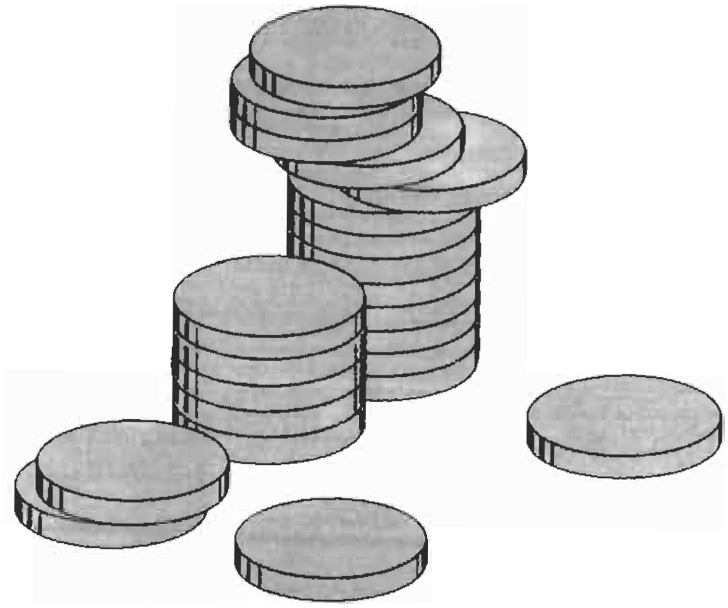
Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

"Ράντες με όρους αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου και εφαρμογές τους"

Εισηγητής: Δ.Γεωργίου

Σπουδάστρια
Λασκαράτου Γερασιμούλα

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΡΑΝΤΩΝ

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΡΑΝΤΩΝ

Με τον όρο χρηματική ροή ή ράντα εννοούμε ένα σύνολο κεφαλαίων τα οποία καταβάλλονται σε ίσα,τακτά χρονικά διαστήματα.Τα κεφάλαια αυτά μπορεί να είναι μια σειρά πληρωμών ή εισπράξεων χρηματικών ποσών, περιοδικές καταθέσεις σε Τράπεζες για σχηματισμό χρηματικών αποθεμάτων, δόσεις για την εξόφληση χρέους ή αγορά ακινήτων κτλ.

Οι ράντες, αποτελούν τη βάση του λογισμού των μακροπρόθεσμων ικονομικών πράξεων και χρησιμοποιούνται ως όργανα μέτρησης της αξίας των επενδύσεων.

Σε κάθε ράντα τα καταβαλόμενα κεφάλαια λέγονται όροι ή δόσεις της. Η ημέρα καταβολής ενός όρου μιας ράντας λέγεται λήξη του όρου αυτού. Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της καταβολής δύο διαδοχικών όρων λέγεται περίοδος της ράντας. Κάθε όρος της ράντας ανατοκίζεται για τις επόμενες περιόδους με κάποιο προκαθορισμένο επιτόκιο i.Αρχή μιας ράντας λέγεται η αρχή της πρώτης της περιόδου ενώ το τέλος της περιόδου στην οποία γίνεται η καταβολή του τελευταίου όρου της λέγεται τέλος της ράντας.Με βάση τα διάφορα στοιχεία τους, οι ράντες κατανέμονται σε διάφορους τύπους. Διακρίνονται βασικά σε ασυνεχείς και σε συνεχείς. Ασυνεχείς ή απαριθμητές λέγονται οι ράντες των οποίων ο χρόνος καταβολής των όρων τους είναι απαριθμητή μεταβλητή ενώ συνεχείς αυτές των οποίων ο χρόνος είναι συνεχής μεταβλητή.Η περίοδος επομένως μιας συνεχούς ράντας είναι απειροστή,έχει δηλαδή αυτή όρους κάθε χρονική στιγμή.

Οι ασυνεχείς ράντες διακρίνονται σε:

1. Πρόσκαιρες και διηνεκείς.

Προσκαιρες είναι αυτές που το πλήθος των όρων τους είναι πεπερασμένο,ενώ διηνεκείς αυτές που το πλήθος των όρων είναι άπειρο .

2. Μεταβλητές και σταθερές.

Μεταβλητές είναι οι ράντες των οποίων οι όροι τους μεταβάλλονται και σταθερές αυτές των οποίων όλοι οι όροι είναι ίσοι.Οταν όλοι οι όροι είναι ίσοι με τη μονάδα η ράντα λέγεται μοναδιαία.

3.Ακέραιες και κλασματικές.

Ακέραιες είναι οι ράντες που η περίοδος τους είναι ίση με τη περίοδο στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο και κλασματικές οι ράντες με περίοδο μικρότερη από την περίοδο στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο.Η ράντα με περίοδο το έτος λέγεται ετήσια.

4. Αμεσες, μέλλουσες και αρξάμενες.

α)Αμεσες λέγονται οι ράντες που η καταβολή του πρώτου όρου γίνεται στην αρχή τους.

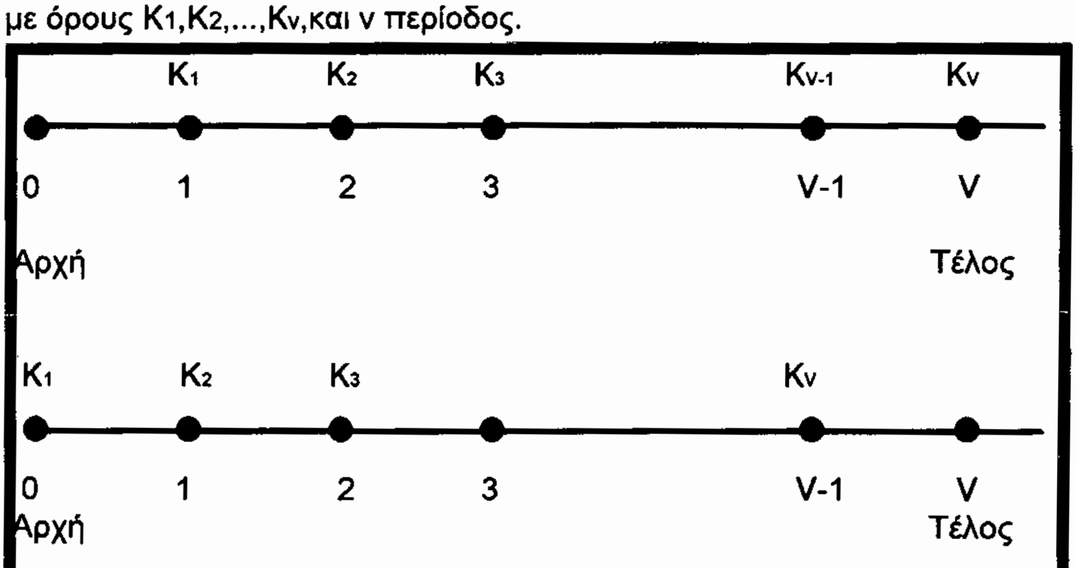
β)Μέλλουσες λέγονται οι ράντες που η καταβολή του πρώτου όρου γίνεται μετά από ορισμένο αριθμό περιόδων.

γ)Αρξάμενες λέγονται οι ράντες που η καταβολή του πρώτου όρου γίνεται πριν από ορισμένο αριθμό περιόδων.

5. Ληξιπρόθεσμες και προκαταβλητέες.

Ληξιπρόθεσμες λέγονται οι ράντες που οι όροι καταβάλλονται στη λήξη κάθε περιόδου ενώ προκαταβλητέες αυτές που οι όροι καταβάλλονται στην αρχή κάθε περιόδου.

Στο σχήμα 1 παριστάνονται αντίστοιχα μια ληξιπρόθεσμή και προκαταβλητέα ράντα, με όρους $K_1, K_2, \ldots, K_v$, και ν περίοδος.



ΣΧΗΜΑ 1

Κάθε όρος μιας ράντας είναι ένα κεφάλαιο που καταβάλλεται σε δεδομένη ημέρα και που ανατοκίζεται για τις περιόδους που ακολουθούν.Εχει δηλαδή μια πραγματική αξία, η οποία μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Το άθροισμα των πραγματικών αξιών όλων των όρων μιας ράντας σε μια συγκεκριμένη ημέρα ονομάζεται πραγματική αξία της ράντας την ημέρα αυτή,ενώ η ημέρα κατά την οποία υπολογίζεται η πραγματική αξία μιας ράντας λέγεται εποχή υπολογισμού. Η πραγματική αξία μιας ράντας στην αρχή της, λέγεται αρχική αξία, ενώ στο τέλος της, λέγεται τελική αξία.

1.2 ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

Ως βασικό τύπο ράντας θα θεωρήσουμε τις ασυνεχείς, ακέραιες,άμεσες, ληξιπρόθεσμες ράντες με ν όρους $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ για τις οποίες θα υπολογίσουμε την τελική και την αρχική τους αξία συμβολίζοντας αντίστοιχα με S και A.

1.3 ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ

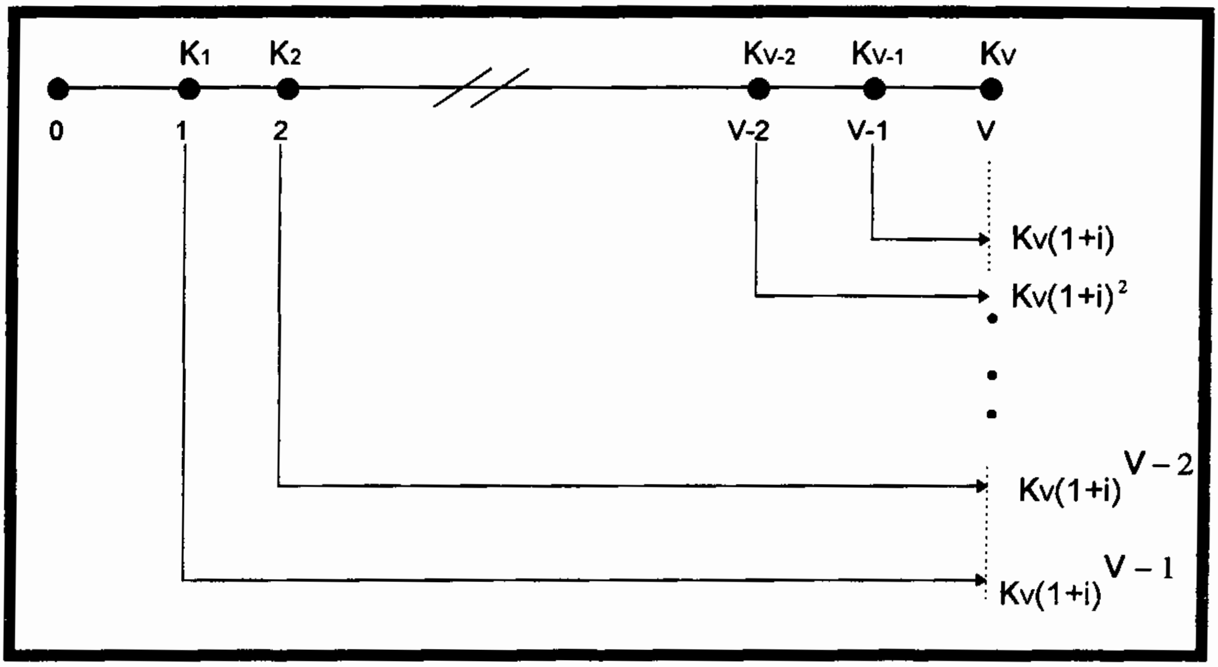
Για να βρούμε την τελική αξία μιας ράντας πρέπει να υπολογίσουμε, με το προκαθορισμένο επιτόκιο i,την τελική αξία κάθε όρου της.Στις ληξιπρόθεσμες ράντες η καταβολή κάθε όρου γίνεται στο τέλος κάθε περιόδου δηλαδή ο πρώτος όρος K_1 ανατοκίζεται για ν-1 περιόδους και έχει τελική αξία,$K_1(1+i)^{\nu-1}$, ο δεύτερος για ν-2 περιόδους και έχει τελική αξία $K_1(1+i)^{\nu-2}$ κ.ο.κ. και τέλος η τελική αξία του τελευταίου όρου είναι ο ίδιος ο όρος K_ν. Αυτό στηρίζεται στον τύπο της σύνθετης κεφαλαιοποίησης (ανατοκισμός) σύμφωνα με τον οποίο, η τελική αξία S ενός κεφαλαίου c τοκιζόμενο για χρόνο t και με επιτόκιο i δίνεται από τον τύπο $S=c(1+i)^t$.

Η τελική επομένως αξία S της ράντας θα είναι:

$$S_{\nu\rceil} = K_1(1+i)^{\nu-1} + K_2(1+i)^{\nu-2} + \ldots + K_{\nu-1}(1+i) + K\nu$$

$$S_{\overline{\nu}|} = \sum_{k=1}^{\nu} K_k (1+i)^{\nu-k} \qquad (1.1)$$

Στο σχήμα 2 απεικονίζεται η τελική αξία της ράντας.



ΣΧΗΜΑ 2

1.4 ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΡΑΝΤΑ

Στην περίπτωση της μοναδιαίας ράντας έχουμε $K_\kappa=1, \kappa=1,2,\ldots,\nu$, οπότε ο τύπος (1.1) γίνεται:

$$S_{\overline{\nu|}} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(1+i)^{\nu-\kappa} = 1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{\nu-\kappa}$$

$$= \frac{(1+i)^{\nu-1}(1+i)-1}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$$

$$\boxed{S_{\overline{\nu|}} = \frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}} \qquad (1.2)$$

και είναι η τελική αξία της μοναδιαίας ράντας.

Πολλές φορές στις εφαρμογές χρησιμοποιείται ο αντίστροφος του $S_{\overline{\nu|}}$

$$\boxed{\frac{1}{S_{\nu\neg}} = \frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}} \qquad (1.3)$$

Οι τιμές του $S_{\nu\neg}$ και του $\frac{1}{S_{\nu\neg}}$ για τις διάφορες τιμές του i και ν δίνονται από τους πίνακες.

1.5 ΣΤΑΘΕΡΗ ΡΑΝΤΑ

Στην περίπτωση της σταθερής ράντας έχουμε Κκ=Κ, κ=1,2,...,ν, οπότε ο τύπος (1.1) γίνεται:

$$S_{\nu\neg} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} K(1+i)^{\nu-\kappa} = K\sum_{\kappa=1}^{\nu}(1+i)^{\nu-\kappa} \quad \text{, όπου } \sum_{\kappa=1}^{\nu}(1+i)^{\nu-\kappa} = (1.2)$$

οπότε $$\boxed{S_{\nu\neg} = K\ s_{\nu\neg}} \qquad (1.4)$$

Παράδειγμα: Η τελική αξία μιας άμεσης, ληξιπρόθεσμης ράντας που έχει 20 όρους ίσους με Κ=10.000 δρχ. και ετήσιο επιτόκιο 8% είναι:

$S_{\nu} = Ks_{20\neg} = 10.000x45{,}761964 = 457.619{,}64$ δρχ.

1.6 ΡΑΝΤΕΣ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΣΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟ

Αν οι όροι μιας ράντας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο Κ και λόγο λ, τότε θα είναι Κκ=Κ+(κ-1)λ, κ=1,2,...,ν οπότε ο τύπος (1.1) γίνεται:

$$\begin{aligned} S_{\nu\neg} &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}[K+(\kappa-1)\lambda](1+i)^{\nu-\kappa} \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}K(1+i)^{\nu-\kappa} + \lambda\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa-1)(1+i)^{\nu-\kappa} \\ &= Ks_{\nu\neg} + \lambda\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa-1)(1+i)^{\nu-\kappa} \\ &= Ks_{\nu\neg} + \frac{\lambda}{i}(s_{\nu\neg} - \nu) \end{aligned}$$

Τελικά:

$$\boxed{S_{\nu\neg} = [K + \frac{\lambda}{i}]s_{\nu\neg} - \frac{\nu\,\lambda}{i}} \qquad (1.5)$$

1.7 ΡΑΝΤΕΣ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟ

Αν οι όροι μιας ράντας αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο Κ και λόγο λ, τότε θα είναι $K_\kappa = K\,\lambda^{\kappa-1}$, κ = 1,2,...,ν, οπότε ο τύπος (1.1) γίνεται :

$$S_{\nu\neg} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} K\lambda^{\kappa-1}(1+i)^{\nu-\kappa} = K\sum_{\kappa=1}^{\nu}\lambda^{\kappa-1}(1+i)^{\nu-\kappa}$$

$$K[(1+i)^{\nu-2} + \lambda(1+i)^{\nu-2} + \ldots + \lambda^{\nu-2}(1+i) + \lambda^{\nu-1}]$$

Για $\lambda(1+i)^{-1} \neq 1$, δηλαδή $\lambda \neq 1+i$, είναι :

$$S_{\nu\neg} = K\frac{\lambda^{\nu-1}\lambda(1+i)^{-1} - (1+i)^{\nu-1}}{\lambda(1+i)^{-1} - 1}$$

$$= K\frac{\lambda^{\nu-1}\lambda - (1+i)^{\nu}}{\lambda - (1+i)}$$

$$= K\frac{\lambda^{\nu} - (1+i)^{\nu}}{\lambda - (1+i)}$$

οπότε

$$\boxed{S_{\nu\neg} = K\frac{\lambda^{\nu} - (1+i)^{\nu}}{\lambda - (1+i)}} \qquad (1.6)$$

Για $\lambda(1+i)^{-1} = 1$,δηλαδή $\lambda = 1+i$, ο τύπος 1.1 γίνεται:

$$S_{\nu\neg} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} K(1+i)^{\kappa-1}(1+i)^{\nu-\kappa}$$

$$= K\sum_{\kappa=1}^{\nu}(1+i)^{\kappa-1+\nu-\kappa}$$

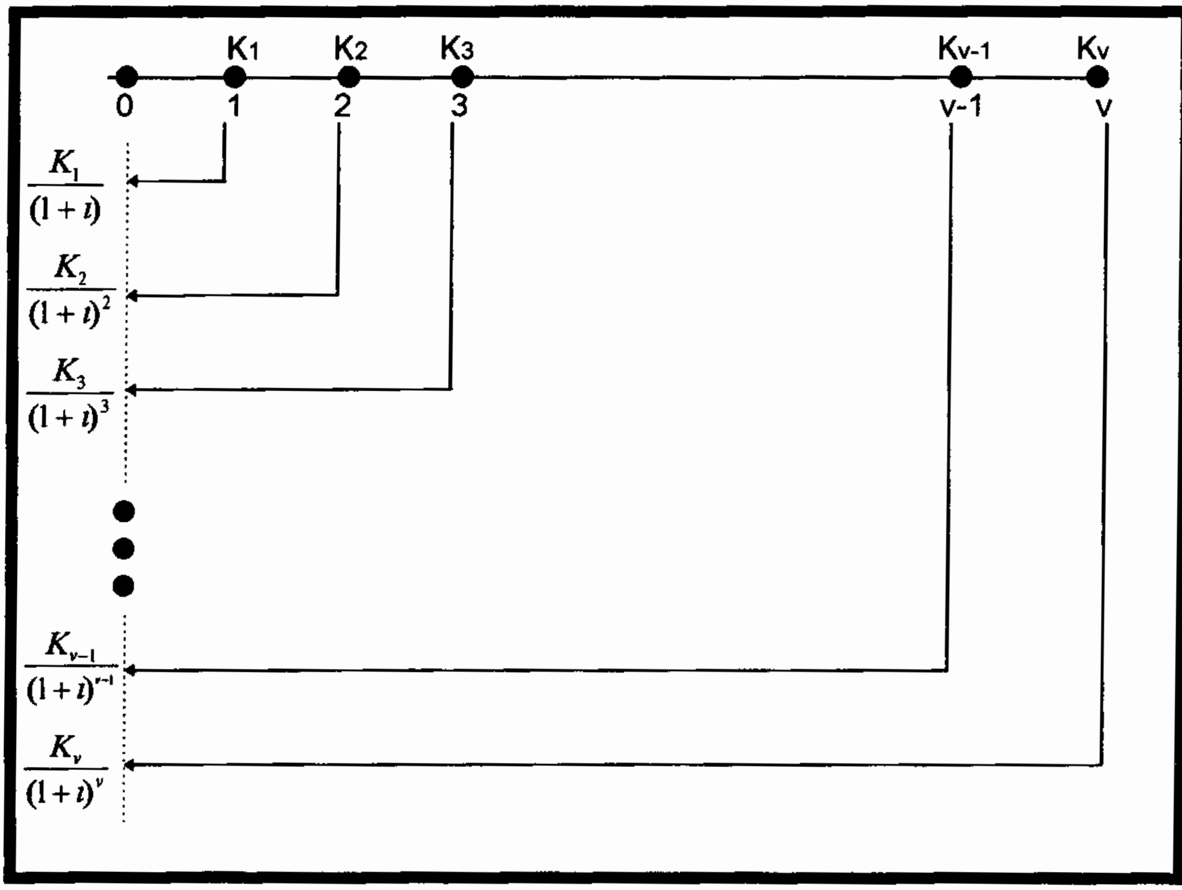
$$= K\sum_{\kappa=1}^{\nu}(1+i)^{\nu-1}$$

οπότε

$$\boxed{S_{\nu-1} = K_1(1+i)^{\nu-1}} \qquad (1.7)$$

1.8 ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ

Στο σχήμα 3 απεικονίζεται η αρχική αξία μιας ράντας την οποία για να βρούμε αρκεί να υπολογίσουμε , με το προκαθορισμένο επιτόκιο i, την αρχική αξία κάθε όρου της.



ΣΧΗΜΑ 3

Σύμφωνα με τον τύπο πραγματικής αξίας , δηλαδή $A' = C(1+i)^{-t}$, η αρχική αξία του πρώτου όρου K1 είναι $\frac{K_1}{1+i}$

του δεύτερου όρου K_2 είναι $\frac{K_2}{(1+i)^2}$

....

του $\nu^{ος}$ όρου K_ν είναι $\frac{K_\nu}{(1+i)^\nu}$

οπότε η αρχική αξία $A_{\nu\overline{1}}$ της ράντας θα είναι

$$A_{\nu\overline{1}} = \frac{K_1}{1+i} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{K_{\nu-1}}{(1+i)^{\nu-1}} + \frac{K_\nu}{(1+i)^\nu}$$

$$\boxed{A_{\nu\overline{1}} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa}} \qquad (1.8)$$

Ο τύπος αυτός γράφεται

$$A_{\nu\overline{1}} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa}$$

$$= (1+i)^{-\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{K_\kappa}{(1+i)^{\kappa-\nu}}$$

$$= (1+i)^{-\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} K_\kappa (1+i)^{\nu-\kappa}$$

και βάσει του (1.1)

$$\boxed{A_{\nu\overline{1}} = (1+i)^{-\nu} S_{\nu\overline{1}}} \qquad (1.9)$$

1.9 Μοναδιαία ράντα

Στην περίπτωση της μοναδιαίας ράντας από τους τύπους (1.2), (1.9) παίρνουμε :

$$A_{\overline{\nu}|} = (1+i)^{-\nu} S_{\overline{\nu}|} = (1+i)^{-\nu}\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i} = \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i}$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμβολίζεται με

$$\boxed{\alpha_{\overline{\nu}|} = \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i}} \qquad (1.10)$$

και είναι η αρχική αξία της μοναδιαίας ράντας.

Πολλές φορές στις εφαρμογές απαντάται ο αντίστροφος του $\alpha_{\overline{\nu}|}$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_{\overline{\nu}|}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-\nu}}} \qquad (1.11)$$

Οι τιμές των $\alpha_{\overline{\nu}|}$ και $\frac{1}{\alpha_{\overline{\nu}|}}$ για τις διάφορες τιμές των i και ν δίνονται από τους πίνακες.

1.10 Σταθερή ράντα

Στην περίπτωση της σταθερής ράντας από τους τύπους (1.4) και (1.9) παίρνουμε :

$$A_{\overline{\nu}|} = (1+i)^{-\nu} S_{\overline{\nu}|} = (1+i)^{-\nu} K s_{\overline{\nu}|} = (1+i)^{-\nu} K \frac{(1+i)^{\nu}}{i}$$

$$= K\frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} \quad \text{, όπου } \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} = (1.10)$$

$$= K\alpha_{\overline{\nu}|}$$

$$\boxed{A_{\nu\rceil}=K\alpha_{\nu\rceil}} \qquad (1.12)$$

Παραδείγματα :

1. Η αρχική αξία μιας άμεσης , ληξιπρόθεσμης ράντας που έχει 20 όρους ίσους με K = 10.000 δρχ. και ετήσιο επιτόκιο 8% είναι

$A_{20\rceil} = K\,\alpha_{20\rceil} = 10.000 \times 9{,}818147 = 98181{,}47$ δρχ.

2. Ο κάθε όρος μιας άμεσης , ληξιπρόθεσμης ράντας με 20 ίσους όρους και αρχική αξία 98181,47 και επιτόκιο 8% είναι

$$K=\frac{A_{20\rceil}}{\alpha_{20\rceil}}=\frac{98181{,}47}{9{,}818147}=10.000$$

1.11 ΡΑΝΤΕΣ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΣΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟ

Στην περίπτωση αυτή από τους τύπους (1.5) και (1.9) παίρνουμε :

$$A_{\nu\rceil}=(1+i)^{-\nu}S_{\nu\rceil}$$

$$=(1+i)^{-\nu}[(K+\frac{\lambda}{i})s_{\nu\rceil}-\frac{\nu\,\lambda}{i}]$$

$$=(K+\frac{\lambda}{i})(1+i)^{-\nu}s_{\nu\rceil}-\frac{\nu\,\lambda}{i}(1+i)^{-\nu}$$

$$=(K+\frac{\lambda}{i})(1+i)^{-\nu}\frac{(1+i)^{-\nu}-1}{i}-\frac{\nu\,\lambda}{i}-(1+i)^{-\nu}$$

$$= (K + \frac{\lambda}{i})\alpha_{\bar{\nu}|} - \frac{\nu\lambda}{i}(1+i)^{-\nu}$$

οπότε :

$$A_{\bar{\nu}|} = (K + \frac{\lambda}{i})\alpha_{\bar{\nu}|} - \frac{\nu\lambda}{i}(1+i)^{-\nu}$$

Για λ = 0, ο τύπος αυτός δίνει $A_{\bar{\nu}|} = K\,\alpha_{\bar{\nu}|}$, δηλαδή την αρχική αξία της σταθερής ράντας.

1.12 Ράντες με όρους σε γεωμετρική πρόοδο

Στην περίπτωση αυτή από τους τύπους (1.6) και (1.9) παίρνουμε :

$$A_{\bar{\nu}|} = (1+i)^{-\nu} S_{\bar{\nu}|}$$

$$= (1+i)^{-\nu} K \frac{\lambda^{\nu} - (1+i)^{\nu}}{\lambda - (1+i)}, \qquad \text{με } \lambda \neq 1+i$$

$$= K \frac{\lambda^{\nu}(1+i)^{-\nu} - 1}{\lambda - (1+i)}$$

οπότε

$$\boxed{A_{\bar{\nu}|} = K \frac{\lambda^{\nu}(1+i)^{-\nu} - 1}{\lambda - (1+i)}} \qquad 1.14$$

Για λ = 1, ο τύπος αυτός δίνει

$$A_{\bar{\nu}|} = K \frac{(1+i)^{-\nu} - 1}{1 - (1+i)}$$

$$= K \frac{(1+i)^{-\nu} - 1}{-i}$$

$$= K \frac{1 - (1+i)^{-\nu}}{i}, \quad \text{όπου } \frac{1 - (1+i)^{-\nu}}{i} = (1.10)$$

$$= K\alpha_{\bar{\nu}|}$$

δηλαδή την αρχική αξία της σταθερής ράντας. Οταν είναι λ = 1+i, από τους τύπους (1.7) και (1.9) παίρνουμε

$$A_{\nu\rceil}=(1+i)^{-\nu}S_{\nu\rceil}$$

$$=(1+i)^{-\nu}\nu\ K(1+i)^{\nu-1}$$

$$=\nu\ K(1+i)^{-1}$$

$$\boxed{A_{\nu\rceil}=\frac{\nu K}{1+i}} \qquad (1.15)$$

1.13 Εξισώσεις διαφορών

Η τελική και η αρχική αξία των ασυνεχών ραντών μπορούν να βρεθούν και με τη βοήθεια εξισώσεων διαφορών, καθόσον ο χρόνος στις ράντες αυτές είναι μια απαριθμητή μεταβλητή που παίρνει τιμές 0,1,2,... .

Ετσι για την άμεση, ασυνεχή, ληξιπρόθεσμη και σταθερή ράντα που ισχύει $S_{\nu+1\rceil} = S_{\nu\rceil}(1+i)+K$ προκύπτει :

$$S_{\nu+1\rceil}-(1+i)\,S_{\nu\rceil}=K$$

δηλαδή μια γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης της οποίας η αντίστοιχη ομογενής :

$$S_{\nu+1\rceil}-(1+i)\,S_{\nu\rceil}=0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση την

$$\omega-(1+i)=0$$

και γενική λύση $S_{\nu\rceil}=\kappa\,(1+i)$.

Εξάλλου η μερική της λύση είναι η :

$$S_{\nu\rceil}=\frac{K}{1-(1+i)}=-\frac{K}{i}$$

οπότε η γενική της λύση θα είναι η

$$S_{\nu\rceil}=\kappa(1+i)-\frac{K}{i}$$

η οποία για ν = 0 δίνει

$$S_{0\rceil}=\kappa-\frac{K}{i} \quad ή \quad 0=\kappa-\frac{K}{i} \quad ή \quad \kappa=\frac{K}{i} \quad \text{και τελικά}$$

$$S_{\nu\rceil}=\frac{K}{i}(1+i)^{\nu}-\frac{K}{i}$$

$$S_{\nu\rceil}=K\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$$

$$S_{\nu\rceil}=Ks_{\nu\rceil}$$

δηλαδή τον τύπο (1.4).

Για την άμεση , ασυνεχή , ακέραιη , ληξιπρόθεσμη ράντα της οποίας οι όροι συνιστούν αριθμητική πρόοδο που ισχύει

$$A_{\nu+1\rceil}=A_{\nu\rceil}+(K+\nu\lambda)(1+i)^{-(\nu+1)} \quad \text{προκύπτει}$$

$$A_{\nu+1\rceil}-A_{\nu\rceil}=(K+\nu\lambda)(1+i)^{-(\nu+1)}$$

δηλαδή μια γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης της οποίας η αντίστοιχη ομογενής

$$A_{\nu+1\rceil}-A_{\nu\rceil}=0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση ω-1 = 0 και γενική λύση $A_{\nu\rceil}$= κ ω = κ.

Εξάλλου επειδή η μερική της λύση είναι της μορφής :

$$A_{\nu+1\rceil}=(\alpha+\beta\nu)(1+i)^{-(\nu+1)}$$

θα ισχύει :

$$(\alpha+\beta(\nu+1))(1+i)^{-(\nu+2)}-(\alpha+\beta\nu)(1+i)^{-(\nu+1)}=(K+\nu\lambda)(1+i)^{-(\nu+1)}$$

$$(\alpha+\beta(\nu+1))(1+i)^{-1}-(\alpha+\beta\nu)=K+\nu\lambda$$

$$\alpha(1+i)^{-1}+\beta(1+i)^{-1}+\beta(1+i)^{-1}\nu=\alpha+K+(\beta+\lambda)\nu-$$

οπότε

$$\alpha(1+i)^{-1}+\beta(1+i)^{-1}=\alpha+K$$

$$\beta(1+i)^{-1}=\beta+\lambda$$

Το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων δίνει :

$$\alpha=-\frac{1+i}{i}\left(\frac{\lambda}{i}+K\right)$$

$$\beta=-\frac{\lambda}{i}(1+i)$$

Ετσι η γενική λύση της εξίσωσης είναι η :

$$\boxed{A_{\nu\neg}=\kappa+\left\{-\frac{1+i}{i}\left(\frac{\lambda}{i}+K\right)-\frac{\lambda}{i}(1+i)^{\nu}\right\}(1+i)^{-(\nu+1)}} \qquad (1.17)$$

η οποία για ν = 0 δίνει :

$$A_{0\neg}=\kappa-\frac{1+i}{i}\left(\frac{\lambda}{i}+K\right)(1+i)^{-1}$$

$$0=\kappa-\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda}{i}+K\right)$$

$$\kappa = \frac{1}{i}\left(\frac{\lambda}{i} + K\right)$$

οπότε :

$$A_{\overline{\nu}|} = \frac{1}{i}\left(\frac{\lambda}{i} + K\right) + \left\{-\frac{1+i}{i}\left(\frac{\lambda}{i} + K\right) - \frac{\lambda}{i}(1+i)^{\nu}\right\}(1+i)^{-(\nu+1)}$$

$$A_{\overline{\nu}|} = \left.\frac{\lambda}{i} + \kappa\right)\frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} - \frac{\lambda}{i}(1+i)^{-\nu}$$

$$A_{\overline{\nu}|} = \left.\frac{\lambda}{i} + K\right)\alpha_{\overline{\nu}|} - \frac{\nu\,\lambda}{i}(1+i)^{-}$$

δηλαδή τον τύπο (1.13).

1.14 Υπολογισμός του επιτοκίου

Στα προβλήματα των πρόσκαιρων ραντών το επιτόκιο τους βρίσκεται με την βοήθεια των πινάκων των τιμών των $\alpha_{\overline{\nu}|}$ και $s_{\overline{\nu}|}$.Οταν είναι σταθερός τότε τα $\alpha_{\overline{\nu}|}$ και $s_{\overline{\nu}|}$ είναι αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις του (i) . Οπότε ισχύει :

$\alpha_{\overline{\nu}|}(i_1) < \alpha_{\overline{\nu}|}(i) < \alpha_{\overline{\nu}|}(i_2)$, όταν $i_2 < i < i_1$

$s_{\overline{\nu}|}(i_1) < s_{\overline{\nu}|}(i) < s_{\overline{\nu}|}(i_2)$, όταν $i_1 < i < i_2$

Στις περιπτώσεις που το αποτέλεσμα δεν βρίσκεται αμέσως από τους πίνακες εφαρμόζουμε τον τύπο της παρεμβόλης ο οποίος δίνει :

$$i = i_1 + \frac{\alpha_{\overline{\nu}|}(i_1) - \alpha_{\overline{\nu}|}(i)}{\alpha_{\overline{\nu}|}(i_1) - \alpha_{\overline{\nu}|}(i_2)}(i_2 - i_1) \qquad (1.18)$$

$$i = i_1 + \frac{s_{\overline{\nu}|}(i_1) - s_{\overline{\nu}|}(i)}{s_{\overline{\nu}|}(i_1) - s_{\overline{\nu}|}(i_2)}(i_2 - i_1) \qquad (1.19)$$

Παράδειγμα : Ζητείται να βρεθεί το επιτόκιο μιας άμεσης, ασυνεχούς, βέβαιης, ληξιπρόθεσμης, ακέραιης, ετήσιας ράντας με

$A_{10\rceil} = 3.450.000$ και $K = 500.000$.

