ΤΕΙ ΠΑΤΡΩΝ

Σχολή Διοίκησης και Οικονομίας

Τμήμα Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Τσιλιγκάνου Θεοδώρα

Μασούρα Χριστίνα

Λάμπρου Ελένη

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2013

***<u>Υπεύθυνη Δήλωση</u>**: Βεβαιώνω ότι είμαι ο συγγραφέας αυτής της πτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην πτυχιακή εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων του ΑΤΕΙ Πάτρας.*

ΤσιλιγκάνουΘεοδώρα

Μασούρα Χριστίνα

Λάμπρου Ελένη

Ευχαριστίες

Θεωρούμε υποχρέωση μας να εκφράσουμε τις ευχαριστίες σε κάποια άτομα που μας προσέφεραν την καθοδήγησή τους και τη συμπαράσταση τους στην προετοιμασία αυτής της εργασίας.

Πρώτα θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντα καθηγητή μας κύριο Κ. Κουνετά για την καθοδήγηση του στην διάρκεια της προετοιμασίας της πτυχιακής εργασίας μας.

Επίσης ευχαριστούμε τα μέλη της επιτροπής που δέχθηκαν να αξιολογήσουν την εργασία μας.

Τέλος θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τις οικογένειες μας, για την ηθική υποστήριξη που μας έχουν προσφέρει, δίνοντας μας δύναμη στην επίτευξη του στόχου μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένα πρόβλημα της Στατιστικής που έχει, κυρίως, σχέση με τις παραμέτρους ενός πληθυσμού είναι αυτό των ελέγχων υποθέσεων. Θα αναφερθούμε σε προβλήματα σχετικά με μια απόφαση μας για το αν μια προκαθορισμένη τιμή μιας παραμέτρου είναι αποδεκτή με βάση κάποιες παρατηρήσεις ενός ή περισσότερων τυχαίων δειγμάτων. Οι κοινοί έλεγχοι υποθέσεων, οι οποίοι ονομάζονται παραμετρικοί, αναφέρονται σε κανονικούς πληθυσμούς. Στην εργασία αυτή θα αναφερθούμε σε ελέγχους που δεν ακολουθούν απαραίτητα μια γνωστή κατανομή (συνήθως την κανονική), οι έλεγχοι αυτοί είναι μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων και στην κατηγορία αυτή υπάγονται οι έλεγχοι που αφορούν τη θέση ή τη διασπορά μίας ή περισσοτέρων κατανομών πληθυσμού όπως οι έλεγχοι για την τυχαιότητα του δείγματος.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και σε αυτό θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές έννοιες της Στατιστικής και των κλάδων της. Παρουσιάζουμε τι είναι η επαγωγική Στατιστική και ειδικότερα οι έλεγχοι υποθέσεων. Για να εφαρμόζονται οι έλεγχοι αυτοί είναι στην σύγχρονη εποχή είναι απαραίτητο να γίνει χρήση υπολογιστικών εργαλείων. Το εργαλείο που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία είναι το PASW STATISTICS 18, για το οποίο αναφορά γίνεται στο πρώτο κεφάλαιο.

Τα επόμενα κεφάλαια αφορούν τις μεθόδους που ακολουθούνται για τα διάφορα προβλήματα, τα οποία λύνονται με μη παραμετρικούς ελέγχους υποθέσεων. Παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο κάθε μεθόδου καθώς και εφαρμογή της θεωρίας μέσω ασκήσεων. Όπου είναι εφικτό παρουσιάζουμε και παράδειγμα της μεθόδου με χρήση του στατιστικού εργαλείου PASW STATISTICS 18.

Τα κεφάλαια χωρίζονται ανά κατηγορία. Πιο αναλυτικά, στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε σε μεθόδους με απλά δείγματα, ενός πληθυσμού. Στο τρίτο κεφάλαιο, σε μεθόδους με δύο δείγματα, επιπλέον σε αυτήν την περίπτωση έχουμε δύο κατηγορίες, μεθόδους για δύο ανεξάρτητα δείγματα και μια κατηγορία ακόμα που αφορά μεθόδους με δύο συσχετισμένα δείγματα. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο, παρουσιάζονται μέθοδοι που αφορούν κ-δείγματα, $\kappa \geq 2$, οι οποίοι και πάλι

χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, αυτούς των ανεξάρτητων δειγμάτων και αυτούς των συσχετισμένων δειγμάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε ακόμα και σε συντελεστές συσχέτισης κ-δειγμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ο κλάδος της Στατιστικής

Υπάρχουν δύο απαντήσεις για την ερώτηση από πού προέρχεται ο όρος στατιστική, η πρώτη είναι ότι προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη ¨στατίζω¨ που σημαίνει ταξινομώ, τοποθετώ, συμπεραίνω και η δεύτερη ότι προέρχεται από τη λατινική λέξη status που σημαίνει πολιτεία, κράτος. Αρχικά, η λέξη χρησιμοποιήθηκε για δεδομένα που αφορούν τον πληθυσμό μιας χώρας. Η αρχαιότερη συλλογή στοιχείων καταγράφηκε στην Κίνα το 2238 π.Χ. και επρόκειτο για απογραφή πληθυσμού υπό την αυτοκρατορία του Yao. Η στατιστική με την πάροδο των χρόνων αναπτύχθηκε με αργούς ρυθμούς στην αρχή ενώ η ραγδαία ανάπτυξή της έγινε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα έως σήμερα.

Η Στατιστική ορίζεται ως η επιστήμη που ασχολείται με την συγκέντρωση, παρουσίαση, αξιολόγηση και επεξεργασία συμπερασμάτων. Ενώ στο θεωρητικό υπόβαθρο της επιστήμης της Στατιστικής γίνεται χρήση μαθηματικών μοντέλων, οι εφαρμογές της χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων πολλών γνωστικών περιοχών εκτός της μαθηματικής επιστήμης όπως ιατρική, χρηματοοικονομικά, μάρκετινγκ, ψυχολογία κ.α..

Η συλλογή στατιστικών στοιχείων για να ερευνηθούν διάφορα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού, γίνονται με ειδικές στατιστικές έρευνες και η παρουσίαση τους με ειδικούς πίνακες και διαγράμματα. Το σύνολο των ατόμων ή αντικειμένων που μελετάμε για να διεξάγουμε τα συμπεράσματα ορίζει τον **πληθυσμό**. Ο πληθυσμός εξετάζεται ως προς κάποια χαρακτηριστικά αυτά ονομάζονται **μεταβλητές** και σε αυτές αντιστοιχούν τιμές. Τις περισσότερες φορές είναι πρακτικά αδύνατη η μελέτη του πληθυσμού και σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε ένα υποσύνολο του πληθυσμού, το **δείγμα** με σκοπό την ανάλυση και διεξαγωγή συμπερασμάτων. Η διαδικασία επιλογής του δείγματος ονομάζεται δειγματοληψία. Για να είναι αξιόπιστη η στατιστική ανάλυση το δείγμα πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικές των τιμών του πληθυσμού ώστε τα αποτελέσματα της ανάλυσης να είναι αξιόπιστα.

Οι ερευνητικές τεχνικές που παράγουν δεδομένα χρειάζονται στατιστική επεξεργασία, δύο είναι τα βασικά εργαλεία επεξεργασίας δεδομένων

Α. Η Περιγραφική Στατιστική, είναι ο κλάδος της Στατιστικής που έχει σκοπό την συλλογή, ταξινόμηση και παρουσίαση αρχικών δεδομένων σε απλή μορφή.

Β. Η Στατιστική Συμπερασματολογία, είναι ο κλάδος της Στατιστικής που έχει σκοπό να εξάγει κανόνες και συμπεράσματα των οποίων η ισχύς ξεπερνά το επίπεδο των παρατηρήσεων.

Για παράδειγμα αν θέλουμε να ερευνήσουμε τον πληθυσμό του Ν. Αχαΐας ως προς κάποια στοιχεία, αντί να ερωτηθούν όλοι οι κάτοικοι επιλέγουμε να πάρουμε ένα μέρος του πληθυσμού, το δείγμα, το οποίο πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό και από αυτό βγάζουμε συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό. Τα στοιχεία που μας ενδιαφέρουν αποτελούν τις μεταβλητές, π.χ. μπορεί να μας ενδιαφέρει το πλήθος των μελών που έχει μια οικογένεια, το πλήθος των αυτοκινήτων που έχει, την ηλικία των μελών της κ.α. οι απαντήσεις που θα πάρουμε σε αυτές τις ερωτήσεις είναι οι μεταβλητές του δείγματος.

1.2 <u>Ο κλάδος της επαγωγής/συμπερασματολογίας</u>

Στατιστική Συμπερασματολογία/επαγωγή είναι η ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με την συγκέντρωση συμπερασμάτων για έναν στατιστικό πληθυσμό βάση των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από ένα δείγμα του πληθυσμού.

Η Στατιστική επαγωγή αποτελείται από τους κλάδους της εκτιμητικής και των ελέγχων υποθέσεων.

Η στατιστική επαγωγή σε έναν πληθυσμό επιτυγχάνεται αν το δείγμα είναι τυχαίο. Ένα δείγμα n τιμών $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ της μεταβλητής X κάποιου πληθυσμού λέγεται τυχαίο αν επιλεγεί από ένα δείγμα πλήθους n έτσι ώστε

i. Κάθε μονάδα του πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί σε κάθε λήψη του δείγματος
ii. Οι λήψεις των n μονάδων του πληθυσμού είναι ανεξάρτητες.

Οι προϋποθέσεις ισχύουν μόνο όταν το δείγμα μονάδων επιλέγεται από πεπερασμένο πληθυσμό μονάδων Ν με επανάθεση, αφού η πιθανότητα επιλογής κάθε μονάδας του πληθυσμού σε κάθε λήψη είναι 1/Ν, ή από άπειρο πληθυσμό με ή χωρίς επανάθεση τότε οι n λήψεις είναι ανεξάρτητες.

1.3 Έλεγχοι υποθέσεων

Οι έλεγχοι υποθέσεων είναι ένα εργαλείο της Στατιστικής που μας βοηθά να βγάλουμε συμπεράσματα και να πάρουμε αποφάσεις για έναν ή περισσότερους πληθυσμούς δειγματικών στοιχείων.

¨Στατιστική υπόθεση¨ είναι μια υπόθεση που κάνουμε

- Για την τιμή μιας παραμέτρου θ (της κατανομής) ενός πληθυσμού.
- Για την ισότητα των τιμών της ίδιας παραμέτρου σε δύο ή περισσότερους πληθυσμούς X_1,X_2,… του ίδιου χαρακτηριστικού (π.χ. την ισότητα μέσων ελαττωματικών εξαρτημάτων μ_1 και μ_2 σε δύο μηχανήματα).
- Την ανεξαρτησία δύο πληθυσμών Χ και Υ.
- Την κατανομή που ακολουθεί ένας πληθυσμός.
- Την τυχαιότητα ενός δείγματος
- Τη μη επίδραση μιας παρέμβασης σε έναν πληθυσμό Χ.

Έλεγχος της υπόθεσης είναι η διαδικασία βάση της οποίας ένα δείγμα καταλήγει στην απόρριψη ή στην αποδοχή της υπόθεσης που έχουμε κάνει αρχικά.

Η αρχική μας υπόθεση συμβολίζεται με H_0 και ονομάζεται υπόθεση 0 ή μηδενική υπόθεση, επειδή υποθέτουμε ότι η απόκλισή της από την πραγματικότητα είναι μηδενική. Αρκετές φορές η αρχική μας υπόθεση είναι αντίθετη με αυτή που πιστεύουμε και αναμένουμε να απορριφθεί από τον έλεγχο που θα διενεργήσουμε.

Η υπόθεση που αναιρεί την H_0 συμβολίζεται με H_1 και ονομάζεται εναλλακτική υπόθεση, την οποία αποδεχόμαστε σε περίπτωση απόρριψης της H_0. Για παράδειγμα, αν η υπόθεση H_0 είναι ο μέσος αριθμός ελαττωματικών εξαρτημάτων είναι 30 θα γράψουμε H_0: $\mu=30$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης H_1: $\mu\neq 30$.

Ο έλεγχος υπόθεσης γίνεται, όπως αναφέραμε από δείγμα και όχι από τον πληθυσμό, υπάρχουν δείγματα που θα απορρίπτουν την H_0 και άλλα που θα την αποδέχονται. Ανάλογα με το δείγμα που θα πάρουμε, υπάρχει κίνδυνος να κάνουμε δύο ειδών σφάλματα. Το ¨ σφάλμα τύπου Ι¨, όπου θα απορρίψουμε μια αληθή H_0 και το ¨σφάλμα τύπου ΙΙ¨, όπου θα αποδεχθούμε μια λανθασμένη H_0. Η πιθανότητα να κάνουμε ¨σφάλμα τύπου Ι¨ συμβολίζεται με α και λέγεται **επίπεδο σημαντικότητας**, ενώ η πιθανότητα να κάνουμε ¨σφάλμα τύπου ΙΙ¨ συμβολίζεται με β και ονομάζεται ισχύς της συνάρτησης.

Η διαδικασία ελέγχου μιας στατιστικής υπόθεσης γίνεται σταδιακά ως εξής

1. Προσδιορίζουμε τις υποθέσεις οι οποίες γίνονται δεκτές (π.χ. δεχόμαστε ότι τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή)
2. Γράφουμε ποια είναι η μηδενική και ποια η εναλλακτική υπόθεση
3. Ορίζουμε το κριτήριο απόφασης για την αποδοχή ή απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, για αυτό το λόγο επιλέγουμε
   - Το στατιστικό του ελέγχου του οποίου η κατανομή πιθανοτήτων προσδιορίζεται τις υποθέσεις που γίνονται δεκτές και τη μη μηδενική υπόθεση.
   - Το επίπεδο σημαντικότητας α του ελέγχου το οποίο ορίζεται στις τιμές 0,01 , 0,05 ή 0,001. Η τιμή του στατιστικού του ελέγχου οι οποίες αντιστοιχούν στο επίπεδο σημαντικότητας α ονομάζονται κρίσιμες τιμές και προσδιορίζουν την περιοχή αποδοχής και την περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης.
4. Παίρνουμε την απόφαση, αν η τιμή του στατιστικού του ελέγχου βρίσκεται στην περιοχή αποδοχής της H_0, την αποδεχόμαστε, διαφορετικά την απορρίπτουμε.

Υπάρχουν δύο είδη ελέγχων οι παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων και οι μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων. Οι παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων αφορούν περιπτώσεις όπου ο έλεγχος H_0

i. Ελέγχει την τιμή μιας παραμέτρου θ ενός κανονικού πληθυσμού Χ ή αν ελέγχει τον μ σε μη κανονικό πληθυσμό όταν το δείγμα είναι μικρό ($n < 30$), αφού τότε ασυμπτωτικά ακολουθεί την N(0,1).

ii. Ελέγχει την ισότητα των τιμών της ίδιας παραμέτρου (διαφορά μέσων που ισούται με 0 ή λόγος διασπορών ισούται με 1) σε δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς Χ και Υ ή αν ελέγχει την διαφορά μέσων που ισούται με 0 σε μη κανονικούς πληθυσμούς με μικρά δείγματα, αφού τότε ασυμπτωτικά ακολουθούν την N(0,1).

iii. Αν ελέγχει την αναλογία ενός υποπληθυσμού με συγκεκριμένη ιδιότητα ή αν ελέγχει την διαφορά αναλογιών του ίδιου υποπληθυσμού σε δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς, όταν τα μεγέθη και των δύο είναι μεγαλύτερα από 100, αφού τότε ασυμπτωτικά ακολουθούν την N(0,1).

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, υπάρχουν και οι μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων. Οι έλεγχοι αυτοί εφαρμόζονται όταν δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστούν έλεγχοι της Παραμετρικής Στατιστικής. Χρησιμοποιούνται, δηλαδή, και σε περιπτώσεις όπου οι κατανομές των μεταβλητών δεν είναι γνωστές, σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε ¨έλεγχο ελεύθερων κατανομών¨ (distribution- free tests) ή όταν τα δείγματα είναι μικρά. Οι μη παραμετρικές μέθοδοι αποβλέπουν σε ευρύτερα πεδία εφαρμογής λόγω του ότι οι κατανομές στις οποίες αναφέρονται είναι λιγότερο περιορισμένες από ότι στα αντίστοιχα παραμετρικά προβλήματα, ακόμα δεν είναι εξίσου ισχυρές με τις αντίστοιχες παραμετρικές μεθόδους και είναι περισσότερο ευσταθείς επειδή δεν επηρεάζονται από τη μορφή κατανομής των δεδομένων. Οι μη παραμετρικές μέθοδοι όπως και οι παραμετρικές, είναι σχεδόν το ίδιο αποτελεσματικές με τις παραμετρικές μεθόδους, οι οποίες κάνουν αυστηρές υποθέσεις για τον πληθυσμό που προέρχονται τα δεδομένα .Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα των μη παραμετρικών μεθόδων είναι ότι μπορούν να εφαρμοσθούν σε δεδομένα που είναι ταξινομημένα σε κατηγορίες και τα οποία είναι σε κλίμακα διάταξης ή ακόμα και απλώς σε ονομαστική κλίμακα, ενώ οι παραμετρικές μέθοδοι προϋποθέτουν ακριβείς μετρήσεις. Μερικά παραδείγματα μη παραμετρικών ελέγχων είναι οι έλεγχοι για τη θέση ή τη διασπορά μίας ή περισσοτέρων κατανομών πληθυσμού και οι έλεγχοι για την τυχαιότητα του δείγματος.

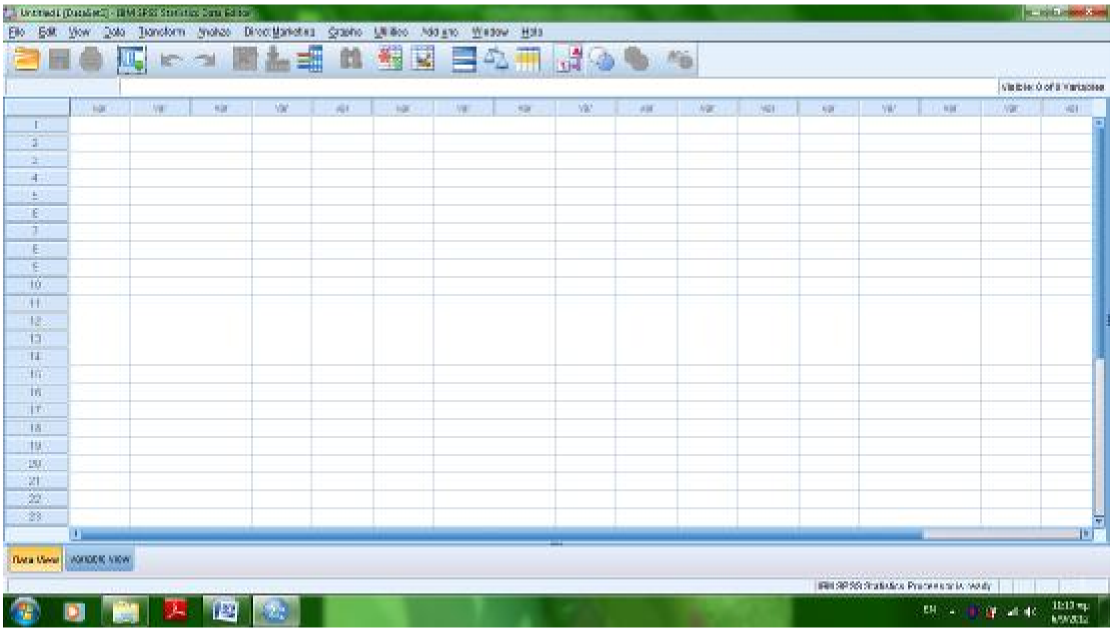
1.4 <u>**Το στατιστικό πακέτο PASW STATISTICS 18**</u>

Το PASW STATISTICS 18 (Statistical Package for Social Science) είναι ένα υπολογιστικό πρόγραμμα που χρησιμοποιείται για την σύνταξη και την ανάπτυξη δεδομένων, την εξόρυξη δεδομένων, την ανάλυση κειμένου, τη στατιστική ανάλυση καθώς και την συνεργασία και την ανάπτυξη δεδομένων.

Η πρώτη έκδοση του PASW STATISTICS 18 δόθηκε το 1968 και είχε αναπτυχθεί από τους Norman H. Nie και C. Hadlai Hull. Το PASW STATISTICS 18 είναι το πιο διαδεδομένο πρόγραμμα για χρήση στατιστικών αναλύσεων σε κοινωνικές επιστήμες. Χρησιμοποιείται από ερευνητές της αγοράς, ερευνητές των επιστημών υγείας, εκπαιδευτικούς ερευνητές, εταιρείες μάρκετινγκ και πολλούς άλλους. Εκτός από την στατιστική ανάλυση, διαχείριση δεδομένων και τεκμηρίωση δεδομένων είναι και λογισμικό βάσης. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το PASW STATISTICS 18 19, δηλαδή η δέκατη ένατη έκδοση του στατιστικού εργαλείου της IBM.

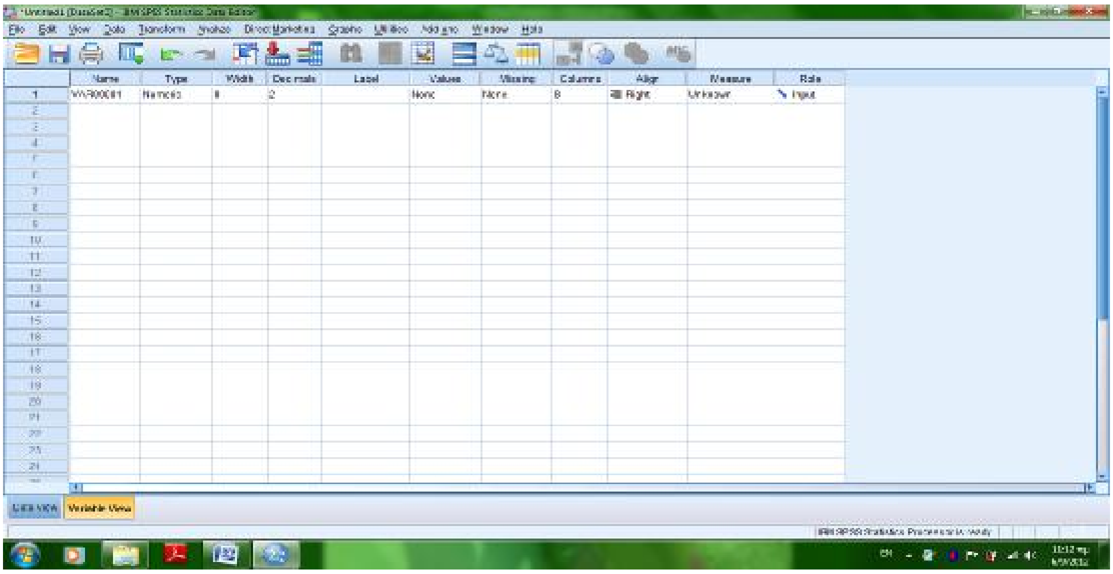
Για να ξεκινήσει η εφαρμογή του PASW STATISTICS 18, πηγαίνουμε στο μενού [έναρξη-> όλα τα προγράμματα-> IBM PASW STATISTICS 18 Statistics] και επιλέξτε το IBM PASW STATISTICS 18 Statistics 19. Η εφαρμογή θα ξεκινήσει και θα εμφανιστεί μια οθόνη η οποία θυμίζει την εμφάνιση λογιστικού φύλλου. Στα κελιά μπορεί κάποιος να μετακινηθεί με τα βέλη του πληκτρολογίου.

Στη γραμμή μενού υπάρχουν μια σειρά από επιλογές σχετικές με την λειτουργία του λογισμικού(π.χ. File, Edit, View.κτλ.) . Υπάρχουν επίσης στη γραμμή εργαλείων εικονίδια συντόμευσης για άμεση σε λειτουργίες που γίνονται συχνά του, τα οποία βρίσκονται ακριβώς κάτω από τις επιλογές για τη λειτουργία του λογισμικού.



Εικόνα 1: Αρχική οθόνη PASW STATISTICS 18

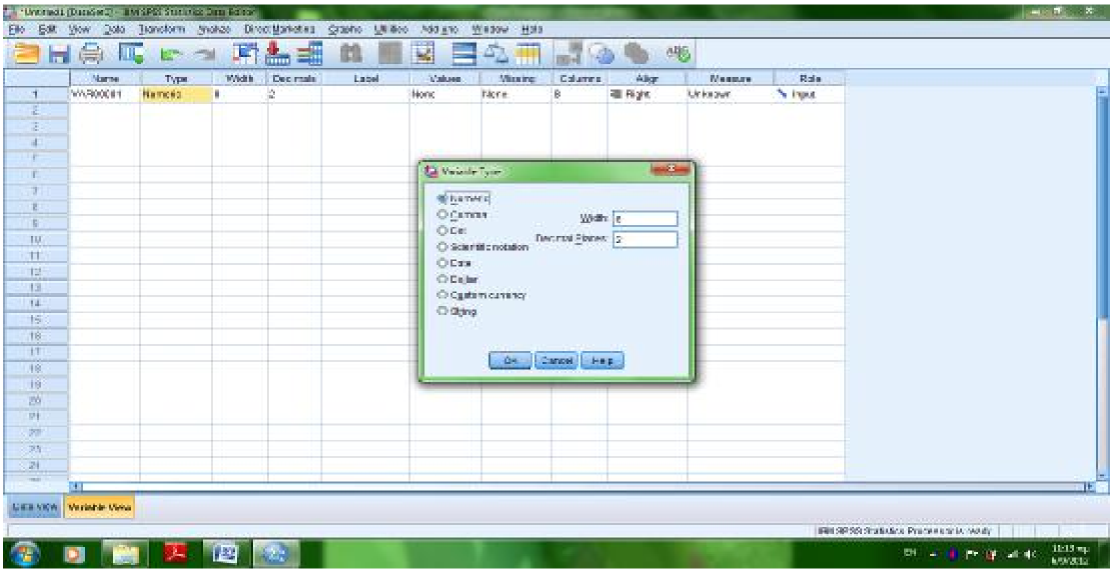
Στο κάτω μέρος υπάρχουν οι επιλογές Data View και Variable View. Στην επιλογή Variable View, ορίζουμε τις μεταβλητές. Όταν πατήσουμε την ετικέτα, περνάμε σε ένα άλλο παράθυρο, όπου ορίζουμε τις μεταβλητές και τα χαρακτηριστικά τους (Name, Type, Width, Decimals, Label, Values, Missing, Columns, Align, Measures, Role).



Εικόνα 2: Οθόνη μεταβλητών PASW STATISTICS 18

1. Name. Στο κελί Name εισάγουμε το όνομα που θέλουμε να δώσουμε στην μεταβλητή (π.χ. ΦΥΛΟ). Τα ονόματα αποτελούνται από γράμματα, αριθμούς και ειδικά σύμβολα (κάτω παύλα, τελεία , @ και #), το πρώτο σύμβολο πρέπει να είναι γράμμα και το τελευταίο δεν μπορεί να είναι τελεία ή κάτω παύλα.

2. Type. Σε αυτήν την επιλογή, καθορίζουμε τον τύπο των μεταβλητών, όταν πατήσουμε την επιλογή Type ανοίγει ένα νέο παράθυρο διαλόγου με διάφορες επιλογές.



Εικόνα 3: Πίνακας επιλογών τύπου μεταβλητής

- *Numeric*. Αν οι τιμές είναι πραγματικοί αριθμοί στο πεδίο Width ορίζουμε τη μέγιστη τιμή των συμβόλων μαζί με την υποδιαστολή και στο πεδίο Decimal το μέγιστο πλήθος των συμβόλων στο κλασματικό μέρος.
- *Comma*. Αν οι τιμές είναι πραγματικοί αριθμοί με ένα ή περισσότερα κόμμα ως διαχωριστικά των ομάδων (χιλιάδων, εκατομμυρίων κτλ.). Εάν δεν εισάγουμε κόμμα όταν περνάμε τα δεδομένα, αυτά μπαίνουν αυτόματα.
- *Dot*. Αν οι τιμές είναι πραγματικοί αριθμοί με μια ή περισσότερες τελείες ως διαχωριστικά των ομάδων (χιλιάδων, εκατομμυρίων κτλ.). Εάν δεν εισάγουμε τελεία όταν περνάμε τα δεδομένα, αυτά μπαίνουν αυτόματα.
- *Scientific notation*. Αν οι τιμές είναι πραγματικοί αριθμοί σε εκθετική μορφή.
- *Date*. Επιτρεπόμενες τιμές είναι η ημερομηνία και ώρα.
- *Dollar*. Επιτρεπόμενες τιμές είναι το σύμβολο του δολαρίου και κόμμα ως διαχωριστικό των ομάδων(χιλιάδων, εκατομμυρίων κτλ.). Εάν δεν εισάγουμε το σύμβολο του δολαρίου όταν περνάμε τα δεδομένα, αυτό μπαίνουν αυτόματα.

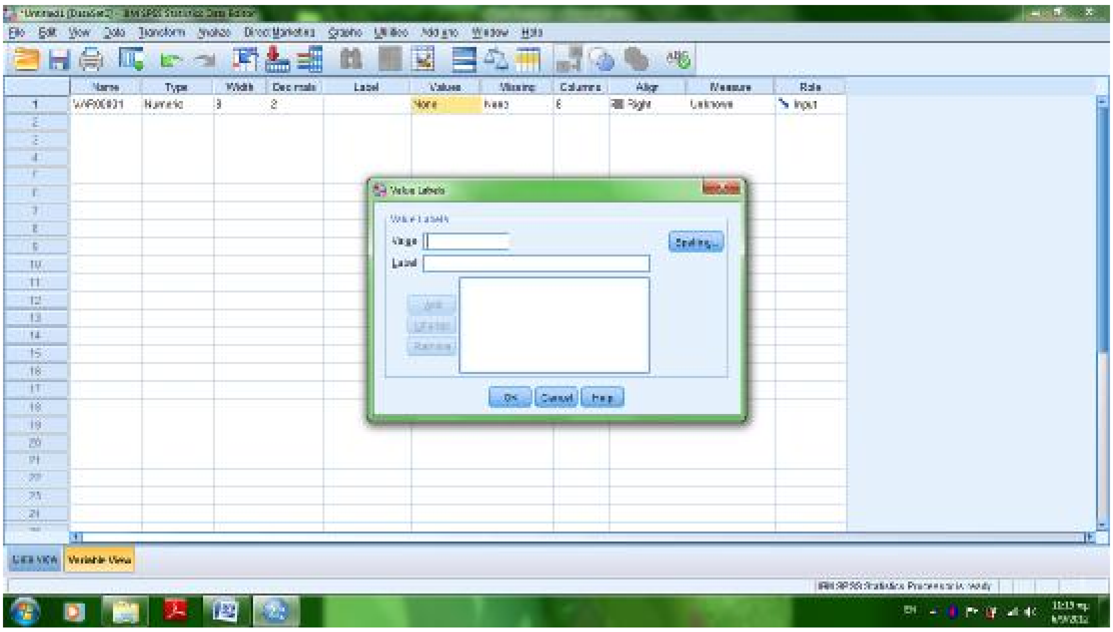
- *Custom Currency*. Ορίζουμε την τιμή του νομίσματος
- *String*.Επιτρεπόμενες τιμές είναι γράμματα, αριθμοί και ειδικά σύμβολα.

3. **Width**. Στο πεδίο αυτό ορίζουμε το μέγιστο αριθμό συμβόλων μαζί με την υποδιαστολή.

4. **Decimals**. Στο πεδίο αυτό ορίζουμε τη μέγιστη τιμή των συμβολών του δεκαδικού μέρους.

5. **Labels**. Περιγράφουμε αναλυτικά τη μεταβλητή.

6.**Values**. Αν πατήσουμε σε αυτή την επιλογή το κουτί … θα εμφανιστεί ένα παράθυρο διαλόγου, όμοιο με αυτό της επόμενης εικόνας.



Εικόνα 4: Πίνακας επιλογών τιμών μεταβλητής

Στο πεδίο Value δίνουμε αριθμητικές τιμές από τον πίνακα κωδικοποίησης. Για παράδειγμα στο πεδίο Value πατάμε τον αριθμό 1, και στο Label ΑΝΔΡΑΣ και μετά Add, τότε η τιμή 1 αντιστοιχεί στο άνδρας. Με το Change κάνουμε αλλαγές και με το Remove διαγράφουμε.

7. **Missing**. Ορίζουμε απούσες ή πεπερασμένες τιμές.

8. **Columns**. Ορίζουμε το πλάτος της στήλης που αντιστοιχεί στην μεταβλητή.

9. **Align**. Ορίζουμε τη στοίχιση των δεδομένων(δεξιά, αριστερά,..)

10. **Measure**. Εδώ μπορούμε να επιλέξουμε τρεις διαθέσιμες επιλογές

- *Scale*. Χρησιμοποιείται για τις ποιοτικές μεταβλητές και επιπλέον έχει την ιδιότητα του προκαθορισμού ίσων διαστημάτων ή διαφορών μεταξύ των κατηγοριών σε οποιαδήποτε τμήμα της κλίμακας.
- *Ordinal*. Χρησιμοποιείται για τις ποιοτικές μεταβλητές που μπορούν οι εγγραφές να ταξινομούνται σε κατηγορίες που ακολουθούν σειρά φυσικά ή λογικά παραδεκτή, αύξουσα ή φθίνουσα.
- *Nomimal*. Χρησιμοποιείται για τις ποιοτικές μεταβλητές που δεν μετρούνται μόνο απαριθμούνται.

11. **Role**. Κάποια δεδομένα θα ακολουθούν προκαθορισμένους ρόλους οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν με προκαθορισμένο στην ανάλυση δεδομένων. Όταν πατήσουμε αυτή την επιλογή εμφανίζεται μια λίστα επιλογών.

- *Input*. Η μεταβλητή θα χρησιμοποιηθεί ως δεδομένο (π.χ. ανεξάρτητη μεταβλητή).
- *Target*. Η μεταβλητή θα χρησιμοποιηθεί ως αποτέλεσμα ή στόχος (π.χ. εξαρτημένη μεταβλητή).
- *Both*. Η μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο ως δεδομένο οσο και ως αποτέλεσμα.
- *None*. Η μεταβλητή δεν έχει προκαθορισμένο ρόλο.
- *Partition*. Η μεταβλητή θα χρησιμοποιηθεί για να διαχωρίσει τα δεδομένα σε κατηγορίες για την εκπαίδευση, την δοκιμή και την εγκυρότητα τους.
- *Split*. Συμπεριλαμβάνει την συμβατότητα με επιστροφή για ένα άλλο λογισμικό της IBM, το IBM@PASW STATISTICS 18@Modeler.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΛΕΓΧΟΙ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

2.1. ΕΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ(tests for goodness of fit)

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, υπάρχουν περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε παραμετρικές μεθόδους για να διενεργήσουμε έναν έλεγχο υπόθεσης, και κάποιες άλλες περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε μη παραμετρικές μεθόδους. Στη συνέχεια παραθέτουμε έναν συνοπτικό πίνακα, με τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των δύο μεθόδων. Οι διαφορές αυτές είναι ένας οδηγός για να καταλάβουμε ποιόν έλεγχο θα διενεργήσουμε σε ένα πρόβλημα.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ-ΜΗ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ	ΜΗ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ
Η κατανομή των μεταβλητών είναι κανονική ή τουλάχιστον προσεγγίζει την κανονική κατανομή.	Δεν απαιτείται κανονικότητα στις κατανομές των μεταβλητών. Εφαρμόζονται όταν δε γνωρίζουμε την κατανομής στις μετρήσεις.
Οι άγνωστοι παράμετροι (π.χ. μέση τιμή, διασπορά) εκτιμούνται.	Δεν απαιτούνται εκτιμήσεις των παραμέτρων των κατανομών.
Τα δείγματα πρέπει να είναι μεγάλα, για να εφαρμοστούν.	Εφαρμόζονται όταν έχουμε μικρά δείγματα.
Υπάρχουν περιπτώσεις που δεν μπορούμε να διενεργήσουμε κάποιο παραμετρικό έλεγχο υποθέσεων.	Εφαρμόζονται όταν δεν μπορούμε να διενεργήσουμε κάποιον παραμετρικό έλεγχο υποθέσεων.

Είναι ισχυρές.	Ευσταθείς, γιατί δεν επηρεάζονται από τη μορφή κατανομής των δεδομένων.
Για να εφαρμοσθούν προϋποθέτουν ακριβείς μετρήσεις.	Εφαρμόζονται σε δεδομένα που είναι ταξινομημένα σε κατηγορίες και τα οποία είναι σε κλίμακα διάταξης ή απλώς σε ονομαστική κλίμακα.

Ένα σημαντικό πρόβλημα στην στατιστική και στην εύρεση πληροφορίας είναι η μορφή της κατανομής από την οποία προέρχεται ένα τυχαίο δείγμα ενός ποσοτικού ή ποιοτικού πληθυσμού. Για να ελέγξουμε αν ένα τυχαίο δείγμα προσεγγίζει μια θεωρητική κατανομή ΘΚ κάνουμε τον εξής έλεγχο υπόθεσης H_0: X ακολουθεί την ΘΚ έναντι της H_1: δεν ακολουθεί την ΘΚ. Οι έλεγχοι που γίνονται με τον σκοπό που αναφέραμε προηγουμένως ονομάζονται ¨έλεγχοι καλής προσαρμογής¨ των δεδομένων και υπάρχουν αρκετοί. Υπάρχουν κάποιοι εμπειρικοί κανόνες μέσω γραφημάτων που μπορούμε να πάρουμε μια πρώτη εικόνα για τα δεδομένα και κάποιοι μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων. Παραδείγματα τέτοιων ελέγχων είναι ο X_v^2 και ο έλεγχος Kolmogorov- Smirnov.

2.1.1 Ο έλεγχος X_v^2– Chi-test

Επιθυμούμε να ελέγξουμε αν κάποιες παρατηρήσεις ενός τυχαίου δείγματος $X_1,X_2,...X_v$ προέρχονται από μια συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή κατασκευάζουμε κατανομή συχνοτήτων των δειγματικών τιμών με κ υποδιαστήματα αν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής, ενώ αν είναι διακριτή θα έχουμε κ μεμονωμένες τιμές, ενώ στην περίπτωση που είναι ποιοτική θα έχουμε κ κατηγορίες. O Pearson από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα (1900) πρότεινε για το σκοπό αυτό να χρησιμοποιηθεί μια στατιστική συνάρτηση η οποία, υπό την H_0 : X_i~ ΘΚ, ακολουθεί προσεγγιστικά κατανομή X^2 (με κάποιους βαθμούς ελευθερίας), ενώ όταν δεν ισχύει η H_0 λαμβάνει ¨μεγάλες¨ τιμές.

Όταν η H_0 ισχύει και ακόμα κάθε συχνότητα $f_i \geq 5$, η σχέση που ισχύει ονομάζεται ¨στατιστική του Pearson" και

$$X^2 \equiv \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - q_i)^2}{q_i^2} \sim \mathrm{X}^2_{k-m-1} \qquad \textit{τύπος 2.1}$$

όπου θ$_i$ είναι οι συχνότητες που θα είχε κάθε υποδιάστημα αν ίσχυε η H_0, οι οποίες ονομάζονται "θεωρητικές" συχνότητες και για τις οποίες ισχύει ότι $\Sigma q_i = \Sigma f_i$.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι παράμετροι της θεωρητικής κατανομής (ΘΚ) είναι άγνωστες, δηλαδή θα πρέπει να τις εκτιμήσουμε από το δείγμα και βάση αυτών των υπολογισμών να υπολογίσουμε τιςq_i .

Όσων αφορά την κατανομή X^2 οι βαθμοί ελευθερίας (ΒΕ) αυτής της κατανομής είναι κ-m-1, όπου κ είναι ο αριθμός των υποδιαστημάτων και m το παραμέτρων της ΘΚ. Έχουμε κ-1 ανεξάρτητες τοποθετήσεις των q_i στα κ-1 υποδιαστήματα γιατί q_i , αν βρούμε κ-1 θεωρητικές τιμές απομένει μια q_i η οποία καθορίζεται αυτόματα. Επιπλέον χάνονται τόσοι βαθμοί ελευθερίας, όσο είναι το πλήθος m των παρατηρήσεων που εκτιμήσαμε.

Περιοχές απόρριψης της H_0

Αν η τυχαία μεταβλητή X ~ ΘΚ, οι διαφορές $f_i - q_i$ θα είναι μικρές, άρα η τιμή X_0^2 της X^2 θα είναι μικρή. Αν ισχύει το αντίθετο, οι διαφορές $f_i - q_i$ θα είναι μεγάλες, άρα η τιμή X_0^2 της X^2 τότε θα είναι μεγάλη. Τότε αν η X ~ ΘΚ, θα ισχύει ότι η $X^2 \sim X^2_{(k-m-1)}$ και απορρίπτουμε την H_0 με πιθανότητα 1-α όταν η δειγματική τιμή $X_0^2 > X^2_{(k-m-1)}$.

