ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΗΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ
ΕΠΟΠΤΕΥΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: κα ΚΑΛΑΠΟΔΗ ΑΛΕΚΑ

ΠΑΤΡΑ 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία είναι αποτέλεσμα θεωρητικών και πρακτικών στοιχείων μιας ενδιαφέρουσας μελέτης της θεωρίας των ολοκληρωμάτων και των οικονομικών τους εφαρμογών.

Αποτελείται από δύο βασικά μέρη. Το πρώτο αναφέρεται στη θεωρία των ολοκληρωμάτων και στις βασικές μεθόδους υπολογισμού τους. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται μια ιστορική αναδρομή και στη συνέχεια, παρουσιάζεται το αόριστο και το ορισμένο ολοκλήρωμα καθώς και οι ιδιότητες τους. Σε όλα τα παραδείγματα έχουν εισαχθεί νέα δεδομένα. Ως προς το ορισμένο ολοκλήρωμα, γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στον ορισμό του κατά τον Riemann. Έπειτα παρουσιάζονται κάποιες βασικές γεωμετρικές εφαρμογές και στο τέλος του πρώτου μέρους αναλύονται οι βασικές μέθοδοι ολοκλήρωσης, με αντικατάσταση, κατά παράγοντες και η ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει τις πρακτικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων. Ξεκινά από το κόστος παραγωγής και κατόπιν προχωρά στα έσοδα. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το πλεόνασμα καταναλωτή, το πλεόνασμα του παραγωγού και το κοινωνικό πλεόνασμα. Οι έννοιες των παραπάνω πλεονασμάτων είναι συνδυασμένες με την προσφορά και τη ζήτηση των προϊόντων. Ακόμη, αναλύονται οι συναρτήσεις στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής χρονικά οριζόμενες, δηλαδή τα διάφορα μεγέθη που μεταβάλλονται σε συνάρτηση με το χρόνο. Γίνεται αναφορά στην παρούσα αξία χρηματικής ροής και στην έννοια της απόσβεσης, στην ελαστικότητα της ζήτησης και της προσφοράς. Εξετάζεται η τιμολογιακή πολιτική και η επιλογή του άριστου χρόνου έναρξης επενδυτικής δραστηριότητας και τέλος το δεύτερο μέρος ολοκληρώνεται με τη θεωρία της δημόσιας επιχείρησης.

Κλείνοντας θα ήθελα να επισημάνω πως μελετώντας τη βιβλιογραφία και ανατρέχοντας σε διάφορες έντυπες και ηλεκτρονικές πηγές ανακάλυψα τις τόσες ποικίλες εφαρμογές των ολοκληρωμάτων. Από τους αρχαίους Έλληνες και τον Αρχιμήδη ως τον Νεύτωνα και τους Riemann και Lebesgue, η έννοια και οι αρχές της ολοκλήρωσης μελετήθηκαν και θεμελιώθηκαν με συνέπεια να αποτελούν σημείο αναφοράς για την ανάπτυξη των τόσων πολλών πρακτικών εφαρμογών τόσο στην Οικονομία όσο και σε πολλές άλλες επιστήμες.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ολοκλήρωση αποτελεί στοιχειώδη έννοια των ανώτερων μαθηματικών, ειδικά στα πεδία του απειροστικού λογισμού και της μαθηματικής ανάλυσης.

Υπάρχουν δύο τύποι ολοκληρωμάτων, το αόριστο και το ορισμένο ολοκλήρωμα. Το δεύτερο ορίζεται και από τον Bernhard Riemann με τη βοήθεια των αθροισμάτων. Μια πολύ σημαντική εφαρμογή του ορισμένου ολοκληρώματος είναι ο υπολογισμός του εμβαδού επίπεδου χωρίου. Η ολοκλήρωση γίνεται κυρίως με τρεις διαφορετικές διαδικασίες, οι οποίες είναι οι εξής: η ολοκλήρωση με αντικατάσταση, η ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες και η ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

Οι πρακτικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στον τομέα των οικονομικών έχουν μεγάλη απήχηση. Τα ολοκληρώματα βρίσκουν εφαρμογή στον υπολογισμό του κόστους παραγωγής αγαθών ή υπηρεσιών, στα έσοδα από την πώληση προϊόντων καθώς και στις συναρτήσεις ζήτησής τους. Η διαδικασία της ολοκλήρωσης εφαρμόζεται ακόμη στο πλεόνασμα του καταναλωτή και του παραγωγού, με τη βοήθεια των συναρτήσεων ζήτησης και προσφοράς, αλλά και των συναρτήσεων των στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής που ορίζονται χρονικά.

Μια άλλη εφαρμογή των ολοκληρωμάτων είναι στην παρούσα αξία της χρηματικής ροής, αλλά και σε κάθε είδους ροής και στην απόσβεση, που διακρίνεται στη μέθοδο της ευθείας γραμμής και της εκθετικής απόσβεσης. Επίσης, συντελούν πολύ στη μελέτη των εννοιών της ελαστικότητας της ζήτησης και της προσφοράς, που μετρούν τον τρόπο με τον οποίο μια συγκεκριμένη ποσότητα αντιδρά, όταν η τιμή ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας μεταβληθεί.

Τέλος, στην πράξη τα ολοκληρώματα βρίσκουν εφαρμογές στην τιμολογιακή πολιτική, που αποτελεί μια από τις σημαντικότερες λειτουργίες μιας επιχείρησης που δημιουργεί έσοδα και κόστος, αλλά και στην επιλογή του άριστου χρόνου έναρξης μιας επενδυτικής δραστηριότητας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2,13].

Η αρχή του Ολοκληρωτικού Λογισμού θα πρέπει να αναζητηθεί στους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων κατά την αρχαιότητα. Οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει εμπειρικές μεθόδους για τον υπολογισμό εμβαδών τριγώνων και τραπεζοειδών και όγκων κυλίνδρων και πρισμάτων. Όμως σε κανένα σημείο δεν φαίνεται να υπάρχει αντίληψη της διαφοράς προσεγγιστικού και συγκεκριμένου υπολογισμού. Τα μαθηματικά της εποχής ήταν χρηστικά. Η έννοια της αιτιολόγησης και της αυστηρής απόδειξης εισάγεται από τους Έλληνες στοχαστές και μαθηματικούς.

Κορυφαίος μαθηματικός της κλασσικής περιόδου θεωρείται ο Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π. Χ.) που έζησε και έδρασε στην Αθήνα και ήταν μέλος της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Στον Εύδοξο οφείλουμε τη μέθοδο της εξάντλησης η οποία αποτελεί τη βάση του ορισμού του ολοκληρώματος κατά Riemann. Η μέθοδος στηρίζεται στην πρόταση 1 των στοιχείων του Ευκλείδη:
Πρόταση 1: «Δοθέντων δυο άνισων μεγεθών, εάν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέρος του μεγαλύτερο του μισού και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί και πάλι μέρος του μεγαλύτερο του μισού και αυτό γίνεται συνεχώς, θα απομείνει μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο από το μικρότερο από τα δυο μεγέθη.

Ο κορυφαίος ίσως μαθηματικός της αρχαιότητας και ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς στην ιστορία της ανθρωπότητας είναι ο Αρχιμήδης. Έζησε έναν περίπου αιώνα μετά τον Εύδοξο (287-212 π.Χ.) και εκμεταλλεύτηκε κατά κόρον τη μέθοδο της εξάντλησης. Έδωσε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης της μεθόδου με τον υπολογισμό του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου (αυτό που με σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται ως $\int_0^1 x^2 dx$.).

Η μετά τον Αρχιμήδη εποχή για τα ελληνικά μαθηματικά δεν έχει να επιδείξει τίποτα σπουδαίο στο πεδίο αυτού που σήμερα ονομάζουμε Ολοκληρωτικό Λογισμό με την εξαίρεση του Διονυσόδωρου, ο οποίος υπολόγισε τον όγκο σπειροειδούς.

Το 17^o αιώνα ο Isaac Newton (1642-1727) περιγράφει σε χειρόγραφό του που έμεινε γνωστό ως «The October 1666 Tract on fluxions» τον υπολογισμό εμβαδών με τη βοήθεια της αντιδιαφόρισης. Ιστορικά αυτή είναι η πρώτη εμφάνιση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού υπό τη μορφή $\frac{dE}{dx} = y$, όπου Ε συμβολίζει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$, θέτοντας μ' αυτό τον τρόπο τη βάση για μια αλγοριθμική προσέγγιση υπολογισμού των εμβαδών και φθάνοντας σ' αυτό που οι ιστορικοί αποκαλούν «ανακάλυψη» του απειροστικού λογισμού. Με τον όρο «ανακάλυψη» εννοούμε τρία πράγματα:

i) Την ένταξη όλων των μεθόδων που ήταν γνωστές μέχρι τότε σε δυο γενικές έννοιες, την «παράγωγο» και το «ολοκλήρωμα».

ii) Την επινόηση συμβολισμών που καθιστούν εύκολη τη χρήση των εννοιών αυτών.

iii) Την «ανακάλυψη» και απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού που καθιστά φανερό ότι οι διαδικασίες της διαφόρισης και της ολοκλήρωσης είναι αντίστροφες διαδικασίες.

Ο Newton κατόρθωσε να βρει την επιφάνεια μέσω μιας διαδικασίας αντίστροφης της διαφόρισης. Με άλλα λόγια βρήκε τη διαδικασία αορίστου ολοκληρώματος. Η πρωτοτυπία του Newton έγκειται στο γεγονός ότι για πρώτη φορά υπολόγισε το εμβαδόν μιας επιφανείας από το λόγο μεταβολής σε ένα μόνο σημείο.

Στη συνέχεια, ο Leibniz ήρθε σε επαφή με τις εργασίες του Αρχιμήδη και άρχισε και ο ίδιος να μελετά τις αρχές της ολοκλήρωσης. Αρχικά χρησιμοποίησε για το ολοκλήρωμα τον όρο omnes ή omn., που είναι συντόμευση της λατινικής λέξης omnia η οποία σημαίνει άθροισμα και πολύ σύντομα εισήγαγε το σύμβολο $\int$. Κατόρθωσε λοιπόν ο Leibniz να δημιουργήσει ένα ολοκληρωμένο, μεθοδικό και λειτουργικό διαφορικό λογισμό, καθιερώνοντας μια νέα ορολογία και ένα απλό και λειτουργικό συμβολισμό. Μέσα από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, οι Leibniz και Newton σύνδεσαν την ολοκλήρωση με την παραγώγιση και το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορούσε εύκολα να υπολογιστεί μόλις γίνει γνωστή η αντιπαράγωγος. Έτσι με την εμφάνισή τους κλείνει μία περίοδος ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού στην οποία σημαντική συμβολή έχει ο Αρχιμήδης.

Τον 19^{ο} αιώνα ο Γερμανός μαθηματικός George Friedrich Bernhard Riemann οδηγήθηκε στην αναγκαιότητα ορισμού του αθροίσματος και στη συνέχεια θεμελίωσε έναν ορισμό του ολοκληρώματος (ολοκλήρωμα Riemann) με τη μορφή που το ξέρουμε σήμερα (ολοκλήρωμα Riemann). Αργότερα, ο Henri Lebesgue (1875-1941) θέλησε να διευρύνει τη θεωρία ολοκλήρωσης που είχε αναπτύξει ο Riemann, η οποία κυριαρχούσε εκείνη τη εποχή και να αναπτύξει τη σύγχρονη θεωρία ολοκλήρωσης και μέτρου. Οι ιδέες του Lebesgue άνοιξαν το δρόμο και σε άλλους μαθηματικούς να επιτύχουν περαιτέρω γενικεύσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

«ΘΕΩΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ»

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2,9].

Το ολοκλήρωμα αποτελεί θεμελιώδη έννοια του ολοκληρωτικού λογισμού. Υπάρχουν δύο τύποι ολοκληρωμάτων:

- Το αόριστο που ορίζεται με τη βοήθεια της παραγώγου ως ένα σύνολο συναρτήσεων των οποίων γνωρίζουμε την κοινή παράγωγο.
- Το ορισμένο που ορίζεται ανεξάρτητα από την παράγωγο, ως το όριο ενός αθροίσματος.

Οι μαθηματικοί παρουσιάζουν πρώτα τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού, ορίζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως μία διαφορά μεταξύ δύο τιμών του αντίστοιχου αόριστου ολοκληρώματος.

1.1 ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2,8,10].

Ορισμός

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \Delta$. Τότε η συνάρτηση, $F + c$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$ καλείται αόριστο ολοκλήρωμα.

Κανόνες ολοκλήρωσης:

1. Αν $f(x)$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ και $k \epsilon R - \{0\}$, ισχύει πάντα:
$$\int kf(x)dx \;=\; k\int f(x)dx$$
2. Αν $f(x)$και $g(x)$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει πάντα:
$$\int [f(x) \;+\; g(x)]dx \;=\; \int f(x)dx \;+\; \int g(x)dx$$
3. Αν $f(x)$και $g(x)$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$, ισχύει πάντα:
$$\int f(x)d\,g(x) \;=\; f(x)\cdot\, g(x) \;-\; \int g(x)\;\cdot\; df(x)$$
4. Αν στο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ συμβεί η μεταβλητή x να είναι συνάρτηση μίας άλλης μεταβλητής της u, δηλαδή $x \;=\; g(u)$, τότε ισχύει:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))\,\frac{dg}{du}\,du = \int f(g(u)) \cdot g_u{}' \cdot du$$

Από τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος

$$F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in \Delta \ \leftrightarrow\ \int f(x)dx = F(x) + c$$

προκύπτουν τα εξής:

1. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in \Delta.$
   Επομένως, η παράγωγος του αόριστου ολοκληρώματος ισούται με την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$
   Αυτό σημαίνει ότι το διαφορικό ακυρώνει το σύμβολο του αόριστου ολοκληρώματος.
3. Επειδή $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, θα είναι $\int f(x)dx = \int d(F(x))$ και επομένως $\int d\left(F(x)\right) = \int f(x)dx = F(x) + c$
   Αυτό δηλώνει ότι το αόριστο ολοκλήρωμα ακυρώνει το σύμβολο του διαφορικού της συνάρτησης F, αλλά προσθέτει μια σταθερή c.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τα βασικά ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να υπολογιστούν απευθείας, με τη χρησιμοποίηση των βασικών κανόνων ολοκλήρωσης.

$\int 0dx = c$	$\int 1dx = x + c$	$\int x^{\nu}dx = \frac{1}{\nu + 1}x^{\nu+1} + c$
$\int \sigma\upsilon\nu\, xdx = \eta\mu x + c$	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$	$\int \varepsilon\varphi x dx = -ln\lvert\sigma\upsilon\nu x\rvert + c$
$\int \sigma\varphi x dx = \ln\lvert\eta\mu x\rvert + c$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c$	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\lvert a\rvert} + c$

1.1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2].

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\, a, b\,]$ και

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Όπου F είναι μια παράγουσα της f. Δηλαδή $F\,'(x) = f(x)\ \forall\, x \in [a, b]$. Τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

1. Αν οι συναρτήσεις f και φ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε η συνάρτηση f+φ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει η σχέση

$$\int f(x) + \varphi(x))dx = \int f(x)\, dx + \int \varphi(x)dx$$

2. Αν οι συναρτήσεις $f1, f2, \ldots, f\nu$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $\lambda 1 f1 + \lambda 2 f2 + \cdots + \lambda\nu f\nu$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει η σχέση:

$$\int \left(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots\ldots + \lambda_\nu f_\nu(x)\right)dx$$
$$= \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx + \cdots + \lambda_\nu \int f_\nu(x)dx$$

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα A και $ax + b \in A\ \ \forall \chi \in A\ \mu\varepsilon\ a,\ b \in R\ \ \kappa\alpha\iota$

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$$

1.1.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

$$\int (5x^4 - 2x^2 + 12x - 4)dx$$

Λύση

Σύμφωνα με τους κανόνες 2 και 1 της παραγράφου 1.2.1 και με τη βοήθεια των στοιχειωδών ολοκληρωμάτων θα έχουμε ,

$$\begin{aligned}\int (5x^4 - 2x^2 + 12x - 4)dx &= \int 5x^4\,dx - \int 2x^2\,dx + \int 12x\,dx - \int 4\,dx \\ &= 5\int x^4\,dx - 2\int x^2\,dx + 12\int x\,dx - 4\int dx \\ &= 5\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} - 4x + c = x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + c\end{aligned}$$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$A = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Λύση

$$A = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{\chi^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x} + c.$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^2\sqrt{2 - 3x^3 dx}$$

Λύση

Κάνουμε αντικατάσταση $u = 2 - 3x^3$. Τότε

$$du = d(2 - 3x^3) \to du = -9x^2dx \to x^2dx = -\frac{1}{9}\,du$$

Το ολοκλήρωμα παίρνει τότε τη μορφή

$$\int x^2\sqrt{2 - 3x^3}dx = x\int \sqrt{u}\ (-\frac{1}{9})du = -\frac{1}{9}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{9}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{27}(2 - 3x^3)^{\frac{3}{2}} + c.$$

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,du.$$

Λύση

Αντικαθιστούμε $u = \sqrt{x+1} \rightarrow x + 1 = u^2 \rightarrow dx = 2u\,du$. Τότε το ολοκλήρωμα γίνεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x+1}\, du &= \int (u^2 - 1)^2\, u2udu = 2\int (u^4 - 2u^2 + 1)u^2 du \\ &= 2\int u^6\, du - 4\int u^4\, du + 2\int u^2\, du = \frac{2}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{2}{3}\, u^3 + c \\ &= \frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c. \end{aligned}$$

1.2 ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2].

