ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Πτυχιακή εργασία

Θέμα:

«Η θεωρία παιγνίων ως παράγοντας δημιουργίας στρατηγικών σε θέματα Διοίκηση – Οικονομίας

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΔΟΥΚΑ ΕΙΡΗΝΗ – ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ

ΕΙΣΗΓΗΣΗ:

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ, 2013

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Ευχαριστίες iv

Πρόλογος 1

1° Κεφάλαιο

Οι Κυριότεροι θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων

1.1 Ιστορική Αναδρομή 3

1.2 Παρουσίαση των κυριότερων θεμελιωτών της θεωρίας παιγνίων 4

1.2.1 JOHN VON NEUMMAN 7

1.2.2 JOHN NASH 12

1.2.3 Oskar Morgenstern 14

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Τα στοιχεία της θεωρίας των παιγνίων

2.1 Παρουσίαση των στρατηγικών των παιγνίων και των πληροφοριακών συνόλων 16

2.1.1 Καθαρές και μικτές στρατηγικές 16

2.1.2 Η κανονική μορφή, η εκτεταμένη μορφή και το πληροφοριακό σύνολο 18

2.2 Δύο έννοιες λύσης για στατικά παίγνια 24

2.2.1 Λυμένα παίγνια και στρατηγικές ισορροπίας 24

2.2.2 Λύση Minimax (ή Λύση ελαχιστοποίησης της μέγιστης ζημίας) του John von Neumann (περίπου 1928) 27

2.2.3Ισορροπία John Nash (περίπου 1949-1950) 33

2.3 Λογική κυριαρχίας 36

2.3.1 Αυστηρή και ασθενής κυριαρχία 36

2.3.2 Βαθμοί κοινής γνώσης του εργαλειακού ορθολογισμού 43

2.4 Ισορροπία NASH 46

2.4.1 Η υπέροχη ιδέα του John Nash 46
2.4.2 Ευθυγραμμισμένες με Συνέπεια Προβλέψεις (ΕΣΠ) Η κρυμμένη Αρχή της Ευθυγραμμισμένες με Συνέπεια Προβλέψεις (ορισμός) 47
2.5 Ισορροπία NASH σε μεικτές στρατηγικές 52
2.5.1 Εύρος και εύρεση Ισορροπιών Nash σε Μικτές Στρατηγικές 52

3° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η θεωρία παιγνίων στην πράξη

3.1 Παραδείγματα χρήσης της Θεωρίας Παιγνίων στην καθημερινότητα και στην οικονομία. 61
3.1.1 Το δίλημμα των φυλακισμένων 61
3.1.2 Παραδείγματα από την καθημερινή ζωή 62
3.1.3 Παραδείγματα από την οικονομία 63
3.1.4 Άλλα παραδείγματα 64
3.1.5 Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων 65

Βιβλιογραφία 67

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Θεωρία Παιγνίων μελετά το πώς λαμβάνονται οι αποφάσεις από αλληλεξαρτώμενες μονάδες λήψης αποφάσεων όταν υφίσταται σύγκρουση συμφερόντων. Οι μονάδες μπορεί να είναι οικονομικές, κοινωνικές, πολιτικές, στρατιωτικές, κλπ. Δηλαδή, οι αντίπαλοι μπορεί να είναι όχι μόνο δύο παίκτες σκάκι αλλά και δύο επιχειρήσεις, ένα εργατικό σωματείο και η εργοδοσία, δύο κοινωνικές ομάδες, ο κλέφτης και ο αστυνόμος, δύο δικηγόροι, δύο οδηγοί στο κέντρο της πόλης σε ώρα αιχμής, δύο πολιτικά κόμματα, δύο υποψήφιοι στις εκλογές, δύο υπουργοί εξωτερικών, δύο στρατοί κλπ. Αρκεί ο κάθε παίκτης να επιδιώκει το συμφέρον του δεδομένων των ιδιαιτεροτήτων του (να είναι "ορθολογικός") και να είναι βέβαιος ότι το ίδιο κάνει και ο αντίπαλος του (να είναι και "λειτουργικά ορθολογικός"). Επομένως, ο όρος Θεωρία Παιγνίων είναι ατυχής. Θα δούμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο ότι πιο δόκιμοι όροι θα ήταν Θεωρία Στρατηγικής Σκέψης ή Θεωρία Διαχείρισης της Σύγκρουσης ή ?

Εν πάση περιπτώσει, πρόκειται για συναρπαστικό αναλυτικό όργανο, που όμως δεν οδηγεί πάντα σε οριστικά συμπεράσματα όπως τα Μαθηματικά, παρά το αυστηρά επιστημονικό πλαίσιο ανάπτυξής της: Τα συμπεράσματα εξαρτώνται από το χρησιμοποιούμενο παίγνιο και τη μέθοδο επίλυσής του. Δεν είναι τυχαίο όταν εντοπίζονται ορισμένες ουσιώδεις διαφορές στα εγχειρίδια της Θεωρίας Παιγνίων. Είναι απλώς ανθρωπίνως αδύνατο να προβλεφθούν και να υποδειγματοποιηθούν όλες οι φανερές και κρυφές πτυχές, όλα τα «αν», σε μια σχέση αντιπαράθεσης. Γι' αυτό και ίσως μερικές φορές ο αναγνώστης αναρωτηθεί αν αετό που κάνει η Θεωρία είναι να επαναδιατυπώνονται τα αυτονόητα με γλώσσα τεχνική και ορισμένες φορές μυστικιστική. Η απάντηση είναι ένα ολοκάθαρο Όχι, γιατί η εφαρμογή της Θεωρίας αποκαλύπτει πλευρές μιας αντιπαλότητας, που είναι αδύνατον να συλλάβει από μόνη της η μαθηματική προσέγγιση. Επομένως, η εφαρμογή της Θεωρία Παιγνίων είναι απαραίτητη, αλλά πρέπει να καθοδηγεί και όχι να υποκαθιστά τη μαθηματική ανάλυση.

Προσοχή, αυτή η διαπίστωση δεν αποτελεί μια ακόμη επιβεβαίωση των πρωτείων των Μαθηματικών. Οι καταστάσεις στις οποίες καλείται να δώσει λύση η Θεωρία Παιγνίων είναι τέτοιας φύσης ώστε ούτε τα Μαθηματικά να μπορούν από μόνα τους να προσφέρουν λύση. Ποτέ για παράδειγμα δεν μπορεί να υπάρξει κάποιος αλγόριθμο ς νικηφόρας στρατηγικής στο σκάκι εάν δεν λάβει υπόψη τις δυνατότητες υλοποίησής της από τους παίκτες, και εκεί θα έχει τον λόγο η Θεωρία Παιγνίων. Ή ας πάρουμε το παράδειγμα των πολεμικών παιγνίων (war games) που χρησιμοποιούν οι ένοπλες δυνάμεις. Οι νικηφόρες στρατηγικές που προβλέπουν αυτά τα παίγνια λειτουργούν σαν μηχανές, δηλαδή μπορούν να προσαρμόζονται στα νέα δεδομένα από το πεδίο της μάχης με τον ίδιο τρόπο που μπορεί να προσαρμόζει τα αποτελέσματά της μια υπολογιστική μηχανή στις νέες εντολές. Κανένας όμως αλγόριθμος δεν μπορεί να προβλέψει ότι ο πόλεμος καταστρέφει αυτό το οποίο μπορεί να αναδείξει τις στρατηγικές των παιγνίων σε νικηφόρες, καταστρέφει τη προσαρμοστικότητά τους κατόπιν της δραματικής μείωσης της τροφοδοσίας με νέα δεδομένα. Καμιά μηχανή, επομένως, δεν μπορεί να υποκαταστήσει τη κρίση των αξιωματικών ως παικτών, από το πεδίο της μάχης μέχρι το στρατηγείο. Η ουσία είναι ότι η Θεωρία Παιγνίων και τα Μαθηματικά θα πρέπει να αλληλοσυμπληρώνονται και να μην χρησιμοποιούνται ανταγωνιστικά.

1° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΙ ΚΥΡΙΟΤΕΡΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΤΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

1.1 Ιστορική αναδρομή

- 1838: Ο Γάλλος οικονομολόγος Augustin Cournot ανέλυσε ολιγοπωλιακές καταστάσεις με τρόποπαρόμοιο με τις σύγχρονες μεθόδους της θεωρίαςπαιγνίων (μοντέλο Cournot).
- 1881: Ο Αγγλος οικονομολόγος Francis Edgeworth ασχολήθηκε με την εφαρμογή των μαθηματικών στις κοινωνικές επιστήμες.
- 1913: Ο Γερμανός μαθηματικός Ernest Zermelo απέδειξε ότι το σκάκι έχει λύση από οποιαδήποτε κατάσταση
- 1928: Ο John von Neumann απέδειξε ότι μια σημαντική κατηγορία παιχνιδιών, τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος, έχουν πάντα λύση.
- 1944: Οι John von Neumann και Oskar Morgenstern εξέδωσαν το βιβλίο "Theory of Games & Economic Behavior", όπου όρισαν αξιωματικά την θεωρία της χρησιμότητας (utility theory), ανέλυσαν διεξοδικά τις βέλτιστες λύσεις στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος και εισήγαγαν μια νέα κατηγορία παιχνιδιών, τα συνεργατικάπαιχνίδια (cooperative games).
- 1950: Ο John Nash εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας, η οποία είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη έννοια στη σύγχρονη θεωρία παιγνίων. Με απλά λόγια η ισορροπία Nash σε ένα παιχνίδι είναι μια κατάσταση από την οποία δεν συμφέρει κανέναν παίκτη να ξεφύγει μεμονωμένα.
- 1965 , 1975: Ο Reinhard Selten γενίκευσε τις ιδέες του Nash στα

δυναμικά παιχνίδια, δηλαδή σε παιχνίδια που εξελίσσονται στην πορεία του χρόνου.

- 1967-1968: O John Harsanyi γενίκευσε τις ιδέες του Nash σε παιχνίδια μη-πλήρους πληροφόρησης σχετικά με τις προτιμήσεις και τις αποφάσεις των άλλων παικτών.
- 1994 : Οι Selten και Harsanyi μοιράστηκαν, μαζί με τον John Nash, το βραβείο Nobel στα οικονομικά το 1994.

1.2 Παρουσίαση των Κυριότερων θεμελιωτών της θεωρίας παιγνίων

Η θεωρία παιχνιδιών έχει προκύψει πρόσφατα ως ισχυρός αμφισβητίας στη συμβατική μέθοδο τα οικονομικά. Αν και πολλοί επιφανείς προκάτοχοι που εργάστηκαν στα προβλήματα σε αυτό που μπορεί να κληθεί "θεωρία παιχνιδιών", η θεμελιώδης, επίσημη σύλληψη της θεωρίας παιχνιδιών ως αναπόσπαστο μέρος της οικονομικής θεωρίας οργανώθηκαν αρχικά σε κλασικό του John von Neumann και Oskar Morgenstern , θεωρία των παιχνιδιών και οικονομική συμπεριφορά (1944).

Αποφάσεις τους είναι στρατηγικές αντιδράσεις σε άλλες ενέργειες πρακτόρων ("ζωντανές μεταβλητές"). Ένας πράκτορας βρίσκεται αντιμέτωπος με ένα σύνολο κινήσεων που μπορεί να παίξει και θα διαμορφώσει μια στρατηγική, μια καλύτερη απάντηση στο περιβάλλον του, το οποίο θα παίξει από τις στρατηγικές μπορεί να είναι είτε "καθαρός" (δηλ. παίξτε μια ιδιαίτερη κίνηση) είτε "μικτό" (τυχαίο παιχνίδι). Μια "ισορροπία Nash" θα επιτευχθεί όταν γέννησαν οι ενέργειες κάθε πράκτορα μια αντίδραση από όλους τους άλλους πράκτορες που, στη συνέχεια, γέννησε την ίδια αρχική δράση. Με άλλα λόγια, οι καλύτερες απαντήσεις όλων των φορέων είναι η μια σύμφωνα με την άλλη. John. Το Nash υποστήριξε ότι κάποιο πρέπει να είναι σε θέση να μειώσει όλα τα συνεταιριστικά παιχνίδια σε κάποια μη συνεταιριστική μορφή. Αυτή η θέση είναι αυτό που είναι γνωστό ως "πρόγραμμα Nash". Μέσα στη μη συνεταιριστική λογοτεχνία, μια διάκριση μπορεί επίσης να γίνει μεταξύ των "κανονικών" παιχνιδιών μορφής (στατικών) και των "εκτενών" παιχνιδιών μορφής (δυναμικών).

καθαρών/μικτών στρατηγικών, τα παιχνίδια coalitional καθώς επίσης και axiomatization αναμενόμενη θεωρία χρησιμότητας , η οποία ήταν τόσο χρήσιμη για τα οικονομικά κάτω από την αβεβαιότητα. Υιοθέτησαν την έννοια λύσης "maximin" που παρήχθη νωρίτερα από John von Neumann (1928) για να λύσουν τα απλά στρατηγικά, μηδενικά κανονικά παιχνίδια . Το 1950, John To Nash εισήγαγε την έννοια μιας "Nash ισορροπίας" (NE), η οποία έγινε η έννοια οργάνωσης κάτω από τη θεωρία παιχνιδιών - ακόμα κι αν η έννοια τέντωσε πραγματικά μέχρι Cournot (1838). Το Nash ακολούθησε αυτό επάνω το 1951 με την έννοια μιας "λύσης διαπραγμάτευσης Nash" (NBS) για τα παιχνίδια coalitional. εγχειρίδιο στη θεωρία παιχνιδιών και, σε το, τυποποίησαν την ιδέα της επαναλήφθείης αποβολής της εξουσιασμένης μεθόδου στρατηγικών IEDS) για τα στρατηγικά κανονικά παιχνίδια και εισήγαγαν την έννοια του "επαναλαμβανόμενου παιχνιδιού" (στατικά παιχνίδια που παίζονται αρκετές φορές). Ο H.W. Kuhn (1953) εισήγαγε τα εκτενή παιχνίδια με τις "ατελείς πληροφορίες" (δηλ. όπου κάποιος δεν ξέρει ποιες κινήσεις έχουν παιχτεί ήδη από άλλους παίκτες). Ο William Vickrey (1961) παρείχε την πρώτη διαμόρφωση "των δημοπρασιών". Ο Reinhard Selten (1965) ανέπτυξε την έννοια μιας "τέλειας ισορροπίας Subgame" (SPE) (δηλ. αποβολή από την οπίσθια επαγωγή) ως καθαρισμένη λύση για τα εκτενή παιχνίδια μορφής.

Ο John C. Harsanyi (1967-8) ανέπτυξε την έννοια μιας "Μπεϋζιανής ισορροπίας Nash" (BNE) για τα Μπεϋζιανά παιχνίδια (δηλ. παιχνίδια με τις ελλιπείς πληροφορίες - όπου υπάρχουν μερικές περιβάλλουσες κινήσεις αβεβαιότητας ή πού "η φύση" παίζει επίσης.) Στο coalitional (οι συνεταιριστικοί) περαιτέρω καθαρισμοί παιχνιδιών εμφανίστηκαν επίσησ. Ö Lloyd Shapley (1953) εισήγαγε την έννοια της "αξίας Shapley" και του "πυρήνα" (που ήταν συλλήφθείων αρχικά από F.Y. Edgeworth (1881)) ως λύσεις στα παιχνίδια Coalitional. Καθ[1] όλη τη διάρκεια της πρόωρης δεκαετίας του '60, ο Robert J. Aumann και ο Martin Shubik άρχισε να εφαρμόζει τη συνεταιριστική θεωρία παιχνιδιών εκτενώς σε όλα τα οικονομικά (π.χ βιομηχανική οργάνωση, γενική ισορροπία, νομισματική θεωρία, κ.λπ.), και, στη διαδικασία, πήγε για να εφευρεθούν διάφορες έννοιες λύσης για τα παιχνίδια coalitional (π.χ. καθορισμένη, ισχυρή ισορροπία διαπραγμάτευσης), τα "μεγάλα παιχνίδια" με τους άπειρους παίκτες και τις πρόωρες δηλώσεις των "λαϊκών θεωρημάτων" (έννοιες λύσης για τα επαναλαμβανόμενα παιχνίδια).

Ο David Schmeidier (1969) ανέπτυξε τη λύση "πυρηνίσκων" για τα παιχνίδια coalitionaî. Οι περαιτέρω εξελίξεις προέκυψαν στη δεκαετία του '70 John C. Το Harsanyi (1973) παρείχε μια εντυπωσιακά οξυδερκή νέα ερμηνεία της έννοιας μιας "μικτής στρατηγικής". Ο Robert J. Aumann καθορισμένη "συσχετισμένη ισορροπία" (1974) για τα Μπεϋζιανά παιχνίδια ενώ Reinhard " Ισορροπία χεριών δόνησης" Selten (1975) εισαχθείσα για τα Μπεϋζιανά παιχνίδια. Οι περαιτέρω ορισμοί ήρθαν: ο Robert J. Aumann (1976) τυπικά καθόρισε την έννοια της "κοινής γνώσης", ανοίγοντας μια πόρτα υδροφράκτη της λογοτεχνίας, ενώ ο B.D. Bernheim και η C.D. Pearce (1984) τυποποίησαν την έννοια "του rationalizability".

Πρόοδοι συνεχιζόμενες γρήγορα: Ο David Kreps και ο Robert Wilson (1982) εισήγαγε την έννοια της "διαδοχικής ισορροπίας" (SEQE) για τα εκτενή παιχνίδια με τις ατελείς πληροφορίες. Ο Ariel Rubinstein

(1982), μετά από μια πρόωρη διορατικότητα από τον Frederik Zeuthen (1930), μετασχημάτισε τη συνεταιριστική λύση διαπραγμάτευσης Nash (NBS) σε ένα μη συνεταιριστικό στρατηγικό εκτενές παιχνίδι της διαδοχικής διαπραγμάτευσης. Οι Elon Kohlberg και Jean- Frairr|ois Mertens (1986) ανέπτυξε την έννοια της "μπροστινής επαγωγής" για τα εκτενή παιχνίδια. Οι Drew Fudenberg and E.S. Maskin (1986) ανέπτυξε ενός από τα διασημότερα "τέλεια λαϊκά θεωρήματα" για τα απείρως επαναλαμβανόμενα παιχνίδια. Τέλος, ο J.C. Harsanyi και ο P. To Selten (1988) ανέπτυξε την ιδέα της "επιλογής ισορροπίας" για οποιοδήποτε τύπο παιχνιδιού ενώ Δ. Fudenberg και Jean To Tiróle (1991) ανέπτυξε τη "Μπεϋζιανή τέλεια ισορροπία" (BPE) για τα εκτενή Μπεϋζιανά παιχνίδια, για να εξηγήσει τέτοια φαινόμενα που είναι συχνά πιθανά το αποτέλεσμα της συνεργασίας ή ανθρώπινο σχέδιο - δηλ. "ιδρύματα" και "συμβάσεις" όπως ο σχηματισμός αγοράς, μηχανισμοί τιμών, κοινωνικοί κανόνες της συμπεριφοράς, των χρημάτων και της πίστωσης, κ.λπ.... Ένας από τους πιο πρόωρους εκθέτες της θεωρίας των εξελικτικών παιχνιδιών ήταν ο Thomas Γ. Schelling (1960 ..1981) που υποστήριξε ότι προφανώς τα "συνεταιριστικά" κοινωνικά ιδρύματα (σε αυτήν την περίπτωση, τακτοποιήσεις στις συγκρούσεις) διατηρούνται κοντά ουσιαστικά από "τις απειλές" της τιμωρίας και της ανταπόδοσης που αυτό έχει ακολουθηθεί ιδιαίτερα στη δεκαετία του '90.

Mirrlees σε 1996, Herbert Simon κέρδισε το Νόμπελ το 1979 για τις έννοιες (π. χ. οριακή ορθολογιστική ικανότητα) που έχουν ενσωματωθεί από τότε στο σώμα (της εξελικτικής) θεωρίας παιχνιδιών.