Σημειώσεις

1. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία αφού βρούμε τις θεωρητικές συχνότητες θ$_i$ συνενώνουμε με τέτοιο τρόπο κατάλληλα υποδιαστήματα έτσι ώστε για όλες τις εμπειρικές συχνότητες να ισχύει $f_i \geq 5$.
2. Όταν η X_v^2 έχει πολύ λίγους ΒΕ, ο Yates έχει προτείνει διόρθωση για την X^2 σύμφωνα με τον εξής τύπο

$$X^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(|f_i - q_i|^2 - 0,5)^2}{q_i} \sim \mathrm{X}^2_{k-m-1} \qquad \textit{τύπος 2.2}$$

Συνοψίζοντας, αν έχω ένα πρόβλημα μονοπαραμετρικής ΘΚ και δεν γνωρίζουμε την τιμή της παραμέτρου της, θα πρέπει να την εκτιμήσουμε, έτσι θα εξισώσουμε την Ε(ΘΚ) με τον δειγματικό μέσο $\overline{X}$ και λύνουμε Ε(ΘΚ)= $\overline{X}$ ως προς την παράμετρο αυτή.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η H_0 ισχύει και υπολογίζουμε την ¨θεωρητική πιθανότητα¨ p_i^q κάθε υποδιαστήματος, δηλαδή την πιθανότητα η Χ να παίρνει τιμές εντός αυτού του υποδιαστήματος δεδομένου ότι ισχύει η H_0. Υπολογίζουμε τις ¨θεωρητικές συχνότητες¨ $q_i = (\Sigma f_i) \cdot p_i^q$ δηλαδή τις συχνότητες που θα πρέπει να έχουν τα υποδιαστήματα όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση, τότε η στατιστική

$$X^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f_i - q_i)^2}{q_i} \sim \mathrm{X}^2_{k-1-1} \text{ , δηλαδή } \mathrm{X}^2_{k-2}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Εξετάσαμε δείγμα 1000 λαμπτήρων ως προς τη διάρκεια ζωής τους και πήραμε τα εξής αποτελέσματα 600 λαμπτήρες είχαν διάρκεια ζωής 0<Τ≤100 h, 200 λαμπτήρες είχαν διάρκεια ζωής 100<Τ≤200 h, 140 λαμπτήρες είχαν διάρκεια ζωής 200<Τ≤300 h και 60 λαμπτήρες είχαν διάρκεια ζωής Τ>300 h.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα να εξεταστεί αν η διάρκεια ζωής των λαμπτήρων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = l e^{-l x}$*, όπου* $l = 10^{-2}$ *. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι α=0,1.*

<u>ΛΥΣΗ</u>

Σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,1 έχουμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση

H_0: η διάρκεια ζωής Τ ακολουθεί εκθετική κατανομή με $l = 10^{-2}$.Έναντι της εναλλακτικής H_1: η διάρκεια ζωής Τ ακολουθεί εκθετική κατανομή με $l = 10^{-2}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση με $l = 10^{-2}$ και βρίσκουμε την πιθανότητα για καθεμία από τις 4 κλάσεις.

$$p_1 = P(0 < x \leq 100) = \int_0^{100} l\, e^{-l\,x} dx = -e^{-l\,x} |_0^{100} = 1 - e^{-1} = 0,632$$

$$p_2 = P(100 < x \leq 200) = \int_{100}^{200} l\, e^{-l\,x} dx = -e^{-l\,x} |_{100}^{200} = e^{-100\,l} - e^{-200\,l} = e^{-1} - e^{-2} = 0,233$$

$$p_3 = P(200 < x \leq 300) = \int_{200}^{300} l\, e^{-l\,x} dx = -e^{-l\,x} |_{200}^{300} = e^{-200\,l} - e^{-300\,l} = e^{-2} - e^{-3} = 0,085$$

$$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 0,05$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζω την κάθε αναμενόμενη πιθανότητα με το πλήθος ν=1000 του δείγματος για να βρω τις αναμενόμενες συχνότητες. Προκύπτει έτσι ο επόμενός πίνακας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ & ΤΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

T_i *διάρκεια ζωής λαμπτήρων (h)*	*Αριθμός λαμπτήρων* f_i	*Θεωρητική πιθανότητα* p_i	*Θεωρητική συχνότητα* θ_i
0-100	*600*	*0,632*	*632*
100-200	*200*	*0,233*	*233*
200-300	*140*	*0,085*	*85*
>300	*60*	*0,05*	*50*
ΣΥΝΟΛΟ	*1000*	*1*	*1000*

Στη συνέχεια υπολογίζω το

$$X^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f_i - q_i)^2}{q_i} = \frac{(632-600)^2}{632} + \frac{(233-200)^2}{233} + \frac{(85-140)^2}{85} + \frac{(50-60)^2}{50} = 43,88$$

Έχω 4 κατηγορίες τότε n-1=3 με α=0,01 από τους πίνακες της κατανομής X^2 έχω ότι $X^2_{3,1-0.1} = X^2_{3,0,9} = 6,251$. Η κρίσιμη περιοχή είναι $X^2 > 6,251$, η τιμή που βρήκαμε 43,88 βρίσκεται μέσα στην κρίσιμη περιοχή, έτσι η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

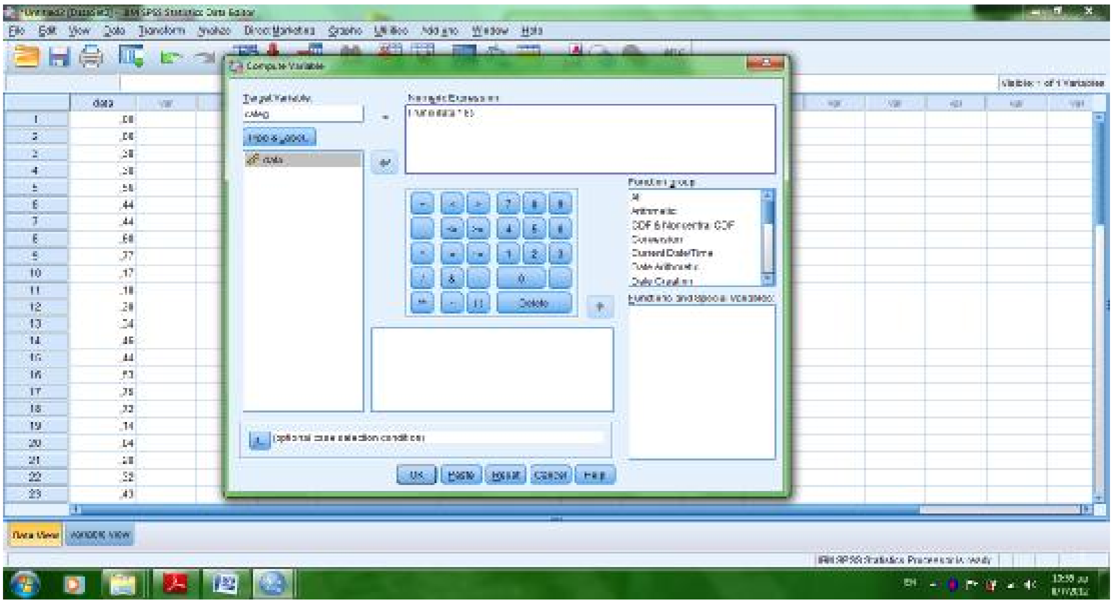
Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι χρόνοι καθυστέρησης μιας γραμμής του μετρό μια μέρα να εξεταστεί αν τα δεδομένα ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1) σε επίπεδο σημαντικότητας 5%

ΧΡΟΝΟΙ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΡΟ (σε sec)

0.00	0.06	0.38	0.38	0.56	0.44	0.44	0.60	0.77
0.17	0.18	0.38	0.34	0.46	0.44	0.53	0.75	0.72
0.14	0.04	0.28	0.32	0.43	0.42	0.56	0.61	0.98
0.04	0.20	0.36	0.54	0.48	0.40	0.79	0.66	0.85
0.16	0.26	0.22	0.51	0.52	0.43	0.71	0.78	0.86

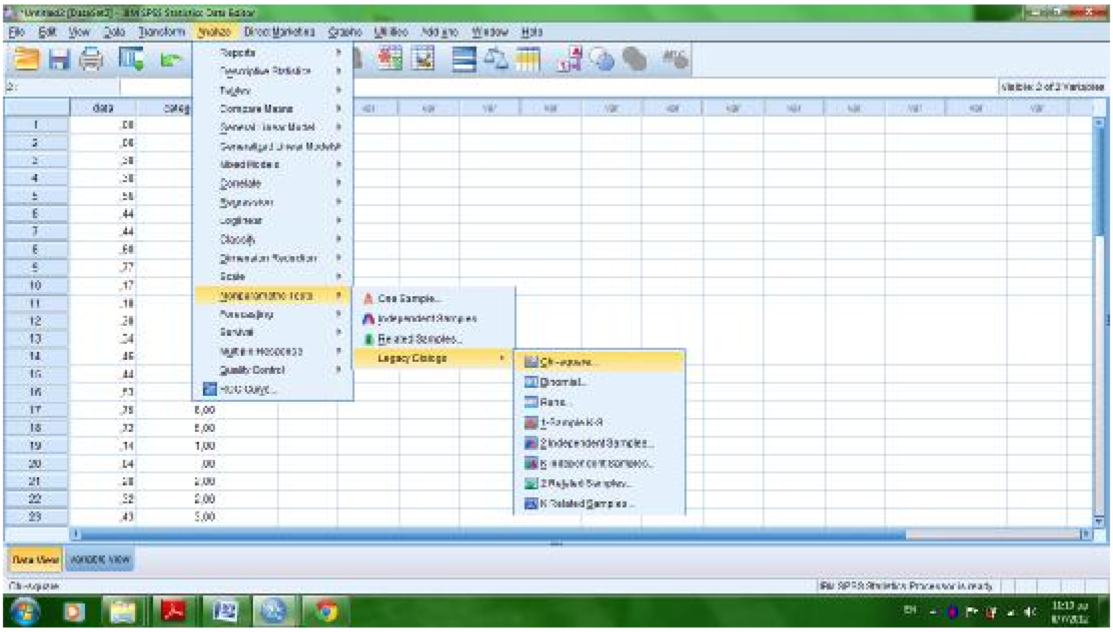
Εισάγουμε τα 45 δεδομένα στο PASW STATISTICS 18 , ως 45 γραμμές (cases) με μια μεταβλητή (variable) την οποία ονομάζουμε data. Τα δεδομένα δεν θεωρούνται κατηγορικά και πρέπει να ομαδοποιηθούν πριν εφαρμόσουμε το X^2 test. Για να τα ομαδοποιήσουμε θα φτιάξουμε 8 κλάσεις ώστε να έχουμε τουλάχιστον 5 αναμενόμενες παρατηρήσεις σε κάθε κελί. Οι κλάσεις θα είναι $[0,{}^1\!/_8),[{}^1\!/_8,{}^2\!/_8),\ldots,({}^7\!/_8,1]$.

Στο PASW STATISTICS 18 στο transform-> compute variable, εμφανίζεται νέο παράθυρο στο target variable βάζω ένα όνομα categ το οποίο = στο numeric expression Trunc(data*8) πατάμε OK και έχει κατασκευαστεί το ζητούμενο, οι τιμές του εμφανίζονται σε νέα στήλη με όνομα categ.



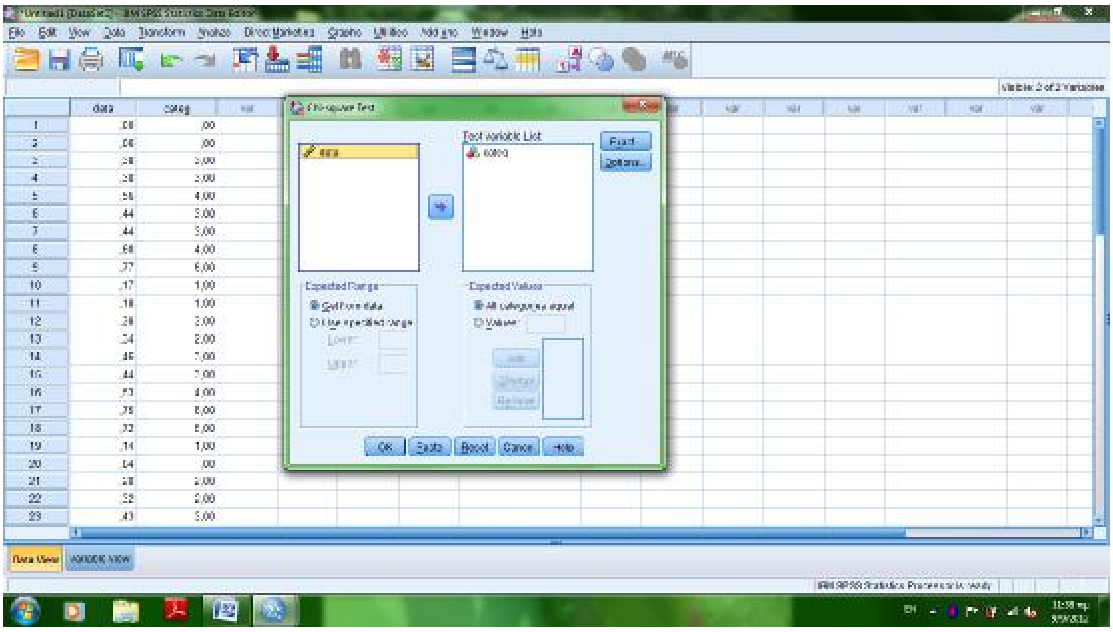
Εικόνα 5: Πίνακας εισαγωγής για ομαδοποίηση δεδομένων

Εφαρμόζουμε σε αυτό X^2 test, επιλέγω Analyze-> Nonparametric tests->Legacy dialogos-> Chi-square.



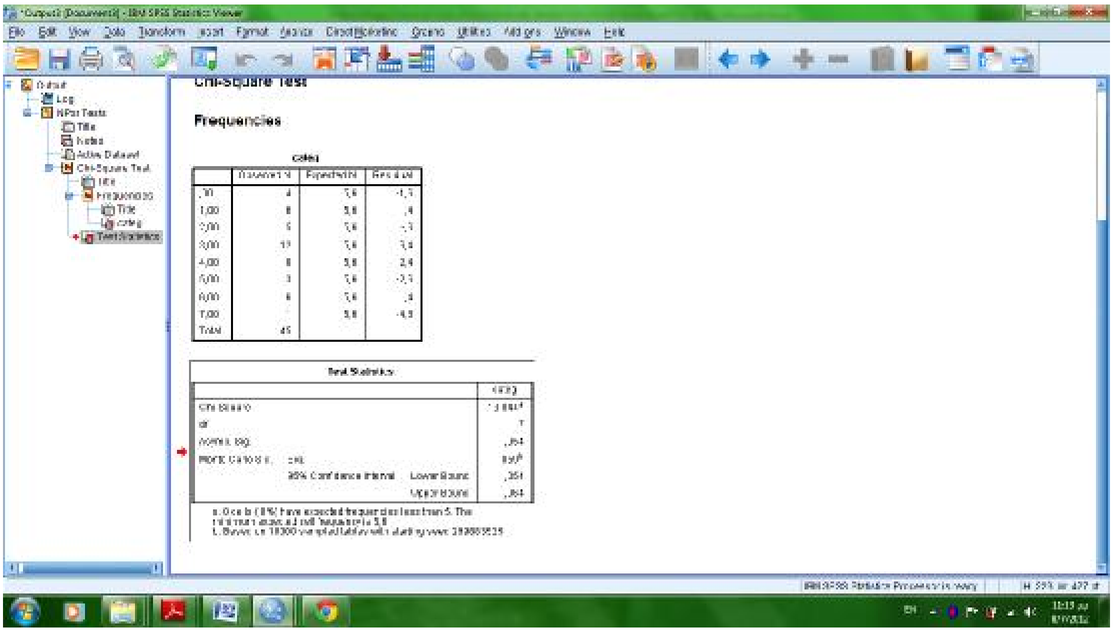
Εικόνα 6: Γραμμή επιλογής του X^2 test

Ο έλεγχος που κάνουμε είναι ο $H_0 : X_i \sim U(0,1)$ όλες ίσες (με 1/8 γιατί έχουν πλάτος 1/8), με το βελάκι περνάω την μεταβλητή categ στο Test Variable List και στο PASW STATISTICS 18 επιλέγω categories equal



Εικόνα 7: Πίνακας PASW STATISTICS 18 για την απάντηση του test

Πατάω ΟΚ και θα πάρουμε κάποιους πίνακες ως απάντηση, θα δούμε την επόμενη εικόνα.



Εικόνα 8: Απαντήσεις του test στο PASW STATISTICS 18

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης στο δείγμα είναι 13,844 με αντίστοιχο $p - value = 0,0504 > 5\% = 0,005$ άρα απορρίπτουμε την H_0, τότε το δείγμα δεν προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή.

2.1.2 Ο έλεγχος καλής προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov (K-S)(Kolmogorov-Smirnov one sample test)

Ο έλεγχος K-S ελέγχει την H_0: η Χ προέρχεται από μια ΘΚ έναντι H_1: η Χ δεν προέρχεται από μια ΘΚ μέσω των αποκλίσεων $F\left[p(x_i)\right]-F[p_q(x_i)]$, όπου $F\left[p(x_i)\right]$ είναι οι δειγματικές αθροιστικές πιθανότητες και $F[p_q(x_i)]$ είναι οι θεωρητικές αθροιστικές πιθανότητες που υπολογίζονται όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση. Αν η H_0 ισχύει, οι αποκλίσεις $F\left[p(x_i)\right]-F[p_q(x_i)]$ περιμένουμε να είναι μικρές, γιατί οφείλονται μόνο σε σφάλματα της τυχαίας δειγματοληψίας.

Η διαφορά με την X_n^2 είναι ότι ο K-S γίνεται και σε πολύ μικρά δείγματα, σε αντίθεση με τον X_n^2 ο οποίος δεν μπορεί να γίνει αφού πρέπει $f_i \le 5$. Ένα ακόμα πλεονέκτημα της K-S είναι ότι όταν απαιτούνται συνενώσεις διαστημάτων ο έλεγχος K-S είναι πιο αξιόπιστος.

Ως προς τον τρόπο που γίνεται ο έλεγχος K-S, φτιάχνουμε έναν πίνακα γράφουμε στην πρώτη γραμμή τις τιμές (ή τα υποδιαστήματα) της ποσοτικής μεταβλητής ή τις κατηγορίες της ποιοτικής μεταβλητής Χ που ερευνούμε. Στη δεύτερη γραμμή γράφουμε τις δειγματικές συχνότητές τους $f(x_i)$, στην τρίτη τις πιθανότητες για τις οποίες ισχύει $p(x_i)=f(x_i)/n$ και στην τέταρτη οι αθροιστικές πιθανότητες $F\left[p(x_i)\right]$. Ακόμα στην επόμενη γραμμή γράφουμε τις θεωρητικές πιθανότητες $p_q(x_i)$, που τους βρίσκουμε με το δεδομένο ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση, στην έκτη γραμμή γράφουμε τις αθροιστικές πιθανότητες $F[p_q(x_i)]$ και στην έβδομη τις διαφορές των δύο αθροιστικών συχνοτήτων $D_i=F\left[p(x_i)\right]-F[p_q(x_i)]$. Από τις D_i θα βρούμε την $D=\max\{D_i\}$.

Για ένα δείγμα μεγέθους n σε επίπεδο σημαντικότητας α μπορούμε να βρούμε τις κρίσιμες τιμές $D_{n,a}$ μέσω πινάκων. Σε αυτούς τους πίνακες βρίσκουμε την αμέσως μικρότερη τιμή από το $D = \max\{D_i\}$. Τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται στο επίπεδο σημαντικότητας τουλάχιστον ίσο με το α, που αντιστοιχεί στην στήλη $D_{n,a}$.

ΑΣΚΗΣΗ

Σε 40 οικοδομές μετρήθηκε ο αριθμός των ατελειών και βρέθηκαν 5 οικοδομές χωρίς ατέλειες, 11 οικοδομές με μια ατέλεια, 10 οικοδομές με 2 ατέλειες, 7 οικοδομές με 3 ατέλειες και 7 οικοδομές με 4 ατέλειες. Με ε.σ. 1% να ελεγχθεί αν το πλήθος των ατελειών ακολουθεί κατανομή Poisson.

ΛΥΣΗ

Η μηδενική υπόθεση που θα ελέγξουμε είναι η H_0: το πλήθος των ατελειών σε κάθε οικοδομή ακολουθεί κατανομή Poisson έναντι της εναλλακτικής H_1: το πλήθος των ατελειών σε κάθε οικοδομή δεν ακολουθεί κατανομή Poisson

Αν η μηδενική υπόθεση αληθεύει, η πιθανότητα να υπάρχουν ατέλειες είναι $P_k = e^{-l}\dfrac{l^k}{k!}$. Βάση αυτού του τύπου βρίσκουμε τις πιθανότητες

$$P_0 = e^{-l}\frac{l^0}{0!} = e^{-l}, P_1 = l \cdot e^{-l}, P_2 = l^2\frac{e^{-l}}{2}, P_3 = l^3\frac{e^{-l}}{6}, P_4 = 1 - e^{-l}(1 + l + \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{6})$$

Η τιμή του λ σε αυτό το παράδειγμα είναι άγνωστη και χρησιμοποιούμε τη δειγματική μέση τιμή για να την προσεγγίσουμε, αφού στην Poisson λ=$\bar{x}$ $\bar{x} = (5\cdot 0 + 11\cdot 1 + 10\cdot 2 + 7\cdot 3 + 7\cdot 4)/40 = 2$. Τότε οι τιμές για λ=2 δίνουν P_0=0,135, P_1=0,270, P_2=0,270, P_3=0,180, P_4=0,145.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ & ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Αριθμός ατελειών X_i	Συχνότητα f_i	$p(x_i)$	$F[p(x_i)]$	Αναμενόμενη πιθανότητα $p_\theta(x_i)$	$F[p_\theta(x_i)]$	$F\left[p\left(x_i\right)\right] - F[p_q\left(x_i\right)]$
0	5	0,125	0,125	0,135	0,135	0,010
1	11	0,275	0,4	0,270	0,405	0,005
2	10	0,250	0,650	0,270	0,675	0,025
3	7	0,175	0,825	0,180	0,855	0,030

4	7	0,175	1	0,145	1	0

Υπολογίζουμε το $D = \max\{D_i\} = 0,030$, στη συνέχεια από τους πίνακες θα βρω το $D_{n,a} = D_{40,0,01} = 0,25$.

Ισχύει $\mathrm{D} = 0,030 < 0,25 = \mathrm{D}_{40,0,01}$ άρα αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση.

Στη συνέχεια θα δούμε κάποιες εφαρμογές με τη χρήση του στατιστικού πακέτου PASW STATISTICS 18, στα παραδείγματα χρησιμοποιούμε πολλά δεδομένα τα οποία θα ήταν πολύ χρονοβόρα να τα ελέγξουμε με το χέρι.

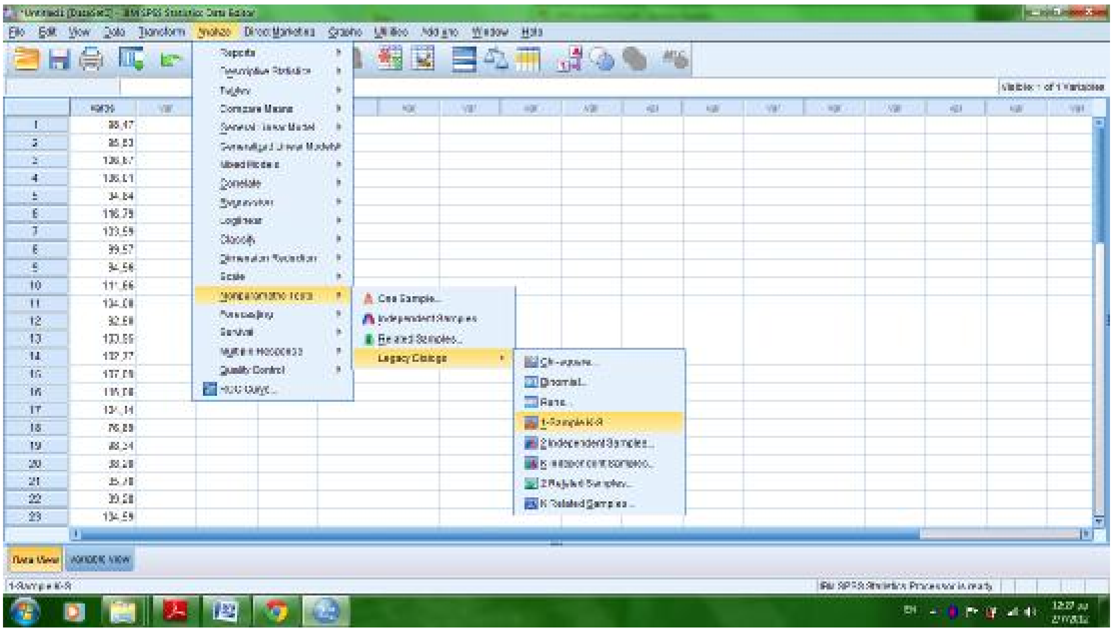
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Ο παρακάτω πίνακας δίνει το βάρος των ενήλικων ανδρών σε μια έρευνα, να ελέγξετε αν οι παρατηρήσεις προέρχονται από κανονική κατανομή.

ΒΑΡΟΣ ΕΝΗΛΙΚΩΝ ΑΝΔΡΩΝ (σε kg)

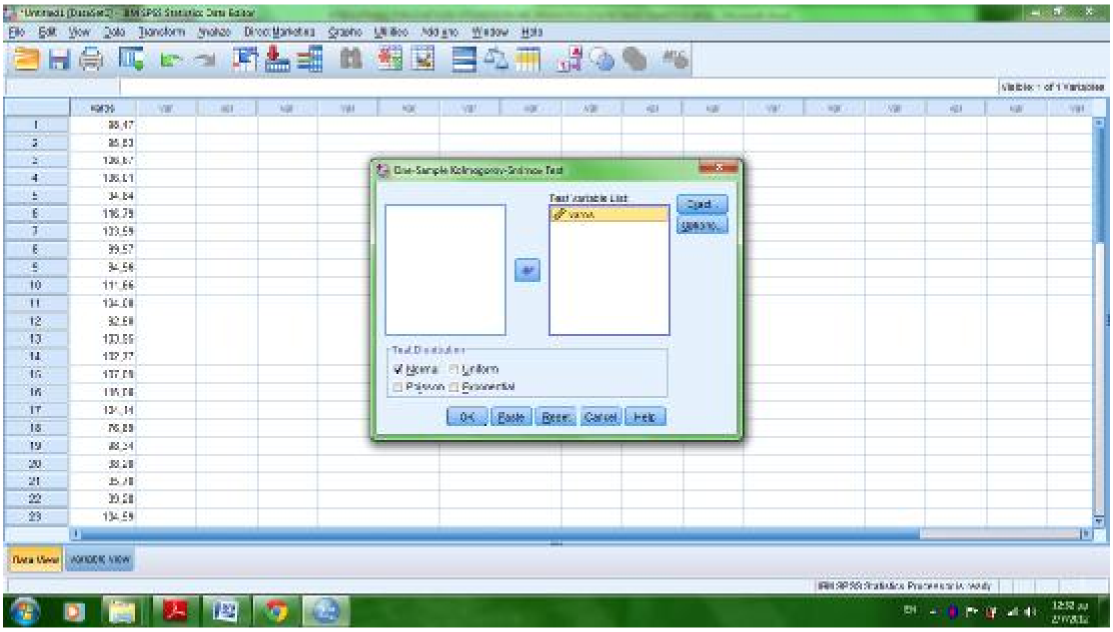
98,47	95,53	106,67	106,1	94,84	116,79	103,57	99,57
94,56	111,66	104,08	92,50	103,95	102,77	107,09	115,08
104,14	76,89	98,34	98,20	95,70	99,28	104,59	101,44
87,50	97,59	117,26	98,91	96,79	91,80	107,68	107,31
98,82	100,99	105,91	97,69	109,03	104,37	91,92	107,63

Όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα για να κάνουμε στο PASW STATISTICS 18 έναν έλεγχο K-S η διαδικασία που ακολουθείται είναι Analyze -> Nonparametrical tests -> Legacy dialogs -> 1-sample K-S



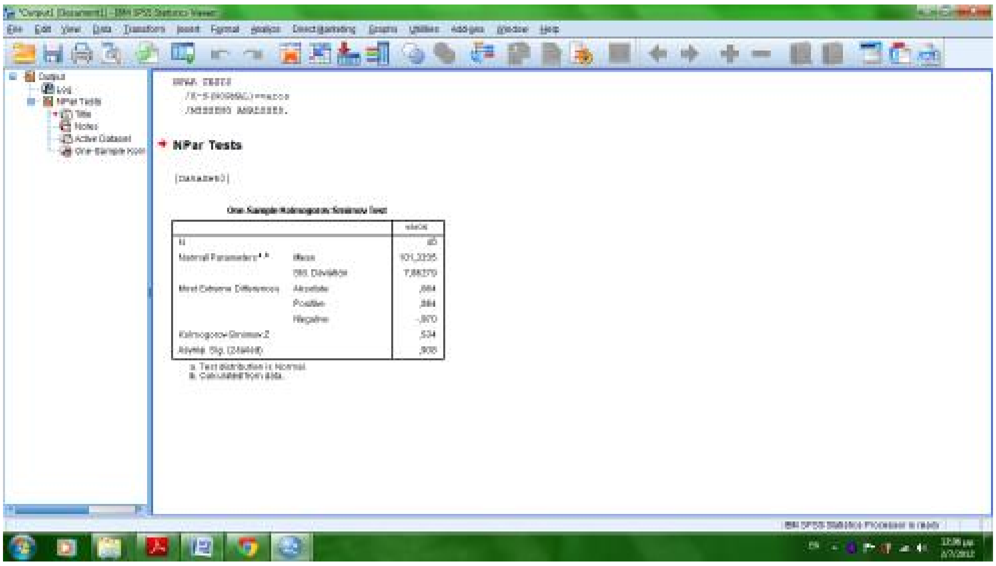
Εικόνα 9: Γραμμή επιλογής για το K-S test

Τότε εμφανίζεται η επόμενη εικόνα



Εικόνα 10: Πίνακας επιλογών του K-S test

Στο εικονίδιο που εμφανίζεται επιλέγουμε τον τύπο της κατανομής που διενεργείται ο έλεγχος για έλεγχο κανονικής κατανομής επιλέγω normal, για έλεγχο ομοιόμορφης κατανομής uniform κτλ. Ακόμα εισάγω variable list test τα δεδομένα που πρόκειται να γίνει ο έλεγχος, πατάω OK για να βγουν τα αποτελέσματα του PASW STATISTICS 18.



Εικόνα 11: Απαντήσεις του K-S test στο PASW STATISTICS 18

Τα αποτελέσματα μου δείχνουν τα εξής $D_n^+ = 0,084$ (μέγιστο από θετικές τιμές) , $D_n^- = 0,070$ (μέγιστο από αρνητικές τιμές) , $D = max\{0,070{,}0,084\} = 0,084$. Ο έλεγχος K-S είναι $Z_n = \sqrt{n}D_n \approx$ 0,534 και p= 0,938. Τότε σε ε.σ. 0,05 αποδεχόμαστε την H_0 και τότε τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή.

2.2 Έλεγχος για την τιμή μιας αναλογίας.

Στους παραμετρικούς ελέγχους για τον έλεγχο H_0: $p=p_0$ γίνεται μόνο όταν n> 100, όταν το δείγμα είναι μικρότερο του 100 γίνονται μη παραμετρικοί έλεγχοι. Οι έλεγχοι αυτοί γίνονται με χρήση της στατιστικής X^2 που ακολουθεί την X_v^2. Επειδή η X^2 είναι πάντα θετική οι έλεγχοι θα είναι μόνο δίπλευροι και δεν λαμβάνεται υπόψη το πρόσημο των $f_i - q_i$.

Από έναν πληθυσμό έχουμε ένα δείγμα πλήθους n, από τα οποία f_1 μέλη έχουν μια ιδιότητα και τα υπόλοιπα $f_2 = n - f_1$ δεν έχουν την ιδιότητα. Η μηδενική υπόθεση που θέλουμε να ελέγξουμε είναι H_0 : $p=p_0$, αν η αναλογία τους στον πληθυσμό είναι p_0. Θεωρούμε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση και βάση αυτής υπολογίζουμε τη θεωρητική συχνότητα $q_1 = n \cdot p_0$ των μελών του πληθυσμού που έχουν την ιδιότητα, τότε $q_2 = n - q_1$ δεν έχουν την ιδιότητα.

Ο έλεγχος είναι έλεγχος καλής προσαρμογής των δειγματικών δεδομένων f_i και $n - f_i$ στην κατανομή με θεωρητικές συχνότητες $q_1 = n \cdot p_0$ των μελών του πληθυσμού που θα έχουν την ιδιότητα και $q_2 = n - q_1$ όσων δεν έχουν την ιδιότητα. Τότε αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, η στατιστική

$$X^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - q_i)^2}{q_i} \sim X^2_{k-m-1} \qquad \textit{τύπος 2.3}$$

με κ=2 και m=0 επειδή δεν έγινε εκτίμηση σε κάποια από τις παραμέτρους, τελικά έχουμε ότι $X^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - \theta_i)^2}{\theta_i} \sim X^2_1$ *τύπος 2.4.* Στην περίπτωση που $X_0^2 > X^2_{1,a}$ θα απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση με πιθανότητα 1-α.

Ακόμα, επισημαίνεται ότι μερικά βιβλία αναφέρουν ότι η προσέγγιση της διακριτής στατιστικής X^2 στη συνεχή κατανομή X_1^2 βελτιώνεται με τη διόρθωση Yates και έχουμε

$$X^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(|f_i - q_i|^2 - 0,5)^2}{q_i} \sim X_1^2 \qquad \textit{τύπος 2.5.}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Μια εταιρεία αγοράζει ηλεκτρικά εξαρτήματα από έναν κατασκευαστή. Ο κατασκευαστής ισχυρίζεται ότι το 95% των εξαρτημάτων του δεν είναι ελαττωματικά. Σε ένα δείγμα 20 εξαρτημάτων της εταιρείας βρέθηκε ότι 2 εξαρτήματα είναι ελαττωματικά. Βάση του δείγματος, να ελεγχθεί σε α=0,10 αν ο ισχυρισμός του κατασκευαστή είναι ορθός.

ΛΥΣΗ

Το δείγμα της εταιρείας είναι n=20, άρα είναι μικρό και ο έλεγχος που θα γίνει είναι μη παραμετρικός. Η μηδενική υπόθεση είναι H_0: p=0,95 έναντι της εναλλακτικής H_1:p≠0,95.

Θεωρούμε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση τότε οι θεωρητικές συχνότητες είναι $q_1 = n \cdot p_0 = 20 \cdot 0,95 = 19$ τότε $q_2 = n - q_1 = 20 - 19$. Βρίσκω το X_0^2

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - q_i)^2}{q_i} = \frac{(19-18)^2}{19} + \frac{(2-1)^2}{1} = \frac{1}{19} + 1 = 1,053$$

Το αποτέλεσμα το συγκρίνω με την $X_{1,0,10}^2 = 6,635$.

Παρατηρούμε ότι $X_0^2 = 1,053 < 6,635 = X_{1,0,10}^2$. Άρα αποδέχομαι την μηδενική υπόθεση με $\alpha = 0,10$.

Το PASW STATISTICS 18 δεν διαθέτει επιλογή για την εφαρμογή ενός τέτοιου τεστ.

2.3 Έλεγχοι τυχαιότητας (One sample runs test)

Ο έλεγχος της τυχαιότητας ενός δείγματος, που είναι απαραίτητη σε κάθε έλεγχο, βασίζεται στη σειρά εμφάνισης των μελών του και δεν έχει αντίστοιχο παραμετρικό. Ειδικότερα υπάρχουν κάποιοι έλεγχοι υποθέσεων που θα δούμε αναλυτικά στην συνέχεια.

2.3.1. Έλεγχος τυχαιότητας ενός δείγματος από δίτιμη τυχαία μεταβλητή Χ

Θεωρούμε ότι όλες οι δυνατές τιμές της Χ είναι επιτυχία (+) και αποτυχία (-). Ο έλεγχος της H_0 είναι ¨ο έλεγχος έχει ληφθεί με τυχαίο τρόπο¨, οπότε η σειρά εμφάνισης των + και – είναι τυχαία, δεν εξαρτάται από τις συχνότητες των + και -. Η διαδικασία γίνεται με τον εξής τρόπο. Πρώτα μετράμε το πλήθος n_1 των (+) και το πλήθος n_2 των (-), ακόμα μετράμε τον αριθμό των ¨ροών¨ R, με τον όρο ροή εννοούμε κάθε σειρά διαδοχικών όμοιων αποτελεσμάτων.

Για παράδειγμα μια εμφάνιση συμβόλων --/++++/---/++/---- έχει $n_1 = 6$, $n_2 = 9$ και R=5 ροές.

Στην μηδενική υπόθεση H_0: οι λήψεις του δείγματος είναι σε τυχαία σειρά η κατανομή δειγματοληψίας της στατιστικής R έχει μέση τιμή και διασπορά τις

$$m_R = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1 \qquad \text{και} \quad s_R^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} \qquad \textit{τύποι 2.6}$$

Μετά ανάλογα σε ποια από τις περιπτώσεις είμαστε ενεργούμε ανάλογα

Α. Αν $n_1 > 20$ ή/και $n_2 > 20$ η R προσεγγίζεται από κανονική κατανομή $N(m_R, s_R^2)$ τότε η μηδενική υπόθεση θα απορριφθεί με πιθανότητα 1-α όταν $|\bar{A}_0| = \dfrac{|R-m_R|}{s_R} > Z_{a/2}$.

Β. Αν $n_1 \le 20$ και $n_2 \le 20$, οι πίνακες των $f^{u}_{1,n_2,a}$ δίνουν για τον έλεγχο της H_0 σε α=0,05, για συγκεκριμένα n_1 και n_2 δύο κρίσιμες τιμές κ και λ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που ο αριθμός των ροών R είναι $X^2 = n\cdot\dfrac{(ad-bg)^2}{(a+b)(a+g)(d+b)(d+g)} \square X_1^2 \quad q_{12} = \dfrac{(a+b)(b+d)}{n}$,, αποδεχόμαστε

την H_0 σε α=0,05. Σε άλλη περίπτωση απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

ΑΣΚΗΣΗ

Να ελέγξετε σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 αν η σειρά κορώνας γράμματος ενός κέρματος είναι τυχαία

ΚΚΓΓΓΚΚΓΚΓΚΚΓΓΚΓ

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ελέγχουμε αν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0: η σειρά ρίψης του κέρματος είναι τυχαία.

Μετράμε τις ροές διαδοχικών ρίψεων του κέρματος

Κ Κ/ Γ Γ Γ / Κ Κ / Γ / Κ / Γ / Κ Κ / Γ Γ / Κ / Γ

Παρατηρούμε ότι έχουμε R=10 ροές με $n_1 = 8K$ (κορώνες), $n_2 = 8\Gamma$ (γράμματα). Τα δείγματα είναι $n_1, n_2 \le 20$ δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε κάποια από τις γνώστες κατανομές άρα έχω μη παραμετρικό έλεγχο (περίπτωση Β). Θα βρω δύο κρίσιμες τιμές κ και λ για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης H_0: οι λήψεις του δείγματος είναι με τυχαία σειρά έναντι της εναλλακτικής H_1: οι λήψεις του δείγματος δεν είναι με τυχαία σειρά.

Για $n_1 = 8$ και $n_2 = 8$ οι δύο πίνακες δίνουν κ=4 και λ=14. Το R=10 βρίσκεται εντός του διαστήματος (4,14) και η μηδενική υπόθεση είναι αποδεκτή.

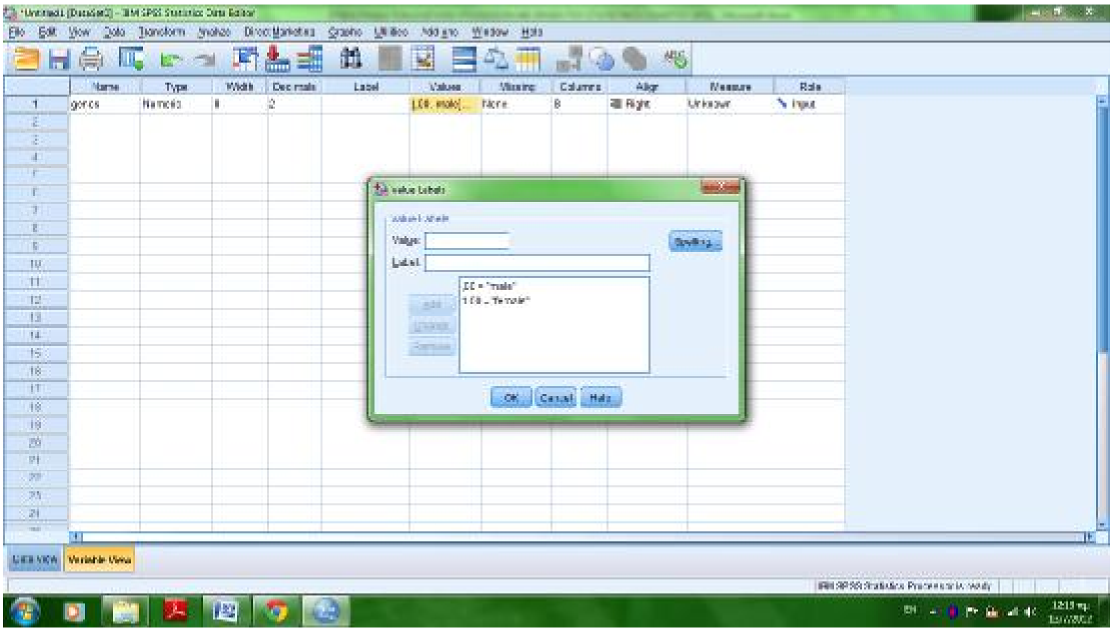
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος καταγράφει 20 ονόματα ατόμων που μπαίνουν σε μια εταιρεία και θέλουμε να εξετάσουμε αν η σειρά ως προς την οποία καταγράφει τα ονόματα είναι τυχαία όσων αφορά το γένος των καλούντων. Η σειρά όπου ***M*** *είναι το αρσενικό και* ***F*** *το θηλυκό είναι η εξής*

MFFMFMFMFFMFFFMMFMMM

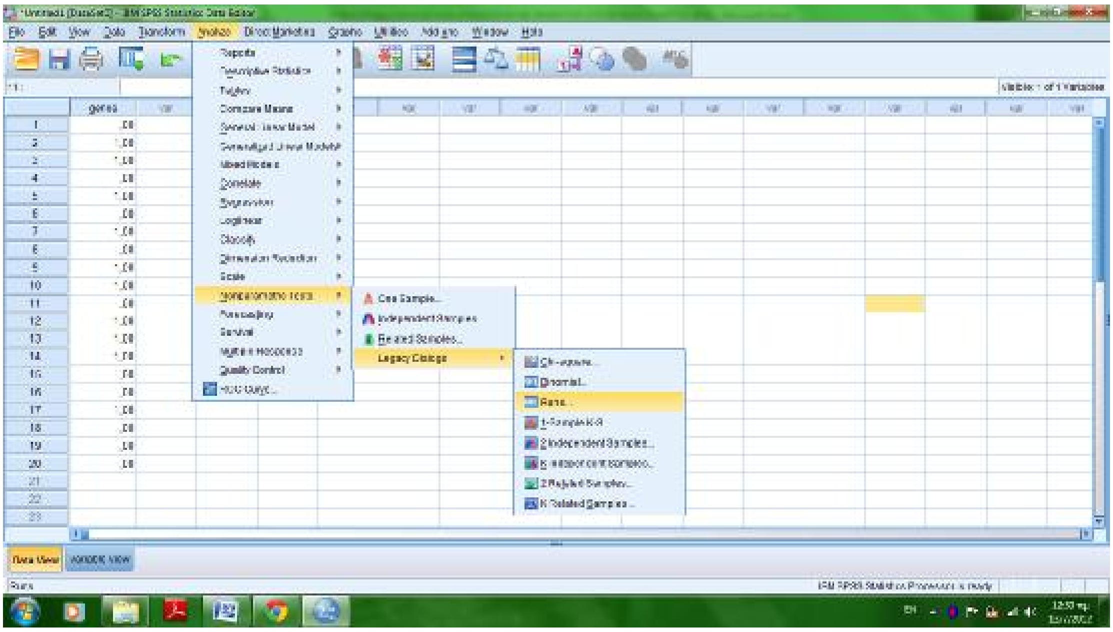
Η μηδενική υπόθεση εδώ είναι H_0: η σειρά των ονομάτων που καταγράφονται είναι τυχαία

Εισάγουμε τα δεδομένα στο στατιστικό πακέτο και συμβολίζουμε με 0=M και 1=F. Η εισαγωγή γίνεται με 0 και 1 και στη συνέχεια δηλώνουμε τι είναι το καθένα ως εξής στο Variable View (εμφανίζεται κάτω αριστερά στο μενού) πατάω την ετικέτα Values και μου βγαίνει ένας πίνακας που βάζω στο value 0 και αντιστοιχώ στο label το male πατάω add και κάνω το ίδιο για την 1 και το female, πατάω OK και είναι έτοιμο (εικόνα). Γυρνάω μετά στο Data view.



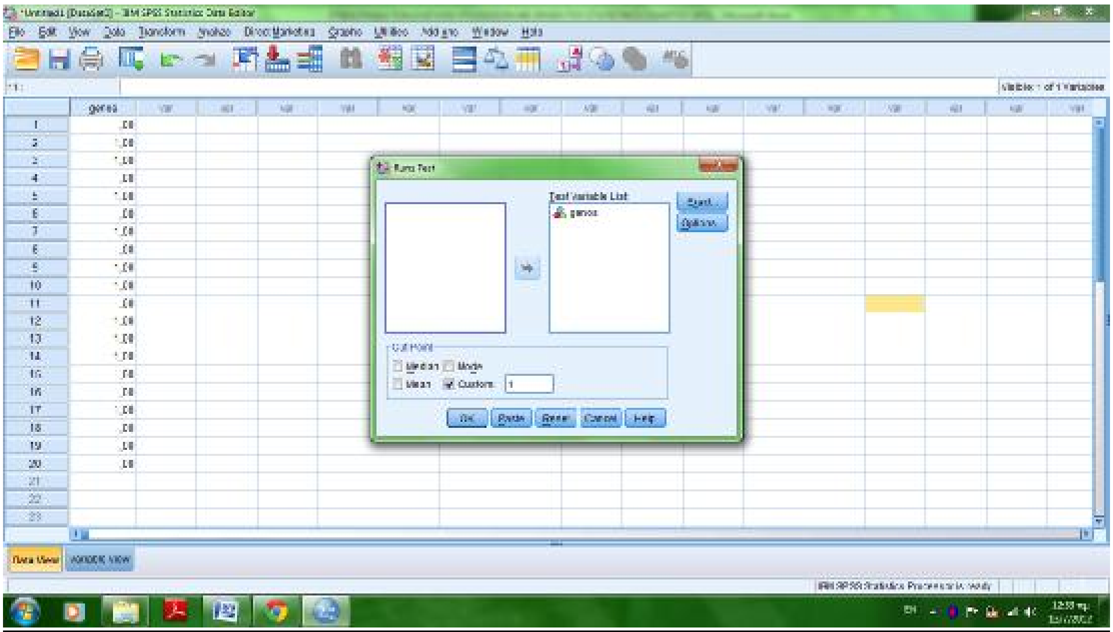
Εικόνα 12: Κωδικοποίηση των μεταβλητών στο PASW STATISTICS 18

Στο μενού του Data view πατάω διαδοχικά Analyze-> Nonparametric Tests -> legacy dialogs->runs…



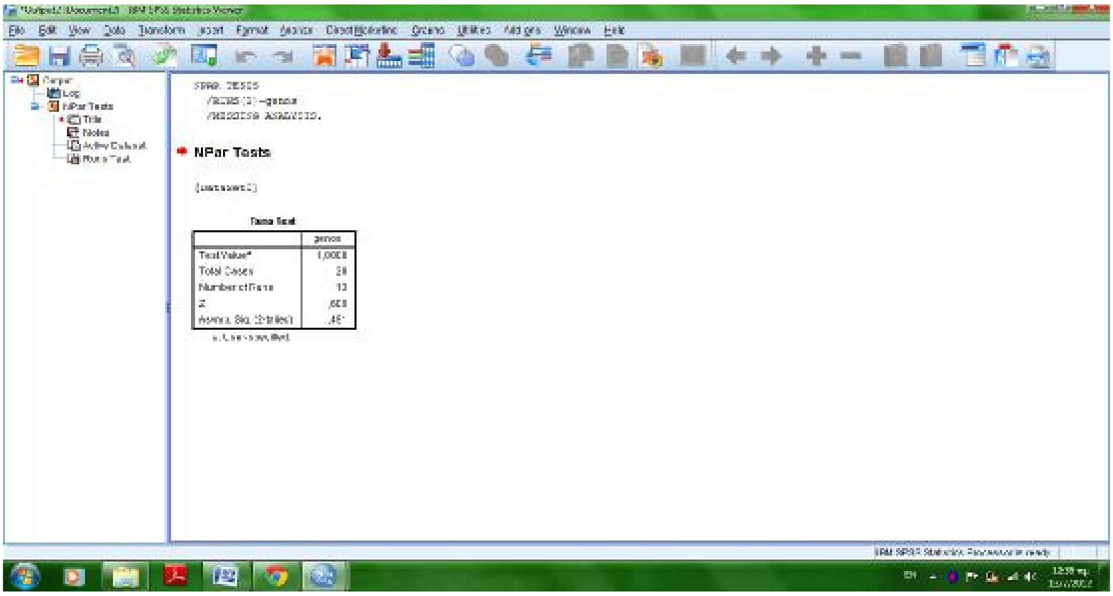
Εικόνα 13: Γραμμή επιλογής του ελέγχου τυχαιότητας

Εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο διαλόγου, με το βελάκι μετακινώ την μεταβλητή genos από το ένα παράθυρο στο άλλο που αναγράφεται Test Variable List. Από τις επιλογές του Cut Point επιλέγω το Custom με 1.



Εικόνα 14:Πίνακας με τις επιλογές του ελέγχου τυχαιότητας

Πατάμε OK θα εμφανιστούν τα αποτελέσματα του PASW STATISTICS 18 όπου $p > 0{,}05$ άρα είναι τυχαία και ισχύει η μηδενική υπόθεση.

