Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ: Σ.Δ.Ο.
ΤΜΗΜΑ: ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

« ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κος Ε.ΒΑΛΑΡΗΣ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ:
ΜΟΥΛΑΓΙΑΝΝΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΟΥΛΙΔΑ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ
ΧΡΥΣΑΝΘΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΑΘΗΝΑ

ΠΑΤΡΑ
2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Την εργασία μας την διακρίνουμε στα παρακάτω κεφάλαια:

Στο 1^{O} **κεφάλαιο** στο πρώτο μέρος αναφερόμαστε στις Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις, αναλύουμε τον απλό τόκο κάνοντας υπολογισμό και παραδείγματα. Ακόμα αναλύουμε την Προεξόφληση αναφερόμενοι στους μεθόδους, και τους υπολογισμούς του. Στις Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις αναφερόμαστε στις έννοιες και τους ορισμούς του Ανατοκισμού, τις Ράντες και τα Δάνεια.

Στο 2^{O} **κεφάλαιο** αναφερόμαστε στην έννοια της Στατιστικής και τα βασικά στάδια της, στην χρονολογική σειρά, στις κυριότερες συνιστώσες μιας χρονολογικής σειράς, στον προσδιορισμό της τάσης με μια γραμμένη εξίσωση καθώς και στον προσδιορισμό της τάσης με μια εκθετική συνάρτηση της μορφής $\Psi_1 = \kappa + \alpha\beta^{\chi}$.

Στο 3^{O} **κεφάλαιο** αναφερόμαστε στους Παραγώγους στον ορισμό του, στην παράγωγο συνάρτησης, στους κανόνες παραγώγησης, στην μονοτονία συνάρτησης, στα ακρότατα συνάρτησης και στα ορισμένα ολοκληρώματα.

Στο 4^{O} **κεφάλαιο** θα ασχοληθούμε με την έννοια και τον σκοπό της αναλύσεως με τις Βασικές αρχές και έννοια του προγραμματισμού και της οργανώσεως και στην Ανάλυση νεκρού σημείου.

Τέλος στο 5^{O} **κεφάλαιο** αναφερόμαστε στην μικροοικονομική θεωρία όπου εμπεριέχεται η συνάρτηση παραγωγής, το Συνολικό, Μέσο και Οριακό προϊόν, η Συνάρτηση κόστους και ο νόμος της ζήτησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

1.1Ορισμοί

Ο απλός τόκος είναι ένα σύστημα τοκισμού κατά το οποίο οι παραγόμενοι τόκοι στο τέλος κάθε χρονικής περίοδου αποδίδονται στο δανειστή ή τίθενται εκτός παραγωγικής διαδικασίας και για την επόμενη χρονική περίοδο τοκίζεται μόνο το αρχικό κεφάλαιο και πάλι **οι τόκοι που παράγονται αποδίδονται στο δανειστή και αυτό γίνεται συνεχώς μέχρι να τελειώσει η χρονική διάρκεια του τοκισμού.**

Τα βασικά μεγέθη που συμμετέχουν σε κάθε πρόβλημα απλού τόκου είναι τα κάτωθι:

1. Το ποσό που δανείζεται, το οποίο ονομάζεται κεφάλαιο και συμβολίζεται με το γράμμα Κ και μετριέται με τη νομισματική μονάδα κάθε χώρας.
2. Η χρονική περίοδος, η οποία ονομάζεται χρόνος και συμβολίζεται με τα γράμματα n , μ , ν ο χρόνος είναι αντίστοιχα έτη, μήνες , μέρες.
3. Ο τόκος, ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα Ι, είναι ομοειδές ποσό με το κεφάλαιο και μετριέται με την ίδια μονάδα.
4. Το επιτόκιο, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα Ι και συμβολίζει τον τόκο μιας νομισματικής μονάδας σε ένα έτος. Το επιτόκιο είναι ομοειδές ποσό με τον τόκο και μετριέται με την ίδια μονάδα.

1.1.1 Υπολογισμός του απλού τόκου

Από τον ορισμό του επιτοκίου προκύπτει ότι το κεφάλαιο μιας νομισματικής μονάδας που τοκίζεται με επιτόκιο i, στο τέλος του πρώτου έτους παράγει τόκο i και τούτο θα συμβαίνει συνεχώς μέχρι τη λήξη του τοκισμού.

Έτσι λοιπόν το κεφάλαιο μιας νομισματικής μονάδας τοκιζόμενο επί n χρονικές περιόδους (έτη) με επιτόκιο i, θα αποδώσει τόκο $I = n \cdot i$. Εάν το τοκιζόμενο κεφάλαιο είναι 2, 3, κ.λ.π νομισματικές μονάδες, τότε ο αντίστοιχος τόκος θα είναι $2 \cdot n \cdot i$, $3 \cdot n \cdot i$,...κ.λ.π.

Εάν ,τέλος, το τοκιζόμενο κεφάλαιο είναι K, τότε ο παραγόμενος τόκος σε n χρονικές περιόδους με επιτόκιο i θα είναι:

$$I = K \cdot n \cdot i \quad (1)$$

Η εξίσωση (1)είναι η θεμελιώδης εξίσωση του τόκου, η οποία όταν ο χρόνος είναι μήνες ή έτη ή ημέρες μετασχηματίζεται ως κάτωθι:

1.1.1.1 Ο χρόνος δίνεται σε μήνες

Εάν μ είναι ο αριθμός των μηνών, τότε θα έχουμε n = μ και ο τύπος (1) γίνεται:

$$I = \frac{K \cdot \mu \cdot \iota}{12} \quad (1\alpha)$$

1.1.1.2 Ο χρόνος δίνεται σε ημέρες

Εάν ν είναι ο αριθμός των ημερών, τότε θα έχουμε n = ν και ο τύπος (1) γίνεται

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot \iota}{365} \quad (1\beta)$$

Το έτος των 365 ημερών, δηλαδή το πραγματικό έτος στα Οικονομικά Μαθηματικά ονομάζεται **Πολιτικό Έτος.**

Για τον υπολογισμό του τόκου όταν ο χρόνος είναι ημέρες, χρησιμοποιείται ένας **πλασματικός τύπος έτους, το λεγόμενο Εμπορικό Έτος, το οποίο αποτελείται από 12 μήνες των 30 ημερών ο καθένας, δηλαδή το έτος αυτό έχει 360 ημέρες. Και ο τύπος του τόκου με έτος εμπορικό, γίνεται:**

$$I = \frac{K \cdot \mu \cdot I}{12} \quad (1\gamma)$$

Ο υπολογισμός του τόκου με έτος εμπορικό είναι σε βάρος του δανειζόμενου και σε όφελος του δανειστή. Όμως η διαφορά υπέρ του δανειστή στην πράξη είναι πολύ μικρή και τούτο διότι ο χρόνος είναι πολύ μικρός, συνήθων 60 έως 90 ημέρες. Από την άλλη πλευρά, ο υπολογισμός του τόκου με έτος εμπορικό γίνεται ταχύτερα και ευκολότερα σε σχέση με το πολιτικό έτος. Αυτά βέβαια, όταν οι πράξεις γίνονται με το χέρι.

Πέρα από το εμπορικό έτος, στην πράξη χρησιμοποιείται και ένα άλλο πλασματικό έτος , το λεγόμενο Μικτό Έτος, το οποίο αποτελείται και αυτό από 360 ημέρες, όμως ο κάθε μήνας του έχει τον πραγματικό αριθμό ημερών (Ιανουάριος 31, Φεβρουάριου 28 κλπ). Στις τρέχουσες εμπορικές συναλλαγές χρησιμοποιείται το εμπορικό ή το μικτό έτος, όταν βέβαια ο χρόνος είναι ημέρες.

Ο τύπος που δίνει τον τόκο με έτος μικτό, είναι ο (1γ) και υπάρχει περίπτωση να έχει άλλη τιμή το ν, όταν το έτος είναι εμπορικό και άλλη όταν το έτος είναι μικτό.

1.1.1.3 Υπολογισμός του τόκου με το σταθερό διαιρέτη

Διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή των τύπων (1β) και (1γ) και έχουμε:

$$I = \frac{K \cdot \nu}{365/\iota} \qquad I = \frac{K \cdot \nu}{360/\iota}$$

Το πηλίκο $\frac{365}{i}$ και $\frac{360}{i}$ για κάθε πρόβλημα τόκου, για το ίδιο επιτόκιο, σταθερό και ονομάζεται σταθερός διαιρέτης και συμβολίζεται με το γράμμα Δ. Έτσι ο τύπος του τόκου με τη χρήση των σταθερών διαιρετών, γίνεται:

$$I = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} \qquad (1\delta)$$

Το γινόμενο $K \cdot \nu = N$, ονομάζεται **τοκάριθμος**.

1.1.1.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα :1

Πόσο τόκο θα λάβουμε εάν τοκίσουμε 620000€ επί 72 ημέρες με 9,5% .

Έτος:α)Πολιτικό, β) Εμπορικό.

Λύση

α) Έτος Πολιτικό

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot \iota}{365} \Rightarrow I = \frac{620000 \cdot 72 \cdot 0{,}095}{365} \Rightarrow I = 11618$$

β) Έτος Εμπορικό

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot \iota}{360} \Rightarrow I = 620000 \cdot 72 \cdot 0{,}095/360 \Rightarrow I = 11780$$

Διαφορά μεταξύ εμπορικού και πολιτικού έτους:11780-11618=162 €.

Παράδειγμα 2:

Επί πόσο χρόνο πρέπει να τοκίσουμε 200000 €. με επιτόκιο 13% για να λάβουμε συνολικό ποσό 350000 €.

Λύση

Τον χρόνο συνήθως τον υπολογίζουμε σε ημέρες, γιατί έχουμε ευκολότερα το αποτέλεσμα. Στη περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το εμπορικό έτος.

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot \iota}{360} \Rightarrow \nu = \frac{I \cdot 360}{K \cdot \iota} \Rightarrow \nu = \frac{150000 \cdot 360}{200000 \cdot 0{,}013} \Rightarrow \nu = 2077 \text{ ημέρες}$$

2077:360=5 έτη, υπόλοιπο 277 ημέρες

277:30=9 μήνες, υπόλοιπο 7 ημέρες

Ζητούμενος χρόνος: 5 έτη, 9 μήνες και 7 ημέρες

Παράδειγμα 3:

Με ποιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε 80000€. Για να λάβουμε μετά από 8 μήνες τόκο 12000€.;

Λύση

$$I = \frac{K \cdot \mu \cdot \iota}{12} \Rightarrow \iota = \frac{I \cdot 12}{K \cdot \mu} \Rightarrow \iota = \frac{12000 \cdot 12}{80000 \cdot 8} \Rightarrow \iota = 0{,}225 \text{ ή } \iota = 22{,}5\%$$

1.1.2 Εύρεση της τελικής αξίας του κεφαλαίου

Στον απλό τόκο ονομάζουμε τελική αξία κεφαλαίου που τοκίζεται επί n χρονικές περιόδους με επιτόκιο i, το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου που δημιουργήθηκε. Εάν παραστήσουμε με K το αρχικό κεφάλαιο και με Kn το τελικό κεφάλαιο, τότε θα έχουμε:

$$Kn = Ko + I \quad \text{ή} \quad Kn = Ko + Ko \cdot n \cdot \iota$$

$$Kn = Ko \cdot (I + n \cdot i) \qquad \text{(2) Χρόνος, έτη}$$

$$Kn = Ko = \frac{K \cdot \nu \cdot \iota}{\Delta} \Rightarrow Kn = \frac{Ko \cdot \Delta + Ko \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow Kn = \frac{Ko \cdot (\Delta + \nu)}{\Delta}$$

(2^{α})Χρόνος, ημέρες

Από τους τύπους (2) και (2 α) μπορούμε να βρούμε το Ko συναρτήσει του Kn:

$$Ko = \frac{Kn}{I + n \cdot i} \quad (2\beta) \qquad Ko = \frac{Kn \cdot \Delta}{\Delta + \nu} \quad (2\gamma)$$

1.1.3 Εύρεση ελαττωμένου κατά τον τόκο κεφαλαίου

Υπάρχουν περιπτώσεις δανεισμού, όπου ο δανειστής ζητάει να κρατήσει προκαταβολικά τον τόκο που αναλογεί στο δανειζόμενο κεφάλαιο. Στη περίπτωση αυτή το τελικό κεφάλαιο, δηλαδή το ποσό που θα εισπράξει ο δανειζόμενος, είναι μικρότερο του αρχικού κεφαλαίου. Το τελικό αυτό κεφάλαιο το ονομάζουμε **ελαττωμένο κατά τον τόκο κεφάλαιο.**

Παράδειγμα:

Τι ποσό πρέπει να δανειστεί κάποιος προς 12% για 6 ημέρες, έτσι ώστε αφού πληρώσει προκαταβολικά τον τόκο να εισπράξει 441000€

Λύση:

$$K_n = \frac{K_0(\Delta - \nu)}{\Delta} \Rightarrow K_n = \frac{K_n \cdot \Delta}{\Delta \cdot \nu} \Rightarrow K_n = \frac{441000 \cdot 3000}{3000 \cdot 60} \Rightarrow$$

$\Rightarrow K_n = 450000€$

1.2 ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ

Βασικές έννοιες- ορισμοί

Οι οικονομικές συναλλαγές γίνονται είτε με την καταβολή ολόκληρου του ποσού που προκύπτει από την συναλλαγή είτε με πίστωση. Στην περίπτωση της με πίστωση συναλλαγής ο πωλών έμπορος ή ο δανείζων χρήματα (τράπεζα, ιδιώτες), για την εξασφάλισή τους ότι θα λάβουν το οφειλόμενο ποσό, παίρνουν από τον αγοραστή ή τον δανειζόμενο ένα έγγραφο με το οποίο ο τελευταίος αποδέχεται να πληρώσει το οφειλόμενο ποσό σε ορισμένη ημερομηνία.

Τα πιο πάνω έγγραφα αποτελούν πιστωτικούς τίτλους είναι τυποποιημένα και θεσμοθετημένα από το κράτος και ονομάζονται **Γραμμάτια** ή **Συναλλαγματικές.**

Ειδικότερα το **Γραμμάτιο** είναι ένας πιστωτικός τίτλος ο οποίος εκδίδεται από τον οφειλέτη και αποτελεί υπόσχεση του οφειλέτη προς τον πιστωτή ότι θα του καταβάλει το αναγραφόμενο ποσό στην αναγραφόμενη ημερομηνία. Με την έκδοση του δε υπογράφεται υποχρεωτικά από τον οφειλέτη.

Η **συναλλαγματική** είναι ένας πιστωτικός τίτλος ο οποίος εκδίδεται από τον πιστωτή και αποτελεί εντολή του πιστωτή προς τον οφειλέτη να του καταβάλλει το αναγραφόμενο ποσό στην αναγραφόμενη ημερομηνία και υπογράφεται και από τον πιστωτή και από τον οφειλέτη.

Παρά την διαφορά μεταξύ γραμματίου και συναλλαγματικής όπως αυτή προκύπτει από τους πιο πάνω ορισμούς, εν τούτοις και οι δύο πιστωτικοί τίτλοι είναι ισοδύναμοι και έχουν την ίδια τυπική ισχύ και διέπονται από την ίδια νομοθεσία η οποία ρυθμίζει τα της έκδοσης, εξόφλησης κλπ τούτων. Στις τρέχουσες εμπορικές συναλλαγές κατά κανόνα χρησιμοποιούνται οι συναλλαγματικές.

Τα βασικά μεγέθη ενός γραμματίου ή μιας συναλλαγματικής είναι τα ακόλουθα:

1. **Η ονομαστική αξία** η οποία είναι η αξία που αναγράφεται επί του τίτλου και την οποία λαμβάνει ο πιστωτικός τίτλος την ημερομηνία που λήγει.
2. **Η παρούσα ή πραγματική αξία,** η οποία είναι η αξία που έχει ο τίτλος σε κάθε ημερομηνία πριν από την λήξη του.
3. **Η ημερομηνία λήξης**, είναι ο χρόνος κατά τον οποίο είναι απαιτητό το ποσό που αναγράφεται επί του τίτλου

Τις συναλλαγματικές και τα γραμμάτια που παίρνει ένας έμπορος από τους πελάτες του μπορεί:

1. Να τα κρατήσει και να αναμείνει τη λήξη τους οπότε και θα εισπράξει την ονομαστική τους αξία.
2. Να τα ρευστοποιήσει πριν την λήξη τους ώστε να αποκτήσει μετρητά για να αντιμετωπίσει τις ανάγκες της επιχείρησης.
3. Η ρευστοποίηση ενός πιστωτικού τίτλου πριν την λήξη του ονομάζεται **προεξόφληση** ή **υφαίρεση.**

1.2.1 Μέθοδοι προεξόφλησης

Οι προεξοφλήσεις στις τρέχουσες εμπορικές συναλλαγές γίνονται από τις Τράπεζες , μπορούν όμως να γίνουν και από ιδιώτες. Αυτός που αποδέχεται να κάνει την προεξόφληση (Τράπεζα ή ιδιώτες) κρατάει τόκο για χρόνο από την ημερομηνία της προεξόφλησης μέχρι την ημερομηνία της λήξης με το επιτόκιο που ισχύει στην αγορά για τις προεξοφλήσεις και καταβάλλει στον κομιστή (δικαιούχος του τίτλου) το υπόλοιπο το οποίο είναι η παρούσα αξία του τίτλου.

Ο τόκος που καταβάλλεται κατά την προεξόφληση ονομάζεται **προεξόφλημα.**

Εάν για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος πάρουμε ως κεφάλαιο την ονομαστική αξία του τίτλου, τότε η προεξόφληση ονομάζεται **εξωτερική** και το προεξόφλημα που προκύπτει **εξωτερικό** το οποίο το συμβολίζουμε με το **Ε**.

Εάν για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος πάρουμε ως κεφάλαιο την παρούσα αξία του τίτλου τότε η προεξόφληση ονομάζεται **εσωτερική** και το αντίστοιχο προεξόφλημα **εσωτερικό** το οποίο το συμβολίζουμε με το **Ε1.**

Τα βασικά μεγέθη σε κάθε προεξόφληση είναι η ονομαστική αξία, η παρούσα αξία και το προεξόφλημα τα οποία συνδέονται με τη σχέση:

(4)	**<u>Ονομαστική αξία</u> = Παρούσα αξία + Προεξόφλημα**

η οποία αποτελεί και τη βασική εξίσωση της προεξόφλησης.

Εάν η προεξόφληση είναι εξωτερική και καλέσουμε με Κ την ονομαστική αξία, Α την παρούσα αξία και Ε το προεξόφλημα, τότε η σχέση (4) γίνεται:

$$K = A + E \quad (4\alpha)$$

Εάν η προεξόφληση είναι εσωτερική Κ είναι η ονομαστική αξία, Α1 η παρούσα αξία και Ε1 το εσωτερικό προεξόφλημα, τότε η σχέση (4) γίνεται:

$$K = A1 + E1 \quad (4\beta)$$

1.2.2 Υπολογισμός του προεξοφλήματος

α) Εξωτερικά

Έστω ότι έχουμε μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας Κ η οποία προεξοφλείται ν ημέρες πριν τη λήξη της με επιτόκιο i, τότε το εξωτερικό προεξόφλημα που θα προκύψει θα είναι:

$$E = \frac{K \cdot \nu \cdot \iota}{360} \quad \text{ή} \quad E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} \quad (5)$$

β) Εσωτερικά

Εάν έχουμε μια συναλλαγματική που έχει παρούσα αξία Α1 η οποία προεξοφλείται ν ημέρες πριν τη λήξη της με επιτόκιο i, τότε το εξωτερικό προεξόφλημα θα είναι:

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot \nu}{\Delta} \qquad (6)$$

Ο τύπος (6) δεν είναι εφαρμόσιμος στη πράξη γιατί το Ε1 και το Α1 τη χρονική στιγμή που επιχειρούμε την προεξόφληση είναι άγνωστα. Έτσι λοιπόν εκφράζουμε το Α1 συναρτήσει του Κ το οποίο είναι γνωστό μέγεθος και έχουμε:

Από Κ = Α1 + Ε1 Α1 = Κ – Ε1 και η (6) γίνεται:

$$E_1 = \frac{(K-E_1)\cdot\nu}{\Delta} \Rightarrow E_1 = \frac{K\cdot\nu - E_1\cdot\nu}{\Delta} \Rightarrow (\Delta+\nu)\cdot E = K\cdot\nu \quad \text{και}$$

$$E_1 = \frac{K\cdot\nu}{\Delta+\nu} \qquad (6^{\alpha})$$

Σημείωση:

Εξετάζουμε κατωτέρω τα αποτελέσματα που δίνει η προεξόφληση εξωτερικά και εσωτερικά για κάθε τιμή του ν.

α)Εξωτερικά:

1. Εάν $\nu<\Delta$ τότε το $\frac{\nu}{\Delta} < 1$ οπότε το $E<K$ τούτο σημαίνει ότι μετά την προεξόφληση θα εισπράξουμε κάποιο ποσό την παρούσα αξία.
2. Εάν $\nu = \Delta \Rightarrow E = K$ τούτο σημαίνει ότι μετά την προεξόφληση δεν θα εισπράξουμε τίποτα

3. Εάν ν >Δ τότε το $\frac{\nu}{\Delta} > 1$ οπότε Ε >Κ τούτο σημαίνει ότι όχι μόνο δεν θα εισπράξουμε προεξόφλημα αλλά θα πληρώσουμε και επιπλέον ποσό.

β) Εσωτερικά:

Στο τύπο $E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta+\nu} = \frac{K \cdot \nu}{\Delta+\nu}$ το κλάσμα $\frac{\nu}{\Delta+\nu}$ είναι πάντοτε μικρότερο της μονάδας για κάθε τιμή του ν(ν<Δ,ν=Δ,ν>Δ) και συνεπώς σε μια εσωτερική προεξόφληση θα εισπράξουμε πάντοτε προεξόφλημα για κάθε τιμή του ν.

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι ο ορθός τρόπος προεξόφλησης είναι εσωτερικά, ενώ η εξωτερική προεξόφληση οδηγεί σε παράλογα αποτελέσματα όταν ο χρόνος είναι πολύ μεγάλος.

Παρά ταύτα, η προεξόφληση στην Ελλάδα και διεθνώς στην πράξη γίνεται εξωτερικά και τούτο διότι α) ο χρόνος προεξόφλησης είναι πολύ μικρός, το πολύ μέχρι 90-100 ημέρες, οπότε η διαφορά μεταξύ εξωτερικού και εσωτερικού προεξοφλήματος είναι ασήμαντη, αμελητέα στην πράξη, β) Ο προεξοφλών (τράπεζα, ιδιώτης) είναι ο οικονομικά ισχυρός κατά τη συναλλαγή και επιβάλλει τη μέθοδο που τον συμφέρει.

Η διαφορά μεταξύ των δύο προεξοφλημάτων είναι:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} - \frac{K \cdot \nu}{\Delta+\nu} = \frac{K \cdot \nu \cdot (\Delta+\nu) - K \cdot \nu \cdot \Delta}{\Delta \cdot (\Delta+\nu)} \Rightarrow E - E_1 = \frac{K \cdot \nu^2}{\Delta \cdot (\Delta+\nu)} \qquad (7)$$

Παράδειγμα 1:

Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 85000€. που λήγει την 15 Μαΐου προεξοφλείται την 14 Φεβρουαρίου του ίδιου έτους με 12%. Να υπολογιστεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα. Έτος μικτό.

Λύση

α)Εξωτερικά

Υπολογισμός ημερών: Φεβ.14+Μαρ.31+Απρ.30+Μάϊος15=90

$$\Delta = \frac{360}{0,12} = 3000$$

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{85000 \cdot 90}{3000} = 2550€$$

β)Εσωτερικά

$$E_1 = \frac{K * v}{\Delta + v} \Rightarrow E_1 = \frac{85000 \cdot 90}{3000+90} = 2476€$$

$$E - E_1 = 2550 - 2476 = 74€$$

Παράδειγμα 2:

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 180000€. πουν λήγει την 10 Σεπτεμβρίου προεξοφλήθηκε εξωτερικά την 17 Ιουλίου του ίδιου έτους και εισέπραξε ο κομιστής 177080€. Να ευρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση. Έτος μικτό.

