ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ: ΚΑΤΣΙΑΜΠΟΥΛΑ ΑΜΑΛΙΑ (Α.Μ. 1370)

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΛΑΠΟΔΗ ΑΛΕΚΑ

ΠΑΤΡΑ - 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Από τα πρώτα χρόνια εξέλιξης του ανθρώπου πάνω στη γη δημιουργήθηκαν μορφές κοινωνικών συνόλων που για την υγιή συμβίωση με τα υπόλοιπα κοινωνικά σύνολα σχημάτισαν τις πρώτες συναλλαγές οι οποίες αρχικά ήταν ανταλλαγές ειδών και καθόρισαν τα θεμέλια του θεσμού της οικονομίας. Σε μεταγενέστερη περίοδο, ο θεσμός αυτός και ειδικότερα η οικονομική κατάσταση ενός ανθρώπου ή ακόμα και ενός λαού ή έθνους απέκτησε σημαντική έννοια αφού όριζε το ποιοτικό επίπεδο ζωής αυτών, τις διαπροσωπικές αλλά και τις διακρατικές τους σχέσεις έως και σήμερα. Στη σύγχρονη εποχή τα οικονομικά προβλήματα δεσπόζουν στη ζωή μας και καθορίζουν τη συμπεριφορά και την εξέλιξη των κοινωνιών παγκοσμίως. Πλέον η οικονομία είναι μία λέξη που τη χρησιμοποιούμε καθημερινά και η ευρεία σημασία της ενδέχεται να ξεκινά από την εξοικονόμηση χρημάτων μέχρι την οικονομική κατάσταση του κράτους. Επίσημα με τον όρο οικονομία χαρακτηρίζεται το σύνολο των λελογισμένων και συστηματικών ενεργειών των ανθρώπων, που διαβιούν σε μια κοινωνία, προς εξεύρεση αγαθών για την ικανοποίηση των αναγκών τους.

Σε επιστημονικό πεδίο η οικονομία ασχολείται με τη βέλτιστη κατανομή και αξιοποίηση δεδομένων πόρων. Η σύγχρονη οικονομία έχει καταξιωθεί ως μία ξεχωριστή επιστήμη η οποία απαρτίζεται από πολυπληθείς εξειδικευμένους κλάδους. Η συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία θα επικεντρωθεί σε ένα τομέα των Οικονομικών Μαθηματικών, τα οποία αποτελούν έναν παράπλευρο κλάδο της Οικονομικής Επιστήμης. Η Οικονομική Επιστήμη θεμελιώνεται όχι μόνο από τους δικούς της νόμους αλλά και από τους νόμους των Μαθηματικών τα οποία αποτέλεσαν την αρχική αξία που βασίστηκε και η Οικονομία.

Η Οικονομία και κατ' επέκταση τα Μαθηματικά έχουν γίνει ένα ζωντανό, μεταβαλλόμενο, αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητάς μας τα οποία βρίσκουν εφαρμογή σε καθημερινή βάση από τις πιο απλοϊκές και δεδομένες πράξεις μας και δεν αποτελούν κάποια απόμακρη και απρόσιτη θεωρητική επιστήμη όπως έχει ειπωθεί από λίγους. Αυτό θα γίνει απόλυτα αντιληπτό κατά την ανάπτυξη της συγκεκριμένης εργασίας αφού οι ακολουθίες και ακόμα περισσότερο το πρακτικό τους μέρος συνδέονται άμεσα με τον καθένα ξεχωριστά αλλά και ως σύνολο. Τα προβλήματα που θα συναντήσουμε προέρχονται από τραπεζικές και χρηματοοικονομικές συναλλαγές και οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι το χρήμα και ο τόκος. Δύο πραγματικά βασικοί παράγοντες για την εποχή μας και ιδιαίτερα αν σκεφτούμε την οικονομική κατάσταση στην οποία βρίσκεται η χώρα μας αυτή την περίοδο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία, οι οικονομικές εφαρμογές των ακολουθιών αναλύονται καθώς και η χρήση τους σήμερα. Αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη θεωρία των ακολουθιών, των σειρών καθώς και των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων. Κάθε θεωρία που αναπτύσσεται συνοδεύεται με ένα αντίστοιχο παράδειγμα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύονται οι έννοιες κεφάλαιο, χρόνος, τόκος και επιτόκιο. Έννοιες οι οποίες είναι βασικές και απαραίτητες για την ανάπτυξη των επόμενων κεφαλαίων.

Συνεχίζοντας, στο τρίτο κεφάλαιο θα γίνει ανάλυση σχετικά με τη χρήση του τόκου. Συγκεκριμένα αναλύεται ο απλός τόκος, ο υπολογισμός του τόκου μιας σειράς καταθέσεων, καθώς και του μέσου επιτοκίου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται ανάλυση της προεξόφλησης ενός χρέους με πιστωτικούς τίτλους. Επίσης αναλύονται οι δυο κατηγορίες προεξόφλησης, η εξωτερική και η εσωτερική, καθώς και η προεξόφληση με έξοδα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο εξηγείται διεξοδικά ο ανατοκισμός και η σημασία του στις συναλλαγές. Ο ανατοκισμός εφαρμόζεται στις ίσες καταθέσεις, στη χρεολυσία και στις ράντες. Ιδιαίτερα χρήσιμα θα φανούν τα παραδείγματα ώστε να γίνουν απόλυτα κατανοητές οι παραπάνω έννοιες.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται δυο ιδιαίτερα σημαντικές οικονομικές συναλλαγές που βασίζονται στις ακολουθίες. Αυτές είναι οι επενδύσεις και τα δάνεια. Θα γίνει εκτενής παρουσίαση όσον αφορά το πότε είναι συμφέρουσα μια επένδυση αλλά και στις κατηγορίες των δανείων με αντίστοιχα παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

Στον επίλογο, προσωπικές ιδέες και συμπεράσματα αυτής της εργασίας παρουσιάζονται με στόχο μια καλύτερη και μια πιο συγκεντρωμένη και ολοκληρωμένη εικόνα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύεται η μαθηματική έννοια της ακολουθίας, οι ιδιότητες μιας ακολουθίας, καθώς και η χρησιμότητα των ακολουθιών στη μικροοικονομική θεωρία. Επίσης αναλύονται οι έννοιες σειρά και πρόοδος οι οποίες είναι άμεσα συνδεδεμένες με τις ακολουθίες. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τις πηγές: [**1**], [**2**], [**3**], [**8**], [**11**].

1.1. Μαθηματική έννοια της ακολουθίας

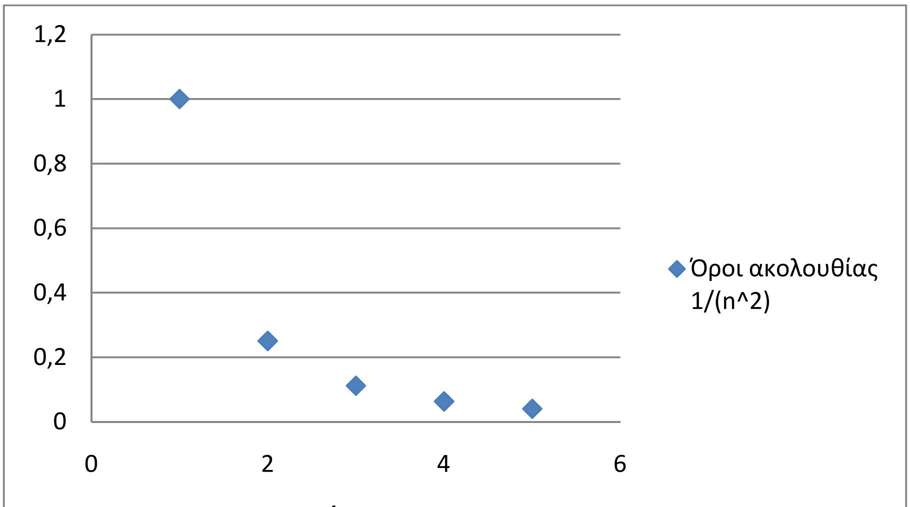
Αν σε κάθε φυσικό αριθμό αντιστοιχίσουμε τον αντίστροφό του, δηλαδή $1 \rightarrow \frac{1}{1}$ $\quad 2 \rightarrow \frac{1}{2}$ $\quad \ldots \quad$ $\mathrm{n} \rightarrow \frac{1}{\mathrm{n}}$ τότε ορίζεται μια συνάρτηση, μια απεικόνιση.

Κάθε απεικόνιση με πεδίο ορισμού το σύνολο N* = N - {0} των θετικών ακέραιων αριθμών ονομάζεται ακολουθία. Στις εφαρμογές μας το πεδίο τιμών μιας ακολουθίας θα είναι πάντοτε υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών R. Κάθε τέτοια ακολουθία ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών ή, εν συντομία, πραγματική ακολουθία.

Μια πραγματική ακολουθία μπορεί να γραφτεί συμβολικά ως f: N* → R, με ψ=f(x). Επειδή όμως το πεδίο ορισμού είναι το N* έχει επικρατήσει η τυχαία μεταβλητή να συμβολίζεται με το γράμμα n (αντί του x). Ακόμη αντί της έκφρασης ψ=f(n) προτιμούμε την $\mathrm{f_n} = \alpha_n$, $\alpha_n \in$ R. Το α_n καλείται γενικός όρος ή n-όρος της ακολουθίας. Κατά συνέπεια μια πραγματική ακολουθία έχει τη μορφή (a_n), n ∈ N*, $a_{\mathrm{n}} \in$ R ή a_1, a_2, …, a_n. Ενώ στην περίπτωση που ως πεδίο ορισμού ληφθεί το σύνολο N των φυσικών αριθμών η ακολουθία θα έχει τη μορφή a_0, a_1, a_2, …a_n.

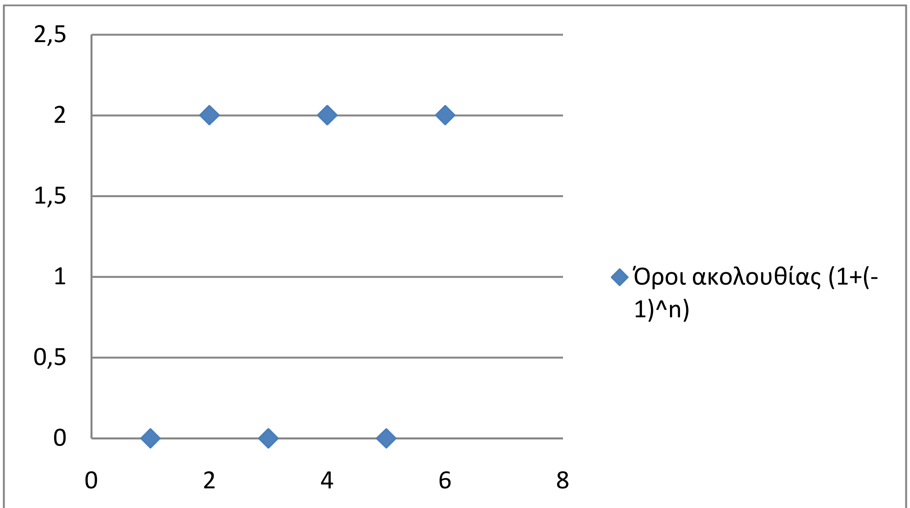
<u>Παραδείγματα:</u>

Η ακολουθία $(a_n) = \left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)$ έχει ως πρώτους όρους τους αριθμούς $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ Στο Σχήμα 1.1 έχουμε τη γραφική παράσταση της ακολουθίας $\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)$.



Σχήμα 1.1

Η ακολουθία $(a_n) = (1+(-1)^n)$ έχει ως πρώτους όρους τους αριθμούς 0, 2, 0, 2, 0, 2, … Στο Σχήμα 1.2 έχουμε τη γραφική παράσταση της ακολουθίας $(1+(-1)^n)$.



Σχήμα 1.2

1.2. Φραγμένες -Μονότονες - Συγκλίνουσες ακολουθίες

Συνήθως εξετάζουμε τις ακολουθίες σχετικά με το αν είναι φραγμένες, αύξουσες ή φθίνουσες καθώς και συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες.

Έστω μια ακολουθία (α_n) πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία (α_n) καλείται άνω φραγμένη όταν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε όρο της ακολουθίας να ισχύει $\alpha_n \leq$ M, $\forall$n $\in$ N. Η ακολουθία (α_n) καλείται κάτω φραγμένη όταν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε για κάθε όρο της ακολουθίας να ισχύει $\alpha_n \geq$ m, $\forall$n $\in$ N. Η ακολουθία (α_n) καλείται φραγμένη όταν ισχύουν τα δύο παραπάνω ταυτόχρονα.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω η ακολουθία $(\alpha_n) = \left(\frac{\text{συν(n)}}{\text{n}}\right)$.

Τότε $|\alpha_n| = \left|\frac{\text{συν(n)}}{\text{n}}\right| \leq \frac{1}{\text{n}} \leq 1$ ή -1$\leq \alpha_n \leq 1$, $\forall$ n $\in$ N. Συνεπώς m = -1 $\leq$ $\alpha_n = \frac{\text{συν(n)}}{\text{n}}$ $\leq$ 1 = M. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η ακολουθία είναι φραγμένη.

Μια ακολουθία (a_n) καλείται αύξουσα όταν ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall$ n $\in$ N, δηλαδή όταν κάθε επόμενος όρος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του προηγουμένου του. Καλείται φθίνουσα όταν ισχύει $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall$ n $\in$ N, δηλαδή όταν κάθε επόμενος όρος είναι μικρότερος ή ίσος του προηγουμένου του. Καλείται γνησίως αύξουσα όταν ισχύει $a_n < a_{n+1}$ $\forall$ n $\in$ N και γνησίως φθίνουσα όταν ισχύει $a_n > a_{n+1}$ $\forall$ n $\in$ N. Εάν η ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα, τότε καλείται μονότονη ενώ αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε καλείται γνησίως μονότονη.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω η ακολουθία $(a_n) = \left(\frac{2}{n}\right)$

Ισχύει ότι $a_{n+1} = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} = a_n$, $\forall$n $\in$ N. Οπότε η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Τέλος περιγράφουμε τη συμπεριφορά της ακολουθίας καθώς ο δείκτης της αυξάνεται απεριόριστα χρησιμοποιώντας το όριό της. Χρησιμοποιούμε δηλαδή το όριο της ακολουθίας για να δούμε τη συμπεριφορά της ως προς το αν συγκλίνει ή αποκλίνει.

Μια ακολουθία (a_n), λοιπόν, θα καλείται συγκλίνουσα προς το λ ∈ R, αν για ∀ ε>0 $\exists n_0 \in$ N τέτοιο ώστε για n>n_0 να ισχύει $|a_n - \lambda|$<ε. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι –ε <a_n-λ< ε ή ισοδύναμα λ-ε < a_n< λ+ε ∀ n>n_0. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι στην περιοχή του λ βρίσκονται σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας εκτός πεπερασμένου πλήθους, τους a_1, a_2, a_3, a_4, … a_{n_0}, ώστε αν λ είναι το όριο της συγκλίνουσας ακολουθίας (a_n), τότε οσονδήποτε μικρός κι αν είναι ο ε, εκτός της περιοχής του λ, Π(λ, ε) = (λ-ε, λ+ε) υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της ακολουθίας. Μια ακολουθία (a_n) που δεν είναι συγκλίνουσα, καλείται αποκλίνουσα. Καλείται ορισμένως αποκλίνουσα αν δοθέντος ενός αριθμού Μ>0 οσονδήποτε μεγάλου $\exists n_0 \in$ N ώστε με n>n_0 να ισχύει a_n>Μ ή a_n<-Μ. Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι η (a_n) αποκλίνει προς το +∞ και θα σημειώνουμε $\lim_{n\to\infty} a_n$= +∞ ή a_n →+∞ ενώ στη δεύτερη $\lim_{n\to\infty} a_n$= -∞ ή a_n →-∞. Μια ακολουθία θα καλείται αορίστως αποκλίνουσα αν δεν είναι ούτε συγκλίνουσα αλλά ούτε και ορισμένως αποκλίνουσα. Για παράδειγμα, η ακολουθία a_n=$(-1)^n$ είναι αορίστως αποκλίνουσα γιατί $\lim_{n\to\infty} a_n$ = -1 με περιττές τιμές και $\lim_{n\to\infty} a_n$ = 1 με άρτιες τιμές. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ορισμένως αποκλίνουσες ακολουθίες, από άποψη ιδιοτήτων, παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες με τις συγκλίνουσες. Γι' αυτό θα λέμε ότι μια ακολουθία θα συγκλίνει υπό την ευρεία έννοια, όταν συγκλίνει ή αποκλίνει ορισμένως.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την ακολουθία (a_n) = $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ και ε=$\frac{1}{1000}$. Τότε $\lim_{n\to\infty} a_n$ = $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ = 1 = λ και $|a_n - \lambda|$ = $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right|$ = $\left|\frac{1}{n+1}\right|$. Τότε θα υπάρχει n_0 = 999 ώστε με n >999 να ισχύει $|a_n - 1|$ = $\left|\frac{1}{n+1}\right|$ < $\frac{1}{1000}$ < ε . Άρα -ε = - $\frac{1}{1000}$ < $\frac{1}{n+1}$ < $\frac{1}{1000}$ = ε . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ακολουθία (a_n) είναι συγκλίνουσα και πιο συγκεκριμένα συγκλίνει προς το 1.

1.3. Ανάλυση προσφοράς – ζήτησης

Η μικροοικονομική θεωρία μέσω των εννοιών της προσφοράς και της ζήτησης προσπαθεί να περιγράψει και να προβλέψει την τιμή και την ποσότητα των αγαθών που πωλούνται σε ανταγωνιστικές αγορές. Σύμφωνα με το νόμο προσφοράς – ζήτησης, όταν αυξάνεται η τιμή πώλησης P ενός αγαθού τότε αυξάνεται και η προσφερόμενη ποσότητα Qs του αγαθού αυτού, ενώ αντίθετα η ζητούμενη ποσότητα Qd του αγαθού μειώνεται. Ενώ όταν μειώνεται η τιμή πώλησης P τότε μειώνεται και η προσφερόμενη ποσότητα Qs αλλά αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητα Qd. Κατά συνέπεια τα Qs και Qd είναι πάντοτε συναρτήσεις της P. Η συνάρτηση Qs = Qs(P) ονομάζεται συνάρτηση προσφοράς ενώ η Qd = Qd(P) ονομάζεται συνάρτηση ζήτησης του αγαθού. Γίνεται φανερό ότι οι δύο συναρτήσεις μπορούν να δοθούν και υπό τη μορφή P = P(Qs) και P = P(Qd) αντίστοιχα. Σ' αυτή την περίπτωση και όταν η φύση του προϊόντος είναι τέτοια ώστε να παράγεται σε ακέραιες μετρικές μονάδες (π.χ. αυτοκίνητα, ηλεκτρικές συσκευές κλπ), τόσο η συνάρτηση ζήτησης όσο και η συνάρτηση προσφοράς του προϊόντος είναι ακολουθίες. Η τιμή πώλησης P προσδιορίζεται όταν επέλθει οικονομική ισορροπία. Αυτό το θεωρητικό σημείο ισορροπίας ορίζεται ως το σημείο όπου οι παραγωγοί είναι διατεθειμένοι να πουλήσουν τόση ποσότητα αγαθών, όση ακριβώς χρειάζονται οι καταναλωτές, δηλαδή όταν Qd = Qs.

Παράδειγμα:

Έστω ότι σε μια αυτοκινητοβιομηχανία η τιμή πώλησης ενός συγκεκριμένου μοντέλου αυτοκινήτου ως συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης δίνεται από τις ακολουθίες (n + 9) και (30 – 2n) αντίστοιχα, όπου n η ποσότητα των αυτοκινήτων. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή αυτού του μοντέλου όταν επέλθει οικονομική ισορροπία.

Έστω ότι P είναι η τιμή πώλησης κάθε αυτοκινήτου. Επειδή η συνάρτηση προσφοράς δίνεται από την ακολουθία (n + 9) τότε από τη σχέση P = n + 9 προκύπτει Qs = n = P – 9. Επειδή η συνάρτηση ζήτησης δίνεται από την ακολουθία (30 – 2n) τότε από τη σχέση P = 30 - 2n προκύπτει $Qd = n = -\frac{1}{2}P + 15$. Η οικονομική ισορροπία επέρχεται όταν Qd = Qs, δηλαδή όταν $-\frac{1}{2}P + 15 = P - 9 \leftrightarrow P + \frac{1}{2}P = 24 \leftrightarrow \frac{3}{2}P = 24$. Συνεπώς P = 16 νομισματικές μονάδες. Άρα η ημερήσια παραγωγή του συγκεκριμένου μοντέλου αυτοκινήτου θα είναι n = P – 9 = 16 – 9 = 7 αυτοκίνητα.