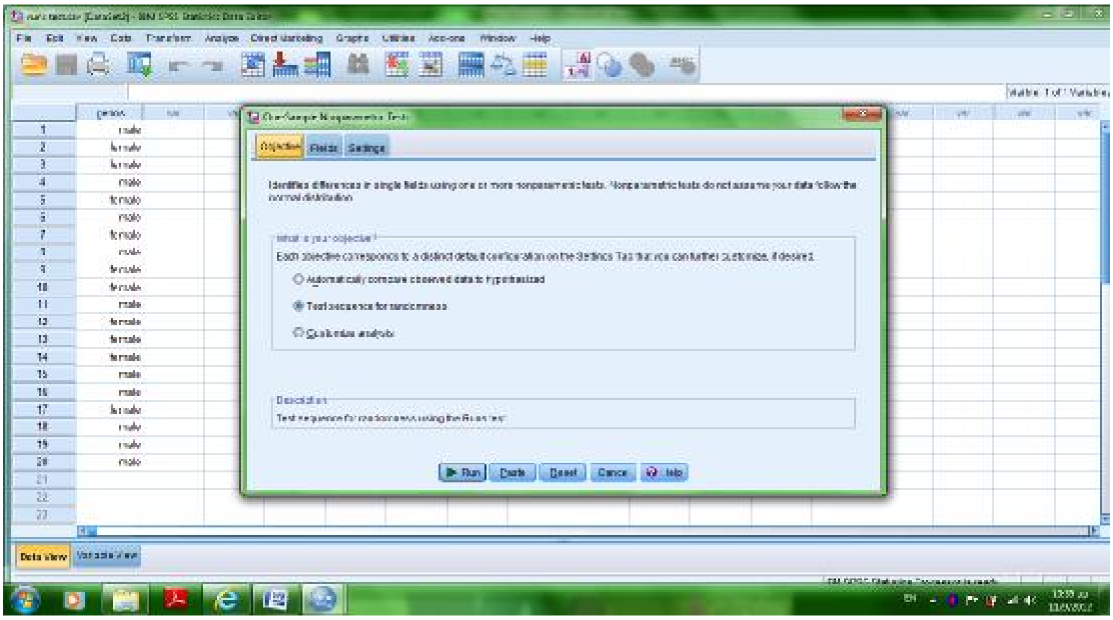


Εικόνα 15: Απαντήσεις του ελέγχου στο PASW STATISTICS 18

Υπάρχει ακόμα ένας τρόπος για να διεξάγουμε αυτόν τον έλεγχο για την τυχαιότητα του δείγματος στο εργαλείο του PASW STATISTICS 18. Εργαζόμενοι με τα ίδια δεδομένα η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής, διαδοχικά πατάμε

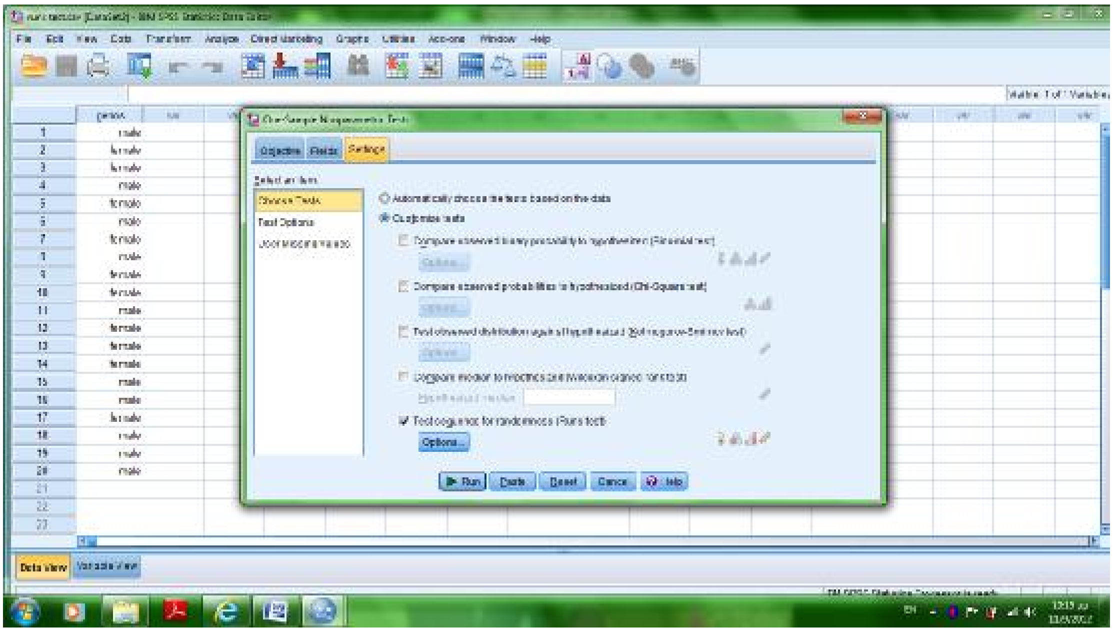
Analyze ->Nonparametric Tests->One sample…

Εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου και επιλέγω Test sequence for randomness και μετά πατάω το Settings.



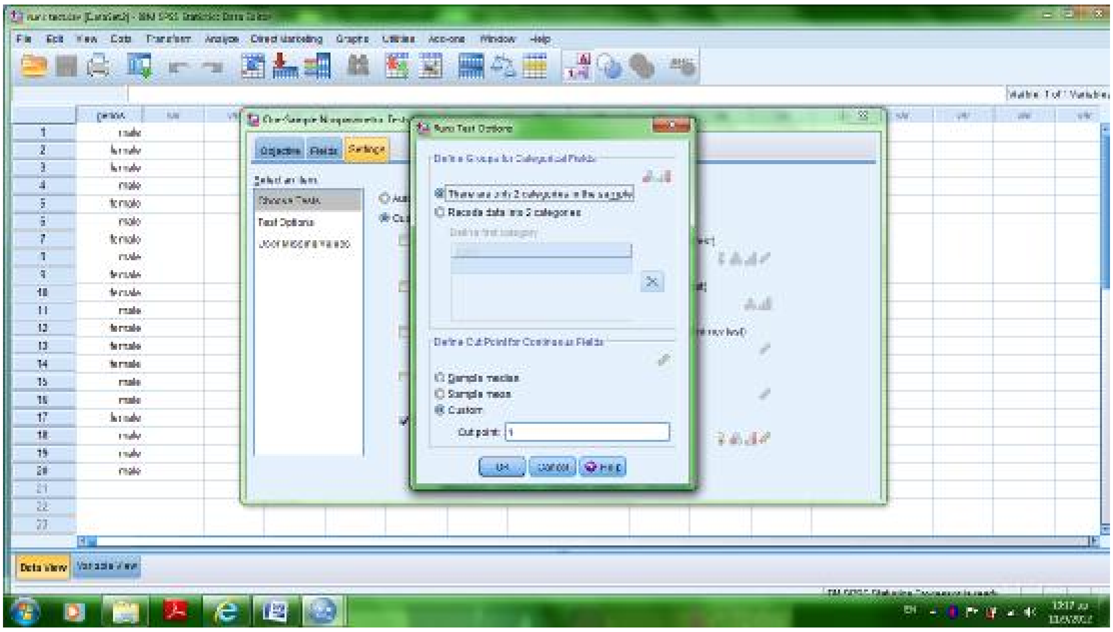
Εικόνα 16: Επιλογή του τεστ τυχαιότητας με δεύτερο τρόπο

Εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου, όπου επιλέγουμε το Test sequence for randomness (Runs test).



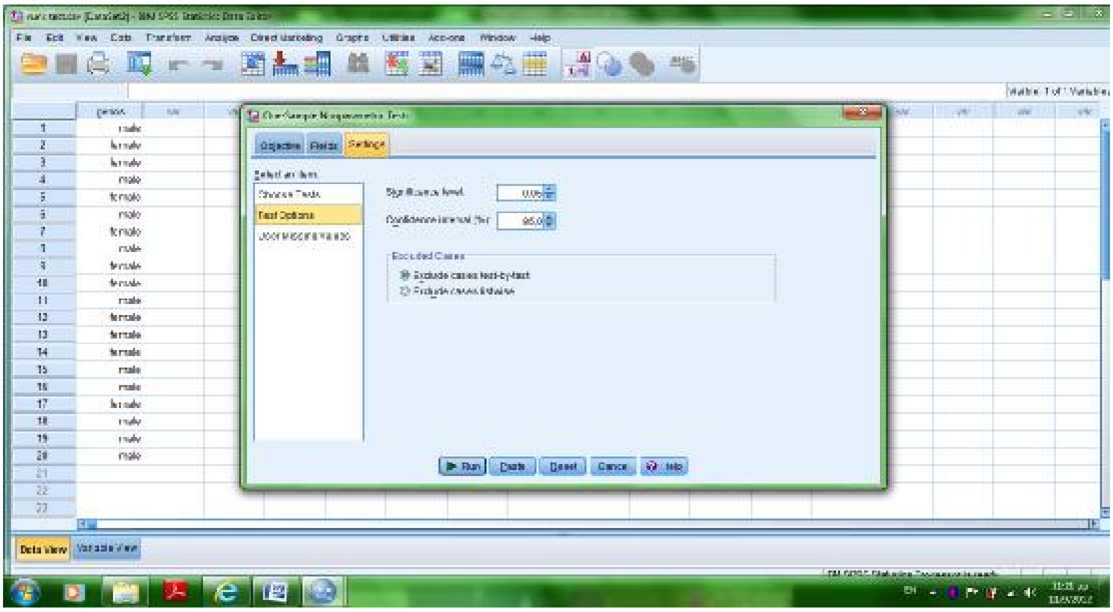
Εικόνα 17: Επιλογή του τεστ τυχαιότητας στο νέο παράθυρο διαλόγου

Πατάμε Options και θα εμφανιστεί το ακόλουθο παράθυρο, εκεί επιλέγουμε There are only 2 categories in the sample (male-female) και στο Define Cut Point for Continues fields επιλέγω το Cut Point με 1.



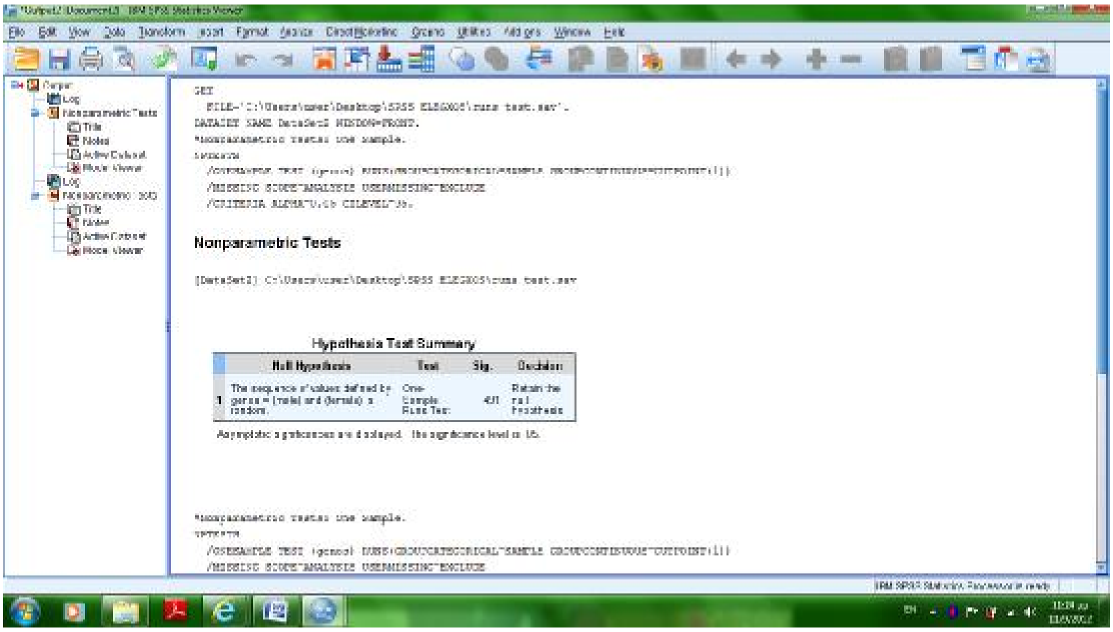
Εικόνα 18: Πίνακας επιλογών του τεστ τυχαιότητας

Πατάω OK και γυρνάω στο προηγούμενο παράθυρο, αν επιλέξω το Test Options, στο παράθυρο που ανοίγει επιλέγω το επίπεδο σημαντικότητας και το διάστημα εμπιστοσύνης.



Εικόνα 19: Επιλογές παραμέτρων στο τεστ τυχαιότητας

Πατάμε Run και εμφανίζονται τα αποτελέσματα, όπου εμφανίζεται η απάντηση πως θα αποδεχθούμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 και p-value=0,491.



Εικόνα 20: Απαντήσεις του τεστ τυχαιότητας στο PASW STATISTICS 18

2.3.2. Έλεγχος τυχαιότητας ενός δείγματος τιμών

Με τη μέθοδο των ροών μπορούμε να ελέγξουμε την τυχαιότητα δείγματος αριθμητικών τιμών. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι να βρούμε πρώτα τη διάμεσο των τιμών του δείγματος X_i, στη συνέχεια τις διαφορές $X_i - M$. Οι τιμές των X_i αντικαθίστανται από τα πρόσημα των διαφορών προσήμων $X_i - M$ και ελέγχουμε όπως και στην περίπτωση Ι την τυχαιότητα της σειράς εμφάνισης των προσήμων + και - . Οι τιμές που είναι ίσες με τη διάμεσο παραλείπονται. Βρίσκουμε τα R, n_1, n_2 και συνεχίζουμε τη διαδικασία όπως και στην περίπτωση Ι.

ΑΣΚΗΣΗ

Τα δεδομένα για τη θερμοκρασία 13 ημερών σε μια πόλη το μήνα Ιανουάριο στις 10.00 το πρωί δίνονται από τα δεδομένα

5,5 3,8 2,5 8,3 2,1 1,7 10 9,5 6,9 7,5 8,6. Να εξετάσετε αν η σειρά εμφάνισης των θερμοκρασιών είναι τυχαία σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05.

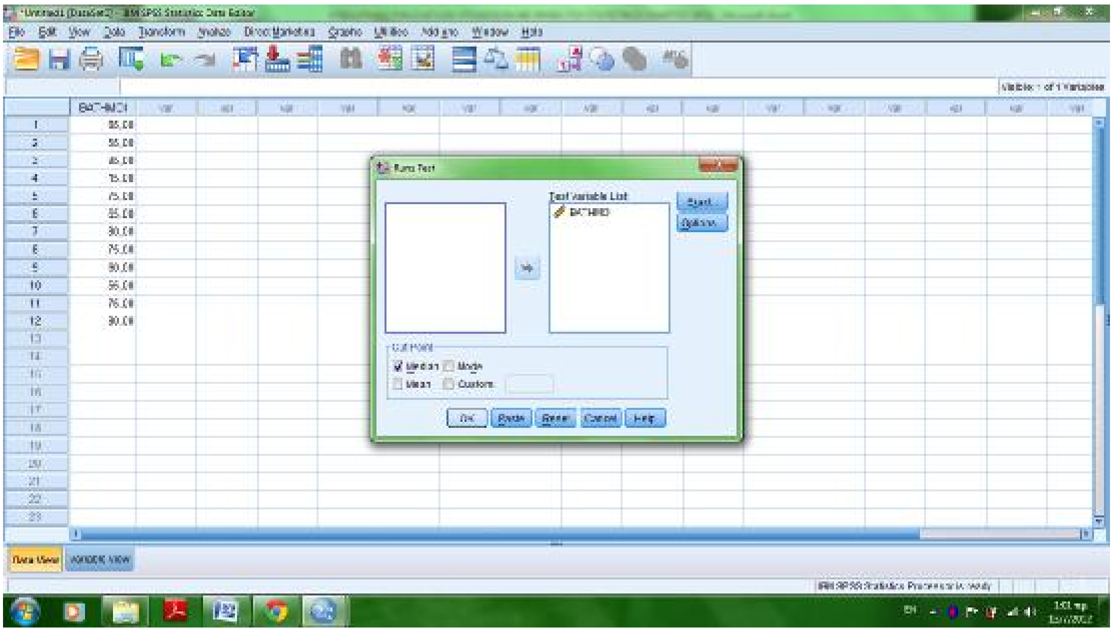
<u>ΛΥΣΗ</u>

Εξετάζουμε την μηδενική υπόθεση H_0: η σειρά εμφάνισης των θερμοκρασιών είναι τυχαία. Οι τιμές έχουν διάμεσο Μ= 6,9. Βρίσκουμε τις διαφορές των τιμών από τη διάμεσο και έχουμε, -1,4, -3,1, -4,4, 1,4, -4,8, -3,2, 3,1, 2,6, 0, 0,6, 1,7,. Στη συνέχεια ελέγχουμε την τυχαιότητα εμφάνισης των προσήμων χωρίς το 0. Η σειρά εμφάνισης των προσήμων είναι - - - / + / - - / + + + + . Παρατηρούμε ότι έχουμε R = 4 ροές με n_1=5 (+) και n_2= 5 (-). Τότε από τους πίνακες βρίσκουμε ότι κ=2 και λ= 10. Το R=4 βρίσκεται στο διάστημα (2, 10) και η μηδενική υπόθεση γίνεται δεκτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

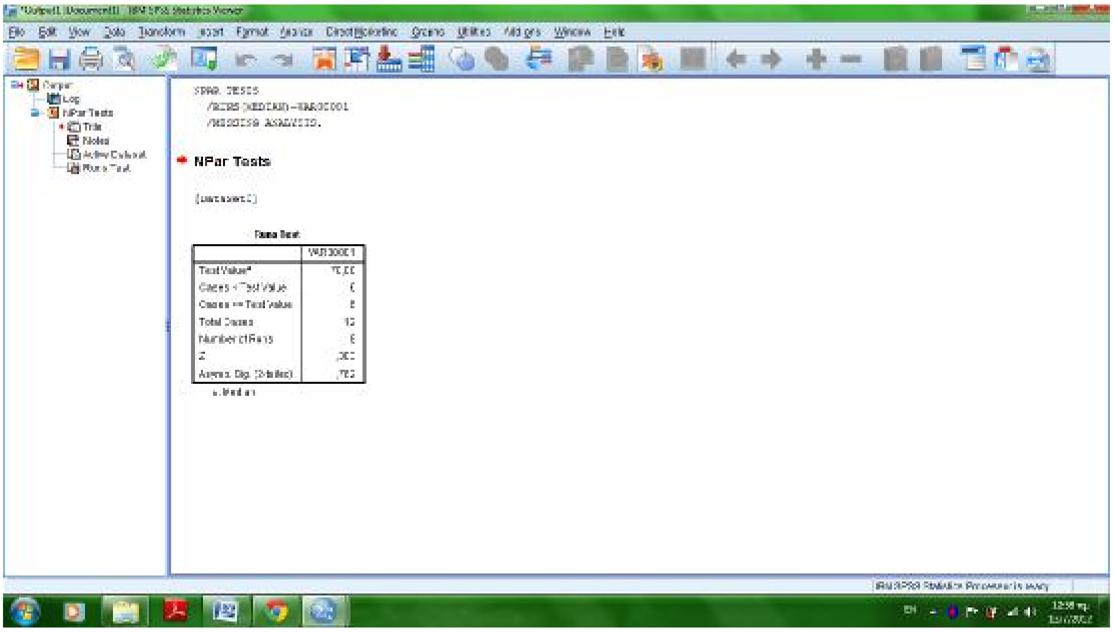
Ένας καθηγητής έχει τους βαθμούς των εβδομαδιαίων τεστ ενός μαθητή θεωρεί ότι η βάση για να θεωρηθεί ότι ο μαθητής έχει κατανοήσει το μάθημα είναι 70 μανάδες, οι επιδόσεις του μαθητή φαίνονται παρακάτω. Σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05 να ελέγξετε αν η σειρά επιδόσεων του μαθητή είναι τυχαία.

Εισάγω τα δεδομένα στο PASW STATISTICS 18 για να εξετάσω αν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0 η σειρά των επιδόσεων είναι τυχαία. Στη συνέχεια πατάω διαδοχικά Analyze-> Nonparametric Tests -> legacy dialogs->runs… όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα αλλά αυτή τη φορά επιλέγω το median (διάμεσος)



Εικόνα 21: Πίνακας επιλογών του τεστ για τη διάμεσο

Τα τελικά αποτελέσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα και επειδή p= 0,762 >0,05 αποδέχομαι την μηδενική υπόθεση.



Εικόνα 22: Απαντήσεις στο τεστ για τη διάμεσο του PASW STATISTICS 18

2.4 Έλεγχοι για τη διάμεσο ενός πληθυσμού

2.4.1 Προσημικός έλεγχος για τη διάμεσο ενός πληθυσμού (one sample sign test)

Ο προσημικός έλεγχος για έναν πληθυσμό τιμών Χ ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση H_0: $M=M_0$, χωρίς προϋποθέσεις για την κατανομή του πληθυσμού όπου Μ είναι η τιμή της διαμέσου. Ο προσημικός έλεγχος διενεργείται και στην περίπτωση που η μεταβλητή Χ είναι ποιοτική ιεραρχική και σε αυτήν την περίπτωση οι τιμές της Χ αντικαθίστανται από τις τάξεις των κατηγοριών της.

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι να επιλέξουμε ένα δείγμα n τιμών X_i και στη συνέχεια να βρούμε τα πρόσημα που θα προκύψουν από τις διαφορές $d_i = X_i - M_0$. Αν υπάρχουν τιμές στο δείγμα που είναι ίσες με τη διάμεσο η διαφορά τους θα είναι μηδέν και αυτές παραλείπονται. Το τελικό δείγμα μπορεί να έχει πλήθος $n^* < n$. Το επόμενο βήμα είναι να μετρήσουμε το πλήθος x των θετικών προσήμων +.

Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, τότε οι μισές τιμές του πληθυσμού θα είναι μεγαλύτερες από την M_0, δηλαδή η αναλογία θετικών και αρνητικών προσήμων του πληθυσμού θα είναι p=0,5. Τελικά παρατηρούμε ότι ο έλεγχος H_0: $M=M_0$, γίνεται έλεγχος H_0: p=0,5. Ο αριθμός των θετικών προσήμων (+) ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $b(n^*,0,5)$. Τότε θα έχω δύο περιπτώσεις

Α. Αν έχω μεγάλο πλήθος $n^* \geq 30$ τότε ισχύουν $n^* \cdot p_0 > 5$ και $n^* \cdot q_0 < 5$,αφού $p_0 = q_0 = 0,5$. Με αυτές τις συνθήκες και από το ΚΟΘ (κεντρικό οριακό θεώρημα) η Χ που ακολουθεί διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή. $X \sim (n^*,0,5)$ τότε $N(0,5n^*,0,25n^*)$ βάση αυτού η αναλογία του δείγματος θα είναι $p = X/n \rightarrow N(0,5n^*,0,25/n^*)$.

Τότε ο έλεγχος H_0: p=0,5 γίνεται παραμετρικός έλεγχος με στατιστική ελέγχου

$$A_0 = \frac{\hat{p}-0,5}{\sqrt{\frac{0,25}{n^*}}} \sim N(0,1) \quad \text{(τύπος 2,7)}$$

B. Αν έχω μικρό δείγμα $n^* < 30$ και αναφέρομαι σε δίπλευρο έλεγχο α=0,05 και με χρήση των πινάκων της $X \sim b(n^*, 0,5)$ προσδιορίζω την κάτω κρίσιμη τιμή κ του ελέγχου ως εξής

$0,1,\ldots k, k+1$ $\qquad\qquad n^* - k, \ldots, n^*$

\- - - - - - ________________ -------

$0,025 \qquad 0,95 \qquad\qquad 0,025$

$b(0, n^*, 0,5) + \ldots + b(k, n^*, 0,5) < 0,025$ *τύποι 2.8*

$b(0, n^*, 0,5) + \ldots + b(k, n^*, 0,5) + b(k+1, n^*, 0,5) > 0,025$

Άρα μεταξύ των κ και κ+1 βρίσκεται η κάτω κρίσιμη τιμή του ελέγχου. Απορρίπτουμε την H_0 ως προς την κάτω περιοχή απόρριψης στις τιμές 0,1,…,κ (αριστερά περιοχή του διαγράμματος) καθώς και ως προς την άνω περιοχή απόρριψης στις $n^*, n^*-1, .., n^*-k$ (δεξιά περιοχή του διαγράμματος). Όταν για τον αριθμό των θετικών προσήμων ισχύει ότι $x \le k$ ή $x \ge n^* - k$, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε α=0,05.

Αντίστοιχα αν έχω μονόπλευρο έλεγχο η περιοχή απόρριψης της H_0 προσδιορίζεται από το γράφημα

______________________ - - - - - - - - - -

0,95 0,05

ΑΣΚΗΣΗ

Μια εταιρεία Α διενεργεί έλεγχο ¨τυφλής δοκιμής¨ ανάμεσα στο δικό της προϊόν και της αντιπάλου εταιρείας Β. Θέλουμε να ελέγξουμε αν υπάρχει διαφορά προτίμησης ανάμεσα στα δύο προϊόντα. Στην έρευνα 20 ατόμων σημειώνουμε με (+) αν η προτίμηση είναι υπέρ του προϊόντος της Α και (-) αν είναι υπέρ της Β.

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής + + + + + - + - + + + - + - - + + + + +.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ο έλεγχος υποθέσεων που πρέπει να γίνει είναι H_0: δεν υπάρχει διαφορά προτίμησης ανάμεσα στα προϊόντα των δύο εταιρειών.

έναντι της εναλλακτικής H_1: υπάρχει διαφορά προτίμησης ανάμεσα στα προϊόντα των δύο εταιρειών.

Αν αληθεύει η μηδενική υπόθεση κάθε άτομο έχει 50% πιθανότητα να επιλέξει προϊόν της εταιρείας Α και 50% πιθανότητα της Β. Από το δείγμα υπάρχουν 15 άτομα που προτίμησαν την εταιρεία Α και 5 που προτίμησαν τη Β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

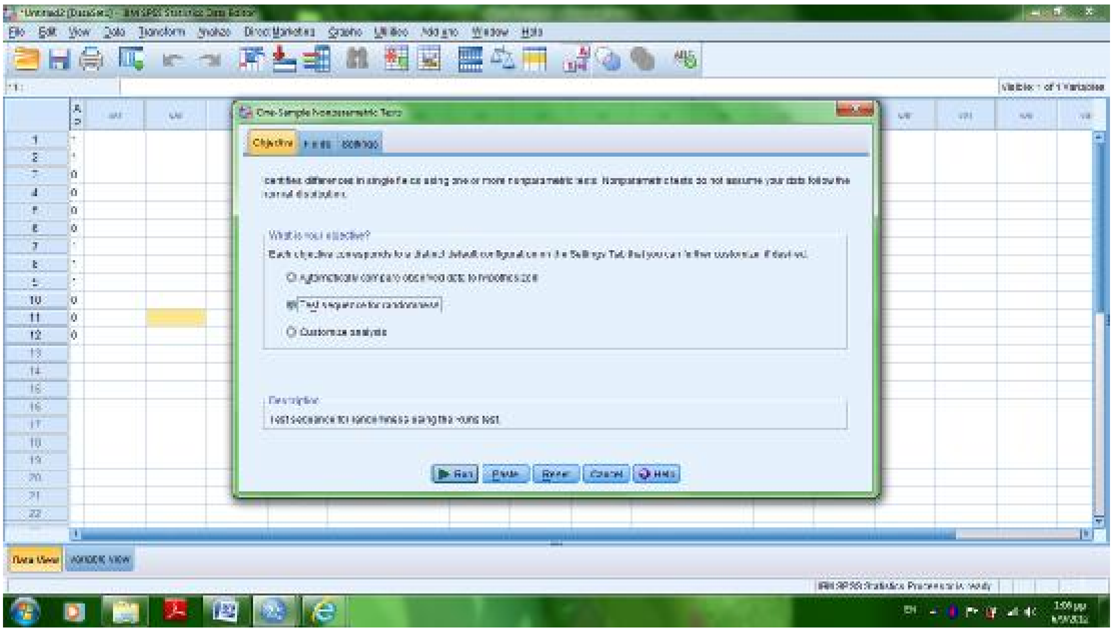
Σε μια έρευνα που διενεργείται ρωτάμε αν μετά την εφαρμογή σε 12 καταναλωτές ενός νέου προϊόντος, θα ήθελαν να αγοράσουν το προϊόν, αν ναι σημειώνουμε ένα +, αν όχι ένα - . Να ελέγξετε σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, αν υπάρχει τάση των καταναλωτών να αγοράσουν το προϊόν με όσους δεν θα το αγοράσουν. Τα αποτελέσματα του δείγματος είναι τα εξής

\+ + - - - - + + + - - -

Ο έλεγχος υποθέσεων που πρέπει να γίνει είναι H_0: δεν υπάρχει διαφορά προτίμησης στην τάση να αγοράσει κάποιος το προϊόν.

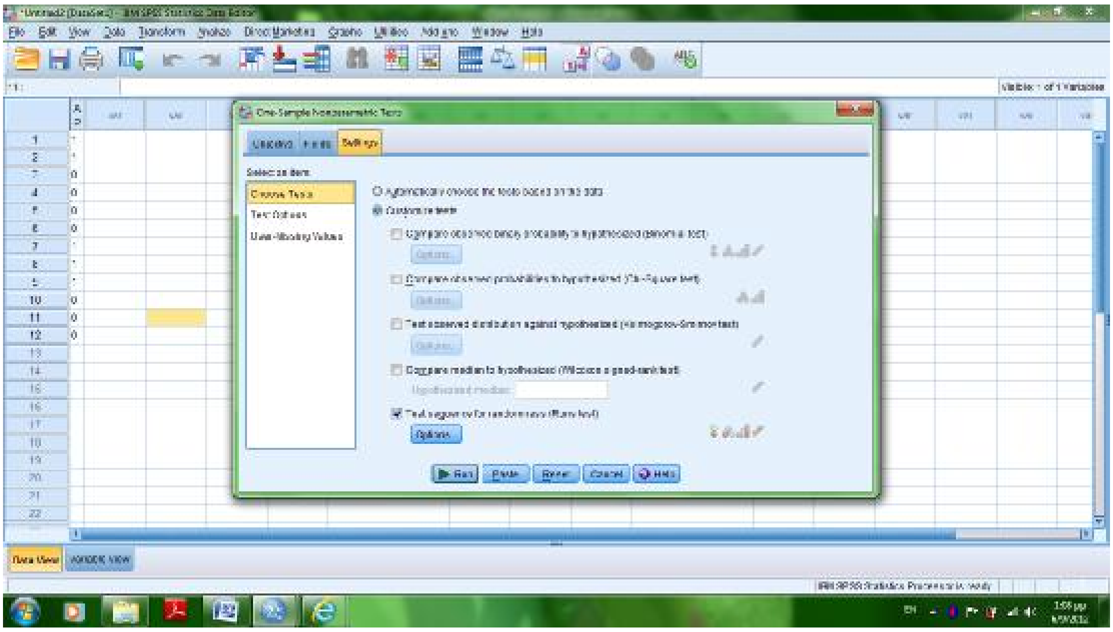
Καταγράφουμε τα αποτελέσματα της δειγματοληπτικής έρευνας σε μια στήλη του PASW STATISTICS 18 την οποία ονομάζουμε APANTHSEIS. Στη συνέχεια από το μενού επιλέγουμε Analyze->Nonparametric->One sample… και ανοίγει ένα νέο παράθυρο διαλόγου.

Στην ερώτηση what is your objective, επιλέγουμε την απάντηση test sequence for randomness.



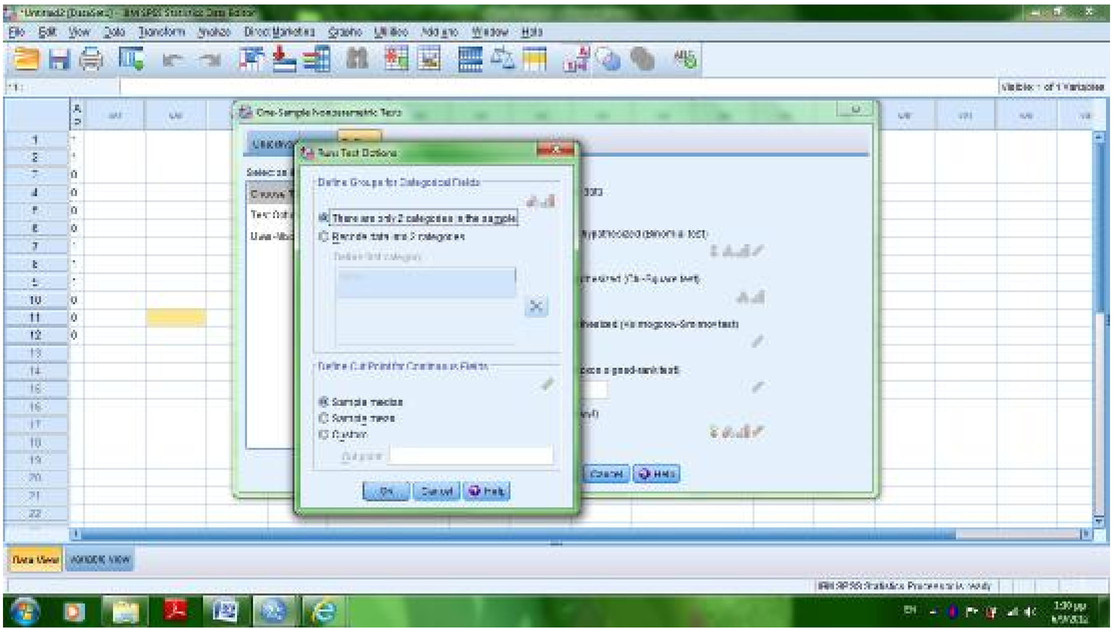
Εικόνα 23: Επιλογή του τεστ τυχαιότητας

Πατάμε την επιλογή Settings, επιλέγουμε το test sequence for randomness.



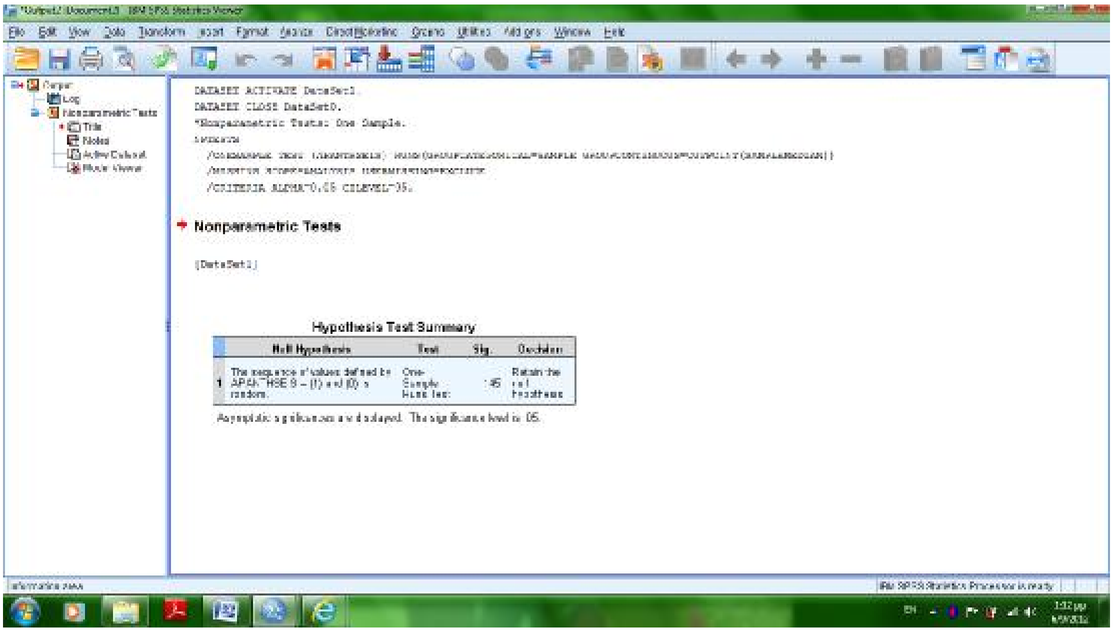
Εικόνα 24: Επιλογή του τεστ τυχαιότητας στο νέο παράθυρο διαλόγου

Πατάμε το Options και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου. Στο define cut point for continuous fields επιλέγουμε Sample median, γιατί έχουμε τεστ για τη διάμεσο του δείγματος.



Εικόνα 25: Επιλογή παραμέτρων του τεστ τυχαιότητας (2 κατηγορίες για τη διάμεσο)

Πατάμε OK και στο επόμενο παράθυρο Run, εμφανίζονται τα εξής αποτελέσματα.



Εικόνα 26: Απαντήσεις για το τεστ τυχαιότητας στο PASW STATISTICS 18

Το τεστ, μας υποδεικνύει ότι σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 θα αποδεχθούμε την μηδενική υπόθεση.

2.4.2 Έλεγχος Wilcoxon για τη διάμεσο ενός πληθυσμού (one sample Wilcoxon rank-sum test)

Ο έλεγχος Wilcoxon ελέγχει την H_0: $M=M_0$, όπως και ο προσημικός έλεγχος, αλλά ο Wilcoxon υπερτερεί έναντι του προσημικού στην περίπτωση που οι τιμές παρουσιάζουν περιορισμένη ασυμμετρία, αυτό συμβαίνει γιατί ενώ στον προσημικό σημειώνουμε μόνο τα πρόσημα των διαφορών $d_i=X_i-M_0$, σε αυτόν τον έλεγχο λαμβάνουμε υπόψη και το μέγεθος αυτών των διαφορών. Επειδή ισχύει αυτό ο έλεγχος Wilcoxon εφαρμόζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές.

Η διαδικασία που ακολουθείται στη μέθοδο Wilcoxon για να απορρίψουμε ή να αποδεχθούμε την μηδενική υπόθεση είναι πρώτα να βρούμε τις διαφορές $d_i = X_i - M_0$ για τις n δειγματικές τιμές X_i και σημειώνουμε τα πρόσημά τους. Μετά βρίσκουμε τις απόλυτες τιμές των διαφορών d_i, $|d_i| = |X_i - M_0|$, τις διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά και τις βαθμολογούμε με τάξεις 1,2,3,… Αν δύο ή περισσότερες τιμές $|d_i|$είναι ίσες, βαθμολογούνται με τάξη ίση με τον μέσο όρο των τάξεων που θα είχαν αν παρουσίαζαν έστω και ελάχιστη διαφορά. Όπως και στον προσημικό έλεγχο οι τιμές $|d_i|=0$ παραλείπονται και το δείγμα του μεγέθους γίνεται $n^* < n$.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε το άθροισμα των τάξεων που προέρχονται από θετικές d_i και το συμβολίζουμε με $|d|_+$, καθώς και το αντίστοιχο των αρνητικών d_i, που το συμβολίζουμε $|d|_-$.Το μικρότερο από τα δύο αθροίσματα λέγεται στατιστική Τ του Wilcoxon και έχει

$$m_T = \frac{n(n+1)}{4} \quad \text{και} \quad s_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \qquad \textit{τύποι 2,9}$$

Α. Αν το δείγμα $n<50$, βρίσκουμε τη δειγματική τιμή T_0, μετά πάμε σε πίνακες και βρίσκουμε την τιμή $T_{ΠΙΝ} = D_{n^*,a}$ για το n^* και για το α της εφαρμογής. Αν η τιμή $T_0 = T_{ΠΙΝ}$, απορρίπτουμε την H_0, ανάλογα και με τον έλεγχο που έχουμε μονόπλευρο ή δίπλευρο.

Οι τιμές του πίνακα για μονόπλευρο έλεγχο ισχύουν και για τα δύο είδη μονόπλευρων ελέγχων. Αυτό συμβαίνει γιατί αν απορριφθεί η H_0: M= M_0 υπέρ της H_0: M > M_0, πρέπει πολύ περισσότερες τιμές της X να είναι μεγαλύτερες της M_0, οπότε $|d|_+ > |d|_-$ άρα $T = |d|_-$. Για να απορρίψουμε την H_0: M= M_0 υπέρ της H_0: M < M_0, πρέπει πολύ περισσότερες τιμές της X να είναι μικρότερες της M_0, οπότε $|d|_- > |d|_+$ άρα $T = |d|_+$. Άρα σε κάθε περίπτωση αν $T = min\{|d|_-, |d|_+\} < T_{\Pi I N}$, απορρίπτεται η H_0.

B. Αν το δείγμα $n > 50$, και ισχύει η μηδενική υπόθεση προσεγγίζουμε την T με την κανονική κατανομή $T \sim N(m_T, s_T^2)$ τότε ο έλεγχος μονόπλευρος ή δίπλευρος, είναι ο γνωστός παραμετρικός με στατιστική ελέγχου

$$A_0 = \frac{T - m_T}{s_T} \sim N(0,1) \qquad \textit{τύπος 2.10}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα δέκα μετοχικών κεφαλαίων σε ένα χρηματιστήριο που κατανέμονται συμμετρικά και βλέπουμε τα αποτελέσματα

+8,4, +2,1, -0,8, +3,7, +12,5, -9, +4,5, -6,5, +2,3, -4,6

Να ελεγχθεί σε α=0,05 αν η διάμεσος είναι 3.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η μηδενική υπόθεση είναι H_0: M=3 έναντι της εναλλακτικής H_1: M≠3

ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΕΙΣ ΩΣ ΠΡΟΣ d

X_i	$d_i = 3 - X_i$	$\|d_i\|$	Τάξη των $\|d_i\|$	$\|d\|_+$	$\|d\|_-$
+8,4	-5,4	5,4	4		4
+2,1	+0,9	0,9	3	3	
-0,8	+3,8	3,8	5	5	
+3,7	-0,7	0,7	1,5		1,5
+12,5	-9,5	9,5	7,5		7,5

-9	+12	12	9	9	
+4,5	-1,5	1,5	4		4
-6,5	+9,5	9,5	7,5	7,5	
+2,3	+0,7	0,7	1,5	1,5	
-4,6	+7,6	7,6	6	6	
ΣΥΝΟΛΟ				32	17

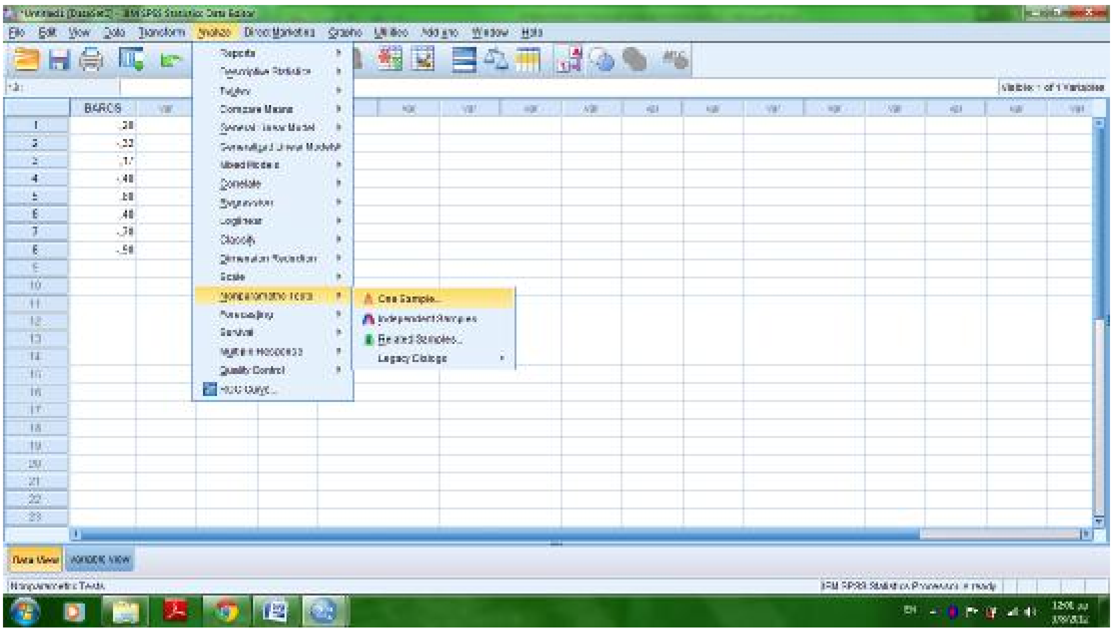
$T_0 = min\{|d|_-, |d|_+\} = \min\{32,17\} = 17$. Για δίπλευρο έλεγχο σε α= 0,05 με n=10 ο πίνακας δίνει $T_{ΠΙΝ} = 8$. Τότε $T_0 = 17 > 8 = T_{ΠΙΝ}$ άρα αποδεχόμαστε την H_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Το βάρος μιας συσκευασίας ενός προϊόντος είναι 1 κιλό. Σε δειγματοληπτικές μετρήσεις που έγιναν λάβαμε κάποιες αποκλίσεις από την τιμή του 1 κιλού οι οποίες καταγράφηκαν ως εξής +0,20, -0,32, 0,17, -0,40, 0,8, 0,4, -0,70, -0,9. Θέλουμε να εξετάσουμε αν η διάμεσος είναι το 1 κιλό.