Λύση

v= 14+31-20=65 ημέρες.

$$E=\frac{K\cdot v\cdot i}{360} \Rightarrow i=\frac{360\cdot E}{K\cdot v} \Rightarrow i=\frac{360\cdot 2920}{180000\cdot 65}=0{,}09 \text{ ή } i=9\%$$

Παράδειγμα 3:

Να βρεθεί η παρούσα αξία γραμματίου ονομαστικής αξίας 240000€. το οποίο προεξοφλήθηκε 45 ημέρες πριν από την λήξη του προς 8%. Προεξόφληση α) εξωτερική, β) εσωτερική. Έτος εμπορικό.

Λύση

α)Εξωτερικά

$$\Delta=\frac{360}{0{,}08}=4500$$

$$E=\frac{K\cdot v}{\Delta} \Rightarrow E=\frac{240000\cdot 45}{4500}=2400$$

$$A=K\text{-}E \Rightarrow A=240000\text{-}2400 \Rightarrow A=237600$$

β) Εσωτερικά

$$E_1=\frac{K\cdot v}{\Delta+v} \Rightarrow E_1=\frac{240000\cdot 45}{4500+45} \Rightarrow E_1=2376$$

$$A_1=K\text{-}E_1 \Rightarrow A_1=240000\text{-}2376 \Rightarrow A\ 237624$$

Παράδειγμα:4

Να βρεθεί η ονομαστική και η παρούσα αξία συναλλαγματικής, εξωτερικά και εσωτερικά η οποία προεξοφλήθηκε 45 ημέρες πριν από την λήξη της προς 8% και έδωσε διαφορά προεξοφλημάτων 8€.

Λύση

$$\Delta = \frac{360}{0,08} = 4500$$

$$E\text{-}E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta \cdot (\Delta\text{-}\nu)} \Rightarrow 8 = \frac{K \cdot 45^2}{4500 \cdot (4500\text{-}45)} \Rightarrow 8 = \frac{K \cdot 2025}{2045 \cdot 2500}$$

$$\Rightarrow K = \frac{2045 \cdot 2500 \cdot 8}{2025} \Rightarrow K = 80800€$$

$$E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{80800 \cdot 45}{4500} = 808€$$

$A = K\text{-}E \Rightarrow A = 80800\text{-}808 = 7992$

$E\text{-}E_1 = 8 \Rightarrow E_1 = E\text{-}8 \Rightarrow E_1 = 808\text{-}8 = 800€$

$A_1 = K\text{-}E_1 \Rightarrow A_1 = 80800\text{-}800 = 80000$

1.2.3 Προεξόφληση μετά εξόδων

Κατά την προεξόφληση των γραμματίων και των συναλλαγματικών από τις τράπεζες, αυτές δεν κρατούν μόνο τον τόκο, δηλαδή το προεξόφλημα, αλλά πέραν αυτού κρατούν και άλλα ποσά τα οποία είναι τα εξής:

1. Προμήθεια η οποία είναι αποζημίωση της τράπεζας για τις υπηρεσίες που σου προσφέρει,
2. Έξοδα που θα δημιουργηθούν κατά την προεξόφληση,
3. Χαρτόσημο, το οποίο είναι έσοδο του Κράτους το οποίο εισπράττει η τράπεζα για λογαριασμό του.

Η προμήθεια υπολογίζεται σε ποσοστά εφάπαξ ή κατά μήνα επί της ονομαστικής αξίας του τίτλου. Τα έξοδα, εάν υπάρχουν, υπολογίζονται σε ποσοστά επί της ονομαστικής αξίας του τίτλου εφάπαξ (μια φορά). Το χαρτόσημο υπολογίζεται με βάση τον τρόπο που ορίζει το Υπουργείο Οικονομικών.

Αυτή λοιπόν η προεξόφληση που περιγράψαμε ανωτέρω, όπου πέραν του προεξοφλήματος κρατούνται και άλλα ποσά, ονομάζεται **προεξόφληση μετά εξόδων.**

1.2.4 Υπολογισμός της παρούσας αξίας

Εάν θ % είναι η προμήθεια, ε % τα έξοδα και χ το χαρτόσημο σε μια προεξόφληση μετά εξόδων, τότε η παρούσα αξία θα είναι

α) Εξωτερικά

$A = K - E - \theta - \varepsilon - x$ ή

$$A = K - \frac{K\nu}{\Delta} - \frac{K\Theta}{100} - \frac{K\varepsilon}{100} - x \Rightarrow A = K\left(1 - \frac{\nu}{\Delta} - \frac{\theta-\varepsilon}{100}\right) - x \qquad (8)$$

β) Εσωτερικά

$$A_1 = K - \frac{K\nu}{\Delta+\nu} - \frac{K\Theta}{100} - \frac{K\varepsilon}{100} - x \Rightarrow A_1 = K\left(1 - \frac{\nu}{\Delta+\nu} - \frac{\theta+\varepsilon}{100}\right) - \chi \qquad (9)$$

Αν λύσουμε τους τύπους (8) και (9) ως προς Κ τότε βρίσκουμε την ονομαστική αξία συναρτήσει της παρούσας σε μια προεξόφληση μετά εξόδων.

1.2.5 Πραγματικό επιτόκιο

Κατά την προεξόφληση μετά εξόδων η κράτηση της προμήθειας, εξόδων και χαρτοσήμου αυξάνει στην ουσία το επιτόκιο και έτσι διαμορφώνεται ένα νέο επιτόκιο το οποίο ονομάζεται **πραγματικό**

επιτόκιο, το οποίο εκφράζει όλα τα ποσά που κρατήθηκαν κατά την προεξόφληση.

Έτσι λοιπόν εάν θέλουμε να γνωρίζουμε πόσο πραγματικά μας στοίχισε μια προεξόφληση μετά εξόδων πρέπει να υπολογίσουμε το πραγματικό επιτόκιο, το οποίο υπολογίζεται μετά το πέρας της προεξόφλησης.

Το γενικό πρόβλημα που τίθεται στην προκειμένη περίπτωση είναι: Με ποιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε ποσό Α επί ν ημέρες για να λάβουμε τόκο Κ - Α.

Έστω J το ζητούμενο επιτόκιο (πραγματικό), τότε θα έχουμε:

$$K\text{-}A = \frac{A \cdot \nu \cdot j}{360} \Rightarrow j = \frac{360 \cdot (K\text{-}A)}{A * \nu} \qquad (10)$$

Στο πιο πάνω παράδειγμα προεξόφλησης μετά εξόδων έχουμε Κ = 80000, Α = 77200 και ν = 70 ημέρες και το πραγματικό επιτόκιο θα είναι:

$$j = \frac{360 \cdot (K\text{-}A)}{A \cdot \nu} \Rightarrow j = \frac{360 \cdot (80000\text{-}77200)}{77200 \cdot 70} = 0{,}0186 \quad ή \quad J = 18{,}6\%$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

1.3 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ-ΕΝΝΟΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ο ανατοκισμός είναι το σύστημα του τοκισμού κατά το οποίο οι παραγόμενοι στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου τόκοι προστίθενται στο υπάρχον κεφάλαιο και μαζί με αυτό τοκίζονται την αμέσως επόμενη χρονική περίοδο και αυτό συμβαίνει συνεχώς μέχρι να τελειώσει η χρονική διάρκεια του τοκισμού.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα του ανατοκισμού είναι ότι οι παραγόμενοι τόκοι είναι παραγωγικοί. Τούτο έχει ως συνέπεια ότι τα αποτελέσματα στα οποία οδηγεί ο ανατοκισμός είναι μεγαλύτερα από αυτά τα οποία αποδίδει ο απλός τόκος για τα αυτά στοιχεία τοκισμού. Τα αποτελέσματα γίνονται τεράστια όταν ο χρόνος του τοκισμού είναι πολύ μεγάλος και γι' αυτό ο τοκισμός με ανατοκισμό κατά αρχήν δεν επιτρέπεται.

Όμως σε ορισμένες περιπτώσεις επιτρέπεται ο ανατοκισμός , πάντοτε όμως υπάρχει ανώτατο όριο χρονικής διάρκειας.

Η πιο διαδεδομένη περίπτωση τοκισμού με ανατοκισμό είναι οι καταθέσεις ταμιευτηρίου. Στην περίπτωση αυτή ο οικονομικά ισχυρός είναι ο δανειζόμενος δηλαδή η τράπεζα ή τα ταμιευτήρια , όπου έχουν την δυνατότητα να εκμεταλλευτούν παραγωγικά το αποταμίευμα των καταθετών. Στην περίπτωση αυτή η αποδοχή καταθέσεων με ανατοκισμό αποτελεί κίνητρο για την προσέλκυση του αποταμιεύματος των πολιτών.

Ως περίοδο παραγωγής του τόκου, μετά το πέρας της οποίας ο παραγόμενος τόκος προστίθεται στο κεφάλαιο, λαμβάνεται το έτος. Όμως μπορεί να ληφθεί το εξάμηνο ή το τρίμηνο, οπότε ο ανατοκισμός για τις πιο πάνω περιπτώσεις λέγεται αντίστοιχα ετήσιος, εξαμηνιαίος, τριμηνιαίος. Στην περίπτωση που δεν αναφέρεται η χρονική περίοδος ο ανατοκισμός είναι ετήσιος.

1.3.1.Εύρεση της τελικής αξίας κεφαλαίου που τοκίζεται με ανατοκισμό

Γενικό πρόβλημα: Κεφάλαιο Κο τοκίζεται με ανατοκισμό προς επιτόκιο ι. Ποια τελική Κn θ' αποκτήσει μετά n έτη;

Το αρχικό κεφάλαιο Κο τοκιζόμενο με επιτόκιο ι στο τέλος του πρώτου έτους θα αποδώσει τόκο Κο . ι και το τελικό κεφάλαιο στο τέλος του πρώτου έτους θα είναι:

$K_1 = K\text{-}K_0 i = K_0(1+I)$

Το κεφάλαιο Κ1 θα τοκιστεί για την δεύτερη χρονική περίοδο, στο τέλος της οποίας θα δώσει τόκο Κο (1+ι)ι και η τελική αξία Κ2 του κεφαλαίου στο τέλος του δεύτερου έτους θα είναι:

$K_2 = K_0(1+i) + K_0(1+i)i = K_0(1+i)(1+i) \Rightarrow K_2 = K_0 = (1+i^2)$

Κατά τον ίδιο τρόπο εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι η τελική Kn που θα αποκτήσει το αρχικό κεφάλαιο Κο που τοκίστηκε με ανατοκισμό προς επιτόκιο ι στο τέλος των n ετών θα είναι:

$$K_n = K_0(1+i)^n \qquad (19)$$

Ο τύπος αυτός είναι ο βασικός τύπος του ανατοκισμού που συνδέει τα μεγέθη που συμμετέχουν σε κάθε πρόβλημα ανατοκισμού και ανάλογα με τα δεδομένα υπολογίζουμε το κάθε ένα από τα μεγέθη.

Ο τύπος (19) είναι λογιστός με τους λογάριθμους και η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την θεωρητική επίλυση των προβλημάτων.

Για την πρακτική λύση των προβλημάτων ανατοκισμό χρησιμοποιούνται οι **οικονομικοί πίνακες**, με τη χρήση των οποίων, βρίσκουμε εύκολα και γρήγορα τα ζητούμενα. Συγκεκριμένα από τους οικονομικούς πίνακες 1 παίρνουμε έτοιμη τη τιμή της παράστασης $(1+\iota)^n$ για μια σειρά επιτοκίων για χρόνο μέχρι 50έτη αλλά συνδυαστικά για όσο χρόνο θέλουμε.

Παράδειγμα:

Να ευρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 500000€ το οποίο τοκίστηκε με ανατοκισμό προς 8% επί 10 έτη.

Λύση

$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow K_n = 500000 \cdot (1+0{,}08)^{10} \Rightarrow$

$K_{10} = 500000 \cdot 2{,}15892 \Rightarrow K_{10} = 1079460€$

1.3.2 Εύρεση της τελικής αξίας όταν ο χρόνος είναι έτη και μήνες

Εάν ένα κεφάλαιο Κο ανατοκίζεται με επιτόκιο ι για χρόνο

$n + \frac{\mu}{12}$ έτη τότε

για τον ακέραιο αριθμό n ετών θα δώσει τελική αξία $Kn = Ko \cdot (1+ι)^n$

Το κεφάλαιο τούτο ανατοκιζόμενο για την χρονική περίοδο $\frac{\mu}{12}$ του έτους

με ισοδύναμο προς το ετήσιο επιτόκιο ι δίνει τελική αξία:

$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n\text{-}\mu/12}$ (20)

1.3.3 Εύρεση του επιτοκίου

Το επιτόκιο το υπολογίζουμε με τη βοήθεια του τύπου $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ τον οποίο λύνουμε ως προς το διώνυμο $(1+ι)^n$ και έχουμε:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_o}$$

Παράδειγμα:

Με ποιο επιτόκιο πρέπει να ανατοκίσουμε ποσό 370000€, ώστε να γίνει τούτο μετά 8 έτη 7000000€.

ΛΥΣΗ:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_o} \Rightarrow (1+i)^8 = \frac{7000000}{3700000} = 1{,}89189$$

Το πηλίκο το παίρνουμε με πέντε δεκαδικά ψηφία αν υπάρχουν. Το πηλίκο 1,89189 το αναζητούμε στους πίνακες 1 που δίνουν την τιμή της παράστασης $(1+\iota)^n$ στην οριζόντια γραμμή των 8 ετών. Εάν το βρούμε αυτό θα ανήκει σε κάποια στήλη επιτοκίου, κοιτάμε ποίο είναι το επιτόκιο το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Εάν δεν το βρούμε, το οποίο είναι και το επικρατέστερο, τότε το επιτόκιο το υπολογίζουμε με παρεμβολή ως εξής:

Από τους πίνακες 1 βρίσκουμε ότι ο αριθμός 1,89189 περιέχεται μεταξύ των αριθμών 1,85093 και 1,92060, οι οποίοι αντιστοιχούν στα επιτόκια 8% και 8,5%. Με την παρεμβολή εντοπίσαμε το ζητούμενο επιτόκιο που περιέχεται μεταξύ 8% και 8,5%. Το ζητούμενο επιτόκιο το υπολογίζουμε ως εξής: Βρίσκουμε τις διαφορές:

$$1{,}92060 - 1{,}85093 = 0{,}06967$$

$$1{,}89189 - 1{,}85093 = 0{,}04096$$

Και κάνουμε την κατάστρωση:

Για διαφορά 0,06967 διαφορά επιτοκίου 0,005

Για διαφορά 0,04069 διαφορά επιτοκίου Χ

$$X = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}04096}{0{,}06967} = 0{,}0028$$

$i = 0{,}08 - 0{,}0028 = 0{,}0828 \qquad i = 8{,}28\%$

1.3.4 Ανάλογα και ισοδύναμα επιτόκια

Βασική προϋπόθεση για να λυθεί ένα πρόβλημα είτε με το σύστημα του απλού τόκου είτε με τον ανατοκισμό, είναι ότι θα πρέπει η χρονική περίοδος παραγωγής του τόκου του συγκεκριμένου προβλήματος να συμπίπτει με την χρονική περίοδο του επιτοκίου.

Εάν αυτό δεν συμβαίνει τότε θα πρέπει το επιτόκιο, το οποίο εξ ορισμού έχει χρονική περίοδο το έτος, να αναχθεί στην χρονική περίοδο παραγωγής του τόκου γίνεται μέσω των αναλόγων **επιτοκίων** , ως κάτωθι:

Ανάλογα επιτόκια

Για να αναχθεί ένα ετήσιο επιτόκιο σε ανάλογο που αναφέρεται σε χρονική περίοδο μικρότερη του έτους αρκεί να διαιρεθεί το επιτόκιο τούτο δια του αριθμού των εντός του έτους περιόδων παραγωγής του τόκου και το πηλίκο δίνει ανάλογο επιτόκιο που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη περίοδο παραγωγής του τόκου. Παράλληλα πολλαπλασιάζουμε τον δοθέντα χρόνο επί τον αριθμό των περιόδων που μέσα στο έτος γίνεται ο τοκισμός και έτσι βρίσκουμε το πλήθος των περιόδων τοκισμού.

Παράδειγμα:

Τι τόκο δίνει κεφάλαιο 150000€. που τοκίστηκε με 12% επί 3 έτη.

Λύση

α)Περίοδος παραγωγής του τόκου το έτος

$I = 150000 \cdot 3 \cdot 0{,}12 = 54000$

β)Περίοδος παραγωγής του τόκου το εξάμηνο

$I = 150000 \cdot 6 \cdot 0{,}06 = 54000$

γ) Περίοδος παραγωγής του τόκου το τετράμηνο

$I = 150000 \cdot 9 \cdot 0{,}04 = 54000$

Τα επιτόκια 0.12 , 0.06 και 0.04 είναι ανάλογα, έχουν δε τον ίδιο λόγο τον οποίο έχουν οι χρονικές περίοδοι στις οποίες αντιστοιχούν.

Ισοδύναμα επιτόκια

Δύο επιτόκια θα είναι ισοδύναμα όταν αντιστοιχούν μεν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους παραγωγής του τόκου, δίνουν όμως την ίδια τελική αξία σε ένα κεφάλαιο που ανατοκίζεται για το ίδιο χρονικό διάστημα.

Υπολογισμός του ισοδύναμου επιτοκίου:

Έστω ότι μια νομισματική μονάδα τοκίστηκε με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο ι. τότε στο τέλος του έτους θα δώσει τόκο ι και η τελική της αξία θα είναι 1 + ι .

Έστω i_μ είναι το ζητούμενο ισοδύναμο επιτόκιο του ετησίου ι, όπου μ είναι ο αριθμός των περιόδων που μέσα στο έτος γίνεται ο ανατοκισμός. Εάν ανατοκίσουμε τη νομισματική μονάδα με το επιτόκιο i_μ μ φορές μέσα στο έτος θα λάβουμε τελική αξία:

$$(1+i_\mu)^\mu$$

Επειδή όμως τα επιτόκια ι και * είναι ισοδύναμα δίνουν ίσες τελικές αξίες και συνεπώς ισχύει:

$$1+i = (1+i_\mu)^\mu \qquad (21)$$

Με την εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε το i_μ συναρτήσει του ι ή και αντίστροφα:

$$\iota = \sqrt[\mu]{(1+\iota)^{\mu}} - 1 \qquad (21\alpha)$$

$$\iota = (1 + i)^{\mu} - 1 \qquad (21\beta)$$

Παράδειγμα:1

Δίνεται ετήσιο επιτόκιο 9 %. Να υπολογισθεί το ισοδύναμο εξαμηνιαίο και τριμηνιαίο.

Λύση

α) Εξαμηνιαίο

$\mu = 12/6 = 2$

$\iota_2 = (1+0,09)^{6/12}$ -1

$\iota_2 = 4,4\%$

$\iota_2 =$ 1+0,09 - 1 $= (1+0,09)^{1/2}$ -1

$\iota_2 = 1,0440-1$ $\qquad \iota_2 = 0,0444$

β) Τριμηνιαίο

$\mu = 12/3 = 4$

$\iota_4 = \sqrt[4]{1+0,09} - 1 = (1+0,09)^{1/4} - 1 = (1+0,09)^{3/12} - 1$

$\iota_4 = 1,0217 - 1 \qquad \iota_4 = 0,0217 \qquad \iota_4 = 2,17\%$

1.3.5.Προεξόφληση με ανατοκισμό

Όσα αναφέρθηκαν στην απλή κεφαλαιοποίηση περί προεξόφλησης, ισχύουν και στην σύνθετη προεξόφληση.

Έτσι ονομάζουμε **προεξόφληση με ανατοκισμό** τη διαφορά της ονομαστικής αξίας του γραμματίου μείον την παρούσα αξία.

Εάν Κn είναι η ονομαστική αξία ενός γραμματίου που λήγει μετά τον χρόνο n , ι το επιτόκιο προεξόφλησης και Κο η παρούσα αξία, τότε έχουμε:

$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ και $K_0 = K_n \cdot (1+i)^{-n}$

και το προεξόφλημα Ε είναι:

$E_n = K_n - K_0$ $\qquad\qquad$ $E = K_n - K_n(1+i)^{-n}$

$E = K_n\,[1+i)^{-n}\,]$ $\qquad$ (22)

Το προεξόφλημα της σχέσης (22) ονομάζεται εσωτερικό προεξόφλημα. Στον ανατοκισμό εφαρμόζεται μόνο η εσωτερική προεξόφληση, διότι η εξωτερική προεξόφληση οδηγεί σε άτοπα αποτελέσματα.

Παράδειγμα:1

Γραμμάτιο 300000€ που λήγει μετά 7 έτη , προεξοφλείται σήμερα προς 6%. Πόσο προεξόφλημα καταβλήθηκε;

Λύση

$E = K_n\,[1+i)^{-n}\,]$ $\qquad\qquad$ $E = 300000\cdot\,[1-(1+0{,}06)^{-7}]$

$E = 300000\cdot\,(1-0{,}66505)$ $\qquad\qquad$ $E= 300000\cdot 0{,}33495$

$E = 100485$€

1.4.ΡΑΝΤΕΣ-ΕΝΝΟΙΑ

Ράντα καλείται μία σειρά κεφαλαίων τα οποία διατίθενται ανά ίσα χρονικά διαστήματα. Τα προβλήματα των ράντων είναι μια ειδική κατηγορία προβλημάτων ανατοκισμού τα οποία αναφέρονται είτε στη δημιουργία ενός κεφαλαίου με καταθέσεις ανά ίσα χρονικά διαστήματα, είτε στην απόσβεση ενός χρέους με την καταβολή δόσεων ανά ίσα χρονικά διαστήματα.

Κάθε ένα από τα κεφάλαια από τα οποία αποτελείται μία ράντα ονομάζεται όρος της. Η ημερομηνία καταβολής κάθε όρου λέγεται **λήξη** του όρου. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών λήξεων λέγεται περίοδος της ράντας.

Κάθε ράντα έχει δύο αξίες: μία στην αρχή της πρώτης περιόδου και ονομάζεται **αρχική αξία** της ράντας και μία στο τέλος της τελευταίας περιόδου και ονομάζεται **τελική αξία** της ράντας.

Η χρονική στιγμή που επιχειρούμε να υπολογίσουμε την αξία της ράντας λέγεται **εποχή υπολογισμού.**

1.4.1 Κατάταξη ράντων –συμβολισμοί

Λαμβάνοντας ως κριτήριο διάφορα βασικά μεγέθη των ράντων τις κατατάσσουμε ως ακολούθως:

α) Ως προς τους όρους

Σε ράντες **σταθερές** όταν όλοι οι όροι είναι ίσοι και σε ράντες **μεταβλητές** όταν δεν είναι όλοι οι όροι ίσοι. Η επικρατέστερη κατηγορία είναι οι σταθερές ράντες.

β) Ως προς την λήξη

Σε ράντες **ληξιπρόθεσμες** όταν ο κάθε όρος καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου και σε **προκαταβλητέες** όταν ο κάθε όρος καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

γ) Ως προς την διάρκεια

Σε ράντες **πρόσκαιρες** όταν το πλήθος των όρων είναι συγκεκριμένο ,σε **διηνεκείς** όταν το πλήθος των όρων είναι άπειρο και σε **ράντες ζωής** όταν το πλήθος των όρων εξαρτάται από τη ζωή ενός ή περισσοτέρων ατόμων.

δ) Ως προς την περίοδο

Σε ράντες **ετήσιες , εξαμηνιαίες** κλπ. όταν αντίστοιχα η περίοδος είναι το έτος , το εξάμηνο κλπ. Οι πιο πάνω ράντες λέγονται **ακέραιες**. Εάν εντός της κατά τα ανωτέρω λαμβανόμενης ακέραιας περιόδου ο όρος διαιρείται σε λ το πλήθος ίσα μέρη που το κάθε ένα από αυτά καταβάλλεται ανά χρονικά διαστήματα 1/λ της ακέραιας χρονικής περιόδου, τότε η ράντα αυτή ονομάζεται **κλασματική**.

