ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ

ΔΙΑΚΟΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΚΑΡΓΙΩΤΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΠΑΤΡΑ 2013

<u>Περιεχόμενα</u>

Εισαγωγή

Στην σημερινή εποχή υπάρχουν διάφορα οικονομικά προβλήματα που απασχολούν τον σύγχρονο άνθρωπο και που απαιτούν λύσεις. Κάποια από αυτά αφορούν την μεγιστοποίηση του κέρδους μιας εταιρείας ή την ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής σε βιομηχανίες κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες –περιορισμούς. Οι περιορισμοί αυτοί μπορούν να αφορούν τη περιορισμένη πρόσβαση της εταιρείας σε πρώτες ύλες, στη κατανομή του προσωπικού σε σχέση με το ωράριο εργασίας, στην αύξηση του κόστους παραγωγής αν ξεπεραστεί κάποιο συγκεκριμένο όριο και στη πτώση της τιμή πώλησης του προϊόντος καθώς αυξάνει η ποσότητα-προσφορά του στην αγορά. Σε αυτού του είδους τα οικονομικά προβλήματα η επιχειρησιακή έρευνα είναι το κατάλληλο εργαλείο για να μας δώσει λύσεις. Μέσω της μοντελοποίησης του προβλήματος σε μαθηματικό επίπεδο προσπαθούμε να βρούμε την βέλτιστη λύση στο πρόβλημα που μας απασχολεί. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές και υπολογιστικά προγράμματα που εφαρμόζουν τις συγκεκριμένες τεχνικές όπως η μέθοδος simplex. Μια άλλη κατηγορία προβλημάτων αφορούν τον υπολογισμό των χρηματοροών αποπληρωμής ενός δανείου που πρέπει να πληρωθεί σταδιακά σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μέσω σταθερών αλλά και μη σταθερών δόσεων σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που ισαπέχουν χρονικά μεταξύ τους. Σε αυτού του είδους τα προβλήματα επιδιώκουμε να βρούμε το ύψος του ποσού που πρέπει να γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή λαμβάνοντας υπόψη το επιτόκιο. Σε αυτά τα προβλήματα την λύση μας την δίνει η μιγαδική ανάλυση η οποία μας παρέχει όλες τις λύσεις της εξίσωσης που μοντελοποιεί το πρόβλημα. Μέσα στις μιγαδικές λύσεις που βρίσκουμε υπάρχει και η πραγματική λύση και η οποία είναι αυτή που μας ενδιαφέρει. Ένα άλλο είδος οικονομικών προβλημάτων που συναντούμε είναι η εύρεση της βέλτιστης λύσης σε προβλήματα οικονομικής φύσης, δηλαδή της ελαχιστοποίησης για παράδειγμα του κόστους παραγωγής ή την μεγιστοποίηση του κέρδους. Ποια είναι η τιμή εκείνη που πρέπει ένα λιανοπωλητής να πουλήσει το προϊόν του σε μια αγορά με συγκεκριμένη ζήτηση για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Σε αυτή την περίπτωση την λύση δίνει ο διαφορικός λογισμός ο οποίος μέσω της χρήσης της πρώτης και δεύτερης παραγώγου βρίσκουμε τα ακρότατα, τα σημεία στα οποία η εξίσωση, δηλαδή το μοντελοποιημένο πρόβλημα λαμβάνει τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές σε συγκεκριμένες εφικτές περιοχές των μεταβλητών που λαμβάνουν μέρος στο μοντέλο. Επιπλέον σε αυτό το σημείο η εξίσωση μοντελοποίησης του προβλήματος ερευνάται ως προς την συμπεριφορά της σε διάφορα σημεία που θεωρούνται ακραία, δηλαδή είναι στα όρια του προβλήματος που έχει οριστεί, δηλαδή στα όρια των μεταβλητών που λαμβάνουν μέρος. Σε αυτό το πρόβλημα η μελέτη συμπεριφοράς του προβλήματος μέσω της μοντελοποίησης του σε εξίσωση γίνεται μέσω της χρήσης –εύρεσης των ορίων της συνάρτησης στα ζητούμενα σημεία.

Έτσι λοιπόν με βάση τα παραπάνω οικονομικά προβλήματα η πτυχιακή αυτή στοχεύει να παρουσιάσει μαθηματικές μεθόδους που εφαρμόζονται σε οικονομικά προβλήματα για την επίλυση τους. Για τον σκοπό αυτό έχουμε επιλέξει τρεις τομείς των μαθηματικών που κρίναμε ότι έχουν ενδιαφέρον και οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε οικονομικά προβλήματα. Έτσι λοιπόν στο πρώτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον γραμμικό προγραμματισμό και με προβλήματα μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης κάτω από περιορισμούς. Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τους μιγαδικούς αριθμούς και προσπαθούμε να αναδείξουμε τον λόγο 'εφεύρεσης' τους για πρακτικούς λόγους. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον διαφορικό λογισμό, την εύρεση της μέγιστης ή ελάχιστης τιμής συναρτήσεων που μπορεί να είναι κέρδη ή κόστη επιχειρήσεων.

<u>Κεφάλαιο 1^{o}: Γραμμικός Προγραμματισμός</u>

<u>1.1 Γραμμικός Προγραμματισμός</u>

Ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με προβλήματα που αναφέρονται σε ένα πλήθος πηγών, όπως υλικά, μηχανές, εργατικό δυναμικό και ακίνητα. Επειδή αυτά είναι διαθέσιμα πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα. Όμως κατά την διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές έχουν περιορισμούς όπως στην συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται. Σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται μια ποσότητα.

<u>1.1.1 Προϋποθέσεις για την Εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού</u>

Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι τρεις :

Γραμμικότητα

Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, που είναι η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί, θα πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας.

Διαιρετότητα

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού, υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλαδή μεταβλητή) είναι συνεχής, και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται, ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές.

Βεβαιότητα

Το υπόδειγμα του γραμμικού προγραμματισμού προϋποθέτει ότι όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα. Στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.

1.1.2 Το πρόβλημα της Βελτιστοποίησης και του Γραμμικού Προγραμματισμού

Προκειμένου να διατυπώσουμε ένα πρόβλημα **βελτιστοποίησης** θα πρέπει να ορίσουμε: (α) τις μεταβλητές απόφασης (αγνώστους) του προβλήματος, (β) έναν αντικειμενικό στόχο που θα πρέπει να επιτευχθεί, και (γ) τους περιορισμούς που θα ενσωματώνονται στις μεταβλητές απόφασης. Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, ψάχνουμε να βρούμε εκείνες τις τιμές των μεταβλητών απόφασης, οι οποίες θα βελτιστοποιήσουν τον αντικειμενικό στόχο του προβλήματος.

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται ως **πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού** όταν πληρούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις

- Αφορά στη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης των μεταβλητών απόφασης. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται και ως αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Κάθε περιορισμός πρέπει να είναι μια γραμμική εξίσωση ή ανισότητα.
- Κάθε μεταβλητή απόφασης πρέπει οπωσδήποτε να είναι μη αρνητική.

Για παράδειγμα, η κανονική μορφή ενός προβλήματος μεγιστοποιήσεως, με M περιορισμούς και N μεταβλητές απόφασης, έχει ως ακολούθως

$$\max \ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

Όπου

$\max \ z$: ο αντικειμενικό στόχος, ο οποίος είναι η μεγιστοποίηση της $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

$\mathbf{c}$: το διάνυσμα-στήλη $N \times 1$ των N μεταβλητών

$\mathbf{x}$: το διάνυσμα-στήλη $N \times 1$ των N μεταβλητών απόφασης, με $x_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \mathbf{K}, N$

$\mathbf{b}$: το διάνυσμα-στήλη $M \times 1$ των σταθερών όρων

$\mathbf{A}$: μήτρα διαστάσεων $M \times N$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{M1} & a_{N2} & \ldots & a_{MN} \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix},\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$$

Οι μεταβλητές x_i, για $i = 1, 2, \ldots, N$, αποτελούν τα δομικά στοιχεία του προβλήματος που μπορεί να επηρεάσει ο αναλυτής. Για το λόγω αυτό συχνά αναφέρονται και ως μεταβλητές απόφασης (decision variables). Όσο αφορά τις παραμέτρους a_{ij}, για $i = 1, 2, \ldots, N$ $j = 1, 2, ..., M$ αντιπροσωπεύουν τα χαρακτηριστικά των περιορισμών του εκάστοτε προβλήματος που επιλύουμε. Ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος καθορίζονται οι τιμές των παραμέτρων αυτών. Το ίδιο ισχύει και για τις παραμέτρους b_j, για $j = 1, 2, \ldots, M$ ενώ για τις παραμέτρους c_i, για $i = 1, 2, \ldots, N$ οι τιμές τους ορίζονται και πάλι από τα δεδομένα του προβλήματος αλλά αφορούν την αντικειμενική συνάρτηση. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των πεπερασμένων πόρων ενός συστήματος (πρώτες ύλες, εργαζόμενοι, μηχανές, κτλ.) σε διαφορετικές, ανταγωνιζόμενες μεταξύ τους, δραστηριότητες (προϊόντα, υπηρεσίες, κτλ.) κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Η $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ αποτελεί ένα μέτρο της αποδοτικότητας του συστήματος.

1.1.3 Μορφές και Ισοδυναμίες του Γραμμικού Προβλήματος

Στο σημείο αυτό θα ξεκαθαρίσουμε τον διαχωρισμό των γραμμικών προβλημάτων μεταξύ προβλημάτων μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης. Στην πραγματικότητα δεν πρόκειται για διαφορετικά προβλήματα διότι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ένα αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης και το αντίθετο, από τον παρακάτω τύπο:

$\max\ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \Leftrightarrow -\min z' = -\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, ενώ στους περιορισμούς δεν γίνετε καμία αλλαγή.

Για την περιγραφή των περισσοτέρων αλγορίθμων επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων υπάρχουν δύο μορφές, η κανονική μορφή και η τυποποιημένη μορφή.

Η δομή της κανονικής μορφής είναι

$$\max(\acute{\eta}\ \min)\ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

Όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{N2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \text{και } x_i \geq 0 \text{ για } i = 1, 2, \cdots, N\ .$$

Παρατηρούμε ότι στην κανονική μορφή όλοι οι περιορισμοί του συστήματος είναι της μορφής $\{\leq\}$. Αν κάποιο σύστημα είναι μεικτών περιορισμών, δηλαδή περιορισμών της μορφής $\{\leq, =, \geq\}$, πρέπει να γίνουν οι κατάλληλες μετατροπές των περιορισμών, έτσι ώστε το σύστημα να ακολουθήσει τους κανόνες στην κανονική μορφή.

Ένας περιορισμός της μορφής $\{\geq\}$ μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε έναν περιορισμό της κανονικής μορφής, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη του με το (-1) όπως φαίνεται στον παρακάτω τύπο (Αβδέλας, Σίμος, 2003):

$$a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n \geq b. \xrightarrow{(-1)} -a_{.1}x_1 - a_{.2}x_2 - \ldots - a_{.n}x_n \leq -b.$$

Ενώ, ένας περιορισμός της μορφής $\{=\}$ μετατρέπεται, σύμφωνα με τον τύπο:

$$a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n = b. \longrightarrow \begin{cases} a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n \leq b. \\ a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n \geq b. \end{cases} \xrightarrow[(-1)]{(+1)}$$

$$\xrightarrow[(-1)]{(+1)} \begin{cases} a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n \leq b. \\ -a_{.1}x_1 - a_{.2}x_2 - \ldots - a_{.n}x_n \leq -b. \end{cases}$$

Την εξίσωση που παρατηρούμε παραπάνω την γράφουμε με την μορφή δύο ανισώσεων πρώτα ενώ στο επόμενο βήμα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ανίσωση με τον αριθμό 1 και την δεύτερη με τον αριθμό -1 έτσι ώστε να προκύψουν οι δύο τελευταίες ανισώσεις.

Η δομή της τυποποιημένης μορφής είναι

$$\max \; z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{M1} & a_{N2} & \ldots & a_{MN} \end{bmatrix}, \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \text{και } x_i \geq 0 \text{ για } i = 1, 2, \ldots, N \, .$$

Σε αντίθεση με την κανονική μορφή παρατηρούμε ότι στην τυποποιημένη μορφή όλοι οι περιορισμοί του συστήματος είναι ισοτικοί δηλαδή της μορφής $\{=\}$. Για ένα γραμμικό πρόβλημα όπου το σύστημα του είναι μεικτών περιορισμών δηλαδή της μορφής $\{\leq, =, \geq\}$, για να μετασχηματιστεί στην τυποποιημένη πρέπει οι ανισοτικοί περιορισμοί να μετατραπούν σε ισοτικούς. Η μετατροπή αυτή γίνεται με εισαγωγή νέων μεταβλητών. Ένας ανισοτικός περιορισμός της μορφής: $a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n \leq b.$,μετατρέπεται σε ισότητα με πρόσθεση μιας νέας μεταβλητής x_{n+1} στο αριστερό της μέλος. Τότε ο προηγούμενος ανισοτικός περιορισμός είναι ισοδύναμος με το σύστημα των δύο περιορισμών $a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n + x_{n+1} = b. \quad kai \quad x_{n+1} \geq 0$.Η νέα μη αρνητική μεταβλητή x_{n+1} ονομάζεται ελλειμματική.

Ένας ανισοτικός περιορισμός της μορφής: $a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + \ldots + a_{.n}x_n \geq b.$,μετατρέπεται σε ισοτικό με αφαίρεση μιας μεταβλητής x_{n+1} από το αριστερό της μέλος. Τότε η προηγούμενη ανισότητα μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο σύστημα

$a_{.1}x_1 + a_{.2}x_2 + ... + a_{.n}x_n - x_{n+1} = b. \quad kai \quad x_{n+1} \geq 0$. Η νέα μη αρνητική μεταβλητή x_{n+1} ονομάζεται τώρα πλεονασματική. Οι ελλειμματικές και ο πλεονασματικές μεταβλητές ονομάζονται μαζί χαλαρές μεταβλητές (slack variables). Η ελλειμματική μεταβλητή συμβολίζει το ποσό που λείπει από το αριστερό μέλος της ανισότητας για να γίνει ίσο με το δεξιό. Παρόμοια, η πλεονασματική μεταβλητή είναι το ποσό που πλεονάζει στο αριστερό μέλος της ανισότητας σε σύγκριση με το δεξιό μέρος.

Κάθε χαλαρή μεταβλητή χρησιμοποιείται μόνο σε ένα περιορισμό, ενώ στην αντικειμενική συνάρτηση θα έχει συντελεστή μηδέν.

Μετατροπή ενός πρωτεύοντος γραμμικού προβλήματος στο αντίστοιχο δυαδικό.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονιστεί ότι οποιοδήποτε πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να θεωρηθεί ως πρωτεύον και με τις κατάλληλες τροποποιήσεις να βρούμε το αντίστοιχο δυαδικό του.

Θεωρώντας ότι το πρωτεύον πρόβλημα είναι στην κανονική του μορφή δηλαδή οι περιορισμοί είναι τις μορφής $\{\leq\}$, έχουμε τα εξής

- Το πλήθος των μεταβλητών του πρωτεύοντος προβλήματος ορίζει το πλήθος των περιορισμών του δυαδικού προβλήματος.
- Το πλήθος των περιορισμών του πρωτεύοντος προβλήματος ορίζει το πλήθος των μεταβλητών του δυαδικού προβλήματος.
- Αν στο πρωτεύον πρόβλημα ζητείται να μεγιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση στο δυαδικό θα είναι προς ελαχιστοποίηση και το αντίθετο.
- Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος προβλήματος θα είναι το δεξί μέλος των περιορισμών του δυαδικού.
- Το δεξί μέλος των περιορισμών του πρωτεύοντος θα είναι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυαδικού.
- Ο ανάστροφος πίνακας των συντελεστών από τους περιορισμούς το πρωτεύοντος προβλήματος θα είναι ο πίνακας των συντελεστών του δυαδικού.
- Οι ανισότητες του δυαδικού προβλήματος είναι αντίθετες από αυτές του πρωτεύοντος προβλήματος.

1.1.4 Λύση του Γραμμικού Προβλήματος

Το σύνολο όλων των εφικτών σημείων, δηλαδή των σημείων που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος, ονομάζεται εφικτή περιοχή. Αν η εφικτή περιοχή είναι κενό σύνολο, το πρόβλημα είναι αδύνατο. Διαφορετικά είναι εφικτό. Ένα εφικτό σημείο, x, ενός γραμμικού προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι βέλτιστο, αν για κάθε άλλο εφικτό σημείο y ισχύει η σχέση $\mathbf{c}^T x \leq \mathbf{c}^T y$. Ομοίως, ένα εφικτό σημείο, x, ενός γραμμικού προβλήματος μεγιστοποίησης είναι βέλτιστο, αν για κάθε άλλο εφικτό σημείο y ισχύει η σχέση $\mathbf{c}^T x \geq \mathbf{c}^T y$. Ένα γραμμικό πρόβλημα το οποίο έχει βέλτιστα σημεία ονομάζεται βέλτιστο πρόβλημα. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα βέλτιστο σημείο ονομάζεται βέλτιστη τιμή. Ένα εφικτό πρόβλημα, που δεν είναι βέλτιστο, είναι απεριόριστο. Ένα εφικτό γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης (μεγιστοποίησης) είναι απεριόριστο αν υπάρχει ακολουθία εφικτών σημείων $\{x^1, x^2, \ldots\}$ τέτοια ώστε η ακολουθία των αντικειμενικών τιμών $\{\mathbf{c}^T x^1, \mathbf{c}^T x^2, \ldots\}$ να τείνει στο $-\infty$ ($+\infty$). Η λύση ενός γραμμικού προβλήματος, είναι ο προσδιορισμός της κατηγορίας στην οποία ανήκει: αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο, αλλά και η εύρεση τουλάχιστον ενός βέλτιστου σημείου. Εφικτή λύση είναι στην πραγματικότητα κάθε λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς. Τις περισσότερες φορές σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν άπειρες λύσεις και επιδιώκουμε την εύρεση της βέλτιστης δυνατής λύσης

Σε αυτό το σημείο καλό είναι να αναφέρουμε ότι έχοντας γνώση για το τι είναι το πρωτεύον πρόβλημα μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για το αντίστοιχο δυαδικό του και αντίστροφα(θεώρημα Δυαδικότητας). Συγκεκριμένα:

- εάν γνωρίζουμε ότι ένα από τα δύο προβλήματα (πρωτεύον και δυαδικό) είναι βέλτιστο τότε και το άλλο αντίστοιχα θα είναι βέλτιστο.
- Εάν το ένα από τα προβλήματα είναι απεριόριστο το άλλο είναι αδύνατο.

1.1.5 Μοντελοποίησης ενός Γραμμικού Προβλήματος

Ας υποθέσουμε ότι μια εταιρεία διαθέτει μια γραμμή παραγωγής δύο προϊόντων, το προϊόν Ι και το προϊόν ΙΙ. Έχουμε δηλαδή ένα σύνολο δραστηριοτήτων, σε κάθε μία από αυτές αντιστοιχούμε μια μεταβλητή x_j ($j = 1, 2$) η τιμή της οποίας προσδιορίζεται από τη λύση του προβλήματος. Για την παραγωγή αυτών των προϊόντων η εταιρεία χρησιμοποιεί ανά εβδομάδα τρεις συντελεστές παραγωγής: πρώτη ύλη, εργασία, και κεφάλαιο. Έχουμε δηλαδή ένα σύνολο πόρων ή μέσων, οι οποίοι ωστόσο διατίθενται σε περιορισμένες ποσότητες.

