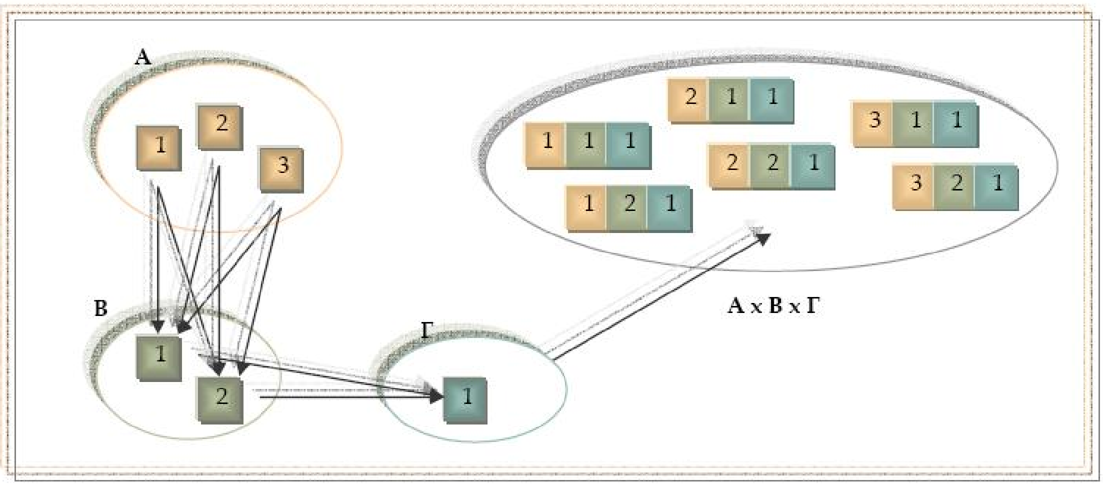
Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ &
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

‘Βασικές Αρχές Απαρίθμησης και Εφαρμογές τους στον Σχηματισμό Ομάδων Εργασίας’

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΟΡΔΑ ΓΚΟΛΦΩ



ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΛΑΠΟΔΗ ΑΛΕΚΑ

ΠΑΤΡΑ 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή μελέτη εστιάζεται στη μελέτη των Βασικών Αρχών Απαρίθμησης και στις εφαρμογές τους στο Σχηματισμό Ομάδων Εργασίας. Αρχικά γίνεται μια σύντομη ιστορική αναφορά για τη Θεωρία των Πιθανοτήτων, η οποία αναπτύχθηκε από τον Pascal και τον Fermat το 17^{o} αιώνα με αφορμή το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια του Πειράματος Τύχης, στο οποίο δε μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα σε αντίθεση με το Αιτιοκρατικό Πείραμα. Στη συνέχεια αναλύουμε το Καρτεσιανό Γινόμενο για την καλύτερη κατανόηση της Συνδυαστικής Αρχής, των Βασικών Αρχών Απαρίθμησης για την επίλυση των συνδυαστικών προβλημάτων και των Βασικών κανόνων της Συνδυαστικής με την προσθετική και πολλαπλασιαστική αρχή. Τέλος, παρουσιάζεται η έννοια των Διατάξεων και των Συνδυασμών, όπως στις διατάξεις έτσι και στους συνδυασμούς στοιχείων έχουμε δύο είδη τους απλούς και τους επαναληπτικούς και η αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού μας βοηθάει να κατανοήσουμε την συμπερίληψη (εγκλεισμός) των στοιχείων Α1, Α2 και την εξαίρεση (αποκλεισμός) των στοιχείων της τομής $A_1 \cap A_2$ για να μας δώσει το ζητούμενο αριθμό $A1 \cup A2$ της ένωσης. Τέλος παρουσιάζεται η έννοια των Μοντέλων Καταλήψεων όπου μας ενδιαφέρει η απαρίθμηση των διαφορετικών τρόπων για την τοποθέτηση σφαιριδίων σε κελιά, αυτό γίνεται με δύο ειδών κατανομές των όμοιων σφαιριδίων και των διακεκριμένων. Φυσικά παρουσιάζονται και εφαρμογές όλων των παραπάνω εννοιών.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Είναι δύσκολο να πει κανείς πόσο παλιά είναι η συνήθεια να παίζει κάποιος τυχερά παιχνίδια. Επιτραπέζια παιχνίδια τα οποία «περιείχαν» το στοιχείο της τύχης φαίνεται (σε ανασκαφές που έγιναν στις πυραμίδες) να είχαν κατασκευαστεί, στην αρχαία Αίγυπτο από το 3000 π.Χ.. Το τυχαίο στοιχείο σε αυτά προερχόταν από το ρίξιμο κυρίως των αστραγάλων των προβάτων (κότσια), οι τέσσερες πλευρές των οποίων (στις οποίες μπορούσαν να στηριχθούν) παρίσταναν τους αριθμούς 4, 3, 1 και 6. Τα γνωστά μας ζάρια προήλθαν από αυτά, με λείανση των καμπύλων επιφανειών τους, και κατασκευάστηκαν μάλλον για πρώτη φορά από τους Έλληνες οι οποίοι τα αποκαλούσαν «τέσσερα». Αγγεία που βρέθηκαν, στην Ελλάδα, απεικονίζουν νέους να ρίχνουν οστά μέσα σε μια κυκλική περιοχή. Ακόμα, στην αρχαία Ελληνική μυθολογία αναφέρεται ότι θεοί του Ολύμπου αποφάσιζαν για το ριζικό των ανθρώπων ρίχνοντας ζάρια, όπως επίσης ο Δίας, ο Ποσειδώνας και ο Άδης έγιναν «κυβερνήτες» του ουρανού, της θάλασσας και του κάτω κόσμου αντίστοιχα παίζοντας το σύμπαν σε ένα παιχνίδι με ζάρια. Κυβικά ζάρια φτιαγμένα από κοκάλα ή πηλό βρέθηκαν σε αρχαίους Αιγυπτιακούς και Ελληνικούς τάφους, όπως επίσης στο Ιράκ και την Ινδία. Παιχνίδια με ζάρια ήταν αρκετά δημοφιλή και στην αρχαία Ρώμη. Αναφέρεται ακόμα ότι, ο Πόντιος Πιλάτος έβαλε σε κλήρο τον χιτώνα του Χριστού κατά την διάρκεια της σταύρωσής του.

Ο Αριστοτέλης είναι από τους πρώτους που καταπιάστηκαν με θέματα Πιθανοτήτων, θεωρούσε όμως «τυχαίο» κάθε τι το οποίο έχουμε αδυναμία (λόγω έλλειψης γνώσης) να το ερμηνεύσουμε. Ένα πράγμα που φαίνεται παράξενο είναι ότι, αν και οι αρχαίοι Έλληνες είχαν αναπτύξει τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες σε εξαιρετικό για την εποχή τους βαθμό, εν τούτοις δεν είχαν παρατηρήσει ότι, τα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού που επαναλαμβάνεται παρουσιάζουν κάποιες αριθμητικές «κανονικότητες» (σχετικές συχνότητες). Η εξήγηση σε αυτό είναι ότι, τα οστά (ζάρια) που χρησιμοποιούσαν δεν είχαν ακριβώς ομοιόμορφες έδρες ώστε να εμφανίζονται, κατά την ρίψη τους, οι κανονικότητες που αναφέραμε. Λόγω λοιπόν αυτής της αδυναμίας παρατήρησης κανονικοτήτων ή με άλλα λόγια επειδή δεν είχε γίνει αντιληπτό ότι είναι δυνατόν να ποσοτικοποιηθεί η δυνατότητα (πιθανότητα) πραγματοποίησης μελλοντικών γεγονότων, τίποτε σημαντικό δεν έγινε στην Θεωρία των Πιθανοτήτων μέχρι την εποχή του Μεσαίωνα. Γεγονότα που δεν ήταν καθορισμένα, βρίσκονταν πέρα από κάθε ανάλυση και καθορίζονταν από ένα «υπέρτατο ον» .

Οι πρώτες «δειλές» προσπάθειες ανάπτυξης των πιθανοτήτων φαίνεται να ξεκινούν στα τέλη του 15ου αιώνα. Το 1494 ο Luca Pacioli, στο βιβλίο του Summa de arithmetica, geometrica proportioni et proportionalita (Τα πάντα για την αριθμητική, την γεωμετρία και τις αναλογίες) δημοσίευσε το πρόβλημα των πόντων, όπως ονομάζεται, και το οποίο αργότερα ήταν μια από τις αρχικές αιτίες ανάπτυξης των Πιθανοτήτων. Το πρόβλημα αναφέρεται στο πώς πρέπει να κατανεμηθεί το ποσό ενός στοιχήματος, όταν ένα παιχνίδι πολλών γύρων διακόπτεται χωρίς να έχει ολοκληρωθεί.

Ο Giralomo Gardano (1501-76), αστρολόγος φιλόσοφος φυσικός μαθηματικός και τζογαδόρος είναι αυτός που έγραψε, γύρω στα 1564 αν και το βιβλίο δημοσιεύτηκε εκατό χρόνια αργότερα στα 1663, το πρώτο βιβλίο στις πιθανότητες με τίτλο Liber De Ludo Aleae (Βιβλίο για παιχνίδια με ζάρια). Στο βιβλίο αυτό ανέφερε τεχνικές για το πώς να κλέβει κάποιος σε τυχερά παιχνίδια ή πώς να καταλάβει ότι άλλοι κλέβουν. Επίσης, σωστά, απαρίθμησε τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών, είναι δε ο πρώτος (μαζί με τον G. Galilaio) που διατύπωσε το ισοπίθανο των εδρών ενός αμερόληπτου ζαριού και επίσης ο πρώτος που εισήγαγε την πιθανότητα με την μορφή κλάσματος, δηλαδή το λόγο του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το συνολικό πλήθος των ισοπίθανων περιπτώσεων. Ακόμα διατύπωσε τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων (ξένα γεγονότα) και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων (ανεξάρτητα γεγονότα). Με το πρόβλημα των πόντων καταπιάστηκαν, χωρίς να έχουν ουσιαστική συμβολή στην λύση του και άλλοι μετέπειτα Ιταλοί μαθηματικοί όπως ο Nicolo Tartaglia και ο Lorenzo Forestani. Ακόμα, ο Galilei Galilaio στο άρθρο του Sopra le scoperte dei dadi (Περί μιας ανακάλυψης αναφορικά με τα ζάρια) ανέφερε, σωστά όλους τους τρόπους με τους οποίους το άθροισμα τριών ζαριών μπορεί να πάρει την τιμή 9 ή 10. Η συνεισφορά αυτή είναι σημαντική λόγω του ότι, προσέγγισε το για πρώτη φορά πρόβλημα επιστημονικά ξεκινώντας από μια εμπειρική παρατήρηση και αναζήτησε μια μαθηματική εξήγηση γι αυτό. Έθεσε έτσι τα θεμέλια για ότι θα ακολουθούσε στις Πιθανότητες.