Από τον τύπο (1.12)

$$\alpha_{10\rceil} = \frac{A_{\nu\rceil}}{K} = \frac{3.450.000}{500.000} = 6{,}9$$

Από τους πίνακες για $i_1 = 0{,}08$ και $i_2 = 0{,}07$ είναι

$\alpha_{10\rceil}(i_1) = 6{,}71\,008$ και $\alpha_{10\rceil}(i_2) = 7{,}02358$, οπότε $0{,}07 < i < 0{,}08$

Κατόπιν τούτο ο τύπος (1.16) δίνει :

$$i = 0.08 + \frac{6{,}71008 - 6{,}9}{6{,}71008 - 7{,}02358}(0{,}07 - 0{,}08) = 0{,}073942$$

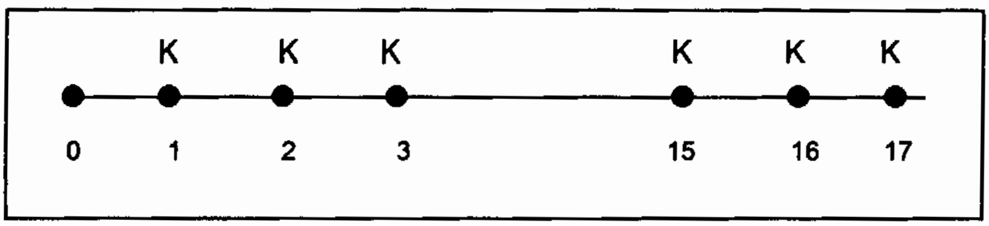
ή $\qquad i \approx 7{,}39\%$

1.15 Υπολογισμός του πλήθους των όρων

Με την βοήθεια των πινάκων των τιμών των $\alpha_{\nu\rceil}$ και $s_{\nu\rceil}$ υπολογίζεται και το πλήθος των όρων μιάς ράντας. Στο παρακάτω παράδειγμα παρουσιάζεται ο υπολογισμός του πλήθους των όρων μιάς ράντας, σε περίπτωση που αυτός δεν είναι φυσικός αριθμός και επομένως ,δεν μπορεί να βρεθεί αμέσως από τους πίνακες .

Παράδειγμα : Να βρεθεί σε πόσα χρόνια θα εξοφληθεί ένα δάνειο 13.500.000 δρχ. ,με επιτόκιο 8% και ετήσιες δόσεις 1.500.000 δρχ. και η πρώτη δόση καταβλήθηκε ένα ακριβώς χρόνο μετά την σύναψη του δανείου .

Οι δόσεις του δανείου αποτελούν μιά ληξιπρόθεσμη σταθερή ράντα με όρο K = 1.500.000 δρχ., επιτόκιο i=0.08, που έχει αρχική αξία $A_{\nu\rceil}$ = 13.500.000 δρχ.



σχήμα 4

Για την ράντα αυτή από τον τύπο (1.12) παίρνουμε

$$\alpha_{\nu\rceil} = \frac{A_{\nu\rceil}}{K} = \frac{13.500.000}{1.500.000} = 9$$

Από τους πίνακες προκύπτει ότι ,για i = 0,08 ,στην τιμή 9 του $\alpha_{\nu\rceil}$ ο αριθμός ν που αντιστοιχεί βρίσκεται μεταξύ του 16 και 17 .Πιο συγκεκριμένα είναι :

$$\alpha_{16\rceil} = 8,85136$$

$$\alpha_{17\rceil} = 9,12163$$

οπότε $16 < \nu < 17.$

Παρατηρούμε ότι οι 16 δόσεις δεν επαρκούν για την εξόφληση του δανείου , ενώ οι 17 το ξεπερνούν . Πραγματικά είναι :

$$A_{16\rceil} = K_{16\rceil} = 1.500.000 \times 8{,}85136 = 13.277.040 < 13.500.000$$

$$A_{17\rceil} = K_{17\rceil} = 1.500.000 \times 9{,}12163 = 13.682.445 > 13.500.000$$

Σε περιπτώσεις όπως η προηγούμενη η εξόφληση του δανείου μπορεί να γίνει με ένα από τους παρακάτω τρόπους :

α. Με 16 ετήσιες δόσεις ίσες με :

$$K = \frac{A_{\nu\rceil}}{\alpha_{16\rceil}} = \frac{13.500.000}{8{,}85136} \approx 1.525.189$$

μεγαλύτερες δηλαδή των 1.500.000 δρχ.

β. Με 17 ετήσιες δόσεις ίσες με

$$K = \frac{A_{\nu\rceil}}{\alpha_{17\rceil}} = \frac{13.500.000}{9{,}12163} \approx 1.479.998$$

μικρότερες δηλαδή των 1.500.000 δρχ.

γ. Με 17 ετήσιες δόσεις ,από τις οποίες οι 16 πρώτες να είναι ίσες με 1.500.000 δρχ. και μία 17η συμπληρωματική ίση με

$$K' = (A_{\nu\rceil} - A_{16\rceil}) (1+i)^{17}$$

$$= (13.500.000 - 13.277.040) \times (1+0.08)^{17}$$

$$= 222.960 \times 3{,}70001$$

$$\approx 824.974$$

Είναι προφανές ότι η προηγούμενη ισότητα εκφράζει ότι η τελευταία συμπληρωματική δόση είναι το ποσό στο οποίο ανέρχεται η διαφορά $A_{\nu\rceil} - A_{16\rceil}$ σε 17 έτη πρός 8% .

1.16 Μέση λήξη

Μέση λήξη των όρων μιας ράντας λέγεται ο χρόνος κατά τον οποίο η αξία μιας ράντας είναι ίση με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των όρων της.

Στην περίπτωση μιας ακέραιης, ληξιπρόθεσμης ράντας με όρους K1,K2,...,Kν, η μέση λήξη της, που συμβολίζεται με $\bar{\nu}$ δίνεται από τη σχέση

$$A_{\nu\rceil}(1+i)^{\bar{\nu}} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} K_\kappa$$

Οταν η ράντα είναι σταθερή, τότε ο προηγούμενος τύπος γίνεται

$$K\alpha_{\nu\rceil}(1+i)^{\bar{\nu}} = \nu\, K$$

$$\alpha_{\nu\rceil}(1+i)^{\bar{\nu}} = \nu$$

$$(1+i)^{\bar{\nu}} = \frac{\nu}{\alpha_{\nu\rceil}}$$

$$\bar{\nu}\log(1+i) = \log\left(\nu\frac{1}{\alpha_{\nu\rceil}}\right)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\log\left(\nu\frac{1}{\alpha_{\nu\rceil}}\right)}{\log(1+i)} \quad (1.21)$$

Οι τιμές του $\frac{1}{a_{\overline{\nu}|}}$ δίνονται από τους πίνακες .

Παράδειγμα : Η μέση λήξη των όρων μιας άμεσης, ακέραιης, ληξιπρόθεσμης ράντας με επιτόκιο 8% είναι

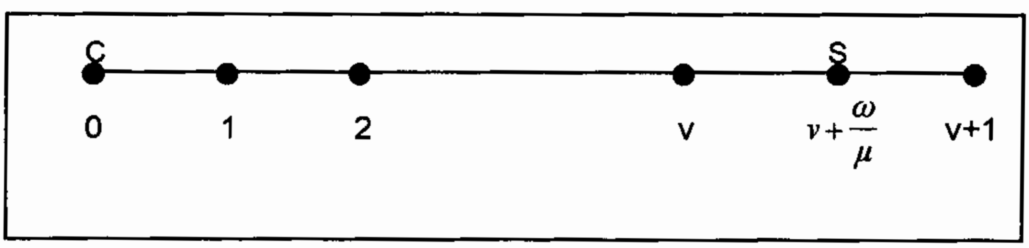
$$\bar{\nu} = \frac{\log\left(20\frac{1}{a_{\overline{20}|}}\right)}{\log(1+0.08)}$$

$$= \frac{\log(20x0{,}08718)}{\log 1.08}$$

$$\approx \frac{0{,}2414469}{0{,}0334} \approx 7{,}2$$

1.17 Κλασματικός χρόνος

Η αρχική και τελική αξία μιας ράντας, μας ζητούνται να βρεθούν πριν συμπληρωθεί η τελευταία ακέραιη περίοδος. Στην περίπτωση του ανατοκισμού ενός κεφαλαίου C με επιτόκιο i και σε χρόνο t , όπου το t δεν είναι ακέραιος αριθμός περιόδων , το t παριστάνεται ως εξής :



Σχήμα 5

όπου t=, $\nu+\frac{\omega}{\mu}$ με μ>ω.

Αρα η τελική αξία είναι

$$S = C(1+i)^{\nu+\frac{\omega}{\mu}}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η τελική και αρχική αξία της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι :

$$s_{\overline{\nu+\frac{\omega}{\mu}}|}=\frac{(1+i)^{\nu+\frac{\omega}{\mu}}-1}{i}$$

$$=\frac{(1+i)^{\nu}-(1+i)^{\nu}+(1+i)^{\nu+\frac{\omega}{\mu}}-1}{i}$$

$$=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}+\frac{(1+i)^{\nu+\frac{\omega}{\mu}}-(1+i)^{\nu}}{i}$$

$$=s_{\overline{\nu}|}+(1+i)^{\nu+\frac{\omega}{\mu}}\frac{1-(1+i)^{-\frac{\omega}{\mu}}}{i}$$

$$=s_{\overline{\nu}|}+(1+i)^{\nu+\frac{\omega}{\mu}}\alpha_{\overline{\frac{\omega}{\mu}}|}$$

$$\boxed{s_{\overline{\nu}|}=s_{\overline{\nu}|}+(1+i)^{\nu+\frac{\omega}{\mu}}\alpha_{\overline{\frac{\omega}{\mu}}|}} \qquad (1,22)$$

και

$$\alpha_{\overline{\nu+\frac{\omega}{\mu}}|}=\frac{1-(1+i)^{-(\nu+\frac{\omega}{\mu})}}{i}$$

$$=\frac{1\_(1+i)^{-\nu}+(1+i)^{-\nu}-(1+i)^{-(\nu+\frac{\omega}{\mu})}}{i}$$

$$=\frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i}+\frac{(1+i)^{-\nu}-(1+i)^{-(\nu+\frac{\omega}{\mu})}}{i}$$

$$=a_{\overline{\nu}|}+(1+i)^{-(\nu+\frac{\omega}{\mu})}\frac{)1+i)^{\frac{\omega}{\mu}}-1}{i}$$

$$=a_{\overline{\nu}|}+(1+i)^{-(\nu+\frac{\omega}{\mu})}s_{\overline{\frac{\omega}{\mu}}|}$$

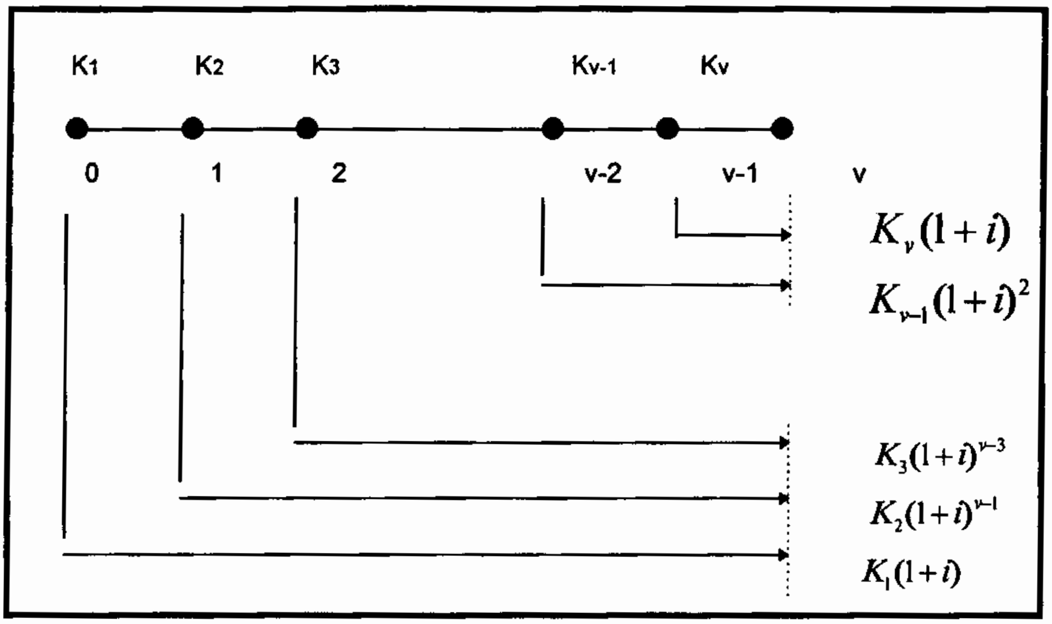
$$\boxed{a_{\overline{\nu}|}=a_{\overline{\nu}|}+(1+i)^{-(\nu+\frac{\omega}{\mu})}s_{\overline{\frac{\omega}{\mu}}|}} \qquad 1.23$$

1.18 Προκαταβλητέες ράντες

Για μια ασυνεχή , άμεση, προκαταβλητέα ράντα με ν όρους $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$, υπολογίζουμε την τελική και την αρχική της αξία συμβολίζοντας αντίστοιχα με $S_{\overline{\nu}|}$ και $A_{\overline{\nu}|}$.

1.19 Τελική αξία

Επειδή στις προκαταβλητέες ράντες κάθε όρος καταβάλλεται στην αρχή της αντίστοιχης περιόδου , ο πρώτος όρος ανατοκίζεται ν περιόδους και έχει τελική αξία, σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού $S = C\ (1+i)^{\nu}$, $K_1\ (1+i)^{\nu}$, ο δεύτερος ν-1 περιόδους και έχει τελική αξία $K_2\ (1+i)^{\nu-1}$ κ.ο.κ. και τέλος ο τελευταίος όρος μόνο την τελευταία περίοδο και έχει τελική αξία $K_\nu\ (1+i)$. Η τελική επομένως αξία της προκαταβλητέας ράντας που συμβολίζεται με $S_{\overline{\nu}|}$ θα είναι :



Σχήμα 6

$$S_{\nu\rceil} = K_1(1+i)^\nu + K_2(1+i)^{\nu-1} + \ldots + K_\nu(1+i)$$
$$= (1+i)\left[K_1(1+i)^{\nu-1} + K_2(1+i)^{\nu-2} + \ldots + K_\nu\right]$$

Το άθροισμα $K_1(1+i)^{\nu-1} + K_2(1+i)^{\nu-2} + \ldots + K_\nu$ είναι η τελική αξία $S_{\nu\rceil}$ της ληξιπρόθεσμης ράντας οπότε η παραπάνω ισότητα γράφεται :

$$\boxed{S_{\nu\rceil} = (1+i)\, S_{\nu\rceil}} \qquad (1.24)$$

Η τελική αξία επομένως των διαφόρων τύπων της προκαταβλητέας ράντας βρίσκεται με τη βοήθεια της τελικής αξίας της ληξιπρόθεσμης ράντας . Ετσι για την σταθερή ράντα έχουμε

$$S_{\nu\rceil} = (1+i)\, S_{\nu\rceil}$$

$$= (1+i)\, K\, s_{\nu\rceil}$$

$$= K(1+i)\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$$

$$= K\left[\frac{(1+i)^{\nu+1}-(1+i)}{i}\right]$$

$$= K\left[\frac{(1+i)^{\nu+1}-1}{i}-\frac{i}{i}\right]$$

$$= K\left[\frac{(1+i)^{\nu+1}-1}{i}-1\right]$$

και τελικά

$$\boxed{S_{\nu\rceil} = K(s_{\nu+1\rceil}-1)} \qquad (1.25)$$

Οταν είναι K = 1 , δηλαδή η ράντα είναι μοναδιαία , τότε ο τύπος (1.25) δίνει την τελική αξία της προκαταβλητέας μοναδιαίας ράντας που συμβολίζεται με $s_{\nu\rceil}$.

Είναι δηλαδή

$$\boxed{s_{\nu\rceil} = (s_{n+1\rceil}-1)} \qquad (1.26)$$

Ετσι, από τους πίνακες παίρνουμε την τελική αξία της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας $s_{\nu\rceil}$ και υπολογίζουμε την τελική αξία της μοναδιαίας προκαταβλητέας ράντας $s_{\nu\rceil}$.

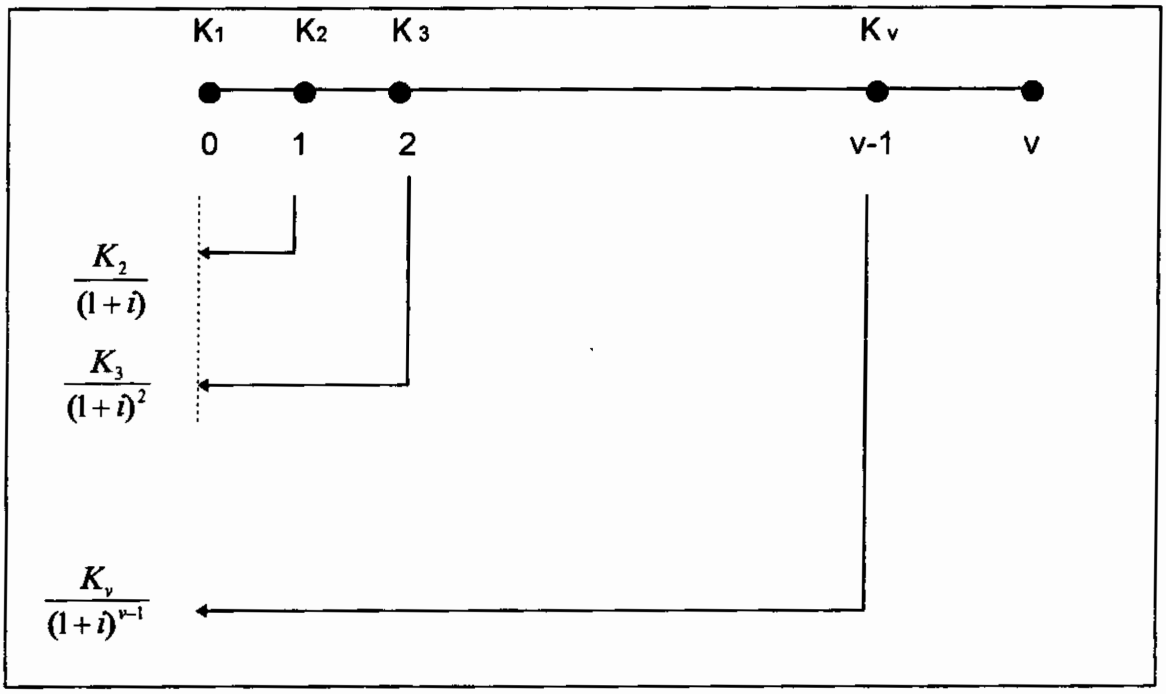
Για παράδειγμα, όταν το επιτόκιο είναι 6% , έχουμε

$s_{10\rceil} = (s_{11\rceil} -1) = 14,97164 - 1 = 13,97164$.

1.20 Αρχική αξία

Για τον υπολογισμό της αρχικής αξίας μιας προκαταβλητέας ράντας παρατηρούμε ότι η αρχική αξία του πρώτου όρου K_1 είναι ο ίδιος ο όρος K_1, ενώ η αρχική αξία του δεύτερου όρου K_2, σύμφωνα με τον τύπο της πραγματικής αξίας

$$A' = C(1+i)^{-t}$$



ΣΧΗΜΑ 6

είναι $\frac{K_2}{1+i}$, του τρίτου K_3 είναι $\frac{K_3}{(1+i)^2}$ κ.ο.κ. και τέλος του

τελευταίου Kν είναι $\frac{K_\nu}{(1+i)^{\nu-1}}$, οπότε η αρχική αξία της $A_{\nu 1}$ θα είναι :

$$A_{\nu 1} = K1 + \frac{K_2}{1+i} + \frac{K_3}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{K_\nu}{(1+i)^{\nu-1}}$$

$$= (1+i)\left[\frac{K_1}{1+i}+\frac{K_2}{(1+i)^2}+\frac{K_3}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{K_\nu}{(1+i)^\nu}\right]$$

Το άρθροισμα όμως

$$\frac{K_1}{1+i}+\frac{K_2}{(1+i)^2}+\frac{K_3}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{K_\nu}{(1+i)^\nu}$$

είναι η αρχική αξία της $A_{\nu \urcorner}$ της ληξιπρόθεσμης ράντας , οπότε η παραπάνω ισότητα γίνεται :

$$\boxed{A_{\nu \urcorner} = (1+i)\, A_{\nu \urcorner}} \qquad (1.27)$$

Οι αρχικές αξίες επομένως των διαφόρων τύπων της προκαταβλητέας ράντας μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της αρχικής αξίας της ληξιπρόθεσμης ράντας. Ειδικότερα για την περίπτωση της σταθερής ράντας έχουμε :

$$A_{\nu \urcorner} = (1+i)\, A_{\nu \urcorner}$$

$$= (1+i)\, K\, \alpha_{\nu \urcorner}$$

$$= (1+i) K \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i}$$

$$= K \frac{(1+i)-(1+i)^{-\nu+1}}{i}$$

$$= K\left[\frac{i}{i}+\frac{1+(1+i)^{-(\nu-1)}}{i}\right]$$

$$= K\,(1+\alpha_{\nu-1 \urcorner}).$$

και τελικά

$$\boxed{A_{\nu\neg} = K(a_{\nu-1\neg} + 1)} \qquad (1.28)$$

1.21 ΔΙΗΝΕΚΕΙΣ ΡΑΝΤΕΣ

Στις διηνεκείς ράντες που το πλήθος των όρων τους είναι άπειρο, υπάρχει μόνο το πρόβλημα του υπολογισμού της αρχικής αξίας .

Αν έχουμε μια άμεση, διηνεκή, ληξιπρόθεσμη ράντα με όρους K1,K2,K3,...,Kν,... η αρχική της αξία, που συμβολίζεται με A, θα είναι :

$$A_\infty = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{K\kappa}{(1+i)^\kappa} \qquad (1.30)$$

οπότε από τον τύπο (1.8) και σύμφωνα με τον ορισμό του αθροίσματος μιας σειράς προκύπτει

$$\boxed{A = \lim_{\nu \to +\infty} A_{\nu\urcorner}} \qquad (1.31)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο παραπάνω τύπος σε μερικές περιπτώσεις ακέραιων ραντών.

1 . Μοναδιαία ράντα : Οταν η ράντα είναι μοναδιαία έχουμε :

$$A_\infty = \lim_{\nu \to +\infty} A_{\nu\urcorner}$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty} a_{\nu\urcorner} \qquad \text{[ράντα μοναδιαία]}$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty} \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} \qquad \acute{o}\pi o\ \upsilon \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} = (1.10)$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\nu \to +\infty} [1-(1+i)^{-\nu}]$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\nu\to+\infty}[1-\frac{1}{(1+i)^{\nu}}]$$

$$= \frac{1}{i}(1-0) \qquad [\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{(1+i)^{\nu}} = 0$$

$$= \frac{1}{i}$$

Τελικά

$$\boxed{A_{\infty} = \frac{1}{i}} \qquad (1.32)$$

2 . Σταθερή ράντα : Οταν η ράντα είναι σταθερή έχουμε :

$$A = \lim_{\nu\to+\infty} A_{\nu 1}$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty} K\, \alpha_{\nu 1} \qquad \text{όπου } K\, \alpha_{\nu 1} = (1.12)$$

$$= K \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_{\nu 1}$$

$$= K\, \frac{1}{i} \qquad \text{όπο υ } \frac{1}{i} = (1.32)$$

Τελικά

$$\boxed{A_{\infty} = \frac{K}{i}} \qquad (1.33)$$

Παράδειγμα : Η άμεση, διηνεκής, ληξιπρόθεσμη ράντα με K = 180.000 και ετήσιο επιτόκιο 12% έχει αρχική αξία

$$A_{\infty} = \frac{K}{i} = \frac{180.000}{0,12} = 1500.000 \text{ δρχ.}$$

3 . Ράντα με όρους σε αριθμητική πρόοδο : Οταν οι όροι της ράντας συνιστούν αριθμητική πρόοδο έχουμε :

$$A = \lim_{v\to+\infty} A\overline{v|}$$

$$= \lim_{v\to+\infty}[(K+\frac{\lambda}{i})\alpha\overline{v|} - \frac{v\,\lambda}{i}(1+i)^{-v}] \quad \acute{o}\pi o \; \iota(\kappa+\frac{\lambda}{i})\,\alpha\overline{v|} - \frac{v\,\lambda}{i}(1+i)^{-v} = (1.13)$$

$$= (K+\frac{\lambda}{i})\lim_{v\to+\infty}\alpha\overline{v|} - \frac{\lambda}{i}\lim_{v\to+\infty}\frac{v}{(1+i)}$$

Η ακολουθία όμως $\alpha = \frac{v}{(1+i)}$ είναι μηδενική , γιατί η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty}\frac{v}{(1+i)^v} < +\infty$ συγκλίνει δηλαδή σε θετικό αριθμό. Πραγματικά, επειδή

αν >0, και

$$\lim_{v\to+\infty}\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \lim_{v\to+\infty}\frac{\frac{v+1}{(1+i)^{v+1}}}{\frac{v}{(1+i)^v}} = \lim_{v\to+\infty}\frac{v+1}{(1+i)^v} = \frac{1}{1+i} < 1,$$

σύμφωνα με το κριτήριο του D' Alembert η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(1+i)^v} < +\infty$$

Η προηγούμενη ισότητα γίνεται :

$$A_\infty = (K+\frac{\lambda}{i})\lim_{v\to+\infty}\alpha\overline{v|} - \frac{\lambda}{i}\cdot 0$$

$$= \frac{K}{i} + \frac{\lambda}{i^2}$$

τελικά

$$\boxed{A_\infty = \frac{K}{i} + \frac{\lambda}{i^2}} \qquad (1.34)$$

4 . Ράντα με όρους σε γεωμετρική πρόοδο : Οταν οι όροι της ράντας συνιστούν γεωμετρική πρόοδο έχουμε :

$$A_\infty = \lim_{\nu \to +\infty} A_{\nu 1}$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty} K \frac{\lambda^\nu (1+i)^{-\nu} - 1}{\lambda - (1+i)} \qquad \acute{o}\pi o \upsilon K \frac{\lambda^\nu (1+i)^{-\nu} - 1}{\lambda - (1+i)} = (1.14)$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty} \frac{K}{1+i} \frac{\frac{\lambda^\nu}{(1+i)^\nu} - 1}{\frac{\lambda}{1+i} - 1}$$

$$= \frac{K}{1+i} \frac{0-1}{\frac{\lambda}{1+i} - 1} [\lim_{\nu \to +\infty} (\frac{\lambda}{1+i})^\nu = 0, \acute{o}\tau \alpha\nu 0 < \frac{\lambda}{1+i} < 1]$$

$$= \frac{K}{1+i} \cdot \frac{-1}{\frac{\lambda - (1+i)}{1+i}} = \frac{K}{(1+i) - \lambda}$$

Τελικά

$$\boxed{A_\infty = \frac{K}{(1+i) - \lambda}} \qquad (1.35)$$

5 . Ράντα προκαταβλητέα :Οταν η ράντα είναι προκαταβλητέα έχουμε :

$$A_\infty = K_1 + \frac{K_2}{1+i} + \frac{K_3}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{K_\nu}{(1+i)^{\nu-1}} + \ldots$$

$$= (1+i)[\frac{K_1}{1+i} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \frac{K_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{K_\nu}{(1+i)^\nu} + \ldots]$$

$$= (1+i) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa}$$

$$= (1+i) A_\infty$$

Τελικά

$$\boxed{\dot{A}_\infty = (1+i) A_\infty} \qquad (1.36)$$

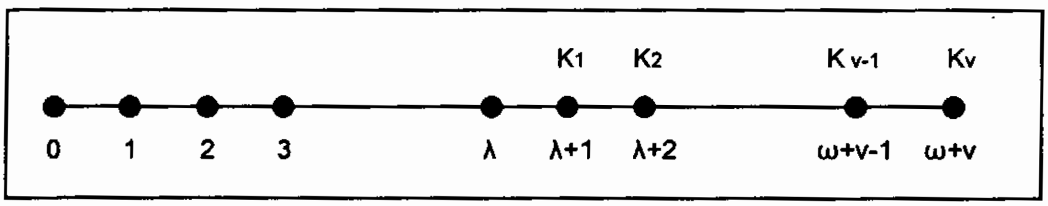
1.22 ΜΕΛΛΟΥΣΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

Στις μέλλουσες ράντες η καταβολή του πρώτου όρου γίνεται μετά από έναν ορισμένο αριθμό χρονικών περιόδων.

Οταν ο πρώτος όρος καταβάλλεται την $\omega + 1$ περίοδο, στο τέλος ή στην αρχή της , ανάλογα αν η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη ή προκαταβλητέα, τότε λέμε ότι η ράντα έχει επιβράνδυση ω περιόδους. Αντίστροφα, ο πρώτος όρος μιας ράντας που έχει επιβράνδυση ω περιόδους καταβάλεται την ω+1 περίοδο. Για παράδειγμα όταν η πρώτη καταβολή γίνεται σε μια ληξιπρόθεσμη ράντα μετά 10 έτη, η ράντα έχει επιβράνδυση 9 έτη, ενώ όταν η ράντα έχει επιβράνδυση 12 έτη ο πρώτος της όρος καταβάλλεται στο τέλος του 13ου έτους.

1.23 ΜΕΛΛΟΥΣΕΣ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΕΣ

Εχουμε μια μέλλουσα, ακέραιη, ληξιπρόθεσμη ράντα με επιβράνδυση ω περιόδους, και υπολογίζουμε την τελική και αρχική τους αξία συμβολίζοντας με $\omega/S_{\nu\rceil}$ και $\omega/A_{\nu\rceil}$ αντίστοιχα.



ΣΧΗΜΑ 6

Για τον υπολογισμό της τελικής αξίας $\omega/S_{\nu\rceil}$ οι όροι Κ1,Κ2,...,Κν της μέλλουσας ράντας μπορούν να θεωρηθούν ως οι ν όροι μιας αντίστοιχης, άμεσης, ληξιπρόθεσμης ράντας, με τελική αξία $S_{\nu\rceil}$ που δίνεται από τον τύπο $S_{\nu\rceil} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} K_\kappa (1+i)^{\nu-\kappa}$ οπότε

$$\boxed{\omega/S_{\nu\rceil} = S_{\nu\rceil}} \qquad (1.37)$$

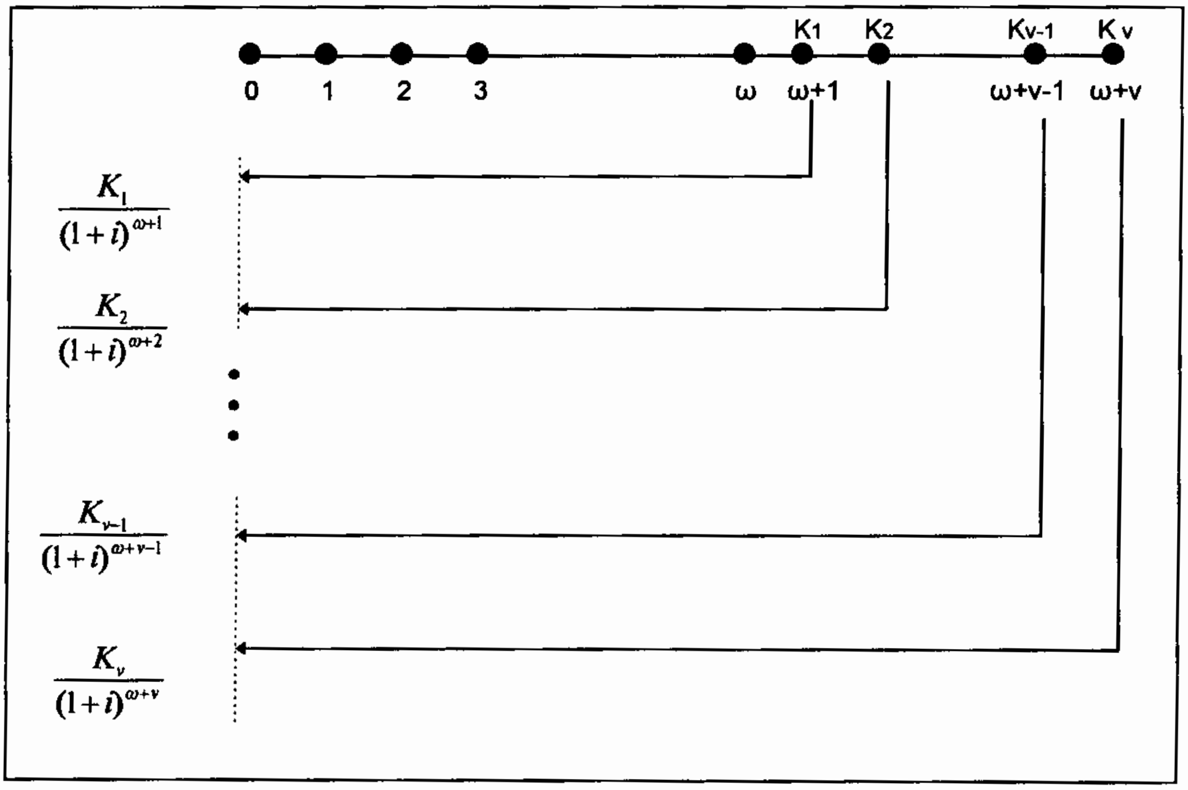
Για τον υπολογισμό της αρχικής αξίας μιας μέλλουσας ράντας παρατηρούμε ότι η αρχική αξία

του πρώτου όρου Κ1 είναι $\dfrac{K_1}{(1+i)^{\omega+1}}$

του δεύτερου όρου K2 είναι $\dfrac{K_2}{(1+i)^{\omega+2}}$

....

