ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ **ΠΑΤΡΑΣ**

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ:
" ΟΙ ΚΥΡΙΟΤΕΡΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ "

Εισηγητής:
Κων/νος Φωτόπουλος

Σπουδαστές:
Νηφάκος Σταύρος
Σελετοπούλου Μαρία

ΠΑΤΡΑ
ΙΟΥΛΙΟΣ 1995

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

1.ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
2.ΑΠΟΓΡΑΦΗ
3.ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ
4.ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
5.ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
6. Η ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ
7.ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ
8.ΠΛΟΗΓΙΔΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΕΣ
9 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ
10.ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ
11.ΜΕΡΟΛΗΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ
12. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΣΧΕΔΙΑ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

1.ΤΥΧΑΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ
2.ΑΠΛΗ ΤΥΧΑΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ
2.1 ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΓΙΑ ΝΑ ΠΑΡΟΥΜΕ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΘΩΡΙΣΜΕΝΗΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ.
2.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΛΗΨΕΩΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ
2.2.1 Εκτιμήσεις στην απλή τυχαία δειγματοληψία
2.2.2 Διακυμάνσεις των εκτιμήσεων
2.2.3 Εκτιμηση του τυπικού σφάλματος από ένα δείγμα
2.2.4 Διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού
2.2.5 Εναλλακτική μέθοδος αποδείξεως
2.2.6Η κανονική προσέγγιση
2.2.7 Αποτέλεσμα της μη κανονικότητας επί της εκτιμούμενης διακύμανσης

3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

3.1 ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

4. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΤΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

4.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΑΝΑΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΔΕΙΣΑΝΑΛΟΓΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

4.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΤΗΣ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

4.2.1 Ιδιότητες των εκτιμήσεων

4.2.2Αναλογική κατανόμη

4.2.3 Αριστή κατανομή

4.2.4 Περαιτέρω ανάλυση της επιλογής των δειγματικών μεγεθών στα επιμέρους στρώματα

4.2.5 Σχετική ακρίβεια της στρωματοποιημένης τυχαίας και απλής τυχαίας δειγματοληψίας

4.2.6 Πότε η στρωματοποίηση παράγει μεγάλα οφέλη στην ακρίβεια

4.2.7 Κατανομή που απαιτεί δειγματοληψία περισσότερα απο 100%

4.2.8 Εκτίμηση του μεγέθους του δείγματος

4.2.9 Στρωματοποιημένη δειγματοληψία για ποσοστά

4.2.10 Κέρδη στην ακρίβεια απο τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία για ποσοστά

4.2.11 Εκτίμηση του μεγέθους του δείγματος με ποσοστά

5 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

5.1 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ - ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

6 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ

7 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΜΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

8 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΑΠΟ ΚΥΡΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

9 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΜΕ ΥΠΕΡΤΙΘΕΜΕΝΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

10 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ
10.1 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ - ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

11 ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Ι. ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πληθυσμός (POPULATION) είναι το σύνολο των μετρήσεων ή απαριθμήσεων, οι οποίες αναφέρονται σε ένα πλήθος έμψυχων όντων ή άψυχων αντικειμένων, τα οποία έχουν ένα ή περισσότερα κοινά χαρακτηριστικά. Π.χ. το σύνολο των αναστημάτων των σπουδαστών του Τ.Ε.Ι. είναι ένας πληθυσμός αναστημάτων, η βαθμολογία όλων των υποψηφίων του διαγωνισμού του Δημοσίου, στην Πρακτική Αριθμητική είναι ένας πληθυσμός βαθμολογιών κ.α.

Η χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων ενός πληθυσμού:

α) Μπορεί να εκφραστεί με κάποιο αριθμό και τότε λέγεται ποσοστική π.χ. βάρος, εισόδημα, ανάστημα κ.λπ.

Οι αριθμοί που αναφέρονται σε ποσοτικές ιδιότητες λέγονται μετρήσεις.

β) μπορεί να αναφέρεται στην ποιότητα των στοιχείων και τότε λέγεται κατηγοριακή π.χ. φύλο, χρώμα. θρησκεία κ.τλ.

Οι αριθμοί-που αναφέρονται σε ποιοτικές ιδιότητες λέγονται απαριθμήσεις. Τα γενικά χαρακτηριστικά (η δομή) ενός πληθυσμού μετρήσεων κατά κανόνα εκφράζονται με ένα πλήθος παραμέτρων σπουδαιότερες των οποίων είναι: ο μέσος αριθμητικός (μ), η διακύμανση (σ^2), η ασυμμετρία (β_1) και η κύρτωση (β_2).

Τα γενικά χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού απαριθμήσεων (ποιοτική ιδιότητα) εκφράζονται με την αναλογία (ποσοστό P).

2. ΑΠΟΓΡΑΦΗ

Τα γενικά χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού για να προσδιοριστούν χρειάζονται στατιστικά στοιχεία. Τα στοιχεία αυτά συλλέγονται με απογραφή ή με δειγματοληψία.

Η απογραφή αποβλέπει στη λεπτομερή καταγραφή των χαρακτηριστικών όλων των μονάδων ενός πληθυσμού χωρίς εξαίρεση κι από κάθε μονάδα παίρνουμε μετρήσεις ή απαριθμήσεις των χαρακτηριστικών που μας ενδιαφέρουν.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως η απογραφή είναι τεχνικώς ανέφικτη ή οικονομικώς και πρακτικώς ασύμφορη.

1. Ανέφικτη είναι η απογραφή:

α) Όταν ο πληθυσμός είναι άπειρος. Άπειροι είναι οι πληθυσμοί από άποψη στατιστικής, εκείνοι που αποτελούνται από πάρα πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων καθώς επίσης κι εκείνοι που δημιουργούνται με τη συνέχιση της παραγωγής.

Π.χ. Για να μετρήσουμε την ακροαματικότητα ορισμένου διαφημιστικού ραδιοφωνικού προγράμματος είναι αδιανόητο να ρωτήσουμε όλους τους Έλληνες αν άκουσαν ή όχι το πρόγραμμα αυτό.

β) Όταν η λήψη της πληροφορίας προϋποθέτει καταστροφή του στοιχείου από το οποίο λαμβάνεται π.χ. η πληροφορία για "αντοχή ηλεκτρικών λαμπτήρων σε ώρες "χ" προϋποθέτει κάψιμο των ηλεκτρικών λαμπτήρων.

2. Οικονομικώς ασύμφορη είναι η απογραφή:

Όταν η διενέργεια της προϋποθέτει μεγάλη χρηματική δαπάνη.

Π.χ. Για τον προσδιορισμό των καταναλισκόμενων ποσοτήτων ειδών διατροφής από όλα τα νοικοκυριά της Ελλάδας - για τον καταρτισμός του τιμαρίθμου - θα απαιτούσε μεγάλο αριθμό απογραφέων και άρα υψηλό κόστος.

3. Πρακτικώς ασύμφορη είναι η απογραφή:

όταν η διενέργεια της χρειάζεται μεγάλο χρονικό διάστημα.

Π.χ. για να διαπιστώσουμε πόση είναι η ποσότητα καθαρού νικέλου που περιέχεται σ΄ένα φορτίο 5.000 τόννων σιδηρονικελίου δεν επιβάλλουμε σε χημική ανάλυση ολόκληρο το φορτίο.

3. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Όταν παρουσιάζεται πρακτική αδυναμία διερευνήσεως ολόκληρου του πληθυσμού ή όταν είναι μεν δυνατή η διερεύνηση όλου του πληθυσμού αλλά απαιτείται υψηλό κόστος και σημαντικός χρόνος για τη συλλογή και επεξεργασία του στατιστικού υλικού, αντί της απογραφής χρησιμοποιείται η δειγματοληψία.

Η δειγματοληψία (SAMPLING) αποβλέπει στη συλλογή στατιστικών δεδομένων μόνο από ένα τμήμα του πληθυσμού το οποίο θέλουμε να διερευνήσουμε.

Το τμήμα αυτό του πληθυσμού ονομάζεται δείγμα και είναι απολύτως αντιπροσωπευτικό του με σκοπό να συνταχθούν τα αναγκαία συμπεράσματα για την όλη δομή του πληθυσμού. Οι μετρήσεις που προκύπτουν από τα ποσοτικά δεδομένα του δείγματος, μετά την αναγωγή τους στον πληθυσμό, ονομάζονται εκτιμήσεις.

Δύο είναι τα βασικά πλεονεκτήματα της δειγματοληψίας σε σύγκριση με την απογραφή:

- Η μεγαλύτερη ταχύτητα με την οποία παίρνουμε πληροφορίες.
- Το χαμηλό κόστος

Παράλληλα με τα πλεονεκτήματα της δειγματοληψίας υπάρχουν και ορισμένα μειονεκτήματα κυριότερα από τα οποία είναι:

- Η δυσκολία που παρουσιάζει πολλές φορές η επιλογή του δείγματος, το οποίο πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.
- Ο σχεδιασμός και η εκτέλεση της δειγματοληψίας χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή κι εξειδικευμένα άτομα.
- Τα δειγματοληπτικά σφάλματα που δημιουργεί και για τα οποία θα μιλήσουμε παρακάτω.

4. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

α) ΜΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Σε μια στατιστική έρευνα είτε είναι απογραφική είτε δειγματοληπτική δημιουργούνται μη δειγματοληπτικά σφάλματα και είναι τα εξής:

(i) Σφάλματα μετρήσεων. Αυτά οφείλονται στην λανθασμένη μέτρηση της χαρακτηριστικής ιδιότητας των στοιχείων του πληθυσμού.

(ii) Σφάλματα συνεντεύξεων. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται στην κακή διατύπωση της ερώτησης εκ μέρους του ερευνητού (συνεντεύκτου).

(iii) Σφάλματα που οφείλονται στην ατελή σύνταξη του ερωτηματολογίου.

(iv) Σφάλματα που οφείλονται στις αναληθείς απαντήσεις των απογραφόμενων.

β) ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Σφάλματα δειγματοληπτικά είναι: η διαφορά μεταξύ μιας στατιστική εκτίμησης που προκύπτει από ένα δείγμα και της αντίστοιχης στατιστικής παραμέτρου που προκύπτει με απογραφή.

Π.χ. Έστω ότι έχουμε προσδιορίσει με απογραφή το μέσο ανάστημα 1.000 σπουδαστών σε 175 εκατοστά. Από τους 1.000 σπουδαστές παίρνουμε τυχαίο δείγμα 100 σπουδαστών βρίσκουμε μέσο ανάστημα 170 εκατοστά. Η διαφορά $\left|\bar{x}-\mu\right| = |170-175| = 5cm$, λέγεται δειγματολογικό σφάλμα.

Τα δειγματοληπτικά σφάλματα περιορίζονται με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος κι εξαφανίζονται στην απογραφή. Άρα λοιπόν, τ΄αποτελέσματα μιας δειγματοληψίας δεν μπορούμε να τα δεχτούμε ως απολύτως ακριβή γιατί επηρεάζονται από τις τυχαίες κυμάνσεις της δειγματοληψίας (περιέχουν σφάλματα δειγματοληπτικά) η από σφάλματα μη δειγματοληπτικά.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα μιας απογραφής, όμως σφάλματα μη δειγματοληπτικά και μάλιστα, κατά το συνήθες, σε μεγαλύτερη έκταση απ'ότι είναι τα μη δειγματοληπτικά της δειγματοληψίας, διότι η απογραφή είναι έρευνα μεγάλης έκτασης, διενεργείται κατά κανόνα με περιορισμένα μέσα (χρόνο και χρήμα), οπότε είναι φυσικό τα μη δειγματοληπτικά σφάλματα αυτής να είναι μεγαλύτερης έκτασης από ότι είναι τα αντίστοιχα μη δειγματοληπτικά της δειγματοληψίας.

Αν σε μια απογραφή υπάρχουν σφάλματα μη δειγματοληπτικά μεγαλύτερης έκτασης από τα αντίστοιχα δειγματοληπτικά και μη δειγματοληπτικά σφάλματα μιας καλοσχεδιασμένης δειγματοληψίας, τα αποτελέσματα της απογραφής μπορεί να μην είναι τόσο ακριβή όσο τα αποτελέσματα της αντίστοιχης δειγματοληψίας.

ε. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Τα σφάλματα, γενικά, διακρίνονται σε συστηματικά και τυχαία.

Συστηματικά είναι π.χ. τα σφάλματα μέτρησης τους βάρους που γίνονται από ζυγό, ο οποίος επειδή είναι απαριθμημένος προσθέτει π.χ. σε κάθε πρόσωπο που ζυγίζεται δύο κιλά. Συστηματικά είναι, ακόμη, τα σφάλματα από την απόκρυψη ηλικίας και του εισοδήματος. Τα συστηματικά σφάλματα παραμένουν στις ατομικές, στις δειγματοληπτικές και στις απογραφικές μετρήσεις.

Τα σφάλματα μέτρησης και καταχώρισης, που γίνονται από απροσεξία είναι συνήθως μη συστηματικά (τυχαία). Τα σφάλματα αυτά ενώ παραμένουν στις ατομικές μετρήσεις είναι δυνατό να αλληλοεξουδετερώνονται στο σύνολο των μετρήσεων του δείγματος ή της απογραφής.

Π.χ. Το συνολικό βάρος 1.000 σπουδαστών που ζυγίζονται ένας ένας σε κανονικό ζυγό (και το μέσο βάρος κατά σπουδαστών) μπορεί να είναι ορθό παρά το ότι οι μετρήσεις για κάθε σπουδαστή περιέχουν σφάλματα μέτρησης (δηλαδή σφάλματα ανάγκης και καταγραφής της σωστής ένδειξης του ζυγού). Τα δειγματοληπτικά σφάλματα είναι τυχαία αν η δειγματοληψία είναι τυχαία.

6. Η ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η δειγματοληψία είναι δυνατόν να μας δίνει εκτιμήσεις που βρίσκονται κοντά στο αντίστοιχο απογραφικό μέγεθος χωρίς αυτό να σημαίνει ότι κατ΄ανάγκη βρίσκονται κοντά και στο αληθινό μέγεθος του πληθυσμού, το οποίο πραγματικά αναζητούμε.

Η ακρίβεια της εκτιμήσεις σε σχέση με το απογραφικό μέγεθος του πληθυσμού καθορίζεται από το δειγματοληπτικό σφάλμα.

Η ακρίβεια της εκτίμησης σε σχέση με το αληθινό μέγεθος του πληθυσμού καθορίζεται απ΄όλα τα σφάλματα δηλαδή τα δειγματοληπτικά και τα μη δειγματοληπτικά.

7. ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Ένα από τα προβλήματα που έχει να αντιμετωπίσει ο στατιστικός κατά τη διενέργεια μιας δειγματοληψίας είναι ο καθορισμός του άριστου μεγέθους δείγματος. Οι παράγοντες που θα ληφθούν υπ όψιν για τον καθορισμό του άριστου μεγέθους δείγματος είναι οι εξής:

α) Το μέγεθος της ακρίβειας της έρευνας.

Δηλ. το μέγεθος του δειγματοληπτικού σφάλματος. Όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα τόσο μικρότερο είναι το δειγματοληπτικό σφάλμα (κι άρα μεγαλύτερη η ακρίβεια της έρευνας).

β) Οι παράγοντες κόστος και χρόνος της έρευνας.

Όσο μικρότερα είναι το δείγμα τόσο λιγότερο δαπανηρή είναι η έρευνα και τόσο γρηγορότερα τελειώνει.

γ) Η ομοιογένεια του πληθυσμού.

Αν ο πληθυσμός είναι ομοιογενείς (έχει μικρή διακύμανση) απαιτούνται λίγε μονάδες δείγματος. Αντίθετα αν ο πληθυσμός είναι ανομοιογενείς (έχει μεγάλη διακύμανση) τότε απαιτούνται πολλές μονάδες δείγματος για να τον αντιπροσωπεύσουν.

δ) Η μέθοδος δειγματοληπτικής έρευνας

Για να είναι ένα δείγμα άριστο, δεν αρκεί μόνο να αποτελείται από μεγάλο αριθμό μονάδων αλλά θα πρέπει να ακολουθείται και η κατάλληλη μέθοδος δειγματοληπτικής έρευνας ώστε το δείγμα να είναι απολύτως αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.

Αν το δείγμα είναι τυχαίο, υπάρχουν στατιστικές σχέσεις μονάδων του δείγματος ή του κόστους της έρευνας, σύμφωνα με την απαιτούμενη ακρίβεια εκτίμησης.

8. ΠΛΟΗΓΙΔΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΕΣ

Όταν πρόκειται να διεξαχθεί μία δειγματοληπτική έρευνα, ο σχεδιασμός της υποβοηθείται από δεδομένα προγενέστερων στατιστικών ερευνών που έχουν προκύψει από απογραφή ή δειγματοληψίας. Αν όμως η έρευνα διεξάγεται για πρώτη φορά, τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν. Σ΄αυτές τις περιπτώσεις, προκειμένου να συγκεντρωθούν στοιχεία που θα καθοδηγήσουν την κυρίως δειγματοληπτική έρευνα, διενεργείται μια προκαταρκτική σύντομη δειγματοληπτική έρευνα, με λίγες μονάδες δείγματος, που έχει σα σκοπό όχι τη λήψη πληροφοριών, αναφορικά προς τον κύριο σκοπό της έρευνας, αλλά την καθοδήγηση του όλου σχεδίου της έρευνας κι η έρευνα αυτή καλείται πλοηγίδα δειγματοληψία (PILOT SAMPLING).

Συγκεκριμένα πλοηγίδες δειγματοληψίας διενεργούνται για τον καθορισμό του χρόνου συνεντεύξεως, της τυχόν απαιτούμενης διαγραφής ή ανασκευής ερωτήσεων, τον καθορισμό του ποσοστού συμμετοχής στην έρευνα και κυρίως την εκτίμηση της διακύμανσης του πληθυσμού σύμφωνα με την οποία θα καθοριστεί το μέγεθος του δείγματος της κύριας δειγματοληπτικής έρευνας.

Τα αποτελέσματα των πλοηγίδων ερευνών μπορεί να χρησιμοποιηθούν ή να συγκριθούν προς τα δεδομένα της κύριας δειγματοληπτικής έρευνας.

9. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

Δείγμα όπως είπαμε, είναι ένα τμήμα του πληθυσμού που θέλουμε να ερωτήσουμε. Κάθε πληθυσμός αποτελείται από ξεχωριστά στοιχεία τα οποία ονομάζονται δειγματοληπτικές μονάδες (Sampling Units).

Προτού διερευνήσουμε ένας πληθυσμό πρέπει προηγουμένως να ορίσουμε με ακρίβεια τη δειγματοληπτική μονάδα. Η δειγματοληπτική μονάδα μπορεί να είναι το άτομο, το νοικοκυριό, το εμπορικό κατάστημα, η βιομηχανική επιχείρηση, το οικοδομικό τετράγωνο κ.λπ.

10. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το σύνολο των δειγματοληπτικών μονάδων ενός πληθυσμού από τον οποίο θα ληφθεί το δείγμα καλείται δειγματοληπτικό πλαίσιο. Το δειγματοληπτικό πλαίσιο μπορεί να είναι κατάλογος, τοπογραφικός χάρτης, αεροφωτογραφία κ.λπ.

Ακατάλληλα δειγματοληπτικά πλαίσια είναι εκεί να που δεν περιέχουν ολόκληρο το δειγματιζόμενο πληθυσμό ή είναι κατάλογοι πολλαπλών εγγραφών. Π.χ. οι τηλεφωνικοί κατάλογοι και οι εκλογικοί κατάλογοι που περιέχουν και τους πεθαμένους, είναι ακατάλληλα δειγματοληπτικά πλαίσια.

Κατάλληλα δειγματοληπτικά πλαίσια για τη διεξαγωγή μιας δειγματοληπτικής έρευνας, είναι συνήθως κατάλογοι ή μητρώα που είναι πλήρως ενημερωμένα. Π.χ. τα μητρώα των ληξιαρχείων, οι κατάλογοι των μελών του τεχνικού επιμελητηρίου, οι κατάλογοι φορολογίας εισοδήματος φυσικών προσώπων κ.λπ., αν είναι καλά ενημερωμένοι είναι κατάλληλα δειγματοληπτικά πλαίσια και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για δειγματοληπτικές έρευνες.

11. ΜΕΡΟΛΗΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Μεροληπτικότητα καλείται η συστηματική απόκλιση μεταξύ εκτίμησης δείγματος και αληθινής παραμέτρου πληθυσμού και που οφείλεται στο στατιστικό ή στον απογραφέα ή στον απογραφόμενο.

Μεροληπτικότητα εκ μέρους του στατιστικού, επιτελείται από έλλειψη εμπειρίας, από ανεπαρκείς γνώσεις σχετικά με το ερευνόμενο αντικείμενο, από την εφαρμογή της μη ενδεδειγμένης δειγματοληπτικής μεθόδου (μη τυχαίας), από την ατελή σύνταξη του ερωτηματολογίου, απ΄τη χρησιμοποίηση ακατάλληλων πλαισίων κ.τλ.

