



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΙΓΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΟΠΤΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΦΑΚΩΝ

Γιάκρα Παρασκευή
Ψαραδάκου Κωνσταντίνα

Επόπτης καθηγητής
Χαράλαμπος Αναστόπουλος

Αίγιο, Ιούνιος 2013

ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον καθηγητή μας κύριο Χ. Αναστόπουλο, κυρίως για την εμπιστοσύνη που μας έδειξε, και την υπομονή που έκανε κατά την διάρκεια υλοποίησης της πτυχιακής εργασίας. Όπως επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του, για την επίλυση διαφόρων θεμάτων.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένας ιδανικός φακός παράγει μία περιορισμένη εικόνα μιας συμμετρικής περίθλασης ενός διαμπερούς μοτίβου από ένα αντικείμενο του χώρου. Το επίπεδο εικόνας βρίσκεται γενικά σε μια σταθερή απόσταση από τον αντικειμενικό φακό μπροστά σε ένα μέσο με καθορισμένο δείκτη διάθλασης. Οι φακοί που προσφέρονται από τους κορυφαίους κατασκευαστές φακών έχουν εξαιρετικά χαμηλούς βαθμούς εκτροπών. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι φακοί δεν είναι φτιαγμένοι για να είναι τέλειοι από κάθε άποψη, αλλά έχουν σχεδιαστεί για να ανταποκρίνονται σε ορισμένες προδιαγραφές, ανάλογα με την προβλεπόμενη χρήση τους. Οι φακοί κατασκευάζονται με διαφορετικό βαθμό της οπτικής διόρθωσης τόσο για μονοχρωματικές (σφαιρικό, κόμη, αστιγματισμός, καμπύλωση πεδίου, παραμόρφωση ειδώλου) όσο και για πολυχρωματικές εκτροπές (διαμήκης, εγκάρσια). Επομένως, τα σφάλματα απεικόνισης προέρχονται από τις κατασκευαστικές ατέλειες των φακών και οι οποίες προκαλούν σκέδαση του φωτός, με αποτέλεσμα, η εικόνα που θα πάρουμε να μην είναι καθαρή αλλά αλλοιωμένη. Ο στόχος της πτυχιακής αυτής εργασίας, λοιπόν, είναι να μελετήσει διεξοδικά και να εξηγήσει τους τύπους των εκτροπών και των σφαλμάτων των φακών.



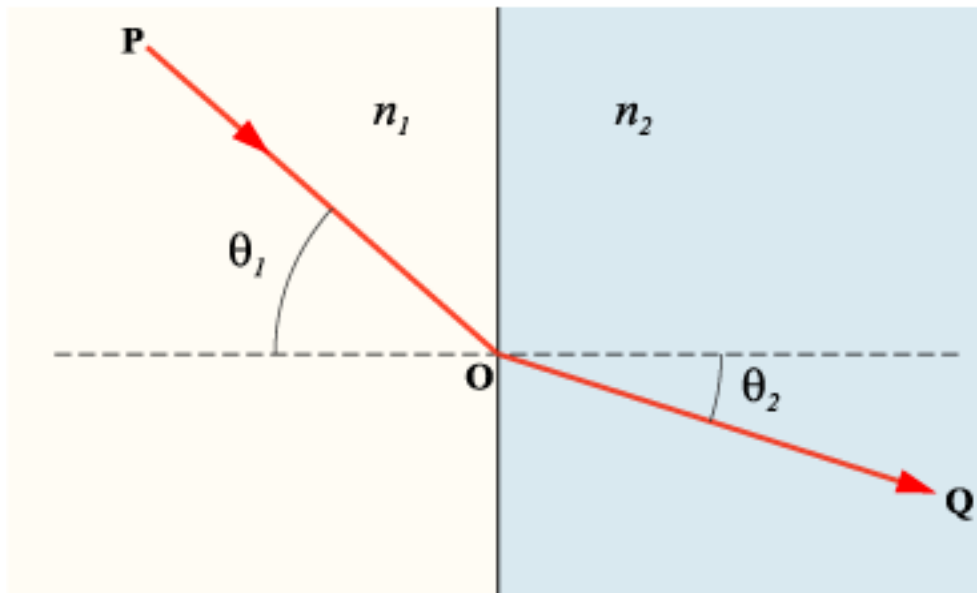
Πίνακας περιεχομένων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
1.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΣ ΦΑΚΟΣ	5
1.2 ΕΙΔΗ ΦΑΚΩΝ ΚΑΙ ΠΩΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΝΤΑΙ.....	6
1.3 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΣΗΜΕΙΑ ΕΝΟΣ ΦΑΚΟΥ	7
1.4 ΠΟΡΕΙΑ ΑΚΤΙΝΩΝ ΣΕ ΕΝΑΝ ΛΕΠΤΟ ΦΑΚΟ	9
1.5 ΠΟΡΕΙΑ ΑΚΤΙΝΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΦΑΚΩΝ	10
1.6 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΦΑΚΩΝ ΠΩΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΝΤΑΙ ΚΑΙ ΟΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΟΥΣ ...	11
2. ΤΑ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ	12
2.1 ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ	12
2.1.1 ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΛΕΠΤΟΥ ΦΑΚΟΥ	18
2.1.2 ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ.....	20
2.2 ΚΟΜΗ	25
2.2.1 ΣΦΑΛΜΑ ΚΟΜΗΣ	25
2.2.2 Η ΚΟΜΗ ΠΟΣΟΤΙΚΑ.....	28
2.2.3 ΑΔΙΚΗΜΑ ΕΙΣ ΒΑΡΟΣ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ	28
2.3 ΑΣΤΙΓΜΑΤΙΣΜΟΣ	30
2.3.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΣΤΙΓΜΑΤΙΣΜΟ	30
2.3.2 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ CODDINGTON	34
2.4 ΚΑΜΠΥΛΩΣΗ ΠΕΔΙΟΥ	37
2.5 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΕΙΔΩΛΟΥ.....	38
3. ΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ	40
3.1 ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ	44
3.2 ΑΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΖΕΥΓΗ.....	45
3.3 ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΧΡΩΜΑΤΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ Η ΑΞΟΝΙΚΟ ΧΡΩΜΑΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ.....	46
3.4 ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΧΡΩΜΑΤΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ Η ΠΛΕΥΡΙΚΟ ΧΡΩΜΑΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ	48
4. ΙΣΤΟΡΙΚΑ.....	49
5. ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ	50
6. ΙΧΝΗΛΑΤΗΣΗ ΑΚΤΙΝΩΝ	51
7. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΟΦΘΑΛΜΟ.....	57
7.1 ΣΦΑΙΡΟΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ.....	57
8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	63
9. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	64

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΣ ΦΑΚΟΣ

Φακός είναι ένα σώμα διαφανές που περιορίζεται από τουλάχιστον δύο διαθλαστικές επιφάνειες (δίοπτρα). Αυτό, αποτελεί ένα οπτικό σύστημα που έχει ως βάση το φαινόμενο διάθλαση. Δεν είναι γνωστό το πότε ακριβώς επινοήθηκαν οι φακοί. Το σίγουρο όμως είναι ότι ήταν γνωστοί στους Αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι τους χρησιμοποιούσαν για να ανάψουν φωτιά συγκεντρώνοντας μέσω αυτών τις ηλιακές ακτίνες. Στο πέρασμα των χρόνων οι φακοί εξελίχθηκαν πολύ, αφού έπρεπε να καλύψουν τις ανάγκες που προέκυπταν. Έτσι, βλέπουμε την εξέλιξη διάφορων οπτικών οργάνων όπως π.χ φωτογραφικών μηχανών, τηλεσκοπίων, μικροσκοπίων κ.α. Γενικά, διάθλαση ονομάζεται το φυσικό φαινόμενο της εκτροπής της ευθύγραμμης διάδοσης που υφίστανται φωτεινά ή άλλα κύματα όταν διέρχονται από ένα διαπερατό από αυτά μέσον σε ένα άλλο. Ιδιαίτερα, στην οπτική, διάθλαση φωτός χαρακτηρίζεται κάθε οπτικό φαινόμενο της εκτροπής της διεύθυνσης των φωτεινών ακτίνων κατά τη μετάβασή τους από ένα διαπερατό μέσο διάδοσης με δείκτη διάθλασης, σε άλλο μέσο διάδοσης με δείκτη διάθλασης. Η διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων ονομάζεται δίοπτρο. Το φαινόμενο αυτό, οφείλεται στη διαφορετική ταχύτητα διάδοσης του φωτεινού κύματος. Η σχέση που συνδέει τη γωνία πρόσπτωσης με τη γωνία διάθλασης, ως προς την κάθετο, στη διαχωριστική επιφάνεια είναι γνωστή ως "Νόμος του Snell", και ορίζεται ως εξής: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, όπου θ_1 η γωνία πρόσπτωσης, θ_2 η διαθλώμενη γωνία, και n_1 n_2 οι δείκτες διάθλασης των υλικών. Για μικρές γωνίες είναι δυνατό να γίνει η προσέγγιση. Από αυτή την προσέγγιση προκύπτουν και τα γεωμετρικά σφάλματα φακών. Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι στο "κενό" η πορεία των φωτεινών ακτίνων παραμένει αμετάβλητη. Στην περίπτωση που φωτεινές ακτίνες διερχόμενες από ένα μέσον πέσουν κάθετα στην επιφάνεια του άλλου, τότε η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδενική με αποτέλεσμα και η γωνία διάθλασης να είναι και αυτή μηδενική π.χ. ακτίνες φωτός από τον αέρα προσπίπτουσες κάθετα σε νερό συνεχίζουν στην ίδια διεύθυνση. Και αυτό το γνωρίζουν πολύ καλά οι γλάροι όταν εφορμούν κάθετα στη λεία τους.



Εικόνα 1: Διάθλαση φωτός στην επιφάνεια μεταξύ δύο μέσων διαφορετικών δεικτών διάθλασης, με $n_1 > n_2$. Η ταχύτητα είναι μικρότερη στο δεύτερο μέσο ($v_1 < v_2$), οπότε η γωνία διάθλασης θ_2 είναι μικρότερη από τη γωνία πρόσπτωσης θ_1 . Σημείωση στο διάγραμμα η διακεκομμένη ευθεία, είναι η κάθετος, στην επιφάνεια πρόσπτωσης. Η φωτογραφία προέρχεται από: www.Wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Snell.png

1.2 ΕΙΔΗ ΦΑΚΩΝ ΚΑΙ ΠΩΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΝΤΑΙ

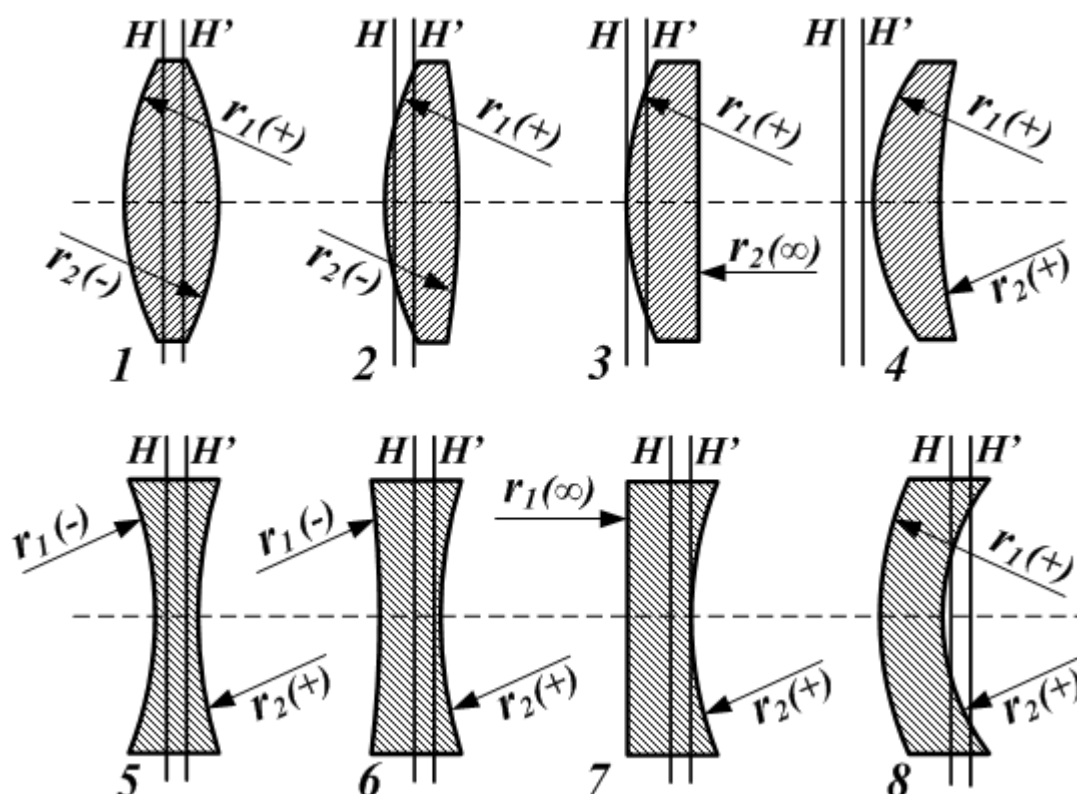
Οι φακοί διακρίνονται σε έξι βασικές μορφές, και είναι:

- Αμφίκυρτοι
- Επιπεδόκυρτοι
- Κυλόκυρτοι ή συγκλίνοντες μηνίσκοι (παχείς στο μέσον)
- Αμφίκοιλοι
- Επιπεδόκοιλοι
- Κοιλόκυρτοι ή αποκλίνοντες μηνίσκοι (λεπτοί στο μέσον)

Επίσης ανάλογα με την εκτροπή που συμβαίνει στις ακτίνες όταν διέρχονται από τους φακούς, αυτοί διακρίνονται σε θετικούς ή αλλιώς σε συγκλίνοντες φακούς και σε αρνητικούς ή αλλιώς σε αποκλίνοντες φακούς.

- 1) Θετικοί φακοί ή αλλιώς συγκλίνοντες: Όταν μία δέσμη φωτός εισέρχεται σε έναν τέτοιο φακό τότε αυτή παθαίνει σύγκλιση. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να συμβεί με φακούς επιπεδόκυρτους, αμφίκυρτους και συγκλίνοντες μηνίσκους.
- 2) Αρνητικοί φακοί ή αποκλίνοντες: Αυτοί οι φακοί προκαλούν απόκλιση σε μία εισερχόμενη δέσμη φωτός. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται με επιπεδόκοιλους φακούς, με αμφίκοιλους και με αποκλίνοντες μηνίσκους.

Όπως φαίνεται και στην εικόνα 2, οι φακοί 1 και 2 είναι αμφίκυρτοι με διαφορετικό βαθμό κυρτότητας στις πλευρές τους. Ο φακός 3 είναι επιπεδόκυρτος, ενώ ο 4 είναι αποκλίνων μηνίσκος. Αντίστοιχα, οι φακοί 5 και 6 είναι αμφίκοιλοι, ομοίως και εδώ με διαφορετικό βαθμό κυρτότητας στις πλευρές τους. Ο φακός 7 είναι επιπεδόκοιλος, ενώ ο 8 είναι συγκλίνων μηνίσκος.

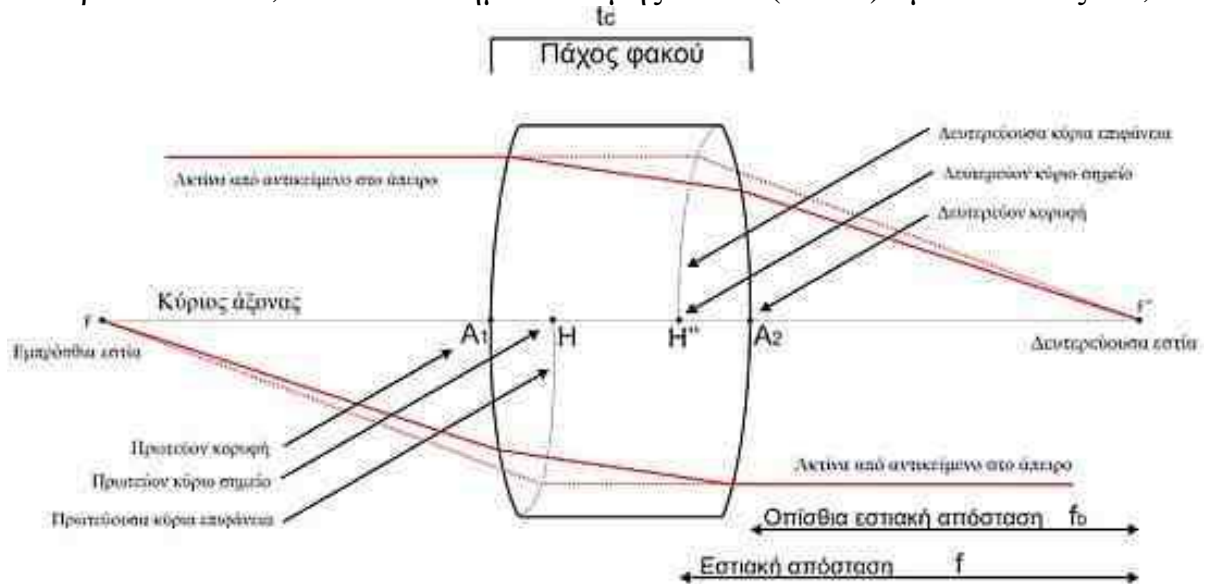


Εικόνα 2: Τα είδη των φακών. Η φωτογραφία προέρχεται από: www.wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Lens-shapes.png

1.3 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΣΗΜΕΙΑ ΕΝΟΣ ΦΑΚΟΥ

Κύριος άξονας ενός φακού ονομάζεται η ευθεία που συνδέει τα κέντρα καμυλότητας των δύο επιφανειών του. Σε περίπτωση που η μία επιφάνεια είναι επίπεδη τότε κύριος άξονας λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στην επίπεδη επιφάνεια και διέρχεται από το κέντρο καμυλότητας της σφαιρικής επιφάνειας. Κύρια τομή ενός φακού ονομάζεται κάθε επίπεδο που διέρχεται από τον κύριο άξονα. Κύρια εστία ενός φακού είναι το γεωμετρικό σημείο του κύριου οπτικού άξονα, στο οποίο όταν βρεθεί η πηγή μιας αξονικής δέσμης, μετά τη διάθλαση αυτής από το φακό, γίνεται παράλληλη. Πρωτεύουσα/ δευτερεύουσα κορυφή ενός φακού είναι το γεωμετρικό σημείο τομής της πρωτεύουσας/ δευτερεύουσας επιφάνειας ενός φακού με τον κύριο άξονα. Αν μια

εστιακή αξονική δέσμη προσπίπτει στο φακό από το σημείο της πρωτεύουσας/ δευτερεύουσας κύριας εστίας (F/F''), η διαθλώμενη δέσμη θα εξέλθει παράλληλα προς τον κύριο άξονα. Αν προεκτείνουμε τις προσπίπτουσες και διαθλώμενες ακτίνες, τα σημεία τομής τους ορίζουν ένα επίπεδο, κάθετο στον άξονα, που ονομάζεται πρωτεύον/ δευτερεύον κύριο επίπεδο, και το σημείο τομής του (H/H'') με τον άξονα,

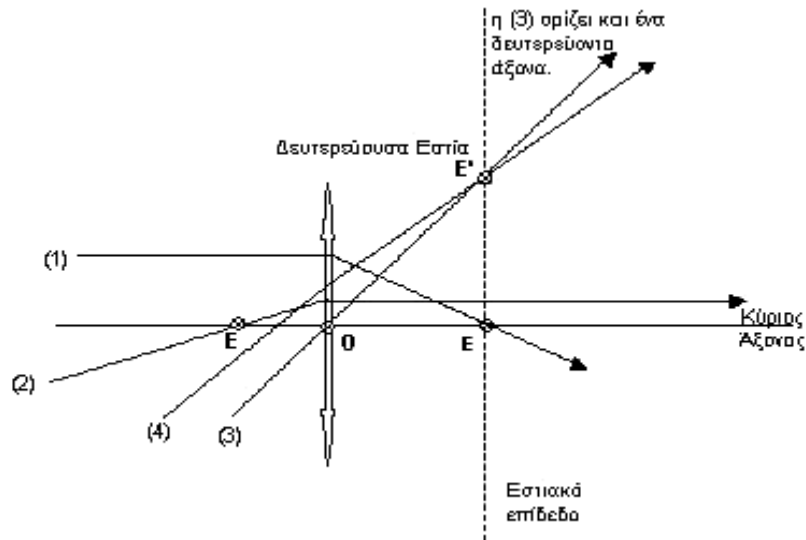


Εικόνα 3: Θεμελιώδη σημεία ενός φακού. Η φωτογραφία προέρχεται από: www.wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Lens_diagram.jpg

ονομάζεται πρωτεύον/ δευτερεύον κύριο σημείο. Όταν μια στιγματική αξονική δέσμη προσπίπτει από ένα σημείο εκτός του άξονα σε ένα παχύ φακό, υπάρχει μια ακτίνα της δέσμης, η κύρια ακτίνα, η οποία δεν υφίσταται εκτροπή αλλά μόνο παράλληλη μετατόπιση. Αν προεκτείνουμε την προσπίπτουσα και την εξερχόμενη ακτίνα οι προεκτάσεις θα συναντήσουν τον κύριο άξονα στα σημεία N και N'' αντίστοιχα. Τα θεμελιώδη σημεία και οι αποστάσεις ενός φακού δίνονται στο παραπάνω Σχήμα 3.

1.4 ΠΟΡΕΙΑ ΑΚΤΙΝΩΝ ΣΕ ΕΝΑΝ ΛΕΠΤΟ ΦΑΚΟ

Οι λεπτοί φακοί είναι ιδανική περίπτωση φακών, οι οποίοι έχουν πολύ μικρό πάχος. Οι ακτίνες που συγκεντρώνονται στο φακό είναι κεντρικές, δηλαδή απέχουν λίγο από τον κύριο άξονα και έχουν μικρή κλίση ως προς αυτόν. Κάθε ακτίνα που διέρχεται από το οπτικό κέντρο δεν υφίσταται καμία απολύτως μετατόπιση. Αν εξεταστεί και σχηματικά η πορεία των ακτίνων, τότε:

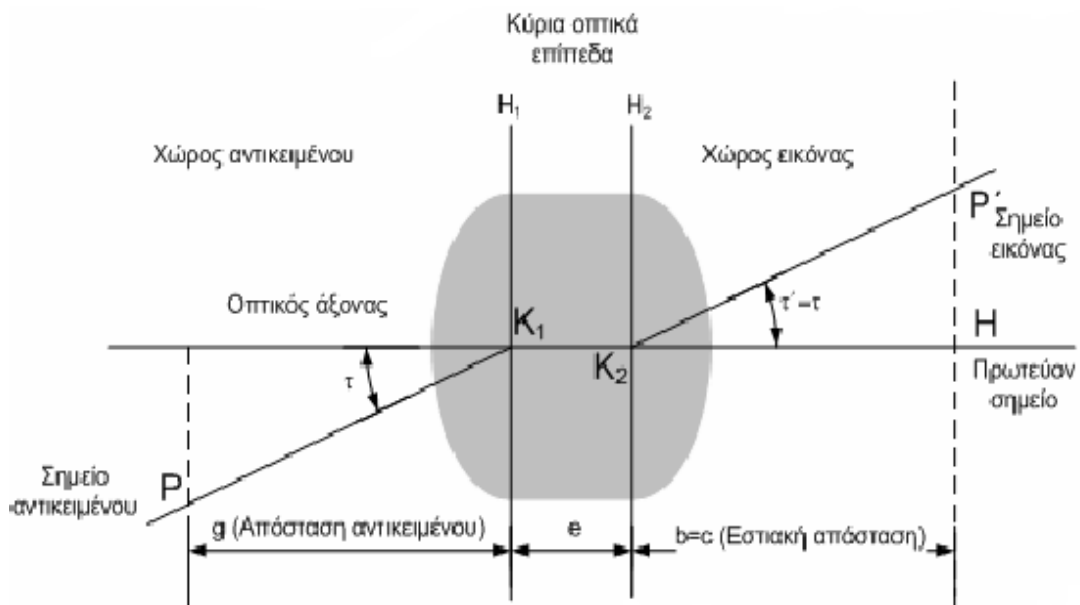


Εικόνα 4: Πορεία ακτίνων σε έναν λεπτό φακό. Η φωτογραφία προέρχεται από: www.wikipedia.org

- Η ακτίνα (1) είναι παράλληλη προς τον κύριο άξονα και διαθλώμενη από τον φακό, διέρχεται από την κύρια εστία.
- Η ακτίνα (2) διέρχεται από την κύρια εστία, άρα η διαθλώμενη από τον φακό θα είναι παράλληλη προς τον κύριο άξονα.
- Η ακτίνα (3) διέρχεται από το οπτικό κέντρο και συνεχίζει την πορεία της χωρίς καμία μετατόπιση.
- Η ακτίνα (4) είναι μία τυχαία ακτίνα. Αναγκαστικά θα διέλθει από μία δευτερεύουσα ακτίνα E' .
- Δευτερεύουσες εστίες, είναι οι εστίες στις οποίες συγκλίνουν ακτίνες που έχουν παράλληλη διεύθυνση προς ένα δευτερεύοντα άξονα.

1.5 ΠΟΡΕΙΑ ΑΚΤΙΝΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΦΑΚΩΝ

Παραπάνω, αναλύσαμε την πορεία των ακτίνων σε έναν θεωρητικά λεπτό φακό. Σε αυτόν ορίζεται ένα κέντρο, από το οποίο όλες οι ακτίνες εισέρχονται χωρίς απόκλιση. Για συστήματα όμως φακών, ορίζονται δύο κύρια επίπεδα H_1 και H_2 . Η τομή των επιπέδων αυτών με τον οπτικό άξονα, ορίζουν τα δεσμικά σημεία K_1 και K_2 , κατά τέτοιον τρόπο ώστε η εξερχόμενη (κεντρική) ακτίνα από το K_2 , να σχηματίζει την ίδια γωνία $\tau = \tau'$ με τον οπτικό άξονα όπως και η προσπίπτουσα ακτίνα στο K_1 . Για την ιδανική αυτή περίπτωση συστήματος φακών, K_1 θα ήταν το



Εικόνα 5: Πορεία ακτίνων σε ένα σύστημα φακών. Η φωτογραφία προέρχεται από: www.wikipedia.org

εξωτερικό (προς το αντικείμενο) προβολικό κέντρο O και το K_2 το αντίστοιχο εσωτερικό. Η σταθερά c της μηχανής, θα ήταν ίση με την εστιακή απόσταση b . Επειδή όμως οι φακοί που δημιουργούνται δεν είναι τέλεια κατασκευασμένοι δημιουργούνται τα σφάλματα φακών.