Στα μέσα του 17ου αιώνα, ένας επαγγελματίας παίχτης ο Chevalier de Mere απέκτησε αρκετά χρήματα ποντάροντας σε τυχερά παιχνίδια. Στοιχημάτιζε ότι σε 4 ρίψεις ενός ζαριού θα μπορούσε να φέρει τουλάχιστον ένα 6. Σύντομα η φήμη του διαδόθηκε με αποτέλεσμα άλλοι παίκτες να αρνούνται να παίξουν μαζί του το παιχνίδι αυτό. Αποφάσισε λοιπόν ότι χρειαζόταν κάποιο άλλο παιχνίδι για να συνεχίσει να κερδίζει. Σκεφτόμενος «λογικά», θεώρησε ότι θα μπορούσε να φέρει δύο τουλάχιστον 6 σε 24 ρίψεις δύο ζαριών, αλλά η λογική του ήταν λάθος με αποτέλεσμα να χάνει συστηματικά. Ανίκανος να διαπιστώσει τι ήταν λάθος, απευθύνθηκε στον διάσημο μαθηματικό της εποχής του, τον Blaise Pascal (1623-62).

Ο Pascal ενδιαφέρθηκε και άρχισε να μελετά τις Πιθανότητες. Αλληλογραφούσε με τον Pierre de Fermat, έναν κυβερνητικό υπάλληλο, ο οποίος ασχολιόταν με τα Μαθηματικά από χόμπι. Στις μεταξύ τους επιστολές ασχολήθηκαν με την ερώτηση του de Mere όπως επίσης και με το πρόβλημα των πόντων. Μαζί διατύπωσαν τις πρώτες βασικές αρχές τις Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, De Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των εφαρμοσμένων Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η έννοια του πειράματος τύχης του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων. Για το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι πηγές [1], [3], [4].

1.1 Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 1000 βαθμούς Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t. Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα.**

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης (random experiment).** Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.

3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.

4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε "γράμματα" αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.

5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.

6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.

7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετράται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.

8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετράται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.

9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

1.2 Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος (sample space)** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα **Ω.** Αν δηλαδή $\omega_1,\omega_2,...,\omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega=\{\omega_1 , \omega_2 ,..., \omega_\kappa \}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με Κ συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε "γράμματα", τότε ο δειγματικός χώρος είναι Ω={Κ, Γ}. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι Ω={1,2,3, 4,5,6}.

1.3 Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο (event) ή γεγονός**. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα Α={2,4,6}, Β={1,3,5} και Γ={6} είναι ενδεχόμενα. Το Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το Β να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα Α και Β είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται ή συμβαίνει. Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο Α ={2,4,6} έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α θα το συμβολίζουμε με N(A). Επομένως, αν Ω={1,2,3, 4,5,6} και Α={2, 4,6} έχουμε N(A)=3, N(Ω)=6 και N($\varnothing$)=0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η έννοια του Καρτεσιανού Γινομένου, οι Βασικές Αρχές Απαρίθμησης και οι Βασικοί κανόνες της Συνδυαστικής. Για το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι πηγές [2], [5], [6], [7].

Όταν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης έχει πεπερασμένο πλήθος απλών ενδεχομένων και τα απλά αυτά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Επομένως, όταν έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, ο υπολογισμός της P(A) ανάγεται στην απαρίθμηση των στοιχείων των συνόλων Ω και Α.

Σε πολλά προβλήματα όμως, η απευθείας απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές η απαρίθμηση διευκολύνεται με τις επόμενες μεθόδους της Συνδυαστικής η οποία είναι ένας από τους βασικούς κλάδους των Μαθηματικών.

2.1 Η έννοια του Καρτεσιανού Γινομένου

Για την καλύτερη και πιο βαθιά κατανόηση της συνδυαστικής, θα πρέπει να αναλυθεί η βασική έννοια του **Καρτεσιανού Γινομένου**.

Ορισμός: Καρτεσιανό Γινόμενο δυο μη κενών συνόλων Α και Β, ορίζεται το σύνολο των ζευγών (α, β) όπου $a \in A$ και $b \in B$. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται:

Α x Β = { (α, β): $a \in A$ και $b \in B$ }.

Γενικευμένος Ορισμός: Καρτεσιανό γινόμενο των μη κενών συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, ορίζεται το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$), όπου $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$, …, $\alpha_\nu \in A_\nu$. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu = \{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) : \alpha_i \in A_i , i = 1, 2, \ldots, \nu \}$

<u>Παράδειγμα:</u>

Μια χρηματοοικονομική εταιρία απασχολεί 5 Λογιστές, 6 Οικονομολόγους, 3 Μαθηματικούς και 2 Στατιστικολόγους. Για τη διοίκηση της εταιρίας επιλέγεται τετραμελής επιτροπή. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί η επιτροπή;

Λύση

Έστω Α: σύνολο Λογιστών
Β: σύνολο Οικονομολόγων
Γ: σύνολο Μαθηματικών
Δ: σύνολο Στατιστικολόγων

Κάθε τετραμελής αντιπροσωπία είναι στοιχείο του συνόλου Α x Β x Γ x Δ, επομένως οι δυνατότητες επιλογής είναι τόσες όσες και ο πληθάριθμος του Α x Β x Γ x Δ. Δηλαδή:

Ν (Α x Β x Γ x Δ) = Ν (Α) x Ν (Β) x Ν (Γ) x Ν (Δ) = 5 x 6 x 3 x 2 = 180

Επομένως η διοικητική επιτροπή μπορεί να συγκροτηθεί κατά 180 τρόπους.

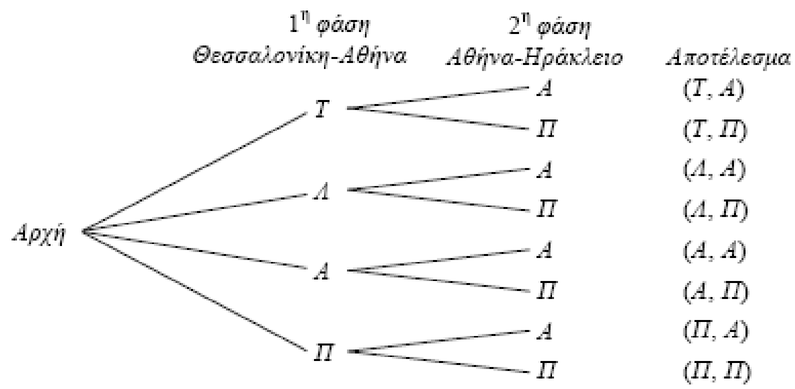
2.2 Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

Βασιζόμενη στη θεωρία του Καρτεσιανού γινομένου, οι αρχές της απαρίθμησης είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων.

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος επιθυμεί να ταξιδέψει από τη Θεσσαλονίκη, μέσω Αθηνών, στο Ηράκλειο Κρήτης χωρίς να χρησιμοποιήσει το ΙΧ αυτοκίνητό του. Από τη Θεσσαλονίκη μπορεί να ταξιδέψει στην Αθήνα με τρένο (Τ) ή λεωφορείο (Λ) ή αεροπλάνο (Α) ή πλοίο (Π) και από την Αθήνα στο Ηράκλειο με πλοίο ή αεροπλάνο. Ενδιαφερόμαστε για τους διαφορετικούς τρόπους ως προς το ταξιδιωτικό μέσο με τους οποίους μπορεί να πάει κάποιος από τη Θεσσαλονίκη στο Ηράκλειο.

Το ταξίδι λοιπόν γίνεται σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η μετάβαση από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα και η δεύτερη από την Αθήνα στο Ηράκλειο. Η πρώτη φάση του ταξιδιού μπορεί να γίνει με 4 τρόπους και η δεύτερη με 2 τρόπους. Σε κάθε τρόπο της πρώτης φάσης αντιστοιχούν οι δύο τρόποι της δεύτερης φάσης. Άρα το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο μπορεί να γίνει με 4x2=8 διαφορετικούς τρόπους.

Τα παραπάνω φαίνονται παραστατικά στο επόμενο δεντροδιάγραμμα:



Γενικά ισχύει η επόμενη βασική αρχή απαρίθμησης:

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις φ_1 , φ_2 ,..., φ_ν . Αν η φάση φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_2 τρόπους ,…, και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση φ_ν μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_ν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\kappa_1 \times \kappa_2 \times \ldots \times \kappa_\nu$ τρόπους.

Επομένως, αν με μια διαδικασία η οποία πραγματοποιείται όπως ορίστηκε προηγουμένως, στην πρώτη φάση συμπληρώνεται το πρώτο στοιχείο μιας διατεταγμένης ν-άδας με κ_1 τρόπους, στη δεύτερη φάση το δεύτερο στοιχείο με κ_2 τρόπους ,…, στη ν- οστή φάση το ν-στό στοιχείο με

κ_ν , τότε σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορούν να σχηματισθούν κ_1 x κ_2 x... x κ_ν διαφορετικές διατεταγμένες ν-άδες.

