ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ

ΘΕΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΟΙ :

ΒΥΛΛΙΩΤΗ ΑΝΤΩΝΙΑ
ΜΕΛΙΣΣΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ :
Ι. ΖΑΧΑΡΑΚΗΣ

ΠΑΤΡΑ ,2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιούνται οι επιχειρήσεις και οι διάφοροι οργανισμοί, γίνεται όλο και πιο πολύπλοκο και μεταβάλλεται διαρκώς, λόγω των τεχνολογικών, οικονομικών και κοινωνικών εξελίξεων. Οι διοικήσεις των επιχειρήσεων και των οργανισμών, για να αντιμετωπίσουν το σημερινό ανταγωνιστικό περιβάλλον, θα πρέπει να σχεδιάζουν και να προγραμματίζουν τις δραστηριότητες τους με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, λαμβάνοντας υπόψιν όλους εκείνους τους παράγοντες που τις επηρεάζουν. Αυτό σημαίνει ότι καθώς ο επιχειρηματικός κόσμος καθίσταται περισσότερο σύνθετος, όσο ποτέ άλλοτε, αυξάνεται σημαντικά η ανάγκη απόκτησης πληροφοριών, οι οποίες θα υποστηρίζουν αποτελεσματικά τη διαδικασία λήψης των αποφάσεων.

Σημαντικό ρόλο στη λήψη των αποφάσεων έχουν οι πληροφορίες που προέρχονται από προβλέψεις και οι οποίες αφορούν τις μελλοντικές εξελίξεις του περιβάλλοντος των οικονομικών μονάδων. Η διαμόρφωση των προβλέψεων βασίζεται σε μια διαδικασία, η οποία αποσκοπεί αρχικά στη μελέτη ενός οικονομικού φαινομένου με την ανάλυση αριθμητικών δεδομένων του, ώστε να αποκαλυφθεί και να αναγνωριστεί ο τρόπος συμπεριφοράς του. Η αποκτώμενη αυτή πληροφόρηση χρησιμοποιείται στη συνέχεια για το σχηματισμό προβλέψεων.

Βασικό ρόλο στην ανάπτυξη ανάλυσης των προβλημάτων αποτέλεσε η απλή διαπίστωση, ότι η επίλυση πολύπλοκων και ιδιαίτερα σημαντικών προβλημάτων λήψης αποφάσεων, δεν είναι δυνατό να πραγματοποιείται μέσω μιας μονόπλευρης ανάλυσης. Κατά την προσπάθεια όμως, εξέτασης όλων των παραμέτρων ενός προβλήματος και των κριτηρίων /παραγόντων που επηρεάζουν τη λήψη της κατάλληλης απόφασης, γεννάται ένα ιδιαίτερα σημαντικό πρόβλημα, το οποίο ορισμένες φορές αποθαρρύνει τους αποφασίζοντες και αναλυτές, και αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί η σύνθεση όλων των παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί η λήψη ορθολογικών αποφάσεων.

Όπως είναι κατανοητό, το αποτέλεσμα της όποιας ανάλυσης, που πραγματοποιείται με σκοπό την αντιμετώπιση ενός προβλήματος λήψης αποφάσεων, έχει ως τελικό αποδέκτη τον ίδιο τον αποφασίζοντα. Συνεπώς, η ανάπτυξη υποδειγμάτων λήψης αποφάσεων μέσω μεθοδολογικών προσεγγίσεων, που δεν είναι σε θέση να ενσωματώσουν τον αποφασίζοντα και τις προτιμήσεις του, τον περιορίζουν στην παρακολούθηση και εφαρμογή των αποτελεσμάτων μαθηματικών υποδειγμάτων.

Απώτερος στόχος είναι η παροχή των απαραίτητων πληροφοριών για την υποστήριξη της διαδικασίας λήψης αποφάσεων, συμβάλλοντας στον εντοπισμό των βασικών χαρακτηριστικών του εξεταζόμενου προβλήματος ,καθώς και των ιδιαιτεροτήτων των διαθέσιμων εναλλακτικών λύσεων.

Οι αποφάσεις που παίρνονται στον κόσμο των επιχειρήσεων, μπορεί συχνά να εμπεριέχουν σημαντικά χρηματικά ποσά και το κόστος της λήψης μιας απόφασης να είναι σημαντικό. Έτσι, αυτός που παίρνει τις αποφάσεις θα πρέπει να συγκεντρώσει όσο το δυνατό περισσότερη σχετική πληροφορία πριν να πάρει κάποια απόφαση.

➢ ΔΟΜΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο Νο1 κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή στις προβλέψεις, που είναι μια από τις βασικές λειτουργίες της διοίκησης των επιχειρήσεων, αφού αποτελούν απαραίτητη πηγή πληροφόρησης των επιχειρηματικών και οικονομικών αποφάσεων. Παρουσιάζονται επίσης, κάποιες βασικές έννοιες της ανάλυσης αποφάσεων.

Στο Νο2 κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα καθεστώτα συνθηκών περιβάλλοντος (βεβαιότητας, αβεβαιότητας, κινδύνου), εντός του οποίου λαμβάνονται οι αποφάσεις.

Συχνά χρειάζεται να πάρουμε μια σειρά αποφάσεων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Τότε, για τον καθορισμό της βέλτιστης απόφασης χρησιμοποιούμε τα « δέντρα αποφάσεων ».Αυτά παρουσιάζονται στο Νο3 κεφάλαιο.

Στο επόμενο κεφάλαιο,Νο4,εξετάζουμε μια ειδική κατηγορία αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας, που αφορούν στα προβλήματα ανταγωνισμού ή συγκρούσεων. Τη λεγόμενη , « θεωρία παιγνίων» .

Στα επόμενα κεφάλαια 5 και 6 , παρουσιάζονται οι αλυσίδες MARKOV, οι οποίες μπορούν να δώσουν τις πιθανότητες μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη. Ακόμη παρουσιάζονται κάποιες MARKOV διαδικασίες απόφασης (Μ.Δ.Α), οι οποίες αποτελούν προβλήματα πιθανοθεωρητικού δυναμικού προγραμματισμού άπειρου χρονικού ορίζοντα.

Στο Νο7 κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποιες μέθοδοι εύρεσης μέγιστης ροής σε δίκτυο (το οποίο είναι ένα προσανατολισμένο και συνεκτικό γράφημα που έχει κάποια βασικά χαρακτηριστικά, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με το κεφάλαιο Νο8, στο οποίο καταγράφονται 2 πολύ βασικές μέθοδοι (PERT – CPM) σχεδιάσεως προγραμματισμού και ελέγχου πολύπλοκων δραστηριοτήτων.

- **ΣΤΟΧΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

Στις σημειώσεις αυτές, στόχο έχουμε να διερευνήσουμε τα σπουδαιότερα μαθηματικά μοντέλα στη διαδικασία λήψης απόφασης καθώς και τις ιδιότητες τους. Για παράδειγμα προβλήματα επιλογής υποψηφίων, βέλτιστων διαδρομών, επιλογής κινήσεων σε παιχνίδια, που αποτελούν ζητήματα που διέπονται από μία κοινή ιδιαιτερότητα : υπάρχει ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών, από όπου πρέπει ένα συγκεκριμένο υποσύνολο να επιλεχθεί.

Η συγγραφή έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε να κατανοήσει ο αναγνώστης τη μεθοδολογία των τεχνικών αυτών και συγχρόνως να είναι σε θέση να τις εφαρμόσει στην πράξη και να μπορεί να ερμηνεύει τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο σύγχρονος άνθρωπος, ως κοινωνικό ον, ενδιαφέρεται από τη φύση του να γνωρίζει την εξέλιξη πολλών πτυχών της ζωής του στο μέλλον, όπως για παράδειγμα την εξέλιξη της προσωπικής του ζωής, της επαγγελματικής του καριέρας κ.ά. Η γνώση αυτή αποτελεί αναμφισβήτητα μια χρήσιμη πηγή πληροφόρησης, την οποία ο καθένας θα ήθελε να έχει. Μάλιστα, το γεγονός ότι ζούμε σε ένα διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας, κάνει την ανθρώπινη αυτή επιθυμία να γίνεται όλο και πιο μεγάλη. Βέβαια, ο άνθρωπος δεν είναι δυνατό να γνωρίζει με βεβαιότητα εκ των προτέρων τη μελλοντική εξέλιξη γεγονότων και καταστάσεων που αφορούν τη ζωή του. Για το λόγο αυτό προσπαθεί να λαμβάνει τα "κατάλληλα" μέτρα, ώστε να μειώνει σε κάποιο βαθμό το στοιχείο της αβεβαιότητας.

Η πρόγνωση αυτή του μέλλοντος βοηθάει τον άνθρωπο στο να λαμβάνει τις "καλύτερες" δυνατές αποφάσεις και συγχρόνως του παρέχει τη δυνατότητα να προφυλάσσεται από δυσάρεστες μελλοντικές καταστάσεις. Άλλωστε, η ανθρώπινη αυτή επιθυμία της πρόγνωσης δεν αποτελεί σημερινό σημείο των καιρών, αλλά θα έλεγε κανείς ότι έχει τις ρίζες της πολλούς αιώνες πριν. Για παράδειγμα, στην Αρχαία Ελλάδα ένας τέτοιος προβληματισμός αντιμετωπιζόταν με μια ή περισσότερες επισκέψεις στο Μαντείο των Δελφών.

Θα πρέπει ωστόσο να σημειώσουμε ότι αν οι άνθρωποι γνώριζαν με βεβαιότητα το τι πρόκειται να τους συμβεί στο μέλλον, η ζωή τους θα ήταν πολύ "φτωχότερη" από πλευράς ενδιαφέροντος, αφού όλα θα ήταν γνωστά και προκαθορισμένα. Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα, ο άνθρωπος μαθαίνει να συμβιώνει με το στοιχείο της αβεβαιότητας και καθορίζει τις ενέργειές του προσπαθώντας να το μειώσει, εφόσον κατά κανόνα δεν είναι σε θέση να το εξαλείψει.

Αντίστοιχα με την ανθρώπινη προσπάθεια για τη γνώση του "αύριο" είναι και οι προσπάθειες που καταβάλλουν οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί, προκειμένου να αποκτήσουν την κατάλληλη πληροφόρηση αναφορικά με τη μελλοντική τους εξέλιξη στο χώρο που δραστηριοποιούνται. Οι οικονομικές αυτές μονάδες προγραμματίζουν τις δραστηριότητες τους στηριζόμενες σε εκτιμήσεις για το τι πρόκειται να συμβεί στο μέλλον. Κάθε επιχείρηση ή οργανισμός λαμβάνει αποφάσεις με βάση προβλέψεις οικονομικών μεγεθών που προέρχονται από την επεξεργασία των διαθέσιμων δεδομένων και την εφαρμογή των κατάλληλων μεθόδων πρόβλεψης. Μάλιστα, αν λάβουμε υπ' όψιν το γεγονός ότι στις μέρες μας οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί δραστηριοποιούνται σ' ένα πολύ σύνθετο όσο ποτέ άλλοτε περιβάλλον, τότε εύκολα διαπιστώνουμε πόσο σημαντικά μεγάλο ρόλο παίζουν οι προβλέψεις στον καθορισμό της πορείας τους στην αγορά.

ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ

Οι περισσότερες αποφάσεις των οικονομικών μονάδων βασίζονται σε κάποιου είδους πρόβλεψη αναφορικά με τις μελλοντικές εξελίξεις διάφορων οικονομικών μεγεθών. Αυτό συμβαίνει διότι στη σημερινή εποχή οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί λειτουργούν μέσα σ' ένα ανταγωνιστικό και διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον, με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας. Στο περιβάλλον αυτό τα διοικητικά στελέχη καλούνται να λάβουν σημαντικές αποφάσεις που αφορούν τις μελλοντικές εξελίξεις της ίδιας της επιχείρησης. Για παράδειγμα, αποφάσεις που αφορούν τις παραγόμενες ποσότητες των προϊόντων, το σχεδιασμό της παραγωγικής διαδικασίας, τις ανάγκες σε ανθρώπινους και λοιπούς πόρους, το ύψος των διαφημιστικών δαπανών και πολλές άλλες, βασίζονται κατά κύριο λόγο στην πρόβλεψη της μελλοντικής ζήτησης. Κατά συνέπεια, η πρόβλεψη της ζήτησης των προϊόντων ή των υπηρεσιών αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές λειτουργίες των επιχειρήσεων και των οργανισμών.

Αναμφισβήτητα, όταν το περιβάλλον είναι σχετικά σταθερό ή με προβλεπόμενο ρυθμό μεταβολών, η αναγκαιότητα των προβλέψεων δεν είναι πολύ μεγάλη. Όμως, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το σημερινό περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιούνται οι οικονομικές μονάδες είναι ως επί το πλείστον ανταγωνιστικό και διαρκώς μεταβαλλόμενο, λόγω οικονομικών, τεχνολογικών, κοινωνικών και πολιτικών αλλαγών. Σ' ένα τέτοιο περιβάλλον η αναγκαιότητα των προβλέψεων θεωρείται ιδιαίτερα επιτακτική, διότι οι προβλέψεις της ζήτησης καλύπτουν τις πληροφοριακές απαιτήσεις όχι μόνο της οικονομικής ομάδας στο σύνολο της, αλλά και των επί μέρους τμημάτων της. Έτσι, για να είναι οι διοικητικές αποφάσεις που λαμβάνονται οι καλύτερες δυνατές, θα πρέπει κατά κανόνα να υποστηρίζονται και από τις αντίστοιχες προβλέψεις οικονομικών μεγεθών.

Από τα παραπάνω προκύπτουν δύο χρήσιμα συμπεράσματα αναφορικά με τη χρησιμότητα των προβλέψεων:

- Η πρόβλεψη είναι μια αναγκαία και από τις πλέον βασικές λειτουργίες της διοίκησης των επιχειρήσεων.
- Η πρόβλεψη αποτελεί μία απαραίτητη πηγή πληροφόρησης, η οποία υποστηρίζει τη λήψη των αποφάσεων. Μάλιστα, όσο πιο "ακριβής" είναι η πρόβλεψη, τόσο πιο σωστή αναμένεται να είναι και η απόφαση που λαμβάνεται.

Βέβαια, μια πρόβλεψη, όσο "ακριβής" κι αν φαίνεται ότι είναι, δεν μπορεί να εξαλείψει τελείως το στοιχείο της αβεβαιότητας. Παρόλα αυτά, η πρόβλεψη είναι μια σημαντική πηγή πληροφόρησης για τη λήψη των αποφάσεων, επειδή περιορίζει την αβεβαιότητα που αποτελεί ένα χαρακτηριστικό στοιχείο του μέλλοντος.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ

Οι προβλέψεις μπορούν να ταξινομηθούν με βάση διάφορα κριτήρια ταξινόμησης. Ένα πρώτο κριτήριο αφορά τον ορίζοντα προγραμματισμού, στον οποίο αναφέρονται. Σύμφωνα με αυτό, οι προβλέψεις διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμες, μεσοπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες. Οι βραχυπρόθεσμες προβλέψεις αναφέρονται στο άμεσο μέλλον, οι μακροπρόθεσμες στο απώτερο μέλλον, ενώ οι μεσοπρόθεσμες σε ενδιάμεσο χρονικό ορίζοντα προγραμματισμού. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ταξινόμηση αυτή είναι αρκετά σχετική, επειδή δεν υπάρχει ένας σαφής ορισμός για κάθε περίπτωση πρόβλεψης. Αυτό εξαρτάται, μεταξύ άλλων παραγόντων, κυρίως από την οικονομική μεταβλητή για την οποία γίνεται η πρόβλεψη, καθώς και από το είδος των διαθέσιμων δεδομένων. Για παράδειγμα, όταν το διοικητικό στέλεχος μιας επιχείρησης ενδιαφέρεται να γνωρίζει τις προβλέψεις των πωλήσεων ενός προϊόντος για τις προσεχείς τέσσερις εβδομάδες, οι προβλέψεις αυτές θεωρούνται ως βραχυπρόθεσμες. Αν όμως ενδιαφέρεται για τις προβλέψεις πωλήσεων του ίδιου προϊόντος για την επόμενη πενταετία, τότε οι προβλέψεις θεωρούνται ως μακροπρόθεσμες, φυσικά, αν αναφερόμασταν στην πρόβλεψη του καιρού, βραχυπρόθεσμη θα ήταν η πρόβλεψη του καιρού για τα επόμενα εικοσιτετράωρα, ενώ μακροπρόθεσμη η πρόβλεψη των επόμενων εβδομάδων. Αντίστοιχα, στην περίπτωση των προβλέψεων για το επίπεδο ανεργίας σε μια χώρα, οι βραχυπρόθεσμες αναφέρονται στους προσεχείς δώδεκα το πολύ μήνες, ενώ οι μακροπρόθεσμες στα προσεχή χρόνια.

Ένα δεύτερο κριτήριο ταξινόμησης των προβλέψεων σχετίζεται με το οικονομικό επίπεδο (μικροοικονομικό ή μακροοικονομικό), στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή.

Για παράδειγμα, οι προβλέψεις για το απαιτούμενο προσωπικό μιας επιχείρησης είναι προβλέψεις μικροοικονομικού επιπέδου, ενώ οι προβλέψεις για το επίπεδο απασχόλησης του εργατικού δυναμικού μιας χώρας είναι προβλέψεις μακροοικονομικού επιπέδου. Σημειώνεται ότι τα ανώτατα στελέχη των επιχειρήσεων ενδιαφέρονται όχι μόνο για προβλέψεις μεταβλητών της επιχείρησης τους, αλλά και για προβλέψεις μεταβλητών του κλάδου τους και γενικότερα της οικονομίας σε εθνικό ή και σε διεθνές επίπεδο.

Μια τρίτη διάκριση είναι εκείνη μεταξύ ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων προβλέψεων. Οι ποιοτικές μέθοδοι προβλέψεων αφορούν τεχνικές, οι οποίες βασίζονται περισσότερο στην πείρα και στις υποκειμενικές εκτιμήσεις διοικητικών στελεχών και εμπειρογνωμώνων, παρά αποκλειστικά στην ανάλυση αριθμητικών δεδομένων. Οι μέθοδοι αυτές αναφέρονται και ως υποκειμενικές μέθοδοι προβλέψεων και χρησιμοποιούνται κυρίως στις περιπτώσεις που δεν υπάρχουν επαρκή ή κατάλληλα ιστορικά δεδομένα, όπως ενδέχεται να συμβαίνει π.χ. κατά την εισαγωγή ενός καινούργιου προϊόντος στην αγορά. Οι πλέον γνωστές υποκειμενικές μέθοδοι είναι η μέθοδος των Δελφών και η μέθοδος των εκτιμήσεων των διοικητικών στελεχών. Αντίθετα, οι ποσοτικές μέθοδοι προβλέψεων στηρίζονται στην ποσοτική ανάλυση αριθμητικών δεδομένων για την πρόβλεψη της εξεταζόμενης οικονομικής μεταβλητής. Οι μέθοδοι αυτές είναι κυρίως "μηχανιστικές διαδικασίες" και δεν χρησιμοποιούν ως εισροές δεδομένων τις υποκειμενικές εκτιμήσεις των διοικητικών στελεχών. Ορισμένες από τις ποσοτικές μεθόδους προβλέψεων είναι αρκετά απλές στην εφαρμογή τους, ενώ άλλες περισσότερο πολύπλοκες. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι προβλέψεις που προέρχονται αποκλειστικά από την εφαρμογή των ποσοτικών μεθόδων είναι δυνατό να συνδυαστούν με αντίστοιχες ποιοτικών μεθόδων ώστε τα προσαρμοσμένα αριθμητικά αποτελέσματα να ανταποκρίνονται καλύτερα στις επικρατούσες συνθήκες του περιβάλλοντος.

ΕΝΝΟΙΑ - ΣΗΜΑΣΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΣ

Πολύ συχνά η λήψη αποφάσεως αποτελεί υπέρβαση δυνάμεως ή προσωπική επιλογή, ή μέτρια διεύθυνση ή μία ωμή επίδειξη του πνεύματος της αποφάσεως. Η βαθειά ανάλυση του προβλήματος, ο προσδιορισμός της υφισταμένης πρώτης αιτίας και ο κατάλογος εναλλακτικών λύσεων παρέχουν την δυνατότητα σ' αυτούς που λύνουν τα προβλήματα και λαμβάνουν τις αποφάσεις να κάνουν αντικειμενική ή ορθολογική εκτίμηση.

Για καθένα από μας η σύνθετη υπόθεση της ζωής είναι αποτέλεσμα αναρίθμητων αποφάσεων, είτε δικών μας ή άλλων. Οι αποφάσεις ξεκινούν από πολύ απλές και τετριμμένες και φθάνουν μέχρι σοβαρές και ιστορικές .

Η λήψη αποφάσεων είναι ένα από τα βασικά καθήκοντα των προϊσταμένων, κάθε επιπέδου, αλλά η σοβαρότητα τους εξαρτάται από τις αρμοδιότητες και την εξουσία, που έχει κάθε προϊστάμενος.

Τι είναι όμως Απόφαση; Απόφαση ανεξαρτήτως της σημασίας ή της πολυπλοκότητας, είναι μια κρίση και μία επιλογή της καλύτερης από τις εναλλακτικές λύσεις που έχουμε στην διάθεση μας. Εναλλακτική λύση είναι ένας πιθανός τρόπος ενέργειας που είναι πιθανόν να περιορίσει ή να διορθώσει ένα πρόβλημα ή να μεγιστοποιήσει μία ευκαιρία.

Σκοπός ή και πρόθεση των προϊσταμένων αποτελεί η λήψη αποτελεσματικών αποφάσεων, δηλ. η επιλογή εκείνης της εναλλακτικής λύσεως, που θα δώσει τα καλύτερα αποτελέσματα, με βάση τους αντικειμενικούς σκοπούς που έχει θέσει η επιχείρηση.

Η αποτελεσματική λήψη αποφάσεων απαιτεί την «ορθολογική» επιλογή μιας πορείας δράσεως. Για τη σωστή και «ορθολογική» λήψη αποφάσεων, σύμφωνα με ορισμένες απόψεις, θα πρέπει να προϋπάρχουν συνθήκες, όπως οι ακόλουθες:

- Να είναι ικανά, να λαμβάνουν σωστά αποφάσεις.
- Να επιχειρούν να φθάσουν σε κάποιο στόχο, που δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς θετικές ενέργειες.
- Να έχουν σαφή αντίληψη των πορειών, μέσω των οποίων θα μπορούσε να επιτευχθεί ένας στόχος με τις συνθήκες, τις δυνατότητες και τους περιορισμούς, που υπάρχουν.
- Να γνωρίζουν πού αρχίζει και πού σταματά μια απόφαση, σε ποιες αρχές θα βασισθεί η λήψη αποφάσεως.
- Να έχουν τις πληροφορίες και την ικανότητα να αναλύσουν τις εναλλακτικές λύσεις για την επίτευξη του επιδιωκόμενου σκοπού. Να συμπληρώνονται οι πληροφορίες διαρκώς, ώστε να υπάρχει αυτό που αποκαλέσαμε πριν «επαναπληροφόρηση ».
- Να έχουν την αισιοδοξία, ότι θα επιτύχουν επιλέγονται την εναλλακτική λύση, πού υπόσχεται περισσότερό την πραγματοποίηση του στόχου.

Ο ορθολογισμός περιορίζεται, διότι οι αποφάσεις που λαμβάνονται στο μέγιστο ποσοστό αφορούν αντιμετώπιση θεμάτων, που εκτείνονται από την επόμενη στιγμή έως τα επόμενα είκοσι, τριάντα έτη, που δεν υπάρχουν τα αναγκαία και απαραίτητα στοιχεία. Οπωσδήποτε δεν αναφέρονται στο παρελθόν για το οποίο υπάρχουν πληροφορίες. Η ταχύτητα της εξελίξεως και η δυναμική γενικά μεταβολή των συνθηκών που περιβάλλουν τα διοικητικά στελέχη κάνουν πιο δύσκολη τη λήψη αποφάσεων.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Λήψη αποφάσεων είναι η διαδικασία προσδιορισμού προβλημάτων και ευκαιριών, αναπτύξεως εναλλακτικών λύσεων, επιλογής της καλλίτερης εναλλακτικής λύσεως και τέλος υλοποιήσεώς της.

Κατά την λήψη αποφάσεων ο προϊστάμενος καταλήγει σε ένα αποτέλεσμα στηριζόμενος στην αξιολόγηση εναλλακτικών λύσεων. Με τον όρο Πρόβλημα εννοούμε κάθε ζήτημα για το οποίο φροντίζουμε, αναζητούμε λύσεις ή λαμβάνουμε αποφάσεις. Πιθανόν ακόμη να χρησιμοποιηθεί ο όρος αυτός για κάποιο θέμα που δεν είναι σε επιθυμητή κατάσταση.

Στην Οργάνωση και Διοίκηση των Επιχειρήσεων οι όροι «λήψη αποφάσεων» και «επίλυση προβλημάτων» χρησιμοποιούνται συχνά εναλλακτικά επειδή οι προϊστάμενοι αποφασίζουν όταν πρόκειται να λύσουν κάποιο πρόβλημα. Όταν π.χ. παραιτείται ένας επιθεωρητής πωλήσεων την παραμονή της κοινής συνελεύσεως μετόχων και των υπευθύνων στελεχών των πωλήσεων ο Γενικός Διευθυντής Πωλήσεων αντιμετωπίζει ένα (σοβαρό) πρόβλημα. Αυτός ο Γεν. Δ/ντής θα πρέπει να προβεί στην αντικατάσταση του παραιτηθέντος ή με την προαγωγή κάποιου καλού πωλητή, ή να προσλάβει κάποιον άλλον έμπειρο επιθεωρητή πωλήσεων ή να εξουσιοδοτήσει ένα νέο πτυχιούχο που πιθανόν να έχει δυνατότητα να εξελιχθεί γρήγορα σε επιθεωρητή πωλήσεων. Κάθε μία από τις εναλλακτικές λύσεις πιθανόν να λύνει το πρόβλημα.

Η ΚΑΘΟΛΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΛΗΨΕΩΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Η λήψη αποφάσεων, όπως είναι γνωστό, είναι τμήμα των καθηκόντων των διοικητικών στελεχών. Τα διοικητικά στελέχη λαμβάνουν αποφάσεις παράλληλα με τα άλλα καθήκοντα τους, δηλ. τον προγραμματισμό, την οργάνωση, την διεύθυνση, τον συντονισμό και τον έλεγχο. Η λήψη αποφάσεων δεν είναι ξεχωριστή λειτουργία της οργανώσεως και διοικήσεως αλλά αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των υπολοίπων λειτουργιών αυτής.

Τα διοικητικά στελέχη όλων των επιπέδων της ιεραρχίας ασχολούνται με την λήψη αποφάσεων, ανάλογης σημασίας με το επίπεδο που βρίσκονται. Οι αποφάσεις αφορούν την αποστολή της επιχειρήσεως και τις στρατηγικές για να πραγματοποιηθεί. Οι αποφάσεις των ανωτάτων στελεχών επηρεάζουν όλη την επιχείρηση. Αντιστοίχως οι αποφάσεις των στελεχών των υπολοίπων επιπέδων.

Τα διοικητικά στελέχη λαμβάνουν αποφάσεις σοβαρές ή ασήμαντες κάθε ημέρα. Όσο ασήμαντη και αν είναι η απόφαση ακολουθεί μία προσδιορίσιμη διαδικασία. Ακόμη οι αποφάσεις που λαμβάνονται άλλοτε είναι προγραμματισμένες και άλλοτε είναι απρογραμμάτιστες, ανάλογα με τα προβλήματα που παρουσιάζονται και την σημασία τους.

<u>ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΛΗΨΕΩΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ</u>

Αφού έχει προσδιορισθεί το θέμα, που απασχολεί την επιχείρηση, για το οποίο πρέπει να ληφθεί απόφαση, στην συνέχεια, σύμφωνα πάντα με κάποιες απόψεις, αρχίζει η έρευνα για την ανεύρεση εναλλακτικών λύσεων. Προκύπτει π.χ. θέμα για την ανανέωση του μηχανολογικού εξοπλισμού, προκειμένου να αντιμετωπισθούν οι ανάγκες της αγοράς με μειωμένο κόστος. Η πρώτη έρευνα απέδειξε, ότι λόγω συνεχών ζημιών, δεν υπήρχε δυνατότητα αυτοχρηματοδοτήσεως της νέας επενδύσεως. Πρώτη «λύση» η αναβολή πραγματοποιήσεως της επενδύσεως. Έπειτα όμως από αναζητήσεις για πραγματοποιήσιμες λύσεις, ανευρέθηκαν δύο.

- Η μια ήταν η χρηματοδότηση από τις βιοτεχνικές πιστώσεις, όπως ορίζουν οι διατάξεις της Τράπεζας της Ελλάδος .
- Η άλλη ήταν η αγορά μεταχειρισμένων μηχανημάτων, χωρίς προκαταβολή.

Έτσι βρέθηκαν δύο εναλλακτικές λύσεις, εκεί που προηγουμένως δεν φαινόταν καμία λύση. Επισημαίνεται ότι η ικανότητα αναπτύξεως εναλλακτικών λύσεων είναι συχνά το ίδιο σημαντική με την ικανότητα ορθής επιλογής μεταξύ τέτοιων προτάσεων - λύσεων.

Η διαδικασία επιλογής μεταξύ εναλλακτικών λύσεων είναι συνάρτηση των προσόντων των διοικητικών στελεχών που αποφασίζουν. Βάσεις για να μπορέσει το διοικητικό στέλεχος να επιλέξει μεταξύ εναλλακτικών λύσεων είναι τα ακόλουθα:

- Γνώσεις-πείρα-δημιουργική σκέψη
- Αποτελέσματα πειραματισμού, όπου είναι δυνατόν (σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί) η έρευνα σε δοκιμαστικές συνθήκες και η ανάλυση των αποτελεσμάτων.

ΕΠΤΑ ΣΤΑΔΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΛΗΨΕΩΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Οι επαγγελματίες διαφόρων κλάδων μαθαίνουν από τα πρώτα επαγγελματικά τους βήματα να σκέπτονται και να ενεργούν ως πραγματικοί επαγγελματίες. Αντίθετα, είναι λίγες οι περιπτώσεις κατά τις οποίες τα υποψήφια διοικητικά στελέχη μαθαίνουν να σκέπτονται ως πραγματικοί επαγγελματίες, ως πραγματικά διοικητικά στελέχη.

Η λήψη αποφάσεων έχει μια υπεροχή που στηρίζεται σε μια διαδικασία. Υποστηρίζεται ότι όσα διοικητικά στελέχη γνωρίζουν τα επτά στάδια λήψεως αποφάσεων, που παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα, είναι σε θέση να συμβάλλουν ουσιαστικά στην επιτυχία κάθε επιχειρήσεως.

1ο Στάδιο . Προσδιορίστε το πρόβλημα η την ευκαιρία

2ο Στάδιο Προσδιορίστε περιοριστικούς παράγοντες

3ο Στάδιο Αναπτύξετε πιθανές εναλλακτικές λύσεις

4ο Στάδιο Αναλύστε τις εναλλακτικές λύσεις

5ο Στάδιο Επιλέξτε την άριστη εναλλακτική λύση

6ο Στάδιο Υλοποιήστε την απόφαση

7ο Στάδιο Υιοθετήστε ένα σύστημα ελέγχου και αξιολογήσεως

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε αρχικά με τη σημασία που έχουν οι προβλέψεις στη λήψη των αποφάσεων, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το περιβάλλον στο οποίο λειτουργούν οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί είναι όχι μόνο ανταγωνιστικό, αλλά και μεταβάλλεται διαρκώς με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας. Στη συνέχεια αναφερθήκαμε στις διάφορες κατηγορίες προβλέψεων, όπως αυτές ταξινομούνται με διάφορα κριτήρια. Ειδικότερα, διακρίναμε τις προβλέψεις ανάλογα με το χρονικό ορίζοντα προγραμματισμού σε βραχυπρόθεσμες, μεσοπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες και ανάλογα με το οικονομικό τους επίπεδο σε μικροοικονομικές και μακροοικονομικές. Επίσης, ταξινομήσαμε τις μεθόδους προβλέψεων σε ποιοτικές και ποσοτικές και σημειώσαμε τη σημασία του συνδυασμού των δύο αυτών κατηγοριών προβλέψεων στη λήψη των καλύτερων δυνατών αποφάσεων. Κατόπιν αναπτύξαμε την έννοια της λήψης αποφάσεων καθώς και της διαδικασίας επιλογής μεταξύ των εναλλακτικών λύσεων για την ορθότερη διαμόρφωση του επιθυμητού αποτελέσματος .Τέλος παρουσιάσαμε τα στάδια λήψεως αποφάσεων που υποστηρίζεται ότι όσα διοικητικά στελέχη τα γνωρίζουν , είναι σε θέση να συμβάλουν ουσιαστικά στην επιτυχία κάθε επιχείρησης .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΚΑΘΕΣΤΩΤΑ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Η θεωρία αποφάσεων διαπραγματεύεται τις διαδικασίες επιλογής που εξετάζουμε σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια, μεταξύ δύο ή περισσότερων εναλλακτικών λύσεων. Στην ενότητα αυτή, έχουμε στόχο να διερευνήσουμε τα σπουδαιότερα μαθηματικά μοντέλα στη διαδικασία λήψης απόφασης καθώς και τις ιδιότητες τους. Για παράδειγμα, προβλήματα επιλογής υποψηφίων, κατανομής εργασιών, βέλτιστων διαδρομών, επιλογής κινήσεων σε παιχνίδια, αποτελούν ζητήματα που διέπονται από μία κοινή ιδιαιτερότητα: υπάρχει ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών, από όπου πρέπει ένα συγκεκριμένο υποσύνολο να επιλεχθεί. Σε κάποιες περιπτώσεις οι εναλλακτικές επιλογές και τα αποτελέσματά τους είναι γνωστά εκ των προτέρων σε αυτόν που παίρνει τις αποφάσεις. Τις πιο πολλές φορές όμως οι «καταστάσεις της φύσης» που παριστάνουν διάφορα γεγονότα που καθορίζονται από παράγοντες που δεν μπορούμε να ελέγξουμε, δημιουργούν αδυναμία συγκέντρωσης όλων των απαραίτητων πληροφοριών και επηρεάζουν το αποτέλεσμα της απόφασης.

Όταν υπάρχει μια γνωστή κατάσταση της φύσης και ο φορέας που αποφασίζει γνωρίζει εκ των προτέρων το αποτέλεσμα των εναλλακτικών λύσεων, τότε λέμε ότι λειτουργεί κάτω από συνθήκες βεβαιότητας. Χαρακτηριστικά τέτοια προβλήματα αντιμετωπίζουμε στο γραμμικό προγραμματισμό. Αντίθετα, όταν είναι δυνατόν να εμφανιστούν περισσότερες από μία καταστάσεις της φύσης με γνωστή όμως την πιθανότητα εμφάνισής τους και άρα ικανότητα αξιολόγησης των εναλλακτικών λύσεων, τότε λέμε ότι ο φορέας που αποφασίζει λειτουργεί κάτω από συνθήκες κινδύνου. Τέλος, όταν είναι δυνατόν να εμφανιστούν διάφορες καταστάσεις της φύσης χωρίς ο φορέας να γνωρίζει την πιθανότητα εμφάνισής τους, τότε λέμε ότι οι αποφάσεις παίρνονται κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

Η λήψη απόφασης κάτω από βεβαιότητα είναι η απλούστερη. Αυτός που παίρνει την απόφαση απλά υπολογίζει την έκβαση κάθε εναλλακτικής λύσης και επιλέγει την καλύτερη. Αντίθετα, στις αποφάσεις κάτω από κίνδυνο και αβεβαιότητα, ο φορέας επιλέγει μεταξύ πολλών εναλλακτικών λύσεων, κάποιες από τις οποίες έχουν αβέβαια αποτελέσματα.