1.6 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΦΑΚΩΝ ΠΩΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΝΤΑΙ ΚΑΙ ΟΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΟΥΣ

Η μελέτη του φαινομένου της διάθλασης μέσα από πρίσματα καθώς και από φακούς, γίνεται με τη χρησιμοποίηση σχέσεων που ισχύουν στη γεωμετρική οπτική σαν αποτέλεσμα της προσέγγισης κατά Gauss δηλαδή για παραξονικές φωτεινές ακτίνες. Οι προσεγγιστικές σχέσεις που ισχύουν, βασίζονται στη σειρά McLaurin όπου μόνο ο πρώτος όρος έχει σημασία.

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή από ένα σημειακό αντικείμενο θα προκύπτει το αντίστοιχο σημειακό είδωλο ανεξάρτητα των ακτίνων που το προσδιορίζουν. Αυτή είναι μια ιδανική περιγραφή της κατάστασης, αλλά δεν είναι αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα. Πρακτικά, οι γωνίες πρόσπτωσης είναι μεγάλες με αποτέλεσμα να είναι σημαντικοί και οι όροι τρίτου και πέμπτου βαθμού της παραπάνω σειράς. Σε αυτήν την περίπτωση δεν ισχύουν οι παραξονικοί κανόνες για την δημιουργία ειδώλου και στην απεικόνιση εμφανίζονται ατέλειες. Αυτές οι ατέλειες είναι τα σφάλματα φακών και ανάλογα με τους όρους που λαμβάνονται υπόψη, τα σφάλματα ονομάζονται ανάλογα σφάλματα τρίτης ή πέμπτης τάξης.

Τα σφάλματα χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

1. Τα μονοχρωματικά ή Seidel σφάλματα
 - Σφαιρική εκτροπή
 - Κόμη
 - Αστιγματισμός
 - Καμπύλωση πεδίου
 - Παραμόρφωση ειδώλου
2. Τα χρωματικά σφάλματα
 - Διαμήκης εκτροπή
 - Εγκάρσια εκτροπή

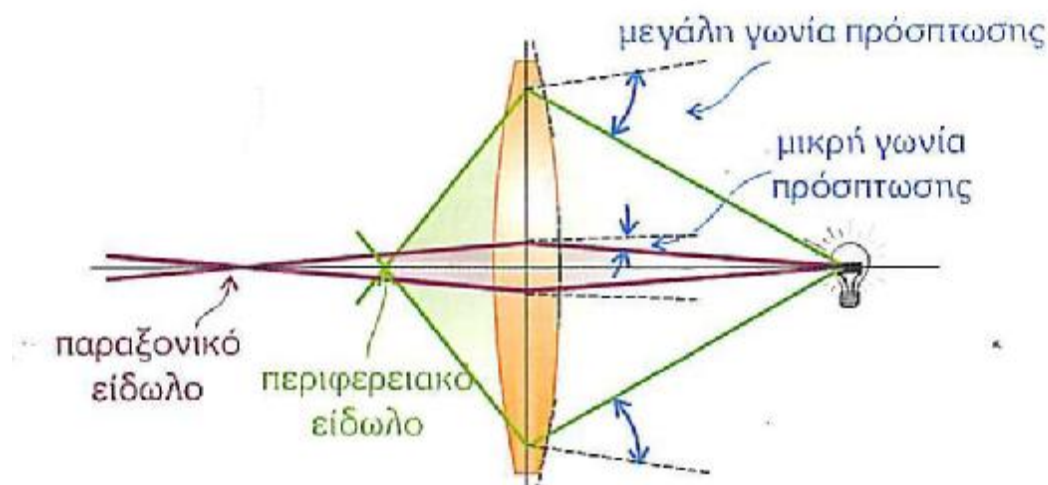
Στις μονοχρωματικές εκτροπές, το φως που συμμετέχει είναι μονοχρωματικό και εξαρτάται από τον τύπο του οπτικού συστήματος. Αντίστοιχα, οι χρωματικές εκτροπές παρουσιάζονται εξ' αιτίας της διαφορετικότητας στη διάθλαση από το διαφανές οπτικό μέσο για τις πολύχρωματικές ακτινοβολίες.

2. ΤΑ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

2.1 ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ

Πρόκειται για μία απόκλιση μονοχρωματικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από φωτεινή πηγή που είναι τοποθετημένη στον άξονα του οπτικού συστήματος. Σε ένα ιδανικά σφαιρικό φακό προσπίπτουν όχι μόνο παραξονικές ακτίνες (μικρή κλίση), αλλά και περιφερειακές ακτίνες με μεγάλη κλίση. Εφαρμόζοντας για κάθε ακτίνα το νόμο της διάθλασης χωρίς προσεγγίσεις, προκύπτει ότι η απόσταση του αντικειμένου εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας.

Η εστιακή απόσταση δηλαδή εξαρτάται όχι μόνο από την γεωμετρία του φακού (καμπυλότητα και δείκτη διάθλασης) αλλά και από την κλίση της ακτίνας. Φωτίζοντας ένα τέτοιο φακό σε όλη του την έκταση, σχηματίζεται μια εκτεταμένη, ασαφής κηλίδα με περιστροφική συμμετρία ως προς τον οπτικό άξονα. Αυτό είναι το σφάλμα σφαιρικής εκτροπής.



Εικόνα 6: Η περιφερειακή και η παραξονική ακτίνα συναντούν σημαντικά διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης. Η εικόνα προέρχεται από: Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη γνώση 2008), 6.1.4, εικόνα 6-1-9.

Για να απλοποιηθούν οι αναλυτικές σχέσεις, θα πειραματιστούμε στην περίπτωση ενός λεπτού φακού δηλαδή ενός φακού του οποίου η διάμετρος είναι μικρή σε σχέση με τις ακτίνες καμπυλότητας του. Στην πραγματικότητα η διάμετρος του φακού έχει τέτοιο μέγεθος όπου ο φακός δεν μπορεί να θεωρηθεί λεπτός. Έστω ένας φακός που αποτελείται από δύο σφαιρικές επιφάνειες ακτίνων καμπυλότητας R_1 και R_2 . Αν ο δείκτης διάθλασης του υλικού που αποτελεί τον φακό συμβολίζεται ως n τότε η εστιακή απόσταση του φακού δίνεται από τον τύπο των κατασκευαστών των φακών:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Αν έχουμε αντικείμενο σε απόσταση s από το φακό, τότε οι ακτίνες κοντά στον άξονα σχηματίζουν είδωλο σε απόσταση s' σύμφωνα με την σχέση του Gauss. Έστω h η μέγιστη απόσταση από το κέντρο του φακού όπου περνούν οι ακτίνες. Οι ακτίνες που περνούν σε απόσταση h από το κέντρο του φακού σχηματίζουν είδωλο σε απόσταση s' που δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{s'h} - \frac{1}{s'} = \frac{h^2}{f^3} (Ap^2 + Bpq + Cq^2 + D)$$

Όπου p καλείται παράγοντας σχήματος και εξαρτάται από τις ακτίνες καμπυλότητας του φακού

$$p = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

η ποσότητα q καλείται παράγοντας απόστασης και εξαρτάται από την απόσταση s του αντικειμένου από τον φακό

$$q = \frac{2f}{s} - 1$$

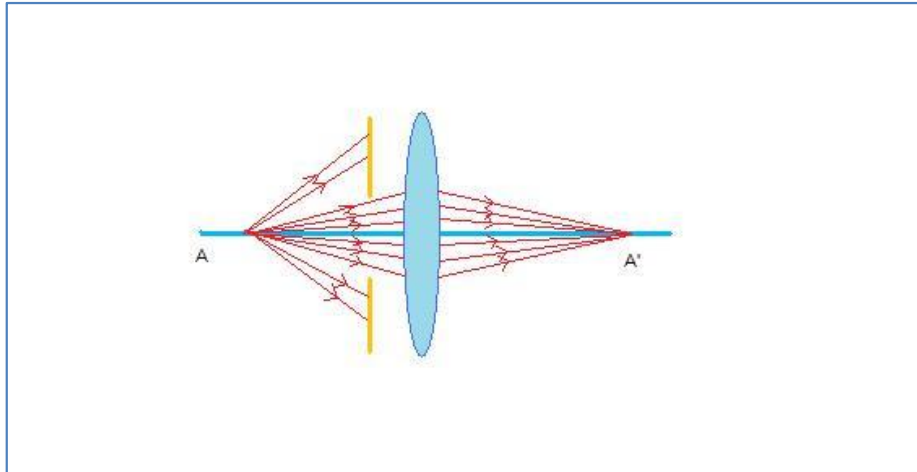
Και οι σταθερές A, B, C, D δίνονται από τις σχέσεις:

$$A = \frac{n+1}{8n(n-1)^2}, B = \frac{n+1}{2n(n-1)}, C = \frac{3n+2}{8n}, D = \frac{n^2}{8(n-1)^2}$$

Για ακτίνες εισερχόμενες από το άπειρο $s=\infty$ και $s'=f$ οπότε $q=-1$ και η δεύτερη σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{s'h} - \frac{1}{f} = \frac{h^2}{f^3} (Ap^2 - Bp + C + D)$$

Εάν μπροστά από τον φακό τοποθετηθεί διάφραγμα που επιτρέπει ο φακός να δέχεται μόνο παραξονικές ακτίνες από ένα σημειακό αντικείμενο A επί του κυρίου άξονα τότε θα σχηματιζόταν ένα είδωλο A' επί του κυρίου άξονα. Η απόσταση του ειδώλου A' από τον φακό θα υπολογιζόταν από την σχέση:

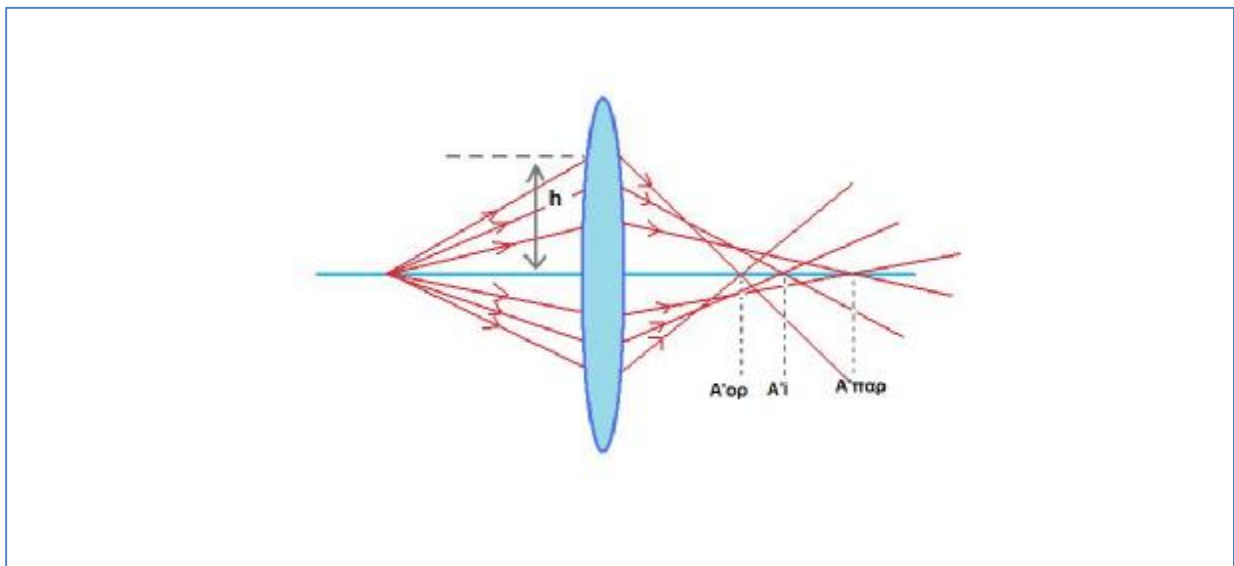


Εικόνα 7: Σχηματισμός ειδώλου από λεπτό φακό.

$$\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi'} = \frac{1}{f}$$

Όπου χ η απόσταση του αντικείμενου από το φακό, χ' η απόσταση του ειδώλου από τον φακό και f η εστιακή του απόσταση.

Με την απομάκρυνση του διαφράγματος οι φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν στην περιφέρεια του φακού εκτρέπονται περισσότερο γιατί η θλαστική γωνία του πρίσματος που αντιστοιχεί στα σημεία της περιφέρειάς του φακού είναι μεγάλη. Αυτές οι φωτεινές ακτίνες δεν μπορούν να θεωρηθούν παραξονικές και έτσι λόγω της προσέγγισης τρίτης τάξης θα συγκλίνουν περισσότερο από τις παραξονικές ακτίνες που προέρχονται από το ίδιο σημειακό αντικείμενο A. Το αποτέλεσμα



είναι η ταυτόχρονη δημιουργία μιας σειράς σχετικών ειδώλων: ένα είδωλο παραξονικό $A'_{\text{παρ}}$, ένα είδωλο οριακό $A'_{\text{ορ}}$ και ενδιάμεσα διάφορα είδωλα A'_i . Η απόσταση $A'_{\text{παρ}}A'_{\text{ορ}}$ καλείται διαμήκης σφαιρική απόκλιση και εξαρτάται εκτός από το μέγεθος h την ισχύ του φακού και από την θέση του σημειακού αντικειμένου A . (βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα).

Ενώ δηλαδή από το A εξαρτάται η θέση του $A'_{\text{παρ}}$ βάσει των σχέσεων που ισχύουν στις προσεγγίσεις του Gauss από την θέση του A εξαρτάται και η θέση του $A'_{\text{ορ}}$ και μάλιστα ανάλογα του h^2 . Τα συμπεράσματα αυτά ισχύουν και αν το αντικείμενο είναι σε άπειρη απόσταση από τον φακό δηλαδή οι ακτίνες που προσπίπτουν στο φακό να είναι παράλληλες. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μία εστία παραξονική $E'_{\text{παρ}}$, μία εστία οριακή $E'_{\text{ορ}}$ και οι ενδιάμεσες εστίες. Εάν ένα επίπεδο π μετακινηθεί πίσω από τον φακό παραμένοντας κάθετο στον κύριο άξονα θα παρατηρηθούν τα εξής:

Όταν το επίπεδο τοποθετηθεί στη θέση $E'_{\text{παρ}}$ θα σχηματίζεται στο κέντρο του ένας φωτεινός δίσκος που θα περιβάλλεται από ένα ελάχιστο φωτεινό δακτύλιο. Όταν το επίπεδο τοποθετηθεί στην θέση $E'_{\text{ορ}}$ ο κεντρικός φωτεινός δίσκος μεγαλώνει την διάμετρο του και μειώνεται η φωτεινότητα του ενώ αντίστοιχα μειώνεται η διάμετρος του δακτυλίου που τον περιβάλλει.

Καθώς το επίπεδο μετακινείται μεταξύ του $E'_{\text{παρ}}$ και $E'_{\text{ορ}}$ υπάρχει μία θέση στην οποία αντιστοιχεί μία ελάχιστη διάμετρος με μία κατανομή φωτεινότητας περίπου ομοιόμορφη. Αυτή η εικόνα καλείται δίσκος ελάχιστης σύγχυσης.

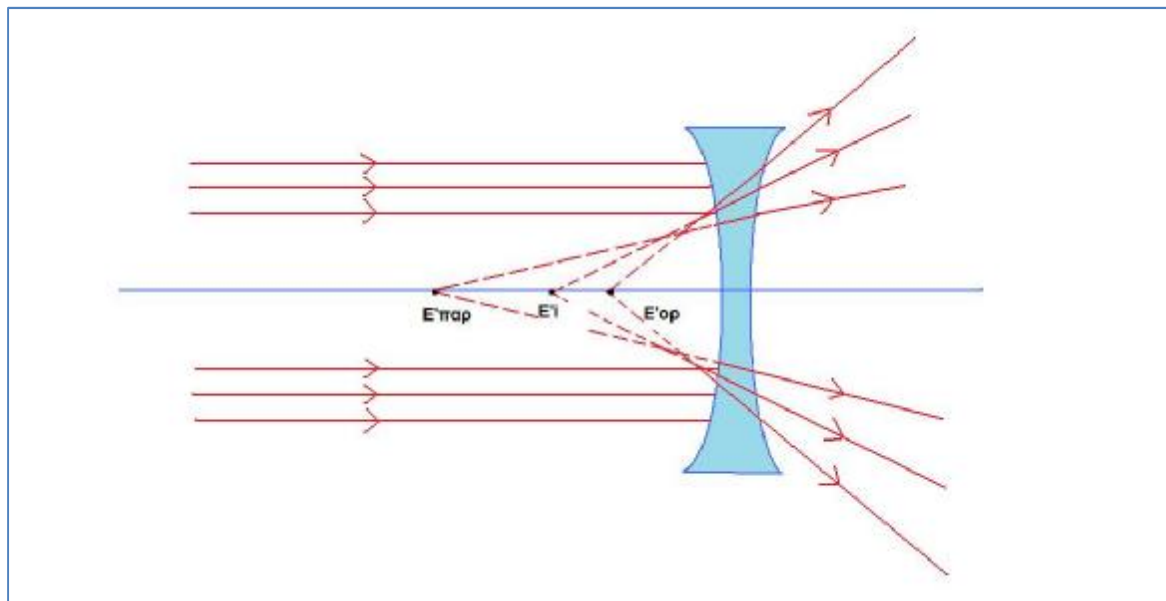
Τα είδωλα που προκύπτουν, δημιουργούν μία κωνική επιφάνεια η οποία καλείται κωνική καυστική όπου η παραξονική εστία αποτελεί την κορυφή του σχετικού κώνου.

Η απόσταση $E'_{\text{παρ}}E'_{\text{ορ}}$ καλείται διαμήκης σφαιρική απόκλιση του φακού και δίνεται από την σχέση: $A = f'_{\text{παρ}} - f'_{\text{ορ}} = kh^2P$, όπου:

- P η ισχύς του φακού
- h η απόσταση από τον κύριο οπτικό άξονα του φακού, του σημείου της περιφέρειας του φακού στο οποίο προσπίπτει μία φωτεινή ακτίνα
- k ένας παράγοντας που εξαρτάται από την γεωμετρία του φακού και τον δείκτη διάθλασης του υλικού.

Εάν τοποθετηθεί ένα επίπεδο π κάθετα στον οπτικό άξονα στη θέση της παραξονικής εστίας $E'_{\text{παρ}}$ (εστιακό παραξονικό επίπεδο) θα ορίζεται επίσης μία εγκάρσια σφαιρική απόκλιση της οποίας το μέγεθος θα

συνδέεται μαθηματικά με την διαμήκη σφαιρική απόκλιση. Παρακάτω βλέπουμε την σχετική πορεία των ακτίνων για έναν αρνητικό



Εικόνα 9: Προσδιορισμός εστιών παραξονικών και περιφερειακών ακτίνων σε αποκλίνοντα φακό.

(αποκλίνοντα) φακό.

Όταν ο κύκλος σύγχυσης έχει την μικρότερη διάμετρο ονομάζεται κύκλος ελάχιστης σύγχυσης (circle of least confusion). Η θέση του επιπέδου ελάχιστης σύγχυσης έχει μεγάλη σημασία καθώς σε αυτήν θα πρέπει να τοποθετείται το επίπεδο παρατήρησης των ειδώλων. Επομένως, από όλα αυτά καταλαβαίνουμε ότι τα σφάλματα σφαιρικής εκτροπής μπορούν να μειωθούν αν μειώσουμε το ύψος h του φακού. Αυτό μπορεί να γίνει με την βοήθεια του διαφράγματος στα άκρα του φακού, ώστε να μην περνούν ακτίνες από αυτήν την περιοχή. Ωστόσο δεν μπορούμε να πάρουμε την τιμή του h όσο μικρή θέλουμε, γιατί έτσι δεν θα περνά αρκετό φως από τον φακό. Η πιο συνηθής επιλογή για ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων έγκειται στην κατάλληλη επιλογή των ακτίνων καμπυλότητας του φακού, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το $\Delta s'$. Δηλαδή, να διαλέγουμε τις ακτίνες καμπυλότητας έτσι ώστε ο παράγοντας σχήματος να αντιστοιχεί στην ελάχιστη δυνατή τιμή της σφαιρικής εκτροπής. Παρατηρούμε ότι πάντα υπάρχει μια τιμή του παράγοντα σχήματος p για την οποία το σφάλμα ελαχιστοποιείται, ωστόσο αυτή η τιμή εξαρτάται από την θέση του αντικειμένου. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα για όλες τις δυνατές χρήσεις του φακού, αλλά πρέπει να επιλέξουμε μία κλίμακα αποστάσεων για την οποία θα χρησιμοποιήσουμε τον φακό και για την οποία θα ελαχιστοποιείται το σφάλμα. Άλλος φακός ελαχιστοποιεί τα σφάλματα από μακρινά αντικείμενα και άλλος για κοντινά, ακόμα και αν οι δύο φακοί έχουν την ίδια εστιακή απόσταση.

Η διαδικασία ελαχιστοποίησης σφαλμάτων έχει ως εξής:

Έστω ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα σφαιρικής εκτροπής για έναν φακό εστιακής απόστασης f . Πρώτα προσδιορίζουμε για ποιες αποστάσεις αντικειμένου s πρόκειται να τον χρησιμοποιήσουμε και άρα τον παράγοντα απόστασης q από την σχέση:

$$q = \frac{2f}{s} - 1$$

Στην συνέχεια βρίσκουμε την τιμή p_{\min} του παράγοντα σχήματος που ελαχιστοποιεί το σφάλμα σύμφωνα με την εξίσωση

$$\frac{1}{s'h} - \frac{1}{f} = \frac{h^2}{f^3} (Ap^2 - Bp + C + D)$$

Και υπολογίζεται ως εξής: $p_{\min} = -\frac{Bq+C}{2A}$

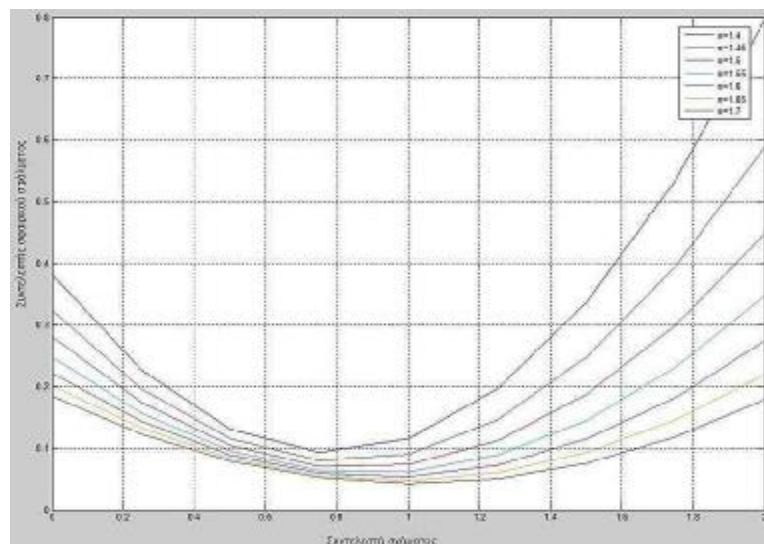
Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$p = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

Για $p=p_{\min}$ μαζί με την εξίσωση

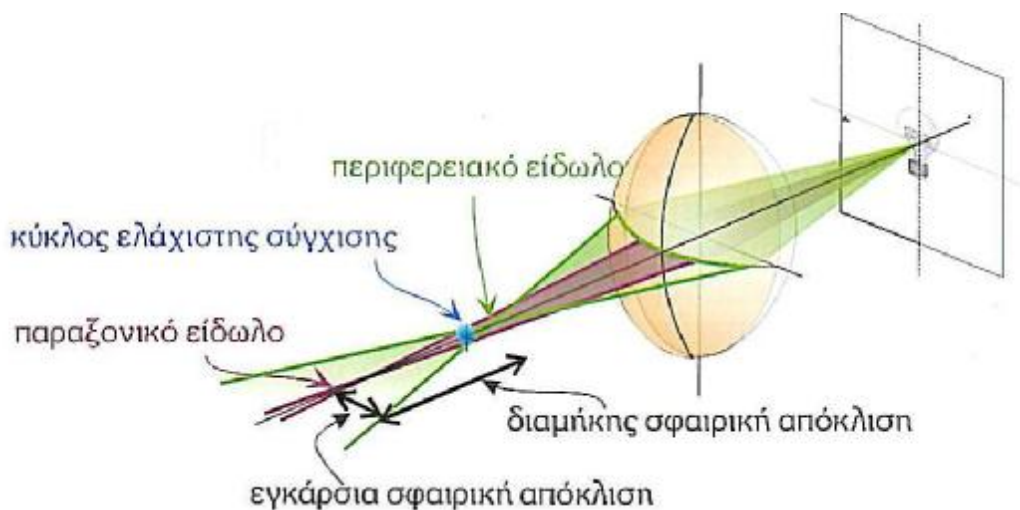
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Για την ζητούμενη τιμή της εστιακής απόστασης f . Έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους το οποίο λύνουμε για να επιλέξουμε τις τιμές των ακτίνων καμπυλότητας R_1 και R_2 με τις οποίες θα κατασκευάσουμε το φακό. Όπως μπορούμε να δούμε, η σφαιρική εκτροπή ενός φακού εξαρτάται από τον συντελεστή σχήματος αυτού, καθώς ο συντελεστής σχετίζεται άμεσα με αυτό. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή της σφαιρικής εκτροπής σε συνάρτηση με τον συντελεστή σχήματος για διάφορους δείκτες διάθλασης. Από το σχήμα φαίνεται ότι η σφαιρική εκτροπή παρουσιάζει ελάχιστο για



Εικόνα 10: Σφαιρικό σφάλμα συναρτήσεως του συντελεστή σχήματος. Η εικόνα προέρχεται από: el.wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Spherical_aberration.jpg

συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή σφάλματος των φακών ανάλογα με τον δείκτη διάθλασης. Ο φακός ενός στοιχείου ο οποίος παρουσιάζει ελάχιστο σφαιρικό σφάλμα ονομάζεται φακός βέλτιστου σχήματος (best form).



Εικόνα 11: Διαμήκης και εγκάρσια σφαιρική απόκλιση. Η εικόνα προέρχεται από: Γ.Ασημέλλης, *Οπτική και Υπερόραση*, (Σύγχρονη γνώση 2008), 6.1.4, εικόνα 6-1-11.

Επομένως, το σφάλμα σφαιρικής εκτροπής εκφράζει την αδυναμία του οπτικού συστήματος να εστιάσει στο ίδιο σημείο τις ακτίνες που διέρχονται και από το κέντρο και από την περιφέρειά του. Όσο πιο απομακρυσμένη είναι η ακτίνα από τον οπτικό άξονα, τόσο πιο κοντά εστιάζει στο φακό οπότε έχουμε θετική σφαιρική εκτροπή. Αν ιχθεί το αντίθετο, τότε, έχουμε αρνητικό σφάλμα σφαιρικής εκτροπής.