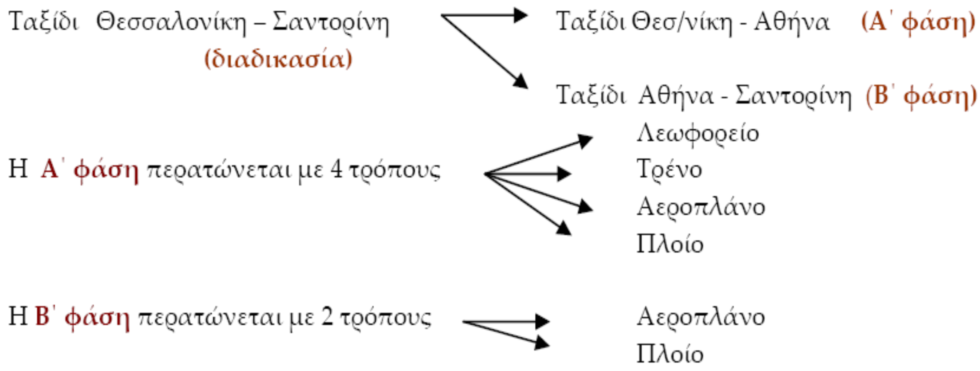
<u>Παράδειγμα:</u>

Χρησιμοποιώντας κάθε δυνατό δημόσιο μεταφορικό μέσο, με πόσους τρόπους μπορεί ένας ταξιδιώτης να επισκεφτεί την Σαντορίνη, ξεκινώντας από Θεσσαλονίκη και ποιοι είναι αυτοί; Υπόψη, ότι για να ταξιδέψει κανείς από Θεσσαλονίκη στη Σαντορίνη, θα πρέπει να περάσει πρώτα και από Αθήνα.

Λύση

Αρχικά ορίζουμε τα γεγονότα. Στην περίπτωση μας το γεγονός είναι το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Σαντορίνη και πραγματοποιείται σε δύο φάσεις. Θεσσαλονίκη-Αθήνα και Αθήνα-Σαντορίνη.

Επομένως:



Άρα για να πραγματοποιηθεί το ταξίδι υπάρχουν 4x2 = 8 επιλογές, οι οποίες είναι:

(Λεωφορείο, Αεροπλάνο), (Τρένο, Αεροπλάνο), (Αεροπλάνο, Αεροπλάνο),

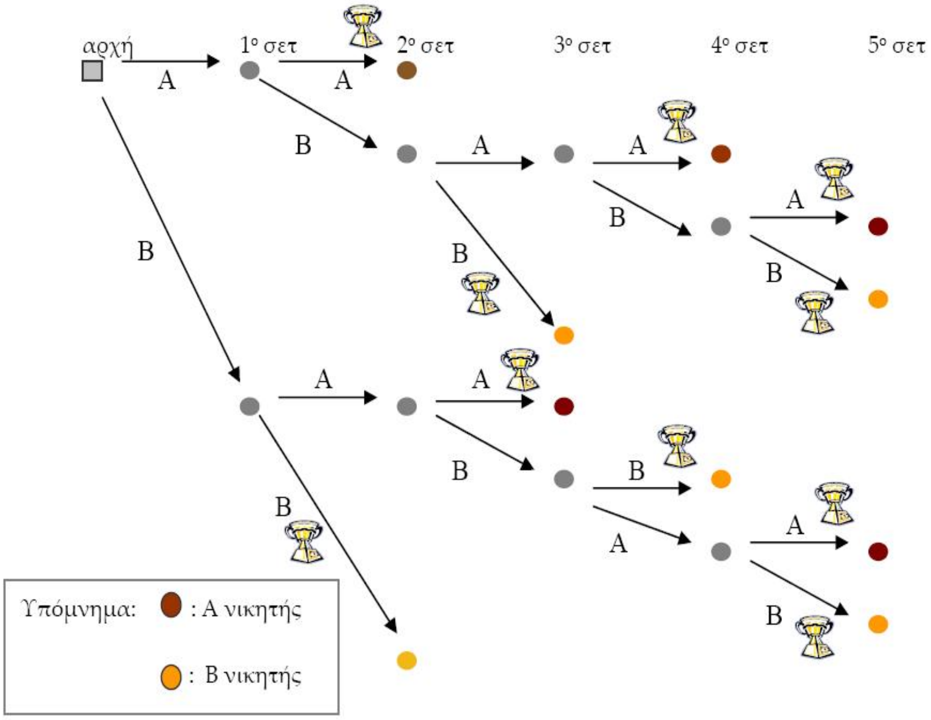
(Λεωφορείο, Πλοίο), (Τρένο, Πλοίο), (Αεροπλάνο, Πλοίο),

(Πλοίο, Αεροπλάνο), (Πλοίο, Πλοίο)

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν ο Α και Β παίζουν έναν αγώνα τένις με τη συμφωνία ότι νικητής θα είναι αυτός που θα κερδίσει διαδοχικά 2 σετ ή ο πρώτος που θα κερδίσει 3 συνολικά σετ. Σχεδιάστε το δεντροδιάγραμμα των εκβάσεων του αγώνα.

Λύση



2.3 Βασικοί κανόνες της Συνδυαστικής

Αρχή του αθροίσματος: Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο) $α_1$ μπορεί να εκλεγεί κατά $κ_1$ τρόπους και ένα στοιχείο $α_2$ μπορεί να εκλεγεί κατά $κ_2$ τρόπους και η εκλογή του ενός αποκλείει την ταυτόχρονη εκλογή του άλλου, τότε το στοιχείο $α_1$ ή $α_2$ μπορεί να εκλεγεί κατά $κ_1 + κ_2$ τρόπους.

Αρχή του αθροίσματος (με ορολογία θεωρίας συνόλων): Έστω A_1 , A_2 , ..., A_k οποιαδήποτε $k \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει $A_i \cap A_j = \varnothing$ για i, j = 1, 2, ..., k με $i \neq j$. Τότε:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

ή ακόμη, με χρήση του συμβόλου της άθροισης

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Στην Οικονομική σχολή γίνονται 3 πρωινές παραδόσεις και 2 απογευματινές. Εάν ο φοιτητής θέλει να παρακολουθήσει μόνο 1 παράδοση, χωρίς να τον ενδιαφέρει αν θα είναι πρωινή □ απογευματινή, τότε έχει 3 + 2 = 5 επιλογές.

<u>Παράδειγμα:</u>

Εάν στο διοικητικό συμβούλιο μιας Διαφημιστικής εταιρίας υπάρχουν 34 τρόποι να επανεκλεγεί ένας παλιός πρόεδρος του διοικητικού συμβουλίου και 21 τρόποι να εκλεγεί ένας καινούργιος, τότε υπάρχουν 34 + 21 = 55 τρόποι να ψηφιστεί είτε ο ένας είτε ο άλλος.

<u>Παράδειγμα:</u>

Υπάρχουν 4 άρτιοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10 και 5 πρώτοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10. Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10 υπάρχουν οι οποίοι είναι άρτιοι ή πρώτοι.

Λύση

Ας χρησιμοποιήσουμε το a_1, για να δηλώσουμε επιλογή άρτιου θετικού ακέραιου μικρότερου του 10, και το a_2, για να δηλώσουμε επιλογή πρώτου θετικού ακέραιου μικρότερου του 10. Σύμφωνα με την εκφώνηση το a_1 μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους, ενώ το a_2 με 5. Όμως η επιλογή θετικού ή πρώτου ακέραιου μικρότερου του 10 μπορεί να γίνει με 8 διαφορετικούς τρόπους (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) και όχι με 9=4+5, όπως θα πρόεκυπτε με εφαρμογή της αρχής του αθροίσματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η επιλογή του a_1 δεν αποκλείει την επιλογή του a_2, αφού ο αριθμός 2 είναι και πρώτος και άρτιος συγχρόνως.

<u>Παράδειγμα:</u>

Σε μια Χρηματοοικονομική εταιρία, για την εκτέλεση ενός project, απασχολούνται καθημερινά 2 λογιστές, 3 οικονομολόγοι, 2 προϊστάμενοι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εκτελεστεί το project μια συγκεκριμένη ημέρα.

Λύση

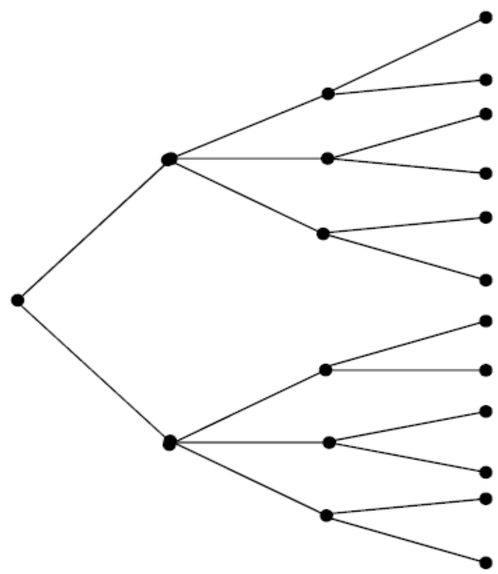
Η εκτέλεση του project μπορεί να γίνει από λογιστές (a_1), από οικονομολόγους (a_2), από προϊστάμενους (a_3). Η επιλογή του a_1 μπορεί να γίνει με n_1=2 διαφορετικούς τρόπους, του a_2 με n_2=3, ενώ του a_3 με n_3=2 διαφορετικούς τρόπους. Επίσης, η επιλογή του a_i αποκλείει την επιλογή οποιουδήποτε a_j με $j \neq i$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος θα υπάρχουν 2+3+2=7 τρόποι για την εκτέλεση του project μια συγκεκριμένη ημέρα.

<u>Αρχή γινομένου (ή πολλαπλασιαστική αρχή)</u>: Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο) $α_1$ μπορεί να εκλεγεί κατά $κ_1$ τρόπους και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα άλλο στοιχείο $α_2$ μπορεί να εκλεγεί κατά $κ_2$ τρόπους, τότε και τα δύο στοιχεία $α_1$ και $α_2$ μπορούν να εκλεγούν κατά $κ_1$x$κ_2$ τρόπους.

Οι αρχές αυτές μπορούν να διατυπωθούν και για $α_1$, $α_2$,...,$α_ν$ στοιχεία (αντικείμενα).

