Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Υπεύθυνοι εργασίας:

Δημήτρης Βασιλαντωνόπουλος

Γεωργία Φούτση

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Ε. ΒΑΛΑΡΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

<u>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</u>

<u>ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u>

Τα Μαθηματικά διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στα Θεωρητικά και Εφαρμοσμένα.

Θεωρητικά Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης, οι οποίοι ασχολούνται με τη θεωρητική θεμελίωση, διερεύνηση και απόδειξη των νόμων (αξιωμάτων), στους οποίους στηρίζεται η Μαθηματική Επιστήμη.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων των διάφορων επιστημών (Αστρονομία, Μετεωρολογία, Οικονομική, Οικονομετρία, Στατιστική, Φυσική κ.τ.λ.), οι οποίοι θεμελιώνονται όχι μόνο στους δικούς τους νόμους αλλά και στους νόμους (αξιώματα) της Μαθηματικής Επιστήμης. Ένας από τους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είναι τα Οικονομικά Μαθηματικά όπως και η Στατιστική και η Οικονομική όπου γίνεται ανάλυση στα παρακάτω κεφάλαια.

Οικονομικά Μαθηματικά - Έννοια και Διάκριση αυτών

Συνέπεια της ευρύτατης χρήσης των Μαθηματικών στην Οικονομική Επιστήμη ήταν, πριν από λίγα χρόνια, η πλήρης διάσταση απόψεων σχετικά με τα όρια των Οικονομικών Μαθηματικών, της Μαθηματικής Οικονομικής, των Γενικών Μαθηματικών για Οικονομολόγους και της Οικονομετρίας. Σήμερα τέθηκαν κάποια σύνορα, τα οποία, όσο ασαφή και αμφιλεγόμενα και αν είναι, διευκολύνουν την ταξινόμηση της ύλης των Μαθηματικών των Οικονομικών Σχολών. Έτσι διακρίνουμε Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Οικονομικά Μαθηματικά.

Τα Μαθηματικά για Οικονομολόγους είναι Μαθηματικά γι' αυτούς που σπουδάζουν Οικονομικές Επιστήμες. Ο αντικειμενικός σκοπός των Μαθηματικών για Οικονομολόγους δεν είναι η σπουδή καθαρών Μαθηματικών αλλά η σπουδή της ποσοτικής μεταβολής των οικονομικών μεγεθών και η τεχνική της εξεύρεσης παραδεκτών λύσεων διαφόρων προβλημάτων της Οικονομικής Επιστήμης.

Τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και αποτελούν τη μαθηματική ανάλυση, η οποία εφαρμόζεται στα ζητήματα, στα οποία υπεισέρχεται ως βασικός παράγοντας το χρήμα.

Τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι τα Μαθηματικά των Οικονομικών πράξεων που υποδιαιρούνται σε δύο κλάδους:

α) Ο πρώτος κλάδος ασχολείται με προβλήματα, τα οποία δημιουργούνται στις τραπεζικές και χρηματοοικονομικές συναλλαγές. Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι το χρήμα και ο τόκος. Τα Μαθηματικά που ασχολούνται με τέτοια προβλήματα, ονομάζονται Τραπεζικά Μαθηματικά ή Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά.

β) Ο δεύτερος κλάδος ασχολείται με τα προβλήματα των διάφορων ασφαλιστικών οργανισμών και ονομάζονται Ασφαλιστικά ή Αναλογιστικά Μαθηματικά. Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι ο τόκος και η πιθανότητα πραγματοποιήσεως ορισμένων γεγονότων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1.1. ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

Ορισμός: Απλός τόκος είναι ένα σύστημα τοκισμού κατά το οποίο οι παραγόμενοι τόκοι στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου αποδίδονται στο δανειστή ή τίθενται εκτός παραγωγικής διαδικασίας και για την επόμενη χρονική περίοδο τοκίζεται μόνο το αρχικό κεφάλαιο και πάλι οι τόκοι που παράγονται αποδίδονται στο δανειστή και αυτό γίνεται συνεχώς μέχρι να τελειώσει η χρονική διάρκεια του τοκισμού.

Τα βασικά μεγέθη που συμμετέχουν σε κάθε πρόβλημα απλού τόκου είναι:

1. Το ποσό που δανείζεται, το οποίο ονομάζεται κεφάλαιο και συμβολίζεται με το γράμμα Κ και μετριέται με τη νομισματική μονάδα κάθε χώρας.
2. Η χρονική περίοδος, η οποία ονομάζεται χρόνος και συμβολίζεται με τα γράμματα n, μ, ν όταν ο χρόνος είναι αντίστοιχα έτη, μήνες, ημέρες.
3. Ο τόκος ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα Ι, είναι ομοειδές ποσό με το κεφάλαιο και μετριέται με την ίδια μονάδα.
4. Το επιτόκιο, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα i και συμβολίζει τον τόκο μιας νομισματικής μονάδας σε ένα έτος.

1.1.1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ

Από τον ορισμό του επιτοκίου προκύπτει, ότι το κεφάλαιο μιας νομισματικής μονάδας που τοκίζεται με επιτόκιο i, στο τέλος του πρώτου έτους παράγει τόκο I και τούτο θα συμβαίνει συνεχώς μέχρι τη λήξη του τοκισμού. Έτσι λοιπόν το κεφάλαιο της μίας νομισματικής μονάδας τοκιζόμενο επί n χρονικές περιόδους (έτη) με επιτόκιο i, θα αποδώσει I=n.i. Εάν το τοκιζόμενο κεφάλαιο είναι 2,3, ... κι νομισματικές μονάδες, τότε ο αντίστοιχος τόκος θα είναι 2.n.i, 3.n.i ... κ.λ.π. Εάν, τέλος το τοκιζόμενο κεφάλαιο είναι K, τότε ο παραγόμενος τόκος σε η χρονικές περιόδους με επιτόκιο i, θα είναι:

$$I=K\cdot n\cdot i \quad (1)$$

α) Ο χρόνος δίνεται σε μήνες.

Εάν μ είναι ο αριθμός των μηνών, τότε θα έχουμε $n=\frac{\mu}{12}$ και ο τύπος (1) γίνεται:

$$I=\frac{K\cdot\mu\cdot i}{12} \quad (1\alpha)$$

β) Ο χρόνος δίνεται σε ημέρες.

Εάν ν είναι ο αριθμός των ημερών, τότε θα έχουμε $n=\frac{\nu}{365}$ και ο τύπος (1) γίνεται:

$$I=\frac{K\cdot\nu\cdot i}{365} \quad (1\beta)$$

Το έτος των 365 ημερών, δηλαδή το πραγματικό έτος στα οικονομικά μαθηματικά ονομάζεται Πολιτικό Έτος. Για τον υπολογισμό του τόκου όταν ο χρόνος είναι ημέρες, χρησιμοποιείται ένας πλασματικός τύπος έτους, το λεγόμενο Εμπορικό Έτος, το οποίο αποτελείται από 12 μήνες των 30 ημερών ο καθένας, δηλαδή το έτος αυτό έχει 360 ημέρες. Και ο τύπος του τόκου με έτος εμπορικό, γίνεται:

$$I=\frac{K\cdot\mu\cdot I}{12} \quad (1\gamma)$$

Πέρα από το Εμπορικό Έτος, στην πράξη χρησιμοποιείται και ένα άλλο πλασματικό έτος, το λεγόμενο Μικτό Έτος, το οποίο αποτελείται από 360 ημέρες, όμως ο κάθε μήνας που έχει τον πραγματικό αριθμό ημερών (Ιανουάριος 31, Φεβρουάριος 28, κ.λ.π.). Ο τύπος που δίνει τον τόκο με έτος μικτό, είναι ο (1γ) και υπάρχει περίπτωση να έχει άλλη τιμή το ν, όταν το έτος είναι εμπορικό και άλλη όταν το έτος είναι μικτό.

Παραδείγματα

1ο) Πόσο τόκο θα λάβουμε εάν τοκίσουμε 620.000 δρχ. επί 72 ημέρες, με 9,5%; Έτος α) Πολιτικό β) Εμπορικό

ΛΥΣΗ:

α) Έτος Πολιτικό

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365} \Rightarrow I = \frac{620.000 \cdot 72 \cdot 0{,}095}{365} \Rightarrow I = 11.618$$

β) Έτος Εμπορικό

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow I = \frac{620.000 \cdot 72 \cdot 0{,}095}{360} \Rightarrow I = 11.780$$

Διαφορά μεταξύ Εμπορικού και πολιτικού έτους: 11.780-11.618=162 δρχ.

Παράδειγμα 2ο:

Επί πόσο χρόνο πρέπει να τοκίσουμε 200.000 δρχ. με επιτόκιο 13% για να λάβουμε συνολικό ποσό 350.000 δρχ.;

ΛΥΣΗ:

Τον χρόνο συνήθως τον υπολογίζουμε σε ημέρες, γιατί έχουμε ευκολότερα το αποτέλεσμα. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το εμπορικό έτος

I=350.000-200.000=150.000

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow \nu = \frac{I \cdot 360}{K \cdot i} \Rightarrow \nu = \frac{150.000 \cdot 360}{200.000 \cdot 0{,}13} \Rightarrow \nu = 2077 \text{ ημέρες.}$$

2077:360=5 έτη, υπόλοιπο 277 ημέρες.

277:30= 9 μήνες, υπόλοιπο 7 ημέρες.

Ζητούμενος χρόνος: 5 έτη, 9 μήνες και 7 ημέρες.

Παράδειγμα 3ο:

Με ποιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε 80.000 δρχ. για να λάβουμε μετά από 8 μήνες τόκο 12.000 δρχ.;

ΛΥΣΗ:

$$I = \frac{I \cdot \mu \cdot i}{12} \Rightarrow i = \frac{I \cdot 12}{K \cdot \mu} \Rightarrow i = \frac{12.000 \cdot 12}{80.000 \cdot 8} \Rightarrow i = 0{,}225 \text{ ή } i=22{,}5\%$$

1.1.2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στον απλό τόκο ονομάζουμε με τελική αξία κεφαλαίου που τοκίζεται επί n χρονικές περιόδους με επιτόκιο I, το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου που δημιουργήθηκε. Εάν παραστήσουμε με K το αρχικό κεφάλαιο και με Kn το τελικό κεφάλαιο, τότε θα έχουμε:

ή Kn=Ko+I ή Kn=Ko+Ko·n·i

$Kn = Ko(1 + n + i)$ (2) χρόνος, έτη.

$$Kn = Ko + \frac{K \cdot \nu \cdot i}{\Delta} \Rightarrow Kn = \frac{Ko \cdot \Delta + Ko \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow Kn = \frac{Ko \cdot (\Delta + \nu)}{\Delta} \qquad (2\alpha)$$

χρόνος, ημέρες.

Από τους τύπους (2) και (2α) μπορούμε να βρούμε το Ko συναρτήσει του Kn

$$\mathrm{K}o=\frac{Kn}{1+n\cdot i}\quad(2\beta)\qquad \mathrm{K}o=\frac{Kn\cdot\Delta}{\Delta+\nu}\quad(2\gamma)$$

1.1.3. ΕΥΡΕΣΗ ΕΛΑΤΤΩΜΕΝΟΥ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΤΟΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Υπάρχουν περιπτώσεις δανεισμού, όπου ο δανειστής ζητάει να κρατήσει προκαταβολικά τον τόκο που αναλογεί στο δανειζόμενο κεφάλαιο. Στην περίπτωση αυτή το τελικό κεφάλαιο, δηλαδή το ποσό που θα εισπράξει ο δανειζόμενος, είναι μικρότερο του αρχικού κεφαλαίου. Το τελικό αυτό κεφάλαιο το ονομάζουμε ελαττώμενο κατά τον τόκο κεφάλαιο.

$$Kn=\mathrm{K}o-\mathrm{I}\Rightarrow Kn=\mathrm{K}o-\mathrm{K}o\cdot n\cdot i\Rightarrow Kn=\mathrm{K}o(1-n\cdot i)\quad(3)\text{ χρόνος, έτη.}$$

$$Kn=\frac{\mathrm{K}o(\Delta-\nu)}{\Delta}\quad(3\alpha)\text{ χρόνος, ημέρες.}$$

Παράδειγμα: Τι ποσό πρέπει να δανειστεί κάποιος προς 12% για 6 ημέρες, έτσι ώστε αφού πληρώσει προκαταβολικά τον τόκο, να εισπράξει 441.000 δρχ.;

ΛΥΣΗ:

$$Kn=\frac{\mathrm{K}o(\Delta-\nu)}{\Delta}\Rightarrow \mathrm{K}o=\frac{Kn\cdot\Delta}{\Delta-\nu}\Rightarrow \mathrm{K}o=\frac{441.000-3.000}{3.000\cdot 60}\Rightarrow \mathrm{K}o=450.000\delta\rho\chi.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ένας έμπορος στο τέλος κάθε μήνα καταθέτει στην τράπεζα μηνιαίες εισπράξεις του όπως παρακάτω:

120.000 στις 30/5, 250.000 στις 30/6, 180.000 στις 30/7 και 230.000 στις 30/8. Στις 25/9 χρειάστηκε να αποσύρει τα χρήματα αυτά. Να βρεθεί ο τόκος που θα εισπράξει εάν ισχύει έτος μικτό και i=0,18 ετήσιο.

ΛΥΣΗ:

ΠΟΣΟ	από	μέχρι	Τοκοφόρες ημέρες	Τοκάριθμος
20.000	30/5	25/9	1+30+31+31+24=117	14.040.000
250.000	30/6	25/9	31+31+24=86	21.500.000
180.000	30/7	25/9	1+31+24=56	10.080.000
230.000	30/8	25/9	1+24=25	5.750.000
				51.370.000

Άρα $I = \dfrac{51.370.000}{2000} = 25.685$ αφού $\Delta = \dfrac{360}{0,18} = 2000$

2) Τι ποσό πρέπει να ζητήσει ως δάνειο ο «Α», δεδομένου ότι έχει ανάγκη 100.000 δρχ. για 6 μήνες, εάν έχει συμφωνήσει με τον πιστωτή του ότι του παρακρατήσει τους τόκους. Επιτόκιο i=0,20 έτος εμπορικό.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε K=100.000, i=0,20, n=6 μήνες

Άρα: $Ko = K\left(1-\dfrac{\nu}{\Delta}\right)$ ή $100.000 = K\left(1-\dfrac{180}{1.800}\right)$

$K = \dfrac{100.000 \cdot 1.800}{1.800-180} = 111.111 \delta\rho\chi.$

1.2. ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ

Βασικές έννοιες – ορισμοί:

Οι οικονομικές συναλλαγές γίνονται είτε με την καταβολή ολόκληρου του ποσού που προκύπτει από τη συναλλαγή είτε με πίστωση. Στην περίπτωση της πίστωσης ο πωλών έμπορος ή ο δανείζων χρήματα (τράπεζα, ιδιώτες), για την εξασφάλισή τους ότι θα λάβουν το οφειλόμενο ποσό, παίρνουν από τον αγοραστή ή το δανειζόμενο ένα έγγραφο με το οποίο ο τελευταίος αποδέχεται να πληρώσει το οφειλόμενο ποσό σε ορισμένη ημερομηνία. Τα πιο πάνω έγγραφα αποτελούν πιστωτικούς τίτλους, είναι τυποποιημένα και θεσμοθετημένα απ' το κράτος και ονομάζονται Γράμματα ή Συναλλαγματικές.

1.2.1. Μέθοδοι προεξόφλησης

Οι προεξοφλήσεις στις τρέχουσες εμπορικές συναλλαγές γίνονται απ' τις Τράπεζες, μπορεί όμως να γίνουν και από ιδιώτες. Αυτός που αποδέχεται να κάνει την προεξόφληση κρατάει τόκο για χρόνο, από την ημερομηνία της προεξόφλησης μέχρι την ημερομηνία της λήξης με το επιτόκιο που ισχύει στην αγορά για τις προεξοφλήσεις και καταβάλλει στον κομιστή το υπόλοιπο το οποίο είναι η παρούσα αξία του τίτλου. Ο τόκος που καταβάλλεται κατά την προεξόφληση ονομάζεται προεξόφλημα. Εάν για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος πάρουμε ως κεφάλαιο την ονομαστική αξία του τίτλου, τότε η προεξόφληση ονομάζεται εξωτερική και το προεξόφλημα που προκύπτει εξωτερικό, το οποίο το συμβολίζουμε με το Ε.