Ορισμός

Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha\, , b]$, $\alpha, b \in R$, με $\alpha < b$ και F είναι μία παράγουσα της f, τότε η διαφορά $F(b) - F(\alpha)$, ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α μέχρι το b και συμβολίζεται με $\int_\alpha^b f(x)dx$.

Οι αριθμοί a, b ονομάζονται όρια του ολοκληρώματος. Ο αριθμός α είναι το κάτω όριο και ο b το άνω όριο του ολοκληρώματος.

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι

$\int_\alpha^b f(x)dx = F(b) - F(\alpha)$, με $F(x) = \int f(x)dx$

Όπως θα δούμε στις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, ο παραπάνω τύπος γνωστός και ως Newton – Leibniz, ισχύει και στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha\ ,\ \beta]$. Τη διαφορά $F(\beta)\ -\ F(\alpha)$ τη συμβολίζουμε συνήθως με $\Big| _{\alpha}^{b} F(X)$

Έτσι έχουμε $\int_a^b f(\chi)d\chi = \Big| _{\alpha}^{b} F(X)$, όπου $F(x) = \int f(x)$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός $F(b) - F(\alpha)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το α παραμένει σταθερό, ενώ το άνω όριο b του ολοκληρώματος μεταβάλλεται και το συμβολίζουμε με x. Τότε έχουμε

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)d\chi = F(x) - F(\alpha)$$

Επειδή για κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μια ορισμένη τιμή $F(x)$ της F και μια συγκεκριμένη τιμή της διαφοράς $F(x) - F(\alpha)$, έπεται ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ είναι μια συνάρτηση της x, η οποία μηδενίζεται με $x = \alpha$.

Έστω

$$\int f(x)dx = g(x) + c.$$

Αν από το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων $g(x) + c$ επιλέξουμε εκείνη η οποία μηδενίζεται στο σημείο $x = \alpha$, τότε θα έχουμε

$g(\alpha) + c = 0$, η οποία δίνει $c = -g(\alpha)$.

Επομένως,

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)dx = g(x) - g(\alpha).$$

Αυτό σημαίνει ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\chi} f(x)dx$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f και μάλιστα η παράγουσα εκείνη για την οποία ισχύει $c = -g(\alpha)$.

Με την έννοια αυτή ισχύει η σχέση $\int f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx + c$.

1.2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2].

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη και ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, b]$. Ισχύει η σχέση

$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = F(b) - F(\alpha)$ (1)

Όπου η F είναι μια παράγουσα της f. Δηλαδή $F'(x) = f(x) \forall x \in [\alpha, b]$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) θα δείξουμε μερικές βασικές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

1. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ είναι ανεξάρτητο από το γράμμα x που επιλέχτηκε ως μεταβλητή ολοκλήρωσης.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$, θα ισχύει

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = Fb - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{b} f(\omega)d\omega.$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$ τότε, $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{\alpha} f(x)dx.$

   Απόδειξη

   $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = F(b) - F(\alpha) = -\big(F(\alpha) - F(b)\big) = -\int_{b}^{\alpha} f(x)dx$

3. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $g \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{g} f(x)dx + \int_{g}^{b} f(x)dx.$$

   Απόδειξη

   Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$, θα είναι ολοκληρώσιμη και σε κάθε υποδιάστημα $[\alpha, g], [g, b]$, του $[\alpha, b]$. Αν η F είναι μια παράγουσα της f, τότε $F'(x) = f(x) \forall x \in [\alpha, g]$ και $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [\gamma, b]$, αφού $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [\alpha, b]\, \kappa\alpha\iota\, [\alpha, b] = [\alpha, g] \cup [g, b]$. Επομένως

$$\int_{\alpha}^{g} f(x)dx + \int_{g}^{b} f(x)dx = \big(F(g) - F(\alpha)\big) + \big(F(b) - F(g)\big) = F(b) - F(\alpha)$$
$$= \int_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

4. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$ και $\lambda \in R, \lambda \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\lambda \cdot f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$ και ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{b} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

5. Αν οι συναρτήσεις f και φ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, b]$, τότε η συνάρτηση $\theta = f + \varphi$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$ και ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{b} \big(f(x) + \varphi(x)\big)dx = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx + \int_{\alpha}^{b} \varphi(x)dx$$

6. Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \nu \in N$, είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, b]$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η συνάρτηση $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_\nu f_\nu$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$ και ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{b} (\lambda_1 f_1 (x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_\nu f_\nu(x))dx$$
$$= \lambda_1 \int_{\alpha}^{b} f_1 (x)dx + \lambda_2 \int_{\alpha}^{b} f_2 (x)dx + \cdots + \lambda_\nu \int_{\alpha}^{b} f_\nu(x)dx$$

7. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$, $\alpha, b \in R, \alpha \leq b$ και $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \geq 0$$

8. Αν οι συναρτήσεις f και φ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, b]$ με $\alpha, \beta \in R, \alpha \leq b \; και \; f(x) \leq \varphi(x) \forall x \in [\alpha, b]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{b} \varphi(x)\, dx$$

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$, τότε θα υπάρχει j στο (α, b) με

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = f(j)(b - \alpha)$$

1.2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_2^6 (x^2 + 4x + 5)dx$

   Λύση

$$\int_2^6 (x^2 + 4x + 5)dx = F(6) - F(2)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + c$$

$$F(6) = \frac{6^3}{3} + 2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 = \frac{216}{3} + 2 \cdot 36 + 30 = 72 + 72 + 30 = 174$$

$$F(2) = \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = \frac{8}{3} + 8 + 10 = 18 + 2{,}66 = 20{,}66$$

$$F(6) - F(2) = 174 - 20{,}66 = 153{,}33$$

2. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ολοκληρωμάτων να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

I. $\int_0^2 \sqrt{1 + 2x}\, dx$

II. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi\, x\, dx$

Λύση

I. Είναι

Άρα

.

II. Είναι

Άρα

$\Big|_0^{\pi/4}$.

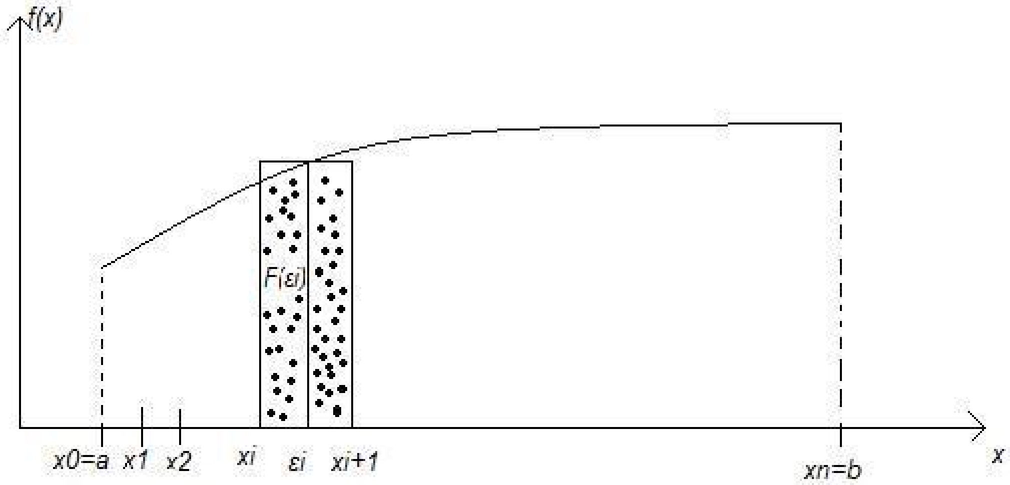
3. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

Λύση

1.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ RIEMANN

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [1].

Έστω $f(\chi)$ μια συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη στο διάστημα $[\alpha\,,\beta]$. Στο διάστημα αυτό θεωρούμε τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu$ ώστε το $x_0 \equiv \alpha$, $x_\nu \equiv \beta$ και τα $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ ενδιάμεσα. Με τον τρόπο αυτό, το διάστημα $[\alpha\,,\beta]$ χωρίστηκε στα ν διαστήματα $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{\nu-1}, x_\nu]$.



Σε κάθε υποδιάστημα θεωρούμε ένα σημείο: Στο διάστημα $[x_0, x_1]$ το σημείο ξ_1, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ το ξ_2,… και στο διάστημα $[x_{\nu-1}, x_\nu]$το σημείο ξ_ν. Τα σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ δεν αποκλείεται να συμπίπτουν και με τα άκρα των αντίστοιχων υποδιαστημάτων. Για παράδειγμα, το σημείο ξ_1 μπορεί και να συμπίπτει με το x_0 ή με το x_1.

Οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στις θέσεις $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ είναι αντίστοιχα $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots\ f(\xi_\nu)$. Σχηματίζουμε τώρα το άθροισμα

$$S_{\nu=}f(\xi_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\cdot(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_\nu)\cdot(x_\nu - x_{\nu-1})$$

Κάθε όρος του αθροίσματος ισούται με το γινόμενο της τιμής της συνάρτησης στο ενδιάμεσο σημείο ξ_1 επί το μήκος του αντίστοιχου διαστήματος στο οποίο ανήκει το ξ_1. Γεωμετρικά αυτό (κάθε όρος) ισούται με το εμβαδό ορθογωνίου που έχει βάση το μήκος του διαστήματος και ύψος την τιμή της συνάρτησης. Αν το πλήθος (ν) των σημείων αυξάνει και τα μήκη των υποδιαστημάτων τείνουν στο 0, τότε ορίζεται:

$$\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \int_\alpha^b f(x)dx$$

αν βεβαίως το όριο αυτό υπάρχει. Γεωμετρικά, αυτό παριστάνει το προσημασμένο εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, του άξονα x και των ευθειών $x = \alpha, x = b$.

Παρατήρηση 1. Η υποδιαίρεση είναι αυθαίρετη. Έτσι τα σημεία είναι δυνατόν να ισαπέχουν, οπότε τα μήκη των υποδιαστημάτων είναι ίσα και ίσα με $(\beta - \alpha)/\nu$ το καθένα. Τότε είναι:

$$x_0 = \alpha, x_1 = \alpha + \frac{b-\alpha}{\nu}, x_2 = \alpha + 2\frac{b-\alpha}{\nu}, \ldots x_\nu - 1 = \alpha + (\nu - 1)\frac{b-\alpha}{\nu}, x_\nu = b$$

Παρατήρηση 2. Το (προσημασμένο) εμβαδό είναι θετικό όταν βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ και αρνητικό όταν βρίσκεται κάτω απ' αυτόν.

Παρατήρηση 3. Το $lim\, S\nu$ υπάρχει όταν υπάρχει και το $\int_\alpha^b f(x)dx$. Αυτό συμβαίνει όταν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$ ή έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας στο $[\alpha, b]$. Το $\int_\alpha^b f(x)dx$ είναι ανεξάρτητο από την υποδιαίρεση που θεωρήσαμε. Λέμε τότε ότι η συνάρτηση f(x) είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha, b]$.

1.3.1 Παραδείγματα ολοκληρωμάτων κατά Riemann

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [11].

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την τιμή του $\int_1^2 (2x+1)dx$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x) = 2x + 1$ στο διάστημα $[1, 2]$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, ως πολυωνυμική, άρα είναι συνεχής και στο $[1,2]$.

Επομένως, θα είναι:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (2x+1)\,dx &= \lim_{\nu\to+\infty} \frac{2-1}{\nu}\sum_{\kappa-1}^{\nu} f\left(1+\kappa\frac{2-1}{\nu}\right) = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa-1}^{\nu} f\left(1+\kappa\frac{1}{\nu}\right)\\
&= \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa-1}^{\nu}[2\left(1+\frac{\kappa}{\nu}\right)+1] = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa-1}^{\nu}[\left(2+\frac{2\kappa}{\nu}\right)+1]\\
&= \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa-1}^{\nu}[\left(3+\frac{2\kappa}{\nu}\right)] = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\left[\sum_{\kappa-1}^{\nu}3+\sum_{\kappa-1}^{\nu}\left(\frac{2\kappa}{\nu}\right)\right]\\
&= \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\left[3\nu+\frac{2}{\nu}\sum_{\kappa-1}^{\nu}\kappa\right] = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\left[3\nu+\frac{2}{\nu}\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]\\
&= \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}[3\nu+(\nu+1)] = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}[4\nu+1] = \lim_{\nu\to+\infty}\left[4+\frac{1}{\nu}\right] = 4
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε την τιμή του $\int_0^1 (x^2 + x + 1)\, dx$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + x + 1$ στο διάστημα $[0, 1]$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, ως πολυωνυμική, άρα είναι συνεχής και στο $[0,1]$.

Επομένως, θα είναι:

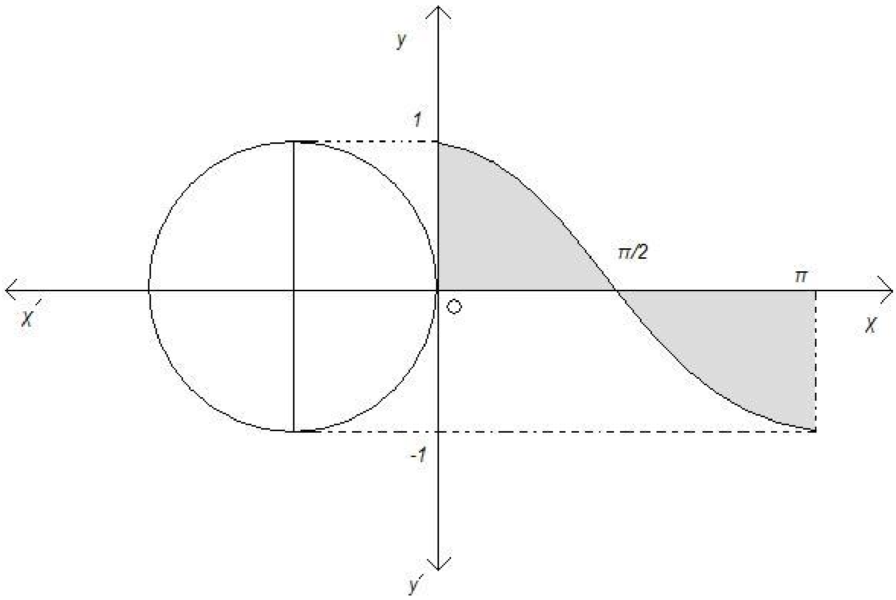
$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx &= \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1-0}{\nu} \sum_{\kappa-1}^{\nu} f\left(0 + \kappa\frac{1-0}{\nu}\right) \\
&= \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa-1}^{\nu} f\left(\frac{\kappa}{\nu}\right) = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa-1}^{\nu} \left[\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2 + \frac{\kappa}{\nu} + 1\right] \\
&= \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu} \left[\sum_{\kappa-1}^{\nu} \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2 + \sum_{\kappa-1}^{\nu} \frac{\kappa}{\nu} + \sum_{\kappa-1}^{\nu} 1\right] = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\nu^2} \sum_{\kappa-1}^{\nu} \kappa^2 + \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa-1}^{\nu} \kappa + \sum_{\kappa-1}^{\nu} 1\right] \\
&= \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\nu^2} \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \frac{1}{\nu} \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu\right] \\
&= \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu} \left[\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu} + \frac{(\nu+1)}{2} + \nu\right] \\
&= \lim_{\nu\to+\infty} \left[\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2} + \frac{(\nu+1)}{2\nu} + 1\right] \\
&= \lim_{\nu\to+\infty} \left[\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2}\right] + \lim_{\nu\to+\infty} \left[\frac{(\nu+1)}{2\nu}\right] + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}
\end{aligned}
$$

1.4 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2].