ε) Ως προς την εποχή υπολογισμού

Σε ράντες **άμεσες** όταν η εποχή υπολογισμού συμπίπτει με την αρχή της ράντας, δηλαδή όταν ο πρώτος όρος καταβάλλεται στην αρχή ή το τέλος της πρώτης περιόδου.

Σε ράντες **μέλλουσες** όταν η εποχή υπολογισμού είναι προγενέστερη της αρχής της ράντας , δηλαδή όταν ο πρώτος όρος καταβάλλεται μετά την παρέλευση ορισμένου αριθμού περιόδων.

Σε ράντες **αρξάμενες** όταν η εποχή υπολογισμού είναι μεταγενέστερη της αρχής της ράντας, δηλαδή όταν ο πρώτος όρος καταβάλλεται κάποιες περιόδους πριν από την έναρξη της ράντας.

στ) Ως προς τον τρόπο καταβολής

Εάν η καταβολή των όρων της ράντας δεν εξαρτάται από την πραγματοποίηση ή όχι κάποιου γεγονότος, τότε η ράντα λέγεται **βέβαια** στην αντίθετη περίπτωση λέγεται **τυχαία**. Επικρατέστερες είναι οι βέβαιες ράντες.

Συμβολισμοί:

Για την παράσταση των διαφόρων στοιχείων της ράντας χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

R = Όρος της ράντας

α_n = Αρχική αξία μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων

(Μοναδιαία είναι η ράντα που όλοι της οι όροι έχουν αξία μία νομισματική μονάδα)

α_n = Αρχική αξία μοναδιαίας προκαταβλητέας ράντας n όρων

S_n = Τελική αξία μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων

S_n = Τελική αξία μοναδιαίας προκαταβλητέας ράντας n όρων

Ράντα σταθερή, ετήσια , άμεση, ληξιπρόθεσμη

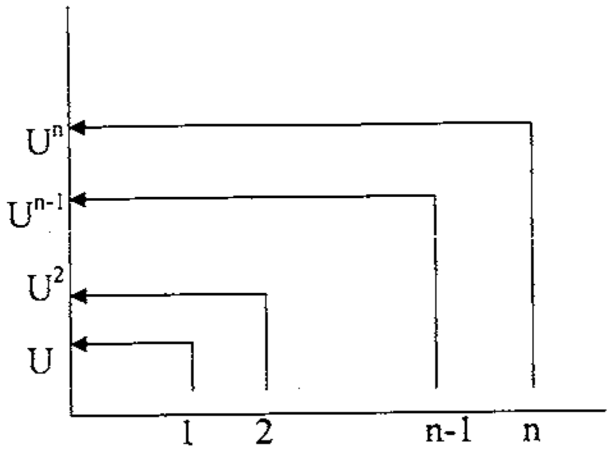
Γενικό πρόβλημα : Δίνεται ράντα σταθερή όρου R, ετήσια, άμεση, πρόσκαιρη χρονικής διάρκειας n ετών, ληξιπρόθεσμη με επιτόκιο ανατοκισμού ι .

Ζητείται να υπολογισθεί η αρχική αξία, η τελική αξία και τα λοιπά στοιχεία της ράντας.

1.4.2 Υπολογισμός της αρχικής αξίας

Για να βρούμε την αρχική αξία της δοθείσας ράντας αρκεί να βρούμε με ανατοκισμό την αρχική αξία κάθε όρου της και να προσθέσουμε τα ευρεθέντα ποσά.

Υποθέτουμε ότι έχουμε τη μοναδιαία ράντα n όρων, τότε η αρχική αξία κάθε όρου σύμφωνα με τον τύπο $K_0 = K_n(1+i)^{-n}$ ή $K_0 = K_n U^n$ όπου $U = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$ θα είναι όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Και η αρχική αξία α_n θα είναι:

$\alpha_n = U+U^2 - U^{n-1} + U^n$

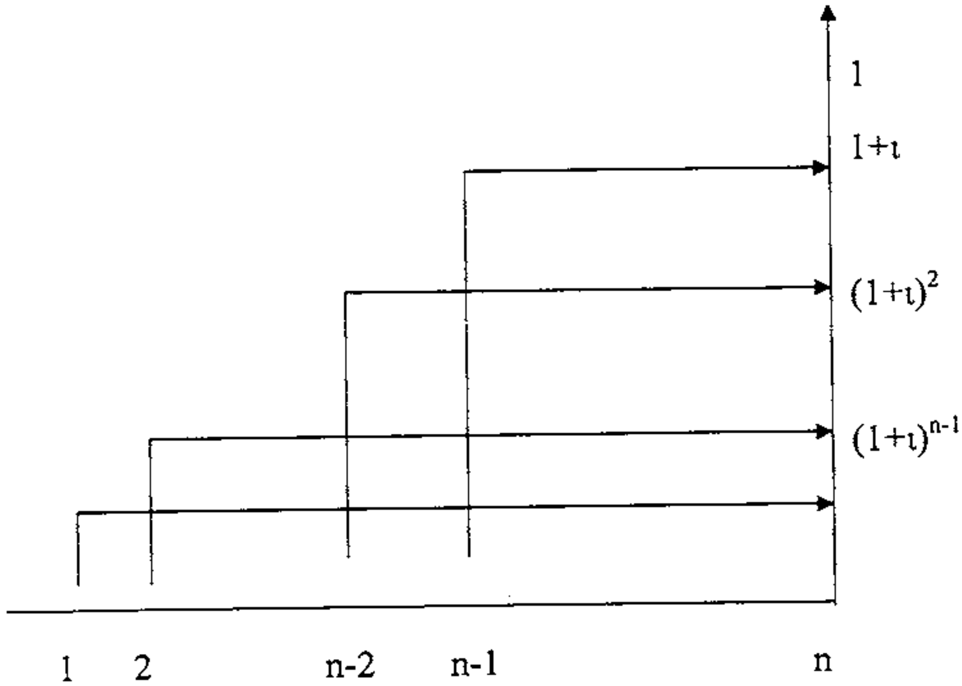
Το δεύτερο μέλος είναι μία γεωμετρική πρόοδος n όρων με πρώτο όρο U λόγο U και τελευταίο όρο U^n. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον τύπο του αθροίσματος των όρων της γεωμετρικής προόδου $\Sigma = \dfrac{\tau \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1}$

για τα συγκεκριμένα δεδομένα έχουμε:

$$\alpha_n = \frac{U^n \cdot U - U}{U-1}$$

1.4.3 Υπολογισμός της τελικής αξίας

Για να βρούμε την τελική αξία της ράντας ευρίσκουμε τις τελικές αξίες των όρων της βάσει του τύπου * και προσθέτουμε τα ευρεθέντα ποσά. Η σχετική διαδικασία εμφανίζεται με το ακόλουθο διάγραμμα για την περίπτωση της τελικής αξίας της μοναδιαίας ράντας:



$S_n = 1+(1+i) + (1+i)^2 + \ldots +(1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$

Το δεύτερο μέλος είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 1, λόγο το (1+ι) και τελευταίο όρο το $(1+i)^{n-1}$ και το άθροισμά της είναι:

$$S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Εάν οι όροι της ράντας είναι όλοι αξίας R, τότε η τελική της αξία είναι:

$$S_n = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Παράδειγμα:

Καταθέτει κάποιος στο τέλος κάθε έτους και επί 15 έτη 800000€. ετησίως με ανατοκισμό και επιτόκιο 7,5%. Τι ποσό θα εισπράξει μετά 15 έτη;

Λύση

Πρόκειται περί προβλήματος ράντας σταθερής ετήσιας, άμεσης, ληξιπρόθεσμης της οποίας ζητάμε την τελική αξία.

$$S_n = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad S_n = 800000 \cdot \frac{(1+0{,}075)^{15} - 1}{0{,}075}$$

$$S_n = 800000 \cdot 26{,}11836 \qquad S_n = 20894688€$$

1.5 ΔΑΝΕΙΑ-ΓΕΝΙΚΑ

Τα κράτη, οι Δημόσιοι ή οι Ιδιωτικοί Οργανισμοί (ΔΕΗ, ΟΤΕ,ΟΤΑ), οι επιχειρήσεις ή και οι ιδιώτες προκειμένου να αντιμετωπίσουν πάγιες ή έκτακτες οικονομικές ανάγκες συνάπτουν δάνειο για να αποκτήσουν τα κεφάλαια που έχουν ανάγκη.

Τα δάνεια ανάλογα με τη χρονική τους διάρκεια διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα, όταν η διάρκειά τους είναι μικρότερη του έτους και σε μακροπρόθεσμα, όταν η διάρκειά τους είναι μεγαλύτερη του έτους.

Τα βραχυπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται με απλό τόκο, ενώ τα μακροπρόθεσμα συνάπτονται με ανατοκισμό.

Εάν ο δανειστής είναι ένας , τότε το δάνειο λέγεται ενιαίο, ενώ όταν οι δανειστές είναι πολλοί το δάνειο λέγεται ομολογιακό δάνειο ή δάνειο δια τίτλων.

Ένα δάνειο λέγεται πάγιο, όταν ο οφειλέτης υποχρεούται στο τέλος κάθε περιόδου να καταβάλλει τους παραχθέντες τόκους στην περίοδο αυτή, μπορεί όμως, να εξοφλήσει το δάνειο στο τέλος μιας ορισμένης χρονικής περιόδου.

Ένα δάνειο λέγεται εξοφλητέο, όταν ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει το δάνειο στο τέλος μιας ορισμένης χρονικής περιόδου.

Απόσβεση δανείου λέγεται το σύνολο των υποχρεώσεων που αναλαμβάνονται και των πράξεων που γίνονται για την εξόφληση του δανείου.

1.5.1 Δάνεια ενιαία, εξοφλητέα, εφ 'άπαξ

Τα δάνεια της κατηγορίας αυτής παρουσιάζονται με δύο μορφές:

α) Οι παραγόμενοι τόκοι καθ' όλη τη διάρκεια του δανείου καταβάλλονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου και κατά τη λήξη του δανείου καταβάλλεται το δανεισθέν ποσό,

β) Οι τόκοι και το κεφάλαιο που δανείστηκε καταβάλλονται κατά τη λήξη του δανείου.

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια είναι κατά κανόνα μεγάλου ή πολύ μεγάλου ύψους και τούτο έχει ως συνέπεια ο οφειλέτης να δυσκολεύεται ή να αδυνατεί να καταβάλλει κατά τη λήξη του ολόκληρο το ποσό που δανείστηκε.

Για να διευκολυνθεί ο οφειλέτης στην εξυπηρέτηση του δανείου, έχει επικρατήσει όπως κατά τη διάρκεια του δανείου να κατατίθενται από τον οφειλέτη κατά τακτά χρονικά διαστήματα συγκεκριμένα ποσά , τα οποία ανατοκιζόμενα να δημιουργήσουν κατά τη λήξη του δανείου το δανεισθέν ποσό.

Το δημιουργούμενο με τον τρόπο αυτό ποσό λέγεται εξοφλητικό απόθεμα, το δε ποσό που κατατίθεται κάθε περίοδο για τη σύσταση του εξοφλητικού αποθέματος λέγεται χρεολύσιο.

Με βάση τ' ανωτέρω , οι τρόποι που μπορούμε να εξοφλήσουμε ένα δάνειο είναι οι κάτωθι:

1.5.1.1 Δεν συνίσταται εξοφλητικό απόθεμα

α) Οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Εάν Κο είναι το δανεισθέν ποσό, n ο αριθμός των περιόδων και i το επιτόκιο, τότε οι τόκοι που καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου είναι K_0*i. Οι τόκοι αυτοί αποτελούν ράντα σταθερή ληξιπρόθεσμη n όρων της οποίας η τελική αξία είναι:

$$S_n' = K_0 \cdot i \cdot s_n$$

Και επομένως η τελική αξία του δανείου, δηλαδή το ποσό που πρέπει να καταβληθεί στο τέλος του δανεισμού θα είναι:

$$K = K_0 \cdot i \cdot s_n + K_0$$

β)Οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Στην περίπτωση αυτή η εξόφληση του δανείου θα γίνει με μία μόνο πληρωμή στη λήξη του, το ύψος της οποίας θα είναι:

$$K = K_0 (1+i)^n$$

όπου Κο είναι το ποσό του δανείου.

Παράδειγμα:

Δανείστηκε κάποιος 5000000€. με επιτόκιο 8% με την υποχρέωση να το εξοφλήσει μετά 10 έτη. Να ευρεθεί το συνολικό ποσό που θα πληρώσει για την εξόφληση του δανείου.

Λύση

α) $K= K_0 \cdot i \cdot s_n + K_0 \Rightarrow K = 5000000 \cdot 0{,}08 \cdot 14{,}48656+5000000 \Rightarrow$

$K = 10794624€$

β) $K = K_0(1+i)^n \Rightarrow K = 5000000 \cdot (1+0{,}08)^{10} \Rightarrow K = 5000000 \cdot 2{,}15892$

$K = 10794600€$

Η διαφορά στις ευρεθείσες τελικές αξίες οφείλεται στις προσεγγίσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά τους υπολογισμούς.

1.5.1.2 Συνίσταται εξοφλητικό απόθεμα

Έστω ότι οι τόκοι του δανείου καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου και ταυτόχρονα κατατίθεται ποσό R στο τέλος επίσης κάθε περιόδου προς επιτόκιο t (συνήθως διάφορο του i) επί n περιόδους προς τον σκοπό δημιουργίας εξοφλητικού αποθέματος.

Εάν το δανεισθέν ποσό είναι μια νομισματική μονάδα, τότε θα είναι $R = P_n$. Το ποσό είναι το χρεολύσιο της μιας νομισματικής μονάδας που πρέπει να καταθέτει ο οφειλέτης στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου για να δημιουργηθεί η μια νομισματική μονάδα, όταν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι i.

Εάν οι τόκοι του δανείου δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου, τότε η τελική αξία του δανεισθέντος ποσού K είναι $K^*(1+\iota)^n$, οπότε η τελική αξία του συνισταμένου εξοφλητικού αποθέματος με επιτόκιο t είναι $K \cdot (1+\iota)^n$.

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση του δανείου γίνεται:

$K \cdot (1+\iota)^n = R \cdot s_n$ και $R = \dfrac{K(1+\iota)^n}{s_n}$

και επειδή $P_n = \dfrac{1}{s_n}$ έχουμε : $R = K\cdot(1+\iota)^n \cdot P_n$

Παράδειγμα:

Ένας επιχειρηματίας δανείστηκε 20000000€. εξοφλητέες εφ΄ άπαξ με ανατοκισμό μετά 8 έτη προς επιτόκιο 7,5%. Ζητείται να υπολογισθεί το χρεολύσιο όταν :

α) οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους,

β) οι τόκοι καταβάλλονται κατά τη λήξη του δανείου.

Επιτόκιο σύστασης εξοφλητικού αποθέματος 7%.

Λύση

α) Αφού οι τόκοι καταβάλλονται κάθε έτους, αυτοί είναι:

$20000000\cdot 0{,}075=1500000$ ετησίως

Συνολικοί τόκοι: $1500000\cdot 8=12000000$

Το χρεολύσιο θα είναι:

$R = K\cdot P_n \Rightarrow R = 20000000\cdot P_8$

$R = 20000000\cdot 0{,}09746 \Rightarrow R = 1949200$€

β) $R = K(1+\iota)^n P_n \Rightarrow R = 20000000\cdot(1+0{,}075)^8\cdot P_8 \Rightarrow$

$R = 20000000\cdot 1{,}78347\cdot 0{,}09746 \Rightarrow R = 3476340$€

1.5.2 Δάνεια ενιαία, εξοφλητέα, τοκοχρεολυτικά με ίσα τοκοχρεολύσια

Το πιο ενδιαφέρον σύστημα απόσβεσης δανείων είναι εκείνο όπου η απόσβεση πραγματοποιείται με την καταβολή στο τέλος κάθε περιόδου ίσων δόσεων.

Η κάθε μία από τις ίσες δόσεις ονομάζεται τοκοχρεολύσιο και αποτελείται από τον τόκο της περιόδου συν το χρεολύσιο.

Το σύστημα αυτό απόσβεσης δανείων είναι αυτό που κυρίως εφαρμόζεται στην πράξη.

1.5.2.1 Μέθοδος σταθερού χρεολυσίου

Με την μέθοδο αυτή θεωρούμε ότι καθ' όλη τη διάρκεια του δανείου παραμένει σταθερό το ποσό του τόκου κάθε τοκοχρεολυτικής δόσης, οπότε και το χρεολύσιο θα είναι σταθερό και το άθροισμα των δύο δίνει το τοκοχρεολύσιο το οποίο πρέπει καθ' όλη την διάρκεια του δανείου να είναι σταθερό.

Στην περίπτωση αυτή ο τύπος γράφεται $R = K \cdot \iota - K \cdot P_n$. Αυτό σημαίνει ότι το τοκοχρεολύσιο αποτελείται από δύο μέρη, το ένα εκ των οποίων είναι ο τόκος $K \cdot \iota$ της περιόδου και το άλλο $K \cdot P_n$ το χρεολύσιο της περιόδου.

1.5.2.2 Μέθοδος προοδευτικού χρεολυσίου

Με την μέθοδο αυτή το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό καθ' όλη την διάρκεια του δανείου, τα ποσά όμως από τα οποία αποτελείται (τόκος + χρεολύσιο) μεταβάλλονται από περίοδο σε περίοδο.

Με την μέθοδο αυτή δεχόμαστε ότι ο τόκος κάθε περιόδου υπολογίζεται επί του ανεξόφλητου μέχρι την περίοδο εκείνη ποσού του δανείου.

ΑΣΚΗΣΗ:

Πόσο κεφάλαιο μπορούμε να δανεισθούμε προς 5% αν έχουμε την δυνατότητα να πληρώσουμε επί 15 έτη ετήσιο χρεωλύσιο 250.000 €;

ΛΥΣΗ:

Χ= Χρεωλύσιο= 250.000€

Ι= επιτόκιο= 5% ή 0,05

$$X = \frac{\alpha i(1+\iota)^{\nu}}{(1+\iota)^{\nu}-1} \Rightarrow 250.000 = \alpha \frac{(0,05)\cdot(1+0,05)^{15}}{(1+0,05)^{15}-1}$$

$$\Rightarrow 250.000 = \alpha \frac{(0,05)\cdot(1,05)^{15}}{(1,05)^{15}-1}$$

$$\alpha \approx 2.594882€$$

ΑΣΚΗΣΗ:

Να υπολογισθεί η τρέχουσα αξία κεφαλαίου, το οποίο ανατοκιζόμενο προς 20%ετησίως με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, θα ανέρχεται σε 2 έτη σε 10.000.000€.

ΛΥΣΗ:

$$\Psi = Ko\left(1+\frac{I}{2}\right)^{-2t}$$

$$\Psi = 10.000.000\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{-2.2}$$

$$\Psi \approx 6.830.134€$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

2.1 Τι είναι Στατιστική και τα βασικά στάδιά της;

Τι είναι Στατιστική

Στατιστική σημαίνει συστηματική απαρίθμηση και παρουσίαση αριθμητικών δεδομένων ή στοιχείων, τα οποία προέρχονται από πολλές παρατηρήσεις ή μετρήσεις. Οι παρατηρήσεις αυτές ή οι μετρήσεις αναφέρονται σε συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός. Έτσι, η Στατιστική περιλαμβάνει τόσο τις μεθόδους συλλογής και επεξεργασίας στοιχείων, όσο και τις μεθόδους ανάλυσης και μελέτης τους, ανακαλύπτοντας έτσι σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα φαινόμενα και διατυπώνοντας συμπεράσματα που είναι χρήσιμα για τη λήψη ορθών αποφάσεων. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι:

Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τις επιστημονικές μεθόδους συλλογής, οργάνωσης, παρουσίασης και ανάλυσης των αριθμητικών εκείνων στοιχείων που αναφέρονται σε χαρακτηριστικές ιδιότητες διαφόρων οικονομικών, κοινωνικών, δημογραφικών, φυσικών κ.λ.π. φαινομένων και έχει ως σκοπό τη συστηματική μελέτη αυτών των στοιχείων για την κατάληξη σε γενικά συμπεράσματα, που είναι χρήσιμα στη διαδικασία της λήψης ορθών αποφάσεων.

Βασικά Στάδια

α) Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι αναγκαία για τη μελέτη του προβλήματος που θέλουμε να ερευνήσουμε.

β) Η μεθοδικής επεξεργασία και παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων σε μορφή αριθμητικών πινάκων και γραφικών παραστάσεων.

γ) Η ανάλυση των στοιχείων αυτών και η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για να ληφθούν σωστές αποφάσεις.

2.2 Χρονολογική Σειρά

Χρονολογική σειρά ονομάζουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων οι οποίες παίρνονται κατά ορισμένες χρονικές στιγμές ή περιόδους που ισαπέχουν μεταξύ τους.

Αν συμβολίσουμε με ψ_i την τιμή της παρατήρησης που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή χ_i τότε η χρονολογική σειρά θα αποτελείται από N ζεύγη (ψ_1, χ_1), (ψ_2, χ_2), (ψ_3, χ_3), ... (ψ_i, χ_i), ... (ψ_N, χ_N).

Η ανάλυση των χρονολογικών σειρών προέρχεται από το γεγονός ότι μέσω αυτής είναι δυνατό, μέσα σε ορισμένα όρια και με ορισμένες προφυλάξεις, να διατυπώνονται προβλέψεις για μελλοντικές εξελίξεις φαινομένων.

Η σημασία αυτών των προβλέψεων φαίνεται από το γεγονός ότι καμιά επιχείρηση, δημόσια ή ιδιωτική, δεν μπορεί να αποφύγει τη διατύπωση προγραμμάτων για το μέλλον.

2.2.1 Οι κυριότερες συνιστώσες μιας χρονολογικής σειράς

Οι χρονολογικές σειρές παρουσιάζουν μεταβολές με μορφή και ένταση που κάθε φορά διαφέρει.

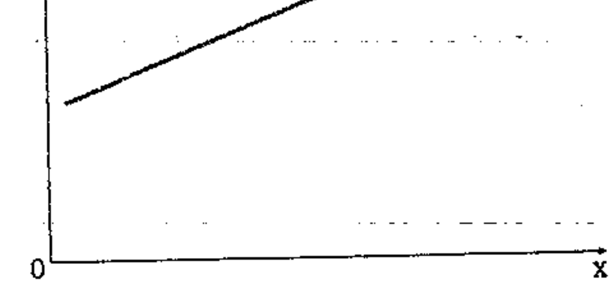
Εξετάζοντας τις μεταβολές αυτές, που ονομάζονται κινήσεις της μεταβλητής ψ_i σε συνάρτηση με το χρόνο χ_i μιας χρονολογικές σειράς, διακρίνουμε κυρίως τα ακόλουθα είδη κίνησης.

- τη μακροχρόνια τάση ή γενική τάση (trend)
- τις περιοδικές μεταβολές
- τις κυκλικές μεταβολές
- τις άρρυθμες ή ακανόνιστες ή απρόοπτες μεταβολές.

Μακροχρόνια τάση

Αν για μια μεγάλη χρονική περίοδο οι τιμές μιας χρονολογικής σειράς τείνουν να αυξηθούν ή να μειωθούν, τότε λέμε ότι η σειρά των παρατηρήσεων παρουσιάζει μακροχρόνια τάση. Δηλαδή, τάση είναι η μακροχρόνια αύξηση ή μείωση που παρατηρείται στα δεδομένα.

Το χαρακτηριστικό της μακροχρόνιας τάσης είναι ότι έχουμε μακροχρόνια και σταθερή κίνηση των οικονομικών μεγεθών που επηρεάζεται από γενικότερους παράγοντες.

