ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΚΑΡΑΒΕΛΑ ΖΩΗ

ΜΙΧΑΛΟΠΟΥΛΟΥ ΑΦΡΟΔΙΤΗ

ΕΙΣΗΓΗΣΗ:

κ. ΚΑΡΥΩΤΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΠΑΤΡΑ 2010

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αντικειμενικός σκοπός της εργασίας αυτής είναι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων και της Συνδυαστικής ανάλυσης στην Οικονομία. Καταβλήθηκε προσπάθεια να υπάρξουν αρκετές εφαρμογές και παραδείγματα ώστε να φανεί η χρησιμότητα του κλάδου αυτού σε διάφορες επιστήμες και ιδιαίτερα στην Οικονομία.

Ευχαριστούμε θερμά την κυρία Καρυώτη Βασιλική, για την πολύτιμη βοήθειά της και την προθυμία της να μας καθοδηγεί και να μας διορθώνει σε όλο το διάστημα που χρειάστηκε για να ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία.

Επίσης, οι δυο συμφοιτήτριες Καραβέλα Ζωή και Μιχαλοπούλου Αφροδίτη ευχαριστούν θερμά η μια την άλλη για την άψογη συνεργασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από την πληθώρα των πληροφοριών σε όλες τις δραστηριότητες και λειτουργίες της οικονομίας τόσο σε μικροοικονομικό όσο και σε μακροοικονομικό επίπεδο. Από τον απλό πολίτη μέχρι τον Διευθύνοντα Σύμβουλο μιας πολυεθνικής εταιρίας και από τον απλό υπάλληλο του Υπουργείου Εμπορίου μέχρι και τον Υπουργό, υπάρχουν και είναι διαθέσιμα δεδομένα για οτιδήποτε τους αφορά: τιμές πρώτων υλών, τιμές συναλλάγματος, χρηματιστηριακές αξίες, επίπεδο πληθωρισμού, στοιχεία ισολογισμών κ.λπ.

Εάν λάβουμε δε υπόψη μας ότι ο αριθμός των οικονομικών μεγεθών(μεταβλητών) που εμπλέκονται στη διαδικασία αντιμετώπισης ενός επιχειρηματικού προβλήματος έχει αυξηθεί σημαντικά, θα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι για να ληφθούν σωστές αποφάσεις θα πρέπει πρώτα να γίνει ποσοτική ανάλυση των δεδομένων, προκειμένου να διαπιστωθεί η συμπεριφορά των οικονομικών μεγεθών και η ενδεχόμενη σχέση μεταξύ τους.

Έτσι, η ανάλυση των δεδομένων, που στον χώρο των επιχειρήσεων έχει αντικαταστήσει τον κλασσικό όρο «στατιστική ανάλυση» αποτελεί πλέον το βασικότερο σύστημα υποστήριξης αποφάσεων και είναι συνδυασμός των βασικών συστατικών μεγεθών και υπολογιστικών συστημάτων. Η ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστών την τελευταία δεκαετία οδήγησε την ανάπτυξη ολοκληρωμένων συστημάτων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων. Στον χώρο των επιχειρήσεων, μεταξύ άλλων προγραμμάτων, έχουν επικρατήσει και τα προγράμματα ανάλυσης λογιστικών φύλλων.

Πολλοί είναι οι λόγοι για τους οποίους τα στελέχη των επιχειρήσεων πρέπει να γνωρίζουν τις βασικές μεθόδους στατιστικής (ή ποσοτικής) ανάλυσης των δεδομένων. Κυριότεροι είναι οι εξής:

- Πρέπει να γνωρίζουν πως παρουσιάζονται και περιγράφονται οι ποσοτικές (αριθμητικές) πληροφορίες.
- Πρέπει να γνωρίζουν πως προκύπτουν συμπεράσματα για μεγάλους πληθυσμούς, όταν τα διαθέσιμα δεδομένα προκύπτουν από ένα μικρό αριθμό παρατηρήσεων, που ονομάζονται «δείγμα».
- Πρέπει να γνωρίζουν πως προκύπτουν αξιόπιστες προβλέψεις για διάφορα οικονομικά μεγέθη(π.χ. πωλήσεις, μερίδια αγοράς, κ.λπ.).

Για όλους αυτούς τους λόγους καταλαβαίνουμε την σπουδαιότητα της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων στο χώρο της Οικονομίας.

Η Στατιστική είναι μια εφαρμόσιμη μαθηματική επιστήμη που σκοπό έχει να βοηθήσει στην μελέτη και κατανόηση των φαινομένων η των ιδιοτήτων των πληθυσμών, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δίνει ένα μέρος μόνο του πληθυσμού ή του φαινομένου.

Επειδή ούτε η μελέτη του συνόλου του πληθυσμού, ούτε η εξολοκλήρου παρακολούθηση της εξέλιξης του φαινομένου είναι δυνατή, καταφεύγουμε στο πείραμα αν πρόκειται για μελέτη φαινομένου ή στην δειγματοληψία αν πρόκειται για πληθυσμό. Για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα θα πρέπει το δείγμα να είναι τυχαίο και αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται.

Για να μελετηθούν οι ιδιότητες ή τα φαινόμενα, θα πρέπει να εκφράσουν μαθηματικά, ώστε να γίνουν μαθηματικά προβλήματα τα οποία θα επιλυθούν και θα δώσουν τα αποτελέσματα. Έτσι θα πρέπει να υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των ιδιοτήτων ή των φαινομένων και κάποιων μαθηματικών εκφράσεων.

Η θεωρία Πιθανοτήτων από την άλλη μεριά, είναι ο κλάδος της μαθηματικής επιστήμης που μελετά την συμπεριφορά των τυχαίων φαινομένων. Είναι η επιστήμη που εξετάζει τους νόμους της τύχης και έχει εφαρμογές σε όλες σχεδόν τις άλλες επιστήμες μεταξύ των οποίων και την Οικονομία. Η θεωρία των Πιθανοτήτων άλλωστε αναπτύχθηκε κάτω από την ανάγκη επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων.

Η συγκεκριμένη εργασία έχει σκοπό το συσχετισμό των Επιστημών της Στατιστικής και της Πιθανότητας με αυτή της Οικονομίας.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη Συνδυαστική Ανάλυση, η οποία μας διευκολύνει να βρούμε τρόπους και τύπους για τον προσδιορισμό του πλήθους των αντικειμένων όταν αυτό είναι μεγάλο. Με την βοήθεια ορισμών αλλά και παραδειγμάτων επιχειρείται η κατανόηση εννοιών όπως αυτής της διάταξης, της μετάθεσης και των συνδυασμών.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιέχει έννοιες καθοριστικής σημασίας για την κατανόηση του τρόπου λειτουργίας των πιθανοτήτων. Η αναφορά γνωστών και σπουδαίων για τις πιθανότητες θεωρημάτων, όπως αυτός του Bayes δίνουν μια αυστηρότητα απαραίτητη για εξαγωγή σίγουρων και ασφαλών συμπερασμάτων. Η αναφορά των αμοιβαίων κεφαλαίων είναι ένα παράδειγμα στο οποίο φαίνεται ο τρόπος που εφαρμόζονται όλα τα παραπάνω.

Τέλος στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά στις σπουδαιότερες κατανομές πολλές από τις οποίες εφαρμόζονται και στο χώρο της οικονομίας.

Κεφάλαιο 1: Συνδυαστική Ανάλυση

1.1 Βασικές αρχές απαρίθμησης

Η απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου, η εύρεση δηλαδή του πληθικού αριθμού ενός συνόλου, θεωρητικά δεν έχει καμία δυσκολία. Πράγματι, αρκεί να βρεθεί ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε να μπορεί να δημιουργηθεί μια αντιστοιχία μεταξύ του δοθέντος συνόλου και του συνόλου$\{1,2,\ldots,n\}$ των πρώτων n φυσικών αριθμών. Στην πράξη όμως η αντιστοίχηση αυτή δεν είναι πάντα εύκολο να υλοποιηθεί, δεν μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε εύκολα το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου.

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια ορισμένες αρχές που μας βοηθούν στην απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου.

1.1.1 Θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης

Ας υποθέσουμε ότι για την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου χωρίζουμε πρώτα το συνολικό έργο της απαρίθμησης σε m διαδοχικές φάσεις. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι οι φάσεις αυτές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες ή τέτοιες ώστε το αποτέλεσμα της μέτρησης σε κάθε φάση να καθορίζεται μονοσήμαντα από τα αποτελέσματα των προηγούμενων φάσεων. Τότε, το αποτέλεσμα της συνολικής απαρίθμησης ισούται με το γινόμενο των επί μέρους απαριθμήσεων. Δηλαδή, αν είναι n_1 το αποτέλεσμα της απαρίθμησης στην πρώτη φάση, n_2 στη δεύτερη φάση και n_m στην τελευταία, τότε το αποτέλεσμα στη συνολική απαρίθμηση είναι:

$$n = n_1 n_2 \ldots n_m$$

1.1.2 Αρχή Αθροίσματος

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο του οποίου ζητάμε την απαρίθμηση χωρίζεται σε επιμέρους κατηγορίες, ξένες μεταξύ τους ανά δυο, δηλαδή σε κατηγορίες τέτοιες ώστε αν κάποιο στοιχείο του συνόλου ανήκει σε μια κατηγορία, να μην ανήκει σε καμία άλλη. Τότε, το αποτέλεσμα της συνολικής απαρίθμησης ισούται με το άθροισμα των επί μέρους απαριθμήσεων. Θα είναι δηλαδή:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

όπου $n_κ$ είναι το αποτέλεσμα στην απαρίθμηση των στοιχείων της κ-στής κατηγορίας και n το αποτέλεσμα στην συνολική απαρίθμηση.

1.2 Συνδυασμοί, διατάξεις, μεταθέσεις

Ας θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο σύνολο n αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους λόγω κάποιας χαρακτηριστικής ιδιότητάς τους, όπως θέση εργασίας, μισθό κ.λπ. Σχηματίζουμε μια συλλογή κ αντικειμένων, επιλέγοντας κ από τα n αντικείμενα που δόθηκαν. Ανάλογα με τον τρόπο επιλογής των κ αυτών αντικειμένων, διακρίνουμε τις μεθόδους σε συνδυασμούς, διατάξεις, μεταθέσεις.

1.2.1 Συνδυασμοί

Αν από τα n διαφορετικά αντικείμενα πάρουμε r χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους αλλά μόνο ποιά αντικείμενα πήραμε, τότε έχουμε τους συνδυασμούς των r αντικειμένων που το πλήθος τους συμβολίζεται με $\binom{n}{r}$ και είναι :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Όπου το σύμβολο n! διαβάζεται « n παραγοντικό», ορίζεται ως εξής:

$n! = 1\times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ και $0! = 1$ (Κολυβά-Μαχαίρα, 1998)

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $A^4_\kappa = 24$ και $\binom{4}{\kappa} = 4$, να υπολογιστεί το κ.