Για να βρούμε τους διαφορετικούς τρόπους εκλογής των διαφόρων στοιχείων $α_1$, $α_2$,...,$α_ν$ συνήθως διευκολύνει η χρήση ενός δενδροδιαγράμματος.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι πρόκειται να διαλέξουμε ν = 3 στοιχεία ($α_1$,$α_2$,$α_3$) . Αν το πρώτο στοιχείο $α_1$ μπορεί να επιλεγεί κατά $κ_1$ = 2 τρόπους (α ή β) , το δεύτερο στοιχείο $α_2$ μπορεί να επιλεγεί κατά $κ_2$ = 3 τρόπους (γ ή δ ή ε) και το $α_3$ κατά $κ_3$ =2 τρόπους (ζ ή η) , τότε οι $κ_1$x $κ_2$x $κ_3$ = 12 διαφορετικοί τρόποι εκλογής των $α_1$, $α_2$ και $α_3$ είναι:



<u>Πολλαπλασιαστική αρχή(με ορολογία θεωρίας συνόλων):</u> Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_k$ οποιαδήποτε $k \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα και $A_1 x A_2 x \ldots x A_k$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Τότε

$$|A_1 x A_2 x \ldots x A_k| = |A_1| x |A_2| x \ldots x |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Στην Οικονομική σχολή γίνονται 3 πρωινές παραδόσεις και 2 απογευματινές. Εάν ο φοιτητής θέλει να παρακολουθήσει 1 πρωινή και 1 απογευματινή παράδοση, τότε έχει 3x2 = 6 επιλογές.

<u>Παράδειγμα:</u>

Εάν στις διοικητικές εκλογές μιας Διαφημιστικής εταιρίας υπάρχουν 34 τρόποι να επανεκλεγεί ένας παλιός πρόεδρος και 21 τρόποι να εκλεγεί ένας καινούργιος, τότε υπάρχουν 34x21 = 714 τρόποι να ψηφιστούν και οι δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η έννοια των Διατάξεων, των Συνδυασμών, της αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού και των Μοντέλων Καταλήψεων. Για το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι πηγές [2], [4], [5].

3.1 Διατάξεις

Οι διατάξεις στοιχείων είναι δύο ειδών. Οι **απλές διατάξεις** και οι **επαναληπτικές.**

Ας υποθέσουμε ότι μία επιτροπή με 5 μαθητές συνεδριάζει για να εκλέξει πρόεδρο, γραμματέα, και ταμία. Αν θέλουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών τριάδων που θα εκλεγούν για τις τρεις θέσεις σκεπτόμαστε ως εξής:

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις:

1η φάση εκλογή προέδρου, 2η φάση εκλογή γραμματέα και 3η φάση εκλογή ταμία. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του ταμία. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι 5x4x3=60. Καθεμιά από τις παραπάνω τριάδες λέγεται διάταξη των 5 ανά 3.

$1^η$ *θέση*	$2^η$ *θέση*	$3^η$ *θέση*
5 *τρόποι*	4 *τρόποι*	3 *τρόποι*

Γενικά:

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, με κ≤ν, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ διαφορετικά στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε μια σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ συμβολίζεται με Δ_k^n και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι:

$$\Delta_k^n = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο διατάξεις των ν ανά κ είναι διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς ένα τουλάχιστον στοιχείο ή ως προς τη θέση που κατέχουν τα στοιχεία. Για παράδειγμα, οι διατάξεις (1, 2, 3), (1, 4, 3) και (3, 2, 1) είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που πάρουμε και τα ν στοιχεία ενός συνόλου Α και τα βάλουμε σε μια σειρά, τότε έχουμε μια διάταξη των ν στοιχείων ανά ν η οποία λέγεται μετάθεση των ν στοιχείων. Το πλήθος Δ_n^n των μεταθέσεων των ν στοιχείων συμβολίζεται με $Μ_ν$ και σύμφωνα με τον τύπο (1) είναι:

$$M_n = n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1$$

Το γινόμενο 1x2x3...(ν-2)(ν-1)ν συμβολίζεται με ν! και διαβάζεται ν παραγοντικό. Επομένως

$$M_n = n! \qquad (2)$$

Έτσι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα θέλουμε να βάλουμε τους 5 μαθητές σε μια σειρά, τότε υπάρχουν $Μ_5$=1x2x3x4x5=120 διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε.

Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του παραγοντικού για να εκφράσουμε το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ με κ**p**ν έχουμε:

$$\Delta_k^n = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...3\times2\times1}{(n-k)(n-k-1)...3\times2\times1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Επομένως

$$\Delta_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (3)$$

Αν τώρα θέλουμε ο τύπος (3) να ισχύει και για κ=ν , επειδή Δ_n^n = M_ν = ν!, πρέπει $\frac{n!}{0!} = n!$. Είναι λοιπόν λογικό να ορίσουμε 0!=1.

Για κάθε σύνολο Α με ν διακεκριμένα στοιχεία, Α = { α_i, i = 1, 2, …, ν }, ορίζεται ως επαναληπτική διάταξη ν στοιχείων ανά κ, την κατάταξη σε ευθεία γραμμή των κ στοιχείων που πήραμε από τα ν, αν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι κ φορές.

Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων ν ανά κ ορίζεται:

$$E_k^n = n \times n \times ... \times n = n^k$$

Στις διατάξεις που εξετάσαμε παραπάνω, τα στοιχεία του σχηματισμού ήταν τοποθετημένα σε μια σειρά. Τι θα συμβεί άραγε, αν θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία τοποθετούνται περιμετρικά γύρω από ένα κύκλο.

Σε αυτή τη περίπτωση, αφού από κάθε **κυκλική** διάταξη προκύπτουν k διατάξεις, αν συμβολίσουμε με x το πλήθος των κυκλικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k, το γινόμενο kx θα δίνει το πλήθος των συνήθων διατάξεων των n στοιχείων ανά k. Άρα, θα πρέπει να ισχύει $kx = (\nu)_k$ απ' όπου προκύπτει ότι $x = \frac{(\nu)_k}{k}$.

Επομένως, ο αριθμός των κυκλικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k είναι ίσος με

$$\frac{(\nu)_k}{k} = \frac{\nu!}{k(\nu-k)!}.$$

Ειδικότερα, ο αριθμός των κυκλικών μεταθέσεων των ν στοιχείων (k=ν) είναι ίσος με (ν-1)!

<u>Παράδειγμα:</u>

Για την διεκπεραίωση ενός project μιας Διαφημιστικής εταιρίας, συμμετέχουν 32 στελέχη της. Με πόσους τρόπους μπορεί να συμπληρωθούν οι 3 πρώτες θέσεις;

Λύση

Από τα 32 στο σύνολο στελέχη, μόνο 3 είναι αυτοί που θα καταλάβουν τις πρώτες θέσεις. Επειδή μάλιστα σε κάθε διατεταγμένη τριάδα που μπορεί να δημιουργηθεί, τα επιμέρους μέλη θα είναι διαφορετικά, το πλήθος των τελικών τριάδων θα είναι:

$$\Delta_3^{32} = \frac{32!}{(32-3)!} = 29.760$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Σε μια Διαφημιστική εταιρία με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι ν ζεύγη ανδρόγυνων στελεχών,

α) χωρίς κανένα περιορισμό ως προς τη θέση που καταλαμβάνει ο καθένας

β) έτσι ώστε οι άντρες και οι γυναίκες να εναλλάσσονται.

Λύση

α) Εδώ αναφερόμαστε στις κυκλικές μεταθέσεις των 2ν ατόμων (ν άντρες και ν γυναίκες), οπότε το ζητούμενο πλήθος είναι (2ν-1)!.

β) θεωρούμε ότι η διαδικασία εκτελείται σε δυο βήματα (φάσεις). Στο πρώτο, τοποθετούνται στο τραπέζι οι ν άντρες και αυτό μπορεί να συμβεί κατά (ν-1)! διαφορετικούς τρόπους. Άρα, τελικά το πλήθος των διαφορετικών τοποθετήσεων υπό τη συνθήκη που δόθηκε είναι ίσο με (ν-1)!ν!.

Παράδειγμα:

Ένα τραπεζικό κατάστημα διαθέτει 3 διαφορετικά ταμεία T_1, T_2, T_3. Αν στα ταμεία αυτά μπορούν να εργαστούν 8 διαφορετικοί υπάλληλοι της τράπεζας, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν τα 3 ταμεία. Ποια θα ήταν η απάντηση, αν η εταιρία διέθετε 8 ταμεία.

Λύση

Έστω $X = \{1, 2, ..., 8\}$ το σύνολο των ατόμων που μπορούν να απασχοληθούν στα k=3 ταμεία. Κάθε τοποθέτηση ατόμων στα τρία ταμεία αντιστοιχεί στη συμπλήρωση μιας τριάδας (a_1, a_2, a_3) αποτελούμενης από στοιχεία του X, δηλαδή $a_1, a_2, a_3 \in X$. Το στοιχειό a_1 δηλώνει το άτομο που τοποθετήθηκε στο ταμείο T_1, το a_2 δηλώνει το άτομο που τοποθετήθηκε στο ταμείο T_2 και τέλος το a_3 δηλώνει το άτομο που τοποθετήθηκε στο ταμείο T_3. Για παράδειγμα, η τριάδα (3, 7, 1) δηλώνει τοποθέτηση

Ταμείο 1	Ταμείο 2	Ταμείο 3
3	7	1

ενώ η τριάδα (1, 3, 7) την τοποθέτηση

Ταμείο 1	Ταμείο 2	Ταμείο 3
1	3	7

Είναι, λοιπόν, φανερό ότι μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των a_1, a_2, a_3 (δηλαδή έχουμε διατεταγμένη τριάδα), ενώ επιπλέον τα a_1, a_2, a_3 είναι ανά δυο διαφορετικά μεταξύ τους (κανένα άτομο δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μια φορά). Άρα, οι σχηματισμοί που ψάχνουμε είναι διατάξεις των ν=8 στοιχείων ανά k=3 και το πλήθος τους θα δίνεται από τον τύπο

$$(8)_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Στην περίπτωση που τα ταμεία ήταν 8, προκύπτουν οι μεταθέσεις των ν=8 στοιχείων, οπότε το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων γίνεται

$$8! = 1\times 2\times 3\times ...\times 8 = 40320\,.$$

3.2 Συνδυασμοί

Ας υποθέσουμε ότι από 5 άτομα Α, Β, Γ, Δ και Ε θέλουμε να επιλέξουμε μια ομάδα 3 ατόμων, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κατάταξη μέσα σ’ αυτήν την ομάδα. Αν x είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων που μπορούμε να επιλέξουμε, τότε από κάθε τέτοια ομάδα μπορούν να προκύψουν 3! διατεταγμένες ομάδες. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων ομάδων θα είναι 3!x. Ο αριθμός αυτός όμως είναι το πλήθος των διατάξεων Δ_3^5.