Η έκταση του σφάλματος εξαρτάται από την διάμετρο του φακού ή του διαφράγματος. Έτσι, μπορούμε να περιορίσουμε το σφαιρικό σφάλμα αν φωτίσουμε μόνο μια μικρή περιοχή με την χρήση ενός διαφράγματος.

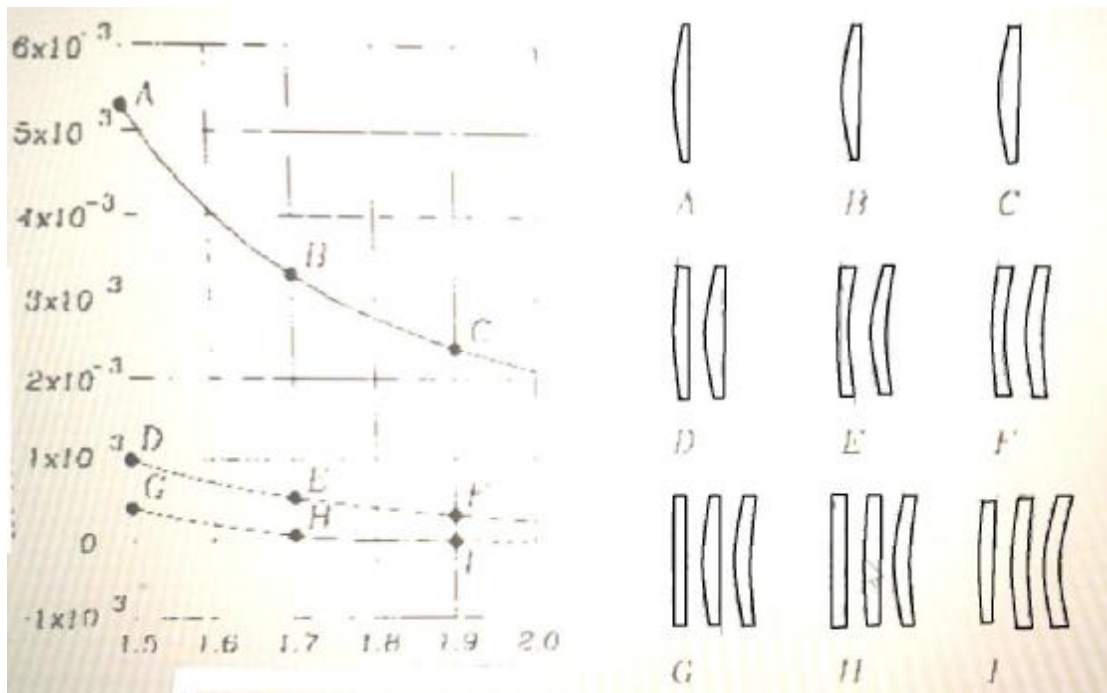
2.1.1 ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΛΕΠΤΟΥ ΦΑΚΟΥ

Όταν ένας λεπτός φακός με ελαχιστοποιημένη την σφαιρική του εκτροπή χωρίζεται σε δύο στοιχεία, έτσι ώστε ο συνδυασμός να έχει την ίδια ισχύ όπως στον αρχικό φακό, η σφαιρική εκτροπή μειώνεται σημαντικά. Για να φανεί αυτό, θα εξετάσουμε έναν φακό με διάμετρο D και F εστιακό μήκος, ο οποίος έχει βελτιστοποιηθεί για ελάχιστη σφαιρική εκτροπή. Για να χωρίσουμε αυτό το φακό σε δύο, ακολουθούμε τα εξής τρία βήματα:

- Έχουμε την κλίμακα του φακού κατά έναν συντελεστή δύο, αποκτώντας έτσι ένα φακό με διπλάσια διάμετρο, δύο φορές το εστιακό μήκος και διπλάσια σφαιρική εκτροπή.

- Τώρα μειώνουμε την διάμετρο στην αρχική τιμή. Η εστιακή απόσταση δεν αλλάζει, αλλά η εγκάρσια σφαιρική εκτροπή μειώνεται κατά ένα συντελεστή 16, δεδομένου ότι η εγκάρσια σφαιρική εκτροπή μεγαλώνει με την τέταρτη δύναμη της οπής.
- Τέλος, δύο πανομοιότυποι φακοί τοποθετούνται σε επαφή ο ένας με τον άλλον. Ο συνδυασμός διπλασιάζει την σφαιρική εκτροπή και μειώνει το εστιακό μήκος στο μισό της αρχικής του τιμής. Η σφαιρική εκτροπή είναι τώρα μόνο το ένα όγδοο της εκτροπής στον αρχικό φακό.

Περαιτέρω βελτίωση μπορεί να επιτευχθεί εάν ο δεύτερος φακός είναι λυγισμένος στο καλύτερο δυνατό του σχήμα, με συγκλίνουσες φωτεινές ακτίνες. Ο δείκτης διάθλασης είναι μία πολύ σημαντική μεταβλητή, καθώς η σφαιρική εκτροπή μειώνεται όταν ο δείκτης



Εικόνα 12: Σφαιρική εκτροπή σε ένα φακό και σε συστήματα δύο και τριών φακών. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004). Κεφ.4.2.2.

διάθλασης αυξάνεται. Το σχήμα δείχνει την αξία της οριακής σφαιρικής εκτροπής ως συνάρτηση του δείκτη διάθλασης, για αρκετά συστήματα λεπτών φακών. Όλα τα συστήματα έχουν την ίδια οπή ($D=0,333$) και ίδιο εστιακό μήκος ($F=1$). Μπορούμε να δούμε ότι με τρεις φακούς και έναν υψηλό δείκτη διάθλασης, η σφαιρική εκτροπή γίνεται αρνητική.

2.1.2 ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ

Μία ενιαία οπτική επιφάνεια μπορεί να είναι εντελώς απαλλαγμένη από σφαιρική εκτροπή υπό ορισμένες συνθήκες. Αυτές τις επιφάνειες θα αναλύσουμε παρακάτω.

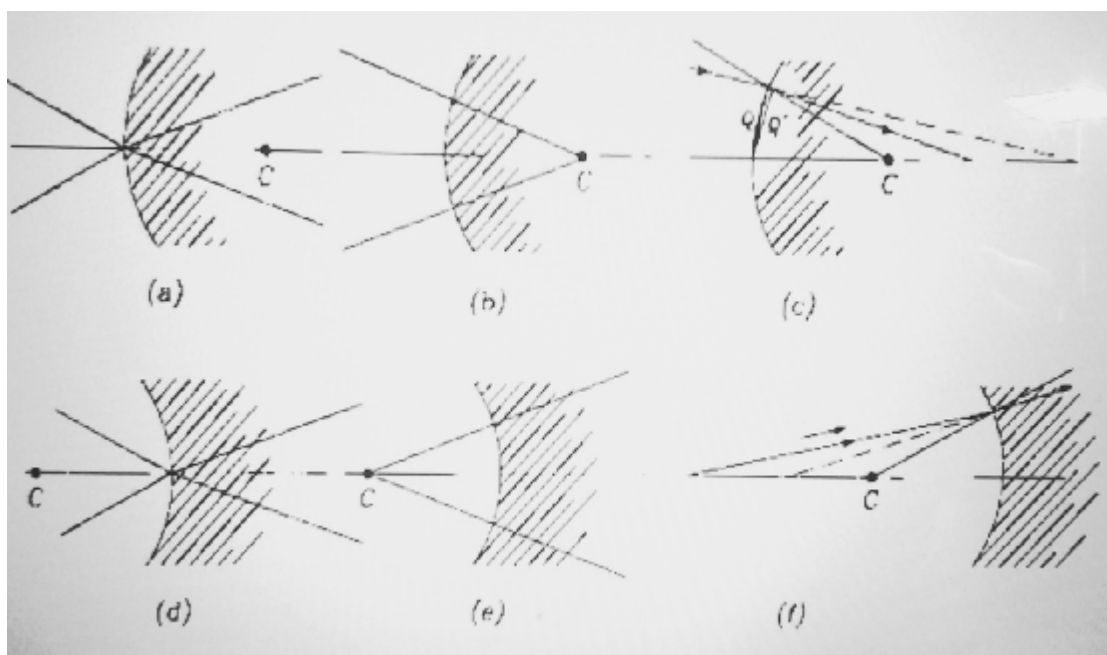
A) Διαθλαστικές Σφαιρικές Επιφάνειες

Οι προϋποθέσεις για μια ενιαία διαθλαστική οπτική επιφάνεια να είναι απαλλαγμένη από σφαιρικές εκτροπές, μπορούν να βρεθούν με διάφορους τρόπους. Από την εξίσωση

$$n' \left(\frac{L'-l'}{L'l'} \right) - n \frac{L-l}{Ll} = \frac{n(L-r)}{rL} \left(\frac{Q}{Q'} - 1 \right)$$

βλέπουμε ότι αυτή η εκτροπή είναι απύσα αν $Q=Q'$. Αυτό είναι πιθανό να συμβεί αν:

- Q και Q' είναι ίσες στο μηδέν
- Όταν το αντικείμενο και η εικόνα συμπίπτουν με την κορυφή της επιφάνειας όπως στο σχήμα παρακάτω (a και d)
- Όταν η ακτίνα μπαίνει κάθετα στην επιφάνεια, με το αντικείμενο και την εικόνα στο κέντρο καμπυλότητας όπως στο σχήμα παρακάτω και (b και e)
- Όταν το αντικείμενο και η εικόνα έχουν τέτοιες θέσεις ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη, όπως στο σχήμα (c και f).



Εικόνα 13: Τρεις υποθέσεις χωρίς σφαιρική εκτροπή για μία κυρτή και κοίλη επιφάνεια. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004), κεφάλαιο 4.2.2 εικόνα 4.11.

Από την εξίσωση

$$SphL = \left(\frac{nL'l'}{n'Ll} \right) SphL - \mathbf{1} + \frac{2n(L-r)L'l'}{n'rL} \times \left\{ \frac{\left[\frac{\sin(I+U')}{2} \times \frac{\sin(I'-I)}{2} \right]}{\cos(I'+U')} / 2 \right\}$$

Όπου, sph είναι το σφαίρωμα και μπορούμε να δούμε τις ακόλουθες προϋποθέσεις για μηδενική σφαιρική εκτροπή. Αν $L'=0$, $L=r$ ή $I=I'$ και $I'=-U$. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις είναι προφανείς, αλλά η τρίτη είναι η πιο ενδιαφέρουσα. Εφαρμόζοντας $I=-U'$ από την εξίσωση

$$SphL_k = \left[\frac{n_1 u_1 \sin U_1}{n'_k U'_k \sin U'_k} \right] SphL_0 + \sum_{j=1}^k \frac{2n_j PA}{n'_k u'_k} \left[\frac{\sin(I+U')/2 \times \sin(I'-I)/2}{\sin U'_k} \right]$$

και τον νόμο του Snell βρίσκουμε ότι: $\frac{n'}{n} \sin I' = -\sin U'$ και

χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\frac{\sin I'}{L'-r} = \frac{-\sin U'}{r}$ βρίσκουμε ότι $L' - r = \frac{n}{n'} r$

και $L - r = \frac{n'}{n} r$. Αυτές είναι οι θέσεις εικόνας και αντικειμένου, όπως

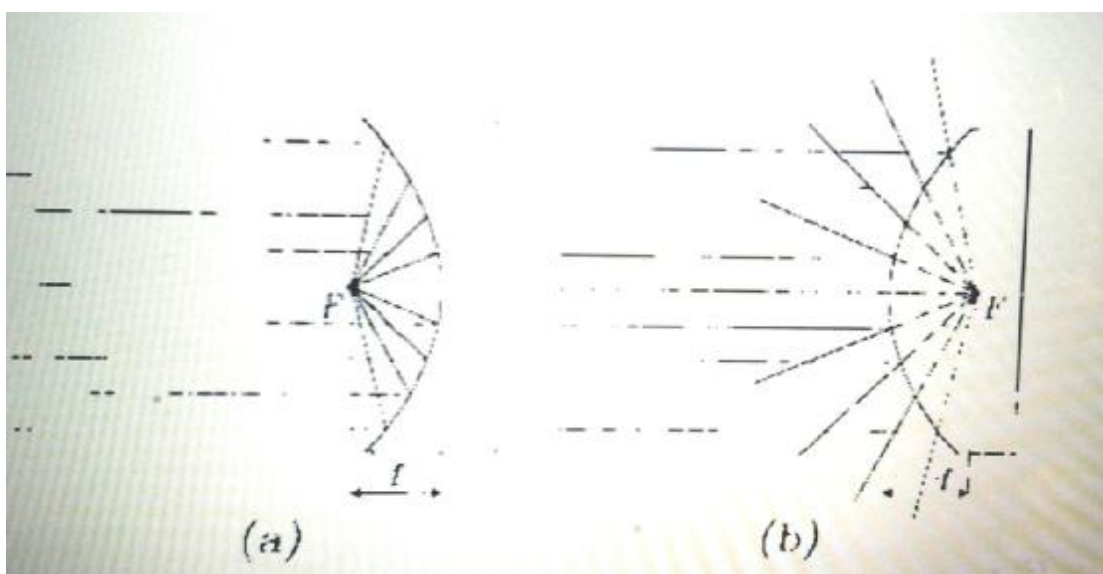
ανακαλύφθηκε από τον Abbe (1840-1905), διευθυντής του

Παρατηρητηρίου στην Jena και διευθυντής έρευνας της Zeiss. Οι θέσεις αντικειμένου και εικόνας ονομάζονται απλανητικά σημεία Abbe.

Υπάρχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές για την αποφυγή δημιουργίας σφαιρικής εκτροπής

Β) Ανακλαστικές κωνικές επιφάνειες

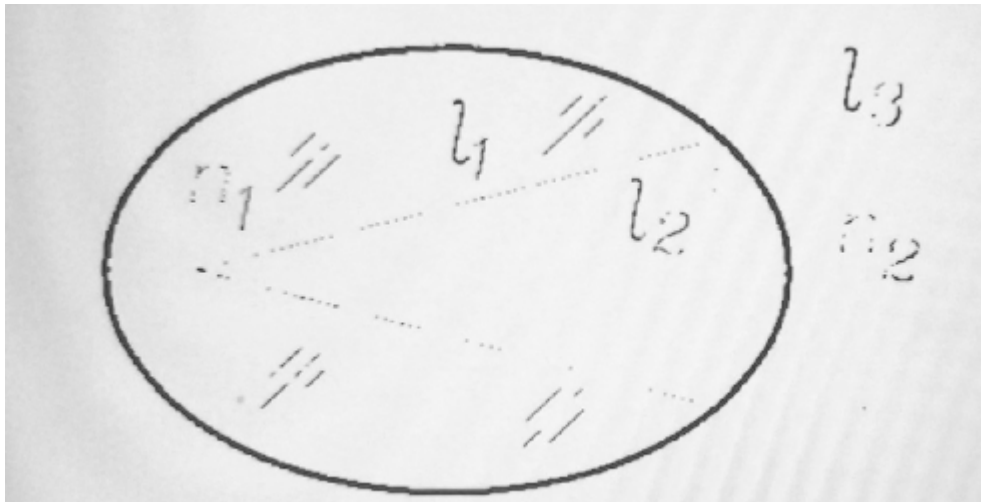
Οι ανακλαστικές κωνικές επιφάνειες με την συμμετρία της επανάστασης είναι απαλλαγμένες από σφαιρικές εκτροπές αν το αντικείμενο έχει τοποθετηθεί στην κατάλληλη θέση ανάλογα με την κωνική σταθερή αξία. Μία παραβολοειδής είναι ελεύθερη από σφαιρικές εκτροπές, αν το αντικείμενο είναι στο άπειρο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ελλειψοειδής και υπερβολή είναι επίσης χωρίς σφαιρική εκτροπή, όταν το αντικείμενο πραγματικό ή εικονικό, τοποθετείται σε μία από τις τέσσερις εστίες. Αυτά εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα και μπορεί να παράγει τέσσερις συνδυασμούς πραγματικών και εικονικών αντικειμένων και εικόνων.



Εικόνα 14: Κοίλο και κυρτό παραβολικό κάτοπτρο χωρίς σφαιρική εκτροπή. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004), κεφάλαιο 4.5.3, εικόνα 4.12.

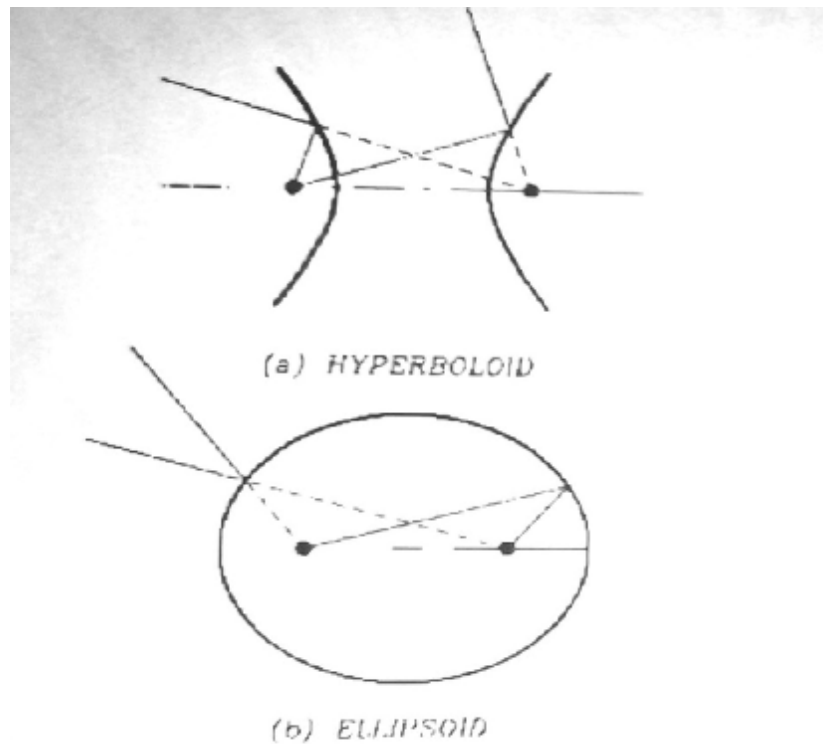
Γ) Το ωοειδές του Descartes

Ο Ρενέ Ντεκάρτ (Rene Descartes) διαπίστωσε ότι σφαιρικές διαθλαστικές επιφάνειες μπορεί να είναι επίσης απαλλαγμένες από σφαιρικές εκτροπές. Αυτές οι μορφές ωοειδούς σχήματος απεικονίζονται στο σχήμα παρακάτω όπου n_1 είναι ο εσωτερικός δείκτης διάθλασης και n_2 ο εξωτερικός δείκτης διάθλασης. Ας εξετάσουμε δύο ευθείες γραμμές l_1 και l_2 από κάθε εστίαση στην ελλειψοειδή επιφάνεια, και μία γραμμή l_3 , παράλληλη προς τον άξονα. Μία ακτίνα φωτός μπορεί να ταξιδέψει κατά μήκος της l_3 μόνο εάν ικανοποιείται η συνθήκη του Fermat ως εξής:
$$n_1 l_1 + n_2 l_3 = \text{constant (σταθερό)}$$



Εικόνα 15: Το ωσειδές του Ντεκάρι. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004), κεφάλαιο 4.5.3, εικόνα 4.14.

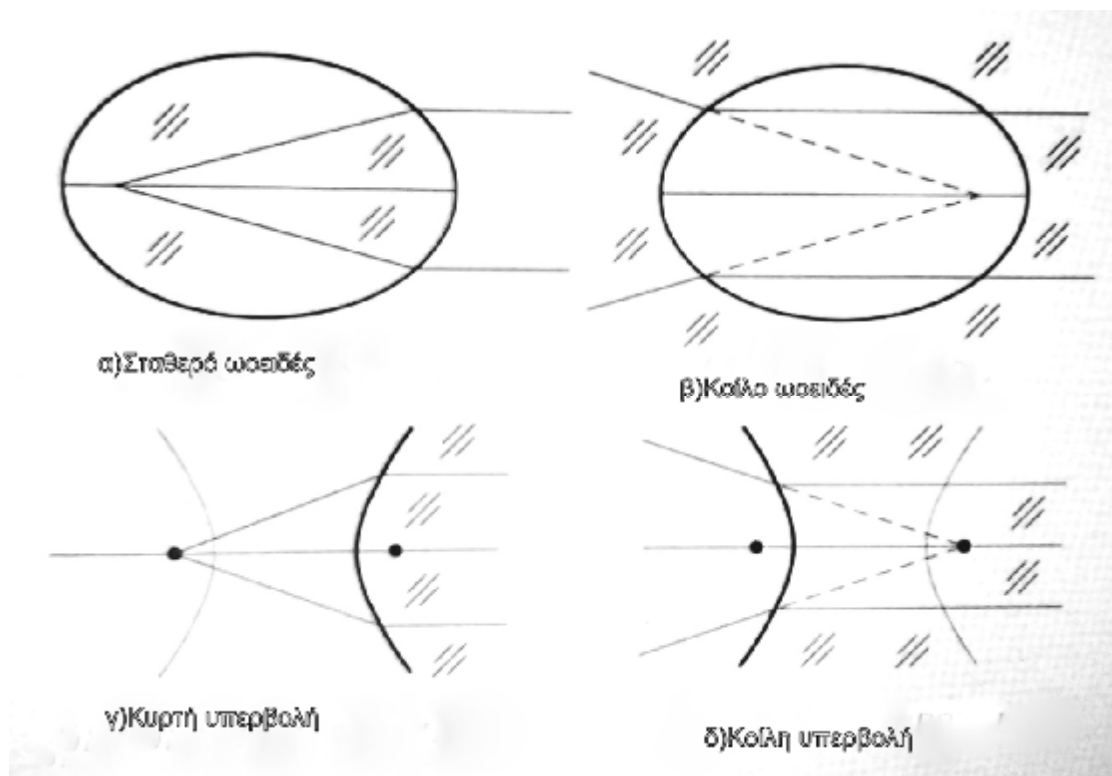
Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες της έλλειψης, εάν η κάθετη ευθεία γραμμή προς τα δεξιά είναι η διευθετούσα: $l_2 = el_3$. Όπου e είναι η εκκεντρότητα. Έτσι μπορούμε να βρούμε ότι $n_1 l_1 + n_2 \frac{l_2}{e} = constant$ (σταθερό).



Εικόνα 16: α) ανακλαστική υπερβολή και β) κυρτό παραβολικό κάτοπτρο χωρίς σφαιρική εκτροπή. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004), κεφάλαιο 4.5.3, εικόνα 4.13.

Μια άλλη ιδιότητα έλλειψης είναι: $l_1 + l_2 = constant$ (σταθερό) αλλά αυτό είναι πιθανό μόνο εάν ισχύει: $n_1 = \frac{n_2}{e}$.

Συμπερασματικά, εάν ο λόγος των εσωτερικών και εξωτερικών δεικτών διάθλασης, επιλέγεται εξίσου με μία δεδομένη εκκεντρική έλλειψη, τότε δεν υπάρχει σφαιρική εκτροπή. Φυσικά, μπορούμε να σκεφτούμε ότι, δεδομένων των δεικτών διάθλασης, η εκκεντρότητα μπορεί να υπολογιστεί. Το σχήμα δείχνει τέσσερις πιθανές διαμορφώσεις του καρτεσιανού ωειδούς. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, το ωειδές γίνεται μια υπερβολή με περιστροφική συμμετρία.

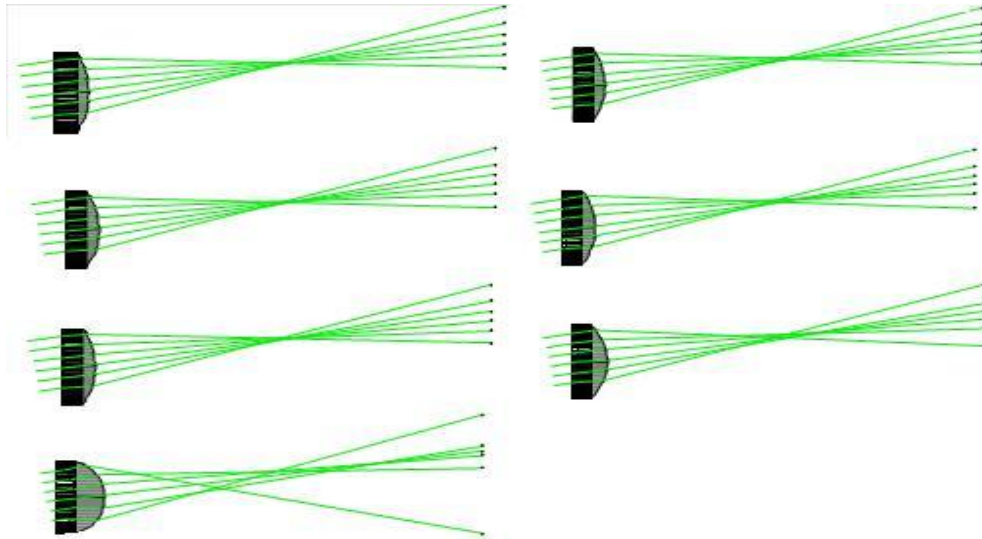


Εικόνα 17: Ωειδές και υπερβολές χωρίς σφαιρική εκτροπή. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004), κεφάλαιο 4.5.3, εικόνα 4.15.