1.4. Σειρές

Έστω ότι έχουμε την παρακάτω ακολουθία (a_n) = $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \dots,\ a_n)$ και από αυτή σχηματίζουμε την εξής ακολουθία των μερικών αθροισμάτων: (S_n) = $(S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4, \dots,\ S_n)$ όπου,

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

…

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$

Για την αρχική ακολουθία χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \dots,\ a_n$, ενώ για τη δεύτερη τον $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Το νέο σύμβολο ονομάζεται άπειρη σειρά ή απλώς σειρά. Οι όροι της ακολουθίας S_n, δηλαδή οι $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4, \dots,\ S_n$ λέγονται μερικά αθροίσματα της ακολουθίας (a_n). Συνεπώς με τον όρο σειρά εννοούμε ένα σύμβολο, το οποίο παριστάνει την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Επισημαίνουμε ότι μια σειρά μπορεί να αρχίζει από τον κ – όρο. Οπότε γράφουμε $\sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n$. Αν κ=0 τότε έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Συμπεραίνουμε πως και στις σειρές θα ισχύουν οι σχετικοί ορισμοί αλλά και οι ιδιότητες των ακολουθιών. Συγκεκριμένα συγκλίνουσα θα λέγεται η σειρά εκείνη, της οποίας η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (S_n) είναι συγκλίνουσα ενώ ορισμένως αποκλίνουσα ή αορίστως αποκλίνουσα θα λέγεται η σειρά εκείνη, της οποίας η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (S_n) είναι ορισμένως ή αορίστως αποκλίνουσα αντίστοιχα. Αν η σειρά συγκλίνει και L είναι το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων αυτής, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} S_n$ = L τότε ο αριθμός L καλείται άθροισμα της σειράς και θα σημειώνεται ως $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = +∞ (αντίστοιχα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = -∞), τότε η σειρά απειρίζεται θετικά (αντίστοιχα απειρίζεται αρνητικά). Οπότε όταν λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$ συγκλίνει εννοούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = L και L∈ R.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι το άθροισμα μιας σειράς δεν έχει την έννοια του αποτελέσματος μιας πρόσθεσης, αφού η πράξη της πρόσθεσης είναι μια εντελώς ορισμένη πράξη που αφορά μόνο πεπερασμένου πλήθους προσθετέους. Το άθροισμα μιας σειράς είναι το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων, εφόσον η ακολουθία αυτή είναι συγκλίνουσα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί , η σειρά είναι ένα νέο σύμβολο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Αλλά και αντίστροφα κάθε ακολουθία (β_n) μπορεί να παρασταθεί σαν μια ακολουθία μερικών αθροισμάτων, συνεπώς σαν μια σειρά. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε την ακολουθία $(\beta_n) = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4, ..., \beta_n)$ και θέτουμε $a_1 = \beta_2$, $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$ - β_n με n ∈ N. Τότε θεωρούμε την παρακάτω σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$= \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) + (\beta_3 - \beta_2) + \ldots + (\beta_{n+1} - \beta_n) + \ldots$$

$$= \beta_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{n+1} - \beta_n)$$

Μερικά αθροίσματα της σειράς θα είναι τα $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4, \ldots, \beta_n$, δηλαδή η ακολουθία (β_n). Επομένως σε κάθε πρόταση που αφορά τη σύγκλιση ή την απόκλιση ακολουθίας θα αντιστοιχεί και μια πρόταση που αφορά τη σύγκλιση ή την απόκλιση σειράς.

<u>Παράδειγμα:</u>

Υποθέτουμε ότι έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} n$.

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ = 1 + 2 + … + n = $\frac{n(n+1)}{2}$, ως το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου (η ανάλυσή της θα γίνει παρακάτω). Ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = +\infty$. Οπότε συμπεραίνουμε πως η σειρά απειρίζεται θετικά.

1.5. Πρόοδοι

1.5.1. Αριθμητική Πρόοδος

Μια ακολουθία καλείται αριθμητική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του, εφόσον προστεθεί σ' αυτόν ένας συγκεκριμένος αριθμός. Δηλαδή όταν ισχύει $a_n = \alpha_{n-1} + ω$, για κάθε φυσικό αριθμό n. Ο σταθερός πραγματικός αριθμός ω ονομάζεται διαφορά της προόδου. Επομένως από τον ορισμό ισχύουν τα παρακάτω:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + ω$

$\alpha_3 = a_2 + ω = (a_1 + ω) + ω = a_1 + 2ω$

$\alpha_4 = \alpha_3 + ω = (a_1 + 2ω) + ω = a_1 + 3ω$

…

$a_n = [a_1 + (n-2)\omega] + ω = a_1 + (n-1)ω$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου υπολογίζεται από τη σχέση $a_n = a_1 + (n-1)ω$, n≥1. (1)

Αποδεικνύεται επίσης ότι το διπλάσιο του μεσαίου όρου ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων όρων όταν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Το παρατηρούμε όταν επιλέξουμε μια αριθμητική πρόοδο, έστω την 8, 16, 24, 32, 40, 48, …Αν πάρουμε τους όρους 16, 24, 32 τότε ισχύει 2*24 = 16 + 32 και αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Έστω ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου με λόγο ή διαφορά ω. Τότε β-α = ω και γ-β = ω, οπότε β-α = γ-β και 2β = γ+α. Συνεπώς ο αριθμός β με την ιδιότητα 2β = γ+α ονομάζεται αριθμητικός μέσος των α και γ.

Τέλος θα αποδείξουμε τον τύπο του αθροίσματος n πρώτων όρων. Έστω η αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά ω, $S_n = a_1 + a_2 + … + \alpha_{n-1} + a_n$ ή $S_n = a_n + \alpha_{n-1} + … + a_2 + a_1$. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + \alpha_{n-1}) + (\alpha_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

$= (a_1 + a_n) + [(a_1 + \omega) + (a_n - \omega)] + … + [(a_n - \omega) + (a_1 + \omega)] + (a_1 + a_n)$

$= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + … + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$

$= n(a_1 + a_n)$

Άρα $S_n = \frac{\mathrm{n}(a_1 + a_n)}{2}$ (2) και αντικαθιστώντας το $a_n = a_1$ + (n-1)ω στην (2) θα έχουμε:

$$S_n = \frac{\mathrm{n}(a_1 + a_1 + (\mathrm{n}-1)\omega\,)}{2} = \frac{\mathrm{n}(2\,a_1 + (\mathrm{n}-1)\omega\,)}{2} \qquad (3)$$

Η αριθμητική πρόοδος είναι μια σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}[a_1 + (\mathrm{n}-1)\omega\,]$ όπου α, ω ∈ R και ω≠0. Ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} S_n$ = +∞ αν ω>0 και $\lim_{n\to\infty} S_n$ = -∞ αν ω<0. Αυτό σημαίνει πως θα είναι πάντα αποκλίνουσα.

Ο τύπος $S_n = \frac{\mathrm{n}(a_1 + a_n)}{2}$ είχε υπολογιστεί από τον Johann Carl Friedrich Gauss, γνωστό μαθηματικό, σε ηλικία μόλις δέκα ετών. Σε μια απόπειρα ενός δασκάλου του στο δημοτικό να απασχολήσει τους μαθητές του βάζοντάς τους να προσθέσουν όλους τους ακεραίους από το 1 έως το 100 ο μικρός Gauss βρήκε το σωστό άθροισμα σε λιγότερο από ένα λεπτό. Αντιλήφθηκε πως η πρόσθεση κατά ζεύγη από τις δύο άκρες αυτής της σειράς αριθμών έδινε πάντα το ίδιο άθροισμα: 1 + 100 =101, 2 + 99 = 101 κ.ο.κ.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος, καθώς και η διαφορά ω αυτής. Η πρόοδος έχει ως πρώτο όρο a_1=30 και το άθροισμα των πρώτων 20 όρων είναι 410. Έπειτα να σημειωθούν οι τέσσερις πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου.

Έχουμε ως δεδομένα: a_1=30, n=20, S_{20}=410.

Η αριθμητική πρόοδος είναι της μορφής $a_n = a_1$ + (n-1)ω και για τον εικοστό όρο ισχύει a_{20} = 30 + 19ω. Από τη στιγμή που το άθροισμα των 20 πρώτων όρων είναι 410 ισχύει:

$S_n = \frac{\mathrm{n}(a_1 + a_n)}{2}$, δηλαδή

$$410 = \frac{20\big(30 + (30 + 19\omega)\big)}{2}$$

$$= \frac{20(60 + 19\omega)}{2}$$

$$= 10(60 + 19\omega)$$

Λύνοντας ως προς τη διαφορά ω δίνεται ως αποτέλεσμα 190ω = -190. Επομένως η διαφορά είναι ω=-1. Επίσης οι τέσσερις πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου είναι: α_1=30, α_2=29, α_3=28, α_4=27.

1.5.2. Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία καλείται γεωμετρική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του, εφόσον πολλαπλασιαστεί με ένα σταθερό αριθμό ω. Δηλαδή όταν ισχύει $a_n = \alpha_{n-1}$ω, για κάθε φυσικό αριθμό n. Ο σταθερός πραγματικός αριθμός ω ονομάζεται λόγος της προόδου. Επομένως από τον ορισμό ισχύει ω = $\frac{a_n}{\alpha_{n-1}}$. Δηλαδή για να βρούμε το λόγο ω μιας γεωμετρικής προόδου αρκεί να διαιρέσουμε οποιονδήποτε όρο της με τον προηγούμενό του. Ισχύει επίσης ότι:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1$ω

$\alpha_3 = a_2$ω = $(a_1$ω)ω = $a_1\omega^2$

$\alpha_4 = \alpha_3$ω = $(a_1\omega^2)$ω = $a_1\omega^3$

…

$a_n = \alpha_{n-1}$ω = $(a_1\omega^{n-2})$ω = $a_1\omega^{n-1}$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου υπολογίζεται από τη σχέση $a_n = a_1\omega^{n-1}$, n≥1. (4)

Αποδεικνύεται επίσης ότι το τετράγωνο του μεσαίου όρου ισούται με το γινόμενο των δύο άλλων όρων όταν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Το παρατηρούμε όταν επιλέξουμε μια γεωμετρική πρόοδο, έστω την 5, 10, 20, 40, 80, 160, …Αν πάρουμε τους όρους 10, 20, 40 τότε ισχύει 20^2 = 10 · 40 και αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Έστω ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο ω. Τότε $\frac{\beta}{\alpha}$ = ω και $\frac{\gamma}{\beta}$ = ω, οπότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ και β^2 = γα. Συνεπώς ο αριθμός β με την ιδιότητα β^2 = γα ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

Θα αποδείξουμε τον τύπο του αθροίσματος n πρώτων όρων. Έστω η γεωμετρική πρόοδος (a_n) με λόγο ω, $S_n = a_1 + a_1$ω $+ a_1\omega^2 + \ldots + a_1\omega^{n-1}$ και ω$S_n = a_1$ω $+ a_1\omega^2 + a_1\omega^3 + \ldots + a_1\omega^{n-1} + a_1\omega^n$. Αν από τη δεύτερη ισότητα αφαιρέσουμε την πρώτη τότε: ωS_n - $S_n = a_1\omega^n$ - a_1 ↔ (ω-1) $S_n = a_1$ $(\omega^n$-1) ↔ $S_n = a_1\frac{\omega^n-1}{\omega-1}$ (5)

Από τη σχέση (5) $S_n = a_1\frac{\omega^n-1}{\omega-1} = \frac{a_1\omega^n-a_1}{\omega-1} = \frac{a_1}{1-\omega} - \frac{a_1\omega^n}{1-\omega}$ και με $|\omega|$<1 το $\lim_{n\to\infty}\omega^n$ = 0. Άρα $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_1}{1-\omega} - \frac{a_1\omega^n}{1-\omega}\right] = \frac{a_1}{1-\omega}$. Επομένως το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο ω και $|\omega|$<1 δίνεται από τον τύπο $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{1-\omega}$ (6). Μια τέτοια σειρά ονομάζεται γεωμετρική σειρά.

Παράδειγμα:

Έστω η γεωμετρική πρόοδος 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, … Να βρεθεί ο όγδοος όρος της. Επίσης να βρεθεί ο όγδοος όρος της αριθμητικής προόδου 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, … και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Ο λόγος ω της γεωμετρικής προόδου είναι ω=$\frac{1}{3}$ και ο πρώτος όρος της a_1=1. Επίσης τα ίδια ισχύουν και για την αριθμητική πρόοδο. Άρα ο όγδοος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $a_n = a_1\omega^{n-1} \leftrightarrow \alpha_8 = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187} \cong$ 0,0004572 . Ο όγδοος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $a_n = a_1$ + (n-1)ω ↔ $\alpha_8 = 1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}$ = 3,333.

Όπως γίνεται αντιληπτό εάν υπάρχει μια γεωμετρική πρόοδος και μια αριθμητική πρόοδος τέτοιες ώστε να έχουν ίσους πρώτους όρους, καθώς και ο λόγος ή διαφορά ω να είναι ίσος και στις δυο, τότε οι όροι της γεωμετρικής προόδου μεταβάλλονται γρηγορότερα από τους αντίστοιχους όρους της αριθμητικής προόδου.

2. ΕΝΝΟΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΚΟΥ, ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αναλύονται οι έννοιες κεφάλαιο, χρόνος, τόκος και επιτόκιο. Πρόκειται για τέσσερις βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα για την ανάπτυξη των επόμενων κεφαλαίων. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τις πηγές: $[\mathbf{4}]$, $[\mathbf{5}]$, $[\mathbf{6}]$, $[\mathbf{12}]$.

2.1. Κεφάλαιο

Για την έννοια του κεφαλαίου έχουν δοθεί αρκετοί ορισμοί από την Οικονομική Επιστήμη. Στα Οικονομικά Μαθηματικά όμως ως κεφάλαιο νοείται κάθε χρηματικό ποσό που δύναται να διατεθεί ώστε να παράγει ένα νέο χρηματικό ποσό ή διαφορετικά κεφάλαιο καλείται κάθε οικονομικό αγαθό που εκφράζεται σε νομισματικές μονάδες και έχει μια ≪ παραγωγική ικανότητα ≫. Κατά συνέπεια αν υπάρχει ένα χρηματικό ποσό το οποίο όμως δε χρησιμοποιείται ή ένα χρηματικό ποσό το οποίο έχει δανειστεί χωρίς τόκο δεν αποτελεί κεφάλαιο. Επίσης ένα οικόπεδο καθώς και ένα μηχάνημα που δε χρησιμοποιούνται δεν αποτελούν κεφάλαιο από οικονομικής άποψης για τα Οικονομικά Μαθηματικά. Αν όμως εκτιμηθούν σε νομισματικές μονάδες και νοικιασθούν με στόχο τη χρησιμοποίησή τους για παραγωγικό σκοπό, τότε αποτελούν ενεργό κεφάλαιο. Μια συνηθισμένη μορφή παραγωγικής ικανότητας ενός κεφαλαίου είναι η παραχώρησή του με αμοιβή σε κάποιο άλλο πρόσωπο για ορισμένο χρονικό διάστημα. Η συγκεκριμένη ενέργεια καλείται δανεισμός κεφαλαίου. Να σημειώσουμε ότι το κεφάλαιο συμβολίζεται με το γράμμα C.

2.2. Χρόνος

Χρόνος καλείται η χρονική διάρκεια κατά την οποία το κεφάλαιο καλείται παραγωγικό, ή διαφορετικά, η χρονική διάρκεια της παραγωγικής ικανότητας ενός κεφαλαίου. Ο χρόνος μπορεί να είναι πεπερασμένος ή ακόμα και άπειρος. Η χρονική διάρκεια συμβολίζεται με το διάστημα $[0,\ t]$, όπου το 0 παριστάνει τη χρονική στιγμή που αρχίζει η παραγωγικότητα του κεφαλαίου και το t τη χρονική στιγμή που διακόπτεται η παραγωγικότητα του κεφαλαίου. Στην πράξη κυρίως ως μονάδες μέτρησης του χρόνου λαμβάνονται το έτος, το τρίμηνο, ο μήνας και η ημέρα.

Όσον αφορά το έτος διακρίνουμε τρεις κατηγορίες, μικτό, εμπορικό και πολιτικό έτος:

- Μικτό έτος

Στο μικτό έτος θεωρούμε πως όλοι οι μήνες του έτους έχουν ακριβώς τις ημέρες που έχουν και ημερολογιακά και το έτος 360 ημέρες. Εφαρμόζεται στην Ελλάδα, στην Ιταλία, στη Γαλλία, στο Βέλγιο, στην Αυστρία, στην Ισπανία, στην Ολλανδία και στη Γενεύη.

- Εμπορικό έτος

Στο εμπορικό έτος θεωρούμε πως κάθε μήνας έχει 30 ημέρες ανεξάρτητα από το πόσες ημέρες έχει ημερολογιακά και το έτος 360 ημέρες. Εφαρμόζεται στις Σκανδιναβικές χώρες, στη Γερμανία, στη Ρωσία και στην Ελβετία εκτός από την περιοχή της Γενεύης.

- Πολιτικό έτος

Στο πολιτικό έτος θεωρούμε πως όλοι οι μήνες του έτους έχουν ακριβώς τις ημέρες που έχουν και ημερολογιακά και το έτος 365 ημέρες ή 366 εάν το έτος είναι δίσεκτο. Εφαρμόζεται στην Αγγλία, στις ΗΠΑ, στην Πορτογαλία και στον Καναδά.

Εάν ο χρόνος αναφέρεται σε έτη τότε συμβολίζεται με n, εάν αναφέρεται σε μήνες συμβολίζεται με μ και εάν αναφέρεται σε ημέρες συμβολίζεται με v. Η έννοια του χρόνου και κυρίως η κατηγοριοποίηση σε μικτό, εμπορικό και πολιτικό έτος θα γίνει απόλυτα κατανοητή στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα δούμε ορισμένα παραδείγματα.

2.3. Τόκος

Ο όρος τόκος παρουσιάζει ένα θεωρητικό και ένα ηθικό πρόβλημα από αμνημονεύτων χρόνων. Αποδοκιμάστηκε την αρχαία εποχή από την εκκλησία αλλά και από τους φιλόσοφους, ένας από τους οποίους είναι ο Αριστοτέλης. Είναι γνωστή άλλωστε και η φράση της εποχής ≪ Όποιος λαμβάνει τόκο αμαρτάνει ≫.

Εάν γίνει εναλλαγή από ηθικολόγους και επιχειρηματίες σε επιβεβαιωμένους, ειδικούς οικονομολόγους, τότε θα διαπιστωθεί ότι παρόλο που οι περισσότεροι από αυτούς δικαιολογούν τον τόκο, υπάρχουν σχεδόν απελπιστικές διαφωνίες ως προς τη θεωρία της αιτιολόγησής του. Τα πιο αξιοσημείωτα βιβλία, όπως είναι αυτά του Cassel, του Bawerk, του Landry και του Fisher, προσφέρουν θεωρίες περί τόκου τόσο διαφορετικές όπου και ένας ειδικός ερευνητής θα έμπαινε σε πειρασμό να εγκαταλείψει το πρόβλημα από απόγνωση.

Στη σημερινή εποχή, ως τόκος καλείται το ποσό των χρημάτων το οποίο εισπράττει ο κάτοχος ενός κεφαλαίου – δανειστής από τον οφειλέτη ως αποζημίωση ή αμοιβή για την παραχώρηση του δικαιώματος χρήσης ή εκμετάλλευσης ενός χρηματικού ποσού για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Οι οικονομολόγοι συχνά όταν αναφέρονται στον τόκο χρησιμοποιούν τον όρο αμοιβή για τη χρησιμοποίηση του κεφαλαίου ή τιμή με την οποία χρεώνεται η χρήση του κεφαλαίου. Ο τόκος ενός κεφαλαίου είναι το μέτρο της παραγωγικής ικανότητας του κεφαλαίου και το μέγεθός του εξαρτάται από το ύψος του κεφαλαίου καθώς και από τη χρονική διάρκεια της παραχώρησης αυτού. Επιπλέον, ο τόκος αναγνωρίζεται ως νόμιμο στοιχείο αλλά υπάρχει ένας και μόνο περιορισμός στον καθορισμό του ανώτατου ορίου αυτού. Η υπέρβαση αυτού του ορίου ονομάζεται τοκογλυφία και τιμωρείται από το νόμο.

