ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ MATHEMATICA

ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ: ΓΕΡΑΚΑΡΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΤΣΑΓΔΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2010

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

ΣΕΛ

Εισαγωγή στη *Mathematica*

Η *Mathematica* είναι ένα αλγεβρικό υπολογιστικό σύστημα το οποίο εκτελεί αριθμητικούς, συμβολικούς και γραφικούς υπολογισμούς. Η ειδοποιός διαφορά της από τις κοινές γλώσσες προγραμματισμού και τα συναφή προγράμματα έγκειται στο ότι εκτελεί όχι μόνο αριθμητικούς αλλά και πολύπλοκους αλγεβρικούς υπολογισμούς. Πρόκειται για μια διαφορά ισοδύναμη με τη διαφορά ανάμεσα στην Αριθμητική και την Άλγεβρα. Η διαφορά αυτή δεν είναι μόνον πρακτική, ότι δηλαδή η *Mathematica* κάνει πέρα από αριθμητικούς υπολογισμούς και συμβολικούς υπολογισμούς. Είναι και μια διαφορά διανοητικού περιβάλλοντος γιατί η *Mathematica* είναι ένα πρόγραμμα υψηλής περιεκτικότητας σε αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και γι' αυτό κομψότερο στην εσωτερική δομή και τον τρόπο λειτουργίας του απ' ότι τα κοινά προγράμματα καθαρά αριθμητικών υπολογισμών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι άνθρωποι της Wolfram Research, Inc. που την ανέπτυξαν, η *Mathematica* είναι ''ένα σύστημα για να κάνει κανείς μαθηματικά με τον υπολογιστή''. Δεν είναι όμως σαν πρόγραμμα αριθμητικών και συμβολικών υπολογισμών ένας απλός εκτελεστής προαποφασισμένων καθηκόντων

– έστω μιας πελώριας ποικιλίας τέτοιων καθηκόντων – αλλά μια πλήρης γλώσσα προγραμματισμού. Έτσι οι δυνατότητες που παρέχει στο χρήστη είναι πραγματικά ανεξάντλητες. Η *Mathematica* είναι διαφορετική από άλλες γλώσσες προγραμματισμού (FORTRAN, BASIC, Pascal, C, …). Είναι μια interpreted γλώσσα, δηλ. κάθε εντολή στην είσοδο παράγει άμεσα έξοδο. Όμως, αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια γλώσσα προγραμματισμού, η υψηλού επιπέδου δομή της είναι πιο κατάλληλη για εκτέλεση εξεζητημένων – πολύπλοκων πράξεων μέσω της χρήσης 'ενσωματωμένων' (built-in) συναρτήσεων. Και ο αριθμός των built-in συναρτήσεων στη *Mathematica* είναι πελώριος.

- Η *Mathematica* αποτελείται από δύο μέρη:

Το *front end* της *Mathematica* δέχεται εισερχόμενα, εμφανίζει εξερχόμενα και γενικά οργανώνει την πληροφορία σε μια 'συνεδρία' (session) της *Mathematica*. Ο πυρήνας (*kernel*) είναι το τμήμα του προγράμματος που κάνει τους υπολογισμούς. Η *Mathematica* είναι ένα modular λογισμικό σύστημα στο οποίο ο *πυρήνας* που στην πραγματικότητα εκτελεί τους υπολογισμούς είναι ξέχωρα από το *front end* που χειρίζεται την αλληλεπίδραση με το χρήστη. Ο πλέον συνήθης τύπος του front end για τη *Mathematica* βασίζεται σε αλληλεπιδραστικά 'έγγραφα' (documents) γνωστών ως *notebooks*. Τα notebooks αναμιγνύουν στην είσοδο και έξοδο της *Mathematica* 'κείμενο' (text), 'γραφικά' (graphics), 'παλέτες' (palettes) και άλλο υλικό. Μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί notebooks είτε για να κάνει τρέχοντες υπολογισμούς, ή ως μέσα για την παρουσίαση ή έκδοση των αποτελεσμάτων του. Το front end ενός notebook περιλαμβάνει πολλά 'μενού' (menus) και εργαλεία γραφικών για τη δημιουργία και ανάγνωση 'notebook εγγράφων' (notebook documents) και για την αποστολή και λήξη υλικού από τον 'πυρήνα της *Mathematica*

- Κάνοντας Αριθμητική με τη *Mathematica*

Στο πλέον πρωταρχικό επίπεδο, η *Mathematica* μπορεί να ειδωθεί ως ένας 'απλός υπολογιστής' (calculator). Μπορεί να εκτελέσει τις πέντε βασικές πράξεις τις αριθμητικής: πρόσθεση (+), αφαίρεση (–), πολλαπλασιασμό (*, ή κενό διάστημα), διαίρεση (/) και ύψωση σε δύναμη (^).

Οι **In** και **Out '**ετικέτες' (tags)

Ξεκινώντας το πρόγραμμα εμφανίζεται επί της οθόνης το σήμα της *Mathematica* και αμέσως μετά μια λωρίδα (στο πάνω μέρος της οθόνης) με το γενικό μενού του προγράμματος, μια παλέτα για εύκολη εισαγωγή συμβόλων και το *φύλλο εργασίας* ενός *αρχείου* υπό τον τίτλο Untitled-1 που αργότερα θα μας ζητηθεί να του δώσουμε ένα όνομα (εφόσον το θέλουμε).

Η *Mathematica* ιχνηλατεί κάθε εισαγόμενη έκφραση που στέλνεται στον 'πυρήνα' και κάθε εξαγόμενο που παράγει σε μια συνεδρία. Αυτή η καταστιχογράφηση των 'εντολών' (statements) εμφανίζεται στο front end με τη χρήση των **In** και **Out** ετικετών. Για να προσθέσουμε το 14 στο 7, πληκτρολογούμε την παράσταση 7 + 14 και εν συνεχεία με Shift+Enter εμφανίζεται το αποτέλεσμα στην οθόνη του υπολογιστή ως ακολούθως:

In[1]:= 5+3

Out[1]= 8

Να σημειώσουμε ότι οι ετικέτες (με μπλε χρώμα) **In[1]!** και **Out[1]=**, που το front end έχει επισυνάψει, δηλώνουν την 'είσοδο' (Input) και την 'έξοδο' (Output), από τον πυρήνα, του υπολογισμού που ζητήσαμε και τυπώνονται αυτόματα από το ίδιο το πρόγραμμα με αύξοντα αριθμό προσδιορίζοντας έτσι τη σειρά εκτέλεσης της αντίστοιχης πράξης στη διάρκεια της συγκεκριμένης συνεδρίας. Αυτό είναι το σειριακό σχήμα ιχνηλάτησης των εισόδων και εξόδων από και προς τον πυρήνα.

Για να πολλαπλασιάσουμε το 15 με το 104.7, πληκτρολογούμε 15*104.7 ή 15 104.7 (κενό σε μια έκφραση εκλαμβάνεται ως πολλαπλασιασμός) και Shift+Enter

In[2]:= 13*203.8

Out[2]= 2649.4

Επειδή αυτό ήταν η δεύτερη είσοδος στον πυρήνα (σ' αυτήν τη συνεδρία) επισυνάφτηκε η ετικέτα **In[2]!** και στην έξοδό της η **Out[2]=**. Όπως είπαμε, ο πυρήνας της *Mathematica* κρατάει αρχείο όλων των εντολών εισόδου και εξόδου σε μια συνεδρία της *Mathematica* (μια συνεδρία ορίζεται ως το διάστημα εργασίας από την ''είσοδό'' μας στον πυρήνα της *Mathematica* έως την αποχώρηση). Είναι δυνατό να αναφερόμαστε σε μια 'εισαγόμενη εντολή' (input statement) ως **In[k]** ή σε μια 'εξαγόμενη εντολή' (output statement) ως **Out[k]**, όπου **k** είναι ένας θετικός ακέραιος που αναφέρεται στην kη εντολή σε μια συνεδρία της *Mathematica*. **In** και **Out** είναι, στην πραγματικότητα, συναρτήσεις της *Mathematica* που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εισαγόμενες εκφράσεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να ζητήσουμε από τη *Mathematica* να εκτελέσει τη δεύτερη εισαχθείσα εντολή ξανά

In[3]:= In[2]

Out[3]= 2649

Να σημειώσουμε ότι η δεύτερη είσοδος καθοδήγησε τη *Mathematica* να πολλαπλασιάσει

το 15 με το 104.7. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τα δύο προηγούμενα εξαγόμενα

In[4]:= Out[1]+Out[2]

Out[4]= 2657.4

Το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο με το 21 + 1570.5. Μπορούμε να αναφερόμαστε στη kη προηγούμενη έξοδο (εξαγχθείσα εντολή) ή είσοδο (εισαχθείσα εντολή) ως **Out[-k]** ή **In[- k]** αντίστοιχα. Μια συντομογραφία της **Out[-1]** είναι **%**, και της **Out[-2]** είναι **%%**. Επίσης **%k** είναι μια συντομογραφία της **Out[k]**. Για παράδειγμα, έχουμε την παρακάτω ακολουθία εντολών της *Mathematica*

In[5]:= 3-4

Out[5]:= -1

Πολλαπλασίασε με 7 το τελευταίο αποτέλεσμα, δηλ. 7*(-3)

In[6]:= 5*%

Out[6]= -5

Πολλαπλασίασε με 8 το τελευταίο αποτέλεσμα, δηλ. 8*(-21)

In[7]:= 6*%

Out[7]= -30

Δώσε το τρίτο κατά σειρά προηγούμενο αποτέλεσμα, δηλ. –3

In[8]:= In[-3]

Out[8]= -1

Για τη διόρθωση ενός λάθους τα πράγματα είναι εύκολα. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να διορθώσουμε το 2 σε 3 στον αριθμό 6529 αφού φέρουμε τον δείκτη στη θέση μεταξύ 2 και 9, πατάμε το σχετικό πλήκτρο του ποντικιού (απλό αριστερό κλικ), οπότε εμφανίζεται η γνωστή αναβοσβήνουσα γραμμή – ο λεγόμενος ‘δρομέας’ (cursor) – η οποία συνόδευε, όπως θα παρατηρήσατε, τη διαδικασία πληκτρολόγησης. Για να σβήσουμε το 2 πατάμε το πλήκτρο □ (backspace) οπότε σβήνεται το 2και αντικαθίσταται μετά με το ψηφίο που θέλουμε, απλά πληκτρολογώντας 3.

Να τονίσουμε τέλος ότι γενικά κενά διαστήματα (blank spaces) αγνοούνται από τη *Mathematica* εκτός αν αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, 4 + 5 αντιμετωπίζεται το ίδιο με 4+5.

- Αριθμοί, σύμβολα και ανάθεση

Η *Mathematica* κάνει αριθμητική διαφορετικά απ' ότι οι παραδοσιακοί calculators. Κάνει τους υπολογισμούς της χρησιμοποιώντας αριθμητική ρητών. Αυτό επιτρέπει ορισμένοι τύποι υπολογισμών να εκτελούνται με άπειρη ακρίβεια. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός μιας έκφρασης όπως της (4 + 1)/3 σ' έναν calculator θα είχε ως αποτέλεσμα τη δεκαδική προσέγγιση 1.666666666 και όχι την ακριβή απάντηση 5/3. Η *Mathematica* μεταχειρίζεται το 5/3 ως ένα σύμβολο στο αριθμητικό σύστημα των ρητών και δεν το προσεγγίζει με το δεκαδικό του ανάπτυγμα.

Για να αναθέτουμε εκφράσεις της *Mathematica* σε σύμβολα ορισμένα από το χρήστη, χρησιμοποιούμε τον τελεστή **Set** (=), ή τον τελεστή **SetDelayed** (:=). Αυτοί οι δυο τελεστές διαφέρουν ως προς τον τρόπο που γίνεται η ανάθεση. Θα εξετάσουμε τις διαφορές μεταξύ των δύο 'πράξεων' (operations) αφού μάθουμε πως να χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Set**.

Ας αναθέσουμε το σύμβολο u στο – 3 και το σύμβολο v στο (1 – 9)π

In[10]:= u=-3

Out[10]:=-3

In[11]:= v=(1-9)*Pi

Out[11]:=-8Pi

Οι παρενθέσεις στις εκφράσεις (εισόδου και εξόδου) της *Mathematica* χρησιμοποιούνται ως αλγεβρικοί deliminators. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τα u και v σε άλλες εκφράσεις της *Mathematica*. Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε 3u – 5v και ας αναθέσουμε την τιμή του στο σύμβολο w

In[12]:= w=3*u-5*v

Out[12]:= -9+40Pi

Μπορούμε πάντα να ρωτάμε τη *Mathematica* ποια έκφραση ανατεθεί σ' ένα σύμβολο εισάγοντας το σύμβολο. Ας ζητήσουμε πληροφορία για την ανάθεση στο v

In[13]:= v

Out[13]= -8Pi

Για να άρουμε μια ανάθεση σ’ ένα σύμβολο, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Clear**

In[14]:= Clear[v]

Ας ρωτήσουμε τώρα ποια έκφραση επί του παρόντος έχει ανατεθεί στο σύμβολο v

In[15]:= v

Out[15]= v

Όταν το *Mathematica* επιστρέφει το όνομα του συμβόλου, δηλώνει ότι οποιαδήποτε εκχώρηση σ’ αυτό το σύμβολο δεν μπορεί να πάρει τιμή ή σε αυτή τη περίπτωση καμία έκφραση δεν έχει εκχωρηθεί στο v. Μια εναλλακτική μέθοδος για να διαγράψουμε μια ανάθεση από ένα σύμβολο είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή **Unset**. Για παράδειγμα για να διαγράψουμε οποιαδήποτε ανάθεση από το σύμβολο v χρησιμοποιούμε την ακόλουθη έκφραση:

In[16]:= v =.

