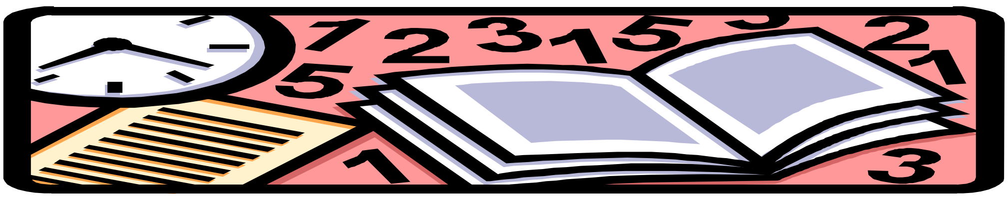
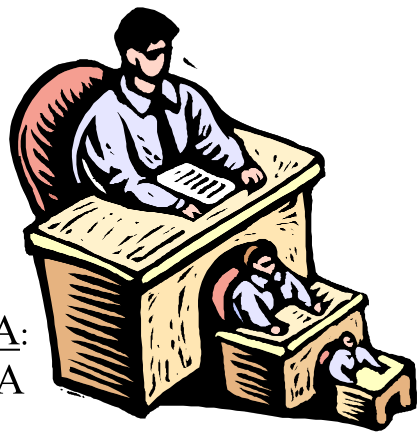
ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ



ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ & ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΕ ΣΧΕΣΗ

ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΤΗ



ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ:
ΛΕΥΤΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ:
ΤΙΝΑ ΣΩΤΗΡΙΑ

ΠΑΤΡΑ 2005

∨ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ν ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Συνδυαστική είναι ο κλάδος εκείνος των Μαθηματικών που ασχολείται με την απαρίθμηση και την εξέταση των ιδιοτήτων των σχηματισμών και ερευνά την ύπαρξη και κατασκευή σχηματισμών με προκαθορισμένες ιδιότητες.

Η εμφάνιση προβλημάτων της συνδυαστικής μπορεί να ανιχνευθεί βαθιά μέσα στο χρόνο. Σε ένα γράμμα που θεωρείται ότι έστειλε ο Αρχιμήδης στον Ερατοσθένη προτείνεται, κάτω από ορισμένες συνθήκες, «ο υπολογισμός του αριθμού των Ταύρων του Ήλιου». Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα από τους σπάνιους υπαινιγμούς στην αρχαιότητα στην συνδυαστική και η αντιμετώπισή του βασίζεται στη θεώρηση των πολυγωνικών αριθμών των Πυθαγόρα, Νικόμαχου και Διοφάντου.

Έρευνα για την ύπαρξη ή μη ενός σχηματισμού με προκαθορισμένες ιδιότητες αποτελεί το περίφημο πρόβλημα των «μαγικών τετραγώνων». Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στην τοποθέτηση φυσικών αριθμών σε ένα τετράγωνο ν γραμμών και ν στηλών έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής, κάθε στήλης και κάθε διαγωνίου να είναι το ίδιο. Δύο απλά παραδείγματα μαγικών τετραγώνων για ν=3,5 δίνονται στα επόμενα σχήματα

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Σχήμα 1

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Σχήμα 2

Τα μαγικά τετράγωνα ήταν γνωστά στους Κινέζους από την αρχαιότητα. Το «Μεγάλο Πλάνο» που περιγράφεται σε ένα από τα πιο παλιά βιβλία της Κίνας αποτελεί ένα τέτοιο σχηματισμό και λέγεται ότι διακοσμούσε τη ράχη μιας θεϊκής χελώνας που αναδυόταν από τον ποταμό **Lo**. Αντικαθιστώντας με φυσικούς αριθμούς τα διάφορα σύνολα σημαδιών παίρνουμε το μαγικό τετράγωνο του σχήματος 1. Επίσης και οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν τα μαγικά τετράγωνα όπως προκύπτει από μία αναφορά σ' αυτά του Θέωνα του Σμυρναίου. Οι Ινδοί και αργότερα και οι Άραβες ασχολούνται με αυτά. Ο πρώτος όμως κανόνας σχηματισμού μαγικών τετραγώνων δόθηκε τον 14^{ον} αιώνα από τον Έλληνα Εμμανουήλ Μοσχόπουλο. Ο Euler και οι άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν επίσης με το πρόβλημα αυτό σε μια πιο αφηρημένη τοποθέτηση, στην κατασκευή πεπερασμένων γεωμετριών.

Για ορισμένους σχηματισμούς που μπορούν να προσδιορισθούν εύκολα, όπως οι συνδυασμοί των στοιχείων λαμβανομένων ανά κ είναι φυσικό να αναρωτηθεί κάποιος για το πλήθος τους. Έτσι μια νέα ανάπτυξη στην εξέλιξη της συνδυαστικής πραγματοποιείται με την εξαγωγή τύπων για τον αριθμό σχηματισμών που ικανοποιούν καθορισμένες ιδιότητες. Βέβαια η συνδυαστική έχει γνωρίσει αλματώδη ανάπτυξη προς αυτή την κατεύθυνση, σαν αποτέλεσμα της ισχυρής επίδρασης των πιθανοτήτων (με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας) και της στατιστικής. Για μεγάλο χρονικό διάστημα η συνδυαστική ήταν η τέχνη της απαρίθμησης. Από την άποψη αυτή σχεδόν παντού μπορούν να ανιχνευθούν στοιχεία της συνδυαστικής. Η πλειονότητα των τύπων έχει ανακαλυφθεί ξανά και ξανά πολλές φορές. Το πιο παλιό ίσως παράδειγμα είναι οι διωνυμικοί συντελεστές που ήταν γνωστοί στην Ινδική σχολή του Μαθηματικού Bhaskra του 12^{ου} μ.Χ. αιώνα. Παρ' όλα αυτά ο δυτικός κόσμος τους αγνοούσε μέχρι τους Pascal και Fermat που τους ανακάλυψαν ξανά σαν παραπροϊόν της μελέτης παιχνιδιών της τύχης. Πρόσφατα έχει ανακαλυφθεί ότι στην αναγωγική μέθοδο υπολογισμού των διωνυμικών συντελεστών αναφέρθηκε στα 1265 ο Πέρσης φιλόσοφος Nasir-Ad-Din. Είναι γνωστό ακόμη ότι ο Cartan απέδειξε στα

1650 ότι ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου **ν** στοιχείων είναι ίσος με 2^{ν}. Το 1666 ο Leibniz σε ηλικία 20 χρονών δημοσίευσε την πρώτη διατριβή στη συνδυαστική με τίτλο «Dissertatio de Arte Combinatoria». Όπως οι σχηματισμοί γίνονταν πιο πολύπλοκοι, οι συνδυαστικοί αρχίζοντας βασικά με τον Euler ενδιαφέρθηκαν για την ανάπτυξη τεχνικών απαρίθμησης. Η πιο φημισμένη ανακάλυψη είναι η τεχνική των γεννητριών συναρτήσεων που έχει εισαχθεί από τον Laplace αν και είχε ήδη χρησιμοποιηθεί έμμεσα και από τον Euler.

Τον 20ο αιώνα η ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών δημιούργησε νέες δυνατότητες επίλυσης προβλημάτων απαρίθμησης και βελτιστοποίησης. Από την άλλη πλευρά, όμως, λόγω της φύσης των Η/Υ ως πεπερασμένων διακριτών μηχανών, η ίδια η επιστήμη των Η/Υ ωφελήθηκε τα μέγιστα από τις μεθόδους της Συνδυαστικής.

Η Συνδυαστική ως διδακτικό αντικείμενο μπορεί να διδαχθεί σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, διότι προσφέρεται για διαφορετικού βαθμού προσεγγίσεις.

Η Εργασία αυτή ασχολείται με την μελέτη των τεχνικών απαρίθμησης. Δίνονται οι τύποι των μεταθέσεων, διατάξεων και συνδυασμών απλών και επαναληπτικών καθώς και αρκετά παραδείγματα και εφαρμογές για τις ανάγκες του λογιστή.

v ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ

1.1 Γενικά

Μία μεγάλη κατηγορία προβλημάτων με τα οποία ασχολείται η Συνδυαστική, είναι τα προβλήματα απαρίθμησης. Με τον όρο αυτό εννοούμε εκείνα τα προβλήματα στα οποία ζητούμε να μετρήσουμε το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου. Τέτοια προβλήματα μπορεί να είναι για παράδειγμα η εύρεση του πλήθους των εμφανίσεων κάποιου γράμματος ή κάποιου συνδυασμού γραμμάτων στις σελίδες ενός βιβλίου ή στο έργο ενός συγγραφέα και πολλά άλλα.

Θεωρητικά η λύση στα προβλήματα αυτά δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία, αφού αρκεί να αντιστοιχίσουμε ένα προς ένα τα στοιχεία του συνόλου με τα στοιχεία ενός τμήματος του συνόλου των φυσικών αριθμών. Στην πράξη όμως η αντιστοίχιση αυτή δεν είναι καθόλου εύκολο να υλοποιηθεί, μερικές φορές μάλιστα είναι αδύνατη για τα ανθρώπινα μέτρα. Αυτό συμβαίνει διότι οι πεπερασμένοι αριθμοί δεν είναι πάντοτε τόσο «πεπερασμένοι».

Έτσι δημιουργήθηκε από πολύ νωρίς η ανάγκη εύρεσης κατάλληλων μεθόδων για την αντιμετώπιση συγκεκριμένων προβλημάτων απαρίθμησης και ανάπτυξης κατάλληλης ορολογίας.

1.2 Θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης

Έστω ότι ζητούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία ενός πεπερασμένου συνόλου. Η **θεμελιώδης αρχή της απαρίθμησης** (multiplication principle), εκφράζει το συνολικό έργο της απαρίθμησης, με το χωρισμό του σε επιμέρους διαδοχικές φάσεις. Ο χωρισμός πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε είτε οι φάσεις αυτές είναι ανεξάρτητες, είτε τέτοιες ώστε η απαρίθμηση σε κάθε φάση εξαρτάται μόνο από τις φάσεις που προηγήθηκαν. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα της συνολικής απαρίθμησης είναι το γινόμενο των αποτελεσμάτων των επιμέρους απαριθμήσεων. Δηλαδή αν ν_1 είναι το αποτέλεσμα της απαρίθμησης στην πρώτη φάση, ν_2 στη δεύτερη φάση και ν_κ στην τελευταία, τότε το αποτέλεσμα της συνολικής απαρίθμησης θα είναι:

$$\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_\kappa$$

Παράδειγμα 1^{o}

Πόσοι είναι οι πενταψήφιοι που αποτελούνται από διαφορετικά ψηφία;

Λύση

Χωρίζουμε τη διαδικασία δημιουργίας ενός τέτοιου αριθμού σε τόσες φάσεις όσα είναι τα ψηφία του. Το πρώτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 9 διαφορετικούς τρόπους, όσα είναι δηλαδή τα ψηφία εκτός από το 0, αφού ο αριθμός πρέπει να είναι πενταψήφιος. Για δεύτερο ψηφίο θα έχουμε να διαλέγουμε ανάμεσα στα 10 ψηφία εκτός από εκείνο που χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη φάση, δηλαδή θα επιλέγουμε ανάμεσα σε 9 ψηφία πάλι, άρα με 9 διαφορετικούς τρόπους. Το τρίτο ψηφίο ανάλογα επιλέγεται με 8 τρόπους, το τέταρτο με 7 και το τελευταίο με 6, άρα συνολικά μπορούμε να κατασκευάσουμε 9·9·8·7·6 = 27216 τέτοιους αριθμούς.

***Σχόλιο*: ** Ας σημειωθεί ότι τίποτα στην εκφώνηση δεν μας υπαγόρευε να χωρίσουμε σε φάσεις (και σε ποιες φάσεις) την κατασκευή των αριθμών. Αυτό θα είναι πάντα δική μας επιλογή και με γνώμονα τη συμφερότερη για τη λύση του προβλήματος μέθοδο.

Παράδειγμα 2^{ο}

Με πόσους τρόπους μπορούμε να συμπληρώσουμε 5 διαδοχικά κενά χρησιμοποιώντας για κάθε κενό από ένα ψηφίο, με τον όρο όμως ότι το τελευταίο ψηφίο δεν θα είναι 0;

Λύση

Αν συμπληρώσουμε κατά σειρά τα κενά, υπάρχουν 10 τρόποι για τη συμπλήρωση του πρώτου κενού, 9 για τη συμπλήρωση του δεύτερου, 8 του τρίτου, 7 του τέταρτου, αλλά προβληματιζόμαστε όταν έρθει η ώρα να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορεί να συμπληρωθεί το τελευταίο κενό, αφού υπάρχουν 6 επιλογές αν έχει ήδη χρησιμοποιηθεί το 0, αλλά 5 αν δεν έχει χρησιμοποιηθεί. Αυτό μας οδηγεί να επιλέγουμε άλλη διαδικασία. Πράγματι, αν αρχίσουμε την συμπλήρωση από το τέλος προς την αρχή, τότε έχουμε ισοδύναμο πρόβλημα με του προηγούμενου παραδείγματος, δηλαδή υπάρχουν 9·9·8·7·6 = 27216 τρόποι συμπλήρωσης των κενών.

