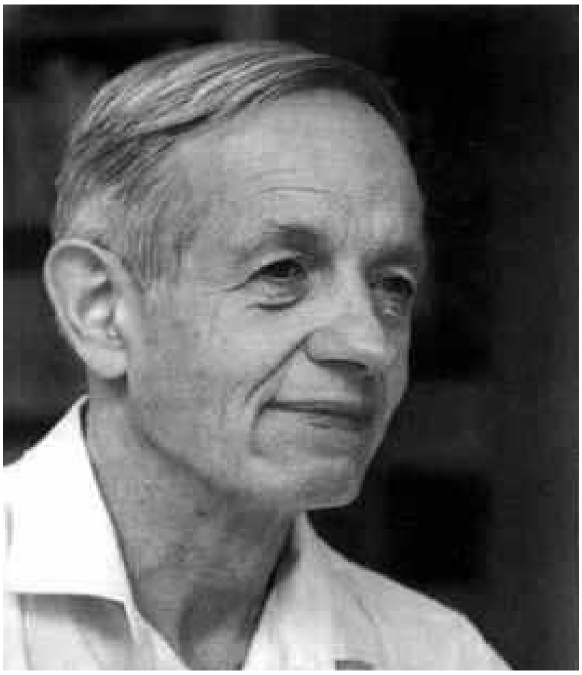
Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ JOHN NASH ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ



ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ:
ΣΓΟΥΡΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ
ΠΙΝΩΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
ΧΡΟΝΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΚΑΛΟΓΕΡΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Ο John Nash υπήρξε μια ιδιοφυία στα μαθηματικά, αλλά ταυτόχρονα όσο και αν αυτό φαίνεται παράξενο, ένας άνθρωπος που έπασχε από σχιζοφρένεια. Γεννήθηκε στις 31 Ιουνίου του 1928 στο σανατόριο της πόλης Bluefield, στην δυτική Βιρτζίνια. Ο πατέρας του ήταν πτυχιούχος στην εφαρμοσμένη ηλεκτρική μηχανική και παλιότερα είχε πολεμήσει στον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο σαν υπολοχαγός στις υπηρεσίες ανεφοδιασμού στο μέτωπο της Γαλλίας. Η μητέρα του Margaret Virginia Martin είχε γεννηθεί στο Bluefield, σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Δυτικής Βιρτζίνια και πριν από το γάμο της εργάστηκε σαν δασκάλα Αγγλικής γλώσσας αλλά και της Λατινικής. Κατά τη διάρκεια της ζωής της υπέστη μερική απώλεια ακοής εξαιτίας μιας παλιότερης αρρώστιας που της προκάλεσε ψηλό πυρετό. Και οι δύο γονείς του ήρθαν στο Bluefield από την Δυτική Βόρεια Καρολίνα. Επίσης είχε και μια αδερφή δυόμιση χρόνια μικρότερή του, την Martha.

Ο John Nash από μικρό παιδί είχε στη διάθεσή του έναν ατελείωτο πλούτο γνώσεων που προερχόταν από τον μεγάλο όγκο από εγκυκλοπαίδειες και άλλα βιβλία που βρίσκονταν στα ράφια της μεγάλης βιβλιοθήκης του σπιτιού του. Όπως περιέγραφε αργότερα η δασκάλα του ο John Nash έδειχνε να ξεχωρίζει από τα άλλα παιδιά του σχολείου του, χωρίς να είναι ένας άριστος μαθητής. Διάβαζε όμως χωρίς τελειωμό, περπατούσε και σφύριζε ολόκληρες συμφωνίες του Μπαχ, αλλά το πιο σημαντικό απ' όλα ήταν μια μοναδική ανεξήγητη ικανότητα που είχε, να αναζητά διαρκώς νέους τρόπους προσέγγισης των πραγμάτων. Όταν πια έφτασε στο πανεπιστήμιο άρχισε να γίνεται φανερή η ιδιοφυία του. Είναι χαρακτηριστικό ένα περιστατικό που έδωσε το πρώτο δείγμα της διάνοιάς του, όταν δεκαεννιάχρονος σπουδαστής ακόμα πλησίασε τον καθηγητή του R.J.Duffin και του έδειξε ένα πρόβλημα που εκτίμησε ότι είχε βρεί την λύση του. Ο καθηγητής έμεινε άφωνος όταν διαπίστωσε ότι ο John

Nash, είχε καταφέρει, χωρίς να το ξέρει, να λύσει το διάσημο θεώρημα του Brower. Ο καθηγητής του σε συστατική επιστολή του προς το πανεπιστήμιο του Princeton περιέγραφε τα πάντα μέσα από μια μόνο φράση ΄΄ Αυτός ο άνθρωπος είναι μια ιδιοφυία ΄΄ . Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι την περίοδο αυτή στο πανεπιστήμιο Princeton βρισκόταν ο Einstein και ο Goder Wiener Neuman. Ο Neuman θεωρείται ο εμπνευστής της Θεωρίας των Παιγνίων. Η θεωρία αυτή επέβλεπε στο να αποκομίσει μαθηματικούς κανόνες μέσα από παίγνια στρατηγικής. Ο Neuman όμως ανέπτυξε τους κανόνες αυτούς μέσα από την εξόντωση των αντιπάλων και όχι και μέσα από συνεργασίες περισσότερων παικτών.

Ο John Nash είχε αναπτύξει σπουδαία μαθηματική ΄΄δράση΄΄ από τις μικρές τάξεις του γυμνασίου και χαρακτηριστικές είναι οι αναλύσεις που έκανε πάνω στο θεώρημα Fermat. Ακόμα διακρίθηκε στα πειράματα της χημείας και του ηλεκτρισμού, όπως και τις τεχνολογικές του εφαρμογές στην χημική εφαρμοσμένη μηχανική την περιόδο που ήταν φοιτητής στο Carnegie του Πίτσμπουργκ. Στο Carnegie σπούδαζε με υποτροφία και όλο αυτό το διάστημα παρακολούθησε μαθήματα χημείας, φυσικής, μηχανολογίας, πριν καταλάβει ότι αυτό που τον άγγιζε πραγματικά ήταν η επιστήμη των μαθηματικών. Στο διάστημα των σπουδών του στο Carnegie του ανατέθηκε να μελετήσει μια σειρά θεμάτων γύρω από τα ΄΄διεθνή οικονομικά΄΄ και να εξάγει τα δικά του συμπεράσματα και προτάσεις. Αποτέλεσμα των μελετών αυτών ήταν η εκπληκτική έκθεση που συνέταξε γύρω από τα οικονομικά προβλήματα και τις ιδέες. Η έκθεση αυτή δημοσιέυτηκε αργότερα με τον τίτλο ΄΄ το πρόβλημα της διαπραγμάτευσης ΄΄ που της δόθηκε ο χαρακτήρας της οικονομετρικής. Η μελέτη αυτή ήταν το ξεκίνημα του ενδιαφέροντός του για την θεωρία των παιγνίων, από το σημείο εκείνο που την σταματούσε ο Neuman. Την επέκτεινε και την ανέλυσε μέσα από τις πολλαπλές και ποικίλες αλγεβρικές δυνατότητες.

Ήξερε πολύ καλά ότι η διατριβή πάνω σε αυτήν τη θεωρία, που πολλοί καθηγητές δεν τολμούσαν να αγγίξουν, θα τον έκανε να ξεχωρίσει μέσα στην πανεπιστημιακή κοινότητα. Και πράγματι τιμήθηκε γι αυτήν το 1994 με το βραβείο Nobel.

Σε ηλικία 22 ετών ο Nash είναι καθηγητής του Princeton (το προτίμησε από το Χάρβαρντ, εξαιτίας της κοντινότερης απόστασης από το Bluefield, αλλά και γιατί εκτίμησε την προσπάθειά του καθηγητή A.W. Tucker να τον πάρει κοντά του). Σε ηλικία 23 ετών διδάσκει στο MIT. Κάθε φορά που ανέλυε μια μαθηματική του μελέτη, το κοινό έμενε άφωνο και τα επιφωνήματα θαυμασμού ήταν συνηθισμένο φαινόμενο. Δυστυχώς τους πρώτους μήνες του 1959 μια ψυχική εκτροπή, σχιζοφρένεια, χτυπά αυτή την ιδιοφυία.(Το διάστημα αυτό συνέπεσε με την εγκυμοσύνη της συζύγου του Alicia).

Άρχισε να κυκλοφορεί στους διαδρόμους του πανεπιστημίου κρατώντας κάτω από την μασχάλη του την εφημερίδα New York Times και να ισχυρίζεται σε όποιους συναντούσε ότι μέσα στα κείμενα υπήρχαν κωδικοποιημένα μηνύματα εξωγήινων προς αυτόν. Έβλεπε παντού συνωμοσίες, ακόμα και από το προσωπικού του MIT. Νόμιζε ότι παντού υπήρχαν κρυπτοκομμουνιστές, άκουγε φωνές και δεχόταν τηλεφωνήματα από άγνωστα άτομα, ενώ πίστευε ότι διαδραμάτιζε σπουδαίο θρησκευτικό ρόλο. Τελικά παραιτείται από το MIT και αρχίζει να νοσηλεύεται σε ψυχιατρικές κλινικές. Στα ενδιάμεσα διαστήματα επισκέπτεται τακτικά το Princeton, όπου φορώντας παράξενα ρούχα κινείται αμίλητος ανάμεσα στις βιβλιοθήκες και τα κτίρια,ενώ σταματούσε και μιλούσε μόνο αν ήθελε να ζητήσει κάποιο τσιγάρο ή μερικά σέντς. Αν και το Princeton του είχε παραχωρήσει τα πάντα (βιβλιοθήκες, υπολογιστές, αίθουσες κλπ), αυτός φανερά στον δικό του κόσμο τα αρνιόταν. Όπως αρνιόταν και τις προσκλήσεις των συναδέλφων του να παραστεί στα σεμινάρια τους.

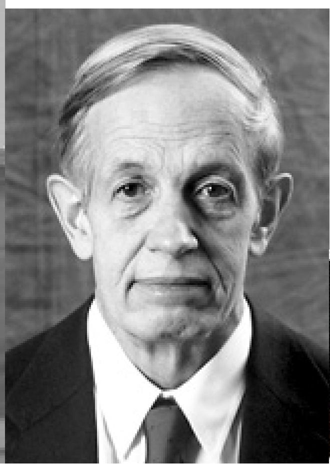
Όλοι όσοι ήξεραν το πρόβλημα τον βοηθούσαν (συμπεριλαμβανομένης και της πρώην συζύγου του Alicia με την οποία είχε χωρίσει), αλλά δυστυχώς δεν μπορούσε να ανταποκριθεί. Και όλα αυτά τη στιγμή που στους πανεπιστημιακούς κύκλους, στα σεμινάρια, και τις συνδιαλέξεις, όλοι αναφερόντουσαν στις θεωρίες του, τις απόψεις του, τις μελέτες του, τα συμπεράσματά του και τις εφαρμογές τους στην πολιτική, την οικονομία , την κοινωνία.

Η κατάσταση αυτή συνεχίστηκε μέχρι που το 1989 εντελώς απροσδόκητα, ο κορυφαίος της θεωρητικής φυσικής του 20 ου αιώνα Freema Dyson, πήρε επιτέλους απάντηση στην καλημέρα που απηύθυνε για πολλά χρόνια στον αμίλητο John Nash. Ο Nash μίλησε στον Dyson για την κόρη του, Ester Dyson, δείχνοντας τα πρώτα στοιχεία ότι το μυαλό αυτού του κορυφαίου μαθηματικού επανέρχεται στην ορθή λειτουργία του. Ο Dyson περιέγραψε την έκπληξή και την χαρά του κλείνοντας με μια φράση: το ξύπνημά του ήταν υπέροχο. !

Ένα χρόνο αργότερα ο Nash αρχίζει να ασχολείται πάλι με τα μαθηματικά. Στις επικοινωνίες του με τους άλλους μαθηματικούς, όπως τον Enrico Bomb, κάνει ευρεία χρήση του διαδικτύου, και τον Οκτώβριο του 1994 παίρνει το βραβείο Nobel. Ο επί 50 χρόνια αχώριστος φίλος του, μαθηματικός Halold Kuhn είναι αυτός που του ανακοινώνει αυτή την μοναδική είδηση.

Ο John Nash υπήρξε κάτι το διαφορετικό και κατάφερε να δώσει διεξόδους εκεί που άλλοι δεν μπορούσαν να δουν. Οι θεωρίες του έχουν αποτελέσει βασικούς κανόνες πάνω στους οποίου κινείται η σημερινή πολιτική, κοινωνική, οικονομική ζωή του πλανήτη. Ο άγνωστος κόσμος που βυθίστηκε τα τριάντα χρόνια της ζωής του, ίσως να μην ήταν μόνο ένας κόσμος σκεπασμένος από το πέπλο της ψυχικής ασθένειας αυτού του μεγάλου μαθηματικού, αλλά ίσως ο κόσμος της σημερινής πορείας και εξέλιξης , όπως τον αντιλήφθηκε και τον βίωσε στο ταραγμένο του (;) μυαλό στα κρίσιμα αυτά χρόνια.

Μήπως ο John Nash,, έστω και σε κάποιο βαθμό υπό το βάρος της ψυχικής του ταραχής είδε πράγματα που θα ζήσουμε στα επόμενα χρόνια; Πράγματα που τον κράτησαν απομακρυσμένο και φοβισμένο από τον κόσμο μέχρι την στιγμή που ένιωσε την δύναμη ικανή ώστε να " γυρίσει " και να τα αντικρίσει;


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ο Χαρακτήρας ενός Παίγνιου *(Kreps, 1988)*

Παίγνιο είναι γενικά μια κατάσταση σύγκρουσης συμφερόντων, στην οποία οι αντίπαλοι, οι παίκτες του παίγνιου, ακολουθούν στρατηγικές για τη μεγιστοποίηση ο καθένας της απόδοσής του απ' αυτή την κατάσταση. Για να είμαστε ακριβείς, αυτό ισχύει για τη μη-συνεργατική θεωρία παιγνίων (non-cooperative game theory) σε αντίθεση με τη συνεργατική θεωρία παιγνίων (co-cooperative), η οποία επικεντρώνεται στο πως διαμορφώνουν αποφάσεις ομάδες ατόμων που μπορούν να συνάψουν ανάμεσα τους δεσμευτικές συμφωνίες. Μπαίνουμε στον χώρο της μη-συνεργατικής θεωρίας όταν είναι αδύνατη η σύναψη τέτοιων συμφωνιών ή όταν υπάρξει σύγκρουση συμφερόντων ομάδων που έχουν σχηματισθεί από τέτοιες συμφωνίες. Αυτό πάλι δεν σημαίνει ότι η μη συνεργατική θεωρία αποκλείει τη συνεργασία · την δέχεται όταν αυτή υπαγορεύεται από το ατομικό συμφέρον. Ό,τι ακολουθεί σ' αυτό και στα επόμενα κεφάλαια εκτός του τελευταίου, αναφέρεται στη μη-συνεργατική θεωρία.

Έτσι, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του παίγνιου, μόνο ορθολογικοί (rational) παίκτες μπορούν να παίζουν παίγνια, διότι αυτό ακριβώς σημαίνει ότι ο κάθε παίκτης πρέπει να μεγιστοποιεί την απόδοση του. Η απόδοση (payoff) είναι η τελική έκβαση ενός παίγνιου. Αν το παίγνιο δεν περιλαμβάνει μια μόνο κίνηση (action,move) αλλά πολλές στη σειρά, η ορθολογικότητα μιας κίνησης δεν μπορεί να ορισθεί σε όρους αποδόσεων, γιατί μόνο η (όποια) τελική κίνηση συνδέεται με κάποια απόδοση. Πρέπει να ορισθεί σε όρους της συνέπειας (con-sequence) που πρόκειται να έχει για την κίνηση που θα επιλέξει ο αντίπαλος.

Ορθολογική θα είναι η επιλογή εκείνης της κίνησης από ένα σύνολο κινήσεων η οποία απομονώνει την προτιμότερη συνέπεια από το σύνολο των συνεπειών. Οι προτιμήσεις (preferences) πρέπει βέβαια να είναι πλήρεις (ο παίκτης είναι σε θέση να πει ότι προτιμά τη κίνηση Α της Β, ή της Β της Α, ή ότι είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο) και μεταβατικές (αν ο παίκτης προτιμά την Α της Β και την Β της Γ, τότε πρέπει να προτιμά την Α της Γ).

Επίσης, το πώς μια κίνηση απομονώνει την προτιμότερη συνέπεια εξαρτάται από τη συνάρτηση με την οποία το σύνολο κινήσεων μετασχηματίζεται σε σύνολο συνεπειών, συνάρτηση που αποκαλείται συνάρτηση συνεπειών (consequence function). Δηλαδή, η συνέπεια που θα έχει μια πράξη μας εξαρτάται από το πώς η πράξη μας μετασχηματίζεται σε συνέπεια. Αλλιώς παίζεται το σκάκι σ’ ένα ήσυχο σαλόνι κι αλλιώς σ' ένα ταξίδι με το τραίνο. Προσέξατε ότι όταν υπάρχει μια σειρά κινήσεων, η ορθολογικότητα μπορεί πάλι να ορισθεί σε όρους αποδόσεων αλλά θα πρόκειται για ορθολογικότητα στρατηγικής, διότι η κάθε εναλλακτική σειρά κινήσεων απαρτίζει και μια στρατηγική. Ορθολογική θα είναι η επιλογή εκείνης της στρατηγικής που μεγιστοποιεί την απόδοση τον παίκτη που την υιοθετεί.

Εξυπακούεται ότι οι παίκτες πρέπει όχι μόνο να είναι ορθολογικοί αλλά και να σκέπτονται στρατηγικά με την έννοια ότι (α) λαμβάνουν υπόψη ό,τι ξέρουν και ό,τι περιμένουν σε σχέση με τις κινήσεις και τις αποδόσεις των αντιπάλων, (β) ανεξάρτητα της ταυτότητάς τους και του πώς αποκαλούνται οι στρατηγικές που ακολουθούν για να επιτύχει ο καθένας τον στόχο του.

Αυτό έπεται και πάλι από τον ορισμό του παίγνιου ως κατάστασης σύγκρουσης συμφερόντων και άρα αλληλεξάρτησης. Αν δεν υπήρχε τέτοια σύγκρουση τότε δεν θα υπήρχε αλληλεξάρτηση και επομένως ανάγκη σχηματισμού εικασιών για τη συμπεριφορά των άλλων μονάδων λήψης αποφάσεων: Ο καθένας θα "κοίταζε τη δουλειά του". Το ότι η αναγνώριση της αλληλεξάρτησης δεν πρέπει να συνδέεται με τις ταυτότητες των αντιπάλων και των κινήσεών τους, εξασφαλίζει την αντικειμενικότητα των αποφάσεων με την έννοια ότι το ίδιο θα κάνει κάποιος αν π.χ. πιάσει κάποιον άλλο να τον κλέβει ανεξάρτητα τι του κλέβει και ποιος το κλέβει.

Μπορεί βέβαια το παράδειγμα να θυμίζει το παίγνιο κλέφτη και αστυνόμου μεταξύ του αμείλικτου επιθεωρητή Ιαβέρη και του άπαξ παρανομήσαντος στην εφηβεία Γιάννη Αγιάννη των "Αθλίων" του Βίκτωρος Ουγκώ (1862),αλλά οι αποφάσεις των αντιπάλων πρέπει να είναι αντικειμενικές στα πλαίσια βέβαια των κανόνων του κάθε παιγνίου, γιατί μόνον έτσι μπορούμε να προβλέπουμε με κάποια βεβαιότητα την έκβαση ενός παιγνίου. Οτιδήποτε μπορεί να συμβεί αν δεν υπάρχουν κανόνες παιχνιδιού, όπως ότι στο τέλος, ο Ιαβέρης αυτοκτονεί. Αυτό δεν θα μπορούσε να το είχε προβλέψει καμία θεωρία.

Ο Ιαβέρης αυτοκτόνησε όταν διαπίστωσε ότι ο συμπαίκτης του δεν έπαιζε σύμφωνα με τον "κανόνα του κλέφτη και του αστυνόμου" αλλά σύμφωνα με ηθικές αξίες που δεν διέθετε ο Ιαβέρης αλλά τόσο καλές όσο και η δική του υψηλή αίσθηση καθήκοντος: summum jus summa injuria...

1.2 Οι Εικασίες για τη Συμπεριφορά των Αντιπάλων

(Lewis, 1969-Aumann, 1976)

Το ζήτημα των εικασιών για τη συμπεριφορά των αντιπάλων δεν είναι τόσο απλό και πρέπει να το θίξουμε από τώρα, γιατί επηρεάζει αποφασιστικά το παίξιμο ενός παιγνίου. Έστω ότι X και Y είναι δύο ενδεχόμενα (events), δηλαδή δύο υποσύνολα πιθανών κινήσεων ή συνδυασμών κινήσεων, τέτοια ώστε το Y να περιέχει το X. Έστω επίσης ότι οι παίκτες είναι μόνο δύο, οι 1 και 2.

Η εμφάνιση του Y θα αποτελεί κοινή γνώση ανάμεσα στους παίκτες 1 και 2 (common knowledge between players 1 and 2), (α) εάν η εμφάνιση του X είναι αυτονόητη ανάμεσα στους παίκτες 1 και 2 (self-evident between players 1 and 2), δηλαδή εάν αποτελεί αμοιβαία γνώση (mutual knowledge) με την έννοια ότι τη γνωρίζουν και οι δύο παίκτες, (β) εάν υπάρχει λειτουργική ορθολογικότητα (instrumental rationality) με την έννοια ότι η εμφάνιση του X συνεπάγεται την εμφάνιση του Y, και (γ) εάν υπάρχει κοινή γνώση αυτής της ορθολογικότητας (CKR, common knowledge of rationality) ανάμεσα στους παίκτες i=l,2 και j=1,2, $i \neq j$ ως εξής:

CKR Ø τάξης	0 i θα είναι λειτουργικά ορθολογικός
CKR 1ης τάξης	γιατί ο i:j θα είναι το ίδιο ΚΑΙ γιατί ο j:i θα είναι το ίδιο
	ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ,
CKR 2ης τάξης	γιατί ο i:j:i θα είναι το ίδιο ΚΑΙ γιατί ο j:i:j θα είναι το ίδιο
	ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ,
CKR 3ης τάξης	γιατί ο i:j:i:j θα είναι το ίδιο ΚΑΙ γιατί ο j:i:j:i θα είναι το ίδιο
	ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ,
CKR 4ης τάξης	γιατί ο i:j:i:j:i θα είναι το ίδιο ΚΑΙ γιατί ο j:i:j:i:j θα είναι το ίδιο
	ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ,

. . .

. . .

. . .

CKR ν (ζυγός) τάξης γιατί ο i:j:...j:i θα είναι το ίδιο ΚΑΙ γιατί ο j:i:...i:j θα είναι το ίδιο

ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ,

CKR (ν+1) τάξης γιατί ο i:j:….i:j θα είναι το ίδιο ΚΑΙ γιατί ο j:i:….j:i θα είναι το ίδιο

ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ,

. . .

. . .

(ν+1) σύμβολα: με το καθένα να σημαίνει «ξέρει ότι ο»

. . .

. . .

Απλώς, δεν συμφέρει να είναι κάποιος λειτουργικά ορθολογικός αν δεν είναι βέβαιος ότι το ίδιο είναι και ο αντίπαλος του. Μπορεί το Χ όντως να συνεπάγεται Υ και να υπαγορεύει την κίνηση ω_i για τον παίκτη i και την ω_i για τον j. Αλλά αν ο j δεν είναι λειτουργικά ορθολογικός και παίξει ω'_j, τότε το καλύτερο που έχει να κάνει ο i είναι να παίξει ω'_i και όχι ω_i. Ο δια της εφαρμογής της CKR σχηματισμός ορθών εικασιών για το ενδεχόμενο Υ με σημείο αναφοράς αυτονόητο του ενδεχόμενου Χ, θα μπορούσε να ήταν μια ικανοποιητική προσέγγιση στο θέμα αν η CKR δεν συνεχίζονταν επ' άπειρον.

Η εφαρμογή της CKR μοιάζει με το παίγνιο του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (Rubinstein, 1989), κατά το οποίο ο παίκτης i στέλνει κάποιο μήνυμα στον υπολογιστή του j, ο οποίος έχει ρυθμίσει τον υπολογιστή του να επιβεβαιώνει τα μηνύματα του i αυτόματα και το ίδιο έχει κάνει επίσης ο i για τα μηνύματα του j, γιατί υπάρχει κάποια μικρή πιθανότητα να μη ληφθεί ένα μήνυμα. Η αποστολή επιβεβαιώσεων από τον ένα υπολογιστή στον άλλο μπορεί να συνεχίζεται επ’ άπειρον, και ποτέ ο I δεν θα είναι σίγουρος για τον j ότι ο j έλαβε το μήνυμα,

ο οποίος ποτέ δεν θα είναι σίγουρος ότι η επιβεβαίωση έφθασε στον i. Αν το μήνυμα του i ήταν ότι ο I θα είναι λειτουργικά ορθολογικός για να ξέρει ότι το ίδιο θα κάνει και ο j, η έναρξη της διαδικασίας επιβεβαιώσεων εγκαινιάζει μια διαδικασία επ' άπειρης αλληλοεπιβεβαίωσης της λειτουργικής ορθολογικότητας των παικτών. (Βλέπε επίσης το Πρόβλημα 3.8.15 και τη λύση του.)

Για την πληρέστερη κατανόηση της CKR, θεωρήσατε και το εξής, (γνωστό κατά τον Myerson (1991)), μυθολόγημα. Σ' ένα χωριό αποτελούμενο από εκατό ζευγάρια, όλοι οι άντρες του χωριού μαζεύονται κάθε βράδυ στην πλατεία του χωριού, και ο καθένας τους είτε επαινεί την γυναίκα του εάν νομίζει ότι του είναι πιστή, είτε την καταριέται εάν νομίζει ότι τον απατά. Όλες οι γυναίκες είναι άπιστες και τις απιστίες της καθεμιάς τις μαθαίνουν όλοι εκτός από τον άνδρα της. Ένα βράδυ φθάνει στο χωριό κάποιος σοφός ξένος, και εκεί που όλοι επαινούσαν τις γυναίκες τους, ο ξένος σηκώνεται και λέει ότι "μια γυναίκα στο χωριό είναι άπιστη". Ο ξένος φεύγει από το χωριό την άλλη μέρα, και οι εκατό άνδρες συνέχισαν να επαινούν τις γυναίκες τους για 99 ακόμη μέρες. Την 100ή, όλοι βρίσκονται να τις καταριώνται...

Αυτό που είχε συμβεί ήταν ότι επί 99 ημέρες, ο καθένας συνέχισε να πιστεύει ότι άπιστες είναι όλες οι άλλες γυναίκες εκτός από την δική του, και περίμενε ν' ακούσει κατάρες από κάποιον άλλο. Περίμενε επί 99 ημέρες, γιατί οι άλλοι ήταν 99, αλλά περίμενε μάταια, (μιας και ο καθένας πίστευε το ίδιο για τη γυναίκα του). Την 100ή μέρα, ο καθένας κατάλαβε ότι για τους άλλους, σ' αυτούς τους 99 περιλαμβάνονταν κι αυτός ή μάλλον η γυναίκα του. Αν δίναμε έναν αριθμό μητρώου από 1 έως 100 στους άνδρες, "ο 1 γνώριζε ότι ο 2 γνώριζε ότι ο 3 γνώριζε ... ότι ο 99 γνώριζε ότι η γυναίκα του 100 ήταν άπιστη, αλλά ο 1 δεν γνώριζε ότι ο 2 γνώριζε ότι ο 3 γνώριζε ... ότι ο 99 γνώριζε ότι ο 100 γνώριζε ότι η γυναίκα του 1,

η δική του γυναίκα, ήταν άπιστη". Υπήρχε δηλαδή κοινή γνώση 99ης τάξης. Η ανακοίνωση του ξένου, η οποία έγινε ενώπιον όλων των ανδρών και κατέστη έτσι κοινή γνώση αυτή καθεαυτή, μετέτρεψε την CKR 99ης τάξης σε CKR 100ής τάξης. Η μετατροπή είχε, όπως είδαμε, σημαντικότατες συνέπειες, δείχνοντας την σημαντικότητα της ύπαρξης CKR.

Για να ξεφύγουμε απ' αυτόν τον φαύλο κύκλο, θα πρέπει οι εικασίες των δύο παικτών για το ενδεχόμενο Υ να συγκλίνουν μόνο με CKR πρώτης τάξης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εάν οι εικασίες για το Υ συνδεθούν με κάποια πιθανότητα εμφάνισης του Υ και υποτεθεί ότι παίκτες με την ίδια πληροφόρηση για το Υ καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα για την εν λόγω πιθανότητα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

Οι εικασίες για την εμφάνιση του Υ θα είναι συνεκτικά ευθυγραμμισμένες (CAB, consistently aligned beliefs), δηλαδή και οι δύο παίκτες θα αξιολογούν το ίδιο την πιθανότητα εμφάνισης του Υ (α) εάν υπάρχει κάποιος *ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ* (partition) του συνόλου των πιθανών κινήσεων ή συνδυασμών κινήσεων, τέτοιος ώστε εάν εμφανισθεί το Υ, οι παίκτες να ξέρουν σε ποιο διαχωρισμό ανήκει, και (β) εάν η πιθανότητα εμφάνισης του Y αποτελεί κοινή γνώση.

Αρκεί το σκέλος (β) να περιλαμβάνει μόνο CKR πρώτης τάξης (και για τους δύο παίκτες), γιατί υπάρχει το σκέλος (α), το οποίο αποκλείει οι παίκτες να πέσουν έξω στην εκτίμηση τους για την πιθανότητα εμφάνισης του Y. Έτσι, ο i θα δίνει στην πιθανότητα εμφάνισης του Y την τιμή h (CKR μηδενικής τάξης), γιατί ο i ξέρει ότι την ίδια τιμή δίνει και ο j (CKR πρώτης τάξης για τον i και γιατί ο j ξέρει ότι την ίδια τιμή δίνει και ο i (CKR πρώτης τάξης για τον j).

Εάν αυτή η πιθανότητα υπαγορεύει την κίνηση ω_i για τον i και την ω_j για τον j, ο i μπορεί πλέον να μην ανησυχεί μήπως ο j επιλέξει ω'_j, πιστεύοντας ο j ότι ο i μπορεί κατά λάθος να παίξει ω ω'_i |. Το σκέλος (α) του ορισμού των CAB δεν επιτρέπει λάθη ως προς την h ενώ το σκέλος (β) το καθιστά αυτό κοινή γνώση, έτσι ώστε οι επιλογές ω_i και ω_j, να είναι σίγουρες χωρίς να χρειάζεται η επ' άπειρον αλληλοεπιβεβαίωση της λειτουργικής ορθολογικότητας των παικτών.

Αυτό που μας λέει στην ουσία ο ορισμός των CAB είναι ότι οι παίκτες δεν επιτρέπεται να "συμφωνήσουν να διαφωνήσουν" για την h ενώ η CKR (ν τάξης) προχωρά στο άλλο άκρο ότι ποτέ οι παίκτες δεν μπορούν ν' αποκλείσουν ένα τέτοιο ενδεχόμενο.

Προσέξατε ότι όταν ένα παίγνιο περιλαμβάνει μια σειρά κινήσεων (και όχι μόνο μια εφάπαξ επιλογή μιας κίνησης), τα ενδεχόμενα X και Y και οι εικασίες για το Y μπορεί να αναφέρονται είτε σε μελλοντικές κινήσεις είτε σε κινήσεις που έχουν ήδη γίνει αλλά που κάποιος παίκτης δεν είχε την ευκαιρία να τις παρατηρήσει. Αυτό ισχύει τόσο για την CKR όσο και για τις CAB. Τον όρο "εικασίες" θα τον δούμε και θα τον ξαναδούμε στα επόμενα κεφάλαια, προσαρμοσμένο σε διαφορετικά αναλυτικά πλαίσια, αλλά πάντα θ' αποτελεί κάποια εκδοχή των εννοιών που μόλις αναπτύξαμε.

Θα δούμε επίσης στα επόμενα κεφάλαια ότι σε αρκετές περιπτώσεις δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση περί CAB, αλλά μόνο τη CKR ενώ η περίπτωση της "περιορισμένης ορθολογικότητας" (Simon, 1982) αμφιβάλλει ακόμη και για την CKR, γι' αυτή καθεαυτή την ύπαρξη ορθολογικότητας. Θα τελειώσουμε αυτό το μέρος με την επισήμανση ότι τα δύο είδη εικασιών για τη συμπεριφορά του αντίπαλου μπορεί να συνεπάγονται διαμετρικά αντίθετες στρατηγικές όπως στο παίγνιο της συμμόρφωσης του παλιόπαιδου από τον γονέα (Hargreaves Heap and Varoufakis, 1995):

Υπό την CKR, ο γονέας ποτέ δεν μπορεί ν’ αποκλείσει ότι το παιδί "δεν θα το ξανακάνει" και το παιδί ποτέ δεν μπορεί να είναι σίγουρο ότι έχει πείσει τον γονέα ότι δεν θα το ξανακάνει. Το καλύτερο, επομένως, που έχει να κάνει ο γονέας είναι να τιμωρεί το παιδί, και το καλύτερο που πρέπει να έχει σαν στόχο το παιδί, είναι η ελαχιστοποίηση των παραπτωμάτων του. Το ίδιο και υπό τις CAB, που όμως δεν αποκλείει την περίπτωση της αμοιβαίας εμπιστοσύνης μεταξύ γονέα και παιδιού. Σ' αυτή την περίπτωση μια παρατήρηση στο παιδί αρκεί, αν γίνει έτσι ώστε να μην μπορεί το παιδί να εκμεταλλευθεί την εμπιστοσύνη του γονέα στο μέλλον: "Πρόσεξε, γιατί αν το ξανακάνεις θα χάσω την εμπιστοσύνη μου απέναντι σου και θ' αρχίσω να συμπεριφέρομαι όπως υπό τη CKR". Η λειτουργική ορθολογικότητα δεν δικαιολογεί παρατηρήσεις του τύπου "Γιατί παιδί μου το έκανες, δεν είναι καλό, θα σ' άρεσε εσένα αν...;" κ.λπ. Μια τέτοια συμπεριφορά απέναντι στο παιδί το μετατρέπει πράγματι σε παλιόπαιδο αλλά και σε κακομαθημένο.

Και έτσι είναι, ακόμη και αν ξεφύγουμε από τη λειτουργική ορθολογικότητα της θεωρίας παιγνίων και μπούμε στην ηθική φιλοσοφία κατά την οποία μόνο η κατηγορική επιταγή (categorical imperative) του Kant (1788) να μην κάνουμε κάτι που δεν θα θέλαμε αν όλοι έκαναν το ίδιο, μπορεί να έχει κάποια αποτελέσματα άλλα απ' ό,τι προβλέπει η θεωρία παιγνίων. Ξεφύγαμε όμως από το θέμα μας εδώ, που είναι ότι η CKR και οι CAB μπορεί, όπως είδαμε, να υπαγορεύουν διαφορετική συμπεριφορά.

1.3 Τα Κεφάλαια που Ακολουθούν

Οι τέσσερις βασικές κατηγορίες παιγνίων είναι τα στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης, τα δυναμικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης, τα στατικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης και τα δυναμικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης:

Η πληροφόρηση δεν είναι πλήρης όταν ένας τουλάχιστον αντίπαλος του παιγνίου δεν γνωρίζει ποια είναι η απόδοση ενός τουλάχιστον άλλου αντίπαλου. Κάθε μία απ’ αυτές τις κατηγορίες παιγνίων έχει τη δική της λύση που χαρακτηρίζεται ως ισορροπία (equilibrium) με την έννοια ότι οι αντίπαλοι δεν έχουν κίνητρο μονομερούς απομάκρυνσης απ' αυτήν. Εκτός όμως των τεσσάρων κύριων εννοιών ισορροπίας, υπάρχουν και αρκετές άλλες που τις βελτιώνουν, ή κατά την ορολογία, τελειοποιούν (perfection) περαιτέρω. Θα δούμε τις περισσότερες απ' αυτές τις ισορροπίες όχι μαθηματικά αλλά βάσει του σκεπτικού που οδηγεί σε κάθε μία απ' αυτές και έτσι ώστε να μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε στην πράξη σε ανάλογες καταστάσεις.

Το σκεπτικό είναι πάντα ένα: Ότι ορθολογικοί παίκτες δεν επιλέγουν κινήσεις που μπορεί ν' αποφέρουν μικρότερη απόδοση απ' ό,τι άλλες κινήσεις αρκεί να υπάρχει λειτουργική ορθολογικότητα (CKR ή CAB). Αυτή είναι η έννοια της "κυριαρχίας" μιας στρατηγικής, που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο και που διαπερνά ολόκληρη τη θεωρία παιγνίων. Οι συνθήκες όμως ικανοποίησης της προϋπόθεσης της κυριαρχίας αλλάζουν καθώς η δομή των παιγνίων γίνεται πλουσιότερη, και αυτό είναι εκείνο το οποίο οδηγεί στην ανάγκη βελτίωσης της έννοιας της ισορροπίας. Το ότι δεν θα παιχθούν "κυριαρχούμενες στρατηγικές", μπορεί να μην μας λέει πολλά για το τι θα παιχθεί. Οι κυρίαρχες στρατηγικές μπορεί απλώς να είναι πολλές.

Το τι θα κάνει ένας ορθολογικός παίκτης, το ποια απ’ αυτές θα επιλέξει τελικά, είναι ό,τι μεγιστοποιεί την απόδοση του, αν βέβαια περιμένει ότι το ίδιο θα πράξει και ο αντίπαλος για τον εαυτό του.

Πρόκειται για εικασία εκ μέρους του κάθε παίκτη, που ισοδυναμεί με κοινή γνώση της λύσης πέραν της κοινής γνώσης που υποδεικνύει απλώς τις κυρίαρχες στρατηγικές.

Αυτός είναι ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να δούμε την ουσία της "ισορροπίας Nash". Είναι ένα από τα σκεπτικά πίσω από την εν λόγω ισορροπία, την οποία θα εξετάσουμε κι αυτή στο επόμενο κεφάλαιο, γιατί η "λογική" της είναι τόσο απλή και επιδέχεται ταυτόχρονα τόσες ερμηνείες (Schelling, 1980), που είναι αδύνατον να αγνοηθεί όταν επιχειρείται η εξεύρεση έννοιας λύσης σε παίγνια πλουσιότερης δομής. Το "κλειδί" αυτής της λογικής είναι στο περιεχόμενο της λειτουργικής ορθολογικότητας. Δεν αρκεί ο κάθε ορθολογικός παίκτης να πιστεύει ότι το ίδιο ορθολογικός είναι και ο αντίπαλος. Αυτό είναι κάτι γενικό και αόριστο. Οι εικασίες πρέπει να είναι πιο συγκεκριμένες και άρα γεννάται θέμα ως προς την ορθότητα τους. Προϋπόθεση για την επίδειξη ορθολογικότητας, για την ορθή επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης, είναι η ορθή διαμόρφωση των εικασιών του για τους συμπαίκτες του. Επομένως, η εξεύρεση λύσης σε παίγνια πλουσιότερης δομής πρέπει να επικεντρώνεται στην εξεύρεση των ιδιαιτεροτήτων της δομής, που πρέπει να ληφθούν υπόψη για την ικανοποίηση των απαιτήσεων περί λειτουργικής ορθολογικότητας. Γι' αυτό και θα δούμε ότι πολλές από τις έννοιες ισορροπιών συνεχίζουν να χαρακτηρίζονται ως Nash, μιας και είναι στο πνεύμα της ισορροπίας Nash.

Στο κεφάλαιο 3, εξετάζουμε μερικές "βελτιωμένες ισορροπίες" σε σχέση πάλι με τα στατικά παίγνια. Η "τελειοποίηση", που αναφέραμε στην εισαγωγική παράγραφο αυτού του μέρους, περιλαμβάνει την ταυτόχρονη εφαρμογή και των δύο πλευρών της ορθολογικότητας, την επιλογή εκείνης της ισορροπίας Nash (αν είναι πολλές), της οποίας οι στρατηγικές δεν είναι κυριαρχούμενες.

Μια ισορροπία Nash σε όρους κυριαρχούμενων στρατηγικών, μπορεί να προκύψει κατά λάθος κατά την διαδικασία επιλογής των στρατηγικών ισορροπίας, ή κατά την ορολογία, λόγω απουσίας διαδικαστικής ορθολογικότητας (procedural rationality), που ωστόσο μπορούμε αναλυτικά να τη λάβουμε υπόψη.

Το κεφάλαιο 3 τελειώνει με τα στατικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης και με μια εναλλακτική προσέγγιση των στατικών παιγνίων από την Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων. Αντίθετα με την "ορθόδοξη" θεωρία, με την οποία ασχολείται όλο το βιβλίο, οι παίκτες της Εξελικτικής Θεωρίας κληρονομούν από τους προγόνους τους αντί να επιλέγουν τις στρατηγικές, και το ζητούμενο είναι η "επιτυχία" μιας στρατηγικής όταν χρειασθεί να παιχθεί.

Το κεφάλαιο 4 μελετά τα δυναμικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης, θέτοντας τα θεμέλια για το κεφάλαιο 5, το οποίο μελετά τα δυναμικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης σε σχέση και με άλλες κατηγορίες πληροφόρησης, τις οποίες θα δούμε εκεί. Το κεφάλαιο 6 ασχολείται με ορισμένες ειδικές αλλά και πάλι ουσιώδεις πτυχές των δυναμικών παιγνίων μη πλήρους πληροφόρησης. Σ' αυτά τα τρία κεφάλαια θίγεται και το θέμα της απουσίας ουσιαστικής ορθολογικότητας (substantive rationality), η οποία αν δεν σημαίνει χαοτική συμπεριφορά, τότε κι αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψη ως απλώς περιορισμένη ορθολογικότητα (bounded rationality), αν μπορεί ν' αντιμετωπισθεί αναλυτικά δια της αναγωγής της σε αβεβαιότητα ως προς τις αποδόσεις των παικτών. Το κεφάλαιο 7 εξετάζει τα αποκαλούμενα "επαναλαμβανόμενα παίγνια", ειδική μορφή δυναμικών παιγνίων όπου επίσης έχουμε την ευκαιρία να δούμε ότι η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων προσεγγίζει τα δυναμικά παίγνια από την άποψη της διαχρονικής επιβίωσης μιας κληρονομούμενης στρατηγικής. Το βιβλίο συνεχίζει με το θέμα των διμερών διαπραγματεύσεων στο κεφάλαιο 8. Πρόκειται για ειδική μορφή δυναμικού παιγνίου που επιτρέπει "επιμέρους πληρωμές" (side-payments) μεταξύ των παικτών ή αυτό που αποκαλείται στην καθομιλουμένη "δωροδοκίες" (bribes).

Σε τέτοια παίγνια παύουμε να αναφερόμαστε σε ισορροπίες και υιοθετούμε ως έννοια λύσης τον ίδιο τον όρο "λύση" (solution).

Το κεφάλαιο 8 δεν αναφέρεται στο ζήτημα των επιμέρους πληρωμών ρητά, αλλά η ύπαρξη τους υποδηλώνεται από τη χρήση του όρου "λύση". Όρος του οποίου το περιεχόμενο αντλεί από τη Συνεργατική Θεωρία Παιγνίων με την οποία τελειώνει το βιβλίο στο κεφάλαιο 9.

Ο αναγνώστης θα έχει ήδη διαπιστώσει ότι δίπλα από τον τίτλο του κάθε μέρους ενός κεφαλαίου υπάρχουν σε παρενθέσεις μια ή περισσότερες βιβλιογραφικές αναφορές. Αυτές αναφέρονται στις βασικές για το εκάστοτε θέμα μελέτες. Τα κείμενα όμως που έχουν επηρεάσει αποφασιστικά τη διαμόρφωση και το περιεχόμενο της ύλης που ακολουθεί είναι των Gibbons (1992), Eichberger (1993), Hargreaves Heap and Varoufakis (1995), Kreps (1990, κεφ. 11-13), Luce and Raiffa (1957), Mas-Colell et al. (1995, κεφ. 7-9), Myerson (1991), Osborne and Rubinstein (1994) και Vega-Redondo (1996). Άλλα σημαντικά βιβλία είναι των Binmore (1992), Fudenberg and Tirole (1991) και Ritzberger (2002).

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται κατά τη παρουσίαση της θεωρίας είναι τα συνήθη για τέτοιου είδους βιβλία. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν ορισμένα προβλήματα προς λύση, που κι αυτά είναι λίγο ή πολύ τα ίδια στη βιβλιογραφία. Καλό είναι ο αναγνώστης να προσπαθήσει να τα λύσει μόνος του. Επειδή, όμως, δεν υπάρχει ελληνική βιβλιογραφία στη θεωρία παιγνίων, το Παράρτημα στο τέλος του βιβλίου, προσφέρει ή μάλλον σκιαγραφεί τη λύση σε όσα προβλήματα συμβάλλουν κατά τη γνώμη του γράφοντος, στην ανάπτυξη της λειτουργικής χρήσης της θεωρίας, της χρήσης της στη πράξη. Τα άλυτα προβλήματα συμβάλλουν στην περαιτέρω εμβάθυνση σ' αυτή καθεαυτή τη θεωρία. Συνοδεύονται όπως και αρκετά από τα λυμένα προβλήματα, από κάποια βιβλιογραφική αναφορά στην οποία μπορεί ν' αποτανθεί ο ενδιαφερόμενος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

2.1 Περιγραφή Παιγνίων (Borel, 1921 - von Neumann, 1928)

Υπάρχουν δύο μορφές παρουσίασης ενός παιγνίου, η κανονική και η εκτατική. Αυτή που ενδιαφέρει εμάς για την υπό εξέταση κατηγορία παιγνίων είναι η κανονική ή στρατηγική μορφή (normal or strategic form), η οποία προσδιορίζει δι' ενός πίνακα σαν αυτούς που ακολουθούν στις επόμενες σελίδες, (α) τους αντιπάλους ή παίκτες του παιγνίου, (β) τις διαθέσιμες σε κάθε παίκτη στρατηγικές υπό μορφή απλών κινήσεων και (γ) την απόδοση του κάθε παίκτη για κάθε συνδυασμό στρατηγικών που θα μπορούσε να είχε επιλεγεί. Δηλαδή, ο παίκτης i, i=l,2,...,N, μπορεί να επιλέξει τη στρατηγική s_i, από το διαθέσιμο σ' αυτόν σύνολο στρατηγικών S_i, και η απόδοση απ' αυτή την κίνηση του να είναι $ui=u_i(s_1,s_2...,s_N)$, δηλ. μια συνάρτηση του συνδυασμού των στρατηγικών που έχουν επιλεγεί και από τους άλλους παίκτες. Γι' αυτό κι ένα παίγνιο κανονικής μορφής συμβολίζεται ως εξής: $G_N=[N,(S_i),(u_i)]$.

Οι στρατηγικές επιλογές στα στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης γίνονται χωρίς ο παίκτης i να γνωρίζει το τι επιλέγει ο παίκτης j, $i \neq j$, j=l,2,...,N, δηλ. όλοι οι παίκτες κάνουν τις επιλογές τους ταυτόχρονα. Η υπόθεση περί ταυτόχρονης επιλογής στρατηγικών είναι το ειδοποιό χαρακτηριστικό των στατικών παιγνίων πλήρους πληροφόρησης. Αυτό δεν σημαίνει (α) ότι και οι κινήσεις των παικτών πρέπει να γίνονται ταυτόχρονα: αρκεί ο κάθε παίκτης να μη γνωρίζει τις επιλογές των άλλων, (β) ότι, όπως θα δούμε αργότερα, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονική μορφή για δυναμικά παίγνια.

2.2 Κυρίαρχη Στρατηγική (Moulin, 1979, 1986)

Στο παίγνιο δφ, που ακολουθεί, το σύνολο των παικτών Ν είναι Ν= (υπόδικος 1, υπόδικος 2), το σύνολο των στρατηγικών διαθέσιμο σε κάθε παίκτη είναι το ίδιο και συγκεκριμένα, S_1=(μη ομολογία, ομολογία)=S_2, ενώ οι αποδόσεις είναι αυτές που δίδονται σε κάθε κελί του πίνακα, όπου ο πρώτος αριθμός σε κάθε κελί είναι πάντα η απόδοση του παίκτη 1 και ο δεύτερος είναι η απόδοση του παίκτη 2:

u_1(μη ομολογία, μη ομολογία) = -2 = u_2 (μη ομολογία, μη ομολογία),

u_1 (μη ομολογία, ομολογία) =-10 = u_2 (ομολογία, μη ομολογία),

u_1 (ομολογία, μη ομολογία) =-1 = u_2 (μη ομολογία, ομολογία) και

u_1(ομολογία, ομολογία) = -5 = u_2 (ομολογία, ομολογία),

όπου η πρώτη στρατηγική σε κάθε παρένθεση αφορά τον παίκτη 1 και η δεύτερη είναι του παίκτη 2. Αυτό που καθιστά το εν λόγω παίγνιο στατικό πλήρους πληροφόρησης και που του προσδίδει κάποτε ρεαλιστικότητα, είναι η εξής κατάσταση:

Δύο υπόδικοι, οι οποίοι έχουν συλληφθεί για κάποιο μικροαδίκημα, κατηγορούνται, επίσης, και για κάποια σοβαρή παρανομία για την οποία, όμως, οι αρχές δεν διαθέτουν επαρκή αποδεικτικά στοιχεία για την καταδίκη τους. Εάν ο ένας από τους δυο υπόδικους ομολογήσει, τότε είναι βέβαιο ότι θα καταδικασθούν. Οι αρχές, συνεπώς, δίνουν ξεχωριστά σε κάθε υπόδικο την ευκαιρία να ομολογήσει (και να γίνει μάρτυρας κατηγορίας). Έτσι, εάν ο ένας ομολογήσει, θα καταδικασθεί μόνο σε 1 χρόνο φυλάκισης, ενώ ο συνεργάτης του, που θα παραμείνει σιωπηλός,

θα τιμωρηθεί με 10 χρόνια φυλάκισης.

Εάν ουδείς ομολογήσει, τότε θα καταδικασθούν και οι δύο για το μικροαδίκημα σε 2 χρόνια φυλάκισης ο καθένας. Τέλος, εάν ομολογήσουν και οι δύο, περίπτωση κατά την οποία κανενός η μαρτυρία δεν είναι ουσιώδης για την απαγγελία της κατηγορίας, θα καταδικασθούν αμφότεροι με τις μεγαλύτερες ποινές των 5 χρόνων φυλάκισης ο καθένας.

		Υπόδικος 2	
		Μη ομολογία	Ομολογία
	Μη ομολογία	-2,-2	-10,-1
Υπόδικος 1	Ομολογία	-1,-10	-5,5

Παίγνιο δφ

Είναι φανερό πλέον ότι οι αποδόσεις είναι αρνητικές γιατί είναι ποινές, όπως και ότι δφ είναι τα αρχικά του ονόματος του παιγνίου, ***δίλημμα των φυλακισμένων*** [prisoners' dilemma, Tucker (Luce and Raiffa, 1957)]. Εξίσου φανερό είναι ότι μοναδική ισορροπία στο εν λόγω παίγνιο αποτελεί η ομολογία αμφοτέρων και η καταδίκη τους σε 5ετή φυλάκιση έκαστος. Κανένα άλλο ζεύγος στρατηγικών δεν αποτελεί ισορροπία, διότι, εάν ο ένας υπόδικος ομολογήσει (ή αναμένεται να ομολογήσει), η καλύτερη στρατηγική για τον άλλον είναι να ομολογήσει κι αυτός, γιατί έτσι θα πάει 5 και όχι 10 χρόνια φυλακή. Ακόμα κι εάν ο ένας υπόδικος δεν ομολογήσει (ή δεν αναμένεται να ομολογήσει), εξακολουθεί να συμφέρει τον άλλο υπόδικο να γίνει μάρτυρας κατηγορίας, γιατί έτσι θα πάει 1 και όχι 2 χρόνια φυλακή.

Το κύριο χαρακτηριστικό του παιγνίου του διλήμματος των φυλακισμένων είναι ότι το αποτέλεσμα ισορροπίας υστερεί έναντι εκείνης της κοινής στρατηγικής κατά την οποία και οι δύο θα συμφωνούσαν να μην ομολογήσουν. Συνεπώς, αυτό το παίγνιο περιγράφει μια κατάσταση, όπου η συνεργασία μπορεί να βελτιώσει την ευημερία όλων των παικτών. Εάν οι δύο υπόδικοι μπορέσουν να βρουν τρόπο να συμφωνήσουν επ' αυτής της κοινής στρατηγικής, και ακόμη πιο σημαντικά, τρόπο να επιβάλλουν την εφαρμογή αυτής της συμφωνίας, θα βρεθούν αμφότεροι σε καλύτερη θέση απ' ό,τι εάν ενεργήσουν ανεξάρτητα.

Αυτή ακριβώς η πλευρά κάθε κοινής στρατηγικής, δηλ. η δυνατότητα επιβολής της εφαρμογής της συμφωνίας, είναι σημαντική, διότι ακόμη κι εάν οι δύο υπόδικοι συμφωνήσουν σε μια κοινή στρατηγική, εξακολουθεί να είναι προς το συμφέρον και των δύο παικτών η παραβίαση μυστικά της συμφωνίας.

Η εξέταση ενός τέτοιου, πλουσιότερης δομής, παιγνίου δφ θα μας απασχολήσει αργότερα. Αυτό που πρέπει να τονίσουμε εδώ είναι το θέμα της συνεργασίας, και συγκεκριμένα ότι το παίγνιο δφ είναι στην ουσία παίγνιο συνεργασίας ή μη της εξής γενικής μορφής:

		Παίκτης 2	
		Συνεργασία	Μη συνεργασία
Παίκτης 1	Συνεργασία	Ε,Ε	Κ,Π
	Μη συνεργασία	Π,Κ	Τ,Τ

Παίγνιο ΔΦ

Το ΔΦ αποτελεί παράδειγμα συμμετρικού παιγνίου: Οι παίκτες έχουν (α) τις ίδιες στρατηγικές, (β) την ίδια απόδοση όταν επιλέγουν την ίδια στρατηγική, και (γ) "αντίθετη" απόδοση όταν παίζουν την αντίθετη στρατηγική. Αφαιρώντας Κ από κάθε απόδοση και διαιρώντας μετά δια του (Ε-Κ), το ΔΦ μπορεί να μετασχηματιστεί στο παίγνιο ΣΜ, το οποίο θ' αποτελεί παίγνιο διλήμματος φυλακισμένων εάν $\pi>1$ και $0<\tau<1$ (Eshel et al, 1998). Αυτό γιατί Π, Ε, Τ και Κ είναι οι αποδόσεις που απορρέουν από το να μπει κάποιος παίκτης στον Πειρασμό να κοροϊδεύσει τον άλλο, να παίξει ανιδιοτελώς και να Επιβραβευθεί, να παίξει ιδιοτελώς και να Τιμωρηθεί, ή να πιαστεί ο ίδιος Κορόιδο, αντίστοιχα, με Π>Ε>Τ>Κ.

Στο παίγνιο π.χ. δφ, οι στρατηγικές συνεργασία και μη συνεργασία αντιστοιχούν στις στρατηγικές μη ομολογία και ομολογία, ενώ Π=-1, Ε=-2, Τ=-5 και Κ=-10, εκ των οποίων έπεται ότι $\pi=9/8$ και $\tau=5/8$.

		Παίκτης 2	
		Συνεργασία	Μη συνεργασία
Παίκτης 1	Συνεργασία	1,1	0,π
	Μη συνεργασία	π,0	τ,τ

ΠαίγνιοΣΜ

Βλέπουμε ότι στη συγκεκριμένη μορφή δφ του παιγνίου ΔΦ και σε όλα γενικότερα τα παίγνια διλήμματος φυλακισμένων, η στρατηγική της μη συνεργασίας αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική (dominant strategy), δηλαδή την αποδοτικότερη στρατηγική ανεξαρτήτως των επιλογών του αντιπάλου. Εφόσον, τώρα, ο κάθε παίκτης θεωρεί τον αντίπαλο του ορθολογικό και άρα ότι δεν θα επιλέξει μια κυριαρχούμενη στρατηγική (έτσι ώστε ο άλλος ν' αρχίσει να σκέφτεται σοβαρά να μην παίξει τη δική του κυρίαρχη στρατηγική), η μοναδική λύση στο παίγνιο ΔΦ είναι (μη συνεργασία, μη συνεργασία) με αποδόσεις (Τ,Τ).

Γενικά, η έννοια της κυρίαρχης στρατηγικής μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εξεύρεση λύσεων μέσω της διαδικασίας της επαναλαμβανόμενης απάλειψης κυριαρχούμενων στρατηγικών. Για παράδειγμα, στο παίγνιο Α, βλέπουμε ότι για τον παίκτη 2, η s_2 κυριαρχείται από την $\hat{s}_2$: ανεξάρτητα της επιλογής του παίκτη 1, η υιοθέτηση της $\hat{s}_2$ αντί της s_2 είναι προς το συμφέρον του παίκτη 2 διότι 3>2 και 2>1.

Έτσι, εάν ο παίκτης 1 γνωρίζει ότι ο αντίπαλος του είναι ορθολογικός και δεν θα παίξει μια κυριαρχούμενη στρατηγική, τότε μπορεί να απαλείψει την $\bar{s}_2$ από το παίγνιο και να βασίσει τις επιλογές του στο απομένον παίγνιο, στο παίγνιο Α'.

Παίκτης 2

		s^*_2	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
Παίκτης 1	s^*_1	2,1	2,3	1,2
	$\hat{s}_1$	1,4	1,2	3,1

Παίγνιο Α

Παίκτης 2

		s^*_2	$\hat{s}_2$
Παίκτης 1	s^*_1	2,1	2,3
	$\hat{s}_1$	1,4	1,2

Παίγνιο Α'

Σ' αυτό το παίγνιο, η $\hat{s}_1$, του παίκτη 1 κυριαρχείται από την s^*_1 γιατί ανεξάρτητα των επιλογών του αντιπάλου, 2>1. Εάν ο παίκτης 2 γνωρίζει ότι ο παίκτης 1 είναι ορθολογικός και δεν θα παίξει μια κυριαρχούμενη στρατηγική, τότε ο παίκτης 2 μπορεί να απαλείψει την $\hat{s}_1$, από το παίγνιο Α' και να προσδιορίσει την κίνηση του βάσει του απομένοντας παιγνίου, του Α''.

Παίκτης 2

		s^*_2	$\hat{s}_2$
Παίκτης 1	s^*_1	2,1	2,3

Παίγνιο Α''

Σ' αυτό το παίγνιο, η s^{*}_{2} κυριαρχείται από την $\hat{s}_2$, γιατί 3>1, και εάν ο παίκτης 2 είναι για τον παίκτη 1 ορθολογικός έτσι ώστε να μην παίξει μια κυριαρχούμενη στρατηγική, τότε απαλείφοντας ο παίκτης 1 την s^{*}_{2} , προκύπτει ότι οι παίκτες καταλήγουν στη λύση (s^{*}_{1}, $\hat{s}_2$) με αποδόσεις (2,3).

2.3 Χαλαρή Κυριαρχία

(Moulin, 1979, 1986 - Bernheim, 1984-Pearce, 1984)

Η έννοια της κυρίαρχης στρατηγικής που αναπτύξαμε είναι εκείνη της αυστηρής (strict) κυριαρχίας. Υπάρχει, ωστόσο, και η χαλαρή ή ασθενής (weak) κυριαρχία, η οποία ενδεχομένως να επηρεάζει το αποτέλεσμα της επαναλαμβανόμενης απάλειψης κυριαρχούμενων στρατηγικών. Μια χαλαρά κυρίαρχη στρατηγική αποδίδει στον παίκτη περισσότερο σε μια επιλογή του αντιπάλου και το ίδιο σε μια άλλη.

Στο παίγνιο Β, η s^*_1 αποτελεί χαλαρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη 1, διότι του αποδίδει το ίδιο αν ο 2 παίξει s^*_2 , δηλ. 10, ή $\hat{s}_2$, δηλ. 5, αλλά περισσότερο αν ο 2 παίξει s^*_2 , αφού 4>1. Αν τώρα εφαρμόσουμε την επαναλαμβανόμενη απάλειψη (χαλαρά) κυριαρχούμενων στρατηγικών, το παίγνιο που απομένει είναι το B'_1 με λύση (s^*_1, $\hat{s}_2$) και αποδόσεις (5,1), μιας και η $\hat{s}_2$ αποτελεί τώρα αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη 2:1>0>-2.

Παίκτης 2

		s^*_2	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
Παίκτης1	s^*_1	10,0	5,1	4,-2
	$\hat{s}_1$	10,1	5,0	1,-1

Παίγνιο Β

Παίκτης 2

	s^*_2	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$	
Παίκτης1	10,0	5,1	4,-2	s^*_1

Παίγνιο B'_1

Προσέξατε, όμως, ότι η επαναλαμβανόμενη απάλειψη θα μας έδιδε άλλο συμπέρασμα αν την αρχίζαμε από τη παρατήρηση ότι η $\hat{s}_2$ κυριαρχεί αυστηρά την $\bar{s}_2$, διότι 1>-2 και 0>-1.

Το παίγνιο που θα απέμενε μετά την απάλειψη της $\bar{s}_2$ θα ήταν το B'$_2$, και δεν θα μπορούσαμε πλέον να συνεχίσουμε την διαδικασία απάλειψης: Δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική ούτε για τον 1 ούτε για τον 2. Δηλαδή, το μόνο συμπέρασμα εκ της επαναλαμβανόμενης απάλειψης θα ήταν απλώς ότι ο 2 δεν θα παίξει την $\bar{s}_2$. (Τον τρόπο λύσης του B'$_2$ θα τον δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Παίχτης 2

		s^*_2	$\hat{s}_2$
Παίχτης1	s^*_1	10,0	5,1
	$\hat{s}_1$	10,1	5,0

Παίγνιο B'$_2$

Για να καταλάβουμε το τι σημαίνει αυτό, προσέξατε ότι στην περίπτωση του B'$_1$ ποτέ δεν θα παίζονταν είτε η $\hat{s}_1$ (αφού έχει ήδη απαληφθεί), είτε η s^*_2 είτε και οι δύο, ενώ τίποτα δεν αποκλείει κάτι τέτοιο στην περίπτωση του B'$_2$. Δεν είναι επομένως βέβαιο ότι οι s^*_1, και $\hat{s}_2$ του B'$_1$, αποτελούν τη προσοδοφότερη αντίδραση ή κατά την ορολογία, την καλύτερη ανταπάντηση του 1 προς τον 2 και του 2 προς τον 1. Γι' αυτό, οι s^*_1και $\hat{s}_2$ του B'$_1$, δεν είναι εκλογικεύσιμες, διότι εκλογικεύσιμες
είναι μόνον οι στρατηγικές που αποτελούν καλύτερη ανταπάντηση. Η αβεβαιότητα ως προς το ποιες ακριβώς είναι οι χαλαρά κυρίαρχες στρατηγικές και άρα ως προς την εκλογικευσιμότητά τους, αντανακλά το γεγονός ότι η υπό την CKR επ' άπειρον αλληλοεπιβεβαίωση της ορθολογικότητας των παικτών μπορεί σε κάποιο σημείο να διακοπεί όταν υπάρχει χαλαρά μόνο κυριαρχία.

Το ενδεχόμενο διακοπής επηρεάζει το αποτέλεσμα της επαναλαμβανόμενης απάλειψης ανάλογα με το πώς η διακοπή επηρεάζει τη σειρά με την οποία αρχίζει η απάλειψη. Τέτοιο θέμα όμως δεν υφίσταται στην περίπτωση της αυστηράς κυριαρχίας. Η σειρά με την οποία αρχίζει η επαναλαμβανόμενη απάλειψη δεν επηρεάζει το σύνολο των στρατηγικών που απομένουν απ' αυτήν.