Σε οποιαδήποτε ανάθεση από τα παραπάνω σύμβολα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή **SetDelayed(:=)** αντί για τον τελεστή **Set(=).**

- Συναρτήσεις

Η *Mathematica* έχει μια εντυπωσιακή λίστα από ενσωματωμένες συναρτήσεις. Επιτρέπει επίσης στους χρήστες να ορίζουν τις δικές τους συναρτήσεις.Οι ενσωματωμένες συναρτήσεις της *Mathematica* έχουν ονόματα παρόμοια με το συνηθισμένο μαθηματικό σύστημα συμβόλων και χαρακτήρων. Όλες οι ενσωματωμένες συναρτήσεις της *Mathematica* ξεκινούν με κεφαλαίο γράμμα και τα ορίσματα τους περικλείονται σε αγκύλες. Για παράδειγμα η συνάρτηση ημιτόνου, sinx, συμβολίζεται ως **Sin[x]** στη *Mathematica*. Πιο κάτω υπάρχει ένας πίνακας με τις πιο συνηθισμένες στη χρήση συναρτήσεις:

Abs[x]	απόλυτη τιμή, □x□
Sqrt[x]	τετραγωνική ρίζα ,◊x
Exp[x]	εκθετική συνάρτηση,‰χ
Log[x]	φυσικός λογάριθμος ,lnx
Log[a,x]	λογάριθμος με βάση α, logax
Sin[x],Cos[x],Tan[x]…	τριγωνομετρικές συναρτήσεις με ορίσματα ακτίνια
ArcSin[x],ArcCos[x],…	αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
Factorial[n] (n!	παραγοντική συνάρτηση

Random []	σταθερός ψευδοτυχαίος αριθμός μεταξύ 0 και 1
N[x]	αριθμητική τιμή του x

- Αλγεβρικοί χειρισμοί

Η *Mathematica* έχει διάφορες ενσωματωμένες συναρτήσεις για να χειρίζεται τις μαθηματικές εκφράσεις. Αυτές οι συναρτήσεις θα εκτελέσουν τα διάφορα αλγεβρικά θέματα για τα μεγάλα γινόμενα, την παραγοντοποίηση, την εύρεση κοινών παρονομαστών και τη μερική κλασματική ανάπτυξη. Οι σημαντικότερες συναρτήσεις χειρισμού είναι η **Expand,** η **Together**, η **Apart** και η **Simplify**. Στη συνέχεια δίνεται μια περιγραφή αυτών των συναρτήσεων

- **Expand**

In[67]:= ?Expand

Η Expand[expr] αναπτύσσει γινόμενα και θετικές ακέραιες δυνάμεις στην expr. Η Expand[expr, patt] αποφεύγει να επεκτείνει στοιχεία της expr που δεν περιέχουν συνθήκες ή κανόνες που ισχύουν στη μεταβλητή patt.

- **Factor**

In[70]:=?Factor

Η Factor[poly] παραγοντοποιεί ένα πολυώνυμο στο σύνολο των ακεραίων. Η Factor[poly,Modulus->p] παραγοντοποιεί ένα πολυώνυμο modulo έναν πρώτο p.

- **Together**

In[73]:= ?Together

Η Together[expr] τοποθετεί τους αριθμούς υπό τη μορφή αθροίσματος πάνω από ένα κοινό παρονομαστή και διαγράφει τους παράγοντες στο αποτέλεσμα.

- **Apart**

Η Apart[expr] γράφει ξανά τη ρητή έκφραση υπό τη μορφή αθροίσματος των όρων με ελάχιστους παρονομαστές. Η Apart[expr, var] θεωρεί όλες τις μεταβλητές εκτός της var ως σταθερές

- **Simplify**

```
In[79]:= ?Simplify
```

Η Simplify[expr] πραγματοποιεί μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών στην expr και επιστρέφει τη απλούστερη μορφή που θα βρει.

- Λογισμός

Τρεις βασικές πράξεις της μαθηματικής ανάλυσης είναι ο υπολογισμός ορίων, παραγώγων και ολοκληρωμάτων. Η *Mathematica* έχει τις συναρτήσεις **Limit, D** και **Integrate** για να εκτελέσει αυτές τις πράξεις. Η συνάρτηση **Limit** επιχειρεί να υπολογίσει το όριο μιας έκφρασης καθώς ένα από τα σύμβολα της έκφρασης προσεγγίζει μια συγκεκριμένη τιμή.

```
In[126]:=?Limit
```

Ακολουθεί ένα παράδειγμα για την εύρεση του ορίου μιας λογικής έκφρασης

```
In[127]:= Clear[x];

Limit[{x^3-3*x^2+3*x-1)/(x-1),xØ1]

Out[128]= 0
```

Οι παράγωγοι στη *Mathematica* υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **D**

```
In[129]:=?D
```

Η D[f, x] δίνει τη μερική παράγωγο της f ως προς x. Η D[f, {x,n}] δίνει τη ν- οστή μερική παράγωγο ως προς x. Η . D[f,x1, x2, ...] δίνει τη μικτή παράγωγο.Στη πιο βασική μορφή το πρώτο όρισμα της **D** είναι η συνάρτηση που θα βρούμε το διαφορικό της και το δεύτερο όρισμα είναι η μεταβλητή του διαφορικού. Για παράδειγμα για να βρούμε το διαφορικό της συνάρτησης *xcos(2x)* ως προς *x* θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη έκφραση

```
In[130]:=Clear[x];

       D[x*Cos[2*x],x]

Out[131]= Cos[2x]-2xSin[2x]
```

Το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης μπορεί να υπολογισθεί με τη συνάρτηση **Dt**. Πιο κάτω η περιγραφή της

In[141]:=?Dt

H Dt[f, x] δίνει την ολική παράγωγο της f ως προς x. H . Dt[f] δίνει το ολικό διαφορικό της f. H Dt[f, {x, n}] δίνει τη ν-οστή ολική παράγωγο ως προς x. H Dt[f, x1, x2, ...] δίνει μια μικτή ολική παράγωγο.

Ας υπολογίσουμε το ολικό διαφορικό της xy^2+z^3

```
In[142]:= Clear[x,y,z];
 Dt[x*y^2+z^3]
```

Out[143]= y^2Dt[x]+2xyDt[y]+3z^2Dt[z]

Σε αυτό το αποτέλεσμα η **Dt[x]** παίζει το ρόλο του d*x* ,η **Dt[y]** παίζει το ρόλο του d*y* και η **Dt[z]** του dz.

Η *Mathematica* έχει τη δυνατότητα να πραγματοποιεί πολύ δύσκολα ολοκληρώματα. Η συνάρτηση **Integrate** χρησιμοποιείται τόσο για τα αόριστα όσο και για τα ορισμένα ολοκληρώματα. Πιο κάτω η περιγραφή της:

In[144]:=?Integrate

H Integrate[f, x] δίνει το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x. H Integrate[f, {x, xmin, xmax}] δίνει το ορισμένο ολοκλήρωμα. H Integrate[f, {x, xmin,xmax}, {y,ymin, ymax}] δίνει ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα

Σαν παράδειγμα υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$$

```
In[145]:=Clear[x];
Integrate[x*Cos[x],{x,0,Pi}]
```

Out[146]= -2

1. ΟΡΙΑ

1.1 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Ο μαθηματικός λογισμός είναι ένας ιδιαίτερα χρήσιμος κλάδος των μαθηματικών με ευρείες εφαρμογές που συμπεριλαμβάνουν τη χάραξη καμπυλών , την αριστοποίηση συναρτήσεων, την εύρεση του ρυθμού μεταβολής μιας συνάρτησης, όντας επίσης και την εκτίμηση του εμβαδού που περικλείεται από μια καμπύλη ή καμπύλες. Το θεμέλιο του λογισμού και η χαρακτηριστική του διαφορά από την άλγεβρα είναι η έννοια του ορίου.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι f(x), είναι συνάρτηση του x και a είναι ένας αριθμός. Το όριο της συνάρτησης f(x) είναι ο αριθμός ένα στον οποίο τείνει η συνάρτηση όσο το χ προσεγγίζει, αλλά ποτέ δεν εξισώνεται με το a. Η πρόταση αυτή συμβολικά διατυπώνεται ως εξής :

=L

<u>Παράδειγμα :</u>

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης :

<u>Λύση :</u>

Στο mathematica η λύση είναι :

In []:=g [x_] = (3x-2)/ (2x+5)

Out [] = (-2+3 x)/ (5+2 x)

In []:=limit [g[x], x→2]

Out [] =4/9

Παράδειγμα :

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης :

Λύση :

Με μια απλή αντικατάσταση του x=0 θα καταλήγαμε στην έκφραση 0/0 που είναι απροσδιόριστη. Παρά το γεγονός ότι η f(0) είναι απροσδιόριστη, η συνάρτηση f(x) είναι προσδιορίσιμη για τιμές του x πολύ κοντά στην περιοχή του μηδενός, εκτός βέβαια απ’ την τιμή του μηδενός. Δεν ενδιαφερόμαστε επομένως να προσδιορίσουμε την συνάρτηση για την τιμή x=0 , αλλά μάλλον να βρούμε τον αριθμό προς τον οποίο η συνάρτηση f(x) τείνει όσο το χ προσεγγίζει, αλλά ποτέ δεν γίνεται ίσο με το μηδέν. Επειδή λοιπόν το χ είναι διάφορο του μηδενός μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το χ και να καταλήξουμε :

Ενώ στο mathematica η λύση είναι :

In []:= t [x_] = (3x*x-3x)/ (4*x)

Out [] = $\frac{-3x+3x^2}{4x}$

In []:=limit [t[x], x→0]

Out [] =-3/4

Μέχρι τώρα η έννοια του ορίου που χρησιμοποιήσαμε ήταν πολύ απλή και όχι ικανοποιητικά ακριβής. Εάν θέλουμε η έννοια του ορίου να διατυπωθεί με ένα επιστημονικότερο τρόπο

Από τον αρχικό ορισμό του ορίου

Απαιτούμε ένα ορισμένο πεδίο αντοχής γύρω από το L. Για το σκοπό αυτό διαλέγουμε ένα μικρό αλλά θετικό αριθμό ε. Το πεδίο αντοχής θα είναι το σύνολο των αριθμών που περιέχεται μεταξύ του $L-ε$ και του $L+ε$. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε ένα άλλο αρκετά μικρό αλλά θετικό αριθμό δ που να εξαρτάται από τον ε, έτσι ώστε να ορίσουμε το πεδίο αντοχής γύρω απ ‘το χ. Αυτό το πεδίο αντοχής είναι το σύνολο των αριθμών που περιλαμβάνεται μεταξύ του $α-δ$ και του $α+δ$. Αν μπορούμε πάντα να ορίζουμε το δ έτσι ώστε το χ να βρίσκεται μεταξύ των $α-δ$ και $α+δ$ και οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ να βρίσκονται μεταξύ των $L-ε$ και του $L+ε$ τότε λέμε ότι το 1 είναι το όριο της $f(x)$ όσο το χ πλησιάζει το α χωρίς φυσικά να συμπίπτει με αυτό.

Από το πεδίο αντοχής ή αλλιώς πεδίο μεταβολής αποκλείουμε τη τιμή του α, επειδή ακριβώς δεν ενδιαφερόμαστε για τη τιμή της συνάρτησης ακριβώς στο σημείο α. Πολλές φορές μάλιστα η συνάρτηση f μπορεί να μην ορίζεται για τη τιμή $χ=α$ όπως πχ στις περιπτώσεις αοριστίας της μορφής 0/0. Όταν εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου, πρώτα επιλέγουμε $ε>0$, μετά βρίσκουμε ένα δ που να αντιστοιχεί στο ε, τέτοιο ώστε αν το χ βρίσκεται εντός του πεδίου ορισμού του δ, η $f(x)$ να βρίσκεται εντός του πεδίου ανεκτικότητας, το ε γύρω από το L. Αν ατό μπορεί να γίνει για κάθε $ε>0$ τότε το L θα είναι πράγματι όριο της συνάρτησης όσο το χ προσεγγίζει το α.

1.1.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

Τα όρια έχουν πολύ χρήσιμες ιδιότητες που μας επιτρέπουν να μετατρέπουμε σύνθετες συναρτησιακές σχέσεις σε άλλες πιο απλές.

Ας υποθέσουμε ότι για δύο συναρτήσεις f(x) και g(x) έχουμε :

Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

1.

2.

3. — — —

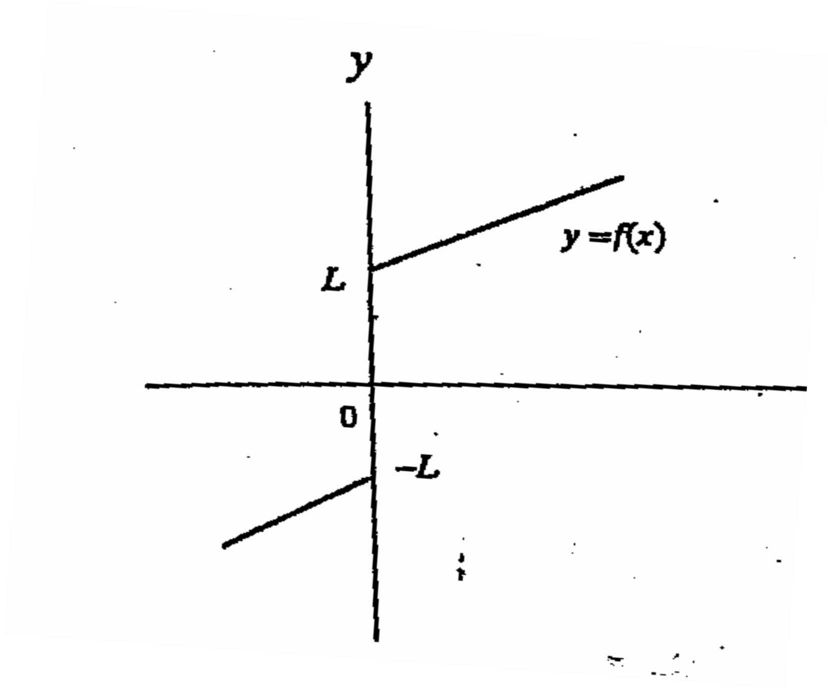
4. – –

1.2 ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Στον ορισμό του ορίου δεν θέσαμε κανένα περιορισμό για το πώς το χ θα πλησιάσει το α. Συχνά είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε μια πιο περιοριστική προσέγγιση για το σκοπό αυτό ας υποθέσουμε μια συνάρτηση

Y= f(x) = +1 αν x>0

-1 αν x<0



Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι για χ=0 η συνάρτηση y=f(x) δεν ορίζεται. Επίσης, όσο η χ προσεγγίζει το 0 από τα δεξιά τόσο η συνάρτηση f(x) προσεγγίζει το +2. Αυτή η σχέση διατυπώνεται ως εξής :

Αν τώρα η χ προσεγγίζει το 0 από τα αριστερά, τότε η συνάρτηση f(x) προσεγγίζει το άλλο όριο το -1 δηλαδή