Στη συνέχεια θα πρέπει να καθορίσει ποια από αυτές τις λύσεις ικανοποιεί καλύτερα το σκοπό του.

Συνήθως ο σκοπός συνδέεται με μια αναμενόμενη απόφαση. Έτσι, αυτός που παίρνει τις αποφάσεις οφείλει να διερευνήσει τα ακόλουθα:

1) Να καταγράψει και να απομονώσει όλες τις εναλλακτικές λύσεις, που τις περισσότερες φορές δεν είναι δεδομένες, αλλά απαιτούν έρευνα σε βάθος.

2) Να προσδιορίσει τα αποτελέσματα κάθε εναλλακτικής λύσης ανεπηρέαστος από ευαισθησίες και προσωπικές επιθυμίες.

3) Να συνειδητοποιήσει κατά πόσο το σύστημα είναι ευσταθές (αποφάσεις κάτω από βεβαιότητα) ή υπάρχουν καταστάσεις της φύσης ικανές να διαταράξουν τα αναμενόμενα αποτελέσματα (αποφάσεις κάτω από κίνδυνο ή αβεβαιότητα).

4) Να διαγνώσει και κατανοήσει σωστά το πρόβλημα και τον επιδιωκόμενο σκοπό. Αποτελεί τη σπουδαιότερη παράμετρο και έχει αποδειχθεί στην πράξη ότι σπάνια δίνονται λάθος λύσεις σε προβλήματα. Συνήθως δίνονται σωστές λύσεις σε λανθασμένα τοποθετημένα προβλήματα. Χρειάζεται έγκαιρη ανακάλυψη της απόκλισης, όταν αυτή υπάρχει, αλλά και έρευνα για την εξεύρεση των αιτίων που οδήγησαν σε αυτήν για να μην επαναληφθούν τα ίδια λάθη αργότερα.

Οι αποφάσεις που παίρνονται στον κόσμο των επιχειρήσεων, μπορεί συχνά να εμπεριέχουν σημαντικά χρηματικά ποσά και το κόστος της λήψης μιας απόφασης να είναι σημαντικό. Έτσι αυτός που παίρνει τις αποφάσεις θα πρέπει να συγκεντρώσει όσο το δυνατό περισσότερη σχετική πληροφορία πριν να πάρει κάποια απόφαση. Συγκεκριμένα, το άτομο αυτό θα πρέπει να είναι πολύ προσεκτικό σχετικά με τις πιθανότητες εμφάνισης μιας από τις «καταστάσεις της φύσης» που μπορεί να επηρεάσουν το τελικό αποτέλεσμα.

Οι αποφάσεις διακρίνονται σε προγραμματισμένες, συνηθισμένες τακτικές ή διαπραγμάτευσης όταν λαμβάνονται κάτω από συνθήκες βεβαιότητας και στην πράξη παίρνονται σε καθημερινό επίπεδο από φορείς μέσης το πολύ βαθμίδας. Από την άλλη μεριά οι αποφάσεις που είναι μη προγραμματισμένες, στρατηγικές, δημιουργικές ή καινοτόμες παίρνονται από υψηλόβαθμους φορείς κάτω από συνθήκες κινδύνου ή αβεβαιότητας.

ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Όταν μια απόφαση λαμβάνεται κάτω από συνθήκες βεβαιότητας, τότε γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποια κατάσταση θα εμφανιστεί, καθώς και τα αποτελέσματα κάθε εναλλακτικής λύσης. Η γενική μορφή του πίνακα των αποτελεσμάτων στην περίπτωση αυτή, έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{array}{c|l} & \theta \\ \hline a_1 & v(a_1,\theta) \\ a_2 & v(a_2,\theta) \\ \vdots & \vdots \\ a_m & v(a_m,\theta) \end{array}$$

- Οι γραμμές αντιπροσωπεύουν πιθανές ενέργειες (στρατηγικές)
- Οι στήλες αντιπροσωπεύουν τις ενέργειες που εφαρμόζονται και τις καταστάσεις του συστήματος που προκύπτουν.

Έτσι, αν το a_i αντιπροσωπεύει την $i-$οστή ενέργεια $(i=1,2,\ldots,m)$ και το θ αντιπροσωπεύει την κατάσταση της φύσης, τότε το $v(a_i,\theta)$ αντιπροσωπεύει το ανάλογο αποτέλεσμα. Η επιλογή της μέγιστης ή ελάχιστης τιμής του πίνακα είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Φυσικά, όλα τα προβλήματα γραμμικού, ακεραίου και αιτιοκρατικού (deterministic) δυναμικού προγραμματισμού, μοντελοποιούνται και επιλύονται με την παροχή της πλήρους πληροφόρησης και αποτελούν παραδείγματα προβλημάτων απόφασης υπό συνθήκες βεβαιότητας.

ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Κριτήριο αναμενόμενης αξίας (τιμής) (Expected value criterion)

Μια φυσική επέκταση των αποφάσεων κάτω από βεβαιότητα, είναι η χρήση του κριτηρίου της αναμενόμενης αξίας, όπου χρειάζεται να μεγιστοποιηθεί το αναμενόμενο κέρδος (ή να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο κόστος). Αυτό το κριτήριο μπορεί να εκφραστεί είτε σε σχέση με αξία ή σε σχέση με τη χρησιμότητα του. Για να σκιαγραφήσουμε την διαφορά μεταξύ αξίας και χρησιμότητας, υποθέτουμε ότι μια επένδυση 20000 ευρώ θα καταστεί με τα κέρδη, είτε 100000 ευρώ ή θα μηδενιστεί με ίδια πιθανότητα. Βασιζόμενοι στην αναμενόμενη τιμή της αξίας, το καθαρό προσδοκώμενο κέρδος είναι $(100000\times.5+0\times.5)-20000=30000$ ευρώ. Χρησιμοποιώντας μόνο αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η βέλτιστη απόφαση είναι να επενδύσουμε 20000 ευρώ. Όμως, αυτή η απόφαση δεν αποδεκτή από όλους τους επενδυτές. Για παράδειγμα, κάποιος επενδυτής A μπορεί να ισχυριστεί ότι λόγω της έλλειψης ρευστών, η απώλεια 20000 ευρώ μπορεί να οδηγήσει σε χρεοκοπία. Κατά συνέπεια, μπορεί να επιλέξει να μην προσχωρήσει σε αυτήν την επένδυση. Από την άλλη, κάποιος άλλος επενδυτής B, έχει ένα πλεόνασμα σε αδρανή κεφάλαια, που υπερβαίνει κάθε ανάγκη για ρευστά και κατά συνέπεια επιθυμεί να αναλάβει το τόλμημα. Αυτό που θέλουμε να παρουσιάσουμε εδώ είναι, η σπουδαιότητα της απόφασης που παίρνει ο επενδυτής απέναντι στην αξία ή τη χρησιμότητα της αξίας.

Ας θεωρήσουμε ξανά την περίπτωση του επενδυτή A, για να πιστοποιήσουμε πόσο διαφορετικές είναι οι δύο καταστάσεις. Έστω ότι ο επενδυτής A δεν είναι σε θέση να ρισκάρει ζημιά μεγαλύτερη των 5000 ευρώ. Έστω περαιτέρω, ότι έχει δύο δυνατότητες: πρώτον, να επενδύσει 20000 ευρώ με πιθανότητα .5 να τις κάνει 100000 ευρώ και .5 να μηδενίσει το κεφάλαιο του, ή δεύτερον, να επενδύσει 5000 ευρώ με πιθανότητα .5 να τις κάνει 23000 ευρώ και .5 να μηδενίσει το κεφάλαιο του. Με αυτά τα δεδομένα ο επενδυτής A δεν έχει παρά να επιλέξει τη δεύτερη περίπτωση έστω και αν το αναμενόμενο καθαρό κέρδος των 6500 ευρώ της δεύτερης επιλογής δεν συγκρίνεται με αυτό της πρώτης επιλογής που είναι 30000 ευρώ.

Το βασικό συμπέρασμα της παραπάνω συζήτησης είναι ότι η χρησιμότητα δεν είναι πάντα ανάλογη της χρηματικής αξίας. Δυστυχώς, αν και έχουν αναπτυχθεί σαφείς τεχνικές για τη δημιουργία των καμπυλών χρησιμότητας, η έννοια της χρησιμότητας είναι αρκετά λεπτή και δεν αποκτά εύκολα ποσοτική διάσταση. Στην πράξη η επιρροή της χρησιμότητας εκφράζεται μέσω επιπρόσθετων συνθηκών που αντανακλούν τη συμπεριφορά αυτού που αποφασίζει και θα την εξετάσουμε αναλυτικά σε κατοπινό κεφάλαιο.

Το κριτήριο της αναμενόμενης τιμής συνεπάγεται ότι η ίδια απόφαση πρέπει να επαναληφθεί αρκετές φορές πριν επιτευχθεί η τιμή που εγγυάται ο τύπος του κριτηρίου. Μαθηματικά αυτό σημαίνει το εξής: έστω z μια τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή $E\{z\}$ και διασπορά σ^2. Αν $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα n

παρατηρήσεων του z, ο δειγματικός μέσος $\bar{z}=\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}$ έχει διασπορά $\frac{\sigma^2}{n}$.

Έτσι, όταν το n γίνεται αρκετά μεγάλο ($n\rightarrow\infty$), $\frac{\sigma^2}{n}\rightarrow 0$ και το $\bar{z}$ τείνει στην $E\{z\}$.

Με άλλα λόγια, όταν το μέγεθος του δείγματος παίρνει μεγάλες τιμές, η διαφορά μεταξύ του δειγματικού μέσου και της αναμενόμενης τιμής, τείνει στο μηδέν.

Παράδειγμα: Η πολιτική προληπτικής συντήρησης μιας μηχανής απαιτεί τη δυνατότητα να παίρνονται αποφάσεις σε συχνή βάση, για τις χρονικές στιγμές συντήρησης, με σκοπό να ελαχιστοποιηθεί το κόστος από ξαφνική βλάβη. Αν ο χρονικός ορίζοντας διαμεριστεί σε ίσες χρονικές περιόδους, η απόφαση αποσκοπεί στον προσδιορισμό του βέλτιστου αριθμού περιόδων μεταξύ δύο διαδοχικών συντηρήσεων. Πολύ συχνή συντήρηση ανεβάζει το κόστος λειτουργίας ενώ συγχρόνως μειώνει το κόστος από ξαφνική βλάβη.

Επειδή δεν μπορούμε να προβλέψουμε εκ των προτέρων πότε η μηχανή θα υποστεί βλάβη, είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε την πιθανότητα η μηχανή να χαλάσει μια δεδομένη χρονική περίοδο t. Εδώ είναι που το στοιχείο του «κινδύνου» υπεισέρχεται στη διαδικασία απόφασης.

Από ένα σύνολο n μηχανών, κάποια θα επισκευαστεί μόλις υποστεί βλάβη. Μετά το τέλος T χρονικών περιόδων, διενεργείται προληπτική συντήρηση και στις n μηχανές. Το πρόβλημα της απόφασης είναι να καθοριστεί το βέλτιστο T, που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος ανά περίοδο επισκευής και συντήρησης.

Έστω p_t η πιθανότητα να υποστεί βλάβη μια μηχανή τη χρονική περίοδο t και n_t η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των χαλασμένων μηχανών την ίδια περίοδο. Περαιτέρω, έστω c_1 το κόστος επισκευής και c_2 το κόστος συντήρησης ανά μηχανή.

Προφανώς για την εφαρμογή του κριτηρίου αναμενόμενης τιμής σε αυτό το πρόβλημα χρειάζεται να υποθέσουμε ότι οι μηχανές λειτουργούν για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα. Το αναμενόμενο κόστος ανά περίοδο είναι

$$EC(T)=\frac{c_1\sum_{t=1}^{T-1}E\{n_t\}+c_2 n}{T}$$

όπου $E\{n_t\}$ ο αναμενόμενος αριθμός των χαλασμένων μηχανών την περίοδο t.

Επειδή η n_t ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, $E\{n_t\}=np_t$. Άρα:

$$EC(T) = \frac{n\left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + c_2\right)}{T}$$

Οι αναγκαίες συνθήκες ώστε το T^* να ελαχιστοποιεί το $EC(T)$ είναι

$$EC(T^* - 1) \geq EC(T^*) \text{ και } EC(T^* + 1) \geq EC(T^*)$$

Αρχίζοντας με μικρές τιμές για το T, συνεχίζουμε να υπολογίζουμε το $EC(T)$ μέχρις ότου οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται.

Αν $c_1 = 100$ χρηματικές μονάδες (χ.μ.), $c_2 = 10$ (χ.μ.) και $n = 50$, ο παρακάτω πίνακας με δεδομένες τις τιμές των p_t, υπολογίζει τα εκάστοτε $EC(T)$ και τελικώς αποφαίνεται ότι προληπτική συντήρηση απαιτείται κάθε τρεις χρονικές περιόδους ($T^* = 3$):

	T	p_T	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$EC(T)$	
	1	.05	0	500	
	2	.07	.05	375	
$T^* \longrightarrow$	**3**	.10	.12	**366.7**	$\longleftarrow EC(T^*)$
	4	.13	.22	400	
	5	.18	.35	450	

Στο παρακάτω πρόγραμμα επιδεικνύουμε τα αποτελέσματα του παραδείγματος της προληπτικής συντήρησης των $n = 50$ μηχανών.

Κριτήριο αναμενόμενης τιμής-διασποράς (Expected value-variance criterion)

Είδαμε ότι το κριτήριο της αναμενόμενης τιμής είναι κατάλληλο κυρίως για αποφάσεις μακροπρόθεσμου χαρακτήρα (long-run). Το ίδιο κριτήριο μπορεί να τροποποιηθεί για να βελτιώσουμε την αποτελεσματικότητα του για αποφάσεις βραχυπρόθεσμου χαρακτήρα (short-run). Η εφαρμογή του βασίζεται στην παρακάτω παρατήρηση: αν z μια τυχαία μεταβλητή με διασπορά σ^2, τότε ο δειγματικός μέσος $\bar{z}$ έχει διασπορά σ^2/n, όπου n το μέγεθος του δείγματος. Έτσι, όταν μικραίνει η διασπορά σ^2, μικραίνει επίσης και η διασπορά του $\bar{z}$ και επομένως αυξάνει η πιθανότητα η τιμή του $\bar{z}$ να προσεγγίσει την $E\{z\}$. Αυτό σημαίνει ότι εξυπηρετεί να αναπτύξουμε ένα κριτήριο που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος ενώ συγχρόνως ελαχιστοποιεί τη διασπορά του κέρδους. Έχουμε δηλαδή δύο στόχους κάτω από το ίδιο κριτήριο. Τα παραπάνω εκφράζονται στο κριτήριο

$$\text{maximize } [E\{z\} - K\operatorname{var}\{z\}]$$

όπου z είναι μια τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το κέρδος και K μια προκαθορισμένη σταθερά, που ονομάζεται παράγοντας αποφυγής κινδύνου (risk aversion factor). Στην πράξη είναι ένας παράγοντας που ανάλογα με το βάρος του επιδεικνύει το βαθμό σημασίας της $\operatorname{var}\{z\}$ σε σχέση με την $E\{z\}$. Για παράδειγμα, αν υπάρχει ιδιαίτερη ευαισθησία σε μεγάλες μειώσεις κέρδους κάτω από την $E\{z\}$, η τιμή της K πρέπει να είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε, ότι το κριτήριο αυτό είναι συμβατό με τη θεωρία χρησιμότητας, που θα μελετήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο, αφού ο παράγοντας αποφυγής κινδύνου είναι ένας δείκτης της τάσης αυτού που παίρνει μια απόφαση σε σχέση με την απόκλιση από την αναμενόμενη τιμή. Η παρατήρηση έχει μια βαθύτερη μαθηματική σημασία και με τη χρήση σειρών Taylor, μπορεί κάποιος να δείξει ότι οι τρεις πρώτοι όροι της σειράς του αναπτύγματος της συνάρτησης χρησιμότητας παράγουν ένα κριτήριο όμοιο με το παραπάνω.

<u>Παράδειγμα</u>: Εφαρμόζουμε το κριτήριο αναμενόμενης τιμής – διασποράς στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου. Πρώτα χρειάζεται να υπολογίσουμε τη διασπορά του κόστους ανά περίοδο η οποία είναι, η διασπορά του $C_T = \dfrac{c_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + nc_2}{T}$, όπου C_T είναι μια τυχαία μεταβλητή, διότι n_t $(t = 1,\ldots,T-1)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αφού η n_t είναι διωνυμική με μέσο np_t και διασπορά $np_t(1-p_t)$, συνεπάγεται ότι

$$\operatorname{var}\{C_T\} = \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} \operatorname{var}\{n_t\} = \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n\left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \left\{\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right\}$$

Αφού $E\{C_T\} = EC(T)$ (σύμφωνα με το προηγούμενα), το κριτήριο γίνεται

$$\text{minimize } [EC(T) + K\operatorname{var}\{C_T\}]$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $EC(T)$ προστίθεται στην $K\operatorname{var}\{C_T\}$, αφού η $EC(T)$ είναι συνάρτηση κόστους. Με $K = 1$ το κριτήριο γίνεται

$$\text{minimize } [EC(T)+\operatorname{var}\{C_T\}] = n\left\{\left(\frac{c_1}{T}+\frac{c_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{c_2}{T}\right\}$$

Κάνοντας χρήση της ίδιας πληροφορίας με το προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να δημιουργήσουμε τον παρακάτω πίνακα, που δίνει $T^* = 1$, δηλαδή ότι η προληπτική συντήρηση θα πρέπει να λαμβάνει χώρα σε κάθε περίοδο.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι για τα ίδια δεδομένα, το κριτήριο αναμενόμενης τιμής - διασποράς κατέληξε σε πιο συντηρητική απόφαση, εφαρμόζοντας προληπτική συντήρηση κάθε περίοδο συγκρινόμενο με το προηγούμενο κριτήριο που εφάρμοσε προληπτική συντήρηση κάθε τρίτη περίοδο.

T	p_T	p_T^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$EC(T)+\operatorname{var}\{C_T\}$
1	.05	.0025	0	0	**500.00**
2	.07	.0049	.05	.0025	6312.50
3	.10	.0100	.12	.0074	6622.22
4	.13	.0169	.22	.0174	6731.25
5	.18	.0324	.35	.0343	6764.00

Στο παρακάτω πρόγραμμα επιδεικνύουμε τα αποτελέσματα του παραδείγματος της προληπτικής συντήρησης των $n = 50$ μηχανών.

Κριτήριο Στάθμης Φιλοδοξίας (Aspiration level criterion)

Το κριτήριο στάθμης φιλοδοξίας, δεν παράγει μια βέλτιστη απόφαση με την έννοια της μεγιστοποίησης του κέρδους ή της ελαχιστοποίησης του κόστους. Είναι απλά ένα μέσο για τον καθορισμό μιας αποδεκτής σειράς ενεργειών. Για παράδειγμα, θεωρούμε την περίπτωση όπου κάποιος προορίζει ένα μεταχειρισμένο αυτοκίνητο προς πώληση. Όταν ο πωλητής δέχεται μια προσφορά, πρέπει μέσα σε εύλογο χρονικό διάστημα να αποφασίσει αν είναι συμφέρουσα ή όχι. Υπό αυτές τις συνθήκες, ο πωλητής θέτει ένα όριο στην τιμή, κάτω από το οποίο δεν πουλάει το αυτοκίνητο. Αυτή είναι η στάθμη φιλοδοξίας (aspiration level), η οποία επιτρέπει στον πωλητή να αποδεχθεί την πρώτη προσφορά που θα την ικανοποιήσει. Προφανώς ένα τέτοιο κριτήριο δεν παράγει απαραίτητα τη βέλτιστη λύση. Μια κατοπινή προσφορά θα μπορούσε να είναι υψηλότερη από αυτήν που έγινε αποδεκτή.

Στο παράδειγμα της πώλησης αυτοκινήτου, δεν έγινε καμία αναφορά στην κατανομή πιθανότητας. Εύλογα διερωτάται λοιπόν κάποιος, γιατί το κριτήριο αυτό συμπεριλαμβάνεται στην κατηγορία των τεχνικών για τη λήψη απόφασης κάτω από κίνδυνο. Μπορεί να υποστηριχθεί ότι διαλέγοντας αυτό το κριτήριο ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου είναι γνώστης των τιμών της αγοράς για παρόμοια αυτοκίνητα. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι έχει την αίσθηση της κατανομής των τιμών των μεταχειρισμένων αυτοκινήτων. Ομολογουμένως αυτό δεν παρέχει έναν αυστηρό ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, αλλά είναι μια βάση για τη συλλογή δεδομένων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργήσουν μια τέτοια συνάρτηση. Στην πραγματικότητα, αυτό ακριβώς συμβαίνει, αφού πλήρης άγνοια της κατανομής, μπορεί να οδηγήσει τον ιδιοκτήτη να θέσει τη στάθμη φιλοδοξίας αρκετά ψηλά, όπου σε τέτοια περίπτωση καμία προσφορά δεν θα γίνει αποδεκτή, ή πολύ χαμηλά οπότε δεν θα επιτευχθεί δίκαιη τιμή για το αυτοκίνητο. Σε κάθε περίπτωση, ένα από τα πλεονεκτήματα της χρήσης του συγκεκριμένου κριτηρίου είναι ότι δεν χρειάζεται να ορίσουμε με ακρίβεια τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η παραπάνω επεξήγηση επισημαίνει τη χρησιμότητα του κριτηρίου όταν όλες οι εναλλακτικές ενέργειες δεν είναι διαθέσιμες τη χρονική στιγμή που παίρνεται η απόφαση. Αυτή όμως δεν είναι η μοναδική περίπτωση που χρησιμοποιούμε το κριτήριο. Θεωρούμε για παράδειγμα την περίπτωση όπου μια εταιρεία εξυπηρέτησης (όπως ένα εστιατόριο ή ένα κουρείο) λειτουργούν με διαφορετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης. Ένας υψηλός ρυθμός εξυπηρέτησης, μολονότι παρέχει γρήγορη και άνετη εξυπηρέτηση για τους πελάτες, μπορεί να είναι πολύ δαπανηρός για τον ιδιοκτήτη. Αντιστρόφως, αργή εξυπηρέτηση μπορεί να είναι λιγότερο δαπανηρή, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της πελατείας και συνεπώς σε μείωση κέρδους. Ο στόχος είναι να καθορίσουμε το βέλτιστο επίπεδο στο οποίο η εξυπηρέτηση πρέπει να εκτελεστεί.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι συνήθως δυνατόν να καθορίσουμε τις κατανομές πιθανοτήτων για τις αφίξεις των πελατών και τους χρόνους εξυπηρέτησης. Επειδή μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των συστημάτων αυτών σε μεγάλο χρονικό διάστημα, είναι σημαντικό να καθορίσουμε το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης ελαχιστοποιώντας το αναμενόμενο συνολικό κόστος του συστήματος ανά μονάδα χρόνου. Αυτό περιλαμβάνει το αναμενόμενο κόστος λειτουργίας του συστήματος και το αναμενόμενο κόστος αναμονής του πελάτη. Και τα δύο είναι συνάρτηση του επιπέδου εξυπηρέτησης, έτσι ώστε όσο ψηλότερα είναι το πρώτο τόσο χαμηλότερα πέφτει το δεύτερο και αντιστρόφως. Ωστόσο, η πρακτικότητα του κριτηρίου χάνεται λόγω της δυσκολίας υπολογισμού του κόστους αναμονής του πελάτη. Πολλοί απροσδιόριστοι παράγοντες δύσκολα εκφράζονται με όρους κόστους, μιας και εξαρτώνται από τη στάση και συμπεριφορά του πελάτη.

Στο παραπάνω παράδειγμα, μπορεί κάποιος να επιλέξει το επίπεδο εξυπηρέτησης έτσι ώστε το σύστημα να είναι κενό $\alpha\%$ του χρόνου, ενώ συγχρόνως ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής του πελάτη να μην υπερβαίνει τις β μονάδες χρόνου. Οι παράμετροι α και β είναι *στάθμες φιλοδοξίας* οι οποίες καθορίζονται βασισμένοι στην έννοια της λειτουργίας αποδοτικού συστήματος και σε γνώση της συμπεριφοράς των πελατών.

Παράδειγμα: Έστω ότι η ζήτηση x ανά περίοδο ενός συγκεκριμένου εμπορεύματος δίνεται από μια συνεχή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Αν η ποσότητα που είναι αποθηκευμένη την αρχή της περιόδου δεν είναι επαρκής είναι πιθανό να υπάρξει έλλειψη. Αν πάλι αποθηκευτεί μεγάλη ποσότητα, τότε ίσως υπάρχει αχρησιμοποίητο απόθεμα στο τέλος της περιόδου. Και οι δύο περιπτώσεις είναι δαπανηρές. Η πρώτη αντικατοπτρίζει απώλεια πιθανού κέρδους και πελατείας, ενώ η δεύτερη αύξηση του κόστους αποθήκευσης και συντήρησης του αποθέματος.

Ενδεχομένως, θα θέλαμε να εξισορροπήσουμε τα δύο αυτά αλληλοσυγκρουόμενα κόστη. Επειδή είναι γενικά δύσκολο να υπολογίσουμε το κόστος της έλλειψης, θα καθορίσουμε το επίπεδο του αποθέματος έτσι ώστε η αναμενόμενη ποσότητα έλλειψης να μην υπερβαίνει τις A_1 μονάδες και η αναμενόμενη ποσότητα πλεονάσματος να μην υπερβαίνει A_2 τις μονάδες. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως εξής: έστω I το προς καθορισμό επίπεδο αποθέματος. Τότε:

$$\text{αναμενόμενη ποσότητα έλλειψης} = \int_I^{\infty}(x-I)f(x)dx \le A_1$$

$$\text{αναμενόμενη ποσότητα επάρκειας} = \int_0^{I}(I-x)f(x)dx \le A_2$$

Γενικά, η επιλογή των A_1 και A_2 ίσως να μην παράγει εφικτές λύσεις για το I. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να χαλαρώσουμε έναν από τους δύο περιορισμούς για να πετύχουμε εφικτότητα.

Έστω ότι η $f(x)$ δίνεται από την κατανομή

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{20}{x^2}, & \text{αν } 10\le x\le 20\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Τότε έχουμε:

$$\int_I^{20}(x-I)f(x)dx=\int_I^{20}(x-I)\frac{20}{x^2}dx=20\left\{\ln\frac{20}{I}+\frac{I}{20}-1\right\}$$

$$\int_{10}^{I}(I-x)f(x)dx=\int_{10}^{I}(I-x)\frac{20}{x^2}dx=20\left\{\ln\frac{10}{I}+\frac{I}{10}-1\right\}$$

Έτσι το κριτήριο απλοποιείται σε:

$$\ln I-\frac{I}{20}\ge\ln 20-\frac{A_1}{20}-1=1.996-\frac{A_1}{20}$$

$$\ln I-\frac{I}{10}\ge\ln 10-\frac{A_2}{20}-1=1.302-\frac{A_2}{20}$$

Τα A_1 και A_2 πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι δύο ανισότητες να ικανοποιούνται ταυτόχρονα, για τουλάχιστον μια τιμή του I. Για παράδειγμα, αν $A_1=2$ και $A_2=4$ οι ανισότητες γίνονται

$$\ln I-\frac{I}{20}\ge 1.896 \text{ και } \ln I-\frac{I}{10}\ge 1.102$$

Η τιμή του I πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των 10 και 20, λόγω περιορισμών της ζήτησης. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει ότι οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται ταυτόχρονα για $13\le I\le 17$. Επομένως οποιαδήποτε από αυτές τις τιμές παρέχει μια λύση στο πρόβλημα.

I	10	11	12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	18	19	20
$\ln I - I/20$	1.8	1.84	1.88	**1.91**	1.94	1.96	1.97	1.98	1.99	1.99	1.99
$\ln I - I/10$	1.3	1.29	1.28	1.26	1.24	1.21	1.17	**1.13**	1.09	1.04	.99

Κριτήριο του πιο πιθανού ενδεχόμενου (Most likely future criterion)

Το κριτήριο αυτό βασίζεται στη μετατροπή μιας πιθανοθεωρητικής κατάστασης σε ντετερμινιστική, αντικαθιστώντας την τυχαία μεταβλητή με μία μοναδική τιμή, η οποία έχει την υψηλότερη πιθανότητα εμφάνισης. Για παράδειγμα, έστω ότι το κέρδος ανά μονάδα του j προϊόντος είναι c_j και η (διακριτή) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι $p_j(c_j)$. Έστω ότι το c_j^* είναι τέτοιο ώστε $p_j(c_j^*) = \max p_j(c_j)$ για κάθε c_j. Τότε το c_j^* θεωρείται ως η «ντετερμινιστική» τιμή που παριστάνει το ανά μονάδα κέρδος για το j προϊόν.

Το κριτήριο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η απλούστευση μιας πολύπλοκης απόφασης κάτω από κίνδυνο. Μια τέτοια απλοποίηση δεν γίνεται απλά για την αναλυτική μας διευκόλυνση, αλλά κυρίως διότι από πρακτική άποψη το πιο πιθανό ενδεχόμενο παρέχει επαρκή πληροφορία για να πάρουμε την απόφαση. Για παράδειγμα, υπάρχει πάντα μια θετική πιθανότητα (όσο μικρή και αν είναι) ότι κάποιο αεροπλάνο θα συντριβεί. Παρ' όλα αυτά οι περισσότεροι επιβάτες πετούν υποθέτοντας ότι όλα θα πάνε καλά.

Η χρήση του παρόντος κριτηρίου κρύβει κάποιες παγίδες. Όπως όταν η τυχαία μεταβλητή λαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό τιμών με μικρή πιθανότητα εμφάνισης της καθεμιάς, έστω 0.05, ή όταν οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής λαμβάνονται με ίση πιθανότητα. Και στις δύο περιπτώσεις το κριτήριο γίνεται ανεπαρκές στη διαδικασία λήψης μιας βάσιμης απόφασης.

ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Θα μελετήσουμε κριτήρια λήψης αποφάσεων κάτω από αβεβαιότητα και την προϋπόθεση ότι οι κατανομές πιθανοτήτων δεν είναι γνωστές. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι:

1. Το κριτήριο Laplace
2. Το κριτήριο Minimax
3. Το κριτήριο Savage
4. Το κριτήριο Hurwicz

Η διαφορά των παραπάνω κριτηρίων έγκειται στο βαθμό του συντηρητισμού αυτού που λαμβάνει την απόφαση. Για παράδειγμα το κριτήριο Laplace είναι λιγότερο συντηρητικό (περισσότερο αισιόδοξο) από το κριτήριο Minimax. Από την άλλη το κριτήριο Hurwicz προσαρμόζεται ώστε να αντικατοπτρίζει από τις πιο αισιόδοξες μέχρι τις πιο απαισιόδοξες συμπεριφορές. Κάτω από αυτό το πρίσμα, τα κριτήρια αν και είναι από τη φύση τους ποσοτικά, αντανακλούν και την υποκειμενική εκτίμηση του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο παίρνεται η απόφαση. Δεν υπάρχει κάποιος κανόνας που να καθορίζει ποιο κριτήριο θα χρησιμοποιούμε κάθε φορά και η απόφαση αυτή εξαρτάται από αυτόν που αποφασίζει.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό αυτών των κριτηρίων είναι ότι αυτός που αποφασίζει δεν έχει απέναντί του κάποιον ευφυή αντίπαλο. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι αντίπαλος είναι η ίδια η φύση, η οποία προφανώς δεν προσπαθεί να προκαλέσει κάποια απώλεια.

Το πρόβλημα είναι όταν ο αντίπαλος είναι ευφυής και προσπαθεί να μας προκαλέσει απώλεια για να επωφεληθεί εκείνος. Ζητήματα τέτοιου τύπου όμως θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο της Θεωρίας Παιγνίων.

Οι πληροφορίες που χρησιμοποιούμε για τη συστηματοποίηση προβλημάτων λήψης απόφασης κάτω από αβεβαιότητα, συνοψίζονται σε ένα πίνακα, όπου:

- Οι γραμμές αντιπροσωπεύουν πιθανές ενέργειες (στρατηγικές)
- Οι στήλες αντιπροσωπεύουν πιθανές μελλοντικές καταστάσεις της φύσης (εκβάσεις) του συστήματος.

Για παράδειγμα, έστω μια εταιρεία η οποία αντιμετωπίζει μια απεργία. Ανάλογα με τη διάρκεια της απεργίας, θα πρέπει να διατηρείται και ένα επίπεδο αποθέματος για κάποιο συγκεκριμένο προϊόν. Ο πίνακας που προαναφέραμε διαμορφώνεται ως εξής: οι στήλες περιέχουν τους χρόνους της πιθανής διάρκειας της απεργίας (πιθανές μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος) και οι γραμμές το επίπεδο του αποθέματος που θα πρέπει να διατηρείται (πιθανές ενέργειες). Αυτό σημαίνει ότι μια ενέργεια αναπαριστά μια πιθανή απόφαση.