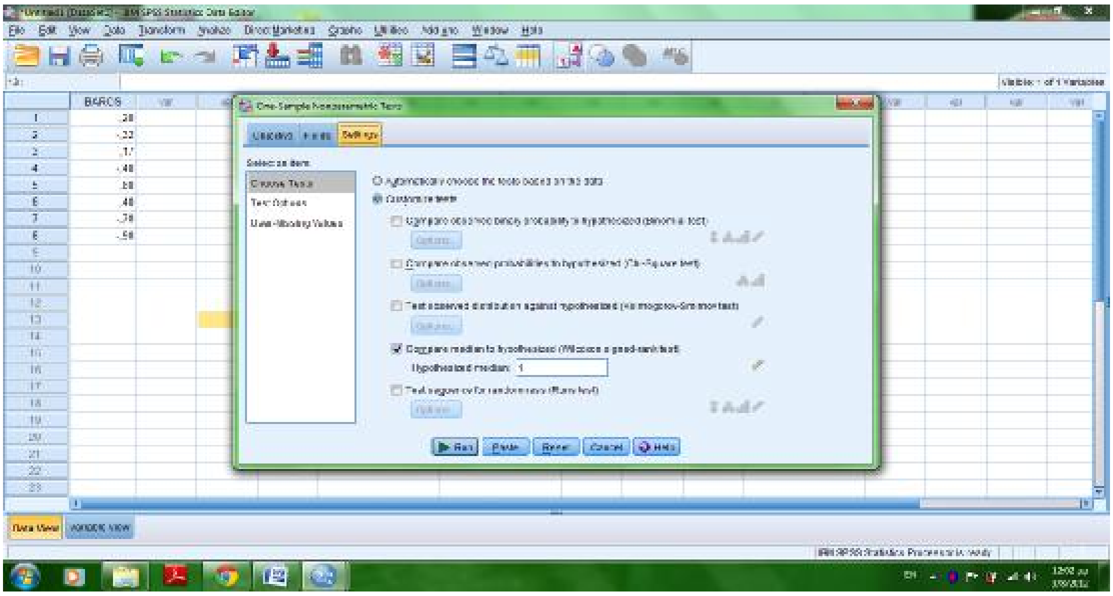
Θέλουμε να εξετάσουμε αν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0: η διάμεσος του δείγματος είναι 1 κιλό, έναντι της εναλλακτικής H_1: η διάμεσος του δείγματος δεν είναι 1 κιλό.

Γράφουμε σε μια στήλη τα δεδομένα, την οποία ονομάζουμε BAROS. Επιλέγουμε Analyze-> Nonparametric Tests-> One Sample…



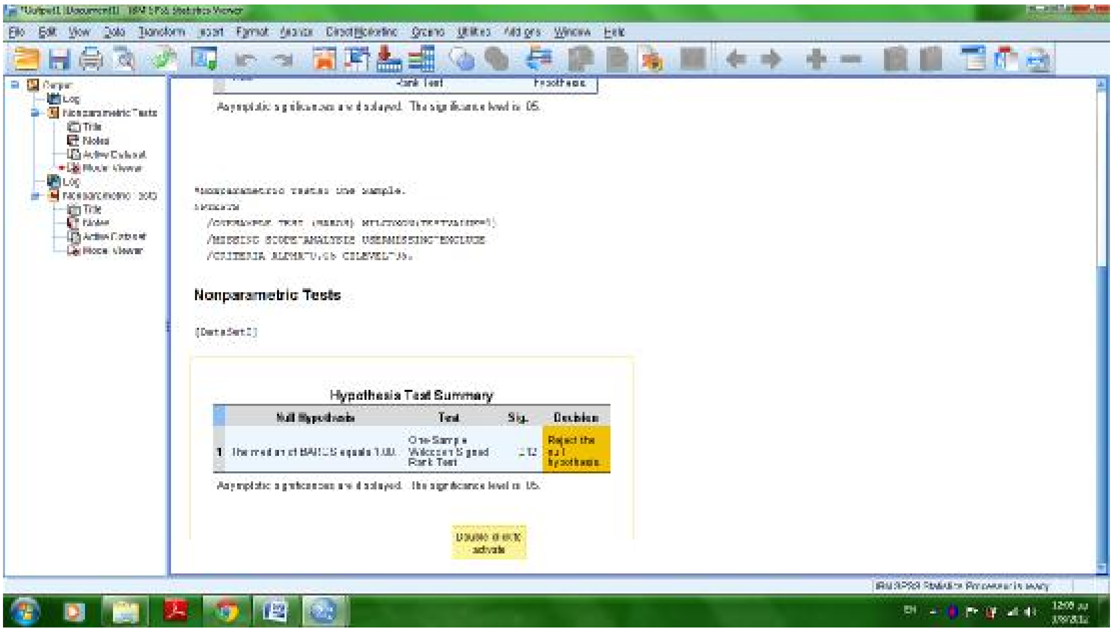
Εικόνα 27: Γραμμή για την επιλογή test ενός δείγματος μη παραμετρικού ελέγχου

Ανοίγει ένα νέο παράθυρο διαλόγου, επιλέγω Settings και στο Customize Tests κλικάρω στο Customize median to Hypothesized(Wilcoxon signed test) και γράφω στο Hypothesized median-> 1.



Εικόνα 28: Επιλογή του Wilcoxon τεστ στο παράθυρο διαλόγου

Πατάμε Run και αναγράφονται τα αποτελέσματα.



Εικόνα 29: Απαντήσεις του Wilcoxon τεστ

Παρατηρούμε ότι η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται με το Wilcoxon signed runs test σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 και η p-τιμή είναι 0,012.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Οι αποπληθωρισμένες ετήσιες αποδοχές των μετοχικών κεφαλαίων σε ένα χρηματιστήριο κατανέμονται συμμετρικά. Ένα τυχαίο δείγμα τεσσάρων αποπληθωρισμένων ετήσιων αποδόσεων αποτελείται από τις τιμές +8,4, -4,3, -0,8, +12,5,-7,6. Σε α=0,05, να ελέγξετε αν η διάμεσος απόδοση είναι μεγαλύτερη από 3.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Οι υποθέσεις των οποίων ο έλεγχος θα διενεργηθεί είναι H_0: M=3 έναντι της H_1:M>3. Για να υπολογίσουμε την τιμή της στατιστικής που θα χρησιμοποιηθεί ως ελεγχοσυνάρτηση χρησιμοποιούμε τον πίνακα με τους υπολογισμούς που κάνουμε

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΟΧΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΕΙΣ ΩΣ ΠΡΟΣ d

X_i	$d_i = 3 - X_i$	$\lvert d_i \rvert$	Τάξη των $\lvert d_i \rvert$	$\lvert d \rvert_+$	$\lvert d \rvert_+$
+8,4	-5,4	5,4	2		2
-4,3	+7,3	7,3	3	3	
-0,8	+3,8	3,8	1	1	
+12,5	-9,5	9,5	4		4
-7,6	+10,6	10,6	5	5	
ΣΥΝΟΛΟ				9	6

$T_0 = min\{\lvert d \rvert_-, \lvert d \rvert_+\} = \min\{9,6\} = 6$. Για μονόπλευρο έλεγχο σε α= 0,05 με n=5 ο πίνακας δίνει $T_{\Pi\Pi N} = 1$.

Τότε $T_0 = 6 > T_{\Pi\Pi N} = 1$ άρα αποδεχόμαστε την H_0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΔΥΟ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερόμαστε στους ελέγχους υποθέσεων για δύο δείγματα, έχουμε χωρίσει σε δύο κατηγορίες αυτούς τους ελέγχους. Οι έλεγχοι όπου τα δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και σε αυτούς που τα δείγματα είναι συσχετισμένα.

I. ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.1.1 Ο έλεγχος X^2

Έστω ότι έχουμε στον πληθυσμό δύο ποιοτικές είτε ιεραρχικές είτε κατηγορικές μεταβλητές. Η μια είναι η X με r κατηγορίες $X_1, X_2, \ldots, X_r$ και η άλλη είναι η Y με κ κατηγορίες $Y_1, Y_2, \ldots, Y_κ$. Ακόμα μπορεί να έχουμε μια ποιοτική και μια ποσοτική μεταβλητή. Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, θέλουμε να δούμε αν είναι ανεξάρτητες οι μεταβλητές μισθός και μόρφωση ή φύλο και χρώμα ματιών σε ένα πληθυσμό.

Παίρνουμε από τον πληθυσμό ένα δείγμα n ατόμων και φτιάχνουμε έναν πίνακα, ο οποίος ονομάζεται πίνακας συνάφειας ή εξάρτησης (contingency/ crosstabulation table) των μεταβλητών X και Y. Σε κάθε κελί του πίνακα γράφουμε το πλήθος n_{ij} ο οποίος περιέχει τα άτομα που ανήκουν στην i κατηγορία ως προς το X και στην j κατηγορία ως προς το Y. Στην τελευταία γραμμή και στήλη γράφουμε τις περιθωριακές συχνότητες, που είναι τα αθροίσματα των γραμμών και στηλών αντίστοιχα.

$n_{i0} = \sum_{i=1}^{k} X$ (οριζόντια αθροίσματα) και $n_{0j} = \sum_{j=1}^{r} Y$ (κατακόρυφα αθροίσματα)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΑΦΕΙΑΣ Ή ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ

X | Y	Y_1	….	Y_k	$n_{ι0}$
X_1	n_{11}	…	$n_{1κ}$	n_{10}
X_2	n_{21}	…	$n_{2κ}$	n_{20}
…	…	…	…	…
X_r	n_{r1}	…	$n_{rκ}$	n_{ro}
n_{0j}	n_{01}	…	$n_{oκ}$	N

Στην περίπτωση που είχαμε μια ποσοτική μεταβλητής, έστω X, αντί για κατηγορίες X_i, θα έχει υποδιαστήματα ή τιμές της X που έχουν ρόλο κατηγοριών που μπορούν να ιεραρχηθούν.

Εμείς θέλουμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση H_0: οι X και Y είναι ανεξάρτητες, για να ισχύει η H_0, αρκεί $p_{ij} = p_{i0} \cdot p_{oj}$. Αν $θ_{ij}$ είναι οι αντίστοιχες από κοινού συχνότητες, οι οποίες ονομάζονται θεωρητικές συχνότητες ισχύουν τα εξής

$p_{ij} = p_{i0} \cdot p_{oj}$ η οποία είναι ίση με $\frac{q_{ij}}{n} = \frac{n_{i0}}{n} \cdot \frac{n_{0j}}{n}$ ή $q_{ij} = \frac{n_{i0} \cdot n_{0j}}{n}$, όπου i= 1, 2,…, r και j= 1,2, …, κ.

Αποδεικνύεται ότι αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, ισχύει δηλαδή η μηδενική υπόθεση η

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - q_{ij})^2}{q_{ij}} \sim X^2_{(r-1)(k-1)} \quad \textit{τύπος 3.1}$$

Οι βαθμοί ελευθερίας είναι (r-1)(κ-1) αφού σε κάθε στήλη μπαίνουν r-1 ανεξάρτητες θ_{ij} και σε κάθε γραμμή κ-1 ανεξάρτητες θ_{ij}.

Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση θα είναι $n_{ij} \approx \theta_{ij}$, και οι διαφορές $n_{ij}-\theta_{ij}$ θα είναι μικρές. Τότε η τιμή της X_0^2 της στατιστικής X^2 θα είναι μικρή. Αν οι X και Y είναι εξαρτημένες οι διαφορές $n_{ij}-\theta_{ij}$ θα είναι μεγάλες και τότε θα είναι μεγάλη και η τιμή της X_0^2.

Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν $X_0^2 > X^2_{(r-1)(k-1),a}$ σε α =0,05. Για να διευκολυνθούμε μπορούμε να γράφουμε τις θ_{ij} σε παρενθέσεις δίπλα από τις n_{ij} όπως στον επόμενο πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΑΦΕΙΑΣ Ή ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ

X | Y	Y_1	….	Y_k	$n_{\iota 0}$
X_1	n_{11} (θ_{11})	…	$n_{1\kappa}$ ($\theta_{1\kappa}$)	n_{10}
X_2	n_{21} (θ_{21})	…	$n_{2\kappa}$ ($\theta_{2\kappa}$)	n_{20}
…	…	…	…	…
X_r	n_{r1} (θ_{r1})	…	$n_{r\kappa}$ ($\theta_{r\kappa}$)	n_{ro}
n_{0j}	n_{01}	…	$n_{o\kappa}$	n

Παρατήρηση 1

Μια πιο εύχρηστη μορφή της στατιστικής X^2 στην οποία δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τις θεωρητικές τιμές θ_{ij} είναι η

$$X^2 = n \cdot \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_{ij}^{\;2}}{n_{i0}\cdot n_{0j}} - 1\right) \sim X^2_{(r-1)(k-1)} \quad \textit{τύπος 3.2}$$

Παρατήρηση 2

Στην περίπτωση που καθεμία από τις δύο κατηγορίες X και Y ο πίνακας συνάφειας είναι της μορφής 2x2

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΑΦΕΙΑΣ ΓΙΑ 2x2 (2 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ)

X | Y	Y_1	Y_2	
X_1	Α	Β	α+β
X_2	Γ	Δ	γ+δ

	α+γ	β+δ	

Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται τετράπτυχος πίνακας και αν επιπλέον ισχύει η μηδενική υπόθεση, η στατιστική X^2 είναι

$$X^2 = n \cdot \frac{(ad - bg)^2}{(a+b)(a+g)(d+b)(d+g)} \sim X_1^2 \quad \text{γιατί r=2 και κ=2}$$

Η σχέση προκύπτει μετά από πράξεις αφού επιπλέον επειδή αν ισχύει η μηδενική υπόθεση τότε ισχύουν οι επόμενες σχέσεις $q_{11} = \frac{(a+b)(a+g)}{n}, q_{12} = \frac{(a+b)(b+d)}{n}, q_{21} = \frac{(g+d)(a+g)}{n}$ και $q_{22} = \frac{(g+d)(b+d)}{n}$.

Η στατιστική X^2 είναι διακριτή και η X_1^2 είναι συνεχής οι X και Y έχουν δύο κατηγορίες και η X^2 διορθώνεται κατά Yates ως

$$X^2 = n \cdot \frac{(|ad - bg| - \frac{n}{2})^2}{(a+b)(a+g)(d+b)(d+g)} \sim X_1^2 \text{ τύπος 3.3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια εταιρεία επιθυμεί να εξετάσει τον τρόπο μετακίνησης των υπαλλήλων της στα γραφεία της εταιρείας. Δίνεται ο πίνακας συνάφειας δείγματος 250 εργαζομένων ως προς τις ποιοτικές μεταβλητές X: ο τρόπος μετακίνησης των υπαλλήλων και Y: ηλικιακή ομάδα καθώς και οι περιθωριακές συχνότητες n_{i0} της X και n_{0j} της Y. Να ελέγξετε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες με πιθανότητα 0,95.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗΝ ΗΛΙΚΙΑ

X	Y	Άνω των 40 ετών	Κάτω των 40 ετών	n_{io}
Μ.Μ.Μ.		24 (34,56)	40 (29,44)	64
ΤΑΞΙ		12 (64,26)	7 (8,74)	19
Ι.Χ.		67 (29,44)	52 (54,74)	119
ΠΕΖΟΙ		32 (54,74)	16 (22,08)	48
n_{0j}		135	115	250

ΛΥΣΗ

Ο έλεγχος που θέλω να διενεργήσω είναι η μηδενική υπόθεση H_0: οι μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους έναντι της εναλλακτικής H_1: οι X και Y έχουν σχέση εξάρτησης.

Βρίσκουμε τις θεωρητικές από κοινού πιθανότητες θ_{ij} των κελιών

$$q_{11} = \frac{n_{10} \cdot n_{01}}{n} = \frac{64 \cdot 135}{250} = 34,56 \qquad q_{21} = \frac{n_{20} \cdot n_{01}}{n} = \frac{19 \cdot 135}{250} = 10,26$$

$$q_{31} = \frac{n_{30} \cdot n_{01}}{n} = \frac{119 \cdot 135}{250} = 64,26 \qquad q_{41} = \frac{n_{40} \cdot n_{01}}{n} = \frac{48 \cdot 135}{250} = 25,92$$

$$q_{12} = \frac{n_{10} \cdot n_{02}}{n} = \frac{64 \cdot 115}{250} = 29,44 \qquad q_{22} = \frac{n_{20} \cdot n_{03}}{n} = \frac{19 \cdot 115}{250} = 8,74$$

$$q_{23} = \frac{n_{20} \cdot n_{03}}{n} = \frac{119 \cdot 115}{250} = 54,74 \qquad q_{24} = \frac{n_{20} \cdot n_{04}}{n} = \frac{48 \cdot 115}{250} = 22,08$$

Οι θεωρητικές πιθανότητες γράφονται σε παρενθέσεις δίπλα από τα αντίστοιχα n_{ij}. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την τιμή της παράστασης

$$\left|F[p_1(x_i)] - F[p_2(x_i)]\right| \quad D_{0,05} = 0,6667 \quad \frac{(40-29,44)^2}{29,44} + \frac{(7-8,74)^2}{8,74} + \frac{(52-54,74)^2}{54,74} + \frac{(16-22,08)^2}{22,08}$$

$$= 3,227 + 0,295 + 0,117 + 1,426 + 3,788 + 0,346 + 0,137 + 1,674 = 11,010$$

Για να αποδεχθώ ή όχι την μηδενική υπόθεση βρίσκω από πίνακες ότι $X^2_{3,0,05} = 7,815$. Συγκρίνω το 11,010 > $X^2_{3,0,05} = 7,815$ και απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση άρα οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

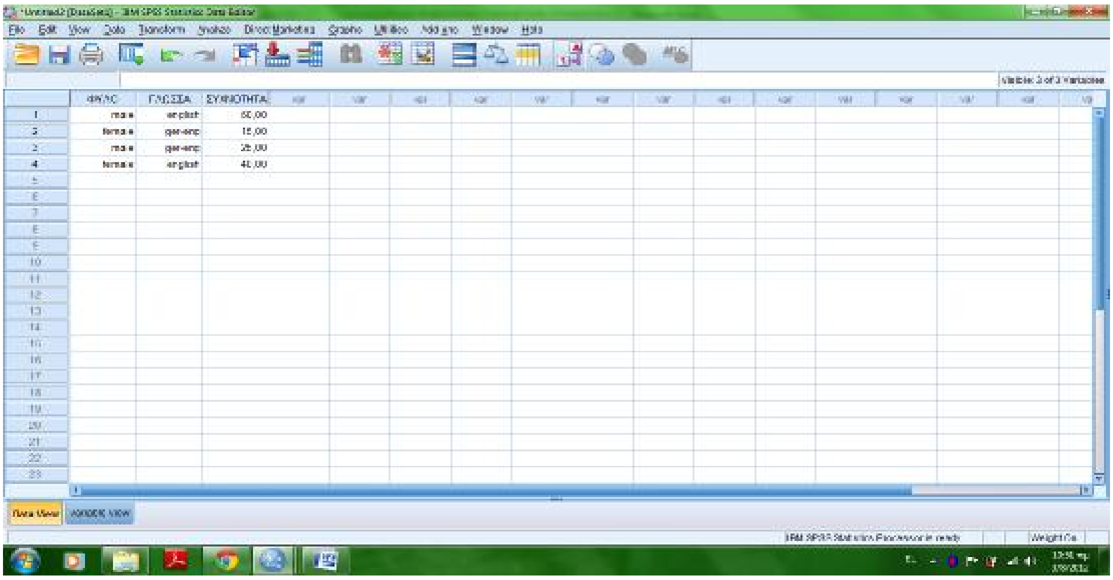
Τα στελέχη μιας εταιρείας είναι απαραίτητο να γνωρίζουν τουλάχιστον μια ξένη γλώσσα. Από αυτούς κάποιοι γνωρίζουν μόνο αγγλικά και κάποιοι αγγλικά και γερμανικά. Τα δεδομένα δίνονται στον επόμενο πίνακα, αναλόγως με το φύλο. Η εταιρεία θέλει να εξετάσει αν οι μεταβλητές X: ΦΥΛΟ και Y: ΓΛΩΣΣΑ είναι ανεξάρτητες με πιθανότητα 0,95.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΞΕΝΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΦΥΛΟ

X	Y	ΑΓΓΛΙΚΑ	ΑΓΓΛΙΚΑ&ΓΕΡΜΑΝΙΚΑ	ΣΥΝΟΛΟ
ΑΝΤΡΑΣ		50	25	75
ΓΥΝΑΙΚΑ		40	15	55
ΣΥΝΟΛΟ		90	40	130

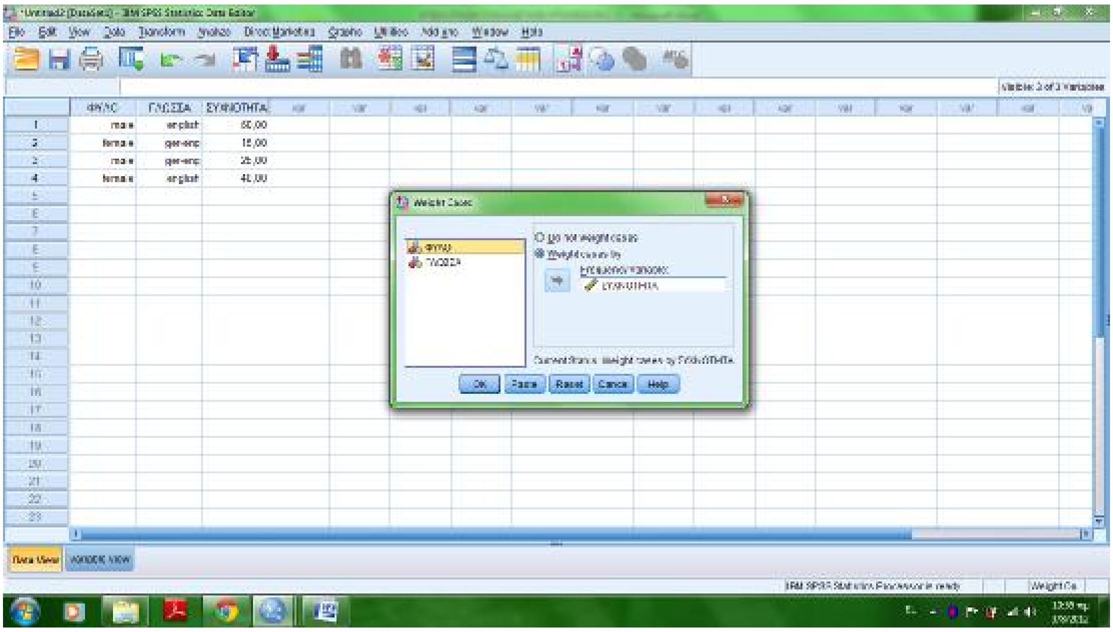
Ο έλεγχος που πρέπει να διενεργήσω είναι να εξετάσω αν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0:οι μεταβλητές Χ και Υ είναι ανεξάρτητες.

Πρώτα εισάγουμε τα δεδομένα στο στατιστικό πρόγραμμα. Έχω τρεις στήλες η μια είναι το φύλο, η άλλη η γλώσσα και η τρίτη η συχνότητα.. Για αυτό στην πρώτη στήλη βάζουμε Label ΜΙΣΘΟΣ και στην δεύτερη ΠΟΛΗ. Οι μεταβλητές της στήλης ΦΥΛΟ είναι καταχωρημένες ως numeric με αντιστοιχία 1->male και 2->female (η διαδικασία γίνεται από το Variable View) όπως συμβαίνει και με τη γλώσσα 1->english και 2->ger-eng.



Εικόνα 30: Εισαγωγή των δεδομένων στο PASW STATISTICS 18

Για να αναγνωρίσει το πρόγραμμα ότι πρόκειται για συχνότητες, χρησιμοποιώ το μενού του PASW STATISTICS 18 Data-> Weight cases και εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου, επιλέγω weight cases by και ως Frequency variables την ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ και πατάω ΟΚ.

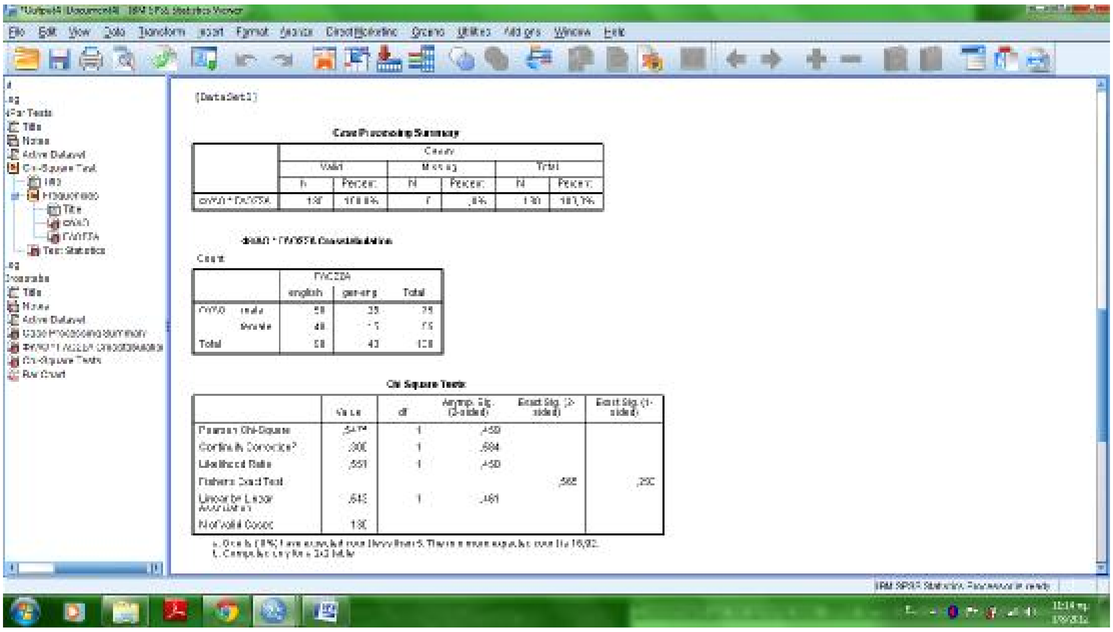


Εικόνα 31: Επιλογή για την αναγνώριση των δεδομένων ως συχνότητες

Αφού τελειώσω με τη διαδικασία περνάω στην επίλυση. Από το μενού επιλέγω Analyze->Descriptive Statistics->Crosstabs και θα εμφανιστεί νέο παράθυρο διαλόγου.

Εικόνα 32: Πίνακες επιλογής του X^2 test και των παραμέτρων του

Εισάγω Rows->ΦΥΛΟ και Columns->ΓΛΩΣΣΑ επιλέγω το Display clustered bar charts, πατάω Statistics και επιλέγω Chi-square μετά Continue για να κλείσει το παράθυρο διαλόγου στο παράθυρο που μένει πατάω OK για να εμφανιστούν τα αποτελέσματα.



Εικόνα 33: Απαντήσεις του X^2 τεστ

\

Ερμηνεία αποτελεσμάτων

Ο πρώτος πίνακας δίνει πληροφορίες για το μέγεθος του δείγματος, ο δεύτερος είναι ο αρχικός μας πίνακας. Ο τρίτος πίνακας δίνει διάφορες πληροφορίες παρατηρούμε ότι X^2=0,547 και η p-τιμή είναι 0,459, επομένως σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 αποδέχομαι την μηδενική υπόθεση, οι μεταβλητές ΦΥΛΟ και ΓΛΩΣΣΑ είναι ανεξάρτητες.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Από δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα 20 ανδρών και 20 γυναικών ζητήθηκε να δοκιμάσουν μια οδοντόκρεμα και να συγκρίνουν την γεύση της με την γεύση αυτής που συνήθως χρησιμοποιούσαν. Οι απαντήσεις τους περιλαμβάνονται στον πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΓΕΥΣΗ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΔΟΚΙΜΗ ΟΔΟΝΤΟΚΡΕΜΑΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΦΥΛΟ

ΓΕΥΣΗ				
	Καμία διαφορά	χειρότερη	καλύτερη	ΣΥΝΟΛΟ

Άνδρες	4 (2,5)	7(6,5)	9(11)	20
Γυναίκες	1(2,5)	6(6,5)	13(11)	20
ΣΥΝΟΛΟ	5	13	22	40

Να εξετάσετε αν τα αποτελέσματα αυτά σε α=0,05, δείχνουν στατιστικά σημαντική διαφορά στις προτιμήσεις ανδρών και γυναικών.

ΛΥΣΗ

Η μηδενική υπόθεση που θα εξετάσουμε είναι η H_0: οι προτιμήσεις στα δύο φύλα δεν διαφέρουν.

Βρίσκουμε τις θεωρητικές από κοινού πιθανότητες, τις οποίες έχουμε γράψει στον πίνακα εντός παρενθέσεων.

$$q_{11} = \frac{n_{10}\cdot n_{01}}{n} = \frac{20\cdot 5}{40} = 2,5 \qquad q_{21} = \frac{n_{20}\cdot n_{01}}{n} = \frac{20\cdot 13}{40} = 6,5 \qquad q_{31} = \frac{n_{30}\cdot n_{01}}{n} = \frac{20\cdot 22}{40} = 11$$

$$q_{12} = \frac{n_{10}\cdot n_{02}}{n} = \frac{20\cdot 5}{40} = 1 \qquad q_{22} = \frac{n_{20}\cdot n_{03}}{n} = \frac{20\cdot 13}{40} = 6,5$$

$$q_{23} = \frac{n_{20}\cdot n_{03}}{n} = \frac{20\cdot 22}{40} = 11$$

Βρίσκουμε την στατιστική για τον έλεγχό μας

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_{ij}-q_{ij})^2}{q_{ij}} = 2,604$$

Για το δείγμα μας $X^2_{2,0,95} = 5,991 > 2,604$. Τότε σε επίπεδο σημαντικότητας 5% δεν φαίνεται να διαφέρουν σημαντικά οι προτιμήσεις ανδρών και γυναικών.

3.1.2 **Kolmogorov- Smirnov για την ισότητα των διάμεσων**

Θεωρούμε δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς με την ίδια μορφή και ίσες διακυμάνσεις. Ο έλεγχος που θα διενεργήσουμε μέσω των δειγμάτων αναφέρεται στην υπόθεση αν οι διάμεσοι M_1 και M_2 έχουν ίσους διαμέσους, δηλαδή αν πρόκειται για δείγματα του ίδιου πληθυσμού. Έτσι η μηδενική υπόθεση είναι H_o:M_1=M_2 έναντι της εναλλακτικής H_1: $M_1 \neq M_2$. Οι έλεγχοι αυτοί αντιστοιχούν στον παραμετρικό έλεγχο H_o:$\mu_1=\mu_2$ δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών με ίσες διακυμάνσεις. Οι έλεγχοι που διενεργούνται είναι των Mann-Whitney και Kolmogorov- Smirnov.

Ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για δύο δείγματα είναι ο έλεγχος προσαρμογής για ένα δείγμα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αν αντικαταστήσουμε τις αθροιστικές θεωρητικές πιθανότητες $F[p_q(x_i)]$ με τις αθροιστικές πιθανότητες του δεύτερου δείγματος και συνεχίσουμε όπως και στην περίπτωση με ένα δείγμα. Ο έλεγχος μπορεί να γίνει σε ποσοτικές και σε ποιοτικές ιεραρχικές μεταβλητές.

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνονται τα δεδομένα τα οποία αντιστοιχούν σε δείγματα που δείχνουν τη διάρκεια ζωής (σε ώρες) μπαταριών δύο διαφορετικών εταιρειών. Να ελέγξετε σε α=0,05 αν οι δύο εταιρείες έχουν την ίδια ποιότητα στις μπαταρίες, αν δηλαδή έχουν τις ίδιες διαμέσους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΖΩΗΣ ΜΠΑΤΑΡΙΑΣ ΣΕ ΔΥΟ ΕΤΑΙΡΕΙΕΣ

Εταιρεία Α	40	30	40	45	55	30
Εταιρεία Β	50	50	45	55	60	40

<u>ΛΥΣΗ</u>

Για κάθε εταιρεία υπολογίζουμε τις αθροιστικές πιθανότητες για κάθε τιμή σύμφωνα με τον επόμενο πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

X	$F[p_1(x_i)]$	$F[p_2(x_i)]$	$\lvert F[p_1(x_i)]-F[p_2(x_i)]\rvert$
30	2/6	0	2/6
40	4/6	1/6	3/6
45	5/6	2/6	3/6
50	5/6	4/6	1/6
55	1	5/6	1/6
60	1	1	0

Παρατηρούμε ότι $D = \max\{|F[p_1(x_i)] - F[p_2(x_i)]|\} = 3/6$. Ακόμα από τον πίνακα για m=n=6 σε α=0,05 μας δίνει ότι $D_{0,05} = 0,6667$. Αφού το D είναι μικρότερο από την τιμή του πίνακα αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση και συμπεραίνουμε ότι η διάρκεια ζωής για τις μπαταρίες των δύο εταιρειών είναι η ίδια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Μια τράπεζα καταγράφει τους χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών από δύο ταμίες. Καταγράφει δειγματοληπτικά τους χρόνους εξυπηρέτησης (σε sec) από 10 πελάτες των δύο υπαλλήλων και αυτοί φαίνονται στον επόμενο πίνακα

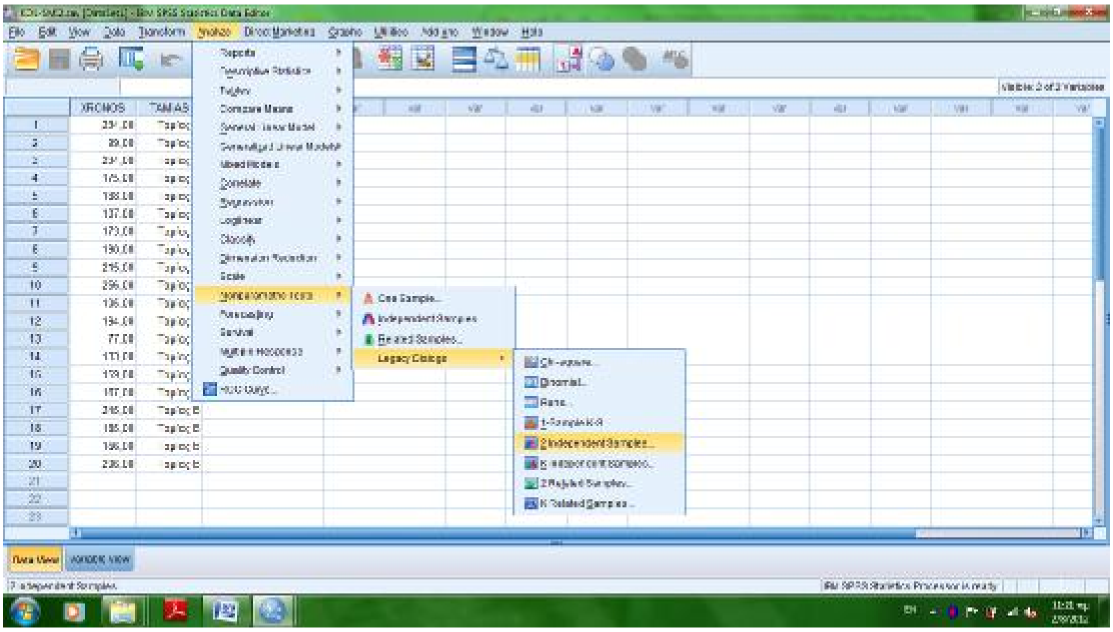
ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΧΡΟΝΟ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΔΥΟ ΤΑΜΙΩΝ

A	234	99	234	175	188	107	173	190	215	256
B	105	194	77	133	159	167	245	185	166	206

Να ελέγξετε αν σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, ότι οι υπάλληλοι έχουν διαφορετική απόδοση.

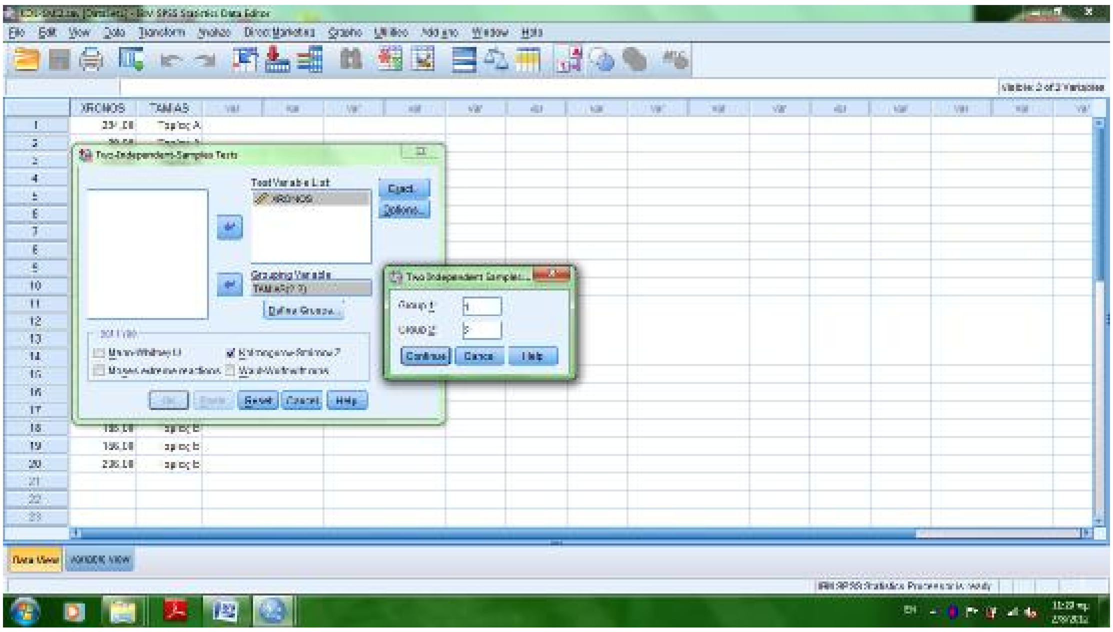
Αναφερόμαστε σε δύο ανεξάρτητα δείγματα και θέλουμε να διενεργήσουμε έλεγχο με τη βοήθεια της μεθόδου Kolmogorov-Smirnov για δύο ανεξάρτητα δείγματα. Γράφουμε τα δεδομένα στο PASW STATISTICS 18, σε δύο στήλες. Στην μια στήλη αναγράφονται οι χρόνοι εξυπηρέτησης και των δύο υπαλλήλων και στην άλλη στήλη ο ταμίας που κάνει τον αντίστοιχο χρόνο στην πρώτη στήλη. Για αυτό στην πρώτη στήλη βάζουμε Label XRONOS και στην δεύτερη TAMIAS. Οι μεταβλητές της στήλης TAMIAS είναι καταχωρημένες ως numeric με αντιστοιχία 1->Ταμίας Α και 2->Ταμίας Β (η διαδικασία γίνεται από το Variable View).

Για να διενεργήσουμε τον έλεγχο στο πρόγραμμα πατάμε διαδοχικά Analyze-> Non parametric Tests-> Legacy dialogs-> 2 Independent Samples.



Εικόνα 34: Γραμμή για την επιλογή τεστ 2 ανεξάρτητων δειγμάτων

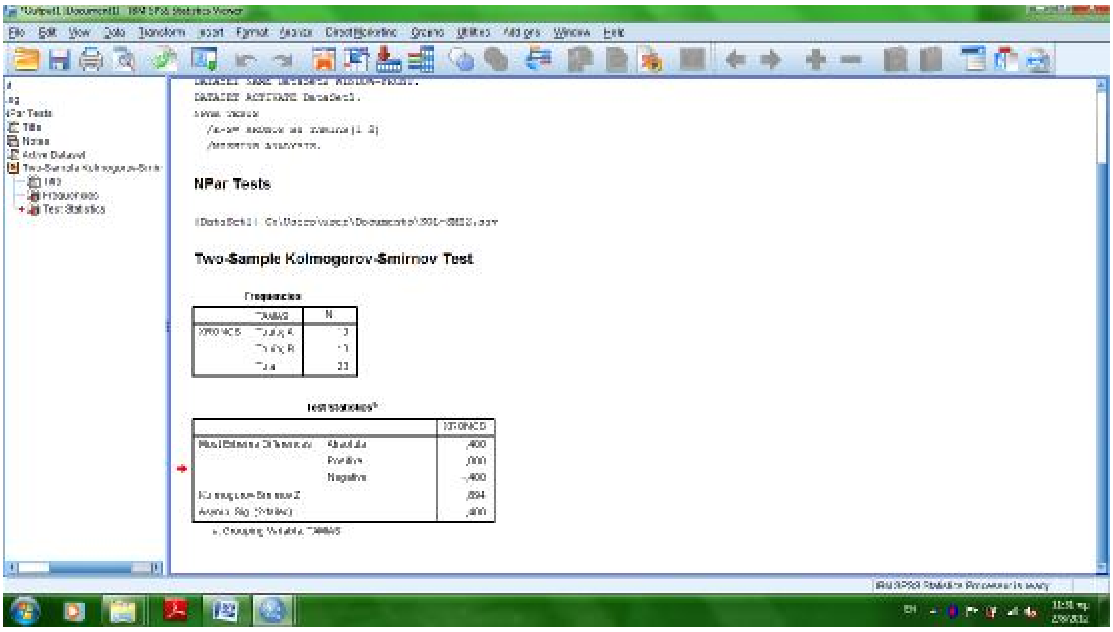
Εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο διαλόγου όπου καταχωρούμε ως Test Variable List το XRONOS και ως Grouping Variable το TAMIAS και μετά επιλέγω το Define Groups, επιλέγω ως Group 1 το 1 (Ταμίας Α) και Group 2 το 2 (Ταμίας Β) και μετά Continue. Ως Test Type επιλέγω το Kolmogorov-Smirnov Z.



Εικόνα 35: Επιλογή του K-S τεστ και των παραμέτρων του

Πατάμε το OK και εμφανίζονται τα αποτελέσματα

<u>Ερμηνεία αποτελέσματος</u>



Εικόνα 36: Απαντήσεις του K-S τεστ

Ο πρώτος πίνακας δείχνει το πλήθος των χρόνων που έχει κάνει ο κάθε ταμίας, ο ταμίας A, 10 χρόνους και ο ταμίας B, 10 χρόνους και το σύνολο των παρατηρήσεων.
Ο δεύτερος πίνακας μας δίνει τις μεγαλύτερες θετικές και αρνητικές τιμές διαφορών που υπάρχουν και το κριτήριο ελέγχου των Kolomogorov-Smirnov 0,894 . Η p-τιμή (ή p-value) είναι 0,400 άρα μεγαλύτερη από 0,05 τότε αποδεχόμαστε σε α=0,05 την μηδενική υπόθεση δηλαδή οι ταμίες εξυπηρετούν στους ίδιους χρόνους.

3.1.3 κριτήριο ροών Wald – Wolfowitz

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαία δείγματα το ένα είναι το $X_1,X_2,\ldots,X_m$ με μέγεθος m και το άλλο το $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ με μέγεθος n και αντίστοιχα οι κατανομές τους είναι F και G αντίστοιχα. Το τεστ Wald-Wolfowitz γίνεται για να ελέγξουμε αν δύο πληθυσμοί ακολουθούν την ίδια κατανομή. Ο έλεγχος υποθέσεων που διενεργείται είναι η μηδενική υπόθεση H_0: F=G έναντι της H_1:F≠G.
Θεωρούμε τα δύο παραπάνω δείγματα ως ένα δείγμα με μέγεθος n+m παρατηρήσεις τα οποία τα διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά στο κοινό αυτό δείγμα. Αν συμβολίσουμε τις παρατηρήσεις X από το πρώτο δείγμα και Y από το δεύτερο

δείγμα, τότε λαμβάνουμε μια ακολουθία συμβόλων όπως Y, X, X, X, Y, Y, X, Y, Y, X, Y.

Αν θεωρήσουμε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση, οι m+n παρατηρήσεις προέρχονται από την ίδια κατανομή και τότε οι παρατηρήσεις από το πρώτο και το δεύτερο δείγμα θα πρέπει να βρίσκονται σε ¨τυχαίες¨ θέσεις στο διατεταγμένο κοινό δείγμα. Αντίθετα αν ισχύει η εναλλακτική υπόθεση, θα πρέπει να εμφανίζονται κάποιες συνεχόμενες σειρές εμφάνισης του ενός ή του άλλου (π.χ. X, X, X, Y, X, Y, X). Θεωρούμε τη στατιστική συνάρτηση R που εκφράζει πόσο τυχαία βρίσκονται οι παρατηρήσεις από το πρώτο και το δεύτερο δείγμα.

R= πλήθος ροών (συνεχόμενων όμοιων συμβόλων X ή Y)

Στην ακολουθία Y,/ X, X, X,/ Y, Y,/ X,/ Y, Y,/ X,/ Y υπάρχουν 7 ροές R=7. Όταν ισχύει η H_1 θα έχουμε μικρές τιμές για το R. Θα απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση όταν

R < c. Το c είναι η κρίσιμη τιμή.

Αν το δείγμα είναι μεγάλο δηλαδή $m,n<10$ τότε ασυμπτωτικά ισχύει ότι

$$Z=\frac{R-\left(\frac{2mn}{m+n}+1\right)}{\sqrt{\frac{2mn(2mn-m-n)}{(m+n)^2(m+n-1)}}}\sim N(0,1) \quad \textit{τύπος 3.4}$$

Αν το δείγμα είναι μικρό $m,n<10$ τότε το c βρίσκεται από πίνακες όπου ανάλογα με το πλήθος του κάθε δείγματος και το επίπεδο εμπιστοσύνης.