Η πληρωμή του τόκου δικαιολογείται από κάποιον κίνδυνο που έχει ο δανειστής σε περίπτωση που δεν του επιστραφεί το κεφάλαιο από τον δανειζόμενο σε συγκεκριμένο χρόνο. Η λέξη τόκος παράγεται από το ρήμα τίκτω (γεννώ) και σημαίνει το γεννημένο (παραχθέν). Συμβολίζεται με το γράμμα I, αρχικό γράμμα της αγγλικής λέξης Interest.

2.4. Επιτόκιο

Επιτόκιο ονομάζεται ο τόκος που καταβάλλεται για τη χρήση συγκεκριμένου χρηματικού κεφαλαίου για συγκεκριμένη χρονική περίοδο και συνήθως στην πράξη το επιτόκιο παριστάνει τον τόκο των 100 νομισματικών μονάδων στην καθορισμένη χρονική περίοδο ή τον τόκο μιας νομισματικής μονάδας. Το επιτόκιο συμβολίζεται με το γράμμα i. Όταν υπάρξει $i=12\%$ τότε συμπεραίνουμε πως εάν ένα άτομο δανείσθηκε 100 ευρώ για μια χρονική περίοδο ενός έτους θα πληρώσει στο τέλος του έτους 12 ευρώ τόκο ή 0,12 ευρώ τόκο για κάθε ευρώ που δανείσθηκε. Η τιμή των επιτοκίων δεν είναι σταθερή, αντιθέτως υπόκειται σε αλλαγές. Αυτή η ρύθμιση των επιτοκίων δε γίνεται αυτόματα. Προσδιορίζεται από τη φερεγγυότητα του δανειζόμενου, από την προσφορά και τη ζήτηση κεφαλαίων και επιπλέον από την οικονομική, πολιτική και κοινωνική κατάσταση κάθε χώρας. Βέβαια σημαντικό ρόλο στις χρηματοπιστωτικές διαδικασίες λαμβάνει η Κεντρική Τράπεζα μιας χώρας η οποία συντονίζει τις εγχώριες.

Υπάρχουν τρία είδη επιτοκίων, το νόμιμο, το συμβατικό και το προεξοφλητικό. Νόμιμο ονομάζεται το επιτόκιο το οποίο καθορίζεται βάση νόμου και δεν μπορεί στις συναλλαγές να υπερβεί το όριο. Συμβατικό ονομάζεται το επιτόκιο το οποίο καθορίζεται μεταξύ δανειστή και οφειλέτη και δεν μπορεί να υπερβεί το ανώτατο όριο του νομίμου επιτοκίου. Προεξοφλητικό ονομάζεται το επιτόκιο το οποίο έχει καθοριστεί από το Διοικητικό Συμβούλιο της Τράπεζας της Ελλάδος και αποτελεί το βασικό επιτόκιο για τις προεξοφλήσεις των συναλλαγματικών και των γραμματίων από τις εμπορικές τράπεζες.

Αναμφισβήτητα, το επιτόκιο είναι ένα από τα ισχυρότερα όπλα της Κεντρικής Τράπεζας για την άσκηση της νομισματικής της πολιτικής. Με τη ρύθμιση και τον έλεγχο των επιτοκίων έχει τη δυνατότητα να ρυθμίζει και να ελέγχει τις χορηγήσεις δανείων των εμπορικών τραπεζών, τις χρηματοδοτήσεις των αναγκών του δημοσίου τομέα, αφού μια αύξηση των επιτοκίων κάνει ελκυστική την αγορά εντόκων γραμματίων του Δημοσίου και με αυτόν τον τρόπο διοχετεύεται χρήμα για χρηματοδότηση δημοσίων δαπανών, καθώς και τις ροές της οικονομίας προς το εξωτερικό.

3. ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

Το παρόν κεφάλαιο αναλύει διεξοδικά την έννοια του απλού τόκου, το πώς υπολογίζεται ο τόκος μιας σειράς καταθέσεων αλλά και το μέσο επιτόκιο. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τις πηγές: [4], [5], [9].

3.1. Βασικές έννοιες

Στον απλό τόκο τα ποσά του κεφαλαίου και του τόκου παραμένουν σταθερά σε όλη τη διάρκεια της παραγωγικής διαδικασίας. Ο τόκος που παράγεται από ένα κεφάλαιο ενσωματώνεται σ' αυτό στο τέλος της χρονικής περιόδου τοκισμού. Αυτό σημαίνει πως ο παραγόμενος τόκος στο τέλος της πρώτης περιόδου δεν προστίθεται στο κεφάλαιο και κατά συνέπεια δεν παράγει και αυτός τόκο για την επόμενη χρονική περίοδο τοκισμού. Ο απλός τόκος εφαρμόζεται στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, συνήθως μέχρι τριών μηνών ή το πολύ μέχρι ενός έτους. Στα προβλήματα του απλού τόκου εμφανίζονται τα ποσά που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Δηλαδή το κεφάλαιο, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα C, ο χρόνος, ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα n εάν ως μονάδα μέτρησης ληφθεί το έτος, με το γράμμα μ εάν ως μονάδα μέτρησης ληφθεί ο μήνας ή με το γράμμα ν εάν ως μονάδα μέτρησης ληφθεί η ημέρα. Επίσης εμφανίζεται ο τόκος, ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα I και το επιτόκιο, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα i.

Σύμφωνα με τον ορισμό του επιτοκίου, όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη θα ισχύει η παρακάτω θεμελιώδης εξίσωση του τόκου:

Κεφάλαιο 1 νομισματικής μονάδας σε 1 έτος και με επιτόκιο i δίνει τόκο $1 \cdot i$

Κεφάλαιο 1 νομισματικής μονάδας σε 2 έτη και με επιτόκιο i δίνει τόκο $2 \cdot i$

Κεφάλαιο 1 νομισματικής μονάδας σε 3 έτη και με επιτόκιο i δίνει τόκο $3 \cdot i$

...

Κεφάλαιο 1 νομισματικής μονάδας σε n έτη και με επιτόκιο i δίνει τόκο $n \cdot i$

Συμπεραίνουμε πως αν έχουμε κεφάλαιο C νομισματικών μονάδων, το οποίο τοκίζεται επί n έτη με απλό τόκο και με ετήσιο επιτόκιο i θα ισχύει η παρακάτω εξίσωση:

$$I = C \cdot n \cdot i \tag{7}$$

Η (7) αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση του Απλού Τόκου (Απλή Κεφαλαιοποίηση). Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο απλός τόκος είναι ποσότητα ανάλογη του κεφαλαίου, του χρόνου και του επιτοκίου. Αυτό σημαίνει, για παράδειγμα, πως αν ένα από τα ποσά του δευτέρου μέλους διπλασιασθεί, τριπλασιασθεί κ.λπ. τότε και ο τόκος θα διπλασιασθεί, τριπλασιασθεί κ.λπ. Η συγκεκριμένη εξίσωση λύνει όλα τα προβλήματα του απλού τόκου αρκεί να δίνονται τα τρία από τα τέσσερα ποσά. Επίσης θα πρέπει ο χρόνος n και το επιτόκιο i να αναφέρονται στην ίδια μονάδα. Αν το επιτόκιο i είναι ετήσιο τότε ο χρόνος n θα πρέπει να εκφράζεται σε έτη.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι κεφάλαιο 50.000 ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο για 3 έτη και με επιτόκιο 9%. Πόσος τόκος θα παραχθεί;

Τα δεδομένα είναι : C = 50.000, n = 3, i = 0,09. Το ζητούμενο είναι ο τόκος, δηλαδή το I. Θα εφαρμόσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση του απλού τόκου $I = C \cdot n \cdot i$. Αντικαθιστώντας ισχύει $I = 50.000 \cdot 3 \cdot 0,09 = 13.500$. Επομένως ο τόκος που θα παραχθεί είναι 13.500 ευρώ.

Στην περίπτωση όμως που ο χρόνος δεν εκφράζεται σε έτη αλλά σε μήνες μ με κεφάλαιο C και ετήσιο επιτόκιο i θα πρέπει ο χρόνος, από τη στιγμή που υπάρχει ετήσιο επιτόκιο, να εκφραστεί σε έτος. Συνεπώς η θεμελιώδης εξίσωση του απλού τόκου (7) θα πάρει τη μορφή $I = C \cdot \frac{\mu}{12} \cdot i = \frac{C \cdot \mu \cdot i}{12}$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι κεφάλαιο 1.500 ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 5% για 4 μήνες. Να βρεθεί ο τόκος που θα δώσει αυτό το κεφάλαιο στο τέλος των τεσσάρων μηνών.

Τα δεδομένα είναι: C = 1.500, μ = 4, i = 5% = 0,05. Το ζητούμενο είναι ο τόκος, δηλαδή το I. $I = \frac{C \cdot \mu \cdot i}{12} = \frac{1.500 \cdot 4 \cdot 0,05}{12} = \frac{300}{12} = 25$. Άρα στο τέλος των τεσσάρων μηνών ο τόκος θα είναι 25 ευρώ.

Στην περίπτωση που ο χρόνος δεν εκφράζεται ούτε σε έτη, ούτε σε μήνες αλλά εκφράζεται σε ημέρες ν με κεφάλαιο C και ετήσιο επιτόκιο i θα πρέπει ο χρόνος, από τη στιγμή που υπάρχει ετήσιο επιτόκιο, να εκφραστεί σε έτος. Συνεπώς η θεμελιώδης εξίσωση του απλού τόκου I = C · n · i θα πάρει τη μορφή $I = C \cdot \frac{v}{365} \cdot i = \frac{C \cdot v \cdot i}{365}$.

Παράδειγμα:

Έστω ότι κεφάλαιο 1.500 ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 5% για 200 ημέρες. Να βρεθεί ο τόκος που θα δώσει αυτό το κεφάλαιο στο τέλος των διακοσίων ημερών.

Τα δεδομένα είναι: C = 1.500, ν = 200, i = 5% = 0,05. Το ζητούμενο είναι ο τόκος, δηλαδή το I. $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{365} = \frac{1.500 \cdot 200 \cdot 0{,}05}{365} = \frac{15.000}{365} = 41,\ 10$. Άρα στο τέλος των διακοσίων ημερών ο τόκος θα είναι 41, 10 ευρώ.

Σημείωση:

Σε περίπτωση που το έτος είναι δίσεκτο ο αριθμός 365 στον τύπο $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{365}$ αντικαθίσταται με τον αριθμό 366.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε αναφορά στην έννοια του χρόνου και επίσης στο μικτό, εμπορικό και πολιτικό έτος. Αυτές οι τρεις κατηγορίες επηρεάζουν την εξίσωση του απλού τόκου ως εξής: Στο μικτό έτος, όπου όλοι οι μήνες έχουν ακριβώς τις ημέρες που έχουν ημερολογιακά και το έτος 360 ημέρες, ισχύει $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{360}$. Στο εμπορικό έτος, όπου κάθε μήνας έχει 30 ημέρες και το έτος 360 ημέρες, ισχύει η ίδια ακριβώς παραπάνω εξίσωση, δηλαδή η $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{360}$. Ενώ στο πολιτικό έτος, όπου όλοι οι μήνες έχουν ακριβώς τις ημέρες που έχουν ημερολογιακά και το έτος 365 ημέρες ή 366 αν το έτος είναι δίσεκτο, ισχύει $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{365}$ ή $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{366}$. Αξίζει να σημειώσουμε πως οι τοκοφόρες ημέρες, όταν αποταμιεύουμε χρήματα σε μια τράπεζα, αρχίζουν από την επόμενη ημέρα της κατάθεσης και τελειώνουν την ημέρα της ανάληψης αυτών. Ενώ οι τοκοφόρες ημέρες, στην περίπτωση που δανειζόμαστε κεφάλαιο από μια τράπεζα, αρχίζουν την ημέρα του δανεισμού του κεφαλαίου και τελειώνουν την ημέρα της επιστροφής του. Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν οι τοκοφόρες ημέρες θα αρχίζουν από την επόμενη ημέρα της κατάθεσης του κεφαλαίου και θα τελειώνουν την ημέρα της ανάληψης αυτού του ποσού.

Παράδειγμα:

Έστω ότι κεφάλαιο 3.800 ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο και με ετήσιο επιτόκιο 4% από 01/02/2010 έως 01/03/2010. Να βρεθεί ο τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο όταν το έτος είναι μικτό, εμπορικό και πολιτικό.

Τα δεδομένα είναι: C = 3.800, i = 4% και για τις τρεις κατηγορίες, ενώ όσον αφορά το χρόνο ισχύουν αυτά που έχουν αναφερθεί παραπάνω. Για το μικτό έτος v = 28, οπότε $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{360} = \frac{3.800 \cdot 28 \cdot 0{,}04}{360} = \frac{4.256}{360} = 11{,}82$. Για το εμπορικό έτος v = 30, οπότε $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{360} = \frac{3.800 \cdot 30 \cdot 0{,}04}{360} = \frac{4.560}{360} = 12{,}66$. Για το πολιτικό έτος v = 28, οπότε $I = \frac{C \cdot v \cdot i}{365} = \frac{3.800 \cdot 28 \cdot 0{,}04}{365} = \frac{4.256}{365} = 11{,}66$.

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να γίνει αναφορά στο άθροισμα C + I, το οποίο προκύπτει από την πρόσθεση του τόκου I στο κεφάλαιο C και καλείται τελική αξία κεφαλαίου. Στην περίπτωση του απλού τόκου η τελική αξία του κεφαλαίου θα είναι $C_n = C + C \cdot n \cdot i = C(1 + n \cdot i)$. (8)

Παράδειγμα:

Έστω ότι κεφάλαιο 20.000 ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο για 5 έτη και με επιτόκιο 7%. Να υπολογισθεί ο τόκος που θα παραχθεί και η τελική αξία του κεφαλαίου.

Τα δεδομένα είναι: C = 20.000, n = 5, i = 0,07. Θα εφαρμοστεί η εξίσωση απλού τόκου $I = C \cdot n \cdot i = 20.000 \cdot 5 \cdot 0{,}07 = 7.000$ ευρώ ο τόκος του κεφαλαίου. Η τελική αξία του κεφαλαίου υπολογίζεται ως εξής $C_n = C + C \cdot n \cdot i = C(1 + n \cdot i) = 20.000(1 + 5 \cdot 0{,}07) = 20.000 \cdot 1{,}35 = 27.000$ ευρώ.

3.2. Υπολογισμός του τόκου μιας σειράς καταθέσεων

Έστω ένα κεφάλαιο C που τοκίζεται για ν ημέρες και με ετήσιο επιτόκιο i. Τότε το γινόμενο C · ν συμβολίζεται με N και καλείται τοκάριθμος. Το πηλίκο $\frac{360}{i}$ ή $\frac{365}{i}$ συμβολίζεται με Δ και καλείται σταθερός διαιρέτης. Συνεπώς από την εξίσωση του απλού τόκου (7) ισχύει I = $\frac{C \cdot v \cdot i}{365} = \frac{C \cdot v}{\frac{1}{\frac{365}{i}}} = \frac{C \cdot v}{\frac{365}{i}} = \frac{N}{\Delta}$. Το επιτόκιο i συνήθως είναι σταθερό για αρκετό χρονικό διάστημα. Κατ' επέκταση και το ποσό Δ = $\frac{365}{i}$ είναι σταθερό. Συνεπώς για τον υπολογισμό του τόκου ενός κεφαλαίου αρκεί να διαιρέσουμε τον τοκάριθμο N = C · ν με το σταθερό διαιρέτη Δ.

Συχνά σε τραπεζικούς λογαριασμούς πραγματοποιούνται καταθέσεις σε διάφορους χρόνους μεταξύ τους αλλά με το ίδιο επιτόκιο. Τότε ο συνολικός απλός τόκος προκύπτει από το άθροισμα των τόκων που αντιστοιχούν στο κάθε κεφάλαιο. Αυτό σημαίνει πως αν υπάρχουν καταθέσεις C_1, C_2, …, C_n με σταθερό ετήσιο επιτόκιο i και σε χρόνους v_1, v_2, …, v_n αντίστοιχα, τότε ο συνολικός τόκος δίνεται από τη σχέση I = I_1+ I_2+…+I_n ή I = $\frac{N_1+N_2+\ldots+N_n}{\Delta}$, όπου $N_i = C_i \cdot v_i$, i=1, 2, …, n. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται ο απλός τόκος των καταθέσεων σε Ταμιευτήρια, Τράπεζες κ.λπ.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι ένας πελάτης καταθέτει σε λογαριασμό μιας τράπεζας τα παρακάτω ποσά: στις 7 Ιανουαρίου 2008 5.000 ευρώ, στις 21 Φεβρουαρίου 2008 2.600 ευρώ, στις 27 Μαρτίου 2008 3.400 ευρώ, στις 16 Μαΐου 2008 4.000 ευρώ και στις 5 Ιουνίου 2008 1.800 ευρώ. Να υπολογιστεί ο τόκος που θα εισπράξει ο πελάτης στις 23 Οκτωβρίου 2008 σε έτος μικτό, εμπορικό και πολιτικό αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 1,5% .

Για το υπολογισμό του τόκου θα γίνει η διαίρεση του τοκαρίθμου προς τον σταθερό διαιρέτη. Αρχικά θα πρέπει να γίνει υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών. Οι τοκοφόρες ημέρες για κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά ή με άλλα λόγια για κάθε κατάθεση του συγκεκριμένου πελάτη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

			Τοκοφόρες ημέρες	Τοκοφόρες ημέρες
Κεφάλαιο	Έναρξη	Λήξη	Μικτό - Πολιτικό	Εμπορικό
5.000	07/01/2008	23/10/2008	290	286
2.600	21/02/2008	23/10/2008	245	242
3.400	27/03/2008	23/10/2008	210	207
4.000	16/05/2008	23/10/2008	160	157
1.800	05/06/2008	23/10/2008	140	138

Πίνακας 3.1: Υπολογισμός τοκοφόρων ημερών για κάθε κεφάλαιο

Στον πίνακα 3.1 παρατηρούμε τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών για κάθε κεφάλαιο από την κατάθεση μέχρι και την ημέρα της εισπράξεως για τα έτη μικτό, εμπορικό και πολιτικό. Να σημειώσουμε ότι το έτος 2008 είναι δίσεκτο και αυτό σημαίνει πως ο μήνας Φεβρουάριος έχει 29 ημέρες. Ο πίνακας προκύπτει προσθέτοντας τον αριθμό των ημερών μεταξύ έναρξης και λήξης συμπεριλαμβανομένης και της 23/10/2008, την ημέρα εισπράξεως. Ας δώσουμε όμως ένα παράδειγμα υπολογισμού, πως υπολογίζονται οι 245 τοκοφόρες ημέρες στο μικτό και πολιτικό έτος: 8 (τοκοφόρες ημέρες από το μήνα Φεβρουάριο) + 31 (από το Μάρτιο) + 30 (από τον Απρίλιο) + 31 (από το Μάιο) + 30 (από τον Ιούνιο) + 31 (από τον Ιούλιο) + 31 (από τον Αύγουστο) + 30 (από το Σεπτέμβριο) + 23 (από τον Οκτώβριο) = 245. Στο εμπορικό έτος βέβαια, όπως έχει προαναφερθεί, ο κάθε μήνας έχει 30 ημέρες. Οι 242 τοκοφόρες ημέρες στο εμπορικό έτος υπολογίζονται ως εξής: 9 (από το Φεβρουάριο) + 30 (από το Μάρτιο) + 30 (από τον Απρίλιο) + 30 (από το Μάιο) + 30 (από τον Ιούνιο) + 30 (από τον Ιούλιο) + 30 (από τον Αύγουστο) + 30 (από το Σεπτέμβριο) + 23 (από τον Οκτώβριο) = 242. Αναλόγως γίνεται και ο υπολογισμός των υπολοίπων.

Εν συνεχεία θα υπολογισθεί ο τοκάριθμος $N = C \cdot v$ για κάθε έτος. Συνεπώς $N = C \cdot v = 5.000 \cdot 290 = 1.450.000$, $N = 2.600 \cdot 245 = 637.000$, $N = 3.400 \cdot 210 = 714.000$, $N = 4.000 \cdot 160 = 640.000$, $N = 1.800 \cdot 140 = 252.000$, N

= 5.000 · 286 = 1.430.000, N = 2.600 · 242 = 629.200, N = 3.400 · 207 = 703.800, N = 4.000 · 157 = 628.000, N = 1.800 · 138 = 248.400. Για την εύρεση του τόκου θα χρειαστούμε το άθροισμα του τοκάριθμου N = $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ για κάθε έτος. Αυτά τα αποτελέσματα θα φανούν στον Πίνακα 3.2.