1η εφαρμογή

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας η οποία περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης f, με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in [\,0\,,\pi]$ και τον άξονα $x'x$.



Λύση

Ένα μέρος της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, με $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ βρίσκεται πάνω από τον ημιάξονα Ox, ενώ ένα δεύτερο μέρος της f , με $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ βρίσκεται κάτω από τον ημιάξονα Ox. Υπολογίζοντας τα δύο αυτά τμήματα χωριστά, έχουμε:

$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\, dx = \Big|_{o}^{\frac{\pi}{2}} \quad \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu 0 = 1$$

$$E_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu x\, dx = \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \eta\mu x = \eta\mu\pi - \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$$

Επομένως η όλη επιφάνεια E θα δίνεται από τη σχέση $E = |E_1| + |E_2| = 2$

2η εφαρμογή

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης f, με $f(x) = 4x^3$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 5$.

Λύση

Επειδή $f(x) \geq 0\ \forall x \in [2,5]$, έπεται ότι η επιφάνεια της οποίας ζητούμε το εμβαδόν βρίσκεται πάνω από τον ημιάξονα Ox . Άρα το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής δίνεται από τη σχέση

$$E = \int_2^5 f(x)dx = \int_2^5 4x^3 dx = \Big|_2^5 x^4 = 5^4 - 2^4 = 609$$

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [8].

3η εφαρμογή

Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 e^{3t} dt.$$

Λύση

$$\int_0^1 e^{3t} dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t} d(3t) = \frac{1}{3}e^{3t} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^{3\cdot 1} - e^{3\cdot 0}) = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

4η εφαρμογή

Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

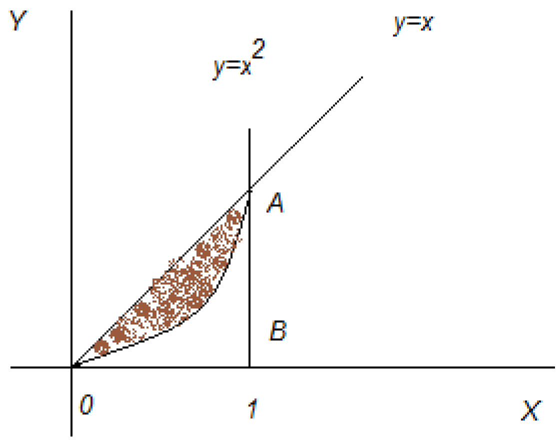
$$\int_1^2 (2w^2 + 1)dw.$$

Λύση

$$\int_1^2 (2w^2+1)dw = \int_1^2 2w^2dw + \int_1^2 dw = 2\int_1^2 w^2dw + \int_1^2 dw = 2\cdot\frac{w^3}{3}\Bigg|_1^2 + w\Bigg|_1^2$$
$$= 2\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) + (2-1) = 2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) + 1 = 2\cdot\frac{7}{3} + 1 = \frac{14+3}{3} = \frac{17}{3}.$$

5η εφαρμογή

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου του παρακάτω σχήματος



Λύση

Το εμβαδό του χωρίου δίνεται από τον τύπο, $E= \int_\alpha^\beta f(x)dx$ που στην περίπτωση αυτή θα είναι,

$$E = \int_0^1 \varphi_1(x) - \varphi_2(x)\,dx = \int_0^1 (x-x^2)dx$$

Άρα αρκεί να υπολογιστεί το παραπάνω ολοκλήρωμα.
Θα έχουμε,

$$E = \int_0^1 (x-x^2)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{2}-0\right) - \left(\frac{1}{3}-0\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

1.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Η διαδικασία που ακολουθείται για την ολοκλήρωση μίας συνάρτησης f εξαρτάται κυρίως από τη μορφή που έχει η συνάρτηση. Ωστόσο, υπάρχουν συναρτήσεις διαφορετικών μορφών, που η ολοκλήρωσή τους αντιμετωπίζεται με την ίδια σχεδόν διαδικασία. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις, με βάση την μέθοδο ολοκλήρωσής τους, χωρίζονται σε διαφορετικές κατηγορίες. Μέσα σε κάθε τέτοια κατηγορία ενδέχεται να υπάρχουν μορφές συναρτήσεων που μπορούν να θεωρηθούν βασικές, είτε γιατί η παρουσία τους είναι πολύ συχνή, είτε γιατί στις μορφές αυτές, μετά από κάποιους μετασχηματισμούς, μπορούν να ενταχθούν κι άλλες, πολυπλοκότερων μορφών, συναρτήσεις της ίδιας κατηγορίας.

Βέβαια, μια τέτοια κατηγοριοποίηση των συναρτήσεων ούτε απλή είναι ούτε εύκολη. Οι κατηγορίες αυτές εξάλλου δεν είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους. Είναι δυνατόν δηλαδή, μια συνάρτηση να εντάσσεται σε περισσότερες από μία κατηγορίες.

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μεθόδους ολοκλήρωσης για τις πιο χαρακτηριστικές κατηγορίες συναρτήσεων.

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [4].

(i) Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Έστω οι συναρτήσεις $y = f(z), z = g(x)$ και η σύνθεσή τους $y = f(g(x))$. Με ολοκλήρωση της $f(z)$ παίρνουμε:

$$\int f(z)dz = F(z) = F(g(x)) \qquad (1)$$

Με παραγώγιση της (1) παίρνουμε:

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = F'(z)g'(x) = f(z)g'(x) \qquad (2)$$

Προκύπτει έτσι η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση (integration by substitution) ως εξής:

$$\int f(z)dz = \int f(z)g'(x)dx \text{ ή } \int f(z)dz = \int f\big(g(x)\big)g'(x)dx \qquad (3)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην (1) το διαφορικό $dz = g'(x)dx$. Με την (3) υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της $f(x)$ και με την αντικατάσταση της $z = g(x)$ μεταφερόμαστε από την z στην x. Έτσι, η ολοκλήρωση με αντικατάσταση είναι ουσιαστικά ο αλυσωτός κανόνας της ολοκλήρωσης.

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2].

Παραδείγματα

Να δειχτεί ότι:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1 + \sqrt{x}\right| + c$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + c$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c$

Απόδειξη

1. Θέτουμε $\sqrt{x} = t$ και έχουμε $dx = 2tdt$.

   Άρα $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot 2tdt = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\int \frac{d(1+t)}{1+t} = 2t - 2\ln|1 + t| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1 + \sqrt{x}\right| + c.$

2. Θέτουμε $\sqrt{1-x} = t$ και έχουμε $dx = -2tdt$.

   Άρα $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\int \frac{tdt}{t} = -2\int dt = -2t + c = -2\sqrt{1-x} + c.$

3. Θέτουμε $x = a\, cos\, h\, \theta$ και έχουμε $dx = a\, sin\, h\theta\, d\theta$ και $\sqrt{x^2 - a^2} = a \sin h\theta$. Άρα

   $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a \sin h\theta\, d\theta}{a \sin h\theta} = \int d\theta = \theta + c = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c.$

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

II. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+9x^2}}$

Λύση

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-25}}{5}\right| + c$

II. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+(3x)^2}} = \left|\ln\frac{3x+\sqrt{7+9x^2}}{\sqrt{7}}\right| + c$

(ii) Ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [4].

Αν $F(x) = g(x)f(x)$ τότε $g(x)f(x) = \int F'(x)dx = \int \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)dx = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$
και $\int f(x)g'(x)dx = g(x)f(x) - \int g(x)f'(x)dx + A$ (1)

Η (1) γράφεται ισοδύναμα ως

$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int[f'(x)\int g(x)dx]dx$ (2)

Η (1) παράγεται εναλλακτικά ως εξής:

$\frac{d[(f(x)g(x)]}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ ή

$f(x)g'(x) = \frac{d[f(x)g(x)]}{dx} - g(x)f'(x)$ (3)

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέρη της (3) παίρνουμε:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx + A$$

που είναι η (1). Αν θέσουμε u=f(x) και v=g(x) τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx \Leftrightarrow \int udv = uv - \int vdu + A$ (4)

Η ολοκλήρωση με βάση την (1) ή την (4) ονομάζεται ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες (integration by parts). Με τη μέθοδο αυτή εκφράζεται ένα ολοκλήρωμα $\int udv$ σε όρους ενός άλλου ολοκληρώματος, $\int vdu$. Αυτό σημαίνει ότι αν με κατάλληλη επιλογή των u και dv το ολοκλήρωμα $\int vdu$ είναι απλούστερο από το $\int udv$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int udv$ ευκολότερα μέσω του $\int vdu$ και αντίστροφα.

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

I. $\int e^x \cdot x^5 dx$
II. $\int x^4 \sigma\upsilon\nu\, x\, dx$

Λύση

I. $\int e^x \cdot x^5 dx = \int x^5 de^x = x^5 \cdot e^x - \int e^x dx^5 = x^5 \cdot e^x - 5\int e^x \cdot x^4 \cdot dx = x^5 \cdot e^x - 5\int x^4 de^x = x^5 \cdot e^x - 5(x^4 \cdot e^x - \int e^x dx^4) = x^5 \cdot e^x - 5x^4e^x + 20\int e^x x^3 dx = x^5e^x - 5x^4e^x + 20\int x^3 de^x = x^5e^x - 5x^4e^x + 20(x^3e^x - \int e^x dx^3) = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3) - 60\int e^x x^2 d\,x = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3) - 60\int x^2 de^x = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3) - 60x^2e^x + 60\int e^x dx^2 = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2) + 120\int e^x x dx = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 -$

$60x^2) + 120 \int xde^x = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x) - 120 \int e^x dx = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + c.$

II. $\int x^4 \sigma\upsilon\nu\, x\, dx = \int x^4 d\, \eta\mu\, x = x^4 \eta\mu\, x - \int \eta\mu\, x dx^4 = x^4 \eta\mu\, x - \int 4x^3 \eta\mu\, x dx = x^4 \eta\mu\, x + 4 \int x^3 d\, \sigma\upsilon\nu\, x = x^4 \eta\mu\, x + 4x^3 \sigma\upsilon\nu\, x - 4 \int \sigma\upsilon\nu\, x\, dx^3 = x^4 \eta\mu\, x + 4x^3 \sigma\upsilon\nu\, x - 4 \int 3x^2 \sigma\upsilon\nu\, x dx = x^4 \eta\mu\, x + 4x^3 \sigma\upsilon\nu\, x - 12 \int x^2 d\, \eta\mu x = x^4 \eta\mu\, x + 4x^3 \sigma\upsilon\nu\, x - 12x^2 \eta\mu\, x + 12 \int \eta\mu\, x dx^2 = x^4 \eta\mu\, x + 4x^3 \sigma\upsilon\nu\, x - 12x^2 \eta\mu\, x + 12 \int 2x\, \eta\mu\, x dx = x^4 \eta\mu\, x + 4x^3 \sigma\upsilon\nu\, x - 12x^2 \eta\mu\, x - 24x\, \sigma\upsilon\nu x + 24 \int \sigma\upsilon\nu\, x dx = x^4 \eta\mu\, x + 4x^3 \sigma\upsilon\nu\, x - 12x^2 \eta\mu\, x - 24x\, \sigma\upsilon\nu x + 24 \eta\mu\, x + c.$

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

I. $\int xe^{ax} dx$
II. $\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$
III. $\int x \ln x dx$

Λύση

I. $\int x\, e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int x de^{ax} = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + c = \frac{1}{a^2} e^{ax}(ax - 1) + c.$
II. $\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx = \int e^x d\eta\mu x = e^x \eta\mu x - \int \eta\mu x de^x = e^x \eta\mu x - \int e^x \eta\mu x dx = e^x \eta\mu x + \int e^x d\sigma\upsilon\nu x = e^x \eta\mu x + e^x \sigma\upsilon\nu x - \int \sigma\upsilon\nu x de^x = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) - \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx.$

Επομένως

$$\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{1}{2} e^x\, (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + c.$$

III. $\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d\, lnx = \frac{1}{2} x^2 lnx - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 lnx - \frac{1}{4} x^2 + c = \frac{1}{4} x^2 (2lnx - 1) + c.$

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [4].

Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{4} (2x^2 - 6) dx$$

Λύση

$$\int_{-1}^{4}(2x^2-6)dx = \int_{-1}^{4}2x^2dx + \int_{-1}^{4}(-6)dx = 2\int_{-1}^{4}x^2dx - 6\int_{-1}^{4}dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{4}$$

$$-6x\Big|_{-1}^{4} = 2\left(\frac{4^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right) - 6\big(4-(-1)\big) = 2\left(\frac{64}{3}+\frac{1}{3}\right) - 6\cdot 5 = \frac{2\cdot 65}{3} - 30$$

$$= \frac{130-90}{3} = \frac{40}{3}.$$

(iii)Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Ρητή ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{\varphi}{f}$, όπου φ και f είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις της ίδιας μεταβλητής x.

Για την ολοκλήρωση τέτοιων συναρτήσεων, προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το κλάσμα $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ σε άθροισμα ή διαφορά άλλων κλασμάτων απλούστερης μορφής, ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή των ιδιοτήτων των ολοκληρωμάτων.

Η μετατροπή του κλάσματος $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ σε άθροισμα ή διαφορά κλασμάτων εξαρτάται από τη μορφή που έχει το κλάσμα αυτό και κυρίως από τη μορφή που έχει η συνάρτηση f του παρονομαστή.

§ Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $\varphi(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το βαθμό του $f(x)$, τότε διαιρούμε το πολυώνυμο $\varphi(x)$ δια του πολυωνύμου $f(x)$ και έχουμε

$\varphi(x) = \pi(x)\cdot f(x) + \upsilon(x)$,όπου $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ είναι δύο πολυώνυμα και ο βαθμός του $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $f(x)$. Τότε

$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{f(x)}$ και $\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx = \int\pi(x)dx + \int\frac{\upsilon(x)}{f(x)}dx$, όπου $\int\pi(x)dx$ υπολογίζεται κατά τα γνωστά, αφού $\pi(x)$ είναι ένα πολυώνυμο. Έτσι, η ολοκλήρωση της συνάρτησης $\frac{\varphi}{f}$, ανάγεται στην ολοκλήρωση της συνάρτησης $\frac{\upsilon}{f}$ όπου ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή.

§ Αν ο παρονομαστής είναι της μορφής $f(x) = ax + b, a, b \in R$, τότε ο αριθμητής είναι μια σταθερή ποσότητα και το κλάσμα $\frac{\upsilon(x)}{f(x)}$ θα έχει τη μορφή $\frac{\lambda}{ax+b}$, με $\lambda \in R, x \in R - \{-\frac{b}{a}\}$.

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\int \frac{\upsilon(x)}{f(x)}dx = \int \frac{\lambda dx}{ax+b} = \frac{\lambda}{\alpha}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{\lambda}{\alpha}\ln|ax+b| + c.$$

Επομένως, μπορούμε να θεωρούμε ότι ο παρονομαστής $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τουλάχιστον δεύτερου βαθμού.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει μόνο απλές πραγματικές ρίζες. Δηλαδή το $f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_\nu)$ με $x_i \neq x_j$ όταν $i \neq j$.

Τότε το κλάσμα $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ γράφεται στη μορφή

$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_\nu}{x-x_\nu}$

Όπου $A_{1,} A_2, \dots, A_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Από την τελευταία αυτή σχέση προσδιορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς $A_{1,} A_2, \dots, A_\nu$ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ιδιότητα 6^{η} των αόριστων ολοκληρωμάτων.