Παράδειγμα 3ο

Υπάρχουν 4 λεωφορειακές γραμμές που συνδέουν τις πόλεις Α και Β, και 3 γραμμές που συνδέουν τη Β με τη Γ. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να ταξιδέψει:

α) από την Α στη Γ μέσω Β,

β) από την Α προς Γ μέσω Β με επιστροφή στην Α πάλι μέσω Β,

γ) Α-Β-Γ-Β-Α χωρίς να χρησιμοποιηθεί δύο φορές το ίδιο λεωφορείο;

(Διαφορετικές είναι δύο διαδρομές, όταν δε χρησιμοποιούνται τα ίδια ακριβώς λεωφορεία).

Λύση

α) Η διαδρομή γίνεται σε 2 φάσεις:

$$\text{Α} \xrightarrow{\text{4 τρόποι}} \text{Β} \xrightarrow{\text{3 τρόποι}} \text{Γ}$$

άρα συνολικά με 4·3=12 τρόπους.

β) Η διαδρομή γίνεται σε 4 φάσεις:

$$\text{Α} \xrightarrow{\text{4 τρόποι}} \text{Β} \xrightarrow{\text{3 τρόποι}} \text{Γ} \xrightarrow{\text{3 τρόποι}} \text{Β} \xrightarrow{\text{4 τρόποι}} \text{Α}$$

με 4·3·3·4 = 144 τρόπους.

γ) Όταν έχουμε τον περιορισμό να μη χρησιμοποιηθεί το ίδιο λεωφορείο δύο φορές, τότε στις φάσεις της επιστροφής θα μειώνονται κατά ένας οι διαφορετικοί τρόποι εκτέλεσης της φάσης:

$$\text{Α} \xrightarrow{\text{4 τρόποι}} \text{Β} \xrightarrow{\text{3 τρόποι}} \text{Γ} \xrightarrow{\text{2 τρόποι}} \text{Β} \xrightarrow{\text{3 τρόποι}} \text{Α}$$

Δηλαδή η διαδρομή μπορεί να εκτελεστεί με 4·3·2·3 = 72 τρόπους.

v ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

2.1 Μεταθέσεις

Εάν έχουμε ν διαφορετικά αντικείμενα $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ τότε <u>μεταθέσεις</u> των ν αυτών διαφόρων αντικειμένων ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε το ένα αντικείμενο μετά το άλλο σε μία σειρά, έτσι ώστε κάθε μετάθεση να περιέχει όλα τα αντικείμενα και να διαφέρει από κάθε άλλη, κατά τη θέση ενός τουλάχιστον αντικειμένου.

Έστω δύο διαφορετικά αντικείμενα α, β. Οι δυνατές μεταθέσεις αυτών είναι:

$$\alpha\beta,\ \beta\alpha \qquad \text{(i)}$$

Εάν λοιπόν καλέσουμε με M_2 τις μεταθέσεις των δύο αντικειμένων θα έχουμε:

$$M_2 = 2 = 1 \cdot 2$$

Έστω τρία διαφορετικά αντικείμενα α, β, γ. Για να βρούμε όλες τις δυνατές μεταθέσεις των τριών αυτών αντικειμένων πάμε στη σχέση (i) και τοποθετούμε το στοιχείο γ σε κάθε μετάθεση της σχέσης αυτής σε όλες τις δυνατές θέσεις και παίρνουμε:

$$\alpha\beta\left|\begin{array}{l}\gamma\alpha\beta\\ \alpha\gamma\beta\\ \alpha\beta\gamma\end{array}\right. \qquad \beta\alpha\left|\begin{array}{l}\gamma\beta\alpha\\ \beta\gamma\alpha\\ \beta\alpha\gamma\end{array}\right. \qquad \text{(ii)}$$

Οι πιο πάνω μεταθέσεις (ii) είναι όλες οι μεταθέσεις των α, β, γ και είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Γιατί αν πάρουμε δύο απ’ αυτές τότε, αν μεν προέκυψαν από την ίδια μετάθεση των δύο αντικειμένων α, β θα διαφέρουν κατά τη θέση του στοιχείου γ, αν δε προέκυψαν από δύο διαφορετικές μεταθέσεις των α, β τότε θα διαφέρουν ως προς την τάξη των α και β.

Έτσι λοιπόν οι μεταθέσεις των τριών πραγμάτων είναι:

$$M_3 = M_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε από τις μεταθέσεις των στοιχείων α, β, γ να πάρουμε τις μεταθέσεις των στοιχείων α, β, γ, δ και ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία υπολογίζουμε τις μεταθέσεις των 4, 5, 6, 7,…, ν-1, ν αντικειμένων και για κάθε περίπτωση έχουμε :

$$\begin{aligned} &M_2 = 2\\ &M_3 = M_2 \cdot 3\\ &M_4 = M_3 \cdot 4\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots.\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots.\\ &M_\nu = M_{\nu-1} \cdot \nu \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις πιο πάνω ισότητες κατά μέλη βρίσκουμε:

$$M_\nu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu$$

Δηλαδή το πλήθος των (διαφορετικών) μεταθέσεων των ν αντικειμένων είναι:

$$\boxed{\mathbf{M_\nu = \nu!}}$$

<u>Σημείωση</u>

Το σύμβολο ν!

Για κάθε θετικό ακέραιο ν ορίζουμε $\nu! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(\nu-2)\cdot(\nu-1)\cdot\nu$, δηλαδή το ν! συμβολίζει το γινόμενο των θετικών ακεραίων από το 1 έως το ν και διαβάζεται ν παραγοντικό. Ισχύουν:

$0! = 1$ και $1! = 1$ εξ ορισμού

$(\nu+1)! = \nu!(\nu+1)$

***Εφαρμογή*:**

Έστω ότι μία κάλπη περιέχει 5 σφαίρες που είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το 5. Παίρνουμε μία-μία τις 5 σφαίρες και σχηματίζουμε πενταψήφιους αριθμούς (η πρώτη σφαίρα καθορίζει το ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων, η δεύτερη το ψηφίο των χιλιάδων, κτλ.). Το πλήθος όλων των αριθμών που μπορούμε να σχηματίσουμε με τον τρόπο αυτό, είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων των 5 σφαιρών. Δηλαδή μπορούμε να σχηματίσουμε $M_5 = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$ αριθμούς.

Παράδειγμα 1ο

Με πόσους τρόπους μπορούν 5 εργάτες να εκχωρηθούν στις 5 μηχανές ενός εργοστασίου όταν σε κάθε μηχανή εκχωρείται ένας μόνο εργάτης και κάθε εργάτης σε μία μόνο μηχανή;

Λύση

Ο πρώτος εργάτης μπορεί να εκχωρηθεί σε μία από τις 5 μηχανές. Ο δεύτερος εργάτης μπορεί να εκχωρηθεί σε μία από τις υπόλοιπες τέσσερις μηχανές στις οποίες ο πρώτος δεν εκχωρήθηκε και ούτω καθ' εξής.

Έχουμε έτσι $M_5 = 5! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 = 120$ δυνατές εκχωρήσεις

Παράδειγμα 2ο

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 6 τόμους μίας εγκυκλοπαίδειας σε ένα ράφι βιβλιοθήκης; Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στο ράφι τους 6 τόμους της προηγούμενης εγκυκλοπαίδειας, 4 τόμους μίας Ιστορίας της Τέχνης και 5 τόμους μίας Λογοτεχνικής Ανθολογίας, αν δεν μας ενδιαφέρει να μείνουν πλάι πλάι τα βιβλία του ίδιου είδους και με πόσους, αν πρέπει η κάθε σειρά να τοποθετηθεί ενιαία;

Λύση

i) Κάθε τοποθέτηση των 6 βιβλίων είναι μία μετάθεση των 6 βιβλίων, άρα υπάρχουν $M_6 = 6! = 720$ τρόποι τοποθέτησης.

ii) Αν δεν μας ενδιαφέρει να είναι κοντά τα ομοειδή βιβλία, όλα τα βιβλία αντιμετωπίζονται σαν $6+4+5 = 15$ διαφορετικά αντικείμενα και υπάρχουν $15!$ τρόποι τοποθέτησης τους στο ράφι.

Για να τοποθετήσουμε σε μία σειρά κ ομάδες που αποτελούνται αντίστοιχα από $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \ldots \nu_\kappa$ διακεκριμένα αντικείμενα, υπάρχουν $\nu_1! \nu_2! \nu_3! \ldots \nu_\kappa! \kappa!$ τρόποι: Μεταθέσεις των αντικειμένων κάθε ομάδας και μεταθέσεων των κ ομάδων.

iii) Για να μείνουν μαζί τα ομοειδή βιβλία ιεραρχούμε αρχικά κατά 6! τρόπους τους 6 τόμους της εγκυκλοπαίδειας, κατά 4! τρόπους την Ιστορία της Τέχνης, κατά 5! τρόπους την Ανθολογία. Σε τελευταία φάση τοποθετούμε σε σειρά τις 3 ομάδες βιβλίων με 3! τρόπους και τελικά έχουμε 6!4!5!3! = 12441600 τρόπους.

Παράδειγμα 3ο

Σε πόσες μεταθέσεις 10 αντικειμένων ένα συγκεκριμένο από αυτά, βρίσκεται σε κάποια από τις δύο πρώτες θέσεις;

Λύση

Ο σχηματισμός μετάθεσης των 10 αντικειμένων στην οποία ένα συγκεκριμένο στοιχείο βρίσκεται σε μία από τις δύο πρώτες θέσεις, γίνεται με την πραγματοποίηση μίας από τις δύο επόμενες, ασυμβίβαστες μεταξύ τους διαδικασίες:

$\boxed{\boldsymbol{\Delta_1}}$ Τοποθετούμε το συγκεκριμένο στοιχείο α στην πρώτη θέση και κατόπιν τοποθετούμε τα υπόλοιπα 9 στοιχεία, στις 9 θέσεις που υπολείπονται. Η διαδικασία Δ_1 πραγματοποιείται με $N(\Delta_1) = 1 \cdot (9!)$ τρόπους, (σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης).

$\boxed{\Delta_2}$ Τοποθετούμε το α στη δεύτερη θέση και τα υπόλοιπα 9 στοιχεία στις 9 θέσεις που υπολείπονται. Η διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $N(\Delta_2) = 1\cdot(9!)$ τρόπους. Συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα που συνίσταται στην πραγματοποίηση μίας από τις δύο διαδικασίες, μπορεί να πραγματοποιηθεί με $N(\Delta_1)+ N(\Delta_2) = 2\cdot(9!)$ τρόπους.

Παράδειγμα 4^o

Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΚΗΠΟΣ υπάρχουν, στους οποίους κανένα φωνήεν δεν βρίσκεται στην αρχική του θέση;

Λύση

Το μέγιστο πλήθος των λέξεων με αναγραμματισμούς είναι $M_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. Όταν όμως βάλουμε τον περιορισμό να μην εμφανίζονται το γράμμα Η στην β! θέση και το Ο στην τέταρτη θέση, τα πράγματα αλλάζουν.

Θα πρέπει να βρούμε αρχικά τις περιπτώσεις των λέξεων (που βεβαίως δεν έχουν νόημα όλες τους) της μορφής _Η_Ο_, και να τις εξαιρέσουμε. Είναι οι μεταθέσεις των τριών συμφώνων που εμφανίζονται κενές.

Είναι λοιπόν $M_3 = 3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$.

Συνεπώς το αποτέλεσμα που ζητάμε είναι: $M_5-M_3 = 120-6 = 114$.

Παράδειγμα 5^o

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν πέντε άντρες και πέντε γυναίκες σε δέκα αριθμημένα καθίσματα θεάτρου, έτσι ώστε οι άντρες να καθίσουν στα καθίσματα με άρτιο αριθμό και οι γυναίκες στα καθίσματα με περιττό αριθμό;

Λύση

Μία συγκεκριμένη πραγματοποίηση του αποτελέσματος που ενδιαφέρει το πρόβλημα, συνίσταται στην επιλογή ενός τρόπου τοποθέτησης για τους πέντε άντρες και ενός για τις πέντε γυναίκες. Αυτό σημαίνει επιλογή μιας μετάθεσης των πέντε γυναικών. Υπάρχουν όμως $M_5 = 5!$ Μεταθέσεις των πέντε γυναικών. Σύμφωνα λοιπόν με τη βασική αρχή απαρίθμησης το ζητούμενο πλήθος τρόπων ισούται με $(5!)^2 = (120)^2 = 14400$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Γ_1$	A_1	$Γ_2$	A_2	$Γ_3$	A_3	$Γ_4$	A_4	$Γ_5$	A_5

Μία τοποθέτηση των πέντε αντρών και πέντε γυναικών σύμφωνα με το πρόβλημα, πραγματοποιείται τοποθετώντας τους άντρες με συγκεκριμένο τρόπο στα καθίσματα 2, 4, 6, 8, 10 και αντίστοιχα τις γυναίκες στα καθίσματα 1, 3, 5, 7, 9. Αυτό σημαίνει ουσιαστικά ότι πραγματοποιούμε δύο ανεξάρτητες μεταθέσεις των πέντε αντρών και των πέντε γυναικών.