Από μέρους απογραφέα μεροληπτικότητα εμφανίζεται από έλλειψη εμπειρίας, επαγγελματικής ευσυνειδησίας, από τον τρόπο που θέτει την ερώτηση, απ΄τα πρόσωπα που αυτός επιλέγει κ.λπ.

Από μέρους απογραφόμενου μεροληπτικότητα επιτελείται από ηθελημένη ανειλικρινή απάντηση (απαντήσεις σχετικές με τα εισοδήματα και τις ηλικίες είναι μεροληπτικές0 από την άρνηση συνεργασίας κ.λπ.

Αν μια δειγματοληπτική έρευνα είναι μεροληπτική τα αποτελέσματα της όχι μόνο είναι άχρηστα αλλά είναι δυνατό να παρασύρουν σε ενέργειες καταστρεπτικές.

Αν η μεροληπτικότητα οφείλεται στην έλλειψη του τυχαίου τότε ο προσδιορισμός του μεγέθους του δειγματοληπτικού σφάλματος δεν είναι δυνατός.

Τη μεροληπτικότητα μπορούμε να την αποφύγουμε παίρνοντας τυχαίο δείγμα και με το σωστό σχεδιασμό και παρακολούθηση της δειγματοληπτικής έρευνας.

12. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΑ ΣΧΕΔΙΑ

Δειγματοληπτικό σχέδιο καλείται η μέθοδος δειγματοληπτικής έρευνας που ακολουθείται για την επιλογή των μονάδων του δείγματος από το δειγματοληπτικό πλαίσιο.

Τα δειγματοληπτικά σχέδια που θα τα λέμε δειγματοληψίες, διακρίνονται σε 3 βασικές κατηγορίες, οι οποίες πάλι διακρίνονται σε επί μέρους αναλυτικότερες δειγματοληψίας.

Οι βασικές αυτές κατηγορίες είναι:

Α. Τυχαία Δειγματοληψία

β. Δειγματοληψία ποσοστού

γ. Κατευθυνόμενη δειγματοληψία

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

1. ΤΥΧΑΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Τυχαία δειγματοληψία είναι εκείνη κατά την οποία το δείγμα λαμβάνεται από το πλαίσιο με κλήρωση και κάθε μονάδα του πληθυσμού έχει ίση πιθανότητα με τις άλλες να περιληφθεί στο δείγμα. Αυτό το δείγμα καλείται τυχαίο δείγμα πιθανότητας

Πλεονεκτήματα της τυχαίας δειγματοληψίας:

- Τα αποτελέσματα της είναι αντικειμενικά (αφού το δείγμα λαμβάνεται με κλήρωση)

- Το δείγμα είναι τυχαίο κι επομένως μπορεί να μετρηθεί το μέγεθος του δειγματοληπτικού σφάλματος.

Μειονεκτήματα της τυχαίας δειγματοληψίας:

- Είναι δαπανηρή επειδή προϋποθέτει πλαίσια πλήρως ενημερωμένα.

- Απαιτεί μεγαλύτερο χρόνο και κόστος απ΄ότι οι άλλες δειγματοληψίας.

2. ΑΠΛΗ ΤΥΧΑΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Απλή τυχαία δειγματοληψία είναι εκείνη κατά την οποία το δείγμα λαμβάνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μη εκλεγμένη μονάδα να έχει ίση πιθανότητα με τις άλλες να εκλεγεί στο δείγμα.

2.1. ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΓΙΑ ΝΑ ΠΑΡΟΥΜΕ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΗΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ

Το πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί στον υπολογισμό του μεγέθους του δείγματος για να επιτύχουμε αποτελέσματα που έχουν καθορισμένο βαθμό ακρίβειας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Επιθυμούμε να έχουμε ένα ικανοποιητικό βαθμό εμπιστοσύνης, ότι η δειγματική εκτίμηση ενός συγκεκριμένου χαρακτηριστικού είναι σε σφάλμα με όχι περισσότερο από συγκεκριμένο μεγεθος, ή ότι το σφάλμα δεν υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο ποσοστό της υπό εκτίμηση τιμής. Για παράδειγμα μπορεί να επιθυμούμε να είμαστε πρακτικά βέβαιοι ότι ο συντελεστής μεταβλητικότητος της δειγματοληπτικής εκτιμήσεως δεν υπερβαίνει π.χ. το 0,04 (ή 4%).

Επειδή υποθέτουμε προς το παρόν ότι η μέθοδος δειγματοληψία που χρησιμοποιείται είναι της απλής τυχαίας δειγματοληψίας των στοιχειωδών μονάδων, η δική μας επιλογή στον σχεδιασμό του δείγματος περιορίζεται στο απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος. Όταν η απαιτούμενη ακρίβεια είναι καθορισμένη, εκείνο που απομένει είναι να θέσουμε το συντελεστή μεταβλητικότητος ίσο με το μέσο σφάλμα το οποίο είμαστε πρόθυμοι να ανεχτούμε, ή να θέσουμε το συντελεστή μεταβλητικότητος της δειγματικής εκτιμήσεως ίσο με το 1/3 του μέγιστου σφάλματος το οποίο επιθυμούμε να είμαστε πρακτικά βέβαιοι ότι δε θα υπερβούμε, και λύνουμε ως προς το απαιτούμενο δειγματικό μέγεθος. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να είμαστε πρακτικά βέβαιοι ότι η σχετική διαφορά μεταξύ της δειγματικής εκτιμήσεως του πληθυσμιακού μέσου και της πραγματικής τιμής αυτού θα είναι όχι μεγαλύτερη από D, θα έχουμε:

$$3CV_{\bar{x}} = D, \quad \text{ή} \quad CV_{\bar{x}} = \frac{D}{3}$$

και από τη σχέση παίρνουμε:

$$\left(\frac{D}{3}\right)^2 = (1-f)\,\frac{V^2}{n} = \frac{N-n}{N}\,\frac{V^2}{n},$$

(όπου $V^2 = C\ V^2$)

ή

$$n = \frac{9NV^2}{ND^2 + 9V^2}$$

(2.11)

Διαπιστώνουμε ότι για να εξακριβώσουμε το μεγεθος του δείγματος που απαιτείται για να επιτύχουμε μία καθορισμένη ακρίβεια, πρέπει να έχουμε μία λογική προσέγγιση του CV εκ των προτέρων. Μία προσέγγιση του μεγέθους του CV μπορεί να γίνει από διαθέσιμη εμπειρία του παρελθόντος. Εάν όχι, κάποιος προέλεγχος και προκαταρκτική μελέτη μπορεί να είναι απαραίτητη για να επιτύχουμε μία προσεγγιστική τιμή αυτού.

Η τιμή του ή όπως προκύπτει από τη σχέση (2.11) είναι για την περίπτωση που η επιθυμητή ακρίβεια είναι τέτοια ώστε το

3-πλάσιο του συντελεστή μεταβλητικότητος της εκτιμήσεως είναι ίσο με D. Γενικά, κάποιος μπορεί να επιθυμεί να έχει ένα βαθμό ακρίβειας τέτοιον ώστε k-φορές ο συντελεστής μεταβλητικότητας να είναι ίσος με D. Τότε το μέγεθος του δείγματος δίνεται θέτοντας στην θέση του 9 το k^2, οπότε:

$$n = \frac{k^2 N V^2}{N D^2 + k^2 V^2}$$

(2.12)

Η τιμή που επιλέγεται για το k καθορίζεται από την πιθανότητα ότι το δειγματικό αποτέλεσμα θα έχει ένα σχετικό σφάλμα όχι μεγαλύτερο από ±D. Η σχέση (2.12) εφαρμόζεται στην περίπτωση της απλής τυχαίας δειγματοληψίας, όταν το χαρακτηριστικό μέτρο που θέλουμε να εκτιμήσουμε είναι ένας μέσος, ένα συνολικό μέγεθος, ή ένα ποσοστό.

Κατά κανόνα στις περιπτώσεις που ο πληθυσμός είναι μεγάλος σε σχέση με οποιοδήποτε μέγεθος του δείγματος, η διαδικασία υπολογισμού του μεγέθους του δείγματος είναι κάπως απλούστερη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η σχετική διακύμανση μιας εκτιμήσεως του μέσου, του ποσοστού, ή του συνολικού μεγέθους δίνεται προσεγγιστικά με V^2/n , οπότε:

$$\frac{k^2 V^2}{n} = D^2$$

και:

$$n = \frac{k^2 V^2}{D^2}$$

(2.13)

Η απόφαση για το επίπεδο της απαιτούμενης ακρίβειας, δηλαδή, για την τιμή του Δ, έχει μεγάλη σημασία. Βλέπουμε από τη σχέση (2.13) ότι, εάν θέλουμε να διπλασιάσουμε ένα αναμενόμενο σχετικό σφάλμα θα απαιτηθεί ένα δείγμα μεγέθους ίσου με το 1/4 περίπου του προηγουμένου. Για παράδειγμα, εάν:

D= 0,04, k=3 και CV=1/2

τότε το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος είναι:

$$n = \frac{9}{4(0,0016)} = 1406$$

ενώ, εάν θεωρούμε ικανοποιητικό το D=8% αντί του 4%, το απαιτούμενο δειγματικό μέγεθος μειώνεται σε n=9/0,0256 = 352, δηλαδή στο 1/4 του 1406.

Γι΄αυτό είναι σημαντικό να ορίζουμε το D τόσο μεγάλο όσο είναι ανεκτό.

Μέχρι εδώ η μελέτη του μεγέθους του δείγματος αφορούσε στην εξέταση ενός απλού χαρακτηριστικού. Συνήθως, επιδιώκεται η εκτίμηση περισσότερων χαρακτηριστικών από το ίδιο δείγμα, και το μέγεθος του δείγματος που απαιτείται για να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια για ένα χαρακτηριστικό μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το μέγεθος του δείγματος που απαιτείται για να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια για άλλα. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται παίρνοντας ένα δείγμα τόσο μεγάλο όσο απαιτείται, ώστε το καθένα από τα πιο σπουδαία χαρακτηριστικά να εκτιμάται με ικανοποιητική ακρίβεια.

Οπότε, για τα χαρακτηριστικά δευτερεύουσας σημασίας αποδεχόμεθα οποιαδήποτε ακρίβεια επιτευχθεί. Μερικά από τα χαρακτηριστικά δευτερεύουσας σημασίας θα εκτιμηθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια από εκείνη που οι σκοποί της έρευνας απαιτούν, ενώ άλλα θα εκτιμηθούν με μικρότερη από την επιθυμητή ακρίβεια.

2.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΛΗΨΕΩΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΤΥΧΑΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Το απλό τυχαίο δείγμα λαμβάνεται με δύο κυρίως μεθόδους: α0 Τη μέθοδο των λαχνών και β) τη μέθοδο των τυχαίων αριθμών.

α) Μέθοδος των λαχνών.

Στη μέθοδο αυτή γράφουμε σε Ν ομοιόμορφα χαρτάκια (όσα τα στοιχεία του πληθυσμού) τον αύξοντα αριθμό καταχωρήσεως του στον κατάλογο. από αυτά (αφού τ΄ανακατέυουμε τραβάμε συνεχώς χαρτάκια, ώστε να καλυφθεί το μέγεθος του δείγματος. Τα στοιχεία που αντιστοιχούν στα χαρτάκια αποτελούν το απλό τυχαίο δείγμα.

β) Μέθοδος τυχαίων αριθμών.

Για να παρουσιάσουμε τη χρήση ενός πίνακα τυχαίων αριθμών στην λήψη ενός δείγματος, υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός περιλαμβάνει N=372 μονάδες και ότι ένα δείγμα μεγέθους n=10 μονάδων επιθυμούμε να λάβουμε από τον πληθυσμό αυτό.

Επιλέγουμε ένα τριψήφιο αριθμό από τον πίνακα A1, έστω ότι ο αριθμός είναι 159 στη γραμμή 11 των στηλών 80-82. Διαβάζουμε στην συνέχεια προς τα κάτω την στήλη και διαλέγουμε τους πρώτους δέκα τριψήφιους αριθμούς που δεν υπερβαίνουν τον αριθμό 372. Αυτοί οι αριθμοί είναι 334, 365, 222, 345, 245, 272, 075, 038, 127 και 112. Το δείγμα αποτελείται από τις μονάδες δειγματοληψίας που φέρουν αυτούς τους αριθμούς στο πλαίσιο του πληθυσμού. Εάν οποιοσδήποτε αριθμός εμφανιστεί περισσότερο από μία φορά, αγνοούμε αυτόν στις επόμενες, της πρώτης, εμφανίσεις και προχωρούμε έως ότου βρεθούν 10 διαφορετικοί αριθμοί.

Εάν το πρώτο ψηφία στο N είναι 1,2 ή 3 αυτή η διαδικασία απαιτεί να παραλείψουμε μερικούς αριθμούς στον πίνακα, επειδή αυτοί είναι πολύ μεγάλοι. (Στο ανώτερο παράδειγμα έπρεπε να καλύψουμε 27 αριθμούς για να βρούμε 10 που θα καθορίζουν τις μονάδες του δείγματος). Αυτό δε έχει σημασία εάν βέβαια υπάρχει πλήθος τυχαίων αριθμών. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε όλους τους τριψήφιους αριθμούς μέχρι τον αριθμό 744 (744=372x2). Αρχίζοντας από την ίδια θέση, οι πρώτοι δέκα αριθμοί οι οποίοι δεν υπερβαίνουν το 744 είναι 539, 334, 615, 736, 365, 222, 345, 660, 431 και 427. Στην συνέχεια, αφαιρούμε το 372 από όλους τους αριθμούς τους μεγαλύτερους του 372. Αυτό δίνει, για το δείγμα, 167, 334, 243, 364, 365, 222, 345, 288, 59 και 55. Με N=189, για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλους τους αριθμούς τους μεγαλύτερους του 945 (945=189x5), αφαιρώντας 189 ή 378 ή 567 ή 756 ανάλογα με την περίπτωση.

Η διαδικασία αυτή της επιλογής του απλού τυχαίου δείγματος, με τη χρήση πινάκων τυχαίων αριθμών είναι γνωστή με την ονομασία σταδιακή επιλογή του δείγματος και συνίσταται στο ότι: "Επιλέγεται κατ'αρχή μία μονάδα από τις N μονάδες του πληθυσμού. Στη συνέχεα, πάντα με την ίδια διαδικασία της χρήσεως πίνακα τυχαίων αριθμών, μία μονάδα από τις υπόλοιπες (N-1) και ούτο καθεξής μέχρι να πάρουμε «n» συνολικά μονάδες". Αποδεικνύεται δε ότι η διαδικασία αυτή είναι ισοδύναμη της άλλης τυχαίας δειγματοληψίας.

Πράγματι:

α. Η πιθανότητα επιλογής του απλού τυχαίου δείγματος (a_1, a_2,...,a_n) είναι:

$$1/\binom{N}{n}$$

β. Η πιθανότητα να οδηγήσει η σταδιακή δειγματοληψία στο δείγμα (a_1, a_2,...,a_n) με την ίδια ακριβώς διάταξη είναι:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}\cdots\frac{1}{N-n+1}$$

Επειδή όμως δε μας ενδιαφέρει η συγκεκριμένη διάταξη (a_1, a_2,...,a_n), αλλά απλώς το δείγμα των «n» μονάδων να περιέχει με οποιαδήποτε διάταξη τις μονάδες a_1, a_2,...,a_n, η ανωτέρω πιθανότητα θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί «n!».

Δηλαδή η πιθανότητα της σταδιακής επιλογής του δείγματος (a_1, a_2,...,a_n) ανεξάρτητα με τη σειρά των μονάδων του είναι:

$$\frac{n!}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)} = \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{1}{\binom{N}{n}}.$$

Η απλή τυχαία δειγματοληψία αφήνει την επιλογή του δείγματος εξ ολοκλήρου στην τύχη. Είναι συνήθως μία ικανοποιητική μέθοδος όταν ο πληθυσμός δεν είναι υψηλά μεταβλητός και ειδικά, όταν τα εκτιμούμενα ποσοστά είναι πιθανόν να κυμαίνονται μεταξύ 20% και 80%. Εξ΄άλλου, εάν έχουμε οποιαδήποτε γνώση της μεταβλητικότητας του πληθυσμού, όπως ότι ορισμένα τμήματα του πληθυσμού είναι πιθανόν να δώσουν υψηλότερη ανταπόκριση απ΄ότι άλλα, θα πρέπει να αναζητήσουμε άλλες μεθόδους περισσότερο ακριβείς, τις οποίες και θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους.

2.2.1. Εκτιμήσεις στην απλή τυχαία δειγματοληψία

Έστω a_1 η πρώτη μονάδα σε ένα απλό τυχαίο δείγμα μεγέθους «n». Η τιμή X_1 αυτής ως προς κάποιο χαρακτηριστικό είναι αμερόληπτη εκτίμηση του μέσου $\overline{X}$ του πληθυσμού.

Πράγματι η X_1 μπορεί να λάβει τις τιμές X_1, X_2,...X_N , κάθε μία με πιθανότητα 1/N.

Συνεπώς:

$$E(\bar{x}_1) = \frac{1}{N} X_1 + \frac{1}{N} X_2 + \ldots + \frac{1}{N} X_N = \bar{X}$$

Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει για την τιμή: x_j : (j=1,2,...,n) μιας οποιασδήποτε μονάδας τους δείγματος, δηλαδή:

$$E(x_j) = \bar{X}, \quad j=1,2,\ldots,n$$

Θεώρημα 2.1.

Ο δειγματικός μέσος $\bar{x}$ είναι μία αμερόληπτη εκτίμηση του μέσου $\bar{X}$ του πληθυσμού.

Πόρισμα : $\hat{X}=N\bar{x}$ είναι μια αμερόληπτη εκτίμηση του πληθυσμιακού συνόλου X.

2.2.2 Διακυμάνσεις των εκτιμήσεων

Η διακύμανση της X_i, σε ένα πεπερασμένο πληθυσμό ορίζεται ως

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (X_i - \bar{X})^2 \tag{2.14}$$

Πράγματι:

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i)$$

αλλά:

$$E(X_i^2) = \frac{1}{N} X_1^2 + \frac{1}{N} X_2^2 + \ldots + \frac{1}{N} X_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} X_i^2$$

και

$$E^2(X_i) = \bar{X}^2$$

άρα:

$$V(X_i) = \sigma^2$$

ή

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{1}^{N} (X_i - \bar{X})^2$$

(2.15)

Ο τύπος (2.15) χρησιμοποιείται από εκείνους που προσεγγίζουν τη θεωρία της δειγματοληψίας μέσω της αναλύσεως διακυμάνσεως.

Διακύμανση του δειγματικού μέσου:

Το $E(\bar{x}-\bar{X})^2$ λαμβάνεται επί όλων των $\binom{N}{n}$ δειγμάτων.

Θεώρημα 2.2

Η διακύμανση του μέσου x από ένα απλό τυχαίο δείγμα είναι:

$$V(\bar{x}) = E(\bar{x}-\bar{X})^2 = \frac{S^2}{n}\,\frac{(N-n)}{n} = \frac{S^2}{n}(1-f)$$

(2.16)

όπου f=n/N είναι το κλάσμα δειγματοληψίας.

Πόρισμα 1. Το τυπικό σφάλμα του δειγματικού μέσου $\bar{x}$ είναι:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{(N-n)/N} = \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{1-f}$$

(2.17)

Πόρισμα 2. Η διακύμανση του $\hat{X}=N\bar{x}$ (εκτίμηση του πληθυσμιακού συνόλου X), είναι:

$$V(\hat{X}) = E(\hat{X}-X)^2 = \frac{N^2 S^2}{n} \frac{(N-n)}{N} = \frac{N^2 S^2}{n} (1-f)$$

(2.18)

Πόρισμα 3. Το τυπικό σφάλμα του $\hat{X}$ είναι:

$$\sigma_{\hat{X}} = \frac{NS}{\sqrt{n}} \sqrt{(N-n)/N} = \frac{NS}{\sqrt{n}} \sqrt{1-f}$$

(2.19)

Θεώρημα 2.3

Η διακύμανση του μέσου $\bar{x}$ από ένα απλό τυχαίο δείγμα είναι:

$$V(\bar{x})=E(\bar{x}-\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} \frac{(N-n)}{N-1}$$

(2.20)

2.2.3 Εκτίμηση του τυπικού σφάλματος από ένα δείγμα

Στην πράξη δε γνωρίζουμε την πληθυσμιακή διακύμανση S^2, αλλά μπορούμε να την εκτιμήσουμε από τα δεδομένα του δείγματος.

Θεώρημα 2.4.

