ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗ

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ ΜΑΓΓΙΝΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΟΥΝΕΤΑΣ

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2013

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή πραγματοποιήθηκε στο Ανώτατο Τεχνολογικό Ίδρυμα Πατρών, στο τμήμα Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων.

Η εργασία αυτή επικεντρώνεται στη διαδικασία του ελέγχου υποθέσεων σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού, τα οποία μελετώνται κάθε φορά. Με τη βοήθεια παραδειγμάτων, γίνεται μία προσπάθεια να κατανοηθεί η σημασία της διαδικασίας αυτής για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Στο πρώτο μέρος γίνεται ανάλυση της έννοιας της στατιστικής και της χρήσης της σε διάφορους τομείς της καθημερινότητας, αναφέρονται τα είδη δειγματοληψίας που χρησιμοποιούνται και οι δειγματικές κατανομές, η χρησιμότητα της εκτίμησης των παραμέτρων του πληθυσμού, περιγράφεται η διαδικασία υπολογισμού των διαστημάτων εμπιστοσύνης και των ελέγχων υποθέσεων.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται μια πρακτική εφαρμογή του ελέγχου υποθέσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Τι είναι στατιστική

Αρχικά στατιστική θεωρούνταν η παρουσίαση πληροφοριών σε αριθμητική μορφή. Το αντικείμενο της στατιστικής, όμως είναι πλατύτερο. Ασχολείται με μεθόδους που περιγράφουν και αναλύουν ένα μεγάλο αριθμό δεδομένων που αναφέρονται σε ιδιότητες συνόλων, φαινομένων ή γεγονότων και κάνουν εφικτό να βγει ένα συμπέρασμα απ’ αυτά.

Η λέξη στατιστική προέρχεται από τη λατινική λέξη status, που σημαίνει κατάσταση, και δηλώνει συλλογή στοιχείων για τις κρατικές ανάγκες. Αυτοί που ασχολούνται με τη συλλογή και ανάλυση των πληροφοριών αυτών ονομάζονταν «κρατικοί» ή «στατιστικοί». Με τη σημασία αυτή χρησιμοποιείται και σήμερα ο όρος στατιστική. Έτσι ακούμε από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης ή διαβάζουμε στα διάφορα έντυπα για «στατιστικές». Αυτές είναι πληροφορίες που αναφέρονται σε συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός και δίνονται με μορφή πινάκων ή διαγραμμάτων.

Ανάλογα με το αντικείμενο ή το γεγονός στο οποίο αναφέρονται τα δεδομένα, η Στατιστική παίρνει και ιδιαίτερη ονομασία. Για παράδειγμα, μιλάμε για «στατιστική επιχειρήσεων», για «γεωργική στατιστική», για «στατιστική τουρισμού» κτλ., όταν τα αριθμητικά δεδομένα αναφέρονται αντίστοιχα στις επιχειρήσεις, στη γεωργία, στον τουρισμό κτλ.

Στην επιστημονική γλώσσα Στατιστική είναι ο κλάδος των εφαρμοσμένων επιστημών που έχει ως αντικείμενο τη συγκέντρωση και παρουσίαση, καθώς και τη μελέτη και ανάλυση των παρατηρήσεων ή μετρήσεων που αναφέρονται σ’ ένα συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός. Έτσι η Στατιστική περιλαμβάνει τόσο τις μεθόδους συλλογής και επεξεργασίας στοιχείων, όσο και τις μεθόδους ανάλυσης και μελέτης τους. Από τη μελέτη αυτή ανακαλύπτονται σχέσεις που υπάρχουν στα διάφορα φαινόμενα και διατυπώνονται συμπεράσματα που είναι χρήσιμα για τη λήψη ορθών αποφάσεων.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι:

Στατιστική είναι η επιστήμη που πραγματεύεται μεθόδους συλλογής, επεξεργασίας, παρουσίασης και ανάλυσης αριθμητικών δεδομένων, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για τη λήψη ορθών αποφάσεων.

Η μελέτη προβλήματος με στατιστικές μεθόδους ακολουθεί τα εξής στάδια:

1. Συλλογή στατιστικών στοιχείων, όπου γίνεται η συγκέντρωση των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος.
2. Επεξεργασία και παρουσίαση στατιστικών στοιχείων, όπου γίνεται η μεθοδική ταξινόμηση των πολλών μετρήσεων και η παρουσίασή τους σε κατάλληλους αριθμητικούς πίνακες και γραφικές παραστάσεις, ώστε η εμφάνισή τους να είναι απλή και παραστατική.
3. Ανάλυση και ερμηνεία στατιστικών στοιχείων, όπου γίνονται μαθηματικοί υπολογισμοί για να βρεθούν διάφορες στατιστικές σταθερές που είναι απαραίτητες για την ερμηνεία των στατιστικών στοιχείων και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η Στατιστική ως επιστήμη έχει τους δικούς της συμβολισμούς, τη δική της ορολογία, τα δικά της θεωρήματα και τεχνικές. Χρησιμοποιείται σε όλες σχεδόν τις άλλες επιστήμες και στους περισσότερους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας (διοίκηση, δημογραφία, βιομηχανία, εμπόριο, πολιτική, ιατρική κτλ.).

Οι ειδικοί, όταν πρόκειται να αναφερθούν σε αριθμητικά στοιχεία που παρουσιάζονται με πίνακες, διαγράμματα κτλ., χρησιμοποιούν τον όρο «παρατηρήσεις» (observations) και όχι τον όρο «στατιστική» (statistics).

Η μεθοδολογία της Στατιστικής και η χρησιμοποίησή της έχουν παρεξηγηθεί από πολλούς ανθρώπους. Λέγεται ότι ο στατιστικός είναι ο άνθρωπος που φτιάχνει ακριβή διαγράμματα από παράλογες υποθέσεις ή που στηρίζει επιστημονικά τα ψέματά του κτλ.

Η Στατιστική δεν ευθύνεται για όλα αυτά. Φταίνε οι άνθρωποι που, είτε δε γνωρίζουν να χρησιμοποιούν σωστά τη Στατιστική, είτε γνωρίζουν αλλά έχουν λαθεμένα στοιχεία, είτε ακόμη εξάγουν σκόπιμα ψεύτικα συμπεράσματα. Οι τελευταίοι είναι επιστημονικά μη έντιμοι. Είναι γνωστό ότι πολλές δημοσκοπήσεις είναι προκατασκευασμένες, γιατί οι ειδικοί συγκεντρώνουν σκόπιμα εκείνα τα στοιχεία που χρειάζονται για να παρουσιάζουν το συμπέρασμα που θέλουν. Έτσι δίνονται συμπεράσματα στατιστικών μελετών που εξαπατούν τους ανθρώπους, με αποτέλεσμα πολλοί να μιλούν για μια ακόμη κατηγορία ψεμάτων, τα «στατιστικά ψέματα».

Αξίζει να αναφερθεί ότι ο πρώτος κυβερνήτης της χώρας μας μετά την Τουρκοκρατία, ο Ι. Καποδίστριας, αποφάσισε τη δημιουργία Στατιστικής

Υπηρεσίας στο Υπουργείο Εσωτερικών. Από τότε (1833) λειτουργεί η Στατιστική Υπηρεσία, η οποία έχει αναπτυχθεί σημαντικά.

1.2 Ιστορία της στατιστικής

Η λέξη στατιστική, όπως είπαμε και πριν, προέρχεται από τη λατινική λέξη status (που σημαίνει κράτος) και δηλώνει αρχικά συλλογή στοιχείων για τις κρατικές ανάγκες (έκταση, παραγωγή, πληθυσμό κλπ.). Η πρώτη απογραφή πληθυσμού έγινε στην Κίνα από τον αυτοκράτορα Υ-άο το έτος 2238 π.Χ., ενώ στους Ρωμαίους η πρώτη απογραφή πληθυσμού έγινε επί Ρωμύλου (753-715 π.Χ.) και η τελευταία από τον αυτοκράτορα Βεσπασιανό το 73 μ.Χ. Στην Αγγλία, η πρώτη καθολική απογραφή του πληθυσμού και του πλούτου γενικά έγινε το 1085 από τον Γουλιέλμο τον κατακτητή.

Το 1583 γράφεται από τον Fr. Sansovino το πρώτο βιβλίο στατιστικού περιεχομένου και λίγο αργότερα εισάγεται από τον Körning (1606-1681) η Στατιστική στην ανώτερη παιδεία.

Την ίδια εποχή εμφανίζεται το ενδιαφέρον για τις ασφάλειες ζωής και ο περίφημος Άγγλος αστρονόμος Halley, χρησιμοποιώντας τα ληξιαρχικά βιβλία γεννήσεων και θανάτων της πόλεως Breslaou, παρουσιάζει τον πρώτο πίνακα θνησιμότητας. Το ρεύμα αυτών των δημογραφικών μελετών επεκτείνεται και στη Γερμανία, όπου ο πάστορας Siissmilch (1707-1767) συγκεντρώνει στοιχεία από τα ληξιαρχικά βιβλία των εφημερίων της Πρωσίας και καταλήγει, το 1741, στο συμπέρασμα ότι το ποσοστό γέννησης των αγοριών είναι 51% και των κοριτσιών 49%, ενώ τα δύο φύλα έχουν ίσα ποσοστά κατά την εποχή του γάμου. Για το συγγραφέα το φαινόμενο αυτό δεν είναι τυχαίο γεγονός, αλλά νόμος θείας προέλευσης που αποσκοπεί στη διαιώνιση του είδους. Μέχρι την εποχή αυτή, η Στατιστική έχει περιγραφικό χαρακτήρα και ασχολείται κυρίως με θέματα Δημογραφίας.

Η Στατιστική ξεφεύγει από τον περιγραφικό της χαρακτήρα με την ανάπτυξη ενός κλάδου, του Λογισμού των Πιθανοτήτων, ο οποίος προήλθε από την μελέτη των τυχερών παιχνιδιών (χαρακτηριστική μάλιστα είναι η αλληλογραφία ανάμεσα στους Γάλλους μαθηματικούς Pascal και Fermat, με αφορμή τα ερωτήματα που έθεσε στον Pascal ο ιππότης De Mere για τα παιχνίδια του κύβου). Από τους θεμελιωτές του Λογισμού των Πιθανοτήτων αναφέρουμε τον Bernoulli, ο οποίος στο βιβλίο του «Η τέχνη των προβλέψεων» διατυπώνει τον περίφημο <u>νόμο των μεγάλων αριθμών</u>, και το Γάλλο μαθηματικό Laplace, στον οποίο οφείλεται η εφαρμογή του Λογισμού των Πιθανοτήτων στη σπουδή των φυσικών φαινομένων με πολυσύνθετες αιτίες. Στη νέα αυτή περίοδο της Στατιστικής, ο Βέλγος αστρονόμος Quetelet επεκτείνει την εφαρμογή της Στατιστικής στη σπουδή των φυσικών, διανοητικών και ηθικών ιδιοτήτων του ανθρώπου και παίρνει την πρωτοβουλία για τη σύγκληση του πρώτου Διεθνούς Συνεδρίου Στατιστικής που έγινε στις Βρυξέλλες το 1853, ενώ αργότερα ο F. Galton εφαρμόζει τη Στατιστική στη βιολογία και, ειδικότερα, στα προβλήματα της κληρονομικότητας. Η προσπάθεια του Galton συνεχίστηκε από τον Άγγλο μαθηματικό Pearson, στον οποίο οφείλεται κατά πολύ η σημερινή ανάπτυξη και θέση της Στατιστικής.

1.3 Βασικές έννοιες της στατιστικής

Δύο από τις θεμελιώδεις έννοιες στη στατιστική είναι αυτές του πληθυσμού και του δείγματος. Ο πληθυσμός αναφέρεται σε ολόκληρο το πληροφοριακό σύνολο που είναι διαθέσιμο και έχει ενδιαφέρον μελέτης για τον ερευνητή. Λόγω της αδυναμίας και του κόστους να συλλεχθούν δεδομένα για τον πληθυσμό, ο ερευνητής συλλέγει δεδομένα από ένα δείγμα, το οποίο είναι υποσύνολο του πληθυσμού, και η επιλογή του είναι τέτοια ώστε να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεχθεί μέσα από τον πληθυσμό όσο και οποιοδήποτε άλλο δείγμα. Τα στοιχεία του δείγματος μπορεί να είναι :

- αριθμητικά
- ποσοτικά (π.χ. ύψος στεγαστικών δανείων), τα οποία με τη σειρά τους μπορεί να έχουν:
    - Ø διακριτή, μη συνεχή μορφή (π.χ. ο αριθμός των αυτοκινήτων που έχει μία οικογένεια, 1, 2,…)
    - Ø συνεχή μορφή (π.χ. ο χρόνος που χρειάζεται κάποιος για να έρθει στην Πάτρα από την Αθήνα).
- ποιοτικά (π.χ. φύλο, χώρα γέννησης, χρώμα ματιών), που ο ερευνητής μπορεί να τα χρησιμοποιήσει για :
    - Ø Περιγραφική Στατιστική, όπου τα δεδομένα συνοψίζονται κατά τρόπο που απλά να περιγράφουν το δείγμα, και αφορά είτε γραφικές μεθόδους, είτε στατιστικά μεγέθη. Για παράδειγμα, το ιστορικό γράφημα τιμών του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου των Αθηνών που βρίσκουμε στον τύπο είναι παράδειγμα περιγραφικής στατιστικής, όπως επίσης και η δήλωση «τα στεγαστικά δάνεια αυξήθηκαν κατά 10% το β’ τρίμηνο του έτους σε σχέση με την αντίστοιχη περίοδο πέρυσι».
    - Ø Επαγωγική Στατιστική, όπου τα δεδομένα από το δείγμα θα χρησιμοποιηθούν για να προκύψουν συμπεράσματα σχετικά με τον πληθυσμό από τον οποίο επιλέχθηκε το δείγμα, και επομένως να προκύψουν εκτιμήσεις και προβλέψεις που θα βοηθήσουν στην άσκηση πολιτικής. Σε μία τράπεζα για παράδειγμα, με τη μελέτη ενός ποσοστού οφειλετών και τη χρήση της επαγωγικής στατιστικής μπορούμε να προβούμε σε εκτιμήσεις για το ποσοστό των δανείων που πιθανότατα δε θα αποπληρωθούν.

1.4 Ο ρόλος της στατιστικής στις επιχειρήσεις

Η εφαρμογή της στατιστικής στον επιχειρηματικό τομέα αφορά κυρίως τις βιομηχανικές και εμπορικές επιχειρήσεις. Η εφαρμογή στατιστικών μεθόδων για τη λύση προβλημάτων του επιχειρηματικού τομέα έγινε πρώτα στις Η.Π.Α. στις αρχές του 20ου αιώνα ως συνέπεια της συγκέντρωσης των δραστηριοτήτων σε μεγάλες επιχειρήσεις με πολυάριθμο προσωπικό και υποκαταστήματα σε όλη την έκταση της χώρας.

Για τον επιχειρηματία που γνωρίζει προσωπικά τους κυριότερους συνεργάτες του και όλο το μηχανισμό της επιχείρησής του η στατιστική δεν παρέχει πρόσθετη ωφέλεια. Αλλά για το γενικό διευθυντή μιας μεγάλης επιχείρησης, η οποία απασχολεί εκατοντάδες ή και χιλιάδες πρόσωπα σε πολυάριθμες εγκαταστάσεις που βρίσκονται συνήθως μακριά από το κέντρο της επιχείρησης, οι στατιστικές πληροφορίες για την ικανότητα των εργοταξίων, των γραφείων, των αποθηκών, για τις αγορές και πωλήσεις, για την παραγωγή και τον έλεγχο καλής ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων, κ.λπ. η στατιστική είναι πολύ χρήσιμο πληροφοριακό εργαλείο για τη λήψη ορθών επιχειρηματικών αποφάσεων και την άσκηση οικονομικής, κοινωνικής, τιμολογιακής κ.λπ. πολιτικής. Η τεράστια ανάπτυξη των βιομηχανικών και εμπορικών επιχειρήσεων στις Η.Π.Α. τα τελευταία χρόνια οφείλεται κυρίως στην καλύτερη οργάνωση της παραγωγής και διανομής των εμπορευμάτων με στατιστικές μεθόδους.

Ο ρόλος του στατιστικού μιας μεγάλης επιχείρησης είναι να συγκρίνει το στατιστικό υλικό, να το παρουσιάζει σε πίνακες και διαγράμματα και να υπολογίζει τους απαραίτητους στατιστικούς δείκτες. Όλα αυτά τα στατιστικά στοιχεία πρέπει να είναι στη διάθεση του γενικού διευθυντή, ο οποίος θα τα χρησιμοποιήσει για τη λήψη ορθών αποφάσεων για την επιχείρηση.

Οι κυριότερες στατιστικές δραστηριότητες μιας μεγάλης επιχείρησης είναι:

1. Το Τμήμα Οικονομικών ή Στατιστικών Μελετών, όπου ο προϊστάμενος οικονομολόγος ή στατιστικός αναλύει γενικές επιχειρηματικές τάσεις και προβλέψεις των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων για τις τιμές των προϊόντων και άλλους οικονομικούς παράγοντες. Συντονίζει τη στατιστική εργασία των τμημάτων της επιχείρησης και εκδίδει συνοπτικές εκθέσεις των λειτουργιών της επιχείρησης, τις οποίες υποβάλλει στους διευθύνοντες της επιχείρησης.
2. Το Τμήμα Marketing ασχολείται με την έρευνα των προτιμήσεων των καταναλωτών και τη σφυγμομέτρηση της κοινής γνώμης. Οι επιχειρήσεις επιδιώκουν την παραγωγή και διάθεση νέων προϊόντων, διενεργούν δειγματοληπτικές έρευνες για να εξακριβώσουν τις ανάγκες και τις προτιμήσεις των καταναλωτών. Η διερεύνηση της αγοράς για την εξακρίβωση των αντιδράσεων του καταναλωτικού κοινού σχετικά με την

ποιότητα, την τιμή κ.λπ. του προϊόντος μπορεί να αποτρέψει τις επιχειρήσεις από επικίνδυνους πειραματισμούς. Το Τμήμα Marketing αποτελεί σήμερα απαραίτητη λειτουργία των σύγχρονων επιχειρήσεων. Σκοπός του Marketing είναι η έρευνα και η πολιτική κατάκτησης της αγοράς.

3. Το Τμήμα Παραγωγής διενεργεί Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας προϊόντων που παράγονται μαζικά. Η σύγχρονη τεχνική της μαζικής παραγωγής απαιτεί κάθε μονάδα του παραγόμενου προϊόντος να ικανοποιεί ορισμένες «προδιαγραφές», δηλαδή τα παραγόμενα προϊόντα πρέπει να έχουν ορισμένες διαστάσεις, χημικές συνθέσεις, κ.λπ., οι οποίες δεν πρέπει να αποκλίνουν από το προκαθορισμένο παραγόμενο προϊόν. Με την εφαρμογή των μεθόδων του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας μπορούμε να εντοπίσουμε εγκαίρως τις υπάρχουσες αποκλίσεις του παραγόμενου προϊόντος από το πρότυπο προϊόν, οι οποίες δημιουργούνται κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διαδικασίας, έτσι ώστε να ρυθμίσουμε τις συνθήκες της παραγωγής εγκαίρως, με αποτέλεσμα να περιορίσουμε τις αποκλίσεις σε λογικά επίπεδα και έτσι να ελαττώσουμε τον αριθμό ή το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων, να μειώσουμε το κόστος παραγωγής, να αυξήσουμε την παραγωγικότητα, να διατηρήσουμε την ομοιομορφία της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων, να αυξήσουμε τα κέρδη της επιχείρησης.
4. Το Τμήμα Οικονομικού Ελέγχου συνδυάζει στατιστικές και λογιστικές μεθόδους για την κατάρτιση του προϋπολογισμού του επόμενου οικονομικού έτους και περιλαμβάνει πωλήσεις, πρώτες ύλες, εργατικό δυναμικό, καθαρά κέρδη κ.ά. Ενδεχομένως τηρεί σύστημα πρότυπου κόστους (standard cost) για την άσκηση τιμολογιακής πολιτικής.
5. Το Τμήμα Προσωπικού ασχολείται με την παρακολούθηση των εξής στοιχείων:
   i. Δύναμη προσωπικού κατά κατηγορία εργαζομένων (εργάτες, υπάλληλοι, μαθητευόμενοι).
   ii. Αμοιβές προσωπικού (μισθοί, ημερομίσθια, ΙΚΑ, οικογενειακά επιδόματα, κ.λπ.).
   iii. Χρόνος εργασίας (καθορίζει και το μέσο ωριαίο κόστος εργασίας για μισθούς, ημερομίσθια, κ.λπ.)

Ειδικότερα, η στατιστική έχει εφαρμογή (με πολύ μεγάλη σημασία) στις δραστηριότητες οργάνωσης των τουριστικών επιχειρήσεων και μεγάλη συμβολή στη χάραξη σωστού προγραμματισμού ευρύτερων τουριστικών περιοχών. Δηλαδή, γίνεται:

1. Μελέτη των συνθηκών της τουριστικής αγοράς, ανάλυση των τουριστικών επιχειρηματικών τάσεων και προβλέψεις των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων για την εφαρμογή σωστής τουριστικής πολιτικής.

2. Έρευνα για τις ανάγκες και τις προτιμήσεις των πελατών της τουριστικής επιχείρησης ή περιοχής. Σφυγμομέτρηση της γνώμης τους σχετικά με την ποιότητα, την τιμή, τις δυνατές βελτιώσεις κ.τ.λ. των παρεχόμενων υπηρεσιών, καθώς και το αν αυτές ικανοποιούν ορισμένες προδιαγραφές.
3. Έρευνα για τη δύναμη, τη σύνθεση, την ηλικία, τις αμοιβές και το χρόνο εργασίας του προσωπικού.

1.5 Η αξία της στατιστικής στις επιστήμες υγείας και πρόνοιας

Το βασικό χαρακτηριστικό των βιολογικών και ιατρικών δεδομένων είναι η μεταβλητότητα. Αυτό το χαρακτηριστικό δε δημιουργεί μόνο το πρόβλημα της συνοπτικής έκφρασης, αλλά κυρίως εισάγει το στοιχείο της αβεβαιότητας κατά την αξιολόγηση των ευρημάτων από διάφορες μελέτες και οδηγεί στην εξαγωγή συμπερασμάτων από αυτές. Η εκτίμηση του βαθμού της αξιοπιστίας, δηλαδή ο υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος κατά την αξιολόγηση της σχέσης μεταξύ κάποιων παραμέτρων ή της μεταβλητότητας κάποιων μεγεθών, αποτελεί το αντικείμενο της στατιστικής μεθοδολογίας. Με δεδομένο ότι η μεταβλητότητα είναι χαρακτηριστικό των περισσότερων ιατρικών μεγεθών, η αξιολόγηση των βιοϊατρικών ευρημάτων και η εξαγωγή συμπερασμάτων από αυτά πραγματοποιούνται πιθανολογικά με τη βοήθεια της στατιστικής μεθοδολογίας. Κατά συνέπεια, η ιατρική στατιστική αποτελεί τη βασική υποδομή για την ιατρική έρευνα, ενώ η ανάλυση και η προσέγγιση των κυριότερων στοιχείων αποτελεί προϋπόθεση για τη σωστή κατανόηση της ιατρικής.

1.6 Το κράτος και η στατιστική

Ένα καλά οργανωμένο κράτος οφείλει να γνωρίζει κάθε στιγμή τον πληθυσμό της χώρας, την κατανομή του πληθυσμού κατά φύλο, ηλικία, επάγγελμα κλπ., καθώς και την κίνηση και πιθανή εξέλιξή του. Πρέπει, επίσης, να παρακολουθεί τόσο τα οικονομικά φαινόμενα της χώρας (παραγωγή, εισαγωγές και εξαγωγές, κίνηση και εμπορία των αγαθών κλπ.), όσο και τα διοικητικά και κοινωνικά φαινόμενα της χώρας (διοίκηση, εργασία, δημόσια υγεία, πρόνοια, κοινωνικές ασφαλίσεις, εκπαίδευση, δικαιοσύνη, στέγαση, κατάρτιση τιμαρίθμου κόστους ζωής κλπ.).

Για το σκοπό αυτό, κάθε κράτος έχει μια στατιστική υπηρεσία, η οποία συγκεντρώνει τα απαραίτητα στοιχεία και παρακολουθεί την εξέλιξη των παραπάνω φαινομένων. Μια τέτοια υπηρεσία πρέπει να είναι καλά οργανωμένη και να διαθέτει ένα πλούσιο κεντρικό αρχείο στατιστικών στοιχείων, από το οποίο θα αντλεί χρήσιμες πληροφορίες κάθε διοικητικός παράγοντας του κράτους και κάθε ερευνητής.

1.7 Σπουδαιότητα και κλάδοι της στατιστικής

Η επίδραση της Στατιστικής στη ζωή μας είναι σήμερα πολύ μεγάλη. Εκτός από την εφαρμογή της στην απογραφή, στατιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της γεννητικότητας, της θνησιμότητας, της μετανάστευσης κτλ., προκειμένου να ληφθούν σοβαρές αποφάσεις για το δημογραφικό πρόβλημα μιας χώρας.

Η μεθοδολογία της Στατιστικής χρησιμοποιείται στη γεωργία, στην ιατρική και φαρμακευτική έρευνα, σε στρατιωτικές υποθέσεις κτλ. Η Στατιστική και η Θεωρία των πιθανοτήτων χρησιμοποιούνται για να ληφθούν σοβαρές αποφάσεις. Για παράδειγμα, με στατιστικές μεθόδους ελέγχεται η ποιότητα των προϊόντων που παράγονται από μια βιομηχανία και στη συνέχεια αποφασίζεται η διάθεσή τους στην αγορά.

Η Μετεωρολογία δεν μπορεί να κάνει καμία πρόβλεψη χωρίς τη στατιστική ανάλυση των διαφόρων στοιχείων που επηρεάζουν το φαινόμενο που μελετάει κάθε φορά και η εκπαιδευτική έρευνα στηρίζεται κυρίως στη στατιστική.

Αυτοί είναι μόνο μερικοί από τους τομείς που προσφέρει τις υπηρεσίες της η Στατιστική. Πριν προχωρήσουμε, θα ορίσουμε με σαφήνεια μερικούς όρους που χρησιμοποιούνται.

Με τη λέξη στατιστικό πληθυσμό, ή απλά πληθυσμό, εννοούμε το σύνολο των ατόμων ή αντικειμένων στα οποία αναφέρονται οι παρατηρήσεις μας. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού τα λέμε άτομα ή στοιχεία ή στατιστικές μονάδες.

Στα διάφορα φαινόμενα που μελετάμε τα σύνολα των ατόμων ή των αντικειμένων είναι πεπερασμένα (πεπερασμένος πληθυσμός). Πληθυσμοί με άπειρο πλήθος στοιχείων σπανίως εμφανίζονται στην καθημερινή ζωή, εκτός κι αν οι μελετητές, για λόγους διευκόλυνσης στη μελέτη τους, υποθέτουν ότι ο πληθυσμός έχει άπειρα στοιχεία. Για παράδειγμα, κατά την εξέταση της ποιότητας των προϊόντων που παράγονται σε μια συνεχή βιομηχανική διαδικασία μπορούμε να θεωρούμε ότι ο πληθυσμός μας αποτελείται από μια άπειρη ακολουθία στοιχείων.

Για να πάρουμε μια απόφαση για έναν πληθυσμό (π.χ. αν είναι αποδεκτό το ποσοστό των ελαττωματικών λαμπτήρων που φτιάχνει ένα εργοστάσιο), συνήθως εξετάζουμε ένα μόνο δείγμα (δηλαδή μερικούς μόνο λαμπτήρες) από το σύνολο αυτό. Η επιλογή των στοιχείων του δείγματος πρέπει να γίνεται με τυχαία διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι το δείγμα λαμβάνεται με κάποιον τρόπο που είναι έξω από τον έλεγχο εκείνου που κάνει το πείραμα ή την μελέτη. Υπάρχουν πολλοί μαθηματικοί ορισμοί για το τυχαίο δείγμα, αλλά εμείς, θα εννοούμε ότι κάθε στοιχείο του πληθυσμού έχει την ίδια ευκαιρία να επιλεγεί και η επιλογή του δεν επηρεάζει την επιλογή κανενός άλλου στοιχείου. Βασισμένοι τώρα στο δείγμα αυτό, οδηγούμαστε σε ορισμένα συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Για παράδειγμα, σε μία ιατρική έρευνα θέλουμε να δούμε αν το φάρμακο Α είναι αποτελεσματικότερο από το φάρμακο Β. Από τους αρρώστους που έχουν ανάγκη τα φάρμακα παίρνουμε τελείως τυχαία δύο ισοπληθείς ομάδες, π.χ. δύο ομάδες με 30 αρρώστους η καθεμία. Στη μία ομάδα δίνουμε το φάρμακο Α και στην άλλη το Β για 10 ημέρες. Την ημέρα που αρχίζουμε το πείραμα εξετάζουμε όλα τα άτομα και καταγράφουμε για το καθένα την αρχική του κατάσταση (π.χ. πίεση, ουρικό οξύ, ζάχαρο κλπ.). Την 11η ημέρα κάνουμε πάλι εξετάσεις και καταγράφουμε τα νέα αποτελέσματα για κάθε ομάδα, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο ομάδων και τελικά βγάζουμε το συμπέρασμα για το ποιό από τα δύο φάρμακα είναι καλύτερο.

Σήμερα η στατιστική διακρίνεται σε δύο μεγάλους τομείς: την Περιγραφική Στατιστική και τη Μαθηματική ή Συμπερασματική Στατιστική. Τελευταία αναπτύσσεται κι ένας καινούριος κλάδος, που ονομάζεται σχεδιασμός πειραμάτων.

Ο πρώτος τομέας ασχολείται με την ταξινόμηση των στοιχείων, τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων που αντιστοιχούν στην κατανομή συχνοτήτων κτλ.. Ο δεύτερος τομέας συνήθως ασχολείται με τη μελέτη δειγμάτων από έναν πληθυσμό με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για ολόκληρο τον πληθυσμό. Τα συμπεράσματα αυτά οδηγούν στη λήψη ορισμένων αποφάσεων. Γι’ αυτό πολλές φορές λέμε ότι η Στατιστική δημιουργεί αποφάσεις.

1.8 Στατιστικές μεταβλητές

Τα άτομα ενός πληθυσμού εξετάζονται ως προς μία ή περισσότερες χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Στο προηγούμενο παράδειγμα οι άρρωστοι αποτελούν τον πληθυσμό κι ο καθένας είναι στοιχείο του πληθυσμού. Οι αριθμοί 14, 15, 16 ,…, που δείχνουν την πίεση των ατόμων, αποτελούν τις παρατηρήσεις μας (τα στατιστικά δεδομένα), ενώ η πίεση είναι το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε τα άτομα και το λέμε μεταβλητή. Οι αριθμοί ή οι άλλες συμβολικές εκφράσεις που μετρούν ή εκφράζουν τις διάφορες καταστάσεις μιας μεταβλητής ονομάζονται τιμές της μεταβλητής. Μια μεταβλητή συμβολίζεται με τα γράμματα Χ, Ψ, Ζ, ..., ενώ οι τιμές της Χ με x_1, x_2, x_3, ...

Για παράδειγμα, η πίεση των ασθενών που αναφέραμε προηγουμένως είναι η μεταβλητή Χ και οι αριθμοί 14, 15, 16, ... είναι οι τιμές της x_1, x_2, x_3, ...

Επίσης, αν εξετάζουμε το σύνολο των βιβλίων μιας βιβλιοθήκης ως προς το είδος των βιβλίων της, ο πληθυσμός θα είναι το σύνολο των βιβλίων και η μεταβλητή το είδος των βιβλίων. Οι τιμές της μεταβλητής αυτής θα είναι: Μαθηματικό (Μ), Φυσικό (Φ), Λογοτεχνικό (Λ), κτλ.. Αν η μεταβλητή είναι η «προτίμηση ψηφοφόρων» στις εκλογές, τότε οι τιμές της μεταβλητής είναι: ΠΑΣΟΚ, ΝΔ, ΚΚΕ, ΣΥΡΙΖΑ κλπ.. Αν η μεταβλητή είναι «ομάδα αίματος», τότε οι τιμές της είναι : A, B, AB, 0.

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Στις ποσοτικές και στις ποιοτικές.

Ποσοτικές μεταβλητές (quantitative variables) είναι εκείνες που επιδέχονται μέτρηση και οι τιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί. Τέτοιες μεταβλητές είναι το βάρος ενός μαθητή, η θερμοκρασία, η υγρασία, ο αριθμός των κοριτσιών μιας οικογένειας κτλ..

Ποιοτικές μεταβλητές (qualitative variables) είναι εκείνες που δεν επιδέχονται μέτρηση και οι τιμές τους δεν εκφράζονται με αριθμούς, αλλά με λέξεις. Τέτοιες μεταβλητές είναι το είδος των βιβλίων, το χρώμα των αυτοκινήτων, η ένδειξη ενός νομίσματος, το ενδιαφέρον των μαθητών για ένα μάθημα, κλπ..

Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε συνεχείς και ασυνεχείς (διακριτές).

Συνεχής (continuous variable) είναι μια μεταβλητή όταν μπορεί να πάρει όλες τις τιμές ενός διαστήματος της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Ασυνεχής ή διακριτή (discrete variable) είναι μια μεταβλητή όταν παίρνει μόνο μεμονωμένες τιμές (πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τιμών).

Για παράδειγμα, το βάρος ενός μαθητή, η θερμοκρασία, η ηλικία είναι συνεχείς μεταβλητές, ενώ η ένδειξη ενός ζαριού, ο αριθμός των παιδιών μιας οικογένειας είναι ασυνεχείς μεταβλητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

2.1 Δειγματοληψία

2.1.1 Γενικά

Για τη συλλογή στατιστικών στοιχείων που αναφέρονται σε ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες ενός πληθυσμού μπορούμε να διακρίνουμε διάφορες στατιστικές μεθόδους, οι σπουδαιότερες από τις οποίες είναι η <u>απογραφή</u> (που εφαρμόζεται σε ολόκληρο τον πληθυσμό), η <u>δειγματοληψία</u> (που εφαρμόζεται σε ένα μέρος του πληθυσμού) και οι <u>συνεχείς καταγραφές στατιστικών στοιχείων</u>. Είναι τρομερά δύσκολο και, για πολλούς πρακτικούς λόγους, ανεπιθύμητο να εξετάζουμε κάθε μέλος ενός στατιστικού πληθυσμού, προκειμένου να μελετήσουμε ένα ορισμένο χαρακτηριστικό του. Σε αυτές τις περιπτώσεις, αντί να μελετήσουμε ολόκληρο τον πληθυσμό, επιλέγουμε ένα μέρος του, το <u>δείγμα</u>, αναλύουμε στατιστικά τις πληροφορίες του δείγματος, και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής, αντλούμε συμπεράσματα για τον πληθυσμό.

Οι πιο συνηθισμένες καταστάσεις που μας οδηγούν στη δειγματοληψία είναι:

§ Όταν δε χρειαζόμαστε απόλυτης ακρίβειας πληροφορίες σε σχέση με τον πληθυσμό.
§ Όταν η μέτρηση ολόκληρου του πληθυσμού είναι ιδιαίτερα δαπανηρή ή δε δικαιολογείται οικονομικά η πλέον ακρίβεια που πρόκειται να προκύψει.
§ Όταν χρειαζόμαστε τις πληροφορίες γρήγορα.
§ Όταν δε διαθέτουμε ολόκληρο τον πληθυσμό για να μετρήσουμε τα διάφορα χαρακτηριστικά του κατά τη χρονική περίοδο της έρευνάς μας.
§ Όταν η μέτρηση ή παρατήρηση κάποιου μέλους του πληθυσμού προκαλεί την αχρήστευσή του.

Η δυσπιστία κάποιων για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της δειγματοληψίας δεν παύει να υπάρχει. Αυτό οφείλεται, από τη μία, στη φυσιολογική απροθυμία των ανθρώπων να αποδεχτούν ως ορθό ένα συμπέρασμα που αφορά ολόκληρο τον πληθυσμό, όταν αυτό προέρχεται από ένα πολύ μικρό μέρος του πληθυσμού και, από την άλλη, σε πρόχειρες εφαρμογές της δειγματοληψίας, που δεν οδηγούν σε αξιόπιστα αποτελέσματα. Ωστόσο γίνεται ολοένα και περισσότερο αποδεκτή.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων της δειγματοληψίας ονομάζεται δειγματικός χώρος.

2.1.2 Τυχαία δείγματα

Για να προκύψουν ορθά συμπεράσματα σε σχέση με τον πληθυσμό από ένα δείγμα πρέπει το τελευταίο να είναι, πρώτα απ' όλα, τυχαίο. Την τυχαιότητα του δείγματος την εξασφαλίζουμε με τη διαδικασία επιλογής των μελών του και δεν είναι δυνατό να την αποδείξουμε αφού το έχουμε επιλέξει. Συγκεκριμένα, η διαδικασία επιλογής των μελών του δείγματος πρέπει να εξασφαλίζει σε κάθε μέλος του πληθυσμού γνωστή και ίση πιθανότητα – μη μηδενική – να είναι μέλος του δείγματος. Τυχαίο στη στατιστική ορολογία σημαίνει το δείγμα που προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία και δεν πρέπει να συγχέεται με την καθημερινή χρήση της λέξης τυχαίο, που υποδηλώνει κάτι που συνέβη χωρίς λόγο, χωρίς αιτία. Παρακάτω θα εξηγήσουμε τέσσερις τύπους τυχαίων δειγμάτων που ενδέχεται να χρησιμοποιήσουμε.

- **Απλά τυχαία δείγματα**

Απλά τυχαία δείγματα ονομάζουμε τα δείγματα έτσι, ώστε κάθε στοιχείο του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να είναι μέλος του δείγματος. Την τυχαιότητα του δείγματος την εξασφαλίζουμε με την επιλογή των μελών του δείγματος με τη βοήθεια των τυχαίων αριθμών. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται σε κάθε μέλος του πληθυσμού η ίδια πιθανότητα να αποτελέσει μέλος του δείγματος. Οι τυχαίοι αριθμοί δημιουργούνται από τους μονοψήφιους αριθμούς 0 μέχρι 9. Η πιο απλή μέθοδος για να δημιουργηθούν τυχαίοι αριθμοί είναι εκείνη κατά την οποία χρησιμοποιούνται 10 όμοιες σφαίρες με ενδείξεις από 0 μέχρι 9. Αν επιλέγουμε κάθε φορά μια σφαίρα και την επανατοποθετούμε στις άλλες, αφού διαβάσουμε την ένδειξή της, τότε δημιουργούμε τυχαίους αριθμούς, οι οποίοι μπορούν να συνδυαστούν ανά δύο ή ανά τρεις κ.λπ. και να δημιουργήσουν διψήφιους, τριψήφιους, κ.λπ. τυχαίους αριθμούς.

Αυτό που έχει σημασία είναι ότι η διαδικασία που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να εξασφαλίζει ίση πιθανότητα σε οποιοδήποτε μέλος του πληθυσμού να επιλεχθεί για το δείγμα και, βέβαια, πρέπει να αποφεύγουμε, οπωσδήποτε, οποιαδήποτε διαδικασία υποβοηθά την ένταξη ενός ορισμένου μέλους του πληθυσμού στο δείγμα.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι τη δειγματοληψία των απλών τυχαίων δειγμάτων μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε, όταν: α) τα μέλη του πληθυσμού μπορούμε να τα αριθμήσουμε με μικρό κόστος και β) μπορούμε να έχουμε πρόσβαση στα μέλη του δείγματος επίσης με μικρό κόστος.

Για να έχουμε, όμως, τη δυνατότητα αρίθμησης πρέπει ο πληθυσμός να μην είναι άπειρος – άπειρος πληθυσμός ουσιαστικά σημαίνει έναν πληθυσμό που, θεωρητικά, δεν έχουμε τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε όλα τα μέλη του. Παρά, λοιπόν, το γεγονός ότι αρκετοί πληθυσμοί εμφανίζονται αρκετά μεγάλοι, άπειροι πληθυσμοί φυσικών αντικειμένων, στην πραγματικότητα, δεν υπάρχουν. Έτσι, στην πράξη δεχόμαστε ένα μεγάλο πεπερασμένο πληθυσμό ως μία προσέγγιση ενός άπειρου πληθυσμού.

- **Συστηματικά τυχαία δείγματα**

Στη συστηματική τυχαία δειγματοληψία επιλέγουμε τα στοιχεία του δείγματος από έναν πληθυσμό κατά ομοιόμορφα διαστήματα, τα οποία μπορεί να μετρώνται σε αριθμό στοιχείο, π.χ. το κάθε $ν_{στό}$ στοιχείο του πληθυσμού, σε χρόνο ή χώρο. Η επιλογή του πρώτου στοιχείου έχει καθοριστική σημασία σ' αυτό το είδος της δειγματοληψίας, αφού από εκεί και πέρα είναι ορισμένα εκείνα τα στοιχεία που θα επιλεχθούν στις επόμενες ομάδες των ν στοιχείων. Γι' αυτό, αφού αριθμήσουμε τα ν πρώτα στοιχεία, επιλέγουμε με τη βοήθεια των τυχαίων αριθμών ποιό είναι αυτό που θα αποτελέσει την αρχή της δειγματοληψίας μας. Αφού καθορίσουμε αυτό, το επόμενο στοιχείο είναι το $ν_{στό}$ απ' αυτό, κ.ο.κ..

Τα δείγματα που προκύπτουν από την απλή τυχαία δειγματοληψία δε συμπίπτουν με εκείνα που προκύπτουν από τη συστηματική τυχαία δειγματοληψία. Έτσι, η απλή και η συστηματική είναι διαφορετικές μέθοδοι τυχαίας δειγματοληψίας. Η συστηματική τυχαία δειγματοληψία μπορεί να παράγει ένα λάθος που δεν υπάρχει στην απλή τυχαία. Ενδέχεται, όμως, η ιδιαιτερότητα της οργάνωσης του πληθυσμού να μας οδηγεί στη χρήση της συστηματικής τυχαίας δειγματοληψίας.

- **Στρωματοποιημένα τυχαία δείγματα**

Στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία λέμε τη διαδικασία κατά την οποία, κατ' αρχήν, διαιρούμε σε στρώματα τον πληθυσμό και, στη συνέχεια, επιλέγουμε ένα απλό τυχαίο δείγμα από κάθε στρώμα. Ο λόγος για τον οποίο καταφεύγουμε σε αυτό το είδος δειγματοληψίας είναι η εξασφάλιση ικανοποιητικού μεγέθους δείγματος από κάθε στρώμα. Παραδείγματος χάρη, αν θέλουμε πληροφορίες για την ανεργία στην Ελλάδα (ολόκληρη τη χώρα) και κατά περιφέρεια (Μακεδονία, Θράκη, Κρήτη, κ.λπ.), αν επιλέξουμε ένα δείγμα για το σύνολο της χώρας, ενδέχεται το δείγμα να είναι πολύ μικρό για να προκύψουν αξιόπιστα αποτελέσματα για μία ή περισσότερες συγκεκριμένες περιφέρειες. Αντίθετα, αν η χώρα διαιρεθεί στις περιφέρειές της (στρώματα), τα μεγέθη των δειγμάτων κατά περιφέρεια μπορούμε να τα καθορίσουμε από πριν, όπως συμβαίνει με την απλή δειγματοληψία στο σύνολο της χώρας και να μην τα αφήσουμε στην τύχη. Πέρα από αυτό όμως, τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία τη χρησιμοποιούμε για να βελτιώσουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της απλής δειγματοληψίας. Αυτό γίνεται όταν οι διαφορές μεταξύ των στρωμάτων είναι μεγαλύτερες από τις διαφορές εντός ενός στρώματος. Με άλλα λόγια, η στρωματοποιημένη δειγματοληψία είναι αποτελεσματική, όταν το εσωτερικό των στρωμάτων είναι ομοιογενές, όσο πιο πολύ γίνεται, ενώ είναι διαφορετικό από στρώμα σε στρώμα, επίσης όσο πιο πολύ γίνεται.

- **Τυχαία δείγματα ομάδων**

Σ’ αυτή τη διαδικασία δειγματοληψίας, κατ’ αρχήν, κάνουμε απλή τυχαία δειγματοληψία στις ομάδες. Έτσι, επιλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα ομάδων. Στη συνέχεια, κάνουμε απλή τυχαία δειγματοληψία σε κάθε ομάδα του τυχαίου δείγματος των ομάδων. Παραδείγματος χάρη, ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει η άποψη των εργαζομένων για τις συνθήκες εργασίας τους στα εργοστάσια μιας ορισμένης βιομηχανικής περιοχής. Προφανώς, για να δημιουργηθεί ένας ενιαίος πίνακας όλων των εργαζομένων στη βιομηχανική περιοχή απαιτείται και χρόνος και χρήμα. Δεν είναι, όμως, δύσκολο να δημιουργήσουμε έναν πίνακα με τα εργοστάσια και για κάθε εργοστάσιο να έχουμε τους εργαζόμενους σ’ αυτό (ομάδα). Στη συνέχεια, μπορούμε να επιλέξουμε ένα απλό τυχαίο δείγμα από τα εργοστάσια και να επιλέξουμε απλά τυχαία δείγματα από τα επιλεχθέντα εργοστάσια. Τη διαδικασία αυτή τη λέμε δειγματοληψία δύο σταδίων. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε το δείγμα των ομάδων, στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε ένα απλό δείγμα για κάθε ομάδα. Τα τυχαία δείγματα τα χρησιμοποιούμε, παρ’ ότι μας δίνουν αποτελέσματα μικρότερης ακρίβειας από εκείνα της απλής τυχαίας δειγματοληψίας για ίσα μεγέθη δείγματος, κυρίως γιατί η σχετική διαδικασία είναι οικονομικά συμφέρουσα.