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τα δεδομένα του προβλήματος που έχουν προσδιοριστεί και αφορούν την παραγωγή ενός τεμαχίου του κάθε προϊόντος, σε εβδομαδιαία βάση:

ΕΙΣΡΟΕΣ	**Προϊόν Ι**	**Προϊόν ΙΙ**	**Διαθεσιμότητα**
Εργασία	$1x_1$	$3x_2$	≤ 1.000
Κεφάλαιο	$2x_1$	$5x_2$	≤ 2.000
Πρώτες Ύλες	$1x_1$	$1x_2$	≤ 550
Κέρδος	$150x_1$	$200x_2$	
Περιορισμοί στην Παραγωγή	$0 \leq x_1 \leq 400$	$0 \leq x_2$	

Πίνακας: Δεδομένα Ενός Προβλήματος Παραγωγής σε Εβδομαδιαία Βάση

όπου

x_1: τα τεμάχια του προϊόντος Ι που παράγονται εβδομαδιαία

x_2: τα τεμάχια του προϊόντος ΙΙ που παράγονται εβδομαδιαία

x_1, x_2: οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος

Από τον παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε αρχικά τους τεχνολογικούς περιορισμούς, οι οποίοι εκφράζουν τους νόμους λειτουργίας των δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι για να παραχθεί ένα τεμάχιο του προϊόντος Ι απαιτούνται 1 μονάδα εργασίας, 2 μονάδες κεφαλαίου, και 1 μονάδα πρώτων υλών, ενώ για την αντίστοιχη παραγωγής του προϊόντος ΙΙ απαιτούνται 3 μονάδες εργασίας, 5 μονάδες κεφαλαίου, και μια μονάδα πρώτων υλών. Εν συνεχεία, παρατηρούμε ότι εβδομαδιαίως, υπάρχουν διαθέσιμες 1.000 μονάδες εργασίας. 2.000 μονάδες κεφαλαίου, και 550 μονάδες πρώτων υλών. Τέλος, το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι €150 και €200 για το προϊόν I και II, αντίστοιχα.

Όλα τα παραπάνω, δηλαδή οι τεχνολογικές απαιτήσεις της παραγωγής, οι διαθέσιμες ποσότητες παραγωγικών συντελεστών, και το κέρδος αποτελούν τα *μη ελεγχόμενα στοιχεία* του προβλήματος. Ο *αντικειμενικός στόχος* είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού εβδομαδιαίου κέρδους από την πώληση των δύο προϊόντων.

Συνεπώς, το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού έχει ως ακολούθως

$$\max p = 150x_1 + 200x_2$$

Υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + 3x_2 \leq 1.000$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 2.000$$

$$x_1 + x_2 \leq 550$$

$$x_1 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το παραπάνω είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού διότι

- Ο αντικειμενικό στόχος είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης
- Οι περιορισμοί είναι ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων των μεταβλητών απόφασης.

1.1.6 Γραφικής Επίλυσης ενός Γραμμικού Προβλήματος

Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\max\ z = 60x + 50y$$

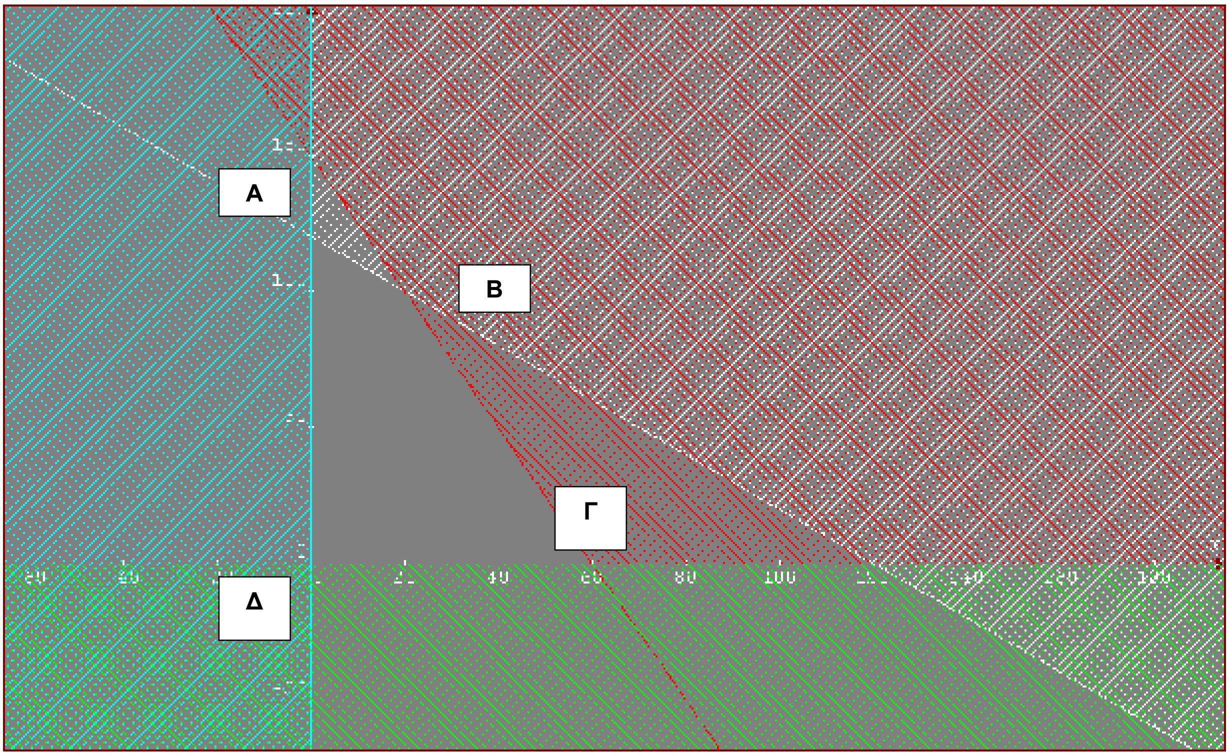
Υπό τους περιορισμούς

$$100x + 40y \leq 6.000$$

$$x + y \leq 120$$

$$x, y \geq 0$$

Αρχικά, σύμφωνα με τους Zitareli και Couglin (Philadelphia Saunders College, 1989), παρουσιάζουμε την γραφική παράσταση εκάστου περιορισμού



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση παραδείγματος γραμμικού προβλήματος

Στο παραπάνω σχήμα, η γκρι περιοχή είναι αυτή που ικανοποιεί τους περιορισμούς που περιγράφουν οι παραπάνω ανισότητες. Εν συνεχεία, βρίσκουμε τα **ακραία σημεία,** στα οποία τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.

- Σημείο $\mathrm{A} = (x, y) = (0,120)$, προκύπτει από την τομή της περιοριστικής ευθείας $x + y = 120$ και του άξονα y

- Σημείο $B=(x,y)=(20,100)$, προκύπτει από την τομή των ευθειών $x+y=120$ και $100x+40y=6.000$
- Σημείο $\Gamma=(x,y)=(60,0)$, προκύπτει από την τομή της περιοριστικής ευθείας $100x+40y=6.000$ και του άξονα x
- Σημείο $\Delta=(x,y)=(0,0)$, αρχή των αξόνων.

Τέλος, αξιολογούμε την αντικειμενική συνάρτηση στα ακραία σημεία

x	y	**Αντικειμενική Συνάρτηση**
0	0	0
60	0	3.600
0	120	6.000
20	100	**6.200**

Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αντικειμενική συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, $z=6200$ για $x=20\ \ kai\ \ y=100$ όπου είναι το βέλτιστο σημείο.

1.2 Η κλασική μέθοδος Simplex

Στη παρούσα ενότητα εξετάζουμε την κλασσική μέθοδο Simplex ως μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και η οποία αναπτύχθηκε το 1947 από τον George B. Dantzig. Στη πραγματικότητα η μέθοδος Simplex είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος η οποία ξεκινά με μια αρχική εφικτή λύση και μέσω επαναλήψεων μετακινείται προς μια καλύτερη λύση ενώ τερματίζεται όταν βρεθεί η άριστη λύση.

Ο μηχανισμός εφαρμογής του αλγόριθμου αυτού λειτουργεί ως εξής: κατασκευάζεται στην πραγματικότητα μια πεπερασμένη ακολουθία βασικών λύσεων. Δύο βάσεις που διαφέρουν σε ένα δείκτη μόνο ονομάζονται γειτονικές. Αυτό κάνει και ο αλγόριθμος αυτός, κατασκευάζει γειτονικές βασικές λύσεις. Ο μηχανισμός υλοποίησης της γειτονικής βάσης είναι μέσω της περιστροφής. Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά την όλη μέθοδο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το πρόβλημα:

$$\max \ c^T x$$

Με τους περιορισμούς

$$Ax = b, x \geq 0$$

Το παραπάνω πρόβλημα το οργανώνουμε σε μορφή πίνακα ή ταμπλό.

1.2.1 Με Μορφή Ταμπλό του Αλγόριθμου Simplex

Με βάσει λοιπόν την τυποποιημένη μορφή του γραμμικού προβλήματος (αν το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι εξαρχής στην τυποποιημένη μορφή πρέπει να γίνουν οι κατάλληλες μετατροπές όπως περιγράφονται στο κεφάλαιο 1, που έχουμε παραπάνω παίρνουμε το παρακάτω ταμπλό (μια πιο αναλυτική μορφή του παρακάτω πίνακα φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί).

$$T = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & 0 \end{array}\right]$$

Το ταμπλό αυτό που αποθηκεύει τα αρχικά δεδομένα A, b και c έχει διάσταση m+1 γραμμές και n+1 στήλες (ο αρχικός πίνακας A έχει διάσταση m*n). Καθώς επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης λαμβάνουν αρνητικό πρόσημο όταν το πρόβλημα είναι μεγιστοποίησης και θετικό όταν είναι ελαχιστοποίησης. Πιο αναλυτικά το πρόβλημα έχει την παρακάτω μορφή:

	X_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{21}		a_{1n}	1	0	…	0	B_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1	…	0	B_2
….	….	….	….	….	….	….	….	….	….
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	…	1	
	$\pm c_1$	$\pm c_2$	…	$\pm c_n$	0	0	….	0	0

Σχήμα 2: Το ταμπλό του αλγορίθμού Simplex

Αλγόριθμος Simplex(με τη μορφή ταμπλό)
Βήμα 1. Ελέγχουμε τα στοιχεία της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης (είναι η τελευταία γραμμή στο παραπάνω ταμπλό). Στη περίπτωση που όλα τα $c_i\ gia\ i = 1, 2, \ldots, n$ δεν είναι αρνητικά η τρέχουσα λύση είναι άριστη. Στην αντίθετη περίπτωση συνεχίζουμε στο βήμα 2. **Βήμα 2.** Επιλέγουμε μια μη βασική μεταβλητή που να αντιστοιχεί στην πιο αρνητική τιμή στη γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης, για να εισέλθει στη βάση. Στην ουσία προσδιορίζουμε την στήλη περιστροφής. Η μεταβλητή αυτή $x_k,\ 1 \le k \le n+m$ ονομάζεται εισερχόμενη μεταβλητή. **Βήμα 3.** Ελέγχουμε όλους τους συντελεστές στην στήλη περιστροφής για το αν ισχύει η συνθήκη $a_{ik} \le 0,\ \ i = 1, \ldots, m$. Αν ισχύει τότε πρόβλημα είναι απεριόριστο. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο βήμα 4. **Βήμα 4.** Υπολογίζονται οι λόγοι $\Theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ik}}\ \ I = \{i : 1 \le i \le m\ \ \&\, a_{ik} > 0\}$ Επιλέγουμε το μικρότερο Θ_i. Από τον προσδιορισμό του μικρότερου Θ προσδιορίζεται και η γραμμής περιστροφής, δηλαδή η εξερχόμενη μεταβλητή. **Βήμα 5.** Για τη δημιουργία του επόμενου ταμπλό που αντιπροσωπεύει την νέα βασική εφικτή λύση διαιρούμε κάθε στοιχείο της γραμμής περιστροφής με το στοιχείο περιστροφής. Χρησιμοποιούμε αυτή τη γραμμή για την εκτέλεση γραμμοπράξεων στις υπόλοιπες γραμμές προκειμένου να μηδενιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης περιστροφής.

Σχήμα 3: Αλγόριθμος Simplex (με τη μορφή ταμπλό)

Στην συνέχεια ακολουθεί ένα παράδειγμα επίλυσης γραμμικού προβλήματος μεγιστοποίησης με την μέθοδο Simplex χρησιμοποιώντας ταμπλό.

Παράδειγμα

Να λυθεί με τη χρήση ταμπλό το γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} MaximizeZ &= 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 18 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 42 \\ 3x_1 + x_2 &\le 24 \\ x_i \ge 0, &\quad i = 1,2 \end{aligned}$$

Μετατρέπουμε τις ανισότητες των περιορισμών σε ισότητες εισάγοντας δύο χαλαρές μεταβλητές $x_{3,} x_4 \; kai \; x_5$, έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} MaximizeZ &= 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 42 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 24 \\ x_i \ge 0, &\quad i = 1,2\ldots,5 \end{aligned}$$

Επίσης επειδή ζητείται η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης οι συντελεστές της θα λάβουν αρνητικό πρόσημο. Τώρα πλέον σχηματίζουμε το ταμπλό της μεθόδου simplex

Βασικές Μεταβλητές	Συντελεστές					Σταθερές Δεξιού μέλους
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	
X_3	2	1	1	0	0	18
X_4	2	3	0	1	0	42
X_5	3	1	0	0	1	24
	-3	-2	0	0	0	0

C

Στο παραπάνω ταμπλό παρατηρούμε ότι ο πιο αρνητικός συντελεστής της αντικειμενικής συνάρτησης λαμβάνει η μεταβλητή x_1, επομένως θα είναι η εισερχομένη μεταβλητή στη βάση του επόμενου ταμπλό. Ενώ το μικρότερο $\Theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}} \quad I = \{i : 1 \le i \le m \ \& a_{ik} > 0\} \Rightarrow \quad \Theta_5 = 24/3$ λαμβάνει η μεταβλητή x_5, όπου και θα είναι η εξερχόμενη μεταβλητή.

Εφόσον διαιρέσουμε κάθε στοιχείο της γραμμής περιστροφής με το στοιχείο περιστροφής και τις κατάλληλες γραμμοπράξης μεταξύ γραμμής περιστροφής και τις υπόλοιπες γραμμές του 1ου ταμπλό, προκύπτει το παρακάτω ταμπλό.

Βασικές Μεταβλητές	Συντελεστές					Σταθερές Δεξιού μέλους
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	
X_3	0	1/3	1	0	-2/3	2
X_4	0	7/3	0	1	-2/3	26
X_1	1	1/3	0	0	1/3	8
	0	-1	0	0	1	24

C

Από παραπάνω ταμπλό η εισερχομένη μεταβλητή θα είναι η x_2 και η εξερχόμενη μεταβλητή η x_3.

Ακολουθώντας τα βήματα της μεθόδου και κάνοντας τις ανάλογες πράξεις προκύπτει το επόμενο ταμπλό.

Βασικές Μεταβλητές	Συντελεστές					Σταθερές Δεξιού μέλους
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	
X_2	0	1	3	0	-2	6
X_4	0	0	-7	1	4	12
X_1	1	0	-1	0	1	6
	0	0	3	0	-1	30
	C					

Συνεχίζοντας με την ίδια διαδικασία δημιουργείται το ταμπλό

Βασικές Μεταβλητές	Συντελεστές					Σταθερές Δεξιού μέλους
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	
X_2	0	1	-1/2	0	0	12
X_5	0	0	-7/4	0	1	3
X_1	1	0	-3/4	0	0	3
	0	0	5/4	0	0	33
	C					

Σε αυτό το σημείο ο αλγόριθμος σταματά καθώς έχει βρει μια βέλτιστη λύση, διότι για τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ισχύει $c_i \geq 0 \ gia \ \ i = 1, 2, ..5$.

Επομένως η άριστη λύση θα είναι $x_1 = 3,\ x_2 = 12.$ όπου μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση και παίρνει την τιμή Ζ =33.

http://www.phpsimplex.com/en/simplex_method_example.htmSimplex.pdf

1.3 Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε δύο εφαρμογές που βασίζονται στο γραμμικό προγραμματισμό. Για την επίλυση τους χρησιμοποιούμε το excel.

Εφαρμογή 1

Η «Φαρμακευτική Εμβολίων ΑΕ» παράγει και διαθέτει εμβόλια για τον «Χ» τύπο γρίπης σε όλη την Ελλάδα. Για το έτος 2011 η εταιρεία προβλέπει ζήτηση ύψους 180.000 μονάδων στη Δυτική Ελλάδα, 250.000 μονάδων στη Βόρεια Ελλάδα, 320.000 μονάδων στη Ανατολική-Κεντρική Ελλάδα, και 210.000 μονάδων στη Νότια Ελλάδα. Η εταιρεία σχεδιάζει το παραγωγικό-αποθηκευτικό της δίκτυο. Έχουν επιλεγεί 4 υποψήφιες περιοχές για δημιουργία εργαστηρίων-εργοστασίων : Αγρίνιο, Θεσσαλονίκη, Λαμία και Πάτρα. Οι παραγωγικές-αποθηκευτικές μονάδες μπορεί να έχουν δυναμικότητα είτε 300.000 είτε 500.000 μονάδες. Τα ετήσια σταθερά κόστη (σε χιλιάδες €) για τις 4 τοποθεσίες καθώς και τα κόστη παραγωγής και μεταφοράς (σε €/εμβόλιο) για την κάθε μονάδα για κάθε μια από τις 4 αγορές φαίνονται στον πίνακα 1 παρακάτω.

Πίνακας 1.1

Αγορά **Εργοστ.**	**Κεντρική Ανατολική Ελλάδα**	**Βόρεια Ελλάδα**	**Νότια Ελλάδα**	**Δυτική Ελλάδα**	**Σταθερό κόστος για** 300.000	**Σταθερό κόστος για** 500.000
Λαμία	2,12	2,34	2,52	2,70	5.000	8.000
Θεσσ/κη	2,32	2,12	2,35	2,50	6.500	10.000
Πάτρα	2,27	2,80	2,15	2,18	5.500	8.500
Αγρίνιο	2,72	2,52	2,22	2,10	5.200	9.000

Ζήτηση	320.000	250.000	210.000	180.000		

Που πρέπει να εγκαταστήσει η εταιρία τα εργοστάσιά της και τι δυναμικότητα πρέπει να έχουν αυτά; Ποιο εργοστάσιο προμηθεύει ποια αγορά και με τι αποστολές; Σε ποιο βαθμό αξιοποιείται η δυναμικότητα του κάθε εργοστασίου (Άσκηση της Σχολής Επιστημόνων Υγείας, Τμήμα Φαρμακευτικής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2011);

Λύση

Στο παρακάτω πίνακα καταγράφουμε τις μεταβλητές απόφασης για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι μεταβλητές X_{ij} αντιπροσωπεύουν τις μεταφερόμενες ποσότητες εμβολίων από τα εργοστάσια στους τόπους κατανάλωσης ενώ οι μεταβλητές Y_{ij} αντιπροσωπεύουν τις μεταβλητές απόφασης για το αν θα κατασκευαστεί εργοστάσιο δυναμικότητας 300.000 εμβολίων ή 500.000. Οι μεταβλητές Y_{ij} πρέπει να οριστούν ως μεταβλητές που παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές.