Γι' αυτό, εκλογικεύσιμες είναι μόνο οι στρατηγικές αυτού του συνόλου ως στρατηγικές καλύτερης ανταπάντησης, και οι στρατηγικές που απομένουν από την επαναλαμβανόμενη απάλειψη χαλαρά κυριαρχούμενων στρατηγικών, αποκαλούνται απλώς αποδεκτές (admissible) στρατηγικές: Μια τέτοια στρατηγική δεν είναι αναγκαία εκλογικεύσιμη αλλά μια εκλογικεύσιμη στρατηγική είναι πάντα αποδεκτή.

Για να είμαστε ακριβέστεροι, η εκλογικευσιμότητά στην οποία αναφερόμαστε, είναι εκείνη ως προς τις απλές στρατηγικές, (μιας και θα δούμε ότι υπάρχουν και οι "μεικτές" στρατηγικές). Σ' αυτήν την περίπτωση, το σύνολο των στρατηγικών που απομένουν από την επαναλαμβανόμενη απάλειψη αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών, συμπίπτει πάντα με το σύνολο των εκλογικεύσιμων στρατηγικών, με το σύνολο των στρατηγικών καλύτερης ανταπάντησης. Δυστυχώς, οι εκλογικεύσιμες στρατηγικές μπορεί να είναι πολλές και να μην μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια συγκεκριμένη λύση ενός παιγνίου βάσει μόνον της έννοιας της εκλογίκευσης. Γι' αυτό και πρέπει να τις περιορίσουμε σ' εκείνο το ζεύγος (s_1 , s_2) που αν πράγματι παίζονταν, κανένας παίκτης i, i=l,2, δεν θα είχε κίνητρο απομάκρυνσης από την s_1. Πρόκειται για το ζεύγος "ισορροπίας Nash", που θα δούμε αμέσως τώρα, σημειώνοντας ότι αυτό το "αν πράγματι παίζονταν" μας πάει σε CKR πρώτης μόνον τάξης και άρα σε CAB. Σε CAB για το τι θα κάνει ο κάθε παίκτης, αντίθετα με την επαναλαμβανόμενη απάλειψη (και χαλαρά) κυριαρχούμενων στρατηγικών, που μας "λέει" το τι δεν θα κάνει ο κάθε παίκτης. Έτσι, όμως, η επαναλαμβανόμενη απάλειψη αποκτά μεγάλη αναλυτική αξία ως μέσον ελέγχου των συμπερασμάτων της προσέγγισης Nash. Αξία που θα έχουμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε στα επόμενα κεφάλαια παρά τα ερωτηματικά που υπάρχουν ως προς την αυστηρότητα της έννοιας της χαλαράς κυριαρχίας.

2.4 Ισορροπία Nash (Nash, 1950, 1951)

Η περίπτωση του παιγνίου Β δείχνει ότι η επαναλαμβανόμενη απάλειψη έχει μειονεκτήματα. Αν εξαιρέσουμε την ειδική περίπτωση του διπλού συμπεράσματος στο οποίο μπορεί να καταλήγει υπό χαλαρά κυριαρχία, τα μειονεκτήματα αυτά είναι τα εξής δύο, ανεξάρτητα τύπου κυριαρχίας: Κατ' αρχάς, η επαναλαμβανόμενη απάλειψη προϋποθέτει την ύπαρξη (της γνωστής μας από το εισαγωγικό κεφάλαιο) κοινής γνώσης της ορθολογικότητας των αντιπάλων. Δηλαδή, ότι σε κάθε στάδιο απάλειψης, ο εμπλεκόμενος παίκτης επανεξετάζει και επιβεβαιώνεται εκ νέου για την ορθολογικότητα των άλλων παικτών, έστω και αν πρόκειται για άπειρο αριθμό σταδίων.

Κάτι τέτοιο δεν έχει νόημα, αφού η επαναλαμβανόμενη απάλειψη "γίνεται μόνο στα χαρτιά" για να απομονώσει ο κάθε παίκτης την πλέον συμφέρουσα γι' αυτόν στρατηγική: δεν εμπλέκεται το στοιχείο του χρόνου έτσι ώστε κάποιος παίκτης να έχει λόγο να υποθέσει ότι κάτι μπορεί να άλλαξε στον αντίπαλο οπότε να χρειάζεται η επανεξέταση της ορθολογικότητας του.

Το δεύτερο μειονέκτημα είναι ότι ενδεχομένως ένα παίγνιο να μην έχει κυρίαρχες στρατηγικές και, συνεπώς, λύση.

Στο παίγνιο π.χ. Γ, δεν υπάρχουν τέτοιες στρατηγικές. Όμως, το παίγνιο π.χ Γ, δεν υπάρχουν τέτοιες στρατηγικές. Όμως, το παίγνιο αυτό έχει λύση εάν υποτεθεί ότι ο κάθε παίκτης επιλέγει τη στρατηγική που είναι αποδοτικότερη γι' αυτόν όταν οι άλλοι παίκτες επιλέγουν τις αποδοτικότερες γι' αυτούς στρατηγικές. Η εν λόγω λύση δεν είναι άλλη από την Ισορροπία Nash.

Έτσι, ο παίκτης 1 σκέφτεται ως εξής:

(α1) Εάν ο παίκτης 2 επιλέξει s^*_2, εμένα η απόδοση μου μεγιστοποιείται εάν επιλέξω $\hat{s}_1$, διότι 5>4>2.

(β1) Εάν πάλι επιλεγεί η $\hat{s}_2$, εγώ θα επιλέξω s^*_1, γιατί 5>3>1.

(γ1) Σε περίπτωση που επιλεγεί η $\bar{s}_2$, τότε με συμφέρει η υιοθέτηση της $\bar{s}_1$, αφού 7>6.

Ο παίκτης 2 σκέφτεται ως ακολούθως:

(α2) Εάν ο παίκτης 1 διαλέξει να παίξει s^*_1, εμένα με συμφέρει να παίξω s^*_2, διότι 5>4>2.

(β2) Εάν παιχθεί η $\hat{s}_1$, τότε καλύτερα να παίξω την $\hat{s}_2$, γιατί 4>3>1.

(γ2) Εάν πάλι υιοθετηθεί η $\bar{s}_1$,, με συμφέρει να επιλέξω την $\bar{s}_2$, αφού 7>6>5.

Παίκτης 2

		s^+_2	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
	s^+_2	$2,\underline{\underline{5}}$	$\underline{5},2$	6,4
Παίκτης1	$\hat{s}_1$	$\underline{5},1$	$1,\underline{\underline{4}}$	6,3
	$\bar{s}_1$	4,6	3,5	$\underline{7},\underline{\underline{7}}$

Παίγνιο Γ

Δηλαδή, εξετάζοντας ο παίκτης 1 ποια στρατηγική μεγιστοποιεί την απόδοση του σε κάθε στήλη του παιγνίου και κάνοντας το ίδιο ο παίκτης 2 αλλά για κάθε σειρά του παιγνίου (κανόνας για την εξεύρεση λύσης σε κάθε παίγνιο κανονικής μορφής), απομονώνει ο καθένας την αποδοτικότερη κίνηση του σε κάθε ενδεχόμενη κίνηση του αντιπάλου. Σε κάθε κίνηση του παίκτη j, αντιστοιχεί και μια αποδοτικότερη κίνηση του παίκτη i, που μπορεί και πάλι ν' αποδοθεί με τον όρο καλύτερη ανταπάντηση, αλλά τώρα άσχετα με την ύπαρξη εικασιών για το τι δεν πρόκειται να παιχθεί και επομένως, άσχετα με το θέμα της εκλογικευσιμότητας. Τώρα, η ισορροπία Nash διατείνεται ότι ο παίκτης i μπορεί να προσδιορίσει επακριβώς το ποια απ' αυτές τις ενδεχόμενες κινήσεις θα επιλεγεί από τον j και άρα τη δική του ανταπάντηση: Είναι απλώς εύλογο ο παίκτης i να υποθέσει ότι ο j θα παίξει την αποδοτικότερη από τις αποδοτικότερες στρατηγικές του, που για τον παίκτη 1 είναι η $\bar{s}_1$, διότι 7>5, ενώ για τον παίκτη 2 είναι η $\bar{s}_2$, διότι 7>5>4.

Τέτοιες εικασίες είναι συνεκτικά ευθυγραμμισμένες με την έννοια ότι ο κάθε παίκτης δίνει ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο την ίδια απάντηση στο ερώτημα του τι θα έκανε εάν ήταν στη θέση του αντιπάλου. Η γνώση αυτή όμως δεν αρκεί για την υλοποίηση των κινήσεων που συνεπάγονται οι εν λόγω απαντήσεις.

Τι θα συνέβαινε, π.χ., αν η απόδοση του 2 στο κεντρικό κελί του Γ ήταν 10 αντί 4; Θα πρέπει επομένως οι κινήσεις στις οποίες οδηγούν οι CAB ν' αποτελούν όντως την λύση έτσι ώστε να υπάρχει πέραν των CAB και συντονισμός των παικτών βάσει κοινής γνώσης της λύσης. Γνώση προερχόμενη από το γεγονός ότι κανένας δεν μεγιστοποιεί την απόδοση του όταν μια s_i είναι καλύτερη ανταπάντηση σε μια sj χωρίς αυτή η sj να είναι η καλύτερη ανταπάντηση σ' αυτή την s_i . Μπορούν κατ' αυτό τον τρόπο οι παίκτες να είναι βέβαιοι για το τι θα κάνει ο καθένας ανεξάρτητα αν μπορούν να ξέρουν το τι δεν θα κάνει.

Έτσι, ο παίκτης 1 γνωρίζει ότι ο παίκτης 2 θα παίξει $\bar{s}_2$ και άρα τον συμφέρει ν' αντιδράσει με την $\bar{s}_1$, ενώ ταυτόχρονα ο παίκτης 2 γνωρίζει ότι ο αντίπαλος του θα παίξει την $\bar{s}_1$, με πλέον συμφέρουσα ανταπάντηση την $\bar{s}_2$. Αυτή η ισορροπία Nash συλλαμβάνεται στον πίνακα του παιγνίου Γ από το γεγονός ότι το ζεύγος στρατηγικών στο οποίο είναι υπογραμμισμένες και οι δύο αποδόσεις, δηλ. στο οποίο μεγιστοποιούνται οι αποδόσεις και των δύο παικτών, είναι το ζεύγος ($\bar{s}_{1,}$ $\bar{s}_2$). (Προφανώς, η υπογράμμιση με μια παύλα αφορά τις αποδοτικότερες κινήσεις του παίκτη 1, ενώ η υπογράμμιση με δύο παύλες αφορά τον παίκτη 2.)

Για την καλύτερη κατανόηση της ισορροπίας Nash, έστω ότι οι αποδόσεις ενός παιγνίου F προέρχονται από τις συναρτήσεις αποδόσεων

$u_i(s)=25s_i- 4s_1^2 + 15s_1s_2$ και $u_2(s)=100s_2-50s_1-s_2^2- s_1s_2$, όπου 1 και 2 είναι βέβαια οι δύο παίκτες ενώ s_i =25 ή 50 είναι οι δύο στρατηγικές του παίκτη i, i=l,2. Το παίγνιο κανονικής μορφής F που ορίζουν αυτά τα δεδομένα έχει την ισορροπία Nash (s_1=50, s_2=25). Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε την έννοια της καλύτερης ανταπάντησης.

Παίκτης 1 Παίκτης 2

	$s_{2=25}$	$s_{2=50}$
$s_{1=25}$	7500, 0	16875, 0
$s_{2=50}$	10000,-1875	28750,-2500

Παίγνιο F

Οι πρωτοβάθμιες συνθήκες μεγιστοποίησης των u_i(s) είναι

$\partial u_1 / \partial s_1 = 25-8s_1+15s_2 = 0$ και $\partial u_2 / \partial s_2 = 100-2s_2-s_1 = 0$,

από τις οποίες προκύπτουν δι' επίλυσης της $\partial u_i / \partial s_i$ ως προς sj, οι εξής συναρτήσεις καλύτερης ανταπάντησης ή αντίδρασης (best response functions ή reaction functions)

$s_1=(25+15s_2)/8$ και $s_2=(100-s_1)/2$

αντιστοίχως. Αποκαλούνται έτσι γιατί δίνουν τη μεγαλύτερη στρατηγική επιλογή του παίκτη i στην κάθε επιλογή si εκ μέρους του j, j=l ,2, i≠j. Αν λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων που σχηματίζουν αυτές οι συναρτήσεις, θα βρούμε τη καλύτερη ανταπάντηση στη καλύτερη ανταπάντηση που είναι το ζεύγος (s_1 =50, s_2 =25) με αποδόσεις (10000, -1875). Αυτή ακριβώς είναι η έννοια της ισορροπίας Nash. [Ο όρος "συνάρτηση" χρησιμοποιείται σπάνια, γιατί προϋποθέτει συνεχείς μεταβλητές, και σπάνια η s μπορεί ν' αποτελεί μια τέτοια μεταβλητή. Γι' αυτό κι έχει επικρατήσει ο όρος "αντιστοιχία" (correspondence).]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΚΑΙ ΜΕΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

3.1 Προβλήματα με την Ισορροπία Nash

Υπάρχουν παίγνια που έχουν πολλαπλές ισορροπίες Nash και άλλα που δεν έχουν καθόλου. Ένα είδος τέτοιων παιγνίων είναι εκείνα στα οποία ο κάθε παίκτης θα ήθελε να γνωρίζει την κίνηση του αντιπάλου του εκ των προτέρων αλλά δεν μπορεί. Θεωρήσατε π.χ. το παίγνιο της σύγκρουσης των φύλων, ΣΦ, (battle of sexes, Luce and Raiffa, 1957), το οποίο παίζεται μεταξύ ενός ζευγαριού, της Μαρίας, που θα προτιμούσε για ψυχαγωγία να πάει στον Κινηματογράφο, και του Γιώργου, που θα ήθελε να πάει Περίπατο.

		Γιώργος: Κινηματογράφος	Γιώργος: Περίπατος
Μαρία	Κινηματογράφος	4,2	0,0
	Περίπατος	0,0	2,4

Παίγνιο ΣΦ

Ο πίνακας του παιγνίου δείχνει ότι οποιαδήποτε μονομερής παρέκκλιση από τα ζεύγη (Κινηματογράφος, Κινηματογράφος) και (Περίπατος, Περίπατος) είναι ζημιογόνα, γιατί, αν μη τι άλλο, καλύτερα η Μαρία και ο Γιώργος να είναι μαζί παρά να πάει η πρώτη στον κινηματογράφο και ο δεύτερος περίπατο.

Είναι εμφανές ότι και τα δύο ζεύγη στρατηγικών που αναφέραμε αποτελούν ισορροπίες Nash, που, όμως, μπορούν να προκύψουν μονάχα εάν ο ένας τουλάχιστον παίκτης γνωρίζει (ή μπορεί να μαντέψει) τι θα παίξει ο άλλος.

Εφόσον και οι δύο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα, μπορεί π.χ. ο Γιώργος να επιλέξει τον Κινηματογράφο για να μη δυσαρεστήσει τη Μαρία, και η Μαρία να διαλέξει τον Περίπατο για να ευχαριστήσει το Γιώργο, με αποτέλεσμα να μην έχουμε ισορροπία.

Αυτή η συμπεριφορά του Γιώργου ή της Μαρίας θα οδηγούσε σε ισορροπία Nash αν ο Γιώργος (η Μαρία) μάντευε ορθά ότι η Μαρία (ο Γιώργος) θα επιλέξει να πάει Κινηματογράφο (Περίπατο).

Θεωρήσατε στη συνέχεια το παίγνιο του ταιριάσματος των νομισμάτων, ΤΝ (matching pennies) (παράδειγμα παιγνίου μηδενικού αθροίσματος ή αυστηρά ανταγωνιστικού παιγνίου, βλέπε πρόβλημα 3.8.19, von Neumann and Morgenstern, 1944). Ο κάθε παίκτης πρέπει να διαλέξει αν θα δείξει το νόμισμα του στον άλλο (ταυτόχρονα μ' εκείνον) με Κεφάλι ή Γράμματα. Αν και οι δύο δείξουν το νόμισμα τους με Κεφάλι ή Γράμματα με αποτέλεσμα το ταίριασμα των νομισμάτων, ο παίκτης 2 κερδίζει το νόμισμα του παίκτη 1 · αν τα νομίσματα δεν ταιριάζουν, ο παίκτης 1 κερδίζει το νόμισμα του παίκτη 2. Εύκολα δεικνύεται ότι το παίγνιο ΤΝ στερείται ισορροπίας Nash:

Εάν τα νομίσματα ταιριάζουν, ο παίκτης 1 θα ήθελε να αλλάξει στρατηγική, ενώ εάν τα νομίσματα δεν ταιριάζουν, τότε θα ήταν ο παίκτης 2 που θα ήθελε να αλλάξει στρατηγική.

	2: Κεφάλι	2: Γράμματα
Κεφάλι	-1,1	1,-1
Γράμματα	1,-1	-1,1

Παίγνιο ΤΝ

3.2 Ισορροπία Nash Μεικτών Στρατηγικών (Nash, 1950, 1951)

Όσον αφορά τα στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης, τα παραπάνω δυο μειονεκτήματα της ισορροπίας Nash μπορούν να επιλυθούν δια της εισαγωγής μεικτών στρατηγικών (mixed strategies). Κοιτάζοντας ένας παίκτης τις διαθέσιμες στρατηγικές του αντιπάλου, δεν λέει ότι ο αντίπαλος μπορεί να παίξει εκείνη ή την άλλη στρατηγική, αλλά ότι ο αντίπαλος μπορεί να παίξει εκείνη τη στρατηγική με πιθανότητα h και την άλλη στρατηγική με πιθανότητα 1-h.

Γενικά, η μεικτή στρατηγική δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια κατανομή πιθανοτήτων:

$h_i=(h_{i1},\ldots,h_{iK}),\quad \Sigma_k h_{ik}= 1,\quad k= 1,\ldots,K$

όσον αφορά τις K διαθέσιμες απλές ή γνήσιες στρατηγικές (pure strategies) του παίκτη i.

Μπορεί να δειχθεί ότι η επαναδιατύπωση ενός παιγνίου σε όρους μεικτών στρατηγικών έχει πάντα μια ισορροπία Nash ως εξής:

Η ύπαρξη πολλών ισορροπιών Nash απλών στρατηγικών ή η απουσία τέτοιων ισορροπιών συνεπάγεται για τους παίκτες αδιαφορία ως προς το ποια στρατηγική να προτιμήσουν και άρα αβεβαιότητα για το τι θα παίξει ο αντίπαλος, μιας και πρέπει κάτι να παίξει. Η μεικτή στρατηγική του παίκτη i δείχνει τον βαθμό αβεβαιότητας που έχει ο αντίπαλος του, παίκτης j, ως προς το ποια απλή στρατηγική θα παιχθεί τελικά από τον i. Δηλαδή, η προσδοκώμενη απόδοση του j από την κάθε του απλή στρατηγική (α) εξαρτάται από τα h_i τα οποία επιλέγονται τυχαία από τον i και ανεξάρτητα από τον j, (β) πρέπει να είναι ίση για κάθε απλή στρατηγική αντανακλώντας το γεγονός της προτιμησιακής αδιαφορίας. Οι πιθανότητες h_i^* που βρίσκει έτσι ο j και τα h_j^* στα οποία καταλήγει ο i, θα αποτελούν τις μεικτές στρατηγικές σε ισορροπία Nash αν βέβαια οι παίκτες έχουν συνεκτικά ευθυγραμμισμένες εικασίες (CAB).

Ας εξετάσουμε για παράδειγμα το παίγνιο TN. Εφόσον δεν έχει καμία ισορροπία Nash, οι παίκτες δεν έχουν λόγο να προτιμούν τη μία στρατηγική από την άλλη. Θα υιοθετήσουν κάποια απ' αυτές τυχαία, γιατί βέβαια κάτι πρέπει, να παίξουν. Εξυπακούεται ότι ο τυχαίος τρόπος επιλογής θα πρέπει να αντανακλά την αδιαφορία τους ως προς τις διαθέσιμες στρατηγικές, δηλ. θα πρέπει

E_i (Κεφάλι)=E_i (Γράμματα)

όπου το E_i υποδηλώνει την προσδοκώμενη απόδοση του παίκτη i, i=l,2. Αν h_i είναι η πιθανότητα με την οποία παίζει Κεφάλι ο παίκτης j, j=l,2, $j \neq i$, το E_i θα είναι συνάρτηση του hj, γιατί η απόδοση από μια επιλογή του i εξαρτάται από την πιθανότητα να έχει κάνει την ίδια επιλογή ο j.

Έτσι αν ο 1 επιλέξει Κεφάλι, η πιθανότητα να χάσει το νόμισμα του είναι h_2, έτσι ώστε

E_i (Κεφάλι)= $h_2(-1)+(1 - h_2)(1)=1 -2 h_2$

Με την ίδια πιθανότητα μπορεί να κερδίσει του άλλου το νόμισμα αν επιλέξει Γράμματα, και άρα

E_i (Γράμματα)= $h_2 (1)+(l- h_2)(-1)=2 h_2-1$

Από την εξίσωση τώρα $l- h_2=2h_2-l$ προκύπτει ότι $h_2^* = l/2$. Για τον παίκτη 2 έχουμε

E_2(Κεφάλι)= $h_1 (1)+(1 - h_1)(-1)=2 h_1,-l$ και E_2(Γράμματα)= $h_1 (-1)+(1 - h_1)(1)= 1 -2 h_1$

των οποίων η εξίσωση δίνει ότι $h_1^* =1/2$.

Ο αστερίσκος υποδηλώνει βέβαια πιθανότητα ισορροπίας, της Ισορροπίας Nash Μεικτών Στρατηγικών (NEMS, Nash Equilibrium in Mixed Strategies): $h_i^* =(1/2, 1/2)$. Αυτή η ισορροπία δεν μας λέει τίποτα περισσότερο και τίποτα λιγότερο από το ότι η πιθανότητα εμφάνισης καθ' ενός εκ των τεσσάρων κελιών του πίνακα του παιγνίου TN ως το αποτέλεσμα επιλογής απλών στρατηγικών, είναι 1/4. Η ισορροπία h_i^* δεν μας λέει ότι π.χ. ο 1 θα επιλέξει Κεφάλι γιατί αναμένει ότι ο 2 θα επιλέξει Γράμματα, δηλ. γιατί h_2<l/2. Απλώς, τέτοιες ανισότητες δεν αποτελούν κατάσταση ισορροπίας:

Η καλύτερη (αποδοτικότερη) ανταπάντηση του i στην h_j^* =(1/2, 1/2) είναι h_i^* =(1/2,1/2). Ο i θα παίξει ό,τι είναι να παίξει γνωρίζοντας ότι οι πιθανότητες να κερδίσει ή να χάσει είναι "50-50".

Για την περαιτέρω αποσαφήνιση της έννοιας της NEMS, ας εξετάσουμε επίσης το παίγνιο ΣΦ, το οποίο διαθέτει δύο ισορροπίες Nash. Ο κάθε παίκτης μπορεί να προτιμά την μία εξ αυτών αλλά αυτό στρατηγικά δεν έχει καμία σημασία. Μπορεί η Μαρία να προτιμά τον Κινηματογράφο και ο Γιώργος τον Περίπατο αλλά ως τρόπους ψυχαγωγίας, όχι ως στρατηγικές προοπτικές, γιατί και οι δύο επιλογές αποτελούν στρατηγικές ισορροπίας Nash.

Ο κάθε παίκτης είναι στρατηγικά αδιάφορος ως προς τις δύο επιλογές, αλλά εφόσον πρέπει να επιλέξει μια εξ αυτών, θα το πράξει τυχαία, έτσι βέβαια ώστε να αντανακλά αυτή του την αδιαφορία. Δηλαδή, θα πρέπει

E_Z(Κινηματογράφος)=E_Z(Περίπατος)

όπου τώρα το z υποδηλώνει είτε την Μαρία (Μ) είτε τον Γιώργο (Γ). Αν h_1 και h_2 είναι οι πιθανότητες της Μαρίας και του Γιώργου ως προς την επιλογή του Κινηματογράφου, η εν λόγω ισότητα θα είναι για την Μαρία

$h_2 (4)+(1 - h_2)(0)= h_2(0)+(1 - h_2)2 \quad => \quad h_2^*=1/3$,

και για τον Γιώργο

$h_1 (2)+(l- h_1)(0)= h_1(0)+(l- h_1)4 \quad => \quad h_1^* =2/3$

Έτσι, η NEMS είναι h*(Μ)=(h_1^*=2/3, 1- h_1^*=1/3) και h* (Γ)=(h_2^*=1/3, l- h_2^*=2/3).

Αυτό που μας λέει είναι ότι η πιθανότητα να συμπέσουν η Μαρία και ο Γιώργος στην επιλογή Κινηματογράφος είναι 2/9, στην επιλογή Περίπατος πάλι 2/9 και στο να βγουν έξω χωριστά 5/9. Η NEMS δεν μας λέει ότι (α) είτε η Μαρία τελικά θα διαλέξει να πάει Περίπατο γιατί είναι σίγουρη εάν l- h_2>2/3, ότι το ίδιο θα πράξει και ο Γιώργος, (β) είτε αυτός θα επιλέξει τον Κινηματογράφο γιατί αναμένεται το ίδιο να κάνει και η Μαρία εάν h_1>2/3.

Δεν μας λέει κάτι τέτοιο, γιατί, απλώς, ανισότητες σαν αυτές δεν αποτελούν κατάσταση ισορροπίας.

Η NEMS προσδιορίζει τη πιθανότητα εμφάνισης ενός εκ των κελιών του πίνακα ενός παιγνίου ως το αποτέλεσμα επιλογής απλών στρατηγικών για τις οποίες δεν υπάρχει ιδιαίτερη προτίμηση εκ μέρους των παικτών (σε αντίθεση με την ισορροπία Nash που προκύπτει ως το αποτέλεσμα τέτοιας ακριβώς προτίμησης).

Υπάρχουν βέβαια παίγνια των οποίων ο πίνακας αποδόσεων δεν είναι των ιδίων διαστάσεων, και κατά τον υπολογισμό μιας NEMS,

δεν μπορούμε να λάβουμε τον ίδιο αριθμό αγνώστων και εξισώσεων. Θεωρήσατε ως προς τούτο το παίγνιο ΝΕ, το οποίο δεν διαθέτει ισορροπία Nash σε όρους απλών στρατηγικών. Η κατανομή πιθανοτήτων ως προς (s_1^*, s_1) είναι η (h_1, 1- h_1) ενώ εκείνη ως προς (s_2^*, $\hat{s}_2$ $\bar{s}_2$) είναι η ($h^1{}_2$,$h^2{}_2$,$h^3{}_2$ = l- $h^1{}_2$ - $h^2{}_2$). Η ισότητα της προσδοκώμενης απόδοσης από την s_1^*, E_1 , (s_1^*), μ' εκείνη από την $\hat{s}_1$, E_1 ($\hat{s}_1$), είναι η

$2\, h^1{}_2 + 4h^2{}_{2+9}h^3{}_2 = 7\, h^1{}_{2+5}h^2{}_{2+2}h^3{}_2 \Rightarrow 5\, h^1{}_2 + h^2{}_2 = 7\, h^3{}_2 \Rightarrow 12\, h^1{}_2 + 8\, h^2{}_2 = 7$

Για τον παίκτη 2, οι ισότητες E_2 (s_2^*)= E_2 ($\hat{s}_2$), E_2 (s_2^*),= E_2 ($\bar{s}_2$) και E_2 ($\hat{s}_2$)= E_2 ($\bar{s}_2$) είναι οι

$9h_1+4(l- h_1)=7\, h_1+5(l- h_1) \Rightarrow h_1=l/3$,

$9h_1+4(l- h_1)=2\, h_1+6(l- h_1) \Rightarrow h_1=2/9$,

$9h_1+5(l- h_1)=2\, h_1+6(l- h_1) \Rightarrow h_1=l/6$, αντιστοίχως.

	s^*_2	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
s^*_1	2,9	4,7	<u>9</u>,2
$\hat{s}_1$	<u>7</u>,4	<u>5</u>,5	2,<u>6</u>

Παίγνιο ΝΕ

Εφόσον δίνουν διαφορετικά h_1, δεν υπάρχει μεικτή στρατηγική ι-σορροπίας στην οποία όλες οι απλές στρατηγικές να παίζονται με θετική πιθανότητα. Θα πρέπει να αναζητήσουμε την ή τις NEMS θέτοντας: (α) h2 = 0 στην $5 h^1_2 + h^2_2 = 7 h^3_2$, αν δεχθούμε ότι h_1=l/3, λαμβάνοντας

$5 h^1_2 + h^2_2 = 0 \Rightarrow 5h\, h^1_2 + l - h^1_2 = 0 \Rightarrow l + 4 h^1_2 = 0$

(β) $h^2_2 = 0$ στην $12 h^1_2 + 8 h^2_2 = 7$, αν δεχθούμε ότι h_1=2/9, λαμβάνοντας

$12 h^1_2 = 7 \Rightarrow h^1_2 = 7/12$, άρα και $h^3_2 = 1 - h^1_2 = 5/12$

(γ) $h^1_2 = 0$ στην $12 h^1_2 + 8 h^2_2 = 7$, αν δεχθούμε ότι h_1=l/6, λαμβάνοντας

$8 h^2_2 = 7 \Rightarrow h^2_2 = 7/8$, άρα και $h^3_2 = l - h^2_2 = 1/8$

Το πρώτο συμπέρασμα ότι $1 + 4h^1_2 = 0$ είναι άτοπο, διότι δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικές πιθανότητες. Το δεύτερο συμπέρασμα ότι h_1=2/9 και h^1_2=7/12, δηλαδή ο συνδυασμός κατανομών [(2/9, 7/9), (7/12, 0, 5/12)] ως προς $[(h_1, 1-h_1), (h^1_2, h^2_2, h^3_2)]$, θα μπορούσε να αποτελεί NEMS αν η υπό την κατανομή (2/9, 7/9) προσδοκώμενη απόδοση του παίκτη 2 από την $\hat{s}_2$ την οποία παίζει με μηδενική πιθανότητα, 7(2/9)+5(7/9) = 49/9 δεν ήταν μεγαλύτερη της προσδοκώμενης απόδοσης 46/9 είτε από την s_2^*, 9(2/9)+4(7/9), είτε από την $\bar{s}_2$, 2(2/9)+6(7/9).

Έτσι, μόνον η [(1/6, 5/6), (0, 7/8, 1/8)] απομένει ως NEMS, μιας και η υπό την κατανομή (1/6, 5/6) προσδοκώμενη απόδοση του 2 από την s_2^*, που παίζει με μηδενική πιθανότητα

9(1/6)+4(5/6) = 29/6

είναι μικρότερη της προσδοκώμενης απόδοσης 32/6 είτε από την $\hat{s}_2$, 7(1/6)+5(5/6), είτε από την $\bar{s}_2$, 2(1/6)+6(5/6).

Η ουσία της συζήτησης μέχρι τώρα είναι ότι οι παίκτες (α) προσδιορίζουν τις υπό την NEMS πιθανότητες και άρα τις πιθανότητες σύμπτωσης σ' ένα από τα κελιά του πίνακα απόδοσης ενός παιγνίου, (β) αναγνωρίζοντας ότι η απλή στρατηγική που θα παιχθεί στη πράξη θα είναι το αποτέλεσμα τυχαίας και ανεξάρτητης επιλογής εκ μέρους των παικτών, στρίβοντας π.χ. ο καθένας το δικό του νόμισμα ή ρίχνοντας τα δικά του ζάρια ή χρησιμοποιώντας κάποιον άλλο πιθανογεννήτορα μηχανισμό, (γ) χωρίς ταυτόχρονα οι υπό την NEMS πιθανότητες να είναι το αποτέλεσμα της χρήσης ενός τέτοιου μηχανισμού αλλά απόρροια της προτιμησιακής αδιαφορίας ως προς τις απλές στρατηγικές: Η εν λόγω αδιαφορία μπορεί μεν να δικαιολογεί τη χρήση πιθανογεννήτορα μηχανισμού, αλλά έχει αντίκρυσμα στην πράξη μια τέτοια αντίληψη περί μεικτής στρατηγικής ως και περί NEMS; Το υπόλοιπο κεφάλαιο εξετάζει διάφορες άλλες έννοιες ισορροπίας σε σχέση μ' αυτό το ερώτημα.

3.3 Εκλογικεύσιμες Μεικτές Στρατηγικές

(Bernheim, 1984-Pearce, 1984)

Μια ερμηνεία της κατανομής πιθανοτήτων μιας μεικτής στρατηγικής είναι ότι δίνει τις πιθανότητες με τις οποίες εικάζεται ότι ο αντίπαλος παίζει όχι τις όποιες απλές του στρατηγικές γενικά, αλλά τις εκ της επαναλαμβανόμενης απάλειψης αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών εκλογικεύσιμες απλές του στρατηγικές. Εφόσον μια εκλογικεύσιμη απλή στρατηγική του i αποτελεί καλύτερη ανταπάντηση στον j δεδομένου των εικασιών του i για το ποιες απλές στρατηγικές δεν πρόκειται να παίξει ο j, τότε αν αυτές οι τελευταίες στρατηγικές είναι οι μη εκλογικεύσιμες του j, μια εκλογικεύσιμη απλή στρατηγική του i αποτελεί καλύτερη ανταπάντηση στον j δεδομένης της μεικτής στρατηγικής του i . Έτσι, μια μεικτή στρατηγική του j αποτελεί τις εικασίες του j για τις απλές στρατηγικές καλύτερης ανταπάντησης του i στον j δεδομένης της μεικτής στρατηγικής του i , (των εικασιών του i για τις απλές στρατηγικές καλύτερης ανταπάντησης του j στον i).

Επομένως, μια μεικτή στρατηγική του j θ' αποτελεί η ίδια καλύτερη ανταπάντηση σε μια μεικτή στρατηγική του i , αν κάθε από τις απλές στρατηγικές (του i) στις οποίες αναφέρεται η μεικτή στρατηγική του j,
αποτελεί καλύτερη ανταπάντηση στη μεικτή στρατηγική του i (στις εικασίες του i για τις απλές στρατηγικές καλύτερης ανταπάντησης του j στον i).

Δηλαδή, αντίθετα με την NEMS, που προϋποθέτει, όπως η κάθε ισορροπία Nash, κοινή γνώση της λύσης, αυτό το συμπέρασμα στηρίζεται σε μια ερμηνεία της μεικτής στρατηγικής, που αποτελεί έξοχο παράδειγμα εφαρμογής της CKR. Είναι ό,τι άμεσα συνεπάγεται η εφαρμογή της CKR στην περίπτωση της μεικτής στρατηγικής.

Έτσι, όπως έχουμε θέσει το εν λόγω συμπέρασμα, οι ακριβείς κατανομές των παικτών που αποτελούν καλύτερη ανταπάντηση, μπορούν να βρεθούν δια της επαναλαμβανόμενης απάλειψης κυριαρχούμενων απλών και μεικτών στρατηγικών, όπως στο παράδειγμα των επόμενων παραγράφων. Σημειώσατε ωστόσο ότι το ίδιο συμπέρασμα μπορεί να τεθεί εναλλακτικά ως εξής: Μια μεικτή στρατηγική του j είναι εκλογικεύσιμη εάν οι απλές στρατηγικές στις οποίες αναφέρεται αυτή η μεικτή στρατηγική, είναι οι εκλογικεύσιμες του i. Σε αυτή την περίπτωση, η εξεύρεση των ακριβών κατανομών καλύτερης ανταπάντησης, μπορεί να γίνει δοκιμάζοντας διάφορες κατανομές ως προς στις εκλογικεύσιμες απλές στρατηγικές, (που ήδη έχουμε βρει από την επαναλαμβανόμενη απάλειψη αυστηρά κυριαρχούμενων απλών στρατηγικών), και λαμβάνοντας εκείνες μόνον τις κατανομές που μεγιστοποιούν την προσδοκώμενη απόδοση.

Ας προχωρήσουμε τώρα με τη δυνατότητα επαναλαμβανόμενης απάλειψης κυριαρχούμενων απλών ή μεικτών στρατηγικών από άλλες μεικτές στρατηγικές, που μπορεί να κυριαρχούν είτε αυστηρά είτε χαλαρά. Για να είμαστε ακριβείς, οι πιθανότητες που ορίζουν μια μεικτή στρατηγική, μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να υπάρχει πάντα αυστηρή κυριαρχία. Όμως, η χαλαρή κυριαρχία μας εξυπηρετεί στην πράξη. Θεωρήσατε ως προς τούτο το παίγνιο C (Bernheim, 1984), στο οποίο δεν υπάρχει απλή στρατηγική που να κυριαρχεί άλλες είτε χαλαρά είτε αυστηρά. Όμως, η μεικτή στρατηγική (6/7,1/7) ως προς τις (s_2^{*}, $\bar{s}_2$) ή η μεικτή στρατηγική (4/5,1/5) ως προς τις (s_2^{*}, $\hat{s}_2$) ή η (1/5,4/5) ως προς τις ($\hat{s}_2$, $\bar{s}_2$), όλες κυριαρχούν χαλαρά την s^{+}_2.

Η πρώτη, για παράδειγμα, δίνει (α) (6/7)(7)+(1/7)(0)=6 που είναι μεγαλύτερο της απόδοσης 1 υπό την s^{+}_2 όταν ο παίκτης 1 παίζει s_1^{*} , (β) (6/7)(2)+(1/7)(2)=3>1 όταν ο 1 παίζει $\hat{s}_1$, (γ) (6/7)(0)+(1/7)(7)=1 που ισούται με το 1 της s^{+}_2

όταν παίζει $\bar{s}_1$, και (δ) (6/7)(0)+(1/7)(0)=0>-1 όταν παίζει s^{+}_1.

Η χαλαρά κυριαρχία στην περίπτωση της $\bar{s}_1$, οφείλεται στην ευκολία με την οποία διαπιστώνεται ότι (1/7)(7)=1. Οποιαδήποτε άλλη πιθανότητα μεγαλύτερη του 1/7, π.χ. η 1/2 της μεικτής στρατηγικής (1/2,12) ως προς (s_2^*, $\bar{s}_2$), δίνει αυστηρή κυριαρχία, διατηρώντας ταυτόχρονα την αυστηρή κυριαρχία και στις άλλες περιπτώσεις ως εξής: (1/2)(7)+(1/2)(0)=3,5>1 όταν ο 1 παίζει s_1^*, (1/2)(2)+(1/2)(2)=2>1 όταν παίζει $\hat{s}_1$, και (1/2)(0)+(1/2)(0)=0>-1 όταν παίζει s^+_1. Επομένως, η επαναλαμβανόμενη απάλειψη δια της χρήσης μεικτών στρατηγικών οδηγεί πάντα σε αυστηρή κυριαρχία. Στο παίγνιο C, απαλείφεται έτσι η s^+_2 , και στο απομένον παίγνιο απαλείφεται η s^+_1 , διότι κυριαρχείται αυστηρά από την $\hat{s}_1$, (και χαλαρά από την $\bar{s}_1$).

	s_2^*	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$	s^+_2
s_1^*	0,7	2,5	7,0	0,1
$\hat{s}_1$	5,2	3,3	5,2	0,1
$\bar{s}_1$	7,0	2,5	0,7	0,1
s^+_1	0,0	0,-2	0,0	10,-1

Παίγνιο C

Θα ανέμενε έτσι κάποιος το σύνολο των εκλογικεύσιμων απλών ή μεικτών στρατηγικών, το σύνολο των στρατηγικών καλύτερης ανταπάντησης, να συμπίπτει με το σύνολο των απλών ή μεικτών στρατηγικών που απομένουν από την επαναλαμβανόμενη απάλειψη.

Θα περίμενε δηλαδή κάποιος να υπάρχει γενίκευση του ανάλογου συμπεράσματος που προέκυψε από την περίπτωση της επαναλαμβανόμενης απάλειψης απλών στρατηγικών από άλλες αυστηρά κυρίαρχες απλές στρατηγικές. Και πράγματι έτσι είναι στο παίγνιο C, οι εκλογικεύσιμες στρατηγικές είναι (s_1^*, $\hat{s}_{1,}$ $\bar{s}_1$) για τον παίκτη 1 και ((s_2^*, $\hat{s}_{2,}$ $\bar{s}_2$) για τον παίκτη 2, γιατί όμως οι παίκτες είναι μόνο δύο. Όταν οι παίκτες είναι περισσότεροι των δύο, υπάρχει ενδεχόμενο ορισμένες μόνο από τις εκ της επαναλαμβανόμενης απάλειψης απομένουσες στρατηγικές ν' αποτελούν καλύτερη ανταπάντηση.

Ενδεχομένως μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική να μην αποτελεί και καλύτερη ανταπάντηση εάν δεν υπάρχει συντονισμός των πιθανοτήτων που ορίζουν τις μεικτές στρατηγικές των παικτών. Τέτοιο συντονισμό παράγει η συσχέτιση, οπότε μόνο σ' αυτή την περίπτωση μπορεί να υπάρξει η παραπάνω γενίκευση. Προχωράμε αμέσως με το θέμα της συσχέτισης αυτό καθεαυτό.

3.4. Συσχετισμένη Ισορροπία (Aumann, 1974, 1987)

Έστω ότι οι παίκτες χρησιμοποιούν πράγματι κάποιο πιθανογεννήτορα μηχανισμό. Η από κοινού αντί της ανεξάρτητης επιλογής του εν λόγω μηχανισμού, θα έδινε στους παίκτες την δυνατότητα της από κοινού παρατήρησης του αποτελέσματος της χρήσης του ή κατά την ορολογία, την δυνατότητα συσχέτισης της πληροφόρησης τους και άρα των στρατηγικών τους και των αποδόσεων τους.

Για παράδειγμα, η Μαρία και ο Γιώργος του παιγνίου ΣΦ, θα μπορούσαν να συμφωνήσουν κατόπιν προπαιγνιακής επικοινωνίας (preplay communication) να στρίψουν ένα νόμισμα από κοινού:

(α) έτσι ώστε να συσχετίσουν τη πληροφόρηση (correlated information) που λαμβάνουν από τη χρήση πιθανογεννήτορα μηχανισμού, μαθαίνοντας και οι δύο αν ήλθε Κεφάλι ή Γράμματα, (αντί να γνωρίζει ο καθένας το αποτέλεσμα του στριψίματος μόνο του δικού του νομίσματος),

(β) για να συσχετίσουν τις στρατηγικές τους (correlated strategies) παίζοντας και οι δύο π.χ. Κινηματογράφο αν έλθει Κεφάλι και Περίπατο αν έλθει Γράμματα,

(γ) συσχετίζοντας επομένως και τις αποδόσεις ισορροπίας (correlated equilibrium payoffs), αφού η πιθανότητα να έλθει Κεφάλι ή Γράμματα είναι 1/2 και αυτό αλλάζει τις πιθανότητες ισορροπίας από h_1,=2/3 και h_2=l/3 σε h_1=l/2= h_2:

ΕΖ(Κινηματογράφος)=(1/2)(4)+(1/2)(2)=3=ΕΖ(Περίπατος)

Την ίδια ακριβώς κατάσταση θα είχαμε και στην περίπτωση που το ζευγάρι ζητούσε τη διαμεσολάβηση ενός τρίτου, άσχετου με το παίγνιο ως π.χ. ενός δικηγόρου για να μην βγουν τελικά έξω χωριστά. Απλώς, ο δικηγόρος δεν ενδιαφέρεται ούτε για τον Κινηματογράφο ούτε για τον Περίπατο, (γιατί δεν είναι αυτός που θα βγει έξω), και άρα η πιθανότητα να πει και στους δύο να πάνε σ' ένα απ' αυτά τα δύο είναι η ίδια.

[Παρατήρηση: Αυτό βέβαια αν το κόστος του δικηγόρου βαραίνει το ζευγάρι εξίσου. Αν όχι, αυτός θα εξυπηρετήσει τα συμφέροντα του μέλους που τον πληρώνει, π.χ. της Μαρίας. Πράγμα που ασφαλώς Οα καταλάβει ο Γιώργος και θα επιλέξει το ίδιο κι αυτός. Θα έχουμε δηλ. τελικά h_1=l= h_2,
αλλά προσέξατε ότι πρόκειται για ισορροπία δυναμικού παιγνίου στο οποίο πρώτα κινείται η Μαρία και μετά κινείται ο Γιώργος;

Διαπιστώνουμε έτσι ότι η συσχέτιση αλλάζει δραστικά τις υπό την NEMS πιθανότητες σύμπτωσης σ' ένα από τα κελιά του πίνακα απόδοσης ενός παιγνίου. Οι νέες πιθανότητες ισορροπίας, η νέα μεικτή στρατηγική ισορροπίας (1/2 και 1/2 στο παράδειγμα μας), αποκαλείται Συσχετισμένη Ισορροπία (correlated equilibrium). Η NEMS αποτελεί ασφαλώς την περίπτωση της μηδενικής συσχέτισης της πληροφόρησης.

Όταν, όμως, η συσχέτιση υπάρχει, αυτή δεν είναι απαραίτητο να είναι τέλεια (perfect), να αποκτούν δηλαδή οι παίκτες την ίδια πληροφόρηση από τον κοινό πιθανογεννήτορα μηχανισμό, ειδικά εάν αυτός προκύψει τυχαία, όχι κατόπιν συμφωνίας των παικτών. Μπορεί για παράδειγμα η Μαρία να βρίσκεται στο σπίτι, ο Γιώργος να είναι καθ' οδόν προς αυτό και το παίγνιο να πρέπει να παιχθεί μόλις η Μαρία υποδεχθεί τον Γιώργο στην είσοδο του σπιτιού. Ο πιθανογεννήτορας μηχανισμός συντονισμού του παιγνίου θα μπορούσε σε μια τέτοια περίπτωση να είναι ο καιρός:

Έστω ότι είναι βέβαιο ότι και οι δύο σκέφτονται να επιλέξουν τον Κινηματογράφο μόνον εάν βρέξει. Ο Γιώργος ωστόσο που είναι ήδη στο ύπαιθρο, λαμβάνει την πρόσθετη πληροφόρηση ότι ο καιρός είναι πολύ κρύος για να πάει κάποιος Περίπατο ανεξάρτητα βροχής. Δηλαδή, ο συσχετισμός της πληροφόρησης υπάρχει αλλά είναι ατελής (imperfect correlation). Η Μαρία αναγνωρίζει τον ρόλο του παράγοντα "κρύο" αλλά δεν έχει γνώση γι' αυτόν, γιατί είναι μέσα στο σπίτι.

Γενικά, ο κοινός πιθανογεννήτορας μηχανισμός συντονισμού ενός παιγνίου, μπορεί να είναι ο οποιοσδήποτε, δίνοντας ο καθένας διαφορετική (τέλεια ή ατελή) συσχέτιση της πληροφόρησης και άρα διαφορετική συσχετισμένη ισορροπία. Η ουσία είναι ότι η χρήση του δίνει "κάποια ζωή" στις πιθανότητες που ορίζουν μια μεικτή στρατηγική, προσδίδει κάποια ρεαλιστικότητα ως προς το παίξιμο τέτοιων στρατηγικών στην πράξη.

Τέλος, προσέξατε ότι η επιλογή του κοινού πιθανογεννήτορα μηχανισμού έχει υποτεθεί ότι προκύπτει μέσω άνευ κόστους προπαιγνιακής επικοινωνίας (pre-play communication). Όμως, ο κοινός πιθανογγενήτορας μηχανισμός δεν είναι ανάγκη ν' απορρέει από μια τέτοια επικοινωνία. Μπορεί να είναι τυχαίος, οτιδήποτε δύναται ν' αλλάξει στο παράδειγμα μας τις πιθανότητες (1/3, 2/3) χωρίς καμιά προηγούμενη συνεννόηση.

Αν όμως όντως απορρέει από προπαιγνιακή επικοινωνία, τότε γεννάται ένα νέο, συνοδευτικό του αρχικού, παίγνιο ως προς την επιλογή του κοινού πιθανογεννήτορα μηχανισμού, διότι σίγουρα υπάρχουν αρκετοί τέτοιοι μηχανισμοί. Τι θα συνέβαινε π.χ. αν η Μ κι ο Γ ήξεραν πριν στρίψουν το νόμισμα από κοινού, ότι το νόμισμα μπορεί να είναι κίβδηλο και ότι οι εικασίες τους για την πιθανότητα να έλθει Κεφάλι ή Γράμματα αποτελούν κοινή γνώση αλλά διαφέρουν; Ο καθένας βέβαια θα μπορούσε να υπολογίσει προσδοκώμενες αποδόσεις και να ενεργήσει αναλόγως, αλλά οι υπολογισμοί θα βασίζονταν σε ασυνεπείς εικασίες. Σε πιθανότητες Bayes προερχόμενες από διαφορετική άποψη για την εκ των προτέρω (prior), πριν το στρίψιμο, πιθανότητα να έλθει Κεφάλι ή Γράμματα, γιατί αλλιώς θα ήταν ίδιες.

Έτσι, αυτό για το οποίο υφίσταται κοινή γνώση είναι ότι δεν υπάρχει κοινή γνώση για τον κοινό πιθανογεννήτορα μηχανισμό, για το ποιος ακριβώς είναι αυτός ο μηχανισμός.

Αυτό είναι και το πιο δύσκολο πρόβλημα που μπορεί ν' ανακύψει κατά την προπαιγνιακή επικοινωνία, και επειδή μπορεί να το λύσει ένας διαμεσολαβητής (mediator), η διαμεσολαβούμενη επικοινωνία αποτελεί την γενικότερη μέθοδο προσέγγισης στο θέμα. Έχουμε ήδη αναφερθεί στη διαμεσολάβηση αλλά στην απλούστερη μορφή της, και είδαμε ότι η συσχετισμένη ισορροπία είναι η κατανομή πιθανοτήτων με την οποία επιλέγει Κινηματογράφο και Περίπατο ο διαμεσολαβητής. Το ίδιο ισχύει για την εν λόγω ισορροπία και υπό την γενικότερη προσέγγιση στη διαμεσολαβούμενη επικοινωνία, αλλά υπό την εξής έννοια:

Ο διαμεσολαβητής κάνει σε κάθε παίκτη εμπιστευτική πρόταση να επιλέξει όσον αφορά το παράδειγμα μας Κεφάλι ή Γράμματα αν θέλει μετά να παίξει Κινηματογράφο ή Περίπατο. Ο κάθε παίκτης μπορεί ν' αποδεχθεί ή ν' απορρίψει την πρόταση, και η κάθε πρόταση αντανακλά την πιθανότητα με την οποία θα επέλεγε Κινηματογράφο ή Περίπατο ο διαμεσολαβητής. Όμως, στόχος του διαμεσολαβητή είναι να εισακουστούν οι προτάσεις του, γιατί γι' αυτό άλλωστε επελέγη να διαμεσολαβήσει. Έτσι, η κατανομή πιθανοτήτων του διαμεσολαβητή ως προς (Κινηματογράφο, Περίπατο), που πρέπει αφ' ενός ν' αποτελεί κοινή γνώση, πρέπει αφ' ετέρου να ικανοποιεί, (όχι τόσο τις απόψεις του περί της εκ των προτέρω πιθανότητας να έλθει Κεφάλι ή Γράμματα, όσο) τον περιορισμό η προσδοκώμενη απόδοση του κάθε παίκτη από την υιοθέτηση της προς αυτόν πρότασης να υπερβαίνει την προσδοκώμενη απόδοση από την απόρριψη της όταν οι άλλοι παίκτες υπακούουν στον διαμεσολαβητή.

Τότε, συσχετισμένη ισορροπία θ' αποτελούν είτε οι πιθανότητες που απορρέουν απ' αυτούς τους περιορισμούς, είτε η συνεπαγόμενη εκ τούτων κατανομή πιθανοτήτων (του διαμεσολαβητή, ασφαλώς), ως προς (Κινηματογράφο, Περίπατο).

Θεωρήσατε πιο συγκεκριμένα τις δύο εναλλακτικές προτάσεις (R) που μπορεί να κάνει ο διαμεσολαβητής: R1: "Επέλεξε Κινηματογράφο εάν το νόμισμα δείξει Κεφάλι και Περίπατο εάν έλθει Γράμματα". R2: "Επέλεξε Περίπατο εάν το νόμισμα δείξει Κεφάλι και Κινηματογράφο εάν έλθει Γράμματα". Η πιθανότητα να έχει γίνει:

(α) η R1 και στους δύο παίκτες είναι h(Kiv, Κιν),

(β) η R2 και στους δύο είναι 1ι(Περ, Περ),

(γ1) είτε η R1 στην Μ και η R2 στον Γ και να έχει έλθει Κεφάλι

(γ2) είτε η R2 στην Μ και η R1 στον Γ και να έχει έλθει Γράμματα είναι h(Kiv, Περ), και

(δ1) είτε η R2 στην Μ και η R1 στον Γ και να έχει έλθει Κεφάλι

(δ2) είτε η R1 στην Μ και η R2 στον Γ και να έχει έλθει Γράμματα

είναι h (Περ, Κιν),

με h(Kiv, Κιν)+h(Περ, Περ)+h(Κιν, Περ)+h(Περ, Κιν)=1. Εφόσον η κάθε πρόταση είναι εμπιστευτική, η απόδοση από την αποδοχή της ή την απόρριψη της εξαρτάται από το αν έχει γίνει η ίδια ή όχι πρόταση στον αντίπαλο, υποθέτοντας ότι αυτός κάνει πάντα ό,τι του λέει ο διαμεσολαβητής, και έτσι λαμβάνει την μορφή προσδοκώμενης απόδοσης.

Αν έχει γίνει η πρόταση R1 στην Μ, αυτή θα την αποδεχθεί (α) εάν η προσδοκώμενη απόδοση από την κίνηση "Κινηματογράφος" σε περίπτωση που το νόμισμα δείξει Κεφάλι, υπερβαίνει την προσδοκώμενη απόδοση από την απόρριψη της, από την κίνηση "Περίπατος", δηλαδή εάν

4h(Κιν, Κιν)+0h(Κιν, Περ) > Oh(Κιν, Κιν)+2h(Κιν, Περ) => 2h(Κιν, Κιν)>h(Κιν, Περ)

και (β) εάν η προσδοκώμενη απόδοση από τον "Περίπατο" εάν έλθει Γράμματα υπερβαίνει την προσδοκώμενη απόδοση από τον "Κινηματογράφο", δηλαδή εάν 0h(Περ, Κιν)+2h(Περ, Περ) > 4h(Περ, Κιν)+0h(Περ, Περ) => h(Περ, Περ) > 2h(Περ, Κιν)

Οι ίδιες ανισότητες ισχύουν και αν η προς αποδοχή ή απόρριψη πρόταση στην Μ είναι η R2. Όμως, η πρώτη ισχύει σε περίπτωση που έλθει Γράμματα και η δεύτερη εάν το νόμισμα δείξει Κεφάλι. Οι ανάλογες ανισότητες για τον Γ είναι οι:

2h(Κιν, Κιν)+0h(Περ, Κιν) > Oh(Κiv, Κιν)+4h(Περ, Κιν) => h(Κιν, Κιν) > 2h(Περ, Κιν),
Oh(Κιν, Περ)+4h(Περ, Περ) > 2h(Κιν, Περ)+Oh(Περ, Περ) =>2h(Περ, Περ) > h(Κιν, Περ)
μ' αυτή τη σειρά αν η πρόταση είναι η R1 και με την αντίστροφη σειρά εάν η πρόταση είναι η R2. Περιοριζόμενοι στην περίπτωση της ισότητας, αυτές οι τέσσερις ισότητες πλέον όσον αφορά την Μ και τον Γ, δίνουν επιλυόμενες ως προς τα h,
h(Κιν, Κιν)=h(Περ, Περ)=2/9, h(Κιν, Περ)=4/9 και h(Περ, Κιν)=1/9.

Οι εν λόγω πιθανότητες ορίζουν την συσχετισμένη ισορροπία. Είναι ίδιες μ' εκείνες της εμφάνισης κάθε κελιού του πίνακα αποδόσεων υπό την NEMS αλλά τώρα είναι οι πιθανότητες που πρέπει ο διαμεσολαβητής ν' αφήσει να καταστούν κοινή γνώση για να εισακουστούν οι προτάσεις του.

Εκ του ορισμού των h ανωτέρω, συνάγεται ότι είναι οι πιθανότητες βάσει των οποίων μπορούν οι παίκτες να συμπεράνουν ότι ο διαμεσολαβητής έχει υιοθετήσει εκείνη την κατανομή πιθανοτήτων ως προς (Κινηματογράφο, Περίπατο) αν πιστεύει ότι πιθανότατα το νόμισμα θα δείξει Κεφάλι, και εκείνη την κατανομή αν πιστεύει ότι το πιθανότερο είναι να έλθει Γράμματα, που θα ήταν προς το συμφέρον των παικτών να υπακούσουν στις υποδείξεις του. Αυτές οι κατανομές δεν είναι άλλες από την [(2+4)/9, (2+1)/9] και την [(2+1)/9, (2+4)/9], αντίστοιχα, αλλά μόνο μια απ' αυτές μπορεί, να ορίσει εναλλακτικά (και εμμέσως) την συσχετισμένη ισορροπία,
διότι το τι πιστεύει ο διαμεσολαβητής για το νόμισμα καθίσταται κοινή γνώση μέσω της πρότασης που κάνει. Αν π.χ. γίνει η πρόταση R1 στην Μ, αμέσως θα καταστεί κοινή γνώση ότι η ίδια πρόταση γίνεται στον Γ, και αυτό γιατί το νόμισμα ευνοεί κατά τον διαμεσολαβητή την εμφάνιση του ενδεχομένου "Κεφάλι", (αλλιώς θα είχε κάνει την πρόταση R2).

3.5 Ισορροπία Τρεμάμενης Χειρός (Selten, 1975)

Το παίξιμο μιας μεικτής στρατηγικής προσλαμβάνει επίσης ρεαλιστικότητα όταν ο κάθε παίκτης αναγνωρίζει ότι ο αντίπαλος του είναι πιθανόν να παίξει μια χαλαρά κυριαρχούμενη στρατηγική κατά λάθος λόγω π.χ. τρεμάμενης χειρός. Θεωρήσατε κατ' αρχάς το παίγνιο Δ, το οποίο έχει δύο ισορροπίες Nash, τις (s_1^* , s_2^*) και ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$). Οι $\hat{s}_i$ αποτελούν ωστόσο χαλαρά κυριαρχούμενες στρατηγικές και μπορούν να προκύψουν μόνο κατά λάθος. Αν εj είναι η πιθανότητα του λάθους από τον παίκτη j, τότε η προσδοκώμενη απόδοση του i από την s_i^*,

E_i (s_i*) = (1-εj) (1) + εj (0)= 1- εj

υπερβαίνει την απόδοση

E_i ($\hat{s}_i$) =(1 - εj)(-3)+ εj (0)=-3 (1- εj)

ακόμα και όταν εj =0. Δηλαδή, το ενδεχόμενο να προκύψει ισορροπία Nash σε όρους χαλαρά κυριαρχούμενων στρατηγικών εξαλείφεται μόνο και μόνο δια της εισαγωγής στο παίγνιο της μεικτής στρατηγικής (ε, 1-ε) ακόμη και αν ε=0.

		2	
		s_2^*	$\hat{s}_2$
	s_1^*	1,1	0,-3
1	$\hat{s}_1$	-3,0	0,0

Παίγνιο Δ

Η απομένουσα ισορροπία Nash, η (s_1^*, s_2^*) στο παίγνιο Δ, αναδεικνύεται έτσι ως (Τέλεια) Ισορροπία (Nash) Τρεμάμενης Χειρός (THE, trembling-hand (perfect Nash) equilibrium). Το χαρακτηριστικό μιας τέτοιας ισορροπίας είναι ότι δεν περιλαμβάνει χαλαρά κυριαρχούμενες στρατηγικές.

Αυτό αρκεί για να χαρακτηρίσουμε μια ισορροπία Nash ως ισορροπία τρεμάμενης χειρός όταν όμως οι παίκτες είναι μόνο δύο. Μπορεί να δειχθεί ότι εάν οι παίκτες είναι περισσότεροι των δύο, μια ισορροπία Nash που δεν περιλαμβάνει κυριαρχούμενες στρατηγικές, δεν αποτελεί απαραίτητα ισορροπία τρεμάμενης χειρός εκτός εάν υπάρχει συσχέτιση του τρεμουλιάσματος, όπως π.χ. είδαμε τη συσχέτιση σε σχέση με την έννοια της συσχετισμένης ισορροπίας.

Ένα παίγνιο τριών παικτών σαν το VD (Van Damme, 1991) απαρτίζεται από δύο πίνακες αποδόσεων. Ο κάθε πίνακας αναφέρεται όπως πάντα στους πρώτους δύο παίκτες, αλλά ο πρώτος πίνακας στις αποδοθείς τους και στις αποδόσεις του τρίτου παίκτη όταν ο τελευταίος παίζει s_3^* και ο δεύτερος πίνακας στις αποδόσεις όλων των παικτών όταν ο τρίτος παίζει $\hat{s}_3$. (Έτσι, ενώ ο παίκτης επιλέγει την προσοδοφότερη στρατηγική ανά στήλη και ο 2 ανά σειρά, ο 3 επιλέγει ανά φάκα.) Οι συνδυασμοί (s_1^*, s_2^*, s_3^*) και ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$, $\hat{s}_3$) δεν περιλαμβάνουν κυριαρχούμενες στρατηγικές και μάλιστα οι στρατηγικές s_2^* και s_3^* αποτελούν για τους παίκτες 2 και 3 κυρίαρχες στρατηγικές.

Όμως, μόνον ο πρώτος απ' αυτούς τους συνδυασμούς αποτελεί ισορροπία τρεμάμενης χειρός, διότι ποτέ δεν θα συνέφερε τον παίκτη 1 να παίξει $\hat{s}_1$, εάν υποπτευόταν ότι ο παίκτης 2 ίσως παίξει $\hat{s}_2$.

	2	
	s_2^*	$\hat{s}_2$
s_1^*	1,1,1	1,0,1
$\hat{s}_1$	1,1,1	0,0,1

s_1^*

	2	
	s_3^*	$\hat{s}_2$
	1,1,0	0,0,0
	0,1,0	1,0,0

$\hat{s}_3$

Παίκτης 3

Παίγνιο VD

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια το παίγνιο Ε με στόχο την γενίκευση των όσων αναπτύξαμε μέχρι τώρα. Στο εν λόγω παίγνιο υπάρχουν δυο ισορροπίες Nash, οι (s_1^*, s_2^*) και ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$), και αν εισάγουμε μεικτές στρατηγικές για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, θα το πράξουμε μόνο σε σχέση με τις s_i^* και $\hat{s}_i$, γιατί, συγκρίνοντας με τις s_i^*, $\bar{s}_i$, αποτελούν χαλαρά κυριαρχούμενες στρατηγικές.

	s_2^*	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
s_1^*	5,0	-1,-1	10,-1
$\hat{s}_1$	-1,-1	0,5	-1,-2
$\bar{s}_1$	-1,10	-2,-1	6,6

Παίγνιο Ε

Οι υπό την NEMS πιθανότητες που θα προκύψουν από τις σχέσεις $E_1(s_1^*)=h_2(5)+(l-h_2)(-l)=E_1(\hat{s}_1)=h_2(-l)+(l-h_2)(0)$

και $E_2(s_2^*)=h_1(0)+(l-h_1)(-l)=E_2(\hat{s}_2)=h_1(-l)+(l-h_1)(5)$
είναι $h_2*=l/7 \Rightarrow l-h_2^*=6/7$ και $h_1^*=6/7 \Rightarrow l-h_1^*=l/7$, όπου h_i είναι η πιθανότητα να παιχθεί η s_i^*. Αν ωστόσο υπάρξει τρεμούλιασμα έτσι ώστε να μπορεί να παιχθεί κατά λάθος η $\bar{s}_i$ με πιθανότητα ε_i, τότε η προτιμησιακή αδιαφορία που αντανακλά η NEMS ως προς τις s_i^* και $\hat{s}_i$, θα διαταραχθεί, διότι (α) η προσδοκώμενη απόδοση
$E_1(s_1^*)=(l-\varepsilon_2)h_2^*(5)+(l-\varepsilon_2)(1-h_2^*)(-l)+\varepsilon_2(l0)=$
$= (1-\varepsilon_2)(1/7)(5)+(1-\varepsilon_2)(6/7)(-1)+\varepsilon_2(10) = \frac{71\varepsilon_2-1}{7}$

θα υπερβαίνει την

$E_1(\hat{s}_1)=(l- \varepsilon_2)\, h_2^*(-1)+(l- \varepsilon_2)(1-h_2^*)(0)+ \varepsilon_2(-1)=$

$= (1-\varepsilon_2)(1/7)\,(-1)+(1-\varepsilon_2)(6/7)\,(0)+ \varepsilon_2(-1) =- \frac{1+6\varepsilon_2}{7}$

για κάθε θετικό ε2, γιατί $\frac{71\varepsilon_2-1}{7} > - \frac{1+6\varepsilon_2}{7} \Rightarrow 11\varepsilon_2 >0$,

και επομένως ο παίκτης 1 θα επιλέξει σίγουρα την s_1^*, ενώ (β) ο 2 θα επιλέξει την s_2^*, αφού πάλι

$E_2(s_2^*)=(l- \varepsilon_1)\, h_1^*(0)+(l- \varepsilon_1)(1-h_1^*)(-l)+ \varepsilon_1(l0)=$

$= (1-\varepsilon_1)(6/7)\,(0)+(1-\varepsilon_1)(1/7)\,(-1)+ \varepsilon_1(10) = \frac{71\varepsilon_2-1}{7}$

και

$E_2(\hat{s}_2)=(l- \varepsilon_1)\, h_1^*(-1)+(l- \varepsilon_1)(1-h_1^*)(5)+ \varepsilon_1(-1)=$

$= (1-\varepsilon_1)(6/7)\,(-1)+(1-\varepsilon_1)(1/7)\,(5)+ \varepsilon_1(-1) = - \frac{1+6\varepsilon_2}{7}$

Το τρεμούλιασμα έχει επηρεάσει αποφασιστικά την κατάσταση ισορροπίας αν και αυτό είναι, βέβαια, ανεπιθύμητο: Μια στρατηγική ισορροπίας δεν πρέπει να είναι ευάλωτη σε μικρά λάθη του αντιπάλου.