Επίσης σε κάθε ένα ζεύγος κατάστασης-ενέργειας αντιστοιχίζεται και ένα αποτέλεσμα (απόδοση ενέργειας) που αποτιμά το κέρδος (ή την απώλεια) που αποκομίζουμε αν ενεργήσουμε μ' αυτόν τον τρόπο όταν επικρατεί η συγκεκριμένη μελλοντική κατάσταση. Έτσι, αν το a_i αντιπροσωπεύει την $i-$οστή ενέργεια $(i=1,2,\ldots,m)$ και το θ_j αντιπροσωπεύει την $j-$οστή μελλοντική κατάσταση $(j=1,2,\ldots,n)$, τότε το $v(a_i,\theta_j)$ αντιπροσωπεύει το ανάλογο αποτέλεσμα. Γενικά, το $v(a_i,\theta_j)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση των a_i και θ_j. Κάτω από διακριτές συνθήκες, οι παραπάνω πληροφορίες καταχωρούνται σε ένα πίνακα της μορφής:

	θ_1	θ_2	$\cdots$	θ_n
a_1	$v(a_1,\theta_1)$	$v(a_1,\theta_2)$	$\cdots$	$v(a_1,\theta_n)$
a_2	$v(a_2,\theta_1)$	$v(a_2,\theta_2)$	$\cdots$	$v(a_2,\theta_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	$v(a_m,\theta_1)$	$v(a_m,\theta_2)$	$\cdots$	$v(a_m,\theta_n)$

1. Κριτήριο Laplace

Το κριτήριο αυτό αποτελεί κριτήριο ορθολογισμού, δεν εξαρτάται από την υποκειμενική κρίση του ατόμου που αποφασίζει και βασίζεται στην αρχή της ανεπαρκούς αιτίας (principle of insufficient reason). Επειδή οι πιθανότητες που σχετίζονται με την πραγματοποίηση των $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ είναι άγνωστες, δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες για να συμπεράνουμε ότι είναι άνισες μεταξύ τους. Διαφορετικά, αν δηλαδή μπορούσαμε να προσδιορίσουμε αυτές τις πιθανότητες, τότε δεν θα είχαμε πρόβλημα απόφασης κάτω από αβεβαιότητα. Επομένως υποθέτουμε ότι οι καταστάσεις $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ είναι ισοπίθανες να συμβούν. Με την προϋπόθεση αυτή δεν έχουμε πλέον μια απόφαση αβεβαιότητας αλλά απόφαση ρίσκου, όπου στόχος είναι να επιλεγεί η ενέργεια a_i που δίνει το μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος. Αυτό σημαίνει ότι τελικά επιλέγουμε εκείνη την ενέργεια a_i^* που αντιστοιχεί στο

$$\max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(a_i, \theta_j)\right\}$$

όπου $1/n$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το θ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Παράδειγμα: Μια επιχείρηση πρέπει να αποφασίσει για τον αριθμό των προμηθειών που πρέπει να αγοράσει προκειμένου να καλύψει τις ανάγκες των πελατών της κατά τη διάρκεια των διακοπών. Ο ακριβής αριθμός των πελατών δεν είναι γνωστός, αλλά αναμένεται να ανήκει σε μια από τις ακόλουθες κατηγορίες: 200, 250, 300 ή 400 πελάτες. Τέσσερα επίπεδα προμηθειών προτείνονται με το επίπεδο i να είναι ιδανικό στην περίπτωση που ο αριθμός των πελατών εμπίπτει στην κατηγορία i. Αποκλίσεις από την ιδανική κατηγορία οδηγούν σε πρόσθετα κόστη, είτε επειδή διατηρούμε επιπλέον προμήθειες που δεν χρειάζονται, είτε επειδή η ζήτηση δεν ικανοποιείται.

Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τα κόστη σε χιλιάδες ευρώ:

		Κατηγορία Πελατών			
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
	a_1	5	10	18	25
Επίπεδο προμηθειών	a_2	8	7	8	23
	a_3	21	18	12	21
	a_4	30	22	19	15

Το κριτήριο Laplace θεωρεί ότι τα γεγονότα θ_1, θ_2, θ_3 και θ_4 έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν, οπότε $P(\theta=\theta_j)=\frac{1}{4}$, $(j=1,2,3,4)$ και τα αναμενόμενα κόστη από τις διαφορετικές ενέργειες a_1, a_2, a_3 και a_4 είναι:

$$E\{a_1\}=(1/4)\cdot(5+10+18+25)=14.5$$
$$E\{a_2\}=(1/4)\cdot(8+7+8+23)=\mathbf{11.5}$$
$$E\{a_3\}=(1/4)\cdot(21+18+12+21)=18.0$$
$$E\{a_4\}=(1/4)\cdot(30+22+19+15)=21.5$$

Έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο αυτό η καλύτερη επιλογή είναι η ενέργεια a_2.

2. Κριτήριο MiniMax (MaxiMin)

Το κριτήριο αυτό είναι ιδιαίτερα συντηρητικό καθώς προσπαθούμε να επιλέξουμε την καλύτερη δυνατή ενέργεια κάτω από τις χειρότερες συνθήκες. Έτσι αν το αποτέλεσμα $v(a_i,\theta_j)$ παριστάνει ζημιά, τότε η χειρότερη ζημιά a_i, ανεξάρτητα της τιμής του θ_j είναι $\max\limits_{\theta_j}\{v(a_i,\theta_j)\}$. Το minimax κριτήριο επιλέγει την πράξη a_i, που σχετίζεται με το $\min\limits_{a_i}\max\limits_{\theta_j}\{v(a_i,\theta_j)\}$. Ομοίως αν το $v(a_i,\theta_j)$ παριστάνει κέρδος, το κριτήριο αυτό επιλέγει την πράξη a_i, που σχετίζεται με το $\max\limits_{a_i}\min\limits_{\theta_j}\{v(a_i,\theta_j)\}$ και ονομάζεται maximin κριτήριο.

Παράδειγμα: Εφαρμόζουμε το κριτήριο minimax στον πίνακα κέρδους του προηγούμενου παραδείγματος.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\max\limits_{\theta_j}\{v(a_i,\theta_j)\}$
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	8	23	23
a_3	21	18	12	21	**21**
a_4	30	22	19	15	30

Η ενέργεια που επιλέγουμε σύμφωνα με αυτό το κριτήριο είναι a_3.

3. Savage MiniMax Regret Κριτήριο

Το minimax κριτήριο που μόλις είδαμε, είναι εξαιρετικά συντηρητικό τόσο ώστε μερικές φορές οδηγεί σε παράλογα συμπεράσματα. Ακολουθεί ένα παράδειγμα που δείχνει την ανάγκη για ένα λιγότερο συντηρητικό κριτήριο. Έστω ο ακόλουθος πίνακας απωλειών:

	θ_1	θ_2
a_1	11000	90
a_2	10000	10000

Αν εφαρμόσουμε τον minimax κριτήριο στον πίνακα τότε επιλέγουμε το a_2. Διαισθητικά όμως θα θέλαμε να επιλέξουμε το a_1, διότι αν $\theta = \theta_2$ τότε η ζημιά είναι 90, ενώ αν επιλέξουμε το a_2 τότε η ζημιά θα είναι 10000 ανεξάρτητα του αν $\theta = \theta_1$ είτε $\theta = \theta_2$.

Το κριτήριο Savage χρησιμοποιεί ένα νέο πίνακα απωλειών όπου η $v(a_i, \theta_j)$ αντικαθίσταται από την $r(a_i, \theta_j)$ το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$r(a_i,\theta_j)=\begin{cases} \max\limits_{a_k}\{v(a_k,\theta_j)\}-v(a_i,\theta_j) & \text{αν το } v \text{ είναι κέρδος} \\ \\ v((a_i,\theta_j)-\min\limits_{a_k}\{v(a_k,\theta_j)\} & \text{αν το } v \text{ είναι απώλεια} \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι η $r(a_i, \theta_j)$ είναι η διαφορά ανάμεσα στην καλύτερη επιλογή της στήλης θ_j και τις τιμές των $v(a_i, \theta_j)$ στην ίδια στήλη. Στην ουσία, η $r(a_i, \theta_j)$ παριστάνει την απώλεια (*regret*) αυτού που παίρνει την απόφαση, ως συνέπεια του ότι δεν έκανε την καλύτερη επιλογή που αντιστοιχεί στην μελλοντική κατάσταση θ_j. Η συνάρτηση $r(a_i, \theta_j)$ αναφέρεται ως πίνακας θλίψης (regret matrix).

Ανεξάρτητα του αν η $v(a_i, \theta_j)$ είναι συνάρτηση κέρδους ή απώλειας, η $r(a_i, \theta_j)$ είναι συνάρτηση θλίψης (regret function) και σε κάθε περίπτωση παριστάνει απώλεια. Επομένως μόνο το minimax κριτήριο (και όχι το maximin) μπορεί να εφαρμοστεί στην $r(a_i, \theta_j)$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε και πάλι το πρόβλημα του πρώτου παραδείγματος. Ο ακόλουθος πίνακας απωλειών προκύπτει από τον πίνακα κόστους του πρώτου παραδείγματος αφαιρώντας το 5, 7, 8 και 15 από τις στήλες 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\max_{\theta_j}\{v(a_i,\theta_j)\}$	
a_1	0	3	10	10	10	
a_2	3	0	0	8	**8**	⟵ minimax value
a_3	16	11	4	6	16	
a_4	25	15	11	0	25	

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό η ενέργεια που επιλέγουμε είναι η a_2, που είναι διαφορετική από την απάντηση με το minimax του προηγούμενου παραδείγματος.

4. Κριτήριο Hurwicz

Το κριτήριο αυτό καλύπτει όλες τις τάσεις από τις πιο αισιόδοξες έως τις πιο απαισιόδοξες. Κάτω από τις πιο αισιόδοξες συνθήκες κάποιος θα επέλεγε την ενέργεια εκείνη που αντιστοιχεί στο $\max_{a_i}\max_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)$, ενώ κάτω από απαισιόδοξες συνθήκες θα επέλεγε εκείνη την ενέργεια που αντιστοιχεί στο $\max_{a_i}\min_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)$. Το κριτήριο του Hurwicz προσφέρει κάποια ισορροπία ανάμεσα σε αυτές τις δυο ακραίες καταστάσεις αισιοδοξίας και απαισιοδοξίας εισαγάγωντας το *δείκτη αισιοδοξίας* α, όπου $0 \le \alpha \le 1$. Έτσι αν η $v(a_i,\theta_j)$ παριστάνει κέρδος, επιλέγουμε την ενέργεια που αντιστοιχεί στο

$$\max_{a_i}\left\{\alpha \max_{\theta_j} v(a_i,\theta_j) + (1-\alpha)\min_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)\right\}$$

Στην περίπτωση που η $v(a_i,\theta_j)$ παριστάνει ζημιά τότε επιλέγουμε εκείνη την ενέργεια που αντιστοιχεί στο:

$$\min_{a_i}\left\{\alpha \min_{\theta_j} v(a_i,\theta_j) + (1-\alpha)\max_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)\right\}$$

Όταν $\alpha = 1$ το κριτήριο είναι πολύ αισιόδοξο ενώ αν $\alpha = 0$ είναι απαισιόδοξο. Μια τιμή του α μεταξύ του 0 και του 1 μπορεί να επιλεγεί ανάλογα με το αν αυτός που αποφασίζει είναι αισιόδοξος ή απαισιόδοξος. Συνήθως, όταν δεν υπάρχει τάση προς καμία πλευρά, μια λογική τιμή είναι $\alpha = \frac{1}{2}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Εφαρμόζουμε το κριτήριο αυτό στο πρώτο παράδειγμα. Θεωρούμε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$. Οι απαραίτητοι υπολογισμοί φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα από όπου προκύπτει ότι η ιδανική λύση είναι είτε η ενέργεια a_1 είτε η ενέργεια a_2.

	$\min\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)$	$\max\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)$	$\alpha \min\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j) + (1-\alpha) \max\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)$	
a_1	5	25	**15**	$\Big\}\ \min\limits_{a_i}$
a_2	7	23	**15**	
a_3	12	21	16.5	
a_4	15	30	22.5	

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα οι προβλέψεις αποτελούν μια σημαντική πηγή πληροφόρησης για τη λήψη των διοικητικών και οικονομικών αποφάσεων. Τα διοικητικά στελέχη των οικονομικών μονάδων που λαμβάνουν τις αποφάσεις, μπορούν να λειτουργούν σε διαφορετικές μορφές περιβάλλοντος , κάθε μια από τις οποίες χαρακτηρίζεται και από συνθήκες βεβαιότητας, αβεβαιότητας ή κινδύνου.

Στη λήψη των αποφάσεων με συνθήκες βεβαιότητας, θεωρούμε ότι είναι γνωστές, τη στιγμή που λαμβάνεται η απόφαση, όλες οι πληροφορίες που χρειάζονται για τη λήψη της απόφασης και ότι υπάρχει βεβαιότητα για το τι πρόκειται να συμβεί στο μέλλον. Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται συνήθως στις αποφάσεις ρουτίνας και η σχετική ανάλυση γίνεται σε μεγάλο βαθμό με προσδιοριστικά παραδείγματα τις επιχειρησιακής έρευνας ή άλλων ποσοτικών μεθόδων .

Στη λήψη αποφάσεων με συνθήκες αβεβαιότητας θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τα αποτελέσματα για τις μελλοντικές καταστάσεις του περιβάλλοντος, αλλά δεν μας είναι γνωστές και ούτε μπορούμε να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των καταστάσεων αυτών.

Η λήψη των αποφάσεων με συνθήκες κινδύνου είναι μια ενδιάμεση περίπτωση μεταξύ συνθηκών βεβαιότητας και αβεβαιότητας. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι για τις διαφορετικές μελλοντικές καταστάσεις του περιβάλλοντος γνωρίζουμε ή μπορούμε να εκτιμήσουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες πραγματοποίησης των καταστάσεων αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΔΕΝΤΡΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΔΕΝΤΡΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑ BAYES

Υπάρχουν δύο κατηγορίες κριτηρίων απόφασης:

- *Ενός σταδίου*: όπου οι αποφάσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και οι αποφάσεις που λαμβάνει κάποιος στο παρόν δεν καθορίζουν και αυτές που θα λάβει στο μέλλον.
- *Πολλαπλών σταδίων*: όπου οι εξαρτώμενες αποφάσεις λαμβάνονται σειριακά.

Τα δένδρα αποφάσεων ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία και χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός προβλήματος λήψης απόφασης της κατηγορίας αυτής. Για παράδειγμα, συχνά χρειάζεται να πάρουμε μια σειρά αποφάσεων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Τότε, για τον καθορισμό της βέλτιστης απόφασης χρησιμοποιούμε τα δένδρα αποφάσεων. Ένα τέτοιο δένδρο μας επιτρέπει να αναλύουμε ένα μεγάλο και πολύπλοκο πρόβλημα σε διάφορα μικρότερα προβλήματα.

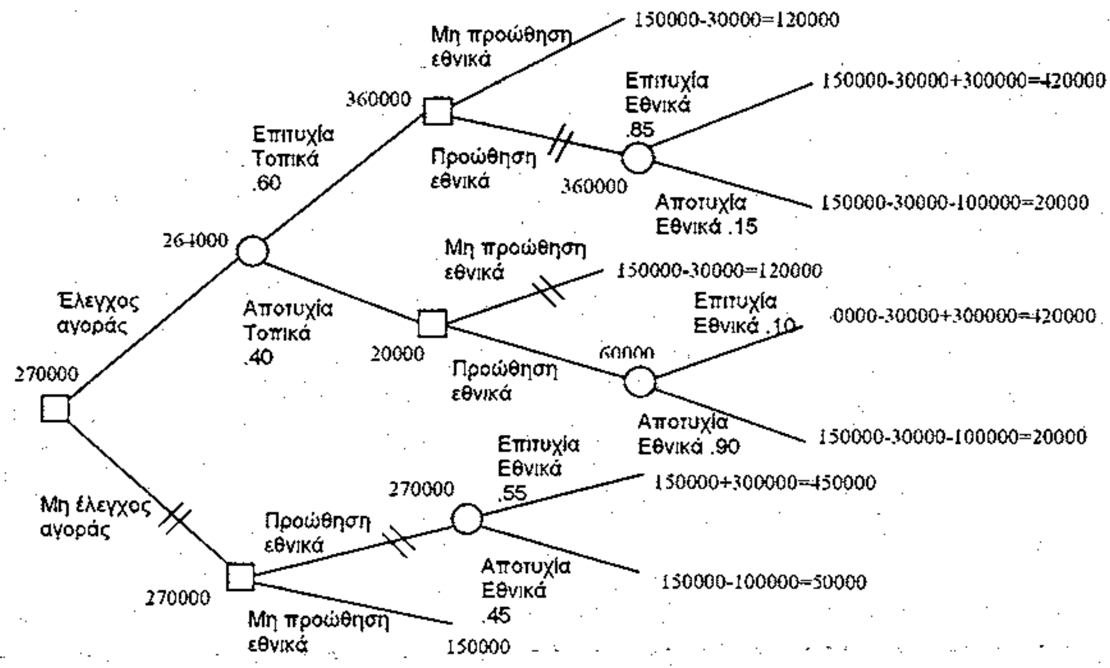
Παράδειγμα: Η κεφαλαιοποίηση της αμερικάνικης εταιρείας «Taste» είναι της τάξης των 150000€ και σκέπτεται να προωθήσει στην αγορά ένα νέο προϊόν, το αναψυκτικό Χ. Υπάρχουν 3 εναλλακτικές επιλογές για την εταιρεία:

1. Να διεξαγάγει έλεγχο αγοράς τοπικά και στη συνέχεια να αξιολογήσει τα αποτελέσματα της αγοράς, για να αποφασίσει αν συμφέρει η προώθηση σε εθνικό επίπεδο.
2. Να ξεκινήσει απευθείας την προώθηση του προϊόντος σε εθνικό επίπεδο (χωρίς έλεγχο αγοράς).
3. Να απορρίψει την ιδέα προώθησης του προϊόντος σε εθνικό επίπεδο (χωρίς έλεγχο αγοράς).

Χωρίς έλεγχο της αγοράς η εταιρεία πιστεύει ότι το προϊόν Χ, έχει πιθανότητα 55% να αποβεί επιτυχές εμπορικά σε εθνικό επίπεδο και 45% να έχει αποτυχία. Αν το προϊόν πετύχει εθνικά, η κεφαλαιοποίηση της εταιρείας θα αυξηθεί κατά 300000€, ενώ αν αποτύχει θα μειωθεί κατά 100000€.

Αν τελικά η εταιρεία διεξαγάγει τον έλεγχο αγοράς, κάτι που κοστίζει 30000€, υπάρχει πιθανότητα 60% για θετικά αποτελέσματα (εθνική επιτυχία του προϊόντος) και 40% για αρνητικά αποτελέσματα. Αν τοπικά παρατηρηθεί επιτυχία, υπάρχει πιθανότητα 85% ότι το ίδιο θα συμβεί και σε εθνικό επίπεδο. Αν πάλι ο τοπικός έλεγχος έχει αρνητικά αποτελέσματα, η πιθανότητα για εθνική επιτυχία είναι μόλις 10%. Αν η εταιρεία διατηρεί ουδέτερη στάση απέναντι στον κίνδυνο (risk neutral), δηλαδή θέλει να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη κεφαλαιοποίηση της, ποια στρατηγική (εναλλακτική επιλογή) πρέπει να ακολουθήσει;

Θα αναπαραστήσουμε γραφικά το παραπάνω πρόβλημα με ένα δένδρο απόφασης, που όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα αποτελείται από δύο ειδών κόμβους: τους *κόμβους απόφασης* (συμβολίζονται με □) και τους κόμβους γεγονότων (συμβολίζονται με○):



Οι κόμβοι απόφασης παριστάνουν σημεία στα οποία η εταιρεία αποφασίζει μεταξύ πιθανών επιλογών και κάθε κλάδος συμβολίζει μια πιθανή απόφαση.

Οι κόμβοι γεγονότων παριστάνουν σημεία στα οποία εξωτερικοί παράγοντες αποφασίζουν ποια από τα πιθανά ενδεχόμενα θα συμβούν. Κάθε κλάδος συμβολίζει και εδώ ένα πιθανό αποτέλεσμα και ο αριθμός συμβολίζει την πιθανότητα το γεγονός να συμβεί. Ο κλάδος από τον οποίο δεν ξεκινούν άλλοι κόμβοι ονομάζεται τελικός κλάδος.

Για να προσδιορίσουμε τις αποφάσεις που μεγιστοποιούν την αναμενόμενη κεφαλαιοποίηση της εταιρείας εργαζόμαστε από το τέλος του δένδρου προς την αρχή (backwards). Για κάθε κόμβο γεγονότος υπολογίζουμε την αναμενόμενη κεφαλαιοποίηση και την τοποθετούμε σε ○. Για κάθε κόμβο απόφασης, συμβολίζουμε με || την απόφαση που μεγιστοποιεί την τελική αναμενόμενη κεφαλαιοποίηση και τοποθετούμε το αποτέλεσμα που σχετίζεται με αυτήν την απόφαση σε □.

Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε ανάποδα με τον ίδιο τρόπο έως ότου φθάσουμε στην αρχή του δένδρου. Κατόπιν, η βέλτιστη ακολουθία αποφάσεων προσδιορίζεται ακολουθώντας τα σύμβολα ||. Αρχίζουμε προσδιορίζοντας την αναμενόμενη τελική κεφαλαιοποίηση για τους τρεις παρακάτω κόμβους γεγονότων:

- Εθνική προώθηση του προϊόντος μετά από επιτυχή τοπικό έλεγχο της αγοράς: $.85(420000)+.15(20000)=360000$.
- Εθνική προώθηση του προϊόντος μετά από αποτυχημένο τοπικό έλεγχο της αγοράς: $.10(420000)+.90(20000)=60000$.
- Εθνική προώθηση του προϊόντος μετά από μη έλεγχο της αγοράς: $.55(450000)+.45(50000)=270000$.

Τώρα μπορούμε να εκτιμήσουμε τους τρεις κόμβους απόφασης:

- Απόφαση μετά από επιτυχή τοπικό έλεγχο της αγοράς. Η εθνική προώθηση του προϊόντος αποφέρει μεγαλύτερη αναμενόμενη τελική κεφαλαιοποίηση από τη μη εθνική προώθηση του προϊόντος, έτσι τοποθετούμε το σύμβολο || μετά την εθνική προώθηση και εισάγουμε ως αναμενόμενη τελική θέση τις 360000.

- Απόφαση μετά από αποτυχημένο τοπικό έλεγχο της αγοράς. Η μη εθνική προώθηση του προϊόντος αποφέρει μεγαλύτερη αναμενόμενη τελική κεφαλαιοποίηση από την εθνική προώθηση του προϊόντος, έτσι τοποθετούμε το σύμβολο || μετά τη μη εθνική προώθηση και εισάγουμε ως αναμενόμενη τελική θέση τις 120000.
- Απόφαση μετά από μη έλεγχο της αγοράς. Η εθνική προώθηση του προϊόντος αποφέρει μεγαλύτερη αναμενόμενη τελική κεφαλαιοποίηση από τη μη εθνική προώθηση του προϊόντος, έτσι τοποθετούμε το σύμβολο || μετά την εθνική προώθηση και εισάγουμε ως αναμενόμενη τελική θέση τις 270000.

Τώρα υπολογίζουμε τον κόμβο γεγονότος που απορρέει από την απόφαση να γίνει έλεγχος αγοράς (ανεξαρτήτου του αποτελέσματος): Η αναμενόμενη τελική θέση είναι $.60(360000)+.40(120000)=264000$ και σημειώνεται σε ○.

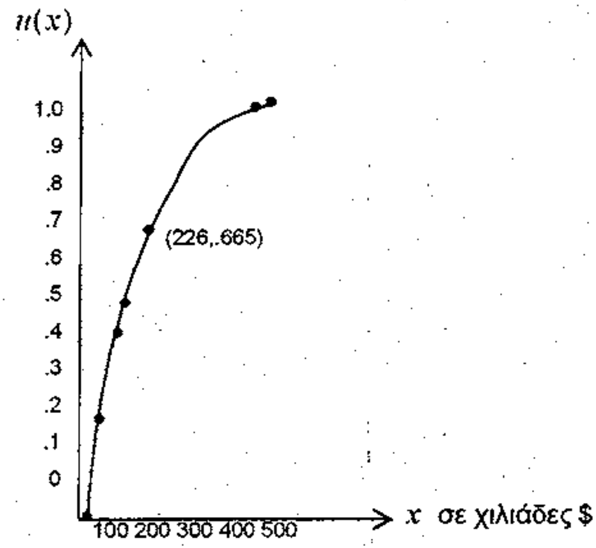
Αυτό που απομένει είναι να αποφασίσουμε για τον έλεγχο ή μη της αγοράς. Έχουμε υπολογίσει ότι ο έλεγχος της αγοράς αποφέρει μια τελική θέση 264000 ενώ ο μη έλεγχος της αγοράς αποφέρει μια τελική θέση 270000. Έτσι σημειώνουμε σε || το μη έλεγχο αγοράς και το ποσό των 270000 τοποθετείται σε □.

Είμαστε τώρα στην αρχή του δένδρου και η βέλτιστη απόφαση είναι η εθνική προώθηση του προϊόντος χωρίς προηγούμενο έλεγχο. Η στρατηγική αυτή αποφέρει αναμενόμενη τελική κεφαλαιοποίηση 270000.

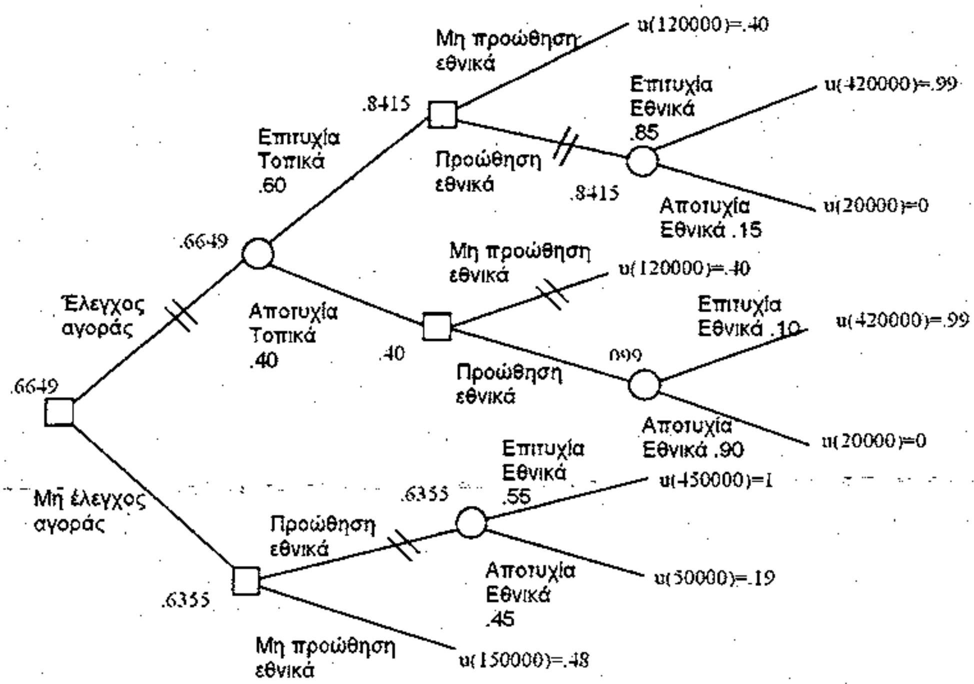
Ενσωμάτωση της συντηρητικότητας (risk aversion) στην ανάλυση δένδρων απόφασης.

Παρατηρούμε ότι στη βέλτιστη στρατηγική της εταιρείας υπάρχει πιθανότητα .45 η τελική θέση να είναι μόλις 50000€. Από την άλλη, η στρατηγική του ελέγχου της αγοράς και κατόπιν της τελικής απόφασης με βάση τα αποτελέσματα, παράγει πιθανότητα $(.60)(.15)=.09$ η τελική κεφαλαιοποίηση να είναι κατώτερη των 100000€. Επομένως, αν η διάθεση της εταιρείας είναι συντηρητική (risk-averse), η στρατηγική της άμεσης προώθησης του προϊόντος ίσως να μην είναι και η προτιμητέα.

Αναλυτικότερα, έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας της εταιρείας είναι η $u(x)$, όπου x είναι η τελική κεφαλαιοποίηση:



Για τη συνάρτηση χρησιμότητας έχουμε $u(450000)=1$, $u(420000)=.99$, $u(150000)=.48$, $u(120000)=.40$, $u(50000)=.19$ και $u(20000)=0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές παράγεται το εξής δένδρο αποφάσεων:



Στη συνέχεια υπολογίζουμε την αναμενόμενη χρησιμότητα στους τρεις παρακάτω κόμβους γεγονότων:

- Εθνική προώθηση του προϊόντος μετά από επιτυχή τοπικό έλεγχο της αγοράς. Εδώ έχουμε αναμενόμενη χρησιμότητα $.85(.99)+.15(0)=.8415$.
- Εθνική προώθηση του προϊόντος μετά από αποτυχημένο τοπικό έλεγχο της αγοράς. Εδώ έχουμε αναμενόμενη χρησιμότητα $.10(.99)+.90(0)=.099$.
- Εθνική προώθηση του προϊόντος μετά από μη έλεγχο της αγοράς. Εδώ έχουμε αναμενόμενη χρησιμότητα $.55(1)+.45(19)=.6355$.

Τώρα μπορούμε να εκτιμήσουμε τους τρεις κόμβους απόφασης:

- Απόφαση μετά από επιτυχή τοπικό έλεγχο της αγοράς. Η εθνική προώθηση του προϊόντος αποφέρει μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα από τη μη εθνική προώθηση του προϊόντος, έτσι τοποθετούμε το σύμβολο || μετά την εθνική προώθηση και εισάγουμε ως αναμενόμενη χρησιμότητα .8415.
- Απόφαση μετά από αποτυχημένο τοπικό έλεγχο της αγοράς. Η μη εθνική προώθηση του προϊόντος αποφέρει μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα από την εθνική προώθηση του προϊόντος, έτσι τοποθετούμε το σύμβολο || μετά τη μη εθνική προώθηση και εισάγουμε ως αναμενόμενη χρησιμότητα .40.
- Απόφαση μετά από μη έλεγχο της αγοράς. Η εθνική προώθηση του προϊόντος αποφέρει μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα από τη μη εθνική προώθηση του προϊόντος, έτσι τοποθετούμε το σύμβολο || μετά την εθνική προώθηση και εισάγουμε ως αναμενόμενη χρησιμότητα .6355.

Τώρα υπολογίζουμε τον κόμβο γεγονότος που απορρέει από την απόφαση να γίνει έλεγχος αγοράς (ανεξαρτήτου του αποτελέσματος).
Η αναμενόμενη χρησιμότητα είναι $.60(.8415)+.40(.40)=.6649$ και εντάσσεται σε Ο.

Αυτό που απομένει είναι να αποφασίσουμε για τον έλεγχο ή μη της αγοράς. Έχουμε υπολογίσει ότι ο έλεγχος της αγοράς αποφέρει μια αναμενόμενη χρησιμότητα .6649 ενώ ο μη έλεγχος της αγοράς αποφέρει μια αναμενόμενη χρησιμότητα .6355. Έτσι σημειώνουμε με || τον έλεγχο αγοράς και η αναμενόμενη χρησιμότητα .6649 τοποθετείται σε □.

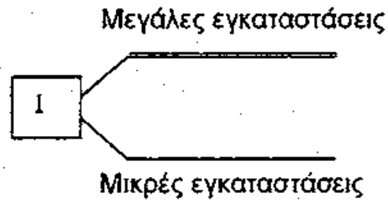
Είμαστε τώρα στην αρχή του δένδρου και η βέλτιστη απόφαση είναι η εθνική προώθηση του προϊόντος με προηγούμενο έλεγχο. Αν αυτός έχει θετικά αποτελέσματα, τότε η εταιρεία μπορεί να προχωρήσει σε εθνική διάθεση του προϊόντος. Η στρατηγική αυτή αποφέρει πιθανότητα μόλις $.60(.15)=.09$ ότι η αναμενόμενη τελική κεφαλαιοποίηση θα είναι λιγότερη από 100000. Αυτό αντανακλά τη συντηρητική φύση (risk-averse nature) της συνάρτησης χρησιμότητας. Επίσης παρατηρούμε από το παραπάνω γράφημα ότι $u(226000)=.665$. Επειδή η εταιρεία θεωρεί ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα της παρούσας κατάστασης είναι .6649, η υποτιθέμενη κεφαλαιοποίηση είναι ισοδύναμη των 226000. Έτσι, αν κάποιος προσέφερε περισσότερα από $226000-150000=76000$ για να αγοράσει τα δικαιώματα του προϊόντος, η εταιρεία θα δεχόταν την προσφορά. Ο λόγος είναι ότι με περισσότερες από 76000, η κεφαλαιοποίηση θα υπερέβαινε τις $150000+76000=226000$, κατάσταση που έχει συνάρτηση χρησιμότητας μεγαλύτερη από .665.

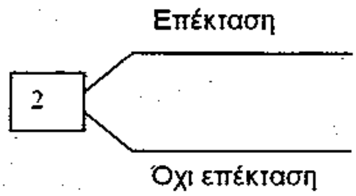
Παράδειγμα: Μια εταιρεία πρέπει να αποφασίσει για το αν θα χτίσει εξαρχής μεγάλες εγκαταστάσεις για την παραγωγή ενός προϊόντος της ή αν θα χτίσει καταρχήν μικρές εγκαταστάσεις που στη συνέχεια θα τις επεκτείνει. Η απόφαση εξαρτάται βασικά απ' τη μελλοντική ζήτηση του προϊόντος. Η κατασκευή μεγάλων εγκαταστάσεων δικαιολογείται μόνο αν έχουμε υψηλή ζήτηση, αλλιώς θα χτιστούν αρχικά μικρές εγκαταστάσεις και θα η εταιρεία θα αποφασίσει σε 2 χρόνια αν θα τις επεκτείνει ή όχι.

Όπως γίνεται φανερό αυτό είναι ένα πρόβλημα που εμπεριέχει δύο στάδια.

- Αν αρχικά θα κτιστούν μεγάλες εγκαταστάσεις ή όχι.
- Αν δεν κτιστούν άμεσα μεγάλες εγκαταστάσεις, τότε η δυνατότητα επέκτασης σε 2 χρόνια.

Επομένως στο δένδρο αποφάσεων θα έχουμε δύο κόμβους αποφάσεων:





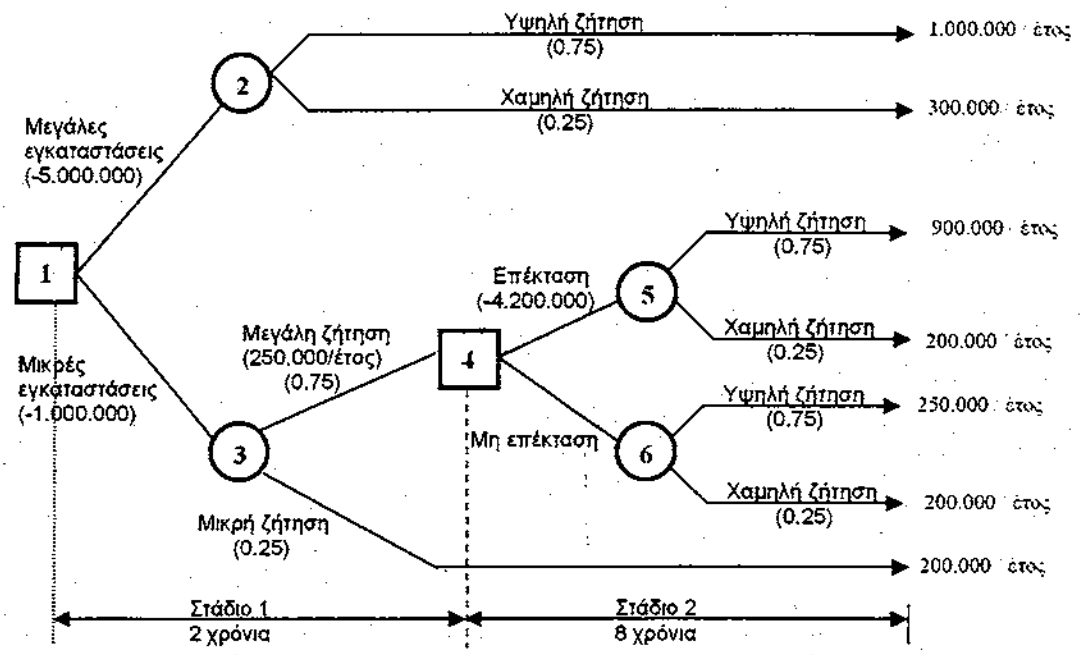
Οι καταστάσεις οι οποίες μπορούν να ισχύουν είναι:

- Να έχουμε υψηλή ζήτηση.
- Να έχουμε χαμηλή ζήτηση.