Εάν για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος πάρουμε ως κεφάλαιο την παρούσα αξία του τίτλου τότε η προεξόφληση ονομάζεται εσωτερική και το αντίστοιχο προεξόφλημα εσωτερικό το οποίο το συμβολίζουμε με το Ε1.

Τα βασικά μεγέθη σε κάθε προεξόφληση είναι η ονομαστική αξία, η παρούσα αξία και προεξόφλημα τα οποία συνδέονται με τη σχέση:

$\boxed{\text{Ονομαστική αξία} = \text{Παρούσα αξία} + \text{Προεξόφλημα}}$ (1)

Εάν η προεξόφληση είναι εξωτερική και καλέσουμε με Κ την ονομαστική αξία, Α την παρούσα και Ε το προεξόφλημα, τότε η σχέση (1) γίνεται:

$K = A + E$ (1α)

Εάν η προεξόφληση είναι εσωτερική Κ, είναι η ονομαστική αξία, Α1, η παρούσα, Ε1 το εσωτερικό προεξόφλημα, τότε η σχέση (1) γίνεται:Κ=Α1+Ε1 (1β).

1.2.2 Υπολογισμός του προεξοφλήματος

α) Εξωτερικά

Έστω ότι έχουμε μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας Κ η οποία προεξοφλείται ν ημέρες πριν τη λήξη της με επιτόκιο i, τότε το εξωτερικό προεξόφλημα που θα προκύψει είναι:

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{K} \cdot \nu \cdot \iota}{360} \quad \text{ή} \quad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{K} \cdot \nu}{\Delta} \quad (2)$$

β) Εσωτερικά

Εάν έχουμε μια συναλλαγματική η οποία έχει παρούσα αξία Α1 η οποία προεξοφλείται ν ημέρες πριν τη λήξη της με επιτόκιο i, τότε το εξωτερικό προεξόφλημα, θα είναι: $\mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{A}_1 \cdot \nu}{\Delta}$ (3)

Ο τύπος (3) δεν είναι εφαρμόσιμος στην πράξη γιατί το Ε1 και Α1 την χρονική στιγμή που επιχειρούμε την προεξόφληση είναι άγνωστο. Έτσι λοιπόν εκφράζουμε το Α1 συναρτήσει του Κ το οποίο είναι γνωστό μέγεθος έχουμε:

Από $\mathrm{K} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{E}_1 \Rightarrow \mathrm{A}_1 = \mathrm{K} - \mathrm{E}_1$, και η (3) γίνεται:

$$\mathrm{E}_1 = \frac{(\mathrm{K} - \mathrm{E}_1) \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow \mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{K} \cdot \nu - \mathrm{E}_1 \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow (\Delta + \nu) \cdot \mathrm{E} = \mathrm{K} \cdot \nu \text{ και } \mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{K} \cdot \nu}{\Delta + \nu} \quad (3\alpha)$$

Ο ορθός τρόπος προεξόφλησης είναι εσωτερικά. Παρά ταύτα, η προεξόφληση στην Ελλάδα και διεθνώς στην πράξη γίνεται εξωτερικά και αυτό διότι: α) ο χρόνος προεξόφλησης είναι πολύ μικρός, το πολύ μέχρι 90-100 ημέρες, οπότε διαφορά μεταξύ εξωτερικού και εσωτερικού προεξοφλήματος είναι ασήμαντη, αμελητέα στην πράξη β) Ο προεξοφλών (τράπεζα, ιδιώτης) είναι ο οικονομικά ισχυρός κατά τη συναλλαγή και επιβάλλει την μέθοδο που τον συμφέρει.

Η διαφορά μεταξύ των δύο προεξοφλημένων είναι:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} - \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} = \frac{K \cdot \nu(\Delta + \nu) - K \cdot \nu \cdot \Delta}{\Delta \cdot (\Delta + \nu)} \Rightarrow E - E_1 = \frac{K \cdot \nu^2}{\Delta \cdot (\Delta + \nu)} \quad (4)$$

Παράδειγμα 1^{o}:

Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 85.000 δρχ. που λήγει την 15$^{\eta}$ Μαΐου προεξοφλείται την 14 Φεβρουαρίου του ίδιου έτους με 12%. Να υπολογισθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα. Έτος μικτό

ΛΥΣΗ:

α) Εξωτερικά

Υπολογισμός ημερών: Φεβρ14+Μαρ31+Απρ30+Μάϊος15=90 ημέρες.

$$\Delta = \frac{360}{0,12} = 3.000$$

$$E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{85.000 \cdot 90}{3.000} = 2.550 \delta\rho\chi.$$

β) Εσωτερικά

$$E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} \Rightarrow E_1 = \frac{85.000 \cdot 90}{3.000 + 90} = 2.476 \delta\rho\chi.$$

E-E1=2.550-2.476=74 δρχ.

Παράδειγμα 2^{o}:

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 180.000 δρχ. που λήγει την 10 Σεπτεμβρίου προεξοφλήθηκε εξωτερικά την 17 Ιουλίου του ίδιου έτους και εισέπραξε ο κομιστής 177.080 δρχ. Να ευρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση. Έτος μικτό $\nu = 14 + 31 + 20 = 65$ ημέρες

$$E = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow i = \frac{360 \cdot E}{K \cdot \nu} \Rightarrow i = \frac{360 \cdot 2.920}{180.000 \cdot 65} = 0,09 \text{ ή } I=9\%$$

Παράδειγμα 3^{o}:

Να βρεθεί η παρούσα αξία γραμματίου ονομαστικής αξίας 240.000 δρχ. το οποίο προεξοφλήθηκε 45 ημέρες πριν τη λήξη του προς 8%. Προεξόφληση

α) εξωτερική και β) Εσωτερική. Έτος Εμπορικό.

ΛΥΣΗ:

α) Εξωτερικά

$$\Delta = \frac{360}{0,08} = 4.500$$

$$E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{240.000 \cdot 45}{4.500} = 2.400$$

$$A = K - E \Rightarrow A = 240.000 - 2.400 \Rightarrow A = 237.600$$

β) Εσωτερικά

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} \Rightarrow E_1 = \frac{240.000 \cdot 45}{4.500 + 45} \Rightarrow E_1 = 2.376$$

$$A = K - E_1 \Rightarrow A_1 = 240.000 - 2.376 \Rightarrow A_1 = 237.624$$

Παράδειγμα 4^{o}:

Να βρεθεί η ονομαστική και η παρούσα αξία συναλλαγματικής, εξωτερικά και εσωτερικά, η οποία προεξοφλήθηκε 45 ημέρες πριν την λήξη της προς 8% και έδωσε διαφορά προεξοφλημάτων 8 δρχ.

ΛΥΣΗ:

$$\Delta = \frac{360}{0,08} = 4.500$$

$$E - E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta(\Delta + \nu)} \Rightarrow 8 = \frac{K \cdot 45^2}{4.500(4.500 + 45)} \Rightarrow 8 = \frac{K \cdot 2.025}{2.045 \cdot 2.500} \Rightarrow K = \frac{2.045 \cdot 2.500 \cdot 8}{2.025} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K = 80.800 \delta\rho\chi.$$

$$E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{80.800 \cdot 45}{4.500} = 808 \delta\rho\chi.$$

$A=K-E \Rightarrow A=80.800-808=79.992$

$E-E_1=8 \Rightarrow E_1=E-8 \Rightarrow E_1=808-8=800$ δρχ.

$A_1=K-E_1 \Rightarrow A_1=80.800-800=80.000$

1.2.3 Προεξόφληση μετά εξόδων

Κατά την προεξόφληση των γραμματίων και των συναλλαγματικών από τις τράπεζες, αυτές δεν κρατούν μόνο τον τόκο, δηλαδή το προεξόφλημα, αλλά πέραν αυτού κρατούν και άλλα ποσά τα οποία είναι τα εξής: α) Προμήθεια η οποία είναι αποζημίωση της τράπεζας για τις υπηρεσίες που σου προσφέρει, β) Έξοδα που θα δημιουργηθούν κατά την προεξόφληση γ) Χαρτόσημο, το οποίο είναι έσοδο του Κράτους, το οποίο εισπράττει η τράπεζα για λογαριασμό του.

Η προμήθεια υπολογίζεται σε ποσοστά εφάπαξ ή κατά μήνα επί της ονομαστικής αξίας του τίτλου. Τα έξοδα εάν υπάρχουν, υπολογίζονται σε ποσοστά επί της ονομαστικής αξίας του τίτλου εφάπαξ (μία φορά). Το χαρτόσημο υπολογίζεται με βάση τον τρόπο που ορίζει το Υπουργείο Οικονομικών. Αυτή η προεξόφληση όπου κρατούνται και άλλα ποσά ονομάζεται προεξόφληση μετά εξόδων.

1.2.4 Υπολογισμός της παρούσας αξίας

Εάν Θ% είναι η προμήθεια, Ε%, τα έξοδα και χ το χαρτόσημο σε μία προεξόφληση μετά εξόδων, τότε η παρούσα αξία θα είναι:

α) Εξωτερικά

$A = K - E - \Theta - \varepsilon - \chi$ ή

$$A = K - \frac{K \cdot \nu}{\Delta} - \frac{K \cdot \Theta}{100} - \frac{K \cdot E}{100} - \chi \Rightarrow A = K\left(1 - \frac{\nu}{\Delta} - \frac{\Theta + \varepsilon}{100}\right) - \chi \quad (1)$$

β) Εσωτερικά

$$A_1 = K - \frac{K\nu}{\Delta + \nu} - \frac{K\Theta}{100} - \frac{K\varepsilon}{100} - \chi \Rightarrow A_1 = K\left(1 - \frac{\nu}{\Delta + \nu} - \frac{\Theta + \Sigma}{100}\right) - \chi$$

Αν λύσουμε τους τύπους (1) και (2) ως προς Κ τότε βρίσκουμε την ονομαστική αξία συναρτήσει της παρούσας σε μία προεξόφληση μετά εξόδων.

Παράδειγμα 1°:

Συναλλαγματική 80.000 δρχ. προεξοφλείται προς 9%, 70 ημέρες πριν τη λήξη της κατά την προεξόφληση, πέραν του προεξοφλήματος, κρατήθηκαν:

α) προμήθεια 0,25% για κάθε μήνα και ολόκληρο μήνα β) έξοδα 0,5% εφάπαξ και χαρτόσημο 400 δρχ. Να βρεθεί το καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο κομιστής αν η προεξόφληση έγινε α) εξωτερικά β) εσωτερικά. Έτος εμπορικό.

ΛΥΣΗ:

Το «για κάθε μήνα και ολόκληρο μήνα» σημαίνει ότι ο χρόνος για τον υπολογισμό της προμήθειας στρογγυλοποιείται προς τα άνω και γίνεται ακέραιος αριθμός μηνών. Δηλαδή οι 70 ημέρες για την προμήθεια γίνονται 3 μήνες και με τον αριθμό των μηνών θα πολλαπλασιαστεί η προμήθεια.

α) Εξωτερικά

$$A = K \cdot 1 - \frac{\nu}{\Delta} - \frac{\Theta + E}{100} - \chi \Rightarrow A = 80.000\left(1 - \frac{70}{4.000} - \frac{0{,}25 \cdot 3 + 0{,}5}{100}\right) - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 80.000\left(1 - \frac{4.000 - 70}{4.000} - \frac{1{,}25}{100}\right) - 400 = 80.000 \cdot \left(\frac{3.930 - 50}{4.000}\right) - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 77.600 - 400 = 77.200\delta\rho\chi.$$

β) Εσωτερικά

$$A_1 = K \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\Delta + \nu} - \frac{\Theta + E}{100}\right) - \chi \Rightarrow A_1 = 80.000\left(1 - \frac{70}{4.000 + 70} - \frac{0{,}25 \cdot 3 + 0{,}5}{100}\right) - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = 80.000(1 - 0{,}0171 - 0{,}0125) - 400 = 77.632 - 400 = 77.232\delta\rho\chi.$$

1.2.5. Πραγματικό επιτόκιο

Κατά την προεξόφληση μετά εξόδων η κράτηση της προμήθειας, εξόδων και χαρτοσήμου αυξάνει στην ουσία το επιτόκιο και έτσι διαμορφώνονται ένα νέο επιτόκιο το οποίο ονομάζεται πραγματικό επιτόκιο, το οποίο εκφράζει όλα τα ποσά που κρατήθηκαν κατά την προεξόφληση. Έτσι λοιπόν εάν θέλουμε να γνωρίζουμε πόσο πραγματικά μας στοίχισε μια προεξόφληση μετ' εξόδων πρέπει να υπολογίσουμε το πραγματικό επιτόκιο, το οποίο υπολογίζετ αι μετά το πέρας της προεξόφλησης. Το γενικό πρόβλημα που τίθεται στην προκειμένη περίπτωση είναι: Με ποιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε ποσό Α επί ν ημέρες για να λάβουμε τόκο Κ-Α.

Έστω ζ το ζητούμενο επιτόκιο (πραγματικό), τότε θα έχουμε:

$$K - A = \frac{A \cdot \nu \cdot \zeta}{360} \Rightarrow \zeta = \frac{360(K - A)}{A \cdot \nu} \quad (1)$$

Στο πιο πάνω παράδειγμα προεξόφλησης μετά εξόδων έχουμε K =80.000, A=77.200 και v=70 ημέρες και το πραγματικό επιτόκιο θα είναι:

$$\zeta = \frac{360(K - A)}{A \cdot \nu} \Rightarrow \zeta = \frac{360(80.000 - 77.200)}{77.200 \cdot 70} = 0{,}186 \text{ ή } \zeta = 18{,}6\%$$

1.3. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Ο ανατοκισμός είναι το σύστημα του τοκισμού κατά το οποίο ο παραγόμενοι στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου τόκοι προστίθενται στο υπάρχον κεφάλαιο και μαζί με αυτό τοκίζονται για την αμέσως επόμενη χρονική περίοδο και αυτό συμβαίνει συνεχώς μέχρι να τελειώσει η χρονική διάρκεια του τοκισμού.

1.3.1. Εύρεση της τελικής αξίας κεφαλαίου που τοκίζεται με ανατοκισμό

Έστω ότι έχουμε κεφάλαιο Ko και τοκίζεται με ανατοκισμό προς επιτόκιο i, και θέλουμε να βρούμε ποια θα είναι η τελική αξία Kn που θα αποκτήσει μετά από έτη.

Έτσι: το αρχικό κεφάλαιο Ko τοκιζόμενο με επιτόκιο ι στο τέλος του πρώτου έτους θα αποδώσει τόκο Ko·i και το τελικό κεφάλαιο στο τέλος του πρώτου έτους θα είναι:

K_1=Ko+Ko·ι ⇔ K1=Ko (1+1)

Την δεύτερη χρονική περίοδο το K_1 θα τοκιστεί και θα δώσει τόκο Ko (1+i) · ι και έτσι η τελική αξία του K_2 στο τέλος του δεύτερου έτους θα είναι:

K_2=Ko(1+ι)+Ko(1+ι) ·ι ⇔ K_2=Ko(1+ι) (1+ι) ⇔ K_2=Ko $(1+ι)^2$

Κατά τον ίδιο τρόπο λοιπόν βρίσκουμε την τελική αξία Kn στα η έτη και θα είναι:

Kn=Ko $(1+I)^n$ (1)

Παράδειγμα:

Καταθέτει κάποιος σε μια τράπεζα 100.000 € με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 0,06. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου μετά 10 χρόνια.

ΛΥΣΗ:

Ko =100.000 i=0,06 n=10 χρόνια

άρα από τύπο (1) έχουμε:

Kn=100.000 $(1+0,06)^{10}$=100.000 · 1,790878=179.088

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για την πρακτική λύση των προβλημάτων ανατοκισμού χρησιμοποιούνται οι οικονομικοί πίνακες με την χρήση των οποίων, βρίσκουμε γρήγορα τα ζητούμενα. Συγκεκριμένα από τους πίνακες αυτούς παίρνουμε έτοιμη την τιμή της παράστασης $(1+ι)^n$

1.3.2. Εύρεση της τελικής αξίας όταν ο χρόνος είναι έτη και μήνες

Εάν έχουμε ένα κεφάλαιο Ko που ανατοκίζεται με επιτόκιο 1 $n+\frac{\mu}{12}$

για χρόνο

(1) $Kn = \mathrm{K}o(1+\iota)^n$ γίνεται: $Kn = \mathrm{K}o(1+\iota)^{n+\frac{\mu}{12}}$ (2)

ΑΣΚΗΣΗ

Κεφάλαιο 30.000 € κατατίθεται με ανατοκισμό προς 9%. Να βρεθεί το ποσό που θα δημιουργηθεί μετά από 9 έτη και 5 μήνες.