Για να βρούμε μια τέτοια στρατηγική, προσέξατε ότι η εισαγωγή του ε στην ανάλυση τροποποιεί το αρχικό παίγνιο συνδέοντας με κάποια πιθανότητα όλες ανεξαρτήτως τις απλές στρατηγικές. Η ούτω προκύπτουσα μεικτή στρατηγική μπορεί πλέον να περιλαμβάνει και κυριαρχούμενες στρατηγικές. Για παράδειγμα, η περιγραφή του αρχικού παιγνίου Ε (σε όρους ασφαλώς μεικτών στρατηγικών) περιελάμβανε (εκτός από τους παίκτες και τις αποδόσεις τους) τις μεικτές στρατηγικές (hi, 1-hi) ενώ στο τροποποιημένο (perturbed) παίγνιο έχουμε $[h_i\,(l- \varepsilon_i), (l-h_i)\,(l- \varepsilon_i), \varepsilon_i]$. Για να είμαστε ακριβέστεροι, στο αρχικό παίγνιο είχαμε:

$[h^1{}_i \geq h^2{}_1 \geq h| \geq 0$, Kai $h^3{}_i = (l - h^1{}_{i-} h^2{}_i) = 0]$

ενώ η τροποποίηση του συλλαμβάνεται ως εξής:

$[h^1{}_i \geq h^1{}_i (1 - \varepsilon_{i,}) = n^1{}_{i,} \quad h^2{}_i \geq h^2{}_i \ (1 - \varepsilon_i) = n^2{}_i \quad$ και $\quad h^3{}_i = \varepsilon_i > n^3{}_i = 0]$

όπου πάλι $h^1{}_i + h^2{}_i + h^3{}_i = 1$ αλλά $n^1{}_i + n^2{}_i + n^3{}_i < 1$

Υπάρχουν πολλά τροποποιημένα παίγνια, το καθένα με τη δική του NEMS, ανάλογα με την τιμή του ε_i . Εάν η ακολουθία αυτών των NEMS τείνει προς την NEMS του αρχικού παιγνίου καθώς το ε τείνει προς το μηδέν, τότε η NEMS του αρχικού παιγνίου θ' αποτελεί ισορροπία τρεμάμενης χειρός. Αυτή η μέθοδος εξεύρεσης της οδηγεί κατά την ορολογία, σε τελειοποίηση της ισορροπίας Nash, αφού "βγάζει από τη μέση" ισορροπίες Nash απλών ή μεικτών στρατηγικών που στηρίζονται σε κυριαρχούμενες στρατηγικές. Βέβαια, η ίδια μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί σ' οποιοδήποτε παίγνιο ανεξάρτητα του ζητήματος της κυριαρχίας, και γι' αυτό κάθε παίγνιο διαθέτει και μία ισορροπία τρεμάμενης χειρός. (Θα δούμε στο κεφάλαιο 5 ότι τέτοια ισορροπία διαθέτουν και τα δυναμικά παίγνια, την οποία θα χαρακτηρίζουμε ως "εκτατικής μορφής" σε αντίθεση με την "κανονικής μορφής" που μόλις αναπτύξαμε.

Προσέξατε ότι για να "τείνει το ε_i προς το μηδέν" σημαίνει ότι το ε_i λαμβάνει τιμές που σχηματίζουν κάποια συγκλίνουσα ακολουθία, και οι ακολουθίες αυτές μπορεί να είναι πολλές. Για να έχουμε Τ-ΗΕ, αρκεί μια στρατηγική να μην είναι ευάλωτη σε μια μόνον απ' αυτές τις ακολουθίες, γι' αυτό και μπορεί να υπάρχουν πολλές Τ-ΗΕ, συνδεόμενες με διαφορετικές ακολουθίες. Αν μια στρατηγική δεν είναι ευάλωτη σε όλες τις ακολουθίες, τότε έχουμε αυστηρή (strict) τελειοποίηση της ισορροπίας Nash, και η αυστηρή Τ-ΗΕ δεν μπορεί παρά να είναι μοναδική. Θα δούμε, για παράδειγμα, στο μέρος 6.6, ότι στο παίγνιο ΔΕ υπάρχουν τρεις ισορροπίες Nash, όλες εκλογικεύσιμες ως Τ-ΗΕ, αλλά μόνον μια απ' αυτές είναι αυστηρή Τ-ΗΕ. Αν η Τ-ΗΕ ενός παιγνίου είναι μια, τότε είναι και αυστηρή.

Σημειώσατε τέλος ότι μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια προσέγγιση και εάν συνδέσουμε την πιθανότητα λάθους με το κόστος του λάθους έτσι ώστε να καταβάλλεται προσπάθεια αποφυγής μεγάλων λαθών. Τα ε_i σχηματίζουν ακολουθία της οποίας οι τιμές σμικρύνονται καθώς αυξάνεται το κόστος του λάθους.

Η επακόλουθη ισορροπία θ' αποτελεί Γνήσια Ισορροπία Nash (proper Nash equilibrium, Myerson, 1978). Εξυπακούεται ότι πρόκειται για Τ-ΗΕ, αλλά η σχέση της με την αυστηρή Τ-ΗΕ δεν είναι ξεκάθαρη. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, το ενδεχόμενο του λάθους καθιστά αναπόφευκτη όχι μόνο τη χρήση μιας μεικτής στρατηγικής αλλά και τη κατάληξη σε μια NEMS σαν οδηγό για το παίξιμο ενός παιγνίου στην πράξη. (Την απλή στρατηγική "παίξε s_1^*" μπορούμε να τη δούμε σαν την ειδική περίπτωση της μεικτής στρατηγικής "παίξε s_1^* με πιθανότητα h_i" κατά την οποία $h^*_i =1$).

3.6 Εξελικτικά Ευσταθής Στρατηγική

(Maynard Smith, 1972, 1974, 1982)

Τα διάφορα κοινωνικά στερεότυπα (focal points) μπορούν ν' αποτελέσουν ένα σημαντικότατο μηχανισμό συντονισμού του παιξίματος ενός παιγνίου, μιας και πρόκειται για στρατηγικές ισορροπίας προερχόμενες από τις διάφορες αρχές στις οποίες επικεντρώνεται μια κοινωνία (focal principles).

Η εκμάθηση του "πως, βάσει ποιων (εξωπαιγνιακών) αρχών (φύλο, κοινωνική προέλευση, παιδεία, ιδιοτέλεια, ανιδιοτέλεια, κ.λπ.), σκέπτονται οι άλλοι" σε ανάλογες καταστάσεις σύγκρουσης συμφερόντων, δημιουργεί προσδοκίες ακόμα και στην περίπτωση της μίμησης μιας κοινωνικής συνήθειας (convention), μίμησης του "πως ενεργούν οι άλλοι". Η δε προσαρμογή στα στερεότυπα δημιουργεί συμπεριφορά, όπως π.χ. στην περίπτωση της Μαρίας και του Γιώργου, να γίνεται πάντα ό,τι επιθυμεί ο άνδρας του ζευγαριού, γιατί έτσι συνηθίζεται στην κοινωνία τους ή να γίνεται πάντα ό,τι επιθυμεί η Μαρία που είναι γιατρός, με το σκεπτικό ότι ο Γιώργος είναι ηλεκτρολόγος, και ένας τρόπος επιβράβευσης της παιδείας στην κοινωνία τους πρέπει να είναι κι αυτός.

Η προσαρμογή όμως στα κοινωνικά στερεότυπα, η υιοθέτηση τους από ένα παίκτη δεν εγγυάται την επιτυχή έκβαση της αντιπαλότητας, διότι υπάρχει το ενδεχόμενο ο άλλος παίκτης να μην ακολουθήσει την "πεπατημένη", όπως στη Βιολογία ένα μέλος του υγιούς μέρους ενός πληθυσμού οργανισμών μπορεί να έλθει σ' επαφή μ' ένα μέλος του μεταλλαγμένου μέρους. Το πρότυπο συμπεριφοράς, δηλ. η στρατηγική των υγιών μελών που τα κρατά υγιή, θα αποτελεί εξελικτικά ευσταθή στρατηγική (ESS, evolutionarily stable strategy) εάν το μεταλλαγμένο μέρος δεν μπορεί να επεκταθεί. Έτσι, και στην περίπτωση ενός κοινωνικού στερεότυπου, αυτό θα αποτελεί ESS εάν οι επαφές με τους παραβάτες του στερεότυπου δεν ενθαρρύνουν την εξάπλωση του αριθμού τους. Και δεν θα ενθαρρύνουν την εξάπλωση εάν η απόδοση από την εμμονή στο στερεότυπο σε περίπτωση επαφής με παραβάτη του, είναι μεγαλύτερη από την απόδοση εκ της μίμησης της παράβασης.

Ή, ακολουθώντας την ορολογία της Βιολογίας όπως κάνει και η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων, η μετάλλαξη (mutation) πρέπει ν' αποτελεί ασύμφορη στρατηγική σε περίπτωση επαφής με μεταλλαγμένο μέλος.

Ας δούμε κατ' αρχάς το θέμα τεχνικά δια του παραδείγματος του παιγνίου Γερακιού-Περιστεριού (hawk-dove ή chicken game) ως το συμμετρικό παίγνιο ΓΠ. Οι δύο παίκτες διεκδικούν κάτι αξίας δυο νομισματικών μονάδων και μπορούν να το πράξουν είτε επιθετικά σαν Γεράκι είτε συναινετικά σαν Περιστέρι. Η αμοιβαία επιθετικότητα θα κατέστρεφε αυτό το κάτι ενώ η αμοιβαία συναίνεση θα κατέληγε στην εξ ίσου διανομή του ανάμεσα στους παίκτες.

Αν ο ένας μόνον ήταν επιθετικός, αυτός ο ένας θα καρπώνονταν όλη τη "λεία". Το παίγνιο έχει τις δύο ισορροπίες Nash, (Γεράκι, Περιστέρι), (Περιστέρι, Γεράκι), και την NEMS κατά την οποία ο κάθε παίκτης παίζει Γεράκι με πιθανότητα 1/3. Το ερώτημα μας εδώ είναι: "Αποτελεί η NEMS μια ESS;"

2

		Γεράκι	Περιστέρι
1	Γεράκι	-2,-2	2,0
	Περιστέρι	0,2	1,1

Παίγνιο ΓΠ

Έστω ότι h_i^{*} =1/3 είναι η πιθανότητα με την οποία παίζει Γεράκι ο παίκτης i, i=l,2, σύμφωνα με την NEMS, και έστω ότι ο παίκτης j, j=l,2, i≠j, είναι μεταλλαγμένος παίζοντας Γεράκι με πιθανότητα όχι h_j^{*}=l/3 αλλά hj≠l/3.

Η πιθανότητα ο i να παίξει (α) Γεράκι και ο j Γεράκι είναι $h_i^* h_j$=(l/3)hj με αρνητική απόδοση και για τους δύο, ίση με την αξία της λείας,

(β)Γεράκι και ο j Περιστέρι είναι h_i^* (l-hj)=(l/3)(l-hj) με μηδενική απόδοση για τον j,

(γ) Περιστέρι και ο j Γεράκι είναι (l - h_i^*)=hj=(2/3)hj με μηδενική απόδοση για τον i,

(5) Περιστέρι και ο j Περιστέρι είναι (l - h_i^*)(l-hj)=(2/3)(l-hj) με μοναδιαία απόδοση και για τους δύο.

Επομένως, η προσδοκώμενη απόδοση του i αν παίξει ως υπό την NEMS παρά το γεγονός ότι ο j είναι μεταλλαγμένος, θα είναι

$E_i(h_i^{*}, h_j)=(l/3)\, h_j\, (-2)+(l/3)(l- h_j)(2)+(2/3)\, h_j\, (0)+(2/3)(l- h_j)(l)$

$=> E_i(h_i^{*}, h_j)= \frac{4}{3} - 2h_j$

Αν, όμως, ο i μιμηθεί τη μετάλλαξη όταν έλθει σ' επαφή με τον μεταλλαγμένο j, δηλ. εάν $h_i^* \neq hi^* = 1/3$ αλλά $h_i=h_j$, η προσδοκώμενη απόδοση του θα είναι

$E_i(hi=hj, hj)= h_i^2\, (-2)+hj(1-hj)(2)+(1-hj)hj(0)+(1-hj)^2\, (1)$

$=>Ei(hj,hj)=l-3h_1^2$

Παρατηρώντας ότι οι δείκτες i και j μπορούν να παραληφθούν λόγω της συμμετρικότητας του παιγνίου, καθίσταται εμφανές ότι E(h* ,h)>E(h,h) για κάθε h μεταξύ μηδενός και μονάδος, [εκτός βέβαια όταν h=l/3, οπότε E(h*, h*)=E(h*, h*)].

Δηλαδή, η NEMS αποτελεί και ESS, γιατί βέβαια το παίγνιο είναι συμμετρικό. Αν και ο χαρακτηρισμός της NEMS ως ESS προσδίδει στην NEMS κάποια άλλη ρεαλιστικότερη ίσως διάσταση, η ασάφεια του "υπάρχει πιθανότητα 1/9 να βρεθούμε στο κελί (Γεράκι, Γεράκι), 4/9 στο κελί (Περιστέρι, Περιστέρι) και 4/9 σ' οποιοδήποτε άλλο κελί», παραμένει παρούσα. Αυτή η ασάφεια, ωστόσο, αίρεται εάν προσδώσουμε στους παίκτες διαφορετικούς ρόλους με την έννοια του "αν είσαι παίκτης του τύπον 1, παίξε χ και εάν είσαι του τύπου 2, παίξε ψ".

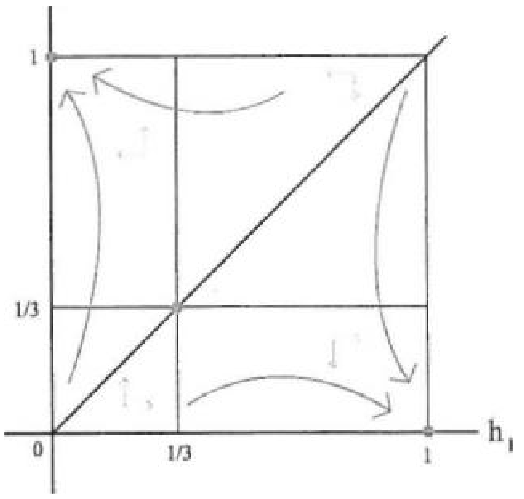
Η διαφοροποίηση συνεπάγεται ασύμμετρη εξέλιξη ανεξάρτητα της συμμετρικότητας του παιγνίου. Η ασυμμετρία των ρόλων καθιστά την NEMS εξελικτικά ασταθή και καθοδηγεί την επακόλουθη εξέλιξη του παιγνίου προς μια συγκεκριμένη ισορροπία Nash απλών στρατηγικών, τις οποίες και αναδεικνύει ως ESS.

Το Διάγραμμα 3.1 απεικονίζει αυτό ακριβώς το γεγονός όσον αφορά το συμμετρικό παίγνιο ΓΠ. Η NEMS, h_1=1/3=h_2, καθίσταται ασταθής, διότι η φορά των τόξων, όπως προκύπτει από τις σχέσεις,

E_i(Γεράκι)= h_j (-2)+(l-h_j)(2)=2-4hj } => E_i.(Γεράκι) $\gtrless$ E_i(Περιστέρι) αν 1/3 $\gtrless$ h_j

E_i .(Περιστέρι)= h_j (0) + (1-h_j) (1)=1-h_j

οδηγεί (α) είτε στην ισορροπία (Γεράκι, Περιστέρι), γιατί ο 2 ξέρει ότι ο 1 θα θέσει h_1=1 αν ο ρόλος του 2 είναι τέτοιος ώστε h_2<1/3, (β) είτε στην ισορροπία (Περιστέρι, Γεράκι), γιατί ο 1 ξέρει ότι ο 2 θα θέσει h_2=l αν ο ρόλος του 1 είναι τέτοιος ώστε h_1<l/3. Δηλαδή, οι ανισότητες αυτές και ως εκ τούτου οι ισορροπίες Nash απλών στρατηγικών προκύπτουν όχι εκ μετάλλαξης αλλά εκ της ασυμμετρίας των ρόλων και μάλιστα, παρά τη συμμετρία του παιγνίου. Αν π.χ. ο παίκτης 1 είναι Γεράκι, φυσικό είναι να έχουμε h_1>l/3, και να "κάνει πίσω" το Περιστέρι, ο παίκτης 2, αναδεικνύοντας ως ESS το ζεύγος ισορροπίας Nash (Γεράκι, Περιστέρι).



Διάγραμμα 3.1

Την σχέση ασυμμετρίας ρόλων και ESS αλλά τώρα στα πλαίσια ενός μη συμμετρικού παιγνίου, θα την δούμε μέσω του παιγνίου ΣΦ για να επανέλθουμε συνάμα και στο θέμα του κοινωνικού στερεότυπου ως ESS. Η διαφοροποίηση ρόλων είναι εγγενής σ' αυτό το παίγνιο. Αν δεν την δούμε ως τέτοια αλλά ως μετάλλαξη σε σχέση με την NEMS, θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η μετάλλαξη είναι πάντα συμφέρουσα, αλλά αυτό που στην ουσία θα συμφέρει πάντα, είναι η υπακοή του κάθε παίκτη στον ρόλο του. Πράγματι, η εμμονή της Μαρίας στις πιθανότητες h_i^* =2/3 και 1 - h_i^* =1/3 της NEMS είναι ασύμφορη εάν ο Γιώργος μεταλλαχθεί υιοθετώντας μια $h_2 \neq 1/3 = h_2$, αφού η προσδοκώμενη απόδοση

$$E_M(h_i^*, h_2) = h_i^* h_2 (4) + (1 - h_i^*)(1 - h_2)(2) = 2h_2 + \frac{2}{3}$$

είναι μικρότερη της απόδοσης

$$E_M(h_1 = h_2, h_2) = h_2^2 (4) + (1 - h_2)^2 (2) = 6h_2^2 - 2h_2 + 2$$

για κάθε h_2 μεταξύ μηδενός και μονάδας, όπου η ισότητα $h_1 = h_2$ υποδηλώνει την μίμηση της μετάλλαξης από την Μαρία.

Παρομοίως, για τον Γιώργο έχουμε

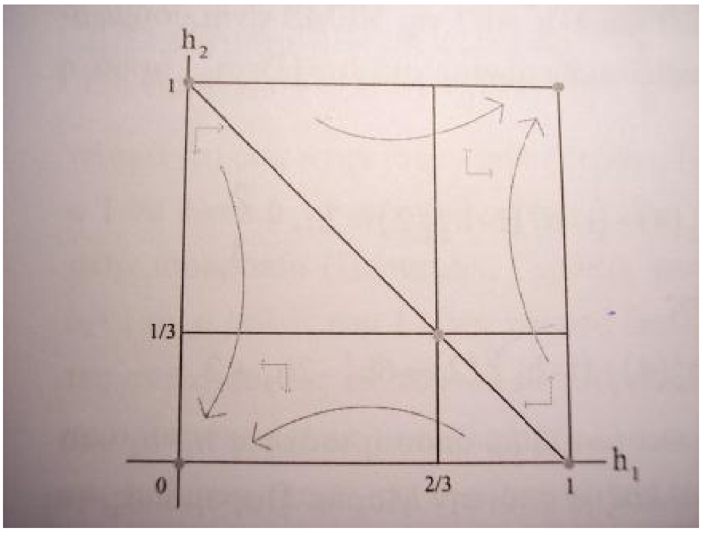
$E_\Gamma(h_2^*, h_1) = h_2^* h_1 (2) + (1 - h_2^*)(1 - h_1)(4) = 2(\underline{4} - h_1)$ 3

που υπολείπεται της

$E_\Gamma(h_2 = h_1, h_1) = h_1^2 (2) + (1 - h_1)^2 (4) = 2(h_1^2 - 4h_1 + 2)$

για όλα τα h_1. Φαίνεται δηλαδή ότι η μετάλλαξη συμφέρει και τους δύο.

Αλλά μετάλλαξη εδώ σημαίνει είτε αμφισβήτηση είτε ενίσχυση του ρόλου ενός παίκτη από τον ίδιο τον παίκτη σε σχέση με την NEMS, αναδεικνύοντας τον ρόλο του αντίπαλου ή του ίδιου, αντίστοιχα, σε αποφασιστικό παράγοντα αναγωγής μιας ισορροπίας Nash απλών στρατηγικών σε ESS. Δηλαδή, αυτό που είδαμε ότι συμφέρει δεν είναι η μετάλλαξη αλλά η αναγνώριση της ασυμμετρίας των ρόλων που κρύβεται πίσω απ' αυτήν. Παραγνωρίζοντας την εν λόγω ασυμμετρία, δεν μπορούμε να δούμε ότι $h_J \neq h_J^*$ δεν μπορεί να σημαίνει την μίμηση h h_i=hj, όπως υποθέσαμε παραπάνω, αλλά ότι (α) εάν $h_2>1/3$ τότε η Μαρία συμφέρει να θέσει $h_1 = 1$, που το ξέρει ο Γιώργος και άρα θα οδηγηθούν στην ισορροπία (Κινηματογράφος, Κινηματογράφος), ενώ (β) εάν $h_1<2/3$, ο Γιώργος συμφέρει να θέσει $h_2=0$ και θα προκύψει η ισορροπία (Περίπατος, Περίπατος). Αυτό ακριβώς απεικονίζει το Διάγραμμα 3.2 δια της φοράς των τόξων.



Διάγραμμα 3.2

Προφανώς,

E_M(Κινηματογράφος)= $h_2(4)+(1 - h_2(0)$ } =>E_M (Κινηματογράφος)> E_M(Περιστέρι)

E_M(Περίπατος)= $h_2(0)+(1- h_2)(2)$ } αν h_2>l/3

και

$E_Г$(Κινηματογράφος)= $h_1(2)+(1-h_1)(0)$ } => $E_Г$(Περίπατος)> $E_Г$(Κινηματογράφος)

$E_Г$(Περίπατος)= h1(0)+(1-h1)(4) } αν h_1 <2/3

Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι σ' ένα μη συμμετρικό παίγνιο, η NEMS δεν αποτελεί αναγκαία ESS είτε γιατί η μετάλλαξη μπορεί να είναι αποδοτικότερη και για τους δύο παίκτες είτε λόγω ασυμμετρίας ρόλων σαν αυτήν που προκαλούν τα κοινωνικά στερεότυπα στο παίγνιο ΣΦ και που τα αναδεικνύει με τη σειρά της σε ESS.

3.7 Στατικά Παίγνια Μη Πλήρους Πληροφόρησης

(Harsanyi, 1967, 1973)

Τα διαγράμματα που μόλις παρουσιάσαμε είναι διαγράμματα φάσης έχοντα νόημα μόνο σ' ένα δυναμικό, σε ένα διαχρονικό περιβάλλον. Όμως, πρόκειται για χρόνο εκμάθησης πριν την προσαρμογή, πριν το παίξιμο ενός στατικού κατά τα άλλα παιγνίου, αν και πρέπει να επισημάνουμε ότι ο κύριος όγκος της εξελικτικής θεωρίας παιγνίων έχει δυναμικό χαρακτήρα. Αντίθετα, ο παράγοντας του χρόνου υπεισέρχεται έμμεσα στο επιχείρημα ότι η μεικτή στρατηγική συλλαμβάνει το στρατηγικό πλεονέκτημα του να είναι κάποιος απρόβλεπτος ως προς το τι τελικά θα επιλέξει να κάνει: Επιχείρημα που υποτίθεται ότι εκλογικεύει καλύτερα το παίξιμο μιας μεικτής στρατηγικής στην πράξη.

Το επιχείρημα αυτό συνεπάγεται ότι πριν το παίξιμο ενός παιγνίου ως π.χ. του Γερακιού-Περιστεριού, ο κάθε παίκτης αυτοαναγορεύεται "τη μια σε Γεράκι και την άλλη σε Περιστέρι". Όμως, κάτι τέτοιο θ' αποτελεί για τον αντίπαλο φθηνές κουβέντες (cheap-talk), κουβέντες χωρίς κόστος γι' αυτόν που τις λέει, και άρα χωρίς αντίκτυπο στον αντίπαλο. Οι προπαιγνιακές φθηνές κουβέντες θα είχαν αντίκτυπο αν ήταν συναινετικές, συμβάλλοντας στο συντονισμό ενός παιγνίου.

Στην προκειμένη, ωστόσο, περίπτωση, στόχος τους είναι να "θολώσουν τα νερά" και για να το επιτύχουν πρέπει να προϋπάρξει το κόστος προετοιμασίας παιξίματος Γερακιού ως ένδειξη στον αντίπαλο ότι ο προετοιμαζόμενος "εννοεί αυτά που λέει". Αλλά τότε μπαίνουμε στον χώρο των δυναμικών παιγνίων, αφού η ανάληψη του εν λόγω κόστους από τον ένα παίκτη αποτελεί την πρώτη κίνηση σ' ένα παίγνιο που θα τελειώσει με το ταυτόχρονο παίξιμο του ΓΠ.

Γι' αυτό ακριβώς αποφύγαμε μέχρι τώρα το επιχείρημα περί του στρατηγικού πλεονεκτήματος του να είναι κάποιος απρόβλεπτος για τον αντίπαλο. Θα ήταν ρεαλιστικότερο στα πλαίσια ενός στατικού παιγνίου να υποτεθεί αβεβαιότητα ως προς τις αποδόσεις μάλλον παρά ως προς τις στρατηγικές των αντιπάλων. Αυτή ακριβώς είναι η ουσία των στατικών παιγνίων μη πλήρους πληροφόρησης. Θα δούμε ότι η ισορροπία σε τέτοια παίγνια τείνει να συμπέσει με την NEMS καθώς τείνει να εξαλειφθεί η αβεβαιότητα ως προς τις αποδόσεις. Πρόκειται για σημαντικότατο συμπέρασμα γιατί συνεπάγεται την εξής ρεαλιστικότατη ερμηνεία της μεικτής στρατηγικής: Κανένας δεν παίζει μεικτές στρατηγικές, αλλά η αβεβαιότητα του κάθε παίκτη για τον τύπο του αντιπάλου, κάνει τον καθένα να φαίνεται στα μάτια του άλλου ότι παίζει τέτοιες στρατηγικές, ενώ στην πραγματικότητα όλοι παίζουν απλές στρατηγικές.

Πριν προχωρήσουμε στο θέμα αυτό, πρέπει πρώτα να δούμε τι ακριβώς σημαίνει αβεβαιότητα ως προς τις αποδόσεις και γιατί την συνδέσαμε με την αβεβαιότητα ως προς τον τύπο του αντιπάλου. Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα παίγνια συντονισμού (coordination ή assurance games) για να θίξουμε ταυτόχρονα και μιαν άλλη πτυχή του σημαντικού ζητήματος του συντονισμού του παιξίματος ενός παιγνίου: Το πρόβλημα συντονισμού σε μια υψηλής αντί χαμηλής απόδοσης ισορροπία Nash.

Στο παίγνιο συντονισμού ΠΣ1, που είναι παρόμοιο μ' εκείνο της σύγκρουσης των φύλων, η Μαρία (Μ) και ο Γιώργος (Γ) πρέπει να παίξουν τώρα την πιο επιθυμητή και για τους δύο ψυχαγωγία, που είναι ο Κιν(ηματογράφος) γιατί 4>2 γι' αμφότερους. Η αποτυχία συντονισμού σ' αυτήν την ισορροπία Nash έχει κόστος και για τους δύο, αφού αν συντονισθούν στην ισορροπία (Περ(ίπατος), Περ), η απόδοση του καθένα θα είναι 2 και όχι 4, ενώ εάν δε συντονισθούν καθόλου, σε καμιά ισορροπία, η απόδοση θα είναι μηδενική. Ο μη συντονισμός έχει γενικά κόστος.

Αντίθετα, στο παίγνιο ΠΣ2, κόστος (20-10=10) έχει μόνον η αποτυχία συντονισμού στην υψηλής απόδοσης ισορροπία Nash, (s_1^*, s_2^*)- Εάν ο παίκτης i επιλέξει $\hat{s}_1$, η απόδοση του θα είναι η ίδια, δηλ. 10, ανεξάρτητα του τι θα παίξει ο αντίπαλος], $i \neq j$, $i,j=1,2$.

	κιν	περ
Κιν	4,4	0,0
Περ	0,0	2,2

Παίγνιο ΠΣ 1

	2	
	s_2^*	$\hat{s}_2$
s_1^*	20,20	5,10
$\hat{s}_1$	10,5	10,10

Παίγνιο ΠΣ 2

Σε οποιαδήποτε περίπτωση, ο συντονισμός στην υψηλής απόδοσης ισορροπία είναι προς όφελος και των δύο, αλλά άλλο τόσο λύση αποτελεί και ο αμοιβαίος συντονισμός στη χαμηλής απόδοσης ισορροπία. Η έννοια της ισορροπίας Nash δεν μπορεί ν' αποκλείσει αυτή τη δεύτερη ισορροπία σαν πιθανή λύση, γιατί ο κάθε παίκτης δε γνωρίζει τι τύπος είναι ο αντίπαλος του: "Τι γίνεται εάν ο αντίπαλος προτιμά για κάποιο λόγο τη χαμηλή από την υψηλή απόδοση;" Δηλαδή, υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τη συνάρτηση απόδοσης τον αντίπαλου λόγω αβεβαιότητας ως προς τον τύπο του αντίπαλου. Αυτό ακριβώς αποτελεί την ουσία των παιγνίων μη πλήρους πληροφόρησης, και γι' αυτό όσον αφορά τα παίγνια συντονισμού λέμε ότι ένας παίκτης θα συνεργασθεί για την επίτευξη της υψηλής απόδοσης λύσης εάν διαβεβαιωθεί ότι ο τύπος του αντίπαλου είναι τέτοιος ώστε να συντονισθεί κι αυτός σ' αυτή τη λύση.

Τα παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης, δηλ. τα παίγνια στα οποία ένας τουλάχιστον παίκτης είναι αβέβαιος για τη συνάρτηση απόδοσης ενός τουλάχιστον άλλου παίκτη, χαρακτηρίζονται γενικά και ως παίγνια Bayes. Η αβεβαιότητα ως προς τη συνάρτηση απόδοσης προέρχεται, σύμφωνα με τη θεωρία, από την αβεβαιότητα για το τι τύπος είναι ο άλλος παίκτης, αβεβαιότητα που συνεπάγεται το σχηματισμό εικασίας γι' αυτόν τον τύπο μέσω του θεωρήματος του Bayes. Αν π.χ. ο παίκτης j μπορεί να είναι δύο τύπων, με αποτέλεσμα το σύνολο τύπων του j να είναι $Tj=\{t_{j1},t_{j2}\}$, τότε η εικασία του i ως προς το αν ο j

είναι του τύπου t_{j1} δεδομένου ότι ο i είναι του τύπου t_{i1}, δίνεται από την υπό συνθήκη πιθανότητα:

$$\pi_i\left(\frac{t_{j1}}{t_{i1}}\right) = \frac{\pi(t_{j1}\, t_{i1})}{\pi(t_{i1})} = \frac{\pi(t_{j1})\,\pi(t_{i1})}{\pi(t_{j1})\,\pi(t_{i1}) + \pi(t_{j1})\,\pi(t_{i2})}$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι τα ενδεχόμενα εμφάνισης των τύπων είναι ανεξάρτητα και ότι το σύνολο τύπων του i περιέχει (κατά τον j) δύο μέλη κι αυτό. Η πιθανότητα π_i δε θα άλλαζε εάν το σύνολο τύπων του j περιείχε περισσότερα των δύο μέλη, αλλά θα μεγάλωνε ο παρονομαστής της εάν μεγάλωνε το σύνολο των τύπων του $_{i.}$

Αβεβαιότητα τώρα ως προς τον τύπο του j σημαίνει για τον i ότι άλλη πρέπει να είναι η στρατηγική του εάν $tj=t_{j1}$, και άλλη εάν $t_j=t_{j2}$. Αν οι κινήσεις του i είναι δύο, τότε αυτό σημαίνει ότι, υπό αβεβαιότητα για τον j αλλά βεβαιότητα για τον i, η συνάρτηση απόδοσης του i δε θα είναι η $u_i=u_i(s_{i1},s_{i2})$, αλλά η $u_i=ui[s_{ic}(t_{jc}),s_{im}(t_{jm})]$, όπου c και m είναι 1 ή 2, με $c\neq m$. Για τον j, η συνάρτηση απόδοσης θα ήταν $u_j=u_j[s_{jc}(t_{jc}),s_{jm}(t_{jm}).t_j)$ αν ο τύπος του i ήταν άγνωστος, αλλά εφόσον υποθέσαμε βεβαιότητα για τον i, η εν λόγω συνάρτηση είναι $u_j=u_j(s_{ji},s_{j2}\text{-}t_j)$. Δηλαδή, όσον αφορά τον j, η συνάρτηση απόδοσης του περιλαμβάνει πάντα το t_j μετά την άνω τελεία, αναγνωρίζοντας ότι εφόσον ο i δε γνωρίζει το tj, η εικασία του i για το tj, θα επηρεάσει την κίνηση του i και, επομένως, την απόδοση του j. (Με το ίδιο σκεπτικό, το t_i θα υπεισέρχονταν στη συνάρτηση uj αν ο τύπος του i ήταν άγνωστος για τον j, παρά το γεγονός ότι ο i θα γνώριζε το δικό του τύπο).

Έτσι, ενώ στην ισορροπία Nash ν παικτών ο κάθε παίκτης λύνει ουσιαστικά το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

Μεγ. u_i $(s^*_1\ldots, s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1\ldots}\ s^*_v)$

στα στατικά παίγνια Bayes έχουμε την Ισορροπία Nash-Bayes ή απλώς t_{j1}, στην οποία ο κάθε παίκτης λύνει πρόβλημα:

$$\mu\varepsilon\gamma\Sigma\ t\text{-}iUi[(s^*_i\ (t_1,)\ldots,\ s^*_{i-1}\ (t_{\ i-1}),\ s_{i,}\ s^*_{i-1}\ (t_{\ i+1}),\ldots,\ s^*_v(t_v))]\ \pi_{\ i}(t\text{-}_1/\ t_1)$$

όπου s* είναι η αποδοτικότερη κίνηση στις αποδοτικότερες κινήσεις των αντιπάλων, ενώ $t_{\ i-1}$ είναι ο οποιοσδήποτε τύπος $j\neq i$.

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια την ισορροπία Bayes όχι μόνο για να λύσουμε παίγνιο συντονισμού αλλά και για να δείξουμε την ισοδυναμία της με την ισορροπία Nash μεικτών στρατηγικών. Θα δούμε ότι η περιγραφή των αποδόσεων ενός παιγνίου ως τυχαία μεταβλητή (στα απλών στρατηγικών στατικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης) ισοδυναμεί με την περιγραφή ως τυχαία μεταβλητή των στρατηγικών του ίδιου παιγνίου (στα μεικτών στρατηγικών στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης).

Έστω ότι οι παίκτες του ΠΣ2 δεν γνωρίζουν ο ένας τον τύπο του άλλου και άρα ότι εάν ο αντίπαλος j του i παίξει ŝj, η απόδοση του j θα είναι η ίδια ανεξάρτητα του τι παίζει ο i. Δεν είναι δηλαδή βέβαιος ο i ότι αυτή η απόδοση θα είναι 10, ότι η επιλογή του ŝj θα είναι χωρίς κόστος για τον j. Ίσως αντί του 10, να είναι κάποιος αριθμός μεγαλύτερος της ελάχιστης απόδοσης του παιγνίου, του 5, συν κάτι άλλο, α για τον 1 και β για τον 2, όπου το α και το β κατανέμονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα στο διάστημα από μηδέν έως ε>0.

Δηλαδή: οποιαδήποτε τιμή του α ή του β έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Αυτή η κατάσταση περιγράφεται στο παίγνιο ΤΠΣ2 και θα δείξουμε ότι η ισορροπία Bayes αυτού του παιγνίου ισοδυναμεί με την NEMS του αρχικού παιγνίου ΠΣ2. Το ερώτημα είναι: "Ανάλογα με την πιθανότητα κάποιος να είναι τύπος που παίζει s*, πόσο μικρά πρέπει να είναι τα α και β, ή το ίδιο, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το κόστος του αντίπαλου εάν δε συντονιστεί στην s* και επιλέξει την $\hat{s}$, για να υπάρξει συντονισμός στη λύση (s^*_1, s^*_2)".

	s_2^*	$\hat{s}_2$
s_1^*	20,20	5,5+β
$\hat{s}_1$	5+α,5	10,10

Παίγνιο ΤΠΣ 2

Εάν q_i είναι η πιθανότητα ο παίκτης j να είναι του τύπου που παίζει s^*_j και $(1-q_j)$ η πιθανότητα να είναι του τύπου που παίζει $\hat{s}_j$ τότε
συμφέρει στον i να παίξει s^*_i εάν
$q_j20+(l-q_j)5>q_j(5+t_i)+(l-q_j)10 \Rightarrow t_i<20-(5/q_i)$, όπου $t_1=a$ και $t_2=\beta$.
Δηλαδή έχουμε:

$$\pi_1 (q_2/\alpha)= \begin{cases} s^*_1 \text{ εάν } \alpha<20-(5/q_2) \\ \hat{s}_1 \text{ εάν } \alpha>20-(5/q_2) \end{cases}$$

και

$$\pi_2 (q_1/\beta)= \begin{cases} s^*_2 \text{ εάν } \beta<20-(5/q_1) \\ \hat{s}_2 \text{ εάν } \beta>20-(5/q_1) \end{cases}$$

(Το σύνολο τύπων είναι t_{i1} ={ο i παίζει s^*_i} και t_{i2}={ο i παίζει $\hat{s}_i$}), αλλά αφού αυτό εξαρτάται από το q_j και το α ή β, τότε μπορούμε να γράψουμε $\pi_i(t_{jc}/t_{im} = \pi_i (q_i/ t_i)$, όπου c,m=l,2 και t_1=a, t_2=β). Κατόπιν, προσέξατε ότι εφόσον υπό την ομοιόμορφη κατανομή,
q_i=πιθαν [ο i παίξει s^*_i]=πιθαν [t_i<20-(5/ q_j)]=[20-(5/ q_j)]/ε, τότε λύνοντας είτε την εξίσωση
$\varepsilon q^2_j -20 q_j +5=0$ είτε την εξίσωση $\varepsilon q^2_i -20 q_i +5=0$ που μπορεί να προκύψει από την επίλυση του συστήματος:
$q_1=[20-(5/ q_2)]/ \varepsilon$ και $q_2=[20-(5/ q_1,)]/ \varepsilon$

αποκτάμε ότι: -> qi=q2 = [l0 - √100- 5ε]/ε

(Η άλλη λύση δεν έχει νόημα ως πιθανότητα δεδομένου ότι 0<q<l.) Έτσι, θέτοντας αυτή τη λύση πίσω στα πι και π2, λαμβάνουμε ότι:

$\pi_1 (t_1)=$ { s^*_1 εάν t_i< 20-[5ε/ (10- √100- 5ε)]
$\hat{s}_1$ εάν t_i > 20-[5ε/ (10- √100- 5ε)]

Δηλαδή, και οι δύο παίκτες παίζουν απλές στρατηγικές ανάλογα της τιμής του t_i, (του α ή του β). Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τον κανόνα Ι' Hospital για να βρούμε το όριο του q_i [l0 - √100- 5ε]/ε καθώς το ε, δηλ. καθώς η αβεβαιότητα του i ως προς την απόδοση της $\hat{s}_j$ στον j, τείνει στο μηδέν, διαπιστώνουμε ότι:
qi=0,25, όπως ακριβώς και στην περίπτωση που θα παίζονταν μεικτές στρατηγικές στο παίγνιο ΠΣ2. Άρα εφόσον αναμένεται και από τους δύο παίκτες ότι γενικά qi<0,5 το καλύτερο που έχει να πράξει έκαστος είναι να συντονισθεί στη χαμηλής απόδοσης λύση: Η συνεργασία για την επίτευξη της πιο προσοδοφόρου λύσης είναι ανέφικτη, αλλά υπάρχει συνεργασία για την εξασφάλιση της άλλης λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°

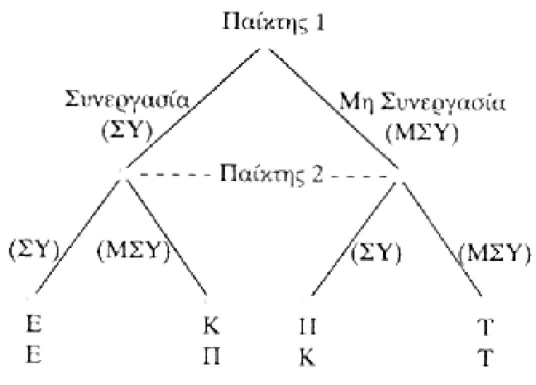
ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΚΑΙ ΤΕΛΕΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

4. 1 Περιγραφή Δυναμικού Παιγνίου (Kuhn, 1953)

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, πλήρης (complete) είναι η πληροφόρηση όταν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν όλες τις αποδόσεις ενός παιγνίου. Αυτή η περιγραφή της πληροφόρησης σε πλήρη και μη πλήρη αρκεί όσον αφορά τα στατικά παίγνια. Όμως, στα δυναμικά παίγνια ή παίγνια ακολουθίας (sequential games), όπου πρώτα κινείται ο ένας παίκτης, ακολούθως κινείται ο άλλος παίκτης, κ.ο.κ., απαιτείται ο περαιτέρω χαρακτηρισμός της πληροφόρησης σε τέλεια και ατελή. Τέλεια (perfect) είναι η πληροφόρηση όταν σε κάθε σημείο κίνησης του παιγνίου, ο παίκτης που έχει σειρά να κινηθεί γνωρίζει όλη την ιστορία (των "παιξιμάτων") του παιγνίου μέχρι τώρα, δηλ. όλες τις προηγούμενες και τρέχουσες επιλογές ως και τις αποδόσεις τους.

Στα δυναμικά, επίσης, παίγνια, η εξεύρεση λύσης διευκολύνεται δια της εκτατικής μάλλον παρά κανονικής μορφής αναπαράστασης τους, αν και κάθε παίγνιο μπορεί να περιγραφεί με οποιαδήποτε μορφή ως π.χ. το παίγνιο ΔΦ παρακάτω. Η διακεκομμένη γραμμή στο σημείο κίνησης του παίκτη 2 δείχνει ότι αυτός δεν γνωρίζει τι παίζει ο παίκτης 1, αφού πρόκειται περί στατικού παιγνίου ή το ίδιο, περί παιγνίου ταυτόχρονης επιλογής εξ ορισμού. Δηλαδή, η στατικότητα του παιγνίου περιγράφεται δια της διακεκομμένης γραμμής υπό μορφή ατελούς πληροφόρησης, διότι, (δεδομένου ότι η στατικότητα δεν προϋποθέτει αναγκαία και ταυτόχρονη κίνηση των παικτών), όταν έρχεται η σειρά του παίκτη 2 να παίξει, αυτός δεν γνωρίζει την ιστορία του παιγνίου (Dubey and Kaneko, 1984).

Γενικά, η εκτατική μορφή (extensive form) ενός παιγνίου περιγράφεται δι' ενός δένδρου παιγνίου σαν το παρακάτω, το οποίο προσδιορίζει (α) τους παίκτες του παιγνίου, (β1) πότε είναι η σειρά κίνησης κάθε παίκτη, (β2) τι μπορεί να κάνει κάθε παίκτης όταν έρχεται η σειρά του να κινηθεί, (β3) τι γνωρίζει κάθε παίκτης για την ιστορία του παιγνίου όταν έρχεται η σειρά του να κινηθεί, δηλ. τον τέλειο ή ατελή χαρακτήρα της πληροφόρησης και (γ) την απόδοση του κάθε παίκτη για κάθε συνδυασμό κινήσεων απ' όλους τους παίκτες. Το γεγονός ότι έρχεται η σειρά κάποιου παίκτη να κινηθεί, αναπαρίσταται δι' ενός κόμβου (node), όπως στο παρακάτω δένδρο του παιγνίου ΔΦ, που αρχίζει μ' έναν κόμβο απόφασης για τον παίκτη 1 και τελειώνει με τους τερματικούς κόμβους και τις αντιστοιχούσες σ' αυτούς αποδόσεις, με τον πρώτο αριθμό να αναφέρεται στην απόδοση του παίκτη 1. Ο αρχικός κόμβος κάθε παιγνίου, ο οποίος στα περισσότερα παίγνια ταυτίζεται με τον πρώτο (και ίσως μοναδικό, όπως στα παίγνια ΔΦ και Ζ) κόμβο απόφασης του παίκτη που παίζει πρώτος, αποδίδεται αρκετές φορές με τον όρο ρίζα (root) του (δένδρου) παιγνίου.



Παίγνιο ΔΦ

Τώρα εξαιρούμενης της ρίζας ενός παιγνίου, ο αριθμός των κόμβων απόφασης ενός παίκτη που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή, (δύο νια τον παίκτη 2 στο δένδρο του παιγνίου ΔΦ), συνθέτει το σύνολο πληροφόρησης (information set) του εν λόγω παίκτη. Το σύνολο πληροφόρησης περιέχει μόνον ένα κόμβο, δηλ. είναι μονομελές (singleton), στην περίπτωση της τέλειας πληροφόρησης.

Έτσι, εξαιρουμένης της ρίζας, εφόσον ένας παίκτης καλείται να παίζει όταν έρχεται η σειρά του σύμφωνα με όσα ξέρει για την ιστορία του παιγνίου, οι επιλογές του θα βασίζονται στο σύνολο πληροφόρησης στο οποίο πρέπει να κινηθεί, εμπλέκοντας τους συγκεκριμένους κόμβους απόφασης που το απαρτίζουν μόνο στη περίπτωση της τέλειας πληροφόρησης.

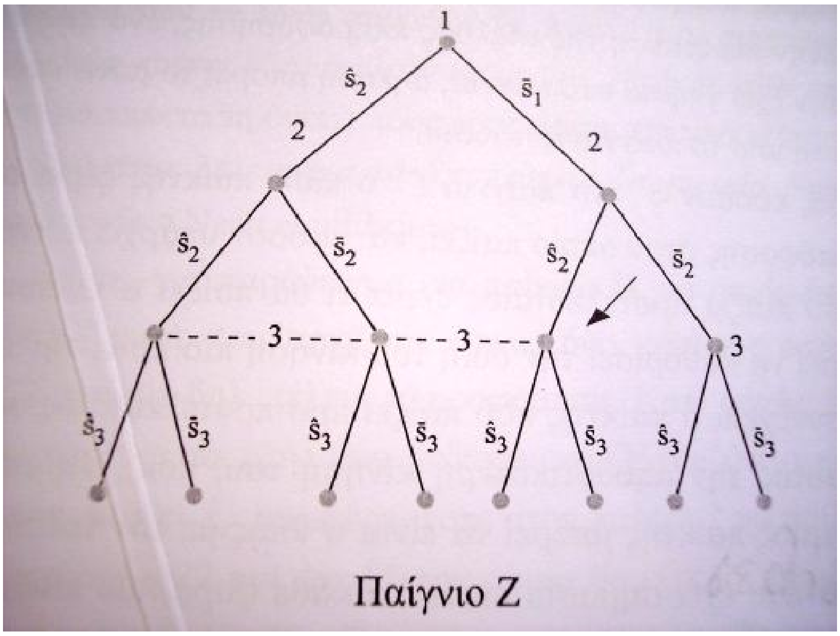
Με δύο λόγια, ένα παίγνιο εκτατικής μορφής περιγράφεται ως εξής: Γ=[N,Q,P,(Ei),(ri)], όπου N είναι πάλι το σύνολο των παικτών, Q το σύνολο των πιθανών ιστοριών, P η συνάρτηση παικτών (player function) με P(h) να είναι ο παίκτης που έχει τη κίνηση μετά την ιστορία h, Ei είναι το σύνολο των συνόλων πληροφόρησης του παίκτη i ε N και ri, είναι το σύνολο των αποδόσεων του ίδιου παίκτη. Υπό τέλεια πληροφόρηση, η παρουσία του Ei είναι περιττή, και έτσι ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης περιγράφεται ως εξής: Γ^T=[N,Q,P,(ri)].

Μια απλή ή γνήσια στρατηγική si του παίκτη i ε N στο Γ^T περιλαμβάνει όχι μόνο μία κίνηση όπως στο G_N, αλλά μια ακολουθία κινήσεων του i που περιέχει από μια κίνηση του ανά κόμβο απόφασης του. Ή το ίδιο, εφόσον κάθε κόμβος απόφασης του i εξαρτάται από το τι έχει παίξει ο j και ίσως ο i πολύ νωρίτερα, δηλαδή εξαρτάται από την ιστορία του παιγνίου, μια si συναρτά μια κίνηση με κάθε πιθανή ιστορία του παιγνίου πριν βέβαια το τέλος του. Πρόκειται επομένως για σύνολο κινήσεων, για πρόγραμμα δράσης δια παν ενδεχόμενο. Και επειδή οι κινήσεις οι διαθέσιμες σ' ένα κόμβο απόφασης είναι περισσότερες της μιας, υπάρχουν πολλά τέτοια προγράμματα δράσης σχηματίζοντα το σύνολο Si των απλών στρατηγικών του i. Αν κάθε σελίδα ενός τετραδίου καταγράφει από ένα πρόγραμμα δράσης, δίνει δηλαδή ένα κατάλογο κινήσεων, μια για κάθε κόμβο απόφασης του i από τότε που πρωτοπαίζει μέχρι την τελευταία φορά που θα παίξε! μια Sj αποτελεί μια σελίδα και το Si αποτελεί το τετράδιο με τόσες σελίδες όσες οι si.

4.2 Υποπαίγνια (Kuhn, 1953)

Ένα παίγνιο εκτατικής μορφής περιέχει συνήθως υποπαίγνια (subgames), τα οποία είναι παίγνια εκτατικής μορφής κι αυτά, (α) αρχίζουν από κάποιο κόμβο απόφασης εκτός του αρχικού και ανήκοντος σε μονομελές σύνολο πληροφόρησης, (β) περιλαμβάνουν όλους τους ακολουθούντες τον κόμβον αυτόν κόμβους απόφασης και τερματικούς κόμβους και (γ) δεν περιέχουν σύνολα πληροφόρησης με κόμβους απόφασης οι οποίοι δεν έπονται του κόμβου απ' όπου αρχίζει το υποπαίγνιο. Για παράδειγμα, το παίγνιο ΔΦ δεν περιέχει υποπαίγνια, διότι όλοι οι κόμβοι απόφασης του παίκτη 2 (οι μοναδικοί κόμβοι απόφασης εκτός του αρχικού) δεν ανήκουν σε μονομελή σύνολα πληροφόρησης.

Τέτοια σύνολα είναι ωστόσο αυτά όσον αφορά τους δύο κόμβους απόφασης του παίκτη 2 στο παίγνιο Ζ, αλλά υποπαίγνιο αρχίζει μόνο με τον κόμβο απόφασης του παίκτη 3 που έπεται της επιλογής $\bar{s}_1$, εκ μέρους του παίκτη 1, και $\bar{s}_2$, εκ μέρους του παίκτη 2. Αυτό, για τρεις λόγους: Πρώτον, το σύνολο πληροφόρησης που ακολουθεί τον "αριστερό" κόμβο απόφασης του 2 περιέχει και τον κόμβο απόφασης του 3 που δείχνεται με το βελάκι αλλά που δεν έπεται εκ του εν λόγω κόμβου απόφασης του 2· έπεται εκ του άλλου κόμβου του 2. Δεύτερον, υποπαίγνιο δεν μπορεί να αρχίζει εξ αυτού του άλλου, του "δεξιού" κόμβου του 2, διότι ο κόμβος απόφασης του 3 που δείχνεται με το βελάκι ανήκει σε σύνολο πληροφόρησης με άλλους τέτοιους κόμβους του 3, οι οποίοι δεν έπονται εκ του δεξιού κόμβου απόφασης του 2.
Τρίτον υποπαίγνια δεν μπορεί να αρχίζουν από κανέναν από τους κόμβους απόφασης του 3 που συνδέονται με τη διακεκομμένη γραμμή αφού αυτή η γραμμή υποδηλώνει ότι όλοι ανήκουν σε μη μονομελές σύνολο πληροφόρησης.



Παίγνιο Ζ

Ο στόχος των τριών κριτηρίων που πρέπει να ικανοποιούνται για την ύπαρξη υποπαίγνιου είναι ότι εάν ένας παίκτης, ο οποίος έχει σειρά να παίξει, βρεθεί σε σύνολο πληροφόρησης (μονομελές ή μη) που έπεται του κόμβου απ' όπου αρχίζει ένα υποπαίγνιο, ο παίκτης αυτός να είναι σε θέση να γνωρίζει τον εν λόγω κόμβο. Στο παίγνιο Ζ, το γεγονός ότι η $\hat{s}_2$ μπορεί να έχει προέλθει από οποιονδήποτε κόμβο απόφασης του 2, σημαίνει ότι ο 3 δεν μπορεί να ξέρει όχι μόνο τι έχει παίξει ο 2 αλλά και ο 1. Εκτός, βέβαια, αν έχουν παιχθεί οι $\bar{s}_1$ και $\bar{s}_2$, οπότε ο 3 ξέρει ότι βρίσκεται στον τελευταίο προς τα δεξιά κόμβο α-πόφασης του.

Θα μπορούσαμε με δύο λόγια να ορίσουμε την έννοια του υποπαίγνιου ως εξής: Εξαιρουμένης της ρίζας ενός παιγνίου, εάν οποιοσδήποτε παίκτης που πρέπει να κινηθεί σ' ένα κόμβο απόφασης ή μετά απ' αυτόν τον κόμβο, ξέρει ότι παίζει σ' αυτόν ή μετά απ' αυτόν τον κόμβο, δηλαδή αν ο συγκεκριμένος κόμβος αποτελεί κοινή γνώση, χ0τε αποτελεί και μια υπορρίζα (subroot) του Γ ή του Γ^T και τη ρίζα γνήσιου (proper) υποπαίγνιου.

Στην περίπτωση της τέλειας πληροφόρησης κάθε κόμβος απόφασης αποτελεί υπορρίζα και ρίζα γνήσιου υποπαίγνιου. Στην περίπτωση της ατελούς πληροφόρησης, ένα παίγνιο μπορεί να μην έχει γνήσια υποπαίγνια, δηλαδή μπορεί το μόνο υποπαίγνιο να είναι το ίδιο το παίγνιο αυτούσιο.

Τώρα, εφόσον σ' ένα παίγνιο Γ^{T} ο κάθε παίκτης ξέρει τον κάθε κόμβο απόφασης στον οποίο παίζει, και εφόσον υπάρχει κοινή γνώση, αυτός που παίζει προτελευταίος ξέρει τι θα παίξει ο τελευταίος και άρα μπορεί να καθορίσει την δική του κίνηση πιο πριν, την οποία ξέρει στη συνέχεια ο παίκτης που παίζει προ-προτελευταίος, καθορίζοντας κι αυτός την αποδοτικότερη κίνηση του, κοκ. Βέβαια, ο προ-προτελευταίος παίκτης μπορεί να είναι ο ίδιος με τον τελευταίο, κοκ, αλλά αυτό που έχει σημασία είναι ότι κάθε φορά που παίζει, αντιμετωπίζει ένα εξατομικευμένο πρόβλημα απόφασης.

Θα μπορούσε δηλαδή ένας παίκτης να μην έπαιζε ο ίδιος σε όλο το παίγνιο, αλλά με ένα διαφορετικό αντιπρόσωπο (agent) κάθε φορά που έρχεται η σειρά του να παίξει.

Η ουσία είναι ότι αποκτάται έτσι μια σειρά λύσεων των επιμέρους υποπαιγνίων, στην αρχή των μικρότερων στο τέλος του παιγνίου, μετά βάσει αυτών στα αμέσως μεγαλύτερα, μετά βάσει αυτών στα αμέσως - αμέσως μεγαλύτερα, κοκ, μέχρι στο τέλος ν' αποκτηθεί η λύση όλου του παιγνίου. Αυτός, ο δια μια σειράς εξατομικευμένων προβλημάτων απόφασης τρόπος επίλυσης ενός παιγνίου ΓΤ, είναι γνωστός ως αλγόριθμος του Kuhn, και αποτελεί παράδειγμα της γενικότερης μεθόδου επίλυσης τέτοιων παιγνίων, που είναι γνωστή ως "οπισθοβατική επαγωγή".

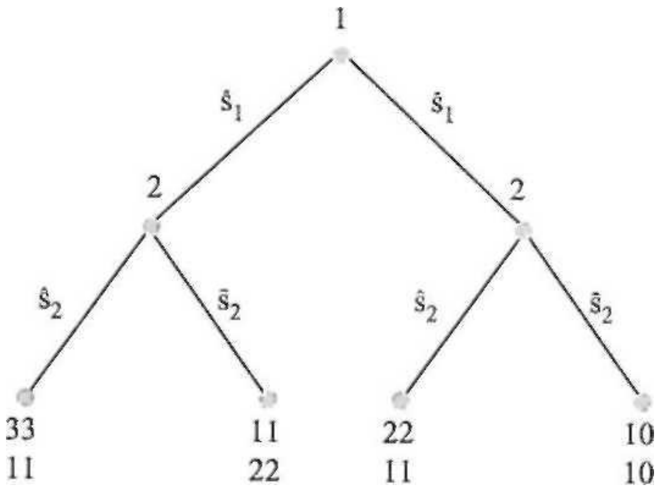
4 3. Οπισθοβατική Επαγωγή και SPNE (Selten, 1965, 1975)

Έχοντας ξεκαθαρίσει την έννοια του υποπαίγνιου και την έννοια της στρατηγικής μπορούμε τώρα να τροποποιήσουμε την ισορροπία Nash έτσι ώστε ν' αποτελεί και λύση στα δυναμικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης. Μια απλή αλλά λογική επέκταση αυτής της ισορροπίας στα πλαίσια των εν λόγω παιγνίων θα ήταν ότι οι στρατηγικές όλων των παικτών πρέπει ν' αποτελούν ισορροπία Nash σε κάθε υποπαίγνιο. Μια τέτοια επέκταση όντως προσφέρει λύση στα υπό εξέταση παίγνια και αποκαλείται Τέλεια-για-τα-Υποπαίγνια Ισορροπία Nash (SPNE, subgame-perfect Nash equilibrium).

Ας δούμε, για παράδειγμα, το παίγνιο Η, το οποίο περιέχει δύο υποπαίγνια, αυτά που αρχίζουν στους δύο κόμβους απόφασης του παίκτη 2, έχουμε δηλ. τέλεια πληροφόρηση. Κατ' αρχάς, ο παίκτης 1 εξετάζει νοητικά τα εξής δύο ενδεχόμενα: Έστω ότι ο παίκτης 1, ο εαυτός του, παίζει $\hat{s}_1$. συμφέρει τότε στον παίκτη 2 να παίξει $\bar{s}_2$, διότι θα έχει απόδοση 22 και όχι 11 την οποία θα είχε αν έπαιζε $\hat{s}_2$.

Έστω πάλι ότι ο παίκτης 1 παίζει $\bar{s}_1$, οπότε συμφέρει τον 2 να παίξει $\hat{s}_2$ γιατί 11>10. Έχοντας, τώρα, ο παίκτης 1 αυτά τα συμπεράσματα όσον αφορά τη συμπεριφορά του 2 στις δικές του κινήσεις, τον συμφέρει μετά να επιλέξει $\bar{s}_1$, αφού τότε ο 2 θα διαλέξει $\hat{s}_2$ και η απόδοση του παίκτη 1 θα είναι 22 αντί της απόδοσης 11 που θα είχε εάν επέλεγε $\hat{s}_1$, και ο παίκτης 2 έπαιζε συνεπώς $\bar{s}_2$.

Δηλαδή, βαδίζοντας ο παίκτης 1 από το τέλος του παιγνίου, από το μέλλον, προς τα πίσω, ή κατά την ορολογία, δια της οπισθοβατικής επαγωγής (backward induction) του παίκτη 1, το παίγνιο Η καταλήγει στην κατάσταση που περιγράφεται μέσω της έντονης γραμμής που συνδέει τον αρχικό κόμβο απόφασης με τον τερματικό κόμβο που έχει αποδόσεις (22,11). Γι' αυτό και η ακολουθία κινήσεων ($\bar{s}_1$, $\hat{s}_2$) αποτελεί το αποτέλεσμα (της) οπισθοβατικής επαγωγής (B-IO, backward-induction outcome), του παιγνίου. Αποτελεί το αποτέλεσμα της μεθόδου επίλυσης του παιγνίου κατά την οποία οι εικασίες για το μέλλον διαμορφώνουν την τρέχουσα συμπεριφορά, εικασίες, γ1(Χι όπως θα δούμε στο μέρος 4.7, οι εικασίες είναι ότι δεν θα παιχθού-κυριαρχούμενες στρατηγικές.



Παίγνιο Η

Το οπισθοβατικό αποτέλεσμα δεν αποτελεί, ωστόσο, τη λύση του παιγνίου για τον εξής λόγο. Όσον αφορά τον παίκτη 1, του οποίου οι δύο στρατηγικές συμπίπτουν με τις δύο κινήσεις του, $\hat{s}_1$, και $\bar{s}_1$, το οπισθοβατικό αποτέλεσμα πράγματι αναφέρεται σ' αυτές, με την έννοια ότι αναγνωρίζει δια της οπισθοβατικής επαγωγής την $\bar{s}_1$, σαν την αποδοτικότερη στρατηγική. Όμως, όσον αφορά τον παίκτη 2, ο οποίος έχει δύο κινήσεις αλλά τέσσερις στρατηγικές,

(α) $\hat{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\hat{s}_1$, και $\hat{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\bar{s}_1$, δηλ. ($\hat{s}_2$, $\hat{s}_2$),

(β) $\hat{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\hat{s}_1$, και $\bar{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\bar{s}_1$, δηλ. ($\hat{s}_2$, $\bar{s}_2$),

(γ) $\bar{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\hat{s}_1$, και $\hat{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\bar{s}_1$, δηλ. ($\bar{s}_2$, $\hat{s}_2$), και

(δ) $\bar{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\hat{s}_1$ και $\bar{s}_2$ εάν ο 1 παίξει $\bar{s}_1$, δηλ. ($\bar{s}_2$, $\bar{s}_2$),

το οπισθοβατικό αποτέλεσμα δεν αναφέρεται σε καμία. Τώρα, για να έχουμε λύση, αυτή θα πρέπει να απαρτίζεται όχι μόνον από την $\bar{s}_1$, αλλά και από ένα, το αποδοτικότερο, εκ των παραπάνω ζευγών κινήθέων δηλ. από την αποδοτικότερη στρατηγική, του παίκτη 2.