Από την εμπειρία της αγοράς έχουμε τα εξής δεδομένα:

- Οι πιθανότητες να έχω υψηλή και χαμηλή ζήτηση για τα επόμενα 10 χρόνια είναι 0.75 και 0.25 αντίστοιχα.
- Η απευθείας ανέγερση μεγάλων εγκαταστάσεων κοστίζει 5.000.000€ ενώ των μικρών 1.000.000€
- Η επέκταση σε 2 χρόνια θα κοστίσει 4.200.000€
- Μεγάλες εγκαταστάσεις και υψηλή (χαμηλή) ζήτηση αποδίδουν 1.000.000€ (300.000€) ετησίως.
- Μικρές εγκαταστάσεις και χαμηλή ζήτηση αποδίδουν 200.000€ ετησίως.
- Μικρές εγκαταστάσεις και υψηλή ζήτηση αποδίδουν 250.000€ ετησίως.
- Επεκτεινόμενες μικρές εγκαταστάσεις με υψηλή (χαμηλή) ζήτηση αποδίδουν 900.000€ (200.000€) ετησίως.
- Μικρές εγκαταστάσεις χωρίς επέκταση και υψηλή ζήτηση τα 2 πρώτα χρόνια που ακολουθείται από χαμηλή ζήτηση αποδίδει 200.000€ για καθένα από τα επόμενα 8 χρόνια.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω δεδομένα σχεδιάζουμε το δένδρο αποφάσεων:



Ο κόμβος 1 είναι ένα σημείο απόφασης όπου πρέπει η εταιρεία να αποφασίσει για το μέγεθος των αρχικών εγκαταστάσεων. Ο κόμβος 2 είναι ένα πιθανό γεγονός απ' όπου ξεκινούν δύο διακλαδώσεις οι οποίες αντιπροσωπεύουν τη χαμηλή και την υψηλή ζήτηση. Όπως φαίνεται σε κάθε διακλάδωση αντιστοιχίζεται και η κατάλληλη πιθανότητα. Ο κόμβος 3 είναι επίσης ένα πιθανό γεγονός απ' όπου ξεκινούν πάλι δύο διακλαδώσεις για τη χαμηλή και την υψηλή ζήτηση.

Ο κόμβος 4 είναι το δεύτερο σημείο απόφασης όπου η εταιρεία θα αποφασίσει για το αν θα επεκταθεί. Πάλι οι κόμβοι 5 και 6 είναι πιθανά γεγονότα απ' όπου ξεκινούν διακλαδώσεις για την υψηλή και χαμηλή ζήτηση.

Υποθέτουμε ότι η εταιρεία θα εξετάσει το πρόβλημα για 10 χρόνια. Οι υπολογισμοί ξεκινούν στο στάδιο 2 και θα συνεχίσουν προς τα πίσω στο στάδιο 1. Έτσι, για τα 8 τελευταία χρόνια μπορούμε να εκτιμήσουμε τις δύο εναλλακτικές λύσεις στον κόμβο 4.

$E\{\text{καθαρό κέρδος} \mid \text{επέκταση}\} = (900000 \cdot .75 + 200000 \cdot .25) \cdot 8 - 4200000 = 1600000.$

$E\{\text{καθαρό κέρδος} \mid \text{μη επέκταση}\} = (250000 \cdot .75 + 200000 \cdot .25) \cdot 8 = 1900000.$

Άρα αποφασίζουμε να μην την επεκτείνουμε.

Τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες τις διακλαδώσεις που ξεκινούν απ' τον κόμβο 4 με ένα κλάδο ο οποίος έχει αναμενόμενο κέρδος 1.900.000€. Στη συνέχεια θα εκτελέσουμε παρόμοιους υπολογισμούς για τον κόμβο 1.

$E\{\text{καθαρό κέρδος} \mid \text{μεγάλες εγκαταστάσεις}\} =$
$= (1000000 \cdot .75 + 300000 \cdot .25) \cdot 10 - 5000000 = 3250000.$

$E\{\text{καθαρό κέρδος} \mid \text{μικρές εγκαταστάσεις}\} =$
$= (1900000 + 500000 \cdot .75 + 400000 \cdot .25) - 1000000 = 1375000.$

Επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι να χτίσει η εταιρεία εξαρχής μεγάλες εγκαταστάσεις. Άρα η απόφαση που πήραμε στον κόμβο 4 δεν παίζει κανένα ρόλο.

<u>Θεώρημα του Bayes</u>

Σε πολλές αποφάσεις είναι απαραίτητο να γίνει σύγκριση μεταξύ του «κόστους» που θα προκύψει αν ληφθεί μια εσφαλμένη απόφαση, με τη δαπάνη συγκέντρωσης νέων πληροφοριών. Μια πολύ σημαντική προσέγγιση στο θέμα αυτό είναι αυτή της «Θεωρίας αποφάσεων του Bayes» (ή ανάλυση κατά Bayes) που εισάγει μια διαδικασία, σύμφωνα με την οποία ο διοικητικός φορέας μπορεί σταδιακά να βελτιώσει τις πληροφορίες που χρειάζεται, επομένως και τις πιθανότητες για τη λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες κινδύνου αλλά και αβεβαιότητας.

Βασικό θεώρημα αυτής της ανάλυσης είναι το *θεώρημα του Bayes*, που αποσκοπεί στην αναπροσαρμογή των a priori (εκ των προτέρων) πιθανοτήτων, κάτω από το φως νέων πληροφοριών (π.χ. προβλέψεις βασιζόμενες σε υποκειμενική κρίση, διενέργεια ενός πειράματος, έρευνα αγοράς κλπ.), σε a posteriori (εκ των υστέρων) πιθανότητες.

Στο θεώρημα αυτό καταλήγουμε ως εξής:

Έστω ότι τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι n αμοιβαίως αποκλειόμενα (ασυμβίβαστα) γεγονότα και $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, όπου S ο δειγματικός χώρος. Έστω ότι τα γεγονότα A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ συμβαίνουν με πιθανότητες

$P(A_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ και οι δεσμευμένες πιθανότητες ενός γεγονότος E είναι $P(E\mid A_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ με $P(E\mid A_i)\neq 0$ για ένα τουλάχιστον i $(i=1,2,\ldots,n)$.

Τότε $E=(A_1\cap E)\cup(A_2\cap E)\cup\ldots\cup(A_n\cap E)$

και $P(E)=P(A_1\cap E)+P(A_2\cap E)+\ldots+P(A_n\cap E)$.

Ξέρουμε όμως ότι $P(E\mid A_i)=\dfrac{P(E\cap A_i)}{P(A_i)}$ για $(i=1,2,\ldots,n)$, επομένως

$$P(E)=P(E\cap A_1)\cdot P(A_1)+P(E\cap A_2)\cdot P(A_2)+\ldots+P(E\cap A_n)\cdot P(A_n)$$

ή $$P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(E\mid A_i)\cdot P(A_i).$$

Αν τώρα ζητήσουμε να βρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα προς την άλλη κατεύθυνση, δηλαδή την $P(A_i\mid E)$, θα έχουμε

$P(A_i\mid E)=\dfrac{P(A_i\cap E)}{P(E)}$ για $(i=1,2,\ldots,n)$ και λόγω αντιμεταθετικότητας της τομής $P(E)\cdot P(A_i\mid E)=P(A_i)\cdot P(E\mid A_i)$, οπότε

$$P(A_i\mid E)=\frac{P(A_i)\cdot P(E\mid A_i)}{P(E)} \text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n.$$

Αφού όμως $P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(E\mid A_i)\cdot P(A_i)$, προκύπτει η παρακάτω σχέση που λέγεται «τύπος (ή θεώρημα) του Bayes»:

$$P(A_i\mid E)=\frac{P(A_i)\cdot P(E\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(E\mid A_i)\cdot P(A_i)}.$$

Παράδειγμα: Η εταιρεία «Fruit Computer» κατασκευάζει ολοκληρωμένα κυκλώματα μνήμης (memory chips) σε πακέτα των δέκα. Από προηγούμενη εμπειρία, η εταιρεία γνωρίζει ότι 80% των πακέτων περιέχουν 10% ελαττωματικά chips και 20% των πακέτων περιέχουν 50% ελαττωματικά chips. Αν μια καλή παρτίδα από chips (10% ελαττωματικά) αποσταλεί στο επόμενο στάδιο παραγωγής, τα έξοδα επεξεργασίας ανέρχονται σε 1000€, ενώ αν συμβεί το ίδιο σε μια κακή παρτίδα (50% ελαττωματικά) τα έξοδα ανέρχονται σε 4000€. Η εταιρεία έχει επίσης τη δυνατότητα να επεξεργάζεται εκ νέου μια παρτίδα από chips με κόστος 1000€. Μια παρτίδα που έχει επεξεργαστεί δεύτερη φορά είναι στα σίγουρα καλή (10% ελαττωματικά). Εναλλακτικά, η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να ελέγχει ένα chip από κάθε παρτίδα στην προσπάθεια να αποφασίσει αν είναι καλή ή όχι στο κόστος των 100€. Να αποφασιστεί πως η εταιρεία μπορεί να ελαχιστοποιήσει το αναμενόμενο συνολικό κόστος ανά παρτίδα.

Απάντηση: Έχουμε δύο καταστάσεις της φύσης (δυνατές εκβάσεις):

$G =$ καλή παρτίδα

$B =$ κακή παρτίδα

Μας δίνονται επίσης οι a priori πιθανότητες $P(G) = .80$ και $P(B) = .20$.

Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα της εκτέλεσης του ελέγχου ενός chip ανά παρτίδα. Τα πιθανά αποτελέσματα του ελέγχου είναι

$D =$ παρατηρείται ελαττωματικό chip

$ND =$ παρατηρείται μη ελαττωματικό chip

Μας δίνονται επίσης οι παρακάτω δεσμευμένες πιθανότητες:
$P(D \mid G) = .10$, $P(ND \mid G) = .90$, $P(D \mid B) = .50$, $P(ND \mid B) = .50$.

Για τη συμπλήρωση του δένδρου αποφάσεων που θα κατασκευάσουμε, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες $P(B \mid D)$, $P(G \mid D)$, $P(B \mid ND)$ και $P(G \mid ND)$. Έχουμε ότι:

$$P(D \cap G) = P(G) \cdot P(D \mid G) = .80 \cdot (.10) = .08$$

$$P(D \cap B) = P(B) \cdot P(D \mid B) = .20 \cdot (.50) = .10$$

$$P(ND \cap G) = P(G) \cdot P(ND \mid G) = .80 \cdot (.90) = .72$$

$$P(ND \cap B) = P(B) \cdot P(ND \mid B) = .20 \cdot (.50) = .10$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πιθανότητα του αποτελέσματος κάθε ελέγχου:

$$P(D) = P(D \cap G) + P(D \cap B) = .08 + .10 = .18$$

$$P(ND) = P(ND \cap G) + P(ND \cap B) = .72 + .10 = .82$$

Τώρα με τον κανόνα του Bayes υπολογίζουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες:

$$P(B \mid D) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)} = \frac{.10}{.18} = \frac{5}{9}$$

$$P(G \mid D) = \frac{P(D \cap G)}{P(D)} = \frac{.08}{.18} = \frac{4}{9}$$

$$P(B \mid ND) = \frac{P(ND \cap B)}{P(ND)} = \frac{.10}{.82} = \frac{10}{82}$$

$$P(G \mid ND) = \frac{P(ND \cap G)}{P(ND)} = \frac{.72}{.82} = \frac{72}{82}$$

Με τις εκ των υστέρων πιθανότητες συμπληρώνουμε το παρακάτω δένδρο.

Η βέλτιστη στρατηγική είναι να ελέγχουμε ένα chip. Αν είναι ελαττωματικό να επεξεργαζόμαστε ξανά την παρτίδα. Διαφορετικά να αποστέλλουμε την παρτίδα. Το αναμενόμενο συνολικό κόστος ανά παρτίδα είναι 1580€.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε κάποια παραδείγματα, όπου οι εξαρτώμενες αποφάσεις λαμβάνονται συριακά. Αρκετοί προϊστάμενοι χρησιμοποιούν ποσοτικές μεθόδους για να βελτιώσουν την ποιότητα των αποφάσεων τους. Μεταξύ των μεθόδων αυτών περιλαμβάνονται τα δένδρα αποφάσεων. Χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση προβλημάτων που χρειάζεται να παρθούν αποφάσεις πολλαπλών σταδίων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, με στόχο να καθοριστεί καλύτερη απόφαση.

Η γραφική αναπαράσταση ενός προβλήματος με ένα δένδρο απόφασης αποτελείται από δύο ειδών κόμβους :

- Τους κόμβους απόφασης (που παριστάνουν σημεία πιθανών επιλογών π.χ εταιρείας)
- Τους κόμβους γεγονότων (που παριστάνουν σημεία στα οποία στα οποία εξωτερικοί παράγοντες αποφασίζουν ποια από τα πιθανά ενδεχόμενα θα συμβούν)

Για να προσδιορίσουμε τις αποφάσεις που μεγιστοποιούν το επιθυμητό αποτέλεσμα, εργαζόμαστε αντίστροφα σε ένα δένδρο αποφάσεων και έτσι φτάνουμε στη βέλτιστη απόφαση.

Γενικά ένα δένδρο αποφάσεων παρουσιάζει εναλλακτικές πορείες αποφάσεων που επιτρέπει στον προϊστάμενο να παρατηρήσει πιθανά αποτελέσματα καθώς και τις σχέσεις τους για μελλοντικά γεγονότα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°
ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μια ειδική κατηγορία αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας που αφορούν στα προβλήματα ανταγωνισμού ή συγκρούσεων.

Το θεμελιώδες πρόβλημα της θεωρίας παιγνίων διατυπώθηκε από τον Von Neumann και ήταν αυτό πάνω στο οποίο βασίστηκε η σύγχρονη εξέλιξη του κλάδου: «Όταν n παίκτες $P_1, P_2, \ldots, P_n$ παίζουν δοθέν παίγνιο Γ, πως πρέπει ο τυχόν παίκτης P_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, για να επιτύχει το πιο ευνοϊκό αποτέλεσμα;»

Με τον όρο *παίγνιο (game)* εννοούμε το σύνολο των κανόνων και συμβάσεων για το παίξιμο. Αντίθετα *παιχνίδι (play)* είναι μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση των κανόνων αυτών, δηλαδή μια συγκεκριμένη αναμέτρηση (των παικτών). Στο τέλος κάθε παιχνιδιού, οι παίκτες που συμμετέχουν λαμβάνουν μια *αμοιβή (payoff)* (θετική ή αρνητική) σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού. Η αμοιβή v_i του παίκτη P_i, μπορεί να είναι θετική (κέρδος), αρνητική (ζημία) ή μηδενική. Σε πολλά παίγνια το ποσό που χάνουν κάποιοι παίκτες ισούται με το ποσό που κερδίζουν οι υπόλοιποι. Αν έχουμε δηλαδή, $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$, τότε μιλάμε για παίγνια μηδενικού αθροίσματος (zero-sum games). Αντίστοιχα συναντούμε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος και ακόμα συχνότερα μη σταθερού αθροίσματος (nonconstant-sum games). Τα περισσότερα μοντέλα θεωρίας παιγνίων σε επίπεδο εταιρικού ανταγωνισμού είναι μη σταθερού αθροίσματος, διότι είναι ασυνήθιστο για εταίρους ανταγωνιστές να βρίσκονται σε πλήρη και καθολική σύγκρουση. Στη συνέχεια θα δούμε παραδείγματα από παίγνια δύο ατόμων, μη σταθερού αθροίσματος όπου η συνεργασία μεταξύ των παικτών απαγορεύεται (το δίλημμα του κρατουμένου).

Τα παίγνια ταξινομούνται, επίσης, ανάλογα με τον αριθμό των παικτών και τον αριθμό των δυνατών κινήσεων. Για παράδειγμα, το σκάκι είναι παίγνιο δύο ατόμων με πεπερασμένο αριθμό κινήσεων. Τέλος τα παίγνια διακρίνονται και σε συνεταιρικά (cooperative) ή μη, ανάλογα με το αν υπάρχουν συμφωνίες ή συνεννοήσεις μεταξύ των παικτών.

Θα ξεκινήσουμε τη θεμελίωση της θεωρίας παιγνίων θεωρώντας *παίγνια δύο ατόμων και μηδενικού αθροίσματος.*

Τα χαρακτηριστικά αυτών των παιχνιδιών συνοψίζονται στα παρακάτω:

- Υπάρχουν δύο παίκτες (ο παίκτης γραμμής P_1 και ο παίκτης στήλης P_2).
- Ο παίκτης γραμμής πρέπει να επιλέξει μία από τις m δυνατές επιλογές $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Συγχρόνως, ο παίκτης στήλης πρέπει να επιλέξει μία από τις n δυνατές επιλογές $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Όλες οι παραπάνω επιλογές ονομάζονται γνήσιες στρατηγικές (pure strategies).
- Εάν ο παίκτης γραμμής επιλέξει τη στρατηγική i και ο παίκτης στήλης επιλέξει τη στρατηγική j, ο παίκτης γραμμής αποκομίζει ένα κέρδος v_{ij} και ο παίκτης στήλης χάνει ένα ποσό v_{ij}. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το κέρδος του παίκτη γραμμής προέρχεται από τον παίκτη στήλης.

Ο πίνακας αμοιβής του παιγνίου έχει την εξής μορφή και αναφέρεται στο ποσό που πληρώνει ο P_2 στον P_1:

$$
\begin{array}{lcc}
\text{Στρατηγικές του } P_2 \ \rightarrow & & \begin{array}{ccccc} b_1 & \cdots & b_j & \cdots & b_n \end{array} \\
 & \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{array} & \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{i1} & \cdots & v_{ij} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mj} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Στρατηγικές του P_1

Για παράδειγμα, στο παρακάτω παίγνιο δύο ατόμων και μηδενικού αθροίσματος, ο παίκτης γραμμής θα αποκομίσει δυο μονάδες (και ο παίκτης στήλης θα χάσει δύο μονάδες) αν ο παίκτης γραμμής επιλέξει τη δεύτερη στρατηγική του και ο παίκτης στήλης επιλέξει την πρώτη στρατηγική του:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Βασική υπόθεση της θεωρίας παιχνιδιών δύο ατόμων μηδενικού αθροίσματος.

Κάθε παίκτης επιλέγει μια στρατηγική που του επιτρέπει να επιτύχει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, με δεδομένο ότι ο αντίπαλός του γνωρίζει τη στρατηγική που έχει επιλέξει. Ας χρησιμοποιήσουμε αυτήν την υπόθεση για να προσδιορίσουμε πως οι παίκτες γραμμής και στήλης πρέπει να παίξουν το παρακάτω παιχνίδι δύο ατόμων και μηδενικού αθροίσματος:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{Ελάχιστα γραμμών} \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{array} \\ \text{Μέγιστα στηλών} & \begin{array}{ccc} 6 & 5 & 10 \end{array} & \end{array}$$

Πώς πρέπει να παίξει αυτό το παιχνίδι ο παίκτης γραμμής; Εάν επιλέξει τη γραμμή 1, η υπόθεση υποδηλώνει ότι ο παίκτης στήλης θα επιλέξει τη στήλη 1 ή τη στήλη 2 για να περιορίσει τον παίκτη γραμμής σε ένα κέρδος τεσσάρων μονάδων (ο μικρότερος αριθμός στη γραμμή 1 του πίνακα του παιχνιδιού). Ομοίως εάν ο παίκτης γραμμής επιλέξει τη γραμμή 2, η υπόθεση υποδηλώνει ότι ο παίκτης στήλης θα επιλέξει τη στήλη 3 και θα περιορίσει το κέρδος του παίκτη γραμμής στη μια μονάδα (ο μικρότερος αριθμός στη δεύτερη γραμμή του πίνακα του παιχνιδιού). Εάν ο παίκτης γραμμής επιλέξει τη γραμμή 3, θα αρκεστεί στο μικρότερο αριθμό αυτής της γραμμής, δηλαδή το 5. Έτσι με βάση την υπόθεση αυτή ο παίκτης γραμμής πρέπει να επιλέξει τη γραμμή με το μεγαλύτερο από τα ελάχιστα. Επειδή $\max(4,1,5) = 5$, ο παίκτης γραμμής πρέπει να επιλέξει τη γραμμή 3. Επιλέγοντας τη γραμμή 3, ο παίκτης γραμμής μπορεί να εξασφαλίσει ότι θα κερδίσει τουλάχιστον το max (minimum γραμμών) = πέντε μονάδες (δηλαδή το μέγιστο των ελαχίστων των γραμμών).

Από την οπτική γωνία του παίκτη στήλης, εάν αυτός επιλέξει τη στήλη 1, ο παίκτης γραμμής θα επιλέξει τη στρατηγική εκείνη που μεγιστοποιεί τις απώλειες του παίκτη στήλης (και τις δικές του ωφέλειες). Έτσι, εάν ο παίκτης στήλης επιλέξει τη στήλη 1, ο παίκτης γραμμής θα επιλέξει τη γραμμή 3 (επειδή ο μεγαλύτερος αριθμός στην πρώτη στήλη είναι ο 6 στην τρίτη γραμμή). Ομοίως, εάν ο παίκτης στήλης επιλέξει τη στήλη 2, ο παίκτης γραμμής θα επιλέξει ξανά τη γραμμή 3, επειδή $5 = \max(4,3,5)$. Τέλος, εάν ο παίκτης στήλης επιλέξει τη στήλη 3, ο παίκτης γραμμής θα επιλέξει τη γραμμή 1, προκαλώντας στον παίκτη στήλης να χάσει $10 = \max(10,1,7)$ μονάδες. Έτσι ο παίκτης στήλης μπορεί να περιορίσει τις απώλειές του στο min (maximum στηλών) $= \min(6,5,10) = 5$ επιλέγοντας τη στήλη 2.

Είδαμε ότι ο παίκτης γραμμής μπορεί να διασφαλίσει ότι τα κέρδη του θα είναι τουλάχιστον πέντε μονάδες. Επίσης ο παίκτης στήλης μπορεί να περιορίσει τις απώλειές του (και τα κέρδη του παίκτη γραμμής) στις πέντε μονάδες. Έτσι το μόνο λογικό αποτέλεσμα του παιχνιδιού είναι ο παίκτης γραμμής να κερδίσει ακριβώς πέντε μονάδες. Ο παίκτης γραμμής δεν μπορεί να περιμένει να κερδίσει περισσότερες από πέντε μονάδες, επειδή ο παίκτης στήλης (επιλέγοντας τη στήλη 2) μπορεί να περιορίσει τα κέρδη του παίκτη γραμμής στις πέντε μονάδες.

Όπως παρατηρούμε, φαίνεται ότι υπάρχει ένας ισχυρός λόγος για την επιλογή των συγκεκριμένων στρατηγικών. Πράγματι, οι στρατηγικές αυτές ορίζουν ένα σημείο ισορροπίας του παιγνίου, εννοώντας ότι κανένα παίκτη δε συμφέρει η αλλαγή στρατηγικής, αν ο άλλος παίκτης δε μεταβάλλει τη στρατηγική του.

Γενικά, ένα τέτοιο σημείο ισορροπίας υπάρχει αν

$$\max_i \min_j v_{ij} = \min_j \max_i v_{ij} = v$$

Αν i^* και j^* είναι οι δείκτες που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση, τότε λέμε ότι η μεν a_{i^*} είναι η στρατηγική maximin, η δε b_{j^*} η στρατηγική minimax. Το ζεύγος (a_{i^*}, b_{j^*}) ορίζει τις βέλτιστες γνήσιες στρατηγικές ή το κατά Nash σημείο ισορροπίας του παιγνίου. Το στοιχείο $v_{i^*j^*}$ είναι ταυτόχρονα το ελάχιστο της γραμμής του και το μέγιστο της στήλης του. Κάθε ζεύγος με την ιδιότητα αυτή αποτελεί ένα σαγμοειδές σημείο (saddle point) του παιγνίου.

Η ύπαρξη ενός τέτοιου σημείου επιβεβαιώνει ότι ο ένας παίκτης μπορεί να είναι βέβαιος ότι θα κερδίσει $v = v_{i^*j^*}$, ο δε άλλος παίκτης μπορεί να εμποδίσει τον πρώτο παίκτη από το να κερδίσει περισσότερο. Το v είναι η τιμή του παιγνίου.

Είναι πιθανό κάποιο παίγνιο να έχει περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \text{Ελάχιστα γραμμών} \\
a_1 & 6 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
a_2 & 3 & 0 & 12 & 2 & 0 \\
a_3 & 6 & 4 & 7 & 4 & 4 \\
a_4 & 8 & -2 & 10 & 1 & -2 \\
\text{Μέγιστα στηλών} & 8 & 4 & 12 & 4 &
\end{array}
$$

Το παίγνιο αυτό έχει τέσσερα σημεία ισορροπίας, τα (a_1, b_2), (a_3, b_4), (a_1, b_4), (a_3, b_2) και τιμή 4.

Φυσικά, δεν υπάρχει σε κάθε παίγνιο ένα σαγμοειδές σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση αυτή στόχος των παικτών είναι ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων σύμφωνα με τις οποίες πρέπει να επιλέγονται οι στρατηγικές για την επίτευξη των στόχων τους. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το κλασσικό παίγνιο «γράμματα – κεφαλή» $(\Gamma - \mathrm{K})$ με τους ακόλουθους κανονισμούς: κάθε παίκτης επιλέγει Γ ή K, αγνοώντας την επιλογή του αντιπάλου του. Αν υπάρχει σύμπτωση των επιλογών, δηλαδή KK ή $\Gamma\Gamma$, ο παίκτης P_1 κερδίζει 1 χρηματική μονάδα, ενώ αν οι επιλογές διαφέρουν, δηλαδή $\mathrm{K}\Gamma$ ή $\Gamma\mathrm{K}$, ο παίκτης P_2 κερδίζει 1 χρηματική μονάδα. Ο πίνακας αμοιβής έχει την παρακάτω μορφή:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \mathrm{K} & \Gamma \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathrm{K} \\ \Gamma \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Προφανώς ο παραπάνω πίνακας δεν έχει σαγμοειδές σημείο και το προηγούμενο κριτήριο (minimax-maximin) δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Στόχος του κάθε παίκτη είναι να δυσκολέψει την πρόβλεψη της επιλογής του από τον αντίπαλο του. Χρησιμοποιώντας κάποιο μηχανισμό τύχης ο κάθε παίκτης αποκλείει τη δυνατότητα πρόβλεψης της επιλογής του από τον άλλον. Το αναμενόμενο κέρδος του P_1 είναι $(1)(1/2)+(-1)(1/2)=0$ αν ο P_2 επιλέξει K και $(-1)(1/2)+(1)(1/2)=0$ αν ο P_2 επιλέξει Γ. Ανάλογα είναι και τα αποτελέσματα για τον P_2. Επομένως ο βέλτιστος τρόπος για να παίξει ο κάθε παίκτης είναι να επιλέγει από τις δύο πιθανές στρατηγικές του με πιθανότητα $1/2$. Η τιμή του παιγνίου είναι 0, και αναφέρεται σαν δίκαιο (fair).

Ας θεωρήσουμε τώρα το παρακάτω παίγνιο με πίνακα αμοιβής

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Το παίγνιο αυτό είναι σαφώς αρνητικό για τον P_2 και παίζοντας επιχειρεί να μειώσει όσο γίνεται τη δεδομένη ζημία του. Έστω ότι ο P_1 επιλέγει τις στρατηγικές a_1 και a_2 με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα και ο P_2 επιλέγει τις στρατηγικές b_1 και b_2 με πιθανότητες q και $1-q$ αντίστοιχα. Ισχύει, προφανώς, ότι $p_1+p_2=1$ καθώς και $q_1+q_2=1$. Το αναμενόμενο κέρδος για τον P_1 είναι

$E(p,q)=q[p+4(1-p)]+(1-q)[3p+2(1-p)]=\ldots=-4(p-1/2)(q-1/4)+5/2$.

Εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι οι βέλτιστες στρατηγικές είναι $p=1/2$, $1-p=1/2$ και $q=4$, $1-q=3/4$, καθώς και ότι η τιμή του παιγνίου είναι $v=5/2$.

Με τον όρο μικτή στρατηγική (mixed strategy) για τον παίκτη P_1 εννοούμε ένα διάνυσμα γραμμή $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_m)$ μη αρνητικών p_i $(i=1,\ldots,m)$, τέτοιων ώστε $\sum_{i=1}^{m} p_i=1$. Τα p_i $(i=1,\ldots,m)$, παριστάνουν τις πιθανότητες επιλογής των στρατηγικών $a_1,\ldots,a_m$. Αντίστοιχα, για τον παίκτη P_2 έχουμε ένα διάνυσμα στήλη $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$ μη αρνητικών q_j $(j=1,\ldots,n)$, τέτοιων ώστε $\sum_{j=1}^{n} q_j=1$. Τα q_j $(j=1,\ldots,n)$, παριστάνουν τις πιθανότητες επιλογής των στρατηγικών $b_1,\ldots,b_n$.

Αν οι παίκτες P_1 και P_2 χρησιμοποιούν τις στρατηγικές $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ αντίστοιχα, η αμοιβή για τον P_1 είναι το αναμενόμενο κέρδος του

$E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i v_{ij} q_j$, όπου v_{ij} ο πίνακας αμοιβής.

Αν ο P_1 χρησιμοποιεί τη γνήσια στρατηγική a_i και ο P_2 τη μικτή στρατηγική $\mathbf{q}$, τότε το αναμενόμενο κέρδος του P_1 είναι $E(a_i,\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} q_j$. Ανάλογα, αν P_2 χρησιμοποιεί τη γνήσια στρατηγική b_j και ο P_1 τη μικτή στρατηγική $\mathbf{p}$, τότε το αναμενόμενο κέρδος του P_1 είναι $E(\mathbf{p},b_j) = \sum_{i=1}^{m} v_{ij} p_i$. Τέλος αν και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν γνήσιες στρατηγικές, τότε $E(a_i,b_j) = v_{ij}$.

Παράδειγμα (παιγνίου δύο ατόμων σταθερού αθροίσματος):
Κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης ώρας της βραδινής ζώνης, δύο κανάλια ανταγωνίζονται για ένα κοινό 100 εκατομμυρίων θεατών. Τα κανάλια πρέπει ταυτοχρόνως να ανακοινώσουν τον τύπο του θεάματος που θα μεταδώσουν σε αυτή τη χρονική περίοδο. Οι πιθανές επιλογές για κάθε κανάλι και ο αριθμός των θεατών του καναλιού 1 (σε εκατομμύρια) για κάθε επιλογή παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Για παράδειγμα, αν και τα δύο κανάλια επιλέξουν γουέστερν, ο πίνακας δείχνει ότι 35 εκατομμύρια άνθρωποι θα παρακολουθήσουν το κανάλι 1 και 100-35=65 εκατομμύρια θα παρακολουθήσουν το κανάλι 2. Έτσι έχουμε ένα παίγνιο δύο ατόμων σταθερού αθροίσματος με c=100 (εκατομμύρια). Έχει αυτό παίγνιο σαγμοειδές σημείο; Ποια είναι η τιμή του παιγνίου για το δίκτυο 1;

Κανάλι 1	Κανάλι 2		
	Γουέστερν	Σαπουνόπερα	Κωμωδία
Γουέστερν	35	15	60
Σαπουνόπερα	45	58	50
Κωμωδία	18	14	70

Απάντηση:

Εξετάζοντας τα ελάχιστα των γραμμών, βρίσκουμε ότι επιλέγοντας μια σαπουνόπερα, το κανάλι 1 μπορεί να είναι σίγουρο για τουλάχιστον max(15,45,14) = 45 εκατομμύρια θεατές. Βλέποντας τα μέγιστα των στηλών, βλέπουμε ότι επιλέγοντας ένα γουέστερν το κανάλι 2 μπορεί να περιορίσει το δίκτυο 1 σε το πολύ min(45,58,70) = 45 εκατομμύρια θεατές. Δηλαδή

Max (minimum γραμμών) = Min (maximum στηλών) = 45

Έτσι, υπάρχει σαγμοειδές σημείο και η τιμή του παιγνίου είναι 45 εκατομμύρια θεατές για το κανάλι 1 και 55 εκατομμύρια θεατές για το κανάλι 2. Καμία πλευρά δεν θα επιτύχει καλύτερο αποτέλεσμα εάν μονομερώς αλλάξει στρατηγική. Η βέλτιστη στρατηγική για κανάλι 1 είναι να επιλέξει μια σαπουνόπερα και η βέλτιστη στρατηγική για το κανάλι 2 είναι να επιλέξει ένα γουέστερν.

Αν $(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του παιγνίου, τότε η $\mathbf{p}^*$ είναι μια στρατηγική maximin και η $\mathbf{q}^*$ μια στρατηγική minimax. Η κοινή τομή τους $E(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)$ είναι η τιμή του παιγνίου. Το σύνολο των μικτών στρατηγικών των P_1 και P_2 συμβολίζονται με P_m και Q_n αντίστοιχα.

<u>Θεώρημα 1</u>: Σε κάθε πινακικό παίγνιο ισχύει $\max_i \min_j v_{ij} = \min_j \max_i v_{ij}$ αν και μόνο αν το παίγνιο έχει ένα σαγμοειδές σημείο, δηλαδή το στοιχείο του πίνακα αμοιβής που είναι ταυτόχρονα το ελάχιστο της γραμμής του και το μέγιστο της στήλης του.

<u>Θεώρημα 2</u>: Σε κάθε πινακικό παίγνιο τα $\max_{\mathbf{p}\in P_m} \min_{\mathbf{q}\in Q_n} E(\mathbf{p},\mathbf{q})$ και $\min_{\mathbf{q}\in Q_n} \max_{\mathbf{p}\in P_m} E(\mathbf{p},\mathbf{q})$ υπάρχουν και είναι ίσα. Δηλαδή, κάθε πινακικό παίγνιο έχει λύση.

<u>Θεώρημα 3</u>: Κάθε μια από τις επόμενες συνθήκες συνεπάγεται τις άλλες δύο:

1. Υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας του παιγνίου.
2. $v_1 = \max_{\mathbf{p}\in P_m} \min_{\mathbf{q}\in Q_n} E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}\in Q_n} \max_{\mathbf{p}\in P_m} E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = v_2$
3. Υπάρχει πραγματικός αριθμός v και μικτές στρατηγικές $\mathbf{p}\in P_m$, $\mathbf{q}\in Q_n$, τέτοιες ώστε:

   (α) $E(\mathbf{p}^*, b_j) = \sum_{i=1}^{m} v_{ij} p_i^* \geq v$

   (β) $E(a_i, \mathbf{q}^*) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} q_j^* \leq v$

<u>Θεώρημα 4</u>: Για κάθε γνήσια στρατηγική a_i και b_j για την οποία είναι

$$E(a_i, \mathbf{q}^*) < v \qquad \text{και} \qquad E(\mathbf{p}^*, b_j) > v$$

έχουμε ότι $p_i^* = 0$ και $q_j^* = 0$ αντίστοιχα, όπου $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ ένα ζεύγος βέλτιστων στρατηγικών και v η τιμή του παιγνίου.