1.2.1. John Von Neumann (1903-1957)

Ο John Von Neumann είναι ένας από τους πιο διαπρεπείς επιστήμονες του 20^ου^ αιώνα, που είχε ιδιαίτερη σημασία για την οικονομική επιστήμη. Ο νους του ήταν σαν μια λογική υπολογιστική μηχανή από μικρή ηλικία, όταν τότε μπόρεσε να υπολογίσει το γινόμενο δύο οκταψήφιων αριθμών με το μυαλό του. Όπως επίσης και μία καταπληκτική μνήμη. Η ισχυρή προσωπικότητά του φαινόταν από τους πολλούς φίλους και θαυμαστές που είχε. Συχνά ο κόσμος τον σχολίαζε με θαυμασμό και σαν άτομο και σαν επιστήμονα. Γεννήθηκε στις 28 Δεκεμβρίου του 1903 στη Βουδαπέστη της Ουγγαρίας και πέθανε στις 8 Φεβρουαρίου 1957, στην πρωτεύουσα των ΗΠΑ, Ουάσιγκτον. Λαμπρός μαθηματικός, συνθέτης, και διάσημος για την αρχιτεκτονική von Neumann. Αφού τελείωσε τα Πανεπιστήμια της Βουδαπέστης το 1921 και του Βερολίνου το 23, σπούδασε Εφηρμοσμένη Χημεία στο Ελβετικό Ομοσπονδιακό Ινστιτούτο της Τεχνολογίας (1923-25). Πήρε το διδακτορικό του στα μαθηματικά το 1926 από το Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης, που το θέμα του αφορούσε τη θεωρία συνόλων. Η αξιωματικοποίηση της θεωρίας αυτής που επινόησε έχει αφήσει εποχή στο θέμα αυτό, αλλά και ο ορισμός των τακτικών αριθμών, που δημοσίευσε όταν ήταν 20 ετών, έχει γίνει γενικά αποδεκτός.

Έγινε καθηγητής στα Πανεπιστήμια του Βερολίνου. Την εποχή αυτή εργάστηκε κυρίως στην κβαντική φυσική και την θεωρία τελεστών. Προϊόν κυρίως της δουλειάς του ήταν το ότι η κβαντική φυσική και η θεωρία τελεστών μπορούν να θεωρηθούν ως δύο όψεις του ίδιου πράγματος. Ως προς αυτό υπήρξε βασική η διαίσθηση του σε ό,τι αφορά στα διανύσματα: Η γεωμετρία των διανυσμάτων σε έναν απειροδιάστατο Ευκλείδειο χώρο έχει τα ίδια μαθηματικά χαρακτηριστικά με την δομή των καταστάσεων σε ένα κβαντομηχανικό σύστημα.

Το 1930, όταν στην Ευρώπη ξεκινούσε μια σκοτεινή εποχή λόγω του Χίτλερ, προσκλήθηκε για να δημιουργήσει και να διδάξει στο Ίδρυμα Προχωρημένων Σπουδών (IAS) του Princeton από το 1933. Διατήρησε εκεί την έδρα των Μαθηματικών μέχρι το θάνατο του. Χάρις στην εγγύηση του φίλου του οικονομολόγου Oskar Morganstern, οι von

Neumann και Kurt Gôdel έγιναν Αμερικανοί πολίτες και πρόσφεραν τα μέγιστα στην υπόθεση του πολέμου με τους Ναζί. Υπάρχει κι ένα σχετικό ανέκδοτο για τη μέρα που ο Morganstern τους οδήγησε στο γραφείο μετανάστευσης για να δουν οι Αμερικανοί εξεταστές τους αν ήξεραν το Αμερικανικό σύνταγμα και την ιστορία των ΗΠΑ, έτσι ώστε να τους δώσουν την Αμερικανική υπηκοότητα.Ο Morganstern ρώτησε τους δύο επιστήμονες εάν είχαν καμιά ερώτηση που θα μπορούσε να τους απαντήσει. Ο Gôdel του απάντησε ότι δεν είχε καμία ερώτηση αλλά είχε βρει μερικές λογικές ασυνέπειες στο Αμερικανικό σύνταγμα για το οποίο ήθελε να ρωτήσει τους υπαλλήλους του γραφείου μετανάστευσης. Ο Morganstern του σύστησε να μη κάνει ερωτήσεις, μόνο να απαντά στις ερωτήσεις που θα του κάνουν.

Το έργο του

Το 1932 έδωσε μία ακριβή διατύπωση και απόδειξη του Εργοδικού Θεωρήματος της μαθηματικής στατιστικής. Το βιβλίο του Μαθηματική θεμελίωση της Κβαντομηχανικής, που δημοσιεύθηκε το 1932, παραμένει ένα κλασικό έργο πάνω σε αυτό το θέμα. Εν τω μεταξύ ενδιαφέρθηκε για τα 23 προβλήματα που είχε προτείνει το 1900 ο Γερμανός μαθηματικός Hilbert ως πρόκληση για την μαθηματική έρευνα του 20ού αιώνα. Ο von Neumann έλυσε μία ειδική περίπτωση του πέμπτου προβλήματος του Hilbert, την περίπτωση των συμπαγών ομάδων. Στο δεύτερο ήμισυ της δεκαετίας του 1930 το κύριο μέρος των δημοσιεύσεων του, που είχαν εν μέρει γραφεί σε συνεργασία με τον Μαρεϋ, αφορούσαν σε δακτυλίους τελεστών. Σήμερα ονομάζονται Αλγεβρες Neumann.

Αυτές οι έννοιες θα αναφέρονται πιθανότατα επί μακρόν, περισσότερο από ό,τι το υπόλοιπο έργο του. Σήμερα αποτελούν ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία για την μελέτη της κβαντικής φυσικής. Περίπου 20 από τις 150 δημοσιεύσεις του αναφέρονται σε θέματα της φυσικής, ενώ οι υπόλοιπες μοιράζονται σχεδόν στα καθαρά μαθηματικά (κυρίως θεωρία συνόλων, μαθηματική λογική, τοπολογικές ομάδες, θεωρία μέτρου, εργοδική θεωρία, θεωρία τελεστών και συνεχή γεωμετρία) και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά (στατιστική, αριθμητική ανάλυση, σεισμικά κύματα, προβλήματα ροής, υδροδυναμική, αεροδυναμική, βαλλιστική, προβλήματα εκρήξεων, μετεωρολογία και σε δύο μη κλασικές περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών: την θεωρία παιγνίων και τους υπολογιστές). Οι δημοσιεύσεις του παρουσιάζουν μία στροφή από την καθαρή στην εφαρμοσμένη έρευνα περί το 1940, Κατά την διάρκεια του Β' Παγκόσμιου πολέμου ήταν περιζήτητος σύμβουλος στις ένοπλες δυνάμεις αλλά και σε πολιτικές επιτροπές. Οι δύο κυριότερες συμβολές του αφορούσαν στην έκρηξη πυρηνικών καυσίμων και την ανάπτυξη της βόμβας υδρογόνου.

Οι πολιτικές και διοικητικές του αποφάσεις δεν βασίζονταν ωστόσο σε φιλελεύθερες αρχές. Συνέχισε να υποστηρίζει τις δοκιμές ατομικών βομβών και μετά το τέλος του πολέμου. Το μαθηματικό θεμέλιο της Θεωρίας παιγνίων του von Neumann είναι το "θεώρημα minimax", το οποίο διατύπωσε το 1928. Η σύνθεση του και οι εφαρμογές του περιγράφονται στο βιβλίο που έγραψε το 1944 μαζί με τον Morganstern; Θεωρία Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά. Χάρις το βιβλίο αυτό διαδόθηκε ταχύτατα σε όλο τον κόσμο η μαθηματική θεωρία των παιγνίων και οι εφαρμογές της στην οικονομία, στην πολιτική, στη στρατιωτική επιστήμη, στην επιχειρησιακή έρευνα, στις επιχειρήσεις, στη νομοθεσία, στα αθλήματα, στη βιολογία, καθώς και σε διάφορα άλλα επιστημονικά πεδία. Σημαντική υπήρξε επίσης η επίδραση της στη στρατιωτική σκέψη.

Το θεώρημα minimax και η θεωρία των παιγνίων

Το θεώρημα minimax αναφέρει ότι για μία μεγάλη κλάση παιγνίων δύο ατόμων δεν υπάρχει λόγος να γίνεται το παίγνιο. Ο καθένας από τους δύο παίκτες μπορεί να θεωρήσει, για κάθε δυνατή στρατηγική του παιχνιδιού, την μεγίστη ζημιά που μπορεί να υποστεί ακολουθώντας αυτή την στρατηγική και ακολούθως να εκλέξει ως βέλτιστη στρατηγική εκείνη που του ελαχιστοποιεί την μέγιστη ζημία. Εάν ένας παίκτης ακολουθήσει την διαδικασία αυτή, μπορεί να είναι στατιστικά βέβαιος ότι δεν θα χάσει περισσότερα από αυτή την τιμή που λέγεται τιμή minimax. Εφόσον (αναφέρει το θεώρημα) η τιμή minimax ισούται με το αρνητικό της παρόμοια οριζόμενης τιμής, που ο αντίπαλος του μπορεί να εγγυηθεί για τον εαυτό του, το τελικό αποτέλεσμα προσδιορίζεται πλήρως από τους κανόνες του παιγνίου. Η θεωρία των παιγνίων τώρα είναι ένας κλάδος των μαθηματικών, ο οποίος χρησιμοποιείται για την ανάλυση ανταγωνιστικών καταστάσεων που η έκβαση τους εξαρτάται όχι μόνο από τις επιλογές ενός ατόμου —ή και από την τύχη— αλλά και από τις επιλογές των άλλων ατόμων, ή παικτών. Εφόσον η έκβαση ενός παιχνιδιού εξαρτάται από τις ενέργειες και τις αποφάσεις όλων των παικτών, καθένας από αυτούς προσπαθεί να προβλέψει τις επιλογές των υπολοίπων, με σκοπό να καθορίσει την δική του βέλτιστη επιλογή. Το κυρίως αντικείμενο της θεωρίας παιγνίων είναι το πώς θα γίνουν αυτοί οι αλληλεξαρτώμενοι στρατηγικοί υπολογισμοί. Η θεωρία παιγνίων υποδιαιρείται σε πολλούς μεγάλους τομείς. Οι σημαντικότεροι είναι:

- Δύο πρόσωπα εναντίον π προσώπων. Η θεωρία των δύο προσώπων ασχολείται με την βέλτιστη στρατηγική επιλογή δύο ατόμων, ενώ η θεωρία των π προσώπων (π>2) ενδιαφέρεται για τις συμμαχίες (ή συνασπισμούς) που θα μπορούσαν να κάνουν κάποιοι από αυτούς έτσι, ώστε τα μέλη της συμμαχίας να αποκομίσουν τα μέγιστα δυνατά κέρδη.

- Μηδενικό άθροισμα εναντίον μη μηδενικού αθροίσματος. Τα κέρδη κάθε παίκτη προστίθενται στο μηδέν (ή σε κάποιον άλλο σταθερό αριθμό) για κάθε έκβαση (γύρο) του παιχνιδιού. Αυτό συμβαίνει στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος. Στα παιχνίδια μη μηδενικού αθροίσματος τα ποσά αθροίζονται σε κάθε έκβαση και, κατά συνέπεια, η αφετηρία δεν είναι κοινή για όλους τους παίκτες. Στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος ό,τι ποσό κερδίζεται συνολικά τόσο ποσό χάνεται. Κατά συνέπεια το αλγεβρικό άθροισμα των ποσών είναι μηδέν. Αντίθετα, στα παιχνίδια μη μηδενικού αθροίσματος είναι δυνατόν σε κάποιο γύρο να χάσουν ή να κερδίσουν όλοι οι παίκτες (από το απόθεμα του παιχνιδιού).
- Συνεργασία εναντίον μη συνεργασίας. Ως παιχνίδια συνεργασίας χαρακτηρίζονται εκείνα, στα οποία οι παίκτες συνάπτουν συμβάσεις και θεσπίζουν κανονισμούς. Αντίθετα, στα παιχνίδια μη συνεργασίας, μπορεί να επιτρέπεται ή όχι η επικοινωνία μεταξύ των παικτών. Πάντως και στα παιχνίδια μη συνεργασίας αν αποφασιστεί κάποια συμφωνία, αυτή δεν πρέπει να παραβιαστεί με το αιτιολογικό ότι πρόκειται για παιχνίδι μη συνεργασίας. Κοινό γνώρισμα όλων των κλάδων της θεωρίας παιγνίων είναι η υπόθεση ότι οι παίκτες, μεταξύ πολλών κακών εκβάσεων, θα επιλέξουν την λιγότερο κακή.

1.2.2 John Nash

Όταν το 21-έτος παλαιός John Nash έγραψε τη διατριβή 27-σελίδων του περιγράφοντας "την ισορροπία Nash του" για τα στρατηγικά μη συνεταιριστικά παιχνίδια, ο αντίκτυπος ήταν τεράστιος. Στην επίσημη πλευρά, η απόδειξη ύπαρξής του ήταν μια από τις πρώτες εφαρμογές του θεωρήματος σταθερών σημείων Kakutani που υιοθετήθηκε αργότερα με τόσο πολύ "γούστο" κοντά New-Walrasians παντού στην εννοιολογική πλευρά, ωοτόκησε ένα μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας στη μη συνεταιριστική θεωρία παιχνιδιών που έχει αυξηθεί από τότε σε ένα καταπληκτικό ποσοστό - να απειλήσει, κάποια αξίωση, για να συντρίψει ένα μεγάλο μέρος των οικονομικών τα ίδια.

Ήταν στο Princeton όταν Nash αντιμετώπισε τη θεωρία των παιχνιδιών, κατόπιν προώθησε πρόσφατα από John von Neumann και Oskar Morgenstern. Εντούτοις, είχαν κατορθώσει μόνο να λύσουν τα μη συνεταιριστικά παιχνίδια στην περίπτωση των "καθαρών ανταγωνισμών" (δηλ. μηδενικός). Το νέο Nash γύρισε στους ανταγωνισμούς με το αμοιβαίο κέρδος. Το τέχνασμά του ήταν η χρήση των λειτουργιών καλύτερος-απάντησης και ενός πρόσφατου θεωρήματος που είχε προκύψει ακριβώς - σταθερό σημείο-θεώρημα Kakutani.

Το κύριο αποτέλεσμά του, η "ισορροπία Nash", δημοσιεύθηκε το 1950 στα πρακτικά της εθνικής ακαδημίας των επιστημών. Ακολούθησε αυτό επάνω με ένα έγγραφο που εισήγαγε ακόμα μια έννοια λύσης - αυτή τη φορά για τα two-person συνεταιριστικά παιχνίδια - η "λύση διαπραγμάτευσης Nash" (NBS) το 1950, Ένα έγγραφο του 1951 σύνδεσε το όνομά του με ακόμα μια πλευρά των οικονομικών - αυτή τη φορά, το "πρόγραμμα Nash", απεικονίζοντας τη μεθοδολογική κλήση του για τη μείωση όλων των συνεταιριστικών παιχνιδιών σε ένα μη συνεταιριστικό πλαίσιο, θεώρημα σημείου Brouwer σταθερό. Αργά, πήγε για να σπαστεί ενός από μαθηματικά αινίγματα Riemann τα περιπλέκοντας. Από έπειτα επάνω, Nash παρείχε τη σημαντική ανακάλυψη μετά από τη σημαντική ανακάλυψη στα μαθηματικά, ηλικία 29) και ήταν ουσιαστικά από την ασθένεια για τις επόμενες δύο δεκαετίες ή έτσι. Περιπλανήθηκε για την Ευρώπη και την Αμερική, τελικά, επιστρέφοντας στο Princeton όπου έγινε λυπημένος, πνευματικός χαρακτήρας στην πανεπιστημιούπολη -

"το φάντασμα της λεπτής αίθουσας" δεδομένου ότι η Rebecca Goldstein τον περιέγραψε στο μυθιστόρημά της, πρόβλημα μυαλού-σώματος.

Η διαβίωσή του σε ένα "ultralogical" αεροπλάνο, "αέρας αναπνοής πάρα πολύ σπάνιος" για τα περισσότερα mortals, και εάν "θεραπευμένος" δεν θα μπορούσε πλέον να κάνει οποιαδήποτε αρχική εργασία σε εκείνο το επίπεδο, κατόπιν, Nash που υποστηρίχτηκε, μια απαλλαγή να μην είναι σημαντική στο τέλος. Καθώς John Dryden τον έβαλε μια φορά:

Τα μεγάλα πνεύματα είναι σίγουρα στην τρέλα που συνδέεται πλησίον, και τα μικρά χωρίσματα κάνουν τα όριά τους διαιρούν.

1.2.3 Oskar Morgenstern (1902-1976)

Ο Oskar Morgenstern μεγάλωσε με τις αρχές της αυστριακής παράδοση;, αλλά ήταν αρκετά λιγότερο δογματική στις προτιμήσεις του. Επιτυχία του το Hayek το 1931 ως διευθυντής του αυστριακού ιδρύματος για την έρευνα επιχειρηματικών κύκλων, ερευνητικά ενδιαφέροντα Morgenstern δεν ήταν στη νομισματική υπερεπενδυτική Hayekian θεωρία, αλλά μάλλον στην κερδοσκοπία και την οικονομική πρόβλεψη (το θέμα της διατριβής ικανότητας του 1928 του).

Ήταν επίσης ένας από τους μεγάλους κριτικούς Αυστριακή θεωρία του κεφαλαίου, που βοηθά να θάψει την έννοια της "μέσης περιόδου παραγωγής".

Γενικότητα της "στρατηγικής συμπεριφοράς" πέρα από "το robinson- crusoe", τιμή-που παίρνει τη συμπεριφορά, οδήγησε το μαθηματικό Edward Cech για να τον αφήσει για τον John von Neumann 1928 άρθρο σχετικά με τα παιχνίδια. Αφότου απομακρύνθηκε Morgenstern από τα Ναζί το 1938, κινήθηκε προς Princeton, όπου συνάντησε τελικά von Neumann. Μαζί, Morgenstern και John von Neumann έγραψε τη διάσημη πραγματεία τους στη θεωρία των παιχνιδιών (1944), η οποία όχι μόνο προώθησε θεωρία παιχνιδιών αλλά και η θεωρία επιλογή κάτω από την αβεβαιότητα. Το Morgenstern παρείχε ένα μεγάλο μέρος της οικονομικής ανάλυσης σε εκείνο το βιβλίο.

Η υπεράσπιση (1959), στα οικονομικά στοιχεία (1950) και επάνω χρηματοδότηση, ειδικότερα η δοκιμή της αναδυόμενης τυχαίας υπόθεσης περιπάτων (με Granger, 1970).

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

2.1 Παρουσίαση των στρατηγικών των παιγνίων και των πληροφοριακών συνόλων

2.1.1 Καθαρές και μικτές στρατηγικές

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα λογικά εργαλεία με τα οποία η θεωρία των παιγνίων επιδιώκει να λύσει «παίγνια», δηλαδή να προβλέψει πώς θα συμπεριφερθούν οι ορθολογικοί άνθρωποι σε καταστάσεις αλληλεπίδρασης στις οποίες το αποτέλεσμα καθορίζεται από το συνδυασμό των δράσεων κάθε ατόμου. Το πρώτο καθήκον μας είναι να ορίσουμε δύο τύπους στρατηγικής μεταξύ των οποίων μπορεί να διαλέξει ο παίκτης.

Η απλούστερη στρατηγική είναι να επιλέξει ξεκάθαρα κάποιον εξαιρετικά συγκεκριμένο τρόπο δράσης (που αναφέρεται επίσης ως «κίνηση»). Παραδείγματος χάρη: «Βοηθά έναν ηλικιωμένο να διασχίσει το δρόμο» ή «πυροβολεί τον εχθρό». Ο τρόπος αυτός δράσης ονομάζεται καθαρή στρατηγική. Ωστόσο, υπάρχουν στιγμές που μπορεί να μην είστε βέβαιοι σχετικά με το ποια είναι η βέλτιστη καθαρή στρατηγική.

Κάτω από τη σκιά μιας τέτοιας αβεβαιότητας σχετικά με το ποια είναι η βέλτιστη καθαρή στρατηγική, μπορείτε να ενεργήσετε ως εάν, διαλέγοντας στην τύχη, μεταξύ δύο ή περισσότερων καθαρών στρατηγικών: π. χ., όταν δεν έχετε αξιόπιστες μετεωρολογικές πληροφορίες μπορείτε να αποφασίσετε αν θα πάρετε μαζί σας ή όχι ομπρέλα στρίβοντας ένα κέρμα. Αυτός ο τύπος στρατηγικής ονομάζεται μικτή στρατηγική, με την έννοια ότι μπορείτε να επιλέξετε ένα «πιθανοτικό μίγμα» ενός συνόλου καθαρών στρατηγικών. Στο τετριμμένο παράδειγμά μας με την ομπρέλα, η μικτή στρατηγική επιλογή σας μπορεί να εκφραστεί ως: «Πάρτε μαζί σας ομπρέλα, με πιθανότητα ρ = 1/2 και μην πάρτε ομπρέλα, με πιθανότητα 1 -p =1/2».