Γνωρίζουμε βάσει οπισθοβατικής επαγωγής ότι η μια κίνηση ενός τέτοιου ζεύγους πρέπει να είναι η $\hat{s}_2$, αφού αυτή αποτελεί την καλύτερη ανταπάντηση του παίκτη 2 στην $\bar{s}_1$. Για να βρούμε το άλλο μέλος του ζεύγους και να έχουμε έτσι προσδιορίσει πλήρως την αποδοτικότερη στρατηγική του 2, θα πρέπει να δούμε και την καλύτερη κίνηση του 2 αν τυχόν ο παίκτης 1 επέλεγε για κάποιο λόγο να παίξει $\hat{s}_1$. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα δίνεται πάλι από την οπισθοβατική επαγωγή που αναπτύχθηκε νωρίτερα και είναι $\bar{s}_2$, με αποτέλεσμα η αποδοτικότερη στρατηγική του 2 να είναι η $(\bar{s}_2, \hat{s}_2)$.

Είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε στην αναζήτηση της λύσης του παιγνίου Η μέσω του εξής σκεπτικού: Αποτελεί η στρατηγική του 1, $\bar{s}_1$, την καλύτερη αντίδραση στην καλύτερη κίνηση των καλύτερων κινήσεων του 2; Η απάντηση όπως είδαμε είναι καταφατική. Αποτελεί η στρατηγική του 2, $\bar{s}_2$ εάν $\hat{s}_1$ και $\hat{s}_2$ εάν $\bar{s}_1$, την καλύτερη αντίδραση του 2 σε οποιαδήποτε κίνηση του 1 και άρα σε οποιοδήποτε υποπαίγνιο;

Η απάντηση είναι πάλι καταφατική. Έπεται ότι η κατάσταση $[\bar{s}_{1,}(\bar{s}_{2,}\, \hat{s}_2)]$ αποτελεί ισορροπία Nash που είναι τέλεια για τα υποπαίγνια.

Στο δένδρο του παιγνίου Η, αυτή η ισορροπία περιγράφεται δια του συνόλου των εντόνων γραμμών ομού. Το γεγονός ότι ο αριστερός κόμβος απόφασης του 2 δεν συνδέεται με τον αρχικό κόμβο απόφασης αλλά μόνο με τερματικό κόμβο, υποδηλώνει ότι ενώ δεν υπάρχει περίπτωση ο παίκτης 1 να παίξει $\hat{s}_1$, (η στρατηγική ισορροπίας του είναι η $\bar{s}_1$) ο παίκτης 2 πρέπει να λάβει ένα τέτοιο ενδεχόμενο υπόψη του σαν μέρος της στρατηγικής ισορροπίας του. Ή, με τεχνική διατύπωση, ο 2 πρέπει να έχει προσδιορίσει την καλύτερη κίνηση του και για το υποπαίγνιο που αρχίζει στον αριστερά κόμβο απόφασης του.

Για να εμβαθύνουμε ακόμη περισσότερο στην έννοια της τέλειας, για-τα-υποπαίγνια ισορροπίας Nash, ας δούμε το παίγνιο Η', την κανονικής μορφής αναπαράσταση του παιγνίου Η. Όπως και πριν, ενώ οι κινήσεις του παίκτη 1 συμπίπτουν με τις στρατηγικές του, ο παίκτης 2 έχει δύο κινήσεις αλλά τέσσερις στρατηγικές. Εύκολα διαπιστώνεται ότι έχουμε τις εξής ισορροπίες Nash: $[\bar{s}_{1},(\bar{s}_{2}, \hat{s}_{2})]$ και $[\hat{s}_1, (\bar{s}_{2}, \bar{s}_2)]$.

Η πρώτη είναι ασφαλώς η ισορροπία που μελετήσαμε μέσω της ανάλυσης της εκτατικής μορφής του παιγνίου. Κατά την άλλη ισορροπία, ο παίκτης 2 παίζει $\bar{s}_2$ όχι μόνο όταν ο 1 παίζει $\hat{s}_1$, όπως ισχυρίζεται η οπισθοβατική επαγωγή, αλλά ακόμη και αν παιχθεί η $\bar{s}_1$. Ένας τρόπος εκλογίκευσης αυτής της συμπεριφοράς εκ μέρους του 2 είναι ότι αυτός απειλεί τον 1 ότι εάν δεν παιχθεί η $\hat{s}_1$, (έτσι ώστε ο 2 να μπορέσει να παίξει $\bar{s}_2$ και να έχει απόδοση 22 που είναι μεγαλύτερη της απόδοσης 11 εκ της ακολουθίας $(\bar{s}_{1}, \hat{s}_2)$, τότε ο 2 θα παίξει $\bar{s}_2$, με αποτέλεσμα και οι δύο να έχουν την ελάχιστη απόδοση 10.

	$(\hat{s}_{2}, \hat{s}_2)$	$(\hat{s}_{2}, \bar{s}_2)$	$(\bar{s}_{2}, \hat{s}_2)$	$(\bar{s}_{2}, \bar{s}_2)$
$\hat{s}_1$	$\underline{33}$,11	$\underline{33}$,11	11,$\underline{\underline{22}}$	11,$\underline{\underline{22}}$
$\bar{s}_1$	22,$\underline{\underline{11}}$	10,10	$\underline{22}$,$\underline{\underline{11}}$	10,10

Παίγνιο Η'

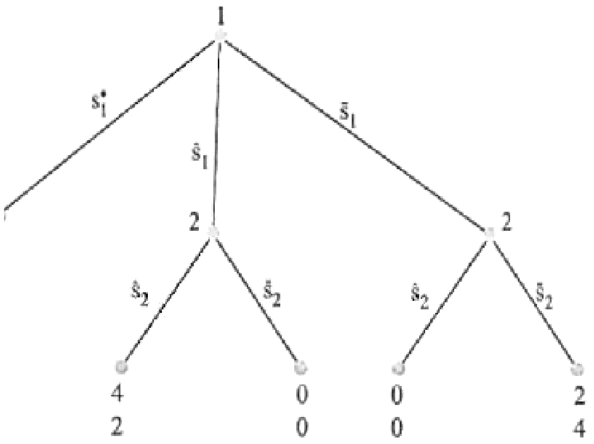
Όμως, μια τέτοια απειλή δεν είναι αξιόπιστη, διότι εάν τελικά ο 1 παίξει $\bar{s}_1$, τότε συμφέρει στον 2 να επιλέξει την $\hat{s}_2$ και όχι την $\bar{s}_2$ αφού 11>10. Έτσι, η ισορροπία Nash $[\hat{s}_1, (\bar{s}_{2}, \bar{s}_2)]$ δεν είναι τέλεια για τα υποπαίγνια, γιατί δεν αποτελεί ισορροπία Nash για το υποπαίγνιο που αρχίζει στον αριστερό κόμβο απόφασης του 2· και δεν είναι ισορροπία Nash για το εν λόγω υποπαίγνιο γιατί βασίζεται σε αναξιόπιστη απειλή.

Το γενικό συμπέρασμα αυτής της συζήτησης είναι ότι όσον αφορά τα δυναμικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης, η οπισθοβατική επαγωγή εξαλείφει μη αξιόπιστες απειλές (incredible threats). Γι' αυτό άλλωστε και η μόνη τέλεια-για-τα-υποπαίγνια ισορροπία Nash στην οποία καταλήξαμε δι' αυτής της μεθόδου ήταν η $[\bar{s}_{1},(\bar{s}_{2}, \hat{s}_{2})]$. Ο όρος "τέλεια" αναφέρεται σ' αυτήν ακριβώς την εξάλειψη μη αξιόπιστων απειλών ως πιθανών λύσεων ενός παιγνίου εκτατικής μορφής.

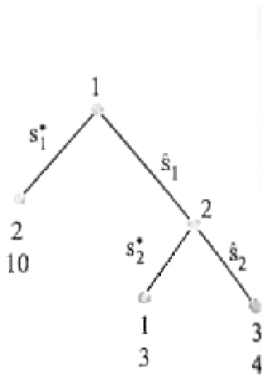
4.4. Ιδιότητα της Μίας Απόκλισης (Osborne and Rubinstein, 1994)

Μία ιδιότητα που έχει η τέλεια-για-τα-υποπαίγνια ισορροπία, η SPNE, και που μπορεί να συμβάλει στην επαλήθευση της, είναι **η ιδιότητα της μιας απόκλισης**
(one deviation property). Έστω ότι ένας παίκτης από τον οποίο αρχίζει υποπαίγνιο, αλλάζει την υπό την SPNE του υποπαίγνιου αρχική του κίνηση, δηλ. ότι υπάρχει απόκλιση μιας ιστορίας παιξίματος (και συγκεκριμένα, από την πρώτη εν σειρά του υποπαίγνιου, την οποία θα "έγραφε" η οπισθοβατική επαγωγή). Η ιδιότητα της μιας απόκλισης θα πληρούται εάν οι απομένουσες στρατηγικές της SPNE του υποπαίγνιου εξακολουθούν ν' αποτελούν SPNE αν βέβαια απομένουν και άλλοι κόμβοι απόφασης πριν το τέλος του παιγνίου. Η εν λόγω ιδιότητα είναι αυτονόητο ότι πληρούται από τον αλγόριθμο του Kuhn εκ του ορισμού του.

Γενικά, σύμφωνα μ' αυτή την ιδιότητα, το "κομμάτι" της SPNE που απομένει αν ένας παίκτης από τον οποίο αρχίζει υποπαίγνιο αλλάξει την υπό την SPNE αρχική του κίνηση, εξακολουθεί ν' αποτελεί την αποδοτικότερη στρατηγική για τους παίκτες που συνεχίζουν το υποπαίγνιο. Εάν, για παράδειγμα, στο παίγνιο Η, ο παίκτης 1 δεν έπαιζε την υπό την SPNE κίνηση $\bar{s}_1$, η στρατηγική $\bar{s}_2$, που απομένει από την SPNE, εξακολουθεί να είναι η αποδοτικότερη όσον αφορά τα συμφέροντα του παίκτη 2. Αυτή ακριβώς είναι η ουσία της ιδιότητας της μιας απόκλισης αν και στο παράδειγμα μας, ο κόμβος απόφασης του παίκτη 1 αποτελεί τον αρχικό κόμβο όλου του παιγνίου και όχι υποπαίγνιου.



Παίγνιο ΣΦΜΦ1



Παίγνιο λ

Ας δούμε τώρα και ένα παράδειγμα με δύο SPNE, το παράδειγμα του παιγνίου ΣΦΜΦ1. Το αποτέλεσμα οπισθοβατικής επαγωγής είναι ο συνδυασμός ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$):

(α) Αν ο 1 έπαιζε $\bar{s}_1$, θα είχε απόδοση 2, γιατί ο παίκτης 2 θα έπαιζε $\bar{s}_2$ για να λάβει 4 αντί του 0 υπό την $\hat{s}_2$.

(β) Αν ο 1 έπαιζε $\hat{s}_1$, θα είχε απόδοση 4, διότι ο παίκτης 2 θα έπαιζε $\hat{s}_2$ για να λάβει 2 αντί του 0 υπό την $\bar{s}_2$.

(γ) Αν πάλι ο 1 έπαιζε s_1^* και δεν έδινε την ευκαιρία στον 2 να παίξει, και οι δυο παίκτες θα είχαν απόδοση 3 ο καθένας. Οπότε συμφέρει στον παίκτη 1 να παίξει $\hat{s}_1$, και να ακολουθήσει ο 2 με $\hat{s}_2$.

Για να πάμε στην SPNE, ο 2 πρέπει να έχει έτοιμη την αποδοτικότερη ανταπάντηση του σε περίπτωση που ο 1 επιλέξει $\bar{s}_1$. Αυτή είναι η $\bar{s}_2$. Όμως, προσέξατε ότι τώρα η $\bar{s}_2$ δεν μπορεί να συνδυασθεί με το οπισθοβατικό αποτέλεσμα και να δώσει μια SPNE όπως πράξαμε στο παίγνιο Η. Αυτό, γιατί τώρα, δηλ. στο παίγνιο ΣΦΜΦ1, δεν είναι μόνο ο 2 που έχει τη δυνατότητα ανταπάντησης σε ενδεχόμενη απομάκρυνση του 1 από το οπισθοβατικό αποτέλεσμα. Την ίδια δυνατότητα έχει και ο 1, την οποία ωστόσο δεν είχε στο Η. Έχει τη δυνατότητα να παίξει s_1^* σε περίπτωση που ο 2 παρεκκλίνει του οπισθοβατικού αποτελέσματος και παίξει $\bar{s}_2$. Ο 1 θα λάβει έτσι 3>2.

Έτσι το οπισθοβατικό αποτέλεσμα, το B-IO, ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$) μετατρέπεται σε SPNE αυτό καθεαυτό, και δημιουργείται μια δεύτερη SPNE, η (s_1^*, $\bar{s}_2$), που αποτελείται από ένα άλλο οπισθοβατικό αποτέλεσμα, το s_1^*, συν την κίνηση $\bar{s}_2$. Μια ενδεχόμενη απομάκρυνση του 2 εκ του πρώτου B-IO, μπορεί ν' αντιμετωπισθεί από τον 1 λόγω της ύπαρξης αυτού ακριβώς του δεύτερου B-IO. Υπακούουν οι δύο SPNE στην ιδιότητα της μιας απόκλισης; Ή το ίδιο, θα μπορούσε ο 2 να είχε καλύτερη απόδοση (α) από την 2 στο αριστερό υποπαίγνιο, (β) από την 4 στο δεξιό υποπαίγνιο;

Η απάντηση και στις δύο περιπτώσεις είναι αρνητική, επαληθεύοντας τις δύο SPNE ως τέτοιες.

Προσέξατε ότι δύο ισορροπίες υπάρχουν και στο παίγνιο λ, η ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$) και η (s_1^*, s_2^*). Η πρώτη είναι το B-IO της ακολουθίας $\hat{s}_1$- $\hat{s}_2$. Η δεύτερη είναι το B-IO s_1^* συν την καλύτερη ανταπάντηση του 1 στο ενδεχόμενο ο 2 να μην παίξει $\hat{s}_2$. Όμως, μόνον η πρώτη αποτελεί SPNE, διότι εφ' όσον 4>3, η s_2^* δεν αποτελεί την καλύτερη κίνηση στο υποπαίγνιο που αρχίζει με τον παίκτη 2, και έτσι η (s_1^*, s_2^*) δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της μιας απόκλισης.

4.5. Η εκλογίκευση της SPNE (Rubinstein, 1991)

Η εξάλειψη μη αξιόπιστων απειλών σ' ένα παίγνιο Γ^T επιτυγχάνεται και δια της επαναλαμβανόμενης απάλειψης στην κανονικής μορφής αναπαράσταση του, και γι' αυτό η οπισθοβατική επαγωγή θεωρείται ως το "δυναμικό" ανάλογο της επαναλαμβανόμενης απάλειψης. Για παράδειγμα, στο H_1', η ($\bar{s}_2$, $\hat{s}_2$) κυριαρχεί είτε χαλαρά είτε αυστηρά όλες τις άλλες στρατηγικές του παίκτη 2, και μετά την απάλειψη τους, η $\bar{s}_1$ κυριαρχεί αυστηρά την $\hat{s}_1$, αφήνοντας μας μόνο με την ισορροπία Nash που αποτελεί και SPNE. Η μη αξιόπιστη απειλή εμφανίζεται στο Η' σαν χαλαρά κυριαρχούμενη στρατηγική.

Αλλά γιατί να υπάρχουν μη αξιόπιστες απειλές; Τις δημιουργεί η ίδια η έννοια της (απλής) στρατηγικής, που προβλέπει κάποια κίνηση σε κάθε κόμβο απόφασης, δηλαδή και σε υποπαίγνιο ή υποπαίγνια στα οποία δεν πρόκειται να βρεθούν οι παίκτες αν ο καθένας τους ακολουθήσει πιστά το δικό του πρόγραμμα δράσης. Όμως, σε τέτοια υποπαίγνια, σε μη πραγματοποιήσιμες στην πράξη ιστορίες (εξελίξεις) του παιγνίου, μπορεί να μην δίνεται σημασία στο ποια ακριβώς θα πρέπει να είναι η ακολουθούμενη στρατηγική. Μπορεί να είναι η οποιαδήποτε και ως εκ τούτου κυριαρχούμενη από κάποια άλλη στρατηγική του ίδιου υποπαίγνιου.

Η δια της οπισθοβατικής επαγωγής μέθοδος επίλυσης ενός παίγνιου Γ^T έρχεται να εντοπίσει εκείνη ακριβώς τη στρατηγική του κάθε παίκτη που περιλαμβάνει την κυρίαρχη σε κάθε κόμβο απόφασης του κίνηση, απαλείφοντας τις κυριαρχούμενες στα υποπαίγνια στρατηγικές ως μη αξιόπιστες απειλές. Το θέμα όμως είναι ότι η ούτω προκύπτουσα στρατηγική ισορροπίας του κάθε παίκτη περιλαμβάνει όχι μόνον εκείνη την αλληλουχία κινήσεων που κυριαρχούν και σε όλο το παίγνιο, δηλ. το οπισθοβατικό αποτέλεσμα, αλλά και τις κυρίαρχες κινήσεις που προβλέπει η εν λόγω στρατηγική σε κόμβους απόφασης υποπαιγνίων, ιστοριών του παιγνίου, που δεν πρόκειται να πραγματοποιηθούν αν ο κάθε παίκτης παίξει σύμφωνα με το B-IO.

Είδαμε π.χ. την περίπτωση του παίκτη 2 στο παίγνιο Η, ο οποίος όταν έρχεται η σειρά του να παίξει, δεν καθορίζει μόνο την $\hat{s}_2$ κατόπιν της επιλογής $\bar{s}_1$, εκ μέρους του 1, αλλά και την $\bar{s}_2$, που είναι αδύνατον να πραγματοποιηθεί εάν ο 2 επιλέξει την $\hat{s}_2$, αλλά που είναι εύλογη (α) εάν ο παίκτης 2 εικάσει ότι ο 1 μπορεί να απομακρυνθεί από το εκ της οπισθοβατικής επαγωγής πρόγραμμα δράσης του και παίξει $\hat{s}_1$ αντί $\bar{s}_1$, (β) εάν ο παίκτης 1 εικάσει τι μπορεί να παίξει ο 2 αν ο 2 απομακρυνθεί από το εκ της οπισθοβατικής επαγωγής πρόγραμμα δράσης του. Ο παίκτης 1 θα ήθελε κι αυτός να προβλέψει κάποια κίνηση αν ο 2 απομακρυνόταν από το Β-ΙΟ και έπαιζε $\bar{s}_2$, αλλά δεν υπάρχει δεύτερο Β-ΙΟ, δηλ. ο 1 δεν διαθέτει κίνηση που θα του απέδιδε περισσότερο του 11 (αλλά λιγότερο του 22) αν δεν έπαιζε $\hat{s}_1$, την οποία και δεν πρόκειται ποτέ να παίξει, μιας και η απόδοση 11 του 1 υπό την ακολουθία ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$) κυριαρχείται αυστηρά από την απόδοση 22 του Β-ΙΟ.

Τέτοιο, όμως, "πρόβλημα", δεν υπάρχει στο παίγνιο ΣΦΜΦ1, όπου εναλλακτικό πρόγραμμα δράσης από εκείνο του οπισθοβατικού αποτελέσματος ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$), δεν έχει μόνο ο 2 αλλά και ο 1 έτσι ώστε να δημιουργείται μια δεύτερη SPNE μ' ένα άλλο οπισθοβατικό αποτέλεσμα, το s_1^* , που (α) ούτε αυτό πρόκειται να πραγματοποιηθεί αν παιχθεί η s,, (β) ούτε η $\bar{s}_2$ αυτής της δεύτερης SPNE θα πραγματοποιηθεί αν παιχθεί η s_1^* , (γ) ούτε το οπισθοβατικό αποτέλεσμα ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$) θα πραγματοποιηθεί αν παιχθεί η s_1^*.

Πράγματι, μια ερμηνεία της έννοιας της στρατηγικής που χρησιμοποιεί η SPNE, είναι ότι οι "μη πραγματοποιήσιμες ιστορίες" (ενός παιγνίου) αποτελούν εικασίες των άλλων παικτών για το τι θα πράξει ο παίκτης που έρχεται η σειρά του να κινηθεί εάν δεν ακολουθήσει το υπό την οπισθοβατική επαγωγή πρόγραμμα δράσης του.

Υπό την απουσία τέτοιων εικασιών, η μόνη εκλογικεύσιμη κατάσταση ισορροπίας θα ήταν αυτό καθεαυτό το αποτέλεσμα οπισθοβατικής επαγωγής, το BIO, και η τήρηση του προγράμματος δράσης που υποδεικνύει η οπισθοβατική επαγωγή θα συνέθετε συμπεριφορά ισορροπίας.

Επομένως, οι εν λόγω τόσο άρρηκτα συνδεδεμένες με την SPNE εικασίες αναφέρονται σε συμπεριφορά εκτός ισορροπίας, η οποία μπορεί να οφείλεται είτε σε απουσία διαδικαστικής ορθολογικότητας, δηλαδή σε σφάλματα λόγω τρεμάμενης χειρός, είτε σε περιορισμένη ορθολογικότητα, αλλά όχι σε απουσία ουσιαστικής ορθολογικότητας, μιας και η συμπεριφορά σε εκτός ισορροπίας υποπαίγνια συνεχίζει να είναι ορθολογική, (επικεντρώνεται στην αποδοτικότερη στρατηγική σε τέτοια υποπαίγνια). Θα τελειώσουμε αυτό το κεφάλαιο, με την πρώτη περίπτωση και με μια πρώτη ματιά όσον αφορά τη δεύτερη συνδέοντας την με το ζήτημα των αβέβαιων αποδόσεων και της ατελούς πληροφόρησης.

4.6. SPNE και T-HE (Selten, 1975 - Moulin, 1986)

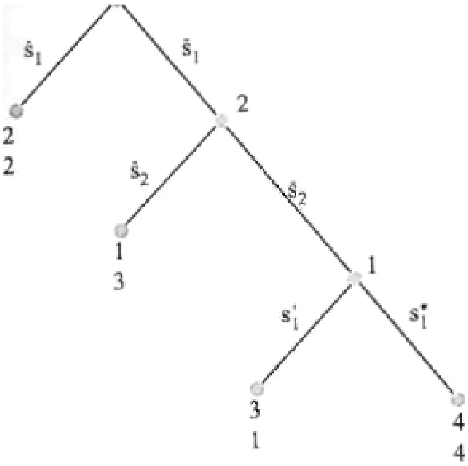
Θεωρήσατε πάλι το παίγνιο Η. Το τρεμούλιασμα μπορεί να δικαιολογήσει την επιλογή $\bar{s}_2$ (α) είτε ως την καλύτερη αντίδραση του 2 στην εικασία του ότι ο 1 μπορεί να παίξει κατά λάθος $\hat{s}_1$, (β) είτε ως την εικασία του 1 για το τι θα επιλέξει ο 2 αν ο 2 παίξει λανθασμένα. Εκλογικεύει έτσι την SPNE [$\bar{s}_1$, ($\bar{s}_2$, $\hat{s}_2$)] ως ισορροπία τρεμάμενης χειρός, T-HE, διότι όπως είδαμε και στο προηγούμενο μέρος, η ($\bar{s}_2$, $\hat{s}_2$) στο Η' κυριαρχεί χαλαρά όλες τις άλλες στρατηγικές του 2, και άρα η απάλειψη τους οδηγεί στην T-HE [$\bar{s}_1$,($\bar{s}_2$, $\hat{s}_2$)]. Αυτό το συμπέρασμα στηρίζεται, βέβαια, (α) στην ταύτιση της T-HE ενός παιγνίου εκτατικής μορφής με την T-HE της κανονικής μορφής του παιγνίου, (β) στο γεγονός ότι η ισορροπία Nash ενός κανονικής μορφής παιγνίου, η οποία δεν περιλαμβάνει χαλαρά κυριαρχούμενες στρατηγικές, αποτελεί και T-HE όταν οι παίκτες είναι μόνο δύο.

Στο παίγνιο Η χρησιμοποιήσαμε το τρεμούλιασμα για να εξηγήσουμε τη διαφορά μεταξύ SPNE και αποτελέσματος οπισθοβατικής επαγωγής, B-IO.

Για την εκλογίκευση της SPNE ως T-HE, το τρεμούλιασμα θα πρέπει να διαδραματίζει κάποιο ρόλο ακόμα και αν η SPNE συμπίπτει με το B-IO. Απλώς, σφάλμα σημαίνει ότι κάποιος δεν εξυπηρετεί με τον καλύτερο τρόπο τα συμφέροντα του ανεξάρτητα της σχέσης μεταξύ SPNE και B-IO. Θεωρήσατε έτσι το παίγνιο Θ, όπου τόσο η SPNE όσο και το B-IO δίδονται εμφανώς από τον συνδυασμό [($\bar{s}_1$, s_1^*), $\bar{s}_2$]: Στο παίγνιο αυτό, ο 1 έχει την ευκαιρία να ξαναπαίξει αν βέβαια του το επιτρέψει ο 2, ο οποίος και θα το κάνει, γιατί οι υπό την s_1^* , αποδόσεις (4,4) είναι οι μεγαλύτερες που μπορούν ν' απολαύσουν και οι δύο παίκτες.

Ο συνδυασμός [($\bar{s}_1$, s_1^*),$\bar{s}_2$] αποτελεί επίσης ισορροπία Nash μη χαλαρά κυριαρχούμενων στρατηγικών και άρα T-HE, διότι στο κανονικής μορφής παίγνιο του Θ, στο Θ', (α) η ($\bar{s}_1$, s_1') κυριαρχείται χαλαρά από την ($\bar{s}_1$, s_1^*) και απαλείφεται από τον 2, (β) στο απομένον παίγνιο, η $\hat{s}_2$ κυριαρχείται χαλαρά από την $\hat{s}_2$ και απαλείφεται από τον 1, (γ) στο απομένον παίγνιο, η ($\bar{s}_1$, s_1^*) κυριαρχεί αυστηρά τα άλλα ζεύγη κινήσεων. Το ερώτημα είναι με ποιον τρόπο υπεισέρχεται σ' αυτήν την προσέγγιση το τρεμούλιασμα έτσι ώστε η [($\bar{s}_1$, s_1^*),$\hat{s}_2$] να δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό της ως Τ-ΗΕ.

Η απάντηση βρίσκεται στο γεγονός ότι το Θ' έχει δυο ακόμα ισορροπίες Nash αλλά τώρα κυριαρχούμενων στρατηγικών, τις [($\hat{s}_1$, s_1'), $\hat{s}_2$] και [($\hat{s}_1$, s_1^*), $\hat{s}_2$], που ενώ έτσι δεν μπορούν ν' αποτελούν Τ-ΗΕ, μπορούν ωστόσο να συμβάλλουν στην κατανόηση της "τρεμούλας ισορροπίας" η οποία ευρίσκεται πίσω από την SPNE ως εξής:



Παίγνιο Θ

	$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
($\hat{s}_1$, s_1')	$\underline{2}$,$\underline{\underline{2}}$	2,$\underline{\underline{2}}$
($\hat{s}_1$, s_1^*)	$\underline{2}$,$\underline{\underline{2}}$	2,$\underline{\underline{2}}$
($\bar{s}_1$, s_1')	1,$\underline{\underline{3}}$	3,1
($\bar{s}_1$, s_1^*)	1,3	$\underline{4}$,$\underline{\underline{4}}$

Παίγνιο Θ'

Κατ' αρχάς προσέξατε ότι εάν ο 1 δεν ξανάπαιζε και στη θέση του έπαιζε ένας τρίτος παίκτης, ο 3, και υπήρχε το ενδεχόμενο ο 3 να κάνει λάθος και να παίξει s_1' τότε καλύτερα ο 2 να έπαιζε $\hat{s}_2$ και ο 1 την $\hat{s}_1$. Δηλαδή, ο συνδυασμός ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$, s_1') θα προέκυπτε ως μια άλλη Τ-ΗΕ. Ή, για να είμαστε ακριβέστεροι, ο συνδυασμός που φαίνεται ν' αναδεικνύεται σε Τ-ΗΕ είναι η ισορροπία Nash του Θ' [($\hat{s}_1$, s_1'), $\hat{s}_{2\}}$], γιατί ο τρίτος παίκτης είναι φανταστικός.

Τον χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε ότι εάν ο 1 δεν παίζει ο ίδιος αλλά μέσω αντιπροσώπων, έναν για κάθε κόμβο απόφασης του, έτσι ώστε να εξυπηρετεί ο καθένας τα συμφέροντα του 1 με τον καλύτερο τρόπο κάθε φορά που έρχεται η σειρά του 1 να παίξει,

τότε ο 2ος αντιπρόσωπος (agent) του 1, αυτός που παίζει στον δεύτερο κόμβο απόφασης του 1, μπορεί να τρέμει περισσότερο από τον 1ο αντιπρόσωπο (απ' αυτόν στην αρχή του παιγνίου), με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι έχουμε στο παίγνιο Θ και μια άλλη Τ-ΗΕ που δεν αποτελεί SPNE.

Το γεγονός ότι ο 2ος αντιπρόσωπος τρέμει περισσότερο όχι μόνον από τον 1 ο αλλά και από τον παίκτη 2, κάνει τόσο τον 2 όσο και τον 1ο αντιπρόσωπο να πιστεύουν ότι ο 2ος αντιπρόσωπος θα παίξει κατά πάσα πιθανότητα s_1' οπότε καλύτερα ο παίκτης 2 να παίξει $\hat{s}_2$ και ο 1ος αντιπρόσωπος $\hat{s}_1$.

Όμως, ο παίκτης 2 και ο 1ος αντιπρόσωπος δεν παύουν να τρέμουν κι αυτοί, και μπορεί να μην επιλέξουν $\hat{s}_2$ και $\hat{s}_1$, αλλά $\bar{s}_2$ και $\bar{s}_1$, αντίστοιχα. Από τη στιγμή που αυτοί οι δύο διαπιστώσουν την εν λόγω "αδυναμία" τους και άρα ότι δεν είναι καλύτεροι από τον 2ο αντιπρόσωπο όσον αφορά την τρεμούλα τους, τότε η μόνη Τ-ΗΕ που απομένει είναι η SPNE. Το όλο σκεπτικό πίσω από την [($\hat{s}_1$, s_1'), $\hat{s}_{2\}}$] στηρίζεται στη σιγουριά με την οποία αναμένεται να παιχθεί η s_1'. Ο οποιοσδήποτε μετριασμός αυτής της σιγουριάς, καθιστά συμφερότερες τις στρατηγικές της SPNE. Ανάλογες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για την άλλη ισορροπία Nash του Θ', την [($\hat{s}_1$, s_1^*), $\hat{s}_{2\}}$] . Εκεί, και οι δύο αντιπρόσωποι του 1 πιστεύουν ότι ο 2 τρέμει περισσότερο απ' αυτούς, και ότι άρα ο 2 θα παίξει κατά πάσα πιθανότητα αντί ν' αφήσει το παίγνιο να εξελιχθεί. Αν φύγει από τη μέση αυτή η σιγουριά για τον 2, τότε μόνο η SPNE απομένει ως T-HE.

Όμως, προσοχή: Ενώ το εκτός B-IO παίξιμο μπορεί ν' αποδοθεί σε σφάλματα τρεμάμενης χειρός, ταυτιζόμενη έτσι μια SPNE στο εκτατικής μορφής παίγνιο με μια T-HE στην κανονικής μορφής αναπαράσταση του, μια T-HE στο κανονικής μορφής παίγνιο δεν αποτελεί πάντα SPNE στο εκτατικό.

Ας δούμε κατ' αρχάς την περίπτωση της μοναδικής SPNE. Εφόσον η οπισθοβατική επαγωγή είναι το δυναμικό ανάλογο της επαναλαμβανόμενης απάλειψης χαλαρά κυριαρχούμενων στρατηγικών, η απάλειψη μπορεί να δικαιολογεί ως T-HE στο κανονικής μορφής παίγνιο, όχι μόνο την ισορροπία Nash που αντιστοιχεί στην SPNE αλλά και άλλη ή άλλες ισορροπίες Nash με τις ίδιες αποδόσεις, όπως π.χ. στο παίγνιο σπ-σπ' παρακάτω. Αποδόσεις, που είναι εκείνες του B-IO, σαν οι παίκτες στην ή στις ισορροπίες Nash που δεν αντιστοιχούν στην SPNE, να μην έδιναν τόση σημασία στο τι θα κάνουν εκτός B-IO και να έσφαλαν απειλώντας "θεούς και δαίμονες" γιατί "έχουν σίγουρο" το B-IO.

Γι' αυτό οι αποδεκτές (admissible) στρατηγικές οι συνεπείς με την SPNE θα πρέπει να εξευρίσκονται μέσω της κυριαρχικής επιλυσιμότητας (βλ. επίσης πρόβλημα 3.9.7), μέσω της επαναλαμβανόμενης απάλειψης όλων των κυριαρχούμενων στρατηγικών σε κάθε στάδιο απάλειψης, στο κανονικής μορφής παίγνιο. Απάλειψης δηλαδή, όλων των αναξιόπιστων απειλών, σε κάθε στάδιο, εξασφαλίζοντας την ορθολογικότητα του παιξίματος, την επιλογή των αποδοτικώτερων κινήσεων ακόμα και εκτός B-IO, και καταλήγοντας έτσι στη μια αποδεκτή (admissible) λύση που αποτελεί και SPNE στο εκτατικό παίγνιο. Μόνον τότε η SPNE θα συμπίπτει με το αποτέλεσμα της επαναλαμβανόμενης απάλειψης χαλαρά κυριαρχούμενων στρατηγικών, γιατί μόνον τότε η απάλειψη αυτή θα οδηγεί όχι μόνο στις ίδιες αποδόσεις όπως ο αλγόριθμος του Kahn, στις αποδόσεις του B-IO, αλλά και στον ίδιο συνδυασμό στρατηγικών που συνεπάγεται ο εν λόγω αλγόριθμος, στην SPNE.

4.7. SPNE και T-HE Εκτατικής Μορφής

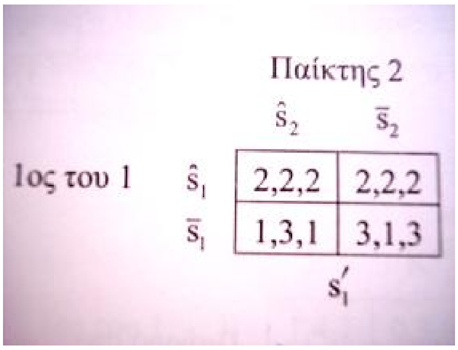
(Selten, 1975 - Ritzberger, 2002)

Η SPNE σ' ένα εκτατικό παίγνιο Θ' αποτελεί βέβαια T-HE στο κανονικής μορφής παίγνιο, αλλά η κυριαρχική επιλυσιμότητα αποκλείει T-HE στο δεύτερο που δεν είναι SPNE στο πρώτο. Τι γίνεται όμως αν λόγω της φύσης ενός παιγνίου, όπως το σπ-σπ' παρακάτω, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η κυριαρχική επιλυσιμότητα; Επίσης, εφόσον η κυριαρχική επιλυσιμότητα οδηγεί πάντα σε μια και μοναδική λύση, τι γίνεται αν η SPNE δεν είναι μοναδική;

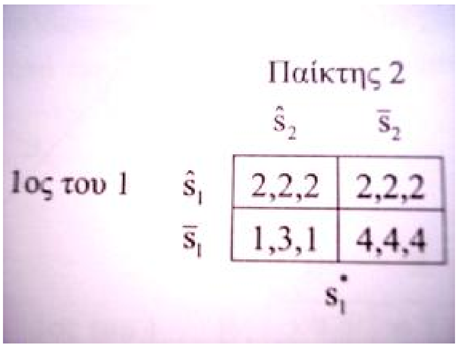
Σ' αυτές τις περιπτώσεις, θα ήταν χρήσιμη η γενίκευση της προσέγγισης της ή των SPNE κατ' ευθείαν μέσω των στρατηγικών επιλογών που κάνουν οι αντιπρόσωποι παικτών, μέσω εκείνων των επιλογών που δεν είναι ευάλωτες απέναντι σε μικρά λάθη επιλογής κυριαρχούμενων κινήσεων σε κάθε υποπαίγνιο. Πρόκειται για επιλογές που συνθέτουν την ή τις T-HE στη δι’ αντιπροσώπων κανονικής μορφής (agent normal form) αναπαράσταση ενός εκτατικού παιγνίου, και που έτσι αποτελούν την T-HE εκτατικής μορφής κατ' αντιδιαστολή με την T-HE (στο) κανονικής μορφής (παίγνιο): Μια SPNE αποτελεί πάντα T-HE εκτατικής μορφής και το αντίστροφο, (αν βέβαια υπάρχει μια τέτοια T-HE).

Ας δούμε κατ' αρχάς το πώς η χρήση αντιπροσώπων κανονικής μορφής στο Θ δεν αφήνει περιθώρια για άλλες ισορροπίες Nash/T-HE πέραν της SPNE. Η εν λόγω μορφή δίδεται από το Θ'', στο οποίο όλοι οι αντιπρόσωποι του παίκτη 1 λαμβάνουν τις ίδιες αποδόσεις, (ο πρώτος και ο τρίτος αριθμός σε κάθε κελί είναι πάντα ο ίδιος). Γενικά, στα αντιπροσώπων κανονικής μορφής παίγνια, η απόδοση ενός αντιπροσώπου είναι σαν να προέρχεται από οποιονδήποτε άλλο αντιπρόσωπο, γιατί απλώς την καρπούται ο παίκτης, που ορίζει τους αντιπροσώπους, ανεξάρτητα του αριθμού μητρώου του αντιπροσώπου (αν είναι ο 1ος ή ο 2ος, κ.λπ.).

Ξαναγυρίζοντας στο Θ'', προσέξατε ότι η ισορροπία Nash $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, s_1^*)$ είναι η μοναδική και άρα αποτελεί T-HE. Αυτές όμως είναι και οι στρατηγικές που απαρτίζουν την SPNE. Επομένως, στο δι' αντιπροσώπων κανονικής μορφής παίγνιο, δεν γεννάται θέμα απόκλισης της T-HE από την SPNE.



		Παίκτης 2	
		$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
1ος του 1	$\hat{s}_1$	2,2,2	2,2,2
	$\bar{s}_1$	1,3,1	3,1,3
		s_1'	



		Παίκτης 2	
		$\hat{s}_2$	$\bar{s}_2$
1ος του 1	$\hat{s}_1$	2,2,2	2,2,2
	$\bar{s}_1$	1,3,1	4,4,4
		s_1^*	

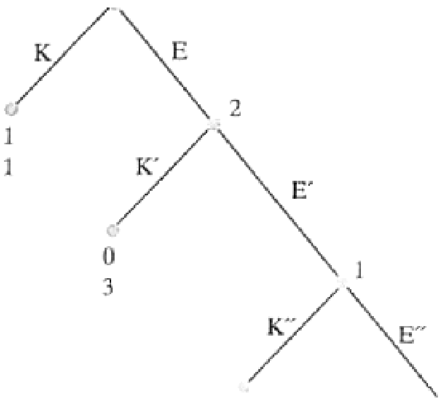
2ος αντιπρόσωπος του 1

Παίγνιο Θ''

Ας προχωρήσουμε τώρα με το παίγνιο σπ. Εάν ο παίκτης 2 δώσει την ευκαιρία στον 1 να ξαναπαίξει, ο 1 θα παίξει K'' και όχι E'' για να λάβει 2 και όχι 1.

Έτσι, όμως, ο παίκτης 2 θα λάβει 2 και όχι 3 όπως αν ο 2 τελείωνε το παίγνιο παίζοντας K' και δεν έδινε στον 1 την ευκαιρία να ξαναπαίξει. Αλλά τότε ο 1 θα ελάμβανε O εάν δεν προλάμβανε τον 2 και δεν τελείωνε το παίγνιο ο 1 ευθύς εξ αρχής παίζοντας K και λαμβάνοντας 1>0. Επομένως, το B-IO σ' αυτό το παίγνιο είναι η κίνηση K από τον παίκτη 1, ενώ η SPNE είναι ο συνδυασμός [(K,K''),K'].

Αν ο 1 παίξει κατά λάθος Ε, τότε συμφέρει στον 2 να παίξει Κ', και αν κάνει λάθος και ο 2 και παίξει Ε', τότε (α) αν ο 1 δεν ξανακάνει λάθος, θα παίξει Κ'', κίνηση που εκλογικεύει την SPNE και ως ισορροπία Nash στο σπ', (β) αν ο 1 ξανακάνει λάθος, θα παίξει Ε'', κίνηση που εκλογικεύει την άλλη ισορροπία Nash, την [(Κ,Ε''), Κ'] , του παιγνίου σπ' η οποία όμως δεν αποτελεί SPNE.



	E′	K′
(E, E′′)	1,4	0,3
(E, K′′)	2,2	0,3
(K, E′′)	1,1	1,1
(K, K′′)	1,1	1,1

Παίγνιο σπ   Παίγνιο σπ'

Προσέξατε στη συνέχεια ότι ούτε η επαναλαμβανόμενη απάλειψη επιτυγχάνει να απαλείψει αυτή τη δεύτερη ισορροπία Nash: (α) Η (Ε,Ε'') του 1 κυριαρχείται χαλαρά από την (Ε,Κ'') και απαλείφεται από τον 2. (β) Στο απομένον παίγνιο, η Ε' του 2 κυριαρχείται χαλαρά από την Κ' και απαλείφεται από τον 1. (γ) Στο απομένον παίγνιο, η (Ε,Κ'') του 1 κυριαρχείται αυστηρά από τις υπόλοιπες στρατηγικές και απαλείφεται από τον 2. Εδώ η επαναλαμβανόμενη απάλειψη σταματά αφήνοντας μας με τους συνδυασμούς που είδαμε ότι αποτελούν και ισορροπίες Nash. Πρόκειται, επομένως για ισορροπίες μη κυριαρχούμενων στρατηγικών και άρα Τ-ΗΕ κανονικής μορφής, (γιατί, οι παίκτες είναι μόνο δύο).

Όμως, στην αντιπροσώπων κανονική μορφή του παιγνίου, σπ'', διαπιστώνουμε ότι μόνον η ισορροπία Nash/SPNE [(Κ,Κ''),Κ'] απομένει ως Τ-ΗΕ, διότι εάν υπάρχει η παραμικρή πιθανότητα να παιχθεί Ε-Ε', τότε συμφέρει μόνον η K' ως εξής: (α) Ενώ οι E_K', K-E' και K-K' αποφέρουν στον 2ο (αλλά βέβαια και στον 1ο) αντιπρόσωπο του 1 την ίδια απόδοση ανεξάρτητα αν παίξει E'' ή K'', (0,1 και 1, αντίστοιχα), ο απομένων συνδυασμός E-E' θα του απέφερε 2 υπό την K'' αντί του 1 υπό την E'' και επομένως, η E'' κυριαρχείται χαλαρά από την K'', απαλειφόμενη ως εκ τούτου από τον παίκτη 2. (β) Στον απομένοντα πίνακα αποδόσεων, η E' του 2 κυριαρχείται χαλαρά από την K', οπότε και απαλείφεται από τον 1. (γ)

Στο απομένον παίγνιο, η E (και για τους δύο αντιπρόσωπους) του 1 κυριαρχείται χαλαρά από την K, και απαλειφόμενη από τον 2, οδηγούμαστε στη λύση [(K,K''),K'].

2

1ος του 1	E'	K'
E	1,4,1	0,3,0
K	1,1,1	1,1,1

E ''

2

1ος του 1	E'	K'
E	2,2,2	0,3,0
K	1,1,1	1,1,1

K ''

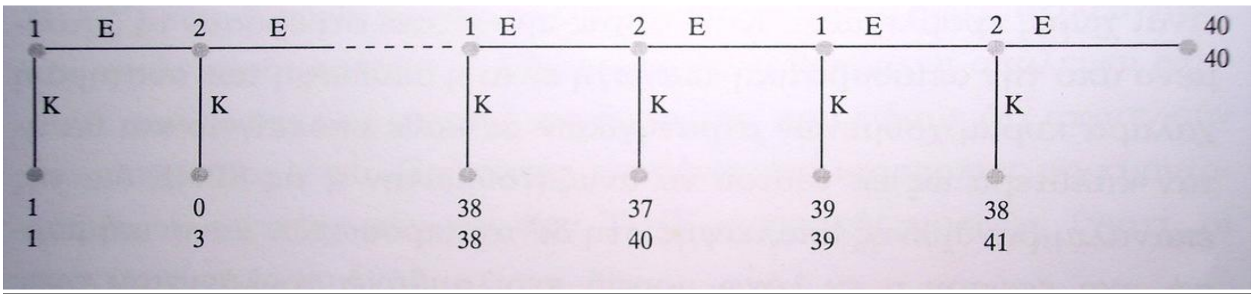
$2_{ος}$ του 1

Παίγνιο σπ ''

Η προσέγγιση ωστόσο της SPNE ως T-HE εκτατικής μορφής δεν είναι χωρίς προβλήματα. Κατ' αρχάς προσέξατε ότι εφόσον το ζητούμενο από την οπισθοβατική επαγωγή είναι η απάλειψη των αυστηρά ή χαλαρά κυριαρχούμενων στρατηγικών σε κάθε υποπαίγνιο και θα ήταν καλύτερα ως εκ τούτου να αναζητούμε την ή τις SPNE δια της επαναλαμβανόμενης απάλειψης στη δι' αντιπροσώπων κανονική μορφή, και εφόσον η εν λόγω μορφή περιλαμβάνει τουλάχιστον τρεις παίκτες και άρα η επαναλαμβανόμενη απάλειψη μπορεί να μην οδηγεί σε Τ-ΗΕ, τότε αυτό που είναι σίγουρο είναι ότι μια Τ-ΗΕ εκτατικής μορφής αποτελεί πάντα SPNE, αλλά μια SPNE δεν είναι αναγκαία Τ-ΗΕ.

Έχοντας αυτό υπόψη, προσέξατε στη συνέχεια ότι υπό την προσέγγιση ενός παιγνίου βάσει σφαλμάτων λόγω τρεμάμενης χειρός οι εικασίες για συμπεριφορά εκτός ισορροπίας εξακολουθούν να υπακούουν στη CAB ή το ίδιο, η εμφάνιση ενός σφάλματος σήμερα δεν αλλάζει την πιθανότητα εμφάνισης ενός σφάλματος αύριο. Τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα (uncorrelated) δηλ. κατανέμονται τυχαία και ανεξάρτητα, εμφανίζονται τυχαία και ακούσια, και ως εκ τούτου, η πιθανότητα εμφάνισης είναι εκ των προτέρων γνωστή σε όλους τους παίκτες.

Θεωρήσατε όμως το παίγνιο σαρανταποδαρούσας ΣΠ (centipede game, Rosenthal, 1981), το οποίο αποτελεί γενίκευση του σπ. Η ονομασία του οφείλεται στο σχήμα του δένδρου του παιγνίου αλλά και στο ότι παίζεται πολλές φορές, ίσως και σαράντα από τον κάθε παίκτη. Οι δύο παίκτες μπορούν να κινηθούν είτε ευθεία (Ε) συνεχίζοντας το παίγνιο, είτε κάτω (Κ) και να το διακόψουν. Το Β-ΙΟ είναι όπως και πριν, η διακοπή του παιγνίου ευθύς εξ αρχής από τον 1 δια της επιλογής Κ ενώ η SPNE είναι η επιλογή Κ κάθε φορά που έρχεται η σειρά ενός παίκτη να παίξει. Το γεγονός ότι η SPNE προβλέπει και την μη διακοπή ταυ παιγνίου ευθύς εξ αρχής από τον 1, μπορεί ν' αποδοθεί σε τρεμούλιασμα όπως και πριν.



Παίγνιο ΣΠ: Εναλλαγή στις αποδόσεις κατά μείον ένα-συν δύο

Ναι, αλλά τότε το τρεμούλιασμα θα πρέπει ν' αποτελεί συστηματικό στοιχείο της συμπεριφοράς των παικτών. Τα σφάλματα παύουν να είναι τυχαία και ακούσια άπαξ και το παίγνιο δεν διακοπεί από τους πρώτους κιόλας γύρους του. Η συνέχιση του παραβιάζει τα περί λειτουργικής ορθολογικότητας και ο κάθε παίκτης δεν ξέρει τι να εικάσει για το τι θα κάνει ο αντίπαλος του στον επόμενο γύρο. Από την άλλη, θα ήταν παράλογο να μην συνεχισθεί το παίγνιο για κάμποσους γύρους γιατί απλώς θα ήταν ασύμφορο. Γι' αυτό και η εν λόγω κατάσταση αποδίδεται ως το παράδοξο της σαρανταποδαρούσας. Η συνέχιση του παιγνίου δεν είναι λειτουργικά ορθολογική αλλά είναι συμφέρουσα αρκεί να παιχθεί δύο τουλάχιστον φορές. Αυτό που φαίνεται να εκλογικεύει την SPNE ή για να είμαστε ακριβέστεροι, τη συνέχιση παιγνίων σαν το ΣΠ, όπου οι προοπτικές είναι "κερδίζω/χάνω", "συνεχίζω", είναι μια ορθολογικότητα περί συμφέροντος, που δεν προβλέπεται από την λειτουργική ορθολογικότητα η οποία υποτίθεται ότι πρέπει να διέπει το τρεμούλιασμα

4.8. SPNE και Προσποίηση Παραλογισμού (Pettit and Sugden, 1989 - Reny, 1992)

Όταν η SPNE διαφέρει του B-IO, η απόκλιση θα μπορούσε εναλλακτικά να αποδοθεί στην προσποίηση παραλογισμού, στο "μπλοφάρισμα" (bluffing) εκ μέρους ενός ή περισσοτέρων παικτών για να εγκλωβίσει ο καθένας το παίγνιο προς τη συμφερότερη γι' αυτόν ιστορία (εξέλιξη του), συμφερότερη σε σχέση με τις αποδόσεις του B-IO. Το B-IO έχει νόημα ως κατάσταση ισορροπίας όταν όλοι οι παίκτες συμμερίζονται το σκεπτικό της οπισθοβατικής επαγωγής, εάν "βλέπουν το ίδιο παίγνιο με το ίδιο μάτι" και βγάζουν τα ίδια συμπεράσματα, εάν διαμορφώνουν τις ίδιες εικασίες για τις κινήσεις των αντιπάλων.

Έτσι, εκτός της περίπτωσης σφαλμάτων λόγω τρεμάμενης χειρός, η διαφοροποίηση της SPNE από το B-IO θα μπορούσε εναλλακτικά να αποδοθεί στο ότι οι παίκτες δεν βλέπουν το ίδιο παίγνιο με το ίδιο μάτι και δεν καταλήγουν στις ίδιες εικασίες για το πώς θα παίξει ο αντίπαλος. Οι παίκτες δεν έχουν CAB, δεν έχουν λειτουργική αλλά περιορισμένη ορθολογικότητα (bounded rationality) (Simon, 1982 - Rubinstein, 1988), διότι η ορθολογικότητα τους παύει ν' αποτελεί κοινή γνώση. Η ύπαρξη κοινής γνώσης για την ορθολογικότητα του παίκτη i αλλά όχι του παίκτη j, δεν σημαίνει ασφαλώς ότι ο j είναι παράλογος· σημαίνει ότι ο j προσποιείται τον παράλογο, μπλοφάρει, για να λάβει μεγαλύτερη απόδοση απ' ό,τι στο B-IO.

Στο παίγνιο σπ για παράδειγμα, η SPNE περιλαμβάνει επιπλέον του B-IO της K, (α) τη κίνηση K' εκ μέρους του παίκτη 2 ως κατάσταση ισορροπίας για το υποπαίγνιο που αρχίζει στον κόμβο απόφασης του 2 σαν ο παίκτης 1 παραλογιζόμένος να είχε παίξει προηγούμενα E, (β) την κίνηση K'' εκ μέρους του 1 ως κατάσταση ισορροπίας για το υποπαίγνιο που αρχίζει στον τελευταίο κόμβο απόφασης σαν ο παίκτης 2 παραλογιζόμένος να είχε παίξει προηγούμενα E' και σαν να σταματά ο παραλογισμός του 1 όταν έρχεται η σειρά του να ξαναπαίξει.

Δεν πρόκειται βέβαια περί παραλογισμού αλλά περί προσποίησης παραλογισμού, που εκλογικεύει τις επιπλέον της Κ κινήσεις, Κ' και Κ'', της SPNE [(K,K''),K'] ως εξής:

(α) Ο παίκτης 2 προσποιείται ότι θα παίξει Ε' για να κάνει τον 1 να παίξει Ε, πιστεύοντας ο 1 ότι έτσι θα του ξαναδοθεί η ευκαιρία να παίξει και να λάβει παίζοντας Κ'' απόδοση 2, η οποία είναι μεγαλύτερη της απόδοσης 1 που θα είχε αν τέλειωνε το παίγνιο ευθύς εξ αρχής. Ο λόγος όμως της προσποίησης του παίκτη 2 είναι να του δοθεί η ευκαιρία να τελειώσει αυτός το παίγνιο, παίζοντας Κ' και λαμβάνοντας 3 αντί 1 ή 2 αν τέλειωνε το παίγνιο ο παίκτης 1.

(β) Ο παίκτης 1 παίζει Ε προσποιούμενος τον παράλογο για να κάνει τον 2 να παίξει Ε' πιστεύοντας ο 2 ότι μετά ο 1 θα παίξει Ε'' με αποτέλεσμα ο 2 να λάβει 4, την μέγιστη εκ των αποδόσεων του. Ο λόγος ωστόσο για τον οποίο προσποιείται ο 1 είναι για να του ξαναδοθεί η ευκαιρία να παίξει και να επιλέξει Κ'' για να λάβει 2>1.

Όμως, η προοπτική προσποίησης παραλογισμού, αυτές οι δύο ''παγίδες'' που μόλις αναπτύξαμε, δεν θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη και από τους δύο παίκτες, με αποτέλεσμα ο 1 να παίξει Κ ευθύς εξ αρχής, και να μείνουμε πάλι με το Β-ΙΟ;

Όχι αναγκαία, γιατί ενώ αυτή καθεαυτή η αναγνώριση της ύπαρξης προσποίησης είναι κάτι το αυτονόητο, ο τρόπος αναγνώρισης μπορεί να διαφέρει, με διαφορετικές επιπτώσεις για την έκβαση του παιγνίου. Ένας τρόπος αναγνώρισης της ύπαρξης προσποίησης είναι αφού και όχι πριν εκδηλωθεί η πρώτη κίνηση προσποίησης. Οι παίκτες αρχίζουν με CAB ή CKR και προσπαθούν εάν γίνει προσποίηση, να την εκλογικεύσουν. Δεν αρχίζουν το παίγνιο περιμένοντας εκ των προτέρο3ν από τους αντιπάλους (μια, κάποιας μορφής) περιορισμένη ορθολογοτικότητα (υπό τη συνήθη έννοια της ορθολογικότητας) με στόχο την παγίδευση.

Η έννοια της ορθολογικότητας αποκτά τώρα το εξής περιεχόμενο: Για να μπλοφάρει ο i τη στιγμή που ξέρει ότι ο j μπορεί να μπλοφάρει αμέσως μετά απ' αυτόν, θα πρέπει ο i να το κάνει γιατί η προσδοκομένη απόδοση του από το μπλοφάρισμα του j (όταν έλθει η σειρά του j να παίξει), είναι το λιγότερο ίση μ' εκείνη που θα προέκυπτε αν ο i δεν μπλόφαρε. Η ορθολογικότητα αυτή θ' αποτελούσε κοινή γνώση εάν ο j σκέπτονταν ανάλογα για τον i όποτε έρχεται η σειρά του j να κινηθεί, και αν ο j ήξερε ότι αυτό το ξέρει ο i.

Όμως, τότε δεν θα πρόκειται για μπλοφάρισμα αλλά για συμπεριφορά μεγιστοποίησης της προσδοκώμενης απόδοσης, (της απόδοσης και από το μελλοντικό παίξιμο του παιγνίου). Εάν ένας παίκτης i απεφάσιζε να συνεχίσει ένα παίγνιο σαν το ΣΠ, θα το έπραττε γιατί αυτή θα ήταν η άριστη κίνηση του και όχι για να διερωτάται ο j για την ορθολογικότητα του i (υπό τη συνήθη αντίληψη περί ορθολογικότητας).

Έτσι, παίγνια σαν το ΣΠ μπορεί να μην "κλείσουν" με τοΒ-ΙΟ ακόμη και αν ο 1 δεν πρόκειται να ξαναπαίξει παραπάνω από μια φορά, όπως συμβαίνει στο σπ. Πιο συγκεκριμένα:

Πρώτον: (Υπολογισμοί Παικτών). Εάν ο 2 πιστεύει ότι ο 1 θα παίξει Ε" με πιθανότητα p_1 τότε η προσδοκώμενη απόδοση του 2 από την Ε', $\rho_2 4+(1- \rho_2)2$, θα είναι τουλάχιστον ίση με την απόδοση 3 από την Κ', όταν $\rho_1=1/2$. [Αν παίζονταν η Ε", ο 2 θα ελάμβανε 4 με πιθανότητα ρ_1, και αν παίζονταν η Κ", ο 2 θα ελάμβανε 2 με πιθανότητα $(1- \rho_1)$.] Επίσης, αν ο 1 πιστεύει ότι ο 2 θα παίξει Ε' με πιθανότητα ρ_2, τότε η προσδοκώμενη απόδοση του 1 από την Ε, $\rho_2 2+(1- \rho_2)0$, θα είναι τουλάχιστον ίση με την απόδοση 1 από την Κ, εάν $\rho_2=1/2$. [Αν παίζονταν η Ε', ο 1 μετά θα έπαιζε Κ" και θα ελάμβανε 2. Αν παίζονταν η Κ', ο 1 θα ελάμβανε 0.]

Δεύτερον: (Κοινή Γνώση Υπολογισμών). Εάν ο 1 συνεχίσει το παίγνιο (παίξει Ε), ξέρει ότι ο 2 θα το διακόψει (θα παίξει Κ') με πιθανότητα 1/2. Εάν ο 2 συνεχίσει το παίγνιο (παίξει Ε'), ξέρει ότι ο 1 θα λάβει την απόδοση 2 (θα παίξει Κ") με πιθανότητα 1/2.

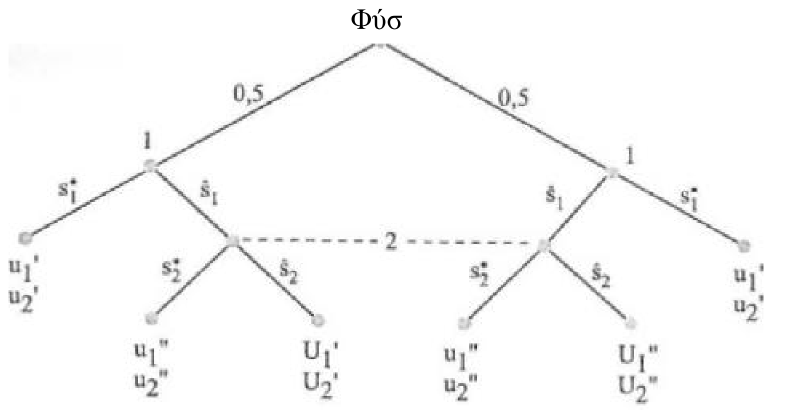
Τρίτον: (Κοινή Γνώση της Ορθολογικότητας υπό την έννοια της μεγιστοποίησης της προσδοκώμενης απόδοσης). Εάν ο 1 δεν έπαιζε το ΒΙΟ και συνέχιζε το παίγνιο, ο 2 θα ήξερε ότι ο 1 το έκανε ξέροντας για τον 2 ότι (α) ο 2 μπορεί να διακόψει το παίγνιο με πιθανότητα 1/2, (β) αν ο 2 δεν διακόψει το παίγνιο, θα το κάνει ξέροντας ότι η πιθανότητα ο 1 να λάβει 2 είναι 1/2.

Συμπέρασμα: Όχι μόνο δεν υπάρχει τίποτα παράλογο στον 1 εάν αυτός συνεχίσει το παίγνιο, αλλά κάτι τέτοιο Θα ήταν άριστο για τον 1 εάν αυτός όντως το έπραττε. Και Θα συμφωνούσε ως προς αυτό και ο 2.

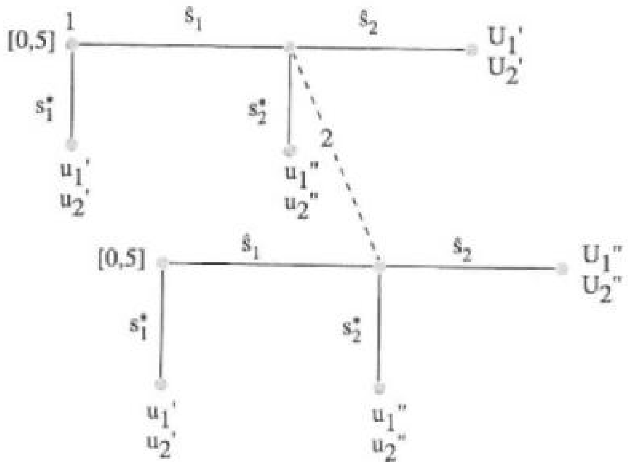
Τα πράγματα, ωστόσο, δεν είναι τόσο απλά όταν υπάρχει ιδιωτική πληροφόρηση (private information), όταν ένας τουλάχιστον παίκτης έχει πληροφόρηση για το παίγνιο που δεν αποτελεί κοινή γνώση. Στο παίγνιο σπ, για παράδειγμα (α) η προσποίηση του 2 θα κάνει τον 1 να διερωτηθεί αν όντως η απόδοση του 2 από την Κ'' είναι 2 ή κάποια άλλη μεγαλύτερη του 3, δηλαδή αν όντως ο 2 προσποιείται ή ξέρει κάτι παραπάνω για τον εαυτό του απ' ό,τι ο 1, (β) η προσποίηση του 1 θα κάνει τον 2 να διερωτηθεί αν πράγματι η απόδοση του παίκτη 1 υπό την Ε'' είναι 1 ή κάποια άλλη μεγαλύτερη του 2, δηλαδή αν πράγματι προσποιείται ο 1 ή ξέρει κάτι παραπάνω για τον εαυτό του απ' ό,τι ο 2. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, το ζήτημα της προσποίησης μετατρέπεται σε ζήτημα αβέβαιων αποδόσεων. Και τότε το μπλοφάρισμα αποτελεί εγγενές στοιχείο του παιγνίου. Οι παίκτες το αναμένουν πριν καν αρχίσει το παίγνιο. Το δυναμικό παίγνιο προσποιούμενων παικτών πλήρους πληροφόρησης και παικτών γενικότερα με πλήρη πληροφόρηση αλλά περιορισμένη ορθολογικότητα, μετατρέπεται σε δυναμικό παίγνιο ορθολογικών παικτών μη πλήρους και ατελούς πληροφόρησης.

Ο πιο απλός τρόπος μετατροπής είναι αυτός που περιγράφει το παράδειγμα του παιγνίου R. Ο παίκτης 1 ξέρει ότι παίζει στο δεξιό παίγνιο αλλά για τον παίκτη 2, οι αποδόσεις μπορεί να είναι εκείνες του αριστερού παιγνίου με πιθανότητα 50% και άρα υπάρχει πιθανότητα 50% να μην παίζει στο δεξιό παίγνιο. Το σύνολο πληροφόρησης του 2 συλλαμβάνει σ' αυτή την περίπτωση την αβεβαιότητα του 2 για τις αποδόσεις λόγω ιδιωτικής πληροφόρησης του 1. Οι πιθανότητες 0,5 υποτίθεται ότι είναι τυχαίες, προερχόμενες εκ της "Φύσης" (ή από άλλο εξωγενή παράγοντα συμβολιζόμενο ως παίκτη Ο) ενώ οι κλώνοι (branches) του δένδρου παιγνίου, που αμέσως έπονται της "Φύσης" (ή του παίκτη Ο) και δίνουν αυτές τις πιθανότητες, δεν συμβολίζουν βέβαια στρατηγικές κινήσεις αλλά κινήσεις της τύχης (chance moves).