Το παραπάνω θεώρημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην επίλυση των παιγνίων.

Εφαρμογή: Με τη βοήθεια των θεωρημάτων 3 και 4, να επιλυθεί το παίγνιο

$$\begin{array}{lcc} \text{Στρατηγικές του } P_2 \rightarrow & & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \text{Στρατηγικές του } P_1 & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Απάντηση: Αφήνεται στον αναγνώστη να πιστοποιήσει ότι η επίλυση του παιγνίου ανάγεται στην επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} & p_1 + p_2 = 1 \\ & q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_1 + 2q_2 + 4q_3 \leq v \\ & 4q_1 + 2q_2 + q_3 \leq v \\ & p_1 + 4p_2 \geq v \\ & 2p_1 + 2p_2 \geq v \\ & 4p_1 + p_2 \geq v \\ & 0 \leq p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Η τιμή του παιγνίου που προκύπτει είναι $v=2$, με $q_1=0$, $q_2=1$, $q_3=0$ και $p_1=1/3$, $p_2=2/3$ ή $p_1=2/3$, $p_2=1/3$.

Γραφική επίλυση παιγνίων

Ένα $m\times 2$ ή $2\times n$ παίγνιο μπορεί να επιλυθεί γραφικά ως εξής:
Έστω για παράδειγμα το παίγνιο με πίνακα αμοιβής

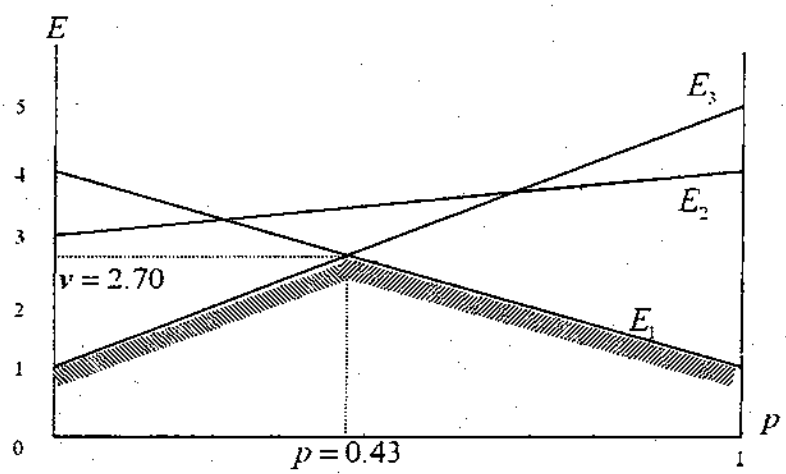
$$\begin{array}{ll} \text{Στρατηγικές του } P_2 \;\rightarrow & \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \text{Στρατηγικές του } P_1 \quad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Έστω ότι ο P_1 επιλέγει τις στρατηγικές a_1 και a_2 με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα. Το αναμενόμενο κέρδος του P_1 είναι:

$E_1=E(\mathbf{p},b_1)=p+4(1-p)=-3p+4$, αν ο P_2 επιλέξει τη b_1

$E_2=E(\mathbf{p},b_2)=4p+3(1-p)=p+3$, αν ο P_2 επιλέξει τη b_2

$E_3=E(\mathbf{p},b_3)=5p+(1-p)=4p+1$, αν ο P_2 επιλέξει τη b_3



Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι ο P_1 αναμένει ένα κέρδος ίσο τουλάχιστον με το σημείο στο οποίο η ελάχιστη των τεταγμένων των σημείων των τριών ευθειών γίνεται όσο το δυνατόν μεγαλύτερη, υπό την έννοια του maximin. Επομένως, η βέλτιστη μικτή στρατηγική για τον P_1 είναι $(0.43, 0.57)$. Με τη στρατηγική αυτή ο P_1 αναμένει ένα κέρδος ίσο με $v=2.70$, που είναι και η τιμή του παιγνίου.

Έστω τώρα, ότι ο P_2 επιλέγει τις στρατηγικές b_1, b_2 και b_3 με πιθανότητες q_1, q_2 και q_3 αντίστοιχα.

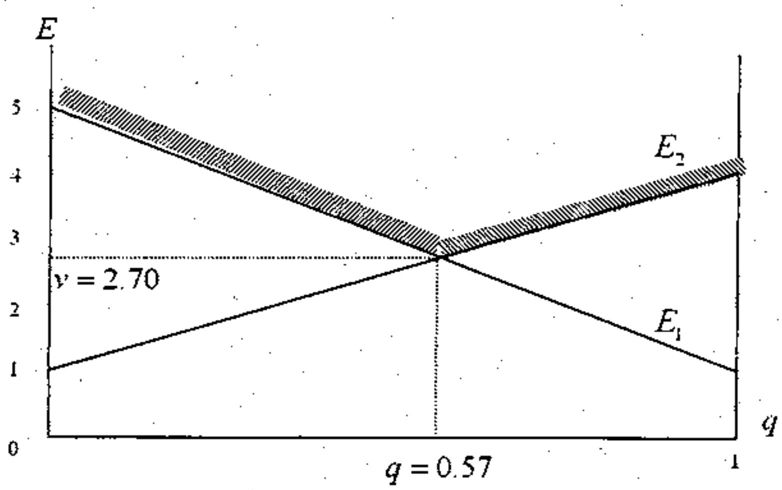
Παρατηρούμε ότι για την ευθεία E_2 που δεν διέρχεται από το ανωτέρω σημείο maximin, πρέπει να ισχύει $q_2 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η στρατηγική b_3 δεν επιλέγεται ποτέ από τον P_2, και επομένως μπορεί να παραληφθεί. Έτσι η στρατηγική minimax του P_2 μπορεί να προσδιοριστεί από τον πίνακα

$$\begin{array}{lcc} \text{Στρατηγικές του } P_2 \rightarrow & & \begin{matrix} b_1 & b_3 \end{matrix} \\ \text{Στρατηγικές του } P_1 & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Έστω λοιπόν, ότι ο P_2 επιλέγει τις στρατηγικές b_1 και b_3 με πιθανότητες q και $1-q$ αντίστοιχα. Τότε, το αναμενόμενο κέρδος του P_1 είναι:

$E_1 = E(a_1, \mathbf{q}) = q + 5(1-q) = -4q + 5$, αν ο P_1 επιλέξει τη a_1

$E_2 = E(a_2, \mathbf{q}) = 4q + (1-q) = 3q + 1$, αν ο P_1 επιλέξει τη a_2



Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι ο P_2 αναμένει ότι η ζημιά του θα είναι το πολύ ίση με το σημείο στο οποίο η μέγιστη των τεταγμένων των σημείων των δύο ευθειών γίνεται όσο το δυνατόν μικρότερη, υπό την έννοια του minimax. Επομένως, η βέλτιστη μικτή στρατηγική για τον P_2 είναι $(0.57, 0.43)$. Με τη στρατηγική αυτή ο P_2 αναμένει να περιορίσει το κέρδος του P_1, σε $v = 2.70$, που είναι και η τιμή του παιγνίου.

Επίλυση παιγνίων με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων

Αποτελεί μια επαναληπτική μέθοδο, η οποία προσεγγίζει την τιμή του παιγνίου και τις βέλτιστες στρατηγικές του με οποιαδήποτε ακρίβεια. Ο προγραμματισμός της σε ένα Η/Υ είναι πολύ εύκολος, αλλά πριν αναλύσουμε τη μέθοδο ας δούμε την εφαρμογή της σε ένα παράδειγμα.

Έστω το παίγνιο με πίνακα αμοιβής

$$\begin{array}{lcc} \text{Στρατηγικές του } P_2 \rightarrow & & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \text{Στρατηγικές του } P_1 & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ας υποθέσουμε ότι αρχικά ο P_1 επιλέγει την a_1 και ο P_2 την b_1. Στο δεύτερο παιχνίδι ο P_1 γνωρίζοντας την προηγούμενη στρατηγική του αντιπάλου του και υποθέτοντας ότι θα παίξει με τον ίδιο τρόπο, επιλέγει πάλι την a_1. Αν θεωρήσουμε τις γραμμές που αντιστοιχούν στις δύο επιλογές του P_1 και αθροίσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους, προκύπτει $(12 \quad 4 \quad 14)$. Εξετάζοντας αυτό το αποτέλεσμα ο P_2 συμπεραίνει ότι θα είχε καλύτερο αποτέλεσμα αν και τις δύο φορές είχε επιλέξει την b_2. Έτσι στο δεύτερο παιχνίδι αποφασίζει να επιλέξει την b_2. Ο P_1 εξετάζει τώρα τις στήλες b_1 και b_2 που αντιστοιχούν στις επιλογές του P_2, σχηματίζοντας το άθροισμα τους που είναι $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ και διαπιστώνει ότι θα είχε μέγιστο κέρδος αν είχε επιλέξει και τις δύο προηγούμενες φορές τη στρατηγική a_2. Έτσι στο τρίτο παιχνίδι επιλέγει την a_2. Ο δε P_2 αθροίζοντας τις στήλες που αντιστοιχούν στις τρεις προηγούμενες επιλογές του αντιπάλου του βρίσκει $(13 \quad 13 \quad 17)$. Αντιλαμβάνεται έτσι ότι η ζημιά του θα ελαχιστοποιούταν αν επέλεγε πάντα τη στρατηγική b_1. Να σημειώσουμε ότι σε περίπτωση ισοβαθμίας (όπως παραπάνω) κάθε παίκτης επιλέγει τη στρατηγική με το μικρότερο δείκτη.

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό σε κάθε παιχνίδι, μετά από 15 επαναλήψεις, διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{ccccccccccccccc} 6 & 8 & 14 & 16 & 22 & 28 & 30 & 36 & 42 & 44 & 46 & 52 & 54 & 60 & 66 \\ 1 & 10 & 11 & 20 & 21 & 22 & 31 & 32 & 33 & 42 & 51 & 52 & 61 & 62 & 63 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

6	2	7
12	4	14
13	13	17
19	15	24
20	24	27
26	26	34
32	28	41
33	37	44
39	39	51
45	41	58
51	43	65
52	52	68
58	54	75
59	63	78
60	72	81

Αποδεικνύεται ότι μετά από k παιχνίδια για την πραγματική τιμή v του παιγνίου ισχύει $\frac{\underline{v}^{(k)}}{k} \le v \le \frac{\overline{v}^{(k)}}{k}$, όπου $\underline{v}^{(k)}$ το ελάχιστο της k γραμμής και $\overline{v}^{(k)}$ το μέγιστο της k στήλης. Στο παράδειγμα μας είναι $\frac{60}{15} \le v \le \frac{66}{15}$, δηλαδή $4 \le v \le 4.4$. Είναι μια ικανοποιητική προσέγγιση δεδομένου ότι $v = 4.33$.

Μια προσέγγιση στη βέλτιστη πιθανότητα κάθε στρατηγικής προσδιορίζεται διαιρώντας το πλήθος των αριθμών σε κύκλο της αντίστοιχης γραμμής ή στήλης με τον αριθμό των παιχνιδιών. Στο παράδειγμα μας, μετά από 15 επαναλήψεις, βρίσκουμε ότι οι πιθανότητες επιλογής στρατηγικών για τον P_1 είναι $p^{(15)} = (8/15, 7/15, 0)$, ενώ για τον P_2 είναι $q^{(15)} = (9/15, 6/15, 0)$. Οι πραγματικές πιθανότητες είναι αντίστοιχα $(.67, .33, 0)$ και $(.58, .42, 0)$.

Υπερέχουσες στρατηγικές

Κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός παιγνίου το πρώτο πράγμα που ελέγχουμε είναι αν υπάρχει σημείο σάγματος, οπότε και η λύση δίνεται αυτομάτως. Εάν δεν υπάρχει τέτοιο σημείο ισορροπίας τότε επιχειρούμε με την παρούσα μέθοδο να περιορίσουμε τις γραμμές και τις στήλες του όσο αυτό είναι δυνατό.

1. Υπεροχή (κυριαρχία) με γνήσιες στρατηγικές.

Δοθέντος ενός $m \times n$ παιγνίου, λέμε ότι η γνήσια στρατηγική a_k υπερέχει (είναι κυρίαρχη) της a_l, αν $a_{kj} \geq a_{lj}$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. Σε αυτήν την περίπτωση ο παίκτης P_1 δεν έχει λόγο να ακολουθήσει ποτέ τη στρατηγική a_l αφού η a_k του εξασφαλίζει μεγαλύτερο κέρδος ανεξάρτητα της επιλογής του P_2. Επομένως κυρίαρχη είναι μια γραμμή που κάθε στοιχείο της είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το αντίστοιχο στοιχείο μιας άλλης γραμμής (υποχωρητική).

Αντίστοιχα, η γνήσια στρατηγική b_k υπερέχει (είναι κυρίαρχη) της b_l, αν $b_{ik} \leq b_{il}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$. Σε αυτήν την περίπτωση ο παίκτης P_2 δεν έχει λόγο να ακολουθήσει ποτέ τη στρατηγική b_l αφού η b_k του εξασφαλίζει μικρότερη ζημιά ανεξάρτητα της επιλογής του P_1. Επομένως κυρίαρχη είναι μια στήλη που κάθε στοιχείο της είναι μικρότερο ή ίσο από το αντίστοιχο στοιχείο μιας άλλης στήλης (υποχωρητική).

Για παράδειγμα, έστω το παίγνιο με πίνακα αμοιβής

$$\begin{array}{lc} \text{Στρατηγικές του } P_2 \rightarrow & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \text{Στρατηγικές του } P_1 \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ο παίκτης P_1 δεν έχει λόγο να επιλέξει ποτέ την πολιτική a_1, αφού αυτή υπερτερεί είναι δηλαδή «μικρότερη», των άλλων δύο γραμμών. Έτσι $p_1 = 0$ και το παίγνιο γίνεται

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Τώρα βλέπουμε ότι ο παίκτης P_2 δεν έχει λόγο να επιλέξει ποτέ την πολιτική b_3, αφού αυτή υπερτερεί είναι δηλαδή «μεγαλύτερη ή ίση», των άλλων δύο στηλών. Έτσι $q_3 = 0$ και το παίγνιο γίνεται

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Υπεροχή (κυριαρχία) με μικτές στρατηγικές.

Η έννοια της κυριαρχίας όπως ορίστηκε παραπάνω επεκτείνεται και στις μικτές στρατηγικές. Στην περίπτωση αυτή, μια γραμμή (ή στήλη) του πίνακα αμοιβής μπορεί να δεσπόζεται από κάποιο κυρτό συνδυασμό γραμμών (ή στηλών) του πίνακα, με αποτέλεσμα και πάλι να παραλείπεται.

Για παράδειγμα, έστω το παίγνιο με πίνακα αμοιβής

$$\begin{array}{lcc} \text{Στρατηγικές του } P_2 & \rightarrow & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \text{Στρατηγικές του } P_1 & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Η a_3 δεσπόζετε (είναι μικρότερη) από τον παρακάτω κυρτό συνδυασμό των a_1 και a_2:

$$\frac{1}{2}(5 \quad 0 \quad 2)+\frac{1}{2}(-1 \quad 8 \quad 6)=(2 \quad 4 \quad 4)>(1 \quad 2 \quad 3)$$

Επομένως, η στρατηγική a_3, μπορεί να παραληφθεί από το σύνολο των δυνατών στρατηγικών του P_1.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με το αντικείμενο εξέτασης της θεωρίας παιγνίων. Στη λήψη των αποφάσεων με συνθήκες σύγκρουσης ή ανταγωνισμού θεωρούμε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον παίχτες με αλληλοσυγκρουόμενους στόχους, καθένας από τους οποίους προσπαθεί να βελτιστοποίηση το στόχο του. Η περίπτωση αυτή είναι αντικείμενο της θεωρίας παιγνίων.

Με τον όρο παίγνιω (game) θεωρούμε το σύνολο των κανόνων και συμβάσεων για το παίξιμο. Αντίθετα παιγνίδι (play) είναι μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση των κανόνων αυτών. Στο τέλος κάθε παιχνιδιού, οι παίχτες που συμμετέχουν λαμβάνουν μια αμοιβή σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού.

Τα παίγνια ταξινομούνται ανάλογα με τον αριθμό των παιχτών και με τον αριθμό των δυνατών κινήσεων. Για παράδειγμα το σκάκι είναι παίγνιο δύο ατόμων με πεπερασμένο αριθμό κινήσεων. Επίσης ταξινομούνται σε παίγνια δύο ατόμων , σταθερού αθροίσματος, μηδενικού αθροίσματος , μη σταθερού και μη μηδενικού αθροίσματος.

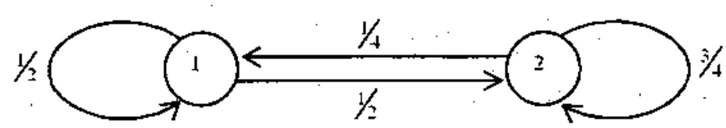
Τα περισσότερα μοντέλα θεωρίας παιγνίων σε επίπεδο εταιρικού ανταγωνισμού, είναι μη σταθερού αθροίσματος, διότι είναι ασυνήθιστο για εταίρους ανταγωνιστές να βρίσκονται σε πλήρη και καθολική σύγκρουση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°

ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΑΛΥΣΙΔΩΝ MARKOV

Οι βασικές έννοιες των αλυσίδων Markov μπορούν να γίνουν αντιληπτές θεωρώντας το απλό σύστημα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



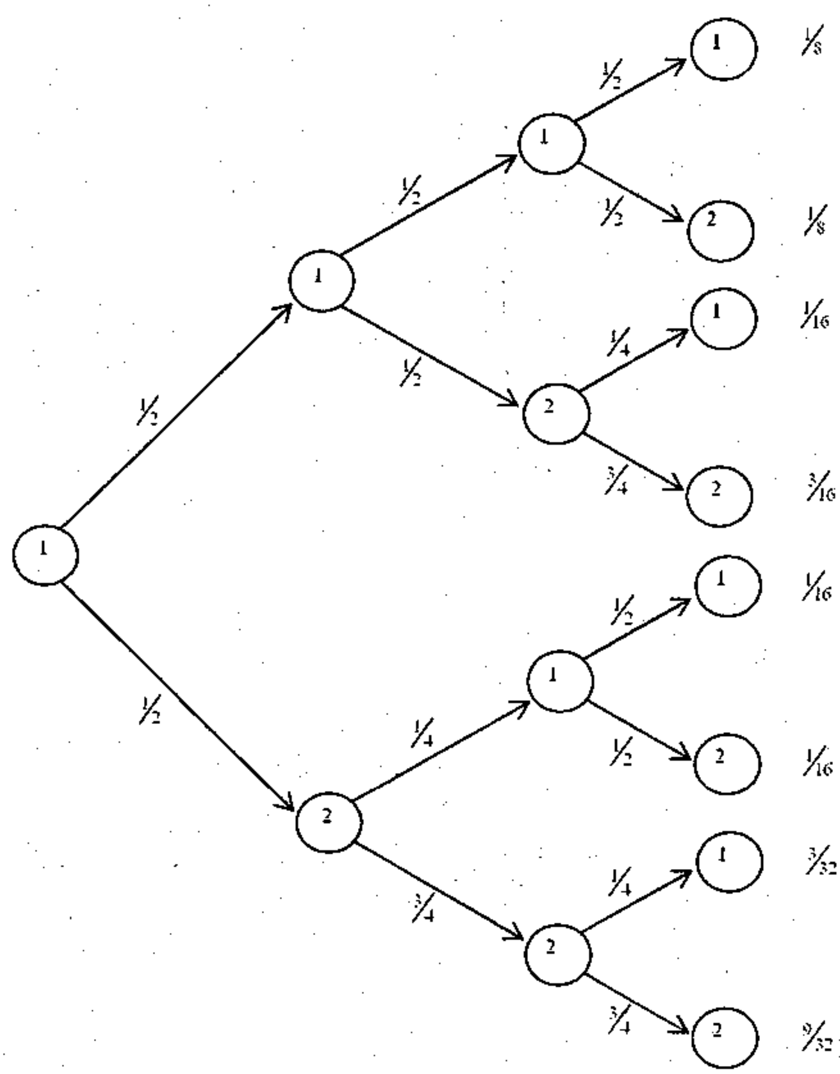
Σε αυτό το σύστημα θεωρούμε δύο καταστάσεις, τις 1 και 2. Οι πιθανότητες το να παραμείνει ή να φύγει το σύστημα σε μια συγκεκριμένη κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο, φαίνονται επίσης στο παραπάνω σχήμα και είναι σταθερές για όλες τις μελλοντικές στιγμές.

Η παραπάνω διαδικασία Markov είναι μια διακριτή αλυσίδα Markov αφού το σύστημα είναι στάσιμο και οι μεταβάσεις ανάμεσα σε καταστάσεις συμβαίνουν σε διακριτά βήματα.

Έστω το πρώτο διάστημα χρόνου και έστω ότι το σύστημα είναι αρχικά στην κατάσταση 1. Το σύστημα μπορεί να παραμείνει στην κατάσταση 1 με μια πιθανότητα $1/2$ ή μπορεί να μετακινηθεί (να κάνει δηλ. μια μετάβαση) στην κατάσταση 2 με μια πιθανότητα $1/2$. Είναι σημαντικό να δει κανείς ότι το άθροισμα αυτών των πιθανοτήτων θα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα δηλ. το σύστημα μπορεί είτε να παραμείνει στην κατάσταση που ήταν ή να μετακινηθεί από αυτήν. Η αρχή αυτή εφαρμόζεται ισοδύναμα σε όλα τα συστήματα ανεξάρτητα από το βαθμό πολυπλοκότητας που υπάρχει ή από το πόσοι πολλοί τρόποι υπάρχουν για να φύγει το σύστημα από μια κατάσταση.

Όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση 2, μπορεί να παραμείνει σε αυτήν με μια πιθανότητα $3/4$ ή μπορεί να κάνει μια μετάβαση πίσω στην κατάσταση 1 με μια πιθανότητα $1/4$, κατά τη διάρκεια του επόμενου χρονικού διαστήματος.

Η συμπεριφορά αυτού του συστήματος μπορεί να γίνει διαισθητικά φανερή με τη βοήθεια του δενδροδιαγράμματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση 1 μετά από 3 χρονικά διαστήματα είναι $^{11}/_{32}$, ενώ η ισοδύναμη πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση 2 είναι $^{21}/_{32}$.

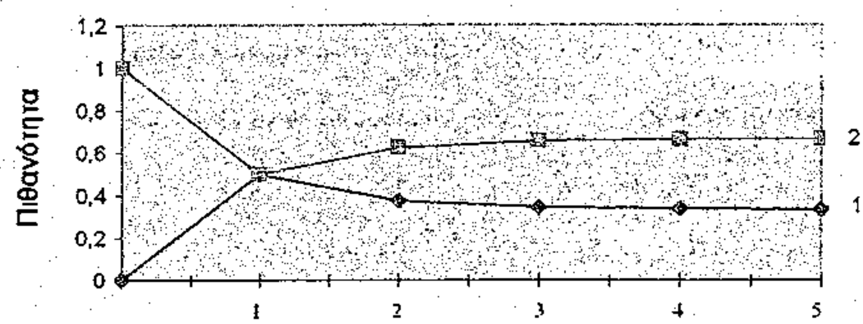


Πιθανότητες κατάστασης ενός συστήματος 2-καταστάσεων

Χρονικό διάστημα	Πιθανότητα κατάστασης	
	Κατάσταση 1	Κατάσταση 2
1	$^1/_2 = 0.5$	$^1/_2 = 0.5$
2	$^3/_8 = 0.375$	$^5/_8 = 0.625$

3	$^{11}/_{32} = 0.344$	$^{21}/_{32} = 0.656$
4	$^{43}/_{128} = 0.336$	$^{85}/_{128} = 0.664$
5	$^{171}/_{512} = 0.334$	$^{341}/_{512} = 0.666$

Τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα αναπαρίστανται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Είναι φανερό, από το παραπάνω σχήμα, ότι καθώς ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων αυξάνεται, οι τιμές των πιθανοτήτων τείνουν σε μια σταθερή ή οριακή τιμή. Αυτό είναι χαρακτηριστικό αρκετών συστημάτων που ικανοποιούν τις συνθήκες Markov και αυτές οι οριακές τιμές της πιθανότητας είναι γνωστές σαν χρονικά ανεξάρτητες τιμές των πιθανοτήτων ή οριακές πιθανότητες των καταστάσεων.

Στο παραπάνω παράδειγμα υποθέσαμε ότι το σύστημα ξεκίνησε από την κατάσταση 1 και υπολογίσαμε την παροδική του συμπεριφορά, καθώς αυξανόταν ο χρόνος. Η κατάσταση του συστήματος στο βήμα 0 ή το μηδενικό χρόνο είναι γνωστή σαν αρχικές συνθήκες. Η παροδική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες κάτι που φαίνεται και από τον υπολογισμό ενός ανάλογου γραφήματος για την περίπτωση στην οποία το σύστημα αρχικά βρισκόταν στην κατάσταση 2. Από τον υπολογισμό αυτό βγαίνει ένα σπουδαίο συμπέρασμα: αν και η παροδική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων είναι ολοκληρωτικά ανεξάρτητες των αρχικών συνθηκών. Ένα σύστημα ή μια διαδικασία για την οποία οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων είναι ανεξάρτητες των αρχικών συνθηκών είναι γνωστό σαν εργοδικό. Είναι φυσικό ότι, όχι όλα τα συστήματα χαρακτηρίζονται από την εργοδικότητα. Για να είναι ένα σύστημα εργοδικό πρέπει κάθε κατάσταση του συστήματος να είναι προσιτή από όλες τις άλλες καταστάσεις του συστήματος, άμεσα ή έμμεσα μέσα από άλλες καταστάσεις. Εάν αυτό δεν είναι δυνατό και μια ιδιαίτερη κατάσταση ή καταστάσεις, στις οποίες εφόσον εισέλθει το σύστημα δεν μπορεί να φύγει, το σύστημα τότε δεν είναι εργοδικό και οι καταστάσεις αυτές είναι γνωστές σαν απορροφητικές καταστάσεις.

Αν και οι οριακές τιμές των καταστάσεων όλων των εργοδικών συστημάτων είναι ανεξάρτητες των αρχικών συνθηκών, η ταχύτητα σύγκλισης στην οριακή τιμή μπορεί να εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες ενώ υπάρχει και μεγάλη εξάρτηση από τις πιθανότητες μετάβασης ανάμεσα στις καταστάσεις του συστήματος.

Η μέθοδος του δενδροδιαγράμματος είναι μια χρήσιμη τεχνική για να γίνονται διαισθητικά αντιληπτές έννοιες αναφορικά με τις αλυσίδες Markov αλλά δεν είναι καθόλου πρακτική για μεγάλα συστήματα ή για μεγάλο αριθμό χρονικών διαστημάτων ακόμα και σε πολύ μικρά συστήματα. Έτσι αναζητούνται άλλες τεχνικές, οι οποίες συζητούνται παρακάτω.

Πίνακας μετάβασης σε ένα βήμα

Για να εφαρμόσουμε τις τεχνικές πινάκων σε ένα σύστημα, είναι απαραίτητο να έχουμε ένα πίνακα ο οποίος θα παριστάνει τις πιθανότητες μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη, σε ένα απλό βήμα ή χρονικό διάστημα.

Θεωρώντας το σύστημα της προηγούμενης παραγράφου, οι πιθανότητες μετάβασης μπορούν να παρασταθούν από τον ακόλουθο πίνακα P:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

όπου p_{ij} = πιθανότητα να κάνει το σύστημα μια μετάβαση στην κατάσταση j μετά από ένα χρονικό διάστημα, δοθέντος ότι ήταν στην κατάσταση i στην αρχή του χρονικού διαστήματος.

Για ένα σύστημα n – καταστάσεων η γενική μορφή του πίνακα, ο οποίος θα πρέπει να είναι πάντα τετραγωνικός, είναι:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\
P = & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array}
\end{array}
$$

Ο πίνακας είναι γνωστός σαν (στοχαστικός) πίνακας μετάβασης ενός βήματος για το σύστημα, αφού παριστάνει τις πιθανότητες μετάβασης της στοχαστικής διαδικασίας. Το άθροισμα των πιθανοτήτων σε κάθε γραμμή θα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα, αφού η κάθε γραμμή i παριστάνει όλους τους δυνατούς τρόπους κατά τους οποίους μπορεί να συμπεριφερθεί το σύστημα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, δοθέντος ότι ήταν στην κατάσταση i στην αρχή εκείνου του χρονικού διαστήματος.

Υπολογισμός των χρονικά εξαρτημένων πιθανοτήτων

Για να υπολογίσουμε την παροδική συμπεριφορά ενός συστήματος χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετάβασης ενός βήματος, θεωρούμε το απλό δύο καταστάσεων σύστημα των προηγουμένων παραγράφων. Ο πίνακας μετάβασης για αυτό το σύστημα είναι γνωστό ότι είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτό το σύστημα με τον εαυτό του παίρνουμε

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{bmatrix}$$

Το πρώτο στοιχείο της πρώτης γραμμής $(3/8)$ είναι η πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση 1 μετά από δύο χρονικά διαστήματα δοθέντος ότι ξεκινήσαμε από την κατάσταση 1. Όμοια το δεύτερο στοιχείο της πρώτης γραμμής ($5/8$) είναι η πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση 2 μετά από δύο χρονικά διαστήματα δοθέντος ότι ξεκινήσαμε από την κατάσταση 1. Ανάλογα είναι τα αποτελέσματα για τη δεύτερη γραμμή.

Τα στοιχεία του P^2 δίνουν όλες τις πιθανότητες των καταστάσεων μετά από δύο χρονικά διαστήματα.

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν σε κάθε δύναμη του P και ο πίνακας P^n μπορεί να ορισθεί σαν ο πίνακας του οποίου το στοιχείο p_{ij}^n παριστάνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση j μετά από n χρονικά διαστήματα δοθέντος ότι ξεκίνησε στην κατάσταση i.

Πολλές φορές, εκτός από τις παραπάνω δεσμευμένες πιθανότητες, θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες να βρισκόμαστε σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, κάποιο συγκεκριμένο χρόνο n (δηλ. τις πιθανότητες καταστάσεων). Τότε ο πίνακας P^n θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων $P(0)$, το οποίο παριστάνει την πιθανότητα να είμαστε σε κάθε μία από τις καταστάσεις του συστήματος στην αρχή της «αποστολής». Οι τιμές των πιθανοτήτων που περιέχονται σε αυτό το διάνυσμα θα πρέπει να έχουν άθροισμα μονάδα.

Όταν το σύστημα του παραδείγματος αρχίζει από την κατάσταση 1, το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων είναι

$$P(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

αφού η πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση 1 το χρόνο 0 είναι μονάδα ενώ η πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση 2 είναι μηδέν. Εάν είναι γνωστό ότι το σύστημα είναι εξίσου πιθανό να αρχίσει από την κατάσταση 1 ή την 2, τότε το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων γίνεται

$$P(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Στην πρώτη περίπτωση, το διάνυσμα πιθανοτήτων που παριστάνει τις πιθανότητες να είμαστε σε μια από τις καταστάσεις μετά από δύο χρονικά διαστήματα, είναι

$$P(2) = P(0) \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Στην δεύτερη περίπτωση, το διάνυσμα των πιθανοτήτων που παριστάνει τις πιθανότητες των καταστάσεων μετά από δύο χρονικά διαστήματα, είναι

$$P(2) = P(0) \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 11/32 & 21/32 \end{bmatrix} \end{array}$$

Γενικεύοντας αυτή την αρχή, έχουμε

$$P(n) = P(0) \cdot P^n$$

Από την παραπάνω συζήτηση γίνεται φανερό ότι οι πιθανότητες των καταστάσεων μπορούν να υπολογισθούν σε κάθε χρονικό διάστημα, απλά πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα μετάβασης ενός βήματος με τον εαυτό του τον αντίστοιχο αριθμό φορών. Οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων μπορούν να υπολογισθούν συνεχίζοντας τον πολλαπλασιασμό για κατάλληλο αριθμό φορών.

Οριακές πιθανότητες των καταστάσεων

Οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων ενός εργοδικού συστήματος μπορούν να υπολογισθούν χρησιμοποιώντας την τεχνική του πολλαπλασιασμού πινάκων που δόθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Εάν επίσης ζητείται και η παροδική συμπεριφορά του συστήματος είναι εύλογο να προτιμήσει κανείς αυτή την τεχνική. Αν όμως ζητούνται μόνο οι οριακές τιμές των καταστάσεων, ο πολλαπλασιασμός πινάκων μπορεί να είναι διαδικασία επίπονη και χρονοβόρα.

Για τούτο, μια δεύτερη εναλλακτική, πολύ αποδοτική μέθοδος δίνεται σε αυτή την παράγραφο, για τον υπολογισμό αυτών των οριακών πιθανοτήτων.

Η αρχή πάνω στην οποία στηρίζεται αυτή η τεχνική είναι ότι, όταν κάποιος έχει φθάσει στις οριακές πιθανότητες των καταστάσεων με τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού πινάκων, κάθε επιπλέον πολλαπλασιασμός με τον πίνακα μετάβασης ενός βήματος δεν αλλάζει τις τιμές των οριακών πιθανοτήτων των καταστάσεων. Αν παραστήσουμε με a το διάνυσμα των οριακών πιθανοτήτων και P είναι ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος, τότε

$$a \cdot P = a$$

Εφαρμόζοντας αυτή την αρχή στο απλό σύστημα δύο καταστάσεων που εξετάσαμε νωρίτερα και συμβολίσουμε με P_1 και P_2 τις οριακές πιθανότητες να είμαστε στις καταστάσεις 1 και 2 αντίστοιχα, παίρνουμε

$$[P_1 \quad P_2] \cdot P = [P_1 \quad P_2]$$

$$[P_1 \quad P_2] \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = [P_1 \quad P_2]$$

από όπου έχουμε ότι $1/2 P_1 - 1/4 P_2 = 0$. Σε συνδυασμό με την $P_1 + P_2 = 1$, καταλήγουμε ότι $P_1 = 0.333$ και $P_2 = 0.667$.

Απορροφητικές καταστάσεις

Είδαμε σε μια από τις προηγούμενες παραγράφους ότι, κάποιες από τις καταστάσεις του συστήματος είναι απορροφητικές, δηλαδή καταστάσεις στις οποίες εάν το σύστημα εισέλθει δεν μπορεί να φύγει, εκτός αν ίσως το σύστημα αρχίσει μια καινούργια «αποστολή». Σε τέτοιες περιπτώσεις, αυτό που απαιτείται είναι ο υπολογισμός του μέσου (αναμενόμενου) αριθμού των χρονικών διαστημάτων στα οποία το σύστημα παραμένει σε μια από τις μη απορροφητικές καταστάσεις ή αλλιώς, πόσα κατά μέσο όρο χρονικά διαστήματα «εργάζεται» το σύστημα πριν εισέλθει σε μια από τις απορροφητικές καταστάσεις.