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι οι συνδυασμοί των *ν* πραγμάτων ανά *μ* δίνονται από τη σχέση :

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{A^\nu_\mu}{\mu!}$$

Έχοντας υπόψη μας την παραπάνω σχέση, θα έχουμε :

$$\binom{4}{\kappa} = \frac{A^4_\kappa}{\kappa!}$$

$$4 = \frac{24}{\kappa!}$$

$$\kappa! = \frac{24}{4}$$

$$\kappa! = 6$$

$$\kappa = 3$$

Παράδειγμα

Σε μια εταιρία το μετοχικό συμβούλιο αποτελείται από τον πρόεδρο και 7 μετόχους. Πρόκειται να σχηματιστεί μια τετραμελής επιτροπή η οποία θα διαπραγματευτεί τη συγχώνευση της εταιρίας με μια άλλη. Πόσες τετραμελής επιτροπές μπορούμε να σχηματίσουμε αν ο πρόεδρος είναι πάντα μέλος της επιτροπής ;

Λύση

Επειδή ο πρόεδρος θα είναι μέλος σε κάθε επιτροπή θα πρέπει να επιλεγούν ακόμα 3 μέλη από τους 7 μετόχους. Επομένως οι δυνατές τετράδες είναι όσοι και οι συνδυασμοί χωρίς επανάληψη των 7 ανά 3, δηλαδή:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Άρα οι δυνατές τετράδες είναι 35.

1.2.2 Διατάξεις

Όταν έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα και τοποθετούμε στη σειρά r από τα αντικείμενα αυτά, έχουμε μια διάταξη των r αντικειμένων από τα n, συμβολίζεται με:

$$A_r^n = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

1.2.3 Μεταθέσεις

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε να διατάξουμε n από τα αντικείμενα που διαθέτουμε, τότε έχουμε μετάθεση των n αντικειμένων που συμβολίζεται με P_n και είναι:

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times ... \times n$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε από τα ψηφία 6,7,8,9 στους οποίους τα άρτια ψηφία να κατέχουν άρτια θέση και τα περιττά, περιττή θέση.

Λύση

Τα δυο άρτια ψηφία 6,8 μπορούν να μπουν στις θέσεις τους (δηλαδή στη δεύτερη και τέταρτη) κατά 2!, διαφορετικούς τρόπους. Τα δυο περιττά ψηφία 7,9 μπορούν να μπουν στις θέσεις τους (δηλαδή στην πρώτη και τρίτη) κατά 2! διαφορετικούς τρόπους. Κάθε μετάθεση των αρτίων συνδυάζεται με κάθε μετάθεση των αρτίων συνδυάζεται με κάθε μετάθεση των περιττών. Συνεπώς συνολικά υπάρχουν

$2! \times 2! = 4$ τρόποι

1.2.4 Διατάξεις με επανάληψη

Όταν καθένα από τα n αντικείμενα που διαθέτουμε μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, τότε έχουμε διάταξη με επανάληψη r αντικειμένων από τα n και το πλήθος είναι:

$$n \times n \times n \times \ldots \times n = n^r$$

1.2.5 Μεταθέσεις με όμοια αντικείμενα

Αν τα n αντικείμενα που διαθέτουμε δεν είναι όλα διαφορετικά αλλά υπάρχουν μόνο κ διαφορετικά αντικείμενα, τα ω_1, ω_2, …, ω_k και υπάρχουν r_1 αντικείμενα όμοια με το $ω_1$, r_2 όμοια με το $ω_2$, …, $r_κ$ αντικείμενα όμοια με το $ω_κ$ όπου $r_1 + r_2 +…+ r_κ = n$, τότε οι διαφορετικές μεταθέσεις των n αντικειμένων είναι : $\frac{n!}{r_1! \times r_2!...\times r_\kappa!}$

(Κολυβά-Μαχαίρα,1998)

1.2.6 <u>Συνδυασμοί με επανάληψη</u>

Συνδυασμοί με επανάληψη n αντικειμένων ανά r ονομάζεται το πλήθος των διαφορετικών ομάδων που μπορούμε να σχηματίσουμε αν πάρουμε r στοιχεία από τα n και κάθε στοιχείο μπορεί να επαναληφθεί σε κάθε ομάδα περισσότερες από r φορές. Το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη το συμβολίζουμε με $C_{n,r}^{(E)}$ και είναι:

$$C_{n,r}^{(E)} = \binom{n+r+1}{n-1}$$

Κεφάλαιο 2: Πιθανότητες

2.1 Εισαγωγή

Η θεωρία των Πιθανοτήτων είναι ο κλάδος εκείνος της Μαθηματικής Επιστήμης που μελετά τη συμπεριφορά των τυχαίων φαινομένων. Είναι η επιστήμη που εξετάζει τους νόμους της τύχης και έχει εφαρμογές σε όλες σχεδόν τις άλλες επιστήμες όπως π.χ Φυσική, Οικονομία, Ιατρική κ.λπ. Η θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε κάτω από την ανάγκη επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων.

Από την αρχή του ανθρώπινου πολιτισμού ,υπήρξε ενδιαφέρον για τα τυχερά παιχνίδια τα οποία αποτελούν και το χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός πειράματος τύχης. Ωστόσο, η ανάπτυξη των πιθανοτήτων , ως ιδιαίτερης περιοχής των μαθηματικών είναι σχετικά πρόσφατη. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήδη από το 3000 π.Χ χρησιμοποιούσαν τον «αστράγαλο», ένα κόκκαλο ζώου με τέσσερις πλευρές, για να παίζουν τυχερά παιχνίδια.

Παρ’ όλα αυτά ,συστηματικές μελέτες για την αντιμετώπιση τυχαίων φαινομένων δεν εμφανίστηκαν μέχρι τον 15^{ο} αιώνα. Οι Ιταλοί Luca Pacciali , Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano και κυρίως ο Galileo Galilei ήταν από τους πρώτους που κατόρθωσαν να υπολογίσουν πιθανότητες απλών αποτελεσμάτων που σχετίζονταν με πείραμα τύχης.

2.2 Βασικές έννοιες

Ορισμός: Λέμε ότι ένα γεγονός πραγματοποιείται όταν το απλό γεγονός που προκύπτει από την εκτέλεση του πειράματος περιέχεται στο γεγονός αυτό. Τα γεγονότα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα ενώ τα απλά γεγονότα συμβολίζονται συνήθως με το γράμμα ω.

Ορισμός : Βέβαιο γεγονός είναι εκείνο που συμβαίνει σε κάθε εκτέλεση του πειράματος.

Ορισμός : Ένα γεγονός το οποίο δεν πραγματοποιείται ποτέ λέγεται αδύνατο γεγονός και συμβολίζεται με $\emptyset$.

(Κουνιάς –Μωυσιάδης, 1995)

Ορισμός πειράματος τύχης

Βασική έννοια στη θεωρία των Πιθανοτήτων είναι το πείραμα τύχης. Με τον όρο αυτό εννοούμε κάθε διαδικασία που εκτελείται (πείραμα) ή παρατηρείται (φαινόμενο) και στην οποία το τελικό αποτέλεσμα είναι τυχαίο, δηλαδή όχι γνωστό εκ των προτέρων. Για παράδειγμα:

(1) Ο αριθμός ατυχημάτων που συμβαίνουν σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα σε συγκεκριμένο τόπο
(2) Η ρίψη ενός ζαριού
(3) Η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ
(4) Η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κ.λπ.

είναι κατά θεωρία πιθανοτήτων πείραμα τύχης.

Βασικές έννοιες:

Ορισμός: Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγεται απλό γεγονός ή απλό ενδεχόμενο και ένα σύνολο απλών γεγονότων λέγεται γεγονός ή ενδεχόμενο.

Ορισμός: Λέμε ότι ένα γεγονός πραγματοποιείται όταν το απλό γεγονός που προκύπτει από την εκτέλεση του πειράματος περιέχεται στο γεγονός αυτό. Τα γεγονότα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα ενώ τα απλά γεγονότα συμβολίζονται συνήθως με το γράμμα ω.

2.3 Δειγματικός χώρος

Ορισμός: Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, το σύνολο δηλαδή των απλών ενδεχομένων του, λέγεται δειγματικός χώρος και συμβολίζεται με Ω ή S.

Αν με ω_i, i= 1,2,… συμβολίσουμε τα απλά ενδεχόμενα τότε

$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ (Κουνιάς-Μωυσιάδης, 1995)

Ορισμός : Αν ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος τότε λέγεται διακριτός, ενώ αν είναι άπειρος λέγεται συνεχής.

2.4 Πράξεις με ενδεχόμενα

Η χρήση συνόλων για τη περιγραφή των γεγονότων μας επιτρέπει να εκφράσουμε και τις πράξεις μεταξύ των γεγονότων με τις γνωστές πράξεις μεταξύ συνόλων

2.4.1 Ίσα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα Α,Β, λέγονται ίσα αν κάθε φορά που συμβαίνει το Α ,συμβαίνει και το Β και αντίστροφα.

Για τα ίσα ενδεχόμενα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό Α=Β. Είναι φανερό ότι η ισότητα δύο ενδεχομένων συνεπάγεται την ισχύ των σχέσεων $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

2.4.2 Ένωση ενδεχομένων

Ένωση δύο ενδεχομένων Α,Β, λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα αυτά και συμβολίζεται με $A\cup B$.Η πράξη της ένωσης μπορεί εύκολα να επεκταθεί για περισσότερα από δύο σύνολα .Έτσι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα $A_1,A_2,\ldots,A_\nu$ πραγματοποιηθεί είναι η ένωση $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_\nu=\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$.

2.4.3 Τομή ενδεχομένων

Τομή δύο ενδεχομένων Α,Β καλείται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα και συμβολίζεται με $A\cap B$ ή ΑΒ.

Όπως και η ένωση , έτσι και η πράξη της τομής ενδεχομένων μπορεί αν επεκταθεί για περισσότερα από δύο σύνολα .Ως τομή των συνόλων $A_1,A_2\ldots A_\nu$ ορίζουμε το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται αν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα όλα τα ενδεχόμενα $A_1,A_2\ldots A_\nu$. Η τομή ν των συνόλων $A_1,A_2\ldots A_\nu$ συμβολίζεται με $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_\nu=\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$.

2.4.4 Ξένα ενδεχόμενα

Αν δύο ενδεχόμενα δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, λέγονται ξένα ή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ο εξής:

Δύο ενδεχόμενα Α,Β λέγονται ξένα ή ασυμβίβαστα αν η τομή τους είναι το αδύνατο ενδεχόμενο δηλαδή αν ισχύει $A\cap B=\varnothing$.

2.4.5 Συμπληρωματικό ενδεχόμενο

Συμπλήρωμα (ή συμπληρωματικό ενδεχόμενο ή αντίθετο)του ενδεχομένου Α λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται αν και μόνο αν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α.