Παράδειγμα 6^ο

Πόσους πενταψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μεταξύ τους μπορούμε να σχηματίσουμε, με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5; Ποια η πιθανότητα, επιλέγοντας τυχαία έναν από αυτούς, να επιλέξουμε αριθμό μεγαλύτερο του 35000;

Λύση

Οι πενταψήφιοι αριθμοί που αναφέρονται στο πρόβλημα, βρίσκονται σε τέλεια αντιστοιχία με τις μεταθέσεις των ψηφίων 1, 2, 3, 4,

5. Το πλήθος είναι ίσο με $M_5 = 5! = 120$. Η διαδικασία σχηματισμού μεγαλύτερου του 35000, πραγματοποιείται στις επόμενες ειδικές περιπτώσεις:

Α) Τοποθετούμε το 5 στην πρώτη θέση και τα 1, 2, 3, 4 με τυχαία μετάθεση στις επόμενες. Υπάρχουν $M_4 = 4! = 24$ τρόποι για την περίπτωση αυτή.

Β) Τοποθετούμε το ψηφίο 4 στην πρώτη θέση και τα 1, 2, 3, 5 τυχαία στις επόμενες τέσσερις. Αντιστοιχούν επίσης 4! = 24 τρόποι πραγματοποίησης και για την περίπτωση αυτή.

Γ) Τοποθετούμε το 3 στην πρώτη θέση, το 5 στη δεύτερη και τα 1, 2, 4 τυχαία στις τρεις τελευταίες θέσεις. Υπάρχουν 3! = 6 τρόποι για την τρίτη περίπτωση.

Σύμφωνα με την προσθετική αρχή, υπάρχουν 24+24+6 = 54 τρόποι σχηματισμού ενός αριθμού μεγαλύτερου του 35000.

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι λοιπόν ίση με:

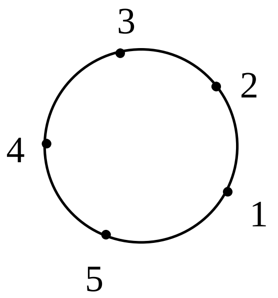
$$M = \frac{54}{120} = \frac{9}{20} = 0{,}45 = 45\%$$

2.2 Κυκλικές Μεταθέσεις

Εάν η γραμμή πάνω στην οποία τοποθετούμε τα διάφορα αντικείμενα είναι κλειστή, τότε οι μεταθέσεις ονομάζονται <u>κλειστές ή κυκλικές μεταθέσεις</u>, οι οποίες συμβολίζονται με το σύμβολο $\mathring{\mathbf{M}}_\nu$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων εργαζόμαστε με τον παρακάτω τρόπο.

Εάν πάρουμε μία από τις κυκλικές μεταθέσεις 5 π.χ. αριθμών 1, 2, 3, 4, 5 αυτή δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος



Αν όμως ανοίξουμε με διάφορους τρόπους την περιφέρεια πάνω στην οποία είναι τοποθετημένοι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 σε μία ανοικτή γραμμή κόβοντας αυτή πρώτα μεταξύ 1 και5, έπειτα μεταξύ 1 και 2, έπειτα μεταξύ 2 και 3, έπειτα μεταξύ 3 και 4 και τέλος μεταξύ 4 και 5 θα πάρουμε από μία και μόνη κυκλική μετάθεση 5 ανοικτές μεταθέσεις διαφορετικές μεταξύ τους τις 12345, 23451, 34512, 45123, 51234.
Οι μεταθέσεις των παραπάνω είναι $5*4! = 5M_4$ ανοικτές μεταθέσεις.

Ώστε από μία κυκλική μετάθεση των 5 αντικειμένων πήραμε 5 ανοικτές μεταθέσεις και επομένως για τις $\mathring{M}_5$ θα πάρουμε $5M_4 = 5 \cdot 4!$ ανοικτές μεταθέσεις. $\Rightarrow \left.\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ \mathring{M}_5 & 5M_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathring{M}_5 = \frac{5M_4}{5} = M_4 = 4!.$

Γενικεύοντας καταλήγουμε ότι οι $\mathring{M}_\nu$ θα δώσουν ανοικτές μεταθέσεις $M_{\nu-1}$. Να γιατί:

Μία κυκλική μετάθεση ν αντικειμένων δίνει ν ανοικτές μεταθέσεις.

$\mathring{M}_\nu$ κυκλικές μεταθέσεις δίνουν ν(ν-1)! ανοικτές μεταθέσεις.

Συνεπώς: $\frac{1}{\mathring{M}_n} = \frac{n}{n(n-1)!} \Rightarrow \frac{1}{\mathring{M}_n} = \frac{1}{(n-1)!} \Rightarrow \mathring{M}_n = (n-1)! = M_{n-1}$

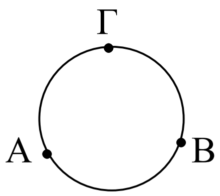
Δηλαδή θα είναι :

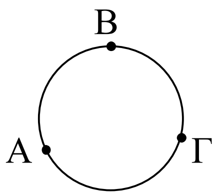
$$\boxed{\mathring{M}_\nu = (\nu-1)! = M_{\nu-1}}$$

Παράδειγμα 1ο

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τρεις φίλοι γύρω από ένα τραπέζι;

Λύση





Δύο είναι οι τρόποι: Ο ένας τρόπος είναι ο Α να έχει στα δεξιά του τον Β και στα αριστερά του τον Γ, ο άλλος τρόπος είναι ο Α να έχει στα δεξιά του τον Γ και στα αριστερά του τον Β. Πράγματι σύμφωνα και με την θεωρία :

$\mathring{M}_3 = M_2 = 1{\cdot}2 = 2$.

Παράδειγμα 2ο

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι 5 άτομα;

Λύση

Οι δυνατοί τρόποι είναι τόσοι όσες οι κυκλικές μεταθέσεις των 5 ατόμων:

$M_5^{\circ} = (5\text{-}1)! = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

Παράδειγμα 3^{o}

Κατά πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν κυκλικά γύρω από μία φωτιά στην παραλία 5 αγόρια και 5 κορίτσια, ώστε κάθε κορίτσι να κάθεται ανάμεσα σε δύο αγόρια;

Λύση

Σε πρώτη φάση τα 5 αγόρια τοποθετούνται, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, με 4! = 24 τρόποι γύρω από τη φωτιά, αφήνοντας ανάμεσά τους κενό χώρο για τα κορίτσια.

Στη δεύτερη φάση τοποθετούνται τα κορίτσια στα κενά, αλλά η τοποθέτησή τους, αν και κυκλική είναι μετάθεση των 5 κοριτσιών, αφού οι 5 κενές θέσεις δεν είναι όλες ίδιες, άρα υπάρχουν 5! = 120 τρόποι τοποθέτησης.

Συνολικά υπάρχουν $24\cdot120 = 2880$ τρόποι να κάτσουν τα παιδιά γύρω από τη φωτιά.

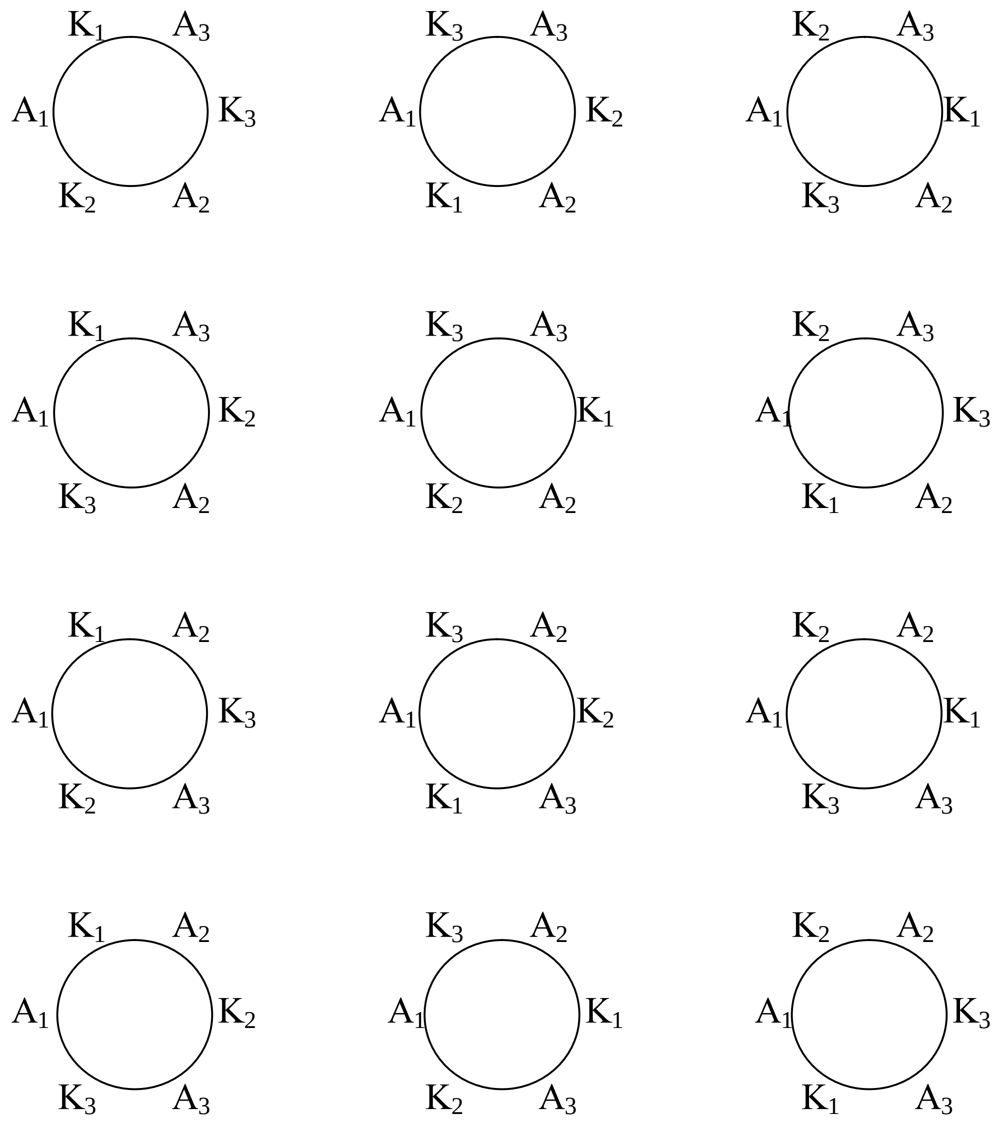
Παράδειγμα 4^{o}

Κατά πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν κυκλικά γύρω από μία φωτιά 3 αγόρια (A_1, A_2, A_3) και 3 κορίτσια (K_1, K_2, K_3) ώστε να κάθονται εναλλάξ τα δύο φύλα. Δώστε σε σχήμα την λύση.

Λύση

Βάσει και του συλλογισμού του προηγούμενου προβλήματος αναμένεται σχηματικά να παρασταθούν 12 εικόνες.

Διότι: $2! \cdot 3! = 2 \cdot 3 = 12$. Πράγματι:



2.3 Επαναληπτικές Μεταθέσεις

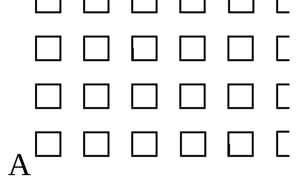
Μεταθέσεις με επανάληψη των ν αντικειμένων ανά μ_1 και μ_2 κ.ο.κ ανά μ_λ όπου $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\lambda = \nu$:

$$M_{\nu}^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\lambda} = \binom{\nu}{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\lambda} = \frac{\nu!}{\mu_1!\cdot\mu_2!\cdot\ldots\cdot\mu_\lambda!}$$

Για την απόδειξη του πιο πάνω τύπου, παρατηρούμε ότι κάθε κυκλική μετάθεση απ' αυτές που μας ενδιαφέρουν έχει ν αντικείμενα σε σειρά τα οποία είναι χωρισμένα σε μ ομάδες τέτοιες ώστε η πρώτη έχει μ_1 όμοια αντικείμενα, η δεύτερη μ_2 όμοια αντικείμενα διαφορετικά από τα προηγούμενα κλπ. Από κάθε τέτοια μετάθεση επομένως προκύπτουν $\mu_1!\cdot\mu_2!\cdot\ldots\cdot\mu_\lambda!$ απλές μεταθέσεις των ν αντικειμένων, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα

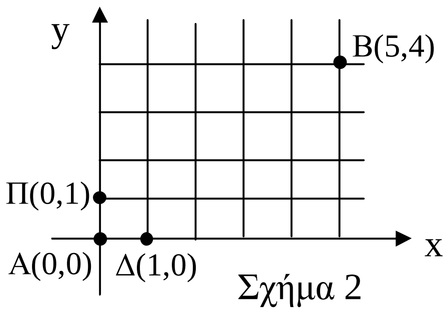
Ένας διαβάτης κινείται σε ένα δίκτυο οικοδομικών τετραγώνων, όπως του σχήματος 1, από το σημείο Α στο σημείο Β. Αν κινείται μόνο προς τα δεξιά ή προς τα πάνω, να βρεθεί πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορεί να ακολουθήσει.



