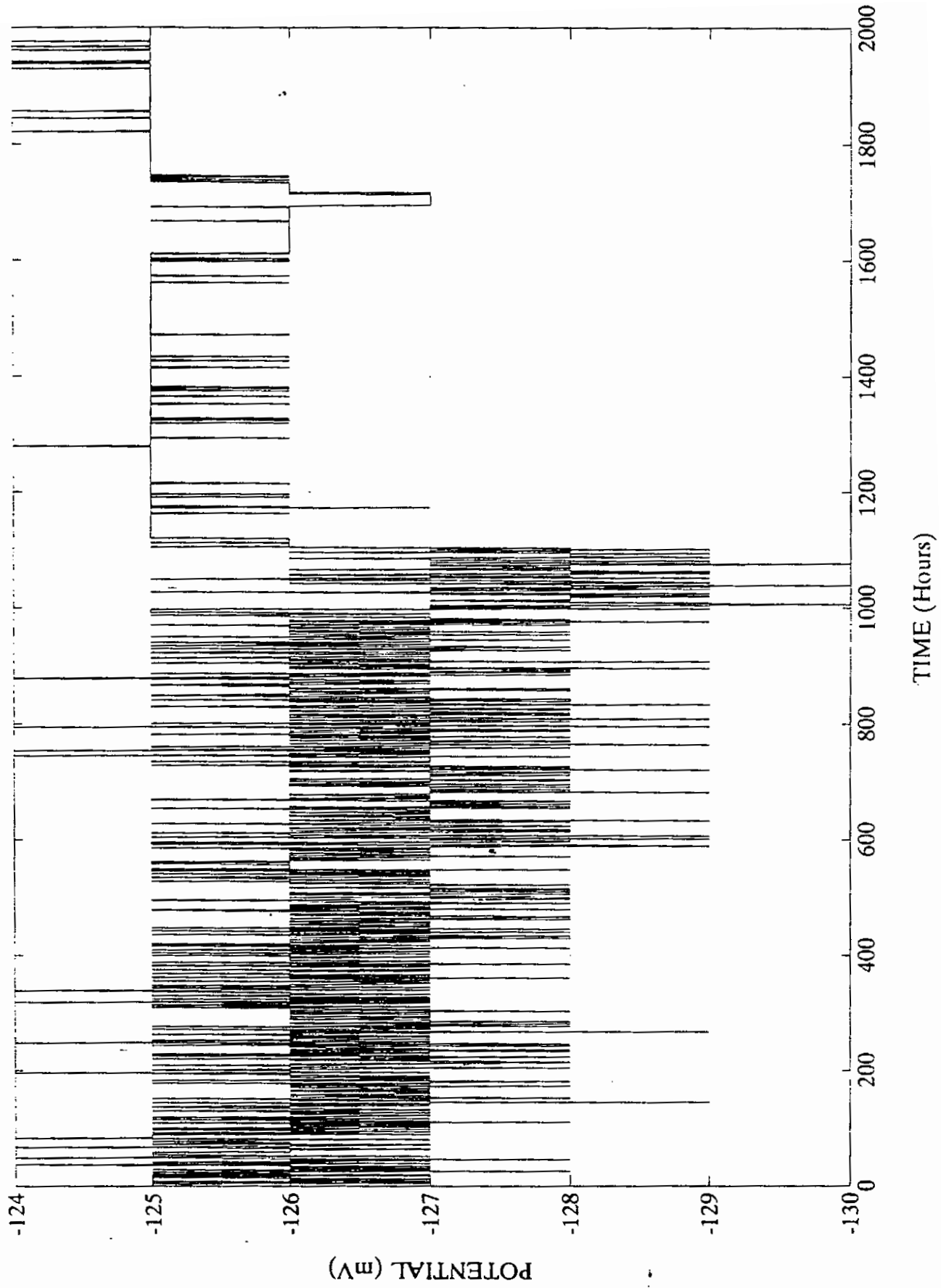
Fsfsfrrrrr



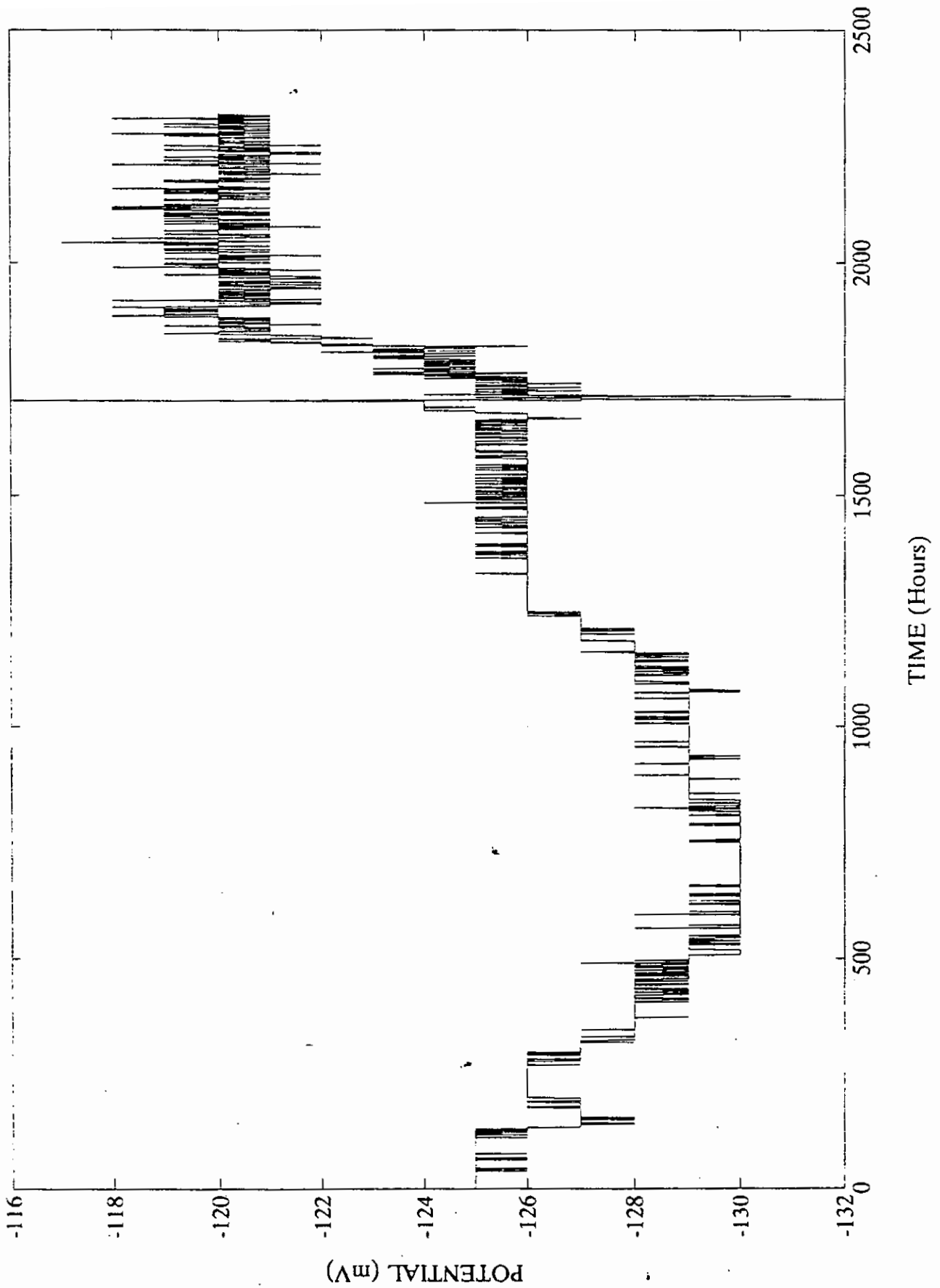
Η ηρ ηξγ ξ γικ υκ γυ8



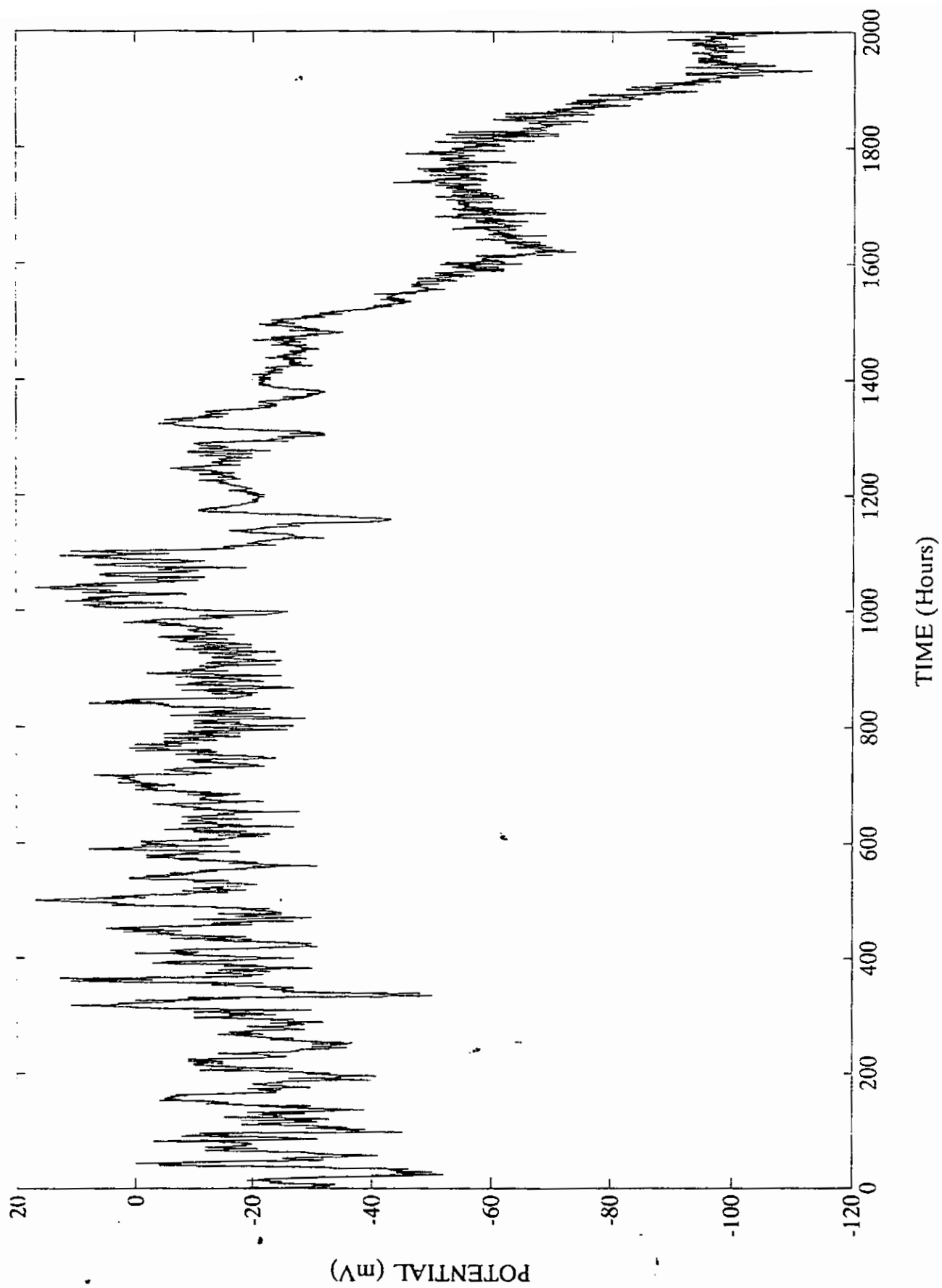
Channel:3 16/07



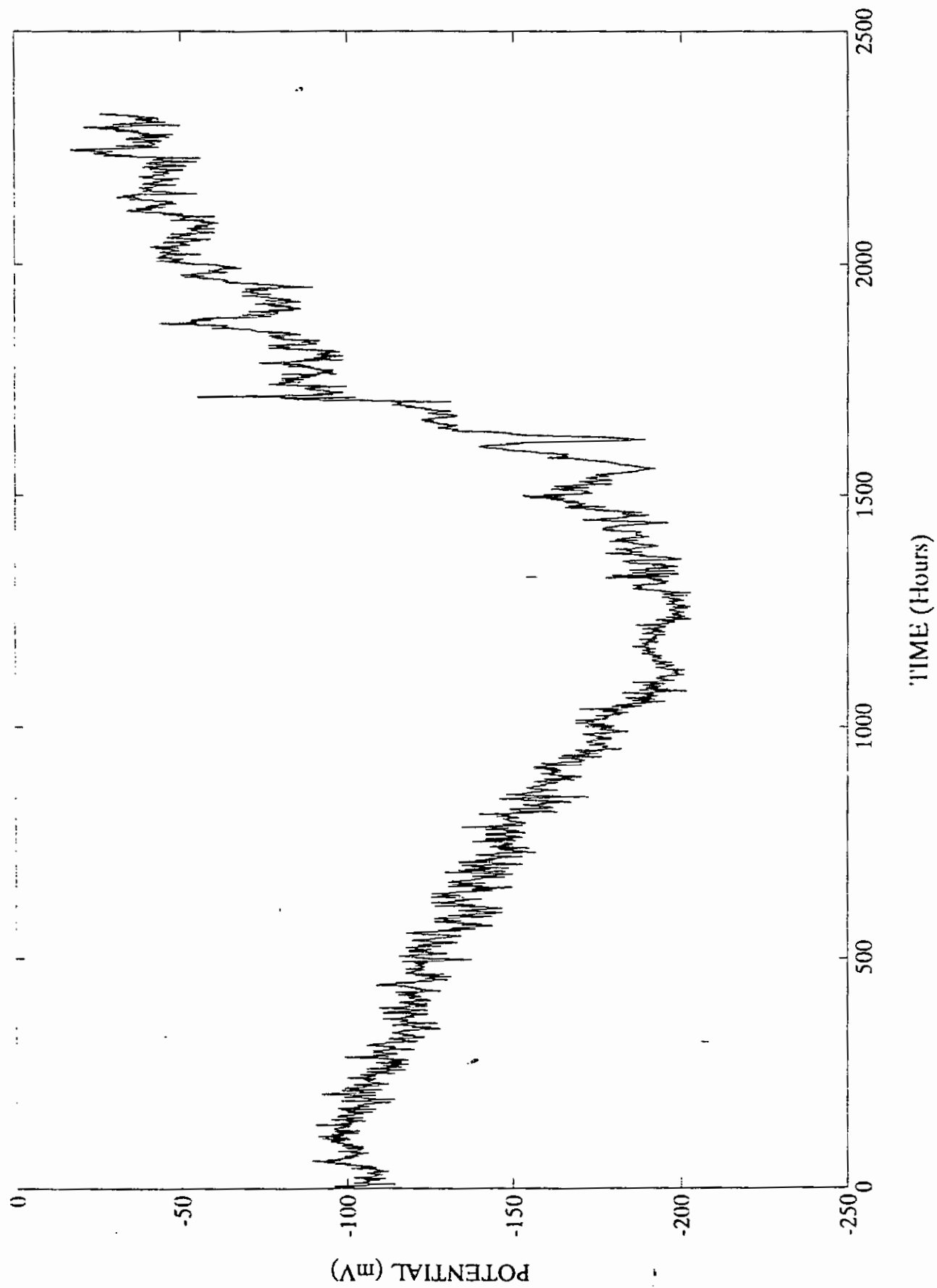
Channel:3 16/07

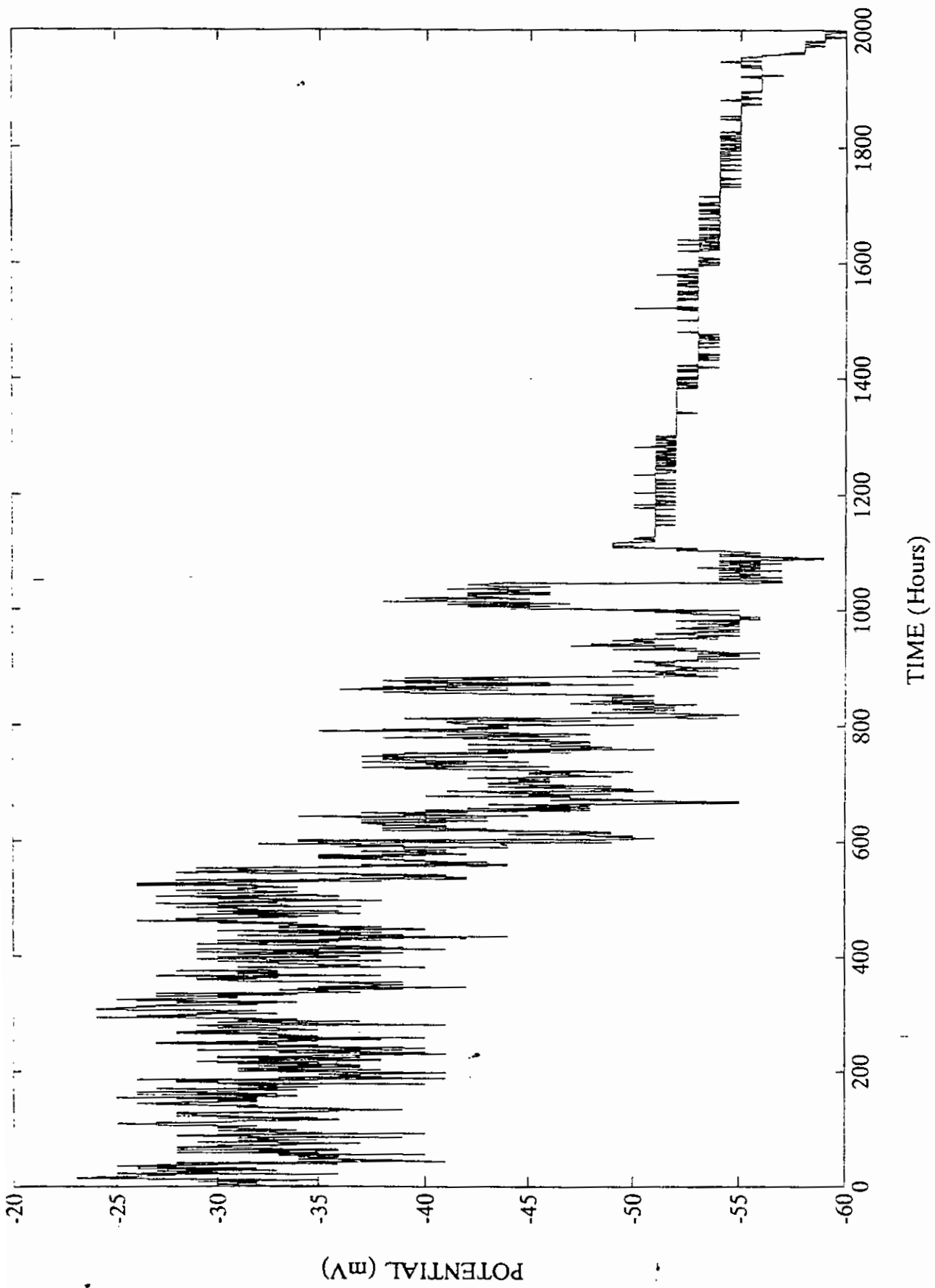


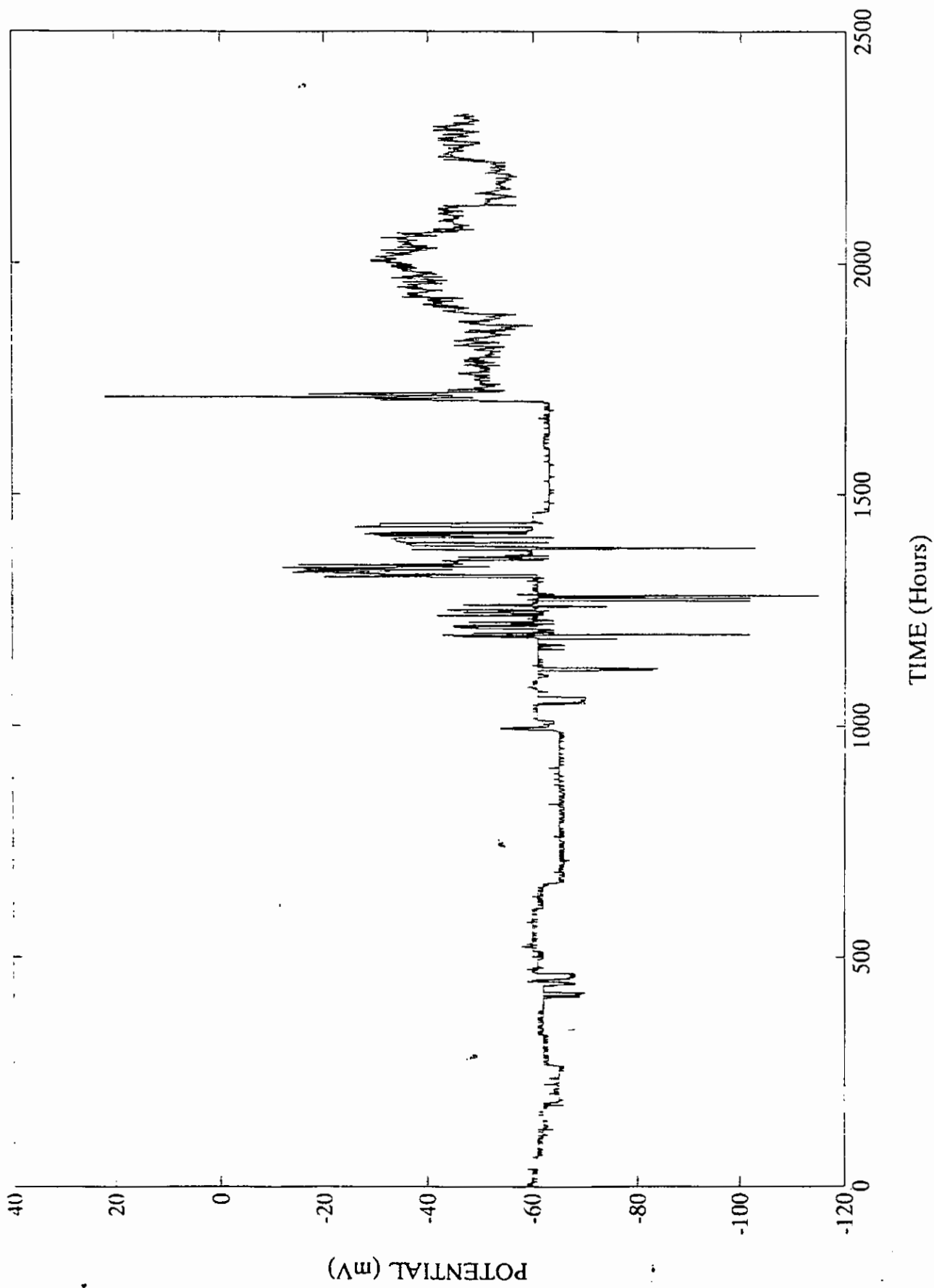
Channel:4 16/07/75

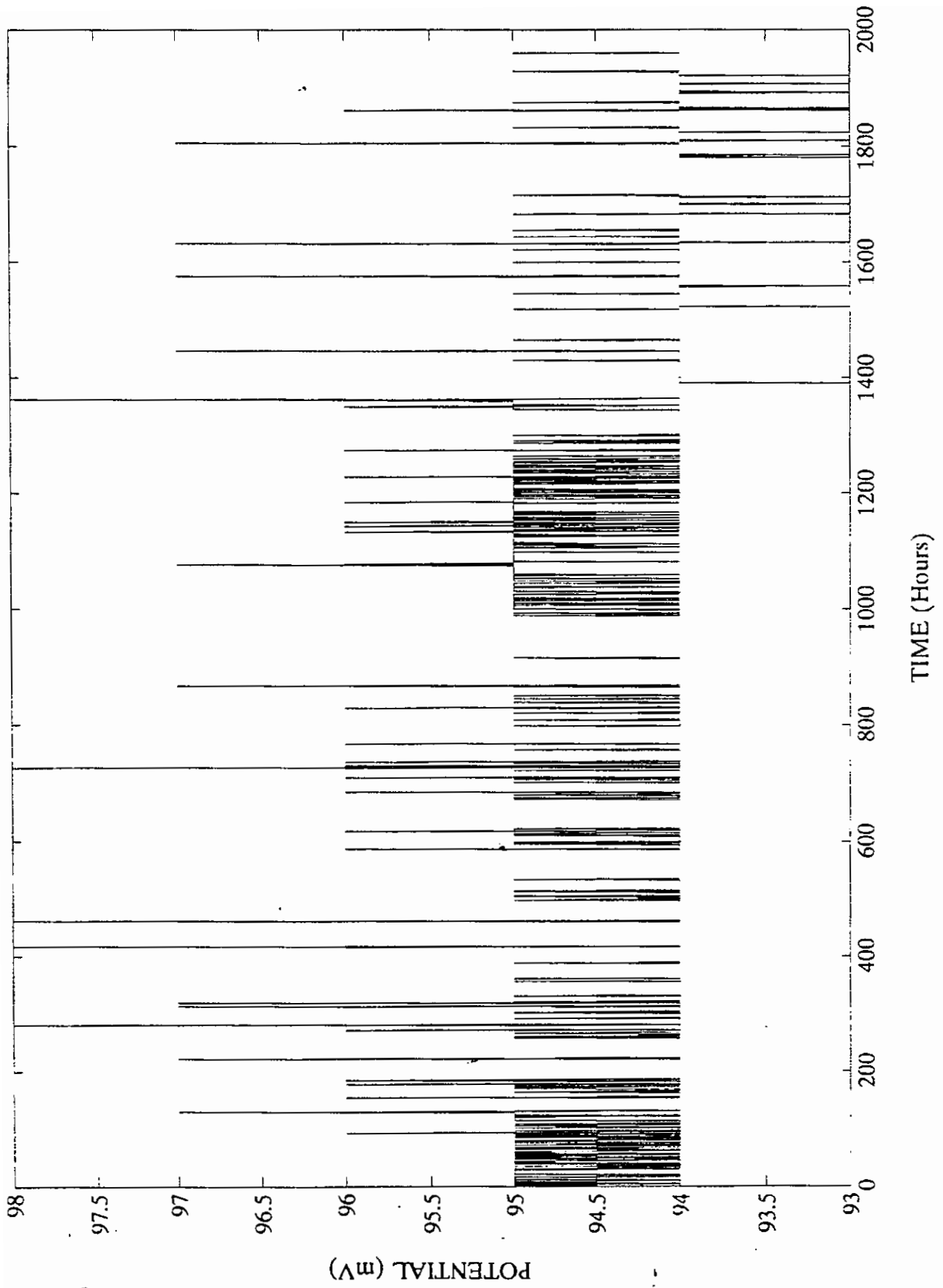


Channel:4 16/07/93

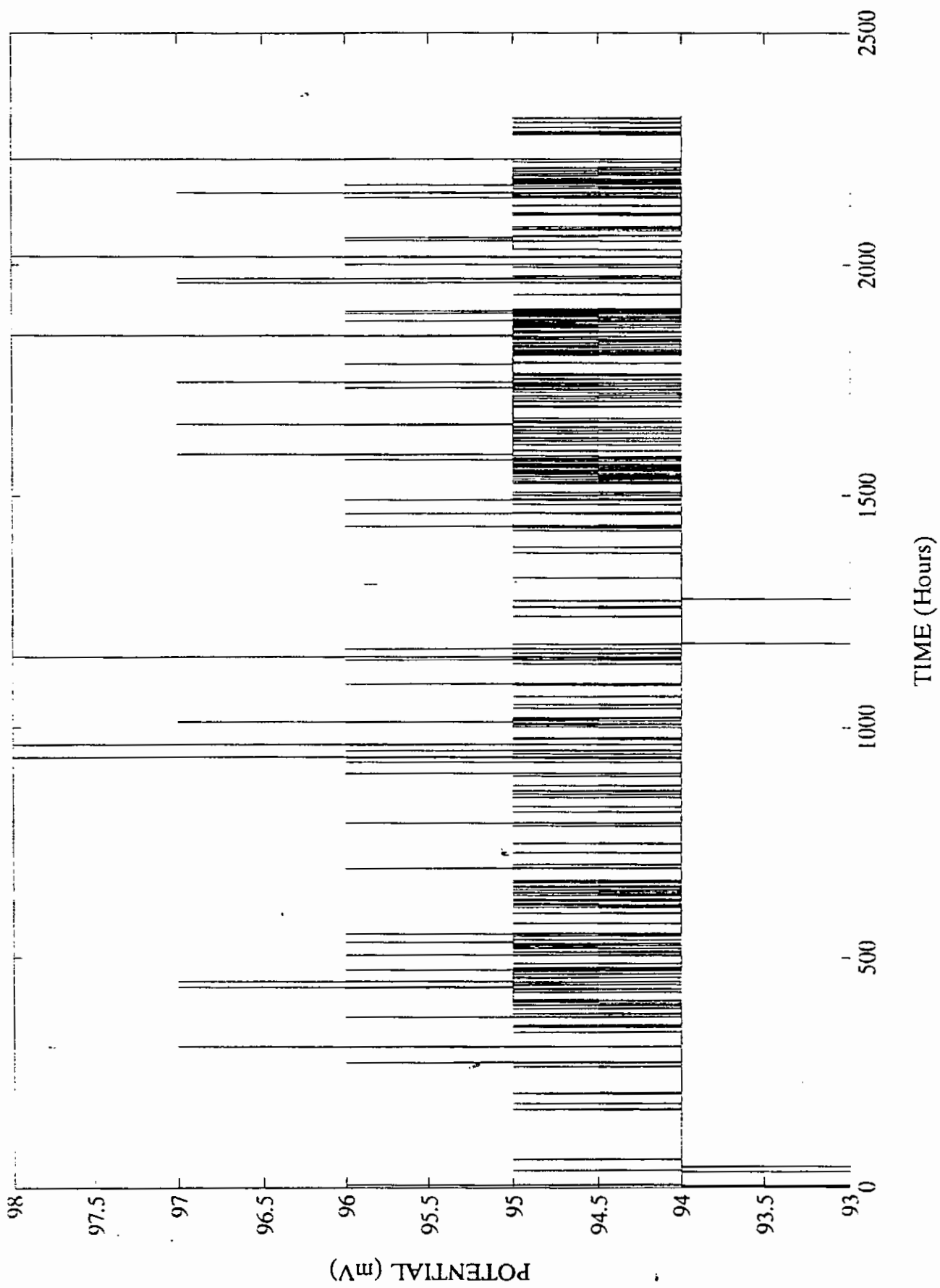




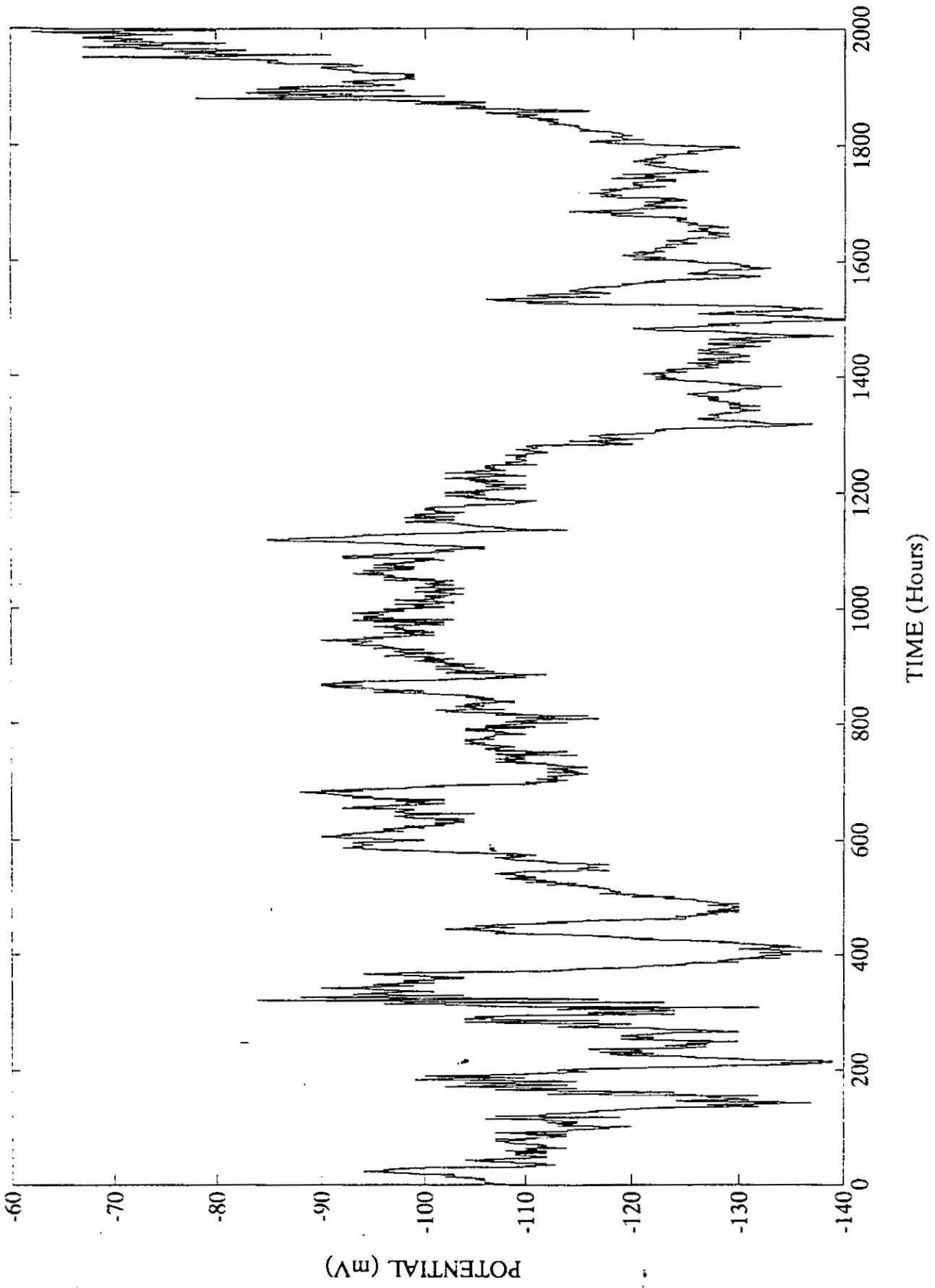




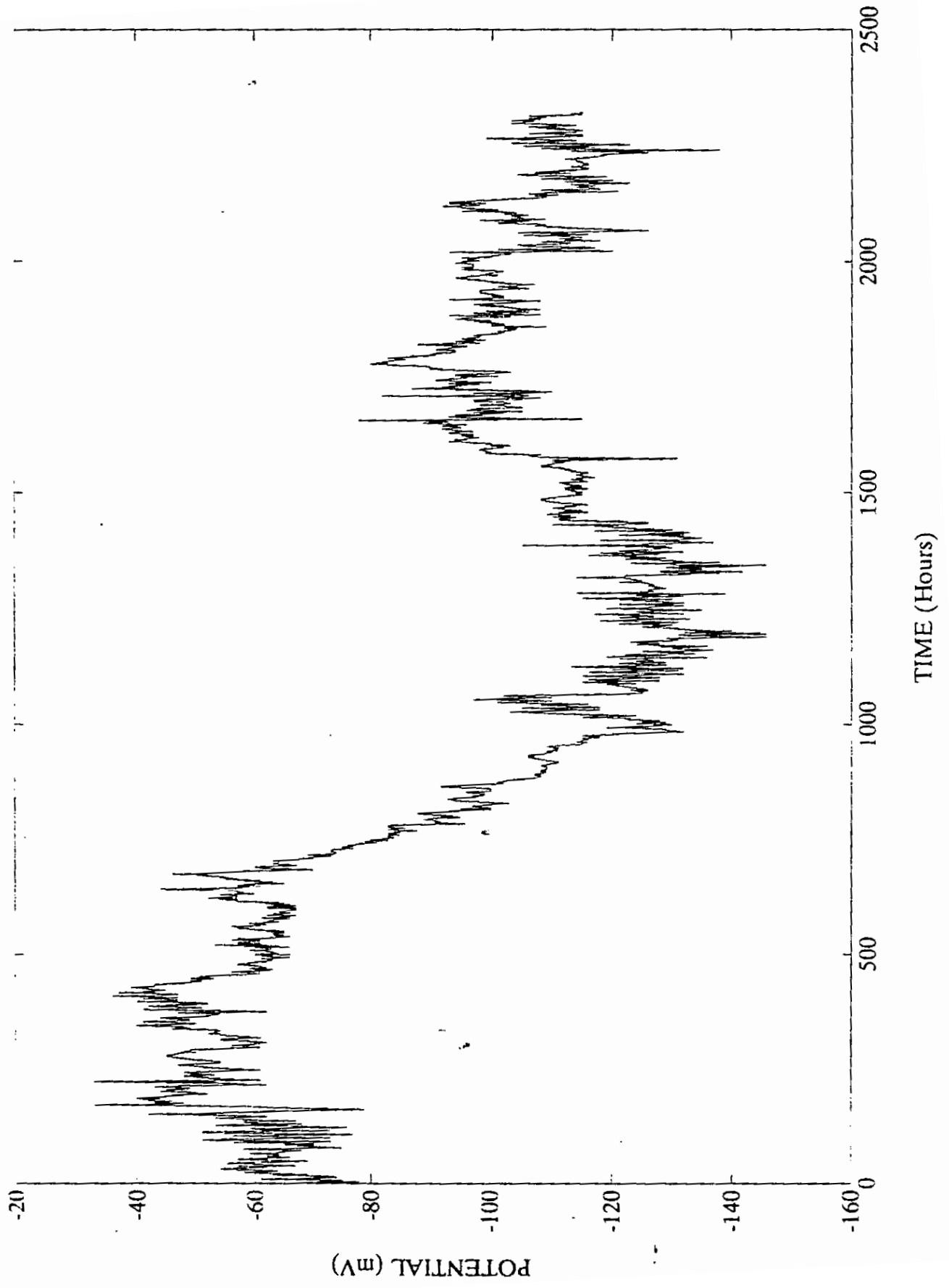
Channel: I 17/07



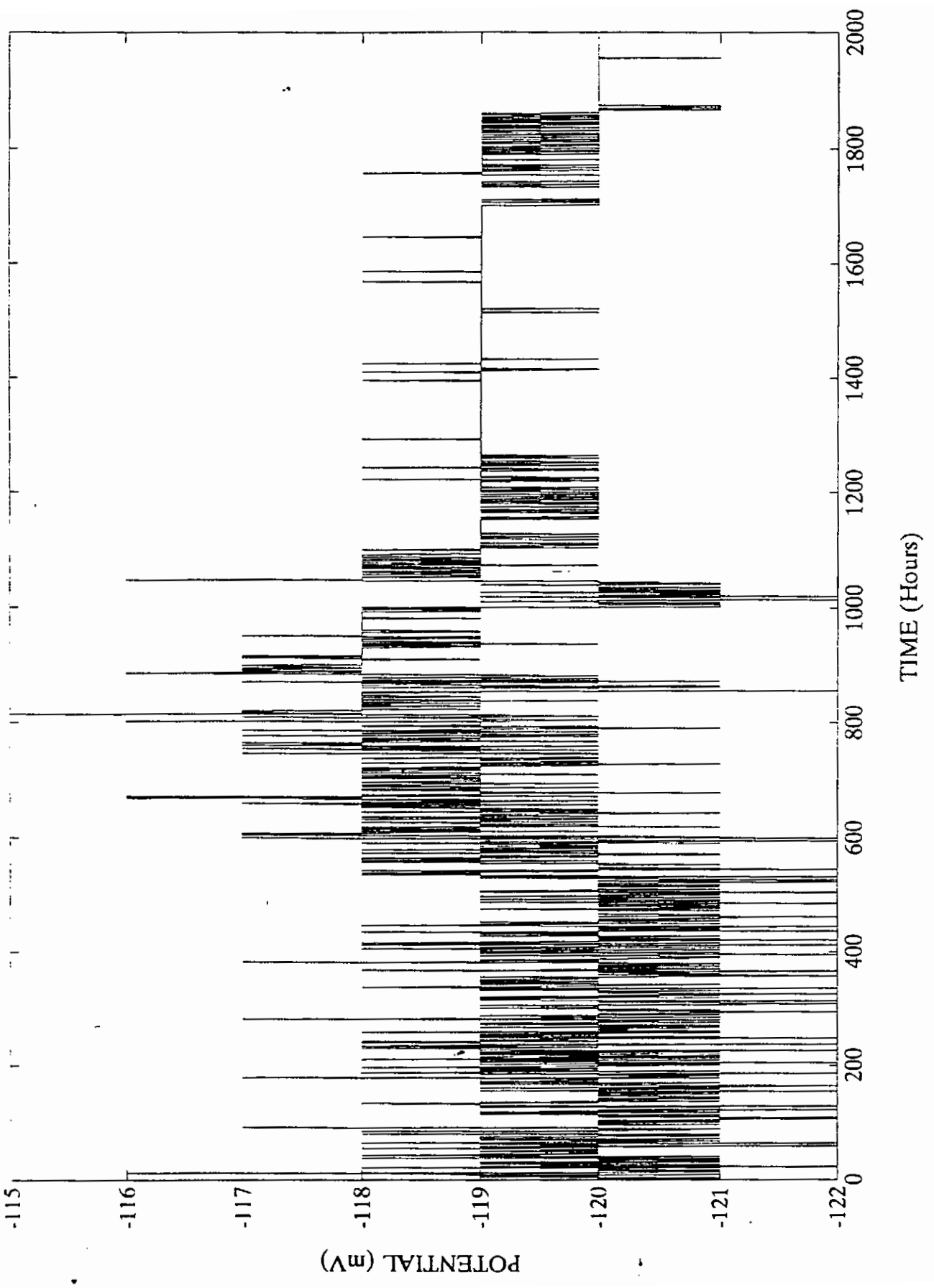
Channel:2 17/07/93



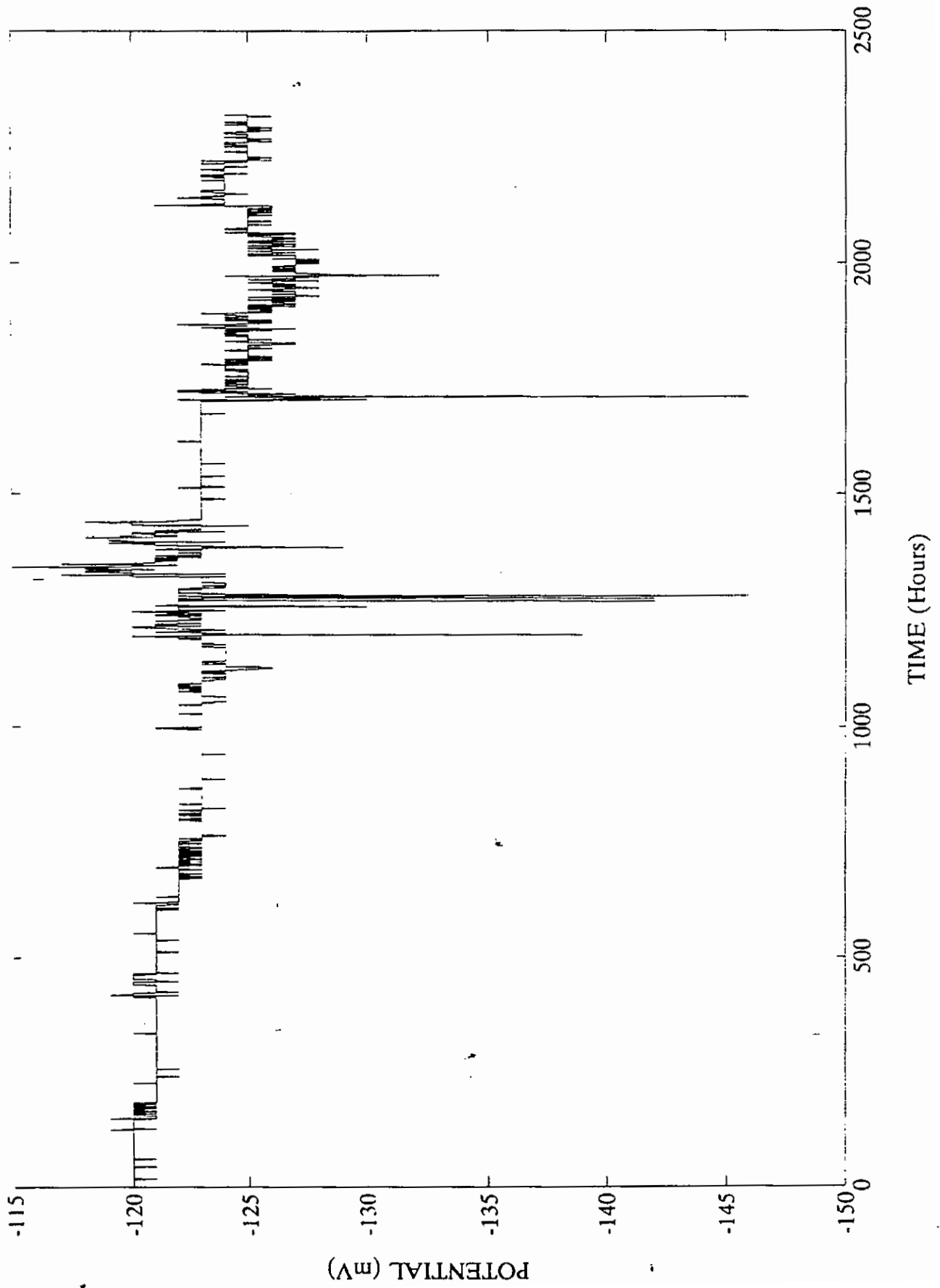
Channel:2 17/07/93

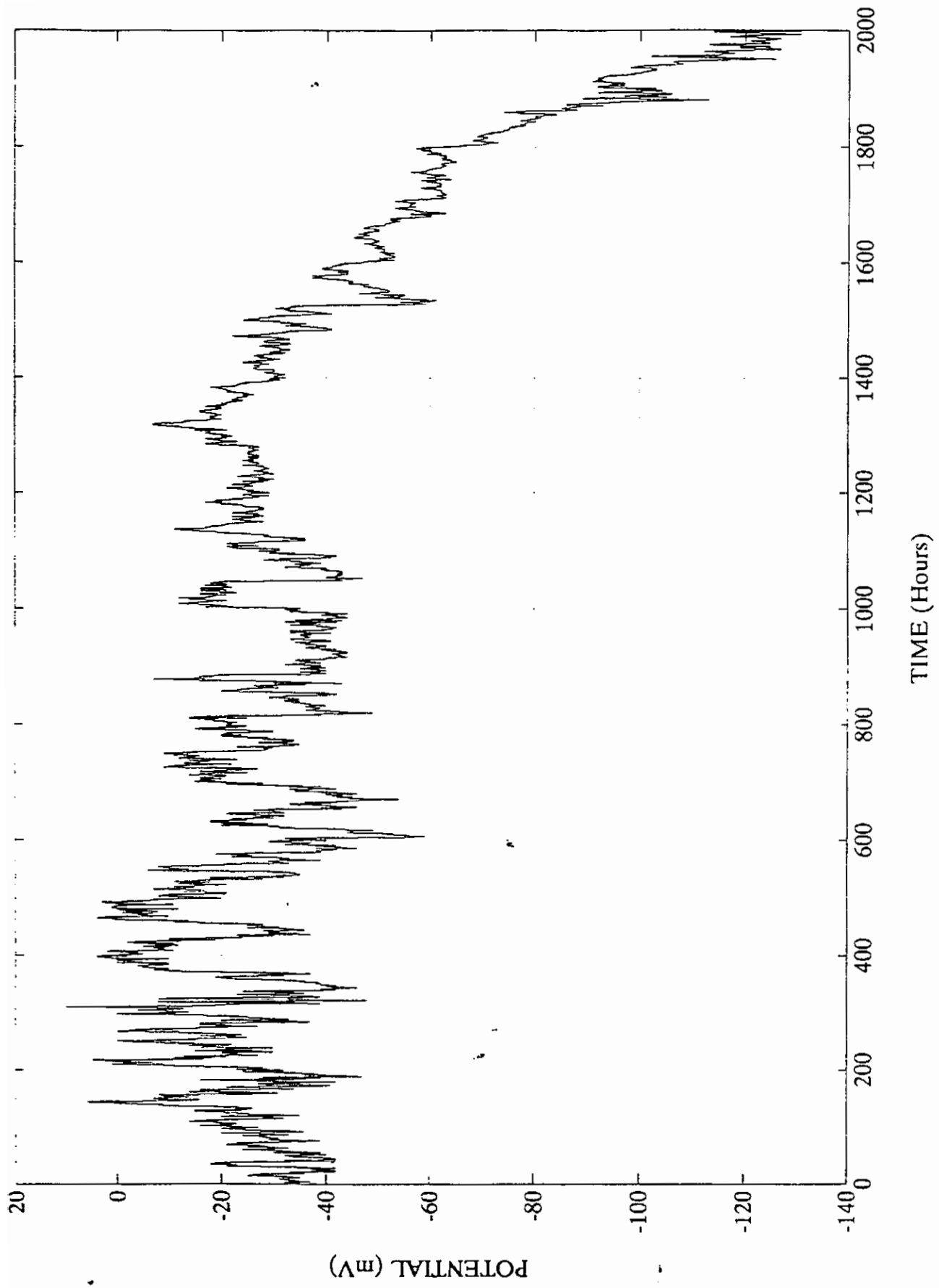


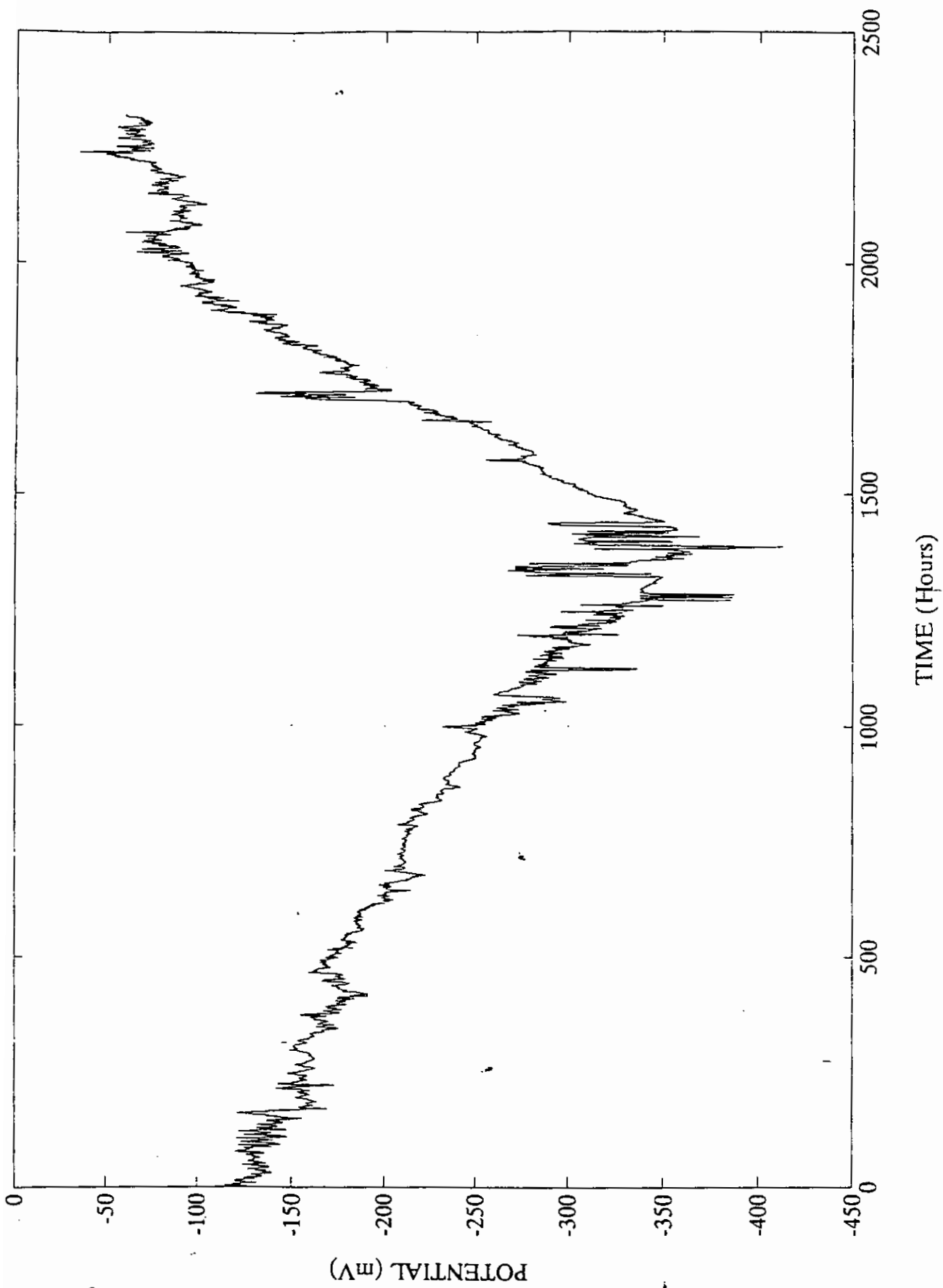
Channel:3 17/07/93



Channel:3 17/07/93







Στην συνέχεια κάθε κανάλι (αρχείο πλέον) μετατρέπεται συμπυκνώνοντας την πληροφορία που μεταφέρει από 4320 σημεια/ημερα σε 3σημεια/λεπτο x 60λεπτα= 180σημεια/ωρα= =1σημειο/ωρα.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε κανάλι παρακολουθεί και καταγράφει μεταβολές που σημειώνονται στο αντίστοιχο ηλεκτρόδιο με συχνότητα δειγματοληψίας

1σημειο/20δευτερολεπτα που μεταφράζεται σε 24σημεια/ημερα.

Η συμπύκνωση αυτή πραγματοποιήθηκε με την βοήθεια προγράμματος που δημιουργήσαμε μετά από μελέτη του εγχειριδίου χρήσης του πακέτου ανάλυσης Matlab.

Η σημασία του προγράμματος αυτού ήταν μεγάλη διότι βοήθησε σημαντικά στην αυτοματοποίηση της επεξεργασίας λόγω του μεγάλου όγκου πληροφοριών και του μεγάλου σχετικά χρονικού διαστήματος μετρήσεων.

Τα αρχεία που δημιουργήθηκαν είναι της μορφής m120630 και βρίσκονται στο