2.2 ΚΟΜΗ

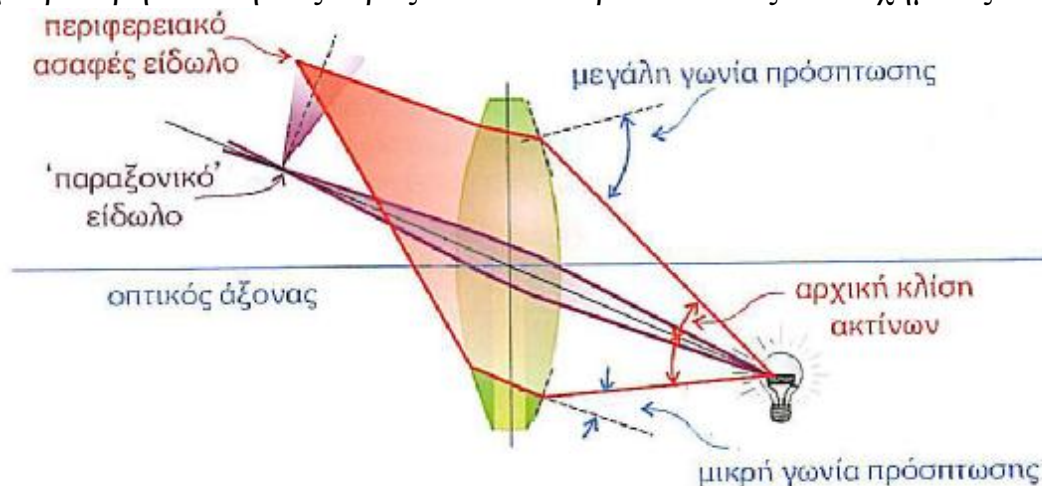
2.2.1 ΣΦΑΛΜΑ ΚΟΜΗΣ

Το σφάλμα κόμης είναι το σφαιρικό σφάλμα δέσμης που παρουσιάζει ελαφριά ασυμμετρία ως προς το φακό, γιατί ο άξονας της δεν συμπίπτει με τον κύριο άξονα του φακού. Είναι ένα σφάλμα φακού ή οπτικού συστήματος δια του οποίου ένα σημείο του αντικειμένου, εκτός οπτικού άξονος, απεικονίζεται σαν ένα αχλάδι ή σαν ένα κομήτη και γι' αυτό ονομάζεται Κόμη(Coma). Η εκτροπή κόμης είναι παρόμοια με την σφαιρική εκτροπή και εξαρτάται και αυτή από το σχήμα του φακού. Κυρίως όμως συναντάται με έκκεντρες ροές φωτός και είναι πιο σοβαρή όταν το μικροσκόπιο είναι εκτός ευθυγραμμίσεως. Όταν συμβαίνουν αυτές οι εκτροπές, η εικόνα ενός σημείου εστιάζεται σε διαδοχικά διαφορετικά ύψη παράγοντας μια σειρά από ασύμμετρα σημειακά σχήματα με αυξανόμενο μέγεθος. Αν ο φακός τοποθετηθεί πλάγια στον οπτικό άξονα τότε δεν θα σχηματίζεται ευκρινές είδωλο, αλλά ένα πλευρικά διογκούμενο, που θα παρουσιάζει μια κομητική εμφάνιση, δηλαδή μια εξασθετισμένη ουρά φωτός στα εξωτερικά σημεία του ειδώλου, καθώς οι φωτεινές ακτίνες απομακρύνονται από τον οπτικό άξονα. Κόμη μπορεί επίσης να συμβεί και στην περίπτωση όπου οι φωτεινές ακτίνες προσπίπτουν στο φακό υπό κλίση. Το φαινόμενο της κόμης γίνεται περισσότερο έντονο αν τοποθετήσουμε ένα διάφραγμα πλησίον του οπτικού άξονα, έτσι ώστε μόνο οι εξωτερικές ακτίνες να διέρχονται. Κατ' αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε μια παραμορφωμένη απεικόνιση, το σχήμα της οποίας εξαρτάται από την απόσταση φακού και πετάσματος. Για να μελετήσουμε το σχηματισμό της κόμης στο χώρο, τοποθετούμε μπροστά από έναν συγκλίνοντα φακό ένα διάφραγμα με δύο αντισυμμετρικές μικρές οπές, που αντιστοιχούν σε ορισμένη ζώνη ακτίνας ύψους h . Παρακάτω δείχνουμε ένα σχήμα εξάρτησης της κόμης από το σχήμα του φακού στέλλοντας μία δέσμη φωτός στο οριζόντιο επίπεδο υπό γωνία.



Εικόνα 18: Εδώ βλέπουμε πώς εξαρτάται η κόμη από το σχήμα του φακού.

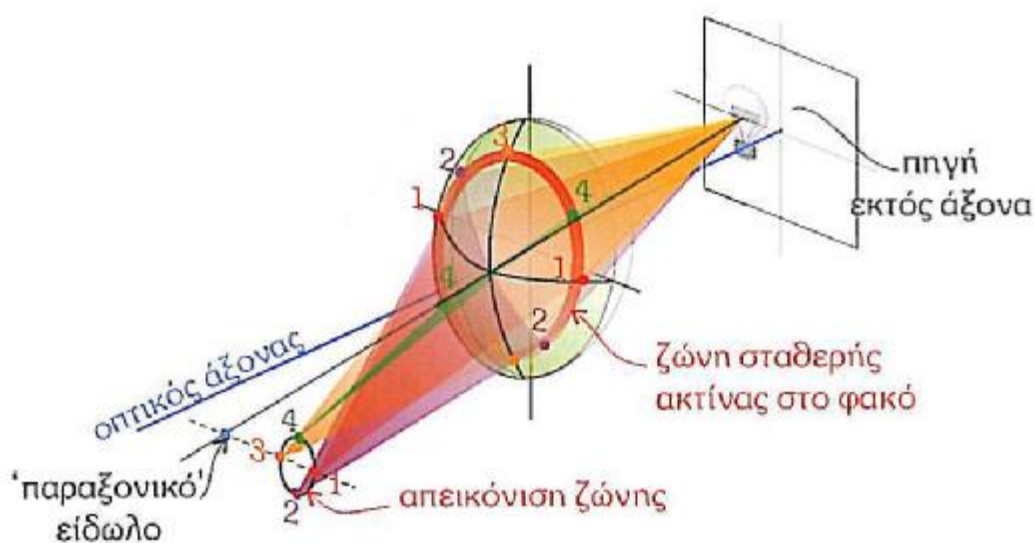
Εξετάζουμε ένα ζεύγος ακτίνων με ίδια αρχική κλίση ως προς ένα δευτερεύοντα άξονα. Οι ακτίνες αυτές συναντούν τις διαθλαστικές επιφάνειες του φακού με σημαντικά διαφορετικές γωνίες. Η «εσωτερική» μπορεί να είναι μικρή αλλά η «εξωτερική» είναι αρκετά μεγάλη. Εδώ πλέον μιλάμε για συμμετρία της προσπίπτουσας δέσμης ως προς τις επιφάνειες του φακού. Έτσι σε κάθε τέτοιο ζεύγος ακτίνων αντιστοιχεί διαφορετική εστία και διαφορετική γωνιακή μεγέθυνση. Οι ακτίνες με μικρότερη κλίση ως προς τον δευτερεύοντα άξονα σχηματίζουν το



Εικόνα 19: Σε ένα ζεύγος ακτίνων με ίσες αρχικά κλίσεις ως προς τον άξονα αντιστοιχούν σημαντικά διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), κεφάλαιο 6.1.3, εικόνα 6-1-12.

παραξονικό είδωλο. Πάνω σε ένα επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα στο σημείο αυτό, το παραξονικό επίπεδο δηλαδή, ακτίνες που συναντούν τον φακό σε μια ζώνη σταθερής ακτίνας απεικονίζονται ως ένας κύκλος, με κέντρο εγκάρσια μετατοπισμένο σε ένα άλλο σημείο, όχι στο παραξονικό είδωλο. Αυτό είναι το σφάλμα κόμης. Μπορούμε εύκολα να το δούμε αυτό εστιάζοντας ένα φακό και μετά δίνοντας του μια κλίση, ώστε οι ακτίνες να σχηματίσουν μεγάλη γωνία ως προς το επίπεδο του φακού. Εξατάζοντας το πού απεικονίζεται μία ζώνη σταθερής ακτίνας παρατηρούμε ότι:

- οι ακτίνες που αντιστοιχούν στις μεγάλες διαφορές στις γωνίες πρόσπτωσης συγκλίνουν στο πιο απομακρυσμένο σημείο από τον οπτικό άξονα.
- Όσο μεγαλύτερη ακτίνα σχηματίζει η ζώνη πάνω στο φακό, τόσο πιο απομακρυσμένο είναι το κέντρο και πιο μεγάλη είναι η ακτίνα του κύκλου απεικόνισης,
- Ενώνοντας τα κέντρα των κύκλων απεικόνισης για διάφορες ζώνες, προκύπτει μια ευθεία κάθετη στον άξονα. Η περιβάλλουσά τους σχηματίζει ουρά όπως αυτή που εμφανίζεται σε έναν κομήτη.



Εικόνα 20: Στο σφάλμα κόμης μια ζώνη σταθερής ακτίνας στο φακό απεικονίζεται στο παραξονικό επίπεδο ως κύκλος. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη γνώση 2008), κεφάλαιο 6.1.4, εικόνα 6-1-13.

Και το σφάλμα κόμης, όπως και της σφαιρικής εκτροπής, εξαρτάται από την διάμετρο του φακού ή το διάφραγμα. Έτσι, μπορούμε να περιορίσουμε το σφάλμα κόμης αν φωτίσουμε μόνο μια μικρή περιοχή γύρω από τον δευτερεύοντα οπτικό άξονα.

2.2.2 Η ΚΟΜΗ ΠΟΣΟΤΙΚΑ

Η κόμη προσδιορίζεται ποσοτικά από τον συντελεστή κόμης του Seidel, ο οποίος για λεπτό φακό εστιακής απόστασης f , απόσταση αντικειμένου- φακού s και απόσταση ειδώλου- φακού s' δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_c = \frac{1}{f^2 s'} (A_c q + B_c p), \quad (1)$$

Όπου η ποσότητα p είναι ο παράγοντας σχήματος

$$p = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}, \quad (2)$$

Η ποσότητα q ο παράγοντας της απόστασης

$$q = \frac{2f}{s} - 1, \quad (3)$$

Και οι σταθερές A_c, B_c δίνονται από τις σχέσεις:

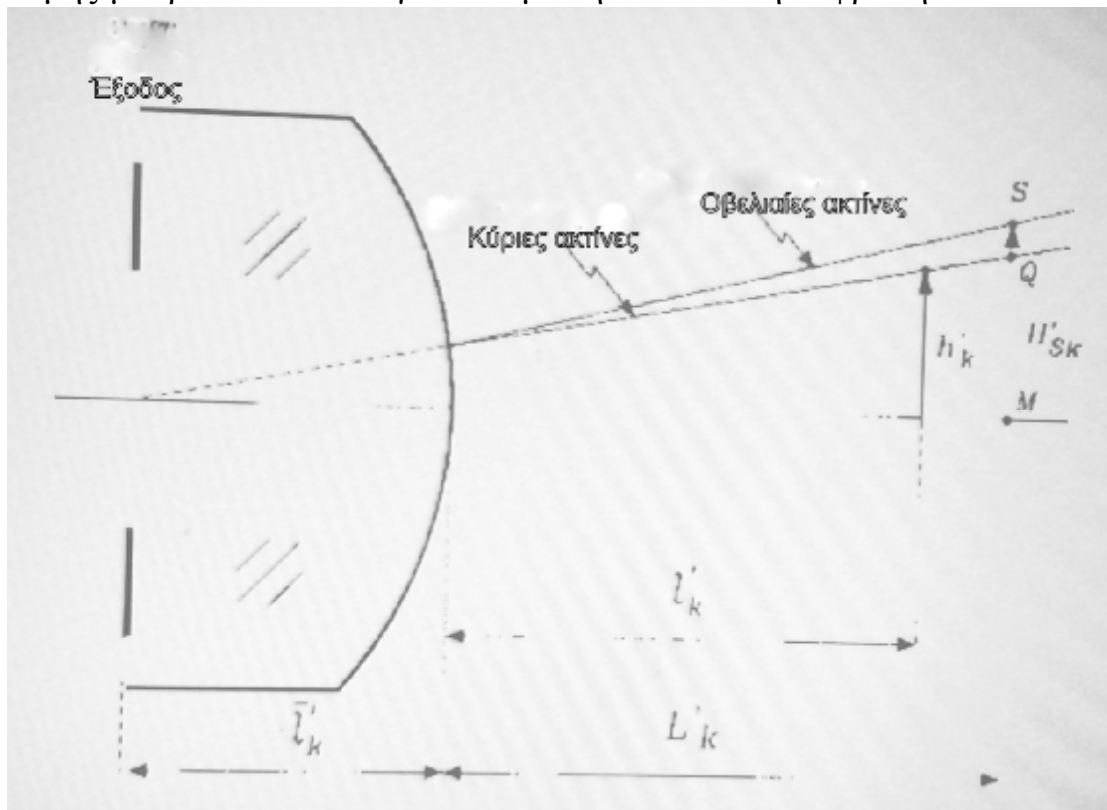
$$A_c = \frac{2n + 1}{4n}, B_c = \frac{n + 1}{4n(n - 1)}, \quad (4)$$

Παρατηρούμε από την (1) ότι ο συντελεστής κόμης μηδενίζεται για $p = -A_c q / B_c$. Στην πράξη η κόμη είναι το πιο ενοχλητικό απ' όλα τα σφάλματα φακών οπότε πάντα επιλέγουμε φακούς με τέτοιο σχήμα ώστε να μηδενίζεται η κόμη για τις συγκεκριμένες τιμές αποστάσεων s που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τον φακό. Για την τιμή του p όμως που μηδενίζεται η κόμη, η σφαιρική εκτροπή δεν είναι ελάχιστη. Για να διορθώσουμε και ως προς την κόμη και ως προς την σφαιρική εκτροπή, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ζεύγη φακών. Με ένα ζεύγος φακών όπου ο ένας είναι συγκλίνων και ο άλλος αποκλίνων μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τις ακτίνες καμπυλότητας ώστε να μηδενίζεται ταυτόχρονα και η κόμη και η σφαιρική εκτροπή.

2.2.3 ΑΔΙΚΗΜΑ ΕΙΣ ΒΑΡΟΣ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ

Αν εξετάσουμε ένα οπτικό σύστημα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι η οριακή τοξοειδής εικόνα είναι το σημείο S πάνω από την κύρια ακτίνα. Η παραξονική τοξοειδής εικόνα είναι πάνω στην κύρια ακτίνα και το ύψος του h_k' υπολογίζεται με το θεώρημα Langrange. Η οριακή τοξοειδής εικόνα H'_{sk} υπολογίζεται με το οπτικό θεώρημα του ημιτόνου. Η τοξοειδής κόμη οφείλεται στο γεγονός ότι η πλευρική μεγέθυνση της εικόνας είναι διαφορετική για τις παραξονικές και τις οριακές τοξοειδής ακτίνες. Οι κύριες ή τρίτης τάξης εκτροπές

κόμης μπορούν να υπολογιστούν με την ακόλουθη έκφραση που δίνεται



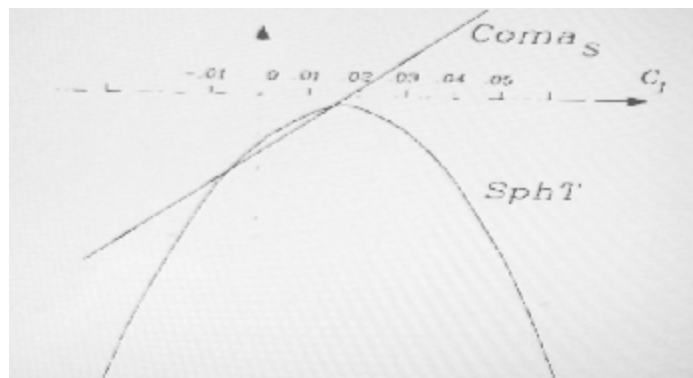
Εικόνα 21: Σχηματισμός κύριων και οβελιαίων ακτίνων. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004), κεφάλαιο 5, εικόνα 5.7.

από τον Conrady (1957).

$Comas = h'_k y^2 \left(\frac{1}{4} G_5 k c_1 - G_7 k v_1 - G_8 c^2 \right)$ όπου Comas είναι η κόμη,

$$G_5 = \frac{2(n^2-1)}{n}, G_7 = \frac{(2n+1)(n-1)}{2n}, G_8 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Αυτή η εκτροπή ως συνάρτηση της καμπυλότητας c_1 φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η κόμη μπορεί να γίνει ίση με μηδέν.



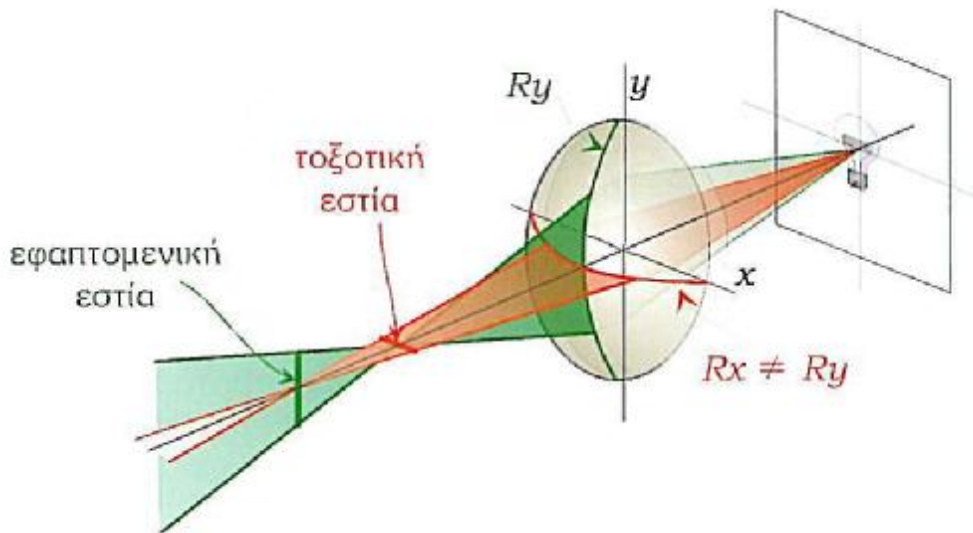
Εικόνα 22: Παραλλαγή της εγκάρσιας σφαιρικής εκτροπής και της κόμης σε σχέση με την καμπυλότητα της εμπρόσθιας επιφάνειας σε ένα λεπτό φακό. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004), κεφάλαιο 5, εικόνα 5.8.

2.3 ΑΣΤΙΓΜΑΤΙΣΜΟΣ

2.3.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΣΤΙΓΜΑΤΙΣΜΟ

Οι αστιγματικές εκτροπές είναι παρόμοιες με τις εκτροπές κόμης καθώς πολλές φορές τα δύο αυτά σφάλματα εμφανίζονται ταυτόχρονα και σε συνδυασμό. Ο αστιγματισμός όπως και η κόμη οφείλονται στην ασυμμετρία της προσπίπτουσας δέσμης ως προς τον φακό. Η συμπεριφορά τους διαφέρει στο ότι ο αστιγματισμός κυριαρχεί όταν η γωνία θ είναι μεγάλη και η δέσμη λεπτή, ενώ η κόμη συναντάται όταν η γωνία θ είναι μικρή και η δέσμη ευρεία. Μία άλλη διαφορά είναι ότι η κόμη διαχέει το είδωλο κάθετα προς τον άξονα της δέσμης, ενώ ο αστιγματισμός διαχέει το είδωλο κατά μήκος του άξονα της δέσμης. Έστω ότι ένας φακός είναι διορθωμένος από το σφαιρικό σφάλμα και την κόμη, τότε για αντικείμενα που βρίσκονται σε σχετικά μεγάλη απόσταση από τον κύριο άξονα παρατηρείται ότι τα είδωλά τους είναι αστιγματικά. «Συγκεκριμένα μία λεπτή δέσμη που ξεκινά από το σημείο Σ και της οποίας ο άξονας (ΣO) σχηματίζει γωνία θ με τον κύριο άξονα του φακού μετατρέπεται σε αστιγματική». Οι ακτίνες που περιέχονται στο επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα της δέσμης και τον κύριο άξονα (πρωτεύον ή μεσημβρινό ή εφαπτομενικό επίπεδο) καθώς και των παράλληλων ακτίνων προς αυτό το επίπεδο, συγκεντρώνονται στο πρωτεύον ή μεσημβρινό είδωλο. Το είδωλο αυτό είναι μία μικρή ευθεία γραμμή κάθετη στο πρωτεύον επίπεδο. Αντίστοιχα, οι ακτίνες που προέρχονται από το δευτερεύον ή ακτινικό ή τοξοτικό επίπεδο, που είναι κάθετο στο πρωτεύον καθώς και των παράλληλων προς αυτό επίπεδων, συγκεντρώνονται στο δευτερεύον ή ακτινικό είδωλο που είναι μία μικρή ευθεία κάθετη στο δευτερεύον επίπεδο. Οι δύο εστιακές γραμμές που προκύπτουν είναι προφανώς ασύμβατα κάθετες μεταξύ τους αλλά και κάθετες στον άξονα δέσμης». Οι δύο αυτές γραμμές, ευρισκόμενες στη σωστή γωνία η μία από την άλλη και με μία κυκλική περιοχή ανάμεσά τους, συνθέτουν μια θολή εικόνα, ένα θολό κύκλο, γνωστός και ως κύκλος της ελάχιστης σύγχυσης. Η απόσταση των δύο αστιγματικών γραμμών ονομάζεται αστιγματική διαφορά και δίνεται από την σχέση:

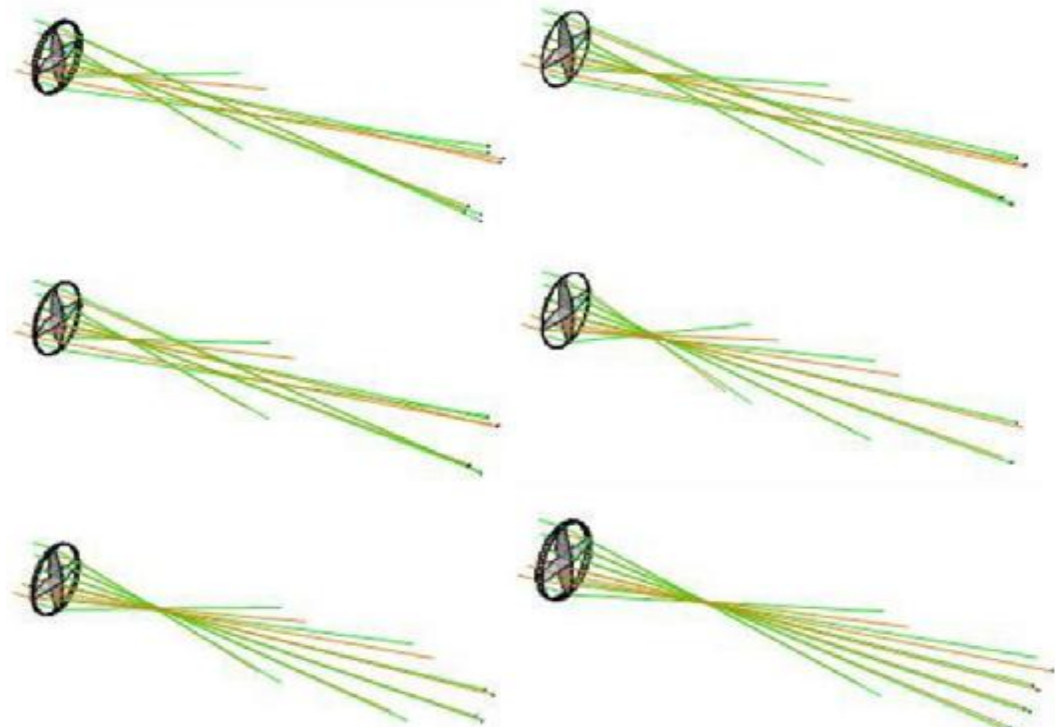
$$l = s'_t - s'_s$$



Εικόνα 23: Αστιγματισμός. Η τοξοτική και η εφαπτομενική εστία δεν συμπίπτουν. Η εικόνα προέρχεται από: Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.3, εικόνα 6-1-6.

Όπου οι αποστάσεις s'_t και s'_s μετρούνται κατά μήκος της κύριας ακτίνας, του άξονα συμμετρίας της δέσμης.

Το σφάλμα αυτό είναι ο αστιγματισμός και οφείλεται στη μεταβολή της ισχύος του φακού κατά τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονά του. Ο αστιγματισμός εξαρτάται από τη μεταβολή της ισχύος του φακού αλλά και από το σχήμα του και βελτιώνεται τοποθετώντας έναν αμφίκυκλο φακό στο μεταβαλλόμενο φακό. Το φαινόμενο του αστιγματισμού εμφανίζεται στις περιπτώσεις όπου το αντικείμενο



Εικόνα 24: Ο αστιγματισμός εξαρτάται σημαντικά από την μεταβολή ισχύος του φακού αλλά και από το σχήμα του.

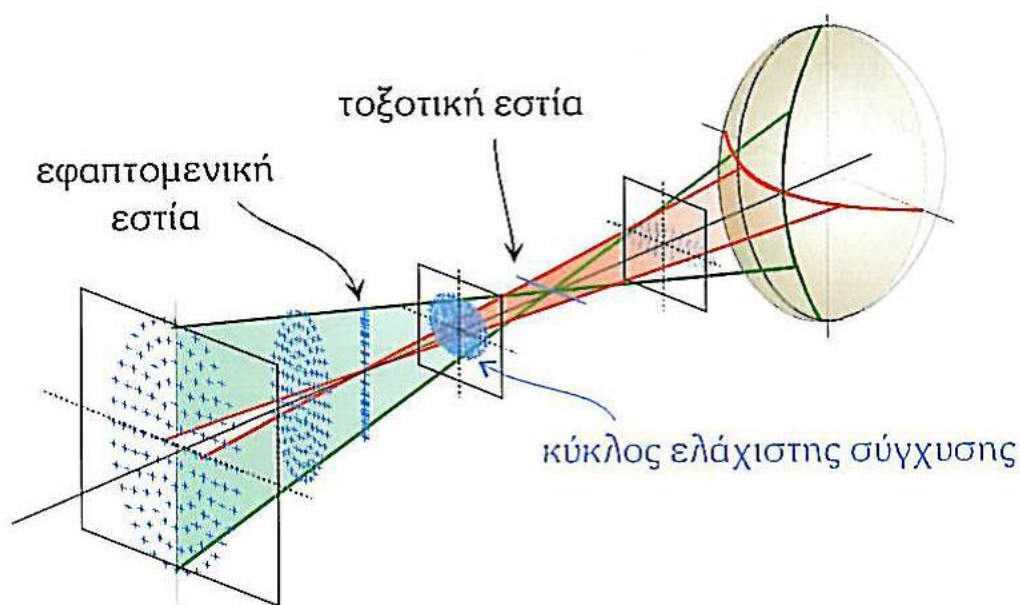
βρίσκεται εκτός οπτικού άξονα και επομένως δεν κατέχει αξονική συμμετρία. Όταν μια σημειακή φωτεινή πηγή βρίσκεται σε έναν δευτερεύοντα οπτικό άξονα, τότε οι ακτίνες, μετά την έξοδό τους από το φακό, δεν θα εστιάζονται σε σημείο, αλλά θα σχηματίζουν γραμμές εστίασης που προέρχονται από τη σύγκλιση ενός οριζόντιου και ενός κάθετου επιπέδου φωτεινών ακτίνων. Η αιτία της διπλής εστίασης οφείλεται στο γεγονός ότι, το γωνιακό άνοιγμα εκπομπής της φωτεινής πηγής είναι πεπερασμένο. Το φαινόμενο του αστιγματισμού προκαλεί παραμόρφωση του ειδώλου, το μέγεθος του οποίου αυξάνει ανάλογα με τη γωνία προσπτώσεως της φωτεινής δέσμης επί του φακού. Το φαινόμενο αυτό δεν εμφανίζεται μόνο στην περίπτωση της πλάγιας προσπτώσεως, αλλά και στη διέλευση φωτεινών ακτίνων μέσα από πλακίδιο. Αν τοποθετήσουμε, κατά την πορεία των ακτίνων, μία κεκλιμένη διαφανή επιφάνεια, τότε δεν θα παρατηρούμε πλέον σημειακό είδωλο, αλλά ανάλογα με την απόσταση του ειδώλου, μία οριζόντια ή κατακόρυφη γραμμή και σε ενδιάμεσες αποστάσεις μία ελλειπτική επιφάνεια. Η διόρθωση του αστιγματισμού στους κυλινδρικούς φακούς γίνεται με τη χρήση σφαιρικών φακών, των οποίων η μία επιφάνεια παρουσιάζει κυλινδρική καμπυλότητα. Η χρήση τέτοιων οπτικών συστημάτων είναι σήμερα πολύ συνηθισμένη στην κατασκευή γυαλιών μυωπίας, που μπορούν να διορθώνουν τον αστιγματισμό στην όραση. Στο παρακάτω παράδειγμα βλέπουμε ότι ο αστιγματισμός εξαρτάται από την μεταβολή της ισχύς του φακού αλλά και από το σχήμα του.