Η αρχή πίσω από ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού των χρονικών διαστημάτων, στα οποία το σύστημα εργάζεται (κανονικά) πριν εισέλθει σε μια ανεπιθύμητη κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή οι καταστάσεις μπορεί να μην είναι πραγματικά απορροφητικές γιατί το σύστημα είναι δυνατόν να φύγει, θεωρούνται όμως απορροφητικές για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού των χρονικών διαστημάτων πριν το σύστημα εισέλθει σε μια από αυτές.

Η τεχνική λοιπόν για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού των χρονικών αυτών διαστημάτων, είναι η ακόλουθη.

Θεωρώντας ξανά το σύστημα των δύο καταστάσεων που είδαμε νωρίτερα, βλέπουμε ότι εάν το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση 1, η πιθανότητα να συνεχίζει το σύστημα να παραμένει στην ίδια κατάσταση χωρίς να εισέλθει στην κατάσταση 2 γίνεται μικρότερη καθώς ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι αν επιτρέψουμε στον αριθμό των χρονικών διαστημάτων να γίνει αρκετά μεγάλος, το σύστημα τελικά θα εισέλθει στη κατάσταση 2. Μαθηματικά μιλώντας, αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι $\lim_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$, όπου n είναι ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων και $1/2$ η πιθανότητα παραμονής στη κατάσταση 1. Εάν στο παράδειγμα αυτό, η κατάσταση 2 θεωρηθεί σαν μια απορροφητική κατάσταση, βλέπουμε ότι τελικά το σύστημα θα εισέλθει σε αυτήν την κατάσταση.

Το πρόβλημα λοιπόν είναι να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό των χρονικών διαστημάτων πριν εισέλθει το σύστημα σε μια απορροφητική κατάσταση. Εάν P είναι ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος του συστήματος και Q είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον P παραλείποντας τη γραμμή (γραμμές) και στήλη (στήλες) που συνδέονται με την απορροφητική κατάσταση (καταστάσεις). Στο προηγούμενο παράδειγμα ο Q θα έχει ένα μόνο στοιχείο το $[p_{11}]$, αν η κατάσταση 2 θεωρηθεί σαν απορροφητική κατάσταση. Ο πίνακας Q παριστάνει το παροδικό σύνολο καταστάσεων και όπως αναφέραμε θέλουμε να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό των χρονικών διαστημάτων για τα οποία το σύστημα παραμένει σε μια από τις καταστάσεις που παρίστανται στον πίνακα αυτό.

Είναι γνωστό ότι η μαθηματική ελπίδα (αναμενόμενη τιμή) μιας τυχαίας μεταβλητής, δίνεται από τη σχέση $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$.

Η μαθηματική ελπίδα (ΜΕ) υπολογίζεται όχι μόνο για απλά στοιχεία πιθανότητας p_i, αλλά και για στοιχεία πιθανότητας όπως αυτά που παριστάνονται από τον πίνακα Q. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με N, τον αναμενόμενο αριθμό των χρονικών διαστημάτων, τότε

$$N = 1\cdot I + 1\cdot Q + 1\cdot Q^2 + \ldots + 1\cdot Q^{n-1}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Όμως

$$[I - Q]\cdot\left[I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1}\right] = I - Q^n$$

Αλλά, όπως $\lim_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$, έτσι και εδώ έχουμε $\lim_{n\to\infty} Q^n = 0$

Επομένως, $I - Q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$[I-Q]\cdot[I+Q+Q^2+\ldots+Q^{n-1}]=I$$

$$I+Q+Q^2+\ldots+Q^{n-1}=[I-Q]^{-1}\cdot I=[I-Q]^{-1}$$

Τελικά έχουμε

$$N=[I-Q]^{-1}$$

Στο γνωστό παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την κατάσταση 2 σαν απορροφητική κατάσταση, $Q=[p_{11}]=[\frac{1}{2}]$. Τότε $N=[I-Q]^{-1}=[1-\frac{1}{2}]^{-1}=2$ χρονικά διαστήματα κατά μέσο όρο πριν εισέλθουμε στη κατάσταση 2, αν το σύστημα ξεκινήσει από την κατάσταση 1.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύξαμε κάποια γενικά στοιχεία για τις αλυσίδες markov. Χαρακτηριστικό αρκετών συστημάτων που ικανοποιούν τις συνθήκες markov είναι ότι, καθώς ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων αυξάνεται , οι τιμές των πιθανοτήτων τείνουν σε μια σταθερή ή οριακή τιμή. Και αυτές οι οριακές τιμές της πιθανότητας είναι σαν χρονικά ανεξάρτητες τιμές των πιθανοτήτων ή οριακές πιθανότητες των καταστάσεων.

Ένα σύστημα ή μια διαδικασία για την οποία οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων είναι ανεξάρτητες των αρχικών συνθηκών είναι γνωστό σαν εργοδικό. Για να είναι ένα σύστημα εργοδικό πρέπει κάθε κατάσταση του συστήματος να είναι προσιτή από όλες τις άλλες καταστάσεις του συστήματος, άμεσα ή έμμεσα. Εάν αυτό δεν είναι δυνατό , και μια ιδιαίτερη κατάσταση ή καταστάσεις στις οποίες εφόσον εισέλθει το σύστημα δεν μπορεί να φύγει , το σύστημα τότε δεν είναι εργοδικό και οι καταστάσεις αυτές είναι γνωστές σαν απορροφητικές καταστάσεις.

Η μέθοδος του δενδροδιαγράμματος είναι μια χρήσιμη τεχνική , για να γίνονται διαισθητικά αντιληπτές έννοιες αναφορικά με τις αλυσίδες markov, αλλά δεν είναι καθόλου πρακτική για μεγάλα συστήματα. Έτσι αναζητούνται άλλες τεχνικές, όπως μετάβαση σε ένα βήμα, οριακές πιθανότητες καταστάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6°

MARKOV ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

MARKOV ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Μία Markov Διαδικασία Απόφασης (ΜΔΑ) καθορίζεται από τέσσερις τύπους πληροφορίας.

1. Χώρος καταστάσεων
2. Σύνολο αποφάσεων
3. Πιθανότητες μετάβασης
4. Αναμενόμενες αμοιβές

Χώρος καταστάσεων: Στην αρχή κάθε περιόδου, η Markov Διαδικασία Απόφασης βρίσκεται σε μια κατάσταση i, όπου $i \in S = \{1,2,\ldots,N\}$. Το σύνολο S αναφέρεται ως χώρος καταστάσεων.

Σύνολο αποφάσεων: Για κάθε κατάσταση i υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο από επιτρεπτές αποφάσεις, $D(i)$.

Πιθανότητες μετάβασης: Έστω ότι μια περίοδος ξεκινάει στην κατάσταση i και επιλέγεται μια απόφαση $d \in D(i)$. Με πιθανότητα $P(j \mid i,d)$ η κατάσταση της επόμενης περιόδου θα είναι j. Δηλαδή, η κατάσταση της επόμενης περιόδου εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση και την απόφαση της παρούσας κατάστασης. Αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιείται ο όρος Markov Διαδικασία Απόφασης.

Αναμενόμενες αμοιβές: Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου όπου η κατάσταση είναι i και επιλέγεται η απόφαση $d \in D(i)$, η αναμενόμενη αμοιβή είναι r_{id}.

Παρατήρηση: Οι Markov διαδικασίες απόφασης αποτελούν προβλήματα πιθανοθεωρητικού δυναμικού προγραμματισμού άπειρου χρονικού ορίζοντα. Όταν μεγιστοποιούμε την αναμενόμενη αμοιβή σε αυτή την περίπτωση, τότε είναι πολύ πιθανό να μην είναι φραγμένη. Αν για παράδειγμα για κάθε κατάσταση και απόφαση, η αμοιβή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου είναι 3 χ.μ., τότε ανεξάρτητα των επιμέρους αποφάσεων η αναμενόμενη αμοιβή θα είναι μη φραγμένη. Μία από τις μεθόδους που λύνουν αυτό το πρόβλημα, είναι η τεχνική της υπό υφαίρεση αναμενόμενης αμοιβής. Σύμφωνα με αυτή την τεχνική, θεωρούμε ότι αμοιβή 1 χ.μ. που λαμβάνεται κατά τη διάρκεια της επόμενης περιόδου, έχει την ίδια αξία (τιμή) με αμοιβή β χ.μ. $(0<\beta<1)$, που λαμβάνεται κατά την παρούσα περίοδο. Αυτό ισοδυναμεί με τη μεγιστοποίηση της υπό υφαίρεση αμοιβής.

Έτσι, αν με M συμβολίσουμε τη μέγιστη αμοιβή (για όλες τις καταστάσεις και επιλογές αποφάσεων) κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, τότε η μέγιστη αναμενόμενη υπό υφαίρεση αμοιβή (για χ.μ. παρούσας χρονικής περιόδου) σε άπειρο χρονικό ορίζοντα, είναι $M+M\beta+M\beta^2+\ldots=\frac{M}{1-\beta}<\infty$.

Παράδειγμα: Στην αρχή κάθε εβδομάδας, μία μηχανή βρίσκεται σε μία από τις παρακάτω τέσσερις καταστάσεις: άριστη (Α), καλή (Β), μέτρια (Γ) ή κακή (Δ). Τα εβδομαδιαία έσοδα από τη χρήση της μηχανής, εξαρτώνται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται και είναι ως εξής: άριστη 100 χ.μ., καλή 80χ.μ., μέτρια 50 χ.μ. και κακή 10 χ.μ.. Παρατηρώντας την κατάσταση της μηχανής στην αρχή της εβδομάδας, έχουμε τη δυνατότητα να την αντικαταστήσουμε με μια άριστη πού στοιχίζει 200 χ.μ.. Η ποιότητα της μηχανής χειροτερεύει με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Παρούσα κατάσταση μηχανής	Πιθανότητα της μηχανής κατά την έναρξη της επόμενης εβδομάδας			
	Άριστη	Καλή	Μέτρια	*Κακή*
Άριστη	.7	.3	-	-
Καλή	-	.7	.3	-
Μέτρια	-	-	.6	.4
Κακή	-	-	-	1.0

Να καθορίσετε τον χώρο καταστάσεων, τα σύνολα αποφάσεων, τις πιθανότητες μετάβασης και τις αναμενόμενες τιμές.

Ο χώρος των πιθανών καταστάσεων είναι $S=\{\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta\}$.

Έστω $N=$ αντικατάσταση της μηχανής στην αρχή της τρέχουσας περιόδου και $\overline{N}$ = μη αντικατάσταση της μηχανής στην αρχή της τρέχουσας περιόδου

Αφού είναι περιττό να αντικατασταθεί μια μηχανή που βρίσκεται σε άριστη κατάσταση, γράφουμε ότι $D(\mathrm{A}) = \{\overline{N}\}$ και $D(\mathrm{B}) = D(\Gamma) = D(\Delta) = \{N, \overline{N}\}$.

Από τον πίνακα, έχουμε τις παρακάτω πιθανότητες μετάβασης:

$P(\mathrm{A} \mid \overline{N}, \mathrm{A}) = .7$ $\quad P(\mathrm{B} \mid \overline{N}, \mathrm{A}) = .3$ $\quad P(\Gamma \mid \overline{N}, \mathrm{A}) = 0$ $\quad P(\Delta \mid \overline{N}, \mathrm{A}) = 0$

$P(\mathrm{A} \mid \overline{N}, \mathrm{B}) = 0$ $\quad P(\mathrm{B} \mid \overline{N}, \mathrm{B}) = .7$ $\quad P(\Gamma \mid \overline{N}, \mathrm{B}) = .3$ $\quad P(\Delta \mid \overline{N}, \mathrm{B}) = 0$

$P(\mathrm{A} \mid \overline{N}, \Gamma) = 0$ $\quad P(\mathrm{B} \mid \overline{N}, \Gamma) = 0$ $\quad P(\Gamma \mid \overline{N}, \Gamma) = .6$ $\quad P(\Delta \mid \overline{N}, \Gamma) = .4$

$P(\mathrm{A} \mid \overline{N}, \Delta) = 0$ $\quad P(\mathrm{B} \mid \overline{N}, \Delta) = 0$ $\quad P(\Gamma \mid \overline{N}, \Delta) = 0$ $\quad P(\Delta \mid \overline{N}, \Delta) = 1$

Αν αντικαταστήσουμε μια μηχανή με μια άριστης κατάστασης, οι πιθανότητες μετάβασης θα είναι οι ίδιες με αυτές που θα είχαμε αν ξεκινούσαμε την εβδομάδα με μια άριστη μηχανή. Επομένως:

$$P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}, N) = P(\mathrm{A} \mid \Gamma, N) = P(\mathrm{A} \mid \Delta, N) = .7$$

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{B}, N) = P(\mathrm{B} \mid \Gamma, N) = P(\mathrm{B} \mid \Delta, N) = .3$$

$$P(\Gamma \mid \mathrm{B}, N) = P(\Gamma \mid \Gamma, N) = P(\Gamma \mid \Delta, N) = 0$$

$$P(\Delta \mid \mathrm{B}, N) = P(\Delta \mid \Gamma, N) = P(\Delta \mid \Delta, N) = 0$$

Εάν η μηχανή δεν αντικατασταθεί, τότε κατά τη διάρκεια της εβδομάδας, λαμβάνουμε τα έσοδα που δίνονται στην εκφώνηση, δηλαδή:

$r_{\mathrm{A},\overline{N}} = 100$, $r_{\mathrm{B},\overline{N}} = 80$, $r_{\Gamma,\overline{N}} = 50$, $r_{\Delta,\overline{N}} = 10$

Εάν γίνει η αντικατάσταση με μια άριστη μηχανή, τότε ανεξάρτητα της κατάστασης της μηχανής στην αρχή της εβδομάδας, λαμβάνουμε 100 χ.μ. και πληρώνουμε 200 χ.μ.. Άρα: $r_{\mathrm{A},N} = r_{\mathrm{B},N} = r_{\Gamma,N} = r_{\Delta,N} = -100$ χ.μ..

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι με ποια κριτήρια επιλέγουμε την ορθή απόφαση. Για την απάντηση σε αυτό το ερώτημα χρειάζεται να εισαγάγουμε την ιδέα της βέλτιστης πολιτικής.

<u>Ορισμός</u>: Μία *πολιτική* (policy) είναι ένας κανόνας που καθορίζει πως επιλέγεται η απόφαση κάθε περιόδου.

Η απόφαση της περιόδου t μπορεί να εξαρτάται από το παρελθόν της διαδικασίας. Έτσι η απόφαση της περιόδου t εξαρτάται από την κατάσταση κατά τη διάρκεια των περιόδων $1,2,\ldots,t$ και τις αποφάσεις που πάρθηκαν κατά τη διάρκεια των περιόδων $1,2,\ldots,t-1$.

Ορισμός: Μία πολιτική δ ονομάζεται *στάσιμη* (stationary) πολιτική, αν όποτε βρισκόμαστε στην κατάσταση i, η πολιτική δ επιλέγει (ανεξάρτητα από την περίοδο) την ίδια απόφαση $\delta(i)$.

Έστω δ μια τυχαία πολιτική και Δ το σύνολο όλων των πολιτικών. Τότε:

X_t = ανεξάρτητη μεταβλητή για την κατάσταση της Markov διαδικασίας απόφασης στην αρχή της περιόδου t.

X_1 = κατάσταση της διαδικασίας κατά την έναρξη της πρώτης περιόδου (αρχική συνθήκη).

d_t = απόφαση που επιλέγεται κατά την περίοδο t.

$V_\delta(i)$ = υπό υφαίρεση αναμενόμενη αμοιβή κατά τη διάρκεια άπειρου αριθμού περιόδων, δεδομένου ότι κατά την αρχή της περιόδου 1 η κατάσταση είναι i και η στάσιμη πολιτική είναι δ.

Τότε:

$$V_\delta(i) = E_\delta\left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} r_{X_t d_t} \mid X_1 = i\right)$$

όπου $E_\delta\left(\beta^{t-1} r_{X_t d_t} \mid X_1 = i\right)$ είναι η υπό υφαίρεση αναμενόμενη αμοιβή κατά τη διάρκεια της περιόδου t, δεδομένου ότι κατά την αρχή της περιόδου 1 η κατάσταση είναι i και η στάσιμη πολιτική δ ακολουθείται.

Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ορίζουμε

$$V(i) = \max_{\delta \in \Delta} V_\delta(i)$$

ενώ σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$V(i) = \min_{\delta \in \Delta} V_\delta(i)$$

Ορισμός: Αν μία πολιτική δ έχει την ιδιότητα $V(i)=V_{\delta^*}(i)$ για όλα τα $i \in S$, τότε η δ^* είναι μία βέλτιστη πολιτική (optimal policy).

Θα εξετάσουμε τρεις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για να επιλέγουμε τη βέλτιστη στάσιμη πολιτική (optimal stationary policy).

1. Επανάληψη πολιτικής (policy iteration)
2. Γραμμικός προγραμματισμός (linear programming)
3. Επανάληψη τιμής ή διαδοχικές προσεγγίσεις (value iteration or successive approximations)

Η μέθοδος επανάληψης πολιτικής (policy iteration method)

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της μεθόδου, θα κατασκευάσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την $V_\delta(i)$ για $i \in S$ και κάθε στάσιμη πολιτική δ. Έστω $\delta(i)$ μια απόφαση που επιλέγεται από τη στάσιμη πολιτική δ όποτε η διαδικασία ξεκινάει μια περίοδο στην κατάσταση i. Τότε η $V_\delta(i)$ μπορεί να υπολογιστεί επιλύοντας το παρακάτω σύστημα N γραμμικών εξισώσεων (εξισώσεις υπολογισμού τιμής):

$$V_\delta(i)=r_{i,\delta(i)}+\beta\sum_{j=1}^{N}P(j\mid i,\delta(i))V_\delta(j) \qquad (i=1,2,\ldots,N)$$

Για να εξηγήσουμε την παραπάνω σχέση υποθέστε ότι είμαστε στην κατάσταση i και ακολουθούμε μια στάσιμη πολιτική δ. Η παρούσα περίοδος είναι η πρώτη. Τότε η υπό υφαίρεση αναμενόμενη αμοιβή κατά τη διάρκεια άπειρου αριθμού περιόδων είναι το άθροισμα της $r_{i,\delta(i)}$ (αναμενόμενη αμοιβή κατά τη διάρκεια της παρούσας περιόδου) και του β (υπό υφαίρεση αναμενόμενη αμοιβή από την περίοδο 2 και μετά). Αλλά με πιθανότητα $P(j\mid i,\delta(i))$, θα ξεκινήσουμε την περίοδο 2 στην κατάσταση j και θα αποκομίσουμε μια υπό υφαίρεση αναμενόμενη αμοιβή πίσω στην περίοδο 2, $V_\delta(j)$.

Θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω εξισώσεις στο προηγούμενο παράδειγμα αντικατάστασης μηχανών, θεωρώντας ως στάσιμη πολιτική την

$\delta(\mathrm{A})=\delta(\mathrm{B})=\overline{N}$ και $\delta(\Gamma)=\delta(\Delta)=N$. Σύμφωνα με την πολιτική αυτή αντικαθιστούμε μία μηχανή που βρίσκεται σε μέτρια ή κακή κατάσταση και δεν αντικαθιστούμε μία μηχανή που βρίσκεται σε άριστη ή καλή κατάσταση. Για αυτήν την πολιτική οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν:

$$\begin{aligned}
V_\delta(\mathrm{A})&=100+.9(.7V_\delta(\mathrm{A})+.3V_\delta(\mathrm{B}))\\
V_\delta(\mathrm{B})&=80+.9(.7V_\delta(\mathrm{B})+.3V_\delta(\Gamma))\\
V_\delta(\Gamma)&=-100+.9(.7V_\delta(\mathrm{A})+.3V_\delta(\mathrm{B}))\\
V_\delta(\Delta)&=-100+.9(.7V_\delta(\mathrm{A})+.3V_\delta(\mathrm{B}))
\end{aligned}$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε $V_\delta(A)=687.81$, $V_\delta(B)=572.19$, $V_\delta(\Gamma)=487.81$ και $V_\delta(\Delta)=487.81$.

Η μέθοδος επανάληψης πολιτικής του Howard

Θα περιγράψουμε τη μέθοδο επανάληψης πολιτικής του Howard, για την εύρεση της βέλτιστης στάσιμης πολιτικής για μια Markov διαδικασία απόφασης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Βήμα 1°: Εκτίμηση πολιτικής – Διαλέγουμε μια στάσιμη πολιτική δ και με τις εξισώσεις υπολογισμού τιμής βρίσκουμε την $V_\delta(i)$ $(i=1,2,\ldots N)$.

Βήμα 2°: Βελτίωση πολιτικής – Για όλες τις καταστάσεις $i=1,2,\ldots N$, υπολογίζουμε την

$$T_\delta(i)=\max_{d\in D(i)}\left(r_{id}+\beta\sum_{j=1}^{N}P(j\mid i,d)V_\delta(j)\right)$$

Επειδή μπορούμε να επιλέξουμε $d=\delta(i)$ για $i=1,2,\ldots N$, $T_\delta(i)\geq V_\delta(i)$. Αν $T_\delta(i)=V_\delta(i)$ για $i=1,2,\ldots N$, τότε η δ είναι μία βέλτιστη πολιτική. Αν $T_\delta(i)>V_\delta(i)$ για τουλάχιστον μία κατάσταση, τότε η δ δεν είναι βέλτιστη πολιτική. Σε αυτήν την περίπτωση, τροποποιούμε την δ, έτσι ώστε η απόφαση σε κάθε κατάσταση i να επιτυγχάνει το maximum στην πιο πάνω εξίσωση για την $T_\delta(i)$. Έτσι παίρνουμε μια νέα στάσιμη πολιτική δ', για την οποία $V_{\delta'}(i)\geq V_\delta(i)$ για $i=1,2,\ldots N$ και για τουλάχιστον μια κατάσταση i', $V_{\delta'}(i')>V_\delta(i')$. Στη συνέχεια επιστρέφουμε στο βήμα 1, με την πολιτική δ' να αντικαθιστά την δ.

Σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, αντικαθιστούμε το max στην παραπάνω εξίσωση με min. Αν $T_\delta(i)=V_\delta(i)$ για $i=1,2,\ldots N$, τότε η δ είναι μία βέλτιστη πολιτική. Αν $T_\delta(i)<V_\delta(i)$ για τουλάχιστον μία κατάσταση, τότε η δ δεν είναι βέλτιστη πολιτική. Σε αυτήν την περίπτωση, τροποποιούμε την δ, έτσι ώστε η απόφαση σε κάθε κατάσταση i να επιτυγχάνει το minimum στην πιο πάνω εξίσωση για την $T_\delta(i)$. Έτσι παίρνουμε μια νέα στάσιμη πολιτική δ', για την οποία $V_{\delta'}(i)\le V_\delta(i)$ για $i=1,2,\ldots N$ και για τουλάχιστον μια κατάσταση i', $V_{\delta'}(i')<V_\delta(i')$. Στη συνέχεια επιστρέφουμε στο βήμα 1, με την πολιτική δ' να αντικαθιστά την δ.

Η μέθοδος επανάληψης πολιτικής εγγυάται την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής για το προηγούμενο παράδειγμα της αντικατάστασης μηχανών. Ξεκινάμε με τη στάσιμη πολιτική

$$\delta(\mathrm{A})=\delta(\mathrm{B})=\overline{N} \text{ και } \delta(\Gamma)=\delta(\Delta)=N$$

Έχουμε ήδη βρει ότι $V_\delta(A)=687.81$, $V_\delta(B)=572.19$, $V_\delta(\Gamma)=487.81$ και $V_\delta(\Delta)=487.81$. Υπολογίζουμε τώρα τις $T_\delta(A)$, $T_\delta(B)$, $T_\delta(\Gamma)$ και $T_\delta(\Delta)$.

Επειδή $\overline{N}$ είναι η μόνη πιθανή απόφαση για την A, $T_\delta(\mathrm{A})=V_\delta(A)=687.81$ και $T_\delta(\mathrm{A})=687.81$ δίνεται από την απόφαση $\overline{N}$.

$$T_\delta(\mathrm{B})=\max\begin{cases}-100+.9(.7V_\delta(\mathrm{A})+.3V_\delta(\mathrm{B}))=487.81 & (N)\\ 80+.9(.7V_\delta(\mathrm{B})+.3V_\delta(\Gamma))=V_\delta(\mathrm{B})=572.19^* & (\overline{N})\end{cases}$$

Άρα $T_\delta(B)=572.19$ δίνεται από την απόφαση $\overline{N}$.

$$T_\delta(\Gamma)=\max\begin{cases}-100+.9(.7V_\delta(\mathrm{A})+.3V_\delta(\mathrm{B}))=487.81 & (N)\\ 50+.9(.6V_\delta(\mathrm{B})+.4V_\delta(\Delta))=489.03^* & (\overline{N})\end{cases}$$

Άρα $T_\delta(\Gamma)=489.03$ δίνεται από την απόφαση $\overline{N}$.

$$T_\delta(\Delta)=\max\begin{cases}-100+.9(.7V_\delta(\mathrm{A})+.3V_\delta(\mathrm{B}))=V_\delta(\Delta)=487.81^* & (N)\\ 10+.9V_\delta(\mathrm{B})=449.03 & (\overline{N})\end{cases}$$

Άρα $T_\delta(\Delta)=V_\delta(\Delta)=489.03$.

Έτσι βρήκαμε ότι, $T_\delta(\text{A}) = V_\delta(A)$, $T_\delta(\text{B}) = V_\delta(\text{B})$, $T_\delta(\Delta) = V_\delta(\Delta)$ και $T_\delta(\Gamma) > V_\delta(\Gamma)$. Επομένως η πολιτική δ δεν είναι βέλτιστη και εξετάζουμε την δ', μια βελτίωση της δ, όπου $\delta(\text{A}) = \delta(\text{B}) = \delta(\Gamma) = \overline{N}$ και $\delta(\Delta) = N$.

Επιστρέφουμε λοιπόν στο βήμα 1 και λύνουμε τις εξισώσεις υπολογισμού τιμής για την δ'.

$$\begin{aligned}
V_{\delta'}(\text{A}) &= 100 + .9(.7V_{\delta'}(\text{A}) + .3V_{\delta'}(\text{B}))\\
V_{\delta'}(\text{B}) &= 80 + .9(.7V_{\delta'}(\text{B}) + .3V_{\delta'}(\Gamma))\\
V_{\delta'}(\Gamma) &= 50 + .9(.6V_{\delta'}(\Gamma) + .4V_{\delta'}(\Delta))\\
V_{\delta'}(\Delta) &= -100 + .9(.7V_{\delta'}(\text{A}) + .3V_{\delta'}(\text{B}))
\end{aligned}$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε $V_{\delta'}(A) = 690.23$, $V_{\delta'}(B) = 575.50$, $V_{\delta'}(\Gamma) = 492.35$ και $V_{\delta'}(\Delta) = 490.23$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε κατάσταση i, $V_{\delta'}(i) > V_\delta(i)$ και εφαρμόζουμε την επαναληπτική διαδικασία στην δ'.

$T_{\delta'}(\text{A}) = V_{\delta'}(A) = 690.23$.

$$T_{\delta'}(\text{B}) = \max\begin{cases} -100 + .9(.7V_{\delta'}(\text{A}) + .3V_{\delta'}(\text{B})) = 490.23 & (N)\\ 80 + .9(.7V_{\delta'}(\text{B}) + .3V_{\delta'}(\Gamma)) = V_{\delta'}(\text{B}) = 575.50^* & (\overline{N}) \end{cases}$$

Άρα $T_{\delta'}(B) = V_{\delta'}(\text{B}) = 575.50$ δίνεται από την απόφαση $\overline{N}$.

$$T_{\delta'}(\Gamma) = \max\begin{cases} -100 + .9(.7V_{\delta'}(\text{A}) + .3V_{\delta'}(\text{B})) = 490.23 & (N)\\ 50 + .9(.6V_{\delta'}(\text{B}) + .4V_{\delta'}(\Delta)) = V_{\delta'}(\Gamma) = 492.35^* & (\overline{N}) \end{cases}$$

Άρα $T_{\delta'}(\Gamma) = 492.35$ δίνεται από την απόφαση $\overline{N}$.

$$T_{\delta'}(\Delta) = \max\begin{cases} -100 + .9(.7V_{\delta'}(\text{A}) + .3V_{\delta'}(\text{B})) = V_{\delta'}(\Delta) = 490.23^* & (N)\\ 10 + .9V_{\delta'}(\Delta) = 451.21 & (\overline{N}) \end{cases}$$

Άρα $T_{\delta'}(\Delta) = V_{\delta'}(\Delta) = 490.23$ δίνεται από αντικατάσταση.

Για κάθε κατάσταση i, $T_{\delta'}(i) = V_{\delta'}(i)$. Άρα η δ' είναι μια βέλτιστη πολιτική. Για τη μεγιστοποίηση της υπό υφαίρεση αναμενόμενης αμοιβής, μια μηχανή σε κακή κατάσταση (Δ) πρέπει να αντικατασταθεί, ενώ από την άλλη μεριά μια άριστη (Α), καλή (Β) ή μέτρια (Γ) μηχανή δεν χρειάζεται αντικατάσταση. Αν ξεκινήσουμε την περίοδο 1 με μια άριστη μηχανή, τότε το υπό υφαίρεση αναμενόμενο κέρδος είναι 690.23 χ.μ..

<u>Η μέθοδος γραμμικού προγραμματισμού</u>

Μπορεί να δειχθεί ότι μια βέλτιστη στάσιμη πολιτική σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να βρεθεί λύνοντας το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min z = V_1 + V_2 + \ldots + V_N$$

$$\text{υπό τη συνθήκη } V_i - \beta \sum_{j=1}^{N} P(j \mid i, d) V_j \geq r_{id}$$

(για κάθε κατάσταση i και κάθε $d \in d(i)$ και χωρίς περιορισμούς στο πρόσημο των μεταβλητών)

Σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, λύνουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = V_1 + V_2 + \ldots + V_N$$

$$\text{υπό τη συνθήκη } V_i - \beta \sum_{j=1}^{N} P(j \mid i, d) V_j \leq r_{id}$$

(για κάθε κατάσταση i και κάθε $d \in d(i)$ και χωρίς περιορισμούς στο πρόσημο των μεταβλητών)

Η βέλτιστη λύση σε αυτά τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού θα έχει $V_i = V(i)$. Επίσης αν για κάποια κατάσταση i και απόφαση d, ένας περιορισμός γίνεται δεσμευτικός, τότε η απόφαση d είναι βέλτιστη για την κατάσταση i.

Στο παράδειγμα της αντικατάστασης μηχανών, το πρόβλημα γ.π. είναι το εξής:

$$\min z = V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B} + V_\Gamma + V_\Delta$$

$$\text{υπό τη συνθήκες} \quad \begin{array}{ll} V_\mathrm{A} \geq 100 + .9(.7V_\mathrm{A} + .3V_\mathrm{B}) & (\overline{N}) \text{ στην A} \\ V_\mathrm{B} \geq 80 + .9(.7V_\mathrm{B} + .3V_\Gamma) & (\overline{N}) \text{ στην B} \\ V_\mathrm{B} \geq -100 + .9(.7V_\mathrm{A} + .3V_\mathrm{B}) & (N) \text{ στην B} \\ V_\Gamma \geq 50 + .9(.6V_\Gamma + .4V_\Delta) & (\overline{N}) \text{ στην } \Gamma \\ V_\Gamma \geq -100 + .9(.7V_\mathrm{A} + .3V_\mathrm{B}) & (N) \text{ στην } \Gamma \\ V_\Delta \geq 10 + .9V_\Delta & (\overline{N}) \text{ στην } \Delta \\ V_\Delta \geq -100 + .9(.7V_\mathrm{A} + .3V_\mathrm{B}) & (N) \text{ στην } \Delta \end{array}$$

(χωρίς περιορισμούς στο πρόσημο των μεταβλητών)

Η λύση του παραπάνω π.γ.π. είναι $V_A = 690.23$, $V_B = 575.50$, $V_\Gamma = 492.35$, και $V_\Delta = 490.23$. Επίσης ο πρώτος, δεύτερος, τέταρτος και έβδομος περιορισμός είναι δεσμευτικοί και άρα η βέλτιστη πολιτική συμφωνεί με αυτή της προηγούμενης μεθόδου.

<u>Η μέθοδος επανάληψης τιμής</u>

Υπάρχουν διάφορες εκδοχές της μεθόδου αυτής. Στην παρούσα παράγραφο, θα δούμε τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Έστω ότι $V_t(i)$ είναι η μέγιστη υπό υφαίρεση αναμενόμενη αμοιβή, που λαμβάνουμε στη διάρκεια t περιόδων, αν η κατάσταση στην αρχή της παρούσας περιόδου είναι i. Τότε:

$$V_t(i) = \max_{d \in D(i)} \left(r_{id} + \beta \sum_{j=1}^{N} P(j \mid i, d) V_{t-1}(j) \right)$$
$$V_0(i) = 0$$

Έστω ότι $d_t(i)$ είναι η απόφαση που επιλέγεται κατά τη διάρκεια της περιόδου 1 στην κατάσταση i για την απόκτηση της $V_t(i)$. Για μια Markov Διαδικασία Απόφασης (ΜΔΑ) με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων και όπου κάθε $D(i)$ περιλαμβάνει ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, το βασικό πόρισμα της μεθόδου είναι:

$$|V_t(i) - V(i)| \le \frac{\beta^t}{1-\beta} \max_{i,d} |r_{id}| \text{ για } i = 1,2,\ldots,N.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $V(i)$ είναι η μέγιστη υπό υφαίρεση αναμενόμενη αμοιβή, που λαμβάνουμε στη διάρκεια απείρου αριθμού περιόδων, αν η κατάσταση στην αρχή της παρούσας περιόδου είναι i. Επομένως

$$\lim_{t \to \infty} d_t(i) = \delta^*(i)$$

όπου $\delta^*(i)$ είναι μια βέλτιστη στάσιμη πολιτική. Επειδή $\beta < 1$, για επαρκώς μεγάλο t, η $V_t(i)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε την $V(i)$. Για παράδειγμα στο πρόβλημα αντικατάστασης μηχανών $\beta = .9$ και $\max|r_{id}| = 100$. Έτσι, για όλες τις καταστάσεις, η $V_{50}(i)$ θα διαφέρει το πολύ $(.9)^{50}\left(\frac{100}{.10}\right) = 5.15$ χ.μ. από την $V(i)$. Η εξίσωση $\lim_{t \to \infty} d_t(i) = \delta^*(i)$ συνεπάγεται ότι για επαρκώς μεγάλο t, η βέλτιστη απόφαση στην κατάσταση i για ένα πρόβλημα t περιόδων, είναι επίσης βέλτιστη στην κατάσταση i για ένα πρόβλημα άπειρου ορίζοντα.

Δυστυχώς, δεν υπάρχει πάντοτε απλός τρόπος υπολογισμού του t^*, έτσι ώστε για όλα τα i και τα $t > t^*$ να ισχύει $d_t(i) = \delta^*(i)$. Παρ' όλα αυτά, η μέθοδος αυτή συνήθως παρέχει μια ικανοποιητική προσέγγιση των $V(i)$ και $\delta^*(i)$ με λιγότερη υπολογιστική προσπάθεια από ότι οι άλλες μέθοδοι.