του νου όρου Kν είναι $\dfrac{K_\nu}{(1+i)^{\omega+\nu}}$



ΣΧΗΜΑ 7

οπότε η αρχική αξία $\omega/A_{\nu\rceil}$ της ράντας θα είναι

$$\omega/A_{\nu\rceil}=\frac{K_1}{(1+i)^{\omega+1}}+\frac{K_2}{(1+i)^{\omega+2}}+\ldots+\frac{K_\nu}{(1+i)^{\omega+\nu}}$$

$$=\frac{1}{(1+i)^{\omega}}\left[\frac{K_1}{(1+i)}+\frac{K_2}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{K_\nu}{(1+i)^\nu}\right]$$

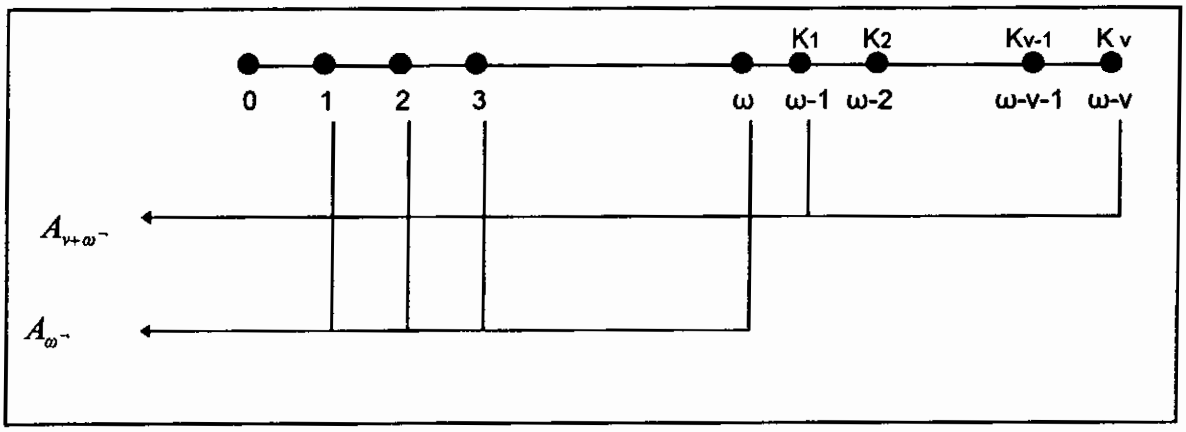
$$=(1+i)^{-\omega}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa} \qquad \acute{o}\pi o\ \upsilon \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa}=(1.8)$$

$$=(1+i)^{-\omega}A_{\nu\rceil}$$

Τελικά

$$\boxed{\omega/A_{\nu\rceil} = (1+i)^{-\omega} A_{\nu\rceil}} \quad (1.38)$$

Ο προηγούμενος τύπος μπορεί να προκύψει, εάν γίνει η υπόθεση ότι η καταβολή των όρων γίνεται και κατά τις περιόδους της επιβράνδυσης, οπότε προκύπτει μια άμεση ράντα με ν+ω όρους και με αρχική αξία $A_{\nu+\omega\rceil}$.



ΣΧΗΜΑ 8

Η αρχική όμως αυτή αξία είναι μεγαλύτερη της αρχικής αξίας της μέλλλουσας ράντας με επιβράνδυση ω περιόδους κατά την αρχική αξία της άμεσης με ω όρους, δηλαδή κατά την ποσότητα $A_{\omega\rceil}$. Ετσι θα έχουμε

$$\omega/A_{\nu\rceil} = A_{\nu+\omega\rceil} - A_{\omega\rceil}$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\nu+\omega} \frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa} - \sum_{\kappa=1}^{\omega} \frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa}$$

$$= \sum_{\kappa=\omega+1}^{\nu} \frac{K_\kappa}{(1+i)^\kappa}$$

$$= (1+i)^{-\omega} A_{\nu\rceil}$$

Οταν η ράντα είναι σταθερή έχουμε :

$$\omega/A_{\nu\rceil} = (1+i)^{-\omega} A_{\nu\rceil} \quad \text{όπου } A_{\nu\rceil} = K\, \alpha_{\nu\rceil}$$

$$= (1 + i^{-\omega}\, K\, \alpha_{\nu\rceil} \quad \text{όπου } K\, \alpha_{\nu\rceil} = (1.12)$$

Τελικά

$$\boxed{\omega/A\nu = K\, \alpha_{\nu\rceil}(1+i)^{-\omega}} \qquad (1.39)$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να γίνει :

$$\omega/A\nu_{\rceil} = K\frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i}(1+i)^{-\omega} \text{ επειδή } \alpha\nu_{\rceil} = \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} = (110)$$

$$= K\frac{(1+i)^{-\nu}-(1+i)^{-(\nu+\omega)}}{i}$$

$$= K[\frac{1-(1+i)^{-\nu+\omega}}{i} - \frac{1-(1+i)^{-\omega}}{i}$$

$$= K\,(\alpha_{\nu+\omega\rceil} - \alpha_{\omega\rceil})$$

Τελικά

$$\boxed{\omega/A\nu_{\rceil} = K\,(\alpha_{\nu+\omega\rceil} - \alpha_{\omega\rceil})} \qquad (1.40)$$

Παράδειγμα : Να βρεθεί η αρχική αξία μιας ληξιπρόθεσμης, ετήσιας ράντας 10 όρων 100.000 δρχ. της οποίας ο πρώτος όρος θα καταβληθεί στο τέλος του 5ου έτους με επιτόκιο 8%

Είναι $\omega+1 = 5$, $\omega = 4$

Για $\omega = 4$ ο τύπος (1.39) δίνει

$$4/A_{10\rceil} = (1+0{,}08)^{-4} \times 100.000\ \alpha_{10\rceil}$$

$$= 100.000 \times 0{,}735030 \times 6{,}71008 = 493.211$$

Επίσης ο τύπος (1.40) για $\omega = 4$ δίνει :

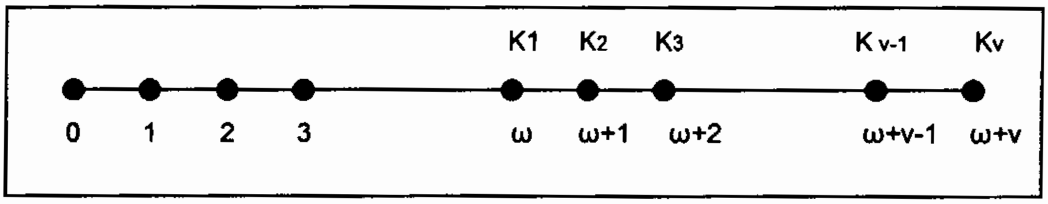
$$4/A_{10\rceil} = 100.000\,(\alpha_{14\rceil} - \alpha_{4\rceil})$$

$$= 100.000\,(8{,}24423 - 3{,}31212)$$

$$= 100.000\,(4{,}93211) = 493.211\ .$$

1.24 Μέλλουσες προκαταβλητέες

Εχουμε μια μέλλουσα, ακέραιη, προκαταβλητέα ράντα με ν όρους Κ1,Κ2,...,Κν και επιβράνδυση ω περιόδους, ο πρώτος όρος της δηλαδή καταβάλλεται στην αρχή της ω+1 περιόδου, και υπολογίζουμε την τελική και την αρχική της αξία συμβολίζοντας με $\omega/S_{\nu\rceil}$ και $\omega/A_{\nu\rceil}$ αντίστοιχα.



ΣΧΗΜΑ

Για τον υπολογισμό της τελικής αξίας $\omega/S_{\nu\rceil}$ οι όροι Κ1,Κ2,...,Κν της μέλλουσας ράντας μπορούν να θεωρηθούν ως οι όροι μιας αντίστοιχης άμεσης προκαταβλητέας ράντας, με τελική αξία $S_{\nu\rceil}$ παίρνοντας τον τύπο (1.24). Ετσι η τελική αξία $\omega/S_{\nu\rceil}$ μιας μέλλουσας προκαταβλητέας ράντας είναι ίση με την τελική αξία της αντίστοιχης άμεσης προκαταβλητέας ράντας, δηλαδή

$$\boxed{\omega/S_{\nu\rceil} = (1+i)\, S_{\nu\rceil}} \qquad (1.41)$$

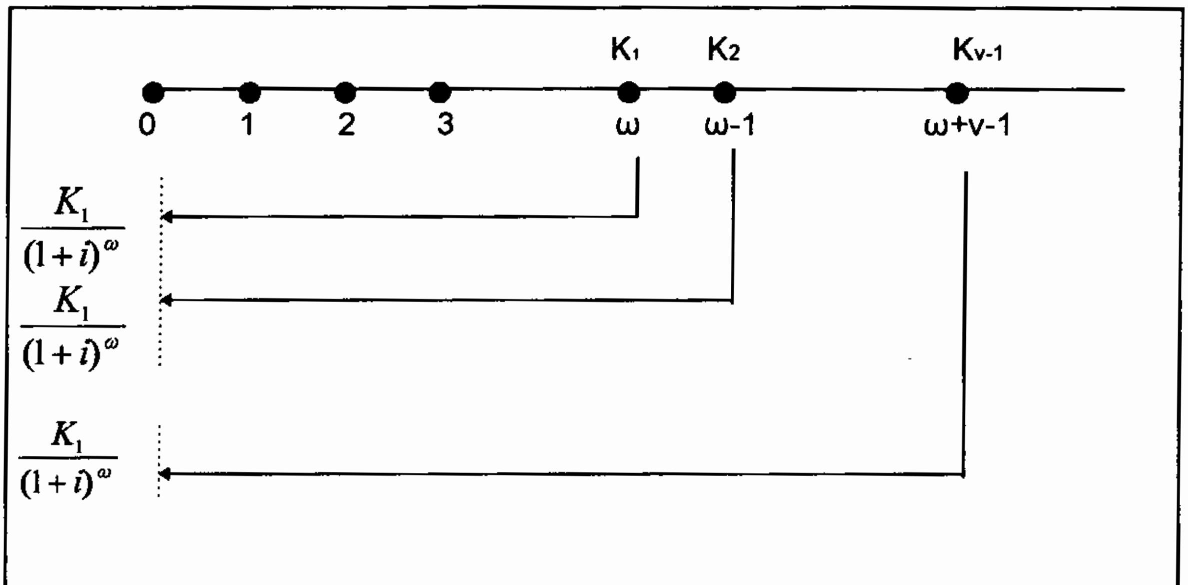
Για τον υπολογισμό της αρχικής αξίας της ράντας αυτής παρατηρούμε ότι η αρχική αξία

του πρώτου όρου K_1 είναι $\dfrac{K_1}{(1+i)^{\omega}}$

του δεύτερου όρου K_2 είναι $\dfrac{K_2}{(1+i)^{\omega+1}}$

....

του νου όρου K_ν είναι $\dfrac{K_\nu}{(1+i)^{\omega+\nu-1}}$



ΣΧΗΜΑ 9

οπότε η αρχική αξία $\omega/\dot{A}_{\nu\rceil}$ της ράντας θα είναι

$$\omega/\dot{A}_{\nu\rceil} = \frac{K_1}{(1+i)^{\omega}} + \frac{K_2}{(1+i)^{\omega+1}} + \ldots + \frac{K_\nu}{(1+i)^{\omega+\nu-1}}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^{\omega}}[K_1 + \frac{K_2}{(1+i)} + \ldots + \frac{K_\nu}{(1+i)^{\nu-1}}]$$

$$= (1+i)^{-\omega}\dot{A}_{\nu\rceil}$$

Τελικά

$$\boxed{\omega/\dot{A}_{\nu\rceil} = (1+i)^{-\omega}\dot{A}_{\nu\rceil}} \qquad (1.42)$$

Η αρχική δηλαδή αξία της μέλλουσας προκαταβλητέας ράντας με επιβράνδυση ω περιόδους είναι ίση με το γινόμενο του $(1 + i)^{-\omega}$ με την αρχική αξία της αντίστοιχης άμεσης προκαταβλητέας ράντας.

Από τον προηγούμενο τύπο και τον τύπο (1.27) έχουμε

$$\omega/\dot{A}_{\nu\rceil} = (1 + i)^{-\omega}(1 + i) A_{\nu\rceil}$$

$$= (1 + i)^{-\omega+1} A_{\nu\rceil}$$

Είναι δηλαδή

$$\omega/A_{\nu\rceil} = (1+i)^{-\omega+1}A_{\nu\rceil} \qquad (1.43)$$

Από τους ίδιους τύπους προκύπτει ακόμη ότι

$$\omega/\dot{A}_{\nu\rceil} = (1+i)\,\omega/A_{\nu\rceil} \qquad (1.44)$$

Οταν η ράντα είναι σταθερή έχουμε :

$$\omega/\dot{A}_{\nu\rceil} = (1+i)^{-\omega+1}A_{\nu\rceil}$$
$$= (1+i)^{-\omega+1}K\,\alpha_{\nu\rceil}$$

Τελικά

$$\boxed{\omega/\dot{A}_{\nu\rceil} = K\,\alpha_{\nu\rceil}\,(1+i)^{-\omega+1})} \qquad (1.45)$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να μετασχηματισθεί ως εξής :

$$\omega/\dot{A}_{\nu\rceil} = K\frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i}(1+i)^{-\omega+1} \quad , \text{ όπου } \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} = (1.10)$$

$$= K\frac{(1+i)^{-\omega-1)} - (1+i)^{-(\nu+\omega-1)}}{i}$$

$$= K[\frac{1-(1+i)^{-(\nu+\omega-1)}}{i} - \frac{1-(1+i)^{-(\nu-1)}}{i}]$$

$$= K\,(\alpha_{\nu+\omega-1\rceil} - \alpha_{\omega-1\rceil})$$

Τελικά

$$\boxed{\omega/A_{\nu\rceil} = K\,(\alpha_{\nu+\omega-1\rceil} - \alpha_{\omega-1\rceil})} \qquad (1.46)$$

Παράδειγμα : Να βρεθεί η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ετήσιας ράντας 10 όρων 100.000 δρχ. της οποίας ο πρώτος όρος θα καταβληθεί στην αρχή του 5ου έτους με επιτόκιο 8% .

Είναι $\omega+1 = 5$ οπότε $\omega = 4$

Για $\omega = 4$ ο τύπος (1.45) δίνει

$$ω/A_{10\rceil} = 100.000 \times α_{10\rceil} \times (1 + 0{,}08)^{-4+1}$$

$$= 100.000 \times 6{,}71008 \times 1{,}08^{-3}$$

$$= 100.000 \times 6{,}71008 \times 0{,}79383 = 532.667$$

Επίσης ο τύπος (1.46) δίνει :

$$ω/A_{10\rceil} = 100.000 \times (α_{13\rceil} - α_{3\rceil})$$

$$= 100.000 \times (7{,}903775 - 2{,}577096)$$

$$= 100.000 \times 5{,}32667 = 532.667$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από τον τύπο (1.44)

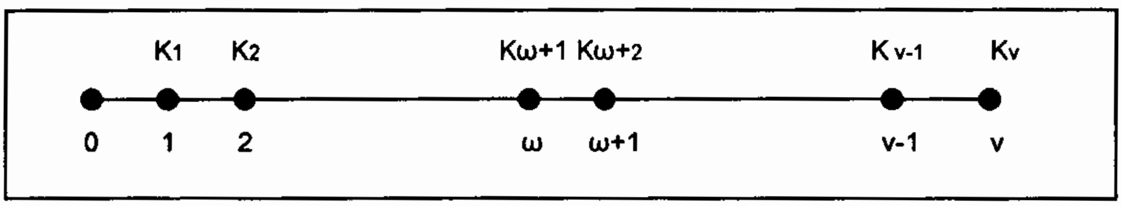
$$ω/A_{10\rceil} = (1 + 0{,}08)\ ω/A_{10\rceil} = 1{,}08 \times 493.221 = 532.667$$

Η τιμή $A_{10\rceil}$ έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο παράδειγμα.

1.25 ΑΡΞΑΜΕΝΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

Αρξάμενες ράντες είναι οι ράντες όπου η καταβολή του πρώτου όρου έχει γίνει πριν από ορισμένο αριθμό περιόδων.

Θεωρούμε μια αρξάμενη, ακέραιη, ληξιπρόθεσμη ράντα με ν όρους Κ1,Κ2,...,Κν της οποίας ο πρώτος όρος έχει καταβληθεί πριν από ω περιόδους.



ΣΧΗΜΑ

Η αξία της ράντας αυτής πριν από ω περιόδους είναι $A_{ν\rceil}$, ίση δηλαδή με την αρχική αξία της αντίστοιχης άμεσης ληξιπρόθεσμης ράντας. Επομένως η παρούσα αξία της, που συμβολίζεται με $/ωA_{ν\rceil}$, θα είναι

$$\boxed{/ω\, A_{ν\rceil} = A_{ν\rceil}\ (1 + i)} \qquad (1.47)$$

ίση δηλαδή με το ποσό στο οποίο ανέρχεται η αρχική αξία $A_{ν\rceil}$ σε ω έτη, όταν ανατοκίζεται με επιτόκιο i, δηλαδή σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού $S = C (1 + i)^t$.

Οταν η ράντα είναι σταθερή από τον τύπο (1.47) προκύπτει

$$\boxed{/\omega\, A_{\nu\rceil} = K\, \alpha_{\nu\rceil}\, (1 + i)} \qquad (1.48)$$

που μπορεί να μετασχηματισθεί ως εξής :

$$_{\omega /}A_{\nu\rceil} = K \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i}(1+i), \, o\pi o \; \vartheta + (1+i) = (1.10)$$

$$= K \frac{(1+i)-(1+i)^{-\nu+\omega}}{i}$$

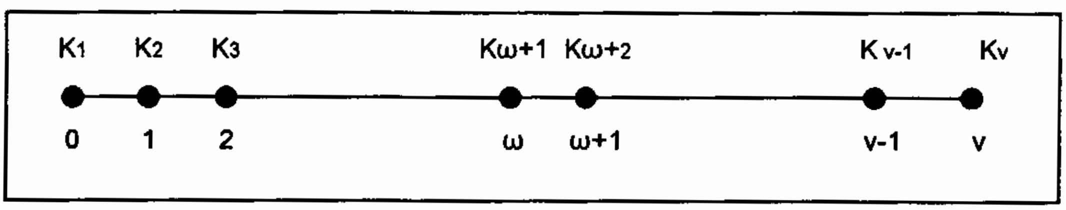
$$= K \left[\frac{1-(1+i)^{-(\nu-\omega)}}{i} + \frac{(1+i)^{\omega}-1}{i} \right]$$

$$= K\, (\alpha_{\nu-\omega\rceil} + s_{\omega\rceil})$$

Τελικά

$$\boxed{/\omega A_{\nu\rceil} = K\, (\alpha_{\nu-\omega\rceil} + s_{\omega\rceil})} \qquad (1.49)$$

Οταν η ράντα είναι προκαταβλητέα τότε η παρούσα αξία της θα είναι



ΣΧΗΜΑ

$$\boxed{/\omega A_{\nu\rceil} = (1 + i)^{\omega+1}\, A_{\nu\rceil}} \qquad (1.50)$$

Παράδειγμα : Να βρεθεί η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης, αρξάμενης, ετήσιας ράντας 10 όρων 100.000 δρχ. της οποίας ο πρώτος όρος έχει καταβληθεί πριν από 6 έτη με επιτόκιο 8%.

Ο τύπος (1.48) δίνει :

$/6A_{10\rceil} = 100.000 \times \alpha_{10\rceil} \times (1 + 0{,}08)^{6}$

$= 100.000 \times 6{,}71008 \times 1{,}58687 = 1.064.802$

Επίσης ο τύπος (1.49) δίνει :

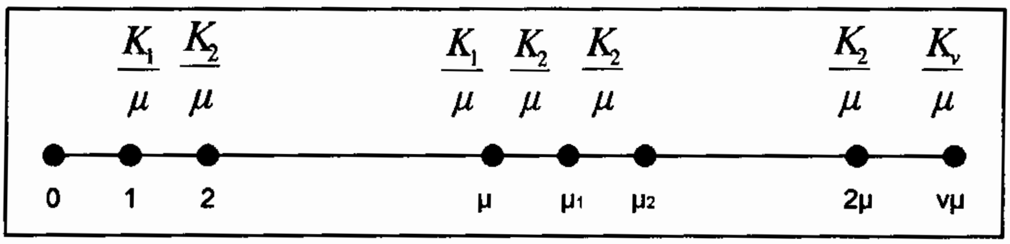
$/6A_{10\rceil} = 100.000\, (\alpha_{4\rceil} + s_{6\rceil})$

$= 100.000\ (3,31212 + 733.592)$

$= 1.064.804.$

1.26 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

Οι ράντες που έχουν περίοδο $\frac{1}{\mu}$ λέγονται **κλασματικές ράντες συχνότητος μ.** Στην περίπτωση αυτή κάθε περίοδος διαιρείται σε μ ίσες κλασματικές περιόδους και κάθε όρος της αρχικής ακέραιας ράντας σε μ ίσα μέρη $\frac{K_\kappa}{\mu}$, κάθε ένα από τα οποία καταβάλλεται με επιτόκιο iμ,που είναι το αντίστοιχο ισοδύναμο επιτόκιο i, στην αρχή ή το τέλος των κλασματικών περιόδων. Προκύπτει τελικά μια ακέραιη ράντα με μ όρους $\frac{K_\kappa}{\mu}$, κ=1,2,...,ν και επιτόκιο i_μ, οπότε οι προηγούμενοι τύποι των ακέραιων ραντών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της τελικής και αρχικής αξίας μιας κλασματικής ράντας.



ΣΧΗΜΑ

1.27 ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

Από τον τύπο της τελικής αξίας $S_{\nu\rceil} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} K_\kappa (1+i)^{\nu-\kappa}$ προκύπτει, ότι η τελική αξία μιας άμεσης, πρόσκαιρης, κλασματικής ράντας συχνότητας μ, που συμβολίζεται με $S_{\nu\rceil}^{(\mu)}$ είναι :

$$\boxed{S_{\nu\rceil}^{(\mu)} = \sum_{\kappa=1}^{\nu\mu} \frac{K_\kappa}{\mu}(1+i_\mu)^{\nu\mu-\kappa}} \qquad (1.51)$$

Οταν η ράντα είναι σταθερή, είναι δηλαδή Κκ = Κ, κ=1,2,...,ν, ο προηγούμενος τύπος δίνει :

$$S^{(\mu)}_{\nu\rceil} = \sum_{\kappa=1}^{\nu\mu} \frac{K_\kappa}{\mu}(1+i_\mu)^{\nu\mu-\kappa}$$

$$= \frac{K}{\mu}\sum_{\kappa=1}^{\nu\mu}(1+i_\mu)^{\nu\mu-\kappa}$$

$$= \frac{K}{\mu}\left[(1+i_\mu)^{\nu\mu-1} + (1+i_\mu)^{\nu\mu-2} + \ldots + (1+i_\mu) + 1\right]$$

$$= \frac{K}{\mu}\frac{(1+i_\mu)^{\nu\mu-1}(1+i_\mu)-1}{(1+i\mu)-1}$$

$$= \frac{K}{\mu}\frac{(1+i_\mu)^{\nu\mu}-1}{i}$$

$$= \frac{K}{\mu}\frac{\left[(1+i_\mu)^{\mu}\right]^{\nu}-1}{i_\mu}$$

$$= K\,\frac{(1+i)^{\nu}-1}{\mu\, i_\mu}$$

$$= K\,\frac{(1+i)^{\nu}-1}{\mu\, i_\mu}$$

$$= K\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}\,\frac{i}{\mu i_\mu}$$

$$= K\, s_{\nu\rceil}\,\frac{i}{j\mu}$$

Τελικά

$$\boxed{S^{(\mu)}_{\nu\rceil} = K s_{\nu\rceil}\frac{i}{j\mu}} \qquad (1.52)$$

Για K=1 , η προηγούμενη σχέση δίνει την τελική αξία της μοναδιαίας κλασματικής ράντας συχνότητας μ, που συμβολίζεται με $S^{(\mu)}_{\nu\rceil}$.

Είναι δηλαδή

$$\boxed{S^{(\mu)}_{\nu\rceil} = s_{\nu\rceil}\frac{i}{j\mu}} \qquad (1.53)$$

Εξάλλου από τον τύπο της αρχικής αξίας (1.8) προκύπτει ότι η αρχική αξία μιας ληξιπρόθεσμης κλασματικής ράντας συχνότητας μ, που συμβολίζεται με $A_{\nu\rceil}$, είναι :

$$\boxed{A^{(\mu)}_{\nu\rceil} = \sum_{\kappa=1}^{\nu\mu}\frac{K_\kappa}{\mu}\frac{1}{(1+i_\mu)^\kappa}} \qquad (1.54)$$

που μετασχηματίζεται ως εξής :

$$A^{(\mu)}_{\nu\rceil} = (1+i_\mu)^{-\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu\mu}\frac{K_\kappa}{(1+i_\mu)^{-\nu\mu+\kappa}}$$

$$=\left((1+i_\mu)^{\mu}\right)^{-\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu\mu}\frac{K_\kappa}{\mu}(1+i_\mu)^{\nu\mu-\kappa}$$

$$=(1+i)^{-\nu}S^{(\mu)}_{\nu\rceil}$$

Τελικά προκύπτει η σχέση

$$\boxed{A^{(\mu)}_{\nu\rceil} = (1+i)^{-\nu}S^{(\mu)}_{\nu\rceil}} \qquad (1.55)$$

η οποία είναι ανάλογη του τύπου (1.9) $(1+i)^{-\nu}S_{\nu\rceil}$

Οταν η ράντα είναι σταθερή έχουμε :

$$A^{(\mu)}_{\nu\rceil} = (1+i)^{-\nu} S^{(\mu)}_{\nu\rceil} \quad \text{όπου } (1+i)^{-\nu} S^{(\mu)}_{\nu\rceil} = (1.55)$$

$$= (1+i)^{-\nu} K s_{\nu\rceil} \frac{i}{j_\mu} \quad \text{όπου} \quad K s_{\nu\rceil} \frac{i}{j_\mu} = (1.52)$$

$$= K(1+i)^{-\nu} \frac{(1+i)^{-\nu}-1}{i} \frac{i}{j_\mu} \quad \text{όπου} \quad \frac{(1+i)^{-\nu}-1}{i} = (1.2)$$

$$= K \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} \frac{i}{j_\mu}$$

$$= K\alpha_{\nu\rceil} \frac{i}{j_\mu} \quad \text{όπου} \quad \alpha_{\nu\rceil} = \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} = (1.10)$$

Τελικά

$$\boxed{A^{(\mu)}_{\nu\rceil} = K\alpha_{\nu\rceil} \frac{i}{j_\mu}} \qquad (1.56)$$

Για K=1, η προηγούμενη σχέση δίνει την αρχική αξία της μοναδιαίας κλασματικής ράντας που συμβολίζεται με $\alpha^{(\mu)}_{\nu\rceil}$.

Είναι δηλαδή

$$\boxed{\alpha^{(\mu)}_{\nu\rceil} = \alpha_{\nu\rceil} \frac{i}{j_\mu}} \qquad (1.57)$$

1.28 ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΕΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

Η τελική αξία μιας προκαταβλητέας κλασματικής ράντας συχνότητας μ προκύπτει από την εφαρμογή του τύπου (1.24) για κλασματικές ράντες.

Είναι δηλαδή

$S_{\nu\rceil} = (1 + i_\mu)\, S_{\nu\rceil}$

$$= \left(1 + \frac{j_\mu}{\mu}\right) S^{(\mu)}_{\nu\rceil}$$

$$\boxed{S_{\nu\urcorner} = \left(1+\frac{j_\mu}{\mu}\right) S_{\nu\urcorner}} \qquad (1.58)$$

Ομοια από τον τύπο (1.27) προκύπτει η άρχική αξία της προκαταβλητέας κλασματικής ράντας

$$\boxed{A^{(\mu)}_{\nu\urcorner} = \left(1+\frac{j_\mu}{\mu}\right) A^{(\mu)}_{\nu\urcorner}} \qquad (1.59)$$

1.29 ΔΙΗΝΕΚΕΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

Από τον τύπο (1.33) της σταθερής ράντας, προκύπτει ότι η αρχική αξία μιας ληξιπρόθεσμης, σταθέρης, διηνεκούς, κλασματικής ράντας είναι

$$A^{(\mu)}_{\infty\urcorner} = \frac{\frac{K}{\mu}}{i_\mu} = \frac{K}{\mu i_\mu}$$

$$= \frac{Ki}{i\mu i_\mu} = \frac{K}{i}\frac{i}{\mu i_\mu} = A\infty\frac{i}{j_\mu}$$

Τελικά

$$\boxed{A^{(\mu)}_{\infty\urcorner} = A_\infty \frac{i}{j_\mu}} \qquad (1.60)$$

Επειδή η ράντα είναι σταθερή ο προηγούμενος τύπος μπορεί επίσης να γραφτεί :

$$A^{(\mu)}_{\infty\urcorner} = \frac{K}{i}\frac{i}{j_\mu}$$

$$\boxed{A^{(\mu)}_{\infty\urcorner} = K\frac{1}{j_\mu}} \qquad (1.61)$$

και όταν η ράντα είναι μοναδιαία έχουμε

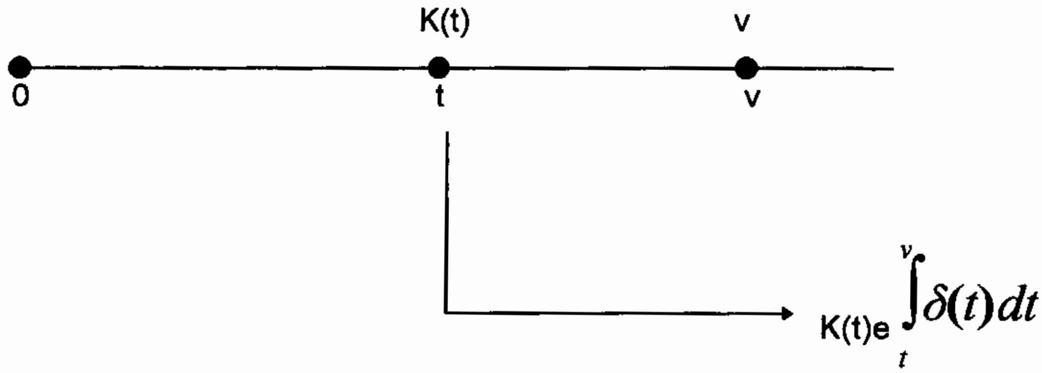
$$\boxed{a^{(\mu)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{j_{\mu}}} \qquad (1.62)$$

Τέλος, η αρχική αξία μιας διηνεκούς προκαταβλητέας ράντας θα είναι :

$$\boxed{A^{(\mu)}_{\overline{\infty}|} = \left(1+\frac{j_{\mu}}{\mu}\right) A^{(\mu)}_{\overline{\infty}|}} \qquad (1.63)\ \text{σελ } 118$$

1.30 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΡΑΝΤΕΣ

Στις ράντες αυτές ο χρόνος καταβολής των όρων τους είναι συνεχής μεταβλητή. Οι όροι και το επιτόκιο των ραντών αυτών είναι συναρτήσεις του χρόνου t. Οταν οι συναρτήσεις αυτές K(t) και δ(t) είναι συνεχείς μπορούμε να υπολογίσουμε την τελική και αρχική αξία των συνεχών ραντών.

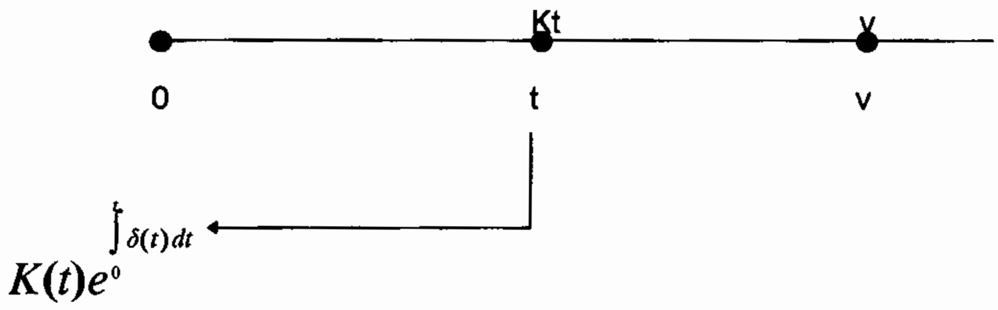


Σύμφωνα με τον τύπο της συνεχούς κεφαλαιοποίησης $C(t)=C(0)e^{\int_0^t \delta(t)dt}$
, η τελική αξία του όρου K(t) είναι

$$K(t)e^{\int_0^t \delta(t)dt}$$

οπότε η τελική αξία της ράντας θα είναι

$$\boxed{S = \int_0^t K(t)e^{\int_0^t \delta(t)dt}\, dt} \qquad (1.64)$$



Ομοια η αρχική αξία του όρου K(t) είναι

$$K(t)e^{-\int_0^t \delta(t)dt}$$

οπότε η αρχική αξία της ράντας θα είναι :

$$\boxed{A=\int_0^{\nu} K(t)e^{-\int_0^t \delta(t)dt}} \qquad (1.65)$$

Ο τύπος (1.64) μπορεί να μετασχηματισθεί ως εξής :

$$S=\int_0^{\nu} K(t)e^{\int_t^{\nu} \delta(t)dt}$$

$$=\int_0^{\nu} K(t)e^{\int_0^{\nu}\delta(t)dt-\int_0^t \delta(t)dt}dt$$

$$=\int_0^{\nu} K(t)e^{\int_0^{\nu}\delta(t)dt}e^{-\int_0^t \delta(t)dt}dt$$

$$=e^{\int_0^{\nu}\delta(t)dt}\int_0^{\nu} K(t)e^{-\int_0^t \delta(t)dt}dt$$

$$= e^{\int_0^{v}\delta(t)\,dt} A$$

Τελικά

$$\boxed{S = A\, e^{\int_0^{v}\delta(t)\,dt}} \qquad (1.66)$$

Οταν οι όροι και το επιτόκιο της ράντας είναι σταθερά, όταν δηλαδή

K(t) = K και δ(t) = j

τότε από τον τύπο (1.64) προκύπτει

$$\boxed{S = \int_0^{v} K e^{\int_t^{v} j\,dt}\, dt} \qquad (1.67)$$

$$= \int_0^{v} K e^{j(v-t)}\, dt \qquad \left[\int_t^{v} j\,dt = j[t]_t^{v} = j(v-t)\right]$$

$$= \int_0^{v} K e^{jv} e^{-jt}\, dt$$

$$= K e^{jv} \int_0^{v} e^{-jt}\, dt$$

$$= K e^{jv}\left(-\frac{1}{j}\right)\left[e^{-jt}\right]_0^{v}$$

$$= -\frac{K}{j} e^{jv}\left(e^{-jv} - e^{0}\right)$$

$$= -\frac{K}{j}\left(1 - e^{jv}\right)$$

$$= K\frac{e^{jv} - 1}{j}$$

Τελικά

$$\boxed{S = K\frac{e^{j\nu}-1}{j}} \qquad (1.68)$$

Η αρχική αξία Α προκύπτει από τον τύπο (1.66), αν αντικαταστήσουμε σε αυτόν την τιμή του S από τον τύπο (1.67).