Τα όρια αυτού του είδους καλούνται πλευρικά (one sided limits) . Τα +L και -L καλούνται δεξιό και αριστερό όριο της f(x) για χ ή γενικότερα για χ Ο ορισμός του ορίου που είναι βασισμένος στα ε και δ παραμένει με τη διαφορά ότι οι τιμές που παίρνει το χ περιορίζουν το χ>α ή χ<α. Τέλος το όριο της συνάρτησης

Δεν υπάρχει. Με άλλα λόγια, όταν το χ προσεγγίζει το μηδέν χωρίς περιορισμό το όριο της f(x) δεν ορίζονται. Σ' αυτή την περίπτωση τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν, ωστόσο δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

Παράδειγμα :

Να βρεθεί το όριο :

Λύση :

Όσο το χ πλησιάζει το -2 από τα δεξιά, ο παρονομαστής του κλάσματος πλησιάζει το 0 αλλά είναι πάντα θετικός. Συνεπώς το κλάσμα θα μεταβληθεί σε έναν άπειρα μεγάλο αριθμό. Επομένως έχουμε :

Στο mathematica η λύση είναι :

In []:=Limit [3/(x+2), x→-2, Direction→-1]

Out [] =∞

Παράδειγμα :

Να βρεθεί το όριο :

Λύση :

Όσο το χ , τότε 1/x αυξάνει χωρίς όρια. Επομένως αν το τείνει στο άπειρο όσο x , το θα τείνει στο μηδέν και επομένως όλη η παράσταση θα τείνει στο 2. Για την απόδειξη χρειάζεται να δείξουμε ότι για κάποιο ε>0 μπορούμε να βρούμε ένα δ τέτοιο ώστε :

Συνεπώς |

Για χ>0, τότε , αν ε και για οποιοδήποτε δ>0

Αν 0 τότε όταν – και >–

Παίρνοντας φυσικούς λογάριθμους και από τις δύο πλευρές της ανισότητας καταλήγουμε:

Στο mathematica η λύση είναι :

In []:= $F[x\_] = \frac{2}{1 + e^{-1/x}}$

Out [] = $\frac{2}{1 + e^{-1/x}}$

In []:=`Limit [F[x], x→0, Direction→-1]`

Out [] = 2

1.3 Όρια που τείνουν στο άπειρο

Η λέξη άπειρο δεν έχει τη σημασία του αριθμού αλλά μιας διαδικασίας χωρίς πέρας. Σε μαθηματική γλώσσα λέμε ότι μια συνάρτηση f(x) τείνει στο άπειρο

Αν για κάθε θετικό αριθμό Μ μπορούμε να βρούμε έναν άλλο θετικό αριθμό δ που να εξαρτάται από τον Μ, τέτοιον ώστε f(x) > M κάθε φορά που 0 < |χ-α|<δ.

Ομοίως λέμε ότι αν για κάθε θετικό αριθμό Μ μπορούμε ένα άλλο αριθμό δ που να εξαρτάται από το Μ, τέτοιον ώστε f(x)<-M κάθε φορά που 0<|χ-α|<δ. Η διατύπωση επαναλαμβάνεται στη περίπτωση που έχουμε πλευρικά όρια.

Πολλές φορές αντιμετωπίζουμε ερωτήματα όπως π.χ. προς τα πού τείνει η συνάρτηση, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς. Στη περίπτωση αυτή αν για κάθε θετικό αριθμό ε μπορούμε να βρούμε ένα θετικό αριθμό Ν (εξαρτημένο από τον ε), τέτοιον ώστε |f(x)-k| < ε κάθε φορά που χ>Ν. Η ίδια διατύπωση ισχύει και στην περίπτωση που

Παράδειγμα :

Να αποδειχτεί ότι :

Λύση :

_Το όριο αυτό ισχύει αν για κάθε θετικό αριθμό Μ μπορούμε να βρούμε ένα άλλο θετικό αριθμό δ τέτοιον ώστε

Παρατηρούμε ότι 0< (χ-1 όταν

Διαλέγοντας δ= καταλήγουμε στο αποτέλεσμα που θέλαμε να αποδείξουμε.

Στο mathematica η λύση είναι :

In []:= $\text{Limit}\left[\frac{1}{(x-1)^6}, x \to 1\right]$

Out [] =∞

Το όριο μιας συνάρτησης της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στο άπειρο, έχει πολλές χρήσιμες εφαρμογές στα οικονομικά, όπου συχνά αντιμετωπίζουμε ζητήματα μακροχρόνιων τάσεων όπως για παράδειγμα το νόμο της πτωτικής τάσης του ποσοστού κέρδους των κλασσικών οικονομολόγων του Μαρχ αλλά και αρκετών νεοκλασικών οικονομολόγων, την αύξηση του πληθυσμού, τη μακροχρόνια τάση του δημοσίου χρέους, τη μελλοντική αξία ενός περιουσιακού στοιχείου, κ.α.

1.4 Όρια Ρητών Συναρτήσεων

Για να πάρουμε τα όρια ρητών συναρτήσεων για x διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με τον όρο που είναι υψωμένος στη μεγαλύτερη δύναμη και παίρνουμε το όριο της καινούριας ρητής συνάρτησης. Μ’ αυτόν τον τρόπο μετατρέπουμε το αρχικό πρόβλημα σε ένα άλλο όπου οι περισσότεροι όροι είναι της μορφής α/ που καθένας από αυτούς έχει όριο το μηδέν.

<u>Παράδειγμα :</u>

Να βρεθεί το όριο της

<u>Λύση :</u>

Διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με καταλήγουμε

=

Στο mathematica η λύση είναι :

In []:= $\text{Limit}\left[\frac{3x^2+3x+5}{5x^2-9x+4}, x \to \infty\right]$

Out [] =3/5

2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

2.1. Μιας μεταβλητής

Η παραγώγιση είναι με απλά λόγια ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης

Η κλίση της εφαπτομένης σε ένα ρυθμισμένο σημείο ρ0 (x0, y0) του γραφήματος μιας συνάρτησης f υπολογίζεται από το όριο της συνάρτησης —. Αν αυτό το όριο υπάρχει, τότε ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f στο χ0 και συμβολίζεται συνήθως με f'(x0). Η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί επίσης να παρασταθεί με τις ακόλουθες εκφράσεις: —,y,——,—, Dx άρα

F'(x0) = ————= —. Αν η συνάρτηση y=f(x) είναι ασυνεχής στο χ0 τότε είτε δεν υπάρχει το , είτε

Από τον αριθμό της παραγώγου προκύπτει ότι για να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο χ0 πρέπει να είναι συνεχής στο χ0. Το αντίστροφο όριο δεν ισχύει πάντοτε.

Π.χ. f(x) =|x| = i) x, x

ii) –x, x είναι συνεχής στο x0=0

Ωστόσο ——— = — = -1,

Ενώ ——— = – = 1

Και κατά συνέπεια η f(x)= δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2.1.2. ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1) (r) ‘ = 0 και ( ) ‘ = r για κάθε r R

2) Αν y=f(x) και y=g(x) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού τότε :

α) [f(x) g(x)] ‘ = f’(x)g’(x)

β) [f(x) f’(x) g(x) +f(x) g’(x) και κατά συνέπεια [rf(x)]’ = rf’(x), για κάθε r R

Γ) [——]’ = —————— , εφόσον g(x) 0

3) Αν , α >0 με α 1 , ( )’ = και κατά συνέπεια ( )’ =

4) ( )’ = – και κατά συνέπεια ( )’ = [——]’ ——, α>0, α

5) (ημχ)’ = συνχ , (συνχ)’ = -ημχ άρα : (εφχ)= [——]’ = —— = 1+ και

(σφχ)’= [——]’ = -—— = (1+)

6)Κανόνας Παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.

[(f0g)(x)]’ = [f(g(x))]’ = fg’ (g(x)) · g’(x)

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης y=(-2)(3x+5)

Λύση :

Θέτουμε f(x)=(—=f(x) —+g(x) —=(

—(3x+5)—(+10x-6

Ενώ στο mathematica η λύση είναι :

In[]:=y [x_] =(x^2-2)*(3 x+5)

Out [] = (5+3 x) $(-2+x^2)$

In[]:= y'[x]

Out [] =2 x (5+3 x) +3 $(-2+x^2)$

In[]:= Expand [%]

Out [] =-6+10 x+9 x^2

2.1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Όπως παραγωγίζουμε μια συνάρτηση έτσι ακριβώς μπορούμε να παραγωγίσουμε μια παράγωγο . Η συνάρτηση που προκύπτει λέγεται δεύτερη παράγωγος. Αν η πρώτη παράγωγος μετρά την κλίση και τον ρυθμό μεταβολής της πρώτης παραγώγου. Γενικά οι παράγωγοι ανώτερης τάξης μετρούν τον ρυθμό μεταβολής παραγώγου της αμέσως προηγούμενης τάξης. Οι κανόνες παραγώγισης που ισχύουν για τις παραγώγους χαμηλότερης τάξης ισχύουν και για τις παραγώγους υψηλότερης τάξης. Οι παράγωγοι δεύτερης τάξης συμβολίζονται ως εξής : —— , y'' ,f''(x), (x) , (y)

Π.χ. : y=3 +12 +5 +2x+1

Να βρεθούν όλες οι δυνατοί παράγωγοι.

Τότε, y'=12 +36

Y''= 36

Y''' = 72x+72

2.1.4 ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Στην οικονομική θεωρία , πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για ποσοστιαίες και όχι για απόλυτες μεταβολές . Για παράδειγμα αν πούμε ότι ο πληθυσμός μιας πόλης 100.000 κάτοικοι αυξήθηκε κατά 100 κατοίκους , η μεταβολή είναι ασήμαντη, ενώ η ίδια μεταβολή έχει ιδιαίτερα μεγάλη σημασία για ένα χωριό 1000 κατοίκων. Η ποσοστιαία μεταβολή μιας ποσότητας υπολογίζεται απ'τον τύπο :

% Μεταβολή =(——————————)

Ενώ σε όρους παραγώγου ο τύπος είναι :

% Μεταβολή (=——) 100

Ο όρος —— λέγεται ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής της y ως προς την χ0. Αν αντί της μεταβολής χ έχουμε την t=χρόνος, τότε γράφουμε —— που αναφέρεται στο στιγμιαίο ρυθμό μεγέθυνσης.

<u>Παράδειγμα</u>

Το ακαθάριστο εθνικό προϊόν της Ελληνικής βιομηχανίας για την περίοδο 1955-1989 αναπτυσσόταν σύμφωνα με την παρακάτω σχέση σε εκατομμύρια δραχμές.

Y(t) = 16907+2024+3721 – 7,4

i) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς το χρόνο για το έτος 1989
ii) Ποια η ποσοστιαία μεταβολής του y ως προς το χρόνο για το ίδιο έτος

Λύση :

i) Y'(t)= 2.024 +744t – 22.2

Το έτος 1959 αντιστοιχεί στη χρονική περίοδο t=34 άρα Y'(t)=1656,8

ii) Η μεταβολή που βρίσκεται από την σχέση

% Μεταβολή = (——)·100 = (—————————— ·100=0,73%

Ενώ στο mathematica είναι :

In[]:=y [t_] =16907+2024t+372t^2-7.4t^3

Out [] =16907+2024t+372t^2-7.4t^3

In[]:= y'[t]

Out [] =2024+744t-22.2t^2

In[]:= y'[34]

Out [] = 1656.8

In[]:= $met = \frac{y'[34]}{y[34]} 100$

Out [] = 0.736665

2.2. ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

2.2.1 Μερική παραγώγιση

Όταν μια συνάρτηση έχει περισσότερες από μια μεταβλητές, τότε υπάρχουν δυο ειδών παραγωγίσεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε, την ολική και την μερική παραγώγιση. Η ολική παραγώγιση επιτρέπει την ταυτόχρονη μεταβολή όλων των μεταβλητών, ενώ η μερική παραγώγιση επιτρέπει τη μεταβολή μιας μόνο μεταβλητής κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές.

Ειδικότερα, πολλές φορές σε διάφορα οικονομικά εμφανίζονται συναρτήσεις με περισσότερες από μια ανεξάρτητες μεταβλητές. Για τη μελέτη προβλημάτων μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης συναρτήσεων δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών είναι χρήσιμη η έννοια των μερικών παραγώγων της συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές αυτές.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών Z=f(x,y)

Όταν το χ μεταβάλλεται και το y παραμένει σταθερό , η μερική παράγωγος της f ως προς το χ που θα συμβολίζεται fx , ορίζεται από την σχέση :

F’x= όταν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Για την fx χρησιμοποιείται επίσης ο συμβολισμός —.

Από τον παραπάνω αριθμό γίνεται φανερό ότι για τον υπολογισμό της fx εφαρμόζουμε τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης θεωρώντας τη μεταβλητή y ως σταθερά.

Γι α παράδειγμα : f(x,y) = 3x είναι fx=3 και fy= 6xy

2.2.2 Κανόνες Μερικής Παραγώγισης

Α) Κανόνες Γινομένου

Έστω ότι έχουμε τις συναρτήσεις g=g(x,y) και h=h(x,y) και το γινόμενο τους γράφεται Z=g·h Τότε έχουμε : — — — — — —

Β) Κανόνας πηλίκου

Έστω η συνάρτηση υ= g(x,y)/h(x,y) και h(x,y) τότε :

— — — — — — — —

____________.

Έστω η συνάρτηση z= ‾, να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της z ως προς τις x και y.

Λύση :

Γράφουμε τη συνάρτηση ως z= και έχουμε :

—(—lny) =—

—( ) = —) =

<u>Ενώ στο mathematica η λύση είναι :</u>

In[]:=g [x_, y_] = $y^{\sqrt{x}}$

Out [] = $y^{\sqrt{x}}$

In[]:= x g. x, y.

Out [] = $\frac{y^{\sqrt{x}}\,\mathrm{Log}[y]}{2\sqrt{x}}$

In[]:= y g. x, y.

Out [] = $\sqrt{x}$ y 1 $\sqrt{x}$

2.2.3 ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι μερικές παράγωγοι της 2= f(x,y) είναι επίσης συναρτήσεις των x και y. Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τέσσερις μερικές παραγώγους ως προς το x που λέγεται και άμεση μερική παράγωγος.