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο εκείνος που αποφασίζει εμπλέκεται σε μια αυθεντικά στρατηγική αλληλεπίδραση (σε αντίθεση με το «παίγνιο» εναντίον του καιρού). Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η Άννα σκέπτεται να πάει σε κάποιο πάρτι και πρέπει να επιλέξει μεταξύ δύο καθαρών στρατηγικών: «Να φορέσει μαύρα παπούτσια» (Μ) ή «να φορέσει κόκκινα παπούτσια» (Κ). Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι θα επέλεγε να φορέσει Μ (μαύρα παπούτσια) αν είχε αξιόπιστες πληροφορίες ότι οι περισσότερες φίλες της θα φορούσαν κόκκινα παπούτσια. Αν, αντιθέτως, οι «πληροφοριοδότες» της την ενημέρωναν ότι οι περισσότερες φίλες της θα φορούσαν μαύρα παπούτσια, τότε θα επέλεγε να φορέσει κόκκινα παπούτσια (στην προσπάθειά της να είναι διαφορετική). Τι θα κάνει, όμως, όταν δεν έχει αξιόπιστες πληροφορίες όσον αφορά το ποσοστό εκείνων που θα φορούν κόκκινα παπούτσια στο πάρτι; Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσε κάλλιστα να επιλέξει τυχαία μεταξύ των δύο, υιοθετώντας την ακόλουθη μικτή στρατηγική: να επιλέξει την καθαρή στρατηγική Μ με πιθανότητα ρ και την καθαρή στρατηγική Κ με πιθανότητα 1 -p.

Μικτές και καθαρές στρατηγικές (ορισμός)

Αν ο παίκτης έχει στη διάθεσή του Ν καθαρές στρατηγικές (S1, S2, ...,SN), τότε η μικτή στρατηγική Μ ορίζεται από τις πιθανότητες (p1, p2,...,pN) με τις οποίες θα πρέπει να επιλέξει καθεμιά από τις καθαρές στρατηγικές του. Ας σημειωθεί ότι για να είναι σαφώς καθορισμένη η Μ, καθεμιά από τις πιθανότητες (p1, p2,..., pN) πρέπει να βρίσκεται μεταξύ 0 και 1, και το άθροισμά τους θα πρέπει να είναι ίσο με μία μονάδα. Ας σημειωθεί, επίσης, ότι η επιλογή μιας μικτής στρατηγικής (p1=0, p2=0...

pj=0..., pN=0) είναι ισοδύναμη με την επιλογή της καθαρής στρατηγικής Sj.

Η Άννα προτίμησε μια μικτή στρατηγική (αναφορικά με τη δήλωσή της για τη μόδα) εξαιτίας της αβεβαιότητας σχετικά με το τι θα κάνουν οι άλλες. Ένας άλλος λόγος για να επιλέξει κανείς μικτή στρατηγική είναι ότι μπορεί να θέλει να κράτησε τους αντιπάλους του σε κατάσταση αβεβαιότητας. Και αν κάποιος θέλει να είναι οι άλλοι αβέβαιοι όσον αφορά το τι πρόκειται να κάνει, ίσως ο καλύτερος τρόπος είναι να μείνει και ο ίδιος εξίσου αβέβαιος ως προς το τι θα κάνει. Αυτό ισοδυναμεί με το να ενεργήσετε ως εάν, διαλέγοντας στην τύχη μεταξύ καθαρών στρατηγικών, δηλ. μια μικτή στρατηγική. Ας υποθέσουμε, παραδείγματος χάρη, ότι είστε ο «κανονιέρης» μιας ομάδας και ετοιμάζεστε να κτυπήσετε ένα πέναλτι. Ο αντίπαλος τερματοφύλακας θα ήθελε να ξέρει αν θα σουτάρετε προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά του. Για να τον κρατήσετε σε αβεβαιότητα, μπορείτε να επιλέξετε μια μικτή στρατηγική: επιλέξτε την καθαρή στρατηγική: «σουτάρω την μπάλα αριστερά» με πιθανότητα 40 τοις εκατό, την καθαρή στρατηγική: «σουτάρω την μπάλα δεξιά», με πιθανότητα 40 τοις εκατό και την καθαρή στρατηγική: «σουτάρω την μπάλα στο κέντρο της εστίας» με πιθανότητα 20 τοις εκατό.

2.1.2 Η κανονική μορφή, η εκτεταμένη μορφή και το πληροφοριακό σύνολο.

Η επόμενη δουλειά μας είναι να παρουσιάσουμε τις δύο κύριες εκφράσεις του τρόπου με τον οποίο αλληλεπιδρούν οι στρατηγικές των παιγνίων για να δώσουν αποτελέσματα: την κανονική μορφή και την εκτεταμένη μορφή παιγνίου. Η κανονική μορφή παιγνίου μοιάζει συνήθως με πίνακα (και είναι, επίσης, γνωστή ως μορφή πίνακα ή στρατηγική μορφή). Αυτό που κάνει η μορφή αυτή είναι να συνδέει συνδυασμούς καθαρών στρατηγικών με αποτελέσματα μέσω ενός πίνακα που δείχνει τις αποδόσεις (ή προτιμήσεις) κάθε παίκτη για κάθε συνδυασμό καθαρών στρατηγικών - βλέπε Παίγνιο 2.1. δεδομένου ότι οι στήλες και οι γραμμές του πίνακα είναι καθαρές στρατηγικές, θα συγκεντρωθούμε, επί του παρόντος, σε καθαρές στρατηγικές.

Στο βιβλίο αυτό, ο παίκτης που επιλέγει μεταξύ γραμμών (ή στηλών) θα δίνει το όνομά του στη γραμμή (ή στη στήλη) και, στο Εξής, η γραμμή (ή η στήλη) θα ονομάζονται, εν συντομία, R (ή C). Με το R θα νοούμε μια γυναίκα παίκτρια και με το 0 έναν άνδρα παίκτη. Η πρώτη δυνατότητα στρατηγικής επιλογής της παίκτριας R είναι η πρώτη στήλη που συμβολίζεται με R1, κ.ο.κ. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η R επιλέγει R2 και ο C επιλέγει C1. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα είναι (R2, C1). Στο παράδειγμα αυτό, η R αποκομίζει 9 μονάδες ωφέλειας/χρησιμότητας (utils) και τις ίδιες μονάδες αποκομίζει και ο C. Η πρώτη εγγραφή σε κάθε στοιχείο του πίνακα αποδόσεων είναι η απόδοση σε χρησιμότητα για την παίκτρια R, ενώ η δεύτερη εγγραφή ανήκει στον παίκτη C. Παραδείγματος χάρη, το αποτέλεσμα (R2, C2) δίνει 3 μονάδες χρησιμότητας στον C και καμία στην R.

	C1	C2
R1	10.4	1.5
R2	9.9	0.3

Παίγνιο 2.1 Η κανονική μορφή *παρουσίασης του παιγνίου*

Ας σημειωθεί ότι η κανονική μορφή δεν λέγει τίποτα για τη διαδικασία, ή την ακολουθία, του παιγνίου και το συμπέρασμα είναι ότι οι παίκτες κινούνται ταυτόχρονα. Όταν οι επιλογές τους είναι πράγματι ταυτόχρονες, η κανονική μορφή είναι επαρκής, ωστόσο, όταν ο ένας παίκτης δράσει πριν ο άλλος έχει την ευκαιρία να κινηθεί, η κανονική μορφή δεν είναι ικανή να μεταβιβάσει αυτή τη στρατηγικά κρίσιμη πληροφορία όσον αφορά την ακολουθία των επιλογών. Τότε χρειαζόμαστε μια διαφορετική απεικόνιση: την εκτεταμένη μορφή, που είναι επίσης γνωστή ως δυναμική μορφή ή μορφή δενδροδιαγράμματος.

Στο Παίγνιο 2.2 παρουσιάζουμε δύο εκδοχές του πιο πάνω παιγνίου σε εκτεταμένη μορφή - μία στην οποία πρώτη κινείται η παίκτρια R [βλ. Παίγνιο 2.2(α)] και μία άλλη στην οποία πρώτος κινείται ο παίκτης C [βλ. Παίγνιο 2.2(β)]. Ανάλογα με την επιλεγμένη πορεία από τον ένα κόμβο στον άλλο (οι κόμβοι παριστάνονται με κύκλους, από τους οποίους μόνο ο αρχικός είναι κενός), κατατείνουμε προς το τελικό αποτέλεσμα στη βάση του δενδροδιαγράμματος. Πα να διατηρήσουμε την αναλογία με την παράσταση της κανονικής μορφής, η πρώτη απόδοση (στο κάτω μέρος ή στη βάση του δέντρου) αναφέρεται στην R και η δεύτερη στον C. Υπάρχει ένα σημάδι στα διαγράμματα αυτά που δεν πρέπει να διαφύγει της προσοχής μας: η διακεκομμένη γραμμή στο Παίγνιο 2.2(β) που εμφανίζεται όταν καλείται η R να επιλέξει. Έχουμε προσθέσει τη γραμμή αυτή στο Παίγνιο 2.2(β) -όχι όμως και στο Παίγνιο 2.2 (α)- σε μια προσπάθεια να εισαγάγουμε αυτό που οι θεωρητικοί των παιγνίων αναφέρουν ως πληροφοριακό σύνολο του παίκτη.

Τη στιγμή που ο παίκτης ετοιμάζεται να κάνει την επιλογή του, όλες οι πληροφορίες που έχει στη διάθεσή του περιέχονται σε αυτό το πληροφοριακό σύνολο του παίκτη. Για να μπορέσουμε να προβλέψουμε τι θα κάνουν οι παίκτες, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τι ξέρουν, δηλαδή να έχουμε προσδιορίσει πλήρως το πληροφοριακό σύνολο των παικτών. Αν ο Οιδίπους γνώριζε ότι ο βασιλιάς που έμελλε να συναντήσει τυχαία σε αυτό το κακότυχο σταυροδρόμι ήταν ο πατέρας του, οι Θήβες δεν θα ζούσαν ένα τέτοιο δράμα. Για να προβλέψουμε, λοιπόν, τα αποτελέσματα είναι ανάγκη να γνωρίζουμε όσο το δυνατόν περισσότερα σχετικά με τα πληροφοριακά σύνολα των παικτών.

Σε παίγνια κανονικής μορφής, π.χ. στο Παίγνιο 2.1, οι παίκτες είναι πλήρως ενημερωμένοι για τη δομή του παιγνίου, εφόσον γνωρίζουν τον πίνακα. Εντούτοις, όταν κάνουν κινήσεις ο ένας κατόπιν του άλλου, τότε πρέπει να γνωρίζουν περισσότερα πράγματα. Παραδείγματος χάρη, αν κινηθεί πρώτη η R, ο C μπορεί να έχει ή να μην έχει παρατηρήσει την επιλογή της P προτού κληθεί να κάνει τη δική του επιλογή. Ας σημειωθεί ότι αν ο C γνωρίζει ποια στρατηγική επέλεξε η R μεταξύ της R1 και R2, τότε ο C ξέρει σε ποιο κλάδο του παιγνίου 2.2 βρίσκεται η R, προτού κάνει τη δική του κίνηση. Αν όχι, τότε η R μπορεί να βρίσκεται στον ένα ή στον άλλο κλάδο από τους δύο. Προφανώς, αν γνωρίζετε σε ποιον από τους δύο κλάδους του δενδροδιαγράμματος βρίσκεστε, είναι ευκολότερο να ξέρετε τι πρέπει να κάνετε. Ας έλθουμε στη διακεκομμένη γραμμή του παιγνίου 2.2. Η σημασία της γραμμής αυτής είναι απλή; Ο C πρέπει να κινηθεί πρώτος και έχει, πράγματι, αποφασίσει προς ποιον από τους δύο κλάδους του παιγνίου θα προχωρήσει. Όταν ενώναμε τους κόμβους της R υποθέσαμε ότι η R δεν γνωρίζει, προτού επιλέξει μεταξύ R1 και R2, εάν βρίσκεται στον κλάδο της αριστερής πλευράς ή στον κλάδο της δεξιάς πλευράς. Πώς συμβαίνει αυτό; Πολύ απλά, δεν έχει δει την επιλογή του παίκτη C (δηλαδή, μολονότι ξέρει καλά ότι ο C έχει ήδη κάνει την επιλογή του, δεν γνωρίζει ποια είναι η επιλογή αυτή του C). Αντίθετα, η απουσία μιας τέτοιας διακεκομμένης γραμμής στο Παίγνιο 2.2(α) σημαίνει ότι ο παίκτης που κινείται δεύτερος (ο C στην περίπτωση αυτή) επιλέγει αφού πρώτα παρατηρήσει την επιλογή του R. Έτσι, ο C γνωρίζει σε ποιο κόμβο βρίσκεται όταν καλείται να παίξει.

Συνοψίζοντας, όταν σε ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής βλέπουμε ότι μια διακεκομμένη γραμμή ενώνει δύο ή περισσότερους κόμβους του παίκτη, αυτό σημαίνει ότι συγκεκριμένος παίκτης πρέπει να επιλέξει χωρίς να γνωρίζει ποιος από τους κόμβους αντιπροσωπεύει την τρέχουσα θέση του στο δένδρο του παιγνίου. Όπως θα δούμε αργότερα, ο παίκτης θα πρέπει να χρησιμοποιήσει όσα αποθέματα λογικής διαθέτει για να επεξεργαστεί λογικά τις πιθανότητες να βρίσκεται σε έναν από τους κόμβους στους οποίους είναι δυνατόν να βρίσκεται.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί (για περισσότερο σύνθετα παίγνια) ότι δεχόμαστε συμβατικά πως όταν σχεδιάζουμε ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής δεν επιτρέπουμε σε καμιά περίπτωση οι κλάδοι του δενδροδιαγράμματος να γυρνούν προς τα πίσω και να διασταυρώνονται. Με άλλα λόγια, η ακολουθία των αποφάσεων σχεδιάζεται πάντοτε με τρόπο ώστε να μοιάζει με δένδρο που τα κλαδιά του εκτείνονται προς τα έξω (και δεν διασταυρώνονται το ένα με το άλλο). Έτσι, ακόμη και όταν ένα άτομο αντιμετωπίζει την ίδια επιλογή (μεταξύ, λόγου χάρη, του να είναι «ευχάριστο» ή όχι στην P) ύστερα από μερικές πιθανές ακολουθίες προηγούμενων επιλογών από τους παίκτες, η επιλογή θα πρέπει να αποφασίζεται χωριστά για καθεμιά από τις πιθανές ακολουθίες που οδηγούν σε αυτή. Το ουσιώδες είναι ότι, ακόμη και όταν οι άνθρωποι αντιμετωπίζουν την ίδια επιλογή περισσότερες από μία φορές μέσα σε μια ακολουθία επιλογών, θέλουμε να τις διακρίνουμε όταν έχουν διαφορετικές προϊστορίες - και αυτό ακριβώς είναι εκείνο που εξασφαλίζει ο αποκλεισμός της διασταύρωσης των κλάδων.

Λογικός χρόνος έναντι ιστορικού χρόνου και στατικά έναντι δυναμικών παιγνίων (ορισμοί)

Όταν εξετάζουμε τα παίγνια στην κανονική μορφή τους (ή, πράγμα που είναι το ίδιο, στη μορφή πίνακα ή στρατηγική μορφή τους) ξεκινούμε με την υπόθεση ότι οι παίκτες επιλέγουν στρατηγική, μεταξύ των διαθέσιμων στρατηγικών, μία φορά, ταυτόχρονα και χωρίς να επικοινωνούν μεταξύ τους. Αφού, λοιπόν, οι παίκτες παίζουν μία φορά, και βλέπουν την επιλογή του αντιπάλου τους μόνον όταν το παίγνιο θα έχει τελειώσει απολύτως και πραγματικά, δεν έχει νόημα να θεωρεί κανείς το παίγνιο δυναμικό (δηλαδή σαν ένα παίγνιο που αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου και επιτρέπει τη δοκιμή και το λάθος ή οποιοδήποτε άλλο τύπο μάθησης). Σο πλαίσιο αυτό, ο χρόνος κυλά μόνο για όση ώρα ο παίκτης σκέπτεται ποια θα είναι η πρώτη και μοναδική επιλογή του. Παραδείγματος χάρη, ο παίκτης σκέπτεται προσεκτικά: «Αν ο αντίπαλος μου κάνει την κίνηση Χ εγώ θα κάνω την κίνηση Υ. Στην περίπτωση αυτή, όμως, δεν γνωρίζει ο αντίπαλος μου ότι αυτή είναι η κίνηση που πρόκειται να κάνω; Μάλλον ναι. Γι' αυτό, είναι ίσως καλύτερο να κάνω την κίνηση Ζ...» Ο τύπος αυτός σκέψεων προ του παιγνίου δεν είναι μέρος δυναμικού παιγνίου· ενός βρόχου ανάδρασης από παρατηρήσεις σε προβλέψεις και σε δράσεις, και πάλι σε παρατηρήσεις. Όταν απουσιάζει μια τέτοια δυναμική διαδικασία, λέμε ότι το (στατικό) παίγνιο εκτυλίσσεται σε λογικό χρόνο.

Στο λογικό χρόνο αντιπαραθέτουμε τον ιστορικό χρόνο (ή τον πραγματικό χρόνο) στη διάρκεια του οποίου σημειώνονται οι δράσεις, όπως και οι σκέψεις, και τροφοδοτούν η μία την άλλη. Με λίγα λόγια, τα στατικά παίγνια (που τα εκφράζει επαρκώς η κανονική μορφή τους) γεννούν στρατηγική σκέψη που πραγματοποιείται σε λογικό χρόνο. Απεναντίας, τα δυναμικά παίγνια (τα οποία θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο) αναπτύσσονται σε ιστορικό χρόνο και μπορούν να εκφραστούν επαρκώς μόνο σε εκτεταμένη μορφή (βλ. Παίγνιο 2.2 πιο πάνω).

2.2 .Δύο έννοιες λύσης για στατικά παίγνια (η παίγνια μιας κίνησης)

2.2.1 Λυμένα παίγνια και στρατηγικές ισορροπίας

Όταν οι θεωρητικοί των παιγνίων αναφέρονται σε «λύση» παιγνίου ή σε «έννοια λύσης» τι ακριβώς εννοούν; Ο σκοπός για τον οποίο μελετούμε παίγνια είναι για να μπορέσουμε να προβλέψουμε πώς θα εκτυλιχθούν οι στρατηγικές αυτές αλληλεπιδράσεις. Επειδή οι παράφρονες είναι από τη φύση τους απρόβλεπτοι, η θεωρία των παιγνίων επικεντρώνεται στην πρόβλεψη των αποτελεσμάτων ορθολογικού παιγνιδιού. Όταν η θεωρία των παιγνίων καταλήγει σε σαφείς προβλέψεις για την έκβαση ενός παιγνίου νομιμοποιείται να ισχυριστεί ότι το συγκεκριμένο παίγνιο «λύθηκε», ωστόσο, η μεγαλύτερη φιλοδοξία της είναι να προσφέρει μια γενική θεωρία που να έχει την ικανότητα να «λύνει» μια όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τάξη παιγνίων. Συχνά ο όρος «λύση» χρησιμοποιείται ως συνώνυμο του όρου «ισορροπία». Για να δώσουμε μια γεύση λύσης παιγνίου, αλλά και του λόγου για τον οποίο αναφέρουμε τη «λύση» παιγνίου ως «ισορροπία», θα εξετάσουμε το ακόλουθο απλό παίγνιο που ονομάζεται **Αγώνας δρόμου προς το ένδεκα** (The Race to Eleven).