Είναι δηλαδή

$$K\frac{e^{j\nu}-1}{j} = e^{\int_0^{\nu} j\,dt} A$$

$$K\frac{e^{j\nu}-1}{j} = e^{j}A \qquad \left[\int_0^{\nu} j\,dt = [jt]_o^{\nu} = j\nu\right]$$

οπότε

$$A = K\frac{e^{j\nu}-1}{j}e^{-j\nu}$$

$$= K\frac{e^{0}-e^{-j\nu}}{j}$$

Τελικά

$$\boxed{A = K\frac{1-e^{-j\nu}}{j}} \qquad (1.69)$$

Οι προηγούμενοι τύποι (1.68) και (1.69) μποροθν να μετασχηματισθούν.

Είναι

j = 1 ν (1 + i), e^{j} = 1+i και $e^{-j\nu}=(1+i)^{-\nu}$

οπότε γίνονται αντίστοιχα :

$$\boxed{S = K\frac{(1+i)^{\nu}-1}{1\nu(1+i)}} \qquad 1.68'$$

$$\boxed{A = K\frac{1-(1+i)^{-\nu}}{1\nu(1+i)}} \qquad 1.69'$$

Παράδειγμα : Η συνεχής ράντα με K = 200.000 δρχ. που διαρκεί 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 8% έχει τελική αξία

$$S=200.000\frac{(1{,}08)^{10}-1}{\ln(1+0{,}08)} = 3.011.721$$

και αρχική

$$A=200.000\frac{1-(1{,}08)^{-10}}{\ln(1+0{,}08)} = 1.395.009$$

Αν K(t) =α$e^{\beta t}$ και δ(t) = j, δηλαδή οι όροι της ράντας μεταβάλλονται εκθετικά, ενώ το επιτόκιο παραμένει σταθερό, τότε θα είναι :

$$\int_t^{\nu} \delta(t)\,dt = j(\nu - t)$$

οπότε ο τύπος (1.67) δίνει :

$$S = \int_0^{\nu} ae^{\beta t}e^{j(\nu-t)}dt = ae^{j\nu}\int_0^{\nu} e^{(\beta-J)t}dt = \frac{ae^{j\nu}}{\beta-j}\left[e^{(\beta-j)t}\right]_0^{\nu} =$$

$$= \frac{ae^{j\nu}}{\beta-j}\left(e^{(\beta-j)\nu}-1\right)$$

$$\boxed{S=\frac{ae^{j\nu}}{\beta-j}\left(e^{(\beta-j)\nu}-1\right)} \qquad (1.70)$$

Αντίστοιχα ο τύπος (1.65) δίνει :

$$A = \int_0^{\nu} ae^{\beta t}e^{-\int_0^t j dt} = a\int_0^{\nu} e^{\beta t}e^{-jt}dt = a\int_0^{\nu} e^{(\beta-j)t}dt =$$

$$= \frac{a}{\beta - j}\left[e^{(\beta - j)t}\right]_0^{\nu} = \frac{a}{\beta - j}\left(e^{\beta - j)\nu} - 1\right)$$

$$\boxed{A = \frac{a}{\beta - j}\left(e^{(\beta - j)\nu} - 1\right)} \qquad (1.71)$$

Παράδειγμα

Για α = 1.000.000, β = 0,02, j = 0,06 και ν = 10 οι τύποι (1.70) και (1.71) δίνουν αντίστοιχα :

$$S = \frac{1.000.000e^{0.06x10}}{0,02 - 0,06}\left(e^{(0,02-0,06)10} - 1\right)$$

$$= \frac{1.000.000e^{0,6}}{-0,04}\left(e^{-0,4} - 1\right) \approx 15.017.805$$

και

$$A = \frac{1.000.000}{0,02 - 0,06}\left(e^{(0,02-0,06)10} - 1\right)$$

$$= \frac{1.000.000}{-0,04}\left(e^{-0,4} - 1\right) \approx 8.241.946$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΔΑΝΕΙΩΝ

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΔΑΝΕΙΩΝ

Ενας από τους πιο διαδεδομένους τρόπους κάλυψης οικονομικών αναγκών των διάφορων οργανισμών αλλά και ιδιωτών είναι η σύναψη δανείων. **Δάνειο** ορίζεται, γενικά, ως το κεφάλαιο που παραχωρείται υπό ορισμένους όρους, οι οποίοι καθορίζονται με κοινή συμφωνία του δανειζόμενου και του δανειστή.

Οι όροι αυτοί αφορούν το χρόνο και τον τρόπο επιστροφής του κεφαλαίου καθώς και την υποχρέωση του οφειλέτη να καταβάλλει τόκο στο δανειστή ως αποζημίωση της χρήσης του κεφαλαίου για το συμφωνηθέν χρονικό διάστημα.

Εξόφληση του δανείου λέγεται η καταβολή του κεφαλαίου και του τόκου που συμφωνήθηκε, διάρκεια του δανείου καλείται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την ημέρα χορήγησης μέχρι την εξόφλησης και απόσβεση του δανείου λέγεται η διαδικασία που ακολουθείται κατά την εξόφληση του δανείου. Οι διάφοροι τρόποι απόσβεσης λέγονται συστήματα απόσβεσης δανείων.

Τα δάνεια διακρίνονται σε:

Βραχυπρόθεσμα-μακροπρόθεσμα

Ι.Βραχυπρόθεσμα είναι τα δάνεια που η διάρκεια τους είναι μικρότερη του ενός έτους.Μεταξύ ιδιωτών η εξόφληση τους γίνεται συνήθως με έντοκα γραμμάτια τα οποία είναι έγγραφα που πληρώνει ο κομιστής στην πραγματική τους αξία κατά τη λήξη τους. Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται η απλή κεφαλαιοποίηση.

ΙΙ.Μακροπρόθεσμα είναι τα δάνεια που η διάρκεια τους είναι μεγαλύτερη του έτους, συνάπτονται κυρίως από μεγάλους οικονομικούς οργανισμούς και σε αυτά εφαρμόζεται η σύνθετη κεφαλαιοποίηση.

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια διακρίνονται σε **πάγια** και **εξοφλητέα**. Πάγια είναι που ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να καταβάλλει κάθε περίοδο μόνο τον τόκο του ποσού που δανείστηκε, ενώ το κεφάλαιο μπορεί να το εξοφλήσει όποτε θέλει. Τα δάνεια αυτά ονομάζονται έτσι γιατί ο τόκος τους αποτελεί μόνιμο έξοδο του προϋπολογισμού των οργανισμών που τα συνάπτουν, δηλαδή ο τόκος παγιούται στον προϋπολογισμό.

Εξοφλητέα είναι τα δάνεια στα οποία ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει το χρέος μέσα σε ορισμένο χρόνο.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με τα εξοφλητέα δάνεια.

Ενιαία-Ομολογιακά

Ενιαία είναι τα δάνεια στα οποία ο δανειστής είναι ένα φυσικό ή νομικό πρόσωπο.

Ομολογιακά είναι τα δάνεια που οι δανειστές είναι πολλοί.Τέτοια δάνεια συνήθως συνάπτουν οι οργανισμοί που δεν μπορούν να δανειστούν από ένα μόνο δανειστή. Σε κάθε περίοδο το ποσό που καταβάλλεται για την εξόφληση του κεφαλαίου λέγεται χρεολύσιο, ενώ το ποσό που καταβάλλεται για την εξόφληση του τόκου λέγεται τόκος. Το άθροισμα τους λέγεται τοκοχρεολύσιο ή δόση απόσβεσης.

Συμβολίζουμε με C το ποσό του δανείου, με ν τη διάρκεια και I το επιτόκιό του, με C_κ το χρεολύσιο, I_κ τον τόκο και K_κ το τοκοχρεολύσιο της κ περιόδου και τέλος με Δκ το υπόλοιπο του χρέους της κ περιόδου.

$$\boxed{K_\kappa = C_\kappa + I_\kappa , \quad \kappa = 1,2,\ldots,\nu} \quad (2.1)$$

$$\boxed{C = \sum_{\kappa=1}^{\nu} C_\kappa} \quad (2.2)$$

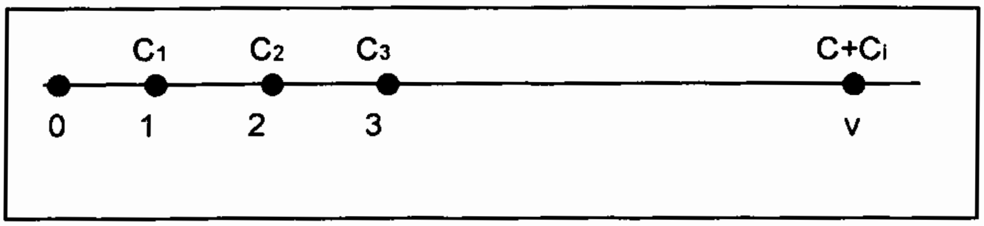
$$\boxed{\Delta_\kappa = \Delta_{\kappa-1} - C_\kappa , \ \kappa=1,2,\ldots,\nu \text{ με } \Delta_0 = C} \quad (2.3)$$

2.2 ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΕΝΙΑΙΩΝ ΔΑΝΕΙΩΝ

Κάθε σύστημα απόσβεσης ενιαίου δανείου καθορίζεται από τον τρόπο που υπολογίζονται τα τοκοχρεολύσια $C_1,C_2,\ldots,C_\nu$.Αν η διάρκεια του δανείου είναι ν χρονικές περίοδοι (π.χ. ν έτη) ,ο υπολογισμός του ανάγεται στον υπολογισμό του χρεολυσίου ,$C_\kappa,\kappa=1,2,\ldots,\nu$ και του τόκου $I_\kappa,\kappa=1,2,\ldots,\nu$.

2.3 ΔΑΝΕΙΑ ΕΝΙΑΙΟΥ ΠΟΣΟΥ

Σε αυτό το σύστημα ο δανειστής καταβάλλει στον οφειλέτη,κάθε περίοδο,μόνο τον αντίστοιχο τόκο, και στην λήξη του δανείου καταβάλλει ολόκληρο το ποσό C που δανείστηκε.



ΣΧΗΜΑ 1

Ετσι έχουμε :

$$\boxed{\begin{array}{ll} I_\kappa = Ci & \kappa=1,2,\ldots,\nu \\ C_\kappa = 0 & \kappa=1,2,\ldots,\nu-1 \\ C_\nu = C & \end{array}} \quad (2.4)$$

Παράδειγμα: Να συνταχθεί ,στο σύστημα ενιαίου ποσού ,ο πίνακας απόσβεσης ενός δανείου 2.000.000 δρχ. που εξοφλείται σε 5 έτη με επιτόκιο 12%.

Για C=2.000.000 ,ν=5 και i=0,12 οι τύποι (2.4) δίνουν

$I_1=I_2=\ldots=I_5=Ci=2.000.000 \times 0,12 = 240.000$

$C_1=C_2=\ldots=C_4=0$

$C_5=2.000.000$

$\Delta_1=C-C_1=2.000.000 - 0= 2.000.000$

$\Delta_2=\Delta_1-C_2= 2.000.000$

$\Delta_3=\Delta_2-C_3= 2.000.000$

$\Delta_4=\Delta_3-C_4= 2.000.000$

$\Delta_5=\Delta_4-C_5= 2.000.000 - 2.000.000 = 0$

οπότε ο αντίστοιχος πίνακας απόσβεσης είναι ο παρακάτω:

Ετος (κ)	Τόκος (Iκ)	Χρεολύσιο (Cκ)	Τοκοχρεολύσιο (Kκ)	Υπόλοιπο Χρέους (Δκ)
1	240.000	0	240.000	2.000.000
2	240.000	0	240.000	2.000.000
3	240.000	0	240.000	2.000.000
4	240.000	0	240.000	2.000.000
5	240.000	2.000.000	240.000	0

2.4 ΣΥΣΤΗΜΑ ΙΣΩΝ ΜΕΡΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σε αυτό το σύστημα το χρεολύσιο κάθε περιόδου είναι ίσο με $\frac{1}{\nu}$του κεφαλαίου C,ενώ οι τόκοι υπολογίζονται στο τέλος κάθε περιόδου .

Είναι δηλαδή

$$_{\kappa} = \frac{C}{\nu}, \qquad \kappa=1,2,\ldots,\nu$$

και

$$I_1 = Ci$$

$$I_2 = (C - \frac{C}{\nu})i = C - \frac{Ci}{\nu} = Ci - (2-1)\frac{Ci}{\nu}$$

$$= I_1 + (2-1)(-\frac{Ci}{\nu})$$

$$I_3 = (C - 2\frac{C}{\nu})i = Ci - 2\frac{Ci}{\nu} = Ci - (3-1)\frac{Ci}{\nu}$$

$$= I_1 + (3-1)(\frac{-Ci}{\nu})$$

....

$$I_\kappa = [C - (\kappa-1)\frac{C}{\nu}]i = Ci - (\kappa-1)\frac{Ci}{\nu}$$

$$= Ci + (\kappa - 1)\frac{Ci}{\nu}I_1 + (\kappa - 1)(-\frac{Ci}{\nu})$$

Επομένως ισχύουν στο σύστημα αυτό οι τύποι :

$$\boxed{\begin{array}{ll} C_\kappa = \dfrac{C}{\nu} \ , & \text{κ=1,2,...,ν} \\ I_\kappa = I_1 + (k-1)(-\dfrac{Ci}{\nu}), & \text{κ=1,2,...,ν} \end{array}} \quad (2.5)$$

οι τόκοι δηλαδή είναι διαδοχικοί όροι φθίνουσας αριθμητικής προόδου ,με πρώτο όρο $I_1 = Ci$ και λόγο $-\frac{Ci}{\nu}$.

Το τοκοχρεολύσιο της κ περιόδου θα είναι

$$K_\kappa = C_\kappa + I_\kappa$$

$$= \frac{C}{\nu} + Ci + (\kappa - 1)(-\frac{Ci}{\nu}) \quad , \text{κ = 1,2,...,ν}$$

τα τοκοχρεολύσια δηλαδή στο σύστημα αυτό είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\frac{C}{v} + Ci$ και λόγο $-\frac{Ci}{i}$.

Βάσει των παραπάνω ο οφειλέτης πληρώνει μεγάλα ποσά για τα πρώτα χρόνια του δανείου ,πράγμα που αποτελεί μειονέκτημα του δανείου αυτού.

Παράδειγμα : Να συνταχθεί ,στο σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου,ο πίνακας απόσβεσης ενός δανείου 2.000.000 δρχ. ,που εξοφλείται σε 5 έτη με επιτόκιο 12%.

Για C=2.000.000 ,ν=5 και i=0,12 οι τύποι (2.5) δίνουν :

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_\kappa = \frac{C}{\nu} = \frac{2.000.000}{5} = 400.000$$

$$I_1 = Ci = 2.000.000 \times 0,12 = 240.000$$

$$I_2 = 240.000 - \frac{2.000.000 \times 0,12}{5} = 240.000 - 48.000 = 192.000$$

$$I_3 = 192.000 - 48.000 = 144.000$$

$$I_4 = 144.000 - 48.000 = 96.000$$

$$I_5 = 96.000 - 48.000 = 48.000$$

$$\Delta_1 = C - C_1 = 2.000.000 - 400.000 = 1.600.000$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 - C_2 = 1.600.000 - 400.000 = 1.200.000$$

....

$$\Delta_5 = \Delta_4 - C = 400.000 - 400.000 = 0$$

οπότε ο αντίστοιχος πίνακας απόσβεσης είναι :

Ετος (κ)	**Τόκος (Iκ)**	**Χρεολύσιο (Cκ)**	**Τοκοχρεολύσιο (Kκ)**	**Υπόλοιπο Χρέους (Δκ)**
1	240.000	400.000	640.000	1.600.000
2	192.000	400.000	592.000	1.200.000
3	144.000	400.000	544.000	800.000
4	96.000	400.000	496.000	400.000
5	48.000	400.000	448.000	0

2.5 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΤΟΚΟΧΡΕΟΛΥΣΙΟΥ

Σε αυτό το σύστημα το τοκοχρεολύσιο κάθε περιόδου είναι σταθερό ,δηλαδή

$$K_\kappa = K, \quad \kappa = 1,2,\ldots,\nu \qquad (2.6)$$

Οι δόσεις απόσβεσης επομένως του δανείου συνιστούν σταθερή ληξιπρόθεσμη ράντα ,της οποίας η αρχική αξία $A_{\nu\rceil}$ είναι ίση με το ποσό του δανείου. Είναι όμως $A_{\nu\rceil} = \nu\ \alpha_{\nu\rceil}$ (τύπος 1.12) οπότε

$$K\, \alpha_{\nu\rceil} = C$$

και $$K = C\,\frac{1}{\alpha_{\nu\rceil}}$$

Ισχύει δηλαδή για τα συστήματα αυτός ο τύπος

$$\boxed{K_\kappa = C\,\frac{1}{\alpha_{\nu\rceil}},\quad \kappa = 1,2,\ldots,\nu.} \qquad (2.7)$$

Επειδή το τοκοχρεολύσιο K_κ μπορεί να διατηρείται σταθερό , ανεξάρτητα του τι συμβαίνει για το χρεολύσιο C_κ και τον τόκο I_κ, θα υπάρχουν προφανώς διάφορα συστήματα σταθερού τοκοχρεολυσίου, από τα οποία στα επόμενα θα εξεταστούν τα κυριότερα.

2.6 ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΤΟΚΟΥ ΚΑΙ ΧΡΕΟΛΥΣΙΟΥ

Σε αυτό το σύστημα ο τόκος που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου στο σύστημα αυτό είναι ίσος με Ci ,οπότε το χρεολύσιο C_κ θα είναι

$$C_\kappa = K_\kappa - I_\kappa \qquad (2.1)$$

$$= C\,\frac{1}{\alpha_{\nu\rceil}} - C_i \qquad (2.7)$$

$$= C\frac{i}{1-(1+i)^{-\nu}} - Ci \qquad \text{Τύπος 1.11}$$

$$= C\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-\nu}} - i\right]$$

$$= C\left[\frac{i(1+i)^{\nu}}{(1+i)^{\nu}-1} - i\frac{(1+i)^{\nu}-1}{(1+i)^{\nu}-1}\right]$$

$$= C\frac{i(1+i)^{\nu} - i(1+i)^{\nu} + i}{(1+i)^{\nu}-1}$$

$$= C\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$$

$$= C\frac{1}{s_{\nu|}}$$ Τύπος (1.3)

Ισχύουν δηλαδή στο σύστημα αυτό οι τύποι :

$$I_\kappa = C i \ , \ \kappa = 1,2,\ldots,\nu$$

(2.8)

$$C_\kappa = C\frac{1}{s_{\nu|}}, \ \kappa = 1,2,\ldots,\nu$$

Το ποσό C_κ που καταβάλλεται στο δανειστή από τον οφειλέτη στη κ περίοδο θεωρείται κατάθεση για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος ,ανατοκίζεται δηλαδή με το ίδιο επιτόκιο i για τις υπόλοιπες περιόδους.

Παράδειγμα: Να συνταχθεί στο σύστημα σταθερού τόκου και χρεολυσίου ,ο πίνακας απόσβεσης ενός δανείου 2.000.000 δρχ, που εξοφλείται σε 5 έτη ,με επιτόκιο 8%.

Για C=2.000.000,ν=5 και i=0,08 οι τύποι (2.8) δίνουν:

$I_1 = I_2 = \ldots = I_5 = Ci = 2.000.000 \times 0,08 = 160.000$

$C_1 = C_2 = \ldots = C_5 = 2.000.000 \times \frac{1}{s_{5|}} =$

$= 2.000.000 \times 0,170456 = 340.912$

$\Delta_1 = 2.000.000 - 349.912 = 1.659.088$

$\Delta_2 = 1.659.088 - 340.912 \times (1+0,08)$

$= 1.659.088 - 368.185 = 1.290.903$

$\Delta_3 = 1.290.903 - 368.185 \times (1+0,08)$

$= 1.290.903 - 397.640 = 893.263$

$\Delta_4 = 893.263 - 397.640 \times (1+0,08)$

$= 893.263 - 429.451 = 463.812$

$\Delta_5 = 463.812 - 429.451 \times (1+0,08) = 0$

οπότε ο αντίστοιχος πίνακας απόσβεσης είναι:

Ετος (κ)	Τόκος ($I_κ$)	Χρεολύσιο ($C_κ$)	Τοκοχρεολύσιο ($K_κ$)	Υπόλοιπο Χρέος ($Δ_κ$)
1	160.000	340.912	500.912	1.659.088
2	160.000	340.912	500.912	1.290.903
3	160.000	340.912	500.912	893.263
4	160.000	340.912	500.912	463.812
5	160.000	340.912	500.912	0

2.7 ΠΡΟΟΔΕΥΤΙΚΟ Ή ΓΑΛΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Το προοδευτικό ή γαλλικό σύστημα είναι ένα σύστημα σταθερού τοκοχρεολυσίου και συναντάται τακτικά στην Τραπεζική πρακτική. Σε αυτό το σύστημα ο τόκος που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου υπολογίζεται στο υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου της προηγούμενης περιόδου, δηλαδή

$$I_κ = Δ_{κ-1}\, i, \quad κ=1,2,\ldots,ν-1 \qquad (2.9)$$

Επειδή το σύστημα αυτό είναι σύστημα σταθερού τοκοχρεολυσίου ισχύει η ισότητα

$$K_{κ+1} = K_κ, \qquad κ=1,2,\ldots,ν-1 \qquad (2.10)$$

από την οποία προκύπτει :

$$I_{κ+1} + C_{κ+1} = I_κ + C_κ \qquad \text{Τύπος } (2.1)$$

$$Δ_κ\, i + C_{κ+1} = Δ_{κ-1}\, i + C_κ \qquad \text{Τύπος } (2.10)$$

$$(Δ_{κ-1} - C_κ)\, i + C_{κ+1} = Δ_{κ-1}\, i + C_κ \qquad \text{Τύπος} (2.3)$$

$$Δ_{κ-1}\, i - C_κ\, i + C_{κ+1} = Δ_{κ-1}\, i + C_κ$$

$$C_{κ+1} = C_κ + C_κ\, i$$

$$C_{κ+1} = C_κ (1 + i) \qquad (2.11)$$

Για κ=1,2,...,ν έχουμε

$$C_1 = C_1$$

$$C_2 = C_1 (1 + i)$$

$$\boxed{C_3 = C_2 (1 + i) = C_1 (1+i)^2} \qquad (2.12)$$

....

$$C_\nu = C_{\nu-1} (1 + i) = C_1 (1+i)^{\nu-1}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι στο σύστημα αυτό τα χρεολύσια αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το χρεολύσιο της πρώτης περιόδου C_1 και λόγο $1 + i$.

Ολα λοιπόν τα χρεολύσια μπορούν να υπολογιστούν, αν είναι γνωστό το πρώτο χρεολύσιο C_1. Για τον υπολογισμό του προσθέτου με κατά μέλη τις ισότητες (2.12).

$$C_1 + C_2 + \dots + C_\nu = C_1 + C_1 (1+ i) + C_1 (1+i)^2 + \dots + C_1 (1+i)^{\nu-1}$$

Αλλά $C_1 + C_2 + \dots + C_\nu = C$ Τύπος (2.2)

οπότε

$$C_1[1+(1+i)+(1+i)^2+\dots+(1+i)^{\nu-1}] = C$$

$$C_1 \frac{(1+i)^{\nu-1}(1+i)-1}{1+i-1} = C$$

$$C_1 \frac{(1+i)^{\nu}-1}{i} = C$$

$C_1 s_{\overline{\nu|}} = C$ Τύπος (1.18)

και τελικά

$$C_1 = C \cdot \frac{1}{s_{\overline{\nu|}}} \qquad (2.13)$$

Ο προηγούμενος μπορεί να γίνει:

$C_1 = K \cdot a_{\overline{\nu|}} \cdot \frac{1}{s_{\overline{\nu|}}}$ Τύπος (1.12)

$$= K \cdot \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{i} \cdot \frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$$ Τύποι (1.10) και (1,19)

$$= K \cdot \frac{1-(1+i)^{-\nu}}{(1+i)^{\nu}-1}$$

$$= K \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+i)^{\nu}}}{(1+i)^{\nu}-1} = K \frac{\frac{(1+i)^{\nu}-1}{(1+i)^{\nu}}}{(1+i)^{\nu}-1} = K \frac{1}{(1+i)^{\nu}} = K(1+i)^{-\nu}$$

Τελικά

$$C_1 = K\,(1+i)^{-\nu} \qquad (2.14)$$

Από τους τύπους (2.12) και (2.14) υπολογίζεται και το χρεολύσιο της κ περιόδου.

Είναι

$$C_\kappa = C_1\,(1+i)^{\kappa-1}$$

$$= K\,(1+i)^{-\nu}\,(1+i)^{\kappa-1}$$

$$= K\,(1+i)^{\kappa-\nu-1}$$

Τελικά

$$C_\kappa = K\,(1+i)^{\kappa-\nu-1}, \quad \kappa=1,2,\ldots,\nu \qquad (2.15)$$

Τέλος , το υπόλοιπο του χρέους Δ_κ, της κ περιόδου μετά την καταβολή κ δόσεων θα είναι :

$$\Delta_\kappa = C - [C_1 + C_2 + \ldots + C_\kappa]$$

$$= C - [C_1 + C_1(1+i) + (1+i)^2 + \ldots + C_1(1+i)^{\kappa-1}]$$
$$= C - C_1[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{\kappa-1}]$$
$$= C - C_1 \frac{(1+i)^{\kappa-1}(1+i) - 1}{1+i-1}$$
$$= C - C_1 \frac{(1+i)^{\kappa} - 1}{i}$$
$$= C - C_1 \cdot s_{\nu\rceil} \qquad \text{Τύπος}(1.2)$$

$$= C - C\frac{1}{s_{\kappa\rceil}} S_{\kappa\rceil}$$
$$= C(1 + \frac{S_{\kappa\rceil}}{S_{\nu\rceil}}) \qquad \text{Τύπος (2.16)}$$

Τελικά

$$\Delta_\kappa = C(1 - \frac{s_{\nu\rceil}}{s_{\nu\rceil}})$$

Παράδειγμα :Να συνταχθεί στο προοδευτικό σύστημα ο πίνακας απόσβεσης ενός δανείου 2.000.000. δρχ., που εξοφλείται σε 5 έτη με επιτόκιο 8%.

Για C =2.000.000, ν=5, i=0,08 οι τύποι (2.7) (2.13) και (2.9) δίνουν :

$K_1=K_2=\ldots=K_\kappa=C\ 1/\alpha_{5\rceil}=2.000.000 \times 0,250456=500.912$

$I_1=C_i=2.000.000 \times 0,08=160.000$

$C_1=C_{\nu\rceil}\ =2.000.000 \times 1/s_{5\rceil}=2.000.000 \times 0.170456=340.912$

$\Delta_1=C-C_1=2.000.000-340.912=1.659.088$

$I_2=\Delta_1\ i=1.659.088 \times 0,08=132.712$

$C_2=C_1\ (1+i)=340.912 \times (1+0,08)=368.185$

$\Delta_2=\Delta_1-C_2=1.659.088-368.185=1.290.903$

....

οπότε ο αντίστοιχος πίνακας απόσβεσης είναι

Ετος (κ)	**Τόκος (Iκ)**	**Χρεολύσιο (Cκ)**	**Τοκοχρεολύσιο (Κκ)**	**Υπόλοιπο Χρέους (Δκ)**
1	160.000	340.912	500.912	1.659.088
2	132.727	368.185	500.912	1.290.903
3	103.272	397.640	500.912	893.263
4	71.461	429.451	500.912	463.812
5	37.105	463.807	500.912	0

2.8 ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΕΥΡΩΠΗΣ

Το σύστημα της Κεντρικής Ευρώπης είναι και αυτό ένα σύστημα σταθερού τοκοχρεολυσίου ,όπου ο τόκος κάθε περιόδου προκαταβάλλεται ,ισχύουν δηλαδή οι τύποι

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta_0=C \\ I_\kappa=\Delta_\kappa\, i\ , \qquad i=0,1,2,\ldots,\nu-1 \end{array}} \qquad 2.17$$

με I_0 και Δ_0 ο τόκος και το υπόλοιπο του χρέους αντίστοιχα στην αρχή της πρώτης περιόδου .

Επειδή το σύστημα αυτό είναι σύστημα σταθερού τοκοχρεολυσίου ισχύει η ισότητα

$$K_{\kappa+1}=K_\kappa\ , \qquad \kappa=1,2,\ldots,\nu-1$$

από την οποία προκύπτει :

$$I_{\kappa+1} + C_{\kappa+1} = I_\kappa + C_\kappa \qquad 2.1$$

$$\Delta_{\kappa+1}\, i + C_{\kappa+1} = \Delta_\kappa\, i + C_\kappa \qquad 2.17$$

$$(\Delta_\kappa - C_{\kappa+1})\, i + C_{\kappa+1} = \Delta_\kappa\, i+C_\kappa \qquad 2.3$$

$$\Delta_\kappa i - C_{\kappa+1}\, i + C_{\kappa+1} = \Delta_\kappa\, i + C_\kappa$$

$$C_{\kappa+1}(1 - i) = C_\kappa$$

$$C_{\kappa+1} = C_\kappa\, \frac{1}{1-i} \qquad 2.18$$

Παρατηρούμε δηλαδή στο σύστημα αυτό τα χρεολύσια αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\frac{1}{1-i}$.Επομένως το σύστημα αυτό με το μετασχηματισμό

$$\frac{1}{1-i}=1+\hat{i} \qquad 2.19$$

μετατρέπεται σε προοδευτικό σύστημα απόσβεσης με επιτόκιο $\hat{i}=\frac{1}{1-i}$ που προκύπτει από τη 2.19.

2.9 ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Το σύστημα δανείων του οποίου τα χρεολύσια συνιστούν αριθμητική πρόοδο ονομάζεται σύστημα αριθμητικής προόδου .

Στο σύστημα αυτό είναι :

$$C_κ = C_1 + (κ-1)\,λ \qquad 2.20$$

και επειδή :

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_ν = C$$

$$\frac{C_1 + (C_1 + (ν-1)λ)}{2} ν = C$$

εύκολα προκύπτει ότι :

$$C_1 = \frac{2C - (ν-1)λν}{2ν}$$

$$C_κ = \frac{2C - (ν-1)λν}{2ν} + (κ-1)λ \text{ , } κ=1,2,\ldots,ν \qquad 2.21$$

Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου ισούται με $λ = C_1$ τότε προκύπτει :

$$C_K = C_1 + (κ-1)C_1 = κ\, C_1$$

$$\frac{C_1 + (C_1 + (ν-1)C_1)}{2} ν = C$$

$$\frac{ν(ν+1)C_1}{2} = C$$

$$C_1 = \frac{2C}{ν(ν+1)} \qquad (2.22)$$

και τελικά :

$$\boxed{C_K = \frac{2κ\, C}{ν(ν+1)}} \text{ , } κ=1,2,\ldots,ν \qquad (2.23)$$

Στην περίπτωση αυτή για τον τόκο της κ περιόδου θα ισχύει :

$I_\kappa=\{C-(C_1+C_2+...+C_{\kappa-1})\}\ i$

$$=\{C\frac{\frac{2C}{\nu(\nu+1)}+\frac{2(\kappa-1)C}{\nu(\nu+1)}}{2}(\kappa-1)\}i$$

$$=\{C-\frac{2\kappa\,C(\kappa-1)}{\nu(\nu+1)}\}i$$

$$I_K=C\{1-\frac{\kappa(\kappa-1)}{\nu(\nu+1)}\}i \qquad \kappa=1,2,3\ldots,\nu \quad (2.24)$$

Τέλος για το τοκοχρεολύσιο της κ περιόδου θα ισχύει :

$K_\kappa=C_\kappa+I_\kappa$

$$K_K=\frac{2\kappa\,C}{\nu(\nu+1)}+C\{1-\frac{\kappa(\kappa-1)}{\nu(\nu+1)}\}i \quad ,\kappa=1,2,\ldots,\nu \qquad (2.25)$$

Παράδειγμα : Να συνταχτεί ο πίνακας απόσβεσης ενός δανείου 1.000.000 δρχ. που εξοφλείται σε 5 έτη με επιτόκιο 6% κατά το σύστημα της αριθμητικής προόδου με $\lambda=C_1$.

Για C=1.000.000 ,ν=5 και i=0,06 οι προηγούμενοι τύποι δίνουν :

$$C_1=\frac{2x1x1.000.000}{5.6}=66666{,}6=66667$$

$$I_1=C_i=1.000.000 \times 0.06=60.000$$

$$K_1=\frac{2x1x1.000.000}{5x6}+1.000.000\ \ (1-\frac{10}{5.6})\ 0{,}06=$$

$$=126.666{,}6=126.667$$

$$\Delta_1=C-C_1=1.000.000-66.667=933.333$$

$$C_2 = \frac{2x2x1.000.000}{5x6} = 133.333,3 = 133,333$$

$$I_2 = \Delta_1\ i = 933.333 \times 0,06 = 55.999,9 = 56.000$$

$$K_2 = \frac{2x2x1.000.000}{5x6} + 1.000.000\ \left(1 - \frac{2.1}{5.6}\right) 0,06$$

$$= 189.333,2 = 189.333$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 - C_2 = 933.333 - 133.333 = 800.000$$

....