Για ένα απλό τυχαίο δείγμα η διακύμανση:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

Είναι μία αμερόληπτη εκτίμηση της:

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}(X_i-\bar{X})^2$$

Πόρισμα: Οι αμερόληπτες εκτιμήσεις των διακυμάνσεως του $\hat{X}=N\bar{x}$ και είναι:

$$v(\bar{x}) = s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right) = \frac{s^2}{n}(1-f)$$

(2.21)

$$v(\hat{X}) = s_{\hat{X}}^2 = \frac{N^2s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right) = \frac{N^2s^2}{n}(1-f)$$

(2.22)

Για τα τυπικά σφάλματα παίρνουμε αντίστοιχα:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1-f}, \qquad s_{\hat{X}} = \frac{Ns}{\sqrt{n}} \sqrt{1-f},$$

(2.23)

2.2.4 Διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού.

Για ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους «n» από ένα άπειρο πληθυσμό, είναι γνωστό ότι η διακύμανση του δειγματικού μέσου είναι σ^2/n και το τυπικό σφάλμα του δειγματικού μέσου $\sigma/\sqrt{n}$. Η μόνη μεταβολή σ΄αυτό το αποτέλεσμα όταν ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος, είναι η εισαγωγή του παράγοντα (N-n)/N. Οι παράγοντες (N-n)/N για τη διακύμανση και $\sqrt{(N-n)/N}$ για το τυπικό σφάλμα, είναι γνωστοί σαν "διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού" (Finite Population Correction). Η διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού δίνεται με διαιρέτη (N-1) στην θέση του N όταν παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα σε όρους της σ. Αυτός ο παράγοντας εισάγεται διότι δειγματοληπτούμε από ένα πληθυσμό πεπερασμένου μεγέθους, N, αντί να δειγματοληπτούμε από ένα άπειρο πληθυσμό όπως υποτίθεται στην συνήθη θεωρία. Σημειώστε ότι, αυτός ο όρος καθιστά το τυπικό σφάλμα μηδέν όταν n=N, όπως θα έπρεπε να κάνει, επειδή τότε έχουμε μετρήσει όλες τις μονάδες του πληθυσμού πλησιάζει τη μονάδα (1) και μπορεί να παραλειφθεί όταν n/N είναι μικρότερο από 10% δηλαδή, όταν το δείγμα περιέχει λιγότερο από 10% του πληθυσμού.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι αξιοσημείωτο. Σε ένα πληθυσμό με μία σταθερή ποσότητα μεταβλητικότητας (μία δεδομένη τιμή της σ), το τυπικό σφάλμα του μέσου εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος του δείγματος και σε ασήμαντο βαθμό από το κλάσμα του πληθυσμού το οποίο περιλαμβάνεται στο δείγμα. Για δεδομένο σ, ο μέσος ενός δείγματος 100 μονάδων είναι σχεδόν τόσο ακριβής όταν το μέγεθος του πληθυσμού είναι 200.000 όσο όταν το μέγεθος του πληθυσμού είναι 20.000 ή 2.000. Από διαίσθηση, μερικοί άνθρωποι πιστεύουν ότι δεν μπορεί κάποιος πιθανώς να πάρει ακριβή αποτελέσματα από ένα δείγμα 100 μονάδων που λαμβάνεται από ένα πληθυσμό 200.000 μονάδων επειδή μόνο ένα μικροσκοπικό κλάσμα του πληθυσμού έχει μετρηθεί. Πράγματι, εάν το σχέδιο δειγματοληψίας είναι ακριβές ή όχι εξαρτάται πρωταρχικά από το μέγεθος του $\sigma/\sqrt{n}$. Αυτό δείχνει γιατί η δειγματοληψία μπορεί να επιφέρει μία μεγάλη μείωση στον αριθμό των απαιτούμενων μετρήσεων.

2.2.5. Εναλλακτική μέθοδος αποδείξεως

Ο Cornfield (1994) πρότεινε μία μέθοδος αποδείξεως των κύριων αποτελεσμάτων για την απλή τυχαία δειγματοληψία χωρίς επανάθεση, η οποία μας καθιστά ικανούς να χρησιμοποιούμε βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία του άπειρου πληθυσμού. Έστω a_i μία τυχαία μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 εάν η i μονάδα περιληφθεί στο δείγμα και την τιμή 0 άλλως. Ο μέσος του δείγματος $\bar{x}$ θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{N} a_i x_i$$

(2.24)

όπου το άθροισμα αναφέρεται σε όλες τις μονάδες του πληθυσμού N.

Σ'αυτή την έκφραση τα a_i είναι τυχαίες μεταβλητές και τα x_i είναι ένα σύνολο σταθερών αριθμών.

Προφανώς:

$$P(a_i=1)=\frac{n}{N},\ P(a_i=0)=1-\frac{n}{N}$$

συνεπώς, a_i κατανέμεται σαν μία διωνυμική μεταβλητή σε μία απλή δοκιμή, με P=n/N. Γι'αυτό:

$$E(a_i)=P=n/N \quad \text{και} \quad V(a_i)=PQ=\frac{n}{N}(1-\frac{n}{N}) \tag{2.25}$$

Για να βρούμε τη διακύμανση $V(\bar{x})$, χρειαζόμαστε επίσης τη συνδιακύμανση των a_i και a_j. Το γινόμενο $a_i \cdot a_j$ είναι 1 όταν η i και j μονάδα περιέχονται στο δείγμα και 0 άλλως. Η πιθανότητα ότι δύο συγκεκριμένες μονάδες περιέχονται στο δείγμα, βρίσκεται εύκολα και είναι n(n-1)/N(N-1).

Συνεπώς:

$$Cov(a_i a_j) = E(a_i a_j)-E(a_i).E(a_j)$$

$$=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}-(\frac{n}{N})^2=$$

$$= - \frac{n}{N(N-1)} \left[-(n-1) + \frac{n(N-1)}{N} \right] =$$

$$= - \frac{n}{N(N-1)} \left[-n+1+ \frac{nN-n}{N} \right] = - \frac{n}{N(N-1)} \left(\frac{N-n}{N}\right) =$$

$$= - \frac{n}{N(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

2.26

Εφαρμόζοντας αυτή την προσέγγιση για να βρούμε τη διακύμανση $V(\bar{x})$, θα έχουμε από την (2.24):

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{1}^{N} X_i^2\, V(a_i) + 2\sum_{i<j}^{N} X_i X_j Cov(a_i a_j)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\Sigma X_i^2 - 2\frac{n}{N(N-1)}\left(1-\frac{n}{N}\right)\Sigma X_i X_j\right] =$$

$$= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\Sigma X_i^2 - \frac{2}{N-1}\Sigma X_i X_j\right] =$$

$$= \frac{1-f}{nN}\left[\Sigma X_i^2 - \frac{2}{N-1}\Sigma X_i X_j\right] =$$

$$= \frac{1-f}{nN}\left[\Sigma X_i^2 - \frac{1}{N-1}\Sigma X_i^2 + \frac{1}{N-1}\Sigma X_i^2 - \frac{2}{N-1}\Sigma X_i X_j\right] =$$

$$= \frac{1-f}{nN}\left[\left(1+\frac{1}{N-1}\right)\Sigma X_i^2 - \frac{1}{N-1}\left(\Sigma X_i^2 + 2\ \Sigma X_i X_j\right)\right] =$$

$$= \frac{1-f}{nN}\left[\frac{N}{N-1}\ \Sigma X_i^2 - \frac{1}{N-1}\ (\Sigma X_i)^2\right] =$$

$$= \frac{1-f}{nN}\left[\frac{N}{N-1}\ \Sigma X_i^2 - \frac{1}{N-1}\ X^2\right] =$$

$$= \frac{1-f}{nN}\ \frac{N}{N-1}\left[\cdot\ \Sigma X_i^2 - \frac{1}{N}\ X^2\right] =$$

$$= \frac{1-f}{n(N-1)}\left[\Sigma X_i^2 - \frac{1}{N}\ X^2\right] =$$

$$= \frac{1-f}{n(N-1)}\left[\Sigma X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{N}\right] =$$

$$= \frac{1-f}{n(N-1)}\ \sum_{1}^{N} (X_i-\bar{X})^2 = (1-f)\ \frac{S^2}{n}$$

Μία παρόμοια διαδικασία εφαρμόζεται όταν η δειγματοληψία γίνεται με επανάθεση.

Σ΄αυτή την περίπτωση η i μονάδα μπορεί να παρουσιαστεί 0,1,2,...,n φορές στο δείγμα. Έστω t_i ο αριθμός των φόρων, που η i μονάδα εμφανίζεται στο δείγμα.

Τότε:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{N} t_i X_i$$

(2.27)

Επειδή η πιθανότητα με την οποία η i μονάδα μπορεί να επιλεγεί στο δείγμα είναι 1/N για κάθε επιλογή, η μεταβλητή ti κατανέμεται όπως ένας διωνυμικός αριθμός επιτυχιών σε «n» δοκιμές με P=1/N.

Ετσι:

$$E(t_i) = \frac{n}{N}, \quad V(t_i) = n\left(\frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

(2.28)

Από κοινού, οι μεταβλητές ti, ακολουθούν μία πολυωνυμική κατανομή. Γι΄αυτό:

$$Cov\ (t_i t_j) = -\frac{n}{N^2}$$

(2.29)

Με χρησιμοποίηση των (2.27), (2.28) και (2.29), θα έχουμε για δειγματοληψία με επανάθεση:

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{1}^{N} X_i^2 \frac{n(N-1)}{N^2} - 2\sum_{i<j}^{N} X_i X_j \frac{n}{N^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{nN}\sum_{1}^{N}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{N-1}{N}\frac{S^2}{n}.$$

2.2.6. Η κανονική προσέγγιση

το τυπικό σφάλμα της Εκτιμήσεως $S_{\bar{x}}$, εκφράζει τη διασπορά του πλήθους όλων των δυνατών εκτιμήσεων $\bar{x}$ από το πραγματικό μέσο πληθυσμού $\bar{\bar{X}}$. Οσο μικρότερο είναι το τυπικό σφάλμα $S_{\bar{x}}$, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να έχουμε μικρό σφάλμα $(\bar{x}-\bar{\bar{X}})$ στην εκτίμηση του μέσου.

Όταν από ένα πληθυσμό που κατανέμεται κανονικά με μέσο μ και διακύμανση σ^2, λάβουμε δείγματα μεγέθους «n», τότε οι μέσοι $\bar{\bar{x}}$ των δειγμάτων αυτών κατανέμονται επίσης κανονικά με τον ίδιο μέσο αλλά διακύμανση σ^2/n.

Έχει επίσης αποδειχτεί ότι για οποιοδήποτε πληθυσμό που έχει μία πεπερασμένη τυπική απόκλιση, η κατανομή του δειγματικού μέσου τείνει να γίνει κανονική όσο το «n» αυξάνει. Η απόδειξη αφορά σε άπειρους πληθυσμούς.

Για δειγματοληψία χωρίς επανάθεση από πεπερασμένους πληθυσμούς, ο Hajek (1960) έχει διατυπώσει τους απαραίτητους και επαρκείς όρους κάτω από τους οποίους η κατανομή του δειγματικού μέσου τείνει να γίνει κανονική, ακολουθώντας τις εργασίες των Erdos και Renyi (1959) και Madow (1948). O Hajek θεωρεί ακολουθίες τιμών (n_v) (N_v) που τείνουν στο άπειρο, ώστε και η (N_v-n_v) να τείνει στο άπειρο. Οι μετρήσεις στον ν-πληθυσμό συμβολίζονται με X_{vi}, $(i=1,2,\ldots,N_v)$. Γι'αυτό τον πληθυσμό, έστω S_{vT} το σύνολο των μονάδων του για τις οποίες:

$$|x_{vi}-\bar{X}_v| > \tau\sqrt{n_v(1-f_v)S_v}$$

όπου $\bar{X}_v$, S_v, f_v είναι ο πληθυσμιακός μέσος, η τυπική απόκλιση και η διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού, και $t>0$.

Τότε, η συνθήκη του Lindeberg,

$$\lim \frac{\Sigma(x_{vi} - \bar{X}_v)^2}{(N_v-1)S_v^2}, \quad v \to \infty$$

(Το άθροισμα αναφέρεται στο σύνολο S_{VT})

Είναι ικανή και αναγκαία για να εξασφαλίσει ότι ο $\bar{x}_v$ τείνει να κατανέμεται κανονικά με μέσο και διακύμανση που δίνονται στα θεωρήματα 2.1 και 2.2

Στις πρακτικές εφαρμογές,. πολλές φορές γίνεται η υπόθεση που απορρέει από το κεντρικό οριακό θεώρημα ότι ο δειγματικός μέσος $\bar{x}$ ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή όταν το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο. Γεννιέται όμως το ερώτημα: Για κάποιο συγκεκριμένο πληθυσμό πόσο μεγάλο θα πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος έτσι ώστε η κανονική προσέγγιση να είναι ικανοποιητική;

Οι μη κανονικοί πληθυσμοί ποικίλλουν ως προς τη φύση τους και το βαθμό αποκλίσεως από την κανονικότητα. Π.χ. σε ένα μη κανονικό αλλά συμμετρικό πληθυσμό η κατανομή του δειγματικού μέσου θα τείνει κατά κανόνα ταχύτερα προς την κανονικότητα απ΄ότι σ΄ένα μη συμμετρικό.

Είναι φανερό ότι ο βαθμός ασυμμετρίας ενός πληθυσμού αποτελεί αποφασιστικό παράγοντα για τον καθορισμό ενός κατωτάτου ορίου για το μέγεθος του δείγματος.

Ο καθηγητής W. Cochran συνιστά ένα εμπειρικό κανόνα για τον προσδιορισμό του «n», σύμφωνα με τον οποίο, για πληθυσμούς στους οποίους η κύρια απόκλιση από την κανονικότητα οφείλεται σε έντονη θετική ασυμμετρία, το μέγεθος του δείγματος δε θα πρέπει να είναι κατώτερο από το εικοσιπενταπλάσιο του τετραγώνου του συντελεστή ασυμμετρίας του Fisher, δηλαδή:

$$n > 25\,\beta_1^2$$

όπου

$$\beta_1 = \frac{E(X_i-\bar{X})^3}{\sigma^3} = \frac{1}{N\sigma^3}\sum_{1}^{N}(X_i-\bar{X})^3$$

Στις δειγματοληπτικές έρευνες η κανονική προσέγγιση χρησιμοποιείται βασικά για τον υπολογισμό διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Με την υπόθεση ότι ο δειγματικός μέσος κατανέμεται κανονικά, ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης του άγνωστου πληθυσμιακού μέσου $\bar{X}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} - 1{,}96 s_{\bar{x}} < \bar{X} < \bar{x} + 1{,}96 s_{\bar{x}}$$

(2.30)

που σημαίνει ότι, με διαδοχική δειγματοληψία για την εκτίμηση του πραγματικού μέσου $\bar{X}$, μόνο στο 5% των περιπτώσεων η εκτίμηση θα είναι εκτός των ορίων της (2.30)

Από τη μελέτη θεωρητικών κατανομών που παρουσιάζουν ασυμμετρία και από τα αποτελέσματα δειγματοληψίας επί πληθυσμών που παρουσιάζουν ασυμμετρία, μερικά συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν για το τι συνήθως συμβαίνει στους συντελεστές εμπιστοσύνης (ή πιθανότητες εμπιστοσύνης), όταν δειγματοληπτούμε από πληθυσμούς με θετική ασυμμετρία.

1. Η συχνότητα με την οποία ο ισχυρισμός (2.30) είναι λανθασμένος είναι συνήθως μεγαλύτερη από 5%

2. Η συχνότητα με την οποία:

$$\bar{X} > \bar{x} + 1{,}96 s_{\bar{x}}$$

είναι μεγαλύτερη από 2,5%

3. Η συχνότητα με την οποία:

$$\bar{X} < \bar{x} - 1,96 s_{\bar{x}}$$

είναι μικρότερη από 2,5%.

Σαν μία εφαρμογή, θεωρούμε μία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, έτσι ώστε η ακριβής κατανομή του δειγματικού μέσου $\bar{x}$, μπορεί να προκύψει από τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής. Η μεταβλητή X παίρνει μόνο δύο τιμές - την τιμή h με πιθανότητα P και την τιμή 0 με πιθανότητα Q. Ο πληθυσμιακός μέσος είναι $\bar{X}=Ph$. Ένα απλό τυχαίο δείγμα μεγέθους «n» περιέχει a μονάδες που έχουν την τιμή h και (n-a) μονάδες που έχουν την τιμή 0. Για το δείγμα:

$$\Sigma x = ah, \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{ah}{n}$$

$$(n-1)s^2 = \Sigma x^2 - n\bar{x}^2 = ah^2 - \frac{a^2h^2}{n}$$

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n} = \frac{h^2}{n^2}\,\frac{a(n-a)}{n-1}$$

Συνεπώς, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον πληθυσμιακό μέσο $\overline{X}$ είναι:

$$\bar{x} \pm 1,96\, s_{\bar{x}} = \frac{h}{n}\left[a \pm 1,96 \sqrt{\frac{a(n-a)}{n-1}}\right]$$

Έστω n=400, P-0,10. Τότε X=0,10h. Με την εμπειρική μέθοδο βρίσκουμε ότι εάν α=29, το ανώτερο όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι 39,18h/400=0,098h, ενώ αντιθέτως για α=30 δίνει 40, 34h/400=0,101h. Συνεπώς οποιαδήποτε τιμή του α≤29 δίνει ένα ανώτερο όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης που είναι αρκετά χαμηλό. Παρομοίως βρίσκουμε ότι εάν α≥54 το κατώτερο όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι αρκετά υψηλό.

Η μεταβλητή α ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με n=400, P=0,10.

Από τους σχετικούς πίνακες προκύπτει ότι:

P(ότι το ανώτερο όριο καθορίζεται αρκετά χαμηλά) =P(α≤ 29)=0,0357

P(ότι το κατώτερο όριο καθορίζεται αρκετά υψηλά) =P(α≥ 54)=0,0217

P(λάθους)=0,0574

Τέλος, με την υπόθεση ότι η εκτίμηση του συνολικού μεγέθους X (που είναι $\hat{X}=N\bar{x}$ κατανέμεται κανονικά, και επειδή:

$$v(\hat{X}) = N^2 v(\bar{x}) = N^2 (1-f) \frac{s^2}{n}$$

ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης του συνολικού μεγέθους X του πληθυσμού δίνεται από τη σχέση:

$$N\bar{x} - 1,96 \frac{Ns}{\sqrt{n}} \sqrt{1-f} < X < N\bar{x} + 1,96 \frac{Ns}{\sqrt{n}} \sqrt{1-f}$$

(2.32)

2.2.7. Αποτέλεσμα της μη κανονικότητας επί της εκτιμούμενης διακυμάνσεως

Ένα αποτέλεσμα της μη κανονικότητας είναι ότι η δειγματική διακύμανση s^2 διακυμαίνεται εντονότερα από δείγμα σε δείγμα, απ΄ότι αναμένουμε εάν υποθέσουμε ότι δειγματοληπτούμε από ένα κανονικό πληθυσμό. Για κάθε άπειρο πληθυσμό, η διακύμανση της εκτιμήσεως s^2 σε τυχαία δείγματα μεγέθους ‹n› είναι :

$$V(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} + \frac{k_4}{n}$$

(2.33)

Ο πρώτος όρος $2\sigma^4/n\text{-}1$ είναι η διακύμανση της εκτιμήσεως S^2 (δειγματική διακύμανση) όταν ο δειγματοληπτούμενος πληθυσμός είναι κανονικός. Ο δεύτερος όρος k_4/n αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της μη κανονικότητας. Η ποσότητα k_4 δίνεται από τον τύπο:

$$k_4 = E(x_i - \bar{X})^4 - 3\sigma^4$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η ασυμμετρία στην αρχική κατανομή μετρούμενη με β_1, δεν επηρεάζει την σταθερότητα της εκτιμήσεως S^2: Βασικός παράγοντας είναι η τέταρτη ροπή του δειγματοληπτούμενου πληθυσμού.

Η ποσότητα k_4 είναι μηδέν στην περίπτωση της κανονικής κατανομής. Επίσης, παίρνει κατά περίπτωση θετικές ή αρνητικές τιμές, αλλά η δειγματοληπτική πρακτική δείχνει ότι η k_4 είναι θετική τις περισσότερες φορές και μπορεί να έχει μία υψηλή τιμή για μερικούς γεννήτορες πληθυσμούς .

Μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (2.32) ως:

$$V(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}\left(1+\frac{n-1}{2n}\frac{k_4}{\sigma^4}\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}\left(1+\frac{n-1}{2n}\beta_2\right)$$

όπου $\beta_2 = k_4/\sigma^4$, είναι ο συντελεστής κυρτώσεως κατά Fisher. Η ποσότητα μέσα στην παρένθεση δείχνει τον παράγοντα με τον οποίο η διακύμανση της εκτιμήσεως S^2 αυξάνει εξ'αιτίας της μη κανονικότητας. Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο παράγοντας είναι σχεδόν ανεξάρτητος του μεγέθους του δείγματος «n», έτσι ώστε ο παράγοντας αυξήσεως παραμένει ακόμη και σε μεγάλα δείγματα.