Τοποθετώντας έναν κυλινδρικό φακό στον μεταβαλλόμενο φακό, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το πρόβλημα του αστιγματισμού βελτιώνεται.



Εικόνα 25: Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα του αστιγματισμού βελτιώνεται.

Επομένως, ο αστιγματισμός εκφράζει την αδυναμία ενός φακού ή κατόπτρου να εστιάσει στην ίδια θέση ακτίνες οι οποίες, ενώ ξεκινούν από το ίδιο σημείο, συναντούν διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας και άρα διαφορετική ισχύ. Είναι συνέπεια της κυλινδρικότητας των κατόπτρων. Αν θεωρήσουμε ότι ο άξονας με την μεγαλύτερη οπτική ισχύ είναι ο κατακόρυφος, Σταδιακά η δέσμη αποκτά ελλειπτικό σχήμα, με το μεγάλο άξονα οριζόντια. Στην εστιακή απόσταση που αντιστοιχεί στον άξονα με την μεγαλύτερη οπτική ισχύ (τον κατακόρυφο) σχηματίζεται μια οριζόντια γραμμή (αυτό θα ήταν σημείο αν ο φακός ήταν ιδανικά σφαιρικός, σύμφωνα με την παραξονική θεωρία). Σταδιακά σχηματίζεται ο κύκλος της ελάχιστης σύγχυσης και κατόπιν συναντάμε την εστία που αντιστοιχεί στον άξονα με την μικρότερη οπτική ισχύ, τον οριζόντιο. Τότε σχηματίζεται μια κατακόρυφη γραμμή, και στη συνέχεια πάλι έλλειψη με τον μεγάλο άξονα κατακόρυφα. Αυτό είναι το κωνοειδές του Sturm. Η αξονική απόσταση των δύο κύριων εστιακών γραμμών λέγεται διάστημα του Sturm.



Εικόνα 26: Σημεία τομής ακτίνων σε εγκάρσια επίπεδα σε διάφορες αποστάσεις. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.3, εικόνα 6-1-8.

Στην οπτική του οφθαλμού, ο αστιγματισμός αντιστοιχεί ακριβώς στη συνώνυμη διαθλαστική απόκλιση. Γι' αυτό και συναντάται με το όνομα «κύλινδρος». Ο άξονας αντιστοιχεί στον προσανατολισμό του άξονα με την μικρότερη καμπυλότητα.

Ο αστιγματισμός γίνεται αντιληπτός όταν ένα αντικείμενο έχει «οριζόντια» και «κατακόρυφα» χαρακτηριστικά. Τότε στην περιοχή που εστιάζουν οι «κατακόρυφες» ακτίνες τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά είναι σαφή, ενώ τα «οριζόντια» ασαφή. Το αντίθετο συμβαίνει όταν εστιάζουν

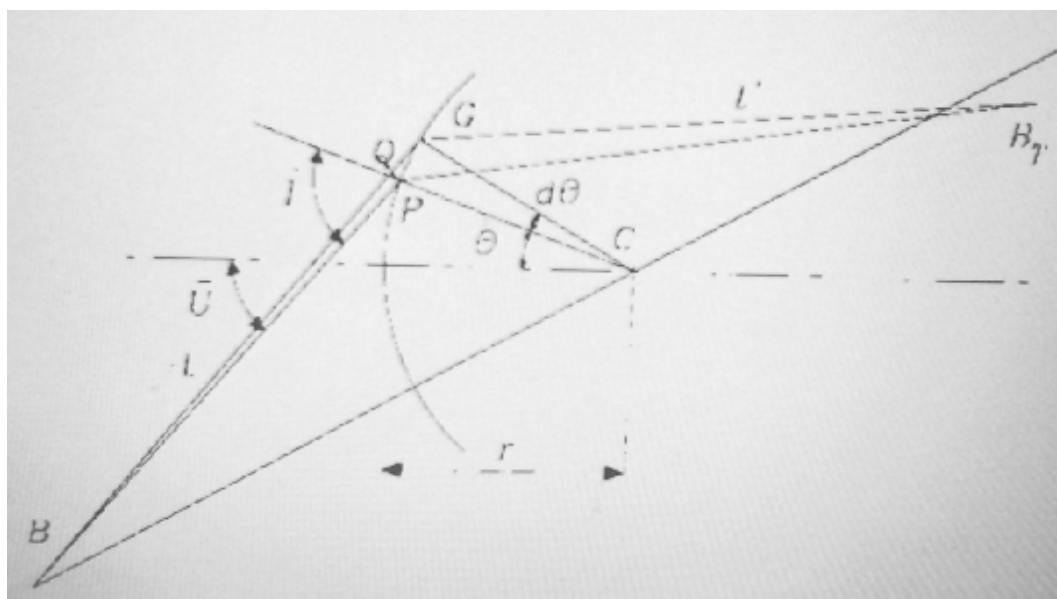
οι «οριζόντιες» ακτίνες. Στη θέση του κύκλου ελάχιστης σύγχυσης, ανάμεσα στις δύο εστίες, το είδωλο έχει λίγο ασαφή και τα κατακόρυφα αλλά και τα οριζόντια χαρακτηριστικά του.

2.3.2 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ CODDINGTON

Ο Henry Coddington το 1829 στο Λονδίνο, άντλησε δύο εξισώσεις για να βρεί τις θέσεις των τοξοειδών και εφαπτομενικών εικόνων σε μια ενιαία διαθλαστική επιφάνεια. Αυτές οι δύο εξισώσεις είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις του Gauss και μπορεί να θεωρηθεί μία γενίκευσή της. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι άντλησης αυτών των εξισώσεων, αλλά θα εξετάσουμε την μέθοδο που περιγράφεται από τον Kingslake (1978).

A) Εφαπτομενική εικόνα

Ας εξετάσουμε το παρακάτω σχήμα με μια σφαιρική επιφάνεια διάθλασης και δύο πολύ κοντινές μεσημβρινές ακτίνες προερχόμενες από το σημείο B και στη συνέχεια διαθλώνται κοντά στο σημείο P. Αυτές οι δύο ακτίνες διαθλώνται διαφορετικά και συγκλίνουν προς την



Εικόνα 27: Εξίσωση Coddington για εφαιπτόμενες ακτίνες. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004).

εφαπτομενική εικόνα B₂. Για να βρούμε τη θέση αυτού του σημείου σύγκλισης πρέπει πρώτα να καθοριστεί η κεντρική γωνία $\theta = \bar{U} + \bar{I}$, και στη συνέχεια να διαφοροποιηθούν ως ακολούθως: $d\theta = d\bar{U} + d\bar{I}$. Η απόσταση από το αντικείμενο B στο σημείο P είναι t. Στη συνέχεια το μικρό τμήμα PQ είναι: $PQ = td\bar{U} = PG\cos\bar{I} = r\cos\bar{I}d\theta = t(d\theta - d\bar{I}) = r\cos\bar{I}d\theta$, ως εκ τούτου μπορούμε να γράψουμε:

$d\bar{I} = \left(1 - \frac{r\cos\bar{I}}{t}\right) d\theta$, και με παρόμοιο τρόπο για τις διαθλώμενες ακτίνες:

$$d\bar{I} = \left(1 - \frac{r \cos \bar{I}}{t}\right) d\theta$$

Διαφοροποιώντας τον νόμο του Snell της διάθλασης βρίσκουμε: $n \cos \bar{I} d\bar{I} = n' \cos \bar{I}' d\bar{I}'$, και τέλος έχουμε:

$$\frac{n' \cos \bar{I}'^2}{t'} - \frac{n \cos \bar{I}^2}{t} = \frac{n' \cos \bar{I}' - n \cos \bar{I}}{r}$$

Αυτή η έκφραση γίνεται η εξίσωση του Gauss, όταν το ύψος του αντικειμένου είναι μηδέν, ώστε το \bar{I} και το \bar{I}' είναι μηδέν.

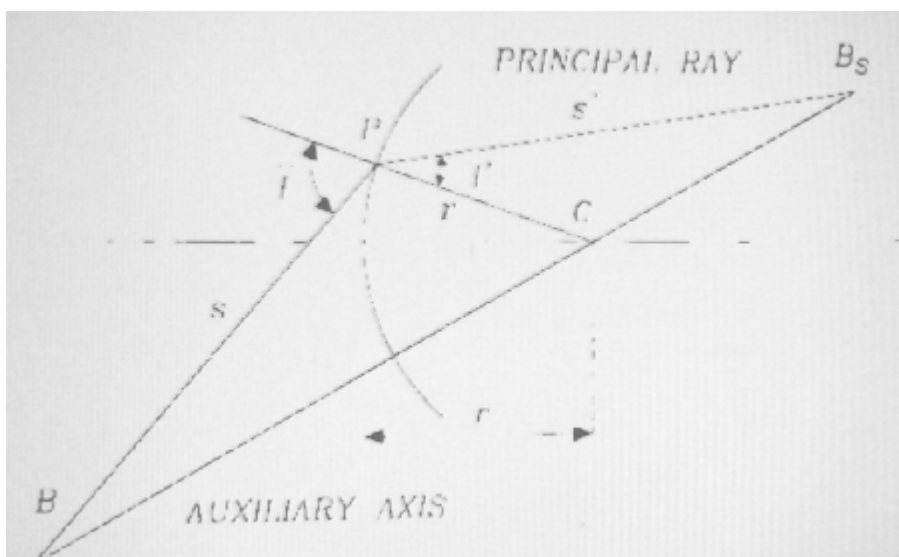
B) Τοξοειδής Εικόνα

Η αντίστοιχη εξίσωση για την τοξοειδή εικόνα μπορεί τώρα να βρεθεί με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος. Πρώτα, πρέπει να θυμόμαστε ότι η τοξοειδής εικόνα βρίσκεται πάνω στον βοηθητικό άξονα. Έτσι, δεν έχουμε παρά να βρούμε το σημείο τομής της κύριας διαθλώμενης ακτίνας με τον βοηθητικό άξονα. Δεδομένου ότι η περιοχή του τριγώνου BPBs είναι η περιοχή του τριγώνου BPC συν την περιοχή του τριγώνου PCBs, μπορούμε να γράψουμε αυτές τις περιοχές ως εξής:

$$\frac{1}{2} ss' \sin(180^\circ - \bar{I} + \bar{I}') = -\frac{1}{2} srs \sin(180^\circ - I') + \frac{1}{2} s'rs \sin \bar{I}'$$

Ως εκ τούτου, $-ss' \sin(\bar{I} - \bar{I}') = -srs \sin \bar{I} + s'rs \sin \bar{I}'$

Στη συνέχεια μετά από μερικά αλγεβρικά βήματα και χρησιμοποιώντας τον νόμο της διάθλασης έχουμε τελικά:



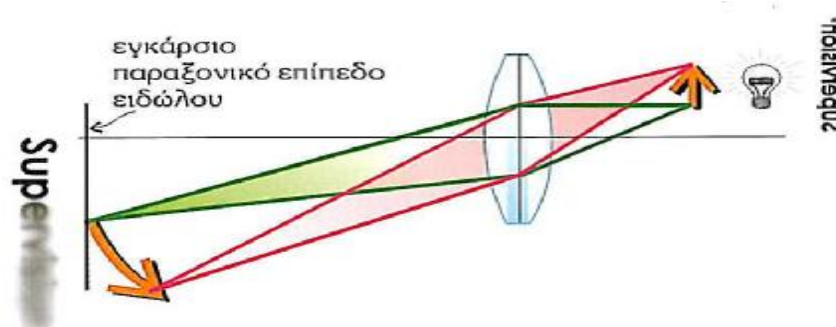
Εικόνα 28: Εξίσωση Coddington για τοξοειδή ακτίνες. D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004).

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos \bar{I}' - n \cos \bar{I}}{r}$$

Και εδώ, αυτή η έκφραση γίνεται η εξίσωση Gauss όταν \bar{I} και \bar{I}' είναι μηδέν. Αυτές οι εξισώσεις χρησιμοποιούνται συχνά για την αξιολόγηση του αστιγματισμού των οπτικών συστημάτων.

2.4 ΚΑΜΠΥΛΩΣΗ ΠΕΔΙΟΥ

Η πιο απλή περίπτωση είναι η μονοδιάστατη. Εξετάζουμε ένα αντικείμενο μήκους L τοποθετημένο κάθετα στον οπτικό άξονα. Στη βάση του αντιστοιχεί μια απόσταση αντικειμένου- φακού s , ενώ στην κορυφή του μια μεγαλύτερη απόσταση $\sqrt{L^2 + s^2} > s$. Σύμφωνα με τη σχέση απεικόνισης, στην κορυφή αντιστοιχεί μια μικρότερη απόσταση ειδώλου-φακού και αντίστοιχα μικρότερη μεγέθυνση. Το είδωλο από ένα σημείο του αντικειμένου είναι σημειακό (μέσα στα πλαίσια της παραξονικής προσέγγισης), αλλά επειδή οι αποστάσεις σχηματισμού σημειακού ειδώλου μικραίνουν, η νοητή ευθεία που ενώνει τα είδωλα από τα διάφορα σημεία του αντικειμένου είναι μια καμπύλη και όχι μια ευθεία. Η καμπύλη βρίσκεται πάνω στο επίπεδο πρόσπτωσης. Το εκτεταμένο είδωλο δεν μπορεί να σχηματιστεί με σαφή τρόπο σε ένα επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα. Σχηματίζεται, έτσι, ένα σαφές είδωλο

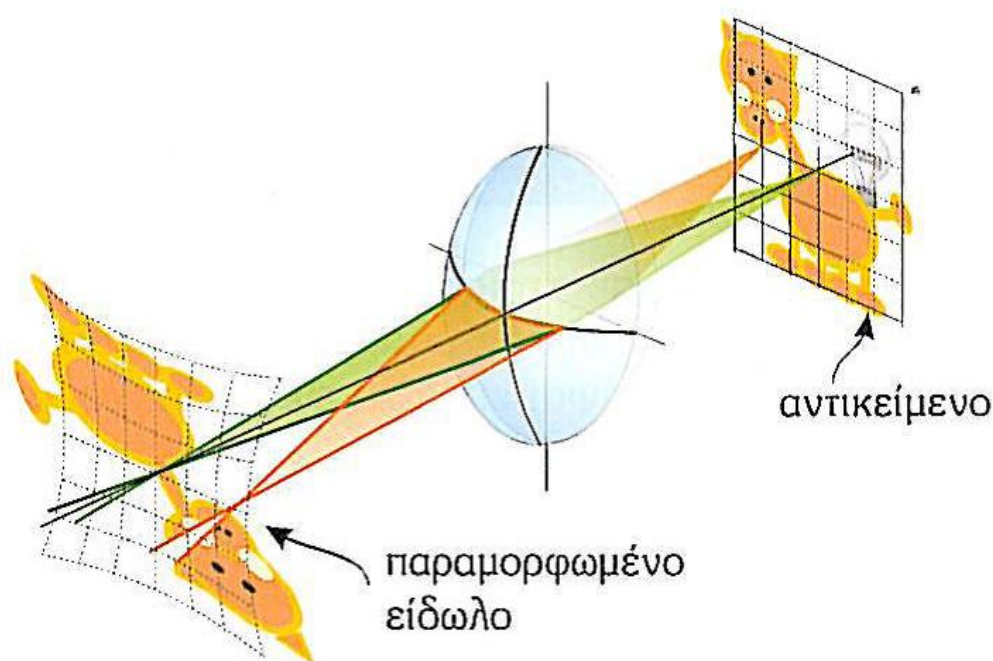


Εικόνα 29: Σφάλμα καμπύλωσης πεδίου. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Συγχρονή Γνώση 2008), 6.1.5, εικόνα 6-1-15.

αλλά πάνω σε μία καμπύλη και όχι σε μία ευθεία. Αν καταγράψουμε το είδωλο πάνω σε ένα εγκάρσιο εστιακό επίπεδο, όσο απομακρυνόμαστε από τον οπτικό άξονα, τόσο θαμπώνει το είδωλο. Αυτό είναι το σφάλμα καμπύλωσης πεδίου. Η καμπύλωση πεδίου είναι γνωστή και ως σφάλμα Petzval, από τον Ούγγρο μαθηματικό Joseph Max Petzval. Αν οι δέσμες συγκλίνουν σε ένα κυρτό επίπεδο, έχουμε θετική καμπύλωση πεδίου, ενώ αν οι δέσμες συγκλίνουν σε κοίλο, τότε έχουμε αρνητική καμπύλωση πεδίου. Γνωρίζουμε ότι τα είδωλα στον ανθρώπινο οφθαλμό σχηματίζονται πάνω στην καμπύλη επιφάνεια του αμφιβληστροειδή. Η καμπύλωση του πεδίου έχει προβλεφθεί από τον ανθρώπινο οφθαλμό, κάτι που δεν αντιμετωπίζεται ακόμα και στις υψηλής τεχνολογίας φωτογραφικές μηχανές. Το είδωλο αναγκαστικά καταγράφεται σε μία επίπεδη επιφάνεια. Συνεπώς η καμπύλωση πεδίου εκφράζει την αδυναμία ενός φακού ή κατόπτρου να σχηματίσει είδωλο σε ένα επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα από ένα αντικείμενο που βρίσκεται κάθετα στον οπτικό άξονα. Είναι συνέπεια των διαφορετικών αποστάσεων που αντιστοιχούν στα απομακρυσμένα από τον άξονα σημεία του αντικειμένου, στις οποίες αντιστοιχεί διαφορετική απόσταση ειδώλου.

2.5 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΕΙΔΩΛΟΥ

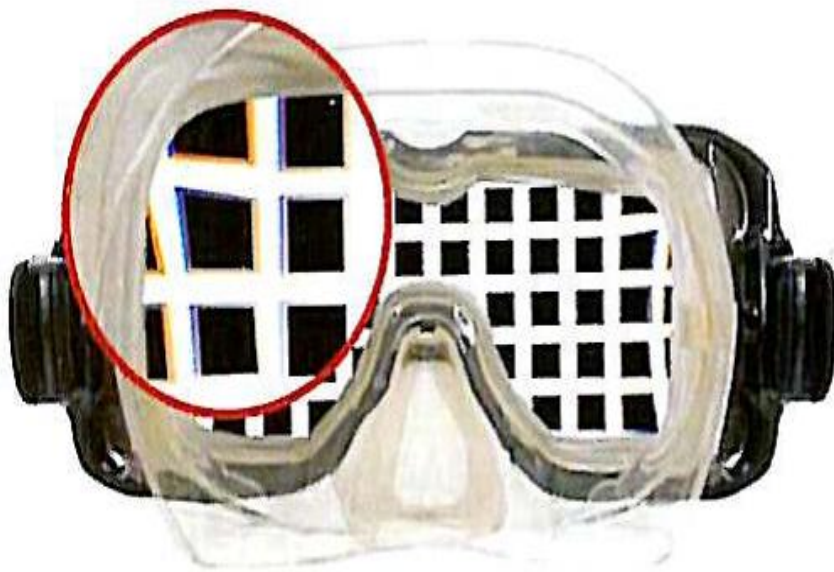
Η παραμόρφωση ειδώλου στους φακούς δεν επηρεάζει την ευκρίνεια του, αλλά μετατοπίζει τα σημεία του από την θέση την οποία έπρεπε να έχουν σύμφωνα με την παραξονική θεωρία. Συνεπώς η μεγέθυνση δεν είναι σταθερή σε όλο το πεδίο του φακού. Όσο απομακρυνόμαστε από τον οπτικό άξονα, εκτός από την διαφορετική απόσταση σχηματισμού ειδώλου στα διάφορα σημεία του εκτεταμένου αντικειμένου αντιστοιχεί μικρότερη μεγέθυνση. Δηλαδή η μεγέθυνση είναι διαφορετική στο κέντρο απ' ότι στα άκρα του. Αυτό προκαλεί παραμόρφωση ειδώλου.



Εικόνα 30: Θετική παραμόρφωση πεδίου. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.5, εικόνα 6-1-16.

Κάτι τέτοι είναι ιδιαίτερα εμφανές με ένα δισδιάστατο αντικείμενο, τοποθετημένο εγκάρσια πάνω στον οπτικό άξονα. Πλήρως συμμετρικά οπτικά συστήματα με μεγέθυνση 1:1 δεν παρουσιάζουν παραμόρφωση, καμπύλωση ή κόμη. Όταν η μεγέθυνση μειώνεται προς τα άκρα έχουμε θετική παραμόρφωση, που είναι γνωστή και σαν παραμόρφωση μηνίσκου, ενώ όταν αυξάνεται προς τα άκρα έχουμε αρνητική παραμόρφωση ειδώλου, γνωστή και ως βαρελοειδή παραμόρφωση. Συνεπώς η παραμόρφωση ειδώλου εκφράζει την αδυναμία ενός φακού ή κατόπτρου να σχηματίσει είδωλο με ίδιες πλευρικές αναλογίες με το αντικείμενο που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα. Είναι συνέπεια των διαφορετικών αποστάσεων που αντιστοιχούν στα απομακρυσμένα από τον άξονα σημεία του αντικειμένου, στις οποίες αντιστοιχεί διαφορετική μεγέθυνση. Για να μην αναπτύσσεται η

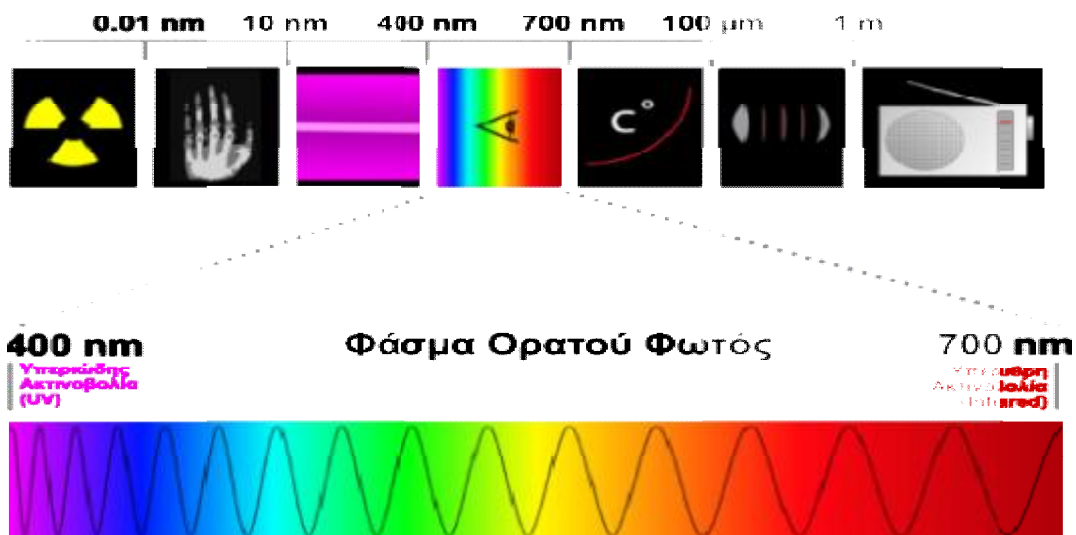
παραμόρφωση θα πρέπει το διάφραγμα του φακού να συμπίπτει με το φακό. Στην περίπτωση αυτή έχουμε το ορθοσκοπικό σύστημα (orthoscopic system). Εάν το διάφραγμα απομακρυνθεί από το φακό, τότε εμφανίζεται η παραμόρφωση. Εάν το διάφραγμα είναι μπροστά από το φακό, οπότε έχουμε την αρνητική ή βαρελοειδή παραμόρφωση (barrel distortion), ενώ αν το διάφραγμα είναι πίσω από το φακό, έχουμε τη θετική παραμόρφωση ή παραμόρφωση μηνίσκου (positive distortion). Στην αρνητική παραμόρφωση η μεγέθυνση ελεγχώνεται καθώς τα σημεία του ειδώλου απομακρύνονται από το κέντρο του πεδίου, ενώ στη θετική συμβαίνει το αντίθετο.



Εικόνα 31: Παραμόρφωση (και χρωματικό σφάλμα) μέσα από μία μάσκα θαλάσσης. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.5, εικόνα 6-1-17.

3. ΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

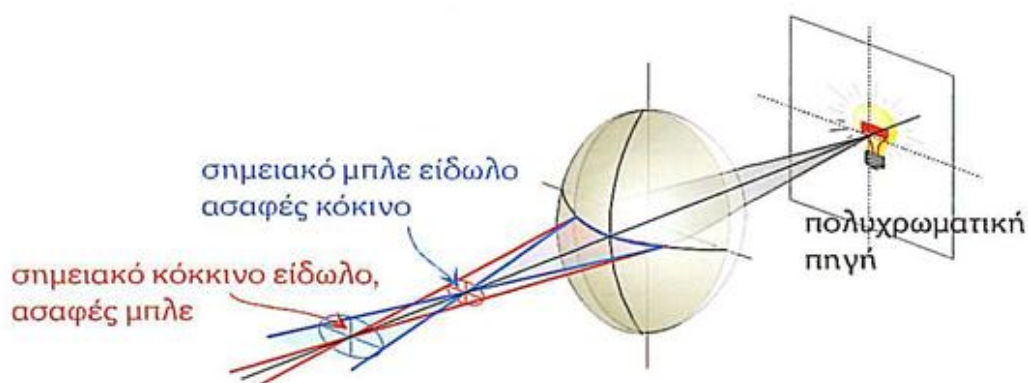
Χρωματικό σφάλμα ή χρωματική απόκλιση ή χρωματική παραμόρφωση είναι ένα είδος παραμόρφωσης που οφείλεται στην αδυναμία του φακού να εστιάσει όλα τα χρώματα στο ίδιο σημείο. Το φαινόμενο αυτό δημιουργείται επειδή ο φακός παρουσιάζει διαφορετικό δείκτη διάθλασης για διαφορετικά μήκη κύματος των χρωμάτων. Ο δείκτης διάθλασης μειώνεται όσο αυξάνεται το μήκος κύματος. Επομένως, όταν διαφορετικά χρώματα του φωτός διαδίδονται σε διαφορετικές ταχύτητες σε ένα μέσο, ο δείκτης διαθλάσεως είναι εξαρτώμενος του μήκους κύματος. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως διασπορά. Τα χρωματικά σφάλματα των φακών οφείλονται στις ιδιότητες διαφοράς των υλικών. Για να δοθεί ένα μέτρο της διασποράς του υλικού για τις τρεις χαρακτηριστικές γραμμές εκπομπής, την γραμμή C του υδρογόνου ($\lambda=656.28 \text{ nm}$) στο κόκκινο, την διπλή γραμμή D του νατρίου στο κίτρινο ($\lambda=589.59 \text{ nm}$, $\lambda=588.99 \text{ nm}$) και στην κυανή γραμμή F ($\lambda=486.13 \text{ nm}$) του υδρογόνου. Οι τρεις παραπάνω γραμμές καλύπτουν περίπου το 70% του ορατού φάσματος. Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα



Εικόνα 32: Διάγραμμα ηλεκτρομαγνητικού φάσματος ορατής ακτινοβολίας.
[El.wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Spectre_visible_light_el.png](http://el.wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Spectre_visible_light_el.png)

είναι το γυάλινο πρίσμα που διασκορπίζει μια προσπίπτουσα δέσμη του λευκού φωτός σε χρώματα του ουράνιου τόξου. Χρωματικές εκτροπές είναι οι αποκλίσεις από την τέλεια απεικόνιση που οφείλονται σε διασπορά. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι εκτροπές Seidel είναι μονοχρωματικές, δηλαδή εμφανίζονται επίσης με το φως ενός ενιαίου χρώματος, οι χρωματικές εκτροπές γίνονται αντιληπτές μόνο με πολυχρωματικό φως.