οπότε ο σχετικός πίνακας απόσβεσης είναι

Ετος (κ)	**Τόκος ($I_κ$)**	**Χρεολύσιο ($C_κ$)**	**Τοκοχρεολύσιο ($K_κ$)**	**Υπόλοιπο Χρέους ($\Delta_κ$)**
1	60.000	66.667	126.667	933.333
2	56.000	133.333	189.333	800.000
3	48.000	200.000	248.000	600.000
4	36.000	266.667	302.667	333.333
5	20.000	333.333	353.333	0

2.10 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

Σύστημα δύο επιτοκίων είναι το σύστημα στο οποίο ο οφειλέτης για την εξόφληση του δανείου δημιουργεί τμηματικά ένα άλλο κεφάλαιο ,ίσο με αυτό που θα χρειαστεί την εποχή της εξόφλησης ,από καταθέσεις με επιτόκιο διαφορετικό από το επιτόκιο του δανείου . Το κεφάλαιο που δημιουργείται λέγεται εξοφλητικό απόθεμα και το επιτόκιο επιτόκιο κατάθεσης ή επιτόκιο εξόφλησης. Ο οφειλέτης δηλαδή ,καταθέτει κάθε χρονική περίοδο σε μία Τράπεζα ένα ορισμένο ποσό που ανατοκίζεται για τις επόμενες χρονικές περιόδους με επιτόκιο διαφορετικό από το επιτόκιο του δανείου. Αυτό γίνεται όταν είναι δύσκολο για τον οφειλέτη να εξοικονομήσει το ποσό που δανείστηκε ,κατά τη λήξη του δανείου .Οι καταθέσεις αυτές αποτελούν μία ληξιπρόθεσμη ράντα με τελική αξία το ποσό που πρέπει να συγκεντρώσει ο οφειλέτης για την εξόφληση του δανείου. Τα συστήματα δύο επιτοκίων που απαντώνται πιο συχνά είναι το αμερικάνικο σύστημα και το σύστημα κεφαλαίου χρεολυσίας .

2.11 ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Σ' αυτό το σύστημα το δάνειο εξοφλείται ολόκληρο κατά τη λήξη του ,χωρίς να πληρώνονται οι τόκοι των ενδιάμεσων περιόδων ,ο οφειλέτης δηλαδή πρέπει να καταβάλει στο τέλος της νιοστής περιόδου το ποσό

$$S = C\,(1+i)^{\nu} \qquad (2.26)$$

καταθέτοντας στο τέλος κάθε περιόδου ένα σταθερό ποσό Κ ,με επιτόκιο εξόφλησης i.Οι καταθέσεις αυτές αποτελούν μία σταθερή ληξιπρόθεσμη ράντα της οποίας η τελική αξία σύμφωνα με τους τύπους 1.4 και 1.2 είναι

$$S_{\nu 1} = K s_{\nu 1}$$

τύπος 2.27

$$S_{\nu 1} = K\frac{(1+\hat{i})^{\nu}-1}{\hat{i}}$$

Από τις 2.26 και 2.27 προκύπτει ότι κατά τη λήξη του δανείου πρέπει να ισχύει η ισότητα

$$K\frac{(1+\hat{i})^{\nu}-1}{\hat{i}} = C(1+i)^{\nu} \qquad 2.28$$

από την οποία υπολογίζεται η κατάθεση του οφειλέτη .Είναι δηλαδή

$$K = C\frac{\hat{i}}{(1+\hat{i})^{\nu}-1}(1+i)^{\nu} \qquad 2.29$$

$$\boxed{K = C\frac{1}{s_{\nu 1}(\hat{i})}(1+i)^{\nu}} \qquad 2.30$$

Παράδειγμα : Να συνταχθεί στο αμερικάνικο σύστημα ο πίνακας απόσβεσης ενός δανείου 1.000.000 δρχ. με 6%, που πρέπει να εξοφληθεί σε 5 έτη με επιτόκιο κατάθεσης 5%.

Για C =1.000.000 , v=5 , $\hat{i}$ =0,06 και i =0,05 οι τύποι 2.26 και 2.30 δίνουν :

S = 1.000.000 x 1,333225 = 1.338.225

K = 1.000.000 x 0,180974 x 1,338225 = 242.184

οπότε αντίστοιχος πίνακας απόσβεσης είναι ο παρακάτω :

Ετος	Κατάθεση	Παραγόμενος τόκος	Συσσωρευμένο εξοφλητικό απόθεμα	Υπόλοιπο Χρέους (Δκ)
1	242.184	--	242.184	1.000.000
2	242.184	12.109	496.477	1.000.000
3	242.184	24.824	763.485	1.000.000
4	242.184	38.174	1.043.843	1.000.000
5	242.184	52.192	1.338.219	--

Τα ποσά της στήλης "Συσσωρευμένο εξοφλητικό απόθεμα" προκύπτουν αν προσθέσουμε το προηγούμενο ποσό της ίδιας στήλης με το ποσό της κατάθεσης και του αντίστοιχου τόκου .

2.12 ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΧΡΕΟΛΥΣΙΑΣ

Σε αυτό το σύστημα το δάνειο εξοφλείται στη λήξη του, και οι τόκοι του πληρώνονται από τον οφειλέτη στο τέλος κάθε περιόδου. Ο οφειλέτης δηλαδή πληρώνει στο τέλος κάθε περιόδου ποσό Ci στο δανειστή ενώ συγχρόνως καταθέτει σε μια τράπεζα ποσό $\bar{C}$ με επιτόκιο κατάθεσης $\hat{i}$ για να δημιουργηθεί το ποσό C του δανείου. Επειδή οι καταθέσεις αυτές αποτελούν ληξιπρόθεσμη ράντα με τελική αξία C, από τον τύπο (1.4) έχουμε :

$$\bar{C}\, s_{\overline{v|}\hat{i}} = C$$

$$\boxed{\bar{C} = C \frac{1}{s_{\overline{v|}\hat{i}}}} \qquad (2.31)$$

Οι καταθέσεις επομένως του οφειλέτη θα είναι ίσες με

$$K = C\, i + C \frac{1}{s_{\overline{v|}\hat{i}}}$$

$$\boxed{K = C\left(i + \frac{1}{s_{\overline{v|}\hat{i}}}\right)} \qquad (2.32)$$

Παράδειγμα: Να συνταχθεί στο σύστημα κεφαλαίου χρεολυσίας ο πίνακας απόσβεσης ενός δανείου 1.000.000 δρχ. , με 6% που πρέπει να εξοφληθεί σε 5 έτη με επιτόκιο κατάθεσης 5 %.

Οι τύποι (2.31) και (2.32) για C= 1.000.000, v= 5, i= 0,06 και ^i=0,05 δίνουν :

$\bar{C}$ =1.000.000 x 0,180974 = 180.974

K = 1.000.000 (0,06 + 0,180974) = 240.974

Ο οφειλέτης δηλαδή καταθέτει κάθε έτος στην τράπεζα 240.974 δρχ. και πληρώνει στο δανειστή τόκο

I = Ci = 1.000.000 x 0,06 = 60.000 δρχ.

οπότε ο αντίστοιχος πίνακας απόσβεσης είναι ο παρακάτω :

Ετος	Κατάθεση	Παραγόμενος Τόκος	Συσσωρευόμενο Εξοφλητικό Απόθεμα	Τόκος στον δανειστή	Πληρωμές οφειλέτη	Υπόλοιπο Χρέους (Δκ)
1	180.975	-	180.975	60.000	240.975	1.000.000
2	180.975	9.049	370.999	60.000	240.975	1.000.000
3	180.975	18.550	570.524	60.000	240.975	1.000.000
4	180.975	28.526	780.025	60.000	240.975	1.000.000
5	180.975	39.001	100.001	60.000	240.975	-

ΠΙΝΑΚΕΣ

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,0100000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9900990099	0,9900990099	1,0100000000
2	1,0201000000	2,0100000000	0,4975124378	0,9802960494	1,9703950593	0,5075124378
3	1,0303010000	3,0301000000	0,3300221115	0,9705901479	2,9409852072	0,3400221115
4	1,0406040100	4,0604010000	0,2462810939	0,9609803445	3,9019655517	0,2562810939
5	1,0510100501	5,1010050100	0,1960397996	0,9514656876	4,8534312393	0,2060397996
6	1,0615201506	6,1520150601	0,1625483667	0,9420452353	5,7954764746	0,1725483667
7	1,0721353521	7,2135352107	0,1386282829	0,9327180547	6,7281945293	0,1486282829
8	1,0828567056	8,2856705628	0,1206902920	0,9234832225	7,6516777518	0,1306902920
9	1,0936852727	9,3685272684	0,1067403628	0,9143398242	8,5660175760	0,1167403628
10	1,1046221254	10,4622125411	0,0955820766	0,9052869547	9,4713045307	0,1055820766
11	1,1156683467	11,5668346665	0,0864540757	0,8963237175	10,3676282482	0,0964540757
12	1,1268250301	12,6825030132	0,0788487887	0,8874492253	11,2550774735	0,0888487887
13	1,1380932804	13,8093280433	0,0724148197	0,8786625993	12,1337400728	0,0824148197
14	1,1494742132	14,9474213238	0,0669011717	0,8699629696	13,0037030423	0,0769011717
15	1,1609689554	16,0968955370	0,0621237802	0,8613494748	13,8650525172	0,0721237802
16	1,1725786449	17,2578644924	0,0579445968	0,8528212622	14,7178737794	0,0679445968
17	1,1843044314	18,4304431373	0,0542580551	0,8443774873	15,5622512667	0,0642580551
18	1,1961474757	19,6147475687	0,0509820479	0,8360173142	16,3982685809	0,0609820479
19	1,2081089504	20,8108950444	0,0480517536	0,8277399150	17,2260084959	0,0580517536
20	1,2201900399	22,0190039948	0,0454153149	0,8195444703	18,0455529663	0,0554153149
21	1,2323919403	23,2391940347	0,0430307522	0,8114301687	18,8569831349	0,0530307522
22	1,2447158598	24,4715859751	0,0408637185	0,8033962066	19,6603793415	0,0508637185
23	1,2571630183	25,7163018348	0,0388858401	0,7954417887	20,4558211302	0,0488858401
24	1,2697346485	26,9734648532	0,0370734722	0,7875661274	21,2433872576	0,0470734722
25	1,2824319950	28,2431995017	0,0354067534	0,7797684430	22,0231557006	0,0454067534
26	1,2952563150	29,5256314967	0,0338688776	0,7720479634	22,7952036640	0,0438688776
27	1,3082088781	30,8208878117	0,0324455287	0,7644039241	23,5596075881	0,0424455287
28	1,3212909669	32,1290966898	0,0311244356	0,7568355684	24,3164431565	0,0411244356
29	1,3345038766	33,4503876567	0,0298950198	0,7493421470	25,0657853035	0,0398950198
30	1,3478489153	34,7848915333	0,0287481132	0,7419229178	25,8077082213	0,0387481132

1%

ν	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu 1}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu 1}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu 1}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu 1}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
31	1,3613274045	36,1327404486	0,0276757309	0,7345771463	26,5422853676	0,0376757309
32	1,3749406785	37,4940678531	0,0266708857	0,7273041053	27,2695894729	0,0366708857
33	1,3886900853	38,8690085316	0,0257274378	0,7201030745	27,9896925474	0,0357274378
34	1,4025769862	40,2576986170	0,0248399694	0,7129733411	28,7026658885	0,0348399694
35	1,4166027560	41,6602756031	0,0240036818	0,7059141991	29,4085800876	0,0340036818
36	1,4307687836	43,0768783592	0,0232143098	0,6989249496	30,1075050373	0,0332143098
37	1,4450764714	44,5076471427	0,0224680491	0,6920049006	30,7995099379	0,0324680491
38	1,4595272361	45,9527236142	0,0217614958	0,6851533670	31,4846633048	0,0317614958
39	1,4741225085	47,4122508503	0,0210915951	0,6783696702	32,1630329751	0,0310915951
40	1,4888637336	48,8863733588	0,0204555980	0,6716531389	32,8346861140	0,0304555980
41	1,5037523709	50,3752370924	0,0198510232	0,6650031078	33,4996892217	0,0298510232
42	1,5187898946	51,8789894633	0,0192756260	0,6584189186	34,1581081403	0,0292756260
43	1,5339777936	53,3977793580	0,0187273705	0,6518999194	34,8100080597	0,0287273705
44	1,5493175715	54,9317571515	0,0182044058	0,6454454648	35,4554535245	0,0282044058
45	1,5648107472	56,4810747231	0,0177050455	0,6390549156	36,0945084401	0,0277050455
46	1,5804588547	58,0458854703	0,0172277499	0,6327276392	36,7272360793	0,0272277499
47	1,5962634432	59,6263443250	0,0167711103	0,6264630091	37,3536990884	0,0267711103
48	1,6122260777	61,2226077682	0,0163338354	0,6202604051	37,9739594935	0,0263338354
49	1,6283483385	62,8348338459	0,0159147393	0,6141192129	38,5880787064	0,0259147393
50	1,6446318218	64,4631821844	0,0155127309	0,6080388247	39,1961175311	0,0255127309
51	1,6610781401	66,1078140062	0,0151268048	0,6020186383	39,7981361694	0,0251268048
52	1,6776889215	67,7688921463	0,0147560329	0,5960580577	40,3941942271	0,0247560329
53	1,6944658107	69,4465810678	0,0143995570	0,5901564928	40,9843507199	0,0243995570
54	1,7114104688	71,1410468784	0,0140565826	0,5843133592	41,5686640791	0,0240565826
55	1,7285245735	72,8524573472	0,0137263730	0,5785280784	42,1471921576	0,0237263730
56	1,7458098192	74,5809819207	0,0134082440	0,5728000776	42,7199922352	0,0234082440
57	1,7632679174	76,3267917399	0,0131015595	0,5671287898	43,2871210250	0,0231015595
58	1,7809005966	78,0900596573	0,0128057272	0,5615136532	43,8486346782	0,0228057272
59	1,7987096025	79,8709602539	0,0125201950	0,5559541121	44,4045887903	0,0225201950
60	1,8166966986	81,6696698564	0,0122444477	0,5504496159	44,9550384062	0,0222444477

1%

ν	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,0200000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9803921569	0,9803921569	1,0200000000
2	1,0404000000	2,0200000000	0,4950495050	0,9611687812	1,9415609381	0,5150495050
3	1,0612080000	3,0604000000	0,3267546726	0,9423223345	2,8838832726	0,3467546726
4	1,0824321600	4,1216080000	0,2426237527	0,9238454260	3,8077286987	0,2626237527
5	1,1040808032	5,2040401600	0,1921583941	0,9057308098	4,7134595085	0,2121583941
6	1,1261624193	6,3081209632	0,1585258123	0,8879713822	5,6014308907	0,1785258123
7	1,1486856676	7,4342833825	0,1345119561	0,8705601786	6,4719910693	0,1545119561
8	1,1716593810	8,5829690501	0,1165097991	0,8534903712	7,3254814405	0,1365097991
9	1,1950925686	9,7546284311	0,1025154374	0,8367552659	8,1622367064	0,1225154374
10	1,2189944200	10,9497209997	0,0913265279	0,8203482999	8,9825850062	0,1113265279
11	1,2433743084	12,1687154197	0,0821779428	0,8042630391	9,7868480453	0,1021779428
12	1,2682417946	13,4120897281	0,0745595966	0,7884931756	10,5753412209	0,0945595966
13	1,2936066305	14,6803315227	0,0681183527	0,7730325251	11,3483737460	0,0881183527
14	1,3194787631	15,9739381531	0,0626019702	0,7578750246	12,1062487706	0,0826019702
15	1,3458683383	17,2934169162	0,0578254723	0,7430147300	12,8492635006	0,0778254723
16	1,3727857051	18,6392852545	0,0536501259	0,7284458137	13,5777093143	0,0736501259
17	1,4002414192	20,0120709596	0,0499698408	0,7141625625	14,2918718768	0,0699698408
18	1,4282462476	21,4123123788	0,0467021022	0,7001593750	14,9920312517	0,0667021022
19	1,4568111725	22,8405586264	0,0437817663	0,6864307598	15,6784620115	0,0637817663
20	1,4859473960	24,2973697989	0,0411567181	0,6729713331	16,3514333446	0,0611567181
21	1,5156663439	25,7833171949	0,0387847689	0,6597758168	17,0112091614	0,0587847689
22	1,5459796708	27,2989835388	0,0366314005	0,6468390361	17,6580481974	0,0566314005
23	1,5768992642	28,8449632096	0,0346680976	0,6341559177	18,2922041151	0,0546680976
24	1,6084372495	30,4218624738	0,0328710973	0,6217214879	18,9139256031	0,0528710973
25	1,6406059945	32,0302997232	0,0312204384	0,6095308705	19,5234564736	0,0512204384
26	1,6734181144	33,6709057177	0,0296992308	0,5975792848	20,1210357584	0,0496992308
27	1,7068864766	35,3443238321	0,0282930862	0,5858620440	20,7068978024	0,0482930862
28	1,7410242062	37,0512103087	0,0269896716	0,5743745529	21,2812723553	0,0469896716
29	1,7758446903	38,7922345149	0,0257783552	0,5631123068	21,8443846620	0,0457783552
30	1,8113615841	40,5680792052	0,0246499223	0,5520708890	22,3964555510	0,0446499223

2%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	1,8475888158	42,3794407893	0,0235963472	0,5412459696	22,9377015206	0,0435963472
32	1,8845405921	44,2270296051	0,0226106073	0,5306333035	23,4683348241	0,0426106073
33	1,9222314039	46,1115701972	0,0216865311	0,5202287289	23,9885635530	0,0416865311
34	1,9606760320	48,0338016011	0,0208186728	0,5100281656	24,4985917187	0,0408186728
35	1,9998895527	49,9944776331	0,0200022092	0,5000276134	24,9986193320	0,0400022092
36	2,0398873437	51,9943671858	0,0192328526	0,4902231504	25,4888424824	0,0392328526
37	2,0806850906	54,0342545295	0,0185067789	0,4806109317	25,9694534141	0,0385067789
38	2,1222987924	56,1149396201	0,0178205663	0,4711871880	26,4406406021	0,0378205663
39	2,1647447682	58,2372384125	0,0171711439	0,4619482235	26,9025888256	0,0371711439
40	2,2080396636	60,4019831807	0,0165557478	0,4528904152	27,3554792407	0,0365557478
41	2,2522004569	62,6100228444	0,0159718836	0,4440102110	27,7994894517	0,0359718836
42	2,2972444660	64,8622233012	0,0154172945	0,4353041284	28,2347935801	0,0354172945
43	2,3431893553	67,1594677673	0,0148899334	0,4267687533	28,6615623334	0,0348899334
44	2,3900531425	69,5026571226	0,0143879391	0,4184007386	29,0799630720	0,0343879391
45	2,4378542053	71,8927102651	0,0139096161	0,4101968025	29,4901598745	0,0339096161
46	2,4866112894	74,3305644704	0,0134534159	0,4021537280	29,8923136025	0,0334534159
47	2,5363435152	76,8171757598	0,0130179220	0,3942683607	30,2865819632	0,0330179220
48	2,5870703855	79,3535192750	0,0126018355	0,3865376086	30,6731195718	0,0326018355
49	2,6388117932	81,9405896605	0,0122039639	0,3789584398	31,0520780115	0,0322039639
50	2,6915880291	84,5794014537	0,0118232097	0,3715278821	31,4236058937	0,0318232097
51	2,7454197897	87,2709894828	0,0114585615	0,3642430217	31,7878489153	0,0314585615
52	2,8003281854	90,0164092724	0,0111090856	0,3571010017	32,1449499170	0,0311090856
53	2,8563347492	92,8167374579	0,0107739189	0,3500990212	32,4950489382	0,0307739189
54	2,9134614441	95,6730722070	0,0104522618	0,3432343345	32,8382832728	0,0304522618
55	2,9717306730	98,5865336512	0,0101433732	0,3365042496	33,1747875223	0,0301433732
56	3,0311652865	101,5582643242	0,0098465645	0,3299061270	33,5046936494	0,0298465645
57	3,0917885922	104,5894296107	0,0095611957	0,3234373794	33,8281310288	0,0295611957
58	3,1536243641	107,6812182029	0,0092866706	0,3170954700	34,1452264988	0,0292866706
59	3,2166968513	110,8348425669	0,0090224335	0,3108779118	34,4561044106	0,0290224335
60	3,2810307884	114,0515394183	0,0087679658	0,3047822665	34,7608866770	0,0287679658

2%

ν	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,0300000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9708737864	0,9708737864	1,0300000000
2	1,0609000000	2,0300000000	0,4926108374	0,9425959091	1,9134696955	0,5226108374
3	1,0927270000	3,0909000000	0,3235303633	0,9151416594	2,8286113549	0,3535303633
4	1,1255088100	4,1836270000	0,2390270452	0,8884870479	3,7170984028	0,2690270452
5	1,1592740743	5,3091358100	0,1883545714	0,8626087844	4,5797071872	0,2183545714
6	1,1940522965	6,4684098843	0,1545975005	0,8374842567	5,4171914439	0,1845975005
7	1,2298738654	7,6624621808	0,1305063538	0,8130915113	6,2302829552	0,1605063538
8	1,2667700814	8,8923360463	0,1124563888	0,7894092343	7,0196921895	0,1424563888
9	1,3047731838	10,1591061276	0,0984338570	0,7664167323	7,7861089219	0,1284338570
10	1,3439163793	11,4638793115	0,0872305066	0,7440939149	8,5302028368	0,1172305066
11	1,3842338707	12,8077956908	0,0780774478	0,7224212766	9,2526241134	0,1080774478
12	1,4257608868	14,1920295615	0,0704620855	0,7013798802	9,9540039936	0,1004620855
13	1,4685337135	15,6177904484	0,0640295440	0,6809513400	10,6349553336	0,0940295440
14	1,5125897249	17,0863241618	0,0585263390	0,6611178058	11,2960731394	0,0885263390
15	1,5579674166	18,5989138867	0,0537665805	0,6418619474	11,9379350868	0,0837665805
16	1,6047064391	20,1568813033	0,0496108493	0,6231669392	12,5611020260	0,0796108493
17	1,6528476323	21,7615877424	0,0459525294	0,6050164458	13,1661184718	0,0759525294
18	1,7024330612	23,4144353747	0,0427086959	0,5873946076	13,7535130795	0,0727086959
19	1,7535060531	25,1168684359	0,0398138806	0,5702860268	14,3237991063	0,0698138806
20	1,8061112347	26,8703744890	0,0372157076	0,5536757542	14,8774748605	0,0672157076
21	1,8602945717	28,6764857236	0,0348717765	0,5375492759	15,4150241364	0,0648717765
22	1,9161034089	30,5367802954	0,0327473948	0,5218925009	15,9369166372	0,0627473948
23	1,9735865111	32,4528837042	0,0308139027	0,5066917484	16,4436083857	0,0608139027
24	2,0327941065	34,4264702153	0,0290474159	0,4919337363	16,9355421220	0,0590474159
25	2,0937779297	36,4592643218	0,0274278710	0,4776055693	17,4131476913	0,0574278710
26	2,1565912675	38,5530422515	0,0259382903	0,4636947274	17,8768424187	0,0559382903
27	2,2212890056	40,7096335190	0,0245642103	0,4501890558	18,3270314745	0,0545642103
28	2,2879276757	42,9309225246	0,0232932334	0,4370767532	18,7641082277	0,0532932334
29	2,3565655060	45,2188502003	0,0221146711	0,4243463623	19,1884545900	0,0521146711
30	2,4272624712	47,5754157063	0,0210192593	0,4119867595	19,6004413495	0,0510192593

3%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	2,5000803453	50,0026781775	0,0199989288	0,3999871452	20,0004284946	0,0499989288
32	2,5750827557	52,5027585228	0,0190466183	0,3883370341	20,3887655288	0,0490466183
33	2,6523352384	55,0778412785	0,0181561219	0,3770262467	20,7657917755	0,0481561219
34	2,7319052955	57,7301765169	0,0173219633	0,3660448997	21,1318366752	0,0473219633
35	2,8138624544	60,4620818124	0,0165392916	0,3553833978	21,4872200731	0,0465392916
36	2,8982783280	63,2759442668	0,0158037942	0,3450324251	21,8322524981	0,0458037942
37	2,9852266778	66,1742225948	0,0151116244	0,3349829369	22,1672354351	0,0451116244
38	3,0747834782	69,1594492726	0,0144593401	0,3252261524	22,4924615874	0,0444593401
39	3,1670269825	72,2342327508	0,0138438516	0,3157535460	22,8082151334	0,0438438516
40	3,2620377920	75,4012597333	0,0132623779	0,3065568408	23,1147719742	0,0432623779
41	3,3598989258	78,6632975253	0,0127124089	0,2976280008	23,4123999750	0,0427124089
42	3,4606958935	82,0231964511	0,0121916731	0,2889592240	23,7013591990	0,0421916731
43	3,5645167703	85,4838923446	0,0116981103	0,2805429360	23,9819021349	0,0416981103
44	3,6714522734	89,0484091149	0,0112298469	0,2723717825	24,2542739174	0,0412298469
45	3,7815958417	92,7198613884	0,0107851757	0,2644386238	24,5187125412	0,0407851757
46	3,8950437169	96,5014572300	0,0103625378	0,2567365279	24,7754490691	0,0403625378
47	4,0118950284	100,3965009469	0,0099605065	0,2492587650	25,0247078341	0,0399605065
48	4,1322518793	104,4083959753	0,0095777738	0,2419988009	25,2667066350	0,0395777738
49	4,2562194356	108,5406478546	0,0092131383	0,2349502922	25,5016569272	0,0392131383
50	4,3839060187	112,7968672902	0,0088654944	0,2281070798	25,7297640070	0,0388654944
51	4,5154231993	117,1807733089	0,0085338232	0,2214631843	25,9512271913	0,0385338232
52	4,6508858952	121,6961965082	0,0082171837	0,2150128003	26,1662399915	0,0382171837
53	4,7904124721	126,3470824035	0,0079147059	0,2087502915	26,3749902830	0,0379147059
54	4,9341248463	131,1374948756	0,0076255841	0,2026701859	26,5776604690	0,0376255841
55	5,0821485917	136,0716197218	0,0073490710	0,1967671708	26,7744276398	0,0373490710
56	5,2346130494	141,1537683135	0,0070844726	0,1910360882	26,9654637279	0,0370844726
57	5,3916514409	146,3883813629	0,0068311432	0,1854719303	27,1509356582	0,0368311432
58	5,5534009841	151,7800328038	0,0065884819	0,1800698352	27,3310054934	0,0365884819
59	5,7200030136	157,3334337879	0,0063559281	0,1748250827	27,5058305761	0,0363559281
60	5,8916031040	163,0534368015	0,0061329587	0,1697330900	27,6755636661	0,0361329587

3%

ν	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,0400000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9615384615	0,9615384615	1,0400000000
2	1,0816000000	2,0400000000	0,4901960784	0,9245562130	1,8860946746	0,5301960784
3	1,1248640000	3,1216000000	0,3203485392	0,8889963587	2,7750910332	0,3603485392
4	1,1698585600	4,2464640000	0,2354900454	0,8548041910	3,6298952243	0,2754900454
5	1,2166529024	5,4163225600	0,1846271135	0,8219271068	4,4518223310	0,2246271135
6	1,2653190185	6,6329754624	0,1507619025	0,7903145257	5,2421368567	0,1907619025
7	1,3159317792	7,8982944809	0,1266096120	0,7599178132	6,0020546699	0,1666096120
8	1,3685690504	9,2142262601	0,1085278320	0,7306902050	6,7327448750	0,1485278320
9	1,4233118124	10,5827953105	0,0944929927	0,7025867356	7,4353316105	0,1344929927
10	1,4802442849	12,0061071230	0,0832909443	0,6755641688	8,1108957794	0,1232909443
11	1,5394540563	13,4863514079	0,0741490393	0,6495809316	8,7604767109	0,1141490393
12	1,6010322186	15,0258054642	0,0665521727	0,6245970496	9,3850737605	0,1065521727
13	1,6650735073	16,6268376828	0,0601437278	0,6005740861	9,9856478466	0,1001437278
14	1,7316764476	18,2919111901	0,0546689731	0,5774750828	10,5631229295	0,0946689731
15	1,8009435055	20,0235876377	0,0499411004	0,5552645027	11,1183874322	0,0899411004
16	1,8729812457	21,8245311432	0,0458199992	0,5339081757	11,6522956079	0,0858199992
17	1,9479004956	23,6975123889	0,0421985221	0,5133732459	12,1656688537	0,0821985221
18	2,0258165154	25,6454128845	0,0389933281	0,4936281210	12,6592969747	0,0789933281
19	2,1068491760	27,6712293998	0,0361386184	0,4746424240	13,1339393988	0,0761386184
20	2,1911231430	29,7780785758	0,0335817503	0,4563869462	13,5903263450	0,0735817503
21	2,2787680688	31,9692017189	0,0312801054	0,4388336021	14,0291599471	0,0712801054
22	2,3699187915	34,2479697876	0,0291988111	0,4219553867	14,4511153337	0,0691988111
23	2,4647155432	36,6178885791	0,0273090568	0,4057263333	14,8568416671	0,0673090568
24	2,5633041649	39,0826041223	0,0255868313	0,3901214743	15,2469631414	0,0655868313
25	2,6658363315	41,6459082872	0,0240119628	0,3751168023	15,6220799437	0,0640119628
26	2,7724697847	44,3117446187	0,0225673805	0,3606892329	15,9827691766	0,0625673805
27	2,8833685761	47,0842144034	0,0212385406	0,3468165701	16,3295857467	0,0612385406
28	2,9987033192	49,9675829796	0,0200129752	0,3334774713	16,6630632180	0,0600129752
29	3,1186514519	52,9662862987	0,0188799342	0,3206514147	16,9837146327	0,0588799342
30	3,2433975100	56,0849377507	0,0178300991	0,3083186680	17,2920333007	0,0578300991

4%

ν	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
31	3,3731334104	59,3283352607	0,0168553524	0,2964602577	17,5884935583	0,0568553524
32	3,5080587468	62,7014686711	0,0159485897	0,2850579401	17,8735514984	0,0559485897
33	3,6483810967	66,2095274180	0,0151035665	0,2740941731	18,1476456715	0,0551035665
34	3,7943163406	69,8579085147	0,0143147715	0,2635520896	18,4111977611	0,0543147715
35	3,9460889942	73,6522248553	0,0135773224	0,2534154707	18,6646132318	0,0535773224
36	4,1039325540	77,5983138495	0,0128868780	0,2436687219	18,9082819537	0,0528868780
37	4,2680898561	81,7022464035	0,0122395655	0,2342968479	19,1425788016	0,0522395655
38	4,4388134504	85,9703362596	0,0116319191	0,2252854307	19,3678642323	0,0516319191
39	4,6163659884	90,4091497100	0,0110608274	0,2166206064	19,5844848388	0,0510608274
40	4,8010206279	95,0255156984	0,0105234893	0,2082890447	19,7927738834	0,0505234893
41	4,9930614531	99,8265363264	0,0100173765	0,2002779276	19,9930518110	0,0500173765
42	5,1927839112	104,8195977794	0,0095402007	0,1925749303	20,1856267413	0,0495402007
43	5,4004952676	110,0123816906	0,0090898859	0,1851682023	20,3707949436	0,0490898859
44	5,6165150783	115,4128769582	0,0086645444	0,1780463483	20,5488412919	0,0486645444
45	5,8411756815	121,0293920365	0,0082624558	0,1711984118	20,7200397038	0,0482624558
46	6,0748227087	126,8705677180	0,0078820488	0,1646138575	20,8846535613	0,0478820488
47	6,3178156171	132,9453904267	0,0075218855	0,1582825553	21,0429361166	0,0475218855
48	6,5705282418	139,2632060438	0,0071806476	0,1521947647	21,1951308814	0,0471806476
49	6,8333493714	145,8337342855	0,0068571240	0,1463411199	21,3414720013	0,0468571240
50	7,1066833463	152,6670836570	0,0065502004	0,1407126153	21,4821846167	0,0465502004
51	7,3909506801	159,7737670032	0,0062588497	0,1353005917	21,6174852083	0,0462588497
52	7,6865887073	167,1647176834	0,0059821236	0,1300967228	21,7475819311	0,0459821236
53	7,9940522556	174,8513063907	0,0057191451	0,1250930027	21,8726749337	0,0457191451
54	8,3138143459	182,8453586463	0,0054691025	0,1202817333	21,9929566671	0,0454691025
55	8,6463669197	191,1591729922	0,0052312426	0,1156555128	22,1086121799	0,0452312426
56	8,9922215965	199,8055399119	0,0050048662	0,1112072239	22,2198194037	0,0450048662
57	9,3519104603	208,7977615083	0,0047893234	0,1069300229	22,3267494267	0,0447893234
58	9,7259868787	218,1496719687	0,0045840087	0,1028173297	22,4295667564	0,0445840087
59	10,1150263539	227,8756588474	0,0043883581	0,0988628171	22,5284295735	0,0443883581
60	10,5196274081	237,9906852013	0,0042018451	0,0950604010	22,6234899745	0,0442018451

