ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

" Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ 18^{Ο} ΚΑΙ 19^{Ο} ΑΙΩΝΑ "

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ:
ΚΑΛΟΓΕΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΡΟΣΟΥΛΑ Α.Μ.: 6662
ΚΑΡΙΝΟΥ ΜΑΡΙΑ Α.Μ.: 6595

ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ:
ΛΕΥΤΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

ΠΑΤΡΑ 2005

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Στις οικογένειές μας που πάντα μας στήριζαν

"... αν θέλεις πραγματικά και ειλικρινά
να κάνεις κάτι (και ολόψυχα μέσα από
τη βάση της ύπαρξής σου), τότε όταν
το κάνεις τελικά, είναι που θα γίνεις πιο
χρήσιμος, θα προσφέρεις τα μέγιστα,
θα νιώσεις την ύψιστη αξία ως άτομο"

Anne Morrow Lindbergh

Η αληθινή Ευτυχία εμπεριέχει την
χρήση όλων των δυνάμεων
και ταλέντων μας.

Gardner

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με την παρούσα εργασία προσπαθήσαμε να αναφέρουμε έναν αξιοσημείωτο αριθμό εργατών της επιστήμης των μαθηματικών και να αφηγηθούμε με συντομία την δράση που ανέπτυξαν και την υποδοχή την οποία έτυχε το έργο τους από τους συναδέλφους τους, τους μαθητές τους, τους καθηγητές τους, τις αμοιβαίες επιδράσεις μεταξύ τους, τόσο σε εθνικό επίπεδο για τον καθένα, όσο και σε ευρύτερο, πέρα από διαχωρισμούς συνόρων από κράτος σε κράτος.

Βέβαια δεν κατέστει δυνατόν να γίνει λόγος για όλους ανεξαιρέτως και με κάθε λεπτομέρεια. Τα επιτεύγματά τους είναι εντυπωσιακά. Από μαθηματικής απόψεως κατά τον 18^{o} αιώνα δεσπόζουν δυο κολοσσοί : ο Gauss και ο Lagrange. Το τέλος του αιώνα αυτού συμπίπτει και χαρακτηρίζεται από μια γενική αναστάτωση των πνευμάτων οφειλόμενη στις ιδέες της Γαλλικής Επανάστασης. Κατά την ίδια περίπου εποχή αναβίωσε η Γεωμετρία με νέο σφρίγος και γονιμότητα την οποία είχε υπερφαλαγγίσει ο απειροστικός λογισμός. Παράλληλα αναπτύχθηκε η Μαθηματική Φυσική.

Ο 19^{ος} αιώνας αφιερώθηκε σε μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, σε ομάδες μετσχηματισμών, Άλγεβρες, κ.λ.π. Η μαθηματική επιστήμη έλαβε κατά τους αιώνες αυτούς θαυμαστή ανάπτυξη και αφύπνισε σε πολλούς την επιθυμία να περιγράψουν τα διαδοχικά στάδια της εξέλιξης γεννώντας με αυτόν τον τρόπο την επιστήμη που ασχολείται με την ιστορία της μαθηματικής σκέψης , την ιστορία των μαθηματικών.

Η ενασχόλησή μας με το θέμα που μας πρότεινε η καθηγήτρια μας κα. Λευτάκη Μαρία μας έδωσε την ευκαιρία ερευνώντας το να αισθανθούμε ευγνωμοσύνη και σεβασμό προς τα μεγάλα πνεύματα της μαθηματικής επιστήμης που αδιακρίτως φύλου ανάλωσαν την ζωή τους με μύριες δυσκολίες στην επιστήμη τους με αφοσίωση και αυταπάρνηση.

EMILIE DU CHATELET
(1706-1749)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Σε μία κοινωνία όπου η αριστοκρατία αντιπάθησε την έννοια της εκπαίδευσης για τις κόρες τους προέκυψε μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικούς του δέκατου όγδοου αιώνα, η γαλλίδα, Emilie du Chatelet. Γεννήθηκε στο Παρίσι στις 17 Δεκεμβρίου του 1706 και μεγάλωσε σε ένα σπίτι όπου η τέχνη του να φλερτάρεις ήταν ο μόνος τρόπος για να έχει κανείς μία θέση στην υψηλή κοινωνία.

Κατά τη διάρκεια της παιδικής της ηλικίας, η Emilie έδειξε ιδιαίτερες ικανότητες πάνω στα ακαδημαϊκά και έτσι κατάφερε να πείσει τον πατέρα της ότι χρειαζόταν μεγαλύτερη προσοχή. Της παρασχέθηκε μια αρκετά καλή εκπαίδευση για την εποχή εκείνη. Μελέτησε και διέπρεψε στα Λατινικά, Ιταλικά και Αγγλικά. Επίσης, μελέτησε Tasso, Virgil, Milton και άλλους σπουδαίους μελετητές της εποχής εκείνης.

Παρόλο το ταλέντο της στις ξένες γλώσσες η πραγματική αγάπη της ήταν τα μαθηματικά. Για τις σπουδές της σε αυτόν τον τομέα την ενθάρρυνε ένα οικογενειακός της φίλος, ο οποίος αναγνώρισε την αγάπη της για αυτά.

Σε ηλικία δεκαεννέα ετών, παντρεύτηκε των τριάντα τετράχρονο Marquis du Chatelet. Στα δύο πρώτα χρόνια του γάμου της γέννησε ένα αγόρι και ένα κορίτσι και αργότερα στα είκοσι εφτά της γέννησε άλλο ένα αγόρι. Ούτε τα παιδιά ούτε ο σύζυγός της την απέτρεψαν από την κοινωνική ζωή του φλέρτ.

Η Emilie με τον γάμο της όχι μόνο αρνήθηκε να εγκαταλείψει τα μαθηματικά αλλά προσέλαβε τους πιο γνωστούς δασκάλους για να την βοηθήσουν στη μελέτη της αυτή. Επίσης, κατέκτησε την καρδιά του Βολτέρου, που εκείνη την εποχή ήταν από τους καλύτερους και πιο έξυπνους δασκάλους. Κάποιο μέρος από τις πιο σημαντικές δουλειές της Emilie έγινε την περίοδο που ήταν με τον Βολτέρο στο Cirey-sur-Blaise. Για τους δύο μελετητές αυτό ήταν ένα ασφαλές μέρος απόμακρο από την ταραγμένη ζωή του Παρισιού.

Ακόμα ένας από τους σημαντικούς δασκάλους της Emilie ήταν ο Pierre Louis de Maupertuis, ένας γνωστός μαθηματικός και αστρονόμος της εποχής. Σαν μαθήτρια η περιέργειά της και το πείσμα της την έφερναν σε σημείο να έχει παράλογες απαιτήσεις από τους δασκάλους της.

Το 1740 όταν το βιβλίο της *Institutions de physique* εκδόθηκε, ο Koenig ξεκίνησε μια φήμη ότι η δουλειά αυτή ήταν απλά μια διασκευή των μαθημάτων του σε αυτήν. Φυσικά αυτό εξόργισε την Emilie και για βοήθεια στράφηκε στην Ακαδημία των Επιστημών και στο Maupertuis, με τον οποίον είχε συζητήσει τις ιδέες της πολύ πριν προσλάβει τον Koenig σαν δάσκαλο. Οι γνωστοί επιστήμονες της εποχής εκείνης ήταν γνώστες των ικανοτήτων της πάνω στη δουλειά αυτή. Παρόλα αυτά ένιωσε ότι δεν είχε την υποστήριξη που της άξιζε. Αυτή ήταν η πρώτη στιγμή που ένιωσε ότι το γεγονός ότι ήταν γυναίκα δούλευε εναντίον της.

Την άνοιξη του 1748, η Emilie γνώρισε και ερωτεύτηκε τον Marquis de Saint-Lambert, έναν αυλικό και πολύ μικρό ποιητή. Αυτός ο δεσμός, όμως, δεν κατέστρεψε τη σχέση της με τον Βολτέρο. Ακόμη και όταν έμαθε ότι ήταν έγκυος με το παιδί του Saint-Lambert, έπεισε, με την βοήθεια του Βολτέρου και του Saint-Lambert, τον άντρα της ότι το παιδί ήταν δικό του.

Στις αρχές Σεπτεμβρίου του 1749 γέννησε ένα κορίτσι. Για μερικές μέρες η Emilie φαινόταν χαρούμενη και ικανοποιημένη. Στις 10 Σεπτεμβρίου του 1749, όμως, πέθανε ξαφνικά. Μετά το θάνατο της Emilie πέθανε και το κορίτσι που πρόσφατα είχε γεννήσει. Η Emilie πέθανε σε ηλικία σαράντα τριών ετών. Όπως πολλοί συντάκτες σημειώνουν, κατά την διάρκεια της σύντομης ζωής της, ήταν μια αληθινά σπάνια γυναίκα και μελετητής. Κατάφερε να διατηρήσει την εμπιστοσύνη και την θέση της στην κοινωνία του Παρισιού ενώ ακολουθούσε και την αγάπη της για τα μαθηματικά. Η Emilie du Chatelet ήταν μία από τις γυναίκες των οποίων οι συνεισφορές βοήθησαν να σχηματιστεί το μάθημα των μαθηματικών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Η δουλειά της Emilie στα μαθηματικά ήταν σπάνια αυθεντική και ουσιώδης. Το γεγονός ότι επιτεύχθηκε σε πρώτο βαθμό ήταν αξιοπρόσεκτο.

Σύμφωνα με τον Βολτέρο έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στον Leibniz και στον Νεύτωνα. Η Emilie αρχικά ασχολήθηκε με τον Leibniz και εξήγησε ένα μέρος του συστήματός του στο βιβλίο της *Institutions de Physique.* Παρόλα αυτά σύντομα παράτησε την δουλειά που έκανε πάνω στον Leibniz και αφοσιώθηκε στις ανακαλύψεις του Νεύτωνα. Ήταν απόλυτα επιτυχής στη μετάφραση ολόκληρου του βιβλίου του πάνω στις αρχές των μαθηματικών στα γαλλικά. Επίσης πρόσθεσε στο βιβλίο του *«Αλγεβρικά Σχόλια»* που πολλοί λίγοι αναγνώστες κατάλαβαν.

Τα χρόνια που η Emilie πέρασε με τον Βολτέρο στο Cirey ήταν από τα πιο παραγωγικά χρόνια της ζωής της. Η μελέτη τους κράταγε όλο το ενδιαφέρον.

Κατά την διάρκεια της εγκυμοσύνης της το 1749 τελείωσε την εργασία της με τον Clairaut, ένα φίλο της με τον οποίο και μελετούσε. Εντούτοις, το βιβλίο της πάνω στον Νεύτωνα ακόμη ανέμενε ολοκλήρωση. Ήταν αποφασισμένη να το τελειώσει και με αυτό το στόχο ακολούθησε ένα πολύ οργανωμένο τρόπο ζωής που περιελάμβανε μόνο εργασία. Ξυπνούσε πολύ νωρίς το πρωί και δούλευε μέχρι πολύ αργά τη νύχτα.

Μέσα στα μεγαλύτερα επιτεύγματά της ήταν το βιβλίο της *«Institutions de physique»* και η μετάφραση που έκανε στο βιβλίο του Νεύτωνα *«Principia»,* το οποίο εκδόθηκε μετά τον θάνατό της μαζί με το «Preface historique» του Βολτέρου.

MARIA GAETANA AGNESI
(1718-1799)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Παρόλο που η συνεισφορά της Maria Gaetana Agnesi στα μαθηματικά είναι πολύ σημαντική, η ίδια δεν ήταν μία συνηθισμένη διάσημη μαθηματικός. Είχε μία πολύ απλή ζωή και παράτησε τα μαθηματικά πολύ σύντομα. Με την πρώτη ματιά η ζωή της μπορεί να μοιάζει βαρετή παρόλα αυτά, δεδομένων των συνθηκών στις οποίες μεγάλωσε, τα επιτεύγματά της στα μαθηματικά ήταν λαμπρά.

Την περίοδο του Μεσαίωνα, κάτω από την επίδραση του χριστιανισμού, πολλές ευρωπαϊκές χώρες ήταν αντίθετες σε οποιασδήποτε μορφής ανώτατης εκπαίδευσης για τις γυναίκες. Οι γυναίκες έμεναν στην βασική εκπαίδευση που ήταν η γραφή και η ανάγνωση. Οι υποστηρικτές της ιδέας αυτής ισχυρίζονταν πως η εκπαίδευση θα ήταν μία πηγή πειρασμού και αμαρτίας. Μετά την πτώση της Κωνσταντινούπολης πολλοί λόγιοι μετανάστευσαν στην Ρώμη, μεταφέροντας έτσι στην Ευρώπη την γνώση και την κριτική σκέψη η οποία έδωσε και την ώθηση για την Αναγέννηση. Από όλη την Ευρώπη μόνο στην Ιταλία άλλαξε το κοινωνικό επίπεδο των γυναικών σχετικά γρήγορα.

Η Maria Gaetana Agnesi γεννήθηκε στο Μιλάνο στις 16 Μαΐου του 1718 σε μία οικονομικώς ευκατάστατη και εγγράμματη οικογένεια. Ήταν η μεγαλύτερη από 21 παιδιά από τρεις γάμους του πατέρας της. Ο πατέρας της ήταν έμπορος μεταξιού και της παρείχε σοβαρή εκπαίδευση.

Έμαθε να μιλάει γαλλικά μέχρι την ηλικία των πέντε, και μέχρι τα εννέα της είχε μάθει να μιλάει άπταιστα λατινικά, ελληνικά και εβραϊκά. Σε ηλικία εννέα χρονών δημοσίευσε μία διατριβή στα λατινικά όπου υπερασπιζόταν την άποψη η ανώτερη εκπαίδευση να παρέχεται στις γυναίκες. Την περίοδο της εφηβείας της η Maria κατείχε πλήρως τα μαθηματικά.

Το 1738 σε ηλικία είκοσι ετών δημοσίευσε το «*Propositiones Philosophicae*» μία σειρά από δοκίμια πάνω στη φιλοσοφία και στη φυσική επιστήμη. Ο τόμος αποτελούνταν από 191 φιλοσοφικές θέσεις στις οποίες η Agnesi ερχόταν σε αντιπαράθεση με ειδικό κοινό από σημαντικούς ανθρώπους τους οποίους ο πατέρας της καλούσε σπίτι.

Η Maria όμως ήταν πολύ ντροπαλή από φύση της και δεν της άρεσαν πολύ αυτές οι συγκεντρώσεις στο σπίτι της. Έτσι φαίνεται, πως ήταν πολύ δυσάρεστη κατάσταση για αυτήν το γεγονός ότι ο πατέρας της επιδείκνυε τα ταλέντα της κόρης του σαν να ήταν ρόλος σε τσίρκο.

Ο θάνατος της μητέρας της παρείχε την δικαιολογία να αποσυρθεί από την δημόσια ζωή. Ανέλαβε την διαχείριση του σπιτιού κάτι το οποίο ο πατέρας της δέχτηκε καθώς ήταν δύσκολο και ακριβό να βρει μία γυναίκα για τις δουλειές του σπιτιού. Παρόλα αυτά δεν παράτησε τα μαθηματικά.

Η Agnesi εστίασε τις προσπάθειές της στο διάβασμα θρησκευτικών βιβλίων αλλά και στο να εμπλουτίσει τις γνώσεις της στα μαθηματικά. Την περίοδο εκείνη έγραψε ένα υπόμνημα πάνω στις «*De L' Hopital Traite Analytique des sections coniques*» αλλά δεν δημοσιεύτηκε ποτέ.

Το να μάθει κανείς μαθηματικά χωρίς την κατάλληλη βοήθεια ήταν σχεδόν ακατόρθωτο και πολύ λίγοι κατάφεραν να επιτύχουν σημαντικά πράγματα με τον τρόπο αυτό. Παρόλα αυτά η Agnesi ήταν πολύ τυχερή καθώς έμαθε μαθηματικά από τον Ramiro Rampinelli. Ήταν ένας μαθηματικός ο οποίος ήταν καθηγητής στην Ρώμη και στην Μπολόνια και ήταν συχνός επισκέπτης στο σπίτι της Agnesi. Με την βοήθειά του η Maria μελέτησε το κείμενο του Reyneau «*Analyse demontree*»

Ο Rampinelli ενθάρρυνε την Maria να γράψει ένα βιβλίο πάνω στους διαφορικούς λογισμούς. Έγραψε το βιβλίο στα ιταλικά σαν βιβλίο για να μάθει κάποιος μαθηματικά. Για να γράψει το βιβλίο αυτό η Agnesi ζήτησε την βοήθεια και την συμβουλή του Riccati.

Ο πρώτος τόμος του διάσημου βιβλίου της Maria «*Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*» εκδόθηκε το 1748 ενώ τον επόμενο χρόνο εκδόθηκε και ο δεύτερος τόμος. Το έργο της αυτό της έφερε μεγάλη φήμη.

Μετά την επιτυχία του βιβλίου της, η Agnesi εκλέχτηκε στην Ακαδημία Επιστημών της Μπολόνια. Το Πανεπιστήμιο της έστειλε ένα πτυχίο και το όνομά της προστέθηκε στο προσωπικό. Δέχτηκε την θέση που της προσέφεραν και έμεινε στο Πανεπιστήμιο μέχρι τον θάνατο του πατέρα της.

Το 1752, μετά τον θάνατο του πατέρα της παραιτήθηκε από τα μαθηματικά. Φαίνεται ότι ο πατέρας ήταν η έμπνευσή της για τα μαθηματικά. Όταν το 1762, το Πανεπιστήμιο του Τορίνο ρώτησε την άποψη της για τα πρόσφατα άρθρα του νεαρού τότε Lagrange πάνω στο λογισμό μεταβολών (calculus of variations) απάντησε ότι πλέον δεν την απασχολούσαν τέτοια ενδιαφέροντα Πλέον είχε αφιερωθεί εντελώς σε φιλανθρωπικές εργασίες.

Φαίνεται πως παρόλο που ήταν μαθηματική ιδιοφυΐα, τα μαθηματικά ήταν απλά μια προσωρινή ενασχόληση για αυτήν. Μπορεί να ασχολούνταν με τα μαθηματικά μόνο για να ευχαριστήσει τον πατέρα της ο οποίος πίστευε πως το παιδί θαύμα του θα ενασχοληθεί με τα μαθηματικά.

Η Maria Agnesi ήταν πολύ ντροπαλός και σεμνός άνθρωπος. Δεν είχε βλέψεις να γίνει μία πολύ γνωστή μαθηματικός. Η πιο γνωστή δουλειά της, *Analytical Instructions,* προοριζόταν για να την διαβάσουν τα αδέρφια της. Η θρησκευτική ζωή και το να βοηθάει τους ανθρώπους φαινόταν για αυτήν πολύ πιο ενδιαφέρον από τα μαθηματικά. Πέθανε στις 9 Ιανουαρίου του 1799 στο Μιλάνο. Ξόδεψε όλα τα χρήματά της σε αγαθοεργίες και πέθανε σε απόλυτη φτώχεια στο άσυλο για τους φτωχούς που η ίδια διοικούσε.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Αν και ήταν πολύ μικρό το χρονικό διάστημα που η Maria Agnesi ασχολήθηκε με τα μαθηματικά η συνεισφορά της στην ανάλυση ήταν πολύ μεγάλη.

Το 1738, δημοσίευσε μία συλλογή από σύνθετα δοκίμια πάνω στην φυσική επιστήμη και τη φιλοσοφία το οποίο ονομαζόταν «*Propositiones Philosophicae*» και βασιζόταν πάνω σε συζητήσεις των διανοούμενων που μαζεύονταν στο σπίτι του πατέρα της.

Στην ηλικία των είκοσι ξεκίνησε να δουλεύει το πιο σημαντικό έργο της, *«Κανόνες Ανάλυσης»* (Analytical Institutions). Το βιβλίο περιλάμβανε πολλά παραδείγματα τα οποία είχε επιλέξει προσεκτικά ώστε να επεξηγήσει τις ιδέες της. Μία κριτική έγραφε πως ήταν μία παράθεση περισσότερο παραδειγμάτων παρά θεωρίας.

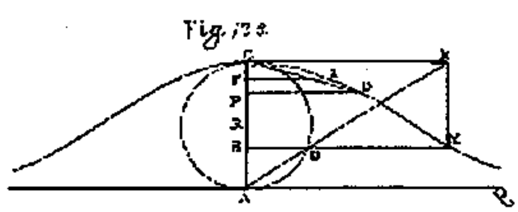
Όταν η εργασία της δημοσιεύτηκε το 1748, προκάλεσε αίσθηση στον ακαδημαϊκό κόσμο. Ήταν μία από τις πρώτες και πιο ολοκληρωμένες εργασίες στην πεπερασμένη και μη πεπερασμένη ανάλυση. Η μεγάλη συνεισφορά της Agnesi στα μαθηματικά με αυτό το βιβλίο ήταν πως συνέθεσε όλη την δουλειά πολλών μαθηματικών σε ένα βιβλίο με ένα πολύ συστηματικό τρόπο και με τις δικές τις ερμηνείες. Το βιβλίο έγινε μοντέλο σαφήνειας, μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες και χρησιμοποιήθηκε ως βοήθημα για τα μαθηματικά.

Οι Κανόνες Ανάλυσης αναφέρονται στην μαθηματική ανάλυση. Το πρώτο μέρος ασχολείται με την ανάλυση πεπερασμένων ποσοτήτων. Επίσης, ασχολείται με προβλήματα μέγιστου (maxima), ελάχιστου (minima), εφαπτόμενες και σημεία καμπής.

Το δεύτερο μέρος αναφέρεται σε απείρως μικρές ποσότητες. Το τρίτο μέρος κάνει λόγο για τον ολοκληρωτικό λογισμό.

Το τελευταίο μέρος ασχολείται με την αντίστροφη μέθοδο των εφαπτόμενων και τις διαφορικές εξισώσεις.

Η Maria Gaetana Agnesi είναι ευρέως γνωστή από την καμπύλη που μελέτησε, γνωστή ως «βόστρυχος της Agnesi».



Η Agnesi έγραψε την εξίσωση για αυτήν την καμπύλη η οποία ήταν της μορφής

$$x^2y=4a^2(2a-y)$$

Είναι μία καμπύλη που την μελέτησε πρώτος ο Fermat.

JOSEPH LOUIS LAGRANGE
(1736-1813)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Joseph Louis Lagrange, ο μεγαλύτερος μαθηματικός του 18^{ου} αιώνα, γεννήθηκε στο Τορίνο στις 25 Ιανουαρίου του 1736 και πέθανε στο Παρίσι στις 10 Απριλίου του 1813. Ο πατέρας του είχε πολύ καλή κοινωνική θέση και ήταν εύπορος, αλλά πριν ο γιος του μεγαλώσει είχε χάσει την περισσότερη περιουσία του, και ο Lagrange έπρεπε να βασιστεί στις δικές του ικανότητες.

Πήρε την μόρφωσή του στο κολέγιο του Τορίνου, αλλά στα δεκαεφτά του άρχισε να δείχνει το ενδιαφέρον του για τα Μαθηματικά. Το πρώτο γέννημα έργου του Lagrange ήταν ένα γράμμα προς τον Euler ενώ ήταν μόλις δεκαεννιά ετών, στο οποίο έλυνε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα (isoperimetrical problem) το οποίο για παραπάνω από μισό αιώνα ήταν θέμα προς συζήτηση. Για να υλοποιήσει την λύση διατύπωσε τις αρχές του λογισμού μεταβολών. Ο Euler αναγνώρισε την ανωτερότητα της μεθόδου που χρησιμοποίησε και την υπεροχή της από αυτή που είχε χρησιμοποιήσει ο ίδιος.

Το 1758 ο Lagrange ίδρυσε με την βοήθεια των μαθητών μία «Εταιρεία» η οποία αργότερα ενσωματώθηκε στην Ακαδημία του Τορίνου και στους πέντε τόμους των πρακτικών της, που ονομάζονται *Miscellanea Taurinensia*, βρίσκονται οι περισσότερες από τις πρώτες εργασίες του.

Το 1761 ο Lagrange θεωρούνταν ο πλέον σημαντικός μαθηματικός εν ζωή. Παρόλα αυτά η αδιάκοπη εργασία του για το προβάδισμα που είχε από τους άλλους για εννέα χρόνια είχε σημαντικές επιπτώσεις για την υγεία του και οι γιατροί αρνήθηκαν να πάρουν την ευθύνη για την ζωή του εκτός αν ο ίδιος δεν αποφάσιζε να ξεκουραστεί. Παρόλο που η υγεία του αποκαταστάθηκε το νευρικό του σύστημα δεν ανακτήθηκε εντελώς και από τότε υπέφερε συχνά από κατάθλιψη

Μετά το 1764, θέλησε να πάει στο Λονδίνο αλλά αρρώστησε στο Παρίσι. Εκεί τον υποδέχτηκαν με μεγάλες τιμές και με μεγάλη του λύπη έφυγε από την λαμπρή κοινωνία του Παρισιού και ξαναγύρισε στο Τορίνο.

Το 1766 ο Euler έφυγε από το Βερολίνο και ο Φρειδερίκος ο Μέγας έγραψε στον Lagrange την επιθυμία «ο καλύτερος βασιλιάς στην Ευρώπη να έχει τον καλύτερο μαθηματικό της Ευρώπης φιλοξενούμενο στο ανάκτορό του. Ο Lagrange δέχτηκε την προσφορά του και πέρασε τα επόμενα είκοσι χρόνια της ζωής του στη Πρωσία, όπου παρήγαγε όχι μόνο μια μεγάλη σειρά από απομνημονεύματα που εκδόθηκαν στο Βερολίνο και το Τορίνο, αλλά και την ιστορική εργασία του *Mecanique Analytique*. Η παραμονή του στο Βερολίνο συνοδεύτηκε από ένα ατυχές λάθος. Καθώς, βρήκε όλους τους συναδέλφους του παντρεμένους και καθώς διαβεβαιώθηκε από τις γυναίκες τους ότι μόνο έτσι θα ήταν πραγματικά ευτυχισμένος, παντρεύτηκε. Η γυναίκα του πέθανε σύντομα, αλλά και ο γάμος τους δεν ήταν ευτυχισμένος.

Ο Lagrange είχε πάντα την υποστήριξη του βασιλιά, ο οποίος συχνά συζητούσε μαζί του για τα πλεονεκτήματα μιας ομαλής ζωής. Αυτά τα είκοσι χρόνια που έμεινε εκεί οι πνευματικές του ικανότητες ήταν σε άριστο επίπεδο. Όχι μόνο έγραψε το αριστούργημά του *Mecanique analytique* αλλά συνέβαλε σε πάνω από διακόσιες δημοσιευμένες εργασίες των Ακαδημιών του Βερολίνου, του Τορίνου και του Παρισίου. Εκτός από μια μικρή περίοδο που ήταν άρρωστος παρήγαγε κατά μέσο όρο περίπου μία εργασία το μήνα.

Το 1787 ο Φρειδερίκος πέθανε και ο Lagrange με χαρά αποδέχτηκε την πρόσκληση του Λουδοβίκου του 16ου να πάει στη Γαλλία. Στη Γαλλία τον υποδέχτηκαν με τιμές και του ετοίμασαν ειδικά δωμάτια για την διαμονή του στο Λούβρο. Παρόλα αυτά στην αρχή της διαμονής του εκεί έπεσε σε κατάθλιψη και ακόμη και το τυπωμένο αντίγραφο του βιβλίου του πάνω στο οποίο εργαζόταν για εικοσιπέντε χρόνια έμεινε πάνω στο γραφείο του χωρίς να το ανοίξει για δύο χρόνια.

Το 1792 γνώρισε μία νεαρή κοπέλα η οποία και επέμενε να τον παντρευτεί και ήταν αυτή που τον βοήθησε να ξεπεράσει την λύπη και την μελαγχολία που είχε τα τελευταία χρόνια και αποδείχτηκε αφοσιωμένη σύζυγος σε αυτόν. Παρόλο που τα διάταγμα τον Οκτώβριο του 1793 διέταζε όλους τους ξένους να φύγουν από τη Γαλλία τον Lagrage τον εξαιρούσε και του προσέφεραν την προεδρία της Επιτροπής Μέτρων και Σταθμών. Παρόλο που ο Lagrange ήταν αποφασισμένος να φύγει από την Γαλλία δεν βρέθηκε ποτέ σε κίνδυνο. Ακόμη και οι διαφορετικές επαναστατικές κυβερνήσεις τον τιμούσαν και τον ξεχώριζαν.

Το 1795 ο Lagrange διορίστηκε ως καθηγητής στη νεοσύστατη Ecole Normale, η οποία λειτούργησε μόνο για τέσσερις μήνες. Οι διαλέξεις του εκεί ήταν εισαγωγικού επιπέδου όχι ιδιαίτερης σημασίας αλλά παρόλα αυτά δημοσιεύτηκαν.

Με την ίδρυση της Ecole Polytechnique το 1797 ο Lagrange έγινε καθηγητής και οι διαλέξεις του περιγράφτηκαν από μαθηματικούς, που είχαν την τύχη να τις παρακολουθήσουν, άψογες και σε δομή και σε θέμα.

Σε χαρακτήρα ο Lagrange ήταν νευρικός και ντροπαλός, απεχθανόταν τις διαμάχες και για να τις αποφεύγει άφηνε τους άλλους να παίρνουν τα εύσημα για αυτά που είχε καταφέρει ο ίδιος. Τα ενδιαφέροντά του περιορίζονταν μόνο στα καθαρά μαθηματικά.

Ένας συγγραφέας αναφερόμενος στον Lagrange είπε ότι έπαιξε έναν εξέχοντα ρόλο στην ανάπτυξη σχεδόν κάθε τομέα των καθαρών μαθηματικών. Όπως και ο Fermat, διέθετε μια ιδιαίτερη μεγαλοφυΐα στη θεωρία των μαθηματικών και σε αυτό το θέμα έδωσε τη λύση σε πολλά από τα προβλήματα που είχε θέσει ο Fermat, και προσέθεσε κάποια θεωρήματα και ο ίδιος. Δημιούργησε τον λογισμό μεταβολών και τις διαφορικές εξισώσεις.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Το 1758 ο Lagrange δημοσίευσε το έργο του *Miscellanea Taurinensia* το οποίο περιείχε τις περισσότερες από τις αρχικές εργασίες του. Ο πρώτος τόμος περιέχει ένα υπόμνημα πάνω στην θεωρία της μετάδοσης του ήχου. Σε αυτό δείχνει ένα λάθος που είχε γίνει από τον Νεύτωνα, χρησιμοποιεί την γενική διαφορική εξίσωση για την κίνηση και την ενσωμάτωσε στην κίνηση σε ευθεία γραμμή. Αυτός ο τόμος επίσης περιέχει την λύση του προβλήματος του νήματος που δονείται εγκάρσια. Σε αυτή την εργασία εντοπίζει την έλλειψη της γενικότητας στις λύσεις που έδιναν πριν οι Taylor, D' Alembert και Euler και φτάνει στο συμπέρασμα ότι το σχήμα της καμπύλης σε κάθε στιγμή *t* δίνεται από την εξίσωση $y= a \sin mx \sin nt$. Το άρθρο τελειώνει με μία αναφορά στην ηχώ, τους κτύπους και τους σύνθετους ήχους. Άλλα άρθρα σε αυτόν το τόμο αναφέρονται στις αναδρομικές σειρές, στις πιθανότητες και τον λογισμό μεταβολών.

Ο δεύτερος τόμος περιέχει μία μεγάλη εργασία στην οποία έχει ενσωματώσει τα αποτελέσματα από διάφορα υπομνήματα του πρώτου τόμου πάνω στην θεωρία του λογισμού μεταβολών. Επίσης, δείχνει την χρήση της θεωρίας αυτής εξάγοντας την αρχή ελάχιστης δράσης και δίνει λύση σε πληθώρα προβλημάτων στην δυναμική.

Ο τρίτος τόμος περιέχει την λύση διαφόρων προβλημάτων της δυναμικής χρησιμοποιώντας τον λογισμό μεταβολών, τον ολοκληρωτικό λογισμό και τις γενικές διαφορικές εξισώσεις της κίνησης τριών σωμάτων που κινούνται κάτω από αμοιβαίες έλξεις.

Η επόμενη εργασία του ήταν το 1764. Η εργασία αυτή αφορούσε την λίκνιση της σελήνης και μία εξήγηση γιατί είναι πάντα στραμμένη προς τη γη η ίδια πλευρά της σελήνης. Η λύση που δίνει είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα αφού περιέχει το σπέρμα για την ιδέα των γενικών εξισώσεων της κίνησης, εξισώσεις τις οποίες τυπικά απέδειξε το 1780.

Το μεγαλύτερο μέρος των εργασιών του όμως δόθηκε στην Ακαδημία του Βερολίνου. Πολλές από αυτές αφορούν ερωτήματα πάνω στην άλγεβρα. Συγκεκριμένα αναφέρουμε τις παρακάτω:

i. Τον σχολιασμό στην λύση για τους ακέραιους αριθμους των απροσδιόριστων εξισώσεων δευτέρου βαθμού το 1769 και γενικά των απροσδιόριστων εξισώσεων.
ii. Το κομμάτι του πάνω στην θεωρία της αποβολής (theory of elimination) το 1770.
iii. Τα υπομνήματά του πάνω στην γενική διαδικασία της λύσης μίας αλγεβρικής εξίσωσης οποιουδήποτε βαθμού το 1770 και το 1771 (αυτή η μέθοδος δεν ισχύει σε εξισώσεις μεγαλύτερου του τετάρτου βαθμού)
iv. Την πλήρη λύση της διωνυμικής εξίσωσης οποιουδήποτε βαθμού
v. Τέλος, το 1773 έστειλε στην Ακαδημία την εργασία του που αφορούσε την επεξεργασία των οριζουσών δεύτερης και τρίτης τάξης και των αναλλοίωτων.

Πολλές από τις εργασίες του εξετάζουν ερωτήματα συνδεδεμένα με το θέμα της θεωρίας των αριθμών. Μερικές από αυτές είναι οι παρακάτω:

i. Η απόδειξη του θεωρήματος που λέει ότι κάθε ακέραιος αριθμός που δεν είναι το τετράγωνο κάποιου αριθμού μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο, τριών ή τεσσάρων ακέραιων τετραγώνων (1770)

ii. Η απόδειξη του θεωρήματος του Wilson που λέει ότι αν ο n είναι πρώτος αριθμός , τότε $(n-1)!+1$ είναι πάντα πολλαπλάσιο του n. (1771)

iii. Τα υπομνήματά του τις χρονιές 1773, 1775 και 1777 που δίνουν τις αποδείξεις πολλών αποτελεσμάτων διατυπωμένων από τον Fermat και που νωρίτερα δεν είχαν αποδειχθεί.

iv. Τέλος, την μέθοδό του καθορισμού των συντελεστών των αριθμών της μορφής x^2+ay^2.

Υπάρχουν επίσης, πολυάριθμα άρθρα πάνω σε διάφορα θέματα της αναλυτικής γεωμετρίας. Σε δύο από αυτά που γράφτηκαν το 1792 και το 1793 ανήγαγε τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις στις κανονικές μορφές τους.

Την περίοδο από το 1772 έως το 1785 μεγάλος αριθμός υπομνημάτων του δημιούργησαν την επιστήμη των διαφορικών εξισώσεων και σε μεγάλο ποσοστό όσον αφορά τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ένα μεγάλο μέρος των αποτελεσμάτων αυτών συνοψίστηκαν στην δεύτερη έκδοση του ολοκληρωτικού υπολογισμού του Euler.

Επίσης, υπάρχουν πολλά υπομνήματα σε προβλήματα που αφορούν την αστρονομία. Από αυτά τα πιο σημαντικά είναι:

i. Η έλξη των ελλειψοειδών το 1773.

ii. Η εξίσωση κίνησης της σελήνης το 1773. Ο Lagrange απέδειξε ότι αν το δυναμικό ενός σώματος σε ένα εξωτερικό σημείο είναι γνωστό, η έλξη προς κάθε κατεύθυνση μπορεί εύκολα να βρεθεί.

iii. Η κίνηση των κόμβων της τροχιάς ενός πλανήτη το 1774.

iv. Η ευστάθεια της τροχιάς ενός πλανήτη το 1776.

v. Ο προσδιορισμός της τροχιάς ενός πλανήτη από τρεις παρατηρήσεις.

vi. Η μέθοδος της παρεμβολής.

Πάνω από όλα τα έργα που αναφέραμε είναι το αριστούργημά του *Mecanique Analytique.* Σε αυτό καθορίζει τον νόμο των δυνατών έργων, και από εκεί μία θεμελιώδη αρχή με την βοήθεια του λογισμού μεταβολών, για το σύνολο της μηχανικής, των στερεών και των ρευστών. Ο στόχος του βιβλίου είναι να δείξει πως το θέμα περιλαμβάνεται σε μία μόνο αρχή και να δώσει μία γενική φόρμουλα από την οποία κάθε συγκεκριμένο αποτέλεσμα να μπορεί να ληφθεί. Η μέθοδος των γενικευμένων συντεταγμένων από τις οποίες έλαβε τα αποτελέσματά του είναι πιθανόν το πιο λαμπρό αποτέλεσμα της ανάλυσής του. Αντί να ακολουθήσει την κίνηση κάθε ξεχωριστού μέρους ενός υλικού συστήματος, όπως έκανε ο D' Alembert και ο Euler, έδειξε ότι εάν καθοριστεί ο υλικός σχηματισμός από έναν επαρκή αριθμό μεταβλητών των οποίων ο αριθμός είναι ο ίδιος με αυτόν των βαθμών της ελευθερίας του συστήματος τότε η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος μπορεί να εκφραστεί σε όρους αυτών των μεταβλητών και οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης εκφράζονται με μεταβλητές τις γενικευμένες συντεταγμένες.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι ο Lagrange παρατήρησε ότι η μηχανική ήταν στην πραγματικότητα ένας κλάδος των καθαρών μαθηματικών ανάλογος με την γεωμετρία τεσσάρων διαστάσεων, δηλαδή, ο χρόνος και οι τρεις διαστάσεις σε ένα σημείο του χώρου. Λέγεται ότι υπερηφανευόταν για τον εαυτό του για το γεγονός ότι από την αρχή μέχρι το τέλος του έργου αυτού δεν υπήρχε ούτε ένα διάγραμμα.

Το 1797 δημοσίευσε το βιβλίο του *«Θεωρία αναλυτικών συναρτήσεων»*. Αυτή η εργασία είναι η προέκταση μιας ιδέας που περιλαμβανόταν σε μία εργασία που είχε στείλει το 1772 στο Βερολίνο. Το αντικείμενό της ήταν να υποκαταστήσει για τον διαφορικό λογισμό μία ομάδα με θεωρήματα που βασίζονταν στο ανάπτυγμα των αλγεβρικών συναρτήσεων σε σειρά.

Το 1798 δημοσίευσε το βιβλίο του *«Resolution des equations numeriques»* το οποίο ήταν και ο καρπός για τις διαλέξεις του στο Polytechnic. Σε αυτό δίνει την μέθοδο της προσέγγισης στις πραγματικές ρίζες μία εξίσωσης.

Το 1810 ο Lagrange ξεκίνησε μία διεξοδική αναθεώρηση του βιβλίου του *Mecanique Analytique*, αλλά δεν πρόλαβε να ολοκληρώσει παρά μόνο τα δύο τρίτα από αυτή.

PIERRE SIMON LAPLACE

(1749-1827)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Pierre Simon Laplace γεννήθηκε στο Beaumont-en-Auge της Γαλλίας στις 23 Μαρτίου του 1749. Ο πατέρας του ήταν εύπορος και ασχολούνταν με το εμπόριο. Η μητέρα του ήταν επίσης από εύπορη οικογένεια που της ανήκε πολύ γη.

Ο Laplace πήγε στο κοινόβιο σχολείο Benedictine από τα επτά του έως και τα 16 του χρόνια. Ο πατέρας του περίμενε από αυτόν να κάνει καριέρα ως κληρικός και πράγματι η εκκλησία ή ο στρατός ήταν οι συνήθεις προορισμοί σε σχολεία τέτοιου τύπου. Σε ηλικία 16 ετών ο Laplace μπήκε στο Πανεπιστήμιο του Caen. Όπως σκόπευε όμως να γίνει κληρικός, γράφτηκε στο θεολογικό τμήμα. Παρόλα αυτά, κατά την διάρκεια των δύο πρώτων ετών του στο Πανεπιστήμιο, ο Laplace ανακάλυψε τα μαθηματικά του ταλέντα και την αγάπη του για το μάθημα αυτό.

Από την στιγμή που συνειδητοποίησε ότι τα μαθηματικά θα ήταν αυτό με το οποίο θα ασχολείτο, ο Laplace έφυγε από το Caen χωρίς να πάρει το πτυχίο του, και πήγε στο Παρίσι. Πήρε μαζί του ένα γράμμα για τον d' Alembert από τον Canu, ένα καθηγητή του από το Caen. Παρόλο που ο Laplace ήταν μόλις δέκα εννέα ετών όταν έφτασε στο Παρίσι εντυπωσίασε αμέσως τον d' Alembert. O d' Alembert όχι μόνο άρχισε να κατευθύνει τις μελέτες του Laplace αλλά τον βοήθησε να βρει και μία δουλειά ώστε να βγάζει χρήματα για να συντηρεί τον εαυτό του στο Παρίσι. Βρήκε θέση ως καθηγητής Μαθηματικών στην Ecole Militaire.

Από το 1770 ξεκίνησε τα συγγράμματά του. Το 1771 ο Laplace έκανε την πρώτη του προσπάθεια να εκλεγεί στην Ακαδημία των Επιστημών αλλά ο Vandermonde προτιμήθηκε. Ξαναπροσπάθησε να κερδίσει την αποδοχή το 1772 αλλά εκλέχτηκε ο Cousin. Παρότι ήταν μόλις είκοσι τριών χρονών ο Laplace ένοιωσε αδικημένος με την απόφαση αυτή. Την ίδια απογοήτευση ένοιωσε και ο d' Alembert και με μία επιστολή του στον Lagrange του ζήτησε να εκλεγεί ο Laplace στην Ακαδημία του Βερολίνου και να βρεθεί μία θέση για αυτόν εκεί.

Στις 31 Μαρτίου ο Laplace εκλέχτηκε στην Ακαδημία των Επιστημών. Την περίοδο της εκλογής του είχε διαβάσει 13 εργασίες στην Ακαδημία.

Η δεκαετία του 1780 ήταν η περίοδος στην οποία ο Laplace παρήγαγε τα περισσότερα αποτελέσματα που θα τον έκαναν έναν από τους σημαντικότερους επιστήμονες που θα γνώριζε ποτέ ο κόσμος. Φαίνεται πως ο Laplace δεν ήταν καθόλου μετριόφρων με τις ικανότητές του, και δεν κατάλαβε τις επιδράσεις που είχε αυτό στη σχέση του με τους συναδέλφους του. Ο Lexell που επισκέφθηκε την Ακαδημία την περίοδο 1780-81 ανέφερε πως ο Laplace θεωρούσε τον εαυτό του τον καλύτερο μαθηματικό της Γαλλίας.

Το 1784 ο Laplace διορίστηκε ως εξεταστής στο Βασιλικό Πυροβολικό Σώμα, και σε αυτό τον ρόλο το 1875, εξέτασε και πέρασε τον δεκαεξάχρονο τότε Napoleon Bonaparte. Στην πραγματικότητα αυτή η θέση του έδωσε πολλή δουλειά στο να γράφει εκθέσεις σχετικά με τους μαθητές που εξέταζε, πράγμα το οποίο δεν τον ευχαριστούσε, αλλά η αμοιβή του ήταν πως έγινε γνωστός στους υπουργούς της κυβέρνησης και σε άλλους με θέσεις ισχύος στη Γαλλία.

Ο Laplace υπηρέτησε σε πολλές επιτροπές στην Ακαδημία των Επιστημών. Μία από αυτές ήταν η επιτροπή που συστάθηκε για να ερευνήσει το μεγαλύτερο νοσοκομείο στο Παρίσι και χρησιμοποίησε την πείρα του στις πιθανότητες για να συγκρίνει τον ρυθμό θνησιμότητας στο νοσοκομείο αυτό σε σύγκριση με άλλα νοσοκομεία.

Το 1785, ο Laplace προήχθη σε μια ανώτερη θέση στην Ακαδημία των Επιστημών. Δύο χρόνια αργότερα ο Lagrange έφυγε από Βερολίνο για να συμμετάσχει με τον Laplace ως μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών στο Παρίσι. Κατά συνέπεια οι δύο μεγάλες ιδιοφυΐες των μαθηματικών βρέθηκαν μαζί στο Παρίσι και, παρά τον ανταγωνισμό που υπήρχε μεταξύ τους, ο καθένας επωφελήθηκε πολύ από τις ιδέες του άλλου.

O Laplace παντρεύτηκε στις 15 Μαΐου του 1788. Η γυναίκα του ήταν είκοσι χρόνια μικρότερη από τον τριανταεννιάχρονο Laplace. Έκαναν δύο παιδιά και ο γιος του ακολούθησε στρατιωτική καριέρα.

O Laplace έγινε μέλος της επιτροπής της Ακαδημίας των Επιστημών για να τυποποιήσει τα βάρη και τα μέτρα τον Μάιο του 1790. Αυτή η επιτροπή εργάστηκε στο μετρικό σύστημα και υποστήριξε μια δεκαδική βάση.

Λίγο πριν το 1793 ο Laplace με την οικογένειά του έφυγαν από το Παρίσι και έμειναν 50χιλ. μακριά. Ξαναπήγε στο Παρίσι το 1794. Αν και ο Laplace κατάφερε να αποφύγει την μοίρα που είχαν άλλοι συνάδελφοί του κατά την Επανάσταση, όπως ο Lavoisier που απαγχονίστηκε τον Μάιο του 1794, είχε μερικές δύσκολες στιγμές.

Το 1795 το Ecole Normale ιδρύθηκε με τον στόχο να εκπαιδεύει δασκάλους για τα σχολεία και ο Laplace δίδασκε μαθήματα. Το Ecole Normale επέζησε μόνο για τέσσερις μήνες καθώς οι 1200 μαθητές που εκπαιδεύονταν να γίνουν δάσκαλοι έβρισκαν το επίπεδο των μαθημάτων πολύ υψηλό.

Το 1795 η Ακαδημία των Επιστημών άνοιξε πάλι ως Εθνικό Ινστιτούτο Επιστημών και Τεχνών (Institut des Sciences et des Arrts). Επίσης το 1795, το Bureau des Longitudes ιδρύθηκε με τον Lagrange και τον Laplace σαν ιδρυτικά μέλη.

Η πρώτη έκδοση του βιβλίου του Laplace «Αναλυτική Θεωρία των πιθανοτήτων» δημοσιεύτηκε το 1812. Αυτή η πρώτη έκδοση αφιερώθηκε στον Μέγα Ναπολέοντα, όμως σε μετέπειτα εκδόσεις η αφιέρωση αφαιρέθηκε.

Η επιθυμία του Laplace να έχει αρχηγικό ρόλο στην φυσική τον οδήγησε να γίνει ιδρυτικό μέλος της Societe d' Arcueil το 1805. Μεταξύ των μαθηματικών που ήταν μέλη αυτής της ενεργής ομάδας επιστημόνων ήταν και ο Biot και ο Poisson. Η ομάδα υπερασπιζόταν σθεναρά την μαθηματική προσέγγιση στη φυσική με τον Laplace να παίζει τον κυρίαρχο ρόλο. Το γεγονός αυτό δείχνει την επιρροή που είχε ο Laplace, ο οποίος κυριαρχούσε και στο Εθνικό Ινστιτούτο Επιστημών και Τεχνών αλλά και στο Ecole Polytechnique και στα μαθήματα που οι μαθητές διδάσκονταν εκεί.

Το Societe d' Arcueil, μετά από μερικά χρόνια υψηλής δραστηριότητας, άρχισε να γίνεται λιγότερο ενεργό με τις συναντήσεις να γίνονται όλο και λιγότερο συχνές γύρω στο 1812. Οι συναντήσεις σταμάτησαν εντελώς το επόμενο έτος. Ο Arago, που ήταν ιδρυτικό μέλος της ομάδας, άρχισε να γίνεται υποστηρικτής της θεωρίας των κυμάτων για το φως στην οποία ο Laplace ήταν εντελώς αντίθετος.

Την περίοδο που η επιρροή του άρχισε να μειώνεται, μια προσωπική τραγωδία χτύπησε τον Laplace. Η κόρη του πέθανε πάνω στη γέννα το 1813 ενώ το παιδί που γέννησε ήταν ο μόνος απόγονος του Laplace καθώς και ο γιος του δεν έκανε παιδιά.

Ο Laplace άλλαζε πάντα τις απόψεις του ανάλογα με τα πολιτικά γεγονότα της εποχής εκείνης. Αυτό τον βοήθησε στην επιτυχία του τις δεκαετίες του 1790 και 1800 αλλά δεν βοήθησε καθόλου στις προσωπικές του σχέσεις με τους συναδέλφους του, που έβλεπαν αυτέ τις αλλαγές στις απόψεις του ως προσπάθεια να κερδίσει εύνοια.

Το πρωί της Δευτέρας 5 Μαρτίου 1827 ο Laplace πέθανε. Ήταν πολύ λίγα τα γεγονότα που θα υποχρέωναν την Ακαδημία να παραμείνει κλειστή. Κι όμως εκίνη την ημέρα έκλεισε ως ένδειξη σεβασμού προς έναν από τους μεγαλύτερους επιστήμονες όλων των εποχών. Η απόφαση για την αντικατάσταση του Laplace δεν πάρθηκε γρήγορα και η Γαλλική Ακαδημία τον Οκτώβριο του 1827 πήρε την απόφαση να μην αντικατασταθεί για 6 μήνες. Μερικούς μήνες αργότερα ο Puissant εκλέχτηκε στη θέση του Laplace.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Laplace ξεκίνησε να παράγει τις μαθηματικές του εργασίες αρκετά νωρίς. Η πρώτη του παρουσιάστηκε στην Ακαδημία των Επιστημών στο Παρίσι στις 28 Μαρτίου 1770. Η πρώτη εργασία, που διαβάστηκε στην Ακαδημία, αλλά ποτέ δεν δημοσιεύτηκε, αφορούσε το μέγιστο και το ελάχιστο στις καμπύλες όπου βελτίωσε μεθόδους που είχε δώσει ο Lagrange. Η επόμενη εργασία για την Ακαδημία ακολούθησε αμέσως μετά και στις 18 Ιουλίου 1770 διάβασε την εργασία του για τις διαφορικές εξισώσεις.

Η πρώτη εργασία του Laplace που εκδόθηκε ήταν για τον ολοκληρωτικό λογισμό την οποία και μετέφρασε και στα λατινικά και εκδόθηκε στο *«Leipzig στο Nova acta eruditorum»* το 1771. Έξι χρόνια αργότερα την εργασία αυτή την επανέκδοσε βελτιωμένη και ζήτησε συγγνώμη για την προηγούμενη έκδοση λέγοντας πως για τα λάθη έφταιγε η εκτύπωση. Ο Laplace μετέφρασε και την εργασία του για τα μέγιστα και ελάχιστα των καμπυλών στα λατινικά και την εξέδωσε στο *«Nova acta eruditorum»* το 1774. Επίσης, το 1771 ο Laplace έστειλε μία ακόμη εργασία που την ονόμασε *«Recherches sur le calcul integral aux differences infiniment petites, et aux* *differences finies»* στο περιοδικό *«Melanges de Turin».* Η εργασία αυτή περιείχε εξισώσεις τις οποίες ο Laplace θεωρούσε πως ήταν ιδιαίτερα σημαντικές στη μηχανική και στην αστρονομία.

Αναφέραμε ήδη κάποιες εργασίες με τις οποίες ξεκίνησε ο Laplace την μαθηματική του καριέρα. Όχι μόνο συνεισέφερε σε μεγάλο βαθμό στις διαφορικές εξισώσεις αλλά εξέτασε και εφαρμογές στη μαθηματική αστρονομία και στην θεωρία των πιθανοτήτων, δύο μεγάλα θέματα με τα οποία και ασχολήθηκε γενικότερα σε όλη τη ζωή του. Η εργασία του στην μαθηματική αστρονομία πριν από την εκλογή του στην Ακαδημία των Επιστημών περιελάμβανε και εργασία πάνω στην κλίση της τροχιάς των πλανητών, μία μελέτη που κατέγραφε πως πλανήτες επηρεάζονταν από τις σελήνες τους. Επίσης σε μια εργασία που διάβασε στην Ακαδημία στις 27 Νοεμβρίου 1771 έκανε μία μελέτη για την κίνηση των πλανητών που θα ήταν το πρώτο βήμα πριν από το μεγάλο του αριστούργημα για την ευστάθεια του ηλιακού συστήματος.

Το 1780 μαζί με τον χημικό Lavoisier, και με την βοήθεια ενός οργάνου μέτρησης της ειδικής θερμότητας των στερεών, το οποίο είχαν οι ίδιοι κατασκευάσει, έδειξαν ότι η αναπνοή ήταν μια μορφή καύσης. Παρόλο που ο Laplace σύντομα γύρισε στην έρευνά του στην μαθηματική αστρονομία, αυτή η εργασία με τον Lavoisier σημάδεψε την αρχή της τρίτης σημαντικής περιοχής ερευνών του Laplace, που ήταν η φυσική και συγκεκριμένα στη θεωρία της θερμότητας με την οποία και ασχολήθηκε μέχρι το τέλος της καριέρας του.

Το 1796 ο Laplace παρουσίασε την διάσημη υπόθεση για τα νεφελώματα στην εργασία του *«Παρουσίαση για το Σύστημα του Κόσμου» (Exposition du system du monde)*, στην οποία θεωρούσε ότι το ηλιακό σύστημα είχε δημιουργηθεί από την συγκέντρωσηκαι την ψύξη μεγάλων, συμπιεσμένων και αργά περιστρεφόμενων σύννεφων που περιείχαν πυρακτωμένα αέρια. Η παρουσίαση αυτή αποτελούνταν από πέντε τόμους: ο πρώτος ήταν πάνω στις φαινομενικές κινήσεις των ουράνιων σωμάτων, την κίνηση της θάλασσας και την ατμοσφαιρική διάθλαση. Ο δεύτερος τόμος αφορούσε την πραγματική κίνηση των ουράνιων σωμάτων, ο τρίτος μιλούσε για την δύναμη και την ορμή, ο τέταρτος για την θεωρία της βαρύτητας του σύμπαντος ενώ το τελευταίο βιβλίο κατέγραφε μια ιστορική αναδρομή και περιείχε την διάσημη υπόθεση νεφελωμάτων. Από αυτό και μόνο το βιβλίο βλέπουμε την πληθώρα των αντικειμένων που απασχόλησαν τον Laplace.

Το βιβλίο του αυτό γράφτηκε σαν μια μη μαθηματική παρουσίαση στην πιο σημαντική δουλειά του Laplace *«Traite de Mecaniqye Celeste»* του οποίου ο πρώτος τόμος εμφανίστηκε τρία χρόνια αργότερα. Ο Laplace είχε ήδη ανακαλύψει την σταθερότητα των πλανητών μέσης κίνησης.

Το 1786 απέδειξε ότι οι κλίσεις των τροχιών των πλανητών μεταξύ τους πάντα παραμένουν μικρές, συνεχείς και διορθώνονται μόνες τους. Αυτά και πολλά άλλα από τα νεώτερα αποτελέσματά του διαμόρφωσαν την βάση για την πιο σημαντική δουλειά του, το βιβλίο *«Traite de Meqanique Celeste»* που εκδόθηκε σε πέντε τόμους, οι δύο πρώτοι το 1799. Αυτή η εργασία ήταν πολύ σημαντική γιατί μετέφρασε την γεωμετρική μελέτη της μηχανικής που χρησιμοποίησε ο Νεύτωνας σε λογισμό, γνωστό ως φυσική μηχανική. Στο βιβλίο αυτό ο Laplace απέδειξε την δυναμική σταθερότητα του ηλιακού συστήματος. Παρόλα αυτά, αυτό μακροπρόθεσμα, αποδείχτηκε πως ήταν λάθος στις αρχές του 1990. Ο Laplace έλυσε την ταλάντευση της Σελήνης. Σε αυτή τη δουλειά συχνά παρέλειπε παραγώγους συναρτήσεων αφήνοντας μόνο τα αποτελέσματα με την σημείωση «είναι εύκολο κανείς να δει» (il est aise a voia). Επίσης, αυτό το βιβλίο περιείχε μία μελέτη για την πίεση και την πυκνότητα, για την αστρονομική διάθλαση, για την βαρομετρική πίεση και την μετάδοση της βαρύτητας που βασιζόταν σε μία καινούρια φιλοσοφία πάνω στη φυσική.

Ακόμη, ο Laplace συστηματοποίησε και επεξεργάστηκε την θεωρία των πιθανοτήτων στην εργασία του *«Essai Philosophique sur les Probabilites»* το 1814. Ήταν ο πρώτος που δημοσίευσε την αξία του Gaussian ολοκληρώματος, $\sqrt{\pi}$. Δημιούργησε τον «Μετασχηματισμό του Laplace», παρόλο που ο Heaviside ανέπτυξε πλήρως τις τεχνικές.