****DIRECTORY: C:\MATLAB\SYMATA2**

Ακολουθεί το listening του προγράμματος.


```
clear;

clc;

home

echo

%          e n o s i

%          -----

%*****

%***  created by john voutos & vaggelis papazaxarias  ***

%*****

%

%

echo off

n=input('insert number of channel (0-4) :');

name1=['c063',int2str(n)];

name2=['c073',int2str(n)];

name3=['c083',int2str(n)];

name4=['c',int2str(n)];

eval(['load a:',name1]);

eval(['load a:',name2]);
```

```
eval(['load a:',name3]);
eval(['load a:',name4]);
x=eval([name1]);
y=eval([name2]);
z=eval([name3]);
w=eval([name4]);
f=0;
subplot(221),plot (x);
title('12/06/93 - 30/06/93');
subplot(222),plot (y);
title('01/07/93 - 31/07/93');
subplot(223),plot (z);
title('01/08/93 - 12/08/93');
    if n == 0
        subplot(224),plot(w);
        grid;
        title('ch.0: 12/06 - 12/08');
        subplot;
        pause;
```

```
clc;
clear;
end
if n == 1
    subplot(224),plot(w);
    grid;
    title('ch.1: 12/06 - 12/08');
    subplot;
    pause;
    clc;
    clear;
    end
if n == 2
    subplot(224),plot(w);
    grid;
    title('ch.2: 12/06 - 12/08');
    subplot;
    pause;
    clc;
```

```
clear;

end

if n == 3

    subplot(224),plot(w);

    grid;

    title('ch.3: 12/06 - 12/08');

    subplot;

    pause;

    clc;

    clear;

end

if n == 4

    subplot(224),plot(w);

    grid;

    title('ch.4: 12/06 - 12/08');

    subplot;

    pause;

    clc;

    clear;
```

```
end  
clear;  
clc;  
end
```

Ακολούθησε η ένωση των αρχείων κάθε καναλιού ξεχωριστά για τα παρακάτω χρονικά διαστήματα.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΑΡΧΕΙΟΥ

ΚΑΝΑΛΙ 0 ΑΠΟ 12/06/93 - 31/06/93 C0630.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 0 ΑΠΟ 01/07/93 - 30/07/93 C0730.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 0 ΑΠΟ 01/08/93 - 12/08/93 C0830.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 1 ΑΠΟ 12/06/93 - 31/06/93 C0631.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 1 ΑΠΟ 01/07/93 - 30/07/93 C0731.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 1 ΑΠΟ 01/08/93 - 12/08/93 C0831.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 2 ΑΠΟ 12/06/93 - 31/06/93 C0632.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 2 ΑΠΟ 01/07/93 - 30/07/93 C0732.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 2 ΑΠΟ 01/08/93 - 12/08/93 C0832.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 3 ΑΠΟ 12/06/93 - 31/06/93 C0633.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 3 ΑΠΟ 01/07/93 - 30/07/93 C0733.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 3 ΑΠΟ 01/08/93 - 12/08/93 C0833.MAT

ΚΑΝΑΛΙ 4 ΑΠΟ 12/06/93 - 31/06/93	C0634.MAT
ΚΑΝΑΛΙ 4 ΑΠΟ 01/07/93 - 30/07/93	C0734.MAT
ΚΑΝΑΛΙ 4 ΑΠΟ 01/08/93 - 12/08/93	C0834.MAT

****DIRECTORY: C:\MATLAB\SYMATA3**

Τέλος έγινε η ένωση όλων των επιμέρους διαστημάτων για κάθε κανάλι και προέκυψε η ενοποιημένη κυματομορφή κάθε καναλιού για το χρονικό διάστημα 12/06/93 - 12/08/93.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΑΡΧΕΙΟΥ

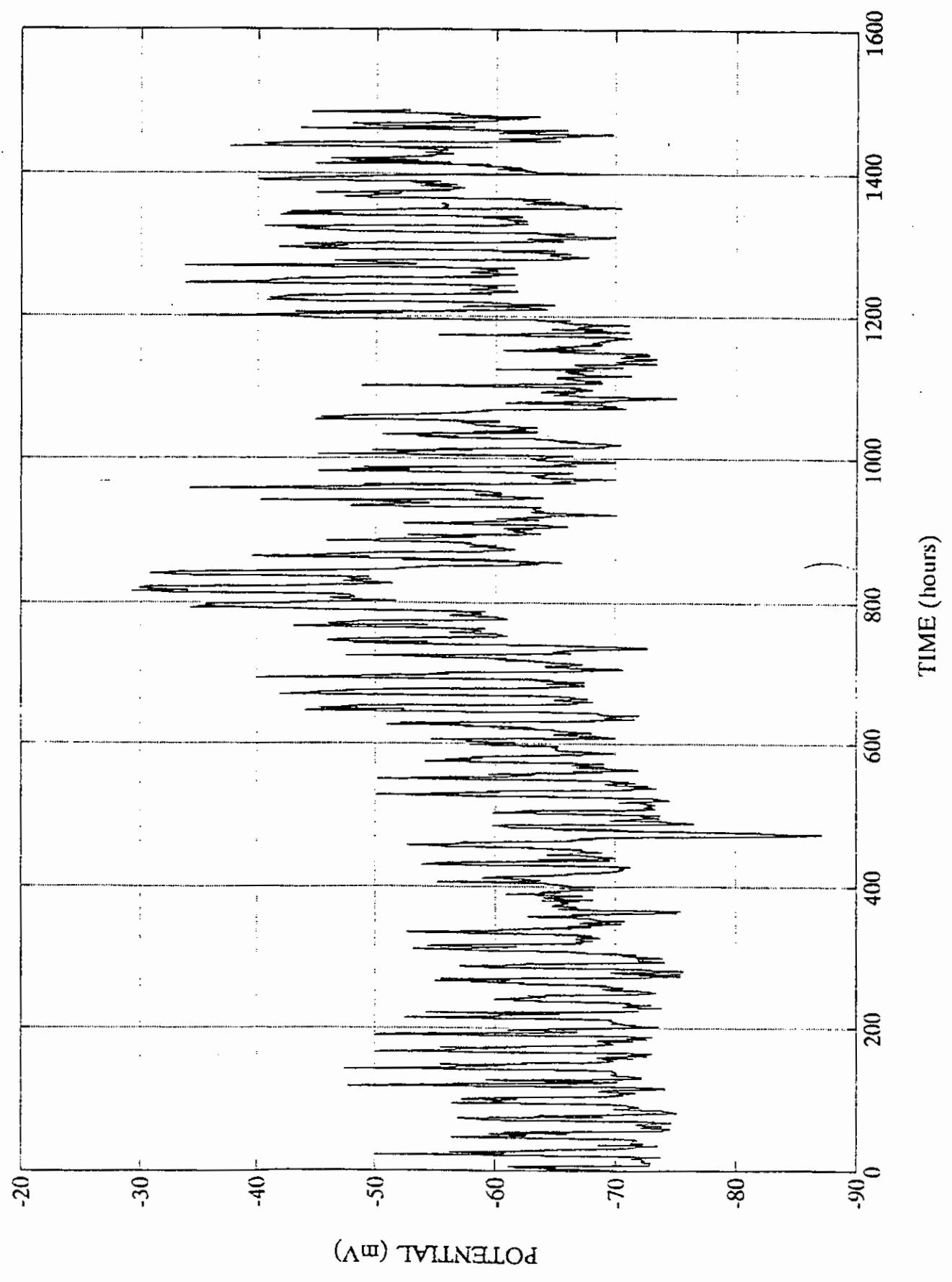
ΚΑΝΑΛΙ 0 " 12/06/93 - 12/08/93	C0.MAT
ΚΑΝΑΛΙ 1 " 12/06/93 - 12/08/93	C1.MAT
ΚΑΝΑΛΙ 2 " 12/06/93 - 12/08/93	C2.MAT
ΚΑΝΑΛΙ 3 " 12/06/93 - 12/08/93	C3.MAT
ΚΑΝΑΛΙ 4 " 12/06/93 - 12/08/93	C4.MAT