Η μικρότερη ακρίβεια της δειγματοληψίας ομάδων οφείλεται στο γεγονός ότι στις περισσότερες πρακτικές καταστάσεις δεχόμαστε τις ομάδες όπως ακριβώς είναι και συχνά η καθεμιά τους είναι σχετικά ομοιογενής, αλλά διαφορετική από τις άλλες ομάδες. Πέραν αυτού, στη δειγματοληψία ομάδων συχνά μόνο ένα μικρό ποσοστό των ομάδων ενός πληθυσμού περιλαμβάνεται στη δειγματοληψία. Οι υπόλοιπες ομάδες αγνοούνται. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων θα είναι καλύτερη αν οι ομάδες που αγνοούνται είναι παρόμοιες με εκείνες που χρησιμοποιούνται στη δειγματοληψία. Συνεπώς, η δειγματοληψία ομάδων δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε ομογενείς πληθυσμούς, δηλαδή πληθυσμούς που έχουν ομοιόμορφη σύνθεση στο σύνολό τους.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι κεντρικό ρόλο στις στατιστικές αναλύσεις έχει η απλή τυχαία δειγματοληψία. Γι' αυτό κάθε φορά που αναφερόμαστε σε δειγματοληψία ή δείγμα εννοούμε την απλή τυχαία δειγματοληψία και το απλό τυχαίο δείγμα.

2.2 Δειγματικές Κατανομές

2.2.1 Γενικά

Σε μερικές περιπτώσεις, η στατιστική εφαρμόζει μεθόδους, μέσω των οποίων είναι δυνατόν από τα δεδομένα ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος να εξαχθούν επαγωγικώς γενικότερα συμπεράσματα, δηλαδή συμπεράσματα που αφορούν το σύνολο των στοιχείων του πληθυσμού από τον οποίο έχει ληφθεί το δείγμα. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι η διερεύνηση ενός στατιστικού πληθυσμού γίνεται με μεθόδους της Επαγωγικής Στατιστικής.

Η κανονική κατανομή χρησιμοποιείται για την περιγραφή πολλών ποσοτικών φαινομένων. Αποτελεί, όμως, χρήσιμο εργαλείο και στην πειραματική έρευνα. Μέσω της χρήσης του κεντρικού οριακού θεωρήματος, η κανονική κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εξαγωγή συμπερασμάτων, όσον αφορά την ακρίβεια με την οποία ο μέσος $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ ενός δείγματος n ανεξάρτητων παρατηρήσεων x_1, x_2, …, x_n από μια οποιαδήποτε κατανομή εκτιμά τη μέση τιμή μ της κατανομής αυτής.

Συγκεκριμένα, η χρήση της κανονικής κατανομής κάνει εφικτό τον προσδιορισμό της πιθανότητας $P(-\varepsilon \leq \bar{x}-\mu \leq \varepsilon)$ με την οποία η εκτίμηση που παρέχει ο $\bar{x}$ δε θα απέχει από την πραγματική, αλλά άγνωστη τιμή της μέσης τιμής μ περισσότερο από ε.

Ο μέσος $\bar{x}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια κατανομή που είναι εν γένει άγνωστη. Η κατανομή αυτή ονομάζεται δειγματική κατανομή. Ο καθορισμός της μορφής της κατανομής αυτής είναι απαραίτητος για τον υπολογισμό της πιθανότητας που αναφέραμε παραπάνω και γίνεται δυνατός με τη χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

Σε κάθε μέτρο που περιγράφει τη θέση, τη διασπορά, την ασυμμετρία, την κύρτωση κ.λπ. της κατανομής ενός δείγματος τιμών αντιστοιχεί μια δειγματική κατανομή. Έτσι, έχουμε τη δειγματική κατανομή του μέσου όρου, της τυπικής απόκλισης, της διαμέσου κ.λπ.

Υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα στις τρεις κατανομές, την κατανομή του πληθυσμού, την κατανομή του δείγματος και τη δειγματική κατανομή ενός στατιστικού.

Η κατανομή του πληθυσμού αναφέρεται στις τιμές όλων των ατόμων του πληθυσμού. Σ' αυτή την κατανομή δε γνωρίζουμε τις παραμέτρους της (μέση τιμή, τυπική απόκλιση κ.λπ.) και είναι αυτές που θέλουμε να εκτιμήσουμε με βάση τα αντίστοιχα στατιστικά ενός δείγματος. Η κατανομή του δείγματος αναφέρεται σε περιορισμένο αριθμό μετρήσεων, οι οποίες είναι αντιπροσωπευτικές του πληθυσμού και είναι αυτές ακριβώς που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού. Η δειγματική κατανομή ενός στατιστικού ($\bar{x}$, s, …) αναφέρεται στις τιμές του που παίρνουμε από όλα τα ισοπληθή δείγματα, τα οποία είναι δυνατό να ληφθούν από τον πληθυσμό.

Τέτοιες δειγματικές κατανομές μπορούμε να κάνουμε εμπειρικά όταν σχηματίζουμε δείγματα από έναν πεπερασμένο πληθυσμό. Η κατανομή αυτή ονομάζεται εμπειρική δειγματική κατανομή. Ο συνήθης τρόπος δημιουργίας μιας τέτοιας κατανομής είναι ο ακόλουθος:

1. Από τον πληθυσμό μεγέθους Ν (πεπερασμένο) παίρνουμε με τυχαία δειγματοληψία δείγματα μεγέθους ν.
2. Υπολογίζουμε το στατιστικό ($\bar{x}$, s, r, …) σε κάθε δείγμα.
3. Κάνουμε την κατανομή συχνοτήτων αυτού του στατιστικού.

Επισημαίνουμε ότι αυτή η διαδικασία είναι δύσκολο να ακολουθηθεί για πληθυσμό μεγάλου μεγέθους, ενώ είναι αδύνατο για άπειρο πληθυσμό. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι δυνατή η προσέγγιση της δειγματικής κατανομής με τη χρησιμοποίηση μεγάλου αριθμού δειγμάτων.

Συνήθως μας ενδιαφέρουν τρία χαρακτηριστικά μιας δειγματικής κατανομής: ο μέσος όρος $\bar{x}$, η τυπική απόκλιση s και η γραφική της παράσταση.

2.2.2 Η κατανομή του μέσου $\overline{\mathrm{X}}$ και το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\bar{x}}$ του μέσου $\overline{\mathrm{X}}$

Ας δούμε πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε τη δειγματική κατανομή του μέσου όρου $\overline{\mathrm{X}}$, χρησιμοποιώντας ένα απλό παράδειγμα.

Από πληθυσμό μεγέθους Ν, του οποίου η μέση τιμή είναι μ και η διακύμανση σ^2, παίρνουμε με επανατοποθέτηση όλα τα δείγματα μεγέθους ν. Ο αριθμός των δειγμάτων είναι N^{ν}, τα στοιχεία κάθε δείγματος είναι x_1, x_2, …, x_ν και η μέση τιμή κάθε δείγματος είναι $\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{\nu} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu)$.

Υπολογίζοντας τις μέσες τιμές (το πλήθος τους είναι N^{ν}) όλων των δειγμάτων μπορούμε να κατασκευάσουμε μια κατανομή συχνοτήτων, τη δειγματική κατανομή της μέσης τιμής $\overline{\mathrm{X}}$. Στην κατανομή αυτή κάθε μέση τιμή έχει ορισμένο αριθμό εμφάνισης στο σύνολο των μέσων τιμών των δειγμάτων, άρα σχετική συχνότητα.

$\bar{\mathrm{x}}_i$	**συχνότητα $\mathrm{f_i}$**	**πιθανότητα** $\mathrm{p_i} = \frac{\mathrm{f_i}}{\mathrm{N}_\nu}$
$\bar{\mathrm{x}}_1$	f_1	$\mathrm{p_i} = \frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{N}_\nu}$
$\bar{\mathrm{x}}_2$	f_2	$\mathrm{p_i} = \frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{N}_\nu}$
$\bar{\mathrm{x}}_3$	f_3	$\mathrm{p_i} = \frac{\mathrm{f}_3}{\mathrm{N}_\nu}$
…	…	…
$\bar{\mathrm{x}}_\nu$	f_ν	$\mathrm{p_i} = \frac{\mathrm{f}_\nu}{\mathrm{N}_\nu}$
	$\sum_i \mathrm{f_i} = \mathrm{N}^{\nu}$	$\frac{\Sigma\, \mathrm{f_i}}{\mathrm{N}_\nu} = 1$

Πίνακας 2.1

Η μέση τιμή $\mu_{\overline{\mathrm{X}}}$ αυτής της δειγματικής κατανομής των μέσων τιμών των δειγμάτων που προέρχονται από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 υπολογίζεται ότι είναι ίση με μ:

$$\mu_{\overline{\mathrm{X}}} = \textstyle\sum_i \bar{\mathrm{x}}_i \cdot \mathrm{p_i} = \mu$$

Η διακύμανση $\sigma_{\bar{x}}^2$ της δειγματικής κατανομής των μέσων τιμών των δειγμάτων υπολογίζεται:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_i (\bar{x}_i - \mu_{\bar{X}})^2 \cdot p_i = \frac{\sigma^2}{\nu}$$

Το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\bar{X}}$ της δειγματικής κατανομής είναι $\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$.

Το τυπικό σφάλμα φανερώνει πόσο καλά ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$ εκτιμά το μέσο μ του πληθυσμού. Προκύπτει ότι το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής δειγμάτων είναι μικρότερο της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού. Αυτό σημαίνει ότι η διασπορά της κατανομής της μέσης τιμής δειγμάτων είναι μικρότερη της κατανομής από την οποία προέρχονται τα δείγματα, ανεξάρτητα από το είδος της. Καθώς υπολογίζουμε τις μέσες τιμές των δειγμάτων, οι ακραίες του πληθυσμού τείνουν να αντικατασταθούν από τις μέσες τιμές, που βρίσκονται πλησιέστερα στη γενική μέση τιμή.

Η παραπάνω ανάλυση αφορά την περίπτωση που τα δείγματα είτε προέρχονται από άπειρο πληθυσμό, είτε από πεπερασμένο, όμως, επανατοποθετούνται και ο πληθυσμός μπορεί να θεωρηθεί άπειρος. Αν υποθέσουμε ότι τα δείγματα μεγέθους ν προέρχονται από έναν πεπερασμένο πληθυσμό μεγέθους Ν και δεν επανατοποθετούνται, τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \qquad \text{και} \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \cdot \sqrt{\frac{N-\nu}{N-1}}.$$

Για να έχουμε πλήρη στατιστική περιγραφή της $\bar{X}$ πρέπει να γνωρίζουμε και το είδος της κατανομής που ακολουθεί. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\bar{X}$ εξαρτάται από το είδος της κατανομής του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχονται τα δείγματα και, κυρίως, από το μέγεθος των δειγμάτων.

Στην περίπτωση που παίρνουμε τα δείγματα από πληθυσμό που κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ, η κατανομή της μέσης τιμής των δειγμάτων είναι κανονική ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, αφού στην ουσία πρόκειται για την κατανομή αθροίσματος κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Συνεπώς, η $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}}$ ακολουθεί την κατανομή N(z, 0,1).

Ακόμη κι αν οι μεταβλητές x_1, x_2, …, x_ν δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, η μέση τιμή του δείγματος τείνει προς την κανονική κατανομή. Δηλαδή, ισχύει η παραπάνω σχέση για $\nu\to\infty$. Η κατανομή της $\bar{X}$ προσεγγίζει ικανοποιητικά την κανονική όταν $\nu \geq 30$ ανεξάρτητα από το είδος της κατανομής του πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται τα δείγματα. Αν $\nu < 30$, η προσέγγιση είναι καλή μόνο αν η κατανομή του πληθυσμού δε διαφέρει πολύ από την κανονική κατανομή.

Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά εξειδικεύονται στην παρακάτω μαθηματική πρόταση, η οποία είναι γνωστή ως κεντρικό οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ.).

Κεντρικό οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ.): Για κάθε πληθυσμό με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ, η δειγματική κατανομή του μέσου $\bar{X}$ για δείγματα μεγέθους ν προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέσο όρο μ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$, καθώς το ν αυξάνεται απεριόριστα.

Η αξία αυτής της πρότασης προέρχεται από δύο γεγονότα. Το πρώτο είναι ότι αναφέρεται στη δειγματική κατανομή του μέσου $\bar{X}$ κάθε πληθυσμού (αδιάφορο του σχήματος, του μέσου όρου, της τυπικής απόκλισης κ.λπ.) και το δεύτερο ότι η δειγματική κατανομή προσεγγίζει μια κανονική κατανομή. Στην περίπτωση που το μέγεθος ν του δείγματος είναι $\nu \geq 30$, η κατανομή είναι τελείως κανονική. Γι’ αυτό το Κ.Ο.Θ. διατυπώνεται και ως εξής:

«Για δειγματικά μεγέθη $\nu \geq 30$ η δειγματική κατανομή του μέσου $\bar{X}$ προσεγγίζεται από κανονική κατανομή με μέσο $\mu_{\bar{X}} = \mu$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$. »

ή συμβολικά:

$$«\text{Αν } \nu \geq 30, \text{ τότε } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right).»$$

Από αυτό το συμπέρασμα προκύπτει ότι:

$$«\text{Αν } \nu \geq 30, \text{ τότε } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right) \text{ και } Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} \sim N(0, 1).»$$

Το Κ.Ο.Θ. περιγράφει τη δειγματική κατανομή του μέσου $\bar{X}$ αναγνωρίζοντας τα τρία βασικά χαρακτηριστικά κάθε κατανομής: σχήμα, κεντρική τάση και μεταβλητότητα.

Το σχήμα της δειγματικής κατανομής θα είναι τελείως κανονικό (σχήμα κανονικής κατανομής), όταν ικανοποιείται μία τουλάχιστον από τις ακόλουθες συνθήκες:

α) Ο πληθυσμός από τον οποίο παίρνουμε τα δείγματα είναι κανονικός.

β) Ο αριθμός ν (το μέγεθος του δείγματος) είναι $\nu \geq 30$.

Ο μέσος όρος $\mu_{\bar{X}}$ της δειγματικής κατανομής του μέσου $\bar{X}$ (κεντρική τάση) ταυτίζεται με το μέσο όρο μ του πληθυσμού, δηλαδή $\mu_{\bar{X}} = \mu$. Ο αριθμός $\mu_{\bar{X}}$ ονομάζεται αναμενόμενη τιμή του $\bar{X}$.

Το τρίτο χαρακτηριστικό της δειγματικής κατανομής του μέσου $\bar{X}$ είναι η μεταβλητότητα, που δηλώνεται με το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\bar{X}}$, το οποίο μετράει την απόσταση μεταξύ του δειγματικού μέσου $\bar{x}$ και του μέσου μ του πληθυσμού.

2.2.3 Δειγματική κατανομή και πιθανότητα του μέσου $\bar{X}$ όταν ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή και έχει γνωστή τυπική απόκλιση - Η z-κατανομή

Όταν η τυχαία μεταβλητή $\bar{X}$ προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση $\sigma^2_{\bar{X}}$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$ προσεγγίζει την τυποποιημένη κανονική κατανομή με $\mu = 0$ και $\sigma = 1$, οπότε χρησιμοποιούμε τους πίνακες για να υπολογίζουμε τις διάφορες πιθανότητες. Όλα αυτά συμβαίνουν με την προϋπόθεση ότι η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού είναι γνωστή, οπότε υπολογίζεται και το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\bar{X}}$.

Ένα ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε τώρα είναι το εξής: Ποια είναι η πιθανότητα το σφάλμα εκτίμησης του μέσου μ από το μέσο $\bar{x}$ ενός δείγματος να είναι μικρότερο μιας δοσμένης τιμής κ; Δηλαδή, ποια είναι η $P(|\bar{X} - \mu| < \kappa)$;

Η κατανομή των μέσων τιμών δειγμάτων μεγέθους ν είπαμε ότι είναι κανονική, όταν ο αρχικός πληθυσμός είναι κανονικός ή όταν $\nu \geq 30$. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα έχουμε:

$$P(|\bar{X} - \mu| < \kappa) = P(-\kappa < \bar{X} - \mu < \kappa) = P\left(-\frac{\kappa}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{\kappa}{\sigma_{\bar{X}}}\right) - P\left(-\frac{\kappa}{\sigma_{\bar{X}}} < Z < \frac{\kappa}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$

οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα από τους πίνακες.

<u>Παράδειγμα</u>

α) Μια κανονική κατανομή έχει $\mu = 80$ και $\sigma = 10$. Ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 25$ έχει $\bar{x} = 83$. Ποια είναι η z – τιμή που αντιστοιχεί σ' αυτόν το δειγματικό μέσο;

β) Ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $\nu = 9$ επιλέγεται από έναν κανονικό πληθυσμό με $\mu = 40$ και $\sigma = 6$.

i) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε ένα δειγματικό μέσο μεγαλύτερο του 41;

ii) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε ένα δειγματικό μέσο μικρότερο του 46;

γ) Μια «λοξή» κατανομή έχει μ = 60 και σ = 8.

i) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε ένα δειγματικό μέσο μεγαλύτερο από 62 από ένα δείγμα μεγέθους ν = 4;

ii) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε ένα δειγματικό μέσο μεγαλύτερο από 62 από ένα δείγμα μεγέθους ν = 64;

⇒ α) Είναι $\sigma_{\overline{X}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$, οπότε $z = \frac{83-80}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

β) i) $P(\overline{X} > 41) = P(\overline{X} - 40 > 41 - 40) = P(\frac{\overline{X}-40}{\sigma_{\overline{X}}} > \frac{41-40}{\sigma_{\overline{X}}}) = P(Z > 0{,}5) =$

$=0{,}5 - A(0{,}5) = 0{,}3085$, αφού $\sigma_{\overline{X}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$.

ii) $P(\overline{X} < 46) = P(Z < 3) = 0{,}5 + A(3) = 0{,}5 + 0{,}49865 = 0{,}99865$.

γ) i) Δεν μπορούμε να απαντήσουμε, γιατί η κατανομή του δειγματικού μέσου δεν είναι κανονική.

ii) Με ν = 64 > 30 η κατανομή του δειγματικού μέσου $\overline{X}$ θα είναι κανονική, οπότε $P(\overline{X} > 62) = P(\overline{X} - 60 > 62 - 60) = P(\frac{\overline{X}- 60}{\sigma_{\overline{X}}} > \frac{62- 60}{\sigma_{\overline{X}}}) = P(Z > 2) =$

$= 0{,}02275$, όπου $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1$.

2.2.4 Η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ όταν ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή και έχει άγνωστη τυπική απόκλιση - Η t – κατανομή

Αν η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X ενός τυχαίου δείγματος είναι $\overline{X}$ και S^2 η διακύμανσή του και το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή και άγνωστη διακύμανση, χρησιμοποιείται η τυχαία μεταβλητή $t = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{\nu}}}$, η οποία είναι γνωστή ως <u>t – κατανομή</u> ή <u>κατανομή του Student</u>.

Έτσι, αντί του $\sigma_{\overline{X}}$, που χρησιμοποιήσαμε στις z – τιμές, χρησιμοποιούμε το $S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{\nu}}$, όπου το S είναι η τυπική απόκλιση δείγματος μεγέθους ν και όχι το άγνωστο σ του πληθυσμού. Δηλαδή, το τυπικό σφάλμα $S_{\overline{X}}$ (που υπολογίζεται από το δείγμα) χρησιμοποιείται ως ένας εκτιμητής του $\sigma_{\overline{X}}$, αφού το σ είναι άγνωστο.

Αυτό σημαίνει ότι:

<u>Όταν γνωρίζουμε το σ του πληθυσμού, χρησιμοποιούμε z – τιμές, ενώ όταν το σ είναι άγνωστο, χρησιμοποιούμε το στατιστικό t</u>.

Ο τύπος που μας δίνει το t – στατιστικό μοιάζει με τον τύπο των z – τιμών, με τη διαφορά ότι το $S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{v}}$ υπολογίζεται από το δείγμα.

Γνωρίζουμε ότι $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{v}(x_i - \overline{x})^2}{v-1}}$. Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό του S, άρα και του $S_{\overline{x}}$, πρέπει να γνωρίζουμε το μέσο όρο $\overline{x}$, που είναι

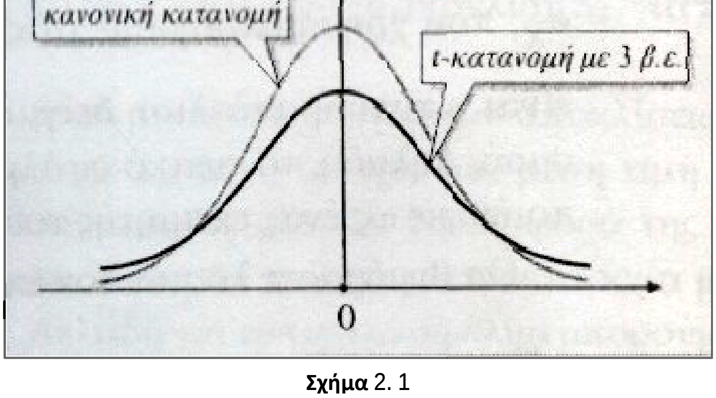
$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_v}{v}$$

Γνωρίζοντας το μέσο όρο $\overline{x}$, υπάρχει ένας περιορισμός για τη μεταβλητότητα του δείγματος. Μόνο ν – 1 από τις τιμές x_i, i = 1, 2, ..., ν, είναι ελεύθερες να μεταβάλλονται, γιατί η άλλη μπορεί να υπολογιστεί απ' αυτές και τη $\overline{x}$.

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε ν – 1 βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom ή df) για την τυπική απόκλιση του δείγματος. Γενικότερα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

<u>Βαθμοί ελευθερίας (β.ε. ή df) είναι το πλήθος των τιμών</u> x_i, <u>i = 1, 2, …, ν, σ' ένα δείγμα που είναι ελεύθερες να μεταβάλλονται. Αν το δείγμα έχει μέγεθος ν, τότε οι βαθμοί ελευθερίας είναι ν – 1.</u>

Όσο περισσότερους βαθμούς ελευθερίας έχουμε για ένα δείγμα (δηλαδή, όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος), τόσο καλύτερα η S εκπροσωπεί τη σ, το ίδιο καλύτερα το t – στατιστικό προσεγγίζει τη z – τιμή, οπότε το ίδιο καλύτερα η t – κατανομή προσεγγίζει την κανονική κατανομή και γι' αυτό την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

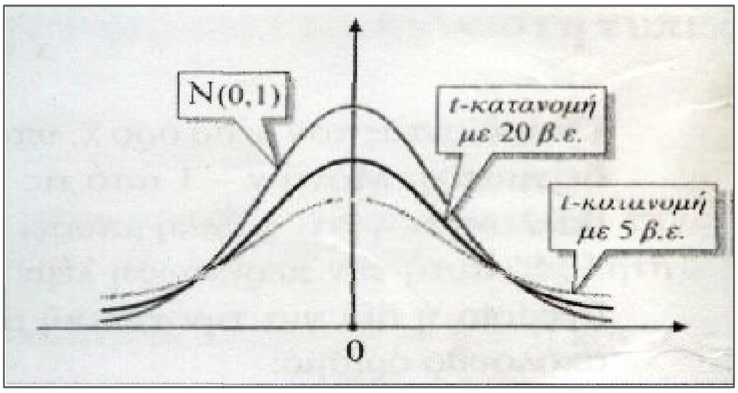


Σχήμα 2. 1

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και της t – κατανομής με 3 βαθμούς ελευθερίας. Οι δύο κατανομές έχουν παρόμοιες γραφικές παραστάσεις με κάποιες μικρές διαφορές. Αυτές οι διαφορές μικραίνουν όλο και πιο πολύ, καθώς οι βαθμοί ελευθερίας αυξάνονται. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο είναι το ν (το μέγεθος του δείγματος), τόσο η t – κατανομή τείνει να ταυτιστεί με τη N(0, 1).

Για πολλούς βαθμούς ελευθερίας (ν > 120) τα διαγράμματα της t – κατανομής και της N(0, 1) σχεδόν ταυτίζονται. Για δείγματα μικρού μεγέθους (ν < 30) η διασπορά της t – κατανομής είναι μεγαλύτερη της μονάδας και, γι’ αυτό, το σχήμα της είναι πλατύτερο της N(0, 1).

Στο επόμενο σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα της N(0, 1) και δύο t – κατανομών με βαθμούς ελευθερίας 5 και 20.



Σχήμα 2. 2

Βλέπουμε ότι το σχήμα της t – κατανομής αλλάζει με τους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή με το ν, γι’ αυτό μιλάμε για οικογένεια t – κατανομών.

Όπως υπολογίσαμε από τους πίνακες της N(0, 1) εμβαδά (ή πιθανότητες) που αντιστοιχούν σε z – τιμές, έτσι έχουμε και πίνακες για την t – κατανομή και βρίσκουμε εμβαδά (ή πιθανότητες) που αντιστοιχούν σε ορισμένη t – τιμή.

Για μία t – κατανομή με ν – 1 βαθμούς ελευθερίας το σύμβολο $t_{\alpha}(\nu - 1)$ δηλώνει την t – τιμή, δεξιά της οποίας βρίσκεται το 100α% του εμβαδού που είναι κάτω από τη γραφική παράσταση αυτής της κατανομής.

Στον πίνακα της t – κατανομής βλέπουμε ότι, καθώς οι βαθμοί ελευθερίας αυξάνονται (καθώς το ν μεγαλώνει), η t – κατανομή είναι όμοια με μια κανονική κατανομή. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε τη στήλη που έχει στην κορυφή α = 0,025. Καθώς προχωράμε προς τα κάτω βλέπουμε ότι οι t – τιμές μικραίνουν και, όταν οι βαθμοί ελευθερίας ξεπεράσουν τους 120, τότε t = + 1,96. Αλλά + 1,96 είναι και η τιμή του Z, για την οποία P(Z > + 1,96) = 0,025, δηλαδή καθώς το ν αυξάνεται (ν >120), τα ποσοστά (οι πιθανότητες) σε μία t – κατανομή προσεγγίζουν εκείνα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Αφού η t – κατανομή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα t = 0, οι τιμές που βρίσκονται αριστερά του άξονα μπορούν να υπολογιστούν από τις t – τιμές που βρίσκονται δεξιά του άξονα.

Γενικά, ισχύει η σχέση

$$t_{1-\alpha} = - t_{\alpha}$$

Για παράδειγμα, είναι $t_{0,975} = - t_{0,025}$. Στον πίνακα βρίσκουμε $t_{0,025}(5) = 2,57$. Έτσι $t_{0,975}(5) = - 2,57$.

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την t – κατανομή με ν – 1 βαθμούς ελευθερίας, τότε: α) η αναμενόμενη τιμή της είναι μηδέν, β) η διακύμανση είναι $Var[X] = \frac{\nu-1}{\nu-3}$ με ν > 3 και γ) η κατανομή είναι διαφορετική για διαφορετικές τιμές του ν.

Για να πούμε ότι η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ ακολουθεί την t – κατανομή, πρέπει ο πληθυσμός απ' όπου παίρνουμε τα δείγματα να είναι κανονικός. Στην πράξη, αυτό δεν τηρείται συνήθως, με αποτέλεσμα η t – κατανομή να χρησιμοποιείται και στις περιπτώσεις όπου ο πληθυσμός έχει περίπου την κανονική κατανομή.

<u>Παράδειγμα</u>

Οι προδιαγραφές ενός μηχανήματος αυτόματης συσκευασίας πακέτων των 200 γραμμαρίων είναι $P(t_1 < t) = 0,05$. Αν σ' ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν = 25 βρήκαμε X = 198 γραμμάρια και S = 6 γραμμάρια, μπορούμε να δεχτούμε ότι πληρούνται οι προδιαγραφές του μηχανήματος;

⇒ Αφού ν < 30 και η διακύμανση σ^2 είναι άγνωστη, η τυχαία μεταβλητή

$t = \frac{\bar{x}-\mu}{S_{\bar{x}}}$, όπου $\bar{x} = 198$ και $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{\nu}} = 1,2$

ακολουθεί την t κατανομή με ν-1 = 24 β.ε.

$P(t_1 < t) = 0,05 \leftrightarrow t_1 = \pm 2,064$ (από τον πίνακα της t κατανομής)

$P(-2,064 < t < 2,064) = 0,95$

Και αφού $t = \frac{198-200}{1,2} = -1,667$, δεχόμαστε ότι το μηχάνημα πληρεί τις προδιαγραφές του.

2.2.5 Η δειγματική κατανομή της διαφοράς των μέσων τιμών δύο δειγμάτων

Η διαφορά των μέσων τιμών μιας μεταβλητής που μετριέται σε δύο πληθυσμούς μπορεί να μελετηθεί στη βάση της διαφοράς των μέσων τιμών τυχαίων και ανεξαρτήτων δειγμάτων που παίρνουμε από τους πληθυσμούς. Κατά συνέπεια είναι φυσικό να μελετήσουμε τη δειγματική κατανομή της διαφοράς δύο μέσων τιμών.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο πληθυσμούς και ότι ο πρώτος έχει μέση τιμή μ_1 και τυπική απόκλιση σ_1 και ο δεύτερος μέση τιμή μ_2 και τυπική απόκλιση σ_2. $\bar{X}_1$ είναι η μέση τιμή ενός δείγματος μεγέθους ν_1, που το επιλέξαμε από τον πρώτο πληθυσμό, και $\bar{X}_2$ η μέση τιμή ενός άλλου δείγματος μεγέθους ν_2, που το επιλέξαμε από το δεύτερο πληθυσμό.

Οι $\bar{X}_1$ και $\bar{X}_2$ ακολουθούν προσεγγιστικά την κανονική κατανομή με μέσες τιμές μ_1 και μ_2 και μεταβλητότητες $\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}$ και $\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}$ αντίστοιχα. Η σχετική προσέγγιση βελτιώνεται, καθώς αυξάνουν τα ν_1 και ν_2. Η $\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2$ ακολουθεί κανονική κατανομή, αν οι πληθυσμοί ακολουθούν κανονική κατανομή, και προσεγγιστικά κανονική κατανομή, αν οι πληθυσμοί δεν ακολουθούν κανονική κατανομή και τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα, με μέση τιμή $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$ και μεταβλητότητα $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = = \frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}$.

Είναι φανερό ότι έχουμε κι εδώ εφαρμογή του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Επισημαίνουμε ότι τα δείγματα που επιλέγουμε από τους πληθυσμούς Α και Β πρέπει να είναι <u>τυχαία</u> και <u>ανεξάρτητα</u> μεταξύ τους.

Η δειγματική κατανομή της διαφοράς των μέσων τιμών μπορεί να μετατραπεί σε τυποποιημένη κανονική κατανομή, όταν γνωρίζουμε τις διασπορές S_A^2 και S_B^2. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε ότι τα δείγματα επιλέγονται από πληθυσμούς που ακολουθούν την κανονική κατανομή, όταν ν_A, $\nu_B \rightarrow +\infty$. Έτσι, έχουμε:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} \sim N(0, 1)$$

ενώ η τυχαία μεταβλητή $t = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_P^2}{\nu_1}+\frac{S_P^2}{\nu_2}}}$, που χρησιμοποιείται όταν δε γνωρίζουμε τις διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2, προσεγγίζει (ακολουθεί κατά προσέγγιση) την t – κατανομή με $(\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 1) = \nu_1 + \nu_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας και $S_P^2 = \frac{(\nu_1-1)S_1^2+(\nu_2-1)S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της κατανομής N(0, 1) και της t – κατανομής για να υπολογίσουμε τιμές πιθανοτήτων.

Παράδειγμα
Οι σπουδαστές μιας σχολής έχουν μέσο βάρος 80 kg και τυπική απόκλιση 9 kg, ενώ μιας άλλης έχουν μέσο βάρος 70 kg και τυπική απόκλιση 5 kg. Αν εξετάσουμε 50 σπουδαστές από κάθε σχολή, ποια είναι η πιθανότητα οι σπουδαστές της πρώτης να έχουν μέσο βάρος 12 kg μεγαλύτερο των σπουδαστών της δεύτερης;

⇒ Επειδή η κατανομή των βαρών είναι κανονική (εδώ είναι $\nu_A > 30$, $\nu_B > 30$), ισχύουν οι προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος και η δειγματική κατανομή της διαφοράς των μέσων τιμών μπορεί να μελετηθεί με βάση την κανονική κατανομή.

$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 80 - 70 = 10\text{kg}$

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}} = \sqrt{\frac{9^2}{50} + \frac{5^2}{50}} = \sqrt{\frac{106}{50}} = 1{,}456\text{kg}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 12) = P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} > \frac{12-(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}}\right) = P(Z > \frac{12-10}{1{,}456}) =$

$= P(Z > 1{,}37) = 1 - P(Z < 1{,}37) = 1 - \Phi(1{,}37) = 1 - 0{,}915 = 0{,}085 = 8{,}5\%$

2.2.6 Η δειγματική κατανομή του αθροίσματος των μέσων τιμών δύο δειγμάτων

Μερικές φορές ενδιαφερόμαστε για τη δειγματική κατανομή του αθροίσματος των μέσων τιμών δύο δειγμάτων δύο πληθυσμών. Αν X είναι το χαρακτηριστικό που ερευνάται, τότε: Για κάθε δείγμα μεγέθους ν_1 από τον πρώτο πληθυσμό υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{X}_1$. Έτσι, έχουμε μια δειγματική κατανομή για το $\bar{X}_1$ με μέση τιμή $\mu_{\bar{X}_1} = \mu_1$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{X}_1}^2 = \frac{\sigma_1^2}{\nu_1}$. Ομοίως, για κάθε δείγμα μεγέθους ν_2 από το δεύτερο πληθυσμό υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{X}_2$ και έχουμε μια δειγματική κατανομή με μέση τιμή $\mu_{\bar{X}_2} = \mu_2$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}$.

Η μέση τιμή και η διακύμανση της δειγματικής αυτής κατανομής δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_{\bar{X}_1+\bar{X}_2} = \mu_1 + \mu_2 \qquad \text{και} \qquad \sigma^2_{\bar{X}_1+\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}$$

Οι παρατηρήσεις που έγιναν στη δειγματική κατανομή της διαφοράς μέσων τιμών ισχύουν και στη δειγματική κατανομή του αθροίσματος των μέσων τιμών, οπότε αυτή μετατρέπεται σε τυποποιημένη κανονική κατανομή με το μετασχηματισμό:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1+\bar{X}_2)-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}}$$

<u>Παράδειγμα</u>
Οι μετρήσεις δύο διαστημάτων έδωσαν μέσες τιμές 27,3cm και 15,6cm με τυπικές αποκλίσεις 0,16cm και 0,08cm αντίστοιχα. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του αθροίσματος των διαστημάτων.

⇒ Αν D_1 και D_2 είναι τα διαστήματα, έχουμε

$\mu_{D_1+D_2} = \mu_{D_1} + \mu_{D_2} = 27{,}3 + 15{,}6 = 42{,}9$cm

$\sigma_{D_1+D_2} = \sqrt{\sigma^2_{D_1} + \sigma^2_{2}} = \sqrt{(0{,}16)^2 + (0{,}08)^2} = 0{,}18$cm

2.2.7 Η δειγματική κατανομή της διακύμανσης σ^2 - Η X^2 - κατανομή

Προηγουμένως μιλήσαμε εκτενέστερα για τη δειγματική κατανομή του μέσου $\bar{X}$. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να μιλήσουμε για τις δειγματικές κατανομές όλων των στατιστικών (διάμεσο, διακύμανση κ.λπ.).

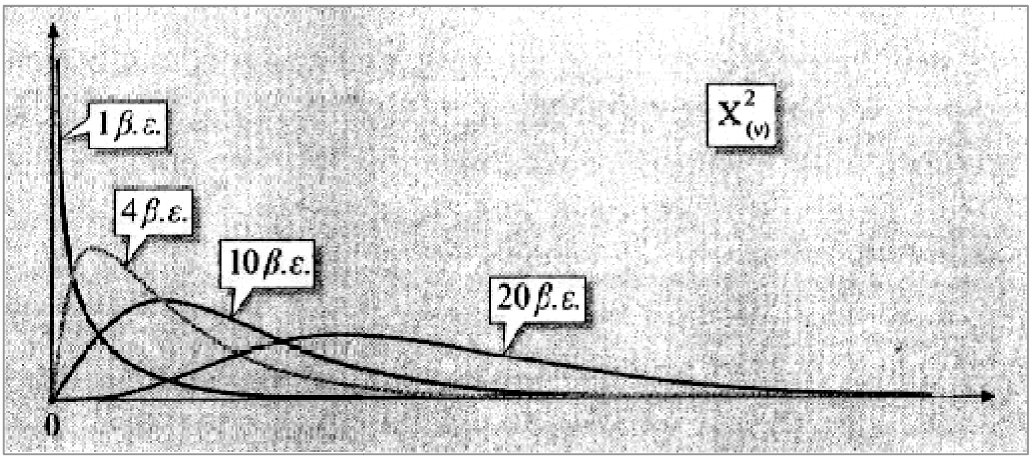
Εδώ θα μιλήσουμε για τη δειγματική κατανομή της διακύμανσης σ^2. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου ο πληθυσμός, από τον οποίο παίρνουμε τα δείγματα, ακολουθεί κανονική κατανομή.

Από πληθυσμό, λοιπόν, που ακολουθεί την κανονική κατανομή με διακύμανση σ^2, παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν και υπολογίζουμε τη διακύμανσή του $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{v}(x_i-\bar{x})^2}{v}$.

$$(\nu\text{-}1)\, S^2 = \sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \frac{(v-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{v}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$$

Οπότε, αν απ' αυτό τον πληθυσμό πάρουμε όλα τα τυχαία δείγματα μεγέθους ν και υπολογίσουμε σε κάθε δείγμα την τιμή $\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη δειγματική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2}$. Η τυχαία αυτή μεταβλητή συμβολίζεται με X^2 και λέμε ότι ακολουθεί τη X^2 – κατανομή με ν-1 βαθμούς ελευθερίας.

Αν κατασκευάσουμε διάφορες δειγματικές κατανομές της X^2 για διαφορετικές τιμές του ν και παραστήσουμε γραφικά τις κατανομές αυτές, θα παρατηρήσουμε ότι οι καμπύλες είναι διαφορετικές. Στο επόμενο διάγραμμα δίνονται οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε μερικές τιμές του ν.



Σχήμα 2. 3

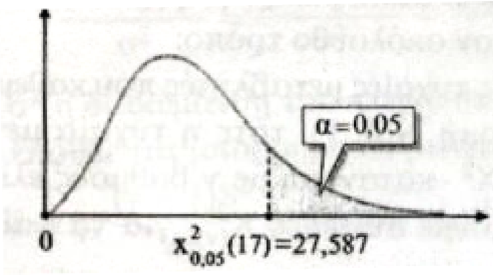
Με τη βοήθεια πινάκων μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα "η τυχαία μεταβλητή X^2 είναι μικρότερη ή ίση ενός αριθμού x_0^2". Οι πίνακες στην πρώτη στήλη δίνουν τους βαθμούς ελευθερίας και στην πρώτη γραμμή δίνουν την πιθανότητα p για τιμές της μεταβλητής X^2 για τις οποίες $P(X^2 \leq x_0^2) = p$. Η διασταύρωση γραμμής και στήλης δίνει τις τιμές x_0^2. Από τους πίνακες προσδιορίζονται και οι πιθανότητες

$$P(x_1^2 < X^2 < x_0^2) = P(X^2 \leq x_0^2) - P(X^2 \leq x_1^2)$$
$$P(X^2 > x_0^2) = 1 - P(X^2 \leq x_0^2) = 1 - p$$

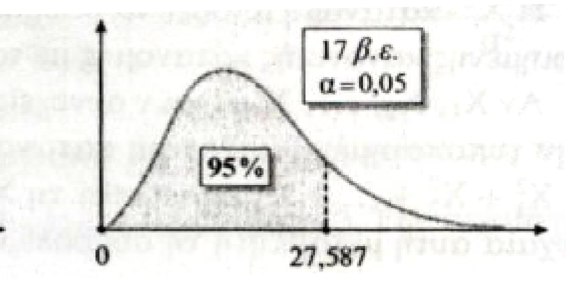
Για κάθε τιμή των βαθμών ελευθερίας το εμβαδόν της περιοχής (πιθανότητα) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $X^2_{(\nu)}$, τον οριζόντιο άξονα και βρίσκεται δεξιά από κάποια ορισμένη τιμή του x^2 ισούται με την τιμή του α, που είναι στην κορυφή της στήλης όπου βρίσκεται η τιμή του x^2.

Για παράδειγμα, αν πάρουμε 17 βαθμούς ελευθερίας, τότε στη γραμμή του 17 υπάρχει η τιμή x^2 = 27,587. Η πιθανότητα που υπάρχει σ' αυτή τη X^2 - κατανομή με 17 β.ε. κάποια τιμή της X^2 να είναι μεγαλύτερη του 27,587 είναι

5% (0,05) ή, διαφορετικά, η πιθανότητα μια τιμή της X^2 με 17 β.ε. να είναι μικρότερη του 27,587 είναι 95%, δηλαδή $P(X^2 < 27,587) = 0,95$.



Σχήμα 2. 4



Σχήμα 2. 5

Το σύμβολο $X_\alpha^2(\nu)$ δηλώνει την τιμή της X^2, δεξιά της οποίας βρίσκεται το 100·α% του εμβαδού (πιθανότητα) της X^2 - κατανομής με ν βαθμούς ελευθερίας.

<u>Παραδείγματα</u>

Α. Μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\sigma^2 = 3$. Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα δείγμα μεγέθους 10 η διακύμανση να είναι μικρότερη ή ίση με 4,9;

$\Rightarrow P(S^2 \leq 4,9) = P(\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(\nu-1)\cdot 4,9}{\sigma^2}) = P(X^2 \leq \frac{(10-1)\cdot 4,9}{3}) = P(X^2 \leq 14,7)$.

Για ν-1= 10-1=9 βαθμούς ελευθερίας βρίσκουμε από τους πίνακες ότι
$P(X^2 \leq 14,7) \approx 0,90 = 90\%$.

Β. Η βαθμολογία σ' ένα τεστ δεξιοτήτων ακολουθεί την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση σ = 10. Από τον πληθυσμό αυτόν επιλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν = 26. Να βρεθεί η πιθανότητα οι τιμές του τεστ (η βαθμολογία των μαθητών) να έχουν τυπική απόκλιση μεγαλύτερη από 13 μονάδες.

$\Rightarrow$ Αν με S_τ συμβολίσουμε την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών στο δείγμα μεγέθους ν = 26, τότε ζητάμε την πιθανότητα $P(S_\tau > 13)$.

Αφού ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή, το στατιστικό

$$\frac{(\nu-1)S_\tau^2}{\sigma^2} = \frac{(26-1)S_\tau^2}{10^2} = \frac{25S_\tau^2}{100}$$

θα ακολουθεί τη X^2 - κατανομή με ν – 1 = 26 – 1 = 25 βαθμούς ελευθερίας.

Επομένως,

$$P(S_\tau > 13) = P(S_\tau^2 > 169) = P\left(\frac{(26-1)S_\tau^2}{100} > \frac{(26-1)169}{100}\right) = P\left(X^2(26) > \frac{25\cdot 169}{100}\right) =$$

$$= P(X^2(26) > 42{,}25)$$

Από τον πίνακα της X^2 - κατανομής και στη γραμμή με β.ε. 25 βλέπουμε ότι η τιμή 42,25 είναι μεταξύ του α = 0,025 και του α = 0,01. Επομένως, θα είναι $0{,}01 < P(S_\tau > 13) < 0{,}025$.

2.2.8 Η δειγματική κατανομή του λόγου δύο διασπορών - Η F – κατανομή

Πολλές φορές το ενδιαφέρον ενός ερευνητή επικεντρώνεται στη σύγκριση των διασπορών δύο πληθυσμών. Τότε ένα κατάλληλο στατιστικό είναι ο λόγος των διασπορών τυχαίων και ανεξάρτητων δειγμάτων που μπορούμε να επιλέξουμε από δύο πληθυσμούς.

Θεωρούμε δύο δείγματα με μεγέθη ν_1 και ν_2 από δύο κανονικούς πληθυσμούς με διασπορές σ_1^2 και σ_2^2. Αν οι δειγματικές διασπορές είναι αντίστοιχα S_1^2 και S_2^2, η στατιστική συνάρτηση

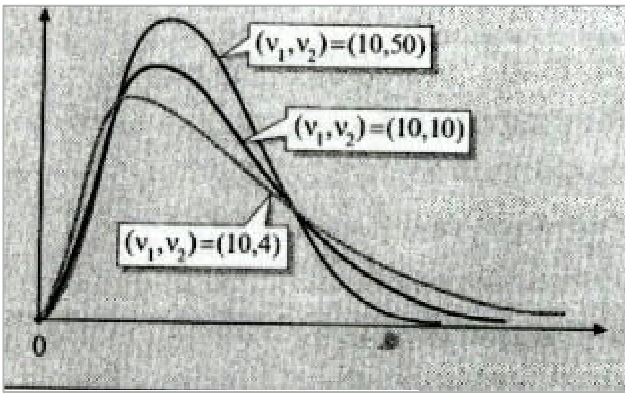
$$F = \frac{\frac{\nu_1 \cdot S_1^2}{(\nu_1 - 1)\cdot\sigma_1^2}}{\frac{\nu_2 \cdot S_2^2}{(\nu_2 - 1)\cdot\sigma_2^2}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

ακολουθεί κατανομή F με $\nu_1 - 1$ και $\nu_2 - 1$ βαθμούς ελευθερίας.

Αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, τότε η τυχαία μεταβλητή F γίνεται: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$.

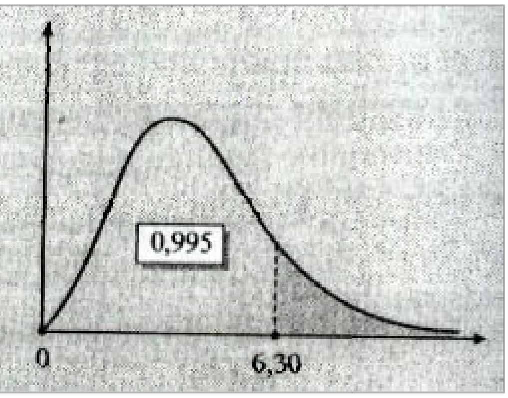
Για την κατανομή αυτή έχουν γίνει πίνακες υπολογισμού των πιθανοτήτων, όπως έγινε και με τις άλλες κατανομές z, t και X^2.