Το παίγνιο R' αποτελεί εναλλακτική αναπαράσταση παιγνίων σαν το R. Την σχέση προσποίηση - αβέβαιες αποδόσεις θα έχουμε την ευκαιρία να την εξετάσουμε διεξοδικότερα στο τέλος του μεθεπόμενου κεφαλαίου, στο μέρος 6.6.



Παίγνιο R



*Παίγνιο **R***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΑΤΕΛΟΥΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

5.1 Στρατηγικές(Kuhn,1953 – Kreps and Wilson, 1982 –Ritzberger)

Στα εκτατικά παίγνια ατελούς πληροφόρησης, στα παίγνια Γ, ένα υποπαίγνιο μπορεί να περιλαμβάνει όχι μόνο μονομελή αλλά και πολυμελή σύνολα πληροφόρησης, με τόσους το καθένα κόμβους απόφασης όσους "πιθανολογεί" ο παίκτης που παίζει σ' ένα τέτοιο σύνολο. Η έννοια της απλής ή γνήσιας στρατηγικής ενός παίκτη γενικεύεται για να περιλάβει μια κίνηση όχι για κάθε κόμβο απόφασής του, όπως σ' ένα παίγνιο $Γ^T$, αλλά για κάθε σύνολο πληροφόρησής του μονομελές ή μη. Στο μέρος 4.1 παρομοιάσαμε μια απλή στρατηγική με μια σελίδα τετραδίου. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και τώρα. Η κάθε σελίδα του "τετραδίου (απλών) στρατηγικών" ενός παίκτη καταγράφει έναν πλήρη κατάλογο κινήσεων, όπως και πριν, αλλά τώρα με μια για κάθε σύνολο πληροφόρησης και όχι αναγκαία για κάθε κόμβο απόφασης.

Για παράδειγμα, στο παίγνιο ΣΦΕΠΙ, οι απλές στρατηγικές της Μ είναι (Σπίτι), (Εξω,Κιν) και (Εξω,Περ) ενώ οι απλές στρατηγικές του Γ είναι οι (Κιν) και (Περ), γιατί ο Γ δεν ξέρει τον κόμβο απόφασής του στον οποίο ίσως κληθεί να τις παίξει. Αν ήξερε, τότε οι απλές στρατηγικές του Γ θα ήταν οι (Κιν,Κιν), (Κιν,Περ), (Περ,Κιν) και (Περ,Περ). Γι' αυτό και η κανονικής μορφής αναπαράσταση του ΣΦΕΠ1 έχει ως στο ΣΦΕ1 ενώ η κανονική μορφή του ΣΦΕΠ2, του αντίστοιχου του ΣΦΕΠ1 παίγνιου τέλειας πληροφόρησης, έχει ως στο ΣΦΕ2. Ένα άλλο παράδειγμα απλών στρατηγικών αποτελούν οι (s_1^*),($\bar{s}_1$,, s_1^+),($\bar{s}_1$, s_1^+),($\hat{s}_1$, s_1^+) και ($\hat{s}_1$, s_1') του παίκτη 1 στο παίγνιο ΤΕΧ1, όπου η στρατηγική π.χ. ($\hat{s}_1$, s_1^+) προβλέπει την έναρξη του παίγνιου με $\hat{s}_1$ και επιλογή μετά της s_1^+ στο διμελές σύνολο πληροφόρησης που ακολουθεί.

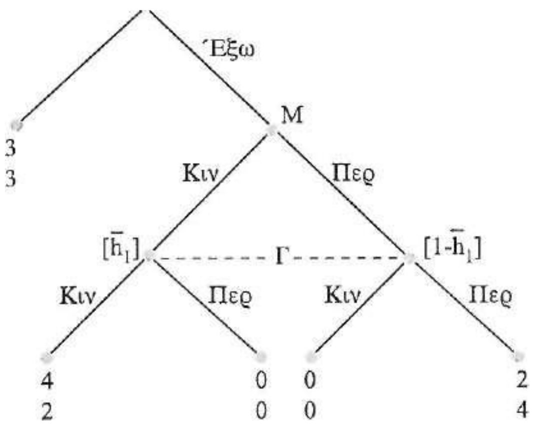
Ξαναγυρίζοντας για απλούστευση στο ΣΦΕΠ1, προσέξατε ότι θα ήταν λάθος να θεωρήσουμε ως απλές στρατηγικές της Μ τις (Σπίτι,Κιν), (Σπίτι,Περ), (Εξω,Κιν) και (Εξω,Περ). Εάν υιοθετούνταν οποιαδήποτε από τις στρατηγικές που περιλαμβάνουν "Σπίτι", τότε το παίγνιο δεν θα έφθανε στον δεξιό του κόμβο. Το (μονομελές) σύνολο πληροφόρησης που ορίζει αυτός ο κόμβος, δεν είναι "συμβατό" με καμία εκ των απλών στρατηγικών (Σπίτι,Κιν) και (Σπίτι,Περ). Ένα (μονομελές ή μη) σύνολο πληροφόρησης ενός παίκτη i είναι συμβατό (compatible) με μια απλή στρατηγική s_i του i εάν αυτή του η στρατηγική (ή και κάποιος συνδυασμός των απλών στρατηγικών των αντιπάλων τον) μπορεί να προκαλέσουν την εμφάνιση του εν λόγω συνόλου πληροφόρησης όταν ο i εφαρμόσει την στρατηγική του i;. Για παράδειγμα, (πάλι), το αριστερό σύνολο πληροφόρησης του παίγνιου ΤΕΧΙ δεν θα ήταν συμβατό με μια στρατηγική σαν την $[\hat{s}_{1,}(s_1^{'}, s_1^{+})]$, διότι ενώ δεν υπάρχει περίπτωση να εμφανισθεί αυτό το σύνολο αν παιχθεί η $\hat{s}_1$, η στρατηγική προβλέπει για το εν λόγω σύνολο το παίξιμο της $s_1^{'}$, (και για το δεξιό σύνολο το παίξιμο της s_1^{+}).

Πρέπει στη συνέχεια να ορίσουμε επίσης την έννοια της συμπεριφορικής στρατηγικής (behavioral strategy) σ_i του παίκτη i. Αυτή προβλέπει από μια κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις κινήσεις του κάθε συνόλου πληροφόρησης του i.

Η κάθε σελίδα του "τετραδίου (συμπεριφορικών) στρατηγικών" του παίκτη i, περιλαμβάνει συγκεκριμένες (αλλά διαφορετικές η κάθε μια) τιμές των πιθανοτήτων με τις οποίες σκοπεύει ο i να παίξει την κάθε κίνησή του αν βρεθεί στο πρώτο πολυμελές ή μη σύνολο πληροφόρησής του, μετά τις συγκεκριμένες πιθανότητες για το δεύτερο εν σειρά σύνολο πληροφόρησής του, κ.ο.κ. Η συμπεριφορική στρατηγική που θα καταγράφει η επόμενη σελίδα, θα διαφέρει της προηγούμενης μόνον ως προς τις συγκεκριμένες τιμές των πιθανοτήτων.

Το τετράδιο θα έχει τόσες σελίδες όσες είναι και οι συμπεριφορικές στρατηγικές, θα δίνει δηλαδή το σύνολο Σi των συμπεριφορικών στρατηγικών σ_i.

M



ΠαίγνιοΣΦΕΠΙ1

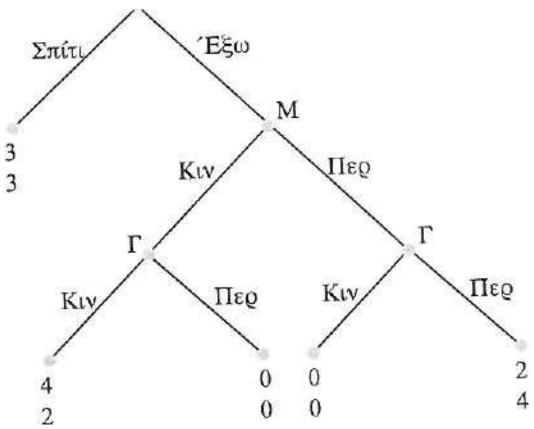
	κιν	περ	
(σπίτι)	3,3	3,3	
(Εξω,	4,2	0,0	Κιν)
(Έξω,	0,0	2,4	Περ)

Παίγνιο ΣΦΕ1

Η γενική μορφή μιας τέτοιας στρατηγικής έχει όπως της Μ στο ΣΦΕΠ1, μια κατανομή (b,1-b) όσον αφορά (Σπίτι,Έξω) και μια κατανομή (h1,1-h1) ως προς (Κιν,Περ), ενώ για τον Γ έχουμε μόνο την κατανομή (h2,1-h2) όσον αφορά (Κιν,Περ). Στο ΤΕΧ1, η γενική μορφή μιας συμπεριφορικής στρατηγικής του παίκτη 1 είναι η [(b1,b2,1-b2) , (h1,1-h1), (h'1,1- h'1),ως προς [(s_1^{*}, $\bar{s}_1$, $\hat{s}_1$) (s_1^{+}, $s_1^{'}$: αριστερό σύνολο πληροφόρησης), (s_1^{+}, $s_1^{'}$: δεξιό σύνολο)]

Η συμπεριφορική στρατηγική του παίκτη 2 θα είναι η [((h12-h12, (h'2,1-h'2,)] : ως προς [(s_2^{*}, $\bar{s}_2$: αριστερός κόμβος απόφασης),(s_2^{*}, $\bar{s}_2$: δεξιός κόμβος)]. Δηλαδή, αν η Μ του ΣΦΕΠ1 έπαιζε με αντιπροσώπους, η κατανομή (b-1b) θα μπορούσε να εκλογικευθεί ως η μεικτή στρατηγική που θα έπαιζε ο 1ος αντιπρόσωπος, και η (h1,1-h1) ως η μεικτή στρατηγική που θα έπαιζε ο 2ος αντιπρόσωπος στη δι' αντιπροσώπων κανονικής μορφής αναπαράσταση ΣΦΕΠ3 του ΣΦΕΠ1. Παρομοίως, οι κατανομές πιθανοτήτων των συμπεριφορικών στρατηγικών στο παίγνιο ΤΕΧ1, θα μπορούσαν να ερμηνευθούν ως οι μεικτές στρατηγικές των αντιπροσώπων στη δι' αντιπροσώπων κανονική μορφή του ΤΕΧ1, με τον παίκτη 1 να παίζει με τρεις αντιπροσώπους, (ένας στην ρίζα του ΤΕΧ και ένας ανά σύνολο πληροφόρησης του1), και τον 2 να παίζει με δύο αντιπροσώπους,ένας ανά κόμβο απόφασης του 2).

M



Παίγνιο ΣΦΕΠ2

	(Κιν,Κιν)	(Κιν,Περ)	(Περ,Κιν)	(Περ,Περ)
(Σπίτι)	3,3	3,3	– =	3,3
(Εξω,Κιν)	4,2	4,2	0,0	0,0
(Εξω,Περ)	0,0	0,0	2,4	2,4

Παίγννο ΣΦΕ2

Γ Γ

Π

	Κιν	Περ
$1^{ος}$ της Μ Σπίτι	3,3,3	3 3 3
Έξω	4,2,4	0,0,0

	Κιν	Περ
$1^{ος}$ της Μ Σπίτι	3 ,3 3	3,3,3
Έξω	0,0,0	2,4,2

Κιν Περ

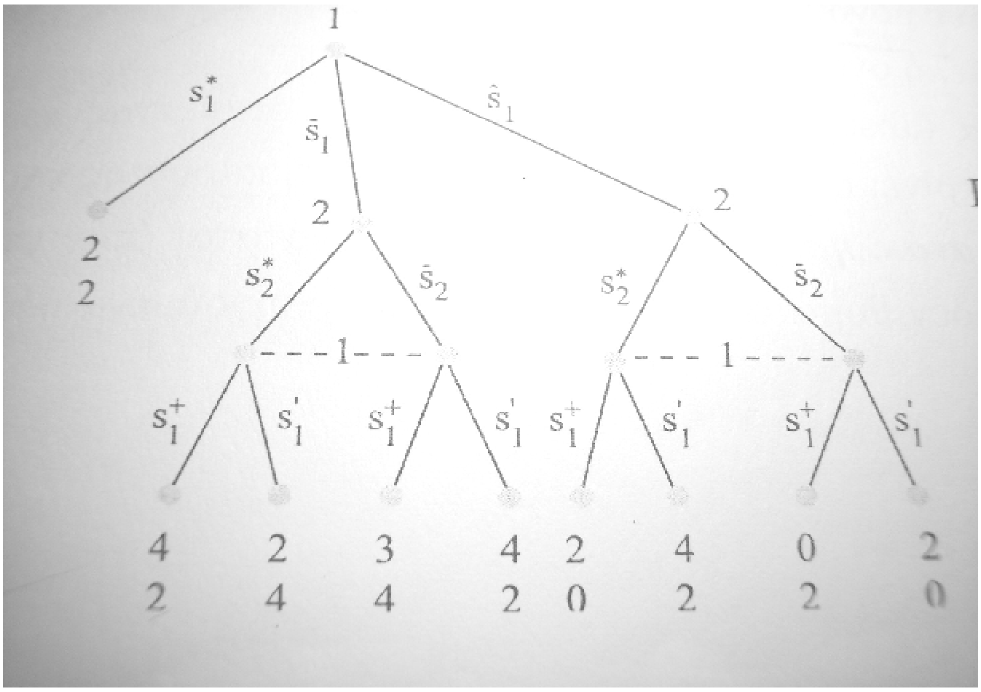
2ος της Μ

Παίγνιο ΣΦΕΠ3

Αλλά τότε η ***μεικτή στρατηγική*** που θα έπαιζε ένας παίκτης σ' ένα οποιοδήποτε παίγνιο Γ από μόνος του, χωρίς αντιπροσώπους, θα πρέπει να είναι η μεικτή στρατηγική που θα έπαιζε στην κανονικής μορφής αναπαράσταση του Γ. Πράγματι, μια μεικτή στρατηγική mi του παίκτη i σ' ένα παίγνιο Γ, είναι μια κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις απλές του στρατηγικές στο παίγνιο, οι οποίες και καθορίζουν τις διαστάσεις του πίνακα αποδόσεων της κανονικής μορφής αναπαράστασης του Γ.

Για παράδειγμα, η μεικτή στρατηγική της Μ στο ΣΦΕΠ1 είναι η ($f1^1$, $f1^2$,1 – $f1^1$ –$f1^2$) ως προς τις απλές της στρατηγικές (Σπίτι), (Έξω,Κιν) και (Έξω,Περ), ενώ η μεικτή στρατηγική (f2,1-f2) του Γ συμπίπτει με την συμπεριφορική στρατηγική (h2,1-h2) ως προς (Κιν,Περ). Επίσης, η μεικτή στρατηγική του παίκτη 1 στο ΤΕΧ1 είναι η ($f1^1$,$f1^2$, $f1^3$,$f1^4$, $f1^5$) ως προς τις πέντε απλές στρατηγικές που αναφέραμε νωρίτερα, με την ίδια σειρά και με τα f1 ν' αθροίζουν στη μονάδα. Η μεικτή στρατηγική του παίκτη 2 στο ίδιο παίγνιο είναι

($f2^1$,$f2^2$, $f2^3$,$f2^4$) ως προς τις απλές στρατηγικές (s_2^* , s_2^*), (s_2^*, $\bar{s}_2$), ($\bar{s}_2$, s_2^*), ($\bar{s}_2$, $\bar{s}_2$), με το άθροισμα των f2 να δίνει πάλι τη μονάδα.



Παίγνιο ΤΕΧ1

Δύο παρατηρήσεις πρέπει να γίνουν πριν κλείσουμε αυτό το μέρος. ***Πρώτον.*** Εάν χρησιμοποιούσαμε την ερμηνεία μιας κατανομής πιθανοτήτων ως το αποτέλεσμα της χρήσης κάποιου πιθανογεννήτορα μηχανισμού, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπό την μεικτή στρατηγική, ο μηχανισμός αυτός ενός παίκτη χρησιμοποιείται άπαξ στην αρχή του παίγνιου για να καθορίσει τις πιθανότητες των κινήσεων του παίκτη για όλο το παίγνιο, ενώ υπό την συμπεριφορική στρατηγική, ο μηχανισμός χρησιμοποιείται κάθε φορά που ο παίκτης φθάνει σε σύνολο πληροφόρησης. ***Δεύτερον:*** Εάν σε μια συμπεριφορική στρατηγική ενός παίκτη, όλες οι κινήσεις του σε κάθε μονομελές ή μη σύνολο πληροφόρησής του συνδέονται με κάποια θετική πιθανότητα, τότε η στρατηγική αυτή αποκαλείται πλήρως ή αυστηρά ή εντελώς μεικτή συμπεριφορική στρατηγική (completely or strictly mixed behavional). Αν για παράδειγμα η συμπεριφορά στρατηγικής της Μ στο ΣΦΕΠ1 ήταν η [b=0, 1-b=1), (h1,1-h1)] ή απλώς [(0,1), ((h1,1-h1)], αυτή δεν θα ήταν εντελώς μεικτή.

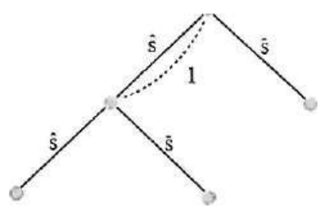
5.2. Ισοδυναμία Στρατηγικών και Τέλεια Ανάκληση

(KUHN, Harsanyi, 1967/1968 – Ritzberrger, 2002)

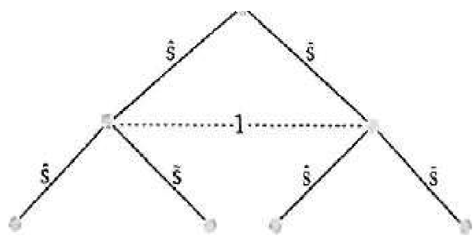
Εάν υποτεθεί ότι ένας παίκτης παίζει δι' αντιπροσώπων, η τέλεια πληροφόρηση επιτρέπει τον συντονισμό των κινήσεών τους, Υπό ατελή ωστόσο πληροφόρηση, η συμπεριφορά ενός ή περισσοτέρων αντιπροσώπων μπορεί να είναι "μυωπική", αποσυντονίζοντας το παίξιμο του όλου παίγνιου με επιλογές τις οποίες ο παίκτης που αντιπροσωπούν θα έκανε μόνον αν ήταν "αφηρημένος" ή αν ακόμη χειρότερα παρουσίαζε "ατελή ανάκληση".

Αφηρημάδα (absent-mindedness) υφίσταται όταν ένας παίκτης αδυνατεί να διακρίνει σαφώς μεταξύ παρελθόντος, παρόντος και μέλλοντος. Ατελής ανάκληση (imperfect recall) υφίσταται όταν επιπρόσθετα ο παίκτης δεν θυμάται (α) τι είχε κάνει προηγούμενα ή και (β) τι ήξερε προηγούμενα στο παίγνιο. Για παράδειγμα, στο παίγνιο Κ1, ο παίκτης 1 είναι αφηρημένος, δεν θυμάται αν έχει ξαναπαίξει, ενώ στο παίγνιο Κ2[5] ο 1 δεν θυμάται τι έχει παίξει.

1



Παίγνιο Κ1



Παίγνιο Κ2

Τώρα, το σκεπτικό για την απουσία αφηρημάδας στηρίζεται στο εξής: Εάν ο κάθε αντιπρόσωπος ενός παίκτη i δεν κάνει "ό,τι του αρέσει" σαν να έπαιζε αφηρημένος ο i, τότε το παίξιμο του όλου παίγνιου που προκύπτει απ' αυτούς πρέπει να είναι τόσο αποδοτικό όσο θα ήταν αν το έπαιζε ο ίδιος ο παίκτης i.

Το σκεπτικό για την απουσία ατελούς ανάκλησης στηρίζεται στο εξής: Αν ένας παίκτης i παίζει σε κάθε σύνολο πληροφόρησής του τόσο "συνειδητά" όσο θα έπαιζαν αντιπρόσωποί του σ' αυτά, τότε το παίξιμο του i πρέπει να είναι τόσο αποδοτικό όσο το συνολικό παίξιμο που θα προέκυπτε από τους αντιπροσώπους. Και επειδή, η στρατηγική που παίζει ο ίδιος ο παίκτης είναι μεικτή, ρίχνοντας τα ζάρια στην αρχή του παίγνιου, ενώ η στρατηγική που προκύπτει από τα ζάρια που ρίχνει ο κάθε αντιπρόσωπος στο δικό του σύνολο πληροφόρησης, είναι συμπεριφορική, μπορούμε να προχωρήσουμε στις εξής διαπιστώσεις.

Δεν θα υπήρχε αφηρημάδα εάν ο κάθε αντιπρόσωπος μπορούσε από τον συνδυασμό των συμπεριφορικών στρατηγικών των παικτών (των μεικτών στρατηγικών των αντιπροσώπων) να φτιάξει για όλο το παίγνιο τον συνδυασμό των μεικτών στρατηγικών (των παικτών) που θα έδινε την ίδια κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις πιθανές ιστορίες του παίγνιου, όπως ο συνδυασμός των συμπεριφορικών στρατηγικών. Δηλαδή, δεν θα υπήρχε αφηρημάδα εκ μέρους των αντιπροσώπων εάν ο καθένας απ' αυτούς μπορούσε να συμπεράνει τι θα έκαναν οι ίδιοι οι παίκτες σε όλο το παίγνιο.

Για παράδειγμα, στο ΣΦΕΠ1, η κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις ιστορίες (Σπίτι), (Εξω,Κιν,Κιν), (Εξω,Κιν,Περ), (Εξω,Περ,Κιν) και (Εξω,Περ,Περ) είναι αυτή που σχηματίζουν οι πιθανότητες: b, [(1-b) h1h2] , [(1-b)h1(1-h2)], [(1-b) , (1-b) (1-h1)h2] και [(1-b) , (1-h1) (1-h2)] αντιστοίχως. Η κατανομή πιθανοτήτων που συνεπάγεται ο συνδυασμός των μεικτών στρατηγικών γι' αυτές τις ιστορίες είναι η [$f1^1$, $f1^2$,f2, $f1^2$ (1^- f2) , (1- $f1^1$, $f1^2$) ,(1- $f1^1$ - $f1^2$) (1-f2)] είναι απηλλαγμένο αφηρημάδας εάν

$f1^{1=}b$

$f1^2 f2 = (1\text{-}b)\, h_1\, h_2$

$f1^2(1\text{-}f_2^{)\,=}(\,1\text{-}b)\, h_1\,(1^{-}\, h_{2)}$

$(\,1\text{-}\, f1^1 - f1^2\,)\, f_2 = (\,1\text{-}b)\,(1\text{-}\, h_1)\, h_2$

$(\,1\text{-}\, f1^1 - f1^2\,)\,(\,1\text{-}\, f_2\,) = (\,1\text{-}b)\,(1\text{-}h_1\,)\,(\,1\text{-}\, h_2\,)$

Γενικά, ένα παίγνιο Γ είναι απηλλαγμένο αφηρημάδας εάν υπάρχει κάποιος συνδυασμός των μεικτών στρατηγικών των παικτών που μπορεί να παράγει την ίδια κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις ιστορίες του παίγνιον, όπως ο συνδυασμός των συμπεριφορικών στρατηγικών.

Το κριτήριο για την τέλεια ανάκληση (perfect recall) είναι ακριβώς το αντίστροφο 5 γιατί ένας παίκτης θα θυμάται τι έκανε και τι ήξερε, εάν έκανε και ήξερε ό,τι και ο κάθε αντιπρόσωπος. Ένα παίγνιο Γ είναι τέλειας ανάκλησης εάν υπάρχει κάποιος συνδυασμός των συμπεριφορικών στρατηγικών των παικτών που μπορεί να παράγει την ίδια κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις ιστορίες τον παίγνιον, όπως ο συνδυασμός των μεικτών στρατηγικών. Και επειδή η τέλεια ανάκληση περιλαμβάνει και την απουσία αφηρημάδας, πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα και το κριτήριο γΓ αυτήν την απουσία.

Προσέξατε εν συνεχεία ότι εφόσον η πιθανότητα εμφάνισης, πραγματοποίησης, μιας ιστορίας είναι και η πιθανότητα εμφάνισης του τερματικού κόμβου στον οποίο καταλήγει, η κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις ιστορίες είναι και η κατανομή ως προς τους τερματικούς κόμβους και άρα ως προς τις αποδόσεις. Και εφόσον διαφορετικές μεικτές ή συμπεριφορικές στρατηγικές ή διαφορετικοί συνδυασμοί μεικτών ή συμπεριφορικών στρατηγικών οδηγούν σε διαφορετικές τιμές των πιθανοτήτων που περιλαμβάνει μια τέτοια κατανομή, σε διαφορετική κατανομή, κάθε κατανομή αποτελεί και το ***αποτέλεσμα*** (outcome) κάποιας μεικτής ή συμπεριφορικής στρατηγικής ή κάποιου συνδυασμού μεικτών ή συμπεριφορικών στρατηγικών.

Δύο μεικτές στρατηγικές, ή δύο συμπεριφορικές στρατηγικές, ή δύο συνδυασμοί μεικτών στρατηγικών, ή δύο συνδυασμοί συμπεριφορικών στρατηγικών, ή μια μεικτή και μια συμπεριφορική, ή ένας συνδυασμός μεικτών και ένας συνδυασμός συμπεριφορικών στρατηγικών, θα είναι ***ισοδύναμου αποτελέσματος*** (outcome equinalent) ή ***ισοδύναμων αποδόσεων*** (payoff equinalent) εάν δεν οδηγούν σε διαφορετική αλλά στην ίδια κατανομή ως προς τους τερματικούς κόμβους και τις αποδόσεις.

Εν όψει αυτής της νέας (τεχνικής) ορολογίας, τα κριτήρια για την απουσία αφηρημάδας και ατελούς ανάκλησης μπορούν να επαναδιατυπωθούν ως εξής: Εάν για κάθε συνδυασμό συμπεριφορικών στρατηγικών σ' ένα παίγνιο Γ, υπάρχει συνδυασμός μεικτών στρατηγικών ισοδύναμου αποτελέσματος, τότε το παίγνιο είναι απηλλαγμένο αφηρημάδας.

Και, αν για κάθε συνδυασμό μεικτών στρατηγικών υπάρχει συνδυασμός συμπεριφορικών στρατηγικών ισοδύναμου αποτελέσματος, τότε το παίγνιο είναι .τέλειας ανάκλησης. Εξυπακούεται ότι αν οι παίκτες έχουν τόση δυνατή μνήμη ώστε να θυμούνται συνδυασμούς, τότε πρέπει ο καθένας απ' αυτούς να θυμάται και το δικό του μενού μεικτών και συμπεριφορικών στρατηγικών.

Μπορεί να δειχθεί ότι για την απουσία αφηρημάδας αρκεί για κάθε συμπεριφορική στρατηγική του παίκτη i να υπάρχει μια μεικτή στρατηγική του i ισοδύναμου αποτελέσματος ενώ για την απουσία ατελούς ανάκληση αρκεί για κάθε μεικτή στρατηγική του i να υπάρχει μια συμπεριφορική στρατηγική του i ισοδύναμου αποτελέσματος. Η ύπαρξη τέτοιας ισοδυναμίας είναι γνωστή ως Θεώρημα του Kuhn και η υπ' αυτήν έννοια περί τέλειας ανάκλησης είναι βέβαια λιγότερο αυστηρή.

<u>5.3. Ισορροπία N3δIι (Μεικτών) Συμπεριφορικών Στρατηγικών</u>

(Kuhn, 1953 - Binmore, 1992)

Το συμπέρασμα "ισοδυναμία μεικτών και συμπεριφορικών στρατηγικών=τέλεια ανάκληση" αποτελεί αναγκαία, αλλά, όπως θα δούμε από το τέλος κιόλας αυτού του μέρους, όχι επαρκή συνθήκη για τον συντονισμό του παιξίματος. Μπορεί ωστόσο ν' αποτελέσει την βάση για την εξεύρεση μνας πρώτης λύσης σ' ένα παίγνιο Γ. Μας επιτρέπει να προχωρήσουμε σε μια απλή επέκταση της έννοιας της NEMS δια της αναζήτησης εκείνης της ισορροπίας μεικτών στρατηγικών της δι' αντιπροσώπων κανονικής μορφής ενός παίγνιου Γ, που επίσης αποτελεί ισορροπία μεικτών στρατηγικών στην κανονική μορφή. Και αφού, η πρώτη μεικτή στρατηγική ισορροπίας συνθέτει εξ ορισμού μια συμπεριφορική στρατηγική, η ούτω προκύπτουσα ισορροπία αποκαλείται Ισορροπία Nash (Μεικτών) Συμπεριφορικών Στρατηγικών, (NEMBS, Nash Equilibrium in Behavioral Strategies). Για την εξεύρεση μιας NEMBS, αρκεί η εξεύρεση μιας NEMS στο κανονικής μορφής παίγνιο, διότι μπορεί να δειχθεί ότι λόγω της ισοδυναμίας, οποιαδήποτε αναπαράσταση μιας τέτοιας NEMS ως συμπεριφορική στρατηγική, θα αποτελεί ισορροπία στη δι' αντιπροσώπων κανονική μορφή.

Για παράδειγμα, στο ΣΦΕΠ1, οι ιστορίες προς θεώρηση για την Μ είναι τώρα οι (Σπίτι), (Εξω,Κιν) και (Εξω,Περ). Η συμπεριφορική στρατηγική της Μ δίνει γι' αυτές τις ιστορίες τις πιθανότητες b_1 $_($ 1- b) h_1 και (1- b)(1- h_1). Για κάθε συμπεριφορική στρατηγική της Μ θα υπάρχει και μια μεικτή στρατηγική της Μ ισοδύναμου αποτελέσματος εάν $b= f1^1$,$(1- b)\, h_1 = f1^2$ και $(1- b)(1-h_1\,) = 1-$ $f1^{1-}$ $f1^2$ ως προς το αποτέλεσμα που δίνει η κατανομή πιθανοτήτων (φ1,φ2,φ3,φ4,1-φ1-φ2-φ3-φ4) για τα ζεύγη αποδόσεων (3,3), (4,2), (0,0), (0,0) και (2,4) με την ίδια σειρά.

Αν εξαιρέσουμε την πιθανότητα φ1 ως προς τα ζεύγη (3,3), η οποία πιθανότητα ελέγχεται πλήρως από την Μ, καθιστώμενη μοναδιαία αν αυτή θέσει $b=f1^{1=}$ 1, το αποτέλεσμα στο οποίο θα αναφέρεται η ισοδυναμία είναι η κατανομή (γ1,γ2,γ3,1-γ1-γ2-γ3) ως προς τα υπόλοιπα ζεύγη αποδόσεων, (4,2), (0,0), (0,0) και (2,4). Αυτό είναι και το αποτέλεσμα ως προς το οποίο η συμπεριφορική ($f_{2,}$1- f2) του Γ ισοδυναμεί με τη μεικτή του Γ, (h_2 , 1- h_2). Αν η Μ δεν θέσει b= $f1^1$ = 1, οι αποδόσεις του Γ θα αφορούν και την Μ, διότι αν η Μ παίξει Έξω αφήνοντας το παίγνιο να συνεχισθεί και να τελειώσει από τον Γ, οι αποδόσεις της θα εξαρτώνται πλήρως από τις επιλογές του Γ.

Τέλος, σε κάθε μεικτή στρατηγική της Μ αντιστοιχεί μια ισοδύναμη συμπεριφορική στρατηγική: Εάν την πιθανότητα $f1^1$ την δούμε σαν το γινόμενο της πιθανότητας z ως προς Έξω, με την πιθανότητα (α) χ ως προς Κιν, και (β) y ως προς Περ, με χ+y =1, τότε ($f1^1$, $f1^2$, $f1^3$ = 1- $f1^1$ - $f1^2$) = ($f1^1$, zx, zy= 1- $f1^1$ - zx). Από τη σχέση zy= 1- $f1^1$ –zx).=> z(x+y) = 1 - $f1^1$ και έτσι, η ($f1^1$, $f1^2$, $f1^3$ = 1- $f1^1$ - $f1^2$) είναι ισοδύναμη με την ($f_{1,}$ 1-f_1) ως προς (Σπίτι, Έξω) και (χ, 1 -χ) ως προς (Κιν, Περ).

Τώρα, για το ΣΦΕΠ1, η εξίσωση της προσδοκώμενης απόδοσης του Γ από την Κιν και την Περ, δίνει σε όρους μεικτών στρατηγικών, ότι $3f1^1 + 2f1^2 + 0 (1- f1^1 - f1^2) = 3f1^1 + 0f1^2 + 4(1-f1^1-f1^2) => 2f1^1 + 3f1^2 = 2$ (1) και σε όρους συμπεριφορικών στρατηγικών, ότι

$$3b+2(1-b) h_1 + 0 (1-b) (1-h_1) = 3b +0 (1-b) h_1 +4 (1-b) (1-h_1) =>$$

$$2b+3h_1 = 2+3bh_1 \quad (2)$$

Η (1) γίνεται σε όρους συμπεριφορικών στρατηγικών,

$$2b+3(1-b) h_1 => 2b +3 h_1 = 2+3 b h_1 \quad (1')$$

η οποία ταυτίζεται με την (2). Θέτοντας σ' αυτήν οποιοδήποτε b ε [0,1), και λύνοντας μετά ως προς h_1, λαμβάνουμε πάντα ότι $h_1=2/3$. Η Μ κατά τον Γ παίζει Κιν με πιθανότητα 2/3 όχι βέβαια για οποιοδήποτε b ε [0,1) αλλά αν συγκεκριμένα δεν παίξει Σπίτι, δηλαδή αν b=0, γιατί αλλιώς δεν θα θεωρούσε ότι $1- h_1=1/3$.

Εφόσον αυτό το ξέρει η Μ για τον Γ, και η Μ πιστεύει ότι ο Γ παίζει Κιν με πιθανότητα h_2, η εξίσωση της προσδοκώμενης απόδοσης της Μ από τις Κιν και Περ δίνει ότι

$$4 h_2 + 0 (1- h_2) = 0 h_2 +2 (1- h_2) => h_2 = 1/3$$

Συνεπώς, μια NEMB8S είναι η

$$\{ [b=0, 1-b = 1], (h_1 = 2/3 , 1- h_1 = 1/3) , (h_2 =1/3 , 1- h_2 = 2/3)\}$$

ή απλώς, η {[(0,1),(2/3,1/3)], (1/3,2/3)}, που αποτελεί άμεση προέκταση της NEMS του παίγνιου ΣΦ. Υπάρχει βέβαια και η NEMBS, [(1,0), h_1 =οποιοδήποτε, h_2 =οποιοδήποτε], που προκύπτει αν στην (2) ή στην (Γ) θέσουμε b=1, και που αναδεικνύει τους περιορισμούς της NEMBS ως έννοιες λύσης, περιορισμούς με τους οποίους θα ασχοληθούμε, αφού δούμε για σύγκριση και ένα άλλο παράδειγμα NEMBS μέσω του εκτατικού παίγνιου Ξ1 και της κανονικής μορφής του, Ξ2.

Έστω ότι $f1^1$, $f1^2$ και $f1^3 = 1- f1^1 - f1^2$ είναι οι πιθανότητες με τις οποίες ο παίχτης 1 παίζει κατά τον παίχτη 2 τις απλές στρατηγικές (s_1*) , $(\hat{s}_1, \bar{s}_1)$ και $(\hat{s}_1, s_1^+)$ αντιστοίχως. Η εξίσωση της προσδοκώμενης απόδοσης του 2 από την s_2^* και την $\hat{s}_2$ στο Ξ 2 δίνει ότι

$$3 f1^1 + 2 f1^2 +4 (1+ f1^1 - f1^2) = 4 f1^1 + 6 f1^2 + 3(1- f1^1 - f1^2) => 2 f1^1 +5 f1^2 =1 \qquad (3)$$

Αν ο 1 έπαιξε τις s_1^{*} και $\hat{s}_1$ με πιθανότητες b1 και 1-b αντίστοιχα και τις $\bar{s}_1$ και $s_1^{'}$ με πιθανότητες h και (1-h) , πάντα κατά τον 2, τότε η ίδια ισότητα θα έδινε b_1

$3 b_1 + 2 (1- b_1) h+4 (1- b_1) – (1-h) = 4 b_1+ 6 (1- b_1) h+3(1- b_1) (1-h)=>$

$2 b_1+ 5h = 1+ b_1 h$ (4)

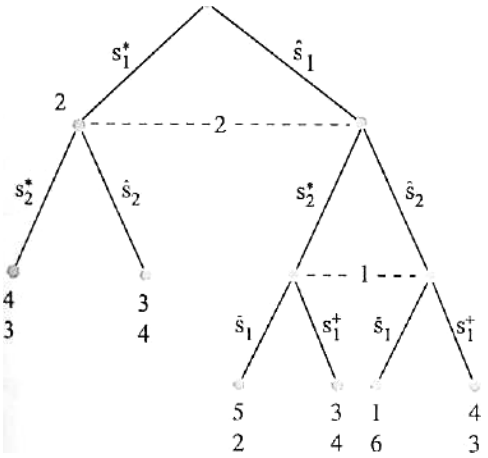
Επίσης η (3) θα γινόταν

$2 b_1 + 5(1- b_1) h =1 => 2 b_1 + 5h = 1+5 b_1h$ (3')

Από τις (3') και (4) προκύπτει ότι h=0 και άρα ότι $b_1= f1^1 =1/2$. Δηλαδή, ο 1 κατά τον 2 παίζει πάντα s_1^* ενώ επιλέγει μεταξύ s_1^* και $\hat{s}_1$ στρίβοντας απλώς ένα νόμισμα. Εφόσον αυτό το ξέρει ο 1 για τον 2 και ο 1 πιστεύει ότι ο 2 παίζει s_2^* με πιθανότητα b_2 , η εξίσωση της προσδοκώμενης απόδοσης του 1 από τις (s_1^*) και ($\hat{s}_1, s_1^+$), δίνει ότι

$4 b_2 + 3 (1- b_2) = 3 b_2+ 4 (1- b_2) => b_2 =1/2$. Οπότε, η NEMBS είναι η {[(1/2,1/2),(0,1)],(1/2,1/2)}.

Αλλά αυτό το συμπέρασμα δεν είναι ικανοποιητικό, δεν αναγνωρίζει ότι εφόσον η τιμή h=0 αποτελεί κοινή γνώση, και άρα ότι εφόσον ο παίκτης 1 σκοπεύει σίγουρα να παίξει s_1^+ και ως εκ τούτου $\hat{s}_1$, τότε θα έπρεπε να ίσχυε ότι $b_1 = f1^1 =0$. Επίσης, στο ΣΦΕΠ1, η NEMBS {[(0,1)(2/3,1/3)],(1/3,2/3)} παραγνωρίζει το γεγονός ότι εφόσον το Σπίτι κυριαρχεί αυστηρά την (Έξω,Περ) της Μ, (3>0, 3>2), τότε αν η Μ δεν έπαιζε Σπίτι, θα έπαιζε (Έξω,Κιν) και θα έπρεπε ο Γ να ακολουθήσει κι αυτός με Κιν, δηλαδή αν b=0 τότε $h_1= h_2 =1$.



	S_2^*	$\hat{S}_2$
s_1^*	4,3	3,$\underline{\underline{4}}$
$\hat{s}_1$, $\bar{s}_1$	$\underline{5}$,2	1,$\underline{\underline{6}}$
$\hat{s}_1$ s_1^+	3,$\underline{\underline{4}}$	$\underline{4}$,3

Παίγνιο Ξ1 Παίγνιο Ξ2

Στην άλλη NEMS του ΣΦΕΠ1, στην [(1,0), h_1 = οποιοδήποτε, h_2 οποιοδήποτε], στην οποία η Μ παίζει Σπίτι και δεν προχωρά το παίγνιο στο μοναδικό του υποπαίγνιο, δεν θα έπρεπε οι πιθανότητες h να ήταν άνευ σημασίας, μόνο και μόνο επειδή δεν προβλέπεται (απ' αυτή την NEMBS) να παιχθεί. δεν θα έπρεπε να ήταν αδιάφορο το πώς θα παίζονταν το υποπαίγνιο. Τι, αν τυχόν παίζονταν;

Το γενικό συμπέρασμα απ' αυτή την αξιολόγηση των NEMBS είναι ότι η τέλεια ανάκληση δεν εξασφαλίζει αναγκαία συντονισμό του παιξίματος. Είναι απαραίτητη αλλά χρειάζεται επιπλέον η σωστή διαμόρφωση εικασιών για τον κόμβο στον οποίο καλείται να παίξει κάποιος σε πολυμελές σύνολο πληροφόρησης. Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των παρατηρήσεών μας για τις παραπάνω NEMBS, αυτό που επισημαίνουν έμμεσα πλην σαφώς, είναι η απουσία τέτοιων ακριβώς εικασιών από την NEMBS. Πρόκειται ασφαλώς περί εικασιών άλλων από εκείνων για τυχόν παίξιμο εκτός της κατάστασης ισορροπίας που δημιουργεί το B-IO, αφού το ενδεχόμενο αυτό είναι ήδη ενσωματωμένο στις έννοιες της στρατηγικής.

Πρόκειται για κατανομές πιθανοτήτων ως προς τους κόμβους απόφασης κάθε πολυμελούς συνόλου πληροφόρησης, κατανομές αποδιδόμενες με τον όρο ***σύστημα εικασιών*** (system of beliefs), ο οποίος όρος χρησιμεύει και για τη διάκριση των δύο ειδών εικασιών. Το πρόβλημα με την NEMBS ως έννοια λύσης είναι ότι δεν συνοδεύεται από ένα τέτοιο σύστημα. Μήπως όμως η αξιοποίηση και πάλι της οπισθοβατικής επαγωγής, μια προσαρμογή της έννοιας της SPNE στα παίγνια Γ, θα μπορούσε να λύσει ή τουλάχιστον να συμβάλλει στη λύση αυτού του προβλήματος, ειδικά επειδή η SPNE αφορά τα εκτατικά παίγνια και το πρόβλημα περί εικασιών παρουσιάζεται μόνο σε τέτοια παίγνια; Μ' αυτό ακριβώς το θέμα θα ασχοληθούμε αμέσως τώρα.

5.4 Η SPNE και Πάλι (Myerson , 1991 - Ritzberger, 2002)

Πώς επηρεάζει η ατελής πληροφόρηση την εξεύρεση μιας 8PNE; Θα ανέμενε κάποιος να το έκανε δια της εισαγωγής συστήματος εικασιών, δια του σχηματισμού πιθανοτήτων για τους κόμβους απόφασης του κάθε πολυμελούς συνόλου πληροφόρησης ξεχωριστά, στα οποία μπορεί να παίζει ένας παίκτης. Όμως, για την "προσαρμογή" του αλγόριθμου του Kuhn στην ατελή πληροφόρηση, αρκεί ο σχηματισμός πιθανοτήτων για όλους τους κόμβους στους οποίους μπορεί να παίζει κάποιος σε μια στιγμή, ανεξάρτητα συνόλου πληροφόρησης και υποπαίγνιου. Πιθανοτήτων για καθέναν απ' αυτούς τους κόμβους χωριστά υπό την συνθήκη πραγματοποίησης των συμπεριφορικών στρατηγικών που οδηγούν στο σύνολο κόμβων στο οποίο ανήκουν οι εν λόγω κόμβοι.

Η σύγκριση μετά προσδοκώμενων αποδόσεων σε κάθε υποπαίγνιο βάσει αυτών των πιθανοτήτων Bayes, μπορεί να δώσει την ισορροπία Nash κάθε υποπαίγνιου, και "συγκολλώντας" αυτές τις ισορροπίες, λαμβάνουμε την ή τις 8PNE: Αυτή ακριβώς η διαδικασία συνθέτει το ***λήμμα του Kuhn***, Έτσι, ενώ μια SPNE ενός παίγνιου Γ αποτελεί NEMBS, η μετατροπή του αλγόριθμου του Kuhn η σε λήμμα του Kuhn που προϋποθέτει η εξεύρεση μιας τέτοιας SPNE, συνεπάγεται ότι μια NEMBS δεν αποτελεί αναγκαία SPNE.

Ας συνεχίσουμε με μερικά παραδείγματα εξεύρεσης SPNE, με πρώτο το παίγνιο ΣΦΕΠ1, το οποίο έχει ένα διμελές σύνολο πληροφόρησης για τον παίκτη Γ στο τέλος του μοναδικού υποπαίγνιου του ΣΦΕΠ1. Η πιθανότητα να έχει βρεθεί σ' αυτό το σύνολο είναι η πιθανότητα να έχουν πραγματοποιηθεί προηγούμενα από την Μ οι ιστορίες (Εξω,Κιν) και (Εξω,Περ) βάσει βέβαια της συμπεριφορικής στρατηγικής της: $(1\text{-}b)h_1$+ $(1\text{-}b)(1\text{-}h_1)$.

Συνεπώς, η πιθανότητα να παίζει ο Γ στον αριστερό κόμβο του συνόλου πληροφόρησής του υπό την συνθήκη πραγματοποίησης αυτού του συνόλου είναι $[(1\text{-}b)h_1\,]/[\,(1\text{-}b)h_1) + (1\text{-}b)(\,1\text{-}\,h_1)]= h_1$

Η πιθανότητα Bayes για τον δεξιό κόμβο είναι

$[(1\text{-}b)(1\text{-}h_1\,]/[\,(1\text{-}b)h_1) + (1\text{-}b)(\,1\text{-}\,h_1)]= 1\text{-}\ h_1$

Η προσδοκώμενη απόδοση του Γ από την Κιν, $2h_1 +0(1\text{-}h_1)\ _1$ θα είναι ως εκ τούτου τουλάχιστον ίση με την προσδοκώμενη απόδοση από την Περ, $0h_1+4(1\text{-}h_1)$ εάν $h_1>2/3$.

Έτσι, αν $h_1>2/3$, η Μ έχει συμφέρον, σύμφωνα με την οπισθοβατική επαγωγή, να παίξει (Εξω,Κιν) για να λάβει 4>3, ενώ αν $h_1<2/3$, η Μ πρέπει να παίξει Σπίτι για να λάβει 3>2.

Έχουμε δηλαδή τις δύο SPNE [(Εξω,Κιν),Κιν] και [(Σπίτι),Περ] ανάλογα της τιμής του h_1. Αυτές είναι και οι δύο ισορροπίες Nash στην κανονικής μορφής αναπαράσταση ΣΦΕ1 του ΣΦΕΠ1.Αποτελούν επίσης SPNE του ΣΦΕΠ2, το οποίο είναι το παίγνιο τέλειας πληροφόρησης που αντιστοιχεί στο ΣΦΕΠ1.

Ο συνδυασμός [(Εξω,Κιν),Κιν] είναι το B-IO του παίγνιου ενώ υπάρχει και η SPNE [(Σπίτι),Περ] με B-IO το Σπίτι. Αυτές οι δύο SPNE λαμβάνονται και ως T-HE (εκτατικής μορφής) στη δι' αντιπροσώπων κανονική μορφή ΣΦΕΪΙ3 τόσο του ΣΦΕΠ2 όσο και του ΣΦΕΠ1: (α) Κανένας πίνακας, δηλαδή καμία στρατηγική του 2ου αντιπροσώπου της Μ, δεν κυριαρχεί την άλλη. (β) Όμως, στο αριστερό παίγνιο, ο Κιν κυριαρχεί χαλαρά τον Περ ενώ στο δεξιό παίγνιο συμβαίνει το αντίθετο, όσον βέβαια αφορά τον Γ. (γ) Στο απομένον παίγνιο αριστερά, η Έξω κυριαρχεί αυστηρά το Σπίτι, ενώ το αντίθετο ισχύει στο απομένον παίγννο δεξιά, λαμβάνοντας έτσι ως T-HE τις δύο παραπάνω SPNE. Το νέο "στοιχείο" που εισάγει η ατελής πληροφόρηση σ' αυτές τις SPNE, είναι η τιμή του h_1.

Όσον αφορά το παίγνιο TEX1, η κατανομή πιθανοτήτων που πρέπει να σχηματίσει ο παίκτης 1 όταν τελειώνει το παίγνιο, προέρχεται από τις πιθανότητες των ιστοριών $\bar{s}_1$-s_2^* , $\bar{s}_1$-$\bar{s}_2$, $\hat{s}_1$-s_2^*και $\hat{s}_1$-$\bar{s}_2$, που είναι οι b_2h_2, b_2 (1- h_2) , b_2 h_2' και b_3(1- h_2') αντιστοίχως, με b_3= 1- b_1 - b_2. Η πιθανότητα να δοθεί η ευκαιρία στον 1 να παίξει είτε την s_1^+ είτε την s_1' είναι το άθροισμα τους: $b_2 h_2 + b_2(1- h_2 + b_3 h_2' + b_3(1- h_2') = b_2 + b_3 = 1- b_1$

Έτσι, η πιθανότητα να το πράξει στον "αριστερότερο" κόμβο υπό τη συνθήκη ότι του έχει δοθεί η ευκαιρία να το πράξει, είναι (b_2 h_2) /(1- b_1).Οι υπό συνθήκη πιθανότητες των υπόλοιπων κόμβων από τα αριστερά προς τα δεξιά, είναι οι

[b_2 (1- h_2)]/(1- b_1),(b_3 h_2')/(1- b_1) και [b_3 (1- h_2')] / (1- b_1) .

Ας προχωρήσουμε τώρα στις συγκρίσεις προσδοκώμενων αποδόσεων βάσει αυτών των πιθανοτήτων των οποίων ο παρανομαστής είναι ίδιος και μπορεί ν' αγνοηθεί:

(α) Κατ' αρχάς, η απόδοση του παίκτη 1 είναι σίγουρα 2 αν παίξει s_1^* και τελειώσει το παίγνιο ευθύς εξ αρχής.

(β) Αν δεν το κάνει και παίξει $\bar{s}_1$, η προσδοκώμενη απόδοση μετά από την s_1', 4 b_2 h_2 + 3 b_2(1- h_2), θα είναι τουλάχιστον ίση εκείνης από την s_1' , 2 b_2 h_2+ 4 b_2(1- h_2),εάν h_2>1/3.

(β1) Έτσι αν h_2>1/3, ο παίκτης 2 έχει συμφέρον να παίξει 5_2 για να λάβει 4 εκ της ακολουθίας $\bar{s}_2$- s_1^+ αντί 2 εκ της ακολουθίας s_2^* - s_1^+: 0 παίκτης 1 θα λάβει τότε 3.

(β2) Αν h_2<1/3, ο 2 έχει συμφέρον να παίξει s_2^* για να λάβει 4 εκ της ακολουθίας s_2^* - s_1' αντί 2 εκ της ακολουθίας $\bar{s}_2$ - s_1': Αλλά τότε ο 1 θα λάβει 2.

(γ) Αν ο 1 παίξει $\hat{s}_1$, η προσδοκώμενη απόδοση μετά από την s_1^+ 2 b_3 h_2'+0 b_3 (1- h_2'), θα ήταν τουλάχιστον ίση εκείνης από την s_1' 4 b_3 h_2' + 2 b_3(1- h_2'), αν 0>1, που ασφαλώς δεν ισχύει και πράγματι, στο δεξιό υποπαίγνιο η $\hat{s}_1$ κυριαρχεί αυστηρά την s_1^+: 4>2 και 2>0.

(γ1 Έτσι, ο 2 έχει συμφέρον να παίξει s_2^* για να λάβει 2 εκ της ακολουθίας s_2^* - $s_1{}'$ αντί 0 εκ της ακολουθίας $\bar{s}_2$ - $s_1{}'$: 0 παίκτης 1 θα λάβει σ' αυτή την περίπτωση 4.

(δ) Συγκρίνοντας στο τέλος ο 1 τις (προσδοκώμενες) αποδόσεις του απ' αυτούς τους υπολογισμούς, συμπεραίνει ότι το καλύτερο που έχει να κάνει, (και αυτό είναι να λάβει τη μέγιστη απόδοση 4), είναι ν' αρχίσει το παίγνιο παίζοντας $\hat{s}_1$.

Οπότε, οι SPNE είναι αυτές που δημιουργεί το B-IO$_1$, $\hat{s}_1 - s_2^* - s_1'$, στο παίγνιο τέλειας πληροφόρησης, με την ακολουθία $\bar{s}_2$- s_1^+, αν $h_2>1/3$, και με την ακολουθία s_2^* - $s_1{}'$, αν $h_2<1/3$, στο αριστερό υποπαίγνιο, δηλαδή οι $\{[(\hat{s}_1, s_1'), s_1^+], (\bar{s}_2, s_2^*)\}$ και $\{[(\hat{s}_1, s_1'), s_1'], (s_2^*, s_2^*)\}$ αντίστοιχα, εκ των οποίων μόνον η πρώτη δικαιολογείται ως SPNE στο παίγνιο τέλειας πληροφόρησης.

Στο παίγνιο Ξ1, τέλος, η πιθανότητα να φθάσει ο παίκτης 1 στο διμελές σύνολο πληροφόρησής του είναι $(1\text{-}b_1)\, b_2 + (1\text{-}b_1)(1\text{-}b_2) = (1\text{-}b_1)$ οπότε η πιθανότητα να παίζει στον αριστερό κόμβο του εν λόγω συνόλου υπό την συνθήκη ότι έχει φθάσει πρώτα σ' αυτό, είναι $[(1\text{-}b_1)\, b_2\,]/ (1\text{-}b_1) = b_2$ ενώ η υπό συνθήκη πιθανότητα για τον δεξιό κόμβο είναι παρομοίως $(1\text{-}b_2)$. Επομένως, η προσδοκώμενη απόδοση του παίκτη 1 από την $\bar{s}_1$ στο σύνολο πληροφόρησής του, $5b_2+1(1\text{-}b_2)$, θα είναι τουλάχιστον ίση εκείνης από την s_1^+,$3b_2 + 4(1\text{-}b_2)$, εάν $b_2>3/5$:

Όταν $b_2>3/5$, ο 1 έχει συμφέρον να παίξει $\bar{s}_1$, σε περίπτωση που θα τον συνέφερε προηγούμενα να παίξει $\hat{s}_1$.

Για να αξιοποιήσει ο παίκτης 2 αυτό το συμπέρασμα, θα λάβει ασφαλώς υπόψη του ότι βρίσκεται κι αυτός σε διμελές σύνολο πληροφόρησης, με πιθανότητα $b_1/ [b_1 + (1\text{-}b_1)]$ να παίζει στον αριστερό του κόμβο απόφασης. Η απόδοσή του από την $\hat{s}_2$ σ' αυτόν τον κόμβο θα είναι 4 ενώ στον δεξιό κόμβο θα είναι 6 αν βέβαια $b_2>3/5$ και ο παίκτης 1 παίξει μετά $\bar{s}_1$. Δηλαδή, η προσδοκώμενη απόδοση του 2 από την $\hat{s}_2$ όταν $b_2>3/5$, θα είναι $4b_1+6(1\text{-}b_1)$ καν θα είναι τουλάχιστον ίση εκείνης από την s_2^*,$3b_1+2(1\text{-}b_1)$, όταν πάλι $b_2>3/5$, εάν $b_1<4/3$, που ισχύει πάντα.

Έτσι, εάν $b_{2>}3/5$, ο 1 θα τελείωνε το παίγνιο με $\bar{s}_1$, αλλά τότε συμφέρει, σύμφωνα με την οπισθοβατικη επαγωγή, στον 2 να παίξει $\hat{s}_2$ αν $b_1<4/3$, και έτσι ο 1 πρέπει ν' αρχίσει παίζοντας s_1^* για να λάβει 3 εκ της ακολουθίας s_1^* - $\hat{s}_2$ αντί 1 εκ της ακολουθίας $\hat{s}_1$- $\hat{s}_2$-s_1.

Μια SPNE θα είναι λοιπόν η {[(s_1^*), $\bar{s}_1$], $\hat{s}_2$}, ισχύουσα όταν $b_2>3/5$ για οποιοδήποτε b_1. Τώρα, εάν $b_2<3/5$, το καλύτερο που θα είχε να κάνει ο 1, θα ήταν να παίξει s_1^+, σε περίπτωση βέβαια που θα ήθελε να τελειώσει το παίγνιο αυτός. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη ο 2, η $\hat{s}_2$ θα του αποδώσει 4 στον αριστερό κόμβο απόφασης του συνόλου πληροφόρησής του, και 3 στον δεξιό, με αποτέλεσμα η προσδοκώμενη απόδοσή του από την $\hat{s}_2$ να είναι 4 b_1+3(1- b_1). Θα είναι τουλάχιστον ίση εκείνης από την s_2^* , 3 b_1+4(1- b_1), εάν $b_1>1/2$. Έτσι, αν $b_2<3/5$ και $b_1>1/2$, ο 1 θ' αρχίσει παίζοντας $\hat{s}_1$, γιατί θα παιχθεί μετά η $\hat{s}_2$, και τελειώνοντας μετά το παίγνιο ο 1 με s_1^+, θα λάβει 4 ενώ θα ελάμβανε 3 αν άρχιζε με s_1^* και συνέχιζε ο 2 με $\hat{s}_2$. Οπότε, μια δεύτερη SPNE είναι η {[$\hat{s}_{1,}$ s_1^+), $\hat{s}_2$] όταν $b_2<3/5$ και $b_1>1/2$. Αν $b_2<3/5$ αλλά $b_1<1/2$, ο 2 θ' απαντούσε στην s_1^+ με s_2^*, και τότε καλύτερα για τον 1 ν' άρχιζε με s_1^* για να λάβει 4 εκ της ακολουθίας $s_1^{*,}$ s_2^* αντί το 3 εκ της ακολουθίας $\hat{s}_{1\,-}$ s_2^- s_1^+ .

Δηλαδή, η τρίτη και τελευταία SPNE είναι η {[(s_1^*), s_1^+], s_2^*} σε περίπτωση που b_2 <3/5 και $b_1<1/2$.

Ας δούμε στη συνέχεια, υπό ποία έννοια μια SPNE μπορεί να αποτελεί NEMBS. Την ή τις κρίσιμες τιμές των πιθανοτήτων Bayes υπό τις οποίες ισχύει η κάθε SPNE, τις έχουμε πάντα υπό μορφή ανισοτήτων, γιατί μόνον τότε υπάρχει η ξεκάθαρη προτίμηση μιας στρατηγικής (έναντι άλλης ή άλλων), που προϋποθέτει η έννοια της 8PNE. Λάβαμε έτσι 5PNE, που αντιστοιχούν σε εκφυλισμένες συμπεριφορικές στρατηγικές ισορροπίας. Στο ΣΦΕΠ1, η [(Έξω,Κιν),Κιν] αντιστοιχεί στην {[b=0, 1-b =1),($h_{1=}$ 1, 1- h_1 =0)],(h_2 =1,1- $h_{2\,=}$0)} ενώ η [(Σπίτι),Περ] αντιστοιχεί στην {[(1,0)(0,1)],(0,1).

ΣτοΤΕΧ1,η $\{[(\hat{s}_{1,}\, s_1'), s_1^{+}]\, (\bar{s}_{2,} s_2^{*})\}$ αντιστοιχεί στην

$\{[(b_1 =0 , b_2 =0, b_3 =1)$,$(h_{1=} 1, 1- h_1 =0).$,$(h_1'{}_{=} 0, 1- h_1' =1)]$,

$[(h_{2=} 0, 1- h_2 =1),),(h_2'{}_{=} 1, 1- h_2' =0)]\}$

ενώ η $\{[(\hat{s}_{1,}\, s_1'), s_1'],(s_2^{*}, s_2^{*})\}$αντιστοιχεί στην {[(0,0,1), (1,0), (1,0)],[(1,0), (1,0)]}

Στο Ξ1,η $\{[(s_1^{*}),\bar{s}_1], \hat{s}_2\}$ αντιστοιχεί στην $(b_{1=1,\, 1\text{-}}b_{1=0\,)}$ $_{(}h$ $=1$,$1\text{-}h =0)$ $(b_2 =0, 1\text{-}b_{2=1)}$

για την $\{[(\hat{s}_{1,}s_1^{+}),\hat{s}_2]$ έχουμε {[(0,1),(0,1)],(0,1)} ενώ η {[(1,0),(0,1)],(1,0)} αφορά την $\{[(s_1^{*}{}_{,}s_1^{+}),s_2^{*}]\}$.

Αν όμως, λάβουμε τις κρίσιμες τιμές των πιθανοτήτων Bayes υπό μορφή ισοτήτων, τότε γεννάται η προτιμησιακή αδιαφορία που ενυπάρχει στην έννοια της NEMBS. Στο ΣΦΕΠ1, οι κινήσεις της [(Εξω,Κιν),Κιν] προτιμώνται και από τους δύο παίκτες όταν $h_1>2/3$ ενώ οι κινήσεις της [(Σπίτι),Περ] προτιμώνται και από τους δύο όταν $h_1<2/3$: Κανένας δεν έχει κίνητρο μονομερούς απομάκρυνσης από την στρατηγική ισορροπίας. Όμως, εάν h_1-2/3 και 1- h_1=1/3, οι παίκτες θα είναι αδιάφοροι απέναντι σ' αυτές τις δύο SPNE, και πράγματι, αν στους υπολογισμούς μας υιοθετήσουμε αυτή μόνο την τιμή της h_1, θα προκύψει ως SPNE η NEMBS {[(0,1),(2/3,1/3)],(1/3,2/3)}.

Οπότε, οι "άλλες δύο" SPNE αποτελούν εκείνες τις ειδικές περιπτώσεις αυτής της τελευταίας, της "γενικότερης" SPNE/NEMBS, που προκύπτουν δι' αντικατάστασης των ισοτήτων δι' ανισοτήτων όσον αφορά βέβαια τις πιθανότητες Bayes.

Η NEMBS που "εκφυλίζεται" για να μας δώσει τις συμπεριφορικές στρατηγικές ισορροπίας τις αντιστοιχούσες στις "άλλες δύο" SPNE, είναι αυτή η "γενικότερη" NEMBS. Στο ΤΕΧΙ, η ΝΕΜΒ3 που αντανακλά την αδιαφορία μεταξύ των δύο "επί μέρους" SPNE του παίγννου και που "πρέπει να εκφυλισθεί" για να μας τις δώσει, είναι η

{[(b_1=οποιοδήποτε),(1/2,1/2),(1/2,1/2)],[(1/3,2/3),(2/3,1/3)]}. Η ανάλογη, "γενικότερη", NEMBS στο Ξ1 είναι η {[(1/2,1/2) (0,1)] (1/2,1/2)}ως προς [($\hat{s}_1$,s_1^+),$\hat{s}_2$] και {[(s_1^*,s_1^+),s_2^*] }

Μια SPNE αποτελεί NEMBS υπ' αυτήν ακριβώς την έννοια. Παρομοίως, και μια NEMBS δεν αποτελεί αναγκαία SPNE με την έννοια ότι στο ΣΦΕΠ1, υπάρχει και η NEMBS [(1,0), (h_1=οποιοδήποτε, h_2 =οποιοδήποτε] από την οποία ωστόσο δεν μπορούν να προκύψουν "επί μέρους" SPNE ενώ στο ΤΕΧ1, υπάρχουν άλλες τρεις NEMBS από τις οποίες δεν μπορεί πάλι να προκύψουν τέτοιες SPNE. Όμως, στο Ξ1, υπάρχει η SPNE {[(s_1^*), $\bar{s}_1$], $\hat{s}_2$ } που δεν αποτελεί καν NEMBS, αφού αν ο 1 έπαιζε s_1^+ αντί $\bar{s}_1$, στο διμελές σύνολο πληροφόρησής του, θα ελάμβανε το λιγότερο 3 αντί της απόδοσης 1 υπό την ακολουθία $\hat{s}_2$ - $\bar{s}_1$, (όπως άλλωστε επισημαίνεται στις δύο άλλες SPNE), και έτσι ο 1 ποτέ δεν θα εξεδήλωνε αδιαφορία γι' αυτή την SPNE, θα την απέρριπτε,

Αυτή η παρατήρηση μας φέρνει στο θέμα της αξιολόγησης της SPNE στα παίγνια Γ, η οποία ενώ αποτελεί βελτίωση έναντι της NEMBS, παρακάμπτει το ζήτημα του συστήματος εικασιών, αφήνοντας ως εκ τούτου ανοιχτό το ζήτημα του συντονισμού του παιξίματος.