Το 1812 δημοσίευσε την πρώτη έκδοση του βιβλίου του *«Theorie Analytique des Probabilites»*. Ο πρώτος τόμος του βιβλίου αυτού πραγματεύεται τις γεννήτριες συναρτήσεις και τις προσεγγίσεις σε διάφορες εκφράσεις που περιλαμβάνονται στην θεωρία των πιθανοτήτων. Ο δεύτερος τόμος περιέχει την θεωρία του Laplace για τις πιθανότητες. Ο τόμος συνεχίζει με μεθόδους για να βρίσκονται πιθανότητες από σύνθετα γεγονότα όταν οι πιθανότητες από τις απλές συνιστώσες είναι γνωστές. Μεταγενέστερες εκδόσεις της εργασίας αυτής, συμπληρώνουν και εξετάζουν εφαρμογές της θεωρίας των πιθανοτήτων σε: λάθη σε παρατηρήσεις, καθορισμός των μαζών του Δία, του Κρόνου και του Ουρανού, μεθόδους τριγωνισμού σε έρευνες και προβλήματα γεωδαισίας και συγκεκριμένα το καθορισμό του μεσημβρινού της Γαλλίας.

CAROLINE HERSCHEL
(1750-1848)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Caroline Herschell γεννήθηκε στις 16 Μαρτίου του 1750 στο Ανόβερο της Γερμανίας σε μια οικογένεια εργατικής τάξης. Ο πατέρας της Isaac, περιποιόταν κήπους για να στηρίξει την οικογένειά του, όμως ήταν και ένας πολύ άξιος μουσικός. Ήταν ομποϊστας σε μια ορχήστρα του Ανοβέρου και κατάφερε να γίνει και ο αρχηγός της μπάντας αυτής.

Παρότι δεν ήταν ένας άνθρωπος με ιδιαίτερη μόρφωση, ενθάρρυνε όλα τα παιδιά του να διδαχθούν Μαθηματικά, Γαλλικά και Μουσική. Η μητέρα της είχε προορίσει την Caroline να γίνει υπηρέτρια. Ο πατέρας της, όμως, την λυπήθηκε και χωρίς την συγκατάθεση της γυναίκας του, την ενθάρρυνε να αξιοποιήσει τα ταλέντα της.

Τύφος χτύπησε την Caroline σε ηλικία 10 ετών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να σταματήσει την ανάπτυξή της. Εξαιτίας αυτής της δυσμορφίας ο πατέρας της την συμβούλευσε να μην παντρευτεί ποτέ καθώς κανείς άντρας δεν θα την ήθελε. Η πρόβλεψη αυτή έγινε πραγματικότητα.

Μετά την γαλλική κυριαρχία του Ανοβέρου το 1757, ο πατέρας της πήγε να πολεμήσει και έτσι δεν ήταν στο σπίτι. Ο αδερφός της William δραπέτευσε στην Αγγλία και η Caroline έμεινε κάτω από την κυριαρχία της μητέρας της. Αυτό κράτησε μέχρι το 1767 όπου πέθανε ο πατέρας της. Τότε η Caroline κατάλαβε πως έπρεπε να πάρει την ζωή της στα χέρια της.

Σε ηλικία 22 ετών ο αδερφός της την πήρε μαζί του στην Αγγλία. Εκεί την είχε μεν, ως υπηρέτρια αλλά της έκανε και μαθήματα φωνητικής καθώς ήταν μουσικός. Έτσι κατάφερε να γίνει η πιο εξέχουσα σοπράνο στο Bath.

Παράλληλα με την μουσική, η Caroline βοηθούσε τον αδερφό της με τις επιστημονικές του δραστηριότητες. Ο αδερφός της τη δίδαξε άλγεβρα, γεωμετρία, και τριγωνομετρία. Συγκεκριμένα σπούδασε σφαιρική τριγωνομετρία η οποία ήταν σημαντική για τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Παρόλα αυτά τα Μαθηματικά δεν την ενδιέφεραν παρά μόνο σε ό,τι θα την βοηθούσαν πάνω στην αστρονομία.

Το 1781 η αστρονομία έγινε κάτι παραπάνω από χόμπι για τον William καθώς κατασκεύαζε τηλεσκόπια και ανακάλυψε τον πλανήτη Ουρανό. Χωρίς να μετανιώσει καθόλου η Caroline παράτησε την μουσική και ασχολήθηκε πιο ενεργά με την αστρονομία. Ο αδερφός της, της έδωσε ένα τηλεσκόπιο με το οποίο άρχισε να παρατηρεί, συγκεκριμένα για κομήτες κάνοντας μεθοδικές παρατηρήσεις στον ουρανό. Άρχισε να γίνεται πολύ χρήσιμη στον αδερφό της και σύντομα όταν αυτός έλειπε μπορούσε να τον αντικαταθιστά επάξια. Ο Βασιλιάς Αρθούρος ΙΙΙ τις έδωσε 50 λίρες το χρόνο σαν βοηθό του William. Ήταν η πρώτη φορά που γυναίκα αναγνωρίστηκε και αμείφθηκε για επιστημονική θέση αστρονόμου.

Την επόμενη χρονιά ο αδερφός της παντρεύτηκε την Marry Pit και η ζωή της Caroline άλλαξε ριζικά. Κρατούσε ένα ημερολόγιο μέσα στο οποίο κατέγραφε τις σκέψεις της. Συγκεκριμένα κατέγραφε την μεγάλη της στενοχώρια για την αλλαγή της σχέσης της με τον αδερφό της. Επίσης κατέγραφε την πικρία της για την γυναίκα του αδερφού της. Παρόλα αυτά η σχέση μεταξύ των δύο γυναικών σταδιακά καλυτέρευσε και η Caroline κατέστρεψε κάθε σελίδα από αυτό το ημερολόγιο.

Το 1798 η Caroline υπέβαλε στην Βασιλική Εταιρεία έναν κατάλογο συμπληρωματικό στις παρατηρήσεις του Flamsteed των σταθερών αστεριών μαζί με μια λίστα από 560 αστέρια τα οποία είχαν παραλειφθεί. Αυτή η δημοσίευση σημάδεψε την προσωρινή λήξη των δικών της ερευνών τις οποίες και δεν ξαναξεκίνησε παρά μόνο 25 χρόνια μετά, αφού πέθανε ο αδερφός της.

Στην διάρκεια των 25 αυτών χρόνων η Caroline ασχολήθηκε με την εκπαίδευση του ανιψιού της. Παράλληλα, η κοινωνική της θέση είχε βελτιωθεί. Ήταν καλεσμένη του Maskelyne στο Βασιλικό Αστεροσκοπείο το 1799 και καλεσμένη μελών της βασιλικής οικογένειας πολλές φορές το 1816, 1817, 1818.

Το 1822, μετά τον θάνατο του αδερφού της William επέστρεψε στο Ανόβερο. Από πολλές απόψεις αυτή ήταν μια άσχημη απόφαση, την οποία πήρε πολύ βιαστικά και σύντομα το μετάνιωσε. Όμως η Caroline πάντα κρατούσε τις υποσχέσεις της παρ' όλες τις συνέπειες και έτσι δεν θα επέστρεφε στην Αγγλία.

Παρότι μετάνιωσε που πέρασε τα τελευταία 25 χρόνια της ζωής της στο Ανόβερο η Caroline αποζημιώθηκε. Ήταν πολύ γνωστή, πλέον, στον επιστημονικό κόσμο και πολλοί επιστήμονες συχνά την επισκέπτονταν, ένας από αυτούς ήταν και ο Gauss.

Η Caroline Herschel τιμήθηκε πολλές φορές για τα επιστημονικά της επιτεύγματα. Μαζί με την Mary Somerville εκλέχτηκε ως τιμητικό μέλος της Βασιλικής Εταιρίας το 1835. Ήταν τα πρώτα τιμώμενα μέλη που ήταν γυναίκες. Ακόμη, εκλέχτηκε ως μέλος της Ιρλανδικής Βασιλικής Ακαδημίας το 1838.

Στα 96α γενέθλιά της ο Βασιλιάς της Πρωσίας, σε αναγνώριση της σπουδαίας συνεισφοράς της στην αστρονομία και γενικότερα στην επιστήμη και ως βοηθός του αδερφού της William της απένειμε το Μεγάλο Χρυσό Μετάλλιο της επιστήμης.

Στα 97α γενέθλιά της διασκέδασε τον πρίγκιπα και την πριγκίπισσα για δύο ώρες και ακόμα και τραγούδησε μια σύνθεση του αδερφού της.

Ένας μικρός πλανήτης ονομάστηκε Lucretia το 1889 στην μνήμη της Caroline Lucretia Herschel ένας αρμάζων φόρος τιμής σε μια γυναίκα που είχε συμβάλλει τόσο πολύ, όμως είχε πολύ λίγες προσωπικές φιλοδοξίες που δεν ήθελε τον έπαινο που έπαιρνε αυτή για να μην μειώνει τον αδερφό της William.

Η Caroline πέθανε στις 9 Ιανουαρίου του 1848 σε ηλικία 98 ετών. Ολόκληρη η επιστημονική κοινότητα θρήνησε για τον θάνατο μιας τέτοιας ισχυρής και εξέχουσας μορφωμένης γυναίκας.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Τα πρώτα επιτεύγματα της Caroline Herschel ήταν ο εντοπισμός νεφελωμάτων. Την περίοδο εκείνη το να βρίσκει κανείς κομήτες ήταν ο κύριος σκοπός πολλών αστρονόμων. Η πρώτη επαφή με τα μαθηματικά για την Caroline ήταν ο κατάλογός της για τα νεφελώματα. Υπολόγισε τις θέσεις του αδερφού της και των δικών τις ανακαλύψεων και τα συνέθεσε σε μία δημοσίευση. Ένα ενδιαφέρον γεγονός ήταν πως η Caroline δεν έμαθε ποτέ τους πίνακες πολλαπλασιασμού. Τους μελέτησε τόσο αργά στη ζωή της που ποτέ δεν κατάφερε να τους αποστηθίσει. Είχε πάντα τους πίνακες σε ένα χαρτί όποτε εργαζόταν.

Η Caroline δεν έβρισκε τον χρόνο που ήθελε για να ασχοληθεί με τις παρατηρήσεις της καθώς έπρεπε να βοηθάει τον αδερφό της. Την ημέρα εργαζόταν πάνω στα αποτελέσματα που είχε το προηγούμενο βράδυ παρατηρήσει με τον αδερφό της. Πραγματοποίησε πολύ παρατεταμένους υπολογισμούς απαραίτητους για να μειώσουν τα δεδομένα του William με μεγάλη ακρίβεια. Τον Απρίλιο του 1786 μετακόμισαν σε ένα καινούριο σπίτι στο Slough και εκεί την 1η Αυγούστου η Caroline ανακάλυψε τον πρώτο κομήτη της ο οποίος περιγράφτηκε από μερικούς σαν «first lady's comet». Αυτή η ανακάλυψη τής έφερε ένα μεγάλη φήμη και άρθρα γράφτηκαν για αυτή.

Η Caroline ανακάλυψε οχτώ κομήτες (1786 και 1797) και τότε ξεκίνησε ένα καινούριο σχέδιο της προσθήκης και της διόρθωσης του καταλόγου αστεριών που είχε συνταχθεί από τον Flamsteed.

Ολοκλήρωσε τον κατάλογό της αποτελούμενο από 2500 νεφελώματα και το 1828 για αυτή την τεράστια δουλειά τής απένειμαν το χρυσό μετάλλιο.

Πριν τον θάνατο του αδερφού της William ανακάλυψε εφτά ακόμη κομήτες. Όταν όμως ο αδερφός της πέθανε τελείωσε την καριέρα της ως αστρονόμος παρατηρητής.

Πριν τον θάνατό της κατέγραψε σε ένα κατάλογο κάθε ανακάλυψη που είχε κάνει αυτή και ο αδερφός της .

SOPHIE GERMAIN
(1776–1831)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Sophie Germain γεννήθηκε 1 Απριλίου του 1776, την εποχή της επανάστασης. Στο έτος γέννησης της άρχισε η αμερικάνικη επανάσταση. Από πολλές απόψεις η Sophie συντονίστηκε στο πνεύμα της επανάστασης που ξεσπούσε. Πήγε ενάντια στις επιθυμίες της οικογένειας της και στις κοινωνικές προκαταλήψεις του καιρού της και έγινε ιδιαίτερα αναγνωρισμένη Μαθηματικός. Πέρασε πολύς χρόνος για να αναγνωρισθεί και να εκτιμηθεί για τις συνεισφορές της στον τομέα των μαθηματικών, αλλά δενπτοήθηκε. Ακόμη και σήμερα θεωρείται, ότι δεν της δόθηκε ποτέ όση πίστωση χρειάστηκε για τις συνεισφορές που έκανε στην θεωρία των αριθμών και την μαθηματική φυσική, επειδή ήταν γυναίκα.

Η Sophie Germain γεννήθηκε στο Παρίσι, την $1^{η}$ Απριλίου του 1776. Οι γονείς της, Francois και Marie ήταν αρκετά πλούσιοι, ο πατέρας της ήταν έμπορος και αργότερα έγινε διευθυντής της τράπεζας της Γαλλίας.

Το ενδιαφέρον της Sophie για τα μαθηματικά άρχισε κατά την διάρκεια της γαλλικής επανάστασης όταν ήταν 13 ετών και περιορίστηκε στο σπίτι της λόγω του κινδύνου που προκλήθηκε από τις επαναστάσεις στο Παρίσι. Περνούσε πολύ χρόνο στη βιβλιοθήκη του πατέρα της, διαβάζοντας. Έτσι μια μέρα διάβασε ένα βιβλίο το οποίο εξιστορούσε έναν μύθο για τον θάνατο του Αρχιμήδη. Ο μύθος έλεγε ότι: «Κατά την διάρκεια της εισβολής της πόλης του, από τους Ρωμαίους, ο Αρχιμήδης ήταν τόσο απορροφημένος στη μελέτη ενός γεωμετρικού σχήματος στην άμμο που απέτυχε να αποκριθεί στο ερώτημα ενός Ρωμαίου στρατιώτη. Το γεγονός αυτό είχε ως αποτέλεσμα τον θάνατό του». Ο μύθος αυτός προκάλεσε το ενδιαφέρον της Sophie. Εάν κάποιος θα μπορούσε να είναι τόσο απορροφημένος σε ένα πρόβλημα ώστε να αγνοηθεί ένας αντίπαλος στρατιώτης και αυτό να έχει ως συνέπεια τον θάνατό του, αυτό σημαίνει ότι το θέμα θα πρέπει να είχε πολύ ενδιαφέρον. Έτσι άρχισε την μελέτη της για τα μαθηματικά.

Η Sophie άρχισε να μελετά τα μαθηματικά χρησιμοποιώντας τα βιβλία στην βιβλιοθήκη του πατέρα της. Οι γονείς της θεώρησαν ότι το ενδιαφέρον της αυτό ήταν ακατάλληλο για ένα κορίτσι (η κοινή πεποίθηση της μεσαίας τάξης του 19^{ου} αιώνα) και έκαναν ό,τι μπορούσαν προκειμένου να την αποθαρρύνουν. Άρχισε να μελετά τις νύχτες για να τους αποφεύγει, αλλά οι γονείς της έλαβαν τα μέτρα τους, παίρνοντας της τα ρούχα της μόλις πήγαινε στο κρεβάτι της και επίσης της στέρησαν την θερμότητα και το φως για να την αναγκάσουν να παραμένει στο κρεβάτι της και να μην σηκώνεται να μελετά. Οι προσπάθειες που έκαναν οι γονείς της για να την αποτρέψουν να μελετήσει ήταν όλες αποτυχημένες, Τυλιγόταν στα παπλώματά της και χρησιμοποιούσε κεριά που είχε κρύψει προκειμένου να μπορέσει να διαβάσει την νύχτα. Τελικά οι γονείς της συνειδητοποίησαν ότι το πάθος της Sophie για τα μαθηματικά ήταν ανίατο και αποφάσισαν να την αφήσουν να μάθει. Έτσι η Sophie πέρασε τα εφηβικά της χρόνια μελετώντας το διαφορικό λογισμό, χωρίς την ενίσχυση δασκάλου.

Το 1794, όταν η Sophie ήταν 18 ετών, ιδρύθηκε στο Παρίσι η Ecole Polytechnique. Ήταν μια ακαδημία που ιδρύθηκε για να εκπαιδευτούν οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες της χώρας. Οι γυναίκες δεν επιτρεπόταν να εγγραφούν σε αυτήν την ακαδημία, αλλά η Sophie βρήκε τον τρόπο να πάρει τις σημειώσεις των διαλέξεων αρκετών μαθημάτων. Έτσι της δόθηκε η ευκαιρία να μάθει πολλούς από τους προεξέχοντες μαθηματικούς της εποχής. Η Sophie ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για τις θεωρίες και διαλέξεις του Lagrange. Με το ψευδώνυμο M. Leblanc (ο οποίος ήταν ένας προηγούμενος σπουδαστής του Lagrange) η Sophie υπέβαλε μια εργασία για την ανάλυση του Lagrange, ο οποίος ενθουσιάστηκε πολύ με την εργασία αυτή και θέλησε να συναντήσει τον σπουδαστή που την έγραψε. Ο Lagrange έμεινε κατάπληκτος όταν αντιλήφθηκε ότι ο συντάκτης της εργασίας αυτής ήταν γένους θηλυκού. Αναγνώρισε τις ικανότητές της και έγινε σύμβουλός της.

Η Sophie Germain πέθανε σε ηλικία 55 ετών, στις 27 Ιουνίου του 1831, μετά από μια μάχη με τον καρκίνο του μαστού. Λίγο πριν τον θάνατό της, ο Gauss, ένας από τους πιο σημαντικούς συμβούλους της, είχε πείσει το πανεπιστήμιο Gottingen να απονείμει στη Sophie έναν τιμητικό τίτλο, πέθανε όμως προτού λάβει το βαθμό αυτό. Η Sophie Germain ήταν ένα επαναστατικό πνεύμα. Μαχόταν ενάντια στις κοινωνικές προκαταλήψεις της εποχής προκειμένου να γίνει γνωστή μαθηματικός. Έγινε γνωστή από την εργασία της για την θεωρία των αριθμών αλλά και η εργασία της για τη θεωρία της ελαστικότητας αποτελούσε επίσης μια σημαντική συνεισφορά στα μαθηματικά.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Το 1804, η Sophie άρχισε να συναναστρέφεται με τον γερμανό μαθηματικό Carl Friedrich Gauss. Έγραψε μια εργασία για την θεωρία των αριθμών και του έστειλε τα αποτελέσματα αυτής χρησιμοποιώντας ξανά το ψευδώνυμό της για να κρύψει την αληθινή της ταυτότητα. Το 1807 ο Gauss ανακάλυψε ότι πίσω από το ψευδώνυμο M. Leblanc κρυβόταν μια γυναίκα. Συγκλονίστηκε όταν διαπίστωσε πόσο ταλαντούχα γυναίκα ήταν η Sophie. Το 1808 η Sophie έστειλε στον Gauss μια επιστολή περιγράφοντας του την εργασία της για την θεωρία των αριθμών. Δεν έλαβε όμως ποτέ απάντηση από αυτόν διότι είχε σταματήσει να ασχολείται με το θέμα αυτό και είχε γίνει καθηγητής αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο Gottingen. Περίπου 12 έτη αργότερα έγραψε στον μαθηματικό Legendre για το σημαντικό αυτό έργο της.

Η Germain απέδειξε ότι εάν το X , το Y και το ζ είναι ακέραιοι αριθμοί και αν X^5+Y^5=ζ^5 , τότε το X, το Y και ζ πρέπει να είναι διαιρετά με το 5. Το θεώρημα Germain είναι ένα σημαντικό βήμα για την παρουσίαση των αποδείξεων του τελευταίου θεωρήματος Fermat, στην περίπτωση όπου το ν είναι ίσο με 5. Το τελευταίο θεώρημα του Fermat λέει ότι εάν το X , το Y, το ζ και το ν είναι ακέραιοι αριθμοί τότε η εξίσωση X^n+Y^n=ζ^n δεν μπορεί να λυθεί για οποιοδήποτε ν μεγαλύτερο από 2.

Ο Gauss είχε καθοδηγήσει πολύ καλά την έρευνα της Sophie, τώρα όμως που αυτός είχε σταματήσει να ασχολείται με τις έρευνες, έπρεπε να αρχίσει να ψάχνει για έναν νέο σύμβουλο. Την ίδια περίοδο η γαλλική Ακαδημία Επιστημών είχε αναγγείλει έναν διαγωνισμό προκειμένου να βρεθεί κάποιος να εξηγήσει τον «μαθηματικό νόμο» ενός γερμανού φυσικού για την δόνηση των ελαστικών επιφανειών. Η Sophie ήταν συνεπαρμένη και αποφασισμένη να εξηγήσει τον νόμο που κρύβεται κάτω από την μελέτη του Chladni. Η Ακαδημία έθεσε προθεσμία, για τον διαγωνισμό αυτό, δυο χρόνια. Έτσι το 1811 η Sophie υπέβαλε την μοναδική εργασία στον διαγωνισμό. Η έλλειψη βασικής εκπαίδευσης της όμως ήταν εμφανής στην ανώνυμη εργασία που υπέβαλε και έτσι δεν της απονεμήθηκε το βραβείο. Είχε ακόμα πολλά να μάθει. Ο Lagrange ήταν διατεθειμένος να διορθώσει τα λάθη της και έτσι δυο χρόνια αργότερα κατέθεσε ξανά την εργασία της για να λάβει μέρος στον διαγωνισμό. Αυτή τη φορά έλαβε μια εύσημο μνεία. Τελικά το 1816 κατέθεσε για τρίτη και τελευταία φορά το έργο της και κέρδισε το βραβείο. Κατά την απόκτηση του βραβείου της οι κριτές ισχυρίζονταν ότι υπήρχαν σοβαρές ανεπάρκειες στην εξήγησή της. Αυτές οι ανεπάρκειες δεν θα διορθώνονταν για δεκαετίες. Μετά την επιτυχία της στο διαγωνισμό η Sophie συνέχισε την εργασία της για την θεωρία της ελαστικότητας δημοσιεύοντάς την παράλληλα. Το σημαντικότερο έργο της από αυτά εξετάζει "την φύση, τα όρια και την έκταση των ελαστικών επιφανειών". Η εργασία της για την θεωρία της ελαστικότητας αποδείχθηκε πολύ σημαντική.

Το βραβείο που κέρδισε από την Ακαδημία ήταν τεράστιας σπουδαιότητας για την Sophie διότι αποτελούσε γι' αυτήν το εισιτήριο για την εισαγωγή της στις τάξεις των σημαντικότερων μαθηματικών του καιρού της. Έγινε η πρώτη γυναίκα, που δεν ήταν η σύζυγος κάποιου μέλους της Ακαδημίας, αλλά μετείχε σε αυτήν με την βοήθεια του Jean-Baptiste-Joseph Fourier. Εγκωμιάστηκε από το Institut της Γαλλίας και κλήθηκε να παρευρεθεί στις συνόδους του. Αυτή ήταν η υψηλότερη ένδειξη τιμής από το διάσημο Ινστιτούτο σε μια γυναίκα. Η Sophie, το 1820, συνεργάστηκε ισάξια με έναν γνωστό μαθηματικό, για να αποσαφηνίσει τις αποδείξεις της εργασίας της που αναφερόταν στην θεωρία των αριθμών.

JOHANN FRIEDERICH CARL GAUSS

(1777–1855)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Η καταγωγή του Gauss, του Πρίγκηπα των Μαθηματικών, ήταν κάθε άλλο παρά βασιλική. Γιος φτωχών γονέων, γεννήθηκε σε ένα άθλιο αγρόκτημα στο Brunswick της Γερμανίας, στις 30 Απριλίου του 1777. Ο παππούς του από την πλευρά του πατέρα του ήταν ένας φτωχός αγρότης, ο οποίος το 1740 εγκαταστάθηκε στο Brunswick. Ο πατέρας του, ο Gerhard Diederich, γεννημένος το 1744 πέρασε όλη του τη ζωή δουλεύοντας σκληρά ως κηπουρός, φύλακας καναλιών και κτίστης. Ο πατέρας του ήταν ένας έντιμος, ευσυνείδητος και άξεστος άνθρωπος, του οποίου η τραχύτητα προς τους γιούς του άγγιζε μερικές φορές τα όρια της κτηνωδίας. Τα λόγια του ήταν σκληρά και το χέρι του βαρύ. Δεν αποτελεί έκπληξη που ένας τέτοιος άνθρωπος έκανε ό,τι περνούσε από το χέρι του για να σταματήσει την εξέλιξη του μικρού γιου του και να τον εμποδίσει να μορφωθεί σύμφωνα με τις ικανότητές του. Αν είχε γίνει το δικό του, το προικισμένο αγόρι θα είχε ακολουθήσει κάποιο από τα επαγγέλματα της οικογένειας. Ο Gauss ως παιδί ήταν υπάκουο και έδειχνε σεβασμό, δεν κριτίκαρε τον φτωχό του πατέρα αλλά έκανε σαφές πως ποτέ δεν είχε αισθανθεί πραγματική στοργή γι΄αυτόν.

Ο Gauss πραγματικά ευτύχησε από την πλευρά της μητέρας του. Η Δωροθέα, μια εξαιρετική κυρία, μετακινήθηκε το 1769 στο Brunswick. Στα τριάντα τέσσερα της, το

1776, παντρεύτηκε τον πατέρα του Gauss. Ένα χρόνο μετά γεννήθηκε ο γιος της. Το πλήρες όνομά του ήταν Johann Friederich Carl Gauss. Η μητέρα του ήταν μια ντόμπρα γυναίκα με ισχυρό χαρακτήρα και με κεφάτο χιούμορ. Ο γιος της ήταν το καμάρι της από την ημέρα της γέννησης του ως την ημέρα του θανάτου της. Όταν φάνηκε η εκπληκτική νοημοσύνη του «παιδιού θαύματος» των δύο ετών, η Δωροθέα Gauss πήρε το μέρος του αγοριού και νίκησε τον πεισματάρη σύζυγό της που προσπαθούσε να αφήσει το παιδί αμόρφωτο όπως είχε μείνει εκείνος. Η ίδια περίμενε μεγάλα πράγματα από τον γιό της, και δεν απογοητεύτηκε. Τα τελευταία είκοσι δύο χρόνια της ζωής της τα πέρασε στο σπίτι του γιου της, την δε τελευταία τετραετία ήταν τελείως τυφλή. Όταν εκείνη τυφλώθηκε, την περιποιόταν μόνος του και έκανε τον νοσοκόμο στην διάρκεια της τελευταίας μακράς αρρώστιάς της. Η μητέρα του πέθανε στις 19 Απριλίου του 1839.

Λίγο μετά τα έβδομα γενέθλια του , ο Gauss, πήγε σχολείο για πρώτη φορά. Ένα άθλιο μεσαιωνικό σχολείο το οποίο διεύθυνε ένας κτηνώδης τύπος με το όνομα Büttner. Το σύστημα διδασκαλίας του ήταν να φέρει τα εκατό περίπου αγόρια, που ήταν στο σχολείο, σε μια κατάσταση ηλιθιότητας από τον τρόμο ώστε να ξεχνούν το ίδιο το όνομά τους. Στα δέκα του χρόνια ο Gauss έγινε δεκτός στην τάξη της αριθμητικής. Καθώς ήταν η πρώτη τάξη στην αριθμητική, κανένα από τα αγόρια δεν είχε ακούσει για αριθμητικές προόδους. Έτσι λοιπόν, ο Büttner τους έδωσε ένα μακρύ πρόβλημα στην πρόσθεση. Το πρόβλημα ήταν του είδους :

$$81297 + 81495 + 81693 + \ldots + 100899,$$

όπου το βήμα από τον έναν αριθμό στον επόμενο είναι το ίδιο πάντα (εδώ 198), και πρέπει να προστεθούν ένας δεδομένος αριθμός όρων (εδώ 100). Ο Büttner μόλις είχε τελειώσει την διατύπωση του προβλήματος όταν ο Gauss είπε ότι το έλυσε. Ο δάσκαλός του εντυπωσιάστηκε πολύ με αυτό που κατάφερε χωρίς καθοδήγηση ένα αγόρι δέκα χρονών. Ως ένδειξη εξιλέωσης για τον σαρκασμό του απέναντι στο παιδί πριν δει το αποτέλεσμα, πλήρωσε ο ίδιος για την αγορά του καλύτερου εγχειριδίου αριθμητικής και το δώρισε στον Gauss. Το αγόρι έκανε αστραπιαία κτήμα του το βιβλίο αφήνοντας άφωνο τον Büttner. Ο ίδιος συνειδητοποίησε ότι δεν μπορούσε να κάνει πολλά για τον νεαρό μαθητή και τον σύστησε σε έναν βοηθό του ο οποίος είχε πάθος για τα Μαθηματικά, τον Johann Martin Bartels. Ανάμεσα σε αυτόν και τον Gauss αναπτύχθηκε μια θερμή φιλία που κράτησε σε όλη τους τη ζωή. Μελετούσαν μαζί, βοηθώντας ο ένας τον άλλον στις δυσκολίες και εξηγώντας τις αποδείξεις που περιείχε το κοινό τους εγχειρίδιο της Άλγεβρας και των στοιχείων της Ανάλυσης.

Μελετώντας το εγχειρίδιο αυτό ο Gauss έγινε κάτοχος του διωνυμικού θεωρήματος :

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1x2}x^2+\frac{n(n-1)(n-1)}{1x2x3}x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Όπου n δεν είναι απαραίτητα θετικός ακέραιος, αλλά οποιοσδήποτε αριθμός. Το πρώιμο συναπάντημά του με το διωνυμικό θεώρημα, στάθηκε η αφορμή για ορισμένες από τις μεγαλύτερες εργασίες του, και ο ίδιος υπήρξε ο πρώτος που αντιμετώπιζε αυστηρά τις μαθηματικές διαδικασίες. Η απόδειξη του διωνυμικού θεωρήματος όταν ο n είναι ακέραιος μεγαλύτερος του μηδενός, στάθηκε το ξεκίνημά του στην Μαθηματική Ανάλυση. Ο Gauss υπήρξε ένας επαναστάτης. Πριν τελειώσει το σχολείο το κριτικό του πνεύμα τον έκανε να αμφισβητήσει τις αποδείξεις της στοιχειώδους γεωμετρίας. Στα δώδεκά του κοίταζε ήδη με λοξό βλέμμα τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μέχρι τα δεκαέξι του είχε κάνει την πρώτη του ανίχνευση μιας γεωμετρίας διαφορετικής από την Ευκλείδεια. Ένα χρόνο αργότερα ξεκίνησε μια κριτική έρευνα των αποδείξεων στη θεωρία των αριθμών στοχεύοντας να καλύψει τα κενά και να συμπληρώσει τις ημιτελείς αποδείξεις. Ο Bartels έκανε πολλά περισσότερα για τον Gauss από το να τον εισαγάγει στα μυστήρια της Άλγεβρας. Ο νεαρός δάσκαλος τον σύστησε σε μερικούς ανθρώπους που είχαν επιρροή στο Brunswick. Αυτοί με την σειρά τους, εντυπωσιασμένοι από την μεγαλοφυΐα του Gauss έθεσαν την περίπτωσή του στον Carl Wilchelm Ferdinard, τον Δούκα του Brunswick.

Ο Δούκας δέχτηκε για πρώτη φορά τον Gauss το 1791. Ο Gauss ήταν τότε δεκατεσσάρων χρόνων. Η μετριοφροσύνη του αγοριού και η αδέξια ντροπαλοσύνη του κέρδισαν την καρδιά του γενναιόδωρου Δούκα, ο οποίος του υποσχέθηκε ότι θα τον στήριζε να συνεχίσει την εκπαίδευσή του. Τον επόμενο χρόνο (Φεβρουάριος του 1792) ο Gauss γράφτηκε στο Collegium Carolinum στο Brunswick. Ο Δούκας πλήρωσε τα δίδακτρά του και συνέχισε να πληρώνει μέχρι που ολοκληρώθηκε η εκπαίδευση του Gauss.

Πριν εισέλθει στο κολλέγιο, σε ηλικία δεκαπέντε ετών, ο Gauss είχε μεγάλες προόδους στις κλασικές γλώσσες. Ο Δούκας έδωσε την οικονομική υποστήριξη για μια διετή επιμόρφωση στο Γυμνάσιο. Εκεί η εκτυφλωτική ικανότητα του Gauss στην εκμάθηση των κλασικών άφησε εμβρόντητους δασκάλους και μαθητές μαζί. Ο Gauss αισθανόταν μια δυνατή έλξη για τις φιλολογικές σπουδές, ευτυχώς όμως για την επιστήμη σύντομα αισθάνθηκε μια ακόμη δυνατότερη έλξη για τα Μαθηματικά.

Μπαίνοντας στο κολλέγιο ήταν ήδη κάτοχος των Λατινικών, στα οποία είναι γραμμένες πολλές από τις σπουδαιότερες εργασίες του.

Όταν ο Gauss άφηνε το κολλέγιο τον Οκτώβριο του 1795 στα δεκαοκτώ του χρόνια, για να μπει στο Πανεπιστήμιο του Gottingen, δεν είχε ακόμη αποφασίσει αν θα ακολουθούσε τα Μαθηματικά ή τη Φιλολογία. Η 30η Μαρτίου του 1796 αποτελεί σημείο καμπής στη σταδιοδρομία του Gauss. Εκείνη την ημέρα, ένα μήνα πριν μπει στα είκοσι, αποφάσισε οριστικά να ασχοληθεί με τα μαθηματικά. Η μελέτη των γλωσσών παρέμεινε το χόμπι του για μια ζωή, η φιλολογία όμως τον έχασε για πάντα. Τρία χρόνια έμεινε (Οκτώβριος 1795 – Σεπτέμβριος 1798) στο Πανεπιστήμιο του Gottingen, τα οποία υπήρξαν τα παραγωγικότερα στη ζωή του. Χάρη στη γενναιοδωρία του Δούκα, ο νεαρός άνδρας δεν ανησυχούσε για ζητήματα οικονομικής φύσεως. Απορροφήθηκε στη δουλειά του κάνοντας πολύ λίγους φίλους. Ένας από αυτούς ήταν ο Wolfang Bolyai - « το σπανιότερο πνεύμα που γνώρισα ποτέ», όπως τον περιέγραψε ο Gauss- επρόκειτο να μείνει φίλος του για μια ζωή. Οι ιδέες που είχαν κατακλύσει τον Gauss από τα δεκαεπτά του χρόνια είχαν τιθασευτεί και εν μέρει είχαν μπει σε τάξη. Από το 1795 σκεφτόταν ένα μεγάλο έργο στη θεωρία των αριθμών. Αυτό έπαιρνε τώρα συγκεκριμένη μορφή και έως το 1798 είχε πρακτικά ολοκληρωθεί. Στη συνέχεια ασχολήθηκε μόνο με τα έργα του προσφέροντας στα μαθηματικά πολύτιμους λίθους.

Ο Δούκας αύξησε το εισόδημα του νεαρού, επιτρέποντας του έτσι να παντρευτεί, τον Οκτώβριο του 1805 σε ηλικία είκοσι οκτώ ετών. Η κυρία ήταν η Johanne Osthof από το Brunswick. Γράφοντας στον παλιό του φίλο από το Πανεπιστήμιο, τον Wolfang Bolyai, τρεις μέρες μετά τον αρραβώνα του, ο Gauss εξέφραζε την απίστευτη ευτυχία του: «Η ζωή στέκει μπροστά μου σαν αιώνια άνοιξη με καινούρια και λαμπρά χρώματα». Τρία παιδιά προέκυψαν από τον γάμο του: ο Joseph , η Minna και ο Louis, το πρώτο από τα οποία λέγεται ότι κληρονόμησε το χάρισμα του πατέρα του για υπολογισμούς. Η γυναίκα του πέθανε στις 11 Οκτωβρίου του 1809 μετά την γέννηση του Louis, αφήνοντας σε μαύρη απελπισία τον νεαρό σύζυγό της. Αν και για χάρη των μικρών παιδιών του ξαναπαντρεύτηκε τον επόμενο χρόνο, στις 4 Αυγούστου του 1810, χρειάστηκε να περάσει πολύς χρόνος, πριν μπορέσει να μιλήσει χωρίς συγκίνηση για την πρώτη του γυναίκα. Με την δεύτερη γυναίκα του, την Minna Waldeck , η οποία ήταν στενή φίλη της πρώτης, αποκτήσανε δυο γιούς και μια κόρη.

Το 1808 ο Gauss έχασε τον πατέρα του. Δυο χρόνια πριν είχε υποστεί μια βαρύτερη απώλεια με τον θάνατο του ευεργέτη του κάτω από τραγικές περιστάσεις. Ο Δούκας πληγώθηκε θανάσιμα αντιμετωπίζοντας τους Γάλλους κατά την προέλασή τους προς το Saale. Με συγκίνηση υπερβολικά βαθειά για να εκφραστεί με λόγια, ο Gauss έβλεπε τον άνθρωπό που του είχε παρασταθεί περισσότερο από τον πατέρα του να πεθαίνει σαν κυνηγημένος. Τότε δεν είπε τίποτα, οι φίλοι του όμως πρόσεξαν πως κλείστηκε περισσότερο στον εαυτό του και η χαρακτηριστική σοβαρότητα του επιτάθηκε. Ο Δούκας πέθανε στο πατρικό του στην Αλτώνα στις 10 Νοεμβρίου του 1806.

Με τον γενναιόδωρο πάτρωνά του νεκρό, ο Gauss επειγόταν να εξασφαλίσει τα προς το ζην για την οικογένειά του. Αυτό δεν ήταν δύσκολο, καθώς η φήμη του είχε πια εξαπλωθεί στις πιο απομακρυσμένες γωνιές της Ευρώπης. Το 1807 του έγινε μια συγκεκριμένη και δελεαστική προσφορά. Ο Alexander von Humboldt και οι άλλοι ισχυροί φίλοι του δεν είχαν την διάθεση να δουν τη Γερμανία να χάνει τον μεγαλύτερο μαθηματικό του κόσμου, κινήθηκαν δραστήρια και ο Gauss τοποθετήθηκε διευθυντής του Παρατηρητηρίου του Gottingen, με το προνόμιο και την υποχρέωση, όταν ήταν απαραίτητο, να παραδίδει μαθήματα Μαθηματικών στους φοιτητές του Πανεπιστημίου. Εκεί έμεινε μέχρι το 1816.

Κατά την περίοδο 1821–1848 ο Gauss διετέλεσε επιστημονικός σύμβουλος των κυβερνήσεων του Αννόβερου και της Δανίας σε μια εκτεταμένη γεωδαιτική χωρομέτρηση. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι τα προβλήματα που σχετίζονταν με την ακριβή χωρομέτρηση ενός τμήματος της γήινης επιφάνειας αναμφίβολα έθεταν βαθύτερα και γενικότερα ζητήματα που είχαν να κάνουν με όλες τις καμπύλες επιφάνειες. Απότοκο αυτών των ερευνών θα ήταν τα μαθηματικά της Σχετικότητας. Ο Gauss όμως ήταν εκείνος που αντιμετώπισε το πρόβλημα σε όλη τη γενικότητα και με τις δικές του έρευνες ξεκίνησε η πρώτη μεγάλη πρόοδος της Διαφορικής Γεωμετρίας. Η Διαφορική Γεωμετρία μπορεί σε αδρές γραμμές να περιγραφεί ως η μελέτη των ιδιοτήτων των καμπυλών, των επιφανειών κ.λ.π., στην άμεση περιοχή ενός σημείου.

Ο Gauss εκτός από το χόμπι του να ασχολείται με τα μαθηματικά, είχε και άλλα ενδιαφέροντα χόμπι, όπως να μαθαίνει γλώσσες. Η ευκολία με την οποία ο Gauss μάθαινε γλώσσες όταν ήταν μικρός συνεχίστηκε σε όλη του τη ζωή. Για να ελέγχει την πλαστικότητα του μυαλού του καθώς γερνούσε μάθαινε επί τούτου μια ξένη γλώσσα. Η άσκηση πίστευε βοηθούσε το μυαλό του να παραμένει νεανικό. Το τρίτο του χόμπι ήταν η διεθνής πολιτική, στην οποία αφιέρωνε περίπου μια ώρα την ημέρα. Ήταν τακτικός επισκέπτης του λογοτεχνικού μουσείου, ενημερωνόταν για γεγονότα διαβάζοντας όλες τις εφημερίδες στις οποίες το μουσείο ήταν συνδρομητής, από τους Times του Λονδίνου μέχρι τις τοπικές του Gottingen.

Στην πολιτική, ο αριστοκράτης της διανόησης Gauss ήταν συντηρητικός, κατά κανένα όμως τρόπο αντιδραστικός. Η οχλοκρατία και οι πράξεις πολιτικής βίας τον έκαναν να αισθάνεται έναν απερίγραπτο τρόμο. Η Παρισινή εξέγερση του 1848 τον πλημμύρισε φόβο. Οι πιο ριζοσπάστες από τους φίλους του απέδιδαν τον συντηρητισμό του στην προσήλωσή του στη δουλειά.

Αν ο Gauss ήταν κάπως συντηρητικός στις τυπωμένες εκφράσεις εκτίμησης, υπήρξε μάλλον εγκάρδιος στην αλληλογραφία του και στις επιστημονικές του σχέσεις με εκείνους που επιζητούσαν την αμερόληπτη κρίση του. Μια από τις επιστημονικές του φιλίες ήταν με την δεσποινίδα Sophie Germain, μόλις ένα χρόνο μεγαλύτερη από τον Gauss. Τα επιστημονικά ενδιαφέροντα της Sophie περιελάμβαναν την Ακουστική, τη μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας και την ανώτερη Αριθμητική. Καταγοητευμένη από το έργο του Gauss έγραψε σε αυτόν ορισμένες από τις δικές της παρατηρήσεις πάνω στην Αριθμητική. Φοβούμενη όμως ότι ο Gauss θα ήταν προκατειλημμένος για τις γυναίκες χρησιμοποίησε ανδρικό ψευδώνυμο. Απαντώντας της ο Gauss στις 30 Απριλίου του 1807, την ευχαριστεί για την παρέμβασή της στη Γαλλική διοίκηση. Συνεχίζοντας, της κάνει μια μεγάλη φιλοφρόνηση και μιλά για την δική του μεγάλη αγάπη, την θεωρία των αριθμών. Όταν τελικά κατάλαβε ότι ο άνθρωπος με τον οποίο επικοινωνούσε ήταν άνδρας και όχι γυναίκα εντυπωσιάστηκε ακόμη περισσότερο και της έστειλε ένα γράμμα στο οποίο της περιέγραφε τον ενθουσιασμό και την έκπληξή του, βλέποντας αυτό τον αξιότιμο επιστολογράφο να μεταμορφώνεται σε αυτήν την επιφανή προσωπικότητα. Οι δυο τους δεν συναντήθηκαν ποτέ, εκείνη πέθανε (στο Παρίσι) προτού μπορέσει το Πανεπιστήμιο του Gottingen να της απονείμει τον τίτλο του επίτιμου διδάκτορα, κατόπιν συστάσεως του Gauss.

Τα τελευταία χρόνια της ζωής του ήταν γεμάτα τιμές και δόξες, όμως δεν ήταν τόσο ευτυχής όσο του άξιζε. Δυνατός στο μυαλό και παραγωγικός σε επινοήσεις όπως πάντα, ο Gauss δεν έδειχνε διάθεση να ξεκουραστεί όταν τα πρώτα συμπτώματα της τελευταίας του αρρώστιας εμφανίστηκαν μερικούς μήνες πριν πεθάνει. Η υγεία του επιδεινώθηκε αργά, και ο Gauss πέθανε στον ύπνο του νωρίς το πρωί της 23ης Φεβρουαρίου του 1855 σε ηλικία εβδομήντα οκτώ χρονών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Gauss σπούδασε στο Collegium Caroline για τρία χρόνια, στη διάρκεια των οποίων αφομοίωσε τις πιο σημαντικές εργασίες του Euler, του Lagrange και κυρίως το Νευτώνειο Principia. Την εποχή που ήταν ακόμη στο κολλέγιο, ο Gauss είχε ξεκινήσει εκείνες τις έρευνες στην ανώτερη Αριθμητική. Πειραματιζόμενος με τους αριθμούς, ανακάλυπτε με επαγωγικό τρόπο βαθειά γενικά θεωρήματα. Μ' αυτό τον τρόπο ανακάλυψε εκ νέου «το διαμάντι της αριθμητικής» το «theorema aureum», στο οποίο ο Euler είχε φτάσει επαγωγικά, και είναι γνωστό ως νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής, ο Gauss ήταν ο πρώτος που το απέδειξε. Η απλή ανακάλυψη ενός τέτοιου νόμου ήταν ένα αξιοσημείωτο κατόρθωμα. Το ότι αποδείχθηκε για πρώτη φορά από ένα δεκαεννιάχρονο αγόρι θα πείσει όποιον έχει επιχειρήσει να αποδείξει τον νόμο, πως ο Gauss ήταν ιδιοφυΐα στα Μαθηματικά.

Στις 30 Μαρτίου του 1796, την ημέρα που ο Gauss αποφάσισε οριστικά να ασχοληθεί με τα Μαθηματικά κα όχι με την Φιλολογία, άρχισε να κρατά το επιστημονικό του ημερολόγιο (Notizenjournal). Πρόκειται για ένα από τα πιο πολύτιμα ντοκουμέντα στην ιστορία των Μαθηματικών. Το ημερολόγιο κυκλοφόρησε στους επιστημονικούς κύκλους μόλις το 1898, σαράντα τρία χρόνια μετά τον θάνατο του Gauss. Αποτελείται από δεκαεννιά μικρές σελίδες ογδόου σχήματος και περιέχει 146 εξαιρετικά συνοπτικές διατυπώσεις ανακαλύψεων ή αποτελέσματα υπολογισμών όπου η τελευταία σημείωση χρονολογείται στις 9 Ιουλίου του 1814.

Από το 1795 ο Gauss είχε στο μυαλό του ένα μεγάλο έργο για την θεωρία των αριθμών, το οποίο τελειοποιήθηκε το 1798. Ο Gauss πέρασε το φθινόπωρο του 1798 (ήταν τότε στα είκοσι ένα του) στο Brunswick με περιστασιακά ταξίδια στο Helmstedt, βάζοντας τις τελευταίες πινελιές στο έργο αυτό το οποίο είχε τίτλο: *Αριθμητικές Έρευνες* (Disquisitiones). Σε ένδειξη ευγνωμοσύνης απέναντι στο Δούκα για ό,τι είχε κάνει γι' αυτόν, ο Gauss του αφιέρωσε το βιβλίο του *«Serenissimo Principi ac Domino Carolo Guilielmo Ferdinando»*.

Όταν ο μεγαλοφυής νέος άρχισε να ανησυχεί σοβαρά για το μέλλον του αφήνοντας το Gottingen και προσπάθησε ανεπιτυχώς να βρει μαθητές, ο Δούκας τον έβγαλε από την δυσκολία, πλήρωσε την εκτύπωση της διδακτορικής του διατριβής και του εξασφάλισε ένα μέσο εισόδημα, που θα του επέτρεπε να συνεχίσει την επιστημονική του εργασία ανεπηρέαστος από την φτώχεια.« Η καλοσύνη Σας», λέει ο Gauss στην αφιέρωσή του, «με απάλλαξε από όλες τις άλλες ευθύνες και μου επέτρεψε να ασχοληθώ αποκλειστικά με αυτήν».

Το 1799 ο Gauss έγραψε μια διατριβή για την οποία έλαβε τον τίτλο του διδάκτορα *in absentia* από το Πανεπιστήμιο του Helmstedt. Η διατριβή του αυτή είχε τον τίτλο: «Demonstratio nova theorematis omnen functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse», *«Μια νέα απόδειξη πως κάθε Ρητή Ακέραια Συνάρτηση μιας Μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε Πραγματικούς Παράγοντες Πρώτου ή Δευτέρου Βαθμού»*. Ο Gauss ήταν ο πρώτος που απέδειξε αυτό το θεώρημα.

Μια άλλη ισοδύναμη απόδειξη-διατύπωση του θεωρήματος, λέει πως κάθε αλγεβρική εξίσωση με έναν άγνωστο έχει μια ρίζα, έως ότου ξεκαθαριστεί το είδος της ρίζας που έχει η εξίσωση. Ο Gauss αποδεικνύοντας πως όλες οι ρίζες μιας αλγεβρικής εξίσωσης είναι «αριθμοί»του τύπου a +bi όπου a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και i είναι η τετραγωνική ρίζα του -1. Το νέο είδος «αριθμού»

$$a + bi$$

καλείται μιγαδικός αριθμός.

Ο Gauss έκρινε ότι το θεώρημα «κάθε αλγεβρική εξίσωση έχει ρίζα» είναι τόσο σημαντικό, ώστε έδωσε τέσσερις διαφορετικές αποδείξεις, την τελευταία όταν ήταν στα εβδομήντα του.

Το έργο του με τίτλο *Disquisitiones* ήταν το πρώτο από τα αριστουργήματα του Gauss και ίσως και το μεγαλύτερό του. Ήταν ο αποχαιρετισμός του στο αποκλειστικό ενδιαφέρον του για τα καθαρά Μαθηματικά. Μετά την δημοσίευση του έργου του το 1801 (ο Gauss ήταν τότε είκοσι τεσσάρων ετών) επεξέτεινε την δραστηριότητά του σε τομείς όπως η Αστρονομία, η γεωδαισία και ο ηλεκτρομαγνητισμός, τόσο στη μαθηματική όσο και στην πρακτική τους κατεύθυνση. Η Αριθμητική όμως ήταν η πρώτη του αγάπη και μετάνιωσε αργότερα που δεν είχε βρει ποτέ το χρόνο να γράψει τον δεύτερο τόμο, όπως σχεδίαζε όταν ήταν νέος. Το βιβλίο έχει επτά «τμήματα».

Η πρώτη πρόταση του προλόγου περιγράφει που αποβλέπει σε γενικές γραμμές το βιβλίο. «Οι έρευνες που περιέχονται σε αυτήν την εργασία ανήκουν σε εκείνο το μέρος των μαθηματικών που ασχολείται με τους ακέραιους αριθμούς και τα κλάσματα».

Τα τρία πρώτα τμήματα είναι αφιερωμένα στη θεωρία των ισοδυναμιών, και συγκεκριμένα στην εξαντλητική μελέτη της διωνυμικής ισοδυναμίας

$$X^n = A(\mathrm{mod}\ p),$$

Όπου οι n, A είναι οποιοιδήποτε δοσμένοι ακέραιοι και ο p είναι πρώτος, ο άγνωστος ακέραιος είναι ο χ.

Στο τέταρτο τμήμα ο Gauss αναπτύσσει τη θεωρία των τετραγωνικών υπολοίπων. Εδώ βρίσκεται η πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής.

Στο πέμπτο τμήμα εμφανίζεται η θεωρία των δυαδικών τετραγωνικών μορφών από την αριθμητική σκοπιά, και στη συνέχεια ακολουθεί μια πραγματεία των τριαδικών τετραγωνικών μορφών που βρέθηκε ότι ήταν απαραίτητες για την ολοκλήρωση της θεωρίας των δυαδικών.

Στο έκτο τμήμα εφαρμόζεται η προηγούμενη θεωρία σε διάφορες ειδικές περιπτώσεις, για παράδειγμα στις ακέραιες λύσεις χ, y της

$$Mx^2 + ny = A,$$

Όπου m, n, A δοθέντες ακέραιοι.

Στο έβδομο και τελευταίο τμήμα που πολλοί θεωρούν ως το κορυφαίο του έργου, ο Gauss εφαρμόζει τα προηγούμενα αποτελέσματα, ιδιαίτερα τη θεωρία των διωνυμικών ισοδυναμιών, σε μια θαυμάσια μελέτη της αλγεβρικής εξίσωσης $\chi^n = 1$ όπου ο n δοσμένος ακέραιος, συνυφαίνοντας την Αριθμητική, την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία σε ένα τέλειο πάντρεμα.

«Το Disquisitiones Arithmeticae έχει περάσει στην ιστορία», έλεγε ο Gauss στα γεράματά του, και είχε δίκιο. Μια νέα κατεύθυνση δόθηκε στην Ανώτερη Αριθμητική με την δημοσίευση αυτού του έργου, και η θεωρία των αριθμών απέκτησε συνοχή και αλληλουχία, κερδίζοντας μια αξιοσέβαστη θέση στα Μαθηματικά μαζί με την Άλγεβρα, την Ανάλυση και τη Γεωμετρία. Η ίδια εργασία είχε χαρακτηρισθεί ως « επτασφράγιστο βιβλίο».

Η χρονιά του 1811 θα μπορούσε να είναι σταθμός για τα Μαθηματικά, αν ο Gauss είχε φέρει στη δημοσιότητα μια ανακάλυψη που εμπιστεύτηκε στον Bessel. Έχοντας καταλάβει πλήρως τους μιγαδικούς αριθμούς και την γεωμετρική τους αναπαράσταση ως σημείων του επιπέδου της Αναλυτικής Γεωμετρίας, ο Gauss άρχισε να ασχολείται με την μελέτη αυτών που καλούνται σήμερα *αναλυτικές συναρτήσεις* τέτοιων αριθμών. Η θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής αποτέλεσε έναν από τους μεγαλύτερους θριάμβους του δέκατου ένατου αιώνα. Ο Gauss στο γράμμα του προς τον Bessel διατυπώνει αυτό που αποτελεί σήμερα το θεμελιώδες θεώρημα αυτής της τεράστιας θεωρίας. Δεν το δημοσίευσε όμως ποτέ, με συνέπεια να ανακαλυφθεί εκ νέου από τον Cauchy και αργότερα από τον Weierstrass. Το θεώρημα αυτό αποτελεί σταθμό στην ιστορία της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Το 1812, ήταν η χρονιά που δημοσιεύθηκε μια άλλη μεγάλη εργασία του Gauss, πάνω στην υπεργεωμετρική σειρά :

$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1)1x2}+\dots\dots\dots\dots$$

όπου οι τελείες σημαίνουν πως η σειρά συνεχίζεται απεριόριστα σύμφωνα με το νόμο που δηλώνεται. Ο επόμενος όρος είναι :

$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)x^3}{c(c+1)(c+2)1x2x3}$$

Πρόκειται για έναν ακόμη σταθμό. Όπως έχει ήδη σημειωθεί, ο Gauss υπήρξε ο πρώτος από τους σύγχρονους υποστηρικτές της αυστηρότητας στις μαθηματικές διαδικασίες. Σε αυτήν την εργασία καθόρισε τους περιορισμούς στους οποίους πρέπει να υπακούουν οι αριθμοί a, b, c, x για να συγκλίνει η σειρά. Η επιλογή μιας τέτοιας έρευνας που απαιτούσε σοβαρή προσπάθεια, είναι χαρακτηριστική του Gauss. Ποτέ δεν δημοσίευε τετριμένα πράγματα. Όταν έβγαινε κάτι στο φως, δεν ήταν μόνο ολοκληρωμένο αλλά και γεμάτο ιδέες ώστε οι διάδοχοί του να μπορούν να εφαρμόσουν αυτό που επινόησε σε νέα προβλήματα.

Με αφορμή τη θέση του ως επιστημονικός σύμβουλος των κυβερνήσεων του Αννόβερου σε μια εκτεταμένη γεωδαιτική χωρομέτρηση, ο Gauss ξεκίνησε να μελετά τις επιφάνειες. Τρία από τα προβλήματα με τα οποία καταπιάστηκε ο Gauss μελετώντας τις επιφάνειες, έδωσαν το έναυσμα για τη διατύπωση των γενικών θεωριών μεγάλης μαθηματικής και επιστημονικής σημασίας: η μέτρηση της *καμπυλότητας* , η θεωρία της *σύμμορφης αναπαράστασης* και το *εφαρμόσιμο* των επιφανειών.

Έτσι κλείνουμε αυτόν τον μακρύ–αλλά κάθε άλλο παρά πλήρη- κατάλογο των σπουδαιότερων πραγμάτων για τα οποία ο Gauss κέρδισε τον τίτλο του αναμφισβήτητα αδιαφιλονίκητου Πρίγκηπα των Μαθηματικών.

MARY FAIRFAX SOMERVILLE
(1780–1872)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Mary Fairfax Somerville γεννήθηκε στις 26 Δεκεμβρίου του 1780 στο Jedburgh της Σκωτίας. Η μητέρα της ήταν η Margaret Charterts και ο πατέρας της ο υπολοχαγός William George Fairfax, ο οποίος ήταν ναύαρχος στο βρετανικό ναυτικό. Η Mary μαζί με την μητέρα της συνόδευε τον πατέρα της στα ταξίδια του για μεγάλες χρονικές περιόδους.

Παρά την άνετη οικονομική κατάσταση της οικογένειας της η εκπαίδευση της Mary ήταν «πενιχρή και τυχαία». Η Mary μελέτησε την πρώτη απλή αριθμητική της σε ηλικία δεκατριών ετών. Τότε η μητέρα της αγόρασε ένα μικρό διαμέρισμα στο Εδιμβούργο για τους χειμωνιάτικους μήνες και έτσι γράφτηκε σε ένα σχολείο εκεί.

Το 1804, σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών, η Mary παντρεύτηκε τον εξάδελφό της Samnel Greig. Ο Greig ήταν καπετάνιος, ήταν μέλος του ρωσικού ναυτικού και δεν τον ενδιέφεραν καθόλου τα μαθηματικά, η επιστήμη που τόσο πολύ αγάπησε η σύζυγός του. Το γεγονός αυτό παρεμπόδισε αρκετά το έργο της. Το 1805, η Mary, γέννησε τον πρώτο της γιο Woronzow και το 1806 το δεύτερο γιο της William George. Το 1807, μετά από τρία χρόνια γάμου, ο σύζυγος της Mary πέθανε αφήνοντας την μόνη της με τους δυο γιούς της ηλικίας ενός και δύο ετών. Ο θάνατος του συζύγου της ήταν δύσκολος και τραγικός. Παρόλα αυτά, Η Mary διαπίστωσε ότι η χηρεία και η άνετη κληρονομιά του συζύγου της την είχαν αφήσει συναισθηματικά και οικονομικά ανεξάρτητη. Μη ελεγχόμενη πια είτε από τους γονείς της είτε από το σύζυγό της η Mary ήταν ελεύθερη να μελετήσει σύμφωνα με τις προσωπικές της πεποιθήσεις και επιθυμίες.