Και τη δεύτερη άμεση μερική παράγωγος ως προς το y :

—— — —

Η οποία υποδηλώνει ότι πρώτα παραγωγίζουμε ως προς x και το αποτέλεσμα που βρίσκουμε το παραγωγίζουμε ως προς y. Η σειρά παραγώγισης μπορεί να είναι διαφορετική όπως βλέπουμε στην επόμενη μικτή παράγωγο:

—— – (—

Εδώ πρώτα παραγωγίζουμε ως προς y και κατόπιν ως προς x. Σύμφωνα με το θεώρημα Young που ισχύει μόνο για συνεχείς συναρτήσεις, η σειρά με την οποία κανείς παραγωγίζει είναι χωρίς σημασία για το αποτέλεσμα άρα fxy=fyx κ.ο.κ.

2.2.4 ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Υπάρχουν περιπτώσεις που οι μεταβλητές x και y δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και είναι εξαρτημένες από μια τρίτη μεταβλητή.

Π.χ. x=g(t) και y=h(t). Τέτοιες συναρτήσεις συναντώνται πολύ συχνά στα οικονομικά π.χ. η z=f(x,y) παριστάνει μια συνάρτηση παραγωγής όπου οι συντελεστές παραγωγής εργασία και κεφάλαιο μεταβάλλονται στη διάρκεια του χρόνου . Έτσι για να βρούμε τη μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν διαχρονικά, δηλαδή — τότε θα πρέπει να εκτιμήσουμε :

i) Τη μεταβολή στη z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t η οποία μεταβιβάζεται στη z μέσω της x , δηλαδή — , —

ii) Τη μεταβολή της z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t η οποία μεταβιβάζεται στη z μέσω της y δηλαδή — —

Επομένως συνολικά θα έχουμε :— — — — — — —

Η — λέγεται ολική παράγωγος της z ως προς την t.

Π.χ. : Έστω η συνάρτηση q=f(k,1)=100k1-k2- .Με k=g(t) = 0,5 και 1=1(t)=2t+1

Να βρεθεί η—

Λύση :

Βρίσκουμε πρώτα το ολικό διαφορικό της q που είναι : dy=fkdk+f1d1=(1001-3 Στη συνέχεια διαιρούμε με dt και έχουμε :

— —+ *(100k-* —

Αλλά — —

Μετά από αντικατάσταση παίρνουμε :

—

—

<u>Ενώ στο mathematica η λύση είναι :</u>

In[]:=q=f [K_, L_] =100K*L-K^3*L-3L^2
Out [] =100K*L-K^{3}L-3L^2

In[]:=K=g[t_]=0.5t^2
Out [] =0.5 t^2

In[]:= L=h [t_] =2t+1
Out [] = 1+2 t

In[]:= D [q, t]

Out [] =$100.t^2-0.25t^6-12(1+2t) +100.t (1+2t)-0.75t^5 (1+2t)$

In[]:= Expand [%]

Out [] =$-12+76.t+300.t^2-0.75t^5-1.75t^6$

2.3 Εύρεση Ακρότατων

2.3.1 Μιας Μεταβλητής

Η εύρεση των ακρότατων (μέγιστο, ελάχιστο) μιας συνάρτησης γίνεται εξετάζοντας την κλίση της. Αν η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο είναι θετική, η συνάρτηση ακολουθεί ανοδική πορεία. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής είναι θετική δηλαδή όσο η

ανεξάρτητη μεταβλητή αυξάνεται τόσο αυξάνεται και η εξαρτημένη μεταβλητή. Αν η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο είναι αρνητική η συνάρτηση ακολουθεί καθοδική πορεία. Δηλαδή η σχέση της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αρνητική, άρα όσο η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξάνεται, τόσο η εξαρτημένη μειώνεται και αντίστροφα. Εφ' όσον η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο που η κλίση της εφαπτομένης δεν είναι ούτε θετική, αλλά ούτε και αρνητική, δηλαδή η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται. Έτσι λοιπόν βρισκόμαστε σ' ένα ακρότατο. Είναι φυσικό, ότι αν για να φθάσουμε σ' αυτό το ακρότατο ακολουθούμε ανοδική πορεία (δηλαδή, η πρώτη παράγωγος είναι θετική) και αν αφήνοντας το σημείο ακολουθούμε καθοδική πορεία (δηλαδή αν έχουμε αρνητική την πρώτη παράγωγο), τότε το ακρότατο είναι μέγιστο. Αν ισχύει το αντίθετο έχουμε ελάχιστο.

Η διαδικασία εντοπισμού και χαρακτηρισμού των ακρότατων μιας συνάρτησης y=f(x) είναι η εξής :

Α) Μηδενίζουμε την πρώτη παράγωγο.

Β) Αντικαθιστούμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου στη δεύτερη παράγωγο.

-αν f''(x) > 0 , η συνάρτηση f(x) έχει τοπικό ελάχιστο για χ= c

-αν f''(c) <0, η συνάρτηση f(x) έχει τοπικό μέγιστο για x=c

-αν f''(c) = 0 τότε παίρνουμε παραγώγους της αμέσως επόμενης τάξης και αν έχουμε παράγωγο άρτιας τάξης, θετικής ή αρνητικής, έχουμε ελάχιστο ή μέγιστο αντίστοιχα. Προϋπόθεση βέβαια είναι ότι οι προηγούμενες παράγωγοι περιττής τάξης υπάρχουν και είναι ίσες με μηδέν . Αν οι παράγωγοι άρτιας τάξης είναι μηδενικές και η αμέσως επόμενη παράγωγος (περιττής τάξης) υπάρχει και είναι διάφορη του μηδενός, τότε έχουμε σημείο καμπής

Παράδειγμα :

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης :

Λύση :

Η πρώτη παράγωγος είναι :

Για f'(x) = 0 λαμβάνουμε τις ρίζες χ=− και χ=-2. Αντικαθιστούμε τις τιμές του χ στη δεύτερη παράγωγο. F''(x) =6x+4 F'' (− − F'' (-2) =6(-2) +4 = -8<0

Επομένως η συνάρτηση f(x) έχει μέγιστο για την τιμή χ=-2 και ελάχιστο για x=−

Αντικαθιστούμε τις τιμές που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο στην αρχική συνάρτηση και λαμβάνουμε :

− − − −

<u>Ενώ στο mathematica η λύση είναι :</u>

In[]:=f [x_] =x^3+2 x^2-4 x+5

Out [] =5-4 x+2 x^2+x^3

In[]:= f'[x]

Out [] =-4+4 x+3 x^2

In[]:= Solve [f'[x] ==0]

Out [] = {{x→-2}, {x→2/3}}

In[]:= f''[x]

Out [] = 4+6 x

In[]:= f''[-2] <0

Out [] = True

In[]:= f’’ [2/3]>0

Out [] = True

ΑΡΑ

In[]:= fmin=f [-2]

Out [] = 13

In[]:= fmax=f [2/3]

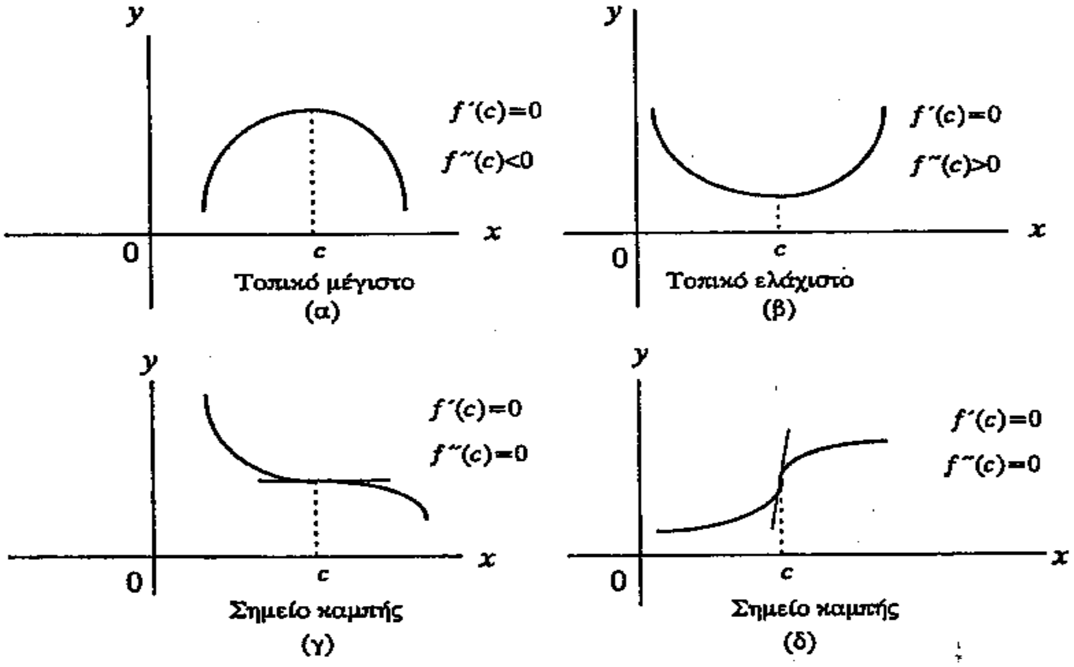
Out [] =95/27

In[]:= N [%]

Out [] = 3.51852

Καμπυλότητα συναρτήσεων

Μια συνάρτηση θεωρείται ότι στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω όταν η κλίση της εφαπτομένης (η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης) αυξάνει όσο κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά. Μια συνάρτηση θεωρείται ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω όταν η κλίση της εφαπτομένης μικραίνει όσο προχωρούμε από τα αριστερά στα δεξιά.



Η καμπυλότητα μιας συνάρτησης σχετίζεται με το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου σ' ένα ορισμένο διάστημα. Όταν η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι θετική, η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι φθίνουσα στο ίδιο διάστημα. Δηλαδή προχωρώντας από τα αριστερά στα δεξιά η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης f(x) αυξάνει. Αν η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι αρνητική η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι αύξουσα στο ίδιο διάστημα. Δηλαδή προχωρώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά , η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης f(x) μειώνεται. Η καμπύλη βρίσκεται κάτω από τις εφαπτομένες που σχηματίζονται μετά το σημείο c και στρέφει τα κοίλα της προς τα κάτω. Δηλαδή το σημείο c είναι το σημείο καμπής και η εφαπτομένη του χωρίζει το γράμμα σε δύο περιοχές. Μια περιοχή όπου η f(x) στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και μία άλλη που η f(x) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Έτσι ως σημεία καμπής ορίζεται το σημείο όπου η συνάρτηση αλλάζει συμπεριφορά και υπολογίζεται αν θέσουμε τη δεύτερη παράγωγο ίση με μηδέν.

Άρα :

α. Αν f''(x)>0 στο κλειστό διάστημα [α,b] η f(x) στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω

β. Αν f''(x)<0 στο κλειστό διάστημα [α,b] η f(x) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Εύρεση σημείων καμπής αν f’’(x) = 0

Στην περίπτωση που η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν η ακόμη απροσδιόριστη για να βρούμε τα σημεία καμπής παίρνουμε την τρίτη παράγωγο.

-Αν f’’(x) >0, τότε στο σημείο χ0 τα κοίλα της f(x) αλλάζουν από κάτω προς τα πάνω.

-Αν f’’(x) <0, τότε στο σημείο χ0 τα κοίλα της f(x) αλλάζουν από πάνω προς τα κάτω.

Παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση f(x)= Να βρεθούν :

α. τα ακρότατα σημεία

β. τα σημεία καμπής

Λύση :

α. f’(x) =3

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν έχουμε : f’(x)=0 ή 3

Λύνοντας ως προς χ , παίρνουμε χ=

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη δεύτερη παράγραφο, f’’(x) = 6x η οποία για χ= 1 δίνει f’’(x)= 6>0 δηλαδή έχουμε τοπικό ελάχιστο. Αντικαθιστώντας την τιμή του χ στην f(x) έχουμε : y=

Άρα λοιπόν το σημείο (1,-2) προσδιορίζει ένα τοπικό ελάχιστο.

Στη συνέχεια αν στη δεύτερη παράγραφο θέσουμε την τιμή χ=-1 παίρνουμε : f’’(x)= 6x-6<0.

Συνεπώς για την τιμή χ=-1 έχουμε τοπικό μέγιστο, αντικαθιστώντας αυτή τη τιμή στην f(x) έχουμε y=-1+3=2. Επομένως, το τοπικό μέγιστο έχει συντεταγμένες το ζεύγος (-1,2).

Β. Τα σημεία καμπής τα βρίσκουμε αν θέσουμε f’’(x)=0 δηλαδή f’’(x)=6(0)=0 και συνεπώς το σημείο μηδέν είναι ένα πιθανό σημείο καμπής. Η Τρίτη παράγωγος είναι f’’(x)=6>0 άρα για χ<0 η καμπύλη στρέφει τα κοίλα της προς τα κάτω και χ>0 στρέφει τα κοίλα της προς τα πάνω.

Η λύση στο mathematica θα είναι :

In[]:=f [x_] =x^3-3 x

Out [] =-3 x+x^3

In[]:= f'[x]

Out [] =-3+3 x^2

In[]:= f''[x]

Out [] = 6 x

In[]:= Solve [f'[x] ==0]

Out [] = {{x →-1}, {x →1}}

In[]:= f’’ [1]>0

Out [] = True

In[]:= f’’ [-1] <0

Out [] = True

ΑΡΑ

In[]:= fmin=f [1]

Out [] = -2

In[]:= fmax=f [-1]

Out [] = 2

2.3.2. ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω μια συνάρτηση με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές z=f(x,y). Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) στο σημείο ρ0 αν στη γειτονική περιοχή το ρ0 ισχύει :

Για μέγιστο : f(ρ) για κάθε ρ που βρίσκεται στη γειτονική περιοχή του ρ0.

Η αναγκαία συνθήκη για ακρότατο όπως γνωρίζουμε από τις μονομεταβλητές συναρτήσεις, απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου, δηλαδή f'(x)=0 , η οποία όμως δεν επαρκεί για το χαρακτηρισμό των ακρότατων μιας πολυμεταβλητής συνάρτησης.