Η σημασία των ανωτέρω στις πρακτικές εφαρμογές είναι ότι μερικές φορές χρησιμοποιούμε τις τιμές της S^2 για να συγκρίνουμε την ακρίβεια μιας μεθόδου δειγματοληψίας με την ακρίβεια μιας άλλης, ή για να εκτιμήσουμε το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος ώστε να επιτύχουμε καθορισμένο βαθμό ακρίβειας στον $\bar{x}$. Γι'αυτούς τους σκοπούς πρέπει να έχουμε κάποια ιδέα της ακρίβειας της εκτιμήσεως S^2, ιδιαίτερα όταν αυτή (η εκτίμηση) έχει προκύψει από λίγα δεδομένα. Άρα η χρησιμοποίηση του τύπου της κανονικής κατανομής για εκτίμηση της διακυμάνσεως της S^2, μπορεί να δώσει μία πολύ εσφαλμένη εντύπωση για την σταθερότητά της S^2.

3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Το δείγμα μ'αυτή τη μέθοδο λαμβάνεται ως εξής:

Έστω Ν το στοιχείο ενός πληθυσμού και n το μέγεθος του τυχαίου δείγματος τότε $N/n=\alpha$. (όπου α=διάστημα δειγματοληψίας)

Σχηματίζουμε μια αριθμητική πρόοδο ως εξής:

(I) $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots (n-1)\alpha$

Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό β, όπου $0<\beta\leq\alpha$ και αφού τον προσθέσουμε στους όρους της (I) δημιουργείται η νέα αριθμητική πρόοδος.

(II) $0+\beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, \ldots (\nu-1)\alpha+\beta$

Τα στοιχεία του καταλόγου που έχουν αύξοντα αριθμό όπως οι όροι της (II) αποτελούν το συστηματικό δείγμα.

Πλεονεκτήματα της συστηματικής δειγματοληψίας:

. παρουσιάζει τα πλεονεκτήματα της τυχαίας δειγματοληψίας

. επιπλέον ομαδοποιεί το πληθυσμό. Σύμφωνα με την καταγραφή των στοιχείων του στον κατάλογο παίρνει στο δείγμα ένα στοιχείο από κάθε ομάδα. Έτσι τα στοιχεία του πληθυσμού αντιπροσωπεύονται με την ίδια αναλογία στο δείγμα κι άρα το δείγμα είναι περισσότερο αντιπροσωπευτικό απ' ότι στην τυχαία δειγματοληψία.

Μειονεκτήματα της συστηματικής δειγματοληψίας:

. έχει τα μειονεκτήματα του τυχαίου δείγματος.

. απαιτεί καταλόγους.

. υπάρχει κίνδυνος να πέσουμε στην τυχαία φάση περιοδικότητας, όταν τα στοιχεία του καταλόγου παρουσιάζουν περιοδικότητα καταγραφής. Αποτέλεσμα αυτού είναι το μη αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού.

Το πρόβλημα αυτό λύνεται αν στη θέση του σταθερού αριθμού β προσθέσουμε τους όρους της προόδου (ι) κάθε φορά· έναν τυχαίο αριθμό $β_i$ όπου $0<β_i<α$. Τότε θα πάρουμε στο δείγμα τα στοιχεία που έχουν αύξοντα αριθμό όπως οι όροι της σειράς (ιιι):

(ΙΙΙ) $β_1$, $α+β_2$, $2α+β_3$........$(n-1)\ α+β_n$.

Ένα συστηματικό δείγμα, είναι ένα απλό τυχαίο δείγμα μιας μονάδος δειγματοληψίας (συσσωρευτικής μονάδος) από ένα πληθυσμό Κ μονάδων δειγματοληψίας (συσσωρευτικών μονάδων).

3.1 ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ.

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει το σύμβολο x_{ij} δηλώνει την j μονάδα του i συστηματικού δείγματος, έτσι j=1,2,......n και i=1,2,...., k. O μέσος του i δείγματος συμβολίζεται με $\bar{x}_i$.

Δείγμα:	1	2	...	i	...	k
	x_{11}	x_{21}	...	x_{i1}	...	x_{k1}
	x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	...	x_{k2}
	...	...		...		...
	x_{1j}	x_{2j}	...	x_{ij}	...	x_{kj}
	...	...		...		...
	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{in}	...	x_{kn}
Μέσοι:	$x_{1.}$	$x_{2.}$		$x_{i.}$		$x_{k.}$

Ο Δειγματικός μέσος $\bar{x}_i$ κατά τη συστηματική δειγματοληψία αποτελεί αμερόληπτη εκτίμηση του μέσου του πληθυσμού $\bar{X}$.

$$E(\bar{x}_{i.}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_{i.} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n\bar{x}_{i.}}{n \cdot k} = \frac{X}{N} = \bar{X}$$

Η διακύμανση του δειγματικού μέσου θα είναι:

$$V(\bar{x}_{i.}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_{i.} - \bar{X})^2,$$

η διακύμανση αυτή δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθεί εκ των στοιχείων ενός μόνο δείγματος, ενώ στην περίπτωση της απλής τυχαίας δειγματοληψίας αυτό είναι δυνατόν.

Θεώρημα 3.1.

Η διακύμανση του μέσου ενός συστηματικού δείγματος είναι:

$$V(\bar{x}_{i.}) = \frac{N-1}{N} S^2 - \frac{k(n-1)}{N} S_w^2 \tag{3.1}$$

όπου

$$S_w^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$$

Είναι η διακύμανση μεταξύ των μονάδων που βρίσκονται στο ίδιο συστηματικό δείγμα. Ο παρονομαστής αυτής της διακυμάνσεως, k(n-1), προκύπτει από τους συνήθεις κανόνες της αναλύσεως διακυμάνσεως: Κάθε ένα από τα k δείγματα συνεισφέρει (n-1) βαθμούς ελευθερίας στο άθροισμα τετραγώνων του αριθμητή.

Πόρισμα: Ο Μέσος ενός συστηματικού δείγματος είναι περισσότερο ακριβής από το μέσο του απλού τυχαίου δείγματος εάν και μόνο εάν:

$$S_W{}^2 > S^2 \tag{3.2}$$

4. Δειγματοληψία κατά στρώματα.

Εάν ένας πληθυσμός, ως ενιαίο σύνολο είναι ανομοιογενές, από την άποψη της εξεταζόμενης ιδιότητας, με την απλή τυχαία δειγματοληψία δεν μπορούμε να επιτύχουμε ικανοποιητικά αντιπροσωπευτικό δείγμα, εκτός εάν πάρουμε πολλές μονάδες δείγματος. Στην περίπτωση αυτή, εφ' όσον ο πληθυσμός μπορεί να ομαδοποιηθεί σε ομοιογενή στρώματα εφαρμόζουμε μια άλλη δειγματοληψία στην οποία με πολύ λιγότερες μονάδες δείγματος μπορούμε να επιτύχουμε ικανοποιητικότερα αποτελέσματα από ότι στην απλή τυχαία δειγματοληψία.

Αυτή η δειγματοληψία λέγεται δειγματοληψία κατά στρώματα και διενεργείται ως εξής:

Ο όλος ανομοιογενής πληθυσμός (με μεγάλη διακύμανση σ^2) υποδιαιρείται σε k. στρώματα, με μονάδες κατά το δυνατό ομοιογενείς. Για κάθε στρώμα υπολογίζεται η εντός στρώματος διακύμανση $\sigma^2{}_i$, (όπου i=1,2......k). Φυσικά η εντός κάθε στρώματος διακύμανση $\sigma^2{}_i$ είναι πολύ μικρότερη από την ενιαία διακύμανση σ^2.

Το όλο δείγμα μεγέθους n κατανέμεται σε k στρώματα σύμφωνα με της εξής τρεις μεθόδους κατανομής:

α) Ανάλογος κατανομή $h_i = (N_i / N) n$

β) Δυσανάλογος κατανομή $h_i = (N_i \sigma_i / \Sigma N_i\sigma_i) n$

γ) Άριστη κατανομή (άριστη διάταξη) $h_i = [(N_i \sigma_i / \sqrt{Ci}) / (\Sigma N_i\sigma_i/\sqrt{Ci})] n$

Αντί των N που είναι το μέγεθος του πληθυσμού για το i στρώμα μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα σχετικά μεγέθη στρωμάτων Wi=Ni/N, δηλαδή το ποσοστό των μονάδων του i στρώματος σε σχέση με το σύνολο των μονάδων του όλου πληθυσμού N.

Το πεδίο εφαρμογής των παραπάνω είναι το εξής:

- Η ανάλογος κατανομή εφαρμόζεται όταν οι διακυμάνσεις των διαφόρων στρωμάτων δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές μεταξύ τους οπότε αγνοούνται.

- Η δυσανάλογος κατανομή εφαρμόζεται όταν έστω και μια διακύμανση στρώματος παρουσιάζει σημαντικά μεγαλύτερη διαφορά από τις άλλες. Από το στρώμα που έχει τη μεγαλύτερη διακύμανση λαμβάνονται περισσότερες μονάδες δείγματος από ότι στην ανάλογο.

- Η άριστη κατανομή εφαρμόζεται όταν, πλέον της ανομοιογένειας των διακυμάνσεων, ποικίλει το κόστος μονάδος επιλογής από στρώμα σε στρώμα. Από το στρώμα που έχει το μεγαλύτερο κόστος, λαμβάνονται λιγότερες μονάδες δείγματος σε σχέση με τη δυσανάλογο κατανομή.

Εφ' όσον γίνει ο επιμερισμός, οι μονάδες του δείγματος λαμβάνονται από κάθε στρώμα με τρόπο απεριόριστο. Δηλαδή και η απλή τυχαία (απεριόριστος) δειγματοληψία είναι μια δειγματοληψία κατά στρώματα με ένα μόνο, όμως, στρώμα.

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της κατά στρώματα δειγματοληψίας.

Η κατά στρώματα δειγματοληψία είναι η καλύτερη δειγματοληψία και η κατ' εξοχήν εφαρμοζόμενη σήμερα γιατί με την υποδιαίρεση του πληθυσμού σε στρώματα ομοιογενή, με λίγες μονάδες δείγματος επιτυγχάνεται μεγαλύτερη αντιπροσώπευση του πληθυσμού από ότι σε άλλες δειγματοληψίες. Εξ' άλλου παρέχει λεπτομερείς πληροφορίες για κάθε στρώμα χωριστά που μπορεί να ενδιαφέρουν την όλη έρευνα.

Η δειγματοληψία κατά στρώματα είναι τυχαία δειγματοληψία, άρα παρέχει αντικειμενική αντιπροσώπευση και δυνατότητα προσδιορισμού του μεγέθους του δειγματοληπτικού σφάλματος. Από πλευράς μειονεκτημάτων, η κατά στρώματα δειγματοληψία παρουσιάζει τα μειονεκτήματα του τυχαίου δείγματος, δηλαδή απαιτεί χρόνο και χρήμα. Ακόμα χρειάζεται καταλόγους χωριστά για κάθε στρώμα.

4.1 Σύγκριση μεταξύ ανάλογου και δυσανάλογου δειγματοληψίας (κατανομής).

Η ανάλογος κατανομή αγνοεί τη διακύμανση, των στρωμάτων, και επιμερίζει το δείγμα σύμφωνα με τον αριθμό των μονάδων του στρώματος.

Η δυσανάλογος κατανομή, εκτός από το μέγεθος των μονάδων του στρώματος Nj, στον επιμερισμό του δείγματος, λαμβάνει υπ' όψιν και τη μέση απόκλιση τετραγώνου σ του στρώματος.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε, ότι ανάλογος δειγματοληψία πλεονεκτεί έναντι της δυσαναλόγου, στο ότι δε χρειάζεται τις διακυμάνσεις των στρωμάτων και μειονεκτεί στο ότι αγνοεί έναν παράγοντα, τη μέση απόκλιση σ, που θα έπρεπε να το λαμβάνει υπ' όψιν.

Γενικά σε περιπτώσεις πληθυσμών που τα στρωματά τους δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές διακυμάνσεων καλύτερη κατανομή είναι η ανάλογος. Εάν όμως οι διακυμάνσεις των στρωμάτων παρουσιάζουν μεταξύ τους σημαντικές διαφορές καλύτερη κατανομή είναι η δυσανάλογος.

4.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΤΗΣ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

4.2.1 Ιδιότητες των εκτιμήσεων.

Για τον πληθυσμιακό μέσο ανά μονάδα δειγματοληψίας, η εκτίμηση που χρησιμοποιείται στην στρωματοποιημένη δειγματοληψία είναι $\bar{x}_{st}$, όπου

$$\bar{x}_{st} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{k} N_h \bar{x}_h$$

4.10

όπου $N=N_1+N_2+....+N_K$.

Η εκτίμηση $\bar{x}_{st}$ δεν είναι γενικά η ίδια με το δειγματικό μέσο. Ο δειγματικός μέσος, $\bar{x}$ είναι:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{k} N_h \bar{x}_h$$

4.11

Η διαφορά είναι ότι στον $\bar{x}_{st}$, οι εκτιμήσεις από τα επί μέρους στρώματα χρησιμοποιούν τα βάρη N_h/N. Προφανώς, ο x συμπίπτει με τον $\bar{x}_{st}$ εάν:

$$\frac{n_h}{n} = \frac{N_h}{N} \quad ή \quad \frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N} \quad ή \quad f_h = f$$

Αυτό σημαίνει ότι το κλάσμα δειγματοληψίας είναι το ίδιο σε όλα τα στρώματα.

Θεώρημα 4.1

Έστω ότι, κατόπιν επιλογής ενός δείγματος κατά στρώμα, έχουμε υπολογίσει εκ των δεδομένων αυτού τους μέσους:

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

Δηλαδή τις αμερόληπτες εκτιμήσεις των μέσων των στρωμάτων.

Τότε, η συνάρτηση :

$$\bar{x}_{st} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{k} N_h \bar{x}_h$$

Είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια συνάρτηση του μέσου $\bar{X}$ του πληθυσμού. Δηλαδή:

$$E(\bar{x}_{st}) = \bar{X}$$

Θεώρημα 4.2.

Στην στρωματοποιημένη δειγματοληψία, η διακύμανση του $\bar{x}_{st}$, είναι:

$$V(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{k} N_h^2 V(\bar{x}_h) = \sum_{h=1}^{k} W_h^2 V(\bar{x}_h)$$

όπου, $V(\bar{x}_h) = E(\bar{x}_h - \bar{X}_h)^2$

4.12

Υπάρχουν δυο περιορισμοί σ' αυτό το Θεώρημα:(α)$\bar{x}_h$ πρέπει να είναι μια αμερόληπτη εκτίμηση του $\bar{X}_h$ και (β) τα δείγματα πρέπει να επιλέγονται ανεξάρτητα στα διάφορα στρώματα.

Πόρισμα: η διακύμανση της εκτιμήτριας:

$$\hat{X}_{st} = N\bar{x}_{st}$$

του συνόλου (Χ) του πληθυσμού, θα είναι:

$$V(\hat{X}_{st}) = \sum_{h=1}^{k} N_h^2 \frac{S_h^2}{n_h} (1-f_h)$$

4.13

Συνήθως το ολικό μέγεθος του δείγματος «n» κατανέμεται στα επί μέρους στρώματα κατά δυο τρόπους που παρουσιάζονται στις ακόλουθες παραγράφους.

4.2.2 Αναλογική κατανομή (proportional allocation)

Έν προκειμένω έχουμε:

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \ldots = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

ή $f_h=f$, όπου h= 1,2,3......,k, οπότε

$$n_h = n \frac{N_h}{N}$$

Σαν δηλωτικό του τρόπου κατανομής του δείγματος στα επί μέρους στρώματα, συμβολίζουμε την εκτίμηση του πραγματικού μέσου $\bar{\bar{X}}$ διά $\bar{x}_{prop}$ στην περίπτωση της αναλογικής στρωματοποιημένης δειγματοληψίας (prorortional allocation), αντί $\bar{x}_{st}$, που δηλώνει οποιαδήποτε κατανομή του δείγματος.

Πόρισμα 1. Με αναλογική κατανομή, εάν θέσουμε στην

$$n_h = \frac{nN_h}{N}$$

θα εχουμε:

$$V(\bar{x}_{prop}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{k} N_h^2(1-f)\frac{S_h^2}{nN_h/N} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{k} N_h(1-f)\frac{S_h^2}{n} =$$

$$= \frac{1-f}{n}\sum_{h=1}^{k} W_h S_h^2$$

4.14

Πόρισμα 2. Εάν η δειγματοληψία είναι αναλογική και οι διακυμάνσεις σε όλα τα στρώματα έχουν την ίδια τιμή $S^2{}_O$(μια λογική υπόθεση σε ορισμένες εφαρμογές), παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$V(\bar{x}_{prop}) = \frac{S_o^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$$

4.15

διότι

$$\sum_{h=1}^{k} W_h = \sum_{h=1}^{k} \frac{N_h}{N} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{k} N_h = \frac{N}{N} = 1$$

Αμερόληπτες εκτιμήτριες συναρτήσεις των ανωτέρω διακυμάνσεων προκύπτουν εύκολα εάν αντικαταστήσουμε τη διακύμανση S^2_h, με την αμερόληπτη εκτίμηση της, s^2_h:

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1}\sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi} - \bar{x}_h)^2$$

4.16

Το αποτέλεσμα της 4.15 είναι το ίδιο όπως εκείνο για τη διακύμανση του μέσου, με απλή τυχαία δειγματοληψία, εκτός του ότι η S^2_o , η κοινή διακύμανση μέσα στα στρώματα, εμφανίζεται στην θέση της διακυμάνσεως, S^2.

Στην πράξη, η εκτίμηση της S^2_0 υπολογίζεται από μια ανάλυση διακυμάνσεως των δεδομένων.

Σαν παράδειγμα αναλογικής κατανομής, παρέχονται τα δεδομένα του πίνακα 4.1 που προέρχονται από μια έρευνα του Clapham της δυνατότητας εφαρμογής της δειγματοληψίας για την εκτίμηση των αποδόσεων μικρών σιτοκαλλιεργειών.

Ένας ορθογώνιος αγρός σιτοκαλλιέργειας διαιρέθηκε εγκάρσια σε τρία ίσα στρώματα. Δέκα δείγματα, έκαστο ενός μέτρου μήκους σε απλή σειρά, επελέγησαν με απλή τυχαία δειγματοληψία από κάθε στρώμα. Το πρόβλημα είναι να υπολογίσουμε το τυπικό σφάλμα της εκτιμούμενης μέσης αποδόσεως ανά μέτρο της σειράς.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

Ανάλυση διακυμάνσεως ενός στρωματοποιημένου τυχαίου δείγματος (Μέση απόδοση ανά μέτρο).

Πηγή Μεταβολής	Βαθμοί ελευθερίας	Αθροισμα τετραγώνων	Μέσο τετράγωνο
Μεταξύ των στρωμάτων	2	2.073	1.036,5
Εντός των στρωμάτων	27	6.491	240,4
Σύνολο	29	8.564	295,3

Σ' αυτό το παράδειγμα, $s^2_o = 240.4$, $s_o = 15.5$ και $n = 30$

Επειδή το δείγμα θεωρείται ένα αμελητέο τμήμα του όλου αγρού, το n/N μπορεί να αγνοηθεί, οπότε:

$$v(\bar{x}_{prop}) = \frac{s_o^2}{n} = \frac{240,4}{30}$$

και

$$s(\bar{x}_{prop}) = \frac{s_o^2}{\sqrt{n}} = \frac{15,5}{\sqrt{30}} = 2,83$$

4.2.3 Άριστη κατανομή(optimum allocation)

Δοθέντος του μεγέθους «n» ενός δείγματος, γεννιέται το ερώτημα: " Πως πρέπει να επιλεγούν τα μεγέθη $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ ούτως ώστε η διακύμανση $V(\bar{x}_{st})$ να γίνεται ελάχιστη;".