Εκπαιδεύτηκε στην Αστρονομία και μπήκε στο Πανεπιστήμιο Principia Issac Newton, παρά το γεγονός ότι πολλοί από την οικογένεια της και τους φίλους της δυσανασχέτησαν. Ο κύκλος των φίλων της στην επιστημονική κοινότητα ήταν περιορισμένος. Σχετιζόταν συχνά με τον Scotsman William ο οποίος ήταν μαθηματικός σε ένα στρατιωτικό κολλέγιο. Ακολουθώντας τις συμβουλές του η Mary απέκτησε μια μικρή βιβλιοθήκη των εργασιών της η οποία της παρείχε ένα υγιές υπόβαθρο στα μαθηματικά.

Το1812 ξαναπαντρεύτηκε έναν άλλο ξάδερφο της, τον Δρ Somerville ο οποίος ήταν χειρούργος στο βρετανικό ναυτικό. Ο Δρ Somerville ήταν πολύ ενθαρρυντικός για τις πνευματικές προσπάθειες της συζύγου του, παρά το γεγονός ότι η οικογένεια του επιθυμούσε να γίνει η Mary μια αξιοσέβαστη και χρήσιμη σύζυγος και να σταματήσει τις ανόητες κατ' αυτούς μελέτες της. Το ζεύγος απέκτησε τέσσερα παιδιά.

Με τον θάνατο του δεύτερου συζύγου της παρέμεινε με τον ένα της γιο και με τον πολύτιμο φίλο της Sir John Herchel. Η Mary, το 1871, έγραψε: «Λίγοι από τους πρώτους φίλους μου παραμένουν, τώρα έχω μείνει σχεδόν μόνη». Ακόμη και στα τελευταία χρόνια της ζωής της, παρόλο που ήταν κωφή και ευπαθής, διατηρούσε τις διανοητικές της ικανότητες και ην πνευματική της διαύγεια και συνέχισε να ισχυρίζεται: «Διαβάστε βιβλία της ανωτέρας άλγεβρας για τέσσερις ή πέντε ώρες το πρωί και μετά θα λυθούν τα προβλήματα». Η Mary απεβίωσε το 1872 στη Νάπολη, σε ηλικία ενενήντα δύο ετών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Η Mary Fairfax Somerville, το καλοκαίρι του 1825, όταν πραγματοποίησε τα πειράματα στον μαγνητισμό, άρχισε τις επιστημονικές της έρευνες. Το 1826, παρουσίασε την εργασία της με τίτλο *«Μαγνητικές ιδιότητες των ιωδών ακτίνων του* *ηλιακού φάσματος».* Η εργασία της αυτή ήταν η πρώτη από γυναίκα που διαβάστηκε στην Βασιλική Μαθηματική Εταιρία. Το 1827 η Mary, μέσω του συζύγου της, άρχισε την αλληλογραφία με τον Λόρδο Brougham, ο οποίος προσπάθησε να την πείσει να γράψει μια ελεύθερη απόδοση πάνω στην Mecanique του Laplace και την Principia του Newton. Ήλπισε ότι θα μπορούσε, μπροστά σε μεγάλο ακροατήριο να επικοινωνήσει με τις έννοιες αυτές μέσω των απλών απεικονίσεων και των πειραμάτων που οι περισσότεροι άνθρωποι θα μπορούσαν να καταλάβουν. Διατηρούσε όμως αμφιβολίες για τα προσόντα της. Παρόλα αυτά η Mary ανέλαβε το πρόγραμμα και βεβαίωσε ότι εάν αποτύγχανε, το χειρόγραφο θα καταστρεφόταν. Η Ουράνια Μηχανική ήταν μια μεγάλη επιτυχία, πιθανόν το πιο διάσημο των μαθηματικών έργων της. Για αναγνώριση της επιτυχίας της, οι θαυμαστές της από την Βασιλική Μαθηματική Εταιρία έφτιαξαν προς τιμήν της το πορτρέτο της το οποίο τοποθετήθηκε στην μεγάλη αίθουσα τους. Τώρα βρίσκεται στα γραφεία της Μαθηματικής Εταιρίας στο Λονδίνο.

Ενώ βρισκόταν στην Ευρώπη, για έντεκα μήνες 1832 -1833, συμπλήρωσε κατά ένα μεγάλο μέρος το δεύτερο βιβλίο της, το οποίο δημοσιεύθηκε το 1834. Το βιβλίο είχε τίτλο *«Η σύνδεση των φυσικών επιστημών»* και αναφερόταν στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων και των συνδέσεων μεταξύ των φυσικών επιστημών. Το 1835, η Mary και η Caroline Herchel εκλέχτηκαν στην Βασιλική Αστρονομική Εταιρία. Ήταν οι πρώτες γυναίκες που αναγνωρίστηκαν επισήμως ως μαθηματικοί. Της δόθηκε μια σύνταξη 200 λιβρών ανά έτος και έλαβαν τιμητικές αναγνωρίσεις και από άλλες διακεκριμένες επιστημονικές οργανώσεις.

Το 1848, σε ηλικία εξήντα οκτώ ετών, η Mary Fairfax Somerville, δημοσίευσε ένα ακόμη βιβλίο με τίτλο *«Φυσική Γεωγραφία».* Ήταν μια εργασία η οποία αποδείχθηκε να είναι άλλη μια επιτυχία της. Το βιβλίο της αυτό χρησιμοποιήθηκε ευρέως στα σχολεία και τα Πανεπιστήμια για τα επόμενα πενήντα έτη. Το 1869, όταν η Mary ήταν σε ηλικία ογδόντα εννιά ετών, δημοσιεύθηκε το τελευταίο επιστημονικό της βιβλίο με τίτλο *«Η μοριακή και μικροσκοπική επιστήμη».* Ήταν μια περίληψη των πιο πρόσφατων ανακαλύψεων στη Χημεία και την Φυσική. Το ίδιο έτος συμπλήρωσε την αυτοβιογραφία της, την οποία δημοσίευσε η κόρη της Μάρθα μετά τον θάνατό της.

SIMEON DENNIS POISSON

(1781–1840)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Simeon Dennis Poisson γεννήθηκε στις 21 Ιουνίου του 1781 στο Pithiviers. Ο πατέρας του ήταν μισθοφόρος στρατιώτης και όταν αποσύρθηκε από την ενεργό υπηρεσία του διορίστηκε σε μια μικρή διοικητική θέση στο χωριό του. Ο Simeon είχε πολλά αδέλφια αλλά δυστυχώς δεν κατάφεραν να επιζήσουν όλα. Και η υγεία του Simeon ήταν επίσης πολύ εύθραυστη. Η μητέρα του από φόβο μήπως το μικρό της παιδί πεθάνει, προσέλαβε μια νοσοκόμα για να το φροντίζει. Ο πατέρας του ασκούσε μεγάλη επιρροή στο γιο του, αφιέρωνε αρκετό χρόνο για να τον μάθει να διαβάζει και να γράφει. Κατά την διάρκεια της γαλλικής επανάστασης έγινε πρόεδρος της περιοχής Pithiviers, στην Κεντρική Γαλλία. Από την θέση αυτή μπορούσε να επηρεάσει την μελλοντική σταδιοδρομία του γιου του. Ο πατέρας Poisson αποφάσισε ότι το ιατρικό επάγγελμα θα παρείχε ένα ασφαλές μέλλον για το γιο του. Ο θείος του ήταν χειρούργος στο Fontainebleau και έτσι ο Simeon πήγε κοντά του ως μαθητευόμενος. Εντούτοις έγινε γρήγορα εμφανές ότι παρόλο που ήταν ταλαντούχο παιδί, δεν εκδήλωνε κανένα ενδιαφέρον για το ιατρικό επάγγελμα. Έτσι ο Poisson επέστρεψε σπίτι του χωρίς να έχει πετύχει το σκοπό του.

Το 1796, ο πατέρας Poisson έστειλε τον Simeon πίσω στο Fontainebleau για να γραφτεί στην Ecole Centrale. Αφ' ενός είχε παρουσιάσει μεγάλη έλλειψη χειρωνακτικής επιδεξιότητας και αφετέρου έδειξε ότι είχε πολύ μεγάλο ταλέντο στην εκμάθηση, και ειδικότερα στα μαθηματικά. Οι δάσκαλοι της Ecole Centrale ήταν εξαιρετικά εντυπωσιασμένοι και τον ενθάρρυναν να συμμετάσχει στις εισαγωγικές εξετάσεις προκειμένου να εισαχθεί στο Πολυτεχνείο, στο Παρίσι. Τελικά συμμετείχε σε αυτές τις εξετάσεις και απέδειξε στους καθηγητές του ότι, παρόλο που είχε έλλειψη στην βασική εκπαίδευση σε σχέση με τους υπόλοιπους νεαρούς που συμμετείχαν στις εξετάσεις, πέτυχε την κορυφαία θέση. Λίγοι άνθρωποι μπορούν να διακριθούν τόσο γρήγορα όσο ο Poisson. Όταν άρχισε να μελετά τα μαθηματικά, το 1798 στην Ecole Polytechnique αντιμετώπισε μια σειρά δύσκολων μαθημάτων. Κατάφερε όμως να ξεπεράσει όλες τις δυσκολίες παρά τις ελλείψεις της βάσιμης εκπαίδευσής του. Οι καθηγητές του Laplace και Lagrange διέκριναν γρήγορα τα μαθηματικά του προσόντα. Έγιναν φίλοι με τον εξαιρετικά ικανό σπουδαστή τους και τον υποστήριξαν με ποικίλους τρόπους. Ο Poisson διαπίστωσε ότι η περιγραφική γεωμετρία ήταν ένα σημαντικό θέμα στην Ecole Polytechnique και κατάλαβε ότι του ήταν δύσκολο να το πετύχει λόγω της ανικανότητάς του να σχεδιάσει διαγράμματα. Αυτό θα ήταν ένα αξεπέραστο εμπόδιο γι' αυτόν αν θα πήγαινε σε δημόσιες υπηρεσίες, αλλά για αυτούς που στοχεύουν σε μια σταδιοδρομία στη καθαρή (θεωρητικής κατεύθυνσης) επιστήμη δεν είναι απαραίτητο εφόδιο.

Στο τελευταίο έτος της σχολής του έγραψε ένα σύγγραμμα για την θεωρία των εξισώσεων και για το θεώρημα Bezout's. Το σύγγραμμά του ήταν τέτοιας ποιότητας που πήρε τον βαθμό χωρίς να δώσει τελικές εξετάσεις. Έτσι πήρε αμέσως την θέση του αναπληρωτή στην Ecole Polytechnique. Ήταν αρκετά ασυνήθιστο για τον καθένα να κερδίζει την πρώτη του θέση στο Παρίσι. Το 1802 ξεκίνησε να εργάζεται ως αναπληρωτής καθηγητής στο Πολυτεχνείο, μια θέση που παρέμεινε μέχρι το 1806 όπου και διορίστηκε στην καθηγεσία του ιδρύματος, η οποία ήταν μια θέση που είχε εγκαταλείψει ο Fourier. Ο Fourier είχε σταλθεί από τον Napoleon στην Γκρενόμπλ.

Ο Poisson έκανε πολλές ενέργειες προκειμένου να υποστηρίξει τα μαθηματικά, την επιστήμη, την εκπαίδευση και το Πολυτεχνείο στο οποίο εργαζόταν. Όταν οι σπουδαστές του πολυτεχνείου ήταν έτοιμοι να κάνουν επίθεση για τις ιδέες του Ναπολέοντα για μεγάλη αυτοκρατορία το 1804, ο Poisson είχε κατορθώσει να τους σταματήσει, όχι επειδή συμφωνούσε με τις απόψεις του Ναπολέοντα αλλά επειδή πίστευε ότι οι σπουδαστές με αυτές τους τις ενέργειες θα έβλαπταν το ίδρυμα. Τα κίνητρα του Poisson δεν έγιναν κατανοητά από την κυβέρνηση του Ναπολέοντα.

Το 1817 ο Poisson παντρεύτηκε την Nancy de Bardi και διαπίστωσε ότι η οικογενειακή ζωή ασκούσε πίεση σε αυτόν αναγκάζοντας τον να αναλαμβάνει περισσότερα καθήκοντα.

Ο Poisson πέθανε στις 25 Απριλίου του 1840 σε ηλικία 59 ετών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Poisson μελέτησε τα προβλήματα σχετικά με τις συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις και τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ειδικότερα μελέτησε τις εφαρμογές σε διάφορα φυσικά προβλήματα όπως είναι το εκκρεμές σ ένα μέσο αντίστασης και η θεωρία του ήχου. Οι μελέτες του ήταν καθαρά θεωρητικές διότι όπως έχουμε προαναφέρει ήταν αδέξιος με τα χέρια του. Το 1806 έγινε η πρώτη προσπάθεια, για μια θέση στο τμήμα μαθηματικών στο ίδρυμα, για τον Poisson, την οποία υποστήριξαν ο Lagrange, ο Laplace, ο Lacroix, ο Legendre και ο Biot. Νόμιζαν ότι αφού ο Bossut ήταν 76 ετών, δεν θα αργούσε να πεθάνει και ο Poisson θα έπαιρνε την θέση του. Ο Bossut όμως έζησε για άλλα επτά έτη και έτσι δεν υπήρχε καμιά θέση στο τμήμα μαθηματικών για τον Poisson.

Εντούτοις, το 1808 κέρδισε την καθηγεσία στην Ecole Polytechnique και έγινε αστρονόμος του Bureau des Longitudes. Το 1809 διορίστηκε ως μηχανικός. Το 1808 και το 1809 ο Poisson δημοσίευσε τρία σημαντικά έργα στην Ακαδημία Επιστημών. Στα έργα αυτά εξέταζε τα μαθηματικά προβλήματα για τις διαταραχές τις κίνησης των πλανητών που είχαν θίξει ο Laplace και ο Lagrange. Το 1809 δημοσίευσε δύο έργα, το πρώτο ήταν το *«Sur le mouvement de rotation de la terre»* και το δεύτερο ήταν το *«Sur la variation des constants arbitraires dans les questions de mecanique»* τα οποία ήταν μια άμεση συνέπεια των μεθόδων Lagrange στον προσδιορισμό των αυθαιρέτων σταθερών. Επιπλέον δημοσίευσε μια νέα έκδοση του Clairaut's *Theorie de la figure de la terre*. Η εργασία ήταν δημοσιευμένη αρχικά από τον Clairaut το 1743 και επιβεβαίωσε την Newton–Huygens πεποίθηση ότι η γη ισιώθηκε στους πόλους είναι επίτευγμα.

Ο Malus ήταν γνωστό ότι έπασχε από ανίατη ασθένεια. Ο θάνατός του θα άφηνε ένα κενό στο τμήμα Φυσικής του ιδρύματος. Οι μαθηματικοί στόχευαν να αναπληρωθεί το κενό αυτό με τον Poisson και έθεσαν ως θέμα για τα Grand Prix την ηλεκτρική ενέργεια ώστε να μεγιστοποιηθούν οι πιθανότητες να πάρει την θέση ο Poisson. Το θέμα για το βραβείο ήταν το ακόλουθο: Να καθοριστεί ο υπολογισμός και να επιβεβαιωθεί με πειράματα ο τρόπος με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια διανέμεται στην επιφάνεια των ηλεκτρικών οργάνων είτε μεμονωμένα είτε ο ένας παρουσία του άλλου, για παράδειγμα στην επιφάνεια δυο ηλεκτρισμένων σφαιρών, η μια παρουσία της άλλης. Προκειμένου να απλοποιηθεί το πρόβλημα θεώρησαν δεδομένο ότι η ηλεκτρική ενέργεια που διαδίδεται σε κάθε επιφάνεια είναι του ίδιου είδους. Ο Poisson είχε σημειώσει σημαντική πρόοδο με το πρόβλημα πριν πεθάνει ο Malus στις 24 Φεβρουαρίου1812.

Το 1813 ο Poisson μελέτησε την δυνατότητα έλξης στο εσωτερικό των μαζών. Τα αποτελέσματα της μελέτης θα έβρισκαν εφαρμογή στην ηλεκτροστατική. Παρήγαγε επίσης σημαντική εργασία για την ηλεκτρική ενέργεια και τον μαγνητισμό καθώς και για τις ελαστικές επιφάνειες. Στην συνέχεια τα έργα του αναφέρονταν στην ταχύτητα του ήχου, στην διάδοση της θερμότητας και στις ελαστικές δονήσεις. Το 1815 ο Poisson έγινε εξεταστής στην Ecole Militaire και το επόμενο έτος έγινε εξεταστής για τις τελικές εξετάσεις στην Ecole Polytechnique. Το ίδιο έτος δημοσίευσε μια εργασία για την θερμότητα που ενόχλησε τον Fourier. O Fourier δημιούργησε έγκυρες ενστάσεις για τα επιχειρήματα του Poisson, τα οποία διόρθωσε στα πιο πρόσφατα απομνημονεύματα του 1820 και 1821.

Το 1823 ο Poisson δημοσίευσε μια εργασία του που αναφερόταν στην θερμότητα, τα αποτελέσματα της οποίας επηρέασαν τον Sadi Carnot. Ένα μεγάλο μέρος του έργου του Poisson παρακινήθηκε από τα έργα του Laplace, ειδικότερα η εργασία του για την σχετική ταχύτητα του ήχου και για τις ελκτικές δυνάμεις.

Το όνομα του Poisson είναι συνδεμένο με μια ευρεία ποικιλία ιδεών όπως για παράδειγμα ολοκλήρωμα Poisson, εξίσωση Poisson στην πιθανή θεωρία, μέθοδος Poisson στις διαφορικές εξισώσεις, αναλογία Poisson στην ελαστικότητα και σταθερά Poisson στην ηλεκτρική ενέργεια. Εντούτοις, δεν εκτιμήθηκε ιδιαίτερα σε σχέση με άλλους Γάλλους μαθηματικούς είτε κατά την διάρκεια της ζωής του είτε μετά το θάνατο του. Ο Poisson αφιερώθηκε εξ ολοκλήρου στα Μαθηματικά. Ο Poisson συχνά έλεγε: «Η ζωή είναι καλή για μόνο δυο πράγματα, να ανακαλύπτεις τα μαθηματικά και να διδάσκεις τα μαθηματικά».

JEAN–VICTOR PONCELET

(1788–1867)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Jean–Victor Poncelet γεννήθηκε την 1η Ιουλίου του 1788. Υπηρέτησε στο Γαλλικό Στρατό ως νεαρός αξιωματικός του μηχανικού. Στη συνέχεια μπήκε στην Ecole Polytechnique στο Παρίσι και αργότερα στη Στρατιωτική Ακαδημία στο Metz. Ως αιχμάλωτος πολέμου, ο νεαρός αξιωματικός υποχρεώθηκε σε πορεία πέντε μηνών διασχίζοντας παγωμένες εκτάσεις, έχοντας για ρούχα τα κουρέλια της στολής του και τρώγοντας μια ισχνή μερίδα μαύρο ψωμί. Το δριμύ ψύχος που επικρατούσε και οι άθλιες συνθήκες έστειλαν στον άλλο κόσμο πολλούς από του συντρόφους του Poncelet. Ο ίδιος όμως, χάρη στη γερή κράση του, άντεξε και το Μάρτιο του 1813 μπήκε στη φυλακή του Saratov στις όχθες του Βόλγα.

Τις πρώτες εβδομάδες δεν είχε δυνάμεις για να σκεφτεί. Όταν όμως «ο υπέροχος Απριλιάτικος ήλιος» του ξανάδωσε τη ζωντάνια του, θυμήθηκε πως είχε καλή μαθηματική παιδεία και, για να μαλακώσει τη σκληρότητα της εξορίας, αποφάσισε να αναπαράγει όσα περισσότερα μπορούσε από αυτά που είχε μάθει. Έτσι ήταν που δημιούργησε την προβολική γεωμετρία. Χωρίς βιβλία και με ανεπαρκέστατα μέσα για γράψιμο στην αρχή, αναπαρήγαγε όλα όσα είχε μάθει στα Μαθηματικά, από την αριθμητική μέχρι την ανώτερη γεωμετρία και τον Λογισμό. Σύμφωνα με κάποιο θρύλο, στην αρχή ο Poncelet διέθετε μόνο κομμάτια από ξυλάνθρακα, τα οποία έπαιρνε από το μαγκάλι του που τον βοηθούσε να μην ξεπαγιάσει, και μ' αυτά σχημάτιζε τα διαγράμματά του στον τοίχο του κελιού του. Ο ίδιος αναφέρει την ενδιαφέρουσα παρατήρηση ότι σχεδόν όλες οι λεπτομέρειες και οι περίπλοκες μαθηματικές διαδικασίες που είχε διδαχθεί στο σχολείο είχαν εξαφανιστεί, ενώ οι γενικές, θεμελιώδεις αρχές διατηρούνταν στη μνήμη του ολοκάθαρες. Το ίδιο ίσχυε για τη Φυσική και τη Μηχανική.

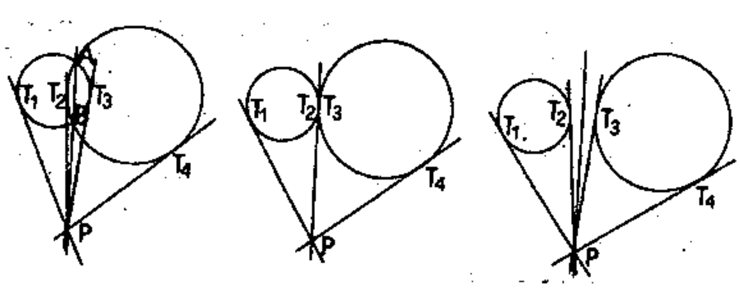
Μετά από μια σειρά από μεγάλες και σημαντικές συνεισφορές στα Μαθηματικά, ο Poncelet, πέθανε στο Παρίσι στις 23 Δεκεμβρίου του 1867 σε ηλικία εβδομήντα εννέα ετών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Στη διάρκεια της φυλάκισής του, ο Poncelet, είχε γράψει μια μελέτη για την αναλυτική γεωμετρία. Το έργο του με τίτλο: Application d' analyse et de geometrie βασιζόταν στις αρχές που είχε διδαχθεί ο Poncelet στην Ecole Polytechnique. Το έργο αυτό όμως δεν δημοσιεύθηκε παρά μόνον πενήντα χρόνια αργότερα, το 1862, παρά το γεγονός ότι ο συγγραφέας του το προόριζε να είναι εισαγωγή στο πολύ πιο διάσημο έργο του με τίτλο *«Traite des proprietes projectives des figures»*, το οποίο δημοσιεύθηκε το 1822. Στον πρόλογό του ο Poncelet ανατρέχει στις εμπειρίες του κατά την καταστροφική υποχώρηση από τη Μόσχα.

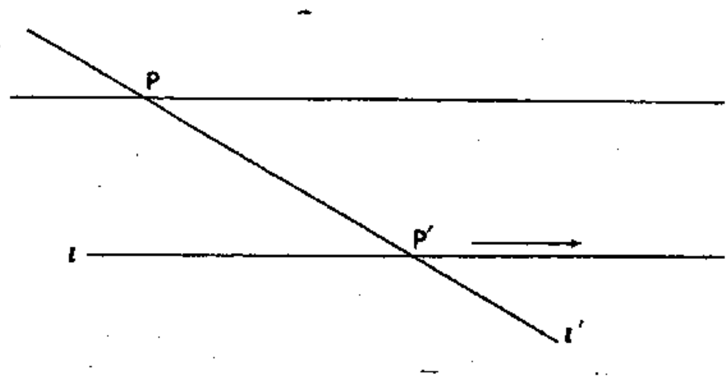
Τον Σεπτέμβριο του 1814, ο Poncelet επέστρεψε στη Γαλλία φέρνοντας μαζί του «το υλικό επτά χειρόγραφων σημειωματαρίων γραμμένων στο Saratov στις φυλακές της Ρωσίας (1813 - 1814), μαζί με διάφορα άλλα γραπτά παλιά και καινούρια», όπου στη νεαρή ηλικία των είκοσι τεσσάρων χρόνων, έδινε στη προβολική γεωμετρία τη μεγαλύτερή της ώθηση. Η πρώτη έκδοση του κλασικού του έργου έγινε το 1822. Δεν περιείχε την απολογία για τη ζωή του, στάθηκε όμως η αφετηρία για μια τεράστια ώθηση στον δέκατο ένατο αιώνα της προβολικής γεωμετρίας, της σύγχρονης συνθετικής γεωμετρίας γενικότερα και της γεωμετρικής ερμηνείας των «φανταστικών αριθμών»που εμφανίζονται σε αλγεβρικούς χειρισμούς, φτάνοντας σε γεωμετρικές ερμηνείες που τους παρουσιάζουν ως «ιδεώδη» στοιχεία του χώρου. Πρότεινε επίσης την πανίσχυρη «αρχή της συνέχειας» η οποία απλοποίησε πολύ την μελέτη των γεωμετρικών διατάξεων με το να ενοποιήσει φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους ιδιότητες των σχημάτων σε ομοιόμορφες, αυτοτελείς και ολοκληρωμένες οντότητες. Στην κλασική πραγματεία γινόταν επίσης πλήρης χρήση της δημιουργικής «αρχής του δυισμού» και εισαγωγή της μεθόδου της «αμοιβαιότητας» που επινόησε ο ίδιος ο Poncelet.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα όπλα που είτε επινόησε είτε ξανασχεδίασε ο Poncelet για την κατάκτηση της προβολικής Γεωμετρίας. Πρώτα υπάρχει «η αρχή της συνέχειας», η οποία αναφέρεται στην διατήρηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων καθώς ένα σχήμα απεικονίζεται, με προβολή ή με άλλο τρόπο, σε ένα άλλο σχήμα. Προειδοποιώντας πως η αρχή είναι μεγάλης ευρετικής αξίας αλλά δεν δίνει πάντα από μόνη της τις αποδείξεις των θεωρημάτων που αποδεικνύει, μπορούμε να αντιληφθούμε το περιεχόμενο της από μερικά απλά παραδείγματα:



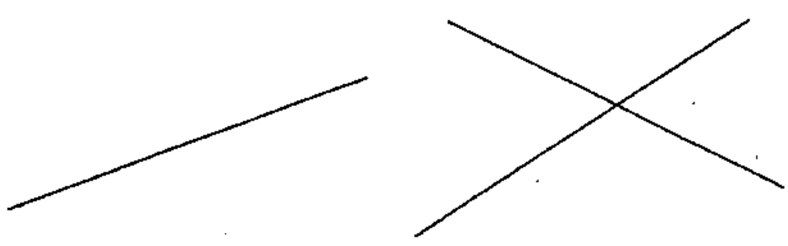
Φανταστείτε δύο τεμνόμενους κύκλους. Ας πούμε τέμνονται στα σημεία A και B. Ενώστε το A και το B με μια ευθεία γραμμή. Τώρα φανταστείτε τους δυο αυτούς κύκλους να απομακρύνονται σιγά σιγά. Η κοινή χορδή AB γίνεται κάποια στιγμή η κοινή εφαπτομένη των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους. Αν P είναι τυχαίο σημείο της κοινής χορδής, τέσσερις εφαπτόμενες μπορούν να προέλθουν από αυτό το σημείο προς τους δυο κύκλους. Συνοψίζοντας σε γεωμετρική γλώσσα λέμε ότι: ο γεωμετρικός τόπος ενός σημείου P που κινείται έτσι ώστε για κάθε θέση του τα μήκη των τεσσάρων εφαπτόμενων τμημάτων από αυτό προς δύο τεμνόμενους κύκλους να είναι ίσα, είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων.

Μια άλλη σπουδαιότερη εκδήλωση της αρχής αυτής δίνεται από τις παράλληλες ευθείες. Φανταστείτε μια ευθεία I και ένα σημείο P εκτός της I. Σύρετε μια ευθεία I΄ που περνά από το P και τέμνει την I στο P΄ και φανταστείτε την I΄ να στρέφεται γύρω από το P έτσι ώστε το P να κινείται πάνω στην I. Πότε σταματά η κίνηση του P; Λέμε πως σταματά όταν οι ευθείες I και I΄ γίνονται παράλληλες ή αλλιώς όταν το σημείο τομής P΄ είναι στο άπειρο.



Με ανάλογο τρόπο τα ορατά πεπερασμένα τμήματα των ευθειών, του επιπέδου και του τριδιάστατου χώρου εμπλουτίζονται με την προσθήκη των «ιδεωδών» σημείων, ευθειών, επιπέδων, ή «περιοχών» στο άπειρο. Κάθε ευθεία στο προβολικό επίπεδο θεωρείται ότι περιέχει ένα ιδεώδες σημείο στο άπειρο.

Εκτός από την «αρχή της συνέχειας» ο Poncelet επινόησε, όπως έχουμε προαναφέρει, την «αρχή του δυισμού» η οποία λέει: Όλες οι προτάσεις της επίπεδης προβολικής γεωμετρίας παρουσιάζονται σε δυικά ζεύγη, έτσι ώστε από πρόταση ενός συγκεκριμένου ζεύγους, μπορεί να συναχθεί αμέσως άλλη, με εναλλαγή των ρόλων που παίζουν οι λέξεις σημείο και ευθεία.



Δύο διακεκριμένα σημεία είναι πάνω σε μία και μόνο μία γραμμή.

Δυό διακεκριμένες ευθείες είναι πάνω σε ένα και μόνο σημείο.

Στην προβολική γεωμετρία ο Poncelet εκμεταλεύτηκε αυτήν την αρχή στο έπακρο. Σχεδόν όποιο βιβλίο κι αν ανοίξουμε στην τύχη, θα δούμε σελίδες με προτάσεις τυπωμένες σε διπλές στήλες, μια επινόηση του Poncelet. Οι αντίστοιχες προτάσεις στις δυο στήλες είναι δυικές μεταξύ τους, αν η μία έχει αποδειχθεί, είναι περιττή η απόδειξη της άλλης, μια και έρχεται ως συνέπεια της αρχής του δυισμού. Έτσι η γεωμετρία διπλασιάζεται με μια κίνηση, χωρίς την καταβολή πρόσθετης προσπάθειας.

AUGUSTIN–LOUIS GAUCHY

(1789-1857)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Augustin–Louis Gauchy, ο πρώτος από τους μεγάλους Γάλλους Μαθηματικούς του οποίου η σκέψη ανήκει απόλυτα στη σύγχρονη εποχή, γεννήθηκε στο Παρίσι στις 21 Αυγούστου του 1789, κάτι λιγότερο από έξι βδομάδες μετά την πτώση της Βαστίλης. Παιδί της Επανάστασης, πλήρωνε τον φόρο του στην ελευθερία και την ισότητα μεγαλώνοντας σε συνθήκες υποσιτισμού. Καταφέρνοντας να επιζήσει της Τρομοκρατίας, αποφοίτησε από την Ecole Polytechnique για να μπει στην υπηρεσία του Ναπολέοντα.

Αν οι επαναστάσεις όντως επηρεάζουν το έργο ενός επιστήμονα, ο Gauchy θα μπορούσε να είναι η περίπτωση που το αποδεικνύει. Τον διέκρινε μια εξαιρετική γονιμότητα σε μαθηματικές επινοήσεις, που είχε ξεπεραστεί δύο φορές μόνο (από τον Euler και τον Cayley). Το έργο του, όπως και η εποχή του, ήταν επαναστατικό.

Ο Augustin ήταν μεγαλύτερος από τα έξι αδέρφια. Πήρε τέτοιες αρχές από τους γονείς του που έγινε μεγάλος υποστηρικτής του Γαλλικού Καθολικισμού στο 1830 και 1840, όταν η εκκλησία είχε περάσει στην άμυνα. Ο Gauchy υπέφερε πολύ για την πίστη του.

Τα παιδικά του χρόνια συνέπεσαν με την αιματηρότερη περίοδο της Επανάστασης. Τα σχολεία ήταν κλειστά. Για να γλιτώσουν από τους προφανείς κινδύνους, ο πατέρας του πήρε την οικογένειά του και πήγε στο χωριό του στο Arcueil. Εκεί, σε συνθήκες πείνας και διατρέφοντας την γυναίκα του και τον γιο του με λίγα φρούτα και λαχανικά που μπορούσε να καλλιεργήσει, περίμενε να περάσει η Τρομοκρατία. Αυτό είχε σαν συνέπεια ο Gauchy να μην μπορέσει να αναπτυχθεί φυσιολογικά. Μόλις στα είκοσί του χρόνια άρχισε να ξεπερνά τις συνέπειες της κακής διατροφής των πρώτων χρόνων και σε όλη του τη ζωή έπρεπε να προσέχει ιδιαίτερα την υγεία του.

Αυτή η απομόνωση, που σιγά σιγά γινόταν λιγότερο αυστηρή, κράτησε σχεδόν έντεκα χρόνια, με τον πατέρα του να έχει αναλάβει όλο αυτό το διάστημα την εκπαίδευση των παιδιών του. Έγραφε δικά του εγχειρίδια, πολλά σε έμμετρο λόγο όπου είχε και ευχέρεια.

Ο νεαρός Gauchy απέκτησε έτσι την ανεξέλεγκτη ικανότητά του τόσο στον Γαλλικό όσο και στον Λατινικό έμμετρο λόγο, τον οποίο καλλιεργούσε σε όλη του τη ζωή.

Το Arcueil γειτόνευε με τα κτήματα του Μαρκησίου Laplace και του Κόμη Claude–Louis Berthollet. Ο Berthollet δεν έβγαινε ποτέ έξω. Ο Laplace ήταν περισσότερος κοινωνικός και άρχισε να συχνάζει στο σπίτι του Gauchy. Εκεί του έκανε εντύπωση το θέμα του νεαρού ο οποίος μη μπορώντας να έχει την ζωή ενός παιδιού με φυσιολογική ανάπτυξη, μελετούσε με εμφανή ευχαρίστηση τα βιβλία του. Σύντομα ο Laplace ανακάλυψε πως το αγόρι διέθετε ένα μοναδικό μαθηματικό ταλέντο και τον συμβούλεψε να το καλλιεργήσει.

Αφού έκανε ό,τι μπορούσε για αυτόν, ο Gauchy μπήκε στο Κεντρικό Σχολείο του Pantheon περίπου στα δεκατρία του. Από την αρχή ο Gauchy ήταν το αστέρι του σχολείου, κερδίζοντας το πρώτο βραβείο στα Λατινικά. Αφήνοντας το σχολείο το 1804, κέρδισε το μεγάλο βραβείο και ένα ειδικό βραβείο στις ανθρωπιστικές σπουδές.

Τους επόμενους δέκα μήνες μελετούσε εντατικά μαθηματικά υπό την επίβλεψη ενός καλού φροντιστή, και το 1805 σε ηλικία δεκαέξι ετών πέρασε πρώτος στην Polytechnique.

Από την Polytechnique ο Gauchy πέρασε στην Σχολή των Πολιτικών Μηχανικών (Κατασκευές γεφυρών και οδοστρωμάτων) το 1807. Αν και μόλις δεκαοχτώ χρονών, εύκολα συναγωνιζόταν με επιτυχία νεαρούς εικοσάρηδες οι οποίοι είχαν δύο χρόνια στη σχολή και γρήγορα ξεχώρισε για την ιδιαίτερα καλή επίδοσή του.

Ο Ναπολέοντας στόχευε σε μία εισβολή στη Αγγλία και έπρεπε να φτιάξει ένα ισχυρό στόλο που σημαίνει και την κατασκευή λιμανιών και οχυρώσεων για την υπεράσπιση του στόλου αυτού. Γι' αυτό πήγαινε ο προικισμένος νεαρός Gauchy στο Χερβούργο: για να γίνει ένας μεγάλος μηχανικός του στρατού.

Ο Gauchy έμεινε για μια τριετία περίπου στο Χερβούργο. Αξιοποίησε σωστά όσο ελεύθερο χρόνο του άφηναν οι πολλές υποχρεώσεις του και έτσι έβρισκε χρόνο για έρευνα. Πέρα από όλα αυτά, ο εκπληκτικός νεαρός εύρισκε χρόνο να καθοδηγεί άλλους που τον εκλιπαρούσαν να τους κάνει μαθήματα για να εξελιχθούν στο επάγγελμά τους και έφτασε ακόμη στο σημείο να συνδράμει τον δήμαρχο του Χερβούργου στη διεξαγωγή των σχολικών εξετάσεων. Έτσι έμαθε να διδάσκει.

Ο Gauchy επέστρεψε στο Παρίσι το 1813 εξαντλημένος από την υπερβολική δουλειά. Ήταν τότε μόνο είκοσι τεσσάρων χρονών, είχε όμως ήδη τραβήξει την προσοχή των κορυφαίων μαθηματικών της Γαλλίας με τις εξαιρετικές έρευνές του, ιδιαίτερα πάνω στα πολύεδρα και με εκείνη πάνω στις συμμετρικές συναρτήσεις.

Μέχρι τα είκοσι επτά του χρόνια (1816) ο Gauchy είχε ανέλθει στην πρώτη γραμμή των ζώντων μαθηματικών. Ο μόνος σοβαρός του αντίπαλος ήταν ο αθόρυβος Gauss, δώδεκα χρόνια μεγαλύτερός του. Την ίδια χρονιά πήρε το Μεγάλο Βραβείο της Ακαδημίας για μια «θεωρία διάδοσης κυμάτων στην επιφάνεια βαρέως ρευστού απεριόριστου βάθους». Η εργασία αυτή όταν τυπώθηκε ξεπέρασε τις 300 σελίδες. Στα είκοσι επτά του είχε βάλει πλώρη για να γίνει μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών, κάτι το εξαιρετικά ασυνήθιστο για ένα τόσο νέο, μαθηματικό. Η δημοτικότητά του έφτασε στο υψηλότερο σημείο της.

Το 1816 ο Gauchy ήταν έτοιμος να εκλεγεί, αλλά δεν υπήρχαν θέσεις. Η θέση βρέθηκε όταν ο Monge εκδιώχθηκε. Τιμητικές και σημαντικές θέσεις προσφέρθηκαν τώρα στον Gauchy, πριν ακόμη κλείσει τα τριάντα. Από το 1815 παράδιδε μαθήματα Ανάλυσης στη Polytechnique. Τώρα έγινε καθηγητής και διορίστηκε επίσης στο College de France και στη Σορβόννη. Η μαθηματική του δραστηριότητα ήταν απίστευτη, μερικές φορές παραδίδονταν στην Ακαδημία δυο μεγάλα άρθρα σε μια βδομάδα. Εκτός από τη δική του έρευνα , έκανε αναρίθμητες κριτικές αναφορές στις εργασίες άλλων που υποβάλλονταν στην Ακαδημία και εύρισκε χρόνο για μια συνεχή σχεδόν παραγωγή σύντομων άρθρων πάνω σε όλους περίπου τους κλάδους των Μαθηματικών, καθαρών και εφαρμοσμένων.

Το 1818 παντρεύτηκε την Aloise de Bure, έζησε μαζί της για σαράντα χρόνια και απέκτησαν δύο κόρες. Η γυναίκα του ήταν το ίδιο φανατική Καθολική όπως και αυτός.

Η παραγωγικότητα του Gauchy ήταν τόσο εκπληκτική ώστε χρειάστηκε να καταφύγει στη δημιουργία ενός περιοδικού, του *Exercises de Mathematiques* (1826-1830),που συνεχίστηκε σε μια δεύτερη σειρά, *την Exercises d'Analyse Mathematique de Physique*, για τη δημοσίευση αποκλειστικά δικών του επεξηγηματικών ή πρωτότυπων εργασιών, στα καθαρά και εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Το 1830 η επανάσταση εκθρόνισε τον Βασιλιά Κάρολο του οποίου ένθερμος υποστηρικτής ήταν και ο Gauchy, ο οποίος οικειοθελώς εγκατέλειψε όλα τα πόστα του και πήγε στην εκούσια εξορία. Χωρίς να αφήσει την θέση του στην Ακαδημία πήγε στην Ελβετία όπου και αφοσιώθηκε στην έρευνα. Δεν ζήτησε καμία χάρη από τον Κάρολο. Όταν όμως ο Βασιλιάς της Σαρδηνίας έμαθε πως ο Gauchy ήταν χωρίς δουλειά του πρόσφερε μία θέση καθηγητή της Μαθηματικής Φυσικής στο Τορίνο. Επίσης επιφορτίσθηκε με το δύσκολο έργο να εκπαιδεύσει τον γιο του Καρόλου. Παρά την συνεχή παρακολούθηση του μαθητή του, ο Gauchy κατάφερε να διατηρήσει την επαφή του με τα Μαθηματικά, καταφεύγοντας στους ιδιωτικούς του χώρους να γράψει ένα τύπο ή στα γρήγορα μία παράγραφο.

Ο Gauchy άφησε πίσω του τον Κάρολο και επέστρεψε στο Παρίσι το 1838, μετά από παρότρυνση φίλων του. Στη διάρκεια των δεκαεννέα χρόνων της ζωής του παρήγαγε περισσότερα από 500 άρθρα σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών, της Μηχανικής, της Φυσικής και της Αστρονομίας. Όταν ανοίχτηκε μία θέση στο College de France ο Gauchy εξελέγη ομόφωνα να αναλάβει τη θέση αυτή.

Ο Gauchy είχε το μερίδιό του σε αντιπαραθέσεις για ζητήματα προτεραιότητας και οι αντίπαλοί του τον κατηγόρησαν για πλεονεξία και ατιμία. Ο τελευταίος χρόνος της ζωής του αμαυρώθηκε από μια τέτοια σύγκρουση, όπου φαινόταν να έχει αυτός άδικο. Όμως, με το σύνηθες πείσμα του σε θέματα αρχών, αγνόησε την κατακραυγή και επέμεινε.

Μια άλλη παραξενιά συνέβαλε στο να μην είναι δημοφιλής ανάμεσα στους συναδέλφους του. Στις επιστημονικές ακαδημίες και εταιρείες αναμένεται πως η ψήφος κάποιου για έναν υποψήφιο βασίζεται αποκλειστικά στην επιστημονική αξία του τελευταίου και οποιαδήποτε άλλη στάση θεωρείται αήθης. Ο Gauchy κατηγορήθηκε πως ψήφιζε με βάση τις θρησκευτικές και πολιτικές του απόψεις.

O Gauchy πέθανε μάλλον απροσδόκητα στο εξηκοστό όγδοο έτος της ηλικίας του, στις 23 Μαΐου 1857. Επιδιώκοντας να θεραπευτεί από μία βρογχίτιδα, είχε αποσυρθεί στην εξοχή, όπου όμως προσβλήθηκε από πυρετό που αποδείχτηκε μοιραίος. Λίγες ώρες πριν από το θάνατό του μιλούσε με τον Αρχιεπίσκοπο Παρισίων σχετικά με κάποια φιλανθρωπικά έργα. Οι τελευταίες του λέξεις απευθύνονταν στον Αρχιεπίσκοπο: «Οι άνθρωποι φεύγουν, τα έργα τους όμως μένουν».

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Τα σύγχρονα Μαθηματικά οφείλουν στον Gauchy δύο από τα κύρια ενδιαφέροντά τους, καθένα από τα οποία συνιστά μια έντονη αλλαγή στάσεως σε σχέση με τα Μαθηματικά του δεκάτου ογδόου αιώνα. Το πρώτο ήταν η εισαγωγή της αυστηρότητας στη Μαθηματική Ανάλυση. Σ' αυτή την αλλαγή, ο Gauchy υπήρξε μεγάλος πρωτοπόρος, μαζί με τον Gauss και τον Abel. Το δεύτερο πράγμα θεμελιώδους σημασίας που ο Gauchy έδωσε στα Μαθηματικά αφορούσε στην άλλη πλευρά, στη συνδυαστική. Κατανοώντας τη βάση της μεθόδου του Lagrange στη θεωρία των εξισώσεων, την έκανε αφηρημένη και άρχισε τη συστηματική δημιουργία της θεωρίας των ομάδων.

O Gauchy κοίταξε βαθύτερα, είδε τις *πράξεις* και τους *συνδυαστικούς νόμους* τους πίσω από τις συμμετρίες των αλγεβρικών τύπων, τα απομόνωσε και οδηγήθηκε στην θεωρία των ομάδων. Για να αναφέρουμε μία μόνο από τις εφαρμογές της σε αυτή στηρίζεται η γεωμετρία των κρυστάλλων.

Τον Φεβρουάριο του 1811 ο Gauchy υπέβαλε την πρώτη του εργασία πάνω στα πολύεδρα, που απαντούσε αρνητικά σε ένα ερώτημα που είχε τεθεί από τον Poinsot (1779-1859): υπάρχουν άλλα κανονικά πολύεδρα εκτός εκείνων με 4,6,8,12 ή 20 πλευρές; Στο δεύτερο μέρος της εργασίας του ο Gauchy επεξέτεινε έναν τύπο του Euler συσχετίζοντας τον αριθμό των ακμών (E), εδρών (F) και κορυφών (V) ενός πολύεδρου $E+2 = F+V$.

Αυτή η εργασία τυπώθηκε. O Legendre την εκτίμησε πολύ και ενθάρρυνε τον Gauchy να συνεχίσει, πράγμα που ο Gauchy έκανε προχωρώντας σε μία δεύτερη εργασία τον Ιανουάριο του 1812. O Legendre και ο Malus ήταν οι κριτές. Στην απόδειξη των πιο σημαντικών θεωρημάτων του ο Gauchy είχε χρησιμοποιήσει την «έμμεση μέθοδο» δηλαδή τη μέθοδο της εις άτοπον επαγωγής. Ακριβώς σε αυτήν την μέθοδο απόδειξης ήταν στραμμένες οι αντιρρήσεις του Malus.

Η θεωρία των μεταθέσεων, που την ξεκίνησε συστηματικά ο Gauchy και την επεξεργάστηκε σε μια μακρά σειρά άρθρων στα μέσα της δεκαετίας του 1840 εξελίχθηκε στη θεωρία των *πεπερασμένων* ομάδων.

Ο Gauchy ήταν ένας από τους μεγάλους πρωτοπόρους στην θεωρία των ομάδων μετάθεσης. Από τις μέρες του ως σήμερα έχει γίνει τεράστια δουλειά στο αντικείμενο αυτό. Η ίδια η θεωρία έχει επεκταθεί πολύ με την ένταξη των απείρων ομάδων (ομάδων που έχουν απειρία στοιχείων τα οποία μπορούν να αριθμηθούν με 1,2,3,...,) και επιπλέον με την ένταξη των ομάδων μεταθέσεων.

Η εργασία του Gauchy το 1814 πάνω στα ορισμένα ολοκληρώματα με όρια ολοκλήρωσης μιγαδικούς αριθμούς, στάθηκε το ξεκίνημα της μεγάλης του σταδιοδρομίας, ως ανεξάρτητου δημιουργού της θεωρίας των συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής.

Τον επόμενο χρόνο (1815) ο Gauchy προξένησε μεγάλη αίσθηση με την απόδειξη ενός από τα μεγάλα θεωρήματα που ο Fermat είχε εγκαταλείψει στους μεταγενέστερους: κάθε θετικός ακέραιος είναι άθροισμα τριών «τριγώνων», τεσσάρων «τετραγώνων», πέντε «πενταγώνων» κλπ. Με το μηδέν σε κάθε περίπτωση να λογαριάζεται ως ένας αριθμός του είδους που μας ενδιαφέρει. Ένα «τρίγωνο» είναι ένας από τους αριθμούς 0,1,3,6,10,15,21,..., ο οποίος προκύπτει από το χτίσιμο κανονικών (ισοπλεύρων) τριγώνων με τελείες

Τα «τετράγωνα» προκύπτουν ανάλογα

όπου ο τρόπος με τον οποίο ένα τετράγωνο προκύπτει από το προηγούμενό του είναι φανερός. Ανάλογα, τα «πεντάγωνα» είναι κανονικά πεντάγωνα οικοδομημένα με τελείες. Η απόδειξη δεν ήταν απλή υπόθεση. Οι δυσκολίες της είχαν φανεί ανυπέρβλητες στους Euler, Lagrange και Legendre.

Το 1821 ο Gauchy παρουσίασε για δημοσίευση την σειρά των διαλέξεων στην Ανάλυση που έδινε στην Polytechnique. Αυτό το έργο αποτελούσε επί μακρόν το πρότυπο της αυστηρότητας και της ακρίβειας. Ακόμη και σήμερα οι ορισμοί του Gauchy για το όριο και την συνέχεια θα βρεθούν σε κάθε βιβλίο για τον Λογισμό.

Την περίοδο που βρισκόταν σε εκούσια εξορία δεν σταμάτησε να παράγει έργο. Η πιο εντυπωσιακή εργασία αυτής της περιόδου ήταν η εκτενής μελέτη του πάνω στην ανάλυση του φωτός, όπου ο Gauchy προσπάθησε να εξηγήσει το φαινόμενο της ανάλυσης (του διαχωρισμού του λευκού φωτός σε έγχρωμες δέσμες, λόγω της διαφορετικής διάθλασης των έγχρωμων ακτίνων από τις οποίες συντίθεται το λευκό φως), με βάση την υπόθεση ότι το φως οφείλεται στις ταλαντώσεις ενός ελαστικού μέσου. Αυτή η εργασία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για την ιστορία της Φυσικής, ως ένα παράδειγμα της τάσης, χαρακτηριστικής του δέκατου ένατου αιώνα, να επιχειρηθούν εξηγήσεις για τα φυσικά φαινόμενα με την βοήθεια μηχανικών προτύπων, αντί να κατασκευαστεί μια αφηρημένη μαθηματική θεωρία για τη συσχέτιση παρατηρήσεων.

Μια φαινομενικά ασήμαντη λεπτομέρεια στα όσα νέα πράγματα που έδωσε ο Gauchy, είναι ένα ακόμη δείγμα προφητικής πρωτοτυπίας. Αντί να χρησιμοποιήσει τον «φανταστικό» $i=(\sqrt{-1})$, πρότεινε να επιτευχθούν όλα αυτά που οι μιγαδικοί αριθμοί κάνουν στα Μαθηματικά, δουλεύοντας με ισοδυναμίες Modulo (i^2+1). Αυτό έγινε το 1847. Το άρθρο δεν κίνησε την προσοχή. Κι όμως είναι η βάση του λεγόμενου «προγράμματος Kronecker», που έφερε επανάσταση σε μερικές από τις θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών.

Για μεγάλο διάστημα μετά τον θάνατό του ο Gauchy δέχτηκε αυστηρή κριτική για την υπερπαραγωγή έργου και τη βιασύνη στη σύνθεση. Η συνολική παραγωγή του είναι 789 άρθρα. Ο ρόλος όμως του Gauchy στα σύγχρονα μαθηματικά είναι από τους κεντρικούς. Οι μέθοδοι που εισήγαγε, το συνολικό πρόγραμμα που εγκαινίασε την πρώτη περίοδο της σύγχρονης αυστηρότητας στα Μαθηματικά, καθώς και η σχεδόν απαράμιλλη επινοητικότητά του, άφησαν την σφραγίδα τους στη μαθηματική επιστήμη.

NICOLAS IVANOVITCH LOBATCHEWSKY
(1793-1856)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Αν δεχτούμε ότι είναι δίκαιη η αναγνώριση της σπουδαιότητας όσων πέτυχε ο Κοπέρνικος θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι είναι μέγιστη τιμή να αποκαλέσουμε κάποιον «Κοπέρνικο» ενός άλλου πεδίου. Όταν κατανοούμε ποια είναι η συνεισφορά του Λομπατσέφσκι στη δημιουργία της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας και εξετάζουμε τη σπουδαιότητά της για ολόκληρη την ανθρώπινη σκέψη, της οποίας μικρό μέρος είναι τα μαθηματικά, θα συμφωνήσουμε πιθανότατα ότι ο Clifford, μεγάλος γεωμέτρης και όχι ένας «απλός μαθηματικός», δεν υπερεπαινούσε τον Λομπατσέφσκι όταν τον αποκαλούσε «Κοπέρνικο της Γεωμετρίας».

Οι εκδότες των έργων του Λομπατσέφσκι έγραψαν:

«Η θεωρία του Λομπατσέφσκι ήταν ακατάληπτη για τους σύγχρονούς του, στα μάτια των οποίων φαινόταν να συγκρούεται με ένα αξίωμα που η αναγκαιότητά του βασιζόταν μόνο σε μια προκατάληψη καθαγιασμένη από τις χιλιετίες».

Ο Nicolas Ivanovitch Lobatchewski, δεύτερος γιος ενός κατώτερου δημοσίου υπαλλήλου, γεννήθηκε στις 2 Νοεμβρίου του 1793 στην περιοχή Μακάριεφ της επαρχίας Νίζνι Νόβγκοροντ, στη Ρωσία. Ο πατέρας του πέθανε όταν ο Νίκολας ήταν επτά χρονών, και η μητέρα του αναγκάστηκε να μετακομίσει στο Καζάν όπου προετοίμασε τα παιδιά της όσο καλύτερα μπορούσε για το σχολείο.

Ο Νίκολας έγινε δεκτός στο Γυμνάσιο το 1802 σε ηλικία μόλις οκτώ χρονών. Είχε προφανή πρόοδο στα μαθηματικά αλλά και στα φιλολογικά μαθήματα. Σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών ήταν έτοιμος να μπει στο Πανεπιστήμιο. Το 1807 μπήκε στο Πανεπιστήμιο του Καζάν όπου, ανάλωσε τα επόμενα σαράντα χρόνια ως επίκουρος καθηγητής, τακτικός καθηγητής και, στο τέλος, ως Πρύτανης.

Θέλοντας οι αρχές να καταστήσουν το Πανεπιστήμιο του Καζάν εφάμιλλο των καλών ευρωπαϊκών πανεπιστημίων κάλεσαν διακεκριμένους καθηγητές από την Γερμανία. Οι Γερμανοί καθηγητές κατάλαβαν αμέσως την μεγαλοφυΐα του Λομπατσέφσκι και του έδωσαν κάθε δυνατή ενθάρρυνση.

Το 1811, σε ηλικία δεκαοχτώ ετών, ο Λομπατσέφσκι πήρε το πτυχίο του μετά από έναν σύντομο καυγά με τις αρχές του Πανεπιστημίου την οργή των οποίων προκάλεσε ο πλούτος των ιδεών του Λομπατσέφσκι. Οι γερμανοί καθηγητές πήραν το μέρος του σε αυτή τη διαμάχη και τελικά του δόθηκε το δίπλωμα με τιμητική διάκριση. Στα είκοσι δύο του χρόνια, ο Λομπατσέφσκι δέχτηκε να διοριστεί δοκιμαστικά ως «Έκτακτος Καθηγητής» ή, όπως θα λέγαμε σήμερα ως Επίκουρος Καθηγητής.

Το 1816 στην ασυνήθιστα μικρή ηλικία των είκοσι τριών ετών ο Λομπατσέφσκι εκλέχτηκε στη θέση του Τακτικού Καθηγητή. Εκτός όμως από τα μαθηματικά δίδασκε και Αστρονομία και Φυσική. Σύντομα ανέλαβε έφορος της βιβλιοθήκης και του μουσείου του Πανεπιστημίου, στο οποίο επικρατούσε χάος. Επίσης, ανάμεσα στα πολυάριθμα καθήκοντα του Λομπατσέφσκι, από το 1819 έως το 1825, ήταν και η ευθύνη εποπτείας των σπουδαστών του Καζάν, η οποία αφορούσε κυρίως στις πολιτικές πεποιθήσεις των σπουδαστών.

Η εικόνα που παρουσίαζαν οι συλλογές του πανεπιστημιακού μουσείου ήταν απερίγραπτη και χαώδης. Ο Λομπατσέφσκι ήταν αποφασισμένος να βάλει τάξη σε αυτόν τον κυκεώνα Αναγνωρίζοντας τις υπηρεσίες του στη εποπτεία των σπουδαστών, οι αρχές τον εξέλεξαν στη θέση του κοσμήτορος του διδακτικού προσωπικού των Μαθηματικών και της Φυσικής. Δεν είχε όμως βοήθεια και έτσι αναγκαζόταν να κάνει τα πάντα μόνος του.

Το 1827, μετά από την βοήθεια ενός νεοδιορισθέντα εφόρου, ο Λομπατσέφσκι εκλέχτηκε Πρύτανης. Κάτω από την καθοδήγησή του η διδασκαλία έγινε πιο φιλελεύθερη και προσλήφθηκαν ικανοί άνθρωποι. Ακόμη, η βιβλιοθήκη επεκτάθηκε, οργανώθηκε μηχανολογικό εργαστήριο για την κατασκευή εργαλείων που ήταν απαραίτητα στην έρευνα, εξοπλίσθηκε ένα αστεροσκοπείο και δημιουργήθηκε μια πλούσια συλλογή από ορυκτά που αντιπροσώπευε τη ρωσική γη.

Ο Λομπατσέφσκι πίστευε πως για να γίνει κάτι όπως το θες εσύ πρέπει να το κάνεις μόνος σου ή να κατανοείς πολύ καλά τον τρόπο που εκτελείται ώστε να μπορείς να κάνεις εποικοδομητικές παρατηρήσεις. Έτσι όταν αποφασίστηκε να εκσυγχρονιστούν τα κτίσματα του Πανεπιστημίου αποφάσισε να μάθει αρχιτεκτονική για να φέρει εις πέρας το έργο που θα αναλάμβανε. Τα κτίρια του όχι μόνο ήταν κομψά και κατάλληλα για τους σκοπούς που θα εξυπηρετούσαν αλλά και αποπερατώθηκαν χωρίς να εξαντληθεί όλο το κονδύλιο που είχε διατεθεί για το σκοπό αυτό. Το 1842 μια φωτιά αφάνισε το μισό Πανεπιστήμιο αλλά με την κατάλληλη καθοδήγηση του Λομπατσέφσκι μετά από δύο χρόνια τίποτα δεν θύμιζε την καταστροφή αυτή.