Αγορά / **Εργοστ.**	**Κεντρική Ανατολική Ελλάδα**	**Βόρεια Ελλάδα**	**Νότια Ελλάδα**	**Δυτική Ελλάδα**	**Σταθερό κόστος για** 300.000	**Σταθερό κόστος για** 500.000
Λαμία	$2{,}12x_{11}$	$2{,}34\ x_{12}$	$2{,}52\ x_{13}$	$2{,}70\ x_{14}$	$5.000\ y_{11}$	$8.000\ y_{12}$
Θεσσ/κη	$2{,}32\ x_{21}$	$2{,}12\ x_{22}$	$2{,}35\ x_{23}$	$2{,}50\ x_{24}$	$6.500\ y_{21}$	$10.000\ y_{22}$
Πάτρα	$2{,}27\ x_{31}$	$2{,}80\ x_{32}$	$2{,}15\ x_{33}$	$2{,}18\ x_{34}$	$5.500\ y_{31}$	$8.500\ y_{32}$
Αγρίνιο	$2{,}72\ x_{41}$	$2{,}52\ x_{42}$	$2{,}22\ x_{43}$	$2{,}10\ x_{44}$	$5.200\ y_{41}$	$9.000\ y_{42}$
Ζήτηση	320.000	250.000	210.000	180.000		

Αντικειμενική συνάρτηση είναι

$\min Z=2{,}12x_{11}+2{,}34\ x_{12}+2{,}52\ x_{13}+2{,}70\ x_{14}+5.000\ y_{11}+8.000\ y_{12}+$

$+2{,}32\ x_{21}+2{,}12\ x_{22}+2{,}35\ x_{23}+2{,}50\ x_{24}+6.500\ y_{21}+10.000\ y_{22}+$

$+2{,}27\ x_{31}+2{,}80\ x_{32}+2{,}15\ x_{33}+2{,}18\ x_{34}+5.500\ y_{31}+8.500\ y_{32}+$

$+2{,}72\ x_{41}+2{,}52\ x_{42}+2{,}22\ x_{43}+2{,}10\ x_{44}+5.200\ y_{41}+9.000\ y_{42}$

Οι περιορισμοί είναι

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\geq 320.000$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}\geq 250.000$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\geq 210.000$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}\geq 180.000$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}-300.000y_{11}-500.000y_{12}\leq 0$$
$$y_{11}+y_{12}\leq 1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}-300.000y_{21}-500.000y_{22}\leq 0$$
$$y_{21}+y_{22}\leq 1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}-300.000y_{31}-500.000y_{32}\leq 0$$
$$y_{31}+y_{32}\leq 1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}-300.000y_{41}-500.000y_{42}\leq 0$$
$$y_{41}+y_{42}\leq 1$$
$$x_{ij},y_{ij}\geq 0 \quad \forall i,j$$

Οι ανισώσεις εξισώσεις όπως η $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}-300.000y_{11}-500.000y_{12}\leq 0$ δημιουργήθηκαν με το σκεπτικό ότι οι παραγόμενες ποσότητες από το i εργοστάσιο πρέπει να είναι μικρότερες των 300.000 ή των 500.000 Στην περίπτωση που δημιουργηθεί εργοστάσιο παραγωγικότητας 300.000 το y_{12} μηδενίζεται και το y_{11} παίρνει την τιμή 1. Η ίδια λογική ισχύει αν δημιουργηθεί εργοστάσιο παραγωγικότητας 500.000. Αν τώρα δεν δημιουργηθεί εργοστάσιο τα y_{12}, y_{11} μηδενίζονται όπως και τα αντίστοιχα x. **Από το** excel **παίρνουμε την ακόλουθη λύση**

Αγορά **Εργοστ.**	**Κεντρική Ανατολική Ελλάδα**	**Βόρεια Ελλάδα**	**Νότια Ελλάδα**	**Δυτική Ελλάδα**	**Δυναμικότητας** 300.000	**Βαθμός αξιοποίησης της δυναμικότητας**
Λαμία	141017	0	0	39045,5	χ	0,600208
Θεσσ/κη	2727,28	250000	0	409,139	χ	0,843788
Πάτρα	2318,193	0	210000	28109,1	χ	0,801424
Αγρίνιο	173936,8	0	0	112436,2	χ	0,954577

Ζήτηση	320.000	250.000	210.000	180.000		

Το **συνολικό ελάχιστο κόστος είναι** 2.193.924 **ευρώ**

Εφαρμογή 2

Η εταιρία ΚΑΠΑ ΑΕ παράγει χορτοκοπτικά μηχανήματα, συναρμολογώντας εξαρτήματα που αγοράζει από τους προμηθευτές της. Ο Πίνακας 2.1. παρουσιάζει την πρόβλεψη της ζήτησης για την περίοδο Ιανουαρίου – Ιουνίου 2011 ενός συγκεκριμένου τύπου (Α) χορτοκοπτικού μηχανήματος για το οποίο η επιχείρηση επιθυμεί να καταστρώσει το σχέδιο συγκεντρωτικού προγραμματισμού. Στόχος της εταιρίας είναι να ικανοποιήσει την εποχική ζήτηση και να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της (Άσκηση της Σχολής Επιστημόνων Υγείας, Τμήμα Φαρμακευτικής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2011);.

Πίνακας 2.1. Πρόβλεψη ζήτησης εργαλείου Α για την εταιρία ΚΑΠΑ ΑΕ.

Μήνας	**Πρόβλεψη ζήτησης**
Ιανουάριος	1.800
Φεβρουάριος	3.200
Μάρτιος	3.400
Απρίλιος	4.000
Μάιος	2.400
Ιούνιος	2.400

Οι επιλογές που έχει η επιχείρηση για την αντιμετώπιση της εποχικότητας είναι:

- Να αυξήσει τον αριθμό των εργαζομένων κατά τη διάρκεια της υψηλής ζήτησης
- Να αναθέσει ένα μέρος της παραγωγής του εργαλείου ως υπεργολαβία σε μια άλλη επιχείρηση
- Να δημιουργήσει αποθέματα κατά τη διάρκεια των μηνών με χαμηλή ζήτηση
- Να συσσωρεύσει ανεκτέλεστες παραγγελίες οι οποίες θα παραδοθούν αργότερα στους πελάτες.

Η παραγωγική ικανότητα της επιχείρησης καθορίζεται κυρίως από τις συνολικές ώρες εργασίας των υπαλλήλων της και συνεπώς η παραγωγική ικανότητα των μηχανών δεν περιορίζει την παραγωγική ικανότητα της επιχείρησης. Στον Πίνακα 2.2. παρουσιάζονται τα αναγκαία δεδομένα αναφορικά με τη λειτουργία της επιχείρησης (παραγωγή και διάθεση των εργαλείων). Επιπλέον αναφέρεται ότι η εταιρία δεν έχει κανένα όριο στις υπεργολαβίες, στα αποθέματα και στις ανεκτέλεστες παραγγελίες. Όλες οι ελλείψεις θα παραδοθούν με καθυστέρηση από την παραγωγή των επόμενων μηνών. Οι δαπάνες των αποθεμάτων υπολογίζονται με βάση το τελικό απόθεμα κάθε μήνα.

Πίνακας 2.2. Δαπάνες και άλλα στοιχεία για την παραγωγή του εργαλείου Α

Αντικείμενο	**Κόστος**
Κόστος 1^{ων} υλών	10 €/ τεμάχιο
Κόστος διατήρησης αποθεμάτων	2 €/ τεμάχιο / μήνα
Κόστος ανεκπλήρωτων παραγγελιών	5 €/ τεμάχιο / μήνα
Κόστος πρόσληψης και εκπαίδευσης	300 € / υπάλληλο
Κόστος απολύσεων	500 € / υπάλληλο
Κόστος ωρομίσθιας εργασίας	4 € / ώρα
Κόστος υπερωριακής εργασίας	6 € / ώρα
Κόστος υπεργολαβίας	30 €/ τεμάχιο
Απαιτούμενη ώρα εργασίας για τη συναρμολόγηση του εργαλείου	4 ώρες / τεμάχιο
Ώρες κανονικής εργασίας υπαλλήλου	8 ώρες / ημέρα – 20 ημέρες / μήνα
Επιτρεπόμενες υπερωρίες	10 ώρες / μήνα / υπάλληλο
Αρχικός αριθμός εργαζομένων (1/1/2001)	90 υπάλληλοι
Αρχικό απόθεμα εργαλείων (1/1/2011)	1.200 τεμάχια
Τελικό απόθεμα εργαλείων (30/6/2011)	500 τεμάχια
Επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης πελατών	Ικανοποίηση ολόκληρης της ζήτησης
Τιμή διάθεσης εργαλείου	40 € / τεμάχιο

Α) Να βρεθεί το σχέδιο του βέλτιστου συγκεντρωτικού προγραμματισμού για την εταιρία.

Β) Η εταιρία ΚΑΠΑ ΑΕ επιθυμεί να εξετάσει το σχέδιο συγκεντρωτικού προγραμματισμού στην περίπτωση όπου η ζήτηση του εργαλείου της παρουσιάσει πιο έντονη εποχική διακύμανση και συγκεκριμένα όταν η πρόβλεψη της ζήτηση είναι όπως παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα, ενώ όλα τα υπόλοιπα δεδομένα παραμένουν ίδια.

Πίνακας 2.3. Πρόβλεψη ζήτησης εργαλείου Α για την εταιρία ΚΑΠΑ ΑΕ. με υψηλή εποχικότητα διακύμανσης

Μήνας	**Πρόβλεψη ζήτησης**
Ιανουάριος	1.200
Φεβρουάριος	3.200
Μάρτιος	4.000
Απρίλιος	5.000
Μάιος	2.200
Ιούνιος	1.600

Γ) Η επιχείρηση ΚΑΠΑ ΑΕ επιθυμεί να εξετάσει πως θα αλλάξει το σχέδιο του συγκεντρωτικού προγραμματισμού, εάν το κόστος διατήρησης αποθεμάτων αυξηθεί από 2 €/τεμάχιο σε 6 €/τεμάχιο.

Λύση

Α)

Παρακάτω ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης:

x_i: πλήθος ατόμων που προσλαμβάνει τον μήνα i

y_i: πλήθος ατόμων που απολύει τον μήνα i

z_i: πλήθος υπερωριών τον μήνα i

A_i: Πλήθος τεμαχίων που αποθηκεύονται τον μήνα i (στο τέλος του μήνα)

di: Πλήθος ανεκτέλεστων τεμαχίων τον μήνα i

κi:πλήθος τεμαχίων από υπεργολαβία

κόστος ωρομίσθιας εργασίας τον μήνα i: $(90 + x_i - y_i) \cdot 8 \cdot 4 \cdot 20$

κόστος υπερωριακής εργασίας τον μήνα i: $6z_i$

κόστος υπεργολαβικής εργασίας τον μήνα i: $30k_i$

κόστος διατήρησης αποθεμάτων για τον μήνα i (εκτός του πρώτου): $2A_i$ και 2*500 (για τον τελευταίο μήνα)

κόστος προσλήψεων τον μήνα i: $300x_i$

κόστος απολύσεων τον μήνα i: $500y_i$

κόστος ανεκπλήρωτων παραγγελιών τον μήνα i: $5d_i$

Με βάσει τα παραπάνω η αντικειμενική συνάρτηση έχει την ακόλουθη μορφή

$$\max[\sum_{i=1}^{6}(\frac{(90+x_i-y_i)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_i}{4}+k_i)\cdot 40+(1200-500)\cdot 40-$$
$$-\sum_{i=1}^{6}(90+x_i-y_i)\cdot 8\cdot 4\cdot 20-\sum_{i=1}^{6}6z_i-\sum_{i=1}^{6}300x_i-\sum_{i=1}^{6}500y_i-\sum_{i=1}^{6}30k_i-$$
$$-\sum_{i=1}^{5}2A_i-2\cdot 500-\sum_{i=1}^{6}5d_i]$$

$$\max[\sum_{i=1}^{6}((90+x_i-y_i)\cdot 960+10z_i+40k_i)+2800-$$
$$-\sum_{i=1}^{6}6z_i-\sum_{i=1}^{6}300x_i-\sum_{i=1}^{6}500y_i-\sum_{i=1}^{6}30k_i-$$
$$-\sum_{i=1}^{5}2A_i-1000-\sum_{i=1}^{6}5d_i]$$

$$\max[\sum_{i=1}^{6}((660x_i-460y_i)+4z_i+10k_i)+88200-\sum_{i=1}^{5}2A_i-\sum_{i=1}^{6}5d_i]$$

Το $(1200-500)\cdot 40$ έχει βγει με το σκεπτικό ότι από αρχικό απόθεμα 1200 μονάδων θα μείνει με 500 στο τέλος, επομένως θα πουλήσει με κέρδος 40 ευρώ το τεμάχιο 700 τεμάχια. Οι περιορισμοί είναι οι παρακάτω:

Περιορισμός υπερωριών (στο δεξί μέρος της ανίσωσης είναι οι υπάλληλοι για τον κάθε μήνα επί το μέγιστο αριθμό ωρών υπερωριών που μπορεί να κάνει ένας υπάλληλος)

$$z_1 \leq 10(90 + x_1 - y_1)$$
$$z_2 \leq 10(90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2)$$
$$z_3 \leq 10(90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3)$$
$$z_4 \leq 10(90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4)$$
$$z_5 \leq 10(90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4 + x_5 - y_5)$$
$$z_6 \leq 10(90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4 + x_5 - y_5 + x_6 - y_6)$$

Ή

$$z_1 - 10x_1 + 10y_1 \leq 900$$
$$z_2 - 10x_1 + 10y_1 - 10x_2 + 10y_2 \leq 900$$
$$z_3 - 10x_1 + 10y_1 - 10x_2 + 10y_2 - 10x_3 + 10y_3 \leq 900$$
$$z_4 - 10x_1 + 10y_1 - 10x_2 + 10y_2 - 10x_3 + 10y_3 \leq 900$$
$$z_5 - 10x_1 + 10y_1 - 10x_2 + 10y_2 - 10x_3 + 10y_3 - 10x_4 + 10y_4 \leq 900$$

$$z_6 - 10x_1 + 10y_1 - 10x_2 + 10y_2 - 10x_3 + 10y_3 - 10x_4 +$$
$$10y_4 - 10x_5 + 10y_5 - 10x_6 + 10y_6 \leq 900$$

Περιορισμός απολύσεων (στο δεξί μέρος της ανίσωσης υπάρχει το πλήθος των υπαλλήλων ανά μήνα)

$$y_1 \leq 90$$
$$y_2 \leq 90 + x_1 - y_1$$
$$y_3 \leq 90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$
$$y_4 \leq 90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3$$
$$y_5 \leq 90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4$$
$$y_6 \leq 90 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4 + x_5 - y_5$$

or

$$y_1 \leq 90$$
$$y_2 - x_1 + y_1 \leq 90$$
$$y_3 - x_1 + y_1 - x_2 + y_2 \leq 90$$
$$y_4 - x_1 + y_1 - x_2 + y_2 - x_3 + y_3 \leq 90$$
$$y_5 - x_1 + y_1 - x_2 + y_2 - x_3 + y_3 - x_4 + y_4 \leq 90$$

$$y_6 - x_1 + y_1 - x_2 + y_2 - x_3 + y_3 - x_4 + y_4 - x_5 + y_5 \leq 90$$

Περιορισμοί ικανοποίησης της ζήτησης (6 εξισώσεις για έξι μήνες, η πρώτη εξίσωση δημιουργήθηκε με το εξής σκεπτικό: 1200 τεμάχια έχουμε στην αποθήκη + την παραγωγή από τις κανονικές ώρες εργασίας +την παραγωγή από τις υπερωρίες + τα τεμάχια από την υπεργολαβία- αυτά που αποθηκεύουμε στο τέλος του μήνα+ η ποσότητα που μένει ανεκτέλεστη. Τον επόμενο μήνα ξεκινάμε με την ποσότητα που έχουμε αποθηκεύσει ενώ τα υπόλοιπα είναι ίδια.

$$1200+\frac{(90+x_1-y_1)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_1}{4}+k_1-A_1-d_1=1800$$
$$A_1+\frac{(90+x_2-y_2)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_2}{4}+k_2-d_1-A_2-d_2=3200$$
$$A_2+\frac{(90+x_3-y_3)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_3}{4}+k_3-d_2-A_3-d_3=3400$$
$$A_3+\frac{(90+x_4-y_4)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_4}{4}+k_4-d_3-A_4-d_4=4000$$
$$A_4+\frac{(90+x_5-y_5)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_5}{4}+k_5-d_4-A_5-d_5=2400$$
$$A_5+\frac{(90+x_6-y_6)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_6}{4}+k_6-d_5-500-d_6=2400$$

Επιπλέον προσθέτουμε τους ακόλουθους περιορισμούς (με 90 εργαζόμενους έχει παραγωγική δυνατότητα για 3600 τεμάχια ανά μήνα, θέτουμε ένα όριο στο να διπλασιάσει τους εργαζόμενους καθώς τότε θα έχει παραγωγική δυνατότητα 7200, **ο περιορισμός αυτός μπήκε για να υπάρξει σύγκλιση, λύση**)

$$x_1 \le 0$$
$$x_2 \le 90$$
$$x_3 \le 90$$
$$x_4 \le 90$$
$$x_5 \le 0$$
$$x_6 \le 0$$

Τον πρώτο, πέμπτο και έκτο μήνα έχουμε χαμηλή ζήτηση ενώ τον δεύτερο, τρίτο και τέταρτο υψηλή ζήτηση. Το πρόβλημα μας πληροφορεί ότι η επιχείρηση προσλαμβάνει την περίοδο της υψηλής ζήτησης μόνο, άρα ο περιορισμός 90 μπαίνει για αυτούς τους μήνες.

Όλες οι μεταβλητές δεν λαμβάνουν αρνητικές τιμές

Η λύση που προκύπτει είναι η παρακάτω

0	90	90	90	0	0
x1	x2	x3	x4	x5	x6

0	0	0	0	0	0
y1	y2	y3	y4	y5	y6

900	1800	2700	3600	3600	3600
z1	z2	z3	z4	z5	z6

0	0	0	0	0	0
k1	k2	k3	k4	k5	k6

0	0	0	0	0
A1	A2	A3	A4	A5

0	0	0	0	0	0
d1	d2	d3	d4	d5	d6

Παρατηρούμε ότι γίνονται προσλήψεις 90 ατόμων τον δεύτερο, τρίτο και τέταρτο μήνα. Επιπλέον από τον 1^{o} έως τον έκτο μήνα γίνονται υπερωρίες. Αποθέματα δεν έχουμε σε κανέναν μήνα. Επιπλέον δεν χρησιμοποιείται υπεργολάβος ενώ δεν υπάρχουν ανεκτέλεστες παραγγελίες.

Β) Το μόνο που αλλάζει σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα είναι οι παρακάτω ανισώσεις

$$1200+\frac{(90+x_1-y_1)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_1}{4}+k_1-A_1-d_1=1200$$

$$A_1+\frac{(90+x_2-y_2)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_2}{4}+k_2-d_1-A_2-d_2=3200$$

$$A_2+\frac{(90+x_3-y_3)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_3}{4}+k_3-d_2-A_3-d_3=4000$$

$$A_3+\frac{(90+x_4-y_4)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_4}{4}+k_4-d_3-A_4-d_4=5000$$

$$A_4+\frac{(90+x_5-y_5)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_5}{4}+k_5-d_4-A_5-d_5=2200$$

$$A_5+\frac{(90+x_6-y_6)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_6}{4}+k_6-d_5-500-d_6=1600$$

Η λύση που προκύπτει είναι η παρακάτω

0	17	0	90	0	0
x1	x2	x3	x4	x5	x6

0	0	0	0	0	0
y1	y2	y3	y4	y5	y6

899,9992	1070,359	1070,36	1970,36	1970,36	1970,359
z1	z2	z3	z4	z5	z6

0	0	0	0	0	0
k1	k2	k3	k4	k5	k6

0	0	0	0	0
A1	A2	A3	A4	A5

0	0	0	0	0	0
d1	d2	d3	d4	d5	d6

Παρατηρούμε ότι γίνονται 17 προσλήψεις των 2^o μήνα και 90 τον τέταρτο. Επιπλέον από τον 1^o έως τον έκτο μήνα γίνονται υπερωρίες. Αποθέματα δεν έχουμε. Επιπλέον δεν χρησιμοποιείται υπεργολάβος ενώ δεν υπάρχουν ανεκτέλεστες παραγγελίες.

Γ) Η διαφορά με βάσει το πρώτο ερώτημα είναι η εξής:

$$\max[\sum_{i=1}^{6}(\frac{(90+x_i-y_i)\cdot 8\cdot 20}{4}+\frac{z_i}{4}+k_i)\cdot 40+(1200-500)\cdot 40-$$
$$-\sum_{i=1}^{6}(90+x_i-y_i)\cdot 8\cdot 4\cdot 20-\sum_{i=1}^{6}6z_i-\sum_{i=1}^{6}300x_i-\sum_{i=1}^{6}500y_i-\sum_{i=1}^{6}30k_i-$$
$$-\sum_{i=1}^{5}6A_i-6\cdot 500-\sum_{i=1}^{6}5d_i]$$

Η λύση που προκύπτει είναι η ίδια με αυτή του 1^{ου} ερωτήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 Ο λόγος Δημιουργίας των Μιγαδικών Αριθμών

Ένα ερώτημα που συχνά ανακύπτει στην πρώτη επαφή μας με τους μιγαδικούς αριθμούς είναι ποιός είναι ο λόγος ύπαρξης τους και σε τι χρησιμεύουν. Έναν παραλληρισμό που μπορούμε να κάνουμε για την κατανόηση του παραπάνω ερωτήματος είναι ότι για τον περισσότερο κόσμο όταν αναφέρεται στους αριθμούς έχει στο μυαλό του περισσότερο τους φυσικούς αριθμούς (1, 2, 3, 4, 5...). Όμως καθημερινά φυσικά προβλήματα μας ανάγκασαν να επεκτείνουμε αυτό το σύνολο των αριθμών στους ακέραιους (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...) τους ρητούς (της μορφής $\frac{k}{m}$, με κ, μ ακέραιοι) κ.τ. λ έτσι ώστε να μπορούμε να λύσουμε πρακτικά προβλήματα όπως να μοιράσουμε για παράδειγμα το ποσό των τριών ευρώ σε δύο ίσα ποσά. Αναγκαστήκαμε να δεχτούμε την λύση 1.5 ευρώ, δηλαδή επεκτείναμε το ‘‘εργαλείο, οικοδόμημα’’ που είχαμε έτσι ώστε να μας καλύπτει και στις προηγούμενες καταστάσεις αλλά και να μας εξυπηρετεί στις τωρινές ανάγκες. Έτσι λοιπόν και εδώ επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών σε ένα μεγαλύτερο σύνολο το οποίο ονομάζεται μιγαδικό σύνολο και περιέχει μέσα του όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Προτού όμως εισέλθουμε στον ορισμό αυτού του συνόλου ας δούμε πρώτα πιο ήταν το πρόβλημα που μας οδήγησε στην επέκταση των πραγματικών αριθμών.