Επομένως, θα είναι $\Delta_3^5 = 3!x$, οπότε $x = \dfrac{\Delta_3^5}{3!} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{120}{6\times 2} = 10$.

Πιο συγκεκριμένα οι ομάδες αυτές θα είναι:

{Α, Β, Γ}, {Α, Β, Δ}, {Α, Β, Ε}, {Α, Γ, Δ}, {Α, Γ, Ε}, {Α, Δ, Ε}, {Β, Γ, Δ}, {Β, Γ, Ε}, {Β, Δ, Ε}, και {Γ, Δ, Ε}. Κάθε τέτοια επιλογή λέγεται συνδυασμός των 5 ανά 3.

Γενικά:

Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Όπως και οι διατάξεις έτσι και οι συνδυασμοί στοιχείων είναι δύο ειδών. Οι **απλοί** και οι **επαναληπτικοί**.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{\Delta_k^n}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Επομένως,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο συνδυασμοί των ν ανά κ είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο.

Για κάθε σύνολο Α με ν διακεκριμένα στοιχεία, Α = { α_i, i = 1, 2, …, ν }, ορίζεται ως επαναληπτικός συνδυασμός ν στοιχείων ανά κ, κάθε υποσύνολο του Α με κ στο πλήθος στοιχεία, αν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι κ φορές.

Το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών ν ανά κ ορίζεται:

$$\mathrm{E}_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Παράδειγμα:

Το διοικητικό συμβούλιο μιας Χρηματοοικονομικής εταιρίας παρουσιάζει 20 προτάσεις για τη δημιουργία διαφόρων project που την αφορά, από τις οποίες οι 5 μόνο είναι για ένα project. Οι υπόλοιπες ανά τρεις δεν αφορούν το συγκεκριμένο project. Πόσα project μπορούμε να δημιουργήσουμε.

Λύση

Με τις 20 προτάσεις ορίζονται $\binom{20}{2}$ project. Οι 5 όμως προτάσεις ορίζουν $\binom{5}{2}$ project, τα οποία όμως συμπίπτουν σε ένα. Επομένως το συνολικό πλήθος των διαφορετικών project που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι:

$$\binom{20}{2}-\binom{5}{2}+1=\frac{20!}{2!18!}-\frac{5!}{2!3!}+1=\frac{19\times20}{2}-\frac{4\times5}{2}+1=181$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Μια εταιρία Μάρκετινγκ αποτελείται από 3 προϊστάμενους, 2 τηλεφωνήτριες και 5 υπάλληλους γραφείου. Εάν κάποιος επιλέξει τυχαία και χωρίς να βλέπει 5 από αυτούς, χωρίς να τους ‘επανατοποθετεί’ μετά,

(α) πόσες επιλογές υπάρχουν να επιλέξει τουλάχιστον 2 προϊστάμενους,

(β) πόσες επιλογές υπάρχουν να επιλέξει το πολύ 1 τηλεφωνήτρια,

(γ) πόσες επιλογές υπάρχουν να επιλέξει τουλάχιστον 1 προϊστάμενο και τουλάχιστον 1

τηλεφωνήτρια,

(δ) πόσες επιλογές υπάρχουν να επιλέξει μόνο υπάλληλους γραφείου και

(ε) πόσες επιλογές υπάρχουν να επιλέξει μόνο προϊστάμενους και τηλεφωνήτριες;

Λύση

(α) Από τους 10 συνολικά υπαλλήλους, επιλέγουμε 5 τυχαίους. Οι επιλογές να επιλέξει κανείς τουλάχιστον 2 προϊστάμενους (δηλ., ή 2, ή 3), γράφεται με απλούς συνδυασμούς:

$$\binom{3}{2}\binom{7}{3}+\binom{3}{3}\binom{7}{2}=3\times\frac{7!}{3!4!}+1\times\frac{7!}{2!5!}=3\times\frac{5\times6\times7}{2\times3}+\frac{6\times7}{2}=126$$

(β) Οι επιλογές να επιλέξει κανείς το πολύ 1 τηλεφωνήτρια (δηλ., ή 1, ή καμία), γράφεται με απλούς συνδυασμούς:

$$\binom{2}{1}\binom{8}{4}+\binom{2}{0}\binom{8}{5}=2\times\frac{8!}{4!4!}+1\frac{8!}{5!3!}=2\times\frac{5\times6\times7\times8}{2\times3\times4}+\frac{6\times7\times8}{2\times3}=196$$

(γ) Οι επιλογές να επιλέξει κανείς τουλάχιστον 1 προϊστάμενο και 1 τηλεφωνήτρια (δηλ., ή 1, ή 2, ή 3 προϊστάμενους και ή 1, ή 2 τηλεφωνήτριες), γράφεται με απλούς συνδυασμούς:

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{3}\binom{3}{1}+\binom{2}{2}\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{5}{2}\binom{3}{2}+\binom{2}{2}\binom{5}{1}+\binom{3}{3}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{3}{3}+\binom{2}{2}\binom{5}{0}=$$
$$=3\times 2+\frac{5!}{3!2!}\times 3+1\times\frac{5!}{2!3!}+3\times 2+\frac{5!}{2!3!}\times 3+1\times 5+1\times 2+5\times 1+1\times 1$$
$$=25+\frac{4\times 5}{2}\times 3+\frac{4\times 5}{2}+3\frac{4\times 5}{2}=95$$

(δ) Οι επιλογές να επιλέξει κανείς μόνο υπάλληλους γραφείου, γράφεται με απλούς συνδυασμούς:

$$\binom{5}{5}\binom{5}{0}=1\times 1=1$$

(ε) Οι επιλογές να επιλέξει κανείς μόνο προϊστάμενους και τηλεφωνήτριες, γράφεται με απλούς συνδυασμούς:

$$\binom{3}{3}\binom{2}{2}\binom{5}{0}=1\times 1\times 1=1$$

Παράδειγμα:

Σε μια Διαφημιστική εταιρία, για τη θέση ενός υπάλληλου γραφείου , οι υποψήφιοι έλαβαν μέρος στην συνέντευξη ανά 2 και έγιναν 21 συνεντεύξεις. Πόσοι ήταν οι υποψήφιοι;

Λύση

Έστω x∈ N, το πλήθος των υποψηφίων και $\binom{x}{2}$ το πλήθος των συνεντεύξεων. Ισχύει:

$$\binom{x}{2}=21\Rightarrow\frac{x!}{2(x-2)!}=21\Rightarrow\frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!}=21\Rightarrow\frac{x(x-1)}{2}=21\Rightarrow x^2-x-42=0$$
$$\Rightarrow(x-7)(x+6)=0\Rightarrow x=7\ \&\ x=-6$$

Επειδή $x\in \mathrm{N}$ θα πρέπει $x\ \mathbf{f}\ 0$. Επομένως οι υποψήφιοι ήταν 7.

Παράδειγμα:

Μια Διαφημιστική εταιρία, για την ανάθεση ενός project, θέλει να προσλάβει 5 νέους υπαλλήλους. Μετά την προκήρυξη των νέων θέσεων υπέβαλαν αίτηση 7 γυναίκες και 8 άντρες. Να υπολογιστούν οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή των 5 νέων υπαλλήλων

α. αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός,

β. αν πρέπει να προληφθούν ακριβώς 2 γυναίκες,

γ. αν πρέπει να προληφθούν τουλάχιστον 3 άντρες,

δ. αν υποθέσουμε ότι μεταξύ των υποψηφίων υπάρχει ένα ανδρόγυνο και δεν επιτρέπεται η πρόσληψη και των δυο συζύγων συγχρόνως.

Λύση

Έστω $X_1 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_7\}$ το σύνολο των 7 γυναικών και $X_2 = \{A_1, A_2, ..., A_8\}$ το σύνολο των 8 αντρών που υπέβαλλαν την αίτηση πρόσληψης.

α. Εδώ ζητάμε τους συνδυασμούς των ν=7+8=15 στοιχείων του συνόλου $X = X_1 \cup X_2$ ανά k=5. Άρα, το πλήθος των διαφορετικών επιλογών είναι ίσο με

$$\binom{15}{5} = \frac{(15)_5}{5!} = \frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 3003$$

β. Η επιλογή των γυναικών μπορεί να γίνει κατά

$$\binom{7}{2} = \frac{(7)_2}{2!} = \frac{7\times 6}{2} = 21$$

τρόπους όσοι και οι συνδυασμοί των 7 στοιχείων του συνόλου X_1 ανά 2. Ομοίως, η επιλογή των 5-2=3 αντρών που απαιτούνται για να συμπληρωθούν οι 5 θέσεις, μπορεί να γίνει με

$$\binom{8}{3} = \frac{(8)_3}{3!} = \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56$$

τρόπους, όσοι και οι συνδυασμοί των 8 στοιχείων του συνόλου X_2 ανά 3. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$\binom{7}{2}\binom{8}{3} = 21 \times 56 = 1176 .$$

γ. Υπάρχουν τρεις ξένες μεταξύ τους περιπτώσεις με τις οποίες μπορεί να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο:

- να προληφθούν 3 άντρες και 2 γυναίκες,
- να προληφθούν 4 άντρες και 1 γυναίκα,
- να προληφθούν 5 άντρες και καμία γυναίκα.

Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση είναι, αντίστοιχα

$$\binom{8}{3}\binom{7}{2} = 1176 ,$$

$$\binom{8}{4}\binom{7}{1} = \frac{(8)_4}{4!} \times 7 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 7 = 490 ,$$

$$\binom{8}{5}\binom{1}{0} = \frac{(8)_5}{5!} \times 1 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 56 .$$

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος, το ζητούμενο πλήθος θα είναι

$$1176+490+56=1722.$$

δ. Ας θεωρήσουμε ότι το ανδρόγυνο είναι τα άτομα A_1, Γ_1 και ας ορίσουμε τα επόμενα σύνολα:

Ω: συνδυασμοί των ν=15 στοιχείων του $X = X_1 \cup X_2$ ανά k= 3 (βασικό σύνολο),

Β: συνδυασμοί των ν=15 στοιχείων του $X = X_1 \cup X_2$ ανά k= 3 στους οποίους συμμετέχουν και οι δυο σύζυγοι A_1, Γ_1.