Γνωρίζουμε ότι η εστιακή απόσταση σε δίοπτρα και φακούς (αλλά όχι σε κάτοπτρα) εξαρτάται σύμφωνα με τον τύπο των κατασκευαστών και από τον δείκτη διάθλασης του υλικού. Σε κάθε υλικό ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από το μήκος κύματος λ ή την συχνότητα f , δηλαδή το χρώμα της ακτινοβολίας. Αυτή είναι η αρχή λειτουργίας των πρισμάτων και σε αυτό το λόγο οφείλεται η εμφάνιση του ουράνιου τόξου.

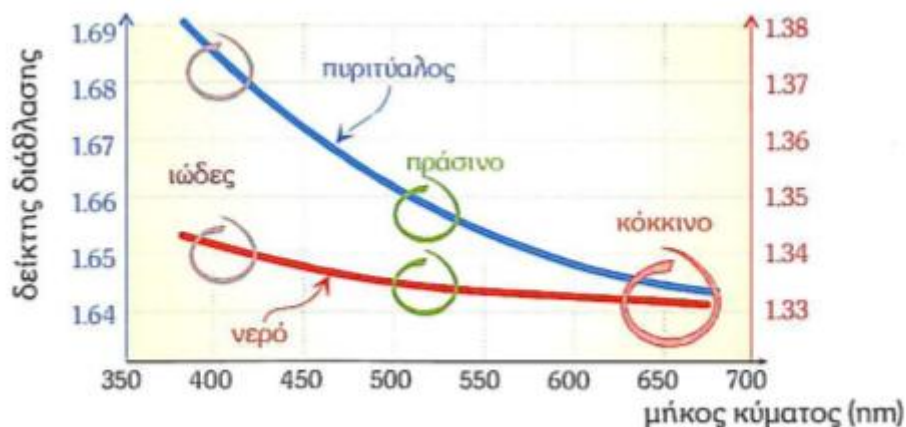


Εικόνα 33: Σφάλμα χρωματικής εκτροπής. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.2, εικόνα 6-1-2.

Στην τυπική περίπτωση, στον ομαλό διασκεδασμό (normal dispersion) όσο μεγαλύτερο είναι το λ (πιο κόκκινο), τόσο μικρότερος είναι ο δείκτης διάθλασης. Έτσι, σε κάθε μήκος κύματος (χρώμα) αντιστοιχεί μια διαφορετική εστιακή απόσταση. Από την σχέση κατασκευαστών των φακών, περιμένουμε από τον ίδιο τον φακό, και για την ίδια ακριβώς γεωμετρία ακτίνων, μεγαλύτερη εστιακή απόσταση για μια κόκκινη ακτίνα απ' ότι για μία μπλέ ακτίνα. Αν η πηγή ή το αντικείμενο αποτελείται από πολλές χρωματικές συνιστώσες (λευκό φως), τότε σχηματίζεται σαφές μπλε είδωλο, οι κόκκινες συνιστώσες δεν έχουν ακόμα εστιάσει και όταν εστιάζεται το κόκκινο, το μπλε έχει ήδη εφεστιαστεί. Αυτή είναι η χρωματική εκτροπή (chromatic aberration). Τα ενδιάμεσα χρώματα σχηματίζουν σαφή είδωλα σε ενδιάμεσες αποστάσεις. Υπάρχει, δηλαδή, μια διευρυμένη περιοχή πάνω στον οπτικό άξονα όπου αρχικά το λευκό, γενικότερα πολυχρωματικό, σημείο από το αντικείμενο απεικονίζεται σε πολλά χρωματικά είδωλα. Η έκταση του σφάλματος χρωματικής εκτροπής εξαρτάται από το πόσο διαφέρουν οι τιμές για το δείκτη διάθλασης στα διάφορα μήκη κύματος. Η σχετική καμπύλη $n(\lambda)$ σε σχέση με το λ είναι η διασπορά ή καμπύλη διασκεδασμού.

Όπως φαίνεται στο γράφημα παρακάτω, η μπλέ γραμμή – περιτύλιγος- παρουσιάζει μια διασπορά του δείκτη διάθλασης, από 1.685 για το ιώδες έως 1.645 για το κόκκινο, και η τιμή του δείκτη διάθλασης

φθίνει με την αύξηση του μήκους κύματος. Πρόκειται για κανονικό, ομαλό διασκεδασμό. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί σε πειραματικά δεδομένα από τη διασπορά του δείκτη διάθλασης στο νερό. Ενώ έχουμε και πάλι ομαλό διασκεδασμό, οι τιμές κυμαίνονται από 1.342 για το



Εικόνα 34: Καμπύλη κανονικού διασκεδασμού για το ορατό φάσμα σε πυριτύαλο (μπλέ γραμμή) και νερό (κόκκινη γραμμή). Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.2, εικόνα 6-1-3

ιώδες έως 1.331 για το κόκκινο. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η τιμή του δείκτη διάθλασης έχει μία αρκετά μικρότερη διακύμανση, και γι' αυτό το νερό παρουσιάζει μικρότερο διασκεδασμό από την περιτύαλο. Σε ένα πρίσμα από νερό παρατηρούμε μικρότερη διασπορά στις φασματικές συνιστώσες (χρώματα) του λευκού φωτός απ' ότι σε ένα πρίσμα από περιτύαλο.

Το συμπέρασμα αυτό είναι γενικότερο καθώς υπάρχουν υλικά με μεγάλη διασπορά και υλικά με μικρή διασπορά. Ο αριθμός Abbe (προς τιμή του Γερμανού Φυσικού Ernst Karl Abbe) γνωστός και ως συσταλτικότητα, αποτελεί μέτρο της διασποράς ενός υλικού και ορίζεται ως:

$$\text{Αριθμός Abbe } V = \frac{n_{\gamma} - 1}{n_B - n_R}$$

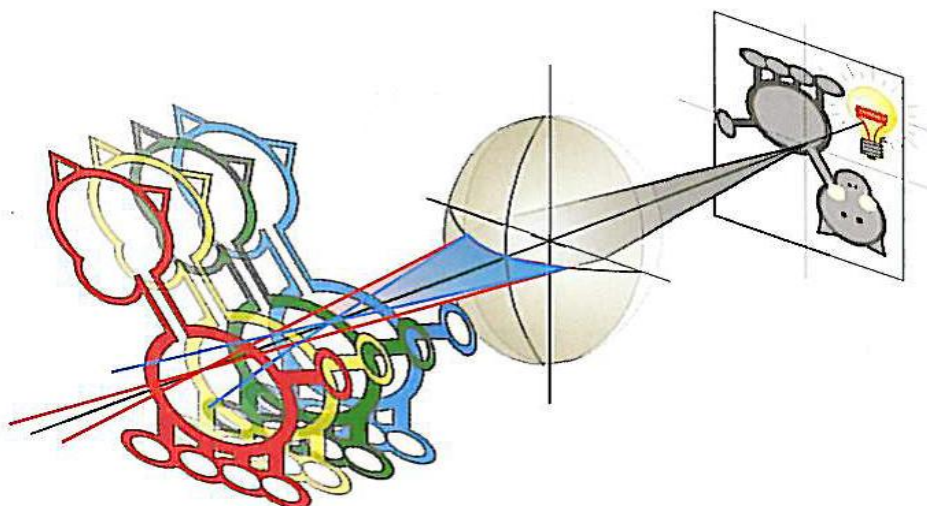
Όπου n_R αναφέρεται στη φασματική γραμμή κόκκινο του υδρογόνου ($\lambda_R=656.3\text{nm}$), n_{γ} για το κίτρινο του νατρίου ($\lambda_{\gamma}=587.6\text{nm}$) και n_B για το μπλέ του υδρογόνου ($\lambda_B=486.1\text{nm}$).

Αν οι δείκτες n_B και n_R διαφέρουν αρκετά, τότε προκύπτει μικρή σχετικά τιμή για τον αριθμό V . Αν οι δείκτες n_B και n_R διαφέρουν λίγο, τότε προκύπτει μεγάλη τιμή για τον αριθμό V . Αν $V > 55$ το υλικό χαρακτηρίζεται από μικρό διασκεδασμό.

Ο αριθμός Abbe έχει μεγάλη σημασία στην επιλογή του υλικού με το οποίο θα κατασκευάσουμε έναν φακό, ιδιαίτερα φακό όρασης. Είναι επιθυμητό για το υλικό να έχει σχετικά μεγάλη τιμή στο δείκτη

διάθλασης, ώστε ο φακός, για συγκεκριμένη διοπτρία να έχει όσο το δυνατόν μικρότερο πάχος, και άρα βάρος, για λόγους τόσο αισθητικής όσο και άνεσης. Ταυτόχρονα όμως να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό Abbe ώστε να διατηρηθεί το χρωματικό σφάλμα σε λογικά επίπεδα. Δυστυχώς, η προσθήκη σπάνιων γαίων στο γυαλί για να πετύχουμε την αύξηση της τιμής του δείκτη διάθλασης, σχεδόν πάντα αυξάνει το διασκεδασμό του γυαλιού, δηλαδή μειώνει τον αριθμό Abbe.

Ένας τρόπος έκφρασης της χρωματικής εκτροπής είναι το πόσο απέχουν μεταξύ τους τα διάφορα είδωλα. Για παράδειγμα μετράμε με την διαμήκη χρωματική εκτροπή την απόσταση που διαχωρίζει τα εστιακά σημεία μπλε και κόκκινης συνιστώσας κατά μήκος του οπτικού άξονα και με την εγκάρσια χρωματική εκτροπή την απόσταση που χωρίζει το σημείο τομής της μπλε ακτίνας με το εγκάρσιο επίπεδο πάνω στην κόκκινη εστία.



Εικόνα 35: Είδωλο με σφάλμα χρωματικής εκτροπής. Γ. Ασημέλλης, *Οπτική και Υπερόραση*, (Σύγχρονη γνώση 2008), 6.1.2, εικόνα 6-1-4.

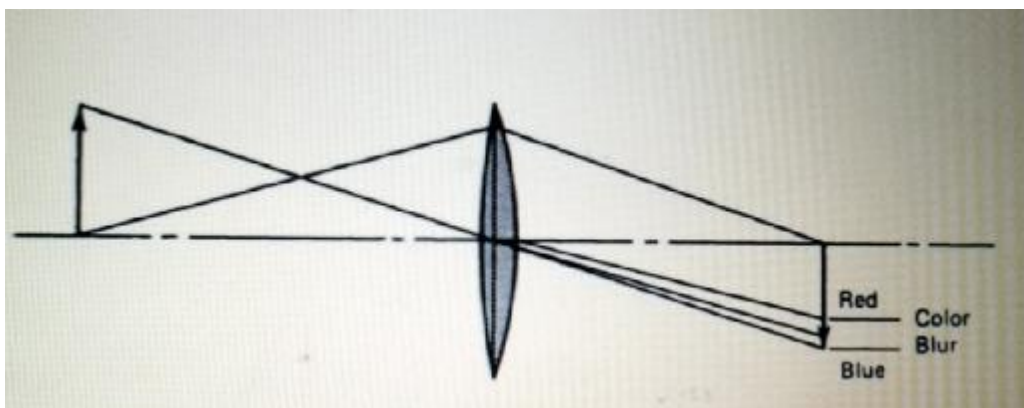
Αν φιλτράρουμε την πηγή ώστε να περιέχει μία μόνο χρωματική συνιστώσα, τότε εμφανίζεται μόνο ένα είδωλο, αυτό που αντιστοιχεί στην οπτική ισχύ του φακού για το συγκεκριμένο μήκος κύματος. Για να διορθωθεί το χρωματικό σφάλμα πρέπει να χρησιμοποιηθεί συνδυασμός από φακούς με διαφορετικούς συντελεστές διασκεδασμού, δηλαδή διαφορετικούς αριθμούς Abbe. Ένας τέτοιος φακός είναι ο αχρωματικός στον οποίο συμπίπτουν οι εστίες από τα άκρα του ορατού, δηλαδή το κόκκινο και το μπλε. Συνδυάζοντας περισσότερους φακούς είναι δυνατόν να ταυτιστούν οι εστίες από περισσότερα χρώματα, π.χ. για το κόκκινο, το πράσινο, και το μπλε και έχουμε ένα αποχρωματικό φακό.

Συνεπώς, τα σφάλματα χρωματικής εκτροπής εκφράζουν την αδυναμία ενός φακού να εστιάσει στην ίδια θέση ακτίνες που ξεκινούν από το ίδιο σημείο, αν σε αυτές αντιστοιχούν διαφορετικά μήκη κύματος. Είναι συνέπεια της εξάρτησης του δείκτη διάθλασης και άρα της εστιακής απόστασης, από το μήκος κύματος.

3.1 ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Μετά τον προσδιορισμό της ποσότητας των χρωματικών εκτροπών που παρουσιάζονται σε ένα σύστημα, είναι δυνατόν, μέσω της χρήσης γυαλιών με διαφορετικές διασπορές, να μειωθεί το ποσό της εκτροπής με την βοήθεια κάποιων απλών λεπτών φακών.

Τα χρωματικά σφάλματα οφείλονται στο γεγονός ότι ο δείκτης διάθλασης n ενός υλικού εξαρτάται από το μήκος κύματος λ , του φωτός που διαδίδεται σ' αυτό. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα φακό η εστιακή απόσταση f θα εξαρτάται από το μήκος κύματος λ , καθώς από την εξίσωση των κατασκευαστών των φακών η εστιακή απόσταση εξαρτάται από τον δείκτη διάθλασης του υλικού. Κατά συνέπεια, ακτίνες διαφορετικού μήκους κύματος εκπεμπόμενες από το ίδιο αντικείμενο θα σχηματίζουν είδωλα σε διαφορετικά σημεία.



Εικόνα 36: Πλευρικό χρώμα. Επειδή η μεγέθυνση του συστήματος μπορεί να ποικίλλει ανάλογα με το δείκτη διάθλασης ενός φακού, η διασπορά του γυαλιού παράγει εικόνες των οποίων τα μεγέθη διαφέρουν ανάλογα με το μήκος κύματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μία θολή εικόνα. D. O' Shea, Elements of Modern Optical Design (John Wiley, 1985).

Για να χαρακτηρίσουμε ένα είδος γυαλιού ως προς την αλλαγή του δείκτη διάθλασης χρησιμοποιούμε μία σύμβαση να εξετάζουμε το δείκτη διάθλασης σε τρία μήκη κύματος αναφοράς, που αντιστοιχούν σε φασματικές γραμμές ουσιών, όπως φαίνονται στον πίνακα:

Φασματική γραμμή	λ (nm)	Χρώμα	Δείκτης διάθλασης
d του He	587.6	Κίτρινο	n_d
F του H	486.1	Μπλε-Πράσινο	n_f
C του H	656.3	κόκκινο	n_c

Η γραμμή d βρίσκεται στη μέση του ορατού φάσματος, ενώ οι γραμμές F και C στα άκρα του φάσματος. Έχοντας μετρήσει τις τιμές n_d , n_f και n_c , ορίζουμε τη δύναμη διασκεδασμού του γυαλιού Δ ως $\Delta = \frac{n_f - n_c}{n_d - 1}$ (1).

Όσο μεγαλύτερη η τιμή του Δ , τόσο μεγαλύτερη η μεταβολή του δείκτη διάθλασης μέσα στο γυαλί. Παραδοσιακά ένα γυαλί προσδιορίζεται από δύο αριθμούς, το δείκτη διάθλασης n_d (με τιμές μεταξύ 1.49 και 2) και τον συντελεστή Abbe V_d , ο οποίος ορίζεται ως $V_d = 1/\Delta$ (2) και έχει τυπικές τιμές μεταξύ 20 και 90.

Οι κατασκευαστές ξεχωρίζουν τους διαφορετικούς τύπους γυαλιών χρησιμοποιώντας έναν εξαψήφιο κωδικό. Τα τρία πρώτα ψηφία του κωδικού αντιστοιχούν στα τρία πρώτα σημαντικά ψηφία του $n_d - 1$ και τα τρία τελευταία αντιστοιχούν στα τρία πρώτα σημαντικά ψηφία του V_d (κάνοντας στρογγυλοποίηση). Για παράδειγμα ένα γυαλί, ονομαζόμενο BK7, με $n_d = 1.5168$ και $V_d = 64.29$, χαρακτηρίζεται από τον εξαψήφιο κωδικό 517643. Αντίστροφα, ένα γυαλί με εξαψήφιο κωδικό 617366 έχει $n_d = 1.617$ και $V_d = 36.3$.

Για φακούς υπάρχει η σύμβαση ότι η εστιακή τους απόσταση f είναι αυτή που αντιστοιχεί στο δείκτη διάθλασης n_d . Το ίδιο ισχύει και για τη θέση ειδώλου s' και για την μεγέθυνση $M = -s'/s$. Για τις γραμμές C και F γράφουμε τις εστιακές αποστάσεις f_c και f_D αντίστοιχα, τις θέσεις ειδώλου S_c' και S_f' για τις μεγεθύνσεις M_c και M_f . Τα χρωματικά σφάλματα προσδιορίζονται από τις διαφορές:

- $\delta f = f_f - f_c$, για το χρωματικό σφάλμα στην εστιακή απόσταση
- $\delta s' = S_f' - S_c'$, για το χρωματικό σφάλμα στη θέση ειδώλου
- $\delta M = M_f' - M_c$, για το χρωματικό σφάλμα στη μεγέθυνση.

Αποδεικνύεται ότι τα παραπάνω σφάλματα δίνονται από τις σχέσεις:
 $\delta f = -f\Delta$, (3)

$$\delta s' = \left(\frac{s'}{f}\right)^2 \delta f, \quad (4),$$

$$\delta M = -s \left(\frac{M}{f}\right)^2 \delta f, \quad (5).$$

3.2 ΑΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΖΕΥΓΗ

Για να κατασκευάσουμε φακούς χωρίς χρωματικά σφάλματα χρησιμοποιούμε ζεύγη φακών. Από την (3) παρατηρούμε ότι το δf είναι θετικό σε αποκλίνοντα φακό και αρνητικό σε συγκλίνοντα. Άρα για να μηδενιστεί θα πρέπει να πάρουμε συνδυασμό συγκλίνοντα και

αποκλίνοντα φακού. Για δύο φακούς σε επαφή ξέρουμε ότι ισχύει η σχέση $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ (6) όπου f_1 και f_2 οι εστιακές αποστάσεις των δύο φακών και f η εστιακή απόσταση του συστήματος. Από την σχέση (6) μπορούμε να αποδείξουμε ότι το χρωματικό σφάλμα στην εστιακή απόσταση του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$\delta_f = -f^2 \left(\frac{\Delta_1}{f_1} + \frac{\Delta_2}{f_2} \right) \quad (7),$$

όπου Δ_1 και Δ_2 η ισχύς διασκεδασμού των υλικών που αποτελούν τους δύο φακούς. Για να μηδενίζεται το χρωματικό σφάλμα, $\delta_f=0$ πρέπει να ισχύει:

$$\Delta_1 f_2 + \Delta_2 f_1 = 0 \quad (8).$$

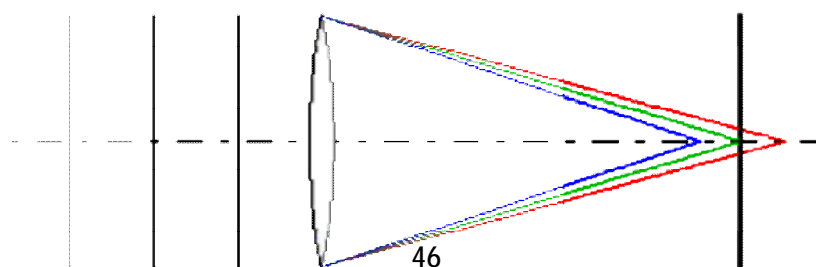
Χρησιμοποιώντας δύο φακούς από διαφορετικά υλικά, επιλέγουμε τις εστιακές τους αποστάσεις έτσι ώστε να κατασκευάσουμε φακό με συγκεκριμένη εστιακή απόσταση f , σύμφωνα με την (6), και με μηδενικό χρωματικό σφάλμα. Συνήθως ο ένας φακός επιλέγεται να είναι κατασκευασμένος από περιτύλαλο και ο άλλος από στεφανύλαλο.

Παρατηρούμε ότι με αυτά τα ζεύγη φακών μηδενίζουμε το χρωματικό σφάλμα, υπο την έννοια ότι ο φακός έχει την ίδια εστιακή απόσταση για τις φασματικές γραμμές F και C, δηλαδή για το γαλάζιο και το ερυθρό. Αυτό δεν σημαίνει ότι η εστιακή απόσταση στο γαλάζιο και το ερυθρό θα είναι ίδια με αυτή ως προς την γραμμή d (κίτρινο). Θα υπάρχει μια μικρή, αλλά όχι μηδενική απόκλιση. Για να εξαφανίσουμε και απόκλιση ως προς το κίτρινο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σύστημα τριών φακών.

Στην πράξη, για την κατασκευή ενός αχρωματικού ζεύγους με συγκεκριμένη εστιακή απόσταση f , επιλέγουμε κατάλληλα τις ακτίνες καμπυλότητας των δύο φακών, ώστε να μηδενίζεται η κόμη και να ελαχιστοποιείται ή και να μηδενίζεται η σφαιρική εκτροπή.

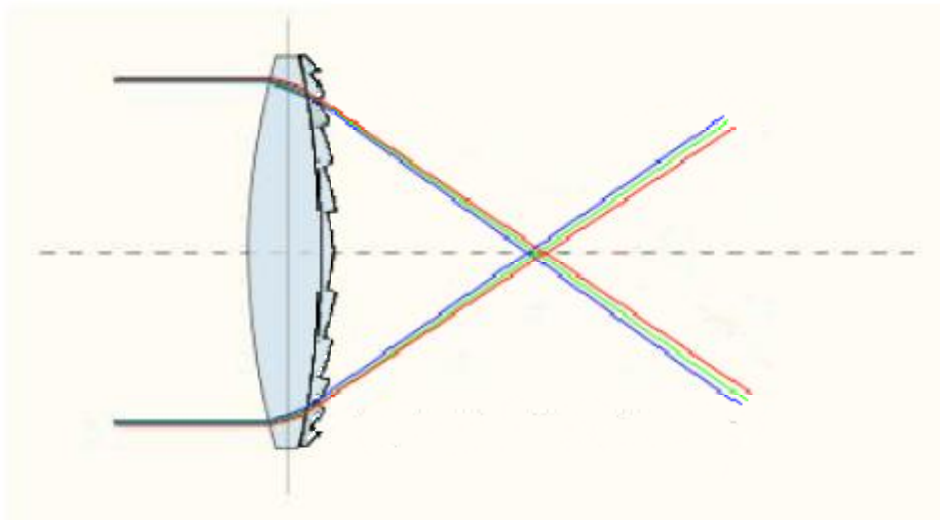
3.3 ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΧΡΩΜΑΤΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ Η ΑΞΟΝΙΚΟ ΧΡΩΜΑΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Διαμήκης χρωματική εκτροπή ή αλλιώς αξονικό χρωματικό



Εικόνα 37: Προέλευση της διαμήκης χρωματικής εκτροπής. Τα εστιακά επίπεδα των διαφόρων

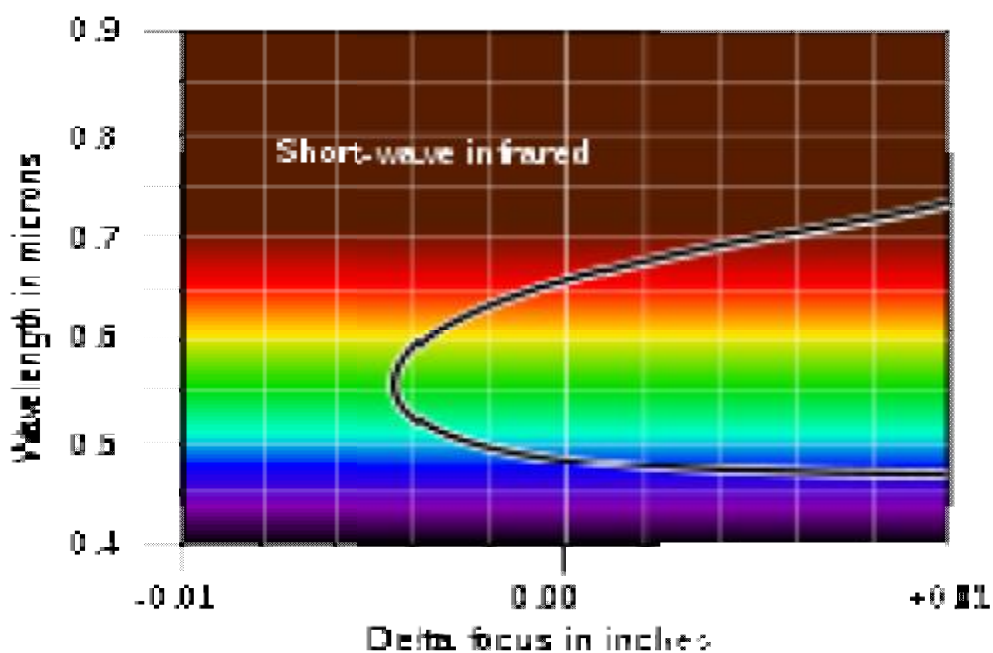
σφάλμα είναι η ανικανότητα ενός φακού να εστιάσει σε διαφορετικά χρώματα στο ίδιο εστιακό επίπεδο. Για ένα σημείο επί του οπτικού άξονα, οι εστίες των διαφόρων χρωμάτων είναι επίσης επί του οπτικού άξονα αλλά μετατοπίζονται κατά τη διαμήκη διεύθυνση, δηλαδή κατά μήκος του οπτικού άξονα. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για μία απόμακρη πηγή φωτός. Σε αυτό το σκίτσο μόνο το πράσινο φως είναι σε ευκρινή εστίαση στον αισθητήρα. Το μπλέ και το κόκκινο φως έχει το λεγόμενο κύκλο σύγχυσης στο επίπεδο του αισθητήρα και δεν απεικονίζεται σημαντικά.