ΑΣΚΗΣΗ

*Μια επιχείρηση θέλει να ερευνήσει την πώληση ενός προϊόντος της. Θέλουμε να ελέγξουμε σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=**0,05** αν αυτή η κατανάλωση του προϊόντος της σε δύο πόλεις διαφέρει για αυτό το λόγο οι υπεύθυνοι πήραν κάποια δείγματα για τη μέση μηνιαία κατανάλωση του προϊόντος για την πώληση του προϊόντος.*

		ΜΗΝΙΑΙΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΠΡΟΙΟΝΤΟΣ						
ΠΡΙΝ	X	31,8	32,8	39,2	36,0	30,0	34,5	37,4
ΜΕΤΑ	Y	35,5	27,6	21,3	24,8	36,7	30,0	

ΛΥΣΗ

Ο έλεγχος που θέλουμε να διενεργήσουμε είναι H_0: οι πληθυσμοί προέρχονται από την ίδια κατανομή έναντι της εναλλακτικής H_1: οι πληθυσμοί προέρχονται από διαφορετικές κατανομές.
Θεωρούμε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση και διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά τα δεδομένα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΑΥΞΟΥΣΑ ΣΕΙΡΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

21,3	24,8	27,6	30,0	30,0	31,8	32,8	34,5	35,5	36,0	36,7	37,4	39,2
Y	Y	Y	Y	X	X	X	X	Y	X	Y	X	X

Έχουμε R=6 ροές. Από τους αντίστοιχους πίνακες για $n=n_1=7$ και $m=n_2=6$ και επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05 βρίσκω c=3. Επομένως R=6> c=3 άρα αποδέχομαι την μηδενική υπόθεση και οι δύο πληθυσμοί προέρχονται από την ίδια κατανομή. Τότε η νέα συσκευασία δεν άλλαξε την πώληση του προϊόντος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Μια εταιρεία έχει δύο υποκαταστήματα σε δύο διαφορετικές πόλεις. Καταγράφει τον μηνιαίο μισθό που πληρώνουν τους υπαλλήλους με τις υπερωρίες και παίρνει ένα δείγμα για το κάθε υποκατάστημα

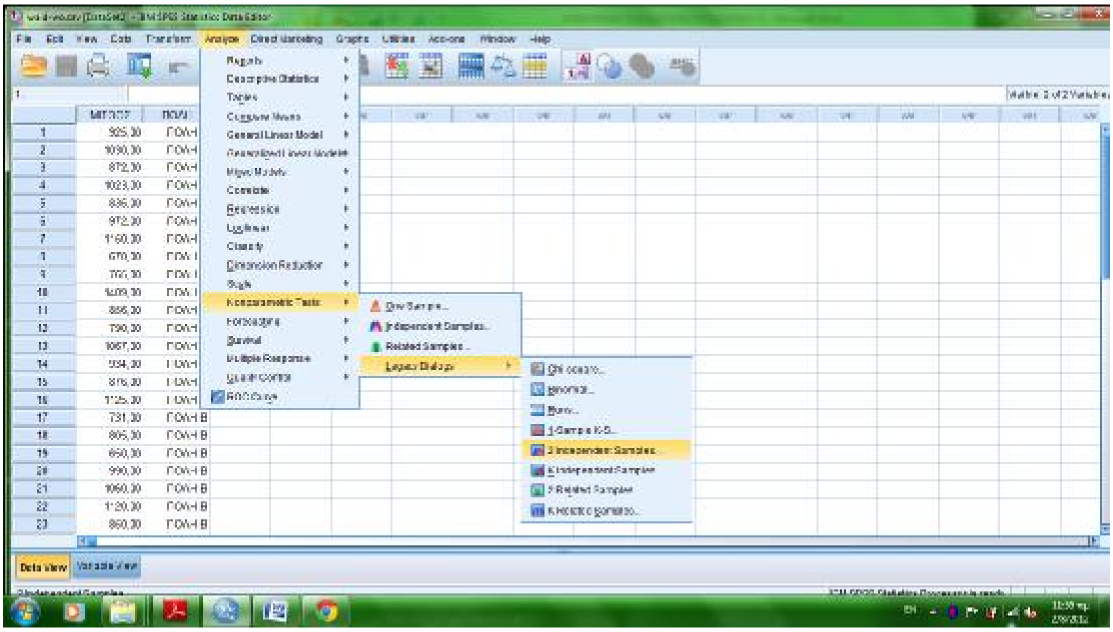
ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΟΝ ΜΙΣΘΟ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ

ΠΟΛΗ Α	925	1030	872	1023	835	972	1150	670	765	1409	856	790
ΠΟΛΗ Β	1067	934	876	1125	731	805	650	990	1060	1120	850	680

*Να ελέγξετε σε επίπεδο σημαντικότητας α=**0,10** αν οι υπάλληλοι παίρνουν διαφορετικό μισθό.*

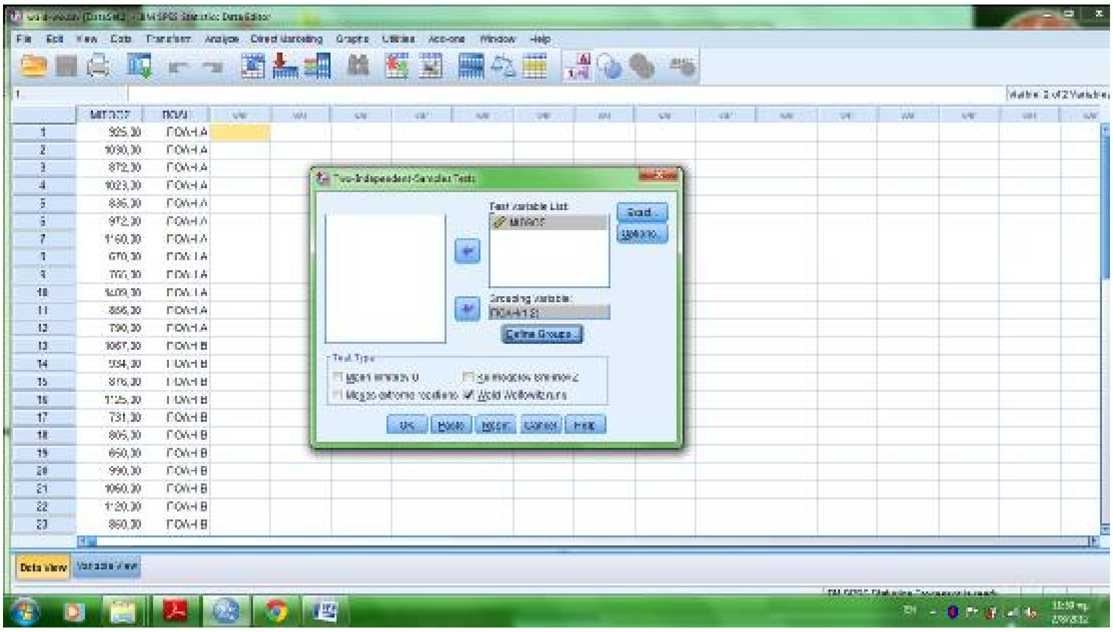
Αναφερόμαστε σε δύο ανεξάρτητα δείγματα και θέλουμε να διενεργήσουμε έλεγχο με τη βοήθεια της μεθόδου Wald-Wolfovitz για δύο ανεξάρτητα δείγματα. Γράφουμε τα δεδομένα στο PASW STATISTICS 18, σε δύο στήλες. Στην μια στήλη αναγράφονται οι μισθοί και των δύο υπαλλήλων στις δύο πόλεις και στην άλλη στήλη η αντίστοιχη πόλη κάθε καταγεγραμμένου μισθού της πρώτης στήλης. Για αυτό στην πρώτη στήλη βάζουμε Label ΜΙΣΘΟΣ και στην δεύτερη ΠΟΛΗ. Οι μεταβλητές της στήλης ΠΟΛΗ είναι καταχωρημένες ως numeric με αντιστοιχία 1->ΠΟΛΗ Α και 2->ΠΟΛΗ Β (η διαδικασία γίνεται από το Variable View).

Για να διενεργήσουμε τον έλεγχο στο πρόγραμμα πατάμε διαδοχικά Analyze-> Non parametric Tests-> Legacy dialogs-> 2 Independent Samples.



Εικόνα 37: Γραμμή για την επιλογή τεστ για 2 ανεξάρτητα δείγματα

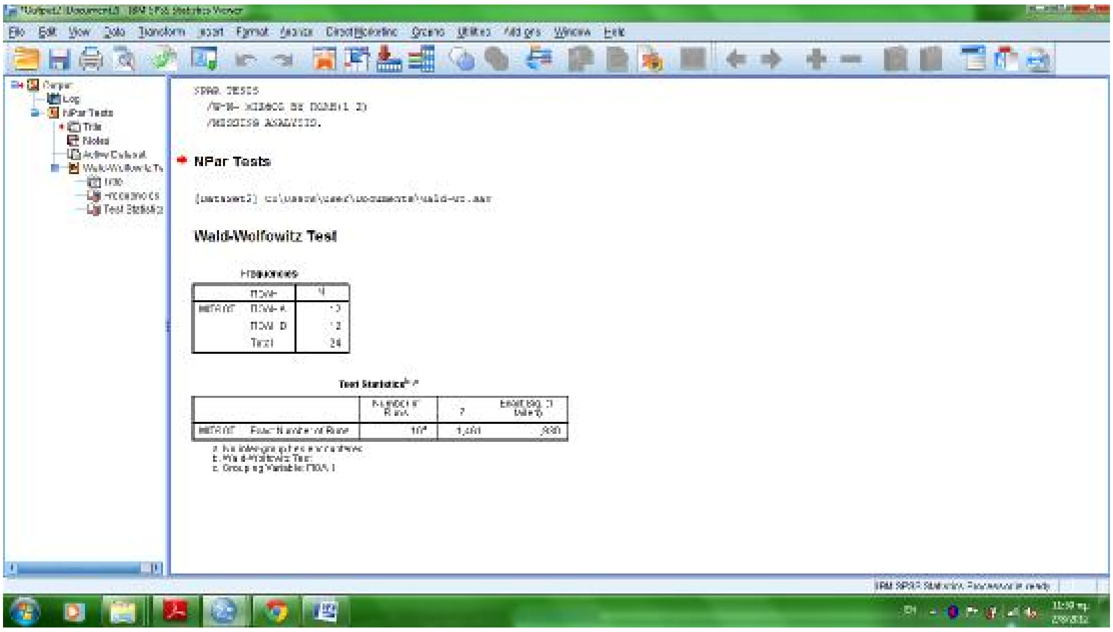
Εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο διαλόγου όπου καταχωρούμε ως Test Variable List το ΜΙΣΘΟΣ και ως Grouping Variable το ΠΟΛΗ και μετά επιλέγω το Define Groups, καταχωρείται στο Group 1 ο κωδικός 1 (ΠΟΛΗ Α) και στο Group 2 ο κωδικός 2 (ΠΟΛΗ Β) και μετά Continue. Ως Test Type επιλέγω το Wald-Wolfovitz runs.



Εικόνα 38: Πίνακας για την επιλογή του Wald-Wolfovitz test και των παραμέτρων του

Ερμηνεία αποτελέσματος

Αν στο προηγούμενο παράθυρο πατήσω το OK εμφανίζονται τα αποτελέσματα του PASW STATISTICS 18.



Εικόνα 39: Απαντήσεις του Wald-Wolfovitz test

Ο πρώτος πίνακας Frequencies δείχνει το πλήθος των παρατηρήσεων-μισθών στην πρώτη πόλη A, στο παράδειγμά μας 12 και το αντίστοιχο πλήθος για την πόλη B, 12 επίσης καθώς και το σύνολο των παρατηρήσεων που είναι 24.

Ο δεύτερος πίνακας Test Statistics δείχνει την p-τιμή 0,930 μεγαλύτερη από το 0,05 άρα αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση δηλαδή οι μισθοί στις δύο πόλεις των υπαλλήλων είναι ίδιοι.

3.1.4 κριτήριο Mann-Whitney για την ισότητα διαμέσων

Επιλέγουμε αρχικά δύο δείγματα μεγέθους n_1 και n_2 από κάθε πληθυσμό. Στη συνέχεια διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά όλες τις $n_1+n_2=n$ τιμές των δύο δειγμάτων και τις βαθμολογούμε βάση των τάξεών τους. Στην περίπτωση που έχουμε ίδιες τάξεις τις βαθμολογούμε με το ημιάθροισμα των τάξεων που θα είχαν αν είχαν ελάχιστη διαφορά. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τα αθροίσματα R_1 και R_2 των τάξεων κάθε δείγματος και υπολογίζουμε τις τιμές των παραστάσεων

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 \quad \text{και} \quad U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = n_1 n_2 - U_1 \qquad \textit{τύποι 3.5}$$

Ακόμα ισχύουν οι σχέσεις

$$R_1 + R_2 = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}{2} \quad \text{και} \quad U_1 + U_2 = n_1 n_2 \qquad \textit{τύποι 3.6}$$

Η μικρότερη από τις U_1 και U_2 ονομάζεται τιμή της στατιστικής του U του ελέγχου. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις

Α. Αν έχω πλήθος δειγμάτων για τα οποία ισχύει n_1, $n_2 > 10$ ή αν $\max(n_1,n_2)\geq 20$ και ισχύει η μηδενική υπόθεση, αποδεικνύεται ότι η U προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή ως

$$U \sim N\left(\frac{n_1 n_2}{2}, \frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}\right) \text{ και ισχύει } A = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}} \sim N(0,1)$$

τύποι 3.7

Ο έλεγχος γίνεται ως γνωστόν με παραμετρικές μεθόδους. Στην περίπτωση που η Χ είναι διακριτή έχουμε διόρθωση της στατιστικής Α κατά Yates, με πρόσθεση στον αριθμητή 0,5.

Β. Αν $2 \leq n_1$ και $n_2 \leq 10$, ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια πινάκων για μη παραμετρικές μεθόδους που υπάρχουν έτοιμοι. Υπάρχει μια ειδική περίπτωση για την περίπτωση δίπλευρου ελέγχου σε α= 0,05. Ο έλεγχος H_0:M_1=M_2 κατά του H_1:$M_1 \neq M_2$. Ο πίνακας είναι ο

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΔΙΠΛΕΥΡΟ ΕΛΕΓΧΟ ΣΕ α=0,05 ΜΕ $2 \leq n_1$ ΚΑΙ $n_2 \leq 10$

n_1/n_2	3	4	5	6	7	8	9	10
2			0	0	1	1	1	1
3	0	0	1	2	2	3	4	4

4		1	2	3	4	5	6	7
5			4	5	6	8	9	11
6				7	8	10	12	14
7					11	13	15	17
8						15	18	20
9							21	24
10								27

Για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση βρίσκουμε τις τιμές των U_1,U_2 και U και την τιμή που δίνει ο προηγούμενος πίνακας (u). Αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση στην περίπτωση που η τιμή του U είναι εντός του διαστήματος με κάτω όριο το (u) του πίνακα και άνω όριο την τιμή $n_1 n_2 - u$.

ΑΣΚΗΣΗ

Δείγματα n_1=8, n_2=8 βενζινάδικων από δύο πόλεις Α και Β ερευνούνται ως προς την ημερησία κατανάλωση λίτρων σε χιλιάδες. Να ελεγχθεί σε α=0,05 αν η κατανάλωση βενζίνης στις δύο πόλεις διαφέρει, δηλαδή αν έχουν την ίδια διάμεσο.

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΒΕΝΖΙΝΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΠΟΛΕΙΣ (χιλιάδες λίτρα)

Πόλη Α	6,0	4,8	5,1	5,5	4,1	5,3	4,5	5,1
Πόλη Β	6,5	5,5	6,3	7,2	6,8	5,5	5,9	5,5

ΛΥΣΗ

Έχουμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση H_0: M_1=M_2 έναντι της εναλλακτικής H_1:$M_1 \neq M_2$ σε α=0,05. Φτιάχνουμε τον πίνακα

ΒΑΘΜΟΝΟΜΟΝΗΣΗ & ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΒΕΝΖΙΝΗΣ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΠΟΛΕΙΣ

ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΒΕΝΖΙΝΗΣ	ΠΟΛΕΙΣ Α	ΠΟΛΕΙΣ Β
4,1	1	
4,5	2	
4,8	3	
5,1	4,5	
5,1	4,5	
5,3	6	
5,5	8,5	
5,5		8,5
5,5		8,5
5,5		8,5
5,9		11
6,0	12	
6,3		13
6,5		14
6,8		15
7,2		16
ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ	R_1=41,5	R_2=94,5

Υπολογίζουμε τις τιμές των U

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = (8\cdot 8) + \frac{8\cdot 9}{2} - 41,5 = 58,5$$
$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = (8\cdot 8) + \frac{8\cdot 9}{2} - 94,5 = 5,5$$

Από τον πίνακα για α=0,05 και για μεγέθη n_1=8 και n_2=8 βρίσκω U=15.

Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν η μικρότερη τιμή από τις U_1, U_2 είναι μικρότερη από την U. Σε αυτήν την περίπτωση η U_2 είναι μικρότερη της U άρα αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση. Υπάρχει διαφορά στην κατανάλωση βενζίνης στις δύο πόλεις.

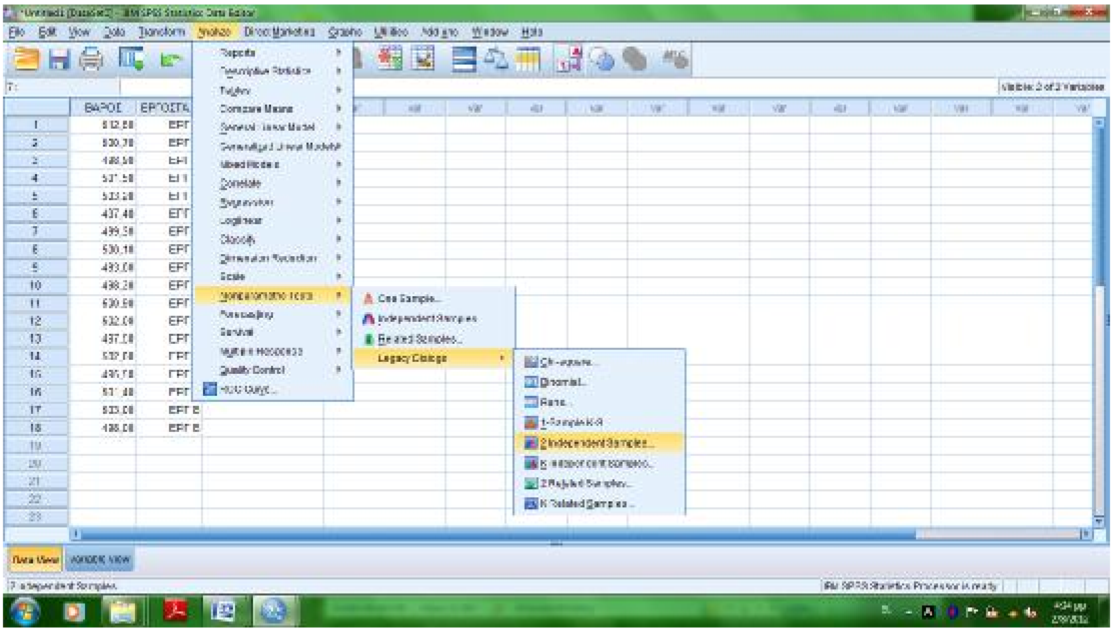
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Μια εταιρεία συσκευάζει ένα προϊόν σε δύο διαφορετικά εργοστάσια και στη συνέχεια ελέγχει το βάρος του. Η εταιρεία θέλει να ελέγξει αν τα δύο εργοστάσια συσκευάζουν το ίδιο βάρος στο προϊόν και για αυτό επέλεξαν δείγματα από κάθε συσκευαστήριο του εργοστασίου και κατέγραψαν τα αποτελέσματα της δειγματοληπτικής έρευνας

ΒΑΡΟΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΙΟΝΤΟΣ ΣΕ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΣΕ ΔΥΟ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΑ (σε gr)

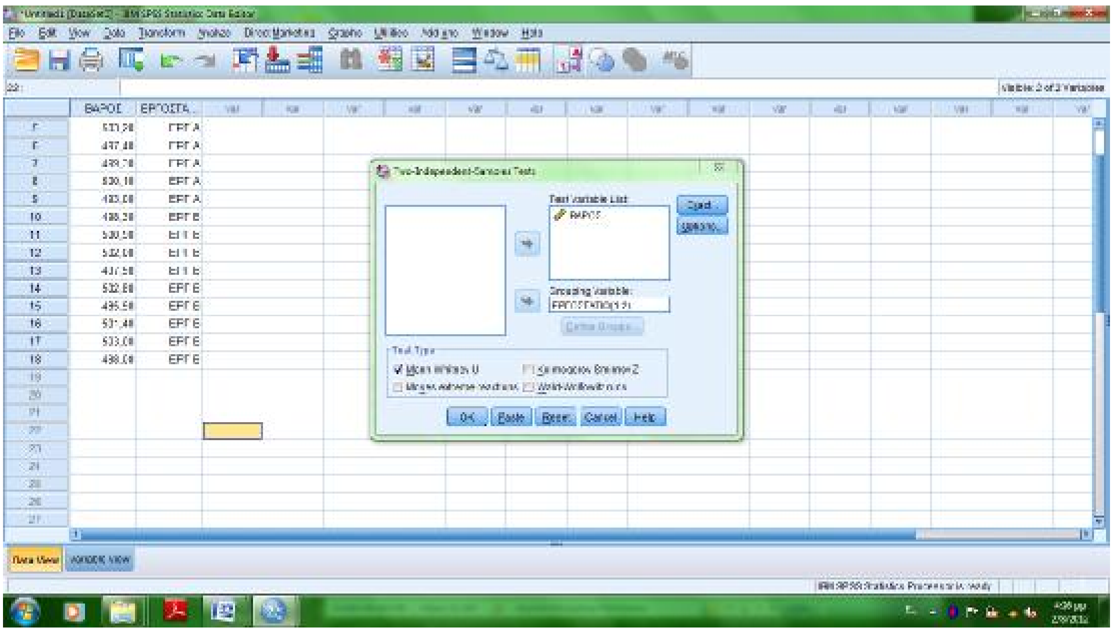
A	512,5	500,7	498,9	501,5	503,2	497,4	499,3	500,1	493
B	498,3	500,9	502	497,5	502,8	495,5	501,4	503	498

Αναφερόμαστε σε δύο ανεξάρτητα δείγματα και θέλουμε να διενεργήσουμε έλεγχο με τη βοήθεια της μεθόδου Mann-Whitney για δύο ανεξάρτητα δείγματα. Γράφουμε τα δεδομένα στο PASW STATISTICS 18, σε δύο στήλες. Στην μια στήλη αναγράφονται το βάρη και των όλων των δειγμάτων των δύο εργοστασίων και στην άλλη στήλη το αντίστοιχο εργοστάσιο κάθε καταγεγραμμένου βάρος της πρώτης στήλης. Για αυτό στην πρώτη στήλη βάζουμε Label ΒΑΡΟΣ και στην δεύτερη ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ. Οι μεταβλητές της στήλης ΕΡΟΣΤΑΣΙΟ είναι καταχωρημένες ως numeric με αντιστοιχία 1->ΕΡΓ Α και 2->ΕΡΓ Β (η διαδικασία γίνεται από το Variable View).
Για να διενεργήσουμε τον έλεγχο στο πρόγραμμα πατάμε διαδοχικά Analyze-> Non parametric Tests-> Legacy dialogs-> 2 Independent Samples.



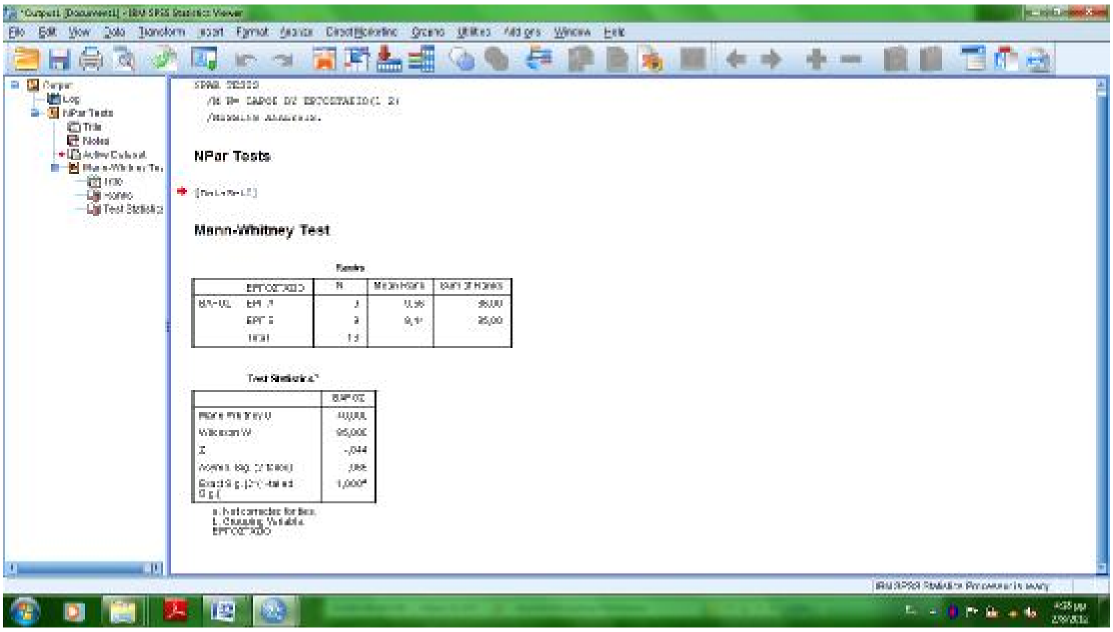
Εικόνα 40: Γραμμή για την επιλογή τεστ για 2 ανεξάρτητα δείγματα

Εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο διαλόγου όπου καταχωρούμε ως Test Variable List το ΒΑΡΟΣ και ως Grouping Variable το ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ και μετά επιλέγω το Define Groups, καταχωρείται στο Group 1 ο κωδικός 1 (ΕΡΓ Α) και στο Group 2 ο κωδικός 2 (ΕΡΓ Β) και μετά Continue. Ως Test Type επιλέγω το Mann-Whitney U.



Εικόνα 41: Πίνακας για την επιλογή Mann-Whitney test και εισαγωγής δεδομένων για το test

Ερμηνεία αποτελέσματος Πατώντας το ΟΚ στο προηγούμενο παράθυρο διαλόγου εμφανίζεται το παράθυρο με τα αποτελέσματα το τεστ Mann-Whitney.



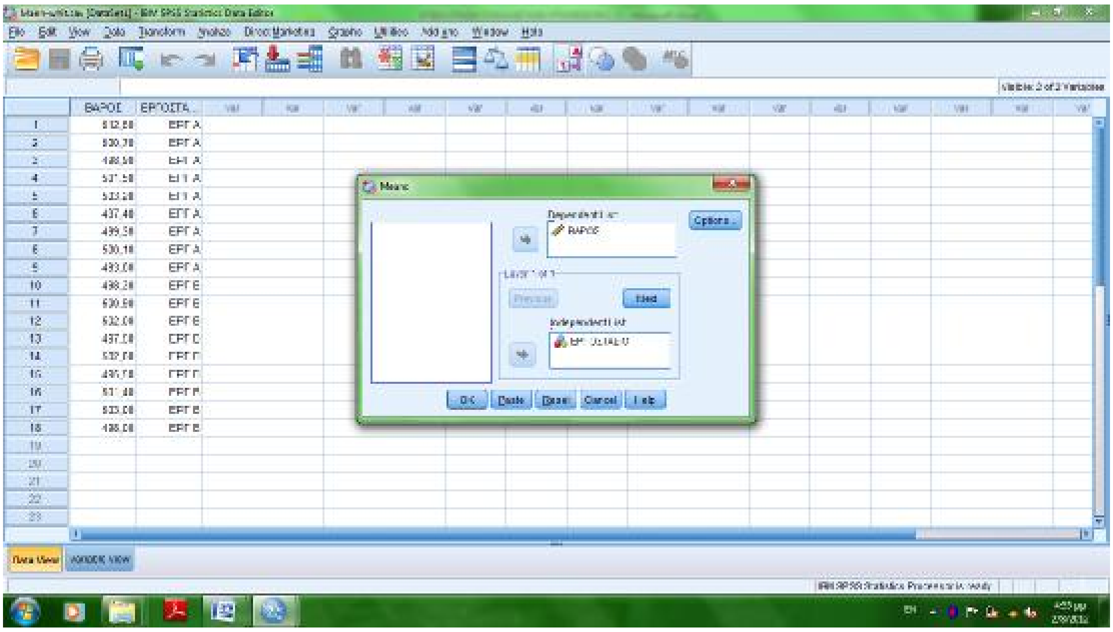
Εικόνα 42: Απαντήσεις για το Mann-Whitney test

Εμφανίζονται δύο πίνακες, ο πρώτος Ranks δείχνει το πλήθος των δεδομένων κάθε ομάδας και το σύνολο των δεδομένων που εισάγαμε. Ακόμα εμφανίζονται ο μέσος της κατάταξης (Mean rank).

Ο δεύτερος πίνακας, Test Statistics, δίνει την τιμή του κριτηρίου Mann-Whitney (εδώ το 40) και την p-τιμή που εδώ είναι 0,965 αποτέλεσμα που σε επίπεδο α=0,05 μας επιτρέπει να αποδεχθούμε την μηδενική υπόθεση.

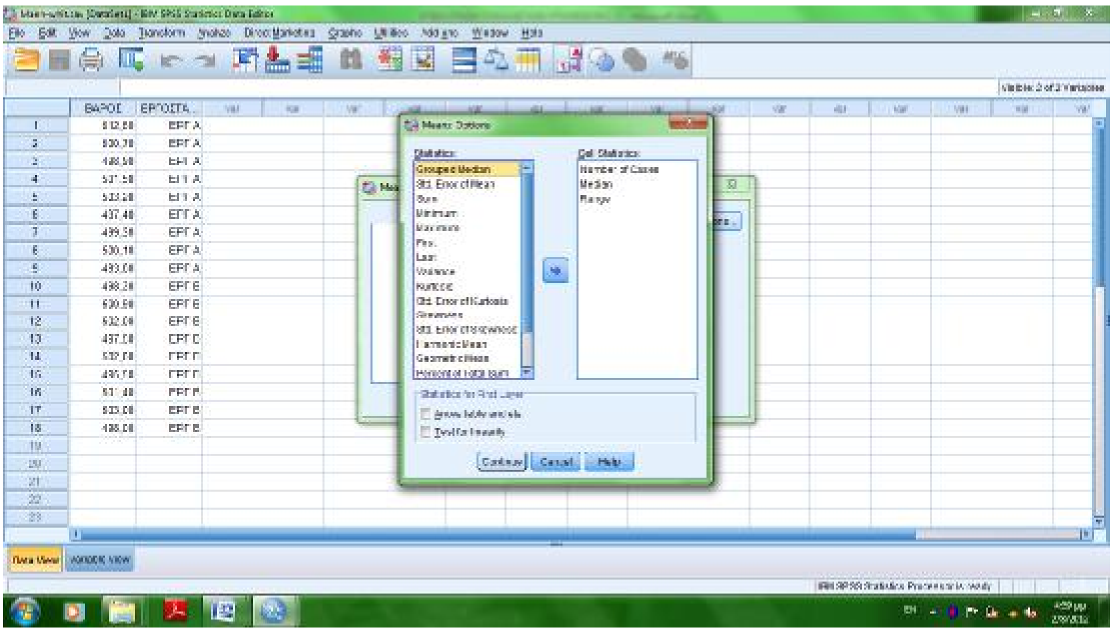
Σημείωση

Ορισμένοι προτιμούν να δίνουν ως περιγραφικά στατιστικά για το τεστ Mann-Whitney τις διαμέσους και το εύρος κάθε ομάδας. Το PASW STATISTICS 18 δεν υπολογίζει αυτόματα τα στατιστικά αυτά, αλλά ακολουθώντας μια άλλη διαδικασία. Για να γίνει αυτό επιλέγουμε διαδοχικά Analyze-> Compare Means-> Means τότε εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου.



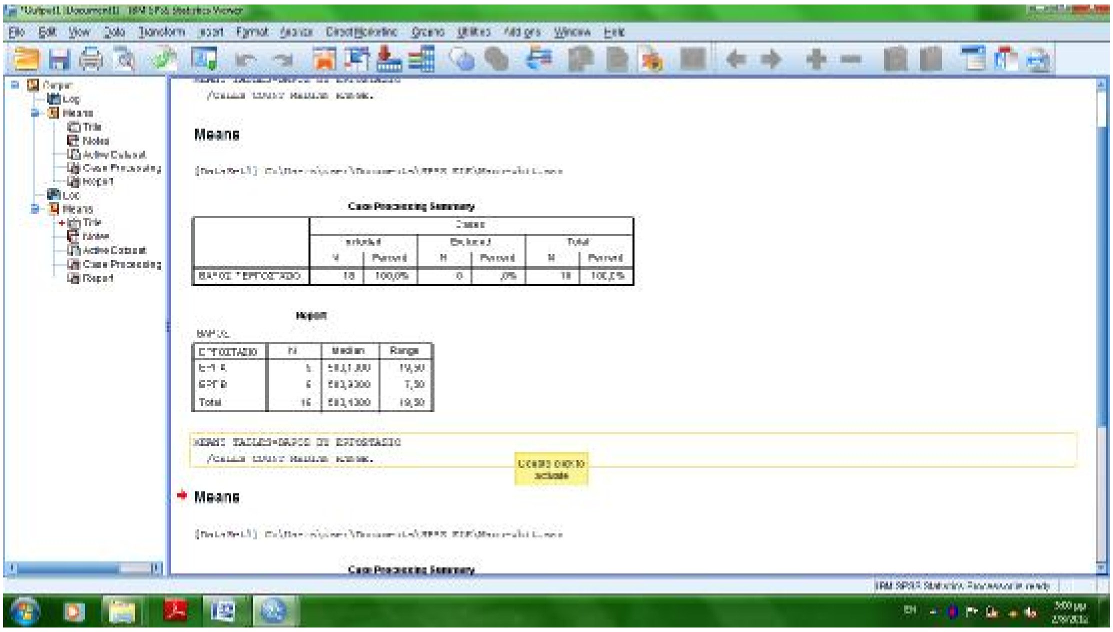
Εικόνα 43: Πίνακας για την εισαγωγή των μεταβλητών για την εύρεση διαμέσων και εύρους

Στην επιλογή Dependent List βάζουμε την μεταβλητή ΒΑΡΟΣ και στην Independent List το ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ. Κάνουμε κλικ στο πλήκτρο Options και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου αφαιρώ από αυτό τις επιλογές Mean και Standard Deviation και προσθέτω τις Median και Range. Για να γίνει αυτό κάνω κλικ στο βελάκι των δύο λιστών και εμφανίζεται η επόμενη εικόνα.



Εικόνα 44: Πίνακας για την επιλογή διαμέσου και εύρους των μεταβλητών

Πατάω Continue και εμφανίζεται η προηγούμενη οθόνη και πατάω το OK, μετά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στον επόμενο πίνακα



Εικόνα 45: Απαντήσεις του test αναφέροντας τις διαμέσους και το εύρος των μεταβλητών

Παρατηρούμε ότι αναγράφονται οι διάμεσοι και το εύρος κάθε ομάδας-εργοστασίου αλλά και του συνόλου του δείγματος.

II. ΔΥΟ ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΕΝΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ- two related samples test

Οι έλεγχοι που περιλαμβάνονται στην διαδικασία two related samples test είναι μη παραμετρικές δοκιμασίες που αφορούν περιπτώσεις των εξαρτημένων κατά ζεύγη δειγμάτων.

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε σε έναν πληθυσμό που θα υποστεί κάποια παρέμβαση (όπως ασθενείς που τους χορηγήθηκε ένα φάρμακο, υπάλληλοι που επιμορφώθηκαν κτλ.). Θέλουμε να ελέγξουμε δύο συνιστώσες

Α. Αν η παρέμβαση διαφοροποίησε σημαντικά τη διάμεσο μιας ποσοτικής μεταβλητής, υποθέτοντας ότι η διακυμάνσεις πριν και μετά είναι ίσες και οι κατανομές έχουν την ίδια μορφή. Ο έλεγχος γίνεται με κάποια δείγματα του πληθυσμού καταγράφοντας τις τιμές πριν και μετά την παρέμβαση. Τα δείγματα δεν είναι εδώ ανεξάρτητα όπως στην προηγούμενη παράγραφο αλλά είναι συσχετισμένα και η μεταβλητή ή οι μεταβλητές που ελέγχονται στα δύο δείγματα είναι ποσοτικές (ή διατεταγμένες). Οι έλεγχοι που θα μελετήσουμε σε αυτή την περίπτωση είναι ο προσημικός έλεγχος ή έλεγχος σημείου (sign test) και ο έλεγχος των προσημασμένων θέσεων του Wilcoxon ή απλούστερα έλεγχος Wilcoxon .

Β. Αν η παρέμβαση άλλαξε σημαντικά την αναλογική συμμετοχή του πληθυσμού σε δύο κατηγορίες (ΝΑΙ-ΟΧΙ) μιας δίτιμης ποιοτικής μεταβλητής. Ο έλεγχος που θα μελετήσουμε σε αυτήν την περίπτωση είναι ο Mc Nemar.

3.2.1. Προσημικός έλεγχος ισότητας των διαμέσων πρίν και μετά από μια παρέμβαση (two related samples sign test)

Ο έλεγχος που θα διενεργήσουμε είναι H_0: M_1=M_2 όπου M_1 είναι η διάμεσος πριν από μια παρέμβαση και M_2 η διάμεσος μετά την παρέμβαση.

Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, ο μισές διαφορές $x_{1i} - x_{2i}$ για κάθε i – μέλος του πληθυσμού θα είναι θετικές και οι μισές αρνητικές. Βάση αυτής της σχέσης καταλαβαίνουμε ότι ο έλεγχος H_0:M_1=M_2 είναι ισοδύναμος με τον H_0:p=0,5, δηλαδή η αναλογία p των προσήμων (+) των διαφορών $x_{1i} - x_{2i}$ είναι 0,5. Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, ο αριθμός των προσήμων (+) στο δείγμα ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή b (n^*,0,5) με n* συμβολίζει το πλήθος του δείγματος που μένει αν παραλείψουμε τις διαφορές των $x_{1i} - x_{2i}$ που είναι μηδενικές.

Ουσιαστικά στην διαδικασία του ελέγχου υποθέσεων καταγράφουμε τις τιμές πριν και μετά την παρέμβαση και υπολογίζουμε τις διαφορές $x_{1i} - x_{2i}$ έχουμε τότε τις περιπτώσεις.

Α. Αν $n^* \geq 30$, και επιπλέον $p_0 = 0,5$, $q_0 = 0,5$, ισχύει ότι $n^* \cdot p_0 > 5$ και $n^* \cdot q_0 > 5$. Οι προϋποθέσεις αυτές ισοδυναμούν με την προϋπόθεση ότι $n^* > 100$,
αν $p_0 \varsigma (0,05, 0,95)$.Τότε η διωνυμική $b(n^*, 0,5)$ από το ΚΟΘ, τείνει στην κανονική

κατανομή. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την αναλογία $\hat{p}$ των προσήμων (+) των διαφορών $x_{1i} - x_{2i}$ στο δείγμα και κάνουμε παραμετρικό έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης με στατιστική ελέγχου

$$A_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1) \qquad \textit{τύπος 3.8}$$

Β. Αν $n^* < 30$, για δίπλευρο έλεγχο με α=0,05, οι περιοχές απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζονται από πίνακες της $b(n^*, 0,5)$ σύμφωνα με το γράφημα

$0,1,\ldots,k$ περιοχή μη απόρριψης της H_0 $n^* - k,\ldots,n^*$

- - - - - - - - - ———————————————— - - - - - - - - - - - -

0,025 0,95 0,025

Προσδιορίζουμε την κάτω κρίσιμη τιμή κ, έτσι ώστε

$b(0, n^*, 0,5) + \ldots + b(0, n^*, 0,5) < 0,025$, ενώ *τύποι 3.9*

$b(0, n^*, 0,5) + \ldots + b(0, n^*, 0,5) + b(k+1, n^*, 0,5) < 0,025$

οπότε η περιοχή απόρριψης της H_0, περιλαμβάνει τις τιμές 0, 1, …, κ, που βρίσκονται αριστερά στο προηγούμενο διάγραμμα, αλλά και οι τιμές $n^*, n^* - 1, \ldots, n^* - k$, που βρίσκονται δεξιά στο διάγραμμα. Αν $x \le k$ ή $x \le n^* - k$ θα απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση σε α=0,05.

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, προσδιορίζεται ανάλογα με την εναλλακτική, για παράδειγμα αν η H_0: $M_1 = M_2$ έναντι της H_1: $M_1 < M_2$ για α=0,05, το γράφημα που προσδιορίζεται η περιοχή απόρριψης είναι το

περιοχή μη απόρριψης της H_0 κ

———————————————— - - - - - - - - - - - -

0,95 0,05

Προσδιορίζουμε την κρίσιμη τιμή κ, ώστε,

$b(n^*, n^*, 0,5) + b(n^* - 1, n^*, 0,5) + ... + b(k, n^*, 0,5) < 0,05$

ενώ $b(n^*, n^*, 0,5) + b(n^* - 1, n^*, 0,5) + ... + b(k, n^*, 0,5) < 0,05$

ΑΣΚΗΣΗ

Ένα δείγμα από 9 ερευνητές έκαναν τις προβλέψεις τους για το ποσοστό της ανεργίας το επόμενο έτος σε μια χώρα, μετά από 3 μήνες με τα νέα δεδομένα που τους δόθηκαν έκανα νέες προβλέψεις και ανακοίνωσαν νέα ποσοστά πρόβλεψης. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΑΝΕΡΓΙΑΣ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΚΑΠΟΙΑ ΔΕΔΟΕΜΕΝΑ ΑΠΟ 9 ΕΡΕΥΝΗΤΕΣ

ΠΡΙΝ(%)	8,6	9,7	11,8	17,1	12,9	14,7	12,4	11	8,9
ΜΕΤΑ(%)	9,8	13,4	11,8	17,3	12,6	14,3	14,2	10,5	10,1

Να ελεγχθεί σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05 αν με τα νέα στοιχεία αυξήθηκε το ποσοστό για την πρόβλεψη της ανεργίας τον επόμενο χρόνο.

ΛΥΣΗ

Ο έλεγχος που θα γίνει είναι να δούμε αν η μηδενική υπόθεση H_0: $M_1=M_2$ έναντι της H_1:$M_1<M_2$, όπου M_1 και M_2 είναι οι διάμεσοι για το δείγμα πριν και το δείγμα μετά τα νέα στοιχεία. Τότε ο έλεγχος που διενεργείται είναι αντίστοιχος με $H_0 : p = 0,5$ έναντι της εναλλακτικής $H_1 : p > 0,5$. Φτιάχνω έναν νέο πίνακα με στήλες τις τιμές πριν και μετά τα νέα στοιχεία και μια στήλη με τις διαφορές τους.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΑΝΕΡΓΙΑΣ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ \ ΚΑΙ ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΟΥΣ

ΠΡΙΝ(%)	8,6	9,7	11,8	17,1	12,9	14,7	12,4	11	8,9
ΜΕΤΑ(%)	9,8	13,4	11,8	17,3	12,6	14,3	14,2	10,5	10,1
ΔΙΑΦΟΡΑ	+1,2	+3,7	0	+0,2	-0,3	-0,4	+1,8	-0,5	+1,2

Παρατηρούμε ότι έχουμε μια μηδενική διαφορά άρα $n^*=8$ και έχω 5 διαφορές με 5 (+) θετικά πρόσημα. Υποθέτουμε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση, Η κρίσιμη τιμή είναι αυτή για την οποία

ισχύει $b(n^*,n^*,0,5)+b(n^*-1,n^*,0,5)+...+b(k,n^*,0,5)<0,05$, ενώ

$b(n^*,n^*,0,5)+...+b(k,n^*,0,5)+b(k+1,n^*,0,5)>0,05$

$b(n^*,n^*,0,5)=b(8,8,0,5)=0,04<0,05$ και $b(n^*-1,n^*,0,5)=b(7,8,0,5)=0,031$ με

$b(8,8,0,5)+b(7,8,0,5)=0,04+0,031=0,035<0,05$. Ακόμα υπολογίζω το

$b(6,8,0,5)=0,109$

άρα $b(8,8,0,5)+b(7,8,0,5)+b(6,8,0,5)=0,049+0,031+0,109=0,144>0,05$.