ΛΥΣΗ

$$Kn = \mathrm{K}o(1+\iota)^{n-\frac{\mu}{12}} \Leftrightarrow Kn = 30.000(1+0{,}09)^{9+\frac{5}{12}} \Leftrightarrow Kn = 30.000(1+0{,}09)^{5/12}$$

(τις τιμές (1+0,09) ή $(1+0{,}09)^{5/12}$ τις παίρνουμε από τους πίνακες)

⇔ Kn =30.000 · 2,17189 · 1,03655 ⇔ Kn =67.538.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ποιο κεφάλαιο πρέπει να τοκίσουμε με ανατοκισμό προς 7% ώστε να γίνει αυτό σε 9 έτη και 7 μήνες 800.000 €;

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο Kn =Ko $(1+\iota)^n$ λύνουμε ως προς Ko και έχουμε:

$$Kn = \mathrm{K}o(1+\iota)^n \Rightarrow \mathrm{K}o = \frac{Kn}{(1+\iota)^n}$$

Άρα

$$\mathrm{K}o = \frac{Kn}{(1+\iota)^{n+\frac{\mu}{12}}} = \frac{Kn}{(1+\iota)^n(1+\iota)^{m/12}} = \frac{800.000}{(1+0{,}07)^9(1+0{,}07)^{7/12}} = \frac{800.000}{1{,}83845 \cdot 1{,}04025} = 4.527.$$

729 €

1.3.3. Εύρεση του επιτοκίου

Το επιτόκιο το υπολογίζουμε με την βοήθεια του τύπου Kn= Ko $(1+\iota)^n$ και λύνουμε ως προς $(1+\iota)^n$ έχουμε:

$$Kn = Ko(1+\iota)^n \Rightarrow \frac{Kn}{Ko} = (1+\iota)^n$$

Ο υπολογισμός του επιτοκίου $(1+\iota)^{n}$ γίνεται από τους πίνακες που προαναφέραμε.

1.3.4. Ανάλογα και ισοδύναμα επιτόκια

Για να λυθεί ένα πρόβλημα είτε με το σύστημα του απλού τόκου είτε με τον ανατοκισμό πρέπει η χρονική περίοδος παραγωγής του τόκου του συγκεκριμένου προβλήματος να συμπίπτει με την χρονική περίοδο του επιτοκίου.

Εάν αυτό δεν συμβαίνει τότε θα πρέπει το επιτόκιο, το οποίο εξ ορισμού έχει χρονική περίοδο το έτος, να αναχθεί στην χρονική περίοδο παραγωγής του τόκου του υπόψη προβλήματος. Η αναγωγή αυτή για τα προβλήματα του απλού τόκου γίνεται μέσο των αναλόγων επιτοκίων και για τα προβλήματα του ανατοκισμού μέσω των ισοδύναμων επιτοκίων.

1.3.4.1. Ανάλογα επιτόκια

Για ν' ανοιχθεί ένα ετήσιο επιτόκιο σε ανάλογο που αναφέρεται σε χρονική περίοδο μικρότερη του έτους αρκεί να διαιρεθεί το επιτόκιο τούτο δια του αριθμού της εντός του έτους περιόδων παραγωγής του τόκου και το πηλίκο δίνει ανάλογο επιτόκιο που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη περίοδο παραγωγής του τόκου. Παράλληλα πολλαπλασιάζουμε τον δοθέντα χρόνο επί του αριθμού των περιόδων που μέσα στο έτος γίνεται ο τοκισμός και έτσι βρίσκουμε το πλήθος των περιόδων τοκισμού.

Παράδειγμα:

Τι τόκο μας δίνει κεφάλαιο 150.000 € που τοκίστηκε με 12% επί 3 έτη.

ΛΥΣΗ:

α) περίοδος παραγωγής του τόκου το έτος

$I=150.000 \cdot 3 \cdot 0,12 = 54.000$

β) περίοδος παραγωγής του τόκο το εξάμηνο

$I=150.000 \cdot 6 \cdot 0,06 = 54.000$

γ) περίοδος παραγωγής του τόκου το τετράμηνο

$I=150.000 \cdot 9 \cdot 0,04 = 54.000$

1.3.4.2. Ισοδύναμα επιτόκια και υπολογισμός τους

Δυο επιτόκια θα είναι ισοδύναμα όταν αντιστοιχούν μεν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους παραγωγής του τόκου, δίνουν όμως την ίδια τελική αξία σε ένα κεφάλαιο που ανατοκίζεται για το ίδιο χρονικό διάστημα.

Υπολογισμός του ισοδύναμου επιτοκίου:

Έστω ότι μια νομισματική μονάδα τοκίστηκε με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο i. Τότε στο τέλος του έτους θα δώσει τόκο ι και η τελική της αξία θα είναι 1+i. Έστω $ι_μ$ είναι το ζητούμενο ισοδύναμο επιτόκιο του ετήσιου ι, όπου μ ο είναι ο αριθμός των περιόδων που μέσα στο έτος γίνεται ο ανατοκισμός. Εάν ανατοκίσουμε τη νομισματική μονάδα με το επιτόκιο $ι_μ$ μ φορές μέσα στο έτος θα λάβουμε τελική αξία $(1+ ι_μ)^μ$.

Επειδή όμως τα επιτόκια ι και $ι_μ$ είναι ισοδύναμα δίνουν ίσες τελικές αξίες ισχύει:

$$1+ι = (1+ ι_μ)^μ \quad (2)$$

Από την εξίσωση (2) μπορούμε να υπολογίσουμε το $ι_μ$ συναρτήσει του ι ή και αντίστροφα:

$$\iota_\mu = \sqrt[\mu]{1+\iota} - 1 \qquad (2\alpha)$$

$$\iota = (1 \quad +\iota)^{\mu} - 1 \qquad (2\beta)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται ετήσιο επιτόκιο 9%. Να υπολογισθεί το ισοδύναμο εξαμηνιαίο και τριμηνιαίο.

ΛΥΣΗ:

α) εξαμηνιαίο

$$\mu = \frac{12}{6} = 2$$

$$i^2 = \sqrt[2]{1+0{,}09} - 1 = (1+0{,}09)^{1/2} - 1 = (1+0{,}09)^{6/12} - 1 = 1{,}0440 - 1 = 0{,}044 = 4{,}4\%$$

(χρήση πινάκων)

β) τριμηνιαίο

$$\mu = \frac{12}{3} = 4$$

$$i^4 = \sqrt[4]{1+0{,}09} - 1 = (1+0{,}09)^{1/4} - 1 = (1+0{,}09)^{3/12} - 1 = 1{,}0217 - 1 = 0{,}0217 = 2{,}17\%$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται τετραμηνιαίο επιτόκιο 3%. Να υπολογιστεί το ετήσιο ισοδύναμο.

ΛΥΣΗ:

$$\mu = \frac{12}{4} \quad I = (1+\mu^{\mu})^{\mu} - 1 = (1+0{,}03)^3 - 1 = 1{,}0927 - 1 = 0{,}0927 = 9{,}27\%$$

1.3.5. Προεξόφληση με ανατοκισμό

Ονομάζουμε προεξόφληση με ανατοκισμό τη διαφορά της ονομαστικής αξίας ενός γραμματίου μείον την παρούσα αξία. Εάν Kn είναι η ονομαστική αξία ενός γραμματίου που λήγει μετά χρόνο η, ι το επιτόκιο προεξόφλησης και Ko η παρούσα αξία, τότε έχουμε:

$Kn = Ko\,(1+\iota)^{n}$ και $Ko = Kn\,(1+\iota)^{-n}$

Και το προεξόφλημα Ε είναι:

$E = Kn - Ko \Rightarrow E = -\,Kn\,(1+\iota)^{-n} \Rightarrow E = Kn\,[1-(1+\iota)^{-n}]$

ΑΣΚΗΣΗ

Γραμμάτιο 300.000 που λήγει μετά από 7 έτη, προεξοφλείται σήμερα προς 6%. Πόσο το προεξόφλημα που καταβλήθηκε;

ΛΥΣΗ:

$E = Kn\ [1-(1+\iota)^{-n}] = 300.000\ [1-(1+0,06)^{-7}] = 300.000\ (1-0,66505) =$

$= 300.000 \cdot 0,33495 = 100.485$

ΑΣΚΗΣΗ

Κατάθεσε κάποιος ποσό 150.000 € με ανατοκισμό και με επιτόκιο 6,5%. Μετά από 5 έτη και 8 μήνες απέσυρε 700.000 € και τα υπόλοιπα τα άφησε ακόμη 4 έτη και 5 μήνες, με τους ίδιους όρους. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει στο τέλος του ανατοκισμού;

ΛΥΣΗ:

Καταρχάς θα βρούμε το κεφάλαιο που θα πάρει από τα 700.000 € που απέσυρε μετά από 5 έτη και 8 μήνες.

Σύμφωνα με τον τύπο έχουμε:

$$Kn = Ko(1+i)^{\nu-\frac{\mu}{12}} \Rightarrow Kn = 700.000(1+0{,}065)^{5+\frac{8}{12}} \Rightarrow Kn = 700.000(1+0{,}065)^{5}(1+0{,}065)^{\frac{8}{12}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Kn = 700.000(1,37008)(1,042876) $\Rightarrow$ Kn=999.612 € (α)

Το ίδιο κάνουμε για τα υπόλοιπα 800.000 € που θα αποσύρει μετά από 4 έτη και 5 μήνες.

$$Kn = Ko(1+i)^{\nu-\frac{\mu}{12}} \Rightarrow Kn = 800.000(1+0{,}065)^{4+5/12} \Rightarrow Kn = 800.000(1+0{,}065)^{4}(1+0{,}065)^{5/12} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Kn =800.000(1,28646)(1,02655) $\Rightarrow$ Kn =1.056.492 € (β)

Από (α) + (β) το κεφάλαιο που θα εισπράξει στο τέλος και είναι: 1.056.492 + 999.612=2.056.104.

1.4. ΔΑΝΕΙΑ

Όταν ένα κράτος, ένας οργανισμός, μια επιχείρηση ή ένας ιδιώτης έχει ανάγκη κεφαλαίων, τότε συμφωνεί, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, να συνάψει δάνειο με κάποια τράπεζα. Η εξόφληση τα δανείου γίνεται με την καταβολή του κεφαλαίου που δανείστηκε μαζί με τους τόκους που παρήγαγε κατά την περίοδο δανεισμού.

Τα δάνεια ανάλογα με την χρονική τους διάρκεια διακρίνονται σε Βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα. Τα Βραχυπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται με απλό τόκο, ενώ τα μακροπρόθεσμα συνάπτονται με ανατοκισμό. Εάν ο δανειστής είναι ένας, τότε το δάνειο λέγεται ενιαίο, ενώ όταν είναι πολλοί λέγεται ομολογιακό. Ένα δάνειο λέγεται πάγιο, όταν ο οφειλέτης υποχρεούται στο τέλος κάθε περιόδου να καταβάλλει τους παραχθέντες τόκους στην περίοδο αυτή, μπορεί όμως, να εξοφλήσει το δάνειο όποτε θελήσει.

Ένα δάνειο λέγεται εξοφλητέο, όταν οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει το δάνειο στο τέλος μιας ορισμένης χρονικής περιόδου.

Απόσβεση δανείου λέγεται το σύνολο των υποχρεώσεων που αναλαμβάνονται και των πράξεων που γίνονται για την εξόφληση του δανείου.

- Όταν δεν συνίσταται εξοφλητικό απόθεμα και οι τόκοι του δανείου καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου ο τύπος υπολογισμού της τελικής αξίας του δανείου είναι:

$$K = Ko \cdot i \cdot S_{\overline{n}|} + Ko$$

Όταν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου ο τύπος είναι

$$K = Ko(1+i)^n$$

(όπου Κο το ποσό του δανείου).

ΑΣΚΗΣΗ

Δανείστηκε κάποιος 500.000€ με επιτόκιο 8% με την υποχρέωση να το εξοφλήσει μετά από 10 έτη. Να βρεθεί το συνολικό ποσό που θα πληρώσει για την εξόφληση του δανείου.

ΛΥΣΗ:

Από τον τύπο $K = Ko\,(1+i)^n \Rightarrow K=500.000\,(1+0{,}08)^{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow K=500.000 \cdot 2{,}15892\ K = 10.794.600$

- Όταν συνιστάται εξοφλητικό απόθεμα ο τύπος υπολογισμού είναι:

$R = K(1+i)^n \cdot P_{\overline{n}|}$ (Η τιμή του $P_{\overline{n}|}$ βρίσκεται από τους πίνακες).

ΑΣΚΗΣΗ

Ένας επιχειρηματίας δανείστηκε 2.000.000€ εξοφλητέες εφάπαξ με ανατοκισμό μετά από 8 έτη προς επιτόκιο 7,5%. Ζητείται να υπολογισθεί το χρεολύσιο όταν α) οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους β) οι τόκοι καταβάλλονται κατά τη λήξη του δανείου. Επιτόκιο σύστασης εξοφλητικού αποθέματος 7%.

ΛΥΣΗ:

α) Αφού οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους τότε έχουμε:

2.000.000 · 0,075=150.000 ετησίως

Συνολικοί τύποι: 150.000 · 8 έτη= 1.200.000 €

Το χρεολύσιο θα είναι:

$R = K \cdot P_{\overline{n}|} \Rightarrow R = 2.000.000 \cdot P_{\overline{8}|} \Rightarrow R = 2.000.000 \cdot 0{,}09746 \Rightarrow$ R=194.920 €

β)

$R = K(1+i)^{\nu} \cdot P_{\overline{n}|} \Rightarrow R = 2.000.000(1+0{,}075)^{8} \cdot P_{\overline{8}|} \Rightarrow R = 2.000.000(1{,}78347)(0{,}09746) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ R=347.634 €

1.4.1. Δάνεια ενιαία εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά με ίσα τοκοχρεολύσια

Το πιο ενδιαφέρον σύστημα απόσβεσης δανείων είναι εκείνο όπου η απόσβεση πραγματοποιείται με την καταβολή στο τέλος κάθε περιόδου ίσων δόσεων. Η κάθε μια από τις ίσες δόσεις ονομάζονται τοκοχρεολύσιο και αποτελείται από τον τόκο της περιόδου σαν το χρεολύσιο.

Ο τύπος υπολογισμού της τοκοχρεολυτικής δόσης είναι: $R = \mathrm{K} \cdot (i + \mathrm{P}_{\overline{n}|})$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποιο είναι το ύψος του δανείου που μπορεί να λάβει κάποιος σήμερα με επιτόκιο 5,5% με τη συμφωνία να το εξοφλήσει με 15 ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις των 40.000 € η κάθε μια;

ΛΥΣΗ:

$$R = \mathrm{K}(i + \mathrm{P}_{\overline{n}|}) \Rightarrow \mathrm{K} = \frac{R}{i + \mathrm{P}_{\overline{n}|}} \Rightarrow \mathrm{K} = \frac{40.000}{0{,}055 + 0{,}04462} \Rightarrow \mathrm{K} = \frac{40.000}{0{,}09962} \Rightarrow \mathrm{K} = 401.525$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δάνειο 40.000 € εξοφλείται με ίσες ετήσιες τοχοχρεωλυτικές δόσεις των 5.000€ η κάθε μια με επιτόκιο 6% . Να βρεθεί μετά από πόσα έτη θα εξοφληθεί το δάνειο.

ΛΥΣΗ

$$R = \mathrm{K}(i + \mathrm{P}_{\overline{n}|}) \Rightarrow \mathrm{P}_{\overline{n}|} = \frac{R - \mathrm{K} - i}{\mathrm{K}} \Rightarrow \mathrm{P}_{\overline{n}|} = \frac{5.000 - 40.000 \cdot 0{,}06}{40.000} \Rightarrow \mathrm{P}_{\overline{n}|} = \frac{2.600}{40.000} \Rightarrow \mathrm{P}_{\overline{n}|} = 0{,}065$$

Ο χρόνος θα βρεθεί με την χρήση των πινάκων που δίνουν την τιμή του $\mathrm{P}_{\overline{n}|}$.

$$\underset{\Downarrow}{0{,}06679} > 0{,}065 > \underset{\Downarrow}{0{,}05927}$$

11 έτη 12 έτη

Ο ζητούμενος χρόνος είναι μεταξύ 11 και 12 ετών.