****DIRECTORY: C:\MATLAB\SYMATA3**

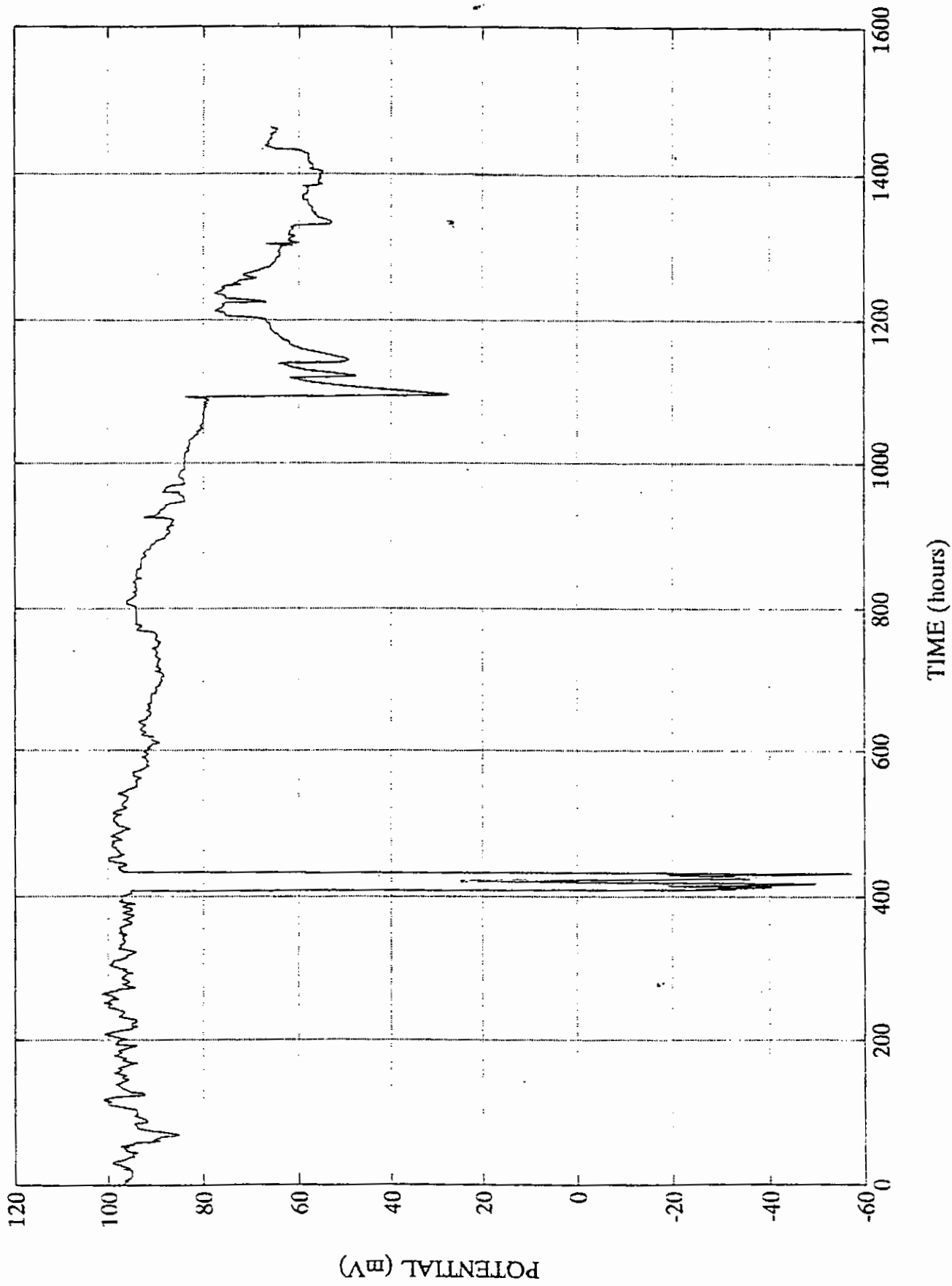
Ακολουθούν οι εκτυπώσεις των παραπάνω αρχείων όπου φαίνονται οι πληροφορίες τις οποίες κατέγραψε κάθε κανάλι ξεχωριστά για το παραπάνω διάστημα μετρήσεων

15/2/93

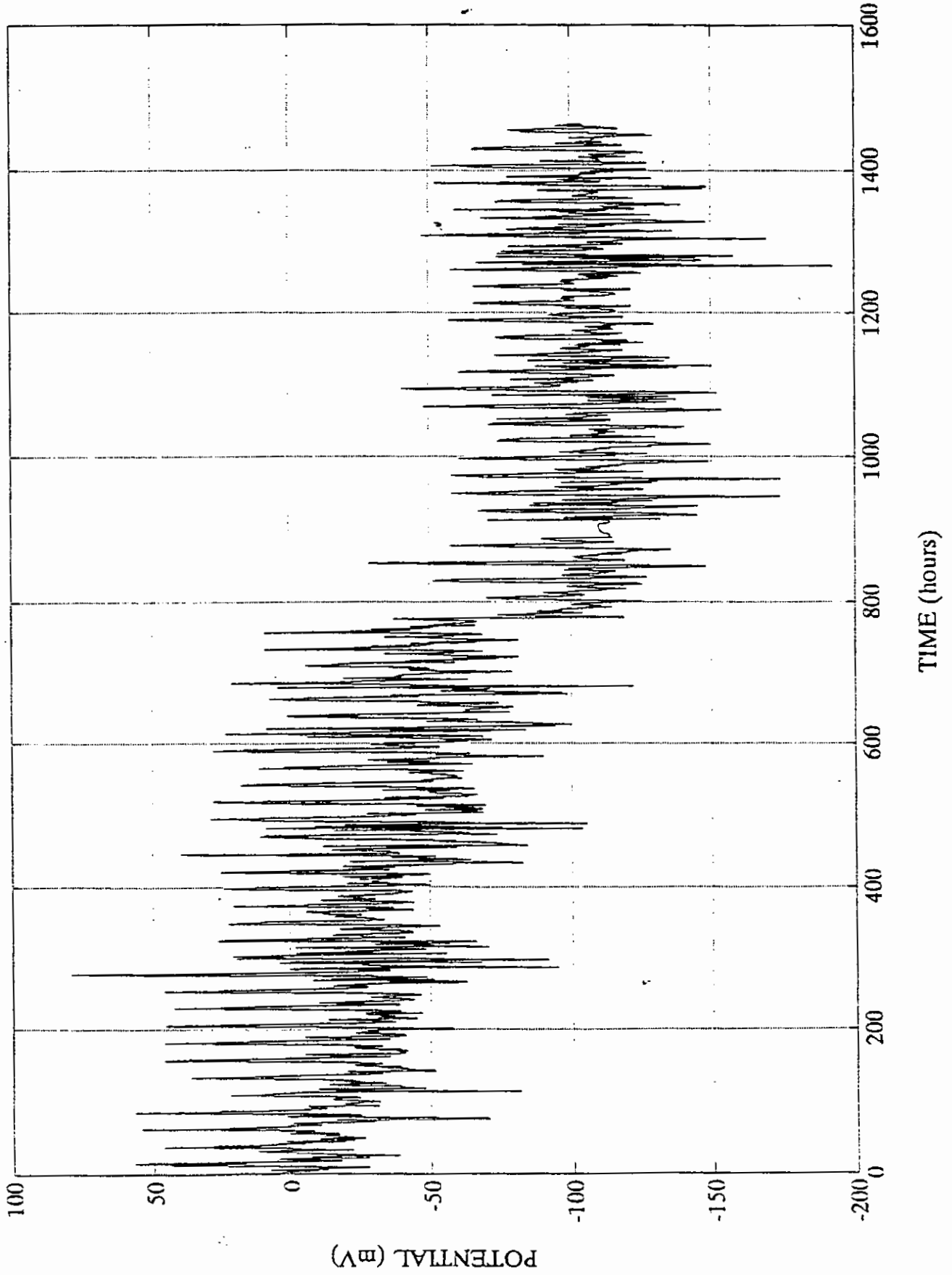
Channel:0 12/6/93 - 12/8/93



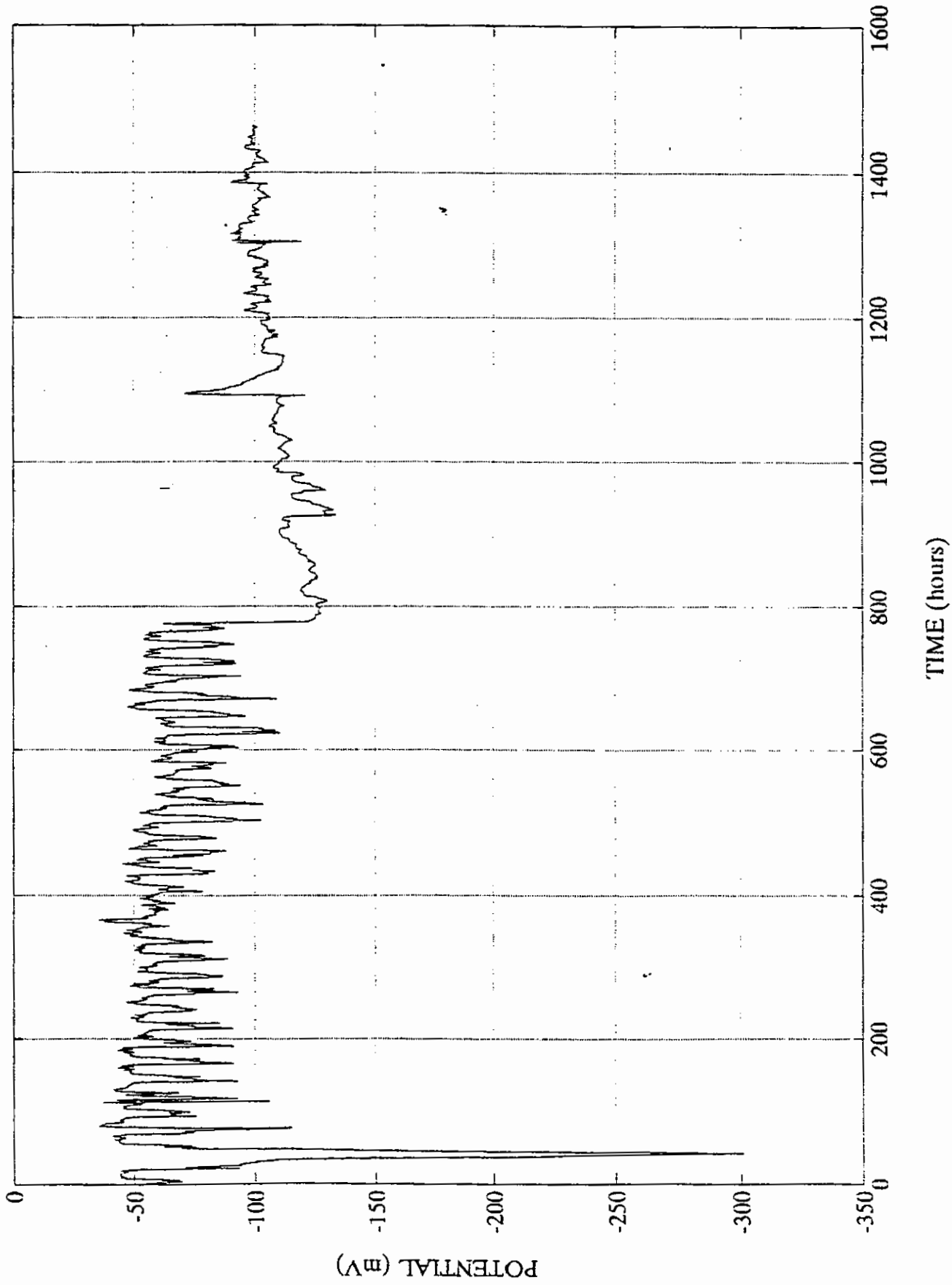
Chanell:1 12/6/93 - 12/8/93



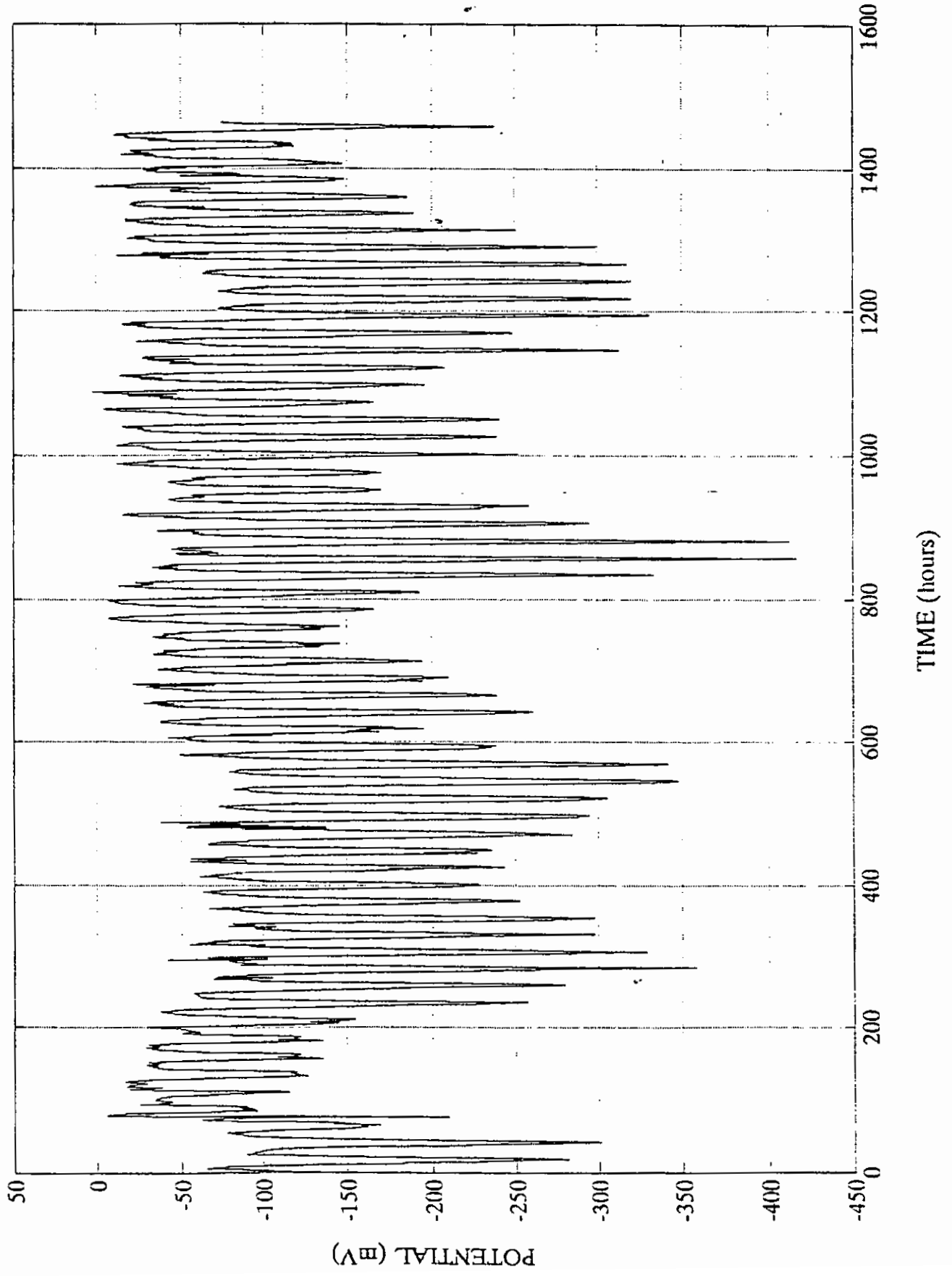
Channel:2 12/6/93 - 12/8/93



Chanell:3 12/6/93 - 12/8/93



Channel:4 12/6/93 - 12/8/93



Στην συνέχεια Ακολουθεί το listening δυο προγραμμάτων εμφάνισης των κυματομορφων στην οθόνη, όπου περιλαμβάνονται όλα τα στοιχεία των καναλιών για το διάστημα που εξετάζουμε.

Τα παρακάτω προγράμματα μας επιτρέπουν να εμφανίζουμε στην οθόνη του Η/Υ οποιοδήποτε αρχείο μας ενδιαφέρει δίνοντας μόνο ημερομηνία και αριθμό καναλιού.

Αυτά φροντίζουν στην συνέχεια να παρουσιάσουν την κυματομορφη στην οθόνη μέσω τίτλων, κλιμακας, πλεγματος και βαθμολογημένων αξωνων, διαδικασία επίτηνη κατά την προβολή κυματομορφων.

Listening 1

clear

clc

home

echo

% symmata.m%

%created by john voutos & vaggelis papazaxarias

%*****

echo off

```
% SHMEIOSH

%GIA HMEROMHNIES APO 1/ EOS 9/ ->FNAME=
=['s','0',INT2sTR(N)];

%

n=input('insert name of file:');

fname=['s',int2str(n)];

sname=('m',int2str(n));

eval(['load c:\matlab\symata1\',fname]);

x=eval([fname]);

for i=180:180:4140;

z(1)=mean(x(1:180));

z((i/180)+1)=mean(x(i+1:i+180));

subplot(211),plot (x(1:2000));

subplot(212),plot (x(2000:4320));

subplot;

plot (z);

grid

eval(['int2str(n)=z']);

clear n x i z
```

```
clear fname;  
%%eval(['save c:\matlab\symata2\'sname]);  
clear  
end
```

Listening 2

```
clear
```

```
clc
```

```
home
```

```
echo
```

```
%          symata.m
```

```
%created by john voutos & vaggelis papazaxarias
```

```
%*****
```

```
echo off
```

```
%DEITE SHMEIOSH sTO ARXEIO symmata.m
```

```
n=input('insert name of file:');
```

```
fname=['m',int2str(n)];
```

```
sname=['m',int2str(n),'.mat'];
```

```
eval(['load c:\matlab\symata2\',fname]);
```

```
eval(['int2str(n)=z']);
```