Υπάρχουν 11 σπίρτα στο τραπέζι και στο παίγνιο συμμετέχουν δύο άνθρωποι. Η παίκτρια R κάνει την πρώτη κίνηση και έχει το δικαίωμα να διαλέξει ένα ή δύο σπίρτα. Μετά είναι η σειρά του παίκτη C να παίξει, ο οποίος μπορεί επίσης να διαλέξει ένα ή δύο σπίρτα. Ύστερα έρχεται πάλι η σειρά της R (να διαλέξει ένα ή δύο σπίρτα), κ.ο.κ. Το παίγνιο τελειώνει όταν ένας από τους δύο παίκτες πάρει το 11° σπίρτο. Ο παίκτης αυτός κερδίζει ένα προσυμφωνημένο χρηματικό ποσό (που το πληρώνει ο αντίπαλος του ο οποίος ηττήθηκε στο παίγνιο). Υποθέστε ότι είστε η R και κάνετε την πρώτη κίνηση: Τι θα πρέπει να κάνετε, αν είστε στη θέση της R, για να κερδίσετε το παίγνιο; Η απάντηση είναι: Πάρτε δύο σπίρτα και έχετε εξασφαλίσει τη νίκη. Αν η υπόδειξη αυτή είναι ορθή, το παίγνιο έχει «λυθεί» εύκολα και σωστά. Πριν εξετάσουμε την έννοια της λύσης παιγνίου, ας δούμε πρώτα αν η απάντηση αυτή είναι ορθή. Πα να νικήσει στο παίγνιο αυτό, η παίκτρια R πρέπει να είναι εκείνη που θα φτάσει πρώτη στο 11ο σπίρτο, .εν είναι όμως αληθές ότι αν η R φτάσει πρώτη στο 8ο σπίρτο (πριν έλθει η σειρά του παίκτη C να παίξει ξανά), τότε είναι βέβαιο ότι θα πάρει αυτή το 11ο σπίρτο; Φυσικά, είναι αληθές. Επειδή αν πάρει αυτή πρώτη το 8ο σπίρτο (προτού έλθει η σειρά του παίκτη C να παίξει ξανά), τότε ο C θα έχει δύο επιλογές, που αμφότερες τον οδηγούν σε ήττα: μπορεί να πάρει ένα σπίρτο, δηλ. το 9ο, ή δύο σπίρτα, δηλ. το 9ο και το 10ο.

Στην πρώτη περίπτωση, η Κ θα επανέλθει στο τραπέζι και θα πάρει τα δύο τελευταία σπίρτα, δηλ. το 10ο και το 11ο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα επανέλθει χορεύοντας από τη χαρά της και θα πάρει το τελευταίο σπίρτο, δηλ. το 11ο. Και στις δύο περιπτώσεις νικητής θα είναι η Κ Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι, για νικήσει στο παίγνιο αυτό με σιγουριά η Κ πρέπει να πάρει πρώτη το 8ο σπίρτο προτού έλθει η σειρά του παίκτη C να κάνει την επόμενη κίνηση. Με τον ίδιο συλλογισμό είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι για να πάρει η Κ πρώτη το 8ο σπίρτο, αρκεί να πάρει πρώτη το 5ο σπίρτο (και να αφήσει στον παίκτη C την επόμενη κίνηση). Και για να πάρει πρώτη το 5ο σπίρτο αρκεί να πάρει πρώτη το 2ο σπίρτο (πριν παίξει ο παίκτης C). Αλλά αυτό είναι κάτι που μπορεί να το κάνει η Κ, δεδομένου ότι οι κανόνες του παιγνίου ορίζουν ότι η Κ: (α) παίζει πρώτη και (β) έχει το δικαίωμα να πάρει ένα ή δύο σπίρτα κάθε φορά που παίζει.

Στην πιο πάνω ανάλυση είδαμε τη λογική με την οποία αναλύεται η πολυπλοκότητα μιας στρατηγικής διάδρασης μέχρις ότου φανεί μια οριστική λύση. Από τη στιγμή, φυσικά, που ένα παίγνιο έχει λυθεί τόσο οριστικά, δεν έχει νόημα να παίζει κανείς ένα τέτοιο παίγνιο. Πράγματι, όταν ένας παίκτης έχει κατανοήσει την πιο πάνω ανάλυση, θα μπορεί να νικά πάντοτε και ο παίκτης C θα συμφωνεί, επομένως, να συμμετάσχει σε αυτό μόνον εάν δεν έχει αντιληφθεί την πιο πάνω ανάλυση ή αν έχει πολύ κακή ιδέα για τις λογικές ικανότητες της παίκτριας R δεν είναι καθόλου διαφορετικοί από τους λόγους για τους οποίους τα παιδιά σπαταλούν το χρόνο τους παίζοντας τρίλιζα. Παρά ταύτα, είμαστε τώρα σε θέση να δούμε γιατί η ανακάλυψη της γενικής λύσης ενός παιγνίου οδηγεί τους θεωρητικούς των παιγνίων να μιλούν για στρατηγικές μοναδικής ισορροπίας.

Δανεισμένη από τη φυσική, η έννοια της ισορροπίας αναφέρεται σε μια σταθερή κατάσταση πραγμάτων (π.χ., ένα ποτήρι πάνω σε ένα τραπέζι), δηλαδή σε μια κατάσταση στην οποία δεν υπάρχουν εσωτερικές (ή ενδογενείς, όπως αποκαλούνται) δυνάμεις που να μπορούν να την μεταβάλουν (π.χ., το ποτήρι θα παραμείνει στο τραπέζι επ' άπειρον, εκτός αν κάποια εξωτερική ή εξωγενής δύναμη ασκηθεί πάνω σε αυτό). Σύμφωνα με τη μεταφορική αυτή εικόνα από τη φυσική, οι θεωρητικοί των παιγνίων σκέπτονται τη «λύση» ενός παιγνίου ως «πόλο έλξης» - ένα αποτέλεσμα των στρατηγικών προς τις οποίες οι ορθολογικοί παίκτες είναι αναγκασμένοι να οδηγούνται. Πράγματι, αν η λύση που έχει ανακαλυφθεί είναι μοναδική και λογικά ισχυρή (όπως εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος μας), τότε οι παίκτες οφείλουν όχι μόνο να κινηθούν προς τις στρατηγικές οι οποίες θα δώσουν αυτή τη λύση, αλλά επίσης πρέπει να μείνουν πιστοί σε αυτές (ή να μην μετανιώσουν ποτέ που τις υιοθέτησαν) από τη στιγμή που θα έχουν οδηγηθεί σε αυτές τις στρατηγικές. Οι τελευταίες, παραμένοντας στη μεταφορική εικόνα από τη φυσική, αναφέρονται ως στρατηγικές μοναδικής ισορροπίας των παικτών. Από τη στιγμή που οι παίκτες θα τις έχουν «κατανοήσει βαθιά», δεν θα έχουν κανένα λόγο να πράξουν διαφορετικά. Χρησιμοποιώντας μια πιο τεχνική ορολογία, θα έχουν κινηθεί προς συναρπαστικές στρατηγικές ισορροπίας.

Ποιες είναι οι στρατηγικές ισορροπίας των παικτών που αντιστοιχούν στη «λύση» μας στον Αγώνα δρόμου προς το ένδεκα; Η μοναδική στρατηγική ισορροπίας της παίκτριας είναι να αρχίσει το παίγνιο παίρνοντας δύο σπίρτα και, ακολούθως, να επιλέξει τον αριθμό των σπίρτων που θα της δώσουν το 5ο, το 8ο και τέλος το 11ο σπίρτο (ανάλογα με τις επιλογές του παίκτη C. Όσο για τον παίκτη C, το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να ελπίζει σε κάποιο λάθος της παίκτριας R, που θα του δώσει τη δυνατότητα να την εκτοπίσει από την πλεονεκτική θέση και να πάρει αυτός πρώτος το 5ο, το 8ο και τέλος το 11 ο σπίρτο.2.

2.2.2 Λύση Minimax (ή Λύση ελαχιστοποίησης της μέγιστης ζημίας) του John von Neumann (περίπου 1928)

Παίγνια του είδους που εξετάσαμε στην Ενότητα 2.2.1 είχαν λυθεί πολύ πριν εμφανιστεί στη σκηνή η θεωρία των παιγνίων. Ο John von Neumann θεωρείται ο ιδρυτής της θεωρίας των παιγνίων, επειδή, σε ένα περίφημο δοκίμιο του που εκδόθηκε (στη γερμανική) το 1928, παρουσιάζει μια λύση η οποία έχει εφαρμογή σε μια ευρεία τάξη παιγνίων. Η προκύψασα γενική Θεωρία λύσης παιγνίων (ή, εν συντομία, θεωρία των παιγνίων) υποσχόταν να βοηθήσει τους κοινωνικούς επιστήμονες να αναλύσουν (άρα και να κατανοήσουν) πολλές και διάφορες κοινωνικοοικονομικές συγκρούσεις, ωστόσο, παρά τα σημαντικά θεωρητικά επιτεύγματα του Neumann, έχει ασφαλώς σημασία να επισημάνουμε ότι η μέθοδος του για τη λύση παιγνίων είναι απούσα από τον πυρήνα της σύγχρονης θεωρίας των παιγνίων. Θα δούμε γιατί, όταν θα έχουμε ολοκληρώσει την παρουσίαση της λύσης του.

Ας δούμε το Παίγνιο 2.3, πιο κάτω, στο οποίο συμμετέχουν δύο παίκτες. Οι διαδράσεις αυτού του είδους είναι γνωστές ως παίγνια μηδενικού αθροίσματος, επειδή το άθροισμα των αποδόσεων των δύο αντιπάλων για κάθε αποτέλεσμα είναι ίσο με μηδέν. Ο John von Neumann μελέτησε τα παίγνια αυτά και απέδειξε ότι μπορούν όλα να «λυθούν» με τον ίδιο τρόπο.

	C1	C2	C3
R1	-2.2	1,-1	10,-10
R2	-1.1	2,-2	0,0
R3	-8.8	0,0	-15,15

Παίγνιο 2.3 - *Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος*

Η φιλοδοξία του von Neumann ήταν να υποδείξει στρατηγικές τις οποίες οφείλουν οι παίκτες να υιοθετήσουν ανεξάρτητο από το τι θα πράξουν οι αντίπαλοι τους. Θυμηθείτε πώς στον πιο πάνω Αγώνα δρόμου προς το ένδεκα ανακαλύψαμε μια τέτοια στρατηγική - τη σειρά κινήσεων της παίκτριας R που οδηγεί με βεβαιότητα στη νίκη (δηλ. που της επιτρέπει να πάρει πρώτη το 11ο σπίρτο). Ο von Neumann αναζήτησε στρατηγικές που θα μπορούσαν να εγγυηθούν στον παίκτη μέγιστες αποδόσεις σε όλα τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, χωρίς να ανησυχεί για το ποιες θα είναι οι στρατηγικές του αντιπάλου του. Στο Παίγνιο 2.3, είναι σαφές ότι η απόδοση για την R θα εξαρτάται σε κρίσιμο βαθμό από την απάντηση του παίκτη C. Π.χ., η στρατηγική R1 μπορεί να προκαλέσει απώλεια 2 μονάδων ωφέλειας/χρησιμότητας (αν ο C απαντήσει με C1) ή ένα όφελος 10 (αν ο C παίξει C3). Πώς μπορούμε να εγγυηθούμε στην R μια ορισμένη απόδοση ανεξάρτητα από τις κινήσεις του C;

Ας υποθέσουμε ότι η παίκτρια R ήταν μια τυπική περίπτωση απαισιόδοξου ανθρώπου, ο οποίος στηρίζεται πάντοτε στο χειρότερο αποτέλεσμα ανεξάρτητα από την επιλογή του. Αν, λοιπόν, επέλεγε την κίνηση R1, ποιο θα ήταν το σενάριο της χειρότερης περίπτωσης; Θα ήταν να επιλέξει ο παίκτης C την κίνηση C1, καταδικάζοντας την R σε απόδοση -2. Στο σημείο αυτό είναι αναγκαία μια επισήμανση: Η χαμηλότερη απόδοση για την R, εφόσον επιλέξει την κίνηση R1 θα είναι η -2 (επειδή αν ο παίκτης C έκανε την κίνηση C2, τότε η απόδοση για την R θα ήταν 1 και αν επέλεγε την κίνηση C3 τότε η απόδοση για την R θα ήταν 10). Συμβολίζουμε τη χαμηλότερη αυτή απόδοση ως Min(R1) = -2. Τι θα συνέβαινε, όμως, αν η R επέλεγε την κίνηση R2; Στην περίπτωση αυτή, το χειρότερο που θα μπορούσε να της συμβεί θα ήταν πάλι να επιλέξει ο παίκτης C την κίνηση C1, οπότε η απόδοση για την R θα είναι -1. Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό με τον πιο πάνω, έχουμε Min(R2) = -1. Τέλος, ποιο θα είναι το χειρότερο αποτέλεσμα για την R αν επιλέξει την κίνηση R3; Αυτή θα είναι η Miri(R3) = -15 και αντιστοιχεί στην επιλογή από τον παίκτη C της κίνησης C3.

Είδαμε, λοιπόν, ότι αν η παίκτρια R επιλέξει την κίνηση R1, το χειρότερο που μπορεί να της συμβεί είναι η Min(R1) = ~2, Αν επιλέξει την κίνηση R2, το χειρότερο που μπορεί να της συμβεί είναι η Min(R2) = -1, ενώ αν επιλέξει την κίνηση R3, το χειρότερο που μπορεί να της συμβεί είναι η Min(R3) = -15. Ποιο από αυτά τα τρομερά σενάρια, αυτά τα ελάχιστα, είναι το λιγότερο κακό; Προφανώς, εκείνο που αντιστοιχεί στην κίνηση R2. Με άλλα λόγια, αν η R παίξει R2, μπορεί να εξασφαλίσει την καλύτερη από τις χειρότερες αποδόσεις (δηλ. -1, αντί είτε -2 ή -15). Επομένως, αν μια επιχείρηση πιστεύει στο νόμο του Μέρφυ,3 και εξακολουθεί να είναι πεπεισμένη ότι θα της συμβεί το χειρότερο, τότε θα έχει κάθε λόγο να επιλέξει τη στρατηγική με την οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση Min(Ri), όπου i = 1, 2, 3. Με άλλα λόγια, ο αμετανόητος απαισιόδοξος μας θα επιλέξει τη στρατηγική Ri που αντιστοιχεί στη λεγόμενη maximin (ή μεγιστοποίηση του ελάχιστου οφέλους) του παίκτη (ένας κατασκευασμένος όρος που προκύπτει από τον κανόνα: μεγιστοποίησε (maximise) την ελάχιστη (minimum) απόδοσή σου). Ας εξετάσουμε, λοιπόν, τις επιλογές του παίκτη C κάτω από την ίδια οπτική. Αν ο παίκτης C επιλέξει την κίνηση C1, το χειρότερο που μπορεί να του συμβεί είναι να επιλέξει ο αντίπαλος του, η παίκτρια R, την κίνηση R2, οπότε η απόδοση του θα είναι Miri(C1) = +1. Ομοίως, έχουμε τα ελάχιστα Min(C2) = - 2 και Min(C3) = — 15, που αντιστοιχούν στις στρατηγικές C2 και C3 του παίκτη C, αντίστοιχα.

Η maximin, επομένως, του παίκτη C αντιστοιχεί στη στρατηγική C1 και είναι ίση με +1. Όπως στην περίπτωση της R, συμπεραίνουμε ότι ο απαισιόδοξος C θα επιλέξει την κίνηση C1, επειδή αυτή είναι η στρατηγική που του εγγυάται την καλύτερη από τις χειρότερες δυνατές αποδόσεις του. Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση: Το άθροισμα των τιμών maximin των δύο παικτών είναι ίσο με μηδέν. Το maximin της παίκτριας R είναι ίσο με -1 και το maximin του παίκτη C είναι ίσο με +1. Το εντυπωσιακό αυτό θεώρημα του John von Neumann είναι ότι αυτό ισχύει για όλα τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, δηλαδή, σε διάδραση μηδενικού αθροίσματος μεταξύ δύο ατόμων, το άθροισμα των αποδόσεων maximin των παικτών είναι ίσο με μηδέν.

Ακόμη και πριν αναλύσουμε το νόημα του αποτελέσματος αυτού, δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε την αίσθηση θαυμασμού που προκάλεσε το θεώρημα του von Neumann. Ήταν το πρώτο θεώρημα που περιλάμβανε μια ολόκληρη ποικιλία παιγνίων, και το οποίο ανακάλυπτε κάποια κανονικότητα που ίσχυε για μια μεγάλη σειρά αλληλεπιδράσεων. Αυτός είναι ο λόγος που το θεώρημα του von Neumann σηματοδοτεί τη γέννηση της θεωρίας των παιγνίων.

Το Θεώρημα Mini max του John von Neumann - Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων, το άθροισμα των αποδόσεων maximin είναι ίσο με μηδέν.

Ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του θεωρήματος αυτού είναι ότι η μικρότερη από τις μεγαλύτερες ζημιές της παίκτριας R θα είναι πάντοτε ίση με το μεγαλύτερο από τα μικρότερα κέρδη του παίκτη C. Γιατί, όμως, θα συμβαίνει αυτό; Εκτός από την αισθητική του αξία, μπορεί αυτό να μας βοηθήσει να λύσουμε το παίγνιο; Μπορεί πράγματι, εφόσον υποθέσουμε ότι και οι δύο παίκτες είναι βαθύτατα απαισιόδοξοι. Επειδή, αν πράγματι είναι, θα επιλέξουν και οι δύο τη δική τους στρατηγική maximin, και εμείς θα γνωρίζουμε εκ των προτέρων τι πρόκειται να κάνουν. Παραδείγματος χάρη, στην περίπτωση του Παιγνίου 2.3, πιο πάνω, η R θα επιλέξει τη στρατηγική R2 και ο C τη στρατηγική C1 (επειδή οι maximin αποδόσεις για τους δύο παίκτες εξασφαλίζονται με τις στρατηγικές R2 και C1 αντίστοιχα). Σύμφωνα με τη «λύση» αυτή, το αποτέλεσμα θα είναι το (-1, +1), δηλαδή, η παίκτρια R θα χάσει μία μονάδα ωφέλειας/χρησιμότητας (την οποία θα κερδίσει ο παίκτης C). Εντούτοις, δεν έχουμε ακόμη εξηγήσει γιατί είναι λογικό για τους παίκτες μας να εμπνέονται μόνο από ένα τέτοιο πνεύμα απαισιοδοξίας.

Ο λόγος για τον οποίο ο von Neumann σκέφθηκε ότι οι παίκτες θα επιλέξουν ορθολογικά να είναι τόσο απαισιόδοξοι συνδέεται με το πιο πάνω θεώρημά του. Υπενθυμίζουμε ότι σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος το κέρδος σας είναι η ζημία του αντιπάλου σας, και αντίστροφα. Το να είναι, λοιπόν, κάποιος απαισιόδοξος δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι είναι το είδος του ανθρώπου που φοβάται να βγει έξω από το σπίτι του μην πέσει κεραυνός και τον κάψει. Στο πλαίσιο των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος μπορεί απλώς να σημαίνει ότι είναι αρκετά ρεαλιστής ώστε να έχει επίγνωση του γεγονότος ότι ο αντίπαλος του θα προσπαθεί πάντοτε να του προκαλέσει τη μέγιστη δυνατή ζημία. Γιατί; Επειδή η ζημία του είναι κέρδος για τον αντίπαλο του! Υπάρχει, ερωτά ο von Neumann, ένα μοναδικό αποτέλεσμα που θα προσελκύει τους παίκτες, όπως ένα βάζο μέλι προσελκύει τις μέλισσες; Ναι, απαντά: το αποτέλεσμα (R2, C1), που όχι μόνο αντιστοιχεί στη στρατηγική maximin κάθε παίκτη, αλλά επίσης έχει αποδόσεις που είναι ίσες με εκείνες που επιδίωξαν οι δύο παίκτες στην προσπάθειά τους να μεγιστοποιήσουν το χειρότερο κέρδος τους ή, πράγμα που είναι ισοδύναμο, να ελαχιστοποιήσουν τη χειρότερη ζημία τους την οποία τους προκαλεί η «απληστία» του αντιπάλου τους.