Στο τέλος των 11 ετών θα έχει ξοφλήσει μέρος του δανείου.

$$K = \frac{R}{i + P_{\overline{n}|}} = \frac{5.000}{0,06 + 0,06679} = 39.435 \text{ €}$$

Ανεξόφλητο ποσό: 40.000-39.435 = 565 €

Το ποσό αυτό θα καταβληθεί στο τέλος των 12 ετών και θα έχει αξία:

$R = 565\ (1{+}0,06)^{12} = 565 \cdot 2,01219 = 1,136$

Άρα το δάνειο θα εξοφληθεί σε 12 έτη όπου τα πρώτα 11 έτη η δόση θα 5.000 € και το 12^{o} έτος η δόση θα είναι 1.136 €.

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΠΟΣΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ μπορούμε να δανεισθούμε προς 5% αν έχουμε την δυνατότητα να πληρώσουμε επί 15 έτη, ετήσιο χρεολύσιο 250.000 €

ΛΥΣΗ:

Αντικαθιστώντας στον τύπο του χρεολυσίου έχουμε:

$$250.000 = \frac{x\ (0,05)\ (1,05)^{15}}{(1,05)^{15} - 1}$$

Επειδή $(1,05)^{15} \approx 2,0789$ έχουμε

$$250.000 = \frac{x\ (0,05)\ (2,0789)}{2,0789 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{250.000\ (1,0789)}{0,05\ (2,0789)} \Leftrightarrow x \approx 2.594.882 \text{ €}$$

Άρα το κεφάλαιο που μπορούμε να δανεισθούμε είναι περίπου 2.594.882 €.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η τρέχουσα αξία κεφαλαίου το οποίο ανατοκιζόμενο προς 20% ετησίως με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, θα ανέρχεται σε 2 έτη σε 10 εκατ. €.

ΛΥΣΗ:

$$\psi = 10 \cdot \left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{-2 \cdot 2} = 10.(1,1)^{-4} = \frac{10}{1,4641} \approx 6.830134$$

Άρα η τρέχουσα αξία κεφαλαίου είναι 6.830.134 €

Μελέτες επενδυτικής ευκαιρίας	±30%
Προμελέτες σκοπιμότητας	±20%
Μελέτη σκοπιμότητας	±10%

Τα ποσοστά αυτά μπορεί να διαφέρουν από επενδυτικό σχέδιο σε επενδυτικό σχέδιο και ανάλογα με την εφαρμοζόμενη μέθοδο εκτιμήσεως του κόστους. Φυσικά, δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται τα ποσοστά αυτά για αναβάθμιση της αξιοπιστίας από το ένα στάδιο στο επόμενο. Για παράδειγμα, δεν μπορεί να προστεθεί ποσοστό 30% στο υπολογιζόμενο κόστος της μελέτης επενδυτικής ευκαιρίας, χωρίς να ελεγχθούν όλα τα σχετικά γεγονότα και χωρίς να εξακριβωθεί η επίδρασή τους στο επενδυτικό σχέδιο και στο κόστος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

2.1. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

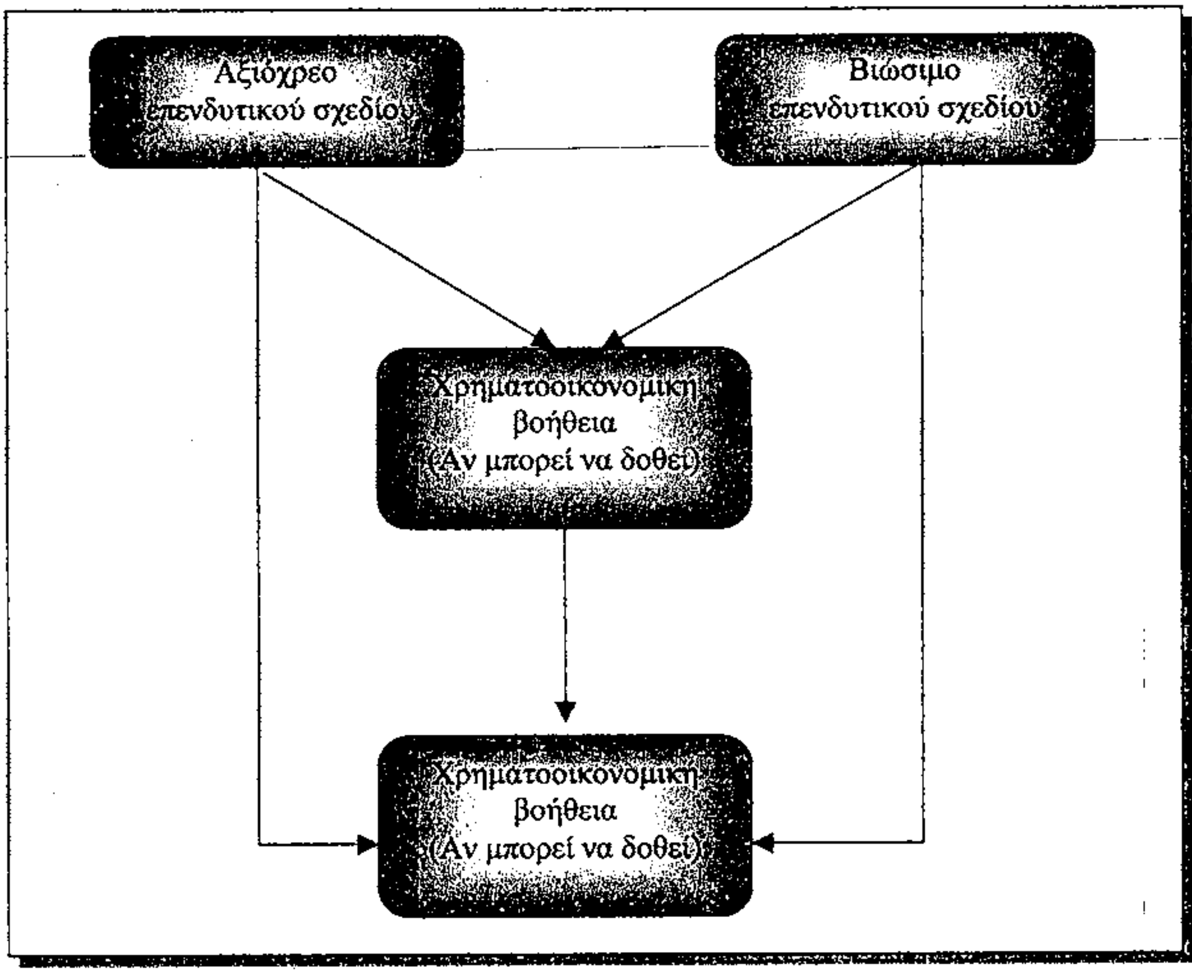
Για κάθε ένα από τα θέματα που εμπλέκονται σε ένα επενδυτικό σχέδιο, η χρηματοοικονομική ανάλυση περιλαμβάνει σύγκριση:

- Κόστους: τα λειτουργικά έξοδα και τα έξοδα επενδύσεως.
- Ωφελειών: οι πρόσοδοι οι προερχόμενες από τη δραστηριότητα.

Λαμβάνεται υπόψη η ακριβής αξία των ροών που καταβάλλονται ή εισπράττονται.

Ειδικότερα, η χρηματοοικονομική ανάλυση περιλαμβάνει:

- Τον εντοπισμό και την εκτίμηση όλων των χρηματικών ροών, των προϊόντων και υπηρεσιών των προερχόμενων από τις δραστηριότητες του σχεδίου, περιλαμβανομένων του κόστους επενδύσεως, του κόστους λειτουργίας και των ωφελειών που το σχέδιο αντλεί από αυτές τις δραστηριότητες.
- Την εκτίμηση των δανειακών αναγκών για το σχέδιο.
- Την εκτίμηση των επιπτώσεων του επενδυτικού σχεδίου επί όλης της χρηματοοικονομικής καταστάσεως του φορέα, και έτσι την εκτίμηση του αξιόχρεου και του βιώσιμου της επενδυτικής προσπάθειας.
- Τον υπολογισμό της αποδόσεως επί του κεφαλαίου επενδύσεως.



Εικόνα 59: Η αρχή της χρηματοοικονομικής αναλύσεως

- Την εκτίμηση της αναγκαίας χρηματοοικονομικής βοήθειας (αν μπορεί να δοθεί τέτοια).

Η σχέση μεταξύ των κυριότερων θεμάτων που καλύπτονται από την χρηματοοικονομική ανάλυση παρουσιάζεται στην εικόνα 59.

2.2. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Για επενδυτικά σχέδια με απτά προϊόντα.

Η οικονομική ανάλυση εκτιμά τα επενδυτικά σχέδια από την άποψη της κοινωνίας ως σύνολο (εθνική οικονομία). Μπορούν δε να υιοθετηθούν δύο προσεγγίσεις για επενδυτικά σχέδια με απτά προϊόντα, ανάλογα με το αν ο στόχος τους είναι:

- Να εκτιμήσουν τις επιπτώσεις του επενδυτικού σχεδίου στην εθνική οικονομία.
- Να αξιολογήσουν τη βιωσιμότητα του επενδυτικού σχεδίου μέσα στο διεθνές οικονομικό περιβάλλον.

Ως προς το πρώτο (την ανάλυση των επιπτώσεων).

- ✓ Κόστος είναι οι κοινωνικοί πόροι που χάνονται από την εθνική οικονομία: είναι απώλειες σε ξένο νόμισμα καθώς αυτό αντιπροσωπεύει τον πλούτο της εθνικής οικονομίας έναντι των ξένων χωρών.
- ✓ Ωφέλειες είναι οι νέες πρόσοδοι, κατανεμημένες σε εγχώρια στοιχεία (π.χ. συμβολή στην ανάπτυξη της οικονομίας, στα οποία μπορεί να προστεθεί και η αύξηση στην εγχώρια κατανάλωση.

Από την άποψη αυτή, οι μισθοί, για να δοθεί ένα παράδειγμα, που θεωρούνται ωφέλειες (διανομή του εισοδήματος) για την κοινωνία ως σύνολο.

Ως προς την δεύτερη προσέγγιση (ανάλυση της βιωσιμότητας εντός της διεθνούς οικονομίας) ο πιθανός πόρος για τις παγκόσμιες αγορές παρέχει το κόστος ευκαιρίας για τα προϊόντα και τις υπηρεσίες που θα παράγονται και χρησιμοποιούνται. Εδώ:

- ✓ Το κόστος αντιστοιχεί στην πραγματική κατανάλωση οικονομικών πόρων και μάλιστα δεδομένων των τιμών που έχουν στις διεθνείς αγορές και όχι τις τοπικές τιμές τους, (εκτός και αν αυτά δεν μπορούν να διατεθούν στις διεθνείς αγορές), ενώ

- ✓ Οι ωφέλειες είναι αυτές που προέρχονται από τις εκροές του επενδυτικού σχεδίου, με βάση επίσης τις τιμές που έχουν στις διεθνείς αγορές.

Από αυτή την άποψη, το κόστος και οι ωφέλειες είναι όμοια με εκείνα της χρηματοοικονομικής αναλύσεως. Μόνο οι τιμές που χρησιμοποιούνται εδώ είναι διαφορετικές.

Η μέθοδος της αναλύσεως του επενδυτικού σχεδίου που προτείνεται συνδυάζει αυτές τις διαφορετικές απόψεις. Έτσι, μια πλήρης οικονομική ανάλυση θα μπορούσε να περιλαμβάνει:

- Παράθεση συγκεντρωτικών λογαριασμών για το σύνολο των θεμάτων που περιλαμβάνει ένα επενδυτικό σχέδιο.
- Υπολογισμό όλων των επιπτώσεων που προκαλούνται στην οικονομία.
- Καθορισμό της βιωσιμότητας του σχεδίου στο πλαίσιο της διεθνούς οικονομίας
- Υπολογισμό της αποδόσεως επί του επενδυμένου κεφαλαίου (βασιζόμενο στο συνολικό κόστος, το κόστος ξένου συναλλάγματος, ή και του κόστους της διεθνούς αγοράς).
- Εξέταση της σημασίας από την άποψη της οικονομικής πολιτικής και κάθε αναδομήσεως που επιχειρείται.

Η σχέση μεταξύ των κυρίων θεμάτων που εμπλέκονται στην οικονομική ανάλυση παρουσιάζεται στην εικόνα 60.

2.3. Οικονομικός Προγραμματισμός

2.3.1. Βασικές Αρχές και Έννοια της Οργάνωσης και του Προγραμματισμού

Η έννοια της διοίκησης και το προγραμματισμού εμπεριέχει το σύνολο των διαδικασιών, που συντελούνται, προκειμένου η επιχείρηση να επιτύχει τους στόχους της. Η διαδικασία αυτή προϋποθέτει σωστή οργάνωση και προγραμματισμό, σωστή στελέχωση και προσφορά του καθενός ατόμου του προαπαιτούμενου έργου του. Λέγοντας, λοιπόν, διοίκηση και προγραμματισμό στα πλαίσια της οργάνωσης εννοούμε το σύνολο των ευεργετών, που αποσκοπούν στη δημιουργία και τη διατήρηση του κατάλληλου κλίματος, ώστε η επιχείρηση να πραγματοποιήσει τους τιθέμενους σκοπούς της. Γενικά, η διοίκηση διέπεται από τις ακόλουθες αρχές: α) την κατανόηση της φύσης της διοίκησης β) τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της διοίκησης γ) τη βελτίωση της έρευνας της διοίκησης και δ) τη βελτίωση του κοινωνικού επιπέδου.

Παράλληλα με τη διοίκηση, μια δεύτερη λειτουργία, που περιγράφει τις επιχειρήσεις, είναι η οργάνωση. Η έννοια της οργάνωσης, χαρακτηρίζεται σαν δεύτερη λειτουργία της διοίκησης από την άποψη της άσκησης της διοίκησης μιας επιχείρησης, με την αξιοποίηση της οργανωτικής δομής και διάρθρωσης των οργανώσεων. Οι διαδικασίες της οργάνωσης βασίζονται σε ορισμένες αρχές όπως:

α) Τμηματοποίηση των διαφορετικών εργασιών β) Εξειδίκευση των εργασιών γ) Η άσκηση ελέγχου δ) Προκαλούμενη ιεραρχία, αρμοδιότητες και υπευθυνότητες.

2.3.2. Έννοια και Οριοθέτηση του Προγραμματισμού και του Σχεδιασμού

Από τις βασικές λειτουργίες της διοίκησης της οικονομικής μονάδας είναι σχεδιασμός, η οργάνωση και ο προγραμματισμός.

«Σχεδιασμός (ή προγραμματισμός) δραστηριοτήτων είναι η διαδικασία, με την οποία προγραμματίζονται, αποφασίζονται και δρομολογούνται διάφορες ενέργειες για την επίτευξη των σκοπών, που θέτει μια οικονομική μονάδα, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και επιλέγοντας την άριστη εναλλακτική λύση». «Ο προγραμματισμός αποτελεί τη διαδικασία επιλογής, μεταξύ διαφόρων εναλλακτικών λύσεων της μελλοντικής δραστηριότητας της επιχείρησης, σαν σύνολο και καθενός τμήματός της. Προγραμματισμός σημαίνει, προβλέπω ποιες θα είναι οι μελλοντικές επιχειρησιακές συνθήκες, μέσα στις οποίες θα επιδιώξει η επιχειρησιακή μονάδας να αναπτύξει τη δραστηριότητά της».

Όπως κάθε διαδικασία, έτσι και ο σχεδιασμός αποσκοπεί στην υλοποίηση συγκεκριμένων στόχων, που οι κυριότεροι μπορεί να συνοψισθούν στους ακόλουθους:

- (α) Το κέρδος.
- (β) Η ανάπτυξη (μεγέθυνση) της επιχείρησης.
- (γ) Το Μερίδιο της Αγοράς.
- (δ) Η Παραγωγικότητα και η Αποτελεσματικότητα.
- (ε) Η κυριαρχία (πρωτιά) της Αγοράς.
- (ζ) Η ικανοποίηση των πελατών.
- (η) Η κοινωνική υπευθυνότητα.