Το πρόβλημα είναι να ελαχιστοποιήσουμε την

$$V(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2}\left[\sum_{h=1}^{k} \frac{N_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{k} N_h S_h^2\right]$$

υπό τον περιορισμό:

$$\sum_{h=1}^{k} n_h = n.$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange, επιλέγουμε τα n_h και τον πολλαπλασιαστή λ που ελαχιστοποιούν την ποσότητα:

$$F = V(\bar{x}_{st}) + \lambda\, [\Sigma n_h - n]$$

Παίρνουμε της μερικές παραγώγους της F ως προς n_h και τις μηδενίζουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial n_h} = -\frac{1}{N^2} \cdot \frac{N_h^2 S_h^2}{n_h^2} + \lambda = 0$$

ή

$$\frac{N_h^2 S_h^2}{n_h^2} = \lambda \cdot N^2$$

ή

$$\frac{N_h S_h}{n_h} = \sqrt{\lambda} \cdot N$$

ή

$$n_h = \frac{N_h S_h}{\sqrt{\lambda} \cdot N}, \quad h=1,2,\dots,k$$

4.17

Εάν αθροίσουμε, λαμβάνουμε:

$$\sum_{h=1}^{k} n_h = n = \frac{\sum_{h=1}^{k} N_h S_h}{\sqrt{\lambda} \cdot N}$$

Συνεπώς,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sum_{h=1}^{k} N_h S_h}{n \cdot N}$$

4.18

Εάν την (4.18) αντικαταστήσουμε την (4.17), θα έχουμε:

$$n_h = \frac{N_h S_h}{N \frac{\Sigma N_h S_h}{n N}} = n \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^{k} N_h S_h}$$

Δηλαδή,

$$\frac{n_1}{N_1 S_1} = \frac{n_2}{N_2 S_2} = \ldots = \frac{n_k}{N_k S_k} = \frac{n}{\Sigma N_h S_h}$$

οπότε,

$$n_h = n \frac{N_h S_h}{\Sigma N_h S_h}$$

(4.19)

Οι τιμές n_h δείχνουν ότι τα δειγματικά μεγέθη n_h, θα πρέπει να είναι ανάλογα προς τα μεγέθη των στρωμάτων N_n καθώς επίσης και προς την τυπική απόκλιση S_h κάθε στρώματος.

Η ελάχιστη διακύμανση βρίσκεται εάν θέσουμε στην $V(\bar{x}_{st})$ την τιμή της (4.19)

$$\sigma^2_{(opt)} = \min V(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{h=1}^{k} \frac{N_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{k} N_h S_h^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{N^2}\left[\frac{(\sum_{h=1}^{k} N_h S_h)^2}{n} - \sum_{h=1}^{k} N_h S_h^2\right] =$$

$$= \frac{(\sum_{h=1}^{k} W_h S_h)^2}{n} - \frac{\sum_{h=1}^{k} W_h S_h^2}{N}$$

4.2.4 Περαιτέρω ανάλυση της επιλογής των δειγματικών μεγεθών στα επί μέρους στρώματα με παράδειγμα

Μερικές φορές πιστεύουμε ότι στην στρωματοποιημένη δειγματοληψία πρέπει να δειγματοληπτούμε το ίδιο κλάσμα από κάθε στρώμα, δηλαδή να πάρουμε n_h/N_h το ίδιο σε όλα τα στρώματα, χρησιμοποιώντας αναλογική κατανομή. Μία πιο πλήρης ανάλυση του προβλήματος, δείχνει πάντως, ότι ή άριστη κατανομή είναι να πάρουμε μέγεθος nh αναλογικά προς το $N_h S_h/\sqrt{Cb}$, όπου S_h είναι η τυπική απόκλιση των μονάδων δειγματοληψίας στο h στρώμα και c_h είναι το κόστος δειγματοληψίας ανά μονάδα στο h στρώμα. Αυτή η μέθοδος της κατανομής δίνει το πιο ελάχιστο τυπικό σφάλμα του εκτιμούμενου μέσου $\overline{X}_{st}$ για ένα δεδομένο συνολικό κόστος λήψεως του δείγματος, Ο κανόνας αυτός μας λέει να λάβουμε ένα μεγαλύτερο δείγμα, σε σύγκριση με την αναλογική κατανομή, σε ένα στρώμα το οποίο είναι συνήθως μεταβλητό (S_h μεγάλο) και ένα μικρότερο δείγμα σε ένα στρώμα όπου η δειγματοληψία είναι συνήθως δαπανηρή (Ch μεγάλο). Ο κανόνας αυτός είναι σύμφωνος με την κοινή λογική όπως συμβαίνει πάντοτε με τους στατιστικούς κανόνες. Ο κανόνας μετατρέπεται σε αναλογική κατανομή όταν η τυπική απόκλιση και το κόστος κατά μονάδα είναι τα ίδια σε όλα τα στρώματα.

Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα, χρειάζονται εκ των προτέρων εκτιμήσεις για τις σχετικές τυπικές αποκλίσεις και για τα σχετικά κόστη στα διάφορα στρώματα. Αυτές οι εκτιμήσεις δε χρειάζεται να είναι πολύ ακριβείς. Πρόχειρες εκτιμήσεις συχνά δίνουν αποτελέσματα που προσεγγίζουν την άριστη κατανομή ικανοποιητικά. Όταν σε ένα πληθυσμό διενεργούνται επανειλημμένες δειγματοληψίες, οι εκτιμήσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν από τα αποτελέσματα προηγούμενων δειγματοληψιών.

Σε άλλες περιπτώσεις δεν έχουμε την ικανότητα να προβλέψουμε με κάποια εμπιστοσύνη ποια στρώματα θα είναι περισσότερο μεταβλητά ή περισσότερο δαπανηρά, ή σκεπτόμαστε ότι οποιεσδήποτε τέτοιες διαφορές θα είναι μικρές. Τότε χρησιμοποιείται η αναλογική κατανομή.

Υπάρχει μια συχνά παρουσιαζόμενη περίπτωση στην οποία η μη αναλογική δειγματοληψία αποδίδει μεγάλους διαιρετέους. Αυτό συμβαίνει όταν η κύρια μεταβλητή που πρόκειται να μετρηθεί έχει μία πολύ συμμετρική κατανομή. συνήθως, τέτοιοι πληθυσμοί περιέχουν λίγες μονάδες δειγματοληψίας που έχουν μεγάλες τιμές και πολλές μονάδες δειγματοληψίας που έχουν μικρές τιμές. Οι μεταβλητές που αφορούν σε οικονομικά μεγέθη είναι συνήθως αυτού του τύπου.

Με πληθυσμούς αυτού του τύπου η στρωματοποίηση κατά μέγεθος είναι πολύ αποτελεσματική και η άριστη κατανομή είναι πιθανόν να είναι πολύ καλύτερη από την αναλογική κατανομή. Σαν μία εφαρμογή ο πίνακας 4.2. δείχνει δεδομένα για τον αριθμό των σπουδαστών κατά εκπαιδευτικό Ιδρυμα σε ένα πληθυσμό που αποτελείται από 1019 ανώτερα κολέγια και Πανεπιστήμια στις Η.Π.Α. Τα δεδομένα, που αφορούν κατά βάση στο ακαδημαϊκό έτος 1952-53, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν βασική πληροφορία για το σχεδιασμό ενός δείγματος προορισμένου να δώσει μια γρήγορη εκτίμηση του συνόλου των εγγραφών σε κάποιο μελλοντικό έτος. Τα εκπαιδευτικά ιδρύματα τακτοποιούνται σε τέσσερα στρώματα κατά μέγεθος.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα 31 μεγαλύτερα πανεπιστήμια περίπου 3% του συνόλου, έχουν 30% των σπουδαστών, ενώ η πιο μικρή ομάδα, που περιέχει 655 των εκπαιδευτικών ιδρυμάτων, συνεισφέρει μόνο 15% των σπουδαστών. Επίσης ότι η εντός των στρωμάτων τυπική απόκλιση Sh αυξάνει γρήγορα με αύξηση του μεγέθους του ιδρύματος.

Πίνακας 4.2

Δεδομένα για το σύνολο των εγγραφών ανά κολέγιο ή Πανεπιστήμιο, τακτοποιημένα σε τέσσερα στρώματα.

Στρώμα: Αριθμός σπουδαστών ανά ίδρυμα	Αριθμός Ιδρυμάτων- N_h	Σύνολο εγγραφών κατά στρώμα	Μέσος ανά Ίδρυμα X_h	Τυπική απόκλιση ανά ίδρυμα S_h
λιγότεροι από 1.000	661	292671	443	236
1000-3000	205	345302	1684	625
3000-10000	122	672728	5514	2008
άνω των 10000	31	573693	18506	10023
Σύνολο	1019	1884394		

Ο πίνακας 4.3 περιέχει τους υπολογισμούς που χρειάζονται για επιλογή των άριστων δειγματικών μεγεθών μέσα στα στρώματα. - Υποθέτουμε ίσα κόστη κατά΄μονάδα δειγματοληψίας μέσα σε όλα τα στρώματα. Τα γινόμενα N_hS_h, υπολογίζονται και προστίθενται επί όλων των στρωμάτων. Κατόπιν τα σχετικά δειγματικά μεγέθη $N_hS_h/\Sigma N_hS_h$, υπολογίζονται. Αυτοί οι λόγοι όταν πολλαπλασιαστούν με το σχεδιαζόμενο δείγμα μεγέθους «n», δίνουν τα δειγματικά μεγέθη στα επί μέρους στρώματα.

Πίνακας 4.3

Υπολογισμοί για τη λήψη άριστων δειγματικών μεγεθών στα επί μέρους στρώματα.

Στρώμα: Αριθμός σπουδαστών ανά ίδρυμα	Αριθμός ιδρυμάτων N_h	N_hS_h	$\frac{N_hS_h}{\Sigma N_hS_h}$	Δειγματικά μεγέθη	Αναλογία δειγματοληψίας (%)
Λιγότεροι από 1000	661	155996	0,1857	65	10
1000-3000	205	128125	0,1526	53	26
3000-10000	122	244976	0,2917	101	83
άνω των 10000	31	310713	0,3700	31	100
Σύνολο	1019	839810	1,000	250	

Σαν συνέπεια της μεγάλης τυπικής αποκλίσεως στο στρώμα με τα μεγαλύτερα πανεπιστήμια, ο κανόνας απαιτεί το 37% του δείγματος να ληφθεί από αυτό το στρώμα. Υποθέτουμε ότι αποβλέπουμε σε ένα συνολικό δείγμα μεγέθους 250. Ο κανόνας τότε απαιτεί (0,37)(250)=92 μονάδες δειγματοληψίας (Πανεπιστήμια) από αυτό το στρώμα και ότι το στρώμα περιέχει μόνο 31 πανεπιστήμια. Με υψηλά ασυμμετρικούς πληθυσμούς, όπως εδώ, η άριστη κατανομή μπορεί ν απαιτήσει 100% δειγματοληψία, η ακόμη και περισσότερο, από το 100%. Όταν αυτό συμβεί, η καλύτερη διαδικασία είναι να λάβουμε το 100% του "μεγάλου" στρώματος και εφαρμόζουμε τον κανόνα για να κατανείμουμε το υπολειπόμενο μέρος του δείγματος επί των άλλων στρωμάτων. ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία, περιλαμβάνουμε στο δείγμα τα 31 μεγαλύτερα ιδρύματα, αφήνοντας 219 (250-31=219) να κατανεμηθούν μεταξύ των πρώτων τριών στρωμάτων. Στο πρώτο στρώμα το μέγεθος του δείγματος είναι:

$$219\left[\frac{0,1857}{0,1857+0,1526+0,2917}\right]=65$$

Η κατανομή, που δείχνεται στην δεύτερη στήλη από τα δεξιά του πίνακα 4.3 απαιτεί 83% δειγματοληψία στην δεύτερη μεγαλύτερη ομάδα εκπαιδευτικών ιδρυμάτων (101 από 1220, αλλά μόνο 10% δειγματοληψία από τα μικρά ιδρύματα.

Στην πράξη μπορούμε να αποφασίσουμε, για διοικητική διευκόλυνση να λάβουμε ένα 100% δείγμα στην δεύτερη μεγαλύτερη ομάδα όπως ακριβώς και στην πιο μεγάλη.

Σ΄αυτό το σημείο αξίζει τον κόπο να ρωτήσουμε: "είναι η άριστη κατανομή πολύ ανώτερη σε σχέση με την αναλογική κατανομή".

Εάν όχι, δεν υπάρχει λόγος να μπούμε στον επί πλέον κόπο υπολογισμών για τη χρησιμοποίηση της άριστης κατανομής. Δεν μπορούμε φυσικά να απαντήσουμε σ΄αυτή την ερώτηση για ένα μελλοντικό δείγμα το οποίο δεν έχει ακόμη ληφθεί, αλλά μπορούμε να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους κατανομής για τις εγγραφές του ακαδημαϊκού έτους 1952-53. Για να κάνουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τα δεδομένα των πινάκων 4.2.

και 4.3 και τους αντίστοιχους τύπους των τυπικών σφαλμάτων των εκτιμούμενων πληθυσμιακών συνόλων με τις δύο μεθόδους. αυτά τα τυπικά σφάλματα βρίσκεται ότι είναι 26.000 διά την άριστη κατανομή, και 107.000 για την αναλογική κατανομή. Εάν η απλή τυχαία δειγματοληψία είχε χρησιμοποιηθεί, με όχι στρωματοποίηση, ένα παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ότι το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα θα έχει την τιμή 216.000. Η μείωση του τυπικού σφάλματος η οφειλόμενη στην στρωματοποίηση και η επιπρόσθετη μείωση που οφείλεται στην άριστη κατανομή, είναι και οι δύο εντυπωσιακές.

4.2.5. Σχετική ακρίβεια της στρωματοποιημένης τυχαίας και απλής τυχαίας δειγματοληψίας

Η στρωματοποιημένη δειγματοληψία, εάν χρησιμοποιείται έξυπνα, σχεδόν πάντοτε καταλήγει σε μικρότερη διακύμανση για τον εκτιμούμενο μέσο ή για το συνολικό μέγεθος, από εκείνη που προκύπτει συγκριτικά από την απλή τυχαία δειγματοληψία. Δεν είναι αλήθεια, πάντως, ότι οποιοδήποτε στρωματοποιημενο τυχαίο δείγμα δίνει μία μικρότερη διακύμανση απ΄ότι ένα απλό τυχαίο δείγμα. Εάν οι τιμές των nh? είναι μακριά από το άριστο μέγεθος, η στρωματοποιημένη δειγματοληψία μπορεί να έχει μία μεγαλύτερη διακύμανση. Πράγματι, ακόμη και η στρωματοποίηση με άριστη κατανομή για σταθερό συνολικό μέγεθος δείγματος μπορεί να δώσει μία μεγαλύτερη διακύμανση, αν και αυτό το αποτέλεσμα είναι μάλλον ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος παρά κάτι που μπορεί να συμβεί στην πράξη.

Σ΄αυτή την παράγραφο θα γίνει μία σύγκριση μεταξύ της απλής τυχαίας δειγματοληψίας και της στρωματοποιημένης τυχαίας δειγματοληψίας με αναλογική και άριστη κατανομή. Αυτή η σύγκριση θα δείξει πως επιτυγχάνεται το κέρδος που οφείλεται στην στρωματοποίηση. Η διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού αγνοείται. Οι διακυμάνσεις των εκτιμούμενων μέσων, συμβολίζονται αντιστοίχως με V_{ran}, V_{prop}, και V_{opt}.

Θεώρημα 4.3

Εάν οι όροι n_h/N_h αγνοηθούν:

$$V_{opt} \leq V_{prop} \leq V_{ran} \qquad (4.21)$$

4.2.6 Πότε η στρωματοποίηση παράγει οφέλη στην ακρίβεια;

Η ιδεώδης μεταβλητή που πρέπει να ληφθεί υπόψη για την στρωματοποίηση είναι η τιμή της μεταβλητής X (δηλαδή η ποσότητα που θα μετρηθεί στην έρευνα). Εάν μπορούσαμε να στρωματοποιήσουμε τις τιμές της X, δε θα υπήρχε επικάλυψη μεταξύ των στρωμάτων και η διακύμανση μέσα στα στρώματα θα ήταν πολύ μικρότερη απ΄ότι η ολική διακύμανση ιδιαίτερα εάν υπήρχαν πολλά στρώματα. Αυτή η κατάσταση παρουσιάζεται με το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα: Ο πίνακας 4.4. δείχνει τον αριθμό των κατοίκων (σε χιλιάδες) των 64 μεγάλων πόλεων των Η.Π.Α.

Πίνακας 4.4.

Μεγέθη των 64 πόλεων (σε χιλ.) το 1920 και 1930.

1920, μέγεθος (X_{hi})				1920, μέγεθος (Y_{hi})			
Στρώμα				Στρώμα			
h=1	2	1		1		2	
797	314	172	121	900	364	209	113
773	298	172	120	822	317	183	115
748	296	163	119	781	328	163	123
734	258	162	118	805	302	253	154
588	256	161	118	670	288	232	140
577	243	159	116	1238	291	260	119
507	238	153	116	573	253	201	130
507	237	144	113	634	291	147	127
457	235	138	113	578	308	292	100
438	235	138	110	487	272	164	107
415	216	138	110	442	284	143	114
401	208	138	108	451	255	169	111
387	201	136	106	459	270	139	163
381	192	132	104	464	214	170	116
324	180	130	101	400	195	150	122
315	179	126	100	366	260	143	134

Τα δεδομένα ελήφθησαν με τη σειρά μεγέθους που είχαν οι πόλεις το 1920. Οι πόλεις κατανεμήθηκαν σε δύο στρώματα, που το πρώτο περιέχει τις 16 μεγαλύτερες πόλεις και το δεύτερο τις υπόλοιπες 48 πόλεις.

Ο συνολικός αριθμός των κατοίκων και στις 64 πόλεις το 1930 πρόκειται να εκτιμηθεί από εάν δείγμα 24 πόλεων. Ν βρείτε το τυπικό σφάλμα του εκτιμούμενου συνόλου για (1) ένα απλό τυχαίο δείγμα, (2) ένα στρωματοποιημένο τυχαίο δείγμα με αναλογική κατανομή, (3) ένα στρωματοποιημένο τυχαίο δείγμα με 12 μονάδες από κάθε στρώμα.

Τα συνολικά μεγέθη των στρωμάτων και τα αθροίσματα τετραγώνων δίνονται στον πίνακα 4.5

Πίνακας 4.5

Σύνολα και αθροίσματα τετραγώνων

Στρώμα	1920		1930	
	ΣY_{hi}	ΣY^2_{hi}	ΣX_{hi}	ΣX^2_{hi}
1	8349	4756619	10070	7145450
2	7941	1474871	9498	2141720

Θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του 1930:

X=19.568, S^2=52.448

Οι τρεις εκτιμήσεις του X συμβολίζονται με $\hat{X}_{ran}$,$\hat{X}_{prop}$, $\hat{X}_{equal}$

1. Για απλή τυχαία δειγματοληψία:

$$V(\hat{X}_{ran})=\frac{N^2S^2}{n}\frac{N-n}{N} = \frac{(64)^2(52.448)}{24}\left(\frac{40}{64}\right) = 5.594.453$$

Το τυπικό σφάλμα είναι

$$\sigma(\hat{X}_{ran})=2365$$

2. Για τα επί μέρους στρώματα οι διακυμάνσεις είναι

$$S_1^2=53.843, \quad S_2^2=5.581$$

Παρατηρούμε ότι το στρώμα με τις μεγαλύτερες πόλεις έχει μία διακύμανση περίπου 10 φορές εκείνης του άλλου στρώματος.

Στην αναλογική κατανομή, έχουμε $n_1=6$, $n_2=18$. Από την 4.14 πολλαπλασιάζοντας με N^2, έχουμε:

$$V(\hat{X}_{prop}) = \frac{N-n}{n} \Sigma N_h S_h^2$$

$$= \frac{40}{24}[(16)(53.843)+(48)(5581)]=1.882.293$$

και $\sigma(\hat{X}_{prop}) = 1372$

3. Για $n_1=n_2=12$ χρησιμοποιούμε το γενικό τύπο 4.13

$$V(\hat{X}_{eq}) = \Sigma N_h^2 \frac{S_h^2}{n_h} (1-f_h) =$$

$$=(16)^2 \frac{53.843}{12}(1-\frac{12}{16})+(48)^2 \frac{5.581}{12}(1-\frac{12}{48})=$$

$$=(1.148.650,67)(0,25)+(1.071.552)(0,75) =$$

$$=287.162,67 + 803.664 = 1.090.826,67$$

και $\sigma(\hat{X}_{eq}) = 1.044,43$

Η εκτίμηση στην περίπτωση που $n_1=n_2=12$, είναι περισσότερο ακριβής από την αντίστοιχη της αναλογικής κατανομής. Και οι δύο υπερτερούν της απλής τυχαίας δειγματοληψίας.

Στην πράξη, βέβαια, δεν μπορούμε να στρωματοποιήσουμε με βάση τις τιμές της μεταβλητής X. Αλλά κάποιες σημαντικές εφαρμογές έρχονται κοντά σ΄αυτή την κατάσταση και γι΄αυτό δίνουν μεγάλα κέρδη στην ακρίβεια, με ικανοποίηση των ακόλουθων τριών προϋποθέσεων:

1. Ο πληθυσμός αποτελείται από οργανισμούς που ποικίλλουν ευρέως στο μέγεθος.