Τότε, το ζητούμενο πλήθος αντιστοιχεί στον πληθάριθμο του συνόλου B', ο οποίος, δίνεται από τον τύπο

$$|B'| = |\Omega| - |B|.$$

Όμως $|\Omega|$=3003, ενώ για την εύρεση του $|B|$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, δεδομένου ότι τα άτομα A_1, Γ_1 ήδη έχουν επιλεγεί, η πεντάδα των νέων υπαλλήλων θα πρέπει απλώς να συμπληρωθεί με 3 άτομα από τα (8-1)+(7-1)=13 που απέμειναν. Άρα

$$|B| = \binom{13}{3} = \frac{(13)_3}{3!} = \frac{13 \times 12 \times 11}{1 \times 2 \times 3} = 286$$

και τελικά

$$|B'| = |\Omega| - |B| = 3003 - 286 = 2717.$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Για την πλήρωση $k \geq 1$ νέων θέσεων σε μια Διαφημιστική εταιρεία , εμφανίστηκαν $n \geq 1$ ενδιαφερόμενοι υποψήφιοι από τους οποίους οι r είναι γυναίκες $(1 \leq r \leq n)$. Με ποιους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των νέων υπαλλήλων, αν

α. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός,

β. πρέπει να προσληφθούν ακριβώς $s \geq 1$ άντρες $(1 \leq s \leq v - r)$,

γ. είχε εκ των προτέρων αποφασιστεί ότι θα προληφθούν οπωσδήποτε 2 συγκεκριμένες γυναίκες και 3 συγκεκριμένοι άντρες.

Λύση

α. Εδώ ζητάμε τους συνδυασμούς των **v**=r+(ν-r)=ν στοιχείων, του συνόλου άντρες και γυναίκες μαζί, ανά **k**=k. Άρα, το πλήθος των διαφορετικών επιλογών των νέων υπαλλήλων είναι ίσο με

$$\binom{n}{k}.$$

β. Η επιλογή των γυναικών μπορεί να γίνει κατά

$$\binom{r}{k-s}$$

όσοι και οι συνδυασμοί των r στοιχείων του συνόλου των γυναικών ανά k-s.

Ομοίως, η επιλογή των s αντρών που απαιτούνται για να συμπληρωθούν οι k θέσεις, μπορεί να γίνει με

$$\binom{n-r}{s}$$

τρόπους, όσοι και οι συνδυασμοί των $n-r$ στοιχείων του συνόλου των αντρών ανά s.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$\binom{r}{k-s}\binom{n-r}{s}.$$

γ. Αφού είχε αποφασιστεί εκ των προτέρων ότι θα προληφθούν οπωσδήποτε 2 συγκεκριμένες γυναίκες και 3 συγκεκριμένοι άντρες, τότε το πλήθος των διαφορετικών επιλογών των νέων υπαλλήλων είναι ίσο με

$$\binom{n-5}{k-5}.$$

3.3 Αρχή Εγκλεισμού- Αποκλεισμού

Παραπάνω αναλύσαμε την αρχή του αθροίσματος, σύμφωνα με την οποία, ο αριθμός των στοιχείων της ένωσης $\nu \geq 2$ ξένων ανά δυο συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ δίνεται από τον τύπο

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu\right| = \sum_{i=1}^{\nu} \left|A_i\right|.$$

Για να εφαρμοστεί ο τύπος αυτός, θα πρέπει να διαιρέσουμε τα στοιχεία του συνόλου που θέλουμε να απαριθμήσουμε σε έναν αριθμό ξένων ανά δυο υποσυνόλων. Ωστόσο, ένα τέτοιο εγχείρημα δεν είναι πάντοτε απλό να γίνει. Για το λόγο αυτό, η εύρεση ενός γενικότερου τύπου ο όποιος θα επέτρεπε τον υπολογισμό του πληθάριθμου της ένωσης $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ ακόμη και αν τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ δεν είναι ανά δυο ξένα, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Στην ειδική περίπτωση ν=2, έχουμε

$$\left|A_1 \cup A_2\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| - \left|A_1 \cap A_2\right|.$$

Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο για να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του $\left|A_1 \cup A_2\right|$, χρειαζόμαστε το πλήθος των στοιχείων του καθενός συνόλου ξεχωριστά ($\left|A_1\right|, \left|A_2\right|$) και το πλήθος των στοιχείων της τομής ($\left|A_1 \cap A_2\right|$). Η **συμπερίληψη(εγκλεισμός)** των στοιχείων των A_1, A_2, και η **εξαίρεση(αποκλεισμός)** των στοιχείων της τομής $A_1 \cap A_2$, θα μας δώσουν τελικά το ζητούμενο αριθμό $\left|A_1 \cup A_2\right|$.

Ο προηγούμενος τύπος αποτελεί την απλούστερη μορφή της **αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού.**

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση ν=3. Αν A_1, A_2, A_3 είναι τρία υποσύνολα (όχι απαραίτητα ξένα αν δυο) ενός βασικού συνόλου Ω, τότε το πλήθος των στοιχείων της ένωσης μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = \left|\left(A_1 \cup A_2\right) \cup A_3\right|$$

$$=\left|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\right|+\left|\mathrm{A}_3\right|-\left|\left(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\right)\cap\mathrm{A}_3\right|$$
$$=\left|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\right|+\left|\mathrm{A}_3\right|-\left|\left(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_3\right)\cup\left(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\right)\right|$$
$$=\left|\mathrm{A}_1\right|+\left|\mathrm{A}_2\right|-\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\right|+\left|\mathrm{A}_3\right|-\left(\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_3\right|+\left|\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\right|-\left|\left(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_3\right)\cap\left(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\right)\right|\right)$$
$$=\left(\left|\mathrm{A}_1\right|+\left|\mathrm{A}_2\right|+\left|\mathrm{A}_3\right|\right)-\left(\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\right|+\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_3\right|+\left|\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\right|\right)+\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\right|.$$

Άρα, τελικά έχουμε

$$\left|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\right|=S_1-S_2+S_3$$

όπου

$$S_1=\left|\mathrm{A}_1\right|+\left|\mathrm{A}_2\right|+\left|\mathrm{A}_3\right|=\sum_{i=1}^{3}\left|\mathrm{A}_i\right|$$
$$S_2=\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\right|+\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_3\right|+\left|\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\right|=\sum_{i<j}\left|\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j\right|$$
$$S_3=\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\right|.$$

Γενικότερα, ισχύει το εξής αποτέλεσμα:

(Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού) Αν $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_\nu$ είναι $\nu\geq 2$ υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε

$$\left|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\ldots\cup\mathrm{A}_\nu\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{\nu}\mathrm{A}_i\right|=S_{\nu,1}-S_{\nu,2}+S_{\nu,3}-\ldots+\left(-1\right)^{-1}S_{\nu,\nu}=\sum_{r=1}^{\nu}\left(-1\right)^{r-1}S_{\nu,r}$$

όπου οι ποσότητες $S_{\nu,r}=1,2,\ldots,\nu$ δίνονται από τους τύπους

$$S_{\nu,1}=\sum_{i=1}^{\nu}\left|\mathrm{A}_i\right|$$
$$S_{\nu,2}=\sum_{i<j}\left|\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j\right|$$
…………………………..
$$S_{\nu,\nu}=\left|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\ldots\cap\mathrm{A}_\nu\right|$$

ή γενικά

$$S_{v,r} = \sum \left| \mathrm{A}_{i_1} \cap \mathrm{A}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{i_r} \right|, r = 1, 2, \ldots, v$$

με το άθροισα να επεκτείνεται σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ των v στοιχείων του συνόλου δεικτών $\{1, 2, \ldots, v\}$ ανά r.

Παράδειγμα:

Έστω $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Να υπολογιστεί το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Ω τα οποία διαιρούνται ακριβώς με το 2, 5, ή 7.

Λύση

Θυμίζουμε αρχικά τα επόμενα δυο αποτελέσματα της θεωρίας αριθμών τα οποία θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα για τη λύση του προβλήματος.

α. Αν n,m είναι δεδομένοι φυσικοί αριθμοί και $\mathrm{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε το πλήθος των στοιχείων του N_n τα οποία είναι πολλαπλάσια του m (διαιρούνται ακριβώς με το m) είναι ίσο με το ακέραιο μέρος $[n/m]$ του λόγου n/m.

β. Έστω m_1, m_2, m τρεις φυσικοί αριθμοί. Τότε, το m είναι πολλαπλάσιο και του m_1 και του m_2 (διαιρείται και από το m_1 και από το m_2), αν και μονό αν είναι πολλαπλάσιο του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου των m_1, m_2.

Για να προχωρήσουμε στην απάντηση του προβλήματος, ας ορίσουμε τα σύνολα

$$\mathrm{A}_1 = \{x \in \Omega : to x diaireítai\ apó\ to\ 2\}$$
$$\mathrm{A}_2 = \{x \in \Omega : to x diaireítai\ apó\ to\ 5\}$$
$$\mathrm{A}_3 = \{x \in \Omega : to x diaireítai\ apó\ to\ 7\}$$

οπότε ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = S_1 - S_2 + S_3 .$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα (α), (β) που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούμε να διαπιστώσουμε άμεσα ότι

$$\left|A_1\right| = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500, \; \left|A_2\right| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200, \; \left|A_3\right| = \left[\frac{1000}{7}\right] = 142$$

$$\left|A_1 \cap A_2\right| = \left|\left\{x \in \Omega : to x diaireítai apó to \; 10\right\}\right| = \left[\frac{1000}{10}\right] = 100$$

$$\left|A_1 \cap A_3\right| = \left|\left\{x \in \Omega : to x diaireítai apó to \; 14\right\}\right| = \left[\frac{1000}{14}\right] = 71$$

$$\left|A_2 \cap A_3\right| = \left|\left\{x \in \Omega : to x diaireítai apó to \; 35\right\}\right| = \left[\frac{1000}{35}\right] = 28$$

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| = \left|\left\{x \in \Omega : to x diaireítai apó to \; 70\right\}\right| = \left[\frac{1000}{70}\right] = 14$$

οπότε

$$S_1 = 500 + 200 + 142 = 842, \; S_2 = 100 + 71 + 28 = 199, \; S_3 = 14$$

και τελικά

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| = 842 - 199 + 14 = 756 .$$

Γενικεύμενη Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι $\nu \geq 2$ υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε το πλήθος $N_{\nu,m}$ των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν σε m ακριβώς από τα ν υποσύνολα δίνεται από τον τύπο

$$N_{\nu,m} = S_{n,m} - \binom{m+1}{m} S_{\nu,m} + \binom{m+2}{m} S_{\nu,m+1} - \ldots + (-1)^{\nu-m} \binom{\nu}{m} S_{\nu,\nu} = \sum_{r=m}^{\nu} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} S_{\nu,r}$$

,

m=0,1,…,ν

όπου $S_{v,0} = |\Omega|$ και $S_{v,r}$, r=1,2,…,ν είναι οι ποσότητες που ορίστηκαν παραπάνω.