Παρακάτω δίνονται μερικά διαγράμματα της F – κατανομής.



Σχήμα 2. 6

F - κατανομές



Σχήμα 2. 7

P($F_{10,7}$ < 6,30) = 0,995

Επειδή οι τιμές της F – κατανομής είναι θετικές, η γραφική της παράσταση γίνεται στο πρώτο τεταρτημόριο και όσο τα v_1 και v_2 αυξάνουν, τόσο η γραφική παράσταση της κατανομής αυτής τείνει προς τη γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής.

Η μέση τιμή και η διακύμανση της F – κατανομής δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_F = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \text{ με } \nu_2 > 2$$

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}\right)^2 \cdot \frac{2\cdot(\nu_1 - 1) + 2\cdot(\nu_2 - 1)}{\nu_1 \cdot (\nu_2 - 4)} \text{ με } \nu_2 > 4$$

Με τη βοήθεια των πινάκων μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα "η τυχαία μεταβλητή F είναι μικρότερη ή ίση ενός αριθμού F_0". Οι πίνακες στην πρώτη στήλη δίνουν τους βαθμούς ελευθερίας v_2 (του παρονομαστή) και στην πρώτη γραμμή τους βαθμούς ελευθερίας v_1 (του αριθμητή). Στη δεύτερη στήλη δίνουν τις πιθανότητες p για τιμές της μεταβλητής F, για τις οποίες $P(F \le F_0) =$ $= p$. Η διασταύρωση γραμμής και στήλης δίνει τις τιμές F_0. Από τους πίνακες προσδιορίζονται και οι πιθανότητες:

$$P(F_1 < F \le F_0) = P(F \le F_0) - P(F \le F_1)$$

$$P(F > F_0) = 1 - P(F \le F_0) = 1 - p$$

<u>Παράδειγμα</u>

Δύο τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή με σ_1^2 = 20,1 και σ_2^2 = 6 αντίστοιχα. Αν πάρουμε ένα δείγμα από κάθε πληθυσμό μεγέθους 11, ποια είναι η πιθανότητα η διακύμανση του πρώτου δείγματος να είναι μεγαλύτερη κατά 10 φορές από τη διακύμανση του δεύτερου;

$\Rightarrow P(S_1^2 > 10S_2^2) = P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 10) = P(\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_1^2}} > 10)$ διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή του $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ με σ_1^2.

Και αφού $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{20{,}1}{6} = 3{,}35$, άρα $\sigma_1^2 = 3{,}35\sigma_2^2$, οπότε είναι

$$P(\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_1^2}} > 10) = P(\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{3{,}35\sigma_2^2}} > 10) = P(\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} > \frac{10}{3{,}35}) = P(F > 2{,}98) = 1 - P(F \leq 2{,}98)$$

Για v_1 - 1 = 11 – 1 = 10 και v_2 - 1 = 11 – 1 = 10 βαθμούς ελευθερίας, βρίσκουμε από τους πίνακες ότι $P(F \leq 2{,}98) = 0{,}95$.
Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:
$P(S_1^2 > 10S_2^2) = 1 - P(F \leq 2{,}98) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 = 5\%$

2.2.9 Η δειγματική κατανομή ενός ποσοστού (μιας αναλογίας)

Συχνά χρειάζεται να υπολογιστεί το ποσοστό των ατόμων ενός πληθυσμού ως προς το αν έχουν ή όχι μια ορισμένη ιδιότητα.

Θεωρούμε έναν πληθυσμό Ν ατόμων από τα οποία τα Μ έχουν μια ιδιότητα Α. Η αναλογία της ιδιότητας Α μέσα στον πληθυσμό είναι $p = \frac{M}{N}$. Αν επιλέξουμε τυχαία από τον πληθυσμό ένα δείγμα μεγέθους ν και ονομάσουμε Χ την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των ατόμων του δείγματος με την ιδιότητα Α, η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\mu = \nu \cdot p$ και $\sigma^2 = \nu \cdot p \cdot (1 - p)$. Η αναλογία $P_i = \frac{x_i}{\nu}$, όπου x_i:το πλήθος των ατόμων του δείγματος i με την ιδιότητα Α, είναι η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή δειγματοληψίας των αναλογιών.

Αν ο πληθυσμός είναι πεπερασμένου μεγέθους Ν ή αν η επιλογή των δειγμάτων αντιστοιχεί σε τυχαία δειγματοληψία από πληθυσμό πεπερασμένου μεγέθους χωρίς επανατοποθέτηση, τότε

$$\mu_p = p \quad \text{και} \quad \sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{\nu} \cdot \frac{N-\nu}{N-1}$$

Αν ο πληθυσμός είναι άπειρος ή αν η επιλογή των δειγμάτων γίνεται με τυχαία δειγματοληψία με επανατοποθέτηση, τότε

$$\mu_p = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\nu \cdot p}{\nu} = p \quad \text{και} \quad \sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{\nu^2} = \frac{\nu \cdot p \cdot (1-p)}{\nu^2} = \frac{p(1-p)}{\nu}$$

Αν το μέγεθος ν του δείγματος είναι μεγάλο (ν → +∞), τότε

$$\mu_{\overline{P}} = p \quad \text{και} \quad \sigma_{\overline{P}}^2 = \frac{p(1-p)}{\nu}$$

Η δειγματική κατανομή του ποσοστού, αν ισχύουν τα παραπάνω, μετατρέπεται σε τυποποιημένη κανονική κατανομή με το μετασχηματισμό:

$$Z = \frac{\widehat{P}-p}{\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{\nu}}}$$

Εξετάζοντας ένα ένα τα άτομα του πληθυσμού, αυτά είτε θα έχουν το χαρακτηριστικό, είτε δε θα το έχουν. Επομένως, το πρόβλημα που μελετάμε μπορεί να αναχθεί στο πείραμα Bernoulli, δηλαδή το ποσοστό p αντιστοιχεί στην πιθανότητα εμφάνισης του χαρακτηριστικού (τη λέμε επιτυχία) και το 1 – p αντιστοιχεί στην πιθανότητα μη εμφάνισης (τη λέμε αποτυχία). Έτσι, η προσέγγιση της δειγματικής κατανομής του $\overline{P}$ από την κανονική κατανομή, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, είναι ικανοποιητική. Ως κριτήριο μπορούμε να έχουμε ότι $\nu p \geq 5$ και $\nu(1-p) \geq 5$.

Παράδειγμα

Μια τουριστική περιοχή υποδέχεται το 30% των τουριστών μιας χώρας. Να υπολογιστεί η πιθανότητα σ' ένα δείγμα 100 τουριστών περισσότεροι από το 40% να κατευθυνθούν στην περιοχή αυτή.

$$\Rightarrow \mu_{\overline{P}} = p = 0{,}3 \text{ και } \sigma_p = \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{\nu}} = \sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{100}} = 0{,}046$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\widehat{P} > 0{,}4) = P\left(\frac{\widehat{P}-p}{\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{\nu}}} > \frac{0{,}4-p}{\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{\nu}}}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}4-0{,}3}{0{,}046}\right) = P(Z > 2{,}17) =$$

$$= 1 - P(Z < 2{,}17) = 1 - \Phi(2{,}17) = 1 - 0{,}985 = 0{,}015 = 1{,}5\%$$

2.2.10 Η δειγματική κατανομή της διαφοράς των ποσοστών

Αντίστοιχα με τη δειγματική κατανομή της διαφοράς των μέσων τιμών μπορούμε να κατασκευάσουμε τη δειγματική κατανομή της διαφοράς ποσοστών βάσει τυχαίων και ανεξάρτητων δειγμάτων που παίρνουμε από τους δύο πληθυσμούς.

Αν $\widehat{P}$ είναι το ποσοστό που ερευνάται, έχουμε ως εξής. Παίρνουμε από τον πρώτο πληθυσμό N_1, του οποίου η τιμή του ποσοστού είναι p_1, όλα τα δείγματα μεγέθους ν_1 και υπολογίζουμε την τιμή του ποσοστού όλων αυτών των δειγμάτων. Ομοίως, παίρνουμε από το δεύτερο πληθυσμό N_2, του οποίου η τιμή του ποσοστού είναι p_2, όλα τα τυχαία δείγματα μεγέθους ν_2 και υπολογίζουμε την τιμή του ποσοστού των δειγμάτων. Παίρνοντας τη διαφορά των δύο ποσοστών, κατασκευάζουμε τη δειγματική κατανομή της διαφοράς των ποσοστών των δειγμάτων ($\widehat{P}_1$ - $\widehat{P}_2$). Η μέση τιμή και η διακύμανση της δειγματικής αυτής κατανομής δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = p_1 - p_2$$
$$\sigma^2_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = \frac{p_1\cdot(1-p_1)}{\nu_1} + \frac{p_2\cdot(1-p_2)}{\nu_2}$$

Στην περίπτωση δειγμάτων που δεν επανατοποθετούνται, τότε η μέση τιμή και η διακύμανση θα είναι

$$\mu_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = p_1 - p_2$$
$$\sigma^2_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = \frac{p_1\cdot(1-p_1)}{\nu_1}\cdot\frac{N_1-\nu_1}{N_1-1} + \frac{p_2\cdot(1-p_2)}{\nu_2}\cdot\frac{N_2-\nu_2}{N_2-1}$$

Αν το μέγεθος των δειγμάτων είναι αρκετά μεγάλο ($\nu_1 \geq 30$ και $\nu_2 \geq 30$), η κατανομή της διαφοράς των ποσοστών προσεγγίζει την κανονική κατανομή και η μέση τιμή και η διακύμανση της δειγματικής αυτής κατανομής δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = p_1 - p_2$$
$$\sigma^2_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = \frac{p_1\cdot(1-p_1)}{\nu_1} + \frac{p_2\cdot(1-p_2)}{\nu_2}$$

Η δειγματική κατανομή της διαφοράς ποσοστών μετατρέπεται σε τυποποιημένη κανονική κατανομή με το μετασχηματισμό:

$$Z = \frac{(\widehat{P}_1-\widehat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1\cdot(1-p_1)}{\nu_1}+\frac{p_2\cdot(1-p_2)}{\nu_2}}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Τα ξενοδοχεία μιας τουριστικής περιοχής έχουν τους καλοκαιρινούς μήνες μέση κάλυψη 90%, ενώ μιας άλλης έχουν μέση κάλυψη 85%. Αν εξετάσουμε 40 ξενοδοχεία από κάθε περιοχή, ποια είναι η πιθανότητα τα ξενοδοχεία της πρώτης να έχουν μέση κάλυψη 8% μεγαλύτερη των ξενοδοχείων της δεύτερης;

$\Rightarrow \mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = p_1 - p_2 = 0,9 - 0,85 = 0,05$

$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{p_1\cdot(1-p_1)}{\nu_1} + \frac{p_2\cdot(1-p_2)}{\nu_2}} = \sqrt{\frac{0,9\cdot 0,1}{40} + \frac{0,85\cdot 0,15}{40}} = \sqrt{0,005438} = 0,074$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 > 0,08) = P\left(\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1\cdot(1-p_1)}{\nu_1}+\frac{p_2\cdot(1-p_2)}{\nu_2}}} > \frac{0,08-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1\cdot(1-p_1)}{\nu_1}+\frac{p_2\cdot(1-p_2)}{\nu_2}}}\right) = P\left(Z > \frac{0,08-0,05}{0,074}\right) =$

$= P(Z > 0,4) = 1 - P(Z < 0,4) = 1 - \Phi(0,4) = 1 - 0,655 = 0,345 = 34,5\%$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ

3.1 Γενικά

Σε πολλές περιπτώσεις στη στατιστική συναντώνται προβλήματα για τα οποία απαιτείται να εκτιμηθεί μια παράμετρος του πληθυσμού που μελετούμε. Η μέθοδος που ακολουθείται στις περιπτώσεις αυτές είναι η χρήση της τιμής μια αντίστοιχης ποσότητας από ένα τυχαίο δείγμα ως εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου του πληθυσμού.

Παραδείγματα, όπου η εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού είναι απαραίτητη, είναι μια εταιρεία έρευνας αγοράς που ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση μετακίνηση προτίμησης των καταναλωτών, που προέρχεται από μια διαφημιστική καμπάνια στην τηλεόραση, και υπολογίζεται μέσω μιας δειγματοληπτικής έρευνας ή μια αποθήκη χονδρικής πώλησης που, προκειμένου να καθορίσει μια πολιτική για το απόθεμα που θα διατηρεί, χρειάζεται να εκτιμήσει το επίπεδο ζήτησης για προϊόντα που διακινεί με βάση ένα δείγμα για κάποια χρονική περίοδο.

Η περιοχή της στατιστικής που ασχολείται με το πρόβλημα αυτό λέγεται εκτιμητική.

<u>Η στατιστική εκτίμηση ή εκτιμητική είναι μια διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε την πιθανότερη τιμή μιας παραμέτρου ενός πληθυσμού με βάση την τιμή του αντίστοιχου στατιστικού ενός δείγματος που παίρνουμε από τον πληθυσμό.</u>

Ένα από τα προβλήματα που απασχολούν την περιοχή αυτή είναι ο καθορισμός κριτηρίων, με βάση τα οποία ο ερευνητής θα αποφασίσει πόσο καλή είναι η εκτιμήτρια μιας παραμέτρου του υπό μελέτη πληθυσμού. Άλλο πρόβλημα είναι ο καθορισμός των κριτηρίων εκείνων σύμφωνα με τα οποία ο ερευνητής θα αποφασίσει αν μια εκτιμήτρια είναι η καλύτερη δυνατή από αυτές που έχει στη διάθεσή του. Πρωταρχικό, βέβαια, πρόβλημα είναι η ανεύρεση μεθόδων καθορισμού εκτιμητριών παραμέτρων.

Το πόσο σημαντικό είναι αυτή η διαδικασία να οδηγεί σε έγκυρα συμπεράσματα φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα. Αν θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο ύψος των μαθητών του λυκείου, τότε θα οδηγηθούμε σε τελείως λανθασμένη εκτίμηση αν το δείγμα που θα πάρουμε αποτελείται μόνο από μαθητές που παίζουν μπάσκετ. Για να έχουμε αξιόπιστη εκτίμηση της παραμέτρου του πληθυσμού από το στατιστικό ενός δείγματος, θα πρέπει το δείγμα να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, που σημαίνει ότι θα έχει εφαρμοστεί τυχαία δειγματοληψία για την επιλογή των ατόμων του δείγματος. Αν ένα δείγμα δεν είναι τυχαίο, κανένα ακριβές συμπέρασμα δεν είναι δυνατόν να προέλθει από το δείγμα αυτό όσον αφορά τον πληθυσμό.

Είναι ενδεχόμενο, βέβαια, να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα σε μερικές περιπτώσεις, τα οποία, όμως, είναι τετριμμένα. Το πρόβλημα, στην απλούστερη μορφή του, είναι να εκτιμηθεί η τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού από πληροφορίες που παρέχονται από ένα τυχαίο δείγμα. Η απλούστερη περίπτωση είναι εκείνη που δίνει μία μόνο τιμή ως εκτίμηση της παραμέτρου που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για σημειακή εκτίμηση.

3.2 Σημειακή εκτίμηση

Στη σημειακή εκτίμηση μια παράμετρος του πληθυσμού (μέση τιμή, τυπική απόκλιση) εκτιμάται από τα αντίστοιχα στατιστικά ενός τυχαίου δείγματος. Κάθε φορά που παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν από τον πληθυσμό έχουμε μια μέση τιμή $\bar{x}$ και μια τυπική απόκλιση s των τιμών του δείγματος. Έτσι μπορούμε να έχουμε και μια εκτίμηση για τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού από τον οποίο πήραμε το δείγμα.

Επειδή από έναν πληθυσμό μπορούμε να πάρουμε πολλά τυχαία δείγματα, οι εκτιμήσεις που μπορούμε να έχουμε για μια παράμετρο του πληθυσμού θα είναι περισσότερες από μία. Σκοπός μας είναι να έχουμε την καλύτερη εκτίμηση για την παράμετρο του πληθυσμού που μας ενδιαφέρει.

Το στατιστικό κάθε δείγματος με το οποίο θα εκτιμήσουμε την αντίστοιχη παράμετρο υπολογίζεται πάντοτε με τον ίδιο τύπο, π.χ. η μέση τιμή υπολογίζεται με τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i \quad \text{ή} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}$$

Ο τύπος αυτός (που είναι συνάρτηση των x_i) ονομάζεται <u>εκτιμήτρια</u> (estimator) της παραμέτρου μ του πληθυσμού. Η αριθμητική τιμή που προκύπτει από τον τύπο αυτόν όταν πάρουμε ένα δείγμα λέγεται <u>σημειακή εκτίμηση</u> (point estimation) ή <u>εκτίμηση σημείου</u> της παραμέτρου μ του πληθυσμού.

Μία εκτιμήτρια για την τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού είναι η τυπική απόκλιση s ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους ν από τον πληθυσμό και δίνεται από τον τύπο

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\nu}} \quad ή \quad s = \sqrt{\frac{1}{\nu-1}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2} \quad ή \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}}$$

Η αριθμητική τιμή που προκύπτει από αυτόν τον τύπο για το δείγμα που πήραμε είναι η εκτίμηση σημείου της σ.

Ομοίως, η αναλογία $\bar{p} = \frac{\nu_i}{\nu}$, i =1, 2, …, κ, που εκφράζει την αναλογία με την οποία εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής X στις τιμές ενός δείγματος, είναι μια εκτιμήτρια της αναλογίας p του πληθυσμού.

Αν δηλαδή από ένα τυχαίο δείγμα βρούμε για την τιμή x_i ότι είναι $\bar{p}$ =0,4, τότε η τιμή 0,4 είναι μια σημειακή εκτίμηση του λόγου $p = \frac{\nu_i}{N}$ της τιμής x_i του πληθυσμού.

Είναι φανερό ότι η εκτίμηση μιας παραμέτρου (μ, σ, κ.λπ.) του πληθυσμού θα είναι τόσο καλύτερη, όσο καλύτερη θα είναι η εκτιμήτρια που χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, προκειμένου να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού, παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ και διαλέγουμε στη συνέχεια μια εκτιμήτρια συνάρτηση. Μπορούμε να πάρουμε τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή, το μέσο εύρος, το μέσο γεωμετρικό και το μέσο αρμονικό, δηλαδή μια από τις ακόλουθες εκτιμήτριες:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}, \quad \delta = \alpha_{i-1} + \left(\frac{\nu}{2} - N_{i-1}\right)\cdot\frac{c}{\nu_i}$$

$$E.T. = \alpha_{i-1} + \frac{\nu_i - \nu_{i-1}}{2\nu_i - (\nu_i + \nu_{i+1})}\cdot c$$

$$\text{Μέσο εύρος} = \frac{\text{μικρότερη τιμή} + \text{μεγαλύτερη τιμή}}{2}$$

$$G = \sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} \quad \text{και} \quad H = \frac{\nu}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_\nu}}$$

Απ’ όλες αυτές τις εκτιμήτριες τώρα ποια θα χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμηση της μ και με ποια κριτήρια θα κάνουμε αυτήν την επιλογή; Μια εκτιμήτρια θα λέμε ότι είναι καλή όταν είναι αμερόληπτη, αποτελεσματική, συνεπής και επαρκής.

3.2.1 Αμερόληπτη εκτιμήτρια

Την εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}$, μιας άγνωστης παραμέτρου θ, τη λέμε αμερόληπτη, αν η δειγματική κατανομή της $\widehat{\Theta}$ έχει μέση τιμή ίση με θ, δηλαδή αν $\mu_{\widehat{\Theta}} = \theta$ ή $E(\widehat{\Theta}) = \theta$. Μια εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}$, για την οποία $E(\widehat{\Theta}) = \theta + b(\theta)$, όπου $b(\theta) \neq 0$, τη λέμε μεροληπτική και το μέγεθος $b(\theta)$ το λέμε μεροληψία.

<u>Παράδειγμα</u>
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η μέση τιμή ενός δείγματος είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχεται το δείγμα.

Έχουμε $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}$. Αφού η μέση τιμή του πληθυσμού είναι μ, $E(x_i) = \mu$. Συνεπώς, $E(\overline{X}) = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} E(x_i) = \frac{\nu \cdot \mu}{\nu} = \mu$.

3.2.2 Αποτελεσματική εκτιμήτρια

Οποιαδήποτε εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}$ ως τυχαία μεταβλητή έχει μέση τιμή και τυπική απόκλιση. Αν η εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}$ είναι αμερόληπτη, δηλαδή αν ισχύει $E(\widehat{\Theta}) = \theta$, τότε η μεταβλητότητα της θ είναι η $E[(\widehat{\Theta} - \theta)^2]$. Αποτελεσματική εκτιμήτρια λέμε την αμερόληπτη εκτιμήτρια, που έχει τη μικρότερη μεταβλητότητα.

Με άλλα λόγια, αν $\widehat{\Theta}_1$ και $\widehat{\Theta}_2$ είναι δύο αμερόληπτες εκτιμήτριες της παραμέτρου θ ενός πληθυσμού, θα επιλέξουμε εκείνη την εκτιμήτρια, της οποίας η κατανομή δειγματοληψίας έχει τη μικρότερη μεταβλητότητα.

3.2.3 Συνεπής εκτιμήτρια

Μια εκτιμήτρια $\overline{\Theta}$ της παραμέτρου θ θα λέμε ότι είναι συνεπής όταν η διακύμανσή της Var $[\overline{\Theta}]$ τείνει προς το μηδέν καθώς το μέγεθος ν του δείγματος αυξάνεται απεριόριστα, δηλαδή

$$\lim_{\nu \to +\infty} \mathrm{Var}\,[\overline{\Theta}] = 0$$

Όπως είδαμε, σε μια δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ είναι $\mu_{\overline{x}} = \mu$ και $\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{\nu}$. Αφού, $\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\sigma^2}{\nu} = 0$ συμπεραίνουμε ότι η εκτιμήτρια $\overline{X}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της μ.

3.2.4 Επαρκής εκτιμήτρια

Μια εκτιμήτρια την λέμε επαρκή, όταν εξαντλεί όλες τις πληροφορίες που περιέχονται στο δείγμα από το οποίο υπολογίζεται σε σχέση με την παράμετρο που εκτιμούμε, ή με άλλα λόγια, όταν καμιά άλλη εκτιμήτρια δεν μπορεί να υπολογιστεί από το ίδιο δείγμα και να δώσει περισσότερες πληροφορίες για την παράμετρο που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

4.1 Γενικά

Η εκτίμηση μιας παραμέτρου του πληθυσμού μπορεί να δοθεί με έναν αριθμό, όπου έχουμε τη σημειακή εκτίμηση της, αλλά και με ένα διάστημα, μέσα στο οποίο πιστεύουμε ότι περιέχεται η παράμετρος του πληθυσμού. Τότε, προσδιορίζουμε το διάστημα εμπιστοσύνης. Το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται από μία πιθανότητα P = 1-α, που προκαθορίζεται και δηλώνει την πιθανότητα να βρίσκεται μέσα στο διάστημα εμπιστοσύνης η τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού.

Η τιμή του α ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας και προσδιορίζει τη σημαντικότητα του σφάλματος της εκτίμησης. Για παράδειγμα, όταν α = 0,05, δηλαδή P = 0,95, η τιμή της παραμέτρου που εκτιμούμε έχει πιθανότητα 95% να βρίσκεται μέσα στο διάστημα εμπιστοσύνης που έχουμε υπολογίσει και 5% πιθανότητα να βρίσκεται εκτός αυτού.

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι τα όρια αυτού του διαστήματος μπορούν να προσδιοριστούν για κάθε τιμή της πιθανότητας, η οποία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι αρκετά μικρή, η υπεροχή αυτής της εκτίμησης έναντι της σημειακής είναι προφανής.

Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο θ ενός πληθυσμού. Παίρνοντας ένα τυχαίο δείγμα έχουμε μια εκτιμήτρια $\bar{\theta}$ της θ. Στη συνέχεια, ζητάμε να προσδιορίσουμε δύο αριθμούς $\bar{\Theta} - \varepsilon$ και $\bar{\Theta} + \varepsilon$, ώστε $P(\bar{\theta} - \varepsilon < \theta < \bar{\theta} + \varepsilon) = 1 - \alpha$, οπότε $P(\theta \leq \bar{\theta} - \varepsilon) + P(\theta > \bar{\theta} + \varepsilon) = \alpha$, όπου το α μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή πιθανότητας. Το διάστημα $(\bar{\theta} - \varepsilon, \bar{\theta} + \varepsilon)$ ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης της παραμέτρου θ ή 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ. Τα όρια $\bar{\theta} - \varepsilon$ και $\bar{\theta} + \varepsilon$ του διαστήματος λέγονται όρια εμπιστοσύνης, το $\bar{\theta} - \varepsilon$ λέγεται κάτω όριο εμπιστοσύνης ενώ το $\bar{\theta} + \varepsilon$ λέγεται άνω όριο εμπιστοσύνης. Η πιθανότητα 1-α λέγεται συντελεστής εμπιστοσύνης ή επίπεδο εμπιστοσύνης και η πιθανότητα α επίπεδο σημαντικότητας. Είναι $0 < \alpha < 1$.

Οπότε, για να προσδιορίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ του πληθυσμού, κάνουμε τα εξής:

1. Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν από τον πληθυσμό.
2. Υπολογίζουμε από το δείγμα αυτό μια εκτίμηση $\overline{\theta}$ της θ.
3. Υπολογίζουμε μια εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ_θ της παραμέτρου του πληθυσμού από τα στοιχεία του δείγματος.
4. Καθορίζουμε τη δειγματική κατανομή που ακολουθεί η παράμετρος θ.
5. Προσδιορίζουμε την πιθανότητα 1-α με την οποία θα υπολογίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης $[\overline{\theta} - \varepsilon, \overline{\theta} + \varepsilon]$ ώστε να έχουμε :

$$P(\overline{\theta} - \varepsilon \leq \theta \leq \overline{\theta} + \varepsilon)=1 - \alpha$$

4.2 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού

Για το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την κατανομή που ακολουθεί ο πληθυσμός που εξετάζουμε (κανονική ή όχι), το μέγεθος του δείγματος ($\nu \geq 30$ ή $\nu < 30$), καθώς και το αν η διακύμανση του πληθυσμού είναι γνωστή ή άγνωστη.

4.2.1 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ κανονικού πληθυσμού με γνωστή διακύμανση σ^2

Αν ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2, η κατανομή της μέσης τιμής $\overline{X}$ ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους ν είναι κανονική με μέση τιμή μ και διακύμανση $\frac{\sigma^2}{\nu}$ και μετατρέπεται σε τυποποιημένη κανονική κατανομή με το μετασχηματισμό $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}}$.

Για ένα συγκεκριμένο δείγμα με προκαθορισμένο συντελεστή εμπιστοσύνης 1-α προσδιορίζουμε την κρίσιμη τιμή $z_{\alpha/2}$, ώστε να έχουμε:

$$P\left(- z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1- \alpha \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(- z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \leq \overline{X} - \mu \leq z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \alpha \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(- \overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \leq -\mu \leq - \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \alpha \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \alpha$$

Οπότε, η μέση τιμή μ του πληθυσμού συμπεριλαμβάνεται στο διάστημα εμπιστοσύνης με κάτω όριο τον αριθμό $\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ και άνω όριο τον $\bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ με πιθανότητα 1 - α, που είναι ο βαθμός εμπιστοσύνης. Δηλαδή ένα 100(1 - α)% διάστημα εμπιστοσύνης του μ για ένα συγκεκριμένο δείγμα είναι $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$, $\bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}})$. Το διάστημα αυτό είναι ένα 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για τον μ. Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε έναν μεγάλο αριθμό δειγμάτων μεγέθους ν (από έναν κανονικό πληθυσμό με γνωστή διακύμανση), τότε περίπου το 100(1-α)% των παραπάνω διαστημάτων θα περιέχει τον μ.

<u>Παράδειγμα</u>
Από έναν κανονικό πληθυσμό, που έχει διακύμανση $\sigma^2 = 1,6$, παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν = 10 και βρίσκουμε τη μέση τιμή του $\bar{x} = 25,62$. Να βρεθούν τα 95% όρια εμπιστοσύνης της μέσης τιμής του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται το δείγμα.

⇒ Επειδή 1-α = 0,95, προκύπτει ότι α/2 = 0,025, $z_{0,975} = 1,96$ και $\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = 0,4$. Οπότε $z_{1-1/2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = 1,96 \cdot 0,4 = 0,78$ και τα όρια είναι $l_1 = 25,62 - 0,78 = 24,84$ και $l_2 = 25,62 + 0,78 = 26,40$.

4.2.2 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση σ^2

Συχνά, η μεταβλητότητα και, συνεπώς, η τυπική απόκλιση του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχεται το δείγμα και του οποίου επιδιώκουμε την εκτίμηση της μέσης τιμής μ, δεν είναι γνωστή. Σ’ αυτήν την περίπτωση, η μόνη δυνατότητα που έχουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλη εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ. Η αμερόληπτη εκτιμήτρια της μεταβλητότητας ενός πληθυσμού είναι η μεταβλητότητα του δείγματος, που υπολογίζεται από τη σχέση $s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\nu - 1}$.

α) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (ν ≥ 30), η τυχαία μεταβλητή $\bar{x}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση $\frac{s^2}{\nu}$ και η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{\nu}}}$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Όπως ορίστηκαν οι τιμές - $z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$ στην περίπτωση της τυπικής κανονικής κατανομής με γνωστή διακύμανση, με ανάλογο τρόπο ορίζονται και εδώ. Οπότε, το διάστημα εμπιστοσύνης $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}})$ είναι ένα διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής μ του πληθυσμού με συντελεστή εμπιστοσύνης 1 – α.

β) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό (ν < 30), η τυχαία μεταβλητή $t = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{\nu}}}$ ακολουθεί την t – κατανομή με ν – 1 βαθμούς ελευθερίας.

Παρομοίως, ορίζονται οι τιμές - $t_{\alpha/2}$και + $t_{\alpha/2}$, έτσι ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη της κατανομής και μεταξύ των ευθειών $t = -t_{\alpha/2}$ και $t = t_{\alpha/2}$να είναι 1 - α. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται από τους ν - 1 βαθμούς ελευθερίας και βρίσκονται από τους αντίστοιχους πίνακες.

Έτσι, το διάστημα $(\bar{x}\ -\ t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}}\ ,\ \bar{x}\ +\ t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}})$ είναι ένα διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής μ του πληθυσμού με συντελεστή εμπιστοσύνης 1–α.

Παράδειγμα 1

Το περιεχόμενο 7 όμοιων εμπορευματοκιβωτίων είναι 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10, 10.2, 9.6 τόνοι. Να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής όλων των εμπορευματοκιβωτίων υποθέτοντας ότι η κατανομή του βάρους τους προσεγγίζει ικανοποιητικά την κανονική κατανομή.

⇒ Από τα στοιχεία του δείγματος υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση s = 0,283. Για ν = 6 βαθμούς ελευθερίας και α = 0,05 (αφού $\frac{\alpha}{2}$ = 0,25) βρίσκουμε την τιμή 2,447.

Συνεπώς το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της μ είναι:

$10\text{-}2,447\ (\frac{0,283}{\sqrt{7}}) \leq \mu \leq 10\text{+}2,447\ (\frac{0,283}{\sqrt{7}}) \iff 9,74 \leq \mu \leq 10,26.$

Παράδειγμα 2

Σ' ένα διαγωνισμό έκθεσης με θέμα το περιβάλλον έλαβαν μέρος 3000 μαθητές. Πήραμε ένα δείγμα μεγέθους ν = 100 και υπολογίσαμε τη μέση βαθμολογία τους $\bar{x}$ = 55 (κλίμακα βαθμολογίας 1-100) και την τυπική απόκλιση s = 20. Η κατανομή της βαθμολογίας όλων των διαγωνιζομένων και η διακύμανσή τους δεν είναι γνωστά. Να βρεθεί το διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ της βαθμολογίας του συνόλου των μαθητών με πιθανότητα 99%.

⇒ Ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος , Ν =3000 και το δείγμα μεγάλο, ν=100. Επίσης είναι 1-α = 99% ↔ α = 0,01↔ $\frac{\alpha}{2}$ = 0,005 και $Z_{0,005}$ = 2,58.

Στην περίπτωση που ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος και η δειγματοληψία γίνεται χωρίς επανατοποθέτηση, το διάστημα για τη μέση τιμή μ, γίνεται:

$$(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}} \cdot \sqrt{\frac{N-\nu}{N-1}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}} \cdot \sqrt{\frac{N-\nu}{N-1}})$$

Έτσι έχουμε:

$$(55-2{,}58 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \cdot \sqrt{\frac{3000-100}{3000-1}}, 55+ 2{,}58 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \cdot \sqrt{\frac{3000-100}{3000-1}}) = (49{,}926\ , 60{,}074)$$

Άρα μπορούμε να πούμε ότι η μέση επίδοση των 3000 διαγωνιζομένων είναι μεταξύ των βαθμών 49,926 και 60,074, με βαθμό εμπιστοσύνης 99%.

4.2.3 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ κανονικού πληθυσμού που δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή

Από το Κ.Ο.Θ. ξέρουμε ότι, αν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο ($\nu \geq 30$), τότε, ανεξάρτητα από το είδος της κατανομής του πληθυσμού, η τυχαία μεταβλητή $\bar{x}$ προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση $\frac{\sigma^2}{\nu}$, αν η διακύμανση σ^2 του πληθυσμού είναι γνωστή, ή $\frac{s^2}{\nu}$, αν είναι άγνωστη.

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης στις δύο περιπτώσεις είναι $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\ , \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}})$ και $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}}\ , \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}})$ αντίστοιχα.

<u>Παράδειγμα</u>

Οι μισθοί των 4.000 ξενοδοχοϋπαλλήλων μιας πόλης ακολουθούν άγνωστη κατανομή. Πήραμε ένα δείγμα μεγέθους ν = 100 και βρήκαμε μέσο $\bar{x}$ = 1000 ευρώ και τυπική απόκλιση s = 150 ευρώ. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται ο μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων με πιθανότητα 99%.

$\Rightarrow N = 4000,\ \nu = 100,\ s = 150,\ \bar{x} = 1000,\ 1 - \alpha = 99\%$

Άρα, $z_{\alpha/2} = 2{,}58$ και το διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι

$$(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}} \cdot \sqrt{\frac{N-\nu}{N-1}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}} \cdot \sqrt{\frac{N-\nu}{N-1}}) =$$

$$= (1000 - 2{,}58 \cdot \frac{150}{10} \sqrt{\frac{4000-100}{4000-1}}, 1000 + 2{,}58 \cdot \frac{150}{10} \sqrt{\frac{4000-100}{4000-1}}) =$$

$$= (1000 - 2{,}58 \cdot 15 \cdot 0{,}9875,\ 1000 + 2{,}58 \cdot 15 \cdot 0{,}9875) =$$

$$= (1000 - 38{,}22,\ 1000 + 38{,}22) = (961{,}78\ , 1038{,}22)$$

4.3 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο κανονικών πληθυσμών

α) Όταν οι διακυμάνσεις είναι γνωστές

Αν έχουμε δύο πληθυσμούς με μέσες τιμές μ_A και μ_B και μεταβλητότητες σ_A^2 και σ_B^2 αντίστοιχα, η εκτιμήτρια της διαφοράς των μέσων τιμών μ_A και μ_B είναι $\overline{X}_A$ - $\overline{X}_B$. Συνεπώς, για να βρούμε το διάστημα εμπιστοσύνης ως μία εκτίμηση της διαφοράς μ_A- μ_B, θα επιλέξουμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα, ένα από κάθε πληθυσμό, μεγέθους ν_A και ν_B και θα υπολογίσουμε τη διαφορά $\overline{X}_A$ - $\overline{X}_B$ των μέσων τιμών των δειγμάτων.

Όπως γνωρίζουμε, $\overline{X}_A \sim N(\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{\nu_A})$ και $\overline{X}_B \sim N(\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{\nu_B})$. Επομένως, $\overline{X}_A - \overline{X}_B \sim N(\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{\nu_A} + \frac{\sigma_B^2}{\nu_B})$ ή $Z = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{\nu_A} + \frac{\sigma_B^2}{\nu_B}}} \sim N(0, 1)$.

Για προκαθορισμένο συντελεστή εμπιστοσύνης 1 – α προσδιορίζουμε την κρίσιμη τιμή $z_{\alpha/2}$, ώστε να έχουμε:

$$[(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{\nu_A} + \frac{\sigma_B^2}{\nu_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\overline{X}_A - \overline{X}_B) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{\nu_A} + \frac{\sigma_B^2}{\nu_B}}] = 1\text{-}\alpha$$

οπότε, ένα διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς των μέσων τιμών μ_A - μ_B των δύο πληθυσμών, με συντελεστή εμπιστοσύνης 1 – α, είναι το:

$$[(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{\nu_A} + \frac{\sigma_B^2}{\nu_B}}, (\overline{X}_A - \overline{X}_B) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{\nu_A} + \frac{\sigma_B^2}{\nu_B}}]$$

β) Όταν οι διακυμάνσεις είναι άγνωστες

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς των δύο μέσων μ_A και μ_B, όταν οι μεταβλητές X_A και X_B των δύο πληθυσμών ακολουθούν κανονικές κατανομές με άγνωστες τις διακυμάνσεις τους σ_A^2 και σ_B^2, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι τα δείγματα είναι ανεξάρτητα και οι άγνωστες διακυμάνσεις ίσες.

Αν θεωρήσουμε μ_A και μ_B τις μέσες τιμές των μεταβλητών X_A και X_B στους δύο πληθυσμούς και $\overline{X}_A$, s_A^2 και $\overline{X}_B$, s_B^2 τους αντίστοιχους δειγματικούς μέσους και δειγματικές διακυμάνσεις, τότε η κοινή διακύμανση των δύο δειγμάτων μεγέθους ν_A και ν_B αντίστοιχα θα είναι $s^2 = \frac{(\nu_A - 1)s_A^2 + (\nu_B - 1)s_B^2}{\nu_A + \nu_B - 2}$. Η τυχαία μεταβλητή $t = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{s\sqrt{\frac{1}{\nu_A} + \frac{1}{\nu_B}}}$ ακολουθεί την t – student κατανομή με $\nu = \nu_A + \nu_B - 2$.

Από τους πίνακες της t – student κατανομής προσδιορίζουμε τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης της διαφοράς των δύο μέσων $\mu_A - \mu_B$ με ορισμένη πιθανότητα P = 1 – α. Έτσι, έχουμε:

$$- t_{\alpha/2,\nu_A+\nu_B-2} < \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{s\sqrt{\frac{1}{\nu_A}+\frac{1}{\nu_B}}} < t_{\alpha/2,\nu_A+\nu_B-2}$$

ή, με πιθανότητα P = 1 – α έχουμε:

$$(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - t_{\alpha/2,\nu_A+\nu_B-2} \cdot s\sqrt{\frac{1}{\nu_A} + \frac{1}{\nu_B}} < \mu_A - \mu_B$$

και $\mu_A - \mu_B < (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + t_{\alpha/2,\nu_A+\nu_B-2} \cdot s\sqrt{\frac{1}{\nu_A} + \frac{1}{\nu_B}}$

Παράδειγμα 1

Το βάρος των σπουδαστών δύο σχολών ακολουθεί την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση σ_1= 9kg και σ_2= 5kg. Εξετάζοντας 40 σπουδαστές από κάθε σχολή βρίσκουμε μέσο βάρος $\bar{x}_1$= 80kg και $\bar{x}_2$= 70kg. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης 99% για τη διαφορά των μέσων βαρών των σπουδαστών των δύο σχολών.

⇒ 1 – α =99%, άρα $z_{\alpha/2}$ = 2,58.

Το διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 99% είναι:

$$[(80-70) - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{9^2}{40} + \frac{5^2}{40}}, (80-70) + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{9^2}{40} + \frac{5^2}{40}}] =$$

= [10 – 2,58 · 1,63, 10 + 2,58 · 1,63] = [10 – 4,2, 10 + 4,2] = [5,8 , 14,2]

Παράδειγμα 2

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα οι δύο διακυμάνσεις είναι άγνωστες, αλλά ίσες, υπολογίζουμε στα δύο δείγματα τις διακυμάνσεις s_1^2 = 100 και s_2^2 = 36. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης 99% για τη διαφορά των μέσων βαρών των σπουδαστών.

$$\Rightarrow s^2 = \frac{(\nu_1-1)s_1^2+(\nu_2-1)s_2^2}{\nu_1+\nu_2-2} = \frac{(40-1)\cdot 100+(40-1)\cdot 36}{40+40-2} = \frac{39\cdot 100+39\cdot 36}{78} = 68$$

Για 1 – α = 99%, $t_{\alpha/2}$ = 2,64.

Οπότε, το διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 99% είναι:

$$[(80-70) - 2{,}64 \cdot \sqrt{\frac{68}{40} + \frac{68}{40}}, (80-70) + 2{,}64 \cdot \sqrt{\frac{68}{40} + \frac{68}{40}}] =$$

= [10 – 2,64 · 1,84, 10 + 2,64 · 1,84] = [10 – 4,86, 10 + 4,86] = [5,14, 14,86]

4.4 Διάστημα εμπιστοσύνης για την διακύμανση σ^2 ενός κανονικού πληθυσμού με γνωστό ή άγνωστο το μέσο μ του πληθυσμού

Ο προσδιορισμός του διαστήματος εμπιστοσύνης της μέσης τιμής, της αναλογίας ή της διαφοράς τους παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το ίδιο διάστημα για τη διακύμανση δεν παρουσιάζει τόσο μεγάλο ενδιαφέρον, εκτός από ειδικές περιπτώσεις, όπως π.χ. όταν επιθυμούμε να μελετήσουμε την κατανομή των ημερομισθίων ενός κλάδου όχι όσον αφορά στο ύψος τους, αλλά σχετικά με τη διασπορά τους.

Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε τυχαία ένα δείγμα μεγέθους ν από έναν πληθυσμό που ακολουθεί, ως προς τη μεταβλητή που μελετούμε, την κανονική κατανομή και ότι εκτιμούμε την άγνωστη διακύμανση του πληθυσμού σ^2 από τη δειγματική S^2. Θέλουμε, δηλαδή, να διαπιστώσουμε την κατανομή της S^2 περί την σ^2 για να προσδιορίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2.

Η τυχαία μεταβλητή $\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2}$ ακολουθεί την κατανομή X^2 με ν-1 βαθμούς ελευθερίας. Έτσι, αν έχουμε έναν κανονικό πληθυσμό με άγνωστη σ^2 και γνωστό μ, τότε η

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\mu)^2}{\nu}$$

είναι μια εκτιμήτρια της σ^2, ενώ αν είναι άγνωστος ο μ, τότε η

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\bar{x})^2}{\nu-1}$$

είναι μια εκτιμήτρια της σ^2, όπου ν είναι το μέγεθος του δείγματος σε κάθε περίπτωση.

Με τη βοήθεια της κατανομής X^2 μπορούμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση

$$P\left[X^2_{1-\alpha/2} \leq \frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \leq X^2_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Από αυτήν τη σχέση έχουμε

$$X^2_{1-\alpha/2} \leq \frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \rightarrow \sigma^2 \leq \frac{(\nu-1)S^2}{X^2_{1-\alpha/2}} \quad \text{και} \quad \frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \leq X^2_{\alpha/2} \rightarrow \frac{(\nu-1)S^2}{X^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$P\left[\frac{(\nu-1)S^2}{X^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(\nu-1)S^2}{X^2_{1-\alpha/2}}\right] = 1 - \alpha$$

Από αυτήν τη σχέση προκύπτει το διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση σ^2 κανονικού πληθυσμού με εμπιστοσύνη 100(1-α)%, όταν πάρουμε ένα δείγμα μεγέθους ν που έχει τυπική απόκλιση S^2. Αυτό είναι :

$$\left[\frac{(\nu-1)S^2}{X^2_{\alpha/2}}, \frac{(\nu-1)S^2}{X^2_{1-\alpha/2}}\right]$$

Οι αριθμητές των άκρων του διαστήματος αυτού μπορούν να αντικατασταθούν με την ποσότητα $\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\bar{x})^2$ γιατί είναι $(\nu-1)S^2 = =\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\bar{x})^2$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή του συγκεκριμένου δείγματος που πήραμε. Έτσι το διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να γραφτεί:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\bar{x})^2}{X^2_{\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\bar{x})^2}{X^2_{1-\alpha/2}}\right]$$

Από τον τύπο αυτό μπορούμε να βρούμε και το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης της τυπικής απόκλισης σ. Αυτό θα είναι :

$$\left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\bar{x})^2}{X^2_{\alpha/2}}}\ ,\ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(xi-\bar{x})^2}{X^2_{1-\alpha/2}}}\right].$$

<u>Παράδειγμα</u>

Δεκαπέντε λαμπτήρες ίδιας μάρκας δοκιμάστηκαν για να εξακριβωθεί η μέση διάρκεια ζωής και η διακύμανση. Το δείγμα έδωσε $\bar{X}$ = 650 ώρες συνεχούς χρήσεως και S^2 = 900. Να βρεθεί το 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση του πληθυσμού. Για επίπεδο σημαντικότητας 1%, οι τιμές του X^2 από τους πίνακες είναι:

$$X^2_{1-\alpha/2} = X^2_{0,995} = 4{,}075 \qquad \text{και} \qquad X^2_{\alpha/2} = X^2_{0,005} = 31{,}319$$

$$\Rightarrow \frac{(15-1)900}{31{,}319} \leq \sigma^2 \leq \frac{(15-1)900}{4{,}075} \qquad \text{ή} \qquad 403 \leq \sigma^2 \leq 3073$$

είναι το 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση.

4.5 Διάστημα εμπιστοσύνης του λόγου των διακυμάνσεων δύο πληθυσμών

Προκειμένου να συγκρίνουμε τις διακυμάνσεις δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών με την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης, χρησιμοποιούμε το θεώρημα που συνδέει ανεξάρτητες X^2 μεταβλητές με την κατανομή F.