Σχήμα 1

Λύση

Συμβολίζουμε το δίκτυο των οικοδομικών τετραγώνων με το δικτύωμα του σχήματος 2



Σχήμα 2

στο οποίο οι συντεταγμένες των κόμβων συμβολίζουν η μεν πρώτη το πλήθος των προς τα δεξιά μετακινήσεων, η δε δεύτερη το πλήθος των προς τα πάνω μετακινήσεων του διαβάτη προκειμένου να κινηθεί από το αρχικό σημείο Α(0,0) στο τυχαίο Μ(x,y).

Έστω f(x,y) το πλήθος των διαφορετικών δρόμων από το Α(0,0) στο Μ(x,y) . Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$f(x+1,y+1) = f(x+1,y)+f(x,y+1)$$

δηλ. το πλήθος των δρόμων που μας οδηγούν σε ένα σημείο ισούται με το πλήθος των δρόμων που μας φέρνουν μέχρι το αμέσως κοντινό από κάτω, στο οποίο θα προσθέσουμε το πλήθος των δρόμων μέχρι το αμέσως κοντινό σημείο από αριστερά.

Είναι εύκολο να βρούμε τη συνάρτηση f(x,y) χρησιμοποιώντας την αναδρομική αυτή σχέση που ικανοποιεί. Εδώ όμως θα ακολουθήσουμε πάλι ένα συνδυαστικό τρόπο σκέψης για να βρεθεί η συνάρτηση.

Πράγματι είναι φανερό ότι για να βρεθεί ο διαβάτης από το σημείο Α(0,0) στο σημείο Μ(x,y) χρειάζεται να κάνει x+y διαδοχικά βήματα, όπου με το «βήμα» θα εννοούμε τη διαδρομή μεταξύ δύο διαδοχικών διασταυρώσεων. Τα βήματα αυτά θα είναι είτε προς τα δεξιά και θα τα συμβολίζουμε με Δ, είτε προς τα πάνω και θα τα συμβολίζουμε με Π. Μία οποιαδήποτε διαδρομή θα είναι μία διαδοχή από Δ και Π που θα έχουν συνολικό πλήθος x+y. Ακόμη πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα Δ είναι σε πλήθος x ενώ τα Π σε πλήθος y. Άρα το πλήθος των διαφορετικών δρόμων θα ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων x+y αντικειμένων, x από τα οποία είναι ίσα με Δ και y ίσα με Π. Το πλήθος όμως αυτό ισούται με:

$$M_{x+y}^{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!y!} = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$$

Άρα ισχύει τελικά $f(x,y) = \binom{x+y}{x}$

ν ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

3.1 Διατάξεις

Διατάξεις ν διαφορετικών αντικειμένων ανά μ $(\nu \geq \mu)$ονομάζουμε διαφόρους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε από τα ν αντικείμενα τα μ και να τα βάλουμε σε μία ανοικτή γραμμή, έτσι ώστε δύο τυχαίες διατάξεις να διαφέρουν μεταξύ τους είτε κατά ένα τουλάχιστον αντικείμενο, είτε κατά τη θέση των αντικειμένων από τα οποία αποτελούνται.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι οι διατάξεις είναι και αυτές μεταθέσεις αλλά όχι συγχρόνως όλων των αντικειμένων.

Οι διατάξεις των ν αντικειμένων ανά μ παρίστανται με το σύμβολο Δ_μ^ν .

3.2 Πλήθος Διατάξεων

Έστω ότι έχουμε ν διάφορα αντικείμενα α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$. Οι διατάξεις των ν αυτών αντικειμένων ανά ένα είναι ν, γιατί αν πάρουμε τα στοιχεία αυτά ανά ένα θα σχηματίσουμε ν διατάξεις, τις α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ (i)

δηλαδή $\Delta_1^\nu = \dfrac{\nu!}{(\nu-1)!} = \nu$

Για να σχηματίσουμε τις διατάξεις των ν ανά δύο, πρέπει σε κάθε διάταξη των ν ανά ένα (δηλαδή σε κάθε στοιχείο της (i)) να τοποθετήσουμε προς τα δεξιά ένα από τα υπόλοιπα ν-1 στοιχεία. Δηλαδή δεξιά του α_1 θα γράψουμε το α_2 ή το α_3…ή το α_ν κλπ.

Έτσι σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1\alpha_3, & \alpha_1\alpha_4, & \ldots\ldots, & \alpha_1\alpha_\nu \\ \alpha_2\alpha_1, & \alpha_2\alpha_3, & \alpha_2\alpha_4, & \ldots\ldots, & \alpha_2\alpha_\nu \\ \alpha_3\alpha_1, & \alpha_3\alpha_2, & \alpha_3\alpha_4, & \ldots\ldots, & \alpha_3\alpha_\nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_\nu\alpha_1, & \alpha_\nu\alpha_2, & \alpha_\nu\alpha_3, & \ldots\ldots, & \alpha_\nu\alpha_{\nu-1} \end{array} \qquad \text{(ii)}$$

Ο πίνακας (ii) περιέχει όλες τις διατάξεις των ν ανά 2 και από μία φορά την κάθε μία. Πραγματικά, αν πάρουμε δύο διατάξεις του πίνακα (ii) αυτές θα είναι διαφορετικές. Γιατί αν προήλθαν από την ίδια διάταξη των ν ανά 1, τότε θα διαφέρουν κατά το δεύτερο στοιχείο, αν δε προήλθαν από διάφορα στοιχεία θα διαφέρουν κατά το πρώτο στοιχείο.

Επειδή μετά από καθένα από τα ν στοιχεία α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ τοποθετήσαμε διαδοχικά κάθε ένα από τα υπόλοιπα ν-1 στοιχεία, συνεπάγεται ότι από κάθε στοιχείο σχηματίζονται ν-1 διατάξεις.

Έτσι θα έχουμε: $\Delta_2^\nu = \nu\cdot(\nu-1)$ ή $\Delta_2^\nu = \Delta_1^n\cdot(\nu-1)$

Γενίκευση: Υποθέτουμε ότι έχουμε σχηματίσει τις διατάξεις των ν αντικειμένων ανά μ-1 και θέλουμε να σχηματίσουμε τις διατάξεις των ν αυτών αντικειμένων ανά μ. Για το σκοπό αυτό τοποθετούμε διαδοχικά στο τέλος κάθε διατάξεις των μ-1 αντικειμένων κάθε ένα από τα υπόλοιπα ν-(μ-1) ή ν-μ+1 στοιχεία.

Οι διατάξεις που σχηματίσαμε είναι όλες που μπορούν να σχηματισθούν και είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Γιατί όσες προήλθαν από την ίδια διάταξη των ν ανά μ-1 διαφέρουν κατά το τελευταίο στοιχείο, όσες δε προήλθαν από διάφορες διατάξεις των ν ανά μ-1, διαφέρουν τουλάχιστον κατά την τάξη των μ-1 πρώτων στοιχείων.

Επειδή από κάθε διάταξη των μ-1 στοιχείων προέρχονται ν-(μ-1) = ν-μ+1 διατάξεις, από τις $\Delta^{\nu}_{\mu-1}$ διατάξεις των ν ανά μ-1 θα προέλθουν $\Delta^{\nu}_{\mu-1}(\nu-\mu+1)$ διατάξεις, οπότε οι διατάξεις των ν ανά μ θα είναι $\Delta^{\nu}_{\mu}=\Delta^{\nu}_{\mu-1}(\nu-\mu+1)$.

Εάν στην πιο πάνω σχέση θέσουμε διαδοχικά μ = 2, 3, 4…μ λαμβάνουμε $\Delta^{\nu}_{2}=\Delta^{\nu}_{1}\cdot(\nu-1)$

$\Delta^{\nu}_{3}=\Delta^{\nu}_{2}\cdot(\nu-2)$

……………….

……………….

$\Delta^{\nu}_{\mu}=\Delta^{\nu}_{\mu-1}(\nu-\mu+1)$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη, και έχοντας υπόψιν ότι $\Delta^{\nu}_{1}=\nu$, λαμβάνουμε τον τύπο των διατάξεων ν αντικειμένων ανά μ

$$\Delta^{\nu}_{\mu}=\nu(\nu-1)(\nu-2)\text{K K }(\nu-\mu+1)=\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!} \qquad \text{(iii)}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Πόσους τριψήφιους αριθμούς με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με πέντε ψηφία.

Το ζητούμενο πλήθος αριθμών είναι διατάξεις πέντε αντικειμένων ανά τρία:

$$\nu-\mu+1=5-3+1=3$$

$$\Delta^{5}_{3}=5\cdot4\cdot3=60$$

<u>Σημείωση:</u> Ο τύπος (iii) που δίνει τις διατάξεις των ν αντικειμένων ανά μ μπορεί να πάρει την πιο κάτω μορφή.

Έχουμε: $\Delta_{\mu}^{\nu}=\nu(\nu-1)(\nu-2)......(\nu-\mu+1)$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $1\cdot 2\cdot 3...(\nu-\mu-1)\cdot(\nu-\mu)$ και έχουμε:

$$\Delta_{\mu}^{\nu}=\frac{[\nu(\nu-1)\cdot(\nu-2).....(\nu-\mu+1)][(\nu-\mu)\cdot(\nu-\mu-1).....2\cdot 1]}{1\cdot 2.......(\nu-\mu)}=\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta_{\mu}^{\nu}=\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}}}$$

Παράδειγμα 1ο

Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 με διαφορετικά ψηφία μεταξύ τους;

Λύση

Ο καθορισμός πενταψήφιων αριθμών, με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία, παρμένα από το σύνολο των 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ισοδυναμεί με την επιλογή διατεταγμένης πεντάδας στοιχείων του συνόλου αυτού, δηλαδή με την επιλογή διάταξη πέντε ψηφίων από τα επτά στοιχεία του.

Υπάρχουν $\Delta_{5}^{7}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2520$ πενταψήφιοι αριθμοί τέτοιοι όπως περιγράφονται στην εκφώνηση.

Παράδειγμα 2ο

Υπάρχουν 42 τρόποι να καταλύσουν 2 επισκέπτες μιας πόλης στα ξενοδοχεία της πόλης, χωρίς κανείς να συγκατοικεί με τον άλλον. Πόσα ξενοδοχεία διαθέτει η πόλη;

Λύση

Αν η πόλη διαθέτει ν ξενοδοχεία, τότε οι 2 επισκέπτες μπορούν να καταλύσουν με $\Delta_2^{\nu} = \dfrac{\nu!}{(\nu-2)!} = (\nu-1)\nu = 42$ τρόπους. Εύκολα βρίσκουμε: $7 \cdot 6 = 42$, βρίσκουμε δηλαδή ότι η πόλη διαθέτει ν=7 ξενοδοχεία.

Παράδειγμα 3ο

Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ενός ψηφίου:

i) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 3, 4, 6, 8, 9,

ii) Πόσοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι του 600,

iii) Πόσοι είναι πολλαπλάσια του 4

Λύση

i) Από τα 5 ψηφία επιλέγουμε τρία χωρίς επανάληψη και τα τοποθετούμε σε σειρά (εκατοντάδες-δεκάδες-μονάδες), άρα υπάρχουν $\Delta_3^5 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ τριψήφιοι αριθμοί.

ii) Επειδή το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι 6, 8 ή 9, συμπληρώνεται με 3 τρόπους το ψηφίο των εκατοντάδων, ενώ τα υπόλοιπα 2 ψηφία με $\Delta_2^4 = \dfrac{4!}{2!} = 12$ τρόπους, άρα τελικά υπάρχουν $3 \cdot 12 = 36$ τριψήφιοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 600.

iii) Ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό πολλαπλάσιο του 4, πρέπει δηλαδή ο αριθμός να λήγει σε 64, 84, 68, 36 ή 96. δηλαδή τα δύο τελευταία ψηφία συμπληρώνονται με 5 τρόπους και το πρώτο με ένα από τα τρία ψηφία που απομένουν, άρα υπάρχουν $5\cdot\Delta_1^3 = 5\cdot 3 = 15$ πολλαπλάσια του 4.