Ένα βασικό στοιχείο του σχεδιασμού είναι τα «μέσα ή τα εργαλεία», με τα οποία πραγματοποιείται. Τα κυριότερα απ' αυτά είναι:

- Η Λογιστική και ο προϋπολογισμός.
- Η Στατιστική Ανάλυση, που διακρίνεται στην περιγραφική και στην επαγωγική (αξιολόγηση των στατιστικών στοιχείων).
- Η Οικονομική Ανάλυση που προσδιορίζει το άριστο επίπεδο παραγωγής, συγκρίνει την ωφέλεια της κάθε λύσης και επιλέγει την πιο σωστή.
- Η Κυβερνητική, που αναφέρεται στον έλεγχο και την επικοινωνία.

- Οι Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές, που παρέχουν σημαντική χρησιμότητα στη διαδικασία του σχεδιασμού και την καθιστούν πιο εύκολη.

Τα γενικά στάδια του Προγραμματισμού είναι:

Στάδιο 1 : ΔΙΑΓΝΩΣΗ ΕΥΚΑΙΡΙΩΝ

Στάδιο 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΧΩΝ

Στάδιο 3 : ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Στάδιο 4 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΔΡΑΣΗΣ

Στάδιο 5 : ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΔΡΑΣΗΣ

2.4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΝΕΚΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Εκτός απ' τον προγραμματισμό και το σχεδιασμό, που σχετίζεται με την οργάνωση και τη διάρθρωση του εσωτερικού περιβάλλοντος της οικονομικής μονάδας, πολλές φορές αναφερόμενοι σε θέματα του προγραμματισμού τα ταυτίζουμε ή εννοούμε εκείνα, που αναφέρονται στα οικονομικά μεγέθη και στον οικονομικό προγραμματισμό. Ο οικονομικός προγραμματισμός αναφέρεται σε θέματα διαχείρισης, σχεδιασμού προγραμμάτων και οργάνωσης των οικονομικών πόρων της οικονομικής μονάδας.

Τα βασικά θέματα, που σχετίζονται με την χρηματοοικονομική ανάλυση και τον προγραμματισμό, αφορούν τα θέματα διαχείρισης των κεφαλαιακών πόρων και της αξιολόγηση των επενδυτικών σχεδίων. Ουσιαστικά ο τελικός σκοπός είναι η ιεράρχηση των επενδυτικών προτάσεων μέχρι το οποίο είναι σκόπιμο να φτάσει η επιχείρηση.

Στη διαδικασία του χρηματοοικονομικού προγραμματισμού και της επιλογής των διαφόρων σχεδίων συχνά χρησιμοποιείται η ανάλυση του νεκρού σημείου (Break- Even Point). Νεκρό σημείο είναι το ποσό εκείνο των πωλήσεων (κύκλου εργασιών), με το οποίο μια επιχείρηση καλύπτει ακριβώς τόσο τα σταθερά όσο και τα μεταβλητά της έξοδα, χωρίς να πραγματοποιεί ούτε κέρδος, ούτε ζημιά. Οι σχέσεις μεταξύ του ύψους των επενδυτικών δαπανώ και του όγκου δραστηριότητας, που απαιτείται για την πραγματοποίηση κερδών, αναφέρονται ως ανάλυση του νεκρού σημείου.

Νεκρό σημείο καλείται, λοιπόν, η αρχειοθέτηση ή ο διαχωρισμός της περιοχής των κερδών από τις ζημιές, που θα αντιμετωπίσει η επιχείρηση. Είναι εκείνη η ποσότητα παραγωγής, στην οποία τα έσοδα αντισταθμίζονται ακριβώς από το κόστος παραγωγής.

Υπάρχουν 3 μέθοδοι υπολογισμού του νεκρού σημείου:

(1) Η μέθοδος της μαθηματικής ισότητας: Η σχέση μεταξύ των πωλήσεων μιας επιχείρησης, των μεταβλητών και των σταθερών δαπανών και των κερδών μπορεί να εκφραστεί με την εξής ισότητα:

Έσοδα από πωλήσεις = Σταθερές δαπάνες + Μεταβλητές δαπάνες + Καθαρό Κέρδος ή $Π = S+M+K$ (1)

όπου: Π = αξία πωλήσεων

S = σταθερές δαπάνες

M = μεταβλητές δαπάνες

K = καθαρά κέρδη

Στα νεκρά σημεία τα κέρδη που έχει μία επιχείρηση είναι μηδέν, οπότε η εξίσωση γίνεται: $Π = S + M$ (2)

Επειδή τα έσοδα πωλήσεων μιας επιχείρησης αποτελούν το γινόμενο του αριθμού των πωληθέντων μονάδων με την τιμή πώλησης αυτών, ενώ οι σταθερές δαπάνες δε μεταβάλλονται και οι μεταβλητές δαπάνες είναι ανάλογες του ύψους των πωληθέντων μονάδων, ο τύπος (2) παίρνει την εξής μορφή: $P \cdot x= S + v \cdot x + K$ (3) όπου: P = τιμή πώλησης κατά μονάδα προϊόντος.

x = ζητούμενη ποσότητα πωληθέντος προϊόντος σε μονάδα

S = σταθερές δαπάνες

v = μεταβλητές δαπάνες

K = καθαρό κέρδος, το οποίο στο νεκρό σημείο είναι μηδέν.

Αν λύσουμε την εξίσωση (3) ως προς x, έχουμε:

$$\mathrm{P} \cdot x - \nu \cdot x = S \rightarrow x(\mathrm{P} - \nu) = S \rightarrow x = \frac{S}{\mathrm{P} - \nu}$$

όπου, (P-v) = σταθερές δαπάνες κατά μονάδας προϊόντος, που βρίσκονται αν από την κατά μονάδα τιμή πώλησης του προϊόντος αφαιρεθεί το κατά μονάδα μεταβλητό κόστος. Η ανάλυση του νεκρού σημείου είναι πολύ χρήσιμη για τη μελέτη των σχέσεων μεταξύ του όγκου των πωλήσεων, των τιμών και του κόστους κατά συνέπεια είναι χρήσιμη σε θέματα τιμολόγησης, ελέγχου του κόστους λήψης αποφάσεων για προγράμματα επέκτασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

3.1. Χρονολογικές σειρές

Γενικά χρονολογική σειρά, ονομάζουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων οι οποίες παίρνονται κατά ορισμένες χρονικές στιγμές ή περιόδους που ισαπέχουν μεταξύ τους.

Αν συμβολίσουμε με yi την τιμή της παρατήρησης που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή χi, τότε η χρονολογική σειρά θα αποτελείται από N ζεύγη (y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3), …., (yi, xi), …(y_N, xi), …(y_N, x_N). Χαράζουμε την τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα διαδοχικά σημεία (y_1, χ_1), (y_2, χ_2), (y_3, χ_3), …., (y_N, χ_N) και παίρνουμε το διάγραμμα της χρονολογικής σειράς.

Η μεγάλη σημασία που έχει για την Οικονομική Στατιστική η ανάλυση των χρονολογικών σειρών προέρχεται από το γεγονός ότι μέσω αυτής είναι δυνατό, μέσα σ' ορισμένα όρια και με ορισμένες προφυλάξεις, να διατυπώνονται προβλέψεις για μελλοντικές εξελίξεις φαινομένων.

3.1.1. Οι κυριότερες συνιστώσες μιας χρονολογικής σειράς

Οι χρονολογικές σειρές παρουσιάζουν μεταβολές με μορφή και ένταση που κάθε φορά διαφέρει.

Εξετάζοντας τις μεταβολές αυτές, που ονομάζονται κινήσεις της μεταβλητής yi, σε συνάρτηση με το χρόνο χi μιας χρονολογικής σειράς, διακρίνουμε κυρίως τα ακόλουθα είδη κίνησης:

– Η μακροχρόνια τάση ή γενική τάση (trend)

- Τις περιοδικές μεταβολές
- Τις κυκλικές μεταβολές
- Τις αρρυθμίες ή ακανόνιστες ή απρόοπτες μεταβολές.

3.2. Προσδιορισμός της τάσης με μία γραμμική εξίσωση

Η μέθοδος αυτή αποβλέπει στην αποζημίωση μιας εξίσωσης που να μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα μιας χρονολογικής σειράς και να μας περιγράψει κατά τον καλύτερο τρόπο την τάση ενός φαινομένου. Η πιο απλή περίπτωση είναι η γραμμική εξίσωση, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$\hat{y}i = \hat{a} + \hat{\beta} xi$$

Όπου οι σταθερές $\hat{a}$ και $\hat{\beta}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\Sigma yi = \mathrm{N}\hat{a} + \hat{\beta}\Sigma xi \qquad \Sigma xi \cdot yi = \hat{a}\Sigma xi + \hat{\beta}\Sigma xi^2$$

Στην περίπτωση όμως των χρονολογικών σειρών είναι δυνατό να διατάξουμε τα δεδομένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουμε Σxi=0. Τότε το παραπάνω σύστημα των κανονικών εξισώσεων θα πάρει τη μορφή:

$$\Sigma_{yi} = \mathrm{N}\hat{a} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\Sigma yi}{\mathrm{N}}$$

$$\Sigma xi \cdot yi = \hat{\beta}\Sigma xi^2 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\Sigma xi \cdot yi}{\Sigma xi^2}$$

Παράδειγμα 1:

Στον πίνακα 3.1 δίνεται, σε χιλιάδες άτομα, ο πληθυσμός της περιφέρειας της πρωτεύουσας για τη χρονική περίοδο 1961 – 1965. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας τάσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Πίνακας 3.1.

Έτος	Πληθυσμός (σε χιλιάδες)
1961	1.885
1962	1.938
1963	1.981
1964	2.050
1965	2.088

ΛΥΣΗ:

Επειδή έχουμε μονό αριθμό ετών (τιμών της x), αντιστοιχίζουμε το μεσαίο έτος στην υποδιαίρεση ο του άξονα Οχ, δηλαδή ορίζουμε την αντιστοιχία:

-2	-1	0	1	2
1961	1962	1963	1964	1965

οπότε έχουμε $\Sigma xi=0$.

Έτσι, αν κατασκευάσουμε τον πίνακα 3.2, βρίσκουμε:

Πίνακας 3.2.

Έτος	**yi**	**xi**	**xi – yi**	**xi^2**
1961	1855	-2	-3.710	4
1962	1938	-1	- 1.938	1
1963	1981	0	0	0
1964	2050	1	2050	1
1965	2088	2	4.176	4
ΣΥΝΟΛΟ	9.912	0	578	10

$$\hat{\alpha} = \frac{\Sigma yi}{\mathrm{N}} = \frac{9912}{5} = 1982{,}4$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma xi \cdot yi}{\Sigma xi^2} = \frac{578}{10} = 57{,}8$$

Επομένως, η ευθεία τάσης θα έχει εξίσωση:

$$\hat{yi} = 1982{,}4 + (57{,}8)xi$$

3.3. Προσδιορισμός της τάσης με μια εκθετική συνάρτηση της μορφής $\mathbf{yi = \kappa + \alpha\beta^{xi}}$

Παράδειγμα 1°

Η παραγωγή ενός προϊόντος Α κατά τη διάρκεια των ετών 1978 – 1986 είχε όπως δείχνει ο πίνακας 3.41.

Ζητείται να προσδιοριστεί η τάση της παραπάνω χρονολογικής σειράς με την εφαρμογή της εκθετικής συνάρτησης $yi = \kappa + \alpha\beta^{xi}$

Πίνακας 3.41

Έτη	Παραγωγή (yi)
1978	1.000
1979	1.302
1980	1.451
1981	1.525
1982	1.563
1983	1.582
1984	1.592
1985	1.596

1986	1.598

ΛΥΣΗ:

Πρώτα καταρτίζουμε τον πίνακα 3.4.2.

Πίνακας 3.4.2.

Έτη	xi	yi
1978	0	1.000
1979	1	1.302
1980	2	1.451

Σ = 3.753

Έτη	xi	yi
1981	3	1.525
1982	4	1.563
1983	5	1.582

Σ = 4.670

Έτη	xi	yi
1984	6	1.592
1985	7	1.596
1986	8	1.598

Σ = 4.786

Με την βοήθεια του πίνακα αυτού υπολογίζουμε τις παραμέτρους α, β, κ.

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1}} = \sqrt[3]{\frac{4786 - 4670}{4670 - 3753}} = 0{,}501991$$

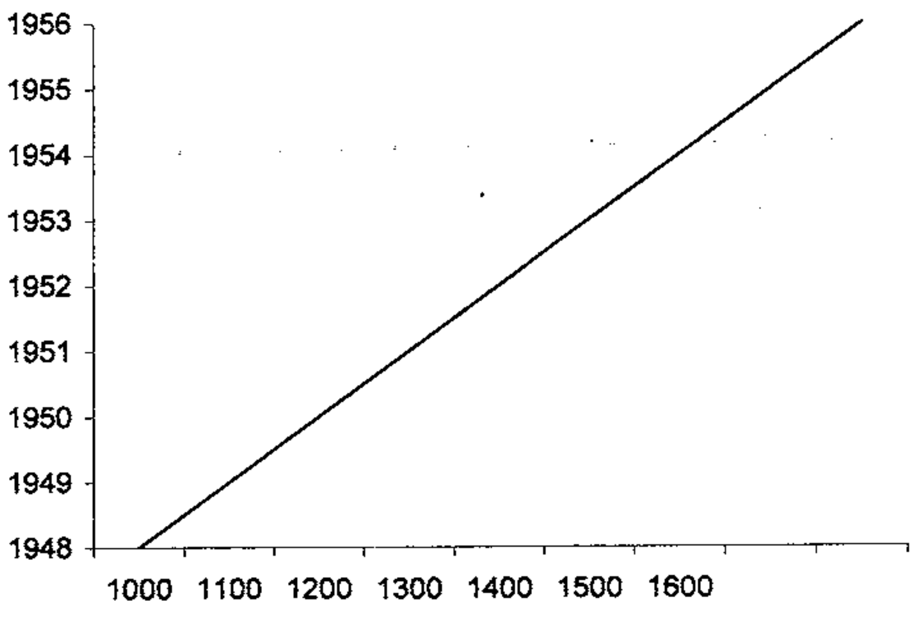
$$\alpha = (\Sigma_2 - \Sigma_1)\frac{\beta - 1}{(\beta^3 - 1)^2} = (4670 - 3753)\frac{0{,}501991 - 1}{\left[(0{,}501991)^3 - 1\right]^2} = -598{,}522$$

$$\kappa = \frac{1}{3}\left[\Sigma_1 - \left(\frac{\beta^3 - 1}{\beta - 1}\right)a\right] = 1.600,93$$

Στη συνέχεια καταρτίζουμε τον παρακάτω πίνακα για τον υπολογισμό των θεωρητικών τιμών.

B^{xi} = ($0,501991^{xi}$)	**α,β^{xi} = ($-598,522 \cdot 0,501991)^{xi}$**	$\hat{y} = \kappa + \alpha\beta^{XI}$
1,000000	-598,522	1.002,41
0,501991	-300,453	1.300,48
0,251995	-150,825	1.450,11
		Σ1 = 3.753,00
0,126499	-75,712	1.525,23
0,063501	-38,007	1562,92
0,031877	-19,079	1.581,85
		Σ2 = 4.670,00
0,016002	-9,578	1.591,35
0,008033	-4,808	1.596,12
0,004032	-2,413	1598,53
		Σ3 = 4.786,00

Η γραφική παράσταση έχει όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



3.4. Αριθμοδείκτες

Γενικά

Οι αριθμοδείκτες είναι στατιστικά μέτρα που δείχνουν τις μεταβολές μιας μεταβλητής ή μιας ομάδας μεταβλητών που σχετίζονται μεταξύ τους, μεταξύ δύο χρονικών περιόδων ή δύο γεωγραφικών περιοχών και γενικότερα, μεταξύ δύο καταστάσεων. Με τη βοήθεια των αριθμοδεικτών μπορούμε να συγκρίνουμε π.χ. το κόστος διατροφής μιας χώρας σε μια ορισμένη χρονική περίοδο, το οποίο εξαρτάται από πολλές μεταβλητές (τιμή ψωμιού, κρέατος, ψαριών κ.α.), με το κόστος διατροφής για τα ίδια προϊόντα σε μία άλλη χρονική περίοδο, ή να συγκρίνουμε την παραγωγή του σιδήρου μιας χώρας με την παραγωγή σιδήρου μιας άλλης χώρας την ίδια χρονική περίοδο.

Στην πρώτη περίπτωση οι δείκτες ονομάζονται χρονολογικοί, ενώ στη δεύτερη ονομάζονται γεωγραφικοί.