Αν από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν την κανονική κατανομή με διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 αντίστοιχα πάρουμε δύο τυχαία δείγματα μεγέθους ν_1 και ν_2 αντίστοιχα και υπολογίσουμε τις διακυμάνσεις τους s_1^2 και s_2^2, τότε η τυχαία μεταβλητή $\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}}$ ακολουθεί την F – κατανομή με ν_1 - 1 και ν_2 - 1 βαθμούς ελευθερίας, ώστε:

$$P\left(F_{\alpha/2} \leq \frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} \leq F_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \ \leftrightarrow\ P\left(\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{1-\alpha/2}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

Οπότε το διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο των διακυμάνσεων δύο πληθυσμών είναι $\left[\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{1-\alpha/2}}, \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\alpha/2}}\right]$.

Παράδειγμα

Η πληρότητα των ξενοδοχείων ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αν εξετάσουμε 15 ξενοδοχεία από μία περιοχή, βρίσκουμε τυπική απόκλιση στην πληρότητά τους 4%, ενώ αν εξετάσουμε 10 ξενοδοχεία μιας άλλης περιοχής, βρίσκουμε τυπική απόκλιση στην πληρότητά τους 3%. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης του λόγου των τυπικών αποκλίσεων της πληρότητας όλων των ξενοδοχείων των δύο περιοχών με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

$\Rightarrow s_1 = 4 \rightarrow s_1^2 = 16$ και $s_2 = 3 \rightarrow s_2^2 = 9$

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$ και $1 - \alpha/2 = 0{,}975$ για $\nu_1 - 1 = 15 - 1 = 14$ και $\nu_2 - 1 = 10 - 1 = 9$ βαθμούς ελευθερίας

$F_{0,975,(14),(9)} = 3{,}7979$ και $F_{0,975,(9),(14)} = 3{,}2093$

$F_{0,025,(14),(9)} = \frac{1}{F_{0,975,(9),(14)}} = \frac{1}{3{,}2093} = 0{,}3116$

Το διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο των διακυμάνσεων θα είναι:

$[\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{1-\alpha/2}}, \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\alpha/2}}] = [\frac{\frac{16}{9}}{3{,}7976}, \frac{\frac{16}{9}}{0{,}3116}] = [0{,}468,\ 5{,}705]$, οπότε το διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 95% για το λόγο των τυπικών αποκλίσεων της κάλυψης όλων των ξενοδοχείων των δύο περιοχών είναι:

$[\sqrt{0{,}468}, \sqrt{5{,}705}] = [0{,}68,\ 2{,}39]$

4.6 Διάστημα εμπιστοσύνης ενός ποσοστού p

Όταν από τις διαθέσιμες πληροφορίες ενός τυχαίου δείγματος επιδιώκουμε να εκτιμήσουμε την αναλογία P των ατόμων του πληθυσμού που έχουν μια δεδομένη ιδιότητα, τότε ακολουθούμε τη μεθοδολογία της εκτίμησης των αναλογιών.

Αν υποθέσουμε ότι σε δείγμα μεγέθους ν τα x άτομα έχουν το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε, τότε η αναλογία στο δείγμα είναι p, δηλαδή $p = \frac{x}{\nu}$ και η σημειακή εκτίμηση της αναλογίας του πληθυσμού είναι $P = \hat{p} = \frac{x}{\nu}$.

Η εκτιμήτρια $\hat{p}$ είναι τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή και η μεταβλητότητα της $\hat{p}$ είναι $\mu_{\hat{p}} = p$ και $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{p\cdot(1-p)}{\nu}$ αντίστοιχα. Έτσι, η κανονικοποιημένη τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{P-\hat{p}}{\sigma_p}$ θα ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Συνεπώς, μπορούμε να έχουμε την πρόταση πιθανότητας

$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{P-\hat{p}}{\sigma_p} < z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha \ \rightarrow\ P(P - z_{\alpha/2}\cdot \sigma_P \leq \hat{p} \leq P + - z_{\alpha/2}\cdot \sigma_P \approx 1 - \alpha$

Οπότε, το διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή $\overline{p}$ θα είναι

$$(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_P \,,\, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_P)$$

με επίπεδο εμπιστοσύνης 100·(1 - α)%. Δηλαδή το ποσοστό $\hat{p}$ ενός δείγματος θα είναι εκτιμητής του p του πληθυσμού.

Και επειδή σπάνια γνωρίζουμε το τυπικό σφάλμα σ_P του πληθυσμού, υπολογίζουμε συνήθως το s_P του δείγματος. Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης για το $\bar{p}$ με επίπεδο εμπιστοσύνης 100·(1 - α)% είναι

$$(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot s_P \,,\, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot s_P)$$

<u>Παράδειγμα</u>

Από ένα τυχαίο δείγμα 100 ψηφοφόρων που ρωτήθηκαν για μια συγκεκριμένη πολιτική της κυβέρνησης οι 90 διαφωνούν. Να κατασκευαστεί 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία του εκλογικού σώματος που διαφωνεί με τη συγκεκριμένη πολιτική.

$\Rightarrow \sigma_P = \sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1/100} = 0{,}03$

Ακόμη, 100·0,9 = 90 > 5 και 100·0,1 = 10 > 5.

Άρα το διάστημα είναι

$$0{,}9 - 2{,}575 \cdot 0{,}03 \le p \le 0{,}9 + 2{,}575 \cdot 0{,}03$$

$$0{,}82 \le p \le 0{,}97$$

4.7 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των ποσοστών p_A - p_B

Υπάρχουν περιπτώσεις που θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διαφορά των ποσοστών δύο πληθυσμών. Έστω ότι ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τη διαφορά p_A - p_B των αναλογιών σε δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους ν_A και ν_B από τους πληθυσμούς αντίστοιχα και καταγράφουμε τους αντίστοιχους αριθμούς των επιτυχιών.

Η δειγματική κατανομή $\hat{P}_A$ - $\hat{P}_B$ προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή p_A - p_B και διακύμανση $\sigma^2 = \frac{p_A(1-p_A)}{\nu_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{\nu_B}$ και μετατρέπεται σε τυποποιημένη κανονική κατανομή με το μετασχηματισμό $Z = \frac{(p_A - p_B) - (\hat{P}_A - \hat{P}_B)}{\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{\nu_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{\nu_B}}}$.

Έτσι, για προκαθορισμένο συντελεστή εμπιστοσύνης 1 – α προσδιορίζουμε την κρίσιμη τιμή $z_{\alpha/2}$ και έχουμε:

$$P\left(- z_{\alpha/2} < \frac{(P_A - P_B) - (\hat{P}_A - \hat{P}_B)}{\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{\nu_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{\nu_B}}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad P((P_A - P_B) - z_{\alpha/2} \cdot \sigma \le \hat{P}_A - \hat{P}_B \le (P_A - P_B) + z_{\alpha/2} \cdot \sigma) \approx 1 - \alpha$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\widehat{P}_A - \widehat{P}_B$ σε 100·(1-α)% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι:

$$[(p_A - p_B) - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, (p_A - p_B) + z_{\alpha/2} \cdot \sigma],$$

όπου $\hat{p}_A$ και $\hat{p}_B$ είναι τα ποσοστά που παρατηρούνται σε συγκεκριμένα δείγματα του πρώτου και του δεύτερου πληθυσμού.

Αν δεν γνωρίζουμε τα $\bar{p}_A$ και $\bar{p}_B$ των πληθυσμών, παίρνουμε ως εκτιμητές τους τα $\hat{p}_A$ και $\hat{p}_B$ και αντί σ το S που θα δίνεται από τον τύπο

$$S = \sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{\nu_A} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{\nu_B}}$$

Σ' αυτή την περίπτωση το διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\widehat{P}_A - \widehat{P}_B$ με βαθμό εμπιστοσύνης 100(1-α)% θα είναι

$$[(p_A - p_B) - z_{\alpha/2} \cdot s, (p_A - p_B) + z_{\alpha/2} \cdot s].$$

<u>Παράδειγμα</u>

Από 600 ενήλικους και 400 ανήλικους που ρωτήθηκαν τυχαία για ένα πρόγραμμα της τηλεόρασης οι 300 ενήλικοι και οι 100 ανήλικοι απάντησαν ότι τους άρεσε. Να υπολογιστεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των αναλογιών όλων των ενηλίκων και όλων των ανηλίκων που παρακολούθησαν το πρόγραμμα και τους άρεσε.

⇒ Τα όρια εμπιστοσύνης είναι $p_A - p_B \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{\nu_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{\nu_B}}$.

$p_A = \frac{300}{600} = 0{,}5$ και $p_B = \frac{100}{400} = 0{,}25$

Άρα, το διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$[(0{,}5 - 0{,}25) - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{600} + \frac{0{,}25\cdot 0{,}75}{400}}, (0{,}5 - 0{,}25) + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{600} + \frac{0{,}25\cdot 0{,}75}{400}}] =$

$= [0{,}25 - 0{,}06, 0{,}25 + 0{,}06]$

Οπότε, μπορούμε να είμαστε 95% σίγουροι ότι η πραγματική διαφορά των αναλογιών είναι από 0,19 ως 0,31.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

5.1 Γενικά

Σε πολλές επιστημονικές περιοχές συχνά αναπτύσσουμε μια θεωρία για να εξηγήσουμε ένα φαινόμενο που παρατηρούμε. Την ισχύ της θεωρίας αυτής την ελέγχουμε συνδυάζοντας νέες παρατηρήσεις και νέα πειραματικά δεδομένα. Τελικά, αποδεχόμαστε τη θεωρία ως ικανοποιητικό πρότυπο εξήγησης του φαινομένου μόνο στην περίπτωση που δεν υπάρχουν παρατηρήσεις που δεν μπορούν να αιτιολογηθούν από αυτήν επαρκώς. Αντιθέτως, αν υπάρχουν παρατηρήσεις που δεν αιτιολογούνται από τη θεωρία, τότε την τροποποιούμε ή την εγκαταλείπουμε και υιοθετούμε κάποια άλλη. Αυτή τη διαδικασία ακολουθούμε και στο στατιστικό έλεγχο των υποθέσεων. Με λίγα λόγια, έλεγχος υποθέσεων είναι μια στατιστική διαδικασία που επιτρέπει στους επιστήμονες να χρησιμοποιούν τα δεδομένα ενός δείγματος για να βγάζουν συμπεράσματα για τον πληθυσμό από τον οποίο πήραν το δείγμα. Δηλαδή, <u>έλεγχος υποθέσεων είναι μια συμπερασματική διαδικασία που χρησιμοποιεί τα δεδομένα ενός δείγματος για να εκτιμήσει την αξιοπιστία μιας υπόθεσης που έγινε για τον πληθυσμό.</u>

Οι έλεγχοι υποθέσεων διακρίνονται σε :

- Παραμετρικούς ελέγχους υποθέσεων
- Μη παραμετρικούς ελέγχους υποθέσεων

Οι <u>παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων</u> αφορούν τις πληθυσμιακές παραμέτρους και διενεργούνται με βάση την υπόθεση ότι είναι γνωστή η κατανομή του πληθυσμού ή πληθυσμών.

Οι <u>μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων</u> μπορεί να αφορούν και παραμέτρους του πληθυσμού (όπως π.χ. τη διακύμανση για την οποία δεν γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητάς της) ή να διενεργούνται για τον έλεγχο της τυχαιότητας του δείγματος. Σε κάθε περίπτωση, όμως, αυτό που τους χαρακτηρίζει είναι ότι αφενός δεν χρειάζεται καμία υπόθεση για τη μορφή της πληθυσμιακής κατανομής κι αφετέρου ακόμα και μικρό μέγεθος δείγματος δίνει αξιόπιστα συμπεράσματα.

Ακόμη, υπάρχουν δύο είδη στατιστικών υποθέσεων, οι μηδενικές υποθέσεις (null hypothesis) ή H_0 και οι εναλλακτικές υποθέσεις (alternative hypothesis) ή H_1. Η μηδενική υπόθεση είναι εκείνη που τελικά ελέγχεται. Πολλές φορές η μηδενική υπόθεση λέγεται και υπόθεση μη διαφοράς, επειδή είναι μια άποψη η οποία συμφωνεί με τις συνθήκες που θεωρούμε ότι αληθεύουν για τον πληθυσμό που μελετάμε.

Γενικά, η μηδενική υπόθεση (H_0) διατυπώνεται με σκοπό να αμφισβητηθεί. Με τον στατιστικό έλεγχο η μηδενική υπόθεση είτε απορρίπτεται είτε δεν απορρίπτεται. Αν δεν απορριφθεί, λέμε ότι τα δεδομένα πάνω στα οποία στηρίζεται ο έλεγχος δεν επαρκούν για την απόρριψή της. Αν ο έλεγχος οδηγήσει στην απόρριψή της, τότε συμπεραίνουμε ότι τα δεδομένα δεν επαληθεύουν τη μηδενική υπόθεση, αλλά είναι συμβατά με κάποια άλλη, η οποία λέγεται εναλλακτική υπόθεση (H_1).

ΣΤΑΔΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Η διαδικασία ελέγχου υποθέσεων μπορεί να περιγραφεί σχηματικά ως εξής :

1. Κάνουμε μια υπόθεση εργασίας.
2. Διατυπώνουμε την αντίστοιχη στατιστική υπόθεση.
3. Κάνουμε έλεγχο της στατιστικής υπόθεσης.
4. Βγάζουμε τη στατιστική απόφαση.
5. Βγάζουμε το τελικό συμπέρασμα σχετικά με ό,τι ισχυριστήκαμε στην υπόθεση εργασίας.

Θα παρουσιάσουμε την όλη διαδικασία του ελέγχου υποθέσεων σε πέντε στάδια.

Βήμα 1^{ο}: Δηλώνουμε την υπόθεση

Ας υποθέσουμε ότι θ είναι η πραγματική τιμή μιας παραμέτρου και έστω θ_0 μια επίσης τιμή, η οποία είναι εκφρασμένη στις ίδιες μονάδες μετρήσεως που είναι εκφρασμένη και η παράμετρος θ. Τότε η στατιστική υπόθεση που θα θέλαμε ίσως να ελέγξουμε, είναι δυνατό να έχει μια από τις εξής τρεις μορφές:

1. $\Theta = \Theta_0$, πράγμα που σημαίνει ότι η πραγματική τιμή της παραμέτρου ισούται με τη δοσμένη τιμή Θ_0.
2. $\Theta \geq \Theta_0$, πράγμα που σημαίνει ότι η πραγματική τιμή της παραμέτρου ισούται ή είναι μεγαλύτερη από τη δοσμένη τιμή Θ_0.
3. $\Theta \leq \Theta_0$, πράγμα που σημαίνει ότι η πραγματική τιμή της παραμέτρου ισούται ή είναι μικρότερη από τη δοσμένη τιμή Θ_0.

Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές, η στατιστική υπόθεση που πρόκειται να ελέγξουμε λέγεται μηδενική υπόθεση και σημειώνεται με H_0.

Η μηδενική υπόθεση (H_0) δηλώνει ότι στον πληθυσμό δεν σημειώνεται καμία αλλαγή, δεν υπάρχει διαφορά ή δεν υπάρχει συγγένεια. Δηλαδή, η H_0 προβλέπει ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν έχει καμία επίδραση στην εξαρτημένη μεταβλητή για τον πληθυσμό.

Αν η μηδενική υπόθεση δεν είναι αποδεκτή, τότε αυτό σημαίνει ότι ισχύει κάτι άλλο στον πληθυσμό, η λεγόμενη εναλλακτική υπόθεση, η οποία σημειώνεται με H_1. Οι εναλλακτικές υποθέσεις που αντιστοιχούν στις τρεις παραπάνω μηδενικές υποθέσεις είναι οι εξής:

1. $\Theta \neq \theta_0$, δηλαδή είναι ή $\theta > \theta_0$ ή $\theta < \theta_0$
2. $\Theta < \theta_0$
3. $\Theta > \theta_0$

Η εναλλακτική υπόθεση (H_1) δηλώνει ότι υπάρχει κάποια αλλαγή, υπάρχει κάποια διαφορά ή υπάρχει μια συγγένεια για τον πληθυσμό. Δηλαδή, η H_1 προβλέπει ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή θα έχει κάποια επίδραση στην εξαρτημένη μεταβλητή για τον πληθυσμό.

Βήμα 2ο: Προσδιορισμός του επιπέδου σημαντικότητας

Προτού ακόμη συγκεντρώσουμε οποιαδήποτε στατιστικά στοιχεία, πρέπει να προσδιορίσουμε το σύνολο όλων των πιθανών δειγμάτων που είναι δυνατό να προκύψουν, όταν η υπόθεση H_0 είναι αληθινή. Δηλαδή, πρέπει να προσδιορίσουμε το σύνολο όλων των αντίστοιχων εκτιμήσεων της παραμέτρου θ, που θα προκύψουν με τον εκτιμητή θ, όταν η υπόθεση H_0 είναι αληθινή. Από το σύνολο των τιμών αυτών πρέπει να προσδιορίσουμε ένα υποσύνολο τιμών, οι οποίες είναι τόσο απομακρυσμένες από την τιμή θ_0, ώστε η πιθανότητα να πάρουμε ένα δείγμα και να μας δώσει τιμή που να ανήκει στο υποσύνολο αυτό, όταν η υπόθεση H_0 είναι αληθινή, είναι πολύ μικρή. Αν μετά τον προσδιορισμό των τιμών του υποσυνόλου αυτού, πάρουμε πράγματι δείγμα σχετικό με την έρευνά μας και μας δώσει εκτίμηση της παραμέτρου θ, η οποία αποτελεί τιμή του υποσυνόλου, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0. Η παραπάνω πολύ μικρή πιθανότητα να πάρουμε ένα δείγμα με τόσο απομακρυσμένη τιμή της θ, όταν η H_0 είναι αληθινή, λέγεται επίπεδο σημαντικότητας και συμβολίζεται με α. Με λίγα λόγια, επίπεδο σημαντικότητας ή α – επίπεδο (alpha level) ενός στατιστικού ελέγχου είναι η πιθανότητα που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο απόρριψης μιας μηδενικής υπόθεσης, η οποία είναι αληθής, υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης.

Από τον ορισμό αυτό είναι φανερή η σχέση μεταξύ του επιπέδου σημαντικότητας α και της αποδοχής ή της απόρριψης της μηδενικής υποθέσεως H_0. Αν δηλαδή το α είναι αρκετά μεγάλο, τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να απορριφθεί η H_0, παρόλο που είναι αληθινή. Αντίθετα αν το α είναι πολύ μικρό, τότε υπάρχει η πιθανότητα να γίνει αποδεκτή η H_0, παρόλο που δεν είναι αληθινή. Συνηθισμένα επίπεδα τιμών του α είναι τα 0,10, 0,05 και 0,01. Ο όρος «επίπεδο σημαντικότητας» προέρχεται από το γεγονός ότι μια τιμή του κριτηρίου ελέγχου που ανήκει στην περιοχή απόρριψης λέγεται σημαντική.

Το επίπεδο σημαντικότητας χρησιμοποιείται για να χωριστεί η κατανομή των δειγματικών μέσων σε δύο τμήματα:

i. Δειγματικούς μέσους που είναι στο κέντρο της κατανομής.
ii. Δειγματικούς μέσους που είναι σημαντικά διαφορετικοί από την H_0 και βρίσκονται στα άκρα της κατανομής.

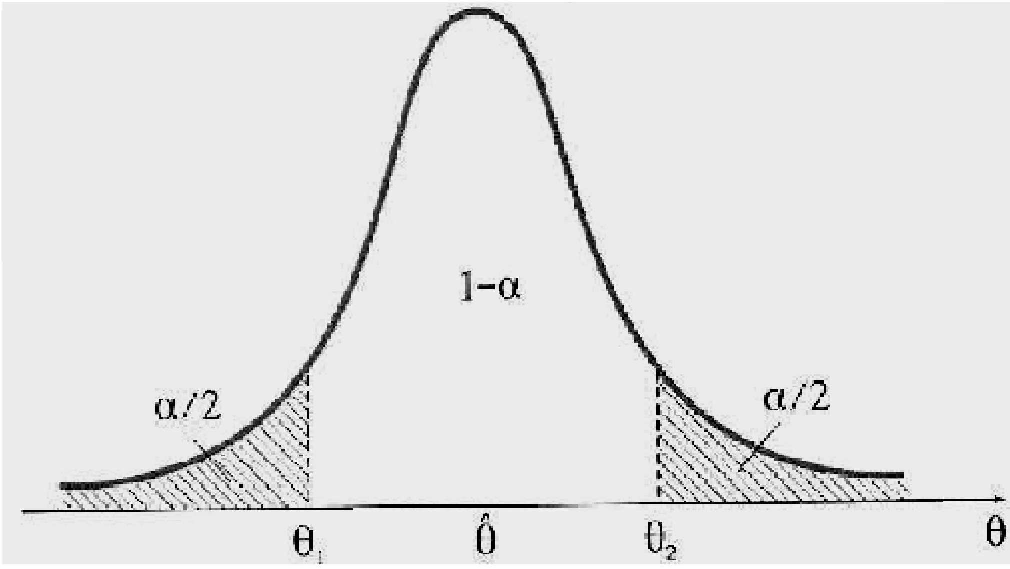
Βήμα 3^{o}: Προσδιορισμός της κατανομής δειγματοληψίας

Έχοντας υπόψη το μέγεθος του δείγματος που χρειαζόμαστε και τη μορφή του πληθυσμού από τον οποίο θα γίνει η δειγματοληψία, πρέπει να προσδιορίσουμε την κατανομή δειγματοληψίας του εκτιμητή θ. Η κατανομή δειγματοληψίας του εκτιμητή δείχνει τις πιθανότητες οι οποίες είναι συνημμένες με διάφορες τιμές που παίρνει ο εκτιμητής όταν η H_0 είναι αληθινή.

Βήμα 4^{o}: Προσδιορισμός του κρίσιμου πεδίου

Το σύνολο των τιμών του θ χωρίζεται σε δυο υποσύνολα: α) αυτό όπου οι τιμές βρίσκονται <u>κοντά</u> στην θ_0, της μηδενικής υποθέσεως και β) αυτό όπου οι τιμές βρίσκονται <u>μακριά</u> από την τιμή της θ_0. Το πρώτο λέγεται σύνολο ή πεδίο αποδοχής της H_0 και το δεύτερο λέγεται σύνολο ή πεδίο απόρριψης της H_0. Το πεδίο απόρριψης της H_0 λέγεται και κρίσιμο πεδίο.

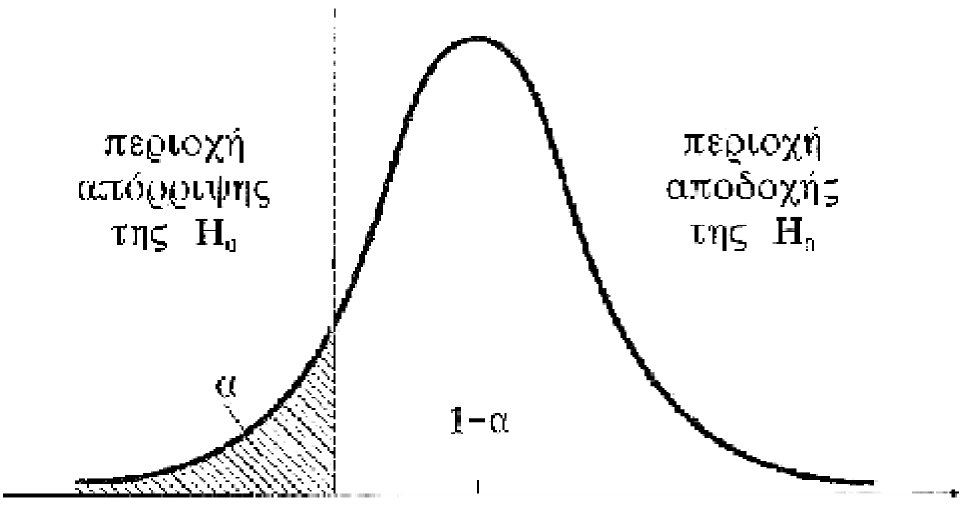
Το μέγεθος του κρίσιμου πεδίου προσδιορίζεται από την κατανομή δειγματοληψίας του θ και το επίπεδο σημαντικότητας α. Ο χώρος του κρίσιμου πεδίου προσδιορίζεται από τη μορφή της H_0. Στο σχήμα που ακολουθεί το μέγεθος του κρίσιμου πεδίου, σημειώνεται με το άθροισμα των σκιασμένων περιοχών όπου $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}$ = α(=επίπεδο σημαντικότητας). Στο ίδιο σχήμα επειδή η H_0 δε δηλώνει κατεύθυνση (< ή >) αλλά είναι $\neq$, το κρίσιμο πεδίο είναι χωρισμένο στα δύο και είναι τοποθετημένο στους δύο περισσότερο απομακρυσμένους χώρους της κατανομής, δηλαδή στις δύο ουρές της κατανομής.



Σχήμα 5. 1

Στην περίπτωση που το κρίσιμο πεδίο μιας στατιστικής υποθέσεως χωρίζεται όπως το κρίσιμο πεδίο στο επόμενο σχήμα, τότε η όλη διαδικασία ελέγχου της στατιστικής αυτής υποθέσεως λέγεται δίπλευρος έλεγχος.

Αν η στατιστική υπόθεση που ελέγχουμε είναι της μορφής $H_0 : \theta \geq \theta_0$ και H_1: $\theta < \theta_0$, δηλαδή η H_0 δηλώνει κάποια κατεύθυνση, τότε το μέγεθος του κρίσιμου πεδίου είναι τοποθετημένο στον περισσότερο προς τα αριστερά του θ_0 απομακρυσμένο χώρο της κατανομής, δηλαδή στην αριστερή ουρά της κατανομής. Εδώ έχουμε μόνο μια κρίσιμη τιμή, την θ_0, η οποία χωρίζει το σύνολο τιμών του θ στο κρίσιμο πεδίο και στο πεδίο αποδοχής της H_0. Η περίπτωση αυτή λέγεται μονόπλευρος έλεγχος.

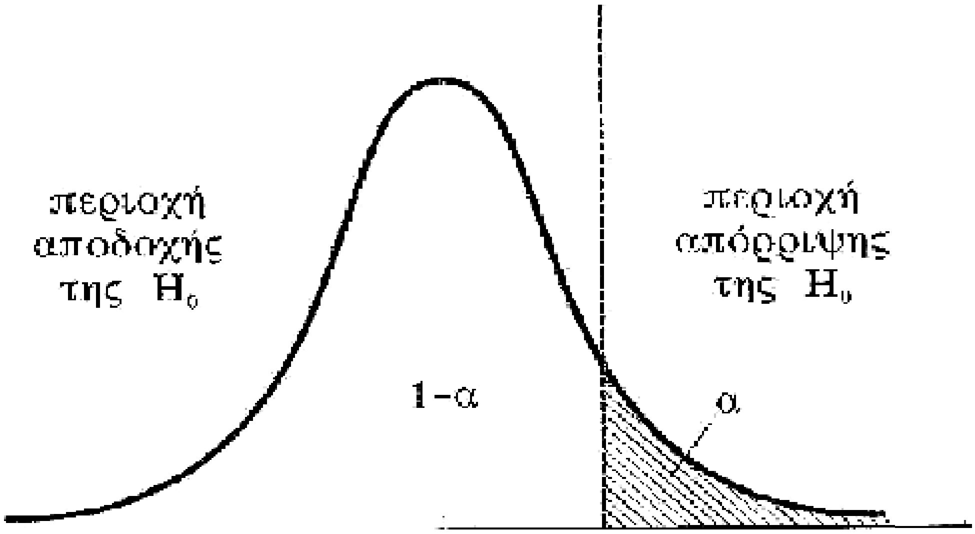


Σχήμα 5. 2

Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται μια άλλη μορφή μονόπλευρου ελέγχου. Εδώ έχουμε H_0: $\theta \leq \theta_0$ και H_1: $\theta > \theta_0$. Τώρα το κρίσιμο πεδίο είναι ολόκληρο τοποθετημένο στον περισσότερο προς τα δεξιά του θ_0 απομακρυσμένο χώρο της κατανομής, δηλαδή στη δεξιά ουρά της κατανομής.

Βήμα 5^o: Η τελική απόφαση

Αν το δείγμα μας δώσει τιμή του θ που βρίσκεται στη κρίσιμη περιοχή, τότε απορρίπτουμε την ορθότητα της μηδενικής υποθέσεως H_0 και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση H_1. Δηλαδή, όταν η τιμή του θ που παίρνεται από το δείγμα συμβαίνει με πιθανότητα ίση ή μικρότερη από α, τότε δεχόμαστε ότι η H_0 δεν είναι αληθινή. Η τιμή αυτή του θ λέγεται σημαντική, ή το αποτέλεσμα του ελέγχου λέγεται <u>στατιστικά σημαντικό</u>. Με άλλα λόγια, όταν παίρνουμε σημαντική τιμή του θ, απορρίπτουμε την H_0 και αποδεχόμαστε την H_1.



Σχήμα 5. 3

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι θέλουμε να ερευνήσουμε τα αποτελέσματα που έχει μια ιδιαίτερη φροντίδα των νηπίων στη φυσική τους ανάπτυξη. Έχουμε πάρει στοιχεία από τη στατιστική υπηρεσία, τα οποία λένε ότι το μέσο βάρος των νηπίων που είναι δύο ετών και δεν τους έχει προσφερθεί κάποια ιδιαίτερη φροντίδα είναι μ=10 κιλά. Προκειμένου να ελέγξουμε αν η ιδιαίτερη φροντίδα που έχουμε σχεδιάσει για τα νήπια έχει επίδραση στο βάρος τους, πρέπει να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα ενός τυχαίου δείγματος νηπίων, στα οποία θα προσφέρουμε την ιδιαίτερη φροντίδα, με τον εθνικό μέσο όρο (μ=10 κιλά).

⇒ <u>Βήμα 1^o</u>: Η μηδενική υπόθεση (H_0) είναι αυτή που δηλώνει ότι η ιδιαίτερη φροντίδα δεν έχει καμία επίδραση στο βάρος των νηπίων.

$$H_0\text{: } \mu_{\text{νηπίων που έτυχαν ιδιαίτερης φροντίδας}} = 10 \text{ κιλά}$$

Δηλαδή, αν και τα νήπια του δείγματος έτυχαν ιδιαίτερης φροντίδας, το μέσο βάρος τους δεν άλλαξε σε σχέση με το μέσο βάρος του πληθυσμού.

Η εναλλακτική υπόθεση (H_1) είναι αυτή που δηλώνει ότι η ιδιαίτερη φροντίδα έχει κάποια επίδραση στην εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή στο βάρος των νηπίων.

$$H_1: \mu_{\text{νηπίων που έτυχαν ιδιαίτερης φροντίδας}} \neq 10 \text{ κιλά}$$

Δηλαδή με μια ιδιαίτερη φροντίδα το μέσο βάρος των νηπίων θα είναι διαφορετικό από το μέσο βάρος του πληθυσμού.

Σημειώνουμε ότι η H_1 δηλώνει ότι θα έχουμε κάποια αλλαγή στο βάρος των νηπίων, αλλά δεν δηλώνει αν θα έχουμε αύξηση ή μείωση του βάρους των νηπίων.

<u>Βήμα 2^o</u>: Επιλέγουμε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05 (5%). Αυτό σημαίνει ότι για να απορρίψουμε την H_0, τα δεδομένα του δείγματος (νήπια που θα τύχουν της ιδιαίτερης φροντίδας) πρέπει να βρίσκονται στην ακραία περιοχή του 5% της κανονικής καμπύλης (αμφίπλευρος έλεγχος).

<u>Βήμα 3^o</u>: Επιλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα από ν=16 νήπια και φροντίζουμε οι γονείς τους να τους παρέχουν ιδιαίτερη φροντίδα.

<u>Βήμα 4^o</u>: Καθορίζουμε το κριτήριο ελέγχου. Επειδή το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή και γνωρίζουμε την τυπική απόκλιση σ=1, παίρνουμε ως κριτήριο ελέγχου τη Z- τιμή :

$$Z = \frac{\bar{X}-10}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-10}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} = \frac{\bar{X}-10}{\frac{1}{\sqrt{16}}} = \frac{\bar{X}-10}{0,25}$$

Από την τυποποιημένη κανονική κατανομή βρίσκουμε ότι $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} =$ = +1,96, οπότε το διάστημα αποδοχής της H_0 είναι

$(\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}, \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}) = (10 - 1,96\frac{1}{\sqrt{16}}, 10 + 1,96\frac{1}{\sqrt{16}}) =$

$=(10-1,96 \cdot 0,25 \;, \; 10+ 1,96 \cdot 0,25) = (9,51 \;, 10,49)$.

Δηλαδή, αν η H_0 είναι αληθής, τότε με πιθανότητα 95% αναμένουμε η μέση τιμή του δείγματος να είναι στο διάστημα (9,51 , 10,49).

Αν η μέση τιμή του δείγματος βρεθεί έξω από το διάστημα αυτό, δηλαδή $\bar{X} \leq 9,51$ ή $\bar{X} \geq 10,49$, τότε απορρίπτουμε την H_0.

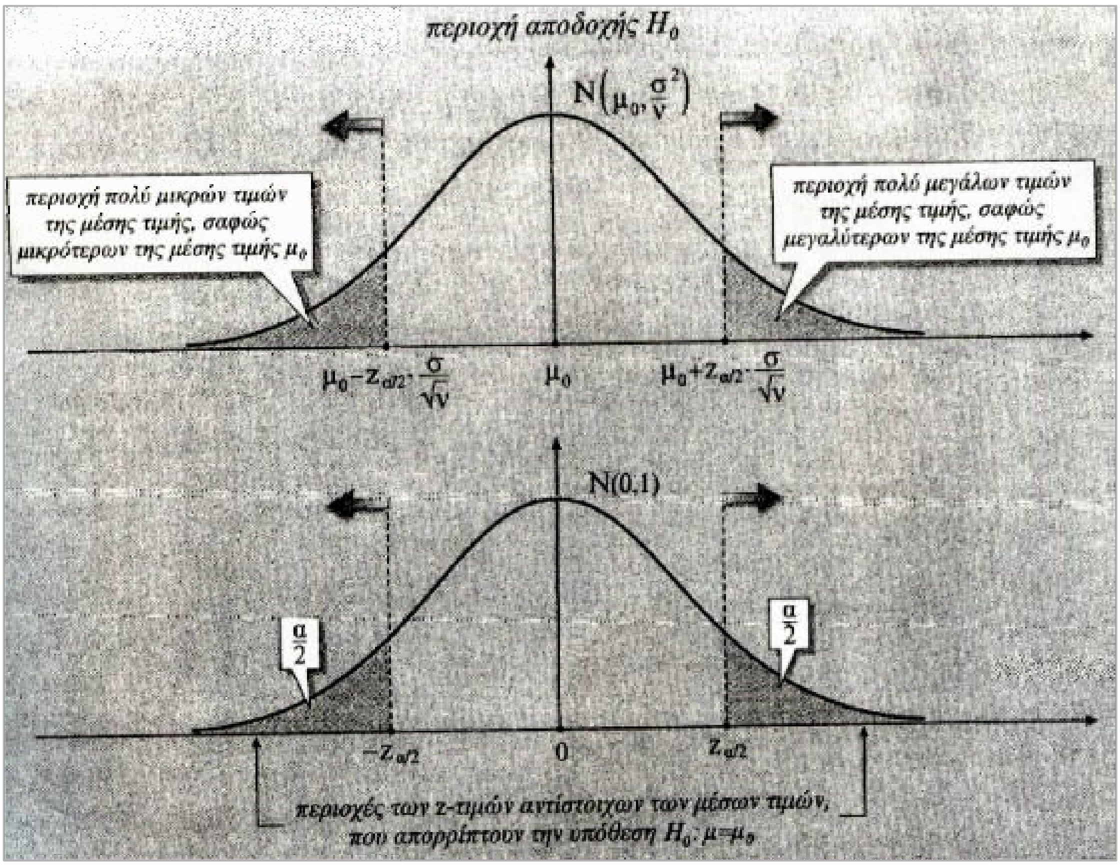
Γενικά, έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι ο μέσος μ του πληθυσμού έχει μια συγκεκριμένη τιμή μ_0. Από τον ελεγχόμενο πληθυσμό παίρνουμε τυχαίο δείγμα μεγέθους ν και υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

Η διαδικασία για τον έλεγχο μιας στατιστικής υπόθεσης απαιτεί τις εξής κινήσεις:

1. Δηλώνουμε την υπόθεση H_0 και την H_1, δηλαδή H_0: $\mu = \mu_0$, H_1: $\mu \neq \mu_0$ και καθορίζουμε το επίπεδο σημαντικότητας α = 0,01 ή α = 0,05 ή α = 0,10.

2. Θέτουμε το κατάλληλο στατιστικό κριτήριο ελέγχου, από το οποίο προκύπτει μια συγκεκριμένη τιμή. Αν, για παράδειγμα, το δείγμα είναι πολυπληθές ($\nu \geq 30$), τότε ως κατάλληλο κριτήριο παίρνουμε τη z – τιμή.
3. Με βάση το επίπεδο σημαντικότητας (α – επίπεδο) βρίσκουμε τις τιμές $-z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής από τους πίνακες και καθορίζουμε τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης H_0.
4. Συγκρίνουμε τη z – τιμή που βρέθηκε από το κριτήριο ελέγχου με τις τιμές $-z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$. Αν η z – τιμή του κριτηρίου ικανοποιεί μία από τις ανισότητες $z < -z_{\alpha/2}$ ή $z > z_{\alpha/2}$, τότε <u>απορρίπτουμε</u> την H_0. Αν η z – τιμή του κριτηρίου ικανοποιεί την ανισότητα $-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}$, τότε <u>αποδεχόμαστε</u> την H_0.
   Όταν απορρίπτουμε την H_0, αποδεχόμαστε την H_1.

Στην περίπτωση που έχουμε μονόπλευρο έλεγχο, δηλαδή H_0: $\mu=\mu_0$ και H_1: $\mu < \mu_0$, η H_0 απορρίπτεται όταν $z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} < -z_\alpha$, ενώ στην περίπτωση που έχουμε H_0: $\mu=\mu_0$ και H_1: $\mu > \mu_0$, η H_0 απορρίπτεται όταν $z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} > z_\alpha$.



Σχήμα 5. 4

5.2 Σφάλματα κατά τον έλεγχο υποθέσεων

Ο έλεγχος υπόθεσης καταλήγει στην απόφαση επιλογής της μίας από τις δύο υποθέσεις, της μηδενικής ή της εναλλακτικής. Κάθε μία από τις δύο υποθέσεις μπορεί να είναι σωστή ή λανθασμένη. Είναι δυνατό να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, ενώ αυτή είναι αληθής ή να δεχτούμε τη μηδενική υπόθεση, ενώ είναι ψευδής. Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι κάνουμε σφάλμα τύπου I, ενώ στη δεύτερη ότι κάνουμε σφάλμα τύπου II. Συγκεκριμένα, έχουμε:

- Σφάλμα τύπου I (Type I error): Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, ενώ είναι αληθής.

- Σφάλμα τύπου II (Type II error): Δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση, ενώ είναι ψευδής.

Ο κίνδυνος να συμβεί κάτι τέτοιο λέγεται κίνδυνος δεύτερου είδους. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε πάρει λανθασμένη απόφαση. Για να είναι ένας έλεγχος υποθέσεως καλός πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να ελαχιστοποιούνται αυτοί οι κίνδυνοι. Αυτό δεν είναι εύκολο, επειδή κάθε προσπάθεια μείωσης του ενός αυξάνει συνήθως τον άλλο. Ουσιαστικά, προσπαθούμε να μειώσουμε το σπουδαιότερο από τους δύο κινδύνους. Ο μόνος τρόπος να μειωθούν και οι δύο είναι η αύξηση του μεγέθους του δείγματος, που μπορεί να είναι ή να μην είναι δυνατή.

Οι πιθανότητες που αναλογούν στα σφάλματα συμβολίζονται διεθνώς με τα ελληνικά γράμματα α και β αντιστοίχως, δηλαδή

$$P\,(\text{σφάλμα τύπου I}) = \alpha \qquad \text{και} \qquad P\,(\text{σφάλμα τύπου II}) = \beta$$

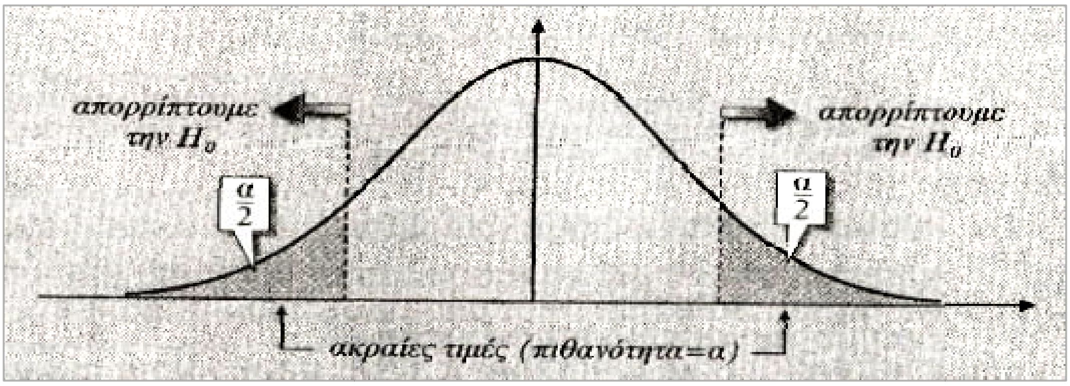
Στον ακόλουθο πίνακα φαίνεται η σχέση μεταξύ στατιστικής απόφασης (απόρριψη ή αποδοχή της H_0) και πραγματικής κατάστασης της H_0 (αληθής ή ψευδής).

Πραγματική κατάσταση της H_0 / **Στατιστική Απόφαση**	**Καμιά επίδραση (αλλαγή). Αληθής η H_0.**	**Υπάρχει επίδραση (αλλαγή). Ψευδής η H_0.**
Απορρίπτουμε την H_0.	Σφάλμα τύπου I με πιθανότητα α.	Σωστή απόφαση με πιθανότητα 1 – β.
Δεχόμαστε την H_0.	Σωστή απόφαση με πιθανότητα 1 – α.	Σφάλμα τύπου II με πιθανότητα β.

Πίνακας 5. 1

Όποτε παίρνουμε δεδομένα του δείγματος που οι τιμές «πέφτουν» στα άκρα της κατανομής, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δεδομένων του δείγματος και της υπόθεσης H_0 και θα την απορρίψουμε.

Η κατανομή των δειγματικών μέσων

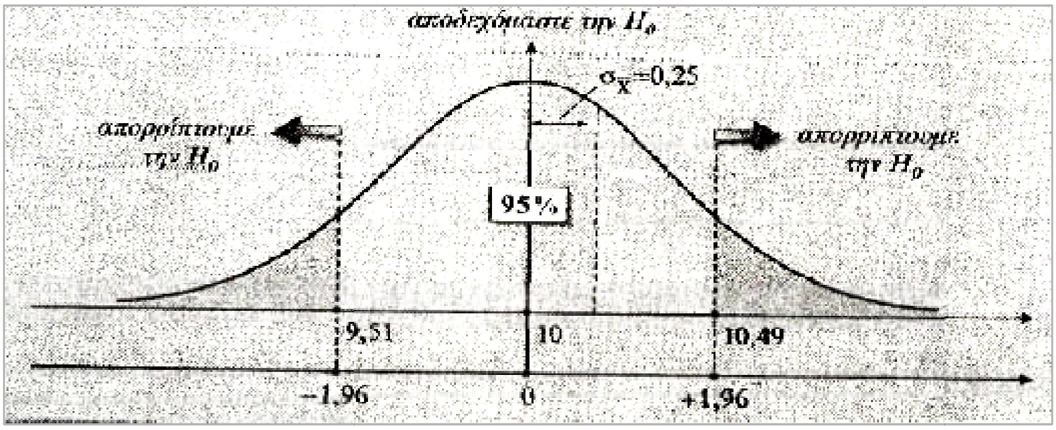


Σχήμα 5. 5

Αν η H_0 είναι αληθής, δυνατές αλλά πολύ απίθανες εμφανίσεις

Οι ακραίες τιμές (που φαίνονται στο σχήμα), όπως ορίστηκαν με το α – επίπεδο, είναι πολύ απίθανο να εμφανιστούν όταν η H_0 είναι αληθής, αλλά υπάρχει μικρή πιθανότητα (ίση με α) ότι τέτοια δεδομένα θα εμφανιστούν. Σ' αυτήν την περίπτωση απορρίπτουμε την H_0. Αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα α ή 100α% κάναμε σφάλμα τύπου I.

Στο παράδειγμα με την επίδραση της φροντίδας στο βάρος των νηπίων της προηγούμενης παραγράφου αν είχαμε βρει ότι $\bar{x}$ = 12 κιλά, τότε, αφού 12 > 10,49, θα απορρίπταμε την H_0, δηλαδή θα συμπεραίναμε ότι, πράγματι, η ιδιαίτερη φροντίδα έχει σημαντική επίδραση στο βάρος των νηπίων και, μάλιστα, αυξάνει το βάρος τους. Ασφαλώς, υπάρχει πιθανότητα 5% η ιδιαίτερη φροντίδα να μην έχει καμιά επίδραση στο βάρος των νηπίων και ο μέσος όρος $\bar{x}$ = 12 να προέκυψε από δειγματική ιδιαιτερότητα (όλα ή μερικά από τα νήπια αυτά να έχουν τάση παχυσαρκίας), οπότε θα κάνουμε σφάλμα τύπου Ι απορρίπτοντας την H_0.



Σχήμα 5. 6

Μπορούμε να αποφασίσουμε για την αποδοχή ή την απόρριψη της H_0 και μόνο με τη z – τιμή που αντιστοιχεί στη μέση τιμή $\bar{x}$ = 12 του δείγματος, δηλαδή $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} = \frac{12-10}{\frac{1}{\sqrt{16}}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$, οπότε, αφού 8 > + 1,96, απορρίπτουμε την H_0.

Για το παράδειγμα των νηπίων, αν τα αποτελέσματα δείξουν την αποδοχή της H_0, τότε είναι δυνατό η ιδιαίτερη φροντίδα να επηρεάζει, στην πραγματικότητα, το βάρος των νηπίων κι εμείς δεν το ανακαλύψαμε, δηλαδή να έχουμε κάνει σφάλμα τύπου ΙΙ. Αν υποψιαζόμαστε κάτι τέτοιο, τότε δεν υπάρχει άλλος δρόμος να το ελέγξουμε παρά να επαναλάβουμε το πείραμα προσέχοντας την τυχαιότητα του δείγματος ή και το μέγεθός του.