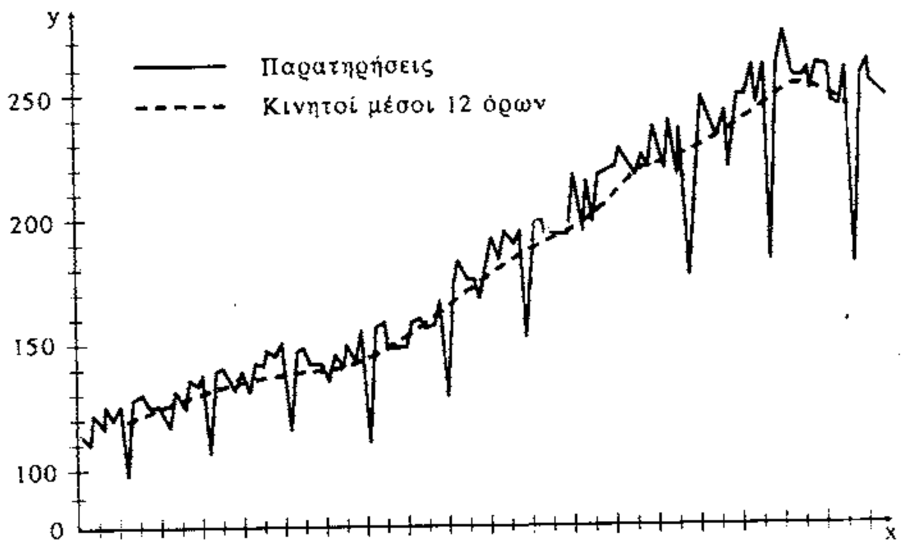


Διάγραμμα

Περιοδικές μεταβολές

Οι περιοδικές μεταβολές είναι εκείνες που επαναλαμβάνονται κατά ορισμένα χρονικά διαστήματα μέσα σε ορισμένη χρονική περίοδο.

Οι πιο συχνές περιοδικές μεταβολές είναι εκείνες που συμβαίνουν μέσα σε ένα χρόνο και ονομάζονται εποχιακές μεταβολές.

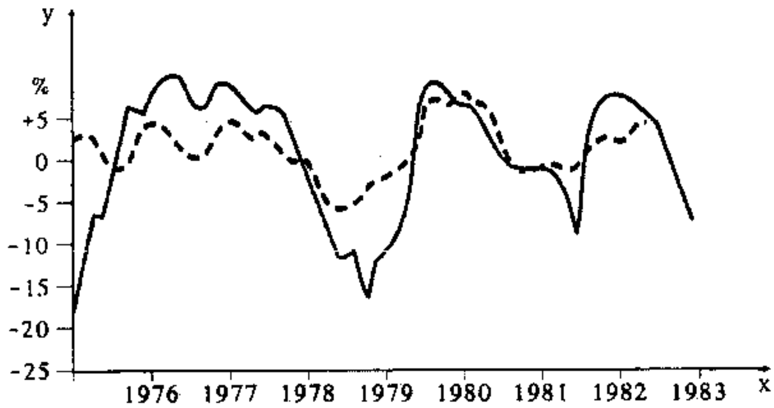


Διάγραμμα

Κυκλικές μεταβολές

Κυκλικές μεταβολές ή κυκλικές διακυμάνσεις είναι οι ταλαντώσεις γύρω από μια γραμμή ή καμπύλη τάσης σε μια μακροχρόνια περίοδο.

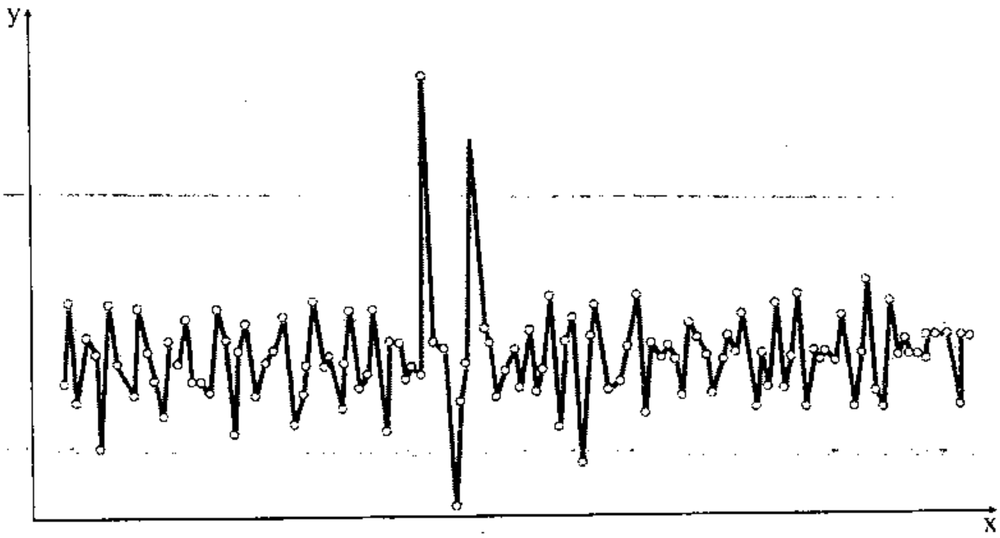
Οι κυκλικές μεταβολές διαφέρουν από τις περιοδικές γιατί είναι διάρκειας μεγαλύτερης από ένα έτος και δεν παρουσιάζουν, γενικά, κανονική περιοδικότητα.



Διάγραμμα

Ακανόνιστες μεταβολές

Οι ακανόνιστες μεταβολές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: στις συμπτωματικές και στις τυχαίες. Οι συμπτωματικές μεταβολές προέρχονται από εξαιρετικά και απρόβλεπτα γεγονότα, όπως είναι οι σεισμοί, οι θύελλες, οι απεργίες, οι επιδημίες, οι πόλεμοι κ.λ.π. ενώ οι τυχαίες μεταβολές οφείλονται σε πολυάριθμους άγνωστους παράγοντες ή, όπως συνήθως λέγεται, στην τύχη.



Διάγραμμα

2.3 Προσδιορισμός της τάσης με μια γραμμένη εξίσωση

Η μέθοδος αυτή αποβλέπει στην αναζήτηση μιας εξίσωσης που να μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα χρονολογικής σειράς και να μας περιγράψει κατά τον καλύτερο τρόπο την τάση ενός φαινομένου. Η πιο απλή περίπτωση είναι η γραμμική εξίσωση, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$$

όπου οι σταθερές $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις :

$$\sum y_i = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum x_i$$

$$\sum x_i y_i = \hat{\alpha} \sum x_i + \hat{\beta} \sum x_i^2$$

Στην περίπτωση όμως των χρονολογικών σειρών είναι δυνατό να διατάξουμε τα δεδομένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουμε $\sum x_i - 0$. Τότε το παραπάνω σύστημα των κανονικών εξισώσεων θα πάρει τη μορφή :

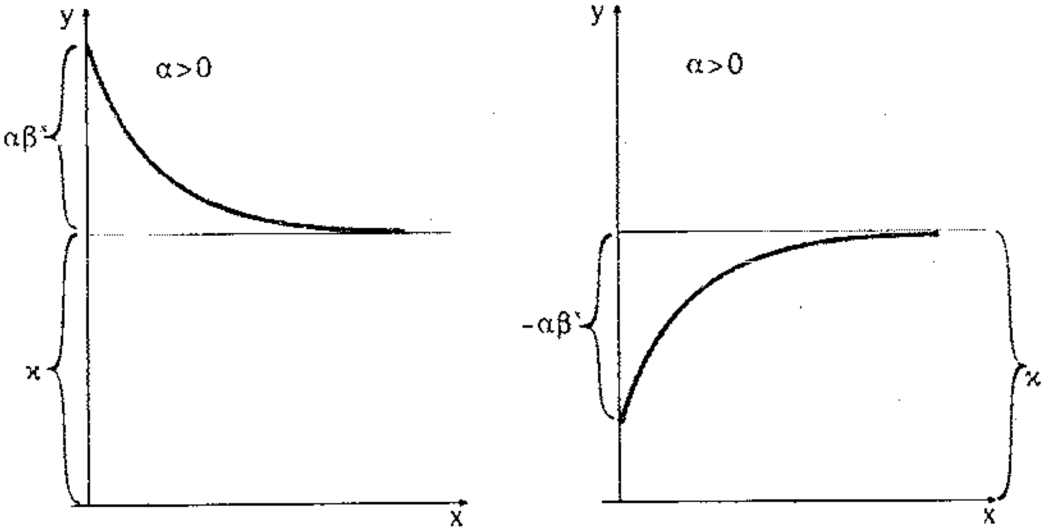
$$\sum y_i = N\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sum y_i}{N}$$

$$\sum x_i y_i = \hat{\beta} \sum x_i^2 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

2.4 Προσδιορισμός της τάσης με μια εκθετική συνάρτηση της μορφής $\psi_1 = \kappa + \alpha\beta^x$

Σε μερικές περιπτώσεις, συμφέρει να προσδιορίσουμε την τάσης μιας χρονολογικής σειράς με μια συνάρτηση της μορφής.

$$\psi_1 = \kappa + \alpha\beta^x$$



Κάθε τιμή της τεταγμένης της εκθετικής καμπύλης του διαγράμματος δίνεται από την τιμή της σταθεράς κ, με πρόθεση ή αφαίρεση από την τιμή αυτή της τιμής του γινομένου $\alpha\beta^{x}$. Η καμπύλη τείνει να πλησιάζει την τιμή του κ, χωρίς ποτέ να την φτάσεις (ασύμπτωτος).

Στην περίπτωση που $0<\beta<1$ και 0 ή $\alpha<0$, η καμπύλη θα έχει τις μορφές του διαγράμματος.

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων κ, α και β χρησιμοποιούμε δύο μεθόδους.

α) Πρώτη μέθοδος (μέθοδος των υποχρεωτικών σημείων)

Κατά τη μέθοδο αυτή, εκλέγουμε τρία σημεία στον άξονα των τετμημένων, δηλαδή τα χ_1, χ_2, χ_3, τέτοια ώστε $\chi_2 - \chi_1 = \chi_3 - \chi_2$. Βάζουμε όπου $\chi_1=0$ και έχουμε $\chi_2 - 0 = \chi_3 - \chi_2 \Rightarrow \chi_3 = 2\chi_2$. Τα σημεία επομένως των συντετρημένων στο καρτεσιανό σύστημα θα είναι $(\psi,0)$, (ψ_2, χ_2) και $(\psi_3, 2\chi_2)$.

Αν βάλουμε στη συνάρτηση ψ1=κ+αβ^x τις παραπάνω τιμές, θα έχουμε:

$y_1 = κ + αβ^0$ ή $y_1 = κ + α$ ή $y_1 - κ = α$ (10.1)

$y_2 = κ + αβ^{x2}$ ή $y_2 - κ = αβ^{x2}$ (10.2)

$y3 = κ + \alpha\beta^{2x_2}$ ή $y_3 - κ = \alpha\beta^{2x_2}$ (10.3)

Διαιρώντας κατά μέλη την (10.3) με την (10.2), θα έχουμε :

$$\frac{y_3-\kappa}{y_2-k}=\frac{\alpha\beta^{2x_2}}{\alpha\beta^{x_2}}=\beta^{x_2} \qquad (10.4)$$

Στη συνέχεια διαιρούμε κατά μέλη την (10.2) με την (10.1) και έχουμε :

$$\frac{y_2-\kappa}{y_1-k}=\frac{\alpha\beta^{x_2}}{\alpha}=\beta^{x_2} \qquad (10.5)$$

Παρατηρούμε όμως ότι τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (10.4) και (10.5) είναι ίσα, άρα θα είναι ίσα και τα πρώτα μέλη και κατά συνέπεια θα έχουμε :

$$\frac{y_3-\kappa}{y_2-\kappa}=\frac{y_2-\kappa}{y_1-\kappa} \qquad (10.6)$$

Αν στη σχέση (10.6) εφαρμόσουμε τη γνωστή ιδιότητα των αναλογιών, $\alpha/\beta=\gamma/\delta \Rightarrow \alpha/(\beta-\alpha)=\gamma/(\delta-\gamma)$, θα έχουμε :

$$\frac{y_3-\kappa}{(y_2-\kappa)-(y_3-\kappa)}=\frac{y_2-\kappa}{(y_1-\kappa)-(y_2-\kappa)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y_3-\kappa}{y_2-\kappa-y_3+\kappa}=\frac{y_2-\kappa}{y_1-\kappa-y_2+\kappa}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y_3-\kappa}{y_2-y_3}=\frac{y_2-\kappa}{y_1-y_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y_3-\kappa)(y_1-y_2)=(y_2-\kappa)(y_2-y_3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_3y_1-y_3y_2-\kappa y_1+\kappa y_2=y_2^2-y_3y_2-\kappa y_2+\kappa y_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\kappa y_1 + \kappa y_2 + \kappa y_2 - \kappa y_3 = y_2^2 - y_3 y_2 - y_3 y_1 + y_3 y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\kappa y_2 - \kappa y_3 - \kappa y_1 = y_2^2 - y_3 y_1 \Rightarrow \kappa(2y_2 - y_3 - y_1) = y_2^2 - y_3 y_1 \Rightarrow$$

$$\kappa = \frac{y_2^2 - y_3 y_1}{2y_2 - y_3 - y_1}$$

Στη συνέχεια, στη σχέση $\alpha = y_1 - \kappa$ (10.1) βάζουμε την τιμή του κ, οπότε θα έχουμε :

$$\alpha = y_1 - \frac{y_2 - y_3 y_1}{2y_2 - y_3 - y_1}$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή, έχουμε :

$$\alpha = \frac{y_1(2y_2 - y_3 - y_1)}{2y_2 - y_3 - y_1} - \frac{y_2^2 - y_3 y_1}{2y_2 - y_3 - y_1} = \frac{2y_2 y_1 - y_3 y_1 - y_1^2}{2y_2 - y_3 - y_1} - \frac{y_2^2 - y_3 y_1}{2y_2 - y_3 - y_1} \text{ ή}$$

$$\alpha = \frac{2y_2 y_1 - y_3 y_1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3 y_1}{2y_2 - y_3 - y_1} \text{ ή}$$

$$\alpha = \frac{2y_2 y_1 - y_1^2 - y_2^2}{2y_2 - y_3 - y_1}$$

Πολλαπλασιάζουμε με (-1) τους όρους του κλάσματος και έχουμε :

$$\alpha = \frac{y_2^2 - 2y_2 y_1 + y_1^2}{y_1 + y_3 - 2y_2}$$

Παρατηρούμε όμως ότι ο αριθμητής είναι τετράγωνο διαφοράς των y_2 και y_1. Επομένως, θα έχουμε :

$$\alpha = \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1 + y_3 - 2y_2}$$

Στη συνέχεια, στη σχέση $y_2 - \kappa = \alpha\beta^{x_2}$ (10.2) θέτουμε $\alpha = y_1 - \kappa$ (10.1) και έχουμε :

$$(y_1 - \kappa)\beta^{x_2} = y_2 - \kappa \text{ ή}$$

$$\beta^{x_2} = \frac{y_2 - \kappa}{y_1 - \kappa}$$

Παίρνοντας τους λογάριθμους, έχουμε :

$$x_2 \log\beta - \log\left(\frac{y_2-\kappa}{y_1-\kappa}\right) \Rightarrow \log\beta = \frac{1}{x_2}\log\left(\frac{y_2-\kappa}{y_1-\kappa}\right)$$

Επομένως :

$$\kappa = \frac{y_2^2 - y_3 y_1}{2y_2 - y_3 - y_1}$$

$$\alpha = \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1 + y_3 - 2y_2}$$

$$\log\beta = \frac{1}{x_2}\log\left(\frac{y_2-\kappa}{y_1-\kappa}\right)$$

β) Δεύτερη μέθοδος

Κατά τη μέθοδο αυτή, αντί των τριών σημείων, χρησιμοποιούμε όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα σε τρία συνεχόμενα χρονικά διαστήματα ίσης έκτασης, όπου κάθε ένα διάστημα περιέχει n χρονικές μονάδες. Αν ονομάσουμε $\sum_1 y, \sum_2 y, \sum_3 y$ τα αθροίσματα όλων των τεταγμένων μέσα σε κάθε διάστημα, θα έχουμε :

$$\sum\nolimits_2 y = n\kappa + \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{n-1} \qquad (10.7)$$

$$\sum\nolimits_2 y = n\kappa + \alpha\beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \ldots + \alpha\beta^{2n-1} \qquad (10.8)$$

$$\sum\nolimits_3 y = n\kappa + \alpha\beta^{2n} + \alpha\beta^{2n+1} + \ldots + \alpha\beta^{3n-1} \qquad (10.9)$$

Η (10.7) μετασχηματίζεται και ως εξής, όταν βγάλουμε κοινό παράγοντα το α :

$$\sum\nolimits_1 y = n\kappa + \alpha(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1})$$

2.5 Αριθμοδείκτες

Οι αριθμοδείκτες είναι στατιστικά μέτρα που δείχνουν τις μεταβολές μιας μεταβλητής ή μιας ομάδας μεταβλητών που σχετίζονται μεταξύ τους, μεταξύ δύο χρονικών περιόδων ή δύο γεωγραφικών περιοχών και, γενικότερα, μεταξύ δύο καταστάσεων. Με τη βοήθεια των αριθμοδεικτών μπορούμε να συγκρίνουμε π.χ. το κόστος διατροφής μιας χώρας σε μια ορισμένη χρονική περίοδο, το οποίο εξαρτάται από πολλές μεταβλητές (τιμή ψωμιού, κρέατος, ψαριών, πατάτες, οσπρίων, γαλακτοκομικών προϊόντων και άλλων), με το κόστος διατροφής για τα ίδια προϊόντα σε μια άλλη χρονική περίοδο, ή να συγκρίνουμε την παραγωγή του σιδήρου μιας χώρας με την παραγωγή σιδήρου μιας άλλης χώρας την ίδια χρονική περίοδο.

Βασικός σκοπός της κατάρτισης ενός αριθμοδείκτη είναι ο χαρακτηρισμός της σχετικής μεταβολής μιας μεταβλητής με ένα μόνο αριθμό, ή μιας ομάδας σχετικών μεταβλητών μεταξύ δύο εποχών ή δύο γεωγραφικών τόπων.

Οι αριθμοδείκτες χρησιμοποιούνται σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Στον τομέα της οικονομίας οι αριθμοδείκτες έχουν μεγάλη εφαρμογή.

Κρατικοί και ιδιωτικοί οργανισμοί συγκεντρώνουν πληροφορίες και καταρτίζουν δείκτες, π.χ. της παραγωγής, της κατανάλωσης αγαθών, της απασχόλησης, των ημερομισθίων, των εισαγωγών και εξαγωγών κ.λ.π.

Ο πιο γνωστός αριθμοδείκτης είναι ο δείκτης του κόστους ζωής.

Εδώ θα εξεταστούν μόνο οι χρονολογικοί αριθμοδείκτες, που μας δίνουν τις μεταβολές των μεταβλητών στο χρόνο.

Οι χρονολογικοί αριθμοδείκτες διακρίνονται βασικά σε δύο κατηγορίες:

(α) Ιδιαίτερη αριθμοδείκτες, αν δείχνουν τις μεταβολές μίας μόνο μεταβλητής μεταξύ δύο χρονικών περιόδων.

(β) Συνθετικοί αριθμοδείκτες, αν εκφράζουν τις μεταβολές πολλών μεταβλητών του ίδιου φαινομένου με συνδυασμό των ιδιαίτερων δεικτών των επί μέρους μεταβλητών και χρησιμοποίησης ενός τύπου μέσης αριθμητικής τιμής. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι δείκτες βιομηχανικής παραγωγής, οι δείκτες τιμών γεωργικών προϊόντων, οι δείκτες κόστους ζωής κ.λ.π.

Ο χρονολογικός αριθμοδείκτης που δείχνει τις μεταβολές των τιμών των διαφόρων αγαθών στο χρόνο ονομάζεται τιμάριθμος.

2.5.1 Ιδιαίτεροι αριθμοδείκτες

α) Σχετικές τιμές

Σχετική τιμή είναι ο λόγος της τιμής ενός αγαθού σε μια χρονική περίοδο, προς την τιμή του ίδιου αγαθού σε μια άλλη χρονική περίοδο που ονομάζεται περίοδος βάσης. Οι σχετικές τιμές συνήθως εκφράζονται σε ποσοστό επί τοις εκατόν.

Αν με p_0 συμβολίζουμε την τιμή ενός αγαθού στην περίοδο 0 που παίρνουμε ως βάση και με p_1 την τιμή του ίδιου αγαθού σε μια άλλη περίοδο 1, τότε η σχετική τιμή στην περίοδο 1, με βάση την περίοδο 0, ορίζεται ως το πηλίκο $p_1 / p_0 \cdot 100\%$ συμβολίζεται με $P_{1/0}$, δηλαδή:

$$P_{1/10}=\frac{p_1}{p_0}\cdot 100\%$$

β) Σχετικές ποσότητες

Πολλές φορές, αντί να συγκρίνουμε τις τιμές ενός αγαθού, μπορούμε να συγκρίνουμε τις ποσότητες ή τον όγκο του. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε σχετικές ποσότητες.

Αν με q_0 συμβολίσουμε την ποσότητα ενός αγαθού κατά την περίοδο 0 και με q_1 την ποσότητα του ίδιου αγαθού στην περίοδο 1, τότε ο σχετικός δείκτης ποσοτήτων, με βάση την περίοδο 0, ορίζεται ως το πηλίκο $q_1/q_1 \cdot 100$ και συμβολίζεται με $Q_{1/0}$.

$$Q_{1/10}=\frac{q_1}{q_0}\cdot 100\%$$

γ) Σχετικές αξίες

Αν p_0 είναι η τιμή ενός αγαθού στην περίοδο 0 και q_0 είναι η ποσότητα ή ο όγκος του αγαθού αυτού στην ίδια περίοδο, τότε το γινόμενο $υ_1=p_1q_1$ παριστάνει την ολική αξία στην περίοδο 1.

Η σχετική αξία για την περίοδο 1, με βάση την περίοδο 0, θα είναι:

$$V_{1/10}=\frac{υ_1}{υ_0}=\frac{p1q1}{p0q0}=\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{q_1}{q_0}=P_{1/10}\cdot Q_{1/10} \qquad ή$$

$$V_{1/10}=\frac{p1q1}{p0q0}\cdot 100\%$$

2.5.2 Συνθετικοί αριθμοδείκτες

Είδαμε πως υπολογίζεται ο δείκτης ενός μόνο αγαθού μεταξύ δύο χρονικών περιόδων. Στην πράξη όμως ενδιαφερόμαστε για τις μεταβολές μεγάλων ομάδων των αγαθών αυτών, π.χ. για τον υπολογισμό του δείκτη κόστους ζωής, δεν μας ενδιαφέρει μόνο η μεταβολή της τιμής ή της ποσότητας του ψωμιού, αλλά μιας ομάδας αγαθών.

Στην παραπάνω περίπτωση υπολογίζουμε ένα δείκτη, που είναι ένα μέτρο θέσης των τιμών ή των ποσοτήτων των παραπάνω αγαθών.

Όπως ο μέσος αριθμητικός διακρίνεται σε απλό και σταθμικό ανάλογο με το αν έχουμε συχνότητες ή όχι, έτσι και εδώ θα έχουμε απλούς συνθετικούς δείκτες και σταθμικούς συνθετικούς δείκτες ανάλογα με το αν οι ιδιαίτεροι δείκτες παρουσιάζουν την ίδια σπουδαιότητα ή όχι, δηλαδή αν κάθε αγαθό έχει την ίδια σημασία για το κοινωνικό σύνολο.

2.5.2.1 Απλοί συνθετικοί δείκτες τιμών

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι οι τιμές των αγαθών έχουν συντελεστή στάθμισης τη μονάδα, δηλαδή ότι όλα τα αγαθά έχουν την ίδια βαρύτητα.

Οι μέθοδοι υπολογισμού των δεικτών αυτών είναι:

α) Μέθοδος των συνολικών τιμών

Παριστάνουμε με $p_0^{(1)}$, $p_0^{(2)}$, $p_0^{(3)}$, ... $p_0^{(v)}$, τις τιμές των αγαθών 1,2,3,.... ν στην περίοδο βάσης 0 και $p_1^{(1)}$, $p_1^{(2)}$, $p_1^{(3)}$, ... $p_1^{(v)}$, τις τιμές των αγαθών 1,2,3 .... ν στην περίοδο 1. Στην περίπτωση αυτή ο δείκτης των συνολικών τιμών βρίσκεται υπολογίζοντας το παρακάτω πηλίκο:

$$P_{1/10} = \frac{p1(1)+p1(2)+p1(3)+...+p1(v1}{p0(1)+p0(2)+p0(3)+...+p0(v0} = \frac{\Sigma p1}{\Sigma p0}$$

Ώστε ο απλός δείκτης των συνολικών τιμών είναι ο λόγος του αθροίσματος των τιμών ν αγαθών στην περίοδο 1 προς το άθροισμα των τιμών των ίδιων αγαθών σε μια άλλη χρονική περίοδο που παίρνουμε ως έτος βάσης.