Για να αποσαφηνίσουμε το σημείο αυτό, ας δούμε ξανά το αποτέλεσμα (R2, C1) που αποδίδει και στους δύο παίκτες, την R και τον C, τις maximin αποδόσεις τους, και ας το συγκρίνουμε με ένα άλλο αποτέλεσμα, λόγου χάρη το (R3, C1). Το αποτέλεσμα αυτό προκαλεί στην R πολύ μεγαλύτερη ζημιά από το maximin της (-15 έναντι -1), ενώ στον παίκτη C αποδίδει πολύ μεγαλύτερο κέρδος από ότι το δικό του maximin (+15 έναντι +1). O John von Neumann ήταν πεπεισμένος ότι κανένας ορθολογιστής παίκτης δεν θα συμβιβαζόταν με τίποτα λιγότερο από την εφικτή maximin απόδοσή του. Και αν και οι δύο είναι αποφασισμένοι να αποφύγουν μια απόδοση κάτω από το maximin, τότε επίσης κανένας δεν θα προσδοκά ότι θα πάρει, δεν θα επιχειρήσει να πάρει και δεν θα πάρει στην πράξη περισσότερα από τη δική του maximin απόδοση.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι αν κανένας παίκτης δεν προσδοκά ότι θα πάρει περισσότερα ή λιγότερα από τη maximin απόδοσή του, συνάγεται ότι και οι δύο παίκτες θα έχουν στραμμένο το βλέμμα τους στη maximin απόδοσή τους. Και επειδή το θεώρημα του Neumann (δηλαδή ότι η μικρότερη από τις χειρότερες ζημίες της R θα είναι πάντοτε ίση με το μεγαλύτερο από τα μικρότερα κέρδη του παίκτη C), προκύπτει ότι τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος «λύονται» όταν οι παίκτες αποσκοπούν στα maximin οφέλη τους, και δεν επιδιώκουν τίποτα περισσότερο ή τίποτα λιγότερο από αυτά.5 Εφόσον μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παίκτες θα έλκονται από τη στρατηγική που τους εξασφαλίζει το μέγιστο εγγυημένο όφελος, τότε η λύση του von

Neumann είναι ένας φυσικός «πόλος έλξης» - μια «ισορροπία».

2.2.3 Ισορροπία John Nash (περίπου 1949-1950)

Στην πρώτη παράγραφο της Ενότητας 2.2.2 διατυπώσαμε μια αινιγματική παρατήρηση για την απουσία της μεθόδου του von Neumann από την καρδιά της σύγχρονης θεωρίας των παιγνίων. Αναγνωρίζοντας ότι το θεώρημα minimax και η λύση που συνδέεται με αυτό ήταν έργο μιας αυθεντικής μεγαλοφυίας, για να μην πούμε ότι ήταν το γενέθλιο θεώρημα της θεωρίας, γρήγορα παραχώρησε τη θέση σε ένα άλλο αξιοσημείωτο συμπέρασμα που αποτέλεσε τη Λυδία λίθο της θεωρίας των παιγνίων: την ισορροπία John Nash. Τι είναι λάθος με το minimax του von Neumann; Θα πρέπει να θυμηθούμε ξανά την τελευταία πρόταση του προηγούμενου υποκεφαλαίου: Εφόσον μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παίκτες θα έλκονται από τη στρατηγική που τους εξασφαλίζει το μέγιστο εγγυημένο όφελος, τότε η λύση του von Neumann είναι ένας φυσικός «πόλος έλξης» - μια «ισορροπία». Το πρόβλημα, λοιπόν, είναι ότι δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ορθολογικοί παίκτες θα συμπεριφέρονται με αυτό τον τρόπο σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση εκτός από την περιορισμένη περίπτωση των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος. Πα να κατανοήσουμε για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό, ας δούμε το Παίγνιο 2.4, πιο κάτω, το οποίο καθιστά αμέσως φανερό ότι η μεγιστοποίηση του ελάχιστου κέρδους σας μπορεί να είναι κακή ιδέα σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος, δηλαδή σε αλληλεπιδράσεις στις οποίες η ζημιά του αντιπάλου σας δεν είναι πάντοτε δικό σας κέρδος.

	C1	C2
R1	2.2	0.-1
R2	-1.0	1000, 1000

Παίγνιο 2.4 - Παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος

Σε παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος, η λύση von Neumann μπορεί να οδηγήσει τους παίκτες σε σοβαρό λάθος. Οι περισσότεροι άνθρωποι, εξετάζοντας τα πράγματα προσεκτικότερα, θα πείθονταν ότι η δεύτερη στρατηγική τους (R2 για την R και C2 για τον C) είναι εκείνη που πρέπει να επιλέξουν. Αν προχωρήσουν σύμφωνα με τη σκέψη αυτή θα ωφεληθούν. Εντούτοις, η μέθοδος von Neumann θα τους υποδείκνυε να παίξουν (R1, C1). Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι Min(R^) = 0 και Min(R2) = -1.

Επομένως, το maximin της παίκτριας R είναι ίσο με 0 και αντιστοιχεί στη στρατηγική R1. Ομοίως, maximin στρατηγική για τον παίκτη C είναι η C1. .στόσο, δεν υπάρχει βάσιμος λόγος για τον οποίο θα ήταν μοναδικά ορθολογικό για την παίκτρια R και τον παίκτη C να επιλέξουν το (R1, C1), παραβλέποντας τη δελεαστική προοπτική του αμοιβαίου οφέλους που τους προσφέρει το (R2, C2). Πράγματι, σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος, υπάρχουν μεγάλες δυνατότητες να προκύψει όφελος από το γεγονός ότι το κέρδος του ενός παίκτη δεν μεταφράζεται αυτόματα σε ζημία για τον άλλο παίκτη.

Στρατηγικές βέλτιστης αντίδρασης (ορισμός)

Στρατηγική Rj για την παίκτρια R είναι η βέλτιστη αντίδραση (ή βέλτιστη απάντηση) στη στρατηγική Cj του παίκτη C, αν η στρατηγική αυτή εξασφαλίζει στην R τη μεγαλύτερη απόδοση, δεδομένου ότι ο C έχει παίξει Cj. (Το ίδιο ισχύει και για τον C).

Ισορροπία Nash (προκαταρκτικός ορισμός)

Το αποτέλεσμα των στρατηγικών Rj για την R και Cj για τον C είναι μια ισορροπία Nash του παιγνίου και, άρα, μια δυνητική «λύση», αν Ri είναι η βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική Cj και, ταυτόχρονα, Cj είναι η βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική Ri.(*) Αν Ri και Cj είναι, πράγματι, οι βέλτιστες απαντήσεις η μία στην άλλη, τότε η υιοθέτησή τους δικαιολογεί πλήρως τις προβλέψεις κάθε παίκτη οι οποίες τον οδήγησαν στην υιοθέτηση αυτή. .ηλαδή, όταν η παίκτρια R ερωτηθεί: «Γιατί επιλέξατε την απάντηση Ri;» η απάντησή της μπορεί να είναι: «Επειδή ανέμενα ότι ο παίκτης C θα επέλεγε Cj». Επομένως, η επιλογή από τον παίκτη C της απάντησης Cj επικυρώνει τη σκέψη της R. Επιπλέον, αφού η Cj είναι επίσης η βέλτιστη απάντηση στη Ri, οι λόγοι για τους οποίους ο παίκτης C έπαιξε Cj θα επικυρώνονται αυτόματα από την παρατήρηση ότι ο παίκτης R επέλεξε Ri.

* Γεωμετρικά, στην κανονική μορφή παράστασης των παιγνίων, η ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές μπορεί να απεικονιστεί με τη σύμπτωση των συμβόλων (+) και (-) μέσα στο ίδιο κελί.

Μόλις «ανακαλύψαμε» την έξοχη ιδέα του Nash σχετικά με τη «λύση» των παιγνίων. Η ιδέα στην οποία στηρίζεται η έννοια της ισορροπίας Nash είναι ελκυστική χάρη στην απλότητά της. Από τη στιγμή που οι παίκτες θα βρεθούν σε ισορροπία Nash, κανένας δεν μετανιώνει για τη στρατηγική επιλογή του, σε προσωπικό επίπεδο. Μπορεί, φυσικά, να στενοχωριούνται που ως ομάδα δεν μπόρεσαν να ενεργήσουν διαφορετικά, αλλά, με δεδομένη τη συμπεριφορά των άλλων, κανένας δεν στενοχωριέται για τις δικές του, ατομικές πράξεις. Με την έννοια αυτή ακριβώς η ιδέα του Nash σηματοδοτεί μια ισορροπία «παιγνίου», δηλαδή εντοπίζει ένα «σημείο» στο οποίο θα ισορροπήσουν οι πράξεις και οι προβλέψεις των ορθολογικών παικτών, ωστόσο, το γεγονός ότι, από τη στιγμή που θα επιτευχθεί η ισορροπία Nash, δεν θα υπάρχει λόγος να αισθάνονται οι ορθολογικοί παίκτες στενοχωρημένοι δεν σημαίνει ότι οι παίκτες θα κινηθούν προς την ισορροπία αυτή! Όπως στη φυσική, είναι άλλο πράγμα να ανακαλύπτετε ένα σημείο ισορροπίας και εντελώς διαφορετικό να αποδεικνύετε ότι το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας ασκεί βαρυτική έλξη σε όσους δεν βρίσκονται ακόμη σε αυτό, δηλαδή, ότι το σημείο αυτό είναι ένας «πόλος έλξης» ο οποίος τραβά τους παίκτες που καθοδηγούνται από τη λογική και από μια προχωρημένη στρατηγική σκέψη. Αν οι ορθολογικοί άνθρωποι αναμένεται κάπως να προσελκυσθούν από κάποια συμπεριφορά που επιβεβαιώνει τους λόγους στους οποίους στηρίζεται (σε αντίθεση με τους ανορθολογικούς ανθρώπους που η απόφασή τους δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια δικαιολογία), μπορούμε ασφαλώς να προβλέψουμε ότι οι παίκτες θα συγκλίνουν σε κάποια ισορροπία Nash μέσα στον πίνακα αποδόσεων (που αποτελείται, εξ ορισμού, από τις στρατηγικές κάθε ατόμου οι οποίες δικαιολογούν κάθε επιλογή του άλλου ατόμου).

2.3 Λογική κυριαρχίας

2.3.1 Αυστηρή και ασθενής κυριαρχία

Έχουμε ήδη αντικρίσει μια πειστική ορθολογικοποίηση της ισορροπίας Nash στο Πλαίσιο του Παιγνίου 2.1. Η καλύτερη κίνηση για την παίκτρια R είναι η R1 ανεξάρτητα από την επιλογή του παίκτη C. Φυσικά, η R θα προτιμούσε να δει τον C να παίζει C2 (επειδή, στην περίπτωση αυτή, η κίνησή της R1 θα της απέφερε απόδοση 10, έναντι απόδοσης 1 την οποία της δίνει ο συνδυασμός R1, C2), αλλά η κίνηση που θα επιλέξει ο C δεν αλλάζει το απλό γεγονός ότι η R1 είναι η καλύτερη στρατηγική της, ανεξάρτητα από την επιλογή του C. Ονομάζουμε τις κινήσεις που είναι οι καλύτερες αντιδράσεις σε οποιαδήποτε κίνηση κάνει ο αντίπαλος αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές. Αντίθετα, οι στρατηγικές που οδηγούν με βεβαιότητα σε κατώτερα αποτελέσματα σε σύγκριση με κάποια άλλη στρατηγική (π.R2 στο Παίγνιο 2.1) είναι γνωστές ως αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές.

Αυστηρά κυρίαρχες και κυριαρχούμενες στρατηγικές (ορισμός)

Μια στρατηγική είναι αυστηρά κυρίαρχη αν εγγυάται σε έναν παίκτη υψηλότερες αποδόσεις από εκείνες που θα είχε αν επέλεγε οποιαδήποτε άλλη στρατηγική, έναντι όλων των πιθανών στρατηγικών τού αντιπάλου του. Αντιστρέφοντας τον ορισμό, μια στρατηγική είναι αυστηρά κυριαρχούμενη αν επιφυλάσσει στον παίκτη χαμηλότερες αποδόσεις από εκείνες που θα αποκόμιζε αν επέλεγε κάποια άλλη στρατηγική, έναντι όλων των πιθανών στρατηγικών του αντιπάλου του. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, η R1 είναι μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική και η R2 είναι μια αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική. [Σημείωση: Όταν ο ένας παίκτης επιλέγει μεταξύ δύο μόνο στρατηγικών και η μία από αυτές είναι αυστηρά κυρίαρχη, τότε η άλλη θα είναι κατ' ανάγκη αυστηρά κυριαρχούμενη].

Αντίθετα, ο παίκτης C δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική στο Παίγνιο 2.1: Η C1 είναι η καλύτερη αντίδρασή του στην R2 και η C2 η καλύτερη αντίδρασή του στην R1. Παρά ταύτα, το γεγονός ότι η R έχει κυρίαρχη στρατηγική επιτρέπει στον παίκτη C να προβλέψει ότι η παίκτρια R, εφόσον είναι έξυπνη, θα επιλέξει R1. Στην περίπτωση αυτή, η καλύτερη απάντηση του C στην κυρίαρχη στρατηγική της R είναι C2. Με την έννοια αυτή, η λογική κυριαρχίας ορθολογικοποιεί τη μοναδική ισορροπία Nash στο παίγνιο αυτό: (R1, C2). Θα δούμε τώρα μια ασθενέστερη μορφή λογικής κυριαρχίας η οποία, εξαιτίας ακριβώς της «αδυναμίας» της, δεν μπορεί να ορθολογικοποιήσει τόσο ισχυρά την ισορροπία Nash όσο η ισχυρή κυριαρχία στο Παίγνιο 2.1. C1 C2

	C1	C2
R1	10.10	5.10
R2	10.5	0.0

Παίγνιο 2.5 - Ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές

Στο Παίγνιο 2.5 βρίσκουμε τρία κελιά στα οποία συμπίπτουν τα καλύτερα σύμβολα (+) και (-) των αντιδράσεών μας: (R1, C1), (R1, C2) και (R2, C1). Εικάζουμε, λοιπόν, ότι και τα τρία αποτελέσματα αποτελούν ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές. Στην πραγματικότητα, το μόνο αποτέλεσμα που δεν αντιστοιχεί σε ισορροπία Nash είναι το (R2,C2). Μπορεί η κυρίαρχη λογική να φωτίσει αυτή την κατάσταση; Εξετάζοντας προσεκτικά την κατάσταση, παρατηρούμε ότι R1 και R2 είναι εξίσου καλές αντιδράσεις στην κίνηση C1 [σε αυτό οφείλεται η παρουσία των συμβόλων (+) και στα δύο κελιά που αντιστοιχούν στο 01]. Ωστόσο, η R έχει μια σαφή προτίμηση όταν προσδοκά ότι ο C θα επιλέξει C2: η καλύτερη απάντησή της στην κίνηση C2 είναι η R1. Υπό το φως των ανωτέρω, η R1 είναι μια ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική δηλαδή, πρόκειται για μια στρατηγική που έχει καλύτερο αποτέλεσμα στη μία από τις δύο στρατηγικές του αντιπάλου (C2), χωρίς να έχει χειρότερο αποτέλεσμα στην άλλη στρατηγική του αντιπάλου (C1). Προφανώς, αφού στο παίγνιο αυτό υπάρχουν μόνο δύο στρατηγικές, η ασθενής κυριαρχία της στρατηγικής R1 σημαίνει ότι η R2 είναι ασθενώς κυριαρχούμενη. Το ίδιο ισχύει και για τον παίκτη C, του οποίου η στρατηγική C1 είναι ασθενώς κυρίαρχη και η C2 ασθενώς κυριαρχούμενη.

Ασθενώς κυρίαρχη και ασθενώς κυριαρχούμενη στρατηγική (ορισμός)

Μια στρατηγική είναι ασθενώς κυρίαρχη αν εγγυάται σε έναν παίκτη, για κάθε επιλογή του αντιπάλου του, απόδοση τουλάχιστον εξίσου καλή με κάθε άλλη στρατηγική του, όπως και υψηλότερες αποδόσεις για μία τουλάχιστον επιλογή του αντιπάλου του. Εξάλλου, ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές είναι αυτές αποφέρουν σε έναν παίκτη χαμηλότερες αποδόσεις για μία τουλάχιστον από τις κινήσεις του αντιπάλου του και, όσον αφορά την επιλογή που απομένει, επιφυλάσσει στον παίκτη αποδόσεις που δεν είναι καλύτερες, αλλά ούτε και χειρότερες από εκείνες τις οποίες θα τους απέφερε κάποια άλλη στρατηγική. Με λίγα λόγια, η ασθενής κυριαρχία εξηγεί το λόγο για τον οποίο ορισμένα αποτελέσματα δεν προσδιορίζονται ως ισορροπίες Nash του παιγνίου [π.χ. το αποτέλεσμα (R2.C2), επειδή αυτό θα εμφανίζεται μόνον αν οι παίκτες επιλέξουν τις ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές τους], αλλά πρόκειται περισσότερο για μια μικρή θεωρητική λεπτομέρεια παρά για ένα αποτέλεσμα που έχει πρακτική αξία. Επειδή ακόμη και αν είναι αληθές ότι το αποτέλεσμα (R2.C2) δεν θα προκύψει όταν η R προσδοκά ότι ο C θα επιλέξει C2 και ο C προσδοκά ότι η R θα επιλέξει R2 (δηλ. το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δεν θα εμφανιστεί ως ισορροπία Nash), αυτό μπορεί κάλλιστα να προκύψει αν η R προσδοκά ότι ο C θα επιλέξει την ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική του (C1) και ο C προσδοκά ότι η R θα επιλέξει την ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική της (R1). Πράγματι, με δεδομένες τις προσδοκίες αυτές, για την R δεν έχει καμιά διαφορά το αν θα επιλέξει R1 ή R2 και, ομοίως, για τον C δεν έχει επίσης καμιά διαφορά το αν θα επιλέξει C1 ή C2. Κατά συνέπεια, είναι δυνατόν να καταλήξουν παίζοντας (R2,C2). Το συμπέρασμα, λοιπόν, εδώ είναι το εξής:

Αυστηρή κυριαρχία, ασθενής κυριαρχία και σταθερότητα των ισορροπιών Nash

Ενώ μια ισορροπία Nash που υποστηρίζεται από τη λογική της αυστηρής κυριαρχίας είναι σταθερή [π.χ., (R1, C2) στο Παίγνιο 2.1], οι ισορροπίες Nash που υποστηρίζονται μόνο από τη λογική της ασθενούς κυριαρχίας είναι ασταθείς.[π.χ. οι ισορροπίες Nash]

Η ΕΙΛΙΚΡΙΝΗΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΣΕ ΔΗΜΟΠΡΑΣΙΕΣ ΣΦΡΑΓΙΣΜΕΝΩΝ ΠΡΟΣΦΟΡΩΝ 2ης ΥΨΗΛΟΤΕΡΗΣ ΤΙΜΗΣ ΕΙΝΑΙ ΚΥΡΊΑΡΧΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Ας υποθέσουμε ότι συμμετέχουν N ενδιαφερόμενοι σε έναν πλειστηριασμό σπιτιού και καθένας από αυτούς υποβάλει προσφορά στον εκπλειστηριαστή. Ο πλειοδότης κερδίζει, αλλά πληρώνει τη δεύτερη υψηλότερη προσφορά. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η προσφορά της πραγματικής αποτίμησης του συμμετέχοντος στον πλειοδοτικό διαγωνισμό αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική: Υποθέστε ότι αποτιμάται την αξία του σπιτιού σε V. Αν, κερδίζοντας, ήσασταν υποχρεωμένος να πληρώσετε μια τιμή ίση με την (σφραγισμένη) προσφορά σας, θα στενοχωριόσασταν δίκαια αν διαπιστώνατε ότι η 2η υψηλότερη προσφορά ήταν πολύ χαμηλότερη από V, οπότε θα είχε νόημα να υποβάλλετε προσφορά σημαντικά χαμηλότερη από V.

Εντούτοις, αν γνωρίζετε ότι αν κερδίσετε δεν θα είστε υποχρεωμένος να πληρώσετε περισσότερο από τη 2η υψηλότερη προσφορά, δεν θα έχετε λόγο να υποβάλλετε προσφορά χαμηλότερη από V ανεξάρτητα από τις προβλέψεις σας σχετικά με τις προσφορές των αντιπάλων σας. Επομένως, η ειλικρινής προσφορά είναι κυρίαρχη στρατηγική. Ας σημειωθεί ότι η ιδέα αυτή έχει εφαρμογή και σε άλλες καταστάσεις, π.χ. όταν μια ομάδα ανθρώπων προσπαθεί να αποφασίσει πόσο πολύ θα συνεισφέρει κάθε μέλος της ομάδας για κάποιο δημόσιο αγαθό, αλλά έχουν όλοι κίνητρο να υποεκτιμήσουν τις ατομικές τους αποτιμήσεις του αγαθού. Η ειλικρίνεια ενθαρρύνεται, λοιπόν, όταν οι άνθρωποι υποβάλλουν σφραγισμένες προσφορές, αλλά είναι υποχρεωμένοι να συνεισφέρουν λιγότερο από την τιμή της προσφοράς τους (π.χ. να συνεισφέρουν τη 2η υψηλότερη προσφορά).

ΚΥΡΙΑΡΧΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟΝ HOBBES ΤΗΣ ΚΡΑΤΙΚΗΣ ΕΞΟΥΣΙΑΣ

Ας εξετάσουμε ένα παίγνιο στο οποίο συμμετέχουν N(>3) παίκτες και ένα κοινό περιουσιακό στοιχείο. Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι παίκτες, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και μόνον άπαξ, προσπαθούν να αποσπάσουν κομμάτια από αυτό το δημόσιο αγαθό για ιδιωτική χρήση. Ας κανονικοποιήσουμε την απληστία του ατόμου περιορίζοντας το X στο πεδίο τιμών [0,1], όπου X=0 σημαίνει ότι το άτομο απέχει πλήρως από την ιδιοποίηση κομματιών από το κοινό περιουσιακό στοιχείο, και X=1 ότι έχει αποσπασθεί όσο περισσότερη ποσότητα είναι δυνατόν να αποσπασθεί από ένα μόνο άτομο. Τέλος, θα θεωρήσουμε ότι οι αποδόσεις για τον παίκτη ϊ δίδονται, για όλα τα ί = 1,...,N, από τη σχέση: Pί = 1-3μ+2Xί, όπου μ είναι η μέση επιλογή του X στον πληθυσμό των N παικτών, Η ιδέα εδώ είναι ότι όσο πιο άπληστοι είναι οι παίκτες (δηλ. όσο εγγύτερα είναι το μ στο 1) τόσο μεγαλύτερη είναι η εξάντληση του δημόσιου αγαθού και τόσο λιγότερη ποσότητα μένει για να απολαύσουν όλοι μαζί και καθένας χωριστά. Ας σημειωθεί ότι οι αποδόσεις κανονικοποιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε όταν το δημόσιο αγαθό είναι άθικτο, κάθε άτομο απολαμβάνει 1 μονάδα του αγαθού (δηλ. αν καθένας επιλέγει X=0, παίρνει P=1). Η τραγωδία τους (που αναφέρεται συχνά ως τραγωδία των κοινόκτητων πόρων) είναι ότι καθένας έχει ένα πιεστικό ατομικό λόγο να θέσει Xΐ=1!

Ποιος είναι ο λόγος αυτός; Είναι ότι Xί=1 είναι η καλύτερη απάντηση σε όλες τις τιμές του μ. δηλαδή, Xί=1 είναι μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική. Απόδειξη: Αν ο παίκτης ι προβλέπει ότι καθένας από όλους τους άλλους παίκτες θα επιλέξει X=0 (δηλ. ότι όλοι οι άλλοι θα είναι εγκρατείς), η απόδοση για τον ΐ θα είναι ίση με 1 αν και αυτός επιλέξει X=0, ενώ θα είναι ίση με 1-3(1/N)+2 αν επιλέξει Xί=1. ωστόσο, επειδή (N>1) 1- 3(1/N)+2>1 και Xΐ~1 αποδίδει περισσότερο από Xΐ=1.

Είναι αυτή μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική; Για να δούμε ότι πράγματι είναι, ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης ί προβλέπει πως καθένας από τους άλλους παίκτες είναι σε υπερθετικό βαθμό άπληστος (δηλ. το αντίθετο του εγκρατής) και θα επιλέξει X=1. Τότε η απόδοσή του θα είναι

$$P_i = 1-3\left[\frac{N - 1x0}{N}\right]+2x0= 1\text{-}3\left[\frac{N-1}{N}\right] \text{ ή } P_i = 1\text{-}3\left(\frac{N - 1 \cdot 1}{N}\right)+2x1= 1\text{-}3+2=0$$

ανάλογα με το τι θα επιλέξει, αντίστοιχα, XI=0 ή Xΐ=1. Ξανά (επειδή N>3) η προηγούμενη τιμή Pϊ είναι πάντοτε αρνητική και, επομένως, η καλύτερη απάντησή του: η αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική του. Επειδή, όμως, η κίνηση αυτή είναι μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για όλους τους παίκτες, κάθε παίκτης θα επιλέξει X=0, η τιμή του μ θα είναι ίση με μηδέν και η απόδοση για κάθε παίκτη θα είναι επίσης ίση με μηδέν. Αν ο παίκτης ΐ επέλεγε Xί=0 ή τον εαυτό του, η απόδοσή του θα ήταν ίση. Επιχείρημα υπέρ μιας χομπσιανής πολιτείας. Η μεταβλητή Xι μπορεί να νοηθεί ως η μεταβλητή της απληστίας ενός ατόμου, δηλαδή η μεταβλητή που δείχνει πόση ποσότητα ψαριών θα αλιεύσει από τον κοντινό ποταμό, πόση έκταση από τα κοινόκτητα εδάφη θα αποσπάσει για τα βόδια του, πόση ποσότητα από αγαθά των άλλων ανθρώπων θα κλέψει όταν δεν τον βλέπουν, κ.λπ.

Στο βαθμό που η πιο πάνω στρατηγική δομή αντανακλά την κατάσταση αυτή, η αυστηρή κυριαρχία της αντικοινωνικής συμπεριφοράς καταδικάζει την κοινότητα σε μια «κατάσταση πολέμου όλων εναντίον όλων» μέσα στην οποία η ζωή είναι «άσχημη, κτηνώδης και σύντομη». Η απάντηση του Χομπς είναι να καταργήσουμε την αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική εκχωρώντας στην πολιτεία την αρκετή εξουσία ώστε να μπορεί να απαγορεύει επιλογές όπως η Xΐ=1.

2.3.2 Βαθμοί κοινής γνώσης του εργαλειακού ορθολογισμού

Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι κύριο καθήκον είναι η λύση παιγνίων με τον προσδιορισμό των ισορροπιών προς τις οποίες οι ορθολογικοί άνθρωποι θα συγκλίνουν, ελκυόμενοι από τη δύναμη της λογικής τους. Από την άποψη αυτή, η παρουσία αυστηρά κυρίαρχων στρατηγικών σε κάποιο παίγνιο μπορεί να συμβάλει στην άμεση «λύση» (π.χ., το Παίγνιο 2.1, όχι όμως το Παίγνιο 2.5). ωστόσο, θα πρέπει να πούμε ότι ακόμη και ισορροπίες που υποστηρίζονται από αυστηρή κυριαρχία είναι δυνατόν να μην επιτευχθούν. Σε αντίθεση με τη φύση, οι νόμοι της οποίας δεν μπορούν να παραβιαστούν από τα φυσικά αντικείμενα, η κοινωνία αποτελείται από ανθρώπους που είναι διαβόητοι παραβάτες κάθε κανόνα ή νόμου που υποτίθεται ότι διέπει τη συμπεριφορά τους δεν υπάρχει καμία εγγύηση, παραδείγματος χάρη, ότι ένας παίκτης θα κάνει πάντοτε την καλύτερη επιλογή. Ακόμη και αν υπάρχει μια μοναδικά βέλτιστη επιλογή (π. χ., μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική), ο παίκτης μπορεί να είναι αφηρημένος ή απλώς να ενεργεί ανορθολογικά.

Στη θεωρία των παιγνίων (ιδίως στη μετά το Nash), έχουμε διατυπώσει την υπόθεση ότι οι παίκτες είναι εργαλειακά ορθολογικοί και ότι, επομένως, δεν αφήνουν ποτέ να χαθεί μια ευκαιρία να αυξήσουν το καθαρό όφελος που αποκομίζουν, με δεδομένες τις προβλέψεις τους για τη συμπεριφορά των άλλων. Ακριβώς με την έννοια αυτή είναι σχεδόν βέβαιο ότι στο Παίγνιο 2.1, η παίκτρια R θα επιλέξει R1, δηλ. την αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική της.Ωστόσο, όπως έχουμε δει, ο παίκτης C δεν έχει αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική και θα ενεργεί ανάλογα με τις προβλέψεις του όσον αφορά την επιλογή του παίκτη R. Φυσικά, αν ο C γνωρίζει ότι η R είναι εργαλειακά ορθολογική, η ισορροπία είναι ασφαλής: ο C προβλέπει ότι η R θα κάνει την κίνηση R1 και, έτσι, θα αντιδράσει στην πρόβλεψη αυτή παίζοντας C2. Ωστόσο, ο C μπορεί να μην ενεργήσει με τον τρόπο αυτό, αν σκέπτεται ότι η παίκτρια R είναι χαζή και θα επιλέξει μεταξύ R1 και R2 χωρίς κανένα κριτήριο ή λόγο, τελείως στην τύχη. Στην περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη απόδοση για τον παίκτη C θα είναι 6,5 από την κίνηση C1 και 4 από την κίνηση C2.7 Αν, λοιπόν, ο C πιστεύει ότι η R θα διαλέξει μεταξύ των στρατηγικών του στην τύχη, τότε είναι απίθανο να προκύψει η ισορροπία (R1, C2).

	C1	C2
R1	10.10	5.10
R2	20.5	0.0

Παίγνιο ***2.6*** **-** Ένα ^παίγνιο με τη δομή του διλήμματος του φυλακισμένου

Ο ορθολογισμός σε αυτό τον τρόπο ισορροπίας του παιγνίου (όταν αυτό είναι δυνατόν) μπορεί να απαιτεί διαφορετικά βάθη αμοιβαίας γνώσης ανάλογα με τη δομή του παιγνίου. Σε ένα παίγνιο του τύπου του διλήμματος του φυλακισμένου, δεν είναι απαραίτητη η κοινή γνώση του (εργαλειακού) ορθολογισμού, δεδομένου ότι κάθε παίκτης έχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική. Όσο οι παίκτες είναι εργαλειακά ορθολογικοί, θα αναγνωρίζουν τις αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές τους και θα τις επιλέγουν, όποιες και αν είναι οι σκέψεις τους για τον ορθολογισμό των αντιπάλων τους. Ωστόσο, όταν εξετάζουμε ένα παίγνιο σαν το Παίγνιο 2.1, όπου μόνο ο ένας παίκτης έχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική, ο εργαλειακός ορθολογισμός των παικτών δεν εγγυάται ότι θα επιτευχθεί ισορροπία. Χρειαζόμαστε κάτι περισσότερο: Χρειαζόμαστε ο ορθολογισμός τους να είναι, τουλάχιστον σε κάποιο βαθμό, κοινή γνώση ακριβέστερα, χρειαζόμαστε ο παίκτης C να έχει τη βεβαιότητα, να γνωρίζει, ότι η παίκτρια R είναι πράγματι ορθολογιστής. (Ας σημειωθεί ότι αυτά που σκέπτεται η παίκτρια R για τον C δεν είναι σημαντικά, επειδή η R έχει πράγματι κάποια κυρίαρχη στρατηγική την οποία θα επιλέξει). Επιπλέον, όπως θα δούμε πιο κάτω, όσο πιο σύνθετη είναι η δομή του παιγνίου, τόσο μεγαλύτερο είναι το βάθος (ή ο βαθμός) της κοινής γνώσης του ορθολογισμού που μπορεί να αποδειχθεί αναγκαία για να καταστεί δυνατόν να ορθολογικοποιηθεί μια ισορροπία του παιγνίου, και το ίδιο το παίγνιο να θεωρηθεί «λυμένο». Πριν παρακολουθήσουμε την ιδέα αυτή, ας ορίσουμε την κοινή γνώση του ορθολογισμού ως εξής:

Κοινή γνώση* η *τάξης του (εργαλειακού) ορθολογισμού ή ΚΓΟ (ορισμός)

Η ΚΓΟ μηδενικής τάξης περιγράφει μια κατάσταση στην οποία οι παίκτες είναι εργαλειακά ορθολογικοί, αλλά δεν γνωρίζει τίποτα ο ένας για την ορθολογικότητα του άλλου. Αντίθετα, η ΚΓΟ πρώτης τάξης σημαίνει ότι όχι μόνον είναι εργαλειακά ορθολογικοί, αλλά επίσης ότι ο ένας πιστεύει για τον άλλο ότι είναι ορθολογιστής. Συνάγεται ότι, αν η είναι άρτιος αριθμός, η ΚΓΟ η τάξης (ή νιοστής τάξης) εκφράζει το ακόλουθο νόημα: «Η παίκτρια R πιστεύει ότι ο παίκτης C πιστεύει ότι η R πιστεύει ότι... ο C πιστεύει ότι η R είναι εργαλειακά ορθολογική» - πρόταση η οποία περιέχει το ρήμα «πιστεύω» n φορές. Όταν το π είναι περιττός αριθμός, τότε η ΚΓΟ n τάξης σημαίνει: «Η R πιστεύει ότι ο C πιστεύει ότι η R πιστεύει ότι η R πιστεύει ότι ο C είναι εργαλειακά ορθολογικός» - επίσης μια πρόταση που περιέχει το ρήμα «πιστεύω» n φορές. Όταν οι θεωρητικοί των παιγνίων αναφέρονται στην ΚΓΟ χωρίς να αναφέρουν κάποια συγκεκριμένη τάξη, το αποτέλεσμα είναι το n να τείνει προς το άπειρο και ότι «ο ένας παίκτης πιστεύει ότι οι άλλοι παίκτες πιστεύουν ότι ο ένας αυτός παίκτης πιστεύει ότι όλοι πιστεύουν ότι καθένας είναι εργαλειακά ορθολογικός επ' άπειρον» δηλαδή, μας ζητείται να φανταστούμε μια πρόταση άπειρου μήκους η οποία, φυσικά, περιέχει το ρήμα «πιστεύω» άπειρες φορές.

2.4 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ NASH

2.4.1 Η υπέροχη ιδέα του John Nash

Ο John Nash ανεξίτηλα το σημάδι του στη θεωρία των παιγνίων, επειδή έδωσε τεράστια ώθηση στην ικανότητά της να διαλύει την απροσδιοριστία: να «λύνει» παίγνια που δεν έχουν έως τότε προφανή λύση. Ένα έξοχο παράδειγμα είναι το Παίγνιο 2.11.

	C1	C2
R1	10.10	5.10
R2	10.5	0.0

Παίγνιο 2.11

Σε ένα παίγνιο που όλες οι στρατηγικές του ήταν ορθολογικοποιήσιμες, οι μικρότερης εμβέλειας διάνοιες θα έμπαιναν στον πειρασμό να συμπεράνουν ότι το αποτέλεσμα του Παιγνίου 2.11 είναι απροσδιόριστο δηλαδή, ότι η ορθολογικότητα από μόνη της δεν είναι αρκετή για να οδηγήσει τους παίκτες (άρα και τους θεωρητικούς) σε ένα μοναδικό αποτέλεσμα. Όχι όμως και ο Nash. Εξετάζοντας ένα παίγνιο σαν αυτό, εκεί όπου οι άλλοι έβλεπαν την απροσδιοριστία, ο Nash θα διέκρινε μια μοναδικό ορθολογική λύση: το μόνο κελί στο οποίο μπορούμε να φτάσουμε μέσω αμοιβαία επαληθευόμενων στρατηγικών. Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο τμήμα, οι προβλέψεις τουλάχιστον ενός από τους δυο παίκτες είναι καταδικασμένες να διαψευσθούν όταν επιλεγεί R1 ή R3. Με άλλα λόγια, κάποιος θα μετανιώσει για την επιλογή του. Αν όμως επιλεγεί R2, τότε δεν είναι αναγκαίο να μετανιώσει για την επιλογή του τουλάχιστον ένας από τους δύο παίκτες.

Πράγματι, αν ο παίκτης C επιλέξει C2 (που είναι αυτό που η παίκτρια R πρέπει να ανέμενε για να έχει ορθολογικά επιλέξει την κίνηση

R2) τότε η R δεν θα μετανιώσει καθόλου. Αλλά δεν θα μετανιώσει και ο παίκτης C εφόσον θα είχε επιλέξει C2 μόνο αν πρόβλεπε ότι η R θα επέλεγε R2. Αυτός είναι ο λόγος ονομάζουμε τις κινήσεις R2 και C2 αμοιβαία επαληθευόμενες στρατηγικές. Ο Nash κατέδειξε ότι από τα εννέα κελιά του Παιγνίου 2.11, μόνο οι στρατηγικές που οδηγούν στο κελί (R2, C2) ήταν αμοιβαία επαληθευόμενες. Κατόπιν τούτου, υποστήριξε ότι αυτό το μοναδικό χαρακτηριστικό του κελιού (R2, C2) του προσέδιδε κάποιο βαθμό υπεροχής που πρέπει να βοηθούσε τους ορθολογικούς παίκτες να κινηθούν συντονισμένα προς το κελί αυτό. Αν έχει δίκιο, τότε ένα φαινομενικά άλυτο παίγνιο έχει λυθεί. Και, επειδή το αξιοσημείωτο αυτό αποτέλεσμα δεν ήταν αρκετό, ο Nash προχώρησε παραπέρα, για να αποδείξει ότι υπάρχει μια αμοιβαία επαληθευόμενη λύση, που είναι σήμερα γνωστή ως ισορροπία Nash, για όλα τα (πεπερασμένα) παίγνια! Με την απόδειξη αυτή, η θεωρία των παιγνίων αναπτύχθηκε πλήρως. Αιφνιδίως, οι θεωρητικοί των παιγνίων μπορούσαν να σταθούν μπροστά σε ένα μικτό ακροατήριο και ισχυριστούν ότι διαθέτουν μια προνομιακή πρόσβαση σε ένα εννοιολογικό εργαλείο που επιτρέπει τη «λύση» όλων των ειδών κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στις οποίες ενυπάρχει κάποιο στοιχείο στρατηγικής.

2.4.2 Ευθυγραμμισμένες με Συνέπεια Προβλέψεις (ΕΣΠ)

Η κρυμμένη Αρχή της Ευθυγραμμισμένες με Συνέπεια Προβλέψεις (ορισμός)

Οι προβλέψεις είναι ασυνεπώς ευθυγραμμισμένες όταν δράσεις που αναλαμβάνονται σαν βέλτιστες αντιδράσεις στις προβλέψεις αυτές μπορούν, ενδεχομένως, να τις «ανατρέψουν». Η πρόβλεψη ενός παίκτη (π.χ. της παίκτριας R) «ανατρέπεται» όταν ένας άλλος παίκτης (π.χ. ο C) αναλαμβάνει μια δράση με πιθανότητα την οποία η παίκτρια R δεν είχε υπολογίσει σωστά. Αντίθετα, οι προβλέψεις είναι ευθυγραμμισμένες με συνέπεια (ΕΣΠ) όταν οι δράσεις κάθε παίκτη (οι οποίες στηρίζονται στις προβλέψεις του για τον άλλο παίκτη) περιορίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην ανατρέπουν τις προβλέψεις αυτές.

Η Αρχή του Ορθολογικού Προσδιορισμού, που αποδίδει ΕΜΠ, ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε ότι οι παίκτες, τη στιγμή που παρατηρούν τον πίνακα αποδόσεων, σχηματίζουν ταυτόσημες αρχικές κατανομές (δηλ. κατανομές της υποκειμενικής πιθανότητας σχετικά με τις στρατηγικές επιλογές καθενός που συμμετέχει στο παίγνιο). Η ομοιότητα των αρχικών προβλέψεων των παικτών που καθοδηγούν τις δράσεις τους ισοδυναμεί με το να πούμε ότι οι προβλέψεις τους είναι ευθυγραμμισμένες με συνέπεια. Ο John Harsanyi (1967/8) στηρίζει το αξίωμα των ΕΣΠ και η θέση αυτή ονομάζεται δόγμα Harsanyi-Aumann και το νόημά της είναι ότι, με δεδομένο το ίδιο πληροφοριακό σύνολο όσον αφορά κάποιο γεγονός, οι ορθολογικοί παράγοντες πρέπει να οδηγούνται πάντοτε στην ίδια πρόβλεψη (δηλ. τις ίδιες προσδοκίες σχετικά με το τι πρόκειται να συμβεί). Στη γλώσσα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, είναι σαν να λέμε ότι η ίδια είσοδος (δηλ. πληροφορία) πρέπει να έχει πάντοτε την έξοδο (δηλ. πρόβλεψη) όταν οι υπολογιστές που χρησιμοποιούνται είναι ίδιοι (δηλ. οι παίκτες είναι εξίσου ορθολογικοί). Φυσικά, είναι δυνατόν οι παράγοντες να έχουν διαφορετικά πληροφοριακά σύνολα και έτσι να οδηγούνται σε διαφορετικά συμπεράσματα.