5.5. Τέλεια Ισορροπία Bayes

(McLennan 1985- Fudenberg and Tirole)

Κάθε SPNE έχει το B-IO της, που όπως έχουμε επισημάνει δημιουργεί μια κατάσταση ισορροπίας. Έτσι, ένα πολυμελές σύνολο πληροφόρησης ενός παίγνιου Γ μπορεί να κείται επί ή εκτός της κατάστασης ισορροπίας ανάλογα με το εάν η υπό το B-IO ακολουθία κινήσεων διέρχεται ή όχι απ' αυτό. Για παράδειγμα, στο ΣΦΕΠΙ, η SPNE [(Εξω, Κιν), Κιν] αποτελεί αυτή καθεαυτή B-IO, εκείνο του παίγνιου, με ακολουθία κινήσεων διερχόμενη εκ του διμελούς συνόλου πληροφόρησης του παίκτη Γ.

Όμως, στην SPNE [(Σπίτι), Περ], το B-IO είναι το Σπίτι και το παίξιμο ισορροπίας τελειώνει μ' αυτή και μόνο την κίνηση, μη διερχόμενο εκ του διμελούς συνόλου πληροφόρησης του παίκτη Γ. Έτσι, αυτό το σύνολο κείται επί της κατάστασης / παιξίματος ισορροπίας (on equilibrium path) όσον αφορά την πρώτη SPNE αλλά εκτός της κατάστασης / παιξίματος ισορροπίας (off equilibrium path) όσον αφορά την δεύτερη.

Στο ΤΕΧ1, το παίξιμο ισορροπίας, το B-IO, είναι το ίδιο και για τις δύο SPNE του παίγνιου, και περιλαμβάνει την ακολουθία κινήσεων $\hat{s}_1 – s_2^* - s_1'$, θέτοντας το δεξιό διμελές σύνολο πληροφόρησης του παίκτη 1 επί της κατάστασης ισορροπίας και το αριστερό εκτός. Στο Ξ1, το B-IO στις SPNE $\{[(s_1^*), \bar{s}_1], \hat{s}_2\}$ και $\{[(s_1^*, s_1^+), s_2^*]\}$ αρχίζει με την s_1^* που θέτει το διμελές σύνολο πληροφόρησης του παίκτη 1 εκτός κατάστασης ισορροπίας. Το εν λόγω σύνολο κείται ωστόσο επί της κατάστασης ισορροπίας της SPNE $[(\hat{s}_1, s_1'), \hat{s}_2]$, διότι αυτή αποτελεί και B-IO με ακολουθία κινήσεων την $\hat{s}_1$- $\hat{s}_2$- s_1^+ διερχόμενη απ' αυτό το σύνολο.

Τώρα, η έννοια της SPNE, το λήμμα του Kuhn, εξασφαλίζει το παίξιμο των αποδοτικότερων κινήσεων στα πολυμελή σύνολα πληροφόρησης επί της κατάστασης ισορροπίας αλλά όχι αναγκαία στα σύνολα εκτός της κατάστασης ισορροπίας. Και αυτό, γιατί το λήμμα του Kuhn δεν προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιου συστήματος εικασιών εκ μέρους των παικτών που παίζουν σε τέτοια σύνολα.

Οι εικασίες είναι κι αυτές πιθανότητες Bayes , όπως υπό το λήμμα του Kuhn , αλλά λαμβάνουν τιμές ως εικασίες και όχι εκείνες τις τιμές που συνεπάγεται η σύγκριση προσδοκώμενων αποδόσεων. Πρόκειται για πιθανότητες Bayes που καθοδηγούν την σύγκριση, δεν καθοδηγούνται απ' αυτή. Και για να είμαστε σίγουροι ότι η σύγκριση γίνεται σε όλα τα πολυμελή σύνολα πληροφόρησης, τόσο επί όσο και εκτός της κατάστασης της όποιας ισορροπίας, οι εικασίες πρέπει να σχηματίζουν ξεχωριστή κατανομή πιθανοτήτων για καθένα απ' αυτά (άσχετα αν είναι σωστές).

Οι ξεχωριστές κατανομές αναγνωρίζουν την αυτοτέλεια του κάθε πολυμελούς συνόλου πληροφόρησης, την ανάγκη επιλογής μιας κίνησης σε καθένα απ' αυτά χωριστά παρά το γεγονός ότι μπορεί την ίδια στιγμή να υπάρχει η ίδια ανάγκη επιλογής σε κάποιο άλλο πολυμελές σύνολο πληροφόρησης.

Μπορούμε έτσι να απομονώσουμε την αποδοτικότερη κίνηση και σ' ένα τέτοιο σύνολο εκτός κατάστασης ισορροπίας εάν ο παίκτης που τον αφορά έπαιζε εκεί και εάν τον ενδιαφέρει τι θα έκανε εκεί. Το λήμμα του Kuhn δεν κάνει αυτή την διάκριση των πολυμελών συνόλων πληροφόρησης, γιατί δεν την χρειάζεται, ψάχνοντας έτσι για την ή τις ισορροπίες χωρίς την δέουσα προσοχή στην εκτός ισορροπίας κατάσταση, και αναδεικνύοντας SPNE που μπορεί να περιλαμβάνει γι' αυτή την κατάσταση κυριαρχούμενες κινήσεις.

Ας συνοψίσουμε τώρα τα περί εικασιών, και ας εισάγουμε την πρόσθετη ορολογία που χρειάζεται για να δούμε σε ποιες νέες έννοιες ισορροπίας μας οδηγούν. Εξυπακούεται ότι αναφερόμαστε στο γνωστό μας "σύστημα εικασιών", σύστημα "εξατομικευμένων" για κάθε πολυμελές σύνολο πληροφόρησης κατανομών πιθανοτήτων. Ένα τέτοιο σύστημα θα είναι ***συνεπές μ' έναν συνδυασμό συμπεριφορικών στρατηγικών*** των παικτών, αν οι πιθανότητες, που συνθέτουν μια κατανομή, προκύπτουν δια του θεωρήματος του Bayes βάσει των ιστοριών που οδηγούν στο σύνολο πληροφόρησης στο οποίο αναφέρονται οι πιθανότητες, όπως οι ιστορίες αυτές προκύπτουν με την σειρά τους απ' αυτόν τον συνδυασμό συμπεριφορικών στρατηγικών. Δηλαδή, οι πιθανότητες προκύπτουν υπολογιστικά όπως και υπό το λήμμα του Kuhn με την διαφορά ότι τώρα πρέπει να αθροίζονται στη μονάδα σε κάθε πολυμελές σύνολο πληροφόρησης. Πρόκειται βέβαια για μια έννοια περί συνέπειας διαφορετική εκείνης ως προς την κοινή γνώση εκ των προτέρων (RRIOR) κατανομών, την οποία συναντήσαμε στο μέρος 3.3.

Η συνέπεια μπορεί ασφαλώς να αφορά μόνο τα πολυμελή σύνολα πληροφόρησης επί της κατάστασης ισορροπίας. Ένας συνδυασμός των συμπεριφορικών στρατηγικών των παικτών που μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη απόδοσή τους βάσει συνεπών μ' αυτόν τον συνδυασμό εικασιών επί της κατάστασης ισορροπίας, αποτελεί ***Χαλαρή ή Ασθενή Ακολουθητική Ισορροπία***, (WSEQ weak sequential equilibrium). Εάν η συνέπεια αφορά και τα πολυμελή σύνολα πληροφόρησης εκτός της κατάστασης ισορροπίας, τότε ένας συνδυασμός συμπεριφορικών στρατηγικών, που μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη απόδοση των παικτών βάσει συνεπών μ' αυτόν τον συνδυασμό εικασιών τόσο επί όσο καν εκτός κατάστασης ισορροπίας, αποτελεί ***Τέλεια Ισορροπία Bayes*** , (PBE, perfect Bayes equilibrium).

Όταν ο συνδυασμός συμπεριφορικών στρατηγικών στον οποίο αναφέρεται η συνέπεια είναι εκείνος της ισορροπίας, οι εικασίες είναι εύλογες (resonable). Έτσι, συνήθως λέμε ότι ένας συνδυασμός συμπερφορικών στρατηγικών αποτελεί WSEQ όταν οι εικασίες είναι εύλογες επί της κατάστασης ισορροπίας, ενώ αποτελεί PBE όταν οχ εικασίες είναι εύλογες τόσο επί όσο και εκτός κατάστασης ισορροπίας.

Η διαφορά μεταξύ WSEQ και PBE είναι ότι η πρώτη προϋποθέτει από μια κατανομή πιθανοτήτων για κάθε πολυμελές σύνολο πληροφόρησης μόνον επί της κατάστασης ισορροπίας, ενώ η δεύτερη προϋποθέτει τέτοιες κατανομές και για την εκτός ισορροπίας κατάσταση. Έτσι, από αυτή την άποψη, μια PBE αποτελεί WSEQ αλλά μια WSEQ δεν αποτελεί αναγκαία PBE.

Υπό την WSEQ, οι παίκτες δεν ενδιαφέρονται καθόλου για την εκτός ισορροπίας κατάσταση, δεν τίθεται καν θέμα συντονισμού του παιξίματος τόσο του κάθε παίκτη όσο και μεταξύ παικτών σε μια τέτοια κατάσταση. Υπό την PBE, οι παίκτες ενδιαφέρονται, αλλά μόνο για τον προσωπικό τους συντονισμό, όχι για τον συντονισμό με τους άλλους παίκτες.

Εφόσον το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στις στρατηγικές ισορροπίας, που δεν είναι ανάγκη να είναι οι πλήρως μεικτές συμπεριφορικές στρατηγικές που θα ελάμβαναν πλήρως υπόψη την κατάσταση εκτός της ισορροπίας, το εύλογο γι' αυτήν την κατάσταση μπορεί να είναι υποκειμενικό για κάθε παίκτη. Ασφαλώς, κάθε σύστημα πιθανοτήτων Bayes μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο εκ των υστέρων (posterior) κατανομών που προκύπτουν από ακολουθία εκ των προτέρων (prior) κατανομών στις οποίες όλες οι κινήσεις σε όλα τα σύνολα πληροφόρησης, συνδέονται με κάποια θετική πιθανότητα. Αλλά η έννοια της PBE αφήνει ανοικτό το θέμα του πως το κάνει αυτό ο κάθε παίκτης, με κίνδυνο τον αποσυντονισμό του παιξίματος στην εκτός της ισορροπίας κατάσταση.

Τώρα, εφόσον η σύγκριση αποδόσεων βάσει των κατανομών πιθανοτήτων επί της κατάστασης ισορροπίας δίνει τα ίδια συμπεράσματα, όπως το λήμμα του Kuhn, το πρόσθετο στοιχείο που εισάγει μια WSEQ σε σχέση με μια SPNE είναι οι κατανομές πιθανοτήτων στα πολυμελή σύνολα πληροφόρησης επί της κατάστασης ισορροπίας ενώ η PBE προσθέτει τέτοιες κατανομές και στην εκτός ισορροπία κατάσταση.

Για παράδειγμα, η δομή τόσο του ΣΦΕΠ1 όσο και του Ξ1 είναι να δίνει πιθανότητες στο κάθε πολυμελές σύνολο πληροφόρησης, που προστιθέμενες να δίνουν την μονάδα. Έτσι, στο ΣΦΕΠ1, η SPNE [(Εξω,Κιν),Κιν] μετατρέπεται σε WSEQ αν εισάγουμε την εικασία ότι $\bar{h}_1 = 1$, (αντί γενικά να έχουμε $h_1 > 2/3$), που αποτελεί επίσης PBE, διότι δεν υπάρχουν πολυμελή σύνολα πληροφόρησης εκτός της κατάστασης ισορροπίας. (Εξυπακούεται ότι η παύλα, όπως εκείνη πάνω από το h_1 χρησιμοποιείται για να υποδηλώνει εικασίες.).

Η SPNE [(Σπίτ), Περ] αποτελεί WSEQ αυτή καθεαυτή, διότι η έννοια της WSEQ δεν προϋποθέτει κάποια κατανομή πιθανοτήτων για το εκτός της κατάστασης ισορροπίας διμελές σύνολο πληροφόρησης του Γ. Αν όμως προσθέσουμε την εικασία ότι $\bar{h}_1 = 0$, (αντί γενικά $h_1 < 2/3$), τότε η SPNE μετατρέπεται σε PBE.

Παρομοίως, στο παίγνιο Ξ1, οι SPNE $\{[(s_1^*), \bar{s}_1], \hat{s}_2\}$ και $\{[(s_1^*), s_1^+], s_2^*\}$ μετατρέπονται σε WSEQ αν προσθέσουμε την εικασία ότι $\bar{b}_1 = 1$, (αντί γενικά b_1 = οποιοδήποτε για την πρώτη, και $b_1 | < 1/2$ για την δεύτερη), και σε PBE αν επίσης προσθέσουμε στην πρώτη $\bar{b}_2 = 0$ και στην δεύτερη ότι $\bar{b}_2 = 1$. Η SPNE $[(\hat{s}_1, s_1^+), \hat{s}_2]$ του Ξ1, μετατρέπεται τόσο σε WSEQ όσο και σε PBE αν προσθέσουμε τις εικασίες $\bar{b}_1 = 0$ και $\bar{b}_2 = 0$.

Στο ΤΕΧ1, οι κατανομές υπό το σύστημα εικασιών διαφέρουν από την κατανομή που προϋποθέτει το λήμμα του Kuhn . Για να λάβουμε το σύστημα εικασιών, θεωρήσατε κατ' αρχάς τις πιθανότητες $b_2 h_2$ και $b_2(1-h_2)$ των ιστοριών $\bar{s}_1 - s_2^*$ και $\bar{s}_1 - \bar{s}_2$, αντιστοίχως, για το αριστερό διμελές σύνολο πληροφόρησης του 1.Η πιθανότητα Bayes του αριστερού κόμβου του εν λόγω συνόλου είναι $(b_2 h_2)/[b_2 h_2 + b_2(1-h_2)] = h_2$ ενώ εκείνη του δεξιού είναι $(1-h_2)$. Στο άλλο σύνολο πληροφόρησης του 1, οι υπό συνθήκη πιθανότητες είναι $(b_3 h_2')/[b_3 h_2' + b_3(1-h_2')] = 1$ για τον αριστερό κόμβο, και $(1-h_2')$ για τον δεξιό, Συνεπώς, το σύστημα εικασιών του ΤΕΧ1 είναι το "$(\bar{h}_2, 1-\bar{h}_2)$ και $(\bar{h}_2', 1-(\bar{h}_2')$". Τώρα, και οι δύο SPNE του ΤΕΧ1 ανάγονται σε WSEQ αν προστεθεί σ' αυτές η εικασία ότι $\bar{h}_2' = 1$, ενώ αν περαιτέρω προστεθεί στην $\{[(\hat{s}_1, s_1'), s_1^+], (\bar{s}_2, s_2^*)\}$ ότι $\bar{h}_2 = 0$ και στην $\{[(\hat{s}_1, s_1'), s_1'], (s_2^*, s_2^*)\}$ότι $\bar{h}_2 = 1$ τότε ανάγονται σε PBE.

Όμως, όπως έχουμε επισημάνει, οι υπό την PBE εικασίες στα εκτός της κατάστασης ισορροπίας πολυμελή σύνολα πληροφόρησης, μπορεί να μην είναι οι σωστές. Στην ισορροπία [(Σπίτι),Περ] του ΣΦΕΠ1, αν παίζονταν το υποπαίγνιο, η Μ δεν θα έπαιζε Περ, οπότε $\bar{h}_1 = 1$ και όχι $\bar{h}_1 = 0$ όπως υποθέτει η PBE.

Στο ΤΕΧ1, η ισορροπία $\{[(\hat{s}_1, s_1') , s_1'], (s_2^*, s_2^*)\}$ θεωρεί εσφαλμένα ότι στο εκτός κατάστασης ισορροπίας, στο αριστερό, διμελες σύνολο πληροφόρησης, πρέπει να παιχθεί η s_1' την στιγμή που η ακολουθία s_2^* - s_1', θα απέδιδε 2 ενώ η s_1^+ θα απέδιδε το λιγότερο 3. Οπότε, θα συνέφερε στον παίκτη 2 να παίξει $\bar{s}_2$ για να λάβει 4>2 από την ακολουθία $\bar{s}_2$ - s_1^+, (όπως συμβαίνει στην άλλη SPNE). Θα έπρεπε έτσι να ισχύει κατά τον παίκτη 1 ότι $\bar{h}_{2=0}$ =>1-$\bar{h}_2$=1 και όχι ότι $\bar{h}_2$ =1 όπως υποθέτει η PBE.

Στην ισορροπία $\{[(s_1^*), \bar{s}_1], \hat{s}_2\}$, του Ξ1, θα έπρεπε να ισχύει ότι $\bar{b}_2 = 1$, όπως στην $\{[(s_1^*),s_1^+], s_2^*\}$, διότι η ακολουθία κινήσεων $\hat{s}_2$-$\bar{s}_1$, στο εκτός της κατάστασης ισορροπίας σύνολο πληροφόρησης, αποδί-
δει 1 ενώ η s_1^+ θα απέδιδε το λιγότερο 3 και θα έπρεπε να υιοθετηθεί από τον παίκτη 1, με καλύτερη ανταπάντηση εκ μέρους του 2 την s_2^* για να λάβει 4>3. Αλλά ούτε και η ισορροπία $\{[(s_1^*),s_1^+], s_2^*\}$ είναι ικανοποιητική, διότι όπως αναφέραμε και στο μέρος 5.3 σε σχέση με την NEMBS {[(1/2,1/2),(0,1)],(1/2,1/2)} του Ξ1, εφόσον h=0 τότε θα έπρεπε να ίσχυε ότι $\bar{b}_1$ =0, όπως στην ισορροπία $[(\hat{s}_1, s_1^+),\hat{s}_2]$. Και πράγματι, αυτή η τελευταία αποτελεί το B-IO της SPNE $[(\hat{s}_1, s_1^+) , (\hat{s}_2, \hat{s}_2)]$ του παίγνιου τέλειας πληροφόρησης. (Το B-IO προκύπτει ως SPNE στο παίγνιο ατελούς πληροφόρησης Ξ1, γιατί απλώς το ΞΙ στερείται υποπαιγνίων.)

Η έννοια γενικά της PBE μπορεί να μην "τιμολογεί" σωστά τις εικασίες εκτός της κατάστασης ισορροπίας. Εφόσον οι σωστές εικασίες επί της κατάστασης ισορροπίες είναι σωστές γιατί διαμορφώνονται βάσει των αποδοτικότερων ιστοριών, βάσει των ιστοριών που αποτελούν μέρος των συμπεριφορικών στρατηγικών ισορροπίας όλων των παικτών, κάτι παρόμοιο πρέπει να εξασφαλισθεί και για τις εικασίες εκτός της κατάστασης ισορροπίας. Θα πρέπει κι' αυτές να δια-μορφώνονται βάσει των αποδοτικότερων στρατηγικών στην εκτός της ισορροπίας κατάσταση. Αυτό μας φέρνει στην έννοια "της (πλήρους) ακολουθητικής ισορροπίας".

5.6 Ακολουθητική Ισορροπία

(Kreps and Wilson, 1982 –Kreps and Ramey, 1987)

Ο συνδυασμός της συμπεριφορικής στρατηγικής και των εικασιών ενός παίκτη που βρίσκεται σε πολυμελές σύνολο πληροφόρησης αποτελεί μια ***εκτίμηση*** (assement) του παίκτη, της οποίας το ***αποτέλεσμα*** είναι μια κατανομή πιθανοτήτων ως προς τις αποδόσεις στις οποίες μπορεί να οδηγεί η εκτίμηση.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την απλή περίπτωση του Γ με τη μεικτή συμπεριφορική στρατηγική $(h_2 ,1-h_2)$ και τις δύο εικασίες ότι $\bar{h}_1 =1$ ή $\bar{h}_2 = 0$. Οι δύο εκτιμήσεις που αντιστοιχούν σ' αυτές τις εικασίες είναι $[(h_2 , 1-h_2), \bar{h}_1 =1]$ και $[(h_2 , 1-h_2), \bar{h}_1 =0]$, με αποτέλεσμα μια κατανομή πιθανοτήτων (ζ, 1-ζ) ως προς τις αποδόσεις (4,2) και (0,0) για την πρώτη εκτίμηση, και μια κατανομή (ξ, 1-ξ) ως προς (0,0) και (2,4) για τη δεύτερη. Για την Μ, συμπεριφορική στρατηγική $[b,(1-b) h_1 , (1-b)(1- h_1)]$ αποτελεί και τη μόνη εκτίμηση της, με αποτέλεσμα το οποίο μας είναι ήδη γνωστό.

Τώρα, μια εκτίμηση θα είναι ***ακολουθητικά ορθολογική*** (sequentially) εάν το αποτέλεσμα της είναι το αποδοτικότερο δεδομένων των υπ' αυτής περιλαμβανομένων εικασιών. Ή, δεδομένων των εικασιών για τον κόμβο απόφασης στον οποίο βρίσκεται ένας παίκτης που παίζει σε πολυμελές σύνολο πληροφόρησης, ο παίκτης αυτός κάνει την αποδοτικότερη κίνηση ή σύνολο κινήσεων, υιοθετεί την προσφορότερη συμπεριφορική στρατηγική. Όσον αφορά τον Γ, όταν εικάζει ότι $h_1=1$, η αποδοτικότερη στρατηγική του είναι να θέσει $h_2=1$, και το αποδοτικότερο αποτέλεσμα είναι ο συνδυασμός αποδόσεων (4,2). Δηλαδή, ακολουθητικά ορθολογική είναι μόνο η εκτίμηση $[(h_2-1, 1- h_2 =O), \bar{h}_1=1]$ ή απλώς, [(1,0),1] με αποτέλεσμα την κατανομή (ζ=1, 1-ζ=0) ή απλώς, (1,0), και το υπ' αυτήν ζεύγος αποδόσεων (4,2). Οποιαδήποτε άλλα h_2 και ζ δεν είναι ακολουθητικά ορθολογικά. Στην περίπτωση της εικασίας ότι $h_1=0$, ακολουθητικά ορθολογική θα είναι μόνο η εκτίμηση [(0,1),0] με αποτέλεσμα την κατανομή (0,1) και τις υπ' αυτήν αποδόσεις (2,4),

Όσον αφορά την Μ, θυμηθείτε ότι το αποτέλεσμα της εκτίμησής της και ταυτόχρονα συμπεριφορικης στρατηγικής της, είναι η κατανομή ($φ_1$, $φ_2$, $φ_3$, $φ_4$, 1-$φ_1$-$φ_2$-$φ_3$-$φ_4$), ως προς (3,3), (4,2), (0,0), (0,0)και (2,4).

Οι αποδόσεις (0,0) και (0,0) "φεύγουν απ' τη μέση" γιατί δεν είναι σύμφωνες με ακολουθητικά ορθολογικές εκτιμήσεις του Γ, και το αποτέλεσμα που απομένει για την Μ είναι η κατανομή ($φ_1$, $φ_2$, 1-$φ_1$-$φ_2$) ως προς (3,3), (4,2) και (2,4), με αποδοτικότερες τις τιμές (0,1,0), διότι τότε η απόδοση για την Μ θα είναι 4 και όχι 3 ή 2. Δηλαδή, ακολουθητικά ορθολογική εκτίμηση της Μ είναι μόνο η (0,1,0), τιμές που τώρα αφορούν τα b, (1-b) h_1 και (1-b)(1-h_1), και όχι τις πιθανότητες φ.

Όμως, η έννοια της ακολουθητικής ορθολογικότητας δεν είναι αρκετή για να φθάσουμε στην ισορροπία ενός παίγνιου Γ. Όσον αφορά π.χ. το ΣΦΕΠ1, χρειαζόμαστε ακόμα ν' απαλλαγούμε από εικασίες του Γ διαφορετικές της $\bar{h}_1 =1$. Γι' αυτό και θέλουμε από τις εκτιμήσεις να είναι "συνεπείς".

*Μια εκτίμηση είναι **πλήρως συνεπής** (fully consistent) εάν υπάρχει μια ακολουθία πλήρως μεικτών συμπεριφορικών στρατηγικών και μια ακολουθία εικασιών συνδεόμενες μ' αυτές τις στρατηγικές δια του θεωρήματος Bayes, που να συγκλίνουν στη μεικτή συμπεριφορική στρατηγική και στις εικασίες της εκτίμησης της οποίας διερευνάται η συνέπεια.* Υπό την πλήρη συνέπεια, κάθε κίνηση σε κάθε σύνολο πληροφόρησης αντιμετωπίζεται αυτοτελώς, συνδέεται με την δική της πιθανότητα, και δεν ομαδοποιείται με άλλες έτσι ώστε μια πιθανότητα να αφορά δύο ή τρεις κινήσεις και να μην ξέρει ο αντίπαλος ποια πιθανολόγηση να κάνει για κάθε μια απ' αυτές για να συντονίσει το παίξιμό του. Ομαδοποίηση απέναντι στην οποία η PBE παραμένει ανοικτή όσον αφορά την κατάσταση εκτός της ισορροπίας σαν να μην ενδιέφερε τους παίκτες ο συντονισμός τους και σε μια τέτοια κατάσταση.

Μια εκτίμηση που αποτελεί WSEQ ή PBE είναι ακολουθητικά ορθολογική αλλά δεν είναι πλήρως συνεπής, είναι απλώς συνεπής. Ο όρος "συνέπεια" θα αποδίδει στο εξής την πλήρη συνέπεια.

Ας ξαναδούμε για παράδειγμα τις ακολουθητικά ορθολογικές εκτιμήσεις του Γ, [(1,0),1] και [(0,1),0]. Οι εικασίες $\bar{h}_{1=}I$ και $\bar{h}_1$ =0 συνδέονται με τις συμπεριφορικές στρατηγικές (h_2=1, 1-h_2=0) και (h_2=0, 1-h_2=1), αντίστοιχα, δια του θεωρήματος του Bayes, με την έννοια ότι αν h_2=1, τότε "πάει να πει" ότι $\bar{h}_1$= (1-b) /[(1-b)+0]=1 και αν h_2=0, τότε πάει να πει ότι h_1=0/[0+(1- K)]K). Για να αξιολογήσουμε στη συνέχεια τη συνέπεια της [(1,0), 1], ορίζουμε μια ακολουθία στρατηγικών ($h_2=\varepsilon_v$ 1-h_2=1-ε_v) αύξουσα στο $h_2=\varepsilon_v$ και τέτοια ώστε αν $h_{2=}\varepsilon_v$ τότε όπου $0<\varepsilon_v<1$ και ν=1,2,... Η ακολουθία { $\bar{h}_{1,\ v}$} θα είναι επομένως αύξουσα κι αυτή.

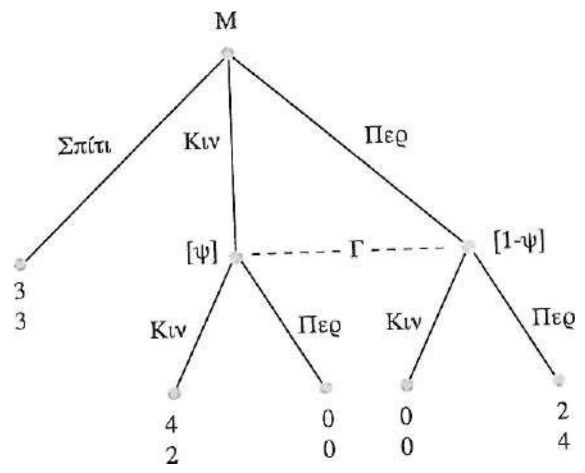
Τώρα εφόσον $0<\varepsilon_v< 1$, τόσο η { $\bar{h}_{1,\ v}$} όσο και η {ε_v} θα συγκλίνουν προς τη μονάδα καθώς το ν τείνει προς το άπειρο. Όσον αφορά την εκτίμηση [(0,1), 0], οι ακολουθίες { $\bar{h}_{1,\ v}$} και {ε_v} πρέπει να είναι φθίνουσες με $0<\varepsilon_v<1$. Και οι δύο ακολουθίες θα συγκλίνουν τότε στο μηδέν.

Επομένως, και οι δύο ακολουθητικά ορθολογικές εκτιμήσεις είναι συνεπείς και θα μπορούσαν ως εκ τούτου ν᾿ αποτελούν εκτιμήσεις ακολουθητικής ισορροπίας αν δεν υπήρχε το ζήτημα ότι άλλο τόσο εκτίμηση ισορροπίας αποτελεί και η (0,1,0) της Μ. Συγκεκριμένα, μια εκτίμηση αποτελεί ***Ακολουθητική Ισορροπία*** (SEQ sequantial equilibrium) όταν είναι ακολουθητικά ορθολογική και συνεπής (σε παίγνια πάντα τέλειας ανάκλησης). Τέτοια είναι και η ακολουθητικά ορθολογική εκτίμηση της Μ, (0,1,0), διότι είναι επίσης συνεπής, μιας και πάντα μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία στρατηγικών b=ε_v, (1-b) $h_1=\varepsilon_v^2$, (1-b)(1- h_1)=1-ε_v- ε_v^2] τέτοια ώστε η { ε_v^2} να συγκλίνει προς τη μονάδα. Αλλά τότε η $\bar{h}_{1=}$O/[O+(1-b)]=O γίνεται η κενή περιεχομένου $\bar{h}_1$ =0/(0+0), γιατί προσέξατε ότι το (1-b)) στον παρανομαστή είναι εκείνο του γινομένου [(1-b)(1- h_1)], δηλ. της πιθανότητας εμφάνισης του δεξιού κόμβου του διμελούς συνόλου πληροφόρησης του Γ, και αντιστοιχεί στο τελευταίο μηδενικό της παρένθεσης (0,1,0)· όχι στο πρώτο, όχι στο b=0, έτσι ώστε να έχουμε $\bar{h}_1$ =0/[0 + (1-0)]=0/1=0. Το αντίθετο συμβαίνει με την $\bar{h}_1$=(1-b)/[(1-b)+0] που τώρα γίνεται $\bar{h}_1$ = (1-0)/ [(1-0)+0]= 1/(1=0 =1. Έτσι, η μόνη εκτίμηση ακολουθητικής ισορροπίας του Γ είναι η [(1,0),1]: Έχουμε εκλογικεύσει πλήρως την ισορροπία του ΣΦΕΠ1 ως ακολουθητική ισορροπία, ως SEQ, που με πιο απλό συμβολισμό είναι η {[(Εξω,Κιν),Κιν], $\bar{h}_1$=1}.

Στο ΣΦΕΠ1, η "λογική" που αναδεικνύει σε συνεπή την εκτίμηση (0,1,0) της Μ, μπορεί να εξασφαλίσει τη συνέπεια και των εκτιμήσεων (1,0,0) και (0,0,1), αλλά μόνο η (0,1,0) είναι ακολουθητικά ορθολογική. Θεωρήσατε, ωστόσο, το παίγνιο ΣΦΜΦ2 το οποίο διαφέρει από το ΣΦΕΠ1 μόνο ως προς την κίνηση Έξω που είναι τώρα "σύμφυτη" στις δύο κινήσεις Κιν και Περ της Μ. Η τέλειας πληροφόρησης μορφή του ΣΦΜΦ2 δίνεται από το ΣΦΜΦ1 στο προηγούμενο κεφάλαιο εάν βέβαια s_1^*=Σπίτι, $\hat{s}_1$=Κιν= $\hat{s}_2$ και $\bar{s}_1$=Περ= $\bar{s}_2$. Στο ΣΦΜΦΙ διαπιστώσαμε ότι υπάρχουν δυο SPNE, το Β-ΙΟ (Κιν,Κιν) και ο συνδυασμός (Σπίτι,Περ) με Β-ΙΟ το Σπίτι.

Αυτές οι SPNE αποτελούν και τις δύο SQE του ΣΦΜΦ2, διότι η Μ έχει τώρα δύο εκτιμήσεις ακολουθητικής ισορροπίας, όχι μόνο την (0,1,0), όπως και πριν, αλλά και την (1,0,0) σαν τη καλύτερη ανταπάντηση στην εκτίμηση [(0,1),1] του Γ, που καθίσταται πλέον εκτίμηση ακολουθητικής ισορροπίας κι αυτή λόγω της σύμφυσης κινήσεων ως εξής: Η συμπεριφορική στρατηγική της Μ είναι τώρα η (b_1, b_2, $b_3 = 1 - b_1 - b_2$) και όχι η [b, (1-b) h_1, (1-b) (1- h_1)]. Δηλαδή, δεν υπάρχει τώρα κάτι ανάλογο του (1-1)), του Έξω, που να διαμορφώνει τις εικασίες του Γ για τη πιθανότητα με την οποία η Μ παίζει Κιν.

Κάτι που να υποδηλώνει στον Γ ότι σκοπίμως η Μ δεν έπαιξε Σπίτι για να παίξει μετά Κιν, έτσι ώστε η Μ να το λάβει υπόψη κατά τον προσδιορισμό της ή των ακολουθητικά ορθολογικών εκτιμήσεών της και η λύση του παίγνιου να εγκλωβισθεί στην κατάσταση (Κιν,Κιν).



Σπίτι	Κιν	Περ
(Κιν)	4,2	0,0
(Περ)	0,0	2,4

Παίγνιο ΣΦΜΦ2　　　　　　　　　　Παίγνιο ΣΦΑ

Οι πιθανότητες να βρίσκεται ο Γ στον αριστερό ή δεξιό κόμβο του συνόλου πληροφόρησης του είναι τώρα:αντιστοίχως. Τον ρόλο της b στην [b, (1-b) h_1, (1-b)(1-h_1)] τον παίζει τώρα η b_1 . Αν b_1 =0, δηλ. αν η Μ δεν παίξει Σπίτι, τότε ψ=b_2 και 1-ψ=1-b_2 Το ότι η Μ δεν έπαιξε Σπίτι, δεν λέει τίποτα στον Γ για το αν η Μ έπαιξε Κιν ή Περ.

Το μόνο που του λέει είναι ότι υπάρχει πιθανότητα b_2 να έχει παξει Κιν και 1- b_2 να έχει παίξει Περ, Έτσι η συνεπής εκτίμηση [(0,1),0] και συγκεκριμένα η [(h_2=0, 1- h_2=1), ψ=0], του Γ δεν μπορεί πλέον να φύγει από τη μέση σαν μη ακολουθητικά ορθολογική εκτμηση, και το καλύτερο που έχει να κάνει η Μ σ' αυτήν τη περίπτωση είναι να παίξει Σπίτι.

Οι SQE είναι ως εκ τούτου δύο: Η {[(Κιν),Κιν], ψ=1}, που είναι ανάλογη της SQE [((Εξω,Κιν),Κιν), $\bar{h}_1$ =1] του ΣΦΕΠ1, αλλά και η {[(Σπίτι),Περ], ψ=0}.

Κατά πόσον όμως εύλογη είναι η εικασία ψ=0 σ' αυτήν τη δεύτερη SEQ ; Η κατάσταση ισορροπίας είναι αυτή που περιγράφει το B-IO αυτής της SEQ , δηλ.

Σπίτι. Συνεπώς, το σύνολο πληροφόρησης του ΣΦΜΦ2 κείται εκτός ισορροπίας, και οι εικασίες του Γ θα μπορούσαν να είναι οι οποιεσδήποτε, γιατί απλώς είναι άνευ σημασίας. Δεν μπορούν, ωστόσο, να μην οδηγούν στην αποδοτικότερη ανταπάντηση σε περίπτωση που θα δίνονταν κάπως η ευκαιρία στον Γ να παίξει, γιατί βέβαια ο Γ είναι πάντα παίκτης ορθολογικός. Ας επινοήσουμε μια στρατηγική της Μ που όντως δίνει μια τέτοια ευκαιρία στον Γ με πιθανότητα δ, μια υποθετική στρατηγική κατά την οποία η Μ παίζει όπως στη πρώτη SEQ με πιθανότητα δ, και όπως στη δεύτερη SEQ με πιθανότητα (1-δ). Πρόκειται βέβαια για υπόθεση εργασίας αλλά το συγκεκριμένο παράδειγμα του ΣΦΜΦ2 είναι τέτοιο που μπορεί να της παράσχει την εξής εκλογίκευση:

Αν παιχθεί Σπίτι, το παίγνιο τελειώνει και ο Γ δεν έχει την ευκαιρία να βρεθεί στο σύνολο πληροφόρησής του. Όμως, υπάρχει και η άλλη ισορροπία που δίνει μάλιστα στην Μ απόδοση αν δεν παίξει Σπίτι ίση με 4>3. Επομένως, υπάρχει κάποια πιθανότητα δ να βρεθεί τελικά ο Γ στο σύνολο πληροφόρησής του και να παίξει. Για να δει τι θα παίξει, κοιτά αν η Μ έχει συμφέρον να του δώσει την ευκαιρία να παίξει. Η Μ θα έχει τέτοιο συμφέρον (α) αν η απόδοση που προσδοκά είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στο Σπίτι, δηλ. αν (1-δ)3+δ4>3=>3+δ>3, που ισχύει για οποιαδήποτε μικρή τιμή του δ, (β) δεδομένου ότι (1-δ)3+δ4>(1δ)3+δ2, δηλ. ότι η προσδοκώμενη απόδοση θα είναι μεγαλύτερη της 3 αν παίξει Κιν και προκύψει ο συνδυασμός (Κιν,Κιν). Άρα, οι εικασίες του Γ πρέπει να είναι ψ=1 ακόμα και υπό το ενδεχόμενο να παιχθεί Σπίτι.

Αντίθετα με την SEQ{[(Κιν),Κιν], ψ=1}, η SEQ {[(Σπίτι),Περ], ψ=0} δεν περιλαμβάνει ***διαρθρωτκά συνεπείς*** (structurally consistent) εικασίες με την έννοια ότι οι εικασίες σε εκτός ισορροπίας σύνολο πληροφόρησης δεν προκύπτουν δια του θεωρήματος τον Bayes από κάποια εναλλακτική στρατηγική (σε σχέση με την υπό την ισορροπία στρατηγική), που καθιστά πιθανή την εξέλιξη τον παίγνιου μέχρι το σύνολο πληροφόρησης.

Μια τέτοια "εναλλακτική" στρατηγική την κατασκευάζουμε αυθαίρετα, την προσαρμόζουμε κατάλληλα για να μπορέσουμε να φθάσουμε στο άλλως εκτός ισορροπίας σύνολο πληροφόρησης, και να μπορέσουμε μετά να ελέγξουμε αν οι εικασίες σ' αυτό το σύνολο είναι εύλογες. Δεν ήταν δηλαδή ανάγκη στο ΣΦΜΦ2 να υπάρχει και άλλη SEQ και μάλιστα με απόδοση 4>3 για την Μ, για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τη στρατηγική βάσει της οποίας δείξαμε ότι η SEQ {[(Σπίτι),Περ], ψ=0} δεν είναι διαρθρωτικά συνεπής.

Στο ΣΦΜΦ2, η προϋπόθεση για εύλογες εικασίες εκτός κατάστασης ισορροπίας, δεν μας λέει τίποτα για τις εικασίες στο σύνολο πληροφόρησης του Γ όταν αυτό είναι εκτός της κατάστασης ισορροπίας (Σπίτι). 0 Γ δεν μπορεί από την κίνηση Σπίτι της Μ να συμπεράνει τίποτα για τον κόμβο απόφασης στον οποίο βρίσκεται. Οποιαδήποτε SEQ {[(Σπίτι),Περ], $\psi<1/2$}, δηλ. SPNE (Σπίτι,Περ) με $\psi<1/2$ για να δικαιολογεί την Περ, αποτελεί δυνητικά PBE και SEQ .

Όμως, αυτό που μας λέει η διαρθρωτική συνέπεια, είναι ότι δεν είναι εύλογο ο Γ να περιμένει από την Μ να παίξει Περ εάν δεν παίξει Σπίτι, γιατί η Περ κυριαρχείται αυστηρά από τον Κιν:4>2. Παίξει, δεν παίξει Σπίτι η Μ, θα πρέπει πάντα ψ=1. Διαρθρωτική συνέπεια δεν σημαίνει μόνον ότι (α) οι εικασίες εκτός κατάστασης ισορροπίας θα πρέπει να είναι εύλογες αλλά (β) και τέτοιες ώστε ν' αντανακλούν το γεγονός ότι το παίξιμο μη κυριαρχούμενων στρατηγικών αποτελεί κοινή γνώση.

Δηλαδή, για να υπάρξει διορθωτική συνέπεια χρειαζόμαστε και την υπόθεση ότι εάν ο παίκτης i (η Μ) δεν παίζει κυριαρχούμενες στρατηγικές (Περ) τότε ο παίκτης j (ο Γ) δεν είναι εύλογο να περιμένει ότι ο i (η Μ) θα παίξει τέτοιες στρατηγικές (Περ), Είδαμε ότι η μόνη ισορροπία που απομένει έτσι στο ΣΦΜΦ2 είναι {[(Κιν), Κιν], ψ=1}, και η προσέγγιση της SEQ αποτυγχάνει να εξασφαλίσει τη μοναδικότητά της.

Η ουσία είναι ότι η έννοια της SEQ δεν μπορεί ν' αποκλείσει διαρθρωτικά ασυνεπείς SEQ . Η λύση σ' αυτό το πρόβλημα είναι βέβαια να συμπληρώσουμε την εν λόγω έννοια με την απαίτηση οι υπ' αυτήν περιλαμβανόμενες εκτιμήσεις να είναι όχι μόνο ακολουθητικά ορθολογικές και συνεπείς, αλλά και διαρθρωτικά συνεπείς.

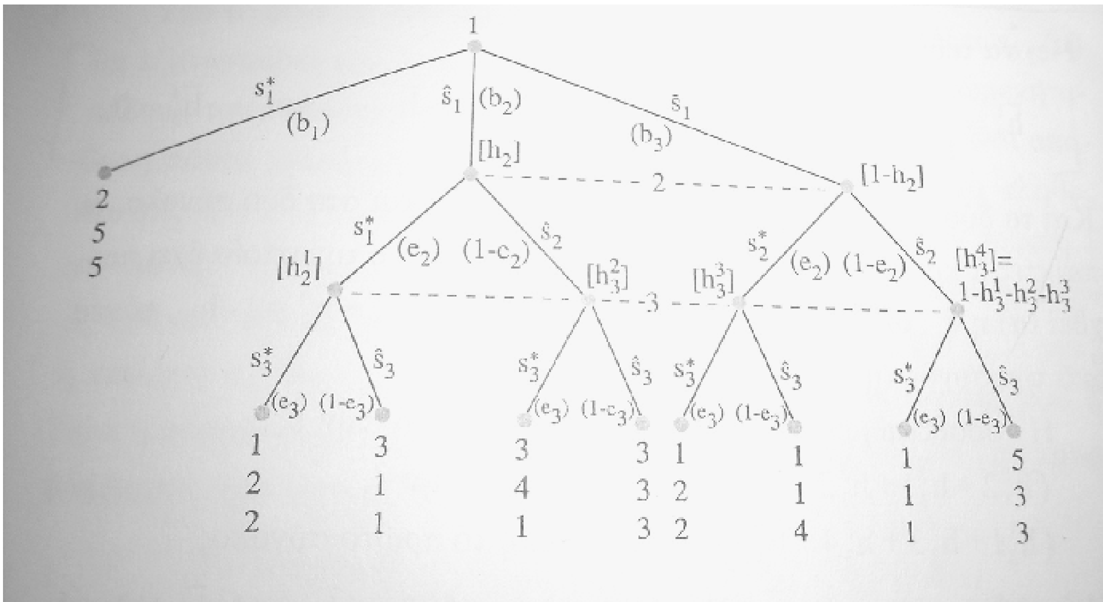
Δεν πρόκειται βέβαια για απλή λύση, και γι' αυτό έχουν προταθεί πολλές, άλλες γενικές και άλλες για ειδικές κατηγορίες παιγνίων, όπως τα "παίγνια σηματοδότησης", που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο σε σχέση και με την "εμπροσθοβατική επαγωγή". Το πρόβλημα έγκειται στην αντιμετώπιση των εικασιών. Μια σύντομη ανασκόπηση των εννοιών λύσης εκτατικών παιγνίων ατελούς πληροφόρησης, θα ήταν σ' αυτό το σημείο χρήσιμη.

Είδαμε ότι το μόνο που χρειάζεται η SPNE πέραν της NEMBS, είναι η σαφής προτίμηση μη κυριαρχούμενων στρατηγικών, η άρση της αδιαφορίας που δείχνει η NEMBS ς προς χαλαρά κυριαρχούμενες στρατηγικές. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι όντως ένας παίκτης θα παίξει σύμφωνα με τις προτιμήσεις του, γιατί ο άλλος ή οι άλλοι μπορεί να μην το κάνουν. Το αποδοτικότερο παίξιμο εξαρτάται και από τις εικασίες για το τι θα πράξει ο αντίπαλος. Μόνον τότε το παίξιμο θα είναι ακολουθητικά ορθολογικό. Επομένως, για να παίξει κάποιος τη στρατηγική σαφούς προτίμησής του, την οποία αναδεικνύει η οπισθοβατική επαγωγή, θα πρέπει να εικάζει ότι το ίδιο θα πράξει και ο αντίπαλος. Αυτό ακριβώς αναγνωρίζει η WSEQ το μόνο που χρειάζεται πέραν της SPNE είναι εύλογες εικασίες επί της κατάστασης ισορροπίας.

Αλλά τι θα γίνει αν υπάρξει απόκλιση απ' αυτή την κατάσταση; Σ' αυτό απαντά η PBE, η οποία το μόνο που χρειάζεται πέραν της , είναι εύλογες εικασίες και εκτός της κατάστασης ισορροπίας. γίνεται όμως αν το εύλογον σε μια τέτοια κατάσταση είναι υποκειμενικό, διότι απλώς οι παίκτες υποβαθμίζουν και δεν δίνουν την πρέπουσα σημασία στο ενδεχόμενο εμφάνισης της εκτός της ισορροπίας κατάστασης; Θα πρέπει επομένως οι εικασίες, όλες οι εικασίες, να διαμορφώνονται επί τη βάσει πλήρως μεικτών συμπεριφορικών στρατηγικών, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα ενδεχόμενα κατά τρόπο σαφή. Αυτό είναι το σημείο στο οποίο επικεντρώνεται μια SEQ , και διαφοροποιείται από μια PBE μόνον ως προς αυτό. Η υποκειμενικότητα περί του εύλογου εκτός της κατάστασης ισορροπίας αίρεται, αλλά το ενδεχόμενο υποβάθμισης μιας τέτοιας κατάστασης εκ μέρους των παικτών παραμένει, και δεν μπορεί έτσι να αποτελεί κοινή γνώση ότι δεν θα παιχθούν χαλαρά κυριαρχούμενες στρατηγικές στην εκτός ισορροπίας κατάσταση.

Εδώ έρχεται η διαρθρωτικη συνέπεια και μας λέει ότι θα πρέπει να δούμε το πως θα διαμορφώνονταν οι εικασίες σ' αυτή την κατάσταση εάν τους είχαμε εξαναγκάσει στην ουσία τους παίκτες να παίξουν σ' αυτήν. Εάν τώρα επιχειρήσουμε να ταιριάξουμε την διαρθρωτική συνέπεια με μια κάποια έννοια ισορροπίας, τι είδους ισορροπία θα ήταν αυτή, αφού η διαρθρωτική συνέπεια θέλει παίξιμο εκτός αυτής έστω και υποθετικά; Και τι είδους ισορροπία θα μπορούσε εναλλακτικά ν' αποτελεί το παίξιμο που θέλει η διαρθρωτική συνέπεια, αφού δεν αξιώνει παίξιμο ισορροπίας; Πρόκειται ασφαλώς για ερωτήματα που αγγίζουν τα όρια της φιλοσοφίας...

Αυτό που απομένει να κάνουμε είναι να δούμε πιο πρακτικά την εξεύρεση μιας SEQ , όπως στο παίγνιο Λ: Έστω ότι οι κινήσεις s_1^*, $\hat{s}_1$ και $\bar{s}_1$ παίζονται με πιθανότητες b_1, b_2 και $b_3 =1- b_2 - b_3$ αντίστοιχα, ότι οι κινήσεις s_2^* και $\hat{s}_2$ παίζονται με πιθανότητες e_2 και $1- e_2$, και ότι οι πιθανότητες για τις κινήσεις s_3^* και $\hat{s}_3$ είναι οι e_3 και $1- e_3$. Επομένως, η πιθανότητα εμφάνισης του διμελούς συνόλου πληροφόρησης του παίκτη 2 είναι $b_2+ b_3$. Η πιθανότητα να παίζει ο 2 στον αριστερό κόμβο του εν λόγω συνόλου υπό την συνθήκη ότι έχει προηγούμενα βρεθεί σ' αυτό, είναι



Παίγνιο Λ

$$\overline{h}_2 = \frac{b_2}{b_2 + b_3} = \frac{b_2}{1 - b_1}$$

και άρα η πιθανότητα Bayes για τον δεξιό κόμβο είναι 1- $\overline{h}_2$ = $b_3/(1- b_1)$. Η πιθανότητα εμφάνισης του τετραμελούς συνόλου πληροφόρησης του παίκτη 3 είναι $b_3e_2 + b_2(1- e_2) + b_3e_2 + b_3(1- e_2) = \overline{h}_1 b_2 + b_3 = 1- b_1$ και επομένως, οι πιθανότητες Bayes γι' αυτόν τον παίκτη είναι:

$$\overline{h}_3^1 = \frac{b_2e_2}{1-b_1}, \quad \overline{h}_3^2 = \frac{b_2(1-e_2)}{1-b_1}, \quad \overline{h}_3^3 = \frac{b_3e_2}{1-b_1} \quad \text{και} \quad \overline{h}_3^4 = \frac{b_3(1-e_2)}{1-b_1}$$

Τώρα, το πρόσθετο στοιχείο που εισάγει στην πράξη μια SEQ σε σχέση με μια PBE, είναι να "εξετάζει όρια" ως εξής: Εάν δοθεί η ευκαιρία στον παίκτη 3 να παίξει, τότε αυτός θα πρέπει να εξετάσει το όριο των εν λόγω παραστάσεων, αφ' ενός αφήνοντας το e_2 να τείνει στο μηδέν, οπότε

$$\bar{h}_3^1 = 0, \quad \bar{h}_3^2 = \frac{b_2}{1-b_1} = \bar{h}_2, \quad \bar{h}_3^3 = 0 \qquad \text{και} \qquad \bar{h}_3^4 = \frac{b_3}{1-b_1} = 1 \;\; \bar{h}_2$$

και αφ' ετέρου αφήνοντας το e_2 να τείνει στη μονάδα ή το ίδιο, το 1- e_2 να τείνει στο μηδέν, οπότε

$$\bar{h}_3^1 = \frac{b_2}{1-b_1} = \bar{h}_2, \quad \bar{h}_3^2 = 0, \quad \bar{h}_3^3 = \frac{b_3}{1-b_1} = 1 - \bar{h}_2 \qquad \text{και} \qquad \bar{h}_3^4 = 0$$

Και τα δύο σύνολα εικασιών είναι συνεπή ενώ και στα δύο σύνολα, οι παίκτες 2 και 3 συμφωνούν για την πιθανότητα με την οποία έχει παιχθεί (α) η $\hat{s}_1$, διότι $\bar{h}^1_3 + \bar{h}^2_3 = \bar{h}_2$, (β) η $\hat{s}_1$, διότι $\bar{h}^3_3 + \bar{h}^4_3 = 1 - \bar{h}_2$, πάντα υπό την συνθήκη ότι δεν έχει επιλεγεί η s_1^*.

Η προσδοκώμενη απόδοση του παίκτη 3 από την s_3^* ,

($h^1_3\,2 + h^2_3\,1 + h^3_3\,1 + h^4_3\,1$) , και εκείνη από την $\hat{s}_3$, ($h^1_3\,1 + h^2_3\,3 + h^3_3\,4 + h^4_3\,3$) >), γίνονται υπό το πρώτο σύνολο, ($h^2_3 + h^4_3$) 1 = [h_2 + (1-$\bar{h}_2$)] 1=1 και ($h^2_3 + h^4_3$) 3 = [h_2 + (1-$\bar{h}_2$)] 3=3 αντιστοίχως ενώ υπό το δεύτερο σύνολο έχουμε,

($h^1_3 + h^3_3$) 2= [$\bar{h}_2$ + (1-$\bar{h}_2$)] 2=2 και $h^1_3 + h^3_3$ 4 = $\bar{h}_2$ 1+ (1-$\bar{h}_2$)4= 3$\bar{h}_2$

Η προσδοκώμενη απόδοση του παίκτη 2 από την s_2^* εάν παιχθεί η $\hat{s}_3$, h_2 1 + (1-h_2) 1 = 1, από την $\hat{s}_2$ εάν παιχθεί η $\hat{s}_3$, h_2 3 + (1-h_2) 3 = 3, και από την s_2^*, h_2 2 + (1-h_2) 2 = 2 , δεν επηρεάζονται από την τιμή του h_2 . Επηρεάζεται, ωστόσο, η προσδοκώμενη απόδοση του 2 από την $\hat{s}_2$ αν παιχθεί η s_3^*, h_2 4 + (1-h_2) 1 = 3 h_2 -1, διότι το h_2 πρέπει να λάβει την τιμή $\bar{h}_2$.

Από τις εν λόγω προσδοκώμενες αποδόσεις, συμπεραίνουμε ότι μόνον το πρώτο σύνολο συνεπών εικασιών υπακούει στην ακολουθητική ορθολογικότητα ως εξής: Εάν ο παίκτης 3 επιλέξει $\hat{s}_3$, (α) θα "εξαναγκάσει" τον 2 να επιλέξει $\hat{s}_2$ για να λάβει 3 και όχι 1 που θα ελάμβανε αν ο 2 έπαιζε s_2^*, και αυτό με την σειρά του, (β) θα εξαναγκάσει τον 1 να παίξει $\bar{s}_1$, για να λάβει 5 και όχι 3 αν έπαιζε $\hat{s}_1$, ή 2 αν έπαιζε s_1^*, δεδομένης της ακολουθίας $\hat{s}_2$– $\hat{s}_3$. Και η επιλογή $\hat{s}_3$ είναι ακολουθητικά ορθολογική διότι αποδίδει 3 αντί του 1 που θα απέδιδε η s_3^*, πάντα υπό το πρώτο σύνολο εικασιών.

Υπό το δεύτερο σύνολο εικασιών, εάν ο παίκτης 3 επιλέξει s_3^*, (α) θα εξαναγκάσει τον 2 να επιλέξει s_2^*, διότι τότε η προσδοκώμενη απόδοσή του θα είναι 2 ενώ υπό την $\hat{s}_2$ θα είναι 3 $\bar{h}_2$ -1
που είναι απόδοση πάντα μικρότερη της σίγουρης 2, μιας και είναι πάντα αληθές ότι $3\bar{h}_2 -1 < 2 \Rightarrow h_2 < 1$, (β) θα εξαναγκάσει ακολούθως τον παίκτη 1 να επιλέξει s_1^* για να λάβει 2 αντί του 1 που θα ελάμβανε είτε υπό την $\hat{s}_1$, είτε από την $\bar{s}_1$, δεδομένου ότι μετά θα παίζονταν s_2^* και s_3^* . Όμως, η επιλογή s_3^* δεν είναι ακολουθητικά ορθολογική εκ μέρους του 3, διότι η προσδοκώμενη απόδοση 2 απ' αυτήν θα υπερέβαινε την προσδοκώμενη απόδοση 1- 3 h_2 από την $\hat{s}_3$ μόνον εάν $h_2>5/3$:

$2> 1- 3 h_2 \Rightarrow -2< - (1-3 h_2) \Rightarrow -2 <3 h_2 –1 \Rightarrow 4-2<3h_2-1+4 \Rightarrow$
$2<3h_2-3 \Rightarrow 2/3< h_2 -1 \Rightarrow 1+ (2/3) < h_2 \Rightarrow h_2>5/3$

Αλλά και αν ακόμη το h_2 μπορούσε να λάβει τέτοια τιμή, θα αντέφασκε με το γεγονός ότι η ακλουθητική ορθολογικότητα του 2 προϋποθέτει ένα $h_2<1$.

Επομένως, SEQ αποτελεί μόνον η
$\{[(\bar{s}_1), (\hat{s}_2) ,(\hat{s}_3)], \bar{h}_2 = 0, \bar{h}^4_3 = 1\}$

Τέλος, στο TEX1, SEQ αποτελεί μόνον η SPNE $\{[(\hat{s}_1, s_1') , s_1^+] , (\bar{s}_2 , s_2^*)\}$ ενώ στο παίγνιο Ξ1, η μοναδική SEQ είναι η SPNE $[(\hat{s}_1, s_1^+), \hat{s}_2]$, όπως πράγματι θα έπρεπε σύμφωνα με τις παρατηρήσεις στο τέλος του προηγούμενου μέρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

6.1. Επανορισμοί

(Luce and Raifa, 1957- Shubik, 1959 – Friedman, 1971)

Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια αποτελούν μια ειδική κατηγορία δυναμικών παιγνίων ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος. Ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο (repeated game) δεν είναι τίποτ' άλλο από ένα στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης που παίζεται πολλές φορές, σε πολλούς γύρους, και που γι' αυτό θα το αποκαλούμε παίγνιο γύρου (state game) ή συστατικό παίγνιο (constituent game). Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που παρουσιάζουν τέτοια παίγνια είναι ότι η ισορροπία Nash του παίγνιου γύρου μπορεί να μην είναι η SPNE του όλου παίγνιου, η κατάσταση ισορροπίας του επαναλαμβανόμενου παίγνιου ως τέτοιο. Για να το δούμε αυτό, θα πρέπει πρώτα να δούμε το νόημα το οποίο έχουν τώρα οι έννοιες του υποπαίγνιου, της στρατηγικής και της SPNE.

Εάν το παίγνιο γύρου παίζεται T φορές και το T είναι κάποιος πεπερασμένος αριθμός, το υποπαίγνιο που αρχίζει στον γύρο t+1 είναι το επαναλαμβανόμενο παίγνιο που απομένει να παιχθεί, το επαναλαμβανόμενο παίγνιο στο οποίο το παίγνιο γύρου παίζεται (T-t) φορές. Και υπάρχουν τόσα υποπαίγνια που αρχίζουν τον γύρο t+1 όσες και οι πιθανές ιστορίες παιξίματος μέχρι τον γύρο t. Αν π.χ. οι, παίκτες είναι δύο με σύνολα στρατηγικών (s_1^* , $\hat{s}_1$) και (s_2^*, $\hat{s}_2$) οι πιθανές ιστορίες όταν t+1=2 είναι οι τέσσερις ιστορίες (s_1^* ,s_2^*), (s_1^* , $\hat{s}_2$), ($\hat{s}_1$, s_2^*) και ($\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$) τις οποίες έστω ότι τις συμβολίζουμε με Α, Β, Γ και Δ, αντιστοίχως. Όταν t+1=3, οι πιθανές ιστορίες πριν τον τρίτο γύρο είναι 4^2=16 ως εξής:

t=1: ΑΑΑΑ ΒΒΒΒ ΓΓΓΓ ΔΔΔΔ

t=2: ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ

(Τις ιστορίες τις διαβάζουμε κάθετα.) Όταν t+1=4, οι πιθανές ιστορίες πριν τον τέταρτο γύρο είναι 4^3=64 ως εξής:

t=1: ΑΑΑΑ ΑΑΑΑ ΑΑΑΑ ΑΑΑΑ

t=2: ΑΑΑΑ ΒΒΒΒ ΓΓΓΓ ΔΔΔΔ

t=3: ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ

t=1: ΒΒΒΒ ΒΒΒΒ ΒΒΒΒ ΒΒΒΒ

t=2: ΑΑΑΑ ΒΒΒΒ ΓΓΓΓ ΔΔΔΔ

t=3: ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ

t=1: ΓΓΓΓ ΓΓΓΓ ΓΓΓΓ ΓΓΓΓ

t=2: ΑΑΑΑ ΒΒΒΒ ΓΓΓΓ ΔΔΔΔ

t=3: ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ

t=1: ΔΔΔΔ ΔΔΔΔ ΔΔΔΔ ΔΔΔΔ

t=2: ΑΑΑΑ ΒΒΒΒ ΓΓΓΓ ΔΔΔΔ

t=3: ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ ΑΒΓΔ

Δηλαδή, οι πιθανές ιστορίες μέχρι τον γύρο t και τα υποπαίγνια που αρχίζουν τον γύρο t+1 για δύο μόνο παίκτες και X>1 στρατηγικές για κάθε παίκτη, θα είναι $(X^2)^t$, ή απλώς, παρά πολλά αν και ένα υποπαίγνιο θα είναι πάντα το ίδιο ανεξάρτητα ιστορίας προέλευσης δεδομένου βέβαια του χρόνου έναρξής του. Τα υποπαίγνια θα είναι όχι μόνο παρά πολλά αλλά άπειρα αν το T τείνει προς το άπειρο. Σ' αυτή τη περίπτωση, ένα υποπαίγνιο θα είναι πάντα το ίδιο με το αρχικό (επαναλαμβανόμενο) παίγνιο.

Όσον αφορά στη συνέχεια την έννοια της στρατηγικής, αυτή συμπίπτει για το παίγνιο γύρου με μια απλή κίνηση, όπως π.χ. την s_i^* ή την $\hat{s}_i$, i=1,2. Όμως, στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο και τα υποπαίγνια του, μια στρατηγική περιλαμβάνει μία σειρά τέτοιων κινήσεων, προγραμματίζει μια κίνηση για κάθε φορά που παίζεται το παίγνιο γύρου δεδομένης της κάθε πιθανής ιστορίας που μπορεί να οδηγεί στον κάθε γύρο. Αν για παράδειγμα ο παίκτης 1 παίζει ένα παίγνιο δύο γύρων, η στρατηγική του θα μπορούσε να έχει ως πρόγραμμα δράσης τη κίνηση s_1^*, για τον πρώτο γύρο και την s_1^* για τον δεύτερο μόνον όταν στον πρώτο εμφανιστεί Α ή Β, παίζοντας σε αντίθετη περίπτωση $\hat{s}_1$, όπου τα Α, Β, Γ και Δ ορίζονται όπως και πριν.