Κεφάλαιο	Τοκάριθμος Μικτό - Πολιτικό	Τοκάριθμος Εμπορικό
5.000	1.450.000	1.430.000
2.600	637.000	629.200
3.400	714.000	703.800
4.000	640.000	628.000
1.800	252.000	248.400
Άθροισμα τοκαρίθμων	3.693.000	3.639.400

Πίνακας 3.2: Υπολογισμός τοκαρίθμου για κάθε κεφάλαιο

Οπότε για κάθε έτος με επιτόκιο 1,5% ισχύουν τα παρακάτω:

Μικτό έτος: Δ = $\frac{360}{i}$ = $\frac{360}{0{,}015}$ = 24.000. Άρα ο συνολικός τόκος I = $\frac{N}{\Delta}$ = $\frac{3.693.000}{24.000}$ = 153,88 ευρώ.

Εμπορικό έτος: Δ = $\frac{360}{i}$ = $\frac{360}{0{,}015}$ = 24.000. Άρα ο συνολικός τόκος I = $\frac{N}{\Delta}$ = $\frac{3.639.400}{24.000}$ = 151,64 ευρώ.

Πολιτικό έτος: Δ = $\frac{366}{i}$ = $\frac{366}{0{,}015}$ = 24.400. Άρα ο συνολικός τόκος I = $\frac{N}{\Delta}$ = $\frac{3.693.000}{24.400}$ = 151,35 ευρώ.

3.3. Μέσο επιτόκιο

Έστω ότι κεφάλαια C_j τοκίζονται για v_j ημέρες με απλό τόκο και με ετήσιο επιτόκιο i_j, όπου j = 1, 2, …, m. Συνοπτικά φαίνονται στον Πίνακα 3.3.

Κεφάλαιο	Ημέρες	Επιτόκιο	Τόκος
C_1	v_1	i_1	I_1
C_2	v_2	i_2	I_2
…	…	…	…
C_m	v_m	i_m	I_m

Πίνακας 3.3: Δεδομένα για υπολογισμό συνολικού τόκου

Τα κεφάλαια θα δώσουν συνολικό τόκο I = $I_1 + I_2 + \ldots + I_m = \frac{C_1 \cdot v_1 \cdot i_1}{365} + \frac{C_2 \cdot v_2 \cdot i_2}{365} + \ldots + \frac{C_m \cdot v_m \cdot i_m}{365} = \frac{C_1 \cdot v_1 \cdot i_1 + C_2 \cdot v_2 \cdot i_2 + \ldots + C_m \cdot v_m \cdot i_m}{365}$.

Έστω ότι τα κεφάλαια C_j τοκίζονται για v_j ημέρες, όπου j = 1, 2, …, m με απλό τόκο και με ετήσιο επιτόκιο i όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.4.

Κεφάλαιο	Ημέρες	Επιτόκιο	Τόκος
C_1	v_1	i	I'_1
C_2	v_2	i	I'_2
…	…	…	…
C_m	v_m	i	I'_m

Πίνακας 3.4: Δεδομένα για υπολογισμό συνολικού τόκου όπου το επιτόκιο i είναι το ίδιο για κάθε κεφάλαιο

Τα κεφάλαια θα δώσουν συνολικό τόκο $I' = I'_1 + I'_2 + \ldots + I'_m = \frac{C_1 \cdot v_1 \cdot i}{365} + \frac{C_2 \cdot v_2 \cdot i}{365} + \ldots + \frac{C_m \cdot v_m \cdot i}{365} = \frac{C_1 \cdot v_1 \cdot i + C_2 \cdot v_2 \cdot i + \ldots + C_m \cdot v_m \cdot i}{365}$.

Μέσο επιτόκιο των επιτοκίων i_1, i_2, …, i_m καλούμε εκείνο το επιτόκιο i για το οποίο ισχύει I = I′

ή $\frac{C_1 \cdot v_1 \cdot i_1 + C_2 \cdot v_2 \cdot i_2 + \ldots + C_m \cdot v_m \cdot i_m}{365} = \frac{C_1 \cdot v_1 \cdot i + C_2 \cdot v_2 \cdot i + \ldots + C_m \cdot v_m \cdot i}{365}$

ή $C_1 \cdot v_1 \cdot i_1 + C_2 \cdot v_2 \cdot i_2 + \ldots + C_m \cdot v_m \cdot i_m$ = i($C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + \ldots + C_m \cdot v_m$)

ή $$\mathrm{i} = \frac{C_1 \cdot v_1 \cdot i_1 + C_2 \cdot v_2 \cdot i_2 + \ldots + C_m \cdot v_m \cdot i_m}{C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + \ldots + C_m \cdot v_m}. \quad (9)$$

Εάν στον τύπο (9) ισχύει $C_1 = C_2 = \ldots = C_m$ και $v_1 = v_2 = \ldots = v_m$ τότε

$$i = \frac{i_1 + i_2 + \ldots + i_m}{m} \qquad (10)$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω κεφάλαια 500 ευρώ και 600 ευρώ, τα οποία τοκίζονται με απλό τόκο και ετήσια επιτόκια 4% και 7% για 27 και 35 ημέρες αντίστοιχα. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο των επιτοκίων 4% και 7%.

Έχουμε ως δεδομένα C_1 = 500, C_2 = 600, i_1 = 4% = 0,04, i_2 = 7% = 0,07, v_1 = 27, v_2 = 35. Οπότε το μέσο επιτόκιο θα βρεθεί από τον τύπο (9) και θα είναι:

$$i = \frac{500 \cdot 27 \cdot 0{,}04 + 600 \cdot 35 \cdot 0{,}07}{500 \cdot 27 + 600 \cdot 35} = \frac{540+1.470}{13.500+21.000} = \frac{2.010}{34.500} = 0,\ 05826.$$

Άρα i = 0, 05826. Συνεπώς το μέσο επιτόκιο θα είναι i = 5,826%.

4. ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ

Η έννοια της προεξόφλησης αναλύεται στο παρόν κεφάλαιο και επιπλέον γίνεται αναφορά στην εσωτερική και στην εξωτερική προεξόφληση, καθώς επίσης και στην προεξόφληση με έξοδα. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τις πηγές: [4], [5], [6], [9].

4.1. Βασικές έννοιες

Είναι σύνηθες φαινόμενο πλέον οι έμποροι να χρησιμοποιούν την πίστωση προς τους πελάτες τους ως μέσο αγοράς των εμπορευμάτων τους. Η αδυναμία εξόφλησης αυτών από την πλευρά των πελατών καθώς και η ανάγκη για εξασφάλιση των χρημάτων από την πλευρά των εμπόρων οδήγησαν σε υπογραφές πιστωτικών τίτλων. Ένας πιστωτικός τίτλος ονομάζεται γραμμάτιο ή συναλλαγματική. Υπογράφοντάς τον ο πελάτης υποχρεώνεται στην εξόφληση του χρέους στην αναγραφόμενη ημερομηνία. Οι πιστωτικοί τίτλοι συμβάλλουν στην τόνωση των συναλλαγών καθώς και στην ανάπτυξη του εμπορίου και πολλές φορές αντικαθιστούν ακόμα και το χρήμα.

Ιστορικά αναφέρουμε πως οι συναλλαγματικές εφευρέθηκαν το 12^{o} αιώνα από τους εμπόρους ως μέσο μεταφοράς των χρημάτων από το ένα κράτος στο άλλο. Οι έμποροι έπαιρναν από τους τραπεζίτες τις επιστολές για συγκεκριμένο ποσό και εισέπρατταν το ισοδύναμο ποσό χρημάτων σε διαφορετικό νόμισμα αλλά και κράτος. Ωστόσο ο νόμος 5325 του 1932 και η απόφαση 2232/1975 του Υπουργείου Οικονομικών ρυθμίζουν όλα τα θέματα σχετικά με τις συναλλαγματικές και τα γραμμάτια.

Μεταξύ γραμματίου και συναλλαγματικής υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά, αφού το γραμμάτιο αποτελεί υπόσχεση του οφειλέτη προς τον πιστωτή για την καταβολή του ποσού που αναγράφεται στον πιστωτικό τίτλο στην αναγραφόμενη ημερομηνία. Ενώ η συναλλαγματική αποτελεί εντολή του πιστωτή προς τον οφειλέτη για την καταβολή του ποσού στην αναγραφόμενη ημερομηνία. Στην πράξη χρησιμοποιούνται κυρίως οι συναλλαγματικές.

Σε κάθε γραμμάτιο ή συναλλαγματική διακρίνουμε τις παρακάτω αξίες:

i. Ονομαστική αξία γραμματίου ή συναλλαγματικής καλείται η αξία, το χρηματικό ποσό το οποίο αναγράφεται πάνω στο έντυπο. Εκδότης ονομάζεται ο οφειλέτης, ενώ πιστωτής εκείνος που θα εισπράξει το ποσό.

ii. Πραγματική αξία ή παρούσα αξία γραμματίου ή συναλλαγματικής καλείται η αξία που έχει κάθε χρονική στιγμή πριν από τη λήξη. Η αξία αυτή συνεχώς αυξάνει καθώς πλησιάζουμε προς τη λήξη. Την ημέρα της λήξης η ονομαστική αξία και η πραγματική αξία είναι ίσες.

Να σημειώσουμε επίσης κάποιους βασικούς ορισμούς:

Λήξη ενός γραμματίου ή συναλλαγματικής καλείται η αναγραφόμενη ημερομηνία του εντύπου και είναι η ημερομηνία κατά την οποία πραγματοποιείται η εξόφληση του πιστωτικού τίτλου.

Προεξόφληση γραμματίου ή συναλλαγματικής καλείται η ρευστοποίηση, ή με άλλα λόγια η μετατροπή σε χρήμα του τίτλου πριν από τη λήξη του.

Προεξόφλημα καλείται το χρηματικό ποσό που κρατάει η τράπεζα ή ο ιδιώτης κατά την προεξόφληση του πιστωτικού τίτλου.

Χρόνος προεξόφλησης καλείται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της ημερομηνίας προεξόφλησης και λήξης ενός γραμματίου ή μιας συναλλαγματικής.

Επιτόκιο προεξόφλησης καλείται το επιτόκιο με το οποίο ο κάτοχος ενός πιστωτικού τίτλου και η τράπεζα συμφωνούν να γίνει η προεξόφλησή του.

4.2. Εξωτερική και εσωτερική προεξόφληση

Υπάρχουν δύο είδη προεξοφλήσεων, η εξωτερική και η εσωτερική προεξόφληση. Εξωτερική προεξόφληση καλείται η προεξόφληση κατά την οποία το προεξόφλημα υπολογίζεται με βάση την ονομαστική αξία του πιστωτικού τίτλου. Στην Ελλάδα χρησιμοποιείται η εξωτερική προεξόφληση. Παρακάτω δίνονται οι συμβολισμοί των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν:

C : Ονομαστική αξία πιστωτικού τίτλου

E : Εξωτερικό προεξόφλημα

i : Επιτόκιο προεξόφλησης

A : Πραγματική ή παρούσα αξία πιστωτικού τίτλου

v : Αριθμός ημερών πριν τη λήξη του πιστωτικού τίτλου

Ένας πιστωτικός τίτλος αξίας C προεξοφλείται εξωτερικά v ημέρες πριν από τη λήξη του με επιτόκιο προεξόφλησης i. Εάν το έτος είναι μικτό ή εμπορικό, για το προεξόφλημα Ε και για την πραγματική αξία Α του πιστωτικού τίτλου ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$E = \frac{C \cdot v \cdot i}{360} \quad (11)$$

ή

$$E = \frac{C \cdot v}{\Delta} \quad (12)$$

όπου $\Delta = \frac{360}{i}$ και Α = C – Ε.

Εάν ο χρόνος δίνεται σε μ μήνες ή n έτη, τότε το προεξόφλημα υπολογίζεται από τους τύπους:

$$E = \frac{C \cdot \mu \cdot i}{12}$$

και

$$E = C \cdot n \cdot i$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 4.000 ευρώ, η οποία προεξοφλείται εξωτερικά σήμερα, 70 ημέρες πριν από τη λήξη της και με επιτόκιο 12%. Να βρεθεί το προεξόφλημα και η πραγματική της αξία. Το έτος είναι μικτό.

Το έτος είναι μικτό και γι' αυτόν το λόγο θα έχει 360 ημέρες. Χρησιμοποιούμε τον εξής τύπο του προεξοφλήματος $E = \frac{C \cdot v \cdot i}{360} = \frac{4.000 \cdot 70 \cdot 0{,}12}{360} = \frac{33.600}{360}$ = 93 ευρώ είναι το προεξόφλημα.

Για να βρεθεί η πραγματική αξία της συναλλαγματικής θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Α = C – Ε = 4.000 – 93 = 3.907 ευρώ είναι η πραγματική αξία της συναλλαγματικής.

Εσωτερική προεξόφληση καλείται η προεξόφληση κατά την οποία το προεξόφλημα υπολογίζεται με βάση την πραγματική αξία του πιστωτικού τίτλου. Ισχύουν και εδώ οι παραπάνω συμβολισμοί των μεγεθών C, i, ν αλλά διαφέρουν τα Ε και Α. Στην εσωτερική προεξόφληση ισχύουν E_1 : Εσωτερικό προεξόφλημα και A_1 : Πραγματική αξία πιστωτικού τίτλου. Ένας πιστωτικός τίτλος αξίας C προεξοφλείται εσωτερικά ν ημέρες πριν από τη λήξη του με επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης i και δίνει πραγματική αξία A_1. Εάν το έτος είναι μικτό ή εμπορικό, για το προεξόφλημα E_1 και για την πραγματική αξία A_1 του πιστωτικού τίτλου ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot v \cdot i}{360} \tag{13}$$

ή

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot v}{\varDelta} \tag{14}$$

όπου $\Delta = \frac{360}{i}$ και $A_1 = \mathrm{C} - E_1$.

Εάν ο χρόνος δίνεται σε μ μήνες ή n έτη, τότε το προεξόφλημα υπολογίζεται από τους τύπους:

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot \mu \cdot i}{12}$$

και

$$E_1 = A_1 \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{i}$$

Παρατηρούμε πως οι παραπάνω τύποι υπολογισμού του εσωτερικού προεξοφλήματος έχουν ένα μειονέκτημα, αφού διαθέτουν δύο άγνωστες ποσότητες, το A_1 και το E_1. Γι’ αυτόν το λόγο χρειαζόμαστε έναν πιο εύχρηστο τύπο υπολογισμού του εσωτερικού προεξοφλήματος.

Ισχύει ότι:

$$E_1 = \mathrm{C} - A_1$$

ή

$$A_1 = \mathrm{C} - E_1$$

Οπότε ο τύπος (13) θα πάρει την παρακάτω μορφή:

$$E_1 = \frac{(\mathrm{C} - E_1) \cdot v \cdot i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{C \cdot v \cdot i}{360} - \frac{E_1 \cdot v \cdot i}{360}$$

ή

$$E_1 \left(1 + \frac{v \cdot i}{360}\right) = \frac{C \cdot v \cdot i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{C \cdot v \cdot i}{360+(v \cdot i)}$$

και διαιρώντας με i

$$E_1 = \frac{C \cdot v}{\frac{360}{i}+ v}$$

ή

$$E_1 = \frac{C \cdot v}{\Delta + v} \qquad (15)$$

Για τον υπολογισμό του εσωτερικού προεξοφλήματος θα χρησιμοποιούμε τον τύπο (15). Να επισημάνουμε, σε αυτό το σημείο, πως v < v + Δ ↔ $\frac{v}{v+\Delta} < 1$. Συνεπώς $\frac{C \cdot v}{v+\Delta}$ < C και από τον τύπο (15) ισχύει E_1 < C, δηλαδή το εσωτερικό προεξόφλημα δεν μπορεί να υπερβεί την ονομαστική αξία του πιστωτικού τίτλου.

Παράδειγμα:

Έστω συναλλαγματική η οποία προεξοφλείται εσωτερικά 60 ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο προεξόφλησης 8% και δίνει πραγματική αξία 199 ευρώ. Να βρεθεί η ονομαστική της αξία καθώς και το εσωτερικό προεξόφλημα.

Έχουμε ως δεδομένα v = 60, i = 8%, A_1 = 199. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο A_1 = C - E_1 για να βρεθεί η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής. Επίσης Δ = $\frac{360}{i} = \frac{360}{0{,}08}$ = 4.500.

$$A_1 = C - E_1$$

αντικαθιστώντας από τον τύπο (15) προκύπτει:

$$A_1 = C - \frac{C \cdot v}{\Delta + v} = C\,(1 - \frac{v}{\Delta + v})$$

ή

$$199 = C\,(1 - \frac{60}{4.500 + 60})$$

ή

$$199 = 0{,}98684 \cdot C$$

Οπότε

$$C = 201,65 \text{ ευρώ}$$

Το εσωτερικό προεξόφλημα θα βρεθεί ως εξής:

E_1 = C - A_1 = 201,65 – 199 = 2,65 ευρώ είναι το εσωτερικό προεξόφλημα.

Έστω συναλλαγματική ονομαστικής αξίας C, η οποία προεξοφλείται ν ημέρες πριν από τη λήξη της και με επιτόκιο i. Τότε από τους τύπους (12) και (15), δηλαδή: E = $\frac{C \cdot v}{\Delta}$ και $E_1 = \frac{C \cdot v}{\Delta + v}$ είναι προφανές πως E > E_1. Οπότε:

$$\begin{aligned} E - E_1 &= \frac{C \cdot v}{\Delta} - \frac{C \cdot v}{\Delta + v} \\ &= \frac{C \cdot v\,(\Delta + v) - C \cdot v \cdot \Delta}{\Delta(\Delta + v)} \\ &= \frac{C \cdot v^2}{\Delta(\Delta + v)} \end{aligned}$$

Όπως έχει προαναφερθεί ισχύουν οι τύποι A = C – E και A_1 = C - E_1. Αφού ισχύει E > E_1 είναι προφανές πως A_1 > A. Οπότε για τη διαφορά των πραγματικών αξιών ισχύει:

$$\begin{aligned} A_1 - A &= C - E_1 - (C - E) \\ &= E - E_1 \\ &= \frac{C \cdot v^2}{\Delta(\Delta + v)}, \end{aligned}$$

το οποίο έχει αποδειχθεί παραπάνω.