2. Οι κύριες μεταβλητές που μετρώνται σχετίζονται στενά με τα μεγέθη των οργανισμών.

3. Ένα καλό μέτρο του μεγέθους παρέχεται για την κατασκευή των στρωμάτων.

Παραδείγματα είναι επιχειρήσεις ενός συγκεκριμένου είδους π.χ. παντοπωλεία (σε έρευνες που σχετίζονται με τον όγκο της επιχειρήσεως ή τον αριθμό των εργαζομένων). Σχολεία (σε έρευνες σχετιζόμενες με τους αριθμούς των μαθητών). Στις Η.Π.Α. οι φάρμες επίσης ποικίλλουν κυρίως σε μέγεθος που μετριέται διά του συνολικού αριθμού εκταρίων ή διά του ακαθάριστου εισοδήματος, αλλά συνήθεις φάρμες, (ειδικών καλλιεργειών), συχνά παρουσιάζουν μία μέτρια συσχέτιση με το μέγεθος της φάρμας, ούτως ώστε τα κέρδη από την στρωματοποίηση, (κατά το μέγεθος της φάρμας), δεν είναι τεράστια.

Εάν το μέγεθος του οργανισμού παραμένει σταθερό διά μέσου του χρόνου, τουλάχιστον για μερικές χρονικές περιόδους, τότε η καλύτερη γι΄αυτούς μέτρηση είναι, συνήθως, το μέγεθος τους σε κάποια πρόσφατη ευκαιρία όταν μία απογραφή έλαβε χώρα.

Το παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε απεικονίζει μία κατάσταση κατά την οποία έχουμε διαθέσιμα προηγούμενα δεδομένα που μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικά. Ο πίνακας 4.6 παρέχει τις S_h και τα άριστα μεγέθη n_h, όταν η κατανομή γίνει από τα δεδομένα του 1920 και 1930, αντιστοίχως.

Πίνακας 4.6

Υπολογισμός της άριστης κατανομής

	1920			1930		
Στρώμα N_h	S_h	N_hS_h	n_h	S_h	N_hS_h	n_h
1 16	163,30	2612,80	11,56	232,04	3712,64	12,21
2 48	58,55	2810,40	12,44	74,71	3586,08	11,79
Σύνολο 64		5423,20	24,00		7298,72	24,00

Τα δεδομένα του 1920 δείχνουν ένα άριστο μέγεθος n_1=11,56 σε αντίθεση με ένα πράγματι άριστο μέγεθος n_2=12,21 για το 1930. Όταν τα αποτελέσματα στρογγυλοποιηθούν σε ακέραιους, και τα δύο σύνολα δεδομένων δίνουν την ίδια κατανομή ένα μέγεθος δείγματος 12 μονάδων από κάθε στρώμα.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι το άριστο κλάσμα δειγματοληψία είναι 755 για το στρώμα 1, αλλά μόνο 25% για το στρώμα 2. Συνήθως βρίσκεται ότι εξ αιτίας της υψηλής μεταβλητικότητας του στρώματος που αποτελείται από τους μεγαλύτερους οργανισμούς (παρ. 4.2.4) απαιτείται 100% δειγματοληψία σε αυτό το στρώμα.

Επίσης οι τυπικές αποκλίσεις S_h είναι μικρότερες το 1920 απ΄ότι το 1930. Τα δεδομένα του 1920 δίνουν μία υπεραισιόδοξη εντύπωση της ακρίβειας που θα προκύψει από μία έρευνα του 1930. όπως έχει ήδη αναφερθεί η δυνατότητα μεταβολών στα επίπεδα των S_h, πρέπει να εξετάζεται πάντοτε όταν χρησιμοποιούνται δεδομένα που αφορούν σε προηγούμενες περιόδους.

Η γεωγραφική στρωματοποίηση, στην οποία τα στρώματα είναι συμπαγείς περιοχές όπως οι Νόμοι ή οι γειτονιές σε μία πόλη, συνηθίζεται στην πράξη (διά διοικητικούς λόγους ή διότι χρειάζονται χωριστά δεδομένα για κάθε στρώμα), Αυτή η μορφή στρωματοποιήσεως συνοδεύεται συνήθως από κάποια αύξηση στην ακρίβεια (precision), διότι πολλοί είναι οι παράγοντες που επιδρούν, ώστε οι άνθρωποι που ζούν (ή οι σοδειές που παράγονται) στην ίδια περιοχή να παρουσιάζουν ομοιότητες στα κύρια χαρακτηριστικά τους.

Η ακρίβεια της μεθόδου της στρωματοποιήσεως ορίζεται σαν μέγεθος αντίστροφο της διακυμάνσεως $V(\bar{x}_{st})$ που προκύπτει από τη μέθοδο. Έτσι η σχετική ακρίβεια της μεθόδου 1 προς τη μέθοδο 2 εκφράζεται από το λόγο :

$$V_2(\bar{x}_{st}) \,/\, V_1(\bar{x}_{st})$$

που εκφράζεται σαν ποσοστό .

Όσον αφορά την αναλογική κατανομή στην στρωματοποίηση συγκρινόμενη με την άριστη κατανομή διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δύο λόγοι που ενισχύουν άνετα την άριστη κατανομή. Ο πρώτος οφείλεται στην περίπτωση που ήδη συζητήσαμε, κατά την οποία ο πληθυσμός αποτελείται από μεγάλες και μικρές μονάδες δειγματοληψίας, που στρωματοποιούνται με κάποιο μέτρο μεγέθους. Οι διακυμάνσεις S^2_h είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερες για τα στρώματα των μονάδων δειγματοληψίας απ ότι για τα αντίστοιχα των μικρών μονάδων δειγματοληψίας, ώστε καθιστούν την αναλογική κατανομή ανεπαρκή. Ο δεύτερος λόγος παρουσιάζεται σε έρευνες στις οποίες κάποια στρώματα είναι πολύ περισσότερο δαπανηρό να περιληφθούν στο δείγμα απ΄ότι άλλα. Η επίδραση του παράγοντα $\sqrt{Ch}$ καθιστά την αναλογική κατανομή μη εφαρμόσιμη.

Όταν σχεδιάζουμε μία κατανομή στην οποία τα εκτιμηθέντα n_h δε διαφέρουν σημαντικά από τα αντίστοιχα της αναλογικής κατανομής, αξίζει τον κόπο να εκτιμήσουμε πόσο μεγαλύτερη γίνεται η $V(\bar{x}_{st})$ ή η $V(\hat{X}_{st})$ εάν χρησιμοποιηθεί η αναλογική κατανομή.

4.2.7 Κατανομή που απαιτεί δειγματοληψία περισσότερο από 100%

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 4.2.4 ο τύπος για την άριστη κατανομή μπορεί να δώσει ένα n_h σε κάποιο στρώμα,. το οποίο να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο N_h.

Έστω το παράδειγμα της παραγράφου 4.2.6. Ένα δείγμα 24 πόλεων κατανεμόμενο μεταξύ δύο στρωμάτων, απαιτεί να πάρουμε 12 πόλεις από τις 16 στο πρώτο στρώμα και 12 από τις 48 πόλεις στο δεύτερο. Εάν το μέγεθος του δείγματος ήταν 48, η κατανομή απαιτούσε 24 πόλεις από τι 16 στο πρώτο στρώμα. Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε σ΄αυτή την περίπτωση είναι να πάρουμε όλες τις πόλεις του στρώματος, αφήνοντας 32 πόλεις για το δεύτερο στρώμα αντί των 24 πόλεων που προέκυψαν από τον αντίστοιχο τύπο. Αυτό το πρόβλημα προκύπτει μόνο όταν το ολικό κλάσμα δειγματοληψίας είναι σημαντικό και ένα στρώμα είναι πολύ περισσότερο μεταβλητό απ΄ότι τα άλλα. Αυτό συμβαίνει στην πράξη σε πολλές περιπτώσεις. Πρέπει να δώσουμε την κατάλληλη προσοχή ώστε να χρησιμοποιήσουμε το σωστό τύπο στην σύγκριση της κατανομής με άλλες. Ο τύπος είναι κατάλληλος εάν το n_h αντικατασταθεί με αυτό που δίνεται από την αναθεωρημένη άριστη κατανομή. Ο τύπος (4.20) για την ελάχιστη διακύμανση με σταθερό n:

$$\min V(\bar{x}_{st}) = \frac{\left(\sum_{h=1}^{k} W_h S_h\right)^2}{n} - \frac{\sum_{h=1}^{k} W_h S_h^2}{N}$$

δεν είναι πλέον κατάλληλος. εάν το στρώμα 1 είναι το μόνο στρώμα στο οποίο ενδείκνυται n_h μεγαλύτερο του N_h, ο σωστός τύπος για minV είναι:

$$\min V(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2}\frac{(\Sigma' N_h S_h)^2}{n-N_1} - \frac{1}{N^2}\Sigma' N_h S_h^2$$

όπου: Σ΄ δηλώνει άθροισμα που αναφέρεται σε όλα τα στρώματα εκτός βέβαια του στρώματος 1.

4.2.8 Εκτίμηση του μεγέθους του δείγματος

Σ΄αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τύπους για οποιαδήποτε κατανομή. Υποθέτουμε ότι η εκτίμηση έχει μία καθορισμένη διακύμανση V. Εάν, αντιθέτως, το όριο του σφάλματος D έχει προκαθοριστεί, $V=D^2/Z^2$, όπου Z είναι η τιμή της τυπικής κανονικής μεταβλητής που αντιστοιχεί στην εκχωρούμενη πιθανότητα ότι το σφάλμα θα υπερβαίνει το επιθυμητό όριο.

Εκτίμηση του πληθυσμιακού μέσου $\bar{X}$

Έστω s_h είναι η εκτίμηση της S_h και έστω $n_h=w_h n$, όπου το W_h έχει επιλεγεί. Σε αυτούς τους όρους η προβλεπόμενη $V(\bar{x}_{st})$ (από το θεώρημα 4.2) είναι:

$$V = \frac{1}{n}\Sigma\frac{W_h^2 s_h^2}{w_h} - \frac{1}{N}\Sigma W_h s_h^2 \tag{4.22}$$

με $W_h = N_h/N$. Αυτός ο τύπος δίνει ένα γενικό τύπο για το n

$$n = \frac{\Sigma \dfrac{W_h^2 s_h^2}{w_h}}{V + \dfrac{1}{N} \Sigma W_h s_h^2}$$

(4.23)

Εάν αγνοήσουμε τη διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού, έχουμε σαν μία πρώτη προσέγγιση:

$$n_0 = \frac{1}{V} \Sigma \frac{W_h^2 s_h^2}{w_h}$$

(4.24)

Εάν n_o/N δε είναι αμελητέο, μπορούμε να υπολογίσουμε το n ως:

$$n = \frac{n_0}{1 + \dfrac{1}{NV} \Sigma W_h s_h^2}$$

(4.25)

Σε ειδικές περιπτώσεις οι τύποι παίρνουν διάφορες μορφές οι οποίες μπορεί να είναι περισσότερο κατάλληλες για τον υπολογισμό του n, όπως στις περιπτώσεις:

(i) της άριστης κατανομής (για σταθερό n)

$$n = \frac{(\Sigma W_h s_h)^2}{V + \frac{1}{N} \Sigma W_h s_h^2}$$

(4.26)

(ii) της αναλογικής κατανομής: $w_h = W_h = N_h/N$

$$n_0 = \frac{\Sigma W_h s_h^2}{V}, \quad n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}}$$

(4.27)

Εκτίμηση για το σύνολο του πληθυσμού

Εάν V είναι η επιθυμητή $V(\hat{X}_{st})$, οι βασικοί τύποι είναι οι ακόλουθοι:

(i) Γενικός:

$$n = \frac{\Sigma \frac{N_h^2 s_h^2}{w_h}}{V + \Sigma N_h s_h^2}$$

(4.28)

(ii) της άριστης κατανομής (για σταθερό n):

$$n = \frac{(\Sigma N_h s_h)^2}{V + \Sigma N_h s_h^2} \tag{4.29}$$

(iii) της αναλογικής κατανομής:

$$n_0 = \frac{N}{V} \Sigma N_h s_h^2, \qquad n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}} \tag{4.30}$$

4.2.9. Στρωματοποιημενη δειγματοληψία για ποσοστά.

Εάν επιθυμούμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό των μονάδων του πληθυσμού που ανήκουν σε κάποια καθορισμένη τάξη C, η ιδεώδης στρωματοποίηση επιτυγχάνεται εάν θέσουμε στο πρώτο στρώμα κάθε μονάδα που ανήκει στην τάση C και στο δεύτερο κάθε ομάδα που δεν ανήκει στην τάξη C.

Έστω,

$$P_h = \frac{A_h}{N_h}, \qquad p_h = \frac{a_h}{n_h}$$

Είναι τα ποσοστά των μονάδων της τάξεως C στο στρώμα h και στο δείγμα από αυτό το στρώμα αντίστοιχα.

Η εκτιμούμενη αναλογία με στρωματοποιημένη δειγματοληψία είναι:

$$p_{st} = \Sigma \frac{N_h p_h}{N}$$

ή

$$p_{st} = \Sigma W_h p_h$$

(4.31)

όπου: $W_h = N_h/N$, είναι η στάθμιση του στρώματος h.

Για να βρούμε το τυπικό σφάλμα του p_{st} θέτουμε $p_h q_h$ αντί S^2_h στον τύπο της $V(\bar{x}_{st})$.

Θεώρημα 4.4

Στην στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία η διακύμανση του P_{st} είναι:

$$V(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \Sigma \frac{N_h^2 (N_h - n_h)}{N_h - 1} \frac{P_h Q_h}{n_h}$$

(4.32)

Πόρισμα 1. Όταν αγνοήσουμε τη διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού:

$$V(p_{st}) = \Sigma W_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_h}$$

(4.33)

Πόρισμα 2. Στην περίπτωση της αναλογικής κατανομής, θα έχουμε:

$$V(p_{st}) = \frac{N-n}{N}\,\frac{1}{nN}\,\Sigma\,\frac{N_h^2 P_h Q_h}{N_h - 1}$$

(4.34)

$$\doteq \frac{1-f}{n}\,\Sigma . W_h P_h Q_h$$

(4.35)

Για μία δειγματική εκτίμηση της διακυμάνσεως χρησιμοποιούμε την ποσότητα $p_h q_h/(n_h-1)$ αντί της άγνωστης $p_h Q_h/n_h$, οπουδήποτε απαιτείται στους ανωτέρων τύπους.

Η καλύτερη επιλογή για n_h προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε την $V(P_{st})$ προκύπτει από τη γενική θεωρία στην παράγραφο 4.2.3.

Ελάχιστη διακύμανση για σταθερό συνολικό μέγεθος δείγματος:

$$n_h \doteq n\,\frac{N_h \sqrt{P_h Q_h}}{\Sigma N_h \sqrt{P_h Q_h}}$$

(4.36)

Ελάχιστη διακύμανση για σταθερό κόστος,

όπου κόστος = $c_o + \Sigma c_h n_h$.

$$n_h = n \frac{N_h \sqrt{P_h Q_h / c_h}}{\Sigma N_h \sqrt{P_h Q_h / c_h}}$$

(4.37)

Η τιμή του «n» βρίσκεται όπως στην παράγραφο 4.2.3.

4.2.10 Κέρδη στην ακρίβεια από την στρωματοποιημένη δειγματοληψία για ποσοστά

Έχουμε υπ΄όψη μας και τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, εάν τα κόστη κατά μονάδα είναι τα ίδια σε όλα τα στρώματα, τότε:

α) Το κέρδος στην ακρίβεια από την στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία σε σύγκριση με την απλή τυχαία δειγματοληψία είναι μικρό ή μέτριο εκτός εάν τα P_h ποικίλουν αρκετά από στρώμα σε στρώμα.

β) Η άριστη κατανομή για σταθερό «n» είναι προτιμότερη της αναλογικής εφ΄όσον οι τυπικές αποκλίσεις S_h διαφέρουν ουσιωδώς από στρώμα σε στρώμα. Στην περίπτωση της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας για ποσοστά η τυπική απόκλιση εκφραζόμενη σαν $\sqrt{PhQh} = \sqrt{Ph(1-Ph)}$ στις περισσότερες των περιπτώσεων, δε διαφοροποιείται ουσιωδών μεταξύ των στρωμάτων.

4.2.11 Εκτίμηση του μεγέθους του δείγματος με ποσοστά

Οι σχετικοί τύποι μπορούν να προκύψουν από τους γενικούς τύπους της παραγράφου 4.2.8. Έστω V η επιθυμητή διακύμανση στην εκτίμηση του ποσοστού P για το συνολικό πληθυσμό.

Οι τύποι για τις δύο βασικές περιπτώσεις κατανομής είναι οι ακόλουθοι:

Αναλογική κατανομή:

$$n_0 = \frac{\Sigma W_h p_h q_h}{V}$$

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}}$$

(4.38)

Άριστη κατανομή:

$$n_0 = \frac{(\Sigma W_h \sqrt{p_h q_h})^2}{V}$$

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{1}{NV} \Sigma W_h p_h q_h}$$

(4.39)

όπου «n_0» είναι μία πρώτη προσέγγιση εάν αγνοήσουμε τη διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού και «n» είναι η διορθωμένη τιμή λαμβάνοντας υπ όψη τη διόρθωση πεπερασμένου πληθυσμού.

5. Επιφανειακή Δειγματοληψία

Όταν πρόκειται να πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα από μια γεωγραφική επιφάνεια για την οποία όμως δεν υπάρχουν κατάλογοι των δειγματοληπτικών μονάδων, αλλά υπάρχουν χάρτες τοπογραφικοί απολύτως ενημερωμένοι τότε διενεργείται επιφανειακή δειγματοληψία.

Η διαδικασία ενέργειας της επιφανειακής δειγματοληψίας έχει ως εξής:

Η όλη περιοχή χωρίζεται σε μικρότερες περιοχές και με κλήρωση επιλέγονται μερικές απ΄αυτές. Οι κληρωθείσες περιοχές χωρίζονται σε μικρότερα τμήματα και με κλήρωση επιλέγονται μερικά. Τα κληρωθέντα τμήματα χωρίζονται κι΄αυτά με τη σειρά τους σε μικρότερα τμήματα. Στη συνέχεια καταγράφονται οι μονάδες των κληρωθέντων τμημάτων και επιλέγονται με κλήρωση εκείνες που θα αποτελέσουν το τυχαίο δείγμα.

Ο αριθμός των φάσεων (σταδίων) της επιφανειακής δειγματοληψίας ποικίλει κατά περίπτωση.

Σε κάθε φάση εκλογής επιφανειών το όλο δείγμα επιμερίζεται ανάλογα με τα ποσοστά των δειγματοληπτικών μονάδων των κληρουμένων επιφανειών.

5.1. Πλεονεκτήματα μειονεκτήματα

Η επιφανειακή δειγματοληψία σαν τυχαία δειγματοληψία έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του τυχαίου δείγματος. Έναντι όμως των άλλων τυχαίων δειγματοληψιών πλεονεκτεί στο ότι δε χρειάζεται καταλόγους αλλά και μειονεκτεί στο ότι χρειάζεται λεπτομερείς και ενημερωμένους χάρτες των οποίων η κατάρτιση είναι δαπανηρή.

6. Δειγματοληψία κατά ομάδες

Η δειγματοληψία κατά ομάδες είναι ως επί το πλείστον μία επιφανειακή δειγματοληψία με τη διαφορά ότι στην τελευταία φάση ή λαμβάνονται στο δείγμα όλες οι δειγματοληπτικές μονάδες της περιοχής ή μια ομάδα απ΄αυτές. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται συγκέντρωση της έρευνας σε ορισμένα τμήματα οπότε αποφεύγονται δαπάνες μετακινήσεων απογραφέων, μ΄αποτέλεσμα να αυξάνεται η αξιοπιστία του δείγματος στην κατά΄μονάδα δαπάνη έρευνα.

Η καθ΄ομάδες δειγματοληψία μπορεί να γίνει και από κατάλογο, χωρίς δηλαδή να έχει προηγηθεί επιφανειακή δειγματοληψία, εάν στο δείγμα λαμβάνονται όλες οι μονάδες μιας σελίδας ή μια ομάδα μονάδων από κάθε σελίδα.

Στην κατά στρώματα δειγματοληψία επειδή το δείγμα λαμβάνεται απ΄όλες τις ομάδες του πληθυσμού, όσο περισσότερο ομοιογενεις είναι αυτές οι ομάδες τόσο μεγαλύτερη αντιπροσώπευση του πληθυσμού επιτυγχάνεται σε αντίθεση με την επιφανειακή δειγματοληψία επειδή το δείγμα δε λαμβάνεται απ΄όλες τις ομάδες του πληθυσμού οπότε η αντιπροσώπευση επιτυγχάνεται με μερικές μόνο ομάδες δείγματος.