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

I. $\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$

II. $\int \frac{23-2x}{2x^2+9x-5}dx$

Λύση

I. $\frac{x+35}{x^2-25} = \frac{A_1}{x+5} + \frac{A_2}{x-5} = \frac{(A_1+A_2)x+5(A_2-A_1)}{(x+5)(x-5)}$. Άρα $x + 35 \equiv (A_1 + A_2)x + 5(A_2 - A_1)$, από το οποίο παίρνουμε $A_1 + A_2 = 1$ και $5(A_2 - A_1) = 35$. Οι σχέσεις αυτές δίνουν $A_2 = 4$ και $A_1 = -3$. Επομένως

$\int \frac{x+35}{x^2-25}dx = \int \left(\frac{-3}{x+5} + \frac{4}{x-5}\right)dx = -3\int \frac{d(x+5)}{x+5} + 4\int \frac{d(x-5)}{x-5} = -3\ln|x+5| + 4\ln|x-5| + c = \ln\left|\frac{(x-5)^4}{(x+5)^3}\right| + c.$

II. $\frac{23-2x}{2x^2+9x-5} = \frac{23-2x}{(2x-1)(x+5)} = \frac{A_1}{2x-1} + \frac{A_2}{x+5} = \frac{(A_1+2A_2)x+(5A_1-A_2)}{(2x-1)(x+5)}$

Άρα $23 - 2x \equiv (A_1 + 2A_2)x + (5A_1 - A_2)$, από την οποία έχουμε ότι $A_1 + 2A_2 = -2$ και $5A_{1-}A_2 = 23$ ή $A_1 = 4, A_2 = -3$

Επομένως,

$$\int \frac{23-2x}{2x^2+9x-5}dx$$
$$= \int \frac{4}{2x-1}dx$$
$$+ \int \frac{-3}{x+5}dx$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{2x-1} - -3\int \frac{d(x+5)}{x+5} = 2\ln|2x-1| - 3\ln|x+5| + c$$
$$= \ln\frac{|2x-1|^2}{|x+5|^3} + c.$$

ii. Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ρίζες πραγματικές, οι οποίες δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

Δηλαδή το $f(x)$ μπορεί να γραφεί, για παράδειγμα, στη μορφή

$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)^\lambda(x-x_3)^\rho \dots (x-x_\nu).$

Τότε το κλάσμα $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ γράφεται

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \left(\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_\lambda}{(x-x_2)^\lambda}\right)$$
$$+ \left(\frac{\Gamma_1}{x-x_3} + \frac{\Gamma_2}{(x-x_3)^2} +..+ \frac{\Gamma_\rho}{(x-x_3)^\rho}\right) +..+ \frac{\Delta}{x-x_\nu}$$

Όπου $A, B_1, B2_2, \dots, B_\lambda, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\rho, \dots, \Delta$ είναι όλοι πραγματικοί αριθμοί. Προσδιορίζουμε τους αριθμούς αυτούς όπως και στην περίπτωση (i) και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα που θα προκύψουν.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+4x+7}{x^3+8x^2+21x+18}dx.$$

Λύση

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18} = \frac{x^2 + 4x + 7}{(x + 2)(x + 3)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3} + \frac{\Gamma}{(x + 3)^2}$$

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε $A = 3, B = -2$ και $\Gamma = -4$. Άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4x + 7}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18} dx \\ &= \int \frac{3}{x + 2} dx \\ &- \int \frac{2}{x + 3} dx \\ &- \int \frac{4}{(x + 3)^2} dx \\ &= 3\ln|x + 2| - 2\ln|x + 3| + 4(x + 3)^{-1} + c = \ln\frac{|x + 2|^3}{|x + 3|^2} + \frac{4}{x + 3} + c. \end{aligned}$$

iii. Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει και μιγαδικές ρίζες.

Τότε τρέπουμε το $f(x)$ σε γινόμενο παραγόντων. Κάθε παράγοντας που περιέχει μιγαδικές ρίζες είναι τουλάχιστον δευτέρου βαθμού.

Αν το $f(x)$ έχει, για παράδειγμα, τη μορφή

$$f(x) = (x - x_1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

όπου το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει ρίζες μιγαδικές, τότε γράφουμε

$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{Bx + \Gamma}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$, με $A, B, \Gamma \in R$

Προσδιορίζουμε τα A, B, Γ και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα που θα προκύψουν.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x + 1}{x^3 - 1} dx$$

Λύση

Επειδή $x^3 - 1 - (x - 1)(x^2 + x + 1)$ και το πολυώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει μιγαδικές ρίζες, θα έχουμε

$$\frac{x+1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+\Gamma)x+(A-\Gamma)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει $x+1 \equiv (A+B)x^2+(A-B+\Gamma)x+(A-\Gamma)$, η οποία δίνει $A+B=0,\ A-B+\Gamma=1,\ A-\Gamma=1.$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$A=\frac{2}{3}, B=-\frac{2}{3}, \Gamma=-\frac{1}{3.}$ Επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3-1}dx &= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} \\ &-\frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} \\ &-\frac{1}{3}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{2}{3}\ln(x^2+x+1)+c = \frac{1}{3}(\ln|x-1|^2-\ln(x^2+x+1))+c \\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|^2}{x^2+x+1}+c.\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 «ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ»

Ο ολοκληρωτικός λογισμός έχει πολλές ποικίλες και ενδιαφέρουσες εφαρμογές σε κάθε σχεδόν επιστημονική περιοχή. Ο ρόλος της παραγώγου και του ολοκληρώματος στη λύση προβλημάτων οικονομικής φύσης είναι πολύ σημαντικός. Προβλήματα που έχουν σχέση με το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος, με τα έσοδα και έξοδα μιας επιχείρησης, με την ελαστικότητα της ζήτησης των προϊόντων παραγωγής, με εθνικά εισοδήματα και εθνικές οικονομίες, καθώς και άλλες οικονομικές εφαρμογές μπορούν να λυθούν σχετικά εύκολα με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων. Στο μέρος αυτό της εργασίας θα παρουσιαστούν οι παραπάνω εφαρμογές των ολοκληρωμάτων σε οικονομικά προβλήματα.

Η διαδικασία της ολοκλήρωσης αναφέρεται στο προσδιορισμό της συνάρτησης ενός ολικού μεγέθους που είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα από την αντίστοιχη συνάρτηση ενός οριακού μεγέθους. Αναφερόμενοι σε οικονομικά μεγέθη αυτό σημαίνει ότι μία συνάρτηση ενός ολικού οικονομικού μεγέθους είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της αντίστοιχης συνάρτησης ενός οριακού οικονομικού μεγέθους.

2.1 ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2,7].

Κόστος είναι ένα αριθμητικό μέγεθος που αντιπροσωπεύει τα ποσά που επενδύθηκα για την απόκτηση υλικών ή άυλων αγαθών και υπηρεσιών με σκοπό την χρησιμοποίηση τους για την πραγματοποίηση εσόδων από πωλήσεις ή για την κάλυψη κοινωνικών αναγκών.

Κόστος πάγιας και Κόστος τρέχουσας μορφής

- Το κόστος πάγιας μορφής κινείται με σχετικά αργούς ρυθμούς, που εξαρτώνται κυρίως, από τον ωφέλιμο χρόνο ζωής του παγίου και διαφέρει από πάγιο σε πάγιο.
- Το κόστος τρέχουσας μορφής κινείται πάντα ανάμεσα στις πωλήσεις των στοιχείων του ενεργητικού.

Ορισμός

Κόστος παραγωγής είναι το κόστος που πραγματοποιείται για την παραγωγή προϊόντων και την παροχή υπηρεσιών. Το κόστος αυτό περιέχει τις συνολικές δαπάνες που απαιτούνται για την παραγωγή του προϊόντος και για τη μορφή και τη θέση που πρέπει να πάρει με στόχο να μπορεί να πουληθεί. Στις δαπάνες αυτέ ανήκουν τα υλικά που αναλώνονται στην παραγωγή, τα εργατικά, οι μισθοί του προσωπικού, το ρεύμα παραγωγής, οι συντηρήσεις των εγκαταστάσεων παραγωγής κ. α.

Τύποι κόστους παραγωγής

Μία επιχείρηση που παράγει ένα προϊόν, εκτός από τα έξοδα παραγωγής και διακίνησης του προϊόντος, έχει και τα σταθερά λειτουργικά έξοδα. Αν y_1 είναι τα έξοδα της παραγωγής και διακίνησης x μονάδων του παραγόμενου προϊόντος και y_0 είναι τα σταθερά λειτουργικά έξοδα, τότε τα συνολικά έξοδα $y = y_1 + y_0$ είναι μια συνάρτηση του x. Είναι δηλαδή:
$y = f(x)$, με $f_0 = [0, +\infty)$.
Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση ολικού κόστους.
Είναι φανερό ότι η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα $\forall x \in f_0$.
Όταν $x = 0$, δηλαδή όταν η παραγόμενη ποσότητα είναι 0, τότε, $f_0 \geq 0$.
. Επειδή η $y = f(x)$ εκφράζει το συνολικό κόστος για τις x μονάδες του παραγόμενου προϊόντος, το κόστος που αντιστοιχεί σε κάθε μονάδα θα είναι $\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$.
Η συνάρτηση

$$\bar{y} = \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}, \qquad x \in f_0, \qquad x > 0.$$

ονομάζεται συνάρτηση μέσου κόστους παραγωγής.

Αν έχουμε αύξηση της παραγωγής από x_1 μονάδες σε x_2μονάδες και $f(x_1)$, $f(x_2)$ είναι το ολικό κόστος αντίστοιχα, τότε το όριο

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$$

Εκφράζει τη στιγμιαία μεταβολή της $y = f(x)$ στο σημείο $x = x_1$ και ονομάζεται οριακό κόστος.
Δηλαδή η συνάρτηση

$$y' = f'(x), x \in f_0$$

Εκφράζει το οριακό κόστος της παραγωγής.
Η παράγωγος της συνάρτησης του μέσου κόστους, ονομάζεται οριακό μέσο κόστος και μας δίνει αρκετές πληροφορίες για τη μεταβολή του κόστους παραγωγής.
Επειδή

$$(\bar{y})' = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}[f'(x) - \bar{y}]$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει τη συνάρτηση του οριακού μέσου κόστους.
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $f'(x) > \bar{y}$, δηλαδή αν το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το μέσο κόστος τότε έχουμε $(\bar{y})' > 0$ και επομένως η συνάρτηση $\bar{y}$ του μέσου κόστους είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $f'(x) < \bar{y}$, τότε $(\bar{y})' < 0$ και η συνάρτηση $\bar{y}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν η συνάρτηση $\bar{y} = \frac{f(x)}{x}$ έχει ελάχιστο, τότε στο σημείο αυτό θα είναι $(\bar{y})' = 0$, το οποίο δίνει $f'(x) = \bar{y}$.

Δηλαδή, στο ελάχιστο σημείο της καμπύλης $\bar{y} = \frac{f(x)}{x}$, (εφόσον τέτοιο σημείο υπάρχει), το οριακό κόστος είναι ίσο με το μέσο κόστος. Αυτό σημαίνει ότι το μέσο κόστος παραγωγής $\bar{y}$ είναι ελάχιστο στο σημείο x, για το οποίο ισχύει $f'(x) = \bar{y}$.
Επομένως οι καμπύλες του μέσου και του οριακού κόστους τέμνονται στο σημείο στο οποίο η συνάρτηση $\bar{y} = \frac{f(x)}{x}$ παρουσιάζει ελάχιστο.

<u>Εφαρμογές</u>

Εφαρμογή 1η

Έστω ότι το ολικό κόστος παραγωγής και διακίνησης x μονάδων προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση
$y = f(x) = \alpha x + b$, με $\alpha, b \in R$, $\alpha > 0$, $b \geq 0$, $x > 0$
Τότε

- Το μέσο κόστος είναι

$$\bar{y} = \alpha + \frac{b}{y}$$

- Το οριακό κόστος είναι

$$f'(x) = \alpha$$

- Το μέσο οριακό κόστος είναι

$$(\bar{y})' = -\frac{b}{x^2}$$

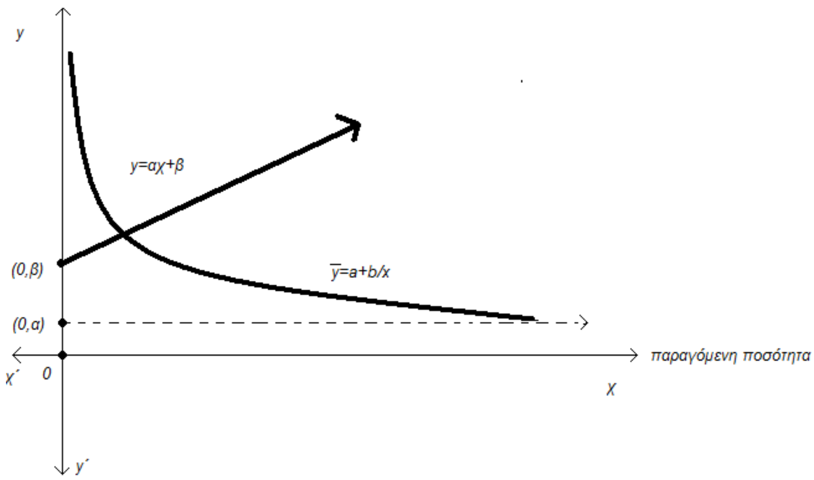
Επειδή $(\bar{y})' = -\frac{b}{x^2} \leq 0$, η συνάρτηση $\bar{y} = \alpha + \frac{b}{y}$ του μέσου κόστους είναι φθίνουσα. Δηλαδή, το μέσο κόστος παραγωγής του προϊόντος ελαττώνεται, καθώς οι μονάδες παραγωγής x αυξάνονται.

Η συνάρτηση $\bar{y}$ δεν έχει ελάχιστο, αλλά, καθώς ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων x αυξάνει, η $\bar{y}$ πλησιάζει τον αριθμό $\alpha = f'(x)$ = οριακό κόστος της y. Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} \bar{y} = \lim_{x\to\infty} \left(\alpha + \frac{b}{x}\right) = \alpha,$$

Έπεται ότι η ευθεία $f'(x) = \alpha$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη της $\bar{y}$.

Τα παραπάνω αποδίδονται γραφικά στο παρακάτω σχήμα, όπου στον άξονα $x'x$ απεικονίζονται οι παραγόμενες ποσότητες και στον άξονα $y'y$ τα αντίστοιχα ολικά έξοδα.



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωσή μας το ολικό κόστος και το οριακό κόστος αντιπροσωπεύονται από ευθείες, ενώ το μέσο κόστος αντιπροσωπεύεται από μία καμπύλη, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη τη ευθεία $f'(x) = \alpha$.

Εφαρμογή 2η

Αν το ολικό κόστος παραγωγής και διακίνησης x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση

$f(x) = ax^2 + bx + c,$ με $\alpha, b, c \in R, a > 0, b \geq 0, c \geq 0, x > 0$

Τότε

- Το μέσο κόστος είναι $\bar{y} = ax + b + \frac{c}{x}$
- Το οριακό κόστος δίνεται από τη σχέση $f'(x) = 2ax + b$ και
- Το μέσο οριακό κόστος είναι $\bar{y} = a - \frac{c}{x^2}$

Αλλά $(\bar{y})' = 0$, αν και μόνο αν $\alpha - \frac{c}{x^2} = 0$, το οποίο δίνει $x = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}$.

Επειδή

$(\bar{y})'' = \left(\alpha - \frac{c}{x^2}\right)' = \frac{2c}{x^3} > 0$,με $x = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}$,

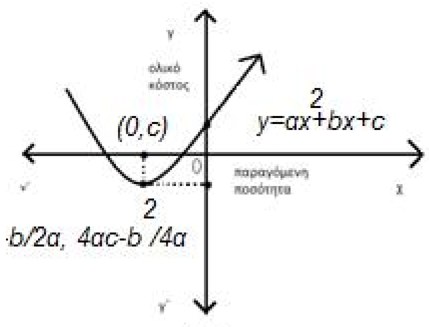
Έπεται ότι η συνάρτηση $\bar{y}$ παρουσιάζει στο σημείο $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ελάχιστο, το οποίο είναι

$$\bar{y}\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}\right) = \alpha\sqrt{\frac{c}{\alpha}} + b + \frac{c}{\sqrt{\frac{c}{\alpha}}} = b + 2\sqrt{\alpha c}.$$

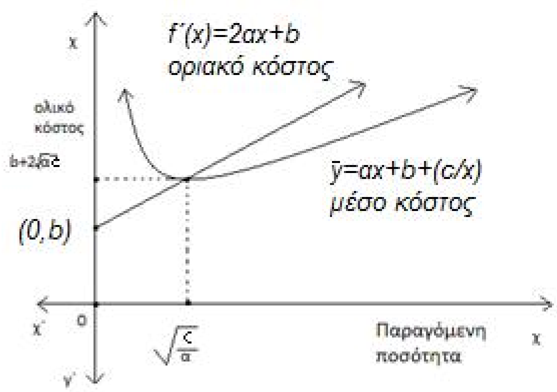
Επειδή με $x = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}$ έχουμε $f'(x) = \bar{y}$, οι καμπύλες του οριακού κόστους και του μέσου κόστους θα τέμνονται στο σημείο $\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}, b + 2\sqrt{\alpha c}\right)$.