Για το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου Α υπάρχουν τρείς τουλάχιστον διαφορετικοί συμβολισμοί οι οποίοι χρησιμοποιούνται τόσο σε διδακτικά εγχειρίδια όσο και σε επιστημονικά/ερευνητικά κείμενα Α΄ ή $\bar{A}$ ή A^c .

2.4.6 Διαφορά ενδεχομένων

Διαφορά του ενδεχομένου Β από το ενδεχόμενο Α (ή διαφορά των ενδεχομένων Α και Β) λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α αλλά δεν πραγματοποιείται το Β. Η διαφορά των ενδεχομένων Α και Β συμβολίζεται με Α-Β.Μία χρήσιμη έκφραση για τη διαφορά δύο συνόλων, η οποία προκύπτει άμεσα από τον ορισμό, είναι η εξής Α-Β= ΑΒ΄

2.4.7 Συνεπαγόμενα ενδεχόμενα

Αν Α και Β δύο ενδεχόμενα ώστε $A \subseteq B$, τότε η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β. Στην περίπτωση αυτή τα ενδεχόμενα ονομάζονται συνεπαγόμενα.

2.5 Σχέσεις γεγονότων

Θεώρημα: Αν Α,Β,Γ γεγονότα του δειγματικού χώρου Ω, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

$A\cup\Omega=\Omega$ $\qquad$ $A\cap\Omega=A$

$A\cup\emptyset=A$ $\qquad$ $A\cap\emptyset=\emptyset$

$A\cup A'=\Omega$ $\qquad$ $A\cap\Omega=A$

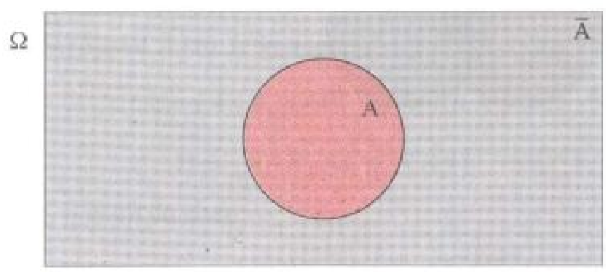
$A\cup B=B\cup A$ $\qquad$ $A\cap B=B\cap A$

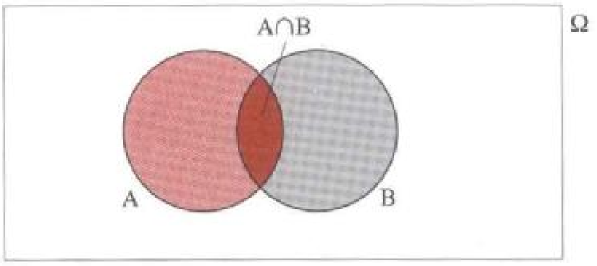
$A\cup(B\cup\Gamma)=(A\cup B)\cup\Gamma$ $\qquad$ $A\cap(B\cap\Gamma)=(A\cap B)\cap\Gamma$

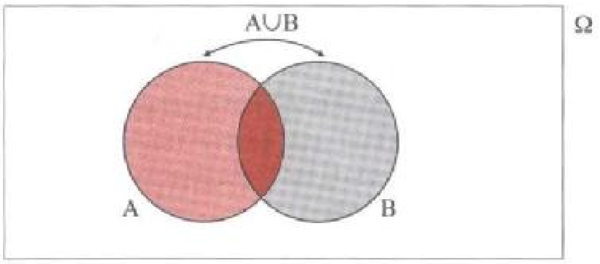
$A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$ $\qquad$ $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$

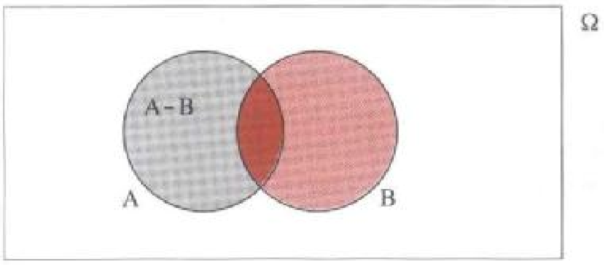
$(A\cup B)'=A'\cap B'$ $\qquad$ $(A\cap B)'=A'\cap B'$

Για την κατανόηση των πράξεων και των ιδιοτήτων των γεγονότων, αλλά και για την αποκάλυψη με εποπτικό τρόπο σχέσεων μεταξύ γεγονότων, χρήσιμα είναι τα διαγράμματα του Venn. Στα σχήματα που ακολουθούν δίνονται παραδείγματα διαγραμμάτων Venn, στα οποία τα A και B συμβολίζουν γεγονότα.









2.6 Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Πολλά πειράματα τύχης έχουν, λόγω συμμετρίας και ομοιογένειας των υλικών που χρησιμοποιούμε, την ιδιότητα όλα τα απλά ενδεχόμενα κατά την εκτέλεση τους να έχουν τις ίδιες ευκαιρίες να εμφανιστούν. Με άλλα λόγια, κανένα από τα απλά ενδεχόμενα δεν έχει πλεονέκτημα έναντι των άλλων.

Η παρατήρηση αυτής της ιδιότητας οδήγησε τον De Moivre στον ορισμό της κλασικής πιθανότητας.

Σε πειράματα όπου το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων ή απλών γεγονότων είναι πεπερασμένο και όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός γεγονότος ισούται με το πηλίκο του πλήθος των ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του γεγονότος αποτελεσμάτων, προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων.

Ώστε αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος που αποτελείται από Ν ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και αν το γεγονός Α περιέχει N_A από αυτά, τότε η πιθανότητα P(A) θα ισούται με:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma \ \varepsilon\upsilon\nu o\ddot{\iota}\kappa\acute{\omega}\nu \ \alpha\pi o\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu \ \gamma\iota\alpha \ \tau o \ A}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma \ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu \ \alpha\pi o\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu} \quad \text{(Κιόχος, 1993)}$$

Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $P(A) \geq 0$, για κάθε γεγονός Α
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$, για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους γεγονότα Α και Β

   Η ιδιότητα 3 είναι γνωστή ως απλή «προσθετική ιδιότητα»

Παράδειγμα

Μια επιχείρηση έχει στο ενεργητικό της 11 στελέχη, 3 διευθυντές και 5 λογιστές. Εξάγουμε κατά τυχαίο τρόπο έναν εργαζόμενο της επιχείρησης. Ποια είναι η πιθανότητα να εξαχθεί στέλεχος της επιχείρησης;

Λύση

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι όσες και τα στελέχη, δηλαδή 11, ενώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι όσα όλοι μαζί οι εργαζόμενοι δηλαδή 11+3+5=19. Αν παρατηρήσουμε με A το ενδεχόμενο να εξαχθεί ένα στέλεχος της επιχείρησης , σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας των ισοπίθανων ενδεχομένων θα έχουμε:

$$P(A)=\frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \varepsilon\upsilon\nu o\ddot{\iota}\kappa\acute{\omega}\nu\ \alpha\pi o\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu\ \alpha\pi o\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu}=\frac{N_A}{N}=\frac{11}{19}=0{,}57$$

2.7 Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι το χαρακτηριστικό γνώρισμα του κλασικού ορισμού της πιθανότητας είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ειδικές μόνο περιπτώσεις και πιο συγκεκριμένα σε εκείνα τα πειράματα στα οποία οι δυνατές περιπτώσεις είναι το ίδιο πιθανές και έχουν πεπερασμένο πλήθος απλών ενδεχομένων . Σε πολλά όμως οικονομικά, κοινωνικά, δημογραφικά και άλλα φαινόμενα, είναι αδύνατο να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός αυτός, γιατί οι δυνατές περιπτώσεις δεν είναι το ίδιο πιθανές και δεν παρουσιάζουν πεπερασμένο πλήθος αποτελεσμάτων.

Συγκεκριμένα, αν θέλουμε να μελετήσουμε ένα τυχαίο γεγονός A, πραγματοποιούμε μια σειρά από ν δοκιμές, πάντοτε με τις ίδιες συνθήκες. Θα παρατηρήσουμε ότι το γεγονός A εμφανίζεται f_ν φορές, άρα η σχετική συχνότητα του θα είναι:

$$0 \le \frac{f_\nu}{\nu} \le 1$$

Αν πραγματοποιήσουμε πολλές φορές το πείραμα των ν δοκιμών, πάντοτε με τις ίδιες συνθήκες, η σχετική συχνότητα $\frac{f_\nu}{\nu}$ δεν είναι πάντοτε η ίδια , αλλά η πείρα έχει αποδείξει ότι αν το ν είναι μικρός αριθμός , η σχετική συχνότητα $\frac{f_\nu}{\nu}$ παρουσιάζει μεγάλες αποκλίσεις (διακυμάνσεις) στις διαδοχικές δοκιμές και ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμός των ν δοκιμών, τόσο η σχετική συχνότητα $\frac{f_\nu}{\nu}$ τείνει να σταθεροποιηθεί γύρω από μια σταθερή τιμή P, την οποία μπορούμε να πάρουμε ως μέτρο πιθανότητας του γεγονότος Α. Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί το λεγόμενο <u>εμπειρικό νόμο</u> <u>της σταθερότητας των σχετικών συχνοτήτων</u> . (Κιόχος, 1993)

Με όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στον παρακάτω εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει διατυπωθεί από τον R.Von. Mises (1936) :

Σε μια ακολουθία δοκιμών η σχετική συχνότητα $\frac{f_\nu}{\nu}$, όταν το ν τείνει στο άπειρο, σταθεροποιείται γύρω από μια τιμή θετική μικρότερη της μονάδας, P(A), την οποία ονομάζουμε στατιστική πιθανότητα του ενδεχομένου Α και είναι το όριο προς το οποίο συγκλίνει η σχετική πιθανότητα, δηλαδή :

$$P(A) = \lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{f_\nu}{\nu}\right)$$

<u>Παράδειγμα</u>

Σε 100.000 λαμπτήρες που παράγονται κατά μέσο όρο 90.237 λειτουργούν για 20 μήνες, 87.701 λειτουργούν για 35 μήνες και 86.505 λειτουργούν για 40 μήνες. Εφαρμόζοντας τον εμπειρικό (στατιστικό) ορισμό της πιθανότητας, υπολογίζουμε την πιθανότητα ένας λαμπτήρας που λειτουργεί για 20 μήνες και ένας άλλος που λειτουργεί για 35 μήνες να φτάσουν να λειτουργούν 40 μήνες ;

Λύση

Οι σχετικές συχνότητες τις οποίες θα πάρουμε και ως ζητούμενες πιθανότητες θα είναι :

$$P_1 = \frac{86.505}{90.237} = 0{,}9586$$

$$P_2 = \frac{86.505}{87.701} = 0{,}9863$$

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι περισσότερο πιθανόν είναι ένας λαμπτήρας που λειτουργεί για 35 μήνες να φτάσει να λειτουργεί για 40 μήνες.