Επίσης από την παραπάνω πρόταση προκύπτει το εξής πόρισμα: Αν $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_v$ είναι $v \geq 2$ ανταλλάξιμα υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε το πλήθος $\mathrm{N}_{v,m}$ των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν σε m ακριβώς από τα ν υποσύνολα δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{N}_{v,m} = \binom{v}{m}\sum_{r=m}^{v}(-1)^{r-m}\binom{v-m}{r-m}n_r = \binom{v}{m}\sum_{j=0}^{v-m}(-1)^{j}\binom{v-m}{j}n_{m+j},\ \text{m=0,1,…,ν}$$

όπου

$$n_0 = |\Omega|,\ n_r = |\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_r|,\ \text{r=1,2,…,ν.}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Μια εταιρία έχει 2ν υπαλλήλους οι οποίοι αποτελούν ν ομάδες εργασίας. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι ν υπάλληλοι να τοποθετηθούν απέναντι στις άλλες ν, έτσι ώστε να προκύψουν ακριβώς m σωστές ομάδες εργασίας.

Λύση

Έστω ότι αρχικά σταθεροποιούμε τους ν υπαλλήλους και ότι στη συνέχεια τοποθετούμε απέναντι τους υπόλοιπους ν υπαλλήλους με όλους τους δυνατούς τρόπους. Το σύνολο Ω όλων των δυνατών τοποθετήσεων έχει ν! στοιχειά. Αν θεωρήσουμε τα υποσύνολα $\mathrm{A}_i \subseteq \Omega$ που περιέχουν τις τοποθετήσεις κατά τις οποίες ο i υπάλληλος μπήκε στη σωστή θέση, τότε είναι φανερό ότι τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_v$ είναι ανταλλάξιμα με

$$n_r = (v-r)!,\ \text{r=0,1,…,ν.}$$

Άρα, ο ζητούμενος αριθμός θα δίνεται, σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα από τον τύπο

$$\mathrm{N}_{v,m} = \binom{v}{m}\sum_{r=m}^{v}(-1)^{r-m}\binom{v-m}{r-m}(v-r)! = \frac{v!}{m!}\sum_{r=m}^{v}\frac{(-1)^{r-m}}{(r-m)!}.$$

3.4 Μοντέλα Καταλήψεων

Στη παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε το εξής συνδυαστικό πρόβλημα: ένας συγκεκριμένος αριθμός k σφαιριδίων (ή γενικά k αντικειμένων) πρόκειται να τοποθετηθεί εντός ν διαφορετικών κελιών. Εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι η απαρίθμηση των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των σφαιριδίων στα κελιά.

Τέτοιες τοποθετήσεις αναφέρονται συνήθως με την ονομασία κατανομές των αντικειμένων στα κελιά ή καταλήψεις των κελιών από τα σφαιρίδια. Παρότι σε ορισμένα εγχειρίδια συνδυαστικής οι δυο προαναφερθέντες όροι χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ελαφρώς διαφορετικά μοντέλα απαρίθμησης, στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιούνται και οι δυο με την ίδια σημασία.

Βέβαια, είναι δυνατόν να προκύψουν διαφορές παραλλαγές του προβλήματος, ανάλογα με το κατά πόσον τα σφαιρίδια θεωρούνται διακεκριμένα ή όχι, καθώς επίσης και ανάλογα με πιθανούς περιορισμούς που μπορούν να τεθούν ως προς τα κελιά (π.χ. να μην είναι κανένα κενό ή να έχουν περιορισμένη χωρητικότητα κλπ).

Α. Κατανομές διακεκριμένων σφαιριδίων σε κελιά

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε k διακεκριμένα σφαιρίδια $s_1, s_2, ..., s_k$ τα οποία πρόκειται να τοποθετηθούν σε ν (διακεκριμένα) κελιά αριθμημένα με τις ενδείξεις 1,2,…,ν.

Για την εύρεση του αριθμού των διαφορετικών κατανομών των k σφαιριδίων στα ν κελιά θα μπορούσαμε να φανταστούμε τη διαδικασία ως αποτελούμενη απ k βήματα: στο πρώτο επιλέγεται το κελί όπου θα τοποθετηθεί το s_1, στο δεύτερο επιλέγεται το κελί όπου θα τοποθετηθεί το s_2, στο k-οστό επιλέγεται το κελί όπου θα τοποθετηθεί το σφαιρίδιο s_k. Αν $n_1, n_2, ..., n_k$ είναι το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να ολοκληρωθεί το βήμα 1,2,…,k, αντίστοιχα, τότε με εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των διαφορετικών κατανομών των k σφαιριδίων στα ν κελιά, σχηματίζοντας το γινόμενο $n_1 * n_2 * ... * n_k$.

Μοντέλο Α1

Έστω ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς τη χωρητικότητα των κελιών, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν από μηδέν έως όλα τα σφαιρίδια.

Σε αυτή την περίπτωση , για κάθε, σφαιρίδιο, υπάρχουν ν διαφορετικές επιλογές, όσα είναι ακριβώς και τα διαθέσιμα κελιά.

Άρα:

$$n_1 = n_2 = ... = n_k = n$$

Και το πλήθος των διαφορετικών κατανομών είναι ίσο με

$$n_1 \times n_2 \times ... \times n_k = n^k.$$

Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει παραπέμπει στις επαναληπτικές διατάξεις των ν στοιχείων ανά k και μπορεί να εξηγηθεί ως εξής:

αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

a_i: ένδειξη του κελιού στο οποίο τοποθετείται το σφαιρίδιο s_i

για i=1,2,…,k, τότε μια κατανομή των ν σφαιριδίων στα k κελιά καθορίζεται πλήρως από την k-άδα

$$\left(a_1, a_2, ..., a_k\right)$$

για την οποία ισχύει

$$a_i \in \mathrm{X} = \{1, 2, ..., n\}, \text{ i=1,2,…,k.}$$

Έτσι, προκύπτει μια αντιστοιχία μεταξύ των κατανομών που απαριθμούμε και των επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων του συνόλου Χ ανά k, των οποίων το πλήθος είναι ως γνωστόν ίσο με n^k.

Μοντέλο Α2

Έστω ότι τα κελία δε χωρούν περισσότερα από ένα σφαιρίδιο, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν μόνο 0 ή 1 σφαιρίδιο $(1 \le k \le n)$.

Στο μοντέλο Α2, για το πρώτο σφαιρίδιο υπάρχουν ν επιλογές, για το δεύτερο ν-1 (δεν είναι δυνατό να επιλεγεί το ίδιο κελί που επιλέχτηκε στο πρώτο βήμα, αφού ένα κελί δεν μπορεί να χωρέσει περισσότερα από ένα σφαιρίδια), για το τρίτο ν-2, …, και τέλος για το k-οστό σφαιρίδιο θα υπάρχουν ν-k+1 επιλογές. Άρα,

$$n_1 = n, n_2 = n-1, \ldots, n_k = n-k+1$$

και το πλήθος των διαφορετικών κατανομών είναι ίσο με

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = (n)_k .$$

Εδώ το αποτέλεσμα παραπέμπει στις (μη επαναληπτικές) διατάξεις των ν ανά k και μπορεί να εξηγηθεί, αν παρατηρήσουμε ότι, ανακαλώντας το συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε στο Μοντέλο Α1, είναι απαραίτητο να τεθεί ο επιπλέον περιορισμός

$a_i \neq a_j$ για $i \neq j$.

Μοντέλο Α3

Έστω ότι στο κελί j πρέπει να τοποθετηθούν ακριβώς r_j σφαιρίδια για j=1,2,…,ν. Τα r_j, j=1,2,…,ν είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k$.

Εδώ δεν είναι εύκολο να ακολουθηθεί η διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα μοντέλα λόγο των περιορισμών που υπάρχουν ως προς τη χωρητικότητα του κάθε κελιού. Μπορούμε όμως να φτάσουμε σε έναν τύπο υπολογισμού του πλήθους των διαφορετικών κατανομών, αν παρατηρήσουμε ότι κάθε τέτοια κατανομή αντιστοιχεί στο χωρισμό του συνόλου

$$\mathrm{X} = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$$

σε ν ξένα ανά δυο υποσύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$, έτσι ώστε το υποσύνολο A_i να περιέχει ακριβώς r_i στοιχεία, i=1,2,…,ν. εδώ τα στοιχεία που περιέχει το σύνολο A_i είναι τα σφαιρίδια τα οποία τοποθετούνται στο κελι i. Οπότε το πλήθος των διαφορετικών κατανομών με τους περιορισμούς που τέθηκαν θα είναι ίσο με

$$\binom{k}{r_1, r_2, ..., r_n} = \frac{k!}{r_1! r_2! ... r_n!}.$$

Μοντέλο Α4

Έστω ότι τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα, αλλά απαιτούμε κανένα κελί να μη μείνει κενό.