Το 1842 ήταν η χρονιά όπου ο Λομπατσέφσκι, χάρις τις υπηρεσίες του Gauss, εκλέχτηκε εξωτερικό μέλος της Βασιλικής Εταιρίας του Gottingen για τη δημιουργία της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας του. Ο Λομπατσέφσκι κατάφερε, παρά τα πολλά καθήκοντά του, να δώσει στην ανθρωπότητα ένα από τα μεγαλύτερα αριστουργήματα των Μαθηματικών και ένα ορόσημο της ανθρώπινης σκέψης. Η πρώτη δημόσια ανακοίνωση του θέματος έγινε στη Φυσικομαθηματική Εταιρεία του Καζάν, το 1826 αλλά την εργασία άκουσε για πρώτη φορά ο Gauss το 1840.

Ο Λομπατσέφσκι δεν ήταν μόνο ως μαθηματικός πολύ μπροστά από την εποχή του. Τη δεκαετία του 1830 έπεσε χολέρα στη Ρωσία. Μετά τα πρώτα κρούσματα στο Καζάν προέτρεψε όλα τα μέλη του διδακτικού προσωπικού να φέρουν τις οικογένειές τους στο Πανεπιστήμιο και διέταξε μερικούς σπουδαστές να ενωθούν μαζί του στη μάχη κατά της χολέρας. Επέβαλε αυστηρούς κανόνες υγιεινής και τα παράθυρα του Πανεπιστημίου έμειναν κλειστά. Έτσι από τους 660 ανθρώπους που είχε μαζέψει στο Πανεπιστήμιο μόνο 16 πέθαναν, δηλαδή το 2,5%. Το ποσοστό αυτό ήταν αμελητέο μπροστά στο ποσοστό θνησιμότητας της περιοχής.

Παρά τις θυσίες του ο Λομπατσέφσκι παύτηκε βίαια από Καθηγητής και Πρύτανης το 1846 χωρίς να του δοθεί καμία εξήγηση. Η απόφαση ήταν οριστική παρά τις διαμαρτυρίες των συναδέλφων του.

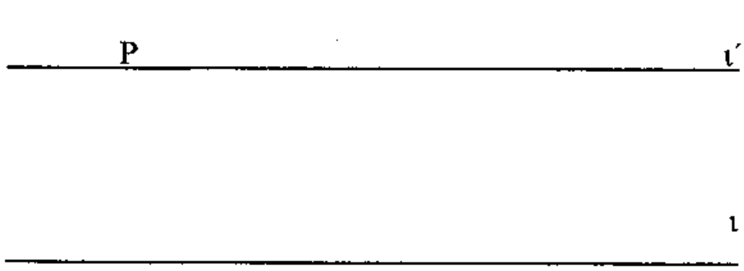
Το γεγονός αυτό τσάκισε τον Λομπατσέφσκι. Έτσι, έφυγε από το Πανεπιστήμιο του Καζάν στο οποίο όφειλε την πνευματική του υπεροχή και εμφανιζόταν μόνο σε μερικές περιπτώσεις για να βοηθήσει στις εξετάσεις. Την περίοδο αυτή άρχισε να χάνει την όρασή του εξακολουθώντας όμως να είναι ικανός για εντατική μαθηματική σκέψη. Η υγεία του άρχισε να επιδεινώνεται απελπιστικά όταν πέθανε ο γιος του. Το 1855 το Πανεπιστήμιο του Καζάν γιόρτασε τα 50 χρόνια ίδρυσής του. Για να τιμήσει το γεγονός αυτό ο Λομπατσέφσκι παρακολούθησε αυτοπροσώπως τις εξετάσεις και παρουσίασε ένα αντίγραφο της *Πανγεωμετρίας* του, το ολοκληρωμένο έργο της επιστημονικής του ζωής. Την εργασία αυτή δεν την είχε γράψει με το χέρι του επειδή ήταν πλέον τυφλός αλλά την είχε υπαγορεύσει. Λίγους μήνες αργότερα, στις 24 Φεβρουαρίου του 1856, πέθανε σε ηλικία 62 ετών.

Χρειάστηκε να περάσουν 2000 χρόνια για να αμφισβητηθεί η αιώνια αλήθεια της γεωμετρίας και αυτό ήταν έργο του Λομπατσέφσκι. Για να χρησιμοποιήσουμε την φράση του Αϊνστάιν, ο Λομπατσέφσκι αμφισβήτησε ένα αξίωμα. Ένας άνδρας που τόλμησε να αμφισβητήσει μια «αποδεκτή αλήθεια» που φαινόταν αναγκαία στη μεγάλη πλειοψηφία των λογικών ανθρώπων για 2000 χρόνια ριψοκινδύνευσε την επιστημονική του υπόληψη, αν όχι και την ζωή του.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

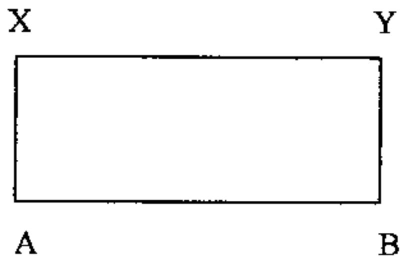
Για να αντιληφθούμε ποια είναι η συνεισφορά του Λομπατσέφσκι, θα πρέπει να ρίξουμε μια ματιά στο εξαιρετικό επίτευγμα του Ευκλείδη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης αναγνωρίζει ότι το πέμπτο αίτημά του είναι μια καθαρή υπόθεση.

Η πιο απλή διατύπωση του πέμπτου αιτήματος είναι η εξής:



Με δεδομένη μια ευθεία γραμμή *ι* και ένα σημείο *P* μη κείμενο στην *ι*, τότε στο επίπεδο που καθορίζεται από την *ι* και το *P* είναι δυνατόν να σύρουμε μία και μόνο ευθεία γραμμή *ι′* διαμέσου του P, τέτοια που η γραμμή *ι′* να μην συναντά ποτέ τη γραμμή ι όσο και αν προεκταθούν, δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι δύο ευθείες κείμενες στο ίδιο επίπεδο οι οποίες δεν τέμνονται ποτέ, είναι παράλληλες.

Άλλο ένα επίτευγμα του Ευκλείδη που πρέπει να δούμε για να αναγνωρίσουμε τον Λομπατσέφσκι είναι το εξής:



Ας δούμε το σχήμα ΑΧΥΒ που «μοιάζει» με ορθογώνιο και αποτελείται από τις ευθείες ΑΧ, ΧΥ, ΥΒ, ΒΑ, όπου ΑΒ η βάση, ΑΧ και ΒΥ ίσες και κάθετες στην ΑΒ και την ίδια πλευρά της ΑΒ. Οι γωνίες ΧΑΒ και ΥΒΑ έναι ορθές και οι πλευρές ΑΧ, ΒΥ είναι ίσες. Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το αίτημα της παραλλήλου, αποδεικνύεται ότι οι γωνίες ΑΧΥ, ΒΥΧ είναι ίσες, αλλά χωρίς το αίτημα αυτό είναι αδύνατον να αποδειχθεί ότι οι ΑΧΥ, ΒΧΥ είναι πράγματι ορθές γωνίες παρόλο που φαίνεται πως είναι. Αν δεχτούμε το αίτημα της παραλλήλου, μπορεί να αποδειχθεί ότι οι ΑΧΥ, ΒΥΧ είναι ορθές γωνίες και, αντιστρόφως αν δεχτούμε ότι οι ΑΧΥ, ΒΥΧ είναι ορθές γωνίες, μπορούμε να αποδείξουμε το αίτημα της παραλλήλου. Άρα, η παραδοχή ότι οι γωνίες ΑΧΥ, ΒΥΧ είναι ορθές, είναι ισοδύναμη με το αίτημα της παραλλήλου. Η παραδοχή αυτή ονομάζεται σήμερα *υπόθεση της ορθής γωνίας.*

Φαίνεται ότι η επαναστατική άποψη του Λομπατσέφσκι δεν ήταν ξαφνική έμπνευση. Σε μια γεωμετρία που έγραψε το 1823 έλεγε πως «ποτέ δεν βρέθηκε αυστηρή απόδειξη της αλήθειας του αξιώματος της παραλλήλου».

Ανάμεσα στο 1826 και 1829 είχε πεισθεί ότι το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη δεν μπορούσε να αποδειχθεί από τα άλλα τέσσερα και το 1829 στο άρθρο του ήταν ο πρώτος μαθηματικός που τόλμησε να δημοσιεύσει μια γεωμετρία βασισμένη συγκεκριμένα σε μια υπόθεση που αντιτίθετο στο αξίωμα της παραλλήλου:
«Από ένα σημείο G, που βρίσκεται εκτός μιας ευθείας ΑΒ μπορούμε να φέρουμε περισσότερες από μία ευθείες, στο επίπεδο, οι οποίες να μην τέμνουν την ΑΒ.»

Με αυτό το καινούριο αξίωμα ο Λομπατσέφσκι κατασκεύασε μια αρμονική γεωμετρία που δεν είχε λογικές αντιφάσεις. Επρόκειτο, για μια απόλυτη έγκυρη γεωμετρία, φαινόταν όμως τόσο αντίθετη στη κοινή λογική που και ο ίδιος ο Λομπατσέφσκι την ονόμασε «*φανταστική γεωμετρία*».

Για 2000 περίπου χρόνια, αποδιδόταν στον Ευκλείδη η τιμή ότι είχε ανακαλύψει μια απόλυτη αλήθεια ή έναν αναγκαίο τρόπο ανθρώπινης αντίληψης των πραγμάτων στο σύστημα της γεωμετρίας του. Το δημιούργημα του Λομπατσέφσκι ήταν μια πραγματική απόδειξη του λάθους αυτής της πεποίθησης. Η τόλμη της αμφισβήτησής του και η επιτυχία της προσπάθειάς του αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για μαθηματικούς, και επιστήμονες γενικά, να αμφισβητήσουν άλλα «αξιώματα» ή καθολικές αλήθειες.

NIELS HENRIK ABEL
(1801-1829)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Το 1801 γεννήθηκε μια μαθηματική ιδιοφυΐα που έμελλε να εμφανιστεί στο στερέωμα, εγκαινιάζοντας το μεγαλύτερο αιώνα της μαθηματικής ιστορίας. Πρόκειται για τον Niels Henrik Abel για τον οποίο ο Hermite είπε ότι «άφησε στους μαθηματικούς έργο ικανό να τους απασχολήσει για 5 αιώνες».

Ο πατέρας του Abel ήταν εφημέριος στο χωριό Φίντε της Νορβηγίας. Από την πλευρά του πατέρα του ο Abel κληρονόμησε την ικανότητά του να γράφει καθώς πολλοί προγονοί του, συμπεριλαμβανομένου και του πατέρα του, ήταν άνθρωποι με παιδεία. Από την μητέρα του κληρονόμησε την ομορφιά του αλλά και την θέληση να εργάζεται σκληρά και αδιάκοπα σε όλη του τη ζωή.

Ο Abel είχε άλλα έξι αδέλφια και πάρα την φτώχεια και τους πολέμους που εκείνη την περίοδο μάστιζαν την Νορβηγία, η οικογένεια ήταν ευτυχισμένη. Όπως είχε γράψει ίδιος ο θόρυβος δεν τον αποσπούσε από την μελέτη ενώ παράλληλα μπορούσε να αστειευτεί με τα αδέλφια του.

Όπως συνέβη με μερικούς άλλους μεγάλους μαθηματικούς, ο Abel ανακάλυψε το ταλέντο του αρκετά νωρίς. Την εποχή εκείνη το εκπαιδευτικό σύστημα της Νορβηγίας χαρακτηριζόταν από σκληρότητα. Για το παραμικρό παράπτωμα ο καθηγητής κατέφευγε σε σωματική βία. Έτσι ένας συμμαθητής του ξυλοκοπήθηκε τόσο άσχημα που τελικά πέθανε. Ο μέχρι τότε καθηγητής του εκδιώχθηκε από το σχολείο. Την θέση του πήρε ο Bernt Michael Holboe (1795-1850) ο οποίος αργότερα έκανε την πρώτη έκδοση έργων του Abel το 1839.

Ο Abel ήταν εκείνη την περίοδο 15 χρονών. Με την βοήθεια του Holboe ο Abel ανακάλυψε τις δυνατότητές του. Στην ηλικία των 16 άρχισε να μελετά μόνος του έργα μεγάλων μαθηματικών, ακόμη και του Νεύτωνα, του Euler και του Lagrange. Όταν ρωτήθηκε μετά από μερικά χρόνια πως κατάφερε τόσο γρήγορα να φτάσει στην κορυφή, απάντησε: «Μελετώ τους δασκάλους και όχι τους μαθητές τους».

Ο Holboe και ο Abel έγιναν γρήγορα καλοί φίλοι. Με τις θερμές υποδείξεις του Holboe, ο Abel μελέτησε και κατανόησε ακόμη και τα δυσκολότερα κλασικά κείμενα, συμπεριλαμβανομένων των *Αριθμητικών Ερευνών (Disquisitiones Arithmaticae)* του Gauss.

Μπορούμε να πούμε πως σήμερα αποτελεί κοινοτοπία ότι πολλά πράγματα που παλαιοί μαθηματικοί νόμιζαν πως είχαν αποδείξει, στην πραγματικότητα δεν είχαν αποδειχθεί. Ο Abel ήταν αυτός που πρώτος κατάλαβε τα κενά στη συλλογιστική των προγενέστερών του και γι΄ αυτό αποφάσισε να αφιερώσει ένα μεγάλο μέρος της ζωής του στο κλείσιμο αυτών των κενών και στη στεγανοποίηση της μαθηματικής λογικής. Μια σπουδαία συνεισφορά είναι η πρώτη απόδειξη του γενικού διωνυμικού θεωρήματος, ειδικές περιπτώσεις του οποίου είχαν απασχολήσει τον Νεύτωνα και τον Euler.

Ο πατέρας του, πέθανε το 1820 όταν Abel ήταν δεκαοκτώ χρονών και επωμίστηκε την φροντίδα της μητέρας και των αδελφών του. Πίστευε ότι καταλαμβάνοντας μια έδρα στο Πανεπιστήμιο θα γίνει ένας σχετικά εύπορος και σεβαστός μαθηματικός. Ως τότε όμως παρέδιδε ιδιωτικά μαθήματα, για να στηρίξει την οικογένειά του.

Τον Ιούνιο του 1822, όταν ο Abel ήταν δεκαεννέα χρονών, ολοκλήρωσε την απαιτούμενη εργασία του στο Πανεπιστήμιο της Κριστιάνσαντ. Η φήμη του γρήγορα ξεπέρασε τα όρια της Σκανδιναβίας. Ήθελε να επισκεφθεί την Γαλλία όπου θα συναντούσε σπουδαίους μαθηματικούς. Ονειρευόταν επίσης να πάει στη Γερμανία να συναντήσει τον Gauss.

Φίλοι του Abel έπεισαν το Πανεπιστήμιο να απευθυνθεί στην Νορβηγική κυβέρνηση για να δώσουν στον Abel επιχορήγηση ώστε να πραγματοποιήσει ένα μαθηματικό ταξίδι στη Ευρώπη. Ο ίδιος ο Abel υπέβαλε μία διατριβή η οποία συνδεόταν με τα θέματα χάρη στα οποία απέκτησε την μεγαλύτερη φήμη του. Ο Abel πίστευε πολύ σε αυτή τη διατριβή. Το πανεπιστήμιο ασχολείτο όμως με τα δικά του προβλήματα και αυτή η εργασία τελικά χάθηκε. Η κυβέρνηση, αυτό που έκανε τελικά, ήταν να δώσει μια επιχορήγηση για να συνεχίσει τις πανεπιστημιακές του σπουδές και να βελτιώσει τα γαλλικά και τα γερμανικά του.

Ο Abel πέρασε ενάμισι χρόνο στο Κριστιάνσαντ τηρώντας ευσυνείδητα το συμβόλαιο και προσπαθώντας να μάθει γερμανικά και γαλλικά. Στις 27 Αυγούστου του 1825, σε ηλικία 23 ετών, οι φίλοι του εξασφάλισαν ένα βασιλικό διάταγμα που του έδινε τα αναγκαία χρήματα για ετήσια διαμονή και σπουδές στη Γαλλία και την Γερμανία. Ο Abel ένοιωθε βαθιά ευγνωμοσύνη.

Βάζοντας δικά του χρήματα πλήρωσε ο ίδιος την εκτύπωση της διατριβής του στην οποία απέδειξε ότι είναι αδύνατον αλγεβρικά να βρεθεί λύση στην γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού. Αυτό θα ήταν, όπως αφελώς πίστευε, το επιστημονικό διαβατήριό του για τους μεγάλους μαθηματικούς. Ήθελε να πιστεύει πως ο Gauss, θα αναγνώριζε την αξία του. Ο Gauss έλαβε εγκαίρως το δοκίμιο. Χωρίς να το διαβάσει το χαρακτήρισε ως τερατούργημα.

Το 1824 η απόδειξη ότι η λύση της γενικής εξίσωσης πέμπτου βαθμού δεν ήταν δυνατή, δεν είχε ακόμη βρεθεί. Βρισκόταν στο δοκίμιο του Abel στο οποίο ο Gauss δεν είχε ρίξει ούτε μία ματιά.

Το Σεπτέμβριο του 1824,αφού επισκέφθηκε τους αξιόλογους μαθηματικούς της Νορβηγίας και της Δανίας, προχώρησε προς το Βερολίνο. Εκεί συνάντησε τον August Leopold Crelle (1780-1865) ο οποίος βοήθησε στην δημιουργία της καλής φήμης του Abel. Ο Crelle δημιούργησε ένα περιοδικό στο οποίο στους τρεις πρώτους τόμους του εμπεριέχονται είκοσι δύο μελέτες του Abel. Το περιοδικό αυτό έκανε ευρύτερα γνωστό τον Abel αλλά δημιούργησε και την καλή φήμη του Crelle.

Η πρώτη συνάντηση του Crelle με τον Abel περιγράφεται διαφορετικά από τον καθένα χωρίς όμως ουσιαστικές διαφορές. Ο Crelle ρώτησε τον Abel τι ακριβώς είχε διαβάσει από τα μαθηματικά. Όταν ανέφερε τα έργα των μεγάλων μαθηματικών που είχε μελετήσει κέρδισε αμέσως την προσοχή του Crelle. Έτσι του δόθηκε η ευκαιρία να του αναπτύξει την απόδειξη που ο ίδιος είχε επινοήσει. Η απόδειξη αυτή μπήκε στο περιοδικό του Crelle. Ο Crelle μαζί με τον Steiner (τον μεγαλύτερο γεωμέτρη μετά τον Απολλώνιο) συνόδευαν συχνά τον Abel στις περιοδείες του.

Η έντονη κοινωνικότητα του Βερολίνου απέσπασε τον Abel από την εργασία του και έτσι αποφάσισε να πάει στο Φράιμπουργκ για να συγκεντρωθεί. Έκει διαμόρφωσε το περίγραμμα του μεγαλύτερου έργου του, αυτό που αργότερα θα γινόταν γνωστό ως *Θεώρημα του Abel.*

Ο Abel μετά κατευθύνθηκε προς το Παρίσι για να γνωρίσει διακεκριμένους μαθηματικούς της εποχής εκείνης.

Ο Crelle προσπαθούσε επίμονα να διορίσει τον Abel στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Στον Abel άρεσε να ταξιδεύει και έτσι άφησε την εργασία του στον Gauchy να την παρουσιάσει και κατευθύνθηκε προς το Παρίσι. Τελικά την *Μελέτη για μια γενική ιδιότητα μιας λίαν εκτεταμένης κατηγορίας υπερβατικών συναρτήσεων* του Abel, την παρουσίασε ο Hachette. Το έργο αυτό που αργότερα ο Legendre θα περιέγραφε με τα λόγια του Οράτιου ως «μνημείο ακατάλυτο» και που ο

Hermitte είπε ότι άφησε έργο στους μαθηματικούς για πέντε αιώνες εκείνη τη στιγμή χαρακτηρίστηκε ως δυσανάγνωστο και παραπετάχτηκε.

Στο Παρίσι ο Abel έμαθε πως έπασχε από φυματίωση των πνευμόνων. Το έβγαλε, όμως, από το μυαλό του και επέστρεψε στο Βερολίνο. Εκεί έμαθε πως την θέση που περίμενε να πάρει στο Πανεπιστήμιο την έδωσαν στον Holboe, ο οποίος την δέχθηκε πολύ απρόθυμα. Θεωρούσαν πως ο Holboe θα ήταν καλύτερος δάσκαλος από τον Abel.

Από τις αρχές του 1829 ο Abel ήξερε πως δεν θα ζούσε για πολύ ακόμη. Έζησε τις τελευταίες του μέρες στη Φλόραντ. Στις έξι Απριλίου του 1829, ο Abel πέθανε σε ηλικία είκοσι έξι χρονών και οχτώ μηνών.

Μετά το θάνατό του ο Jacobi ανακάλυψε την μελέτη του και κατάλαβε το μέγεθος της σημασίας που είχε. Δύο μέρες μετά το θάνατό του, ο Crelle του έγραψε πως επιτέλους θα του έδιναν την έδρα στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Η Ακαδημία το 1830 αποζημίωσε τον Abel βραβεύοντάς τον, μαζί με τον Jacobi, με το Μεγάλο Βραβείο των Μαθηματικών.

Τελικά η μελέτη του εκδόθηκε το 1841 στο *Mémoirés presentés par divers savants á l'académie royale des sciences de l' Institut de France*, όμως δυστυχώς τα χειρόγραφα χάθηκαν στο τυπογραφείο.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Abel ασχολήθηκε με την λύση της εξίσωσης πέμπτου βαθμού αλλά και με την ανάλυση. Το πρώτο φιλόδοξο εγχείρημά του ήταν η λύση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης. Όλοι οι μεγάλοι αλγεβριστές, πριν τον Abel, προσπάθησαν να βρουν τη λύση αλλά χωρίς αποτέλεσμα. Ο Abel πίστεψε σε κάποια στιγμή ότι βρήκε την λύση. Έστειλε την υποτιθέμενη λύση σε έναν μεγάλο μαθηματικό της Δανίας, ο οποίος χωρίς να εκφράσει γνώμη ζήτησε περισσότερες διευκρινίσεις. Έτσι ο Abel κατάλαβε το λάθος της συλλογιστικής του. Η αποτυχία αυτή έβαλε στο σωστό δρόμο τον Abel να αναρωτηθεί κατά πόσο είναι δυνατή η λύση της γενικής εξίσωσης πέμπτου βαθμού. Ο Abel απέδειξε πως η λύση είναι *αδύνατη*. Την εποχή εκείνη ήταν μόλις δεκαεννέα ετών.

Η φύση του προβλήματος περιγράφεται εύκολα. Στο σχολείο, από τα πρώτα μαθήματα άλγεβρας, μαθαίνουμε να λύνουμε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού ως προς έναν άγνωστο χ. Δηλαδή:

$$\alpha\chi+\beta=0$$
&
$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$$

και λίγο αργότερα διδασκόμαστε τις εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού. Δηλαδή:

$$\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$$
&
$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=0$$

Αυτό σημαίνει πως δημιουργούμε πεπερασμένους (κλειστούς) τύπους για καθεμιά από τις παραπάνω εξισώσεις, εκφράζοντας τον άγνωστο χ συναρτήσει των δεδομένων συντελεστών α, β, γ, δ και ε. Μια τέτοια λύση, η οποία μπορεί να λυθεί μόνο με ένα πεπερασμένο αριθμό από προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, ονομάζεται *αλγεβρική*.

Με την επιτυχία τους στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων οι αλγεβριστές προσπαθούσαν για σχεδόν τρεις αιώνες να δώσουν μια παρόμοια αλγεβρική λύση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha\chi^5+\beta\chi^4+\gamma\chi^3+\delta\chi^2+\varepsilon\chi+\zeta=0$$

Απέτυχαν. Το 1824 το πρόβλημα της γενικής εξίσωσης πέμπτου βαθμού ήταν σχεδόν ισοβαρές με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Και τότε εμφανίστηκε ο Abel. Ο Abel ξεκινά τα άρθρο του για το άλυτο της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης ορίζοντας τις αλγεβρικές, τις ρητές και τις «ακέραιες» (δηλ. πολυωνυμικές) συναρτήσεις. Συνεχίζει με μια ταξινόμηση των αλγεβρικών συναρτήσεων σύμφωνα με το αν σχηματίζουν ένα σώμα ρητών συναρτήσεων. Έτσι, μπορεί και εκφράζει το πρόβλημά του ως αυτό της «απλής έκφρασης των ριζών ως αλγεβρικών συναρτήσεων των συντελεστών». Σύμφωνα, λοιπόν, με την διατριβή του μέχρι τότε υπήρχε μια μέθοδος επίλυσης εξισώσεων και έτσι είχε σχηματιστεί η πεποίθηση ότι η μέθοδος αυτή θα μπορούσε να εφαρμοστεί στη λύση οποιουδήποτε βαθμού εξισώσεων. Ο Abel θεωρούσε πως «Αντί να αναζητούμε μια σχέση που δεν είναι γνωστό αν υπάρχει ή όχι, πρέπει να αναρωτηθούμε αν είναι πράγματι δυνατή αυτή η σχέση». Αυτή η επιστημονική μέθοδος που έπρεπε να ακολουθηθεί είχε ελάχιστα χρησιμοποιηθεί εξαιτίας της εξαιρετικής πολυπλοκότητας των (αλγεβρικών) υπολογισμών που συνεπαγόταν. Αλλά όπως έλεγε και ο Abel σε πολλές περιπτώσεις η πολυπλοκότητα αυτή είναι μόνο φαινομενική και εξαλείφεται μετά την πρώτη επίθεση. Επίσης, ο Abel διατύπωσε μια πρόταση, η οποία υπήρξε σιωπηρή υπόθεση προγενέστερων συγγραφέων: «Αν μια εξίσωση επιλύεται αλγεβρικά, οι ρίζες της μπορούν πάντοτε να εκφρασθούν με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι αλγεβρικές συναρτήσεις από τις οποίες αποτελείται να μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις των ριζών της δεδομένης εξίσωσης». Εφαρμόζοντας όλα αυτά σε θεωρήματα για τις συναρτήσεις, μπορούμε να καταλήξουμε στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος μετά από πολλές «επαγωγές σε άτοπο».

Ο Abel ήθελε να λύσει άλλα δύο αλληλένδετα προβλήματα. Αυτά ήταν:

1. Να βρει όλες τις εξισώσεις κάθε βαθμού οι οποίες ήταν επιλύσιμες αλγεβρικά.
2. να κρίνει εάν μια δεδομένη εξίσωση ήταν επιλύσιμη ή όχι.

Ο Abel ασχολήθηκε με πολύ μεγάλο αριθμό προβλημάτων χωρίς να έχει τον απαραίτητο χρόνο να ασχοληθεί σοβαρά με αυτά. Την πλήρη λύση τους την βρήκε ο Galois ο οποίος όταν δημοσιεύτηκε το 1828 η διατριβή του Abel ήταν δεκαέξι χρονών και είχε ήδη αρχίσει την πορεία της βασικής του ανακάλυψης.

Ο Abel, ακόμη, διαβάζοντας το *Disquisitiones* του Gauss παρατήρησε ότι ο Euler έχε αποδείξει το θεώρημα του διωνύμου, μόνο γα τις ρητές δυνάμεις. Συμπλήρωσε λοιπόν το κενό αποδεικνύοντας το θεώρημα γενικά.

Μολονότι η εργασία του στην Άλγεβρα σημείωσε εποχή, ωστόσο επισκιάστηκε από το μεγάλο του έργο, την ανακάλυψη ενός νέου κλάδου της Ανάλυσης. Σε μια επιστολή του στον αστρονόμο Hansteen αναφέρεται στην άτυχη, όπως την χαρακτηρίζει, διαδικασία της λογικής που προχωρεί από το ειδικό στο γενικό. Αυτό κατά τη γνώμη του γινόταν γιατί οι συναρτήσεις που υπήρχαν ως τότε στην ανάλυση μπορούσαν να εκφραστούν ως δυνάμεις. Έτσι, όταν χρησιμοποιούσε μια γενική μέθοδο υπήρχε ο κίνδυνος του λάθους.

Στην *Μελέτη για μια γενική ιδιότητα μιας λίαν εκτεταμένης κατηγορίας υπερβατικών συναρτήσεων* ο Abel απέδειξε ότι οι συναρτήσεις, που οι παράγωγοί τους εκφράζονται διαμέσου αλγεβρικών εξισώσεων των οποίων οι συντελεστές είναι ρητές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των λογαριθμικών και ελλειπτικών συναρτήσεων.

Έτσι κατέληξε στο εξής συμπέρασμα:

«Αν έχουμε μερικές συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι μπορεί να είναι ρίζες *μίας* και *της αυτής αλγεβρικής εξίσωσης*, που όλοι οι συντελεστές τους είναι ρητές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, μπορούμε πάντα να εκφράσουμε το άθροισμα κάθε αριθμού αυτών των συναρτήσεων με μια *αλγεβρική* και *λογαριθμική συνάρτηση*, υπό τον όρο ότι αποδεικνύουμε ένα ορισμένο αριθμό *αλγεβρικών σχέσεων* ανάμεσα στις μεταβλητές των συγκεκριμένων συναρτήσεων.» Αυτό είναι το θεώρημα που σήμερα είναι γνωστό ως *Θεώρημα Abel.* Ο Abel κατέφερε την απόδειξη αυτή με ανυπέρβλητη οικονομία. Η απόδειξη είναι μέσα στις ικανότητες ενός παιδιού που θα έχει διδαχθεί τα πρώτα μαθήματα ολοκληρωτικού λογισμού.

Στο πλήθος των προχωρημένων προβλημάτων των συναρτήσεων, το απλούστερο των οποίων είναι η εύρεση του μήκους τόξου μιας *έλλειψης* με τη βοήθεια του *ολοκληρωτικού λογισμού*, οι άβολες αντίστροφες *«ελλειπτικές» συναρτήσεις* παρουσιάζονται πρώτες. Ο Abel ήταν εκείνος που είδε ότι αυτές οι συναρτήσεις πρέπει να «αντιστραφούν» και να μελετηθούν. Δεν ήταν αυτό απλό; Κι όμως ο μεγάλος Legendre, δαπάνησε πάνω από σαράντα χρόνια στα «ελλειπτικά ολοκληρώματα (τις «αντίστροφες συναρτήσεις» του προβλήματός του)χωρίς ποτέ να υποψιαστεί ότι έπρεπε να κάνει *αντιστροφή*. Αυτό ο τρομερά απλός τρόπος θεώρησης των πραγμάτων, σε ένα φαινομενικά απλό, αλλά βαθύτατα μυστηριώδες πρόβλημα, ήταν μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές προόδους του δέκατου ένατου αιώνα.

Η ανακάλυψη ενός νέου κλάδου Ανάλυσης ήταν όπως είπε ο Legendre το «μνημείο του Abel που θα αντέξει για πάντα στο χρόνο». Ακόμη και αν η ιστορία της ζωής του δεν προσθέτει τίποτα στην λάμψη του επιτεύγματός του, δείχνει τουλάχιστον τι έχασε ο κόσμος όταν πέθανε. Είναι μια μάλλον αποθαρρυντική ιστορία. Μόνο η ακαταμάχητη ψυχραιμία και το αλύγιστο θάρρος του, παρά την πίεση της έσχατης φτώχειας και την έλλειψη ενθάρρυνσης από τους μεγάλους Μαθηματικούς της εποχής εκείνης, ρίχνει κάποιο φως στην ιστορία της ζωής του.

CARL GUSTAV JACOBI
(1804-1851)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Carl Custav Jacobi, που γεννήθηκε στο Πότσδαμ, στην Πρωσία της Γερμανίας, στις 10 Δεκεμβρίου του 1804, ήταν ο δεύτερος γιος ενός εύπορου τραπεζίτη, του Simon Jacobi. Συνολικά είχαν τέσσερα παιδιά. Στην διάρκεια της ζωής του, οι μαθηματικοί τον μπέρδευαν πάντα με τον διάσημο αδελφό του M.H. Jacobi, ο οποίος κέρδισε την φήμη του ως ιδρυτής της μοντέρνας απομίμησης της γαλβανοπλαστικής.

Ο πρώτος δάσκαλος του Jacobi ήταν ένας θείος του, που τον δίδαξε κλασσικούς και Μαθηματικά, προετοιμάζοντάς τον να εισαχθεί στο Γυμνάσιο Πότσδαμ το 1816 σε ηλικία 12 χρονών. Από την πρώτη στιγμή έδωσε δείγματα «καθολικής διάνοιας». Όπως ο Gauss, έτσι και ο Jacobi θα μπορούσε να αποκτήσει μεγάλη φήμη στη φιλολογία αν δεν τον προσέλκυαν τόσο δυνατά τα Μαθηματικά.

Η μαθηματική εξέλιξη του Jacobi ήταν από ορισμένες απόψεις περιέργως παρόμοια με την εξέλιξη του Abel του μεγάλου ανταγωνιστή του. Ο Jacobi , όπως και ο Abel, προσέφυγε στη μελέτη των μεγάλων δημιουργών των Μαθηματικών. Οι εργασίες του Euler και του Lagrange του δίδαξαν την άλγεβρα και τον λογισμό μεταβολών και τον εισήγαγαν στην θεωρία των αριθμών. Αυτή η πρώιμη αυτομόρφωσή του ήταν το στοιχείο που έδωσε την πρώτη εξαίρετη εργασία του για τις ελλειπτικές συναρτήσεις. Για τον Euler ο Jacobi ήταν ο αντάξιος διάδοχός του.

Ο Jacobi σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου από το 1821 έως το 1825. στην διάρκεια των δύο πρώτων χρόνων μοίρασε τον χρόνο του, σχεδόν εξίσου, ανάμεσα στη φιλοσοφία, τη φιλολογία και τα μαθηματικά. Στο φιλολογικό σεμινάριο ο Jacobi προσήλκυσε την ευμενή προσοχή του P.A. Boeckh ενός διάσημου κλασικού μελετητή. Το μάθημα των μαθηματικών δεν προσέφερε πολλά σε έναν φιλόδοξο σπουδαστή, και ο Jacobi συνέχισε να μελετά τα έργα των μεγάλων δημιουργών.

Ο Jacobi ήξερε πως για να καταφέρει να φανεί αντάξιος σε γνώσεις των Euler, Lagrange και Laplace έπρεπε να δουλέψει σκληρά. Έτσι κατάφερε να γίνει, χωρίς χρονοτριβή, ένας από τους πιο ακαταπόνητους εργάτες στην ιστορία των Μαθηματικών.

Τον Αύγουστο του 1825 ο Jacobi απέκτησε διδακτορικό δίπλωμα με την διατριβή του για τα απλά κλάσματα και άλλα συναφή θέματα. Ταυτόχρονα με την εξέτασή του για την απόκτηση διδακτορικού διπλώματος, ο Jacobi ολοκλήρωσε την εκπαίδευσή του για το επάγγελμα του καθηγητή.

Μετά την απόκτηση του διδακτορικού διπλώματος, άρχισε να εργάζεται ως λέκτορας στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, κάνοντας διαλέξεις για τις εφαρμογές του λογισμού μεταβολών στις καμπύλες επιφάνειας και τις καμπύλες που ορίζονται από τις τομές των επιφανειών. Από τις πρώτες του διαλέξεις ήταν ολοφάνερο πως ο Jacobi ήταν γεννημένος δάσκαλος. Αργότερα δε, όταν άρχισε να αναπτύσσει τις δικές του ιδέες, έγινε ο πιο εμπνευσμένος καθηγητής Μαθηματικών του καιρού του. Ο Jacobi ήταν μάλλον ο πρώτος καθηγητής Μαθηματικών σε Πανεπιστήμιο που εισήγαγε στους σπουδαστές την έρευνα, κάνοντας διαλέξεις για τις πρόσφατες ανακαλύψεις και δίνοντας στους σπουδαστές τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν μπροστά στα μάτια τους την δημιουργία ενός νέου αντικειμένου.

Ολόκληρη η ζωή του Jacobi αφιερώθηκε στη διδασκαλία και την έρευνα εκτός από ένα άσχημο διάλειμμα στο οποίο θα αναφερθούμε στην συνέχεια. Οι διδακτικές του ικανότητες του εξασφάλισαν θέση λέκτορα στο Πανεπιστήμιο του Konigsberg το 1826, ύστερα από έξι μήνες σε ανάλογη θέση στο Βερολίνο. Μετά από ένα χρόνο, κάποια αποτελέσματα που δημοσίευσε για την θεωρία των αριθμών απέσπασαν τον θαυμασμό του Gauss ο οποίος βοήθησε τον Jacobi να γίνει σε ηλικία 23 χρονών Επίκουρος Καθηγητής.

Το 1832 πέθανε ο πατέρας του Jacobi. Η οικονομική του άνεση συνεχίστηκε για οχτώ χρόνια μετά τον θάνατο του πατέρα του, οπότε η περιουσία ης μητέρας του εξανεμίστηκε. Σε ηλικία τριάντα έξι χρονών ο Jacobi έχασε ό,τι χρήματα είχε ενώ πλέον είχε να θρέψει και την μητέρα του.

Η απώλεια της περιουσίας του δεν είχε επιπτώσεις στις μαθηματικές έρευνες του Jacobi. Το 1842 ο Jacobi και ο Bessel συμμετείχαν στο Συνέδριο της Βρετανικής Μαθηματικής Εταιρίας στο Μάντσεστερ, όπου ο Jacobi συναντήθηκε με τον Hamilton. Ήταν μία από τις μεγαλύτερες δόξες του Jacobi το ότι συνέχισε την εργασία του Hamilton στην δυναμική και με κάποια έννοια, συμπλήρωσε ό,τι είχε εγκαταλείψει ο Ιρλανδός επιδιώκοντας ένα απατηλό στόχο.

Το 1843 ο Jacobi κατέρρευσε τελείως εξαιτίας μιας υπερκόπωσης και ήταν ο Βασιλιάς της Πρωσίας που τον βοήθησε. Μετά από αυτή την γενναιοδωρία του Βασιλιά και με προτροπή του γιατρού του άρχισε να ασχολείται με την πολιτική. Όταν είχε αρχίσει να εκδηλώνεται ο δημοκρατικός ξεσηκωμός του 1846, ο μαθηματικός ρίχτηκε στην αρένα της πολιτικής. Η μετριοπαθής φιλελεύθερη λέσχη που του πρότειναν τον κατηγόρησε ως καιροσκόπο, αποστάτη και χαφιέ των μοναρχικών.

Τα χειρότερα ήρθαν μετά. Ο Υπουργός παιδείας θεώρησε πως η υγεία του δεν είχε αποκατασταθεί πλήρως ώστε να επιστρέψει στο Πανεπιστήμιο. Ακόμα, ο Βασιλιάς σταμάτησε την επιχορήγηση λίγες μέρες μετά. Η κατάστασή του ήταν απελπιστική καθώς είχε να φροντίσει πέντε παιδιά και την γυναίκα του και για αυτό βρέθηκαν κάποιοι και τον βοήθησαν.

Το 1849, σε ηλικία σαράντα πέντε χρονών ήταν, μετά τον Gauss, ο πιο διάσημος Μαθηματικός της Ευρώπης. Το Πανεπιστήμιο της Βιέννης ενδιαφέρθηκε να τον προσλάβει αλλά ο Alexander von Humbolt κατάφερε να μεταπείσει τον βασιλιά και του ξαναδόθηκε η επιχορήγηση.

Τελικά, ο Jacobi δεν πέθανε πρόωρα από υπερκόπωση αλλά από ευλογιά στις 18 Φεβρουαρίου του 1851 στα σαράντα επτά του χρόνια. Κλείνοντας θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την εύστοχη απάντηση που είχε δώσει στον μεγάλο Γάλλο μαθηματικό φυσικό, Fourier, ο οποίος μεμφόταν τόσο τον Abel όσο και τον Jacobi ότι «σπαταλούσαν» τον χρόνο τους στις ελλειπτικές συναρτήσεις, τη στιγμή που υπήρχαν άλυτα προβλήματα αγωγής της θερμότητας.

«Είναι γεγονός»,λέει ο Jacobi, «πως ο κ. Fourier έχει την γνώμη ότι ο κύριος σκοπός των Μαθηματικών είναι το κοινό όφελος και η εξήγηση των φυσικών φαινομένων. Ως φιλόσοφος ο ίδιος, όφειλε να γνωρίζει ότι μοναδικός σκοπός της επιστήμης είναι η δόξα του ανθρώπινου πνεύματος και στο γενικό αυτό πλαίσιο, ένα πρόβλημα σχετιζόμενο με τους αριθμούς έχει την ίδια αξία με ένα πρόβλημα σχετικό φυσικό σύστημα».

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Jacobi την θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων, ασχολήθηκε με το πρόβλημα της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης και δημιούργησε τις «ορίζουσες Jacobi».

Ο Abel ήταν δύο χρόνια μεγαλύτερος από τον Jacobi. Αγνοώντας ο Jacobi ότι ο Abel το 1820 είχε καταπιαστεί με την γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού, τον ίδιο χρόνο προσπάθησε να βρει μια λύση, ανάγοντας τη γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού στη μορφή

$$x^5 - q^2 x = p$$

και δείχνοντας ότι η λύση της θα συναγόταν από την λύση μιας ορισμένης εξίσωσης δέκατου βαθμού. Κατέληγε, ανεξάρτητα από τον Abel, στα ίδια αποτελέσματα τα οποία και αυτός δημοσίευε στο περιοδικό Crelle. Η προσπάθειά του μπορεί να ήταν άκαρπη, αλλά του δίδαξε πολλά πράγματα από την άλγεβρα και ο ίδιος απέδιδε στη προσπάθεια αυτή μεγάλη σημασία ως ένα βήμα στη μαθηματική του μόρφωση. Δεν φαίνεται, όμως, να του γεννήθηκε η σκέψη, όπως συνέβη με τον Abel, ότι η γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού μπορεί να ήταν αλγεβρικά μη επιλύσιμη. Αυτή η παράβλεψη ή έλλειψη φαντασίας από την πλευρά του Jacobi είναι χαρακτηριστική της διαφοράς ανάμεσα σε αυτόν και τον Abel. Επιστήμονες, όπως ο Legendre, συνειδητοποίησαν ότι και ο Abel και ο Jacobi παρουσίαζαν αποτελέσματα που θα είχαν μεγάλες συνέπειες.

Με το θέμα των ελλειπτικών συναρτήσεων ασχολήθηκαν τέσσερις πολύ μεγάλες προσωπικότητες. Μία από αυτές ήταν ο Legendre, ο οποίος είχε βρει πολλούς τύπους. Ένας από αυτούς τους τύπους είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-K^2)(1-x^2)}}$$

το οποίο περιλαμβάνει το

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

στην ειδική περίπτωση K=0. Ο Gauss είχε μια νέα άποψη η οποία διευκόλυνε πολύ την μελέτη των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων. Αν

$$u = \int_0^{\upsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

τότε u= τοξημυ. Εδώ το u εκφράζεται ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής υ (το x είναι βοηθητική μεταβλητή για την ολοκλήρωση). Αν επιλέξουμε το u ως ανεξάρτητη μεταβλητή θα έχουμε υ= f(u) ή στην γλώσσα της τριγωνομετρίας, υ=ημu. Αυτή η συνάρτηση αντιμετωπίζεται πιο εύκολα και έχει την εντυπωσιακή ιδιότητα να είναι περιοδική.

Το 1829, ο Jacobi έγραψε στον Legendre για να τον ρωτήσει για την μελέτη που είχε αφήσει ο Abel στο Cauchy, γιατί ο Jacobi είχε ενδείξεις ότι είχε σχέση με την ανακάλυψή του. Ο Cauchy βρήκε το χειρόγραφο το οποίο αργότερα χαρακτηρίστηκε από τον Legendre ως «ένα μνημείο που διαρκεί περισσότερο και από χαλκό». Δημοσιεύθηκε το 1841 από το Γαλλικό Ινστιτούτο. Το άρθρο αυτό περιείχε μια σημαντική γενίκευση της δουλειάς του Legendre για τα ελλειπτικά ολοκληρώματα. Αν

$$u=\int_0^{\upsilon}\frac{dx}{\sqrt{(1-K^2x^2)(1-x^2)}}$$

τότε το u είναι μια συνάρτηση του υ, u= f(υ). Η παρατήρηση που διέφυγε από τον Legendre αλλά όχι και από τους Jacobi, Gausskαι Abel ήταν ότι αντιστρέφοντας την συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στα u και υ, καταλήγουμε σε μια χρησιμότερη συνάρτηση την υ=f(u). Η συνάρτηση αυτή, που γράφεται υ=sn u και διαβάζεται ως «το υ είναι το πλάτος ημιτόνου του u», μαζί με άλλες, που ορίζονται με παρόμοιο τρόπο, είναι γνωστές ως ελλειπτικές συναρτήσεις.

Η πιο εντυπωσιακή ιδιότητα αυτών των καινούριων υπερβατικών συναρτήσεων ήταν, όπως παρατήρησαν ανεξάρτητα οι τρεις ερευνητές, ότι στη θεωρία των μιγαδικών μεταβλητών έχουν μια διπλή περιοδικότητα, δηλαδή υπάρχουν δύο μιγαδικοί αριθμοί m και n, τέτοιοι ώστε υ=f(u)=f(u+m)=f(u+n). Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν μόνο μία πραγματική περίοδο (μία περίοδο 2π), και η συνάρτηση e^x έχει μία φανταστική περίοδο μόνο (2πi) ενώ οι ελλειπτικές συναρτήσεις έχουν δύο, διάφορες μεταξύ τους, περιόδους. Ο Jacobi, τόσο εντυπωσιάστηκε από την απλότητα που προέκυπτε από μία απλή αντιστροφή της συναρτησιακής σχέσης στα ελλειπτικά ολοκληρώματα ώστε θεώρησε τη συμβουλή «πρέπει πάντα να αντιστρέφεις» ως το μυστικό της επιτυχίας στα μαθηματικά.

Στον Jacobi οφείλουμε επίσης και αρκετά σημαντικά θεωρήματα, σχετικά με τις ελλειπτικές συναρτήσεις. Το 1834 απέδειξε ότι αν μια μονότιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι διπλά περιοδική, ο λόγος των περιόδων της δεν μπορεί να είναι πραγματικός και ότι είναι αδύνατο, μία μονότιμη συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής να έχει περισσότερες από δύο διάφορες μεταξύ τους περιόδους. Σε αυτόν οφείλουμε, επίσης, μια μελέτη των «συναρτήσεων του Jacobi», μιας ομάδας σχεδόν διπλά περιοδικών ακέραιων συναρτήσεων των οποίων οι ελλειπτικές συναρτήσεις είναι πηλίκα. Ο Jacobi ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε την αντιστροφή όχι μόνο σε μία μεταβλητή αλλά και σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Το 1829 ο Jacobi δημοσίευσε ακόμη ένα άρθρο, στο οποίο χρησιμοποίησε γενικά τις «ορίζουσες Jacobi» διατυπώνοντάς τες σε πιο σύγχρονη μορφή από τον Cauchy:

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dx_1}, & \frac{du}{dx_2}, & \dots & \frac{du}{dx_{n-1}} \\ \frac{du_1}{dx}, & \frac{du_1}{dx_1}, & \frac{du_1}{dx_2}, & \dots & \frac{du_1}{dx_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{du_{n-1}}{dx}, & \frac{du_{n-1}}{dx_1}, & \frac{du_{n-1}}{dx_2}, & \dots & \frac{du_{n-1}}{dx_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Ο Jacobi τόσο αγάπησε τις συναρτησιακές ορίζουσες ώστε επέμενε να θεωρεί τις κανονικές αριθμητικές ορίζουσες ως «ορίζουσες Jacobi» n γραμμικών συναρτήσεων με n αγνώστους.

Το 1841 δημοσίευσε μία εκτενή μελέτη «*De determinantibus functionalibus*», αφιερωμένη στην ορίζουσα Jacobi. Σε αυτήν τόνισε, ανάμεσα σε άλλα, ότι αυτή η συναρτησιακή ορίζουσα είναι, από πολλές απόψεις, ανάλογη, για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, με το διαφορικό πηλίκο μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής και τόνισε το ρόλο της στην διαδικασία καθορισμού του αν ένα σύνολο εξισώσεων ή συναρτήσεων είναι ανεξάρτητο. Έδειξε ότι αν, n συναρτήσεις, n αγνώστων, συνδέονται συναρτησιακά, η ορίζουσα Jacobi πρέπει να είναι εκ ταυτότητας μηδέν ενώ αν οι συναρτήσεις είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, η ορίζουσα Jacobi δεν μπορεί να είναι εκ ταυτότητας μηδέν.

Η συνεισφορά του Jacobi στην εξέλιξη των Μαθηματικών ήταν μεγάλη. Για να απαριθμήσουμε μόνο όλα τα πεδία που εμπλούτισε με τις συνεισφορές του στην διάρκεια της σύντομης ερευνητικής περιόδου της ζωής του, που δεν ξεπέρασε τα είκοσι πέντε χρόνια, θα χρειαζόταν να διαθέσουμε πολύ περισσότερο χώρο από αυτόν που διαθέτουμε. Έτσι, αναφέραμε απλά μερικά από τα μεγάλα έργα του Jacobi.

WILLIAM ROWAN HAMILTON
(1805-1865)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο William Rowan Hamilton είναι ο ασύγκριτα μεγαλύτερος άνθρωπος των επιστημών που ανέδειξε ποτέ η Ιρλανδία.

Ο πατέρας του Hamilton ήταν δικηγόρος και είχε τέσσερα παιδιά. Το νεότερο από αυτά ήταν ο William ο οποίος γεννήθηκε στις 3 Αυγούστου του 1805. ο Hamilton ήταν αρκετά οξυδερκής και μάλλον το όφειλε στην μητέρα του η οποία καταγόταν από οικογένεια γνωστή για τις διάνοιές της.

Από την ηλικία των τριών χρονών ο Hamilton είχε δείξει σημάδια της ιδιοφυΐας του και ο πατέρας του τον εμπιστεύτηκε στην κηδεμονία του θείου του James, που ήταν γλωσσολόγος, για να τον μάθει πολλές γλώσσες.

Η μητέρα του πέθανε όταν ο Hamilton ήταν δώδεκα χρονών και ο πατέρας του δύο χρόνια αργότερα. Σε ηλικία δεκατριών χρονών ήταν ένα από τα πιο εντυπωσιακά τέρατα γλωσσολογικής μόρφωσης σε ολόκληρη την ιστορία.

Η ιστορία των παιδικών κατορθωμάτων του Hamilton έχει ως εξής: σε ηλικία τριών χρονών είχε μάθει να διαβάζει τέλεια αγγλικά ενώ είχε προχωρήσει αρκετά και στην αριθμητική. Στα τέσσερά του χρόνια είχε γίνει καλός γεωγράφος και στα πέντε του μπορούσε να διαβάζει και να μεταφράζει λατινικά, ελληνικά και εβραϊκά, ενώ του άρεσε να απαγγέλλει ολόκληρα κατεβατά του Ντρύντεν, του Κόλλινς, του Μίλτωνος και του Ομήρου, τα τελευταία στα ελληνικά. Όταν έγινε οχτώ χρονών ήξερε πλέον άριστα ιταλικά και γαλλικά ενώ μπορούσε να αυτοσχεδιάζει άνετα και στα λατινικά. Πριν γίνει δέκα χρονών έθεσε τα θεμέλια για την εξαιρετική πολυμάθειά του στις ανατολικές γλώσσες ξεκινώντας με τα αραβικά και σανσκριτικά. Τέλος, μπορούμε να πούμε, ότι στα δεκατρία του χρόνια ο Hamilton είχε κάνει κτήμα του τόσες γλώσσες όσα και τα χρόνια της ζωής του.

Ο άνθρωπος που βοήθησε τον Hamilton να ξεφύγει από την εκμάθηση άχρηστων γλωσσών ήταν ένα παιδί από την Αμερική, ο Zerah Colburn, που την εποχή εκείνη παρακολουθούσε μαθήματα στη σχολή Westminster του Λονδίνου. Ο Colburn και ο Hamilton ήρθαν σε επαφή με την προσδοκία ότι ο Hamilton θα μπορούσε να αποκρυπτογραφήσει τις μεθόδους του Colburn. Ο Αμερικάνος έδειξε τις μεθόδους του στον Hamilton και αυτός ανέπτυξε περαιτέρω ό,τι του είχε δείξει.

Από την ηλικία των δεκαεφτά, ο Hamilton είχε αποκτήσει αρκετές γνώσεις μαθηματικής αστρονομίας ώστε να μπορεί να υπολογίζει εκλείψεις. Διάβαζε Νεύτωνα και Lagrange. Από τότε ήδη είχε κάνει λόγο στους δικούς του για κάποιες περίεργες ανακαλύψεις που είχε κάνει. Πριν από αυτό είχε κεντρίσει το ενδιαφέρον του Καθηγητή της Αστρονομίας αφού εντόπισε ένα λάθος στην απόπειρα απόδειξης από τον Laplace του παραλληλογράμμου των δυνάμεων.

Ο Hamilton δεν πήγε ποτέ σχολείο πριν από το Πανεπιστήμιο. Απέκτησε τη στοιχειώδη παιδεία από τον θείο του. Παρόλα αυτά, όμως, οι κλασικές σπουδές δεν του αποσπούσαν όλο το χρόνο και κατάφερνε να μελετά και Οπτική.

Στις 7 Ιουλίου του 1823 πέρασε πρώτος και με διαφορά στο Κολέγιο Trinity του Δουβλίνου. Τα κατορθώματά του στις κλασικές σπουδές και στα μαθηματικά ενώ ήταν ακόμη φοιτητής κέντρισαν το ενδιαφέρον ακαδημαϊκών κύκλων. Κέρδισε όλα τα βραβεία και πέτυχε τις υψηλότερες επιδόσεις τόσο στις κλασικές σπουδές όσο και στα μαθηματικά. Την περίοδο εκείνη, ολοκλήρωσε το πρώτο χειρόγραφο του Πρώτου Μέρους της διατριβής του για το σύστημα των ακτίνων. Ο Dr Brinkley είπε: « ο νέος αυτός άνδρας δεν υποστηρίζω ότι θα γίνει αλλά ότι είναι ο μεγαλύτερος μαθηματικός της εποχής του».

Ενώ ήταν φοιτητής ο Hamilton ο Dr Berkley εγκατέλειψε την έδρα του για να γίνει επίσκοπος. Μετά από κάποια συζήτηση, το Διοικητικό Συμβούλιο παραμέρισε όλες τις αιτήσεις και επέλεξε ομόφωνα για Καθηγητή Αστρονομίας τον Hamilton ο οποίος δεν είχε υποβάλλει καν αίτηση.

Μετά το μεγάλο του έργο στην οπτική και την δυναμική η ανοδική του πορεία άρχισε να υποχωρεί. Άλλοι υποστήριζαν ότι το μεγαλύτερο έργο του Hamilton, εννοώντας την θεωρία των κουαρτενίων, δεν είχε έρθει ακόμη. Μπορούμε να πούμε όμως ότι από τα είκοσι εφτά του μέχρι τα εξήντα ένα του που πέθανε δύο ήταν οι μεγαλύτερες καταστροφές που προκάλεσαν ερήμωση στην επιστημονική σταδιοδρομία του: ο γάμος και το αλκοόλ.

Το 1832 η γυναίκα του έμεινε μισο-κατάκοιτη στο κρεβάτι. Ο Hamilton αγκιστρώθηκε από την ανάπηρη γυναίκα του. Έτσι, μετά το γάμο του τα ακανόνιστα γεύματα η ακόμη και πλήρης απουσία γευμάτων, μαζί με την συνήθεια να δουλεύει δώδεκα με δεκατρείς ώρες την ημέρα, τον οδήγησαν να αναζητά την τροφή που του έλειπε σε ένα μπουκάλι ποτό.

Όταν μετά από ένα επιστημονικό γεύμα μέθυσε αντιλήφθηκε σε τι εξευτελισμό είχε υποβάλει τον εαυτό του και αποφάσισε να το σταματήσει. Δυστυχώς, όμως, η απόφαση αυτή κράτησε μόλις δύο χρόνια αφού ένας συνάδελφός του τον περιγελούσε γιατί έπινε πλέον μόνο νερό.

Ο Hamilton είχε πολλές τιμές κατά την διάρκεια της ζωής του. Στα τριάντα του κατέλαβε σημαίνουσα θέση στον Βρετανικό Σύνδεσμο για την προαγωγή της Επιστήμης στην συνδιάσκεψη του Δουβλίνου. Ταυτόχρονα τιμήθηκε με τον τίτλο του sir. Στα τριάντα δύο του έγινε πρόεδρος της Βασιλικής Ακαδημίας της Ιρλανδίας και στα τριάντα οχτώ του, του απονεμήθηκε τιμητική σύνταξη από την Βρετανική Κυβέρνηση. Η τιμή που τον ευχαρίστησε περισσότερο από κάθε άλλη ήταν πως έγινε ο πρώτος αλλοδαπός που έγινε μέλος της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών των Ηνωμένων Πολιτειών.

Το 1834, σε ηλικία τριάντα οχτώ χρονών ο Hamilton κατάφερε να εκπληρώσει τη μεγάλη του φιλοδοξία, που ήταν να επεκτείνει τις αρχές που είχε εισαγάγει στην Οπτική σε ολόκληρη την Δυναμική.

Τα τελευταία είκοσι δύο χρόνια της ζωής του τα αφιέρωσε σχεδόν αποκλειστικά στην επεξεργασία των κουαρτενίων, περιλαμβανομένων των εφαρμογών του στην Δυναμική, την Αστρονομία και την κυματική θεωρία του φωτός. Μετά τον θάνατό του από ουρική αρθρίτιδα στις 2 Σεπτεμβρίου του 1865 ανακαλύφθηκε ότι ο Hamilton είχε αφήσει μεγάλο όγκο χαρτιών και χειρόγραφα γεμάτα μαθηματικά. Την τελευταία περίοδο της ζωής του έζησε σαν ερημίτης αγνοώντας τα γεύματα που του έφερναν.

Παρέμεινε ταπεινός και ευσεβής μέχρι το τέλος της ζωής του και ουδέποτε είχε ανησυχία για την επιστημονική του φήμη. Είχε πει: «Θαύμαζα πάντοτε την περιγραφή που δίδει ο Πτολεμαίος για τον δάσκαλό του στην Αστρονομία, τον Ίππαρχο: ανήρ φιλόπονος και φιλαλήθης. Ένας άνδρας που αγαπά την εργασία και λατρεύει την αλήθεια. Τα λόγια αυτά θα ήθελα να είναι η επιτάφιος επιγραφή μου».

ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Το έργο που άφησε πίσω του ο Hamilton ήταν ιδιαίτερα σημαντικό. Οι τεχνικές που εισήγαγε στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην μελέτη του *«το Πρώτο Μέρος της Θεωρίας των Συστημάτων Ακτίνων»* (A theory of Systems of Rays) είναι σήμερα αδιαχώριστες από τη μαθηματική Φυσική. Ακόμη και τότε , πολύ σύντομα μετά την παρουσίαση της θεωρίας αυτής για την κωνική διάθλαση σε ορισμένα κρύσταλλα επιβεβαιώθηκε πειραματικά και από τους φυσικούς. Έτσι, η μελέτη αυτή συγκαταλέγεται στα κλασικά έργα των Μαθηματικών που είχαν την τύχη να γνωρίσουν την αμεσότερη και την πιο εντυπωσιακή επιτυχία σχεδόν αμέσως μετά την δημοσίευσή τους. Η θεωρία αποσκοπούσε στην εξέταση φαινομένων του πραγματικού φυσικού σύμπαντος, όπως παρατηρούνται στην πραγματική ζωή και στα επιστημονικά εργαστήρια. Κάθε μαθηματική θεωρία του είδους αυτού, εκτός αν είναι ικανή να διατυπώσει προβλέψεις που θα επιβεβαιωθούν πειραματικά, δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα περιεκτικό λεξικό των θεμάτων που συστηματοποιεί.

Το 1833 παρουσίασε μια μεγάλη και σημαντική μελέτη στην Ιρλανδική Ακαδημία στην οποία εισήγαγε μια θεωρητική άλγεβρα ζευγών των πραγματικών αριθμών, της οποίας οι κανόνες συνδυασμού είναι ακριβώς ίδιοι με αυτούς που αναφέρονται σήμερα για το σύστημα των μιγαδικών αριθμών. Ο σημαντικός κανόνας για τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών είναι:

$$(a, b)\,(\alpha, \beta) = (a\alpha-b\beta,\ a\beta+b\alpha)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(a+bi)\,(\alpha+\beta i) &= a\alpha+b\alpha i+a\beta i+b\beta i^2\\ &= a\alpha-b\beta+(b\alpha+a\beta)i\\ &= (a\alpha-b\beta,b\alpha+a\beta)\end{aligned}$$

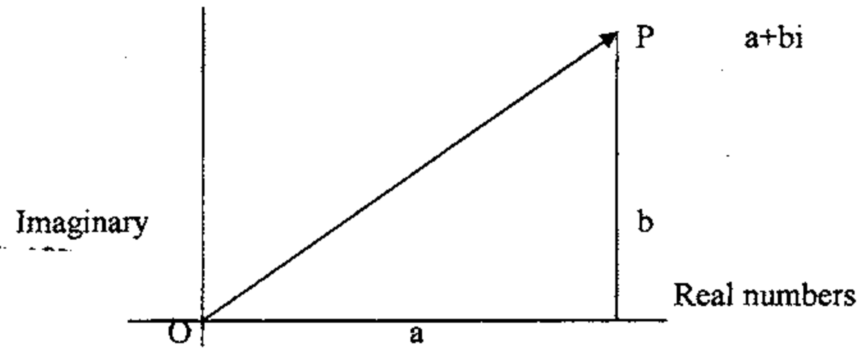
όπου $i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$

i(maginary)=φανταστικός

Ερμήνευσε δε αυτό το γινόμενο ως μία πράξη, σχετική με περιστροφή. Φαίνεται εδώ, ένας μιγαδικός αριθμός ως ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, μια ιδέα που υπαινίσσονταν οι γραφικές παραστάσεις των Bessel, Argand και Gauss αλλά η οποία, για πρώτη φορά , αναφέρεται σαφώς.

Ο Hamilton συνειδητοποίησε ότι τα διατεταγμένα ζεύγη του μπορούσαν να θεωρηθούν ως προσανατολισμένα μεγέθη στο επίπεδο και προσπάθησε να επεκτείνει την ιδέα στις τρεις διαστάσεις, πηγαίνοντας από το μιγαδικό αριθμό $a + bi$ στη διατεταγμένη αριθμητική τριάδα $a + bi + cj$. Σκοπός του Hamilton ήταν να επινοήσει μια άλγεβρα που θα μπορούσε να επιτύχει με περιστροφές στον χώρο των τριών διαστάσεων ότι οι μιγαδικοί, ή τα ζεύγη τους, επιτυγχάνουν με περιστροφές στον χώρο των δύο διαστάσεων, όπου και οι δύο χώροι είναι Ευκλείδειοι όπως στη στοιχειώδη Γεωμετρία. Ένας μιγαδικός αριθμός $a + bi$ μπορεί να νοηθεί ως αντιπροσωπευτικός ενός διανύσματος, δηλαδή ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει μήκος και διεύθυνση, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο το κατευθυνόμενο τμήμα (που δηλώνεται από το βέλος) αντιπροσωπεύει το διάνυσμα OP.



Διάγραμμα Argand

Η πράξη της πρόσθεσης δεν παρουσίασε καμία δυσκολία αλλά για δέκα χρόνια τον ταλαιπωρούσε ο πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων n-διάστατων χώρων , για n>2. Μια μέρα το 1843 είχε μία έμπνευση: η δυσκολία θα εξαφανιζόταν αν αντί για τριάδες, χρησιμοποιούσε τετράδες και αν εγκατέλειπε την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Σε αυτήν την άλγεβρα των κουαρτενίων του Hamilton, εμφανίζεται ο πολλαπλασιασμός AxB να μην είναι ίσος με BxA, αλλά με μείον AxB, που σημαίνει AxB = -BxA. Έτσι για αριθμητικές τετράδες $a + bi + cj + dk$ θα έπρεπε να έχουμε $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Τώρα ο Hamilton παρατήρησε ότι χρειαζόταν, επίσης, $ij=k$ αλλά και $ji= -k$ και παρομοίως $jk = i =-kj$. Από κάθε άλλη άποψη, οι νόμοι των πράξεων είναι ίδιοι με αυτούς της κοινής άλγεβρας.

Ο Hamilton δημιούργησε μια καινούρια άλγεβρα, επίσης συμβιβαστή, παραμερίζοντας το αντιμεταθετικό αξίωμα. Ο ίδιος θεωρούσε πάντα την επινόηση των τετραδικών αριθμών ως τη μεγαλύτερη επιτυχία του. Σήμερα, είναι σαφές ότι δεν ήταν αυτή η συγκεκριμένη μορφή άλγεβρας που ήταν σημαντική αλλά η ανακάλυψη της τεράστιας ελευθερίας των μαθηματικών να κατασκευάσουν άλγεβρες που δεν χρειάζεται να ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέτουν οι αποκαλούμενοι « θεμελιώδεις νόμου».

Οι Διαλέξεις του για τους Τετραδικούς Αριθμούς έκαναν την εμφάνισή τους το 1853. Μεγάλο μέρος του έργου αυτού είναι αφιερωμένο σε εφαρμογές των τετραδικών αριθμών στη γεωμετρία, τη διαφορική γεωμετρία και τη φυσική.

Ανάμεσα στις βασικές έννοιες που αναφέρονται στο βιβλίο είναι αυτές των διανυσμάτων και των βαθμωτών. Οι τετραδικές μονάδες i, j και k περιγράφονταν ως τελεστές και συντεταγμένες. Γενικά, ο Hamilton αντιμετώπισε τους τετραδικούς αριθμούς ως διανύσματα και ουσιαστικά απέδειξε ότι σχηματίζουν ένα γραμμικό διανυσματικό χώρο πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών. Όρισε την πρόσθεση των τετραδικών αριθμών και εισήγαγε την έννοια των δύο ειδών γινομένων: το ένα είδος πολλαπλασιάζοντας ένα διάνυσμα με ένα βαθμωτό και το άλλο πολλαπλασιάζοντας με ένα άλλο διάνυσμα. Παρατήρησε ότι το πρώτο είναι προσεταιριστικό, επιμεριστικό και αντιμεταθετικό ενώ το δεύτερο είναι μόνο προσεταιριστικό και επιμεριστικό. Απέδειξε ακόμη την διγραμμικότητα του διανύσματος.

Στην συνέχεια, ο Hamilton αφοσιώθηκε στην προετοιμασία των *Στοιχείων των Τετραδικών Αριθμών*. Το έργο αυτό δεν πρόλαβε να το ολοκληρώσει μέχρι το θάνατό του το 1865, αλλά το επιμελήθηκε και το δημοσίευσε ο γιος του, την επόμενη χρονιά.

Παραμένουν σε ισχύ και χρησιμοποιούνται και σήμερα οι γνωστές εξισώσεις του Hamilton με τις οποίες περιγράφεται η κίνηση ενός συστήματος από υλικά σημεία που υπόκεινται σε περιορισμούς είτε περιορισμούς στη θέση, είτε περιορισμούς στην ταχύτητα. Επίσης, γνωστή είναι η αρχή του Hamilton ή η αρχή της ελάχιστης δράσης που μας λέει ότι στη φύση τα φαινόμενα εξελίσσονται χάριν οικονομίας έτσι ώστε η δράση ως φυσική έννοια να είναι ελάχιστη, δηλαδή οι φυσικές διεργασίες και τα φυσικά φαινόμενα γίνονται με τον ελάχιστο «κόπο». Επίσης, η συνάρτηση Hamilton για διατηριτικά πεδία δυνάμεων παριστάνει τα άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος από υλικά σημεία που κινείται στο χώρο και σε αυτή την περίπτωση Ha= T+V=σταθερό.

AUGUSTUS DE MORGAN
(1806-1871)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Augustus De Morgan γεννήθηκε στις 27 Ιουνίου του 1806. Ο πατέρας του ήταν αντισυνταγματάρχης που υπηρέτησε στην Ινδία. Ενώ βρισκόταν εκεί γεννήθηκε το πέμπτο παιδί του ο Augustus. Ο Augustus έχασε την όραση του δεξιού ματιού του λίγο μετά την γέννησή του. Επτά μήνες αργότερα γύρισε με την οικογένειά του στην Αγγλία. Ο John De Morgan, ο πατέρας του, πέθανε όταν οAugustus ήταν δέκα ετών.

Στο σχολείο ο De Morgan δεν είχε άριστες επιδόσεις. Λόγω της φυσικής του ανικανότητας δεν συμμετείχε στα αθλήματα με τα άλλα παιδιά και πολύ συχνά γινόταν θύμα κακόγουστων αστείων από μερικούς συμμαθητές του.

Ο De Morgan μπήκε στο Trinity College Cambridge το 1823 στην ηλικία των δέκα έξι χρόνων όπου είχε δασκάλους τον Peackock και τον Whewell. Οι τρεις τους έγιναν φίλοι για μια ζωή. Πήρε το πτυχίο του Πανεπιστημίου, όπου αποφοίτησε τέταρτος, και συνέχισε για το Μεταπτυχιακό. Την εποχή εκείνη όμως απαιτούνταν να δώσει ένα θεολογικό τεστ για το Μεταπτυχιακό, κάτι στο οποίο ο De Morgan είχε αντιρρήσεις παρόλο που ήταν μέλος της εκκλησίας της Αγγλίας. Έτσι, δεν μπορούσε να προχωρήσει παραπάνω στο Cambridge αφού δεν ήταν εκλέξιμος για την θέση υπότροφου βοηθού καθηγητή.

Το 1826 επέστρεψε στο σπίτι του στο Λονδίνο και μπήκε στο Lincoln's Inn για να σπουδάσει. Το 1827, σε ηλικία 27 ετών έκανε αίτηση για την θέση μαθηματικού στο νεοϊδρυθέν University College London, και παρόλο που δεν είχε καμία δημοσίευση στα Μαθηματικά, διορίστηκε.

Το 1828 έγινε ο πρώτος καθηγητής μαθηματικών στο University College. Έδωσε την εναρκτήρια διάλεξή του πάνω στην μελέτη των Μαθηματικών. Ο De Morgan παραιτήθηκε από την θέση του το 1831 εξαιτίας παραβιάσεων ακαδημαϊκής ελευθερίας. Προσλήφθηκε στη θέση του ξανά το 1836 και έμεινε εκεί μέχρι το 1866 όπου παραιτήθηκε για δεύτερη φορά, ξανά για τον ίδιο λόγο.

Το βιβλίο του *«Στοιχεία της Αριθμητικής»* (Elements of Arithmetic) το 1830 ήταν η δεύτερη δημοσίευσή του. Το βιβλίο αυτό εκδόθηκε πολλές φορές.

Το 1838 καθόρισε και παρουσίασε τον όρο «μαθηματική επαγωγή» (mathematical induction) δημιουργώντας μια διαδικασία η οποία χρησιμοποιούνταν χωρίς σαφήνεια σε μια αυστηρή βάση. Ο όρος αυτός εμφανίστηκε πρώτα στο άρθρο του De Morgan *«Επαγωγικά Μαθηματικά»* (Induction Mathematics) στην Penny Cyclopedia. Κατά την διάρκεια της ζωής του ο De Morgan έγραψε 712 άρθρα για την Cyclopedia.

Το 1849 δημοσίευσε το *«Τριγωνομετρία και διπλή άλγεβρα»* (Trigonometry and double algebra) στην οποία έδωσε μια γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών αριθμών.

Το 1866 ήταν συνιδρυτής της Λονδρέζικης Μαθηματικής Εταιρίας και έγινε ο πρώτος της πρόεδρος. Το ίδιο έτος, τον εξέλεξαν Μέλος της Βασιλικής Αστρονομικής Εταιρίας. Ο De Morgan δεν έγινε ποτέ μέλος της Βασιλικής Κοινότητας καθώς αρνήθηκε να βάλει υποψηφιότητα. Επίσης, αρνήθηκε ένα τιμητικό τίτλο από το Πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου. Ο Thomas Hirst τον χαρακτήρισε ψυχρό απόλυτο και σχολαστικό.

Ο De Morgan ενδιαφερόταν πάντα για περίεργα αριθμητικά γεγονότα. Έτσι παρατήρησε ότι είχε την ιδιαιτερότητα να είναι x χρονών το έτος x^2 (ήταν 43 ετών το έτος 1849).

Σε όλη του την ζωή υπήρξε υποστηρικτής της θρησκευτικής και πνευματικής ανοχής. Ήταν εξαιρετικός και πολυγραφότατος συγγραφέας. Το γεγονός ότι είχε γεννηθεί τυφλός από το ένα μάτι ίσως να εξηγεί ορισμένες από τις αθώες εκκεντρικότητές του, όπως την αποστροφή του για την αγροτική ζωή, την άρνησή του να ψηφίζει ακόμη και την άρνηση που είχε να γίνει μέλος της Βασιλικής Κοινότητας. Πέθανε στις 18 Μαρτίου του 1871 σε ηλικία 65 ετών στο Λονδίνο.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Στην άλγεβρά του ο De Morgan θεωρούσε τα σύμβολά του αφηρημένα. Δεν καθόριζε όχι μόνο το γράμμα που χρησιμοποιούσε αλλά και τα σύμβολα των πράξεων. Γράμματα όπως τα A, B, C μπορεί να ήταν αρετές και αμαρτίες και τα (+) συν και πλην (–) μπορεί να σήμαιναν αμοιβή και τιμωρία. Ο De Morgan επέμενε ότι «με μία μόνο εξαίρεση, καμία λέξη ή σύμβολο της αριθμητικής ή της άλγεβρας δεν έχει μόνο μία σημασία, σε όλο το κεφάλαιο, το αντικείμενο του οποίου είναι τα σύμβολα και οι κανόνες συνδυασμού τους, δίνοντας έτσι μία συμβολική άλγεβρα, η οποία μπορεί να παίξει το ρόλο της γραμματικής για εκατό διαφορετικές άλγεβρες».

Η εξαίρεση που ανέφερε ο De Morgan είναι το σύμβολο της ισότητας, διότι πίστευε ότι στην $A=B$, τα σύμβολα A και B πρέπει «να έχουν την ίδια σημασία, ανεξάρτητα από τα βήματα που ακολουθήσαμε για να καταλήξουμε σε αυτήν».

Η ιδέα αυτή, την οποία πρωτοδιατύπωσε το 1830 στο έργο του *Τριγωνομετρία και Διπλή Άλγεβρα,* πλησιάζει πολύ τη σύγχρονη αντίληψη ότι τα μαθηματικά ασχολούνται με προτασιακές συναρτήσεις αντί για προτάσεις. Ο De Morgan, όμως, φαίνεται ότι δεν συνειδητοποίησε πλήρως την αυθαίρετη φύση των κανόνων και των ορισμών της άλγεβρας. Ήταν αρκετά κοντά στη φιλοσοφία του Kant για να πιστεύει ότι οι συνήθεις θεμελιώδεις νόμοι της άλγεβρας έπρεπε να ισχύουν σε οποιοδήποτε αλγεβρικό σύστημα. Διαπίστωσε ότι πηγαίνοντας από τη «μονή άλγεβρα» του συστήματος των πραγματικών αριθμών στη «διπλή άλγεβρα»των μιγαδικών αριθμών, οι κανόνες των πράξεων παραμένουν ίδιοι.

Ακόμη, ο De Morgan πίστευε ότι αυτές οι δύο μορφές εξαντλούν όλες τις δυνατές μορφές της άλγεβρας και ότι δε θα αναπτύσσονταν μία τριπλή ή τετραπλή άλγεβρα. Τον διέψευσε όμως ο Hamilton.

Μία ακόμη συνεισφορά του De Morgan στα Μαθηματικά ήταν οι Νόμοι De Morgan.

<u>*ΝΟΜΟΙ DE MORGAN*</u>

$$\boldsymbol{Comp}\ [\bigcap_J A_J] = \bigcup_J comp\ (\mathbf{A_J})$$

Δηλαδή: το συμπλήρωμα της διατομής οποιουδήποτε αριθμού συνόλων ισούται με την ένωση των συμπληρωμάτων τους

$$\textbf{Comp}\,[\bigcup_j A_J\,]=\bigcap_J comp\,(\mathbf{A_J})$$

Δηλαδή: το συμπλήρωμα της ένωσης οποιουδήποτε αριθμού συνόλων ισούται με τη διατομή των συμπληρωμάτων τους.

<u>Απόδειξη:</u>

Θα αποδείξουμε δύο συνολο-ανισότητες για να αποδείξουμε την ισότητα των αριστερών και δεξιών πλευρών.

Παίρνουμε το x που περιλαμβάνεται στο συμπλήρωμα της διατομής όλων των συνόλων A_J, δηλαδή το x δεν είναι στη διατομή όλων των A_J. Κατόπιν πρέπει να υπάρξει τουλάχιστον ένα σύνολο A_J που δεν περιέχει το x (επειδή εάν όλα τα A_J περιείχαν το x τότε το x θα ήταν η διατομή τους επίσης). Καλούμε αυτό το σύνολο A. Δεδομένου ότι το x δεν είναι στο A, το x είναι στο συμπλήρωμα του A. Αλλά έπειτα το x είναι επίσης στην ένωση όλων των συμπληρωμάτων A_J, επειδή το A είναι από εκείνα τα σύνολα. Αυτό αποδεικνύει ότι το δεξί σύνολο περιλαμβάνεται στο δεξί.

Μετά παίρνουμε το x που περιλαμβάνεται στην ένωση όλων των συμπληρωμάτων A_J. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα συμπλήρωμα που περιέχει το x, ή με άλλα λόγια, τουλάχιστον ένα A_J δεν περιέχει το x. Αλλά έπειτα το x δεν είναι στη διατομή όλων των A_J και ως εκ τούτου πρέπει να είναι στο συμπλήρωμα εκείνης της διατομής. Αυτό αποδεικνύει την άλλη ανισότητα, και ως εκ τούτου και τα δύο σύνολα πρέπει να είναι ίσα.

Ο De Morgan αναγνώρισε την συμβολική φύση της άλγεβρας και γνώριζε την ύπαρξή της όχι σαν κοινή άλγεβρα. Παρουσίασε τους Νόμους De Morgan ενώ τελικά η μεγαλύτερη συνεισφορά του ήταν η αναμόρφωση της μαθηματικής λογικής. Ο De Morgan συνεργάστηκε με τον Hamilton και τον Charles Babbage και έκανε ιδιαίτερα μαθήματα στην Lady Lovelace η οποία, θεωρείται, ότι έγραψε το πρώτο πρόγραμμα για ηλεκτρονικό υπολογιστή για το Babbage.

ERNST EDUARD KUMMER
(1810–1893)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Η σύγχρονη Αριθμητική–μετά τον Gauss-αρχίζει με τον Kummer. Η καταγωγή της θεωρίας του Kummer ανάγεται στην προσπάθεια του να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Ο Kummer ήταν ένας τυπικός Γερμανός παλαιών αντιλήψεων με την ευθύτητα και απλότητα, τον καλό χαρακτήρα και το δηκτικό πνεύμα. Ο Ernst Eduard Kummer γεννήθηκε στις 29 Ιανουαρίου του 1810. Μολονότι γεννήθηκε μόνο πέντε χρόνια πριν από την πτώση του Ναπολέοντα, ο διάσημος Αυτοκράτορας έπαιξε σημαντικό ρόλο, άθελα του, στη ζωή του Kummer. Γιος γιατρού, της περιοχής Sorau, της Γερμανίας, ο Kummer, έχασε τον πατέρα του σε ηλικία τριών χρόνων, εξαιτίας του τύφου. Έτσι έμεινε μαζί με τον μεγαλύτερο αδερφό του και την μητέρα του, η οποία κατάφερε αντιμετωπίζοντας πολλές δυσκολίες να δει τους γιους της να τελειώνουν το Γυμνάσιο.

Σε ηλικία δεκαοκτώ ετών (το 1828) ο Kummer γράφτηκε από την μητέρα του στο Πανεπιστήμιο της Halle για να σπουδάσει θεολογία και να προετοιμαστεί για σταδιοδρομία στην εκκλησία. Στο Πανεπιστήμιο που φοιτούσε, δίδασκε ο Heinrich Ferdinard Scherk μαθηματικά. Ο Scherk ήταν ένας παλαιών αρχών άνθρωπος γεμάτος ενθουσιασμό για την Άλγεβρα και την Θεωρία των Αριθμών, έναν ενθουσιασμό που κατόρθωσε να μεταδώσει στον νεαρό Kummer. Υπό την καθοδήγηση του Scherk, ο Kummer γρήγορα εγκατέλειψε τις ηθικές και θεολογικές σπουδές του προς όφελος των μαθηματικών. Απηχώντας καρτεσιανές απόψεις, ο Kummer έλεγε ότι προτιμά τα μαθηματικά από την Φιλοσοφία επειδή «απλά σφάλματα και πλάνες δεν χωρούν στα Μαθηματικά». Ενόσω ήταν τριτοετής στο Πανεπιστήμιο, ο Kummer επέλυσε ένα πρόβλημα στα Μαθηματικά για το οποίο βραβεύτηκε. Σε ηλικία είκοσι ενός ετών του απονεμήθηκε διδακτορικό δίπλωμα (στις 10 Σεπτεμβρίου του 1831). Δεν υπήρχε όμως διαθέσιμη θέση σε πανεπιστήμιο, και έτσι ο Kummer άρχισε την σταδιοδρομία του ως δάσκαλος στο παλιό του Γυμνάσιο.

Το 1832 εγκαταστάθηκε στο Liegnitz, όπου δίδαξε για δέκα χρόνια στο Γυμνάσιο. Από την θέση αυτή ο Kummer παρακίνησε τον Kronecker να ξεκινήσει την επαναστατική σταδιοδρομία του. Το 1842 ο Kummer εξελέγη καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Breslau, όπου δίδαξε μέχρι το 1855. Το 1855 ήταν η χρονιά που ο θάνατος του Gauss προκάλεσε μεγάλες ανακατατάξεις στον μαθηματικό χάρτη της Ευρώπης.

Έτσι, σε ηλικία είκοσι εννέα ετών, ο Kummer, εξελέγη ομόφωνα από τους συναδέλφους του μαθηματικούς, ως αντικαταστάτης του Dirichlet (ο οποίος διαδέχθηκε τον Gauss), στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Το έτος αυτό (1855) διαδέχθηκε τον Dirichlet τόσο στο Πανεπιστήμιο όσο και στην Ακαδημία, ενώ παράλληλα διορίστηκε καθηγητής στη Στρατιωτική Σχολή του Βερολίνου.

Τα τελευταία εννέα χρόνια της ζωής του, ο Kummer τα έζησε σε πλήρη απομόνωση. « Τίποτα δεν πρόκειται να βρεθεί σε μεταθανάτια δοκίμιά μου», έλεγε, αναλογιζόμενος τον όγκο των εργασιών που άφησε πίσω του ο Gauss για να εκδοθούν μετά τον θάνατό του. Περιβαλλόμενος από την οικογένειά του, (εννέα παιδιά που επέζησαν μετά τον θάνατό του), ο Kummer εγκατέλειψε για τα καλά τα Μαθηματικά όταν αποσύρθηκε και παρέμεινε αυστηρά απομονωμένος από τον υπόλοιπο κόσμο. Πέθανε μετά από μια σύντομη προσβολή γρίπης στις 14 Μαΐου του 1893 σε ηλικία ογδόντα τριών ετών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Kummer ήταν ένας από τους σπάνιους μεγαλοφυείς επιστήμονες που είναι πρώτοι τόσο στα αφηρημένα Μαθηματικά όσο και τις εφαρμογές των Μαθηματικών σε πρακτικά ζητήματα και τέλος στην ικανότητα να πραγματοποιούν έξοχα πειράματα φυσικής. Οι πιο όμορφες εργασίες του αφορούσαν στη Θεωρία των Αριθμών όπου, χάρις στην εξαίρετη πρωτοτυπία, άνοιξε νέους δρόμους ανακαλύψεων μεγάλης σπουδαιότητας. Ωστόσο ο Kummer έδωσε σημαντικές εργασίες και σε άλλα πεδία – Ανάλυση, Γεωμετρία και εφαρμοσμένη Φυσική.

Θα πρέπει να αναφέρουμε εδώ ότι οι «ιδεώδεις αριθμοί» του Kummer έχουν τώρα αντικατασταθεί σε μεγάλο βαθμό από τα «ιδεώδη» του Dedekind. Ο Kummer με τους αριθμούς αυτούς απέδειξε ότι η σχέση $X^p + Y^p = Z^p$, όπου p πρώτος, είναι αδύνατη για ακέραιους X, Y, Z, διάφορους του μηδενός, για μια ολόκληρη εκτεταμένη σειρά πρώτων p. Δεν κατόρθωσε να αποδείξει το θεώρημα του Fermat για όλους τους πρώτους. Ορισμένοι «εκθετικοί πρώτοι» ξέφυγαν από τα δίκτυα του Kummer- και εξακολουθούν να διαφεύγουν. Παρ' όλα αυτά το βήμα προόδου που έκανε ξεπερνούσε όλα όσα είχαν επιτύχει οι προγενέστεροί του, ώστε δίκαια ο Kummer έγινε διάσημος σχεδόν παρά την θέληση του. Τιμήθηκε με το Μεγάλο Βραβείο της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών χωρίς να λάβει μέρος στο διαγωνισμό.

Ο διαγωνισμός είχε αρχίσει από το 1853 και παρατάθηκε έως το 1856. Η επιτροπή αφού διαπίστωσε ότι μεταξύ των εργασιών που της υποβλήθηκαν καμία δεν φαινόταν να άξιζε το βραβείο, πρότεινε στην Ακαδημία να βραβεύσει τον Kummer για τις όμορφες εργασίες του στους μιγαδικούς αριθμούς που συντίθενται από ρίζες αρνητικής μονάδας και ακεραίους. Έτσι η Ακαδημία συμφώνησε με την πρόταση της επιτροπής και ο Kummer πήρε το βραβείο.

Η πρώτη εργασία του Kummer για το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat χρονολογείται από τον Οκτώβριο του 1835. Ακολούθησαν άλλα δοκίμια στην περίοδο 1844- 1847, το τελευταίο από τα οποία είχε τίτλο «*Απόδειξη του Θεωρήματος Fermat ότι είναι Αδύνατη η Σχέση* $X^p + Y^p = Z^p$ *για έναν Άπειρο Αριθμό Πρώτων p*». Συνέχισε να κάνει βελτιώσεις στη θεωρία του ως το 1874, όταν ήταν εξήντα τεσσάρων ετών.

Η θαυμάσια εργασία του Hamilton σχετικά με τα συστήματα ακτινών (στην οπτική) αποτέλεσε για τον Kummer την πηγή έμπνευσης για μια από τις πιο όμορφες ανακαλύψεις του – συγκεκριμένα αυτή της επιφάνειας τέταρτου βαθμού, που είναι γνωστή με το όνομά του, και η οποία διαδραμάτισε ουσιαστικό ρόλο στην Γεωμετρία του Ευκλείδειου χώρου, όταν ο χώρος αυτός είναι τετραδιάστατος (και όχι τριδιάστατος χώρος που συνήθως φανταζόμαστε), όπως συμβαίνει όταν παίρνουμε ευθείες γραμμές αντί σημείων ως τα ανάγωγα στοιχεία από τα οποία συγκροτείται ο χώρος.

Για να κλείσει τον κύκλο, ο Kummer επέστρεψε στη Φυσική με την μελέτη του για τα συστήματα ακτινών και έδωσε σημαντικές συνεισφορές στη θεωρία της ατμοσφαιρικής διάθλασης. Η εργασία του στη Στρατιωτική Σχολή άφησε κατάπληκτη την επιστημονική κοινότητα, αποδεικνύοντας ότι ήταν ταυτόχρονα ένας εξαίρετος πειραματιστής με τις μελέτες του στη βαλλιστική. Με το χαρακτηριστικό του χιούμορ, ο Kummer ζητούσε συγγνώμη γι' αυτήν την ολέθρια απομάκρυνσή του από την ομορφιά των Μαθηματικών και έλεγε ότι: «Όταν καταπιάνομαι με ένα πρόβλημα πειραματικά, τούτο αποτελεί απόδειξη ότι πρόκειται για πρόβλημα μαθηματικά ακαταμάχητο».

EVARISTE GALOIS
(1811-1832)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Galois γεννήθηκε έξω από το Παρίσι, στο χωριό Bourg la Reine, στις 26 Οκτωβρίου 1811. Ο πατέρας του ήταν δήμαρχος στο χωριό αυτό. Οι γονείς του αν και μορφωμένοι δεν ενδιαφέρθηκαν ποτέ για τα Μαθηματικά, όμως ο Galois κληρονόμησε από αυτούς ένα αδυσώπητο μίσος για την τυραννία.

Μέχρι την ηλικία των δώδεκα χρονών ο Galois δεν πήγε σχολείο και δάσκαλο είχε μόνο την μητέρα του. Το 1823 μπήκε στο Γυμνάσιο του Louis-le-Grang στο Παρίσι. Το σχολείο αυτό ήταν τρομακτικό για τα παιδιά καθώς ο Γυμνασιάρχης ήταν πάρα πολύ αυστηρός και είχε μετατρέψει το σχολείο σε ένα είδος φυλακής.

Ξεκινώντας το σχολείο ο Galois δεν έδειξε ενδιαφέρον για τα λατινικά, τα ελληνικά και την άλγεβρα αλλά ενθουσιάστηκε με την Γεωμετρία του Legendre. Αργότερα, διάβασε με κατανόηση την άλγεβρα και την ανάλυση στα έργα μεγάλων Μαθηματικών όπως του Lagrange και του Abel. Η επίδοσή του ήταν πάντα μέτρια και οι καθηγητές του τον θεωρούσαν εκκεντρικό. Στην πρώιμη εφηβεία του εμφανίστηκε ξαφνικά η ευφυΐα του στα μαθηματικά. Παρόλα αυτά, η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο ήταν ένα δευτερεύον μάθημα σε σχέση με την αφομοίωση των κλασικών. Ο Galois διάβασε και κατανόησε την Γεωμετρία του Legendre σαν ένα απλό μυθιστόρημα.

Στην ηλικία των δεκαέξι ετών, ο Galois συνειδητοποίησε αυτό που οι καθηγητές του δεν μπορούσαν να καταλάβουν, ότι ήταν μια Μαθηματική ιδιοφυΐα. Μόνο ένας καθηγητής της Ρητορικής το κατάλαβε κάποια στιγμή και συνέστησε στους γονείς του να ασχολείται μόνο με τα Μαθηματικά.

Ο Galois θέλησε να μπει στην Πολυτεχνική Σχολή (Ecole Polytechnique). Ο καθηγητής του τον παρακαλούσε να διαβάζει συστηματικά, όμως ποτέ δεν τον άκουσε και πήγε στις εξετάσεις απροετοίμαστος. Ο Galois απέτυχε στις εξετάσεις. Η αποτυχία αυτή ήταν σκληρό χτύπημα και κλείστηκε περισσότερο στον εαυτό του. Η απογοήτευση αυτή ακολουθήθηκε και από άλλες.

Ο Galois στα δεκαεφτά του χρόνια είχε αρχίσει να κάνει ανακαλύψεις ιστορικής σημασίας στην θεωρία των εξισώσεων. Τον Μάρτιο του 1829 δημοσίευσε το πρώτο του δοκίμιο για τα συνεχή κλάσματα. Επίσης, μάζεψε σε μία μελέτη ότι είχε ανακαλύψει μέχρι εκείνη τη στιγμή για να τα υποβάλει στην Μαθηματική Ακαδημία. Όμως, ο Gauchy,που θα ήταν υπεύθυνος να την παρουσιάσει, την έχασε.

Δύο ακόμη καταστροφές όταν ο Galois ήτα δεκαοχτώ χρονών, σημάδεψαν οριστικά τον χαρακτήρα του. Παρουσιάστηκε για δεύτερη φορά στις εισαγωγικές εξετάσεις για το Πολυτεχνείο. Δυστυχώς όμως οι καθηγητές δεν μπορούσαν να καταλάβουν την ευφυΐα του Galois και απέτυχε για δεύτερη φορά. Το τελευταίο χτύπημα ήταν ο θάνατος του πατέρα του. Ως δήμαρχος του χωριού του ήταν συχνά στόχος από την πλευρά των κληρικών. Το 1827 ένας κληρικός οργάνωσε μια βρώμικη εκστρατεία εναντίον του με αποτέλεσμα ο πατέρας του Galois να παρουσιάσει μανία καταδίωξης και να αυτοκτονήσει.

Ο Galois μπήκε στην Ecole Normale για να προετοιμαστεί για διδασκαλία. Συνέχισε, όμως, και την έρευνά του. Το 1830 κατάφερε να μπει σε Πανεπιστημιακή σχολή. Στην διάρκεια αυτού του χρόνου, έγραψε τρία μνημόνια με τα οποία άνοιξε νέους δρόμους. Στα έργα αυτά περιέχονται μερικές από τις σημαντικότερες εργασίες του στην θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων. Υπέβαλε άλλη μία διατριβή στην Ακαδημία Επιστημών, σε ένα διαγωνισμό για το μεγάλο βραβείο των Μαθηματικών. Δυστυχώς, όμως, ο Galois στάθηκε άλλη μια φορά άτυχος. Ο γραμματέας πήρε το χειρόγραφο σπίτι του για να το εξετάσει. Πέθανε πριν προλάβει να το διαβάσει. Το χειρόγραφο αναζητήθηκε αλλά δεν βρέθηκε ποτέ.

Ο Galois, αντιμετωπίζοντας συνεχώς την τυραννία και την διάψευση των ελπίδων του, υποστήριξε την επανάσταση του 1830. Μία επιστολή που επέκρινε τον διευθυντή της Ecole Normale είχε σαν αποτέλεσμα την αποβολή του Galois.

Ο Galois προσπάθησε και τρίτη φορά να παρουσιάσει μία εργασία του στην Ακαδημία. Ο Poisson επέστρεψε την μελέτη αυτή γιατί ζητούσε αποδείξεις. Απογοητευμένος, ο Galois κατατάχθηκε στην εθνική φρουρά. Το 1831 συνελήφθη δύο φορές γιατί συμμετείχε σε μία συγκέντρωση ρεπουμπλικάνων όπου έκανε μία πρόταση, η οποία θεωρήθηκε απειλή για την ζωή του βασιλιά.

Λίγο αργότερα, συνδέθηκε με μία κοπέλα «χαμηλής υποστάθμης» και κάποιος τον κάλεσε σε μονομαχία. Το προηγούμενο βράδυ, έχοντας άσχημο προαίσθημα, ο Galois πέρασε πολλές ώρες σημειώνοντας, σε ένα γράμμα του προς κάποιο φίλο του, τον Chevalier, τις ανακαλύψεις του. Ζήτησε να δημοσιευθεί το γράμμα του στην Revue Encyclopédique και εξέφρασε την επιθυμία του να δημοσιεύσουν οι Jacobi και Gauss την γνώμη τους όσον αφορούσε την σημασία των θεωρημάτων του. Το πρωί της 30ης Μαΐου του 1832, ο Galois έλαβε μέρος στην μονομαχία με πιστόλια, η οποία είχε ως αποτέλεσμα τον θάνατό του την επόμενη μέρα. Πέθανε σε ηλικία είκοσι χρονών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Η αποτελεσματική διάδοση των σκέψεων του Galois ξεκίνησε το 1846. Την χρονιά εκείνη ο Liouville δημοσίευσε αρκετά άρθρα και χειρόγραφα του Galois καθώς και το γράμμα του στον Chevalier στο περιοδικό του *Journal des Mathématiques*. Πριν από αυτό, όμως, το 1830 δύο άρθρα του Galois δημοσιεύτηκαν στο *Bulletin des Sciences Mathématiques*. Στο πρώτο από αυτά τα άρθρα, αναφέρει τρία κριτήρια για την επιλυσιμότητα μιας εξίσωσης.

Στο άρθρο αυτό αναφερόταν στις εξισώσεις του Gauss και παρατήρησε ότι τα αποτελέσματά του βασίζονταν στην θεωρία των μεταθέσεων. Παρόλα αυτά δε περιλάμβανε καμία απόδειξη.

Το άλλο άρθρο αναφερόταν στην θεωρία αριθμών. Σε αυτό ο Galois έδειξε τον τρόπο κατασκευής πεπερασμένων σωμάτων.

Το γράμμα του προς τον Chevalier περιλάμβανε τα βασικά σημεία του άρθρου που του είχε επιστραφεί από την Ακαδημία. Σε αυτό, ο Galois σημείωνε αυτό που ο ίδιος θεωρούσε ότι ήταν το σημαντικό μέρος της θεωρίας του. Πιο συγκεκριμένα, τόνισε, την διαφορά ανάμεσα στην προσάρτηση μιας ή όλων των ριζών της επιλύουσας και την συνέδεσε με την ανάλυση της *ομάδας G* της εξίσωσης. Ο Galois, έδειξε ότι μια επέκταση του δεδομένου σώματος είναι κανονική αν και μόνο αν η αντίστοιχη υποομάδα είναι μία κανονική υποομάδα του *G*. Παρατήρησε ότι μια εξίσωση της οποίας η ομάδα δεν μπορεί να αναλυθεί, δηλαδή δεν έχει μία κανονική υποομάδα, πρέπει να μετασχηματίζεται σε μία που να μπορεί.. Ο Galois παρατήρησε, επίσης, ότι η φράση *«μία εξίσωση είναι επιλύσιμη»* είναι ισοδύναμη με την φράση *«υπάρχει αλυσίδα κανονικών υποομάδων με πρώτο δείκτη»*.

Οι καινούριες αυτές έννοιες δεν είχαν αποδείξεις και δεν έγιναν κατανοητές παρά μόνο όταν δημοσιεύτηκε όλη η μελέτη. Η μελέτη αυτή περιλαμβάνει τη σημαντική έννοια της «επέκτασης»:

Θα ονομάζουμε ρητή κάθε ποσότητα η οποία μπορεί να εκφραστεί ως μια ρητή συνάρτηση των συντελεστών της εξίσωσης και ενός συγκεκριμένου αριθμού ποσοτήτων προσαρτημένων στην εξίσωση και επιλεγμένων αυθαίρετα.

Ο Galois παρατήρησε ότι η συνάρτηση βαθμού n, του Gauss, είναι ανάγωγη έως ότου προσαρτηθεί μία ρίζα μιας από τις βοηθητικές εξισώσεις. Ο Gauss είχε στην ουσία απαντήσει στο ερώτημα της επιλυσιμότητας της εξίσωσης:

$$a_o x^n + a_n = 0$$

συναρτήσει ρητών πράξεων και τετραγωνικών ριζών των συντελεστών. Ο Galois γενίκευσε το αποτέλεσμα και διατύπωσε κριτήρια για την επιλυσιμότητα της

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_{n-1}x + a_n = 0$$

Ο Galois ξεκίνησε την αναζήτησή του από κάποια δουλειά του Lagrange για τις ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Κάθε αλλαγή στη διατεταγμένη διάταξη *n* αντικειμένων ονομάζεται μετάθεση αυτών των αντικειμένων. Αν δύο μεταθέσεις γίνουν διαδοχικά, η τελική μετάθεση ονομάζεται γινόμενο των δύο μεταθετικών μετασχηματισμών.

Ο Galois εμπνεύστηκε από την απόδειξη του Abel για την μη επιλυσιμότητα της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης με ριζικά και ανακάλυψε ότι μια ανάγωγη αλγεβρική εξίσωση επιλύεται με την βοήθεια ριζικών, αν και μόνο αν, η ομάδα της είναι επιλύσιμη. Η περιγραφή μιας επιλύσιμης ομάδας είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, διότι αναφέρεται στις σχέσεις ανάμεσα στις υποομάδες της. Ο Lagrange είχε ήδη αποδείξει ότι η τάξη μιας υποομάδας πρέπει να είναι παράγοντας της τάξης της ομάδας. Ο Galois, όμως, προχώρησε ακόμη περισσότερο και βρήκε σχέσεις ανάμεσα στη δυνατότητα παραγοντοποίησης της ομάδας μιας εξίσωσης και την επιλυσιμότητα της εξίσωσης. Επίσης, σε αυτόν οφείλουμε την λέξη ομάδα με την αλγεβρική της έννοια στα μαθηματικά.

Η θεωρία Galois μας δίνει έναν αλγόριθμο για την εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης, όταν αυτές είναι δυνατόν να εκφραστούν με ριζικά. Η έμφαση, όμως, στο έργο του Galois για τη θεωρία των εξισώσεων βρίσκεται, κυρίως, στις αλγεβρικές δομές και όχι στην αντιμετώπιση ειδικών περιπτώσεων. Μολονότι η δουλειά του προηγήθηκε αυτής των βρετανών μαθηματικών που ασχολήθηκαν με την άλγεβρα, την περίοδο 1830–1850, οι ιδέες του δεν άσκησαν καμία επιρροή έως ότου δημοσιεύθηκαν το 1846.

KARL WEIERSTRASS & SONJA KOWALEWSKI

(1815-1897) (1850-1891)

Η ΖΩΗ ΤΟΥΣ

Ο Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, μεγαλύτερος γιος του Wilhelm Weierstrass, γεννήθηκε στις 31 Οκτωβρίου του 1815 στο Ostenfelde της περιοχής Μύνστερ στη Γερμανία. Ο πατέρας του εργαζόταν ως τελωνειακός υπάλληλος στην υπηρεσία της Γαλλίας. Λίγο μετά την γέννηση του Weierstrass, η οικογένειά του μετακόμισε στο Westernkotten της Βεστφαλίας, όπου ο πατέρας του εργάστηκε ως τελωνειακός υπάλληλος στα αλατωρυχεία.

Η οικογένειά του ήταν ευσεβείς φιλελεύθεροι καθολικοί Η μητέρα τους πέθανε το 1826, λίγο μετά τη γέννηση της μικρότερης αδερφής του και ο πατέρας του ξαναπαντρεύτηκε τον επόμενο χρόνο.

Ο πατέρας του ήταν ιδεαλιστής και άνθρωπος με παιδεία και για ένα διάστημα εργάστηκε και ως δάσκαλος. Παρόλα αυτά ήταν πολύ αυταρχικός με τα παιδιά του, τόσο που προσπάθησε να οδηγήσει τον Karl σε μία σταδιοδρομία που δεν του ταίριαζε.

Επειδή δεν υπήρχε σχολείο εκεί, ο Karl πήγε στην παρακείμενη πόλη, το Μύνστερ, όπου σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών μπήκε στο Καθολικό Γυμνάσιο στο Paderborn. Ο Weierstrass απολάμβανε το σχολείο. Πέρασε τον κανονικό κύκλο μαθημάτων μέσα σε πολύ λιγότερο διάστημα από το προβλεπόμενο, σημειώνοντας εξαιρετικές επιδόσεις σε όλα τα μαθήματα. Τελείωσε το σχολείο σε ηλικία δεκαεννιά ετών. Στην πορεία του επισωρεύονταν βραβεία. Σε μία μόνο χρονιά πήρε επτά. Ήταν κατά κανόνα πρώτος στα Γερμανικά και σε δύο από τα τρία μαθήματα: Λατινικά, Ελληνικά και Μαθηματικά.

Ο Weierstrass δούλεψε για μια περίοδο ως λογιστής και ο πατέρας του αποφάσισε να τον στείλει στο Πανεπιστήμιο της Βόννης για να διδαχθεί την νομοθεσία του εμπορίου. Ο Karl όμως δεν ενδιαφερόταν ιδιαίτερα, για αυτό ασχολήθηκε με την ξιφασκία στην οποία ουδέποτε και ηττήθηκε.

Τα τέσσερα χρόνια που ξόδεψε στο Πανεπιστήμιο ξοδεύτηκαν τελικά σωστά και αυτό γιατί απελευθερώθηκε από την προσκόλληση στον πατέρα του και γιατί τον έμαθε να συμμερίζεται τις προσδοκίες των άλλων που τον βοήθησε σημαντικά να γίνει ένας από τους μεγαλύτερους καθηγητές μαθηματικών. Όμως γύρισε από την Βόννη χωρίς το πτυχίο στα χέρια του. Τα μαθηματικά του ήταν ακόμη ασήμαντα.

Ο Weierstrass άρχισε να μελετά μαθηματικά ερασιτεχνικά ανάμεσα στην ξιφασκία και το ποτό. Μελέτησε την Ουράνια Μηχανική του Laplace, θέτοντας τα θεμέλια του ενδιαφέροντος που διατήρησε σε όλη του τη ζωή για τη δυναμική και τα συστήματα των διαφορικών εξισώσεων. Ένας οικογενειακός φίλος είδε το ταλέντο που είχε ο Karl και υπέδειξε μια διέξοδο: να τον αφήσουν να προετοιμαστεί στη γειτονική ακαδημία του Μύνστερ και να πάρει μέρος στις εξετάσεις για να γίνει καθηγητής μέσης εκπαίδευσης. Έτσι θα είχε το χρόνο να ασχοληθεί και με τα Μαθηματικά.

Στις 22 Μαΐου του 1839 η αίτησή του έγινε δεκτή και γράφτηκε στην Ακαδημία. Εκεί γνώρισε τον Christof Guderman που ήταν μαθηματικός. Την εναρκτήρια διάλεξή του για τις ελλειπτικές συναρτήσεις την παρακολούθησαν δεκατρείς ακροατές. Στη δεύτερη διάλεξη ο μοναδικός σπουδαστής που προσήλθε να τον ακούσει ήταν ο Weierstrass. Αισθανόταν ευγνωμοσύνη για τις προσπάθειες του Gudermann να του προσφέρει άφθονες γνώσεις και όταν ήταν πια διάσημος δεν έχανε ποτέ την ευκαιρία να εκφράζει την ευγνωμοσύνη του για αυτόν.

Το 1841 πήρε μέρος στις εξετάσεις για το δίπλωμα καθηγητή. Μία από τις διατριβές που υπέβαλε ήταν ιδιαίτερα δυσνόητη για το δίπλωμα του καθηγητή. Μετά την αποδοχή της εργασίας αυτής και την επιτυχή κατάληξη της προφορικής του εξέτασης πήρε ένα εξαιρετικό πιστοποιητικό για την πρωτότυπη συνεισφορά του στα μαθηματικά.

Στα είκοσι έξι του έγινε καθηγητής. Οι διαλέξεις του Weierstrass ήταν υπόδειγμα τελειότητας. Είχε προσθέσει στη διδασκαλία του και το στοιχείο της έμπνευσης. Κατάφερε να βγάλει σπουδαίους μαθηματικούς από τους σπουδαστές του, σε ποσοστό δυσανάλογο.

Τις δημιουργικές του ιδέες τις συνέλαβε και τις επεξεργάστηκε κατά το πλείστον όταν ήταν ακόμα άσημος καθηγητής σε ένα χωριό όπου τα συγγράμματα των μαθηματικών ήταν δυσεύρετα. Μην έχοντας τα οικονομικά μέσα να πληρώνει ταχυδρομικά τέλη, στερήθηκε τη δυνατότητα κάθε επιστημονικής αλληλογραφίας. Οι καλές πλευρές της απομόνωσης αυτής ήταν η πρωτοτυπία που αναπτύχθηκε και τα συγγράμματά του ήταν χαρακτηριστικά.

Το 1848 ο Weierstrass ήταν βοηθός καθηγητής Μαθηματικών στο Προ-γυμνάσιο του Deutsch-Krone της Δυτικής Πρωσίας. Πέρα από τα Μαθηματικά και τη Φυσική δίδαξε γερμανικά, γεωγραφία και γραφή σε μικρά παιδιά αλλά και γυμναστική. Κατόπιν όμως πήρε μετάθεση για το Βασιλικό Καθολικό Γυμνάσιο του Braunsberg για έξι χρόνια.

Το 1854 μετά την δημοσίευση της μελέτης του για τις αβελιανές συναρτήσεις η αναγνώριση ήταν άμεση. Ο Richelot που ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Konigsberg έπεισε το Πανεπιστήμιο να αναγορεύσει, τιμής ένεκεν, επίτιμο διδάκτορα τον Weierstrass. Ο Υπουργός Παιδείας τον προήγαγε αμέσως και του έδωσε άδεια ενός έτους για να συνεχίσει το επιστημονικό του έργο. Τα απρόσμενα αυτά γεγονότα δεν ξεμυάλισαν τον Weierstrass. Δεν επέστρεψε όμως πίσω στο Γυμνάσιο του Braunsberg. Οι μεγάλοι Γερμανοί μαθηματικοί έκαναν ό,τι περνούσε από το χέρι τους και έτσι ο Karl διορίστηκε Καθηγητής Μαθηματικών στη Βασιλική Πολυτεχνική Σχολή του Βερολίνου το 1856. Το ίδιο έτος τοποθετήθηκε Επίκουρος Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου και έγινε μέλος της Ακαδημίας του Βερολίνου.

Η συγκίνηση από τις νέες συνθήκες εργασίας και η ένταση των κοπιαστικών νέων του διδακτικών καθηκόντων, του προκάλεσαν νευρικό κλονισμό και από τότε βασανιζόταν κατά καιρούς από ζαλάδες.

Καθώς η φήμη του εξαπλώθηκε σε όλη την Ευρώπη, οι τάξεις του Weierstrass άρχισαν να μεγαλώνουν γρήγορα και μερικές φορές ο δάσκαλος έβλεπε με λύπη του ότι η ποιότητα των μαθητών του υστερούσε πολύ σε σχέση με το γρήγορα αυξανόμενο ρυθμό της. Η περίοδος 1864-1897 που ο Weierstrass έζησε στο Βερολίνο ως Καθηγητής Μαθηματικών ήταν μεστή από επιστημονικά ενδιαφέροντα για τον άνθρωπο που έμελλε να αναγνωριστεί ως ηγετική φυσιογνωμία της Μαθηματικής Ανάλυσης στο κόσμο.

Εκείνη την περίοδο γνώρισε και την Sonja Kowalewski στην οποία και θα αναφερθούμε παρακάτω.

Το πατρικό της όνομα ήταν Sonja Corvin Kroukowsky. Γεννήθηκε στη Μόσχα στις 15 Ιανουαρίου του 1850 και πέθανε στη Στοκχόλμη στις 10 Φεβρουαρίου του 1891, έξι χρόνια πριν το θάνατο του Weierstrass.

Σε ηλικία δεκαπέντε ετών η Sonja άρχισε τη μελέτη των Μαθηματικών. Στα δεκαοχτώ είχε ήδη τόσο μεγάλη πρόοδο που ήταν έτοιμη για προχωρημένη εργασία, ενώ αισθανόταν γοητευμένη από το αντικείμενό της. Καθώς καταγόταν από αριστοκρατική και εύπορη οικογένεια είχε τη δυνατότητα να ικανοποιήσει τη φιλοδοξία της να σπουδάσει στο εξωτερικό. Αυτή η κοπέλα έγινε όχι μόνο η κυριότερη γυναίκα μαθηματικός της σύγχρονης εποχής, αλλά απέκτησε φήμη επίσης ως ηγετική μορφή του κινήματος για την χειραφέτηση των γυναικών, ιδίως για να παραμεριστούν τα πανάρχαια εμπόδια στην πρόοδο των γυναικών, στο πεδίο της εκπαίδευσης.

Πέρα από όλα αυτά ήταν και εξαιρετική συγγραφέας. Σε νεαρή ηλικία ταλαντευόταν ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Φιλολογία. Μετά από τη συγγραφή της πιο σημαντικής της εργασίας στράφηκε στη φιλολογία σαν αναψυχή και έγραψε τις αναμνήσεις της παιδικής της ηλικίας στη Ρωσία με τη μορφή μυθιστορήματος.

Η Sonja ήταν ανύπαντρη και η ιδιότητα της ανύπαντρης φοιτήτριας την δεκαετία του 1870 ήταν κάτι το ασυνήθιστο. Για να προλάβει τις κακολογίες του κόσμου, ετέλεσε σε ηλικία δεκαοχτώ ετών λευκό γάμο. Άφησε τον σύζυγο της στη Ρωσία και ξεκίνησε για την Γερμανία για να συναντήσει τον Weierstrass. Η Sonja είχε καθηγητή έναν μαθητή του Weierstrass και έτσι επεδίωξε να τον γνωρίσει.

Ο Weierstrass αφιέρωσε τα απογεύματά του για να της διδάξει Μαθηματικά. Τα μαθήματα άρχισαν το φθινόπωρο του 1870 και συνεχίστηκαν με μικρές παύσεις μέχρι το 1874. Όταν δεν μπορούσαν να συναντηθούν, αλληλογραφούσαν. Μετά το θάνατο της Sonja, ο Weierstrass έκαψε όλα τα γράμματά της και μαζί με αυτά όλη την αλληλογραφία και τουλάχιστον μία μαθηματική μελέτη.

Αφού έλαβε το πτυχίο της το 1874 η Sonja επέστρεψε στην Ρωσία για να ξεκουραστεί ενώ ο Weierstrass έψαξε άκαρπα να τις βρει μια θέση αντάξιά της.

Μετά το θάνατο του πατέρα της η Sonja δεν ξαναεπικοινώνησε μαζί του παρά τις προσπάθειές του. Ο Weierstrass την εκλιπαρούσε να μην αφήσει τα μαθηματικά.

Απάντησε ξαφνικά το 1878 μετά την γέννηση της κόρης της και αποφάσισε να πάει πάλι στο Βερολίνο. Εκεί με την υπόδειξη του Weierstrass καταπιάστηκε με το πρόβλημα της διάδοσης του φωτός σε κρυστάλλινο μέσο.

Το 1883 πέθανε ο σύζυγος της Sonja η οποία όταν συνήλθε από το σοκ που υπέστη άρχισε να γεμίζει κόλες με μαθηματικούς τύπους. Το 1884 επιτέλους βρήκε μία θέση που της άξιζε και διορίστηκε ως μόνιμη καθηγήτρια στο Πανεπιστήμιο της Στοκχόλμης.

Μία από τις μεγαλύτερες χαρές που γνώρισε ο Weierstrass στα τελευταία χρόνια της ζωής του ήταν η αναγνώριση που κέρδισε τελικά η μαθήτριά του. Το 1888, η Sonja παρέλαβε το Βραβείο Bordin της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών για την διατριβή της *Περί της περιφοράς στερεού σώματος γύρω από σταθερό σημείο*. Κατά τη γνώμη των κριτικών η διατριβή αυτή είχε τόσο μεγάλα χαρίσματα που αποφάσισαν να αυξήσουν το χρηματικό έπαθλο που είχε ανακοινωθεί από 3.000 σε 5.000 φράγκα.