Εικόνα 38: Περιθλαστικό οπτικό στοιχείο με συμπληρωματικές ιδιότητες διασποράς με εκείνες του γυαλιού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την διόρθωση της χρωματικής εκτροπής. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.3, εικόνα 6-1-8.

3.4 ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΧΡΩΜΑΤΙΚΗ ΕΚΤΡΟΠΗ Η ΠΛΕΥΡΙΚΟ ΧΡΩΜΑΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Το πλευρικό χρωματικό σφάλμα αναφέρεται στην εγκάρσια χρωματική παρέκκλιση. Λοξές προσπίπτουσες δέσμες φωτός οδηγούν στην εγκάρσια χρωματική εκτροπή, η οποία αναφέρεται σε μία πλάγια μετατοπισμένη εστία. Σε περίπτωση απουσίας του αξονικού χρώματος, όλα τα χρώματα εστίασης είναι στο ίδιο επίπεδο, αλλά η μεγέθυνση εικόνας εξαρτάται από το μήκος κύματος. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Η εμφάνιση του πλευρικού χρώματος υποδηλώνει ότι η εστιακή απόσταση εξαρτάται από το μήκος κύματος, ενώ η εμφάνιση του αξονικού χρώματος σε έναν πολύπλοκο φακό δεν απαιτεί αυστηρά ένα μεταβλητό εστιακό μήκος. Αυτό φαίνεται αντιφατικό, αλλά σε ένα φακό διορθωμένο για διαμήκη χρωματική εκτροπή τα κύρια επίπεδα δεν χρειάζεται να συμπίπτουν για όλα τα χρώματα. Δεδομένου ότι το εστιακό μήκος καθορίζεται από την απόσταση από το οπίσθιο επίπεδο στο επίπεδο της εικόνας, το εστιακό μήκος μπορεί να εξαρτάται από το μήκος κύματος, ακόμη και όταν όλες οι εικόνες είναι στο ίδιο επίπεδο.



Εικόνα 39: Στην καμπύλη βλέπουμε ότι σε ένα αχρωματικό φακό τα ορατά μήκη κύματος φωτός έχουν το ίδιο σημείο εστίασης εκτός από την υπεριώδη και την υπέρυθη ακτινοβολία που είναι εκτός σημείου εστίασης.
El.wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Achromatic_focal_curve.svg

4. ΙΣΤΟΡΙΚΑ

Η ύπαρξη σφαλμάτων και οι περιορισμοί της παραξονικής προσέγγισης ήταν γνωστοί στους πρώτους μελετητές της οπτικής απεικόνισης. Μπορούμε να αναφέρουμε τόσο τον James Clerk Maxwell όσο και τον Ernst Karl Abbe με την κυματική θεωρία σχηματισμού ειδώλων που ανέπτυξε εργαζόμενος για τον σχεδιασμό των μικροσκοπίων του Carl Zeiss. Ήταν και είναι στόχος της κλασσικής



Εικόνα 40: Ernst Karl Abbe (1840-1905) και Carl Zeiss (1816-1888). Γ. Ασημέλλης, *Οπτική και Υπερόραση*, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.1.2.

οπτικής όχι η πλήρης αναίρεση των σφαλμάτων αλλά η μελέτη και αξιολόγηση τους με σκοπό το σχεδιασμό «διορθωμένων» οπτικών συστημάτων που ελαχιστοποιούν τα σφάλματα όσο αυτό είναι δυνατόν.

Ακόμα και σε διορθωμένα συστήματα μιλάμε για ανοχές: σε ένα σύστημα με «τυπικές» εκτροπές, επιτρέπουμε στις διαφορές ανάμεσα σε ένα ιδανικό και το πραγματικό, διορθωμένο σύστημα, να μην ξεπερνούν ορισμένα όρια για ένα εύρος αποστάσεων, μέγεθος και προσανατολισμό αντικειμένου. Συνήθως το οπτικό σύστημα αποτελείται από συνδυασμούς επιφανειών (δίοπτρα, φακούς ή κάτοπτρα), η κάθε μία από τις οποίες μπορεί να έχει σε σημαντικό βαθμό κάποιο ή κάποια σφάλματα, το συνδυασμένο αποτέλεσμα στο τελικό είδωλο είναι η ελαχιστοποίηση τους μέσω αμοιβαίας αντιστάθμισης.

Ένα παράδειγμα αμοιβαίας αντιστάθμισης είναι οι αχρωματικοί φακοί. Συνδυάζονται δύο φακοί, ένας συγκλίνων και ένας αποκλίνων, οι οποίοι ξεχωριστά μπορεί να έχουν σημαντικό χρωματικό σφάλμα. Με κατάλληλη επιλογή του βαθμού διασκεδασμού για τον καθένα ξεχωριστά, είναι δυνατό ο σύνθετος αχρωματικός φακός που προκύπτει από τους δύο απλούς φακούς να έχει μηδενικό σφάλμα χρωματικής εκτροπής για δύο μήκη κύματος, το κόκκινο και το μπλέ. Η διαδικασία μπορεί να συμπεριλάβει περισσότερους φακούς, οπότε είναι δυνατό να αντισταθμιστεί το χρωματικό σφάλμα για τρία μήκη κύματος (αποχρωματικός φακός). Είναι απαραίτητο, λοιπόν, για την μελέτη ενός οπτικού συστήματος να υπάρχει μία ποσοτική μελέτη σφαλμάτων.

5. ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Η πρώτη αντιμετώπιση είναι η άμεση εφαρμογή, χωρίς καμία προσέγγιση, των νόμων διάθλασης (ή και ανάκλασης, αν το οπτικό σύστημα περιλαμβάνει κατοπτρικές διαφάνειες). Κάτι τέτοιο είναι δυνατό να εφαρμοστεί στη μέθοδο ιχνηλάτησης ακτίνων, εφαρμόζοντας την διαδικασία για κάθε ακτίνα από κάθε σημείο του αντικειμένου.

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τις αποκλίσεις του συστήματος σε σχέση με το στιγματικό είδωλο που ιδανικά περιμέναμε. Δεν υπάρχει περιορισμός συμμετρίας στο σύστημα: οποιοδήποτε σύστημα, είτε ομοαξονικό, συμμετρικό εκ περιστροφής είτε όχι, μπορεί να αναλυθεί. Όπως γίνεται αντιληπτό, όχι μόνο πρέπει να θεωρήσουμε ένα μεγάλο αριθμό περιφερειακών ακτίνων από κάθε σημείο του αντικειμένου, αλλά επιπλέον, πρέπει να επαναλάβουμε την διαδικασία αυτή για κάθε σημείο του αντικειμένου.

Ένας άλλος τρόπος είναι η σταδιακή εφαρμογή προσεγγίσεων. Δηλαδή θεωρούμε όχι μόνο τον πρώτο όρο στην παραξονική προσέγγιση, αλλά και τον επόμενο, και έχουμε την τρίτης τάξης προσέγγιση. Αυτή είναι η θεωρία Seidel, η οποία καταλήγει σε αναλυτικές εκφράσεις για τις γνωστές διαθλαστικές εκτροπές, και για πολύ καιρό αποτέλεσε τον «πρότυπο» τρόπο αναφοράς σφαλμάτων. Η θεωρία αυτή περιορίζεται, όμως, σε ομοαξονικά συστήματα, με συμμετρία περιστροφής ως προς τον οπτικό άξονα.

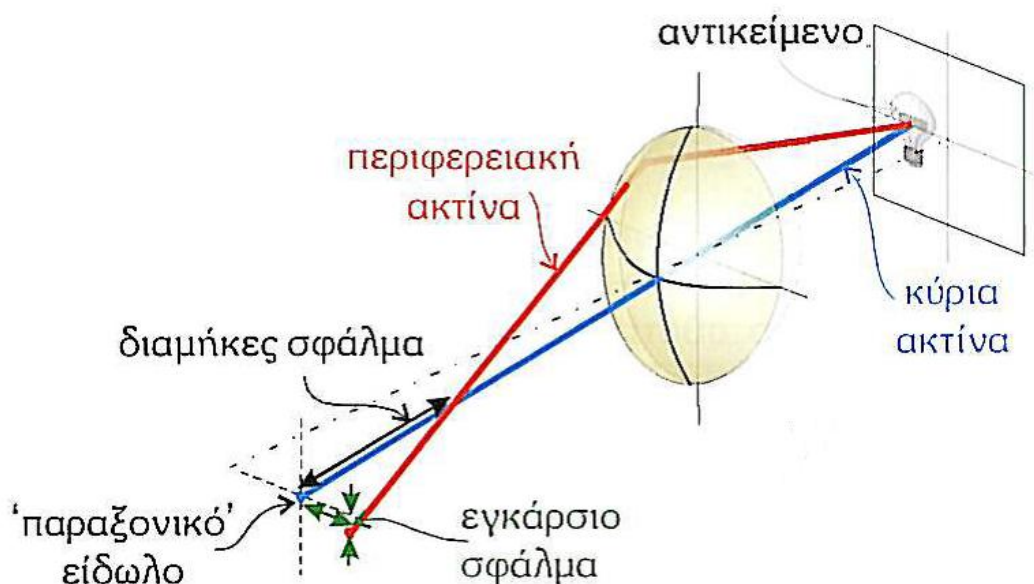
Τέλος, υπάρχει και μία «μοντέρνα» άποψη, που έγινε ιδιαίτερα δημοφιλής πρόσφατα. Αυτή που θεωρεί όχι πλέον τις ακτίνες, αλλά τα μέτωπα κύματος. Τα σφάλματα μπορούν να «θεωρηθούν», κατά μία άποψη, ότι προέρχονται είτε από κατασκευαστικές ατέλειες στα οπτικά στοιχεία, είτε από περιορισμούς στην κατασκευή τους (π.χ. σφαιρικές και όχι παραβολικές επιφάνειες).

Όποιος και να είναι ο λόγος, το μέτωπο κύματος που εισέρχεται στο οπτικό σύστημα υφίσταται παραμορφώσεις. Ακόμα και ένα ιδανικά επίπεδο μέτωπο κύματος δεν θα διέλθει χωρίς παραμόρφωση. Το σχήμα του μετά το πέρασμά του από το οπτικό σύστημα αποκτά τοπικές διαταραχές, και έτσι δεν μπορεί να θεωρηθεί πλέον μία ιδανικά σφαιρική επιφάνεια. Η μελέτη αυτών των διαταραχών στο μέτωπο κύματος γίνεται με τα πολυώνυμα Zernike. Με τα πολυώνυμα αυτά είναι δυνατόν να «αποδομηθεί» το σύνολο των διαταραχών και να αντιστοιχηθούν με συγκεκριμένες διαθλαστικές εκτροπές, και έτσι να καθοδηγηθεί η φωτοδιαθλαστική χειρουργική σε εξατομοκευμένη φωτοαποδόμηση.

6. ΙΧΝΗΛΑΤΗΣΗ ΑΚΤΙΝΩΝ

Ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στη μελέτη των οπτικών αποκλίσεων σε ένα απλό ή σύνθετο οπτικό σύστημα είναι η μέθοδος ιχνηλάτισης ακτίνων (ray tracing). Από κάποιο σημείο του αντικειμένου ακολουθούμε ακτίνες μέσα από το οπτικό σύστημα και, εφαρμόζοντας ξεχωριστά τους νόμους διάθλασης ή ανάκλασης, μελετάμε το είδωλο που σχηματίζεται. Χαράσσουμε την κύρια ακτίνα. Με ακτίνες πολύ κοντά στην κύρια ακτίνα σχηματίζεται το παραξονικό είδωλο.

Όταν μία ακτίνα συναντά μια διαθλαστική επιφάνεια, εφαρμόζουμε τον νόμο της διάθλασης του Snell, με μια «αλλαγή» μεταβλητών. Σε συστήματα με πολλές επιφάνειες, συνήθως εκφραζόμαστε με το ύψος h και την κλίση φ της ακτίνας, αντί για την απόσταση του αντικειμένου, s . Η υιοθέτηση αυτών των μεταβλητών επιτρέπει να ιχνηλατήσουμε την ακτίνα μέσα από πολλές διαδοχικές διαθλάσεις, μιας και η επακριβής απόσταση του αντικειμένου γίνεται ιδιαίτερα δύσκολη μέσα από πολλές οπτικές επιφάνειες.



Εικόνα 41: Αρχή λειτουργίας μεθόδου ιχνηλάτισης ακτίνων. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-1.

Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται με την απλή σχέση:

$$\text{ύψος και κλίση ακτίνας } \varphi = \frac{h}{s}$$

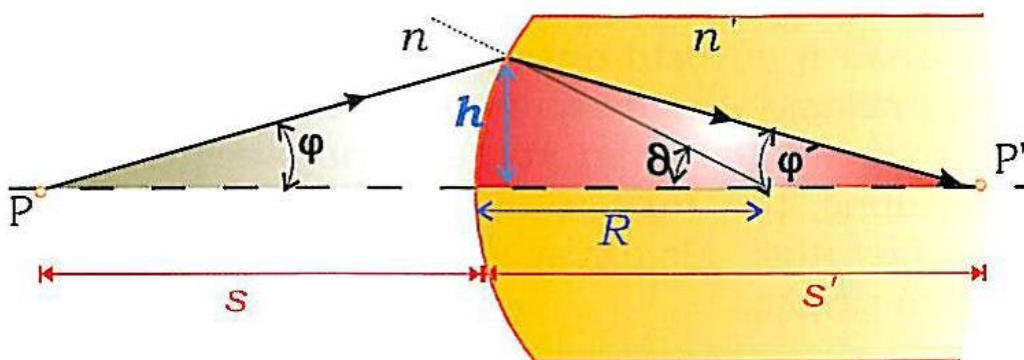
Από το παρακάτω σχήμα μπορούμε να θεωρήσουμε $\theta = h/R$, όπου R η ακτίνα καμπυλότητας του δίοπτρου, και γράφουμε:

$$n(\varphi - \theta) = n'(\varphi' - \theta) \Rightarrow n\left(\varphi - \frac{h}{R}\right) = n'\left(\varphi' - \frac{h}{R}\right)$$

Στην οποία οι τονούμενες ποσότητες αντιστοιχούν στο χώρο του ειδώλου και οι άτονες στο χώρο του αντικειμένου, και οι γωνίες εκφράζονται σε ακτίνια. Με λίγες πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

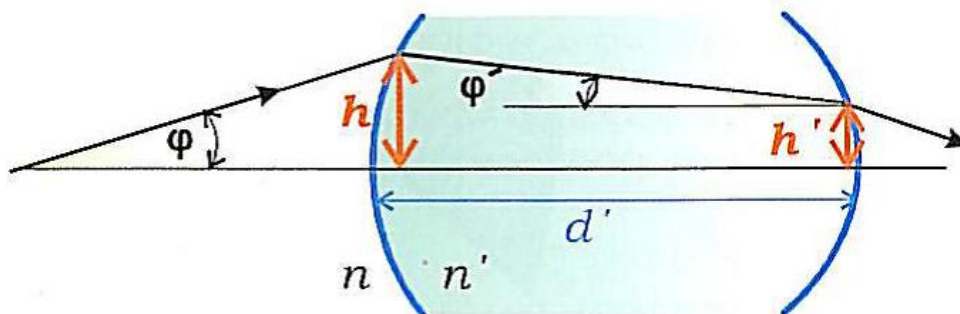
$$n\varphi - n'\varphi' = h \frac{n' - n}{R} = hP$$

Όπου P είναι η ισχύς του δίοπτρου. Η παραπάνω σχέση είναι εξαιρετικά απλή και επιτρέπει τη διαχείριση πολλών συνεχών επαφών της δέσμης με οπτικά στοιχεία, αποδεσμεύοντας μας έτσι να έχουμε κάθε φορά μια συγκεκριμένη απόσταση αντικειμένου.



Εικόνα 42: Ύψος και κλίση ακτίνας μέσα από διάθλαση. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-2.

Εκτός από διάθλαση, μια ακτίνα μπορεί να υποστεί απλή ματατόπιση, όταν διαδίδεται σε μια απόσταση d σε χώρο με σταθερή τιμή δείκτη διάθλασης. Στην περίπτωση αυτή, η κλίση και το ύψος της σε δύο

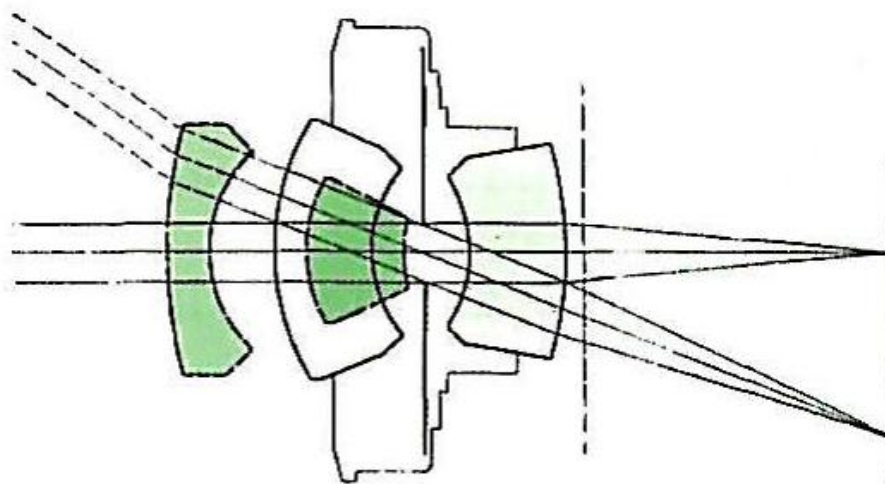


Εικόνα 43: Σχέσεις μεταφοράς ύψους και κλίσης ακτίνας. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-3.

διαφορετικά σημεία συνδέονται με την σχέση:

$$h' = h + d'\varphi'$$

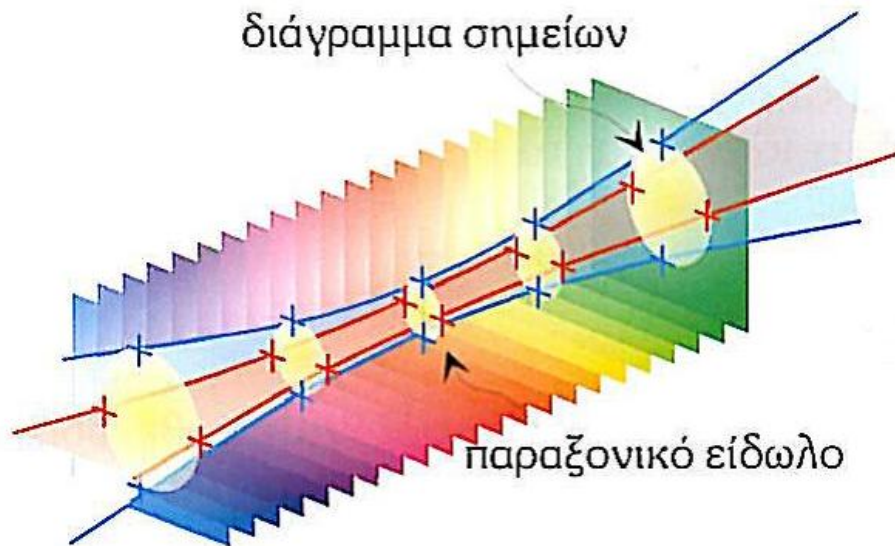
Οι δύο παραπάνω σχέσεις εφαρμόζονται κάθε φορά που μία ακτίνα διαθλάται σε μια επιφάνεια και διαδίδεται μέχρι να συναντήσει την επόμενη. Αποτελούν τη συνάρτηση μεταφοράς της ακτίνας από επιφάνεια σε επιφάνεια. Η λύση ενός τέτοιου προβλήματος είναι αρκετά απλή με εφαρμογή της μεθόδου πινάκων (Ray Matrix Theory). Η ιχνηλάτηση ακτίνων εφαρμόζεται πρακτικά με γνωστά ολοκληρωμένα προγράμματα όπως για παράδειγμα το ZEMAX, της Focus Software, το Optics Lab Optical Ray Tracing της Science Lab Software, το Code-V, το OSLO και το Optica, μέρος της Mathematica της Wolfram Research.



Εικόνα 44: Σχεδιασμός οπτικού συστήματος με μέθοδο ιχνηλάτησης ακτίνων. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-4.

Επιλύοντας ένα τέτοιο σύστημα εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι για ακτίνες που απομακρύνονται από την κύρια, τις περιφερειακές ακτίνες το σημείο τομής τους στο εγκάρσιο παραξονικό επίπεδο δεν συμπίπτει με το σημείο του ειδώλου. Η εγκάρσια απόσταση του σημείου τομής της περιφερειακής ακτίνας δίνει το εγκάρσιο σφάλμα (σε x και y συνιστώσες), ενώ κατά μήκος της κύριας ακτίνας έχουμε το διαμήκες σφάλμα (εμφανίζεται στην z συνιστώσα).

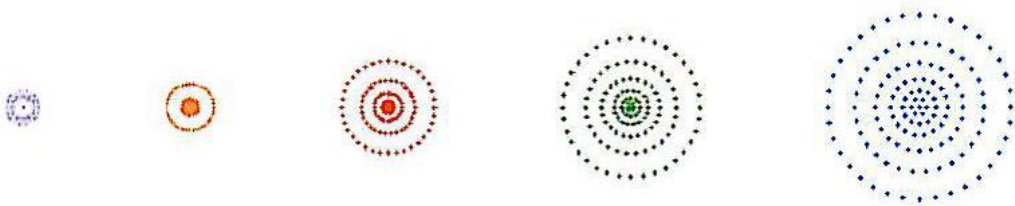
Γραφική απεικόνιση γίνεται σε διαγράμματα σημείων, όπου καταγράφονται τα σημεία τομής των ακτίνων με ένα εγκάρσιο επίπεδο σε διάφορες διαμήκεις αποστάσεις από το παραξονικό είδωλο:



Εικόνα 45: Διαγράμματα ακτίνων σε διαφορετικές αποστάσεις από το παραξονικό είδωλο. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-5.

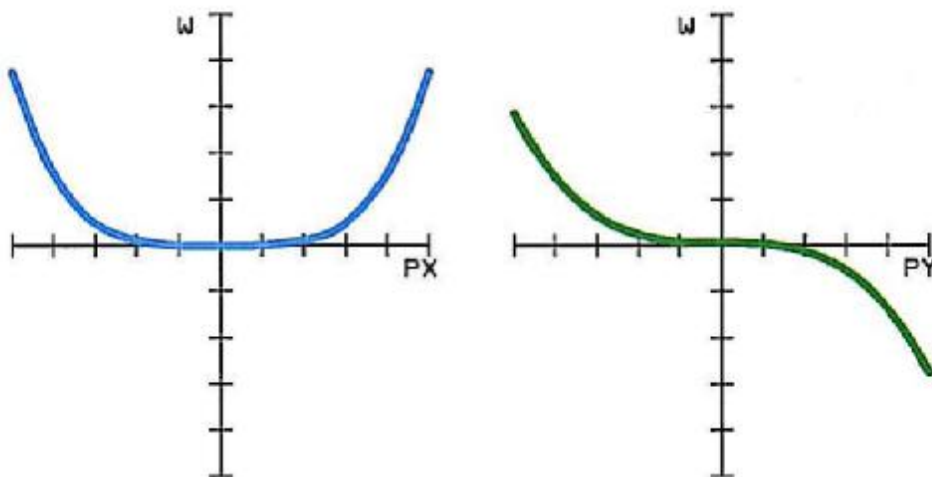


Εικόνα 46: Διαγράμματα σημείων για σφάλμα κόμης με αυξανόμενο αριθμό ακτίνων στον υπολογισμό. Γ. Ασημέλλης, οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-6.



Εικόνα 47: Διαγράμματα σημείων για σφαιρικό σφάλμα με αυξανόμενη διαμήκη απόσταση από την παραξονική εστία. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-7.

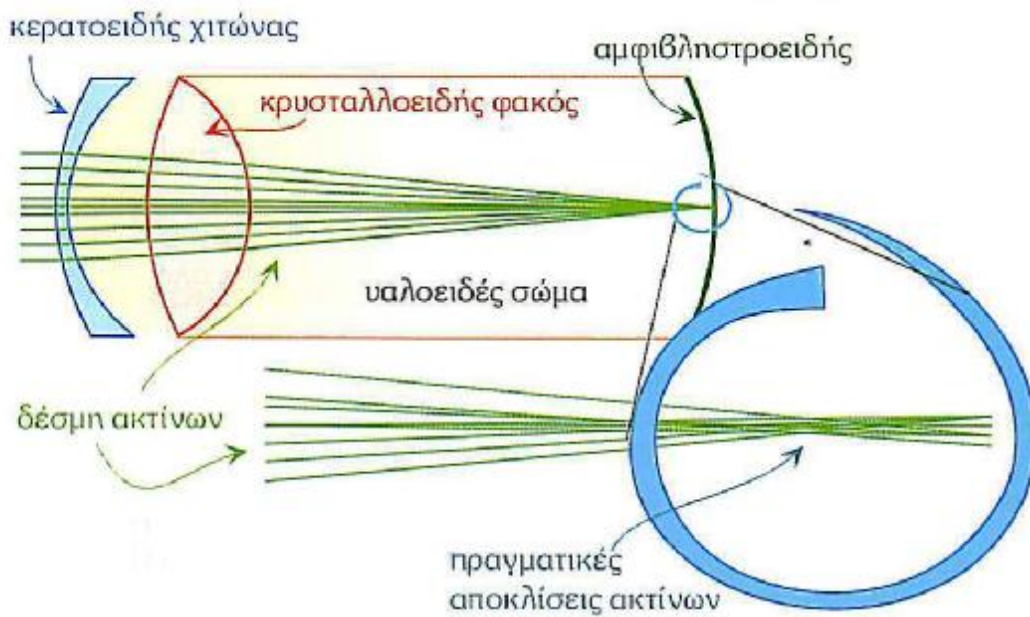
Τα σημεία τομής των ακτίνων σε ένα διαμήκες επίπεδο μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά με διαγράμματα διαφοράς οπτικού δρόμου, Συνήθως στον οριζόντιο άξονα αντιστοιχεί η απομάκρυνση του σημείου στο αντικείμενο από τον οπτικό άξονα και στον κατακόρυφο το εγκάρσιο ή το διαμήκες σφάλμα. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα με «τυπικές» εκτροπές, οι διαφορές οπτικού δρόμου μπορεί να είναι της τάξης μεγέθους δεκάδων λ , ενώ σε ένα διορθωμένο σύστημα, να είναι μικρότερες του $\lambda/4$.