Τα δόγμα Harsanyi-Aumann (ορισμός)

Η υπόθεση ότι, σε κάθε πεπερασμένο παίγνιο, η εκ των προτέρων αντίληψη κάθε παίκτη είναι η ίδια, επειδή όλες οι διαφορές στη γνώση των παικτών πρέπει να προκύπτουν από έναν αντικειμενικό μηχανισμό που κατανέμει τις πληροφορίες σε κάθε παίκτη και όχι από ανεξήγητες ή και υποκειμενικές διαφορές στις αρχικές προσδοκίες των παικτών. Οι ορθολογικοί παίκτες, λοιπόν, δεν θα μπορούν απλώς να συμφωνήσουν ότι διαφωνούν όσον αφορά την πιθανότητα διαφορετικών αποτελεσμάτων από την ορθολογική διεξαγωγή του παιγνίου. Είναι προφανές ότι από τη στιγμή που θα δεχθούμε το δόγμα Harsanyi-Aumann θα έχουμε αποδεχθεί και το αξίωμα των ευθυγραμμισμένων με συνέπεια προβλέψεων (ΕΣΠ) και την άποψη ότι ο ορθολογισμός θέτει τις στρατηγικές ισορροπίας Nash σε προνομιακή θέση έναντι άλλων ορθολογικοποιήσιμων εναλλακτικών λύσεων (που δεν είναι ισορροπίες Nash).

.

Η ΣΥΜΦΩΝΙΑ ΝΑ ΔΙΑΦΩΝΟΥΜΕ ΑΚΟΜΗ ΚΑΙ ΟΤΑΝ Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΑΥΤΗ ΕΧΕΙ ΚΟΣΤΟΣ

Προς το τέλος του καλοκαιριού του 1992 παρατηρήθηκε εξαιρετική δραστηριότητα στις ευρωπαϊκές αγορές συναλλάγματος. Στην αρχή, η ιταλική λιρέτα αναγκάστηκε να υποτιμηθεί μέσα στον ευρωπαϊκό Μηχανισμό Συναλλαγματικών Ισοτιμιών (ΜΣΙ) και, τότε, οι κερδοσκόποι έστρεψαν την προσοχή τους στην αγγλική λίρα και στην ισπανική πεσέτα, πωλώντας και τα δύο νομίσματα με την προσδοκία ότι και αυτά θα ακολουθήσουν την ιταλική λιρέτα στο δρόμο της υποτίμησης. Οι πωλήσεις αυτών των νομισμάτων πραγματοποιούνταν σε συνθήκες βαθέματος της ύφεσης στο Ηνωμένο Βασίλειο. Πράγματι, σε όλη τη διάρκεια της άνοιξης και στις αρχές του καλοκαιριού, καθώς η ύφεση στην οικονομία του Ηνωμένου Βασιλείου επιδεινωνόταν, διατυπώνονταν συνεχώς εκκλήσεις για μείωση των επιτοκίων, ωστόσο, η βρετανική κυβέρνηση είχε αναλάβει τη δέσμευση, με τη συμμετοχή της χώρας στο ΜΣΙ, να στηρίξει τη συναλλαγματική ισοτιμία του νομίσματος της. Έτσι, κρατούσε τα επιτόκια σε υψηλό επίπεδο και πωλούσε ξένο νόμισμα από τα συναλλαγματικά αποθέματα της χώρας για να τονώσει τη ζήτηση της στερλίνας. Στις συνθήκες αυτές, δεν θα είχε φυσικά κανένα νόημα για τη βρετανική κυβέρνηση να ενεργεί με τον τρόπο αυτό αν πίστευε ότι η στερλίνα έπρεπε να εγκαταλείψει το ΜΣΙ. Επειδή αν το πίστευε, τότε θα γνώριζε επίσης ότι με τις πράξεις αυτές απλώς μετέθετε χρονικά την υποτίμηση - και μια τέτοια καθυστέρησε θα είχε προφανώς κόστος, με την έννοια ότι έτσι καθυστερούσε την αναγκαία μείωση των επιτοκίων και την ανάκαμψη της οικονομίας και, ταυτόχρονα, εξαντλούσε τα συναλλαγματικά αποθέματα της χώρας.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι πρέπει να δεχθούμε ότι η βρετανική κυβέρνηση σκεπτόταν ότι μπορούσε, με τις ενέργειες της αυτές, να διατηρήσει την παλαιά της ισοτιμία στο ΜΣΙ. Παράλληλα, οι κερδοσκόποι δεν θα είχαν λόγο να πωλούν στερλίνες και να χάνουν τα σχετικώς υψηλά επιτόκια, που απολάμβαναν επειδή είχαν στερλίνες και όχι μάρκα Γερμανίας, εκτός εάν πρόβλεπαν ότι η στερλίνα δεν θα απέφευγε τελικά την υποτίμηση. Έτσι, οι κερδοσκόποι και η βρετανική κυβέρνηση φαινόταν να βρίσκονται σε θεμελιώδη διαφωνία κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού του 1992 σχετικά με την πιθανή κατεύθυνση της στερλίνας. Η στερλίνα είχε κατρακυλήσει στο κατώτερο επίπεδο της ζώνης του ΜΣΙ τη Δευτέρα και την Τρίτη και, τότε, την Τετάρτη, όπως λέγεται, αφού πυροδοτήθηκε από μια συνέντευξη του διοικητή της Κεντρικής Τράπεζας της Γερμανίας (Bundesbank) σε κάποια εφημερίδα, οι πωλήσεις στερλινών έφθασαν σε νέα πρωτοφανή ύψη.

Πράγματι, είναι χαρακτηριστική η δήλωση ανώτατου στελέχους της Τράπεζας της Αγγλίας: «.εν μπορώ να εκφράσω με λόγια την ένταση της πίεσης που ασκήθηκε στη στερλίνα. Ποτέ στο παρελθόν δεν είχαμε ξαναδεί κάτι τέτοιο ... Ήταν σαν να ερχόταν καταπάνω μας μια χιονοστιβάδα». Ο υπουργός Οικονομικών αύξησε τα επιτόκια κατά δύο εκατοστιαίες μονάδες, σε 12% στις 11 π.μ. Στις 2.15 μ.μ. αύξησε ξανά τα επιτόκια, τούτη τη φορά σε 15%. Έως τις 4 μ.μ. το ένα τρίτο των επίσημων αποθεματικών (αξίας περίπου 15 δισεκατομμυρίων στερλινών) χρησιμοποιήθηκαν για τη στήριξη της στερλίνας - αλλά στο σημείο αυτό ακριβώς σταμάτησε η στήριξη της στερλίνας. Ο υπουργός Οικονομικών έβγαλε τη στερλίνα από το ΜΣΙ και την υποτίμησε κατά 10% έναντι του γερμανικού μάρκου. Είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε το ακριβές κόστος για την Τράπεζα της Αγγλίας και, τελικά, για τον Βρετανό φορολογούμενο, της διαφωνίας αυτής το καλοκαίρι του 1992.

Η καθαρή ζημιά για τα αποθεματικά ήταν (χοντρικά) η υποτίμηση κατά 10% των όποιων αποθεματικών είχαν πωληθεί (ή δεσμευθεί) για τα στήριξη της στερλίνας. Τα ακριβή μεγέθη δεν είναι ποτέ σαφή, επειδή η Τράπεζα της Αγγλίας αποδέχθηκε θέσεις στην προθεσμιακή αγορά για στερλίνες, στην οποία τα περιθώρια είναι μικρά, αλλά και μόνο από τη χρησιμοποίηση του αποθεματικού για τη στήριξη της στερλίνας τη «Μαύρη Τετάρτη» είναι ξεκάθαρο ότι το κόστος για τα συναλλαγματικά αποθέματα της χώρας πρέπει να ανήλθε σε μερικά δισεκατομμύρια στερλίνες. Επιπλέον, υπήρξε ασφαλώς κόστος λόγω της καθυστέρησης της οικονομικής ανάκαμψης και της επιμονής σε υψηλά επιτόκια. Φυσικά, η άλλη πλευρά αυτού του κόστους «της συμφωνίας μας να διαφωνούμε» το καλοκαίρι του 1992 ήταν κάποια εντυπωσιακά κέρδη κερδοσκόπων. Λέγεται παραδείγματος χάρη, ότι ο Τζωρτζ Σόρος, ένας από τους γκουρού των αγορών συναλλάγματος, κέρδισε ένα δισεκατομμύριο δολάρια εκείνο το καλοκαίρι κερδοσκοπώντας εναντίον της ιταλικής λιρέτας και της αγγλικής λίρας.

Η ιστορία αυτή δεν έχει επιβεβαιωθεί, αλλά ένας χρηματιστής από την Τράπεζα της Αμερικής ερωτήθηκε σε βραδινή ειδησεογραφική εκπομπή την Τετάρτη: «Ήταν για εμάς εξαίρετη μέρα. Κερδίσαμε αρκετά χρήματα ... γύρω στα 10 εκατομμύρια δολάρια , καθόλου κακά για εργασία μιας ημέρας μερικών ανθρώπων που εργάστηκαν μπροστά στην οθόνη ενός υπολογιστή!»

2.5 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ NASH ΣΕ ΜΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

2.5.1 Εύρος και εύρεση Ισορροπιών Nash σε Μικτές Στρατηγικές (ΙΣΜΣ)

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε παίγνια τα οποία τόσο οι υποστηρικτές όσο και οι τιμητές του Nash θα χαρακτήριζαν ως πραγματικά απροσδιόριστα, δηλ. αλληλεπιδράσεις όπως τα Παίγνια 2.15 έως 2.19, που θεωρούνται απροσδιόριστες επειδή δεν έχουν μια σαφή «λύση»

	C1	C2	
R1	0,0	3,1	%
R2	1,5	0,0	%
	%	%	ΙΣΜΣ

Παιγνιο 2,15

	C1	C2	
R1	-2,2	2,0	%
R2	0,2	1,1	%
	%	%	ΙΣΜΣ

Παιγνιο 2,16

	C1	C2	
R1	1,1	0,0	%
R2	0,0	3,3	%
	%	%	ΙΣΜΣ

Παίγνιο 2,17

	C1	C2	
R1	1,1	2,0	%
R2	0,2	5,3	%
	%	%	ΙΣΜΣ

Παίγνιο 2,18

	C1	C2	
R1	1,0	0,1	%
R2	0,1	1,0	%
	%	%	ΙΣΜΣ

Παίγνιο 2,19

	C1	C2	
R1	1,1	4,0	1
R2	0,4	3,3	0
	1	0	ΙΣΜΣ

Παίγνιο 2, 20

Τα Παίγνια 2.15, 2.16, 2.17 και 2.18 έχουν κοινό τούτο: καθένα περιγράφει δύο ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές (τα τονισμένα κελιά). Αντίθετα, το Παίγνιο 2.19 δεν περιλαμβάνει κανένα απολύτως αποτέλεσμα ισορροπίας (μπορείτε να δείτε ότι δεν υπάρχει κελί που να περιέχει ένα από τα σύμβολα (+) και (-)). Επομένως, στα παίγνια αυτά, η έννοια της ισορροπίας Nash σε καθαρές στρατηγικές δεν προσφέρει χρήσιμες συμβουλές στους παίκτες σχετικά με το τι πρέπει να κάνουν. Τι θα πράξουν, λοιπόν, οι παίκτες;

Σε προηγουμένη ενότητα ορίσαμε δύο τύπους στρατηγικής: την καθαρή και τη μικτή στρατηγική. Ενώ η πρώτη αναφέρεται σε συγκεκριμένες κινήσεις (π.χ. «η παίκτρια R επιλέγει την κίνηση R1»), η μικτή στρατηγική συμπυκνώνεται στην ανάληψη δράσης ως εάν να στρίβετε ένα κατάλληλο ζυγιασμένο κέρμα ανάμεσα στις διαθέσιμες καθαρές στρατηγικές σας (δηλαδή να επιλέγετε την κίνηση R1 με πιθανότητα ρ και την κίνηση R2 με πιθανότητα 1 -ρ).

Μπορεί αυτό, αρχικά, να φαίνεται παράξενο, αλλά αν το εξετάσουμε λίγο περισσότερο θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που η τυχαιοποίηση έχει ασφαλώς νόημα για δύο αλληλένδετους λόγους: (α) όταν δεν έχετε ιδέα τι πρέπει να κάνετε, οπότε επιλέγετε (ίσως υποσυνείδητα) ως εάν, στην τύχη και ίσως πιο σημαντικό, (β) όταν υπάρχουν καταστάσεις οι οποίες σας δίνουν στρατηγικό πλεονέκτημα αν αφήσετε τον αντίπαλο σας να προσπαθεί να μαντέψει ποια κίνηση θα κάνετε. Οι μικτές στρατηγικές ικανοποιούν και τα δύο.

Με ποιο τρόπο, στην πράξη, οι άνθρωποι επιλέγουν τυχαία; Ασφαλώς, δεν σπεύδουν να στρίβουν κέρματα ή να ρίχνουν τα ζάρια! Η τυχαιοποίηση μπορεί να είναι κρυφή. Η παίκτρια R μπορεί να επιλέξει ΗΊ αν το πρώτο άτομο που θα διαβεί την πόρτα είναι καπνιστής ή αν το πρώτο αυτοκίνητο που θα διασχίσει το δρόμο, έξω από το παράθυρο της, είναι κόκκινο, λευκό ή μπλε. Η τυχαιοποίηση μπορεί ακόμη να είναι τυχαία, όπως όταν σταματά κανείς σε κάποιο σημείο της αποβάθρας αναμένοντας το τρένο, παρά το γεγονός ότι δεν γνωρίζει ποιο είναι το βέλτιστο σημείο, .εν χρειάζεται να είμαστε συγκεκριμένοι όσον αφορά τον ακριβή μηχανισμό με τον οποίο οι παράγοντες προχωρούν σε τυχαιοποίηση. Παραδείγματος χάρη, οι υπουργοί συχνά συγκροτούν ειδικές επιτροπές επιφορτισμένες με το καθήκον να τους εισηγηθούν λύση σε κάποιο ευαίσθητο ζήτημα.

Αυτό δεν διαφέρει καθόλου από την επιλογή μιας πολιτικής μέσω τυχαιοποίησης, όπου ο υπουργός προσδιορίζει την πιθανότητα κάθε δυνατού συμπεράσματος διαλέγοντας τα μέλη της επιτροπής, και κατόπιν αφήνει ελεύθερη την επιτροπή να καταλήξει σε κάποιο συμπέρασμα. Ανακύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: Υπάρχει τρόπος με τον οποίο θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε λογικά τις πιθανότητες με τις οποίες οι ορθολογικοί παίκτες θα μπορούσαν να επιλέξουν μεταξύ των καθαρών στρατηγικών τους; Ή, απλούστερα, μπορεί η θεωρία των παιγνίων να «λύσει» αυτά τα (απροσδιόριστα) παίγνια, ανακαλύπτοντας μοναδικές μικτές στρατηγικές τις οποίες θα μπορούσαν να υιοθετήσουν οι ορθολογικοί παίκτες; διαφορετικά, αλλά ισοδύναμα, μήπως επειδή δεν υπάρχει μοναδική ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές θα μπορούσε να βρεθεί μια τέτοια ισορροπία σε μικτές στρατηγικές; Η απάντηση του John Nash ήταν απλή: Πάντοτε υπάρχει μια μοναδική ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Συχνά οι άνθρωποι βρίσκουν κάπως παράξενη την ιδέα των μικτών στρατηγικών. Συμπεριφέρονται ποτέ οι άνθρωποι στην πραγματικότητα με τέτοιο τρόπο ώστε να αναμιγνύουν πιθανοτικά ορισμένες καθαρές στρατηγικές, αποφασίζοντας τι θα πράξουν στρίβοντας, μεταφορικά, ένα κέρμα; Αργότερα, θα εξετάσουμε την ενδεχόμενη θεμελίωση αυτού του τύπου συμπεριφοράς λεπτομερέστερα. Προς το παρόν, όμως, μερικά παραδείγματα θα βοηθήσουν να συλλάβουμε τη γενική ιδέα. Τα παραδείγματα αυτά καταδεικνύουν το στρατηγικό πλεονέκτημα του να είμαστε απρόβλεπτοι.

Θα πρέπει να μπλοφάρετε στο πόκερ; Αν μπλοφάρετε πάντοτε, τότε η μπλόφα σας δεν θα αποδίδει, επειδή θα το καταλαβαίνουν όλοι, και η μπλόφα σας θα πέφτει στο κενό. Από την άλλη, αν η μπλόφα δεν είναι ποτέ καλή καθαρή στρατηγική, τότε δεν θα αναμένεται. Όταν, όμως, δεν αναμένεται ποτέ η μπλόφα, τότε θα αποδίδει πάντοτε! Η φαινομενική αυτή αντίφαση οδηγεί σε ένα απλό συμπέρασμα: Οι ορθολογικοί παίκτες πρέπει να αναμιγνύουν, με κάποια πιθανότητα, τις καθαρές στρατηγικές τους. Ή, απλούστερα, πρέπει να μπλοφάρουν τυχαία. Με παρόμοιο τρόπο, έχετε ποτέ αναρωτηθεί για ποιο λόγο οι αεροπορικές εταιρείες είναι απρόθυμες να σας πουν πόσες θέσεις αναμονής, με μειωμένο εισιτήριο, είναι διαθέσιμες;

Προφανώς, θέλουν να ενθαρρύνουν οριακούς ταξιδιώτες, αλλά ταυτόχρονα δεν θέλουν να ενθαρρύνουν κάποιους από τους κανονικούς ταξιδιώτες να στραφούν στα μειωμένα εισιτήρια των θέσεων αναμονής, όπως θα μπορούσαν να κάνουν αν γνώριζαν ότι θα έπαιρναν τελικά ένα τέτοιο εισιτήριο. Προτού διερευνήσουμε τον ισχυρισμό του Nash, ας τον ερμηνεύσουμε σε μια πιο απλή γλώσσα: Ο Nash διατείνεται ότι έχει λύσει όλα τα πεπερασμένα, στατικά παίγνια.

Επειδή αν υπάρχει πάντοτε μια ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές (ακόμη και όταν δεν υπάρχει τέτοια ισορροπία σε καθαρές στρατηγικές) και η ισορροπία Nash είναι μια πιθανή «λύση» του παιγνίου, τότε δεν υπάρχει παίγνιο που δεν μπορεί να «λυθεί» (κατά την έννοια του Nash). Πρόκειται για κρίσιμο θεώρημα, το οποίο εκτόξευσε τον Nash στην πρώτη θέση του Πανθέου της θεωρίας των παιγνίων. Ας εξοικειωθούμε με τη λογική στην οποία στηρίζεται η Ισορροπία Nash σε Μικτές Στρατηγικές - η ΙΝΜΣ. Ας δούμε το Παίγνιο 2.15, που έχει δύο ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές (R1, C2) και (R2, C1). Το σκεπτικό του Nash μπορεί να διακριθεί σε δύο αξιώματα, που οδηγούν σε ένα απλό θεώρημα:

1. **Αδιαφορία**: Κανένας από τους δύο παίκτες δεν έχει λόγο να σκεφθεί ότι η μία από τις διαθέσιμες ισορροπίες Nash καθαρής στρατηγικής έχει περισσότερες πιθανότητες να εμφανιστεί από ό,τι η άλλη. Είναι και οι δύο εξίσου ευλογοφανείς και, επομένως, οι παίκτες δεν έχουν λόγο να επιλέξουν τη μία από τις δύο καθαρές στρατηγικές (Nash). Είναι δηλαδή αδιάφοροι μεταξύ των δύο στρατηγικών.

2. **Τυχαιοττοίηση:** Όταν οι παίκτες είναι αδιάφοροι μεταξύ διαφορετικών καθαρών στρατηγικών, οι παίκτες επιλέγουν καλύτερα μεταξύ των στρατηγικών αυτών όταν επιλέγουν στην τύχη. Επιπλέον, οι επιλεγμένες τυχαιοποιήσεις πρέπει να είναι συνεπείς με το πιο πάνω αξίωμα 1.