Έστω η συνάρτηση Z=f(x,y) = -xy ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη στο σημείο (0,0), αλλά μια μικρή μετακίνηση από αυτό οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα, έτσι έχουμε:

F(x, y) >0 για x>0 και y<0

F(x, y) <0 για x>0 και y>0

Ένα τέτοιο σημείο ονομάζεται σαγματικό . Γενικά το σημείο (χ0,y0) είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης f αν fx(x0,y0)=fy(x0,y0)=0 αλλά f(x0,y0) δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο. Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τα πρόσημα των fxx και fyy , αν διαφέρουν τότε έχουμε σαγματικό σημείο και αν είναι ταυτόσημα τότε είναι πιθανόν να έχουμε σημείο καμπής. Στην περίπτωση που οι μερικές παράγωγοι της f ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές μηδενίζονται δηλαδή ισχύει fx=fy=0, τότε για τις τιμές που μηδενίζουν τις πρώτες παραγώγους διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

1) Η συνάρτηση Z=f(x,y) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αν ισχύει :

   Fxx<0 με fxx fyy – f (xy >0

2) Η συνάρτηση Z=f(x,y) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο αν ισχύει :

   Fxx >0 με fxx fyy – (fxy

3) Η συνάρτηση Z= f (x,y) παρουσιάζει σαγματικό σημείο αν ισχύει :

Fxx>0 και fyy<0 ή fxx<0 και fyy >0 με fxx fyy – (fxy

4) Η συνάρτηση Z= f(x,y) παρουσιάζει σημείο καμπής αν :

Fxx >0 και fyy >0 ή fxx <0 και fyy<0 με fxx fyy – (fxy

Παράδειγμα

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης Z=f(x,y) = 4 - 2

Λύση

Βρίσκουμε όλες τις παραγώγους της πρώτης τάξης και τις θέτουμε ίσες με μηδέν :

Fx = -4x = 0, fy = -2y = 0

Το σύστημα των δύο εξισώσεων λύνει για x=y=0 . Στη συνέχεια βρίσκουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης που είναι :

Fxx= -4, fyy = -2, και fxy=FY =0

Άρα fxx fyy – (fxy

Συνεπώς, η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο (0,0)

Η λύση στο mathematica είναι :

In[]:=z=f [x_, y_] =4-2 x^2-y^2

Out [] =4−2 x^2−y^2

In[]:= FX=D [f[x, y], x]

Out [] = -4 x

In[]:= FY=D [f[x, y], y]

Out [] = -2 y

In[]:= Solve [{fy ==0, fx==0}, {x, y}]

Out [] = {{y →0, x →0}}

In[]:= fxx=D [f[x, y], {x, 2}]
Out [] = -4
In[]:= fyy=D [f[x, y], {y, 2}]
Out [] = -2
In[]:= fxy=fyx=D [f[x, y], x, y]
Out [] = 0

Παράδειγμα

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης

Z=f(x,y) = 250 - 3xy + 6x + 3

Λύση

Βρίσκουμε όλες τις παραγώγους πρώτης τάξης και τις θέτουμε ίσες με μηδέν.

Fx= -3y +6 +6x = 0

Fy = -3x + 4y = 0

Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε χ= — , αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε :

-(– — —

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης που είναι fxx = 6, fyy = 4 και fxy=fyx =-3

Οπότε : fxx fyy – (fxy

Συνεπώς η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο (-24/ 15. -18/15)

Ενώ στο mathematica η λύση είναι :

In[]:=z=f [x_, y_] =250-3 x*y+6 x+3 x^2+2 y^2
Out [] =250+6x+3x^2-3xy+2y^2

In[]:= fx=D [f[x, y], x]

Out [] = 6+6 x-3 y

In[]:= fy=D [f[x, y], y]

Out [] = -3 x+4 y

In[]:= Solve [{fx==0, fy==0}, {x, y}]

Out [] = {{x→-8/5, y→-6/5}}

In[]:= fxx=D [f[x, y], {x, 2}]

Out [] = 6

In[]:= fyy=D [f[x, y], {y, 2}]

Out [] = 4

In[]:= fxy=fyx=D [f[x, y], x, y]

Out [] = -3

In[]:=fxx*fyy-fxy^2

Out [] = 15

In[]:=fxx*fyy-fxy^2>0

Out [] = True

ΑΡΑ

In[]:= fmin=f [-8/5,-6/5]

Out [] =1226/5

2.4. Εφαρμογές παραγώγων στα οικονομικά προβλήματα

Οι εφαρμογές των παραγώγων στην οικονομική επιστήμη εστιάζονται κυρίως στην έννοια της ελαστικότητας μιας συνάρτησης και στο οριακό έσοδο προϊόντος στα μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων, όπως των εσόδων, του κόστους και των κερδών.

2.4.1. Ελαστικότητα συνάρτησης

Η ελαστικότητα μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στην εφαπτομένη μεταβλητή μιας συνάρτησης που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής . Στην οικονομική επιστήμη υπάρχουν διάφορα είδη ελαστικότητας όπως η ελαστικότητα ζήτησης, προσφοράς και εισοδήματος.

2.4.1.1 Ελαστικότητα Ζήτησης

Σύμφωνα με το νόμο της ζήτησης όταν η τιμή ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας μεταβληθεί , τότε η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού ή της υπηρεσίας μεταβάλλεται προς την αντίθετη διεύθυνση με την προϋπόθεση ότι όλες οι άλλες μεταβλητές που επηρεάζουν τη ζήτηση παραμένουν σταθερές. Η έννοια της ελαστικότητας ζήτησης χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει πως ακριβώς η μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού επηρεάζει τα συνολικά έσοδα των επιχειρήσεων ή ισοδύναμα τις δαπάνες των νοικοκυριών για το αγαθό του οποίου η τιμή έχει μεταβληθεί. Η ελαστικότητα ζήτησης μπορεί να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τύπο :

N = - ——————————

Με μαθηματικούς όρους η ελαστικότητα ζήτησης γράφεται :

N= - —   ——

Συνεπώς, ο τύπος της ελαστικότητας σημείου μπορεί να ξαναγραφεί ως :

N = - ——

Όπου — είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης q= f(q)

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι q= 20-4q

Α) Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης

Β) Να υπολογιστεί η ελαστικότητα ζήτησης για q=4

Γ)Να δοθεί οικονομική ερμηνεία στην απάντηση της ερώτησης Β

Δ)Για ποια τιμή η ελαστικότητα ζήτησης γίνεται μοναδιαία

<u>Λύση</u>

Α) Η ελαστικότητα ζήτησης είναι :

Β) Για p=4 έχουμε N=

Γ) Ελαστικότητα ζήτησης ίση με 4 σημαίνει ότι όταν η τιμή μεταβάλλεται κατά ένα τις εκατό η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά τέσσερα τις εκατό προς την αντίθετη κατεύθυνση . Η ζήτηση του αγαθού, με άλλα λόγια είναι ελαστική.

Δ) Για n= 1 έχουμε 1= άρα p=2,5

<u>Στο mathematica η λύση είναι :</u>

```
In[]:= q=f [p_] =20-4*p
Out [] = 20-4 p

In[]:= a [p_] =-D [f[p], p]*p/q
```

Out [] = $\frac{4p}{20-4p}$

```
In[]:= a [4]
Out [] = 4

In[]:= solve [a[p] ==1, p]
Out [] = {{p→5/2}}
In[]:= N [%]
Out [] = {{p →2.5}}
```

a[p] ειναι η συναρτηση της ελαστ. ζητησης

2.4.1.2 Ελαστικότητα Ζήτησης και Συνολικά Έσοδα

Τα συνολικά έσοδα (R) μιας επιχείρησης από τις πωλήσεις ενός αγαθού (ή μιας υπηρεσίας) είναι ίσα με το γινόμενο της τιμής του αγαθού (ρ) επί την ποσότητα (q) που πουλήθηκε, δηλαδή : R= p

Όταν η ζήτηση ενός αγαθού είναι ανελαστική και η τιμή του αγαθού αυξηθεί, η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί κατά ένα μικρότερο ποσοστό. Κατά συνέπεια τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα αυξηθούν. Ομοίως αν η τιμή του αγαθού μειωθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό , η ζητούμενη ποσότητα θα αυξηθεί κατά ένα μικρότερο ποσοστό και συνεπώς τα συνολικά έσοδα θα μειωθούν. Αν τώρα υποθέσουμε ότι η ζήτηση του αγαθού είναι ελαστική μια αύξηση της τιμής του ένα τις εκατό οδηγεί σε μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά περισσότερο από ένα τις εκατό. Συνεπώς τα συνολικά έσοδα θα είναι λιγότερα μετά την αύξηση της τιμής. Ομοίως αν η τιμή ελαττωθεί η ζητούμενη ποσότητα αυξάνεται κατά μεγαλύτερο ποσοστό και οδηγεί σε υψηλότερα έσοδα. Αν τέλος η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού είναι ίση με τη μονάδα τότε τα συνολικά έσοδα μένουν αμετάβλητα, επειδή μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή σε οποιαδήποτε διεύθυνση θα αντισταθμιστεί από μια ισόποση ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα προς την αντίθετη κατεύθυνση.

2.4.1.3. Ελαστικότητα Προσφοράς

Η ελαστικότητα της προσφοράς είναι έννοια παρόμοια μ' αυτήν της ζήτησης . Η ελαστικότητα προσφοράς μετρά την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η ελαστικότητα προσφοράς έχει θετική τιμή που σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και την τιμή, είναι πάντα ευθέως ανάλογη λόγω της θετικής κλίσης της καμπύλης προσφοράς. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως με τη ζήτηση η ελαστικότητα προσφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως : e= — −

Η ελαστικότητα προσφοράς χρησιμοποιείται από τους οικονομολόγους για να υπολογίσουν την ευαισθησία της προσφερόμενης ποσότητας σε μια καθορισμένη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής.

Η μέτρηση της ελαστικότητας προσφοράς είναι απαραίτητη ειδικά σε ορισμένους κλάδους, οπού οι παραγωγικοί συντελεστές μεταφέρονται από την παραγωγή ενός προϊόντος στην παραγωγή ενός άλλου εξαιτίας μιας μεταβολής στη τιμή. Τα πιο συχνά παραδείγματα αναφέρονται στη γεωργία. Π.χ. μια άνοδος της τιμής του σιταριού σε σχέση με τη τιμή του καλαμποκιού οδηγεί σε αυξημένη παραγωγή σιταριού. Αν η ποσοστιαία μεταβολή στη προσφερόμενη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από τη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή, λέμε ότι το αγαθό είναι ελαστικό. Αν ισχύει το αντίθετο το αγαθό είναι ανελαστικό. Τέλος, όταν υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής και της προσφερόμενης ποσότητας λέμε ότι η ελαστικότητα είναι μοναδιαία.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ελαστικότητες προσφοράς των ακόλουθων συναρτήσεων προσφοράς ,

Α) q= 5+3p

Β) q= 3p

Γ) q=-10+4p

Δ) να γενικεύσετε τα αποτελέσματα

Λύση :

Α) e=(dp/dp)(p/q)=3(p/(5+3p). Η καμπύλη προσφοράς είναι ανελαστική για όλες τις τιμές.

Β) e=3[p/3p]=1. Η καμπύλη προσφοράς έχει μοναδιαία ελαστικότητα για όλες τις τιμές.

Γ) e=4p[p/(-10+4p)]. Η καμπύλη προσφοράς είναι ελαστική για κάθε τιμή.

Δ) Όταν στη συνάρτηση προσφοράς q=a+bp το a>0 , η συνάρτηση είναι ανελαστική, αν α=0, η ελαστικότητα είναι ίση με τη μονάδα για κάθε τιμή και αν τέλος, α<0, έχουμε ελαστική συνάρτηση προσφοράς για κάθε τιμή p>a .

2.4.2 Η Συνάρτηση Παραγωγής

Η συνάρτηση συνολικής παραγωγής (TP) στην πιο απλή της μορφή περιλαμβάνει μόνο ένα συντελεστή παραγωγής (ας υποθέσουμε εργασία). Έτσι έχουμε :

TP= F(1)

Στη συνάρτηση παραγωγής συνήθως αποδίδονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

1) Παραγωγή μπορεί να υπάρξει μόνο όταν υπάρχει εισροή εργασίας, δηλαδή το συνολικό (total product) , TP=0 όταν 1=0.
2) Η πρώτη παράγωγος του συνολικού προϊόντος ως προς την εργασία είναι θετική,
   dTP / d1 . Δηλαδή η μεταβολή που προκαλείται στο συνολικό προϊόν από τη μεταβολή της εργασίας, ή αλλιώς το οριακό προϊόν της εργασίας, είναι θετική.
3) Οι ρυθμοί αύξησης του προϊόντος είναι υψηλοί μέχρι ένα ορισμένο επίπεδο απασχόλησης. Μετά οι αυξήσεις του προϊόντος μειώνεται σταδιακά. Με άλλα λόγια παρατηρούνται φθίνουσες αποδόσεις του συντελεστή εργασίας.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση TP=-3

A) Να βρεθούν τα ακρότατα της
B) Να βρεθούν τα ακρότατα του μέσου προϊόντος

<u>Λύση:</u>

A) Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο απαιτούν :

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν για την τιμή L=59

Άρα το προϊόν μεγιστοποιείται , όταν απασχολούνται 59 εργάτες.

Β) Οι συνθήκες πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση του μέσου προϊόντος απαιτούν :

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι :

Επομένως, το μέσο προϊόν μεγιστοποιείται, όταν απασχολούνται 45 εργάτες.

2.4.3 Οριακό Έσοδο Προϊόντος

Η συνάρτηση παραγωγής όταν έχουμε μόνο μια εισροή (εργασία) γράφεται ως q=q(1). Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι p=p(q) . Συνεπώς να συνολικά έσοδα της επιχείρησης μπορούν να θεωρηθούν ως μια συνάρτηση του αριθμού των εργαζομένων, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε τα συνολικά έσοδα ως προς τον αριθμό των εργαζομένων. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε :

Από τον ακόλουθο κανόνα έχουμε : — — — — — — —=—

—

Η παράγωγος των συνολικών εσόδων ως προς τον αριθμό των εργαζομένων καλείται οριακό έσοδο προϊόντος. Όπως συμβαίνει με όλα τα οριακά μεγέθη έτσι και αυτό χρησιμοποιείται από τους επιχειρηματίες για να αποφασίσουν τον άριστο αριθμό των εργαζομένων που απασχολούνται στην επιχείρηση.