4%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,0500000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9523809524	0,9523809524	1,0500000000
2	1,1025000000	2,0500000000	0,4878048780	0,9070294785	1,8594104308	0,5378048780
3	1,1576250000	3,1525000000	0,3172085646	0,8638375985	2,7232480294	0,3672085646
4	1,2155062500	4,3101250000	0,2320118326	0,8227024748	3,5459505042	0,2820118326
5	1,2762815625	5,5256312500	0,1809747981	0,7835261665	4,3294766706	0,2309747981
6	1,3400956406	6,8019128125	0,1470174681	0,7462153966	5,0756920673	0,1970174681
7	1,4071004227	8,1420084531	0,1228198184	0,7106813301	5,7863733974	0,1728198184
8	1,4774554438	9,5491088758	0,1047218136	0,6768393620	6,4632127594	0,1547218136
9	1,5513282160	11,0265643196	0,0906900800	0,6446089162	7,1078216756	0,1406900800
10	1,6288946268	12,5778925355	0,0795045750	0,6139132535	7,7217349292	0,1295045750
11	1,7103393581	14,2067871623	0,0703888915	0,5846792891	8,3064142183	0,1203888915
12	1,7958563260	15,9171265204	0,0628254100	0,5568374182	8,8632516364	0,1128254100
13	1,8856491423	17,7129828465	0,0564557652	0,5303213506	9,3935729871	0,1064557652
14	1,9799315994	19,5986319888	0,0510239695	0,5050679530	9,8986409401	0,1010239695
15	2,0789281794	21,5785635882	0,0463422876	0,4810170981	10,3796580382	0,0963422876
16	2,1828745884	23,6574917676	0,0422699080	0,4581115220	10,8377695602	0,0922699080
17	2,2920183178	25,8403663560	0,0386991417	0,4362966876	11,2740662478	0,0886991417
18	2,4066192337	28,1323846738	0,0355462223	0,4155206549	11,6895869027	0,0855462223
19	2,5269501954	30,5390039075	0,0327450104	0,3957339570	12,0853208597	0,0827450104
20	2,6532977051	33,0659541029	0,0302425872	0,3768894829	12,4622103425	0,0802425872
21	2,7859625904	35,7192518080	0,0279961071	0,3589423646	12,8211527072	0,0779961071
22	2,9252607199	38,5052143984	0,0259705086	0,3418498711	13,1630025783	0,0759705086
23	3,0715237559	41,4304751184	0,0241368219	0,3255713058	13,4885738841	0,0741368219
24	3,2250999437	44,5019988743	0,0224709008	0,3100679103	13,7986417943	0,0724709008
25	3,3863549409	47,7270988180	0,0209524573	0,2953027717	14,0939445660	0,0709524573
26	3,5556726879	51,1134537589	0,0195643207	0,2812407350	14,3751853010	0,0695643207
27	3,7334563223	54,6691264468	0,0182918599	0,2678483190	14,6430336200	0,0682918599
28	3,9201291385	58,4025827692	0,0171225304	0,2550936371	14,8981272571	0,0671225304
29	4,1161355954	62,3227119076	0,0160455149	0,2429463211	15,1410735782	0,0660455149
30	4,3219423752	66,4388475030	0,0150514351	0,2313774487	15,3724510269	0,0650514351

5%

ν	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
31	4,5380394939	70,7607898782	0,0141321204	0,2203594749	15,5928105018	0,0641321204
32	4,7649414686	75,2988293721	0,0132804189	0,2098661666	15,8026766684	0,0632804189
33	5,0031885420	80,0637708407	0,0124900437	0,1998725396	16,0025492080	0,0624900437
34	5,2533479691	85,0669593827	0,0117554454	0,1903547996	16,1929040076	0,0617554454
35	5,5160153676	90,3203073518	0,0110717072	0,1812902854	16,3741942929	0,0610717072
36	5,7918161360	95,8363227194	0,0104344571	0,1726574146	16,5468517076	0,0604344571
37	6,0814069428	101,6281388554	0,0098397945	0,1644356330	16,7112873405	0,0598397945
38	6,3854772899	107,7095457982	0,0092842282	0,1566053647	16,8678927053	0,0592842282
39	6,7047511544	114,0950230881	0,0087646242	0,1491479664	17,0170406717	0,0587646242
40	7,0399887121	120,7997742425	0,0082781612	0,1420456823	17,1590863540	0,0582781612
41	7,3919881477	127,8397629546	0,0078222924	0,1352816022	17,2943679562	0,0578222924
42	7,7615875551	135,2317511023	0,0073947131	0,1288396211	17,4232075773	0,0573947131
43	8,1496669329	142,9933386575	0,0069933328	0,1227044011	17,5459119784	0,0569933328
44	8,5571502795	151,1430055903	0,0066162506	0,1168613344	17,6627733128	0,0566162506
45	8,9850077935	159,7001558699	0,0062617347	0,1112965089	17,7740698217	0,0562617347
46	9,4342581832	168,6851636633	0,0059282036	0,1059966752	17,8800664968	0,0559282036
47	9,9059710923	178,1194218465	0,0056142109	0,1009492144	17,9810157113	0,0556142109
48	10,4012696469	188,0253929388	0,0053184306	0,0961421090	18,0771578203	0,0553184306
49	10,9213331293	198,4266625858	0,0050396453	0,0915639133	18,1687217336	0,0550396453
50	11,4673997858	209,3479957151	0,0047767355	0,0872037270	18,2559254606	0,0547767355
51	12,0407697750	220,8153955008	0,0045286697	0,0830511685	18,3389766291	0,0545286697
52	12,6428082638	232,8561652759	0,0042944966	0,0790963510	18,4180729801	0,0542944966
53	13,2749486770	245,4989735397	0,0040733368	0,0753298581	18,4934028382	0,0540733368
54	13,9386961108	258,7739222166	0,0038643770	0,0717427220	18,5651455602	0,0538643770
55	14,6356309164	272,7126183275	0,0036668637	0,0683264019	18,6334719621	0,0536668637
56	15,3674124622	287,3482492439	0,0034800978	0,0650727637	18,6985447258	0,0534800978
57	16,1357830853	302,7156617060	0,0033034300	0,0619740607	18,7605187865	0,0533034300
58	16,9425722396	318,8514447913	0,0031362568	0,0590229149	18,8195417014	0,0531362568
59	17,7897008515	335,7940170309	0,0029780161	0,0562122999	18,8757540013	0,0529780161
60	18,6791858941	353,5837178825	0,0028281845	0,0535355237	18,9292895251	0,0528281845

5%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,0600000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9433962264	0,9433962264	1,0600000000
2	1,1236000000	2,0600000000	0,4854368932	0,8899964400	1,8333926664	0,5454368932
3	1,1910160000	3,1836000000	0,3141098128	0,8396192830	2,6730119495	0,3741098128
4	1,2624769600	4,3746160000	0,2285914924	0,7920936632	3,4651056127	0,2885914924
5	1,3382255776	5,6370929600	0,1773964004	0,7472581729	4,2123637856	0,2373964004
6	1,4185191123	6,9753185376	0,1433626285	0,7049605404	4,9173243260	0,2033626285
7	1,5036302590	8,3938376499	0,1191350181	0,6650571136	5,5823814396	0,1791350181
8	1,5938480745	9,8974679088	0,1010359426	0,6274123713	6,2097938110	0,1610359426
9	1,6894789590	11,4913159834	0,0870222350	0,5918984635	6,8016922745	0,1470222350
10	1,7908476965	13,1807949424	0,0758679582	0,5583947769	7,3600870514	0,1358679582
11	1,8982985583	14,9716426389	0,0667929381	0,5267875254	7,8868745768	0,1267929381
12	2,0121964718	16,8699411973	0,0592770294	0,4969693636	8,3838439404	0,1192770294
13	2,1329282601	18,8821376691	0,0529601053	0,4688390222	8,8526829626	0,1129601053
14	2,2609039558	21,0150659292	0,0475849090	0,4423009644	9,2949839270	0,1075849090
15	2,3965581931	23,2759698850	0,0429627640	0,4172650607	9,7122489877	0,1029627640
16	2,5403516847	25,6725280781	0,0389521436	0,3936462837	10,1058952715	0,0989521436
17	2,6927727858	28,2128797628	0,0354448042	0,3713644186	10,4772596901	0,0954448042
18	2,8543391529	30,9056525485	0,0323565406	0,3503437911	10,8276034812	0,0923565406
19	3,0255995021	33,7599917015	0,0296208604	0,3305130105	11,1581164917	0,0896208604
20	3,2071354722	36,7855912035	0,0271845570	0,3118047269	11,4699212186	0,0871845570
21	3,3995636005	39,9927266758	0,0250045467	0,2941554027	11,7640766213	0,0850045467
22	3,6035374166	43,3922902763	0,0230455685	0,2775050969	12,0415817182	0,0830455685
23	3,8197496616	46,9958276929	0,0212784847	0,2617972612	12,3033789794	0,0812784847
24	4,0489346413	50,8155773545	0,0196790050	0,2469785483	12,5503575278	0,0796790050
25	4,2918707197	54,8645119957	0,0182267182	0,2329986305	12,7833561583	0,0782267182
26	4,5493829629	59,1563827155	0,0169043467	0,2198100288	13,0031661870	0,0769043467
27	4,8223459407	63,7057656784	0,0156971663	0,2073679517	13,2105341387	0,0756971663
28	5,1116866971	68,5281116191	0,0145925515	0,1956301431	13,4061642818	0,0745925515
29	5,4183878990	73,6397983162	0,0135796135	0,1845567388	13,5907210206	0,0735796135
30	5,7434911729	79,0581862152	0,0126489115	0,1741101309	13,7648311515	0,0726489115

6%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	6,0881006433	84,8016773881	0,0117922196	0,1642548405	13,9290859920	0,0717922196
32	6,4533866819	90,8897780314	0,0110023374	0,1549573967	14,0840433887	0,0710023374
33	6,8405898828	97,3431647133	0,0102729350	0,1461862233	14,2302296119	0,0702729350
34	7,2510252758	104,1837545961	0,0095984254	0,1379115314	14,3681411433	0,0695984254
35	7,6860867923	111,4347798719	0,0089738590	0,1301052183	14,4982463616	0,0689738590
36	8,1472519999	119,1208666642	0,0083948348	0,1227407720	14,6209871336	0,0683948348
37	8,6360871198	127,2681186640	0,0078574274	0,1157931811	14,7367803147	0,0678574274
38	9,1542523470	135,9042057839	0,0073581240	0,1092388501	14,8460191648	0,0673581240
39	9,7035074879	145,0584581309	0,0068937724	0,1030555190	14,9490746838	0,0668937724
40	10,2857179371	154,7619656188	0,0064615359	0,0972221877	15,0462968715	0,0664615359
41	10,9028610134	165,0476835559	0,0060588551	0,0917190450	15,1380159165	0,0660588551
42	11,5570326742	175,9505445692	0,0056834152	0,0865274010	15,2245433175	0,0656834152
43	12,2504546346	187,5075772434	0,0053331178	0,0816296235	15,3061729410	0,0653331178
44	12,9854819127	199,7580318780	0,0050060565	0,0770090788	15,3831820198	0,0650060565
45	13,7646108274	212,7435137907	0,0047004958	0,0726500743	15,4558320942	0,0647004958
46	14,5904874771	226,5081246181	0,0044148527	0,0685378060	15,5243699002	0,0644148527
47	15,4659167257	241,0986120952	0,0041476805	0,0646583075	15,5890282077	0,0641476805
48	16,3938717293	256,5645288209	0,0038976549	0,0609984033	15,6500266110	0,0638976549
49	17,3775040330	272,9584005502	0,0036635619	0,0575456635	15,7075722746	0,0636635619
50	18,4201542750	290,3359045832	0,0034442864	0,0542883618	15,7618606364	0,0634442864
51	19,5253635315	308,7560588582	0,0032388028	0,0512154357	15,8130760721	0,0632388028
52	20,6968853434	328,2814223897	0,0030461669	0,0483164488	15,8613925208	0,0630461669
53	21,9386984640	348,9783077331	0,0028655076	0,0455815554	15,9069740762	0,0628655076
54	23,2550203718	370,9170061970	0,0026960209	0,0430014674	15,9499755436	0,0626960209
55	24,6503215941	394,1720265689	0,0025369634	0,0405674221	15,9905429657	0,0625369634
56	26,1293408898	418,8223481630	0,0023876472	0,0382711529	16,0288141186	0,0623876472
57	27,6971013432	444,9516890528	0,0022474350	0,0361048612	16,0649189798	0,0622474350
58	29,3589274238	472,6487903959	0,0021157359	0,0340611898	16,0989801696	0,0621157359
59	31,1204630692	502,0077178197	0,0019920012	0,0321331979	16,1311133676	0,0619920012
60	32,9876908533	533,1281808889	0,0018757215	0,0303143377	16,1614277052	0,0618757215

6%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,0700000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9345794393	0,9345794393	1,0700000000
2	1,1449000000	2,0700000000	0,4830917874	0,8734387283	1,8080181675	0,5530917874
3	1,2250430000	3,2149000000	0,3110516657	0,8162978769	2,6243160444	0,3810516657
4	1,3107960100	4,4399430000	0,2252281167	0,7628952120	3,3872112565	0,2952281167
5	1,4025517307	5,7507390100	0,1738906944	0,7129861795	4,1001974359	0,2438906944
6	1,5007303518	7,1532907407	0,1397957998	0,6663422238	4,7665396598	0,2097957998
7	1,6057814765	8,6540210925	0,1155532196	0,6227497419	5,3892894016	0,1855532196
8	1,7181861798	10,2598025690	0,0974677625	0,5820091046	5,9712985062	0,1674677625
9	1,8384592124	11,9779887489	0,0834864701	0,5439337426	6,5152322488	0,1534864701
10	1,9671513573	13,8164479613	0,0723775027	0,5083492921	7,0235815409	0,1423775027
11	2,1048519523	15,7835993186	0,0633569048	0,4750927964	7,4986743373	0,1333569048
12	2,2521915890	17,8884512709	0,0559019887	0,4440119592	7,9426862966	0,1259019887
13	2,4098450002	20,1406428598	0,0496508481	0,4149644479	8,3576507444	0,1196508481
14	2,5785341502	22,5504878600	0,0443449386	0,3878172410	8,7454679855	0,1143449386
15	2,7590315407	25,1290220102	0,0397946247	0,3624460196	9,1079140051	0,1097946247
16	2,9521637486	27,8880535509	0,0358576477	0,3387345978	9,4466486029	0,1058576477
17	3,1588152110	30,8402172995	0,0324251931	0,3165743905	9,7632229934	0,1024251931
18	3,3799322757	33,9990325105	0,0294126017	0,2958639163	10,0590869097	0,0994126017
19	3,6165275350	37,3789647862	0,0267530148	0,2765083330	10,3355952427	0,0967530148
20	3,8696844625	40,9954923212	0,0243929257	0,2584190028	10,5940142455	0,0943929257
21	4,1405623749	44,8651767837	0,0222890017	0,2415130867	10,8355273323	0,0922890017
22	4,4304017411	49,0057391586	0,0204057732	0,2257131652	11,0612404974	0,0904057732
23	4,7405298630	53,4361408997	0,0187139263	0,2109468833	11,2721873808	0,0887139263
24	5,0723669534	58,1766707627	0,0171890207	0,1971466199	11,4693340007	0,0871890207
25	5,4274326401	63,2490377160	0,0158105172	0,1842491775	11,6535831783	0,0858105172
26	5,8073529249	68,6764703562	0,0145610279	0,1721954930	11,8257786713	0,0845610279
27	6,2138676297	74,4838232811	0,0134257340	0,1609303673	11,9867090386	0,0834257340
28	6,6488383638	80,6976909108	0,0123919283	0,1504022124	12,1371112510	0,0823919283
29	7,1142570492	87,3465292745	0,0114486518	0,1405628154	12,2776740664	0,0814486518
30	7,6122550427	94,4607863237	0,0105864035	0,1313671172	12,4090411835	0,0805864035

7%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	8,1451128956	102,0730413664	0,0097969061	0,1227730067	12,5318141902	0,0797969061
32	8,7152707983	110,2181542621	0,0090729155	0,1147411277	12,6465553179	0,0790729155
33	9,3253397542	118,9334250604	0,0084080653	0,1072346988	12,7537900168	0,0784080653
34	9,9781135370	128,2587648146	0,0077967381	0,1002193447	12,8540093615	0,0777967381
35	10,6765814846	138,2368783516	0,0072339596	0,0936629390	12,9476723004	0,0772339596
36	11,4239421885	148,9134598363	0,0067153097	0,0875354570	13,0352077574	0,0767153097
37	12,2236181417	160,3374020248	0,0062368480	0,0818088383	13,1170165957	0,0762368480
38	13,0792714117	172,5610201665	0,0057950515	0,0764568582	13,1934734539	0,0757950515
39	13,9948204105	185,6402915782	0,0053867616	0,0714550077	13,2649284616	0,0753867616
40	14,9744578392	199,6351119887	0,0050091389	0,0667803810	13,3317088426	0,0750091389
41	16,0226698880	214,6095698279	0,0046596245	0,0624115710	13,3941204137	0,0746596245
42	17,1442567801	230,6322397158	0,0043359072	0,0583285711	13,4524489847	0,0743359072
43	18,3443547547	247,7764964959	0,0040358953	0,0545126832	13,5069616680	0,0740358953
44	19,6284595875	266,1208512507	0,0037576913	0,0509464329	13,5579081009	0,0737576913
45	21,0024517587	285,7493108382	0,0034995710	0,0476134887	13,6055215896	0,0734995710
46	22,4726233818	306,7517625969	0,0032599650	0,0444985876	13,6500201772	0,0732599650
47	24,0457070185	329,2243859787	0,0030374421	0,0415874650	13,6916076423	0,0730374421
48	25,7289065098	353,2700929972	0,0028306953	0,0388667898	13,7304744320	0,0728306953
49	27,5299299655	378,9989995070	0,0026385294	0,0363241026	13,7667985346	0,0726385294
50	29,4570250631	406,5289294724	0,0024598495	0,0339477594	13,8007462940	0,0724598495
51	31,5190168175	435,9859545355	0,0022936519	0,0317268780	13,8324731720	0,0722936519
52	33,7253479947	467,5049713530	0,0021390147	0,0296512878	13,8621244598	0,0721390147
53	36,0861223543	501,2303193477	0,0019950908	0,0277114839	13,8898359437	0,0719950908
54	38,6121509191	537,3164417021	0,0018611007	0,0258985831	13,9157345269	0,0718611007
55	41,3150014835	575,9285926212	0,0017363264	0,0242042833	13,9399388102	0,0717363264
56	44,2070515873	617,2435941047	0,0016201059	0,0226208255	13,9625596357	0,0716201059
57	47,3015451984	661,4506456920	0,0015118286	0,0211409584	13,9837005941	0,0715118286
58	50,6126533623	708,7521908905	0,0014109304	0,0197579051	14,0034584991	0,0714109304
59	54,1555390977	759,3648442528	0,0013168900	0,0184653318	14,0219238310	0,0713168900
60	57,9464268345	813,5203833505	0,0012292255	0,0172573195	14,0391811504	0,0712292255

7%

v	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
1	1,0800000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9259259259	0,9259259259	1,0800000000
2	1,1664000000	2,0800000000	0,4807692308	0,8573388203	1,7832647462	0,5607692308
3	1,2597120000	3,2464000000	0,3080335140	0,7938322410	2,5770969872	0,3880335140
4	1,3604889600	4,5061120000	0,2219208045	0,7350298528	3,3121268400	0,3019208045
5	1,4693280768	5,8666009600	0,1704564546	0,6805831970	3,9927100371	0,2504564546
6	1,5868743229	7,3359290368	0,1363153862	0,6301696269	4,6228796640	0,2163153862
7	1,7138242688	8,9228033597	0,1120724014	0,5834903953	5,2063700592	0,1920724014
8	1,8509302103	10,6366276285	0,0940147606	0,5402688845	5,7466389437	0,1740147606
9	1,9990046271	12,4875578388	0,0800797092	0,5002489671	6,2468879109	0,1600797092
10	2,1589249973	14,4865624659	0,0690294887	0,4631934881	6,7100813989	0,1490294887
11	2,3316389971	16,6454874632	0,0600763421	0,4288828593	7,1389642583	0,1400763421
12	2,5181701168	18,9771264602	0,0526950169	0,3971137586	7,5360780169	0,1326950169
13	2,7196237262	21,4952965771	0,0465218052	0,3676979247	7,9037759416	0,1265218052
14	2,9371936243	24,2149203032	0,0412968528	0,3404610414	8,2442369830	0,1212968528
15	3,1721691142	27,1521139275	0,0368295449	0,3152417050	8,5594786879	0,1168295449
16	3,4259426433	30,3242830417	0,0329768720	0,2918904676	8,8513691555	0,1129768720
17	3,7000180548	33,7502256850	0,0296294315	0,2702689514	9,1216381069	0,1096294315
18	3,9960194992	37,4502437398	0,0267020959	0,2502490291	9,3718871360	0,1067020959
19	4,3157010591	41,4462632390	0,0241276275	0,2317120640	9,6035992000	0,1041276275
20	4,6609571438	45,7619642981	0,0218522088	0,2145482074	9,8181474074	0,1018522088
21	5,0338337154	50,4229214420	0,0198322503	0,1986557476	10,0168031550	0,0998322503
22	5,4365404126	55,4567551573	0,0180320684	0,1839405070	10,2007436621	0,0980320684
23	5,8714636456	60,8932955699	0,0164221692	0,1703152843	10,3710589464	0,0964221692
24	6,3411807372	66,7647592155	0,0149779616	0,1576993373	10,5287582837	0,0949779616
25	6,8484751962	73,1059399527	0,0136787791	0,1460179049	10,6747761886	0,0936787791
26	7,3963532119	79,9544151490	0,0125071267	0,1352017638	10,8099779524	0,0925071267
27	7,9880614689	87,3507683609	0,0114480962	0,1251868183	10,9351647707	0,0914480962
28	8,6271063864	95,3388298297	0,0104889057	0,1159137207	11,0510784914	0,0904889057
29	9,3172748973	103,9659362161	0,0096185350	0,1073275192	11,1584060106	0,0896185350
30	10,0626568891	113,2832111134	0,0088274334	0,0993773325	11,2577833431	0,0888274334

8%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	10,8676694402	123,3458680025	0,0081072841	0,0920160487	11,3497993918	0,0881072841
32	11,7370829954	134,2135374427	0,0074508132	0,0852000451	11,4349994368	0,0874508132
33	12,6760496350	145,9506204381	0,0068516324	0,0788889306	11,5138883674	0,0868516324
34	13,6901336059	158,6266700732	0,0063041101	0,0730453061	11,5869336736	0,0863041101
35	14,7853442943	172,3168036790	0,0058032646	0,0676345427	11,6545682163	0,0858032646
36	15,9681718379	187,1021479733	0,0053446741	0,0626245766	11,7171927928	0,0853446741
37	17,2456255849	203,0703198112	0,0049244025	0,0579857190	11,7751785119	0,0849244025
38	18,6252756317	220,3159453961	0,0045389361	0,0536904806	11,8288689925	0,0845389361
39	20,1152976822	238,9412210278	0,0041851297	0,0497134080	11,8785824004	0,0841851297
40	21,7245214968	259,0565187100	0,0038601615	0,0460309333	11,9246133337	0,0838601615
41	23,4624832165	280,7810402068	0,0035614940	0,0426212345	11,9672345683	0,0835614940
42	25,3394818739	304,2435234233	0,0032868407	0,0394641061	12,0066986743	0,0832868407
43	27,3666404238	329,5830052972	0,0030341370	0,0365408389	12,0432395133	0,0830341370
44	29,5559716577	356,9496457210	0,0028015156	0,0338341101	12,0770736234	0,0828015156
45	31,9204493903	386,5056173787	0,0025872845	0,0313278797	12,1084015032	0,0825872845
46	34,4740853415	418,4260667690	0,0023899085	0,0290072961	12,1374087992	0,0823899085
47	37,2320121688	452,9001521105	0,0022079922	0,0268586075	12,1642674067	0,0822079922
48	40,2105731423	490,1321642793	0,0020402660	0,0248690810	12,1891364877	0,0820402660
49	43,4274189937	530,3427374217	0,0018855731	0,0230269268	12,2121634145	0,0818855731
50	46,9016125132	573,7701564154	0,0017428582	0,0213212286	12,2334846431	0,0817428582
51	50,6537415143	620,6717689286	0,0016111575	0,0197418783	12,2532265214	0,0816111575
52	54,7060408354	671,3255104429	0,0014895903	0,0182795169	12,2715060383	0,0814895903
53	59,0825241023	726,0315512783	0,0013773506	0,0169254786	12,2884315169	0,0813773506
54	63,8091260304	785,1140753806	0,0012737003	0,0156717395	12,3041032564	0,0812737003
55	68,9138561129	848,9232014111	0,0011779629	0,0145108699	12,3186141263	0,0811779629
56	74,4269646019	917,8370575239	0,0010895180	0,0134359906	12,3320501170	0,0810895180
57	80,3811217701	992,2640221259	0,0010077963	0,0124407321	12,3444908490	0,0810077963
58	86,8116115117	1072,6451438959	0,0009322748	0,0115191964	12,3560100454	0,0809322748
59	93,7565404326	1159,4567554076	0,0008624729	0,0106659226	12,3666759680	0,0808624729

8%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,0900000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9174311927	0,9174311927	1,0900000000
2	1,1881000000	2,0900000000	0,4784688995	0,8416799933	1,7591111859	0,5684688995
3	1,2950290000	3,2781000000	0,3050547573	0,7721834801	2,5312946660	0,3950547573
4	1,4115816100	4,5731290000	0,2186686621	0,7084252111	3,2397198771	0,3086686621
5	1,5386239549	5,9847106100	0,1670924570	0,6499313863	3,8896512634	0,2570924570
6	1,6771001108	7,5233345649	0,1329197833	0,5962673269	4,4859185902	0,2229197833
7	1,8280391208	9,2004346757	0,1086905168	0,5470342448	5,0329528351	0,1986905168
8	1,9925626417	11,0284737966	0,0906743778	0,5018662797	5,5348191147	0,1806743778
9	2,1718932794	13,0210364382	0,0767988021	0,4604277795	5,9952468943	0,1667988021
10	2,3673636746	15,1929297177	0,0658200899	0,4224108069	6,4176577012	0,1558200899
11	2,5804264053	17,5602933923	0,0569466567	0,3875328504	6,8051905515	0,1469466567
12	2,8126647818	20,1407197976	0,0496506585	0,3555347251	7,1607252766	0,1396506585
13	3,0658046121	22,9533845794	0,0435665597	0,3261786469	7,4869039235	0,1335665597
14	3,3417270272	26,0191891915	0,0384331730	0,2992464650	7,7861503885	0,1284331730
15	3,6424824597	29,3609162188	0,0340588827	0,2745380413	8,0606884299	0,1240588827
16	3,9703058811	33,0033986784	0,0302999097	0,2518697627	8,3125581925	0,1202999097
17	4,3276334104	36,9737045595	0,0270462485	0,2310731768	8,5436313693	0,1170462485
18	4,7171204173	41,3013379699	0,0242122907	0,2119937402	8,7556251094	0,1142122907
19	5,1416612548	46,0184583871	0,0217304107	0,1944896699	8,9501147793	0,1117304107
20	5,6044107678	51,1601196420	0,0195464750	0,1784308898	9,1285456691	0,1095464750
21	6,1088077369	56,7645304098	0,0176166348	0,1636980640	9,2922437331	0,1076166348
22	6,6586004332	62,8733381466	0,0159049930	0,1501817101	9,4424254432	0,1059049930
23	7,2578744722	69,5319385798	0,0143818800	0,1377813854	9,5802068286	0,1043818800
24	7,9110831747	76,7898130520	0,0130225607	0,1264049408	9,7066117694	0,1030225607
25	8,6230806604	84,7008962267	0,0118062505	0,1159678356	9,8225796049	0,1018062505
26	9,3991579198	93,3239768871	0,0107153599	0,1063925097	9,9289721146	0,1007153599
27	10,2450821326	102,7231348069	0,0097349054	0,0976078070	10,0265799217	0,0997349054
28	11,1671395246	112,9682169396	0,0088520473	0,0895484468	10,1161283685	0,0988520473
29	12,1721820818	124,1353564641	0,0080557226	0,0821545384	10,1982829069	0,0980557226
30	13,2676784691	136,3075385459	0,0073363514	0,0753711361	10,2736540430	0,0973363514

9%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	14,4617695314	149,5752170150	0,0066855995	0,0691478313	10,3428018743	0,0966855995
32	15,7633287892	164,0369865464	0,0060961861	0,0634383773	10,4062402517	0,0960961861
33	17,1820283802	179,8003153356	0,0055617255	0,0582003462	10,4644405979	0,0955617255
34	18,7284109344	196,9823437158	0,0050765971	0,0533948130	10,5178354109	0,0950765971
35	20,4139679185	215,7107546502	0,0046358375	0,0489860670	10,5668214779	0,0946358375
36	22,2512250312	236,1247225687	0,0042350500	0,0449413459	10,6117628237	0,0942350500
37	24,2538352840	258,3759475999	0,0038703293	0,0412305925	10,6529934163	0,0938703293
38	26,4366804595	282,6297828839	0,0035381975	0,0378262317	10,6908196480	0,0935381975
39	28,8159817009	309,0664633434	0,0032355500	0,0347029648	10,7255226128	0,0932355500
40	31,4094200540	337,8824450443	0,0029596092	0,0318375824	10,7573601952	0,0929596092
41	34,2362678588	369,2918650983	0,0027078853	0,0292087912	10,7865689865	0,0927078853
42	37,3175319661	403,5281329572	0,0024781420	0,0267970562	10,8133660426	0,0924781420
43	40,6761098431	440,8456649233	0,0022683675	0,0245844552	10,8379504978	0,0922683675
44	44,3369597290	481,5217747664	0,0020767493	0,0225545461	10,8605050439	0,0920767493
45	48,3272861046	525,8587344954	0,0019016514	0,0206922441	10,8811972880	0,0919016514
46	52,6767418540	574,1860206000	0,0017415959	0,0189837102	10,9001809981	0,0917415959
47	57,4176486209	626,8627624540	0,0015952455	0,0174162479	10,9175972460	0,0915952455
48	62,5852369967	684,2804110748	0,0014613892	0,0159782090	10,9335754550	0,0914613892
49	68,2179083264	746,8656480716	0,0013389289	0,0146589074	10,9482343624	0,0913389289
50	74,3575200758	815,0835563980	0,0012268681	0,0134485389	10,9616829013	0,0912268681
51	81,0496968826	889,4410764738	0,0011243016	0,0123381091	10,9740210104	0,0911243016
52	88,3441696021	970,4907733565	0,0010304065	0,0113193661	10,9853403765	0,0910304065
53	96,2951448663	1058,8349429585	0,0009444343	0,0103847396	10,9957251160	0,0909444343
54	104,9617079042	1155,1300878248	0,0008657034	0,0095272840	11,0052524000	0,0908657034
55	114,4082616156	1260,0917957290	0,0007935930	0,0087406275	11,0139930276	0,0907935930
56	124,7050051610	1374,5000573447	0,0007275373	0,0080189243	11,0220119519	0,0907275373
57	135,9284556255	1499,2050625057	0,0006670202	0,0073568113	11,0293687632	0,0906670202
58	148,1620166318	1635,1335181312	0,0006115709	0,0067493682	11,0361181314	0,0906115709
59	161,4965981287	1783,2955347630	0,0005607595	0,0061920809	11,0423102123	0,0905607595
60	176,0312919602	1944,7921328917	0,0005141938	0,0056808082	11,0479910204	0,0905141938

9%

v	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,1000000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9090909091	0,9090909091	1,1000000000
2	1,2100000000	2,1000000000	0,4761904762	0,8264462810	1,7355371901	0,5761904762
3	1,3310000000	3,3100000000	0,3021148036	0,7513148009	2,4868519910	0,4021148036
4	1,4641000000	4,6410000000	0,2154708037	0,6830134554	3,1698654463	0,3154708037
5	1,6105100000	6,1051000000	0,1637974808	0,6209213231	3,7907867694	0,2637974808
6	1,7715610000	7,7156100000	0,1296073804	0,5644739301	4,3552606995	0,2296073804
7	1,9487171000	9,4871710000	0,1054054997	0,5131581182	4,8684188177	0,2054054997
8	2,1435888100	11,4358881000	0,0874440176	0,4665073802	5,3349261979	0,1874440176
9	2,3579476910	13,5794769100	0,0736405391	0,4240976184	5,7590238163	0,1736405391
10	2,5937424601	15,9374246010	0,0627453949	0,3855432894	6,1445671057	0,1627453949
11	2,8531167061	18,5311670611	0,0539631420	0,3504938995	6,4950610052	0,1539631420
12	3,1384283767	21,3842837672	0,0467633151	0,3186308177	6,8136918229	0,1467633151
13	3,4522712144	24,5227121439	0,0407785238	0,2896643797	7,1033562026	0,1407785238
14	3,7974983358	27,9749833583	0,0357462232	0,2633312543	7,3666874569	0,1357462232
15	4,1772481694	31,7724816942	0,0314737769	0,2393920494	7,6060795063	0,1314737769
16	4,5949729864	35,9497298636	0,0278166207	0,2176291358	7,8237086421	0,1278166207
17	5,0544702850	40,5447028499	0,0246641344	0,1978446689	8,0215533110	0,1246641344
18	5,5599173135	45,5991731349	0,0219302222	0,1798587899	8,2014121009	0,1219302222
19	6,1159090448	51,1590904484	0,0195468682	0,1635079908	8,3649200917	0,1195468682
20	6,7274999493	57,2749994933	0,0174596248	0,1486436280	8,5135637198	0,1174596248
21	7,4002499443	64,0024994426	0,0156243898	0,1351305709	8,6486942907	0,1156243898
22	8,1402749387	71,4027493868	0,0140050630	0,1228459736	8,7715402643	0,1140050630
23	8,9543024326	79,5430243255	0,0125718127	0,1116781578	8,8832184221	0,1125718127
24	9,8497326758	88,4973267581	0,0112997764	0,1015255980	8,9847440201	0,1112997764
25	10,8347059434	98,3470594339	0,0101680722	0,0922959982	9,0770400182	0,1101680722
26	11,9181765377	109,1817653773	0,0091590386	0,0839054529	9,1609454711	0,1091590386
27	13,1099941915	121,0999419150	0,0082576423	0,0762776844	9,2372231556	0,1082576423
28	14,4209936107	134,2099361065	0,0074510132	0,0693433495	9,3065665051	0,1074510132
29	15,8630929717	148,6309297172	0,0067280747	0,0630394086	9,3696059137	0,1067280747
30	17,4494022689	164,4940226889	0,0060792483	0,0573085533	9,4269144670	0,1060792483