7. Δειγματοληψίας με μεταβαλλόμενες πιθανότητες

Στη δειγματοληψία αυτή οι δειγματοληπτικές μονάδες του πληθυσμού είναι καταχωρημένες σε χωριστούς καταλόγους σύμφωνα με κάποιο κριτήριο ομαδοποιήσεως. Από το σύνολο των ομάδων επιλέγονται με τυχαίο τρόπο μερικές ομάδες με πιθανότητες ανάλογες προς τον αριθμό των μονάδων και από κάθε επιλεγείσα ομάδα επιλέγεται με τρόπο απεριόριστο ίσος αριθμός μονάδων δείγματος οπότε όλες οι μονάδες του πληθυσμού έχουν εξ΄αρχής ίση πιθανότητα εκλογής στο δείγμα.

8. Δειγματοληψία από κύρια δείγματα

Πολλές φορές, όταν πρόκειται κατά καιρούς να διενεργούνται δειγματοληπτικές έρευνες στον ίδιο πληθυσμό για την διαχρονική μεταβολή του εξεταζόμενου χαρακτηριστικού, σχεδιάζεται ένα εκτεταμένο, λεπτομερές και αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού κύριο δείγμα, το οποίο χρησιμοποιείται για να λαμβάνονται απ αυτό κατά καιρούς μικρότερα δείγματα.

Τα δείγματα αυτά είναι οικονομικά και σύντομα, διότι οι μονάδες τους είναι εντοπισμένες και έχει εξασφαλιστεί εκ των προτέρων μαζί τους η συνεργασία.

9. Δειγματοληψία με υπερτηθέμενα δείγματα

Όταν βιαζόμαστε να έχουμε γρήγορα αποφάσεις το όλο δείγμα το χωρίζουμε σε δύο ή περισσότερα ανεξάρτητα μικρά δείγματα και αρχίζουμε αμέσως την έρευνα με το πρώτο, δεύτερο, τρίτο κ.λπ. μικρό δείγμα. Έτσι συγκεντρώνουμε γρήγορα πληροφορίες από τα πρώτα δείγματα, τις επεξεργαζόμαστε για να βγάλουμε τα αναγκαία συμπεράσματα, ενώ ταυτόχρονα μελετώντας τα υπόλοιπα. Όταν η έρευνα όλων των δειγμάτων τελειώσει συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα και βγάζουμε τις οριστικές αποφάσεις από το ενιαίο δείγμα.

Η δειγματοληψία αυτή λέγεται δειγματοληψία με υπετιθέμενα δείγματα, τη χρησιμοποιούμε δε και όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα διαφόρων ερευνητών.

10. Δειγματοληψία Ποσοστών

Στη δειγματοληψία ποσοστών το δείγμα λαμβάνεται σύμφωνα με τα ποσοστά των στρωμάτων του πληθυσμού και όχι με κλήρωση και η αντιπροσώπευση αφήνεται στην κρίση του απογραφέα.

10.1 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

Η δειγματοληψία ποσοστών παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα έναντι της τυχαία δειγματοληψίας

Πλεονεκτήματα

Είναι σύντομη

Έχει μικρή δαπάνη (όχι μετακινήσεις ερευνητών)

Δε χρειάζεται καταλόγους ή άλλα ειδικά πλαίσια

Μειονεκτήματα

Το δείγμα είναι μεροληπτικό γιατί η αντιπροσώπευση επαφίεται στην κρίση του απογραφέα.

Δεν μπορεί να μετρηθεί το μέγεθος του μεροληπτικού σφάλματος

11. Κατευθυνόμενη δειγματοληψία

Η κατευθυνόμενη δειγματοληψία επιδιώκει την αντιπροσώπευση του πληθυσμού, παίρνοντας στο δείγμα της μονάδες εκείνες που έχουν το μέσο χαρακτηριστικό του πληθυσμού.

Η δειγματοληψία αυτή μπορεί να διενεργηθεί ως απεριόριστη όταν ο πληθυσμός θεωρείται ως ενιαίο σύνολο ή κατά στρώματα όταν ο πληθυσμός είναι στρωματοποιημένος.

Μειονεκτήματα

Η κατευθυνόμενη δειγματοληψία στηρίζει την αντιπροσωπευτικότητα στην άποψη ότι δείγμα αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού είναι εκείνο που ανταποκρίνεται στο μέσο χαρακτηριστικό του. Ο μέσος όμως δεν αντιπροσωπεύει πάντοτε τον πληθυσμό. Το δείγμα είναι μεροληπτικό γιατί δεν είναι τυχαίο και εξ άλλου δεν υπάρχει δυνατότητα προσδιορισμού του μεγέθους του δειγματοληπτικού σφάλματος.

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α1

Δέκα χιλιάδες τυχαία ταξινομημένα ψηφία

	00–04	05–09	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
00	54463	22662	65905	70639	79365	67382	29085	69831	47058	08186
01	15389	85205	18850	39226	42249	90669	96325	23248	60933	26927
02	85941	40756	82414	02015	13858	78030	16269	65978	01385	15345
03	61149	69440	11286	88218	58925	03638	52862	62733	33451	77455
04	05219	81649	10651	67079	92511	59888	84502	72095	83463	75577
05	41417	98326	87719	92294	46614	50948	64886	20002	97365	30976
06	28357	94070	20652	35774	16249	75019	21145	05217	47286	76305
07	17783	00015	10806	83091	91530	36466	39981	62481	49177	75779
08	40950	84820	29881	85966	62800	70326	84740	62660	77379	90279
09	82995	64157	66164	41180	10089	41757	78258	96488	88629	37231
10	96754	17676	55659	44105	47361	34833	86679	23930	53249	27083
11	34357	88040	53364	71726	45690	66334	60332	22554	90600	71113
12	06318	37403	49927	57715	50423	67372	63116	48888	21505	80182
13	62111	52820	07243	79931	89292	84767	85693	73947	22278	11551
14	47534	09243	67879	00544	23410	12740	02540	54440	32949	13491
15	98614	75993	84460	62846	59844	14922	48730	73443	48167	34770
16	24856	03648	44898	09351	98795	18644	39765	71058	90368	44104
17	96887	12479	80621	66223	86085	78285	02432	53342	42846	94771
18	90801	21472	42815	77408	37390	76766	52615	32141	30268	18106
19	55165	77312	83666	36028	28420	70219	81369	41943	47366	41067
20	75884	12952	84318	95108	72305	64620	91318	89872	45375	85436
21	16777	37116	58550	42958	21460	43910	01175	87894	81378	10620
22	46230	43877	80207	88877	89380	32992	91380	03164	98656	59337
23	42902	66892	46134	01432	94710	23474	20423	60137	60609	13119
24	81007	00333	39693	28039	10154	95425	39220	19774	31782	49037
25	68089	01122	51111	72373	06902	74373	96199	97017	41273	21546
26	20411	67081	89950	16944	93054	87687	96693	87236	77054	33848
27	58212	13160	06468	15718	82627	76999	05999	58680	96739	63700
28	70577	42866	24969	61210	76046	67699	42054	12696	93758	03283
29	94522	74358	71659	62038	79643	79169	44741	05437	39038	13163
30	42626	86819	85651	88678	17401	03252	99547	32404	17918	62880
31	16051	33763	57194	16752	54450	19031	58580	47629	54132	60631
32	08244	27647	33851	44705	94211	46716	11738	55784	95374	72655
33	59497	04392	09419	89964	51211	04894	72882	17805	21896	83864
34	97155	13428	40293	09985	58434	01412	69124	82171	59058	82859
35	98409	66162	95763	47420	20792	61527	20441	39435	11859	41567
36	45476	84882	65109	96597	25930	66790	65706	61203	53634	22557
37	89300	69700	50741	30329	11658	23166	05400	66669	48708	03887
38	50051	95137	91631	66315	91428	12275	24816	68091	71710	33258
39	31753	85178	31310	89642	98364	02306	24617	09609	83942	22716
40	79152	53829	77250	20190	56535	18760	69942	77448	33278	48805
41	44560	38750	83635	56540	64900	42912	13953	79149	18710	68618
42	68328	83378	63369	71381	39564	05615	42451	64559	97501	65747
43	46939	38689	58625	08342	30459	85863	20781	09284	26333	91777
44	83544	86141	15707	96256	23068	13782	08467	89469	93842	55349
45	91621	00881	04900	54224	46177	55309	17852	27491	89415	23466
46	91896	67126	04151	03795	59077	11848	12630	98375	52068	60142
47	55751	62515	21108	80830	02263	29303	37204	96926	30506	09808
48	85156	87689	95493	88842	00664	55017	55539	17771	69448	87530
49	07521	56898	12236	60277	39102	62315	12239	07105	11844	01117

ΠΙΝΑΚΑΣ Α1

(Συνέχεια)

	50–54	55–59	60–64	65–69	70–74	75–79	80–84	85–89	90–94	95–99
00	59391	58030	52098	82718	87024	82848	04190	96574	90464	29065
01	99567	76364	77204	04615	27062	96621	43918	01896	83991	51141
02	10363	97518	51400	25670	98342	61891	27101	37855	06235	33316
03	86859	19558	64432	16706	99612	59798	32803	67708	15297	28612
04	11258	24591	36863	55368	31721	94335	34936	02566	80972	08188
05	95068	88628	35911	14530	33020	80428	39936	31855	34334	64865
06	54463	47237	73800	91017	36239	71824	83671	39892	60518	37092
07	16874	62677	57412	13215	31389	62233	80827	73917	82802	84420
08	92494	63157	76593	91316	03505	72389	96363	52887	01087	66091
09	15669	56689	35682	40844	53256	81872	35213	09840	34471	74441
10	99116	75486	84989	23476	52967	67104	39495	39100	17217	74073
11	15696	10703	65178	90637	63110	17622	53988	71087	84148	11670
12	97720	15369	51269	69620	03388	13699	33423	67453	43269	56720
13	11666	13841	71681	98000	35979	39719	81899	07449	47985	46967
14	71628	73130	78783	75691	41632	09847	61547	18707	85489	69944
15	40501	51089	99943	91843	41995	88931	73631	69361	05375	15417
16	22518	55576	98215	82068	10798	86211	36584	67466	69373	40054
17	75112	30485	62173	02132	14878	92879	22281	16783	86352	00077
18	80327	02671	98191	84342	90813	49268	95441	15496	20168	09271
19	60251	45548	02146	05597	48228	81366	34598	72856	66762	17002
20	57430	82270	10421	00540	43648	75888	66049	21511	47676	33444
21	73528	39559	34434	88596	54086	71693	43132	14414	79949	85193
22	25991	65959	70769	64721	86413	33475	42740	06175	82758	66248
23	78388	16638	09134	59980	63806	48472	39318	35434	24057	74739
24	12477	09965	96657	57994	59439	76330	24596	77515	09577	91871
25	83266	32883	42451	15579	38155	29793	40914	65990	16255	17777
26	76970	80876	10237	39515	79152	74798	39357	09054	73579	92359
27	37074	65198	44785	68624	98336	84481	97610	78735	46703	98265
28	83712	06514	30101	78295	54656	85417	43189	60048	72781	72606
29	20287	56862	69727	94443	64936	08366	27227	05158	50326	59566
30	74261	32592	86538	27041	65172	85532	07571	80609	39285	65340
31	64081	49863	08478	96001	18888	14810	70545	89755	59064	07210
32	05617	75818	47750	67814	29575	10526	66192	44464	27058	40467
33	26793	74951	95466	74307	13330	42664	85515	20632	05497	33625
34	65988	72850	48737	54719	52056	01596	03845	35067	03134	70322
35	27366	42271	44300	73399	21105	03280	73457	43093	05192	48657
36	56760	10909	98147	34736	33863	95256	12731	66598	50771	83665
37	72880	43338	93643	58904	59543	23943	11231	83268	65938	81581
38	77888	38100	03062	58103	47961	83841	25878	23746	55903	44115
39	28440	07819	21580	51459	47971	29882	13990	29226	23608	15873
40	63525	94441	77033	12147	51054	49955	58312	76923	96071	05813
41	47606	93410	16359	89033	89696	47231	64498	31776	05383	39902
42	52669	45030	96279	14709	52372	87832	02735	50803	72744	88208
43	16738	60159	07425	62369	07515	82721	37875	71153	21315	00132
44	59348	11695	45751	15865	74739	05572	32688	20271	65128	14551
45	12900	71775	29845	60774	94924	21810	38636	33717	67598	82521
46	75086	23537	49939	33595	13484	97588	28617	17979	70749	35234
47	99495	51434	29181	09993	38190	42553	68922	52125	91077	40197
48	26075	31671	45386	36583	93459	48599	52022	41330	60651	91321
49	13636	93596	23377	51133	95126	61496	42474	45141	46660	42338

ΠΙΝΑΚΑΣ Α1

(Συνέχεια)

	00–04	05–09	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
50	64249	63664	39652	40646	97306	31741	07294	84149	46797	82487
51	26538	44249	04050	48174	65570	44072	40192	51153	11397	58212
52	05845	00512	78630	55328	18116	69296	91705	86224	29503	57071
53	74897	68373	67359	51014	33510	83048	17056	72506	82949	54600
54	20872	54570	35017	88132	25730	22626	86723	91691	13191	77212
55	31432	96156	89177	75541	81355	24480	77243	76690	42507	84362
56	66890	61505	01240	00660	05873	13568	76082	79172	57913	93448
57	41894	57790	79970	33106	86904	48119	52503	24130	72824	21627
58	11303	87118	81471	52936	08555	28420	49416	44448	04269	27029
59	54374	57325	16947	45356	78371	10563	97191	53798	12693	27928
60	64852	34421	61046	90849	13966	39810	42699	21753	76192	10508
61	16309	20384	09491	91588	97720	89846	30376	76970	23063	35894
62	42587	37065	24526	72602	57589	98131	37292	05967	26002	51945
63	40177	98590	97161	41682	84533	67588	62036	49967	01990	72308
64	82309	76128	93965	26743	24141	04838	40254	26065	07938	76236
65	79788	68243	59732	04257	27084	14743	17520	95401	55811	76099
66	40538	79000	89559	25026	42274	23489	34502	75508	06059	86682
67	64016	73598	18609	73150	62463	33102	45205	87440	96767	67042
68	49767	12691	17903	93871	99721	79109	09425	26904	07419	76013
69	76974	55108	29795	08404	82684	00497	51126	79935	57450	55671
70	23854	08480	85983	96025	50117	64610	99425	62291	86943	21541
71	68973	70551	25098	78033	98573	79848	31778	29555	61446	23037
72	36444	93600	65350	14971	25325	00427	52073	64280	18847	24768
73	03003	87800	07391	11594	21196	00781	32550	57158	58887	73041
74	17540	26188	36647	78386	04558	61463	57842	90382	77019	24210
75	38916	55809	47982	41968	69760	79422	80154	91486	19180	15100
76	64288	19843	69122	42502	48508	28820	59933	72998	99942	10515
77	86809	51564	38040	39418	49915	19000	58050	16899	79952	57849
78	99800	99566	14742	05028	30033	94889	53381	23656	75787	59223
79	92345	31890	95712	08279	91794	94068	49337	88674	35355	12267
80	90363	65162	32245	82279	79256	80834	06088	99462	56705	06118
81	64437	32242	48431	04835	39070	59702	31508	60935	22390	52246
82	91714	53662	28373	34333	55791	74758	51144	18827	10704	76803
83	20902	17646	31391	31459	33315	03444	55743	74701	58851	27427
84	12217	86007	70371	52281	14510	76094	96579	54853	78339	20839
85	45177	02863	42307	53571	22532	74921	17735	42201	80540	54721
86	28325	90814	08804	52746	47913	54577	47525	77705	95330	21866
87	29019	28776	56116	54791	64604	08815	46049	71186	34650	14994
88	84979	81353	56219	67062	26146	82567	33122	14124	46240	92973
89	50371	26347	48513	63915	11158	25563	91915	18431	92978	11591
90	53422	06825	69711	67950	64716	18003	49581	45378	99878	61130
91	67453	35651	89316	41620	32048	70225	47597	33137	31443	51445
92	07294	85353	74819	23445	68237	07202	99515	62282	53809	26685
93	79544	00302	45338	16015	66613	88968	14595	63836	77716	79596
94	64144	85442	82060	46471	24162	39500	87351	36637	42833	71875
95	90919	11883	58318	00042	52402	28210	34075	33272	00840	73268
96	06670	57353	86275	92276	77591	46924	60839	55437	03183	13191
97	36634	93976	52062	83678	41256	60948	18685	48992	19462	96062
98	75101	72891	85745	67106	26010	62107	60885	37503	55461	71213
99	05112	71222	72654	51583	05228	62056	57390	42746	39272	96659

ΠΙΝΑΚΑΣ Α1

(Συνέχεια)

	50–54	55–59	60–64	65–69	70–74	75–79	80–84	85–89	90–94	95–99
50	32847	31282	03345	89593	69214	70381	78285	20054	91018	16742
51	16916	00041	30236	55023	14253	76582	12092	86533	92426	37655
52	66176	34037	21005	27137	03193	48970	64625	22394	39622	79085
53	46299	13335	12180	16861	38043	59292	62675	63631	37020	78195
54	22847	47839	45385	23289	47526	54098	45683	55849	51575	64689
55	41851	54160	92320	69936	34803	92479	33399	71160	64777	83378
56	28444	59497	91586	95917	68553	28639	06455	34174	11130	91994
57	47520	62378	98855	83174	13088	16561	68559	26679	06238	51254
58	34978	63271	13142	82681	05271	08822	06490	44984	49307	61717
59	37404	80416	69035	92980	49486	74378	75610	74976	70056	15478
60	32400	65482	52099	53676	74648	94148	65095	69597	52771	71551
61	89262	86332	51718	70663	11623	29834	79820	73002	84886	03591
62	86866	09127	98021	03871	27789	58444	44832	36505	40672	30180
63	90814	14833	08759	74645	05046	94056	99094	65091	32663	73040
64	19192	82756	20553	58446	55376	88914	75096	26119	83898	43816
65	77585	52593	56612	95766	10019	29531	73064	20953	53523	58136
66	23757	16364	05096	03192	62386	45389	85332	18877	55710	96459
67	45989	96257	23850	26216	23309	21526	07425	50254	19455	29315
68	92970	94243	07316	41467	64837	52406	25225	51553	31220	14032
69	74346	59596	40088	98176	17896	86900	20249	77753	19099	48885
70	87646	41309	27636	45153	29988	94770	07255	70908	05340	99751
71	50099	71038	45146	06146	55211	99429	43169	66259	97786	59180
72	10127	46900	64984	75348	04115	33624	68774	60013	35515	62556
73	67995	81977	18984	64091	02785	27762	42529	97144	80407	64524
74	26304	80217	84934	82657	69291	35397	98714	35104	08187	48109
75	81994	41070	56642	64091	31229	02595	13513	45148	78722	30144
76	59537	34662	79631	89403	65212	09975	06118	86197	58208	16162
77	51228	10937	62396	81460	47331	91403	95007	06047	16846	64809
78	31089	37995	29577	07828	42272	54016	21950	86192	99046	84864
79	38207	97938	93459	75174	79460	55436	57206	87644	21296	43393
80	88666	31142	09474	89712	63153	62333	42212	06140	42594	43671
81	53365	56134	67582	92557	89520	33452	05134	70628	27612	33738
82	89807	74530	38004	90102	11693	90257	05500	79920	62700	43325
83	18682	81038	85662	90915	91631	22223	91588	80774	07716	12548
84	63571	32579	63942	25371	09234	94592	98475	76884	37635	33608
85	68927	56492	67799	95398	77642	54913	91583	08421	81450	76229
86	56401	63186	39389	88798	31356	89235	97036	32341	33292	73757
87	24333	95603	02359	72942	46287	95382	08452	62862	97869	71775
88	17025	84202	95199	62272	06366	16175	97577	99304	41587	03686
89	02804	08253	52133	20224	68034	50865	57868	22343	55111	03607
90	08298	03879	20995	19850	73090	13191	18963	82244	78479	99121
91	59883	01785	82403	96062	03785	03488	12970	64896	38336	30030
92	46982	06682	62864	91837	74021	89094	39952	64158	79614	78235
93	31121	47266	07661	02051	67599	24471	69843	83696	71402	76287
94	97867	56641	63416	17577	30161	87320	37752	73276	48969	41915
95	57364	86746	08415	14621	49430	22311	15836	72492	49372	44103
96	09559	26263	69511	28064	75999	44540	13337	10918	79846	54809
97	53873	55571	00608	42661	91332	63956	74087	59008	47493	99581
98	35531	19162	86406	05299	77511	24311	57257	22826	77555	05941
99	28229	88629	25695	94932	30721	16197	78742	34974	97528	45447

ΠΙΝΑΚΑΣ Α2

Τεταγμένες της κανονικής καμπύλης

Z	Δεύτερη δεκαδική θέση της τιμής Z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046