Ο παραπάνω δείκτης των συνολικών τιμών παρουσιάζει τα παρακάτω μειονεκτήματα:

(1) δεν παίρνει υπόψη τις ποσότητες των αγαθών,

(2) όλα τα αγαθά δεν έχουν κοινή ομάδα,

(3) όλα τα αγαθά δεν έχουν την ίδια βαρύτητα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

3.1.Ορισμός Παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ 'ένα διάστημα Δ, λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο xo ∊ Δ, όταν (και μόνο όταν) υπάρχει το lim f (x) - f (xo)/x-xo και είναι x→xo

Πραγματικός αριθμός. Σ 'αυτή την περίπτωση ονομάζουμε το όριο: **Παράγωγο της f στο xo** και συμβολίζουμε με: **f΄(xo)**

Ώστε: **f΄(xo) = lim f(x) – f(xo)/x-xo ∊ IR**

x→xo

3.2.Παράγωγος Συνάρτησης

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, όταν και μόνο όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

- Αν A1 το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού A της f, τότε αντιστοιχίζοντας σε κάθε X ∊ A την **f΄(x)**, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση την οποία συμβολίζουμε με **f΄** και ονομάζουμε: **Πρώτη παράγωγο της f** ή απλά: **Παράγωγο της f.**

  Ώστε : **f΄ : A1 υποσύνολο του A→ IR, με y = f΄(x).**

- Αν το A1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, όπως συνήθως συμβαίνει τότε ορίζουμε ανάλογα την παράγωγο της συνάρτησης f΄ με πεδίο ορισμού το A1 υποσύνολο του A την οποία συμβολίζουμε με f΄΄ και ονομάζουμε: **Δεύτερη παράγωγο της f.**

  Ώστε: **f΄ : A2 υποσύνολο του A1→ IR, με y = f΄΄(x).**

Επίσης έχουμε: $\mathbf{f''(xo) = \lim\limits_{x \to xo} f'(x) - f'(xo)/x\text{-}xo}$

3.3.Κανόνες Παραγώγησης

Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο Δ όπου Δ: Διάστημα ή ένωση διαστημάτων, έχουμε τους εξής κανόνες παραγώγισης:

i. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

ii. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

1. Ο κανόνας (ii) ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Π.χ. Αν f , g , h παραγωγίσιμες τότε:

$(fgh)'(x) = f'(x)\, g(x)h(x) + f(x)\, g'(x)h(x) + f(x)g(x)\, h'(x)$

2 Από τον κανόνα (ii) όταν $f(x) = \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{IR}$, για κάθε: $\chi \in \Delta$, παίρνουμε ότι:

$[(\alpha f)\,(x)]' = \alpha f'(x)$ **π.χ.** $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot (3x^2) = 15x^2$

Και με $\alpha = -1$, ότι: $[-f(x)]' = -\, f'(x)$

3. Συνδυάζοντας την (i) με την (2) παίρνουμε: $[\alpha f(x) \pm \beta g(x)]' = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$

Σημείωση: Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

3.4.Μονοτονία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f είναι σ 'ένα υποσύνολο Β του πεδίου ορισμού της:

i. **Γνησίως αύξουσα**

ii. **Γνησίως φθίνουσα**

iii. **Γνησίως μονότονη**

Μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** σ 'ένα υποσύνολο B του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν: Για κάθε x1, x2 $\in$ **B** με x1 < x2, ισχύει: f(x1) < f(x2)

Μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα**, όταν και μόνο όταν: Για κάθε x1, x2 $\in$ **B** με x1 < x2, ισχύει: f(x1) > f(x2)

Και τέλος μια συνάρτηση f είναι **γνησίως μονότονη**, όταν και μόνο όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο B.

Διατύπωση: Για την εξέταση της μονοτονίας μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ με τη βοήθεια της παραγώγου έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής σ 'ένα διάστημα** Δ=[α, β] τότε:

- Αν **f΄(x) > 0, για κάθε χ** $\in$ **(α, β)**, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα στο Δ.**
- Αν **f΄(x) < 0, για κάθε x** $\in$ **(α, β)**, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα στο Δ.**

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, όχι μόνο όταν f΄(x) > 0 για κάθε x $\in$ Δ, αλλά και στην περίπτωση που ισχύει:

«**f΄(x) ≥ 0, για κάθε x** $\in$ **Δ και f΄(x) = 0 για ένα: Πεπερασμένο πλήθος σημείων ή άπειρο πλήθος σημείων του Δ, που δε συνιστούν υποδιάστημα του Δ**».

2. Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε:

- **$f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ $\leftrightarrow$ f αύξουσα στο Δ.**
- **$f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ $\leftrightarrow$ f φθίνουσα στο Δ.**

3.5.Ακρόταυα Συνάρτησης

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει στο xο € A:

i. α) **ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ**, όταν και μόνο όταν υπάρχει δ >0, τέτοιο ώστε: **$f(x) \leq f(xo)$,** για κάθε **$x \in A \cap (xo - \delta, xo + \delta)$.** Το xο λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου** και το f(xο) **τοπικό μέγιστο** της f.

ii. β) **ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ,** όταν και μόνο όταν υπάρχει δ< 0, τέτοιο ώστε: **$f(x) \geq f(xo)$,** για κάθε **$x \in A \cap (xo - \delta, xo + \delta)$.** Το xο λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου** και το f(xο) **τοπικό ελάχιστο** της f.

<u>*Σημείωση:*</u> Τα τοπικά μέγιστα - τοπικά ελάχιστα λέγονται **τοπικά ακρότατα** και το μέγιστο – ελάχιστο: **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα.**

Σημαντικές παρατηρήσεις:

1. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

2. Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατα, τότε:

- Το μέγιστο είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.
- Το ελάχιστο είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

Προσοχή όμως: Το αντίστροφο δεν αληθεύει πάντοτε. Δηλαδή: Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα δεν είναι μέγιστο (ολικό), ούτε το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι ελάχιστο.

3. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο σ' ένα διάστημα (α, β) τότε αυτό είναι και ολικό ακρότατο (ίδιου είδους) της f.

3.6.Ορισμένο Ολοκλήρωμα

I. Τι ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β;

II. Τι παριστάνει το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\geq 0$ για κάθε x ∈ [α, β];

III. Δείξτε ότι $\int_\alpha^\beta c\,dx = c(b-a)$, $c \in R$

Απάντηση:

Ορισμός

Ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β και συμβολίζουμε με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, το όριο lim $(\hat{\Sigma} f(\xi_\kappa)\,\Delta x)$,

όπου $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$ έτσι $\xi_\kappa \in [x_{k-1}, x_k]$, k =1, 2, …, ν και τα σημεία

$\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu = \beta$ χωρίζουν το διάστημα [α, β,]σε ν-υποδιαστήματα μήκους Δx

Δηλαδή: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty} (\Sigma f(\xi_\kappa)\Delta x)$

Ο παραπάνω ορισμός προϋποθέτει ότι: **α<β**. Επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος και για τις περιπτώσεις: α>β, α = β ως εξής:

1. Αν **α>β**, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

2. Αν **α = β**, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

Αν f(x) ≥ για κάθε x ∈ [α, β] τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ παριστάνει το εμβαδό Ε(Ω) του χωρίου **Ω** που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και για x=β .

Δηλαδή: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$

<u>**Σημείωση:**</u>

1.Φανερά $\boxed{\text{αν } f(x)\geq 0 \text{ στο } [\alpha,\beta] \text{ τότε: } \int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0}$

2.Το χωρίο Ω γράφεται συμβολικά **Ω= {(x,y) α≤ x ≤β και 0 ≤ y f(x)}**

3.6.1.Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος:

Οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος περιγράφονται από τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ:1

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β] και λ, με R τότε

1. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
2. $\int_\alpha^\beta [f(x)g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ **και γενικά:**
3. $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ:2(Chasles)

Αν f σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ τότε:

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

ΑΣΚΗΣΗ:

Ένας αυτόματος πωλητής έχει

$C'(t) = 4 + \frac{14}{3t}$

Και

$R'(t) = 150 - \frac{1}{3}t^2$

Να προβλέψετε το καθαρό κέρδος σε χρηματικές μονάδες τα 3 πρώτα χρόνια καθώς και για τα 3 επόμενα χρόνια.

ΛΥΣΗ

Κέρδος = Έσοδα – Κόστος Παραγωγής

$P(t)' = R'(t) - C'(t)$

$(150 - \frac{1}{3}t^2) - (4 + \frac{14}{3}t) \Rightarrow 150 - \frac{1}{3}t^2 - 4 - \frac{14}{3}t$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}t^2 - \frac{14}{3}t + 146 \Rightarrow \mathbf{P'(t) = -\frac{1}{3}t^2 - \frac{14}{3}t + 146}$

$P(3) - P(0) = \int_0^3 P'(t)dt = \int_0^3 (-\frac{1}{3}t^2 - \frac{14}{3}t + 146)dt$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 - \left[\frac{14}{3}\right]_0^3 + 146\,[t]_0^3$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\left[\frac{3^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right]-\frac{14}{3}\left[\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right]+146\,[3-0]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\cdot 3^2-\frac{14}{3}\cdot\frac{3}{2}+146\cdot 3$$

$$\Rightarrow -3-\frac{7}{3}\,3^2+146\cdot 3$$

$$\Rightarrow -3-\frac{7}{3}\cdot 9+438$$

$$\Rightarrow -3-21+438$$

$$\Rightarrow -24+438$$

$\Rightarrow$ 414 χρηματικές μονάδες.

3.6.2.Η Συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$

Διατυπώστε το θεώρημα που μας εξασφαλίζει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα έχει αρχική (Παράγουσα).

Απάντηση:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$ τότε η συνάρτηση: $\int_\alpha^x f(t)dt$ $x \in \Delta$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$

Δηλαδή: $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$ **ή αλλιώς:** $\frac{d}{dx}\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right) = f(x)$

<u>Σημειώσεις:</u>

1. Το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει αρχική και επομένως είναι ολοκληρώσιμη

στο Δ. Μάλιστα μια αρχική της f ή αλλιώς ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα Δ είναι η συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x}$ **f(t)dt, x∈ Δ**

2. Φανερά όταν Δ= [κ, λ] προκειμένου για το σημείο x_1= κ αναφερόμαστε στην πλευρική από δεξιά παράγωγο, ενώ για το σημείο x_2 = λ στην πλευρική από αριστερά παράγωγο της συνάρτησης: F(x) = $\int_{\alpha}^{x}$ **f(t)dt, x∈** [κ, λ]

3. Το ολοκλήρωμα: $\int_{\alpha}^{x}$ **f(t)dt, x∈** Δ είναι συνάρτηση ενώ το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}$ **f(x)dx =** $\int_{\alpha}^{\beta}$ **f(t)dt** είναι πραγματικός αριθμός (όταν: α, β ∈ R)

ΑΣΚΗΣΗ

Το μέτρο της επένδυσης είναι $I = 60t^{1/3}$ και το αρχικό κεφάλαιο για t = 1 είναι 85. Να βρείτε το Κ;

ΛΥΣΗ:

$I = 60t^{1/3}$

*1/3+1=1/3+3/3=4/3

$K = \int 60t^{1/3}\, t + c$

$= 60\int d\left[\dfrac{t^{1/3+1}}{1/3+1}\right]+c$

$= \dfrac{60t^{4/3}}{4/3} + 0$

$= \dfrac{60}{4/3} \cdot t^{4/3}$

$= \dfrac{180}{4} \cdot t^{4/3}$

$= 45t^{4/3}$

Άρα $K=45t^{4/3}$

Από την εκφώνηση έχουμε για t = 1 το αρχικό κεφάλαιο είναι 85 οπότε:

$K= 45t^{4/3} +C$

$85= 45\cdot 1^{4/3}+C$

$85=45+C$

$C = 85-45$

$C= 40$

Επομένως θα έχουμε: $K= 45t^{4/3}+40$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται $MC= 32+18Q-12Q^2$. Σταθερό κόστος = 43. Να βρείτε

α)C,

β)C^- και

γ) το μεταβλητό κόστος.

α) $C = \int MCdQ \Rightarrow \int 32 +18Q - 12Q^2 dQ$

$\Rightarrow - 32\int dQ +18\int dQ - 12\int Q^2 dQ$

$\Rightarrow - 32Q + 18 \dfrac{Q^2}{2} - 12\dfrac{Q^3}{3}$

$\Rightarrow 32Q + 9Q^2 - 4Q^3$

$\Rightarrow (32 + 9Q - 4Q^2)Q$

Άρα $C = (32 + 9Q - 4Q^2)Q$

β) $C^- = \dfrac{C}{Q} = \dfrac{(32 + 9Q - 4Q^2)Q}{Q} = 32 + 9Q - 4Q^2$

γ) $MK = C - \Sigma K = [(32 + 9Q - 4Q^2)Q] - 43$

$\Rightarrow - 4Q^3 + 9Q^2 + 32Q - 43$

$\Rightarrow MK = - 4Q^3 + 9Q^2 + 32Q - 43$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Έννοια και σκοπός της αναλύσεως

Γενικά

Ο ρόλος της Λογιστικής, από τεχνικής απόψεως τελειώνει με την κατάρτιση των χρηματοοικονομικών ή λογιστικών καταστάσεων.
Από το σημείο όμως αυτό και μετά αρχίζει ένας άλλος, πιο σπουδαίος ρόλος, ο οποίος αναφέρεται στη διερεύνηση, ερμηνεία και αξιολόγηση των στοιχείων των λογιστικών αυτών καταστάσεων.

Οι λογιστικές ή χρηματοοικονομικές καταστάσεις παρέχουν πληροφορίες που μπορούν να βοηθήσουν τους ενδιαφερόμενους για τις επιχειρηματικές μονάδες να λάβουν σωστές αποφάσεις. Αποτελούν, ως εκ τούτου, σημαντική πηγή πληροφοριών. Η πραγματική, όμως, εικόνα μιας επιχειρήσεως δίνεται σε συνδυασμό και με άλλες συμπληρωματικές πληροφορίες, που περιλαμβάνονται στους ετήσιους απολογισμούς που καταρτίζουν οι επιχειρήσεις, καθώς και σε άλλα εξωλογιστικά δεδομένα. Για το λόγο αυτό οι σημειώσεις που συνοδεύουν τις λογιστικές καταστάσεις αποτελούν αναπόσπαστο μέρος αυτών και πρέπει να μελετώνται προσεκτικά κατά την ανάλυση και αξιολόγηση των δεδομένων μιας επιχειρηματικής μονάδας.

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται κυρίως στη χρηματοοικονομική ανάλυση των δημοσιευομένων λογιστικών καταστάσεων των επιχειρήσεων και επομένως περιορίζεται, κατά κύριο λόγο, στην ανάλυση που μπορούν οι «εξωτερικοί» αναλυτές, εκείνοι δηλαδή που δεν έχουν πρόσβαση στα μη δημοσιευόμενα στοιχεία. Σημειώνεται όμως ότι οι τράπεζες είναι σε θέση να εξασφαλίζουν περισσότερες και λεπτομερέστερες πληροφορίες από ό,τι οι «εξωτερικοί» αναλυτές, προκειμένου να αποφασίσουν για τη χορήγηση ή μη δανείων στις επιχειρήσεις.

Έτσι, η πλέον σημαντική πηγή πληροφοριών για τη δραστηριότητα μιας επιχειρήσεως είναι οι βασικές λογιστικές καταστάσεις, οι οποίες ως γνωστόν είναι ο ισολογισμός και η κατάσταση αποτελεσμάτων χρήσεως. Εκεί, εμφανίζονται τα περιουσιακά στοιχεία, οι πηγές προελεύσεως των κεφαλαίων της, καθώς και τα οικονομικά αποτελέσματα από τις δραστηριότητές της.

Οι παραπάνω όμως λογιστικές καταστάσεις παρουσιάζουν ορισμένα μειονεκτήματα, τα οποία δυσχεραίνουν αρκετά το έργο του αναλυτή. Τα πιο σημαντικά από αυτά είναι:

1) *Τα στοιχεία που περιλαμβάνονται είναι πολύ συνοπτικά και ανομοιόμορφα καταταγμένα, δεδομένου ότι, για την καταρτισή τους δεν υπάρχει ένας ενιαίος τύπος υποχρεωτικός για όλες τις επιχειρήσεις.*
2) *Ο χρόνος που συνήθως μεσολαβεί από το τέλος της χρήσεως, στην οποία αναφέρονται μέχρις ότου δημοσιευθούν και γίνουν γνωστές στο ευρύ κοινό είναι αρκετά μακρύς*

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω μειονεκτημάτων χρησιμοποιείται η χρηματοοικονομική ανάλυση, η οποία ασχολείται με τον υπολογισμό των κατάλληλων μεγεθών και σχέσεων που είναι σημαντικές και χρήσιμες για τη λήψη οικονομικής φύσεως αποφάσεων. Έτσι, μπορεί να λεχθεί ότι με την ανάλυση των λογιστικών καταστάσεων επιτελείται μία σημαντική λειτουργία μετατροπής πολυποίκιλων στοιχείων, από απλούς αριθμούς σε χρήσιμες πληροφορίες, που σπάνια προσφέρονται αυτούσιες.

4.1.1 Σκοπός της αναλύσεως των λογιστικών καταστάσεων

Η ερμηνεία κι η αξιολόγηση των στοιχείων των λογιστικών καταστάσεων απαιτεί μία κάποια εξοικείωση με τις βασικές μεθόδους χρηματοοικονομικής αναλύσεως. Φυσικά το είδος της χρηματοοικονομικής αναλύσεως των λογιστικών καταστάσεων εξαρτάται από το ιδιαίτερο ενδιαφέρον και τις επιδιώξεις αυτών που πραγματοποιούν την ανάλυση (μέτοχοι, επενδυτές, πιστωτές, διοίκηση, κρατικές υπηρεσίες, εργαζόμενοι, χρηματιστές κλπ.). Ως εκ τούτου μπορεί να ακολουθούνται διάφοροι μέθοδοι αναλύσεως και να δίνεται έμφαση σε ορισμένα στοιχεία ανάλογα με τον επιδιωκόμενο σκοπό, όπως π.χ. οι βραχυχρόνιοι πιστωτές μιας επιχειρήσεως (τράπεζες) ενδιαφέρονται πρωτίστως για την ικανότητα της επιχειρήσεως να ανταποκρίνεται στις τρέχουσες υποχρεώσεις της. Τούτο διότι, ενδιαφέρονται περισσότερο και δίνουν μεγάλο βάρος στην εξασφάλιση που τους παρέχεται για την καταβολή από μέρους της επιχειρήσεως τόσο των τόκων όσο και για την επιστροφή των δανειακών κεφαλαίων. Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση εξετάζεται προσεκτικά η σχέση των κυκλοφοριακών στοιχείων της επιχειρήσεως προς τις βραχυπρόθεσμες υποχρεώσεις της, προκειμένου να αξιολογηθεί η τρέχουσα οικονομική της θέση. Αντίθετα, οι μακροχρόνιοι δανειστές (ομολογιούχοι) δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στους μακροχρόνιους οικονομικούς δείκτες της επιχειρήσεως, όπως είναι η διάρθρωση των κεφαλαίων της, τα τρέχοντα και μελλοντικά κέρδη της και οι μεταβολές της οικονομικής της θέσεως. Επίσης οι επενδυτές σε μετοχές της επιχειρήσεως (υφιστάμενοι ή μελλοντικοί μέτοχοι) ενδιαφέρονται για παρόμοια με τους μακροπρόθεσμους δανειστές στοιχεία, οπότε η ανάλυσή τους επικεντρώνεται στα κέρδη, στα μερίσματα και στις προοπτικές αυτών, διότι τα στοιχεία αυτά είναι εκείνα που, σε μεγάλο βαθμό, επηρεάζουν την τιμή των μετοχών μιας επιχειρήσεως στη Χρηματιστηριακή Αγορά (Χρηματιστήριο).

Η διοίκηση της επιχειρήσεως ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για τη σύνθεση και τη διάρθρωση των κεφαλαίων της, όπως και για τις προοπτικές και την κερδοφόρα δυναμικότητα αυτής. Τούτο διότι αυτές οι πληροφορίες επηρεάζουν άμεσα το είδος, το μέγεθος και το κόστος των δανειακών κεφαλαίων, τα οποία μπορεί αυτή να αποκτήσει. Πολλές φορές η ανάλυση των λογιστικών καταστάσεων μπορεί να χρησιμεύει και ως μέσω αξιολογήσεως της διοικήσεως μιας επιχειρήσεως, δηλαδή αν και κατά πόσο είναι αποτελεσματική και ικανή κατά την εκτέλεση των καθηκόντων της. Επίσης μπορεί να οδηγεί στη διάγνωση διαφόρων επιχειρηματικών προβλημάτων ή τέλος να χρησιμεύει για την πρόβλεψη της μελλοντικής οικονομικής θέσεως της επιχειρήσεως και των οικονομικών της αποτελεσμάτων.

Οι εργαζόμενοι στην επιχείρηση, ενδιαφέρονται για τη μακροχρόνια σταθερότητα και προοπτικής αυτής, διότι συνδέονται με την ικανότητά της να τους καταβάλλει τις αμοιβές τους και να τους προσφέρει απασχόληση.

Για να μπορέσουν όλες οι παραπάνω ομάδες ενδιαφερομένων να προχωρήσουν στην χρηματοοικονομική ανάλυση των στοιχείων των επιχειρήσεων, είναι απαραίτητο να προβούν σε συγκρίσεις και να υπολογίσουν σχέσεις, οι οποίες θα αποτελέσουν τη βάση της οποίας θα στηρίξουν τις αποφάσεις τους.

Ως εκ τούτου, με την ανάλυση των στοιχείων των λογιστικών καταστάσεων, οι αποφάσεις των ενδιαφερομένων, σε κάθε περίπτωση, δεν στηρίζονται πλέον στην διαίσθηση ή στις υποθέσεις αλλά σε συγκεκριμένα πορίσματα, οπότε μειώνεται με αυτό τον τρόπο, κατά το δυνατόν, η αβεβαιότητα ως προς το αποτέλεσμα που ενυπάρχει σε όλες τις αποφάσεις.

Βέβαια, η ανάλυση των λογιστικών καταστάσεων δεν αποδυναμώνει τον ανθρώπινο (υποκειμενικό) παράγοντα, ο οποίος πάντοτε σφραγίζει και χρωματίζει την λήψη των αποφάσεων.

Όπως προαναφέρθηκε, η ανάλυση των λογιστικών καταστάσεων και η τεχνική που χρησιμοποιείται κάθε φορά μπορεί να γίνει από διαφορετική σκοπιά, ανάλογα με τον επιδιωκόμενο σκοπό κάθε ενδιαφερομένου.

Για τον λόγο αυτόν, πριν από κάθε ανάλυση πρέπει να γίνεται ανακατάταξη και ομαδοποίηση ορισμένων λογαριασμών των λογιστικών καταστάσεων με σκοπό:

1) *Την μείωση των στοιχείων που θα τύχουν επεξεργασίας και μελέτης.*
2) *Την κατάταξη αυτών σύμφωνα με τις επιδιώξεις του αναλυτή.*

3) Την δυνατότητα επιλογής των μερικών αθροισμάτων, καθώς και των επιμέρους ποσών, ούτως ώστε να μπορούν να υπολογιστούν διάφοροι αριθμοδείκτες.

4.2 Βασικές αρχές και έννοια του προγραμματισμού και της οργανώσεως

Ορισμός-Έννοια προγραμματισμού

Προγραμματισμός είναι μία διαδικασία και μία βασική λειτουργία της Διοικήσεως, η πρώτη μεταξύ ίσων. Η λειτουργία αυτή καθορίζει τους Αντικειμενικούς Σκοπούς και Στόχους, (τι) αναπτύσσει Πολιτικές , Σχέδια δράσεως και Διαδικασίες. Περιγράφονται επίσης τα μέσα και οι ενέργειες (ανθρώπων, χρημάτων, μεθόδων, υλικών κλπ.) που πρέπει να πραγματοποιηθούν (πώς) σε ορισμένο χρονικό διάστημα (πότε) για την επιτυχία αυτών των στόχων. Προβλέπεται επίσης η ύπαρξη επαναπληροφορήσεως (feedback).