Η κρίσιμη τιμή ελέγχου είναι μεταξύ των τιμών 6 και 7 απορρίπτω την μηδενική υπόθεση. Έχουμε βρει 5 θετικά πρόσημα άρα αποδέχομαι την μηδενική υπόθεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

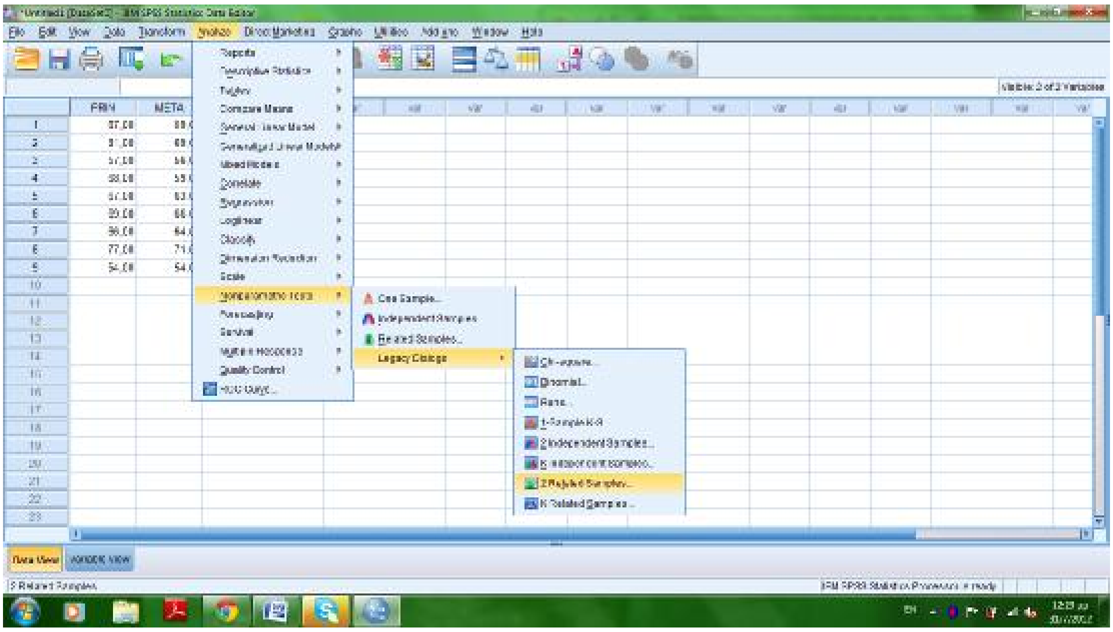
Ένα προϊόν μιας εταιρείας διαφημίζεται στα ΜΜΕ κατά τον τελευταίο μήνα, οι υπεύθυνοι θέλουν να ελέγξουν αν η διαφήμιση του προϊόντος είναι αποτελεσματική σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Για αυτό το λόγο επιλέγουν 9 σημεία πώλησης του προϊόντος και καταγράφουν τις πωλήσεις του πριν και μετά την διαφήμιση και καταγράφουν τα εξής αποτελέσματα

ΠΡΙΝ: 67 81 57 68 67 69 66 77 54

ΜΕΤΑ: 59 69 56 59 63 66 64 71 54

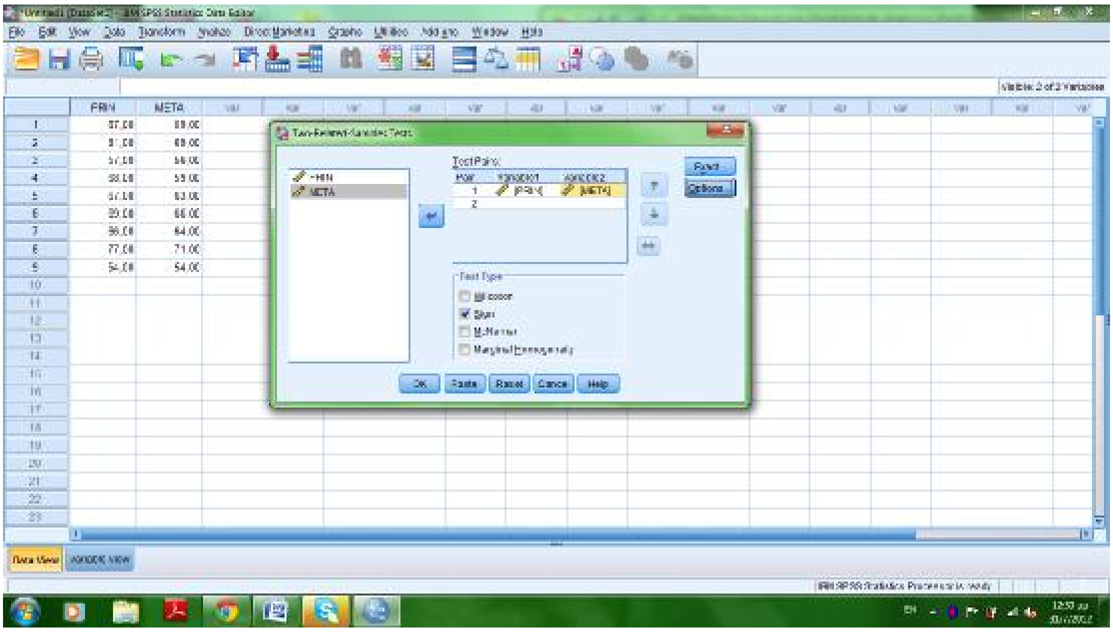
Επειδή πρόκειται για σημεία πώλησης πριν και μετά την διαφήμιση τα δείγματα είναι εξαρτημένα. Φτιάχνουμε στο PASW STATISTICS 18 τις δύο στήλες με τις πωλήσεις του προϊόντος πριν και μετά την διαφήμιση με Label PRIN και META αντίστοιχα. Τα Label αλλάζουν αν εισάγοντας τα δεδομένα, μετά πάμε στο παράθυρο Variable View και στο Name κάθε μεταβλητής αλλάξουμε το όνομα. Ακολουθούμε τα βήματα

Επιλέγουμε από το μενού Analyze-> Non Parametric Tests->Legacy Dialogs-> 2 Related samples.



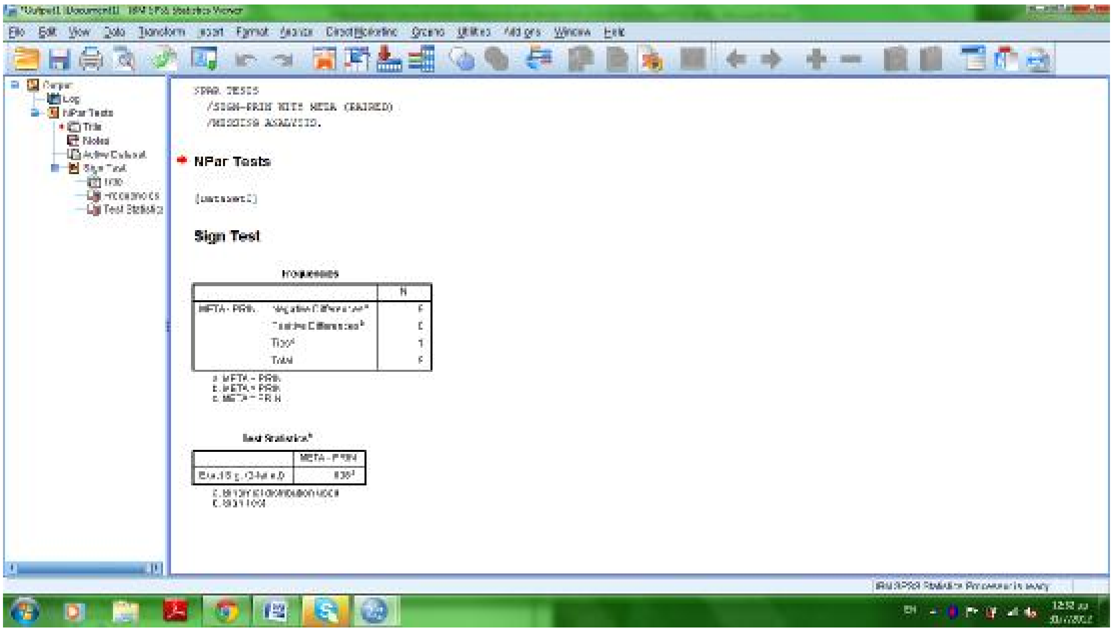
Εικόνα 46: Γραμμή για την επιλογή τεστ για 2 συσχετισμένων δειγμάτων

Όταν γίνει αυτή η διαδικασία εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο διαλόγου. Εισάγουμε ως Variable 1 το PRIN και στη συνέχεια ως Variable 2 το META. Εμφανίζεται επίσης το Test Type, εκεί επιλέγουμε το Sign.



Εικόνα 47: Πίνακας εισαγωγής μεταβλητών για το test και επιλογής του test προσημικού ελέγχου

Ερμηνεία αποτελεσμάτων Αν στην προηγούμενη εικόνα διαλόγου πατήσουμε το OK, εμφανίζονται τα εξής αποτελέσματα



Εικόνα 48: Απαντήσεις για το προσημικό test

Ο πίνακας Frequencies, μας δείχνει ότι έχουμε 8 αποτελέσματα με αρνητικές διαφορές μεταξύ των μεταβλητών του πριν και μετά και μια διαφορά 0, δηλαδή ένα ζεύγος τιμών είναι ίσο πριν και μετά την διαφήμιση.

Ο πίνακας Test Statistics, μας δίνει την p-τιμή. Από την p-τιμή του στατιστικού τεστ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές πριν και μετά την επιμόρφωση, γιατί p-τιμή= 0,008< 0,05. Μετά την διαφήμιση η πώληση είναι στατιστικά καλύτερη.

3.2.2. Έλεγχος Wilcoxon για την *ισότητα των διαμέσων* (Wilcoxon two related samples signed rank test)

Ο έλεγχος του Wilcoxon γίνεται για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση $H_0 : M_1 = M_2$ για τις διαμέσους των τιμών ενός πληθυσμού πριν και μετά από μια παρέμβαση. Το πλεονέκτημα αυτού του ελέγχου σε σχέση με τον προσημικό έλεγχο είναι ότι υπολογίζει όπως και ο προσημικός έλεγχος το $x_{1i} - x_{2i}$ και επιπλέον υπολογίζει το ύψος των απόλυτων αποκλίσεων $| d_i | = | x_{1i} - x_{2i} |$. Λόγω αυτού όμως, η εφαρμογή του ελέγχου Wilcoxon γίνεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές.

Η διαδικασία που ακολουθείται για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση είναι πρώτα να υπολογίσουμε τις αποκλίσεις $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ καθώς και τις απόλυτες αποκλίσεις $|d_i| = |x_{1i} - x_{2i}|$. Μετά διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά τις απόλυτες αποκλίσεις και τις βαθμολογούμε με τάξεις 1, 2, 3,… Στην περίπτωση που υπάρχουν ίσες απόλυτες αποκλίσεις, θα τις βαθμολογήσουμε με τάξη ίση με το μέσο όρο των τάξεων που θα είχαν, αν είχαν ελάχιστη διαφορά. Σε άλλη περίπτωση που κάποια από τις απόλυτες αποκλίσεις είναι μηδέν, αυτές αγνοούνται και το δείγμα θα είναι $n^* < n$. Αθροίζουμε ξεχωριστά τις θετικές αποκλίσεις και τις αρνητικές. Το μικρότερο κατά απόλυτη τιμή από τα δύο αθροίσματα είναι η στατιστική Τ του Wilcoxon. Για την στατιστική Τ ισχύουν για τη μέση τιμή και την διασπορά τα εξής

$$m_{\mathrm{T}} = \frac{n(n+1)}{4} \quad \text{και} \quad s_{\mathrm{T}}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \qquad \textit{τύποι 3.10}$$

Α. Αν το δείγμα είναι $n < 50$, τότε αφού βρούμε όπως περιγράψαμε και πριν την στατιστική του Wilcoxon την ονομάζουμε T_0. Στην συνέχεια πηγαίνουμε σε πίνακες (Πίνακας 7 - παράρτημα) και μας δίνουν μια τιμή που την ονομάζουμε $\mathrm{T}_{\text{ΠΙΝ}}$ ανάλογα με τον έλεγχο που έχουμε (μονόπλευρο χωρίς να μας ενδιαφέρει η φορά ή δίπλευρο), την τιμή του n^* και το α. Θα απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση αν $\mathrm{T}_0 < \mathrm{T}_{\text{ΠΙΝ}}$.

Β. Αν το δείγμα είναι $n > 50$, και δεχθούμε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση, θα προσεγγίσουμε την στατιστική Τ με την $T \sim N(m_{\mathrm{T}}, s_{\mathrm{T}}^2)$. Τότε ο έλεγχος είτε είναι μονόπλευρος ή δίπλευρος γίνεται παραμετρικός με στατιστική ελέγχου την

$$\mathrm{A}_0 = \frac{\mathrm{T} - m_{\mathrm{T}}}{s_{\mathrm{T}}} \sim \mathrm{N}(0,1) \qquad \text{τύπος 3.11}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα εργοστάσιο παράγει ένα υλικό Α για να αυξήσει την αντοχή του προϊόντος παίρνει δείγμα από 8 δοκίμια και μετράει την αντοχή τους πριν και μετά την μετατροπή τους. Τα αποτελέσματα που παίρνει φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

ΑΝΤΟΧΗ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΜΙΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ 8 ΔΟΚΙΜΙΩΝ

ΠΡΙΝ	8,6	8,2	8,9	8,7	8,1	8,6	8,2	8,1

ΜΕΤΑ	7,9	8,8	9,2	8,7	8,0	8,2	8,9	7,9

Να ελεγχθεί με τον έλεγχο Wilcoxon σε α=0,05 αν η αντοχή των υλικών βελτιώθηκε με τις αλλαγές που διενεργήθηκαν.

ΛΥΣΗ

Ο έλεγχος που θα γίνει είναι να δούμε αν η μηδενική υπόθεση H_0: $M_1=M_2$ έναντι της H_1:$M_1<M_2$, όπου M_1 και M_2 είναι οι διάμεσοι για το δείγμα πριν και το δείγμα μετά τις μετατροπές. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα με τις διαφορές και τις απόλυτες διαφορές.

ΑΝΤΟΧΗ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ, ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΟΥΣ & ΟΙ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ

ΤΙΜΕΣ x_{1i}	ΤΙΜΕΣ x_{2i}	$d_i = x_{2i} - x_{1i}$	ΤΑΞΗ ΤΩΝ d_i	$\|d\|_+$	$\|d\|_-$
8,6	7,9	-0,7	6,5		6,5
8,2	8,8	+0,6	5	5	
8,9	9,2	+0,3	3	3	
8,7	8,7	0	…		
8,1	8,0	-0,1	1		1
8,6	8,2	-0,4	4		4
8,2	8,9	+0,7	6,5	6,5	
8,1	7,9	-0,2	2		2
ΑΘΡΟΙΣΜΑ				14,5	12,5

Το τελικό δείγμα μας είναι $n^* = 7$ με $|d|_+ = 14,5$ και $|d|_- = 12,5$.

Τότε $T = \min\{|d|_+, |d|_-\} = 12,5$ ακόμα από τους πίνακες βρίσκουμε $T_{ΠΙΝ}$=4 για α=0,05. Επειδή T=12,5>$T_{ΠΙΝ}$=4 αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση. Δηλαδή δεν έχουμε βελτίωση με τις αλλαγές που έγιναν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Σε μια εταιρεία επιλέξαμε ένα δείγμα 15 υπαλλήλων προκειμένου να καταγράψουμε τις επιδόσεις τους πριν και μετά από μια επιμόρφωση που τους έκαναν. Να ελέγξετε σε επίπεδο σημαντικότητας 5% αν υπάρχει στατιστική σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των υπαλλήλων πριν και μετά την επιμόρφωση

ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ

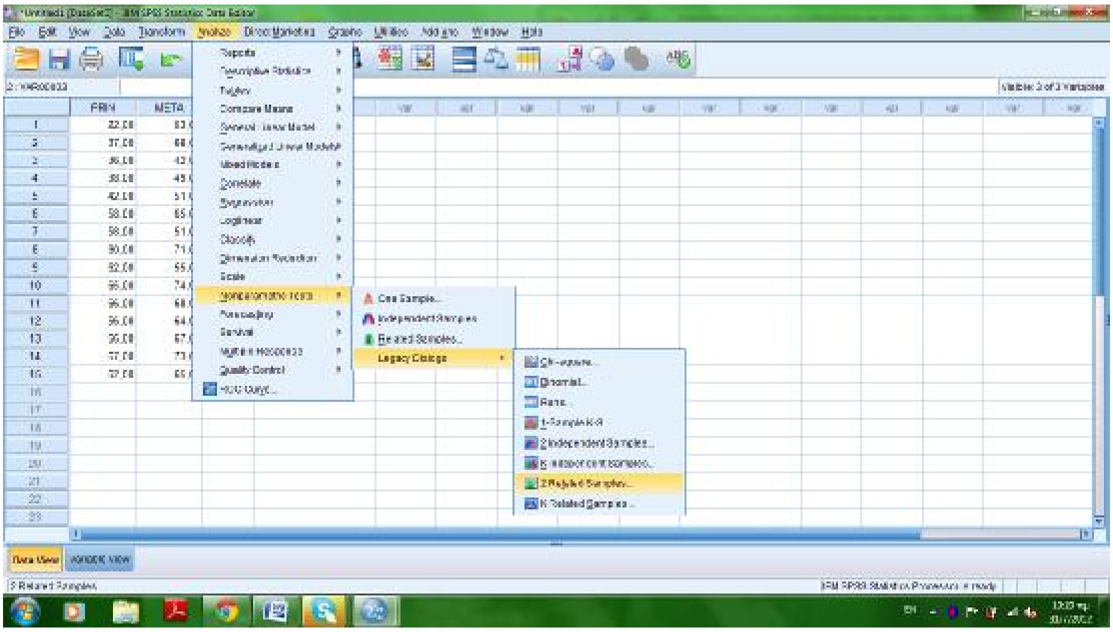
ΠΡΙΝ: 22 37 36 38 42 58 58 60 62 65 66 56 66 67 62

ΜΕΤΑ: 53 68 42 49 51 65 51 71 55 74 68 64 67 73 65

Πρόκειται για τις επιδόσεις των ίδιων υπαλλήλων δηλαδή έχουμε εξαρτημένα δείγματα.

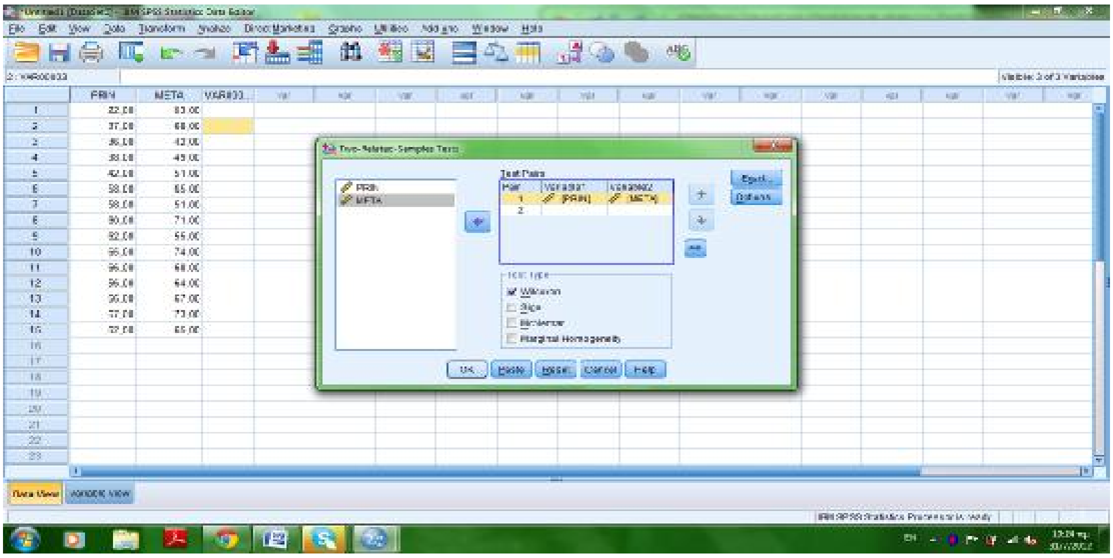
Φτιάχνουμε στο PASW STATISTICS 18 τις δύο στήλες με τις επιδόσεις των υπαλλήλων πριν και μετά την παρέμβαση με Label PRIN και META αντίστοιχα. Ακολουθούμε τα βήματα

Επιλέγουμε από το μενού Analyze-> Non Parametric Tests->Legacy Dialogs-> 2 Related samples.



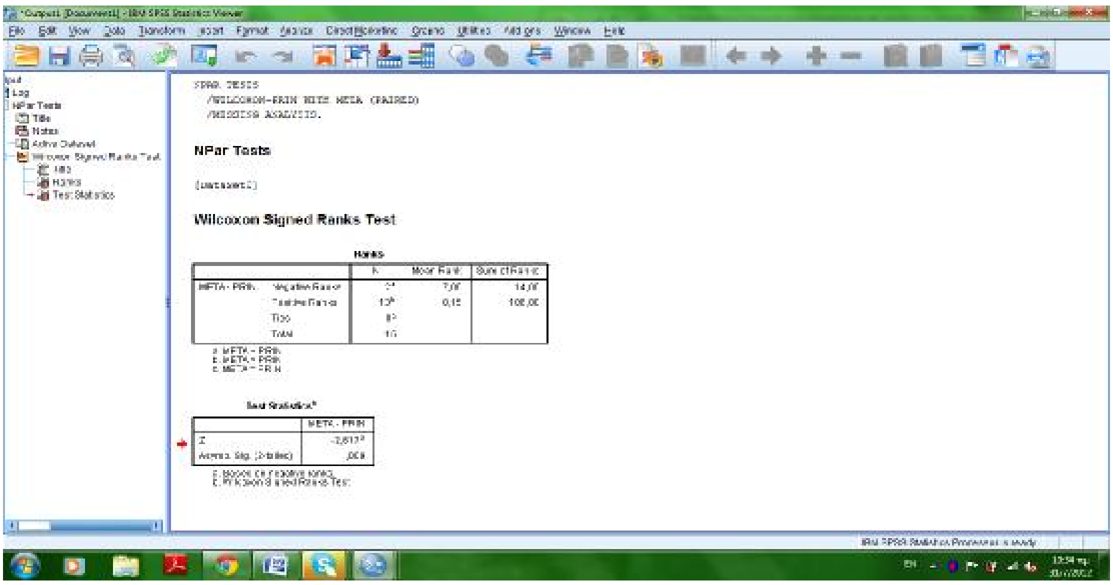
Εικόνα 49: Γραμμή για την επιλογή test δύο συσχετισμένων δειγμάτων

Προκύπτει ένα νέο παράθυρο διαλέγουμε τη μεταβλητή που καταγράφει το πριν (με Label PRIN) και τη χαρακτηρίζουμε ως Variable 1, μετά διαλέγουμε τη μεταβλητή που καταγράφει το μετά (με Label META) και τη χαρακτηρίζουμε ως Variable 2.Στο παράθυρο διαλόγου επιλέγουμε τον τύπο του ελέγχου που θέλουμε να διενεργηθεί, επιλέγουμε το πλαίσιο του Wilcoxon. Πατάμε το OK για να μας δώσουν τα αποτελέσματα.



Εικόνα 50: Επιλογή του Wilcoxon test και εισαγωγή δεδομένων για τη διενέργεια του test

<u>Ερμηνεία αποτελεσμάτων</u> Η εικόνα του αποτελέσματος είναι η ακόλουθη



Εικόνα 51: Απαντήσεις για Wilcoxon signed ranks test

Στον πίνακα Wilcoxon Signed Ranks Test δίνονται το πλήθος των αρνητικών και θετικών τάξεων των διαφορών πριν και μετά την επιμόρφωση. Διαπιστώνουμε ότι

$T^{-}=14$ και $T^{+}=106$. Άρα T=min (T $^{+}$, T $^{-}$)= 14,δηλαδή ο έλεγχος βασίζεται στις αρνητικές τάξεις.

Ο πίνακας Test Statistics μας δίνει την τιμή Z του στατιστικού Wilcoxon καθώς και την p-τιμή. Από την p-τιμή του στατιστικού τεστ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές πριν και μετά την επιμόρφωση, γιατί p-τιμή= 0,009< 0,05. Μετά την παρέμβαση η επίδοση είναι στατιστικά καλύτερη.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα δέκα ανθρώπων που έχουν ενοικιάσει αυτοκίνητο και από μια εταιρεία ενοικιάσεως αυτοκινήτων Α και Β, όταν Α είναι με τα παλιά αυτοκίνητα και Β με τα νέα αυτοκίνητα της εταιρείας και τους ζητάμε να βαθμολογήσουν τις υπηρεσίες και των δύο εταιρειών στην κλίμακα 1-10. Τα αποτελέσματα φαίνονται σε ακόλουθο πίνακα. Να ελέγξετε την υπόθεση ότι έχει βελτιωθεί η άποψη των πελατών για την εταιρεία σε α =0,05.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΕ ΕΝΟΙΚΙΑΣΜΕΝΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΑ ΣΕ ΠΑΛΙΑ & ΝΕΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΑ

άτομο	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Α	4	5	9	5	4	9	5	7	3	3
Β	7	6	6	7	5	8	4	6	5	6

<u>ΛΥΣΗ</u>

Φτιάχνουμε τον πίνακα με τις διαφορές

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΩΝ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΩΝ ΤΩΝ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΩΝ

ΑΤΟΜΟ	Α	Β	d_i	$\|d_i\|$	ΘΕΣΗ	$\|d\|_+$	$\|d\|_-$
1	4	7	-3	3	9		9
2	5	6	-1	1	3		3
3	9	6	3	3	9	9	
4	5	7	-2	2	6,5		6,5

5	4	5	-1	1	3		3
6	9	8	1	1	3	3	
7	5	4	1	1	3	3	
8	7	6	1	1	3	3	
9	3	5	-2	2	6,5		6,5
10	3	6	-3	3	9		9
ΣΥΝΟΛΟ						18	37

Ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση H_0:M_1=M_2 έναντι της εναλλακτικής H_1:M_1<M_2. Το δείγμα έχει $n^* = n = 10$ με $|d|_+ = 18$ και $|d|_- = 37$.

Τότε $T = \min\{|d|_+, |d|_-\} = 18$ ακόμα από τους πίνακες για μονόπλευρο έλεγχο υποθέσεων, σε α=0,05 βρίσκουμε $T_{ΠΙΝ}$=14 για α=0,05. Επειδή T=18>$T_{ΠΙΝ}$=14 αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση. Δηλαδή δεν έχουμε βελτίωση με τις αλλαγές που έγιναν.

3.2.3 Έλεγχος Mc Nemar για τη διαφοροποίηση της άποψης του πληθυσμού μετά από κάποια παρέμβαση

Όπως αναφέραμε στην αρχή της ενότητας, ο έλεγχος Mc Nemar διενεργείται για πληθυσμό που τα μέλη μοιράζονται σε δύο ποσοτικές κατηγορίες (ΝΑΙ-ΟΧΙ) και ελέγχει αν μια παρέμβαση, όπως ενημέρωση, εκπαίδευση κτλ. διαφοροποιεί σημαντικά την αναλογική του σύνθεση.

Η μηδενική υπόθεση είναι H_0: δεν υπήρξε ουσιαστική μεταστροφή του πληθυσμού μετά την παρέμβαση. Επιλέγουμε ένα δείγμα από τον πληθυσμό που συμμετείχαν στην παρέμβαση με n πλήθος. Στη συνέχεια καταγράφουμε την επόμενη διάταξη τους αριθμούς

Α. αυτοί που είχαν θετική άποψη πριν την παρέμβαση, ενώ μετά αρνητική.

Β. αυτοί που είχαν θετική άποψη πριν την παρέμβαση και μετά θετική.

Γ. αυτοί που είχαν αρνητική άποψη πριν την παρέμβαση και μετά αρνητική.

Δ. αυτοί που είχαν αρνητική άποψη πριν την παρέμβαση, ενώ μετά θετική.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΑΠΟΨΗΣ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΜΙΑ ΔΟΚΙΜΗ

ΜΕΤΑ

ΠΡΙΝ		-	+
	+	Α	Β
	-	Γ	Δ

Προφανώς, Α + Β+ Γ+ Δ = n. Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, αναμένουμε οι μισοί από τους Α+Δ που άλλαξαν γνώμη να πήγαν από το + στο -, ενώ οι άλλοι μισοί πήγαν από το – στο +. Τότε οι θεωρητικές συχνότητες που αντιστοιχούν στις εμπειρικές Α και Δ είναι $\frac{\mathrm{A}+\Delta}{2}$ και $\frac{\mathrm{A}+\Delta}{2}$, αγνοώντας τα Β και Γ μέλη του δείγματος που δεν άλλαξαν άποψη.

Ουσιαστικά ο έλεγχος εαυτός είναι έλεγχος καλής προσαρμογής των δειγματικών δεδομένων f_1=Α και f_2=Δ στην κατανομή με θεωρητικές συχνότητες $q_1 = \frac{\mathrm{A}+\Delta}{2}$ και $q_2 = \frac{\mathrm{A}+\Delta}{2}$. Άρα αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, η στατιστική είναι

$$\mathrm{X}^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - q_i)^2}{q_i} \sim X_{k-m-1}^2 \qquad \textit{τύπος 3.12}$$

Με κ=2 οι κατηγορίες Α και Δ που άλλαξαν άποψη και m =0 γιατί δεν εκτιμήσαμε καμία παράμετρο. Τότε η στατιστική γίνεται

$$\mathrm{X}^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - q_i)^2}{q_i} = \frac{(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{A}+\Delta}{2})^2}{\frac{\mathrm{A}+\Delta}{2}} + \frac{(\Delta - \frac{\mathrm{A}+\Delta}{2})^2}{\frac{\mathrm{A}+\Delta}{2}} \sim X_1^2 \qquad \textit{τύπος 3.13}$$

Δηλαδή

$$X^2 = \frac{(A-\Delta)^2}{A+\Delta} \sim X_1^2$$

Επειδή η στατιστική X^2 είναι διακριτή, γιατί τα Α και Δ είναι ακέραιοι και X_1^2 συνεχής, διορθώνουμε κατά Yates την X^2στην

$$X^2 = \frac{(A-\Delta)^2}{A+\Delta} \sim X_1^2 \qquad \textit{τύπος 3.14}$$

Αν η τιμή $X_0^2 > X_{1,a}^2$, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε α=0,05 τότε η παρέμβαση έχει ουσιαστική επίδραση στον πληθυσμό.

ΑΣΚΗΣΗ

Ένα δείγμα 15 καταναλωτών ρωτήθηκε αν ήταν υπέρ ή κατά να αγοράσουν ένα προϊόν πριν και μετά από μια επίδειξή του στο κοινό. Τα αποτελέσματα της έρευνας εμφανίζονται στον επόμενο πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΟΙΝΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΑΠΟΨΗΣ ΜΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΡΟΙΟΝΤΟΣ

άτομο	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Πριν	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+
Μετά	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+

Όπου (+) είναι υπέρ να αγοράσουν το προϊόν ενώ (–) κατά. Σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%, μπορούμε να πούμε ότι υπήρξε αλλαγή στην τάση του κοινού για αγορά του προϊόντος;

ΛΥΣΗ

Ο έλεγχος που θα διενεργήσουμε εδώ αφορά συσχετισμένα δείγματα, αφού αναφερόμαστε στη γνώμη των ίδιων ατόμων πριν και μετά τη επίδειξη ενός προϊόντος και τα μέλη μοιράζονται σε δύο ποσοτικές κατηγορίες (ΥΠΕΡ-ΚΑΤΑ). Η μηδενική υπόθεση είναι H_0: δεν υπήρξε ουσιαστική μεταστροφή του πληθυσμού μετά την επίδειξη. Φτιάχνουμε έναν απλούστερο πίνακα που δείχνει τις συχνότητες με τις γνώμες πριν και μετά την επίδειξη του προϊόντος.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΑΠΟΨΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΓΟΡΑ ΠΡΟΙΟΝΤΟΣ ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΠΙΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΡΟΙΟΝΤΟΣ

		ΜΕΤΑ	
		+	-
ΠΡΙΝ	+	4	3
	-	4	4

Σύμφωνα με τη θεωρία και τον προηγούμενο πίνακα A=3, B=4, C=4 και D= 4.

Υπολογίζουμε την ποσότητα $X^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D} = \frac{(3-4)^2}{3+4} = 0{,}143$.

Ακόμα από τους πίνακες βρίσκουμε ότι για α=0,05 το $X^2_{1,0,05} = 3{,}84$.

Επομένως αφού $X_0^2 > X^2_{1,0,05}$ τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α= 0,05 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει αλλαγή στην τάση του κοινού μετά την επίδειξη του προϊόντος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Μια εταιρεία προκειμένου να εξετάσει αν η αλλαγή διοίκησης της απέδρασε θετικά ή αρνητικά στους υπαλλήλους της εταιρείας. Επιλέγει 100 άτομα στα οποία ζήτησε τη γνώμη τους για την διοίκηση με την παλιά διοίκηση και μετά από την αλλαγή διοικήσεως ζητά την γνώμη τους πάλι. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον επόμενο πίνακα

ΑΠΟΨΕΙΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΣΕ ΜΙΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

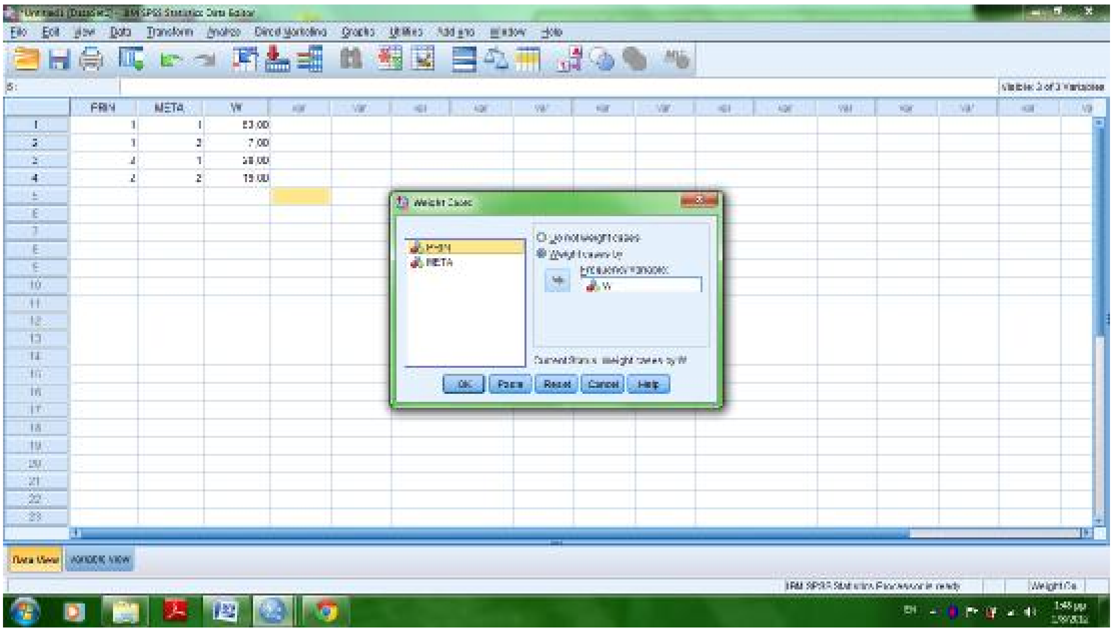
Μετά την αλλαγή διοίκησης

Πριν την αλλαγή διοίκησης		ΘΕΤΙΚΗ	ΑΡΝΗΤΙΚΗ	ΣΥΝΟΛΟ
	ΘΕΤΙΚΗ	53	7	60
	ΑΡΝΗΤΙΚΗ	28	12	40
	ΣΥΝΟΛΟ	81	19	100

Η εταιρεία θέλει να εξετάσει με βάση τα δεδομένα αν η αλλαγή διοίκησης άλλαξε την άποψη των υπαλλήλων για την εταιρεία.

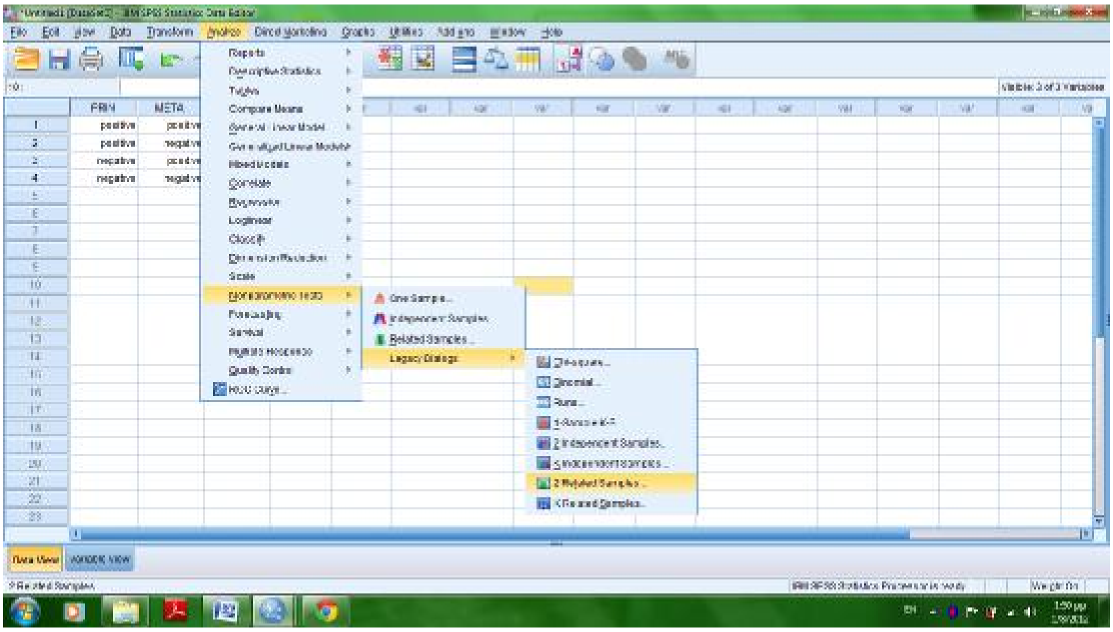
Πρόκειται για έλεγχο πριν και μετά την αλλαγή διοίκησης. Εισάγουμε δύο στήλες, η μια με label PRIN και η άλλη με label META. Στην τιμή 1 αντιστοιχεί το positive(θετική) και στην τιμή 2 το negative(αρνητική). Τις μεταβλητές τις έχουμε καταχωρήσει ως numerical και έχουμε αντιστοιχίσει τις τιμές 1 και 2 ως positive και negative. Φτιάχνουμε και μια τρίτη στήλη w, όπου είναι οι συχνότητες εμφάνισης κάθε κατηγορίας.

Για να μετρήσει τις κατηγορίες το πρόγραμμα στο μενού επιλέγουμε data->weight cases και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου. Στο παράθυρο αυτό επιλέγουμε weight by cases και στο Frequency Variable εισάγουμε το W.Πατάμε OK.



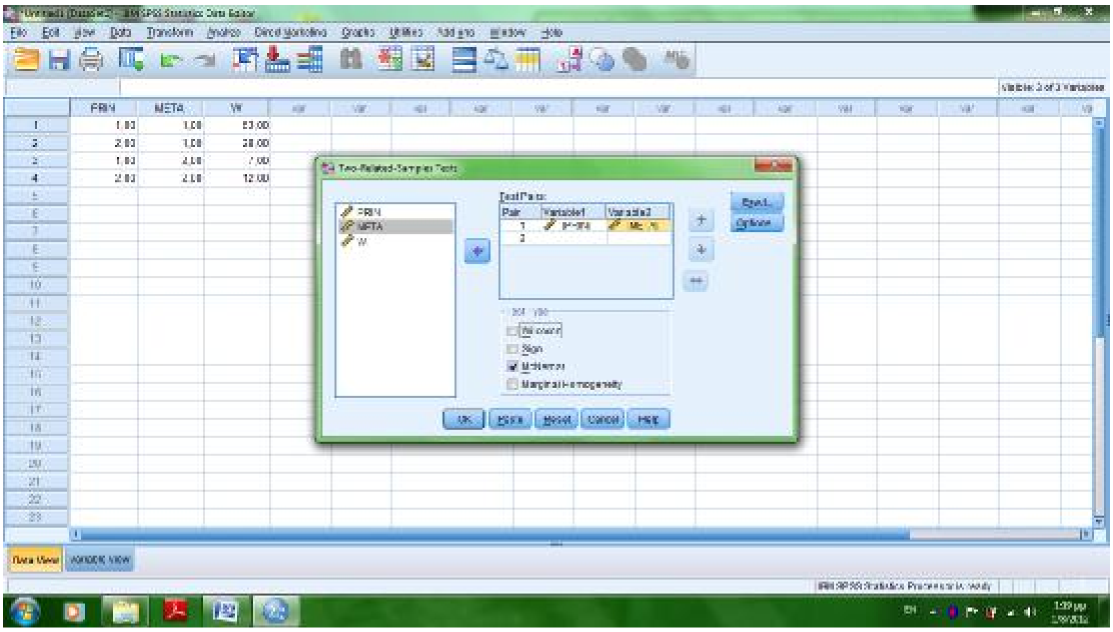
Εικόνα 52: Πίνακας για να επιλέξουμε να αριθμήσει το PASW STATISTICS 18 το πλήθος των κατηγοριών που υπάρχουν στα δεδομένα

Ανοίγουμε το μενού και επιλέγουμε διαδοχικά Analyze->Nonparametric Test->Legacy Dialogs-> 2 Related Samples.



Εικόνα 53: Γραμμή για την επιλογή test 2 συσχετισμένων δειγμάτων

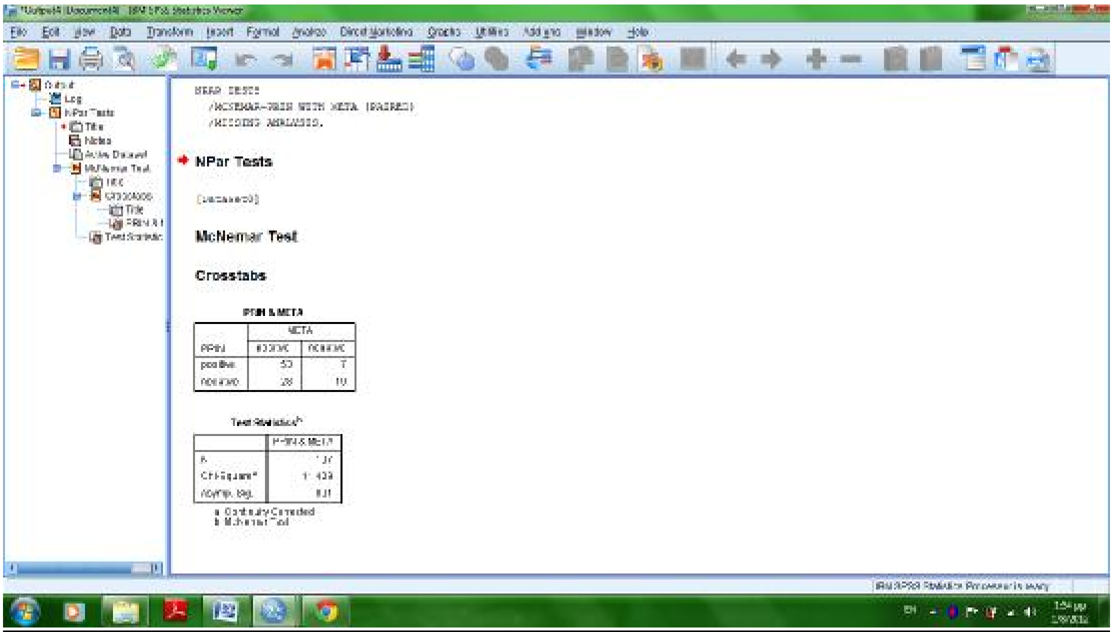
Πατάμε OK και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου επιλέγουμε ως Variable 1 το PRIN και ως Variable 2 το META. Στο μενού εμφανίζεται και το Test Type, εκεί επιλέγουμε το Mc Nemar και πατάμε OK για να εμφανιστούν τα αποτελέσματα.



Εικόνα 54: Πίνακας για την επιλογή του McNemar test και εισαγωγή των δεδομένων για τη διενέργεια του test

Ερμηνεία αποτελεσμάτων

Το αποτέλεσμα που μας δίνει το πρόγραμμα φαίνεται στην επόμενη εικόνα



Εικόνα 55: Απαντήσεις για το McNemar test

Ο πίνακας PRIN & META παρουσιάζει τις συχνότητες των περιπτώσεων στα τέσσερα κελιά. Π.χ. το πλήθος που αρχικά είχε αρνητική και μετά θετική άποψη για την εταιρεία είναι 28.

Ο πίνακας TEST STATISTICS παρουσιάζει το συνολικό πλήθος των περιπτώσεων (100), την τιμή του στατιστικού X^2 και το επίπεδο σημαντικότητας. Αν το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας p- τιμή είναι 0,01 μικρότερο από 0,05 έλεγχος είναι σημαντικός δηλαδή αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ Κ-ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

4.1.1. *Έλεγχος Kruskal- Wallis για την ισότητα διαμέσων*

Ο έλεγχος Kruskal-Wallis *αποτελεί την γενίκευση του ελέγχου για δύο δείγματα των* Mann-Whitney.*Ο έλεγχος αυτός διενεργείται για περισσότερα από 2 ανεξάρτητα δείγματα κ, έστω για τις τιμές* $n_1, n_2, \ldots, n_\kappa$ *μιας μεταβλητής Χ, οι οποίες είτε προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό, είτε από κ διαφορετικούς πληθυσμούς με ίδιες μορφές και διακυμάνσεις, αλλά με διαφορετικές διαμέσους όπου δεν γνωρίζουμε τις κατανομές τους. Ο έλεγχος διενεργείται όταν η μεταβλητή είναι ποιοτική ιεραρχική ή ποσοτική. Αντιστοιχεί στον παραμετρικό έλεγχο ισότητας των μέσων* $\kappa > 2$ *ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών που γίνεται με ανάλυση διακύμανσης ως προς έναν παράγοντα και η η ισχύς του είναι περίπου ίση με την ισχύ του παράγοντα αυτού.*

Η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι να διατάξουμε κατά ενιαία αύξουσα σειρά τις τιμές των κ δειγμάτων και να τις βαθμολογήσουμε με τις τάξεις τους. Στην περίπτωση που υπάρχουν ίδιες τάξεις αυτές βαθμολογούνται με το

Ο έλεγχος Kruskal-Wallis είναι μη παραμετρική διαδικασία που εφαρμόζεται στην σύγκριση τριών ή περισσότερων πληθυσμών. Ελέγχουμε την H_0: τα κ δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό έναντι της H_1: τουλάχιστον ένα δείγμα προέρχεται από διαφορετικό πληθυσμό.

Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση $H_0 : M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, περιμένουμε οι μέσοι όροι $\frac{R_i}{n_i}$ των τάξεων όλων των δειγμάτων να είναι περίπου ίσοι. Αν η μηδενική υπόθεση ισχύει για κάθε $n_i > 5$, αποδεικνύεται ότι

- Αν δεν υπάρχουν ίδιες τάξεις στην ενιαία σειρά η στατιστική που χρησιμοποιείται είναι

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(n+1) \sim X_{k-1}^2 \qquad \textit{τύπος 4.1}$$

- Αν στο i-δείγμα υπάρχουν r_i μέσοι όροι ίδιων τάξεων, θα κάνουμε διόρθωση στην στατιστική H και έχουμε την

$$H_r = \frac{H}{1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}(r_i^3 - r_i)}{n^3 - n}} \sim X_{k-1}^2 \qquad \text{τύπος 4.2}$$

Η διαίρεση της H με τον προηγούμενο παρανομαστή αυξάνει την τιμή της στατιστικής. Απορρίπτω την μηδενική υπόθεση όταν $H > X_{k-1,a}^2$ και τότε δεν χρειάζεται ο υπολογισμός της H_r.

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε 3 δείγματα και $n_i \le 5$, υπάρχει ειδικός πίνακας μη παραμετρικών ελέγχων που δίνει το επίπεδο σημαντικότητας α για το οποίο απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση σε συγκεκριμένο συνδυασμό μεγεθών των δειγμάτων n_1, n_2, n_3. Παραθέτουμε ένα μέρος του πίνακα στην περίπτωση τριών πληθυσμών μεγέθους 5, το καθένα.