2.8 Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (μαθηματικός ορισμός)

Για να δώσουμε έναν τέλειο ορισμό της πιθανότητας χρησιμοποιούμε την θεωρία των συνόλων. Με βάση τη θεωρία αυτή, μπορούμε να θεμελιώσουμε την πιθανότητα κατά τρόπο αξιωματικό με την βοήθεια ενός συστήματος προτάσεων.

Η αξιωματική θεμελίωση της έννοιας της πιθανότητας οφείλεται στο Ρώσο Στατιστικό A. W. Kolmogorov.

Με βάση την αξιωματική θεμελίωση, η πιθανότητα ορίζεται ως μια πραγματική συνάρτηση P, με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του Ω (δηλαδή το δυναμοσύνολο P(Ω)) και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών IR. (Κιόχος , 1993)

Για να εκφράζει πιθανότητα η συνάρτηση P θα πρέπει να πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες (αξιώματα του Kolmogorov) :

(1) Σε κάθε ενδεχόμενο A ∈ P(Ω) αντιστοιχεί ο πραγματικός αριθμός P(A) που ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου A. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι πάντοτε $P(A) \geq 0$.

(2) Η πιθανότητα του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με την μονάδα, $P(\Omega)=1$.

(3) Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, η πιθανότητα της ένωσης αυτών είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων τους.

Δηλαδή αν $A \cap B=\emptyset$, τότε $P(A+B) =P(A)+ P(B)$ (προσθετική ιδιότητα)

Γενικά, αν έχουμε k ενδεχόμενα, τα οποία είναι ανά δύο ασυμβίβαστα τότε η πιθανότητα της ένωσης αυτών θα είναι :

$P(A_1+A_2+A_3+.....+A_\kappa)= P(A_1) +P(A_2) +P(A_3)+.....+P(A_\kappa)$

Δηλαδή P: $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow$ IR με τις ιδιότητες (αξιώματα) :

(1) $P(A) \geq 0$, $\forall \in \mathcal{P}(\Omega)$

(2) $P(\Omega)=1$

(3) $P(A \cup B)= P(A)+P(B)$, $\forall$ $A,B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \cap B=\emptyset$

2.8.1 Αποδείξεις ιδιοτήτων πιθανότητας

1. $P(A^C)= 1-P(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

2. $0 \leq P(A) \leq 1$

3. $P(\emptyset) = 0$

4. Α και Β είναι δύο όχι ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα $P(A\cup B)= P(A)+ P(B) - P(A\cap B)$

5. Αν $A\subset B$ τότε $P(B-A)=P(B)-P(A)$

6. Αν $A\subset B$ τότε $P(A)\leq P(B)$

7. $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$

<u>Αποδείξεις</u>:

1. Γνωρίζουμε ότι για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει η σχέση: $A\cup A^C=\Omega$. Επειδή τα δύο ενδεχόμενα Α και A^C είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, με βάση το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov θα έχουμε: $P(A\cup A^C)=P(\Omega)\Rightarrow P(A)+P(A^C)=1\Rightarrow P(A^C)=1-P(A)$
2. Επειδή $P(A^C)=1-P(A)$ και $P(A^C)\geq 0$ έχουμε $P(A)\leq 1$. Ακόμα, από το πρώτο αξίωμα έχουμε $P(A)\geq 0$. Άρα $0\leq P(A)\leq 1$
3. Το βέβαιο και το αδύνατο ενδεχόμενο είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, άρα $\emptyset\cap\Omega=\emptyset$. Ακόμα $\emptyset\cup\Omega=\Omega$. Άρα, από το τρίτο αξίωμα $P(\emptyset)+ P(\Omega)=P(\Omega)$. Όμως από το δεύτερο αξίωμα, $P(\Omega)=1$, άρα $P(\emptyset)=0$
4. Ισχύουν τα εξής:

   $A\cup B= A\cup(A^C\cap B)$, όπου τα $A,A^C\cap B$:είναι ασυμβίβαστα

   $A\cup B=(A\cap B^C)\cup B$, όπου $A\cap B^C$,B είναι ασυμβίβαστα

$A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ όπου είναι ασυμβίβαστα

Εφαρμόζοντας στις τρεις αυτές σχέσεις το τρίτο αξίωμα, έχουμε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$ (1)

$P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(B)$ (2)

$P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$ (3)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη

$2P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B^C) + P(B)$

Από αυτή αφαιρούμε κατά μέλη τη (3) και παίρνουμε

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. Αφού $A \subset B$ έχουμε: $B = A \cup (B-A)$ και τα $A, B-A$ είναι ασυμβίβαστα.

   Από το τρίτο αξίωμα έχουμε

   $P(B) = P(A) + P(B-A) \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$

6. Από το πρώτο αξίωμα έχουμε $P(B-A) \geq 0$

   Όμως δείξαμε ότι $P(B-A) = P(B) - P(A)$

   Άρα, $P(B) - P(A) \geq 0$ δηλαδή $P(B) \geq P(A)$

7. Με βάση τον προσθετικό νόμο, θα έχουμε:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Σύμφωνα όμως με το αξίωμα $P(A) \geq 0$, θα έχουμε $P(A \cap B) \geq 0$, Επομένως, P(A∪B)≤P(A)+P(B).

2.9 Δεσμευμένη πιθανότητα

Σε ένα πείραμα τύχης και πριν την εκτέλεση του πειράματος, έχουμε το σύνολο Ω των δυνατών αποτελεσμάτων, τα γεγονότα $A \subseteq \Omega$ και την πιθανότητα P(A) κάθε γεγονότος που υπακούει στα αξιώματα των πιθανοτήτων.

Αν εκτελεστεί το πείραμα και δεν γνωρίζουμε το ακριβές αποτέλεσμα του πειράματος, όμως γνωρίζουμε ότι αυτό περιέχεται σε ένα γεγονός Β, δηλαδή το Β έχει συμβεί, τότε αυτή η πληροφορία αλλάζει και την πιθανότητα να συμβεί το Α. Αυτό συμβαίνει διότι ο νέος δειγματικός χώρος αποτελείται από όλα τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο Β και για να έχει συμβεί το Α θα πρέπει το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι στο Β και στο Α, δηλαδή A∩B.

Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο Α όταν είναι γνωστό ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα άλλο ορισμένο ενδεχόμενο $B \neq \emptyset$ ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα, συμβολίζεται με P(A/B) και δίνεται από την σχέση:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Πιο συνοπτικά μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός χώρου πιθανοτήτων (P(Ω),Ω,P) και P(A)≠0, τότε ο αριθμός ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του Β δοθέντος ότι γνωρίζουμε το ενδεχόμενο Α.

2.9.1 Πολλαπλασιαστικός νόμος της πιθανότητας

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε $P(A \cap B)=P(A)\text{-}P(A/B)$ και αν $P(A)>0$, τότε έχουμε $P(A \cap B)=P(A)\times P(B/A)$. Οι σχέσεις αυτές εκφράζουν την πιθανότητα της τομής των γεγονότων Α,Β ως το γινόμενο της πιθανότητας του ενός γεγονότος επί την πιθανότητα του άλλου δεδομένου του πρώτου. Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως πολλαπλασιαστικός νόμος και γενικεύονται και για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος γεγονότων των οποίων η τομή έχει θετική πιθανότητα. Μια άλλη εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού νόμου, δίνεται από το επόμενο θεώρημα, που είναι γνωστό και ως θεώρημα ολικής πιθανότητας.

2.9.2 Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots B_n$ όπου $B_i \cap B_j=0$ με $i\neq j$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $(j=1,2,\ldots,n)$ και $B=B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, τότε για κάθε γεγονός Α ισχύει:

$$P(A/B) = \frac{1}{P(B)}\left[P(B_1)\, P\left(\frac{A}{B_1}\right) + P(B_2)P\left(\frac{A}{B_2}\right) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n)\right]$$

Με την προϋπόθεση ότι $P(B) > 0$

Αν τα B_i αποτελούν διαμέριση του Ω, δηλαδή αν τα ενδεχόμενα B_i είναι ξένα ανά δύο και $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$. τότε:

$P(A)= P(A/B_1)\ P(B_1) + P(A/B_2)\ P(B_2)+\ldots+P(A/B_n)\ P(B_n)$ (Κουνιάς- Μωυσιάδης, 1995)

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τα δεδομένα ισχύει:

$$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$$

Τα ενδεχόμενα $A\cap B_j$ είναι ξένα μεταξύ τους $\forall_j=1,2,3,\ldots,n$.

Τότε έχουμε:

$$P(A)= P[(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)]=$$

$$P[(A\cap B_1)+(A\cap B_2)+\ldots+(A\cap B_n)=$$

$$P(A/B_1)\ P(B_1)+P(A/B_2)\ P(B_2)+\ldots+(A/B_n)\times P(B_n)$$

2.9.3 Θεώρημα Bayes

Ένα πολύ ενδιαφέρον θεώρημα, με πολλές εφαρμογές στη Στατιστική που συσχετίζει δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $P(A/B)$ με δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $P(B/A)$ οφείλεται στον Bayes. Αν θεωρήσουμε το Α ως «αιτία» και το Β ως «αποτέλεσμα», τότε είναι εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα του αποτελέσματος Β που οφείλεται στην αιτία Α. με το θεώρημα Bayes, έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την πιθανότητα να ήταν η αιτία Α που έδωσε το γνωστό αποτέλεσμα.

Θεώρημα Bayes : Έστω τι τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ξένα ανά δύο και $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup\ldots\cup A_n$, όπου Ω ο δειγματικός χώρος και ότι ισχύει $P(A_\kappa) > 0$, για όλα τα $\kappa = 1, 2, \ldots, n$. Έστω επίσης το γεγονός Β με $P(B) >0$. Τότε:

$$P(A_\kappa/B) = \frac{P(A_\kappa)P(B/A_\kappa)}{[P(A_1)\,P\,(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)P(B/A_n)]}$$

(Κουνιάς-Μωυσιάδης,1995)

<u>Παράδειγμα</u>

Σε ένα εργοστάσιο οι μηχανές Α,Β, και Γ παράγουν το 25%,το 35%, και το 40% της συνολικής παραγωγής. Μετά από έλεγχο βρέθηκε ότι το 5% των παραγόμενων τεμαχίων από το μηχάνημα Α είναι ελαττωματικό, επίσης το 4% και το 2% των παραγόμενων τεμαχίων από τις μηχανές Β και Γ είναι ελαττωματικό. Η συνολική παραγωγή φτάνει τα 5000 τεμάχια. Ένα τεμάχιο εξάγεται τυχαία και βρίσκεται ελαττωματικό.