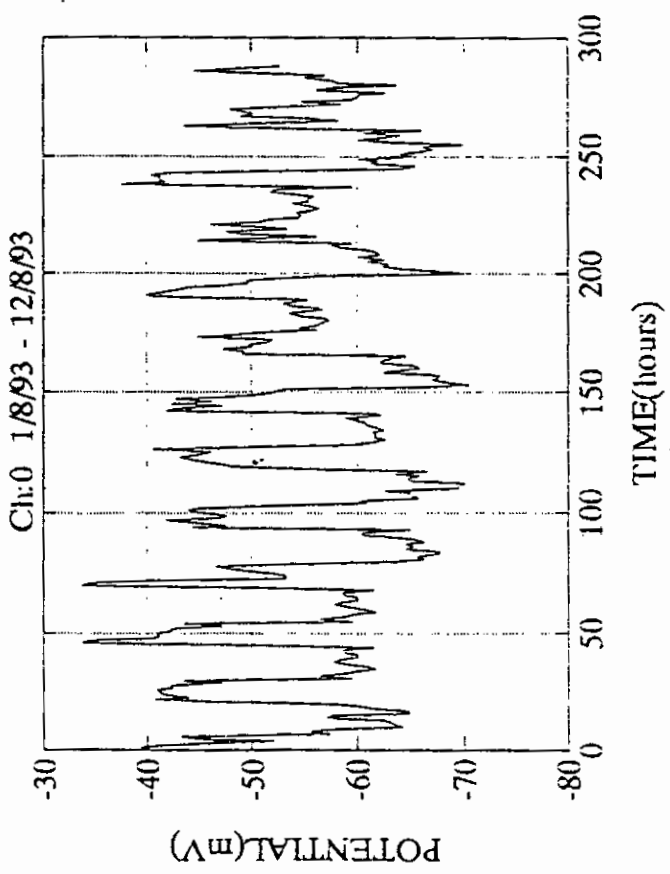
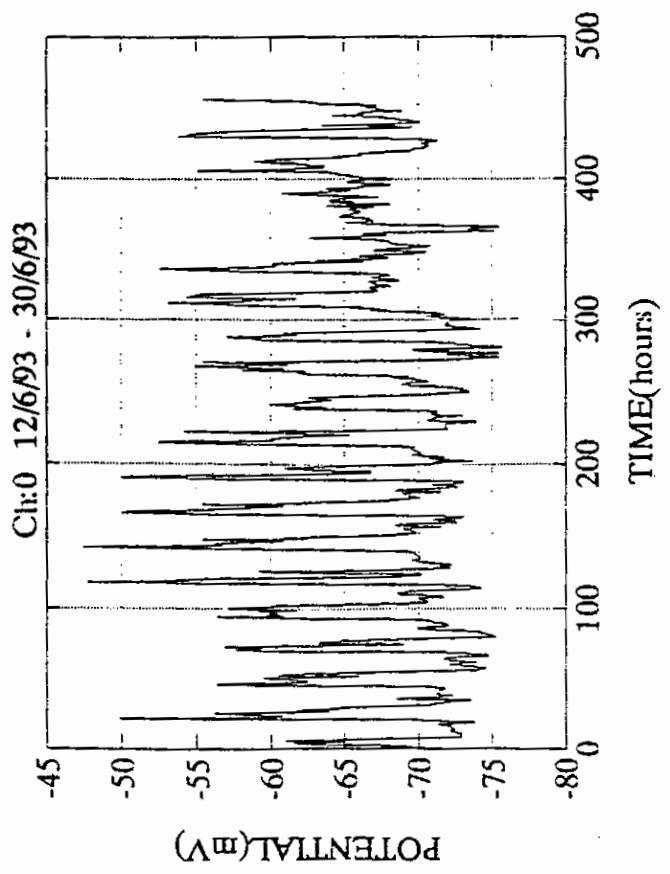
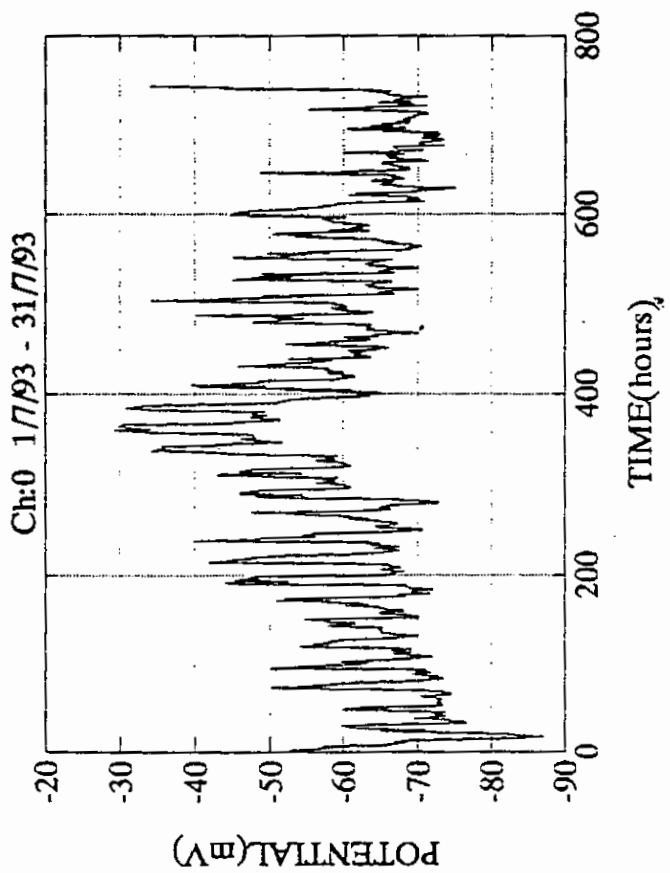
```
clear fname;
```

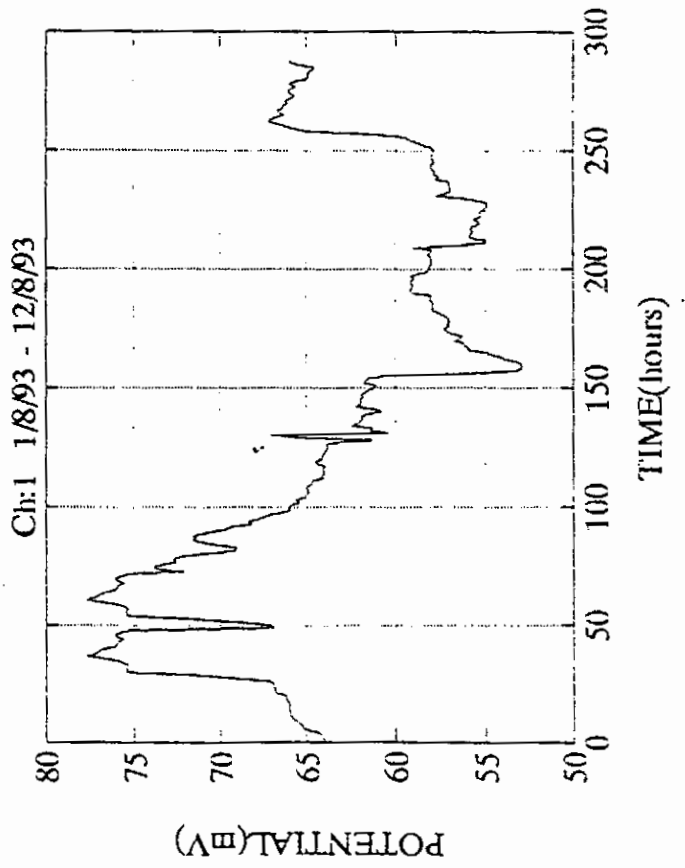
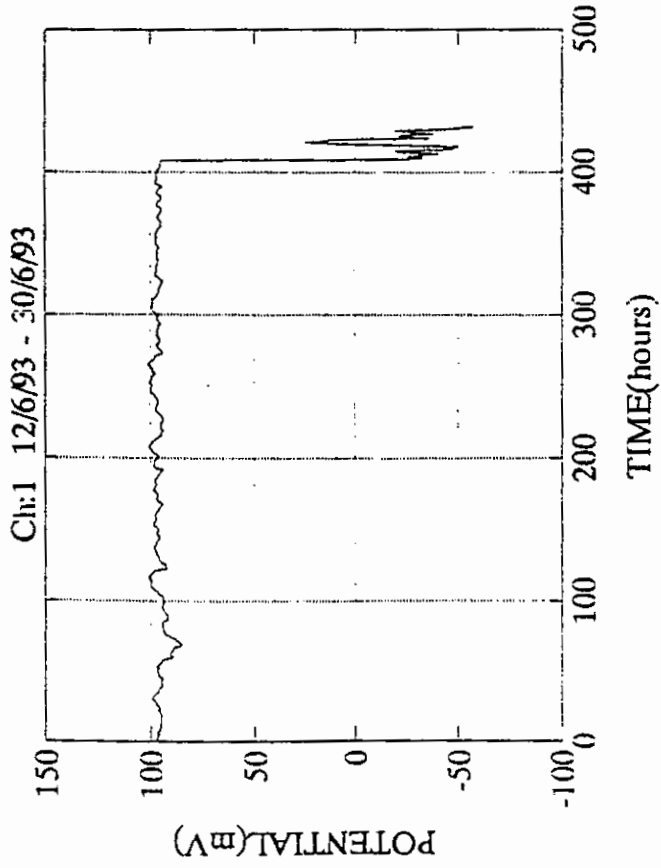
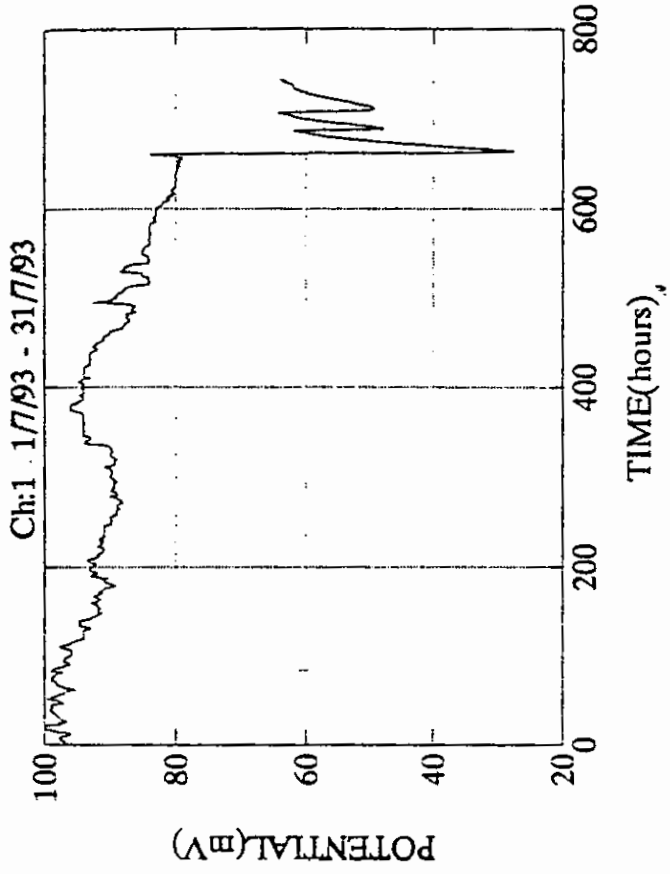
```
clear n;
```

```
clear z;
```

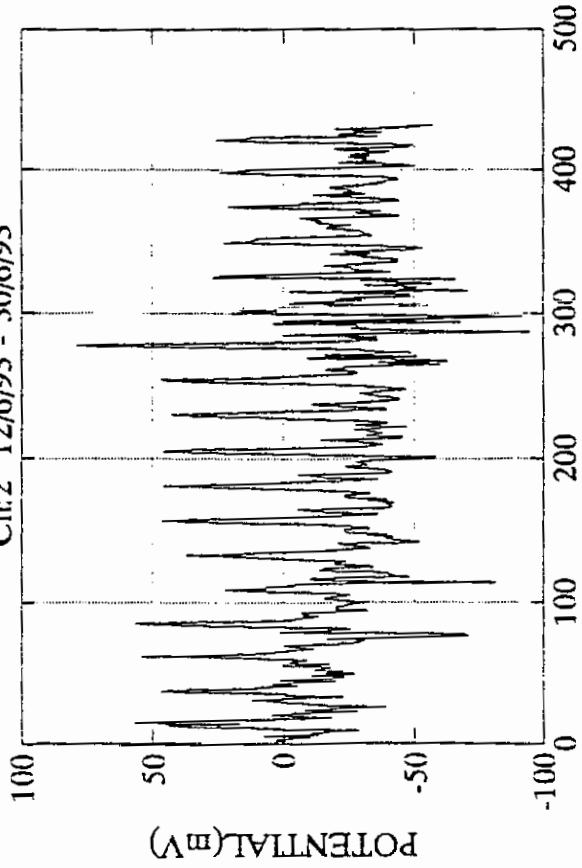
```
eval(['save c:\matlab\symata4\',sname]);
```

```
clear
```

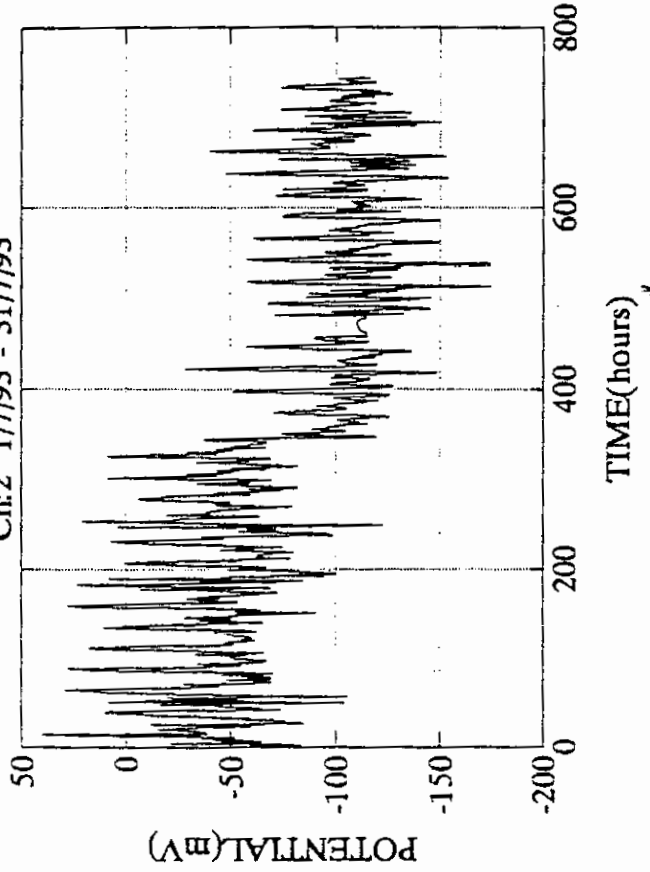





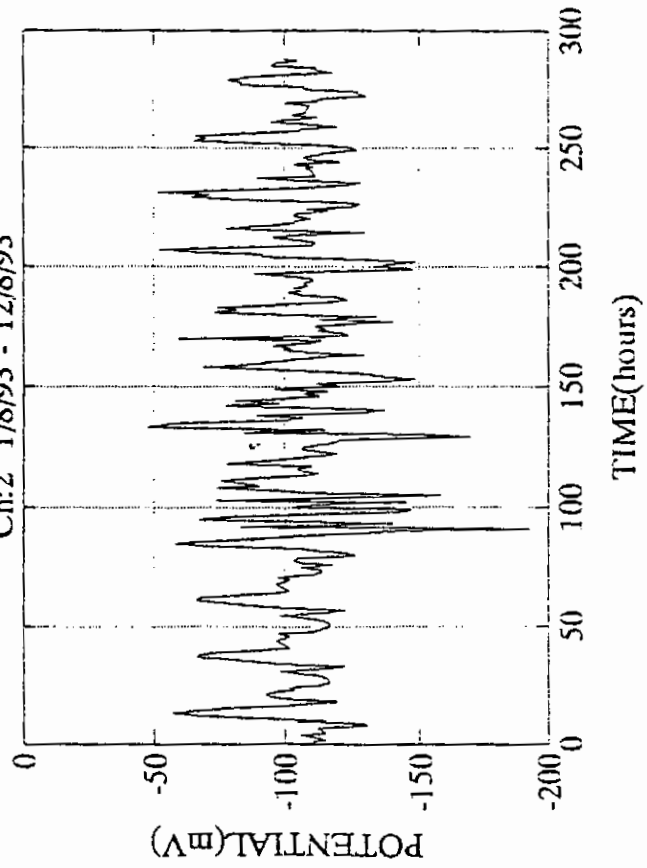
Chr:2 12/6/93 - 30/6/93

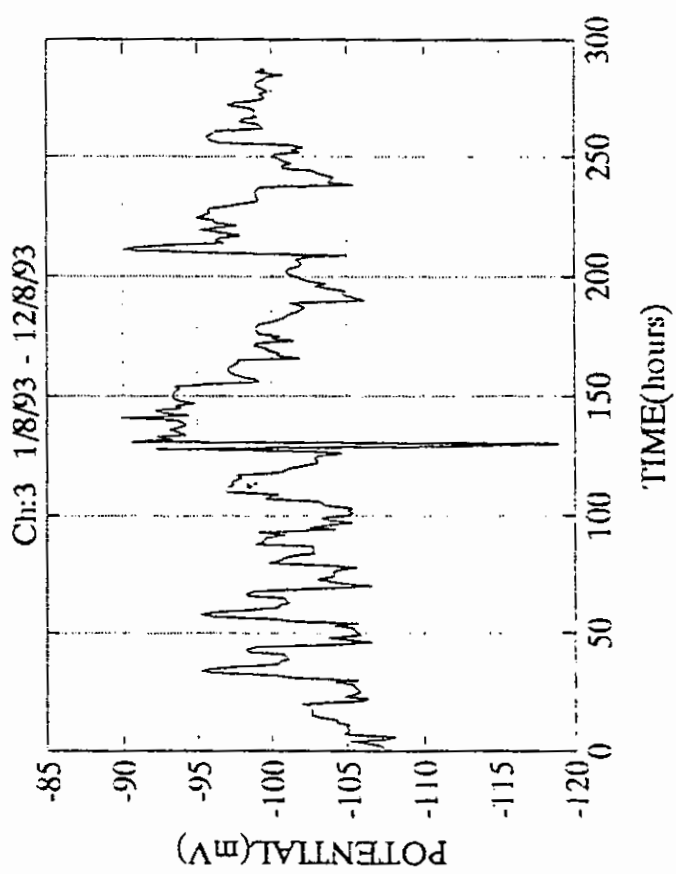
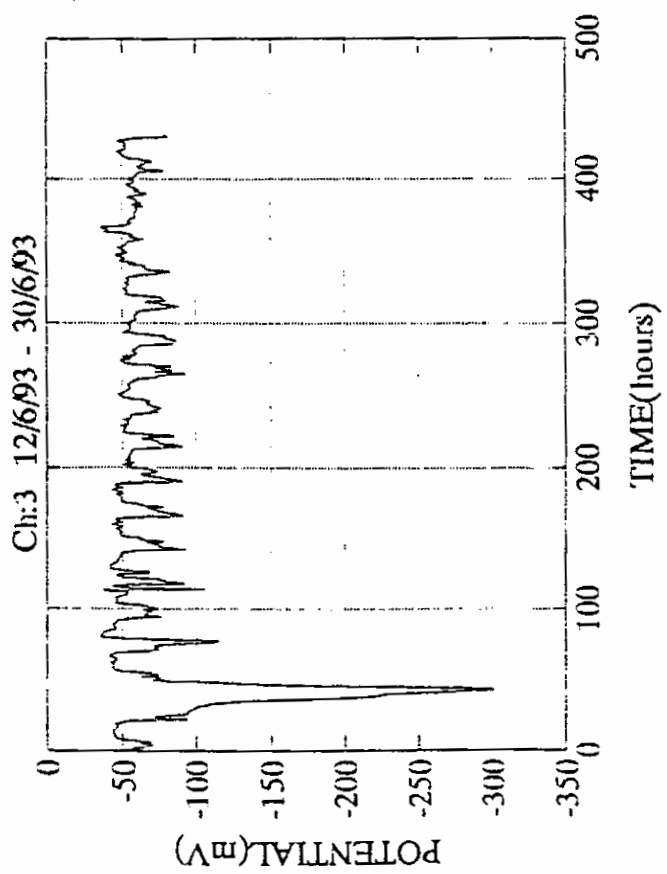
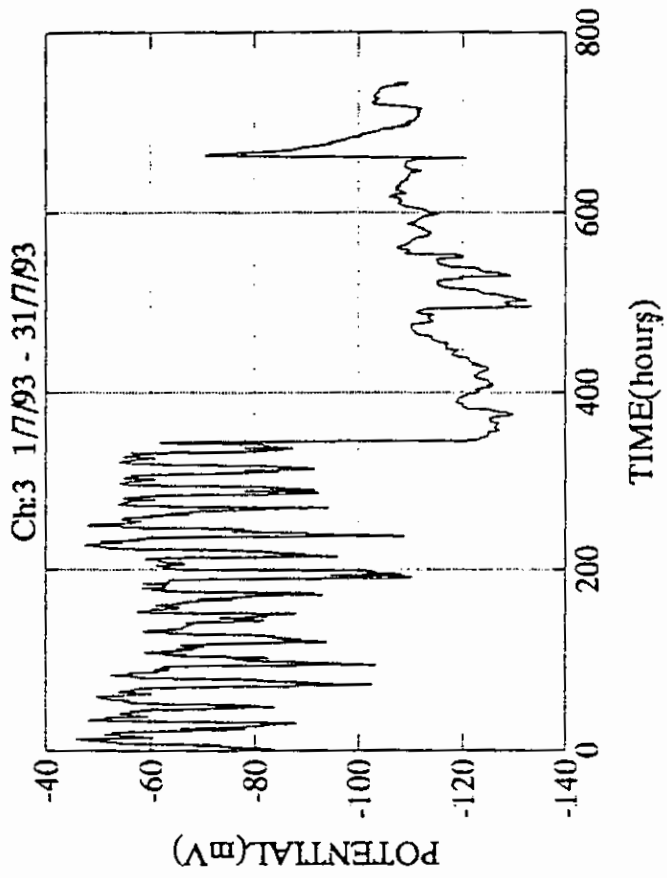