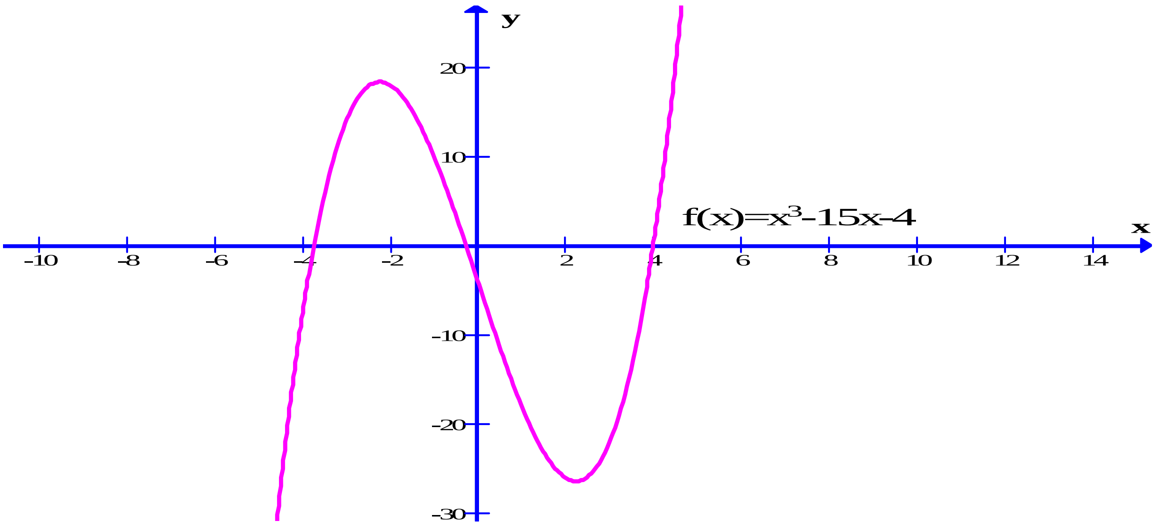
Το πρόβλημα που οδήγησε στους μιγαδικούς αριθμούς ήταν η επίλυση εξισώσεων. Έτσι λοιπόν παρατηρήθηκε το φαινόμενο ότι σε τρίτου βαθμού εξισώσεις όπως η

$x^3=15x+4$ οι τύποι που υπάρχουν για την επίλυση τέτοιας μορφής εξισώσεων να μην μπορούν να ‘‘αποδώσουν’’ τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. Το πρόβλημα ήταν ότι παρουσιαζόταν ρίζα αρνητικού αριθμού κάτι που όπως γνωρίζουμε δεν είναι σωστό. Όμως οι μαθηματικοί παρατήρησαν ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μια προφανή λύση, την x = 4 ($x=-2+\sqrt{3}$, $x=-2-\sqrt{3}$ αυτές οι δύο λύσεις προκύπτουν από το τριώνυμο το οποίο προέρχεται από την διαίρεση του πολυωνύμου $x^3-15x-4$ με το x-4) η οποία δεν προκύπτει από τους τύπους επίλυσης τριτοβάθμιων εξισώσεων (δεν προκύπτει διότι δίνει D=-121). Εδώ οι μαθηματικοί ήταν σε δίλημμα διότι θα έπρεπε είτε να εγκαταλείψουν τους τύπους αυτούς είτε θα έπρεπε να δεχτούν τετραγωνικές ρίζες αρνητικού αριθμού. Έτσι λοιπόν για να αποφύγουν το δίλημμα αυτό εφεύραν τους μιγαδικούς αριθμούς.

$$\text{H} \quad x^3 = px + q \quad \text{έcei} \quad \text{lύsh} \quad \text{thn} \quad x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$\text{me} \quad D = (\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3 \text{na} \quad \text{eínai} \quad \text{h} \quad \text{diakr ínousa}$$

Παρακάτω βλέπουμε το γράφημα της $f(x)=x^3-15x-4$ το οποίο τέμνει, τον άξονα χ΄χ σε τρία σημεία, τα οποία είναι τα εξής: (4,0), (-2+$\sqrt{3}$,0) και (-2-$\sqrt{3}$,0). Είναι εμφανές ότι ενώ έχουμε τρεις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης η αλγεβρική ‘’κατασκευή’’, μηχανισμός τον οποίο έχουμε δημιουργήσει για την επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων δεν μπορεί να μας δώσει καμία λύση. Για αυτό τον λόγο ‘’αναβαθμίζουμε’’ τον μηχανισμό μας με το να του προσθέσουμε ένα στοιχείο το οποίο θα μας βοηθήσει να ξεπεράσουμε το πρόβλημα του αρνητικού αριθμού σε ρίζα. Παρακάτω βλέπουμε ποιο είναι αυτό το στοιχείο που εφηύραμε.



Συγκεκριμένα για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{-121}} \overset{-1=i^2}{=} \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{i^2 121}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{i^2 121}} =$$

$$= \sqrt[3]{2 + i\sqrt{121}} + \sqrt[3]{2 - i\sqrt{121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{(2-i)^3} + \sqrt[3]{(2+i)^3} = 2 - i + 2 + i = 4$$

Έτσι καταφέραμε να βρούμε την πρώτη ρίζα της εξίσωσης χρησιμοποιώντας το στοιχείο i που είδαμε. Παρακάτω θα δούμε τι ακριβώς είναι αυτό που χρησιμοποιήσαμε (http://www.purplemath.com/modules/complex2.htm).

Ορισμός του αριθμού i

$$i = \sqrt{-1}$$

Ο ορισμός του i μας δίνει $i^2 = -1$.

<u>Παράδειγμα 1.</u>

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 * i = -1*i = -i.$

$i^4 = i^2 * i^2 = (-1) * (-1) = 1.$

Μιγαδικός Αριθμός

Ορισμός: Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι της μορφής z =α + β*i*, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Ο αριθμός **α** ονομάζεται το **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με **Re(z)** ενώ ο αριθμός **β** ονομάζεται το **φανταστικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με **Im(z).**

2.2 Πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Ισότητα μιγαδικών: Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι εάν τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι αντίστοιχα ίσα δηλαδή α+βi = γ+δi **αν και μόνο αν** α = γ και β = δ.

<u>Παράδειγμα 2</u>

2 - 5i.

6 + 4i.

0 + 2i = 2i.

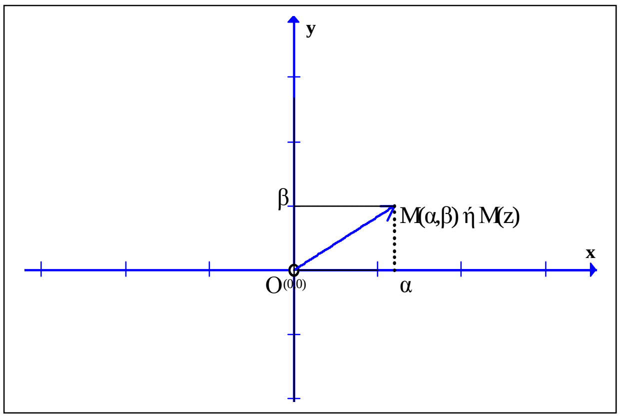
4 + 0i = 4.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ένας μιγαδικός αριθμός με φανταστικό μέρος 0.

Επίσης κάτι που πρέπει να τονιστεί είναι το εξής: γνωρίζουμε ότι αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να τους διατάξουμε δηλαδή να τους βάλουμε πάνω σε έναν άξονα από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο. Στους μιγαδικούς όμως κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει δηλαδή δεν μπορούμε να πούμε ότι ο μιγαδικός αριθμός z = a + bi είναι μεγαλύτερος από τον w = γ + δi. **Η σχέση της διάταξης δεν ισχύει στους μιγαδικούς** παρόλο που όλες οι πράξεις και οι ιδιότητες των πραγματικών ισχύουν όπως θα δούμε παρακάτω.

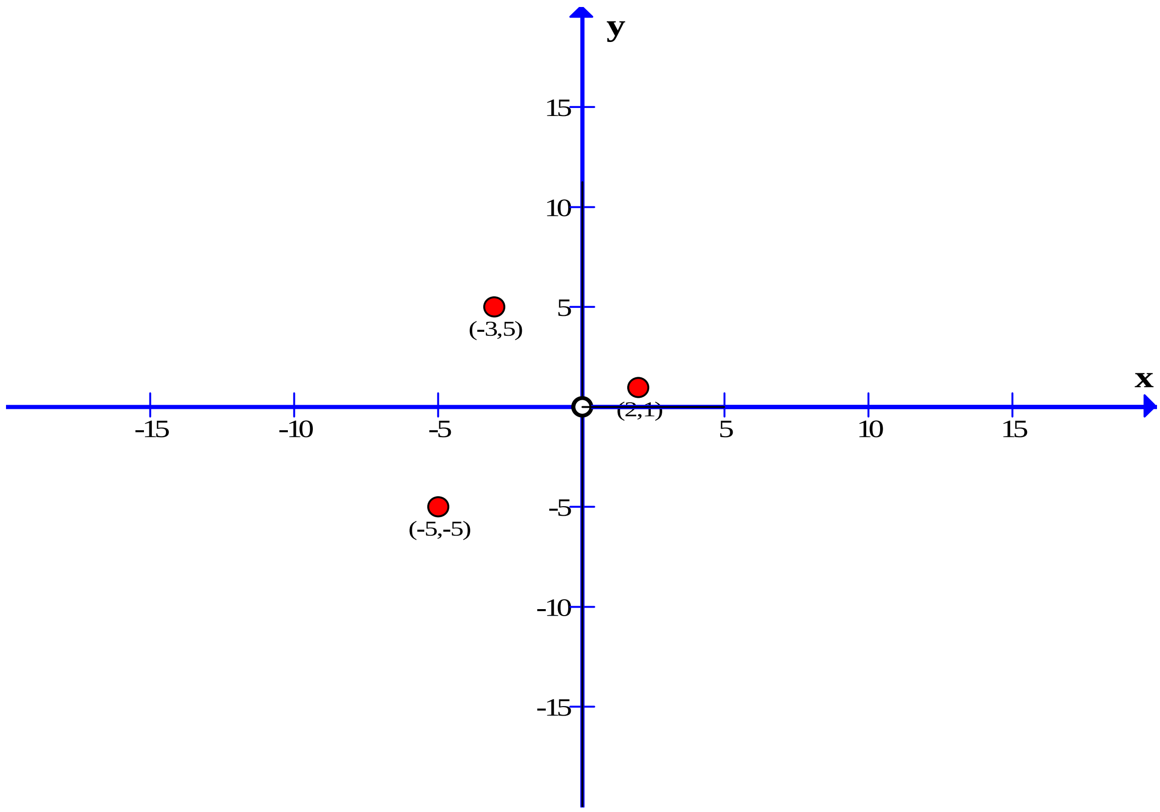
Το Μιγαδικό Επίπεδο

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με το να τους συσχετίσουμε με σημεία πάνω στους άξονες. Ο αριθμός α + β*i* *αντιστοιχεί στο σημείο* Μ(α,β) το οποίο ονομάζεται εικόνα του μιγαδικού α+β*i*.



Το καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο.** Ο άξονας **χ΄χ** λέγεται **πραγματικός άξονας** αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία Μ(α, 0) που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών α=α+0i, ενώ ο άξονας **y΄y** λέγεται **φανταστικός άξονας** αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία Μ(0,β) που είναι εικόνες των φανταστικών αριθμών βi=0+ βi. Κάτι που πρέπει να τονιστεί επίσης είναι ότι ένας μιγαδικός **z=α+βi** παριστάνεται και με την **διανυσματική ακτίνα** $\vec{OM}$ του σημείου Μ(α, β). Επομένως αυτή η δυνατότητα της αναπαράστασταση των μιγαδικών ως διανυσματικές ακτίνες θα βοηθήσει να τους αντιληφθούμε καλύτερα μέσω της θεωρίας της διανυσματικής θεωρίας την οποία έχουμε διδαχθεί στην β΄ λυκείου.

Παρακάτω αναπαριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο οι μιγαδικοί αριθμοί z=-3+5i, w=2+i, r=-5-5i



Αριθμητική των μιγαδικών αριθμών

Όταν ένα αριθμητικό σύστημα όπως το σύνολο των πραγματικών αριθμών (**R)** επεκτείνεται στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών το οποίο συμβολίζεται με (**C)** πρέπει οι πράξεις που ισχύουν για το σύνολο των πραγματικών αριθμών να οριστούν και για το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή πρέπει να οριστεί η πράξη της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Πρόσθεση και αφαίρεση

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη αντίστοιχα.

$(\alpha+ \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i.$

$(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i.$

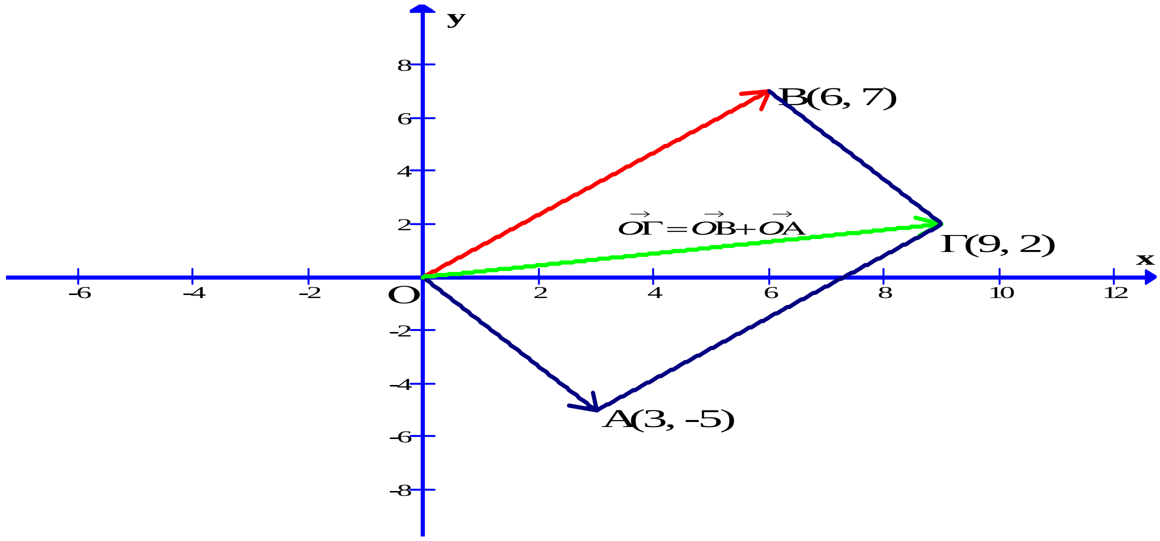
<u>Παράδειγμα 3</u>

(3 - 5*i*) + (6 + 7*i*) = (3 + 6) + (-5 + 7)*i* = 9 + 2*i*.

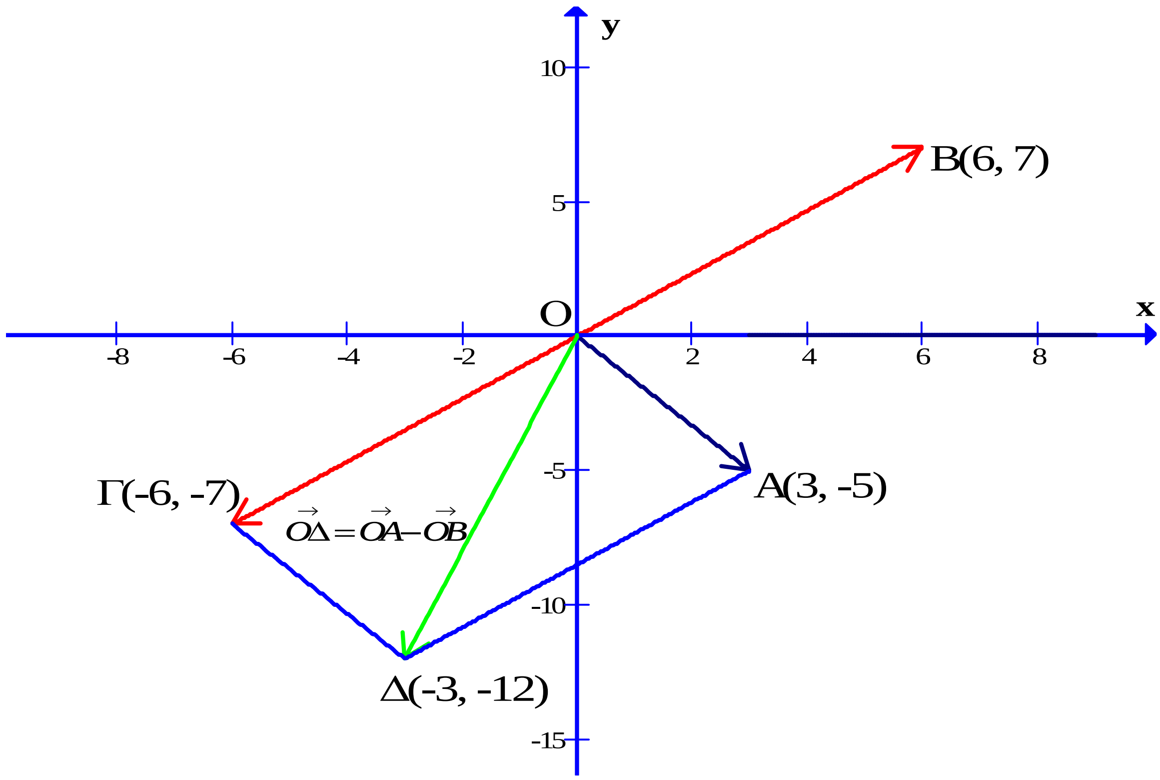
(3 - 5*i*) - (6 + 7*i*) = (3 - 6) + (-5 - 7)*i* = -3 - 12*i*.

Παρακάτω βλέπουμε την πρόσθεση και την αφαίρεση των παραπάνω μιγαδικών αριθμών.

$\vec{O\Gamma} = \vec{OB} + \vec{OA}$



$\vec{O\Delta} = \vec{OA} + \vec{O\Gamma} = \vec{OA} - \vec{OB}$



Πολλαπλασιασμός

Ο τρόπος για να πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς είναι ο παρακάτω:

$$(\alpha + \beta i) * (\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i.$$

Παράδειγμα 4

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(4+7i) &= 2*4 + 2*7i + 4*3i + 3*7*i^2 \\ &= 8 + 14i + 12i + 21*(-1) \\ &= (8 - 21) + (14 + 12)i \\ &= -13 + 26i.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στην δεύτερη γραμμή το i^2 έχει αντικατασταθεί από το -1.

Παρατήρηση: Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών έχει και αυτός γραφική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο. Επίσης ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο δύο διανυσμάτων, δίνοντας όμως μόνο το πραγματικό μέρος και όχι και το φανταστικό μέρος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το γινόμενο διανυσμάτων εκφράζεται στο πραγματικό επίπεδο και όχι στο μιγαδικό επίπεδο, για αυτό λοιπόν δίνει μόνο το πραγματικό μέρος. Αν θέλαμε να πολλαπλασιάσουμε τους μιγαδικούς 5+2i, 3+i θα είχαμε σαν αποτέλεσμα τον μιγαδικό αριθμό 13+11i. Αν πολλαπλασιάζαμε όμως τα διανύσματα που αντιστοιχούν στους παραπάνω μιγαδικούς συμπεριλαμβάνοντας και το i θα είχαμε (5, 2i)*(3, i)=3*5+2*i*i=15-2=13 δηλαδή παίρνουμε μόνο το πραγματικό μέρος.