Πρόκειται δηλαδή για τη γνωστή έννοια της στρατηγικής που χρησιμοποιούν γενικά τα δυναμικά παίγνια και που προβλέπει κινήσεις ακόμα και για ενδεχόμενα που δεν πρόκειται να εμφανισθούν αν ένας παίκτης παίξει όπως σχεδιάζει να παίξει. Ο παίκτης 1 σχεδιάζει για τον δεύτερο γύρο την $\hat{s}_1$ αν προκύψει στο πρώτο Γ ή Δ τη στιγμή που κανένα απ' αυτά τα ενδεχόμενα δεν πρόκειται να προκύψει αν ο 1 παίξει την πρώτη φορά την s_1^* , την οποία προβλέπει η στρατηγική του. Το σύνολο των στρατηγικών είναι πολύ μεγαλύτερο του συνόλου των υποπαιγνίων. Για παίγνιο δύο παικτών και δύο στρατηγικών κινήσεων, ο αριθμός τους φθάνει τις 30 για δύο γύρους και τις 450 για τρεις γύρους ως εξής. Ορίσατε αλφαβητικά για συντόμευση τους παρακάτω συνδυασμούς για κάθε παίγνιο γύρου εκτός του πρώτου:

1. s_i^*ανεξάρτητα αν Α ή Β ή Γ ή Δ στον προηγούμενο γύρο$(s_i^*, s_i^*, s_i^*, s_i^*)$.
2. s_i^* αν Α ή Β ή Γ και $\hat{s}_i$, αν Δ: $(s_i^*, s_i^*, s_i^*, \hat{s}_i)$
3. s_i^* αν Α ή Γ ή Δ και $\hat{s}_i$ αν Β: $(s_i^*, \hat{s}_i, s_i^*, s_i^*)$
4. s_i^* αν Α ή Β ή Δ και $\hat{s}_i$ αν Γ: $(s_i^*, s_i^*, \hat{s}_i, s_i^*)$

5. s_i^* αν Β ή Γ ή Δ και $\hat{s}_i$ αν Α: $(\hat{s}_i, s_i^*, s_i^*, s_i^*)$

6. s_i^* αν Α ή Β και $\hat{s}_i$ αν Γ ή Δ: $(s_i^*, s_i^*, \hat{s}_i, \hat{s}_i)$

7. s_i^* αν Α ή Γ και $\hat{s}_i$ | αν Β ή Δ: $(s_i^*, \hat{s}_i, s_i^*, \hat{s}_1)$

8. s_i^* αν Α ή Δ και $\hat{s}_i$ αν Β ή Γ: $(s_i^*, \hat{s}_i, \hat{s}_i, s_i^*)$

9. s_i^* αν Β ή Δ και $\hat{s}_i$ αν Α ή Γ: $(\hat{s}_i, s_i^*, \hat{s}_i, s_i^*)$

10. s_i^* αν Β ή Γ και $\hat{s}_i$ αν Α ή Δ: $(\hat{s}_i, s_i^*, s_i^*, \hat{s}_i)$

11. s_i^* αν Γ ή Δ και $\hat{s}_i$ αν Α ή Β: $(\hat{s}_i, \hat{s}_i, s_i^*, s_i^*)$

12. s_i^* αν Α και $\hat{s}_i$ αν Β ή Γ ή Δ: $(s_i^*, \hat{s}_i, \hat{s}_i, \hat{s}_i)$

13. s_i^* αν Β και $\hat{s}_i$ αν Α ή Γ ή Δ: $(\hat{s}_i, s_i^*, \hat{s}_i, \hat{s}_i)$

14. s_i^* αν Γ και $\hat{s}_i$ αν Α ή Β ή Δ: $(\hat{s}_i, \hat{s}_i, \hat{s}_i, s_i^*)$

15. s_i^*αν Δ και $\hat{s}_i$ αν Α ή Β ή Γ: $(\hat{s}_i, \hat{s}_i, \hat{s}_i, s_i^*)$

Οι στρατηγικές για δύο γύρους θα είναι:

t=1:	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

t=1:	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

Για τρεις γύρους θα έχουμε:

t=1:	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=3:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

t=1:	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)	(β)
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=3:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

⋮

t=1:	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*	s_i^*
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=3:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

t=1:	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)	(α)
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=3:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

⋮

t=1:	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)	(ιδ)
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=3:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

t=1:	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$	$\hat{s}_i$
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=2:	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)	(ιε)
	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και	και
t=3:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)	(στ)	(ζ)	(η)	(θ)	(ι)	(ια)	(ιβ)	(ιγ)	(ιδ)	(ιε)

Για παράδειγμα, η στρατηγική [s_i^* και (ιε) και (δ)] είναι η (s_i^*, $\hat{s}_i$, $\hat{s}_i$, $\hat{s}_i$, s_i^*, s_i^*, s_i^*, $\hat{s}_i$, s_i^*). Τώρα, μια ισορροπία Nash θα είναι τέλεια για τα υποπαίγνια εάν οι στρατηγικές των παικτών αποτελούν ισορροπία Nash σε κάθε υποπαίγνιο.

6.2 Επαναλαμβανόμενα Παίγνια Πεπερασμένων Γύρων

(Benoit and Krishna, 1985, 1987)

Θεωρήσατε και πάλι το παίγνιο ΔΦ, που έχει μοναδική ισορροπία Nash τη μη συνεργασία εκ μέρους και των δύο παικτών. Έστω ότι αυτό το παίγνιο παίζεται ορισμένες, T, φορές με αποτέλεσμα την τελευταία φορά που παίζεται να είναι σαν να παίζεται μόνον μια φορά, αφού δεν υπάρχει η προοπτική επανάληψής του. Έπεται ότι η ισορροπία Nash στο γύρο T θα είναι η μη συνεργασία, και άρα το καλύτερο που πρέπει να παιχθεί στο γύρο (T-1), είναι πάλι η μη συνεργασία και από τους δύο παίκτες. Το γενικό συμπέρασμα απ' αυτή την οπισθοβατική επαγωγή είναι ότι όταν το παίγνιο γύρου ενός επαναλαμβανόμενου παίγνιου πεπερασμένων γύρων έχει μια μόνον ισορροπία Nash, τότε αυτή η ισορροπία αποτελεί και την SPNE του επαναλαμβανόμενου παίγνιου. Αυτό γιατί όταν η ισορροπία Nash είναι μοναδική, η οποιαδήποτε απειλή για την εξασφάλιση μιας άλλης ισορροπίας είναι αβάσιμη. Είναι απλώς ασύμφορο για τον παίκτη i να πραγματοποιήσει την απειλή του προς τον παίκτη j ότι εάν ο j δεν επιλέξει κάποια συγκεκριμένη κίνηση σ' ένα γύρο, τότε ο i δεν θα παίξει την κίνηση ισορροπίας Nash στον επόμενο γύρο. Όταν, όμως, υπάρχουν πολλές ισορροπίες Nash, κάποιος παίκτης μπορεί να απειλήσει ότι δεν θα παίξει κάποια συγκεκριμένη κίνηση ισορροπίας και η απειλή του να γίνει πιστευτή διότι διαθέτει και άλλες τέτοιες κινήσεις.

Θεωρήσατε εκ νέου το παίγνιο ΔΦ αλλά με αριθμητικές για απλούστευση αποδόσεις, με την υπόθεση πάλι για απλούστευση ότι παίζεται δύο μόνο φορές, ως και με μια ακόμη (τρίτη) κίνηση, την Σ, η οποία ενώ είναι άσχετη με το σενάριο αυτού του παίγνιου, εξυπηρετεί ωστόσο στην επεξήγηση της τελευταίας πρότασης. Θα δείξουμε συγκεκριμένα ότι στο τροποποιημένο αυτό παίγνιο ΔΦ, ΤΔΦ, η αξιοπιστία της απειλής μπορεί να οδηγήσει την πρώτη φορά που παίζεται το παίγνιο στη λύση (ΣΥ, ΣΥ), αν και οι ισορροπίες Nash στο παίγνιο γύρου είναι (Σ,Σ) και (ΜΣΥ, ΜΣΥ), (όπου, όπως πριν, ΣΥ=συνεργασία και ΜΣΥ=μη συνεργασία). Εφόσον το παίγνιο γύρου έχει δύο λύσεις, λογικό είναι να αναμένεται από τους παίκτες ότι διαφορετική λύση στον πρώτο γύρο συνεπάγεται και διαφορετική λύση στο δεύτερο γύρο.

	Σ	ΣΥ	ΜΣΥ
Σ	6,6	0,0	0,0
ΣΥ	0,0	9,9	0,10
ΜΣΥ	0,0	10,0	4,4

Παίγνιο ΤΔΦ

Έστω, για παράδειγμα, ότι αναμένουν (Σ,Σ) τη δεύτερη φορά εάν την πρώτη φορά παιχθεί (ΣΥ,ΣΥ), αλλά (ΜΣΥ,ΜΣΥ) τη δεύτερη φορά εάν παιχθεί οποιοσδήποτε άλλος συνδυασμός την πρώτη φορά. Μια τέτοια προσδοκία σημαίνει ότι το παίγνιο δύο γύρων μπορεί να παιχθεί σαν ένα εφ' άπαξ (μια-κι έξω) παίγνιο (one shot game), το ΕΤΔΦ, στο οποίο (α) οι αποδόσεις του συνδυασμού (ΣΥ,ΣΥ) είναι (15,15), δηλ. (9,9) από τον πρώτο γύρο και (6,6) από το δεύτερο, (β) οι αποδόσεις όλων των άλλων συνδυασμών είναι όπως στο παίγνιο γύρου συν τις αποδόσεις (4,4) από το συνδυασμό (ΜΣΥ,ΜΣΥ) του δεύτερου γύρου.

	Σ	ΣΥ	ΜΣΥ
Σ	10,10	4,4	4,4
ΣΥ	4,4	15,15	4,14
ΜΣΥ	4,4	14,4	8,8

Παίγνιο ΕΔΤΦ

Τώρα, ανακαλέσατε ότι ο (ΜΣΥ,ΜΣΥ) αποτελεί ισορροπία Nash στο παίγνιο γύρου ΤΔΦ και άρα εάν παιχθεί σε αμφότερους τους γύρους, τότε θα αποτελεί την SPNE του επαναλαμβανόμενου παίγνιου με συνολικές αποδόσεις (4,4) από τον πρώτο γύρο συν (4,4) από το δεύτερο γύρο, δηλ. με (8,8) όπως ο συνδυασμός (ΜΣΥ,ΜΣΥ) στο εφάπαξ παίγνιο ΕΤΔΦ. Προσέξατε στη συνέχεια ότι ο συνδυασμός (ΜΣΥ,ΜΣΥ) αποτελεί και ισορροπία Nash στο εφάπαξ παίγνιο. Έπεται, έτσι, ότι η ισορροπία Nash σ' αυτό το παίγνιο αντιστοιχεί στην SPNE [(ΜΣΥ,ΜΣΥ) και (ΜΣΥ,ΜΣΥ)] του επαναλαμβανόμενου παίγνιου.

Παρομοίως, η ισορροπία Nash (Σ,Σ) στο ΕΤΔΦ αντιστοιχεί στις ισορροπίες Nash (Σ,Σ) τον πρώτο γύρο και (ΜΣΥ,ΜΣΥ) τον δεύτερο γύρο στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο, και επομένως αντιστοιχεί στην SPNE [(Σ,Σ) και (ΜΣΥ,ΜΣΥ)] αυτού του παίγνιου πράγματι, οι αποδόσεις (10,10) στο ΕΤΔΦ είναι το άθροισμα (6+4, 6+4) των αποδόσεων από τις ισορροπίες Nash (Σ,Σ) και (ΜΣΥ,ΜΣΥ) στο ΤΔΦ.

Όμως, και οι δύο παραπάνω ισορροπίες Nash του εφάπαξ παίγνιου ΕΤΔΦ απορρέουν από το γεγονός ότι στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο θα παιχθεί (ΜΣΥ,ΜΣΥ) τη δεύτερη φορά αν την πρώτη φορά δεν παιχθεί (ΣΥ,ΣΥ) και παιχθεί οποιαδήποτε από τις δύο ισορροπίες Nash (ΜΣΥ,ΜΣΥ) ή (Σ,Σ) του παίγνιου γύρου. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα "τι γίνεται στην περίπτωση που την πρώτη φορά παιχθεί ο συνδυασμός (ΣΥ,ΣΥ)". Συλλαμβάνεται ένα τέτοιο ενδεχόμενο - που ως υπετέθη θα οδηγήσει τη δεύτερη φορά σε (Σ,Σ) - από το εφάπαξ παίγνιο;

Η απάντηση είναι καταφατική, γιατί ισορροπία Nash στο ΕΤΔΦ αποτελεί και ο συνδυασμός (ΣΥ,ΣΥ), με αποδόσεις (15,15)=(9+6, 9+6). Δηλαδή, αυτή η τρίτη ισορροπία Nash του ΕΤΔΦ αντιστοιχεί στην SPNE [(ΣΥ,ΣΥ) και (Σ,Σ)] του επαναλαμβανόμενου παίγνιου. Έτσι, δείξαμε ότι η συνεργασία μπορεί να επιτευχθεί στο "πρώτο στάδιο μιας SPNE" του επαναλαμβανόμενου παίγνιου βάσει της απειλής ότι θα παιχθεί ΜΣΥ στο δεύτερο στάδιο του παίγνιου εάν στο πρώτο δεν παιχθεί ΣΥ, απειλή τιμωρίας αξιόπιστη, διότι η ΜΣΥ αποτελεί κι αυτή κίνηση ισορροπίας πέραν της Σ. Ακόμη βέβαια πιο σημαντικό είναι το συμπέρασμα ότι η λύση, η SPNE, ενός επαναλαμβανόμενου παίγνιου με πολλαπλές ισορροπίες Nash (στο παίγνιο γύρου) ενδεχομένως να μην περιλαμβάνει καμία εκ των ισορροπιών Nash του παίγνιου γύρου όσον αφορά κάποιο συγκεκριμένο γύρο του επαναλαμβανόμενου παίγνιου, (όπως τον πρώτο γύρο στο παράδειγμα του ΤΔΦ υπό το τέλειο-για-τα-υποπαίγνια αποτέλεσμα [(ΣΥ,ΣΥ) και (Σ,Σ)]).

Πρόκειται περί συμπεράσματος γνωστού ως κοινό Θεώρημα για παίγνια πεπερασμένων γύρων (folk theorem for finitely repeated games), που αντανακλά τον αποφασιστικό ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η απειλή τιμωρίας, όπως θα δούμε και στα παίγνια απείρων γύρων.

Για να συνοψίσουμε τα κύρια συμπεράσματά μας, ορίσατε την minimax απόδοση του παίκτη i από το παίγνιο γύρου σαν εκείνη που λύνει το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της μέγιστης απόδοσης του i όταν αυτός ανταπαντά σε κάθε κίνηση του j με τη καλύτερη κίνησή του στο παίγνιο γύρου. Στο ΤΔΦ, για παράδειγμα, η μέγιστη απόδοση του i όταν ο j παίζει Σ είναι 6, όταν ο j παίζει ΣΥ είναι 9 και όταν ο j παίζει ΜΣΥ είναι 4. Η λύση του προβλήματος της ελαχιστοποίησης είναι η απόδοση 4. Η minimax απόδοση του i είναι γενικότερα η χαμηλότερη απόδοση $υ_i$ που μπορούν να επιβάλλουν οι άλλοι παίκτες στον i.

Αν τότε το παίγνιο γύρου έχει μια ισορροπία Nash στην οποία η απόδοση του κάθε παίκτη είναι η minimax απόδοση, η εν λόγω ισορροπία Nash θ' αποτελεί ισορροπία σε κάθε γύρο και την SPNE του επαναλαμβανόμενου παίγνιου (γιατί απλώς ο i δεν μπορεί ν' απειλήσει τον j με τιμωρία μικρότερης απόδοσης απ' ό,τι της minimax). Αν όμως το παίγνιο γύρου έχει και μια άλλη ισορροπία Nash στην οποία η απόδοση w_i του κάθε παίκτη i υπερβαίνει την minimax απόδοσή του, τότε υπάρχει κάποιος γύρος του επαναλαμβανόμενου παίγνιου μέχρι τον οποίο θα επικρατεί ως λύση του επαναλαμβανόμενου παίγνιου, δηλ. ως μέρος της SPNE, η εν λόγω ισορροπία Nash.

Ο γύρος αυτός είναι εκείνος μέχρι τον οποίο ο i μπορεί δια της απειλής τιμωρίας του j με minimax απόδοση να τον αποτρέπει να επωφεληθεί πρόσκαιρα από μια παρέκκλιση εκ της ισορροπίας που δίνει w_j.

<u>6.3 Οι Αποδόσεις στα Απείρως Επαναλαμβανόμενα Παίγνια</u>

(Diamond, 1965)

Στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια, το άθροισμα των αποδόσεων ενός παίκτη απ' όλους τους γύρους θα είναι κι αυτό άπειρο άσχετα εάν πρόκειται για το άθροισμα π.χ. μονάδων ή εκατοντάδων' επομένως, η σύγκριση των αποδόσεων είναι αδύνατη. Γι' αυτό, αυτού του είδους τα παίγνια, (α) τα επανερμηνεύουμε σαν αορίστως επαναλαμανόμενα παίγνια, τα οποία τελειώνουν μετά από κάποιο τυχαίο, αβέβαιο για τους παίκτες, αριθμό γύρων, (β) περιλαμβάνουν κάποιον ρυθμό προτίμησης του παρόντος από το μέλλον. Έτσι, αν η απόδοση του γύρου t, t=1,2,..., είναι α_t, το άθροισμα των αποδόσεων για κάποιον παίκτη του παίγνιου θα είναι:

$$\alpha_1 + \frac{(1-\pi)}{(1+\mu)}\alpha_2 + \frac{(1-\pi)^2}{(1+\mu)^2}\alpha_3 + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\alpha_t$$

Όπου (1-π) είναι η πιθανότητα συνέχισης του παιγνίου , 1/ (1-μ) είναι η σημερινή αξία μιας νομισματικής μονάδας από τον επόμενο γύρο και ασφαλώς δ=(1-π)/(1+μ), με συνέπεια το εν λόγω άθροισμα να αντιπροσωπεύει στην ουσία τόσο την παρούσα αξία του αθροίσματος των αποδόσεων όσον και την πιθανότητα παύσης του παίγνιου.

Αν η μέση απόδοση (average payoff) είναι α, δηλ. αν κάθε γύρος t απέδιδε α αντί α_t; το παραπάνω άθροισμα θα ήταν

$$\alpha+\delta\alpha+\delta^2\alpha+\ldots= \sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\alpha$$

και τα δύο αθροίσματα θα έπρεπε ασφαλώς να είναι ίσα:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\alpha = \sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\alpha_t \Rightarrow \alpha=\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\alpha_t \,/\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}$$

εκ της οποίας έπεται ότι:

$$\alpha=(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\alpha_t \qquad (1)$$

διότι $\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}=1/(1-\delta).$

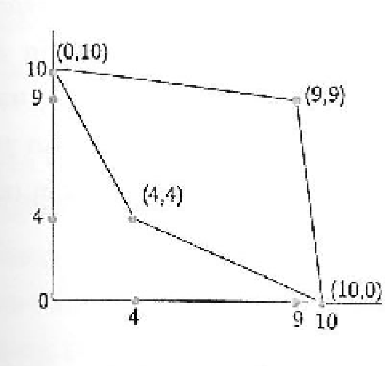
Εάν δ<1, η ακολουθία των μέσων αποδόσεων α_tστην (1) θα είναι συγκλίνουσα. Εάν, όμως, δ=1, η εν λόγω ακολουθία μπορεί μεν να μην είναι αποκλίνουσα αλλά υπάρχει το ενδεχόμενο οι μέσες αποδόσεις να κυμαίνονται εντός κάποιου εύρους. Σ' αυτή την περίπτωση, η μέση απόδοση του επαναλαμβανόμενου παίγνιου, η α, θα ορίζεται ως το όριο της μικρότερης συγκλίνουσας υπακολουθίας μέσων αποδόσεων $\Sigma\alpha_t$, /T, που μπορεί να βρεθεί. Αυτό το όριο συμβολίζεται με lim inf και έτσι λαμβάνουμε τις περιπτώσεις, πρώτον της (1) για δ<1, και δεύτερον της

$$\alpha=\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\alpha_t/T \qquad \text{για } \delta=1 \qquad (2)$$

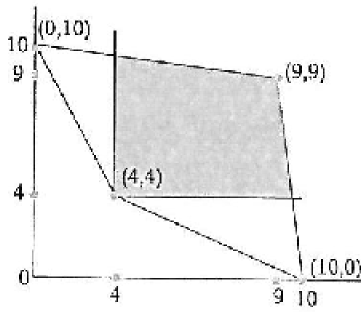
Εάν ένας παίκτης ενδιαφέρεται για τις μεταβολές των αποδόσεων από γύρο σε γύρο, τότε δ<1. Ο λόγος που ενδιαφέρεται είναι είτε γιατί το παίγνιο μπορεί να τελειώσει γρήγορα (π>0) είτε γιατί προτιμά το παρόν από το μέλλον (μ>0). Εάν δεν τον ενδιαφέρουν τέτοιες μεταβολές αλλά είναι διατεθειμένος να υποστεί βραχυχρόνια (για κάμποσους αρχικούς γύρους) απώλειες για ν' αυξήσει το μακροχρόνιο όφελος, τότε δ=1. Όταν δ=1, τότε τόσο π=0 όσο και μ=0, που σημαίνει ότι μπορεί κάποιος να αναβάλει να κάνει κάτι προσοδοφόρο σήμερα αν αργότερα του αποδώσει περισσότερο. Μπορούμε ακόμη να ορίσουμε τη μέση απόδοση ως

$$\alpha=\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\alpha_t \qquad (3)$$

Ο παίκτης τότε θα ενδιαφέρεται τόσο για το μέλλον των αποδόσεών του όσο και για τις μεταβολές τους από γύρο σε γύρο.



Διάγραμμα 7.1



Διάγραμμα 7.2

Τα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια διακρίνονται σε δ-προεξοφλούμενα (δ-discounted), ορίου μέσων (limit of means) και υπερβατικά (overtaking), ανάλογα με το εάν η χρησιμοποιούμενη μέση απόδοση είναι η (1), η (2) ή η (3), αντιστοίχως. Η (3) χαρακτηρίζεται ως υπερβατική με την έννοια ότι ο παίκτης θέλει να ξεπερνά τις βραχυχρόνιες διακυμάνσεις των αποδόσεών του επιτυχώς, εκμεταλλευόμενος ταυτόχρονα τις μακροχρόνιες προοπτικές του. Ας ορίσουμε τέλος και τους εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων (feasible payoff profiles) ως τους κυρτούς (convex) συνδυασμούς ή το ίδιο, τους σταθμισμένους μέσους των αποδόσεων των απλών στρατηγικών-κινήσεων στο παίγνιο γύρου, με τις σταθμίσεις (π) να μην είναι αρνητικές, και προστιθέμενες να δίνουν τη μονάδα.

Το σκιαγραφημένο εμβαδόν στο Διάγραμμα 7.1 δίνει τους κυρτούς συνδυασμούς του ΔΦ:($\pi_1 9 + \pi_2 0 + \pi_3 10 + \pi_4 4$) , ($\pi_1 9 + \pi_2 10 + \pi_3 0 + \pi_4 4$,).

6.4 Κοινά Θεωρήματα

(Friedman, 1971- Aumann and Shapley ,1976 - Rubinstein, 1977)

Θεωρήσατε την εξής στρατηγική εκ μέρους του παίκτη i στο ΔΦ: "Θα παίζω ΣΥ για πάντα εκτός εάν σε κάποιο γύρο διαπιστώσω ότι ο αντίπαλος έχει παίξει την προηγούμενη φορά ΜΣΥ, οπότε θα συνεχίσω κι εγώ με ΜΣΥ για πάντα". Αυτή η στρατηγική χαρακτηρίζεται ως στρατηγική ενεργοποίησης (trigger strategy), διότι η μη συνεργασία εκ μέρους κάποιου παίκτη σε κάποιο γύρο ενεργοποιεί τη στροφή από ΣΥ στη τιμωρία με την minimax απόδοση της ΜΣΥ για πάντα και για τους δυο παίκτες. Το άθροισμα των αποδόσεων για έναν παίκτη απ' αυτή τη στρατηγική αν παιχθεί για πάντα η ΣΥ είναι:

$$9+9\delta+9\delta^2+...=9+9\delta(1+\delta+\delta^2+...)= 9+ \frac{9\delta}{1-\delta} \qquad (4)$$

Εξάλλου, το άθροισμα των αποδόσεων από την εν λόγω στρατηγική εάν παιχθεί για πάντα η ΜΣΥ είναι:

$$10+ 4\delta + 4\delta^2 + \ldots = 10 + \frac{4\delta}{1-\delta} \qquad (5)$$

Εάν τώρα:

$$9 + \frac{9\delta}{1-\delta} \geq 10 + \frac{4\delta}{1-\delta} \Rightarrow \delta \geq 1/6$$

τότε θα συμφέρει και τους δυο παίκτες να υιοθετήσουν για όλο το παίγνιο (από την αρχή) τη στρατηγική ενεργοποίησης. Εφόσον έχουμε παίγνιο απείρων γύρων και άρα υποπαίγνια απείρων γύρων ακριβώς όπως ολόκληρο το παίγνιο, έπεται ότι αυτή η στρατηγική συμφέρει, αποτελεί ισορροπία Nash, και για όλα τα υποπαίγνια.

Συγκεκριμένα, τα υποπαίγνια μπορούν να είναι δύο ειδών: (α) υποπαίγνια που σε όλους τους προηγούμενους γύρους είχαμε (ΣΥ,ΣΥ) και (β) υποπαίγνια που τουλάχιστον σ' έναν προηγούμενο γύρο δεν είχαμε (ΣΥ,ΣΥ). Η στρατηγική που συμφέρει για το πρώτο είδος είναι πάλι η στρατηγική ενεργοποίησης, η οποία, όπως δείξαμε, αποτελεί ισορροπία Nash και για όλο το παίγνιο. Η στρατηγική που συμφέρει στο δεύτερο είδος υποπαιγνίων είναι η επανάληψη του συνδυασμού (ΜΣΥ,ΜΣΥ) για πάντα, συνδυασμός ο οποίος, επίσης, αποτελεί ισορροπία Nash και για όλο το παίγνιο (αφού είναι μέρος της στρατηγικής ενεργοποίησης). Συνεπώς, αν το δ είναι αρκετά μεγάλο και συγκεκριμένα ίσο τουλάχιστον με ένα-έκτο, η στρατηγική ενεργοποίησης αποτελεί ισορροπία Nash για κάθε υποπαίγνιο και έτσι έχουμε μια SPNE.

Το σημαντικότερο, ωστόσο, συμπέρασμα είναι ότι ενώ έχουμε μια μόνο ισορροπία Nash στο παίγνιο γύρου, την (ΜΣΥ,ΜΣΥ), η SPNE στο απείρων γύρων παίγνιο ενδεχομένως να μην την περιλαμβάνει σαν ισορροπία Nash σε κανένα γύρο, γιατί απλώς η τέλεια-για-τα-υποπαίγνια στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική ενεργοποίησης (της τιμωρίας με την minimax απόδοση της ΜΣΥ). Η μέση απόδοση ισορροπίας του κάθε παίκτη θα κυμαίνεται σύμφωνα με την (1) μεταξύ (10-6δ) και 9, ανάλογα με τον γύρο ενεργοποίησης της τιμωρίας "ΜΣΥ για πάντα". Δηλαδή, ο συνδυασμός των μέσων αποδόσεων ισορροπίας θα είναι κάποιος εφικτός συνδυασμός στο έντονα σκιαγραφημένο εμβαδόν του Διαγράμματος 7.2, αλλά ποτέ δεν θα είχαμε 10-6δ=4, διότι αυτό προϋποθέτει δ=1.

Έχουμε γενικότερα το εξής κοινό θεώρημα για δ-προεξοφλούμενα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια, στο οποίο η φράση "συνδυασμός SPNE" υποδηλώνει "τέλεια-για-τα-υποπαίγνια συνδυασμό αποδόσεων ισορροπίας".

Αν το παίγνιο γύρου έχει μια ισορροπία Nash και αν απ' αυτό το παίγνιο μπορούν να προκύψουν εφικτοί συνδυασμοί αποδόσεων μεγαλυτέρων εκείνων υπό την ισορροπία Nash, τότε υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο δ ε (0, 1) που καθιστά οποιουσδήποτε απ' αυτούς τους εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων, συνδυασμούς SPNE δια της στρατηγικής ενεργοποίησης της minimax απόδοσης.

Αν δ=1, η στρατηγική "ΣΥ για πάντα" αποδίδει συνολικά

$\Sigma_{t=1}^{\infty}\ 9_t$ ενώ η στρατηγική "ΜΣΥ για πάντα" δίνει $\Sigma_{t=2}^{\infty}\ 4_t$

Μπορούμε εύκολα να ορίσουμε συγκλίνουσες υπακολουθίες δίνοντας στο T κάποια αυθαίρετα μεγάλη τιμή,

$\bar{T} = T$, διότι τότε

$$\sum_{t=1}^{\overline{T}} 9_t = 9\overline{T} \quad \text{και} \quad \sum_{t=2}^{\overline{T}} 4_t = 4(\overline{T} - 1)$$

Επομένως οι μέσες αποδόσεις ισορροπίας θα κυμαίνονται μεταξύ

$$\liminf \frac{10 + 4(\overline{T} - 1)}{\overline{T}} = \liminf \frac{10 + 4\overline{T}}{\overline{T}} = \frac{4\overline{T}}{\overline{T}} = 4$$

και

$$\liminf \frac{9\overline{T}}{\overline{T}} = 9$$

κάπου μέσα στο έντονα σκιαγραφημένο εμβαδόν του Διαγράμματος 7.2, περιλαμβανομένης τώρα της τιμής 4. Έχουμε γενικότερα το εξής κοινό θεώρημα για ορίου μέσων απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια:

Αν το παίγνιο γύρου έχει μια ισορροπία Nash και αν απ' αυτό το παίγνιο μπορούν να προκύψουν εφικτοί συνδυασμοί αποδόσεων μεγαλυτέρων εκείνων υπό την ισορροπία Nash, τότε η στρατηγική ενεργοποίησης της minimax απόδοσης καθιστά συνδυασμούς SPNE οποιουσδήποτε εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων ως το κατώτερο όριο κάποιας συγκλίνουσας υπακολουθίας μέσων αποδόσεων.

Υπογραμμίζεται και πάλι ότι το ποιος ακριβώς θα είναι ο συνδυασμός μέσων αποδόσεων ισορροπίας, το ποια ακριβώς θα είναι η SPNE, εξαρτάται από τον γύρο ενεργοποίησης της τιμωρίας.

Για την πληρέστερη κατανόηση του χαρακτήρα της στρατηγικής ενεργοποίησης και των κοινών θεωρημάτων, ας ξεφύγουμε από το ΔΦ και ας εξετάσουμε το παίγνιο Μ, στο οποίο η μοναδική ισορροπία Nash είναι η (s_1^* , $\hat{s}_2$). Το περιεχόμενο της στρατηγικής ενεργοποίησης είναι και τώρα ότι ο παίκτης 1 απειλεί τον 2 ότι και ο 1 θ' αρχίσει να παίζει $\hat{s}_1$, αν ο 2 δεν πάψει να παίζει $\hat{s}_2$. Η απειλή όμως είναι αναξιόπιστη γιατί για τον 1 η s_1^* κυριαρχεί αυστηρά την $\hat{s}_1$, και αν ποτέ ενεργοποιηθεί η τιμωρία, θα είναι ασύμφορη για τον 1 να τη συνεχίσει για πολύ.

	s_1^*	$\hat{s}_2$
s_1^*	$\underline{9}$,9	$\underline{5}$,$\underline{\underline{10}}$
$\hat{s}_1$	8,$\underline{\underline{4}}$	$\underline{2}$,$\underline{\underline{2}}$

Παίγνιο Μ

Η στρατηγική ενεργοποίησης παύει να είναι τέλεια για τα υποπαίγνια στρατηγική ισορροπίας. Η άριστη διάρκεια της τιμωρίας σε τέτοιες και άλλες περιπτώσεις είναι το θέμα το οποίο θίγουν τα Τέλεια Κοινά Θεωρήματα (perfect folk theorems), που ακολουθούν.

6.5 Τέλεια Κοινά Θεωρήματα

(Auman and Ahapley , 1976- Rubinstein1977, 1979 – Fudenberg and Maskin, 1986)

Η στρατηγική ενεργοποίησης έχει το μειονέκτημα ότι είναι αδικαιολόγητα σκληρή τόσο για τον τιμωρούμενο όσο και για τον τιμωρό ανεξάρτητα του αν αποτελεί στρατηγική ισορροπίας ή όχι. Η τιμωρία με minimax απόδοση θα μπορούσε να διαρκούσε τόσο όσο χρειάζεται για να εξαλείψει τη πρόσθετη απόδοση εκ της κατά ένα γύρο παρέκκλισης από τη συνεργασία. Η διάρκεια και σοβαρότητα της τιμωρίας εξαρτάται βέβαια και από τη δομή του παίγνιου. Για παράδειγμα, στο ΔΦ, η ελάχιστη διάρκεια του ενός γύρου στερεί από τον τιμωρούμενο 9-4=5 που υπερβαίνει την εκ της παρέκκλισης πρόσθετη απόδοση 10-9=1.

Η ουσία είναι ότι η στρατηγική τιμωρίας περιορισμένης διάρκειας, που είναι επίσης γνωστή ως μία σου και μία μου (tit for tat) γιατί συνήθως η διάρκεια είναι ενός γύρου, υπερτερεί της στρατηγικής ενεργοποίησης, διότι η πρώτη θα απέδιδε το ποσό

$$4+ \delta 9 + \delta^2 9 + \ldots = 4 + \frac{9\delta}{1-\delta} \qquad (6)$$

το οποίο είναι μεγαλύτερο από την απόδοση

$$4+ \delta 4 + \delta^2 4+ \ldots = 4 + \frac{4\delta}{1-\delta} \qquad (7)$$

υπό τη δεύτερη για κάθε δ<1. Αν δ=1, η μία σου και μία μου έχει το επιπλέον πλεονέκτημα ότι αποδίδει στον τιμωρό το ίδιο όσο και η "συνεργασία για πάντα", έτσι ώστε να μην έχουν κίνητρο οι παίκτες να μην υιοθετήσουν αυτήν τη στρατηγική. Και πράγματι, 9 είναι όπως γνωρίζουμε το κατώτερο όριο μιας υπακολουθίας μέσων αποδόσεων όταν οι αποδόσεις είναι όπως στο αριστερό σκέλος της (4), δηλ. η ακολουθία (9,9,9,..,), ενώ

$$\liminf \frac{4+9(T-1)}{T} = \liminf \frac{4+9T}{T} = \liminf \frac{9T}{T} = 9$$

πάλι όταν οι αποδόσεις είναι όπως στο αριστερό σκέλος της (6), δηλ. η ακολουθία (4,9,9,...). Οι παίκτες είναι αδιάφοροι μεταξύ των δύο ακολουθιών, γιατί δεν τους ενδιαφέρουν οι βραχυχρόνιες μεταβολές των αποδόσεων τόσο όσο οι μακροχρόνιες. Έτσι, έχουμε το εξής τέλειο κοινό Θεώρημα για ορίου μέσων απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια:

Αν το παίγνιο γύρου έχει μια ισορροπία Nash και αν απ' αυτό το παίγνιο μπορούν να προκύψουν εφικτοί συνδυασμοί αποδόσεων μεγαλυτέρων εκείνων υπό την ισορροπία , τότε η στρατηγική τιμωρίας περιορισμένης διάρκειας καθιστά συνδυασμούς SPNE οποιουσδήποτε εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων ως το κατώτερο όριο κάποιας συγκλίνουσας υπακολουθίας μέσων αποδόσεων για τον κάθε παίκτη.

Αν βλέπαμε το ΔΦ ως δ-προεξοφλούμενο ή υπερβατικά απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο, οι παίκτες θα προτιμούσαν την ακολουθία (9,9,9,...) από την ακολουθία (4,9,9,...) διότι είναι ευαίσθητοι στις βραχυχρόνιες μεταβολές των αποδόσεων και θα είχαν κίνητρο να μην υιοθετήσουν τη μία σου και μία μου ως εξής: Υπό δ-προεξόφληση, η "ΣΥ για πάντα" θα συμφέρει αν η (4) υπερβαίνει τη

$$10+\delta 4+\delta^2 10+\delta^3 4+\ldots = \frac{10+4\delta}{1-\delta^2} \qquad (8)$$

από την "ΜΣΥ για πάντα" όταν αυτή τιμωρείται σύμφωνα με τη μία σου και μία μου. Η (4) υπερβαίνει την (8) όταν δ>1/5, οπότε η υιοθέτηση της στρατηγικής της μία σου και μία μου θα είναι συμφέρουσα μόνον εάν δ<1/5.

Η ΜΣΥ δεν συμφέρει να παιχθεί όταν δ>1/5, αλλά εάν για κάποιο λόγο παιχθεί από τον αντίπαλο για έναν γύρο, τότε η τιμωρία του με ΜΣΥ τον επόμενο γύρο θα ήταν ασύμφορη γιατί θα απέδιδε στον τιμωρό 4 ενώ η ΣΥ θα απέδιδε 9, μιας και δεν αναμένεται να ξαναπαιχθεί ΜΣΥ. Επομένως, όταν δ>1/5, οι παίκτες δεν έχουν κίνητρο υιοθέτησης της στρατηγικής της μία σου και μία μου.

Η εν λόγω στρατηγική δεν είναι τέλεια-για-τα-υποπαίγνια στρατηγική ισορροπίας για το δ-προεξοφλούμενο απείρως επαναλαμβανόμενο ΔΦ. Το ίδιο ισχύει και για το υπερβατικά απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο. Η ακολουθία (9,9,9,...) δίνει lim inf 9T που υπερβαίνει το lim inf (9T-5) εκ της ακολουθίας (4,9,9,...).

Σ' αυτό το σημείο, μπορούμε να δούμε τη διαφορά μεταξύ τελείων κοινών και απλώς κοινών θεωρημάτων. Ίσως να φαίνεται ότι η στρατηγική περιορισμένης χρονικής διάρκειας είναι σύμφωνη με τα κοινά θεωρήματα του προηγούμενου μέρους, αλλά προσέξατε ότι εκείνα αναφέρονται στη στρατηγική ενεργοποίησης. Υπ' αυτή τη στρατηγική, αν δ>1/6 και παιχθεί ΜΣΥ για κάποιο λόγο, ο τιμωρός δεν έχει άλλη επιλογή από το ν' αρχίσει να παίζει ΜΣΥ για πάντα. Η υιοθέτηση της εν λόγω στρατηγικής ισοδυναμεί με υιοθέτηση της απειλής περί διηνεκούς αντιπαράθεσης, και αν τυχόν χρειασθεί η απειλή να πραγματοποιηθεί, δεν υπάρχουν περιθώρια σύγκρισης μεταξύ 4 και 9.

Αυτό δεν σημαίνει ότι η στρατηγική ενεργοποίησης είναι καλύτερη από τη στρατηγική περιορισμένης χρονικής διάρκειας. Είδαμε ότι το αντίθετο ακριβώς συμβαίνει με τα ορίου μέσων απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια όταν αυτή η δεύτερη στρατηγική λαμβάνει τη μορφή της μία σου και μία μου. Το ίδιο θα δούμε αμέσως τώρα και για τις δύο άλλες κατηγορίες απείρως επαναλαμβανόμενων παιγνίων αν όμως η μία σου και μία μου βελτιωθεί έτσι ώστε να υπάρχει πάντα κίνητρο υιοθέτησης της βελτιωμένης μορφής. Το γεγονός ότι υπάρχουν απειλές τιμωρίας λιγότερο σκληρές από την απειλή της στρατηγικής ενεργοποίησης αλλά που εξασφαλίζουν σε ισορροπία τη συνεργασία όπως και η στρατηγική ενεργοποίησης, είναι αυτό που καθιστά τέλεια τα σχετικά κοινά θεωρήματα αυτού του μέρους.

Η πρώτη βελτίωση που θα κάνουμε στη μία σου και μία μου είναι να επιτρέψουμε στον τιμωρούμενο να τιμωρεί τον τιμωρό όταν ο δεύτερος αποφεύγει να τιμωρήσει. Αυτή η εκδοχή της στρατηγικής περιορισμένης χρονικής διάρκειας είναι γνωστή ως στρατηγική του τιμωρούμενου τιμωρού (punishing the punisher), καθώς επίσης και ως το καρότο και το μαστίγιο (the carrot and the stick). Καρότο εάν ο παίκτης υπακούσει σε ό,τι επιτάσσει η στρατηγική (τιμωρία αν επιτάσσει τιμωρία, συνεργασία όταν επιτάσσει συνεργασία) και μαστίγιο, δηλ. τιμωρία του παίκτη, αν αυτός δεν υπακούσει.

Έστω, για παράδειγμα, ότι στον γύρο t όταν παίζεται το ΔΦ, ο παίκτης 1 συνεργάζεται αλλά όχι ο παίκτης 2. Οι αποδόσεις θα είναι (0,10). Στον γύρο t+1, ο 2 αναμένει ότι ο 1 θα τον τιμωρήσει και παίζει ΜΣΥ. Εάν ο 1 δεν υπακούσει στη στρατηγική και δεν τιμωρήσει τον 2, οι αποδόσεις θα είναι πάλι (0,10). Στον γύρο t+2, ο παίκτης 2, που υπακούει σε ό,τι επιτάσσει η στρατηγική, θα τιμωρήσει τον 1 παίζοντας ΜΣΥ. Αν ο 1, που το ξέρει αυτό, παίξει ΜΣΥ, οι αποδόσεις θα είναι (4,4) και όχι μόνον δεν θα ξανατιμωρηθεί αλλά το παίγνιο θα επιστρέψει στη (ΣΥ,ΣΥ). Αν, ωστόσο, ο 1 δεν υπακούσει και πάλι στη στρατηγική, οι αποδόσεις θα είναι (0,10) και θα ξανατιμωρηθεί στον γύρο 1+3, κ.ο.κ. Θέτοντας για απλούστευση 1=0, η ακολουθία αποδόσεων του 1 εάν αυτός υπακούσει τη στρατηγική καρότου-μαστιγίου, θα είναι (4,9,9,9,...) με lim inf (9T-5) μεγαλύτερο του lim inf (9T-14) εκ της ακολουθίας (0,4,9,9,...) εάν ο 1 δεν υπακούσει στη στρατηγική για έναν γύρο και τιμωρηθεί στον επόμενο γύρο. Οπότε, έχουμε γενικά το εξής τέλειο κοινό Θεώρημα για υπερβατικά απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια:

Αν το παίγνιο γύρου έχει μια ισορροπία Nash και αν απ' αυτό το παίγνιο μπορούν να προκύψουν εφικτοί συνδυασμοί αποδόσεων μεγαλυτέρων εκείνων υπό την ισορροπία Nash, τότε η στρατηγική του τιμωρούμενου τιμωρού καθιστά συνδυασμούς SPNE οποιουσδήποτε εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων ως το κατώτερο όριο κάποιας συγκλίνουσας υπακολουθίας αποδόσεων για τον κάθε παίκτη.

Προσέξατε ότι όσον αφορά το συγκεκριμένο παράδειγμα του ΔΦ, το καρότο και το μαστίγιο ικανοποιεί επιπλέον τόσο το τέλειο κοινό θεώρημα ορίου μέσων όσο και το τέλειο κοινό θεώρημα για το δ- προεξοφλούμενο παίγνιο, το οποίο θα δούμε παρακάτω. Υπό δ-προεξόφληση, το καρότο και το μαστίγιο θα συμφέρει αν (α) οι παίκτες προτιμούν να συνεργάζονται όταν το επιτάσσει η στρατηγική, δηλ. αν η (4) υπερβαίνει την (8), όπως και πριν, (β) οι παίκτες προτιμούν να τιμωρούν όταν το επιτάσσει η στρατηγική, δηλ. εάν το ποσό,

$$4+ \delta 9 + \delta^2 9+ \delta^3 9+ \ldots = 4 + \frac{9\delta}{1- \delta}$$

από την τιμωρία υπερβαίνει το ποσό

$$0+ \delta 4 + \delta^2 9+ \delta^3 9+ \ldots = 4\delta + \frac{9\delta^2}{1- \delta}$$

από το να μην τιμωρήσει κάποιος και μετά να τιμωρηθεί. Αυτή η δεύτερη ανισότητα γίνεται 4>δ(5δ-1), που ισχύει για κάθε δ<1. Επομένως, το καρότο και το μαστίγιο αποτελεί SPNE και για το δ-προεξοφλούμενο απείρως επαναλαμβανόμενο ΔΦ, όταν 1/5<δ<1, [το 1/5 το έχουμε βρει από τη σύγκριση μεταξύ (4) και (8)]. Εάν την αυστηρή ανισότητα την αντικαταστήσουμε από την 4>δ(5δ-1), τότε θα ισχύει και για δ=1, οπότε το καρότο και το μαστίγιο αποτελεί SPNE και στο ορίου μέσων απείρως επαναλαμβανόμενο ΔΦ.

Το ότι συμφέρει γι' αυτή την τελευταία μορφή του ΔΦ, δεν πρέπει να μας παραξενεύει γιατί οι παίκτες είναι αδιάφοροι μεταξύ (4,9,9,9,...) και (0,4,9,9,...), όταν δεν δίνουν σημασία στις βραχυχρόνιες μεταβολές των αποδόσεών τους.

Όσον, όμως, αφορά τη περίπτωση δ<1, το καρότο και το μαστίγιο συμφέρει, γιατί προσέξατε ότι όποτε ο παίκτης j τιμωρεί τον παίκτη i όταν ο i αποφεύγει να τιμωρήσει τον j, η απόδοση του j είναι 10, που υπερβαίνει την υπό την ΣΥ απόδοση 9. Δηλαδή, ο j επιβραβεύεται όταν τιμωρεί τον τιμωρό i, και έτσι έχει κίνητρο να το πράξει.

Θεωρήσατε, ωστόσο το παίγνιο Μ με τις εξής ακολουθίες αποδόσεων για τους παίκτες 1 και 2.

t:	1	2	3	4	5	6...	t+ν	t+ν+1	t+ν+2	t+ν+3...
1:	(5,	2,	5,	2,	2,	9...,	2,	2,	2,	9,...)
2:	(10,	2,	10,	2,	2,	9,...,	2,	2,	2,	9,...)

Στον πρώτο γύρο, οι παίκτες παίζουν τις κινήσεις (s_1^* , $\hat{s}_2$) με αποδόσεις (5,10). Στον δεύτερο γύρο, ο παίκτης 1 πραγματοποιεί την απειλή του ότι θα τιμωρήσει τον παίκτη 2 με $\hat{s}_1$, για ένα γύρο αν ο 2 δεν παίξει s_2^*, και οι αποδόσεις μειώνονται έτσι σε (2,2). Στον τρίτο γύρο, ο 1 αναμένει ότι ο 2 θα. συμμορφωθεί και παίζει s_1^*, αλλά ο 2 δεν συμμορφώνεται, και βρίσκονται πάλι με αποδόσεις (5,10).

Στον τέταρτο γύρο, ο 1 πραγματοποιεί την απειλή του ότι εάν ο 2 δεν παίξει s_2^* αμέσως μετά τη πρώτη τιμωρία, ο 1 θα τον ξανατιμωρήσει με δύο γύρους. Έτσι, έχουν αποδόσεις (2,2) και (2,2) για t=4 και t=5 . Στον έκτο γύρο, ο 2 αποφασίζει να συμμορφωθεί και να παίξει s_2^* για [(t+ν-1)-5] γύρους για να ανακάμψει από τις απώλειες που είχε από τις τιμωρίες. Στον γύρο (t+ν-1) έχει ήδη ανακάμψει και ξαναπαίζει $\hat{s}_2$, με αποτέλεσμα οι αποδόσεις να γίνουν (5,10). Κατόπιν τούτου, ο 1 ξανατιμωρεί τον 2 για τρεις τώρα γύρους, και τον τέταρτο (t+ν+3) γύρο, ο 2 ξαναπαίζει s_2^* για τόσους γύρους όσους χρειάζεται για να ανακάμψει από τις απώλειες της τρίτης εν σειρά τιμωρίας του, κ.ο.κ.

Προσέξατε τώρα ότι η συνολική απόδοση του παίκτη 1 από την πραγματοποίηση του καρότου και του μαστίγιου τους πρώτους έξι γύρους είναι (χωρίς προεξόφληση για λόγους απλούστευσης) 25 ενώ εάν απέφευγε να τιμωρήσει, η απόδοση θα ήταν 6(5) = 30>25. Επομένως, ο 1 δεν έχει κίνητρο να τιμωρήσει. Αυτό το ξαναβλέπουμε στη περίοδο από (t+ν) μέχρι (t+ν+3) κατά την οποία η τιμωρία αποδίδει 15 ενώ η αποφυγή της τιμωρίας θα απέδιδε 4(5)=20>15. Αλλά ούτε και στον 2 συμφέρει να τιμωρήσει τον 1 που δεν τον τιμωρεί, γιατί απλώς αν το έπραττε η συνολική του απόδοση θα ήταν μικρότερη απ' ό,τι αν δεν το έπραττε. Μικρότερη από 6(10)=60 για τους πρώτους έξι γύρους, και μικρότερη από 4(10)=40 για τη περίοδο από (t+ν) μέχρι (t+ν+3).

Η τιμωρία με τις minimax αποδόσεις (2,2) ενέχει μεγάλες απώλειες και ο συνδυασμός (s_1^* , s_2^*) δεν μπορεί να προκύψει ως ισορροπία Nash στο παίγνιο γύρου εάν οι δύο παίκτες δεν καθορίσουν μεταξύ τους κάποιο σύστημα αλληλεπιβράβευσης όταν ο ένας πρέπει να τιμωρήσει τον άλλο σύμφωνα με το καρότο και το μαστίγιο. Αυτή η βελτιωμένη εκδοχή της εν λόγω στρατηγικής είναι γνωστή ως στρατηγική επιβράβευσης των τιμωρών.

Η υιοθέτησή της ενδείκνυται όταν το καρότο και το μαστίγιο δεν αποτελεί απλώς βελτίωση της μία σου και μία μου δια της τιμωρίας αυτού που θα έπρεπε να τιμωρήσει και δεν το έπραξε, αλλά περιλαμβάνει την ίδια απειλή τιμωρίας για περισσότερους γύρους κάθε φορά που θα χρειασθεί να πραγματοποιηθεί η απειλή. Αυτό το είδαμε με το παίγνιο Μ αν και μας απομένουν οι σχετικές πράξεις με το δ. Αντ' αυτών, (που αφήνονται στον αναγνώστη), θα διατυπώσουμε γενικότερα το τέλειο κοινό Θεώρημα για δ-προεξοφλούμενα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια:

Αν το παίγνιο γύρου έχει μια ισορροπία Nash και αν απ' αυτό το παίγνιο μπορούν να προκύψουν εφικτοί συνδυασμοί αποδόσεων μεγαλυτέρων εκείνων υπό την ισορροπία Nash, τότε υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο δ ε (0, 1) που καθιστά οποιουσδήποτε απ' αυτούς τους εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων, συνδυασμούς SPNE δια της στρατηγικής επιβράβευσης των τιμωρών.

6.6 Η Ουσία των Κοινών Θεωρημάτων, η Συγχώρεση και η Υπόληψη (Hart, 1985 – Radner, 1985, 1986 –Fudeenberg and Levine, 1989)

Είδαμε ότι τα κοινά θεωρήματα αναδεικνύουν στρατηγικές αντιποίνων (retaliation strategies) σε κοινά για τους παίκτες πρότυπα συμπεριφοράς, που μπορούν να εξασφαλίσουν αμοιβαία επιθυμητές καταστάσεις ως καταστάσεις ισορροπίας δια της απειλής πραγματοποίησης των προβλεπόμενων εκάστοτε αντιποίνων εάν υπάρξει απόκλιση από μια τέτοια κατάσταση λόγω ιδιοτέλειας. Το τι ακριβώς προβλέπεται εκάστοτε από μια στρατηγική αντιποίνων, η συγκεκριμένη μορφή που λαμβάνει η εν λόγω στρατηγική εξαρτάται (α) από το πώς οι παίκτες αξιολογούν το παρόν έναντι του μέλλοντος, και (β) από την αβεβαιότητα για το πέρας του παίγνιου, αβεβαιότητα που το καθιστά στη πράξη απείρων γύρων.

Μπορεί μάλιστα ένα παίγνιο να είναι πεπερασμένων π.χ. 20 γύρων, αλλά να μην είναι ξεκάθαρο στους παίκτες το πότε θα παιχθούν οι τελευταίοι γύροι, και έτσι οι παίκτες θα παίζουν στους πρώτους 5 ή 10 ή 15 γύρους σαν να έπαιζαν απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο με την έννοια βέβαια του αορίστως επαναλαμβανόμενου παίγνιου. Αν γενικά οι παίκτες δεν βλέπουν ότι μπορούν σύντομα να ξεφύγουν ο ένας από τον άλλο και αν δίνουν αρκετή σημασία στο μέλλον, η προοπτική αντιποίνων καθιστά ασύμφορο διαχρονικά τον πειρασμό της μη συνεργασίας βραχυχρόνια. Δηλαδή, σε ισορροπία η εν λόγω προοπτική υπάρχει μόνο "θεωρητικά", διότι ποτέ οι παίκτες δεν τιμωρούν ο ένας τον άλλο.

Δυο ερωτήματα προκύπτουν αμέσως απ' αυτές τις παρατηρήσεις. Το πρώτο, το πιο εύκολο και που αποσαφηνίζει παραπέρα τον χαρακτήρα των κοινών θεωρημάτων, είναι ότι εφόσον τελικά οι παίκτες δεν τιμωρούν, τότε γιατί να "γίνονται κακοί" απειλώντας ο ένας τον άλλο και προετοιμαζόμενοι για την πραγματοποίηση της απειλής.

Υποθέσατε ως προς τούτο ότι η απόδοση του παίκτη i σε κάθε κελί του πίνακα αποδόσεων του παίγνιου γύρου, δεν είναι προκαθορισμένη αλλά ο μέσος μ_i μιας κανονικής κατανομής $N_i(\mu_i,\sigma_i)$, όπου σ_i είναι η τυπική απόκλιση που αποδίδεται πολλές φορές με τον όρο θόρυβος (noise).

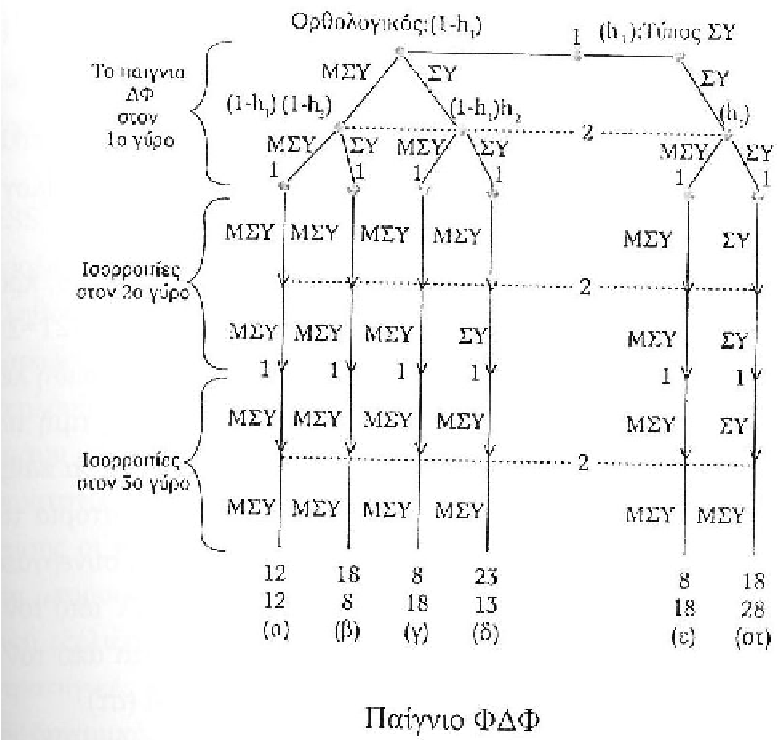
Για παράδειγμα, στο ΔΦ, η απόδοση 9 από (ΣΥ,ΣΥ) προέρχεται από μια κατανομή N_i (9, σ_i) , η απόδοση 0 από (ΣΥ,ΜΣΥ) από μια κατανομή N_i (0, $\sigma_i^{'}$), η 10 από (ΜΣΥ,ΣΥ) από την N_i(10, $\sigma_i^{''}$) και η 4 από (ΜΣΥ,ΜΣΥ) από την N_i(4, $\sigma_i^{'''}$). Έτσι, εάν για τον i προκύψει σ' ένα γύρο απόδοση π.χ. 5 όταν έχει παίξει ΣΥ, πώς μπορεί να ξέρει αν αυτό οφείλεται σε ΣΥ ή ΜΣΥ από τον j; Θα πρέπει επομένως να τον τιμωρήσει έστω και εσφαλμένα, αν αυτό νομίζει ότι πρέπει να πράξει εν’ όψει και της παρατηρούμενης από τον i απόδοσης του j.

Όμως, ο i ξέρει ότι σε ισορροπία, κανένας δεν παίζει ΜΣΥ. Γιατί τότε ο i να μην συγχωρήσει τον j ειδικά όταν ο i δεν πολυπιστεύει ότι ο j έχει παίξει ΜΣΥ παρά την όποια παρατηρούμενη από τον i απόδοση του j; Η απάντηση βέβαια είναι ότι τότε ο j θ' αρχίσει πράγματι να παίζει ΜΣΥ ακόμα και αν δεν είχε ξαναπαίξει ΜΣΥ και αν δεν είχε πρόθεση να το πράξει στο μέλλον. Η ουσία είναι ότι η προοπτική τιμωρίας μπορεί να υπάρξει ως θεωρητικό μόνον ενδεχόμενο που θεμελιώνει μια κατάσταση ισορροπίας, μόνον όταν δεν μπορεί να υπάρξει συγχώρεση (forgiveness). Κανένας παίκτης δεν πρέπει ν' αφήσει να εννοηθεί ότι μπορεί να υπάρξει συγχώρεση.

Δεν θα προχωρήσουμε με το θέμα του θορύβου-συγχώρεσης παραπέρα αλλά θα ξαναδούμε το θέμα της υπόληψης-φήμης παραλογιζόμενου σε μια προσπάθεια περαιτέρω κατανόησης της ουσίας των κοινών θεωρημάτων. Και στις δύο περιπτώσεις, ο παίκτης i φοβάται μήπως πιαστεί κορόιδο από τον παίκτη j αν ο i πιστέψει ότι ο j παίζει ΣΥ.

Στη περίπτωση του θορύβου στις αποδόσεις, ο i φοβάται γιατί ο j μπορεί να επιλέξει ΜΣΥ στο απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο. Στην περίπτωση της φήμης παραλογιζόμενου, ο i φοβάται γιατί ο j μπορεί να επιλέξει ΣΥ μπλοφάροντας στο

πεπερασμένων γύρων παίγνιο. Θεωρήσατε ως προς αυτήν τη δεύτερη περίπτωση το παίγνιο ΦΔΦ.Πρόκειται για παίγνιο ΔΦ τριών γύρων, το οποίο δικαιολογεί τη ΣΥ εκ μέρους του 1 όταν t=1, είτε ως κίνηση συνεργάσιμου, υπολήψιμου παίκτη, παραβιάζοντας την λειτουργική ορθολογικότητα που ενέχει η επιλογή ΜΣΥ, είτε ως μπλοφάρισμα λειτουργικά ορθολογικού παίκτη, με πιθανότητες h_1 και (1- h_1) h_2, αντιστοίχως, όπου h_1 και h_2 είναι οι πιθανότητες, ο παίκτης 1 να είναι συνεργάσιμος ή να μπλοφάρει, αντιστοίχως. Ένας λειτουργικά ορθολογικός παίκτης που παίζει στο ΦΔΦ, (Hargreaves Heap and Varoufakis, 1995) δεν μπορεί να παίξει ΣΥ παρά μόνο στον πρώτο γύρο ενώ ένας συνεργάσιμος παίκτης δεν μπορεί ποτέ να παίξει ΜΣΥ αν δεν το πράξει πρώτα ο αντίπαλος (μία σου καιμία μου).



Παίγνιο ΦΔΦ

Έτσι προκύπτουν οι, έξι ιστορίες (α),(β),...,(στ), με συνολικές (και χωρίς εξόφληση) αποδόσεις τις εξής:

(α): (4+4+4,4+4+4) (β): (10+4+4,0+4+4)

(γ): (0+4+4,10+4+4) (δ): (9+10+4,9+0+4)

(ε): (0+4+4, 10+4+4) (στ): (9+9+0, 9+9+10)

Θα συνέφερε στον παίκτη 2 να παίξει ΣΥ άμα και ο παίκτης 1 παίξει ΣΥ στον πρώτο γύρο, εάν ο 2 δεν φοβόταν μήπως βρεθεί επί της ιστορίας (δ) αντί της ιστορίας (στ). Η προσδοκώμενη απόδοση του παίκτη 2 εάν συνεργασθεί στον πρώτο γύρο,

$(1-h_1)(1-h_2)(0+4+4)+(1-h_1)h_2(9+0+4)+h_1(9+9+10)=8+20h_1+5h_2-5h_1h_2$ θα υπερβαίνει τη προσδοκώμενη απόδοση

$(1-h_1)(1-h_2)(4+4+4)+(1-h_1)h_2(10+4+4)+h_1(10+4+4)=12+6h_1+6h_2-6h_1h_2$

από την ΜΣΥ εάν

$h_2<(14h_1-4)/(1-h_1)$

που γίνεται $h_2<1$, όταν $h_1=1/3=7/21$.

Οπότε όταν $h_1>1/3$, ο 2 θα επιλέξει σίγουρα ΣΥ. Ο παίκτης 1 έχει καλή φήμη όχι βέβαια ως παραλογιζόμενος επειδή δεν παίζει ΜΣΥ, αλλά ως συνεργάσιμος.

Για να δούμε τι σημαίνει αυτό για την ιστορία του παίγνιου, προσέξατε ότι αρκεί μια μικρή μείωση της εν λόγω φήμης σε $h_1=6/21=2/7$ για να μηδενίσει το h_2 και να κάνει τον 2 να παίξει ΜΣΥ. Επειδή λειτουργική ορθολογικότητα σημαίνει μεταξύ άλλων και ότι η τιμή των πιθανοτήτων αυτών είναι κοινή γνώση, ο παίκτης 1 ποτέ δεν θα παίξει ΣΥ στο πρώτο και ως εκ τούτου σε κανένα γύρο, και η ιστορία του παίγνιου θα εγκλωβισθεί στην (α).

Αλλά τότε μόνον ένας συνεργάσιμος 1 μπορεί να παίξει ΣΥ, που σημαίνει ότι αν παιχθεί ΣΥ από τον 2 όταν t=1, ο 2 θα είναι σίγουρος ότι το ίδιο θα παιχθεί και από τον 1 στον ίδιο γύρο, και το παίγνιο εγκλωβίζεται στην ιστορία (στ).

Η ουσία είναι ότι μπορούν να υπάρξουν αμοιβαία επιθυμητές καταστάσεις ως καταστάσεις ισορροπίας χωρίς καμιά απειλή τιμωρίας και με δεδομένη τη συγχώρεση ακόμα και σε επαναλαμβανόμενα παίγνια πεπερασμένων γύρων με μοναδική ισορροπία Nash στο παίγνιο γύρου, αρκεί ένας τουλάχιστον παίκτης να χαίρει υπόληψης. (Συγκρίνατε αυτό το συμπέρασμα με τις παρατηρήσεις μας στο μέρος 6.6.)

6.7 Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων: Δυναμική Ανάλυση

(Maynard Smith, 1972, 1974, 1982)

Ας κάνουμε τέλος και μια σύντομη εισαγωγή στην Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων αλλά τώρα στη δυναμική ανάλυση. Νομίζω ότι το καταλληλότερο πεδίο αναφοράς της είναι τα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια, το πώς δύο παίκτες προερχόμενοι από διαφορετικούς πληθυσμούς παίζουν το ίδιο παίγνιο με τους προγόνους τους από γενιά σε γενιά βάσει κληρονομούμενων και όχι συνειδητά καθοριζόμενων στρατηγικών.

Η στατική προσέγγιση, που ήδη έχουμε εξετάσει, είναι προσέγγιση στο παίγνιο γύρου όταν αυτό παίζεται μια φορά, όπως το παίγνιο γερακιού-περιστεριού, που χρησιμοποιήσαμε σαν παράδειγμα στο μέρος 3.6.

Υπό τη στατική προσέγγιση, η εξελικτικά ευσταθής ισορροπία, η ESS, αποτελεί μια ικανοποιητική έννοια ισορροπίας όταν οι παίκτες προέρχονται από μονομορφικό (monomorphic) πληθυσμό, δηλ. από πληθυσμό του οποίου τα μέλη ακολουθούν την ίδια στρατηγική. Στο παράδειγμα της Βιολογίας, τα μέλη του υγιούς μέρους του πληθυσμού ακολουθούν σε κατάσταση ισορροπίας την ίδια στρατηγική ενώ τα μέλη του μεταλλαγμένου μέρους ακολουθούν τη δική τους αλλά πάλι ίδια στρατηγική. Εάν θέλουμε η ESS να είναι εξίσου ικανοποιητική όταν επίσης οι παίκτες ανήκουν σε πολυμορφικό (Polymarphic) πληθυσμό και μπορούν ν' ακολουθούν διαφορετικές στρατηγικές, τότε η διαχρονική εξέλιξη των ποσοστών του πληθυσμού που παίζουν τις διάφορες στρατηγικές πρέπει να καθορίζεται σαφώς. Αυτή ακριβώς είναι η ουσία της δυναμικής ανάλυσης υπό την Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων.