Παράδειγμα

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος μιας βιομηχανίας περιγράφεται από τη συνάρτηση :

P=

Και η συνάρτηση παραγωγής από :

Q=

Να υπολογιστεί το ΟΕΠ για 1=5

Λύση

και

Αντικαθιστούμε το q με το ίσο του και παίρνουμε

(p+q (-

Όταν 1=5 τότε q Επομένως ,

Στο mathematica η λύση είναι :

In[]:= $p[q[l\_]] = \frac{520}{q[l]+3}$

Out [] = $\frac{520}{3 + \frac{10\,l^2}{\sqrt{8+l^2}}}$

In[]:=q[l_]=(10 l^2)/$\sqrt{l^2 \quad 8}$

Out [] = (10 l^2)/$\sqrt{8 \quad l^2}$

In[]:= D [q[l], l]

Out [] = $$-\frac{10\,l^3}{(8+l^2)^{3/2}}+\frac{20\,l}{\sqrt{8+l^2}}$$

In[]:= Factor [%]

Out [] = $$\frac{10\,l\,(16+l^2)}{(8+l^2)^{3/2}}$$

In[]:= D [p[q], l]

Out [] = $$-\frac{520\left(-\frac{10\,l^3}{(8+l^2)^{3/2}}+\frac{20\,l}{\sqrt{8+l^2}}\right)}{\left(3+\frac{10\,l^2}{\sqrt{8+l^2}}\right)^2}$$

In[]:= r [l_] =p[q]*q[l]

Out [] = $$\frac{5200\,l^2}{\sqrt{8+l^2}\left(3+\frac{10\,l^2}{\sqrt{8+l^2}}\right)}$$

In[]:= f [l_] =D[r[l], l]

Out [] = $$-\frac{5200\,l^2\left(-\frac{10\,l^3}{(8+l^2)^{3/2}}+\frac{20\,l}{\sqrt{8+l^2}}\right)}{\sqrt{8+l^2}\left(3+\frac{10\,l^2}{\sqrt{8+l^2}}\right)^2}-\frac{5200\,l^3}{(8+l^2)^{3/2}\left(3+\frac{10\,l^2}{\sqrt{8+l^2}}\right)}+\frac{10400\,l}{\sqrt{8+l^2}\left(3+\frac{10\,l^2}{\sqrt{8+l^2}}\right)}$$

In[]:= f [5]

Out [] = $-\frac{266\,500\,000}{1089\left(3+\frac{250}{\sqrt{33}}\right)^2}+\frac{1\,066\,000}{33\sqrt{33}\left(3+\frac{250}{\sqrt{33}}\right)}$

In[]:= N [%]

Out [] = 7.79541

2.4.4 Η συνάρτηση κόστους

Στην σύγχρονη εποχή οι επιχειρήσεις θεωρούνται ότι παράγουν με στόχο να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους. Τα κέρδη μιας επιχείρησης υπολογίζονται από τη διαφορά μεταξύ συνολικών εσόδων και συνολικού κόστους. Το συνολικό κόστος (total cost) συμπεριλαμβάνει και το εναλλακτικό κόστος (opportunity cost).Η συνάρτηση κόστους προκύπτει από τη συνάρτηση παραγωγής δηλαδή το συνολικό κόστος εξαρτάται από τη παραγόμενη ποσότητα. Υποθέτουμε τη συνάρτηση παραγωγής που χρησιμοποιεί ως μόνη εισροή το συντελεστή εργασία. Επίσης, υποθέτουμε ότι η αμοιβή κάθε μονάδας εργασίας(ώρες ή αριθμός εργατών) είναι ίση με w. Τότε το συνολικό κόστος είναι :

$C= wL+F$

Όπου C= συνολικό κόστος, V= wL ή μεταβλητό κόστος, F= σταθερό κόστος

Η διάκριση ανάμεσα σε σταθερό και μεταβλητό κόστος βασίζεται στο αν το κόστος μεταβάλλεται. Έτσι λοιπόν το εργατικό κόστος, οι πρώτες ύλες, τα μεταφορικά κλπ θεωρούνται μεταβλητό κόστος. Αντίθετα, το σταθερό κόστος δεν εξαρτάται από την παραγωγή , δηλαδή η επιχείρηση το πληρώνει ανεξάρτητα από το αν παράγει ή όχι, όπως τα ενοίκια, μηχανήματα, ασφάλιστρα κλπ.

Αφαιρούμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους με την παραγόμενη ποσότητα και παίρνουμε :

— — —

Δηλαδή το μέσο συνολικό κόστος (AC=C) είναι ίσο με το άθροισμα του μέσου μεταβλητού (AVC=– και του μέσου σταθερού κόστους (AFC=– . Παραγωγίζοντας το συνολικό κόστος ως προς το προϊόν παίρνουμε το οριακό κόστος(marginal cost)

MC= — —— —— όπου MC είναι το οριακό κόστος. Αλλά dC/dL=w, από την υπόθεση που κάναμε ότι μόνο μεταβλητό κόστος συνάρτησης είναι η εργασία .Επίσης DQ/DL είναι η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας (MP). Συνεπώς το οριακό κόστος, ο μισθός και η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας συνδέονται με τη σχέση : MC=—

Βλέπουμε την αντίστροφη σχέση μεταξύ της οριακής παραγωγικότητας και του οριακού κόστους όπως επίσης την ευθέως ανάλογη σχέση ανάμεσα στον ονομαστικό μισθό και το οριακό κόστος.

2.4.4.1 Συνάρτηση Μικτού Κόστους

Υποθέτουμε μια επιχείρηση που παράγει αγαθά χ και y . Το συνολικό κόστος C αυτών των μονάδων είναι η συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας των x και y και καλείται συνάρτηση μικτού κόστους. Αν γράψουμε μια τέτοια συνάρτηση ως c=f(x,y) τότε dc/dx καλείται μερικό οριακό κόστος ως προς το χ και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το y όταν το χ κρατείτε σταθερό. Ταυτόχρονα το dc/dy είναι η μερική οριακή παράγωγος ως προς y και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το y όταν το χ κρατείτε σταθερό.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε μια επιχείρηση που παράγει τα αγαθά χ και y . Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μικτού κόστους αυτών των δύο αγαθών είναι :

C=f(x,y) = 6

Να προσδιοριστεί το οριακό μερικό κόστος παραγωγής του κάθε αγαθού, όταν χ=100 και y=50 .

Λύση

Επομένως στο σημείο (100, 50) θα έχουμε :

Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας τη παραγωγή του αγαθού χ από 100 σε 101 μονάδες, διατηρώντας τη παραγωγή του αγαθού y στις 50 μονάδες αυξάνεται το συνολικό κόστος κατά 1550. Όσον αφορά το αγαθό y , αυξάνοντας τη παραγωγή του από 50 σε 51 μονάδες κρατώντας την παραγωγή του χ στις 100 μονάδες θα οδηγήσει σε αύξηση του κόστους κατά 1700.

Στο mathematica η λύση είναι :

In[]:= c [x_, y_] =6x*x+7x*y+10y*y+1000

Out [] =1000+6 x^2+7 x y+10 y^2

In[]:= c1 [x_, y_] =D[c[x, y], x]

Out [] = 12 x+7 y

In[]:= c2 [x_, y_] =D[c[x, y], y]

Out [] = 7 x+20 y

In[]:= c1 [100, 50]

Out [] = 1550

In[]:= c2 [100, 50]

Out [] = 170

2.4.5 Μεγιστοποίηση των κερδών

Τα κέρδη μιας επιχείρησης είναι η διαφορά ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και στο συνολικό κόστος. Δηλαδή, Π(q)=R(q)-C(q)

Για την μεγιστοποίηση των κερδών, η αναγκαία συνθήκη απαιτεί το μηδενισμό της $1^{ης}$ παραγώγου της συνάρτησης των κερδών

— — —

Επομένως,

— —

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι τα κέρδη μεγιστοποιούνται στο σημείο που η κλίση της συνάρτησης των συνολικών εσόδων ισούται με τη κλίση της συνάρτησης του συνολικού κόστους. Με άλλα λόγια τα κέρδη της επιχείρησης μεγιστοποιούνται όταν η επιχείρηση παράγει τόσο προϊόν όσο είναι αρκετό για να εξισώσει το οριακό έσοδο (marginal revenue) με το οριακό κόστος (marginal cost)

— —

Η ικανή συνθήκη για τη μεγιστοποίηση των κερδών απαιτεί η $2^{η}$ παράγωγος της συνάρτησης των κερδών να είναι αρνητική, δηλαδή — .

Παράδειγμα

Αν η αναζήτηση ενός αγαθού περιγράφεται από τη συνάρτηση

q=10-0,5p και το συνολικό κόστος παραγωγής του από τη συνάρτηση TC=0,5

α) να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.

Β)Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος.

Γ) Να βρεθεί το μέσο σταθερό κόστος που αντιστοιχεί στο επίπεδο παραγωγής (Β) .

Δ) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Λύση:

Α) Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι p=20-2q, επομένως για τα συνολικά έσοδα έχουμε:

— —(20q-2

Η δεύτερη παράγωγος δίνει :

Άρα οι συνθήκες δεύτερης τάξης για μέγιστο ικανοποιούνται.

Β) Η συνάρτηση μέσου κόστους είναι :

Αν θέσουμε τη παραγωγό της ίση με το μηδέν :

Από τις δύο ρίζες φυσικά δεχόμαστε τη θετική, άρα το μέσο κόστος ελαχιστοποιείται για q μονάδες. Εξετάζοντας τις συνθήκες δεύτερης τάξης βρίσκουμε :

Γ) για την εύρεση του σταθερού κόστους θέτουμε στη συνάρτηση κόστους για q=14 είναι :

Δ) Η συνάρτηση κέρδους είναι :

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο δίνουν :

Και οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται :

3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

3.1.ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Η ολοκλήρωση μιας συνάρτησης δεν είναι τίποτε άλλο παρά η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης πιο συγκεκριμένα μια παραγωγίσιμη συνάρτηση y=f(x) θα λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα ή παράγουσα της συνάρτησης y=f(x), αν ισχύει F'(x) = f(x). Έτσι π.χ. μια παράγουσα της f(x)= είναι ή F(x)= — αφού

(—)' = – ·4 = .

Γενικά, αν η f(x) είναι μια παράγουσα της f(x), τότε και κάθε άλλη συνάρτηση της μορφής f(x) + με R είναι επίσης παράγουσα της f(x) αφού [F(x) + C] ' = F'(x) =F(x) το αόριστο ολοκλήρωμα της y=f(x) συμβολίζεται με

Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον μαθηματικό Leibniz τον 17^{o} αιώνα .Έτσι για το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε F(x)= dx = — .

Από το παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι [. Η σταθερά της ολοκλήρωσης μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα αν μας δοθεί κάποια αρχική συνθήκη. Έτσι αν στο προηγούμενο ολοκλήρωμα γνωρίζουμε π.χ. ότι F(x) = 2 αμέσως βρίσκουμε –

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

1.
2. ——
3. — — –
4.
5.
6.

7.

8. ——

9. ——

10. ——

11. ——

12. ——

3.2.ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

3.2.1 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ

Καταρχήν παρατηρούμε ότι αν είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και x1,x2,… (ν N), τότε η συνάρτηση|(x)=K1 είναι μια παράγουσα της K1f1(x)+K2f2(x)+… Kνfν(x) πράγματι I'(x)=k1 (

Κατά συνέπεια από τον ορισμό του ολοκληρώματος προκύπτει ότι

Με τον τύπο αυτό επιτυγχάνεται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης που είναι ή μπορεί να γράφει ως άθροισμα απλούστερων συναρτήσεων.

3.2.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Αν f(x) και g(x) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, από την σχέση d(fg)=(fg)'dx=(f'g+fg') dx = gf' dx +fg' dx παίρνουμε d(fg)=gdf+fdg.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε

Fg – ή

3.2.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Τα ολοκληρώματα της μορφής —— Dx όπου f(x) και g(x) είναι μη μηδενικές πολυωνυμικές συναρτήσεις, υπολογίζοντας συνθήκες με ανάλυση του κλάσματος —— σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων.

3.2.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Η μέθοδος αυτή δεν είναι παρά μια απλή αλλαγή μεταβλητής. Εφαρμόζεται όταν μετά την αλλαγή της μεταβλητής απαλείφεται η παλαιά μεταβλητή και τα ολοκληρώματα γίνεται απλούστερο. Δεν υπάρχει κανένας γενικός κανόνας που να εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή απλά χρειάζεται μια σχετική εμπειρία για την εύρεση της κατάλληλης κάθε φοράς μεταβλητής.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

Λύση :

Σ' αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε επειδή $-dx =$

Θα ισχύει και το αντίστροφο. Εδώ εφαρμόζουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες .

θέτοντας $u=$ $-$

$-$

<u>Στο Mathematica η λύση είναι :</u>

In[]:= $\int x * \mathrm{Log}[x]\, dx$

Out [] = $-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} x^2 \mathrm{Log}[x]$

Παράδειγμα

Να ολοκληρωθεί το ολοκλήρωμα: – –

<u>Λύση :</u>

– – =4 – – —

<u>Ενώ στο Mathematica η λύση είναι :</u>

In[]:= $\int \left(4e^x + \frac{3}{x} - \frac{1}{5} x^2\right) dx$

Out [] = $4e^x - \frac{x^3}{15} + 3\,\mathrm{Log}[x]$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

Λύση:

dx- ή

6

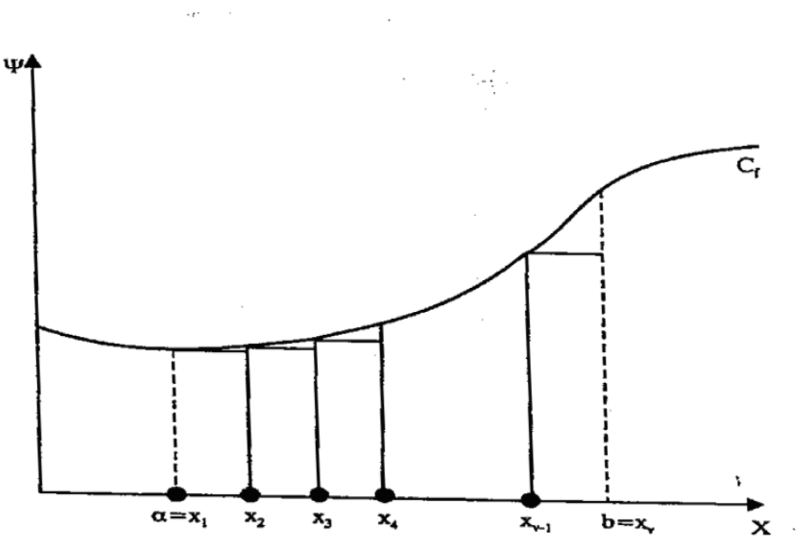
Ενώ στο Mathematica η λύση είναι :

In[]:= $\int (6x^2 - 4x + 7)\, dx$

Out [] =7 x-2 x^2+2 x^3

3.3 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ο ολοκληρωτικός λογισμός έχει τις ρίζες του στην προσπάθεια για την εύρεση μιας γενικής μεθόδου για τον υπολογισμό των εμβαδών διαφόρων σχημάτων. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό Κ της επιφάνειας που περικλείεται από τις ευθείες x=α, x=d και η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=f(x) που είναι ορισμένη και συνεχής στο [α,d]



Για το λόγο αυτό χωρίζουμε το διάστημα [α,d] σε ν υποδιαστήματα [χ1,χ2], [χ3,χ4],…, [xν-1,xν] που έχουν το ίδιο μήκος.