Βασικός σκοπός της κατάρτισης ενός αριθμοδείκτη είναι ο χαρακτηρισμός της σχετικής μεταβολής μιας μεταβλητής με έναν μόνο αριθμό ή μιας ομάδας σχετικών μεταβλητών. Οι αριθμοδείκτες χρησιμοποιούνται σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Στο τομέα της οικονομίας οι αριθμοδείκτες έχουν μεγάλη εφαρμογή.

3.4.1. Ιδιαίτεροι αριθμοδείκτες

α) Σχετικές τιμές

Σχετική τιμή είναι ο λόγος της τιμής ενός αριθμού σε μία χρονική περίοδο, προς την τιμή του ίδιου αγαθού σε μια άλλη χρονική περίοδο που ονομάζεται περίοδος βάσης. Οι σχετικές τιμές συνήθως εκφράζονται σε ποσοστό επί τοις εκατό.

Αν με Po συμβολίζουμε τη τιμή ενός αγαθού στην περίοδο o που παίρνουμε ως βάση και με P_1 την τιμή του ίδιου αγαθού σε μία άλλη περίοδο 1, τότε η σχετική τιμή στην περίοδο 1, με βάση την περίοδο o, ορίζεται το πηλίκο $P_1/Po \cdot 100\%$ και συμβολίζεται με P_1/o, δηλαδή:

$$P_{1/o} = \frac{P_1}{Po} \cdot 100\%$$

Η σχετική τιμή που αντιστοιχεί στην περίοδο βάσης θα είναι 100.

Παράδειγμα:

Η τιμή λιανικής πώλησης μιας μεγάλης φιάλης πορτοκαλάδας κατά τα έτη 1977 και 1978 ήταν 12 και 14 δρχ. αντίστοιχα. Αν πάρουμε το έτος 1977 ως έτος βάσης, να υπολογιστεί η σχετική τιμή.

ΛΥΣΗ: Η σχετική τιμή θα είναι:

$$P_{1/o} = \frac{P_1}{Po} \cdot 100\% = \frac{14}{12} \cdot 100\% = 117\%$$

Αυτό σημαίνει ότι το 1978, με βάση το 1977, η τιμή μιας μεγάλης φιάλης πορτοκαλάδας αυξήθηκε κατά 17%.

β) Σχετικές ποσότητες

Πολλές φορές αντί να συγκρίνουμε τις τιμές ενός αγαθού, μπορούμε να συγκρίνουμε τις ποσότητες ή τον όγκο του. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε σχετικές ποσότητες.

Αν με qo συμβολίσουμε την ποσότητα ενός αγαθού κατά την περίοδο o και με q1 την ποσότητα του ίδιου αγαθού στην περίοδο 1, τότε ο σχετικός δείκτης ποσοτήτων, με βάση την περίοδο o, ορίζεται ω στο πηλίκο $q_1/qo \cdot 100$ και συμβολίζεται με $Q_{1/o}$

$$Q_{1/o} = \frac{q_1}{qo} \cdot 108\%$$

Παράδειγμα:

Η παραγωγή πατάτας (σε τόνους) στο νομό Θεσπρωτίας κατά τα έτη 1986 και 1987 ήταν 4.200 και 4.800 αντίστοιχα. Να υπολογιστεί ο δείκτης σχετικών ποσοτήτων με βάση το έτος 1986.

ΛΥΣΗ:

Ο δείκτης σχετικών ποσοτήτων ή όγκων δίνεται από τον τύπο:

$$Q_{1/o} = \frac{q_1}{qo} \cdot 100\% = \frac{4.800}{4.200} \cdot 100\% = 114\%$$

Η τιμή 114% σημαίνει ότι η παραγωγή πατάτας κατά το έτος 1987 αυξήθηκε κατά 14% σε σύγκριση με το έτος 1986.

γ) Σχετικές αξίες

Αν Po είναι η τιμή ενός αγαθού στη περίοδο ο και qo είναι η ποσότητα ή ο όγκος του αγαθού αυτού στην ίδια περίοδο, τότε το γινόμενο $v1 = P_1 \cdot q_1$ παριστάνει την ολική αξία στην περίοδο 1.

Η σχετική αξία για την περίοδο 1, με βάση την περίοδο ο, θα είναι:

$$V_{1/o} = \frac{v_1}{vo} = \frac{P_1 \cdot q_1}{P_o \cdot q_o} = \frac{P_1}{P_o} \cdot \frac{q_1}{q_o} = P_{1/o} \cdot Q_{1/o}$$

$$V_{1/o} = \frac{P_1 \cdot q_1}{P_o \cdot q_o} \cdot 100\%$$

Παράδειγμα:

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές (σε δρχ.) και οι ποσότητες (σε κιλά) ενός αγαθού κατά έτη 1985 και 1987.

Πίνακας

Έτη	Τιμές	Ποσότητες
1985	32	162
1987	41	168

Να υπολογισθεί ο σχετικός δείκτης για το έτος 1987, με βάση το έτος 1985.

ΛΥΣΗ:

Ο σχετικός δείκτης αξίας δίνεται από τον τύπο:

$$V_{1/o} = \frac{P_1 \cdot q_1}{P_o \cdot q_o} \cdot 100\% = \frac{41 \cdot 168}{32 \cdot 162} \cdot 100\% = \frac{6.888}{5.184} \cdot 100\% = 133\%$$

3.4.2. Απλοί συνθετικοί δείκτες τιμών

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι οι τιμές των αγαθών έχουν συντελεστή στάθμισης τη μονάδα, δηλαδή ότι όλα τα αγαθά έχουν την ίδια βαρύτητα.

Οι μέθοδοι υπολογισμού των δανείων αυτών είναι:

α) Μέθοδος των συνολικών τιμών

Παριστάνουμε με $Po^{(1)}$, $Po^{(2)}$, $Po^{(3)}$, ……, $Po^{(v)}$ τις τιμές των αγαθών 1,2,3, ……, ν στην περίοδο βάσης ο και $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$, $P_1^{(3)}$, ……, $P_1^{(v)}$ τις τιμές των αγαθών 1,2,3……, ν στην περίοδο 1. Στην περίπτωση αυτή ο δείκτης των συνολικών τιμών βρίσκεται υπολογίζοντας το παρακάτω πηλίκο:

$$P_{1/o} = \frac{P_1^{(1)} + P_1^{(2)} + P_1^{(3)} + \ldots\ldots + P_1^{\nu}}{P_o^{(1)} + P_o^{(2)} + P_o^{(3)} + \ldots\ldots P_o^{\nu}} = \frac{\Sigma_{P1}}{\Sigma_{PO}}$$

Ώστε ο απλός δείκτης των συνολικών τιμών είναι ο λόγος του αθροίσματος των τιμών ν αγαθών στην περίοδο 1 προς το άθροισμα των τιμών των ίδιων αγαθών σε μία άλλη χρονική περίοδο που παίρνουμε ως έτος βάσης.

Ο παραπάνω δείκτης των συνολικών τιμών παρουσιάζει τα παρακάτω μειονεκτήματα:

α) δεν παίρνει υπόψη τις ποσότητες των αγαθών.

β) όλα τα αγαθά δεν έχουν κοινή ομάδα.

γ) όλα τα αγαθά δεν έχουν την ίδια βαρύτητα.

Παράδειγμα:

Ο πίνακας 3.5.3.1. δείχνει τις μέσες τιμές χονδρικής πώλησης τεσσάρων αγαθών κατά τα έτη 1985 και 1987. Να υπολογιστεί ο δείκτης των συνολικών τιμών για το έτος 1987, με βάση το έτος 1985.

ΛΥΣΗ:

Ο δείκτης συνολικών τιμών θα είναι:

Πίνακας 3.5.3.1.

	Τιμές αγαθών	
Αγαθά	1985 Po	1987 P_1
Α	24	30
Β	30	36
Γ	36	39
Δ	12	18
ΣΥΝΟΛΟ	102	123

$$P_{\%} = \frac{\Sigma_{P1}}{\Sigma_{Po}} = \frac{123}{102} = 1{,}2058 \text{ ή } 120{,}58\%.$$

Δηλαδή οι τιμές χονδρικής πώλησης κατά το έτος 1987 είναι 20,58% μεγαλύτερες του 1985.

β) Μέθοδος του αριθμητικού μέσου των σχετικών τιμών

Είναι γνωστό ότι, η σχετική τιμή ενός αγαθού είναι P_1/Po, αν όμως έχουμε ν αγαθά και πάρουμε το άθροισμα Σ (P_1/Po) και το διαιρέσουμε με το Ν, προκύπτει ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών, δηλαδή:

$$P_{1/o} = \frac{\frac{P_1^{(1)}}{P_o^{(1)}} + \frac{P_1^{(2)}}{P_o^{(2)}} + \frac{P_1^{(3)}}{P_o^{3}} + \ldots\ldots + \frac{P_1^{(\nu)}}{P_o^{(\nu)}}}{N} = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_o}\right)}{N} = \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{P_1}{P_o}\right)$$

Ο παρακάτω δείκτης έχει δύο βασικά μειονεκτήματα:

(1) δεν λαμβάνει υπόψη τη σχετική σπουδαιότητα των διαφόρων αγαθών, αλλά δίνει ίση βαρύτητα (σπουδαιότητα) σε όλα τα αγαθά.

(2) Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται για το χαρακτηρισμό των τιμών, όπως κιλά, γαλόνια, τόνοι κ.α., επηρεάζουν τις τιμές του δείκτη.

Παράδειγμα:

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις τιμές (σε δρχ.) ορισμένων αγαθών κατά τα έτη 1987 και 1988. Να υπολογισθεί ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών.

ΛΥΣΗ:

Πίνακας

	ΤΙΜΕΣ		**ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ**
	1987	**1988**	
Αγαθά	**Po**	**P_1**	$\frac{P_1}{Po}$
Α	2	4	2
Β	5	7	1,4
Γ	3	6	2
Δ	7	9	1,28
Ε	3	4	1,33
ΣΥΝΟΛΟ	20	30	8,01

Επομένως ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών θα είναι:

$$P_{1/o} = \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{P_1}{P_o}\right) = \frac{1}{5}\cdot 8{,}02 = 1{,}602 \text{ ή } 160{,}2\%.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°

ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

4.1. Συνάρτηση *παραγωγής*

Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν τον όρο συνάρτηση παραγωγής, για να εκφράσουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις ποσότητες των διαφόρων παραγωγικών συντελεστών που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ενός αγαθού και στη μέγιστη ποσότητα του αγαθού που μπορεί να παραχθεί σε κάθε χρονική περίοδο. Δηλαδή η συνάρτηση παραγωγής είναι η τεχνολογική σχέση που συνδέει την ποσότητα του προϊόντος και τις ποσότητες των παραγωγικών συντελεστών που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των συναρτήσεων μπορούμε να παραστήσουμε τη συνάρτηση παραγωγής ενός αγαθού γενικά ως εξής:

$Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_v)$

όπου: Q = η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

x_i = η ποσότητα του χρησιμοποιούμενου συντελεστή παραγωγής i για i = 1,2,3, …, ν.

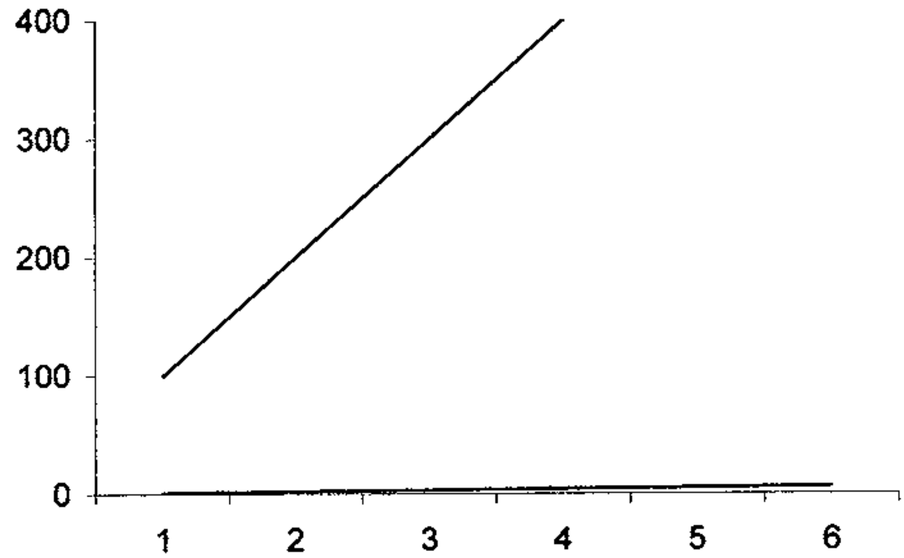
Συνήθως υποθέτουμε δυο συντελεστές παραγωγής, το κεφάλαιο (Κ) και την εργασία (Ε), οπότε η συνάρτηση παραγωγής γράφεται:

$Q = f(K, E)$

4.2. Συνολικό προϊόν, μέσο και οριακό προϊόν

Συνολικό προϊόν ενός μεταβλητού συντελεστή είναι η ποσότητα του προϊόντος που παράγεται, όταν οι ποσότητες όλων των άλλων συντελεστών παραμένουν σταθερές και μεταβάλλεται μόνο η ποσότητα του υπόψη συντελεστή.

Η καμπύλη του συνολικού προϊόντος έχει ως εξής:



Μέσο προϊόν ενός συντελεστή είναι ο λόγος του συνολικού προϊόντος προς την αντίστοιχη ποσότητα του μεταβλητού συντελεστή που χρησιμοποιείται για να παραχθεί το προϊόν.

Δηλαδή

$$\textbf{Μέσο προϊόν} = \frac{\text{Συνολικό προϊόν}}{\text{Ποσότητα του μεταβλητού συντελεστή}}$$

ή $\text{ΜΠ} = \frac{Q}{E}$

όπου: Q = Συνολικό προϊόν

E = Ποσότητα μεταβλητού συντελεστή

Μ.Π. = Μέσο προϊόν

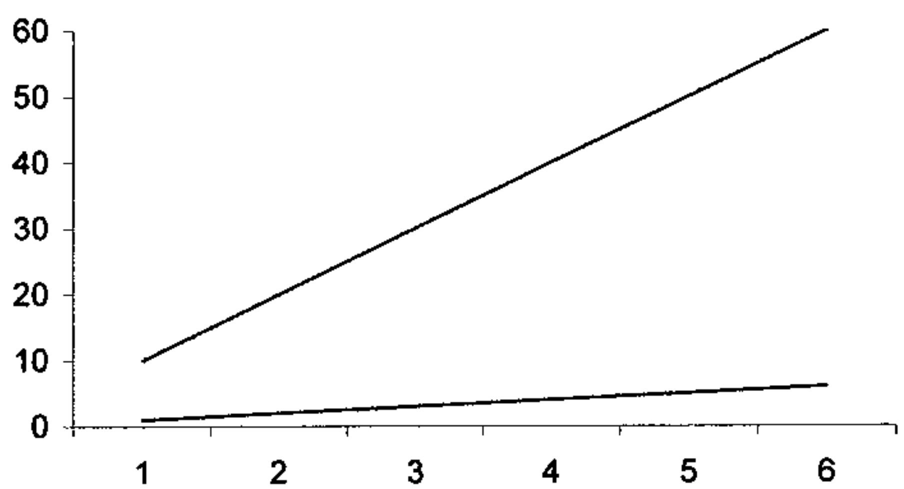
Οριακό προϊόν ενός συντελεστή είναι η μεταβολή του συνολικού προϊόντος, όταν μεταβάλλεται η ποσότητα του μεταβλητού συντελεστή κατά μία μονάδα.

$$\textbf{Οριακό προϊόν} = \frac{\text{Μεταβολή στο συνολικό προϊόν}}{\text{Μεταβολή στην ποσότητα του μεταβλητού συντελεστή}}$$

ή $Ο.Π = \frac{\Delta Q}{\Delta E}$

Όπου Δ συμβολίζει μεταβολή και Ο.Π. = οριακό προϊόν.