Παράδειγμα 4^o

Πόσους πενταψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία να εμφανίζονται (χωρίς επανάληψη) παίρνοντας τρία ψηφία από τα 1, 2, 3, 4, 5, 6 και δύο ψηφία από τα 7, 8, 9.

Λύση

Έχουμε να καλύψουμε τις 3 πρώτες θέσεις του πενταψήφιου αριθμού από την ομάδα των ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6. Συνεπώς είναι διάταξη $\Delta_3^6 = \frac{6!}{3!} = 4\cdot 5\cdot 6 = 120$.

Στην συνέχεια έχουμε να καλύψουμε τις δύο τελευταίες θέσεις του πενταψήφιου αριθμού με δύο από τα ψηφία 7, 8, 9. Συνεπώς είναι και πάλι διάταξη $\Delta_2^3 = \frac{3!}{1!} = 6$.

Συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε συνολικά το πλήθος $\Delta_3^6\cdot\Delta_2^3 = 120\cdot 6 = 720$ πενταψήφιους αριθμούς.

Παράδειγμα 5ο

Πόσους και ποιους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε (χωρίς επαναλήψεις) παίρνοντας δύο ψηφία από τα 1, 2, 3 και ένα ψηφίο από τα 5, 6;

Λύση

Τις δύο πρώτες θέσεις του τριψήφιου αριθμού μπορούν να καταλάβουν τα ψηφία:

1 2

1 3

2 3

3 2

3 1

2 1

Την τρίτη και τελευταία θέση μπορεί να καταλάβει το 5 ή το 6.

Συνεπώς κατασκευάζονται 6·2 = 12 αριθμοί.

Βάσει του σκεπτικού του παραδείγματος 4ου έχουμε:

$$\Delta_2^3 \cdot \Delta_1^2 = \frac{3!}{1!} \cdot \frac{2!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 12$$

Έτσι απαντάμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 12 και συγκεκριμένα οι εξής: 125, 126, 235, 236, 325, 326, 315, 316, 215, 216, 135, 136.

3.3 Επαναληπτικές Διατάξεις

Έστω ένα σύνολο **Α** με ν στοιχεία. Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο των **διατάξεων με επανάληψη** στοιχείων του Α οι οποίες έχουν μ συνιστώσες, χρησιμοποιούμε την έκφραση «διατάξεις με επανάληψη των ν ανά μ». Το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των ν ανά μ το συμβολίζουμε D^{ν}_{μ} και το υπολογίζουμε ως εξής:

Για την επιλογή κάθε στοιχείου μιας τέτοιας διάταξης με επανάληψη υπάρχουν ν δυνατότητες (όσα είναι τα στοιχεία του **Α**). Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη ν ανά μ θα είναι

$$D^{\nu}_{\mu} = \underbrace{\nu\cdot\nu\cdot\nu\cdots\nu}_{\mu \text{ παράγοντες}} = \nu^{\mu}$$

Άρα:

$$\boxed{D^{\nu}_{\mu} = \nu^{\mu}}$$

Παράδειγμα 1ο

Όλες οι διαφορετικές στήλες που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟ-ΠΟ, είναι όσες οι διατάξεις με επανάληψη των 3 ανά 13. Δηλαδή μπορούμε να συμπληρώσουμε 3^{13} =1594323στήλες.

Παράδειγμα 2ο

Μια πινακίδα αυτοκινήτου περιέχει δύο γράμματα, τα οποία ακολουθούνται από ένα τετραψήφιο αριθμό. Πόσες διαφορετικές πινακίδες μπορούμε να κατασκευάσουμε, αν από τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χρησιμοποιούμε μόνο εκείνα που υπάρχουν και στο λατινικό αλφάβητο;

Λύση

Από τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου πρέπει να εξαιρέσουμε τα Γ, Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω που δεν υπάρχουν στο λατινικό. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τα υπόλοιπα 14 γράμματα. Τότε το πρώτο τμήμα κάθε πινακίδας θα είναι μια διάταξη των 14 γραμμάτων ανά 2. Το πλήθος αυτών των διατάξεων είναι $\Delta_2^{14} = \frac{14!}{12!} = 13 \cdot 14 = 182$.

Καθένας από τους τετραψήφιους αριθμούς που αποτελούν το δεύτερο τμήμα της πινακίδας, είναι μια διάταξη με επανάληψη των 10 ψηφίων ανά 4, με την προϋπόθεση ότι δεν έχει πρώτο στοιχείο το 0. Αλλά οι αριθμοί που έχουν πρώτο ψηφίο 0 είναι όσες οι διατάξεις των 10 ψηφίων ανά 3. Επομένως το πλήθος όλων των τετραψήφιων αριθμών είναι $\Delta_4^{10} - \Delta_3^{10} = 10^4 - 10^3 = 9000$.

Αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα βγαίνει και διαφορετικά. Με την μέθοδο της απαρίθμησης. Εφόσον έχουμε τέσσερις θέσεις για να δεχθούν τέσσερα ψηφία, με τον περιορισμό το πρώτο ψηφίο να μην είναι το μηδέν, σημαίνει ότι την α! θέση του τετραψήφιου αριθμού μπορούν να την καταλάβουν τα ψηφία από το 1 έως το 9. Τις β!, γ!, δ! θέσεις μπορούν να καταλάβουντα ψηφία από το 1 έως το 9 και το 0.

Οπότε οι διατάξεις που σχηματίζονται είναι σε πλήθος:

9·10·10·10 = 9000.

1	1	1	1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	9	9	9
9	0	0	0

Αν συνδυάσουμε κάθε δυάδα γραμμάτων με κάθε τετραψήφιο αριθμό, θα κατασκευάσουμε $182 \cdot 9000 = 1638000$ διαφορετικές πινακίδες.

ν ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

4.1 Συνδυασμοί

Συνδυασμοί των ν αντικειμένων ανά μ ($\nu \geq \mu$) ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε από τα ν αντικείμενα τα μ, έτσι ώστε δύο συνδυασμοί να διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον αντικείμενο.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν ανά μ παριστάνεται με το σύμβολο:

$$\binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\mu}}$$

Έτσι οι συνδυασμοί των τριών γραμμάτων α,β,γ ανά δύο είναι αβ, αγ, βγ.

Οι διατάξεις των ίδιων γραμμάτων ανά δύο είναι αβ, αγ, βγ
βα, γα, γβ

Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι τρεις συνδυασμοί αβ, αγ, βγ ταυτίζονται με τις τρεις διατάξεις αβ, αγ, βγ, ενώ οι άλλες τρεις διατάξεις βα, γα, γβ προκύπτουν από τους τρεις συνδυασμούς στους οποίους έγινε μετάθεση των γραμμάτων τους. Συνεπώς οι διατάξεις είναι πολυπληθέστερες των συνδυασμών, διότι στις διατάξεις μας ενδιαφέρει και η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα αντικείμενα (ανάλογα με το πρόβλημα, μπορεί να είναι γράμματα, ψηφία κλπ).

4.2 Υπολογισμός των συνδυασμών των ν αντικειμένων ανά μ

Καλούμε x το πλήθος των συνδυασμών των ν ανά μ. Αν σε κάθε συνδυασμό κάνουμε όλες τις δυνατές μεταθέσεις τότε θα λάβουμε όλες τις διατάξεις των ν ανά μ. Επειδή κάθε συνδυασμός των ν ανά μ περιέχει μ αντικείμενα, τότε από κάθε τέτοιο συνδυασμό, θα πάρουμε μ! μεταθέσεις, δηλαδή μ! διατάξεις των ν ανά μ. Και από τους x συνδυασμούς θα πάρουμε x·μ! διατάξεις. Αλλά το πλήθος των διατάξεων είναι :

$$\Delta_\mu^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots\ldots(\nu-\mu+1)$$

οπότε θα έχουμε

$$x \cdot \mu! = \Delta_\mu^\nu \qquad \text{και} \qquad x = \frac{\Delta_\mu^\nu}{\mu!}$$

Συμβολίζουμε $x = \binom{\nu}{\mu}$. Τότε:

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\Delta_\mu^\nu}{\mu!} = \frac{\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}}{\frac{\mu!}{1}} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$$

αφού αντικαταστήσουμε το Δ_μ^ν με τη σχέση $\Delta_\mu^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}$

Επίσης ισχύει : $\binom{\nu}{\mu} = \binom{\nu}{\nu-\mu}$. Η απόδειξη είναι εύκολη:

$$\frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!} = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!(\nu-\nu+\mu)!} = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!\mu!}$$

Ο τύπος αυτός είναι χρήσιμος γιατί σε ορισμένες περιπτώσεις απλοποιεί τους υπολογισμούς.

π.χ. $\binom{30}{25}=\binom{30}{5}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=142506$

Εξ ορισμού τίθεται $\binom{\nu}{0}=\binom{\nu}{\nu}=1$, διότι $0! = 1$

Παράδειγμα 1ο

Από 24 άτομα πρόκειται να σχηματίσουμε μία επιτροπή 3 ατόμων. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν;

Λύση

Αρκεί να υπολογίσουμε τους συνδυασμούς των 24 ατόμων ανά 3 και έχουμε:

$$\binom{24}{3}=\frac{24!}{3!(24-3)!}=\frac{24!}{3!\cdot 21!}=\frac{22\cdot 23\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 3}=2024$$

Παράδειγμα 2ο

Σε ένα στρατόπεδο βρίσκονται 30 αξιωματικοί και 150 στρατιώτες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε όμιλο αποτελούμενο από 10 αξιωματικούς και 50 στρατιώτες;

Λύση

Μπορούμε να επιλέξουμε 10 αξιωματικούς κατά $\binom{30}{10}=\frac{30!}{10!20!}$ τρόπους, ενώ 50 στρατιώτες κατά $\binom{150}{50}=\frac{150!}{50!100!}$ τρόπους. Επειδή οι δύο επιλογές γίνονται ανεξάρτητα, συμπεραίνουμε ότι η τελική επιλογή γίνεται κατά

$\binom{30}{10}\cdot\binom{150}{50}=\frac{30!}{10!20!}\cdot\frac{150!}{50!100!}$ τρόπους.

Κάθε συγκεκριμένο αποτέλεσμα, αναφέρεται στο περιεχόμενο της επιλογής, δηλαδή στο υποσύνολο που κάθε φορά επιλέγεται. Είναι λοιπόν ευνόητο ότι τα αποτελέσματα που ενδιαφέρουν το πρόβλημα συνίσταται από την επιλογή ενός συνδυασμού 10 αξιωματικών και ενός συνδυασμού 50 στρατιωτών.

Παράδειγμα 3^{ο}

Ένας σύλλογος αποτελείται από 7 άνδρες και 5 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορούν να εκλέξουν μεταξύ τους τετραμελή αντιπροσωπεία,

i) Χωρίς περιορισμούς,

ii) Αν πρέπει να αποτελείται από ίσο αριθμό ανδρών και γυναικών;

Λύση

i) Ουσιαστικά, εφόσον η αντιπροσωπεία επιλέγεται χωρίς περιορισμούς ως προς το φύλο, επιλέγουμε 4 από τα 7+5=12 μέλη του συλλόγου, άρα υπάρχουν $\binom{12}{4}=495$ τρόποι.

ii) Επιλέγουμε τους 2 άνδρες κατά $\binom{7}{2}$ τρόπους και τις γυναίκες κατά $\binom{5}{2}$ τρόπους, άρα συνολικά κατά $\binom{7}{2}\binom{5}{2}=\frac{7!}{2!5!}\cdot\frac{5!}{2!3!}=\frac{7!}{2!2!3!}=210$ τρόπους.

Παράδειγμα 4ο

Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΟΥΠΟΥΛΟ υπάρχουν;

Λύση

Κάθε αναγραμματισμός είναι μια τοποθέτηση σε 8 θέσεις (όσα τα γράμματα της λέξης ΠΟΥΠΟΥΛΟ) των γραμμάτων. Επειδή ορισμένα γράμματα επαναλαμβάνονται, επιλέγουμε διαδοχικά τις 2 από τις 8 θέσεις για τα Π, τις 3 από τις υπόλοιπες 6 για τα Ο, τις 2 από τις υπόλοιπες για τα Υ και τοποθετούμε με μοναδικό τρόπο το Λ στη μοναδική θέση που απομένει, ώστε υπάρχουν $\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\cdot 1=\ldots=\frac{8!}{2!3!2!1!}$ τρόποι.