Ποια η πιθανότητα κατασκευής του από τη μηχανή Β;

<u>Λύση</u>

Έστω :

Ε το ενδεχόμενο ότι το τεμάχιο που έχει εξαχθεί είναι ελαττωματικό.

Α το ενδεχόμενο ότι το τεμάχιο αυτό έχει εξαχθεί από το Α.

Β το ενδεχόμενο ότι το τεμάχιο αυτό έχει εξαχθεί από το Β.

Γ το ενδεχόμενο ότι το τεμάχιο αυτό έχει εξαχθεί από το Γ.

Θα έχουμε:

$$P\{A\} = \frac{25}{100},\ P\{B\} = \frac{35}{100},\ P\{\Gamma\} = \frac{40}{100}$$

$$P\{E/A\} = 0.05,\ P\{E/B\} = 0.04,\ P\{E/\Gamma\} = 0.02$$

Επομένως :

$$P\{B/E\}=\frac{P\{B\}\,P\{E/B\}}{P\{A\}P\{E/A\}+P\{B\}P\{E/B\}+P\{\Gamma\}\,P\{E/\Gamma\}}$$

$$\Rightarrow P\{B/E\}=\frac{0.35\times 0.04}{0.25\times 0.05+0.35\times 0.04+0.40\times 0.02}=0.4058$$

2.10 Ανεξάρτητο γεγονός

Η πραγματοποίηση του γεγονότος Β επηρεάζει όπως είδαμε την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός άλλου γεγονότος Α. Πράγματι, με την γνώση της πραγματοποίησης του Β, η πιθανότητα του Α από P(A) μεταβάλλεται σε P(A/B), όπου γενικά οι δύο αυτές πιθανότητες είναι διαφορετικές. Αν όμως, P(A/B)=P(A) τότε λέμε ότι το γεγονός Α είναι ανεξάρτητο του Β. Όμοια, αν P(B/A)=P(B)τότε λέμε ότι το Β είναι ανεξάρτητο του Α.

Ορισμός :Δύο γεγονότα Α και Β θα λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει η σχέση $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (Κουνιάς- Μωυσιάδης, 1995)

Κεφάλαιο 3: Τυχαίες μεταβλητές

3.1Τυχαίες μεταβλητές

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος, Α τυχαίο γεγονός και Ρ ο νόμος που μας δίνει την πιθανότητα κάθε γεγονότος. Για να μελετήσουμε το αποτέλεσμα του πειράματος, μας διευκολύνει να αντιστοιχίσουμε σε κάθε απλό γεγονός έναν ή περισσότερους πραγματικούς αριθμούς. Ο πραγματικός αυτός αριθμός μπορεί να είναι ένα σημείο της πραγματικής ευθείας ή ένα σημείο του επιπέδου. Για παράδειγμα, αν μελετάμε τα άτομα μιας κοινωνίας ως προς το βάρος τους, τότε σε κάθε άτομο αντιστοιχούμε έναν αριθμό που είναι το βάρος του ενώ αν τα μελετάμε ως προς το βάρος και το ύψος, τότε σε κάθε άτομο αντιστοιχούμε δυο αριθμούς.

Ορισμός : Τυχαία μεταβλητή (τ.μ) ονομάζεται η συνάρτηση που απεικονίζει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα Χ, Υ, Ζ,… και μπορεί να είναι μονοδιάστατες ή πολυδιάστατες, αν η μελέτη αφορά σε ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά αντίστοιχα.

Ορισμός : Αν η τυχαία μεταβλητή παίρνει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τιμών, τότε λέγεται διακριτή ενώ αν παίρνει τιμές σ' ένα διάστημα (α, β) με α, β θα λέγεται συνεχής . π. χ το πλήθος των τηλεφωνικών κλήσεων, ο αριθμός των επενδυτών στο χρηματιστήριο κ.λπ. είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές ενώ ο χρόνος λειτουργίας ενός ανταλλακτικού, η θερμοκρασία κ.λπ. είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

3.2 Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής

Ο τρόπος με τον οποίο κατανέμονται οι πιθανότητες στις διάφορες τιμές της τυχαίας μεταβλητής δίνεται από τη συνάρτηση κατανομής.(Κουνιάς – Μωυσιάδης, 1995)

Ορισμός : Η συνάρτηση $F_x(x)= P(X \leq x)$, $\forall x \in IR$, ονομάζεται συνάρτηση αθροιστικής κατανομής (σ. α. κ) της τυχαίας μεταβλητής Χ και δίνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή Χ να πάρει όλες τις τιμές της μέχρι το σημείο x.

Σε κάθε τυχαία μεταβλητή Χ, αντιστοιχεί μια ακριβώς σ. α. κ. F_x (x), που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $F_x(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$, $F_x(\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_x(x) = 1$

(2) Η F_x (x) είναι αύξουσα συνάρτηση του x

(3) Η F_x (x) είναι δεξιά συνεχής

3.3 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός: Αν η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή, τότε η συνάρτηση που δίνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή Χ να πάρει τιμή x, λέγεται συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Χ, συμβολίζεται με $f_x(x)=P(X=x)$ και έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) $f_x(x) \geq 0, \forall x$,

(2) $\sum_x f_x(x)=1$ (το x διατρέχει όλες τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής Χ).

Οι συναρτήσεις $f_x(x)$ και $F_x(x)$ συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$F_x(x)= P(X\leq x)= \sum_{x_i \leq x} f_x(x_i)$

$F_x(x_i)= P(X=x_i)= P(x\leq x_i)- P(x\leq x_{i-1})= F(x_i)-F(x_{i-1})=F(x_i)-F(x_i-0)$

Ορισμός: Αν η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής $F_x(x)$ ή η τυχαία μεταβλητή Χ είναι συνεχής τότε υπάρχει συνάρτηση f(x) τέτοια ώστε:

$$F_x(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in IR$$

και η συνάρτηση f(x) ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής Χ.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι:

$$F_x(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ \ \text{αν η τυχαία μεταβλητή } X \text{ είναι συνεχής} \\ \sum_{x_i\leq x} f(x_i) \ \text{αν η τυχαία μεταβλητή } X \text{ είναι διακριτή} \end{cases}$$

3.4 Μέση τιμή

Δίνεται μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X, που παίρνει τιμές $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\nu$ με αντίστοιχες πιθανότητες $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_\nu$ όπου

$$\sum_{i=1}^{\nu} P_i = 1$$

Η παράσταση $E(X)=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_\nu x_\nu=\sum P_i\, x_i=\sum x_i f(x_i)$

Καλείται μέση τιμή της μεταβλητής X. Επομένως, η μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής ισούται με το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Η μέση τιμή όμως μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$E(X)= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

3.5 Διακύμανση

Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $[X-E(X)]^2$, δηλαδή η μέση τιμή που προέρχεται από το τετράγωνο της διαφοράς μεταξύ της τυχαίας μεταβλητής X και της μέσης τιμής αυτής, E(X).

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή, η διακύμανση δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x)$$

Ενώ αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, τότε η διακύμανση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

Κεφάλαιο 4: Κατανομές

Ορισμένα πειράματα τύχης ή τυχαία φαινόμενα με ομοειδή χαρακτηριστικά μπορούν να περιγραφούν με συγκεκριμένες τυχαίες μεταβλητές. Κάποιες από αυτές τις τυχαίες μεταβλητές έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θεωρία Πιθανοτήτων και τη Στατιστική.

4.1 Κατανομές διακριτών τυχαίων μεταβλητών

(1) Bernoulli: B(1, p)

Μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κατανομή Bernoulli όταν είναι δίτιμη, δηλαδή παίρνει μόνο δύο τιμές (συνήθως 0 και 1) τις οποίες ονομάζουμε επιτυχία ή αποτυχία με πιθανότητα που δίνεται από τον τύπο:

$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$, x=0, 1 και $0< p< 1$, όπου το p λέγεται παράμετρος

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν η κατανομή της X είναι Bernoulli (δηλαδή $X \sim B(1, p)$, τότε:

$\mu = EX = p$

$\sigma^2 = Var(X)= p(1-p)$

όπου μ, η μέση τιμή και σ^2, η διακύμανση

(2) Διωνυμική κατανομή: B(n, p)

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα τύχης στο οποίο εκτελούμε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p. Δηλαδή, το πείραμα τύχης αποτελείται από n ανεξάρτητα πειράματα στα οποία το ίδιο γεγονός A πραγματοποιείται ή όχι με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας όση με p. Τότε, η τυχαία μεταβλητή X, που μετρά το συνολικό πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές, ακολουθεί διωνυμική κατανομή (δηλαδή $X \sim B(n, p)$ με πιθανότητα που δίνεται από τον τύπο:

$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^x$, x= 0,1, …, n

Και p: παράμετρο που ικανοποιεί την $0 \leq p \leq 1$

(Κουνιάς –Μωυσιάδης, 1995)

Θεώρημα : Αν η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή B(n, p), τότε

$\mu = EX = n\,p$ και σ^2 = η διακύμανση

Απόδειξη :

Για τη μέση τιμή έχουμε:

$\mu = EX = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} (1-p)^{n-x} = n\,p$

$\sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x} = n\,p \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i} (1-p)^{n-1-i} = n\,p\,[p+(1-p)]^{n-1} =$

$= n\,p$

Για τη διακύμανση έχουμε:

$EX(X-1) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} = \sum_{n=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x}$

$(1-p)^{n-x}$

$= n(n-1)\,p^{2} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^{i} (1-p)^{n-2-I} = n(n-1)\,p^{2}$

Ακόμα : $EX^2 = EX(X-1) + EX = n(n-1)\,p^2 + n\,p = n^2 p^2 + n\,p\,(1-p)$

(3) Υπεργεωμετρική κατανομή

Η Υπεργεωμετρική κατανομή συνδέεται στενά με την Διωνυμική κατανομή. Ενώ η Διωνυμική κατανομή είναι το κατά προσέγγιση μοντέλο πιθανότητας για την δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση από ένα πεπερασμένο, αλλά μεγάλου μεγέθους, πληθυσμό, η Υπεργεωμετρική κατανομή είναι το ακριβές μοντέλο πιθανότητας για τον αριθμό των επιτυχιών στο δείγμα.

Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό Ν αντικειμένων από τα οποία Κ είναι ελαττωματικά. Υποθέτουμε ότι διαλέγουμε δυο αντικείμενα διαδοχικά. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα της δεύτερης εκλογής επηρεάζεται από το αποτέλεσμα της πρώτης εκλογής. Συνεπώς οι δοκιμές είναι εξαρτημένες.

Υποθέτουμε ότι ένας πληθυσμός αποτελείται από Ν αντικείμενα, τα οποία Κ είναι ενός τύπου και Ν-Κ ενός άλλου τύπου. Τα Κ αντικείμενα λέγονται επιτυχίες (s) και τα Ν-Κ αντικείμενα λέγονται αποτυχίες (f).

Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n και εξάγουμε τα αντικείμενα ένα- ένα. Αν Χ συμβολίσουμε το πλήθος των Κ αντικειμένων στο δείγμα, τότε λέμε ότι η Χ ακολουθεί υπεργεωμετρική κατανομή, με συνάρτηση πιθανότητας:

$$P(X=x) = \frac{\binom{\kappa}{x}\binom{N-\kappa}{n-x}}{\binom{N}{n}} \ , 0\leq x \leq n$$

Και N, K, n ακέραιοι με $0\leq K \leq N$, $1 \leq n \leq N$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της Υπεργεωμετρικής κατανομής είναι : $E(X) = n \times \frac{K}{N}$,

$$Var(X)= (\frac{N-n}{N-1}) \times n \times \frac{K}{N} \times (1 - \frac{K}{N})$$

Αξίζει να τονίσουμε ότι, αν το Ν είναι πολύ μεγάλο και το n σχετικά μικρό, τέτοιο ώστε $n \leq \frac{N}{10}$, τότε η υπεργεωμετρική κατανομή προσεγγίζεται από τη διωνυμική κατανομή $B(n, \frac{K}{N})$

Παράδειγμα

Υπάρχουν αρκετά προσθετικά σφάλματα υπολογισμών σε τρία τιμολόγια μίας εμπορικής επιχείρησης που περιλαμβάνονται σε έναν πληθυσμό τριάντα δύο τιμολογίων. Ένας ορκωτός λογιστής ελέγχει ένα δείγμα δέκα τιμολογίων. Ποιες είναι οι πιθανότητες να επισημάνει:

Α) μηδέν,

Β) ένα,

Γ) δύο,

Δ)τρία, λανθασμένα τιμολόγια

Λύση

Υποθέτουμε ότι Χ είναι η τυχαία μεταβλητή η οποία δείχνει τον αριθμό των λαθών στο δείγμα των δέκα τιμολογίων. Η Χ ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με Ν=32, Κ=3, n=10.

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{29}{10}}{\binom{32}{10}}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{29}{9}}{\binom{32}{10}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{29}{8}}{\binom{32}{10}}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{29}{7}}{\binom{32}{10}}$$

(4) Γεωμετρική κατανομή

Ας θεωρήσουμε ότι εκτελείται μια σειρά από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p. Έστω Χ ο αριθμός των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Τότε λέμε ότι η Χ ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X=x) = p\,(1-p)^x,\ x= 0,1,2,\ \dots$$

Σημειώνεται ότι, ο αριθμός Y των δοκιμών μέχρι και την πρώτη επιτυχία συνδέεται με την Χ με τη σχέση Y= X +1. Έχει συνάρτηση πιθανότητας $P(Y= y) = p(1-p)^{y-1}$, y=1,2,…

και λέγεται κατανομή Pascal.(Κιόχος, 1993)

Ακόμα, η μέση τιμή και η διασπορά της γεωμετρικής κατανομής είναι:

$\mu = EX = \frac{1-p}{p}$ και $\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

τότε $\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 = n^2\,p^2 + n\,p\,(1-p) - (n\,p)^2 = n\,p\,(1-p)$

Παράδειγμα :

Εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικών ασφαλειών παράγει 10% ελαττωματικές ασφάλειες. Αν διαλέξουμε τυχαία τέσσερις ασφάλειες από το σύνολο παραγωγής, ποια η πιθανότητα

1) Ακριβώς μια ασφάλεια να είναι ελαττωματική
2) Τουλάχιστον μια ασφάλεια να είναι ελαττωματική

Λύση :

Θεωρούμε ότι η εξέταση μιας ασφάλειας είναι μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p= 0, 1. Θεωρούμε ακόμη ότι οι τέσσερις δοκιμές είναι ανεξάρτητες. Οι υποθέσεις αυτές ισχύουν επειδή ο πληθυσμός απ' όπου διαλέγουμε τις ασφάλειες είναι αρκετά μεγάλος.

Αν με X συμβολίσουμε το πλήθος των ελαττωματικών ασφαλειών από τις 4, τότε η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή B(4, 0.1). Ζητάμε :

1) $P(X=1) = \binom{4}{1} \times (0,1)^1 \times (0,9)^3 = 0,2916$
2) $P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \binom{4}{0} \times (0,1)^0 \times (0,9)^4 = 0,3439$
3)

(5) Αρνητική διωνυμική κατανομή

Η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή εκφράζει το πλήθος των δοκιμών μιας διαδικασίας Bernoulli με σταθερή πιθανότητα που χρειάζονται μέχρι να συμπληρωθούν n επιτυχίες.

Η γεωμετρική κατανομή είναι ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής για ν= 1.

Η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$P(X=x) = \binom{x-1}{n-1} \times p^n (1-p)^{x-n},$$

x= n, n+1, …
0< p< 1

και n: ακέραιος

η μέση τιμή και η διακύμανση στην αρνητική διωνυμική κατανομή είναι:

μ = EX = $\frac{n}{p}$,

σ^2 = Var(X) = $\frac{n\,(1-p)}{p^2}$

(6) Κατανομή Poisson

Ας υποθέσουμε ότι μετρούμε τον αριθμό X των εμφανίσεων κάποιου γεγονότος σε συγκεκριμένο χρονικό ή τοπικό διάστημα, στο οποίο γνωρίζουμε ότι το γεγονός αυτό εμφανίζεται με ένα μέσο ρυθμό λ, δηλαδή κατά μέσο όρο λ φορές στη μονάδα του χρόνου ή του μήκους κ. λπ. Τότε η X ακολουθεί την κατανομή Poisson (X~P(λ)) με παράμετρο λ και με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$\text{E(X)} = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{x(x-1)!} =$$

$$e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{l} = \lambda = \text{n p}$$

Ενώ η διακύμανση δίνεται από την εξής σχέση:

$$\text{V(X)} = \text{E}(\text{X}^2) - [\text{E(X)}]^2 = \sum_{x=o}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2 =$$

$$= \sum_{\chi=0}^{\infty} (x^2 - x + x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2 = \sum_{x=o}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$+ \sum_{x=o}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 \times 1 + \lambda \times 1 - \lambda^2 =$$

λ = n p

Παράδειγμα

Ο ταμίας μιας τράπεζας κάνει σφάλματα όταν εγγράφει τις καταθέσεις και αναλήψεις πελατών στα βιβλία της τράπεζας, με μία μέση συχνότητα 0,75 σφαλμάτων σε κάθε σελίδα βιβλίου τραπέζης. Ποια είναι η πιθανότητα ότι σε ένα τυχαίο δείγμα τεσσάρων σελίδων θα υπάρξουν δύο ή περισσότερα σφάλματα;

Λύση

Υποθέτουμε ότι X= αριθμός σφαλμάτων σε 4 σελίδες και ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Ισχύει 0,75 σφάλματα ανά σελίδα=3 σφάλματα ανά 4 σελίδες

Άρα, έχουμε:

P(X≥ 2) = 1-P(x<2)= P(X=x) = $\frac{e^{-3}3^x}{x!}$, x=0,1,2,…=1-P(x=0)-P(x=1)=

=1- $\frac{e^{-3}3^0}{0!}$ - $\frac{e^{-3}3^1}{1!}$ = 1-0.0498-0.1494 = 0.8008

4.2 Κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών

(1) Ομοιόμορφη κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή (x~U(α,β)) αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{αν } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, \text{αν } x < \alpha \; \kappa\alpha\iota \; \beta < x \end{cases}$$

Και η συνάρτηση κατανομής είναι :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu -\infty < x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\nu \; \alpha \leq x \leq \beta \\ 1, & \alpha\nu \; \beta < x < \infty \end{cases}$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της ομοιόμορφης κατανομής είναι:

E(X)=$\frac{\alpha+\beta}{2}$, Var(X)=$\frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$

Πράγματι,

E(X)= $\int_{\alpha}^{\beta} x \frac{dx}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha+\beta}{2}$,

E(X^2)= $\int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{dx}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}$

Επομένως η διακύμανση βρίσκεται από τον εξής τύπο:

Var(X)= E(X^2) $- E(X)^2 = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$

(2) Κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή είναι η σπουδαιότερη από όλες τις θεωρητικές κατανομές, γιατί έχει πολύ μεγάλη εφαρμογή στη θεωρία των πιθανοτήτων, τη δειγματοληψία, τη Στατιστική, κ.λπ.

Η τυχαία μεταβλητή X, θα λέμε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με παράμετρο μ και σ^2 και θα συμβολίζουμε X~N(μ,σ^2)και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$$

Όπου μ ο μέσος αριθμητικός της τυχαίας μεταβλητής X, που προσδιορίζει τη θέση της καμπύλης στον άξονα των x και μπορεί να πάρει τιμές από – ∞ μέχρι + ∞, δηλαδή,$-\infty \leq \mu \leq \infty$

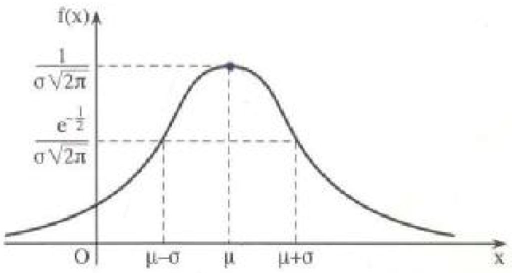
σ: η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X, που παίρνει μόνο θετικές τιμές (σ > 0) και προσδιορίζει το σχήμα της κανονικής κατανομής

Η μέση τιμή και η διακύμανση της κανονικής κατανομής αποδεικνύεται ότι είναι:

E(X)= μ

Var(X)= σ^2

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας της κατανομής δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



Η τυχαία μεταβλητή Ζ που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}},\ \text{όπου } z \in IR$$

ονομάζεται τυπική κανονική κατανομή και συμβολίζεται N(0,1).

Η κανονική κατανομή έχει την ιδιότητα να τυποποιείται δηλαδή αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ ακολουθεί την N(0,1) κατανομή. (Κολυβά-Μαχαίρα,1998)

(3) Εκθετική κατανομή

Αν έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x \geq 0 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Λέμε τότε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ, όπου θ>0.