10%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	19,1943424958	181,9434249578	0,0054962140	0,0520986848	9,4790131518	0,1054962140
32	21,1137767454	201,1377674535	0,0049717167	0,0473624407	9,5263755926	0,1049717167
33	23,2251544199	222,2515441989	0,0044994063	0,0430567643	9,5694323569	0,1044994063
34	25,5476698619	245,4766986188	0,0040737064	0,0391425130	9,6085748699	0,1040737064
35	28,1024368481	271,0243684806	0,0036897051	0,0355841027	9,6441589726	0,1036897051
36	30,9126805329	299,1268053287	0,0033430638	0,0323491843	9,6765081569	0,1033430638
37	34,0039485862	330,0394858616	0,0030299405	0,0294083494	9,7059165063	0,1030299405
38	37,4043434448	364,0434344477	0,0027469250	0,0267348631	9,7326513694	0,1027469250
39	41,1447777893	401,4477778925	0,0024909840	0,0243044210	9,7569557903	0,1024909840
40	45,2592555682	442,5925556818	0,0022594144	0,0220949282	9,7790507185	0,1022594144
41	49,7851811250	487,8518112499	0,0020498028	0,0200862983	9,7991370168	0,1020498028
42	54,7636992375	537,6369923749	0,0018599911	0,0182602712	9,8173972880	0,1018599911
43	60,2400691612	592,4006916124	0,0016880466	0,0166002465	9,8339975345	0,1016880466
44	66,2640760774	652,6407607737	0,0015322365	0,0150911332	9,8490886678	0,1015322365
45	72,8904836851	718,9048368510	0,0013910047	0,0137192120	9,8628078798	0,1013910047
46	80,1795320536	791,7953205361	0,0012629527	0,0124720109	9,8752798907	0,1012629527
47	88,1974852590	871,9748525898	0,0011468221	0,0113381918	9,8866180825	0,1011468221
48	97,0172337849	960,1723378487	0,0010414797	0,0103074470	9,8969255295	0,1010414797
49	106,7189571634	1057,1895716336	0,0009459041	0,0093704064	9,9062959359	0,1009459041
50	117,3908528797	1163,9085287970	0,0008591740	0,0085185513	9,9148144872	0,1008591740
51	129,1299381677	1281,2993816767	0,0007804577	0,0077441375	9,9225586247	0,1007804577
52	142,0429319844	1410,4293198443	0,0007090040	0,0070401250	9,9295987498	0,1007090040
53	156,2472251829	1552,4722518288	0,0006441339	0,0064001137	9,9359988634	0,1006441339
54	171,8719477012	1708,7194770116	0,0005852336	0,0058182851	9,9418171486	0,1005852336
55	189,0591424713	1880,5914247128	0,0005317476	0,0052893501	9,9471064987	0,1005317476
56	207,9650567184	2069,6505671841	0,0004831734	0,0048085001	9,9519149988	0,1004831734
57	228,7615623902	2277,6156239025	0,0004390556	0,0043713637	9,9562863626	0,1004390556
58	251,6377186293	2506,3771862927	0,0003989822	0,0039739670	9,9602603296	0,1003989822
59	276,8014904922	2758,0149049220	0,0003625796	0,0036126973	9,9638730269	0,1003625796
60	304,4816395414	3034,8163954142	0,0003295092	0,0032842703	9,9671572972	0,1003295092

10%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,1100000000	1,0000000000	1,0000000000	0,9009009009	0,9009009009	1,1100000000
2	1,2321000000	2,1100000000	0,4739336493	0,8116224332	1,7125233341	0,5839336493
3	1,3676310000	3,3421000000	0,2992130696	0,7311913813	2,4437147154	0,4092130696
4	1,5180704100	4,7097310000	0,2123263515	0,6587309741	3,1024456896	0,3223263515
5	1,6850581551	6,2278014100	0,1605703095	0,5934513281	3,6958970176	0,2705703095
6	1,8704145522	7,9128595651	0,1263765636	0,5346408361	4,2305378537	0,2363765636
7	2,0761601529	9,7832741173	0,1022152695	0,4816584109	4,7121962646	0,2122152695
8	2,3045377697	11,8594342702	0,0843210542	0,4339264963	5,1461227609	0,1943210542
9	2,5580369244	14,1639720399	0,0706016644	0,3909247714	5,5370475324	0,1806016644
10	2,8394209861	16,7220089643	0,0598014271	0,3521844788	5,8892320111	0,1698014271
11	3,1517572945	19,5614299503	0,0511210071	0,3172833142	6,2065153254	0,1611210071
12	3,4984505969	22,7131872449	0,0440272864	0,2858408236	6,4923561490	0,1540272864
13	3,8832801626	26,2116378418	0,0381509925	0,2575142555	6,7498704045	0,1481509925
14	4,3104409805	30,0949180044	0,0332282015	0,2319948248	6,9818652293	0,1432282015
15	4,7845894883	34,4053589849	0,0290652395	0,2090043467	7,1908695759	0,1390652395
16	5,3108943321	39,1899484732	0,0255167470	0,1882922042	7,3791617801	0,1355167470
17	5,8950927086	44,5008428053	0,0224714845	0,1696326164	7,5487943965	0,1324714845
18	6,5435529065	50,3959355139	0,0198428701	0,1528221769	7,7016165734	0,1298428701
19	7,2633437262	56,9394884204	0,0175625041	0,1376776369	7,8392942103	0,1275625041
20	8,0623115361	64,2028321466	0,0155756369	0,1240339071	7,9633281174	0,1255756369
21	8,9491658051	72,2651436828	0,0138379300	0,1117422586	8,0750703760	0,1238379300
22	9,9335740437	81,2143094879	0,0123131011	0,1006687015	8,1757390775	0,1223131011
23	11,0262671885	91,1478835315	0,0109711818	0,0906925239	8,2664316013	0,1209711818
24	12,2391565792	102,1741507200	0,0097872113	0,0817049764	8,3481365778	0,1197872113
25	13,5854638029	114,4133072992	0,0087402421	0,0736080869	8,4217446647	0,1187402421
26	15,0798648212	127,9987711021	0,0078125750	0,0663135918	8,4880582565	0,1178125750
27	16,7386499516	143,0786359233	0,0069891636	0,0597419746	8,5478002310	0,1169891636
28	18,5799014462	159,8172858749	0,0062571454	0,0538215987	8,6016218298	0,1162571454
29	20,6236906053	178,3971873211	0,0056054695	0,0484879268	8,6501097565	0,1156054695
30	22,8922965719	199,0208779265	0,0050245985	0,0436828169	8,6937925735	0,1150245985

11%

v	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
31	25,4104491948	221,9131744984	0,0045062669	0,0393538891	8,7331464626	0,1145062669
32	28,2055986063	247,3236236932	0,0040432854	0,0354539542	8,7686004167	0,1140432854
33	31,3082144529	275,5292222995	0,0036293791	0,0319404992	8,8005409160	0,1136293791
34	34,7521180428	306,8374367524	0,0032590547	0,0287752245	8,8293161405	0,1132590547
35	38,5748510275	341,5895547952	0,0029274900	0,0259236257	8,8552397662	0,1129274900
36	42,8180846405	380,1644058226	0,0026304409	0,0233546178	8,8785943840	0,1126304409
37	47,5280739509	422,9824904631	0,0023641641	0,0210401962	8,8996345802	0,1123641641
38	52,7561620855	470,5105644141	0,0021253508	0,0189551317	8,9185897119	0,1121253508
39	58,5593399150	523,2667264996	0,0019110713	0,0170766952	8,9356664071	0,1119110713
40	65,0008673056	581,8260664146	0,0017187267	0,0153844101	8,9510508172	0,1117187267
41	72,1509627092	646,8269337202	0,0015460086	0,0138598289	8,9649106461	0,1115460086
42	80,0875686072	718,9778964294	0,0013908633	0,0124863324	8,9773969785	0,1113908633
43	88,8972011540	799,0654650366	0,0012514619	0,0112489481	8,9886459266	0,1112514619
44	98,6758932810	887,9626661906	0,0011261735	0,0101341875	8,9987801140	0,1111261735
45	109,5302415419	986,6385594716	0,0010135424	0,0091298986	9,0079100126	0,1110135424
46	121,5785681115	1096,1688010135	0,0009122683	0,0082251339	9,0161351465	0,1109122683
47	134,9522106037	1217,7473691250	0,0008211884	0,0074100305	9,0235451770	0,1108211884
48	149,7969537702	1352,6995797287	0,0007392624	0,0066757032	9,0302208802	0,1107392624
49	166,2746186849	1502,4965334989	0,0006655589	0,0060141470	9,0362350272	0,1106655589
50	184,5648267402	1668,7711521837	0,0005992433	0,0054181505	9,0416531777	0,1105992433
51	204,8669576816	1853,3359789240	0,0005395676	0,0048812166	9,0465343943	0,1105395676
52	227,4023230266	2058,2029366056	0,0004858607	0,0043974925	9,0509318868	0,1104858607
53	252,4165785595	2285,6052596322	0,0004375209	0,0039617049	9,0548935917	0,1104375209
54	280,1824022011	2538,0218381918	0,0003940076	0,0035691035	9,0584626952	0,1103940076
55	311,0024664432	2818,2042403928	0,0003548359	0,0032154086	9,0616781038	0,1103548359
56	345,2127377520	3129,2067068361	0,0003195698	0,0028967645	9,0645748683	0,1103195698
57	383,1861389047	3474,4194445880	0,0002878179	0,0026096977	9,0671845660	0,1102878179
58	425,3366141842	3857,6055834927	0,0002592282	0,0023510790	9,0695356451	0,1102592282
59	472,1236417445	4282,9421976769	0,0002334844	0,0021180892	9,0716537343	0,1102334844
60	524,0572423363	4755,0658394214	0,0002103020	0,0019081885	9,0735619228	0,1102103020

11%

v	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
1	1,1200000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8928571429	0,8928571429	1,1200000000
2	1,2544000000	2,1200000000	0,4716981132	0,7971938776	1,6900510204	0,5916981132
3	1,4049280000	3,3744000000	0,2963489806	0,7117802478	2,4018312682	0,4163489806
4	1,5735193600	4,7793280000	0,2092344363	0,6355180784	3,0373493466	0,3292344363
5	1,7623416832	6,3528473600	0,1574097319	0,5674268557	3,6047762023	0,2774097319
6	1,9738226852	8,1151890432	0,1232257184	0,5066311212	4,1114073235	0,2432257184
7	2,2106814074	10,0890117284	0,0991177359	0,4523492153	4,5637565389	0,2191177359
8	2,4759631763	12,2996931358	0,0813028414	0,4038832280	4,9676397668	0,2013028414
9	2,7730787575	14,7756563121	0,0676788888	0,3606100250	5,3282497918	0,1876788888
10	3,1058482083	17,5487350695	0,0569841642	0,3219732366	5,6502230284	0,1769841642
11	3,4785499933	20,6545832779	0,0484154043	0,2874761041	5,9376991325	0,1684154043
12	3,8959759925	24,1331332712	0,0414368076	0,2566750929	6,1943742255	0,1614368076
13	4,3634931117	28,0291092638	0,0356771951	0,2291741901	6,4235484156	0,1556771951
14	4,8871122851	32,3926023754	0,0308712461	0,2046198126	6,6281682282	0,1508712461
15	5,4735657593	37,2797146605	0,0268242396	0,1826962613	6,8108644895	0,1468242396
16	6,1303936504	42,7532804197	0,0233900180	0,1631216618	6,9739861513	0,1433900180
17	6,8660408884	48,8836740701	0,0204567275	0,1456443409	7,1196304922	0,1404567275
18	7,6899657950	55,7497149585	0,0179373114	0,1300395901	7,2496700824	0,1379373114
19	8,6127616904	63,4396807535	0,0157630049	0,1161067769	7,3657768592	0,1357630049
20	9,6462930933	72,0524424440	0,0138787800	0,1036667651	7,4694436243	0,1338787800
21	10,8038482645	81,6987355372	0,0122400915	0,0925596117	7,5620032360	0,1322400915
22	12,1003100562	92,5025838017	0,0108105088	0,0826425104	7,6446457464	0,1308105088
23	13,5523472629	104,6028938579	0,0095599650	0,0737879557	7,7184337022	0,1295599650
24	15,1786289345	118,1552411209	0,0084634417	0,0658821033	7,7843158055	0,1284634417
25	17,0000644066	133,3338700554	0,0074999698	0,0588233066	7,8431391121	0,1274999698
26	19,0400721354	150,3339344620	0,0066518581	0,0525208094	7,8956599215	0,1266518581
27	21,3248807917	169,3740065974	0,0059040937	0,0468935798	7,9425535013	0,1259040937
28	23,8838664867	190,6988873891	0,0052438691	0,0418692677	7,9844227690	0,1252438691
29	26,7499304651	214,5827538758	0,0046602068	0,0373832747	8,0218060438	0,1246602068
30	29,9599221209	241,3326843409	0,0041436576	0,0333779239	8,0551839677	0,1241436576

12%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	33,5551127754	271,2926064618	0,0036860570	0,0298017177	8,0849856854	0,1236860570
32	37,5817263085	304,8477192373	0,0032803263	0,0266086766	8,1115943620	0,1232803263
33	42,0915334655	342,4294455457	0,0029203096	0,0237577469	8,1353521089	0,1229203096
34	47,1425174813	384,5209790112	0,0026006383	0,0212122740	8,1565643830	0,1226006383
35	52,7996195791	431,6634964926	0,0023166193	0,0189395304	8,1755039134	0,1223166193
36	59,1355739286	484,4631160717	0,0020641406	0,0169102950	8,1924142084	0,1220641406
37	66,2318428000	543,5986900003	0,0018395924	0,0150984777	8,2075126860	0,1218395924
38	74,1796639360	609,8305328003	0,0016397998	0,0134807836	8,2209934697	0,1216397998
39	83,0812236084	684,0101967363	0,0014619665	0,0120364140	8,2330298836	0,1214619665
40	93,0509704414	767,0914203447	0,0013036256	0,0107467982	8,2437766818	0,1213036256
41	104,2170868943	860,1423907861	0,0011625982	0,0095953555	8,2533720373	0,1211625982
42	116,7231373216	964,3594776804	0,0010369577	0,0085672817	8,2619393190	0,1210369577
43	130,7299138002	1081,0826150020	0,0009249987	0,0076493587	8,2695886777	0,1209249987
44	146,4175034563	1211,8125288023	0,0008252102	0,0068297845	8,2764184623	0,1208252102
45	163,9876038710	1358,2300322586	0,0007362523	0,0060980219	8,2825164842	0,1207362523
46	183,6661163356	1522,2176361296	0,0006569363	0,0054446624	8,2879611466	0,1206569363
47	205,7060502958	1705,8837524651	0,0005862064	0,0048613057	8,2928224523	0,1205862064
48	230,3907763313	1911,5898027610	0,0005231248	0,0043404515	8,2971629038	0,1205231248
49	258,0376694911	2141,9805790923	0,0004668576	0,0038754032	8,3010383070	0,1204668576
50	289,0021898300	2400,0182485833	0,0004166635	0,0034601814	8,3044984884	0,1204166635
51	323,6824526096	2689,0204384133	0,0003718826	0,0030894477	8,3075879361	0,1203718826
52	362,5243469228	3012,7028910229	0,0003319279	0,0027584354	8,3103463715	0,1203319279
53	406,0272685535	3375,2272379457	0,0002962763	0,0024628888	8,3128092603	0,1202962763
54	454,7505407799	3781,2545064992	0,0002644625	0,0021990078	8,3150082681	0,1202644625
55	509,3206056735	4236,0050472791	0,0002360715	0,0019633998	8,3169716679	0,1202360715
56	570,4390783543	4745,3256529526	0,0002107337	0,0017530356	8,3187247035	0,1202107337
57	638,8917677568	5315,7647313069	0,0001881197	0,0015652103	8,3202899138	0,1201881197
58	715,5587798876	5954,6564990637	0,0001679358	0,0013975092	8,3216874231	0,1201679358
59	801,4258334742	6670,2152789513	0,0001499202	0,0012477761	8,3229351992	0,1201499202
60	897,5969334911	7471,6411124255	0,0001338394	0,0011140858	8,3240492850	0,1201338394

12%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,1300000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8849557522	0,8849557522	1,1300000000
2	1,2769000000	2,1300000000	0,4694835681	0,7831466834	1,6681024356	0,5994835681
3	1,4428970000	3,4069000000	0,2935219701	0,6930501623	2,3611525979	0,4235219701
4	1,6304736100	4,8497970000	0,2061941974	0,6133187277	2,9744713255	0,3361941974
5	1,8424351793	6,4802706100	0,1543145434	0,5427599360	3,5172312615	0,2843145434
6	2,0819517526	8,3227057893	0,1201532321	0,4803185274	3,9975497890	0,2501532321
7	2,3526054804	10,4046575419	0,0961108038	0,4250606437	4,4226104327	0,2261108038
8	2,6584441929	12,7572630224	0,0783867196	0,3761598617	4,7987702944	0,2083867196
9	3,0040419380	15,4157072153	0,0648689020	0,3328848334	5,1316551278	0,1948689020
10	3,3945673899	18,4197491532	0,0542895558	0,2945883481	5,4262434760	0,1842895558
11	3,8358611506	21,8143165432	0,0458414545	0,2606976532	5,6869411292	0,1758414545
12	4,3345231002	25,6501776938	0,0389860847	0,2307058878	5,9176470170	0,1689860847
13	4,8980111032	29,9847007940	0,0333503411	0,2041645025	6,1218115194	0,1633503411
14	5,5347525466	34,8827118972	0,0286674959	0,1806765509	6,3024880703	0,1586674959
15	6,2542703777	40,4174644438	0,0247417797	0,1598907530	6,4623788233	0,1547417797
16	7,0673255268	46,6717348215	0,0214262445	0,1414962416	6,6038750648	0,1514262445
17	7,9860778453	53,7390603483	0,0186084385	0,1252179129	6,7290929777	0,1486084385
18	9,0242679652	61,7251381936	0,0162008548	0,1108123123	6,8399052900	0,1462008548
19	10,1974228006	70,7494061588	0,0141343943	0,0980639932	6,9379692832	0,1441343943
20	11,5230877647	80,9468289594	0,0123537884	0,0867822949	7,0247515781	0,1423537884
21	13,0210891741	92,4699167241	0,0108143279	0,0767984910	7,1015500691	0,1408143279
22	14,7138307668	105,4910058983	0,0094794811	0,0679632664	7,1695133355	0,1394794811
23	16,6266287665	120,2048366650	0,0083191328	0,0601444835	7,2296578190	0,1383191328
24	18,7880905061	136,8314654315	0,0073082605	0,0532252067	7,2828830257	0,1373082605
25	21,2305422719	155,6195559376	0,0064259276	0,0471019528	7,3299849785	0,1364259276
26	23,9905127672	176,8500982095	0,0056545063	0,0416831441	7,3716681225	0,1356545063
27	27,1092794270	200,8406109767	0,0049790727	0,0368877381	7,4085558607	0,1349790727
28	30,6334857525	227,9498904037	0,0043869291	0,0326440160	7,4411998767	0,1343869291
29	34,6158389003	258,5833761562	0,0038672246	0,0288885098	7,4700883864	0,1338672246
30	39,1158979573	293,1992150565	0,0034106503	0,0255650529	7,4956534393	0,1334106503

13%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	44,2009646918	332,3151130138	0,0030091921	0,0226239406	7,5182773799	0,1330091921
32	49,9470901017	376,5160777056	0,0026559291	0,0200211864	7,5382985663	0,1326559291
33	56,4402118150	426,4631678073	0,0023448684	0,0177178641	7,5560164304	0,1323448684
34	63,7774393509	482,9033796223	0,0020708076	0,0156795257	7,5716959561	0,1320708076
35	72,0685064665	546,6808189732	0,0018292209	0,0138756865	7,5855716425	0,1318292209
36	81,4374123072	618,7493254397	0,0016161634	0,0122793686	7,5978510111	0,1316161634
37	92,0242759071	700,1867377469	0,0014281904	0,0108666978	7,6087177089	0,1314281904
38	103,9874317750	792,2110136540	0,0012622899	0,0096165468	7,6183342557	0,1312622899
39	117,5057979058	896,1984454290	0,0011158243	0,0085102184	7,6268444741	0,1311158243
40	132,7815516335	1013,7042433348	0,0009864810	0,0075311667	7,6343756408	0,1309864810
41	150,0431533459	1146,4857949683	0,0008722306	0,0066647493	7,6410403901	0,1308722306
42	169,5487632808	1296,5289483141	0,0007712901	0,0058980082	7,6469383983	0,1307712901
43	191,5901025073	1466,0777115950	0,0006820921	0,0052194763	7,6521578746	0,1306820921
44	216,4968158333	1657,6678141023	0,0006032572	0,0046190056	7,6567768802	0,1306032572
45	244,6414018916	1874,1646299356	0,0005335711	0,0040876156	7,6608644957	0,1305335711
46	276,4447841375	2118,8060318273	0,0004719639	0,0036173589	7,6644818546	0,1304719639
47	312,3826060754	2395,2508159648	0,0004174928	0,0032012026	7,6676830572	0,1304174928
48	352,9923448652	2707,6334220402	0,0003693262	0,0028329226	7,6705159798	0,1303693262
49	398,8813496977	3060,6257669055	0,0003267306	0,0025070112	7,6730229910	0,1303267306
50	450,7359251584	3459,5071166032	0,0002890585	0,0022185940	7,6752415849	0,1302890585
51	509,3315954290	3910,2430417616	0,0002557386	0,0019633575	7,6772049424	0,1302557386
52	575,5447028348	4419,5746371906	0,0002262661	0,0017374845	7,6789424269	0,1302262661
53	650,3655142033	4995,1193400253	0,0002001954	0,0015375969	7,6804800238	0,1302001954
54	734,9130310497	5645,4848542286	0,0001771327	0,0013607052	7,6818407291	0,1301771327
55	830,4517250862	6380,3978852784	0,0001567300	0,0012041639	7,6830448930	0,1301567300
56	938,4104493474	7210,8496103645	0,0001386799	0,0010656318	7,6841105247	0,1301386799
57	1060,4038077626	8149,2600597119	0,0001227105	0,0009430370	7,6850535617	0,1301227105
58	1198,2563027717	9209,6638674745	0,0001085816	0,0008345460	7,6858881077	0,1301085816
59	1354,0296221320	10407,9201702462	0,0000960807	0,0007385363	7,6866266440	0,1300960807
60	1530,0534730092	11761,9497923782	0,0000850199	0,0006535719	7,6872802159	0,1300850199

13%

0,14	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,1400000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8771929825	0,8771929825	1,1400000000
2	1,2996000000	2,1400000000	0,4672897196	0,7694675285	1,6466605109	0,6072897196
3	1,4815440000	3,4396000000	0,2907314804	0,6749715162	2,3216320271	0,4307314804
4	1,6889601600	4,9211440000	0,2032047833	0,5920802774	2,9137123045	0,3432047833
5	1,9254145824	6,6101041600	0,1512835465	0,5193686644	3,4330809689	0,2912835465
6	2,1949726239	8,5355187424	0,1171574957	0,4555865477	3,8886675165	0,2571574957
7	2,5022687913	10,7304913663	0,0931923773	0,3996373225	4,2883048391	0,2331923773
8	2,8525864221	13,2327601576	0,0755700238	0,3505590549	4,6388638939	0,2155700238
9	3,2519485212	16,0853465797	0,0621683838	0,3075079429	4,9463718368	0,2021683838
10	3,7072213141	19,3372951008	0,0517135408	0,2697438095	5,2161156463	0,1917135408
11	4,2262322981	23,0445164150	0,0433942714	0,2366173768	5,4527330231	0,1833942714
12	4,8179048198	27,2707487131	0,0366693269	0,2075591024	5,6602921255	0,1766693269
13	5,4924114946	32,0886535329	0,0311636635	0,1820693881	5,8423615136	0,1711636635
14	6,2613491038	37,5810650275	0,0266091448	0,1597099896	6,0020715032	0,1666091448
15	7,1379379784	43,8424141313	0,0228089630	0,1400964821	6,1421679852	0,1628089630
16	8,1372492954	50,9803521097	0,0196154000	0,1228916509	6,2650596362	0,1596154000
17	9,2764641967	59,1176014051	0,0169154359	0,1077996938	6,3728593300	0,1569154359
18	10,5751691843	68,3940656018	0,0146211516	0,0945611349	6,4674204649	0,1546211516
19	12,0556928700	78,9692347861	0,0126631593	0,0829483640	6,5503688288	0,1526631593
20	13,7434898719	91,0249276561	0,0109860016	0,0727617228	6,6231305516	0,1509860016
21	15,6675784539	104,7684175280	0,0095448612	0,0638260726	6,6869566242	0,1495448612
22	17,8610394375	120,4359959819	0,0083031654	0,0559877830	6,7429444072	0,1483031654
23	20,3615849587	138,2970354193	0,0072308130	0,0491120903	6,7920564976	0,1472308130
24	23,2122068529	158,6586203780	0,0063028406	0,0430807810	6,8351372786	0,1463028406
25	26,4619158123	181,8708272310	0,0054984079	0,0377901588	6,8729274373	0,1454984079
26	30,1665840261	208,3327430433	0,0048000136	0,0331492621	6,9060766994	0,1448000136
27	34,3899057897	238,4993270694	0,0041928839	0,0290783001	6,9351549995	0,1441928839
28	39,2044926003	272,8892328591	0,0036644905	0,0255072808	6,9606622803	0,1436644905
29	44,6931215643	312,0937254594	0,0032041657	0,0223748077	6,9830370879	0,1432041657
30	50,9501585833	356,7868470237	0,0028027939	0,0196270243	7,0026641122	0,1428027939

14%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	58,0831807850	407,7370056070	0,0024525613	0,0172166880	7,0198808002	0,1424525613
32	66,2148260949	465,8201863920	0,0021467511	0,0151023579	7,0349831581	0,1421467511
33	75,4849017482	532,0350124868	0,0018795755	0,0132476823	7,0482308404	0,1418795755
34	86,0527879929	607,5199142350	0,0016460366	0,0116207740	7,0598516144	0,1416460366
35	98,1001783119	693,5727022279	0,0014418099	0,0101936614	7,0700452758	0,1414418099
36	111,8342032756	791,6728805398	0,0012631480	0,0089418082	7,0789870840	0,1412631480
37	127,4909917342	903,5070838154	0,0011067982	0,0078436914	7,0868307755	0,1411067982
38	145,3397305769	1030,9980755495	0,0009699339	0,0068804311	7,0937112065	0,1409699339
39	165,6872928577	1176,3378061265	0,0008500959	0,0060354659	7,0997466724	0,1408500959
40	188,8835138578	1342,0250989842	0,0007451425	0,0052942683	7,1050409407	0,1407451425
41	215,3272057979	1530,9086128419	0,0006532069	0,0046440950	7,1096850357	0,1406532069
42	245,4730146096	1746,2358186398	0,0005726603	0,0040737675	7,1137588033	0,1405726603
43	279,8392366549	1991,7088332494	0,0005020814	0,0035734803	7,1173322836	0,1405020814
44	319,0167297866	2271,5480699043	0,0004402284	0,0031346318	7,1204669154	0,1404402284
45	363,6790719567	2590,5647996909	0,0003860162	0,0027496771	7,1232165925	0,1403860162
46	414,5941420307	2954,2438716476	0,0003384961	0,0024119974	7,1256285899	0,1403384961
47	472,6373219150	3368,8380136783	0,0002968383	0,0021157872	7,1277443771	0,1402968383
48	538,8065469831	3841,4753355933	0,0002603167	0,0018559537	7,1296003308	0,1402603167
49	614,2394635607	4380,2818825763	0,0002282958	0,0016280296	7,1312283603	0,1402282958
50	700,2329884592	4994,5213461370	0,0002002194	0,0014280961	7,1326564564	0,1402002194
51	798,2656068435	5694,7543345962	0,0001756002	0,0012527159	7,1339091723	0,1401756002
52	910,0227918015	6493,0199414396	0,0001540115	0,0010988736	7,1350080459	0,1401540115
53	1037,4259826538	7403,0427332412	0,0001350796	0,0009639242	7,1359719701	0,1401350796
54	1182,6656202253	8440,4687158949	0,0001184768	0,0008455475	7,1368175176	0,1401184768
55	1348,2388070568	9623,1343361202	0,0001039162	0,0007417084	7,1375592260	0,1401039162
56	1536,9922400448	10971,3731431771	0,0000911463	0,0006506214	7,1382098473	0,1400911463
57	1752,1711536511	12508,3653832219	0,0000799465	0,0005707205	7,1387805678	0,1400799465
58	1997,4751151622	14260,5365368729	0,0000701236	0,0005006320	7,1392811999	0,1400701236
59	2277,1216312849	16258,0116520351	0,0000615081	0,0004391509	7,1397203508	0,1400615081
60	2595,9186596648	18535,1332833201	0,0000539516	0,0003852201	7,1401055708	0,1400539516

14%

0,15	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,1500000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8695652174	0,8695652174	1,1500000000
2	1,3225000000	2,1500000000	0,4651162791	0,7561436673	1,6257088847	0,6151162791
3	1,5208750000	3,4725000000	0,2879769618	0,6575162324	2,2832251171	0,4379769618
4	1,7490062500	4,9933750000	0,2002653516	0,5717532456	2,8549783627	0,3502653516
5	2,0113571875	6,7423812500	0,1483155525	0,4971767353	3,3521550980	0,2983155525
6	2,3130607656	8,7537384375	0,1142369066	0,4323275959	3,7844826939	0,2642369066
7	2,6600198805	11,0667992031	0,0903603636	0,3759370399	4,1604197338	0,2403603636
8	3,0590228625	13,7268190836	0,0728500896	0,3269017738	4,4873215077	0,2228500896
9	3,5178762919	16,7858419461	0,0595740150	0,2842624120	4,7715839197	0,2095740150
10	4,0455577357	20,3037182381	0,0492520625	0,2471847061	5,0187686259	0,1992520625
11	4,6523913961	24,3492759738	0,0410689830	0,2149432227	5,2337118486	0,1910689830
12	5,3502501055	29,0016673698	0,0344807761	0,1869071502	5,4206189988	0,1844807761
13	6,1527876213	34,3519174753	0,0291104565	0,1625279567	5,5831469554	0,1791104565
14	7,0757057645	40,5047050966	0,0246884898	0,1413286580	5,7244756134	0,1746884898
15	8,1370616292	47,5804108611	0,0210170526	0,1228944852	5,8473700986	0,1710170526
16	9,3576208735	55,7174724902	0,0179476914	0,1068647697	5,9542348684	0,1679476914
17	10,7612640046	65,0750933638	0,0153668623	0,0929258867	6,0471607551	0,1653668623
18	12,3754536053	75,8363573683	0,0131862874	0,0808051189	6,1279658740	0,1631862874
19	14,2317716460	88,2118109736	0,0113363504	0,0702653208	6,1982311948	0,1613363504
20	16,3665373929	102,4435826196	0,0097614704	0,0611002789	6,2593314737	0,1597614704
21	18,8215180019	118,8101200126	0,0084167914	0,0531306773	6,3124621511	0,1584167914
22	21,6447457022	137,6316380145	0,0072657713	0,0462005890	6,3586627401	0,1572657713
23	24,8914575575	159,2763837166	0,0062783947	0,0401744252	6,3988371653	0,1562783947
24	28,6251761911	184,1678412741	0,0054298296	0,0349342828	6,4337714481	0,1554298296
25	32,9189526198	212,7930174653	0,0046994023	0,0303776372	6,4641490853	0,1546994023
26	37,8567955128	245,7119700851	0,0040698058	0,0264153367	6,4905644220	0,1540698058
27	43,5353148397	283,5687655978	0,0035264815	0,0229698580	6,5135342800	0,1535264815
28	50,0656120656	327,1040804375	0,0030571309	0,0199737896	6,5335080695	0,1530571309
29	57,5754538755	377,1696925031	0,0026513265	0,0173685127	6,5508765822	0,1526513265
30	66,2117719568	434,7451463786	0,0023001982	0,0151030545	6,5659796367	0,1523001982

15%

v	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
31	76,1435377503	500,9569183354	0,0019961796	0,0131330909	6,5791127276	0,1519961796
32	87,5650684128	577,1004560857	0,0017328006	0,0114200790	6,5905328066	0,1517328006
33	100,6998286748	664,6655244985	0,0015045161	0,0099305035	6,6004633101	0,1515045161
34	115,8048029760	765,3653531733	0,0013065655	0,0086352204	6,6090985305	0,1513065655
35	133,1755234224	881,1701561493	0,0011348546	0,0075088873	6,6166074178	0,1511348546
36	153,1518519358	1014,3456795717	0,0009858572	0,0065294672	6,6231368851	0,1509858572
37	176,1246297261	1167,4975315074	0,0008565329	0,0056777976	6,6288146827	0,1508565329
38	202,5433241850	1343,6221612335	0,0007442569	0,0049372153	6,6337518980	0,1507442569
39	232,9248228128	1546,1654854186	0,0006467613	0,0042932307	6,6380451287	0,1506467613
40	267,8635462347	1779,0903082314	0,0005620850	0,0037332441	6,6417783728	0,1505620850
41	308,0430781699	2046,9538544661	0,0004885308	0,0032462992	6,6450246720	0,1504885308
42	354,2495398954	2354,9969326360	0,0004246290	0,0028228689	6,6478475408	0,1504246290
43	407,3869708797	2709,2464725314	0,0003691063	0,0024546686	6,6503022094	0,1503691063
44	468,4950165117	3116,6334434111	0,0003208590	0,0021344944	6,6524367038	0,1503208590
45	538,7692689884	3585,1284599227	0,0002789300	0,0018560821	6,6542927860	0,1502789300
46	619,5846593367	4123,8977289111	0,0002424890	0,0016139844	6,6559067704	0,1502424890
47	712,5223582372	4743,4823882478	0,0002108156	0,0014034647	6,6573102351	0,1502108156
48	819,4007119727	5456,0047464850	0,0001832843	0,0012204041	6,6585306392	0,1501832843
49	942,3108187687	6275,4054584577	0,0001593523	0,0010612210	6,6595918602	0,1501593523
50	1083,6574415840	7217,7162772264	0,0001385480	0,0009228008	6,6605146611	0,1501385480
51	1246,2060578216	8301,3737188103	0,0001204620	0,0008024355	6,6613170966	0,1501204620
52	1433,1369664948	9547,5797766319	0,0001047386	0,0006977700	6,6620148666	0,1501047386
53	1648,1075114690	10980,7167431266	0,0000910687	0,0006067565	6,6626216231	0,1500910687
54	1895,3236381893	12628,8242545956	0,0000791839	0,0005276144	6,6631492375	0,1500791839
55	2179,6221839177	14524,1478927850	0,0000688509	0,0004587951	6,6636080326	0,1500688509
56	2506,5655115054	16703,7700767027	0,0000598667	0,0003989523	6,6640069849	0,1500598667
57	2882,5503382312	19210,3355882081	0,0000520553	0,0003469150	6,6643538999	0,1500520553
58	3314,9328889659	22092,8859264393	0,0000452634	0,0003016652	6,6646555651	0,1500452634
59	3812,1728223108	25407,8188154052	0,0000393580	0,0002623176	6,6649178827	0,1500393580
60	4383,9987456574	29219,9916377160	0,0000342231	0,0002281023	6,6651459850	0,1500342231