Chr:2 1/7/93 - 31/7/93

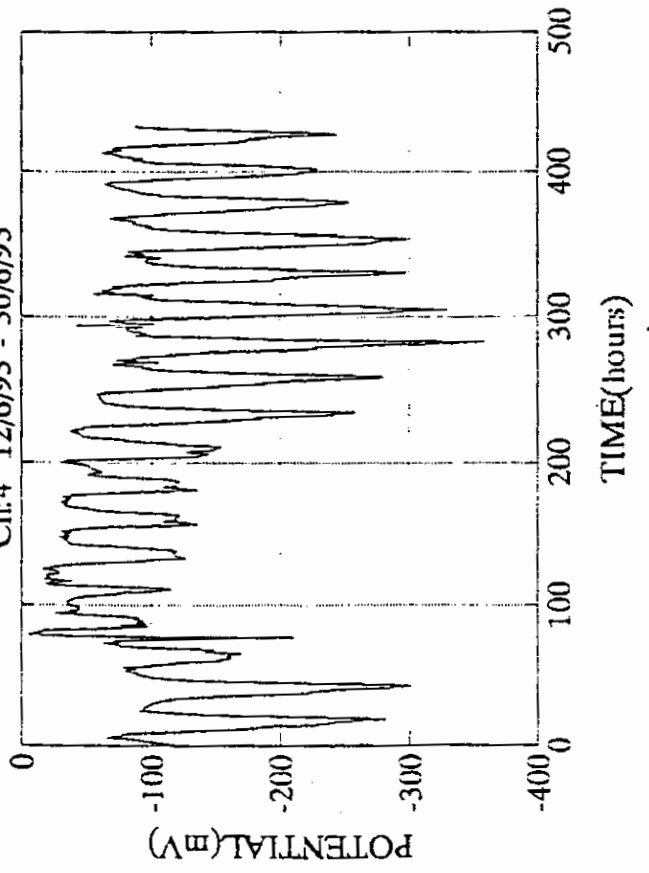


Chr:2 1/8/93 - 12/8/93

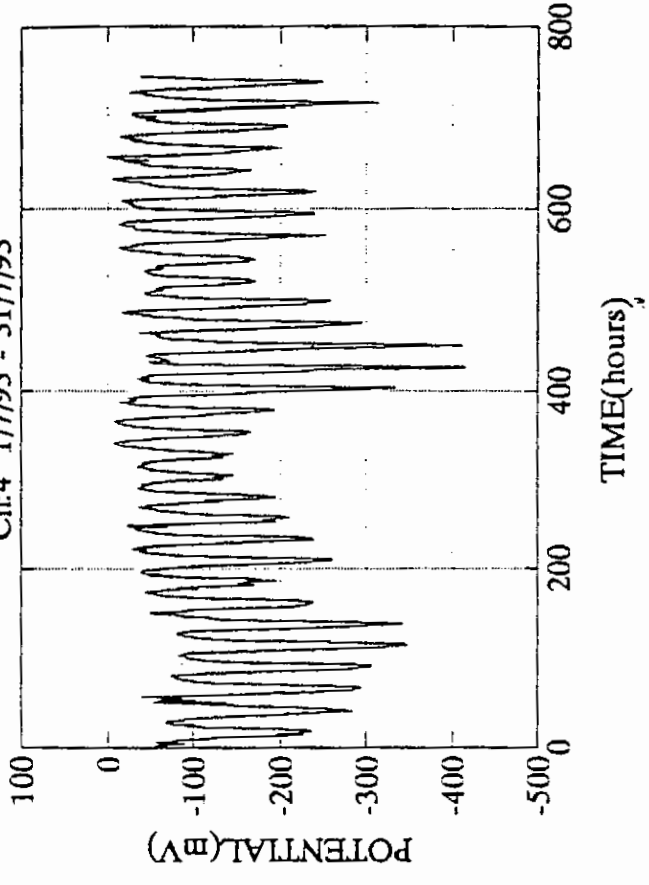




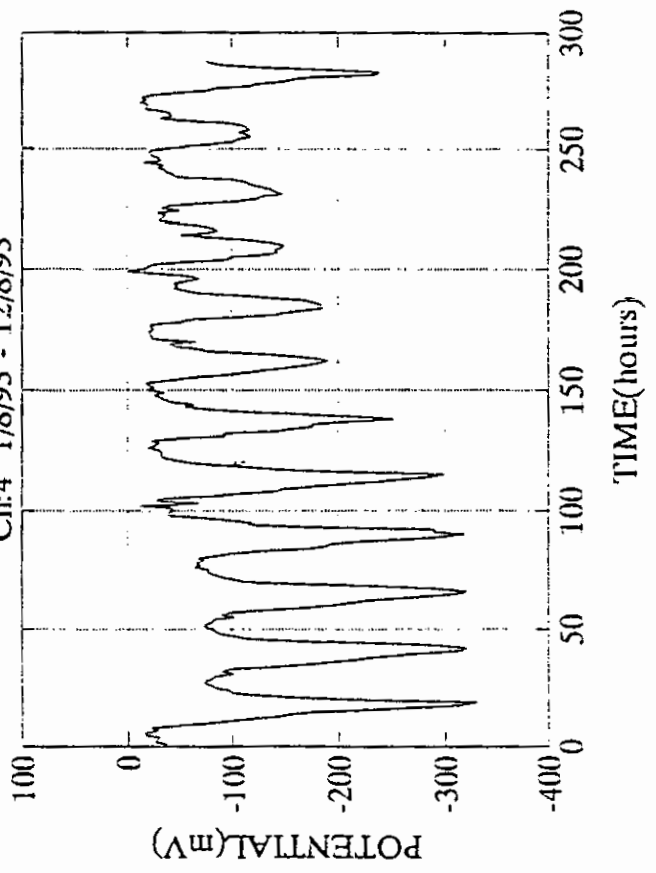
Ch:4 12/6/93 - 30/6/93



Ch:4 1/7/93 - 31/7/93



Ch:4 1/8/93 - 12/8/93



Εδώ παρουσιάζουμε υποδείγματα προγραμμάτων για τη δημιουργία των αρχείων (meta) που περιέχουν τις εκτυπώσεις των κυματομορφών που βλέπετε.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ 1: δημιουργία αρχείου εκτύπωσης (meta file)

```
%load - ονομα αρχείου για εκτύπωση-
%plot - " -
%xlabel('TIME(HOYRs)');
%ylabel('POTENTIAL(mV)');
%title('Chanell:0 12/06/93 – 12/08/93');
%grid;
%meta c0;
%clear
%clg
%quit
```

Εντολή εκτύπωσης αρχείου (meta file) "gpp c0.met /d jet /ol /fpm"

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ 2: δημιουργία αρχείου εκτύπωσης (meta file)

```
echo off
n=input('insert name of file:');
g=input('chanell:');
```

```
——if g == 0
——fname=['s',int2str(n)];
——sname=[int2str(n)];
——eval(['load c:\matlab\;',fname]);
——w=eval([fname]);
——subplot(211),plot(w(1:2000));
——subplot(212),plot(w(2000:4320));
——subplot;
——xlabel('TIME(hours)');
——ylabel('POTENTIAL(mv)');
——title('Ch:0 17/07/93');
——meta c0177;
——clear;
——cls;
——end;
——if g == 1
——fname=['s',int2str(n)];
——sname=[int2str(n)];
——eval(['load c:\matlab\;',fname]);
——w=eval([fname]);
——subplot(211),plot(w(1:2000));
——subplot(212),plot(w(2000:4320));
——subplot;
——xlabel('TIME(hours)');
——ylabel('POTENTIAL(mv)');
——title('Ch:1 17/07/93');
```

```
———meta c1177;  
———clear;  
———cls;  
———end;  
———if g == 2  
———fname=['s',int2str(n)];  
———sname=[int2str(n)];  
———eval(['load c:\matlab\',fname]);  
———w=eval([fname]);  
———subplot(211),plot(w(1:2000));  
———subplot(212),plot(w(2000:4320));  
———subplot;  
———xlabel('TIME(hours)');  
———ylabel('POTENTIAL(mv)');  
———title('Ch:2 17/07/93');  
———meta c2177;  
———clear;  
———cls;  
———end;  
———if g == 3  
———fname=['s',int2str(n)];  
———sname=[int2str(n)];  
———eval(['load c:\matlab\',fname]);  
———w=eval([fname]);  
———subplot(211),plot(w(1:2000));  
———subplot(212),plot(w(2000:4320));
```



```
——subplot;  
——xlabel('TIME(hours)');  
——ylabel('POTENTIAL(mv)');  
——title('Ch:3 17/07/93');  
——meta c3177;  
——clear;  
——clc;  
——end;  
—— if g == 4  
—— fname=['s',int2str(n)];  
—— sname=[int2str(n)];  
—— eval(['load c:\matlab\',fname]);  
—— w=eval([fname]);  
—— subplot(211),plot(w(1:2000));  
—— subplot(212),plot(w(2000:4320));  
—— subplot;  
—— xlabel('TIME(hours)');  
—— ylabel('POTENTIAL(mv)');  
—— title('Ch:4 17/07/93');  
—— meta c4177;  
—— clear;  
—— clc;  
—— end;  
clear;  
clc;  
end;
```

Στο υποδειγμα 2 που ακολουθει φαινεται το προγραμμα δημιουργιας ενος κατοδιαβατου φιλτρου με το οποιο εχουμε την δυνατοτητα να φιλτραρουμε το τελικο σημα και να εμφανισουμε μια κυματομορφη απαλαγμενη απο τυχαιες συναρτησεις και θορυβους.

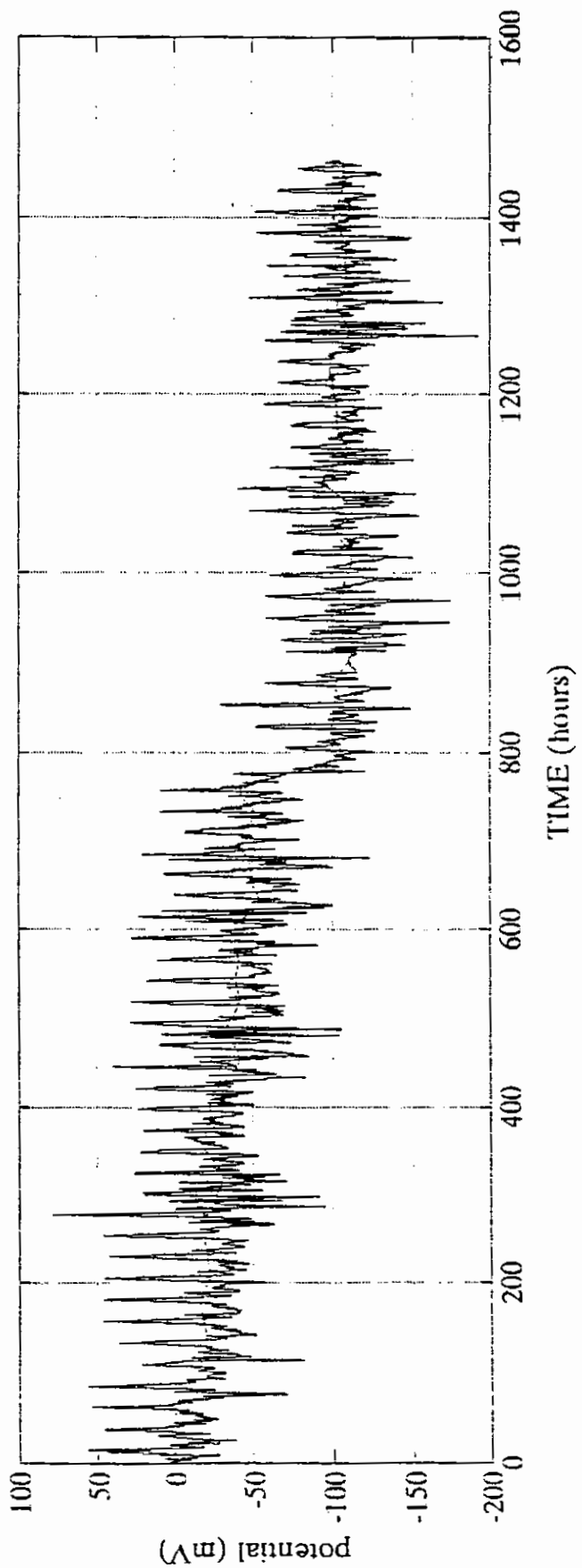
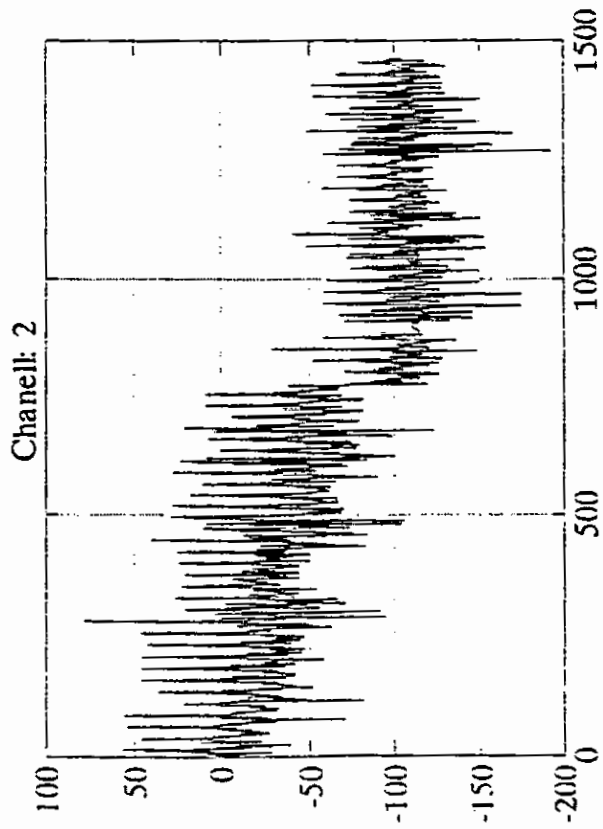
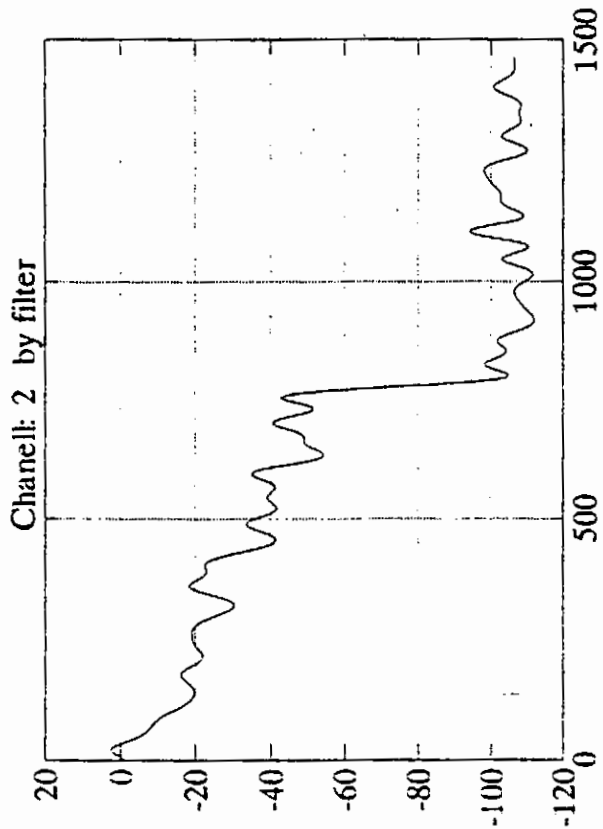
ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ 2: Δημιουργια κατοδιαβατου φιλτρου

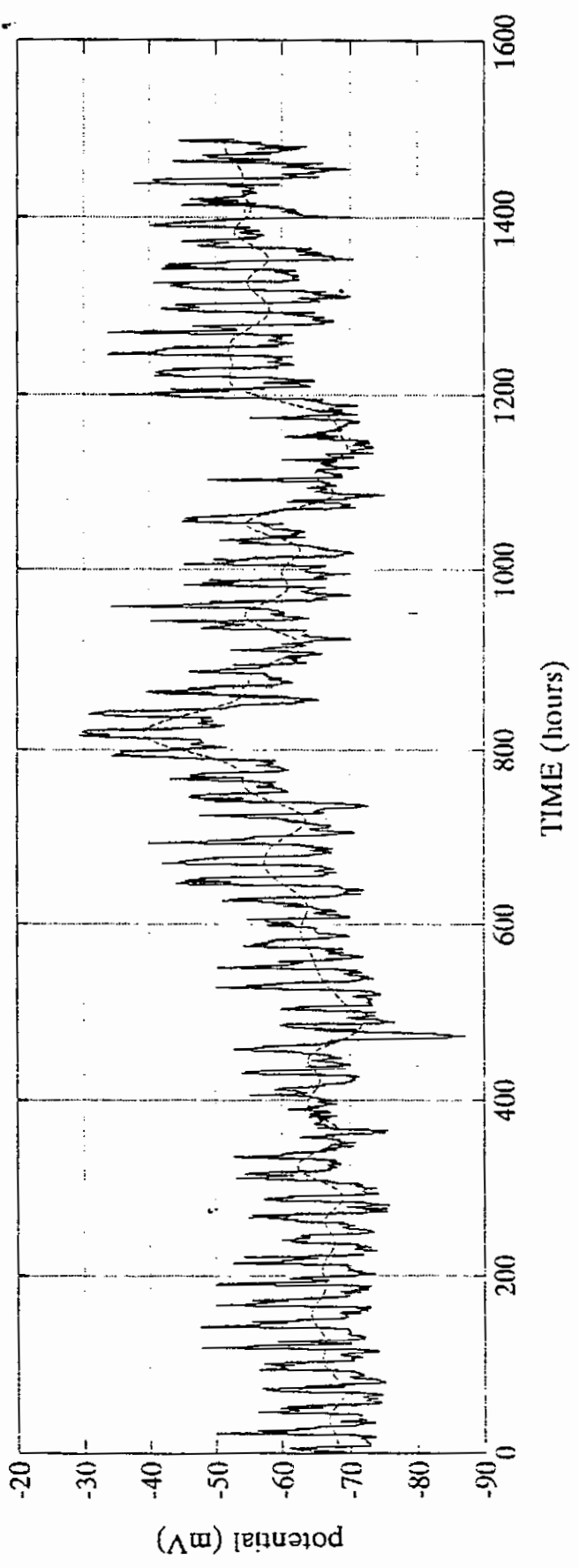
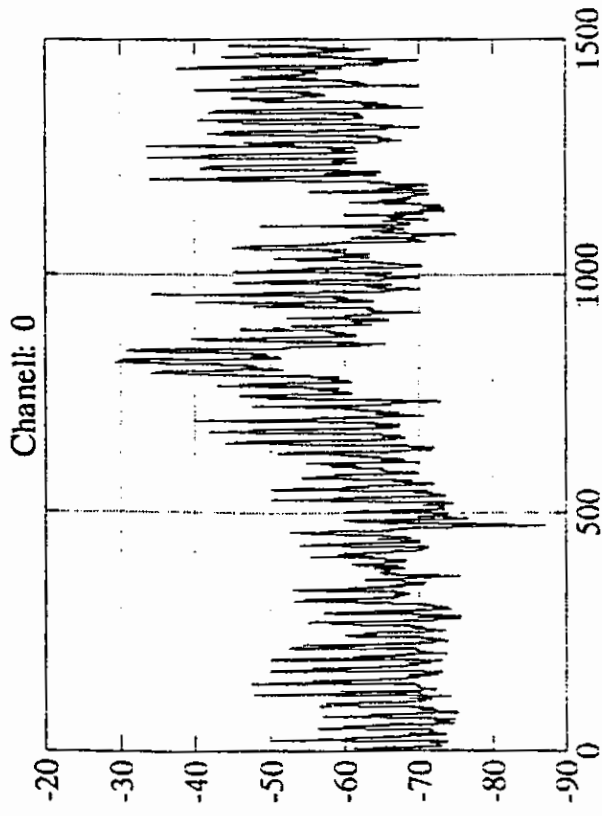
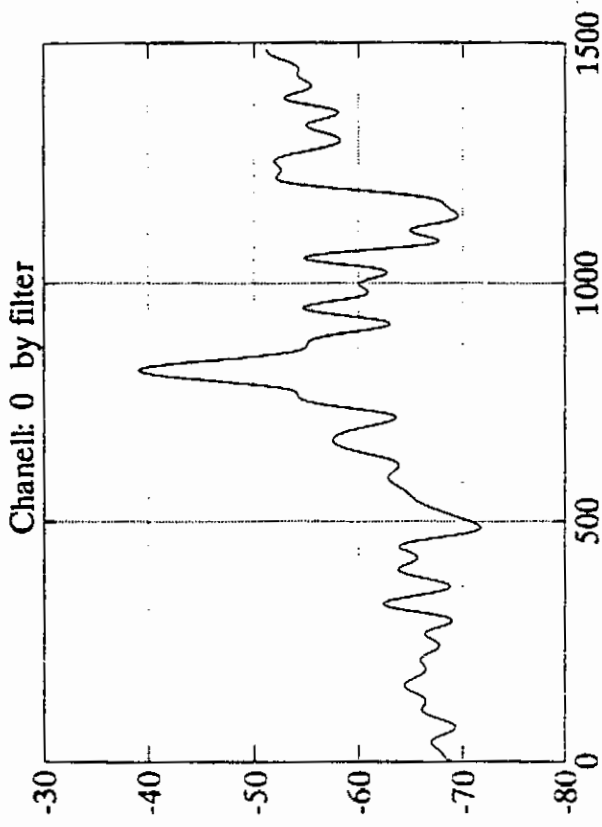
Βαθος πολυωνυμου: $b=8$