Παρατηρούμε ότι αν η τιμή $H = 5{,}500 \in [5{,}780, 7{,}980)$ η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για α=0,1, αλλά για α=0,05 γίνεται αποδεκτή. Αντίστοιχα η $H = 6{,}100 \in [5{,}780, 7{,}980)$ απορρίπτεται σε α=0,049 και σε α=0,05, αλλά γίνεται αποδεκτή σε α=0,01.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ 3 ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕ $n_i \le 5$

n_1	n_2	n_3	$H_{ΠΙΝ}$	Α
5	5	5	8,000	0,009
5	5	5	7,980	0,010
5	5	5	5,780	0,049
5	5	5	5,660	0,051
5	5	5	4,560	0,100

5	5	5	4,500	0,102

ΑΣΚΗΣΗ

Σε 4 ποικιλίες ενός φυτού μετρήθηκαν οι τιμές ενός αγρονομικού χαρακτηριστικού. Τα στοιχεία δίνονται στον ακόλουθο πίνακα. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 αν οι ποικιλίες διαφέρουν σημαντικά ως προς το χαρακτηριστικό που μετρήθηκαν.

ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΣΕ 4 ΠΟΙΚΙΛΙΕΣ ΦΥΤΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ

Π1	Π2	Π3	Π4
65	75	59	94
87	69	78	89
73	83	67	80
79	81	62	88

ΛΥΣΗ

Διατάσσουμε τις τιμές κατά αύξουσα σειρά και βρίσκουμε τις τάξεις τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ

59	62	65	67	69	73	75	78	79	80	81	83	87	88	89	94
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Γράφω πάλι τον αρχικό πίνακα γράφοντας τις τάξεις των τιμών καθώς και τα αθροίσματα R_i.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΜΕΝΕΣ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΦΥΤΩΝ

Π1	ΤΑΞΕΙΣ	Π2	ΤΑΞΕΙΣ	Π3	ΤΑΞΕΙΣ	Π4	ΤΑΞΕΙΣ
65	3	75	7	59	1	94	16
87	13	69	5	78	8	89	15

73	6	83	12	67	4	80	10
79	9	81	11	62	2	88	14
Αθροίσματα	$R_1 = 31$		$R_2 = 35$		$R_3 = 15$		$R_4 = 55$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον στατιστικό

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} (\frac{R_i^2}{n_i}) - 3(n+1) = \frac{12}{16 \cdot 17} \left(\frac{31^2 + 35^2 + 15^2 + 55^2}{4} \right) - 3 \cdot 17 = 8,96$$

Η κρίσιμη τιμή της X^2 κατανομής σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05 για n=4-1=3 βαθμούς ελευθερίας είναι 7,81. Τότε $8,96 > 7,81$, δηλαδή έχουμε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, άρα υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές των 4 ποικιλιών (τουλάχιστον δύο διαφέρουν).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

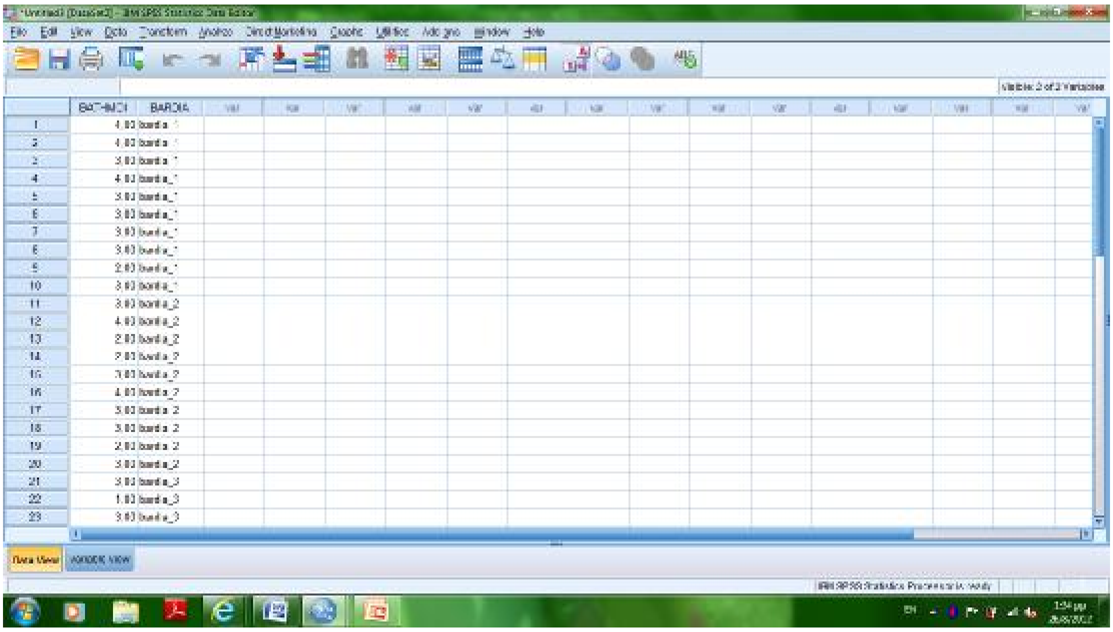
Ένα εστιατόριο ταχείας εξυπηρέτησης θέλει να συγκρίνει τους υπαλλήλους του ως προς την ταχύτητα εξυπηρέτησης για τους πελάτες. Το εστιατόριο χωρίζει σε τρεις βάρδιες το προσωπικό και επιλέγει τυχαία 10 πελάτες σε κάθε βάρδια, ζητώντας τους να βαθμολογήσουν την ταχύτητα που εξυπηρετήθηκαν με μια κλίμακα 1-4 (1= κακή, 4= πολύ καλή). Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει διαφορά στην ταχύτητα εξυπηρέτησης μεταξύ των βαρδιών σε α=0,05. Ο πίνακας με τις απαντήσεις που δόθηκαν φαίνεται παρακάτω.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΕΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟΥΣ ΥΠΑΛΛΗΛΟΥΣ ΑΝΑ ΒΑΡΔΙΑ

Βάρδιες										
0.00-8.00	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3
8.00-4.00	3	4	2	2	3	4	3	3	2	3
4.00-12.00	3	1	3	2	1	3	4	2	4	1

Θέλουμε να εξετάσουμε αν H_0: υπάρχει διαφορά στην ταχύτητα εξυπηρέτησης των πελατών ανάλογα με την βάρδια των υπαλλήλων.

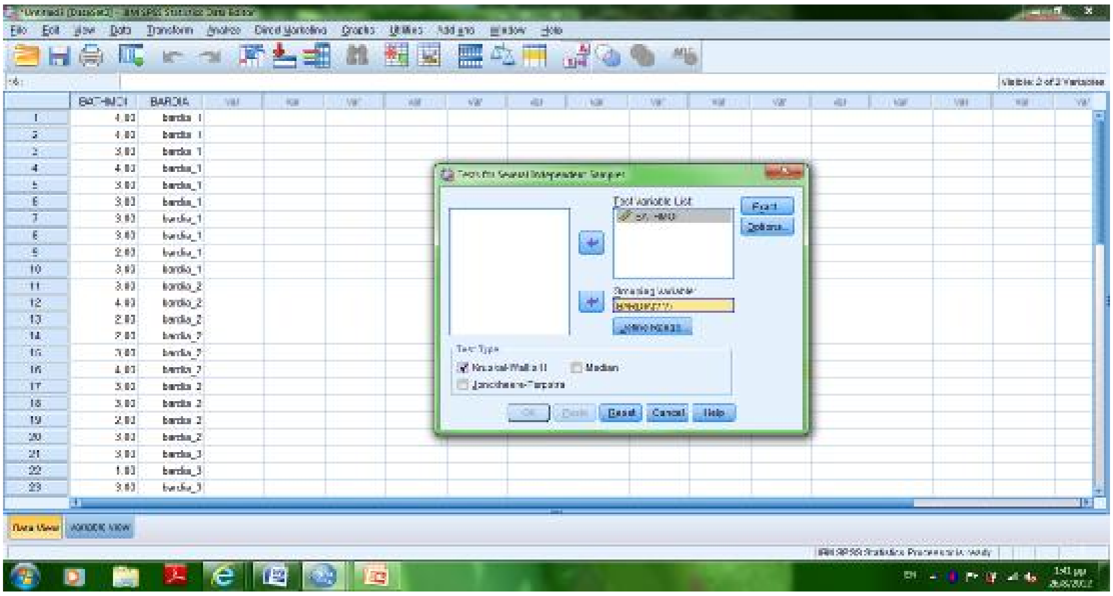
Εισάγουμε τα δεδομένα σε στήλες του PASW STATISTICS 18, στην πρώτη στήλη γράφουμε τα δεδομένα με τις βαθμολογίες που έβαλαν οι πελάτες και στην δεύτερη γράφουμε τις βάρδιες των αντίστοιχων βαθμολογιών, συμβολίζοντας την βάρδια 0.00-8.00 με label bardia_1,την 8.00-4.00 με label bardia_2 και την 4.00-12.00 με label bardia_3.



Εικόνα 56: Εισαγωγή δεδομένων για τη διενέργεια του Kruskal-Wallis test

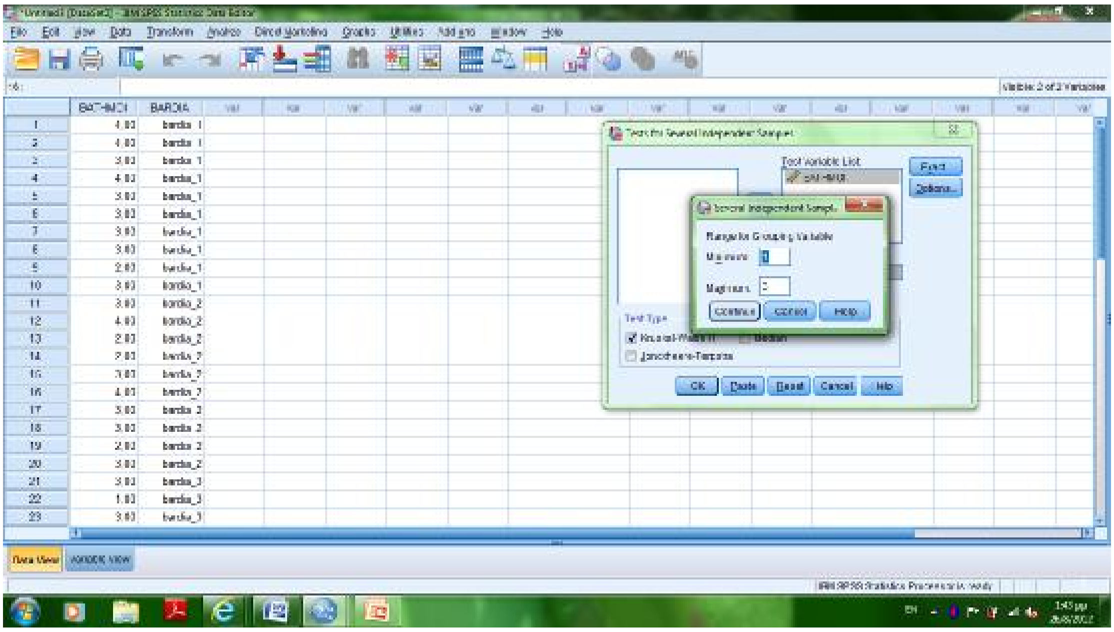
Για να τρέξουμε το τεστ πατάμε διαδοχικά Analyze-> Nonparametric Tests -> Legacy Dialogs->K-Independent Samples και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου.

Στο παράθυρο διαλόγου βάζουμε ως Test Variable List τους BATHMOI και Grouping Variable την BARDDIA, η διαδικασία γίνεται με τα βελάκια αφού και οι δύο μεταβλητές εμφανίζονται αρχικά στο λευκό κουτί και τις μετακινούμε όπου θέλουμε.



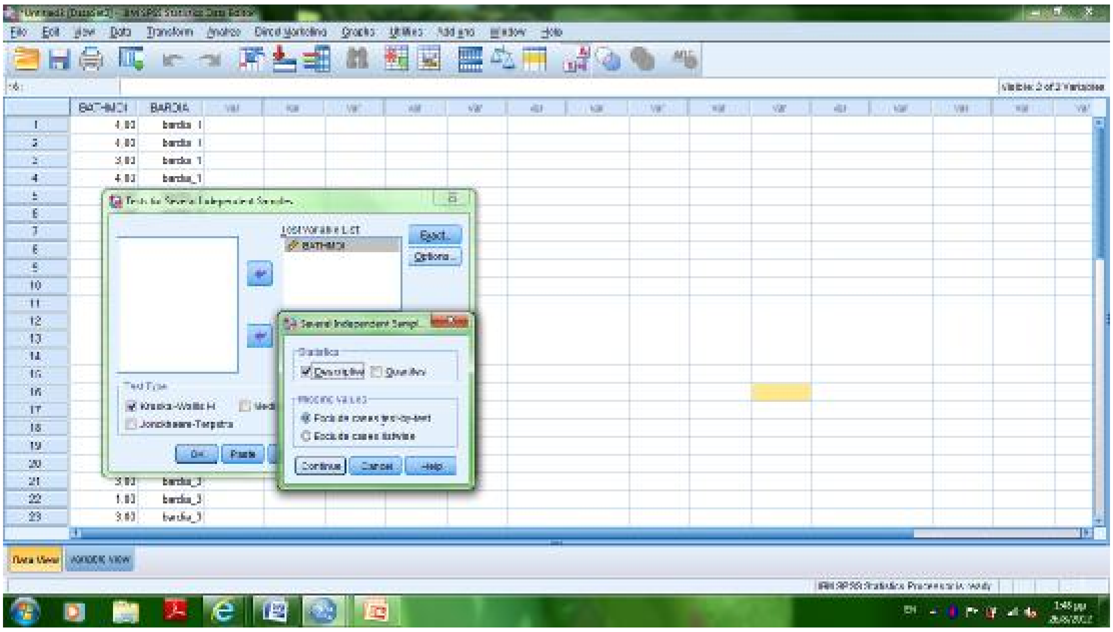
Εικόνα 57: Πίνακας για την επιλογή Kruskal-Wallis test και εισαγωγή δεδομένων για τη διενέργεια του test

Επιλέγουμε το Define range και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου, όπου γράφουμε την τιμή 1 στο minimum κουτί και το 3 στο maximum. Οι τιμές καθορίζουν το εύρος των τιμών για το πλήθος των κατηγοριών που έχουμε (οι τρεις βάρδιες). Πατάμε Continue.



Εικόνα 58: Καθορισμός του πλήθους των κατηγοριών που έχουμε στα δεδομένα

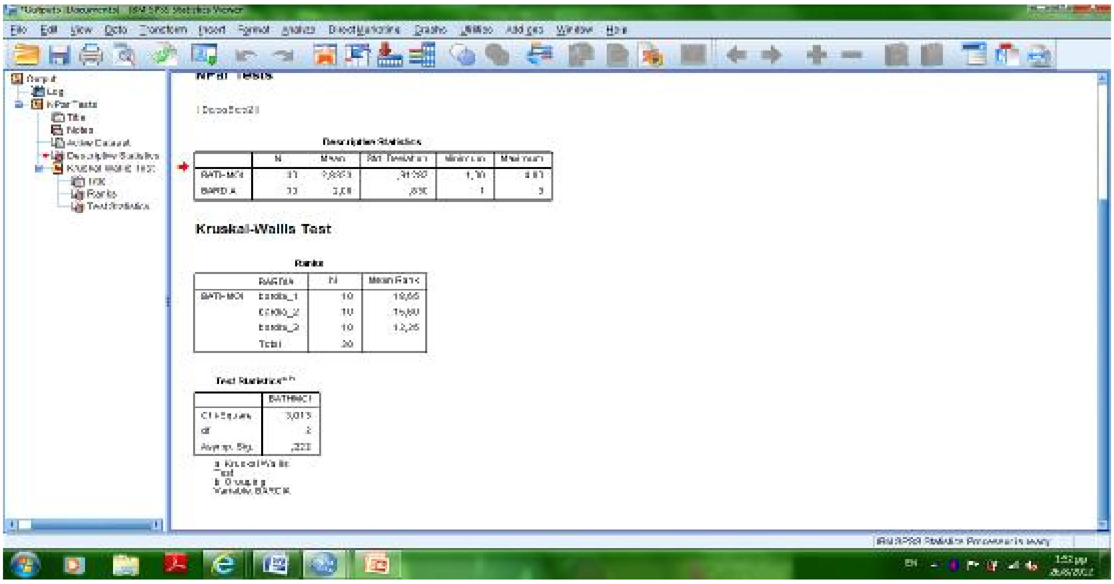
Εμφανίζεται το προηγούμενο παράθυρο διαλόγου, πατάμε το options και εκεί επιλέγουμε από το statistics το Descriptive και από το Missing Values το exclude cases test-by-test, στη συνέχεια Continue.



Εικόνα 59: Πίνακας για την επιλογή παραμέτρων του test

Εμφανίζεται το προηγούμενο παράθυρο διαλόγου και εκεί επιλέγω στο Test Type Kruskal-Wallis H και πατάμε OK για να ανοίξουν τα αποτελέσματα του τεστ.

Ερμηνεία αποτελεσμάτων



Εικόνα 60: Απαντήσεις στο Kruskal-Wallis test

Ο πρώτος πίνακας, Descriptive Statistics, μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το δείγμα όπως το πλήθος κάθε στήλης, το μέσο όρο, τη διασπορά καθώς και την μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Ο δεύτερος πίνακας, Ranks, μας δίνει το πλήθος κάθε ομάδας-βάρδιας και την μέση τάξη.

Ο τελευταίος πίνακας Test Statistics μας δίνει την στατιστική για δύο βαθμούς ελευθερίας και το επίπεδο εμπιστοσύνης, φαίνεται οτι $H_2 = 3,013,\ p = 0,222$.

Αφού $p = 0,222 > 0,05$ αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση, δηλαδή ανάλογα με τη βάρδια των υπαλλήλων διαφέρει η ταχύτητα εξυπηρέτησης των πελατών.

4.1.2 <u>Έλεγχος για την ισότητα k αναλογιών</u>

Ο έλεγχος αναφέρεται σε κ ανεξάρτητους πληθυσμούς, με $k \geq 2$, όπου από κάθε πληθυσμό επιλέγουμε δείγμα μεγέθους $n_{1,} n_2, .., n_k$. Στο δείγμα του i- πληθυσμού βρέθηκαν n_{i1} μέλη με μια ιδιότητα (ΝΑΙ) και n_{i2} μέλη τα οποία δεν έχουν την ιδιότητα (ΟΧΙ). Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι αναλογίες p_i των 'ΝΑΙ' είναι ίσες σε όλους τους πληθυσμούς, δηλαδή την $\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = \ldots = p_k$ έναντι της εναλλακτικής H_1: τουλάχιστον μία από τις p_i διαφέρει από τις υπόλοιπες. Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης είναι ουσιαστικά έλεγχος ανεξαρτησίας της μεταβλητής Χ με r = 2 τιμές ΝΑΙ ή ΟΧΙ της Υ, που έχει τιμές τους κ πληθυσμούς.

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα ως εξής

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΝΑΙ-ΟΧΙ Κ-ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Χ	Υ	1ος πληθυσμός	2ος πληθυσμός	….	κος πληθυσμός	n_{i0}
ΝΑΙ		n_{11}	n_{12}		n_{1k}	n_{10}

ΟΧΙ	n_{21}	n_{22}		n_{2k}	n_{20}
n_{0j}	n_{01}	n_{02}		n_{0k}	n

Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, ισχύει

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{(n_{ij}-\theta_{ij})^2}{\theta_{ij}} \sim X^2_{(r-1)(\kappa-1)} \quad \textit{τύπος 4.3}$$

Όπου αν r=2 ο προηγούμενος τύπος θα είναι

$$\mathrm{X}^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij}-q_{ij})^2}{q_{ij}} \sim X^2_{k-1} \text{ όπου } q_{ij} = \frac{n_{i0} \cdot n_{oj}}{n}$$

Ο έλεγχος μπορεί να διενεργηθεί χωρίς να υπολογίσουμε τις θ_{ij} μέσω της

$$\mathrm{T} > w_{1-a} \quad \textit{τύπος 4.4}$$

Η μηδενική υπόθεση σε α=0,05 απορρίπτεται αν $\mathrm{X}_0^2 > \mathrm{X}_{k-1,a}^2$

ΑΣΚΗΣΗ

Σε μια περιοχή θέλουμε να ελέγξουμε αν η άποψη σχετικά με μια απόφαση του δημοτικού συμβουλίου επηρεάζεται από την ηλικία των πολιτών. Πήραμε δείγμα 25 ατόμων στην ηλικία [20,35), 30 άτομα [35,50) και 35 άτομα στην ηλικία [50,70]. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα. Να ελεγχθεί σε α=0,05 αν η αναλογία όσων είναι υπέρ του νομοσχεδίου είναι ανεξάρτητη της ηλικιακής ομάδας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΗΜΟΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΨΗ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΕΝΑ ΝΟΜΟΣΧΕΔΙΟ

	[20,35)	[35,50)	[50,70]	n_{i0}
ΥΠΕΡ	15	12	17	44
ΚΑΤΑ	10	18	18	46
n_{0j}	25	30	35	90

ΛΥΣΗ

Η μηδενική υπόθεση H_0:η αναλογία όσων είναι υπέρ του νομοσχεδίου δεν επηρεάζεται από την ηλικιακή ομάδα.

Οι κ=3 ανεξάρτητοι πληθυσμοί χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε την στατιστική

$$X^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{n_{ij}^2}{n_{i0}\cdot n_{0j}} - 1 = 90\cdot\left(\frac{15^2}{44\cdot 25}+\frac{10^2}{46\cdot 25}+\frac{12^2}{30\cdot 44}+\frac{18^2}{46\cdot 30}+\frac{17^2}{44\cdot 35}+\frac{18^2}{35\cdot 49}-1\right)=1,305$$

Η στατιστική της $X^2_{2,0,05} = 5,991 > 1,305$ τότε η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεκτή, δηλαδή η άποψη για το νομοσχέδιο είναι ανεξάρτητη της ηλικιακής ομάδας.

I. Κ- ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΕΝΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

4.2.1 Το κριτήριο Friedman

Θέλουμε να εξετάσουμε την μηδενική υπόθεση H_0:τα k δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό, έναντι της εναλλακτικής H_1: τουλάχιστον 2 από τα k δείγματα προέρχονται από διαφορετικό πληθυσμό. Αν k είναι το πλήθος των δειγμάτων που θέλουμε να εξετάσουμε αν προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό, n είναι το μέγεθος των δειγμάτων, αυτό δηλαδή που αναφέρεται σε όλα τα δείγματα και επιπλέον για καθεμία από τις n περιπτώσεις, οι k μεταβλητές ταξινομούνται και τις βαθμολογούμε σε τάξεις και σε περίπτωση ισοβαθμίας βάζουμε την μέση τιμή τους. Για κάθε από τις κ μεταβλητές, υπολογίζουμε το άθροισμα των περιπτώσεων το οποίο ονομάζουμε R_i. Τότε η στατιστική του τεστ που χρησιμοποιούμε είναι ίση με

$$X^2 = \frac{12}{nk(k+1)}\sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1) \quad \textit{τύπος 4.5}$$

Για να απορρίψουμε ή να αποδεχθούμε την μηδενική υπόθεση χρησιμοποιούμε στατιστικούς πίνακες ανάλογα με την περίπτωση

- Αν $X^2 > F_{n,k,a}$ για k=3 και n=2,3,…,9 και για k=4 και n=2,3,4.
- Αν $X^2 > X^2_{k-1,a}$, για τις άλλες περιπτώσεις των τιμών k και n, αυτό συμβαίνει γιατί η ασυμπτωτική κατανομή της είναι η X^2_{k-1}.

ΑΣΚΗΣΗ

Τρία διαφορετικά λιπάσματα A, B, C συγκρίθηκαν για την απόδοση τους σε 10 χωράφια των 3 στρεμμάτων το καθένα. Κάθε χωράφι χωρίστηκε σε 3 ίσα μέρη και τυχαία βάλαμε στο ένα μέρος το λίπασμα Α, στο άλλο μέρος το Β και στο τρίτο το C. Η συγκομιδή για τα τρία μέρη είναι η επόμενη

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΣΥΓΚΟΜΙΔΗ ΧΩΡΑΦΙΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ 3 ΛΙΠΑΣΜΑΤΩΝ

ΧΩΡΑΦΙΑ	1	2	3	4	5	6	7	8
A	312	333	356	316	310	352	389	313
B	346	372	392	351	330	364	375	315
C	446	315	350	412	299	305	405	400

Σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05, να εξετάσετε αν υπάρχει σημαντική διαφορά στην απόδοση των 3 λιπασμάτων.

ΛΥΣΗ

Θέλουμε να διενεργήσουμε έναν έλεγχο υποθέσεων με μηδενική υπόθεση H_o : τα τρία λιπάσματα είναι ισοδύναμα, έναντι της εναλλακτικής H_1: τα τρία λιπάσματα δεν είναι ισοδύναμα.

Κάθε χωράφι θεωρείται μια ομάδα 3 συσχετισμένων κομματιών, με αυτόν τον τρόπο τα 10 χωράφια αποτελούν 3 συσχετισμένα δείγματα μεγέθους 10 και το κατάλληλο κριτήριο για τη σύγκριση των τριών λιπασμάτων είναι του Friedman.

Σχηματίζουμε έναν πίνακα 3×10 τάξεων με την εξής λογική, διατάσσουμε την απόδοση των τριών λιπασμάτων A, B, C μέσα σε ομάδα και έχουμε τον πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΛΙΠΑΣΜΑΤΩΝ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	R_i
A	1	2	2	1	2	2	2	1	1	1	15
B	2	3	3	2	3	3	1	2	2	3	24
C	3	1	1	3	1	1	3	3	3	2	21

Τότε $R_1 = R_A = 15, R_2 = R_B = 24$ και $R_3 = R_C = 21$. Υπολογίζουμε την ποσότητα της στατιστικής X^2.

$$X^2 = \frac{12}{\mathrm{nk}\left(\mathrm{k}+1\right)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1) = \frac{12}{10 \cdot 3 \cdot 4}\left(15^2 + 24^2 + 21^2\right) - 3 \cdot 10 \cdot 4 = 4,2$$

Από τους στατιστικούς πίνακες βρίσκουμε και την $X^2_{k-1,a} = X^2_{2,0,05} = 5,99$.

Ισχύει ότι $X^2 = 4,2 < X^2_{2,0,05} = 5,99$, τότε με επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05 αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση, δηλαδή τα τρία λιπάσματα είναι ισοδύναμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

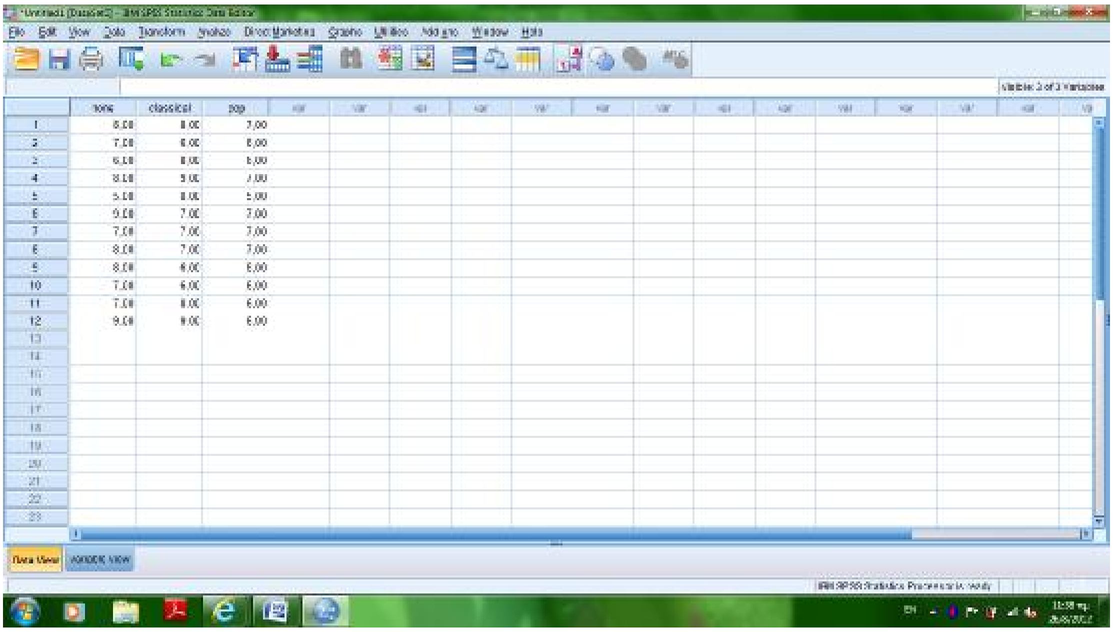
Ένας ερευνητής θέλει να εξετάσει αν η μουσική επηρεάζει την απόδοση των υπαλλήλων μιας εταιρείας. Για αυτό το λόγο επιλέγει 12 υπαλλήλους της εταιρείας και τους αφήνει να δουλεύουν ενώ ανά μισή ώρα αλλάζει τις συνθήκες εργασίας- είδος μουσικής. Οι υπάλληλοι δουλεύουν χωρίς μουσική, με κλασσική μουσική και με pop μουσική. Μετά το τέλος κάθε μισάωρου, οι υπάλληλοι απαντούν στο ερώτημα πόσο δύσκολο ήταν να εργαστούν σε κλίμακα από το 1-10, με το 1 να είναι εύκολο και 10 πολύ δύσκολο. Με τη βοήθεια ενός test Friedman, να ελέγξετε αν υπάρχουν διαφορές στην εργασία των υπαλλήλων ανάλογα με τη μουσική που ακούνε σε α=0,05. Ο πίνακας με τις απαντήσεις που δόθηκαν είναι ο ακόλουθος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΠΟΔΟΣΗ 12 ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΕΙΔΟΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ

υπάλληλος	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
καθόλου	8	7	6	8	5	9	7	8	8	7	7	9
κλασσική	8	6	8	9	8	7	7	7	6	6	8	9
pop	7	6	6	7	5	7	7	7	8	6	6	6

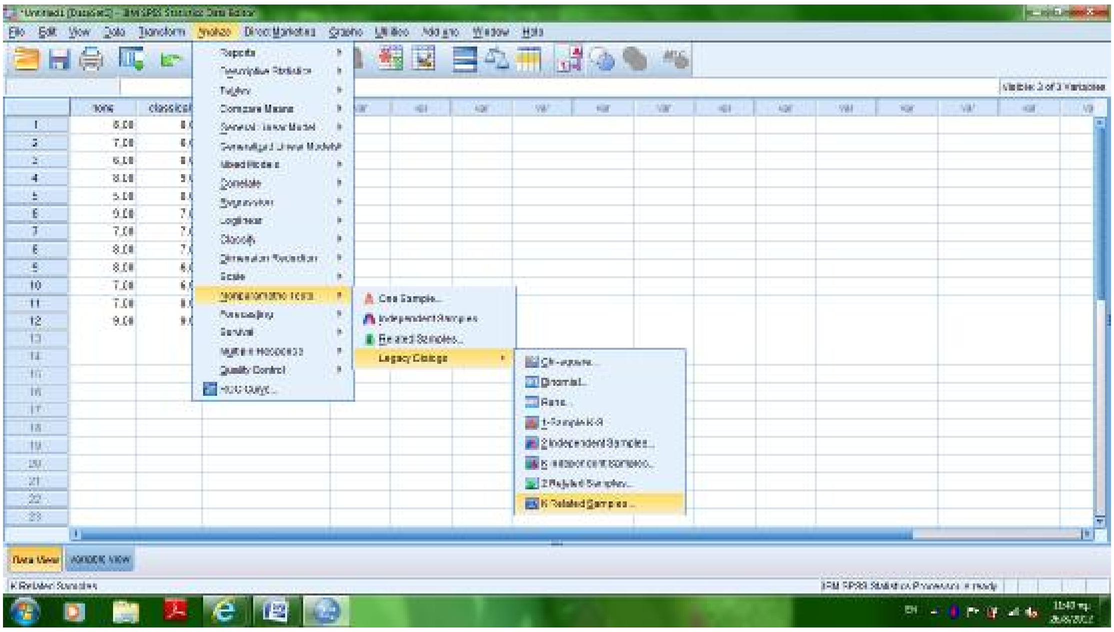
Ελέγχουμε αν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0:η εργασία των υπαλλήλων διαφέρει ανάλογα με την μουσική που ακούνε.

Εισάγουμε τα δεδομένα σε στήλες του PASW STATISTICS 18, η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στις απαντήσεις για την περίπτωση που δεν ακούει μουσική, η δεύτερη για τις απαντήσεις ως προς την κλασσική μουσική και η τελευταία για την pop μουσική.



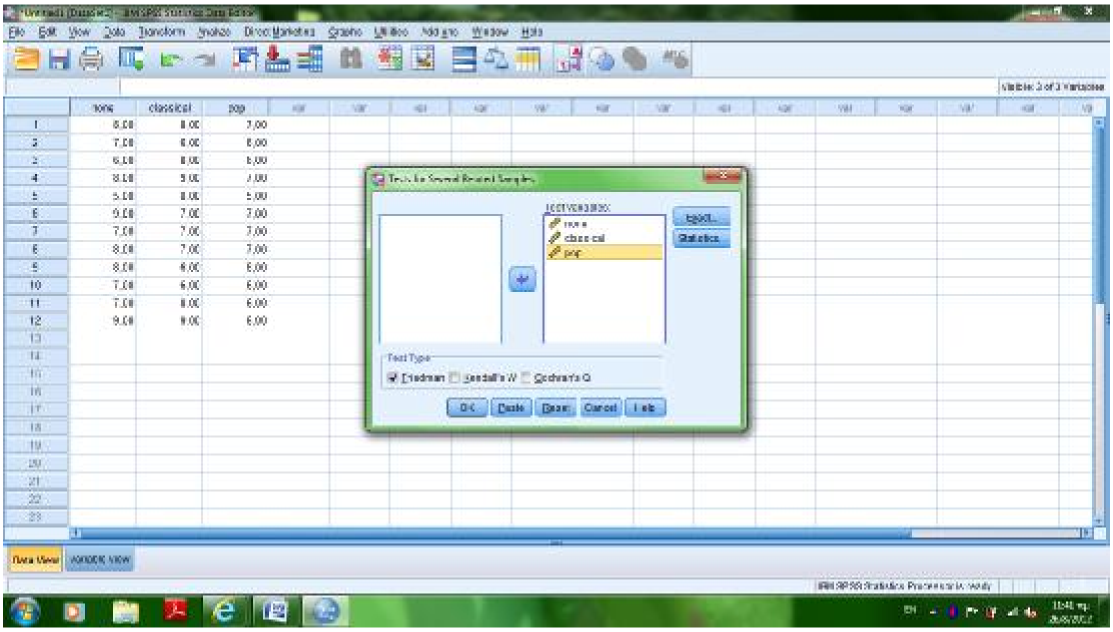
Εικόνα 61: Πίνακας για την εισαγωγή των δεδομένων για το Friedmann test

Για να κάνουμε το τεστ πατάμε διαδοχικά Analyze->Nonparametric Tests->Legacy Dialogs->k-Related Samples



Εικόνα 62: Γραμμή για την επιλογή test k-συσχετισμένων δειγμάτων

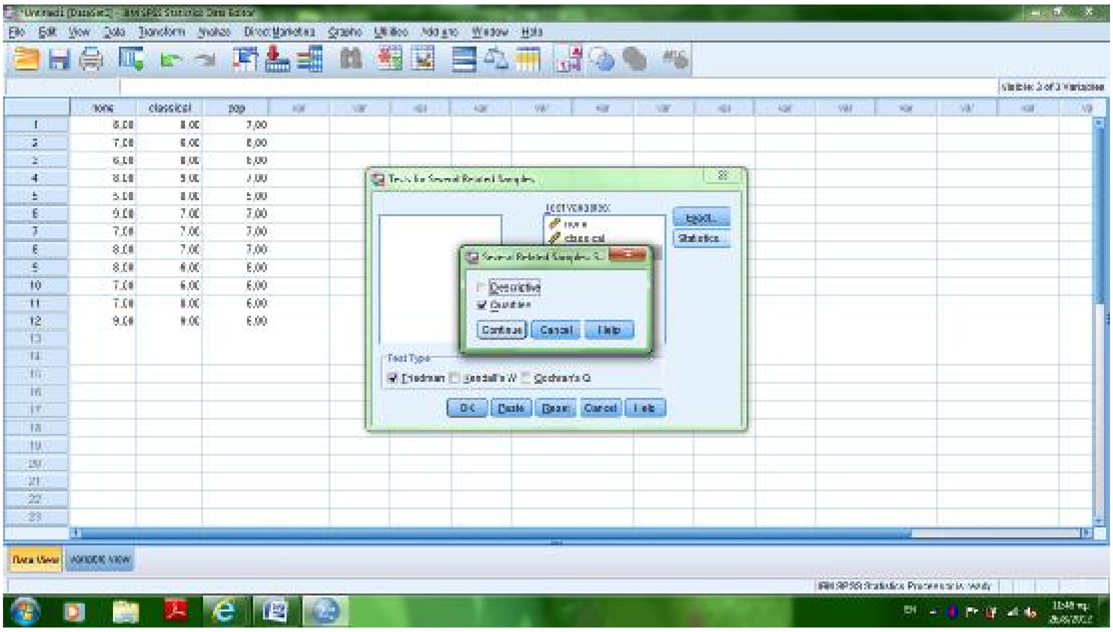
Θα εμφανιστεί νέο παράθυρο διαλόγου, με το βελάκι μεταφέρουμε τις μεταβλητές none, classical, pop στην στήλη Test variables, αφού αρχικά θα εμφανιστούν σε λίστα στο δίπλα κουτί. Ακόμα στην λίστα επιλογών Test Type επιλέγουμε το Friedmann.



Εικόνα 63: Πίνακας για την επιλογή Friedman test και εισαγωγή των δεδομένων

Στο ίδιο παράθυρο εμφανίζεται και η επιλογή Statistics, πατάμε αυτήν την επιλογή και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου όπου επιλέγουμε Quartiles, αφού η επιλογή

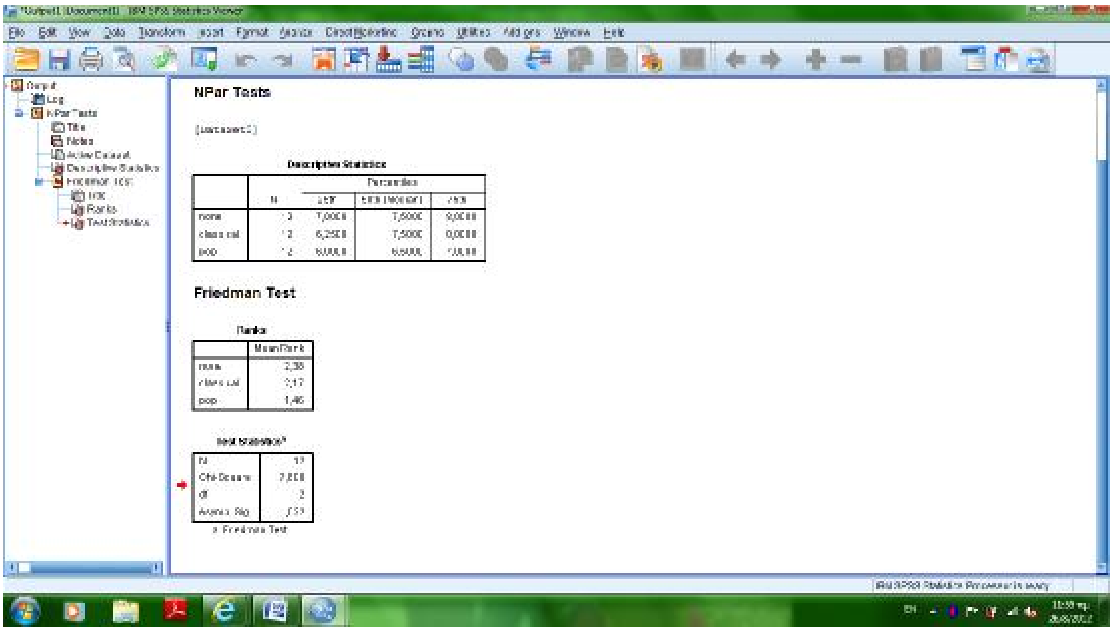
Descriptive δεν είναι κατάλληλη για μη παραμετρικούς ελέγχους. Πατάμε Continue και επανερχόμαστε στο προηγούμενο παράθυρο διαλόγου.



Εικόνα 64: Πίνακας για την εισαγωγή παραμέτρων του Friedman test

Πατάμε το OK για να τρέξει το τεστ του Friedman.

Τα αποτελέσματα που μας δίνει το τεστ φαίνονται παρακάτω.



Εικόνα 65: Απαντήσεις για το Friedman test

Ο πρώτος πίνακας Descriptive statistics, δίνει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με το πλήθος των παρατηρήσεων κάθε ομάδας, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο κάθε ομάδας καθώς και τη διάμεσο.

Ο δεύτερος πίνακας δείχνει τη μέση τάξη κάθε ομάδας. Το τεστ του Friedman συγκρίνει τη μέση τάξη μεταξύ συσχετισμένων ομάδων και υποδεικνύει πως διαφέρουν οι ομάδες.

Ο πίνακας Test Statistics,μας δίνει το αποτέλεσμα του τεστ, έχουμε ότι η στατιστική $X^2 = 7,600$ και το επίπεδο εμπιστοσύνης $p = 0,022$.

Ισχύει ότι $p = 0,022 < 0,05$ άρα υπάρχει στατιστική διαφορά στο ερώτημα αν εξαρτάται η εργασία από τη μουσική που ακούμε στο χώρο εργασίας, δηλαδή απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

4.2.2 Το τεστ Cochran

Το στατιστικό τεστ του Cochran αναφέρεται σε γεγονότα/πειράματα με δύο πιθανά αποτελέσματα, το οποίο το ένα θεωρείται επιτυχία και το άλλο αποτυχία. Αν σε ένα τέτοιο πείραμα γίνουν n δοκιμές, τα αποτελέσματα του πειράματος μπορούν να παρασταθούν σε έναν πίνακα $2 \times n$, όπου η μια γραμμή παριστάνει τον αριθμό των επιτυχιών και η άλλη των αποτυχιών. Η μηδενική υπόθεση είναι ότι καμία μεταβλητή δε διαφέρει.

Υποθέτουμε ότι επιλέξαμε τα τυχαία να δείγμα από τον πληθυσμό για να διενεργήσουμε το τεστ, για N>2 δοκιμές και οι παρατηρήσεις είναι χωρισμένες σε r blocks (ομάδες) έτσι ώστε τα αποτελέσματα να μπορούν να αναπαρασταθούν με 0 και 1. Ο πίνακας θα έχει την ακόλουθη μορφή:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣΜΕΝΕΣ ΣΕ blocks

Δοκιμές	1	2	…	N	Αθροίσματα γραμμών
Block 1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	R_1
Block 2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	R_2
….	...	…	…	…	….
Block r	X_{r1}	X_{r2}	…	X_{rn}	R_r
Αθροίσματα στηλών	C_1	C_2	…	C_r	N

Ο έλεγχος που διενεργείται είναι να ελέγξουμε αν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0 : οι μέθοδοι είναι όλες το ίδιο αποτελεσματικές έναντι της H_1 : υπάρχει διαφορά στις μεθόδους. Θέλουμε να ελέγξουμε αν για κάθε ομάδα (Block) η πιθανότητα να είναι επιτυχημένη μια δοκιμή της δεν εξαρτάται από ποια μέθοδος ακολουθείται.

Η στατιστική που χρησιμοποιείται σε αυτό το τεστ είναι η

$$T = \frac{n \cdot (n-1)\sum_{i=1}^{c} c_i^2 - (n-1)N^2}{nN - \sum_{i=1}^{r} R_i^2} \quad \textit{τύπος 4.6}$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, όταν $T > X^2_{1-a,n-1}$, με n βαθμούς ελευθερίας.