Με άλλον τρόπο: Με παρόμοιο σκεπτικό έχουμε:

Για τα Ο: $\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!5!}$, για τα Υ: $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}$, για τα Π: $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!1!}$, για το Λ: $\binom{1}{1}=1$. Συνεπώς έχουμε τελικά: $\frac{8!}{3!5!}\cdot\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot 1=\frac{8!}{2!3!2!}$.

Παράδειγμα 5ο

Σε μια υπηρεσία εργάζονται 5 διοικητικοί υπάλληλοι και 6 τεχνικοί υπάλληλοι. Πόσες διαφορετικές πενταμελείς ομάδες μπορούμε να σχηματίσουμε, αν θέλουμε σε κάθε ομάδα να περιέχονται:

i) 3 διοικητικοί υπάλληλοι

ii) 3 τουλάχιστον τεχνικοί υπάλληλοι;

Λύση

i) Οι 3 διοικητικοί υπάλληλοι επιλέγονται κατά $\binom{5}{3}$ τρόπους, ενώ οι υπόλοιποι 5-3=2 τεχνικοί υπάλληλοι κάθε ομάδας επιλέγονται κατά $\binom{6}{2}$ τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, μπορούμε να σχηματίσουμε $\binom{5}{3}\binom{6}{2}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=150$ διαφορετικές ομάδες.

ii) Σε κάθε ομάδα θέλουμε να περιέχονται 3 ή 4 ή 5 τεχνικοί υπάλληλοι. Αν σκεφτούμε όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι:

- Με 3 τεχνικούς υπαλλήλους μπορούμε να σχηματίσουμε

  $\binom{6}{3}\binom{5}{2}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=200$ διαφορετικές ομάδες.

- Με 4 τεχνικούς υπαλλήλους μπορούμε να σχηματίσουμε

  $\binom{6}{4}\binom{5}{1}=75$ διαφορετικές ομάδες.

- Με 5 τεχνικούς υπαλλήλους μπορούμε να σχηματίσουμε

  $\binom{6}{5}\binom{5}{0}=6$ διαφορετικές ομάδες.

Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε 200+75+6=281 διαφορετικές ομάδες.

Παράδειγμα 6ο

Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από μία τράπουλα των 52 χαρτιών, 20 χαρτιά;

Λύση

Προφανώς κάθε τρόπος είναι ένας συνδυασμός των 52 χαρτιών ανά 20. Επομένως έχουμε:

$\binom{52}{20}=\frac{52!}{20!\cdot(52-20)!}=\frac{52!}{20!\cdot 32!}=\frac{33\cdot 34\cdot 35\ldots 52}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 20}=\ldots$ είναι θέμα πράξεων.

Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\binom{\nu}{\mu}=\binom{\nu}{\nu-\mu}$ τότε θα έχουμε:

$\binom{52}{20}=\binom{52}{52-20}=\binom{52}{32}=\frac{52!}{32!\cdot(52-32)!}=\frac{52!}{32!\cdot 20!}$. Βλέπουμε ότι εδώ δεν μας εξυπηρετεί σε τίποτε η χρήση του παραπάνω τύπου.

Παράδειγμα 7ο

Πόσες διαγώνιους έχει πολύγωνο με ν κορυφές;

Λύση

Δύο κορυφές του πολυγώνου ορίζουν μία πλευρά ή μία διαγώνιο. Άρα οι συνδυασμοί των ν κορυφών ανά 2 ορίζουν το πλήθος των πλευρών και των διαγωνίων μαζί. Δηλαδή

$$\binom{\nu}{2}=\frac{\nu!}{2!\cdot(\nu-2)!}=\frac{(\nu-2)!(\nu-1)\nu}{1\cdot 2\cdot(\nu-2)!}=\frac{(\nu-1)\nu}{2}$$

Αν από το πλήθος αυτό αφαιρεθεί το πλήθος των ν πλευρών, θα έχουμε το πλήθος των διαγωνίων.

Συνεπώς $\frac{\nu(\nu-1)}{2}-\nu=\frac{\nu(\nu-3)}{2}$

Εφαρμογή:

Στο τρίγωνο, όπου ν=3, $\frac{3\cdot 2}{2}-3=0$ διαγώνιοι υπάρχουν.

Στο τετράγωνο, όπου ν=4, $\frac{4\cdot 1}{2}=2$ διαγώνιοι υπάρχουν.

Στο πεντάγωνο, όπου ν=5, $\frac{5\cdot 2}{2}=5$ διαγώνιοι υπάρχουν.

Τέλος στο εξάγωνο, όπου ν=6, $\frac{6\cdot 3}{2}=9$ διαγώνιοι υπάρχουν.

Παράδειγμα 8^{o}

Με την θεωρία των συνδυασμών αποδείξτε ότι το γινόμενο μ διαδοχικών ακέραιων αριθμών διαιρείται ακριβώς διά του 1·2·3·…·μ.

Λύση

Παίρνουμε τους ακόλουθους μ διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς ν, ν-1, ν-2, …, ν-(μ-1) ή ν, ν-1, ν-2,…, ν-μ+1

Το πηλίκο

$$\frac{(\nu-\mu+1)\ldots(\nu-2)(\nu-1)\nu}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\mu}=\frac{(\nu-\mu+1)\ldots(\nu-2)(\nu-1)\nu}{\mu!}=\frac{\nu!}{\mu!\cdot(\nu-\mu)!}=\binom{\nu}{\mu}$$

παριστάνει το πλήθος των συνδυασμών ν στοιχείων ανά μ, άρα είναι ακέραιος αριθμός.

4.3 Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

Έστω Α ένα σύνολο ν στοιχείων και μ ένας αυστηρά φυσικός αριθμός (μικρότερος, ίσος ή και μεγαλύτερος του ν), θα ονομάζεται συνδυασμός των ν στοιχείων του Α ανά μ, με επανάληψη είτε επαναληπτικός συνδυασμός των ν στοιχείων ανά μ. το αποτέλεσμα μισότιμων επιλογών, κάθε μία των οποίων επιλέγει ένα στοιχείο του Α, όχι απαραίτητα διαφορετικό από αυτό που επιλέγουν οι υπόλοιπες. Ένας επαναληπτικός συνδυασμός των στοιχείων του Α ανά μ, είναι μια λίστα στην οποία αναφέρεται ποια στοιχεία του Α εμφανίζονται και πόσες φορές το καθένα, όταν επιλέξουμε μ φορές ένα κάθε φορά, στοιχείο του Α, έχοντας τη δυνατότητα να επιλέξουμε το ίδιο στοιχείο του Α περισσότερες φορές από μία.

Το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη, ν στοιχείων ανά μ, το συμβολίζουμε με: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}$.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε σύνολο Α, ν στοιχείων, τα οποία συμβολίζουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, …, ν. Συμφωνούμε επίσης να παρουσιάζουμε τους επαναληπτικούς συνδυασμούς των στοιχείων του Α ανά μ, γράφοντας κατά σειρά αύξοντος μεγέθους τους αριθμούς που εμφανίζονται και επαναλαμβάνονται καθένας τόσες φορές, όσες φορές εμφανίζεται αυτό στον επαναληπτικό συνδυασμό.

Θεωρούμε τώρα έναν οποιονδήποτε επαναληπτικό συνδυασμό των στοιχείων του Α ανά μ, γραμμένο με τον τρόπο που αναφέραμε. Τότε προσθέτοντας κατά σειρά τους αριθμούς 0, 1, 2,…,μ-1 στους αριθμούς που εμφανίζονται, προκύπτουν μ διαφορετικοί αριθμοί σε αυστηρώς αύξουσα σειρά, επιλεγμένοι από τους αριθμούς 1, 2, 3,…,ν+μ-1. Αυτό όμως είναι ένας συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου

$\{1,2,3,...,\nu+\mu-1\}$ ανά μ.

Αντίστροφα κάθε συνδυασμός του συνόλου $\{1,2,3,...,\nu+\mu-1\}$ ανά μ, είναι αντίστοιχος ενός και μόνον από τους επαναληπτικούς συνδυασμούς που αναφέραμε. Αυτός προκύπτει, αφαιρώντας αντίστοιχα, τους αριθμούς 0, 1, 2,…,μ-1.

<u>Συμπέρασμα</u>

Υπάρχει τέλεια αντιστοιχία μεταξύ των επαναληπτικών συνδυασμών των **ν** ανά μ και των (απλών) συνδυασμών του ν+μ-1 ανά μ.

Είναι λοιπόν: $\boxed{\begin{bmatrix} \nu \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \nu+\mu-1 \\ \mu \end{pmatrix}}$

π.χ. Έστω $A=\{1,2,3,4,5\}$. Τότε ο επαναληπτικός συνδυασμός των 5 ανά 7 στον οποίο τα στοιχεία 1, 3, 4 εμφανίζονται αντίστοιχα 3, 2, 2 φορές γράφεται 1113344.

Οπότε έχουμε $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5+7-1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} = \dfrac{11!}{7!\cdot 4!} = 330$ επαναληπτικούς συνδυασμούς.

Παράδειγμα 1ο

Πόσοι είναι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των $\{1,2,3,4\}$ ανά τρ'ια με ελεύθερες επαναλήψεις;

Λύση

Είναι:

111,	112,	113,	114,
122,	123,	124,	133,
134,	144,	222,	223,
224,	233,	244,	234,
333,	334,	344,	444.

Το πλήθος των συνδυασμών των 4 ανά 3 με ελεύθερες επαναλήψεις είναι ίσο με:

$$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=20$$

Πράγματι 20 βρήκαμε και παραπάνω.

Παράδειγμα 2^{o}

Πόσοι είναι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των αριθμών $\{1,2\}$ ανά τρία;

Λύση

Είναι: 111, 222, 112, 122. Τέσσερις το πλήθος.

Βάσει της θεωρίας: $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\binom{2+3-1}{3}=\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$.

Παρατήρηση: Στον συνδυασμό δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα ψηφία, αλλά μόνον η συχνότητα με την οποίαν εμφανίζονται. Για να εξηγούμαστε. Η απάντηση 121 ή 211 δεν είναι δια φορετική από την 112 που δώσαμε στο παράδειγμά μας. Μας αρκεί που λάβαμε υπόψη μας ότι μπορεί να εμφανιστεί το ψηφίο 1 δύο φορές μαζί με το ψηφίο 2 από μία φορά. Δηλαδή στον συνδυασμό, η απάντηση $121\equiv 211\equiv 112$.

Παράδειγμα 3^{o}

Πόσα μονώνυμα της μορφής $x^{\kappa}\cdot y^{\lambda}\cdot z^{\mu}$ τρίτου βαθμού ως προς ‘όλα τα γράμματα x, y, z μπορούμε να σχηματίσουμε;

Λύση

Τα ακόλουθα: $x^0y^0z^3 = z^3$, $x^1y^1z^1 = xyz$

$x^3y^0z^0 = x^3$, $x^2y^1z^0 = x^2y$

$x^0y^3z^0 = y^3$, $x^0y^2z^1 = y^2z$

$x^0y^1z^2 = yz^2$

$x^1y^2z^0 = xy^2$

$x^1y^0z^2 = xz^2$

$x^2y^0z^1 = x^2z$

Βλέπουμε ότι μπορούμε να σχηματίσουμε 10.

Βάσει της θεωρίας των συνδυασμών με ελεύθερες επαναλήψεις έχουμε τρία γράμματα τα x, y, z ανά τρία (διότι κάθε μονώνυμο που θα προκύψει είναι 3^{ου} βαθμού). Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}3+3-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10\,.$$

Όσα έχουμε βρει με πρακτικό τρόπο. Επαληθεύτηκε.

Παράδειγμα 4^{ο}

Πόσα μονώνυμα της μορφής $x^{\kappa}\cdot y^{\lambda}\cdot z^{\mu}$ πέμπτου βαθμού ως προς όλα μαζί τα γράμματα x, y, z μπορούμε να σχηματίσουμε;

Λύση

Βάσει και του προηγούμενου παραδείγματος βρίσκουμε:

$\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}3+5-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}=21$ μονώνυμα. Ας βρούμε ποια είναι αυτά:

$x^0y^0z^5 = z^5$

$x^5y^0z^0 = x^5$

$x^0y^5z^0 = y^5$

$x^1y^1z^3 = xyz^3$

$x^3y^1z^1 = x^3yz$

$x^1y^3z^1 = xy^3z$

$x^2y^2z^1 = x^2y^2z$

$x^1y^2z^2 = xy^2z^2$

$x^2y^1z^2 = x^2yz^2$

$x^0y^2z^3 = y^2z^3$

$x^2y^0z^3 = x^2z^3$

$x^3y^0z^2 = x^3z^2$

$x^0y^3z^2 = y^3z^2$

$x^2y^3z^0 = x^2y^3$

$x^3y^2z^0 = x^3y^2$

$x^4y^1z^0 = x^4y$

$x^1y^4z^0 = xy^4$

$x^0y^4z^1 = y^4z$

$x^0y^1z^4 = yz^4$

$x^4y^0z^1 = x^4z$

$x^1y^0z^4 = xz^4$

Πράγματι είναι 21 το πλήθος.