Στην πράξη οι τράπεζες χρησιμοποιούν την εξωτερική προεξόφληση γραμματίων ή συναλλαγματικών. Με αυτόν τον τρόπο εισπράττουν περισσότερο τόκο. Όμως η προεξόφληση γραμματίων ή συναλλαγματικών πραγματοποιείται συνήθως λίγες ημέρες πριν από τη λήξη τους, με αποτέλεσμα η διαφορά των προεξοφλημάτων E - E_1 να είναι πολύ μικρή.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 1.000 ευρώ η οποία προεξοφλείται 40 ημέρες πριν από τη λήξη της και με επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η διαφορά των προεξοφλημάτων και των πραγματικών αξιών.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 1.000, ν = 40, i = 6%. Ισχύει ότι η διαφορά των προεξοφλημάτων ισούται με τη διαφορά των πραγματικών αξιών, δηλαδή:

$$\mathrm{E} - E_1 = A_1 - \mathrm{A} = \frac{C \cdot v^2}{\Delta(\Delta+v)} = \frac{1.000 \cdot 40^2}{\frac{360}{0{,}06}(\frac{360}{0{,}06} + 40)} = 0{,}04.$$

4.3. Προεξόφληση με έξοδα

Κατά τη διαδικασία της προεξόφλησης των γραμματίων και των συναλλαγματικών οι τράπεζες εκτός από το προεξόφλημα κρατούν και άλλα ποσά. Αυτά τα ποσά είναι για προμήθεια, χαρτόσημο και διάφορα άλλα έξοδα τα οποία υπολογίζονται επί της ονομαστικής αξίας του γραμματίου ή της συναλλαγματικής. Για την εξωτερική προεξόφληση ισχύουν τα παρακάτω:

Εξωτερικό προεξόφλημα: $\mathrm{E} = \frac{C \cdot v}{\Delta}$

Προμήθεια: $\Pi = \frac{\pi \cdot C}{100}$

Διάφορα έξοδα: $E_\delta = \frac{\varepsilon \cdot C}{100}$

Χαρτόσημο: χ

Οπότε στην εξωτερική προεξόφληση ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} - \mathrm{E} - \Pi - E_\delta - \chi = \mathrm{C} - \frac{C \cdot v}{\Delta} - \frac{\pi \cdot C}{100} - \frac{\varepsilon \cdot C}{100} - \chi \tag{16}$$

Για την εσωτερική προεξόφληση ισχύουν τα παρακάτω:

Εσωτερικό προεξόφλημα: $E_1 = \frac{C \cdot v}{\Delta + v}$

Προμήθεια: $\Pi = \frac{\pi \cdot C}{100}$

Διάφορα έξοδα: $E_\delta = \frac{\varepsilon \cdot C}{100}$

Χαρτόσημο: χ

Οπότε στην εσωτερική προεξόφληση ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} - E_1 - \Pi - E_\delta - \chi = \mathrm{C} - \frac{C \cdot v}{\Delta + v} - \frac{\pi \cdot C}{100} - \frac{\varepsilon \cdot C}{100} - \chi \tag{17}$$

Σε παραδείγματα που αφορούν προεξόφληση γραμματίου ή συναλλαγματικής με έξοδα συναντούμε συχνά τις εκφράσεις κατά μήνα και ολόκληρο μήνα και κατά χιλιάδα και ολόκληρη χιλιάδα. Η πρώτη έκφραση σημαίνει πως εάν έχουμε ως χρονική μονάδα μέτρησης τους μήνες και προκύψει ο δεκαδικός αριθμός m, d, τότε θα χρησιμοποιήσουμε το m + 1. Η δεύτερη έκφραση σημαίνει πως εάν το κεφάλαιο είναι σε χιλιάδες ευρώ και προκύψει ο δεκαδικός αριθμός k, d, τότε θα χρησιμοποιήσουμε το k + 1. Θα γίνει απόλυτα κατανοητό στο επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 1.200 ευρώ η οποία προεξοφλείται εξωτερικά από την Εμπορική Τράπεζα 50 ημέρες πριν από τη λήξη της και με επιτόκιο 7,5%. Τι ποσό θα εισπραχθεί εάν η τράπεζα κρατήσει προμήθεια 0,45% για κάθε μήνα και για ολόκληρο μήνα, έξοδα 0,55% εφ' άπαξ και χαρτόσημο 1,20 ευρώ; Το έτος είναι εμπορικό.

Έχουμε ως δεδομένα C = 1.200, ν = 50, i = 7,5% = 0,075, π = 0,45, ε = 0,55, χ = 1,20. Στην εκφώνηση του παραδείγματος παρατηρούμε ότι μας δίνεται η προμήθεια 0,45% για κάθε μήνα και για ολόκληρο μήνα. Από τη στιγμή που η συναλλαγματική προεξοφλείται 50 ημέρες πριν από τη λήξη της ισχύει m + 1 = 1 + 1 = 2.

$$\Delta = \frac{360}{i} = \frac{360}{0,075} = 4.800$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (16):

$$\begin{aligned} A = C - E - \Pi - E_\delta - \chi &= C - \frac{C \cdot v}{\Delta} - \frac{\pi \cdot C}{100} - \frac{\varepsilon \cdot C}{100} - \chi \\ &= 1.200 - \frac{1.200 \cdot 50}{4.800} - 2 \cdot \frac{0,45 \cdot 1.200}{100} - \frac{0,55 \cdot 1.200}{100} - 1,20 \\ &= 1.200 - 12,5 - 10,8 - 6,6 - 1,20 \\ &= 1.168,90 \text{ ευρώ θα εισπραχθούν.} \end{aligned}$$

5. Ο ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ ΣΤΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΛΛΑΓΕΣ

Οι ακολουθίες βρίσκουν εφαρμογή και στις οικονομικές συναλλαγές που λειτουργούν βάσει ανατοκισμού. Ορισμένες από αυτές είναι οι ίσες καταθέσεις, η χρεολυσία και οι ράντες. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τις πηγές: [3], [5], [7], [9].

5.1. Ανατοκισμός

Ανατοκισμός καλείται ο τοκισμός χρημάτων όπου ο δανειστής στο τέλος κάθε περιόδου δεν εισπράττει τον τόκο. Αφήνει τον τόκο και γίνεται κεφάλαιο, με αποτέλεσμα την επόμενη χρονική περίοδο να φέρει τόκο όχι μόνο το αρχικό κεφάλαιο αλλά και ο τόκος. Αυτό επαναλαμβάνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους τοκισμού. Ο ανατοκισμός είναι μια μακροπρόθεσμη οικονομική διαδικασία η οποία έχει χρονική διάρκεια άνω του ενός έτους. Βέβαια επιτρέπεται σε ορισμένες περιπτώσεις και για περιορισμένο αριθμό ετών στα πλαίσια της αποταμίευσης. Δεν επιτρέπεται από το νόμο ο ανατοκισμός μεγάλων χρηματικών ποσών και για μεγάλα χρονικά διαστήματα, διότι με αυτόν τον τρόπο μπορεί να παραχθούν τεράστια ποσά τα οποία δε θα είναι δυνατόν να αποπληρωθούν.

Ωστόσο η ιστορία του ανατοκισμού πάει πολλά χρόνια στο παρελθόν, τουλάχιστον μέχρι τους Βαβυλώνιους. Η πιο σπουδαία άσκηση ανατοκισμού ήταν η πώληση του νησιού του Manhattan της Νέας Υόρκης. Το 1626 ο Peter Minuit, ο διευθυντής της ολλανδικής εταιρίας των Δυτικών Ινδιών, αντάλλαξε το νησί με κρεβάτια και χάντρες αξίας 6 guilders, περίπου 24 δολάρια. Ήταν συμφέρουσα η ανταλλαγή που πραγματοποίησε ο Minuit; Εάν ο διευθυντής της εταιρίας των Δυτικών Ινδών τοποθετούσε τα 24 δολάρια σε μια τράπεζα με επιτόκιο 8% και ετήσιο ανατοκισμό για 384 χρόνια (1626 - 2010) σήμερα η αξία αυτών των χρημάτων θα ήταν 164.033.801.073.255,62 δολάρια. Τα 164 τρισεκατομμύρια δολάρια έχουν μεγαλύτερη αξία από τα 31 τετραγωνικά μίλια του Manhattan. Αυτή είναι η δύναμη του ανατοκισμού για τον οποίο ο A. Einstein είπε πως αποτελεί την πιο ισχυρή δύναμη του σύμπαντος και επίσης άλλο ένα θαύμα του κόσμου.

Παρακάτω δίνονται οι συμβολισμοί των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν:

C_0 : Αρχικό κεφάλαιο

C_n : Τελική αξία κεφαλαίου

n : Αριθμός χρονικών περιόδων που ανατοκίζεται το αρχικό κεφάλαιο C_0

i : Επιτόκιο ανατοκισμού

Στο τέλος του πρώτου έτους η τελική αξία του κεφαλαίου C_1 θα είναι:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i)^1$$

Στο τέλος του δεύτερου έτους η τελική αξία του κεφαλαίου C_2 θα είναι:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \mathrm{i} = C_1(1 + \mathrm{i}) = C_0(1 + \mathrm{i})\,(1 + \mathrm{i}) = C_0(1\ +\ \mathrm{i})^{\,2}$$

Στο τέλος του τρίτου έτους η τελική αξία του κεφαλαίου C_3 θα είναι:

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \mathrm{i} = C_2(1 + \mathrm{i}) = C_0(1\ +\ \mathrm{i})^{\,2}\,(1 + \mathrm{i}) = C_0(1\ +\ \mathrm{i})^3$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι στο τέλος του n-οστού έτους η τελική αξία του κεφαλαίου θα είναι:

$$C_n = C_0(1 + i)^n. \qquad (18)$$

Ωστόσο παρατηρούμε πως επρόκειτο για μια γεωμετρική πρόοδο με τα ποσά C_1, C_2, C_3, …, C_n να είναι διαδοχικοί όροι αυτής. Επίσης ισχύει ο τύπος της γεωμετρικής προόδου, ο (4) με $\alpha_1 = C_0(1 + \mathrm{i})$ και λόγο ω = 1 + i.

Η παραπάνω εξίσωση, δηλαδή η (18) ονομάζεται θεμελιώδης εξίσωση του ανατοκισμού.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι τοκίζεται κεφάλαιο 10.000 ευρώ με ετήσιο ανατοκισμό προς 8,5% για 6 έτη. Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο.

Έχουμε ως δεδομένα: C_0 = 10.000, i = 8,5% = 0,085, n = 6. Τότε βρίσκουμε το τελικό κεφάλαιο ως εξής: $C_n = C_0(1 + i)^n$

$$= 10.000\ (1 + 0{,}085)^6$$

$$= 10.000 \cdot 1{,}6315$$

$$= 16.315 \text{ ευρώ.}$$

Ενδέχεται το επιτόκιο i να μην εκφράζεται σε έτη αλλά έτη και μήνες. Σε αυτήν την περίπτωση, όπου υπάρχει αρχικό κεφάλαιο C_0 το οποίο ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i για n έτη και μ μήνες ισχύουν τα ακόλουθα.

Στο τέλος του n-οστού έτους το αρχικό κεφάλαιο C_0 δίνει τελική αξία:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Στη συνέχεια το κεφάλαιο τοκίζεται για μ μήνες και δίνει τόκο:

$$\mathrm{I} = \frac{C_n \cdot \mu \cdot i}{12}$$

Συνεπώς η τελική αξία του κεφαλαίου είναι:

$$C_{n+\frac{\mu}{12}} = C_n + \mathrm{I} = C_n + \frac{C_n \cdot \mu \cdot i}{12} = C_n(1 + \frac{\mu \cdot i}{12})$$

ή

$$C_{n+\frac{\mu}{12}} = C_0(1+i)^n(1 + \frac{\mu \cdot i}{12}) \qquad (19)$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω κεφάλαιο 28.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται προς 2,75% ετησίως για 9 έτη και 4 μήνες. Να υπολογιστεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Έχουμε ως δεδομένα: C_0 = 28.000, i = 2,75% = 0,0275, n = 9, μ = 4. Τότε ισχύει $C_{n+\frac{\mu}{12}} = C_0(1+i)^n(1 + \frac{\mu \cdot i}{12})$

$$= 28.000\ (1 + 0{,}0275)^9\ (1 + \frac{4 \cdot 0{,}0275}{12})$$

$$= 28.000 \cdot 1{,}2765 \cdot 1{,}00916 = 36.069{,}4 \text{ ευρώ.}$$

Ενώ όταν αρχικό κεφάλαιο C_0 ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i για n έτη και ν ημέρες ισχύουν τα ακόλουθα.

Στο τέλος του n-οστού έτους το αρχικό κεφάλαιο C_0 δίνει τελική αξία:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Στη συνέχεια το κεφάλαιο τοκίζεται για ν ημέρες και δίνει τόκο:

$$\mathrm{I} = \frac{C_n \cdot \nu \cdot i}{360}$$

Συνεπώς η τελική αξία του κεφαλαίου είναι:

$$C_{n+\frac{v}{360}} = C_n + \mathrm{I} = C_n + \frac{C_n \cdot v \cdot i}{360} = C_n(1 + \frac{v \cdot i}{360})$$

ή

$$C_{n+\frac{v}{360}} = C_0(1+i)^n(1 + \frac{v \cdot i}{360}) \qquad (20)$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω κεφάλαιο 1.500 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 5% για 3 έτη και 20 ημέρες. Να υπολογιστεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Έχουμε ως δεδομένα: C_0 = 1.500, i = 5% = 0,05, n = 3, v = 20. Τότε ισχύει $C_{n+\frac{v}{360}} = C_0(1+i)^n(1 + \frac{v \cdot i}{360})$

$= 1.500\ (1 + 0{,}05)^3\ (1 + \frac{20 \cdot 0{,}05}{360})$

= 1.500 · 1,1576 · 1,00277 = 1.741,21 ευρώ.

Στην προεξόφληση με απλό τόκο έγινε γνωστό ότι το προεξόφλημα είναι η διαφορά ανάμεσα στην ονομαστική και στην παρούσα αξία μιας συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου. Τα ίδια ισχύουν και στον ανατοκισμό. Στον ανατοκισμό όμως εφαρμόζεται μόνο εσωτερική προεξόφληση. Παρακάτω δίνονται οι συμβολισμοί των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν:

C_0 : Πραγματική αξία γραμματίου ή συναλλαγματικής

C_n : Ονομαστική αξία γραμματίου ή συναλλαγματικής

i : Επιτόκιο προεξόφλησης

n : Αριθμός χρονικών περιόδων ανατοκισμού πριν τη λήξη του γραμματίου ή της συναλλαγματικής

Ε : Προεξόφλημα

Ισχύει ότι $C_n = C_0(1+i)^n \leftrightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$.

Για το προεξόφλημα ισχύει:

$$\mathrm{E} = C_n - C_0 = C_n - \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad (21)$$

Όμως όταν είναι γνωστή η πραγματική αξία του γραμματίου ή της συναλλαγματικής, το προεξόφλημα δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E} = C_n - C_0 = C_0(1+i)^n - C_0 \qquad (22)$$

Παράδειγμα:

Έστω συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 3.000 ευρώ η οποία λήγει σε 6 έτη και προεξοφλείται σήμερα με επιτόκιο ανατοκισμού 5%. Να βρεθεί το προεξόφλημα.

Έχουμε ως δεδομένα: C_n = 3.000, n = 6, i = 5% = 0,05.

Τότε ισχύει $\mathrm{E} = C_n - C_0 = C_n - \frac{C_n}{(1+i)^n}$

$$= 3.000 - \frac{3.000}{(1+0{,}05)^6}$$

$$= 3.000 - \frac{3.000}{1{,}34} = 761{,}19 \text{ ευρώ.}$$

5.2. Ίσες καταθέσεις

Ίση κατάθεση καλείται ένα συγκεκριμένο, σταθερό ποσό το οποίο καταθέτεται για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα στην αρχή κάθε έτους με σκοπό την απόκτηση κεφαλαίου. Εξυπακούεται πως οι ίσες καταθέσεις μπορούν να γίνονται και κάθε εξάμηνο, τρίμηνο, κ.λπ. Ας υποθέσουμε ότι γίνεται κατάθεση σε μια τράπεζα, στην αρχή κάθε έτους, ενός σταθερού κεφαλαίου C ευρώ, το οποίο θα ανατοκίζεται για n έτη και με επιτόκιο i. Η πρώτη κατάθεση του κεφαλαίου C ανατοκιζόμενη για n έτη και με επιτόκιο i, σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού, θα είναι:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Η δεύτερη κατάθεση θα είναι ίση με την πρώτη αλλά θα ανατοκιστεί για n-1 έτη. Οπότε θα είναι:

$$C_{n-1} = C_0(1+i)^{n-1}$$

Οπότε για την προτελευταία κατάθεση θα ισχύει:

$$C_2 = C_0(1+i)^2$$

Και για την τελευταία θα ισχύει:

$$C_1 = C_0(1 + i)$$

Το κεφάλαιο που θα εισπραχθεί ένα έτος μετά την τελευταία κατάθεση θα είναι:

$$S_n = C_0(1 + i) + C_0(1 + i)^2 + \ldots + C_0(1 + i)^{n-1} + C_0(1 + i)^n$$

Παρατηρούμε ότι το S_n είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $a_1 = C_0(1 + i)$ και λόγο ω = 1 + i . Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου θα βρούμε τον τύπο των ίσων καταθέσεων:

$$S_n = a_1 \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = C_0(1 + i)\,\frac{(1 + \mathrm{i})^n - 1}{1 + \mathrm{i} - 1}$$

$$= \frac{C_0(1+i)(1 + \mathrm{i})^n - C_0(1+i)}{\iota}$$

$$= \frac{C_0(1+i)[(1 + \mathrm{i})^n - 1]}{i}$$

Οπότε $S_n = \frac{C_0(1+i)[(1 + \mathrm{i})^n - 1]}{i}$ (23)

Ο τύπος (23) είναι γνωστός ως ο τύπος των ίσων καταθέσεων και δίνει το ποσό που θα εισπραχθεί στο τέλος μιας χρονικής περιόδου n ετών όταν στην αρχή κάθε χρόνου γινόταν κατάθεση C ευρώ ανατοκιζόμενη και με επιτόκιο i.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ένας ιδιώτης ο οποίος καταθέτει σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου 2.000 ευρώ με ανατοκισμό προς 5%. Τι ποσό θα εισπράξει στο τέλος μιας δεκαετίας;

Με βάση τον τύπο των ίσων καταθέσεων ισχύει ότι:

$$S_n = \frac{C_0(1+i)[(1 + \mathrm{i})^n - 1]}{i}$$

$$= \frac{2.000(1+0{,}05)[(1+0{,}05)^{10} - 1]}{0{,}05}$$

$$= \frac{2.100 \cdot (1{,}6289 - 1)}{0{,}05}$$

= 26.413,8 ευρώ θα εισπράξει στο τέλος της δεκαετίας.

5.3. Χρεολυσία

Υποθέτουμε πως κάποιος δανείζεται με ανατοκισμό και με επιτόκιο i ανά έτος ένα χρηματικό ποσό C με σκοπό την εξόφληση του χρέους του σε n ίσες δόσεις, οι οποίες θα πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους από την ημέρα δανεισμού. Το συγκεκριμένο ποσό, το οποίο πρέπει να πληρώνεται προς εξόφληση του χρέους καλείται χρεολύσιο. Στην περίπτωση που ο δανειζόμενος δεν πλήρωνε κατά τη διάρκεια των n ετών, τότε στο τέλος των n ετών θα έπρεπε να πληρώσει $C(1+i)^n$ ευρώ. Αλλά ο δανειζόμενος πληρώνει ένα χρεολύσιο x και δικαιούται να ζητήσει τους τόκους των ετήσιων δόσεων, τους οποίους θα λάμβανε, εάν ανατόκιζε την κάθε δόση.

Η πρώτη δόση των x ευρώ θα μείνει ανατοκιζόμενη επί n-1 έτη, αφού πληρώνεται στο τέλος του έτους. Επομένως η πρώτη δόση θα είναι $x(1+i)^{n-1}$ ευρώ. Συνεχίζοντας, με την ίδια λογική, η δεύτερη δόση θα είναι $x(1+i)^{n-2}$ ευρώ. Η προτελευταία δόση θα μείνει ανατοκιζόμενη ένα έτος και θα είναι x(1 + i) ευρώ, ενώ η τελευταία, η οποία θα πληρωθεί στο τέλος των n ετών θα είναι x ευρώ και εξοφλείται το χρέος. Ο δανειζόμενος θα πληρώσει συνολικά:

$$x + x(1+i) + x(1+i)^2 + \ldots + x(1+i)^{n-2} + x(1+i)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι το χρέος είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $a_1 = x$, λόγο $\omega = 1 + i$ και $a_n = x(1+i)^{n-1}$. Οπότε το παραπάνω άθροισμα θα είναι $S_n = a_1 \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{1+i-1} = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$. Για να εξοφληθεί το χρέος θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω εξίσωση:

$$C(1+i)^n = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Και κατά συνέπεια:

$$x = \frac{C \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \tag{24}$$

Παράδειγμα:

Έστω ότι υπάρχει η δυνατότητα πληρωμής ενός ετησίου χρεολυσίου 1.000 ευρώ επί 9 έτη και με επιτόκιο 5%. Να βρεθεί το κεφάλαιο το οποίο έχει λάβει ο δανειζόμενος.

Έχουμε ως δεδομένα: x = 1.000, n = 9, i = 5% = 0,05. Τότε σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο ισχύει x = $\frac{C \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ ↔ 1.000 = $\frac{C \cdot 0{,}05 \cdot (1{,}05)^9}{(1{,}05)^9 - 1}$ ↔ C = $\frac{1.000(1{,}5513 - 1)}{0{,}05 \cdot 1{,}5513} = \frac{551{,}3}{0{,}077565}$ = 7.107,59 ευρώ είναι το κεφάλαιο που δανείστηκε.

5.4. Ράντες

Ράντα καλείται ένα σύνολο χρηματικών ποσών τα οποία καταβάλλονται ανά ίσα χρονικά διαστήματα. Ο όρος ράντα έχει προέλθει από τη λατινική λέξη Reddita. Μια λέξη που θα μπορούσε να αποδώσει καλύτερα τον όρο ράντα είναι χρηματοσειρά ή χρηματοροή αφού η ράντα όντως είναι μια σειρά ισόποσων καταθέσεων ή πληρωμών. Παρατηρούμε στην καθημερινή ζωή ενός ανθρώπου παραδείγματα ραντών, όπως για παράδειγμα το ενοίκιο που καταβάλλεται, οι μηνιαίες κρατήσεις στο μισθό των εργαζομένων, οι μηνιαίες δόσεις προς εξόφληση δανείων κ.λπ. Επίσης θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω όροι:

Όρος ράντας (R) καλείται το χρηματικό ποσό που καταβάλλεται κάθε φορά.