Στο παρακάτω σχήμα:

- Το ολικό κόστος y αντιπροσωπεύεται από το τμήμα της παραβολής που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο (σχήμα α), αφού η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$ παριστάνει παραβολή και με $\alpha > 0$ έχει ελάχιστο.
- Το μέσο κόστος $\bar{y}$ αντιπροσωπεύεται από το τμήμα της υπερβολής $\bar{y} = ax + b + \frac{c}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο (σχήμα β).



(α)



(β)

- Το οριακό κόστος αντιπροσωπεύεται από την ευθεία $f'(x) = 2\alpha x + b$.

Εφαρμογή 3η

Μια βιομηχανία για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος έχει οριακό κόστος $f'(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρεθεί το μέσο και το ολικό κόστος παραγωγής, όταν το σταθερό κόστος είναι 10 μονάδες. Για ποιες τιμές του x το ολικό κόστος θα είναι ελάχιστο;

Λύση

Επειδή $y' = f'(x) = x^2 - 3x + 2$, θα είναι

$y = f(x) = \int (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

Επειδή το σταθερό κόστος είναι 10, θα έχουμε $f(0) = 10$. Άρα $10 = f(0) = c$ και η συνάρτηση του ολικού κόστους δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10$$

.

Η συνάρτηση του μέσου κόστους είναι

$$\bar{y} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{10}{x}$$

Είναι $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$, με $x = 1$ ή $x = 2$ και

$$f''(x) = 2x - 3$$

Αλλά $f''(1) = -1 < 0$ και $f''(2) = 1 > 0$. Επομένως, με την τιμή $x = 2$ το ολικό κόστος θα είναι ελάχιστο.

2.2 ΕΣΟΔΑ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2].

Ορισμός και τύποι εσόδων

Αν x είναι η τιμή μονάδας ενός προϊόντος και y η ποσότητα παραγωγής η οποία μπορεί να απορροφηθεί από την κατανάλωση, (η ζήτηση του προϊόντος), τότε το y είναι μια συνάρτηση του x. Αν το προϊόν απορροφάται από την κατανάλωση σε τιμή μονάδας που κυμαίνεται σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η συνάρτηση
$y = f(x)$, με $f_0 = [\alpha, \beta]$
ονομάζεται συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος.

Η συνάρτηση ζήτησης είναι συνήθως φθίνουσα, γιατί, όσο αυξάνεται το x, (η τιμή μονάδας του προϊόντος), τόσο ελαττώνεται η ζήτηση.

Αν R είναι τα ολικά έσοδα από την πώληση μίας ποσότητας y στην τιμή x, τότε η συνάρτηση

$$R(y) = x \cdot y$$

ονομάζεται συνάρτηση ολικών εσόδων ή ολικό έσοδο.

Αν η τιμή μονάδας x είναι μια συνάρτηση της ποσότητας διάθεσης y, αν δηλαδή είναι $x = f(y)$, τότε η συνάρτηση των ολικών εσόδων δίνεται από τη σχέση $R(y) = y \cdot x = y \cdot f(y)$, με $R_0 = A$, όπου A είναι το διάστημα των δυνατών ποσοτήτων πώλησης του προϊόντος.

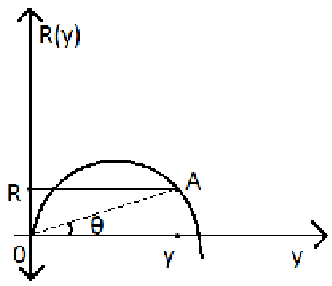
Η συνάρτηση του μέσου εσόδου $\bar{R}(y)$ δίνεται από τη σχέση

$$\bar{R} = \frac{R(y)}{y} = x = f(y)$$

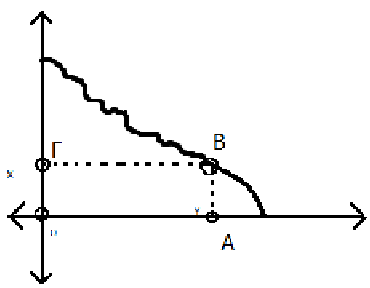
Δηλαδή, το μέσο έσοδο συμπίπτει με την τιμή μονάδας του προϊόντος.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

(i) Αν A είναι ένα σημείο της καμπύλης της συνάρτησης $R(y)$ με συντεταγμένες $(y, R(y))$, τότε η αντίστοιχη τιμή των μέσων εσόδων θα ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας θ (σχήμα α), την οποία σχηματίζει η OA με τον ημιάξονα Oy, αφού $\varepsilon\varphi\theta = \frac{R}{y} = x$



(A)



(B)

(ii) Αν B είναι ένα σημείο καμπύλης της συνάρτησης $\bar{R}(y)$ των μέσων εσόδων με συντεταγμένες $(y, \bar{R}(y)) = (y, x)$, τότε η αντίστοιχη τιμή των ολικών εσόδων ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ (σχήμα β), αφού $(OAB\Gamma) = x \cdot y = R$.

Η συνάρτηση του οριακού εσόδου δίνεται από τη σχέση $R'(y) = x + \frac{dx}{dy} \cdot y$

Όταν είναι γνωστό το οριακό έσοδο $R'(y)$, το ολικό έσοδο $R(y)$ προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\int R'(y)dy = R(y) + c$$

οπού η σταθερή c υπολογίζεται, αν λάβουμε υπόψη μας ότι το ολικό έσοδο $R(y)$ είναι μηδέν, όταν η ζήτηση είναι μηδέν.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Έστω οριακό έσοδο είναι $R''(y) = -4$ και $R'(5) = 0$, να βρεθεί το ολικό έσοδο. Αν $R(0) = 0$ να προσδιοριστεί η συνάρτηση τιμής.

Λύση

$$R'(y) = \int R''(y)dy = \int (-4)dy = -4y$$

Από τα δεδομένα γνωρίζουμε ότι $R'(5) = 0$,
Άρα $R'(5) = 0 \leftrightarrow -4 \cdot 5 = 0 \leftrightarrow -20 = 0$

$$R'(y) = 20 - 4y$$

Το ολικό έσοδο είναι:

$$R(y) = \int R'(y)dy = \int (20 - 4y)dy = 20y - 2y^2 + c$$

Αν $R(0) = 0$ τότε $R(y) = 20y - 2y^2$

Αλλά $R(y) = x \cdot y$, επομένως $R(y) = y \cdot (20 - 2y)$

Άρα η συνάρτηση τιμής είναι,

$$x = 20 - 2y$$

Εφαρμογή 2η

Έστω ότι η συνάρτηση του οριακού εσόδου μιας επιχείρησης η οποία παράγει ένα προϊόν, είναι $R'(y) = y^2 - 6y - 3$, όπου y είναι οι μονάδες παραγωγής του προϊόντος. Να βρεθεί η συνάρτηση του ολικού εσόδου.

Λύση

$$R(y) = \int R'(y)dy = \int (y^2 - 6y - 3)dy = \frac{1}{3}y^3 - 3y^2 - 3y + c$$

Με $y = 0$ είναι $R(y) = 0$ και επομένως $c = 0$. Άρα η συνάρτηση $R(y) = \frac{1}{3}y^3 - 3y^2 - 3y$ είναι η συνάρτηση του ολικού εσόδου.

Εφαρμογή 3η

Μια επιχείρηση παράγει ένα αγαθό σε ποσότητα y. Η τιμή μονάδας του αγαθού αυτού δίνεται από τη σχέση $x = 50 - y$. Αν η συνάρτηση του κέρδους είναι $f'(y) = 56 - 8y$ και $f(0) = -5$, να προσδιοριστεί το ολικού κόστους.

Λύση

Η συνάρτηση των ολικών εσόδων δίνεται από τη σχέση

$$R(y) = y \cdot x = y \cdot (50 - y) = 50y - y^2$$

Αν $\varphi(y)$ είναι η συνάρτηση του κόστους, τότε θα είναι $\varphi(y) = R(y) - f(y)$.

$$f(y) = \int f'(y)dy = \int (56 - 8y)dy = 56y - 4y^2 + c$$

Από την εκφώνηση ξέρουμε ότι $f(0) = -5$, άρα $c = -5$

Επομένως

$$f(y) = 56y - 4y^2 - 5$$

$$\varphi(y) = R(y) - f(y) = 50y - y^2 - (56y - 4y^2 - 5) = 3y^2 - 6y + 5$$

Άρα η συνάρτηση του ολικού κόστους είναι

$$\varphi(y) = 3y^2 - 6y + 5$$

2.3 ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

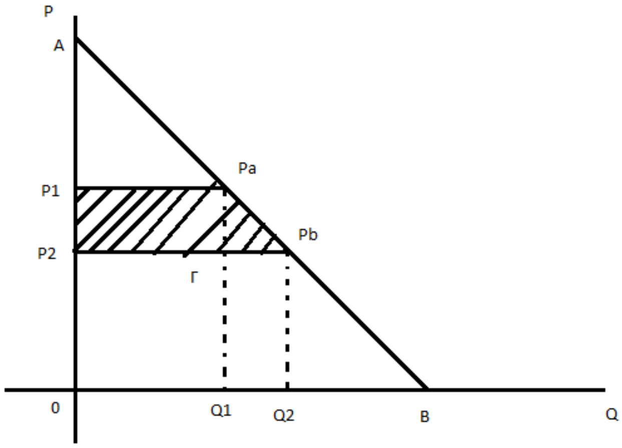
Τα στοιχεία της παραγράφου βρίσκονται στο [6,8].

Ορισμός

Ως πλεόνασμα καταναλωτή ορίζουμε το επιπλέον ποσό που διατίθεται να πληρώσει ο καταναλωτής για αγαθά ή τις υπηρεσίες που πωλούνται σε τιμές υψηλότερες από την τιμή P_1.

Τύποι

Ο δείκτης κοινωνικής ευημερίας που είναι αναγκαίος για την αξιολόγηση των εναλλακτικών τιμολογιακών επιλογών μιας δημόσιας επιχείρησης, είναι απαραίτητο να αντανακλά το όφελος, σε χρηματικούς όρους, που απορρέει στον καταναλωτή από μεταβολή της τιμής ενός αγαθού.



Έστω η συνάρτηση ζήτησης του παραπάνω σχήματος. Η ζήτηση του αγαθού εξαρτάται μόνο από την τιμή του $Q = Q(p)$. Οι τιμές των υπόλοιπων αγαθών και το εισόδημα του καταναλωτή παραμένουν σταθερά. Οι συναρτήσεις ζήτησης προκύπτουν κατά τη διαδικασία μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας του καταναλωτή με δεδομένο το εισόδημα του. Αν ξεκινήσουμε από μία υποθετική τιμή P_1, η χρηματική αποτίμηση από τον καταναλωτή, κάθε επιπρόσθετης μονάδας, $Q, Q + 1$ κ.ο.κ. προσδιορίζεται πάνω στην καμπύλη ζήτησης από την εκάστοτε διαμορφούμενη τιμή μεταξύ P_ακαι P_b. Αν η τιμή μειωθεί από P_1 σε P_2 το συνολικό όφελος σε χρηματικούς όρους του καταναλωτή είναι το άθροισμα όλων των επί μέρους αποτιμήσεων μεταξύ Q_1 και Q_2, που αντιστοιχεί στην επιφάνεια $P_1P_2P_bP_\alpha$. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται πλεόνασμα του καταναλωτή. Το πλεόνασμα αυτό αποτελείται όπως φαίνεται στο σχήμα από δύο μέρη. Την επιφάνεια $P_1P_2\Gamma P_\alpha$ που αντιπροσωπεύει το χρηματικό όφελος του καταναλωτή λόγω του ότι η ποσότητα Q_1 αγοράζεται στη χαμηλότερη τιμή P_2και την επιφάνεια $P_b\Gamma P_\alpha$ που αντιπροσωπεύει το όφελος επειδή έγινε δυνατή αύξηση της αγοραζόμενης ποσότητας κατά Q_1Q_2 λόγω μείωση της τιμής. Γενικά το πλεόνασμα του καταναλωτή προκύπτει αν από το συνολικό χρηματικό όφελος αφαιρεθεί το ποσό που πληρώνει ο καταναλωτής για να αγοράσει δεδομένη ποσότητα. Έτσι το πλεόνασμα της ποσότητας Q_1 είναι η επιφάνεια AP_1P_a ενώ το πλεόνασμα της ποσότητας Q_2 είναι η επιφάνεια AP_2P_b.

Τα πλεονάσματα που ορίσθηκαν στο παραπάνω σχήμα προσδιορίζονται από ορισμένα ως:

$cs = -\int_{P_1}^{P_2} Q(p) > 0$ επειδή $P_1 > P_2$

και

$$cs(P_1) = \int_{P_1}^{A} Q(p)dp = U(Q_1) - pQ_1$$

Όπου, $U(Q_1)$ η χρησιμότητα από την κατανάλωση ποσότητας Q_1 και P_1Q_1 η δαπάνη του καταναλωτή για αγορά ποσότητας Q_1 Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν όταν οι τιμές των άλλων αγαθών παραμένουν σταθερές. Στην περίπτωση που οι τιμές $i = 1, \ldots . n$ αγαθών είναι μεταβλητές η συνάρτηση ζήτησης των αγαθών γράφεται:

$$Q_i = Q_i(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_{n,}M) \qquad i = 1, \ldots \ldots \ldots, n$$

M=σταθερό εισόδημα

<u>Εφαρμογή</u>

Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = D(q) = \sqrt{16-2q}$ να υπολογιστεί το πλεόνασμα καταναλωτή όταν $q_0 = 3$.

Λύση

Έχουμε $p = D(q) = \sqrt{16-2q} \quad = D(p) = 8 - \frac{1}{2}p^2$
Και $p_0 = D(3) = \sqrt{10}$
Από τα δεδομένα αυτά παίρνουμε:

$CS = \int_0^3 \sqrt{16-2q}\ dq - 3\sqrt{10} = -\frac{1}{3}(16-2q)^{3/2} \Big|_0^3 - 3\sqrt{10} = -\frac{10}{3}\sqrt{10} - \left(-\frac{1}{3}16^{3/2}\right) - 3\sqrt{10} = \frac{64}{3} - \frac{19}{3}\sqrt{10}.$

2.4 ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [6].

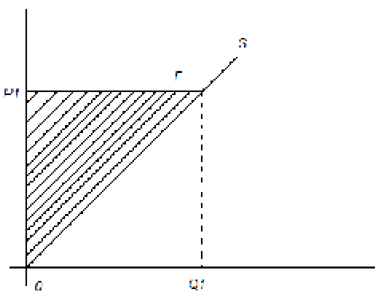
Ορισμός

Ως πλεόνασμα παραγωγού ορίζουμε το επιπλέον ποσό που διατίθεται να χάσει ο παραγωγός προσφέροντας τα αγαθά ή τις υπηρεσίες του σε τιμή χαμηλότερη από την P_1.

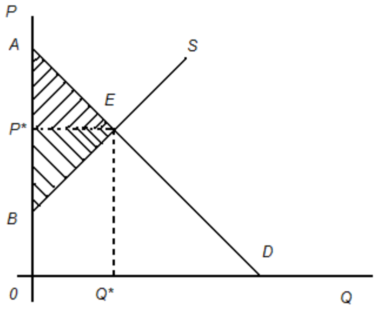
Τύποι

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι για μία μεταβολή της τιμής από 0 σε P_1 προσδιορίζεται από την επιφάνεια $0P_1\Gamma$ αριστερά της καμπύλης προσφοράς $0S$. Δεδομένου ότι η συνάρτηση προσφοράς αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση οριακού κόστους το πλεόνασμα του παραγωγού μπορεί να γραφεί ως:

$$PS = pQ - \int_0^Q MC(u)du = pQ - C(Q)$$



Οι έννοιες των δύο πλεονασμάτων μπορούν να συνδυασθούν στο συνηθισμένο διάγραμμα προσφοράς και ζήτησης στο παρακάτω σχήμα.