Δύο χρόνια αργότερα η Sonja πέθανε στη Στοκχόλμη σε ηλικία σαράντα ενός ετών μετά από σύντομη προσβολή από γρίππη. Ο Weierstrass έζησε έξι ακόμη χρόνια και πέθανε σε ηλικία ογδόντα δύο ετών στις 19 Φεβρουαρίου του 1897 στο σπίτι του στο Βερολίνο. Η τελευταία του ευχή ήταν να μην εκφωνήσει ο ιερέας εγκωμιαστικά λόγια πάνω από τον τάφο, αλλά να αρκεστεί στις συνηθισμένες δεήσεις που γίνονται για όλο τον κόσμο.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥΣ

Μετά το έτος της δοκιμαστικής διδασκαλίας στο Γυμνάσιο του Μύνστερ, ο Weierstrass έγραψε μία διατριβή για τις αναλυτικές συναρτήσεις στην οποία, μεταξύ άλλων, κατέληξε τελείως ανεξάρτητα, στο ολοκληρωτικό θεώρημα του Gauchy, το ονομαζόμενο Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης. Το 1842 άκουσε να γίνεται λόγος για την μέθοδο του Gauchy, αλλά δεν διεκδίκησε την πρωτιά. Το 1842, σε ηλικία είκοσι επτά χρονών, ο Weierstrass ανέπτυξε τις μεθόδους που είχε αναπτύξει σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων, σαν τα συστήματα, λόγου χάρη, που εμφανίζονται στο Νευτώνειο πρόβλημα των τριών σωμάτων. Ο Weierstrass έκανε τις εργασίες αυτές χωρίς να έχει στο μυαλό του να τις δημοσιεύσει, παρά μόνο για να προετοιμάσει το έδαφος στο οποίο θα στηριζόταν το έργο της ζωής του (για τις αβελιανές συναρτήσεις).

Το 1842 δημοσίευσε την πρώτη του εργασία. Τα γερμανικά σχολεία δημοσίευσαν κατά καιρούς «προγράμματα» που περιείχαν διατριβές μελών του διδακτικού προσωπικού. Ο Weierstrass έδωσε μια μελέτη με τίτλο *«Παρατηρήσεις για τα αναλυτικά Παραγοντικά»*. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι ότι το ζήτημα των παραγοντικών είχε προκαλέσει στους παλαιότερους αναλυτές πολλά προβλήματα. Μέχρι την ώρα που ο Weierstrass καταπιάστηκε με τα προβλήματα που συνδέονται με τα παραγοντικά, η ουσία του προβλήματος διέφευγε από τους μαθηματικούς. Σε ένα μέρος που δεν υπήρχε βιβλιοθήκη, απομονωμένος από κάθε επιστημονική επαφή, έθεσε τα θεμέλια του έργου της ζωής του: «να ολοκληρώσει το έργο ζωής του Abel και του Jacobi, που αναδύεται μέσα από το Θεώρημα του Abel και την ανακάλυψη του Jacobi για τις πολλαπλά περιοδικές συναρτήσεις μερικών μεταβλητών».

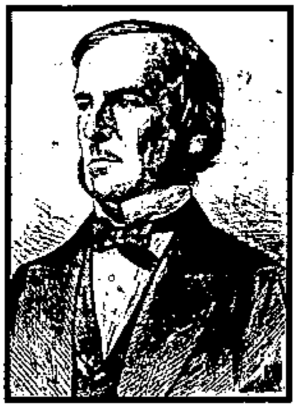
Ολόκληρη η εργασία του για την ανάλυση μπορεί να θεωρηθεί ως μία μεγάλη επίθεση στο κύριο πρόβλημα που ήταν η πραγματική παρουσίαση των συναρτήσεων και η επεξεργασία των ιδιοτήτων τους. Μεμονωμένα αποτελέσματα, ειδικές περιπτώσεις και ακόμη εκτεταμένες θεωρίες, λόγου χάρη αυτή των άρρητων αριθμών όπως αναπτύχθηκαν από τον ίδιο, εκπήγασαν από το ένα ή το άλλο στάδιο του κεντρικού προβλήματος.

Το 1848 το σχολικό «πρόγραμμα» περιείχε ένα δοκίμιο του Weierstrass που άφησε κατάπληκτους πολλούς:*«Συνεισφορά στη Θεωρία των Αβελιανών Ολοκληρωμάτων»*. Αν η εργασία αυτή είχε την δυνατότητα να πέσει στην αντίληψη οποιουδήποτε επαγγελματία Γερμανού Μαθηματικού θα μπορούσε να γνώριζε την επιτυχία νωρίτερα.

Η επόμενη προσπάθειά του πήγε καλύτερα. Στις καλοκαιρινές διακοπές του το 1843 έγραψε ένα δοκίμιο για τις αβελιανές συναρτήσεις. Όταν το ολοκλήρωσε το έστειλε στο έγκυρο περιοδικό Journal του Crelle. Έγινε δεκτό και δημοσιεύτηκε στο 47^{o} τόμο (1854). Η μελέτη αυτή δημιούργησε αίσθηση. Επρόκειτο για ένα αριστούργημα γραμμένο από έναν άγνωστο καθηγητή που ζούσε σε ένα μικρό χωριό. Και μόνο το γεγονός αυτό ήταν εκπληκτικό.

Η Θεωρία του Weierstrass για τους άρρητους αριθμούς δημιουργήθηκε από τις δυσκολίες που προκύπτουν από τις έννοιες των ορίων, της συνέχειας και της σύγκλισης. Η θεωρία αυτή έχει ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι εξάγουμε την τετραγωνική ρίζα του 2, συνεχίζοντας τον υπολογισμό μέχρι ενός μεγάλου αριθμού δεκαδικών ψηφίων. Ως διαδοχικές προσεγγίσεις στη ζητούμενη τετραγωνική ρίζα παίρνουμε την ακολουθία των αριθμών 1, 1.4, 1.41, 1.412,... Με πολλή δουλειά και προχωρώντας με σαφώς καθορισμένα βήματα σύμφωνα με συνήθη κανόνα, θα μπορούσαμε, αν ήταν απαραίτητο, να παρουσιάσουμε την πρώτη χιλιάδα ή το πρώτο εκατομμύριο ρητών αριθμών 1, 1.4,... ως την ακολουθία αυτή των προσεγγίσεων. Εξετάζοντας την ακολουθία αυτή βλέπουμε πως όταν έχουμε προχωρήσει αρκετά μακριά, θα έχουμε βρει ένα τέλεια ορισμένο ρητό αριθμό που θα περιέχει τόσα δεκαδικά όσα θέλουμε και ότι αυτός ο ρητός αριθμός διαφέρει από κάθε επόμενο ρητό αριθμό κατά ένα αριθμό, όπως .000...000..., όπου ένας αντίστοιχα μεγάλος αριθμός μηδενικών μπαίνει πριν από την εμφάνιση ενός άλλου ψηφίου (1,2,...,ή 9). Η θεωρία αυτή αμφισβητήθηκε πολύ. Παρόλα αυτά τα πιο χρήσιμα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν δεν έχουν ακόμη αμφισβητηθεί, τουλάχιστον όσον αφορά τη μεγάλη χρησιμότητά τους στην Ανάλυση και τις εφαρμογές της. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι αντιρρήσεις ήταν αβάσιμες. Στρέφει απλώς την προσοχή στο γεγονός ότι στα Μαθηματικά, σύμφωνα με τα λόγια του Crelle, μπορούμε να ελπίζουμε μοναχά σε ολοένα και καλύτερες προσεγγίσεις της αλήθειας όπως ακριβώς στη θεωρία του Weiertrasss η συγκλίνουσα ακολουθία των ρητών αριθμών ορίζει τους άρρητους.



GEORGE BOOLE
(1815-1864)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο George Boole γεννήθηκε στις 2 Νοεμβρίου του 1815 στο Λίνκολν της Αγγλίας, και ήταν γιος ενός μικρέμπορου. Σύμφωνα με Βρετανούς συγγραφείς –το 1815 ήταν το έτος του Βατερλώ- το να γεννηθείς παιδί μικρέμπορου εκείνη την εποχή σήμαινε ότι ήσουν καταδικασμένος από την γέννησή σου.

Η τάξη στην οποία ανήκε ο πατέρας του Boole αντιμετωπιζόταν με περιφρόνηση, για ένα παιδί που ανήκε σε αυτήν την κοινωνική τάξη όφειλε να αρκεστεί, όχι απλώς αδιαμαρτύρητα αλλά και με ευγνωμοσύνη, στην απόκτηση των απολύτως αναγκαίων γνώσεων.

Τα σχολεία όπου οι νεαροί τζέντλεμαν διδάσκονταν πώς να υβρίζουν ο ένας τον άλλο, εκπαιδευόμενοι για τους μελλοντικούς ρόλους τους ως ηγέτες, δεν ήταν για τα γούστα του Boole. Το «Εθνικό Σχολείο» ήταν γι' αυτόν σχεδιασμένο ακριβώς για να κρατά τον φτωχό στη μίζερη θέση που του πρέπει. Έτσι ο Boole αποφάσισε ότι έπρεπε να μάθει Λατινικά και Ελληνικά για να μπορέσει να ξεφύγει από τη μιζέρια της κοινωνικής του θέσης, και αυτό ήταν και το πρώτο του λάθος. Άρχισε να μελετά μόνος του Λατινικά, με την συγκινητική ενθάρρυνση του φτωχού πατέρα του. Στην ηλικία των δώδεκα χρόνων, ο Boole είχε αποκτήσει γνώσεις Λατινικών που του επέτρεψαν να μεταφράσει μία ωδή του Ορατίου στα αγγλικά. Ταυτόχρονα μελετούσε μόνος του και Ελληνικά.

Ο Boole πήρε τα πρώτα μαθήματα Μαθηματικών από τον πατέρα του. Αφού τελείωσε το κανονικό δημόσιο σχολείο παρακολούθησε εμπορικά μαθήματα. Στα δεκάξι του διαπίστωσε ότι έπρεπε να αρχίσει να συνεισφέρει στην συντήρηση των γονέων του. Έτσι, ο Boole έγινε δάσκαλος στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η διδασκαλία στο δημοτικό σχολείο του παρείχε τον πιο άμεσο τρόπο να κερδίζει ένα σταθερό μεροκάματο. Ο Boole ξόδεψε τέσσερα ευτυχισμένα χρόνια διδάσκοντας σε αυτά τα δημοτικά σχολεία.

Ο Boole άρχισε να διερευνά τα ευγενή επαγγέλματα. Ο στρατός ήταν πέρα από τις δυνατότητές του, δεδομένου ότι δεν είχε τα χρηματικά μέσα για να αγοράσει κάποιον τίτλο αξιωματικού. Αλλά και το δικηγορικό επάγγελμα είχε προφανείς οικονομικές και εκπαιδευτικές απαιτήσεις στις οποίες δεν μπορούσε να ανταποκριθεί. Έτσι αποφάσισε να γίνει ιερωμένος. Βλέποντας πόσο γελοίο θα ήταν να γίνει ο Boole κληρικός, έστρεψε τις φιλοδοξίες του νεαρού άνδρα σε λιγότερο εξωφρενικά μονοπάτια. Ωστόσο τα τέσσερα χρόνια ατομικής προετοιμασίας για την σταδιοδρομία που σχεδίαζε, δεν πήγαν χαμένα. Κατάφερε να μάθει καλά γαλλικά, γερμανικά και ιταλικά που έμελλε να του προσφέρουν ανυπολόγιστη βοήθεια.

Στα είκοσι χρόνια του, ο Boole άνοιξε το δικό του πολιτισμένο σχολείο. Ωστόσο, για να προετοιμάζει σωστά τους μαθητές του, όφειλε να τους διδάξει και κάποιες γνώσεις Μαθηματικών. Τότε γεννήθηκε το ενδιαφέρον του για τα Μαθηματικά. Θα πρέπει να θυμηθούμε ότι ο Boole δεν είχε μαθηματική παιδεία, πέρα από τις απολύτως στοιχειώδεις γνώσεις. Ωστόσο είχε απίστευτες πνευματικές ικανότητες, αν φανταστεί κανείς τον μοναχικό εικοσάχρονο σπουδαστή να πασχίζει και τελικά να καταφέρνει, χωρίς καμμιά βοήθεια, να αφομοιώσει την Ουράνια Μηχανική του Laplace και την εξαιρετικά αφηρημένη Αναλυτική Μηχανική του Lagrange. Και επιπλέον, χάρη σε αυτή την μοναχική μελέτη, κατάφερε να δώσει και την πρώτη του συνεισφορά στα Μαθηματικά – μια διατριβή για τον Λογισμό των Μεταβολών. Ένα ακόμη κέρδος της μελέτης του αυτής ήταν ότι ανακάλυψε τις αναλλοίωτες (αξίζει να σημειωθεί ότι χωρίς την θεωρία του αναλλοίωτου, η ανακάλυψη της θεωρίας της σχετικότητας θα ήταν αδύνατη).

Οι δυνατότητες να δημοσιεύσει κανείς τις μαθηματικές διατριβές του την εποχή του Boole ήταν πολύ περιορισμένες. Ευτυχώς το 1837 ιδρύθηκε το Μαθηματικό Περιοδικό του Καίμπριτζ υπό την διεύθυνση του Σκωτσέζου μαθηματικού D.F.

Gregory. Ο Boole έδωσε στον Gregory για έκδοση κάποιες εργασίες του. Η πρωτοτυπία και το ύφος του συγγραφέα εντυπωσίασαν τον Gregory, και άρχισε μια εγκάρδια αλληλογραφία για μαθηματικά θέματα μεταξύ των δύο ανδρών.

Ο Boole απέρριψε την συμβουλή των φίλων του μαθηματικών να εγγραφεί στο Καίμπριτζ και να κάνει ορθόδοξες μαθηματικές σπουδές, και συνέχισε την διδασκαλία στην στοιχειώδη εκπαίδευση, δεδομένου ότι τώρα οι γονείς του περίμεναν από αυτόν ουσιαστική βοήθεια για να ζήσουν. Τουλάχιστον, οι εξαίρετες ικανότητες του Boole ως ερευνητής και ως δάσκαλος έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη ζωή του. Έτσι, το 1848 ο Boole εξακολουθούσε να διδάσκει στο σχολείο. Το 1849 διορίστηκε Καθηγητής των Μαθηματικών στο Queen's College που είχε ιδρυθεί εκείνη την εποχή, στην πόλη Cork της Ιρλανδίας. Ο Boole ήταν τριάντα εννέα χρόνων όταν δημοσιεύθηκε το έργο του (1854), δεν ήταν καθόλου σύνηθες ένας μαθηματικός σε αυτήν την ηλικία να παράγει ένα έργο τόσο πρωτότυπο και υπό αυτές τις κοινωνικές και οικογενειακές συνθήκες.

Τον επόμενο χρόνο της δημοσίευσης του αριστουργήματός του, παντρεύτηκε την Mary Everest, ανηψιά του Καθηγητή των Ελληνικών στο Queen's College. Η γυναίκα του έγινε αφοσιωμένη μαθήτριά του. Ο Boole, πέθανε τιμημένος στις 8 Δεκεμβρίου του 1864, στο πεντηκοστό έτος της ηλικίας του, δέκα χρόνια μετά την δημοσίευση των *Νόμων της Σκέψης*. Ο πρόωρος θάνατός του οφειλόταν σε πνευμονία που άρπαξε επειδή έμεινε πιστός στο διδακτικό του καθήκον, κάνοντας μάθημα ενώ ήταν μουσκεμένος ως το κόκαλο. Είχε όμως την τύχη να ζήσει όσο χρειαζόταν, για να αντιληφθεί ότι είχε επιτελέσει ένα πραγματικά σημαντικό έργο.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Την εποχή που ο Boole άρχισε να μελετά τα έργα των Laplace και Lagrange, είχε ήδη γνωρίσει τον μαθηματικό De Morgan και τότε του απέσπασε την προσοχή μια διαφωνία περί την λογική που είχε ο Σκώτος φιλόσοφος Sir William Hamilton με τον De Morgan. Το αποτέλεσμα ήταν, το 1848, ο Boole να δημοσιεύσει ένα μικρό έργο με τίτλο *«Η Μαθηματική Ανάλυση της Λογικής»* (The Mathematical Analysis of Logic) που αποτέλεσε την πρώτη μεγάλη συνεισφορά του στο ευρύτερο θέμα που εγκαινίασε η εργασία του, και που έμελλε να του δώσει μεγάλη φήμη για την τόλμη και τη διορατικότητα του οράματός του. Το μικρό αυτό βιβλίο απέσπασε την προσοχή και τον θαυμασμό του De Morgan, ο οποίος δεν δίστασε να αναγνωρίσει αμέσως την ανωτερότητα του Boole.

Ο Boole έδωσε αξιόλογες και ποικιλόμορφες μαθηματικές εργασίες. Ωστόσο, η κύρια προσπάθεια του ήταν να δώσει τελική μορφή στο μεγάλο του αριστούργημα. Έτσι, το 1854 δημοσίευσε το έργο του με τίτλο *«Έρευνα των Νόμων της Σκέψης»* (An Investigation of the Laws of Thought), επάνω στους οποίους στηρίζονται οι Μαθηματικές Θεωρίες της Λογικής και των Πιθανοτήτων.

Ο Boole έχει αναγάγει την λογική σε έναν εύκολο και απλό τύπο της άλγεβρας. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τα αιτήματα της άλγεβρας του Boole (η άλγεβρα της Λογικής): Το σύνολο των αιτημάτων εκφράζεται σε όρους του K , + , χ, όπου K είναι μια τάξη απροσδιορίστων στοιχείων α, b, c, ..., και α + b και α x b είναι τα αποτελέσματα δύο μη προσδιορισμένων διμελών πράξεων, +, x

Διατυπώνονται δέκα αιτήματα,

1. Αν α και b ανήκουν στην τάξη K, τότε και α + b ανήκει στην τάξη K.
2. Αν α και b ανήκουν στην τάξη K, τότε και αb ανήκει στην τάξη K.
3. Υπάρχει ένα στοιχείο Z τέτοιο ώστε α + Z = α για κάθε στοιχείο του α.
4. Υπάρχει ένα στοιχείο U τέτοιο ώστε αU = α για κάθε στοιχείο του α.
5. α + b = b + α.
6. αb = bα.
7. α + bc = (α + b) (α + c).
8. α(b + c) = αb + αc.
9. Για κάθε στοιχείο α υπάρχει ένα στοιχείο α΄ τέτοιο ώστε α + α΄= U και αα΄= Z.
10. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία στην τάξη του K.

Είναι εντυπωσιακό ότι από ένα τόσο απλό σύνολο προτάσεων, είναι δυνατόν να οικοδομηθεί με σύμβολα ολόκληρη η κλασική λογική με την βοήθεια της άλγεβρας που αναπτύσσεται από τα παραπάνω αιτήματα.

Μέσα από αυτά τα αιτήματα γεννιέται μια θεωρία η οποία μπορεί να ονομαστεί «λογικές εξισώσεις» και η επίλυσή τους βασίζεται στα τεχνάσματα της άλγεβρας.

CAYLEY & SYLVESTER
(1821-1895) (1814-1897)

Η ΖΩΗ ΤΟΥΣ

Οι βίοι του Cayley και του Sylvester θα έπρεπε να εξιστορηθούν ταυτόχρονα, αν ήταν δυνατόν. Ο καθένας τους αποτελεί τέλεια αντίθεση του άλλου. Και η ζωή του ενός, σε μεγάλο βαθμό, προσφέρει αυτό που λείπει από τη ζωή του άλλου. Η ζωή του Cayley ήταν γαλήνια. Αντίθετα ο Sylvester , όπως ο ίδιος αναγνώριζε με λύπη του, ανάλωσε μεγάλο μέρος της ικμάδους του πνεύματος του και της ενεργητικότητάς του «αγωνιζόμενος εναντίον του κατεστημένου. Σπάνια ο Cayley επέτρεπε στον εαυτό του να γράψει οτιδήποτε άλλο εκτός από ακριβείς μαθηματικές προτάσεις. Ο Sylvester, αντιθέτως, σχεδόν ποτέ δεν κατάφερε να ανοίξει το στόμα του και να μιλήσει για μαθηματικά χωρίς να γίνει τελικά ποιητικός. Κι όμως οι δυο τους, παρά τις διαφορές που είχαν στον χαρακτήρα τους, έγιναν πολύ καλοί φίλοι και ενέπνευσαν ο ένας στον άλλον μερικές από τις καλύτερες εργασίες τους όπως για παράδειγμα, τις θεωρίες των αναλλοίωτων και των πινάκων.

Αν και ο Sylvester ήταν κατά επτά χρόνια μεγαλύτερος από τον Cayley, θα ξεκινήσουμε να περιγράψουμε πρώτα την ζωή του δεύτερου, καθώς ήταν ο Sylvester αυτός που ανατάραξε την ήρεμη ζωή του Cayley.

Ο Arthur Cayley γεννήθηκε στις 16 Αυγούστου του 1821 στο Richmond του Surrey. Ήταν το δεύτερο παιδί μιας οικογένειας που ζούσε τότε προσωρινά στην Αγγλία. Ο πατέρας του ήταν ένας Άγγλος έμπορος που έκανε εμπόριο με τη Ρωσία.

Το 1829, όταν ο Arthur ήταν οχτώ χρονών, ο πατέρας του σταμάτησε να εργάζεται για να εγκατασταθεί μόνιμα στην πατρίδα του. Ο Arhur πήγε σε ένα ιδιωτικό σχολείο στο Blackheath και αργότερα, σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών γράφτηκε στο King's College School του Λονδίνου. Η μαθηματική του ιδιοφυΐα αποκαλύφθηκε από πολύ νωρίς. Οι πρώτες εκδηλώσεις του μεγάλου ταλέντου του ήταν ανάλογες με εκείνες του Gauss. Ο νεαρός Cayley ανέπτυξε μία εξαιρετική ικανότητα περίπλοκων αριθμητικών υπολογισμών, τους οποίους έκανε μόνο για την ευχαρίστησή του. Μόλις άρχισε τις τυπικές σπουδές του στα Μαθηματικά, γρήγορα ξεπέρασε τους υπόλοιπους μαθητές του σχολείου. Από τότε ξεχώριζε, όπως και αργότερα όταν μπήκε στο Πανεπιστήμιο.

Στην αρχή ο πατέρας του πρόβαλε σθεναρές αντιρρήσεις στην απόφαση του γιου του να γίνει μαθηματικός. Τελικά όμως πείστηκε από τον Διευθυντή του σχολείου του και έδωσε την συγκατάθεσή του αλλά και τα χρήματα που απαιτούντο για να φοιτήσει στο Cambridge.

Ο Cayley ξεκίνησε την πανεπιστημιακή του σταδιοδρομία σε ηλικία δεκαεπτά χρονών, στο Πανεπιστήμιο Trinity του Cambridge. Μεταξύ των άλλων σπουδαστών, διαμορφώθηκε η αντίληψη ότι ο Cayley ήταν ένας «αυθεντικός μαθηματικός» ο οποίος είχε ένα περίεργο πάθος με το διάβασμα λογοτεχνίας.

Τα αρχαία ελληνικά που διδάχθηκε στο σχολείο ήταν μία γλώσσα στην οποία μπορούσε να διαβάζει με πολύ ευκολία. Στα γαλλικά διάβαζε και έγραφε με την ευκολία που μιλούσε και έγραφε στη μητρική του γλώσσα. Τέλος, οι γνώσεις του των γερμανικών και ιταλικών του επέτρεπαν να διαβάζει ξένη λογοτεχνία στο πρωτότυπο.

Το 1842, σε ηλικία είκοσι ενός ετών, ο Cayley αρίστευσε στις εξετάσεις των μαθηματικών για το πτυχίο του Bachelor of Arts και τον ίδιο χρόνο πήρε την πρώτη θέση στις ακόμα δυσκολότερες εξετάσεις για το βραβείο Smith.

Εξελέγη Υφηγητής στο Κολέγιο του Trinity και βοηθός του διευθυντή σπουδών για μία περίοδο τριών ετών. Τα καθήκοντά του ήταν ελάχιστα έως και ανύπαρκτα και έτσι αξιοποίησε το χρόνο του για συνεχίσει τις μαθηματικές του έρευνες. Ο Cayley εμπνεύστηκε από τους μεγάλους δημιουργούς των Μαθηματικών. Η πρώτη του εργασία που δημοσιεύτηκε το 1841, όταν ήταν ακόμα προπτυχιακός φοιτητής, προέκυψε από την μελέτη του Laplace και του Lagrange.

Εξασφαλίζοντας την δυνατότητα να κάνει ό,τι θέλει, μετά την απόκτηση του πτυχίου του ο Cayley δημοσίευσε οκτώ μελέτες τον πρώτο χρόνο, τέσσερις τον δεύτερο και δεκατρείς τον τρίτο.

Είναι εντυπωσιακό να αναφέρουμε ότι η περιγραφή του για την έκταση των σύγχρονων μαθηματικών, δεν ήταν απλώς μία ακαδημαϊκή περιγραφή από έναν επιστήμονα, αλλά η ακριβής περιγραφή ενός ανθρώπου που είχε αγαπήσει την ομορφιά της φύσης.

Ο Cayley αγαπούσε και ασχολούνταν ιδιαίτερα με τη φύση. Στην διάρκεια, όμως, των διακοπών του στην Ιταλία απέκτησε και άλλα ενδιαφέροντα. Αυτά ήταν η αρχιτεκτονική και η ζωγραφική.

Το 1846, έφυγε από το Cambridge. Δεν υπήρχε θέση μαθηματικού για τον Cayley αφού δεν εναρμόνιζε το εαυτό του με τον τύπο των «θείων εντολών». Τα νομικά προσήλκυσαν τώρα τον Cayley. Μπήκε στην Νομική Σχολή Lincoln' s Inn προσβλέποντας σε μια δικηγορική καριέρα. Μετά από τρία χρόνια, το 1849, έγινε δεκτός από τον δικηγορικό σύλλογο. Ήταν τότε είκοσι οχτώ χρονών. Από την πρώτη στιγμή που έγινε μέλος του δικηγορικού συλλόγου, πήρε την σοφή απόφαση να μην αφήσει τα νομικά να του απορροφήσουν όλη την σκέψη. Σκοπός του ήταν απλώς μία άνετη ζωή. Η φήμη όμως που απέκτησε στην ειδικότητά του (μεταβίβαση περιουσίας) αυξανόταν συνεχώς. Ο Cayley εγκατέλειψε τα νομικά με την πρώτη ευκαιρία που του δόθηκε και ύστερα από δεκατέσσερα χρόνια εργασίας ως δικηγόρος. Ωστόσο, ακόμη και εκείνη την περίοδο δημοσίευσε διακόσιες με τριακόσιες μαθηματικές μελέτες, πολλές από τις οποίες είναι σήμερα κλασικές.

Ο Sylvester εισέβαλε στη ζωή του Cayley στη διάρκεια της δικηγορικής του περιόδου και θα αναφερθούμε σε αυτόν τώρα.

Ο James Joseph (το πρώτο του όνομα) ήταν ο νεώτερος από μερικά αδέλφια και αδελφές. Γεννήθηκε από Εβραίους γονείς στις 3 Σεπτεμβρίου του 1814 στο Λονδίνο. Ελάχιστα πράγματα είναι γνωστά από την παιδική του ηλικία καθώς φαίνεται πως δεν ήθελε να αναφέρεται καθόλου στα πρώτα χρόνια της ζωής του. Ο μεγαλύτερος αδελφός του μετανάστευσε στις Ηνωμένες Πολιτείες, όπου πήρε το όνομα Sylvester, το οποίο τελικά υιοθέτησαν και τα υπόλοιπα μέλη της οικογένειάς του.

Σαν τον Cayley η μαθηματική ιδιοφυΐα του Sylvester φάνηκε πολύ νωρίς. Μεταξύ έξι και δεκατεσσάρων ετών, παρακολούθησε μαθήματα σε ιδιωτικά σχολεία. Τους πέντε τελευταίους μήνες του δέκατου τέταρτου έτους του τους δαπάνησε στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου όπου και είχε καθηγητή τον De Morgan.

Σε ηλικία δεκαπέντε ετών μπήκε στο Βασιλικό Ινστιτούτο του Λονδίνου όπου έμεινε για περίπου δύο χρόνια. Στο τέλος του πρώτου έτους κέρδισε το βραβείο των Μαθηματικών. Από την εποχή εκείνη προπορευόταν κατά πολύ όλων των συμμαθητών του στα Μαθηματικά.

Ο Αμερικανός αδελφός του τον πρότεινε στη Διοίκηση των Λαχειοφόρων Συμβάσεων των Ηνωμένων Πολιτειών που ανέθεσαν τη λύση ενός πολύ δύσκολου πρόβλημα διακανονισμών στο Sylvester. Η λύση που έδωσε ήταν πλήρης και η πιο ικανοποιητική για τους διευθυντές, οι οποίοι του έδωσαν ένα βραβείο πεντακοσίων δολαρίων για τις προσπάθειές του.

Τα χρόνια που έζησε στο Λίβερπουλ δεν ήταν ευτυχισμένα για τον Sylvester καθώς διακήρυττε την ιουδαϊκή πίστη του την περίοδο που γίνονταν διωγμοί. Τελικά τράπηκε σε φυγή και επέστρεψε στο Δουβλίνο.

Το 1831, ο Sylvester μπήκε στο St. John' s College στο Cambridge. Εξ αιτίας σοβαρών προβλημάτων υγείας διέκοψε προσωρινά τις σπουδές του και δεν έδωσε εξετάσεις μέχρι το 1837. Το 1837, στις εξετάσεις που έδωσε βγήκε δεύτερος. Επειδή δεν ήταν χριστιανός, δεν είχε τα τυπικά προσόντα να διαγωνισθεί για το βραβείο Smith. Λόγω της εβραϊκής καταγωγής του το Cambridge αρνήθηκε να του δώσει το δίπλωμα του αλλά, το 1871, ο Sylvester πήρε τα διπλώματά του τιμής ένεκεν.

Πέρα από τα μαθηματικά ασχολήθηκε με την λογοτεχνία. Η γνώση του των Ελλήνων και Λατινικών κλασικών από το πρωτότυπο ήταν ευρεία και βαθιά. Ακόμα, γνώριζε καλά την αγγλική, γαλλική, γερμανική και ιταλική γραμματεία από το πρωτότυπο. Ασχολήθηκε, επίσης, με την συγγραφή ποιημάτων αλλά και την συλλογή από σονέτα.

Μία από τις αξιοσημείωτες διαφορές του Cayley με το Sylvester ήταν η εξής : ο Cayley ήταν αναγνώστης όλων των εργασιών των άλλων μαθηματικών. Ο Sylvester, αντιθέτως, θεωρούσε αφόρητα ανιαρή την προσπάθεια να κατανοήσει τα επιτεύγματα των άλλων μαθηματικών.

Σε ηλικία είκοσι τεσσάρων ετών, ο Sylvester διορίστηκε καθηγητής Φυσικής Φιλοσοφίας στο University College του Λονδίνου. Αν και είχε σπουδάσει Χημεία θεωρούσε ανιαρή την διδασκαλία της και μετά από δύο χρόνια παραιτήθηκε. Οι μαθηματικές του αρετές αν και δεν πέρασαν απαρατήρητες δεν του εξασφάλισαν μία θέση απασχόλησης.

Το 1841 πήγε να διδάξει στο Πανεπιστήμιο της Βιρτζίνια όμως μετά από ένα ατυχές περιστατικό υπέβαλε την παραίτησή του. Αν και προσπάθησε να διδάξει και στο Χάρβαρντ δεν τα κατάφερε. Έτσι επέστρεψε στην Αγγλία και εργάστηκε ως ασφαλιστής.

Το 1846 μπήκε στη Νομική Σχολή Inner Temple για να προετοιμαστεί για δικηγόρος και το 1850 έγινε δεκτός από το δικηγορικό σύλλογο. Την χρονιά εκείνη ο Cayley ήταν είκοσι εννέα ετών και ο Sylvester τριάντα έξι. Και οι δύο βρέθηκαν έξω από το πραγματικό τους επάγγελμα. Οι δύο φίλοι συχνά έκαναν περίπατο έξω από τη Νομική Σχολή Lincoln's Inn συζητώντας για την θεωρία των αναλλοίωτων που δημιούργησαν από κοινού.

Το 1863, το Πανεπιστήμιο του Cambridge δημιούργησε μια νέα καθηγητική έδρα Μαθηματικών και πρόσφερε τη θέση στον Cayley, ο οποίος την αποδέχτηκε με χαρά. Τον ίδιο χρόνο παντρεύτηκε την Susan Moline. Η ζωή του ήταν τώρα αφιερωμένη σχεδόν αποκλειστικά στη μαθηματική έρευνα και στη Διοίκηση του Πανεπιστημίου. Ευτύχησε και στον γάμο του και απέκτησε δύο παιδιά.

Στην διάρκεια της καθηγεσίας του, η ανώτατη εκπαίδευση για τις γυναίκες ήταν ένα διαμφισβητούμενο ζήτημα. Ο Cayley, άσκησε όλη την ψύχραιμη πειστική επιρροή του υπέρ της πλευράς του πολιτισμού. Χάρη στις προσπάθειές του σε μεγάλο βαθμό, άρχισαν να γίνονται οι γυναίκες δεκτές ως σπουδάστριες.

Ενώ ο Cayley ατάραχα παρέδιδε Μαθηματικά ο φίλος του συνέχιζε να μάχεται εναντίον του καταστημένου. Ο Sylvester παρέμεινε άγαμος. Το 1852, έκανε αίτηση για να καταλάβει την έδρα των Μαθηματικών στη Βασιλική Στρατιωτική Ακαδημία, στο Woolwitch. Δεν την πήρε. Ούτε και μια άλλη θέση που είχε ζητήσει στο Κολλέγιο Gresham στο Λονδίνο. Ωστόσο, ο υποψήφιος που είχε κερδίσει την έδρα στο Woolwitch πέθανε τον επόμενο χρόνο και την θέση του πήρε ο Sylvester.

Ο Sylvester κράτησε την θέση του εκεί για δεκαέξι χρόνια, μέχρι που συνταξιοδοτήθηκε αναγκαστικά το 1870 σε ηλικία πενήντα έξι ετών.

Συχνά στο δρόμο της ζωής του απόλαυσε πολλές τιμές, ανάμεσα στις οποίες και μία τιμή που εκτιμάται από τον επιστημονικό κόσμο περισσότερο από κάθε άλλη – αυτή του επιστημονικού συνεργάτη της Γαλλικής Ακαδημίας των Επιστημών. Το 1863, εξελέγη να καταλάβει την έδρα της Γεωμετρίας που έμενε κενή μετά τον θάνατο του Steiner.

Το 1876 διέσχισε για δεύτερη φορά τον Ατλαντικό και ανάλαβε την έδρα των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο John Hopkins. Εκεί ανεμπόδιστος θα συνέχιζε τις έρευνές του. Έμεινε στο Πανεπιστήμιο αυτό μέχρι το 1883.

Το 1878 ο Sylvester ίδρυσε για λογαριασμό του Πανεπιστημίου John Hopkins το περιοδικό American Journal of Mathematics την εκδοτική επιμέλεια του οποίου ανέλαβε ο ίδιος. Το Journal έδωσε στα Μαθηματικά τεράστια ώθηση στη σωστή κατεύθυνση, την έρευνα.

Ο Cayley και ο Sylvester συναντήθηκαν πάλι επαγγελματικά όταν ο Cayley δέχτηκε την πρόταση του Πανεπιστημίου John Hopkins να κάνει μαθήματα για ένα εξάμηνο, την περίοδο 1881-1882. Ως θέμα διδασκαλίας του διάλεξε τις αβελιανές συναρτήσεις, τις οποίες ερευνούσε εκείνη την εποχή, και ο 67χρονος Sylvester παρακολουθούσε τις διαλέξεις του.

Ο Cayley συνέχισε την δημιουργική του δραστηριότητα μέχρι μια βδομάδα πριν από τον θάνατό του που επήλθε μετά από μακρά και οδυνηρή αρρώστια, την οποία υπέμεινε μέχρι το 1895. Τα τελευταία λόγια στην βιογραφία που έγραψε ο Forsyth για τον καθηγητή του Cayley ήταν τα εξής: «Αλλά ήταν κάτι περισσότερο από μαθηματικός. Με μοναδική προσήλωση στο σκοπό του ο Cayley επέμεινε ως το τέλος στα ευγενή ιδανικά της ζωής του. Η ζωή του άσκησε σημαντική επιρροή σε εκείνους που τον γνώριζαν: θαύμαζαν τον χαρακτήρα του όσο σέβονταν την διάνοιά του. Και ένοιωσαν, με τον θάνατό του, ότι η ανθρωπότητα έχασε ένα μεγάλο άνδρα».

Το 1883, ο Sylvester δέχτηκε να γυρίσει στην γενέτειρά του και να διδάξει στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης σε ηλικία εβδομήντα ετών. Εκεί δίδαξε μια καινούρια θεωρία τους «αντίστροφους»-διαφορικούς λογισμούς.

Ο Sylvester αγαπούσε την ζωή, ακόμη και όταν ήταν αναγκασμένος να δίνει σκληρές μάχες και έλεγε πως «οι μαθηματικοί ζουν πολλά χρόνια, αλλά μένουν πάντα νέοι». Ο ίδιος ήταν το ζωντανό παράδειγμα της φιλοσοφίας του. Το 1893, όμως, σε ηλικία εβδομήντα εννέα ετών, άρχισε να χάνει την όρασή του και ένοιωθε θλίψη που δεν μπορούσε να δίνει πια διαλέξεις. Τον επόμενο χρόνο του ζητήθηκε να παραιτηθεί από τα καθήκοντά του. Τα αδέλφια του είχαν πεθάνει καθώς και οι περισσότεροι φίλοι του. Δεν το έβαλε όμως κάτω. Το μυαλό του εξακολουθούσε να είναι ακμαίο και το 1896 στα ογδόντα δύο του άρχισε να κάνει ξανά σκέψεις πάνω στη θεωρία των σύνθετων διαμερίσεων. Δεν του έμενε ζωή πολύ όμως ακόμα. Το 1897 ενώ ασχολούνταν με τα μαθηματικά έπαθε παραλυτική συμφόρηση και απώλεσε την ικανότητα ομιλίας. Πέθανε στις 15 Μαρτίου του 1897. Η ζωή του μπορεί να συνοψιστεί στα λόγια του : «Αγάπησε πραγματικά αυτό που έκανε».

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥΣ

Ο Cayley ασχολήθηκε από πολύ νωρίς με την γεωμετρία των n διαστάσεων (την οποία είχε ο ίδιος επινοήσει), την θεωρία των αναλλοίωτων, την απαριθμητική γεωμετρία των επίπεδων καμπύλων και είχε διακεκριμένες συμβολές στην θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων.

Ούτε ο Boole ούτε ο Eisenstein είχαν ανακαλύψει κάποια γενική μέθοδο εύρεσης αναλλοίωτων εκφράσεων. Στο σημείο αυτό εισέβαλλε στο πεδίο ο Cayley το 1884, με την πρωτοπόρα διατριβή του με τίτλο *«Για τη Θεωρία των Γραμμικών Μετασχηματισμών» (On the theory of Linear Transformations).* Την εποχή εκείνη ο Cayley ήταν μόλις είκοσι τεσσάρων ετών. Έθεσε ο ίδιος το πρόβλημα της εύρεσης ενιαίων μεθόδων που θα έδιναν όλες τις αναλλοίωτες εκφράσεις. Έτσι το πρόβλημα διατυπώθηκε σε όρους εξισώσεων.

Πέρα από την εργασία του όμως στη θεωρία των αλγεβρικών αναλλοίωτων, οι ιδέες του στην Γεωμετρία έριξαν νέο φως (στα χέρια του Klein) στη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ανακάλυψε ότι οι μετρήσεις (μέγεθος γωνιών, μήκος γραμμών) και τα θεωρήματα που εξαρτώνται από την μέτρηση δεν είναι προβολικά αλλά μετρικά, και δεν τα πραγματεύεται η συνήθης προβολική Γεωμετρία. Αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του Cayley στη Γεωμετρία το ότι ξεπέρασε το εμπόδιο που διαχώριζε ως τότε τις προβολικές από τις μετρικές ιδιότητες των σχημάτων. Κάτω από τη νέα αυτή θεώρηση, η μετρική Γεωμετρία έγινε και προβολική.

Οι θεμελιακές έννοιες της μετρικής Γεωμετρίας είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων και η γωνία μεταξύ δύο γραμμών. Αντικαθιστώντας την έννοια της απόστασης από κάποια άλλη, πράγμα που συνεπάγεται «φανταστικά» στοιχεία, ο Cayley προσέφερε τα μέσα για την ενοποίηση της Ευκλείδειας με τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες σε μια περιεκτική θεωρία.

Ακόμη όπως προαναφέραμε ο Cayley ασχολήθηκε και με το θέμα της γεωμετρίας των n διαστάσεων. Το θέμα αυτό όταν πρωτοδιατυπώθηκε από τον Cayley, ήταν περισσότερο μυστηριώδες από ό,τι φαίνεται σήμερα, καθώς έχουμε εξοικειωθεί στην ειδική περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων (χώρος –χρόνος) στη σχετικότητα.

Η τελευταία από τις μεγάλες ανακαλύψεις του Cayley, την οποία κρίναμε αναγκαίο να αναφέρουμε, είναι η ανακάλυψη των πινάκων και η άλγεβρά τους στο γενικό της περίγραμμα. Το θέμα εγκαινιάστηκε σε μια διατριβή του 1858 και αναπτύχθηκε άμεσα από απλές παρατηρήσεις σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο συνδυάζονται οι (γραμμικοί) μετασχηματισμοί της θεωρίας των αλγεβρικών αναλλοίωτων. Στους πίνακες ο πολλαπλασιασμός δεν είναι αντιμεταθετικός, εκτός από ειδικά είδη πινάκων. Ο παράξενος κανόνας του πολλαπλασιασμού για τους πίνακες, με τον οποίο παίρνουμε διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με την σειρά με την οποία κάνουμε τον πολλαπλασιασμό (αντίθετα με την κοινή άλγεβρα, όπου χ επί y είναι πάντα ίσο με y επί χ), μοιάζει να είναι τόσο ξένο προς κάθε επιστημονική ή πρακτική χρήση όσο τίποτα άλλο. Κι όμως, εξήντα χρόνια μετά την ανακάλυψη αυτή του Cayley, ο Heisenberg, το 1925, αναγνώρισε ότι η άλγεβρα των πινάκων ήταν ακριβώς το εργαλείο που χρειαζόταν στην επαναστατική θεωρία του για την κβαντομηχανική.

Τα ενδιαφέροντα του Cayley ήταν πολλά αλλά ο Sylvester παρέμεινε πιστός στην άλγεβρα. Δεν εκπλήσσει το γεγονός ότι το όνομά του συνδέεται, με την αποκαλούμενη διαλυτική μέθοδο του Sylvester στην απαλοιφή ενός αγνώστου από δύο πολυωνυμικές εξισώσεις.

Πιο σημαντική από την δουλειά του για την απαλοιφή ήταν η συνεργασία του Sylvester με τον Cayley για την διατύπωση της θεωρίας των «μορφών» (ή των «αλγεβρικών ομογενών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών», όπως προτιμούσε να τις αποκαλεί ο Cayley). Ανάμεσα στο 1854 και το 1878, ο Sylvester δημοσίευσε σχεδόν δώδεκα άρθρα για τις μορφές –ομογενή πολυώνυμα δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών- και τα αναλλοιωτά τους.

Ο Sylvester ασχολήθηκε με την θεωρία των αναλλοίωτων, το οποίο ξεκίνησε να τον ενδιαφέρει όταν ξεκίνησε να συναναστρέφεται με τον Cayley. Το 1851, ανακάλυψε τη διακρίνουσα μιας κυβικής εξίσωσης όπου και χρησιμοποίησε πρώτος τον όρο «διακρίνουσα» για τέτοιες εκφράσεις τετραγωνικών εξισώσεων και για τέτοιες υψηλότερου επιπέδου. Συγκεκριμένα, χρησιμοποίησε την θεωρία των αναλλοίωτων για τη μελέτη της γεωμετρίας n διαστάσεων. Επίσης, συνέβαλε στη θεωρία των στοιχειωδών διαιρετών των λάμδα αναλλοίωτων (lambda matrices).

CHARLES HERMITE
(1822-1901)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Charles Hermite γεννήθηκε στις 24 Δεκεμβρίου 1822 στο Dieuze, στη Λωραίνη της Γαλλίας. Ήταν ένας σπάνιος συνδυασμός αυθεντικής ευφυΐας και ικανότητας να κάνει κτήμα του τις καλύτερες από τις εργασίες άλλων στοχαστών που προσπάθησαν να συνταιριάξουν τις αριθμητικές δημιουργίες του Gauss με τις ανακαλύψεις του Abel και του Jacobi στις ελλειπτικές συναρτήσεις, τις αβελιανές συναρτήσεις και στο ευρύ πεδίο των αλγεβρικών αναλλοίωτων.

Αν η μαθηματική ικανότητα του Hermite είναι κληρονομική, τότε θα πρέπει να την έχει κληρονομήσει από τον πατέρα του που είχε σπουδάσει μηχανικός. Ο Charles ήταν το έκτο στη σειρά από τα εφτά παιδιά που απέκτησαν οι γονείς του. Γεννήθηκε με μια δυσμορφία στο δεξί πόδι, που τον καταδίκασε να είναι χωλός για όλη του τη ζωή–καταδίκη που δεν του επέτρεψε να ακολουθήσει κάποια σταδιοδρομία συνδεδεμένη με τον στρατό. Ωστόσο, η χωλότητά του ουδέποτε επηρέασε την γλυκύτητα της διάθεσής του.

Ο Hermite πήρε την πρώτη του μόρφωση από τους γονείς του. Η οικογένεια του μετακόμισε από το Dieuze στο Nancy όταν ο Hermite ήταν έξι χρονών. Εκεί οι γονείς του τον έστειλαν οικότροφο στο Λύκειο της Nancy. Αργότερα έκριναν ότι το σχολείο δεν ήταν ικανοποιητικό για το παιδί τους και αποφάσισαν να τον στείλουν στο Παρίσι. Εκεί σπούδασε για λίγο στο Λύκειο του Ερρίκου του Δ΄ και αργότερα σε ηλικία δεκαοκτώ ετών (1840), πήγε στο φημισμένο Louis-le-Grand για να προετοιμαστεί για το Πολυτεχνείο.

Ενώ ήταν ακόμη μαθητής Λυκείου συμπλήρωσε τα παραμελημένα μαθήματά του με προσωπική μελέτη στη βιβλιοθήκη του Sainte-Geneviene, όπου βρήκε και αφομοίωσε τη διατριβή του Lagrange για την λύση των αριθμητικών εξισώσεων . Κάνοντας οικονομία αγόρασε τη γαλλική μετάφραση των *Αριθμητικών Ερευνών* [Disquisitiones Arithmeticae] του Gauss και το σημαντικότερο, την έκανε κτήμα του σε βαθμό που ελάχιστοι το είχαν κατορθώσει νωρίτερα. «Χάρη σε αυτά τα βιβλία», του άρεσε να λέει «έμαθα Άλγεβρα».

Το 1842, ο Hermite, σε ηλικία είκοσι ετών, έλαβε μέρος στις εισαγωγικές εξετάσεις για το Πολυτεχνείο, με την συμπαράσταση του καθηγητή Richard, και πέρασε μόλις εξηκοστός όγδοος. Ο Hermite έμεινε μόνο έναν χρόνο στο Πολυτεχνείο. Δεν ήταν βέβαια οι πνευματικές του ικανότητες που τον καθιστούσαν ακατάλληλο, αλλά η χωλότητά του η οποία δεν του επέτρεπε να καταλάβει κάποια από τις θέσεις που είναι διαθέσιμες για τους επιτυχείς σπουδαστές του Πολυτεχνείου. Παρ' όλα αυτά, ο ένας χρόνος στο Πολυτεχνείο δεν πήγε καθόλου χαμένος, ο Hermite αξιοποίησε τον χρόνο του μελετώντας τις αβελιανές συναρτήσεις που τότε, το 1842, αποτελούσαν το σημαντικότερο θέμα και το επίκεντρο του ενδιαφέροντος των μεγάλων μαθηματικών της Ευρώπης.

Αποκλεισμένος από το Πολυτεχνείο εξαιτίας της χωλότητας του, ο Hermite στράφηκε προς το επάγγελμα του δασκάλου από όπου θα μπορούσε να κερδίσει τα προς το ζην, ενώ ταυτόχρονα θα προχωρούσε στη μελέτη των αγαπημένων του μαθηματικών. Ο Hermite, σε ηλικία είκοσι τεσσάρων ετών εγκατέλειψε τις θεμελιακές του ανακαλύψεις και καταπιάστηκε με όσα ασήμαντα απαιτούνταν για να αποκτήσει το πρώτο του δίπλωμα. Πέρασε στις εξετάσεις του αλλά με πολύ κακές επιδόσεις. Χωρίς την φιλία δύο εξεταστών –του Sturm και του Bertrand- ο Hermite δεν θα είχε περάσει τις εξετάσεις. Η ειρωνεία της τύχης ήταν ότι η πρώτη ακαδημαϊκή επιτυχία του ήταν η επιλογή του το 1848 ως εξεταστής για την αποδοχή υποψηφίων στο Πολυτεχνείο – το ίδιο ίδρυμα που κάποτε είχε σχεδόν αρνηθεί να τον υποδεχθεί, λόγω της χωλότητάς του, στο ίδιο ίδρυμα διορίστηκε ως πρώτος εξεταστής. Επίσης το 1848 παντρεύτηκε την αδερφή του Berrtrand, τη Louise.

Αφού τελικά κατάφερε και ικανοποίησε τους εξεταστές του, ο Hermite στρώθηκε στη δουλειά για να γίνει μεγάλος μαθηματικός. Από το 1848 ως το 1850 διορίστηκε αναπληρωτής του Libri στο Κολλέγιο της Γαλλίας. Έξι χρόνια αργότερα εξελέγη στο Ινστιτούτο, ως μέλος της Ακαδημίας Επιστημών. Σε ηλικία σαράντα εφτά ετών κατάφερε να καταλάβει μια θέση που του άρμοζε : Καθηγητής, διορίστηκε μόνο το 1869 στην Ecole Normale και τέλος το 1870 έγινε Καθηγητής στη Σορβόνη –σε αυτή τη θέση έμεινε ως την συνταξιοδότησή του, είκοσι επτά χρόνια μετά. Ο Hermite εκπαίδευσε μια ολόκληρη γενιά διακεκριμένων μαθηματικών, από τους οποίους είναι: Emile Picard, Henri Poincare, Emile Borel και Paul Apell.

Για τον Hermite ήταν προφανές ότι η γνώση και η σοφία δεν είναι προνόμιο μιας ελίτ και έτσι δεν δίστασε να εκφράσει ποτέ την άποψη του. Πέθανε, έχοντας την αγάπη του κόσμου, στις 14 Ιανουαρίου του 1901.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ενόσω ο Hermite ήταν ακόμη σπουδαστής στο Louis-le-Grand, το 1842, σε ηλικία είκοσι ετών, κυκλοφόρησε η εφημερίδα *Nouvelles Annales de Mathematiques,* μια εφημερίδα αφιερωμένη στα ενδιαφέροντα των σπουδαστών ανωτάτων σχολων. Ο πρώτος τόμος της εφημερίδας αυτής περιείχε δυο μελέτες τις οποίες είχε γράψει ο Hermite. Η πρώτη ήταν μια απλή άσκηση στην αναλυτική Γεωμετρία των κωνικών τομών. Η δεύτερη παρουσίαζε μια διαφορετική ποιότητα σκέψης και είχε τίτλο : *Σκέψεις για την αλγεβρική λύση της εξίσωσης πέμπτου βαθμού.*

Ο εικοσάχρονος μαθηματικός πίστευε ότι η μέθοδος Lagrange έκανε την αλγεβρική λύση της εξίσωσης πέμπτου βαθμού να εξαρτάται από τον καθορισμό της ρίζας μιας ορισμένης εξίσωσης έκτου βαθμού την οποία ονόμασε ανηγμένη εξίσωση (σήμερα την ονομάζουμε επιλύουσα εξίσωση). Ήθελε να αποδείξει ότι η ανάλυση της επιλύουσας σε ρητούς παράγοντες δευτέρου ή τρίτου βαθμού που θα έδινε την λύση της εξίσωσης πέμπτου βαθμού, είναι αδύνατη. Και τελικά όχι μόνο κατάφερε να πετύχει τον σκοπό του αλλά έδειξε επίσης ότι ήταν ένας αλγεβριστής.

Το 1842 ο Hermite μελετούσε τις αβελιανές συναρτήσεις. Η πρωτοπόρα εργασία του με αντικείμενο τις συναρτήσεις αυτές ήταν αρκετά δυσνόητη. Ενθαρρυμένος από τον μαθηματικό Jacobi, ο Hermite συμμερίστηκε μαζί του όχι μόνο τις ανακαλύψεις του για τις αβελιανές συναρτήσεις αλλά του έστειλε τέσσερα γράμματα για την θεωρία των αριθμών. Τα γράμματα αυτά, από τα οποία το πρώτο το έγραψε το1847 σε ηλικία είκοσι τεσσάρων ετών, ανοίγουν νέο δρόμο και θα αρκούσαν μόνο αυτά για να δώσουν στον Hermite μια θέση μεταξύ των πιο δημιουργικών μαθηματικών.

Τα δυο πεδία στα οποία ο Hermite θεμελίωσε αυτά που αποτελούν ίσως τα πιο εντυπωσιακά δικά του επιτεύγματα σε όλη την όμορφη εργασία του, είναι εκείνα της γενικής εξίσωσης πέμπτου βαθμού και των υπερβατικών αριθμών. Η φύση τού τι θεμελίωσε στην πρώτη αναφέρεται στην εισαγωγή της σύντομης σημείωσής του Για την Λύση της Γενικής Εξίσωσης Πέμπτου Βαθμού, που δημοσιεύθηκε στα Πρακτικά της Ακαδημίας Επιστημών το1858, όταν ο Hermite ήταν τριάντα έξι ετών.

Ο Hermite προχώρησε στην επίλυση της γενικής εξίσωσης πέμπτου βαθμού

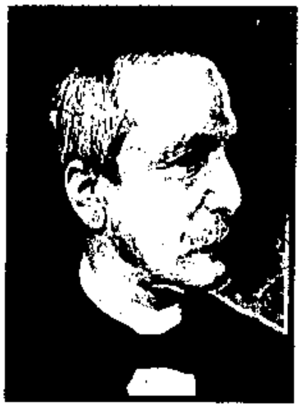
$$x^5-x-\alpha=0,$$

χρησιμοποιώντας για τον σκοπό αυτό ελλειπτικές συναρτήσεις. Το άλλο μεμονωμένο εντυπωσιακό επίτευγμα του Hermite ήταν η απόδειξη της υπερβατικότητας του αριθμού που παριστάνεται στη μαθηματική ανάλυση με το γράμμα e, συγκεκριμένα :

$$1+(1/1!)+(1/2!)+(1/3!)+(1/4!)$$

όπου 1! είναι ίσο με 1, 2!= 1x2, 3!= 1x2x3, 4! = 1x2x3x4, κ.ο.κ

Ο αριθμός αυτός είναι η βάση του λεγόμενου «φυσικού» συστήματος των λογαρίθμων, και είναι ίσος με 2,718281828. Έτσι, όταν ο Hermite το 1873 απέδειξε ότι ο e είναι υπερβατικός αριθμός, ο μαθηματικός κόσμος όχι μόνον γοητεύθηκε, αλλά έμεινε κατάπληκτος από την εξαιρετική εφευρετικότητα της απόδειξής του.



LEOPOLD KRONECKER
(1823-1891)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Η ζωή του Leopold Kronecker ήταν εύκολη από την πρώτη μέρα της γέννησής του. Γόνος πλούσιας εβραϊκής οικογένειας, γεννήθηκε στις 7 Δεκεμβρίου του 1983 στο Leignitz της Πρωσίας. Ο πατέρας του, άνθρωπος πολύ μορφωμένος, διατηρούσε μια ανθηρή εμπορική επιχείρηση. Είχε άσβεστη δίψα για την φιλοσοφία και την φιλοσοφία αυτή την μετέδωσε και στον Leopold. Ο Leopold είχα έναν ακόμη αδερφό, τον Hugo, κατά δεκαεπτά χρόνια νεώτερο του, που έγινε διακεκριμένος φυσιολόγος και καθηγητής στη Βέρνη. Τις πρώτες του γνώσεις ο Leopold, τις απέκτησε από ιδιωτικό δάσκαλο με την καθοδήγηση του πατέρα του. Λίγο αργότερα η αγαπημένη ασχολία του Leopold ήταν η εκπαίδευση του Hugo.

Στο δεύτερο στάδιο της εκπαίδευσης του, στην προπαρασκευαστική σχολή για το Γυμνάσιο, ο Leopold επηρεάστηκε από τον συνδιευθυντή Werner, ο οποίος όταν ο Kronecker πήγε στο γυμνάσιο έγινε δάσκαλός του. Μεταξύ των άλλων πραγμάτων που ο Kronecker πήρε από τον Werner ήταν και η απροκατάληπτη θεώρηση της χριστιανικής θεολογίας. Ένας άλλος δάσκαλος του Kronecker στο Γυμνάσιο που επίσης τον επηρέασε βαθειά και έγινε φίλος του για ολόκληρη τη ζωή του, ήταν ο Ernst Eduard Kummer.