Διαίρεση

Ορισμός: Ο **συζυγής μιγαδικός** ενός μιγαδικού αριθμού $\alpha + \beta i$ είναι ο $\alpha - \beta i$.

Οι συζυγείς μιγαδικοί είναι σημαντικοί διότι εάν πολλαπλασιάσουμε έναν μιγαδικό αριθμό με τον συζυγή του τότε το αποτέλεσμα είναι ένας πραγματικός αριθμός.

$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = (\alpha^2 + \beta^2) + 0i = \alpha^2 + \beta^2$.

Παράδειγμα 5

Μιγαδικός	**Συζυγής Μιγαδικός**	**Αποτέλεσμα**
$2 + 3i$	$2 - 3i$	4 + 9 = 13
$3 - 5i$	$3 + 5i$	9 + 25 = 34
$4i$	$-4i$	16

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να κάνουμε την διαίρεση $(3 + 2i) \div (2 + 5i)$. Πρώτα ας γράψουμε αυτήν την διαίρεση σε κλασματική, μορφή $\frac{3+2i}{2+5i}$.

Παρόλο που δεν έχουμε ορίσει την διαίρεση ακόμα θα πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνηθισμένης διαίρεσης, θα πρέπει δηλαδή για παράδειγμα ένας αριθμός όταν διαιρείται με τον εαυτό του να μας δίνει μονάδα. Έτσι αν πολλαπλασιάσουμε τον $\frac{3+2i}{2+5i}$ με τον $\frac{2-5i}{2-5i}$ ο αριθμός δεν θα αλλάξει καθόλου αφού πολλαπλασιάζουμε με την μονάδα. Πρέπει να προσέξουμε ότι ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε αποτελείται από τον συζυγή μιγαδικό του αριθμού που βρίσκεται στον παρανομαστή, δηλαδή του 2+5i

Παρακάτω βλέπουμε το ολοκληρωμένο πρόβλημα της διαίρεσης με το αποτέλεσμα να γράφεται στην κανονική μορφή ενός μιγαδικού.

$$\begin{aligned} \frac{3+2i}{2+5i} &= \frac{3+2i}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i} \\ &= \frac{(3+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{16-11i}{29} \\ &= \frac{16}{29} - \frac{11}{29}i \end{aligned}$$

Ιδιότητες Συζυγών

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z = α+βi και ο συζυγής του ο $\bar{z} = a - b \cdot i$. Τότε ισχύουν:

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = a$$
$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = b$$

Αν τώρα έχουμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = a + b \cdot i$ και $z_2 = g + d \cdot i$ τότε έχουμε:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

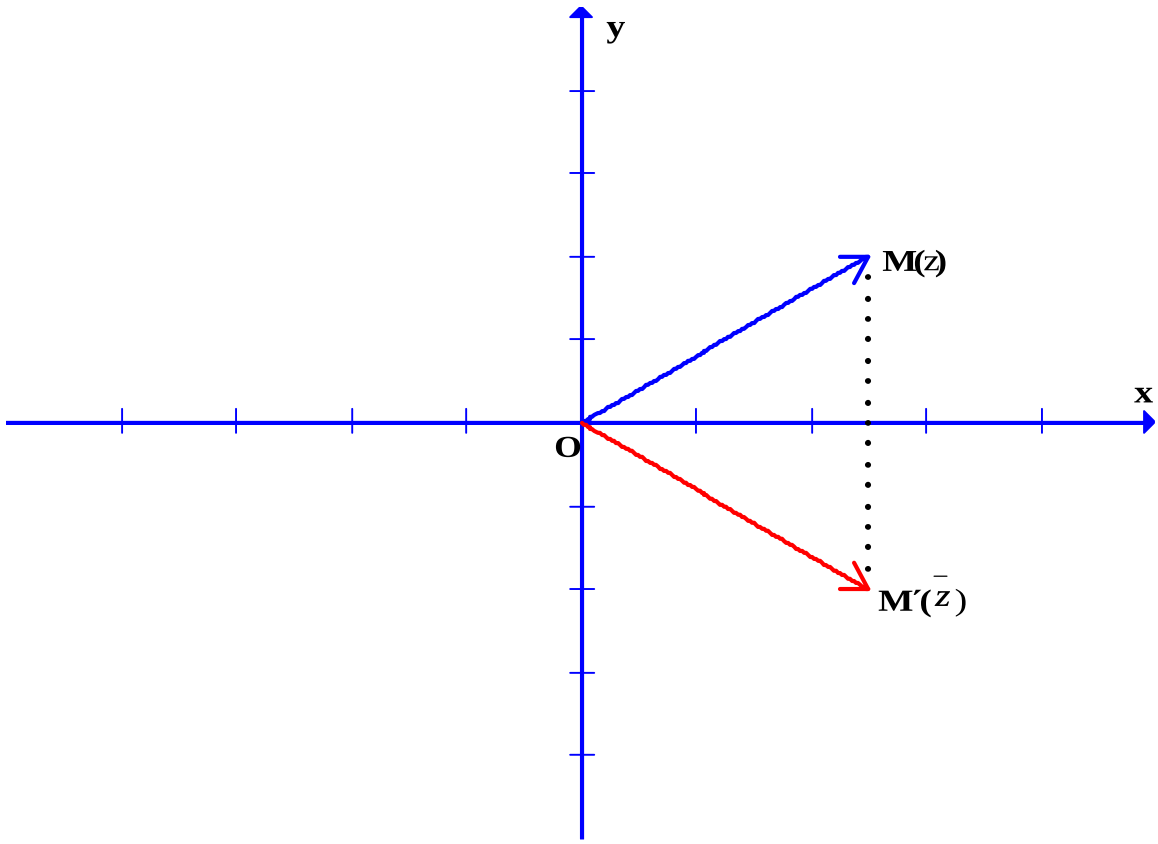
Οι παραπάνω τύποι ισχύουν και για περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς.

Προφανώς βασιζόμενοι σε αυτό θα έχουμε ότι $\overline{z^\nu} = (\bar{z})^\nu$

<u>Παράδειγμα 6</u>

$$\overline{\left(\frac{2+5i}{4+6i}\right)^4} = \left[\overline{\left(\frac{2+5i}{4+6i}\right)}\right]^4 = \left(\frac{2-5i}{4-6i}\right)^4$$

Γεωμετρική αναπαράσταση του μιγαδικού αριθμού z=α+βi και του συζυγή του.



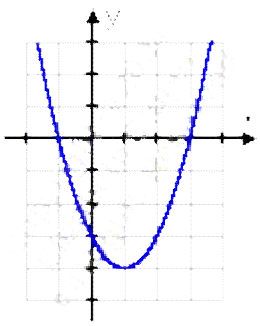
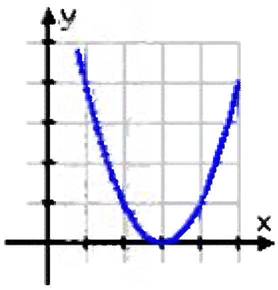
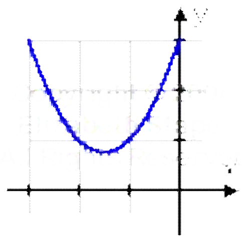
Από ότι παρατηρούμε η εικόνα δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Επίλυσης της εξίσωσης α z^2 +βz+γ=0 με α,β $\neq 0$

- **Αν Δ>0** τότε οι λύσεις είναι $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Αν Δ=0** τότε η λύση είναι $z = \dfrac{-b}{2a}$
- **Αν Δ<0** τότε οι λύσεις είναι $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Παρατήρηση: $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{g}{a}$

Παραδείγματα

$x^2 - 2x - 3$	$x^2 - 6x + 9$	$x^2 + 3x + 3$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \frac{-2}{2}, \frac{6}{2} = -1, 3$	$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(3)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$
Θετικός αριθμός μέσα στην ρίζα	Μηδέν μέσα στην ρίζα	Αρνητικός αριθμός μέσα στην ρίζα
Δύο πραγματικές ρίζες	Μία πραγματική ρίζα	Δύο μιγαδικές ρίζες
		
Δύο σημεία με τον άξονα χ΄χ	Ένα σημείο με τον άξονα χ΄χ	Κανένα σημείο με τον άξονα χ΄χ

2.3 Εφαρμογές Μιγαδικών

Παραδείγματα

1. Να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύει

   i) α+2β+(α-β)i =4-2i ii) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+a\cdot i=1-i$ iii) $e^{α}$+β+βi=1-βi

Λύση

i) Πρέπει $\left.\begin{array}{l} α+2β=4 \\ α-β=-2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} α+2β=4 \\ 3β=6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} α+2β=4 \\ β=2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} α=4 \\ β=2 \end{array}$

ιι) Πρέπει $\left.\begin{array}{r} \sqrt{a^2-2ab+b^2}=1 \\ α = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} \sqrt{|a-b|^2}=1 \\ α = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} |-1-b|=1 \\ α = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} -1-b=1 \text{ ή } -1-b=-1 \\ α = -1 \end{array}\right\}$

β = -2 ή β=0

α = -1

ιιι) Πρέπει $\left.\begin{array}{r} e^{α}+β=1 \\ β=-β \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} e^{α}+0=1 \\ β=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} e^{α}=e^{0} \\ β=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} α=0 \\ β=0 \end{array}$

2. Να βρείτε τους χ, y για τους οποίους ισχύει $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{1}{x-yi}=x+i$ β) ο μιγαδικός αριθμός z =$χ^2$-4χ+3+yi να μην είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση

$$\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{1}{x-yi}=x+i \Rightarrow \frac{(1-i)^2}{1+i}\frac{1-i}{1-i}+\frac{1}{x-yi}\frac{x+yi}{x+yi}=x+i \Rightarrow \frac{(1-i)^3}{2}+\frac{x+yi}{x^2+y^2}=x+i$$

$$\Rightarrow \frac{(1-i)^3}{2}+\frac{x+yi}{x^2+y^2}=x+i \Rightarrow \frac{1-3i+3i^2-i^3}{2}+\frac{x+yi}{x^2+y^2}=x+i \Rightarrow \frac{-2-2i}{2}+\frac{x+yi}{x^2+y^2}=x+i$$

=> $-1-i+\frac{x+yi}{x^2+y^2}=x+i$ => $\frac{x+yi}{x^2+y^2}=x+1+2i$ => $\frac{x}{x^2+y^2}=x+1$ και $\frac{y}{x^2+y^2}=2$ =>

$\frac{x}{x+1}=x^2+y^2$ και $\frac{y}{2}=x^2+y^2$ => $\frac{x}{x+1}=\frac{y}{2}$ με y≥ 0, x$\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$ διότι

$\frac{x}{x+1}\geq 0$ και χ+1$\neq 0$. Επομένως οι αριθμοί που ψάχνουμε είναι όλοι οι αριθμοί χ, y που ικανοποιούν την εξίσωση $y=\frac{2x}{x+1}$ με χ$\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις : α) z^2-5z+8.5=0 β) -3z^3 +3z^2+z-5=0

Λύση

α) Δ=25-34=-9 => $z_{1,2}$=$\frac{5\pm i\sqrt{|-9|}}{2}=\frac{5\pm 3i}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{5+3i}{2}\\ \frac{5-3i}{2}\end{array}\right.$

β) Πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm 1,\pm 5$.

-3	3	1	-5	-1
	3	-6	5	
-3	6	-5	0	

-3z^3 +3z^2+z-5=0 □ (z+1)(-3z^2+6z-5)=0 => -3z^2+6z-5=0

=>Δ=36-60=-24 =>

$z_{1,2}$=$\frac{6\pm i\sqrt{|-24|}}{-6}=\frac{6\pm 2\sqrt{6}i}{-6}=\left[\begin{array}{l}\frac{3+\sqrt{6}i}{-3}\\ \frac{3-\sqrt{6}i}{-3}\end{array}\right.$ και η z=1+0i

4. Δίνεται η εξίσωση 4z^2+βz+γ=0 με β, γ $\in\Re$. Αν μια ρίζα της είναι η 2+5i.να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Λύση

Εφόσον έχουμε φανταστικό μέρος στην ρίζα που μας δίνεται πρέπει Δ<0. Επομένως θα έχουμε δύο συζυγείς ρίζες την 2+5i και την 2-5i. Άρα

{2+5i +2-5i=$-\frac{b}{4}$ και (2+5i)(2-5i)=$\frac{g}{4}$ }>{ 4=$-\frac{b}{4}$ και 4+25=$\frac{g}{4}$ }=> β=-16 και γ=116

5. Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού αριθμού 5-12i.

Λύση

Αναζητούμε έναν αριθμό z έτσι ώστε $z^2=5-12i \Rightarrow (x+yi)^2=5-12i \Rightarrow x^2-y^2+2xyi=5-12i$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=5 \\ 2xy=-12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2-y^2=5 \\ xy=-6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2-\dfrac{36}{x^2}=5 \\ y=-6/x,\ x\neq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^4-5x^2-36=0 \\ y=-6/x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2=9 \text{ ή } x^2=-4 \\ y=-6/x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \chi=\pm 3 \\ y=\pm 2 \end{array}$$

Επομένως η τετραγωνική ρίζα του αριθμού 5-12i είναι ο z=3-2i ή ο z=-3+2i

Με ανάλογο τρόπο εργασίας μπορούμε να βρούμε την κυβική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού ή την ν-ιοστή ρίζα του.

6. Σε αυτό το παράδειγμα θα δούμε πως το μιγαδικό επίπεδο μπορεί να θέσει νέο σκοπό, να δώσει μια νέα και οπτική ερμηνεία δυο σημαντικών οικονομικών μέτρων, την διάρκεια τους και τον συντελεστή εσωτερικής απόδοσης.

   Ας σκεφτούμε μια σειρά αριθμών, $a_{i.}$ Τοποθετούμε αυτούς τους αριθμούς στη συγκεκριμένη μορφή της εξίσωσης [1], δηλαδή ενσωματώστε τα σε ένα πολυώνυμο. Η εξίσωση [1] είναι στην μορφή που συναντάται συχνά στα βιβλία των οικονομικών, είναι η εξίσωση της χρονικής αξίας του χρήματος, ενώ η [2] είναι το ίδιο πράγμα αναδιατυπωμένο στη γενικότερη μορφή που βρίσκεται στα βιβλία των μαθηματικών.

$$-1+\frac{a_1}{(1+r)}+\frac{a_2}{(1+r)^2}+\ldots..+\frac{a_{(n-1)}}{(1+r)^{(n-1)}}+\frac{a_n}{(1+r)^n}+\frac{1}{(1+r)^n}=0 \quad [1]$$

$$x^n-a_1x^{(n-1)}-\ldots..-a_{(n-1)}x-(a_n+1)=0$$

όπου $x=(1+r)$ [2]

Σύμφωνα με την εξίσωση [1], ξοδεύοντας 1, ακολούθως λαμβάνουμε αποδόσεις a_i, και παίρνουμε 1 πίσω μαζί με ότι μας αποδίδεται. Οποιαδήποτε ροή αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αυτή την εξίσωση, αλλά τώρα επικεντρωνόμαστε στην αγορά ομολόγων σταθερού εισοδήματος. Οι εξισώσεις [3] και [3^α] δείχνουν την άλγεβρα που χρησιμοποιείται στην τιμολόγηση ομολόγων κατά τον σύνηθες υπολογισμό. Η εξίσωση [3] είναι στην ίδια μορφή με την [1].

$$-1+\frac{PMT/PV}{(1+r)}+\frac{PMT/PV}{(1+r)^2}+.....+\frac{PMT/PV}{(1+r)^{(n-1)}}+\frac{(PMT-FV)/PV-1}{(1+r)^n}+\frac{1}{(1+r)^n}=0 \quad [3]$$

Η εξίσωση [3] είναι μια αναδιάταξη της [3^{α}], της πιο οικείας έκδοσης της εξίσωσης τιμολόγησης ομολόγων.

$$-PV+\frac{PMT}{(1+r)}+\frac{PMT}{(1+r)^2}+.....+\frac{PMT}{(1+r)^{(n-1)}}+\frac{PMT}{(1+r)^n}+\frac{FV}{(1+r)^n}=0 \quad [3^{\alpha}]$$

Θέτοντας $PV = FV = 1$ μετατρέπουμε τις εξισώσεις [3] και [3^{α}] σε τέτοιες ενός ομολόγου ονομαστικής αξίας.

Συνήθως σκεφτόμαστε ένα ομόλογο ως ένα μέσο απόδοσης στο οποίο όλα τα a_i είναι ίσα. Η εξίσωση [3], όμως, αποδεικνύει ότι μπορούμε να την επανεξετάσουμε με την μορφή της [1] στην οποία η σειρά αριθμών είναι σταθερή για $n – 1$ περιόδους, αλλά διαφορετική στην τελική περίοδο α_n. Αυτή η μόνη διαφορά σημαίνει ότι έχουμε μια μεταβλητή ροή.

Εμείς εστιάζουμε στην γενικότερη ανάλυση των μεταβλητών ροών στις οποίες το a_i μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε με ποιο τρόπο το a_i παίζει ρόλο στον προσδιορισμό του συντελεστή εσωτερικής απόδοσης και του χρόνου δια μέσου του μιγαδικού επιπέδου.

Ο συντελεστής εσωτερικής απόδοσης είναι η τιμή του r που ικανοποιεί τις εξισώσεις [3] ή [3^{α}] με δεδομένες τιμές για όλες τις άλλες μεταβλητές. Πρόκειται για ένα μέτρο της απόδοσης ανά περίοδο σε μια ροή αριθμών, ή της απόδοσης ενός ομολόγου.

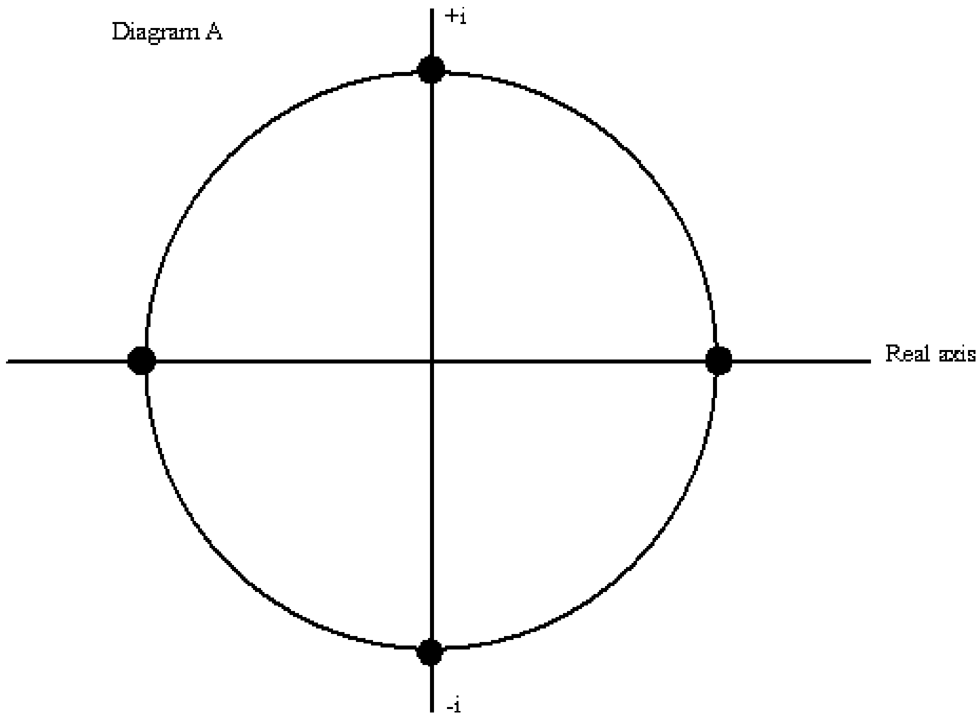
Η διάρκεια είναι η πρώτη παράγωγος του PV (ή της τιμής) σε σχέση με το r στην [3α] διαιρεμένο με το PV. Δείχνει την ελαστικότητα των τόκων της αξίας ενός ομολόγου, και ως εκ τούτου είναι ένα μέσο μέτρησης ρίσκου. Η διάρκεια έχει διάφορες πολύτιμες ιδιότητες όπως, για παράδειγμα, η διάρκεια ενός σταθμισμένου χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων είναι ίση με τον σταθμισμένο μέσο όρο διαρκειών τους. Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε όταν έχουμε να αντισταθμίσουμε κινδύνους.