Δx= x2-x1=x3-x2=x4-x3= … xν-xν-1 και κατασκευάζουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα πλευράς Δx, τέτοια ώστε το ύψος του καθενός να είναι ίσο με την ελάχιστη τιμή της y=f(x)στο αντίστοιχο υποδιάστημα. Θέτουμε m:=min f(x) στο διάστημα [x:-1, x:]. Γίνεται φανερό ότι όταν ν τότε Δx 0 , δηλαδή το Δx γίνεται όπως λέμε στα μαθηματικά, απειροστό και το συμβολίζουμε με dx. Στην περίπτωση αυτή το άθροισμα : Δx των εμβαδών όλων των παραπάνω ορθογωνίων πλησιάζει το ζητούμενο εμβαδό Ε.

Μπορούμε να γράφουμε Ε= . Αντικαθιστώντας το σύμβολο του απείρου αθροίσματος με το σύμβολο (από την λέξη sum= άθροισμα) μπορούμε να γράψουμε Ε= . Η ποσότητα ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της y=f(x) στο διάστημα [α,b].

Παρατηρούμε δηλαδή ότι αντίθετα με το αόριστο ολοκλήρωμα της y=f(x) που είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής χ, το ορισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα [α,b] έχει μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή.

Η τιμή αυτή μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού (των Newton-Leibniz). Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, αν η f(x) είναι μια παράγουσα της f(x) στο διάστημα [α,b], τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ίσο με F(x)-F(a), ή όπως συνήθως γράφουμε συμβολικά = [F(x)]

Τα α και b ονομάζονται κατώτερο και ανώτερο όριο της ολοκλήρωσης αντίστοιχα. Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος ανάγεται στον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος

Ακόμη προκύπτει αμέσως ότι για τα ορισμένα ολοκληρώματα οι εξής χρήσιμες ιδιότητες.

i)

ii)

iii) Αν $\alpha \leq c \leq b$ τότε

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα —

Λύση

Αντικαθιστούμε u= και du =(−) dx

Τα όρια της ολοκλήρωσης μετά την αντικατάσταση θα είναι u(1)= και

u(e)= , άρα θα έχουμε : — — — –

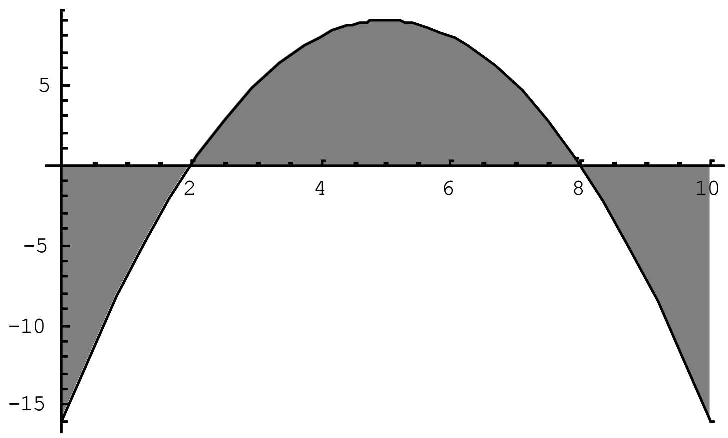
Επίλυση στο mathematica :

In[]:= $\int_1^e$ Log[x]/x ⅆx

Out [] =1/2

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση : f(x)=- στο διάστημα [α,2]



Λύση :

Μετά από αντικατάσταση παίρνουμε :

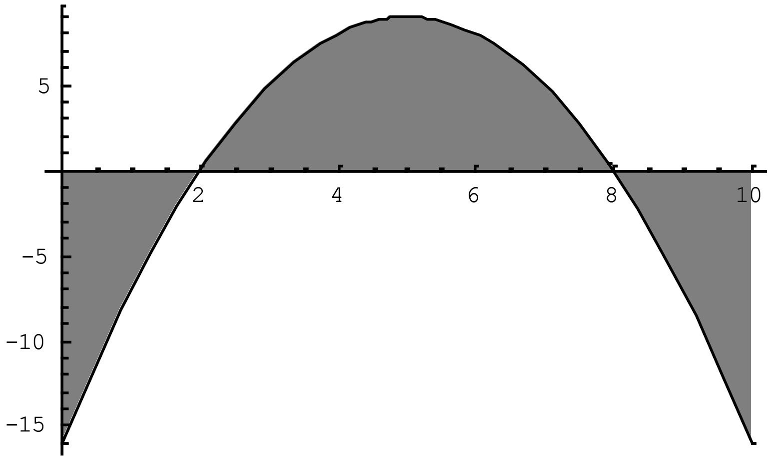
E1=- –+ ——-(16)(2)]-0=—

Επίλυση στο mathematica :

In[]:= f [x_] =-x*x+10x-16

Out [] =$-16+10\ x-x^2$

In[]:= FilledPlot [f[x], {x, 0, 10}]



Out [] = -Graphics-

In[]:= $Em1 = \int_2^8 f[x]\,dx$

Out [] = 36

In[]:= $Em2 = -\int_0^2 f[x]\,dx$

Out [] =44/3

In[]:= $Em3 = -\int_8^{10} f[x]\,dx$

Out [] =44/3

In[]:= $Em = -\int_0^2 f[x]\,dx + \int_2^8 f[x]\,dx + \left(-\int_8^{10} f[x]\,dx\right)$

Out [] =196/3

In[]:= N [%]

Out [] = 65.3333

(Em1 ειναι το εμβαδο απο 2 εως 8,Em2 ειναι το εμβαδο απο 0 εως 2,Em3 ειναι το εμβαδο απο 8 εως 10,Em είναι το ολίκο εμβαδο)

3.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Είδαμε πως, η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι δυο αντίστροφες διαδικασίες. Έτσι αν γνωρίζουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης μπορούμε μέσω της ολοκλήρωσης να υπολογίσουμε την αρχική συνάρτηση. Αυτή η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην παράγωγο μιας συνάρτησης και στην ολοκλήρωση της, μας βοηθά στη λύση πολλών προβλημάτων που παρουσιάζονται στα οικονομικά. Αν τα οικονομικά φαινόμενα μπορούν να διατυπωθούν με συναρτήσεις, τότε ασφαλώς μπορούμε να βρούμε τους ρυθμούς μεταβολής των συναρτήσεων, οι οποίες ονομάζονται οριακές μεταβολές, για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβολής. Όπως επίσης αν γνωρίζουμε τους ρυθμούς μεταβολής, μπορούμε να καταλήξουμε στην αρχική συνάρτηση.

Παράδειγμα

Ο ρυθμός απόσβεσης ενός μηχανήματος είναι 220(t-10) δραχμές το χρόνο. Αν το μηχάνημα αγοραστεί καινούργιο στην τιμή των 120.000 δραχμών, ποια θα είναι η αξία του σε μια χρόνια ;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η συνάρτηση απόσβεσης του μηχανήματος είναι :

Θέτοντας τη συνάρτηση απόσβεσης (για t=0) ίση με τη τιμή αγοράς του μηχανήματος, υπολογίζουμε τη σταθερά ποσότητα :

120.000=110( )-2.200(0) + C και C=120.000

Άρα για t=10 έχουμε S=110( )-2200 (10) + 120.000

S=109.000

Στο mathematica η λύση είναι :

In[]:= p=120000

Out [] = 120000

In[]:= $s[t\_] = \int 220(t-10)\,dt + c$

Out [] =c-2200 t+110 t^2

In[]:= Solve[s [0] ==p, c]

Out [] = {{c $\rightarrow$120000}}

In[]:= c=120000

Out [] = 120000

In[]:= s [10]

Out [] = 109000

Παράδειγμα

Η οριακή πρόοδος (MR) μιας επιχείρησης είναι MR =1-

Να υπολογιστούν:

A)Η συνολική πρόοδος R

B) Η συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης (y=f(x))

A) R= – –

Αν η επιχείρηση δεν παράγει τίποτε τότε τα συνολικά της έσοδα θα είναι μηδέν, άρα και η σταθερά c=0

B) Γνωρίζουμε ότι R=yx επομένως y=–

Άρα η μέση πρόοδος (AR) και η ζήτηση είναι ταυτόσημες συναρτήσεις. Επομένως,

−=*AR*=*y*=*10*-*(*− −

Ενώ στο mathematica η λύση είναι :

In[]:= MR [x_] =10-3x-4x*x

Out [] =$10-3\ x-4\ x^2$

In[]:= $R[x\_] = \int MR[x]\,dx + c$

Out [] = $c + 10x - \frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3}$

In[]:= Solve[R [0] ==0, c]

Out [] = {{c →0}}

In[]:= c=0

Out [] = 0

APA

In[]:= R[x]

Out [] = $10x - \frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3}$

In[]:= AR=R[x]/x

Out [] = $\frac{10x - \frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3}}{x}$

In[]:= AR=Simplify [Out [24]]

Out [] = $\frac{1}{6}\left(60 - 9x - 8x^2\right)$

3.4.1. ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΤΟΥ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

Στην έννοια της ζήτησης υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στην τιμή ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας και στη ζητούμενη ποσότητα. Ο καταναλωτής υποθέτοντας όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές ζητάει μεγαλύτερη ποσότητα για χαμηλότερες τιμές και μικρότερη ποσότητα γι υψηλότερες τιμές. Όταν όμως ο καταναλωτής αγοράζει μια ποσότητα % ενός αγαθού, πληρώνει την τιμή που αντιστοιχεί στην ποσότητα % αλλά χρεώνεται την ίδια τιμή για ποσότητες μικρότερες από %. Αυτό το υποθετικό πλεονέκτημα που αποκτά ο καταναλωτής στην οικονομική ανάλυση λέγεται πλεόνασμα του καταναλωτή. Μέσω του ολοκληρωτικού λογισμού μπορούμε να υπολογίσουμε το πλεονέκτημα του καταναλωτή και δίνεται από τη σχέση :

ΠΚ=

Παράδειγμα

Η συνάρτηση ζήτησης για κάποιο αγαθό είναι p=8(65- για κάθε μονάδα προϊόντος . Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή για τη τιμή των 320 ν.μ.

<u>Λύση :</u>

Η ποσότητα που πωλείται στη τιμή των 320 ν.μ. είναι : 320= 520-8 και q=5. Η αρνητική τιμή απορρίπτεται. Επομένως, το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι :

ΠΚ= –

3.4.2. ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Όπως ο καταναλωτής έτσι και ο παραγωγός έχε ένα πλεόνασμα, που ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της τιμής ισορροπίας και της τιμής στην οποία θα ήταν πρόθυμος να διαθέσει το προϊόν του. Το πλεόνασμα του παραγωγού υπολογίζεται ως εξής :

ΠΠ=pq -

Παράδειγμα :

Αν η συνάρτηση προσφοράς +10 και η τιμή ισορροπίας είναι ρ=1^{ος} να υπολογιστεί το ΠΠ.

Λύση :

Λύνουμε ως προς την ποσότητα ισορροπίας και παίρνουμε και q=

Η αρνητική ποσότητας απορρίπτεται. Επομένως έχουμε :

ΠΠ=(19)(3)= —

Ενώ στο mathematica η λύση είναι :

In[]:=s [q_] =q^2+10
Out [] =10+q^2

In[]:= p=19
Out [] = 19

In[]:= Solve[s[q] ==19]
Out [] = {{q→-3}, {q→3}}

Αφού το q ∂ίναι ποσότητα, θα ∂ίναι θ∂τικο.Άρα q=3

In[]:= $\Pi\Pi = 19*3 - \int_0^3 s[q]\,dq$

Out [] = 18

3.4.3. ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΡΡΟΗΣ

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του ορισμένου ολοκληρώματος είναι ο υπολογισμός της παρούσας αξίας ενός περιουσιακού στοιχείου που δημιουργεί εισόδημα με ένα ορισμένο ρυθμό(επιτόκιο) σε μια καθορισμένη χρονική περίοδο.Η παρούσα αξία ενός περιουσιακού στοιχείου αναφέρεται στο χρηματικό ποσό που χρειάζεται να καταθέσει σήμερα σε ένα λογαριασμό, ώστε να δημιουργήσει το ίδιο εισόδημα που δημιουργεί το περιουσιακό στοιχείο στην ίδια χρονική περίοδο. Η παρούσα αξία χρηματορροής υπολογίζεται ως εξής :

P= όπου ρ= παρούσα αξία

F= μελλοντική αξία

i = επιτόκιο

t = χρόνος

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παρούσα αξία των 270 ν.μ. που καταβάλλονται κάθε χρόνο για 3 χρόνια , όταν το επιτόκιο είναι 12% και ο ανατοκισμός είναι συνεχής.

<u>Λύση:</u>

Αντικαθιστούμε στον τύπο της παρούσας αξίας και παίρνουμε :

Παράδειγμα

Ο κάτοχος ενός περιουσιακού στοιχείου παίρνει κάθε χρόνο κέρδη σύμφωνα με την συντήρηση f(t)=1500+580 το χρόνο. Αν η διάρκεια ζωής του περιουσιακού στοιχείου είναι 5 χρόνια, το επιτόκιο γι αυτό το χρονικό διάστημα παραμένει αμετάβλητο και ίσο με 10% ενώ ο ανατοκισμός είναι συνεχής, να βρεθεί η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου.