5.3 Έλεγχος υποθέσεων για το μέσο (μ)

Για τον έλεγχο υπόθεσης της μέσης τιμής διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την κατανομή που ακολουθεί ο πληθυσμός (κανονική ή όχι), το μέγεθος του δείγματος (ν ≥ 30 ή ν < 30), καθώς και το αν η διακύμανση του πληθυσμού είναι γνωστή ή άγνωστη. Η διατύπωση των υποθέσεων, ανάλογα με τη μορφή του ελέγχου, μπορεί να είναι:

1. Δίπλευρος:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

2. Μονόπλευρος προς τα πάνω (ή δεξιόπλευρος):

$H_0: \mu = \mu_0$ ή $H_0: \mu \leq \mu_0$

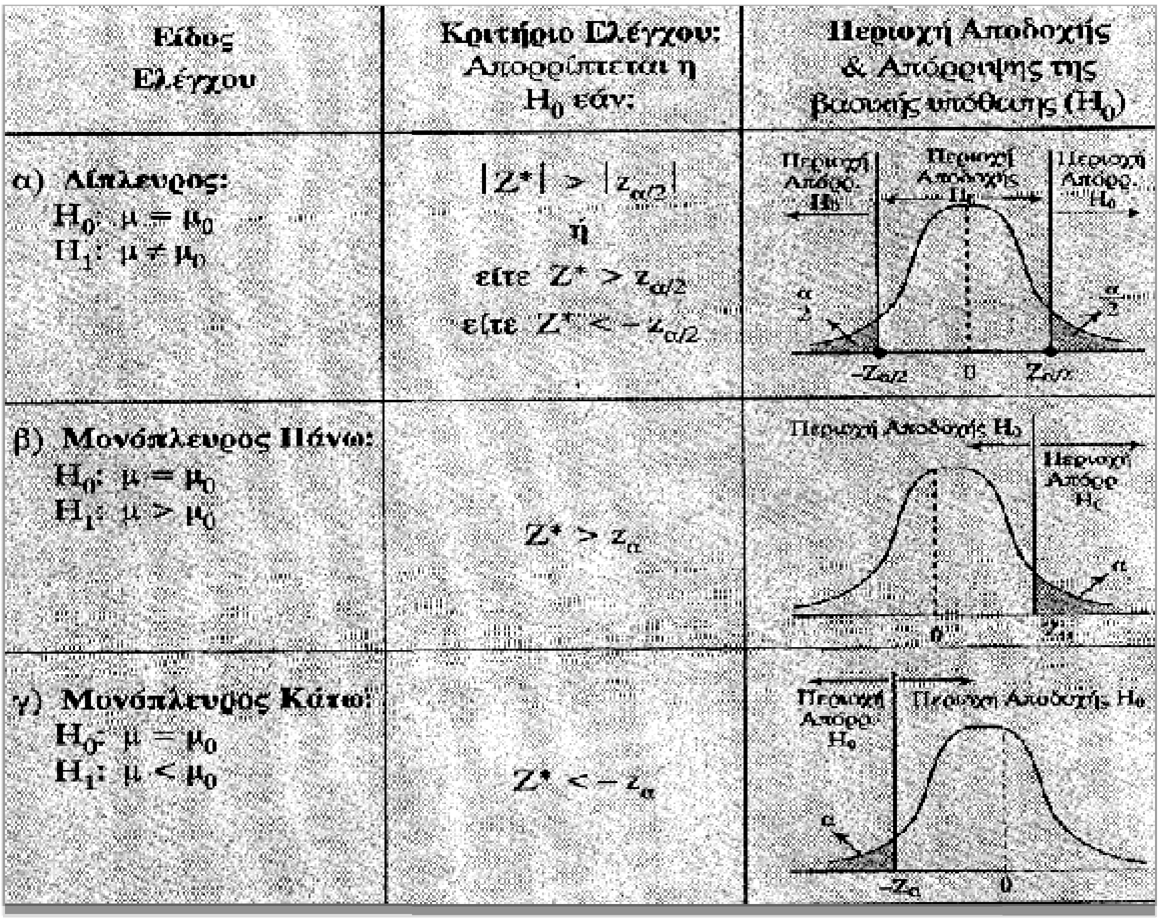
$H_1: \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu > \mu_0$

3. Μονόπλευρος προς τα κάτω (ή αριστερόπλευρος):

$H_0: \mu = \mu_0$ ή $H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu < \mu_0$

Α) Αν ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή με γνωστή διακύμανση σ^2, χρησιμοποιείται η τυχαία μεταβλητή Z - N(0,1) ως στατιστική ελέγχου, δηλαδή $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}$.



Είδος Ελέγχου	Κριτήριο Ελέγχου: Απορρίπτεται η H_0 εάν:	Περιοχή Αποδοχής & Απόρριψης της βασικής υπόθεσης (H_0)
α) Δίπλευρος: $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$\lvert Z^* \rvert > \lvert z_{\alpha/2} \rvert$ ή είτε $Z^* > z_{\alpha/2}$ είτε $Z^* < -z_{\alpha/2}$	Περιοχή Απόρρ. H_0; Περιοχή Αποδοχής H_0; Περιοχή Απόρρ. H_0; $\frac{\alpha}{2}$; $\frac{\alpha}{2}$; $-z_{\alpha/2}$; 0; $z_{\alpha/2}$
β) Μονόπλευρος Πάνω: $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$Z^* > z_\alpha$	Περιοχή Αποδοχής H_0; Περιοχή Απόρρ. H_0; α; 0; z_α
γ) Μονόπλευρος Κάτω: $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$Z^* < -z_\alpha$	Περιοχή Απόρρ. H_0; Περιοχή Αποδοχής H_0; α; $-z_\alpha$; 0

Πίνακας 5.2

Κριτήρια ελέγχου ανάλογα της μορφής της εναλλακτικής

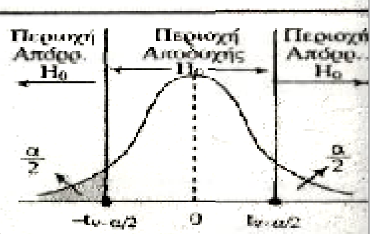
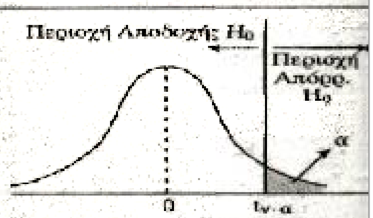
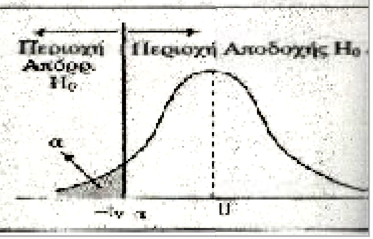
Β) Στην περίπτωση που ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή, αλλά δε γνωρίζουμε τη διακύμανσή της, χρησιμοποιούμε για την εκτίμησή της τη διακύμανση $s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\nu - 1}$.

Β1) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (ν ≥ 30), κριτήριο ελέγχου είναι το κριτήριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής που παίρνει την τιμή $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{\nu}}$.

Από το επίπεδο σημαντικότητας α βρίσκουμε τις κρίσιμες τιμές από τους πίνακες και προσδιορίζουμε τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης της H_0, συγκρίνοντας την τιμή z με τις κρίσιμες τιμές $\pm z_{\alpha/2}$ στη δίπλευρη υπόθεση, $-z_\alpha$ στην αριστερή μονόπλευρη και z_α στη δεξιά μονόπλευρη.

Β2) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό (ν < 30), η κατανομή δειγματοληψίας του μέσου ακολουθεί την t – student, με ν – 1 βαθμούς ελευθερίας. Η στατιστική ελέγχου εδώ θα είναι $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{\nu}}}$.

Παρομοίως, από το επίπεδο σημαντικότητας α βρίσκουμε τις κρίσιμες τιμές από τους πίνακες και προσδιορίζουμε τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης της H_0, συγκρίνοντας την τιμή t με τις κρίσιμες τιμές $\pm t_{\alpha/2}$ στη δίπλευρη υπόθεση, $-t_\alpha$ στην αριστερή μονόπλευρη και t_α στη δεξιά μονόπλευρη.

Είδος Ελέγχου	Κριτήριο Ελέγχου: Απορρίπτεται η H_0 όταν:	Περιοχή Αποδοχής & Απόρριψης της (H_0)
α) Δίπλευρος: H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_\nu^* \rvert > \lvert t_{\nu\cdot(\alpha/2)} \rvert$ ή είτε $t_\nu^* > t_{\nu\cdot(\alpha/2)}$ είτε $t_\nu^* < -t_{\nu\cdot(\alpha/2)}$	
β) Μονόπλευρος Πάνω: H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu > \mu_0$	$t_\nu^* > t_{\nu\cdot\alpha}$	
γ) Μονόπλευρος Κάτω: H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu < \mu_0$	$t_\nu^* < -t_{\nu\cdot\alpha}$	

Κριτήρια ελέγχου με την t – student (Πίνακας 5. 3)

Γ) Όταν ο πληθυσμός δεν ακολουθεί κανονική κατανομή, αν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, ισχύει το Κ.Ο.Θ., οπότε κριτήριο ελέγχου είναι το κριτήριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής Ζ.

Γ1) Αν η διακύμανση σ^2 του πληθυσμού είναι γνωστή, το κριτήριο Ζ παίρνει την τιμή $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}$.

Γ2) Αν η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη, χρησιμοποιείται για την εκτίμησή της η διακύμανση $s^2 = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{\nu-1}$ δείγματος μεγέθους ν. Το κριτήριο Ζ παίρνει την τιμή $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{\nu}}$.

<u>Παράδειγμα με χρήση της μεταβλητής Ζ</u>
Στο πανεπιστήμιο επικρατεί η άποψη ότι οι φοιτητές εργάζονται λιγότερο από 38 ώρες την εβδομάδα, που είναι ο μέσος χρόνος απασχόλησης των εργαζομένων. Ένας ερευνητής θέλει να ελέγξει στατιστικά αυτή τη φήμη σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05. Για το σκοπό αυτό επιλέγει ένα τυχαίο δείγμα από 25 φοιτητές και υπολογίζει ότι ο μέσος χρόνος απασχόλησής τους ήταν $\bar{x}$ = 28 ώρες την εβδομάδα. Από άλλες έρευνες γνωρίζει επίσης ότι η κατανομή του χρόνου απασχόλησης των φοιτητών προσεγγίζει την κανονική κατανομή με σ = 10. Εργάζονται πράγματι λιγότερο οι φοιτητές;

$\Rightarrow$ Εδώ θα έχουμε αριστερόπλευρο έλεγχο, αφού η φήμη είναι ότι εργάζονται λιγότερο.
Δηλώνουμε τις υποθέσεις H_0: μ = 38 και H_1: μ < 38. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι α = 0,05.
Αφού λοιπόν εργαζόμαστε με α = 0,05 και η κατανομή του χρόνου απασχόλησης είναι κανονική, το κατάλληλο κριτήριο είναι η z – τιμή. Το όριο της κρίσιμης περιοχής σε αριστερόπλευρο έλεγχο με α = 0,05 είναι $z_{0,05}$ = - 1,64.
Η τιμή του κριτηρίου είναι $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} = \frac{28-38}{10/\sqrt{25}} = \frac{-10}{2} = -5$.
Βλέπουμε ότι η τιμή του κριτηρίου z = - 5 < - 1,64. Επομένως, απορρίπτουμε την H_0 και δεχόμαστε την H_1, δηλαδή πράγματι οι φοιτητές εργάζονται λιγότερο χρόνο εβδομαδιαίως από τους άλλους εργαζομένους. Αυτό το συμπέρασμα έχει πιθανότητα λάθους 5%.

Παράδειγμα με χρήση της μεταβλητής t

Το ταμείο ασφάλισης ναυτικών ισχυρίζεται ότι ο μέσος χρόνος θαλάσσιας υπηρεσίας των Ελλήνων ναυτικών πριν να συνταξιοδοτηθούν είναι 23 χρόνια. Για να επιβεβαιώσουμε τον ισχυρισμό του Ν. Α. Τ. μελετήσαμε δείγμα 18 ναυτικών, από το οποίο πήραμε μέσο και τυπική απόκλιση $\overline{X} = 25$ χρόνια και $s = 3{,}5$ χρόνια αντίστοιχα. Ζητείται να ελεγχθεί σε $\alpha = 5\%$ εάν ο μέσος χρόνος θαλάσσιας υπηρεσίας είναι μεγαλύτερος από 23 χρόνια.

⇒ Θέτουμε τις υποθέσεις του μονόπλευρου Πάνω Ελέγχου

$$H_0: \mu = \mu_0 = 23$$
$$H_1: \mu > 23$$

Με βάση τα δεδομένα (σ^2 άγνωστη και $n < 30$) δικαιολογείται η t_ν^* - t_ν. Επομένως

$$t_\nu^* = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{X}}}$$

Στο δεδομένο $\alpha = 5\%$, απορρίπτουμε την H_0, εάν t_ν^* - $t_{\nu.\alpha}$ κι επειδή $t_{\nu.\alpha} = t_{17.0,05}$, απορρίπτουμε την H_0, εάν $t_{17}^* > t_{17.0,05}$

Υπολογίζουμε ότι

$t_{\nu.\alpha} = t_{17.0,05} = 1{,}74$ αφού $P(t_{17} > t_{17.0,05}) = 0{,}05$.

Επίσης

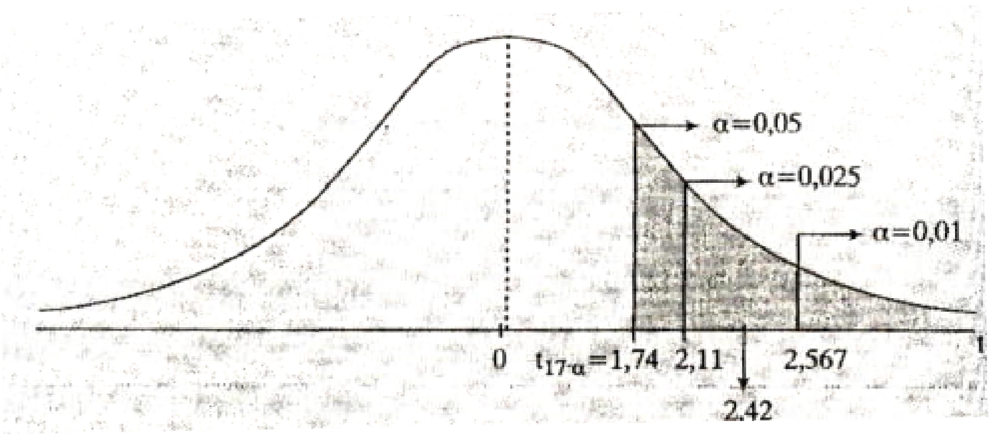
$$t^* = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{25 - 23}{3{,}5/\sqrt{18}} = 2{,}42$$

Η τιμή πιθανότητας (p) είναι

$$p = P(\overline{X} \geq 25) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq \frac{25 - 23}{3{,}5/\sqrt{18}}\right) = P(t_{17} \geq 2{,}42)$$

Επομένως, $0{,}01 < p < 0{,}025$.

Δηλαδή, σημαίνει ότι με H_0: $\mu = 23$ υπάρχει πιθανότητα (έστω 2 %) να πάρουμε δειγματικό μέσο $\overline{X} = 25$, του οποίου ο πληθυσμός ακολουθεί t – student με $\nu = 17$ βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα 5. 7

Με πιθανότητα α = 5% να απορρίψουμε τη βασική υπόθεση (H_0), ενώ αυτή είναι αληθινή, επειδή t^*_{17}(=2,42) > $t_{17.0,05}$(=1,74), απορρίπτουμε την H_0 (το 2,42 της στατιστικής ελέγχου βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης της H_0).
Με άλλα λόγια, η παρατηρούμενη διαφορά των 2,42 τυπικών σφαλμάτων (του δειγματικού $\bar{X}$ = 25 από τον μ = 23 είναι στατιστικά σημαντική και δεν μπορεί να αποδοθεί στην τύχη. Εναλλακτικά, απορρίπτουμε την H_0, αφού (p) < (α).

5.4 Έλεγχος υποθέσεων για τη διαφορά δύο μέσων ($\mu_1 - \mu_2$)

Υπάρχουν περιπτώσεις που είναι αναγκαίο να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές δύο πληθυσμών με τη βοήθεια δύο δειγμάτων που επιλέγουμε από τους πληθυσμούς αυτούς. Στις περιπτώσεις αυτές προσπαθούμε να εξακριβώσουμε την αιτία της διαφοράς δύο ομοειδών εκτιμήσεων (αν υπάρχει). Ερευνούμε, δηλαδή, κατά πόσο η διαφορά των εκτιμήσεων οφείλεται στις διακυμάνσεις της δειγματοληψίας ή σε πραγματική διαφορά των αντίστοιχων παραμέτρων των πληθυσμών από τους οποίους πάρθηκαν τα δείγματα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο πληθυσμούς, οι οποίοι έχουν μέσους μ_1 και μ_2 και διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 αντίστοιχα. Για να ελέγξουμε τη σχέση των δύο αυτών μέσων μεταξύ τους σημειώνουμε τις υποθέσεις H_0 και H_1 ως εξής

(α) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ και $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
(β) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ και $H_1 : \mu_1 > \mu_2$
(γ) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ και $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

και παίρνουμε δύο τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα μεταξύ τους, μεγέθους ν_1 και ν_2 αντίστοιχα, ένα από κάθε πληθυσμό, των οποίων έστω ότι οι μέσοι είναι

$\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$ αντίστοιχα. Πρέπει να διακρίνουμε αντίστοιχες περιπτώσεις με αυτές του ελέγχου υπόθεσης μέσης τιμής πληθυσμού.

Α) Αν τα δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς και έχουν γνωστές διακυμάνσεις $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ και $\boldsymbol{\sigma_2^2}$, η διαφορά των δειγματικών μέσων $\bar{x}_1$ - $\bar{x}_2$ ακολουθεί την κανονική κατανομή N(μ,σ) με $\mu = \mu_1 - \mu_2$ και $\sigma^2 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}$. Επομένως, η στατιστική ελέγχου που χρησιμοποιούμε είναι $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}}$.

Ορίζουμε επίπεδο σημαντικότητας α για να κάνουμε τον έλεγχο. Υπολογίζουμε τις τιμές $-z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$, συγκρίνουμε το στατιστικό Z με αυτές και αποφασίζουμε για την αποδοχή ή απόρριψη της H_0.

Β) Αν τα δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς και έχουν άγνωστες και ίσες διακυμάνσεις $\boldsymbol{\sigma_A^2}$ και $\boldsymbol{\sigma_B^2}$, τότε η Z γίνεται $\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}}$.

Επειδή, όμως, το σ είναι άγνωστο, αντί του Z που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως, φαίνεται λογικό να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη φορά τη στατιστική συνάρτηση $t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu}{s_P^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}}$, που προκύπτει από τη Z αντικαθιστώντας το σ με τον εκτιμητή s_P^2, όπου $s_P^2 = \frac{(\nu_1 - 1)s_1^2 + (\nu_2 - 1)s_2^2}{\nu_1 + \nu_2 - 2}$. Ο εκτιμητής s_P^2 είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2, προκύπτει από συνδυασμό και των δύο δειγμάτων και χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή διαστήματος εμπιστοσύνης για το μ_1 - μ_2, όταν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ με σ^2 άγνωστο. Όταν η H_0 είναι αληθής, η t έχει κατανομή $t_{\nu_1 + \nu_2 - 2}$. Ορίζουμε επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζουμε τις τιμές $-t_{\alpha/2}$ και $t_{\alpha/2}$, συγκρίνουμε το στατιστικό t με αυτές και αποφασίζουμε για την αποδοχή ή απόρριψη της H_0.

Γ) Αν τα δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς και έχουν άγνωστες και άνισες διακυμάνσεις $\boldsymbol{\sigma_A^2}$ και $\boldsymbol{\sigma_B^2}$, πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο $t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu}{s_P^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}}$, αλλά ως βαθμό ελευθερίας θα πάρουμε το μικρότερο αριθμό από τους $\nu_A - 1$ και $\nu_B - 1$. Αυτό το κριτήριο θα χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα.

Δ) Αν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μικρά και οι διακυμάνσεις τους άγνωστες, πρέπει να υποτεθεί ότι οι διακυμάνσεις είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε ισχύει ότι είπαμε στο (Β).

Ε) Αν οι δύο πληθυσμοί δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, τότε για μεγάλα μόνο δείγματα το κεντρικό οριακό θεώρημα μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε ως κριτήριο πάλι το $Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{\nu_A} + \frac{\sigma_B^2}{\nu_B}}}$, όταν είναι γνωστές οι διακυμάνσεις σ_A^2 και σ_B^2, ή το $t = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{s_A^2}{\nu_A} + \frac{s_B^2}{\nu_B}}}$, όπου s_A^2 και s_B^2 οι διακυμάνσεις των δειγμάτων, όταν οι διακυμάνσεις των πληθυσμών είναι άγνωστες.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Έστω ότι είναι γνωστό ότι τα επίπεδα της αιμογλοβίνης (g/cc) σε παιδιά που έχουν εκ γενετής μη κυανωτική ή κυανωτική ασθένεια της καρδιάς ακολουθούν την κανονική κατανομή με τυπικές αποκλίσεις 1,0 g/cc και 1,2 g/cc αντίστοιχα. Έστω τώρα ότι πήραμε δύο δείγματα παιδιών, το πρώτο από 25 μη κυανωτικά παιδιά και το δεύτερο από 15 κυανωτικά παιδιά, και βρήκαμε ότι το μέσο επίπεδο της αιμογλοβίνης στο πρώτο δείγμα είναι ίσο με 13 g/cc και στο δεύτερο είναι ίσο με 16 g/cc. Μπορούμε να πούμε, σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στο επίπεδο αιμογλοβίνης μεταξύ κυανωτικών και μη κυανωτικών παιδιών;

⇒ Αν μ_1 και μ_2 είναι τα μέσα επίπεδα της αιμογλοβίνης στους πληθυσμούς των μη κυανωτικών και κυανωτικών παιδιών αντίστοιχα, τότε οι υποθέσεις στο πρόβλημα αυτό είναι:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad ή \quad \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad ή \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

Επίσης, έχουμε ότι $\sigma_1 = 1,0$, $\sigma_2 = 1,2$, $n_1 = 25$, $n_2 = 15$, $\overline{X}_1 = 13$ και $\overline{X}_2 = 16$. Επειδή οι δύο πληθυσμοί είναι κανονικοί με γνωστές διακυμάνσεις, το τυπικό σφάλμα της διαφοράς των μέσων είναι:

$$\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{1,0^2}{25} + \frac{1,2^2}{15}} = 0,369$$

Επειδή, επιπλέον, είναι α = 0,01 και ο έλεγχος είναι δίπλευρος, βρίσκουμε από τον πίνακα ότι $Z_{\alpha/2} = 2,576$. Σύμφωνα, λοιπόν, με τα δεδομένα μας η ποσότητα που δίνεται από τον τύπο $Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ είναι $Z = \frac{(13-16)}{0,369} = -8,13$. Επειδή είναι $Z = -8,13 < -Z_\alpha = -2,576$, απορρίπτουμε τη μηδενική και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση. Δηλαδή, αποδεχόμαστε την υπόθεση ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στο επίπεδο της αιμογλοβίνης μεταξύ μη κυανωτικών και κυανωτικών παιδιών, με πιθανότητα σφάλματος 1%.

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Αναλυτής αγοράς ερευνά τη συμπεριφορά δύο τύπων εταιρειών όσον αφορά τη στρατηγική διαφήμισής τους. Μία από τις ερευνώμενες μεταβλητές είναι το ποσό των διαφημιστικών τους δαπανών την προηγούμενη χρονιά. Επέλεξε γι' αυτό δύο τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα από κάθε τύπο εταιρείας, τα οποία έδωσαν τα παρακάτω αποτελέσματα.
Μπορούμε να συμπεράνουμε απ' αυτά τα δείγματα ότι ο τύπος Α των εταιρειών δαπανά κατά μέσο όρο μεγαλύτερα ποσά για διαφήμιση απ' ότι ο τύπος Β; Δεχθείτε πιθανότητα α = 5% να κάνετε σφάλμα τύπου Ι.

Τύπος Α εταιρείας	$n_A = 60$	$\overline{X}_A = 3,6$ εκ.€	$s_A^2 = 440$ χιλ.€
Τύπος Β εταιρείας	$n_A = 70$	$\overline{X}_A = 3,5$ εκ.€	$s_A^2 = 326$ χιλ.€

⇒ Διατυπώνουμε τις υποθέσεις

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$
$$H_1: \mu_A > \mu_B.$$

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι και για τους δύο τύπους εταιρειών η δαπάνη για διαφήμιση συνιστά τυχαία μεταβλητή, η οποία κατανέμεται κανονικά. Επιπλέον, αφού $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 128 > 30$, χρησιμοποιούμε για τον έλεγχο την τυχαία μεταβλητή:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Αφού μας δίνεται επίπεδο σημαντικότητας α = 5%, θ' απορρίπτουμε τη βασική υπόθεση εάν $t > t_\alpha$ ή εάν $(p) \leq (a)$.

Υπολογίζουμε

$t_a = t_{0,05} = 1,645$ (από τον πίνακα)

$$t = \frac{3,6-3,5}{\sqrt{\frac{0,44}{60}+\frac{0,326}{70}}} = 0,4602$$

Αφού t (=0,91) < $t_{0,05}$ (=1,645) η H_0 μπορεί να είναι σωστή σε επίπεδο σημαντικότητας α = 5%.

Εναλλακτικά, αφού η τιμή πιθανότητας p (=46,02%) > α (=5%), δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη βασική υπόθεση και, επομένως, η παρατηρούμενη διαφορά των 0,1 εκ. € θεωρείται στατιστικά ασήμαντη.

Παράδειγμα 3ο

Ένας ερευνητής μαθηματικός θέλει να αποφασίσει κατά πόσο υπάρχει πραγματική διαφορά ανάμεσα στη μέση επίδοση των μαθητών Β΄ λυκείου που διδάσκονται Μαθηματικά με τη χρήση νέων τεχνολογιών και στη μέση επίδοση των μαθητών που διδάσκονται τα Μαθηματικά με τον παραδοσιακό τρόπο. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα δεδομένα από δύο τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα μαθητών που διδάχθηκαν με διαφορετική μέθοδο το καθένα.

Μέθοδος Α (Δείγμα Α)	**Μέθοδος Β (Δείγμα Β)**
$\nu_A = 14$	$\nu_B = 16$
$\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{A} = 14,3$	$\bar{x}_B = 13,9$
$\mathbf{s_A^2} = 3,21$	$s_B^2 = 2,85$

Πίνακας 5. 4

Δεδομένου ότι οι επιδόσεις των μαθητών ακολουθούν την κανονική κατανομή, να γίνει ο έλεγχος της αποτελεσματικότητας σε επίπεδο α = 0,05.

⇒ Διατυπώνουμε τις υποθέσεις H_0: $\mu_A = \mu_B$ και H_1: $\mu_A \neq \mu_B$. Θα γίνει δίπλευρος έλεγχος σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05.

Το κριτήριο που θα χρησιμοποιηθεί είναι το t, αφού τα δείγματα είναι μικρά ($\nu_A = 14 < 30$ και $\nu_B = 16 < 30$), οι διακυμάνσεις άγνωστες και οι πληθυσμοί κανονικοί. Οι διακυμάνσεις μπορούν να θεωρηθούν ίσες, οπότε το κριτήριο είναι $t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{s_P^2}{\nu_A}+\frac{s_P^2}{\nu_B}}}$ με $\nu_A + \nu_B - 2$ βαθμούς ελευθερίας και $s_P^2 = \frac{(\nu_A-1)s_A^2 + (\nu_B-1)s_B^2}{\nu_A + \nu_B - 2}$.

Με $\nu_A + \nu_B - 2 = 14 + 16 - 2 = 28$ βαθμούς ελευθερίας έχουμε $t_{0,025}(28) = 2,048$. Συνεπώς η μηδενική υπόθεση της μη διαφοράς των μέσων τιμών θα απορριφθεί, αν η τιμή του κριτηρίου είναι έξω από το διάστημα (-2,048, 2,048).

Υπολογίζουμε την τιμή του κριτηρίου. Είναι $s_P^2 = \frac{(14-1)\cdot 3{,}21 + (16-1)\cdot 2{,}85}{16+14-2} \approx$ $\approx 3{,}02$, οπότε $t = \frac{14{,}3-13{,}9}{\sqrt{\frac{3{,}02}{14}+\frac{3{,}02}{16}}} = 0{,}63$.

Αποφασίζουμε για την H_0. Αφού η τιμή του κριτηρίου 0,63 βρίσκεται μέσα στο διάστημα (-2,048, 2,048), δεν μπορεί να απορριφθεί η μηδενική και, συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα δεδομένα μας δεν στηρίζουν τη διαφορά στη μέση επίδοση των μαθητών που διδάσκονται τα Μαθηματικά με τις δύο διαφορετικές μεθόδους. Δηλαδή η διδασκαλία των Μαθηματικών με τις νέες τεχνολογίες δεν αλλάζει τη μέση επίδοση των μαθητών. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι με όποια από τις δύο μεθόδους και να διδάξουμε τα Μαθηματικά η μέση επίδοση των μαθητών θα είναι η ίδια.

5.5 Έλεγχος υποθέσεων για τη μέση τιμή των διαφορών ζευγών στατιστικών δεδομένων – Εξαρτημένα δείγματα

Στην προηγούμενη παράγραφο τα δείγματα που μελετήσαμε ήταν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Εδώ θα παρουσιάσουμε τη διαδικασία ελέγχου, όπου τα δύο δείγματα είναι εξαρτημένα μεταξύ τους, δηλαδή θα δούμε την περίπτωση των ζευγών παρατηρήσεων.

Ζεύγη παρατηρήσεων μπορούμε να πάρουμε με πολλούς τρόπους, όπως π.χ. από τη μέτρηση ενός χαρακτηριστικού του ίδιου υποκειμένου πριν και μετά την υποβολή του σε μία μεταχείριση ή από την υποβολή ζευγών διδύμων μονάδων σε δύο διαφορετικές μεταχειρίσεις.

Εδώ δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα δείγματα είναι ανεξάρτητα, αφού πρόκειται για τα ίδια ακριβώς άτομα. Το μεγάλο πλεονέκτημα από την εκτέλεση του πειράματος στα ίδια άτομα είναι ότι δεν υπάρχει ο κίνδυνος που υπάρχει στα ανεξάρτητα δείγματα, τα άτομα του ενός δείγματος να είναι πολύ διαφορετικά από τα άτομα του άλλου δείγματος. Πολλές φορές, βέβαια, οι ερευνητές παίρνουν δύο ανεξάρτητα δείγματα, αλλά φροντίζουν τα άτομα ένα προς ένα να είναι ισοδύναμα ως προς κάποιο χαρακτηριστικό. Εδώ θεωρούμε ότι έχουμε επιλέξει ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό και μετράμε τις τιμές ενός χαρακτηριστικού στο δείγμα αυτό πριν και μετά την εκτέλεση του πειράματος. Έτσι, κάθε άτομο του δείγματος θα έχει ένα ζεύγος τιμών, μία πριν το πείραμα και μία μετά το πείραμα.

Αν, λοιπόν, έχουμε ζεύγη παρατηρήσεων X_{1i} και X_{2i} για i = 1, 2, …, ν, τότε αντί να μελετήσουμε τις παρατηρήσεις αυτές ξεχωριστά, μελετούμε τη διαφορά τους $\delta_i = X_{1i} - X_{2i}$. Με τη μελέτη των διαφορών δ_i, αντί των παρατηρήσεων X_{1i} και X_{2i} ξεχωριστά, γίνεται προσπάθεια να μειωθούν στο ελάχιστο οι επιδράσεις των εξωτερικών παραγόντων πάνω στις παραμέτρους των πληθυσμών που μας ενδιαφέρουν. Αυτό γιατί μία μελέτη των παρατηρήσεων X_{1i} και X_{2i} είναι πιθανό να καταλήξει σε λάθος συμπεράσματα, είτε γιατί οι πραγματικές διαφορές μεταξύ των πληθυσμών καλύπτονται από εξωτερικούς παράγοντες, είτε γιατί ενώ δεν υπάρχουν πραγματικές διαφορές, οι εξωτερικοί παράγοντες επιδρούν έτσι, ώστε να συμπεραίνεται ότι υπάρχουν.

Έτσι, αν οι παρατηρήσεις προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς με μέσους μ_1 και μ_2 αντίστοιχα, τότε επειδή οι διαφορές δ_i κατανέμονται κανονικά με μέσο $\mu_\delta = \mu_1 - \mu_2$ και τυπική απόκλιση s_δ, οι υποθέσεις H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ και H_0: $\mu_\delta = 0$ είναι ισοδύναμες. Η διαδικασία ελέγχου είναι:

$H_0: \mu_\delta = \delta_0 \qquad H_1: \mu_\delta \neq \delta_0$ ή

$H_0: \mu_\delta \geq \delta_0 \qquad H_1: \mu_\delta < \delta_0$ ή

$H_0: \mu_\delta \leq \delta_0 \qquad H_1: \mu_\delta > \delta_0$

όπου δ_0 είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Υπολογίζουμε όλες τις διαφορές των ζευγών αυτών και έστω d_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, αυτές οι διαφορές. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\bar{\delta}$ των διαφορών και την τυπική απόκλισή τους s_δ, δηλαδή

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \delta_i}{\nu} \qquad \text{και} \qquad s_\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(\delta_i - \delta)^2}{\nu - 1}$$

Αν δεχτούμε ότι οι δειγματικές διαφορές αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα από έναν κανονικό πληθυσμό διαφορών δ με μέση τιμή μ_δ, τότε το κριτήριο ελέγχου για το μέσο όρο του πληθυσμού των διαφορών μ_δ είναι $t = \frac{\bar{\delta} - \delta_0}{s_\delta/\sqrt{\nu}}$. Όταν αληθεύει η H_0, το κριτήριο ελέγχου ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\nu - 1$ βαθμούς ελευθερίας.

Στην περίπτωση που οι διαφορές δεν είναι κανονικά κατανεμημένες, αλλά $\nu > 30$, κάνουμε χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

<u>Παράδειγμα 1$^{\text{ο}}$</u>

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα βάρη οκτώ ανθρώπων πριν σταματήσουν το κάπνισμα και πέντε εβδομάδες αφού σταμάτησαν το κάπνισμα. Σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 μπορεί να υποστηριχτεί η άποψη ότι το βάρος αυξάνεται μόλις κάποιος σταματήσει το κάπνισμα;

Περίπτωση	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
Πριν Χ	74	88	75	58	65	64	60	66
Μετά Υ	77	90	74	61	66	68	62	64
Διαφορά d = Υ - Χ	3	2	-1	3	1	4	2	-2

Πίνακας 5. 5

$\Rightarrow$ Διατυπώνουμε τις υποθέσεις H_0 : $\mu_\delta > 0$. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι α = 0,05 και οι βαθμοί ελευθερίας ν – 1 = 8 – 1 = 7.

Ως κριτήριο ελέγχου της υπόθεσης θα χρησιμοποιηθεί το $t = \frac{\bar{\delta}}{s_\delta/\sqrt{\nu}}$ με 7 βαθμούς ελευθερίας, αφού το δείγμα είναι μικρό, η σ_d είναι άγνωστη και ο πληθυσμός μπορεί να θεωρηθεί κανονικά κατανεμημένος. Άλλωστε, εδώ έχουμε ζεύγη τιμών και αυτό είναι το ορθό κριτήριο. Υπολογίζουμε ότι είναι $\bar{\delta} = \frac{12}{8}$ =1,5 και $s_\delta = 2{,}07$.

$t_{0,05}(7) = 1{,}895$, αφού ο έλεγχος είναι δεξιόπλευρος.

Το κριτήριο είναι $t = \frac{1{,}5}{2{,}07/\sqrt{8}} = 2{,}05$ και επειδή 2,05 > 1,895, απορρίπτουμε την H_0, δηλαδή με βάση τα δεδομένα υποστηρίζεται η αύξηση του βάρους μετά το σταμάτημα του τσιγάρου.

<u>Παράδειγμα 2$^{\text{ο}}$</u>

Υπάρχει η άποψη ότι οι άνδρες προτιμούν να παντρεύονται γυναίκες με χαμηλότερο επίπεδο εκπαίδευσης απ' ό,τι είναι το δικό τους. Οι ερευνητές συμφώνησαν ότι θα θεωρήσουν την άποψη αυτή ορθή, αν αποδειχτεί σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05 ότι κατά μέσο όρο η εκπαίδευση των ανδρών, μετρημένη σε σχολικά χρόνια, υπερέχει κατά τρία τουλάχιστον χρόνια από την αντίστοιχη των συζύγων τους. Για το σκοπό αυτό πήραν ένα τυχαίο δείγμα 10 παντρεμένων ζευγαριών και κατέγραψαν τα σχολικά χρόνια σπουδών τους. Ο επόμενος πίνακας δίνει τα δεδομένα.

Χρόνια σπουδών

Άνδρας (Χ)	15	18	20	18	17	12	18	15	24	18
Γυναίκα (Υ)	9	12	18	15	20	12	12	18	18	12

Πίνακας 5. 6

Τι απέδειξε ο έλεγχος αυτός;

$\Rightarrow$ Έστω μ_X και μ_Y είναι οι μέσες τιμές ετήσιων σπουδών των ανδρών και των γυναικών σε όλο τον πληθυσμό. Τότε θα πρέπει να ελεγχθούν οι υποθέσεις $H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq 3$, $H_0 : \mu_X - \mu_Y > 3$.
Επειδή τα δείγματα δεν είναι ανεξάρτητα, ο έλεγχος της διαφοράς $\mu_X - \mu_Y$ θα γίνει με βάση την παράμετρο μ_d, που αντιστοιχεί στη μέση τιμή της μεταβλητής $\delta = X - Y$, όπου X είναι η διάρκεια των σπουδών των ανδρών και Y η αντίστοιχη των συζύγων τους. Άρα, οι προς έλεγχο υποθέσεις είναι $H_0 : \mu_\delta \leq 3$, $H_1 : \mu_\delta > 3$.
Για τη μεταβλητή δ υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με άγνωστη διακύμανση, οπότε το κριτήριο ελέγχου θα είναι $t = \frac{\bar{\delta}-\mu_\delta}{s_\delta/\sqrt{\nu}}$, που ακολουθεί την t – κατανομή με $\nu - 1 = 9$ βαθμούς ελευθερίας. Ο έλεγχος είναι δεξιόπλευρος και το επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}05$.
$t_{0,05}(9) = 1{,}833$.
Η τιμή του κριτηρίου είναι $t = \frac{\bar{\delta}-3}{\frac{s_\delta}{\sqrt{10}}} = \frac{\bar{\delta}-3}{\frac{s_\delta}{3{,}16}}$. Οι διαφορές των ζευγών είναι X – Y : 6, 6, 2, 3, -3, 0, 6, -3, 6, 6, οπότε με απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε $\bar{\delta} = \frac{\sum(X-Y)}{10} = \frac{29}{10} = 2{,}9$ και $\frac{s_\delta}{\sqrt{\nu}} = \frac{3{,}57}{3{,}16} = 1{,}13$. Έτσι $t = \frac{2{,}9-3}{1{,}13} = \frac{-0{,}1}{1{,}13} = -0{,}09$.
Επειδή $t = -0{,}09 < t_{0,05}(9) = 1{,}833$ (έλεγχος δεξιόπλευρος), τα δεδομένα του δείγματος δε συνηγορούν στην απόρριψη της H_0. Αυτό σημαίνει ότι αποδεχόμαστε την H_0, δηλαδή δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ ανδρών και γυναικών, άρα οι άνδρες δεν προτιμούν να παντρεύονται γυναίκες με χαμηλότερο επίπεδο εκπαίδευσης. Θα μπορούσαμε να κάνουμε τον έλεγχο και με την τιμή της $\bar{\delta} = 2{,}9$, αν υπολογίζαμε το όριο του διαστήματος απόρριψης (δεξιόπλευρο). Αυτό είναι

$$\mu_\delta + t_{0,05}(9) \cdot \frac{s_\delta}{\sqrt{\nu}} = 3 + 1{,}833 \cdot 1{,}13 = 5{,}07$$

και, αφού $\bar{d} = 2{,}9 < 5{,}07$ (δεξιόπλευρος έλεγχος), αποδεχόμαστε την H_0.

5.6 Έλεγχος υποθέσεων για τη διακύμανση σ^2 ενός κανονικού πληθυσμού

Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε ένα δείγμα μεγέθους ν από πληθυσμό που ακολουθεί κανονική κατανομή, η μεταβλητότητα του δείγματος s^2 είναι η εκτιμήτρια της μεταβλητότητας του πληθυσμού. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η μεταβλητότητα του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχεται το δείγμα, είναι ίση με μια ορισμένη τιμή, έστω σ_0^2.

Η διατύπωση των υποθέσεων, ανάλογα με τη μορφή των ελέγχων, μπορεί να είναι:

1. Δίπλευρος:
   H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$,
   H_1: $\sigma^2\neq \sigma_0^2$
2. Μονόπλευρος Πάνω:
   H_0 : $\sigma^2=\sigma_0^2$,
   H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$
3. Μονόπλευρος Κάτω:
   H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$,
   H_1: $\sigma^2< \sigma_0^2$

όπου σ_0^2 η γνωστή πληθυσμιακή διακύμανση.

Εφόσον το δείγμα είναι τυχαίο, η στατιστική ελέγχου της διακύμανσης είναι:

α. για μικρά δείγματα (ν < 30) η παρακάτω $x_{\nu^*}^2 \sim x_\nu^2$ με ν – 1 βαθμούς ελευθερίας.

Έτσι, με την προϋπόθεση ισχύος της H_0 η κατάλληλη στατιστική ελέγχου είναι:

$$x_{\nu^*}^2 = \frac{(\nu-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

ενώ

β. για μεγάλα δείγματα (ν ≥ 30), η παρακάτω $Z^* \sim N(0,1)$

Έτσι, με την προϋπόθεση ισχύος της βασικής υπόθεσης η κατάλληλη στατιστική ελέγχου είναι:

$$Z^* = \frac{s^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{s^2-\sigma_0^2}{\sigma^2\sqrt{\frac{2}{\nu-1}}}.$$

Από το προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας α και για ν – 1 βαθμούς ελευθερίας βρίσκουμε τις κρίσιμες τιμές από τους πίνακες, σύμφωνα με τη διατύπωση της εναλλακτικής υπόθεσης, και προσδιορίζουμε τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης της H_0, συγκρίνοντας την X^2 με τις κρίσιμες τιμές $X_{\alpha/2}^2$ και $X_{1-\alpha/2}^2$ στο δίπλευρο έλεγχο, X_α^2 στον αριστερό μονόπλευρο και $X_{1-\alpha}^2$ στο δεξιό μονόπλευρο.

Οπότε:

1. <u>Στο δίπλευρο έλεγχο.</u> H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$, H_1: $\sigma^2\neq \sigma_0^2$, οι κρίσιμες περιοχές της X^2 με ν - 1 βαθμούς ελευθερίας θα είναι $X_{1-\alpha/2}^2$(ν - 1) και $X_{\alpha/2}^2$(ν - 1) και οι αντίστοιχες τιμές των ορίων των περιοχών απόρριψης θα είναι
$$\frac{X_{1-\alpha/2}^2(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu} \text{ και } \frac{X_{\alpha/2}^2(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$$

Αυτές οι τιμές έχουν προς τα δεξιά τους εκείνη την περιοχή κάτω από την καμπύλη της $X^2(\nu\text{-}1)$ που έχει εμβαδόν ίσο με $1-\frac{\alpha}{2}$ και $\frac{\alpha}{2}$ αντίστοιχα. Δηλαδή οι δύο αυτές τιμές θα έχουν προς τ' αριστερά τους περιοχή με εμβαδό ίσο με $\frac{\alpha}{2}$ και $1-\frac{\alpha}{2}$ αντίστοιχα.

Έτσι, αν για την τιμή s^2 που υπολογίζουμε από το δείγμα ισχύει

$$s^2 \leq \frac{X^2_{1-\alpha/2}(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu} \text{ ή } s^2 \geq \frac{X^2_{\alpha/2}(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$$

τότε απορρίπτουμε την H_0, ενώ αν ισχύει

$$\frac{X^2_{1-\alpha/2}(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu} < s^2 < \frac{X^2_{\alpha/2}(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$$

αποδεχόμαστε την H_0.

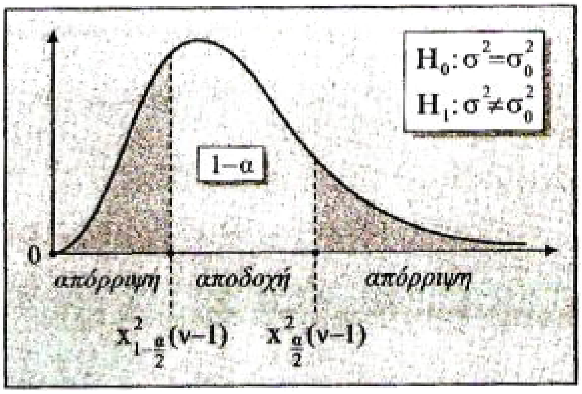
Ακριβώς τα ίδια μπορούμε να πούμε όταν χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό $X^2(\nu\text{-}1)$. Τότε, αν

$$X^2(\nu\text{-}1) \leq X^2_{1-\alpha/2}(\nu-1) \qquad \text{ή} \qquad X^2(\nu\text{-}1) \geq X^2_{\alpha/2}(\nu-1)$$

απορρίπτουμε την H_0, ενώ αν

$$X^2_{1-\alpha/2}(\nu-1) < X^2(\nu\text{-}1) < X^2_{\alpha/2}(\nu-1)$$

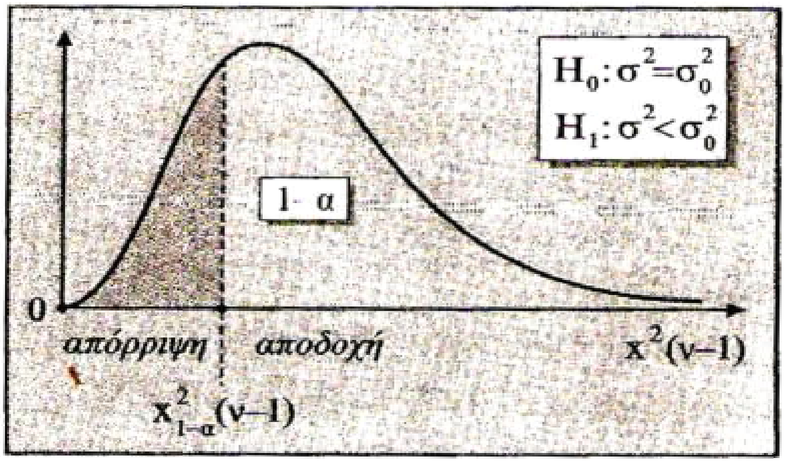
αποδεχόμαστε την H_0.