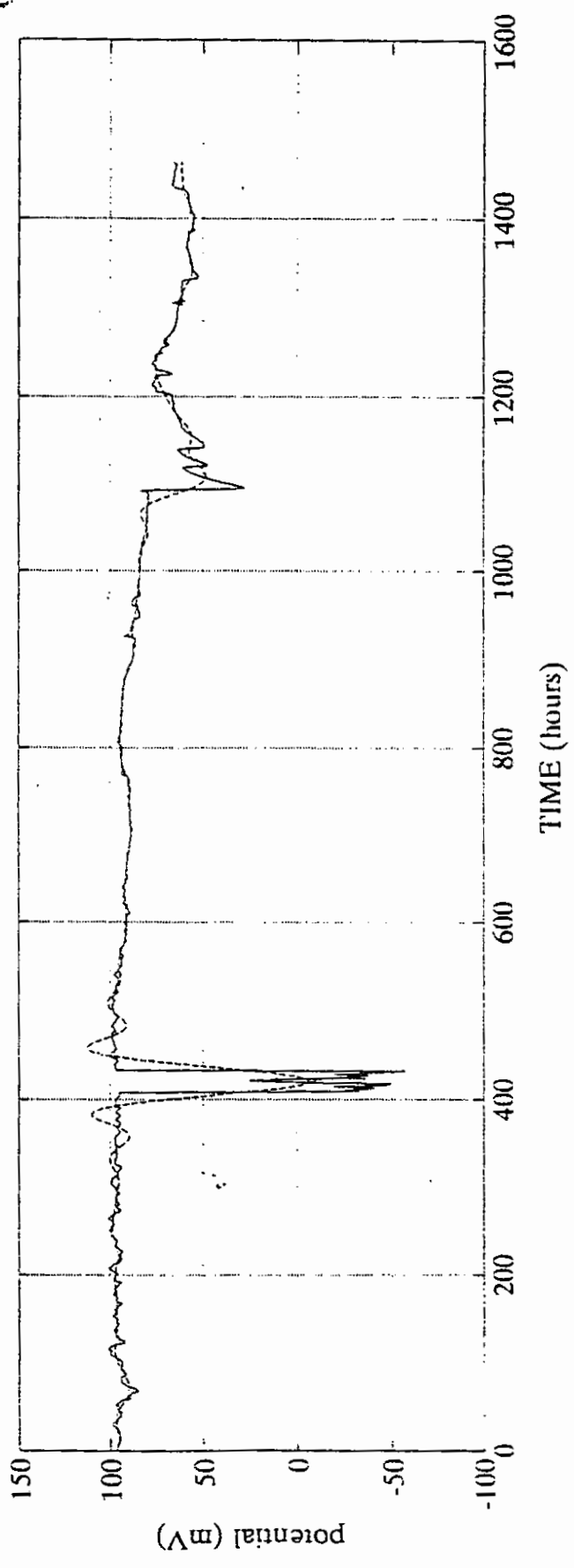
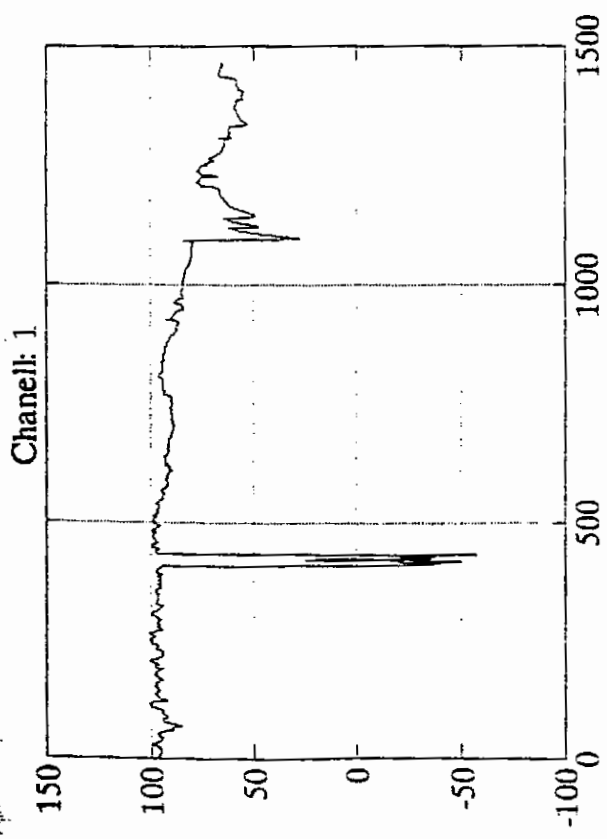
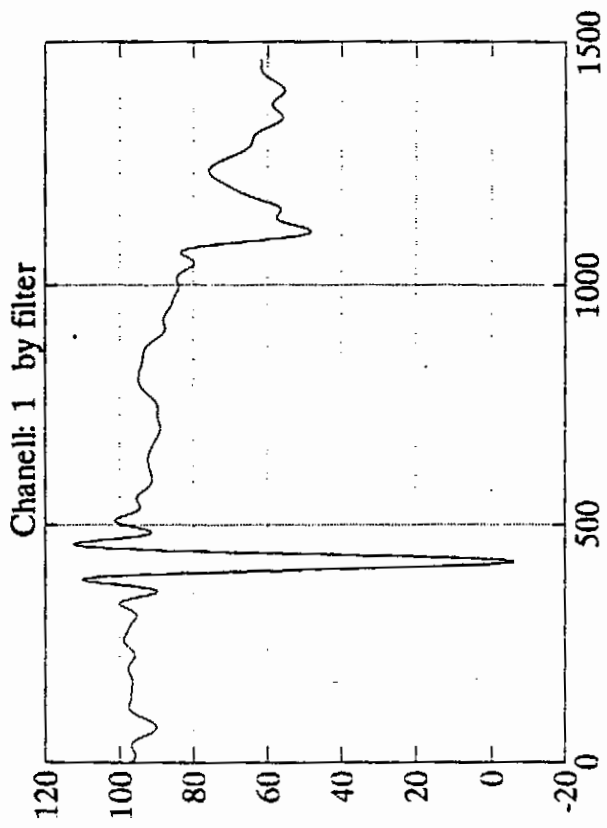
Συχνοτητα: $a=0.04$

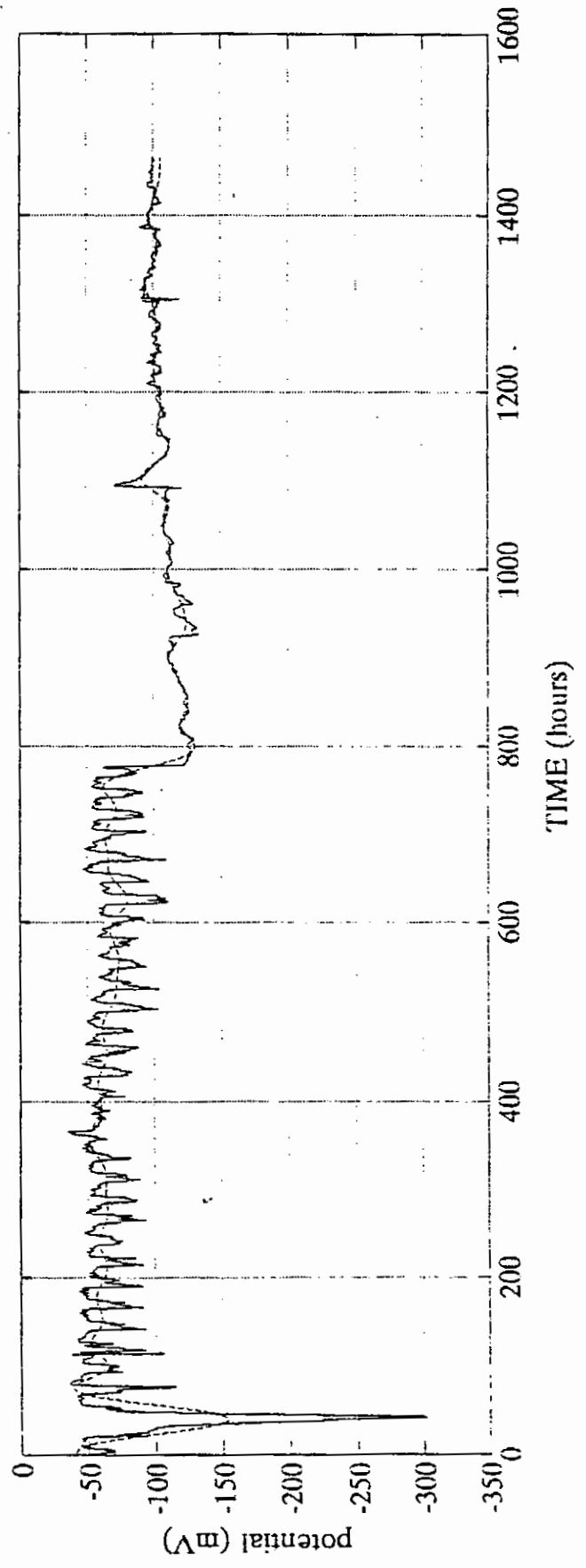
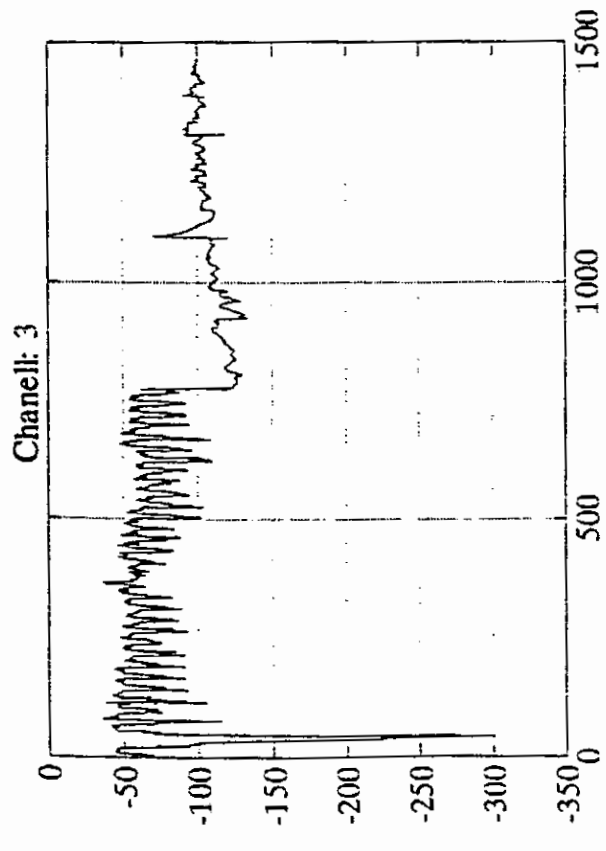
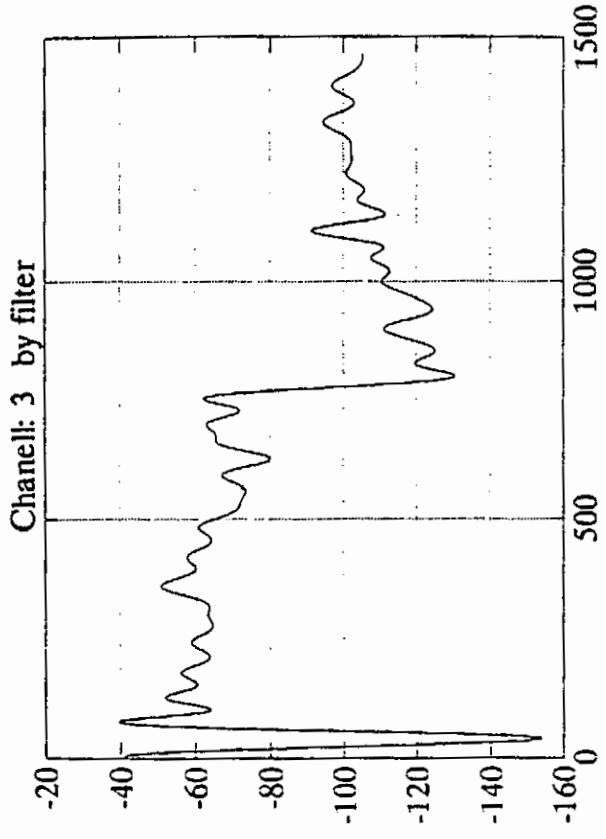
```
%[b,a]=butter(8,.04);  
%load - ονομα αρχειου για φιλτραρισμα-  
%fc0=filtfilt(b,a,c0);  
%i=1:1480  
%plot(i,fc0,i,c0);
```

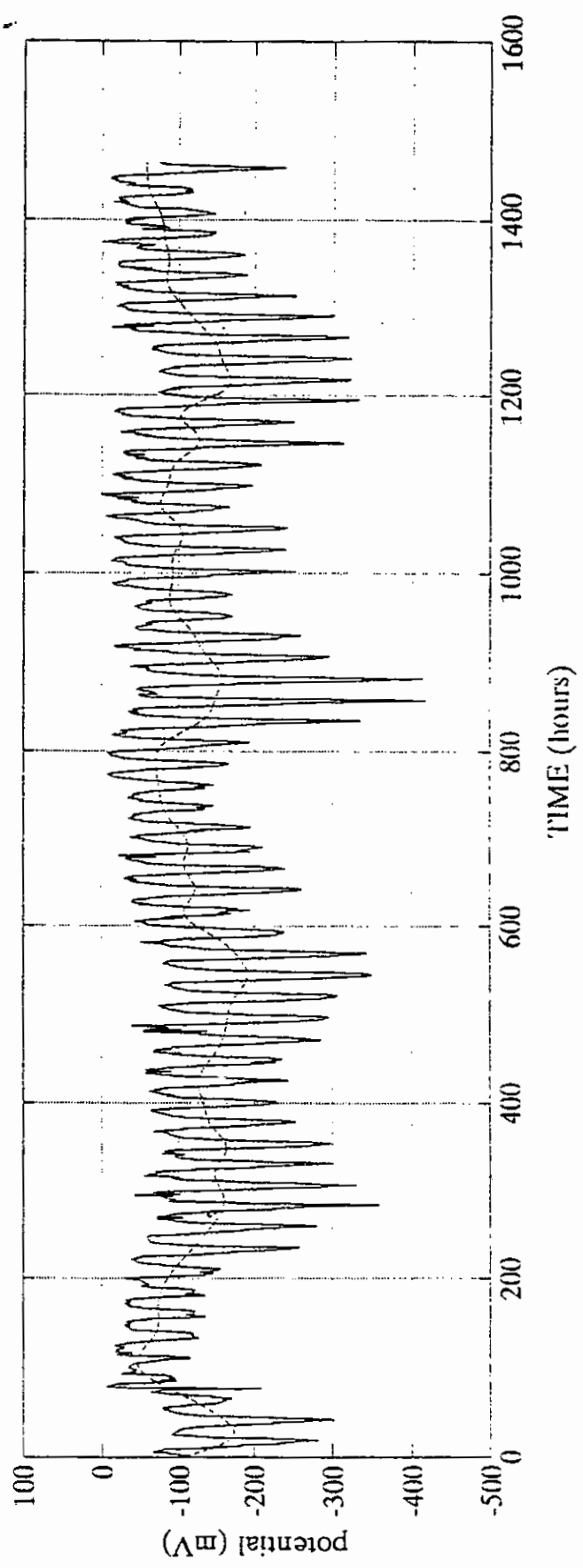
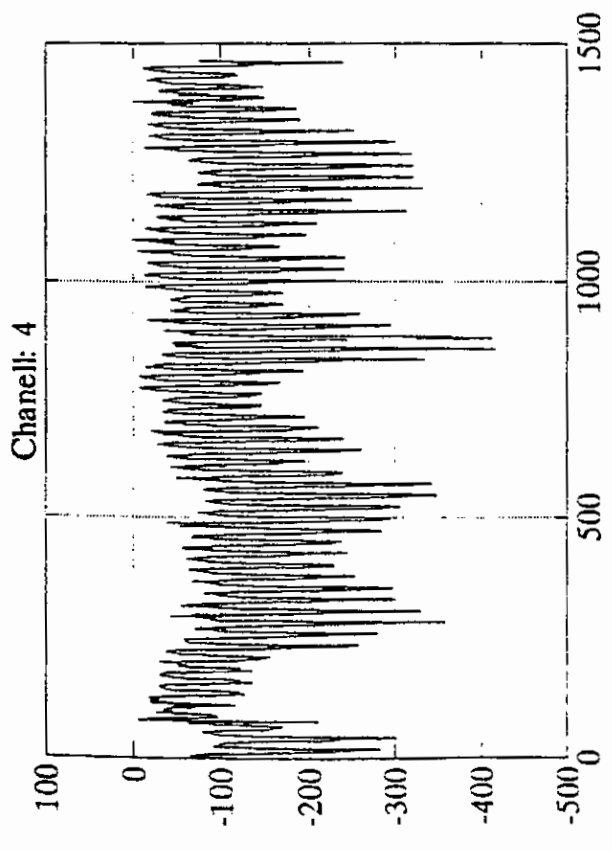
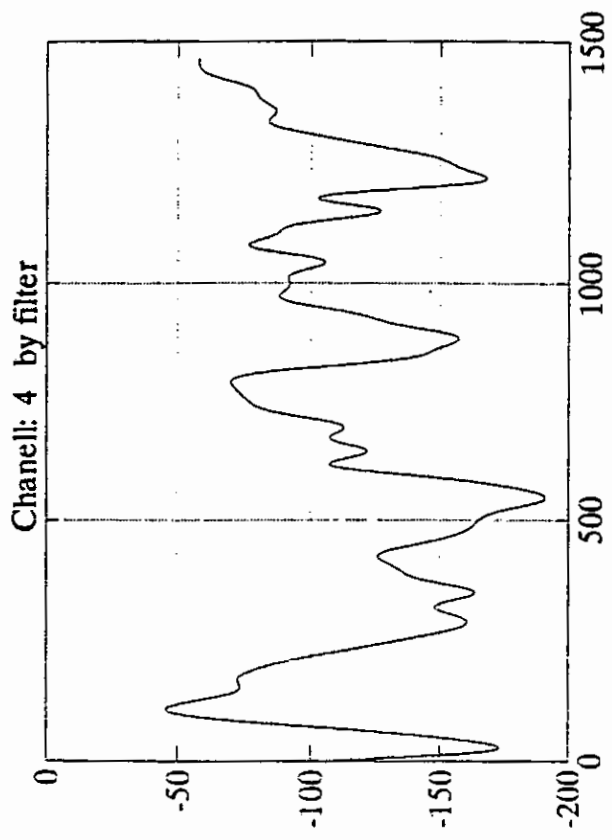
Ακολουθουν συνοπτικες εκτυπωσεις κυματομορφων με και χωρις φιλτραρισμα αλλα και με συνδιασμο αυτων.











Τέλος παρουσιάζουμε επιλεκτικά μερικές εκτυπώσεις καναλιών οι οποίες είναι οι πιο κάτω.

1.κανάλι(1) απο 28/06/93 - 03/07/93

2.κανάλι(2) απο 14/07/93 - 16/07/93

3.κανάλι(3) απο 12/06/93 - 14/06/93

4.κανάλι(4) απο 14/07/93 - 16/07/93

5.κανάλι(0) απο 15/07/93 - 17/07/93

****DIRECTORY: C:\MATLAB\FMETA**

Στις εκτυπώσεις αυτές μπορεί κανείς εύκολα να διακρίνει καταγραφές συγκεκριμένων καναλιών άρα και συγκεκριμένης τοποθεσίας ηλεκτροδίων, οι οποίες αναφέρονται στο χρονικό διάστημα που έγιναν οι μετρήσεις (12/06/93-12/08/93).

Οι κυματομορφές των εκτυπώσεων χωρίς να έχουν υποστεί κάποιο φιλτράρισμα γίνονται εύκολα κατανοητές τόσο ως προς την μορφή τους αλλά και ως προς την πληροφορία που μεταφέρουν, σε αντίθεση με την πληροφορία που μας έδιναν τα κανάλια καταγραφής πριν την επεξεργασία τους από το πακέτο ανάλυσης Matlab.