15%

0,16	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
1	1,1600000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8620689655	0,8620689655	1,1600000000
2	1,3456000000	2,1600000000	0,4629629630	0,7431629013	1,6052318668	0,6229629630
3	1,5608960000	3,5056000000	0,2852578731	0,6406576735	2,2458895404	0,4452578731
4	1,8106393600	5,0664960000	0,1973750695	0,5522910979	2,7981806382	0,3573750695
5	2,1003416576	6,8771353600	0,1454093816	0,4761130154	3,2742936537	0,3054093816
6	2,4363963228	8,9774770176	0,1113898702	0,4104422547	3,6847359083	0,2713898702
7	2,8262197345	11,4138733404	0,0876126771	0,3538295299	4,0385654382	0,2476126771
8	3,2784148920	14,2400930749	0,0702242601	0,3050254568	4,3435908950	0,2302242601
9	3,8029612747	17,5185079669	0,0570824868	0,2629529800	4,6065438750	0,2170824868
10	4,4114350786	21,3214692416	0,0469010831	0,2266836034	4,8332274785	0,2069010831
11	5,1172646912	25,7329043202	0,0388607515	0,1954168995	5,0286443780	0,1988607515
12	5,9360270418	30,8501690114	0,0324147333	0,1684628444	5,1971072224	0,1924147333
13	6,8857913685	36,7861960533	0,0271841100	0,1452265900	5,3423338124	0,1871841100
14	7,9875179875	43,6719874218	0,0228979733	0,1251953362	5,4675291486	0,1828979733
15	9,2655208655	51,6595054093	0,0193575218	0,1079270140	5,5754561626	0,1793575218
16	10,7480042040	60,9250262748	0,0164136162	0,0930405293	5,6684966919	0,1764136162
17	12,4676848766	71,6730304787	0,0139522494	0,0802073528	5,7487040447	0,1739522494
18	14,4625144569	84,1407153553	0,0118848526	0,0691442697	5,8178483144	0,1718848526
19	16,7765167700	98,6032298122	0,0101416556	0,0596071290	5,8774554435	0,1701416556
20	19,4607594531	115,3797465821	0,0086670324	0,0513854561	5,9288408996	0,1686670324
21	22,5744809656	134,8405060353	0,0074161691	0,0442978070	5,9731387065	0,1674161691
22	26,1863979201	157,4149870009	0,0063526353	0,0381877646	6,0113264711	0,1663526353
23	30,3762215874	183,6013849211	0,0054465820	0,0329204867	6,0442469579	0,1654465820
24	35,2364170414	213,9776065085	0,0046733862	0,0283797299	6,0726266878	0,1646733862
25	40,8742437680	249,2140235498	0,0040126153	0,0244652844	6,0970919723	0,1640126153
26	47,4141227708	290,0882673178	0,0034472266	0,0210907624	6,1181827347	0,1634472266
27	55,0003824142	337,5023900886	0,0029629420	0,0181816918	6,1363644265	0,1629629420
28	63,8004436004	392,5027725028	0,0025477527	0,0156738722	6,1520382987	0,1625477527
29	74,0085145765	456,3032161032	0,0021915252	0,0135119588	6,1655502575	0,1621915252
30	85,8498769088	530,3117306798	0,0018856833	0,0116482403	6,1771984978	0,1618856833

16%

	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
31	99,5858572142	616,1616075885	0,0016229508	0,0100415865	6,1872400843	0,1616229508
32	115,5195943684	715,7474648027	0,0013971408	0,0086565401	6,1958966244	0,1613971408
33	134,0027294674	831,2670591711	0,0012029828	0,0074625346	6,2033591590	0,1612029828
34	155,4431661822	965,2697886385	0,0010359798	0,0064332194	6,2097923784	0,1610359798
35	180,3140727713	1120,7129548207	0,0008922891	0,0055458788	6,2153382573	0,1608922891
36	209,1643244147	1301,0270275920	0,0007686235	0,0047809300	6,2201191873	0,1607686235
37	242,6306163211	1510,1913520067	0,0006621677	0,0041214914	6,2242406787	0,1606621677
38	281,4515149324	1752,8219683278	0,0005705086	0,0035530098	6,2277936885	0,1605705086
39	326,4837573216	2034,2734832602	0,0004915760	0,0030629395	6,2308566281	0,1604915760
40	378,7211584931	2360,7572405818	0,0004235929	0,0026404651	6,2334970932	0,1604235929
41	439,3165438520	2739,4783990749	0,0003650330	0,0022762630	6,2357733562	0,1603650330
42	509,6071908683	3178,7949429269	0,0003145846	0,0019622957	6,2377356519	0,1603145846
43	591,1443414072	3688,4021337952	0,0002711201	0,0016916342	6,2394272861	0,1602711201
44	685,7274360324	4279,5464752025	0,0002336696	0,0014583054	6,2408855915	0,1602336696
45	795,4438257976	4965,2739112349	0,0002013988	0,0012571598	6,2421427513	0,1602013988
46	922,7148379252	5760,7177370324	0,0001735895	0,0010837584	6,2432265097	0,1601735895
47	1070,3492119932	6683,4325749576	0,0001496237	0,0009342745	6,2441607842	0,1601496237
48	1241,6050859121	7753,7817869508	0,0001289693	0,0008054091	6,2449661933	0,1601289693
49	1440,2618996581	8995,3868728630	0,0001111681	0,0006943182	6,2456605115	0,1601111681
50	1670,7038036034	10435,6487725210	0,0000958254	0,0005985501	6,2462590616	0,1600958254
51	1938,0164121799	12106,3525761244	0,0000826013	0,0005159915	6,2467750531	0,1600826013
52	2248,0990381287	14044,3689883043	0,0000712029	0,0004448203	6,2472198734	0,1600712029
53	2607,7948842293	16292,4680264330	0,0000613781	0,0003834657	6,2476033391	0,1600613781
54	3025,0420657060	18900,2629106623	0,0000529093	0,0003305739	6,2479339130	0,1600529093
55	3509,0487962189	21925,3049763682	0,0000456094	0,0002849775	6,2482188905	0,1600456094
56	4070,4966036140	25434,3537725872	0,0000393169	0,0002456703	6,2484645608	0,1600393169
57	4721,7760601922	29504,8503762011	0,0000338927	0,0002117847	6,2486763455	0,1600338927
58	5477,2602298229	34226,6264363933	0,0000292170	0,0001825730	6,2488589186	0,1600292170
59	6353,6218665946	39703,8866662162	0,0000251865	0,0001573905	6,2490163091	0,1600251865
60	7370,2013652497	46057,5085328108	0,0000217120	0,0001356815	6,2491519906	0,1600217120

16%

0,17	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
1	1,1700000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8547008547	0,8547008547	1,1700000000
2	1,3689000000	2,1700000000	0,4608294931	0,7305135510	1,5852144057	0,6308294931
3	1,6016130000	3,5389000000	0,2825736811	0,6243705564	2,2095849622	0,4525736811
4	1,8738872100	5,1405130000	0,1945331137	0,5336500482	2,7432350104	0,3645331137
5	2,1924480357	7,0144002100	0,1425638643	0,4561111523	3,1993461627	0,3125638643
6	2,5651642018	9,2068482457	0,1086148021	0,3898385917	3,5891847545	0,2786148021
7	3,0012421161	11,7720124475	0,0849472428	0,3331953776	3,9223801320	0,2549472428
8	3,5114532758	14,7732545635	0,0676898916	0,2847823740	4,2071625060	0,2376898916
9	4,1084003327	18,2847078393	0,0546905102	0,2434037384	4,4505662444	0,2246905102
10	4,8068283892	22,3931081720	0,0446565967	0,2080373833	4,6586036277	0,2146565967
11	5,6239892154	27,1999365613	0,0367647916	0,1778097293	4,8364133570	0,2067647916
12	6,5800673820	32,8239257767	0,0304655819	0,1519741276	4,9883874846	0,2004655819
13	7,6986788370	39,4039931587	0,0253781386	0,1298924168	5,1182799014	0,1953781386
14	9,0074542393	47,1026719957	0,0212302181	0,1110191596	5,2292990610	0,1912302181
15	10,5387214599	56,1101262350	0,0178220950	0,0948881706	5,3241872317	0,1878220950
16	12,3303041081	66,6488476949	0,0150040103	0,0811010005	5,4052882322	0,1850040103
17	14,4264558065	78,9791518031	0,0126615693	0,0693170945	5,4746053267	0,1826615693
18	16,8789532936	93,4056076096	0,0107059953	0,0592453799	5,5338507065	0,1807059953
19	19,7483753535	110,2845609032	0,0090674523	0,0506370768	5,5844877834	0,1790674523
20	23,1055991636	130,0329362568	0,0076903593	0,0432795528	5,6277673362	0,1776903593
21	27,0335510215	153,1385354204	0,0065300350	0,0369910708	5,6647584070	0,1765300350
22	31,6292546951	180,1720864419	0,0055502493	0,0316162998	5,6963747069	0,1755502493
23	37,0062279933	211,8013411370	0,0047214054	0,0270224785	5,7233971853	0,1747214054
24	43,2972867521	248,8075691303	0,0040191703	0,0230961355	5,7464933208	0,1740191703
25	50,6578255000	292,1048558824	0,0034234282	0,0197402867	5,7662336075	0,1734234282
26	59,2696558350	342,7626813825	0,0029174705	0,0168720399	5,7831056475	0,1729174705
27	69,3454973270	402,0323372175	0,0024873621	0,0144205470	5,7975261944	0,1724873621
28	81,1342318726	471,3778345444	0,0021214404	0,0123252538	5,8098514482	0,1721214404
29	94,9270512909	552,5120664170	0,0018099152	0,0105344050	5,8203858532	0,1718099152
30	111,0646500103	647,4391177079	0,0015445468	0,0090037649	5,8293896181	0,1715445468

17%

v	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
31	129,9456405121	758,5037677182	0,0013183850	0,0076955256	5,8370851437	0,1713183850
32	152,0363993992	888,4494082303	0,0011255565	0,0065773723	5,8436625160	0,1711255565
33	177,8825872970	1040,4858076295	0,0009610895	0,0056216857	5,8492842017	0,1709610895
34	208,1226271375	1218,3683949265	0,0008207698	0,0048048596	5,8540890613	0,1708207698
35	243,5034737509	1426,4910220640	0,0007010209	0,0041067176	5,8581957789	0,1707010209
36	284,8990642885	1669,9944958149	0,0005988044	0,0035100150	5,8617057939	0,1705988044
37	333,3319052176	1954,8935601034	0,0005115368	0,0030000129	5,8647058067	0,1705115368
38	389,9983291046	2288,2254653210	0,0004370199	0,0025641135	5,8672699203	0,1704370199
39	456,2980450523	2678,2237944256	0,0003733818	0,0021915500	5,8694614703	0,1703733818
40	533,8687127112	3134,5218394779	0,0003190279	0,0018731197	5,8713345900	0,1703190279
41	624,6263938722	3668,3905521892	0,0002725991	0,0016009570	5,8729355470	0,1702725991
42	730,8128808304	4293,0169460613	0,0002329364	0,0013683393	5,8743038864	0,1702329364
43	855,0510705716	5023,8298268917	0,0001990513	0,0011695208	5,8754734071	0,1701990513
44	1000,4097525688	5878,8808974633	0,0001701004	0,0009995904	5,8764729976	0,1701701004
45	1170,4794105055	6879,2906500321	0,0001453638	0,0008543508	5,8773273483	0,1701453638
46	1369,4609102914	8049,7700605376	0,0001242272	0,0007302143	5,8780575627	0,1701242272
47	1602,2692650409	9419,2309708290	0,0001061658	0,0006241148	5,8786816775	0,1701061658
48	1874,6550400979	11021,5002358699	0,0000907317	0,0005334315	5,8792151090	0,1700907317
49	2193,3463969145	12896,1552759677	0,0000775425	0,0004559243	5,8796710333	0,1700775425
50	2566,2152843900	15089,5016728823	0,0000662712	0,0003896789	5,8800607122	0,1700662712
51	3002,4718827363	17655,7169572722	0,0000566389	0,0003330589	5,8803937711	0,1700566389
52	3512,8921028015	20658,1888400085	0,0000484070	0,0002846657	5,8806784369	0,1700484070
53	4110,0837602777	24171,0809428100	0,0000413718	0,0002433040	5,8809217409	0,1700413718
54	4808,7979995249	28281,1647030877	0,0000353592	0,0002079522	5,8811296931	0,1700353592
55	5626,2936594441	33089,9627026126	0,0000302206	0,0001777369	5,8813074300	0,1700302206
56	6582,7635815496	38716,2563620567	0,0000258289	0,0001519119	5,8814593419	0,1700258289
57	7701,8333904131	45299,0199436063	0,0000220755	0,0001298392	5,8815891811	0,1700220755
58	9011,1450667833	53000,8533340194	0,0000188676	0,0001109737	5,8817001548	0,1700188676
59	10543,0397281365	62011,9984008027	0,0000161259	0,0000948493	5,8817950041	0,1700161259
60	12335,3564819197	72555,0381289391	0,0000137826	0,0000810678	5,8818760719	0,1700137826

17%

0,18	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,1800000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8474576271	0,8474576271	1,1800000000
2	1,3924000000	2,1800000000	0,4587155963	0,7181844298	1,5656420569	0,6387155963
3	1,6430320000	3,5724000000	0,2799238607	0,6086308727	2,1742729296	0,4599238607
4	1,9387777600	5,2154320000	0,1917386709	0,5157888752	2,6900618047	0,3717386709
5	2,2877577568	7,1542097600	0,1397778418	0,4371092162	3,1271710209	0,3197778418
6	2,6995541530	9,4419675168	0,1059101292	0,3704315392	3,4976025601	0,2859101292
7	3,1854739006	12,1415216698	0,0823619994	0,3139250332	3,8115275933	0,2623619994
8	3,7588592027	15,3269955704	0,0652443589	0,2660381637	4,0775657571	0,2452443589
9	4,4354538592	19,0858547731	0,0523948239	0,2254560710	4,3030218280	0,2323948239
10	5,2338355538	23,5213086322	0,0425146413	0,1910644669	4,4940862949	0,2225146413
11	6,1759259535	28,7551441860	0,0347763862	0,1619190398	4,6560053347	0,2147763862
12	7,2875926251	34,9310701395	0,0286278089	0,1372195252	4,7932248599	0,2086278089
13	8,5993592976	42,2186627646	0,0236862073	0,1162877332	4,9095125931	0,2036862073
14	10,1472439712	50,8180220622	0,0196780583	0,0985489265	5,0080615196	0,1996780583
15	11,9737478860	60,9652660334	0,0164027825	0,0835160394	5,0915775590	0,1964027825
16	14,1290225055	72,9390139195	0,0137100839	0,0707763046	5,1623538635	0,1937100839
17	16,6722465565	87,0680364250	0,0114852711	0,0599799191	5,2223337827	0,1914852711
18	19,6732509367	103,7402829814	0,0096394570	0,0508304399	5,2731642226	0,1896394570
19	23,2144361053	123,4135339181	0,0081028390	0,0430766440	5,3162408666	0,1881028390
20	27,3930346042	146,6279700234	0,0068199812	0,0365056305	5,3527464971	0,1868199812
21	32,3237808330	174,0210046276	0,0057464327	0,0309369750	5,3836834721	0,1857464327
22	38,1420613829	206,3447854605	0,0048462577	0,0262177754	5,4099012476	0,1848462577
23	45,0076324318	244,4868468434	0,0040901996	0,0222184538	5,4321197013	0,1840901996
24	53,1090062695	289,4944792752	0,0034542973	0,0188291981	5,4509488994	0,1834542973
25	62,6686273981	342,6034855448	0,0029188261	0,0159569475	5,4669058470	0,1829188261
26	73,9489803297	405,2721129429	0,0024674779	0,0135228369	5,4804286839	0,1824674779
27	87,2597967891	479,2210932726	0,0020867195	0,0114600313	5,4918887152	0,1820867195
28	102,9665602111	566,4808900616	0,0017652846	0,0097118909	5,5016006061	0,1817652846
29	121,5005410491	669,4474502727	0,0014937692	0,0082304160	5,5098310221	0,1814937692
30	143,3706384379	790,9479913218	0,0012643056	0,0069749288	5,5168059509	0,1812643056

18%

v	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
31	169,1773533568	934,3186297597	0,0010702987	0,0059109566	5,5227169076	0,1810702987
32	199,6292769610	1103,4959831165	0,0009062108	0,0050092853	5,5277261928	0,1809062108
33	235,5625468139	1303,1252600775	0,0007673859	0,0042451570	5,5319713499	0,1807673859
34	277,9638052405	1538,6878068914	0,0006499044	0,0035975907	5,5355689406	0,1806499044
35	327,9972901837	1816,6516121319	0,0005504633	0,0030488057	5,5386177462	0,1805504633
36	387,0368024168	2144,6489023156	0,0004662768	0,0025837336	5,5412014799	0,1804662768
37	456,7034268518	2531,6857047324	0,0003949937	0,0021896048	5,5433910846	0,1803949937
38	538,9100436852	2988,3891315843	0,0003346284	0,0018555973	5,5452466819	0,1803346284
39	635,9138515485	3527,2991752694	0,0002835030	0,0015725401	5,5468192219	0,1802835030
40	750,3783448272	4163,2130268179	0,0002401991	0,0013326611	5,5481518830	0,1802401991
41	885,4464468961	4913,5913716451	0,0002035171	0,0011293738	5,5492812568	0,1802035171
42	1044,8268073374	5799,0378185413	0,0001724424	0,0009570964	5,5502383532	0,1801724424
43	1232,8956326582	6843,8646258787	0,0001461163	0,0008110987	5,5510494519	0,1801461163
44	1454,8168465366	8076,7602585369	0,0001238120	0,0006873717	5,5517368236	0,1801238120
45	1716,6838789132	9531,5771050735	0,0001049144	0,0005825184	5,5523193420	0,1801049144
46	2025,6869771176	11248,2609839867	0,0000889026	0,0004936597	5,5528130017	0,1800889026
47	2390,3106329988	13273,9479611043	0,0000753355	0,0004183557	5,5532313574	0,1800753355
48	2820,5665469386	15664,2585941031	0,0000638396	0,0003545387	5,5535858961	0,1800638396
49	3328,2685253875	18484,8251410416	0,0000540984	0,0003004565	5,5538863526	0,1800540984
50	3927,3568599572	21813,0936664291	0,0000458440	0,0002546242	5,5541409768	0,1800458440
51	4634,2810947496	25740,4505263864	0,0000388494	0,0002157832	5,5543567600	0,1800388494
52	5468,4516918045	30374,7316211359	0,0000329221	0,0001828671	5,5545396271	0,1800329221
53	6452,7729963293	35843,1833129404	0,0000278993	0,0001549721	5,5546945993	0,1800278993
54	7614,2721356685	42295,9563092697	0,0000236429	0,0001313323	5,5548259316	0,1800236429
55	8984,8411200889	49910,2284449382	0,0000200360	0,0001112986	5,5549372301	0,1800200360
56	10602,1125217049	58895,0695650271	0,0000169794	0,0000943208	5,5550315510	0,1800169794
57	12510,4927756117	69497,1820867319	0,0000143891	0,0000799329	5,5551114839	0,1800143891
58	14762,3814752219	82007,6748623437	0,0000121940	0,0000677397	5,5551792236	0,1800121940
59	17419,6101407618	96770,0563375655	0,0000103338	0,0000574066	5,5552366302	0,1800103338
60	20555,1399660989	114189,6664783270	0,0000087574	0,0000486496	5,5552852798	0,1800087574

18%

0,19	$S=(1+i)^v$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^v-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^v-1}$	$u^v=\frac{1}{(1+i)^v}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^v}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^v}$
1	1,1900000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8403361345	0,8403361345	1,1900000000
2	1,4161000000	2,1900000000	0,4566210046	0,7061648189	1,5465009533	0,6466210046
3	1,6851590000	3,6061000000	0,2773078950	0,5934158142	2,1399167675	0,4673078950
4	2,0053392100	5,2912590000	0,1889909377	0,4986687514	2,6385855189	0,3789909377
5	2,3863536599	7,2965982100	0,1370501666	0,4190493709	3,0576348898	0,3270501666
6	2,8397608553	9,6829518699	0,1032742921	0,3521423285	3,4097772184	0,2932742921
7	3,3793154178	12,5227127252	0,0798549022	0,2959179231	3,7056951415	0,2698549022
8	4,0213853472	15,9020281430	0,0628850604	0,2486705236	3,9543656651	0,2528850604
9	4,7854485631	19,9234134901	0,0501922023	0,2089668266	4,1633324917	0,2401922023
10	5,6946837901	24,7088620533	0,0404713094	0,1756023753	4,3389348670	0,2304713094
11	6,7766737102	30,4035458434	0,0328909005	0,1475650212	4,4864998882	0,2228909005
12	8,0642417152	37,1802195536	0,0268960219	0,1240042195	4,6105041077	0,2168960219
13	9,5964476411	45,2444612688	0,0221021529	0,1042052265	4,7147093342	0,2121021529
14	11,4197726929	54,8409089099	0,0182345628	0,0875674172	4,8022767515	0,2082345628
15	13,5895295045	66,2606816027	0,0150919063	0,0735860649	4,8758628163	0,2050919063
16	16,1715401104	79,8502111073	0,0125234484	0,0618370293	4,9376998457	0,2025234484
17	19,2441327314	96,0217512176	0,0104143070	0,0519638902	4,9896637359	0,2004143070
18	22,9005179503	115,2658839490	0,0086755939	0,0436671346	5,0333308705	0,1986755939
19	27,2516163609	138,1664018993	0,0072376496	0,0366950711	5,0700259416	0,1972376496
20	32,4294234694	165,4180182602	0,0060452907	0,0308361942	5,1008621358	0,1960452907
21	38,5910139286	197,8474417296	0,0050543994	0,0259127682	5,1267749040	0,1950543994
22	45,9233065751	236,4384556582	0,0042294304	0,0217754355	5,1485503395	0,1942294304
23	54,6487348243	282,3617622333	0,0035415560	0,0182986853	5,1668490248	0,1935415560
24	65,0319944410	337,0104970576	0,0029672666	0,0153770465	5,1822260713	0,1929672666
25	77,3880733847	402,0424914986	0,0024872993	0,0129218878	5,1951479590	0,1924872993
26	92,0918073278	479,4305648833	0,0020858078	0,0108587292	5,2060066883	0,1920858078
27	109,5892507201	571,5223722111	0,0017497128	0,0091249825	5,2151316708	0,1917497128
28	130,4112083569	681,1116229313	0,0014681881	0,0076680526	5,2227997234	0,1914681881
29	155,1893379448	811,5228312882	0,0012322512	0,0064437416	5,2292434650	0,1912322512
30	184,6753121543	966,7121692330	0,0010344341	0,0054149089	5,2346583740	0,1910344341

19%

v	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\urcorner}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\urcorner}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\urcorner}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\urcorner}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
31	219,7636214636	1151,3874813872	0,0008685173	0,0045503437	5,2392087176	0,1908685173
32	261,5187095417	1371,1511028508	0,0007293142	0,0038238182	5,2430325358	0,1907293142
33	311,2072643546	1632,6698123925	0,0006124937	0,0032132926	5,2462458284	0,1906124937
34	370,3366445819	1943,8770767470	0,0005144358	0,0027002459	5,2489460743	0,1905144358
35	440,7006070525	2314,2137213290	0,0004321122	0,0022691142	5,2512151885	0,1904321122
36	524,4337223925	2754,9143283815	0,0003629877	0,0019068186	5,2531220071	0,1903629877
37	624,0761296470	3279,3480507739	0,0003049387	0,0016023686	5,2547243757	0,1903049387
38	742,6505942800	3903,4241804210	0,0002561853	0,0013465282	5,2560709040	0,1902561853
39	883,7542071932	4646,0747747010	0,0002152355	0,0011315363	5,2572024403	0,1902152355
40	1051,6675065599	5529,8289818941	0,0001808374	0,0009508709	5,2581533112	0,1901808374
41	1251,4843328063	6581,4964884540	0,0001519411	0,0007990512	5,2589523623	0,1901519411
42	1489,2663560395	7832,9808212603	0,0001276653	0,0006714716	5,2596238339	0,1901276653
43	1772,2269636870	9322,2471772997	0,0001072703	0,0005642618	5,2601880957	0,1901072703
44	2108,9500867875	11094,4741409867	0,0000901350	0,0004741696	5,2606622653	0,1900901350
45	2509,6506032771	13203,4242277742	0,0000757379	0,0003984618	5,2610607272	0,1900757379
46	2986,4842178997	15713,0748310512	0,0000636413	0,0003348419	5,2613955690	0,1900636413
47	3553,9162193007	18699,5590489510	0,0000534772	0,0002813797	5,2616769488	0,1900534772
48	4229,1603009678	22253,4752682517	0,0000449368	0,0002364536	5,2619134023	0,1900449368
49	5032,7007581517	26482,6355692195	0,0000377606	0,0001987005	5,2621121028	0,1900377606
50	5988,9139022005	31515,3363273712	0,0000317306	0,0001669752	5,2622790780	0,1900317306
51	7126,8075436186	37504,2502295717	0,0000266636	0,0001403153	5,2624193933	0,1900266636
52	8480,9009769062	44631,0577731903	0,0000224059	0,0001179120	5,2625373053	0,1900224059
53	10092,2721625183	53111,9587500965	0,0000188282	0,0000990857	5,2626363910	0,1900188282
54	12009,8038733968	63204,2309126148	0,0000158217	0,0000832653	5,2627196563	0,1900158217
55	14291,6666093422	75214,0347860116	0,0000132954	0,0000699708	5,2627896271	0,1900132954
56	17007,0832651172	89505,7013953538	0,0000111725	0,0000587990	5,2628484262	0,1900111725
57	20238,4290854895	106512,7846604710	0,0000093885	0,0000494109	5,2628978371	0,1900093885
58	24083,7306117325	126751,2137459610	0,0000078895	0,0000415218	5,2629393589	0,1900078895
59	28659,6394279617	150834,9443576930	0,0000066298	0,0000348923	5,2629742512	0,1900066298
60	34104,9709192744	179494,5837856550	0,0000055712	0,0000293212	5,2630035724	0,1900055712

19%

0,20	$S=(1+i)^{\nu}$	$S_{\nu\rceil}=\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{\nu\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{\nu}-1}$	$u^{\nu}=\frac{1}{(1+i)^{\nu}}$	$a_{\nu\rceil}=\frac{1-u^{\nu}}{i}$	$\frac{1}{a_{\nu\rceil}}=\frac{i}{1-u^{\nu}}$
1	1,2000000000	1,0000000000	1,0000000000	0,8333333333	0,8333333333	1,2000000000
2	1,4400000000	2,2000000000	0,4545454545	0,6944444444	1,5277777778	0,6545454545
3	1,7280000000	3,6400000000	0,2747252747	0,5787037037	2,1064814815	0,4747252747
4	2,0736000000	5,3680000000	0,1862891207	0,4822530864	2,5887345679	0,3862891207
5	2,4883200000	7,4416000000	0,1343797033	0,4018775720	2,9906121399	0,3343797033
6	2,9859840000	9,9299200000	0,1007057459	0,3348979767	3,3255101166	0,3007057459
7	3,5831808000	12,9159040000	0,0774239263	0,2790816472	3,6045917638	0,2774239263
8	4,2998169600	16,4990848000	0,0606094224	0,2325680394	3,8371598032	0,2606094224
9	5,1597803520	20,7989017600	0,0480794617	0,1938066995	4,0309665027	0,2480794617
10	6,1917364224	25,9586821120	0,0385227569	0,1615055829	4,1924720856	0,2385227569
11	7,4300837069	32,1504185344	0,0311037942	0,1345879857	4,3270600713	0,2311037942
12	8,9161004483	39,5805022413	0,0252649649	0,1121566548	4,4392167261	0,2252649649
13	10,6993205379	48,4966026895	0,0206200011	0,0934638790	4,5326806051	0,2206200011
14	12,8391846455	59,1959232274	0,0168930552	0,0778865658	4,6105671709	0,2168930552
15	15,4070215746	72,0351078729	0,0138821198	0,0649054715	4,6754726424	0,2138821198
16	18,4884258895	87,4421294475	0,0114361350	0,0540878929	4,7295605353	0,2114361350
17	22,1861110674	105,9305553370	0,0094401469	0,0450732441	4,7746337794	0,2094401469
18	26,6233332809	128,1166664044	0,0078053857	0,0375610368	4,8121948162	0,2078053857
19	31,9479999371	154,7399996853	0,0064624532	0,0313008640	4,8434956802	0,2064624532
20	38,3375999245	186,6879996224	0,0053565307	0,0260840533	4,8695797335	0,2053565307
21	46,0051199094	225,0255995468	0,0044439388	0,0217367111	4,8913164446	0,2044439388
22	55,2061438912	271,0307194562	0,0036896187	0,0181139259	4,9094303705	0,2036896187
23	66,2473726695	326,2368633475	0,0030652575	0,0150949383	4,9245253087	0,2030652575
24	79,4968472034	392,4842360170	0,0025478730	0,0125791152	4,9371044239	0,2025478730
25	95,3962166441	471,9810832203	0,0021187290	0,0104825960	4,9475870199	0,2021187290
26	114,4754599729	567,3772998644	0,0017624956	0,0087354967	4,9563225166	0,2017624956
27	137,3705519675	681,8527598373	0,0014665923	0,0072795806	4,9636020972	0,2014665923
28	164,8446623610	819,2233118048	0,0012206684	0,0060663171	4,9696684143	0,2012206684
29	197,8135948331	984,0679741657	0,0010161900	0,0050552643	4,9747236786	0,2010161900
30	237,3763137998	1181,8815689989	0,0008461085	0,0042127202	4,9789363988	0,2008461085

20%

v	$S=(1+i)^{v}$	$S_{v\rceil}=\frac{(1+i)^{v}-1}{i}$	$\frac{1}{S_{v\rceil}}=\frac{i}{(1+i)^{v}-1}$	$u^{v}=\frac{1}{(1+i)^{v}}$	$a_{v\rceil}=\frac{1-u^{v}}{i}$	$\frac{1}{a_{v\rceil}}=\frac{i}{1-u^{v}}$
31	284,8515765597	1419,2578827986	0,0007045936	0,0035106002	4,9824469990	0,2007045936
32	341,8218918717	1704,1094593583	0,0005868168	0,0029255002	4,9853724992	0,2005868168
33	410,1862702460	2045,9313512300	0,0004887750	0,0024379168	4,9878104160	0,2004887750
34	492,2235242952	2456,1176214760	0,0004071466	0,0020315973	4,9898420133	0,2004071466
35	590,6682291542	2948,3411457712	0,0003391738	0,0016929978	4,9915350111	0,2003391738
36	708,8018749851	3539,0093749255	0,0002825649	0,0014108315	4,9929458426	0,2002825649
37	850,5622499821	4247,8112499106	0,0002354154	0,0011756929	4,9941215355	0,2002354154
38	1020,6746999785	5098,3734998927	0,0001961410	0,0009797441	4,9951012796	0,2001961410
39	1224,8096399742	6119,0481998712	0,0001634241	0,0008164534	4,9959177330	0,2001634241
40	1469,7715679691	7343,8578398454	0,0001361682	0,0006803778	4,9965981108	0,2001361682
41	1763,7258815629	8813,6294078145	0,0001134606	0,0005669815	4,9971650923	0,2001134606
42	2116,4710578755	10577,3552893774	0,0000945416	0,0004724846	4,9976375770	0,2000945416
43	2539,7652694506	12693,8263472529	0,0000787785	0,0003937372	4,9980313141	0,2000787785
44	3047,7183233407	15233,5916167035	0,0000656444	0,0003281143	4,9983594284	0,2000656444
45	3657,2619880088	18281,3099400442	0,0000547007	0,0002734286	4,9986328570	0,2000547007
46	4388,7143856106	21938,5719280530	0,0000455818	0,0002278572	4,9988607142	0,2000455818
47	5266,4572627327	26327,2863136636	0,0000379834	0,0001898810	4,9990505952	0,2000379834
48	6319,7487152793	31593,7435763963	0,0000316518	0,0001582341	4,9992088293	0,2000316518
49	7583,6984583351	37913,4922916756	0,0000263758	0,0001318618	4,9993406911	0,2000263758
50	9100,4381500021	45497,1907500107	0,0000219794	0,0001098848	4,9994505759	0,2000219794
51	10920,5257800026	54597,6289000128	0,0000183158	0,0000915707	4,9995421466	0,2000183158
52	13104,6309360031	65518,1546800154	0,0000152629	0,0000763089	4,9996184555	0,2000152629
53	15725,5571232037	78622,7856160185	0,0000127190	0,0000635908	4,9996820462	0,2000127190
54	18870,6685478444	94348,3427392222	0,0000105990	0,0000529923	4,9997350385	0,2000105990
55	22644,8022574133	113219,0112870670	0,0000088324	0,0000441602	4,9997791988	0,2000088324
56	27173,7627088960	135863,8135444800	0,0000073603	0,0000368002	4,9998159990	0,2000073603
57	32608,5152506752	163037,5762533760	0,0000061336	0,0000306668	4,9998466658	0,2000061336
58	39130,2183008102	195646,0915040510	0,0000051113	0,0000255557	4,9998722215	0,2000051113
59	46956,2619609723	234776,3098048610	0,0000042594	0,0000212964	4,9998935179	0,2000042594
60	56347,5143531667	281732,5717658340	0,0000035495	0,0000177470	4,9999112649	0,2000035495

20%

<u>**Βιβλιογραφία**</u>

1. **Οικονομικά Μαθηματικά** - *Κεραμιδά Τριαντάφυλλου*

2. **Οικονομικά Μαθηματικά** - *Αλεξανδρή Νίκου*

3. **Οικονομικά Μαθηματικά** - *Σφακιανού Γρηγιρίου*
Σφακιανού Παναγιώτη

4.**Στοιχεία Οικονομικών Μαθηματικών** - *Μακρή Κωνσταντίνου*