Αν συμβολίσουμε με Ω το σύνολο όλων των δυνατών κατανομών (χωρίς κανένα περιορισμό) και με $\mathrm{A}_i \subseteq \Omega$, i=1,2,…,ν το σύνολο των κατανομών στις οποίες το I κελί είναι κενό, τότε σύμφωνα με το μοντέλο Α1, θα έχουμε

$$|\Omega| = n^k,$$

Ενώ το σύνολο που θέλουμε να απαριθμήσουμε είναι το

$$\mathrm{A}_1' \cap \mathrm{A}_2' \cap ... \cap \mathrm{A}_n'.$$

Είναι επίσης εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, για οποιοδήποτε συνδυασμό $\{i_1, i_2, ..., i_r\}$ των δεικτών 1,2,…,ν ανά r, ισχύει

$$\left|\mathrm{A}_{i_1} \cap \mathrm{A}_{i_2} \cap ... \cap \mathrm{A}_{i_r}\right| = (n-r)^k$$

Αφού τότε έχουμε k σφαιρίδια τα οποία θα πρέπει να τοποθετηθούν σε ν-r κελιά, χωρίς κανέναν περιορισμό. Άρα, τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι ανταλλάξιμα με

$$n_r = (n - r)^k,$$

οπότε

$$\left|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'\right| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n - r)^k .$$

Τελικά, λοιπόν, το πλήθος των διαφορετικών κατανομών είναι ίσο με

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n - r)^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k .$$

Β. Κατανομές όμοιων σφαιριδίων σε κελιά

Εδώ υποθέτουμε ότι τα k σφαιρίδια είναι όμοια μεταξύ τους, δηλαδή δε μας ενδιαφέρει ποια συγκεκριμένα σφαιρίδια τοποθετούνται στο κάθε κελί αλλά μόνο ο αριθμός των σφαιριδίων σε αυτό.

Αν συμβολίσουμε με $x_1, x_2, \ldots, x_n$ το πλήθος των σφαιρών που τοποθετούνται στο κελί 1,2,…,ν, αντίστοιχα, είναι προφανές ότι θα ισχύει

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

Αντίστροφα, κάθε ακέραια μη αρνητική λύση της προηγούμενης εξίσωσης (με κατάλληλες συνθήκες στα x_i, ανάλογα με τους εκάστοτε περιορισμούς ως προς τη χωρητικότητα των κελιών) καθορίζει έναν τρόπο κατάληψης των ν κελιών από τις k σφαίρες.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε συνοπτικά ορισμένα συγκεκριμένα μοντέλα, δίνοντας συγχρόνως τους αντίστοιχους τύπους απαρίθμησης του πλήθους των καταλήψεων για κάθε μοντέλο.

Μοντέλο Β1

Έστω ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς τη χωρητικότητα των κελιών, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν από μηδέν έως όλα τα σφαιρίδια.

Στην περίπτωση αυτή ενδιαφερόμαστε για όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\ ,\ k \geq 0\ .$$

Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών καταλήψεων είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Μοντέλο Β2

Έστω τα κελιά δε χωρούν περισσότερα από ένα σφαιρίδιο, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν μόνο 0 ή 1 σφαιρίδιο $(1 \leq k \leq n)$.

Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρουν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

με τους περιορισμούς

$x_i \in \{0,1\}$, i=1,2,…,ν.

Οπότε το ζητούμενο πλήθος θα είναι ίσο με

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Μοντέλο Β3

Έστω ότι τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα, αλλά απαιτούμε κανένα κελί να μη μείνει κενό $(n \le k)$.

Στο ισοδύναμο πρόβλημα με χρήση ακέραιων λύσεων γραμμικής εξίσωσης, θα έχουμε την εξίσωση

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

και τους περιορισμούς

$$x_1 \ge 1, x_2 \ge 1, \ldots, x_n \ge 1 .$$

Άρα, το ζητούμενο πλήθος καταλήψεων είναι ίσο με

$$\binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}, n \le k .$$

Ένας εναλλακτικός (συνδυαστικός) τρόπος με τον οποίο μπορούμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα είναι ο εξής: τοποθετούμε αρχικά ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί, ώστε να εξασφαλιστούν οι περιορισμοί

$$x_1 \ge 1, x_2 \ge 1, \ldots, x_n \ge 1$$

Και στη συνεχεία κατανέμουμε τα εναπομείναντα k-ν σφαιρίδια στα ν κελιά χωρίς κανένα επιπλέον περιορισμό.

Σύμφωνα με το Μοντέλο Β1, ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης των k=ν σφαιριδίων σε ν κελιά (χωρίς περιορισμούς είναι ίσος με

$$\begin{bmatrix} n \\ k-n \end{bmatrix} = \binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{n+(k-n)-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}.$$

Σημειώνουμε ότι και το γενικότερο μοντέλο όπου τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα και απαιτούμε κάθε κελί να περιέχει τουλάχιστον n σφαιρίδια μπορεί να μελετηθεί με παρόμοιες τεχνικές. Έτσι με τοποθέτηση αρχικά σε κάθε κελί n σφαιριδίων (ώστε κάθε κελί να περιέχει τουλάχιστον N σφαιρίδια) και εν συνεχεία κατανομή των υπόλοιπων k-νn σφαιριδίων στα ν κελιά χωρίς περιορισμούς, καταλήγουμε ότι το συνολικό πλήθος κατανομών που προκύπτουν είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ k-nn \end{bmatrix} = \binom{n+(k-nn)-1}{k-nn} = \binom{n+(k-nn)-1}{n-1},\ k \le nn.$$

Μοντέλο Β4

Έστω ότι κάθε κελί πρέπει να περιέχει τουλάχιστον n σφαιρίδια, ενώ επιπλέον έχει περιορισμένη χωρητικότητα m σφαιριδίων $(nn \le k \le nm)$.

Εδώ μας ενδιαφέρουν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

με τους περιορισμούς

$$n \le x_1 \le m, n \le x_2 \le m, \dots, n \le x_n \le m.$$

Οπότε, το πλήθος των τρόπων κατάληψης των κελιών από τα k σφαιρίδια είναι ίσο με

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{n+k-nn-r(m-n+1)-1}{n-1}.$$

Στην ειδική περίπτωση n=1 (κανένα κελί κενό), η προηγούμενη έκφραση παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{n-rm-1}{n-1}.$$

Παράδειγμα:

Οι 30 εργαζόμενοι, μιας εταιρείας Μάρκετινγκ, πρόκειται να εκλέξουν με μυστική ψηφοφορία τον πρόεδρο του διοικητικού συμβουλίου της εταιρείας. Οι υποψήφιοι για την συγκεκριμένη θέση είναι 4 στελέχη της εταιρείας.

α. Να διατυπωθεί το πρόβλημα της απαρίθμησης των δυνατών αποτελεσμάτων της ψηφοφορίας ως μοντέλο καταλήψεων.

β. Να υπολογιστούν τα διαφορετικά αποτελέσματα ψηφοφορίας που μπορούν να προκύψουν, αν

i. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός,

ii. κάθε υποψήφιος παίρνει τουλάχιστον μια ψήφο,

iii. κάθε υποψήφιος παίρνει τουλάχιστον πέντε ψήφους,

iv. κανένας υποψήφιος δε συγκέντρωσε απόλυτη πλειοψηφία (16 ψήφους) και κανένας δεν έμεινε χωρίς ψήφο.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις υποθέτουμε ότι δεν υπήρξαν λευκά ψηφοδέλτια.

Λύση

α. Το συνδυαστικό πρόβλημα που προκύπτει είναι το εξής: ένας συγκεκριμένος αριθμός 30 ψήφων πρόκειται να τοποθετηθεί σε 4 διαφορετικούς υποψηφίους. Εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι η απαρίθμηση των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των ψήφων στους υποψηφίους. Συγκεκριμένα εδώ, τέτοιες τοποθεσίες αναφέρονται συνήθως με την ονομασία κατανομές ψήφων στους υποψηφίους ή καταλήψεις των υποψηφίων από τους ψήφους.

β. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι k=30 ψήφοι είναι όμοιοι μεταξύ τους, δηλαδή δε μας ενδιαφέρει ποιοι συγκεκριμένοι ψήφοι τοποθετούνται σε κάθε υποψήφιο από τους ν=4 αλλά μόνο ο αριθμός των ψήφων σε αυτόν. Οπότε:

i. Σύμφωνα με το Μοντέλο Β1, το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων ψηφοφορίας που μπορούν να προκύψουν εάν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, είναι:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}, \text{ δηλαδή}$$

$$\binom{4+30-1}{4-1}=\binom{33}{3}.$$

ii. Σύμφωνα με το Μοντέλο Β3, το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων ψηφοφορίας που μπορούν να προκύψουν εάν κάθε υποψήφιος παίρνει τουλάχιστον μια ψήφο, είναι:

$$\binom{k-1}{n-1}=\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}, n \leq k, \text{ δηλαδή}$$

$$\binom{30-1}{4-1}=\frac{(30-1)!}{(4-1)!(30-4)!}=\frac{29!}{3!26!}, 4 \leq 30.$$

iii. Σύμφωνα με το γενικότερο Μοντέλο Β3, το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων ψηφοφορίας που μπορούν να προκύψουν εάν κάθε υποψήφιος παίρνει τουλάχιστον πέντε ψήφους, είναι:

$$\begin{bmatrix} n \\ k-nn \end{bmatrix}=\binom{n+(k-nn)-1}{k-nn}=\binom{n+(k-nn)-1}{n-1}, \ k \leq nn, \text{ δηλαδή}$$

$$\binom{4+(30-20)-1}{3}=\binom{13}{3}.$$

iv. Σύμφωνα με το Μοντέλο Β4, το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων ψηφοφορίας που μπορούν να προκύψουν εάν κανένας υποψήφιος δε συγκέντρωσε απόλυτη πλειοψηφία (16 ψήφους) και κανένα δεν έμεινε χωρίς ψήφο, είναι:

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n+k-nn-r(m-n+1)-1}{n-1}, \text{ δηλαδή}$$

$$\sum_{r=0}^{4}(-1)^r\binom{4}{r}\binom{29-15r}{3}.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΝΤΥΠΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Δάρας Τρύφων Ι., Σύψας Παναγιώτης Θ., *'Πιθανότητες και στατιστική -Θεωρία και Εφαρμογές'*, Εκδόσεις Ζήτη 2010.

[2] Μάρκος Κούτρας, *'Εισαγωγή στην Συνδυαστική'*, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, Αθήνα 2006.

[3] Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο,*'Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Ενιαίου Λυκείου'*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

[4] Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Α. Χαραλαμπίδης, *'Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική'*, Διδακτικές Σημειώσεις-Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα 2003.

[5] Χαράλαμπος Χαραλαμπίδης, *'Συνδυαστική'*, Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1990.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[6] diocles.civil.duth.gr

[7] www.unipi.gr