Από εδώ και πέρα θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα τεσσάρων περιόδων για να απεικονίσουμε περισσότερα αποτελέσματα. Αυτή η απλή περίπτωση επιλέχτηκε γιατί συγκεκριμένα είναι εύκολο να απεικονιστούν τα αποτελέσματα όταν υπάρχουν μόνο τέσσερις ρίζες. Τα αποτελέσματα εύκολα γενικεύονται στις n περιόδους με n ρίζες.

Η απλούστερη έκδοση είναι όπου τα a_i ειναι 0, δηλαδή FV και PV ισούνται με 1 (δεν υπάρχει απώλεια ή κέρδος κεφαλαίου) και όλες οι επιστροφές είναι 0. Τότε η εξίσωση [1] μετατρέπεται στην [4]:

$$-1 + \frac{1}{(1+r)^4} = 0 \quad [4]$$

Οι τέσσερις ρίζες της εξίσωσης κατανέμονται ομοιόμορφα γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.



Με βάση αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε εύκολα να γενικεύσουμε για την n περίοδο όπου υπάρχουν n ρίζες ομοιόμορφα κατανεμημένες γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο (360/N μοίρες). Το παραπάνω δείχνει τις ρίζες που μπορούν να προκύψουν σε μια οικονομική εξίσωση όπως η παραπάνω ανάλογα με την χρονική διάρκεια ενός δανείου ή κάποιας γενικά χρηματοροής.

7. Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στη συμπεριφορά των νοικοκυριών στην αποκεντρωμένη οικονομία. Έστω λοιπόν ότι στην πλευρά της ζήτησης η οικονομία αποτελείται από νοικοκυριά, τα οποία ζουν απεριόριστα. Τα νοικοκυριά αυτά

λαμβάνουν μισθούς για την εργασία που προσφέρουν και τόκους για τα περιουσιακά στοιχεία που συσσωρεύουν, ενώ αγοράζουν αγαθά για κατανάλωση και αποταμιεύουν συσσωρεύοντας καινούργια περιουσιακά στοιχεία. Τα νοικοκυριά δηλαδή υπόκεινται στον παρακάτω εισοδηματικό περιορισμό:

$B = w_t L_t + r_t B_t - C_t$

όπου B_t είναι τα περιουσιακά στοιχεία, L_t ο συνολικός πληθυσμός, w_t ο μισθός και r_t το επιτόκιο. Η εξίσωση παραπάνω δηλώνει ότι η μεταβολή των περιουσιακών στοιχείων των νοικοκυριών ισούται με το εισόδημα από εργασία και τόκους μείον την κατανάλωση.
Η εξίσωση που είδαμε προηγουμένως μπορεί να γραφεί σε κατά κεφαλήν όρους ως εξής:

$b = w_t + r_t b_t - n b_t - c_t$

όπου $b_t = B_t / L_t$, $c_t = C_t / L_t$

Με βάση το υπόδειγμα Ramsey στην ισορροπία τα κατά κεφαλήν περιουσιακά στοιχεία των νοικοκυριών θα είναι ίσα με το λόγο κεφαλαίου-εργασίας, δηλαδή θα ισχύει $b=k$. Στο υπόδειγμα του Ramsey οι αποταμιεύσεις προσδιορίζονται ως αποτέλεσμα της βέλτιστης διαχρονικής συμπεριφοράς του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. Δηλαδή η αποταμιευτική συμπεριφορά εξαρτάται από τις προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού (ποσοστό διαχρονικής προτίμησης και διαχρονικής υποκατάστασης) και την τεχνολογία της παραγωγής που προσδιορίζει το πραγματικό επιτόκιο. Επί πλέον, καθώς η βασική μορφή του υποδείγματος υποθέτει πλήρεις και ανταγωνιστικές αγορές, το υπόδειγμα αυτό προσδιορίζει την κοινωνικά βέλτιστη αποταμιευτική συμπεριφορά, με την έννοια της μεγιστοποίησης της κοινωνικής ευημερίας. Επομένως, η εξίσωση που είδαμε προηγουμένως μαζί με κάποιους επιπλέον μετασχηματισμούς μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{k} = f(k) - (n+d)k - c$$

Επιπλέον έχουμε και την διαφορική εξίσωση (διαφορική εξίσωση ονομάζουμε μια μαθηματική εξίσωση που συσχετίζει τις τιμές μιας άγνωστης συνάρτησης μιας ή περισσότερων μεταβλητών και των παραγώγων της πρώτου, δεύτερου ή ανώτερου βαθμού).

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{q}(f'(k) - d - r)$$

Οι παραπάνω δύο διαφορικές εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα, η λύση του οποίου προσδιορίζει την ισορροπία της οικονομίας μας. Στη σταθερή κατάσταση ισχύει $\dot{k} = \dot{c}$

Η λύση του παραπάνω οικονομικού υποδείγματος περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις που είδαμε και οι οποίες σε γενική μορφή μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\dot{c} = g(c,k) = \frac{1}{q}[f'(k) - d - r]c$$

$$\dot{k} = h(c,k) = f(k) - (n+d)k - c$$

Η ισορροπία σταθερής κατάστασης $(\bar{c},\bar{k})$, δεδομένου ότι υπάρχει, δίνεται από το σύστημα:

$$g(\bar{c},\bar{k}) = 0$$

$$h(\bar{c},\bar{k}) = 0$$

Έστω τώρα λ_1 και λ_2 οι χαρακτηριστικές ρίζες της μήτρας των πρώτων παραγώγων. Διακρίνονται τότε οι εξής περιπτώσεις (Chiang, 1984):

- Αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι πραγματικοί αριθμοί με αντίθετο πρόσημο, τότε η ισορροπία είναι πραγματικό σημείο (saddle-point).Υπάρχει δηλαδή μία μοναδική τροχιά όπου μπορεί να βρεθεί η οικονομία και που οδηγεί στο σημείο ισορροπίας του συστήματος.
- Αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι πραγματικοί μη αρνητικοί αριθμοί, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Από όποιο σημείο και εάν ξεκινήσει η οικονομία, θα μετακινείται μακριά από το σημείο ισορροπίας, εκτός εάν τύχει να βρεθεί αρχικά σ' αυτό.
- Αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι πραγματικοί αρνητικοί αριθμοί, η οικονομία θα καταλήξει τελικά στο σημείο ισορροπίας.

- Αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε η ισορροπία είναι ασταθής εάν τα πραγματικά τμήματα των μιγαδικών αριθμών είναι θετικά και σταθερή εάν τα πραγματικά τμήματα των μιγαδικών αριθμών είναι αρνητικά.

<u>Κεφάλαιο 3^{o}: Διαφορικός Λογισμός</u>

3.1 Συνάρτηση

Ορισμός: Συνάρτηση ονομάζεται μια διαδικασία κατά την οποία <u>κάθε</u> στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε <u>ένα</u> ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Συχνά συμβολίζουμε τη συνάρτηση με f:Α→Β.

Το Α ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και το Β **πεδίο τιμών** αυτής. Για την εύρεση του πεδίου ορισμού ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

Αν η συνάρτηση είναι της μορφής:

1. f(x)=P(x), όπου P(x) ένα πολυώνυμο του x, τότε η f ονομάζεται <u>πολυωνυμική</u> και έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς.
2. $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου P(x), Q(x) πολυώνυμα του x, τότε η f ονομάζεται <u>ρητή</u> και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο Α={x$\in\Re$/ Q(x)$\neq$0}

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$.

ΛΥΣΗ

Αφού έχουμε ρητή συνάρτηση, πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός , δηλαδή πρέπει $x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x\neq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το Α= $\Re-\{2,3\}$

3. f(x)= $\sqrt{g(x)}$, όπου g(x) είναι μια παράσταση του x, τότε η f καλείται <u>άρρητη</u> και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο Α ={$x\in\Re$ / g(x)$\geq$0}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $x^2-2x-3\geq 0$. Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου και μετά κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων. Έχουμε $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή x=3

x	-∞	-1	3	+∞
x^2-2x-3	+	-	+	

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το Α=$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

Σημείωση:

Όταν $\Delta\geq 0$, η εξίσωση αx^2+βx+γ = 0 έχει 2 ρίζες, x_1,x_2, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α εκτός των ριζών και ετερόσημο του α εντός αυτών (όπως στο παραπάνω παράδειγμα) και παραγοντοποιείται ως εξής : αx^2+βx+γ = α(x-x_1)(x-x_2).

Όταν Δ = 0 η εξίσωση αx^2+βx+γ=0 έχει 1 ρίζα, x_1 ,το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α (εκτός βέβαια από το σημείο στο οποίο μηδενίζεται) και παραγοντοποιείται ως εξής : αx^2+βx+γ = α(x-x_1)^2.

Όταν Δ < 0 η εξίσωση αx^2+βx+γ=0 δεν έχει καμία ρίζα και το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α.

4. f(x)=ℓn(g(x)), όπου g(x) είναι μια παράσταση του x, τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α={ $x\in\Re$ /g(x)>0}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=ln(-2x-4)$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $-2x-4>0 \Leftrightarrow -2x>4 \Leftrightarrow x<-2$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το Α= $(-\infty,-2)$.

5. Αν μια συνάρτηση έχει τύπο που αποτελεί συνδυασμό των προηγούμενων περιπτώσεων, τότε εξετάζουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά και συναληθεύουμε τα αποτελέσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ΛΥΣΗ

Πρέπει $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ και επειδή το $1-x^2$ βρίσκεται στον παρονομαστή πρέπει $x \neq \pm 1$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

Α=(-1,1).

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το Α.

Τότε ορίζονται:

- Το άθροισμα $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in$ Α των δύο συναρτήσεων.
- Η διαφορά $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in$ Α των δύο συναρτήσεων.
- Το γινόμενο $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in$ Α των δύο συναρτήσεων.
- Το πηλίκο $K(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \in A' = \{x \in A: g(x) \neq 0\}$ των δύο συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-4x$ και $g(x)=x-2$. Να ορισθεί η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$.

ΛΥΣΗ

Οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\Re$. Για να ορίσουμε το πηλίκο θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι ο παρονομαστής είναι διάφορος του 0, δηλαδή

$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ Άρα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 4x}{x-2} = \frac{x(x^2-4)}{x-2} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} =$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x(x+2)$$

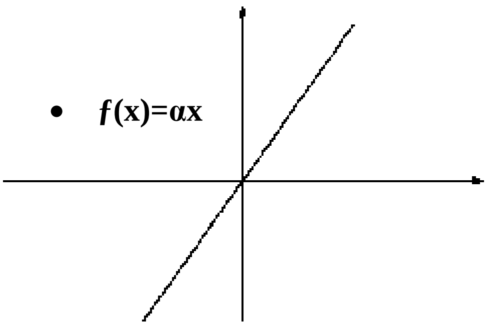
με πεδίο ορισμού το A = $\Re - \{2\}$.

Παρατήρηση

Αν οι f, g έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού τότε το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο των δύο συναρτήσεων θα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A∩B (τομή των A και B). Το πηλίκο των δυο συναρτήσεων θα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο { x∈ A∩B: g(x)≠0 }.

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- **f(x)=αx**

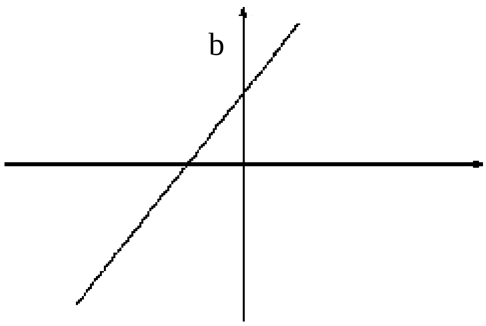


Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και είναι μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.

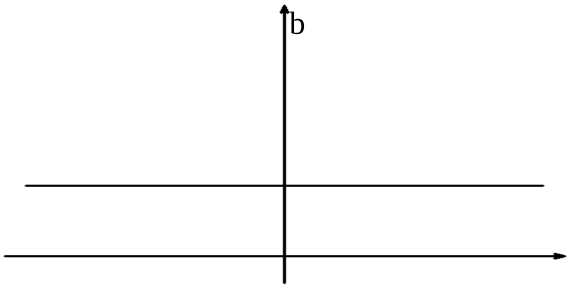
- **f(x)=ax+b**

Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και είναι μια ευθεία

που περνά από το σημείο (0,b)

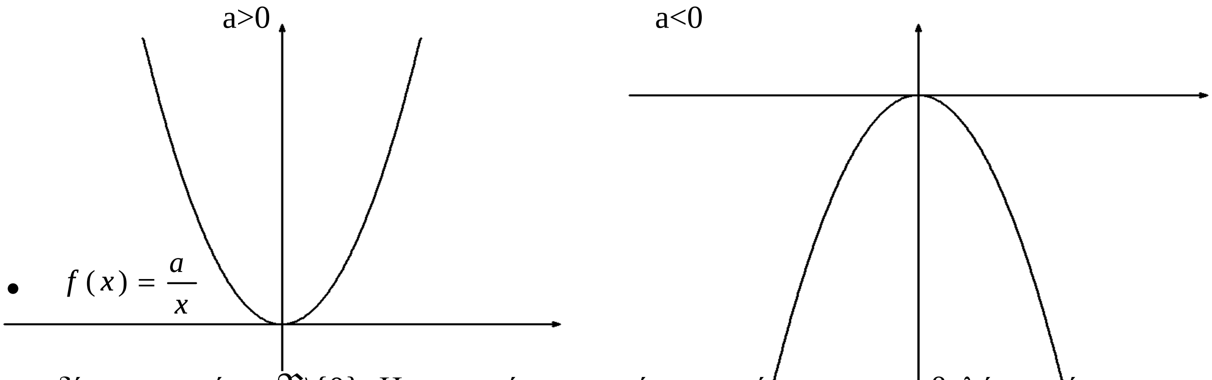


Στην ειδική περίπτωση που a=0, έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=b$, που έχει γραφική παράσταση μια ευθεία παράλληλη στον άξονα xx΄.



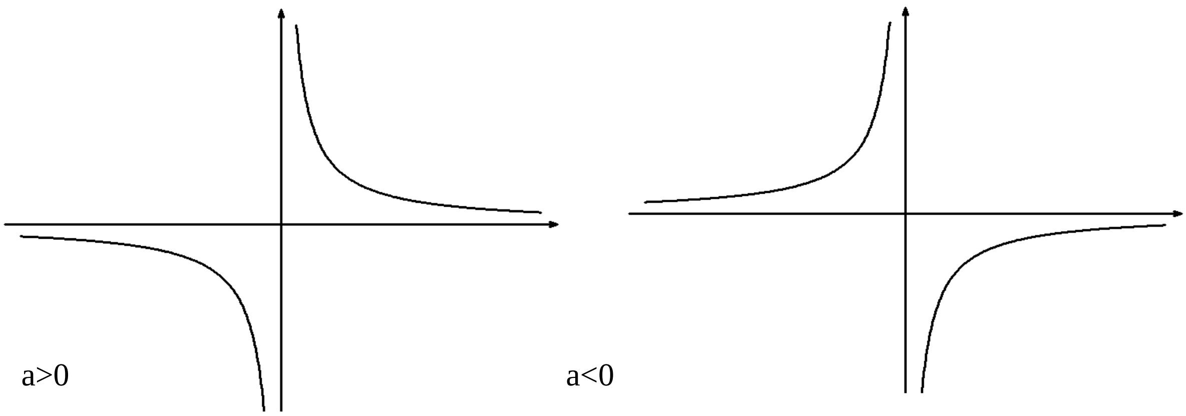
- **$f(x)=ax2$**

Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και η γραφική της παράσταση είναι μια παραβολή, η οποία αν a>0 βρίσκεται "πάνω" από τον άξονα xx΄και αν a<0 βρίσκεται "κάτω" από τον άξονα xx΄.Έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy΄.



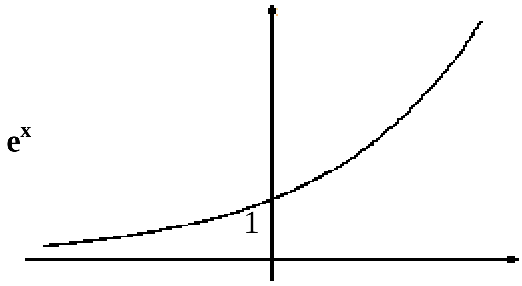
- $f(x) = \frac{a}{x}$

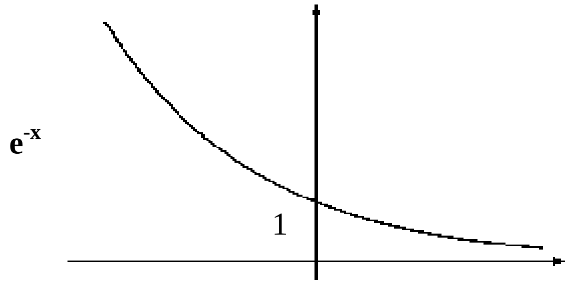
Έχει πεδίο ορισμού το $\Re\backslash\{0\}$. Η γραφική της παράσταση είναι μια υπερβολή με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Αν a>0 τότε βρίσκεται στο 1^{ο} και 3^{ο} τεταρτημόριο, ενώ αν a<0 βρίσκεται στο 2^{ο} και 4^{ο} τεταρτημόριο.



- ***f***(x)=e^{x} **και** ***g***(x)=e^{-x}

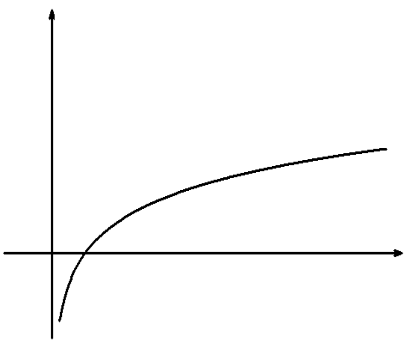
Έχουν πεδίο ορισμού το $\mathfrak{R}$ και σύνολο τιμών το (0, +∞)**.** Οι γραφικές τους παραστάσεις διέρχονται από το (0,1).





- ***f*(x)=ℓ*n*x**

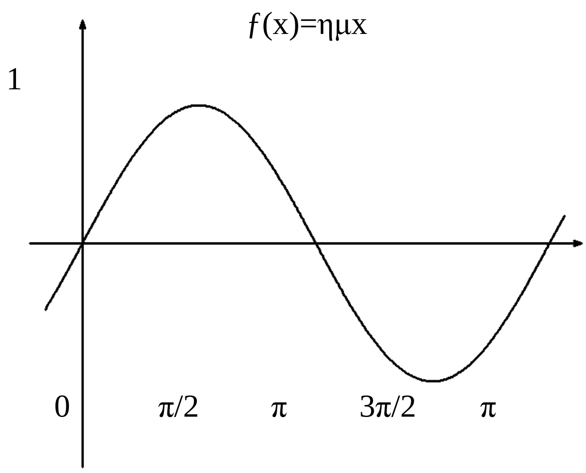
Έχει πεδίο ορισμού το (0,+∞) και σύνολο τιμών το $\mathfrak{R}$. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (1,0).

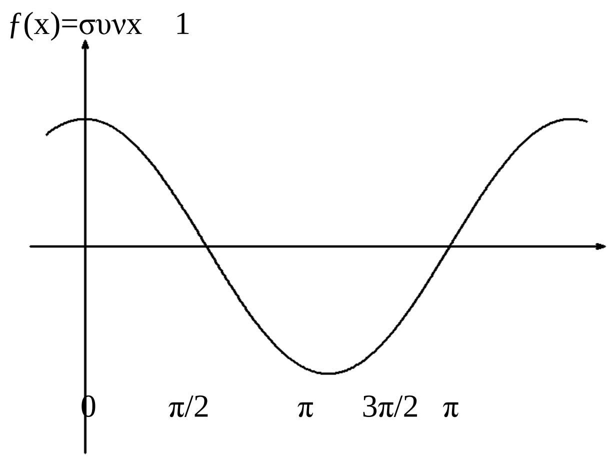


Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της ℓ*n*x βρίσκεται στα δεξιά του άξονα yy΄, αφού ο λογάριθμος ορίζεται **μόνο για x>0.**

- ***f*(x)=ημx και *g*(x)=συνx**

Έχουν πεδίο ορισμού το $\mathfrak{R}$, σύνολο τιμών το [-1,1] και είναι περιοδικές με περίοδο 2π.





3.2 Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Ορισμοί

1.Έστω μια συνάρτηση f:Α→Β. Η f λέγεται

- γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $D \subseteq A$, όταν για κάθε x_1, $x_2 \in D$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

- γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα $D \subseteq A$, όταν για κάθε x_1, $x_2 \in D$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Γνησίως μονότονη ονομάζεται μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

2.Έστω μια συνάρτηση f:Α→Β. Η f λέμε ότι παρουσιάζει

- τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή κοντά στο x_1.
- τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή κοντά στο x_2.