<u>Λύση</u>

Αντικαθιστούμε στον τύπο της παρούσας αξίας και έχουμε :

P=

[——

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της παράστασης εφαρμόζουμε την τεχνική ολοκλήρωσης κατά παράγοντες σύμφωνα με τον τύπο

– –

Επειδή n=1 και a=0,10 τότε :

580(—t ——

Προσθέτουμε και τους δύο όρους και έχουμε :

P= 11.134

Ενώ στο mathematica η λύση είναι:

In[]:= f [t_] =1500+580t
Out [] = 1500+580 t

In[]:= z=5

Out [] = 5

In[]:= ep=0.1

Out [] = 0.1

In[]:= $P = \int_0^5 f[t] * e^{-0.1\,t}\, dt$

Out [] = 11133.9

3.4.4. ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΑΞΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΡΡΟΗΣ

Η μελλοντική αξία F κατάθεσης με συνεχή κεφαλαιοποίηση και επιτόκιο i είναι F=P . Αν υποθέσουμε ότι οι καταθέσεις γίνονται συνεχής για ένα χρονικό διάστημα Τα, η μελλοντική αξία των καταθέσεων υπολογίζεται ως εξής, χωρίζουμε το χρονικό διάστημα που είναι ανοιχτός ο λογαριασμός ο σε n ίσα υποδιαστήματα , το κάθε ένα από τα οποία έχει χρονική διάρκεια 1t (μήνες, εβδομάδες, μέρες κ.τ.λ.). Αν tj συμβολίζει ένα τυχαίο χρονικό υποδιάστημα τότε ισχύει :

Ποσό κατάθεσης = (P) (1t)

Αν τώρα υποθέσουμε ότι όλα τα χρήματα κατατέθηκαν στο χρονικό διάστημα tj, τότε οι καταθέσεις θα μείνουν στο λογαριασμό για το διάστημα Τα-tj χρόνια και επομένως η μελλοντική τους αξία που πραγματοποιήθηκε το χρόνο tj είναι :

Fj=P

Αν δεν ενδιαφερόμαστε για τη μελλοντική αξία μιας και μόνο κατάθεσης στο χρόνο tj , αλλά ενδιαφερόμαστε για τη μελλοντική αξία του αθροίσματος των καταθέσεων σε n ίσα, υποδιαστήματα με μέγεθος Δt το κάθε ένα τότε :

F=

Παρατηρούμε ότι η μελλοντική αξία υπολογίζεται προσεγγιστικά και όχι ακριβώς, επειδή κάθε φορά έχουμε καταθέσεις (P)(Δt) χρημάτων. Η ακρίβεια της προσέγγισης εξαρτάται από το μέγεθος του υποδιαστήματος. Δηλαδή όσο μικρότερο είναι το υποδιάστημα τόσο καλύτερη η προσέγγιση.

Αν n τότε Δt άρα

F=

Παράδειγμα

Έστω ότι σε ένα λογαριασμό γίνονται κάθε χρονιά καταθέσεις ύψους 975. Ο ανατοκισμός είναι συνεχής και το ετήσιο επιτόκιο είναι 15%. Ποια η μελλοντική αξία της κατάθεσης σε 6 χρόνια από σήμερα.

<u>Λύση</u>

F= dt=975

975 ή F=[-— =9487,42

Ενώ στο mathematica η λύση είναι :

In[]:= kat=975
Out [] = 975

In[]:= epit=0.15
Out [] = 0.15

In[]:= $f = \int_0^6 975 * e^{0.15\,(6-t)}\, dt$
Out [] = 9487.42

4. Διαφορικές Εξισώσεις

4.1. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Συνήθεις διαφορική εξίσωση (Δ.Ε) ν- τάξης ονομάζεται κάθε σχέση, που περιέχει μια ανεξάρτητη μεταβλητή χ, μια εξαρτημένη μεταβλητή y=y(x) και παραγώγους της y ως προς χ μέχρι και ν-τάξης, έχει δηλαδή τη μορφή f(x,y,y',y''….

Π.χ. η Δ.Ε.

Είναι μια συνήθης Δ.Ε. $3^{ης}$ τάξης

Υπάρχουν επίσης και Δ.Ε. στις οποίες η εξαρτημένη μεταβλητή είναι συνάρτηση περισσότερων της μιας ανεξάρτητων μεταβλητών. Σε τέτοιου είδους Δ.Ε. εμφανίζονται μερικές παραγώγοι της μεταβλητής αυτής και για το λόγο αυτό ονομάζονται Δ.Ε. με μερικές παραγώγους. Μια τέτοια είναι π.χ. η Δ.Ε.

Αν μια Δ.Ε. ν τάξης μπορεί να γράψει ως πολυώνυμο ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή και τις παραγώγους της, βαθμός της Δ.Ε. λέγεται η δύναμη, στην οποία είναι υψωμένη η ν-οστη παράγωγος.

Έτσι π.χ. η Δ.Ε. (1) είναι πρώτου βαθμού ενώ η Δ.Ε. (

Είναι $2^{ου}$ βαθμού, αν και η πρώτη παράγωγος είναι υψωμένη στην $5^{η}$ δύναμη.

Τέλος στη ΔΕ 3

Δεν μπορούμε να μιλάμε για βαθμό επειδή υπάρχει ο όρος ημy , που δεν μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο.

Γενική λύση μιας Δ.Ε. ν-τάξης, αν υπάρχει ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής y=y (x, c1, c2,… cν) (2) που εξαρτάται από ν αυθαίρετες παραμέτρους c1,c2,…,cν και επαληθεύει ταυτοτικά την Δ.Ε.

Π.χ. η ΔΕ — έχει ως γενική λύση την y(x) = c1x+ c2, η ΔΕ —

Την y(x) = c1

Γίνεται φανερό ότι για κάθε συγκεκριμένη ν-άδα τιμών (c1, c2…, cν) των παραμέτρων, από την εξίσωση (2) προκύπτει μια επίπεδη καμπύλη, που αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=y(x). Κατά συνέπεια η (2) για αυθαίρετες τιμές των παραμέτρων παριστάνει μια οικογένεια καμπυλών.

Έτσι π.χ. η γενική λύση της ΔΕ (3) παριστάνει μια οικογένεια ευθειών , η γενική λύση της ΔΕ (3) παριστάνει μια οικογένεια παραβολών. Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές μας ενδιαφέρει η εύρεση μιας συνάρτησης, η οποία εκτός του ότι πρέπει να επαληθεύει μια ΔΕ, πρέπει επίσης αυτή και οι παραγωγοί της να ικανοποιούν ορισμένες πρόσθετες συνθήκες. Προβλήματα τέτοιου είδους λέγονται προβλήματα αρχικών συνθηκών ή αρχικών τιμών. Έτσι η λύση της ΔΕ (3) που διέρχεται από το σημείο (1,3) και για την οποία ισχύει y’=7, είναι ή y(x)=7x-4 αφού πρέπει να ισχύει y(1)=3=c1+c2 και y’=c1=7.

Οι λύσεις μιας Δ.Ε. που προκύπτουν από τη γενική λύση για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων ονομάζονται μερικές λύσεις ή καμπύλες ολοκλήρωσης της Δ.Ε. Έτσι πχ η y(x)=7x-4 είναι μια καμπύλη ολοκλήρωσης της ΔΕ (3), η y (x)=
της ΔΕ (4) .

Λύσεις μιας ΔΕ που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων c1,c2,…cν ονομάζονται ιδιάζουσες λύσεις.

4.2. Διαφορικές Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Μια ΔΕ $1^{ης}$ τάξης και $1^{ου}$ βαθμού μπορεί να γραφεί υπό διαφορετική μορφή ως A(x,y) dx + B (x,y) dy = 0. Αν η συνάρτηση A(x,y) εξαρτάται μόνο από το χ και η B(x,y) μόνο το y τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται A(χ)dx+B(y)dy=0(1)

Η ΔΕ (1) είναι μια ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές και η γενική της λύση βρίσκεται αμέσως με ολοκλήρωση. Έχουμε δηλαδή

Για παράδειγμα η ΔΕ χ(1+ —

Με διαίρεση και των δύο μελών της δια (1+ γράφεται

—— ——— ή —— ——

Οπότε ολοκληρώνοντας προκύπτει —— ——=c ή

—— —— *ή* ——— ——— *ή*

Όπου

Άρα

Ορισμένες ΔΕ χωρίς να είναι χωριζόμενων μεταβλητών μπορούν να λυθούν με σχηματισμό ομάδων όρων που μπορούν να ολοκληρωθούν άμεσα.

Π.χ. η ΔΕ — γράφεται ή

Ή , οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε

ή — —

Μια ΔΕ που δεν λύνεται άμεσα, μπορεί ίσως να ολοκληρωθεί μετά από πολλαπλασιασμό επί κάποια κατάλληλη συνάρτηση των χ και y . Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε.

Για παράδειγμα η ΔΕ — γράφεται

Ή

Η παράσταση xdy –ydx υποδεικνύει τη χρήση της σχέσης d −

Έτσι πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ (1) επί φ(χ) =— παίρνουμε 2xdx – d (−

Και ολοκληρώνοντας έχουμε −) = c ή −

Άρα y= όπου c1=c

4.3. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε

Μια συνάρτηση f(x,y) λέγεται ομογενής ν – βαθμού αν f(λx λy)= για κάθε λ

Η Δ.Ε A(x, y) dx + B (x, y) dy=0 (1) λέγεται ομογενείς αν οι συναρτήσεις A (x, y) και B (x, y) είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού.

Στην περίπτωση αυτή θέτοντας λ=− προκύπτει ότι A (1, − − A(x,y) ή A (χ,y) = −)

Όπου A − −

Έτσι η (1) μπορεί να γράφει P (− −

Θέτοντας – οπότε dy=d(xυ)= υ dx + xdυ ή (2) ανάγεται σε μια ΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών που λύνεται κατά τα γνωστά.

4.4 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η γενική μορφή μιας γραμμικής Δ.Ε πρώτης τάξης είναι — και έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση d(x) =

Π.χ. στη Δ.Ε. — – –

Πολλαπλασιάζουμε τη Δ.Ε. επί τον ολοκληρωτικό παράγοντα d(x)= και παίρνουμε :

— *ή*

Ή *ή*

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τελικά y = Γενικά ο ολοκληρωτικός παράγοντας μιας Δ.Ε. δεν είναι μοναδικός. Στο προηγούμενο παράδειγμα κάθε συνάρτηση της μορφής c όπου c σταθερά είναι επίσης ολοκληρωτικός παράγοντας. Αρκεί λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τον απλούστερο δυνατό ολοκληρωτικό παράγοντα.

4.5. Δ.Ε. Bernoulli

Κάθε εξίσωση της μορφής — (1) , ν , ν , 1

Ανάγεται σε γραμμική με το μετασχηματισμό Μια τέτοια εξίσωση ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli.

Πράγματι πολλαπλασιάζοντας την (1) επί παίρνουμε —

Ακόμη παραγωγίζοντας την (2) ως προς χ έχουμε (1-ν) — = — ή —

— —

Και αντικαθιστώντας στη (3) παίρνουμε — — ή —

Η (4) είναι μια γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης με άγνωστη συνάρτηση των y και ανεξάρτητη μεταβλητή τη x και λύνεται κατά τα γνωστά.

Π.χ. στη Δ.Ε. — πολλαπλασιάζοντας επί παίρνουμε —

(5)

Θέτοντας έχουμε — — και η (5) γράφεται -— + 4 =χ ή —

(6)

Ο ολοκληρωτικός παράγωντας είναι οπότε από την (6) προκύπτει ότι:

— *ή* *ή d (*

Έτσι ολοκληρώνοντας βρίσκουμε :

–

Παράδειγμα: Να λυθούν με την βοήθεια του mathematica οι παρακάτω εξισώσεις

1) y ‘ + y = 0

In[]:= DSolve[y'[x] +y[x] ==0, y[x], x]

Out [] = {{y[x] → e^{-x} C[1]}}

2) y ‘’ + 3y’+ 5=0

In[]:= DSolve[y''[x]+3y'[x]-5y[x]==0,y[x],x]

Out [] = $\left\{\left\{y[x] \to e^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)x} C[1] + e^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)x} C[2]\right\}\right\}$

3) t’=

In[]:= $\text{DSolve}\left[\left\{t'[x] == \frac{x*x+t[x]^2}{x*t[x]}, t[1] == -2\right\}, t[x], x\right]$

Out [] = $\left\{\left\{t[x] \to -\sqrt{2}\ \sqrt{2x^2+x^2\,\text{Log}[x]}\right\}\right\}$

4) y ‘’ -y’ -2y= Όταν y=2 και y’=1

In[]:= $\text{DSolve}\left[\left\{t''[x] - t'[x] - 2\,t[x] == e^{3x}, t[1] == 2, t'[1] == 1\right\}, t[x], x\right]$

Out $\left\{\left\{t[x] \to \frac{1}{12} e^{-2-x} \left(12 e^3 + e^6 + 12 e^{3x} - 4 e^{3+3x} + 3 e^{2+4x}\right)\right\}\right\}$

In[]:= Simplify [%]

Out [] = $\left\{\left\{t[x] \to \frac{1}{12} e^{-2-x} \left(12 e^3 + e^6 + 12 e^{3x} - 4 e^{3+3x} + 3 e^{2+4x}\right)\right\}\right\}$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΤΣΟΥΦΛΙΔΗΣ, μαθηματικά οικονομικής ανάλυσης μέθοδοι και υποδείγματα,

Gutenberg Αθήνα 1997

2. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Ε. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ, Οδηγός για το mathematica, Εκδόσεις Τσιόλα, Θεσσαλονίκη

3. ΜΙΧΑΛΗΣ ΓΡ. ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ, Μαθηματικά, Β’ έκδοση, Πάτρα 2007

4. Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, Γ’ τάξη γενικού λυκείου, ΟΕΔΒ

5. Μαθηματικά Γενικής παιδείας, Γ’ τάξη γενικού λυκείου, ΟΕΔΒ
6. ΚΕΣΟΓΛΙΔΗΣ ΜΙΧΑΗΛ, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΖΗΤΗ 2009
7. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ Β. ΓΙΑΝΝΗΣ , Ολοκληρώματα Εκδόσεις SPIN
8. ΨΩΜΟΠΟΥΛΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ, Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica, Εκδόσεις ΖΗΤΗ 2004
9. ΤΡΑΧΑΝΑΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ, Mathematica και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2004
10. ΦΛΥΤΖΑΝΗΣ ΗΛΙΑΣ, Μαθηματικά Για Οικονομολόγους, Εκδότης Μπένου Σωτηρία 2008