Περίοδος ράντας καλείται το χρονικό διάστημα μου μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών όρων αυτής.

Αρχή ράντας καλείται το ξεκίνημα της πρώτης περιόδου αυτής.

Τέλος ράντας καλείται το τελείωμα της τελευταίας περιόδου.

Αρχική αξία ράντας (Α) είναι το άθροισμα των πραγματικών αξιών των όρων της ράντας.

Τελική αξία ράντας (S) είναι το άθροισμα των τελικών αξιών των όρων της ράντας.

Να σημειώσουμε πως για τον υπολογισμό της τελικής αξίας υπολογίζουμε τη μελλοντική αξία (FV) μιας χρηματοροής R, με επιτόκιο i και χρόνο n ισχύει ο τύπος FV = R$(1 + i)^n$. Οπότε όταν υπάρχει μια σειρά χρηματοροών R_0, R_1, R_2, …, R_n που προκύπτουν σήμερα, σε ένα χρόνο, σε δύο χρόνια, …, σε n χρόνια, αντίστοιχα τότε η συνολική μελλοντική αξία είναι:

$$FV = R_0(1 + i)^n + R_1(1 + i)^{n-1} + R_2(1 + i)^{n-2} + \ldots + R_n \quad (25)$$

Ενώ για τον υπολογισμό της αρχικής αξίας της ράντας θα πρέπει να βρούμε την παρούσα αξία των όρων με τον τύπο PV = $\frac{FV}{(1+i)^n}$, ο οποίος λόγω των χρηματοροών R_0, R_1, R_2, …, R_n θα πάρει τη μορφή:

$$PV = \frac{R_0}{(1+i)^0} + \frac{R_1}{(1+i)^1} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^n} \qquad (26)$$

Περαιτέρω ανάλυση, όσον αφορά τη μελλοντική αξία καθώς και την παρούσα αξία θα πραγματοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Στις ράντες παρατηρούμε τις εξής βασικές κατηγορίες:

- Σταθερές – Μεταβλητές

Σταθερή καλείται η ράντα της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι μεταξύ τους, ενώ μεταβλητή καλείται η ράντα στην οποία υπάρχουν όροι που δεν είναι ίσοι μεταξύ τους.

- Ληξιπρόθεσμες – Προκαταβλητέες

Ληξιπρόθεσμη καλείται η ράντα στην οποία κάθε όρος καταβάλλεται στο τέλος της κάθε περιόδου, ενώ προκαταβλητέα καλείται η ράντα στην οποία κάθε όρος καταβάλλεται στην αρχή της κάθε περιόδου.

- Πρόσκαιρες – Διηνεκείς

Πρόσκαιρη καλείται η ράντα της οποίας το πλήθος των όρων είναι πεπερασμένο, ενώ διηνεκής ή ράντα ζωής καλείται η ράντα της οποίας το πλήθος των όρων είναι άπειρο.

- Άμεσες – Μέλλουσες – Αρξάμενες

Άμεση καλείται η ράντα στην οποία η εποχή υπολογισμού της συμπίπτει με την αρχή της. Μέλλουσα καλείται η ράντα στην οποία η εποχή υπολογισμού της βρίσκεται πριν από ορισμένες περιόδους από την αρχή της. Αρξάμενη καλείται η ράντα στην οποία η εποχή υπολογισμού της βρίσκεται μετά από ορισμένες περιόδους από την αρχή της. Να επισημάνουμε πως με τη φράση εποχή υπολογισμού εννοούμε την ημερομηνία υπολογισμού της πραγματικής αξίας της ράντας, δηλαδή την αξία όλων των όρων τη χρονική στιγμή, έστω t.

- Ακέραιες – Κλασματικές

Ακέραια καλείται η ράντα όπου η περίοδος ανατοκισμού συμπίπτει με την περίοδο της ράντας, ενώ κλασματική καλείται η ράντα που δεν είναι ακέραια.

Παράδειγμα:

Έστω ότι γίνονται καταθέσεις στο τέλος κάθε έτους για τρία συνεχή έτη τα εξής ποσά: 200 ευρώ, 300 ευρώ και 600 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Να βρεθεί η τελική και η αρχική αξία της ράντας.

Έχουμε ως δεδομένα: R_1 = 200, R_2 = 300, R_3 = 600, i = 3%, n = 3

Για να βρεθεί η τελική αξία S της ράντας θα πρέπει να βρεθεί η αξία όλων των όρων μαζί στο τέλος του τρίτου έτους. Ο πρώτος όρος R_1 της ράντας θα ανατοκιστεί για δύο χρόνια, ο R_2 θα ανατοκιστεί για ένα έτος και ο R_3 απλά θα προστεθεί. Οπότε:

$$\mathrm{S} = \mathrm{R}_1(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1} + \mathrm{R}_2(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-2} + \mathrm{R}_3$$

$$= 200\ (1+0{,}03)^2 + 300\ (1+0{,}03)^1 + 600$$

$$= 212{,}18 + 309 + 600$$

= 1.121,18 ευρώ είναι η τελική αξία της ράντας.

Για να βρεθεί η αρχική αξία A θα πρέπει να βρεθεί η πραγματική αξία όλων των όρων μαζί στην αρχή του πρώτου έτους. Οπότε:

$$\mathrm{A} = \frac{R_1}{(1+i)^1} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3}$$

$$= \frac{200}{(1+0{,}03)^1} + \frac{300}{(1+0{,}03)^2} + \frac{600}{(1+0{,}03)^3}$$

$$= 194{,}17 + 283{,}02 + 550{,}46$$

= 1.027,65 ευρώ είναι η αρχική αξία της ράντας.

Οι ράντες εκτός από τις πολλές εφαρμογές τους στα δάνεια, παραδείγματα των οποίων θα δούμε διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο, έχουν εφαρμογές γενικότερα στα χρηματοοικονομικά, στις επενδυτικές αποφάσεις, στις αποσβέσεις περιουσιακών στοιχείων κ.λπ. Παρακάτω θα παρουσιαστεί η εφαρμογή τους στις αποσβέσεις πάγιων περιουσιακών στοιχείων.

Τα πάγια περιουσιακά στοιχεία, όπως κτήρια, μηχανήματα κ.λπ. με την πάροδο του χρόνου υφίστανται φθορές και γι' αυτόν το λόγο επέρχεται μείωση της αρχικής τους αξίας. Τα μηχανήματα, για παράδειγμα οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, λόγω εντατικής χρήσης και παλαίωσης υφίστανται μείωση της αξίας τους, ενώ τα κτίρια υφίστανται φθορά με την πάροδο του χρόνου. Αυτή η μείωση της αξίας καλείται απόσβεση πάγιου ενεργητικού. Έστω ότι A είναι η αρχική αξία ή στην προκειμένη περίπτωση το αρχικό κόστος ενός πάγιου περιουσιακού στοιχείου, n είναι η χρονική διάρκεια ωφέλιμης ζωής, S είναι η υπολειμματική αξία, η αξία δηλαδή που θα έχει το στοιχείο μετά από n έτη και D = A – S είναι η αξία προς απόσβεση. Τότε το ποσό R της ετήσιας απόσβεσης για το πάγιο περιουσιακό στοιχείο δίνεται από τη σχέση:

$$R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = D = A - S \tag{27}$$

ή

$$R = (A - S)\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} \tag{28}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω μια επιχείρηση η οποία δίνει 6.000 ευρώ για την απόκτηση ενός μηχανήματος και μετά από 10 έτη η υπολειμματική του αξία γίνεται 800 ευρώ. Να υπολογιστεί το ετήσιο ποσό για την απόσβεση του μηχανήματος όταν το ετήσιο επιτόκιο απόσβεσης είναι 5,5%.

Έχουμε ως δεδομένα: A = 6.000, S = 800, n = 10, i = 5,5% = 0,055. Οπότε

$$R = (A - S)\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} = (6.000 - 800)\,\frac{0{,}055}{(1+0{,}055)^{10} - 1} = 5.200\,\frac{0{,}055}{0{,}708} = 403{,}95 \text{ ευρώ}$$

είναι η ετήσια δαπάνη για την απόσβεση του μηχανήματος.

6. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΑΝΕΙΑ

Η αξιολόγηση επενδύσεων και τα δάνεια αποτελούν άλλες δύο σημαντικές περιπτώσεις εφαρμογής των ακολουθιών. Θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο συγκεκριμένο κεφάλαιο οι τρόποι αξιολόγησης των επενδύσεων, η διάκριση των δανείων αλλά και οι μέθοδοι απόσβεσης αυτών. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τις πηγές: [**4**], [**5**], [**9**], [**10**], [**14**].

6.1. Αξιολόγηση επενδύσεων

Η παροιμία « κάλλιο πέντε και στο χέρι παρά δέκα και καρτέρει » αρμόζει πλήρως στη χρηματοοικονομική αφού η αξία του χρήματος είναι μεγαλύτερη στο παρόν παρά στο μέλλον. Οι επενδυτές προτιμούν να παίρνουν χρήματα σήμερα παρά αργότερα. Οι παράγοντες οι οποίοι μειώνουν προοδευτικά την αξία του χρήματος με την πάροδο του χρόνου είναι ο πληθωρισμός, ο κίνδυνος και η προτίμηση για ρευστότητα. Ο πληθωρισμός αναφέρεται στην αγοραστική αξία μιας νομισματικής μονάδας η οποία θα είναι μεγαλύτερη σήμερα απ’ ότι αύριο επειδή οι αυξημένες τιμές θα μειώσουν την αξία της νομισματικής μονάδας. Ο κίνδυνος είναι η αβεβαιότητα για το μέλλον αφού δεν είναι κανείς σε θέση να γνωρίζει τι θα συμβεί στο μέλλον, ποια θα είναι η μελλοντική κατάσταση της εγχώριας οικονομίας ή ποιες θα είναι οι χρηματοοικονομικές τάσεις σε άλλες χώρες. Η ρευστότητα είναι ένα σημαντικό στοιχείο για έναν επενδυτή ή μια επιχείρηση αφού προτιμούν να έχουν μετρητά για τυχόν ανάγκες ή χρηματοοικονομικές απαιτήσεις παρά να δεσμεύσουν τα κεφάλαιά τους. Εάν θυσιάσουν την παρούσα ρευστότητα για περιουσιακά στοιχεία τότε ανταλλάσουν τα εξασφαλισμένα διαθέσιμα με ένα μελλοντικό κέρδος το οποίο όμως εμπεριέχει μεγαλύτερο κίνδυνο.

Γνωρίζοντας όμως το ποσό που θα επενδυθεί ή θα δεσμευθεί, καθώς και το ποσοστό απόδοσης μπορεί να βρεθεί πόσο θα αυξηθεί στο μέλλον η τρέχουσα αξία του κεφαλαίου. Αυτός ο υπολογισμός καλείται μελλοντική αξία μιας επένδυσης. Θα δοθεί ο τύπος της μελλοντικής αξίας μέσω ενός απλού παραδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής αποταμιεύει 1.000 ευρώ, καταθέτοντάς τα στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 10%. Ένα χρόνο αργότερα θα έχει το αρχικό κεφάλαιο των 1.000 ευρώ και άλλα 100 ευρώ από τους τόκους. Δηλαδή ισχύει:

Αρχική κατάθεση + Τόκοι κατάθεσης = FV

ή 1.000 + (10%) (1.000) = 1.100 ευρώ

Ο υπολογισμός για ένα έτος είναι απλός αλλά τι γίνεται στην περίπτωση που κάποιος θέλει να μάθει την αξία του κεφαλαίου του έπειτα από αρκετά έτη; Σε αυτήν την περίπτωση ο τύπος με βάση τον οποίο υπολογίζεται η μελλοντική αξία είναι ο εξής:

$$FV = P(1 + i)^n$$

Όπου FV = Μελλοντική αξία

P = Αρχική κατάθεση (κεφάλαιο)

i = Ετήσιο επιτόκιο

n = Αριθμός ετών

Όμως εξίσου σημαντική είναι και η παρούσα αξία αφού παρέχει μια βάση σύγκρισης της αποδοτικότητας που θα έχουν ορισμένα προγράμματα ή επενδύσεις σε μια χρονική περίοδο. Η παρούσα αξία είναι η τρέχουσα αξία των μελλοντικών κερδών ή εισοδημάτων αφού εφαρμοστεί σε αυτή ένα προεξοφλητικό επιτόκιο (κεφαλαιοποίηση). Το προεξοφλητικό επιτόκιο ή επιτόκιο κεφαλαιοποίησης είναι το επιτόκιο το οποίο εφαρμόζεται σε μια σειρά μελλοντικών καταβολών έτσι ώστε να τις αναπροσαρμόσει σε σχέση με τον κίνδυνο και την αβεβαιότητα που εμπεριέχει ο χρόνος. Ο κίνδυνος μπορεί να μειωθεί λόγω κάποιων ευνοϊκότερων εξελίξεων στον επιχειρηματικό κόσμο. Αυτές οι εξελίξεις σχετίζονται με μείωση του πληθωρισμού και των επιτοκίων ή με τις λιγότερο αβέβαιες οικονομικές συνθήκες. Καθώς μειώνεται ο κίνδυνος, η παρούσα αξία του μελλοντικού εισοδήματος αυξάνεται. Ο τύπος υπολογισμού της παρούσας αξίας είναι ο εξής:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

Όπου PV = Παρούσα αξία ενός μελλοντικού εισοδήματος

FV = Μελλοντική αξία την περίοδο n

i = Προεξοφλητικό επιτόκιο

n = Αριθμός ετών

Επιπλέον απαραίτητη είναι μια αναφορά στον ενδιάμεσο ανατοκισμό. Μέχρι τώρα υποθέταμε, προς χάρη απλούστευσης, ότι ο τόκος ανατοκίζεται μόνο μια φορά το χρόνο. Όμως τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά αφού υπάρχει πιθανότητα να ανατοκίζεται περισσότερες από μια φορές. Εάν το ετήσιο επιτόκιο είναι 10%, είναι σαφές πως το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 5% και το τριμηνιαίο 2,5%. Συμβολίζουμε με m τον αριθμό πραγματοποίησης ανατοκισμού εντός ενός έτους. Τότε η μελλοντική αξία δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathrm{FV} = \mathrm{P}(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{\mathrm{mn}}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι γίνεται κατάθεση 1.000 ευρώ σε μια τράπεζα η οποία δίνει επιτόκιο 8% ανατοκιζόμενο τριμηνιαία. Να βρεθεί το ποσό της κατάθεσης μετά από ένα έτος.

Έχουμε ως δεδομένα: P = 1.000, i = 8% = 0,08, n = 1, m = 4 (υπάρχει τριμηνιαίος ανατοκισμός, δηλαδή πραγματοποιείται ανατοκισμός 4 φορές το χρόνο). Ο ανατοκισμός με επιτόκιο $\frac{8\%}{4}$ = 2% δίνεται ως εξής:

1^{o} τρίμηνο: 1.000 · 1,02 = 1.020

2^{o} τρίμηνο: 1.020 · 1,02 = 1.040,4

3^{o} τρίμηνο: 1.040,4 · 1,02 = 1.061,21

4^{o} τρίμηνο: 1.061,21 · 1,02 = 1.082,43

Οπότε στην αρχή του επόμενου έτους η κατάθεση θα ανέρχεται σε 1.082,43 ευρώ. Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού της κατάθεσης μετά από ένα έτος γίνεται χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, δηλαδή:

$\mathrm{FV} = \mathrm{P}(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{\mathrm{mn}} = 1.000(1 + \frac{0{,}08}{4})^{4 \cdot 1} = 1.000 \cdot 1{,}\ 08243 = 1.082{,}43$ ευρώ.

Η σωστή αξιολόγηση και η λήψη επενδυτικών αποφάσεων παίζουν σημαντικό ρόλο στη βιωσιμότητα και στην επέκταση του χρόνου αποδοτικής λειτουργίας της επιχείρησης. Μια λάθος επενδυτική απόφαση θέτει την απόδοση της επένδυσης εις βάρος της επιχείρησης. Γι’ αυτό η επιχείρηση πρέπει να επιλέγει μια συμφέρουσα επένδυση. Υπάρχουν διάφορες σύγχρονες μέθοδοι και κριτήρια επενδυτικών αποφάσεων. Εδώ θα γίνει ανάπτυξη του κριτηρίου της καθαρής παρούσας αξίας (NPV). Η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας στηρίζεται στον υπολογισμό του αθροίσματος των πραγματικών αξιών όλων των χρηματικών ροών που καταβάλλονται σε μια επένδυση και υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathrm{NPV} = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^n} - C_0 \tag{29}$$

Όπου C_n = Καθαρές χρηματικές ροές, με n = 1, 2, …, n

i = Επιτόκιο

n = Χρονική διάρκεια επένδυσης

C_0 = Αρχικό κόστος επένδυσης

Εάν η παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών είναι μεγαλύτερη από το αρχικό κόστος, τότε αξίζει να γίνει η επένδυση. Αντίθετα, εάν η παρούσα αξία είναι μικρότερη από το αρχικό κόστος, τότε η επένδυση πρέπει να απορριφθεί. Με άλλα λόγια, εάν NPV > 0 τότε η επένδυση είναι συμφέρουσα, ενώ εάν NPV < 0 τότε είναι μη συμφέρουσα και θα επιφέρει ζημία. Βέβαια στην περίπτωση που υπάρχουν επιλογές επενδύσεων επιλέγεται εκείνη με τη μεγαλύτερη καθαρή παρούσα αξία.

6.2. Δάνεια

6.2.1. Εισαγωγή στην έννοια των δανείων

Συχνά για την αντιμετώπιση των οικονομικών αναγκών είτε ενός ιδιώτη, είτε μιας επιχείρησης είναι αναπόφευκτη η σύναψη δανείου από τράπεζα ή άλλο φορέα. Τα δάνεια ανάλογα με τη διάρκειά τους διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, σε βραχυπρόθεσμα και σε μακροπρόθεσμα. Βραχυπρόθεσμα καλούνται τα δάνεια τα οποία έχουν χρονική διάρκεια το πολύ ένα έτος, ενώ μακροπρόθεσμα καλούνται τα δάνεια τα οποία έχουν διάρκεια μεγαλύτερη του ενός έτους. Στα βραχυπρόθεσμα εφαρμόζεται ο απλός τόκος και συνάπτονται μεταξύ φυσικών ή νομικών προσώπων. Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν οι συναλλαγματικές. Στα μακροπρόθεσμα εφαρμόζεται ο ανατοκισμός. Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν τα στεγαστικά, καταναλωτικά κ.λπ. δάνεια.

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια διακρίνονται σε ενιαία και σε ομολογιακά. Ενιαία καλούνται τα δάνεια στα οποία ο δανειστής είναι ένα μόνο πρόσωπο, είτε φυσικό είτε νομικό. Ομολογιακά καλούνται τα δάνεια στα οποία οι δανειστές είναι πολλοί. Αυτά τα δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν είναι διαθέσιμα μόνο από ένα πρόσωπο με αποτέλεσμα το δάνειο να διαιρείται σε μικρότερα ποσά τα οποία καλούνται ομολογίες.

Παρακάτω γίνεται αναφορά σε βασικούς ορισμούς:

Διάρκεια δανείου καλείται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την ημέρα σύναψης του δανείου μέχρι την ημέρα εξόφλησής του.

Εξόφληση δανείου καλείται η πληρωμή του δανειζόμενου κεφαλαίου καθώς και ο τόκος που προέκυψε μέχρι την ημέρα της επιστροφής του.

Απόσβεση δανείου καλείται το σύνολο των αριθμητικών πράξεων που γίνονται για την εξόφλησή του.

Τόκος καλείται το ποσό που διατίθεται σε κάθε δόση προς εξόφληση του τόκου του δανείου.