Στην τιμή ισορροπίας P το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι $AP \cdot E$ ενώ το πλεόνασμα του παραγωγού είναι $BP \cdot E$. Η συνολική επιφάνεια ABE μπορεί να θεωρηθεί, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις εννοιολογικές δυσκολίες που αναφέρθηκαν παραπάνω, ως ικανοποιητική προσέγγιση του συνολικού οφέλους μείον το συνολικό κόστος. Η διαφορά αυτή αναφέρεται και ως κοινωνικό πλεόνασμα.

Εφαρμογή 1^{η}

Αν η συνάρτηση προσφοράς είναι $p = S(q) = 20 + 0{,}1q$ και η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = D(q) = \frac{6000}{q+50}$ να βρεθεί η ποσότητα ισορροπίας q_0 και το πλεόνασμα παραγωγού.

Λύση

Για να βρούμε την ποσότητα ισορροπίας q_0 θα πρέπει η συνάρτηση προσφοράς να ισούται με τη συνάρτηση ζήτησης. Άρα:

$$D(q) = S(q) \leftrightarrow \frac{6000}{q + 50} = 20 + 0{,}1q$$

$$6000 = (20 + 0{,}1q)(q + 50) \leftrightarrow 5000 = 25q + 0{,}1q^2 \leftrightarrow 0{,}1q^2 + 25q - 5000 = 0$$

$$q_1 = 136{,}15$$

$$q_2 = -381$$

Αποδεχόμαστε την τιμή q_1 με θετικό πρόσημο και απορρίπτουμε αυτή με το αρνητικό.

Άρα το πλεόνασμα παραγωγού είναι

$$PS = Pq_0 - \int_0^{q_0} MC(u)du \leftrightarrow 20q_0 + 0{,}1{q_0}^2 - Cq_0 = 2723 + 1883{,}7 - Cq_0 \leftrightarrow$$

$$PS = 4576{,}7 - Cq_0$$

Εφαρμογή 2^{η}

Αν η συνάρτηση προσφοράς είναι $p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9$ και η τιμή $p_1 = 49$ να υπολογιστεί το πλεόνασμα του παραγωγού.

Λύση

Έχουμε $p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9 \quad = G(p) = \frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{3}{2}$,

και $q_1 = G(49) = \frac{1}{2}\sqrt{49} - \frac{3}{2} = 2$
Από τα δεδομένα έχουμε:

$$PS = \int_0^{49}\left(\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{3}{2}\right)dp = (2)(49) - \int_0^{2}(4q^2 + 12q + 9)dq$$

Άρα

$PS = (2)(49) - \int_0^{2}(4q^2 + 12q + 9)dq = (2)(49) = \left(\frac{4}{3}q^3 + 6q^2 + 9q\right)\Big|_0^2 = (2)(49) - \left[\frac{4}{3}(2)^3 + 6(2)^2 + 9(2) - \frac{4}{3}(0)^3 - 6(0)^2 - 9(0)\right] = 98 - \frac{158}{3} = 45\frac{1}{3}$.

2.5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΓΜΙΑΙΩΝ ΡΥΘΜΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΧΡΟΝΙΚΑ ΟΡΙΖΟΜΕΝΕΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [4].

Τύποι

Είναι προφανές ότι πολλά οικονομικά μεγέθη μεταβάλλονται σε συνάρτηση με το χρόνο. Στις περιπτώσεις αυτές αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής τότε με ολοκλήρωση παίρνουμε τη συνάρτηση που εκφράζει την εξάρτηση της τιμής του μεγέθους αυτού από το χρόνο. Με τον τρόπο αυτό εκφράζεται συνήθως το αποτέλεσμα μιας συνεχούς διαδικασίας συσσώρευσης ή σχηματισμού ενός οικονομικού μεγέθους που είναι απόθεμα (stock) από ένα αντίστοιχο μέγεθος ροής (flow). Πιο συγκεκριμένα αν συμβολίσουμε με $S(t)$ και $f(t)$ τις συναρτήσεις του αποθέματος και ροής αντίστοιχα στο χρόνο t τότε ισχύει:

$$dS(t) = f(t)dt \leftrightarrow \int dS(t) = \int f(t)dt = S(t)$$

Η συσσώρευση κεφαλαίου είναι μια διαδικασία, που μπορεί να θεωρηθεί συνεχής σε σχέση με το χρόνο t, με την οποία προστίθεται σ' ένα απόθεμα κεφαλαίου $K(t)$ στο χρόνο t η καθαρή επένδυση $I(t)$, που είναι η συνάρτηση ροής. Οι συναρτήσεις $K(t)$ και $I(t)$ συνδέονται με τις σχέσεις:
$K'(t) \equiv I(t)$ και $\int I(t)dt = \int dK(t) = K(t)$

Εφαρμογή

Αν ο στιγμιαίος ρυθμός καθαρής επένδυσης είναι $I(t) = 2\sqrt{t+5}$ δις. δρχ. ετησίως τότε το κεφάλαιο που συσσωρεύεται στο χρόνο t είναι ίσο με :

$$K(t) = \int\left(2\sqrt{t+5}\right)dt = \frac{4}{3}t^{3/2} + 5t + A$$

Και επειδή $K(0) = A$ έχουμε $K(t) = \frac{4}{3}t^{3/2} + 5t + K(0)$.

Ακόμη το κεφάλαιο που συσσωρεύεται στη διάρκεια ενός χρόνου έστω x είναι ίσο με:

$$\int_x^{x+1}\left(2t^{\frac{1}{2}} + 5\right)dt = \frac{4}{3}t^{3/2} + 5t\Big|_x^{x+1} = \frac{4}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] + 5$$

- Έστω ότι η συνάρτηση του στιγμιαίου ρυθμού ροής εσόδων από την απασχόληση μιας μηχανής είναι $E(t) = 500 - \frac{1}{4}t^2$ όπου ο χρόνος t μετράται σε χρόνια και η συνάρτηση του οριακού κόστους συνάρτησης είναι $M(t) = 2t^2$. Αν υποθέσουμε ότι η μηχανή δεν έχει καμιά υπολειμματική αξία ζητείται να προσδιοριστούν (i) ο άριστος χρόνος διακοπής της λειτουργίας της, και (ii) το ύψος των κερδών που θα συσσωρευτούν στον άριστο χρόνο λειτουργίας της.

Προφανώς ο άριστος χρόνος λειτουργίας της μηχανής προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης:

$E(t) = M(t)$ ή $500 - \frac{1}{4}t^2 = 2t^2 \leftrightarrow 500 = 2{,}25t^2 \leftrightarrow t = 14{,}9$

Το ολικό κέδρος που θα πραγματοποιηθεί την περίοδο των 14,9 ετών είναι:

$TP = \int_0^{14,9} \big(E(t) - M(t)\big)dt = \int_0^{14,9} \left(500 - \frac{1}{4}t^2 - 2t^2\right) dt = 500t - \frac{3}{4}t^3 \Big|_0^{14,9} = 500(14{,}9) - \frac{3}{4}(14{,}9)^3 = 4970.$

2.6 ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΡΟΗΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [6].

Ορισμός

Η παρούσα αξία ενός χρηματικού ποσού διαθέσιμου σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t, με συνθήκες συνεχούς ανατοκισμού ορίζεται ως: $P = Se^{-it}$.
Μία χρηματική ροή είναι μια πραγματική συνάρτηση $S(t)$ με πεδίο ορισμού τον χρονικό ορίζοντα $(0, T)$, η οποία εκφράζει διαθέσιμο χρηματικό ποσό στη χρονική στιγμή t. Η χρηματική ροή μπορεί να αντίστοιχη στη ροή των εσόδων από την πώληση ενός προϊόντος στο δεδομένο χρονικό ορίζοντα, στη ροή των τόκων μίας ομολογίας κ.ο.κ.

Τύποι

Η παρούσα αξία της χρηματικής ροής ορίζεται ως:

$$PV = \int_0^T S(t)e^{-it}dt$$

Αν η χρηματική ροή είναι σταθερή δηλαδή $S(t) = S$ τότε

$$PV = \int_0^T S(t)e^{-it}dt = \frac{S}{i}(1 - e^{-iT})$$

Αν η σταθερή χρηματοροή είναι διαρκής π.χ. μία διαρκής ομολογία η παρούσα αξία της είναι:

$$PV = \int_0^{+\infty} S(t)e^{-it}dt = \frac{S}{i}$$

Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν την παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου που δημιουργεί τη συγκεκριμένη χρηματοροή. Με άλλα λόγια όταν το στοιχείο γίνεται αντικείμενο συναλλαγής στην αγορά, η τιμή αγοράς του θα είναι ίσο με την παρούσα αξία του. Έτσι, αν το επιτόκιο στην αγορά είναι 10%, μια ομολογία αποφέρει $1000€/έτος$ επ' άπειρο, έχει παρούσα αξία $1000/0.1 = 10000€$. Η αξία αυτή είναι και η τιμή αγοράς της. Όπως φαίνεται $dPV/di < 0$ επομένως μια αύξηση, του επιτοκίου θα μειώσει την παρούσα αξία της ομολογίας και αντίστροφα.

Η έννοια της παρούσας αξίας μπορεί να εφαρμοσθεί σε κάθε είδος ροή, όχι κατ' ανάγκη χρηματική. Έτσι η παρούσα μίας ροής κατανάλωσης είναι:

$$PV = \int_0^T C(t)e^{-\int_0^t r(u)du}dt$$

Όπου $r(u)$ είναι ο μεταβαλλόμενος ρυθμός χρονικής προτίμησης. Αν $r(u) = r$ σταθερό τότε $\int_0^t rdu = rt$ επομένως

$$PV = \int_0^T C(t)e^{-rt}dt$$

2.7 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [5,6].

Ορισμός

Ως απόσβεση ορίζουμε τη μείωση της αξίας ενός πάγιου περιουσιακού στοιχείου από τη φθορά που υπέστη αυτό, είτε λόγω της παρόδου του χρόνου , είτε λόγω της χρήσεως, είτε όταν οφείλεται σε επιστημονικές και τεχνικές ανακαλύψεις και εφευρέσεις (τεχνολογική απαξίωση).

Τύποι

Έστω ένα μηχάνημα το οποίο έχει ετήσιο κόστος λειτουργίας $c(\tau)$ και παράγει $y(\tau)$ μονάδες προϊόντος το έτος οι οποίες πωλούνται στη γνωστή και σταθερή τιμή p. Η χρηματική ροή που αντιστοιχεί στη λειτουργία του μηχανήματος στο χρόνο τα είναι:

$$R(\tau) = py(\tau) - c(\tau)$$

Αν το μηχάνημα έχει λειτουργική ζωή $N^{(2)}$ έτη και μηδενική υπολειμματική αξία στο τέλος της λειτουργικής του ζωής και αν το επιτόκιο είναι σταθερό, η παρούσα αξία της χρηματικής ροής που δημιουργείται από τη λειτουργία του μηχανήματος, από κάποιο έτος t μέχρι το τέλος της λειτουργικής του ζωής είναι:

$$V(t) = \int_t^N R(\tau)e^{-i(\tau-t)}d\tau \qquad (a)$$

Από την αναφορά στο κεφάλαιο παρούσα αξία χρηματοροής φαίνεται ότι η σχέση (α) εκφράζει τη αξία του μηχανήματος, που είναι η αξία του στο $t=0$, ορίζεται επομένως ως:

$K = V(0) = \int_t^N R(\tau)e^{-i\tau}d\tau$ (β)

<u>Η συνάρτηση απόσβεσης</u> ορίζεται ως ο ρυθμός μείωσης της αξίας του μηχανήματος διαχρονικά

$$D(t) = -\frac{dV(t)}{dt}$$

Παραγωγίζοντας την (α) έχουμε:

$$-\frac{dV(t)}{dt} = -(\int_t^N \frac{d}{dt}R(\tau)e^{-i(\tau-t)})dt + R(N)e^{-i(N-t)}\frac{dN}{dt} - R(t)e^{-i(t-t)}\frac{dt}{dt})$$
$$= R(t) - i\int_t^N R(t)e^{-i(\tau-t)}d\tau = R(t) - iV(t), \quad \left(\frac{dN}{dt} = 0\right) \quad (1)$$

<u>Η Συσσωρευμένη απόσβεση</u> από την περίοδο αγοράς, του μηχανήματος μέχρι κάποιο έτος $\alpha \le N$ ορίζεται ως:

$$\int_0^\alpha D(t)dt = -\int_0^a \left(\frac{dV(t)}{dt}\right)dt = V(0) - V(a) \quad (2)$$

Στη συνήθη πρακτική η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος απόσβεσης είναι η <u>ευθεία γραμμή</u>. Η μέθοδος της <u>εκθετικής απόσβεσης</u> χρησιμοποιείται επίσης σε εφαρμοσμένα οικονομικά προβλήματα. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό οι μέθοδοι αυτές ορίζονται ως:

Ευθεία γραμμή $D(t) = -\frac{dV(t)}{dt} = \frac{V(0)}{N}, \quad 0 \le t \le N$ (3)

Ευθεία απόσβεση $D(t) = -\frac{dV(t)}{dt} = \gamma V(t)$ (4)

Από την (1) όμως φαίνεται ότι η συνάρτηση απόσβεσης εξαρτάται τελικά από τη συνάρτηση χρηματοροής $R(t)$ που δημιουργεί το μηχάνημα. Επομένως αυθαίρετες συναρτήσεις απόσβεσης όπως οι (3) ή (4) που χρησιμοποιούνται σε λογιστικές πρακτικές δεν εκτιμούν σωστά τη μεταβολή της αξίας του μηχανήματος, η οποία αντιπροσωπεύει την ακριβή οικονομική απόσβεση.

Η σχέση (1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για τον προσδιορισμό της συνάρτησης χρηματοροής που είναι συνεπής με <u>Ευθεία Γραμμή</u> ή <u>Εκθετική Απόσβεση</u>. Προσδιορίζεται δηλαδή μια συνάρτηση χρηματοροής για την οποία η αυθαίρετη συνάρτηση απόσβεσης (Ευθεία Γραμμή, Εκθετική Απόσβεση) ταυτίζεται με την ακριβή οικονομική συνάρτηση απόσβεσης.

Ολοκληρώνοντας την (3) και χρησιμοποιώντας την (2) έχουμε:

$\int_0^t D(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{V(0)}{N}d\tau$ ή$V(\tau) = V(0) - V(0)\frac{t}{N}$ (5)

Αντικαθιστώντας την $V(t)$ από την (β) , η (5) γίνεται:

$$\int_t^N R(\tau)e^{-i\tau}d\tau = (V(0) - V(0)\frac{t}{N})e^{-it}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς t επιτυγχάνουμε:

$$-R(t)e^{-it} = -ie^{-it}\left(V(0) - V(0)\frac{t}{N}\right) - V(0)\frac{e^{-it}}{N}$$

Συνεπώς $R(t) = V(0)\left(i + \frac{1}{N}\right) - \frac{iV(0)}{N}t$ (6)

Αν επομένως η συνάρτηση χρηματοροής είναι η γραμμική συνάρτηση (6), τότε η Ευθεία Γραμμή αποτελεί σωστή προσέγγιση της οικονομικής συνάρτησης απόσβεσης.

2.8 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [2].