Οι καμπύλες του μέσου και οριακού προϊόντος έχουν ως εξής:



ΑΣΚΗΣΗ

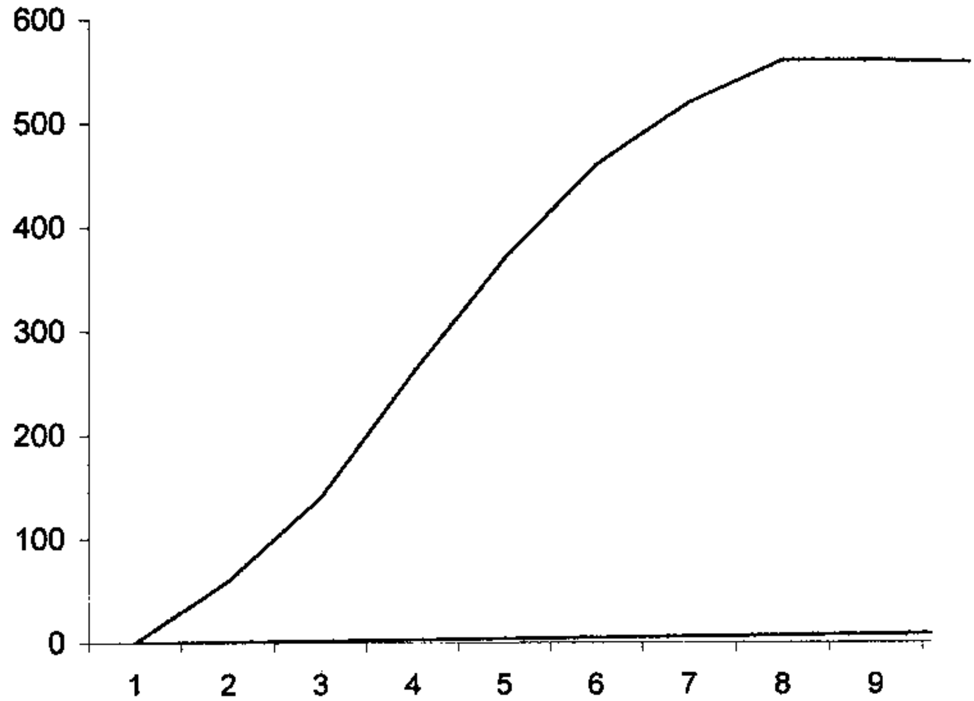
Στον παρακάτω πίνακα μας δίνονται η ποσότητα του εδάφους (στρέμματα) και η ποσότητα εργασίας (αριθμός εργατών). Να βρεθεί το μέσο και οριακό προϊόν για την συγκεκριμένη παραγωγή. Να γίνουν τα διαγράμματα.

Ποσότητα εδάφους (στρέμματα)	**Ποσότητα εργασίας (Ε) (αριθμός εργατών)**	**Συνολικό προϊόν ;**
5	0	0
5	1	60
5	2	140
5	3	260
5	4	370
5	5	460
5	6	520
5	7	560
5	8	560
5	9	558

ΛΥΣΗ:

Από τους τύπους παραπάνω έχουμε τον εξής πίνακα:

Ποσότητα εργασίας (Ε)	**Συνολικό προϊόν (Q)**	**Μέσο προϊόν** $\frac{Q}{E}$	**Οριακό προϊόν** $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta E}\right)$
0	0	-	-
1	60	60	60
2	140	70	80
3	260	86,7	120
4	370	92,5	110
5	460	92	90
6	520	86,7	60
7	560	80	40
8	560	70	0
9	558	62	-2



4.3. ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Γενικά το κόστος παραγωγής είναι οι χρηματικές δαπάνες της επιχείρησης για την αγορά των παραγωγικών συντελεστών που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή του προϊόντος. Οι δαπάνες για κάθε παραγωγικό συντελεστή εξαρτώνται από την ποσότητα και την τιμή του.

Το κόστος διακρίνεται σε μεταβλητό κόστος και σταθερό κόστος. Το άθροισμα αυτών των δυο μας δίνει το συνολικό κόστος.

Μεταβλητό κόστος είναι το κόστος που μεταβάλλεται, καθώς μεταβάλλεται η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

Σταθερό κόστος είναι αυτό που δεν μεταβάλλεται, καθώς μεταβάλλεται η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

Το άθροισμα του σταθερού και του μεταβλητού κόστους είναι το συνολικό κόστος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι έχουμε μια επιχείρηση που παράγει πλεκτά. Για την παραγωγή πλεκτών εκτός από την εργασία χρησιμοποιούνται μάλλινα νήματα που αποτελούν την πρώτη ύλη (Μεταβλητό κόστος). Η επιχείρηση έχει στην κατοχή της κτίρια και μηχανές (Σταθερό κόστος). Υποθέτουμε ότι το σταθερό κόστος για την συγκεκριμένη περίοδο είναι 3.000 €. Υποθέτουμε επίσης ότι η τιμή του νήματος είναι 100 € το κιλό και ότι κάθε εργάτης αμοίβεται 30 €. Έστω επίσης τα δεδομένα για το συνολικό προϊόν και την ποσότητα της εργασίας είναι όπως δίνονται στον πίνακα:

Εργασία:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Συν. προϊόν	0	5	13	18	22	25	27	28	28

Ζητείται να βρεθούν το μεταβλητό κόστος, και συνολικό κόστος.

ΛΥΣΗ:

Φτιάχνουμε τον εξής πίνακα:

Εργασία (αριθμός εργατών)	Συνολικό προϊόν	Σταθερό κόστος	Δαπάνες για νήματα (Μ.Κ.$_1$)	Αμοιβή εργασίας(Μ.Κ.$_2$)	ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΚΟΣΤΟΣ	Συνολικό κόστος
0	0	3000	0	0	0	3000
1	5	3000	500	30	530	3530
2	13	3000	1300	60	1360	4360
3	18	3000	1800	90	1890	4890
4	22	3000	2200	120	2320	5320
5	25	3000	2500	150	2650	5650
6	27	3000	2700	180	2980	5980
7	28	3000	2800	210	3010	6010
8	28	3000	2800	240	3040	6040

- Δαπάνες για νήματα = Συνολικό προϊόν * αξία νήματος.
- Αμοιβή εργασίας = Εργάτες και αμοιβή εργάτη.
- $Μ.Κ = Μ.Κ_1 + Μ.Κ_2$
- Συν. Κ. = Μ.Κ. + Σταθερό κόστος

Με βάση τους τύπους αυτούς κάνουμε τους υπολογισμούς και έχουμε το αποτέλεσμα κάθε στήλης.

4.3.1. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΟΣΤΟΥΣ

Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν τον όρο συνάρτηση κόστους για να εκφράσουν την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο κόστος παραγωγής ενός προϊόντος και στην παραγόμενη ποσότητα.

Δηλαδή $C = f(Q)$

όπου, C = κόστος παραγωγής

Q = παραγόμενη ποσότητα

Ανάλογα με την κατηγορία κόστους έχουμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους, τη συνάρτηση μεταβλητού κόστους και τη συνάρτηση σταθερού κόστους. Η συνάρτηση συνολικού κόστους δίνει το συνολικό κόστος για κάθε επίπεδο παραγωγής. Η συνάρτηση μεταβλητού κόστους δίνει το μεταβλητό κόστος για κάθε επίπεδο παραγωγής.

Η γραφική παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων μας δίνει τις αντίστοιχες καμπύλες κόστους. Ο κάθετος άξονας παριστάνει το κόστος και ο οριζόντιος την παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος.

4.3.2. ΟΙ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΜΕΣΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Μέσο κόστος ορίζεται ως ο λόγος του κόστους προς την αντίστοιχη ποσότητα του προϊόντος.

Δηλαδή,

$$\textbf{Μέσο κόστος} = \frac{\text{Κόστος παραγωγής}}{\text{Ποσότητα προϊόντος}}$$

ή $\text{M.K} = \dfrac{C}{Q}$

Ανάλογα με τις διάφορες κατηγορίες κόστους, το μέσο κόστος διακρίνεται σε μέσο σταθερό, μέσο μεταβλητό και μέσο συνολικό κόστος. Δηλαδή το μέσο σταθερό κόστος είναι ο λόγος του σταθερού κόστους προς την ποσότητα του προϊόντος. Το μέσο μεταβλητό κόστος είναι ο λόγος του μεταβλητού κόστους προς την ποσότητα του προϊόντος και το μέσο συνολικό κόστος είναι ο λόγος του συνολικού κόστους προς την ποσότητα του προϊόντος.

Είναι φανερό λοιπόν ότι το μέσο συνολικό κόστος είναι ο άθροισμα του μέσου σταθερού και του μέσου μεταβλητού κόστους.

Εφόσον,

$$\textbf{Συνολικό κόστος} = \text{Σταθερό κόστος} + \text{Μεταβλητό κόστος} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Συνολικό κόστος}}{\text{Ποσότητα}} = \frac{\text{Σταθερό κόστος} + \text{Μεταβλητό κόστος}}{\text{Ποσότητα}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Μέσο συνολικό κόστος} = \text{Μέσο σταθερό κόστος} + \text{Μέσο μεταβλητό κόστος} \Rightarrow \text{Μ.Σ.Κ.} = \frac{\text{ΣΚ}}{Q}$$

ΟΡΙΑΚΟ ΚΟΣΤΟΣ

Οριακό κόστος είναι ο λόγος της μεταβολής του συνολικού κόστους ως προς την μεταβολή του προϊόντος. Δηλαδή,

$$\text{Ο.Κ.} = \frac{\text{Μεταβολή στο συνολικό κόστος}}{\text{Μεταβολή ποσότητας προϊόντος}} = \frac{\Delta.\Sigma.\text{Κ.}}{\Delta.Q}$$

και επειδή το σταθερό κόστος δε μεταβάλλεται

$$\text{Ο.Κ.} = \frac{\text{Μεταβολή μεταβλητού κόστους}}{\text{Μεταβολή ποσότητας προϊόντος}} = \frac{\Delta.\Sigma.\text{Κ.}}{\Delta.Q}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

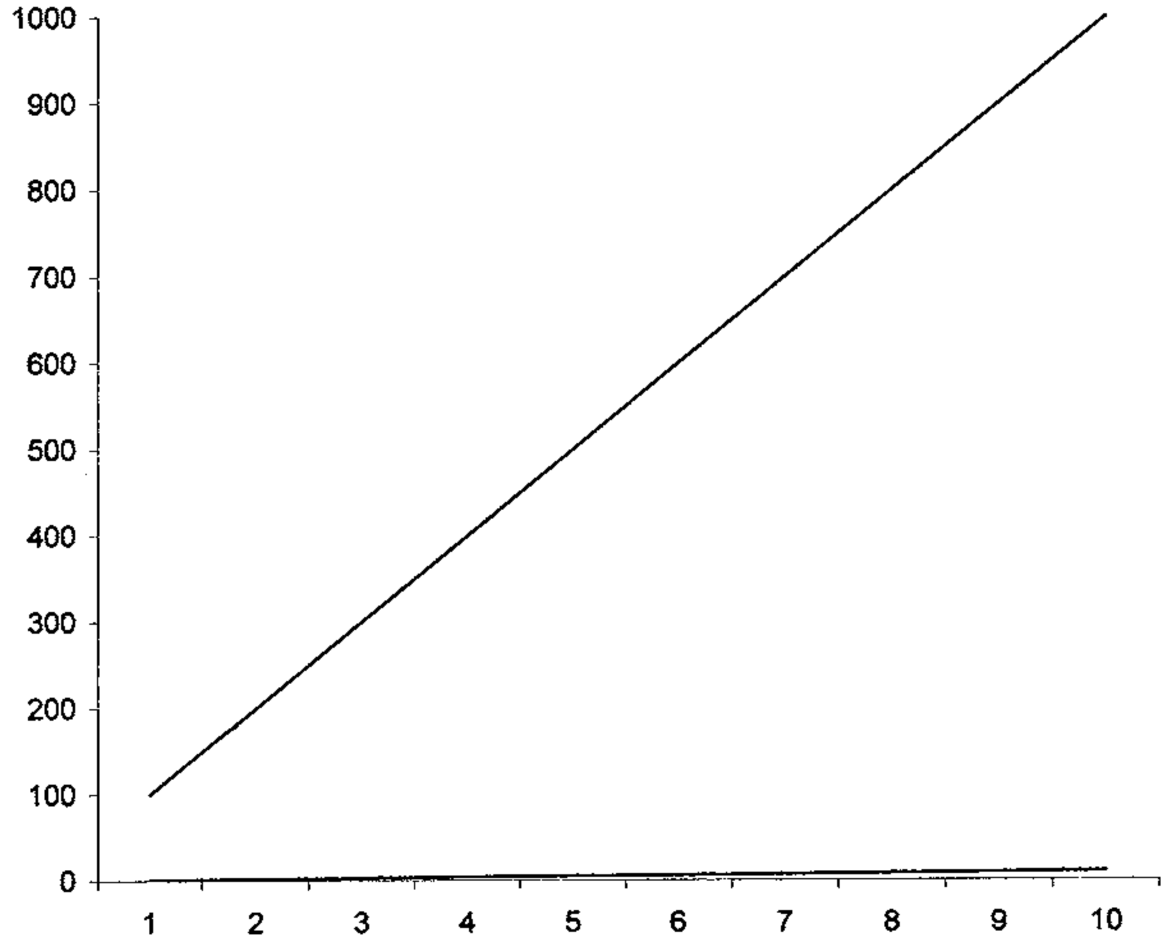
Έστω τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα που αναφέρονται στο κόστος παραγωγής ενός προϊόντος.

Προϊόν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητό κόστος	50	90	120	160	220	300	400	520	670	900

Τα σταθερά έξοδα της επιχείρησης είναι 200. Να βρεθεί το σταθερό, συνολικό, μέσο σταθερό, μέσο μεταβλητό και οριακό κόστος και να γίνουν οι καμπύλες κόστους.

ΛΥΣΗ:

Προϊόν	ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΚΟΣΤΟΣ	Σταθερό κόστος	Συνολικό κόστος	Μέσο Σταθερό κόστος	Μέσο Μεταβλητό κόστος	Οριακό κόστος
1	50	200	250	200	50	50
2	90	200	290	100	45	40
3	120	200	320	66,6	40	30
4	160	200	360	50	40	40
5	220	200	420	40	44	60
6	300	200	500	33,3	50	80
7	400	200	600	26,6	57,1	100
8	520	200	720	25	65	120
9	670	200	870	22,2	74,44	150
10	900	200	1100	20	90	230


1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^o

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

5.1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o και συμβολίζεται με $f'(x_o)$

Δηλαδή: $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$ τότε στο $x_o=1$ έχουμε

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

Επομένως $f'(1) = 2$

5.2. Παράγωγοι μερικών Βασικών συναρτήσεων

Με αντικατάσταση στο τύπο της παραγώγου βγάζουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

- Έστω η σταθερή συνάρτηση f (x) = C. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = 0$.

  δηλαδή $(C)' = 0$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = 1$

  δηλαδή $(x)' = 1$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

στο R και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$

δηλαδή $(x)^{\nu} = \nu x^{\nu-1}$

5.3. Μονοτονία συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- γνησίως αύξουσα σ' ένα υποσύνολο Β του πεδίου ορισμού της,

όταν για κάθε x_1, x_2, Ε, Β με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$f(x_1) < f(x_2)$

- γνησίως φθίνουσα σ' ένα υποσύνολο Β του πεδίου ορισμού της,

όταν για κάθε x_1, x_2, Ε, Β με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$f(x_1) > f(x_2)$

Από τα παραπάνω βγάζουμε το παρακάτω θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ

i) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

ii) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

5.4 Ακρότατα Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και x_oΕ (α,β) ένα κρίσιμο σημείο της f, στο οποίο αυτή είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) > 0$ στο (x_o, β), τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x_o)$ διατηρεί πρόσημο στο (α, x_o) ν (x_o, β) τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

5.5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ

Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης Π (x) κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο Π (x) = 40.000 – 6x. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4.000 €. Αν η Βιομηχανική πληρώνει φόρο 1.200 € για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ:

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι:

$$E(x) = x \cdot \Pi(x) \Rightarrow E(x) = x(40.000 - 6x) \Rightarrow E(x) = -6x^2 + 40.000x$$

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι K (x) = 4.000x

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι: $K_{o\lambda} = 4.000x + 1.200x = 5.200x$

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι:

$$P(x) = E(x) - K_{o\lambda}(x) = -6x^2 + 40.000x - 5.200x = -6x^2 + 34.800x$$

Έχουμε $P'(x) = -12x + 34.800$, οπότε $P'(x) = 0 \Rightarrow x = 2.900$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της P στο (ο, +οο) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	2900	+oo
P΄(x)	+		-
P(x)		50.460€	

↗ μέγιστο ↘

Επομένως το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2.900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50.460 €.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Το κόστος παραγωγής της ποσότητας Q ενός προϊόντος είναι C (Q) = $2Q^2$-36Q+25 και η τιμή πώλησης της μονάδας του προϊόντος είναι $P(Q) = \frac{1}{2}Q - 15$

Να υπολογισθούν οι ποσότητες του προϊόντος για τις οποίες:

i) Το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο.

ii) Το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο.

iii) Το κέρδος από την πώληση του προϊόντος είναι μέγιστο.