Και στην απλούστερη επιχειρηματική ενέργεια διαπιστώνεται σχεδόν πάντα η ύπαρξη δύο στοιχείων, δηλαδή της προβλέψεως και της συγκρίσεως. Ακόμη και η μικρότερη επιχείρηση ασχολείται με εκείνο το αντικείμενο, το οποίο προβλέπει ότι θα έχει όφελος γι' αυτήν. Μετά από κάποια χρονική περίοδο λειτουργίας της συγκρίνει τα αποτελέσματα με τις προβλέψεις που είχαν κάνει οι υπεύθυνοί της. Η επιχείρηση πρέπει να επιδιώκει την πραγματοποίηση του μεγαλύτερου δυνατού αποτελέσματος με την μικρότερη δυνατή δαπάνη ή θυσία (δηλαδή την Οικονομική Αρχή). Επομένως η πρόβλεψη και η σύγκριση συνδέονται αμέσως με την πραγματοποίηση της Αρχής αυτής.

Προγραμματισμός είναι η συστηματική προετοιμασία για το «αύριο», είναι μία κανονική διαδικασία, η οποία επιτρέπει στα Διοικητικά Στελέχη να προσδιορίσουν τι θέλουν και με ποιους τρόπους θα το επιτύχουν. Κατά τον προγραμματισμό, τα διοικητικά στελέχη εκτιμούν το μέλλον, προσδιορίζουν τους σκοπούς της επιχειρήσεως της Εργασιακής Ομάδας και αναπτύσσουν τις στρατηγικές για να επιτύχουν την πραγματοποίηση των στόχων.

Βασικές αρχές προγραμματισμού

Με τον προγραμματισμό:

a) Η παραγωγή δε σταματά από έλλειψη πρώτων ή βοηθητικών υλών ή ανταλλακτικών ή εξαρτημάτων.

b) Καταρτίζεται ταμειακό πρόγραμμα εισπράξεων-πληρωμών κι έτσι δε βρίσκονται στη δύσκολη θέση να κυκλοφορούν επιταγές ακάλυπτες.

c) Είναι δυνατή η πρόβλεψη επεκτάσεως των επενδύσεων, ή ακόμη και μειώσεως της παραγωγής, για την αντιμετώπιση της αγοράς κ.α.

Με τον προγραμματισμό είναι γενικά δυνατή και πιθανή η μείωση της αβεβαιότητας, του τυχαίου κινδύνου.

Ο προγραμματισμός παρέχει στις οικονομικές μονάδες και ιδιαίτερα στις επιχειρήσεις τις ακόλουθες δυνατότητες:

- *Να καθορίζουν τους αντικειμενικούς σκοπούς της επιχειρήσεως*
- *Να ελέγχουν και*
- *Να συντονίζουν τη δράση τους*

- *Να διευκολύνουν τη διοικητική τους αποκέντρωση*
- *Να κάνουν δυνατή τη μείωση του κόστους και την αύξηση της αποδοτικότητάς τους, κλπ.*

Έννοια και ορισμοί της οργανώσεως

Μία επίσης πολύ ουσιαστική λειτουργία της διοικήσεως είναι η Οργάνωση.

Αφού αποφασισθεί ποιοι θα είναι οι βασικοί αντικειμενικοί σκοποί, οι επιδιώξεις και η βασική πολιτική της επιχειρήσεως, τότε η διοίκησή της είναι σε θέση να ασχοληθεί ποιο είναι το πρόβλημα της οργανώσεως της.

Για τον προσδιορισμό της έννοιας της οργανώσεως έχουν διατυπωθεί πολλοί ορισμοί, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται και ακόλουθοι:

Οργάνωση, σύμφωνα με την παραδοσιακή Σχολή της Διοικήσεως είναι μία τυπική διάρθρωση που σκοπεύει στην πραγματοποίηση κοινών στόχων.

Οργάνωση, επίσης, είναι μία διαδικασία που προσδιορίζει και ομαδοποιεί την εργασία, που θα καθορισθεί και θα πραγματοποιηθεί, σε κάποιον τόπο εργασίας, καθορίζοντας και εξουσιοδοτώντας την ευθύνη και την εξουσία και θέτοντας σχέσεις με σκοπό να καταστούν δυνατά.

1) Η εκτέλεση της εργασίας, περισσότερο σωστά και αποδοτικά, από τους ανθρώπους και

2) Την εκπλήρωση των σκοπών της επιχειρήσεως.

Οργάνωση, ακόμη, κατά τη σύγχρονη Σχολή, είναι σύστημα σχετιζομένων μεταξύ τους μέσων (resources) που κάνουν δυνατή την εκπλήρωση ειδικών σκοπών. Τα μέσα αυτά είναι οι:

1) άνθρωποι,
2) οι μηχανές,
3) τα χρηματικά κεφάλαια,
4) οι ύλες και τα υλικά,
5) ο χρόνος,
6) το περιβάλλον.

Η οργάνωση σχεδιάζει και διατηρεί μια διάρθρωση ρόλων μεταξύ των ανθρώπων, ώστε να είναι δυνατή η αποτελεσματική τους εργασία και μάλιστα με την καλύτερη συνεργασία και τις δυνατές λιγότερες προστριβές.

Οι Koontz και O' Donell υπογραμμίζουν, ότι για να υπάρξει ένας ρόλος με νόημα, πρέπει να ενσωματώνει:

1) Αντικειμενικούς σκοπούς, που είναι δυνατό να επιβεβαιωθούν,
2) Μία κατανοητή περιοχή εξουσίας ή δικαιώματος ενεργείας, κατά την κρίση του αμέσως ενδιαφερόμενου,
3) Μία σαφή αντίληψη των βασικών δραστηριοτήτων ή καθηκόντων που περιλαμβάνει και
4) Μία σαφή κατανόηση των σχέσεων του ατόμου με άλλα άτομα και άλλους ρόλους, όταν απαιτείται συντονισμός. Ένας ρόλος για να γίνει απόλυτα λειτουργικός και να εκτελείται σωστά και αποδοτικά, πρέπει οι προϋποθέσεις αυτές να συμπληρώνονται με τις απαιτούμενες πληροφορίες.

Η σημαντική λειτουργία της Οργανώσεως, πρέπει να διέπεται από τη φιλοσοφία των Ανθρώπινων Σχέσεων και όσοι ασχολούνται με αυτήν πρέπει να εξετάζουν τις δυνατότητες των ανθρώπων, τα ενδιαφέροντά τους, τις αδυναμίες και τους περιορισμούς τους.

Η οργάνωση μιας επιχειρήσεως, όπως παρατηρείται, πρέπει να είναι σύμφωνη με τους στόχους που επιδιώκονται, αφού αυτή αποτελεί μέσο για την πραγματοποίηση τους.

Η σημασία της καλής οργανώσεως είναι πολύ μεγάλη για την ομαλή λειτουργία μιας επιχειρήσεως. Είναι προϋπόθεση για την επιτυχία και την απόδοση της. Αντίθετα είναι σχεδόν βέβαιο, ότι μία επιχείρηση με κακή οργάνωση θ 'αποτύχει, λόγω των τριβών, των φιλονικιών κλπ. Που προκαλούνται στα διάφορα επίπεδα διοικήσεως και ηγεσίας.

Παλαιότερα, μάλιστα είχαν διατυπωθεί τα ακόλουθα, από τον Α. Carnergie, σχετικά με την αξία της οργανώσεως «Αν επρόκειτο να χάσω τα εργοστάσια μου ή την οργάνωση μου, δε θα δίσταζα να χάσω τα πρώτα, που θα μπορούσα να τα ξαναποκτήσω και να δημιουργήσω πάλι. Δε θα μπορούσα όμως σε μια γενεά να ξανακάνω την οργάνωση μου, δηλαδή να ξαναβρώ ένα εκλεκτό προσωπικό, καλά καταρτισμένο; προσανατολισμένο στην κατεύθυνση που μπορεί να παρέχει τις καλύτερες υπηρεσίες και συνηθισμένο να συνεργάζεται με τους συναδέλφους του και με τα άλλα επίπεδα της διοικήσεως.

Πρέπει πάντως να σημειωθεί, ότι έχουν διατυπωθεί διάφορες γνώμες εναντίον της οργανώσεως, που όμως έχουν αντικρουστεί και απορριφθεί από άλλους . Έχει υποστηριχθεί π.χ. ότι η επιστημονική οργάνωση είναι προνόμιο των μεγάλων επιχειρήσεων. Η άποψη όμως αυτή είναι εντελώς λανθασμένη. Όπως είναι γνωστό όλες οι επιχειρήσεις έχουν προβλήματα και δυσκολίες που δε διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους, τις ίδιες ανάγκες και παρόμοιους σκοπούς. Τόσο οι μικρές όσο και οι μεγάλες επιχειρήσεις έχουν μεγαλύτερο συμφέρον να συμπιέσουν το κόστος. Οι μικρότερες όμως έχουν ευνοϊκότερες συνθήκες να το επιτύχουν.

Η οργάνωση υπογραμμίζεται, είναι επιστήμη και επάγγελμα, που προϋποθέτει πολλά. Δεν είναι έργο ερασιτεχνικό, ούτε δευτερεύουσα απασχόληση, ούτε εμπειρική συνταγή. Η οργάνωση βοηθάει τους ανθρώπους και τις επιχειρήσεις για τη σωστή και αποδοτική χρησιμοποίηση των μέσων παραγωγής, με τη μικρότερη δυνατή θυσία.

<u>Βασικές αρχές οργανώσεως</u>

Με την οργάνωση πραγματοποιείται ο αρμονικός συνδυασμός ανθρώπων και άλλων μέσων, επιτυγχάνεται η μεθόδευση της δραστηριότητας των ανθρώπων και της χρήσεως των άλλων μέσων με σκοπό την λήψη των καλύτερων αποτελεσμάτων.

Ο αρμονικός συνδυασμός και η συνεργασία των ανθρώπων επιτυγχάνεται τόσο με τον αυτοέλεγχό τους, όσο και με κανόνες συμπεριφοράς των ανθρώπων και χρήσεως των μηχανικών και άλλων μέσων. Οι κανόνες αυτοί παρομοιάζονται με τους κανόνες κυκλοφορίας οχημάτων (κ.ο.κ.) που επιτρέπουν την ομαλή οδική κίνηση με αποφυγή συγκρούσεων, ατυχημάτων κλπ. Χωρίς να είναι υπερβολικοί, ώστε, όπως παρατηρεί ο

Allen, «να μη σβήσουν τη σπίθα του προσωπικού ενδιαφέροντος και τον ενθουσιασμό, που είναι απαραίτητα για την πραγματοποίηση πραγματικά εξαιρετικών αποδόσεων».

Η υλοποίηση των σκέψεων και των θεωριών που αφορούν την Οργάνωση ως επιστημονική λειτουργία των επιχειρήσεων στηρίζεται και στην εφαρμογή ορισμένων Αρχών, όπως οι ακόλουθες:

1. *Αρχή κατανομής των εργασιών και δραστηριοτήτων*
2. *Αρχή καθορισμού των σκοπών*
3. *Αρχή ενότητας της διοικήσεως*
4. *Αρχή περιορισμένης εκτάσεως του ελέγχου*
5. *Αρχή προκαθορισμού της εξουσίας και της ευθύνης*
6. *Αρχή συντονισμού*
7. *Αρχή ιεραρχικής κλίμακας*

Έχουν διατυπωθεί και οι ακόλουθες αρχές:

8. *Αρχή καταρτίσεως της ιεραρχικής διαρθρώσεως, σε κάθετη και οριζόντια διάταξη και του καθορισμού θέσεων (διοικητικών, επιτελικών και εκτελεστικών θέσεων) με σαφή περιγραφή του έργου κάθε θέσεως εργασίας.*
9. *Αρχή σωστής επιλογής προσωπικού*
10. *Αρχή απλοποιήσεως και τυποποιήσεως της εργασίας*
11. *Αρχή θεσπίσεως κινήτρων για την αύξηση της αποδοτικότητας (και της παραγωγικότητας).*
12. *Αρχή προγραμματισμού και ελέγχου των ενεργειών. Προηγούνται όμως, όπως είναι ευνόητο, η θέσπιση*

κανόνων και μεθόδων και η εφαρμογή τους σε όλες τις δραστηριότητες.

13.*Αρχή του καλύτερου δυνατού συνδυασμού των συντελεστών της παραγωγής με παράλληλη προσοχή α) στην κυριαρχική θέση του ανθρώπινου παράγοντα, β) στην ελαστικότητα οργανώσεως*

γ) στη διαρκή βελτίωση

14.*Αρχή της οικονομικής αποτελεσματικότητας.*

4.3.Ανάλυση νεκρού σημείου

Ανάλυση νεκρού σημείου και πρόβλεψη εσόδων

Οι οικονομικοί προγραμματιστές, οι οποίοι τελικά πρέπει να αποφασίσουν για το είδος μιας επενδύσεως και τον τρόπο χρηματοδοτήσεώς της, που θα μεγιστοποιήσει την αξία μιας εταιρείας, είναι αναγκαίο να βασιστούν σε μερικές στοιχειώδεις πληροφορίες σχετικά με την προβλεπόμενη ζήτηση των προϊόντων ή υπηρεσιών της, τις αναμενόμενες σχέσεις συντελεστών παραγωγής - τελικού προϊόντος στο στάδιο παραγωγής και τη συσχέτιση κόστους - όγκου παραγωγής στα διάφορα επίπεδα προβλεπόμενων πωλήσεων και το κόστος παραγωγής. Η τελευταία αυτή ομάδα σχέσεων αρχίζει από την ανάλυση του Νεκρού Σημείου, η οποία καθορίζει τον αριθμό των μονάδων που θα παραχθούν και θα πωληθούν, στον οποίο το Συνολικό Κόστος της επιχειρήσεως εξισώνεται με τα Συνολικά Έσοδα αυτής. Με άλλα λόγια, η διοίκηση έχει ανάγκη να γνωρίζει το επίπεδο παραγωγής και πωλήσεων μετά από το οποίο αρχίζει το πραγματικό κέρδος για ένα συγκεκριμένο προϊόν ή υπηρεσία.

Επομένως, η ανάλυση Νεκρού Σημείου χρησιμεύει σαν ένα αρχικό κριτήριο της οικονομικής βιωσιμότητας επενδυτικών προτάσεων, καθώς επίσης και της ευαισθησίας της ποσότητας Νεκρού Σημείου σε αλλαγές τιμών πωλήσεως και κόστους παραγωγής. Από την άποψη αυτή, η ανάλυση Νεκρού Σημείου είναι μία από πολλές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση των επιπτώσεων διάφορων επενδύσεων στα κέρδη της επιχειρήσεως. Άλλες μέθοδοι, όπως η Καθαρά Παρούσα Αξία, ο Εσωτερικός Συντελεστής Αποδόσεως, ο Συντελεστής Κόστους – Αποδόσεως και οι αντίστοιχοι με αυτούς συντελεστές για περιπτώσεις που περιέχουν αβεβαιότητα και οικονομικό κίνδυνο. Υπάρχουν δύο μορφές αναλύσεως Νεκρού Σημείου, η Γραμμική και η μη Γραμμική, που μπορούν να αναπτυχθούν μέσα στα ακόλουθα τρία πλαίσια:

1. Τη μέθοδο Δοκιμής και Αποκλίσεως
2. Τη Μέθοδο Σχηματικής Απεικονίσεως
3. Τη Μέθοδο Αλγεβρικής Αναλύσεως

Για να αναλύσουμε τις λειτουργικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ όγκου παραγωγής, κόστους λειτουργίες και τιμών πωλήσεως των προϊόντων, κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές απλοποιήσεως που είναι εφαρμόσιμες στην περίπτωση της Γραμμικής Αναλύσεως του Νεκρού Σημείου.

1. Η τιμή πωλήσεως κάθε μονάδας προϊόντος είναι γνωστή και σταθερή. Αυτή η παραδοχή επιτρέπει την αύξηση των Συνολικών Εσόδων σε σταθερή αναλογία με την αύξηση των Πωλήσεων. Επομένως, στην πραγματικότητα, υποθέτουμε ότι η Καμπύλη Συνολικών Εσόδων είναι μια ευθεία γραμμή.
2. Η επιχείρηση παράγει και πωλεί ένα μοναδικό προϊόν. Αυτή είναι επίσης μια σημαντική παραδοχή, παρόλο που μπορεί να αντικατασταθεί με την παραδοχή ότι η επιχείρηση παράγει και πωλεί πολλά προϊόντα, των οποίων οι πωλήσεις μεταβάλλονται αναλογικά με την παραγωγή. Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα με τη μορφή Πωλήσεων Νεκρού Σημείου σε δραχμές και να αποφύγουμε την παραδοχή της μοναδικότητας αντικαθιστώντας τη με την παραδοχή της αναλογικότητας.
3. Η επιχείρηση έχει Σταθερό Κόστος που είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό των πωλούμενων μονάδων. Το κόστος αυτό, που δεν αυξάνεται με την αύξηση του όγκου πωλήσεων , συνίσταται μεταξύ άλλων από:
   - Τα έξοδα αποσβέσεων,
   - Τα ενοίκια
   - Τα έξοδα ασφαλίσεως
   - Τα διοικητικά έξοδα και
   - Τις αποπληρωμές δανείων

4. Η επιχείρηση έχει Μεταβλητό Κόστος, που είναι ευθέως ανάλογο με τον αριθμό των παραγόμενων και πωλούμενων μονάδων. Παραδείγματα τέτοιου κόστους είναι:

- Οι πρώτες και οι βοηθητικές ύλες που αναλώνονται στην παραγωγή,
- Το άμεσο εργατικό κόστος
- Οι προμήθειες των πωλητών
- Τα έξοδα λειτουργίας και συντηρήσεως

5. Η επιχείρηση αντιμετωπίζει μερικές φορές κόστους που είναι μείγμα του σταθερού
Κόστους και μεταβλητού κόστους και αποκαλείται ημιμεταβλητό κόστος.

Παράδειγμα αυτού του κόστους είναι μερικές προμήθειες πωλητών που είναι σταθερές έως ένα σημείο και πέρα από αυτό μεταβλητές.

6. Η επιχείρηση διατηρεί σταθερά αποθέματα

Στο σχήμα παρακάτω εμφανίζονται τα διάφορα είδη κόστους. Το σταθερό κόστος εμφανίζεται στην οριζόντια γραμμή, το μεταβλητό κόστος στην ευθεία που έχει ανοδική κλίση και το ημιμεταβλητό κόστος από την κλιμακωτή και ανοδική συνάρτηση. Για χάρη υπολογιστικής ευκολίας θα αγνοήσουμε το ημιμεταβλητό κόστος και θα παρουσιάσουμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους με τον ακόλουθο τρόπο:

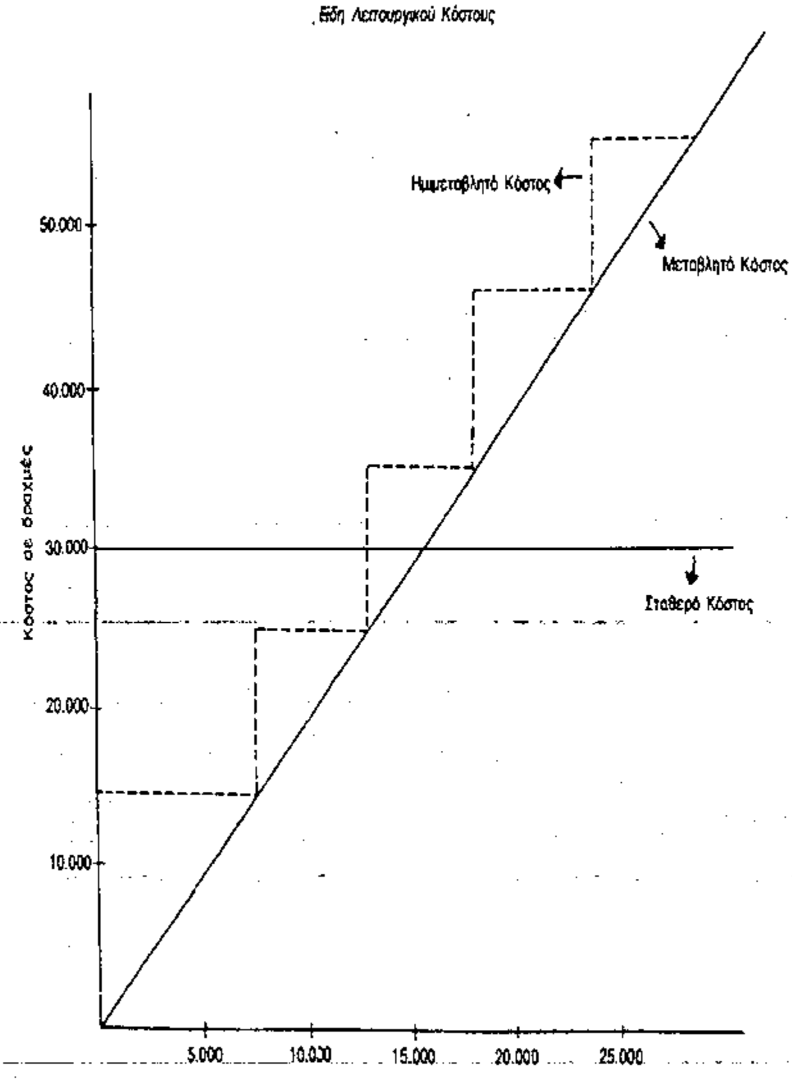
Ολικό Λειτουργικό Κόστος =

Σταθερό Λειτουργικό Κόστος + Μεταβλητό Λειτουργικό Κόστος

Οκ = Σκ + Μκ

ΣΧΗΜΑ 4.1

Είδη Λειτουργικού Κόστους



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

5.1 Συνάρτηση παραγωγής

Η βασική δραστηριότητα κάθε επιχείρησης είναι να μετατρέπει τις εισροές σε εκροές. Καθώς οι οικονομολόγοι ενδιαφέρονται για τις επιλογές που κάνει η επιχείρηση για να επιτύχει αυτό το στόχο, αλλά θέλουν να αποφύγουν τις μηχανικές λεπτομέρειες, επέλεξαν να κατασκευάσουν ένα αφηρημένο υπόδειγμα παραγωγής. Σ΄ αυτό το υπόδειγμα, η σχέση μεταξύ των εισροών και εκροών διατυπώνεται σε μια συνάρτηση παραγωγής της μορφής.

$$q=f(K, L, M, \ldots)$$

όπου το q συμβολίζει την παραγωγή ενός συγκεκριμένου αγαθού της επιχείρησης για μια χρονική περίοδο, το K συμβολίζει τη χρήση των μηχανημάτων (δηλαδή του κεφαλαίου) κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου, το L συμβολίζει τις ώρες της εισροής εργασίας το M συμβολίζει τις πρώτες ύλες που χρησιμοποιούνται και ο συμβολισμός δείχνει την πιθανότητα να επηρεάζουν την παραγωγική διαδικασία και άλλες μεταβλητές. Η εξίσωση υποτίθεται ότι δίνει, για οποιαδήποτε σύνολο εισροών, τη λύση του μηχανικού στο πρόβλημά του πως είναι καλύτερα να συνδυάζεις αυτές τις εισροές για να πάρεις προϊόν.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση παραγωγής. Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης για ένα συγκεκριμένο αγαθό, q,

$$q = f(K,L)$$

δείχνει τη μέγιστη ποσότητα του αγαθού που μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας τους εναλλακτικούς συνδυασμούς κεφαλαίου (K) και εργασίας (L).

$$\text{Συνολικό κόστος} = TC = Wl + Vk$$

5.2 Συνολικό, Μέσο και Οριακό προϊόν

Ο νόμος της μη ανάλογης ή της φθίνουσας αποδόσεως αναφέρεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις μεταβολές του παραγόμενου προϊόντος και στις μεταβολές των χρησιμοποιούμενων συντελεστών σε βραχυχρόνια περίοδο, όπου ορισμένοι συντελεστές παραμένουν αμετάβλητοι. Μ΄ άλλα λόγια, ο νόμος της φθίνουσας αποδόσεως δείχνει τις μεταβολές του προϊόντος, καθώς ορισμένοι συντελεστές μεταβάλλονται, ενώ ορισμένοι άλλοι παραμένουν σταθεροί.