Όπως είναι γνωστό η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f μας δίνει πληροφορίες για το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης σε σχέση με τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις, ιδιαίτερα σε προβλήματα Οικονομίας, υπάρχει ανάγκη προσδιορισμού της ποσοστιαίας μεταβολής της συνάρτησης f σε σχέση με τη μοναδιαία ποσοστιαία μεταβολή της x, δηλαδή πόσο επί τοις εκατό, για παράδειγμα, μεταβάλλεται η $f(x)$ όταν η μεταβλητή x μεταβληθεί κατά 1%. Πληροφορίες τέτοιου είδους μας δίνει η ελαστικότητα της συνάρτησης, η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός

Ελαστικότητα της συνάρτησης f στο σημείο x του f_0, με $f(x) \neq 0$, ονομάζεται το γινόμενο $\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$ και συμβολίζεται με ε_f ή απλώς με ε.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό,

$$\varepsilon = \frac{x}{f(x)} \cdot f' \cdot (x) \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), με $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f(x))}{\Delta x}$, έχουμε

$$\varepsilon = \frac{x}{f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{\frac{\Delta(f(x))}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \qquad (2)$$

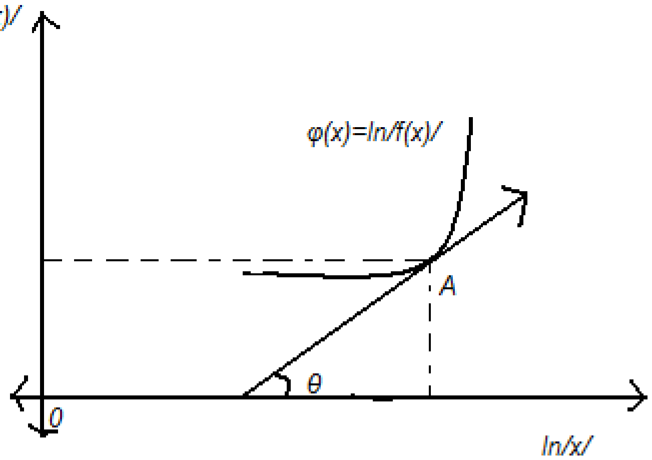
Αυτό σημαίνει ότι η ελαστικότητα της συνάρτησης $y = f(x)$ δίνει ένα μέτρο μεταβλητότητας της f με τη βοήθεια των σχετικών μεταβολών των λόγων $\frac{\Delta(f(x))}{f(x)}$ και $\frac{\Delta x}{x}$. Έτσι, η ελαστικότητα ε της f στο σημείο x του f_0είναι η ποσοστιαία μεταβολή της x. Χρησιμοποιείται κυρίως, όταν ενδιαφέρει περισσότερο η σύγκριση των σχετικών μεταβολών των x και $f(x)$ και λιγότερο οι απόλυτες μεταβολές τους. Π. χ. κατά τη μελέτη της μεταβολής της προσφοράς και της ζήτησης ενός προϊόντος, ενδιαφέρει περισσότερο, για παράδειγμα, πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί η ζήτηση του προϊόντος, όταν η τιμή μονάδας αυξηθεί κατά 1%, παρά οι απόλυτες μεταβολές των x και $f(x)$.

Η ελαστικότητα μιας συνάρτησης f είναι ανεξάρτητη από τη μονάδα μέτρησης των x και $f(x)$ και γι' αυτό η χρήση της σε οικονομικά προβλήματα είναι πολύ συχνή.

Επειδή $df(x) = f'(x)\,dx$, από τη σχέση (1) παίρνουμε

$$\varepsilon = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{\frac{d(f(x))}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d(\ln(f(x)))}{d(lnx)} \qquad (3)$$

Θεωρούμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων των $\ln|f(x)|$ και $\ln|x|$. Τότε, με τη βοήθεια και της σχέσης (3)



Συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $\ln|f(x)|$ στο σημείο $(\ln|x|, \ln|f(x)|)$ σχηματίζει με τον άξονα $\ln|x|$ γωνία θ τέτοια, ώστε $\varepsilon\varphi\,\theta = \varepsilon$.

Δηλαδή η ελαστικότητα ε της συνάρτησης f συμπίπτει με την εφαπτόμενη της γωνίας θ στους θεωρούμενους άξονες συντεταγμένων (παραπάνω σχήμα).

Ιδιότητες της ελαστικότητας συνάρτησης

(i) Η ελαστικότητα ε μιας συνάρτησης f είναι ανεξάρτητη από τη μονάδα μέτρησης.

(ii) Η ελαστικότητα σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν.

(iii) Η ελαστικότητα συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha x_{\nu}$, $\alpha \in \mathrm{R}$, είναι σταθερή και ίση με $\nu, \forall\, \nu \in \mathrm{R}$.

(iv) Η ελαστικότητα της συνάρτησης $\theta = f + \varphi$ δίνεται από τη σχέση $\varepsilon_{\theta} = \frac{\varepsilon_f f(x) + \varepsilon_{\varphi}\varphi(\chi)}{\theta(\chi)}$.

(v) Η ελαστικότητα της συνάρτησης $\theta = f \cdot \varphi$ δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{f \cdot \varphi} = \varepsilon_f + \varepsilon_{\varphi}$$

(vi) Η ελαστικότητα της συνάρτησης $\theta = \frac{f}{\varphi}$, με $\varphi(x) \neq 0 \ \forall x \in \varphi_0$, δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{f:\varphi} = \varepsilon_f - \varepsilon_\varphi$$

<u>**Εφαρμογές**</u>

Εφαρμογή 1η

Η ελαστικότητα της συνάρτησης $f(x) = 2x - 3$ στο σημείο $x = 2$ είναι

$$\varepsilon = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{2x-3} \cdot 2 = \frac{2x}{2x-3.}$$

Επομένως, με $x = 2$ έχουμε $\varepsilon = 4$. Άρα έχουμε ανελαστική. Αυτό σημαίνει ότι όταν η μεταβλητή x αυξάνεται κατά 1%, η $f(x)$ αυξάνεται κατά 4%.

Εφαρμογή 2η

Η ελαστικότητα της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2x - 5$ στο σημείο $x = 1$ είναι

$$\varepsilon = \frac{x}{x^2 + 2x - 5} \cdot (x^2 + 2x - 5)' = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 5}$$

Και με $x = 1$ έχουμε $\varepsilon = -2$. Αυτό σημαίνει ότι, όταν η μεταβλητή x αυξάνεται κατά 1%, η $f(x)$ ελαττώνεται κατά 2%.

Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση f έχει σταθερή ελαστικότητα $\forall x \in f_0$, τότε η f ονομάζεται ισοελαστική.

Π. χ. η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ με $f_0 = (0, +\infty)$ είναι ισοελαστική, γιατί

$$\varepsilon = \frac{x}{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1$$

2.9 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΖΗΤΗΣΗΣ Ερ

Ορισμός

Η ζήτηση σε ορισμένα αγαθά και υπηρεσίες είναι ποιο ευαίσθητη στις μεταβολές της τιμής ενώ σε άλλα είναι λιγότερο ευαίσθητη. Αυτός ο βαθμός της ευαισθησίας της ζητούμενης ποσότητας ενός αγαθού Α στις μεταβολές της τιμής του ονομάζεται ελαστικότητα ζήτησης σε σχέση με την τιμή του αγαθού δίνεται από τον τύπο που δεν είναι άλλος παρά ο λόγος της ποσοστιαίας % μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας προς την ποσοστιαία % μεταβολή της τιμής.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα μέγεθος x που μεταβάλλεται κατά Δx και ένα μέγεθος y που μεταβάλλεται κατά Δy. Τότε οι μεταβολές σε % θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x & \Delta x \\ 100 & ; \end{bmatrix} \rightarrow ; = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100$$

$$\begin{bmatrix} y & \Delta y \\ 100 & ; \end{bmatrix} \rightarrow ; = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100$$

Ο λόγος $\frac{\Delta y}{y} \cdot 100 / \frac{\Delta x}{x} \cdot 100$ θα λέγεται ελαστικότητα του x ως προς y, ενώ ο λόγος $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100 / \frac{\Delta y}{y} \cdot 100$ θα λέγεται ελαστικότητα του y ως προς x. Δηλαδή θα είναι $e_x = \frac{\frac{\Delta y}{y}\%}{\frac{\Delta x}{x}\%} \wedge e_y = \frac{\frac{\Delta x}{x}\%}{\frac{\Delta y}{y}\%}$

Θέτουμε τώρα όπου $y = Q$ και $X = P$, τότε ο πρώτος από τους παραπάνω τύπους θα γίνει,

$e_p = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta p / p} = \frac{P}{Q} \frac{\Delta Q}{\Delta p}$ και με $\Delta P \rightarrow 0$

$* e_p = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}$

Δηλαδή θα έχουμε το γνωστό τύπο της ελαστικότητας της ζήτησης ως προς την τιμή.

Ελαστικότητα και ζήτηση

(i) Εάν η ζήτηση είναι ελαστική τότε μια μείωση (αύξηση) στην τιμή ενός αγαθού επιφέρει μια τέτοια αύξηση (μείωση) στη ζητούμενη ποσότητά του, ώστε η συνολική δαπάνη του αγαθού αυτού αυξάνεται (μειώνεται).

(ii) Εάν η ζήτηση είναι μοναδιαίας ελαστικότητας, τότε μια μείωση (αύξηση) στην τιμή ενός αγαθού επιφέρει μια τέτοια αύξηση (μείωση) στη ζητούμενη ποσότητά του, έτσι ώστε η συνολική δαπάνη του αγαθού αυτού παραμένει αμετάβλητη.

(iii) Εάν η ζήτηση είναι ανελαστική τότε μια μείωση (αύξηση) στην τιμή ενός αγαθού επιφέρει μια τέτοια αύξηση (μείωση) στη ζητούμενη ποσότητά του, έτσι ώστε η συνολική δαπάνη του αγαθού αυτού μειώνεται (αυξάνεται).

Τιμές ελαστικότητας ζήτησης

(i) Εάν $-\infty < \varepsilon < -1$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητά του, τότε η ζήτηση ονομάζεται ελαστική.

(ii) Εάν $-1 < \varepsilon < 0$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με μικρότερη ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητά του, τότε η ζήτηση ονομάζεται ανελαστική.

(iii) Εάν $\varepsilon = -1$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με ίση ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητά του, τότε η ζήτηση ονομάζεται μοναδιαίας ελαστικότητας.

(iv) Εάν $\varepsilon = -\infty$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με άπειρη ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητά του, τότε η ζήτηση ονομάζεται τέλεια (ή πλήρως) ελαστική.

(v) Εάν $\varepsilon = 0$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με μηδενική ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητά του, τότε η ζήτηση ονομάζεται τέλεια (ή πλήρως) ανελαστική.

Εφαρμογή

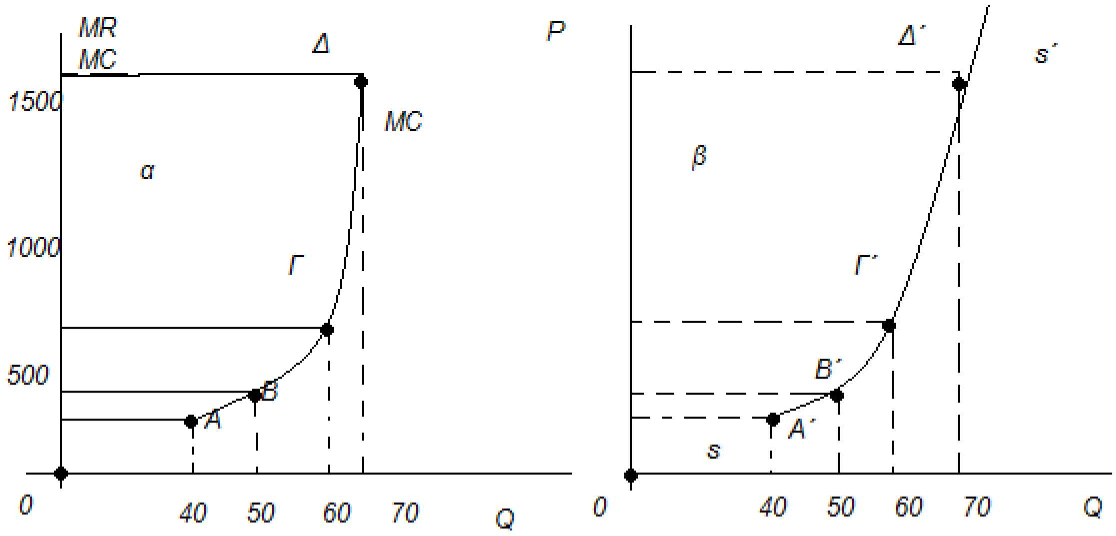
Αν η τιμή ενός αγαθού αυξηθεί κατά $20\ \%$ και η ζητούμενη ποσότητα μειωθεί κατά 6% τότε η ελαστικότητα ζήτησης θα ισούται με

$$e_p = \frac{\%\Delta q}{\%\Delta p} = \frac{6\%}{20\%} = 0{,}3$$

2.10 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΦΟΡΑ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [8].

Ατομική προσφορά (κλίμακα ή καμπύλη) ενός αγαθού ονομάζεται η ποσότητα από το αγαθό αυτό που ο επιχειρηματίας προσφέρει για πώληση για κάθε δυνατή τιμή του (μέσα σε μια δοσμένη χρονική περίοδο).



Η καμπύλη προσφοράς ενός αγαθού

Ορισμός

Ελαστικότητα προσφοράς ενός αγαθού ως προς την τιμή του, ονομάζεται ο συντελεστής που μετρά το βαθμό αντίδρασης της προσφερόμενης ποσότητας του αγαθού, ως προς μια δοσμένη μεταβολή στην τιμή του και καθορίζεται σαν ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής στην προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού, που οφείλεται σε μια μεταβολή στην τιμή του, δια της ποσοστιαίας μεταβολής στην τιμή του αγαθού αυτού.

Τιμές ελαστικότητας προσφοράς

(i) Εάν $+\infty < n < +1$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητά του, τότε η προσφορά ονομάζεται ελαστική.

(ii) Εάν $+1 < n < 0$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με μικρότερη ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητά του, τότε η προσφορά ονομάζεται ανελαστική.

(iii) Εάν $n = +1$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με ίση ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητά του, τότε η προσφορά ονομάζεται μοναδιαίας ελαστικότητας.
(iv) Εάν $n = +\infty$, δηλαδή εάν μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού συνοδεύεται με άπειρη ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητά του, τότε η προσφορά ονομάζεται τέλεια (ή πλήρως) ελαστική.

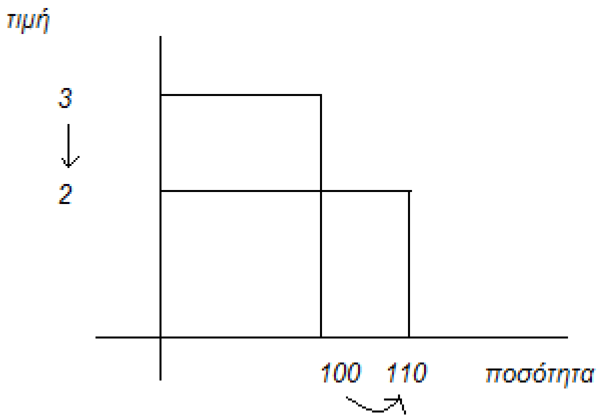
Συντελεστής σταυροειδούς ζήτησης

Η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού Y ως προς την τιμή ενός άλλου αγαθού X μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Y σε σχέση με μια δοσμένη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή του αγαθού X.
(i) $\varepsilon_{YX} = -\infty$, τότε τα αγαθά X και Y είναι τέλεια συμπληρωματικά.
(ii) $\varepsilon_{YX} < 0$, τότε τα αγαθά X και Y είναι συμπληρωματικά.
(iii) $\varepsilon_{YX} = 0$, τότε τα αγαθά X και Y είναι ανεξάρτητα.
(iv) $\varepsilon_{YX} > 0$, τότε τα αγαθά X και Y είναι υποκατάστατα.
(v) $\varepsilon_{YX} = +\infty$, τότε τα αγαθά X και Y είναι τέλεια υποκατάστατα.

Εφαρμογή

Εξετάστε τις επιπτώσεις που θα έχει στην αγορά σιταριού η ανακάλυψη ενός νέου πιο αποδοτικού υβριδίου.

Απάντηση
Με ανελαστική ζήτηση μια αύξηση της προσφοράς οδηγεί σε μεγάλη πτώση της τιμής και μια αναλογικά μικρότερη αύξηση στην ποσότητα.



$$e_p = \frac{(100 - 110)/[\frac{100 + 110}{2}]}{(3.00 - 2.00)/[\frac{3.00 + 2.00}{2}]} = \frac{-0{,}095238}{0{,}2857} = -0{,}33$$

Η αύξηση της προσφοράς με ανελαστική ζήτηση μειώνει τη συνολική πρόσοδο.