Θα υπολογίσουμε τις V_1 και V_2 στο πρόβλημα αντικατάστασης μηχανών:

$$V_1(\mathrm{A}) = 100 \qquad (\bar{N})$$

$$V_1(\mathrm{B}) = \max\begin{cases} 80^* & (\bar{N}) \\ -100 & (N) \end{cases} = 80$$

$$V_1(\Gamma) = \max\begin{cases} 50^* & (\bar{N}) \\ -100 & (N) \end{cases} = 50$$

$$V_1(\Delta) = \max\begin{cases} 10^* & (\bar{N}) \\ -100 & (N) \end{cases} = 10$$

Το * σημαίνει την απόφαση που επιτυγχάνει την $V_1(i)$. Κατόπιν:

$$V_2(\mathrm{A}) = 100 + .9(.7V_1(\mathrm{A}) + .3V_2(\mathrm{B})) = 184.6 \qquad (\bar{N})$$

$$V_1(\mathrm{B}) = \max\begin{cases} 80 + .9(.7V_1(\mathrm{B}) + .3V_2(\Gamma)) = 143.9^* & (\bar{N}) \\ -100 + .9(.7V_1(\mathrm{A}) + .3V_2(\mathrm{B})) = -15.4 & (N) \end{cases}$$

$$V_1(\Gamma) = \max\begin{cases} 50 + .9(.6V_1(\Gamma) + .4V_2(\Delta)) = 80.6^* & (\bar{N}) \\ -100 + .9(.7V_1(\mathrm{A}) + .3V_2(\mathrm{B})) = -15.4 & (N) \end{cases}$$

$$V_1(\Delta) = \max\begin{cases} 10 + .9V_1(\Delta) & (\bar{N}) \\ -100 + .9(.7V_1(\mathrm{A}) + .3V_2(\mathrm{B})) = -15.4 & (N) \end{cases}$$

Το * τώρα σημαίνει την απόφαση που επιτυγχάνει την $V_2(i)$. Παρατηρούμε ότι μετά από δύο επαναλήψεις των διαδοχικών προσεγγίσεων, είμαστε αρκετά μακριά από τις πραγματικές τιμές των $V(i)$. Γενικά, για να είμαστε σίγουροι ότι όλες οι $V_t(i)$ βρίσκεται σε απόσταση ε από την $V(i)$ χρειαζόμαστε t^* επαναλήψεις των διαδοχικών προσεγγίσεων, όπου $\frac{\beta^{t^*}}{1-\beta}\max_{i,d}|r_{id}| < \varepsilon$. Δεν υπάρχει όμως εγγύηση ότι μετά από t^* επαναλήψεις των διαδοχικών προσεγγίσεων θα βρούμε την βέλτιστη στάσιμη πολιτική.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Οι Markov διαδικασίες απόφασης αποτελούν προβλήματα πιθανοθεωρητικού δυναμικού προγραμματισμού άπειρου χρονικού ορίζοντα. Μία Markov διαδικασία απόφασης καθορίζεται από τέσσερις τύπους πληροφορίας:

- χώρο καταστάσεων
- σύνολο αποφάσεων
- πιθανότητες μετάβασης και
- αναμενόμενες αμοιβές .

Αφού όμως εξετασθούν αυτές οι πληροφορίες θα πρέπει με κάποια κριτήρια να επιλεχθεί η πιθανότερη ορθή απόφαση.

Μια πολιτική είναι ένας κανόνας που καθορίζει πως επιλέγεται η απόφαση κάθε περιόδου. Γίνεται όμως και μια πολιτική να είναι στάσιμη , αν επιλέγει συνέχεια την ίδια απόφαση. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού παρατίθενται οι κυριότερες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επιλογή βέλτιστης στάσιμης πολιτικής.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7°</u>

<u>ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΔΙΚΤΥΟ</u>

ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΔΙΚΤΥΟ

Γράφημα ή γράφος (graph) είναι μια δυάδα δύο συνόλων N και A, η οποία συμβολίζεται με $G=(N,A)$. Τα στοιχεία του συνόλου N ονομάζονται κόμβοι (nodes) ή κορυφές (vertices). Τα στοιχεία του συνόλου A είναι ζευγάρια στοιχείων του συνόλου N και ονομάζονται ακμές (edges). Επομένως ένα γράφημα αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων που συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο ακμών. Αν οι κόμβοι είναι αριθμημένοι από $1,\dots,n$ τότε οι ακμές μπορούν να οριστούν από τα ακραία σημεία τους. Για παράδειγμα η ακμή που έχει ως ακραία σημεία τους κόμβους i και j, συμβολίζεται με (i,j). Δύο κόμβοι λέγονται γειτονικοί αν συνδέονται με μία ακμή. Δεν επιτρέπουμε την παρουσία πολλαπλών ακμών που συνδέουν το ίδιο ζευγάρι κόμβων, καθώς επίσης και ακμές της μορφής (i,i) (loops).

Κατευθυνόμενο (προσανατολισμένο) γράφημα (directed graph) είναι ένα γράφημα όπου κάθε ακμή (i,j) έχει κατεύθυνση από το i στον j. Προφανώς $(i,j)\neq(j,i)$ και στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον όρο τόξο. Στην περίπτωση του κατευθυνόμενου γραφήματος, δύο τόξα που συνδέουν το ίδιο ζευγάρι κόμβων, είναι επιτρεπτά, μόνο αν έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

Αλυσίδα (chain) μεταξύ δύο κόμβων i ενός j ενός (κατευθυνόμενου) γραφήματος, είναι μια ακολουθία από τόξα που ενώνουν τον i με τον j. Ο *δρόμος* ή *μονοπάτι (path)* από τον i στον j είναι μια αλυσίδα μεταξύ των i και j, της οποίας όλα τα τόξα έχουν κατεύθυνση από τον i στον j. Ένας *κύκλος* είναι μία αλυσίδα που αρχίζει και τελειώνει στον ίδιο κόμβο. Δύο κόμβοι είναι *συνδεδεμένοι*, αν υπάρχει ένας τουλάχιστον δρόμος με άκρα αυτού τους κόμβους. Το γράφημα λέγεται *συνεκτικό*, αν οποιοιδήποτε δύο κόμβοι του είναι συνδεδεμένοι. *Δέντρο* ονομάζεται ένα συνεκτικό και άκυκλο γράφημα. Σαν δέντρο ενός γραφήματος ορίζεται κάθε υπογράφημα του γραφήματος που είναι δέντρο. Το *ζευγνύον (παράγον)* δέντρο ενός γραφήματος είναι ένα δέντρο του γραφήματος που περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του γραφήματος.

Αποδεικνύονται τα παρακάτω:

- Ένα δέντρο με n κόμβους αποτελείται από $n-1$ τόξα.
- Οποιεσδήποτε δύο κορυφές ενός δέντρου συνδέονται με μια μοναδική αλυσίδα.
- Ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν περιλαμβάνει ένα παράγον δέντρο.

Μερικές ιδιότητες των γραφημάτων είναι πολύ χρήσιμες γιατί η συχνότητα εμφάνισης τους σε προβλήματα και αλγορίθμους είναι μεγάλη. Οι ειδικές μέθοδοι που εντοπίζουν συγκεκριμένες ιδιότητες ονομάζονται αλγόριθμοι ανίχνευσης. Δύο κλασσικοί αλγόριθμοι εύρεσης παραγόντων δέντρων μέσω διάσχισης του γραφήματος είναι οι BFS και DFS:

1. Αναζήτηση κατά πλάτος (BFS, Breadth First Search), όπου εξετάζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τον τρέχοντα κόμβο, ακολουθώντας αύξουσα αριθμητική σειρά (π.χ. 1→2, 1→3, 1→5 κλπ.)

2. Αναζήτηση κατά βάθος (DFS, Depth First Search), όπου εξετάζουμε έναν κάθε φορά συνδεδεμένο κόμβο στον τρέχοντα, ακολουθώντας πάλι αύξουσα αριθμητική σειρά. Αν σε κάποιο σημείο δεν υπάρχει επόμενος κόμβος, επιστρέφουμε στον προηγούμενο και συνεχίζουμε την διάσχιση του γραφήματος από άλλο δρόμο.

<u>*Διατύπωση του προβλήματος της μέγιστης ροής*</u>

Δίκτυο ονομάζεται ένα προσανατολισμένο και συνεκτικό γράφημα που έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

- Ένα κόμβο αφετηρία που ονομάζεται είσοδος (source) για τον οποίο δεν υπάρχουν τόξα με κατεύθυνση προς αυτόν .
- Ένα κόμβο προορισμό που ονομάζεται έξοδος (sink) από τον οποίο δεν ξεκινά κανένα τόξο.

- Για κάθε ακμή (i,j), υπάρχει μια χωρητικότητα c_{ij} που εκφράζει το μέγιστο ποσό ροής (flow) που μπορεί να διοχετευτεί από τον κόμβο i στον κόμβο j διαμέσου του τόξου (i,j).
- Θεωρούμε $c_{ij} = c_{ji} = 0$ αν οι δυο κόμβοι δεν συνδέονται.

Στην μελέτη που θα ακολουθήσει θα θεωρούμε σαν είσοδο τον κόμβο 1 και σαν έξοδο τον κόμβο n. Σύμφωνα με τα παραπάνω, δεν εισέρχεται ροή στον κόμβο 1 (είσοδος) και δεν εξέρχεται ροή από τον κόμβο n (έξοδος). Για όλους τους άλλους κόμβους του δικτύου ισχύει inflow = outflow. Δηλαδή όση ροή εισέρχεται στον κόμβο, τόση εξέρχεται (αρχή διατήρησης της ροής).

Το πρόβλημα είναι να βρούμε την μέγιστη δυνατή ροή που μπορεί να περάσει από τον κόμβο 1 στον κόμβο n. Αν x_{ij} είναι η ροή από τον i στον j διαμέσου του τόξου (i,j) μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα με την παρακάτω μορφή:

$$\text{maximize} \qquad f = \sum_{k=1}^{n} x_{1k} = \sum_{k=1}^{n} x_{kn}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{jk}, \quad j = 2,3,\ldots,n-1$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij} \qquad 1 \le i,j \le n$$

Η μέθοδος Simplex μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λύση αυτού του γραμμικού προβλήματος αλλά εμείς θα εξετάσουμε στην συνέχεια δύο περισσότερο αποτελεσματικές μεθόδους.

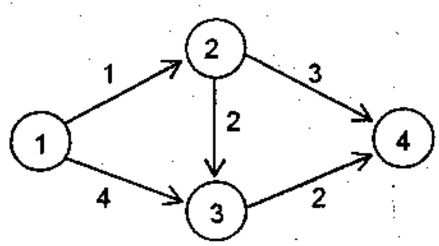
1. *ΤΟΜΕΣ*

Η τομή (cut) $(S,\overline{S})$ σε ένα δίκτυο είναι μία διαμέριση των κόμβων του σε δύο σύνολα S και $\overline{S}$ όπου το S περιέχει τον κόμβο 1 και το $\overline{S}$ περιέχει τον κόμβο n. Σε κάθε τομή αντιστοιχεί ένα σύνολο (cutset) το οποίο περιέχει τα τόξα (i,j) όπου ο κόμβος i ανήκει στο S και ο κόμβος j ανήκει στο $\overline{S}$. Κάθε μονοπάτι από τον 1 στον n περιέχει τουλάχιστον ένα τόξο από το σύνολο αυτό (cutset).

Η χωρητικότητα της τομής ισούται με το άθροισμα των χωρητικοτήτων των τόξων του cutset που αντιστοιχούν στην τομή. Ελάχιστη τομή (minimal cut) είναι η τομή με την ελάχιστη χωρητικότητα.

Παράδειγμα

Θεωρώντας το γράφημα του παρακάτω σχήματος βρίσκουμε τις τομές του και τις αντίστοιχες χωρητικότητές τους.



S	S'	Τόξα των συνόλων (cutsets)	Χωρητικότητα
1	2,3,4	(1,2)(1,3)	5
1,3	2,4	(1,2)(3,4)	3(min)
1,2	3,4	(1,3)(2,3)(2,4)	9
1,2,3	4	(2,4)(3,4)	5

Από τον πίνακα των χωρητικοτήτων διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη τομή είναι η δεύτερη όπου $\{1,3\} \in S$ και $\{2,4\} \in \overline{S}$. Η χωρητικότητά της είναι 3 που είναι και η μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει από το δίκτυο.

<u>Θεώρημα 1 (ασθενούς δυϊκότητας)</u>: Το ποσό κάθε εφικτής ροής από τον κόμβο 1 στον κόμβο n δεν ξεπερνά την χωρητικότητα οποιασδήποτε τομής.

Από το θεώρημα 1 συνεπάγεται ότι η χωρητικότητα μιας ελάχιστης τομής αποτελεί άνω όριο για την μέγιστη ροή από τον 1 στον n.

<u>Θεώρημα 2 (ισχυρούς δυϊκότητας)</u>: Η τιμή της μέγιστης ροής που μπορεί να περάσει από ένα δίκτυο ισούται με την χωρητικότητα της ελάχιστης τομής.

2. Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ FORD - FULKERSON

Ο αλγόριθμος ξεκινά από μια αρχική εφικτή ροή και αναζητά αλυσίδες από τον κόμβο 1 προς τον κόμβο n, κατά μήκος των οποίων η ροή μπορεί να αλλάξει αυξάνοντας ή ελαττώνοντας την συνολική ροή.

- Ο κόμβος i ονομάζεται *γειτονικός* του κόμβου j αν $c_{ij} > 0$.
- *Εξετάζουμε* ένα κόμβο, σημαίνει ότι βρίσκουμε όλους τους γειτονικούς του κόμβους που μπορούν είτε να αυξήσουν την ροή τους είτε να εφοδιάσουν με θετική ροή τον κόμβο που εξετάζουμε.
- Μια *σήμανση* (label), της μορφής $(\pm i, \Delta j)$ στον κόμβο j δίνει δύο πληροφορίες σχετικά με την ροή που μπορεί να σταλεί από τον κόμβο 1 προς τον j. Το πρώτο όρισμα i δείχνει τον προηγούμενο κόμβο της αλυσίδας κατά μήκος της οποίας οι ροές μπορούν να αλλάξουν. $+i$ σημαίνει ότι η ροή προστίθεται στο x_{ij} και $-i$ σημαίνει ότι η ροή αφαιρείται από το x_{ji}. Το δεύτερο όρισμα της σήμανσης Δj δείχνει το ποσό της αυξανόμενης ροής. Αυτό εξαρτάται από δύο τιμές: την ροή Δi που είναι διαθέσιμη στον κόμβο i και την περίσσεια χωρητικότητα $c_{ij} - x_{ij}$ στο τόξο (i, j).
- Μία *αυξανόμενη αλυσίδα (augmenting chain)* είναι μια αλυσίδα κατά μήκος της οποίας οι ροές μπορούν να αλλάξουν χωρίς να ξεπεραστούν οι χωρητικότητές τους, έτσι ώστε η συνολική ροή να αυξηθεί.
- Ένα *πέρασμα (breakthrough)* εμφανίζεται όταν εντοπιστεί μία αυξανόμενη αλυσίδα από τον κόμβο1 προς τον κόμβο n.

Περιγραφή του αλγορίθμου:

Ο αλγόριθμος αναζητά αυξανόμενες αλυσίδες από τον κόμβο 1 προς τον κόμβο n. Αρχικά, βρίσκουμε ένα πρότυπο εφικτής ροής (συνήθως τοποθετούνται μηδενικές αρχικές ροές). Στη συνέχεια κατασκευάζεται ένα προς τα εμπρός πέρασμα, διαμέσου του δικτύου ξεκινώντας από τον κόμβο 1. Οι κόμβοι εξετάζονται και αποκτούν σημάνσεις αν υφίσταται προστιθέμενη ή αφαιρούμενη ροή. Τελικώς, είτε:

(i) ο κόμβος n αποκτά σήμανση και ένα πέρασμα έχει δημιουργηθεί, ή

(ii) κάθε κόμβος με σήμανση έχει εξεταστεί και δε δύναται να τοποθετηθούν νέες σημάνσεις.

Στην περίπτωση (i), ένα προς τα πίσω πέρασμα υπάρχει από τον n στον 1 ανανεώνοντας τις ροές τον τόξων που περιέχονται στην αυξανόμενη αλυσίδα. Στη συνέχεια, όλες οι σημάνσεις αφαιρούνται και η επεξεργασία της εξέτασης επαναλαμβάνεται.

Στην περίπτωση (ii) δεν υπάρχουν άλλες αυξανόμενες αλυσίδες και η μέγιστη ροή έχει βρεθεί.

Τότε ο αλγόριθμος σταματά και μια ελάχιστη τομή διαμερίζει τους κόμβους που έχουν σήμανση από αυτούς που δεν έχουν. Η ελάχιστη αυτή τομή μπορεί με βάση την θεωρία που έχει προαναφερθεί να χρησιμοποιηθεί για έλεγχο.

Τα βήματα του αλγορίθμου.

Ο αλγόριθμος βρίσκει την μέγιστη ροή σε ένα δίκτυο n κόμβων από την είσοδο (κόμβος 1) στην έξοδο (κόμβος n), με χωρητικότητες τόξων c_{ij}.

Δεδομένα: $n,(i,j),c_{ij}$

Ζητούμενα: Η μέγιστη ροή και ο τρόπος κατανομής της ($x=[x_{ij}]$).

0: Καθορίζουμε μια αρχική ροή (για παράδειγμα $x_{ij}=0$ για κάθε i,j).

1: Θέτουμε σήμανση $(\,,\infty)$ στον κόμβο 1, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει προηγούμενος κόμβος, καθώς και ότι δεν υφίσταται όριο στην ροή που εξέρχεται από τον κόμβο 1.

2: Βρίσκουμε τον επόμενο κόμβο με σήμανση, έστω i, που δεν έχει εξεταστεί και τον εξετάζουμε όπως ακολούθως:

(α) Αν $c_{ij}>x_{ij}\geq 0$, υπολογίζουμε τη διαφορά $\Delta_{ij}=c_{ij}-x_{ij}$ (την περίσσεια χωρητικότητα), θέτουμε $\Delta_j=\min(\Delta_i,\Delta_{ij})$ (τη μέγιστη προστιθέμενη ροή) και θέτουμε στον κόμβο j την προς τα εμπρός σήμανση $(+i,\Delta_j)$.

(β) Αν $x_{ij}>0$, υπολογίζουμε το $\Delta_j=\min(\Delta_i,x_{ji})$ και θέτουμε στον κόμβο j την προς τα πίσω σήμανση $(-i,\Delta_j)$.

Αν δεν είναι δυνατό να εντοπίσουμε άλλο κόμβο προς σήμανση, επιστρέφουμε στο βήμα 4. Διαφορετικά προχωρούμε στο βήμα 3.

3: Επαναλαμβάνουμε το βήμα 2, έως ότου ο κόμβος n αποκτήσει σήμανση. Τότε ένα πέρασμα (breakthrough) έχει δημιουργηθεί και πρόσθετη ροή Δn από τον κόμβο 1 στον κόμβο n είναι δυνατή. Ανανεώνουμε τα x_{ij} στην αυξανόμενη αλυσίδα με προς τα πίσω έλεγχο των σημάνσεων ως εξής:

Αν ο j έχει προς τα εμπρός σήμανση, τότε προσθέτουμε Δn στο x_{ij}.

Αν ο j έχει προς τα πίσω σήμανση, τότε αφαιρούμε Δn από το x_{ji}.

Όταν επιστρέψουμε στον κόμβο 1, αφαιρούμε τις σημάνσεις από όλους τους κόμβους εκτός του 1, και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

4: Υπολογίζουμε το $\sum \Delta n$, που είναι η μέγιστη ροή. Τα σύνολα NL και NU, δηλαδή των κόμβων με και δίχως σημάνσεις αντίστοιχα, ορίζουν την ελάχιστη τομή (NL, NU).

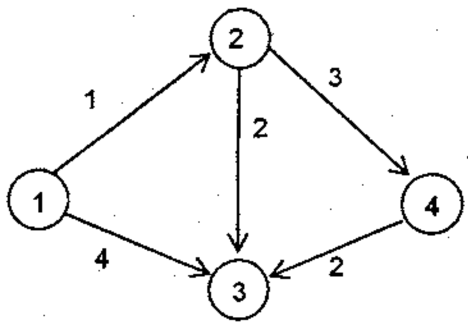
Τέλος, ελέγχουμε αν "εξερχόμενη από τον κόμβο 1 ροή"=
="εισερχόμενη στον κόμβο n ροή"=
="χωρητικότητα της (NL, NU)".

Παρατηρήσεις:

1. Το πρότυπο ροής και η ελάχιστη τομή που δίνει ο αλγόριθμος δεν είναι απαραίτητα μοναδικά. Διαφορετικές επιλογές του i στο βήμα 2, παράγουν γενικά διαφορετικά πρότυπα ροής. Σε κάθε περίπτωση όμως, η τιμή της μέγιστης ροής είναι μοναδική.
2. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την BFS αναζήτηση. Η DFS αναζήτηση, όπου ένας μοναδικός κόμβος δέχεται σήμανση στο βήμα 2, ίσως σε κάποια προβλήματα απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς.
3. Σε απλά προβλήματα, είναι θεμιτό να ξεκινούμε με αρχική ροή διαφορετική του μηδενός. Αυτό μειώνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο της έρευνας για την μέγιστη ροή.

Εφαρμογή του αλγορίθμου:

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson στο παρακάτω γράφημα, όπου ο κόμβος 1 είναι η είσοδος και ο κόμβος 4 είναι η έξοδος:



Βήμα 0: Θέτουμε $x_{ij} = 0$ για όλα τα τόξα του γραφήματος.

Βήμα 1: Θέτουμε σήμανση $(\ ,\infty)$ στον κόμβο 1.

Βήμα 2: Εξετάζουμε τον κόμβο 1:

Σήμανση στον κόμβο 2:

$c_{12} - x_{12} = 1 - 0 = 1 = \Delta_{12} > 0$,

άρα $\Delta_2 = \min(\Delta_1, \Delta_{12}) = \min(\infty, 1) = 1$

και στον 2 θέτουμε προς τα εμπρός σήμανση $(+1,1)$.

Σήμανση στον κόμβο 3:

$c_{13} - x_{13} = 4 - 0 = 4 = \Delta_{13} > 0$,

άρα $\Delta_3 = \min(\Delta_1, \Delta_{13}) = \min(\infty, 4) = 4$

και στον 3 θέτουμε προς τα εμπρός σήμανση $(+1,4)$.

Εξετάζουμε τον κόμβο 2:

Σήμανση στον κόμβο 4:

$c_{24} - x_{24} = 3 - 0 = 3 = \Delta_{24} > 0$,

άρα $\Delta_2 = \min(\Delta_2, \Delta_{24}) = \min(3, 1) = 1$

και στον 4 θέτουμε προς τα εμπρός σήμανση $(+2,1)$.

Βήμα 3: Ένα πέρασμα (breakthrough) έχει δημιουργηθεί αφού ο κόμβος 4 έχει σήμανση. Άρα διατρέχουμε προς τα πίσω την αυξανόμενη αλυσίδα $(1,2)(2,4)$ και ενημερώνουμε τα x_{ij}. Είναι $x_{24} = 1$ και $x_{12} = 1$. Τέλος, αφαιρούμε όλες τις σημάνσεις και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Βήμα 2: Εξετάζουμε τον κόμβο 1:

Σήμανση στον κόμβο 2:

$c_{12} - x_{12} = 1 - 1 = 0$, και επομένως δεν μπορούμε να θέσουμε σήμανση στον κόμβο 2.

Σήμανση στον κόμβο 3:

$c_{13} - x_{13} = 4 - 0 = 4 = \Delta_{13} > 0$,

άρα $\Delta_3 = \min(\Delta_1, \Delta_{13}) = \min(\infty, 4) = 4$

και στον 3 θέτουμε προς τα εμπρός σήμανση $(+1,4)$.

Εξετάζουμε τον κόμβο 3:

Σήμανση στον κόμβο 2:

δεν θέτουμε σήμανση, διότι $x_{23} = 0$.

Σήμανση στον κόμβο 4:

$c_{34} - x_{34} = 2 - 0 = 2 = \Delta_{34} > 0$,

άρα $\Delta_4 = \min(\Delta_3, \Delta_{34}) = \min(4,2) = 2$

και στον 4 θέτουμε προς τα εμπρός σήμανση $(+3,2)$.

Βήμα 3: Ένα πέρασμα έχει δημιουργηθεί αφού ο κόμβος 4 έχει σήμανση. Άρα διατρέχουμε προς τα πίσω την αυξανόμενη αλυσίδα $(1,3)(3,4)$ και ενημερώνουμε τα x_{ij}. Είναι $x_{13} = 2$ και $x_{34} = 2$. Τέλος, αφαιρούμε όλες τις σημάνσεις και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Βήμα 2: Εξετάζουμε τον κόμβο 1:

Σήμανση στον κόμβο 2:

$c_{12} - x_{12} = 1 - 1 = 0$, και επομένως δεν μπορούμε να θέσουμε σήμανση στον κόμβο 2.

Σήμανση στον κόμβο 3:

$c_{13} - x_{13} = 4 - 2 = 2 = \Delta_{13} > 0$,

άρα $\Delta_3 = \min(\Delta_1, \Delta_{13}) = \min(\infty, 2) = 2$

και στον 3 θέτουμε προς τα εμπρός σήμανση $(+1,2)$.

Εξετάζουμε τον κόμβο 3:

Σήμανση στον κόμβο 2:

δεν θέτουμε σήμανση, διότι $x_{23} = 0$.

Σήμανση στον κόμβο 4:

$c_{34} - x_{34} = 0$, και επομένως δεν μπορούμε να θέσουμε σήμανση στον κόμβο 4.

Βήμα 4: Υπολογίζουμε τη συνολική ροή που είναι $1 + 2 = 3$ και ελέγχουμε την χωρητικότητα της τομής που έχει δημιουργηθεί (και είναι ελάχιστη) με τους κόμβους που έχουν σήμανση και αυτούς που δεν έχουν:

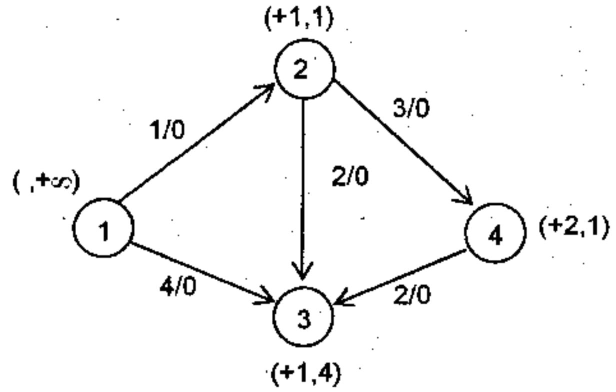
$N_L = \{1,3\}$ και $N_U = \{2,4\}$.

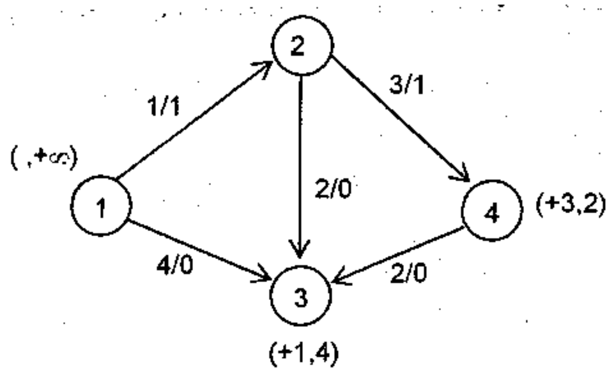
Χωρητικότητα της τομής $\{N_L, N_U\} = c_{12} + c_{34} = 1 + 2 = 3$

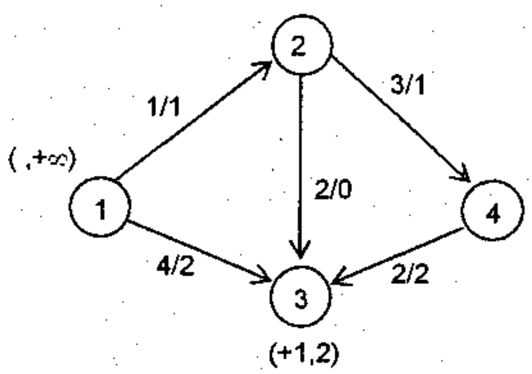
Επίσης, ελέγχουμε αν η ροή που εξέρχεται από τον κόμβο 1, ισούται με αυτήν που εισέρχεται στον κόμβο 4: $1 + 2 = 1 = 2 = 3$.

Τελικά η μέγιστη ροή του δικτύου είναι 3.

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε την γραφική απεικόνιση των βημάτων του αλγορίθμου, που ακολουθήσαμε:







ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε το ο πρόβλημα της μέγιστης ροής σε δίκτυο. Δίκτυο ονομάζεται ένα προσανατολισμένο και συνεκτικό γράφημα που έχει τα εξής χαρακτηριστικά: ένα κόμβο αφετηρία που ονομάζεται είσοδος και δεν υπάρχουν τόξα με κατεύθυνση προς αυτόν , ένα κόμβο προορισμό που ονομάζεται έξοδος από τον οποίο δεν ξεκινά κανένα τόξο , για κάθε ακμή (I, G) υπάρχει μια χωρητικότητα C_{IG} που εκφράζει το μέγιστο ποσό ροής που διοχετεύεται από τον κόμβο I στο κόμβο G διαμέσου του τόξου (I, G) και τέλος αν δύο κόμβοι δεν συνδέονται οι χωρητικότητες είναι ίσες με C I G = C G I = 0 .

Το πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι να μπορούμε να βρίσκουμε τη μέγιστη ροή που να μπορεί να περάσει από τον ένα κόμβο στον άλλο. Μια από τις μεθόδους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λύση τέτοιων γραμμικών προβλημάτων είναι η μέθοδος SIMPLEX αλλά εμείς εξετάζουμε την μέθοδο των τομών και τον αλγόριθμο FORD-FULKERSON σαν τις δύο πιο αποτελεσματικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8°

PERT – C P M

P.E.R.T. (ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΧΡΟΝΟΥ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ)

Η τεχνική P.E.R.T. (Project Evaluation and Review Technique) αναπτύχθηκε (1956-1958) για λογαριασμό της Lockheed Aircraft Corporation προκειμένου να χρησιμοποιηθεί για τη σχεδίαση και την ανάπτυξη του προγράμματος των πυραύλων Polaris. Είχε σαν αποτέλεσμα να μειωθεί ο αρχικά προβλεπόμενος χρόνος κατά 2 έτη. Έκτοτε χρησιμοποιείται ευρέως σε προγράμματα στα οποία η εκτίμηση του χρόνου εκτέλεσης των δραστηριοτήτων δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια.

Οι βασικές προϋποθέσεις για την ανάπτυξη της μεθόδου αυτής είναι:

- Η στοχαστική ανεξαρτησία των δραστηριοτήτων του έργου.
- Ο μεγάλος αριθμός δραστηριοτήτων που πρέπει να περιλαμβάνει η κρίσιμη διαδρομή, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα χρήσης του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

Έστω η τυχαία μεταβλητή s_{1k} που εκφράζει τη διάρκεια της διαδρομής από την αρχή 1 του δικτύου προς τον τυχαίο κόμβο k. Τότε $s_{1k} = \sum_{i,j\le k} d_{ij}$. Η αναμενόμενη τιμή της s_{1k} δίνεται από τη σχέση $E(s_{1k}) = E\left(\sum_{i,j\le k} d_{ij}\right) = \sum_{i,j\le k} E(d_{ij})$, η δε διασπορά, λόγω ανεξαρτησίας, από τη σχέση $Var(s_{1k}) = \sum_{i,j\le k} Var(d_{ij})$.

Η τεχνική PERT, για να αποφύγει τον άμεσο υπολογισμό της διάρκειας κάθε δραστηριότητας του έργου, θεωρεί ότι αυτή ισούται με την αναμενόμενη τιμή της.

Για τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής και διασποράς των τυχαίων μεταβλητών απαιτείται η εκτίμηση 3 χρόνων εκτέλεσης:

- του πιο αισιόδοξου χρόνου t_a. Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί στην πιο αισιόδοξη εκτίμηση, κάτω από τις πιο ευνοϊκές συνθήκες πραγματοποίησης της δραστηριότητας και δύσκολα πραγματοποιείται.

- του πιο απαισιόδοξου χρόνου t_b. Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί στην πιο απαισιόδοξη εκτίμηση, κάτω από τις πιο δυσμενείς συνθήκες πραγματοποίησης της δραστηριότητας και προφανώς εύκολα πραγματοποιείται.
- του πιο πιθανού χρόνου t_m. Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί στον κανονικό χρόνο εκτέλεσης της δραστηριότητας, αυτόν δηλαδή που θα παρουσιαζόταν συχνότερα αν επαναλαμβάναμε τη δραστηριότητα πολλές φορές.

Για τον υπολογισμό της αναμενόμενης διάρκειας κάθε δραστηριότητας, η τεχνική δέχεται ότι η διάρκεια των δραστηριοτήτων του έργου ακολουθεί τη Βήτα κατανομή. Η καμπύλη της κατανομής αυτής μοιάζει με την καμπύλη της κανονικής κατανομής, με τη διαφορά ότι δεν είναι πάντα συμμετρική ως προς το μέσο και τα άκρα της τέμνουν τον άξονα του χρόνου t σε δύο σημεία, τα t_a και t_b. Για τον υπολογισμό της διασποράς, η τεχνική PERT θεωρεί ότι η κατανομή που ακολουθεί η διάρκεια d κάθε δραστηριότητας έχει τέτοιο εύρος, ώστε αυτό να καλύπτεται πρακτικά από έξι τυπικές αποκλίσεις. Έτσι θέτουμε $Var(d)=\left(\frac{t_b-t_a}{6}\right)^2$. Για την αναμενόμενη τιμή, μια καλή γραμμική προσέγγιση στην πραγματική αναμενόμενη τιμή, δίνεται από τον αριθμητικό μέσο των $\frac{t_a+t_b}{2}$ και $2t_m$, δηλαδή είναι $E(d)=\frac{1}{3}\left[\frac{t_a+t_b}{2}+2t_m\right]=\frac{t_a+4t_m+t_b}{6}$.