Σχήμα 5. 8

2. <u>Στον μονόπλευρο έλεγχο.</u> H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$, H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$, η τιμή της X^2-κατανομής με ν-1 βαθμούς ελευθερίας είναι $X^2_{1-\alpha}(\nu\text{ -}1)$ και η αντίστοιχη τιμή του ορίου της περιοχής απόρριψης είναι $\frac{X^2_{1-\alpha}(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$. Αυτές οι τιμές έχουν προς τα δεξιά τους περιοχή με εμβαδόν ίσο με 1-α, δηλαδή το σκιασμένο εμβαδόν είναι α. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι :

   Αν για $s^2 \leq \frac{X^2_{1-\alpha}(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$, τότε απορρίπτουμε την H_0, ενώ αν $s^2 > \frac{X^2_{1-\alpha}(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$, αποδεχόμαστε την H_0.



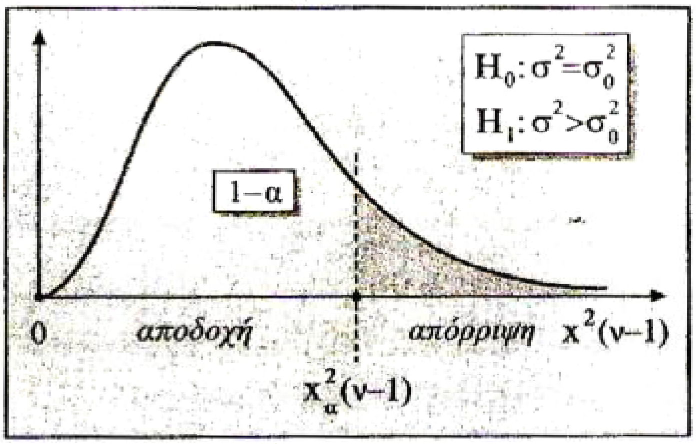
Σχήμα 5. 9

Όταν χρησιμοποιούμε το στατιστικό X^2(ν-1), θα έχουμε :

Αν X^2(ν-1) $\leq X^2_{1-\alpha}(\nu-1)$, απορρίπτουμε την H_0.

Αν X^2(ν-1) > $X^2_{1-\alpha}(\nu-1)$, αποδεχόμαστε την H_0.

Επίσης αν H_0: σ^2=σ_0^2, H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$, η τιμή της X^2- κατανομής είναι X^2_α(ν-1). Το όριο της περιοχής απόρριψης είναι $\frac{X^2_\alpha(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$, οπότε αν $s^2 \geq \frac{X^2_\alpha(\nu-1)\cdot\sigma_0^2}{\nu}$, απορρίπτουμε την H_0, ενώ αν $s^2 < \frac{X^2_\alpha(\nu-1)*\sigma_0^2}{\nu}$, αποδεχόμαστε την H_0.



Πίνακας 5. 10

Για το στατιστικό X^2(ν-1) θα έχουμε :

Αν X^2(ν-1) $\geq X^2_\alpha$(ν-1), τότε απορρίπτουμε την H_0.

Αν X^2(ν-1) < X^2_α(ν-1), τότε αποδεχόμαστε την H_0.

Στατιστικό ελέγχου σε όλες τις περιπτώσεις είναι το $\frac{(\nu-1)s_0^2}{\sigma_0^2}$,

όπου s_0^2 είναι η διακύμανση του δείγματος.

Παράδειγμα
Μεταξύ των προδιαγραφών αποδοχής ενός παραγόμενου εξαρτήματος είναι και το να μην είναι η διακύμανσή του μεγαλύτερη από 0,0002 εκατοστά. Σ' ένα δείγμα 10 εξαρτημάτων βρέθηκε η δειγματική διακύμανση $s^2 = 0{,}0003$ εκατοστά. Να ελεγχθεί αν πληρούνται οι προϋποθέσεις αποδοχής της παραγωγής ως προς τη διακύμανση με α = 0,05.

⇒ Διατυπώνουμε την υπόθεση H_0: $\sigma^2 \leq 0{,}0002$ και H_1: $\sigma^2 > 0{,}0002$.
Το στατιστικό X^2 με ν-1 = 10-1 = 9 βαθμούς ελευθερίας είναι
$X^2(9) = \frac{(\nu-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{9\cdot 0{,}0003}{0{,}0002} = 13{,}5$
$X^2_{\alpha,9} = 16{,}919$
Παρατηρούμε ότι 13,5 < 16,919, άρα αποδεχόμαστε την H_0. Το πιθανό σφάλμα εδώ είναι 5%, δηλαδή με πιθανότητα 5% κάνουμε λάθος, το οποίο οφείλεται στο δείγμα.

5.7 Έλεγχος υποθέσεων για τη διαφορά των διακυμάνσεων δύο κανονικών πληθυσμών.

Μερικές φορές θέλουμε να ελέγξουμε αν δύο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο κανονικό πληθυσμό ή να συγκρίνουμε την ακρίβεια κάποιου μηχανισμού μέτρησης σε σχέση με την ακρίβεια κάποιου άλλου. Για να κάνουμε τον έλεγχο της διαφοράς δύο διακυμάνσεων διατυπώνουμε τις υποθέσεις ανάλογα με τη μορφή του ελέγχου:

- Δίπλευρος: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ και $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$
  ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ και $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- Μονόπλευρος: Αν $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, θέτουμε το λόγο ως $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.
  Αν $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, θέτουμε το λόγο ως $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$.
  Στην πρώτη περίπτωση, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, έχουμε: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ και $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$
  ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ και $H_0 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$
  και αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση.

Η στατιστική ελέγχου, με την προϋπόθεση ισχύος της ισότητας των διακυμάνσεων (H_0), είναι:

$$F^*_{(\nu_1,\nu_2)} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \text{ή} \quad F^*_{(\nu_2,\nu_1)} = \frac{s_2^2}{s_1^2},$$

ανάλογα με το ποιος λόγος είναι μεγαλύτερος.

Από το προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας και για $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1$ βαθμούς ελευθερίας βρίσκουμε τις κρίσιμες τιμές από τους πίνακες σύμφωνα με τη διατύπωση της εναλλακτικής υπόθεσης και προσδιορίζουμε τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης της H_0, συγκρίνοντας την τιμή F με τις κρίσιμες τιμές $F_{\alpha/2}$ ή $F_{1-\alpha/2}$ στο δίπλευρο έλεγχο και $F_{1-\alpha}$ στο μονόπλευρο.

Παράδειγμα

Ένα τυχαίο δείγμα από 9 άνδρες μιας πόλης έχει μέση τιμή βάρους 68 κιλά και η εκτίμηση s^2 της μεταβλητότητας του πληθυσμού είναι 4,5 κιλά. Ένα άλλο τυχαίο δείγμα από 10 άνδρες έχει μέση τιμή βάρους 69 κιλά και η s^2 είναι 4,9 κιλά. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι τα δύο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό συγκρίνοντας τις μεταβλητότητές τους σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

$\Rightarrow H_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ και H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{4,9}{4,5} = 1,09$

Με τη χρήση του πίνακα καταλήγουμε ότι 1,09 < 3,395, άρα τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

5.8 Έλεγχος υποθέσεων για την αναλογία (P)

Ο έλεγχος των ποσοστών (αναλογίας) εξετάζει αν το ποσοστό μιας κατηγορίας είναι κάποιου μεγέθους ή αν υπάρχει διαφορά μεταξύ δύο ποσοστών αυτής της κατηγορίας. Με άλλα λόγια, με τον έλεγχο υποθέσεων της παραμέτρου (P) διωνυμικών πληθυσμών μπορούμε να συμπεράνουμε στατιστικά εάν η πραγματική τιμή ενός ποσοστού, ισούται, είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από μια συγκεκριμένη σταθερά (P_0).

Ας υποθέσουμε ότι σ' ένα πληθυσμό υπάρχει μια αναλογία, έστω p, με μια ορισμένη ιδιότητα. Παίρνουμε τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό μεγέθους ν, στο οποίο έστω ότι X από τα στοιχεία του έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Η εκτιμήτρια της p είναι η $\widehat{P} = \frac{X}{\nu}$.

Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο η αναλογία των μελών του πληθυσμού, τα οποία έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα, είναι ίση προς ορισμένη τιμή p_0.

Οι συνηθισμένοι συνδυασμοί υποθέσεων είναι:

1. Δίπλευρος έλεγχος :

   H_0: $P = P_0$

   H_1: $P \neq P_0$

2. Μονόπλευρος έλεγχος πάνω:

   H_0: $P = P_0$

   H_1: $P > P_0$

3. Μονόπλευρος έλεγχος κάτω:
   H_0: P = P_0
   H_1: P < P_0

Για να ελέγξουμε τις παραπάνω υποθέσεις, υπενθυμίζουμε ότι η κατανομή δειγματοληψίας της αναλογίας, δηλαδή της εκτιμήτριας $\widehat{P} = \frac{X}{\nu}$, είναι κανονική ή κατά προσέγγιση κανονική, εφόσον τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα, ν > 30, με μέση τιμή την $\mu_{\widehat{P}}$=P και τυπική απόκλιση την $S_{\widehat{P}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{\nu}}$, όπου κατ' ανάγκη την P την αντικαθιστούμε με την τιμή της εκτιμήτριας $\widehat{P}$.
Έτσι, η μεταβλητή

$$Z = \frac{\widehat{P}-p}{S_{\widehat{P}}} = \frac{\widehat{P}-p_0}{S_{\widehat{P}}}$$

είναι η κανονική μεταβλητή.

Για τους ελέγχους υποθέσεων και το επίπεδο σημαντικότητας α οι αντίστοιχες περιοχές απόρριψης ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις, όπου $\widehat{p}$ είναι η τιμή της εκτιμήτριας $\widehat{P}$.

Δίπλευρος έλεγχος :

$$\frac{\widehat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/\nu}} > z_{\alpha/2} \text{ και } \frac{\widehat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/\nu}} < -z_{\alpha/2}$$

Μονόπλευρος έλεγχος πάνω:

$$\frac{\widehat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/\nu}} > z_{\alpha}$$

Μονόπλευρος έλεγχος κάτω:

$$\frac{\widehat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/\nu}} < -z_{\alpha}$$

Έτσι και σε αυτή την περίπτωση καθορίζουμε την κρίσιμη περιοχή, που εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας α, και υπολογίζουμε κατά πόσο το z βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή ή όχι. Αν βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή, απορρίπτουμε την υπόθεση H_0, αλλιώς δεν την απορρίπτουμε.

Παράδειγμα 1

Σε ένα δείγμα 670 παιδιών βρέθηκε ότι το 66% είχε κάνει ολόκληρη τη σειρά εμβολιασμών για την ηπατίτιδα Β. Με βάση αυτό το δείγμα, είναι δυνατό να δεχτούμε την υπόθεση ότι περισσότερο από το 60% του όλου πληθυσμού έχει κάνει ολόκληρη τη σειρά εμβολιασμών για την ηπατίτιδα Β με επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05;

⇒ Η υπόθεση μηδέν είναι ότι το 60% του πληθυσμού έχει κάνει ολόκληρη τη σειρά του εμβολιασμού. Συνεπώς, η υπόθεση την οποία πρέπει να ελέγξουμε είναι η εξής: H_0: P = 0,60 , H_1: P > 0,60.

Αφού ν > 30, η μεταβλητή Ζ ακολουθεί κανονική κατανομή. Έτσι, έχουμε

$$Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/\nu}}$$

$$Z = \frac{0{,}66 - 0{,}60}{\sqrt{\frac{0{,}60 \cdot 0{,}40}{670}}} = 3{,}170.$$

Επειδή 1,645 < 3,170, συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατό να δεχτούμε τη μηδενική υπόθεση. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αναλογία των ατόμων ολόκληρου του πληθυσμού που πραγματοποίησε ολόκληρη τη σειρά εμβολιασμών κατά της ηπατίτιδας Β είναι μεγαλύτερη του 60%.

Παράδειγμα 2

Ο λογιστής μιας εταιρείας γνωρίζει από την εμπειρία του ότι πάνω από 20% των εκδιδόμενων τιμολογίων από τους βοηθούς του περιέχουν τουλάχιστον ένα λάθος στη σύνταξή τους. Σε τυχαίο δείγμα 400 τιμολογίων βρέθηκαν 100 από αυτά να έχουν τουλάχιστον ένα λάθος. Να ελεγχθεί σε α=5% εάν η πληροφορία του δείγματος υποστηρίζει την άποψη του λογιστή της επιχείρησης.

⇒ Η υπόθεση μηδέν είναι ότι το 20% των εκδιδόμενων τιμολογίων είναι λανθασμένα. Συνεπώς η υπόθεση που πρέπει να ελέγξουμε είναι

$$H_0: P \geq 0{,}20\ ,\ H_1: P < 0{,}20$$

Η εκτίμηση της $\hat{P}$, που προκύπτει από το συγκεκριμένο δείγμα είναι

$\hat{p} = \frac{X}{\nu} = \frac{100}{400} = 0{,}25.$

Επειδή n > 30, η μεταβλητή Ζ ακολουθεί κανονική κατανομή. Έτσι, έχουμε

$$Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/\nu}}$$

Άρα

$$Z = \frac{0{,}25 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{400}}} = 2{,}5$$

Επειδή 2,5 > - 1,645 που αντιστοιχεί στο $Z_\alpha = Z_{0,05}$, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την βασική υπόθεση (H_0). Επομένως σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%, το δείγμα μας δείχνει ότι η άποψη του λογιστή ήταν σωστή.

5.9 Έλεγχος υποθέσεων για την διαφορά δυο αναλογιών (ποσοστών)

Ο έλεγχος της διαφοράς μεταξύ δύο ποσοστών είναι ένας από τους πιο συνηθισμένους ελέγχους. Χρησιμοποιείται, όπως και ο έλεγχος των δύο αριθμητικών μέσων, για να συγκρίνουμε δύο ομάδες.

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για στατιστικά συμπεράσματα αναφορικά με ελέγχους υποθέσεων διαφοράς δύο ποσοστών από διωνυμικούς ελέγχους ενεργούμε ως εξής. Έστω $\widehat{P_1}$ και $\widehat{P_2}$ οι εκτιμήτριες των αναλογιών δυο δειγμάτων, μεγέθους n_1 και n_2 αντίστοιχα, που τα επιλέξαμε από δυο πληθυσμούς, που έχουν αναλογίες p_1και p_2. Θεωρούμε ως υπόθεση μηδέν ότι δεν υφίσταται διαφορά ανάμεσα στις αναλογίες των πληθυσμών, δηλαδή ότι p_1=p_2. Έτσι θεωρούμε ότι τα δείγματα προέρχονται στην πραγματικότητα από τον ίδιο πληθυσμό. Η διατύπωση των υποθέσεων, ανάλογα με τη μορφή του ελέγχου, γίνεται ως εξής :

1. <u>Δίπλευρος έλεγχος :</u>
   H_0:P_1=P_2
   H_1: $P_1 \neq P_2$
2. <u>Μονόπλευρος έλεγχος πάνω:</u>
   H_0: P_1 = P_2
   H_1: P_1> P_2

3. <u>Μονόπλευρος έλεγχος κάτω:</u>
   H_0: P_1 = P_2
   H_1: P_1 < P_2.

Η κατάλληλη στατιστική ελέγχου β, για μεγάλα δείγματα προκύπτει από την:

$$Z = \frac{(\widehat{p_1}-\widehat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{\nu_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{\nu_2}}} \approx N(0,1)$$

Συνεπώς με την προϋπόθεση ισχύος της βασικής H_0 : P_1= P_2= P η στατιστική ελέγχου είναι :

$$Z = \frac{(\widehat{p_1}-\widehat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{P(1-P)(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2})}}$$

όπου το (P) συνήθως εκτιμάται από τα δεδομένα των τυχαίων κι ανεξάρτητων δειγμάτων μεγέθους (n_1), (n_2), ως :

$$\hat{p}= \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$$

Για τους ελέγχους υποθέσεων και το επίπεδο σημαντικότητας α οι αντίστοιχες περιοχές απόρριψης ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

<u>Δίπλευρος έλεγχος :</u> $Z > z_{\alpha/2}$ και $Z < - z_{\alpha/2}$

<u>Μονόπλευρος έλεγχος πάνω:</u> $Z > z_\alpha$

<u>Μονόπλευρος έλεγχος κάτω:</u> $Z < -z_\alpha$

Παράδειγμα

Ερευνητής αγοράς πιστεύει ότι το ποσοστό των νοικοκυριών, της περιοχής Α, που κατέχει περισσότερα του ενός Ι.Χ. αυτοκίνητα, υπερβαίνει το αντίστοιχο της περιοχής Β, πάνω από 0,05. Με σκοπό να επαληθεύσει στατιστικά τον ισχυρισμό του, ο ερευνητής διεξάγει έρευνα με τα παρακάτω αποτελέσματα. Να ελέγξετε τη διαφορά $(P_A - P_B)$ σε α= 10%.

Περιοχή	Μέγεθος δείγματος	Αριθμός νοικ. με πάνω από ένα Ι.Χ.
Α	ν_A=160	x_A=134
Β	ν_B=180	x_B=127

⇒ Οι υποθέσεις μας είναι :

$$H_o: P_A - P_B = 0{,}05$$
$$H_1: P_A - P_B > 0{,}05$$

Δεν υπάρχει λόγος να μην θεωρήσουμε τους πληθυσμούς κανονικούς. Συνεπώς με την προϋπόθεση ισχύος της βασικής υπόθεσης η κατάλληλη στατιστική ελέγχου είναι :

$$Z = \frac{(\widehat{p_A} - \hat{p}_B) - 0{,}05}{\sqrt{P(1-P)(\frac{1}{\nu_A} + \frac{1}{\nu_B})}}$$

όπου : $\hat{p} = \frac{x_A + x_B}{\nu_A + \nu_B}$

Στο δεδομένο α = 10% θα απορριφθεί η H_0 εάν $Z > z_\alpha$.

Υπολογίζουμε :

- $\hat{p} = \frac{x_A + x_B}{\nu_A + \nu_B} = \frac{134+127}{160+180} = 0{,}768$.
- $\widehat{p_A} = \frac{x_A}{\nu_A} = \frac{134}{160} = 0{,}8375$.
- $\widehat{p_B} = \frac{x_B}{\nu_B} = \frac{127}{180} = 0{,}7055$.
- $S_{\widehat{p_A} - \widehat{p_B}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{\nu_A} + \frac{1}{\nu_B})} = \sqrt{0{,}768 \cdot 0{,}232 \cdot (\frac{1}{160} + \frac{1}{180})} = 0{,}046$
- $Z = \frac{(0{,}8365 - 0{,}7055) - 0{,}05}{0{,}046} = 1{,}78$
- $z_\alpha = z_{0,1}$=1,289

Επειδή Z = 1,78 > $z_{0,1}$=1,289 απορρίπτουμε την βασική υπόθεση και σε α= 10% δεχόμαστε τον ισχυρισμό του ερευνητή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ερευνητής θέτοντας α=10% να απορρίψει μια σωστή H_0 δείχνει ότι θεωρεί σημαντικότερο από τον κίνδυνο (α) τον κίνδυνο (β) να κάνει σφάλμα τύπου ΙΙ. Εδώ η πιθανότητα να δεχθεί την H_0 ενώ αυτή είναι λάθος, μπορεί να είναι β = 59,1% κι αντίστοιχα η δύναμη του κριτηρίου περιορίζεται στον συγκεκριμένο έλεγχο σε (1-β) ≈ 41%.

$(\widehat{p_A} - \widehat{p_B}) > (\widehat{p_A} - \widehat{p_B})_c = 0{,}05 + 1{,}289 \cdot 0{,}046 = 0{,}1093$

Επομένως $\beta = P((\widehat{p_A} - \widehat{p_B}) \geq 0{,}1093) = P\left(Z > \frac{(\widehat{p_A} - \widehat{p_B})_c - (\widehat{p_A} - \widehat{p_B})}{S_{\widehat{p_A} - \widehat{p_B}}}\right.$

Έστω τώρα ότι $(\widehat{p_A} - \widehat{p_B}) = 0{,}12$ τότε $1\text{-}F\left(\frac{0{,}1093 - 0{,}12}{0{,}046}\right) = 0{,}591$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

6.1 Γενικά

Για να αντιληφθούμε καλύτερα όλα όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με μια πρακτική εφαρμογή των όσων είπαμε μέχρι στιγμής σχετικά με τους ελέγχους. Για να βγάλουμε όσο το δυνατόν πιο ακριβή αποτελέσματα, πήραμε ως βάση πραγματικά δεδομένα. Αυτά είναι, δύο σεζόν από τη διοργάνωση euroleague του μπάσκετ ανδρών.

Οι σεζόν αυτές που θα ασχοληθούμε είναι η σεζόν για τις ομάδες της euroleague 2009-2010 και η σεζόν για τις ομάδες της euroleague 2010-2011. Θα εξετάσουμε τις μεταβολές που είχαμε τις δύο σεζόν σε 6 κατηγορίες. Οι κατηγορίες αυτές θα είναι: α)team (οι ομάδες της euroleague), β)points (οι πόντοι των ομάδων της euroleague), γ)rebounds (τα ριμπάουντ των ομάδων), δ)assists (οι assists των ίδιων ομάδων), ε)steals (τα κλεψίματα), στ)blocks και τέλος ζ)τα fouls των ομάδων.

Κατ’ αρχάς θα πραγματοποιήσουμε έλεγχο κανονικότητας για κάθε μια μεταβλητή. Κατόπιν θα κάνουμε ελέγχους για την σύγκριση των μέσων τιμών των δύο σεζόν. Από τον έλεγχο κανονικότητας θα κρίνουμε αν θα συνεχίσουμε στους ελέγχους υποθέσεων για τις συγκρίσεις των μέσων αποδόσεων των δύο σεζόν της euroleague.

Αναλυτικότερα θα τα δούμε παρακάτω, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των παρακάτω πινάκων. Τα δεδομένα τα έχουμε συλλέξει από ιστότοπο στο διαδίκτυο ο οποίος τα διαθέτει για κοινή χρήση.

ΣΕΖΟΝ 2009-2010						
team	**points**	**rebounds**	**assists**	**steals**	**blocks**	**fouls**
Maccabi	77,7	35,2	15,8	7,8	4,2	23,8
Olympiacos	86,7	33,3	18,1	8,8	2,5	21,4
Panathinaikos	76,9	30,5	14,6	7,6	2,3	20,4
Barcelona	79,4	32,5	15,4	7,5	4,1	19,1
Real Madrid	77,0	31,0	14,7	7,5	2,1	20,3
Khimki	76,0	34,7	13,9	5,7	3,3	20,2
Armani Milano	72,4	30,8	11,6	7,6	1,0	23,2
Lottomatica	71,3	31,4	9,6	7,9	2,1	22,7
Cska Moscow	75,6	31,2	14,0	8,0	3,1	18,9
Fenerbahce	69,0	31,3	11,1	5,1	2,6	19,6

Πίνακας 6.1. Χαρακτηριστικά ομάδων της euroleague για τη σεζόν 2009-2010.

ΣΕΖΟΝ 2010-2011						
team	**points**	**rebounds**	**assists**	**steals**	**blocks**	**fouls**
Maccabi	81,6	36.1	16.1	9.1	2.9	20.4
Olympiacos	78,4	36.6	16.3	7.8	3.5	21.1
Panathinaikos	78,2	33.5	14.3	7.2	3.1	21.5
Barcelona	76,6	31.9	14.8	6.5	3.2	20.2
Real Madrid	73.0	38.4	14.9	5.8	3.5	20.1
Khimki	76.4	34.9	12.6	6.6	3.8	21.9
Armani Milano	73.7	27.5	13.8	7.7	1.5	24.0
Lottomatica	71.5	30.4	10.3	8.9	3.2	21.3
Cska Moscow	68,3	33.6	12.4	5.0	2.4	18.5
Fenerbahce	78,2	34.8	14.7	7.8	2.5	22.2

Πίνακας 6.2. Χαρακτηριστικά ομάδων της euroleague για τη σεζόν 2010-2011.

6.2 Έλεγχος Κανονικότητας

H_0: Το δείγμα μας προέρχεται από κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό.

Vs

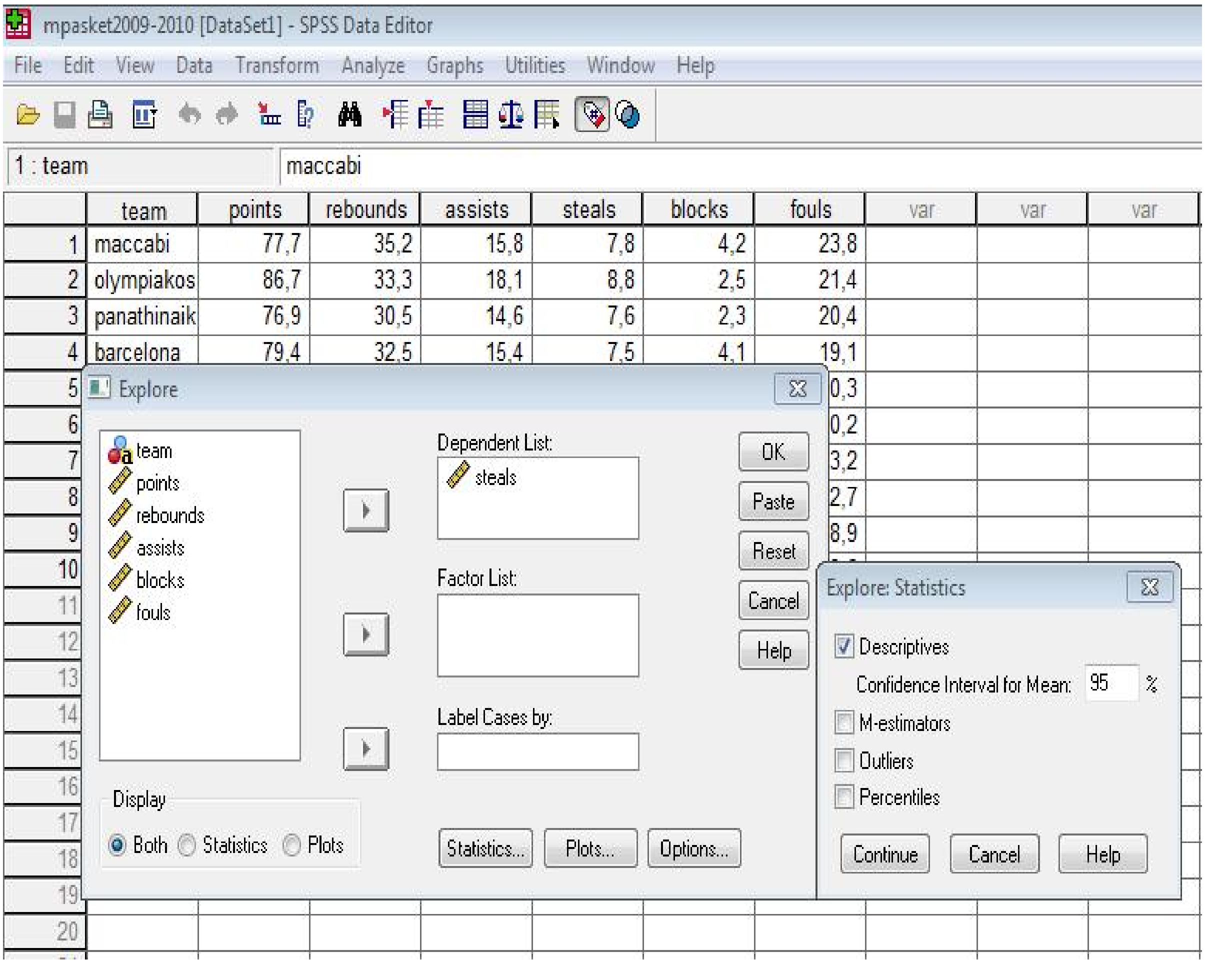
H_1:Το δείγμα μας δεν προέρχεται από κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό.

Σύμφωνα με τα δεδομένα θα πραγματοποιήσουμε έλεγχο κανονικότητας σε κάθε μια από τις περιπτώσεις ανάμεσα στα στοιχεία των δύο πινάκων.

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε στο spss για τον έλεγχο κανονικότητας είναι η εξής :

ANALYZE → DESCRIPTIVE STATISTICS → EXPLORE.

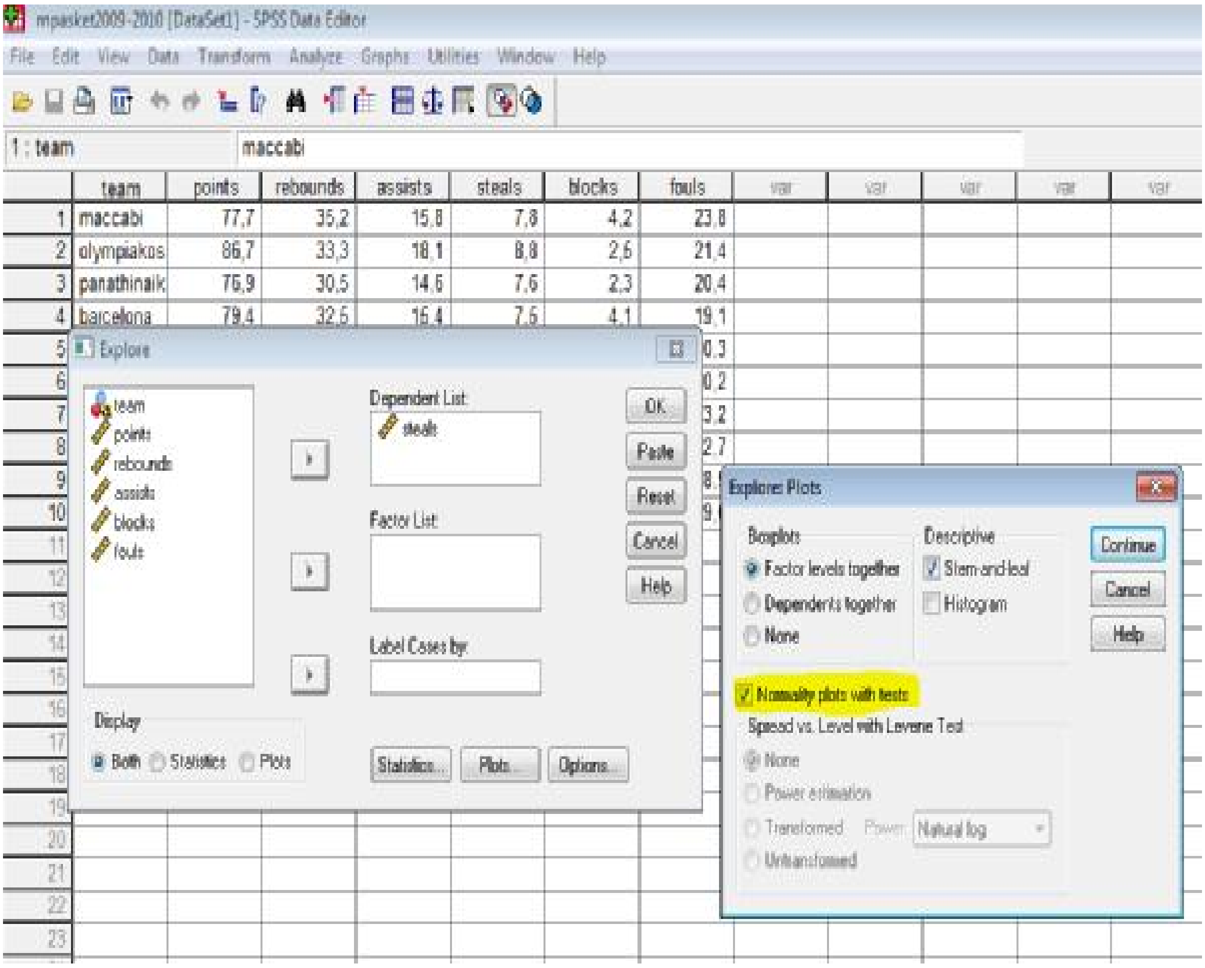
Επιλέγουμε από το παράθυρο αριστερά τη μεταβλητή στην οποία θέλουμε να κάνουμε τον έλεγχο και με το **μαύρο βέλος** τη μεταφέρουμε στο παράθυρο DEPEND LIST , όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 6. 1

Για να επιλέξουμε το διάστημα εμπιστοσύνης που θέλουμε πατάμε το κουμπί statistics , στη συνέχεια τσεκάρουμε **descriptive** και στο παράθυρο

confidence interval for mean δίνουμε την τιμή ανάλογα με το διάστημα εμπιστοσύνης που θέλουμε να υπολογίσουμε. Στη συνέχεια επιλέγουμε **plots** → **normality plots with tests** → **continue**, όπως μας δείχνει η παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 6. 2

6.2.1 Έλεγχος κανονικότητας για τα points των σεζόν

Για τα points της σεζόν 2009-2010 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Points	,179	10	,200(*)	,935	10	,498

Πίνακας 6. 3

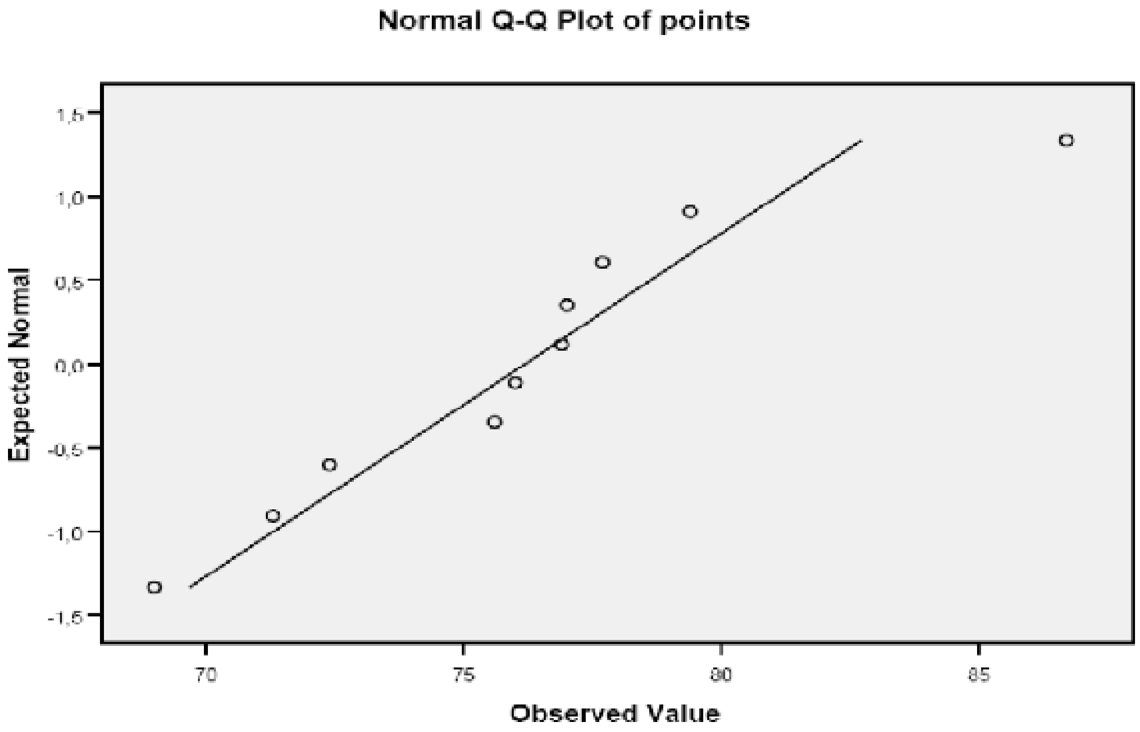
<u>Kolmogorov-Smirnov:</u>

$sig._1 = 0{,}200 > 0{,}05$

Shapiro-Wilk:

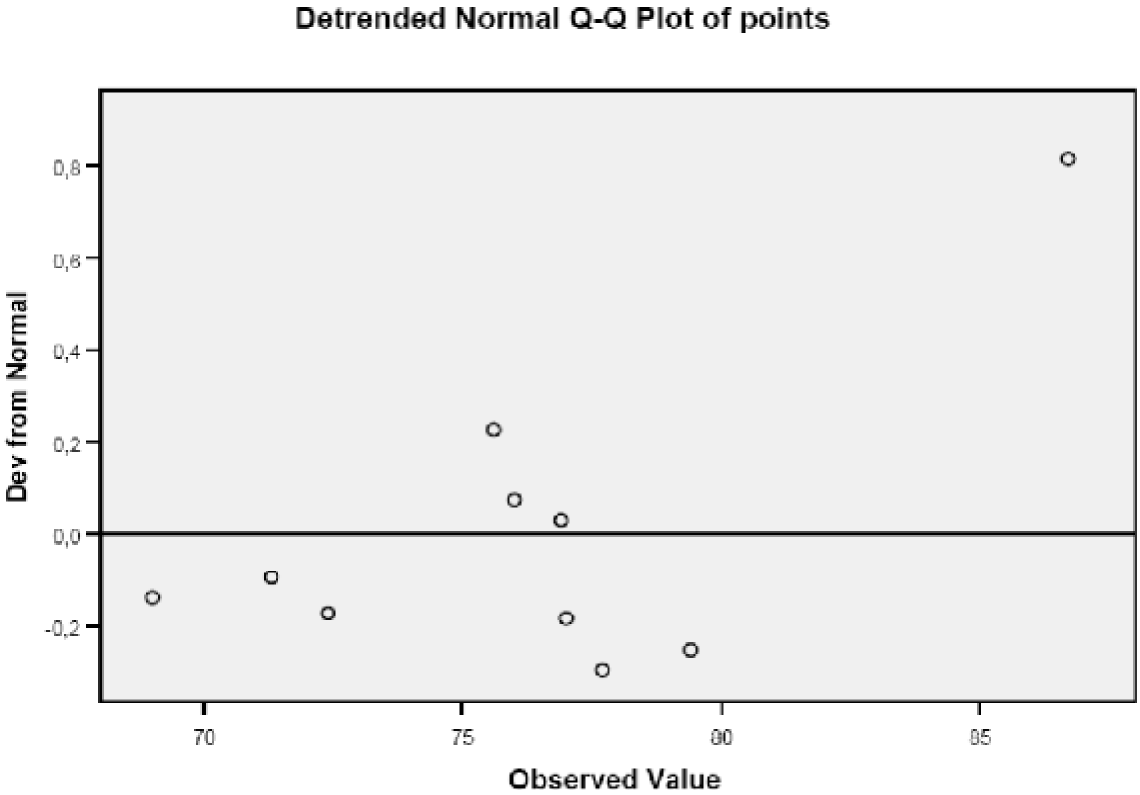
$sig._1$ = 0,498 > 0,05

Άρα αποδεχόμαστε την H_0. Συνεπώς η μεταβλητή των points για τη σεζόν 2009-2010 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 1

Το **NORMAL Q – Q PLOT** μας δείχνει τις πραγματικές τιμές (observed values) και τις αναμενόμενες τιμές (expected values). Κάθε κουκίδα αναπαριστά ένα ζεύγος (α, β) όπου α είναι η παρατηρούμενη και β η αναμενόμενη τιμή για την μεταβλητή μας. Αν για κάθε κουκίδα του διαγράμματος για κάθε ζεύγος (α, β) ίσχυε α = β, τότε όλες οι κουκίδες θα πέφτουν πάνω στη διαγώνιο η οποία διχοτομεί τους άξονες. Στην περίπτωση αυτή θα υπάρχει μια ιδανική κατάσταση για την κανονικότητα, αφού κάθε παρατηρούμενη τιμή της μεταβλητής ταυτίζεται με την αντίστοιχη αναμενόμενή της. Σχεδόν ποτέ δεν έχουμε τέλεια διάταξη των κουκίδων πάνω στη διχοτόμο των αξόνων, επομένως σχεδόν ποτέ δεν έχουμε ιδανική περίπτωση κανονικότητας. Έτσι λοιπόν, αν οι κουκίδες προσεγγίζουν ή τείνουν να πέσουν πάνω στη διχοτόμο, τότε η κατανομή του δείγματός μας είναι προσεγγιστικά κανονική. Αν υπάρχουν μεγάλες απομακρύνσεις κουκίδων από τη διχοτόμο, τότε υπάρχει ανάλογη απομάκρυνση από τη συνθήκη της κανονικότητας.



Σχήμα 6. 2

Το διάγραμμα **DETRENDED NORMAL Q – Q PLOT** μας βοηθάει να διαγνώσουμε απομάκρυνση από την κανονικότητα. Στον άξονα x έχουμε τις παρατηρούμενες τιμές, ενώ στον άξονα y έχουμε τις τιμές που αναμένονται δεδομένης της κανονικότητας. Αν οι κουκίδες του διαγράμματος είναι τυχαία κατανεμημένες μέσα σε μια οριζόντια ταινία, η οποία σχηματίζεται με άξονα την ευθεία που διέρχεται από το 0 του άξονα y και έχει μεγάλη διάμετρο (ώστε να περιλαμβάνει το μεγαλύτερο μέγεθος των κουκίδων), τότε το δείγμα μας δεν έχει πρόβλημα κανονικότητας. Αν όμως οι κουκίδες σχηματίζουν ευθεία γραμμή ή ουράνιο τόξο ή ένα αναποδογυρισμένο ουράνιο τόξο, τότε προφανώς δεν είναι τυχαία κατανεμημένες και επομένως υπάρχει πρόβλημα κανονικότητας.