Παράδειγμα 5ο

(κατανομή ομοίων αντικειμένων σε κουτιά)

Σύνολο 10 αντικειμένων, εντελώς ομοίων μεταξύ τους, κατανέμεται σε τρία κουτιά. Με πόσους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί τέτοια κατανομή;

Λύση

Κάθε συγκεκριμένη κατανομή των 10 αντικειμένων στα κουτιά Α, Β, Γ επιλέγει καθένα κουτί τόσες φορές, όσα και τα αντικείμενα που τοποθετούνται σ' αυτό. Εφ' όσον τα αντικείμενα που τοποθετούνται στα κουτιά δεν διαφέρουν μεταξύ τους, τότε, ενδιαφέρει μόνο το πόσα τοποθετούνται. Υπάρχουν τόσοι ακριβώς τρόποι κατανομής των 10 αντικειμένων στα κουτιά Α, Β, Γ όσοι και οι συνδυασμοί με επανάληψη τριών στοιχείων ανά 10.

Ο τρόπος κατανομής Α(4), Β(5), Γ(1) δηλαδή 4 αντικείμενα στο Α, 5 στο Β και ένα στο Γ, βρίσκεται σε τέλεια αντιστοιχία με το σχήμα A^4 B^5 Γ^1 δηλαδή με το

Α Α Α Α Β Β Β Β Β Γ

Επιλέγεται 4 φορές το κουτί Α, 5 το Β και μία το Γ

Έχουμε δηλαδή $\begin{bmatrix}3\\10\end{bmatrix}=\binom{3+10-1}{10}=\binom{12}{10}=\frac{12!}{10!\cdot 2!}=\frac{11\cdot 12}{2}=66$ τρόπους.

Παράδειγμα 6ο

Με πόσους τρόπους πέντε όμοιους βώλους μπορούμε να τους υποθηκεύσουμε σε τρία σπιρτόκουτα;

Λύση

Έχουμε επανάληψη τριών στοιχείων ανά 5.

$\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21$ τρόποι.

Σχηματικά ας το επαληθεύσουμε

□	□	□	⟸ σπιρτόκουτα
1	1	3	⟸ βώλοι
3	1	1	»
1	3	1	»
2	2	1	»
1	2	2	»
2	1	2	»
0	4	1	»
1	4	0	»
0	1	4	»
4	1	0	»
4	0	1	»
1	0	4	»
3	2	0	»
0	2	3	»
0	3	2	»
3	0	2	»
2	3	0	»
2	0	3	»
0	0	5	»
0	5	0	»
5	0	0	»

Παράδειγμα 7^ο^

Πόσες ακέραιες, μη αρνητικές (μπορούν να είναι μηδέν) λύσεις έχει η εξίσωση:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

Λύση

Έχει τόσες όσοι είναι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των 3 ανά 6.

Οπότε: $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6-1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$

Πράγματι. Λύσεις μπορούν να είναι οι εξής:

$x_1 = 1$,	$x_2 = 1$,	$x_3 = 4$	$x_1 = 5$,	$x_2 = 1$,	$x_3 = 0$
$x_1 = 1$,	$x_2 = 4$,	$x_3 = 1$	$x_1 = 1$,	$x_2 = 5$,	$x_3 = 0$
$x_1 = 4$,	$x_2 = 1$,	$x_3 = 1$	$x_1 = 0$,	$x_2 = 1$,	$x_3 = 5$
$x_1 = 0$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 6$	$x_1 = 0$,	$x_2 = 5$,	$x_3 = 1$
$x_1 = 0$,	$x_2 = 6$,	$x_3 = 0$	$x_1 = 5$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 1$
$x_1 = 6$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 0$	$x_1 = 1$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 5$
$x_1 = 3$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 1$	$x_1 = 4$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 0$
$x_1 = 1$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 3$	$x_1 = 4$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 2$
$x_1 = 1$,	$x_2 = 3$,	$x_3 = 2$	$x_1 = 2$,	$x_2 = 4$,	$x_3 = 0$
$x_1 = 3$,	$x_2 = 1$,	$x_3 = 2$	$x_1 = 2$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 4$
$x_1 = 2$,	$x_2 = 3$,	$x_3 = 1$	$x_1 = 0$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 4$
$x_1 = 2$,	$x_2 = 1$,	$x_3 = 3$	$x_1 = 2$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 2$
$x_1 = 0$,	$x_2 = 4$,	$x_3 = 2$	$x_1 = 3$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 3$
$x_1 = 0$,	$x_2 = 3$,	$x_3 = 3$	$x_1 = 3$,	$x_2 = 3$,	$x_3 = 0$

Το πλήθος τους είναι 28.

v ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ

5.1 Γινόμενο παραγόντων πολλών διωνύμων

Έστω ότι έχουμε ν το πλήθος διώνυμα $(\chi+\alpha_1)$, $(\chi+\alpha_2)$,….., $(\chi+\alpha_\nu)$ και θέλουμε να βρούμε το γινόμενο τους $(\chi+\alpha_1)\,(\chi+\alpha_2)\ldots\,(\chi+\alpha_\nu)$.

Για το δοθέν γινόμενο παραγόντων βρίσκουμε:

$$(\chi+\alpha_1)\cdot(\chi+\alpha_2)=\chi^2+(\alpha_1+\alpha_2)\chi+\alpha_1\alpha_2$$

$$(\chi+\alpha_1)\cdot(\chi+\alpha_2)\cdot(\chi+\alpha_3)=\chi^3+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\chi^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\chi+$$
$$+\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$$(\chi+\alpha_1)(\chi+\alpha_2)(\chi+\alpha_3)(\chi+\alpha_4)=\chi^4+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\chi^3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+$$
$$+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)\chi^2+(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\chi+$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

……………………………………………………………………...

$$(\chi+\alpha_1)(\chi+\alpha_2)\ldots\ldots(\chi+\alpha_\nu)=\chi^\nu+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_\nu)\chi^{\nu-1}+(\alpha_1\alpha_2+$$
$$+\alpha_1\alpha_3+\ldots\ldots)\chi^{\nu-2}+(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots\ldots)\chi^{\nu-3}+\ldots\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_\nu$$

Παρατηρούμε ότι το εξαγόμενο του πιο πάνω γινομένου είναι ένα ακέραιο πολυώνυμο του χ, βαθμού ν, διατεταγμένο κατά τις κατιούσες δυνάμεις του χ. Ο πρώτος όρος είναι το χ^ν. Ο δεύτερος όρος έχει συντελεστή το άθροισμα $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)$ το οποίο το παριστάνουμε με το σύμβολο Σ_1. Ο τρίτος όρος έχει συντελεστή το άθροισμα $(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots)$ το οποίο το παριστάνουμε με το σύμβολο Σ_2. Ο τέταρτος όρος θα έχει συντελεστεί Σ_3, ο πέμπτος Σ_4 κλπ. Δηλαδή ο συντελεστής της τυχούσας δύναμης $\chi^{\nu-\mu}$ είναι το άθροισμα όλων των γινομένων των γραμμάτων α_1, α_2,….., α_ν τα οποία πάρθηκαν ανά μ με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

Θα είναι λοιπόν:

$$(\chi+\alpha_1)(\chi+\alpha_2)\ldots\ldots(\chi+\alpha_\nu)=\chi^\nu+\Sigma_1\chi^{\nu-1}+\Sigma_2\chi^{\nu-2}+\ldots\ldots+\Sigma_{\nu-1}\chi+\Sigma_\nu \qquad \text{(i)}$$

5.2 Τύπος του διώνυμου

Εάν στην πιο πάνω ισότητα (i) θέσουμε

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots\ldots=\alpha_\nu=\alpha$$

τότε το πρώτο μέλος της ισότητας γίνεται $(\chi+\alpha)^\nu$

Στο δεύτερο μέλος ο συντελεστής Σ_1 γίνεται (α+α+…..+α)=να, το δε πλήθος των προσθετέων α είναι συνδυασμοί των $\binom{\nu}{1}$ δηλαδή $\Sigma_1=\binom{\nu}{1}\alpha$.

Ο συντελεστής Σ_2 γίνεται $(\alpha^2+\alpha^2+\ldots\ldots)$, το δε πλήθος των προσθετέων είναι οι συνδυασμοί των $\binom{\nu}{2}$ και επομένως θα είναι $\Sigma_2=\binom{\nu}{2}\alpha^2$.

Με τον ίδιο τρόπο σκεπτόμενοι θα έχουμε $\Sigma_3=\binom{\nu}{3}\alpha^3$,……., $\Sigma_{\nu-1}=\binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1}$ και $\Sigma_\nu=\binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu$.

Αντικαθιστούμε στον πιο πάνω τύπο (i) τα Σ_1, Σ_2, …, Σ_ν με τα ίσα τους και έτσι παίρνουμε <u>τον τύπο του διωνύμου:</u>

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\chi}+\boldsymbol{\alpha})^{\nu} &= \boldsymbol{\chi}^{\nu}+\binom{\boldsymbol{\nu}}{\mathbf{1}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\chi}^{\nu-1}+\binom{\boldsymbol{\nu}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\alpha}^{2}\boldsymbol{\chi}^{\nu-2}+\ldots+\binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\alpha}^{\lambda}\boldsymbol{\chi}^{\nu-\lambda}+\\ &+\ldots\ldots+\binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\nu}-\mathbf{1}}\boldsymbol{\alpha}^{\nu-1}\boldsymbol{\chi}+\binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\alpha}^{\nu}\end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

Ο τύπος (ii) γράφεται:

$$\begin{aligned}(\chi+\alpha)^{\nu} &= \chi^{\nu}+\nu\alpha\chi^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\alpha^{2}\chi^{\nu-2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{3}\chi^{\nu-3}+\\ &+\ldots+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\lambda}\alpha^{\lambda}\chi^{\nu-\lambda}+\ldots\nu\alpha^{\nu-1}\chi+\alpha^{\nu}\end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

<u>Σημείωση.</u> Ο τύπος του διωνύμου λέγεται και δυώνυμο του NEWTON.

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα του δυωνύμου $(\chi+\alpha)^5$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο (iii) και έχουμε:

$$\begin{aligned}(\chi+\alpha)^{5} &= \chi^{5}+5\alpha\chi^{4}+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\alpha^{2}\chi^{3}+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{3}\chi^{2}+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^{4}\chi+\alpha^{5}=\\ &= \chi^{5}+5\alpha\chi^{4}+10\alpha^{2}\chi^{3}+10\alpha^{3}\chi^{2}+5\alpha^{4}\chi+\alpha^{5}\end{aligned}$$

5.3 Ιδιότητες των όρων του αναπτύγματος του δυωνύμου

α) Ο τύπος του διωνύμου περιέχει ν+1 όρους με πρώτο τον χ^ν και τελευταίο τον α^ν.

β) Οι εκθέτες του χ προχωρούν ελαττούμενοι κατά μία μονάδα από όρο σε όρο, ενώ οι εκθέτες των α προχωρούν αυξανόμενοι κατά μία μονάδα. Έτσι σε κάθε όρο το άθροισμα των εκθετών του χ και του α είναι ίσο με ν.

Από αυτό προκύπτει ότι το ανάπτυγμα του δυωνύμου $(\chi+\alpha)^\nu$ είναι ένα ομογενές ακέραιο πολυώνυμο ν βαθμού προς α και προς χ.

γ) Επειδή $\binom{\nu}{1}=\binom{\nu}{\nu-1},\binom{\nu}{2}=\binom{\nu}{\nu-2}$ κλπ, προκύπτει ότι οι συντελεστές δύο όρων που απέχουν ίσα από τους ακραίους όρους είναι ίσοι.

δ) Ο όρος λ τάξης του αναπτύγματος του δυωνύμου είναι ίσοι με:

$$T_l=\binom{n}{l-1}a^{l-1}\cdot c^{n-l+1}$$

Τούτο επιβεβαιώνεται από την διάταξη που έχουν οι συντελεστές του αναπτύγματος στον τύπο (iii), όπου ο πρώτος έχει συντελεστή $\binom{\nu}{0}$, ο δεύτερος $\binom{\nu}{1}$, ο τρίτος $\binom{\nu}{2}$ και ο λ τάξης έχει συντελεστή $\binom{\nu}{\lambda-1}$. Σε ότι αφορά το άθροισμα των εκθετών αυτό είναι $\lambda-1+(\nu-\lambda+1)=\nu$.

ε) Εάν ο ν είναι άρτιος αριθμός, το πλήθος των όρων είναι περιττός αριθμός και επομένως υπάρχει ένας μεσαίος όρος, ο οποίος κατέχει την $\frac{\nu}{2}+1$ τάξη, από τον όρο αυτό και μετά οι συντελεστές επαναλαμβάνονται κατά την αντίθετη τάξη.