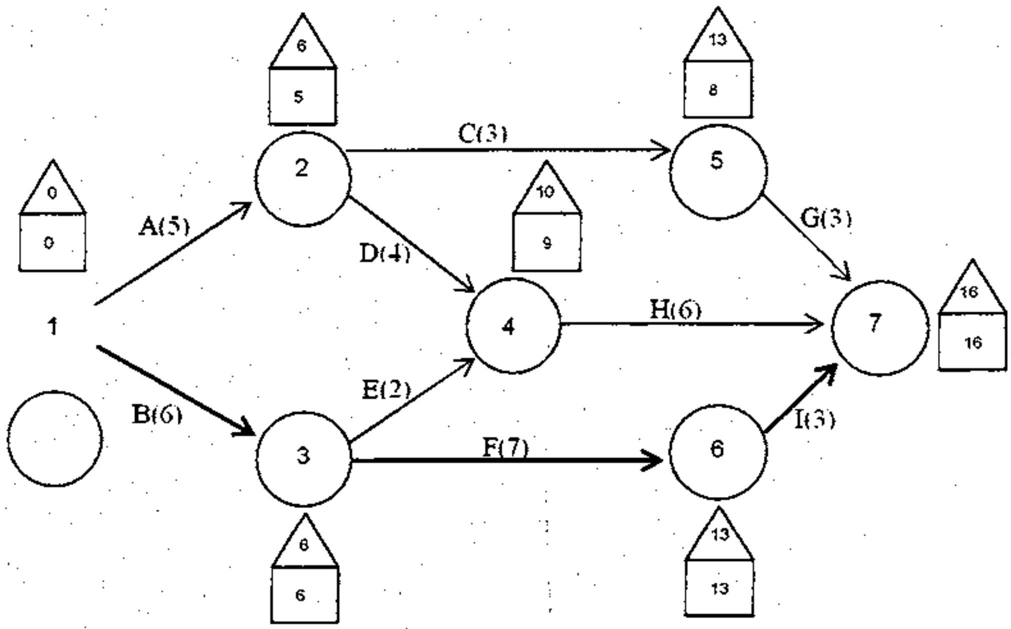
Στην περίπτωση κατά την οποία μεταξύ των κόμβων 1 και k υπάρχουν περισσότερες από μία διαδρομές με την ίδια αναμενόμενη διάρκεια, σαν μεγαλύτερη χρονικά επιλέγεται αυτή με τη μεγαλύτερη διασπορά. Αυτή δηλαδή που αντιπροσωπεύει τη μεγαλύτερη αβεβαιότητα και επομένως αυτή που παρέχει τα πιο συντηρητικά αποτελέσματα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το έργο του οποίου οι δραστηριότητες δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δραστηριότητα	Προηγούμενες Δραστηριότητες	t_a	t_m	t_b	$E(d)$	$Var(d)$
$A(1,2)$	–	2	4	12	5	2.78
$B(1,3)^*$	–	3	6	9	6	1.00
$C(2,5)$	A	1	2	9	3	1.78
$D(2,4)$	A	3	3	9	4	1.00
$E(3,4)$	B	1	2	3	2	0.11
$F(3,6)^*$	B	2	8	8	7	1.00
$G(5,7)$	C	1	2	9	3	1.78
$H(4,7)$	D, E	4	5	12	6	1.78
$I(6,7)^*$	F	1	3	5	3	0.44

* κρίσιμη δραστηριότητα

Ας κατασκευάσουμε τώρα το δίκτυο για την αναπαράσταση του έργου. Χρησιμοποιώντας ως διάρκειες των δραστηριοτήτων τις αντίστοιχες αναμενόμενες τιμές, προκύπτει η κατά PERT κρίσιμη διαδρομή $B - F - I$ με αναμενόμενη διάρκεια 16 και διασπορά 2.44.



Υπενθυμίζουμε ότι η χρονικά μεγαλύτερη διαδρομή από την αρχή του δικτύου προς το τυχαίο γεγονός k δίνεται από τον ενωρίτερο χρόνο του γεγονότος αυτού. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το άθροισμα των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών της διάρκειας μιας διαδρομής. Η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της μεταβλητής αυτής είναι το άθροισμα των αντιστοίχων αναμενόμενων τιμών και διασπορών των διαρκειών των επιμέρους δραστηριοτήτων που συνθέτουν τη διαδρομή. Αν η διαδρομή περιλαμβάνει ικανά μεγάλο αριθμό δραστηριοτήτων, από το κεντρικό οριακό θεώρημα, η κατανομή που ακολουθεί η διάρκεια της διαδρομής αυτής προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με μ_k την αναμενόμενη τιμή και σ_k^2 τη διασπορά του ενωρίτερου χρόνου του γεγονότος k, η πιθανότητα πραγματοποίησης του γεγονότος αυτού σε χρόνο t_k, είναι $P((ET)_k \leq t_k) = F\left(\frac{t_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)$, όπου $F(z)$ η συνάρτηση κατανομής μιας τυποποιημένης κανονικής τυχαίας μεταβλητής.

Για το προηγούμενο παράδειγμα, με βάση τον παρακάτω πίνακα:

Γεγονός	Διαδρομή	μ_k	σ_k^2
1	–	0	0.00
2	$1 \to 2$	5	2.78
3	$1 \to 3$	6	1.00
4	$1 \to 2 \to 4$	9	3.78
5	$1 \to 2 \to 5$	8	4.56
6	$1 \to 3 \to 6$	13	2.00
7	$1 \to 3 \to 6 \to 7$	16	2.44

η πιθανότητα περάτωσης του έργου σε 15 ημέρες είναι $F\left(\dfrac{t_k - \mu_k}{\sigma_k}\right) = F\left(\dfrac{15-16}{\sqrt{2.44}}\right) = F(-0.641) \cong 0.26$.

C.P.M. (ΣΧΕΣΗ ΧΡΟΝΟΥ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΥΣ)

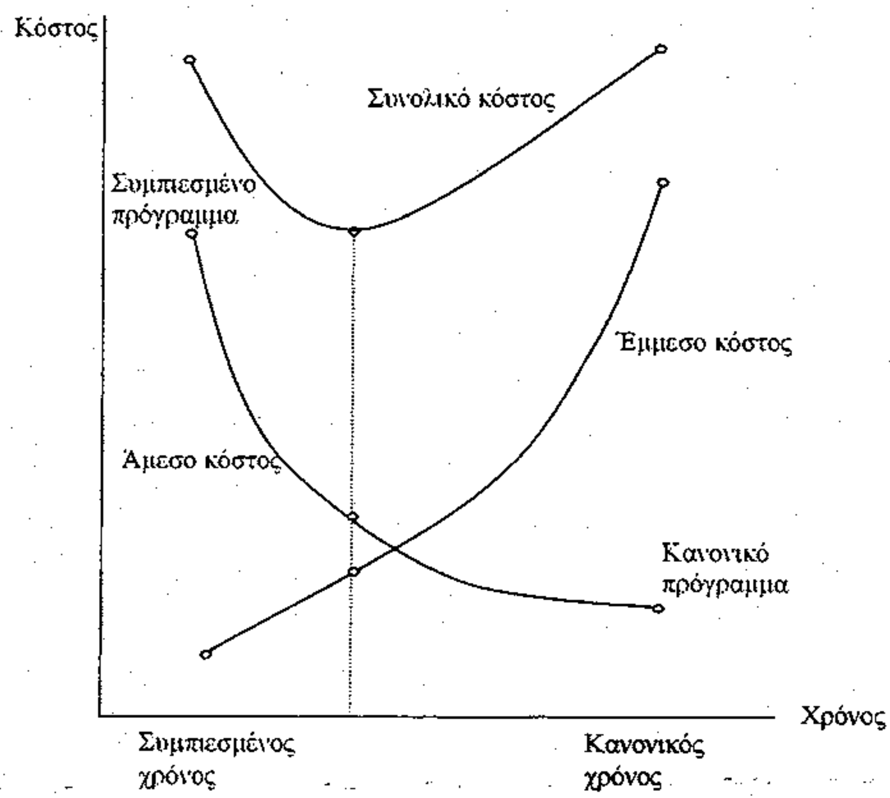
Η τεχνική CPM (Critical Path Method) αναπτύχθηκε (1956-1958) για λογαριασμό της Du Pont και εφαρμόστηκε για τον προγραμματισμό της συντήρησης των μηχανών της εταιρείας. Η ελάττωση του χρόνου συντήρησης κατά 37% απέφερε κέρδη άνω του ποσού των £1000000 μέσα σε ένα έτος. Ανάλογες επιτυχίες είχε και η εφαρμογή της μεθόδου σε συνδυασμό με τη μέθοδο PERT, στην κατασκευή των κτιριακών και λοιπών εγκαταστάσεων της διεθνούς έκθεσης του Montreal EXPO 1967.

Η μέθοδος PERT που είδαμε στα προηγούμενα, δίνει έμφαση στη χρονική διάρκεια εκτέλεσης κάποιου έργου χωρίς να λαμβάνει υπ' όψιν τη μεταβλητή του κόστους και πως αυτή επηρεάζεται από τη συμπίεση του χρόνου εκτέλεσης των εργασιών. Συμπίεση του χρόνου συνεπάγεται αύξηση του κόστους και αντικειμενικός σκοπός της CPM είναι να πετύχει τον άριστο συνδυασμό χρόνου και κόστους.

Σύμφωνα με τη μέθοδο, χρειαζόμαστε εκτιμήσεις του χρόνου και του κόστους κάτω από συνθήκες κανονικού ρυθμού εκτέλεσης των εργασιών και υπό συνθήκες συμπίεσης του χρόνου έως το ελάχιστο δυνατό όριο. Το κόστος εκτέλεσης κάθε δραστηριότητας (συνεπώς και όλου του έργου) χωρίζεται σε δύο κατηγορίες:

- το άμεσο κόστος εργασίας
- το έμμεσο κόστος εργασίας (γενικά έξοδα, φόροι, ασφάλειες κλπ.)

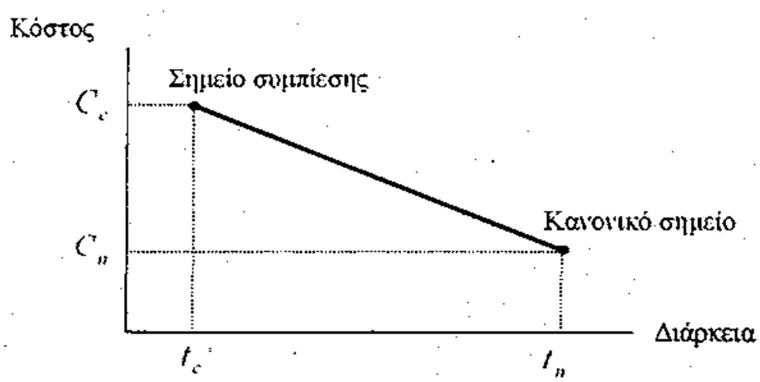
Όπως φαίνεται στην παρακάτω καμπύλη, το άμεσο κόστος αυξάνεται κατά τη διάρκεια της συμπίεσης του χρόνου εκτέλεσης μιας δραστηριότητας, ενώ αντίθετα το έμμεσο κόστος μειώνεται με την επίσπευση του αρχικού χρόνου εκτέλεσης του έργου. Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε το σημείο της καμπύλης που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος (το άθροισμα δηλαδή του άμεσου και έμμεσου κόστους).



Καμπύλη άμεσου, έμμεσου και συνολικού κόστους - χρόνου

- Για κάθε δραστηριότητα ορίζεται ένας κανονικός χρόνος T (συνήθως αντιστοιχεί στον πλέον πιθανό χρόνο κατά PERT) και ο ελάχιστος T_0 (συμπιεσμένος) που απαιτείται για την ολοκλήρωση της.

Επίσης θεωρούμε ότι η διάρκεια κάθε δραστηριότητας είναι μια γραμμική συνάρτηση του απαιτούμενου χρόνου για την εκτέλεση της. Υπό τις συνθήκες αυτές, το κόστος C κάθε δραστηριότητας εκφράζεται σαν συνάρτηση της διάρκειας t της δραστηριότητας με τη σχέση $C = C_t - \lambda t$, όπου λ είναι το άμεσο κόστος συμπίεσης για κάθε μονάδα χρόνου της δραστηριότητας.



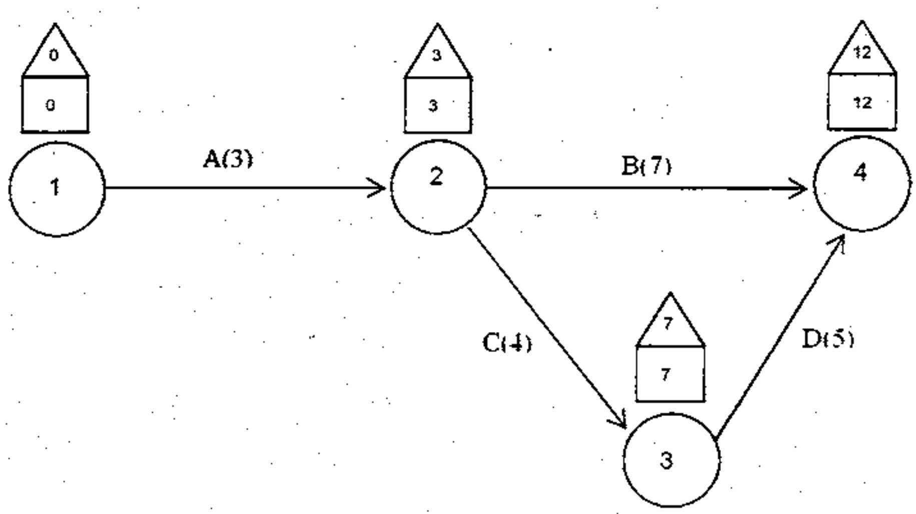
Δεδομένου ότι κάθε δραστηριότητα έχει το δικό της κόστος επίσπευσης ανά μονάδα χρόνου (λ), είναι σκόπιμο να συντομεύσουμε τις δραστηριότητες της κρίσιμης διαδρομής οι οποίες συνεπάγονται την ελάχιστη δυνατή αύξηση του κόστους. Ακολουθούμε λοιπόν την εξής διαδικασία, όπως περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα: Θεωρούμε το έργο του οποίου οι δραστηριότητες δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δρ/τητα	Πρ. Δρ/τητα	Κανονικός χρόνος (ημ.)	Συμπιεσμένος χρόνος (ημ.)	C_t (χ. μ.)	λ (χ. μ.)
$A(1,2)$	–	3	1	140	40
$B(2,4)$	A	7	3	110	10
$C(2,3)$	A	4	2	180	40
$D(3,4)$	C	5	2	130	20

Το έμμεσο κόστος C_e του έργου είναι 45 (χρηματικές μονάδες) ανά ημέρα. Να βρεθεί ο προγραμματισμός του έργου που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Ο αρχικός σχεδιασμός γίνεται με βάση τον κανονικό χρόνο (μέγιστη διάρκεια):



Η κρίσιμη διαδρομή, $(TF)_{ij}$ =0, είναι η $A-C-D$ και ο χρόνος εκτέλεσης του έργου είναι 12 ημέρες:

Δραστηριότητα	Διάρκεια	$(TF)_{ij}$	$(FF)_{ij}$
$A(1,2)$	3	0	0
$B(2,4)$	7	2	2
$C(2,3)$	4	0	0
$D(3,4)$	5	0	0

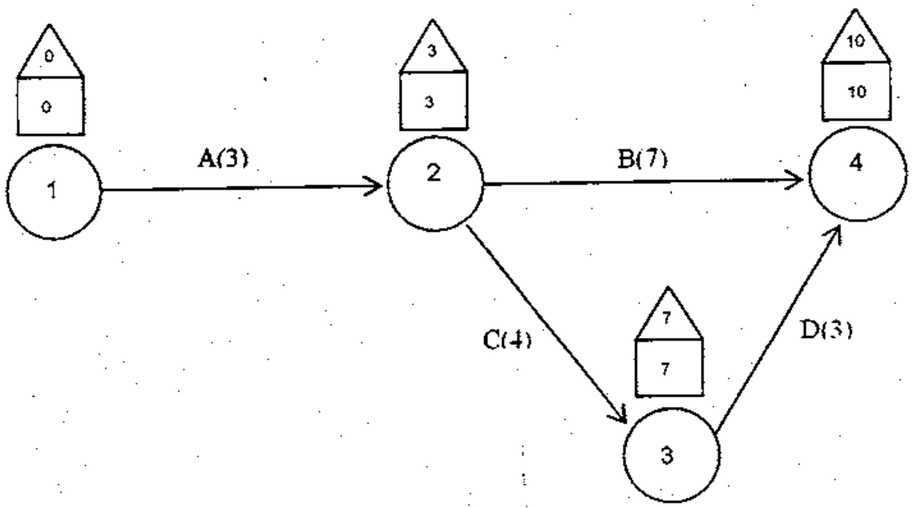
Κόστος δραστηριοτήτων:
$$\begin{aligned} A &: 140-(40)(3)= 20 \\ B &: 110-(10)(7)= 40 \\ C &: 180-(40)(4)= 20 \\ D &: 130-(20)(5)= 30 \end{aligned}$$

Συνολικό κόστος: $K=(12)(45)+20+40+20+30=650$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η διάρκεια του έργου μπορεί να ελαττωθεί αν συντομεύσουμε κάποια από τις κρίσιμες δραστηριότητες A, C ή D. Θα επιλέξουμε αυτή με το μικρότερο συντελεστή $\lambda<C_e$, αφού αυτή απαιτεί το μικρότερο κόστος, δηλαδή την D, που έχει $\lambda_D=20$. Αν και η δραστηριότητα D δύναται να ελαττωθεί κατά 3 ημέρες, η ελάττωση πρέπει να γίνει με προσοχή ώστε να αποκλείεται η εμφάνιση μιας νέας κρίσιμης διαδρομής, έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι ότι και το έργο θα συντομευτεί κατά το ίδιο χρονικό διάστημα. Αυτό εξασφαλίζεται με τον έλεγχο των ελεύθερων περιθωρίων όλων των δραστηριοτήτων. Αν κατά τη συντόμευση μιας κρίσιμης δραστηριότητας ένα θετικό ελεύθερο περιθώριο γίνει μηδέν, η συντόμευση δεν πρέπει να συνεχιστεί χωρίς προηγούμενο έλεγχο, δεδομένου ότι υπάρχει το ενδεχόμενο η δραστηριότητα με το μηδενικό ελεύθερο περιθώριο να μεταπέσει σε κρίσιμη κατάσταση.

Έτσι η ελάττωση γίνεται κατά το $\min(t-T_0, FF)$, όπου t είναι η τρέχουσα διάρκεια της δραστηριότητας και FF το ελάχιστο από τα *θετικά* ελεύθερα περιθώρια, των οποίων η τιμή ελαττώνεται κατά ένα, όταν η διάρκεια της δραστηριότητας ελαττώνεται κατά μια μονάδα χρόνου.

Επομένως, η διάρκεια της D ελαττώνεται κατά $\min(5-2, FF=2)=2$ ημέρες. Ο προγραμματισμός αυτός δίνει:



Οι κρίσιμες διαδρομές, $(TF)_{ij}=0$, είναι τώρα δύο, οι $A-C-D$ και $A-B$ και ο χρόνος εκτέλεσης του έργου είναι 10 ημέρες:

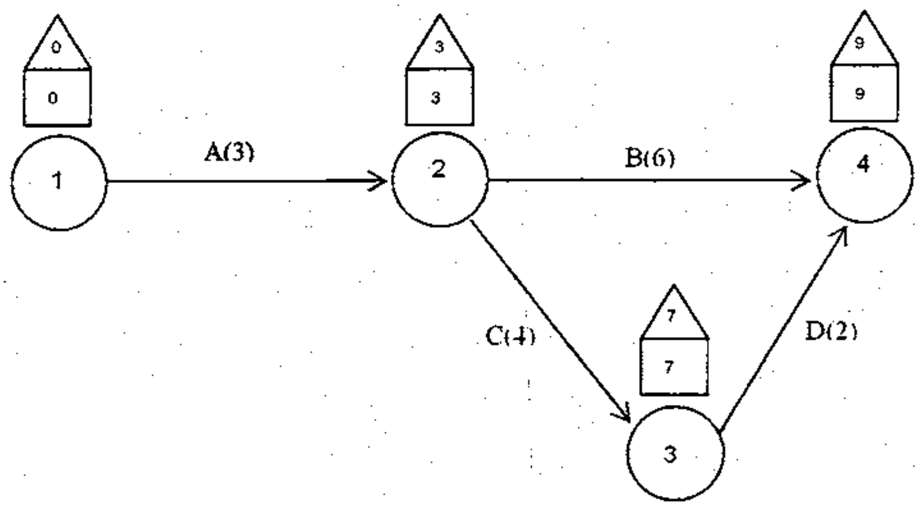
Δραστηριότητα	Διάρκεια	$(TF)_{ij}$	$(FF)_{ij}$
$A(1,2)$	3	0	0
$B(2,4)$	7	0	0
$C(2,3)$	4	0	0
$D(3,4)$	3	0	0

Κόστος δραστηριοτήτων:
$$\begin{aligned} A &: 140-(40)(3)=20 \\ B &: 110-(10)(7)=40 \\ C &: 180-(40)(4)=20 \\ D &: 130-(20)(3)=70 \end{aligned}$$

Συνολικό κόστος: $K=(10)(45)+20+40+20+70=600$

Προκειμένου τώρα να ελαττώσουμε τη διάρκεια του έργου, πρέπει να συντομεύσουμε ταυτόχρονα και τις δύο κρίσιμες διαδρομές. Ως προς τη διαδρομή $A-C-D$, επιλέγουμε για συντόμευση τη δραστηριότητα D της οποίας η διάρκεια δύναται να ελαττωθεί κατά μια ακόμη μονάδα. Ως προς τη διαδρομή $A-B$, επιλέγουμε για συντόμευση τη δραστηριότητα B που έχει $\lambda_B=10$. Επίσης, $\lambda_B+\lambda_D=30<45=C_e$, επομένως το έργο επιδέχεται ελάττωση χωρίς επιβάρυνση κόστους. Η D δύναται να ελαττωθεί κατά 1 ημέρα ενώ η B κατά 4 ημέρες. Άρα θα ελαττώσουμε και τις δύο δραστηριότητες κατά $\min(1,4) = 1$ ημέρα.

Ο προγραμματισμός αυτός δίνει:



Οι κρίσιμες διαδρομές, $(TF)_{ij}$ =0, παραμένουν δύο, οι $A-C-D$ και $A-B$ και ο χρόνος εκτέλεσης του έργου είναι 9 ημέρες:

Δραστηριότητα	Διάρκεια	$(TF)_{ij}$	$(FF)_{ij}$
$A(1,2)$	3	0	0
$B(2,4)$	6	0	0
$C(2,3)$	4	0	0
$D(3,4)$	2	0	0

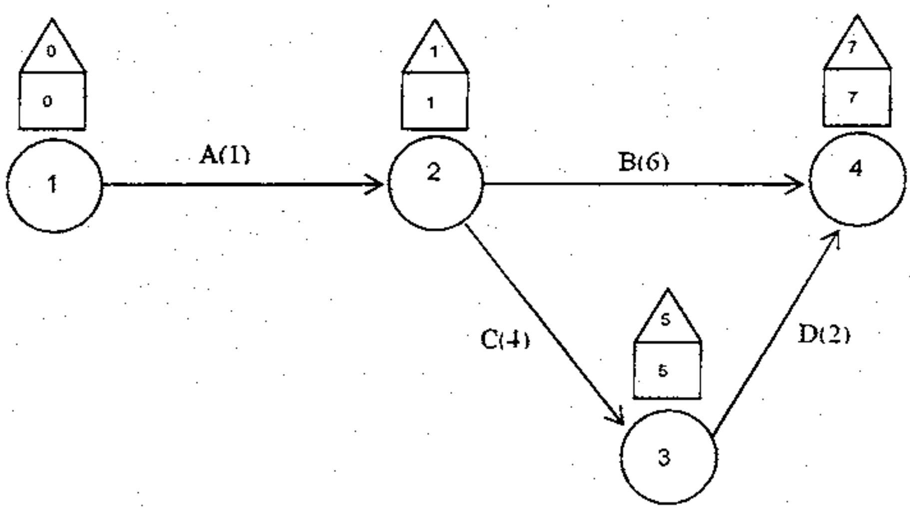
Κόστος δραστηριοτήτων:

$$A: 140-(40)(3) = 20$$
$$B: 110-(10)(6) = 50$$
$$C: 180-(40)(4) = 20$$
$$D: 130-(20)(2) = 90$$

Συνολικό κόστος: $K = (9)(45)+20+50+20+90 = 585$

Για την περαιτέρω μείωση της διάρκειας του έργου πρέπει να μειώσουμε και πάλι κάποιες δραστηριότητες των δύο κρίσιμων διαδρομών. Ως προς την $A-C-D$, δεν μπορούμε να επιλέξουμε πια την D μιας και έχει συμπιεστεί πλήρως και αφού $\lambda_A = \lambda_C = 40$, μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις A ή C. Ως προς την διαδρομή $A-B$, υποψήφια για συντόμευση είναι πάλι η B. Παρατηρούμε όμως ότι $\lambda_B + \lambda_C = \lambda_B + \lambda_A = 10 + 40 = 50 > 45 = C_e$ και ότι η A είναι κοινή δραστηριότητα των δύο κρίσιμων διαδρομών με $\lambda_A = 40 < 45 = C_e$. Έτσι αποφασίζουμε να συντομεύσουμε την A κατά 2 ημέρες.

Ο προγραμματισμός αυτός δίνει:



Κόστος δραστηριοτήτων:
$$\begin{aligned} A&: 140-(40)(1)=100 \\ B&: 110-(10)(6)=\ 50 \\ C&: 180-(40)(4)=\ 20 \\ D&: 130-(20)(2)=\ 90 \end{aligned}$$

Συνολικό κόστος: $K = (7)(45) + 100 + 50 + 20 + 90 = 575$

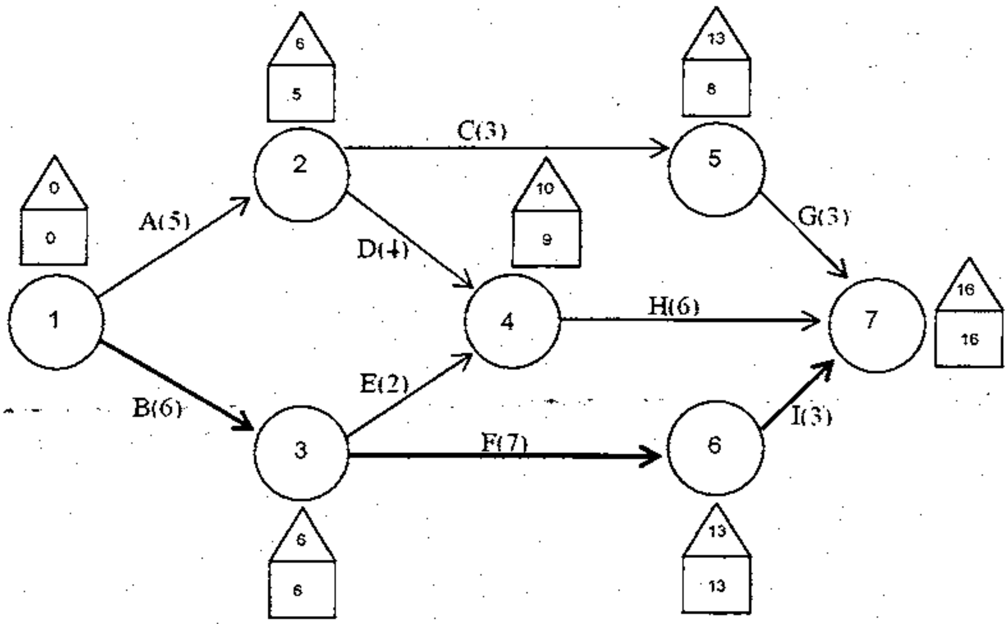
Παρατηρούμε ότι περαιτέρω ελάττωση του έργου είναι αδύνατη διότι η «κλίση» των B και C είναι μεγαλύτερη του έμμεσου ημερήσιου κόστους. Επομένως η βέλτιστη διάρκεια των δραστηριοτήτων A, B, C και D είναι αντίστοιχα 1, 6, 4 και 2 ημέρες, το ελάχιστο δε κόστος του έργου είναι 575 χ.μ..

Πρόβλημα: Θεωρούμε το έργο του οποίου οι δραστηριότητες δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δρ/τητα	Πρ. Δρ/τητα	Κανονικός χρόνος (ημέρες)	Συμπιεσμένος χρόνος (ημέρες)	C_i (χ.μ.)	λ (χ.μ.)
A	–	8	4	30000	4000
B	–	6	2	24000	2500
C	–	5	2	18000	3000
D	*A*	10	5	42000	2000
E	*B*	7	3	30000	7000
F	*B*	6	3	25000	1000
G	*C*	4	2	16000	1500
H	*D, E*	11	6	36000	5000
I	*F, G*	9	4	28000	6000

Το έμμεσο κόστος C_e του έργου είναι 5000 (χρηματικές μονάδες) ανά ημέρα. Να βρεθεί ο προγραμματισμός του έργου που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Δίνεται ο αρχικός σχεδιασμός γίνεται με βάση τον κανονικό χρόνο (μέγιστη διάρκεια):



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Οι μέθοδοι PERT και CPM είναι δυο μέθοδοι με τις οποίες επιδιώκεται ο καλύτερος τρόπος σχεδιάσεως προγραματισμού και ελέγχου πολύπλοκων δραστηριοτήτων, στις οποίες έχει ιδιαίτερη σημασία ο παράγοντας χρόνος.

Σύμφωνα με τη μέθοδο PERT καθορίζεται ο καταλληλότερος χρόνος ενάρξεως και ολοκληρώσεως κάθε εργασίας για να είναι δυνατή η πραγματοποίησης τακτών χρονικών περιορισμών και προθεσμιών. Έτσι ρυθμίζονται οι διάφορες οικονομικές επιπτώσεις και επιτυγχάνεται το άριστο αποτέλεσμα.

Η μέθοδος PERT δίνει έμφαση στη χρονική διάρκεια εκτέλεσης κάποιου έργου, χωρίς να λαμβάνει υπόψη την μεταβλητή του κόστους και πως αυτή επηρεάζεται από τη συμπίεση του χρόνου εκτέλεσης των εργασιών. Συμπίεση του χρόνου συνεπάγεται αύξηση του κόστους και αντικειμενικός σκοπός της CPM είναι να πετύχει τον άριστο συνδυασμό χρόνου και κόστους.

Σύμφωνα με την μέθοδο CPM ,χρειαζόμαστε εκτιμήσεις του χρόνου και του κόστους κάτω από συνθήκες κανονικού αριθμού εκτέλεσης των εργασιών και υπό συνθήκες συμπίεσης του χρόνου έως το ελάχιστο δυνατό όριο.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Καθώς ο επιχειρηματικός κόσμος καθίσταται περισσότερο σύνθετος, αυξάνεται σημαντικά η ανάγκη απόκτησης πληροφοριών οι οποίες θα υποστηρίζουν αποτελεσματικά τη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Η απόφαση είναι κρίση, είναι επιλογή μεταξύ εναλλακτικών λύσεων. Με τους πλέον ευνοϊκούς όρους, είναι επιλογή μεταξύ «σχεδόν σωστού» και «πιθανού λάθους». Η απόφαση ξεκινάει από υποθέσεις που ελέγχονται αν είναι αξιόπιστες ή όχι και επιλέγονται οι σωστές και αυτές που πλησιάζουν την πραγματικότητα.

Η καλή απόφαση λαμβάνεται μετά από διαφωνία, αλλά και μετά από σύγκριση και δοκιμασία γνωμών προς τα γεγονότα. Με την διαφωνία όμως δεν εννοούμε όμως συγκρούσεις και διαπληκτισμούς. Η διαφωνία είναι χρήσιμη διότι: αποδεσμεύει από τον κλοιό κάποιας προκατασκευασμένης γνώμης, προσφέρει εναλλακτικές λύσεις για επιλογή και απόφαση και τέλος διεγείρει τη φαντασία.

Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι η λύση αποφάσεων δεν είναι ένα μηχανικό έργο. Είναι ένα έργο προλήψεως κινδύνων και μια πρόκληση για κρίση. Η λήψη αποφάσεων δεν είναι μια άσκηση ευφυΐας. Κινητοποιεί την διορατικότητα, την δραστηριότητα και τους πόρους του οργανισμού για αποτελεσματική δράση.

Γενικώς υπάρχουν πολλοί τρόποι προσεγγίσεως για την λύση ενός προβλήματος. Η διαδικασία διαμορφώσεως συνεργασίας/λύσεως της συγκρούσεως δημιουργείται μέσα σε μια μεθοδολογία που προσανατολίζεται στην ανεύρεση της πιο σωστής λύσης. Εκείνοι που εμπλέκονται στη λύση γνωρίζουν καλά ένα μέρος αναλύσεως του προβλήματος, επειδή μετέχουν επίσης στην τακτοποίηση του. Οι άνθρωποι θα πρέπει να έχουν προτίμησης και διάφορες απόψεις. Αυτό που βοηθά μια επιχείρηση μακροχρόνια είναι πιθανό να ζημιώσει ένα άτομο η μια υπηρεσία βραχυχρόνια. Διαφορετικές απόψεις οδηγούν πάντοτε σε συμβολικές λύσεις. Οι άνθρωποι έχουν την δυνατότητα να διαπραγματεύονται και να μεταβάλουν τα θετικά σημεία και ή να ασκούν πίεση.

Τέλος αξιοσημείωτες είναι και κάποιες μελλοντικές τάσεις σχετικά με τις αποφάσεις και το περιβάλλον των αποφάσεων. Οι προϊστάμενοι όλων των επιπέδων θα εξαρτώνται ακόμα πιο πολύ στην ορθολογική λήψη των αποφάσεων για θέματα χρηματοδοτήσεως, παραγωγής, αναπτύξεως κλπ. Το περιθώριο λάθους κατά τη λήψη των αποφάσεων θα μειώνεται συνεχώς λόγω της αύξησης του ανταγωνισμού και περιορισμό των διαθέσιμων πόρων. Επιπλέον, η αυξανόμενη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των διαφόρων προγραμμάτων τους, θα καταστήσει τις πληροφορίες που είναι χρήσιμες για τη λήψη αποφάσεων περισσότερο προσιτές.

Κλείνοντας , στην εργασία αυτή προσπαθήσαμε να σας παρουσιάσουμε το σημαντικό έργο της λήψης αποφάσεων και πόσο συχνά συναντάμε την εφαρμογή της . Διερευνήσαμε τα σπουδαιότερα μαθηματικά μοντέλα καθώς και κάποιες μεθόδους που βοηθούν στη διαδικασία λήψης αποφάσεων σε διαφορετικά καθεστώτα συνθηκών περιβάλλοντος .

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι αυτός που αποφασίζει θα πρέπει να έχει σαν στόχο την παροχή απαραίτητων πληροφοριών για την υποστήριξη της διαδικασίας λήψης αποφάσεων , συμβάλλοντας στον εντοπισμό των βασικών χαρακτηριστικών του εξεταζόμενου κάθε φορά προβλήματος καθώς και των ιδιαιτεροτήτων των διαθέσιμων εναλλακτικών λύσεων ώστε να επιτευχθεί η λήψη ορθολογικών αποφάσεων .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΛΗΨΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ
  ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΕΤΟΣ ΕΚΔΟΣΗΣ 2002
  ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ

- ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
  ΘΕΩΔΟΡΑΤΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΕΤΟΣ ΕΚΔΟΣΗΣ 1999
  ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ ΑΘ.

- ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ
  ΔΡ.ΜΙΧΑΛΗΣ ΔΟΥΜΠΟΣ
  ΧΑΝΙΑ 2004

- ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ:
  www.ierd.duth.gr/courses/syllabus_decision_makinglecture.htm

- ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ:
  En.wikipedia.org/wiki/ford-fulkerson_algorithm

- ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ:
  En.wikipedia.org/wiki/markov_chain