Επίσης, για τα points της σεζόν 2010-2011 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Points	,182	10	,200(*)	,961	10	,794

Πίνακας 6. 4

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

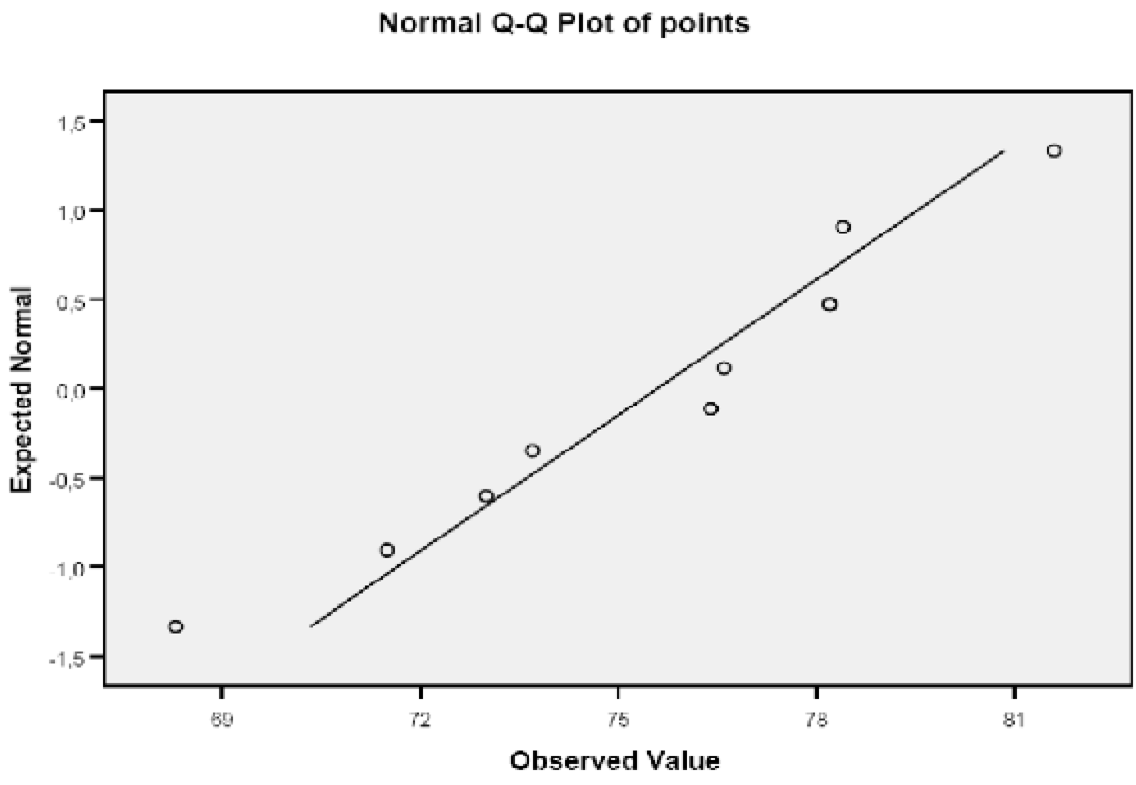
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

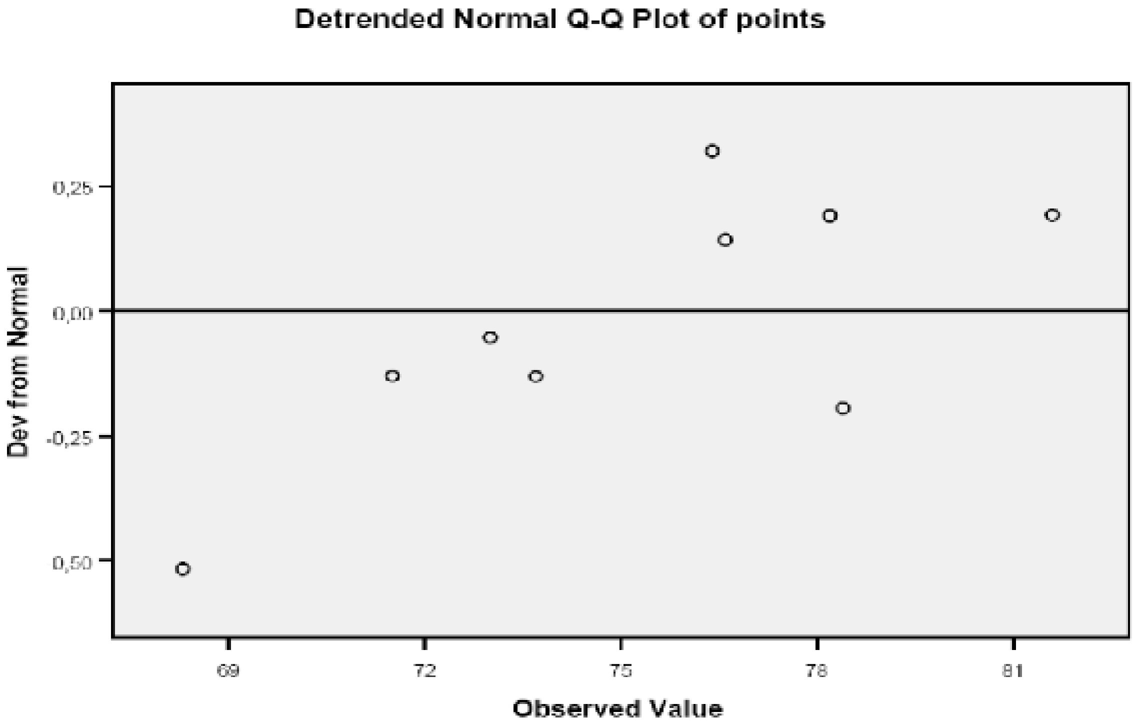
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,794 > 0,05

Αντιστοίχως, αποδεχόμαστε την H_0. Συνεπώς, η μεταβλητή των points για τη σεζόν 2010-2011 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 3



Σχήμα 6. 4

6.2.2 Έλεγχος κανονικότητας για τα rebounds των σεζόν

Για τα rebounds της σεζόν 2009-2010 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Rebounds	,281	10	,024	,850	10	,058

Πίνακας 6. 5

a Lilliefors Significance Correction

Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,024 < 0,05

Shapiro-Wilk:

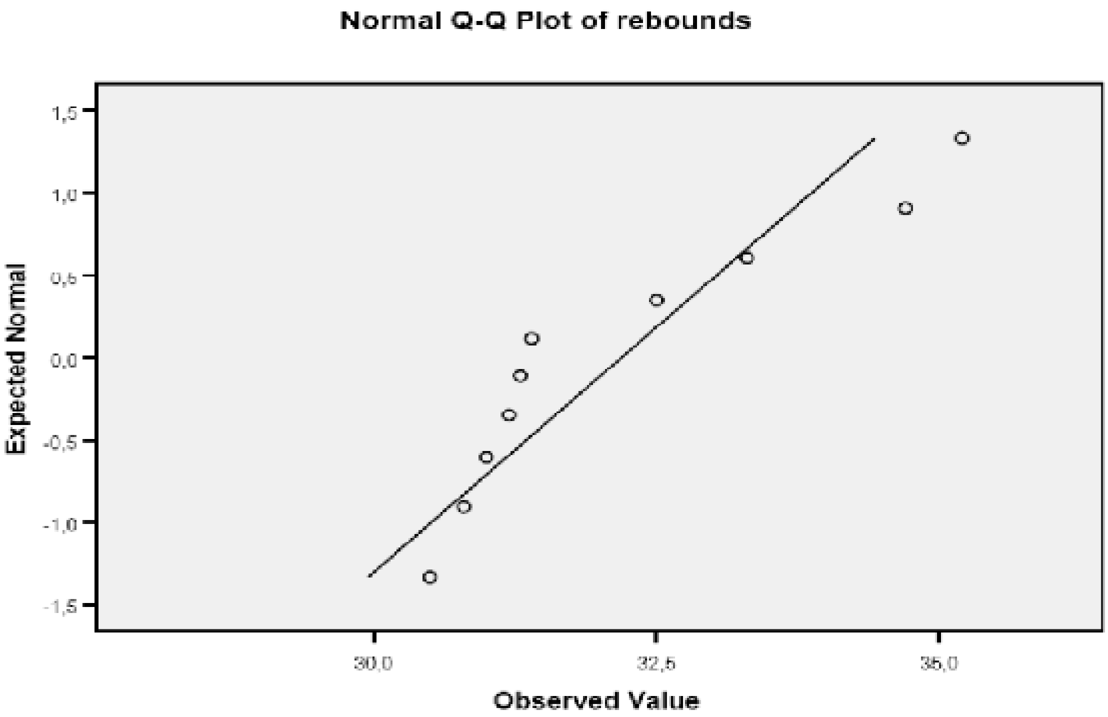
$sig._1$ = 0,058 > 0,05

Επειδή το Kolmogorov-Smirnov και το Shapiro-Wilk είναι το ένα μικρότερο και το άλλο μεγαλύτερο από το επίπεδο σημαντικότητας, θα ελέγξουμε το μέγεθος του δείγματος. Το μέγεθος του δείγματός μας είναι μικρότερο από το 50, άρα εργαζόμαστε με το Shapiro-Wilk. Έτσι, αφού έχουμε:

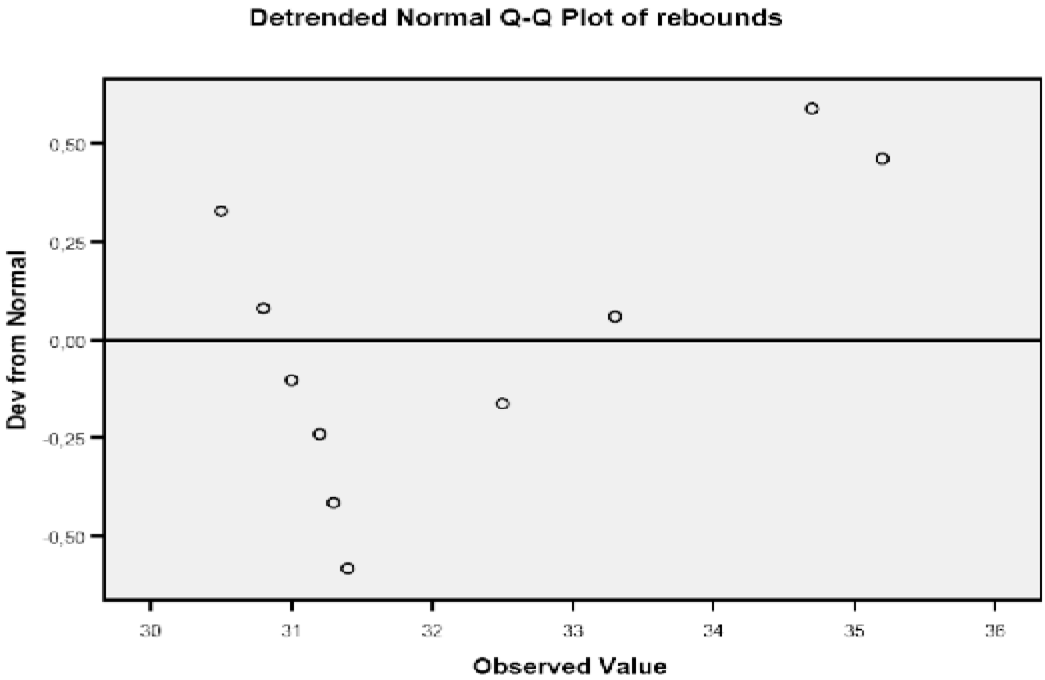
<u>Shapiro-Wilk:</u>

$sig._1$ = 0,058 > 0,05

άρα έχουμε αποδοχή της H_0. Οπότε, για τη σεζόν 2009-2010 η μεταβλητή rebounds είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 5



Σχήμα 6. 6

Επίσης για τα rebounds της σεζόν 2010-2011 έχουμε :

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Rebounds	,166	10	,200(*)	,969	10	,878

Πίνακας 6. 6

* This is a lower bound of the true significance.

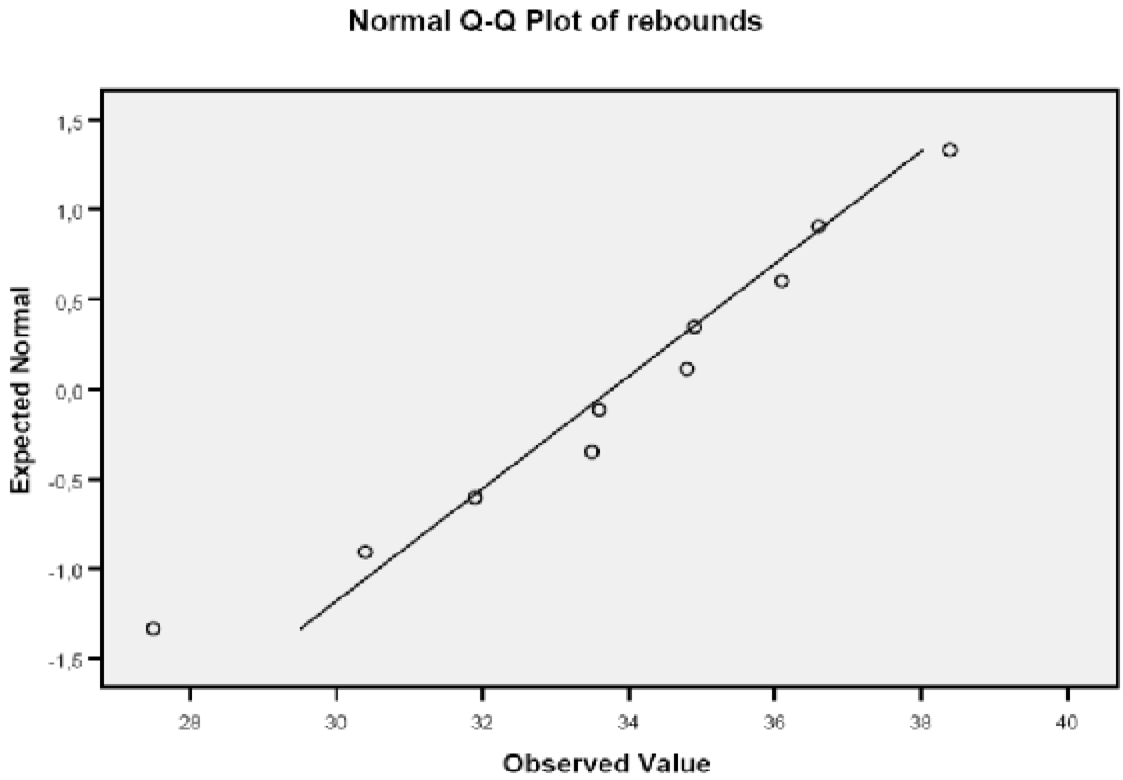
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

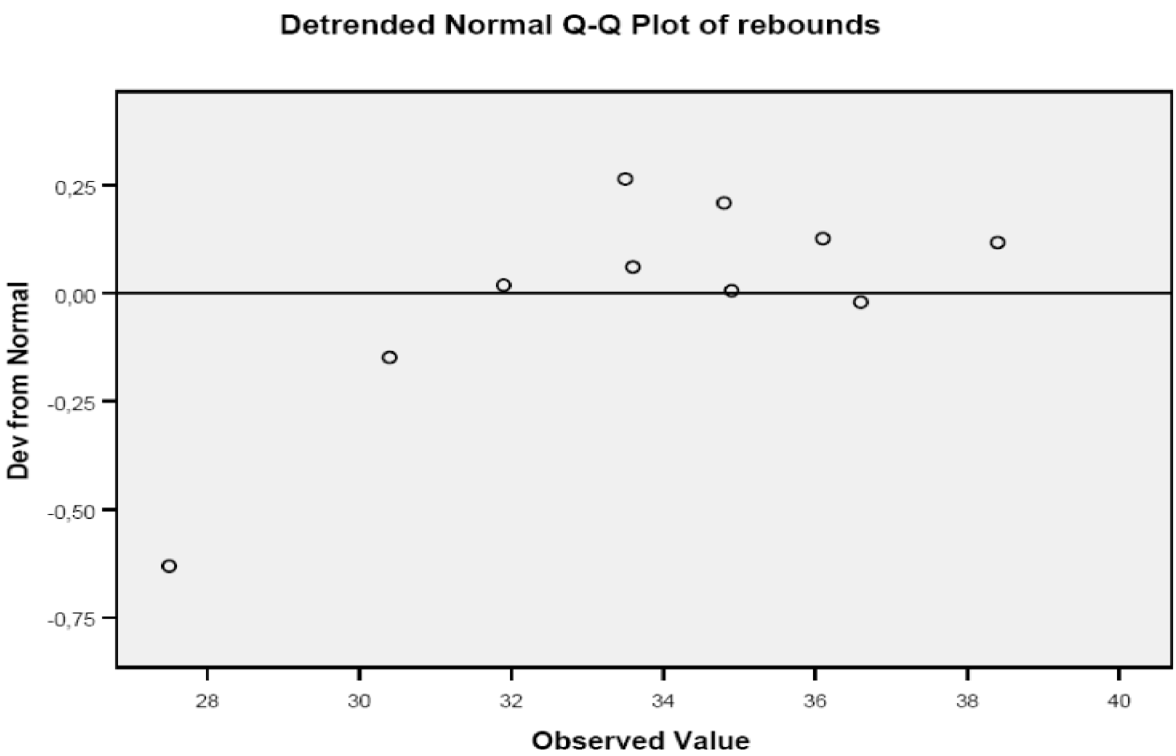
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,878 > 0,05

Άρα έχουμε αποδοχή της H_0. Οπότε, για τη σεζόν 2010-2011 η μεταβλητή rebounds είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 7



Σχήμα 6. 8

6.2.3 Έλεγχος κανονικότητας για τις assists των σεζόν

Για τις assists της σεζόν 2009-2010 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Assists	,203	10	,200(*)	,963	10	,817

Πίνακας 6. 7

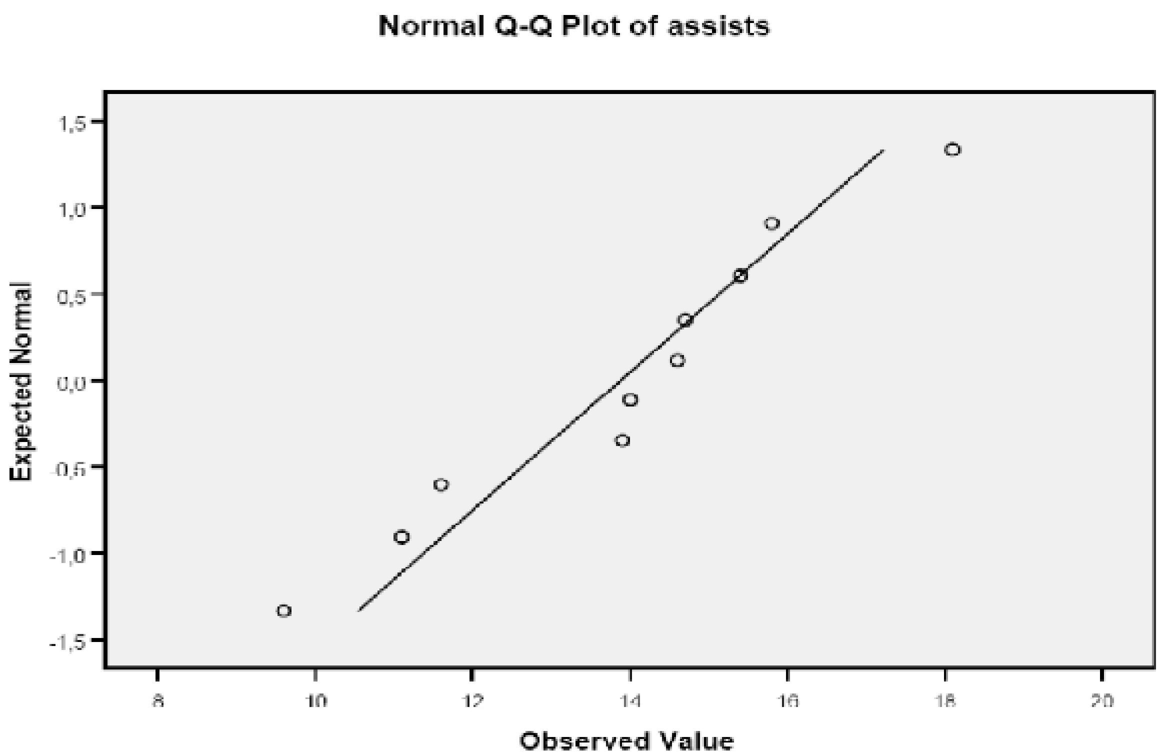
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

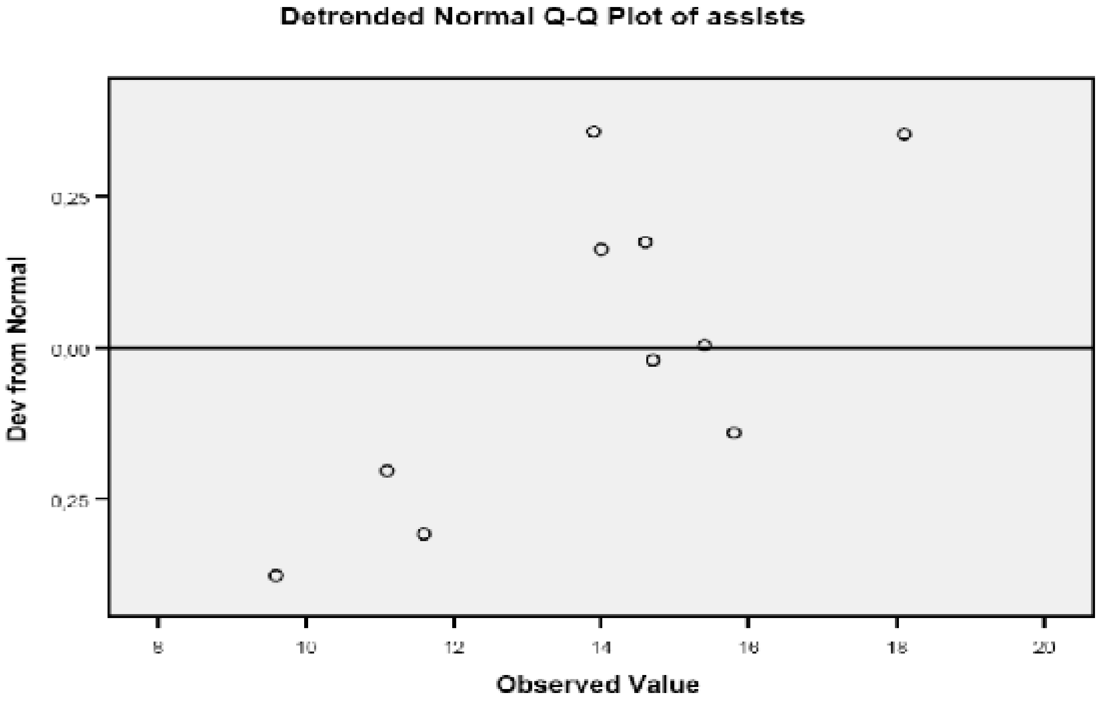
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,817 > 0,05

Άρα έχουμε αποδοχή της H_0. Επομένως, για τη σεζόν 2009-2010 η μεταβλητή assists είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 9



Σχήμα 6. 10

Επίσης για τις assists της σεζόν 2010-2011 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Assists	,161	10	,200(*)	,934	10	,488

Πίνακας 6. 8

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

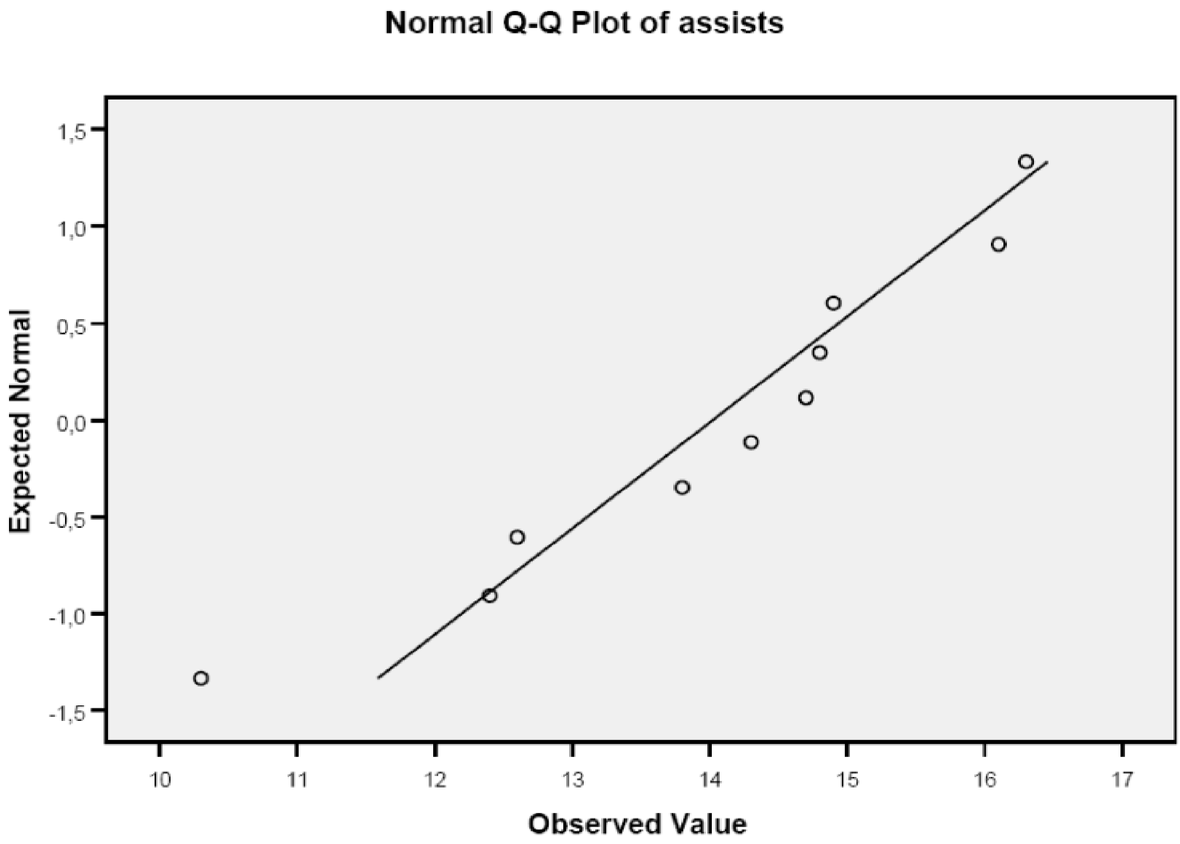
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

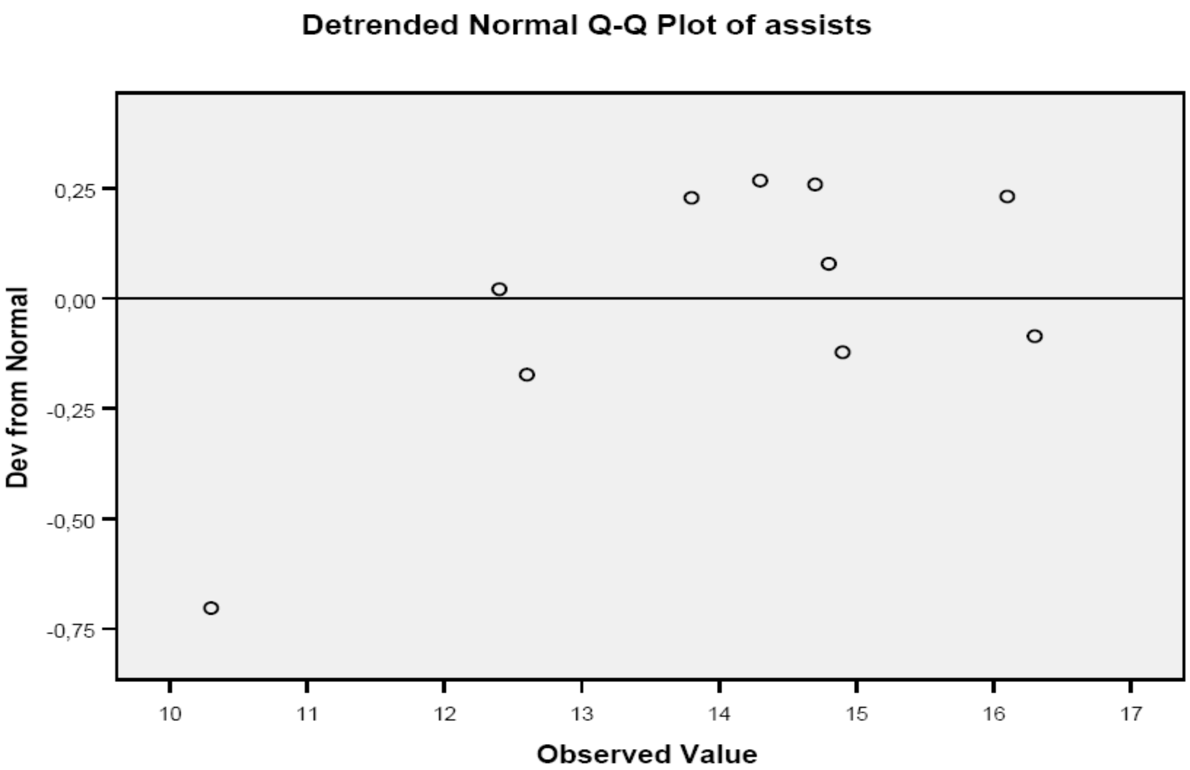
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,488 > 0,05

Άρα έχουμε αποδοχή της H_0. Επομένως, η μεταβλητή assists για τη σεζόν 2010-2011 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 11



Σχήμα 6. 12

6.2.4 Έλεγχος κανονικότητας για τα steals των σεζόν

Για τη σεζόν 2009-2010 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Steals	,354	10	,001	,820	10	,026

Πίνακας 6. 9

a Lilliefors Significance Correction

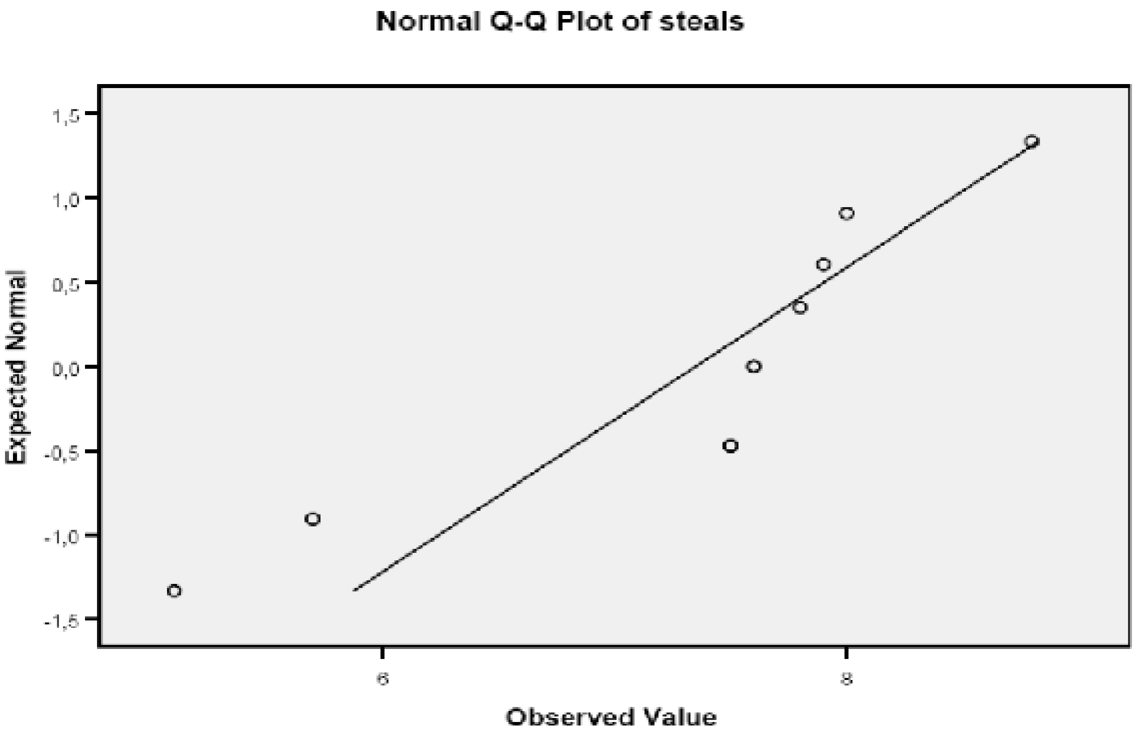
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,001 < 0,05

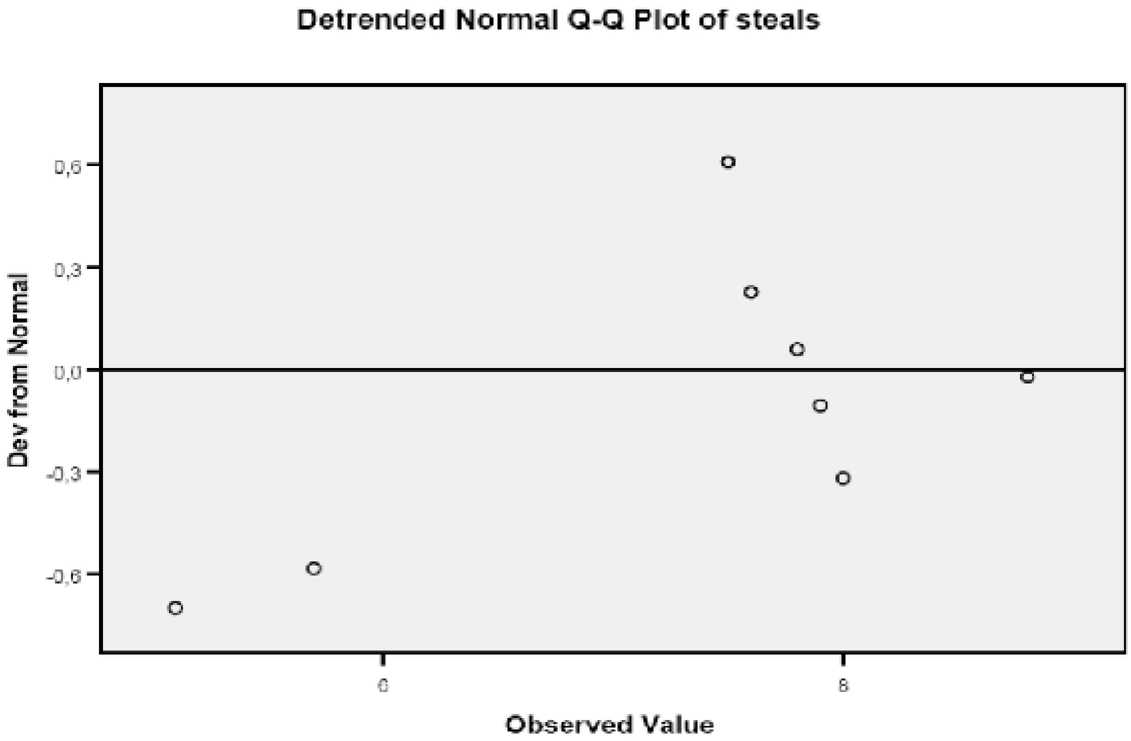
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,026 < 0,05

Άρα απορρίπτουμε την H_0. Συνεπώς, η μεταβλητή steals για τη σεζόν 2009-2010 δεν είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 13



Σχήμα 6. 14

Επίσης για τα steals της σεζόν 2010-2011 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Steals	,139	10	,200(*)	,965	10	,843

Πίνακας 6.10

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

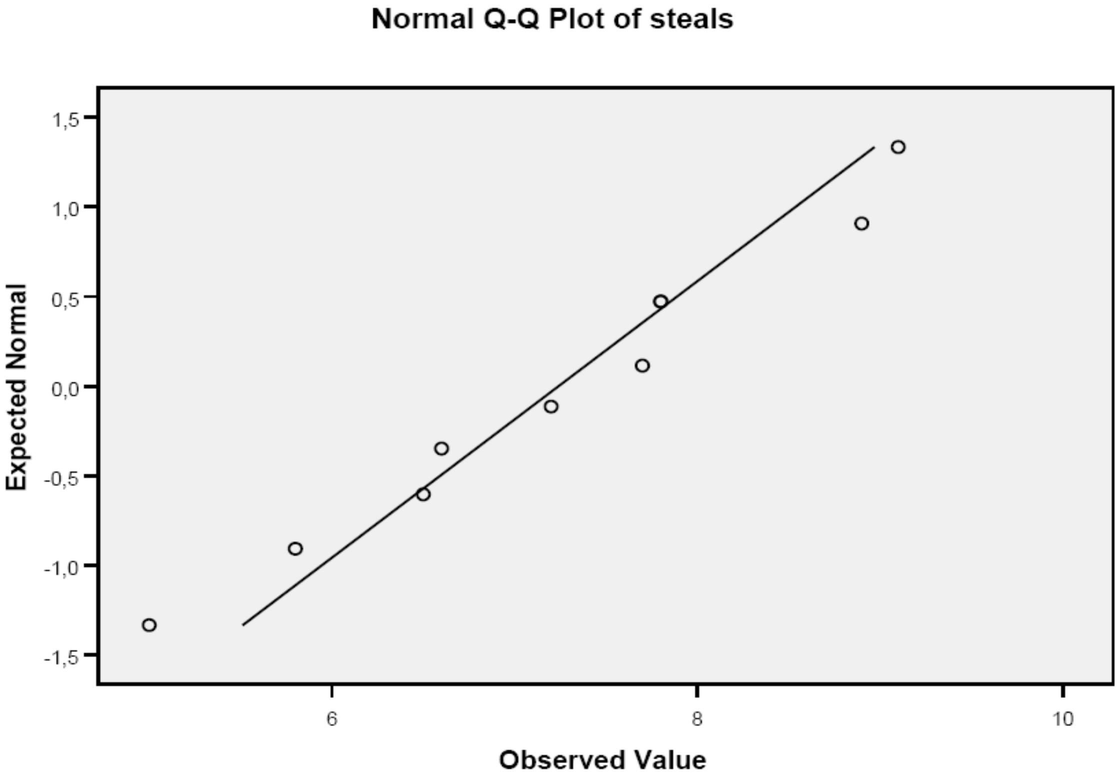
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

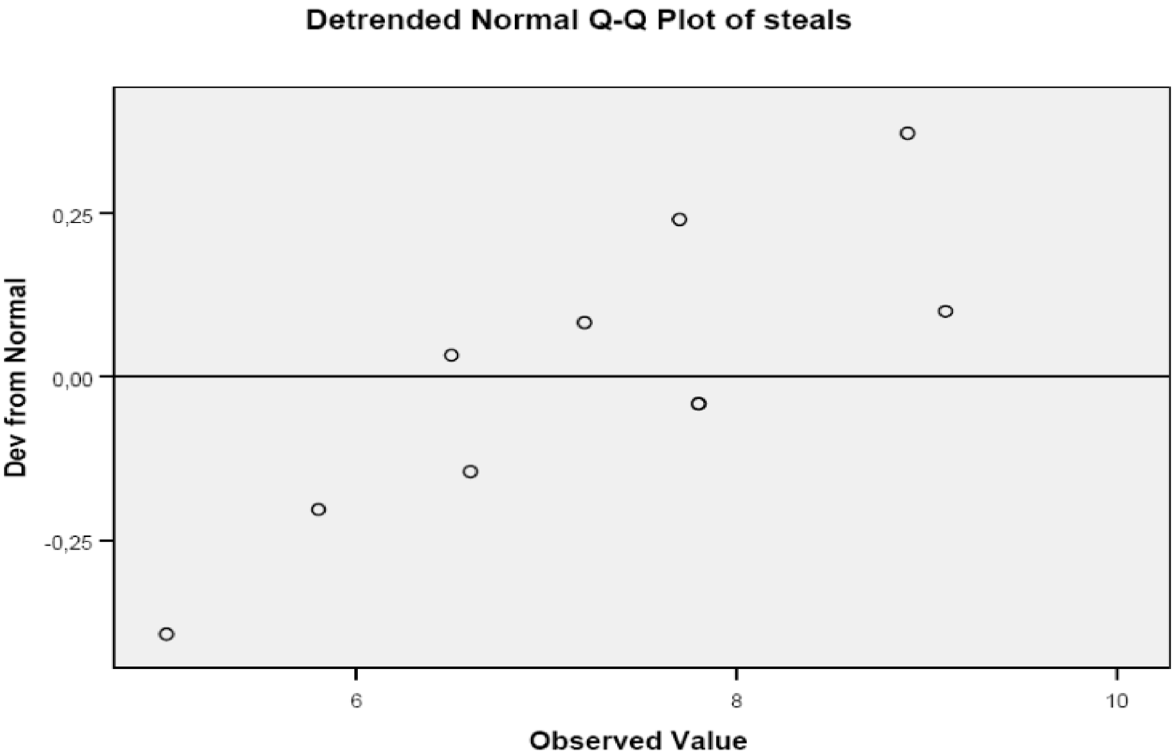
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,843 > 0,05

Άρα αποδεχόμαστε την H_0. Συνεπώς, η μεταβλητή steals για τη σεζόν 2010-2011 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 15



Σχήμα 6. 16

6.2.5 Έλεγχος κανονικότητας για τα blocks των σεζόν

Για τη σεζόν 2009-2010 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Blocks	,159	10	,200(*)	,953	10	,706

Πίνακας 6. 11

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

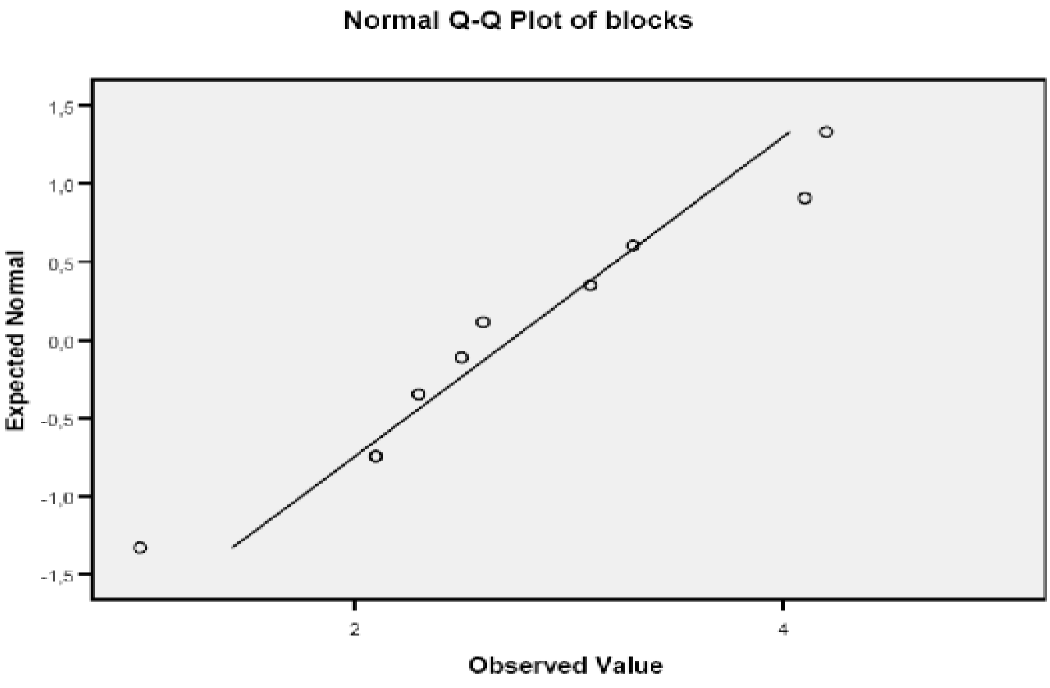
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

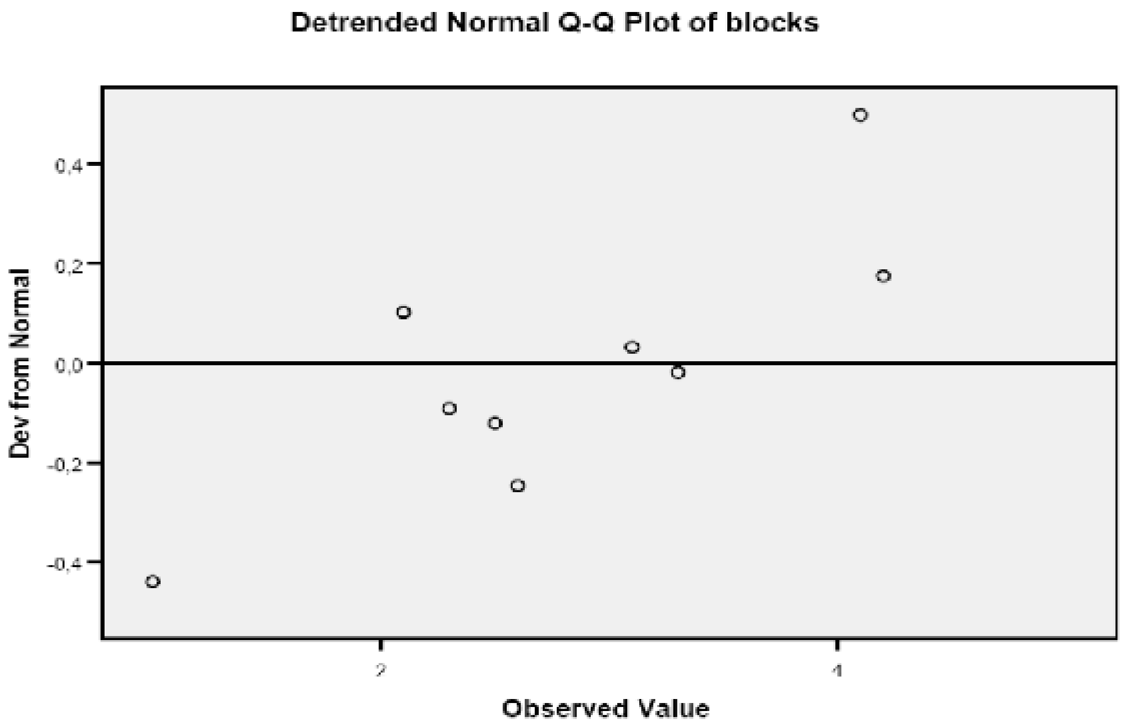
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,706 > 0,05

Άρα αποδεχόμαστε την H_0. Επομένως, η μεταβλητή blocks για τη σεζόν 2009-2010 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 17



Σχήμα 6. 18

Επίσης για τη σεζόν 2010-2011 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Blocks	,182	10	,200(*)	,918	10	,343

Πίνακας 6. 12

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

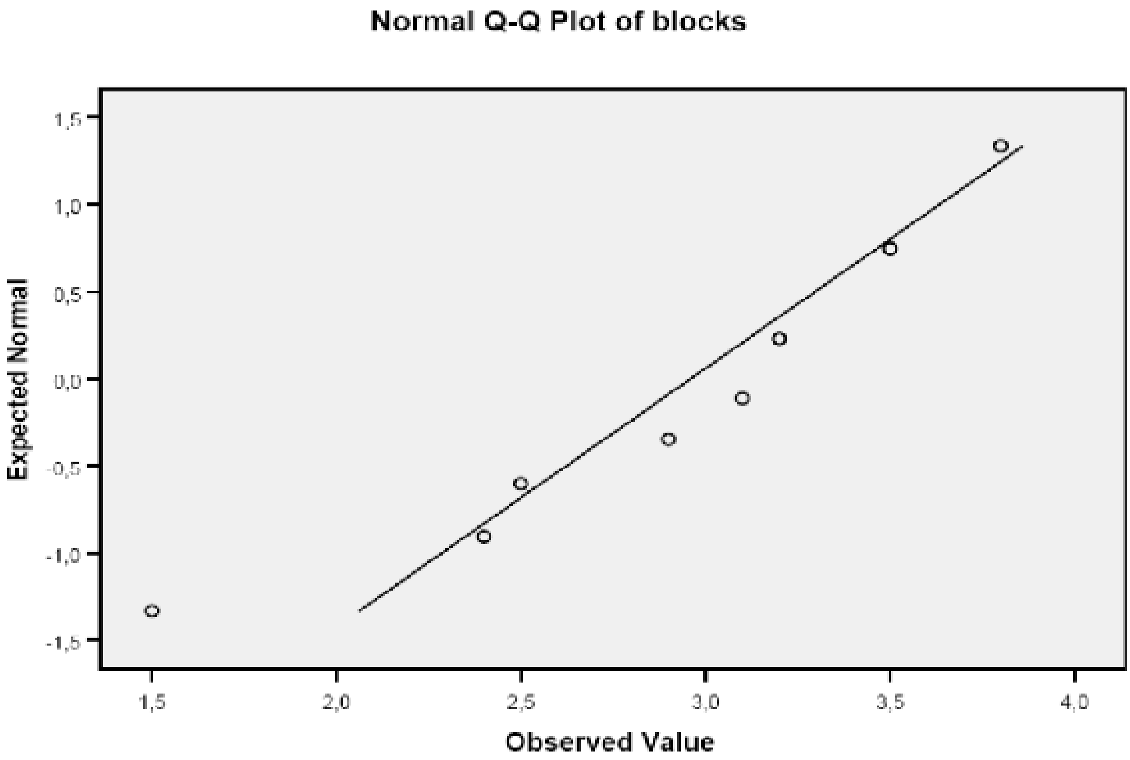
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