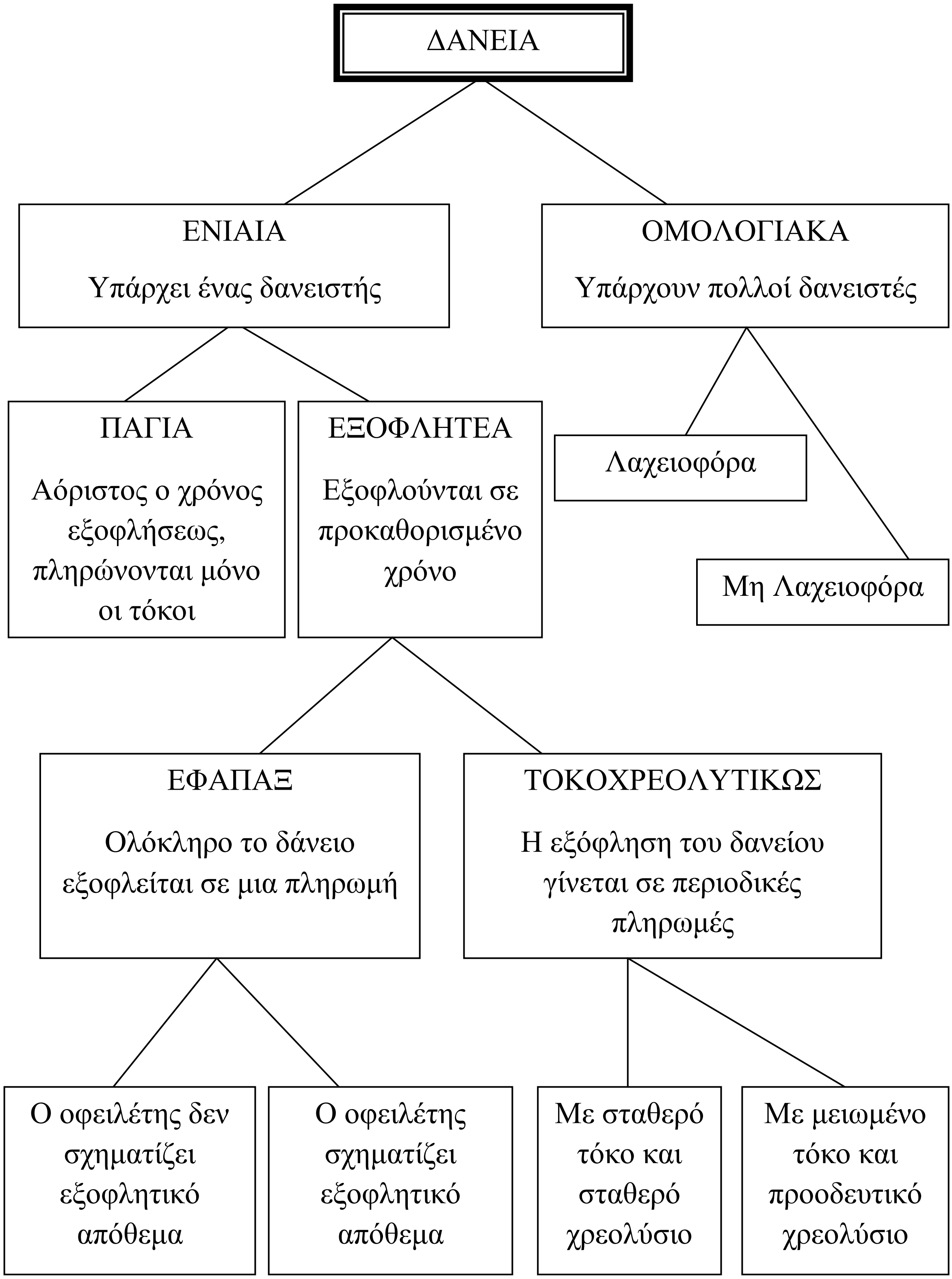
Χρεολύσιο καλείται το ποσό που διατίθεται σε κάθε δόση προς εξόφληση του χρέους.

Τοκοχρεολύσιο καλείται η συνολική δόση του δανείου που δίνεται κάθε φορά προς εξόφληση. Είναι προφανές πως:

Τοκοχρεολύσιο = Τόκος + Χρεολύσιο

Τα ενιαία δάνεια διακρίνονται στα πάγια και στα εξοφλητέα. Πάγια καλούνται τα δάνεια των οποίων ο χρόνος εξόφλησης δεν είναι καθορισμένος. Εξοφλητέα καλούνται τα δάνεια των οποίων ο χρόνος εξόφλησης είναι καθορισμένος. Τα εξοφλητέα ενιαία δάνεια διακρίνονται σε εξοφλητέα εφάπαξ και σε εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς. Εξοφλητέα εφάπαξ καλούνται τα δάνεια στα οποία η εξόφληση γίνεται σε μια δόση. Εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς καλούνται τα δάνεια στα οποία η εξόφληση γίνεται σε περισσότερες από μια δόσεις.

Παραθέτεται το παρακάτω διάγραμμα για την πλήρη κατανόηση και εμπέδωση της διάκρισης των δανείων.


ΔΑΝΕΙΑ
ΕΝΙΑΙΑ
Υπάρχει ένας δανειστής
ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΑ
Υπάρχουν πολλοί δανειστές
ΠΑΓΙΑ
Αόριστος ο χρόνος εξοφλήσεως, πληρώνονται μόνο οι τόκοι
ΕΞΟΦΛΗΤΕΑ
Εξοφλούνται σε προκαθορισμένο χρόνο
Λαχειοφόρα
Μη Λαχειοφόρα
ΕΦΑΠΑΞ
Ολόκληρο το δάνειο εξοφλείται σε μια πληρωμή
ΤΟΚΟΧΡΕΟΛΥΤΙΚΩΣ
Η εξόφληση του δανείου γίνεται σε περιοδικές πληρωμές
Ο οφειλέτης δεν σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα
Ο οφειλέτης σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα
Με σταθερό τόκο και σταθερό χρεολύσιο
Με μειωμένο τόκο και προοδευτικό χρεολύσιο

6.2.2. Μέθοδος ενιαίου ποσού

Έστω ότι δανείζεται κάποιος ένα κεφάλαιο C με επιτόκιο i για n περιόδους. Με τη μέθοδο του ενιαίου ποσού καταβάλλει στο τέλος κάθε περιόδου και για n-1 περιόδους τόκο $I = C \cdot i$ και στο τέλος της n περιόδου καταβάλλει τον τόκο και το αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή $C + C \cdot i$. Πρόκειται για ένα από τα πλέον απλούστερα συστήματα απόσβεσης δανείου όπου ο οφειλέτης καταβάλλει στο δανειστή τον τόκο της κάθε περιόδου και στη λήξη του δανείου ολόκληρο το ποσό που έχει δανειστεί. Αυτός ο τρόπος αποπληρωμής δανείου θα εξυπηρετούσε μια νέα επιχείρηση, η οποία χρειάζεται χρόνο έτσι ώστε να λειτουργήσει και να αποκτήσει το κατάλληλο κεφάλαιο για την εξόφληση του αρχικού δανείου. Τα στοιχεία φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Όπου x: χρεολύσιο, R: τοκοχρεολύσιο και Y: υπόλοιπο δανείου.

n	I	x	R	Y
1	$C \cdot i$	0	$C \cdot i$	C
2	$C \cdot i$	0	$C \cdot i$	C
…	…	…	…	…
n-1	$C \cdot i$	0	$C \cdot i$	C
n	$C \cdot i$	C	$C + C \cdot i$	0

Πίνακας 6.1: Απόσβεση δανείου με τη μέθοδο ενιαίου ποσού

<u>Παράδειγμα:</u>

Να γίνει απόσβεση δανείου ύψους 60.000 ευρώ το οποίο εξοφλείται σε 6 ετήσιες δόσεις, με επιτόκιο 8% και με τη μέθοδο του ενιαίου ποσού.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 60.000, n = 6, i = 8% = 0,08.

Οπότε ισχύει $I = C \cdot i = 60.000 \cdot 0,08 = 4.800$ ευρώ. Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι ο παρακάτω:

n	I	x	R	Y
1	4.800	0	4.800	60.000
2	4.800	0	4.800	60.000
3	4.800	0	4.800	60.000
4	4.800	0	4.800	60.000
5	4.800	0	4.800	60.000
6	4.800	60.000	64.800	0

Πίνακας 6.2: Εφαρμογή απόσβεσης δανείου με τη μέθοδο ενιαίου ποσού

6.2.3. Μέθοδος ίσων μερών κεφαλαίου

Ας υποθέσουμε πως δανείζεται κάποιος κεφάλαιο C με επιτόκιο i για n χρονικές περιόδους. Με τη μέθοδο των ίσων μερών κεφαλαίου καταβάλλει στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου σταθερό χρεολύσιο x = $\frac{C}{n}$. Ενώ ο τόκος που καταβάλλει για n συνεχείς χρονικές περιόδους είναι:

I_1 = C · i

$I_2 = \left(C - \frac{C}{n}\right)$ i = C · i - $\frac{C}{n}$ · i

$I_3 = \left(C - \frac{2C}{n}\right)$i = C · i - 2$\frac{C}{n}$ · i

…

$I_n = \left(C - \frac{(n-1)C}{n}\right)$ i = C · i – (n - 1) · $\frac{C}{n}$ · i

<u>Παράδειγμα:</u>

Να γίνει απόσβεση δανείου ύψους 60.000 ευρώ το οποίο εξοφλείται σε 6 ετήσιες δόσεις, με επιτόκιο 8% και με τη μέθοδο των ίσων μερών κεφαλαίου.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 60.000, n = 6, i = 8% = 0,08.

Οπότε το χρεολύσιο είναι σταθερό x = $\frac{C}{n} = \frac{60.000}{6}$ = 10.000 ευρώ και για τα 6 έτη ισχύουν τα παρακάτω:

Για το 1^{ο} έτος:

I_1 = C · i = 60.000 · 0,08 = 4.800

$R_1 = I_1$ + x = 4.800 + 10.000 = 14.800

Y_1 = C – x = 60.000 – 10.000 = 50.000

Για το 2^{ο} έτος:

$I_2 = \left(C - \frac{C}{n}\right)$ i = (C - x) i = Y_1 · i = 50.000 · 0,08 = 4.000

$R_2 = I_2$ + x = 4.000 + 10.000 = 14.000

$Y_2 = Y_1$ - x = 50.000 – 10.000 = 40.000

Για το 3^{ο} έτος:

$I_3 = \left(C - \frac{2C}{n}\right)$i = (C – 2x)i = ($Y_1$ - x)i = Y_2 · i = 40.000 · 0,08 = 3.200

$R_3 = I_3$ + x = 3.200 + 10.000 = 13.200

$Y_3 = Y_2$ - x = 40.000 – 10.000 = 30.000

Για το 4^o έτος:

$I_4 = Y_3$ · i = 30.000 · 0,08 = 2.400

$R_4 = I_4$ + x = 2.400 + 10.000 = 12.400

$Y_4 = Y_3$ – x = 30.000 – 10.000 = 20.000

Για το 5^o έτος:

$I_5 = Y_4$ · i = 20.000 · 0,08 = 1.600

$R_5 = I_5$ + x = 1.600 + 10.000 = 11.600

$Y_5 = Y_4$ – x = 20.000 – 10.000 = 10.000

Για το 6^o έτος:

$I_6 = Y_5$ · i = 10.000 · 0,08 = 800

$R_6 = I_6$ + x = 800 + 10.000 = 10.800

$Y_6 = Y_5$ – x = 10.000 – 10.000 = 0

Συνεπώς ο πίνακας απόσβεσης δανείου με τη μέθοδο ίσων μερών κεφαλαίου είναι ο ακόλουθος:

n	I	x	R	Y
1	4.800	10.000	14.800	50.000
2	4.000	10.000	14.000	40.000
3	3.200	10.000	13.200	30.000
4	2.400	10.000	12.400	20.000
5	1.600	10.000	11.600	10.000
6	800	10.000	10.800	0

Πίνακας 6.3: Εφαρμογή απόσβεσης δανείου με τη μέθοδο ίσων μερών κεφαλαίου

6.2.4. Μέθοδος σταθερού τόκου και χρεολυσίου

Με τη μέθοδο του σταθερού τόκου και χρεολυσίου, ο τόκος, το χρεολύσιο και κατά συνέπεια το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερά. Έστω ότι έχει δανειστεί κάποιος κεφάλαιο C, με επιτόκιο i για n χρονικές περιόδους. Τότε οι δόσεις του δανείου αποτελούν πρόβλημα ράντας σταθερής, πρόσκαιρης, ακεραίας, ληξιπρόθεσμης και άμεσης. Το ποσό C αποτελεί την αρχική αξία της ράντας. Οπότε ισχύει:

$$C = R\frac{1 - U^n}{i}, \text{ όπου } U = \frac{1}{1+i}$$

$$R = \frac{C}{\frac{1 - U^n}{i}} = \frac{C}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = C\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = Ci\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = C\left[i\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n - 1} + \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$\text{Συνεπώς } R = C \cdot i + C\frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad (30)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, είναι φανερό πως: $I = C \cdot i$ και $x = C\frac{i}{(1+i)^n - 1}$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ας υποθέσουμε πως ένας επιχειρηματίας πήρε δάνειο ύψους 100.000 ευρώ, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 5 ετήσιες δόσεις και με επιτόκιο 7%. Να γίνει απόσβεση δανείου και να συνταχθεί ο αντίστοιχος πίνακας με τη μέθοδο σταθερού τόκου και χρεολυσίου.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 100.000, n = 5, i = 7% = 0,07.

Τότε $I = C \cdot i = 100.000 \cdot 0{,}07 = 7.000$

$$x = C\frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100.000\,\frac{0{,}07}{(1+0{,}07)^5 - 1} = 17.389$$

$R = x + I = 17.389 + 7.000 = 24.389$

Για τα υπόλοιπα του δανείου των 5 ετών ισχύουν τα παρακάτω:

$Y_1 = C - x = 100.000 - 17.389 = 82.611$

$Y_2 = Y_1 - x \cdot (1 + i) = 82.611 - 17.389 \cdot 1,07 = 64.004{,}77$

$Y_3 = Y_2 - x \cdot (1 + i)^2 = 64.004{,}77 - 17.389 \cdot (1 + 0{,}07)^2 = 44.096{,}10$

$Y_4 = Y_3 - x \cdot (1 + i)^3 = 44.096{,}10 - 17.389 \cdot (1 + 0{,}07)^3 = 22.793{,}83$

$Y_5 = Y_4 - x \cdot (1 + i)^4 = 22.793{,}83 - 17.389 \cdot (1 + 0{,}07)^4 = 0{,}4 \approx 0$

Αυτή η διαφορά των 0,4 ευρώ οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις που γίνονται στις πράξεις. Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι ο παρακάτω:

n	I	x	R	Y
1	7.000	17.389	24.389	82.611
2	7.000	17.389	24.389	64.004,77
3	7.000	17.389	24.389	44.096,10
4	7.000	17.389	24.389	22.793,83
5	7.000	17.389	24.389	0

Πίνακας 6.4: Εφαρμογή απόσβεσης δανείου με τη μέθοδο σταθερού τόκου και χρεολυσίου

6.2.5. Μέθοδος προοδευτικού χρεολυσίου ή γαλλικό σύστημα

Το προοδευτικό ή γαλλικό σύστημα είναι ένα από τα συχνότερα που εφαρμόζονται σήμερα για την απόσβεση ενιαίων δανείων. Στη συγκεκριμένη μέθοδο το τοκοχρεολύσιο κάθε περιόδου παραμένει σταθερό, χωρίς όμως να παραμένουν σταθερά ο τόκος ή το χρεολύσιο. Ο τόκος που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου υπολογίζεται με βάση το χρέος της προηγούμενης περιόδου. Ενώ τα χρεολύσια αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με λόγο 1 + i. Γι' αυτόν το λόγο η μέθοδος αυτή καλείται μέθοδος του προοδευτικού χρεολυσίου. Έστω ότι δανείζεται κεφάλαιο C για n χρονικές περιόδους και με επιτόκιο i. Οπότε $\mathrm{R_1 = R_2 = \ldots = R_n}$ και $\mathrm{I_n + x_n = I_{n+1} + x_{n+1}}$ που θα πάρει την εξής μορφή:

$$Y_{n-1} \cdot \mathrm{i} + \mathrm{x_n} = Y_n \cdot \mathrm{i} + \mathrm{x_{n+1}}$$

$$\mathrm{x_{n+1}} = (Y_{n-1} - Y_n) \cdot \mathrm{i} + \mathrm{x_n} = \mathrm{x_n} \cdot \mathrm{i} + \mathrm{x_n} = \mathrm{x_n}(1+i)$$

Πράγματι τα χρεολύσια αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με λόγο 1 + i και με βάση την ισότητα $\mathrm{C} = x_1 + \mathrm{x_1}(1+i) + \ldots + \mathrm{x_1}(1+i)^{n-1}$

$$= \mathrm{x_1}\,[1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-1}]$$

$$= \mathrm{x_1}\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Λύνοντας ως προς $\mathrm{x_1}$ προκύπτει $\mathrm{x_1} = \mathrm{C}\,\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ (31). Οι δόσεις του δανείου R αποτελούν πρόβλημα ράντας σταθερής, πρόσκαιρης, ακεραίας, ληξιπρόθεσμης και άμεσης. Για τη ράντα το ποσό C αποτελεί την αρχική της αξία. Ισχύει:

$$C = R\frac{1 - U^n}{i}, \text{ όπου } U = \frac{1}{1+i}$$

Ισχύει $x_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R\frac{1 - U^n}{i}$ ή $x_1[(1+i)^n - 1] = R\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$ και λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση ως προς x_1 έχουμε:

$$x_1 = R\frac{\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}{[(1+i)^n - 1]} = R\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{(1+i)^n - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n[(1+i)^n - 1]} = R\frac{1}{(1+i)^n}$$

Το χρεολύσιο της mης περιόδου είναι:

$x_m = x_1\,(1+i)^{m-1}$ όπου m = 1, 2, …, n

$= R\frac{1}{(1+i)^n}\,(1+i)^{m-1}$

$= R\,(1+i)^{m-n-1}$

Παράδειγμα:

Έστω ότι επιχειρηματίας παίρνει δάνειο ύψους 100.000 ευρώ, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 5 ετήσιες δόσεις και με επιτόκιο 7,5%. Να γίνει απόσβεση του δανείου και να συνταχθεί ο αντίστοιχος πίνακας με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 100.000, n = 5, i = 7,5% = 0,075.

Οπότε:

$$R = \frac{C \cdot i}{1 - U^n} = \frac{C \cdot i}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n} = \frac{100.000 \cdot 0{,}075}{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}075}\right)^5} = \frac{7500}{0{,}30344} = 24.716{,}58$$

Για το 1ο έτος:

$I_1 = C \cdot i = 100.000 \cdot 0{,}075 = 7.500$

$x_1 = R - I_1 = 24.716{,}58 – 7.500 = 17.216{,}58$

$Y_1 = C - x_1 = 100.000 – 17.216{,}58 = 82.783{,}42$

Για το 2ο έτος:

$I_2 = Y_1 \cdot i = 82.783{,}42 \cdot 0{,}075 = 6.208{,}76$

$x_2 = R - I_2 = 24.716{,}58 – 6.208{,}76 = 18.507{,}82$

$Y_2 = Y_1$ - x_2 = 82.783,42 - 18.507,82 = 64.275,60

Για το 3ο έτος:

$I_3 = Y_2 \cdot i$ = 64.275,60 · 0,075 = 4.820,67

x_3 = R - I_3 = 24.716,58 - 4.820,67 = 19.895,91

$Y_3 = Y_2$ - x_3 = 64.275,60 - 19.895,91 = 44.379,69

Για το 4ο έτος:

$I_4 = Y_3 \cdot i$ = 44.379,69 · 0,075 = 3.328,48

x_4 = R - I_4 = 24.716,58 – 3.328,48 = 21.388,10

$Y_4 = Y_3$ - x_4 = 44.379,69 – 21.388,10 = 22.991,59

Για το 5ο έτος:

$I_5 = Y_4 \cdot i$ = 22.991,59 · 0,075 = 1.724,37

x_5 = R - I_5 24.716,58 – 1.724,37 = 22.992,21

$Y_5 = Y_4$ - x_5 = 22.991,59 – 22.992,21 = - 0,62 ≈ 0

Αυτή η διαφορά των 0,62 ευρώ οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις που γίνονται στις πράξεις. Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι ο παρακάτω:

n	I	x	R	Y
1	7.500	17.216,58	24.716,58	82.783,42
2	6.208,76	18.507,82	24.716,58	64.275,60
3	4.820,67	19.895,91	24.716,58	44.379,69
4	3.328.48	21.388,10	24.716,58	22.991,59
5	1.724,37	22.992,21	24.716,58	0

Πίνακας 6.5: Εφαρμογή απόσβεσης δανείου με τη μέθοδο προοδευτικού χρεολυσίου

6.2.6. Αμερικάνικη μέθοδος

Έστω ότι δανείζεται ένα κεφάλαιο C με επιτόκιο i για n χρονικές περιόδους. Με την αμερικάνικη μέθοδο το δάνειο εξοφλείται κατά τη λήξη του δίχως να πληρώνονται οι τόκοι των ενδιάμεσων περιόδων. Ο οφειλέτης στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου καταθέτει το ποσό R. Οι δόσεις αποτελούν πρόβλημα ληξιπρόθεσμης ράντας. Είναι γνωστό πως η τελική αξία S δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$S = R\frac{(1+i_1)^n - 1}{i_1}$$

Όμως ισχύει και η σχέση:

$$S = C(1+i)^n$$

Συνεπώς:

$$R\frac{(1+i_1)^n - 1}{i_1} = C(1+i)^n$$

Από τη παραπάνω ισότητα προκύπτει:

$$R = \frac{C \cdot i_1}{(1+i_1)^n - 1} \cdot (1+i)^n \qquad (32)$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Ας υποθέσουμε πως κάποιος παίρνει ένα δάνειο ύψους 20.000 ευρώ για 4 έτη και με επιτόκιο 6%. Η απόσβεση του δανείου πραγματοποιείται με το αμερικάνικο σύστημα και με επιτόκιο σύστασης εξοφλητικού αποθέματος 4%. Να βρεθεί το ύψος της δόσης του δανείου.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 20.000, n = 4, i = 6% = 0,06, i_1 = 4% = 0,04

$$R = \frac{C \cdot i_1}{(1+i_1)^n - 1} \cdot (1+i)^n$$

$$= \frac{20.000 \cdot 0{,}04}{(1+0{,}04)^4 - 1} \cdot (1+0{,}06)^4$$

$$= \frac{800}{0{,}17} \cdot 1{,}26$$

= 5.929,41 ευρώ είναι η δόση του δανείου.