ΑΣΚΗΣΗ

Μια διαφημιστική εταιρεία θέλει να εξετάσει τρεις διαφορετικές τεχνικές πώλησης (η Α, η Β και η Γ) οι οποίες δοκιμάζονται σε εθελόντριες νοικοκυρές. Σε κάθε νοικοκυρά εφαρμόστηκε κάθε μια από τις τεχνικές για την αγορά ενός συγκεκριμένου προϊόντος, το ίδιο προϊόν κάθε φορά. Στο τέλος κάθε επίδειξης, κάθε νοικοκυρά βαθμολόγησε την *τεχνική με 1, αν την είχε πείσει να αγοράσει το προϊόν και με 0 αν δεν την είχε πείσει. Τα αποτελέσματα αυτής της ενέργειας φαίνονται στον επόμενο πίνακα.*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑΣ ΝΟΙΚΟΚΥΡΩΝ ΓΙΑ ΕΝΑ ΠΡΟΙΟΝ ΜΕ 3 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΩΛΗΣΗΣ

νοικοκυρά	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ΣΥΝΟΛΟ
Α	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	8
Β	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	10
Γ	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	7
ΣΥΝΟΛΟ	3	3	1	2	0	3	3	2	1	1	3	3	25

Θέλουμε να εξετάσουμε την μηδενική υπόθεση H_0 *:κάθε τεχνική είναι το ίδιο αποτελεσματική σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05.*

ΛΥΣΗ

Για να εξετάσουμε αν ισχύει η μηδενική υπόθεση θα βρούμε τη στατιστική Τ

$$T = \frac{n \cdot (n-1)\sum_{i=1}^{c} c_i^2 - (n-1)N^2}{nN - \sum_{i=1}^{r} R_i^2} = 2,8$$

Ακόμα από τους στατιστικούς πίνακες $X^2_{0,95,n-1} = 5,99$. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της στατιστικής και της κριτικής περιοχής συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει διαφορά στις τρεις τεχνικές διαφήμισης του προϊόντος, δηλαδή αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

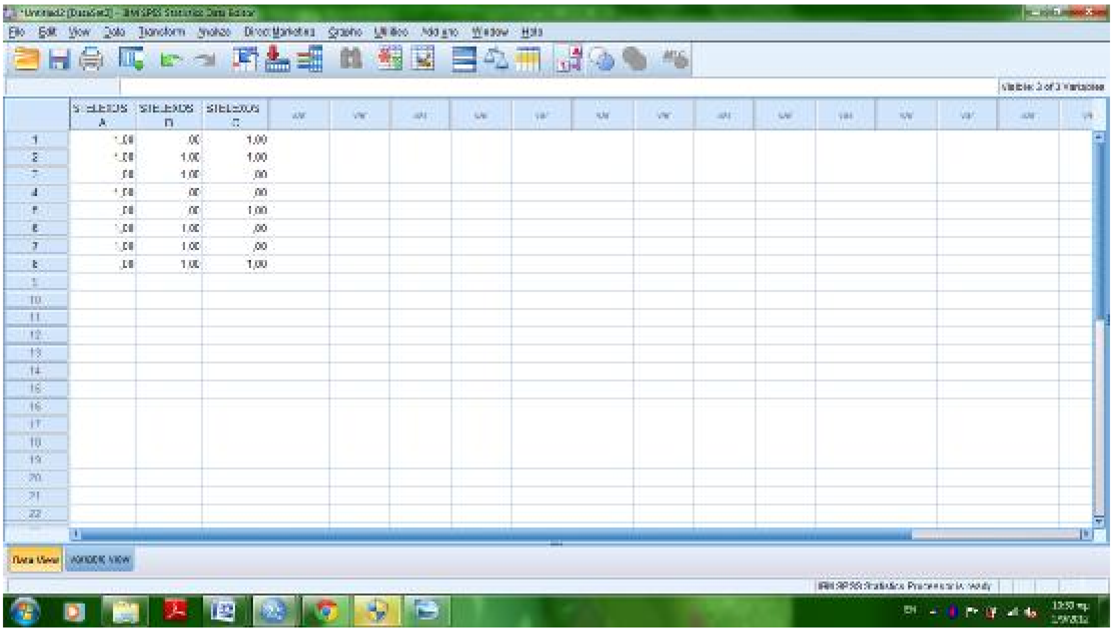
Τρία από τα στελέχη μιας εταιρείας κάνουν πρόβλεψη για τις μηνιαίες πωλήσεις ενός προϊόντος. Μετά το τέλος του χρόνου τα αποτελέσματα κρίνονται ως επιτυχημένα ¨1¨αν το στέλεχος έχει κάνει σωστή πρόβλεψη και αποτυχημένα ¨0¨ αν κάνει λάθος πρόβλεψη. Επιλέχθηκαν 8 αποτελέσματα τυχαία και καταγράφηκαν στον ακόλουθο πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΩΣΤΗ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΠΩΛΗΣΗΣ ΠΡΟΙΟΝΤΟΣ ΑΠΟ 3 ΣΤΕΛΕΧΗ ΜΙΑΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Μήνας	1	2	3	4	5	6	7	8
Στέλεχος Α	1	1	0	1	0	1	1	0
Στέλεχος Β	0	1	1	0	0	1	1	1
Στέλεχος Γ	1	1	0	0	1	0	0	1

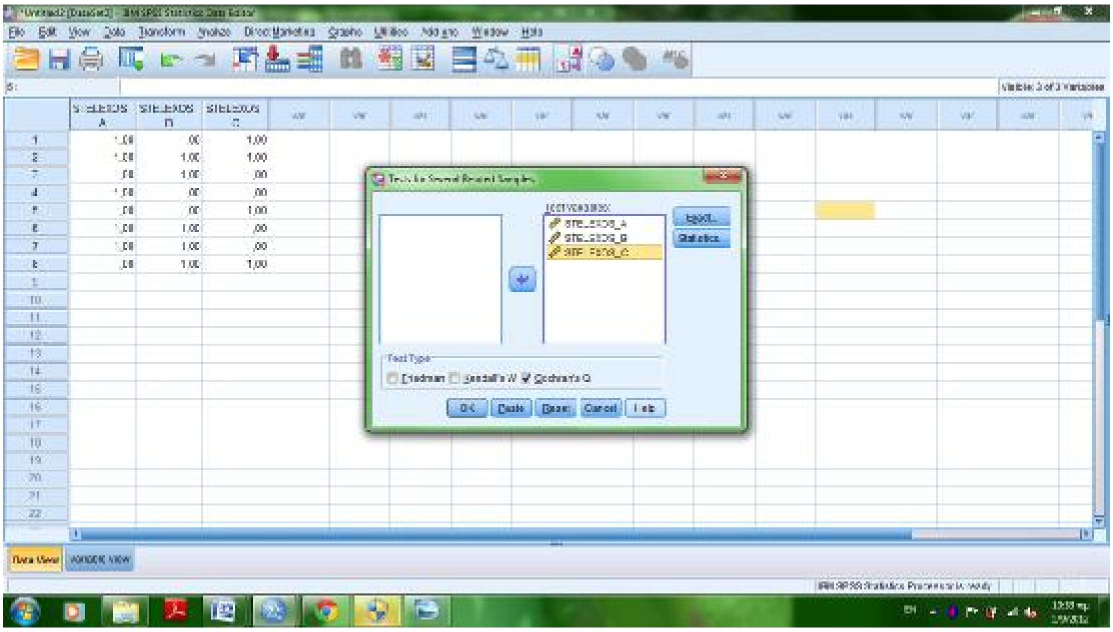
Ελέγξτε την μηδενική υπόθεση κάθε στέλεχος είναι το ίδιο αποτελεσματικός στην πρόβλεψη του αποτελέσματος για την πώληση του προϊόντος σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05.

Εισάγουμε τα δεδομένα σε στήλες του PASW STATISTICS 18, η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στις προβλέψεις του στελέχους Α, η δεύτερη για τις προβλέψεις του Β και η τελευταία για τις προβλέψεις του Γ.



Εικόνα 66: Εισαγωγή δεδομένων για το Cochran test

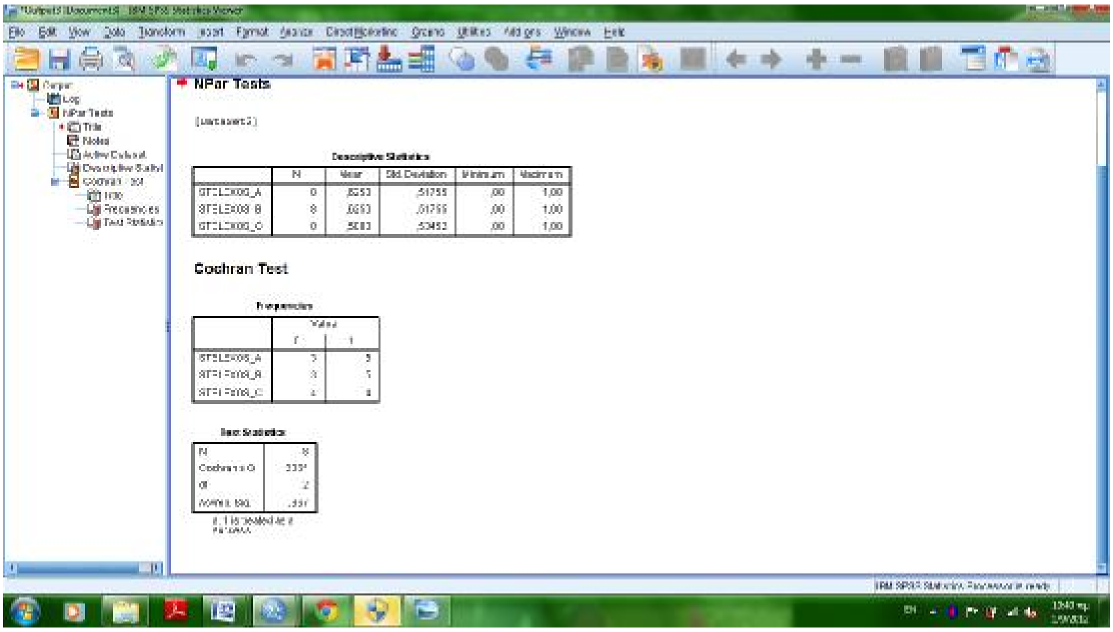
Πατάμε διαδοχικά Analyze->Nonparametric Tests-> Legacy Dialogs-> K-Related Samples και εμφανίζεται νέο παράθυρο διαλόγου. Με τα βελάκι μετακινούμε ένα-ένα τις μεταβλητές, STELEXOS_A, STELEXOS_B, STELEXOS_C. Στην επιλογή Test Type επιλέγω το Cochran’s Q και αφαιρώ την αρχική επιλογή Friedman. Αν θέλουμε να σημειώσουμε και κάποια επιπλέον στατιστικά για το δείγμα, μπορούμε στην επιλογή Statistics, θα ανοίξει νέο παράθυρο διαλόγου και εκεί να επιλέξουμε το Descriptive και μετά πατάμε Continue.



Εικόνα 67: Πίνακας για την επιλογή Cochran test και εισαγωγή δεδομένων για τη διενέργεια του test

Πατάμε το OK και εμφανίζονται τα αποτελέσματα του τεστ.

Ο πρώτος πίνακας, εμφανίζεται στην περίπτωση που επιλέξουμε, με τη διαδικασία που αναφέρθηκε προηγουμένως το Descriptive Statistics και παρατηρούμε ότι δίνονται πληροφορίες για τη μέση τιμή,, την τυπική απόκλιση καθώς και τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές κάθε μεταβλητής. Στον επόμενο πίνακα Frequencies δίνονται οι συχνότητες κάθε μεταβλητής. Στον πίνακα Test Statistics η στατιστική του τεστ μας δίνει 0,286 με p-value=0,867. Επειδή 0,876>0,05 τότε αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση, δηλαδή τα στελέχη προβλέπουν με την ίδια πιθανότητα το αποτέλεσμα των πωλήσεων του προϊόντος.



Εικόνα 68: Απαντήσεις του Cochran test

4.2.3 <u>Ο συντελεστής συσχέτισης τάξεων Spearman</u>

Αν δύο τυχαίες μεταβλητές Χ και Υ ορίζονται σε έναν πληθυσμό, είναι ποσοτικές και $H_0 : r = 0$ γίνεται βάση των ελέγχων ισότητας διαμέσων για δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, μέσω του δειγματικού συντελεστή συσχέτισης r και της στατιστικής $\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{n-2}$.

Στη περίπτωση που δεν ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις που αναφέραμε και κυρίως αν μια τουλάχιστον από τις δύο μεταβλητές είναι ποιοτική ιεραρχική, ο προηγούμενος έλεγχος γίνεται συνήθως μέσω του δειγματικού συντελεστή συσχέτισης τάξεων r_s του Spearman.

Από τον πληθυσμό επιλέγουμε ένα δείγμα n μελών του και βρίσκουμε τις τάξεις 1,2,…,n των τιμών και των δύο μεταβλητών Χ και Υ για κάθε μέλος του δείγματος προς το καλύτερο(από τη χειρότερη παρατήρηση προς την καλύτερη παρατήρηση). Στην περίπτωση που υπάρχουν δειγματικές τιμές της ίδιας μεταβλητής με ίδια τάξη, αυτές τις βαθμολογούμε με τάξη ίση με το μέσο όρο των τάξεων που θα είχαν αν παρουσίαζαν έστω και ελάχιστη διαφορά. Ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman είναι ο

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{N} D_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \in [-1,1] \quad \textit{τύπος 4.7}$$

Όπου D_i είναι η διαφορά των τάξεων κάθε μέλους του δείγματος ως προς τις δύο μεταβλητές. Το μέτρο συσχέτισης που προτάθηκε από το Spearman είναι ουσιαστικά ο συντελεστής r του Pearson υπολογιζόμενο με βάση τις τάξεις μεγέθους και όχι τις παρατηρήσεις.

Ο έλεγχος αν οι Χ και Υ είναι ασυσχέτιστες, δηλαδή ο έλεγχος της μηδενική υπόθεσης $\mathrm{H}_0 : r = 0$ γίνεται ως εξής

Α. Αν έχουμε μικρό δείγμα, δηλαδή αν $n \leq 30$ ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης θα είναι μονόπλευρος και γίνεται με τη βοήθεια της στατιστικής $D = \sum D_i^2$ και με τη βοήθεια στατιστικών πινάκων.

- Αν $r_s > 0$ ελέγχουμε την $\mathrm{H}_0 : r = 0$ έναντι της $\mathrm{H}_1 : r > 0$. Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται να $D < D_{n,a}$ και οι τιμές του $D_{n,a}$ δίνονται από στατιστικούς πίνακες.
- Αν $r_s < 0$ ελέγχουμε την $\mathrm{H}_0 : r = 0$ έναντι της $\mathrm{H}_1 : r < 0$. Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται να $D < \frac{n(n^2-1)}{3} - D_{n,a}$.

Β. Αν έχουμε μικρό δείγμα, δηλαδή αν $n \leq 30$ μη στατιστική $A = r_s\sqrt{n-1} \sim N(0,1)$, τότε ο έλεγχος γίνεται παραμετρικός και ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0 : r = 0$ έναντι οποιασδήποτε εναλλακτικής.

ΑΣΚΗΣΗ

Θέλουμε να εξετάσουμε την επίδραση ή μη, της θερμότητας πάνω σε κάποιο μεταλλικό σύρμα. Πήραμε 8 κομμάτια τυχαία μήκους 2 m το καθένα από 8 διαφορετικές μονάδες παραγωγής ενός εργοστασίου. Το καθένα χωρίστηκε σε 2 κομμάτια του 1 m και *θερμάναμε το ένα από τα δύο στους 50^0 C και το άλλο καθόλου. Στη συνέχεια μετρήσαμε το όριο θραύσης σε kg.*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΟΧΗ ΣΥΡΜΑΤΟΣ ΟΤΑΝ ΘΕΡΜΑΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΟΤΑΝ ΔΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΝΤΑΙ

	1	2	3	4	5	6	7	8
Θερμαθέντα X	36	40,5	24,5	30	31	41	37	28
Μη θερμαθέντα Y	37	42	20	31	29	37	34,5	25

Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman για τα ζεύγη (X, Y). Να εξετάσετε αν τα όρια θραύσης X και Y είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Φτιάχνουμε έναν πίνακα για να μας βοηθήσει στην εύρεση του τύπου. Το i συμβολίζει το κάθε κομμάτι της μονάδας παραγωγής. Οι x_i και y_i είναι οι τιμές για τα θερμαθέντα και μη θερμαθέντα κομμάτια αντίστοιχα. Στις στήλες των τάξεων, βαθμονομούμε και τις δύο μεταβλητές X και Y για κάθε μέλος του δείγματος προς το καλύτερο(από τη χειρότερη παρατήρηση προς την καλύτερη παρατήρηση). Στην περίπτωση που υπάρχουν δειγματικές τιμές της ίδιας μεταβλητής με ίδια τάξη, όπως για την y_i για την τιμή 5, αυτές τις βαθμολογούμε με τάξη ίση με το μέσο όρο των τάξεων που θα είχαν αν παρουσίαζαν έστω και ελάχιστη διαφορά. Το D_i , είναι οι διαφορές των τάξεων.

ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΡΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ 2 ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

i	x_i	y_i	τάξη x_i	τάξη y_i	D_i	D_i^2
1	36	37	5	6,5	-1,5	2,25
2	40,5	42	8	8	0	0
3	24,5	20	1	1	0	0
4	30	31	3	4	-1	1
5	31	29	4	3	1	1
6	41	37	7	6,5	0,5	0,25

7	37	34,5	6	5	1	1
8	28	25	2	2	0	0

Από τον προηγούμενο πίνακα, βρίσκουμε ότι $\sum_{i=1}^{8} D_i^2 = 6$, τότε ο τύπος για την στατιστική του Spearman είναι $r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{N} D_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 6}{8 \cdot (8^2 - 1)} = 0,929$.

Θέλουμε να κάνουμε έλεγχο υποθέσεων για να δούμε αν ισχύει ην μηδενική υπόθεση H_0 : τα όρια θραύσης X και Y είναι ανεξάρτητα έναντι της εναλλακτικής H_1: τα όρια θραύσης X και Y δεν είναι ανεξάρτητα.

Από τους πίνακες βρίσκουμε ότι $D_{n,a} = D_{8,0,05} = 0,738$. Ισχύει ότι $|r_s| = 0,929 > 0,738$ και απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση σε α=0,05 και δεχόμαστε ότι τα όρια θραύσης έχουν σχέση θετικά συσχετισμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

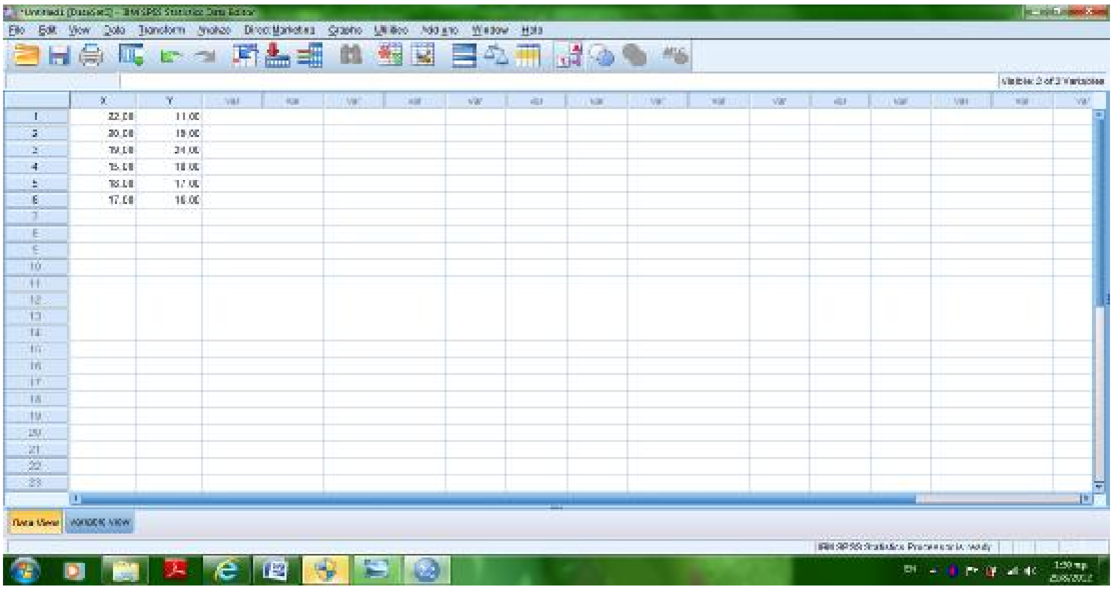
Έξι καταστήματα κινητής τηλεφωνίας παρουσιάζουν τις πωλήσεις για δύο διαφορετικά μοντέλα κινητών τηλεφώνων X και Y και ο πίνακας με τα αποτελέσματα εμφανίζεται παρακάτω

ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΙΝΗΤΩΝ ΣΕ 6 ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ

	X	Y
Α	22	11
Β	20	19
Γ	19	24
Δ	15	18
Ε	18	17
ΣΤ	17	16

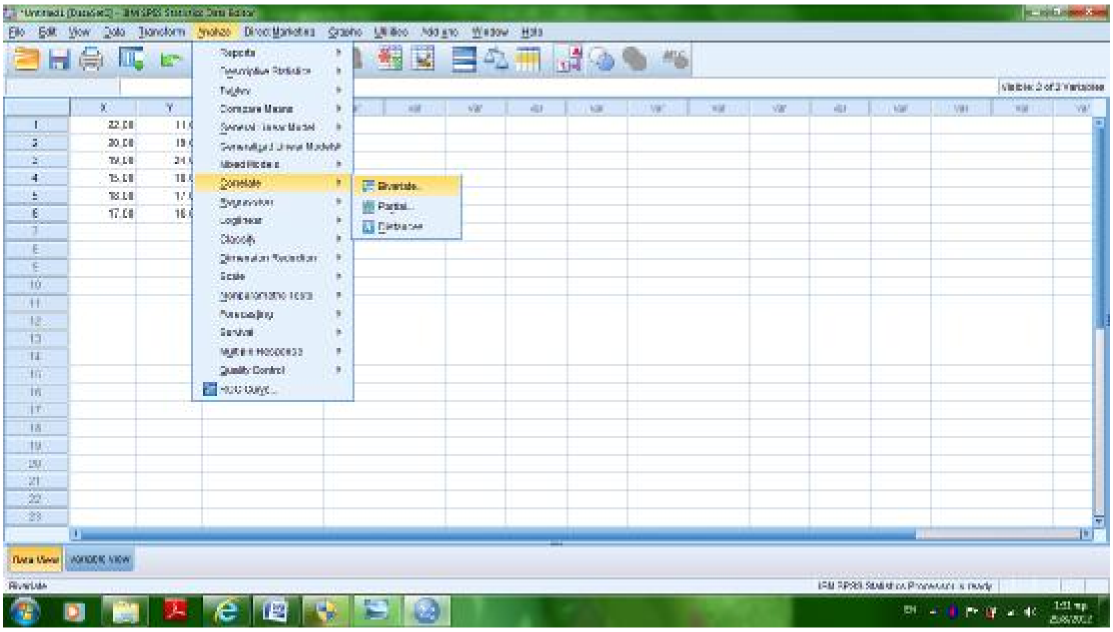
Να ελέγξετε τη μηδενική υπόθεση ότι οι πωλήσεις των κινητών τηλεφώνων X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Εισάγουμε τις πωλήσεις για κάθε διαφορετικό κινητό τηλέφωνο σε δύο στήλες του PASW STATISTICS 18, η πρώτη έχει τις πωλήσεις κάθε καταστήματος για το κινητό X και η δεύτερη τις αντίστοιχες για το κινητό Y.



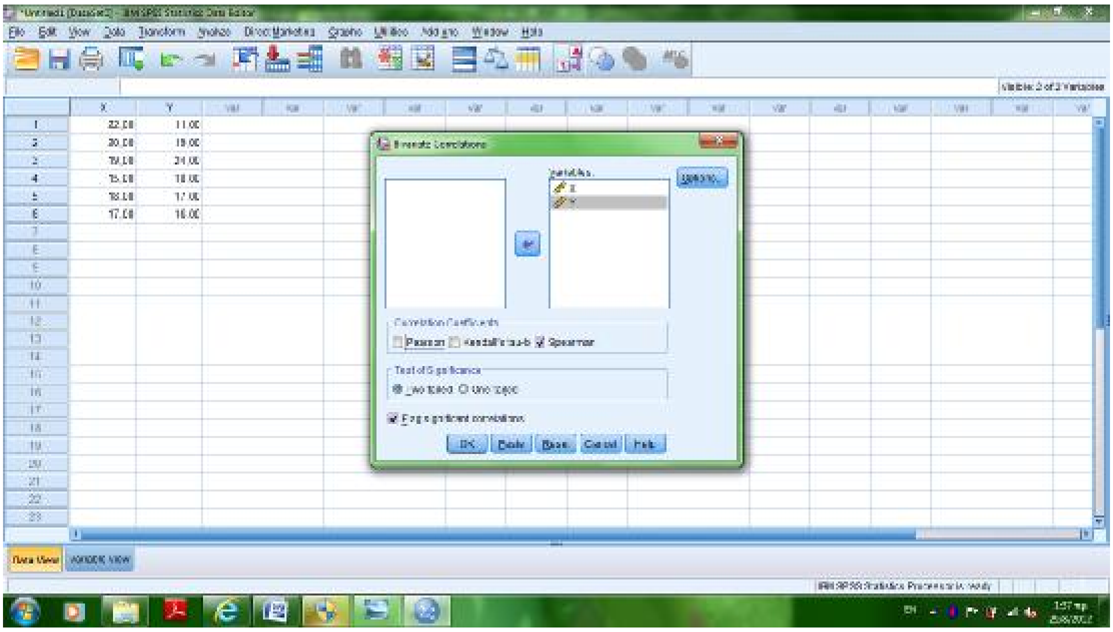
Εικόνα 69: Εισαγωγή δεδομένων για το Spearman test

Επιλέγουμε διαδοχικά Analyze-> Collerate-> Bivariate στο μενού 18 ως εξής



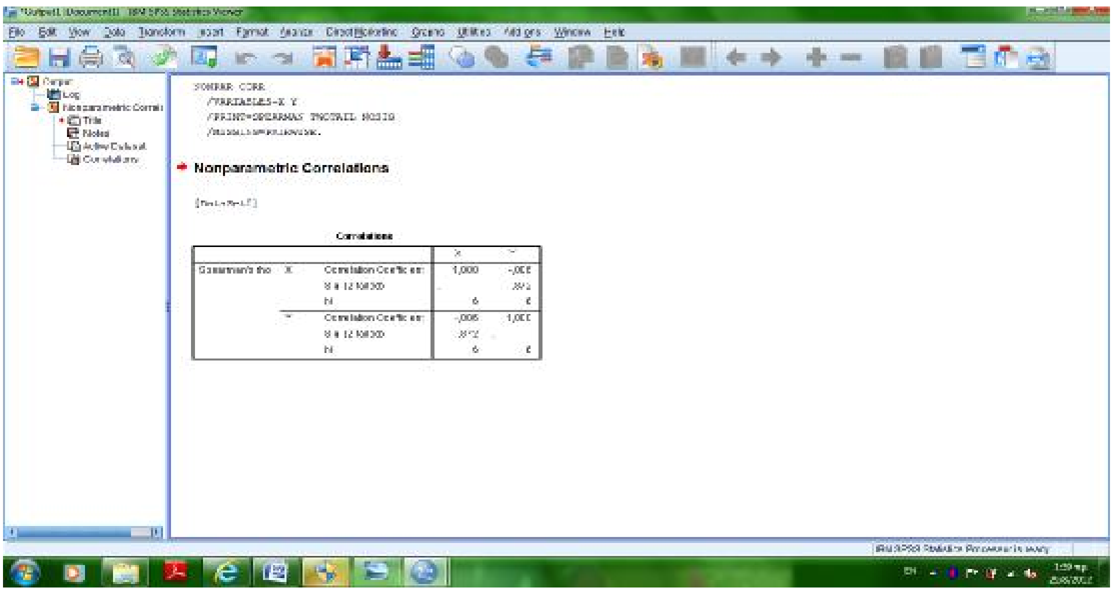
Εικόνα 70: Γραμμή επιλογής για διμεταβλητή

Θα εμφανιστεί νέο παράθυρο διαλόγου, εκεί πατώντας κάθε μεταβλητή X και Y διαδοχικά, οι X και Y μεταφέρονται στο Variables με το βελάκι που εμφανίζεται. Ακόμα από το κουτί Correlation Coefficients επιλέγουμε το Spearman, αφαιρώντας την επιλογή Pearson που θα εμφανιστεί αρχικά και στο Test Significance το Two-tailed, τελικά θα έχουμε μια εικόνα ως εξής



Εικόνα 71: Πίνακας για την επιλογή Spearman test και εισαγωγή δεδομένων για τη διενέργεια του test

Πατάμε το OK για να εμφανιστούν τα αποτελέσματα σε νέα εικόνα



Εικόνα 72: Απαντήσεις για το Spearman test

Στον πίνακα Correlation εμφανίζονται τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν. Ο πίνακας εμφανίζει τον συντελεστή συσχέτισης του Spearman που είναι $r_s = 0{,}086$ (κοντά στο 0) και ότι αυτό είναι στατιστικά σημαντικό με επίπεδο σημαντικότητας p=0,872. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των X και Y σε επίπεδο εμπιστοσύνης 0,872.

4.2.4 <u>Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall</u>

Ο συντελεστής συσχέτισης τ του Kendall, γνωστός και ως συντελεστής εναρμόνισης του Kendall, μοιάζει με το συντελεστή του Spearman γιατί υπολογίζεται με βάση την τάξη μεγέθους των παρατηρήσεων και όχι με βάση τις παρατηρήσεις. Επιπλέον, η κατανομή του δεν εξαρτάται από την κατανομή των μεταβλητών X και Y, όταν αυτές είναι ανεξάρτητες και συνεχείς. Το κύριο πλεονέκτημα του συντελεστή συσχέτισης του Kendall σε σχέση με του Spearman είναι ότι τείνει σχετικά γρήγορα στην κανονική κατανομή και έτσι ο συντελεστής τ προσεγγίζει καλύτερα σε σχέση με το συντελεστή του Spearman, όταν αληθεύει η μηδενική υπόθεση της ανεξαρτησίας των μεταβλητών X και Y.

Τα δεδομένα αποτελούνται από ένα διμετάβλητο τυχαίο δείγμα μεγέθους n παρατηρήσεων (X_i, Y_i), i=1 ,2 , 3,.., n.

Οι παρατηρήσεις (X_j, Y_j) και (X_k, Y_k),θα ονομάζονται μη εναρμονισμένες ή μη συσχετισμένες αν η διάταξη των πρώτων μελών τους είναι αντίθετη από την διάταξη των δεύτερων μελών τους, δηλαδή αν $(X_j - X_k) \cdot (Y_j - Y_k) > 0$. Ισοδύναμα δύο μέλη θα εναρμονισμένες ή συσχετισμένες αν η διάταξη των πρώτων μελών τους είναι ίδια από την διάταξη των δεύτερων μελών τους, δηλαδή αν $(X_j - X_k) \cdot (Y_j - Y_k) < 0$.

Αν θεωρήσουμε N_c ,N_d το πλήθος των εναρμονισμένων και μη εναρμονισμένων ζευγών παρατηρήσεων. Τα ζεύγη για τα οποία ισχύει ότι $X_j = X_k$ ή/και $Y_j = Y_k$ δεν θεωρούνται ούτε εναρμονισμένα, ούτε μη εναρμονισμένα. Αυτά τα ζεύγη θεωρούνται ισοβαθμούντα.

Το μέτρο συσχέτισης του Kendall είναι ίσο με

$$t = \frac{N_c - N_d}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \quad \textit{τύπος 4.8}$$

Ο συντελεστής τ, παριστάνει τη διαφορά μεταξύ των ποσοστών των εναρμονισμένων και μη εναρμονισμένων ζευγών παρατηρήσεων. Αν όλα τα δεδομένα είναι εναρμονισμένα ο συντελεστής είναι 1, ενώ αν είναι μη εναρμονισμένα είναι -1. Οι τιμές του συντελεστή κυμαίνονται από 1 έως -1.

Ο υπολογισμός του συντελεστή τ, γίνεται απλούστερος αν οι παρατηρήσεις $(\mathrm{X}_i, Y_i), i = 1, 2, \ldots, n$ διαταχθούν σε μια στήλη κατά αύξουσα σειρά μεγέθους των τιμών των παρατηρήσεων πάνω στην τυχαία μεταβλητή X. Τότε, κάθε τιμή Y χρειάζεται να συγκριθεί μόνο με τις τιμές που είναι ¨κάτω ¨από αυτήν. Έτσι, κάθε ζεύγος παρατηρήσεων εξετάζεται μόνο μια φορά και ο αριθμός των συσχετισμένων και μη συσχετισμένων ζευγών προσδιορίζεται γρηγορότερα.

Ο έλεγχος υπόθεσης που διενεργείται για την αποδοχή ή απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0 : οι μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, χρησιμοποιεί ως στατιστική την ελεγχοσυνάρτηση του Kendall.

$$T = N_c - N \qquad \textit{τύπος 4.9}$$

Απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης

Ανάλογα με το είδος του ελέγχου που έχουμε διαμορφώνονται τα εξής

Α. Αμφίπλευρος έλεγχος συνάρτησης. Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο

$Y_i^*, i = 1, 2, ..., n Y_i$ $\mathrm{T} = N_C - N_d = 49 - 12 = 37$

σημαντικότητας α, αν $\mathrm{T} > w_{1-a/2}$ ή $Y_i^* < Y_{i+1}^*$ $X^{(i)} < X^{(i+1)}, i = 1, 2, \ldots, n-1$.

H_1

Β. Μονόπλευρος έλεγχος θετικής συσχέτισης. . Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν $\mathrm{T} > w_{1-a}$.

Γ. Μονόπλευρος έλεγχος αρνητικής συσχέτισης. . Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν $\mathrm{T} < w_a = -w_{1-a}$.

Τα ποσοστιαία σημεία βρίσκονται από στατιστικούς πίνακες.

ΑΣΚΗΣΗ

Μια εταιρεία εξετάζει τις γνώσεις των υπαλλήλων της. Για αυτό το λόγο εξετάζει γραπτώς τους υπαλλήλους σε δύο μαθήματα, ξένη γλώσσα (Χ) και οικονομικά μαθηματικά (Υ). Βάση των επιδόσεων που καταγράφηκαν θέλει να ελεγχθεί αν υπάρχει συσχέτιση στην βαθμολογία των μαθημάτων σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05.

ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΑ ΔΥΟ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Υπάλληλος	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	86	71	77	68	91	72	77	91	70	71	88	87
Y	88	77	76	64	90	72	65	90	65	80	81	72

ΛΥΣΗ

Θέλουμε αν ελέγξουμε την υπόθεση H_0:οι μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες, έναντι της εναλλακτικής H_1:οι μεταβλητές X και Y είναι συσχετισμένες, έχουμε αμφίπλευρο έλεγχο (περίπτωση Α).

Διατάσσουμε τα ζεύγη τιμών των παρατηρήσεων, με βάση τις μεταβλητές X_i και $Y_i^*, i = 1, 2, ..., n$, η αναδιάταξη που προκύπτει στις αντίστοιχες τιμές των Y_i. Η δεύτερη στήλη δίνει τον αριθμό των ζευγών $(\mathrm{X}^{(i+1)}, Y_{i+1}^*)$ για τα οποία $Y_i^* < Y_{i+1}^*$ όταν $X^{(i)} < X^{(i+1)}, i = 1, 2, \ldots, n-1$.Η τρίτη στήλη δίνει τον αριθμό των ζευγών $(\mathrm{X}^{(i+1)}, Y_{i+1}^*)$ για τα οποία $Y_i^* < Y_{i+1}^*$ όταν $X^{(i)} < X^{(i+1)}, i = 1, 2, \ldots, n-1$.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΩΝ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΩΝ ΤΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

$(\mathrm{X}^{(i)}, Y_i^*)$	Εναρμονισμένα κάτω από το $(\mathrm{X}^{(i)}, Y_i^*)$	Μη Εναρμονισμένα κάτω από το $(\mathrm{X}^{(i)}, Y_i^*)$
(68,64)	11	0
(70,65)	9	0
(71,77)	4	4
(71,80)	4	4

(72,72)	5	1
(77,65)	5	0
(77,76)	4	1
(86,88)	2	2
(87,72)	3	0
(88,81)	2	0
(91,90)	0	0
(91,96)	0	0
ΣΥΝΟΛΟ	$N_c = 49$	$N_d = 12$

Τότε η τιμή της στατιστικής με βάση τον Kendall είναι

$$\mathrm{T} = N_C - N_d = 49 - 12 = 37$$

Από στατιστικούς πίνακες βρίσκουμε ότι για α=0,05 και n=12, $w_{0,975} = 28, w_{0,025} = -w_{0,975} = -28$. Η τιμή της στατιστικής Τ υπερβαίνει το 0,975-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05. Δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των βαθμών των δύο μαθημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ PASW STATISTICS 18

Ζητήσαμε από 9 ανθρώπους να βαθμολογήσουν σε κλίμακα από 1 έως 100 ένα στερεοφωνικό σύστημα (Χ) και μία τηλεόραση (Υ) της ίδιας εταιρείας. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής

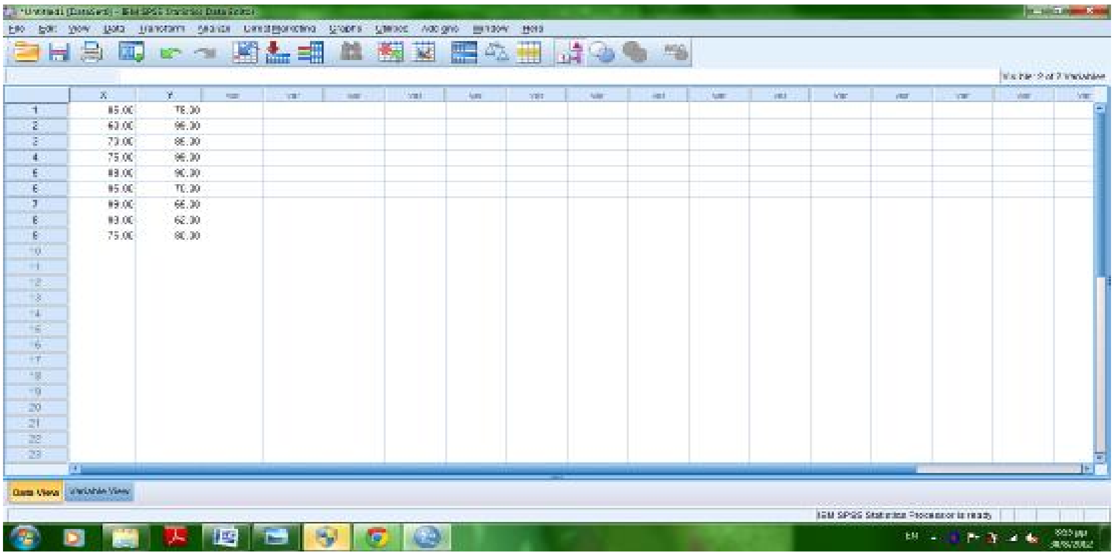
ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ 9 ΑΤΟΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΟΣΗ ΔΥΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΣΥΣΚΕΥΩΝ(άριστα 100)

ΑΤΟΜΟ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Χ	85	60	70	75	88	95	99	93	75
Υ	78	99	85	99	90	70	65	62	80

Ελέγξτε την μηδενική υπόθεση αν υπάρχει συσχέτιση στην βαθμολογία που έβαλαν για τις δύο ηλεκτρικές συσκευές σε επίπεδο εμπιστοσύνης α=0,05.

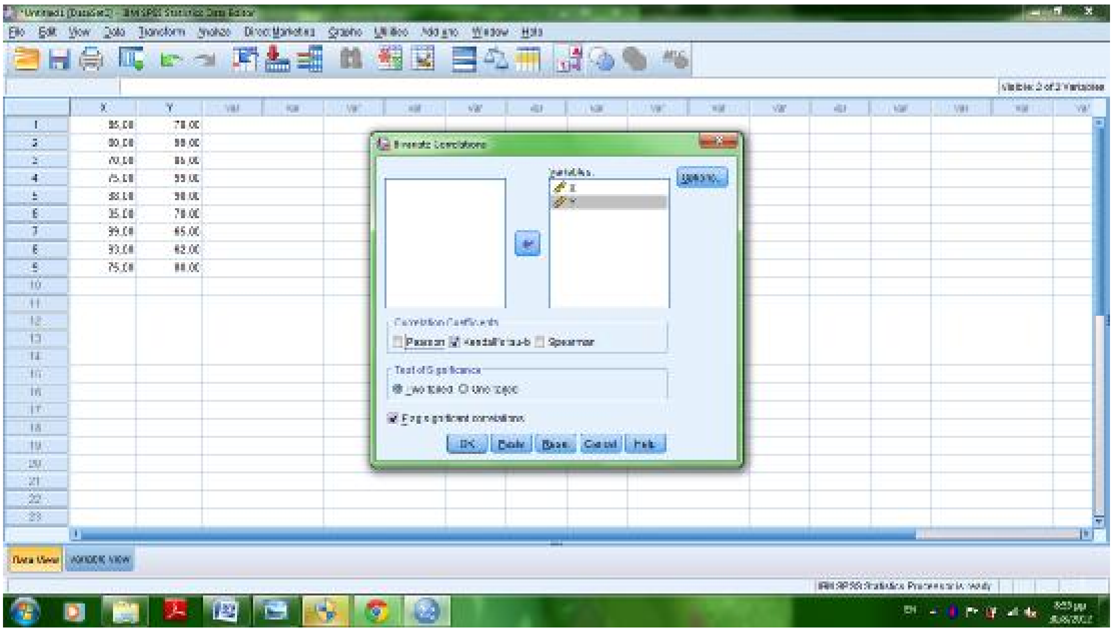
Θέλουμε αν ελέγξουμε την υπόθεση H_0 :οι μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες, έναντι της εναλλακτικής H_1 :οι μεταβλητές X και Y είναι συσχετισμένες.

Εισάγουμε τα δεδομένα στο στατιστικό πακέτο PASW STATISTICS 18, η πρώτη στήλη περιέχει τα X (βαθμολογία για το στερεοφωνικό σύστημα) και η δεύτερη τα Y (βαθμολογία για την τηλεόραση)



Εικόνα 73: Εισαγωγή δεδομένων για τη διενέργεια Kendall test

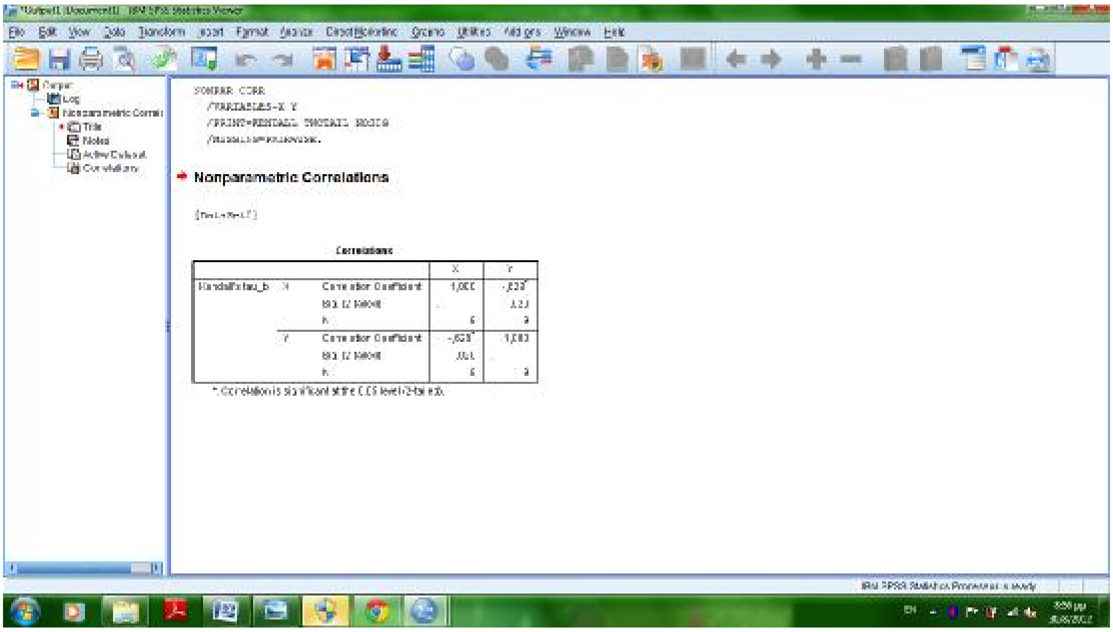
Πατάμε διαδοχικά Analyze -> Collerate-> Bivariate, από το μενού του PASW STATISTICS 18 όπως και στην Spearman και θα εμφανιστεί ένα νέο παράθυρο διαλόγου. εκεί πατώντας κάθε μεταβλητή X και Y διαδοχικά, οι X και Y μεταφέρονται στο Variables με το βελάκι που εμφανίζεται. Ακόμα από το κουτί Correlation Coefficients επιλέγουμε το Kendall-tau, αφαιρώντας την επιλογή Pearson που θα εμφανιστεί αρχικά και στο Test Significance το Two-tailed, τελικά θα έχουμε μια εικόνα ως εξής



Εικόνα 74: Πίνακας για την επιλογή του Kendall test και εισαγωγή δεδομένων για την διενέργεια του test

Πατάμε OK και θα εμφανιστούν τα αποτελέσματα του τεστ σε ένα πίνακα.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall είναι 0,629, το αποτέλεσμα είναι στατιστικά σημαντικό κατά 0,020. Επίσης εμφανίζεται ένα μήνυμα που αναφέρει ότι η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο εμπιστοσύνης 0,05.



Εικόνα 75: Απαντήσεις του Kendall test

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ποσειδών Εμμ. Ζαϊρης, (2009), Στατιστική Μεθοδολογία.
2. Daglas Downing and Jeffrey Clark (2010) Στατιστική των Επιχειρήσεων.
3. Ευδοκία Ξεκαλάκη, (2001), Μη παραμετρική Στατιστική.
4. http://127.0.0.1:53577/help/index.jsp?topic=/com.ibm.PASW STATISTICS 18.statistics.help/overvw_auto_0.html
5. https://statistics.laerd.com/#
6. Darren George, Mallery Paul, (2005), SPSS for Windows step by step.
7. Κ.Β. Μπαγιάτης , Θεσσαλονίκη 2005, Στατιστική.
8. Dennis Howitt, Duncan Cramer, (2007) Στατιστική για το SPSS 11 για Windows.
9. Bernard Grais,(2005), Στατιστικοί Μέθοδοι.
10. Ιωάννης Κατσίλης, (2006), Επαγωγική Στατιστική.
11. Μανώλης Μανατάκης (1996), Εφαρμοσμένη Στατιστική
12. Φ.Κολυβά, Ε. Μπορά, Στατιστική, θεωρία-εφαρμογές.
13. Gopal K. Kanji,(1999), 100 Statistical tests.
14. Andy Field, (2005), Discovering Statistics using SPSS.
15. Jeremy J. Foster, (2001),Data Analysis using SPSS for Windows
16. James B.Cunningham & James O.Aldrich, (2012), Using SPSS
17. Eric L.Einspruch, (2005), An introductory Guide to SPSS for Windows.
18. Frederick L. Coolidge, (2012), Statistics, A gentle Introduction.

19. Jean D. Gibbons, (1992), Nonparametric Statistics an introduction.
20. Peter Y Chen, Paula M Popovich, (2002), Correlation Parametric and Nonparametric Measures.
21. Dennis Howitt, Duncan Cramer, Στατιστική με το SPSS 16.
22. George Argyrous, (2011), Statistics for research with a guide to SPSS.
23. Eelko Huizingh, (2007), Applied Statistics with SPSS.
24. Δημητριάδης Ευστάθιος, (2012), Στατιστική επιχειρήσεων και εφαρμογές σε SPSS.