Το απλούστερο παράδειγμα για την κατανόηση αυτού του νόμου είναι η περίπτωση του γεωργού που καλλιεργεί μια σταθερή έκταση εδάφους και μεταβαλλόμενες ποσότητες εργασίας, για να παράγει κάποιο προϊόν. Στο παράδειγμα αυτό, το έδαφος είναι ο σταθερό συντελεστής και η εργασία ο μεταβλητός συντελεστής. Ο Πίνακας δίνει τα στοιχεία της παραγωγικής διαδικασίας που περιγράψαμε πιο πάνω. Οι τρεις πρώτες στήλες περιέχουν τις ποσότητες εδάφους και εργασίας και το αντίστοιχο προϊόν. Όταν π.χ. χρησιμοποιούνται 10 στρέμματα εδάφους και 2 εργάτες (εννοείται ότι χρησιμοποιούνται σπόροι, λιπάσματα κ.λ.π. που αγνοούμε για ευκολία), η συνολική παραγωγή είναι 26 μονάδες. Οι στήλες αυτές, που δείχνουν τη σχέση μεταξύ προϊόντος και παραγωγικών συντελεστών, αποτελούν έκφραση της συναρτήσεως παραγωγής. Ο Πίνακας (7.2) δείχνει επίσης το μέσο και το οριακό προϊόν. Μέσο προϊόν είναι ο λόγος του συνολικού προϊόντος προς τις μονάδες του μεταβλητού συντελεστή (εργασία στο παράδειγμα) και δείχνει το προϊόν κατά εργάτη. Το οριακό προϊόν δείχνει τη μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό προϊόν, όταν μεταβληθεί ο μεταβλητός συντελεστής κατά μία μονάδα. Στον Πίνακα (7.2), όταν έχουμε 3 εργάτες, το συνολικό προϊόν είναι 45 και όταν έχουμε 4, το προϊόν γίνεται 62. Άρα το οριακό προϊόν είναι 62-45=17.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2

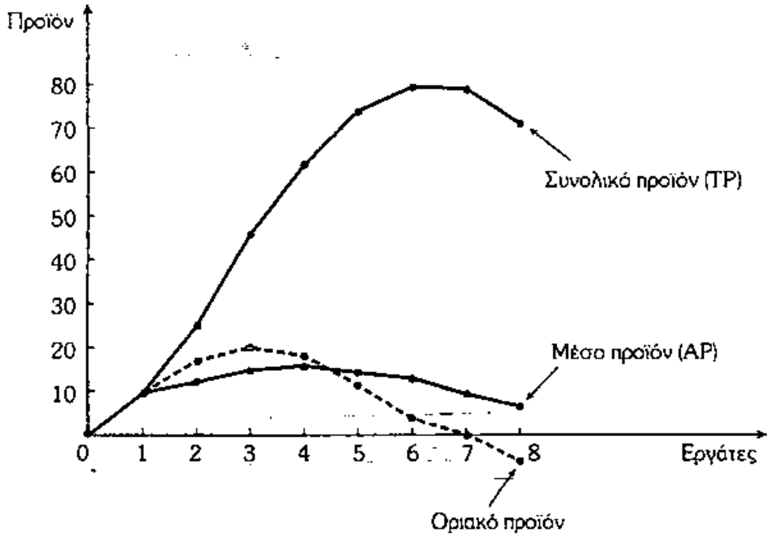
Παράδειγμα Συναρτήσεως Παραγωγής

Ποσότητα εδάφους (στρέμματα)	Αριθμός εργατών	Συνολικό προϊόν	Μέσο προϊόν	Οριακό προϊόν
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
10	0	0	0	
10	1	10	10	10
10	2	26	13	16
10	3	45	15	19
10	4	62	15,5	17
10	5	74	14,8	12
10	6	78	13	4
10	7	78	11,1	0
10	8	72	9	-6

Το συνολικό προϊόν αυξάνεται στην αρχή με ισχύ ρυθμό, έπειτα ο ρυθμός αυξήσεως μειώνεται, ώσπου να φθάσει στο ανώτατο επίπεδο και στη συνέχεια να μειωθεί.

Διάγραμμα 7.2

Οι Καμπύλες του Συνολικού, Μέσου και Οριακού Προϊόντος



Σ΄ αυτή τη συμπεριφορά του συνολικού προϊόντος οφείλεται και η αρχική αύξηση και η τελική μείωση του οριακού προϊόντος. Οι μεταβολές του μέσου προϊόντος είναι μικρότερες απ΄ όσο του οριακού. Αυτό οφείλεται στο ότι το μέσο προϊόν επηρεάζεται και από τις προηγούμενες μονάδες εργασίας και προϊόντος (βλ. τον ορισμό του μέσου προϊόντος), ενώ το οριακό προϊόν δίνει μόνο την τελευταία μεταβολή του συνολικού προϊόντος. Τέλος αξίζει να σημειωθεί, ότι η καμπύλη του οριακού τέμνει την καμπύλη του μέσου προϊόντος από τα πάνω προς τα κάτω και στο υψηλότερό της σημείο.

Η παραπάνω συμπεριφορά του συνολικού προϊόντος οφείλεται στο ότι το έδαφος και η εργασία συνδυάζονται με τον καλύτερο τρόπο από πλευράς παραγωγής, όταν βρίσκονται σε μια ορισμένη αναλογία. Μπορούμε να προχωρήσουμε χωρίς δυσκολία στην ανάλυση του κόστους παραγωγής δηλαδή των δαπανών που έχει η επιχείρηση κατά την παραγωγή του προϊόντος. Η παραγωγή, όπως δείξαμε πιο πάνω, βρίσκεται σε άμεση σχέση με τις ποσότητες των παραγωγικών συντελεστών. Η χρησιμοποίηση όμως των παραγωγικών συντελεστών προϋποθέτει αγορά των υπηρεσιών τους και καταβολή χρηματικών δαπανών από την πλευρά της επιχειρήσεως. Είναι λοιπόν φανερό, ότι υπάρχει σχέση μεταξύ ποσότητας παραγωγής και χρηματικών δαπανών. Τη σχέση αυτή θα μελετήσουμε αμέσως πιο κάτω. Προϋπόθεση ότι οι τιμές των παραγωγικών συντελεστών είναι σταθερές για ην επιχείρηση που τους αγοράζει και δε μεταβάλλονται, καθώς οι αγοραζόμενες ποσότητες αυξομειώνονται.

(I) **Σταθερό κόστος είναι το κόστος που δεν μεταβάλλεται μαζί με την ποσότητα του προϊόντος.** Το σταθερό κόστος είναι το σύνολο των δαπανών που καταβάλλονται για τους σταθερούς συντελεστές.

(II) **Μεταβλητό κόστος είναι το κόστος που μεταβάλλεται, καθώς μεταβάλλεται η παραγόμενη ποσότητα προϊόντος.** Το μεταβλητό κόστος είναι το σύνολο των δαπανών που καταβάλλονται για τους μεταβλητούς συντελεστές.

(III) **Συνολικό κόστος είναι το άθροισμα του σταθερού και του μεταβλητού κόστους.**

Οι στήλες (2), (3), και (4) του πίνακα (7.3) δίνουν το σταθερό, μεταβλητό και συνολικό κόστος παραγωγής για το παράδειγμα του Πίνακα (7.2).

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3

Παράδειγμα Συναρτήσεως Κόστους

Σταθερό κόστος (2)	**Μεταβλητό κόστος (3)**	**Συνολικό κόστος (4)=(2)+(3)**	**Μέσο σταθερό κόστος (5)=(2)/(1)**	**Μέσο μεταβλητό κόστος (6)=(3)/(1)**	**Μέσο συνολικό κόστος (7)-(5)+(6)**	**Οριακό κόστος (8)=Δ(4)/Δ(1)**
1000	0	1000	-	-	-	-
1000	200	1200	100	20	120	20
1000	400	1400	38,4	15,3	53,7	12,5
1000	600	1600	22,2	13,3	35,5	10,5
1000	800	1800	16,1	12,9	29,0	11,8
1000	1000	2000	13,6	13,5	27,1	16,6
1000	1200	2200	12,8	15,4	28,2	50
1000	1400	2400	12,8	18,1	30,9	≈8

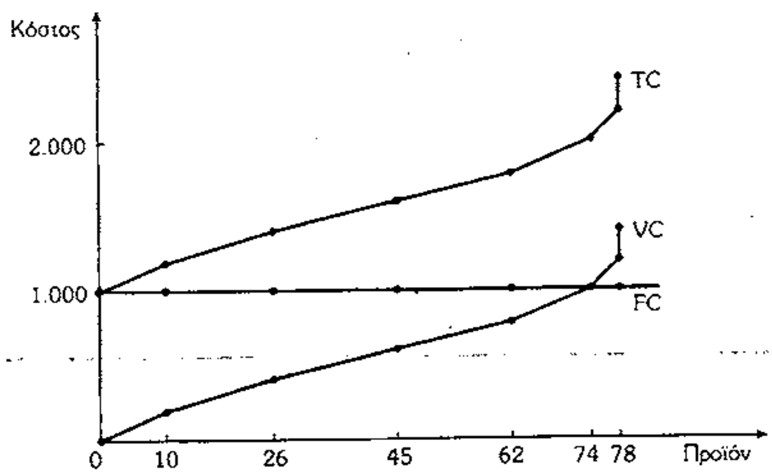
Έστω π.χ. ότι παράγονται 26 μονάδες προϊόντος. Σύμφωνα με τον πίνακα (7.2), για την παραγωγή αυτή χρειάζονται 10 στρέμματα και 2 εργάτες. Το κόστος των 10 στρεμμάτων είναι 10 Χ 100 = 1000 δρχ. και αυτό είναι το σταθερό κόστος. το κόστος των εργατών, είναι 2 Χ 200 = 400 δρχ. και αυτό είναι το μεταβλητό κόστος, το συνολικό κόστος είναι 1000 + 400 = 1400 δρχ. Μ΄ αυτό τον τρόπο βρίσκουμε το κόστος για όλα τα επίπεδα παραγωγής.

Από τις στήλες αυτές του πίνακα (7.3) μπορούμε να δούμε τις διάφορες σχέσεις ανάμεσα στο συνολικό προϊόν και στο κόστος παραγωγής, που εμφανίζονται καθαρά στο διάγραμμα (7.3). Εκεί βλέπουμε ότι το σταθερό κόστος (FC) εκφράζεται με μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των ποσοτήτων, που σημαίνει ότι το σταθερό κόστος μένει αμετάβλητο στο επίπεδο των 1000 δρχ. ανεξάρτητα από τις μεταβολές του προϊόντος. Η καμπύλη του μεταβλητού κόστους (VC) δείχνει ότι το μεταβλητό κόστος αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η ποσότητα του προϊόντος. Στην αρχή η αύξηση του μεταβλητού κόστους είναι αργή αλλά, καθώς το προϊόν αυξάνεται, η αύξηση του κόστους γίνεται ιδιαίτερα έντονη. Η καμπύλη του συνολικού κόστους (TC) είναι το άθροισμα (κάθετα) των δύο άλλων καμπυλών.

Οι καμπύλες του Διαγράμματος (7.3) δείχνουν τη σχέση μεταξύ κόστους και συνολικού προϊόντος. Το επόμενο βήμα είναι η μελέτη.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.3

Καμπύλες συνολικού Κόστους



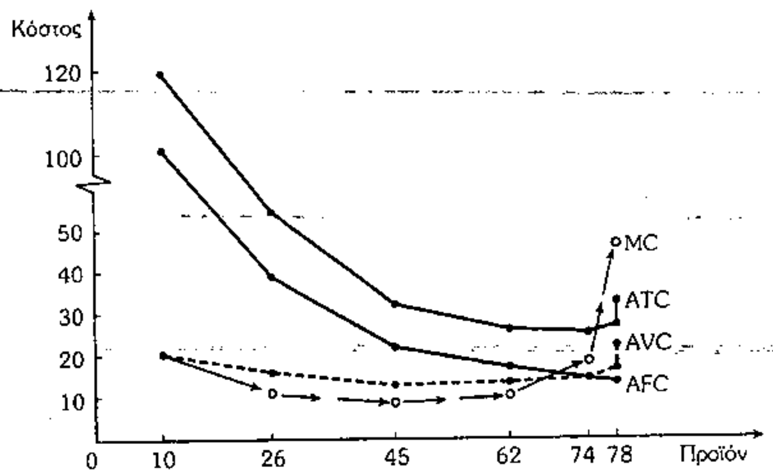
της σκέψης ανάμεσα στο συνολικό προϊόν και το κόστος **κατά μονάδα προϊόντος.** Μ΄ άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στο σταθερό, μεταβλητό και συνολικό κόστος κατά μονάδα προϊόντος και στην ποσότητα της παραγωγής. **Το σταθερό κόστος κατά μονάδα προϊόντος λέγεται συνήθως μέσο σταθερό κόστος και είναι ο λόγος**

του σταθερού κόστους προς την ποσότητα της παραγωγής. Κατ΄ αναλογία, το μέσο μεταβλητό κόστος ορίζεται ως ο λόγος του μεταβλητού κόστους προς την ποσότητα της παραγωγής, και το μέσο συνολικό κόστος ως ο λόγος του συνολικού κόστους προς την ποσότητα της παραγωγής. Είναι φανερό, ότι το μέσο συνολικό κόστος είναι ίσο με το άθροισμα του μέσου σταθερού και μέσου μεταβλητού κόστους. Οι στήλες (5), (6) και (7) του πίνακα (7.3) δείχνουν τους υπολογισμούς του μέσου σταθερού, μέσου μεταβλητού και μέσου συνολικού κόστους. Για παράδειγμα, όταν παράγονται 26 μονάδες προϊόντος, το μέσο σταθερό κόστος είναι 1000/26 = 38,4 δρχ. το μέσο μεταβλητό 400/26 = 15,3 δρχ. και το μέσο συνολικό 1400/26=53,7 δρχ. ή 38,4 + 15,3 = 53,7 δραχμές.

Οι σχέσεις αυτές φαίνονται πιο καθαρά στο Διάγραμμα (7.4). Η καμπύλη του μέσου σταθερού κόστους (AFC) φθίνει συνεχώς, γιατί η

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7,4

Καμπύλες Μέσου και Οριακού Κόστους



σταθερή δαπάνη διατηρείται με συνεχώς μεγαλύτερο προϊόν. Η καμπύλη του μέσου μεταβλητού κόστους (AVC) φθίνει στην αρχή και στο τέλος αυξάνεται. Αυτό οφείλεται στο νόμο της φθίνουσας αποδόσεως, δηλαδή στην αρχή το προϊόν αυξάνεται πιο γρήγορα από το κόστος του μεταβλητού συντελεστή και συνεπώς το μέσο πέφτει, ενώ μετά το προϊόν αυξάνεται πιο αργά (ή καθόλου) από το μεταβλητό συντελεστή και το μέσο μεταβλητό κόστος αυξάνεται. Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι οι μεταβολές του μέσου μεταβλητού κόστους είναι αντίθετες από τις μεταβολές του μέσου προϊόντος, όπως φαίνεται από τη σύγκριση της καμπύλης AVC του διαγράμματος (7,4) με την καμπύλη AP του Διαγράμματος (7,2).

Η καμπύλη του μέσου συνολικού κόστους (ATC) είναι το κάθετο άθροισμα των καμπυλών AFC και AVC και φυσικά επηρεάζεται και από τις δύο καμπύλες. Στην αρχή, όπου τα σταθερά έξοδα είναι μεγάλα, επηρεάζεται κυρίως από την καμπύλη του μέσου σταθερού κόστους. Καθώς όμως η παραγωγή αυξάνεται, η σημασία, κατά μονάδα προϊόντος, των σταθερών εξόδων μειώνεται, η καμπύλη ATC επηρεάζεται κυρίως από το μέσο μεταβλητό κόστος, που αυξάνεται η σημασία του.

Από τις πιο σημαντικές έννοιες κόστους είναι το οριακό κόστος παραγωγής. **Ως οριακό κόστος ορίζεται η μεταβολή του συνολικού κόστους, όταν το προϊόν μεταβάλλεται κατά μία μονάδα.** Η στήλη (8) του Πίνακα (7.3) δίνει το οριακό κόστος για τις διάφορες μεταβολές της παραγωγής. Π.χ. όταν η παραγωγή αυξάνεται από 26 σε 45 μονάδες, το συνολικό κόστος αυξάνεται κατά 200 δρχ. και συνεπώς κατά μονάδα προϊόντος η οριακή αύξηση κόστους είναι 200 / 19 = 10,5 δραχμές. Η σχέση μεταξύ ποσότητας παραγωγής και οριακού προϊόντος φαίνεται από την καμπύλη MC στο Διάγραμμα (7.4). Η συμπεριφορά της καμπύλης MC προσδιορίζεται από το νόμο της φθίνουσας αποδόσεως και η σχέση της με την καμπύλη του μέσου μεταβλητού κόστους συνδέεται με τη σχέση της καμπύλης του οριακού προϊόντος προς την καμπύλη του μέσου προϊόντος. Από το Διάγραμμα (7.4) γιατί δεν επηρεάζεται, όπως το μέσο, από τις προηγούμενες μεταβολές κόστους και παραγωγής. Τέλος, σημειώνουμε ότι η καμπύλη του οριακού κόστους τέμνει την καμπύλη του μέσου από τα κάτω προς τα πάνω και στο χαμηλότερό της σημείο.

Τελειώνοντας την ανάλυση, του κόστους παραγωγής είναι σκόπιμο να τονίσουμε τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στις δύο βασικές έννοιες κόστους, δηλαδή του μέσου και του οριακού. Το μέσο είναι το κόστος κατά μονάδα προϊόντος για κάθε μέγεθος παραγωγής. Το οριακό είναι η αύξηση του συνολικού κόστους παραγωγής για την παραγωγή της τελευταίας μονάδας προϊόντος.

Το κόστος Παραγωγής σε Μακροχρόνια Περίοδο

Η ανάλυση του κόστους παραγωγής, που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο τμήμα, βασίσθηκε στη ρητή υπόθεση, ότι ένας συντελεστής (το έδαφος) είναι σταθερός και ένας (η εργασία) μεταβλητός. Συνεπώς, η ανάλυση αναφερόταν σε βραχυχρόνια περίοδο και γ΄ αυτό οι καμπύλες των Διαγραμμάτων (7.3) και (7.4) λέγονται **βραχυχρόνιες καμπύλες κόστους.** Γνωρίζουμε όμως από τα προηγούμενα, ότι η επιχείρηση είναι σε θέση να μεταβάλλει τις ποσότητες όλων των παραγωγικών συντελεστών σε μακροχρόνια περίοδο. Στο τμήμα αυτό μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ παραγωγής και κόστους σε μακροχρόνια περίοδο.

Η πρώτη συνέπεια της αναλύσεως σε μακροχρόνια περίοδο είναι ότι δεν γίνεται πια διάκριση ανάμεσα σε σταθερό και μεταβλητά έξοδα γιατί δεν υπάρχουν πια σταθεροί συντελεστές.

Η μακροχρόνια καμπύλη μέσου κόστους μπορεί να ορισθεί ως η καμπύλη που δίνει το χαμηλότερο δυνατό κόστος κατά μονάδα προϊόντος για κάθε μέγεθος παραγωγής, όταν η επιχείρηση έχει τη χρονική ευχέρεια να μεταβάλλει τις ποσότητες όλων των παραγωγικών συντελεστών που χρησιμοποιεί έδαφος, εργασία, κτίρια, μηχανήματα κ.λ.π.).

5.3.1 Συνάρτηση κόστους

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η συνάρτηση συνολικού κόστους. Η συνάρτηση συνολικού κόστους μας δείχνει ότι για κάθε συνδυασμό κόστους των συντελεστών και για κάθε επίπεδο προϊόντος, το ελάχιστο συνολικό κόστος που επιβαρύνει την επιχείρηση είναι:

$$\mathbf{TC = TC\ 9v, w, q)} \qquad (12.12)$$

Αν και η συνάρτηση συνολικού κόστους μας δίνει πλήρεις πληροφορίες για τη σχέση προϊόντος κόστους, είναι συχνά βολικό να αναλύουμε το κόστος στη βάση του ανά μονάδα προϊόντος, καθόσον αυτή η προσέγγιση αντιστοιχεί περισσότερο στην ανάλυσή μας της ζήτησης, η οποία επικεντρώθηκε στην τιμή ανά μονάδα του αγαθού. Δύο διαφορετικά μέτρα του ανά μονάδα κόστους χρησιμοποιούνται ευρέως στα οικονομικά: (1) το μέσο κόστος, που είναι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος και (2) το οριακό κόστος, το οποίο είναι το κόστος της μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος. Η σχέση αυτών των εννοιών προς τη συνάρτηση συνολικού κόστους περιγράφεται στους ακόλουθους ορισμούς:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Οι συναρτήσεις μέσου και οριακού κόστους. Η συνάρτηση του μέσου κόστους (AC) βρίσκεται με υπολογισμό του συνολικού κόστους ανά μονάδα προϊόντος.

$$\text{μέσο κόστος} = \mathrm{AC}\ (\mathrm{v,w,q}) = \frac{AC(v,w,q)}{q} \qquad (12.13)$$

Η συνάρτηση του οριακού κόστους (MC) βρίσκεται με υπολογισμό της μεταβολής του συνολικού κόστους από μια μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν.

$$\text{Οριακό κόστος} = \mathrm{MC}\ (\mathrm{v,w,q}) = \frac{\theta TC(v,w,q,)}{\theta q} \qquad (12.14)$$

Παρατηρούμε ότι σ' αυτούς τού ορισμούς, το μέσο και το οριακό κόστος εξαρτώνται και από το επίπεδο προϊόντος που παράγεται και από τις τιμές των συντελεστών. Σε αρκετά τμήματα αυτού του βιβλίου θα απεικονίζουμε με απλά διαγράμματα δύο διαστάσεων τη σχέση μεταξύ του κόστους και του προϊόντος. Όπως φανερώνουν οι εξισώσεις 12.12, 12.13 και 12.14 όλα αυτά τα διαγράμματα σχεδιάζονται βασιζόμενα στην υπόθεση ότι οι τιμές των συντελεστών παραμένουν σταθερές και ότι η τεχνολογία δεν μεταβάλλεται. Εάν οι τιμές των συντελεστών μεταβληθούν ή εάν η τεχνολογία εξελιχθεί, οι καμπύλες κόστους γενικά θα μετακινηθούν σε νέα θέση. Αργότερα σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα διερευνήσουμε την πιθανή κατεύθυνση και το μέγεθος αυτών των μετακινήσεων.

Τα σχήματα 12.5 (a) και 12.6 (a) παρουσιάζουν δύο πιθανές μορφές της σχέσης μεταξύ συνολικού κόστους και του επιπέδου του προϊόντος της επιχείρησης. Στο σχήμα 12.5 (a) το συνολικό κόστος είναι απλά ανάλογο του προϊόντος. Μια τέτοια θέση θα προκύψει εάν η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής εμφανίζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Στην περίπτωση αυτή, ας υποθέσουμε ότι K_1 μονάδες της εισροής κεφαλαίου και L_1 μονάδες της εισροής εργασίας απαιτούνται για να παράγουν μια μονάδα προϊόντος. Τότε

$$TC\ (q=1) = vK_1 + Wl_1 \qquad (12.15)$$

Για να παράγουμε m μονάδες προϊόντος, λοιπό, απαιτούνται mK_1 μονάδες κεφαλαίου και mL_1 μονάδες εργασίας λόγω της υπόθεσης των σταθερών αποδόσεων κλίμακας. Συνεπώς,

$$TC\ (q=m) = vmK_1 + wmL_1 = m(vK_1 + wL_1)$$
$$= m \cdot TC\ (q=1) \qquad (12.16)$$

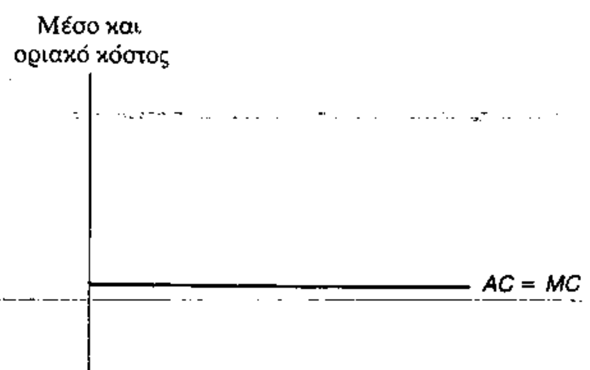
και η αναλογικότητα μεταξύ του προϊόντος και τους κόστους καθιερώνεται.