6.2.7. Δάνεια κτηματικής πίστης

Δάνεια κτηματικής πίστης καλούνται τα μακροπρόθεσμα ενιαία δάνεια τα οποία χορηγούνται κυρίως σε φυσικά πρόσωπα. Προϋπόθεση χορήγησης του δανείου είναι η υποθήκευση ενός ακινήτου ίσης ή μεγαλύτερης αξίας του ποσού που δανείζεται. Παλαιότερα τα συγκεκριμένα δάνεια τα χορηγούσαν το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων, το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο, η Στεγαστική Τράπεζα και η Κτηματική Τράπεζα, η οποία έχει πλέον ενσωματωθεί με την

Εθνική Τράπεζα. Σήμερα όλες οι εμπορικές τράπεζες χορηγούν δάνεια κτηματικής πίστης. Γνωστά είναι τα στεγαστικά δάνεια, τα οποία χορηγούνται σε δημοσίους υπαλλήλους ή σε άλλους εργαζομένους, ασφαλισμένους σε ταμεία, όπως το ΙΚΑ, και είναι πολλές φορές επιδοτούμενα από τον ασφαλιστικό τομέα ή από το Ελληνικό Δημόσιο.

Τα δάνεια κτηματικής πίστης χορηγούνται πλέον με χαμηλά επιτόκια και με κυμαινόμενο επιτόκιο ή σταθερό για κάποιο χρονικό διάστημα και έπειτα κυμαινόμενο. Σύμφωνα με το άρθρο «Περισσότερες διευκολύνσεις, λιγότερα δάνεια» της εφημερίδας Καθημερινή, σήμερα οι αιτήσεις για στεγαστικά δάνεια εμφανίζονται μειωμένες κατά 50% έναντι του Δεκεμβρίου του 2009, όταν ήδη είχε κάνει την εμφάνισή της η οικονομική κρίση. Η πλειονότητα των τραπεζών συνεχίζει την πολιτική των αυστηρότερων κριτηρίων χορήγησης δανείων, η οποία ξεκίνησε από τα τέλη του 2008, σε μια προσπάθεια να περιορίσουν το ρυθμό αύξησης των επισφαλειών. Πλέον, οι τράπεζες μοιάζουν να επικεντρώνονται περισσότερο στη διαχείριση του υφιστάμενου χαρτοφυλακίου δανείων τους, όπως προκύπτει από την κίνηση πέντε τραπεζών και προχωρούν σε κινήσεις για τη διευκόλυνση των δανειοληπτών στην κάλυψη των υποχρεώσεών τους. Για παράδειγμα, η Εθνική Τράπεζα, απευθυνόμενη σε συνταξιούχους και δημοσίους υπαλλήλους, ανακοίνωσε τη δυνατότητα επιμήκυνσης της διάρκειας αποπληρωμής έως και 12 επιπλέον χρόνια, με τη μέγιστη διάρκεια να διαμορφώνεται στα 40 έτη. Η Eurobank ανακοίνωσε μια σειρά προγραμμάτων διευκόλυνσης εξατομικευμένου χαρακτήρα, τα οποία έχουν ήδη εκμεταλλευτεί πάνω από 57.700 δανειολήπτες. Μεταξύ άλλων οι κάτοχοι στεγαστικού δανείου μπορούν να αυξήσουν τη χρονική διάρκεια έως και 10 έτη με μέγιστη διάρκεια τα 40 έτη. Επίσης η Τράπεζα Πειραιώς έχει ήδη θέσει σε εφαρμογή μέτρα ελάφρυνσης των δανειοληπτών, τα οποία όμως αφορούν μόνο δημοσίους υπαλλήλους. Μπορούν να μειώσουν τη μηνιαία δόση τους στο μισό για διάστημα έως και 3 χρόνια, με αντίστοιχη επιμήκυνση της διάρκειας του δανείου.

Η εξόφληση των δανείων γίνεται κυρίως με το προοδευτικό σύστημα απόσβεσης ενιαίων δανείων. Οι δόσεις καταβάλλονται συνήθως κάθε εξάμηνο ή μήνα. Οι τοκοχρεολυτικές δόσεις, καθώς και τα υπόλοιπα στοιχεία για την απόσβεση του δανείου δίνονται από τις εξισώσεις που αναπτύξαμε στη μέθοδο προοδευτικού χρεολυσίου, δηλαδή:

$$R = C\frac{i}{1-U^n}$$

Για τον υπολογισμό του υπολοίπου του δανείου μετά την παρέλευση r περιόδων ισχύει:

$\mathrm{Y_r} = \mathrm{C} - (x_1 + x_2 + \ldots + x_r)$

$$= \mathrm{C} - \left(\frac{R}{(1+i)^n} + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{n-(r-1)}}\right)$$

$$= \mathrm{C} - \left(R(1+i)^{-n} + R(1+i)^{1-n} + \ldots + R(1+i)^{r-n-1}\right)$$

$$= \mathrm{C} - R(1+i)^{-n}[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{r-1}]$$

$$= \mathrm{C} - \mathrm{C}\frac{i}{1-U^n}(1+i)^{-n}\frac{(1+i)^r - 1}{i}$$

$$= \mathrm{C} - \mathrm{C}\frac{1}{\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}}(1+i)^{-n}\frac{(1+i)^r - 1}{i}$$

$$= \mathrm{C} - \mathrm{C}\frac{(1+i)^{-n}\cdot i}{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}} \cdot \frac{(1+i)^r - 1}{i}$$

$$= \mathrm{C} - \mathrm{C}\frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^r - 1}{i} \qquad (33)$$

Στην περίπτωση που οι δόσεις καταβάλλονται κάθε εξάμηνο, θέτουμε στη θέση του i το $\frac{i}{2}$ και στη θέση του n το 2n, όσον αφορά τις εξισώσεις υπολογισμού του δανείου. Ενώ στην περίπτωση που οι δόσεις καταβάλλονται κάθε μήνα, θέτουμε στη θέση του i το $\frac{i}{12}$ και στη θέση του n το 12n.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι δανείζεται κάποιος 100.000 ευρώ από το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 6,5%. Εάν το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί σε 20 έτη με ισόποσες εξαμηνιαίες τοκοχρεολυτικές δόσεις, οι οποίες καταβάλλονται στο τέλος του κάθε εξαμήνου, να υπολογιστεί το τοκοχρεολύσιο και το ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά από 16 έτη και 6 μήνες.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 100.000, i = 6,5% = 0,065, $\frac{i}{2}$ = 0,0325, n = 20, 2n = 40, r = 2 · 16,5 = 33

Η κάθε δόση είναι R = $\mathrm{C}\frac{i}{1-U^n} = \mathrm{C}\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$ και από τη στιγμή που είναι εξαμηνιαίες οι δόσεις διαμορφώνεται ο παραπάνω τύπος ως εξής:

$$R = \mathrm{C}\frac{\frac{i}{2}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}}} = 100.000\frac{0{,}0325}{1-\frac{1}{(1+0{,}0325)^{40}}} = 100.000 \cdot 0{,}0450263 = 4.502{,}63$$

ευρώ είναι η τοκοχρεολυτική εξαμηνιαία δόση του δανείου.

Το ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά από 33 εξάμηνα θα είναι:

$$Y_{33} = C - C\frac{\frac{i}{2}}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n} - 1} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{r} - 1}{\frac{i}{2}} = 100.000 - 100.000\frac{0{,}0325}{(1+0{,}0325)^{40} - 1} \cdot \frac{(1+0{,}0325)^{33} - 1}{0{,}0325} = 100.000 - 100.000 \cdot 0{,}01253 \cdot 57{,}638 = 27.779{,}59$$

ευρώ είναι το υπόλοιπο της οφειλής μετά από 33 εξάμηνα.

6.2.8. Ομολογιακά δάνεια

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο διαθέτονται σε περισσότερα από ένα πρόσωπα. Διαιρούνται σε μικρότερα ποσά τα οποία καλούνται ομολογίες, τις εκδίδει ο δανειζόμενος και τις διαθέτει στους δανειστές του. Η ομολογία είναι ένας πιστωτικός τίτλος με τον οποίο ο δανειζόμενος υπόσχεται να πληρώσει το αναγραφόμενο ποσό. Σε κάθε ομολογία γίνεται αναγραφή του χρηματικού ποσού του ομολογιακού δανείου, του επιτοκίου, του χρόνου και του τρόπου πληρωμής των τόκων και διάφορα άλλα στοιχεία.

Ο τρόπος με τον οποίο εκδίδεται μια ομολογία καθορίζει και τη φύση της. Υφίστανται οι παρακάτω:

- Ονομαστικές

Οι ομολογίες στις οποίες αναγράφεται το όνομα του ομολογιούχου και ο χρόνος πληρωμής. Παρέχουν στον κάτοχο πλήρη ασφάλεια αλλά δεν είναι εύκολη η μεταβίβασή τους, αφού αυτό προϋποθέτει αλλαγή ονοματεπωνύμου στον πιστωτικό τίτλο καθώς και στο μητρώο ομολογιών.

- Στον κομιστή

Οι ομολογίες οι οποίες είναι ανώνυμες και ανήκουν σε εκείνον που τις κατέχει. Οι τόκοι τους πληρώνονται με τοκομερίδια, δηλαδή με έντυπα αποδείξεων που είναι ίσα με τις χρονικές περιόδους καταβολής των τόκων. Μεταβιβάζονται εύκολα αλλά δεν παρέχουν ασφάλεια στον ομολογιούχο. Βέβαια είναι οι πλέον συνηθισμένες ομολογίες στην πράξη.

- Μικτές

Οι ομολογίες στις οποίες αναγράφεται το όνομα του ομολογιούχου και έχουν τοκομερίδια. Τα τοκομερίδια όμως δε φέρουν το όνομα του ομολογιούχου, έχοντας ως αποτέλεσμα η είσπραξή τους να πραγματοποιηθεί από οποιονδήποτε.

Στη συνέχεια γίνεται αναφορά σε βασικές έννοιες των ομολογιακών δανείων:

Ονομαστική αξία ομολογίας καλείται το χρηματικό ποσό το οποίο αναγράφεται στην ομολογία.

Τιμή έκδοσης ομολογίας καλείται το χρηματικό ποσό όπου πωλείται η ομολογία. Εάν η τιμή έκδοσης της ομολογίας είναι ίση με την ονομαστική αξία, τότε το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε στο άρτιο. Εάν η τιμή έκδοσης της ομολογίας είναι μεγαλύτερη από την ονομαστική αξία, τότε το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε υπέρ το άρτιο. Εάν η τιμή έκδοσης της ομολογίας είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία, τότε το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε υπό το άρτιο.

Τιμή εξόφλησης ομολογίας καλείται το χρηματικό ποσό όπου εξοφλείται η ομολογία κατά τη λήξη της.

Η απόσβεση των ομολογιακών δανείων γίνεται συνήθως με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Παρακάτω δίνονται οι συμβολισμοί των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν:

C: Ποσό ομολογιακού δανείου

K: Ονομαστική αξία ομολογίας

n: Διάρκεια ομολογιακού δανείου

i: Επιτόκιο ομολογιακού δανείου

N: Αριθμός ομολογιών

Ο αριθμός των ομολογιών δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{K}}$$

Το τοκοχρεολύσιο, το οποίο είναι σταθερό και στις n περιόδους, όπως έχει ήδη αναφερθεί δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\mathrm{R} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{U}^{\mathrm{n}}} \quad \text{ή} \quad \mathrm{R} = \mathrm{K} \cdot N\,\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{U}^{\mathrm{n}}}$$

Επίσης είναι γνωστοί οι τύποι υπολογισμού των χρεολυσίων:

$$x_1 = C\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} \text{ και } x_n = x_1\,(1+i)^{n-1}$$

Στα ομολογιακά δάνεια ισχύει $x_n = N_n \cdot K$, με n = 1, 2, …, n και οι παραπάνω τύποι διαμορφώνεται ως εξής:

$$N_1 \cdot K = N \cdot K\,\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$N_1 = N\,\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

και

$$x_n = x_1\,(1+i)^{n-1}$$

$$N_n \cdot K = N_1 \cdot K(1+i)^{n-1}$$

$$N_n = N_1(1+i)^{n-1}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι ένας οργανισμός συνάπτει ομολογιακό δάνειο ύψους 1.000.000 ευρώ με ομολογίες ονομαστικής αξίας 20 ευρώ. Εάν το επιτόκιο είναι 6%, η εξόφληση του ομολογιακού δανείου γίνει σε 4 έτη με ετήσιες κληρώσεις στο άρτιο και η απόσβεση τοκοχρεολυτικώς με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου, να βρεθούν: ο αριθμός των ομολογιών, το τοκοχρεολύσιο και ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος της 1ης, 2ης, 3ης, και 4ης χρονιάς.

Έχουμε ως δεδομένα: C = 1.000.000, K = 20, i = 6%, n = 4

Ο αριθμός των ομολογιών είναι ίσος με:

$N = \frac{C}{K} = \frac{1.000.000}{20} = 50.000$ ομολογίες

Το τοκοχρεολύσιο είναι ίσο με:

$$R = C\frac{i}{1 - U^n}$$

$$= C\frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$$

$$= 1.000.000\frac{0{,}06}{1 - \frac{1}{(1+0{,}06)^4}} = 1.000.000 \cdot 0{,}28859149 = 288.591{,}49 \text{ ευρώ}$$

Ο αριθμός των ομολογιών στο τέλος της κάθε χρονιάς είναι:

$N_1 = \text{N} \frac{\text{i}}{(1+\text{i})^{\text{n}} - 1} = 50.000\frac{0,06}{(1+0,06)^4 - 1} = 50.000 \cdot 0,22859 = 11.430$ ομολογίες

$\text{N}_2 = \text{N}_1(1 + \text{i})^{n-1} = 11.430(1 + 0,06) = 12.116$ ομολογίες

$\text{N}_3 = \text{N}_1(1 + \text{i})^{\text{n}-1} = 11.430(1 + 0,06)^2 = 12.843$ ομολογίες

$\text{N}_4 = \text{N}_1(1 + \text{i})^{\text{n}-1} = 11.430(1 + 0,06)^3 = 13.613$ ομολογίες.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η αναφορά στις ακολουθίες ήταν εκτενής και σε συνδυασμό με τα παραδείγματα που εδόθησαν συνέβαλαν στην εμπέδωση της θεωρίας των ακολουθιών και συνάμα των οικονομικών εφαρμογών τους, τόσο των βραχυπρόθεσμων όσο και των μακροπρόθεσμων.

Η οικονομία έχει δημιουργηθεί από τις καθημερινές συναλλαγές των εταιριών και των φυσικών προσώπων. Η καθημερινή ζωή κατά κάποιον τρόπο έχει θέσει τις βάσεις της στην οικονομία. Οι ανάγκες του συνόλου κρίνουν επιτακτικά λύσεις.

Η ύπαρξη των ακολουθιών βιώνεται από το σύνολο των ανθρώπων, όχι τόσο από τη γνώση της θεωρίας αλλά από την καθημερινή τους χρήση και εφαρμογή από τον κάθε ένα άνθρωπο που τις καθιστά ως ένα δεδομένο εργαλείο για τις εμπορικές και γενικότερα οικονομικές του συναλλαγές με τους συνανθρώπους του και με το ευρύτερο κοινωνικό σύνολο. Πολλές είναι οι συναλλαγές που κρύβουν από πίσω τους τη θεωρία των ακολουθιών.

Παλαιότερα δεν ήταν τόσο καθημερινό φαινόμενο μια επιχείρηση να συνάπτει οικονομικές σχέσεις με την τράπεζα για την κάλυψη των αναγκών της, τόσο στις σχέσεις με τους πελάτες της όσο και με τους υπαλλήλους της. Σήμερα η κάθε εταιρία μετά από τον οικονομικό της προγραμματισμό μαθαίνει και αξιολογεί τις ανάγκες που έχει, οδηγώντας την ίδια την εταιρία στην χρήση τραπεζικών υπηρεσιών και κατ’ επέκταση στην εφαρμογή των ακολουθιών, χρίζοντας επιτακτική και αναγκαία μια τέτοια πράξη για την περαιτέρω επιβίωση και εξέλιξη της επιχείρησης.

Ο Benjamin Franklin από την Αμερική, ένας από τους θεμελιωτές του έθνους του, γνωστός πολιτικός, διπλωμάτης, επιστήμονας και εφευρέτης φέρεται να συμβούλεψε ένα νεαρό έμπορο το 1748 λέγοντάς του: ≪ Να θυμάσαι ότι τα χρήματα είναι γόνιμης, παραγωγικής φύσεως. Τα χρήματα μπορούν να γεννήσουν χρήματα και ο απόγονός τους μπορεί να γεννήσει περισσότερα και ούτω καθεξής ≫. [**13**] Θεωρώ πως είναι μια απόλυτα επιτυχημένη έκφραση η οποία συνάδει στις οικονομικές εφαρμογές των ακολουθιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Ζαγούρας Χ., Γεωργίου Δ. (2003), Γενικά Μαθηματικά 1, Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

[2] Πέκος Γ. (2006), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομικές Επιστήμες, Ζ' Έκδοση, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΥΓΟΣ.

[3] Βόσκογλου Μ. (2004), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, 2η Έκδοση, Αθήνα: ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ.

[4] Κιόχος Π., Κιόχος Α. (2003), Οικονομικά Μαθηματικά, 2η Έκδοση, Αθήνα: Εκδόσεις INTERBOOKS.

[5] Κούγιας Γ., Γεωργίου Δ. (2004), Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, Αθήνα: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ.

[6] Φράγκος Χ. (2007), Οικονομικά Μαθηματικά, 2η Έκδοση, Αθήνα: Εκδόσεις ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ.

[7] Σόρμας Α., Σαριαννίδης Ν. (2010), Οικονομικά Μαθηματικά, Κοζάνη: Εκδόσεις ΣΑΡΙΑΝΝΙΔΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ.

[8] Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (1998), Άλγεβρα, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

[9] Αποστολόπουλος Θ. (2003), Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών, Αθήνα: ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΕΠΕ.

[10] Groppelli A., Nikbakht E. (1996), Χρηματοοικονομική, 3η Έκδοση, Αθήνα: Εκδόσεις ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ.

[11] Kunihiko Kodaira (1997), Mathematics 2 Japanese Grade 11, U.S.A.: University of Chicago School Mathematics Project.

[12] Clarence Gilbert Hoag (2009), A Theory of Interest, U.S.A: BiblioLife.

[13] Pamela Peterson Drake, Frank J. Fabozzi (2009), Foundations and Applications of the Time Value of Money, Canada: John Wiley & Sons

[14] Καθημερινή, Περισσότερες διευκολύνσεις λιγότερα δάνεια, Online,

http://portal.kathimerini.gr/4dcgi/_w_articles_kathextra_1_31/05/2010_340295