Σαν παράδειγμα παρακολουθείστε την καταγραφή των μεταβολών στο επίμαχο τριήμερο μεταξύ 15/07/93 και 17/07/93

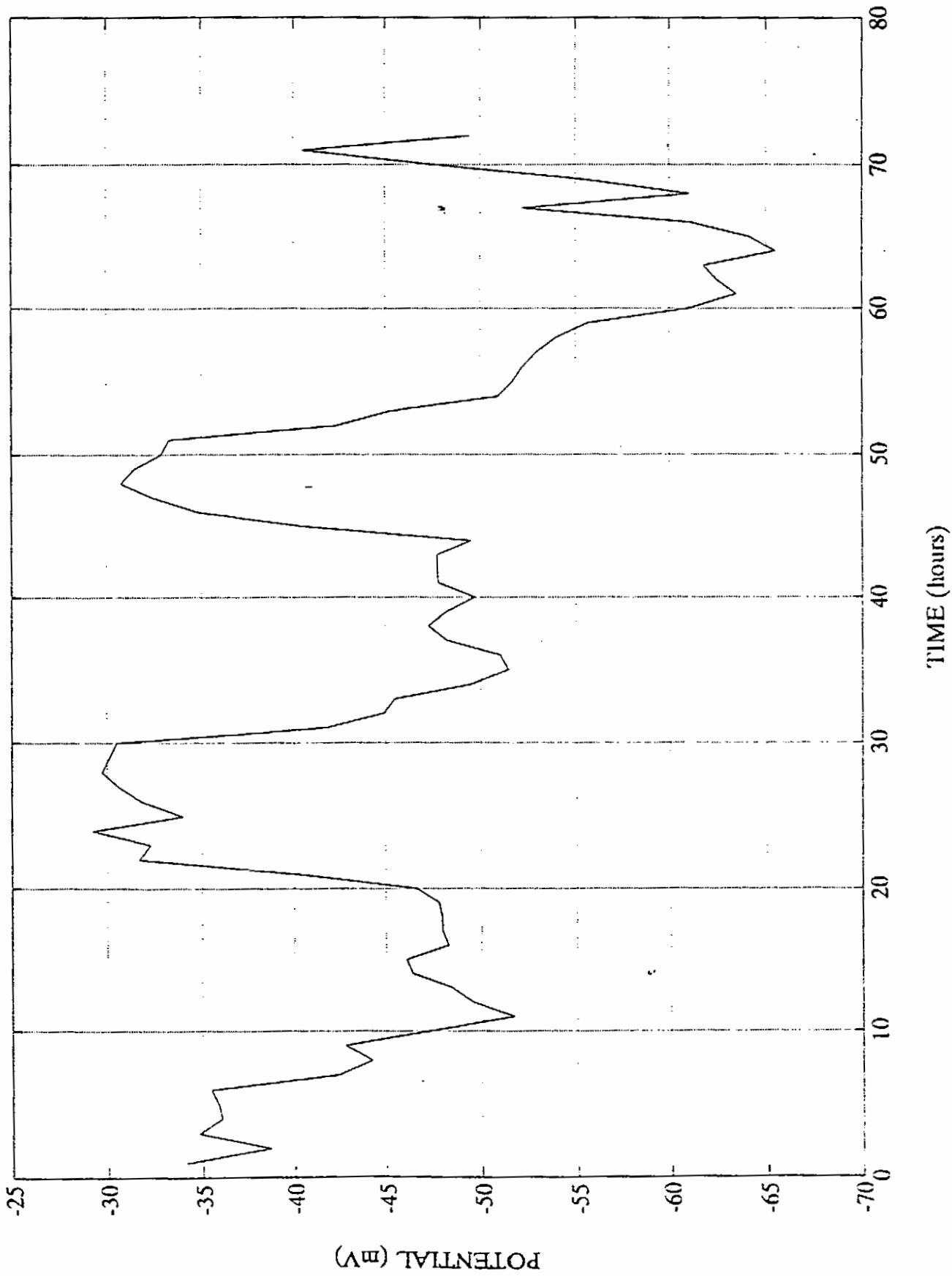
όπου έχουμε και τις πιο έντονες διακυμάνσεις λόγω της μεγάλης σεισμικής δραστηριότητας που επικρατούσε στην περιοχή και κατέγραψαν τα κανάλια 4-2-0 με συχνότητα δειγματοληψίας μετά την επεξεργασία 1σημείο/ώρα σε σύνολο 72 ωρων (δηλ. από 15/7-17/7).

Δείτε ακόμα τις προειδοποιητικές καταγραφές των καναλιών 1-3 ένα μήνα πριν την έντονη σεισμική δραστηριότητα που καταγράφηκε.

Συμπερασματικά διαπιστώνεται ότι η σημασία της επεξεργασίας των παραπάνω σημάτων είναι μεγάλη γιατί χωρίς αυτή δεν μπορούμε να έχουμε την συνοπτική εικόνα που μας δίνουν οι ενοποιημένες κυματομορφές για την εξαγωγή συμπερασμάτων και ελέγχων.

15/7/93 - 17/7/93

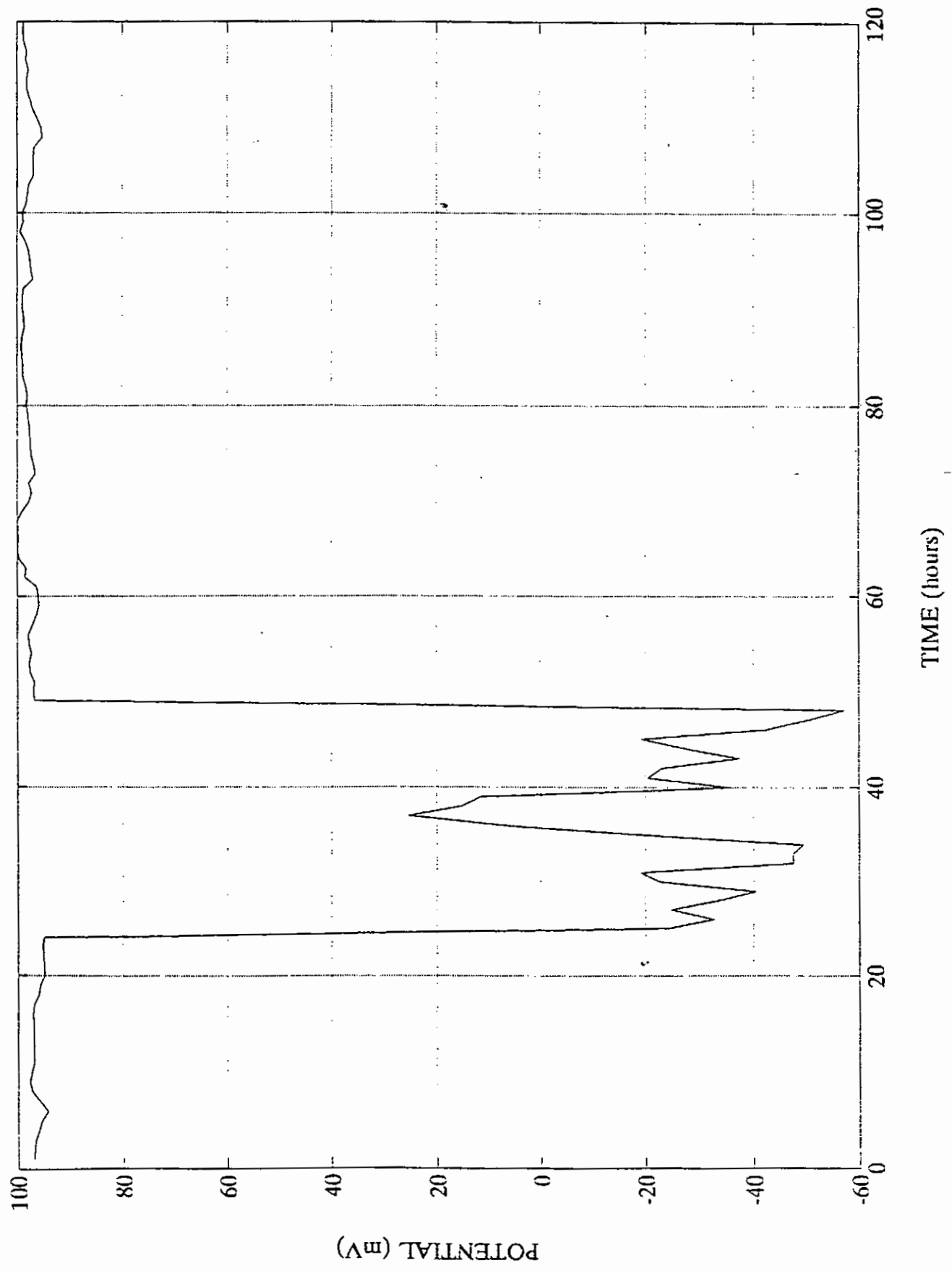
Chr0 K



TIME (hours)

28/6/93 - 3/7/93

Ch:1 K

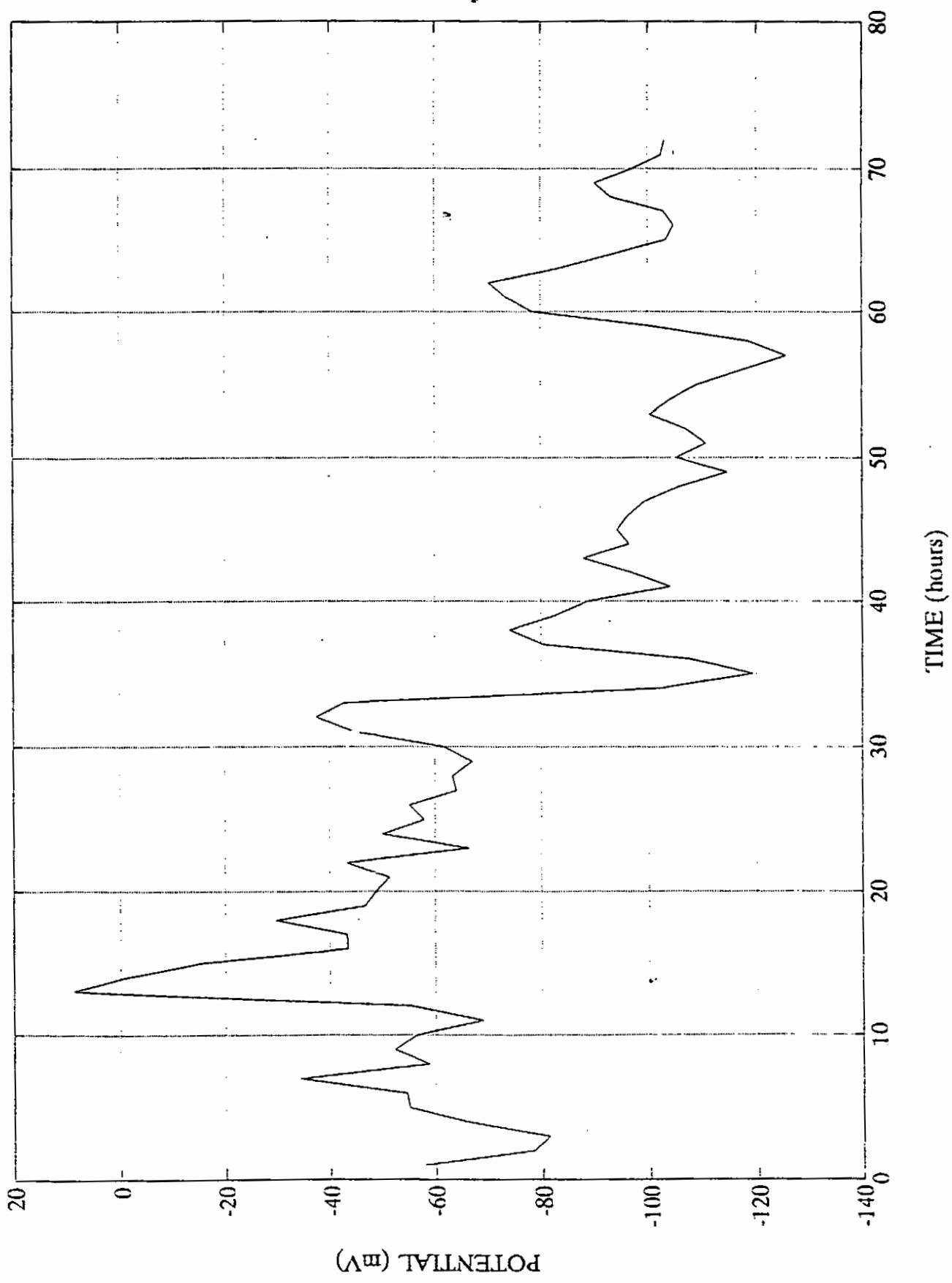


TIME (hours)

POTENTIAL (mV)

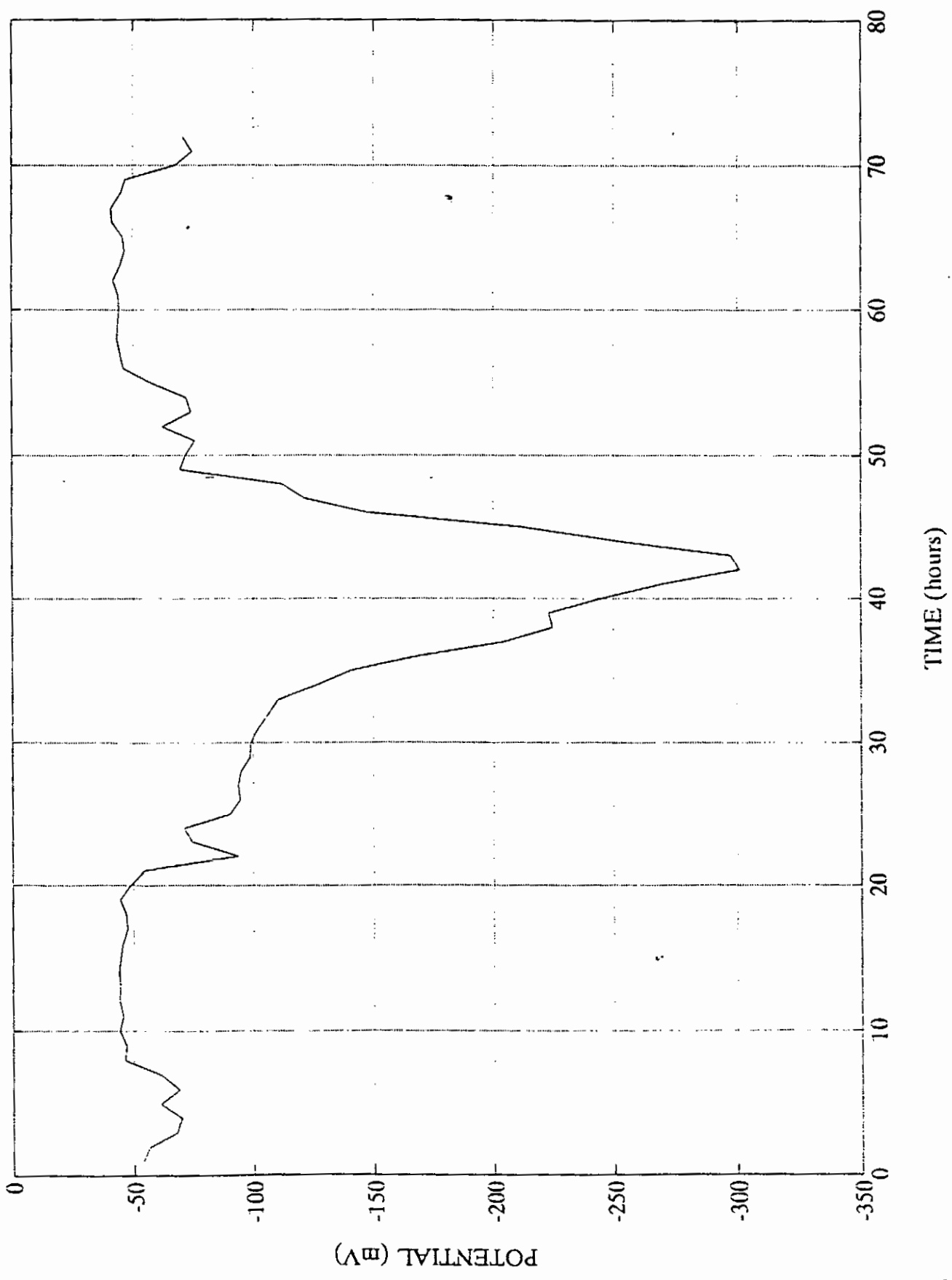
14/7/93 - 16/7/93

Ch:2 K



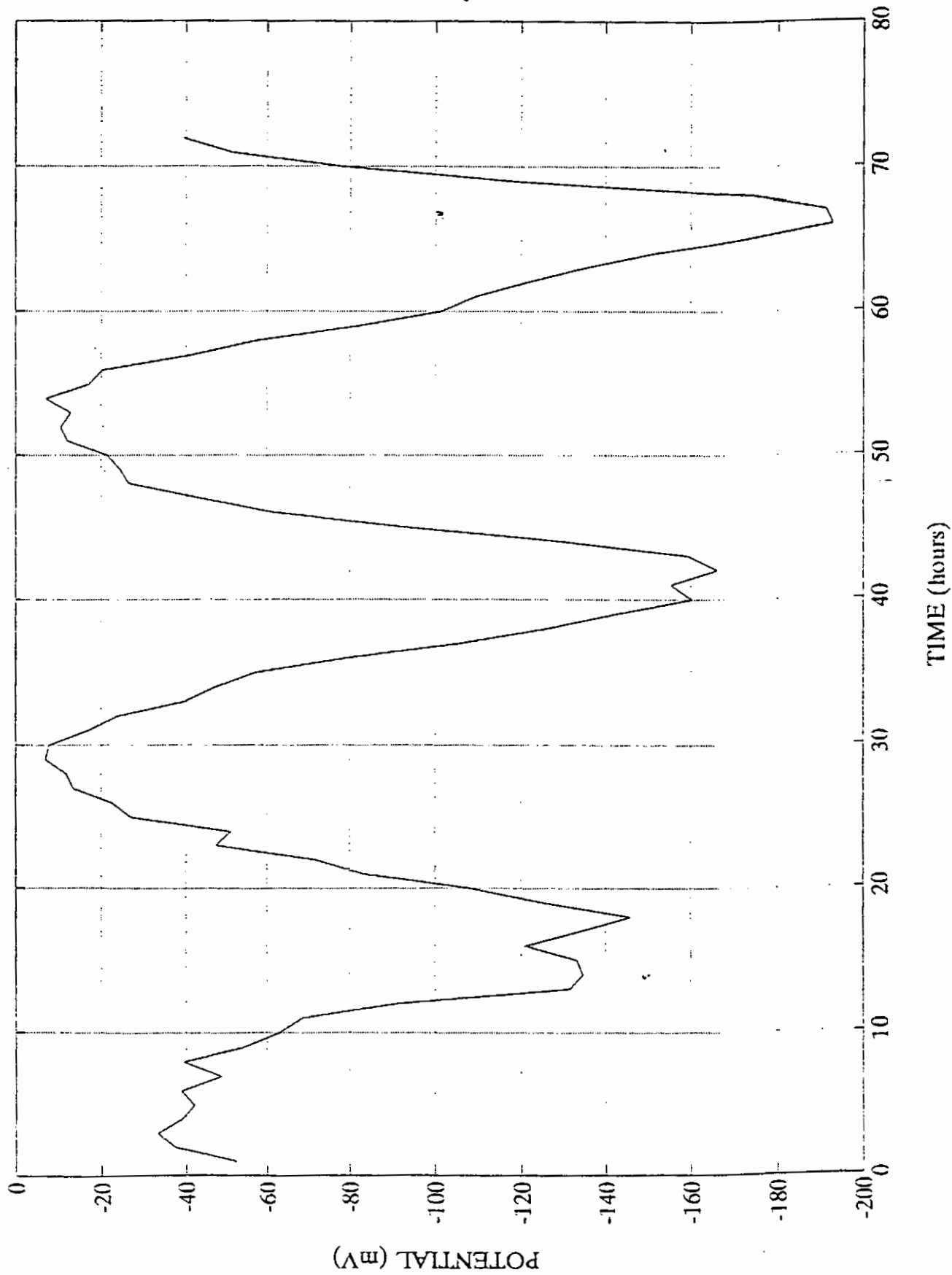
12/6/93 - 14/6/93

Chr:3 K



14/7/93 - 16/7/93

Chr:4 K



Βιβλιογραφία

1. Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, Κ.Α. ΚΑΡΥΜΠΑΚΑΣ - Ε.Κ. ΣΕΡΒΕΤΑΣ
2. Διδακτορικό Καθηγητή, Α. ΥΦΑΝΤΗ
3. W.A. PORTER: «Modern Foundations of systems Engineering», Mac Millan Co. N. York, 1986
4. S.CHANG: «Syntheisi of Optimal Control», Mc Grew - N. York, 1971
5. Μαθηματικό Πακέτο Επεξεργασίας και Ανάλυσης Matlab