Τα κατορθώματα του Kronecker στο σχολείο ήταν εξίσου λαμπρά και πολύπλευρα. Εκτός από τους Έλληνες και Λατίνους κλασικούς που είχε μάθει τέλεια και που δεν έπαψαν να τον ενδιαφέρουν σε όλη του τη ζωή, ο Kronecker διακρίθηκε στα εβραϊκά, την Φιλοσοφία και τα Μαθηματικά. Έκτος από τις τυπικές σπουδές του, παρακολούθησε μαθήματα μουσικής και έγινε ολοκληρωμένος πιανίστας και τραγουδιστής. Επίσης ασχολήθηκε με τις Καλές Τέχνες και την Ποίηση. Όλα αυτά τα ενδιαφέροντα τον ακολούθησαν σε ολόκληρη τη ζωή του. Μπαίνοντας στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου την άνοιξη του 1841, ο Kronecker συνέχισε να διευρύνει την γενική παιδεία του, αλλά ταυτόχρονα άρχισε ν συγκεντρώνει το ενδιαφέρον του στα Μαθηματικά. Στην πανεπιστημιακή του σταδιοδρομία ο Kronecker, παρακολούθησε διαλέξεις για τους κλασικούς και τις επιστήμες και ενέδωσε στην έφεσή του για την φιλοσοφία. Ο Kronecker δεν ξόδεψε όλο τον καιρό του στο Βερολίνο, αλλά πήγε και αλλού. Μέρος των μαθημάτων του, παρακολούθησε στο πανεπιστήμιο της Βόννης.

Ο Kronecker είχε την τύχη να είναι ανιψιός πλούσιου θείου που ασχολούνταν με τραπεζικές εργασίες και έλεγχε μεγάλες αγροτικές επιχειρήσεις. Όλα αυτά τα πλούτη μετά τον θάνατο του θείου έπεσαν στα χέρια του Kronecker, ο οποίος μόλις είχε πάρει το πτυχίο του σε ηλικία είκοσι δυο ετών. Από το 1845 έως και το 1853 ασχολήθηκε με την διαχείριση της περιουσίας και την διεύθυνση των επιχειρήσεων, και τα εκτέλεσε με εξαιρετική οικονομική επιτυχία. Στην διάρκεια των οκτώ ετών που ασχολήθηκε με τις επιχειρήσεις, ο Kronecker έπαψε να παράγει μαθηματικό έργο. Παρά τη δραστηριότητά του στον κόσμο των επιχειρήσεων συνέχισε με πάθος την επιστημονική του αλληλογραφία με τον δάσκαλο του και φίλο του Kummer. Όταν τελικά αποδεσμεύτηκε από τις επαγγελματικές του υποχρεώσεις επισκέφθηκε το Παρίσι, όπου γνώρισε τον Hermite και άλλους εξέχοντες Γάλλους Μαθηματικους.

Το 1848, σε ηλικία είκοσι πέντε ετών, ο γεμάτος ζωντάνια νεαρός επιχειρηματίας, ερωτεύθηκε την εξαδέρφη του, την Fanny Prausnitzer, κόρη ενός πλούσιου θείου του που ασχολούνταν με τραπεζικές εργασίες, την παντρεύτηκε και έφτιαξε μαζί της οικογένεια. Απέκτησαν έξι παιδιά. Η οικογενειακή ζωή του Kronecker ήταν ιδανικά ευτυχισμένη, και αυτός μαζί με την σύζυγό του –μια προικισμένη και ευχάριστη γυναίκα- μεγάλωσαν τα παιδιά τους με την μέγιστη αφοσίωση. Ο θάνατος της συζύγου του Kronecker, λίγους μήνες πριν από την τελευταία του αρρώστια, ήταν το χτύπημα που τον τσάκισε τελειωτικά.

Από το 1861 ως το 1883 παρέδιδε κανονικά μαθήματα στο Πανεπιστήμιο, κυρίως γύρω από τις προσωπικές έρευνες του, μετά την απαραίτητη εισαγωγή στο θέμα του. Το 1883 ο Kummer, που ήταν τότε στο Βερολίνο, συνταξιοδοτήθηκε, και ο Kronecker διαδέχθηκε τον παλιό του δάσκαλο ως τακτικός Καθηγητής.

Ωστόσο με την χαρακτηριστική του επιφυλακτικότητα, ο Kronecker δεν ασπάστηκε την χριστιανική του πίστη παρά μόνο λίγο πριν πεθάνει. Όταν πια ήταν σίγουρος ότι η απόφασή του αυτή δεν θα είχε συνέπειες στα έξι παιδιά του, ο Kronecker απαρνήθηκε τον ιουδαϊσμό και ασπάστηκε τον ευαγγελικό χριστιανισμό σε ηλικία εξήντα οκτώ ετών. Ο Kronecker πέθανε από βρογχίτιδα στο Βερολίνο στις 29 Δεκεμβρίου του 1891, σε ηλικία εξήντα εννέα ετών.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Kronecker εισήλθε στο όμορφο αυτό πεδίο των αλγεβρικών αριθμών το 1845, σε ηλικία είκοσι δύο ετών, με την εξαιρετική πραγματεία του De Unitatibus Complexis [Περί Μιγαδικών Αριθμών]. Η πραγματεία αυτή έγινε δεκτή ως διδακτορική διατριβή το 1845 και είχε την έμπνευσή της στην εργασία του Kummer για την Θεωρία των Αριθμών. Με την εργασία του αυτή ο Kronecker πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα. Το αποκορύφωμα της σταδιοδρομίας του ήταν ο παρατεταμένος μαθηματικός πόλεμος εναντίον του Weierstrass. Ο ένας ήταν γεννημένος αλγεβριστής και ο άλλος ήταν αφοσιωμένος στην Ανάλυση. Το αίτημα του Kronecker να αντικατασταθεί η ανάλυση από την πεπερασμένη αριθμητική αποτελούσε την βασική διαφωνία με τον Weierstrass. Ωστόσο, παρά τις επιστημονικές διαφορές τους δεν έπαψαν ποτέ να είναι καλοί φίλοι, ενώ και οι δυο ήταν πραγματικά εξαιρετικοί μαθηματικοι.

Το 1853, όταν δημοσιεύτηκε η πραγματεία του Kronecker για την δυνατότητα επίλυσης των εξισώσεων, η θεωρία των εξισώσεων του Galois δεν είχε κατανοηθεί παρά μόνον από ελάχιστους μαθηματικούς. Ο Kronecker ήταν ίσως ο μοναδικός μαθηματικός της εποχής του που κατάφερε να κάνει κτήμα του την θεωρία αυτή και ήταν κάτι που χαρακτήριζε πολλές από τις πιο λεπτές εργασίες του. Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα της προσέγγισής του στην θεωρία των εξισώσεων ήταν η τέλεια επιμέλειά του. Ο Kronecker ήταν στις περισσότερες εργασίες του αυτό που λέμε «αλγοριθμιστής». Μόνιμη επιδίωξή του ήταν να διατυπώνει σύντομους, σαφείς και εκφραστικούς τύπους που να ανακαλύπτουν όλη την αλήθεια.

Η ικανότητα και η τάση του προς τη ενοποίηση χαρακτηρίζει μια από τις πιο ονομαστές πραγματείες του η οποία καταλαμβάνει μόλις δύο σελίδες στα Άπαντά του, με τίτλο *Για την Λύση της Γενικής Εξίσωσης Πέμπτου Βαθμού*, που δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά το 1853. Ο Hermite, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είχε δώσει την πρώτη λύση στην εξίσωση αυτή με την βοήθεια των ελλειπτικών συναρτήσεων το ίδιο έτος. Ο Kronecker κατάφερε να πετύχει την λύση του Hermite εφαρμόζοντας τις ιδέες του Galois.

Σε ένα άλλο δοκίμιό του, επίσης σύντομο, το οποίο δημοσιεύθηκε το 1861 και για το οποίο ανάλωσε τον περισσότερο καιρό του επί πέντε ολόκληρα χρόνια, επέστρεψε ξανά στο ίδιο θέμα και προσπάθησε να εξηγήσει γιατί η γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού μπορεί να επιλυθεί με τον τρόπο που επιλύθηκε. Με αυτό το βήμα ο Kronecker προχώρησε πέρα από τον Abel ο οποίος είχε αντιμετωπίσει το πρόβλημα της επιλυσιμότητας με τα ριζικά.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα των τεχνικών ανακαλύψεων του Kronecker ήταν ο οικείος τρόπος με τον οποίο συνύφανε τα τρία νήματα των μεγάλων ενδιαφερόντων του: την θεωρία των αριθμών, την θεωρία των εξισώσεων και τις ελλειπτικές συναρτήσεις.

GEORGE FRIEDRICH RIEMANN
(1826–1866)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο George Friedrich Bernhard Riemann, γιος Λουθηριανού ιερέα, δευτερότοκος ανάμεσα σε έξι παιδιά, γεννήθηκε στην μικρή κωμόπολη της Μπρέζελενς, στο Ανόβερο της Γερμανίας, στις 17 Σεπτεμβρίου του 1826. Το Ανόβερο του 1826 δεν μπορούμε να πούμε ότι ήταν μια ευημερούσα πόλη, και οι συνθήκες ζωής για μια οικογένεια με έξι παιδιά κάθε άλλο παρά εύπορες ήταν. Ωστόσο παρά την φτώχεια, η οικογενειακή ζωή τους ήταν ευτυχισμένη και ο Riemann έτρεφε πάντα τα θερμότερα συναισθήματα για όλη την λατρευτή του οικογένεια. Από τα πρώτα χρόνια της ζωής του, ήταν ένα συνεσταλμένο και σεμνό παιδί που αισθανόταν τρόμο όταν έπρεπε να μιλήσει δημόσια ή να τραβήξει την προσοχή άλλων ανθρώπων επάνω του. Αργότερα η χρόνια αυτή ντροπαλότητά του αποδείχθηκε ένα πολύ σοβαρό μειονέκτημα που του προκαλούσε βάσανα τα οποία τα ξεπερνούσε μόνο με την επιμελή προετοιμασία κάθε δημόσιας ομιλίας που θα έκανε.

Όταν ο Riemann ήταν ακόμη παιδί, ο πατέρας του μετατέθηκε στην ποιμαντορία της Quickborn. Εκεί ο νεαρός Riemann δέχθηκε την πρώτη του εκπαίδευση από τον πατέρα του, που φαίνεται ότι ήταν εξαίρετος δάσκαλος. Από τα πρώτα μαθήματα, φανέρωσε άσβεστη δίψα για μάθηση. Τα πρώτα ενδιαφέροντά του ήταν ιστορικά, κυρίως γύρω από την ρομαντική και τραγική ιστορία της Πολωνίας. Η Αριθμητική, την οποία άρχισε από τα έξι του χρόνια ήταν μια λιγότερο βασανιστική ενασχόληση για το ευαίσθητο παιδί. Από τότε εκδήλωσε την παρουσία της η έμφυτη μαθηματική ιδιοφυία του. Ο Bernahard όχι μόνο έλυνε όλα τα προβλήματα που του έδιναν με το σωρό, αλλά του άρεσε να επινοεί ακόμη δυσκολότερες σπαζοκεφαλιές για να εκνευρίζει τα αδέλφια του. Σε ηλικία δέκα ετών πήρε μαθήματα ανώτερης Αριθμητικής και Γεωμετρίας από έναν επαγγελματία δάσκαλο, τον Schulz. Ο Schulz πολλές φορές διδασκόταν από τον μαθητή του, που εύρισκε συχνά καλύτερες λύσεις από τον ίδιο.

Σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών, ο Riemann πήγε να μείνει με την γιαγιά του στο Ανόβερο, όπου μπήκε στο πρώτο του Γυμνάσιο, στην τρίτη τάξη. Εκεί βίωσε την πρώτη καταθλιπτική μοναξιά του. Όταν πέθανε η μητέρα του, δύο χρόνια αργότερα, ο Riemann πήρε μετεγγραφή για το Γυμνάσιο του Luneburg, όπου σπούδασε μέχρι την προετοιμασία του, σε ηλικία δεκαεννέα ετών, για το Πανεπιστήμιο του Gottingen. Τα χρόνια αυτά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσής του, ήταν τα πιο ευτυχισμένα της ζωής του.

Ενόσω ήταν μαθητής Γυμνασίου, υπέφερε από το πάθος της τελειομανίας που ήταν αργότερα ο λόγος για τον οποίο καθυστέρησε υπερβολικά τις επιστημονικές δημοσιεύσεις του. Το γνώρισμά του αυτό ήταν υπεύθυνο για την τελική μορφή των δύο από τα τελευταία αριστουργήματά του. Ο Γυμνασιάρχης Schmalfuss έχοντας παρατηρήσει ότι ο Riemann ήταν μαθηματική ιδιοφυία, του είχε δώσει την άδεια να μπαίνει στην ιδιωτική βιβλιοθήκη του και των απάλλαξε από την υποχρέωση να παρακολουθεί τις παραδόσεις των Μαθηματικών. Έτσι ο Riemann ανακάλυψε την έμφυτη κλίση του για τα Μαθηματικά. Με την υπόδειξη του Schmalfuss, ο Riemann δανείστηκε τη *Theories des Nombres* (Θεωρία των Αριθμών) του Legendre. Ήταν ένα σύγγραμμα 859 σελίδων με πολλούς δυσνόητους συλλογισμούς. Μετά από έξι μέρες ο Riemann επέστρεψε το βιβλίο, το οποίο ασφαλώς το είχε κάνει κτήμα του. Αναμφίβολα αυτή ήταν η αρχή του ενδιαφέροντος του Riemann για το μυστήριο των αριθμών.

Το 1846, σε ηλικία δεκαεννέα ετών, ο Riemann γράφτηκε στο Πανεπιστήμιο του Gottingen ως σπουδαστής της φιλοσοφίας και θεολογίας. Η επιθυμία του να ευχαριστήσει τον πατέρα του και να βοηθήσει οικονομικά την οικογένειά του βρίσκοντας μια αμειβομένη θέση εργασίας όσο πιο γρήγορα ήταν δυνατόν, του υπαγόρευσε την απόφασή του να σπουδάσει θεολογία. Δεν μπορούσε όμως να μείνει μακριά από τις μαθηματικές παραδόσεις του Stern για τη θεωρία των εξισώσεων και τα ορισμένα ολοκληρώματα, ή από εκείνες του Gauss για την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και του Goldsmith για τον γήινο μαγνητισμό. Έτσι ο Riemann κάνοντας έκκληση στην επιείκεια του πατέρα του τον παρακάλεσε να του επιτρέψει να αλλάξει κατεύθυνση σπουδών. Η πρόθυμη και ολόψυχη συγκατάθεση του πατέρα του να ακολουθήσει τα Μαθηματικά ως σταδιοδρομία του, έκανε τον Riemann τον πιο ευτυχισμένο άνθρωπο του κόσμου και ταυτόχρονα τον γέμισε ευγνωμοσύνη για το πρόσωπο του πατέρα του.

Μετά από ένα έτος στο Gottingen, όπου η διδασκαλία ήταν αναμφισβήτητα ξεπερασμένη, ο Riemann έφυγε για το Βερολίνο για να μυηθεί από τους Dirichlet, Steiner και Eisenstein στα νεώτερα και προχωρημένα μαθηματικά. Από όλους αυτούς ο Riemann διδάχθηκε πολλά–προχωρημένη Μηχανική και ανώτερη Άλγεβρα από τον Jacobi, Θεωρία των Αριθμών και ανάλυση από τον Dirichlet, σύγχρονη Γεωμετρία από τον Steiner, ενώ ο Eisenstein του δίδαξε τις ελλειπτικές συναρτήσεις αλλά και τον προίκισε με αυτοπεποίθηση. Ο Riemann ξόδεψε δύο από τα χρόνια της ζωής του στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Το 1849 επέστρεψε στο Gottingen για να συμπληρώσει τις μαθηματικές του σπουδές και να προετοιμάσει την διδακτορική του διατριβή. Τα ενδιαφέροντα του ήταν συνήθως ευρύτερα από τα καθαρά Μαθηματικά με τα οποία τον συνδέουν, και στην πραγματικότητα αφιέρωσε για την φυσική επιστήμη τόσο χρόνο, όσο και για τα Μαθηματικά. Στην διάρκεια των τελευταίων τριών εξαμήνων στο Πανεπιστήμιο του Gottingen ο Riemann παρακολούθησε μαθήματα φιλοσοφίας και τις παραδόσεις του Wilhelm Weber στην πειραματική Φυσική. Ο Weber αναγνώριζε την επιστημονική ιδιοφυία του Riemann και έγινε εγκάρδιος φίλος και πολύτιμος σύμβουλός του. Ο Riemann είχε μια ανεπτυγμένη αίσθηση για το τι ήταν σημαντικό στη Φυσική. Ως αποτέλεσμα των φιλοσοφικών του σπουδών με τον Johann Friedrich Herbart, ο Riemann κατέληξε το 1850 στο συμπέρασμα ότι «είναι δυνατόν να διατυπωθεί μια πλήρης, καλοφτιαγμένη μαθηματική θεωρία που να προχωρεί από τους θεμελιώδεις νόμους για τα επιμέρους σημεία σε διεργασίες που αναπτύσσονται στον συνεχώς πλήρη χώρο της πραγματικότητας, χωρίς διάκριση μεταξύ βαρύτητας, ηλεκτρισμού, μαγνητισμού ή θερμοδυναμικής. Το 1850, αφήνοντας για λίγο τα καθαρά Μαθηματικά, πήρε μέρος στο σεμινάριο για την μαθηματική Φυσική που είχε μόλις οργανωθεί από τους Weber, Ulrish, Stern και Listing. Στη διάρκεια του φθινοπώρου του 1852 ο Riemann επωφελήθηκε από την παρουσία του Dirichlet στο Gottinngen κατά τις διακοπές, και ζήτησε την συμβουλή του για την διατριβή που εκπονούσε. Ο Dirichlet γοητεύθηκε από τη μετριοφροσύνη και την ιδιοφυία του Riemann.

Από το 1853 και πέρα, η σκέψη του είναι προσανατολισμένη επίμονα στην μαθηματική Φυσική. Έτσι ξανάρχισε τις έρευνές του για τον δεσμό μεταξύ ηλεκτρισμού, μαγνητισμού, φωτός και βαρύτητας και έκανε τέτοια πρόοδο που πίστευε ότι μπορούσε πια να δημοσιεύσει την εργασία του. Η έντονη προσπάθεια να φέρει σε πέρας δύο εξαιρετικά δύσκολες έρευνες ταυτόχρονα, ενώ εργαζόταν ήδη ως βοηθός του Weber στο σεμινάριο μαθηματικής Φυσικής, μαζί με τα γνωστά επακόλουθα της φτώχειας, του προκάλεσαν μια προσωρινή κατάρρευση.

Το 1855 όταν ο Dirichlet διαδέχθηκε τον Gauss, οι φίλοι του Riemann πίεσαν τις αρχές του Πανεπιστημίου να δοθεί στον Riemann η σιγουριά της θέσης του επίκουρου καθηγητή. Δυστυχώς όμως τα οικονομικά της Σχολής δεν επέτρεπαν τέτοιο άνοιγμα. Παρ' όλα αυτά του δόθηκε ως ετήσια επιχορήγηση χρηματικό ποσό ισοδύναμο με διακόσια δολάρια, που ασφαλώς ήταν μια καλή λύση. Το μέλλον του τον στενοχωρούσε και όταν έχασε, μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα, τον πατέρα του και την αδελφή του Clara, πράγμα που του απέκλειε στο εξής τις διακοπές στο Quickborn, ο Riemann ένοιωσε φτωχός και δυστυχισμένος.

Το επόμενο έτος, το 1856, οι προοπτικές άρχισαν να γίνονται λιγάκι πιο φωτεινές. Τελικά, το 1857, σε ηλικία τριάντα ενός ετών, ο Riemann κέρδισε μια θέση επίκουρου καθηγητή. Ο μισθός του ήταν το ισοδύναμο τριακοσίων δολαρίων ετησίως, αλλά για έναν άνθρωπο που είχε μάθει να ζει με στερήσεις σε όλη του τη ζωή, τώρα θα ένοιωθε να του λείπουν πολύ λιγότερα. Δυστυχώς όμως σχεδόν ταυτόχρονα τον χτύπησε μια πραγματική συμφορά: ο αδελφός του πέθανε και η ευθύνη για τις τρείς αδελφές του έπεσε στους ώμους του. Από τις ετήσιες αποδοχές του πρόσβλεψε ένα ποσό ισοδύναμο με εβδομήντα πέντε δολάρια ετησίως ως βοήθημα για κάθε μία από τις αδελφές του. Λίγο αργότερα έχασε την μικρότερη αδελφή του, την Marie, έτσι ο προϋπολογισμός του εκτοξεύθηκε στα εκατό δολάρια το χρόνο.

Δυο χρόνια αργότερα, στις 5 Μαΐου του 1859, πέθανε ο Dirichlet, ο οποίος είχε μεγάλη εκτίμηση στον Riemann. Το ενδιαφέρον του Dirichlet και η ραγδαία αυξανόμενη φήμη του Riemann έπεισαν την Κυβέρνηση να προάγει τον Riemann στη θέση του θανόντος Dirichlet. Έτσι σε ηλικία τριάντα τριών ετών, ο Riemann έγινε ο δεύτερος διάδοχος του Gauss. Όταν οι υλικές συνθήκες της ζωής του βελτιώθηκαν σημαντικά με την εκλογή του ως τακτικού Καθηγητή, ο Riemann έκρινε ότι μπορεί να νυμφευθεί και νυμφεύθηκε σε ηλικία τριάντα έξι ετών. Μόλις ένα μήνα μετά το γάμο του, τον Ιούλιο του 1862, ο Riemann αρρώστησε από πλευρίτιδα. Η ανάρρωσή του δεν ήταν πλήρης με αποτέλεσμα να εξελιχθεί η αρρώστιά του σε φυματίωση. Η Κυβέρνηση έδωσε στον Riemann τα χρηματικά μέσα για να αναρρώσει στο ήπιο κλίμα της Ιταλίας, όπου έμεινε τελικά όλο τον χειμώνα.

Γεμάτος ελπίδες ο Riemann άφησε την αγαπημένη του Ιταλία, για να αρρωστήσει ακόμη σοβαρότερα μόλις έφτασε στο Gottingen. Τον επόμενο Αύγουστο(1863) επέστρεψε στην Ιταλία, σταματώντας πρώτα στην Πίζα, όπου γεννήθηκε η κόρη του Ida. Τον Μάιο εγκαταστάθηκε σε μια μικρή κωμόπολη στα προάστια της Πίζας. Εκεί πέθανε η αδελφή του η Helene. Αλλά και η σοβαρή αρρώστειά του, που επιδεινώθηκε παραπέρα καθώς αρρώστησε με ίκτερο, γινόταν ολοένα και βαρύτερη. Προς μεγάλη του λύπη ήταν υποχρεωμένος να αρνηθεί την προσφορά που του έκανε το Πανεπιστήμιο της Πίζας να εργαστεί ως τακτικός Καθηγητής. Αφού αναζήτησε την αποκατάσταση της υγείας του στο Λιβόρνο και την Γενεύη, επέστρεψε τελικά τον Οκτώβριο στο Gottingen, όπου πέρασε έναν υποφερτό χειμώνα. Όλον αυτόν τον καιρό εργαζόταν όταν είχε την δύναμη. Ένα από τα τελευταία σχέδιά του ήταν μια εργασία για την μηχανική του αυτιού, την οποία άφησε ανολοκλήρωτη.

Έτσι πέθανε ο Riemann, αφού η ώριμη ιδιοφυία του γνώρισε την δόξα, στις 20 Ιουλίου του 1866, σε ηλικία μόλις τριάντα εννέα ετών. Η επιγραφή στη επιτύμβια στήλη του, την οποία ανέγειραν οι Ιταλοί φίλοι του, τελείωνε με τα λόγια: «Denen die Gott lieben mussen alle Dinge zum Besten dienen». (Όλα τα πράγματα συνεργούν για το καλό, για εκείνους που αγαπούν το Θεό).

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Στις αρχές Νοεμβρίου του 1851 ο Riemann υπέβαλλε τη διδακτορική διατριβή του, με τίτλο *«Βάσεις για μια γενική θεωρία των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής»* (Grundlagen fur eien allegemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grosse) στην κρίση του Gauss. Η εργασία αυτή του νεαρού μαθηματικού των είκοσι πέντε ετών ήταν μια από τις ελάχιστες σύγχρονες συνεισφορές των μαθηματικών που προκάλεσαν τον ενθουσιασμό του Gauss. Ο ίδιος εκμυστηρεύτηκε στον Gauss ότι για πολλά χρόνια σχεδίαζε να γράψει μια μελέτη για το ίδιο θέμα. Ένα μήνα αργότερα, ο Riemann πέρασε στην τελική του εξέταση. Όλα τελείωσαν καλά και άρχισε να ελπίζει ότι θα εύρισκε κάποια θέση ανάλογη των προσόντων του. Ως διατριβή του για υφηγησία (Habilitationsschrift) ο Riemann σχεδίαζε να υποβάλλει μια πραγματεία για τις τριγωνομετρικές σειρές (σειρές Fourier).

Η δοκιμαστική διάλεξη του Riemann, στις 10 Ιουνίου του 1854 έγινε δεκτή με πολλή μεγάλη θέρμη, τόση που ούτε αυτός δεν φανταζόταν. Πέρα από το γεγονός ότι είναι ένα από τα μεγαλύτερα αριστουργήματα όλων των Μαθηματικών, το δοκίμιο του Riemann με τίτλο *«Για τις υποθέσεις που αποτελούν τα θεμέλια της Γεωμετρίας»* (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen) είναι επίσης κλασικό από άποψη ανάπτυξης του θέματος. Η εργασία προκάλεσε τον ενθουσιασμό του Gauss. Στην εργασία του αυτή αναφέρει τα παρακάτω αξιώματα:

(1)Ότι μικρά τμήματα του χώρου έχουν στην πραγματικότητα χαρακτήρα ανάλογο με τους μικρούς λόφους σε μια επιφάνεια που είναι κατά μέσο όρο επίπεδη. Δηλαδή οι συνηθισμένοι νόμοι της Γεωμετρίας δεν ισχύουν για τα τμήματα αυτά.

(2)Ότι η ιδιότητά τους αυτή, δηλαδή να είναι καμπύλα ή να παραμορφώνονται, μεταβιβάζεται συνεχώς από το ένα τμήμα του χώρου στο άλλο σαν κύμα.

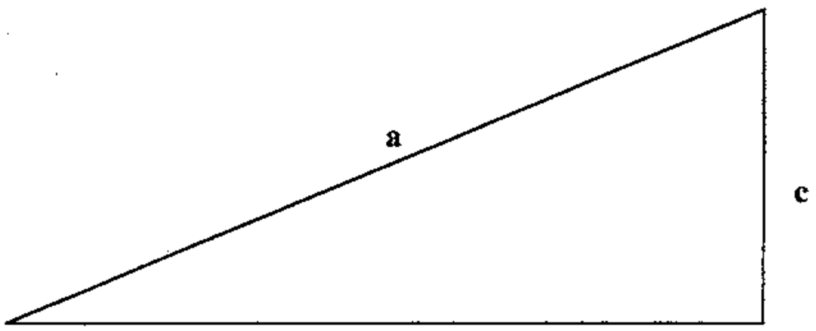
(3)Ότι η απόκλιση της καμπυλότητας του χώρου είναι αυτό ακριβώς που συμβαίνει στο φαινόμενο που αποκαλούμε κίνηση της ύλης, αδιάφορο αν είναι σωματειακή ή κυματική.

(4)Ότι στον φυσικό κόσμο τίποτε άλλο δεν λαμβάνει χώραν παρά η διακύμανση αυτή, υποκείμενη στο νόμο της συνέχειας.

Τα αξιώματα αυτά πραγματικά ισχύουν. Η εργασία αυτή του Riemann έθεσε τη Γεωμετρία κάτω από ένα πρίσμα. Η Γεωμετρία που οραματιζόταν ο Riemann ήταν μη Ευκλείδεια, με μια περιεκτική έννοια που εξαρτάται από την αντίληψη της μέτρησης. Η θεωρία του Riemann περιέχει πολύ περισσότερα πράγματα από μια εφαρμόσιμη θεωρία της μετρικής και αυτό είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της. Καμιά ελεύθερη απόδοση της περιεκτικής εργασίας του δεν μπορεί να αποκαλύψει όλο της το περιεχόμενο.

Παρ' όλα αυτά θα προσπαθήσουμε να αναφερθούμε σε τρεις βασικές ιδέες της εργασίας του Riemann: την ιδέα του n-διάστατου χώρου, τον ορισμό της απόστασης και την έννοια της καμπυλότητας.

Κατεβαίνοντας για άλλη μια φορά από τις φιλοσοφικές γενικεύσεις στα λιγότερο μυστηριώδη Μαθηματικά, ο Riemann προχώρησε στη διατύπωση ενός ορισμού της απόστασης, που εξάγεται από την έννοιά του για την μέτρηση και ο οποίος , όπως έχει αποδειχθεί, είναι εξαιρετικά χρήσιμος τόσο για την Φυσική όσο και για τα Μαθηματικά. Η πυθαγόρεια πρόταση ότι



$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ ή } a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

όπου α είναι το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου και b , c είναι τα μήκη των δυο άλλων πλευρών, είναι ο θεμελιώδης τύπος για την μέτρηση της απόστασης στο επίπεδο.

Η καμπυλότητα, όπως την αντιλαμβάνεται ο Riemann είναι μια άλλη γενίκευση από την κοινή εμπειρία. Ο Riemann, γενικεύοντας την θέση του Gauss, προχώρησε με τον ίδιο μαθηματικό τρόπο για να διατυπωθεί μια έκφραση που να περιέχει όλα τα g στη γενική περίπτωση του n-διάστατου χώρου, που είναι όμοια από μαθηματική άποψη με την έκφραση του Gauss για την καμπυλότητα επιφάνειας. Η γενικευμένη αυτή έκφραση είναι αυτό που αποκαλείται *μέτρο της καμπυλότητας του χώρου.*

Από την επανάσταση του Riemann στη γεωμετρική σκέψη προέκυψαν μερικά οφέλη: Πρώτον, δημιούργησε έναν άπειρο αριθμό «χώρων» και «γεωμετριών» για συγκεκριμένους σκοπούς μέσα στις ικανότητες των επαγγελματιών γεωμετρών, και κατάφερε να συνενώσει έναν μεγάλο όγκο σημαντικών γεωμετρικών θεωρημάτων σε μια συμπαγή μάζα. Δεύτερον, αποσαφήνισε την αντίληψή μας για τον χώρο και ξεγύμνωσε αυτόν τον ανύπαρκτο μυστικιστικό Χώρο. Το επίτευγμα του Riemann δίδαξε τους μαθηματικούς να μην πιστεύουν σε καμιά Γεωμετρία.

Τέλος, η καμπυλότητα που όρισε ο Riemann, οι διαδικασίες που επινόησε για την διερεύνηση των τετραγωνικών διαφορικών μορφών και η αναγνώρισή του ότι η καμπυλότητα είναι ένα αναλλοίωτο, όλα βρίσκουν τις φυσικές τους ερμηνείες στη θεωρία της σχετικότητας.

Τον Σεπτέμβριο ο Riemann επέστρεψε στο Gottingen όπου έδωσε μια βιαστικά προετοιμασμένη διάλεξη σε μια συνέλευση επιστημόνων. Το θέμα του ήταν η διάδοση του ηλεκτρισμού σε κακούς αγωγούς. Στη διάρκεια αυτού του έτους συνέχισε τις έρευνές του στη μαθηματική θεωρία του ηλεκτρισμού και προετοίμασε ένα δοκίμιο για τους χρωματικούς δακτυλίους.

Το 1856, όταν ο Riemann ήταν τριάντα χρονών, οι προοπτικές άρχισαν να γίνονται πιο φωτεινές. Στην περίοδο αυτή ανήκει ένα μεγάλο μέρος της χαρακτηριστικά πρωτότυπης εργασίας του για τις αβελιανές συναρτήσεις, την κλασική εργασία του για την υπεργεωμετρική σειρά και τις διαφορικές εξισώσεις. Και στις δυο αυτές εργασίες του ο Riemann προχώρησε τις έρευνές του προς νέες κατευθύνσεις. Η ανάπτυξη της θεωρίας των αβελιανών συναρτήσεων από τον Riemann διαφέρει τόσο από εκείνη του Weierstrass όσο η νύχτα από την ημέρα. Η προσέγγιση του Weierstrass ήταν μεθοδολογική, ακριβής στις λεπτομέρειες της. Ο Riemann, από την άλλη πλευρά, ατένιζε ολόκληρο τον ορίζοντα βλέποντας τα πάντα εκτός από τις λεπτομέρειες, τις οποίες άφηνε στην τύχη τους, και ήταν ευχαριστημένος όταν κατόρθωνε να συλλάβει τις κύριες θέσεις της γενικής τοπογραφίας με την φαντασία του. Η μέθοδος του Weierstrass ήταν αριθμητική ενώ εκείνη του Riemann γεωμετρική και διαισθητική.

Χωρίς την εργασία του Riemann, η επανάσταση στην επιστημονική σκέψη θα ήταν αδύνατη.

JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND
(1831–1916)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο διάδοχος του Kummer στην Αριθμητική ήταν ο Julius Wilhelm Richard Dedekind ένας από τους μεγαλύτερους και πιο πρωτότυπους μαθηματικούς. Όπως ο Kummer, έτσι και ο Dedekind έζησε πολλά χρόνια και παρέμεινε μαθηματικά δραστήριος σχεδόν μέχρι το τέλος της ζωής του.

Ο Richard Dedekind, ο μικρότερος από τα τέσσερα παιδιά του Julius Levin Ultrich Dedekind, καθηγητή του Δικαίου, γεννήθηκε στο Brunswick, τον τόπο γέννησης του Gauss. Από την ηλικία των επτά έως δεκαεπτά ετών, ο Richard παρακολούθησε το δημοτικό και το γυμνάσιο της γενέτειράς του. Πρώτες του αγάπες ήταν η Φυσική και η Χημεία, ενώ τα Μαθηματικά τα έβλεπε ως υπηρέτη των επιστημών. Από την ηλικία των δεκαεπτά χρόνων είχε υποπτευθεί ότι πολλά πράγματα δεν πάνε καλά με την δήθεν λογική της Φυσικής, και στράφηκε στα Μαθηματικά αναζητώντας μια λιγότερο αμφισβητούμενη λογική. Το 1848 εισήλθε στο κολλέγιο Caroline. Στο Κολλέγιο ο Dedekind έκανε κτήμα του τις θεμελιώδεις γνώσεις της Αναλυτικής Γεωμετρίας, της «Ανώτερης» Άλγεβρας, του Λογισμού και της «Ανώτερης» Μηχανικής. Έτσι όταν μπήκε στο Πανεπιστήμιο του Gottingen το 1850 σε ηλικία δεκαεννέα ετών, ήταν καλά προετοιμασμένος να αρχίσει σοβαρή εργασία. Οι κυριότεροι καθηγητές του ήταν ο Moritz Abraham Stern, ο Gauss και ο φυσικός Wilhelm Weber. Από τους τρεις αυτούς άνδρες ο Dedekind απέκτησε θεμελιακές γνώσεις για τον Λογισμό, τα στοιχεία της Ανώτερης Αριθμητικής, τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και την πειραματική Φυσική.

Ο Dedekind χρειάστηκε να διαθέσει, αφού πήρε το πτυχίο του, δυο ολόκληρα χρόνια σκληρής εργασίας για να κάνει κτήμα του τις ελλειπτικές συναρτήσεις, την σύγχρονη Γεωμετρία, την ανώτερη Άλγεβρα και τη μαθηματική Φυσική, σε μια εποχή που αυτά αναπτύσσονταν έξοχα στο Βερολίνο από τους Jacobi, Steiner και Dirichlet. Το 1852 ο Dedekind πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα (σε ηλικία είκοσι ενός ετών) από τον Gauss για μια σύντομη διατριβή του σχετικά με τα ολοκληρώματα του Euler.

Το 1854 ο Dedekind εξελέγη λέκτορας στο Gottingen , μια θέση που κράτησε για τέσσερα χρόνια. Όταν πέθανε ο Gauss, το 1855, ο Dirichlet έφυγε από το Βερολίνο και ήλθε στο Gottingen. Κατά τα επόμενα τρία χρόνια της παραμονής του στο Gottingen, ο Dedekind παρακολούθησε τις πιο σημαντικές διαλέξεις του Dirichlet. Επίσης έγινε φίλος με τον Riemann που τότε άρχιζε την σταδιοδρομία του. Οι πανεπιστημιακές παραδόσεις του Dedekind αφορούσαν στο μεγαλύτερο μέρος τους τα στοιχειώδη Μαθηματικά, αλλά το 1857 – 1858 παρέδωσε μαθήματα για τη θεωρία των εξισώσεων του Gallois. Σε ηλικία δεκαέξι ετών ο Dedekind διορίστηκε (το 1857) τακτικός καθηγητής στην Πολυτεχνική Σχολή της Ζυρίχης όπου παρέμεινε πέντε χρόνια, επιστρέφοντας το 1862 στο Brunswick ως καθηγητής στο τεχνικό Γυμνάσιο. Εκεί έριξε άγκυρα σχεδόν για μισό αιώνα.

Ο Dedekind πέθανε το 1916, σε ηλικία ογδόντα πέντε ετών. Μέχρι τότε διατηρούσε την διαύγεια του πνεύματος και τη ρώμη του σώματος του. Δεν νυμφεύτηκε ποτέ, και έζησε με την αδελφή του Julie, την γνωστή μυθιστοριογράφο. Ο ίδιος είχε γίνει θρύλος και πολλοί τον κατέτασσαν μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών που είχαν πεθάνει. Δώδεκα χρόνια πριν από τον θάνατό του, το *Ημερολόγιο για Μαθηματικούς* του Teubner ανέφερε τον Dedekind ως θανόντα στις 4 Σεπτεμβρίου του 1899, προς μεγάλη διασκέδαση του Dedekind. «Για την μέρα του θανάτου μου, την $4^{η}$ Σεπτεμβρίου» έγραψε στον εκδότη του Ημερολογίου, «μπορεί τελικά να αποδειχθεί ότι είναι ορθή, αλλά για το έτος έχετε σίγουρα λάθος. Σύμφωνα με τις προσωπικές μου σημειώσεις, την ημέρα εκείνη ήμουν απολύτως υγιής και απολάμβανα μια πολύ ενδιαφέρουσα συζήτηση για το «σύστημα και τη θεωρία» με τον αγαπητό μου φίλο George Cantor από τη Halle».

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Λίγο αργότερα από την εποχή που ο Dedekind παρακολούθησε τις διαλέξεις του Dirichlet, ο ίδιος έμελλε να εκδώσει την περίφημη μελέτη του για την θεωρία των αριθμών και να προσθέσει το «Ενδέκατο Παράρτημα» που άφησε εποχή, στο οποίο περιέχεται το περίγραμμα της δικής του θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών.

Δεν έχουμε διαθέσιμο χώρο για να αναφερθούμε σε όλες του τις συνεισφορές στα Μαθηματικά. Γι' αυτό θα περιοριστούμε μόνο σε δυο από τα μεγαλύτερα επιτεύγματά του. Πρώτα θα παρουσιάσουμε τη θεμελιώδη συνεισφορά του, αυτή της «τομής Dedekind», στη θεωρία των αρρήτων και επομένως στα θεμέλια της Ανάλυσης. Δεδομένης της μεγάλης σπουδαιότητας της συνεισφοράς αυτής, αξίζει νομίζω να υπενθυμίσουμε σύντομα τη φύση του ζητήματος. Αν a, b είναι ακέραιοι αριθμοί, το κλάσμα a/b ονομάζεται ρητός αριθμός. Αν δεν υπάρχουν m, n ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε ένας ορισμένος «αριθμός» N να εκφράζεται ως m/n, τότε το N ονομάζεται άρρητος αριθμός. Έτσι οι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ είναι άρρητοι αριθμοί. Για να εκφραστεί ένας άρρητος αριθμός με τον δεκαδικό συμβολισμό, τα ψηφία που ακολουθούν την υποδιαστολή δεν πρέπει να εκδηλώνουν κάποια κανονικότητα – δηλαδή να μην υπάρχει κάποια επαναλαμβανόμενη «περίοδος», όπως 13/11,=1,181818…., όπου το 18 επαναλαμβάνεται στο διηνεκές.

Αν δυο ρητοί αριθμοί είναι ίσοι, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι θα είναι ίσες και οι τετραγωνικές τους ρίζες. Έτσι 2x3 και 6 είναι ίσα, άρα και $\sqrt{2x3} = \sqrt{6}$. Ωστόσο δεν είναι προφανές ότι $\sqrt{2}$ x $\sqrt{3} = \sqrt{2x3}$. Ποτέ και κανένας όσο κι αν προσπαθήσει δεν θα καταφέρει να αποδείξει ότι $\sqrt{2}$ x $\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Με την πάροδο του χρόνου θα επιτυγχάνονται ολοένα και καλύτερες προσεγγίσεις αλλά πάντα θα απέχουν από την τέλεια ταύτιση. Το να γίνουν αυτές οι έννοιες της «προσέγγισης» και της «ισότητας» ακριβείς ή το να δοθούν οι πρώτες αδρές ιδέες των αρρήτων αριθμών ήταν το καθήκον που έθεσε στον εαυτό του ο Dedekind στις αρχές του 1870. Το 1872 δημοσιεύθηκε η εργασία του με τίτλο (*Συνέχεια και Άρρητοι αριθμοί*» (Continuity and irrational Numbers).

Καρδιά της θεωρίας του Dedekind για τους άρρητους αριθμούς είναι η αντίληψη του της «τομής»: μια τομή διαχωρίζει όλους τους ρητούς αριθμούς σε δυο τάξεις, έτσι ώστε κάθε αριθμός στην πρώτη τάξη να είναι μικρότερος από κάθε αριθμό στην δεύτερη τάξη. Κάθε τέτοια τομή που δεν «αντιστοιχεί» σε ρητό αριθμό, ορίζει έναν «άρρητο» αριθμό.

Η άλλη εξέχουσα συνεισφορά που έδωσε ο Dedekind στην έννοια του «αριθμού», ήταν στην κατεύθυνση των αλγεβρικών αριθμών. Η ουσία του ζητήματος είναι ότι, σε τέτοια πεδία, η αναγωγή σε πρώτους παράγοντες δεν είναι μοναδική όπως στην κοινή Αριθμητική. Ο Dedekind αποκατέστησε αυτήν την εξαιρετικά επιθυμητή μοναδικότητα, ανακαλύπτοντας αυτό που αποκάλεσε ιδεώδες. Το ιδεώδες δεν είναι αριθμός, αλλά μια άπειρη τάξη αριθμών–κι έτσι ξανά ο Dedekind ξεπέρασε τις δυσκολίες του καταφεύγοντας στο άπειρο.

Η έννοια του ιδεώδους δεν είναι δύσκολο να κατανοηθεί, αν και υπάρχει κάποιο μπέρδεμα–η πιο περιεκτική τάξη διαιρεί την λιγότερο περιεκτική. Ένα ιδεώδες πρέπει να κάνει τουλάχιστον δυο πράγματα: Πρώτον, να αφήνει την κοινή Αριθμητική ουσιαστικά αναλλοίωτη, και δεύτερον να αναγκάζει τους ατίθασους αλγεβρικούς ακεραίους να υπακούουν σε εκείνους τους νόμους της Αριθμητικής – μοναδική ανάλυση σε πρώτους – τους οποίους αψηφούν.

Ας εξετάσουμε το σύνολο ή την τάξη όλων των αλγεβρικών ακεραίων σε ένα δεδομένο πεδίο αλγεβρικού αριθμού. Στο σύνολο αναφοράς θα υπάρχουν πάντα υποσύνολα. Ένα υποσύνολο καλείται ιδεώδες αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Α. Το άθροισμα και η διαφορά δυο οποιωνδήποτε ακεραίων του υποσυνόλου ανήκουν επίσης στο υποσύνολο.

Β. Αν ένας ακέραιος του υποσυνόλου πολλαπλασιαστεί με έναν οποιωνδήποτε ακέραιο του συνόλου αναφοράς, ο ακέραιος που θα προκύψει θα ανήκει στο υποσύνολο.

Άρα ένα ιδεώδες είναι μια άπειρη τάξη ακεραίων.

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι κάθε ιδεώδες είναι μια άπειρη τάξη ακεραίων που όλοι τους έχουν την μορφή

$$X_1\alpha_1 + X_2\alpha_2 + \ldots\ldots + X_n\alpha_n$$

Όπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ είναι συγκεκριμένοι ακέραιοι του σχετικού πεδίου βαθμού n και κάθε ένας από τους $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος του πεδίου.

Ο Dedekind ήταν ένας μαθηματικός της απολύτου αρεσκείας του Gauss, ήταν ένας μαθηματικός που στηριζόταν πάντα στη σκέψη του παρά σε έναν εφευρετικό συμβολισμό και σε επιδέξιους χειρισμούς τύπων για να προχωρήσει.

Αν κάποιος άνθρωπος εισήγαγε έννοιες στα Μαθηματικά, αυτός ήταν ο Dedekind, και η σοφία της προτίμησής του για δημιουργικές ιδέες σε σχέση με τα στείρα σύμβολα είναι σήμερα ολοφάνερη, κάτι που δεν ήταν φανερό στην διάρκεια της ζωής του.

MARY EVEREST BOOLE
(1832-1916)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Mary Everest Boole γεννήθηκε στην Αγγλία το 1832. Ο πατέρας της, ο Thomas Everest ήταν υπουργός. Το 1837, όταν η Mary ήταν σε ηλικία πέντε ετών και ο αδερφός της δύο ετών, ο πατέρας τους πήρε την οικογένεια τους και εγκαταστάθηκε στο Poissy της Γαλλίας προκειμένου να θεραπευτεί από την σοβαρή αρρώστια που είχε προσβληθεί. Η ζωή της Mary ήταν αρκετά δύσκολη μεγαλώνοντας σε μια πόλη με διαφορετικό πολιτισμό και διαφορετική γλώσσα. Ακόμη και η οικογένειά της αντιμετώπισε δυσκολίες διότι προερχόμενοι από την παράδοση ενός αγγλικού υπουργού ήταν δύσκολο να προσαρμοστούν σε μια πόλη που ήταν γαλλική καθολική.

Ο πατέρας της Mary, πίστεψε έντονα στην ομοιοπαθητική, ένα ιατρικό θεραπευτικό σύστημα του οποίου κύριος στόχος του ήταν να προωθηθεί η υγεία και να αποτραπεί η ασθένεια. Έτσι υπεβλήθη σε αυτήν την θεραπεία. Κατά την διάρκεια της θεραπείας του πατέρα της η Mary έμεινε πιστή στο πλευρό του.

Η πρώτη εισαγωγή της Mary στα μαθηματικά προήλθε από τις μελέτες με το δάσκαλό της, Monsieur Deplace. Το ιδιαίτερο ύφος της διδασκαλίας του βοήθησε πολύ την Mary να αφιερώνεται στις μελέτες της και αυτό ήταν κάτι που δεν ξέχασε ποτέ.

Όταν η Mary ήταν έντεκα χρονών η οικογένεια της γύρισε πίσω στην Αγγλία. Εκεί όταν τελείωσε το σχολείο έγινε βοηθός του πατέρα της. Τον βοηθούσε στα κηρύγματά του και έκανε μαθήματα σε μια σχολική τάξη της Κυριακής χρησιμοποιώντας τα βιβλία στη βιβλιοθήκη του πατέρα της για να διδαχθεί μαθηματικά. Αν και της άρεσε και μελετούσε πολύ τα μαθηματικά, είχε ακόμη πολλές αναπάντητες απορίες στις μελέτες της. Την περίοδο εκείνη η Mary επισκέφτηκε τον θείο της και την θεία της στο Κόρκ, στη δυτική Ιρλανδία. Μέσω του θείου της η Mary συνάντησε τον George Boole, έναν ήδη διάσημο Μαθηματικό. Η Mary απολάμβανε το χρόνο της με τον Boole και κοινωνικά και πνευματικά. Έτσι της δόθηκε η ευκαιρία να λύσει όλες τις απορίες της. Όταν η Mary γύρισε πίσω στην Αγγλία συνέχισε την επικοινωνία της με τον Boole μέσω αλληλογραφίας. Δυο χρόνια αργότερα ο Boole πήγε στην Αγγλία για να διδάξει στη Mary περισσότερα για τα μαθηματικά.. Εκτός από την παράδοση ιδιαίτερων μαθημάτων, ο Boole βρισκόταν στην διαδικασία γραψίματος ενός βιβλίου με τίτλο *«Οι νόμοι της σκέψης»* το οποίο αργότερα έγινε ένα από τα σπουδαιότερα έργα του και στο οποίο η Mary συνέβαλε ως συντάκτης αυτού του βιβλίου.

Λίγα χρόνια αργότερα η Mary έχασε τον πατέρα της και ο George σαν καλός της φίλος τής στάθηκε σε όλη αυτή την δύσκολη περίοδο της ζωής της. Έτσι σιγά-σιγά αναπτύχθηκε μια σοβαρή σχέση ανάμεσά τους η οποία μέσα στο ίδιο έτος κατέληξε σε γάμο. Ακόμα και αν η Mary ήταν δεκαεπτά χρόνια νεότερη από τον George, ήταν πολύ στενοί και αγαπημένοι σύντροφοι και είχαν έναν πολύ επιτυχημένο γάμο. Μέσα στα επόμενα εννέα χρόνια η Mary και ο George απέκτησαν πέντε κόρες. Η ευτυχία τους αυτή όμως δεν θα διαρκούσε πολύ. Ξαφνικά ο George προσβλήθηκε από πνευμονία και πέθανε αφήνοντας την Mary μόνη με το μικρότερό τους παιδί, μόνο έξι μηνών. Ο θάνατος του συζύγου της ήταν μεγάλο πλήγμα για την Mary.

Καθώς ο χρόνος περνούσε η υγεία της άρχισε να επιδεινώνεται. Πέθανε, σε ηλικία 84 ετών, το 1916. Η Mary Everest Boole ήταν μια θαυμαστή γυναίκα που, χηρευάμενη για πενήντα έτη, ανέθρεψε μόνη της τις πέντε κόρες της και κατάφερε να συνεισφέρει με αρκετές από τις εξαιρετικές γνώσεις της στην μαθηματική εκπαίδευση πολλών κοριτσιών και αγοριών. Η Mary θεωρήθηκε ένας ψυχολογικός μαθηματικός. Ο στόχος της ήταν να προσπαθήσει να καταλάβει με ποιόν τρόπο οι άνθρωποι, και ειδικά τα παιδιά, έμαθαν τα μαθηματικά και την επιστήμη, χρησιμοποιώντας τους συνειρμικούς συλλογισμούς των μυαλών τους και τους φυσικούς οργανισμούς τους.

Πολλές από τις συνεισφορές της Mary Everest Boole μπορούν να φανούν χρήσιμες ακόμη και στην σημερινή εποχή.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Η Mary δέχτηκε πρόταση για μια εργασία στο Queens College, το πρώτο κολλέγιο γυναικών στην Αγγλία. Εργαζόταν στο κολλέγιο αυτό ως βιβλιοθηκάριος. Μέσω αυτής της θέσης που είχε, έγινε ανεπίσημη σύμβουλος των σπουδαστών. Συνειδητοποίησε ότι της άρεσε πολύ να διδάσκει στους σπουδαστές και γρήγορα κατάλαβε ότι ήταν καλή σε αυτό. Τελικά, η Mary άρχισε να διδάσκει σε παιδιά και σύντομα αναγνωρίστηκε, από τον επικεφαλής της εκπαίδευσης του Λονδίνου, ως σημαντική εκπαιδευτικός.

Εξαιτίας μιας διαμάχης, η Mary αναγκάστηκε να εγκαταλείψει την δουλειά της στο κολλέγιο. Έτσι βρήκε μια άλλη απασχόληση ως γραμματέας στον φίλο του πατέρα της, James Hinton. Μέσω του Hinton, η Mary άρχισε να ενδιαφέρεται για την εξέλιξη και την διαδικασία της σκέψης. Θεωρούσε ότι ήταν δυνατόν να εκφραστούν όλες οι βασικές έννοιες του κόσμου με τους αριθμούς και τα σύμβολα. Σε ηλικία πενήντα ετών η Mary άρχισε να γράφει μια σειρά άρθρων και βιβλία τα οποία δημοσίευε τακτικά μέχρι το θάνατο της.

Το 1904, η Mary, έγραψε και δημοσίευσε το πρώτο της βιβλίο με τίτλο: *«Η προετοιμασία του παιδιού για την επιστήμη»*. Το βιβλίο αυτό άσκησε μεγάλη επίδραση στα προοδευτικά σχολεία στην Αγγλία και στις Ηνωμένες Πολιτείες στις αρχές του εικοστού αιώνα. Έγραψε βιβλίο για να βοηθήσει τα παιδιά να μάθουν για την γεωμετρία των γωνιών και των διαστημάτων. Το δεύτερο βιβλίο της δημοσιεύθηκε δεκαπέντε χρόνια μετά, με τίτλο: *«Το μήνυμα της επιστήμης της ψυχολογίας για τις μητέρες και τις νοσοκόμες»*.

FELIX KLEIN
(1849-1925)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Ο Felix Klein έγινε ιδιαίτερα γνωστός για την εργασία του στη μη – ευκλείδια γεωμετρία, για την εργασία του πάνω στις συνδέσεις μεταξύ της γεωμετρίας και της θεωρίας της ομάδας (group theory) αλλά και για τα αποτελέσματα πάνω στην θεωρία συναρτήσεων (function theory). Γεννήθηκε στις 25 Απριλίου του 1849 και αργότερα παρατήρησε ότι κάθε μια από την ημέρα (5^2), μήνα (2^2) και έτος (43^2) ήταν το τετράγωνο ενός όρου.

Ο πατέρας του ήταν γραμματέας σε προϊστάμενο της κυβέρνησης. Ο Klein γεννήθηκε μέσα στην επανάσταση των Rhinelanders ενάντια των Πρώσων κυβερνητών. Αποφοίτησε από το Γυμνάσιο του Dusseldorf. Από το 1865 έως το 1866 σπούδασε μαθηματικά και φυσική στο Πανεπιστήμιο της Βόννης.

Ξεκίνησε την καριέρα του με την πρόθεση να γίνει φυσικός. Ενώ σπούδαζε στο Πανεπιστήμιο της Bonn διορίστηκε στη θέση του εργαστηριακού βοηθού του Plucker. Ο Klein έλαβε το διδακτορικό του, το οποίο και επέβλεπε ο Plucker, το 1868. Στη διατριβή του ασχολήθηκε με εφαρμογές της γεωμετρίας στην μηχανική, χρησιμοποιώντας την θεωρία του Weierstrass των στοιχειωδών διαιρετέων.

Το έτος που ο Klein πήρε το διδακτορικό του ο Plucker πέθανε αφήνοντας το μεγάλο του έργο για τα θεμέλια της Γεωμετρίας στη μέση. Το πλέον κατάλληλο άτομο για να ολοκληρώσει την εργασία αυτή ήταν ο Klein.

Ο Klein ήταν στο Παρίσι όταν η Γαλλία κήρυξε τον πόλεμο στην Πρωσία και έτσι ένιωσε ότι δεν μπορούσε πλέον να μείνει εκεί. Έπειτα, για ένα μικρό χρονικό διάστημα πριν διοριστεί σαν λέκτορας στο Gottingen, έκανε την στρατιωτική του θητεία.

Το 1872 διορίστηκε ως καθηγητής στο Erlangen, στην Βαυαρία. Υποστηριζόταν έντονα από τον Glebsch που θεωρούσε ότι ο Klein θα μπορούσε να αφήσει όνομα μαθηματικού της εποχής του και έτσι πήρε έδρα από την ηλικία των 23.

Το 1875 του προσφέρθηκε έδρα στην Πολυτεχνική Σχολή του Μονάχου. Εκεί εκφράστηκε πλήρως το μεγάλο ταλέντο του Klein στη διδασκαλία. Την ίδια χρονιά παντρεύτηκε την Anne Hegel, την εγγονή του φιλόσοφου Georg Friedrich Hegel.

Μετά από πέντε χρόνια παραμονής του στην Πολυτεχνική Σχολή του Μονάχου διορίστηκε σε μια θέση στο Leipzig. Η καριέρα του ως ερευνητής μαθηματικός ξεκίνησε όταν ο Klein δέχτηκε μια θέση στο Πανεπιστήμιο του Gottingen το 1886. Δίδαξε στο Πανεπιστήμιο αυτό μέχρι που αποσύρθηκε το 1913 αλλά επεδίωξε να επανεγκαθιδρύσει το Gottingen ως πρώτιστο ερευνητικό μαθηματικό κέντρο στον κόσμο. Εκεί δίδαξε πληθώρα μαθημάτων, κυρίως σε συσχέτιση μαθηματικών με φυσική, όπως μηχανική και θεωρία δυναμικών συστημάτων.

Ο Klein εδραίωσε ένα ερευνητικό κέντρο στο Gottingen που επρόκειτο να χρησιμεύσει ως πρότυπο για τα καλύτερα μαθηματικά ερευνητικά κέντρα στο κόσμο.

Η φήμη του περιοδικού *«Μαθηματικά Χρονικά»* (Mathematische Annalen) βασίζεται στην μαθηματική και διοικητική ικανότητα του Klein. Η εφημερίδα ειδικευόταν στην μιγαδική ανάλυση (complex analysis), στην αλγεβρική γεωμετρία και στην θεωρία αναλλοίωτων.

Ο Klein αποσύρθηκε εξαιτίας της κακής του υγείας το 1913. Παρόλα αυτά συνέχισε να διδάσκει μαθηματικά στο σπίτι του κατά την διάρκεια του Πρώτου Παγκόσμιου Πολέμου. Εκλέχτηκε Πρόεδρος της Διεθνούς Επιτροπής της Μαθηματικής Εταιρίας στο διεθνές μαθηματικό συνέδριο της Ρώμης το 1908. Κάτω από την καθοδήγησή του ο γερμανικός κλάδος της Επιτροπής δημοσίευσε τόμους πάνω στην διδακτική των μαθηματικών σε όλα τα επίπεδα στη Γερμανία. Το 1885 εκλέχτηκε μέλος τη Βασιλικής Εταιρίας και έλαβε το μετάλλιο Copley το 1912. Η

Μαθηματική Εταιρία του Λονδίνου τον βράβευσε με το μετάλλιο De Morgan το 1893. Πέθανε στις 22 Ιουνίου του 1925 στο Gottingen της Γερμανίας.