2.11 ΤΙΜΟΛΟΓΙΑΚΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [6].

Όταν συνδυαστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή, το πλεόνασμα του παραγωγού, και το κυβερνητικό πλεόνασμα αποτελούν κοινωνικό πλεόνασμα ή συνολικό πλεόνασμα. Το συνολικό πλεόνασμα είναι το αρχικό μέτρο που χρησιμοποιεί οικονομικά μέσα ευημερίας για να αξιολογήσει την αποδοτικότητα μιας προτεινόμενης πολιτικής.

Η έννοια του κοινωνικού πλεονάσματος $(CS + PS)$ που ορίστηκε παραπάνω αποτελεί μια εύλογη αντικειμενική συνάρτηση για τον καθορισμό της τιμολογιακής πολιτικής της δημόσιας επιχείρησης.

Μια τιμολογιακή πολιτική είναι αποτελεσματική αν μεγιστοποιεί το δείκτη κοινωνικής ευημερίας που ορίζεται ως το άθροισμα του πλεονάσματος του καταναλωτή και του πλεονάσματος του παραγωγού.

Τιμές οικονομικής αποτελεσματικότητας προσδιορίζονται στη συνέχεια για μια δημόσια επιχείρηση που παράγει $Q_1, \ldots, Q_\nu$ προϊόντα. Στο στάδιο αυτό γίνονται οι ακόλουθες απλουστευτικές παραδοχές:

- Η δημόσια επιχείρηση δεν έχει αναδιανεμητικές επιδιώξεις. Η διανομή του εισοδήματος θεωρείται δεδομένη και η δημόσια επιχείρηση δεν επιδιώκει να τη μεταβάλλει.
- Η δημόσια επιχείρηση κατά το σχεδιασμό της τιμολογιακής της πολιτικής δεν επιδιώκει να πετύχει δεδομένο ύψος εσόδων.
- Τα προϊόντα $Q_1, \ldots, Q_\nu$παράγονται αποκλειστικά από τη δημόσια επιχείρηση.

Οι παραπάνω παραδοχές μπορούν να απαλειφθούν με εισαγωγή κατάλληλων περιορισμών. Το πρόβλημα της δημόσιας επιχείρησης είναι:

$$\max_{P_i}(CS + PS) \qquad i = 1, \ldots \qquad (1)$$

Για τον προσδιορισμό του CS είναι αναγκαίο να οριστούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης. Η συνάρτηση ζήτησης για το αγαθό i ορίζεται ως $Q_i = Q_i(p_1, \ldots, p_\nu, \delta_1, \ldots, \delta_\nu)$, όπου $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_\nu)$ είναι ένα διάνυσμα δεικτών ποιότητας που αναφέρονται στα προϊόντα της δημόσιας επιχείρησης.(Η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή μπορεί να γραφτεί στην περίπτωση αυτή ως $U = U(Q_1, \ldots, Q_\nu, \delta_1, \ldots, \delta_\nu)$ όπου δ είναι δεδομένα επίπεδα ποιότητας. Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται ως προς Q_i για δεδομένο εισόδημα.). Είναι γνωστό ότι προϊόντα διαφορετικής ποιότητας μπορεί να θεωρηθούν ως διαφορετικά προϊόντα. Η εισαγωγή επομένως δεικτών ποιότητας, φαίνεται περιττή. Από την άλλη όμως μεριά η φύση των προϊόντων μια δημόσιας επιχείρησης και η φύση του δείκτη ποιότητας κάνουν πρακτικά ανέφικτο τέτοιο διαχωρισμό. Έτσι, για συγκοινωνίες ο δείκτης αναφέρεται στη συχνότητα άφιξης του μέσου μεταφοράς, ο ίδιος δείκτης στον ηλεκτρισμό αναφέρεται στα χαρακτηριστικά της τάσης και συχνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος. Είναι συνεπώς πρακτικά ανέφικτο να οριστούν ως διαφορετικά προϊόντα π. χ. λεωφορείο με συχνότητα άφιξης 10΄, με συχνότητα άφιξης 5΄κ.ο.κ.

2.12 ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΕΝΑΡΞΗΣ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Τα στοιχεία της παραγράφου, βρίσκονται στο [6].

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έγινε λόγος για την αγορά ενός παραγωγικού στοιχείου (κεφαλαιουχικό αγαθό) το οποίο με τη λειτουργία του δημιουργεί ροή εσόδων. Κάθε παρόμοια διαδικασία η οποία συνεπάγεται δέσμευση (μη κατανάλωση) οικονομικών πόρων και αντίστοιχη αύξηση του πραγματικού κεφαλαίου, συνιστά επένδυση. Μια επενδυτική δραστηριότητα αναφέρεται επομένως στην κτήση των οικονομικών πόρων (μηχανήματα, κτίρια κ.α.) και στη συνεπακόλουθη χρηματοροή που αντιστοιχεί στην αξία του προϊόντος το οποίο παράγεται από τους πόρους αυτούς. Το βασικό ερώτημα που δημιουργείται κατά την ανάλυση των επενδυτικών επιλογών είναι εάν μια συγκεκριμένη επενδυτική δραστηριότητα πρέπει να αναληφθεί ή όχι. Ένα δεύτερο ερώτημα που δημιουργείται είναι, εάν ληφθεί απόφαση ανάληψης της επενδυτικής δραστηριότητας, ποιος είναι ο άριστος χρόνος έναρξής της;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα δίνεται με εφαρμογή κριτηρίων αξιολόγησης επενδύσεων. Η βιβλιογραφία στο θέμα αυτό είναι τεράστια, έτσι θα γίνει σύντομη αναφορά στο βασικό κριτήριο αξιολόγησης.

Έστω ένα επενδυτικό σχέδιο το οποίο:

I. Έχει κόστος κατασκευής K. Το κόστος αυτό περιλαμβάνει κόστος κτιρίων, μηχανημάτων κ.τ.λ. Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι η κατασκευή διαρκεί μια περίοδο.
II. Δημιουργεί μια ροή οφέλους $B(\tau)$, η οποία αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της αξίας του παραγόμενου προϊόντος και του κόστους λειτουργίας. Το κόστος λειτουργίας περιλαμβάνει στοιχεία όπως καύσιμα, εργατικά κ.τ.λ.

Η καθαρή παρούσα αξία του επενδυτικού σχεδίου ορίζεται ως:

$$NPV = -K + \int_0^N e^{-r\tau} B(\tau) d\tau \qquad (1)$$

Όπου N είναι η λειτουργική ζωή της επένδυσης και το r το σταθερό επιτόκιο προεξόφλησης. (Το επιτόκιο προεξόφλησης προσδιορίζεται από το κόστος κεφαλαίου για τη χρηματοδότηση της επένδυσης. Σε συνθήκες ανταγωνιστικών κεφαλαιαγορών και πλήρους βεβαιότητας, το κόστος κεφαλαίου προσδιορίζεται από το επιτόκιο αγοράς.)

Αν $NPV > 0$ το σχέδιο γίνεται αποδεκτό. Αν πρέπει να επιλεγεί μόνο ένα από τα δύο σχέδια, τότε επιλέγεται το σχέδιο με τη μεγαλύτερη NPV. Δηλαδή $NPV^1 > NPV^2$ σημαίνει ότι το σχέδιο 1 γίνεται αποδεκτό. Ένα δεύτερο πολύ συχνά χρησιμοποιούμενο κριτήριο αξιολόγησης είναι το κριτήριο του εσωτερικού επιτοκίου αποδοτικότητας. Το IRR είναι τι επιτόκιο i το όποιο είναι η λύση της εξίσωσης

$$-K + \int_0^N e^{-i\tau} B(\tau) d\tau = 0 \qquad (2)$$

Αν $i > r$ το σχέδιο γίνεται αποδεκτό.

Τις περισσότερες φορές η απόφαση για αποδοχή ή απόρριψη του σχεδίου είναι ίδια ανεξάρτητα από το κριτήριο που χρησιμοποιείται. (Σε περιπτώσεις αντιφατικών ιεραρχήσεων εναλλακτικών επενδυτικών σχεδίων με τα κριτήρια NPV και IRR, έχει δειχθεί ότι το κριτήριο NPV οδηγεί στην ορθή απόφαση.

Ο κανόνας απόφασης (1) στηρίζεται στην υπόθεση ότι η επενδυτική δραστηριότητα αρχίζει την τρέχουσα περίοδο $t = 0$. Ο κανόνας αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως στατικός κανόνας με την έννοια ότι συνεπάγεται άμεση έναρξη αν $NPV > 0$. Αναλαμβάνοντας όμως το έργο τώρα χάνεται η ευκαιρία να αναληφθεί το έργο σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή με πιθανά μεγαλύτερη NPV. Η επιλογή του άριστου χρόνου έναρξης συνίσταται επομένως στον προσδιορισμό του χρόνου κατασκευής της επένδυσης στον οποίο αντιστοιχεί η μεγαλύτερη NPV.

Για την εφαρμογή του δυναμικού αυτού κανόνα η συνάρτηση οφέλους του σχεδίου εξαρτάται τόσο από τον ημερολογιακό χρόνο όσο και από την ηλικία της επένδυσης. Έστω:

τ : ο ημερολογιακός χρόνος

t : ο χρόνος κατασκευής

$w = \tau - t$: η ηλικία του έργου

Η συνάρτηση οφέλους γράφεται ως:

$$B(\tau, t - t) = P((\tau)Q(\tau - t) \qquad (3)$$

Η συνάρτηση οφέλους μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση εσόδων, με:

a) $P(\tau)$ την τιμή του προϊόντος μια μονότονη συνάρτηση του ημερολογιακού χρόνου, $P'(\tau) \lesseqgtr 0$ για κάθε τ.
b) $Q(\tau - t)$ το προϊόν της επένδυσης το οποίο αναμένεται να αυξάνει καθώς η επένδυση ωριμάζει, να παραμένει σταθερό κατά την περίοδο της ωριμότητας και στη συνέχεια να φθίνει. Επιπλέον $Q(\tau - t)=0$ για $\tau < t$ δεν υπάρχουν δηλαδή οφέλη πριν από την κατασκευή του έργου.

Υποθέτοντας ότι το κόστος κατασκευής είναι ανεξάρτητο του χρόνου κατασκευής, η καθαρή παρούσα αξία μιας επένδυσης που κατασκευάζεται την περίοδο t προσδιορίζεται ως:

$$V(t) = NPV = \int_{t}^{t+N} P(\tau)Q(\tau - t)e^{-r\tau}d\tau - Ke^{-rt} \qquad (4)$$

Η παράσταση (4) είναι η διαφορά μεταξύ (i) της παρούσας, αξίας της ροής του οφέλους ενός έργου που κατασκευάζεται την περίοδο t και έχει λειτουργική ζωή N έτη και (ii) της παρούσας αξίας του κόστους κατασκευής του. Όπως φαίνεται αν $t = 0$ δηλαδή το έργο κατασκευάζεται τώρα, η (4) καταλήγει στην (1). Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί ο άριστος χρόνος κατασκευής, ο οποίος μεγιστοποιεί την (4).

Θέτουμε $w = \tau - t$, επομένως $\frac{d\tau}{dw} = 1$. Επιπλέον τα όρια του ολοκληρώματος (4) γίνονται $w(t) = t - t = 0$ και $w(t + N) = t + N - t = N$. Συνεπώς η (4) γράφεται ως:

$$V(t) = \int_{0}^{N} P(w + t)Q(w)e^{-r(w+t)}dw - Ke^{-rt}$$

$$= e^{-rt}\left(\int_{0}^{N} P(w + t)Q(w)e^{-rw}dw - K\right) \qquad (5)$$

Η (5) είναι ισοδύναμος τρόπος παρουσίασης της καθαρής παρούσας αξίας έργου που κατασκευάζεται την περίοδο $t \geq 0$. Παραγωγίζοντας την (5) ως προς t έχουμε:

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0$$

Ή $-rV(t) + (\int_0^N P'(w + t)Q(w)e^{-rw}dw)\, e^{-rt} = 0$

Ή $-rV(t) + \int_t^{N+t} P'(\tau)Q(\tau - t)e^{-r\tau}d\tau = 0$ (6)

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} < 0$$

Ή $-rV'(t) + \int_t^{N+t} e^{-r\tau}\big(P''(\tau) - rP'(\tau)\big)Q(\tau - t)dt < 0$ (7)

Δεδομένου ότι $V'(t)=0$ από την (6) ή (7) ικανοποιείται αν

$$(P''(\tau) - rP'(\tau) < 0$$

$$\text{ή } \frac{P''(\tau)}{P'(\tau)} < r$$

Αν δηλαδή η ποσοστιαία μεταβολή της $P'(\tau)$ είναι μικρότερη από το επιτόκιο προεξόφλησης, η συνθήκη δεύτερης τάξης ικανοποιείται. Ο προσδιορισμός του άριστου χρόνου κατασκευής μπορεί να αποσαφηνιστεί περισσότερο αν εξεταστεί μια ειδική περίπτωση.

Η συνάρτηση οφέλους θεωρείται σταθερή $Q(\tau - t)=\alpha$ για $\tau \geq t$.
Στην περίπτωση αυτή η (4) γράφεται:

$$V(t) = \int_t^{t+N} aP(\tau)e^{-r\tau}d\tau - K\,e^{-rt}$$

Επομένως

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

Ή $\alpha(P(t+N)e^{-r(t+N)} - P(t)e^{-rt}) + rKe^{-rt} = 0$

Ή $\alpha(P(t)\text{-}P(t+N)e^{-rN}) = rK$ (8)

$$\frac{d^2V}{dt^2} < 0 \text{ ή } \alpha(P'(t) - P'(\tau + N)e^{-rN}) < 0 \qquad (9)$$

Η (9) ικανοποιείται αν $P'(t) - P'(t + N)\,e^{-rN} < 0$
Για παράδειγμα αν $P(\tau) = P0e^{\gamma\tau}, \gamma, P0 > 0$ αντικαθιστώντας, στην (8) έχουμε:

$$\alpha P_0 e^{\gamma t*}\big(1 - e^{(\gamma - r)N}\big) = rK$$

Ή ύστερα από λογαρίθμηση

$$t* = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{rK}{aP_0(1 - e^{(\gamma - r)N})}\right)$$

Με παρόμοιο τρόπο προσεγγίζεται το πρόβλημα της επιλογής του άριστου χρόνου κατασκευής στη γενική περίπτωση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γκαρούτσος Β. Γιάννης, (1995), *Μαθηματική ανάλυση,* τεύχος 1, εκδόσεις Spin, Αθήνα

2. Εξαρχάκος Γ. Θεόδωρος, (1993), *Εισαγωγή στα μαθηματικά,* τ. Β΄ Ανάλυση, Αθήνα

3. Ζαγούρας Γ. Χαράλαμπος – Γεωργίου Ν. Δημήτριος, (2003), *Γενικά μαθηματικά Ι,* εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα

4. Λουκάκης Μανόλης, (1993), *Μαθηματικά οικονομικών επιστημών,* τ. Α΄, 3η έκδοση, Θεσσαλονίκη

5. Νιάρχος Νικήτας, (2004), *Χρηματοοικονομική ανάλυση λογιστικών,* έκδοση 7η *καταστάσεων,* εκδόσεις Σταμούλης Αθανάσιος, Αθήνα

6. Ξεπαπαδέας Π. Αναστάσιος, (1989), *Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά-Θεωρία και εφαρμογές,* εκδόσεις Σμπίλιας «Το οικονομικό», Αθήνα

7. Παυλάτος Οδυσσέας, (2006), *Λογιστική Κόστους(Κόστος-Κοστολόγηση-Αναλυτική Λογιστική)*, Χαλκίδα

8. Πέκος Δημ. Γεώργιος, (2006), *Εφαρμοσμένα μαθηματικά για οικονομικές επιστήμες,* τ. ΙΙ, Ζ΄ έκδοση, εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη

Ηλεκτρονικές πηγές

9. www. el.wikipedia.org/wiki/Ολοκλήρωμα

10. www.katsetis.gr/mathimataeapsimeioseis/deo13/deo13GenikaMathimatika2.doc

11. www.geogebra.uni.lu/en/wiki/index.php?title=Ολοκλήρωμα_Riemann&redirect=no

12. www.edu.eap.gr/pli/pli12/shmeiwseis/Oloklhrwmata_1.pdf

13. www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_palaiogianides.pdf