Παράδειγμα 1ο

Να αναπτυχθούν οι παραστάσεις:

$(1-\chi)^3,(\chi+1)^6$.

- $$\begin{aligned}(1-\chi)^3&=-\left[(\chi-1)^3\right]=-\left[[\chi+(-1)]^3\right]=\\&=-\left[\chi^3+3\cdot(-1)\cdot\chi^2+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot(-1)^2\chi^1+(-1)^3\right]=\\&=-\left(\chi^3-3\chi^2+3\chi-1\right)=-\chi^3+3\chi^2-3\chi+1\end{aligned}$$

- $$(\chi+1)^6=\chi^6+6\cdot 1\cdot\chi^5+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 1^2\cdot\chi^4+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1^3\cdot\chi^3+$$
$$+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 1^4\cdot\chi^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 1^5\cdot\chi+1^5=$$
$$=\chi^6+6\chi^5+15\chi^4+20\chi^3+15\chi^2+6\chi+1$$

Παράδειγμα 2º

Να αποδειχτεί ότι αν ν άρτιος, τότε

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}=\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{3}+\ldots+\binom{\nu}{\nu-1}$$

Λύση

Η ισότητα (ii) για χ = 1, α = -1 και ν = 2μ γίνεται:

$$(1-1)^{2\mu}=\binom{2\mu}{0}+\binom{2\mu}{1}1^{2\mu-1}(-1)+\binom{2\mu}{2}1^{2\mu-2}(-2)^2+\ldots+$$
$$+\binom{2\mu}{2\mu-1}1\cdot(-1)^{2\mu-1}+\binom{2\mu}{2\mu}(-1)^{2\mu}$$

ή $$0=\binom{2\mu}{0}-\binom{2\mu}{1}+\ldots-\binom{2\mu}{2\mu-1}+\binom{2\mu}{2\mu}$$

Άρα

$$\binom{2\mu}{0}+\binom{2\mu}{2}+\ldots+\binom{2\mu}{2\mu}=\binom{2\mu}{1}+\binom{2\mu}{3}+\ldots+\binom{2\mu}{2\mu-1}$$

ή $$\binom{2\mu}{0}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}=\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{3}+\ldots+\binom{\nu}{\nu-1}$$

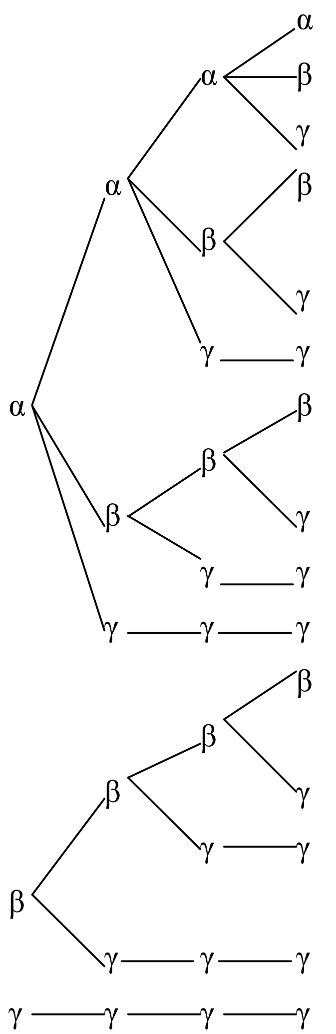
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Τα δενδροδιαγράμματα (tree diagram) είναι ένας σχηματικός τρόπος απαρίθμησης και ταυτόχρονης καταγραφής των διαφορετικών στοιχείων ενός συνόλου. Εφαρμόζεται σε περιπτώσεις με μικρά νούμερα, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1^{ο}

Να καταγραφούν οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των τριών αντικειμένων α, β, γ ανά 4.



α	α	α	α
α	α	α	β
α	α	α	γ
α	α	β	β
α	α	β	γ
α	α	γ	γ
α	β	β	β
α	β	β	γ
α	β	γ	γ
α	γ	γ	γ
β	β	β	β
β	β	β	γ
β	β	γ	γ
β	γ	γ	γ
γ	γ	γ	γ

Σχήμα 1

Λύση

Επειδή πρόκειται για συνδυασμούς, δεν ενδιαφέρει η σειρά των α, β, γ σε κάθε συνδυασμό. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάθε συνδυασμό προηγούνται τα α ακολουθούν τα β και τελευταία είναι τα γ. Αυτό σημαίνει ότι το ακολουθείται από α ή β ή γ, το β ακολουθείται από β ή γ και το γ μόνο από γ. Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε το δενδροδιάγραμμα του σχήματος 1.

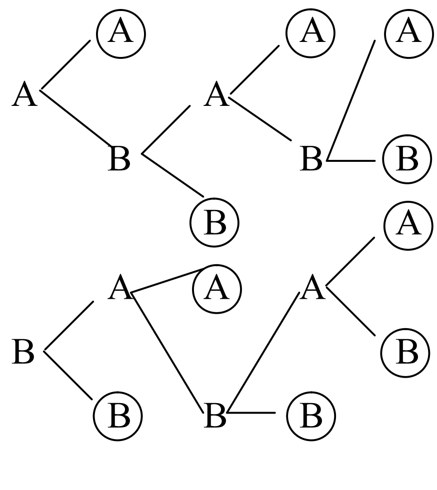
Στο πλαίσιο δεξιά του δενδροδιαγράμματος φαίνονται οι $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\binom{3+4-1}{4}=\binom{6}{4}=15$ επαναληπτικοί συνδυασμοί των 3 ανά 4.

Παράδειγμα 2^{o}

Δύο παίκτες Α και Β παίζουν τάβλι και συμφωνούν να κερδίζει το παιχνίδι όποιος πάρει δύο συνεχόμενες παρτίδες ή όποιος πάρει τη 5^{η} παρτίδα. Να γίνει η καταγραφή όλων των τρόπων με τους οποίους κερδίζει ο Α.

Λύση

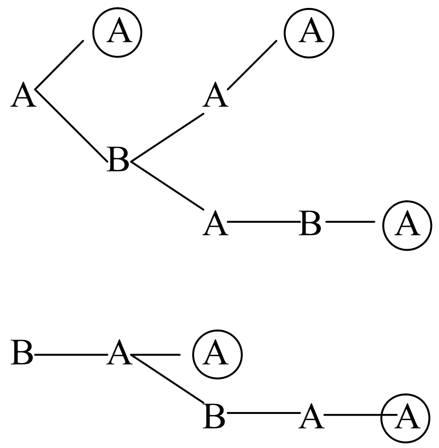
Σημειώνουμε Α αν κερδίζει ο Α την παρτίδα και Α μέσα σε κύκλο, αν κερδίζει το παιχνίδι. Ανάλογα σημειώνουμε για τον Β και σχεδιάζουμε έτσι το δένδρο διάγραμμα του σχήματος 2.



Σχήμα 2

Άρα οι τρόποι που κερδίζει ο Α είναι ΑΑ, ΑΒΑΑ, ΑΒΑΒΑ, ΒΑΑ, ΒΑΒΑΑ.

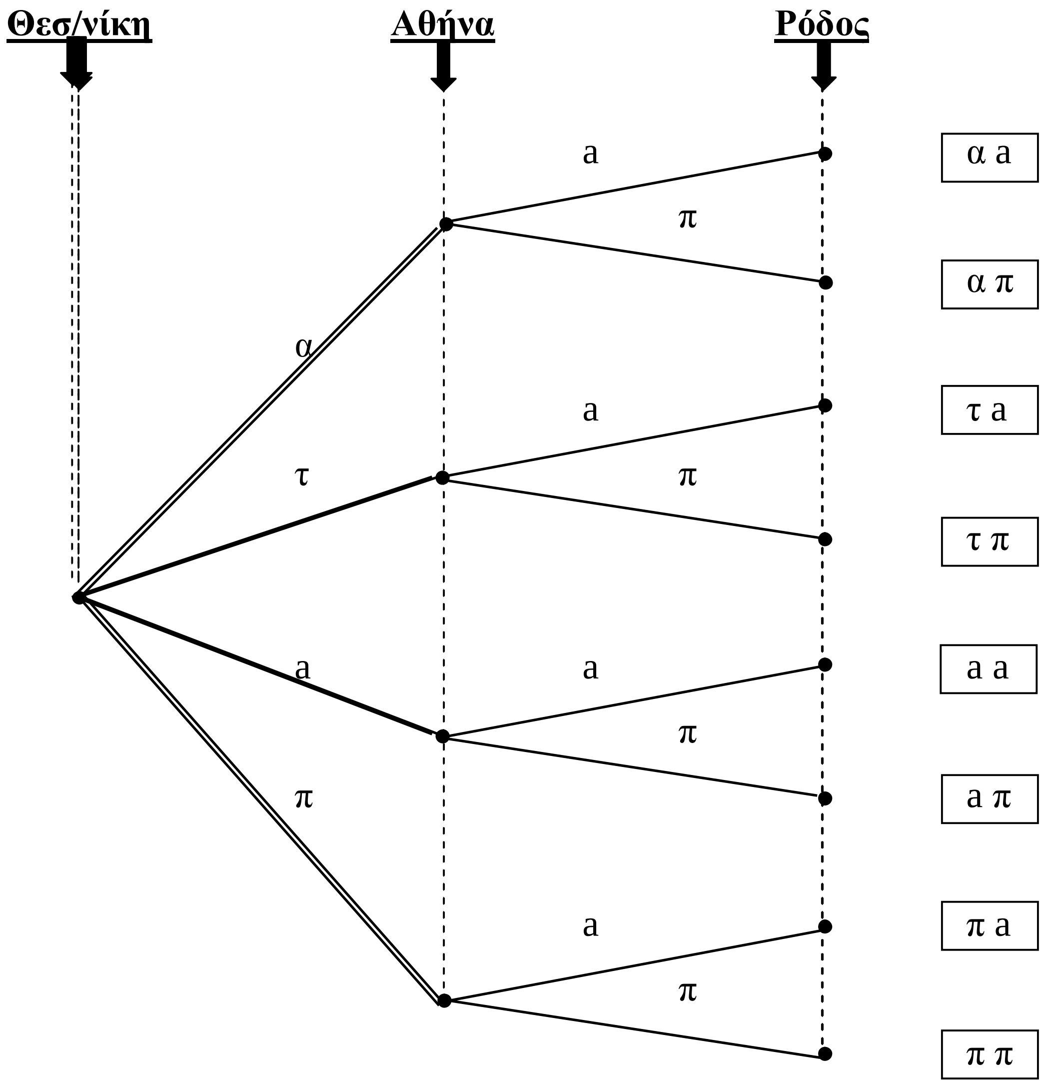
Παρατήρηση: Το δενδροδιάγραμμα που θα μπορούσαμε εξίσου καλά να χρησιμοποιήσουμε ώστε ξεκάθαρα να φανεί πότε ο Α κερδίζει το παιχνίδι, αγνοώντας τελείως πότε κερδίζει ο Β είναι το ακόλουθο:



Οπόπε προκύπει ότι οι τρόποι που κερδίζει ο Α είναι: ΑΑ, ΑΒΑΑ, ΑΒΑΒΑ, ΒΑΑ, ΒΑΒΑΑ

Παράδειγμα 3ο

Το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ρόδος μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις, Θεσσαλονίκη-Αθήνα και Αθήνα Ρόδος. Η πρώτη φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους: αυτοκίνητο (α), τραίνο (τ), αεροπλάνο (a), πλοίο (π) και η δεύτερη με 2 τρόπους: a, π. Επομένως το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ρόδος μπορεί να γίνει με 8 τρόπους. Τους τρόπους αυτούς τους βρίσκουμε με το επόμενο δενδροδιάγραμμα.


Θεσ/νίκη
Αθήνα
Ρόδος
α
τ
a
π
a
π
a
π
a
π
a
π
α a
α π
τ a
τ π
a a
a π
π a
π π

v ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- § *M. Aigner, “Combinatory Theory”.*
- § *Danieli A.Cohen, “Basic Techniqes Of Combinatory Theory”.*
- § *Làszlo Lovàsz ,“Combinatory Problems And Exercises”.*
- § *Percy A. Macmahon, “Combinatory Analysis”.*
- § *Θ. Ν. Καζαντζή, “Συνδυαστική (Πιθανότητες Β)”, Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη Χ. Βαφειάδης*
- § *Ιωακείμ Κ. Κουμούσης, “Σημειώσεις Γενικών Μαθηματικών”.*
- § *Μανώλη Λουκάκη, “Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών”, Τόμος Α΄, Θεσσαλονίκη (1996).*
- § *Χαραλάμπου Α. Χαραλαμπίδη,“Συνδυαστική”, Τεύχος 1, Αθήνα (1984)*
- § *Χρόνης Μωϋσιάδης – Θεόδωρος Χατζηπαντελής, “Συνδυαστική”, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη (1995).*