Το έργο του Klein είναι, κατά κάποιο τρόπο, η κατάλληλη κατάληξη της «Ηρωικής εποχής της γεωμετρίας», γιατί δίδασκε και έδινε διαλέξεις για πενήντα σχεδόν χρόνια. Ο ενθουσιασμός του ήταν τόσο μεταδοτικός ώστε μερικές προσωπικότητες των τελών του δέκατου ένατου αιώνα θέλησαν να προφητεύσουν ότι όχι μόνο η γεωμετρία αλλά όλα τα μαθηματικά θα περιλαμβάνονταν μια μέρα στη θεωρία των ομάδων. Παρόλα αυτά, ο Klein δεν περιορίστηκε στις ομάδες. Έγραψε μια ιστορία μαθηματικών, η οποία δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του. Το κλασικό αυτό έργο δείχνει πόσο εξοικειωμένος ήταν ο συγγραφέας του με όλες τις πτυχές του κλάδου.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Είναι λίγο δύσκολο να γίνει κατανοητή η σημασία των συνεισφορών του Klein στη γεωμετρία. Αυτό συμβαίνει γιατί, σήμερα, έχει γίνει μέρος της παρούσας μαθηματικής σκέψης και είναι δύσκολο να συνειδητοποιήσουμε την καινοτομία των αποτελεσμάτων του και επίσης ότι δεν έγιναν αποδεκτά παγκοσμίως από όλους του συνεργάτες του.

Οι πρώτες σημαντικές ανακαλύψεις του Klein έγιναν το 1870 σε συνεργασία με τον Lie. Ανακάλυψαν τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ασυμπτωτικών γραμμών στην επιφάνεια Kummer. Η συνεργασία του με τον Kummer συνέχισε περαιτέρω και εργάστηκαν πάνω στην έρευνα των W- καμπυλών που κάμπτουν την σταθερά κάτω από μια ομάδα προβολικών μετασχηματισμών. Έτσι οι μετασχηματισμοί του Lie, οι οποίοι συστηματοποιήθηκαν από τον Klein, όρισαν μία ένα–προς–ένα αντιστοιχία ανάμεσα στις ευθείες και στις σφαίρες του ευκλείδειου χώρου, έτσι ώστε οι τεμνόμενες ευθείες αντιστοιχούν σε εφαπτόμενες σφαίρες.

Κατά την διάρκεια του χρόνου του στο Gottingen, ο Klein έκανε σημαντικές ανακαλύψεις σχετικά με την γεωμετρία. Δημοσίευσε δύο εργασίες «για την αποκαλούμενη μη–ευκλείδεια γεωμετρία, στις οποίες έδειξε ότι ήταν πιθανό να θεωρηθεί η ευκλείδεια γεωμετρία και η μη–ευκλείδεια σε ειδικές περιπτώσεις ως προβολική επιφάνεια με ένα συγκεκριμένο γειτονικό κωνικό τμήμα. Αυτό είχε το αξιοπρόσεκτο πόρισμα ότι η μη–ευκλείδεια γεωμετρία ισχύει εάν και μόνο εάν η ευκλείδεια γεωμετρία ισχύει. Το γεγονός ότι η μη–ευκλείδεια γεωμετρία ήταν ακόμη και τότε ένα αμφισβητούμενο θέμα εξαφανίστηκε τώρα.

Ο Klein, σε ένα διάσημο εναρκτήριο πρόγραμμα το 1872, όταν έγινε καθηγητής στο Erlangen, έδειξε το πώς θα μπορούσε να εφαρμοσθεί ένας κατάλληλος τρόπος χαρακτηρισμού των διαφόρων γεωμετριών που είχαν κάνει την εμφάνισή τους κατά τη διάρκεια του αιώνα.

Το πρόγραμμα που παρέδωσε ο Klein, το οποίο έγινε γνωστό ως το Erlanger Program, περιέγραφε τη γεωμετρία ως τη μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μία συγκεκριμένη ομάδα μετασχηματισμών. Κατά συνέπεια, κάθε ταξινόμηση των ομάδων μετασχηματισμών γίνεται μια κωδικοποίηση των γεωμετριών. Η επίπεδη ευκλείδεια γεωμετρία, για παράδειγμα, είναι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων, συμπεριλαμβανομένων των μηκών και των εμβαδών, που παραμένουν αναλλοίωτες από την ομάδα των μετασχηματισμών, η οποία αποτελείται από παράλληλες μετατοπίσεις και περιστροφές στο επίπεδο – τους αποκαλούμενους ανελαστικούς μετασχηματισμούς. Αναλυτικά οι ανελαστικοί επίπεδοι μετασχηματισμοί μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = dx + ey + f,$$

όπου $ae-bd=1$. Αυτές αποτελούν τα στοιχεία μια ομάδας. Η «πράξη» που «συνδυάζει» δύο τέτοια στοιχεία είναι απλώς αυτή που εκτελεί το μετασχηματισμό. Αν ο παραπάνω μετασχηματισμός ακολουθηθεί από ένα δεύτερο

$$x'' = Ax' + By' + C,$$
$$y'' = Dx' + Ey' + F,$$

το αποτέλεσμα των δύο πράξεων που εκτελούνται διαδοχικά ισοδυναμεί με μία μοναδική πράξη αυτής της μορφής η οποία θα αντιστοιχεί το σημείο (x, y) στο (x'', y''). Αν σε αυτή την ομάδα μετασχηματισμών αντικαταστήσουμε τον περιορισμό $ae-bd=1$ με τη γενικότερη πρόταση $ae-bd\neq 0$, οι νέοι μετασχηματισμοί πάλι σχηματίζουν μία ομάδα. Παρόλα αυτά, τα μήκη και τα εμβαδά δεν παραμένουν, κατ᾽ ανάγκη, τα ίδια, αλλά μια κωνική τομή κάποιας μορφής (έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή) θα παραμείνει, με αυτούς τους μετασχηματισμούς, μια κωνική τομή της ίδιας μορφής. Αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί. Χαρακτηρίζουν μια γεωμετρία καλούμενη ομοπαραλληλική, γιατί κάθε τέτοιος μετασχηματισμός αντιστοιχεί ένα σημείο σε ένα σημείο. Έτσι σύμφωνα με τον Klein η ευκλείδεια γεωμετρία είναι και αυτή ομοπαραλληλική. Η ομοπαραλληλική γεωμετρία είναι μια ειδική περίπτωση της προβολικής γεωμετρίας. Ένας προβολικός μετασχηματισμός μπορεί να έχει την μορφή

$$x' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f}, \quad y' = \frac{Ax+By+C}{dx+ey+f}$$

Αν d=0 και f=1, ο μετασχηματισμός είναι ομοπαραλληλικός. Οι ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών περιλαμβάνουν το γεγονός ότι:

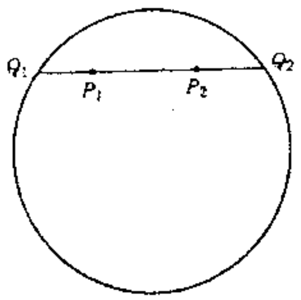
1. μία κωνική τομή μετασχηματίζεται σε μια κωνική τομή και
2. ο αναρμονικός λόγος παραμένει αναλλοίωτος.

Το Erlangeh Program του Klein ήταν σαφώς προϊόν του δέκατου ένατου αιώνα. Αρχικά, είχε περιορισμένη κυκλοφορία αλλά πριν το τέλος του αιώνα άρχισε να ασκεί μεγάλη επιρροή στη διεθνή μαθηματική κοινότητα.

Τέλος ο Klein συνεισέφερε τους όρους «ελλειπτική γεωμετρία» και «υπερβολική γεωμετρία» οι οποίοι αντιστοιχούν στις υποθέσεις της αμβλείας και της οξείας γωνίας αντίστοιχα. Για την τελευταία πρότεινε ένα απλό μοντέλο. Έστω ότι θεωρούμε το υπερβολικό επίπεδο ως τα σημεία τα εσωτερικά σε ένα κύκλο C στο ευκλείδειο πεδίο, έστω ότι η «υπερβολική ευθεία», που διέρχεται από τα σημεία P_1 και P_2 είναι το τμήμα αυτό της ευκλείδειας ευθείας P_1P_2 το οποίο βρίσκεται μέσα στον κύκλο C και έστω η «απόσταση» ανάμεσα σε δυο σημεία P_1 και P_2 μέσα στο κύκλο ορίζεται ως

$$\text{In}\frac{P_2Q_1 * P_1Q_2}{P_1Q_1 * P_2Q_2}.$$

Όπου Q_1 και Q_2 είναι τα σημεία τομής της ευθείας P_1P_2 με τον κύκλο C.



Έτσι, η χρυσή εποχή της σύγχρονης γεωμετρίας, η οποία είχε ξεκινήσει τόσο ευνοϊκά στη Γαλλία στην Ecole Polytechnique με το έργο των Lagrange, Monge και Poncelet έφθασε στο ζενίθ της στη Γερμανία, στο πανεπιστήμιο του Gottingen με την έρευνα και έμπνευση των Riemann, Gauss και Klein.

ELLEN AMANDA HAYES
(1851-1930)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Ellen Amanda Hayes γεννήθηκε στις 23 Σεπτεμβρίου του 1851 στο Granville του Ohio στις Ηνωμένες Πολιτείες. Ο πατέρας της Charles ήταν αξιωματικός κατά την διάρκεια του εμφυλίου πολέμου και μετά το τέλος του, δούλευε ως επεξεργαστής δερμάτων. Ήταν ένας άνθρωπος χωρίς ιδιαίτερη μόρφωση, αλλά παρόλα αυτά ήταν πολύ θετικός στη μόρφωση και των αντρών αλλά και των γυναικών. Η Ellen είχε άλλα πέντε αδέρφια και η μητέρα της, καθώς ήταν δασκάλα, χρησιμοποίησε τις γνώσεις της για να διδάξει τα παιδιά της. Μέχρι τα επτά της η Ellen είχε ως δασκάλα την μητέρα της. Έμαθε όχι μόνο να διαβάζει και να γράφει αλλά και αστρονομία και βοτανολογία.

Σε ηλικία οχτώ ετών η Ellen πήγε στο Centreville. Αφού τελείωσε την δική της σχολική εκπαίδευση έγινε δασκάλα σε ένα σχολείο στην επαρχία για να μαζέψει χρήματα ώστε να πάει στο Πανεπιστήμιο. Αφού δίδαξε για πέντε χρόνια, μπήκε στο Oberlin College το 1872. Η επιλογή αυτού του Πανεπιστημίου από την Ellen έγινε επειδή την εποχή εκείνη ήταν το μοναδικό Πανεπιστήμιο της Αμερικής που δεχόταν γυναίκες και άντρες.

Ξόδεψε κάποιο χρονικό διάστημα για να προετοιμαστεί για τις σπουδές της τις οποίες ξεκίνησε το 1875 και τελείωσε το 1878. Οι κύριες σπουδές της ήταν πάνω στα μαθηματικά και την φυσική, αλλά, διδάχτηκε επίσης ιστορία, αγγλική λογοτεχνία, ελληνικά και λατινικά.

Μετά την αποφοίτησή της η Hayes δίδαξε για ένα χρόνο στο Adrian College. Κατόπιν, το 1879, πήγε στο Wellesley College το οποίο ήταν μόνο για γυναίκες και είχε ανοίξει τέσσερα χρόνια πριν πάει η Hayes εκεί. Ήταν το πρώτο Πανεπιστήμιο που είχε επιστημονικά εργαστήρια.

Η Ellen έμεινε εκεί από το 1879 μέχρι την συνταξιοδότησή της το 1916. Εκεί έκανε καριέρα ως μαθηματικός αλλά έγινε και πρόεδρος του Τμήματος των Μαθηματικών το 1888. Το 1897 όταν το Πανεπιστήμιο ξεκίνησε ένα καινούριο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών διόρισε την Hayes πρόεδρο του νέου Τμήματος. Το 1904 το Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών επεκτάθηκε και έγινε Τμήμα Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών πάλι με την Hayes πρόεδρο. Το 1891 η Ellen εκλέχτηκε μέλος της Μαθηματικής Εταιρίας της Νέας Υόρκης και ήταν μία από τις έξι γυναίκες που εκλέχτηκαν.

Παρόλα αυτά, το Wellesley College δεν ήταν δεκτικό με τις απόψεις της Hayes πάνω στην εκπαίδευση και την πολιτική. Υποστήριζε τα δικαιώματα των γυναικών στην εκπαίδευση αλλά και στην ψήφο. Λόγω των απόψεών της που δεν ευχαριστούσαν την διοίκηση του Πανεπιστημίου δεχόταν πολλές απειλές.

Για να περάσεις τις απόψεις σου έπρεπε να έχει και την συμπαράσταση του τύπου και η Hayes γνώριζε καλά πως δεν την είχε. Έτσι αφού συνταξιοδοτήθηκε δημοσίευσε την δική της εφημερίδα που λεγόταν Relay και ήταν μηνιαία.

Το 1912 έβαλε υποψηφιότητα για Γραμματέας της Πολιτείας της Μασαχουσέτης με το σοσιαλιστικό κόμμα. Ήταν η πρώτη γυναίκα που ήταν υποψήφια για μια τέτοια θέση. Εκείνη την περίοδο, φυσικά, οι γυναίκες δεν ψήφιζαν, παρόλα αυτά πήρε περισσότερες ψήφους (13.991) από κάθε άλλο υποψήφιο του ίδιου κόμματος.

Πέθανε στις 17 Οκτωβρίου του 1930.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Η Ellen Amanda Hayes έγραψε πολλά διδακτικά βιβλία. Κάποια από αυτά ήταν *«Μαθήματα στην Ανώτερη Άλγεβρα»* (Lessons on Higher Algebra, 1891, δεύτερη έκδοση 1894), *«Στοιχειώδης Τριγωνομετρία»* (Elementary Trigonometry, 1896), *«Άλγεβρα για Λύκεια και Πανεπιστήμια»* (Algebra for High Schools and Colleges, 1897) και *«Λογισμός με Εφαρμογές, μία Εισαγωγή στη Μαθηματική Επιστήμη»* (Calculus with Applications, An Introduction to the Mathematical Treatment of Science, 1900).

Τα πιο σημαντικά κομμάτια της επιστημονικής της δουλειάς έγιναν στην αστρονομία. Τη περίοδο 1887-88 η Hayes έκανε παρατηρήσεις στο Αστεροσκοπείο Leander McCormick του Πανεπιστημίου της Βιρτζίνια. Έκανε παρατηρήσεις σε έναν δευτερεύοντα πλανήτη (Minor Planet 267) και υπολόγισε ην τροχιά του. Επίσης, έκανε παρατηρήσεις ενός κομήτη το 1904 που δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό Nature το Μάιο του 1904.

HENRI POINCARE

(1854–1912)

Η ΖΩΗ ΤΟΥ

Στη διάρκεια της εκστρατείας του Ναπολέοντα το 1814, ο παππούς σε ηλικία μόλις είκοσι ενός ετών, αποσπάστηκε στο στρατιωτικό νοσοκομείο του Saint Quentin. Μετά την εγκατάστασή του το 1817 στη Ρουέν παντρεύτηκε και απέκτησε δυο γιούς: τον Leon και τον Antoine. Ο Leon Poincare, που γεννήθηκε το 1828, έγινε πρώτης τάξεως ιατρός παθολόγος και μέλος της ιατρικής κοινότητας, ενώ ο Antoine έγινε γενικός επιθεωρητής της Διεύθυνσης οδών και γεφυρών. Ο γιος του Leon, ο Henri, που γεννήθηκε στις 29 Απριλίου του 1854 στη Νάνσυ της Λωρραίνης, εξελίχθηκε σε ηγετική φυσιογνωμία των Μαθηματικών στις αρχές του εικοστού αιώνα.

Η μητέρα του Henri αφιέρωσε ολόκληρη την προσοχή της στην εκπαίδευση των δυο νεαρών παιδιών της, του Henri και της νεότερης αδελφής του. Η αδελφή του Henri ήταν σύζυγος του Emile Boutroux και μητέρα ενός μαθηματικού που πέθανε νέος. Χάρη κυρίως στην σταθερή φροντίδα της μητέρας τους, η πνευματική ανάπτυξη του Henri ως παιδιού ήταν εξαιρετικά γρήγορη. Έμαθε πολύ γρήγορα να μιλά, αλλά μάλλον πολύ άσχημα καθώς η ταχύτητα της σκέψης του ήταν πολύ γρηγορότερη από την ικανότητα του να αρθρώνει λέξεις. Όταν έμαθε να γράφει ανακάλυψε ότι ήταν αμφιδέξιος και ότι μπορούσε να γράφει ή να σχεδιάζει το ίδιο κακά με το αριστερό όπως και με το δεξί.

Κυριότερη ψυχαγωγία του ήταν το διάβασμα, όπου φανέρωσε τα ασυνήθιστα χαρίσματά του. Από την στιγμή που διάβαζε ένα βιβλίο το έκανε κτήμα του, και μπορούσε πάντα να μνημονεύει την σελίδα και την γραμμή ακόμη που αναφερόταν κάτι. Σε όλη του τη ζωή διατήρησε αυτήν την πανίσχυρη μνήμη. Η σπάνια αυτή ικανότητα μνήμης που χαρακτήριζε τον Poincare μπορεί να αποκληθεί οπτική ή χωρική μνήμη. Αλλά και η χρονική μνήμη του ήταν εξαιρετικά ισχυρή. Η πλειονότητα των μαθηματικών θυμούνται τα θεωρήματα και τους τύπους κυρίως με το μάτι. Ο Poincare τα θυμόταν κυρίως με το αυτί. Όταν έγινε σπουδαστής ανωτέρων Μαθηματικών, καθώς ήταν ανήμπορος να δει καθαρά τον πίνακα, καθόταν στα πίσω θρανία και άκουγε, παρακολουθώντας τις παραδόσεις και συγκρατώντας τέλεια τα πάντα χωρίς να κρατά σημειώσεις. Η ανικανότητα που είχε και δεν μπορούσε να χρησιμοποιήσει τα χέρια του επιδέξια ήταν φυσικά για τον Poincare ένα μειονέκτημα στις εργαστηριακές ασκήσεις, πράγμα ασφαλώς λυπηρό. Αν ο Poincare ήταν εξίσου δυνατός στην πρακτική επιστήμη όσο και στη θεωρητική, θα αποτελούσε τετράδα με την ανυπέρβλητη τριάδα του Αρχιμήδη, του Νεύτωνα και του Gauss.

Η σταδιοδρομία του Poincare στο δημοτικό σχολείο ήταν εξαιρετική, αν και στην αρχή δεν έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Το πρώτο του πάθος ήταν η φυσική ιστορία, και σε όλη του τη ζωή παρέμεινε μεγάλος φιλόζωος. Το πάθος του για τα μαθηματικά τον κυρίευσε στην εφηβεία του ή λίγο πριν (όταν ήταν περίπου δεκαπέντε ετών). Από την πρώτη στιγμή εκδήλωσε μια ιδιαιτερότητα που θα τον ακολουθούσε σε όλη του τη ζωή: οι μαθηματικές του δημιουργίες πραγματοποιούνταν μέσα στο κεφάλι του καθώς βημάτιζε ακατάπαυστα πάνω–κάτω, και κατέφευγε στο χαρτί μόνον όταν όλα είχαν ολοκληρωθεί στη σκέψη του. Στην τελευταία περίοδο της ζωής του, ο Poincare έγραψε τις μαθηματικές του διατριβές μια και έξω, χωρίς να ανατρέχει σε όσα είχε γράψει, ενώ ήταν ελάχιστα τα σβησίματα που έκανε όταν έγραφε.

Ακολουθώντας τη συνηθισμένη γαλλική πρακτική, ο Poincare έδωσε εξετάσεις για το πρώτο πτυχίο του πριν ειδικευθεί. Πέρασε τις εξετάσεις το 1871 σε ηλικία δεκαεφτά ετών–αφού κινδύνεψε να κοπεί στα μαθηματικά. Μετά προετοιμάστηκε για τις εισαγωγικές εξετάσεις στη Δασοκομική Σχολή, αφού προηγουμένως άφησε κατάπληκτους του φίλους του κερδίζοντας το πρώτο βραβείο στα μαθηματικά, ενώ δεν είχε κρατήσει σημειώσεις ούτε από μία διάλεξη μαθηματικών.

Στο τέλος του έτους πέρασε πρώτος στο Πολυτεχνείο (Ecole Polytechnique). Διασώζονται μερικοί θρύλοι από εκείνες τις μοναδικές εξετάσεις. Ένας από τους θρύλους αυτούς λέει πως κάποιος εξεταστής, που είχε προειδοποιηθεί ότι ο νεαρός Poincare ήταν ιδιοφυία, ανέβαλε την έναρξη των εξετάσεων για τρία τέταρτα της ώρας στην προσπάθεια του να βρει μια «ζόρικη» ερώτηση. Ο Poincare όμως έδειξε την μεγάλη κλάση του, και ο εξεταστής «έδωσε θερμά συγχαρητήρια στον εξεταζόμενο, λέγοντας του ότι του δίνει την υψηλότερη βαθμολογία».

Στο Πολυτεχνείο ο Poincare διακρίθηκε για το λαμπρό του πνεύμα στα μαθηματικά, την απίθανη αδεξιότητά του σε όλες τις φυσικές ασκήσεις, συμπεριλαμβανομένης της γυμναστικής και των στρατιωτικών ασκήσεων, και την τέλεια αδυναμία του να τραβήξει μερικές γραμμές που να μοιάζουν με οτιδήποτε στον ουρανό ή τη γη. Στις εισαγωγικές εξετάσεις ο βαθμός του στο σχέδιο ήταν μηδέν, πράγμα που παρά λίγο να του κοστίσει τον αποκλεισμό του από τη Σχολή. Ωστόσο, η ανικανότητα του Poincare να σχεδιάσει είχε και τη σοβαρή της πλευρά όταν άρχισε να ασχολείται με τη γεωμετρία, χάνοντας την πρώτη θέση. Έτσι ο Poincare αποφοίτησε από την Πολυτεχνική Σχολή δεύτερος. Τελειώνοντας το Πολυτεχνείο το 1875, σε ηλικία είκοσι ενός ετών, ο Poincare μπήκε στη Σχολή Μεταλλείων με σκοπό να γίνει μηχανικός ορυχείων. Οι τεχνικές σπουδές του, αν και τις ολοκλήρωσε με ευσυνειδησία, του άφηναν αρκετό ελεύθερο χρόνο για να ασχολείται με τα μαθηματικά.

Ο Poincare δεν ήταν γραφτό να γίνει μηχανικός μεταλλείων. Έτσι δέχθηκε με χαρά την πρόταση να γίνει καθηγητής Μαθηματικών–δυνατότητα που του εξασφάλισαν η διδακτορική διατριβή του αλλά και οι προηγούμενες εργασίες του. Η πρώτη ακαδημαϊκή θέση που κατέλαβε ήταν στην Caen την 1η Δεκεμβρίου του 1879 ως Καθηγητής Μαθηματικής Ανάλυσης. Μετά από δυο χρόνια πήρε προαγωγή αναλαμβάνοντας την διδασκαλία της μηχανικής και πειραματικής φυσικής. Ο Poincare ανάλωσε τα υπόλοιπα χρόνια της ζωής του στο Παρίσι ως άρχοντας των γαλλικών Μαθηματικών. Στην διάρκεια της πρώτης δεκαετίας του εικοστού αιώνα, η φήμη του Poincare απλώθηκε ραγδαία και άρχισε να θεωρείται, ιδίως στη Γαλλία, ως αυθεντία για όλα τα μαθηματικά ζητήματα.

Εκτός από την βασανιστική αρρώστια στην διάρκεια των τελευταίων τεσσάρων χρόνων, η δραστήρια ζωή του Poincare ήταν γαλήνια και ευτυχισμένη. Τον τίμησαν όλες οι μεγάλες επιστημονικές εταιρείες του κόσμου, και το 1906, σε ηλικία πενήντα δυο ετών, τιμήθηκε με την μεγαλύτερη διάκριση που μπορεί να δοθεί σε Γάλλο επιστήμονα–έγινε Πρόεδρος της Ακαδημίας Επιστημών. Είχε κάνει έναν ευτυχισμένο γάμο και είχε αποκτήσει έναν γιο και τρεις κόρες που του έδωσαν μεγάλη χαρά. Η σύζυγός ήταν δισέγγονη του Etienne Geoffroy SaintHilaire, που έμεινε στην μνήμη των ανθρώπων σαν ο ανταγωνιστής του καβγατζή ανατόμου Cuvier.

Ένα από τα πάθη του Poincare ήταν η συμφωνική μουσική. Πήρε μέρος στο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο που έγινε στη Ρώμη το 1908, αλλά η αρρώστια του δεν του επέτρεψε να διαβάσει τον ενθαρρυντικό λόγο του για το Μέλλον της Μαθηματικής Φυσικής (The Future of Mathematical Physics). Το πρόβλημα του ήταν υπερτροφία προστάτη, και αντιμετωπίστηκε με χειρουργική επέμβαση από Ιταλό γιατρό. Ο Poincare πίστεψε ότι απαλλάχτηκε οριστικά από το πρόβλημα, έτσι επιστρέφοντας στο Παρίσι στρώθηκε ξανά στη δουλειά, δραστήρια όσο ποτέ άλλοτε. Αλλά από το 1911 άρχισε να έχει προμηνύματα ότι δεν του έμενε πολλή ζωή. Στις 9 Δεκεμβρίου έγραψε σε έναν εκδότη μαθηματικού περιοδικού ζητώντας να πληροφορηθεί αν μπορούσε να δημοσιεύσει μια ανολοκλήρωτη μελέτη για ένα θέμα το οποίο θεωρούσε ύψιστης σπουδαιότητας : «.....στην ηλικία που είμαι ίσως να μην μπορέσω να το λύσω, και τα συμπεράσματα στα οποία έχω καταλήξει, που νομίζω ότι μπορούν να βάλουν τους νεότερους μαθηματικούς σε ένα νέο μονοπάτι της επιστήμης, είναι νομίζω ελπιδοφόρα, παρά τις πλάνες που μου γέννησαν, ότι θα έπρεπε να παραιτηθώ και να τα εγκαταλείψω....».

Η επιθυμητή απόδειξη δόθηκε λίγο μετά την δημοσίευση της «ανολοκλήρωτης συμφωνίας» του Poincare από το νεαρό Αμερικανό μαθηματικό George Birkhoff. Την άνοιξη του 1912 ο Poincare αρρώστησε ξανά και υποβλήθηκε σε δεύτερη εγχείρηση στις 9 Ιουλίου. Η εγχείρηση πέτυχε, αλλά στις 17 Ιουλίου ο Poincare πέθανε από εμβολή ενώ ντυνόταν. Διένυε το πεντηκοστό ένατο έτος της ηλικίας του και βρισκόταν στο αποκορύφωμα της δύναμής του «ο ζωντανός εγκέφαλος των θετικών επιστημών», σύμφωνα με τα λόγια του Painleve. Η εκθαμβωτική φήμη που απέκτησε στην διάρκεια της ζωής του γνώρισε μια περίοδο μερικής έκλειψης στην πρώτη δεκαετία μετά τον θάνατό του. Ωστόσο, η διαίσθησή του για το τι θα ενδιέφερε πιθανότατα τις μετέπειτα γενεές φαίνεται ήδη να δικαιώνεται.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Η δημιουργική περίοδος του Poincare άνοιξε με τη διατριβή του το 1878 και έκλεισε με τον θάνατό του το 1912- όταν βρισκόταν στο αποκορύφωμα των δυνάμεων του. Η παραγωγή του ανέρχεται σε σχεδόν πεντακόσια δοκίμια για τα νέα Μαθηματικά, πολλά από τα οποία ήταν εκτεταμένες διατριβές, και περισσότερα από τριάντα βιβλία που κάλυπταν πρακτικά όλους τους κλάδους της μαθηματικής φυσικής, της θεωρητικής φυσικής και της θεωρητικής Αστρονομίας. Πέρα από τις εργασίες αυτές έχουμε και τις κλασικές μελέτες του για την φιλοσοφία της επιστήμης και τα εκλαϊκευμένα δοκίμιά του.

Η πρώτη επιτυχία του Poincare ανήκει στο πεδίο της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων, όπου εφάρμοσε όλα τα εργαλεία της ανάλυσης που είχε κάνει απόλυτο κτήμα του. Οι έρευνες για τις διαφορικές εξισώσεις κατέληξαν το 1880, όταν ο Poincare ήταν είκοσι έξι ετών, σε μια από τις πιο λαμπρές του ανακαλύψεις, μια γενίκευση των ελλειπτικών συναρτήσεων. Η τριγωνομετρική συνάρτηση ημz έχει περίοδο 2π, δηλαδή ημ$(z + 2\pi)$ = ημz . Όταν λοιπόν η μεταβλητή z αυξάνεται κατά 2π, η συνάρτηση ημιτόνου του z ξαναπαίρνει την αρχική της τιμή. Ο Poincare διαπίστωσε ότι η περιοδικότητα είναι απλώς ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ιδιότητας: η τιμή ορισμένων συναρτήσεων αποκαθίσταται όταν η μεταβλητή αντικατασταθεί από ένα οποιοδήποτε αριθμήσιμο άπειρο των ίδιων των γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών–και όλοι αυτοί οι μετασχηματισμοί αποτελούν μια ομάδα. Με ελάχιστα σύμβολα θα αποσαφηνιστεί η δήλωση αυτή.

Έστω ότι το z αντικαθίσταται από $\dfrac{az+b}{cz+d}$

Τότε, για ένα αριθμήσιμο άπειρο σύνολο τιμών των α, b, c, d, υπάρχουν ομοιόμορφες συναρτήσεις του z. Ο Poincare κατασκεύασε πραγματικά τέτοιες συναρτήσεις και ανέπτυξε τις πιο σημαντικές τους ιδιότητες σε μια σειρά δοκιμίων στη διάρκεια της δεκαετίας του 1880. Οι συναρτήσεις αυτού του είδους ονομάζονται αυτομορφικές.

Εδώ αρκούν μόνο δυο παρατηρήσεις για να δείξουμε τι πέτυχε ο Poincare με τη θαυμάσια δημιουργία του. Πρώτον, η θεωρία του συμπεριλαμβάνει την θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων ως λεπτομέρεια της. Και δεύτερον, ο Poincare ανακάλυψε δυο αξιομνημόνευτες προτάσεις που του «έδωσαν τα κλειδιά του αλγεβρικού κόσμου». Η δημιουργία αυτής της μεγάλης θεωρίας των αυτομορφικών συναρτήσεων δεν ήταν παρά μία από τις πολλές συνεισφορές του Poincare στην ανάλυση, πριν φτάσει τα τριάντα. Και φυσικά δεν είχε αφιερώσει όλο τον καιρό του στην ανάλυση. Η θεωρία των αριθμών, τμήματα της Άλγεβρας και η μαθηματική Αστρονομία απορροφούσαν επίσης την προσοχή του την ίδια περίοδο. Στην αρχή ανέπλασε την θεωρία του Gauss για τις διτετραγωνικές μορφές σε ένα τετραγωνικό σχήμα. Δεν είναι βέβαια μόνον αυτά όσα ο Poincare πέτυχε στην ανώτερη Αριθμητική, αλλά δυστυχώς ο χώρος δεν μας επιτρέπει να επεκταθούμε περισσότερο.

Στην ασυνήθιστα νεαρή ηλικία των τριάντα δυο ετών, το 1887, ο Poincare εξελέγη μέλος της Ακαδημίας. Η πρώτη μεγάλη επιτυχία του το 1889 στη μαθηματική Αστρονομία προήλθε από μια ανεπιτυχή επίθεση στο «πρόβλημα των n σωμάτων». Για n = 2, το πρόβλημα είχε λυθεί ολοκληρωμένα από τον Νεύτωνα. Η πιο πρωτότυπη εργασία του Poincare στη μαθηματική Αστρονομία περιέχεται στη μεγάλη πραγματεία του με τίτλο *«Νέες μέθοδοι της ουράνιας μηχανικής»* (Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste) που κυκλοφόρησε σε τρεις τόμους, το 1892, 1893, και 1899. Ακολούθησε ένα άλλο τρίτομο έργο τα έτη 1905–1910 που το θέμα του είχε πιο άμεσα πρακτικό χαρακτήρα: Μαθήματα ουράνιας μηχανικής (Leçons de mécanique céleste). Λίγο αργότερα δημοσίευσε τις παραδόσεις με τίτλο *«Για σχήματα ισορροπίας ρευστής μάζας»* (Sur les figures d' équilibre d' une masse fluide) και ένα ιστορικό–κριτικό σύγγραμμα με τίτλο *«Περί των κοσμογονικών υποθέσεων»* (Sur les hypothèses cosmogoniques).

Για την πρώτη από τις εργασίες αυτές του Poincare, ο Darboux διακήρυξε ότι εγκαινίασε μια νέα εποχή της ουράνιας μηχανικής. Ο Poincare ήταν ο πρώτος που εισήγαγε ή χρησιμοποίησε στη μελέτη δυναμικών προβλημάτων διαφορετικές ιδέες : η πρώτη ιδέα, είναι αυτή των εξισώσεων μεταβολών (variational equations), δηλαδή των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που καθορίζουν λύσεις ενός προβλήματος απείρως κοντά σε μια δεδομένη λύση. Η δεύτερη ήταν η ιδέα των ολοκληρωτικών αναλλοίωτων (integral invariants), που ανήκει εξ ολοκλήρου στον Poincare και έπαιξε πρωταγωνιστικό ρόλο στις έρευνες αυτές.

Θα αφήσουμε για τώρα τις συνεισφορές του στην Ανάλυση και θα περάσουμε στο πολύτομο έργο του για την μαθηματική Φυσική. Εδώ η τύχη του δεν ήταν και τόσο καλή. Όταν η Φυσική άρχισε να ανακτά τη νεανικότητά της ο Poincare ήταν βαθύτατα διαποτισμένος από τις θεωρίες του δέκατου ένατου αιώνα και δεν του έμενε χρόνος για να αντιληφθεί το θαύμα που άρχισε να συντελείται, καθώς έμελλε να πεθάνει το 1912. Μολονότι ο Poincare έδωσε αρκετά στη μαθηματική Φυσική-περίπου έξι συνεισφορές που δίκαια του εξασφάλισαν μεγάλη φήμη-ωστόσο δεν ήταν αυτή η δουλειά για την οποία είχε γεννηθεί.

Ο Poincare παρουσίασε τις απόψεις του για τις μαθηματικές ανακαλύψεις σε ένα δοκίμιο που δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά το 1908 και αναδημοσιεύθηκε στο βιβλίο του Science et Méthode. Η γένεση της μαθηματικής δημιουργίας, λέει, είναι το πρόβλημα που πρέπει να απασχολεί εντατικά τους ψυχολόγους, γιατί αυτή είναι η δραστηριότητα στην οποία η ανθρώπινη σκέψη φαίνεται να δανείζεται ελάχιστα πράγματα από τον εξωτερικό κόσμο. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό γνώρισμα της θεώρησης του Poincare είναι ότι ελάχιστοι μαθηματικοί είχαν την πνοή της φιλοσοφικής ενατένισης με την οποία ήταν προικισμένος ο Poincare, και κανένας δεν είχε σε τέτοιο βαθμό το χάρισμα της σαφούς έκθεσης.

CHARLOTTE ANGAS SCOTT
(1858-1931)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Charlotte Angas Scott γεννήθηκε στην Αγγλία το 1858. Ο πατέρας της ήταν παπάς αλλά και Πρόεδρος του Lancashire Independent College. Το έναυσμα για το ενδιαφέρον της για τα μαθηματικά, το οποίο ξεκίνησε από πολύ νωρίς, της το έδωσε ο πατέρας της ο οποίος μπορούσε να της παρέχει μαθήματα μαθηματικών από την ηλικία των 7.

Την περίοδο εκείνη, ήταν λίγες οι γυναίκες που είχαν πρόσβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και κανένα Πανεπιστήμιο στην Αγγλία δεν τις δέχονταν. Η Charlotte, που ήταν η δεύτερη από επτά παιδιά, ήταν πολύ τυχερή που μεγάλωσε σε ένα σπίτι όπου οι γονείς της την παρότρυναν να μην μένει περιορισμένη λόγω του συντηρητισμού της εποχής. Έχοντας τα προσόντα από τα ιδιωτικά μαθήματα που έκανε σπίτι της, κέρδισε μια υποτροφία το 1876, σε ηλικία δεκαοχτώ ετών, στο Hitchin College.

Τέσσερα χρόνια αργότερα, το 1880, η Charlotte διαγωνίστηκε στους τελικούς διαγωνισμούς που προσέφερε το Cambridge, τα «Tripos exams». Οι διαγωνισμοί αυτοί έκριναν ποιος ήταν ικανός να πάρει το πτυχίο του Πανεπιστημίου με τιμές. Πιο παλιά, η τιμή αυτή δινόταν μόνο σε άντρες φοιτητές. Η επίδοση της Charlotte την κατέταξε στην όγδοη θέση μεταξύ όλων των φοιτητών του Πανεπιστημίου. Παρόλα αυτά δεν της επέτρεψαν να παραστεί στην τελετή της απονομής των βραβείων μόνο και μόνο επειδή ήταν γυναίκα. Η Charlotte, δεν άφησε την «προσβολή» αυτή να την αποθαρρύνει, αλλά την έκανε να προσπαθεί ακόμη περισσότερο. Προχώρησε και πήρε το πτυχίο της στη Φυσική το 1882, ενώ μέχρι το 1885 είχε πάρει και το διδακτορικό της κάτω από την επίβλεψη του Cayley. Και οι δύο από τους βαθμούς της ήταν της υψηλότερης πιθανής σχολικής εκτίμησης «first class». Πήρε τους βαθμούς της από το Πανεπιστήμιο του Λονδίνου καθώς το Πανεπιστήμιο του Cambridge ξεκίνησε να βραβεύει γυναίκες από το 1948 και μετά. Ακόμα τα αποτελέσματα αυτού του σημαντικού επιτεύγματος σε έναν ανδροκρατούμενο τομέα δεν πέρασαν απαρατήρητα, καθώς σημάδεψε την αρχή μιας δράσης ώστε για όλες τις γυναίκες που ήταν σε θέση να παρευρεθούν στις εξετάσεις του Cambridge επιπρόσθετα να ανακοινώνονται τα ονόματά τους δημόσια με τους άντρες.

Η Scott παρέμεινε στο Girton College όπου και δίδαξε για τέσσερα χρόνια. Στο τέλος του τέταρτου έτους της δόθηκε η ευκαιρία να πάει να διδάξει στο Bryn Mawr College στις Ηνωμένες Πολιτείες. Είχε λάβει πολύ θερμές συστατικές επιστολές και ήταν μία από τους πρώτους που της προσφερόταν η θέση αυτή. Η Charlotte αποφάσισε να δεχτεί την θέση αυτή. Θεώρησε ότι εκεί θα της δίνονταν ευκαιρίες που δεν είχε στη Αγγλία. Εκεί πίεσε το Πανεπιστήμιο να θέσει εισαγωγικές εξετάσεις κάτι το οποίο τελικά θεσμοθετήθηκε το 1901. Εδραίωσε, επίσης, πολιτικές για το Πανεπιστήμιο οι οποίες είναι σε ισχύ ακόμη και σήμερα.

Το 1899 έγινε συν εκδότρια του περιοδικού «American Journal of Mathematics», μία θέση που κράτησε μέχρι το 1926. Το 1896 πήρε μία πολύ θετική κριτική από την Μαθηματική Αμερικάνικη Εταιρία. (AMS). Η Charlotte ήταν επίσης η πρώτη γυναίκα στο πρώτο Διοικητικό Συμβούλιο όταν η 1894 το AMS ξεκίνησε.

Αυτή και η πρώτη κοπέλα που επέβλεπε για το διδακτορικό της ήσαν δύο από εννέα γυναίκες μεταξύ των 250 μελών της AMS. Εργάστηκε ξανά για το Διοικητικό Συμβούλιο της AMS από το 1899 μέχρι το 1901 και το 1905 έγινε αντιπρόεδρος του Διοικητικού Συμβουλίου.

Στα σαράντα χρόνια που η Charlotte Angas Scott έμεινε στην Αμερική είχε μία ζωή γεμάτη από επιτυχίες. Είχε εδραιώσει τα προπτυχιακά και πτυχιακά προγράμματα στα Μαθηματικά, δημοσίευσε ένα εγχειρίδιο για τους πτυχιούχους, έγραψε πάνω από τριάντα εργασίες που δημοσιεύτηκαν σε διεθνή περιοδικά και υπηρέτησε και σαν μέλος αλλά και σαν πρόεδρος σε μαθηματικές εταιρίες και οργανισμούς. Ήταν η πρώτη Βρετανίδα που πήρε διδακτορικό στα Μαθηματικά και η πρώτη μαθηματικός στο Bryn Mawr College.

Η Charlotte συνταξιοδοτήθηκε στην ηλικία των εξήντα επτά χρόνων. Επέστρεψε στην Αγγλία και έζησε εκεί μέχρι το 1931. Το 1925, αφού επέστρεψε στο Cambridge, η Scott έχασε την ακοή της και αυτό δεν την άφησε να παίξει ενεργό ρόλο στη ζωή του Πανεπιστημίου. Πέθανε στις 10 Νοεμβρίου του 1931 στο Cambridge. Κάτω από την καθοδήγησή της, οι γυναίκες κατέκτησαν ένα πιο ενεργό ρόλο στην μαθηματική κοινωνία. Στην ουσία η Charlotte Angas Scott ενέπνευσε τη ριζοσπαστική πρόκληση για τις γυναίκες να κυνηγήσουν μια καριέρα στα Μαθηματικά.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Η Charlotte έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο *«Εισαγωγικά Μαθήματα ορισμένων σύγχρονων ιδεών και μεθόδων στην αναλυτική γεωμετρία επιπέδων»* το οποίο πρωτοεκδόθηκε το 1894, επανεκτυπώθηκε τριάντα χρόνια αργότερα και ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται ευρέως.

Ακόμη, πάνω από τριάντα εργασίες της δημοσιεύτηκαν στο American Journal of Mathematics. Είναι η συγγραφέας της πρώτης εργασίας της μαθηματικής έρευνας που γράφτηκε στην Αμερική και είναι γνωστή στην Ευρώπη ως *«Η απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της Noether»*.

Η Scott ενδιαφέρθηκε για τις αποδείξεις και τα παραδείγματα. Ήταν η πρώτη που απέδειξε θεωρήματα πράγμα το οποίο ήταν δημοφιλής ασχολία για λύση προβλημάτων την δεκαετία του 1920.

Όμως η μεγαλύτερη συνεισφορά της Charlotte Angas Scott ήταν πως εγκαινίασε μια εποχή όπου οι γυναίκες αγωνίστηκαν να λάβουν μία θέση στον κύκλο της ελίτ και των μορφωμένων. Η Charlotte υπερνίκησε την αποδοκιμασία της κοινωνίας και έγινε η πρώτη γυναίκα που πήρε διδακτορικό στα Μαθηματικά στην Αγγλία. Ο δέκατος ένατος και οι αρχές του εικοστού αιώνα ήταν εποχές όπου περιέκλειαν μία περίοδο στην οποία η κοινωνία έβλεπε την θέση της γυναίκας στο σπίτι. Όμως, η Charlotte κατάλαβε από νωρίς την σημασία του αγώνα για την ισότητα των γυναικών. Επιτυχής στις φιλοδοξίες της, θεωρείται πρωτοπόρος για την πρόοδο του ρόλου των γυναικών στον τομέα των μαθηματικών.

WINIFRED EDGERTON MERRILL
(1862–1951)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Winifred Edgerton γεννήθηκε στις 24 Σεπτεμβρίου του 1862 στο Ripon, Wisconsin. Ήταν η πρώτη γυναίκα που έλαβε ένα ph. D στα μαθηματικά. Η εκπαίδευσή της ξεκίνησε νωρίς από ιδιωτικούς δασκάλους. Το 1883 κέρδισε τον B.A βαθμό της από το κολλέγιο Wellesley. Μετά από κάποια απασχόληση της στο Χάρβαρντ είχε την άδεια να μελετήσει τα μαθηματικά και την αστρονομία στο Πανεπιστήμιο της Κολούμπια.

Το 1887 η Edgerton παντρεύτηκε με τον Frederick Merrill, ο οποίος ήταν πτυχιούχος του πανεπιστημίου της Κολούμπια και το 1890 έλαβε το ph.D. Εργαζόταν ως κρατικός γεωλόγος της Νέας Υόρκης από το 1899 έως το 1904 και στη συνέχεια έγινε διευθυντής του κρατικού μουσείου της Νέας Υόρκης μέχρι το 1916, λίγο πριν το θάνατό του.

Η Merrill δίδαξε τα μαθηματικά στα διάφορα κολλέγια για πολλά χρόνια μετά από την αποφοίτησή της από το Κολούμπια. Της είχε προσφερθεί μια θέση ως καθηγήτρια μαθηματικών στο κολλέγιο Wellesley αλλά την αρνήθηκε λόγω του επικείμενου γάμου της. Το 1906 ίδρυσε το σχολείο Oaksmere για τα κορίτσια το οποίο διεύθυνε μέχρι το 1928. Το Oaksmere έγινε πολύ γνωστό σχολείο για τα υψηλά σχολικά πρότυπά του. Το 1928 η Merrill σταμάτησε να διευθύνει το σχολείο και κινήθηκε προς την πόλη της Νέας Υόρκης. Εκεί έγραψε πολλά άρθρα σε περιοδικά σχετικά με την εκπαίδευση και έγινε δημοφιλής ομιλήτρια εκπαιδευτικών θεμάτων. Εργάστηκε αρκετά έτη ως επίτροπος των απόφοιτων του κολλεγίου του Wellesley. Η Merrill πέθανε στις 6 Σεπτεμβρίου του 1951, σε ηλικία ογδόντα εννέα ετών, στη Νέα Υόρκη.

Η Mary Williams στα έγγραφά της για την Winifred Merrill αναφέρει την ακόλουθη επιστολή που εμφανίστηκε στις 20 Σεπτεμβρίου του 1951, αμέσως μετά το θάνατό της, στην εφημερίδα New York Times:
«Όλοι εκείνοι που ενδιαφέρονται για την εκπαιδευτική πρόοδο οφείλουν ευγνωμοσύνη στην πρώην Κα Winifred Edgerton Merrill, η οποία ήταν μια από τους πέντε της επιτροπής που υπέβαλε την πρώτη πρόταση για το κολλέγιο, μιας γυναίκας η οποία συνδέθηκε με την πανεπιστημιακή κοινότητα της Κολούμπια. Νωρίτερα η Κα Merrill ήταν η πρώτη γυναίκα που έλαβε τον πανεπιστημιακό τίτλο της Κολούμπια, τον οποίο κέρδισε με τους υψηλότερους βαθμούς στον τομέα των μαθηματικών και της αστρονομίας. Θεωρώ πολύτιμα: την αξιοζήλευτη μνήμη της, το γενναίο πνεύμα της, την ευσπλαχνία της και το έντονο ενδιαφέρον της για τα τρέχοντα γεγονότα γύρω της. Αν και ήταν ογδόντα χρονών έβλεπε πολύ μπροστά. Ενδιαφέρθηκε για την πρόοδο των γυναικών στις επιχειρήσεις και στα άλλα επαγγέλματα καθώς και για την τριτοβάθμια εκπαίδευσή τους, στην οποία η ίδια έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο».

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Στο τέλος του δεύτερου έτους των σπουδών της η Edgerton υπέβαλε μια αίτηση για να πάρει ph. D για μια γραπτή διατριβή της στην οποία εξέταζε τις γεωμετρικές ερμηνείες των πολλαπλών ολοκληρωμάτων και τους μετασχηματισμούς και τις σχέσεις των διαφόρων συστημάτων συντεταγμένων. Δυστυχώς όμως δεν κατόρθωσε να πάρει το ph. D διότι ήταν γένους θηλυκού. Το 1883 η Edgerton έκανε μια εργασία για την μαθηματική αστρονομία που περιελάμβανε τον υπολογισμό της τροχιάς κομήτη.

Η Merrill, με τη υποστήριξη του προέδρου Barnard υπέβαλε μια αίτηση και πραγματοποίησε μια εκστρατεία προκειμένου να παρέχεται και στις γυναίκες η στοιχειώδης εκπαίδευση. Η επιτροπή όμως που εξέτασε την αίτησή της αρνήθηκε. Ο Barnard πρότεινε στην Edgerton να μιλήσει προσωπικά σε κάθε επίτροπο. Η προσπάθειά της αυτή αποδείχθηκε επιτυχής και στην επόμενη συνεδρίαση της επιτροπής, η πρόταση της έγινε δεκτή και όλοι ψήφισαν ομόφωνα να της απονεμηθεί το ph. D στα μαθηματικά, το οποίο έλαβε το 1886 με άριστα. 50 χρόνια μετά παρουσιάστηκε ένα πορτρέτο της Winifred Edgerton Merrill στο Πανεπιστήμιο Κολούμπια. Το πορτρέτο σήμερα κρέμεται σε ένα από τα ακαδημαϊκά κτίρια με την επιγραφή «άνοιξε την πόρτα». Η Merrill ήταν επίσης μέλος μιας επιτροπής, η οποία είχε υποβάλλει αίτηση στο Πανεπιστήμιο της Κολούμπια για την ίδρυση του κολλεγίου Barnard το 1889, το οποίο αποτελούσε το πρώτο δημόσιο ίδρυμα της Νέας Υόρκης που απένειμε στις γυναίκες πτυχία πάνω στις τέχνες.

VIRGINIA RAGSDALE

(1870-1945)

Η ΖΩΗ ΤΗΣ

Η Virginia Ragsdale γεννήθηκε στις 13 Δεκεμβρίου του 1870 σε μία φάρμα στο Jamestown, αμέσως μετά τον αμερικάνικο εμφύλιο πόλεμο. Παρακολούθησε ιδιωτικό σχολείο στο Jamestown, όπου τα μαθηματικά ήταν βασικό μέρος των σπουδών. Όπως η ίδια είχε πει, ο δάσκαλός της εκεί ευχαριστιόταν να ζητάει από τους μαθητές ταχύτητα και ακρίβεια στους νοερούς υπολογισμούς μέχρι να γίνουν άρτια εκπαιδευμένοι.

Η Ragsdale μπήκε στο Salem Academy σαν πρωτοετής όπου σπούδασε πιάνο, ξεχωριστά από τις ακαδημαϊκές σπουδές της, και αποφοίτησε το 1887. Παρακολούθησε μαθήματα στο Guilford College Greensboro όπου και ενεργά διαμόρφωσε το κολέγιο. Κατά την φοίτησή της εκεί βραβεύτηκε με υποτροφία στο Bryn Mawr College καθώς ήταν η γυναίκα με το μεγαλύτερο μέσο όρο στα μαθήματα. Εκεί σπούδασε φυσική μαζί με την Charlotte Agnes Scott για ένα χρόνο πριν κερδίσει την υποτροφία για να σπουδάσει στην Ευρώπη.

Μαζί με άλλες δύο γυναίκες από το Bryn Mawr, επέλεξε να περάσει ένα χρόνο στην Ευρώπη στο Goettingen, της Γερμανίας, όπου σπούδασε με τον Felix Klein και τον David Hilbert. Πριν γυρίσει στην Αμερική για να τελειώσει το διδακτορικό της κέρδισε άλλη μια υποτροφία για να διδάξει για τρία χρόνια στην Βαλτιμόρη. Η διατριβή της πάνω στην *ρύθμιση των πραγματικών κλάδων των επίπεδων αλγεβρικών καμπυλών* (the Arrangement of the Real Branches of the Plane Algebraic Curves) δημοσιεύτηκε το 1906 στο «American Journal of Mathematics».

Η Ragsdale δίδαξε για πολλά χρόνια αφού τελείωσε με το διδακτορικό της, και τελικά δέχτηκε μία θέση στο τμήμα των μαθηματικών του γυναικείου Πανεπιστημίου στο Greensboro τηw Νότιας Καρολίνας το 1911. Παρέμεινε εκεί για αρκετά χρόνια και ήταν η διευθύντρια του τμήματος από το 1926 μέχρι το 1928.

Η επίδραση της στο τμήμα αλλά και γενικά σε ολόκληρο το Πανεπιστήμιο ήταν έντονη. Το Πανεπιστήμιο αγόρασε ένα τηλεσκόπιο με την επιμονή της και έπεισε το τμήμα μαθηματικών να βάλει την στατιστική μέσα στο πρόγραμμα σπουδών. Σύμφωνα με τους συναδέλφους της έπαιρνε την δουλειά της πολύ σοβαρά και δεν την έβλεπε σαν ρουτίνα.

Η Ragsdale αποσύρθηκε από την διδασκαλία το 1928 για να φροντίσει την μητέρα της που ήταν άρρωστη. Μετά το θάνατο της μητέρας έφτιαξε ένα σπίτι στην άκρη της πανεπιστημιούπολης του Guilford όπου πέρασε τα υπόλοιπα χρόνια της ζωής της φτιάχνοντας έπιπλα ενώ ασχολούνταν και με την κηπουρική.

Πέθανε στις 4 Ιουνίου του 1945 και δώρισε το σπίτι αυτό στο Πανεπιστήμιο όπου σήμερα είναι το σπίτι του Προέδρου του Πανεπιστημίου.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ

Η Virginia Ragsdale ασχολήθηκε στην διατριβή της με το 16^{o} πρόβλημα του Hilbert όπου ο ίδιος είχε παρουσιάσει στο διεθνές μαθηματικό συνέδριο το 1900. Συγκεκριμένα, το ακόμη και σήμερα άλυτο ερώτημα, είναι «ποιες είναι οι πιθανές ρυθμίσεις των πραγματικών αλγεβρικών καμπυλών που ενσωματώνονται στο προβολικό επίπεδο».

Βάσει των πειραματικών στοιχείων, η Ragsdale διατύπωσε μία υπόθεση που παρείχε ένα ανώτερο όριο στον αριθμό τοπολογικών κύκλων ενός ορισμένου τύπου.

Η υπόθεση Ragsdale, όπως ονομάστηκε, ήταν ένα ανοικτό πρόβλημα στον τομέα της πραγματικής αλγεβρικής γεωμετρίας για σχεδόν 90 χρόνια και υποκίνησε άλλες έρευνες. Ο Oleg Viro (1979) και η Ilya Itenberg (1994) δημιούργησαν παραδείγματα εξαιρέσεις στον κανόνα «υπόθεση Ragsdale», όμως η λύση είναι ακόμα άγνωστη.

Πιο συγκεκριμένα, η Ragsdale πρότεινε τις αλγεβρικές καμπύλες που αντιστοιχούν στα πολυώνυμα άρτιου βαθμού 2k. Σε αυτή την περίπτωση, οι καμπύλες είναι όλες τοπολογικοί κύκλοι (ή ovals). Μερικά ovals τοποθετούνται το ένα μέσα στο άλλο είναι φωλιασμένα, άλλα όχι. Ένα oval λέγεται άρτιο εάν περιέχει ένα άρτιο αριθμό oval στην καμπύλη, διαφορετικά το oval καλείται περιττό. Ας πούμε ότι το *p* και το *n* δηλώνουν τον αριθμό των *even* και odd *ovals*, αντίστοιχα. Ο λόγος για να υπολογισθούν αυτές οι ποσότητες ήταν η μεγάλη μαθηματική διορατικότητα της Ragsdale:η διαφορά *p-n* είναι το χαρακτηριστικό του Euler μιας περιοχής που περιβάλλεται από τα *even* και *odd ovals*.

Η κύρια υπόθεση της Ragsdale ήταν η ακόλουθη. Αν υποθέσουμε ότι μία αλγεβρική καμπύλη βαθμού 2k περιέχει *p even και n odd ovals*, μετά η Ragsdale είκασε ότι

$$p <= 3k\,(k-1)\,/\,2 + 1$$

$$n <= 3k\,(k-1)\,/\,2$$

επίσης έθεσε την ανισότητα

$$|\,2(p-n)-1\,| <= 3k\text{^}2-3k+1$$

και έδειξε ότι αυτή η ανισότητα δεν μπορεί να βελτιωθεί. Αργότερα όμως, αποδείχτηκε από τον Petrovski.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, **Η Ιστορία των Μαθηματικών**, τόμος τρίτος, τεύχος β' , εκδόσεις παπαζήση, Αθήνα 1974
2. Paolo Rossi, **Η Γένεση της Σύγχρονης Επιστήμης στην Ευρώπη**, εκδόσεις Ελληνικά γράμματα, Αθήνα 2004
3. E.T. Bell, **Οι Μαθηματικοί**, τόμος II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1993
4. Howard Eves, **Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών Μετά το 1650,** εκδόσεις Τροχαλία
5. Carl B. Boier, **Ιστορία των Μαθηματικών**, UTA C. Merzbach
6. D.E. Smith, **History of Mathematics**, Volume I, Dover publications, INC N.Y.
7. Richard Mankiewicz, **Η Ιστορία των Μαθηματικών**, εκδόσεις Αλεξάνδρεια
8. **European Women in Mathematics**, Universidad Compluterise de Madrid

ΠΗΓΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

1. www. baycountrylibrary.org
2. www. mathabout.com
3. www. biography.com
4. www.google pictures.com
5. www. schools.ash.org.au
6. www. libraryArizona.edu
7. www-groups.dcs.st-and.ac.uk
8. www.agnesscott.edu
9. www.maths.tcd
10. www.scienceworld.wolfram.com