Η κατάσταση στο Σχήμα 12.6 (a) είναι κάπως πιο περίπλοκη. Αρχικά υποθέσαμε ότι η καμπύλη TC είναι κοίλη. Μολονότι το αρχικό κόστος αυξάνεται ραγδαία με την αύξηση του προϊόντος, αυτός ο ρυθμός αύξησης επιβραδύνεται καθώς το προϊόν επεκτείνεται στο μεσοδιάστημα του προϊόντος. Εντούτοις, πέρα από αυτό το μεσοδιάστημα, η καμπύλη TC γίνεται κυρτή, και το κόστος αρχίζει να αυξάνει σταδιακά γρηγορότερα. Μια πιθανή αιτία για μια τέτοια μορφή της καμπύλης συνολικού κόστους είναι ότι υπάρχει κάποιος τρίτος παραγωγικός συντελεστής (ας πούμε, οι υπηρεσίες ενός επιχειρηματία) που είναι σταθερός καθώς η χρησιμοποίηση κεφαλαίου και εργασίας αυξάνεται. Στην περίπτωση αυτή, το αρχικό κοίλο τμήμα της καμπύλης TC μπορεί να εξηγηθεί από την αυξανόμενα άριστη χρήση των υπηρεσιών του επιχειρηματία - που χρειάζεται ένα μέσο επίπεδο παραγωγής να χρησιμοποιήσει πλήρως τις δυνατότητές του. Εντούτοις, πέρα από αυτό το σημείο καμπής, ο επιχειρηματίας εξαντλείται στην προσπάθειά του να συντονίσει την παραγωγή και αρχίζουν να εμφανίζονται φθίνουσες αποδόσεις,. Συνεπώς το συνολικό κόστος αυξάνεται ραγδαία.

ΣΧΗΜΑ 12.5

ΟΙ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ, ΜΕΣΟΥ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Στο (a), το συνολικό κόστος είναι ανάλογα του επιπέδου προϊόντος. Το μέσο και οριακό κόστος, όπως παρουσιάζονται στο (b), είναι ίσα και σταθερά για όλα τα επίπεδα προϊόντος.



5.3.2 Ο Νόμος της Ζήτησης

Θα αναλύσουμε πρώτα την σχέση τιμών και ζητούμενων ποσοτήτων, που αποτελεί το λεγόμενο **νόμο της ζητήσεως.** Για να αρχίσουμε ας υποθέσουμε ότι ο (οποιοδήποτε) καταναλωτής αγοράζει τις ποσότητες εκείνες από τα διάφορα αγαθά, που μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του και επομένως, δεν έχει κίνητρο να αλλάξει τους συνδυασμούς των αγαθών που ζητάει να καταναλίσκει δηλαδή ο καταναλωτής βρίσκεται σε **θέση ισορροπίας.** Ας υποθέσουμε τώρα ότι ενώ το εισόδημα και οι προτιμήσεις του καταναλωτή παραμένουν αμετάβλητα, η τιμή ενός μόνο αγαθού, του αγαθού Χ, αυξάνεται. Πως θα αντιδράσει ο καταναλωτής; θα ζητήσει περισσότερες, τις ίδιες ή λιγότερες μονάδες από το αγαθό του Χ; ο καταναλωτής δεν μπορεί να αγοράσει περισσότερες τις ίδιες μονάδες του Χ, γιατί το εισόδημα του δεν το επιτρέπει τώρα που το Χ είναι ακριβότερο. Είναι πιο λογικό να πούμε ότι θα αγοράζει λιγότερες μονάδες, και μάλιστα για δυο λόγους: πρώτα γιατί τώρα, που η τιμή του Χ αυξήθηκε, το εισόδημα του δεν είναι αρκετό για να αγοράσει τις ίδιες ποσότητες, όπως προηγούμενα. Άρα, είναι αναγκασμένος να αγοράσει λιγότερες. Και ύστερα γιατί, τώρα που το αγαθό Χ είναι ακριβότερο, είναι δυνατό ο καταναλωτής να θελήσει να ικανοποιήσει την ανάγκη που του ικανοποιούσε το Χ, με κάποιο άλλο παρόμοιο αγαθό δηλαδή να υποκαταστήσει το Χ με άλλο αγαθό. Π.χ. αν αυξηθεί η τιμή της πορτοκαλάδας, οι καταναλωτές θα στραφούν σιγά σιγά στην κατανάλωση της λεμονάδας, αν έχει γίνει σχετικά φθηνότερη.

Τα αντίθετα ισχύουν σε περιπτώσεις μειώσεως της τιμής του Χ. Ο καταναλωτής θα αγοράσει περισσότερες μονάδες του Χ, πρώτα γιατί με το ίδιο εισόδημα μπορεί να αγοράσει περισσότερες μονάδες και να ικανοποιήσει περισσότερες πληρέστερα τις ανάγκες του, ύστερα γιατί μπορεί να υποκαταστήσει άλλα αγαθά με το Χ, που τώρα έχει γίνει σχετικά φθηνότερο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πώς όταν η τιμή ενός αγαθού αυξάνεται, οι ζητούμενες ποσότητες από τους καταναλωτές μειώνονται, και όταν η τιμή του μειώνεται, οι ζητούμενες ποσότητες αυξάνονται. Η αντίστροφη αυτή σχέση ανάμεσα στις μεταβολές στην τιμή ενός αγαθού και στις μεταβολές στις ζητούμενες ποσότητες του ίδιου αγαθού είναι ο γνωστός νόμος της ζητήσεως.

Η Ατομική καμπύλη της Ζητήσεως

Ο νόμος της Ζητήσεως γίνεται ακόμα πιο σαφής με τη βοήθεια του παραδείγματος στον Πίνακα (6.1.), που δείχνει ότι με δεδομένες τις προτιμήσεις του καταναλωτή και το εισόδημα στο επίπεδο των 1.000 μονάδων κατά χρονική περίοδο (π. χ. εβδομάδα) καθώς η τιμή αυξάνεται από 10 σε 30 μονάδες, ο καταναλωτής μειώνει τη ζήτηση του προϊόντος από 22 σε 24 μονάδες σε κάθε χρονική περίοδο. Η αντίστροφη σχέση που συνδέει τιμές και ποσότητες γίνεται φανερή στο Διάγραμμα (6.1), που δείχνει τους διάφορους συνδυασμούς και υποθέτοντας ότι υπάρχει πλήθος τέτοιων σημείων, παίρνουμε την καμπύλη ΖΖ, που είναι γνωστή ως ατομική καμπύλη της ζητήσεως.

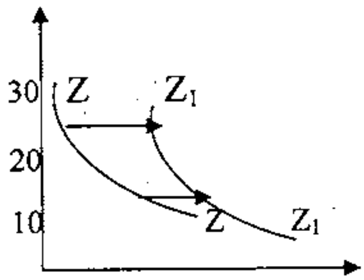
ΠΙΝΑΚΑΣ (6.1)

Παράδειγμα Καμπυλών Ζητήσεως

ΤΙΜΗ ΜΟΝΑΔΑΣ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ (ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ 1.000)	ΖΗΤΟΥΜΕΝΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ (ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ 1.500)
10	22	27
13	16	24
16	12	22
20	9	20
24	7	18
30	4	16

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.1

Η Καμπύλη της Ζητήσεως



Μετατοπίσεις Καμπύλης Ζήτησης

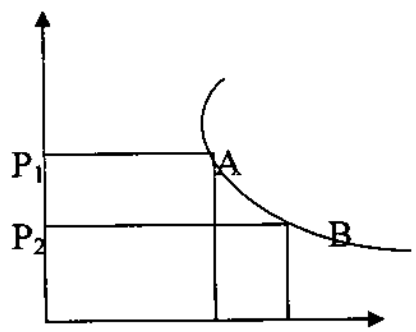
Η ατομική καμπύλη ζήτησης του Διαγράμματος (6.1) δείχνει την σχέση τιμής και ζητούμενης ποσότητας, όταν το εισόδημα και οι προτιμήσεις του καταναλωτή είναι δεδομένα. Στη συνέχεια μας ενδιαφέρει να βρούμε τη σχέση μεταξύ εισοδήματος και ζητούμενων ποσοτήτων, όταν πάρουμε ως δεδομένες τις τιμές των αγαθών και τις προτιμήσεις του καταναλωτή. Η σχέση αυτή είναι φανερή. Εφόσον ο καταναλωτής επιδιώκει τη μεγιστοποίηση της απολαύσεως ή χρησιμότητας του, αν το εισόδημα του αυξηθεί, έχει τη δυνατότητα να αγοράσει μεγαλύτερες ποσότητες από τα διάφορα αγαθά και να ικανοποιήσει πληρέστερα τις ανάγκες του. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το εισόδημα του καταναλωτή μειώνεται. **Υπάρχει συνεπώς, θετική σχέση ανάμεσα στις μεταβολές του εισοδήματος και στις μεταβολές στη ζητούμενη ποσότητα.** Από τον πίνακα (6.1) φαίνεται πως, όταν το εισόδημα του καταναλωτή είναι 1.500 μονάδες αγοράζει μεγαλύτερη ποσότητα για κάθε τιμή του αγαθού. Στο Διάγραμμα (6.1) η αντίστοιχη ατομική καμπύλη ζητήσεως είναι η $Z_1 Z_1$. Συγκρίνοντας τις δυο καμπύλες Z Z και $Z_1 Z_1$ βλέπουμε ότι η αύξηση του εισοδήματος με σταθερές τιμές των αγαθών και τις προτιμήσεις του καταναλωτή ουσιαστικά ισοδυναμεί με μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης προς τα δεξιά. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να αντιληφθεί, ότι σε περίπτωση μειώσεως του εισοδήματος η καμπύλη ζητήσεως μετατοπίζεται προς τα αριστερά. Η τρίτη σχέση που μας ενδιαφέρει να ερευνήσουμε είναι σχέση μεταβολών στις προτιμήσεις του καταναλωτή και στις ζητούμενες ποσότητες, όταν το εισόδημα του και οι τιμές παραμένουν σταθερές. Αν για κάποιο λόγο αυξηθεί η ένταση της επιθυμίας για κάποιο αγαθό, η ζητούμενη ποσότητα σε κάθε τιμή θα αυξηθεί. Αντίθετα, αν η ένταση της επιθυμίας υποχωρήσει, η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί. Π.χ. το καλοκαίρι αυξάνεται η ζήτηση μπύρας και μειώνεται η ζήτηση κονιάκ, το αντίθετο συμβαίνει το χειμώνα. Έτσι το καλοκαίρι η καμπύλη ζήτησης της μετατοπίζεται προς τα δεξιά και του κονιάκ προς τα αριστερά. Οι αντίθετες μετατοπίσεις συμβαίνουν το χειμώνα.

Η Ελαστικότητα ζήτησης

Από το νόμο της ζητήσεως γνωρίζουμε, πως μεταβάλλεται η ζητούμενη ποσότητα, όταν μεταβληθεί η τιμή ενός αγαθού. Έχει μεγάλη χρησιμότητα να γνωρίζουμε επιπλέον το μέγεθος της μεταβολής της ποσότητας σε μια μεταβολή της τιμής. Π.χ. είναι χρήσιμο για την άσκηση οικονομικής πολιτικής να γνωρίζουμε, πόσο θα μειωθεί η ζήτηση βενζίνης, αν η τιμή αυξηθεί κατά 25%. Την πληροφορία αυτή μας την δίνει **η ελαστικότητα της ζητήσεως ως προς την τιμή.**

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (6.3)

ΚΑΜΠΥΛΗ ΖΗΤΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ



Η ελαστικότητα της ζητήσεως ως προς την τιμή ορίζεται ως **ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας ως προς την μεταβολή της τιμής.** Ο ορισμός της ελαστικότητας γίνεται σαφής με την βοήθεια του διαγράμματος (6.3.) που δείχνει την (συνολική) καμπύλη ζητήσεως ενός αγαθού. Έστω ότι αρχικά η τιμή είναι P1 και η ζητούμενη ποσότητα Q1, και ότι η τιμή μειώνεται σε P2. Η καμπύλη της ζητήσεως δείχνει, ότι η ζητούμενη ποσότητα θα αυξηθεί σε Q2. Η μεταβολή της τιμής κατά ΔP έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της ποσότητας κατά ΔQ.

Σε σχέση με την αρχική τιμή, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής είναι ΔP/P1 και η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας είναι ΔQ/Q1.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό η ελαστικότητα της ζητήσεως είναι

$$\frac{\Delta Q}{Q1} : \frac{\Delta P}{P1}$$

Γενικά η ελαστικότητα της ζητήσεως είναι :

$$E_Z = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q * P}{\Delta P * Q}$$

Η ελαστικότητα της ζητήσεως είναι αρνητική, επειδή η σχέση ανάμεσα στις μεταβολές τιμών και στις ποσότητες είναι αρνητική.

Από τον παραπάνω τύπο της ελαστικότητας φαίνεται ότι το μέγεθος της εξαρτάται από την κλήση της καμπύλης της ζητήσεως στο αρχικό σημείο, που εκφράζεται στο λόγο ΔQ/ΔP, και από τον λόγο των αρχικών μεγεθών P/Q. Για παράδειγμα υπολογισμού της ελαστικότητας παίρνουμε τον συνδυασμό P=10, Q=22 του πίνακα (6.1) ως αρχικά μεγέθη, και υποθέτουμε ότι η τιμή γίνεται P=13 και η ποσότητα Q=16. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ΔP=3, ΔQ=-6, P=10 και Q=22.

Η ελαστικότητα είναι:

E_Z= -6/3 · 10/22 = -0,909

Αν χρησιμοποιήσουμε άλλο συνδυασμό του πίνακα η ελαστικότητα θα είναι διαφορετική. Π.χ. αν αρχικά έχουμε P=24 και Q=7, και η τιμή μειώνεται σε P=20, οπότε Q=9 τότε ΔP=-4, ΔQ=2, P=24,Q=7 και η ελαστικότητα είναι:

$E_Z = 2/-4 \cdot 24/7 = -1{,}71$

Ακόμα πρέπει να αναφερθεί ότι ***όταν η ελαστικότητα είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα (πάντα σε απόλυτες τιμές), λέμε ότι η ζήτηση είναι ελαστική και όταν είναι μικρότερη λέμε ότι η ζήτηση είναι ανελαστική***.

ΑΣΚΗΣΗ:

Το κόστος παραγωγής της ποσότητας Q ενός προϊόντος είναι $C(q)= 2Q^2-36Q+25$ και η τιμή πώλησης της μονάδας προϊόντος είναι $P(q)= \frac{1}{2} Q-15$.

Να υπολογισθούν οι ποσότητες του προϊόντος για τις οποίες:

i) το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο.

ii) το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο.

iii) το κέρδος από την πώληση του προϊόντος είναι μέγιστο.

ΛΥΣΗ:

Κόστος παραγωγής: $C(Q)= 2Q^2-36Q+25$

Τιμή πώλησης: $P(Q)= \frac{1}{2} Q-15$

i. Για να βρω το ελάχιστο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσω τη μέθοδο της παραγώγησης στην συνάρτηση του κόστους παραγωγής.

   Παραγωγίζω και έχω:

   $C'(Q)=(2Q^2-36Q+25)'$

   $= 2\cdot 2Q^{2-1}-36\cdot 1+0$

$= 4Q-36$

Άρα: $C'(Q) = 4Q-36$

Αρχικά τα μηδενίζω, για να βρω το Q

$C'(Q) = 0$

$4Q-36 = 0$

$4Q = 36$

$Q = 9$

Q		
C '(q)	-	+
C (q)	↘	↗

Ελάχιστο για Q=9

Για τιμές μικρότερες του 9, έχω αρνητικό πρόσημο, άρα η συνάρτηση είναι φθίνουσα και για τιμές μεγαλύτερες του 9, έχω θετικό πρόσημο, άρα η συνάρτηση είναι αύξουσα. Συνεπώς το σημείο στο οποίο η συνάρτηση έχει ελάχιστο είναι για Q=9. Οπότε το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο για Q=9 μονάδες προϊόντος.

ii. $R(Q) = P(q) \cdot Q$

$$= \left(\frac{1}{2}Q-15\right)Q$$

$$= \frac{1}{2}Q^2-15Q$$

ενώ $R'(Q)= \left(\frac{1}{2}Q^2-15Q\right)'$

$$= Q-15$$

$R'(Q)= 0$

$Q-15=0$

$Q=15$

Επειδή $R''(q)=1>0$, Το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο για πώληση 15μ.μ. του προϊόντος

iii. Κέρδος = Συνολικό έσοδο – Κόστος

$K(Q) = R(Q)-C(Q)$

$K(Q) = \left[\left(\frac{1}{2}Q-15\right)\cdot Q-(2Q^2-36Q+25)\right]$

$K(Q) = \left[\left(\frac{1}{2}Q^2-15Q\right)-(2Q^2-36Q+25)\right]$

$K(Q) = \left(\frac{1}{2}Q^2-2\frac{Q^2}{2}\right)+(-15Q+36Q)+25$

$K(Q) = -\frac{3}{2}Q^2+21Q+25$

$K'(Q) = \left(-\frac{3}{2}Q^2+21Q+25\right)'$

$K'(Q) = -3Q+21$

Και

$K'(Q) = 0$

$-3Q+21=0$

$21=3Q$

$Q=7$

Όμως $K''(Q) = -3<0$ και κατά συνέπεια το κέρδος γίνεται μέγιστο από την παραγωγή και πώληση 7μ.μ. του προϊόντος.

ΑΣΚΗΣΗ:

Θεωρούμε έναν κατασκευαστή μοτοποδηλάτων του οποίου τα εβδομαδιαία έξοδα και έσοδα (σε χρηματικές μονάδες) είναι:

$C(x)= 2000+40x -\frac{x^2}{20}$ και

$R(x)= 80x + \frac{x^2}{10}$ αντίστοιχα:

α) Να βρείτε τη συνάρτηση οριακού κόστους και των οριακών εσόδων.

β) Ποιο είναι το μέτρο μεταβολής του κόστους όταν το επίπεδο παραγωγής είναι X=30 μοτοποδήλατα την εβδομάδα;

γ) Ποιο είναι το μέτρο μεταβολής των εσόδων όταν το επίπεδο παραγωγής είναι X=30 μοτοποδήλατα την εβδομάδα;

δ) Να εκτιμήσετε το κόστος παραγωγής του 31ου μοτοποδηλάτου.

ε)Να εκτιμήσετε τα έσοδα από την πώληση του 31^{ου}

μοτοποδηλάτου.

ΛΥΣΗ:

$C(x) = 2.000 + 40x - \frac{X^2}{20} \longrightarrow$ Έξοδα

$R(x) = 80x + \frac{X^2}{10} \longrightarrow$ Έσοδα

α) Για να βρω την συνάρτηση οριακού κόστους θα πρέπει να παραγωγίσω την συνάρτηση C (x) :

$$MC = C'(x) = \left(2000 + 40x - \frac{x^2}{20}\right)'$$

$$= 40 - \frac{2x}{20}$$

$$= 40 - \frac{x}{10}$$

Τα οριακά έσοδα και αυτά για να βρεθούν, παραγωγίζω την συνάρτηση εσόδων:

$$MR = R'(x) = \left(80x + \frac{x^2}{10}\right)'$$

$$= 80 + \frac{2x}{10}$$

$$= 80 + \frac{x}{5}$$

οπότε η συνάρτηση οριακών εξόδων είναι:

$MC = 40 - \frac{x}{...}$

10

Και των οριακών εσόδων:

$$MR = 80+\frac{x}{5}$$

β) $C'(30)= 40-\frac{30}{10} = 40-3=37$

γ) $R'(30)= 80+\frac{30}{5} = 80+6=86$

δ) $C'(31)= 40-\frac{31}{10} = 40-3,1=36,9$

ε) $E'(31)= 80+\frac{31}{5}= 80+6,2=86,2$

ΑΣΚΗΣΗ:

Δίνεται η συνάρτηση εσόδων μιας επιχείρησης $R=24Q-Q^2$

Να βρεθεί το επίπεδο πωλούμενων ποσοτήτων ώστε τα έσοδα να γίνονται μέγιστα.

ΛΥΣΗ:

Από την συνάρτηση γνωρίζουμε την συνάρτηση εσόδων. Οπότε για να βρούμε τα επίπεδο πωλούμενων ποσοτήτων ώστε τα έσοδα να γίνουν μέγιστα, θα πρέπει να παραγωγήσουμε την συνάρτηση εσόδων, δηλαδή:

$R(Q) = 24Q-Q^2$

$R(Q) = (24Q-Q^2)'$

$R(Q) = 24-2Q$

Και τη μηδενίζω:

$R'(Q) = 0$

$24 - 2Q = 0$

$24 = 2Q$

$Q = 12$

Q		Q = 12	
R΄(q)	+		-
R (q)	↗		↘

Για τιμές Q μικρότερες του 12 έχω θετικό πρόσημο, άρα αύξουσα συνάρτηση για Q μεγαλύτερες του 12

ΑΣΚΗΣΗ:

Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης από την εξίσωση

$4Q+P=28$

Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης όταν P=2.

ΛΥΣΗ:

Έχω $4Q+P=28$ για $P=2$

Άρα $4Q+P=28$

$4Q+2=28$

$4Q=28-2$

$4Q=26$

$Q=26/4$

$Q=6,5$

Λύνω ως προς Q την αρχική συνάρτηση:

$4Q+P=28$

$4Q=28-P$

$Q=7-1/4P$

Την παραγωγίζω: $(Q)'=(7-1/4P)'$

$(Q)'=-1/4$

όπου $\Delta Q/\Delta P=-1/4$

άρα θα έχω $E_D=\dfrac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$

$$E_D=-\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P}{Q}$$

$E_D=-1/4\cdot 2/6,5$

$E_D=-1/2\cdot 1/6,5$

$E_D=-1/13$

Άρα έχω εντελώς ανελαστική ζήτηση. Δηλαδή αυτό μας δείχνει ότι η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής δεν θα επιφέρει καμία μεταβολή της ποσότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Οικονομικά Μαθηματικά «Κουμούσης» Τ.Ε.Ι. Πάτρας 1995
- Περιγραφική Στατιστική «Π. Α. Κιοχος»2000
- Πολιτική Οικονομία έκδοση ε΄«ε.Μπένου»Αθήνα 1998
- Μικροοικονομική Θεωρία εκδόσεις Κριτική Επιστημονική βιβλιοθήκη «Walter Nicholson»1999
- Χρηματοοικονομική Ανάλυση Λογιστικών Καταστάσεων εκδόσεις Σταμούλη «Νικήτα Νιάρχου»2000
- Γενικά Μαθηματικά Μακεδονικές εκδόσεις «Σπ. Κ. Σάσσαλος»2004
- Χρηματοοικονομική Διοικητική εκδόσεις Παπαζήση «Γ.Κ. Φιλιππάτος & Π.Ι. Αθανασόπουλος»
- Μαθηματικά για τον τομέα Διοίκησης και Οικονομίας, Μακεδονικές εκδόσεις «Μιχ.Γρ.Βόσκογλου».
- Διαφορικός-Ολοκληρωτικός Λογισμός, εκδόσεις Δηρός «Δ.Δημητρακούδη, Ι. Θεοδώρου, Π.Κικίλα, Ν.Κουρή και Δ.Παλαμουρδά.
- Παράγωγοι-Ολοκληρώματα εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου «γ.Μπαράλος»1994