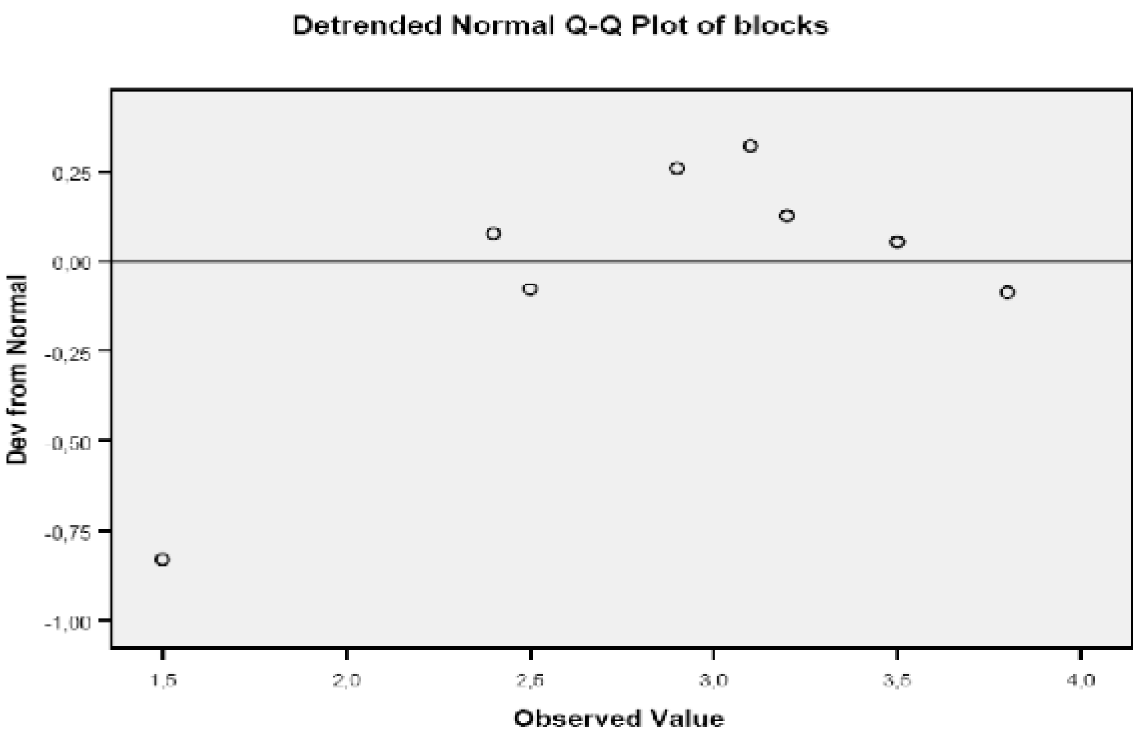
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,343 > 0,05

Άρα αποδεχόμαστε την H_0. Συνεπώς, η μεταβλητή blocks για τη σεζόν 2010-2011 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 19



Σχήμα 6. 20

6.2.5 Έλεγχος κανονικότητας για τα fouls των σεζόν

Για τη σεζόν 2009-2010 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Fouls	,226	10	,157	,911	10	,286

Πίνακας 6. 13

a Lilliefors Significance Correction

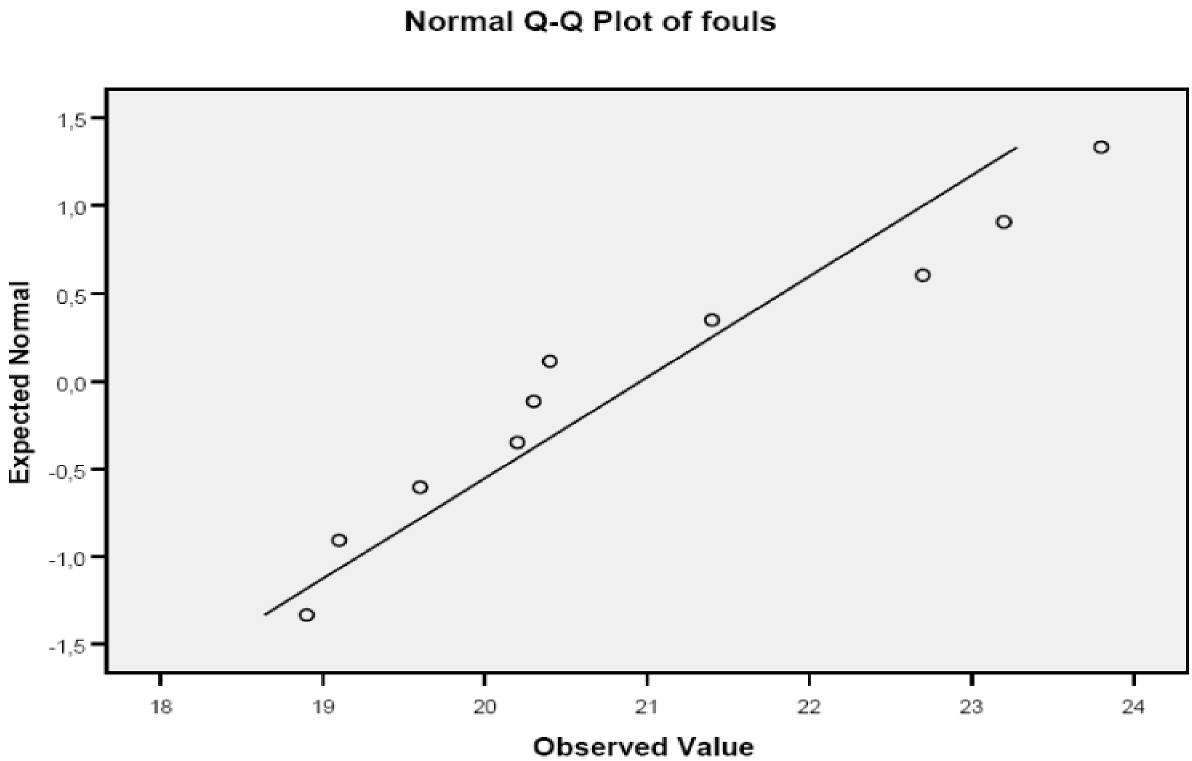
Kolmogorov-Smirnov:

$sig._1$ = 0,157 > 0,05

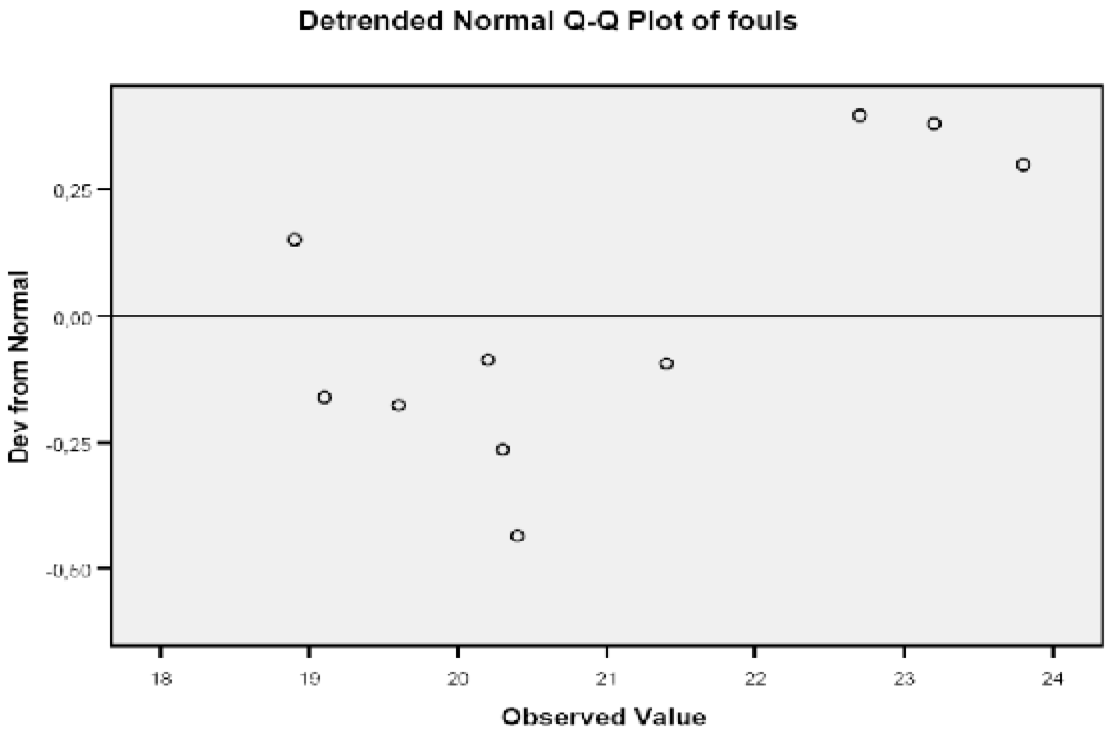
Shapiro-Wilk:

$sig._1$ = 0,286 > 0,05

Άρα αποδεχόμαστε την H_0. Συνεπώς, η μεταβλητή fouls για τη σεζόν 2009-2010 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 21



Σχήμα 6. 22

Επίσης για τη σεζόν 2010-2011 έχουμε:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Fouls	,144	10	,200(*)	,971	10	,902

Πίνακας 6. 14

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

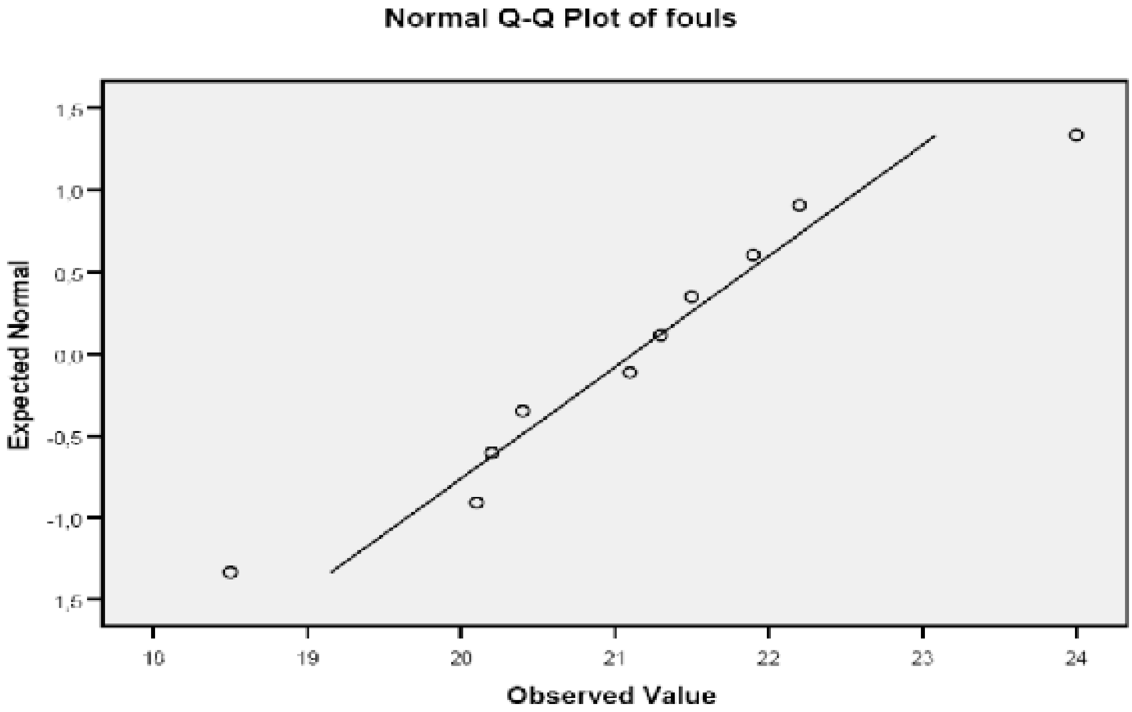
<u>Kolmogorov-Smirnov:</u>

$sig._1$ = 0,200 > 0,05

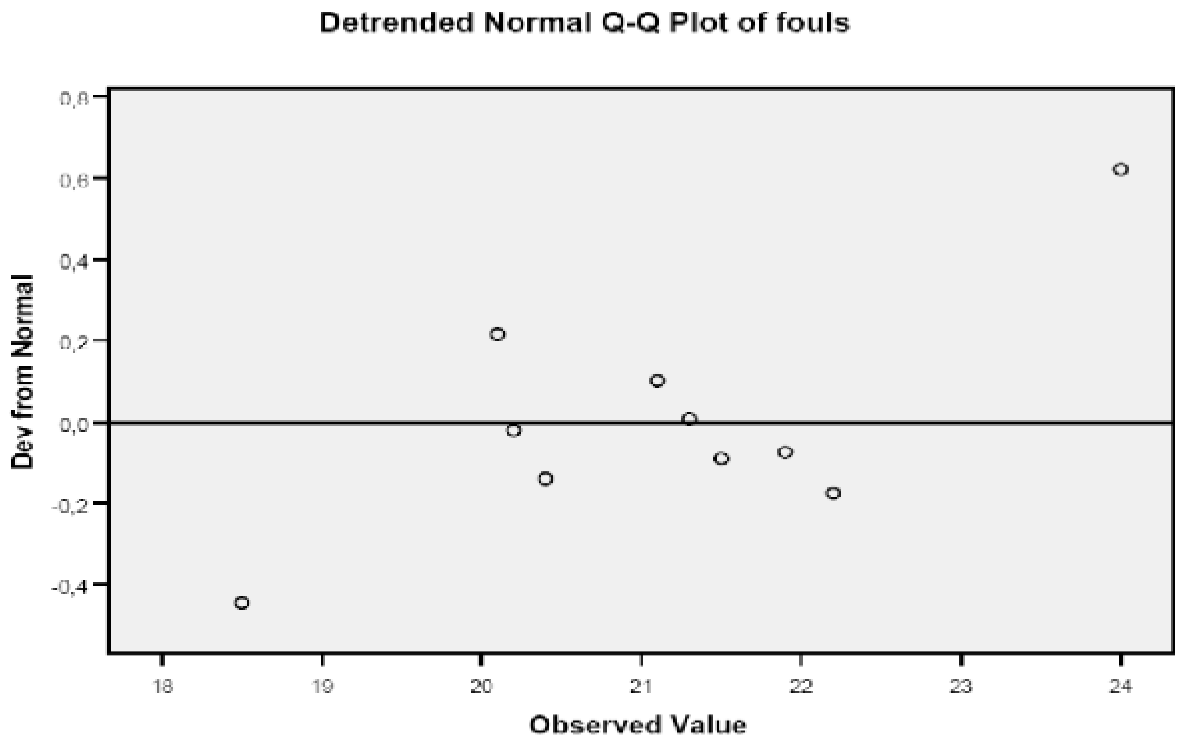
<u>Shapiro-Wilk:</u>

$sig._1$ = 0,902 > 0,05

Άρα αποδεχόμαστε την H_0. Συνεπώς, η μεταβλητή fouls για τη σεζόν 2010-2011 είναι κανονικά κατανεμημένη.



Σχήμα 6. 23

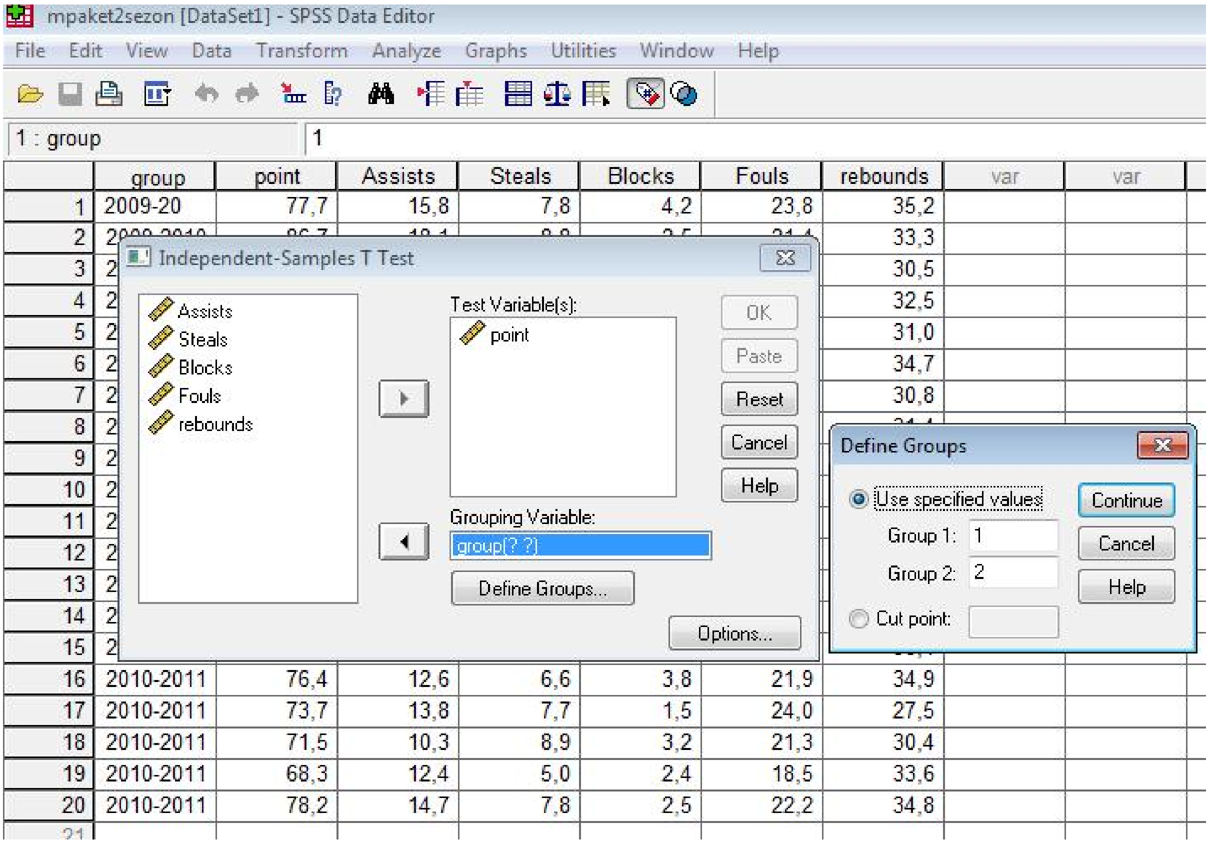


Σχήμα 6. 24

6.3 Έλεγχος υποθέσεως για τη μέση τιμή

Από τον έλεγχο κανονικότητας που κάναμε καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως οι πέντε από τις μεταβλητές μας είναι κανονικά κατανεμημένες. Επομένως, μόνο σε αυτές μπορούμε να κάνουμε έλεγχο υποθέσεων για τη μέση τιμή τους.

Στο spss ο έλεγχος υποθέσεων θα γίνει ως εξής :
Από το μενού **ANALYZE → COMPARE MEANS →INDEPENDENT – SAMPLE T TEST** έχουμε την παρακάτω εικόνα .

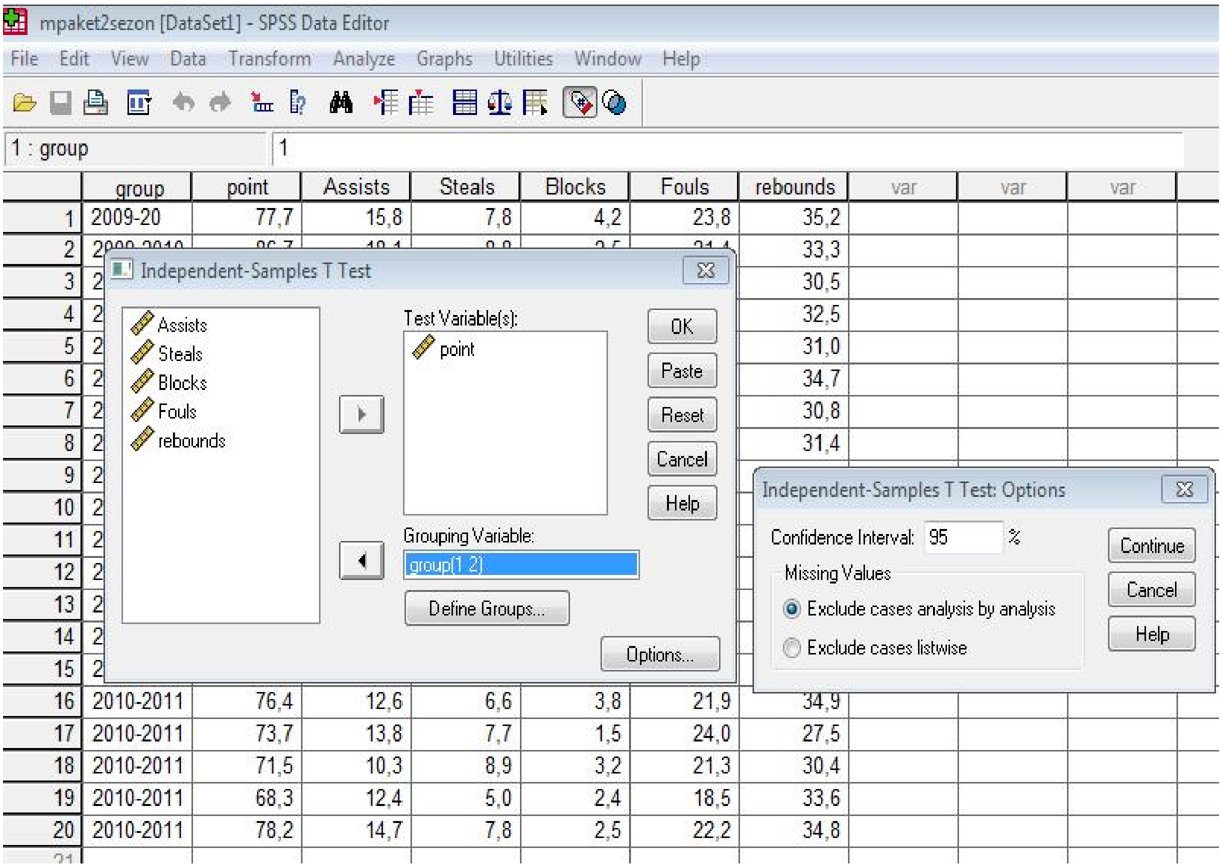


Εικόνα 6. 3

Διαλέγουμε από το παράθυρο αριστερά τη μεταβλητή που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο και τη μεταφέρουμε στο παράθυρο **test variable**.

Στο παράθυρο **GROUPING VARIABLE** βάζουμε τη μεταβλητή **GROUP** και στη συνέχεια πατάμε στην επιλογή **DIFINE GROUPS.** Στην επιλογή **USED SPECIFIED VALUES** και στις θέσεις **GROUP 1** και **GROUP 2** θα βάλουμε τους ανάλογους κωδικούς που χρησιμοποιήσαμε και στην εισαγωγή δεδομένων.

Στην επιλογή **OPTIONS** προσδιορίζουμε το επίπεδο σημαντικότητας του διαστήματος εμπιστοσύνης που θα κατασκευαστεί, όπως μας δείχνει η παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 6. 4

6.3.1 Έλεγχος υποθέσεως για τη μέση τιμή των points των σεζόν

H_0: $\mu_1 = \mu_2$
Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των points της σεζόν 2010-2011.

Vs

H_1: $\mu_1 > \mu_2$
Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή των points της σεζόν 2010-2011.

Independent Samples Test

Point	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	T	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	,018	,895	,308	18	,762	,6100	1,9833	-3,5569	4,7769
Equal variances not assumed			,308	17,225	,762	,6100	1,9833	-3,5703	4,7903

Πίνακας 6. 15

Group Statistics

	group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Point	2009-2010	10	76,200	4,8826	1,5440
	2010-2011	10	75,590	3,9366	1,2449

Πίνακας 6. 16

Θα κάνουμε έλεγχο διασπορών :
H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ οι διασπορές είναι ίσες.
Vs
H_1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ οι διασπορές είναι άνισες.

Levene’s test P = 0,895 > α = 0,05

Άρα αποδεχόμαστε την H_0.

Δηλαδή οι διακυμάνσεις είναι ίσες (συνεχίζουμε να εργαζόμαστε με τα δεδομένα της πρώτης γραμμής του πίνακα Independent Samples Test).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ελέγξουμε αν οι μέσοι ικανοποιούν την H_1, δηλαδή:

mean(s_1): 76,200 > mean(s_2): 75,590.

Επομένως, οι μέσοι ικανοποιούν την H_1 και έχουμε:

$p\_value^* = \frac{p\_value}{2} = \frac{0{,}762}{2} = 0{,}381$.

Συγκρίνω την καινούρια p_value με το επίπεδο σημαντικότητας α. Άρα θα έχουμε:

p_value = 0,381 > 0,05. Επομένως, αποδεχόμαστε την H_0.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ελέγξουμε αν:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των points της σεζόν 2010-2011.

Vs

H_1: $\mu_1 < \mu_2$

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι μικρότερη από τη μέση τιμή των points της σεζόν 2010-2011.

Ελέγχουμε αν οι μέσοι ικανοποιούν την H_1, δηλαδή:

mean(s_1): 76,200 > mean(s_2): 75,590.

Επομένως, οι μέσοι δεν ικανοποιούν την H_1 και έχουμε :

$p\_value^* = 1 - \frac{p\_value}{2} = 1 - \frac{0{,}762}{2} = 0{,}619$.

Συγκρίνω την καινούρια p_value με το επίπεδο σημαντικότητας α και έχουμε:

p_value = 0,619 > 0,05. Επομένως, αποδεχόμαστε την H_0.

Βλέπουμε ότι και οι δύο μονόπλευροι έλεγχοι μας έδειξαν αποδοχή της H_0, δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή των points των ομάδων για τη σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των points των ομάδων για τη σεζόν 2010-2011.

6.3.2 Έλεγχος υποθέσεως για τη μέση τιμή των rebounds των σεζόν

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Η μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2010-2011.

Vs
$H_1: \mu_1 > \mu_2$
Η μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2009-2010 είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2010-2011.

Group Statistics

	group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Rebounds	2009-2010	10	32,190	1,6763	,5301
	2010-2011	10	33,770	3,1882	1,0082

Πίνακας 6. 17

Independent Samples Test

Rebound	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	T	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	2,238	,152	-1,387	18	,182	-1,5800	1,1391	-3,9731	,8131
Equal variances not assumed			-1,387	13,623	,188	-1,5800	1,1391	-4,0294	,8694

Πίνακας 6. 18

Θα κάνουμε έλεγχο διασπορών:
H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (οι διασπορές είναι ίσες)
Vs
H_1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (οι διασπορές είναι άνισες)

Levene's test P = 0,152 > α = 0,05
Άρα αποδεχόμαστε την H_0.

Δηλαδή οι διακυμάνσεις είναι ίσες (συνεχίζουμε να εργαζόμαστε με τα δεδομένα της πρώτης γραμμής του πίνακα Independent Samples Test).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ελέγξουμε αν οι μέσοι ικανοποιούν την H_1, δηλαδή:
mean(s_1): 32,190 < mean(s_2): 33,770.
Επομένως, οι μέσοι ικανοποιούν την H_1 και έχουμε:
p_value* = $\frac{p\_value}{2} = \frac{0,182}{2}$ = 0,091.

Συγκρίνω την καινούρια p_value με το επίπεδο σημαντικότητας α. Άρα θα έχουμε:
p_value = 0,091 > 0,05. Επομένως, αποδεχόμαστε την H_0.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ελέγξουμε αν:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Η μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2010-2011.
Vs
H_1: $\mu_1 > \mu_2$
Η μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2009-2010 είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2010-2011.

Ελέγχουμε αν οι μέσοι ικανοποιούν την H_1, δηλαδή:
mean(s_1): 32,190 < mean(s_2): 33,770.

Επομένως, οι μέσοι δεν ικανοποιούν την H_1 και έχουμε:
p_value* = 1 - $\frac{p\_value}{2}$ = 1 - $\frac{0,182}{2}$ = 1 - 0,091 = 0,909

Συγκρίνουμε την καινούρια p_value με το επίπεδο σημαντικότητας α. Άρα θα έχουμε:
p_value = 0,909 > 0,05. Επομένως, αποδεχόμαστε την H_0.

Βλέπουμε ότι και οι δύο μονόπλευροι έλεγχοι μας έδειξαν αποδοχή της H_0, δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των rebounds της σεζόν 2010-2011.

6.3.3 Έλεγχος υποθέσεως για τη μέση τιμή των assists των σεζόν

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Η μέση τιμή των assists της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των assists της σεζόν 2010-2011.

Vs

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Η μέση τιμή των assists της σεζόν 2009-2010 δεν είναι ίση με τη μέση τιμή των assists της σεζόν 2010-2011.

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
								95% Confidence Interval of the Difference	
Assists	F	Sig.	t	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Equal variances assumed Equal	,630	,438	-,143	18	,888	-,1400	,9788	-2,1965	1,9165
variances not assumed			-,143	16,470	,888	-,1400	,9788	-2,2102	1,9302

Πίνακας 6. 19

Group Statistics

	Group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Assists	2009-2010	10	13,880	2,5001	,7906
	2010-2011	10	14,020	1,8250	,5771

Πίνακας 6. 20

Θα κάνουμε έλεγχο διασπορών:
H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (Οι διασπορές είναι ίσες)
Vs
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (Οι διασπορές είναι άνισες)

Levene's test p= 0,438 > α = 0,05
Άρα, αποδεχόμαστε την H_0.

Δηλαδή, οι διακυμάνσεις είναι ίσες (επιλέγουμε και πάλι τα δεδομένα της πρώτης γραμμής από τον πίνακα). Οπότε:

Συγκρίνουμε το p-value = 0,888 με το επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05 και έχουμε:
p-value : 0,888 > α : 0,05.

Συνεπώς αποδεχόμαστε την H_0, δηλαδή η μέση τιμή των assists των ομάδων για τη σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των assists των ομάδων για τη σεζόν 2010-2011.

6.3.4 Έλεγχος υποθέσεως για τη μέση τιμή των blocks των σεζόν

H_0: $\mu_1 = \mu_2$
Η μέση τιμή των blocks της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των blocks της σεζόν 2010-2011.
Vs
H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
Η μέση τιμή των blocks της σεζόν 2009-2010 δεν είναι ίση με τη μέση τιμή των blocks της σεζόν 2010-2011.

Group Statistics

	group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Blocks	2009-2010	10	2,730	,9742	,3081
	2010-2011	10	2,960	,6736	,2130

Πίνακας 6. 21

Independent Samples Test

Blocks	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
								95% Confidence Interval of the Difference	
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Equal variances assumed	1,279	,273	-,614	18	,547	-,2300	,3745	-1,0169	,5569
Equal variances not assumed			-,614	16,005	,548	-,2300	,3745	-1,0240	,5640

Πίνακας 6. 22

Θα κάνουμε έλεγχο διασπορών:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (Οι διασπορές είναι ίσες)

Vs

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (Οι διασπορές είναι άνισες)

Levene’s test $p= 0{,}273 > \alpha = 0{,}05$

Άρα αποδεχόμαστε την H_0.

Δηλαδή οι διακυμάνσεις είναι ίσες (επιλέγουμε και πάλι τα δεδομένα της πρώτης γραμμής από τον πίνακα). Οπότε:

Συγκρίνουμε το p-value = 0,547 με το επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05 και έχουμε:

p-value: 0,547 > α: 0,05.

Συνεπώς, αποδεχόμαστε την H_0, δηλαδή η μέση τιμή των blocks των ομάδων για τη σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των blocks των ομάδων για τη σεζόν 2010-2011.

6.3.5 Έλεγχος υποθέσεως για τη μέση τιμή των fouls των σεζόν

H_0: $\mu_1 = \mu_2$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των fouls της σεζόν 2010-2011.
Vs
H_1: $\mu_1 > \mu_2$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή των fouls της σεζόν 2010-2011.

Group Statistics

	group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Fouls	2009-2010	10	20,960	1,7379	,5496
	2010-2011	10	21,120	1,4726	,4657

Πίνακας 6. 23

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
								95% Confidence Interval of the Difference	
Fouls	F	Sig.	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Equal variances assumed	,962	,340	-,222	18	,827	-,1600	,7203	-1,6734	1,3534
Equal variances not assumed			-,222	17,527	,827	-,1600	,7203	-1,6763	1,3563

Πίνακας 6. 24

Θα κάνουμε έλεγχο διασπορών:
H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (οι διασπορές είναι ίσες)
Vs
H_1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (οι διασπορές είναι άνισες)

Levene's test P = 0,340 > α = 0,05
Άρα αποδεχόμαστε την H_0.

Δηλαδή οι διακυμάνσεις είναι ίσες (συνεχίζουμε να εργαζόμαστε με τα δεδομένα της πρώτης γραμμής του πίνακα Independent Samples Test).
Πρέπει να ελέγξουμε αν οι μέσοι ικανοποιούν την H_1, δηλαδή:
mean(s_1) : 20,960 < mean(s_2): 21,120
Επομένως, οι μέσοι δεν ικανοποιούν την H_1 και έχουμε:
p_value* = $1 - \frac{p\_value}{2} = 1 - \frac{0{,}827}{2}$ =0,5865.

Συγκρίνουμε την καινούρια p_value με το επίπεδο σημαντικότητας α. Άρα θα έχουμε:
p_value = 0,5865 > 0,05. Επομένως, αποδεχόμαστε την H_0.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ελέγξουμε αν:
H_0: $\mu_1 = \mu_2$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των fouls της σεζόν 2010-2011.
Vs
H_1: $\mu_1 < \mu_2$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι μικρότερη από τη μέση τιμή των fouls της σεζόν 2010-2011.

Ελέγχουμε αν οι μέσοι ικανοποιούν την H_1, δηλαδή:
mean(s_1): 20,960 < mean(s_2): 21,120.

Επομένως οι μέσοι ικανοποιούν την H_1 και έχουμε:
p_value* = $\frac{p\_value}{2} = \frac{0{,}827}{2}$ = 0,4135.
Συγκρίνουμε την καινούρια p_value με το επίπεδο σημαντικότητας α και έχουμε:
p_value = 0,4135 > 0,05 Επομένως αποδεχόμαστε την H_0.

Βλέπουμε ότι και οι δύο μονόπλευροι έλεγχοι μας έδειξαν αποδοχή της H_0, δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή των fouls των ομάδων για τη σεζόν 2009-2010 είναι ίση με τη μέση τιμή των fouls των ομάδων για τη σεζόν 2010-2011.

6.4 Έλεγχος υποθέσεως για τη μέση τιμή των μεταβλητών points και fouls με μια συγκεκριμένη τιμή

Α) Για τη μεταβλητή points έχουμε:

1. Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010. Έτσι έχουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

H_0: $\mu_1 = 80$
Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με 80.

Vs

H_1: $\mu_1 > 80$
Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι μεγαλύτερη από 80.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Points	10	76,200	4,8826	1,5440

Πίνακας 6. 25

One-Sample Test

	Test Value = 80					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Points	-2,461	9	,036	-3,8000	-7,293	-,307

Πίνακας 6. 26

Επειδή πρόκειται για μονόπλευρο έλεγχο ελέγχουμε την τιμή mean. Έτσι έχουμε:
Mean = 76,200 < 80, δηλαδή δεν ικανοποιεί την υπόθεση H_1, οπότε συγκρίνουμε την τιμή 1 - $\frac{sig.t-test}{2}$ με το επίπεδο σημαντικότητας α.

Επομένως

$1 - \frac{\mathrm{sig.t-test}}{2} = 1 - \frac{0,036}{2} = 1 - 0,018 = 0,982 > 0,05 = \alpha$.

Άρα έχουμε αποδοχή της υπόθεσης H_0.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει η υπόθεση H_1: $\mu_1 < 80$.

Άρα έχουμε τον παρακάτω έλεγχο:

H_0: $\mu_1 = 80$

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με 80.

Vs

H_1: $\mu_1 < 80$

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2009-2010 είναι μικρότερη από 80.

Ελέγχουμε την τιμή mean. Έτσι έχουμε:

Mean = 76,200 < 80, δηλαδή ικανοποιείται η υπόθεση H_1, οπότε συγκρίνουμε την τιμή $\frac{sig.t-test}{2}$ με το επίπεδο σημαντικότητας α.

Επομένως

$\frac{sig.t-test}{2} = \frac{0,036}{2} = 0,018 < 0,05$.

Έχουμε απόρριψη της H_0.

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή των points της σεζόν 2009 – 2010 είναι μικρότερη από 80.

2. Έστω τώρα ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη μέση τιμή των points της <u>σεζόν 2010-2011</u>. Έτσι έχουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

H_0: $\mu_1 = 80$

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2010 - 2011 είναι ίση με 80.

Vs

H_1: $\mu_1 > 80$

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2010-2011 είναι μεγαλύτερη από 80.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
points	10	75,590	3,9366	1,2449

Πίνακας 6. 27

One-Sample Test

	Test Value = 80					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
points	-3,543	9	,006	-4,4100	-7,226	-1,594

Πίνακας 6. 28

Επειδή έχουμε μονόπλευρο έλεγχο ελέγχουμε την τιμή mean. Έτσι έχουμε: Mean = 75,590 < 80, δηλαδή δεν ικανοποιεί την υπόθεση H_1, οπότε συγκρίνουμε την τιμή 1 - $\frac{sig.t-test}{2}$ με το επίπεδο σημαντικότητας α.

Επομένως

1 - $\frac{sig.t-test}{2}$ = 1 – $\frac{0,006}{2}$ = 1 – 0,003 = 0,997 > 0,05 = α.

Άρα έχουμε αποδοχή της υπόθεσης H_0.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει η υπόθεση H_1: μ_1 < 80.

Άρα έχουμε τον παρακάτω έλεγχο:

H_0: μ_1= 80

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2010 - 2011 είναι ίση με 80.

Vs

H_1: μ_1 < 80

Η μέση τιμή των points της σεζόν 2010-2011 είναι μικρότερη από 80.

Ελέγχουμε την τιμή mean. Έτσι έχουμε:

Mean = 75,590 < 80, δηλαδή ικανοποιείται η υπόθεση H_1, οπότε συγκρίνουμε την τιμή $\frac{sig.t-test}{2}$ με το επίπεδο σημαντικότητας α.

Επομένως $\frac{sig.t-test}{2}$ = $\frac{0,006}{2}$ = 0,003 < 0,05.

Έχουμε απόρριψη της H_0.

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή των points της σεζόν 2010 – 2011 είναι μικρότερη από 80.

Β) Για τη μεταβλητή fouls έχουμε:

1. Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009 – 2010. Έχουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

H_0: $\mu_1 = 20$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με 20.

Vs

H_1: $\mu_1 > 20$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι μεγαλύτερη από 20.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
fouls	10	20,960	1,7379	,5496

Πίνακας 6. 29

One-Sample Test

	Test Value = 20					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	T	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Fouls	1,747	9	,115	,9600	-,283	2,203

Πίνακας 6. 30

Επειδή πρόκειται για μονόπλευρο έλεγχο ελέγχουμε την τιμή mean. Έτσι έχουμε:
Mean = 20,960 > 20, δηλαδή ικανοποιεί την υπόθεση H_1, οπότε συγκρίνουμε την τιμή $\frac{sig.t-test}{2}$ με το επίπεδο σημαντικότητας α.
Επομένως $\frac{sig.t-test}{2} = \frac{0,115}{2} = 0,0575 > 0,05 = \alpha$.
Άρα έχουμε αποδοχή της υπόθεσης H_0.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει η υπόθεση H_1: $\mu_1 < 20$.
Άρα έχουμε τον παρακάτω έλεγχο:
H_0: $\mu_1 = 20$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι ίση με 20.
Vs
H_1: $\mu_1 < 20$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009-2010 είναι μικρότερη από 20.

Ελέγχουμε την τιμή mean. Έτσι έχουμε:
Mean = 20,960 > 20, δηλαδή δεν ικανοποιείται η υπόθεση H_1, οπότε συγκρίνουμε την τιμή 1 - $\frac{sig.t-test}{2}$ με το επίπεδο σημαντικότητας α.
Επομένως 1 - $\frac{sig.t-test}{2} = 1 - \frac{0,115}{2} = 1 - 0,0575 = 0,9425 > 0,05$.
Έχουμε αποδοχή της H_0.
Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2009 - 2010 είναι 20.

2. Έστω τώρα ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη μέση τιμή των fouls της <u>σεζόν 2010 – 2011</u>. Έχουμε τις παρακάτω υποθέσεις :

H_0: $\mu_1 = 20$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2010 - 2011 είναι ίση με 20.

Vs

H_1: $\mu_1 > 20$
Η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2010 -2011 είναι μεγαλύτερη από 20.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
fouls	10	21,120	1,4726	,4657

Πίνακας 6. 31

One-Sample Test

	Test Value = 20					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
fouls	2,405	9	,040	1,1200	,067	2,173

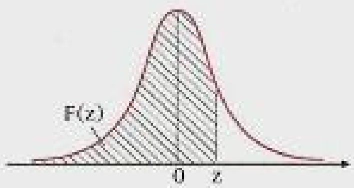
Πίνακας 6. 32

Επειδή έχουμε μονόπλευρο έλεγχο ελέγχουμε την τιμή mean. Έτσι έχουμε:
Mean = 21,120 > 20, δηλαδή ικανοποιεί την υπόθεση H_1, οπότε συγκρίνουμε την τιμή $\frac{sig.t-test}{2}$ με το επίπεδο σημαντικότητας α.
Επομένως $\frac{sig.t-test}{2} = \frac{0,040}{2}$ = 0,02 < 0,05 = α.
Άρα έχουμε απόρριψη της υπόθεσης H_0.

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή των fouls της σεζόν 2010 – 2011 είναι μεγαλύτερη από 20.

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ



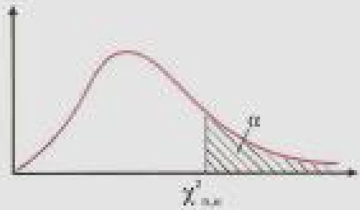
Τιμές της συνάρτησης κατανομής N (0, 1)

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(z)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2

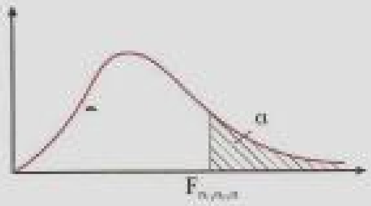


Τιμές $\chi^2_{n,a}$ για τις οποίες:

$$P\{\chi^2 > \chi^2_{n,a}\} = a$$

n	a								
	0,9990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

ΚΑΤΑΝΟΜΗ F



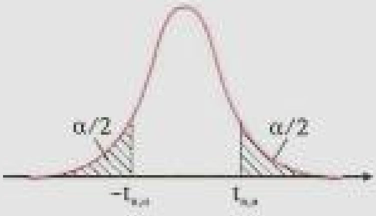
Τιμές $F_{n_1;n_2,a}$ για τις οποίες:

$$P\{F > F_{n_1,n_2,a}\} = \alpha$$

$$\alpha = 0,05$$

n_2	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	12	24
1	161,4	199,5	125,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,77	5,63	
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,30
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22,	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,75	1,52	1,00

ΚΑΤΑΝΟΜΗ t



Τιμές $t_{n,a}$ για τις οποίες:

$$P\{|t| > t_{n,a}\} = a$$

n	α													
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,555	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,042	2,457	2,750	3,659
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,201

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Εφαρμοσμένη Στατιστική στις Επιστήμες Υγείας και Πρόνοιας, Κωνσταντίνος Κουτσογιάννης - Μαρία Noelle-Λαζαρίδου - Αλέξανδρος Λαζαρίδης, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝ 2003
- ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ, ΙΩΑΝΝΗΣ Μ. ΚΑΤΣΙΛΛΗΣ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ GUTENBERG 2006
- ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ Α' ΤΟΜΟΣ, Γεωργίου Κ. Χρήστου, ΕΚΔΟΣΕΙΣ GUTENBERG 2007
- ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, MURRAY R. SPIEGEL, ΕΚΔΟΣΕΙΣ McGRAW-HILL 1975
- ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ, Κων. Βασιλάκης, ΕΚΔΟΣΕΙΣ INTERBOOKS 2003
- ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΤΕΥΧΟΣ 2 ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, ΓΙΑΝΝΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΥΠΩΘΗΤΩ-ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ 2005
- ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ Τόμος ΙΙ Εισαγωγή στις Πιθανότητες και στη Στατιστική Συμπερασμοτολογία, Ι. Πανάρετος - Ε. Ξεκαλάκη, 2000
- ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι, Σ. ΚΟΥΡΟΥΚΛΗΣ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΤΜΗΜΑ ΕΚΤΥΠΩΣΕΩΝ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ 2002
- ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ, ΙΩΑΝΝΗΣ Μ. ΚΑΤΣΙΛΛΗΣ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ GUTENBERG 2004
- ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ Τόμος 1 (Περιγραφική Στατιστική), Ι. ΠΑΝΑΡΕΤΟΥ - Ε. ΞΕΚΑΛΑΚΗ, 2003
- ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, ΛΕΥΤΕΡΗΣ Ι. ΘΑΛΑΣΣΙΝΟΣ - ΘΕΟΔΩΡΟΣ Β. ΣΤΑΜΑΤΟΠΟΥΛΟΣ - ΧΑΡΙΛΑΟΣ Φ. ΧΑΡΙΣΗΣ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ 1996
- ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, Αναστάσιος Β. Κάτος, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ 1986
- ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, Δ. Π. ΨΩΙΝΟΣ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ 1999
- ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Περιγραφική και Επαγωγική, Δημήτρης Λ. Καραγεώργος, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Σαββάλας 2001
- ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, ΠΕΤΡΟΣ Α. ΚΙΟΧΟΣ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ INTERBOOKS 1993

Επίσης, για την πραγματοποίηση της εργασίας χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τις εξής ιστοσελίδες:

- ftp://filer.soc.uoc.gr/incoming/stamatakis/%D3%D4%C1%CF%202/confidence%20intervals.pdf
- http://androulakis.bma.upatras.gr/mediawiki/index.php/%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%83%CF%84%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1_%CE%B5%CE%BC%CF%80%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%83%CF%8D%CE%BD%CE%B7%CF%82_%CE%B3%CE%B9%CE%B1_%CF%84%CE%B7_%CE%B4%CE%B9%CE%B1%CE%BA%CF%8D%CE%BC%CE%B1%CE%BD%CF%83%CE%B7
- http://www.stat-athens.aueb.gr/~jpan/statistiki-skepsi-II/chapter19.pdf
- http://www.unipi.gr/faculty/mkoutras/StatII/StatII_snmeiwseis.pdf
- http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/CivilEngineer/hypothesis.pdf
- http://diogenis.ceid.upatras.gr/~smyrnios/07-Chap07b-X2-t-F%20distributions.pdf
- http://www.hoopsstats.com/basketball/fantasy/eurobasketball/euroleague/teams/stats/11/rkg-1-1