Έστω ότι υπάρχουν οι απλές στρατηγικές s_1 ,..., s_i ,..., s_m και ότι το κλάσμα του πληθυσμού (των παικτών) ν(t)=1 που υιοθετεί την s_i τη χρονική περίοδο t=1,2,..., είναι v_i (t) έτσι ώστε η πληθυσμιακή σύνθεση (population profile) να είναι $v(t)=[\, v_1(t),..., v_i(t),..., v_m(t)]$ με $\Sigma_i\, v_i(t)=1$.

Εάν κάθε πληθυσμιακό υποσύνολο (παικτών) $v_i(t)$ ζει μόνο μια περίοδο, η απόδοση ενός μέλους του, $\pi_i(t)$, θα είναι ο αριθμός των ζώντων απογόνων του (offspring) που ακολουθούν την ίδια στρατηγική έτσι ώστε ο συνολικός πληθυσμός, η μέση απόδοση, την περίοδο t+1 να είναι $\Sigma_i\, v_i(t)\, \pi_i(t)$
και το κλάσμα που υιοθετεί την s_i να γίνεται

$$v_i(t+1) = v_i(t)\, \frac{\pi_i(t)}{\Sigma_i\, v_i(t)\, \pi_i(t)}$$

Έστω για παράδειγμα ότι οι στρατηγικές είναι τρεις και $\nu(t)=(1/5,\ 2/5,\ 2/5)$ ή $\nu_1(1)=1/5$ και $\nu_2(E)=2/5=\nu_3(t)$. Αν κάθε μέλος του ν_1 κάνει στο τέλος της περιόδου t δύο παιδιά που ακολουθούν την s_1 την περίοδο t+1, του v_2 τρία παιδιά που ακολουθούν την s_2 και του v_3 ενάμισι παιδιά που ακολουθούν την s_3, τότε

$$\Sigma_i\, v_i(t)\, \pi_i(t) = \frac{1}{5}(2) + \frac{2}{5}(3) + \frac{2}{5}(1{,}5) = \frac{11}{5}$$

ενώ $v_1(t+1) = \dfrac{2/5}{11/5} = \dfrac{2}{11}$, $v_2(t+1) = \dfrac{6/5}{11/5} = \dfrac{6}{11}$, $v_3(t+1) = \dfrac{3/5}{11/5} = \dfrac{3}{11}$

δηλαδή, $v_1(t+1)=(2/11,\ 6/11,\ 3/11)$ με $\Sigma_i\, v_i(t+1)=1$. Η μεταβολή λοιπόν των $v_i(t)$ θα είναι

$$v_1(t+1) - v_1(t) = \frac{2}{11} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{55}$$

$$v_2(t+1) - v_2(t) = \frac{6}{11} - \frac{2}{5} = -\frac{8}{55}$$

$$v_3(t+1) - v_3(t) = \frac{3}{11} - \frac{2}{5} = -\frac{7}{55}$$

ή γενικά

$$v_i(t+1) - v_i(t) = v_i(t) \frac{\pi_i(t)}{\Sigma_i v_i(t)\, \pi_i(t)} - v_i(t) \Rightarrow \Delta v_i(t) \equiv v_{i(t)} = v_i(t) = \frac{\pi_i(t) - \bar{\pi}(t)}{\bar{\pi}(t)}$$

όπου $\bar{\pi}(t)$ είναι η μέση απόδοση, δηλ. $\bar{\pi}(t) = \Sigma_i v_i(t)\, \pi_i(t)$, και $\Sigma_i v_i(t) = 0$, όπως ακριβώς δείχνει και το παράδειγμά μας. Η δυναμική εξέλιξης που περιγράφει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $v_i(t)$ αποκαλείται αντιγραφική δυναμική (replicator dynamics, Dawkins, 1982), διότι αναφέρεται στη διαδικασία διαφοροποίησης της αντιγραφής των διαφόρων στρατηγικών από περίοδο σε περίοδο.

Η σταθερή κατάσταση (steady state) αυτού του συστήματος θ' αποτελεί την ESS εάν ασφαλώς είναι ευσταθής. Αν Α είναι η μήτρα αποδόσεων, η μήτρα της οποίας το στοιχείο α_{ij} είναι η απόδοση του μέλους που παίζει s_i όταν οι άλλοι παίζουν s_j, και αν A_i, είναι η σειρά i της Α, η αντιγραφική δυναμική δίνεται από το σύστημα $v_i = v_i\ [A_i\nu - \nu(A\nu)]$ και η σταθερή κατάσταση θα είναι εκείνη η ν που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$v_i\ [A_i\nu - \nu(A\nu)] = 0$

Αν αυτή η ν είναι η ν* , και η ν* είναι ευσταθής, τότε θ' αποτελεί την ESS.

Ας ξαναδούμε για παράδειγμα το παίγνιο ΓΠ, για το οποίο η Α είναι:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου οι αποδόσεις αντιστοιχούν στους συνδυασμούς

$$\begin{pmatrix} \text{(Γεράκι, Γεράκι)} & \text{(Γεράκι, Περιστέρι)} \\ \text{(Περιστέρι, Γεράκι)} & \text{(Περιστέρι Περιστέρι)} \end{pmatrix}$$

ενώ A_1=[-2 2] και A_2=[0 1]. Εφόσον η πληθυσμιακή σύνθεση από την οποία προέρχονται οι παίκτες είναι ν=($ν_1$=Γεράκια, 1-$ν_1$=Περιστέρια), δηλ. εφόσον οι παίκτες είναι μόνο δύο, η μόνη εξίσωση που πρέπει να λύσουμε για να βρούμε τη σταθερή κατάσταση είναι η εξής:

$$\nu_1 \left\{ [-2\ 2]\begin{pmatrix} \nu_1 \\ 1-\nu_1 \end{pmatrix} - [\nu_1\ \ 1-\nu_1]\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ 1-\nu_1 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

=> $\nu_1(1-\nu_1)(1-3\nu_1)=0$

με δύο μονομορφικές λύσεις, $v_1 = 0$ και $\nu_1 = 1$, και μία πολυμορφική, v_1=1/3 => v_2=2/3. Οι πρώτες αντιστοιχούν στην περίπτωση της ασυμμετρίας ρόλων στο μέρος 3.6 ενώ η πολυμορφική λύση (v_1 =1/3, v_2=2/3) αντιστοιχεί στην NEMS (h_1=1/3, h_2=2/3) υπό συμμετρία ρόλων. Δηλαδή, ο μονομορφισμός αποτελεί το παίξιμο μιας απλής στρατηγικής και ο πολυμορφισμός το παίξιμο μιας μεικτής στρατηγικής. Η διαφορά μεταξύ στατικής και δυναμικής ανάλυσης είναι ότι τώρα (α) το παίξιμο αυτό κληρονομείται από γενιά παικτών σε γενιά παικτών και γι' αυτό (β) δεν γεννάται θέμα συμμετρίας ή ασυμμετρίας ρόλων (Vega – Redondo,1996).

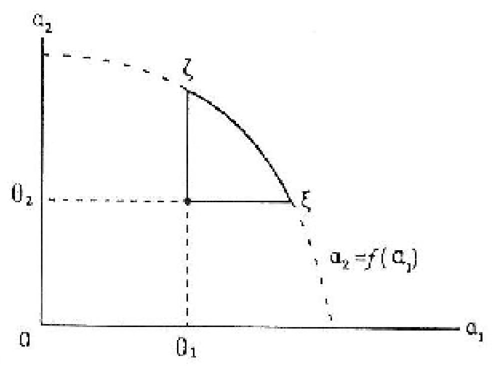
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΔΙΜΕΡΕΙΣ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΕΙΣ

7.1 Το Πρόβλημα Διαπραγμάτευσης

(Nash 1950α, 1953 – Luce and Raiffa, 1957)

Θεωρήσατε μια κατάσταση κατά την οποία δύο διαπραγματευτές έχουν την ευκαιρία είτε να καταλήξουν σε κάποια συμφωνία που θα τους αποδώσει (α_1,α_2) είτε να διακόψουν τις διαπραγματεύσεις και να μείνουν με τις αποδόσεις (θ_1,θ_2) του status quo. Ένα πρόβλημα διαπραγμάτευσης (bargaining problem) απαρτίζεται πρώτον από μία φθίνουσα συνάρτηση α_2=f (α_1), $d\alpha_2/d\alpha_1<0$, που περιγράφει το πώς η απόδοση α_1, του παίκτη 1 μετασχηματίζεται στη μέγιστη δυνατή απόδοση του παίκτη 2, και δεύτερον από τον συνδυασμό (θ_1,θ_2), όπως ακριβώς απεικονίζει και το Διάγραμμα 8.1



Διάγραμμα 8.1

Το ίδιο διάγραμμα απεικονίζει και to σύνολο των πιθανών λύσεων του προβλήματος ως το συνεχές τμήμα της κοίλης καμπύλης μετασχηματισμού του α_i σε α_j . Η κοιλότητα οφείλεται στο γεγονός ότι η απόσπαση μιας παραπάνω μονάδας του j από τον i, κοστίζει στον j περισσότερο απ' ό,τι η προηγούμενη μονάδα που παραχωρήθηκε στον i.

Η λύση των διαπραγματεύσεων πρέπει να είναι επί του τμήματος ζξ της καμπύλης μετασχηματισμού των αποδόσεων, γιατί αλλιώς θα υπάρχουν περιθώρια βελτίωσής της και άρα περαιτέρω διαπραγματεύσεων.

Το σύνολο των συνδυασμών ($α_1$,$α_2$) επί του ζξ αποτελεί το ***σύνολο διαπραγμάτευσης*** (negotiation set) και τη ***λύση von Neumann -Morgenstern*** στο πρόβλημα διαπραγμάτευσης. Δεν αποτελεί βέβαια ικανοποιητική έννοια λύσης, γιατί θα θέλαμε ως λύση κάποιο συγκεκριμένο μέλος ($α_1^*$, $α_2^*$) του συνόλου διαπραγμάτευσης. Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για την εξεύρεση μιας τέτοιας λύσης, οι οποίες ευτυχώς καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα. Η μια βλέπει τις διαπραγματεύσεις σαν μια διαδικασία ***εναλλασσόμενων προσφορών*** (alternating offers), και η άλλη, η ***αξιωματική προσέγγιση*** (axiomatic approach), θέλει τη λύση να υπακούει σε ορισμένες αρχές (αξιώματα), τις οποίες θα δούμε στο μεθεπόμενο μέρος.

Θ' αρχίσουμε με την πρώτη, διότι αποτελεί δυναμικό παίγνιο αόριστης διάρκειας. Πρέπει όμως πρώτα να σημειώσουμε ότι αν δεν υπάρχει ***διαιτησία***, δηλ. κάποια άλλη κοινά αποδεκτή οντότητα πέραν των διαπραγματευόμενων μερών, υπό την αιγίδα της οποίας να γίνονται οι διαπραγματεύσεις, τότε οι διαπραγματευόμενοι μπορεί να απειλούν ή να υπόσχονται χωρίς αντίκρυσμα, δηλ. να λένε ***"φθηνά λόγια"***: Μια απειλή ή μια υπόσχεση του i προς τον j, της οποίας η πραγματοποίηση κοστίζει στον i περισσότερο απ' ό,τι η μη πραγματοποίηση, αποτελεί φθηνά λόγια (cheap talk) και είναι ως εκ τούτου αναξιόπιστη. Μια ισορροπία ή λύση της οποίας προηγούνται φθηνά λόγια, που επομένως δεν την επηρεάζουν, αποτελεί ***ισορροπία ή λύση φούσκα*** (babbling equilibrium or solution).

Επειδή δεν υπάρχει διαιτησία στην ανάλυση που ακολουθεί, θα πρέπει να κάνουμε την υπόθεση ότι οι διαπραγματεύσεις δεν μπορεί να λαμβάνουν φθηνά λόγια.

Έστω για παράδειγμα ότι δύο παίκτες έχουν την ευκαιρία να μοιραστούν ένα Ευρώ-100 λεπτά με όποιο τρόπο θέλουν ως εξής: Τη πρώτη προσφορά την κάνει ο i και αν ο j δεχτεί, το παίγνιο τελειώνει. Αν όχι, τότε αφαιρούνται 99 λεπτά και το παίγνιο συνεχίζει τον δεύτερο γύρο με προσφορά του j ως προς το ένα λεπτό που απέμεινε. Αν ο i δεχθεί, το παίγνιο τελειώνει. Αν όχι, το παίγνιο πάλι τελειώνει, αλλά με μηδενικές αποδόσεις και για τους δύο. Η SPNE αυτού του παίγνιου είναι απλή, γιατί εφόσον στον δεύτερο γύρο η απόδοση του j δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη της μονάδας, ο i θα του προσφέρει αυτή τη μονάδα στον πρώτο γύρο (κρατώντας για τον εαυτό του 99 λεπτά), και το καλύτερο που έχει να κάνει ο j είναι να δεχτεί.

Τι γίνεται όμως αν ο j απειλήσει τον i πριν ο i κάνει την προσφορά του, ότι ο j δεν πρόκειται να δεχθεί τίποτα λιγότερο από π.χ. 40 λεπτά; Κάτι τέτοιο θα ήταν για τον i απειλή μόνο στα λόγια, γιατί απλώς αν ο j δεν δεχθεί το ένα λεπτό που θα του προσφέρει ο i, τότε ο j θα βρεθεί στον επόμενο γύρο με ακόμα μικρότερη απόδοση.

7.2 Η Θεωρία Εναλλασσόμενων Προσφορών

(Stahl, 1972-Rubinstein, 1982)

Η περιγραφή μιας διαδικασίας διαπραγματεύσεων έχει ως εξής:

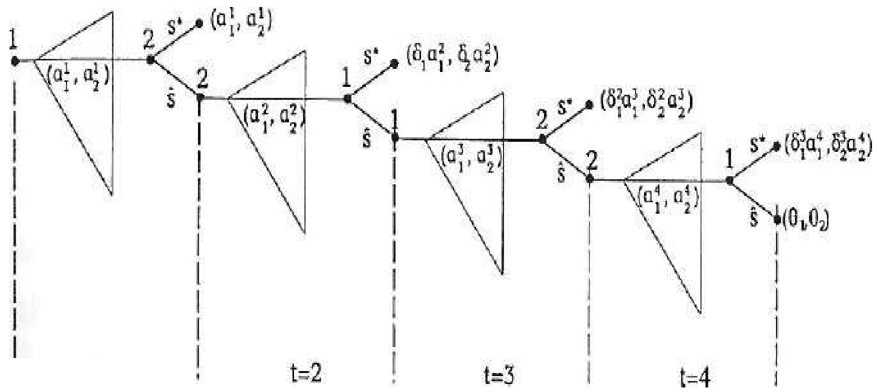
- Οι διαπραγματεύσεις λαμβάνουν χώρα σε γύρους και αρχίζουν με προσφορά (α_1^1 , α_2^1) του παίκτη 1, την οποία αποδέχεται ή απορρίπτει ο παίκτης 2.
- Εάν η προσφορά γίνει αποδεκτή, οι διαπραγματεύσεις τελειώνουν και υλοποιείται η συμφωνία.
- Εάν η προσφορά απορριφθεί, η διαπραγμάτευση προχωρά σε νέο γύρο με προσφορά (α_1^2 , α_2^2) εκ μέρους του παίκτη 2, την οποία ο 1 μπορεί να αποδεχθεί ή να απορρίψει, κ.ο.κ.
- 0 κάθε παίκτης i προεξοφλεί κάθε γύρο με ρυθμό $\delta_i<1$.

Αυτή η διαδικασία περιγράφεται για τέσσερις γύρους από το παίγνιο ΔΠ, όπου οι εκθέτες που συνοδεύουν τα α δεν είναι εκθέτες αλλά δείκτες γύρου. Κάθε τριγωνάκι αναπαριστά το σύνολο των προσφορών από το οποίο μπορεί να διαλέξει ο παίκτης που κάνει τη προσφορά ενώ η ευθεία που διέρχεται από ένα τριγωνάκι αναπαριστά την επιλεγείσα προσφορά. 0 παίκτης 1 κάνει προσφορά σε μονούς γύρους και ο παίκτης 2 κάνει προσφορά σε ζυγούς γύρους. s* και ŝ σημαίνουν αποδοχή ή απόρριψη προσφοράς, αντιστοίχως. Το Διάγραμμα 8.2 απεικονίζει τις συνέπειες της προεξόφλησης για τρεις γύρους. Οι αποδόσεις $\alpha^3{}_1$, και $\alpha^3{}_2$ του τρίτου γύρου ισοδυναμούν με τις αποδόσεις δ_1, $\alpha^3{}_1 < \alpha^3{}_1$ και $\delta_2\ \alpha^3{}_2 < \alpha^3{}_2$ του δεύτερου γύρου και με τις αποδόσεις $\delta^2{}_1\ \alpha^3{}_1 < \delta_1$, $\alpha^3{}_1$ και $\delta^2{}_2\ \alpha^3{}_2 < \delta_2\ \alpha^3{}_2$ του πρώτου γύρου. Ή το αντίστροφο, οι αποδόσεις $\alpha^1{}_i = \delta^2{}_i\ \alpha^3{}_i$ του πρώτου γύρου, ισοδυναμούν με τις $\alpha^1{}_i / \delta_i$ στον δεύτερο και $\alpha^1{}_i /\delta^2{}_i$ στον τρίτο.

Η προεξόφληση μετακινεί την καμπύλη μετασχηματισμού αποδόσεων προς τα αριστερά:

$\alpha_2 = \varphi_t\,(\alpha_1\,) = \delta^{\,t-1}{}_2\, f\,(\,\alpha_1/\delta^{\,t-1}{}_1)$

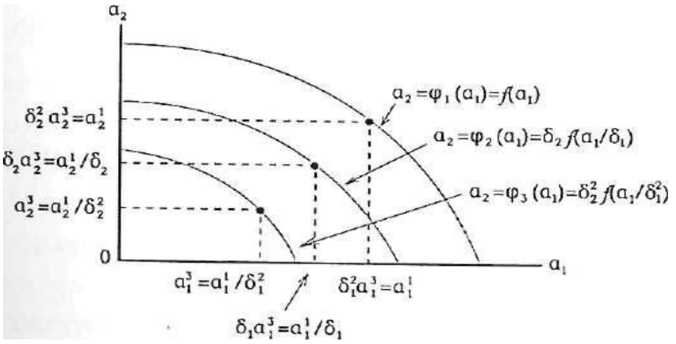
Ως προς τη λύση του προβλήματος των διαπραγματεύσεων, θεωρήσατε και πάλι το μοίρασμα των 100 λεπτών αλλά τώρα υπό τη μορφή του αόριστης διάρκειας παίγνιον του μοιράσματος του Ευρώ, ΜΕ, (split the Euro), σύμφωνα με την περιγραφείσα διαδικασία διαπραγματεύσεων. Θα πρέπει βέβαια $\alpha_1+\alpha_2=1 \Rightarrow \alpha_2=1-\alpha_1$, που σημαίνει ότι οι δείκτες i περιττεύουν, μιας και μπορούμε να συμβολίζουμε την απόδοση του παίκτη 1 απλώς με α και την απόδοση του παίκτη 2 με (1-α). Έστω ότι ο παίκτης που κάνει μια προσφορά είναι ο i.



παίγνιο ΔΠ

Οποιεσδήποτε συνεκτικά ευθυγραμμισμένες εικασίες, CAB, για το τι περιμένει οj από τον i και για το τι περιμένει ο i ν' αποδεχθεί ο j σε κάποιο γύρο διαπραγματεύσεων, μπορεί να οδηγήσουν σε ισορροπία Nash σ' αυτό τον γύρο. Αν π.χ. ο j περιμένει στον γύρο i ότι ο i θα του προσφέρει 40 λεπτά και ο i εικάζει σωστά για το τι περιμένει απ' αυτόν ο j, η λύση του παίγνιου θα είναι 40 για τον j και 60 για τον i.

Οποιοσδήποτε γενικά συνδυασμός (α, 1-α) μπορεί ν' αποτελέσει τη λύση του ΜΕ ως ισορροπία Nash σε κάποιο γύρο, αρκεί να είναι το αποτέλεσμα CAB.



Διάγραμμα 8.2

Θα μπορούσε κάτι τέτοιο να συμβεί π.χ. στον τρίτο γύρο διαπραγματεύσεων με αποτέλεσμα τις αποδόσεις (α ,1-α*); Η απάντηση, που δίνει η οπισθοβατική επαγωγή, είναι ότι αυτή η λύση θα μπορούσε να είχε επιτευχθεί από τον πρώτο κιόλας γύρο ως εξής: Κατ' αρχάς, προσέξατε ότι οι αποδόσεις α και 1-α* του τρίτου γύρου αξίζουν στον δεύτερο γύρο δ α* και δ(1-α*), αντιστοίχως, αν βέβαια $δ_1$=$δ_2$=δ. Έτσι, για να μην είχαν προχωρήσει οι διαπραγματεύσεις από τον δεύτερο στον τρίτο γύρο, η προσφορά του 2 στον δεύτερο γύρο θα έπρεπε να ήταν (δα*, 1-δα) δεδομένου ότι 1-δα* = δ(1-α*)==>δ=1 και πράγματι τόσο είναι πάντα το δ για τον συγκεκριμένο γύρο t όταν οι παίκτες παίζουν σ' αυτό τον γύρο. Δεύτερον, προσέξατε ότι η απόδοση (1-δα*) του 2 από τον δεύτερο γύρο αξίζει στον πρώτο γύρο δ(1-δα*). Έτσι, για να μην είχαν προχωρήσει οι διαπραγματεύσεις από τον πρώτο στον δεύτερο γύρο, ο 1 θα έπρεπε στο πρώτο γύρο να είχε κάνει την προσφορά [1-δ(1-δα*), δ(1-δα*)] δεδομένου ότι 1-δ(1-δα*)=$δ^2$α*=>δ=1. Τρίτον, προσέξατε ότι το 6 είναι στο τετράγωνο, γιατί η προεξόφληση μας δίνει το πόσο θ' άξιζε το α αν ο 1 το έπαιρνε με καθυστέρηση δύο γύρων. Όμως, αν το έπαιρνε από τον πρώτο κιόλας γύρο και συγκεκριμένα αν έπαιρνε

1-δ(1-δα*)=α *=>α*=1/(1+δ) θα εξοικονομούσε το εκ της διπλής καθυστέρησης κόστος

$$\frac{1}{1+\delta} - \delta^2 \frac{1}{1+\delta} = 1-\delta$$

Τέταρτον, προσέξατε ότι θα αποδεχόταν το εν λόγω κόστος αν στον τρίτο γύρο έπαιρνε

$$\frac{1}{1+\delta} + 1 - \delta = \frac{2-\delta^2}{1+\delta}$$

Αλλά έτσι η καθυστέρηση θα απέβαινε εις βάρος του 2, γιατί θα μειωνόταν το μέρος του Ευρώ που θα έπαιρνε στον τρίτο γύρο, και το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει για τον δεύτερο επίσης γύρο.

Επομένως, η λύση του παίγνιου ΜΕ είναι ότι οι δύο παίκτες μπορούν να καταλήξουν σε συμφωνία από τον πρώτο κιόλας γύρο διαπραγματεύσεων βάσει της προσφοράς [$\alpha=1/(1+\delta)$, $1-\alpha=\delta/(1+\delta)$] εκ μέρους του παίκτη 1. Η προσφορά αποτελείται από τις υπό την SPNE αποδόσεις, μιας και τα πρώτα τρία βήματα για την εξεύρεση της προσφοράς ισορροπίας έδειξαν ότι υπάρχει συνδυασμός στρατηγικών που εξασφαλίζει την ισορροπία Nash σε κάθε υποπαίγνιο ενώ στο τέταρτο και τελευταίο βήμα είδαμε ότι η ούτω προκύπτουσα SPNE είναι μοναδική. Η ύπαρξη και μοναδικότητα της SPNE βάσει των συνδυασμών της στρατηγικής του παίκτη 1 (για δύο διαδοχικούς γύρους):

1i) προσφορά [α_1^* , f (α_1^*)] όταν t είναι περιττός αριθμός (π.χ. 9)

$$\left.\begin{array}{l}\text{(1ii) αποδοχή της } [\alpha_1, f(\alpha_1)] \text{ εάν } \alpha_1 \geq \delta_1\alpha_1^* \\ \text{απόρριψη της } [\alpha_1, f(\alpha_1)] \text{ εάν } \alpha_1 < \delta_1\alpha_1^*\end{array}\right\} \text{ όταν t είναι ζυγός αριθμός (π.χ.8)}$$

και της στρατηγικής του παίχτη 2 (για δυο διαδοχικούς γύρους):

(2i) προσφορά [$\delta_1\alpha_1^*$, f ($\delta_1\alpha_1^*$)] όταν t είναι ζυγός (π.χ. 4)

(2ii) αποδοχή της $[\alpha_1 , f(\alpha_1)]$ εάν $f(\alpha_1) \geq \delta_2 f(\delta_1\alpha_1{*})$ όταν t είναι ζυγός (π.χ. 8)απόρριψη της $[\alpha_1 , f(\alpha_1)]$ εάν $f(\alpha_1) < \delta_2 f(\delta_1\alpha_1{*})$

και εξασφαλίζουν την ισχύ του εξής θεωρήματος:

Εάν $d\alpha_2/d\alpha_1<0$ και $d^2\alpha_2 / d\, \alpha^2{}_1 >0$ και εάν $\delta_i,<0$, τότε η σχέση $f(\alpha_1^*) = \delta_2 f(\delta_1\alpha_1^*)$ προσδιορίζει τη μοναδική τέλεια-για-τα-υποπαίγνια προσφορά ισορροπίας $[\alpha_1^*, f\alpha_1^*)]$ του αόριστης διάρκειας προβλήματος διαπραγματεύσεων.

Με δύο λόγια, η ουσία της SPNE είναι ότι ανυπόμονοι παίκτες, των οποίων οι στρατηγικές προβλέπουν τις ίδιες κινήσεις για κάθε δύο διαδοχικούς γύρους, επιτυγχάνουν συμφωνία από τον πρώτο κιόλας γύρο διαπραγματεύσεων, η οποία ευνοεί όπως πάντα αυτόν που κινείται πρώτος.

Σημειώσατε ότι εκτός του πλεονεκτήματος που έχει αυτός που κινείται πρώτος, υπάρχει και το πλεονέκτημα του παίκτη που κάνει τη τελευταία προσφορά όσον όμως αφορά παίγνια πεπερασμένου αριθμούς γύρων. Η εν λόγω προσφορά γίνεται στον προτελευταίο γύρο, γιατί απλώς ο παίκτης που την κάνει μπορεί να χρησιμοποιήσει την απειλή της διαφωνίας στον τελευταίο γύρο.

Έτσι, αν ο αριθμός γύρων είναι ζυγός, ο παίκτης που κάνει την τελευταία προσφορά είναι αυτός που κάνει και την πρώτη, και το πλεονέκτημα εκ της τελευταίας προσφοράς "προστίθεται" στο πλεονέκτημα εκ της πρώτης. Εάν ο αριθμός γύρων είναι περιττός, ο ένας παίκτης κάνει τη πρώτη προσφορά και ο άλλος την τελευταία, μετριάζοντας ή και εξουδετερώνοντας το πλεονέκτημα εκ της πρώτης κίνησης.

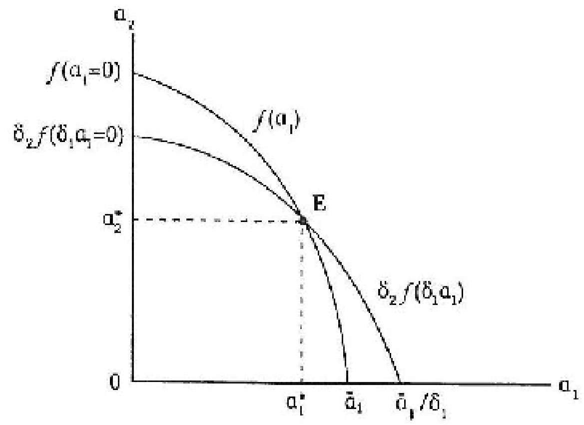
Επομένως, εάν ένα παίγνιο διαπραγμάτευσης είναι πεπερασμένων γύρων, η έκβαση της διαπραγμάτευσης εξαρτάται από το αν θα προχωρήσει για έναν ακόμη γύρο. Η λύση διαφοροποιείται από το αν ο αριθμός γύρων θα είναι ζυγός ή περιττός και κάτι τέτοιο είναι βέβαια ανεπιθύμητο:

Ένα παίγνιο διαπραγμάτευσης πεπερασμένου αριθμού γύρων θα έχει ως μοναδική SPNE τη λύση που προκύπτει από την εξίσωση:

$f\ (\alpha_1)= \delta_2 f\ (\delta_1\alpha_1)$

αν το δούμε ως παίγνιο αόριστης διάρκειας (στο οποίο κινείται πρώτος ο παίκτης 1).

Η λύση αυτή απεικονίζεται στο Διάγραμμα 8.3, δια του σημείο Ε. Παραμένει βέβαια το πλεονέκτημα του παίκτη που κινείται πρώτος. Μια διαπραγμάτευση θα είναι "συμμετρική" για τα διαπραγματευόμενα μέρη αν ο παίκτης 2 χρησιμοποιήσει επιπλέον [(της απειλής (θ_1,θ_2) και] την απειλή της αποχώρησης ή ακόμη και της μη προσέλευσης σε προγραμματισθείσες διαπραγματεύσεις (opting out).



Διάγραμμα 8.3

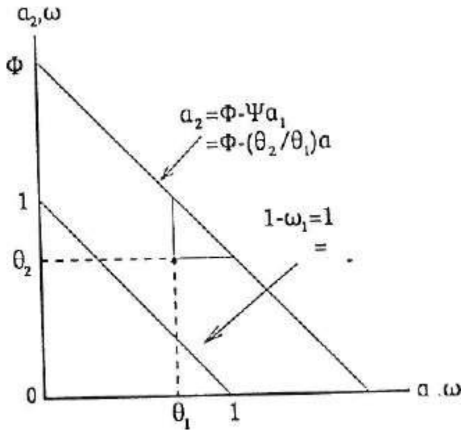
Υπό την συμμετρική διαπραγμάτευση, ο παίκτης 2 απαλλάσσεται από το μειονέκτημα ότι παίζει δεύτερος, σαν να υπήρχε αμερόληπτη διαιτησία. Μια τέτοια διαπραγμάτευση δεν πρέπει να συγχέεται με την έννοια της "συμμετρικής λύσης'[1], η οποία αναπτύσσεται στο επόμενο μέρος, 8.3. Η επίπτωση της απειλής αποχώρησης στη λύση δεδομένης της απειλής (61,62), εξετάζεται στο τέλος του μέρους 8.4 ενώ η επίπτωση της απειλής αποχώρησης τόσο στο ζεύγος (θ_1,θ_2) όσο και στη λύση εξετάζεται στο μέρος 8.5.

7.3 Η Αξιωματική Προσέγγιση (Nash , 1950α, 1953)

Ήδη γνωρίζουμε από το Διάγραμμα 8.1 ότι μια λύση (α_1,α_2) στο πρόβλημα διαπραγμάτευσης θα πρέπει να περιλαμβάνει μια προσφορά (α_1^*,α_2^*)πρώτον, σαφώς καλύτερη της απειλής (θ_1,θ_2) και δεύτερον, χωρίς καλύτερη εναλλακτική προσφορά. Ή, κατά την ορολογία, η λύση (α_1^*,α_2^*) θα πρέπει να ικανοποιεί πρώτον, το αξίωμα της ***ισχυράς ατομικής ορθολογικότητας*** (strong individual ratiomality) και δεύτερον, το
αξίωμα της ***αριστοποίησης κατά Pareto*** (Pareto optimality), αντιστοίχως.

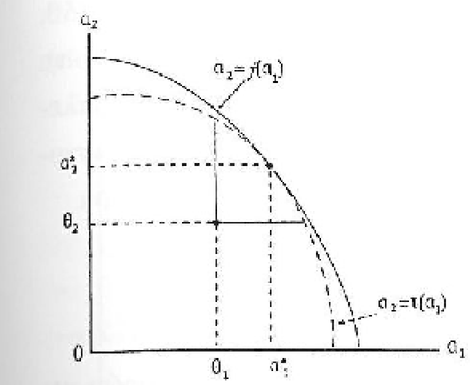
Μόνον τότε η (α_1^*,α_2^*) θα κείται επί της καμπύλης μετασχηματισμού όπως απεικονίζει το Διάγραμμα 8.1.

Θα πρέπει επίσης να ικανοποιείται το αξίωμα του ***αμετάβλητου*** (invariance) της προσφοράς (α_1*,α_2^*)ως λύση οποιουδήποτε άλλου προβλήματος διαπραγμάτευσης (ωι,ω_2) που αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό του (α_1,α_2), (ω_1=A_1+$B_1\alpha_1$, ω_2=A_2+$B_2\alpha_2$), με την έννοια ότι (ω_1=A_1+$B_1\alpha_1$*,A_2+B_2 α_2*). Πρόκειται για σημαντικότατο αξίωμα για δύο λόγους: Πρώτον, γιατί βλέπει τις αποδόσεις ως προερχόμενες από προσδοκώμενη (von Neumann-Morgenstern) συνάρτηση χρησιμότητας, αναπαριστώσα τις ίδιες προτιμήσεις, ανεξάρτητα γραμμικών μετασχηματισμών της. Δεύτερον, γιατί καθιστά όλα τα προβλήματα με γραμμική καμπύλη μετασχηματισμού, [α_1, f(α_1)=Φ-Ψ α_1], ισοδύναμα μεταξύ τους και μετατρέψιμα σε παίγνιο ΜΕ διαγραμμικού μετασχηματισμού ω_i = A_i+ B_i α_i συνεπή με Φ=Ψ=1 ή το ίδιο, με A_i+ B_i θ_i =0.Αυτό ακριβώς απεικονίζει το Διάγραμμα 8.4, στο οποίο η απειλή (θι,θ_2) υπό το (α_1,α_2) έχει μετατραπεί στην απειλή (0,0) του ΜΕ (ω,1-ω).

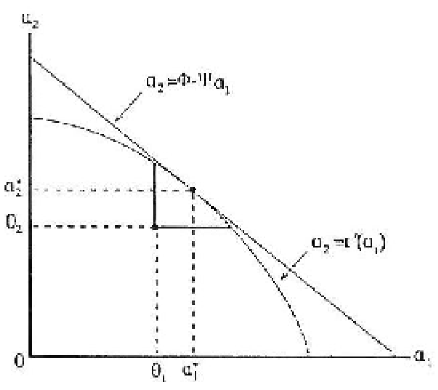


Διάγραμμα 8.4

Η προσφορά ($α_1$*, $α_2$*) θα πρέπει ακόμη να παραμένει ως λύση και παιγνίων με καμπύλη μετασχηματισμού που διαφοροποιείται της $α_2 = f\ (α_1)$ με τρόπο που δείχνουν τα Διαγράμματα 8.5 και 8.6.



Διάγραμμα 8.5



Διάγραμμα 8.6

Στο πρώτο έχουμε αφαιρέσει [προσθέσει] όλους τους συνδυασμούς ($α_1$,$α_2$) επί της f ($α_1$) [επί της τ($α_1$)] εκτός της λύσης ($α_1$*, $α_2$*) . Το ίδιο έχουμε κάνει και στο δεύτερο, όπου όμως f ($α_1$)= Φ-Ψ$α_1$. Όλα τα παίγνια που περιλαμβάνουν τον συνδυασμό ($α_1$*, $α_2$*) στην καμπύλη μετασχηματισμού τους, θα πρέπει να έχουν ως λύση τον εν λόγω συνδυασμό.

Αυτό είναι το αξίωμα της ***ανεξαρτησίας από άσχετες εναλλακτικές επιλογές*** (independence of irrelevant alternatives), ανεξαρτησίας δηλ. της λύσης (α_1*, α_2*) από τις μεταβολές στις εναλλακτικές επιλογές που συνεπάγεται η μεταβολή της καμπύλης μετασχηματισμού από το ένα πρόβλημα διαπραγμάτευσης στο άλλο. Εάν η λύση (α_1*, α_2*) ικανοποιεί τα παραπάνω τέσσερα αξιώματα, τότε υπάρχει κάποιο η ε (0,1) που μεγιστοποιεί το γινόμενο $[(\alpha_1)^{\eta}(\alpha_2)^{1-n}]$, το οποίο γίνεται $[(\alpha)^{0,5}(\alpha_2)^{0.,5}]$ =α* όταν ικανοποιείται και το εξής ***αξίωμα συμμετρίας***.

Εάν Θ_1=θ_2= Θ και εάν όταν είναι εφικτός ο συνδυασμός (α_1=¯$\alpha_{1,}$ α_2 =¯α_2) είναι επίσης εφικτός και ο συνδυασμός (α_1=¯$\alpha_{2,}$ α_2 =¯α_1) , τότε «ι = α_2 = α και η=1-η=0,5. Εάν ικανοποιείται το εν λόγω αξίωμα, η λύση (α*, α*) θ' αποτελεί τη ***Λύση Nash στο πρόβλημα διαπραγμάτευσης***, ενώ εάν δεν ικανοποιείται το αξίωμα, η λύση (α*, α*)) θ' αποτελεί την ασυμμετρική ***λύση Nash στο πρόβλημα διαπραγμάτευσης.***

Στο ΜΕ, για παράδειγμα, η λύση Nash είναι (0,5, 0,5) Ευρώ ή (50, 50) λεπτά ενώ η ασυμμετρική λύση είναι (α≠0,5 , 1-α) ή (α≠50, 100-α). Ο συντελεστής n συλλαμβάνει τη διαπραγματευτική ισχύ των εμπλεκομένων μερών με το n>0,5 να σημαίνει ότι ο παίκτης 1 είναι ο ισχυρότερος. Τον ακριβή προσδιορισμό του θα τον δούμε αμέσως τώρα.

7.4 Συμβιβασμός των Δυο Προσεγγίσεων

(Nash, 1950α, 1953 – Osbome and Rubinstein, 1990

Η διαφορά μεταξύ της προσέγγισης εναλλασσόμενων προσφορών και της αξιωματικής προσέγγισης είναι ότι στην πρώτη η λύση εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της διαδικασίας διαπραγματεύσεων ενώ η δεύτερη βλέπει τη λύση ως αποτέλεσμα ορισμένων γενικών αρχών. Έτσι, ο ίδιος ο Nash πρότεινε η λύση που βρίσκεται βάσει τέτοιων αρχών, να συνοδεύεται από λεπτομερή καθορισμό της διαδικασίας διαπραγματεύσεων που μπορεί να οδηγήσει σ' αυτήν. Τα Διαγράμματα 8.3 και 8.7 δείχνουν ότι αυτό είναι πράγματι δυνατόν. Το πρώτο είναι αυτό της προσέγγισης εναλλασσόμενων προσφορών ενώ το δεύτερο θέλει τη λύση εξ αυτής της προσέγγισης να μεγιστοποιεί το γινόμενο των αποδόσεων των εμπλεκομένων μερών όπως επιτάσσει η λύση Nash.

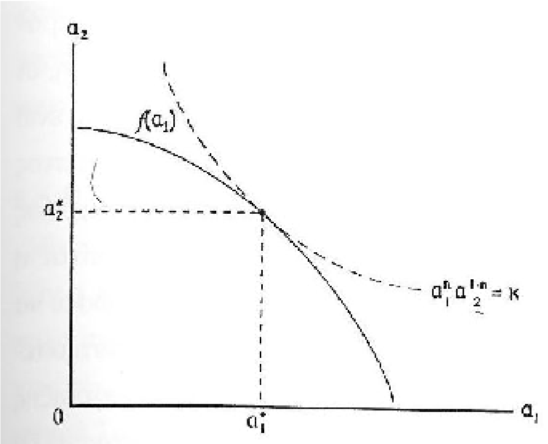
Δηλαδή, η πρόταση Nash περί συμβιβασμού των δύο προσεγγίσεων ισοδυναμεί πρώτον με την επίλυση ως προς α_1 της εξίσωσης

$$f(\alpha_1)= \delta_2 f(\delta_1\alpha_1)$$

όσον αφορά την τομή των δύο καμπυλών στο Διάγραμμα 8.3, και δεύτερον με τον έλεγχο της ούτω προκύπτουσας λύσης α_1* δια της επίλυσης ως προς α_1 της εξίσωσης

$$f\,'(\alpha_1) = -\frac{nf(\alpha_1)}{(1-n)\,\alpha_1} \qquad (1)$$

όσον αφορά το σημείο επαφής των δύο καμπυλών στο Διάγραμμα 8.7. Το κλάσμα -[$nf(\alpha_1)/(1-n)\,\alpha_1$] που προκύπτει από την $\alpha^n{}_1\, \alpha_2{}^{(1-n)}$ =κ, όπου κ = σταθερά. Εκ της (1) έπεται επίσης ότι ο συντελεστής διαπραγματευτικής ισχύος είναι:



Διάγραμμα 8.7

$$n= -\frac{\alpha_1 f'(\alpha_1)}{f(\alpha_1)-\alpha_1 f'(\alpha_1)}$$

ή δια διαιρέσεως του αριθμητή και του παρανομαστή δια του $f'(\alpha_1)$,

$$n = -\varepsilon / (1-\varepsilon)$$

όπου $\varepsilon= \alpha_1 f'(\alpha_1) / f(\alpha_1)$ είναι η ελαστικότητα της συνάρτησης $f(\alpha_1)$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ΜΕ, $f(\alpha_1) = 1- \alpha_1$ και $\delta_2 f(\delta_1\alpha_1)= \delta_2 (1-\delta_1\alpha_1)$.Η εξίσωση των δύο δίνει

$$\alpha_1^* (1- \delta_2) / (1- \delta_1 \delta_2)$$

ή $\alpha_1^* =1/(1+\delta)$ στην περίπτωση που $\delta_1=\delta_2=\delta$. Η ελαστικότητα είναι $\varepsilon= -\alpha_1 / (1-\alpha_1)$, οπότε $n =\alpha_1$ που στο σημείο (α_1^*, α_2^*) γίνεται : $n=(1-\delta_2)/(1-\delta_1,\delta_2)$

Η παράγωγος : $\partial n/\partial\delta_1=\delta_2(1-\delta_2)/(1-\delta_1\delta_2)^2>0$ ενώ η $\partial n/\partial\delta_2=(\delta_1-1)/(1-\delta_1\delta_2)^2<0$.

Όσο πιο υπομονετικός είναι ο παίκτης 1 τόσο μεγαλύτερη είναι η διαπραγματευτική του ισχύς ενώ όσο πιο υπομονετικός είναι ο παίκτης 2 τόσο μικρότερη είναι η διαπραγματευτική ισχύς του παίκτη 1.

Το ζήτημα του συμβιβασμού των δύο προσεγγίσεων δεν είναι μόνο τεχνικό. Στην αξιωματική προσέγγιση, οι αποδόσεις υποτίθεται ότι προέρχονται από προσδοκώμενη συνάρτηση χρησιμότητας ενώ οι αποδόσεις υπό την προσέγγιση των εναλλασσόμενων προσφορών προέρχονται από μια διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας. Στη πρώτη, οι αποδόσεις ισορροπίας προέρχονται από ένα αβέβαιο περιβάλλον ενώ στη δεύτερη, οι αποδόσεις ισορροπίας επιβαρύνονται με το κόστος της καθυστέρησης από την επίτευξη μιας συμφωνίας. Ένας τρόπος συμβιβασμού των δύο τρόπων καθορισμού των αποδόσεων είναι η τροποποίηση της θεωρίας εναλλασσόμενων προσφορών, έτσι ώστε να περιλαμβάνει και τον "κίνδυνο κατάρρευσης" των διαπραγματεύσεων. Οι διαπραγματευόμενοι ενδιαφέρονται για τον χρόνο επίτευξης μιας συμφωνίας όχι μόνο γιατί η καθυστέρηση της έχει κόστος αλλά και γιατί υπάρχει κίνδυνος κατάρρευσης των διαπραγματεύσεων.

Οι δύο προσεγγίσεις μπορούν να συμβιβασθούν μόνον αν υπάρχει τόσο ο συμβιβασμός στο ζήτημα των αποδόσεων όσο και ο "συμβιβασμός (που πρότεινε ο) Nash". Στο μέρος 8.2, είδαμε ότι ένας λόγος κατάρρευσης είναι η απειλή αποχώρησης του 2 σε μονούς γύρους εάν αυτός διαπιστώσει ότι μια προσφορά του 1 είναι απορριπτέα. Σ' αυτή την περίπτωση, ο κίνδυνος κατάρρευσης συμβιβάζει το ζήτημα των αποδόσεων και είναι επίσης συνεπής με τον "συμβιβασμό Nash ", γιατί η απειλή επιτυγχάνει μια και μοναδική SPNE, (η οποία, όπως έχουμε επισημάνει, σέβεται τη διαπραγματευτική ισχύ των εμπλεκομένων μερών ανεξάρτητα του γεγονότος ότι ο παίκτης 1 κινείται πρώτος).

Κίνδυνος κατάρρευσης υπάρχει και αν η απειλή αποχώρησης του 2 αναφέρεται σε κάθε γύρο, περιλαμβάνουσα επιπλέον τους ζυγούς γύρους όταν είναι αυτός ο οποίος υποβάλλει μια προσφορά. Όμως, σ' αυτή την περίπτωση έχουμε συμβιβασμό στο ζήτημα των αποδόσεων αλλά όχι των δύο προσεγγίσεων, γιατί μπορεί να υπάρχουν πολλές SPNE, (τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων στο Διάγραμμα 8-3 μπορεί να είναι πολλά). Αντίθετα όταν ο κίνδυνος κατάρρευσης σε κάθε γύρο οφείλεται σε κάποιο εξωγενή παράγοντα, στην τύχη, τότε πάλι η SPNE θα είναι μοναδική. Σημειώσατε ότι ο όρος ***κίνδυνος κατάρρευσης*** (risk of breakdown) συνδέεται μ' αυτή την τελευταία περίπτωση. Οι άλλες δύο περιπτώσεις είναι περιπτώσεις ***επιλογής αποχώρησης*** (opting out).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^{ο}

8,1 Επίλογος

Η Θεωρία Παιγνίων ξεκίνησε ως ένα παρακλάδι του μοντερνισμού που χαρακτήριζε τις κοινωνικές θεωρίες στις αρχές του 20ου αιώνα. Όπως όλα τα μοντέρνα κινήματα, θέλησε εξ'αρχής να στρέψει το διαπεραστικό φως της ορθολογικής στις σκοτεινές πτυχές των ανθρώπινων δρώμενων και να φωτίσει τη στρατηγική δομή των κοινωνικών φαινομένων. Το ότι επιβίωσε το τέλος των «μεγάλων αφηγήσεων» που ήρθε με το πέρας του «σύντομου 20^{ου} αιώνα»[39] είναι από μόνο του ένα μικρό θαύμα. Ένα θαύμα που οφείλεται κατά κύριο λόγο στον John Nash του οποίου το έργο επιτρέπει στη Θεωρία Παιγνίων να αυξάνει καθημερινά την διεισδυτικότητα της σε όλες τις κοινωνικές επιστήμες. Σε μια εποχή που εξέλειψε η «μοντέρνα» αυτοπεποίθηση για την προοπτική θεμελίωσης των επιστημών σε μια *κοινή βάση*, οι δύο υπέροχες ιδέες του Nash διατήρησαν ζωντανή την ελπίδα πως μπορούμε ακόμα να ελπίζουμε σε μια ορθολογική, σφαιρική, κατανόηση του «κοινωνικού προβλήματος».

Χιλιάδες είναι οι μεταπτυχιακοί φοιτητές που σήμερα προεκτείνουν και εφαρμόζουν τις ιδέες του Nash σε πολλά διαφορετικά πεδία (π.χ. την ανθρωπολογία, την κοινωνιολογία, τις πολιτικές επιστήμες και βέβαια την οικονομική). Τα επιστημονικά περιοδικά έχουν σχεδόν αλωθεί από τέτοιου είδους εργασίες. Όπως φαίνεται και από τα άρθρα που ακολουθούν στο παρόν βιβλίο, είναι γενική και έντονη η πεποίθηση πως ο Nash μετασχημάτισε ριζικά τις κοινωνικές επιστήμες, δίνοντάς τους πιο στέρεες επιστημονικές βάσεις και εργαλεία τα οποία επιτρέπουν στον μελετητή να φτάσει με χειρουργική ακρίβεια στην ουσία των κοινωνικών φαινομένων. Σε αυτό το κλίμα γενικού ενθουσιασμού, ο αναγνώστης δεν μπορεί παρά να ξαφνιαστεί από το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγω και με το οποίο, είμαι σίγουρος, θα συμφωνήσουν ελάχιστοι: *Η Θεωρία Παιγνίων απέτυχε!*

Μπορεί να βρίσκεται στην Κολοφώνα της δόξας της σήμερα, αλλά η παρακμή έχει ήδη αρχίσει και σύντομα θα γίνει αισθητή. Πριν περάσει πολύς καιρός, οι κοινωνικές επιστήμες τις οποίες επιρρέασε (με εξαίρεση ίσως την οικονομική) θα αρχίσουν να την παραμερίζουν. Τολμώ να καταθέσω ένα τόσο καταθλιπτικό συμπέρασμα επειδή έχω πειστεί, αγαπητέ αναγνώστη, πως η εξαίσια αυτή θεωρία γεννήθηκε με έναν καταστροφικό ιό στα γονίδιά της˙ έναν ιό που δεν μπορεί να καταπολεμηθεί χωρίς να ακυρωθούν τα βασικότερα «ατού» της ίδιας της θεωρίας: *Τον ιό της απροσδιοριστίας*! Η αδυναμία της Θεωρίας Παιγνίων να λύνει τα προβλήματα που η ίδια θέτει οφείλεται:

(α) στις πολλαπλές ισορροπίες Nash (που, όπως είδαμε, γίνονται ακόμα περισσότερες όσο πιο ενδιαφέρον το κοινωνικό φαινόμενο που προσπαθούμε να κατανοήσουμε), και

(β) στην αδυναμία του Nash να πείσει ότι, ακόμα και όταν υπάρχει μόνο μια ισορροπία, τα ορθολογικά άτομα θα της δώσουν, με τη συμπεριφορά τους, σάρκα και οστά. Η Θεωρία Παιγνίων αντλεί την αίγλη της από το επιχείρημα ότι προβλέπει, χωρίς να κρίνει, τα κοινωνικά φαινόμενα˙ ότι πρόκειται για αντικειμενικό, επιστημονικό εργαλείο. Για αυτόν ακριβώς το λόγο η απροσδιοριστία είναι ο χειρότερος εχθρός της˙ στερώντας της τη δυνατότητα της *συγκεκριμένης* πρόβλεψης, την αποδυναμώνει πλήρως. Υπάρχει τρόπος να καταπολεμηθεί; Οι παιγνιοθεωρητικοί προσπάθησαν για τουλάχιστον τριάντα χρόνια. Όμως, η ανάγνωση του έργου τους με οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλη αυτή η σκληρή δουλειά (των λαμπρότερων μυαλών που έχουν ασχοληθεί ποτέ με τις κοινωνικές επιστήμες) είχε πενιχρά αποτελέσματα. Ο αγώνας του Nash και των επιγόνων του εναντίον της απροσδιοριστίας κατέληξε να πάρει τη μορφή ενός (σχεδόν) κρυφού αξιώματος: *Άτομα με την ίδια πληροφόρηση έχουν πανομοιότυπες προσδοκίες <u>ανά</u> <u>πάσα</u> <u>στιγμή</u>*. Το παρουσίασαν μάλιστα ως φυσική απόρροια της ανθρώπινης ορθολογικότητας.

Δυστυχώς, αυτή η προσπάθεια εκλογίκευσης δεν πείθει. Το πρόβλημα δεν είναι ότι η ορθολογικότητα του κοινού ανθρώπου υστερεί τωνπροδιαγραφών του Nash. Αν ήταν αυτό το πρόβλημα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η θεωρία του Nash αφορά μόνο ιδιοφυείς παίκτες και ότι παράγει προβλέψεις από τις οποίες η δική μας συμπεριφορά μπορεί να διαφέρει αλλά τις οποίες θα προσεγγίζει όσο πιο έξυπνοι και πεπειραμένοι γινόμαστε. Όχι, το πρόβλημα είναι πολύ μεγαλύτερο: Οι προσδοκίες μας βρίσκονται συχνά σε αναντιστοιχία με εκείνες των άλλων όχι επειδή είμαστε ανορθολογικοί αλλά *επειδή είμαστε περισσότερο έξυπνοι απ' ότι μας αναγνωρίζει ο **Nash***˙ επειδή επενδύουμε πολλά (όπως και οι σκακιστές, οι χαρτοπαίκτες, ο φιλόσοφος και ο ιεροεξεταστής στο *Παίγνιο 9* κλπ) στο να *εμποδίσουμε* τους άλλους να γνωρίζουν τις προσδοκίες μας. Κι όταν τις πλησιάζουν, δεν διστάζουμε να συμπεριφερόμαστε «παράλογα» για να τους ρίξουμε στάχτη στα μάτια.

Ο Nash δεν τα επιτρέπει αυτά τα τερτίπια (τις «μπλόφες») επιβάλλοντάς μας να παραδεχτούμε *αξιωματικά* ότι δεν θα δουλέψουν˙ χωρίς όμως ποτέ να μας *αποδεικνύει* ότι δεν θα δουλέψουν. Αν εισακουστεί ο Nash, τότε κανένας δεν θα *προσπαθούσε* ποτέ να «μπερδέψει» με τις κινήσεις του τον αντίπαλο αφού θα έχει αξιωματικά αποδεχθεί την ανά πάσα στιγμή σύμπτωση των προσδοκιών του εαυτού του και του αντιπάλου.[41] Είναι λογικό ο Nash να επιβάλει αυτό το αξίωμα, επιμένοντας ότι προκύπτει φυσιολογικά από την ορθολογικότητά μας; Δεν νομίζω. Γιατί το επιβάλλει τότε; Επειδή έχει ανάγκη να τον πιστέψουμε μιας και, διαφορετικά, η θεωρία του θα κολλήσει και πάλι στο βάλτο της απροσδιοριστίας. Ναι, αλλά δεν φτάνει αυτός ο λόγος για να πειστούμε. Όπως δεν θα πείθονταν οι μαιτρ του σκακιού να λαμβάνουν ως δεδομένο το παραπάνω αξίωμα μόνο και μόνο επειδή χωρίς το αξίωμα τούτο θα «πέσει έξω» η θεωρία του Nash.

Στην ουσία, η Θεωρία Παιγνίων υιοθετεί την εξής προσέγγιση στα σύνθετα κοινωνικά φαινόμενα (όπως π.χ. το διαπραγματευτικό πρόβλημα):

(1) Δέχεται *αξιωματικά* πως το πρόβλημα έχει μια και μοναδική λύση (πιθανώς στοχαστική[42]).

(2) Από τη στιγμή που έχει δεχθεί τη μοναδικότητα της λύσης,

υποθέτει ότι, εάν ο παιγνιοθεωρητικός μπορεί να την βρει, το ίδιο θα ισχύει και για παίκτες που δεν θα πρέπει να θεωρούνται λιγότερο έξυπνοι απ' ότι ο παιγνιοθεωρητικός.

(3) Αφού η λύση είναι μια και την γνωρίζουν δυνητικά όλα τα εμπλεκόμενα μέρη, οι προσδοκίες τους θα στραφούν προς αυτή τη λύση. Άρα οι προσδοκίες τους θα συμπίπτουν.

(4) Έχοντας δεχθεί τα σημεία (1) με (3), το τελευταίο στάδιο είναι η θριαμβευτική εξεύρεση αυτής της μοναδικής λύσης η οποία προκύπτει *επειδή* ο παιγνιοθεωρητικός θεωρεί (λόγω του αξιώματος περί μοναδικής λύσης) *δεδομένη* τη σύμπτωση των προσδοκιών των παικτών. Η μέθοδος αυτή αφήνει μεγάλα περιθώρια αμφισβήτησης επειδή το ζητούμενο είναι να δείξουμε όχι μόνο *ποια* είναι η λύση (εφόσον αποδεχθούμε ότι είναι μοναδική) αλλά και το *εάν* υπάρχει λόγος να πιστεύουμε στην ύπαρξη μοναδικής λύσης. Όσο πιο σύνθετα τα κοινωνικά φαινόμενα που αναλύουμε, τόσο πιο επισφαλές το αξίωμα ότι η λύση είναι μια και μοναδική και, συνεπώς, τόσο προβληματικότερη η μέθοδος που εφαρμόζει η Θεωρία Παιγνίων για να την εντοπίσει. Το πρόβλημα δεν είναι απλά τεχνικό. Είναι βαθιά φιλοσοφικό και πολιτικό. Η άκριτη και αυταρχική επιβολή της σύμπτωσης των προσδοκιών αμφισβητεί τη δημιουργικότητα του ανθρώπινου νου. Αντίθετα από έναν αλγόριθμο, ή ένα cyborg, ο άνθρωπος έχει ένα εξαίσιο χάρισμα: Τη δυνατότητα να αναρωτιέται τι θα συμβεί εάν ο ίδιος παραβεί τους κανόνες που τον διέπουν. Τη στιγμή που μας περνούν τέτοιες ανατρεπτικές σκέψεις από το μυαλό, καταρρέει η σύμπτωση προσδοκιών που απαιτεί ο Nash και επανέρχεται δριμύτερη η απροσδιοριστία. Ο ισχυρισμός μου περί «αποτυχίας» της Θεωρία Παιγνίων θα μπορούσε να θεωρηθεί υπερβολικός εάν βασιζόταν αποκλειστικά στη διαπίστωση πως οι προσπάθειες θεωρητικής υπερνίκησης της απροσδιοριστίας δεν ευοδώθηκαν. Αν σημείωνε σημαντικές επιτυχίες στο εμπειρικό πεδίο, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί πως ο Nash επαληθεύεται στην πράξη.

Πράγματι, εφόσον ο στόχος της Θεωρίας Παιγνίων είναι η πρόβλεψη, ίσως το ζητούμενο είναι κατά πόσο προβλέπει τη συμπεριφορά των ατόμων. Τα τελευταία χρόνια οι παιγνιοθεωρητικοί περνούν άπειρες ώρες σε εργαστήρια οικονομικής όπου εθελοντές συμμετέχουν σε παίγνια σχεδιασμένα έτσι ώστε να ελέγχονται οι θεωρητικές προβλέψεις του Nash και των επιγόνων του. Το συμπέρασμα είναι αμείλικτο:[44] Η Θεωρία Παιγνίων αποτυγχάνει (α) να προβλέψει την συμπεριφορά των εθελοντών, και (β) να εξηγήσει τις *συστηματικές* διαφορές μεταξύ της συμπεριφοράς τους και της θεωρητικής πρόβλεψης.

Στην Ηθική του Νικόμαχου ο Αριστοτέλης γράφει πως είναι αδύνατον να προσδιοριστούν οι κανόνες του μη-προσδιορίσιμου. Ο John F. Nash Jr αψήφησε τον Αριστοτέλη και επιχείρησε να ανατρέψει το ρητό του. Αν και απέτυχε, είναι άξιο θαυμασμού το πόσο κοντά *πλησίασε* την ανατροπή αυτή. Πρόκειται για μια αποτυχία με τεράστια αξία τόσο για τις κοινωνικές επιστήμες όσο και για την πολιτική φιλοσοφία: Στην προσπάθειά του να δαμάσει τους κανόνες της κοινωνικής ιστορίας, ο Nash *ανακάλυψε τα απόλυτα όρια του μεθοδολογικού ατομικισμού*˙ μας κατέδειξε μέχρι που μπορεί να μας «πάει» η ανάλυση της κοινωνίας όταν μοναδική αναλυτική κατηγορία είναι ένα υπόδειγμα ανθρώπου (ο λεγόμενος και ***homo economicus***) που θέλει αυτό που κάνει και κάνει αυτό που θέλει˙ ενός «ατόμου» με όλη την έννοια της λέξης, μιας και ο χαρακτήρας του δίδεται εξωγενώς *ανεξάρτητα* από την κοινωνική διαδικασία˙ ένα άτομο το οποίο ταυτίζεται με τις προτιμήσεις του, και του οποίου η ορθολογικότητα εξαντλείται στη δυνατότητα να ικανοποιεί αυτές τις προτιμήσεις αποτελεσματικά.

Με εξαίρεση τον Marx, οι κοινωνικές επιστήμες δεν έχουν ξαναδεί άλλη προσωπικότητα που να επιρρεάσει τόσους πολλούς τομείς της κοινωνικής θεωρίας. Πόσομάλιστα που ο Nash, αντίθετα με τον Marx, δεν κατέβαλε ιδιαίτερη προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση. Κατάφερε μέσα από τρία ή τέσσερα σύντομα άρθρα, σχεδόν ακούσια, να ιδρύσει μια νέα σχολή σκέψης.

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1950, παρόλη την απουσία του από τις συζητήσεις και εξελίξεις της Θεωρίας Παιγνίων, ο Nash καθοδήγησε τους συνεχιστές του χωρίς να πει ή να γράψει ούτε μια κουβέντα. Μερικές αράδες στα άρθρά του, ή στην συντομότατη διδακτορική του διατριβή, ήταν ικανές να καθοδηγήσουν θεωρητικούς όπως οι Harsanyi, Selten, Rubinstein, Shubik, Myerson κλπ.

Το αποτέλεσμα ήταν η πιο φιλόδοξη και «μοντέρνα» προσπάθεια ενοποίησης των κοινωνικών θεωριών. Αν η προσωπική μου αποτίμηση ήταν σωστή, η προσπάθεια αυτή απέτυχε. Απέτυχε επειδή οι συνεχιστές του Nash ήρθαν αντιμέτωποι με το ίδιο απροσπέλαστο τείχος που αντιμετώπισαν και οι επίγονοι του Marx: *τη δημιουργική απροσδιοριστία της ανθρώπινης δράσης*. Πρόκειται για ένα εμπόδιο το οποίο, εγγυημένα, σταματά απότομα όσους προσπαθούν να «δαμάσουν» την κοινωνική διαδικασία εφαρμόζοντας μηχανιστικά τις εμπνευσμένες ιδέες των δασκάλων τους. Όμως όταν η προσπάθεια είναι μνημειώδης, η ηρωική αποτυχία έχει συχνά αξία που οι λάτρεις των θριάμβων αδυνατούν να εκτιμήσουν. Ακόμα και αν ο μελετητής της Θεωρίας Παιγνίων συμφωνήσει μαζί μου, θα διακρίνει ελπίζω ότι εξαίσιες αποτυχίες σαν του Nash μας αφήνουν σοφότερους και σε καλύτερη θέση να θαυμάζουμε τη δυνατότητα του ανθρώπινου νου να κατασκευάζει εκπληκτικής ομορφιάς αφηρημένες εξηγήσεις του εαυτού του *προτού τις υπερβεί*.[47] Εδώ έγκειται το χρέος μας στον John F. Nash Jr: του χρωστάμε τη βαθιά γνώση των λόγων για τους οποίους οι κοινωνικές θεωρίες είναι καταδικασμένες στην παράλυση και στην απροσδιοριστία όσο δεν μπολιάζονται από την ιστορική μελέτη των κοινωνικών διαδικασιών˙ διαδικασιών που επιλύουν αλλά και ταυτόχρονα *δημιουργούν* τα παίγνια της ζωής.

8.2 Πηγές

ΒΙΒΛΙΑ:

-´´Θεωρία Παιγνίων για Οικονομολόγους, συγγραφέας Σολδάτος Σ. Γεράσιμος, έκδοση Πανεπιστημίου Μακεδονίας 2002.

- ´´Θεωρία Παιγνίων´´ Βαρουφακη Ιωάννη, εκδοση Gutenberg 2007.

- ´´Αφιέρωμα στον John Nash, Θεωρία Παιγνίων´´ έκδοση Ευρασία 2002.

ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ:

- www.aueb.gr ´´Θεωρία Παιγνίων´´ Π.Μηλιώτη

- Διαλέξεις Σκιντζής Γεωργίας Πανεπιστημίου Πατρών

- *ΒΙΚΙΠΑΙΔΕΙΑ:* Θεωρία Παιγνίων John Forbes Nash