ΛΥΣΗ:

i) $C'(Q) = 4Q - 36$ επειδή $C'(Q) = 0$ Για να είναι το κόστος ελάχιστο.

Άρα $4Q - 36 = 0$

$4Q = 36$

$Q = 9$

Q	-oo	9	+oo
P΄(Q)	-		+

↘ Τοπικό ελάχιστο ↗

Άρα το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο για την ποσότητα Q = 9

ii) Έσοδα = Q x P(Q)

$$E'(Q) = Q \times \left(\frac{1}{2}Q - 15\right) = \frac{1}{2}Q^2 - 15Q$$

Για να είναι το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος ελάχιστο θα πρέπει $E'(Q) = 0$

$E'(Q) = Q - 15 \Rightarrow Q = 15$

Άρα για $Q = 15$ το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο.

Q	-oo	15	+oo
E΄(Q)	-		+
	↘		↗

iii) Κέρδος = Έσοδα – κόστος

$$K(Q) = E(Q) - C(Q) = \frac{1}{2}Q^2 - 15Q - 2Q^2 + 36Q - 25 = -\frac{3}{2}Q^2 + 21Q - 25$$

$K'(Q) = -3Q + 21 \Rightarrow Q = 7$

Άρα το κέρδος από την πώληση του προϊόντος είναι μέγιστο στην τιμή Q=7.

Q	-oo	7	+oo
K΄(Q)	-		+
	↗		↘

ΑΣΚΗΣΗ

Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων μιας εταιρείας μειώνεται με σταθερό αριθμό. Αν ο όγκος αυτός ανέρχεται μετά από ένα χρόνο σε 6,87 εκατ. €

και μετά από 4 χρόνια σε 4,6 εκατ. € να υπολογισθεί ο ετήσιος ρυθμός και οι συναρτήσεις.

α) συνεχούς και β) διακεκριμένης παρακμής.

ΛΥΣΗ:

α) Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων υπολογίζεται από τη σχέση $P = Poe^{-rt}$ όπου Po ο αρχικός ετήσιος όγκος πωλήσεων και r ο ρυθμός συνεχούς παρακμής.

Από τα δεδομένα προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} 6,87 = Poe^{-r} \\ 4,36 = Poe^{-r} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \ln(6,87) = \ln Po - r \\ \ln(4,36) = \ln Po - 4r \end{array}$$

από υπολογισμό των ln έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 1,92716 = \ln Po - r \\ 1,47247 = \ln Po - 4r \end{array}\right\} \text{αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:}$$

$0,45469 = 3r \Leftrightarrow r = 0,15156$, δηλαδή ο ετήσιος αριθμός συνεχούς παρακμής είναι 15,156%.

Αντικαθιστώντας το r στην πρώτη από τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε $\ln Po = 2,0772 \Rightarrow Po \approx 5,982$

Κατά συνέπεια η συνάρτηση συνεχούς παρακμής είναι:

$P = 5,982e^{-0,15156t}$

β) Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων υπό μορφή διακεκριμένης παρακμής υπολογίζεται από τη σχέση $P = 5,982\ (1+i)^{-t}$ όπου i ο ετήσιος ρυθμός διακεκριμένης παρακμής. Από την ισότητα $(1+i)^{-t} = e^{-0,15156t}$ προκύπτει:

$\ln(1+i) = 0,15156$

Κατά συνέπεια προκύπτει ότι $1+i \approx 1,66 \Rightarrow i\ 0,166$

Δηλ. $i=16,6\%$

Η συνάρτηση διακεκριμένης παρακμής είναι $P=5,982 \cdot 1,166^{-t}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο:

$C(x)= x^3-3\nu x^2+5\nu^3$ Ευρώ.

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 16-ν ευρώ.

Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $C'(x) = 3x^2 - 6\nu x$

$C''(x) = 6x-6\nu$

Επομένως $C'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-6\nu x = 0 \Rightarrow 3x = 6x \Leftrightarrow x=2\nu$

και $C''(2\nu) = 12\nu-6\nu = 6\nu > 0$

Άρα για κάθε $x = 2\nu$ μονάδες το κόστος γίνεται ελάχιστο.

Το κέρδος από την παραγωγή 2ν μονάδων είναι ίσο με $P(\nu) = 2\nu(16-\nu)$ $P\nu = 32\nu - 2\nu^2$

Έχουμε $P'(\nu) = 32 - 4\nu$

$P''(\nu) = -4<0$

Επομένως $P'(N) = 0$ $32 - 4v = 0 \Leftrightarrow v = 8$.

Άρα όταν παράγονται ημερησίως $x = 2 \cdot 8 \Rightarrow x = 16$ μονάδες από ν = 8 εργάτες έχουμε το ελάχιστο κόστος και το μέγιστο κέρδος.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Η είσπραξη E(x), από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος $(0 \leq x \leq 100)$ μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x) = 100 - x$ € ανά μονάδα προϊόντος, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής είναι σταθερός και ισούται με 2 χιλ. € ανά μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 100 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα.

ΛΥΣΗ

Αν P (x) είναι το κέρδος και K (x) είναι το κόστος παραγωγής για x μονάδες προϊόντος, τότε:

$P(x) = E(x) - K(x)$

οπότε $P'(x) = E'(x) - K'(x) = 100 - x - 2 = 98 - x$

οπότε

$$S\, P'(x) = S\,(98-x)\,dx \Leftrightarrow P(x) = 98x - \left|\frac{x^2}{2}\right| + C, \quad C\, ER$$

Όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα, το κέρδος είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει $P(0) = 0$

Άρα $P(0) = 0 \Leftrightarrow 98 \cdot 0 - \frac{0}{2} + C = 0 \Rightarrow 0$

Επομένως $P(x) = 98x - \frac{x^2}{2}$

Άρα το κέρδος από 100 μονάδες προϊόντος είναι:

$$P(100) = 98 \,.\, 100 - \frac{100^2}{2} = 4.800.000 \text{ €}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένα κατάστημα αγοράζει ποτήρια με κόστος 30 χρηματικές μονάδες το ένα. Από την πείρα του καταστήματος είναι γνωστό ότι αν πωλούν ποτήρια x χρηματικές μονάδες το ένα τότε κατά μέσο όρο πωλούν 80-x ποτήρια ημερήσια. Να βρείτε:

α) τις συναρτήσεις για $R(x)$, $C(x)$ και $P(x)$

β) το ημερήσιο κέρδος όταν $x = 60$ χρηματικές μονάδες

γ) να βρείτε την πλέον συμφέρουσα τιμή πώλησης.

ΛΥΣΗ

α) $C(x) = 30(80-x)$

$R(x) = x(80-x)$

$P(x) = R(x) - C(x) \Leftrightarrow P(x) = x(80-x) - 30(80-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x) = (80-x)(x-30)$

β) Για $x = 60$ έχουμε:

$P(60) = (80-60)(60-30) = 600$ χρηματικές μονάδες.

γ) Η συμφέρουσα τιμή πώλησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους.

$P'(x) = [(80-x)(x-30)]' = (80x - x^2 + 30x - 2400)' =$

$= (-x^2 + 110x - 2400)' = -2x + 110$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 110 = 0 \Rightarrow x = 55$

x	-oo	55	+oo
P΄(x)	+		-
P(x)	↘		↗

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται η συνάρτηση εσόδων μιας επιχείρησης $R = 24Q - Q^2$

Να βρεθεί το επίπεδο πωλούμενων ποσοτήτων ώστε τα έσοδα να γίνονται μέγιστα.

ΛΥΣΗ

$R(Q) = 24Q - Q^2$

$R'(Q) = 24 - Q$

Άρα πρέπει R; $(Q) = 0 \Rightarrow 24\text{-}2Q = 0 \Rightarrow Q = 12$

Άρα για να γίνονται τα έσοδα μέγιστα πρέπει το $Q = 12$

Q	12	55	+oo
R΄(Q)	+		-
R(Q)	↘		↗

ΑΣΚΗΣΗ 8

Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του t σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο:

$$P(t) = 20\left(200 - \frac{250}{t} - t^2\right), \quad t > 3.$$

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Θα βρούμε την $P'(t)$

Έχουμε: $P'(t) = 20\left(\frac{250}{t^2} - 2t\right) \Rightarrow P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{250}{t^2} - 2t = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{250 - 2t^3}{t^2} = 0 \Rightarrow t^3 = 125 \Rightarrow t = 5$$

Θα εξετάσουμε αν η τιμή t = 5 αντιστοιχεί σε μέγιστο κέρδος με την βοήθεια της δεύτερης παραγώγου. Άρα:

$$P''(t) = 20\left(-\frac{500}{t^3} - 2\right) = -20\left(\frac{500}{t^3} - 2\right) < 0, \text{ αφού } t>3$$

Άρα για t = 5 έχουμε μέγιστο κέρδος που είναι P (5) = 20 (200-50-25) = 2.500 €

ΑΣΚΗΣΗ 9

Θεωρούμε έναν κατασκευαστή μοτοποδηλάτων του οποίου τα εβδομαδιαία έξοδα και έσοδα (σε χρηματικές μονάδες) είναι:

$$C(x) = 2000 + 40x - \frac{x^2}{20} \text{ και } R(x) = 80x + \frac{x^2}{10} \text{ αντίστοιχα.}$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση του οριακού κόστους και των οριακών εσόδων.

β) Ποιο είναι το μέτρο μεταβολής του κόστους όταν το επίπεδο παραγωγής είναι x=30 μοτοποδήλατα την εβδομάδα;

γ) Ποιο είναι το μέτρο μεταβολής των εσόδων όταν το επίπεδο παραγωγής είναι x=30 μοτοποδήλατα την εβδομάδα;

δ) Να εκτιμήσετε το κόστος παραγωγής του 31ου μοτοποδηλάτου.

ε) Να εκτιμήσετε τα έσοδα από την πώληση του 31ου μοτοποδηλάτου.

ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις του οριακού κόστους και των οριακών εσόδων είναι:

$MC = C'(x) = 40 - \frac{x}{10}$ και $MR = R'(x) = 80 + \frac{x}{5}$

Η συνάρτηση του οριακού κέρδους είναι:

$MP = MR - MC$

$= 80 + \frac{x}{5} - (40 - \frac{x}{10}) = 40 - \frac{3x}{10}$

β) $C'(30) = 40 - \frac{30}{10} = 37$ χρηματικές μονάδες ανά μοτοποδήλατο

γ) $R'(x) = 80 + \frac{30}{5} = 86$ χρηματικές μονάδες ανά μοτοποδήλατο

δ) 37 χρηματικές μονάδες

ε) χρηματικές μονάδες

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης από την εξίσωση

$$4Q+P=28$$

Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης όταν P=2

ΛΥΣΗ

Είναι Q = $7-\frac{1}{4}P$ άρα $\frac{dQ}{dP}=\frac{1}{4}$

Αν P=2 Q = $7-\frac{1}{4}\cdot 2=7-\frac{1}{2}=6+\frac{1}{2}$

Τότε $\varepsilon=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=-\frac{1}{13}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Η συνάρτηση ζήτησης είναι :

P=200-4x-3x2

Να βρείτε το πλεονέκτημα των καταναλωτών

α) Όταν 5 μονάδες του αγαθού πωληθούν

β) Όταν η τιμή της αγοράς είναι 68 χρηματικές μονάδες ανά μονάδα.

ΛΥΣΗ

α) όταν $\tilde{x}=5$, τότε

p = 200 - 4·5 - 3·5^2 = 105 χρηματικές μονάδες

και

$$CS=\int_0^5\left[\left(200-4x-3x^2\right)-105\right]dx$$

$$=\int_0^5\left(95-4x-3x^2\right)dx$$

$$=\left[95x-2x^2-x^3\right]_0^5=300\,\chi\rho\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

β) Όταν $\tilde{p}=68$ τότε η εξίσωση

$$200-4x-3x^2=68$$

δίνει

$\tilde{x}=6$, και $\tilde{x}=-\frac{22}{3}$ που απορρίπτεται.

Για $\tilde{p}=68$, $\tilde{x}=6$, έχουμε

$$CS=\int_0^6 [(200-4x-3x^2)-68]dx$$
$$=\int_0^6 (132-4x-3x^2)dx$$
$$=[132x-2x^2-x^3]_0^6=504\,\text{χρηματικές μονάδες}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Ένας αυτόματος πωλητής έχει

$$C'(t)=4+\frac{14}{3}t$$

και $$R'(t)=150-\frac{1}{3}t^2$$

Να προβλέψετε το καθαρό κέρδος σε χρηματικές μονάδες τα 3 πρώτα χρόνια καθώς και για τα 3 επόμενα χρόνια.

$$P'(t)=R'(t)-C'(t)$$

Είναι $$=\left(150-\frac{1}{3}t^2\right)-\left(5+\frac{14}{3}t\right)$$
$$=145-\frac{1}{3}t^2-\frac{14}{3}t$$

α) Για τα τρία πρώτα χρόνια έχουμε:

$$P(3)-P(0)=\int_0^3 P'(t)dt$$
$$=\int_0^3\left(145-\frac{1}{3}t^2-\frac{14}{3}t\right)dt$$
$$\left[145t-\frac{1}{9}t^3-\frac{7}{3}t^2\right]_0^3$$
$435-3-21=411 \chi\rho.\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$

β) Για τα τρίτα επόμενα χρόνια έχουμε:

$$P(6)-P(3)=\int_3^6 P'(t)dt$$
$$=\int_3^6\left(145-\frac{1}{3}t^2-\frac{14}{3}t\right)dt$$
$$\left[145t-\frac{1}{9}t^3-\frac{7}{3}t^2\right]_3^6$$
$762-411=351 \chi\rho.\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Το μέτρο της επένδυσης είναι $I=60t^{1/3}$ και το αρχικό κεφάλαιο για t=1 είναι 85. Να βρείτε το K.

Είναι $K=\int 60t^{1/3}dt+c=45t^{4/3}+c$

Για t=1 και K=85 έχουμε $85=45\cdot 1+c$ ή c=40

Ώστε $K=45t^{4/3}+40$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Δίνεται $MC=32+18Q-12Q^2$. Σταθερό κόστος = 43.

Να βρείτε $(\alpha) C, (\beta) \widetilde{C}$ και (γ) το μεταβλητό κόστος.

ΛΥΣΗ

(α)

$$C = \int MCdQ = \int (32 + 18Q - 12Q^2)dQ = 32Q + 9Q2 - 4Q3 + c$$

Για Q=0, ΣΚ=43 και c=43

Ώστε $C = 32Q + 9Q^2 + 43$

(β)

$$\widetilde{C} = \frac{C}{Q} = 32 + 9Q - 4Q^2 + \frac{43}{Q}$$

(γ)

$$MK = C - \Sigma K = 32Q + 9Q^2 - 4Q^3$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- **ΓΙΩΡΓΟΣ Μ. ΚΟΡΡΕΣ – ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ ΚΑΙ ΔΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ:**
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ

- **ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΪΤΣΑΣ:**
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

- **ΣΩΤΗΡΗΣ Κ. ΚΑΡΒΟΥΝΗΣ:**
ΟΙΚΟΝΟΜΟΤΕΧΝΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ

- **ΠΕΤΡΟΣ Α. ΚΙΟΧΟΣ**
ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

- **ΘΕΟΔΩΡΟΣ Π. ΛΙΑΝΟΣ**
ΓΕΩΡΓΙΟΣ Κ. ΧΡΗΣΤΟΥ
ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

- **ΙΩΑΚΕΙΜ ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ**
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

- **ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ Σ. – ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ Β. – ΜΕΤΗΣ Σ.**
ΜΠΡΟΥΧΟΥΤΑΣ Κ. – ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ Σ. – ΠΟΛΥΖΟΣ Γ.
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΕΣΜΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

- **ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ – ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ**
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

- **Δ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥΔΗΣ, Ι. ΘΕΟΔΩΡΟΥ, Π. ΚΙΚΙΛΙΑΣ, Ν. ΚΟΥΡΗΣ, Δ. ΠΑΛΑΜΟΥΡΔΑΣ –**

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ - ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΔΗΡΟΣ

- **ΜΙΧΑΛΗΣ ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ – ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