Η μέση τιμή και η διακύμανση της εκθετικής κατανομής είναι:

$E(X)=\frac{1}{\theta}$, $Var(X)=\frac{1}{\theta^2}$

(4) Κατανομή γάμα

Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ως κατανέμεται ως γάμα κατανομή, αν η πυκνότητα πιθανότητας αυτής είναι :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \alpha\nu\ x > 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , \alpha\nu\ x \leq 0 \end{cases}$$

όπου α>0, β>0 και Γ(α) η συνάρτηση γάμα, που δίνεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \qquad (\nu > 0)$$

Η συνάρτηση γάμα ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

- Γ(α+1)= α×Γ(α) αν α>0
- Γ(1) =1
- Γ(α)= (α-1)! αν α φυσικός αριθμός

Η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής γάμα αποδεικνύεται ότι είναι :

E(X)= μ = αβ, Var(X) = $\alpha\beta^2$

(5) Κατανομή βήτα

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή βήτα, αν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \qquad \alpha\nu\ 0 < x < 1 \\ 0 \qquad \alpha\nu\ x \leq 0 \text{ και } x \geq 1 \end{cases}$$

όπου α>0, β>0 και Β(α, β) η συνάρτηση βήτα, που δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}\, dx, \quad (\alpha,\beta>0)$$

Οι συναρτήσεις βήτα και γάμα συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση :

$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)*\Gamma(\beta)}$

Η μέση τιμή και διακύμανση είναι:

$E(X)= \mu= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $Var(X)= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

(6) <u>Κατανομή Pareto</u>

Η κατανομή αυτή οφείλεται στον Ιταλό οικονομολόγο Vilfredo Pareto,καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Λωζάνης , και είναι πολύ χρήσιμη στην κατανομή των εισοδημάτων. Ο νόμος αυτός δίνει τον αριθμό των εισοδημάτων N_i οι οποίοι έχουν εισόδημα μεγαλύτερο του x_i και δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$N_i = \frac{A}{x_i^{\alpha}} = Ax^{-\alpha}_i$

όπου A και α θετικές σταθερές .

Η κατανομή των εισοδημάτων είναι συνήθως γνωστή από τις φορολογικές στατιστικές που δίνουν κατά τάξεις εισοδήματος τον αριθμό των εισοδηματιών και το συνολικό εισόδημά τους .

Ο νόμος του Pareto λογαριθμικώς έχει τη μορφή :

$\log N_i = \log A - \alpha \log x_i$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει το θεωρητικό αριθμό N_i των εισοδηματιών που έχουν εισόδημα μεγαλύτερο του x_i.

Ο αείμνηστος καθηγητής της Στατιστικής στην Α.Σ.Ο.Ε.Ε.Κ. Αθανασιάδης υπολόγισε την παράμετρο α του νόμου του Pareto με βάση την παρακάτω σχέση :

$\mu= \frac{\alpha}{\alpha-1} x_i \Rightarrow \alpha= \frac{\mu}{\mu-x_i}$

όπου μ το μέσο εισόδημα και x_i το ελάχιστο εισόδημα.

Για τον υπολογισμό της παραμέτρου A μετασχηματίζεται η δοθείσα κατανομή σε αριστερόστροφη αθροιστική σειρά και παίρνουμε τους λογαρίθμους της σχέσης:

$$N_i = Ax_i^{-\alpha}$$

Έτσι έχουμε:

$$\log N_i = \log A - \alpha \log x_i$$

Από την οποία σχέση έχουμε:

$$\sum \log N_i = n\log A - \alpha \sum \log x_i \Rightarrow n\log A = \sum \log N_i + \alpha \sum \log x_i$$

Αν στην παραπάνω σχέση δώσουμε διάφορες τιμές στη x_i, βρίσκουμε τις αθροιστικές θεωρητικές συχνότητες y_i. Στην συνέχεια βρίσκουμε τις αθροιστικές θεωρητικές συχνότητες με διαδοχικές αφαιρέσεις $y_i - y_{i+1}$.

(7) Λογαριθμοκανονική κατανομή

Η Λογαριθμοκανονική κατανομή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στη Στατιστική από τον D. McAlister. Το χαρακτηριστικό γνώρισμα της κατανομής αυτής είναι ότι σε πολλά φαινόμενα, συνήθως οικονομικά, οι τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής δεν ακολουθούν μια κανονική κατανομή, ακολουθούν όμως οι νεπέρειοι λογάριθμοι των τιμών των μεταβλητών αυτών.

Μια τιμή X έχει λογαριθμοκανονική κατανομή αν ο φυσικός λογάριθμος της X, δηλαδή η ποσότητα Y=lnX έχει κανονική κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ όπου } 0 < x < \infty$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της παρακάτω μεταβλητής X θα είναι: $E(X)= e^{\mu+1/2\sigma^2}$, $V(X)= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$

(8) Κατανομή x^2

Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_3, … , $X_ν$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι η καθεμία από αυτές κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1, δηλαδή $x_i \sim N(0,1)$. Αν όμως πάρουμε το άθροισμα των τετραγώνων των παραπάνω μεταβλητών, δηλαδή:

$$x^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots X_ν^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

τότε το άθροισμα αυτό δεν ακολουθεί κανονική κατανομή, αλλά ακολουθεί μια άλλη κατανομή που λέγεται x τετράγωνο και γράφεται x^2 και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την παρακάτω:

$$f(x^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{\frac{-\chi^2}{2}} \mathrm{X}^{2\frac{\nu}{2}-1} & , \ \alpha\nu\ x > 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x \leq 0 \end{cases}$$

με ν βαθμούς ελευθερίας. Δηλαδή η κατανομή x^2 εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας και παίρνει μόνο θετικές τιμές: $0 < x^2 < \infty$

Η κατανομή x^2 είναι μια ειδική περίπτωση της κατανομής γάμα, με:

$α = \frac{\nu}{2}$ και $β = 2$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της x^2 είναι:

$E(x_ν^2) = ν$

$Var(x_ν^2) = 2ν$

(9) Κατανομή t- student

Αν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1, δηλαδή $Z \sim N(0,1)$και Y, μια άλλη μεταβλητή, ανεξάρτητα της X, που ακολουθεί την κατανομή x^2 με $ν = n-1$ βαθμούς ελευθερίας, τότε η τυχαία συνεχής μεταβλητή:

$$t_ν = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

ακολουθεί την κατανομή t με ν βαθμούς ελευθερίας και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$f(t_\nu) = \frac{\Gamma[\frac{\nu+1}{2}]}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}} \times \frac{1}{(1+\frac{t^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}$, $-\infty < t < \infty$ Αν στη σχέση: $t_\nu = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$ θέσουμε $Z= \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ όπου η Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή και $Y= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ όπου Y ακολουθεί την κατανομή x^2, θα έχουμε:

$$t_\nu = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}, \quad -\infty < t < \infty$$

Η κατανομή t ανακαλύφθηκε το 1908 από τον W.S. Gosset, ο οποίος δημοσίευσε την εργασία του με το ψευδώνυμο Student.

Η κατανομή t έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1/(ν-2), δηλαδή:

$E(t_\nu) = 0$ αν ν>1 και

$Var(t_\nu)= \frac{\nu}{\nu-2}$, αν ν>2

Να τονίσουμε ότι για τις κατανομές x^2 και t- Student έχουν κατασκευαστεί πίνακες που δίνουν τα σημεία για τα οποία η τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές.

Κεφάλαιο 5: Οικονομική εφαρμογή

<u>Τα αμοιβαία κεφάλια στην Οικονομία</u>

Αμοιβαίο κεφάλαιο είναι μια μεγάλη κοινή επένδυση που γίνεται για λογαριασμό πολλών μικρότερων επενδυτών από έναν οικονομικό οργανισμό, όπως για παράδειγμα μια τράπεζα. Τις περισσότερες φορές την ευθύνη των επενδυτικών αποφάσεων έχει ένας διευθυντής με σπουδές στα οικονομικά και τη στατιστική. Η επένδυση συνήθως αποτελείται από ένα μείγμα μετοχών και ομολόγων, που επιλέγονται σύμφωνα με τη φιλοσοφία του αμοιβαίου κεφαλαίου. Για παράδειγμα, υπάρχουν αμοιβαία κεφάλαια που ειδικεύονται σε ασφαλή κρατικά ομόλογα και άλλα που επενδύουν πιο επιθετικά, σε μετοχές νέας τεχνολογίας ή βιοτεχνολογίας.

Ίσως ακούγεται παράξενο, αλλά τα περισσότερα αμοιβαία κεφάλαια πετυχαίνουν αποδόσεις που δεν ξεπερνούν τους χρηματιστηριακούς δείκτες. Αυτό κατά ένα μέρος οφείλεται στις διαχειριστικές δαπάνες των αμοιβαίων κεφαλαίων, στις οποίες φυσικά περιλαμβάνεται ο μισθός και τα πριμ του διευθυντή. Το κόστος διαχείρισης των αμοιβαίων κεφαλαίων ξεκινά από 0,5% και μπορεί να φτάσει πάνω από το 49% επί τις αξίας του αμοιβαίου κεφαλαίου.

Η συνολική επιτυχία ή αποτυχία ενός αμοιβαίου κεφαλαίου οφείλεται αποκλειστικά στις γνώσεις και τις ικανότητες αυτού που λαμβάνει τις επενδυτικές αποφάσεις , κάτι που οδηγεί στην ερώτηση: τι είναι αυτό που κάνει έναν επιτυχημένο διευθυντή αμοιβαίου κεφαλαίου;

Τι είναι αυτό που κάνει ένα διευθυντή αμοιβαίου κεφαλαίου πιο επιτυχημένο από έναν άλλο; Ένας παράγοντας ασφαλώς είναι το πανεπιστήμιο στο οποίο κάθε διευθυντής έκανε τις σπουδές του.

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής, από ενδιαφέρον για την τύχη της επένδυσής του, κατέγραψε το πανεπιστήμιο προέλευσης των διευθυντών όλων των αμοιβαίων κεφαλαίων και από τα δεδομένα αυτά κατασκεύασε τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 1

Πανεπιστήμιο	Απόδοση ως προς το χρηματιστήριο	
	Ανώτερη	Κατώτερη
Top-20	0,11	0,29
Άλλο	0,06	0,54

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει ότι η πιθανότητα ένα κεφάλαιο να έχει απόδοση καλύτερη από τον χρηματιστηριακό δείκτη και ο διευθυντής του να έχει σπουδάσει σε ένα από τα 20 καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας είναι 0,11. Αυτό σημαίνει ότι 11% των αμοιβαίων κεφαλαίων ξεπερνούν το χρηματιστήριο και έχουν διευθυντή με σπουδές σε ένα από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια.

Όμοια ερμηνεύονται οι άλλοι αριθμοί του πίνακα:

Το 6% των αμοιβαίων κεφαλαίων έχουν απόδοση καλύτερη από τον χρηματιστηριακό δείκτη χωρίς ο διευθυντής τους να έχει σπουδάσει σε ένα από τα 20 καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας.

Το 29% των αμοιβαίων κεφαλαίων έχουν απόδοση κατώτερη από τον χρηματιστηριακό δείκτη παρότι ο διευθυντής τους έχει σπουδάσει σε ένα από τα 20 καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας.

Το 54% των αμοιβαίων κεφαλαίων έχουν απόδοση κατώτερη από τον χρηματιστηριακό δείκτη και ο διευθυντής τους δεν έχει σπουδάσει σε ένα από τα 20 καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας.