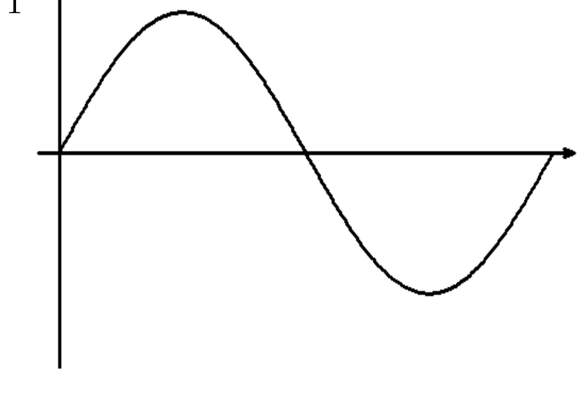
3.Αντίστοιχα,αν έχουμε μια συνάρτηση f:Α→Β θα λέμε ότι παρουσιάζει

- ολικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε $x \in A$.
- ολικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε $x \in A$.

Ακρότατο μιας συνάρτησης f ονομάζεται ένα μέγιστο ή ελάχιστο αυτής (ολικό ή τοπικό).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση f(x)=ημx.Όπως είδαμε η γραφική της παράσταση είναι η ακόλουθη:



0 π/2 π 3π/2 2π

Όπως παρατηρούμε από το σχήμα, για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του [0,π/2] με $x_1 < x_2$ ισχύει ημx_1<ημx_2. Άρα η συνάρτηση f(x)=ημx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,π/2]. Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [π/2,π], γνησίως φθίνουσα στο [π,3π/2] και γνησίως

αύξουσα στο [3π/2,2π].

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο π/2, το f(π/2)=1 και ολικό ελάχιστο στο 3π/2, το f(3π/2)=-1.

3.3 Όριο συνάρτησης

Τι εκφράζει η σχέση $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$

Η σχέση εκφράζει ότι όταν το x τείνει (πλησιάζει) στο x_0, οι τιμές της συνάρτησης τείνουν (πλησιάζουν) στο ℓ και λέμε ότι το όριο της f, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ.Το x_0 μπορεί να είναι ή να μην είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f, αρκεί να βρίσκεται «κοντά» σε αυτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ονομάζεται ***<u>συνεχής</u>*** **στο x_0** Î **A** όταν

ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται ***<u>συνεχής στο Α.</u>***

Παρατήρηση: Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης **<u>μόνο</u>** στα σημεία του πεδίου ορισμού της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Πολυωνυμικές (π.χ. $3x^2+4x-2$)
- Τριγωνομετρικές (π.χ. ημx, συνx, εφx)

- Εκθετικές (π.χ. e^x)
- Λογαριθμικές (π.χ. $\ell n x$)
- Οι συναρτήσεις που προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών (π.χ. e^x+ημx)

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΟΡΙΑ

Έστω οι συναρτήσεις f,g και έστω ότι υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_o} f(x) = m \in \Re$ και

$\lim_{x\to x_o} g(x) = n \in \Re$ Τότε:

I. $\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = m+n$

II. $\lim_{x\to x_0} [k\cdot f(x)] = k\cdot m$

III. $\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = m\cdot n$

IV. $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{m}{n}$ (για n≠0)

V. $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^\nu = m^\nu$

VI. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{m}$

Γενικά, όταν ζητούμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ κάνουμε τα εξής:

- Αν το x_0 <u>είναι</u> σημείο του πεδίου ορισμού της f και η f είναι συνεχής, αντικαθιστούμε το x_0 στον τύπο της f, δηλαδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Αν το x_0 <u>δεν είναι</u> σημείο του πεδίου ορισμού της f και η f είναι συνεχής, κάνουμε πράξεις στον τύπο της f (π.χ. παραγοντοποίηση) μέχρι να φτάσουμε στο σημείο που επιτρέπεται η αντικατάσταση.
- Ειδικά στην περίπτωση που εμφανίζεται κλάσμα με ρίζες στο οποίο με αντικατάσταση του x_o οδηγούμαστε στη μορφή 0/0 πολλαπλασιάζουμε αριθμητή

και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του όρου στον οποίο εμφανίζονται οι ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

I. **Να βρεθεί το** $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-9)$

ΛΥΣΗ

Πεδίο ορισμού είναι το Α=$\Re$ και $2\in\Re$. Άρα

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-9) = \lim_{x\to 2}x^2 +\lim_{x\to 2}3x+ \lim_{x\to 2}(-9)=2^2+3\cdot 2+(-9)=1$$

II. **Να βρεθεί το όριο της** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **στο** $x_0=1$

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι το Α= $\Re\backslash\{1\}$, γιατί πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Άρα $x_0\notin A$. Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$

III. **Να βρεθεί το όριο της** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4x-4}}{-x^2+x+2}$ **στο** $x_0=2$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδέν και οι υπόρριζες ποσότητες μη αρνητικές.

Έχουμε $\left.\begin{cases} -x^2+x+2\neq 0 \text{ ό } x\neq -1 \text{ και } x\neq 2. \\ x+2\geq 0 \text{ ό } x\geq -2 \\ 4x-4\geq 0 \text{ ό } x\geq 1 \end{cases}\right\}$ ό Άρα $A=[1,2)U(2,+\infty)$ και $x_0\notin A$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4x-4}}{-x^2+x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4x-4}}{-(x+1)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{4x-4})\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-4}\right)}{-(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{4x-4}\right)^2}{-(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4x+4}{-(x+1)\cdot(x-2)\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-4})}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{-(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-4}\right)}=$$

$$\frac{3}{(2+1)\cdot\left(\sqrt{2+2}+\sqrt{4\cdot 2-4}\right)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

IV. Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$ **να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.**

ΛΥΣΗ

Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Αλλά

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$$

και $f(2)$ = α. Άρα πρέπει <u>α = 1</u>.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ

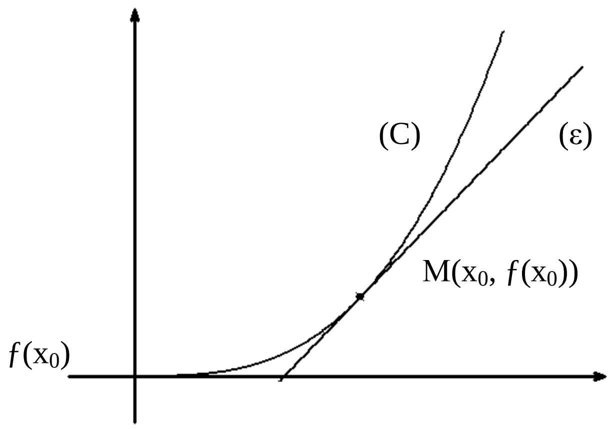
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Η f ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο x_0 Î Α** αν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 , συμβολίζεται με **$f'(x_0)$** και διαβάζεται "f τόνος του x_0", δηλαδή

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** της $y= f(x)$ ως προς x, όταν $x= x_0$.
- Η στιγμιαία ταχύτητα, τη χρονική στιγμή t_0, ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του περιγράφεται από τη συνάρτηση $x= f(t)$ είναι $v(t_0)= f'(t_0)$.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου



Έστω μια συνάρτηση f με γραφική παράσταση την καμπύλη (C) του σχήματος και έστω η εφαπτομένη (ε):y = λx + β της (C) στο σημείο $M(x_0, f(x_0))\in C$, η οποία σχηματίζει με τον xx΄ γωνία ω. Τότε

<u>ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε),(ή αλλιώς η κλίση της ε), λ=εφω, είναι ακριβώς η παράγωγος της f στο x_0, δηλαδή : λ_ε = εφω = $f'(x_0)$</u>

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Έστω Β το σύνολο των στοιχείων του Α στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η συνάρτηση αυτή, όπως ορίστηκε, ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f' (Νεγροπόντης Σ et al, Τόμος Ι, 1992)

- Αν η f' είναι κι αυτή παραγωγίσιμη, τότε η (πρώτη) παράγωγός της ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. **Η παράγωγος της $f(x)$=c είναι** $\boxed{f'(x)=(c)'= 0}$

Πράγματι,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

2. **Η παράγωγος της $f(x)$=x είναι** $\boxed{f'(x)=(x)'=1}$

Πράγματι , f(x+h) - f(x) x+h-x h

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\quad}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{}{h} = 1$$

3. **Η παράγωγος της $f(x)=x^{\rho}$ είναι** $\boxed{f'(x)=(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}}$

Πράγματι, για ρ=2 έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} =$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} =\lim_{h\to 0} (h+2x) = 2x$$

Ως εφαρμογή των παραπάνω έχουμε

- $\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1} = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ δηλαδή $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)}$

- $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

  δηλαδή

  $$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

ΧΡΗΣΙΜΗ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Ισχύουν οι σχέσεις: $x^{-\rho} = \frac{1}{x^{\rho}}$ και $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Η παράγωγος της f(x)=ημx είναι $\boxed{f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$

4. **Η παράγωγος της f(x)=συνx είναι** $\boxed{f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$

5. **Η παράγωγος της $f(x)=e^x$ είναι** $\boxed{f'(x)=(e^x)'=e^x}$

6. **Η παράγωγος της $f(x)=\ell n x$ είναι** $\boxed{f'(x)=(\ell n x)'=\frac{1}{x}}$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

I. $\boxed{[\,c\cdot f(x)\,]' = c\cdot f'(x)}$

Πράγματι, αν θέσουμε F(x)=c·f(x), έχουμε

$$[c\cdot f(x)]'=F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h} = c\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\cdot f'(x).$$

II. $\boxed{[f(x)+g(x)]'= f'(x)+g'(x)}$

Πράγματι, αν θέσουμε F(x)= f(x)+g(x), έχουμε

$$[f(x)+ g(x)]'=F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) +g'(x)$$

III. $$\boxed{[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

IV. $$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad ,g(x)\neq 0}$$

V. $$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Παρατήρηση

Συχνά είναι καλό να χρησιμοποιούμε τους παρακάτω τύπους για την παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης:

- $\left((f(x))^p\right)' = p\,(f(x))^{p-1} f'(x)$
- $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$
- $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{(f(x))^2} f'(x)$
- $(\eta\mu f(x))' = [\sigma\upsilon\nu\, f(x)] \cdot f'(x)$
- $(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -[\eta\mu f(x)]\cdot f'(x)$
- $(\varepsilon\varphi f(x))' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} f'(x)$
- $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $(\ell n f(x))' = \dfrac{1}{f(x)} f'(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. $(3x^5)'=3(x^5)'=3\cdot 5x^{5-1}=15x^4$
2. $(x^2-x)'= (x^2)'+(-x)'=2x-1$
3. $(x\cdot ημx)'= (x)'ημx+x(ημx)'=1\cdot ημx+x\cdot συνx$
4. $$\left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{(x+1)'\cdot x^2-(x+1)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{[(x)'+(1)']\cdot x^2-(x+1)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{(1+0)\cdot x^2-2x^2-2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x(x+2)}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3}$$

5. Σύνθετες συναρτήσεις
   - $[ημ(2x+1)]' = συν(2x+1)\cdot(2x+1)'= συν(2x+1)\cdot(2+0)= 2συν(2x+1)$
   - $$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x+0) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
   - $[ημ^2(3x)]' = [(ημ3x)^2]'= 2\,(ημ3x)^{2-1}\cdot (ημ3x)'=2\,ημ3x\cdot συν3x\cdot(3x)'=$

     $(2\cdot ημ3xσυν3x)\cdot 3 = ημ[(2\cdot 3x)]\cdot 3= 3ημ6x.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Όταν ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης δοσμένης συνάρτησης σε δοσμένο σημείο:

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=-2x^2+x-3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$.

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x) = \left(-2x^2 + x - 3\right)' = -2 \cdot 2x + 1 = -4x + 1$ Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1, f (1)) είναι της μορφής y=λx+b, όπου λ= $f'(1)$ και αφού $f'(1)$=-4·1+1= -3 θα είναι της μορφής y=-3x+b.Αλλά

το (1, f (1))=(1,-4) ανήκει στην εφαπτομένη άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή -4=-3·1+b **ó** b= -1. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η <u>y=-3x-1</u>

2. Όταν ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης δοσμένης συνάρτησης σε κάποιο (άγνωστο) σημείο x_0 , έτσι ώστε αυτή να ικανοποιεί κάποια συνθήκη:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)= $-x^2$+3x-1, x∈ℜ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f που σχηματίζει με τον άξονα xx΄ γωνία 135^o.

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x)$=-2x+3.

Ισχύει 135^o=180^o - 45^o. Άρα εφ135^o = - εφ45^o= -1

(ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες)

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) θα είναι της μορφής y = -x+b

Αν x_0 είναι το σημείο στο οποίο φέρουμε την εφαπτομένη που σχηματίζει τη

γωνία 135^o θα ισχύει

$$\left.\begin{array}{c} f'(x_0) = -1 \\ \text{ó}\ -2x_0+3 = -1\ \text{ó}\ -2x_0 = -4\ \text{ó}\ x_0 = 2 \end{array}\right\}$$

Αλλά $f'(x_0) = -2x_0+3$

και $f(x_0) = -2^2+3\cdot 2-1=1$. Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ = (2,1) ανήκει και στην (ε), άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή 1 = -2+b **ó** b=3

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η y = -x+3.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αντίστοιχα εργαζόμαστε αν μας ζητούν την εξίσωση της εφαπτομένης η οποία:

•Είναι παράλληλη με την ευθεία y = λx + β (Λύνω την εξίσωση $f'(x_0) = \lambda$)

•Είναι κάθετη στην ευθεία y = λx + β (Λύνω την εξίσωση $f'(x_0) \cdot \lambda = -1$)

3. Όταν δίνεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης σε συγκεκριμένο σημείο ικανοποιεί κάποια συνθήκη και ζητείται να βρεθεί μια παράμετρος:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax.$. Να προσδιοριστεί το α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (2, f (2)) να σχηματίζει με τον άξονα xx΄ γωνία 45^o.

ΛΥΣΗ

Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο (2, f (2)) , έστω λ, θα ισούται με την εφαπτομένη των 45^o, δηλαδή $\lambda = \varepsilon\varphi 45^o = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα και } f'(2)=1. \\ \text{Αλλά } f'(x)=4x-a \text{ και } f'(2)=4\cdot 2-a=8-a \end{array}\right\}$$

Άρα πρέπει 8-a=1 **ό** a=7

4. Όταν ζητείται να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση ικανοποιεί μια σχέση ή ζητείται η τιμή μιας παραμέτρου ώστε μια συνάρτηση να ικανοποιεί μια σχέση:

v ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{ax}$, $a\in\Re$. Να βρεθούν οι τιμές του a, ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x)+2f'(x)=3f(x)$, για κάθε $x\in\Re$.

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x)= e^{ax}\cdot(ax)'=a\cdot e^{ax}$

και $f''(x) = (a\cdot e^{ax})'= a\cdot(e^{ax})'= a^2\cdot e^{ax}$

Άρα $f''(x) + 2\cdot f'(x) = 3\cdot f(x) \Leftrightarrow a^2 \cdot e^{ax} + 2\cdot a\cdot e^{ax} = 3\cdot e^{ax} \Leftrightarrow$

$a^2\cdot e^{ax} + 2\cdot a\cdot e^{ax} - 3e^{ax} = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(a^2+2a-3) = 0 \Leftrightarrow a^2+2a-3=0$ (επειδή $e^{ax}\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$).
Το τριώνυμο έχει ρίζες $a_1=1$ και $a_2= -3$ και αυτές είναι οι ζητούμενες τιμές.

3.4 Εφαρμογές των Παραγώγων

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση $f : A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $D \subseteq A$, τότε:

- Αν $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in D$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο D.
- Αν $f'(x) < 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in D$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 1ΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω μια συνάρτηση $f : (\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$ (Νεγροπόντης Σ et al, Τόμος ΙΙα, 1992).

$$\text{Αν} \left\{ \begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0) \\ f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(x_0,\beta) \end{array} \right\}$$

τότε η f παρουσιάζει στο $x=x_0$ <u>μέγιστο</u>, το $f(x_0)$.

$$\text{Αν} \left\{ \begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0) \\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(x_0,\beta) \end{array} \right\}$$

τότε η f παρουσιάζει στο $x=x_0$ <u>ελάχιστο</u>, το $f(x_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0)=0$. Το αντίστροφο όμως <u>**δεν**</u> ισχύει. Δηλαδή, αν για κάποια f ισχύει $f'(x_0)=0$ για κάποιο x_0 του πεδίου ορισμού της, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x)=x^2-3x$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $f'(x)=2x-3$. Άρα $f'(x)=0$ **ó** $2x-3=0$ **ó** $x=3/2$.

x	$-\infty$ 3/2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3/2$, το $f(3/2) = -9/4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \Re$ ώστε η f να έχει στη θέση $x = 2$ τοπικό ακρότατο ίσο με 6.

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα της άσκησης συμπεραίνουμε ότι

$$f(2)=6 \Leftrightarrow a\cdot 2^2+b\cdot 2+2=6 \Leftrightarrow 4a+2b+2=6 \Leftrightarrow 4a+2b=4 \Leftrightarrow 2a+b=2$$
(1)

Επίσης, αφού δίνεται ότι στο $x=2$ η συνάρτηση έχει τοπικό ακρότατο, θα ισχύει

$f'(2) = 0$. Αλλά έχουμε $f'(x) = 2\alpha x + \beta$ **ó** $f'(2) = 4\alpha + \beta = 0$ (2)

Από τη λύση του συστήματος των (1) και (2) έχουμε $\alpha = -1$ και $\beta = 4$.

ΛΥΜΕΝΕΣ *ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f \text{ με } f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

Να βρεθούν:

- το πεδίο ορισμού της
- $\lim_{x\to 4} f(x)$

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού είναι το R\{4}, γιατί πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0.

Έχουμε

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$I.\ f(x)=hm\mathrm{x}^4$$
$$II.\ f(x)=\ln\sqrt{x}$$
$$III.\ f(x)=e^{sun\,\mathrm{x}}$$
$$IV.\ f(x)=\ln(\ln x)$$
$$V.\ f(x)=x^2\cdot sun\,2\mathrm{x}$$
$$VI.\ f(x)=\ln^3 x^2$$
$$VII.\ f(x)=ef^{\,2}3x$$
$$VIII.\ f(x)=sun^{\,3}x^3$$

ΛΥΣΗ

$$\text{I.}\ f'(x)=\left(hm\,x^4\right)'=sun\ x^4\left(x^4\right)'=sun\ x^4\cdot 4x^3$$

$$\text{II.}\ f'(x)=\left(ln\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$$

$$\text{III.}\ f'(x)=\left(e^{sun\ x}\right)'=e^{sun\ x}\cdot(sun\,x)'=e^{sun\ x}\cdot(-hm\,x)=-e^{sun\ x}\cdot hm\,x$$

$$\text{IV.}\ f'(x)=\left(ln(ln\,x)\right)'=\frac{1}{ln\,x}\cdot(ln\,x)'=\frac{1}{ln\,x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot ln\,x}$$

$$\text{V.}\ f'(x)=\left(x^2\cdot sun\,2x\right)'=\left(x^2\right)'\cdot sun\,2x+x^2\cdot(sun\,2x)'=$$

$$2x\cdot sun\,2x+x^2\cdot(-hm2x)\cdot(2x)'=2x\cdot sun\,2x\text{-}2x^2\cdot hm2x$$

$$\text{VI.}\ f'(x)=\left(ln^3x^2\right)'=\left[\left(ln\,x^2\right)^3\right]'=\left[(2ln\,x)^3\right]'=3\cdot(2ln\,x)^2\cdot(2ln\,x)'$$

$$=3\cdot4\cdot ln^2x\cdot2\cdot\frac{1}{x}=24\frac{ln^2x}{x}$$

$$\text{VII.}\ f'(x)=\left(ef^2 3x\right)'=2\cdot ef3x\cdot(ef3x)'=2\cdot ef3x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}\cdot(3x)'=6\frac{ef3x}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}$$

$$\text{VII.}\ f'(x)=\left(sun^3x^3\right)'=\left[\left(sun\ x^3\right)^3\right]'=3\cdot\left(sun\ x^3\right)^2\cdot\left(sun\ x^3\right)'=$$

$$3\cdot sun^2x^3\cdot(-hm\ x^3)\cdot\left(x^3\right)'=-3sun^2x^3\cdot hm\ x^3\cdot3x^2=-9x^2\cdot sun^2x^3\cdot hm\ x^3$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=ae^{-x}+be^{-2x}$, $a, b\in\Re$.