Z	Πρώτη δεκαδική θέση της τιμής Z									
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	0.0044	0.0033	0.0024	0.0017	0.0012	0.0009	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002
4	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

ΠΙΝΑΚΑΣ Α3

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΟΣ

(Εμβαδόν υπό την τυπική κανονική καμπύλη από 0 έως Ζ)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000									

ΠΙΝΑΚΑΣ Α4

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ t (ΤΕΣΤ ΔΙΠΛΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

(Τιμές του t^* της πιθανότητος: $P\{|t| > t^*\}$)

Βαθμοί Ελευθ.	$P\{\|t\| > t^*\}$								
	0.500	0.400	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	25.452	63.657		
2	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089	31.598
3	.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.176	5.841	7.453	12.941
4	.741	.941	1.533	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	8.610
5	.727	.920	1.476	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	6.859
6	.718	.906	1.440	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.959
7	.711	.896	1.415	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	5.405
8	.706	.889	1.397	1.860	2.306	2.752	3.355	3.832	5.041
9	.703	.883	1.383	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.781
10	.700	.879	1.372	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.587
11	.697	.876	1.363	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.437
12	.695	.873	1.356	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	4.318
13	.694	.870	1.350	1.771	2.160	2.533	3.012	3.372	4.221
14	.692	.868	1.345	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326	4.140
15	.691	.866	1.341	1.753	2.131	2.490	2.947	3.286	4.073
16	.690	.865	1.337	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252	4.015
17	.689	.863	1.333	1.740	2.110	2.458	2.898	3.222	3.965
18	.688	.862	1.330	1.734	2.101	2,445	2.878	3.197	3.922
19	.688	.861	1.328	1.729	2.093	2.433	2.861	3.174	3.883
20	.687	.860	1.325	1.725	2.086	2.423	2.845	3.153	3.850
21	.686	.859	1.323	1.721	2.080	2.414	2.831	3.135	3.819
22	.686	.858	1.321	1.717	2.074	2.406	2.819	3.119	3.792
23	.685	.858	1.319	1.714	2.069	2.398	2.807	3.104	3.767
24	.685	.857	1.318	1.711	2.064	2.391	2.797	3.090	3.745
25	.684	.856	1.316	1.708	2.060	2.385	2.787	3.078	3.725
26	.684	.856	1.315	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067	3.707
27	.684	.855	1.314	1.703	2.052	2.373	2.771	3.056	3.690
28	.683	.855	1.313	1.701	2.048	2.368	2.763	3.047	3.674
29	.683	.854	1.311	1.699	2.045	2.364	2.756	3.038	3.659
30	.683	.854	1.310	1.697	2.042	2.360	2.750	3.030	3.646
35	.682	.852	1.306	1.690	2.030	2.342	2.724	2.996	3.591
40	.681	.851	1.303	1.684	2.021	2.329	2.704	2.971	3.551
45	.680	.850	1.301	1.680	2.014	2.319	2.690	2.952	3.520
50	.680	.849	1.299	1.676	2.008	2.310	2.678	2.937	3.496
55	.679	.849	1.297	1.673	2.004	2.304	2.669	2.925	3.476
60	.679	.848	1.296	1.671	2.000	2.299	2.660	2.915	3.460
70	.678	.847	1.294	1.667	1.994	2.290	2.648	2.899	3.435
80	.678	.847	1.293	1.665	1.989	2.284	2.638	2.887	3.416
90	.678	.846	1.291	1.662	1.986	2.279	2.631	2.878	3.402
100	.677	.846	1.290	1.661	1.982	2.276	2.625	2.871	3.390
120	.677	.845	1.289	1.658	1.980	2.270	2.617	2.860	3.373
∞	.6745	.8416	1.2816	1.6448	1.9600	2.2414	2.5758	2.8070	3.2905

ΠΙΝΑΚΑΣ Α5

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ x-ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ (x^2)
(Τιμές του x^2_* της πιθανότητος: $P[x^2>x^2_*]$)

Βαθμοί	$P[x^2 > x^2_*]$												
Ελευθερίας	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	....	....	....	....	0.02	0.10	0.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00

ΠΙΝΑΚΑΣ Α5

(Συνέχεια)

Βαθμοί Ελευθερίας	$P[x^2 > x_*^2]$												
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.80	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.64	107.56	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.14	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

ΠΙΝΑΚΑΣ Α6

25%, 10%, 2,5%, 0,5% ΣΗΜΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ F

ν_1 βαθμοί Ελευθερίας (για το μεγαλύτερο μέσο τετράγωνο).

ν_2	P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	0.250	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.20	60.70	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	.025	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	997	1,001	1,006	1,010	1,014	1,018
	.005	16,211	20,000	21,615	22,500	23,056	23,437	23,715	23,925	24,091	24,224	24,426	24,630	24,836	24,940	25,044	25,148	25,253	25,359	25,465
2	.250	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.025	38.51	39.00	39.16	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.42	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.005	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200
3	.250	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47
	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.74	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
	.005	55.55	49.80	47.47	46.20	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	.250	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
	.005	31.33	26.28	24.26	23.16	22.46	21.98	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	.250	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.005	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	.250	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
	.005	18.64	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	.250	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	5.47	4.47	4.42	5.36	5.31	4.25	4.20	4.14
	.005	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	.250	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.62	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.20	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
	.005	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95

ΠΙΝΑΚΑΣ Α6

(Συνέχεια)

ν_2	p	ν_1 βαθμοί Ελευθερίας (για το μεγαλύτερο μέσο τετράγωνο) 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
9	0.250	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
	.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	.250	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
	.100	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
	.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	.250	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.83
	.005	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	9.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	.250	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42
	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
	.005	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	8.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	.250	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
	.005	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	.250	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38
	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
	.005	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	4.44
15	.250	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
	.025	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.58	2.52	2.46	2.40
	.005	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	.250	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
	.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
	.005	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	.250	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
	.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
	.005	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98

ΠΙΝΑΚΑΣ Α6

(Συνέχεια)

ν_2	P	ν_1 βαθμοί ελευθερίας (για το μεγαλύτερο μέσο τετράγωνο)																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
18	0.250	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
	.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
	.005	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	.250	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30
	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
	.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
	.005	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	.250	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29
	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
	.005	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	.250	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.88	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
	.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
	.005	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	.250	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
	.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
	.005	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	.250	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27
	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
	.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
	.005	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	.250	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26
	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
	.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
	.005	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	.250	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
	.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
	.005	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.02	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	.250	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.25
	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
	.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.83
	.005	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33

ΠΙΝΑΚΑΣ Α6

(Συνέχεια)

ν_2	P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
		ν_1 βαθμοί Ελευθερίας (για το μεγαλύτερο μέσο τετράγωνο)																		
27	0.250	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27	1.26	1.24
	.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
	.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
	.005	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	.250	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24
	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
	.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
	.005	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	.250	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23
	.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
	.025	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
	.005	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	.250	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23
	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
	.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
	.005	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	.250	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19
	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
	.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
	.005	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	.250	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.25	1.24	1.22	1.21	1.17	1.15
	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
	.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
	.005	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	.250	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.16	1.13	1.10
	.100	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.54	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
	.025	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.63	1.43	1.31
	.005	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	.250	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00
	.100	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00
	.025	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00
	.005	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

ΠΙΝΑΚΑΣ Α7

(Συνέχεια)

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
4.00	2.00	6.32	5.00	2.24	7.07	6.00	2.45	7.75
4.02	2.00	6.34	5.02	2.24	7.09	6.02	2.45	7.76
4.04	2.01	6.36	5.04	2.24	7.10	6.04	2.46	7.77
4.06	2.01	6.37	5.06	2.25	7.11	6.06	2.46	7.78
4.08	2.02	6.39	5.08	2.25	7.13	6.08	2.47	7.80
4.10	2.02	6.40	5.10	2.26	7.14	6.10	2.47	7.81
4.12	2.03	6.42	5.12	2.26	7.16	6.12	2.47	7.82
4.14	2.03	6.43	5.14	2.27	7.17	6.14	2.48	7.84
4.16	2.04	6.45	5.16	2.27	7.18	6.16	2.48	7.85
4.18	2.04	6.47	5.18	2.28	7.20	6.18	2.49	7.86
4.20	2.05	6.48	5.20	2.28	7.21	6.20	2.49	7.87
4.22	2.05	6.50	5.22	2.28	7.22	6.22	2.49	7.89
4.24	2.06	6.51	5.24	2.29	7.24	6.24	2.50	7.90
4.26	2.06	6.53	5.26	2.29	7.25	6.26	2.50	7.91
4.28	2.07	6.54	5.28	2.30	7.27	6.28	2.51	7.92
4.30	2.07	6.56	5.30	2.30	7.28	6.30	2.51	7.94
4.32	2.08	6.57	5.32	2.31	7.29	6.32	2.51	7.95
4.34	2.08	6.59	5.34	2.31	7.31	6.34	2.52	7.96
4.36	2.09	6.60	5.36	2.32	7.32	6.36	2.52	7.97
4.38	2.09	6.62	5.38	2.32	7.33	6.38	2.53	7.99
4.40	2.10	6.63	5.40	2.32	7.35	6.40	2.53	8.00
4.42	2.10	6.65	5.42	2.33	7.36	6.42	2.53	8.01
4.44	2.11	6.66	5.44	2.33	7.38	6.44	2.54	8.02
4.46	2.11	6.68	5.46	2.34	7.39	6.46	2.54	8.04
4.48	2.12	6.69	5.48	2.34	7.40	6.48	2.55	8.05
4.50	2.12	6.71	5.50	2.35	7.42	6.50	2.55	8.06
4.52	2.13	6.72	5.52	2.35	7.43	6.52	2.55	8.07
4.54	2.13	6.74	5.54	2.35	7.44	6.54	2.56	8.09
4.56	2.14	6.75	5.56	2.36	7.46	6.56	2.56	8.10
4.58	2.14	6.77	5.58	2.36	7.47	6.58	2.57	8.11
4.60	2.14	6.78	5.60	2.37	7.48	6.60	2.57	8.12
4.62	2.15	6.80	5.62	2.37	7.50	6.62	2.57	8.14
4.64	2.15	6.81	5.64	2.37	7.51	6.64	2.58	8.15
4.66	2.16	6.83	5.66	2.38	7.52	6.66	2.58	8.16
4.68	2.16	6.84	5.68	2.38	7.54	6.68	2.58	8.17
4.70	2.17	6.86	5.70	2.39	7.55	6.70	2.59	8.19
4.72	2.17	6.87	5.72	2.39	7.56	6.72	2.59	8.20
4.74	2.18	6.88	5.74	2.40	7.58	6.74	2.60	8.21
4.76	2.18	6.90	5.76	2.40	7.59	6.76	2.60	8.22
4.78	2.19	6.91	5.78	2.40	7.60	6.78	2.60	8.23
4.80	2.19	6.93	5.80	2.41	7.62	6.80	2.61	8.25
4.82	2.20	6.94	5.82	2.41	7.63	6.82	2.61	8.26
4.84	2.20	6.96	5.84	2.42	7.64	6.84	2.62	8.27
4.86	2.20	6.97	5.86	2.42	7.66	6.86	2.62	8.28
4.88	2.21	6.99	5.88	2.42	7.67	6.88	2.62	8.29
4.90	2.21	7.00	5.90	2.43	7.68	6.90	2.63	8.31
4.92	2.22	7.01	5.92	2.43	7.69	6.92	2.63	8.32
4.94	2.22	7.03	5.94	2.44	7.71	6.94	2.63	8.33
4.96	2.23	7.04	5.96	2.44	7.72	6.96	2.64	8.34
4.98	2.23	7.06	5.98	2.45	7.73	6.98	2.64	8.35

ΠΙΝΑΚΑΣ Α7

(Συνέχεια)

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
7.00	2.65	8.37	8.00	2.83	8.94	9.00	3.00	9.49
7.02	2.65	8.38	8.02	2.83	8.96	9.02	3.00	9.50
7.04	2.65	8.39	8.04	2.84	8.97	9.04	3.01	9.51
7.06	2.66	8.40	8.06	2.84	8.98	9.06	3.01	9.52
7.08	2.66	8.41	8.08	2.84	8.99	9.08	3.01	9.53
7.10	2.66	8.43	8.10	2.85	9.00	9.10	3.02	9.54
7.12	2.67	8.44	8.12	2.85	9.01	9.12	3.02	9.55
7.14	2.67	8.45	8.14	2.85	9.02	9.14	3.02	9.56
7.16	2.68	8.46	8.16	2.86	9.03	9.16	3.03	9.57
7.18	2.68	8.47	8.18	2.86	9.04	9.18	3.03	9.58
7.20	2.68	8.49	8.20	2.86	9.06	9.20	3.03	9.59
7.22	2.69	8.50	8.22	2.87	9.07	9.22	3.04	9.60
7.24	2.69	8.51	8.24	2.87	9.08	9.24	3.04	9.61
7.26	2.69	8.52	8.26	2.87	9.09	9.26	3.04	9.62
7.28	2.70	8.53	8.28	2.88	9.10	9.28	3.05	9.63
7.30	2.70	8.54	8.30	2.88	9.11	9.30	3.05	9.64
7.32	2.71	8.56	8.32	2.88	9.12	9.32	3.05	9.65
7.34	2.71	8.57	8.34	2.89	9.13	9.34	3.06	9.66
7.36	2.71	8.58	8.36	2.89	9.14	9.36	3.06	9.67
7.38	2.72	8.59	8.38	2.89	9.15	9.38	3.06	9.68
7.40	2.72	8.60	8.40	2.90	9.17	9.40	3.07	9.70
7.42	2.72	8.61	8.42	2.90	9.18	9.42	3.07	9.71
7.44	2.73	8.63	8.44	2.91	9.19	9.44	3.07	9.72
7.46	2.73	8.64	8.46	2.91	9.20	9.46	3.08	9.73
7.48	2.73	8.65	8.48	2.91	9.21	9.48	3.08	9.74
7.50	2.74	8.66	8.50	2.92	9.22	9.50	3.08	9.75
7.52	2.74	8.67	8.52	2.92	9.23	9.52	3.09	9.76
7.54	2.75	8.68	8.54	2.92	9.24	9.54	3.09	9.77
7.56	2.75	8.69	8.56	2.93	9.25	9.56	3.09	9.78
7.58	2.75	8.71	8.58	2.93	9.26	9.58	3.10	9.79
7.60	2.76	8.72	8.60	2.93	9.27	9.60	3.10	9.80
7.62	2.76	8.73	8.62	2.94	9.28	9.62	3.10	9.81
7.64	2.76	8.74	8.64	2.94	9.30	9.64	3.10	9.82
7.66	2.77	8.75	8.66	2.94	9.31	9.66	3.11	9.83
7.68	2.77	8.76	8.68	2.95	9.32	9.68	3.11	9.84
7.70	2.77	8.77	8.70	2.95	9.33	9.70	3.11	9.85
7.72	2.78	8.79	8.72	2.95	9.34	9.72	3.12	9.86
7.74	2.78	8.80	8.74	2.96	9.35	9.74	3.12	9.87
7.76	2.79	8.81	8.76	2.96	9.36	9.76	3.12	9.88
7.78	2.79	8.82	8.78	2.96	9.37	9.78	3.13	9.89
7.80	2.79	8.83	8.80	2.97	9.38	9.80	3.13	9.90
7.82	2.80	8.84	8.82	2.97	9.39	9.82	3.13	9.91
7.84	2.80	8.85	8.84	2.97	9.40	9.84	3.14	9.92
7.86	2.80	8.86	8.86	2.98	9.41	9.86	3.14	9.93
7.88	2.81	8.87	8.88	2.98	9.42	9.88	3.14	9.94
7.90	2.81	8.89	8.90	2.98	9.43	9.90	3.15	9.95
7.92	2.81	8.90	8.92	2.99	9.44	9.92	3.15	9.96
7.94	2.82	8.91	8.94	2.99	9.46	9.94	3.15	9.97
7.96	2.82	8.92	8.96	2.99	9.47	9.96	3.16	9.98
7.98	2.82	8.93	8.98	3.00	9.48	9.98	3.16	9.99

ΠΙΝΑΚΑΣ Α7

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
1.00	1.00	3.16	2.00	1.41	4.47	3.00	1.73	5.48
1.02	1.01	3.19	2.02	1.42	4.49	3.02	1.74	5.50
1.04	1.02	3.22	2.04	1.43	4.52	3.04	1.74	5.51
1.06	1.03	3.26	2.06	1.44	4.54	3.06	1.75	5.53
1.08	1.04	3.29	2.08	1.44	4.56	3.08	1.76	5.55
1.10	1.05	3.32	2.10	1.45	4.58	3.10	1.76	5.57
1.12	1.06	3.35	2.12	1.46	4.60	3.12	1.77	5.59
1.14	1.07	3.38	2.14	1.46	4.63	3.14	1.77	5.60
1.16	1.08	3.41	2.16	1.47	4.65	3.16	1.78	5.62
1.18	1.09	3.44	2.18	1.48	4.67	3.18	1.78	5.64
1.20	1.10	3.46	2.20	1.48	4.69	3.20	1.79	5.66
1.22	1.10	3.49	2.22	1.49	4.71	3.22	1.79	5.67
1.24	1.11	3.52	2.24	1.50	4.73	3.24	1.80	5.69
1.26	1.12	3.55	2.26	1.50	4.75	3.26	1.81	5.71
1.28	1.13	3.58	2.28	1.51	4.77	3.28	1.81	5.73
1.30	1.14	3.61	2.30	1.52	4.80	3.30	1.82	5.74
1.32	1.15	3.63	2.32	1.52	4.82	3.32	1.82	5.76
1.34	1.16	3.66	2.34	1.53	4.84	3.34	1.83	5.78
1.36	1.17	3.69	2.36	1.54	4.86	3.36	1.83	5.80
1.38	1.17	3.71	2.38	1.54	4.88	3.38	1.84	5.81
1.40	1.18	3.74	2.40	1.55	4.90	3.40	1.84	5.83
1.42	1.19	3.77	2.42	1.56	4.92	3.42	1.85	5.85
1.44	1.20	3.79	2.44	1.56	4.94	3.44	1.85	5.87
1.46	1.21	3.82	2.46	1.57	4.96	3.46	1.86	5.88
1.48	1.22	3.85	2.48	1.57	4.98	3.48	1.87	5.90
1.50	1.22	3.87	2.50	1.58	5.00	3.50	1.87	5.92
1.52	1.23	3.90	2.52	1.59	5.02	3.52	1.88	5.93
1.54	1.24	3.92	2.54	1.59	5.04	3.54	1.88	5.95
1.56	1.25	3.95	2.56	1.60	5.06	3.56	1.89	5.97
1.58	1.26	3.97	2.58	1.61	5.08	3.58	1.89	5.98
1.60	1.26	4.00	2.60	1.61	5.10	3.60	1.90	6.00
1.62	1.27	4.02	2.62	1.62	5.12	3.62	1.90	6.02
1.64	1.28	4.05	2.64	1.62	5.14	3.64	1.91	6.03
1.66	1.29	4.07	2.66	1.63	5.16	3.66	1.91	6.05
1.68	1.30	4.10	2.68	1.64	5.18	3.68	1.92	6.07
1.70	1.30	4.12	2.70	1.64	5.20	3.70	1.92	6.08
1.72	1.31	4.15	2.72	1.65	5.22	3.72	1.93	6.10
1.74	1.32	4.17	2.74	1.66	5.23	3.74	1.93	6.12
1.76	1.33	4.20	2.76	1.66	5.25	3.76	1.94	6.13
1.78	1.33	4.22	2.78	1.67	5.27	3.78	1.94	6.15
1.80	1.34	4.24	2.80	1.67	5.29	3.80	1.95	6.16
1.82	1.35	4.27	2.82	1.68	5.31	3.82	1.95	6.18
1.84	1.36	4.29	2.84	1.69	5.33	3.84	1.96	6.20
1.86	1.36	4.31	2.86	1.69	5.35	3.86	1.96	6.21
1.88	1.37	4.34	2.88	1.70	5.37	3.88	1.97	6.23
1.90	1.38	4.36	2.90	1.70	5.39	3.90	1.97	6.25
1.92	1.39	4.38	2.92	1.71	5.40	3.92	1.98	6.26
1.94	1.39	4.40	2.94	1.71	5.42	3.94	1.98	6.28
1.96	1.40	4.43	2.96	1.72	5.44	3.96	1.99	6.29
1.98	1.41	4.45	2.98	1.73	5.46	3.98	1.99	6.31

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ ΕΥΣΤ. ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΕΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ"ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΩΝ ΚΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ" ΑΘΗΝΑ 1977

ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΣ Θ. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΑΘΗΝΑ 1988

ΜΠΕΝΟΣ ΒΑΣ. ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΠΕΙΡΑΙΑΣ 1991

ΤΖΩΡΤΖΟΠΟΥΛΟΣ Π.Θ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ-ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΤΟΜΟΣ 2.ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΑΘΗΝΑ 1985