Για να γίνει ευκολότερη η διατύπωση των προτάσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό:

A_1= Διευθυντής με σπουδές στα 20 καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας

A_2= Διευθυντής χωρίς σπουδές στα 20 καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας

B_1= Απόδοση ανώτερη του χρηματιστηριακού δείκτη

B_2= Απόδοση κατώτερη του χρηματιστηριακού δείκτη

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, έχουμε:

$P(A_1 \cap B_1) = 0{,}11$

$P(A_2 \cap B_1) = 0{,}06$

$P(A_1 \cap B_2) = 0{,}29$

$P(A_2 \cap B_2) = 0{,}54$

Οι πιθανότητες, ο διευθυντής ενός αμοιβαίου κεφαλαίου να έχει αποφοιτήσει από ένα από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια, είτε το αμοιβαίο κεφάλαιο έχει καλύτερη είτε χειρότερη απόδοση από τον χρηματιστηριακό δείκτη είναι :

$$P(A_1 \cap B_1)+P(A_1 \cap B_2)= 0{,}11+0{,}29=0{,}40$$

Με απλά λόγια, το παραπάνω άθροισμα σημαίνει ότι το 40% των διευθυντών αμοιβαίων κεφαλαίων προέρχεται από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια της χώρας.

Όμοια αν προσθέσουμε τους αριθμούς της δεύτερης γραμμής του πίνακα 1 θα έχουμε:

$$P(A_2 \cap B_1)+P(A_2 \cap B_2)= 0,06+0,54= 0,60$$

Αυτό σημαίνει ότι το 60% των διευθυντών αμοιβαίων κεφαλαίων δεν προέρχεται από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια της χώρας. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των δυο ενδεχομένων (ο διευθυντής να προέρχεται ή μη να προέρχεται από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια) είναι ίσο με τη μονάδα. Δηλαδή τα ενδεχόμενα αυτά είναι συμπληρωματικά.

Αν υπολογίσουμε και τις ολικές πιθανότητες αθροίζοντας τις στήλες του πίνακα 1 θα έχουμε:

$$P(A_1 \cap B_1)+P(A_2 \cap B_1)= 0,11+0,06= 0,17$$

$$P(A_1 \cap B_2)+P(A_2 \cap B_2)= 0,29+0,54= 0,83$$

Αυτές οι πιθανότητες αφορούν την απόδοση ενός αμοιβαίου κεφαλαίου πάνω και κάτω από τον χρηματιστηριακό δείκτη αντίστοιχα, είτε ο διευθυντής προέρχεται από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια είτε όχι. Τα αποτελέσματα είναι μόλις 17% των αμοιβαίων κεφαλαίων επιτυγχάνουν απόδοση ανώτερη του χρηματιστηριακού δείκτη.

Ο πίνακας 2 επεκτείνει τον πίνακα 1 υπολογίζοντας τις ολικές πιθανότητες.

Πίνακας

πανεπιστήμιο	Απόδοση ως προς το χρηματιστήριο		
	Ανώτερη	Κατώτερη	Σύνολο
Top-20	0,11	0,29	$P(A_1)$=0,40
Άλλο	0,06	0,54	$P(A_2)$=0,60
Σύνολο	$P(B_1)$=0,17	$P(B_2)$=0,83	1,00

Συχνά αυτό που μας ενδιαφέρει είναι πώς σχετίζονται μεταξύ τους δυο ενδεχόμενα, και ιδιαίτερα ποιες είναι οι πιθανότητες να συμβεί ένα ενδεχόμενο αν γνωρίζουμε ότι κάποιο άλλο έχει συμβεί. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι ο διευθυντής ενός αμοιβαίου κεφαλαίου έχει σπουδάσει σε ένα από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια, ποια είναι η πιθανότητα το συγκεκριμένο αμοιβαίο κεφάλαιο να έχει απόδοση ανώτερη του χρηματιστηριακού δείκτη; Μια τέτοια πληροφορία μπορεί να βοηθήσει έναν επενδυτή να αποφασίσει καλύτερα για την τοποθέτηση των χρημάτων του.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας πρέπει ουσιαστικά να περιορίσουμε τον δειγματικό χώρο μόνο στα στοιχεία εκείνα που ανήκουν στο ενδεχόμενο A_1. Στο παράδειγμα των αμοιβαίων κεφαλαίων, αν γνωρίζουμε ότι ο διευθυντής έχει σπουδάσει σε κάποιο από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια, μπορούμε ουσιαστικά να αγνοήσουμε τις αποδόσεις του 60% των αμοιβαίων κεφαλαίων με διευθυντές χωρίς σπουδές στα 20 κορυφαία πανεπιστήμια. Έτσι, διαπιστώνουμε ότι από το 40% των αμοιβαίων κεφαλαίων που μας ενδιαφέρουν, το 11% παρουσιάζει αποδόσεις άνω του χρηματιστηριακού δείκτη. Αυτό αντιστοιχεί σε ποσοστό 11/40= 27,5% ή πιθανότητα 0,275.

Αν υποθέσουμε ότι στο παραπάνω παράδειγμα των αμοιβαίων κεφαλαίων ο επενδυτής επέλεξε ένα αμοιβαίο κεφάλαιο στην τύχη και ένα χρόνο αργότερα διαπίστωσε ότι η απόδοσή του ήταν κατώτερη του χρηματιστηριακού δείκτη. Ποια είναι η πιθανότητα ο διευθυντής του αμοιβαίου κεφαλαίου να έχει σπουδάσει σε ένα από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια;

Το ζητούμενο είναι η δεσμευμένη πιθανότητα A_1 δεδομένου του B_2.

Σύμφωνα με τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(A_1/B_2)= \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{0,29}{0,83} = 0,3494$$

Άρα, αν ένα αμοιβαίο κεφάλαιο έχει απόδοση κατώτερη του χρηματιστηριακού δείκτη, έχουμε πιθανότητα 34,94% ο διευθυντής του να μην προέρχεται από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια. Ο υπολογισμός των δεσμευμένων πιθανοτήτων απαντά στο ουσιαστικό ερώτημα, κατά πόσο οι σπουδές του διευθυντή σε ένα από τα 20 κορυφαία πανεπιστήμια σχετίζονται με την απόδοση του αμοιβαίου κεφαλαίου. (Gerald Keller)

Συμπεράσματα

Μελετώντας όλα τα παραπάνω κεφάλαια σε συνδυασμό με τα παραδείγματα και την εφαρμογή των αμοιβαίων κεφαλαίων, φαίνεται η καθοριστική συμβολή των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής στον κλάδο της Οικονομίας.

Πιο συγκεκριμένα, το αντικείμενο της Στατιστικής ανάλυσης των δεδομένων μπορεί να παρέχει σε στελέχη επιχειρήσεων πολύτιμες πληροφορίες γύρω από τον τρόπο διαχείρισης πόρων και κεφαλαίων. Άλλωστε για να ληφθούν σωστές αποφάσεις θα πρέπει πρώτα να γίνει ποσοτική ανάλυση των δεδομένων προκειμένου να διαπιστωθεί η συμπεριφορά των οικονομικών μεγεθών και η ενδεχόμενη σχέση μεταξύ τους.

Έτσι, η ανάλυση των δεδομένων, που στον χώρο των επιχειρήσεων έχει αντικαταστήσει των κλασσικό όρο «Στατιστική ανάλυση» αποτελεί πλέον το βασικότερο σύστημα υποστήριξης αποφάσεων και είναι συνδυασμός των βασικών στατιστικών μεθόδων και των υπολογιστικών συστημάτων.

Επιπλέον η Στατιστική βρίσκει πολύ μεγάλη εφαρμογή στην Οικονομία αφού η παρακολούθηση του γενικού επιπέδου τιμών, του εθνικού εισοδήματος, της νομισματικής ισοτιμίας και των οικονομικών διακυμάνσεων, της απασχόλησης, της παραγωγικότητας, της κατάρτισης δεικτών οικονομικών δραστηριοτήτων, των εθνικών πόρων και της εθνικής δαπάνης είναι αντικείμενα στατιστικής επεξεργασίας.

Η χρησιμότητα της Στατιστικής φαίνεται και από το γεγονός ότι η Στατιστική διδάσκεται σήμερα σχεδόν σε όλες τις ανώτατες και ανώτερες σχολές της χώρας.

Ακόμα, όπως αναφέρθηκε και σε ξεχωριστό κεφάλαιο, η χρήση των πιθανοτήτων τόσο με την βοήθεια του κλασικού ορισμού όσο και με του αξιωματικού, έχουν άμεση εφαρμογή σε ζητήματα οικονομικού περιεχομένου. Τα ασφαλή συμπεράσματα με την χρήση των πιθανοτήτων για τον τρόπο εφαρμογής των αμοιβαίων κεφαλαίων φανερώνει την κρισιμότητα των εννοιών όπως αυτής της δεσμευμένης πιθανότητας αλλά κ την άμεση σύνδεση των πιθανοτήτων με την Οικονομία.

Ακόμα, οι κατανομές που έχουν αναφερθεί, αποτελούν στατιστικά μοντέλα ανάπτυξης οικονομικών δραστηριοτήτων. Τα μοντέλα αυτά μπορούν να μελετηθούν και σε θεωρητικό επίπεδο μεταβάλλοντας κάθε φορά την τιμή της παραμέτρου που καθορίζει την κατανομή.

Με τον τρόπο αυτό, μπορούν να βγουν συμπεράσματα σχετικά με το είδος και το ύψος της μεταβολής, ώστε για παράδειγμα να έχουμε το μέγιστο κέρδος ή τις ελάχιστες απώλειες ή και ακόμη και το εύρος της μεταβολής μιας τιμής μετά από μια αλλαγή σε παράμετρο.

Η σπουδαιότητα των κατανομών στην Οικονομία φαίνεται και από το γεγονός ότι σπουδαίοι οικονομολόγοι, όπως ο Pareto, ασχολήθηκαν συστηματικά με την καθιέρωση και μελέτη κατανομών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αποστολοπούλου Θ., 1988, Στατιστκή Επιχειρήσεως

Κάτου Αν., 1984, Στατιστική

Κιόχος Π., 1993,Στατιστική

Κοκολάκη Γ. – Σπηλιώτη Ι., 1985, Θεωρία πιθανοτήτων και εφαρμογής

Κολυβά – Μαχαίρα Φ., 1998, Στατιστική

Κουνιάς Σ.- Μωυσιάδης Χ., 1995, Θεωρία των πιθανοτήτων

Παπαϊωάννου Τ., 1982, Εισαγωγή στις πιθανότητες και τη στατιστική

Τζιαφέτα Γ., 1983, Εισαγωγικά Μαθήματα Θεωρίας Πιθανοτήτων

Φράγκος Χ., 1998, Στατιστική Επιχειρήσεων

Χαλικίας Ι., Στατιστική

Ξένη

Gerald Keller, Στατιστική για οικονομικά και διοίκηση επιχειρήσεων