Να αποδείξετε ότι $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=0$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $f'(x)=ae^{-x}(-x)'+be^{-2x}(-2x)'=-ae^{-x}-2be^{-2x}$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(-ae^{-x}-2be^{-2x}\right)'=-ae^{-x}(-x)'-2be^{-2x}(-2x)'=ae^{-x}+4be^{-2x}$$

Άρα $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=\left(ae^{-x}+4be^{-2x}\right)+3\left(-ae^{-x}-2be^{-2x}\right)+2\left(ae^{-x}+be^{-2x}\right)=$

$$=ae^{-x}+4be^{-2x}-3ae^{-x}-6be^{-2x}+2ae^{-x}+2be^{-2x}=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+1$ Να βρεθούν:

1. Η $f'(x)$
2. Τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες σ’αυτήν είναι παράλληλες στον άξονα xx΄.

ΛΥΣΗ

1. Είναι $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+1\right)'=\frac{1}{3}3x^2+2\cdot 2x+3=x^2+4x+3$
2. Οι εφαπτομένες της καμπύλης που είναι παράλληλες στον xx΄ έχουν συντελεστή διεύθυνσης 0. Έστω (x_0, f (x_0)) ένα από τα ζητούμενα σημεία. Τότε θα ισχύει $f'(x_0)=0 \Rightarrow x_0^2+4x_0+3=0 \Rightarrow x_0=-1$ ή $x_0=-3$.

   Για κάθε μια από τις παραπάνω τιμές βρίσκουμε την αντίστοιχη τετμημένη

$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3+2(-1)^2+3(-1)+1=-\frac{1}{3}$$

$$f(-3)=\frac{1}{3}(-3)^3+2(-3)^2+3(-3)+1=1$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα Α(-1, 1/3)   και Β(-3,1)

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρεθούν 2 αριθμοί x,y με σταθερό άθροισμα 12, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

ΛΥΣΗ

Έστω x,y δύο αριθμοί με x+y=12. y=12-x (1).

Το γινόμενο θα είναι $xy=x(12-x)=12x-x^2$.

Άρα μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x)=12x-x^2$ και ζητούμε το μέγιστό της (αφού μας ζητείται το μεγαλύτερο γινόμενο).

Είναι $f'(x)=12-2x$

Άρα $f'(x)=0 \Rightarrow 12-2x=0 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$

Συνεπώς είναι
$$\left.\begin{array}{l} f'(6)=0 \\ f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x<6 \\ f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x>6 \end{array}\right\}$$

Άρα το <u>x=6</u> είναι μέγιστο (ολικό) για την f, δηλαδή για x=6 μεγιστοποιείται το γινόμενο xy. Από την (1) έχουμε ότι $y=12-x \Rightarrow y = 12-6$ δηλαδή <u>y = 6</u>

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η συνάρτηση του συνολικού κόστους παραγωγής, TC, ενός προϊόντος περιγράφεται από την συνάρτηση:

$TC(x) = 0,2\cdot x^2 - 10x + 1000$, όπου x είναι η παραγόμενη ποσότητα. Μία μελέτη έδειξε ότι για τα επόμενα έτη η ποσότητα παραγωγής του προϊόντος ακολουθεί τον τύπο : $X(t)=4\sqrt{t+1}$, όπου η μεταβλητή t δηλώνει το έτος (τρέχον έτος t=0, επόμενο έτος t=1 κοκ).

a. Για ποια παραγόμενη ποσότητα το κόστος παραγωγής ελαχιστοποιείται;

b. Εξετάζοντας την συνάρτηση της οριακής μεταβολής της παραγωγής, εκτιμάται ότι η παραγωγή του προϊόντος αναμένεται να αυξηθεί ή να μειωθεί τα επόμενα έτη και γιατί;

c. Ποια χρονική στιγμή θα παρατηρήσουμε μεγαλύτερη μεταβολή της παραγωγής: Από το έτος 1 στο έτος 2 ή από το έτος 4 στο έτος 5.

d. Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταβολής του κόστους παραγωγής σε σχέση με τον χρόνο.

[20%]

e. Να υπολογισθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία το κόστος παραγωγής θα έχει την ελάχιστη τιμή, καθώς και η αντίστοιχη ποσότητα παραγωγής.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $TC(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 1000$

Επομένως $MC = dTC/dx = 0{,}4 \cdot x - 10$ και $d^2TC/dx^2 = 0{,}4$

$MC = 0 \Rightarrow 0{,}4 \cdot x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10/0{,}4 \Rightarrow x = 25$

Η συνάρτηση οριακής μεταβολής της παραγωγής είναι η παράγωγος της X(t). $dX(t)/dt = (1/2) \cdot 4 \cdot (t+1)^{-1/2} = 2 \cdot (t+1)^{-1/2}$, η οποία λαμβάνει θετικές τιμές για όλες τις τιμές του t. Επομένως η συνάρτηση X(t) είναι αύξουσα, άρα επομένως η ποσότητα παραγωγής αυξάνεται από χρόνο σε χρόνο.

Η συνάρτηση οριακής μεταβολής της παραγωγής $dX(t)/dt = 2 \cdot (t+1)^{-1/2}$, είναι φθίνουσα συνάρτηση του t, επομένως η μεταβολή (αύξηση διότι οι τιμές της παραγώγου είναι θετικές) της παραγωγής μειώνεται από χρόνο σε χρόνο. Η τιμή της dX(t)/dt είναι μεγαλύτερη για t=1 από την αντίστοιχη τιμή για t=4, επομένως η αύξηση είναι μεγαλύτερη από το έτος 1 στο έτος 2.

Η συνάρτηση μεταβολής του κόστους παραγωγής σε σχέση με τον χρόνο είναι η παράγωγος dC(t)/dt.
$dC(t)/dt = (dC/dx).(dx/dt) = (0{,}2 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 1000)'. [4 \cdot (t+1)^{1/2}]' =$
$= (0{,}4 \cdot x - 10) \cdot 2 \cdot (t+1)^{-1/2} = (0{,}4 \cdot (4 \cdot (t+1)^{½}) - 10) \cdot 2 \cdot (t+1)^{-½} = 3{,}2 - 20 \cdot (t+1)^{-½}$

Η χρονική στιγμή κατά την οποία το κόστος παραγωγής θα έχει την ελάχιστη τιμή δίνεται από τη σχέση dC(t)/dt = 0 από την οποία προκύπτει ότι :

$$3{,}2 - 20 \cdot (t+1)^{-½} = 0 \Rightarrow (t+1)^{½} = 20/3{,}2 = 6{,}25 \Rightarrow t + 1 = 39{,}0625 \Rightarrow t = 38{,}0625$$

Η αντίστοιχη ποσότητα παραγωγής είναι $X(t) = 4 \cdot (t+1)^{½} = 4 \cdot (38{,}0625+1)^{1/2} = 4 \cdot (6{,}25) =$ 25, επαληθεύοντας τα αποτελέσματα της ερώτησης (a).

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ας υποθέσουμε ότι τα συνολικά έσοδα (TR) και τα συνολικά κόστη (TC), μίας επιχείρησης δίνονται από τις σχέσεις, αντίστοιχα:

$$TR = 260Q \quad \text{και} \quad TC = 1125 + 10Q + 5Q^2$$

α) Βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων του συνολικού εσόδου και του συνολικού κόστους και εξηγείστε την οικονομική σημασία των αποτελεσμάτων.

β) Υπολογίστε την κλίση του TR και του TC στην ποσότητα Q=25, όπου μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης. Πως ερμηνεύεται το αποτέλεσμα σας;

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του προϊόντος αυξάνεται στις 300 χρηματικές μονάδες (χ.μ.). Τι θα συμβεί στην ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος;

Υπολογίστε την νέα ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος και σχολιάστε το αποτέλεσμα.

γ) Αν το σταθερό κόστος αυξηθεί στις 1500 χ.μ, υπολογίστε τη νέα ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος και εξηγείστε το αποτέλεσμα.

δ) Η συνάρτηση ζήτησης μίας εταιρείας δίνεται από τον τύπο $Q_d = 100 + \frac{5}{P}$.

Υπολογίστε την κλίση όταν η τιμή P = 2 και όταν P = 5. Πως μεταβάλλεται η κλίση ως προς την τιμή; Τι συμπεραίνετε για την κυρτότητα της καμπύλης ζήτησης;

<u>Λύση</u>

α) $\frac{dTR}{dQ} = 260, \frac{dTC}{dQ} = 10 + 10Q$

Η πρώτη παράγωγος του συνολικού εσόδου ως προς την ποσότητα είναι το οριακό έσοδο, MR, (δηλαδή η μεταβολή που προκύπτει στα έσοδα από μια αύξηση της παραγωγής κατά μια μονάδα) ενώ η πρώτη παράγωγος του συνολικού κόστους ως προς την ποσότητα είναι το οριακό κόστος,MC (δηλαδή η μεταβολή που προκύπτει στο κόστος από μια αύξηση της παραγωγής κατά μια μονάδα).

β) MR=260, MC=10+10Q=10+10(25)=260

Συμπεραίνουμε ότι το MR και το MC είναι ίσα στην ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος. Αυτό συμβαίνει διότι Π(Q)=TR-TC → $\frac{dp}{DQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = 0$ για μέγιστο.

Για να μεγιστοποιείται το κέρδος, πρέπει η παραγωγή να βρίσκεται σε επίπεδο όπου το οριακό κόστος να ίσο με το οριακό έσοδο, καθώς μόνο τότε ο παραγωγός δεν έχει κίνητρο να αυξομειώσει περαιτέρω την παραγωγή του. Σε κάθε άλλη περίπτωση, ο παραγωγός θα μετέβαλε την παραγόμενη ποσότητα προκειμένου να αυξήσει τα κέρδη του. Για παράδειγμα: αν η παραγωγή βρίσκεται σε επίπεδο στο οποίο το οριακό κόστος είναι μικρότερο από το οριακό έσοδο, μπορεί να αυξήσει λίγο την παραγωγή του (το επιπλέον κόστος θα είναι μικρότερο από το επιπλέον έσοδο που θα προκύψει) έχοντας επιπρόσθετο κέρδος (τη διαφορά μεταξύ επιπλέον εσόδου και επιπλέον κόστους). Αν, από την άλλη μεριά, το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το οριακό έσοδο, τότε μπορεί μειώνοντας την παραγωγή να αυξήσει το κέρδος.

Όταν η τιμή αυξηθεί στο 300, η συνάρτηση εσόδων γίνεται TR=300Q. Εξισώνουμε πάλι το οριακό κόστος με το οριακό έσοδο για να βρούμε την νέα ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Τώρα MR=300 και MC=10+10Q

→ 300=10+10Q→ Q=29

Η ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος έχει αυξηθεί διότι η αύξηση της τιμή πώλησης του προϊόντος αύξησε το οριακό έσοδο, ενώ το οριακό κόστος παρέμεινε αμετάβλητο. Έτσι MR>MC και κατά συνέπεια ο παραγωγός έχει κίνητρο (κέρδος) να αυξήσει την παραγωγή του μέχρι του σημείου όπου το νέο MR θα είναι ίσο με το MC.

γ) Η μεταβολή στο σταθερό κόστος από $TC=1125+10Q+5Q^2$ σε $TC=1500+10Q+5Q^2$ δεν θα επηρεάσει την παραγόμενη ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος και τούτο διότι το σταθερό κόστος δεν παίρνει μέρος στην επιχειρηματική απόφαση τουλάχιστον βραχυχρόνια. Με άλλα λόγια, το MC παραμένει αμετάβλητο και κατά συνέπεια δεν μεταβάλλεται η ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος.

δ) Η κλίση της συνάρτησης ζήτησης δίνεται από $\frac{dQ_d}{dP} = \frac{-5}{P^2}$

όταν το P=2 η κλίση παίρνει την τιμή -5/4 και όταν το P=5, η κλίση παίρνει την τιμή -5/25.Αυτό σημαίνει ότι σε απόλυτους όρους η κλίση μειώνεται, ($\frac{5}{4} > \frac{5}{25}$), πράγμα που είναι χαρακτηριστικό μίας κοίλης καμπύλης ζήτησης.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Το οριακό κόστος παραγωγής ενός προϊόντος είναι γραμμική συνάρτηση της ποσότητας παραγωγής. Για ποσότητα παραγωγής 40 μονάδων το οριακό κόστος είναι 6 νομισματικές μονάδες (ν.μ.), ενώ για ποσότητα παραγωγής 50 μονάδων το οριακό κόστος είναι 10 ν.μ.. Το σταθερό κόστος παραγωγής είναι 200 ν.μ.:

α) Να ευρεθεί η συνάρτηση του οριακού κόστους παραγωγής.

β) Να ευρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους παραγωγής.

γ) Να προσδιορισθεί το επίπεδο παραγωγής (αν υπάρχει) στο οποίο το συνολικό κόστος παραγωγής ελαχιστοποιείται και στη περίπτωση αυτή να υπολογισθεί το ελάχιστο κόστος παραγωγής.

δ) Αν η πρόβλεψη για την ποσότητα παραγωγής δίνεται από τη σχέση $x = 2 + \sqrt{2t+1}$, όπου x η ποσότητα παραγωγής και t ο χρόνος, να προσδιορισθεί η συνάρτηση οριακής μεταβολής του κόστους παραγωγής σε σχέση με τον χρόνο.

<u>Λύση</u>

α) Εφ όσον η συνάρτηση του οριακού κόστους παραγωγής είναι γραμμική, και σύμφωνα με τους κανόνες για τον υπολογισμό εξίσωσης ευθείας όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων της, ισχύει

$$\frac{MC-6}{x-40} = \frac{MC-10}{x-50} \Rightarrow$$
$$xMC - 6x - 50MC + 300 = xMC - 10x - 40MC + 400 \Rightarrow$$
$$-10MC = -4x + 100 \Rightarrow MC = 0,4x - 10$$

β) Η συνάρτηση του συνολικού κόστους TC, είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης του οριακού κόστους. Επομένως

$TC = \int (0{,}4x\text{-}10)dx \rightarrow TC = 0{,}2x^2 - 10x + C$

και εφ όσον TC (0) = 200 $\rightarrow$ C=200, άρα

$TC = 0{,}2x^2 - 10x + 200$

γ) Για να υπάρχει ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους θα πρέπει να ικανοποιούνται οι αντίστοιχες συνθήκες πρώτης και δεύτερης παραγώγου.

ΚΠΠ: MC=0=>0,4x-10=0=>χ=25.

ΚΔΠ: MC'=0,4>0, επομένως για ποσότητα παραγωγής χ=25 το κόστος παραγωγής ελαχιστοποιείται.

Το ελάχιστο κόστος είναι $TC(25)=0{,}2(25)^2\text{-}10(25)+200= 125\text{-}250+200 = 75$

δ) Σύμφωνα με τον κανόνα της παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε:

dTC/dt = (dTC/dx) (dx/dt)

Γνωρίζουμε ότι (dTC/dx) = 0,4x - 10

$dx/dt = (1/2)\ (2t+1)^{-1/2}\ (2t+1)' = (2t+1)^{-1/2}$

Επομένως

$dTC/dt = (0{,}4x\text{-}10)\ (2t+1)^{-1/2} = \{0{,}4[2+(2t+1)^{1/2}]\text{-}10\}\ (2t+1)^{-1/2} =$

$= (0.4\ (2t+1)^{1/2} - 9.2\ )\ /\ (2t+1)^{1/2}$

Κεφάλαιο 4^{ο}: Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με μαθηματικές μεθόδους επίλυσης οικονομικών προβλημάτων. Εξετάσαμε για τον σκοπό αυτό τρεις τομείς των μαθηματικών που κρίναμε ότι έχουν ενδιαφέρον και οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε οικονομικά προβλήματα. Έτσι λοιπόν στο πρώτο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τον γραμμικό προγραμματισμό και με προβλήματα μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης κάτω από περιορισμούς. Κάποια από αυτά αφορούν την μεγιστοποίηση του κέρδους μιας εταιρείας ή την ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής σε βιομηχανίες κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες –περιορισμούς. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να αφορούν τη περιορισμένη πρόσβαση της εταιρείας σε πρώτες ύλες, στη κατανομή του προσωπικού σε σχέση με το ωράριο εργασίας, στην αύξηση του κόστους παραγωγής αν ξεπεραστεί κάποιο συγκεκριμένο όριο και στη πτώση της τιμή πώλησης του προϊόντος καθώς αυξάνει η ποσότητα-προσφορά του στην αγορά. Μέσω της μοντελοποίησης του προβλήματος σε μαθηματικό επίπεδο προσπαθούμε να βρούμε την βέλτιστη λύση στο πρόβλημα που μας απασχολεί. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές και υπολογιστικά προγράμματα που εφαρμόζουν τις συγκεκριμένες τεχνικές όπως η μέθοδος simplex.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους αναδείξαμε τον λόγο ‘εφεύρεσης’ τους για πρακτικούς λόγους. Είδαμε προβλήματα που αφορούν τον υπολογισμό των χρηματοροών αποπληρωμής ενός δανείου που πρέπει να πληρωθεί σταδιακά σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μέσω σταθερών αλλά και μη σταθερών δόσεων σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που ισαπέχουν χρονικά μεταξύ τους. Σε αυτού του είδους τα προβλήματα επιδιώκουμε να βρούμε το ύψος του ποσού που πρέπει να γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή λαμβάνοντας υπόψη το επιτόκιο. Σε αυτά τα προβλήματα την λύση μας την δίνει η μιγαδική ανάλυση η οποία μας παρέχει όλες τις λύσεις της εξίσωσης που μοντελοποιεί το πρόβλημα. Μέσα στις μιγαδικές λύσεις που βρίσκουμε υπάρχει και η πραγματική λύση και η οποία είναι αυτή που μας ενδιαφέρει.

Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον διαφορικό λογισμό, την εύρεση της μέγιστης ή ελάχιστης τιμής συναρτήσεων που μπορεί να είναι κέρδη ή κόστη επιχειρήσεων. Ποια είναι για παράδειγμα η τιμή εκείνη που πρέπει ένα λιανοπωλητής να πουλήσει το προϊόν του σε μια αγορά με συγκεκριμένη ζήτηση για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Σε αυτή την περίπτωση την λύση δίνει ο διαφορικός λογισμός ο οποίος μέσω της χρήσης της πρώτης και δεύτερης παραγώγου βρίσκουμε τα ακρότατα, τα σημεία στα οποία η εξίσωση, δηλαδή το μοντελοποιημένο πρόβλημα λαμβάνει τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές σε συγκεκριμένες εφικτές περιοχές των μεταβλητών που λαμβάνουν μέρος στο μοντέλο. Επιπλέον σε αυτό το σημείο η εξίσωση μοντελοποίησης του προβλήματος ερευνάται ως προς την συμπεριφορά της σε διάφορα σημεία που θεωρούνται ακραία, δηλαδή είναι στα όρια του προβλήματος που έχει οριστεί, δηλαδή στα όρια των μεταβλητών που λαμβάνουν μέρος. Σε αυτό το πρόβλημα η μελέτη συμπεριφοράς του προβλήματος μέσω της μοντελοποίησης του σε εξίσωση γίνεται μέσω της χρήσης – εύρεσης των ορίων της συνάρτησης στα ζητούμενα σημεία.

Βιβλιογραφία

Chiang,Alpha C, 1984, ‘Fundamental methods of mathematical economics’, McGraw-Hill (New York)

Dantzing, G. M. L.: Mathematical Programming in Practice, Pitman Publishing Ltd, London, 1976

Zitarelli, David E.;Coughlin, Raymond F. ‘Finite Mathematics With Calculus: An Applied Approach’, Philadelphia Saunders College Publishing, 1989

Αβδέλας, Σίμος, ¨ Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα .Τομ. Α (θεωρία) ¨, Τμήμα Πληροφορικής & Τεχνολογίας υπολογιστών, ΤΕΙ Μακεδονίας, 2003

Κουνιά.Σ, Φακίνου.Δ, ‘Γραμμικός Προγραμματισμός’, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη, 1993

Νεγροπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1992

Νεγροπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙα, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1992

http://www.phpsimplex.com/en/simplex_method_example.htmSimplex.pdf

http://www.purplemath.com/modules/complex2.htm