Εικόνα 48: Διαγράμματα διαφοράς οπτικού δρόμου για σφάλμα σφαιρικής εκτροπής και κόμης. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-8.

Μια τυπική λειτουργία ενός τέτοιου προγράμματος είναι να δοθούν μερικές σταθερές, όπως επιθυμητή απόσταση αντικειμένου, μεγέθυνση, κλπ και τα μέγιστα όρια ανοχών. Η διαδικασία στοχεύει στην ελαχιστοποίηση μιας παραμέτρου γνωστής ως συνάρτηση αξίας, η οποία μοιάζει με την συνάρτηση προσδιορισμού ποιότητας στη γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων.

Με την μέθοδο αυτή είναι δυνατόν να μελετηθεί με μεγάλη λεπτομέρεια κάθε είδους απόκλιση και να διαπιστωθεί άμεσα η επίδραση της αλλαγής μιας παραμέτρου (π.χ. καμπυλότητα ενός φακού, απόσταση διόπτρων, μήκος κύματος, γωνία πρόσπτωσης της δέσμης, δείκτες διάθλασης μέγεθος κόρης κλπ) στο τελικό αποτέλεσμα. Είναι δυνατό να αναπαρασταθούν πλήρη οπτικά συστήματα, με συγκεκριμένες οπτικές επιφάνειες, καθώς και δείκτες διάθλασης των μέσων, και έτσι να μελετηθούν οι αποκλίσεις για το σύστημα αυτό.



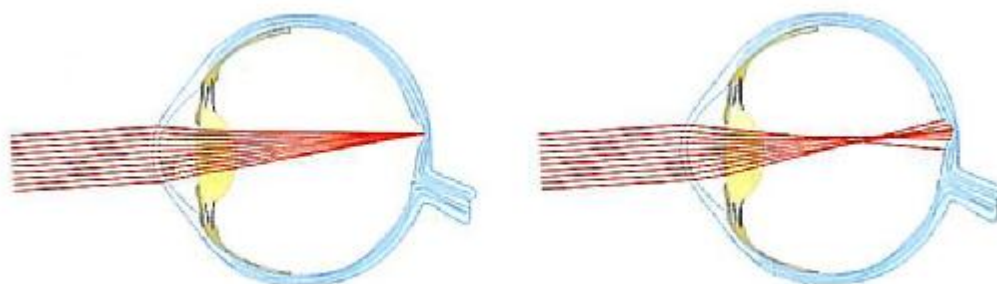
Εικόνα 49: Ιχνηλάτηση ακτίνων στο οπτικό σύστημα του οφθαλμού. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 6.2.3, εικόνα 6-2-9.

Μία αναπαράσταση του οπτικού συστήματος του οφθαλμού μέσω του προγράμματος ZEMAX δίνεται στο σχήμα παρακάτω όπου μπορούμε να παρατηρήσουμε τις πραγματικές αποκλίσεις των ακτίνων στο αμφιβληστροειδικό είδωλο.

7. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΟΦΘΑΛΜΟ

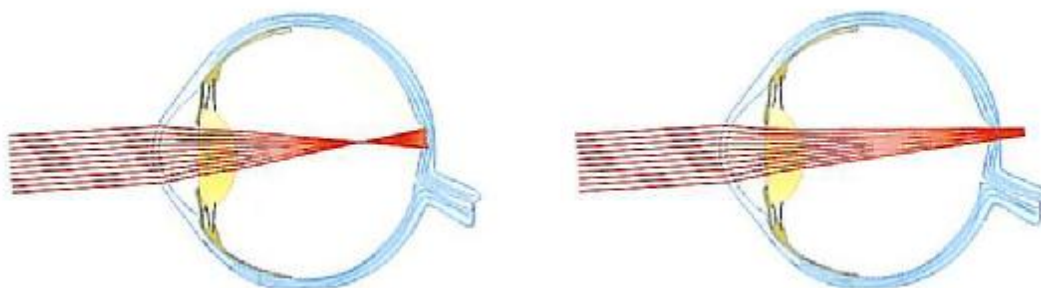
7.1 ΣΦΑΙΡΟΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Τα σφάλματα στον οφθαλμό προκαλούνται από διαταραχές στις οπτικές επιφάνειες, όπως ο κερατοειδής και ο κρυσταλλοειδής φακός. Ακόμα και σε υγιείς οφθαλμούς υπάρχουν διακυμάνσεις στην οπτική ισχύ κατά την εκτάση της κόρης. Ταυτόχρονα όμως υπάρχουν πολλοί μηχανισμοί για την αντιστάθμιση των σφαλμάτων: για παράδειγμα, η ίριδα λειτουργεί ως αυξομειούμενο διάφραγμα, αλλάζοντας το μέγεθος της κόρης, για αντιστάθμιση σφαιρικών σφαλμάτων, και το καμπύλο της επιφάνειας του αμφιβληστροειδή βοηθά στην αντιστάθμιση της κυρτότητας πεδίου. Όταν αυτοί οι παράγοντες είναι σωστά ισορροπημένοι, το φως εστιάζεται στον αμφιβληστροειδή σε ένα ευκρινές είδωλο. Ο οφθαλμός τότε λέγεται εμμετρικός.



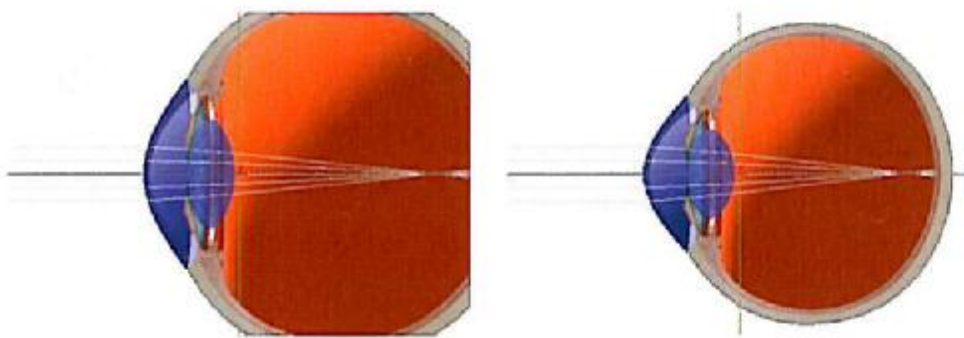
Εικόνα 50: Εμμετρικός και αμετρικός οφθαλμός. Γ. Ασημέλλης, *Οπτική και Υπερόραση*, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 7.4.1, εικόνα 7-4-1.

Στην αντίθετη περίπτωση όμως, που για οπτικούς λόγους δεν σχηματίζεται ευκρινές είδωλο, το πρόβλημα με μια λέξη, είναι η αμετροπία. Οι πιο απλές ανωμαλίες της όρασης είναι οι εκτοπές αφεστίασης, η μυωπία και η υπερμετροπία. Μυωπία εμφανίζεται όταν η οπτική ισχύς του οφθαλμού είναι πιο δυνατή απ' ότι χρειάζεται και η υπερμετροπία, όταν η διαθλαστική ισχύς του οφθαλμού είναι λιγότερη απ' ότι χρειάζεται. Έτσι, το είδωλο σχηματίζεται πριν ή μετά τον αμφιβληστροειδή αντίστοιχα. Αν θέλουμε να εκφράσουμε αυτό με τα πολυώνυμα Zernike, πρέπει να πούμε θετική αφεστίαση για μυωπία, και αρνητική αφεστίαση για την υπερμετροπία.



Εικόνα 51: Μυωπία και Υπερμετρωπία. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 7.4.1, εικόνα 7-4-2.

Όταν λόγω γήρανσης προκαλείται απώλεια της προσαρμογής του φακού εμφανίζεται πρεσβυωπία, και μπορεί να εμφανίζει μυωπία για μακρινή όραση και υπερμετρωπία για κοντινή. Το σφάλμα αφεστίασης οφείλεται σε ασυμμετρία μεταξύ της διαθλαστικής ισχύος του οφθαλμού και του αξονικού του μήκους. Διαχωρίζουμε την μυωπία και την υπερμετρωπία σε αξονική, όταν η διαθλαστική ισχύς είναι κανονική αλλά το μήκος του οφθαλμού μεγάλο ή μικρό αντίστοιχα, και διαθλαστική, όταν το μήκος του οφθαλμού είναι φυσιολογικό, αλλά η διαθλαστική ισχύς πολύ μεγάλη ή μικρή, αντίστοιχα. Οι μεγάλες μυωπίες είναι κυρίως αξονικές, αλλά συνήθως υπάρχουν και δύο αιτίες ταυτόχρονα, δηλαδή υπάρχει και ο διαθλαστικός και ο αξονικός παράγοντας.



Εικόνα 52: Αξονική και διαθλαστική μυωπία. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 7.4.1, εικόνα 7-4-3.

Αν και μιλάμε για οπτική ισχύ του οφθαλμού, ξέρουμε ότι η κύρια ισχύς οφείλεται στον κερατοειδή. Οι μεταβολές στην οπτική ισχύ του κρυσταλλοειδή φακού επηρεάζουν περισσότερο την προσαρμογή και σε λιγότερο βαθμό στην όποια αμετρωπία. Έτσι δεν είναι παράξενο που οι διαθλαστικές αποκλίσεις αποδίδονται στην εξωτερική επιφάνεια του κερατοειδή.

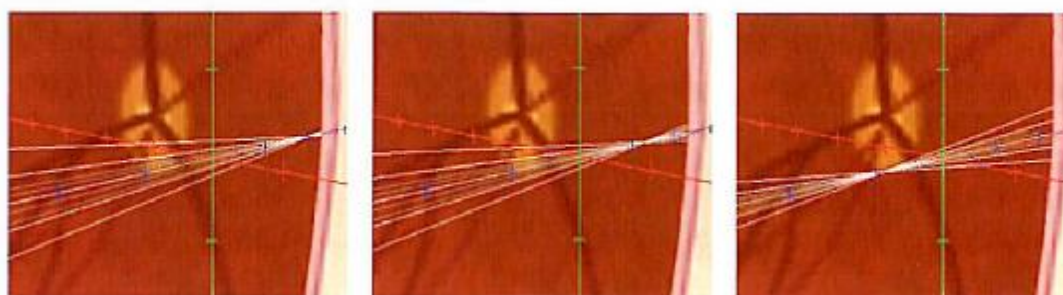
Η παραξονική ακτίνα καμπυλότητας του κερατοειδή μπορεί να πάρει τιμές από 7mm μέχρι 9mm. Τιμές που ξεπερνούν αυτά τα όρια

συναντάμαι στον κερατόκωνο (μέχρι 5 mm) και στην cornea plana (μέχρι 14mm). Τέτοιες τιμές προκαλούν πολύ μεγάλη μυωπία και υπερμετρωπία, αντίστοιχα. Αν εξαιρέσουμε όμως τις παθολογικές περιπτώσεις, η μεγάλη πλειοψηφία των μεγάλων μυωπιών και υπερμετρωπιών οφείλονται κυρίως στο υπερβολικά μεγάλο ή μικρό αντίστοιχα, μήκος του οφθαλμού.

Με τη μυωπία η δυσκολία εμφανίζεται κυρίως στην μακρινή όραση, μιας και το απώτερο σημείο για ευκρινή όραση πλησιάζει, από το άπειρο, που θεωρητικά βρίσκεται για ένα εμμετρωπικό οφθαλμό, πιο κοντά στον οφθαλμό. Η κοντινή όραση δεν έχει πρόβλημα, γιατί έτσι κι αλλιώς χρειαζόμαστε μεγαλύτερη οπτική ισχύ για ένα αντικείμενο που βρίσκεται πιο κοντά στον οφθαλμό, την οποία έχει ήδη ο μυωπικός οφθαλμός. Έτσι, με τη μυωπία ενεργοποιείται σε λιγότερο βαθμό η προσαρμογή και χρειαζόμαστε διόρθωση κυρίως για την μακρινή όραση.

Αντίθετα, με την υπερμετρωπία δεν βλέπουμε σωστά, ούτε κοντά, ούτε μακριά. Τόσο τα μακρινά, όσο και τα κοντινά αντικείμενα εστιάζονται πέρα από τον αμφιβληστροειδή. Βέβαια ο νέος σε ηλικία υπερμέτρωπας χρησιμοποιεί το διαθέσιμο εύρος της προσαρμογής του για να αντισταθμίσει την έλλειψη οπτικής ισχύος, και έτσι βλέπει κάπως καθαρά με αντίτιμο την κοπιωπία από την συνεχή λειτουργία του ακτινωτού μύ και των οφθαλμοκινητικών μυών. Αν, όμως, η υπερμετρωπία είναι μεγάλη, μπορεί το εύρος αυτό να μην αρκεί και να βλέπει πάντα θολά. Ο πρεσβύωπας υπερμέτρωπας όμως, δεν έχει πλέον διαθέσιμο εύρος προσαρμογής, οπότε τα πράγματα θολώνουν ενοχλητικά, θυμίζοντάς του συνέχεια ότι δεν είναι πια νέος.

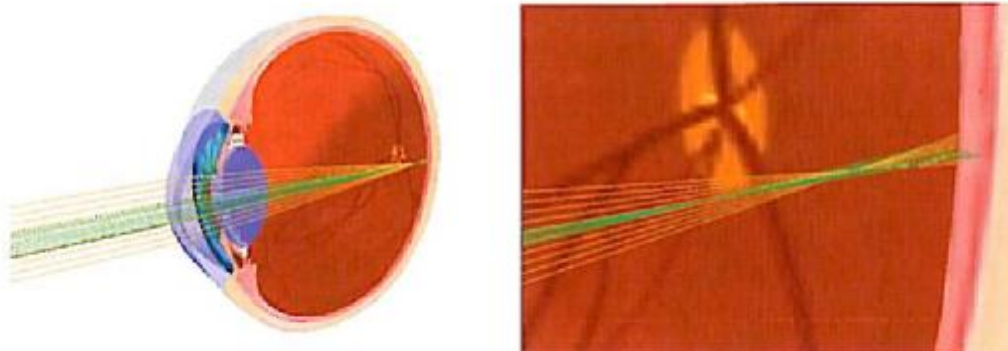
Ο βαθμός αφεστίασης είναι η διαφορά της εμμετρωπικής οπτικής ισχύος του οφθαλμού με την πραγματική, εκφρασμένη σε διοπτρίες. Επειδή ένας μύωπας έχει μεγαλύτερη οπτική ισχύ, ο βαθμός μυωπίας εκφράζεται σε αρνητικές διοπτρίες, ενώ ο βαθμός υπερμετρωπίας σε



Εικόνα 53: Ιχνηλάτηση ακτίνων για μυωπικό οφθαλμό με -1 dpt, -3 dpt και -10dpt. Γ.Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 7.4.1, εικόνα 7-4-4.

θετικές αντίστοιχα. Στην καθημερινή οφθαλμική πρακτική οι βαθμοί αυτοί συνταγογραφούνται ως σφαίρωμα ή σφαίρα, αρνητική για μυωπία και θετική για υπερμετροπία.

Επομένως, ένα ιδανικά επίπεδο μέτωπο κύματος εστιάζεται όχι σε ένα σημείο αλλά σε δύο κύριες εστιακές γραμμές, την τοξοτική και την εφαπτομενική εστία, σχηματίζοντας το κωνοειδές του Sturm. Ανάμεσα στις εστιακές γραμμές βρίσκεται ο κύκλος της ελάχιστης σύγχυσης.



Εικόνα 54: Ιχνηλάτηση ακτίνων σε σύνθετο μυωπικό αστιγματικό οφθαλμό με -3 dpt οριζόντιο και -2 dpt κατακόρυφο. Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 7.4.1, εικόνα 7-4-7.

Η συγκεκριμένη διαφορά στην οπτική ισχύ μπορεί να εμφανίζεται και σε πλάγιους μεσημβρινούς, και γι' αυτό μιλάμε για τον άξονα Α, δηλαδή τον προσανατολισμό του άξονα με την μικρότερη οπτική ισχύ. Η μεγαλύτερη διαφορά προστίθεται στον κάθετο σε αυτόν άξονα. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον αστιγματισμό σαν διαφορετικό βαθμό μυωπίας κατά μήκος δύο κάθετων μεταξύ τους αξόνων.

Σύμφωνα με τα πολυώνυμα Zernike ο αστιγματισμός διακρίνεται σε δύο συνιστώσες, μία με άξονα στις $45^\circ / 135^\circ$ και μία με άξονα στις $90^\circ / 180^\circ$.

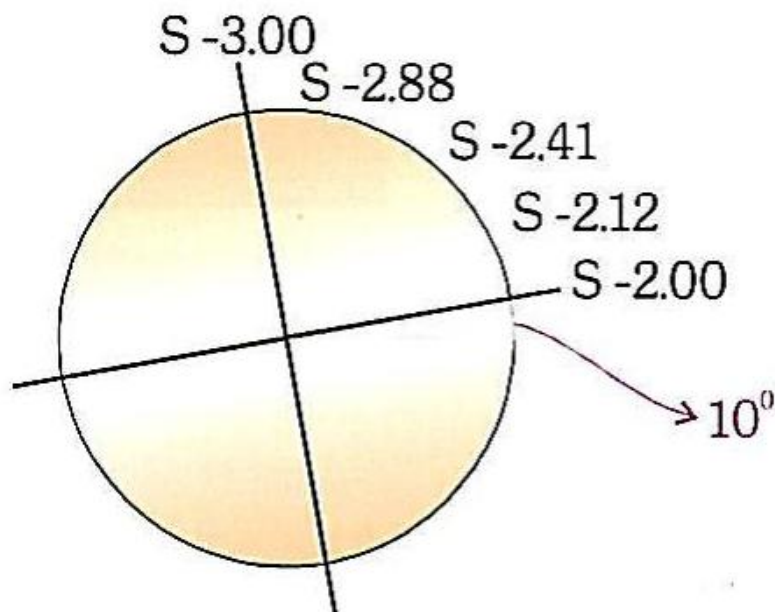
Ο πιο συχνός αστιγματισμός είναι αυτός όπου ο κατακόρυφος μεσημβρινός έχει την μεγαλύτερη οπτική ισχύ, και εμπειρικά ονομάστηκε «σύμφωνα με τον κανόνα». Αντίστοιχα ο αστιγματισμός στον οποίο ο μεσημβρινός με την μεγαλύτερη οπτική ισχύ είναι ο οριζόντιος, ονομάστηκε «παρά τον κανόνα» και είναι αρκετά πιο σπάνιος. Μπορεί να συναντήσουμε πλάγιους αστιγματισμούς στους οποίους οι κύριοι μεσημβρινοί δεν είναι οι άξονες των 90° και 180° . Ο αστιγματισμός προφανώς οφείλεται μόνο σε διαθλαστικούς λόγους και διακρίνεται κλινικά σε πέντε υποκατηγορίες:

- Απλός μυωπικός, όταν η μία εστιακή γραμμή βράσκει πάνω στον αμφιβληστροειδή και η άλλη μπροστά από αυτόν.

- Σύνθετος μυωπικός, όταν και οι δύο εστιακές γραμμές βρίσκονται μπροστά από τον αμφιβληστροειδή
- Απλός υπερμετρωπικός, όταν η μία εστιακή γραμμή βρίσκεται πάνω στον αμφιβληστροειδή και η άλλη πίσω από αυτόν.
- Σύνθετος υπερμετρωπικός, όταν και οι δύο εστιακές γραμμές βρίσκονται πίσω από τον αμφιβληστροειδή, και τέλος,
- Μεικτός, όταν η μία εστιακή γραμμή βρίσκεται μπροστά από τον αμφιβληστροειδή και η άλλη πίσω από αυτόν.

Στους υπερμετρωπικούς αστιγματισμούς τα φαινόμενα κοπιωπίας είναι παρόμοια με την υπερμετρωπία, καθώς ο εγκέφαλος αυτή την φορά προσπαθεί να φέρει τον κύκλο ελάχιστης σύγχυσης πάνω στον αμφιβληστροειδή. Η περίπτωση του μεικτού αστιγματισμού παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς αν ο αστιγματισμός δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλος και οι εστιακές γραμμές βρίσκονται εκατέρωθεν του αμφιβληστροειδή και η όραση είναι σχετικά καλή, με αποτέλεσμα να μην χρειάζεται ενεργοποίηση της προσαρμογής για την βελτίωση της ευκρίνειας του αμφιβληστροειδικού ειδώλου.

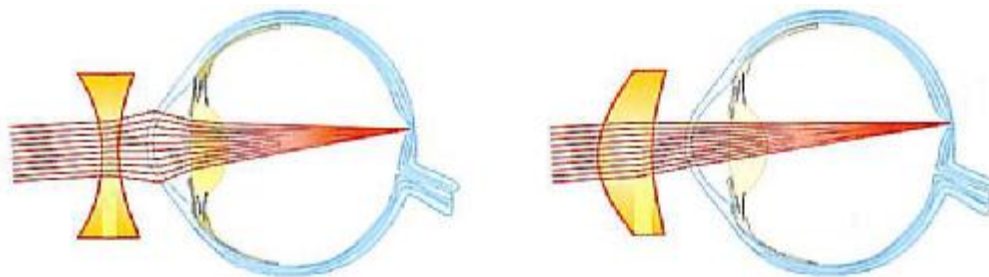
Μια τυπική συνταγή σε σύνθετο πλάγιο μυωπικό αστιγματισμό μπορεί να είναι της μορφής S-2.00 C-1.00 x 10°. Η διαθλαστική ισχύς αυξάνεται, από την τιμή -2 dpt κατά μήκος του άξονα, δηλαδή του μεσημβρινού που σχηματίζει 10° με τον οριζόντιο, έως -3dpt στο κάθετο στον άξονα μεσημβρινό.



Εικόνα 55: Κατανομή διαθλαστικής ισχύος σε συνταγή S-2.00 C-1.00 x 10°.

Αυτές οι χαμηλής τάξης εκτροπές, που λέγονται σφαιροκυλινδρικές, γιατί ακριβώς αντιμετωπίζονται σαν σφαιρικές ή κυλινδρικές αποκλίσεις, μπορούν να διορθωθούν με χρήση γυαλιών όρασης, κοινών φακών επαφής, ή συμβατική διαθλαστική χειρουργική. Συγκεκριμένα, για την μυωπία πρέπει να μειώσουμε την οπτική ισχύ του οφθαλμού, και αυτό γίνεται με ένα διαθλαστικό σύστημα που μειώνει την ισχύ του, έναν αποκλίνοντα αρνητικό φακό. Η υπερμετρωπία αντισταθμίζεται με ενίσχυση της ισχύος του με έναν συγκλίνοντα θετικό φακό. Ο αστιγματισμός αντισταθμίζεται με τους κατάλληλους κυλινδρικούς φακούς.

Η πρώτη καταγεγραμμένη μαρτυρία για την χρήση των γυαλιών αναφέρεται στον αυτοκράτορα Νέρωνα της Ρώμης, ο οποίος συνήθιζε να παρακολουθεί τους μονομάχους στην αρένα εφοδιασμένος με ένα σμαράγδι. Ο πολύτιμος αυτός λίθος είχε επεξεργαστεί στο σχήμα ενός αρνητικού φακού. Και από άλλες μαρτυρίες αποκαλύπτεται ότι ο Νέρωνας ήτανε μύωπας, καθώς έσφιγγε συχνά τα μάτια για να δει μακριά, κάτι που του είχε προκαλέσει έντονες ρυτίδες.



Εικόνα 56: Διορθώσεις σε μυωπία και υπερμετρωπία. Γ. Ασημέλλης, *Οπτική και Υπερόραση*, (Σύγχρονη Γνώση 2008), 7.4.1, εικόνα 7-4-9.

Η οφθαλμολογικές αυτές παθήσεις πλέον διορθώνονται με διαθλαστική χειρουργική. Συγκεκριμένα η σύγχρονη διαθλαστική χειρουργική διόρθωσης της όρασης χρησιμοποιεί την αλλήλεπίδραση excimer Laser με τον ιστό του κερατοειδή, για την σμίλευση της πρόσθιας επιφάνειάς του με τοπικές αποξύσεις.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, τα σφάλματα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Τα μονοχρωματικά και τα χρωματικά σφάλματα, όπου το καθένα έχει τις υποκατηγορίες του. Επομένως βλέπουμε το σφαιρικό σφάλμα, το σφάλμα κόμης, του αστιγματισμού, την καμπύλωση πεδίου, την παραμόρφωση ειδώλου και την εγκάρσια και διαμήκη χρωματική εκτροπή. Γνωρίζουμε πώς δημιουργούνται, γιατί δημιουργούνται αλλά ξέρουμε και τον τρόπο αντιμετώπισής τους. Η γνώση αυτή θεωρείται απαραίτητη στην οπτική για να αποφευχθούν όλα αυτά τα σφάλματα στην κατασκευή των οφθαλμικών φακών. Με αυτόν τον τρόπο οι κατασκευαστές των φακών γνωρίζουν τι πρέπει να κάνουν για την καλύτερη δυνατή όραση και οπτική οξύτητα. Στις μέρες μας, που το μεγαλύτερο ποσοστό του πληθυσμού χρησιμοποιεί γυαλιά εξαιτίας των διαφόρων εμμετροπιών, είναι πολύ σημαντικό τα γυαλιά να μας προσφέρουν μία ξεκούραστη αλλά και καθαρή όραση. Χωρίς την γνώση των σφαλμάτων τα γυαλιά όχι μόνο δεν θα μας βοηθούσαν αλλά ίσως και να μας δυσκόλευαν ακόμα περισσότερο.

9. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γ. Ασημέλλης, Οπτική και Υπερόραση, (Σύγχρονη Γνώση 2008).
- D. O' Shea, Elements of Modern Optical Design (John Wiley, 1985).
- D. Malacara, Handbook of Optical Design, (Marcel Dekker, New York, 2004).
- Robert D. Guenther, Modern Optics, (Duke University, United States of America, 1990).
- Ν. Παταργιάς, Φυσική (Μηχανική, Θερμοδυναμική, Κυματική-Οπτική, Σύγχρονη φυσική), (Μακεδονικές εκδόσεις, 2004).
- Γ. Ασημέλλης, Μαθήματα Οπτικής, (Σύγχρονη γνώση, 2006).
- http://en.wikipedia.org/wiki/Optical_aberration
- http://en.wikipedia.org/wiki/Chromatic_aberration
- <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/anatomy/aberrationhome.html>
- <http://toothwalker.org/optics/chromatic.html>
- el.wikipedia.org/wiki/Χρωματικό_σφάλμα
- Χ. Αναστόπουλος, Άσκηση 5 Εργαστηρίου Φυσικής τμήματος Οπτικής και Οπτομετρίας.
- Χ. Αναστόπουλος, Άσκηση 6 Εργαστηρίου Φυσικής τμήματος Οπτικής και Οπτομετρίας.