Πρόταση: Η Ισορροπία Nash σε Μικτές Στρατηγικές (ΙΝΜΣ) του Παιγνίου 2.15 είναι μία ισορροπία όπου η παίκτρια R επιλέγει R1 με πιθανότητα % και R2 με πιθανότητα Ομοίως, ο παίκτης C επιλέγει C1 και C2 με πιθανότητες $^3/4$ και $^\Lambda$A αντίστοιχα. Απόδειξη: Υποθέτοντας ότι οι παίκτες επιδιώκουν τη μεγιστοποίηση τη προσδοκώμενης ωφέλειας/χρησιμότητας, το ανωτέρω αξίωμα 1 σημαίνει ότι για να είναι η παίκτρια R αδιάφορη μεταξύ R1 και R2, οι προσδοκώμενες αποδόσεις ωφέλειας/χρησιμότητας από τη στρατηγική R1 πρέπει να είναι ταυτόσημες με τις αποδόσεις που αναμένονται από τη στρατηγική R2, ή ER(R1) = ER(R2). Για τους ίδιους ακριβώς λόγους, το αξίωμα 1 συνεπάγεται ότι οι προσδοκώμενες αποδόσεις για τον παίκτη C από τη στρατηγική C1 πρέπει να είναι ταυτόσημες με τις προσδοκώμενες αποδόσεις από τη στρατηγική C2, δηλαδή ER(C1) = ER(C2). Ερχόμενοι τώρα στο αξίωμα 2, η αδιαφορία των R και C έναντι των διαθέσιμων στρατηγικών τους σημαίνει ότι καθένας παίκτης πρέπει να επιλέξει τυχαία. Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης C επιλέγει C1 και C2 με πιθανότητες ρ και 1~ρ αντίστοιχα. Μπορούμε να πούμε κάτι για τις πιθανότητες αυτές; Μπορούμε να κάνουμε περισσότερα από αυτό: Μπορούμε να υπολογίσουμε τις ακριβείς τιμές που είναι μοναδικά συνεπείς με το αξίωμα 1! Αυτό μπορεί να γίνει με το εξής τρόπο: Για να είναι συνεπής η τυχαιοποίηση των πιθανοτήτων (p,q) από τους παίκτες μας με το αξίωμα 1 πρέπει να είναι τέτοια ώστε ER(R1)=ER(R2) και ER(C1)=ER(C2). Από εδώ και πέρα, είναι ζήτημα απλής αριθμητικής να αποδείξουμε ότι ρ = q - 3/4. Πρώτον, παρατηρούμε πως όταν η παίκτρια R υιοθετεί τη στρατηγική R1 θα αποκομίσει είτε απόδοση 0 είτε απόδοση 3. Την πρώτη απόδοση θα την αποκομίσει με πιθανότητα q (δηλαδή την πιθανότητα να επιλέξει ο παίκτης C την κίνηση C1) και τη δεύτερη απόδοση με πιθανότητα 1 -q. Αν η παίκτρια επιλέξει την κίνηση R2, τότε θα αναμένει απόδοση 1 με πιθανότητα ρ και απόδοση 0 με πιθανότητα 1-p.

Γενικά, ER(R1) = OXq + 3X(1-q) = 3-3q (1.1)

ER(R2) = 1Xqf + 0X(1-qf) = q (2.2)

Όπως έχουν ήδη αποδείξει, οι τυχαιοποιήσεις της παίκτριας R είναι συνεπείς με το αξίωμα 1 μόνο όταν ER(R1)=ER(R2) ή 3-3q=q, δηλαδή όταν q = ¾. Είναι απλό τώρα να αποδείξουμε ότι και p = ¾

Συνοψίζοντας, αν και οι δύο παίκτες δεν βλέπουν κανένα σημάδι σχετικά με το ποια από τις καθαρές στρατηγικές τους οφείλουν να υιοθετήσουν, τότε καθένας από τους δύο παίκτες θα πρέπει να αναμένει ότι ο άλλος θα επιλέξει την πρώτη στρατηγική του (R1 για την R και C1 για τον C) με πιθανότητα ¾. Φυσικά, οι προσδοκίες αυτές θα επαληθευθούν μόνο εάν η R και ο C προκρίνουν μικτές στρατηγικές p = ¾ και q = ¾ αντίστοιχα. Αυτό που μένει τώρα να αποδείξουμε είναι ότι αυτές οι μικτές στρατηγικές αντιστοιχούν σε ισορροπία Nash.

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη αυτή, ας ξαναθυμηθούμε τον ορισμό της ισορροπίας Nash: Αποτελείται από ένα σύνολο στρατηγικών, λόγου χάρη, sR για την R και sC για τον C, τέτοιο ώστε όταν η R προσδοκά ότι ο C θα επιλέξει sC δεν έχει κανένα κίνητρο να επιλέξει άλλη στρατηγική εκτός της sR, ενώ αν ο C προσδοκά ότι η R θα επιλέξει sR δεν έχει κανένα κίνητρο να επιλέξει "άλλη στρατηγική εκτός της sC. Όταν ισχύει αυτό, ο συνδυασμός των στρατηγικών (sR,sC) αποτελεί ισορροπία Nash. Όταν πραγματευόμαστε μικτές στρατηγικές, οι στρατηγικές (sR,sC) είναι οι πιθανότητες με τις οποίες οι παίκτες θα επιλέξουν καθεμιά καθαρή στρατηγική. Είναι ο συνδυασμός των μικτών στρατηγικών p = ¾ και q = ¾ ισορροπία Nash (ΙΝΣΜ); Ας δούμε τι θα συμβεί όταν η R προσδοκά ότι ο C θα επιλέξει την κίνηση q = Έχει η R κίνητρο να επιλέξει κάποια στρατηγική άλλη από τη στρατηγική της ρ = ¾; Όχι, δεν έχει. Εξ ορισμού, ότι η R προβλέπει ότι ο C θα επιλέξει τη μικτή στρατηγική q = %, ER(R1) = ER(R2), τότε η R είναι πλήρως και αυθεντικά αδιάφορη έναντι όλων των διαθέσιμων (καθαρών και μικτών) στρατηγικών της. Με άλλα λόγια, όταν αναμένει ότι ο C θα προσδιορίσει το δικό του q = η R δεν μπορεί να βελτιώσει τη θέση της εγκαταλείποντας τη στρατηγική της ρ = και αντίστροφα. Ταυτόχρονα, όταν ο C αναμένει ότι η R θα προσδιορίσει το δικό της ρ = ER(C1)=ER(C2), τότε ο παίκτης C θα είναι αδιάφορος και δεν θα έχει κανένα κίνητρο να εγκαταλείψει τη δική του στρατηγική q = ¾ either. Ο συνδυασμός, λοιπόν, των μικτών στρατηγικών ρ = ¾ και q = ¾ είναι μια ισορροπία Nash - μια ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές ή ΙΝΜΣ.

Παρατηρούμε αμέσως μια θεμελιώδη διαφορά ανάμεσα στις ισορροπίες Nash σε μικτές στρατηγικές (ΙΝΜΣ) και στις ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές: Οι ΙΝΜΣ είναι ασθενέστερες\ Με αυτό εννοούμε απλώς ότι ενώ η ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές μπορεί να οικοδομηθεί πάνω σε ένα στρώμα ισχυρής προτίμησης, η ΙΝΜΣ εδράζεται αμετάβλητα στην αδιαφορία. Πα να αποσαφηνίσουμε το σημείο αυτό ας εξετάσουμε το Παίγνιο 2.14, που είναι παίγνιο με μια μοναδική ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής. Στο παίγνιο αυτό, η R θα έχει ισχυρή προτίμηση υπέρ της στρατηγικής R1, αν αναμένει ότι ο παίκτης C θα επιλέξει την κίνηση C1, ενώ ο παίκτης C θα έχει ισχυρή προτίμηση υπέρ της στρατηγικής C1, αν αναμένει ότι η παίκτρια R θα επιλέξει την κίνηση R1. Με άλλα λόγια, αν προβλέπουν ισορροπία Nash, τότε θα κινηθούν αποφασιστικά προς αυτή.

Ισορροπία Nash σε Μικτές Στρατηγικές (ορισμός)

(1) Μια ΙΝΜΣ αποτελείται από ένα σύνολο Μ μικτών στρατηγικών - μία για κάθε παίκτη. Η μικτή στρατηγική είναι μια σαφώς προσδιορισμένη κατανομή πιθανότητας (που αποδίδει μια ακριβή πιθανότητα σε καθεμιά διαθέσιμη καθαρή στρατηγική του παίκτη, τέτοια που όλες οι πιθανότητες να βρίσκονται εντός του διαστήματος [0, 1] και το άθροισμα τους να είναι ίσο με (1). Οι μικτές αυτές στρατηγικές βρίσκονται σε ισορροπία Nash όταν κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει την προσδοκώμενη ωφέλεια/χρησιμότητα επιλέγοντας μια διαφορετική στρατηγική από τη μικτή στρατηγική του στο Μ. (2) Όλα τα (πεπερασμένα) παίγνια κανονικής μορφής ή στατικά αναδεικνύουν ένα μοναδικό σύνολο μικτών στρατηγικών (ένα ανά παίκτη) που συνιστά μια ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές (ΙΝΜΣ). (3) Αν το παίγνιο δεν έχει καμία ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής, τότε η ΙΝΜΣ αποδίδει θετική πιθανότητα σε καθεμιά από τις ορθολογικοποιήσιμες καθαρές στρατηγικές και των δύο παικτών. (4) Αν το παίγνιο έχει μια μοναδική ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής, τότε η ΙΝΜΣ αποδίδει πιθανότητα 1 στην καθαρή στρατηγική κάθε παίκτη που αντιστοιχεί στην ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής. (5) Αν το παίγνιο έχει περισσότερες από μία ισορροπίες Nash καθαρής στρατηγικής, τότε η ΙΝΜΣ αποδίδει θετική πιθανότητα στην καθαρή στρατηγική κάθε παίκτη που αντιστοιχεί σε μία

από τις ισορροπίες Nash καθαρής στρατηγικής, και μηδενική πιθανότητα στις καθαρές στρατηγικές που δεν αντιστοιχούν σε μία από τις ισορροπίες Nash καθαρής στρατηγικής του παιγνίου. (1) & (2): Το Παίγνιο 2.19 δεν έχει ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής. Σε τέτοια παίγνια, σύμφωνα με τα σημεία (1) και (2), υπάρχει ισορροπία Nash και αποδίδει θετική πιθανότητα (όχι κατ' ανάγκη την ίδια) σε κάθε στρατηγική και των δύο παικτών. (3): Το Παίγνιο 2.20 έχει μια ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής και επομένως, η ΙΝΜΣ υποδεικνύει ότι η σχετική καθαρή στρατηγική μπορεί να παιχθεί με πιθανότητα 1 (ρ = q = 1). (4): Στα Παίγνια 2.15-2.18, υπάρχουν δύο ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές και σε καθεμιά στρατηγική που αντιστοιχεί σε μια τέτοια ισορροπία Nash αποδίδεται θετική πιθανότητα. Αντίθετα, στο Παίγνιο 2.14, όπου υπάρχουν επίσης δύο ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές, οι καθαρές στρατηγικές ττσυ αντιστοιχούν στην τελευταία έχουν θετικές πιθανότητες {Υζ σε καθεμιά), αλλά στις στρατηγικές R3 και C3 αποδίδονται μηδενικές πιθανότητες, επειδή δεν αντιστοιχούν σε κάποια ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής

3^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ
Η ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

3,1 Παραδείγματα χρήσης της θεωρίας Παιγνίων στην καθημερινότητα και στην οικονομία.

3,1,1 Το δίλημμα των φυλακισμένων

ΣΕΝΑΡΙΟ

Δυο φυλακισμένοι, οι Calvin και Klein, κρατούνται ως ύποπτοι για ένα έγκλημα. Ο ανακριτής μιλάει και στους δυο ξεχωριστά και προσπαθεί να τους πείσει να ομολογήσουν.

Υπάρχουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- Να ομολογήσουν και οι δύο
- Να μην ομολογήσει κανένας
- Να ομολογήσει μόνο ο Calvin
- Να ομολογήσει μόνο ο Klein

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ποινές των δυο φυλακισμένων για κάθε μια από τις τέσσερις περιπτώσεις:

Calvin και Klein	Ομολογεί	Δεν ομολογεί
Ομολογεί	5,5	0,15
Δεν ομολογεί	15,0	1,1

ΑΝΑΛΥΣΗ

Αν το δούμε συνολικά, το συμφερότερο και για τους δύο μαζί είναι να μην ομολογήσουν . Ωστόσο, αν π.χ. ο Clein πιστεύει ότι ο Kalvin δεν θα ομολογήσει , τότε τον Clein τον συμφέρει να ομολογήσει . Το ίδιο ισχύει ανάλογα για τον Kalvin. Γενικότερα, για κάθε επιλογή του Kalvin, τονClein τον συμφέρει να ομολογήσει!! Τελικά ομολογούν και οι δύο.

ΣΧΟΛΙΑ

Το παιχνίδι με τους φυλακισμένους δεν μηδενικού αθροίσματος . Υπάρχουν περιπτώσεις όπου και οι δύο παίκτες κερδίζουν, π.χ. όταν δεν ομολογήσουν. Έχει εφαρμογές στην καθημερινή ζωή:

- Κούρσα εξοπλισμών μεταξύ δύο κρατών.
- Η επιλογή δύο αντιμαχόμενων μερών σε μια αμφισβήτηση σχετικά με το αν θα χρησιμοποιήσουν δικηγόρους ή/και θα καταφύγουν στα δικαστήρια να λύσουν για την αντιδικία τους.

3.1.2 Παραδείγματα από την καθημερινή ζωή

Συμμετοχή σε μια ομαδική εργασία:

Μια ομάδα φοιτητών έχει αναλάβει ένα project Εάν ένας φοιτητής δεν εργάζεται αρκετά, κάποιος άλλος πρέπει να εργαστεί περισσότερο (αλληλεπίδραση). Κάθε φοιτητής πρέπει να αποφασίσει αν και σε ποια ομάδα θα μπει (εκτιμώντας τις δυνατότητες των συμφοιτητών του).

Η ορθολογικότητα έχει να κάνει με την απόφαση του χρόνου που θα αφιερωθεί στην εργασία σε σχέση με τον βαθμό που αναμένεται να πάρουν οι φοιτητές.

Τυχαίος έλεγχος για αναβολικά:

Κάθε αθλητής πρέπει να αποφασίσει αν θα χρησιμοποιήσει ή όχι αναβολικές ουσίες. Εάν χρησιμοποιήσει, αυξάνει τις πιθανότητες του να κερδίσει, ταυτόχρονα όμως ρισκάρει να ανιχνευθεί και να αποβληθεί από σχετικές διοργανώσεις για μεγάλο χρονικό διάστημα, καθώς επίσης και να θέσει σε κίνδυνο την υγεία του . Εάν δεν χρησιμοποιήσει, μειώνει τις πιθανότητές του να διακριθεί, εφόσον άλλοι αθλητές χρησιμοποιήσουν και δεν ανακαλυφθούν.

3.1.3 Παραδείγματα από την οικονομία

Επένδυση σε έρευνα και ανάπτυξη για τις φαρμακευτικές εταιρείες:

Κάθε φαρμακευτική εταιρεία επενδύει ένα ποσό στην ανάπτυξη νέων φαρμάκων. Η πρώτη εταιρεία που αναπτύσσει ένα φάρμακο έχει το δικαίωμα να το εκμεταλλεύεται αποκλειστικά για κάποια χρόνια (αλληλεπίδραση).

Οι εταιρείες λοιπόν πρέπει να αποφασίσουν πού θα διοχετεύσουν τους πόρους τους για έρευνα, πώς θα τιμολογήσουν τα νέα φάρμακα, πώς θα μειώσουν το ρίσκο κατά την ανάπτυξη ενός νέου φαρμάκου κλπ. Οι αποφάσεις αυτές λαμβάνονται βάσει συμπερασμάτων για τις αντίστοιχες αποφάσεις των ανταγωνιστριών εταιρειών. Δημοπρασίες κρατικών ομολόγων:

Ανά τακτά χρονικά διαστήματα οι διάφορες κυβερνήσεις εκδίδουν κρατικά ομόλογα. Οι συμμετέχοντες είναι οι μεγάλες τράπεζες, οι οποίες στη συνέχεια μεταπωλούν τα ομόλογα στους πελάτες τους (π.χ. ομολογιακά αμοιβαία κεφάλαια). Η αλληλεπίδραση έχει να κάνει με το ότι ο μεγάλος ανταγωνισμός ανεβάζει τις τιμές. Η ορθολογικότητα έχει να κάνει με την εξισορρόπηση του ποσού που προσφέρει κάθε τράπεζα για να πάρει κάποια ομόλογα και της πιθανότητας να μην πάρει.

Νόμος για την πτώχευση στις Η ΠΑ:

Στις ΗΠΑ, όταν μια εταιρεία κηρύξει πτώχευση, τα περιουσιακά της στοιχεία δεν μπορούν πλέον να δεσμευθούν από ανεξάρτητους πιστωτές, αλλά προστατεύονται από το νόμο μέχρι η εταιρεία και οι πιστωτές να καταλήξουν σε κάποια συμφωνία διαμοιρασμού των. Φυσικά οι πιστωτές μπορούν να διεκδικήσουν τα χρέη τους δικαστικά πριν η εταιρεία κηρύξει πτώχευση, ωστόσο σε αυτή την περίπτωση διακινδυνεύουν να κηρύξει τελικά η εταιρεία πτώχευση και να χάσουν τα χρήματα τους. Κάθε πιστωτής πρέπει να εκτιμήσει τη μελλοντική πορεία της εταιρείας καθώς και το πόσο υπομονετικοί μπορεί να είναι οι υπόλοιποι πιστωτές, ώστε να αποφασίσει αν θα διεκδικήσει τα χρήματά του δικαστικά ή αν θα περιμένει.

3.1.4 Άλλα παραδείγματα

Συμπεριφορά των ζώων:

Τα ζώα ανταγωνίζονται για δυσεύρετους πόρους όπως τροφή, περιοχή κλπ. Οι παίκτες είναι όλα τα ζώα που έχουν βλέψη για τον ίδιο πόρο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα ζώα έχουν δύο δυνατότητες:. Να μείνουν και να πολεμήσουν για τον πόρο ή να φύγουν , Έχει διαπιστωθεί ότι η συμπεριφορά των ζώων σε καταστάσεις ανταγωνισμού είναι ορθολογική.

Ψηφοφορίες

Χρήση των φυσικών πόρων. Συμπεριφορά στρατιωτών στον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο . Καθορισμός τιμών πετρελαίου από τον OPEC.

Συμπεριφορά των ζώων:

Τα ζώα ανταγωνίζονται για δυσεύρετους πόρους όπως τροφή, περιοχή κλπ. Οι παίκτες είναι όλα τα ζώα που έχουν βλέψη για τον ίδιο πόρο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα ζώα έχουν δύο δυνατότητες:

Να μείνουν και να πολεμήσουν για τον πόρο ή να φύγουν. Έχει διαπιστωθεί ότι η συμπεριφορά των ζώων σε καταστάσεις ανταγωνισμού είναι ορθολογική.

3.1.5 Παράδειγμα: Παιχνίδι Γνώσεων

Έστω ένα τηλεοπτικό παιχνίδι γνώσεων. Λίγο πριν από το τέλος του παιχνιδιού έχουμε κερδίσει ένα ποσό ΑΙ και πρέπει να στοιχηματίσουμε ένα ποσό Β1<Α1 για μια τελευταία ερώτηση (την οποία δεν γνωρίζουμε ακόμη).

Εάν απαντήσουμε σωστά, το ποσό Β1 προστίθεται στο ΑΙ, αλλιώς αφαιρείται . Έστω Ν συνολικά οι παίκτες, κάθε ένας από τους οποίους κερδίζει μέχρι στιγμής ποσό Α1 και καλείται να στοιχηματίσει ποσό Βί<Αί. Μετά την ολοκλήρωση των ερωτήσεων, ο παίκτης που έχει συγκεντρώσει το μεγαλύτερο ποσό Α1+Β1 κερδίζει και παίρνει τα χρήματά του, ενώ οι υπόλοιποι δεν παίρνουν τίποτα. Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Ποιο πρέπει να είναι το ποσό Βί για κάθε παίκτη ϊ, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να φύγει νικητής και μάλιστα με όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα;

Το πρόβλημα έχει όλα τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων που εξετάσει η θεωρία παιγνίων:

Υπάρχει μια ομάδα ανθρώπων. Οι επιμέρους αποφάσεις τους επηρεάζουν ολόκληρη την ομάδα. Για κάθε παίκτη υπάρχουν αποφάσεις που δεν έχουν ειδικό νόημα, οπότε δεν χρειάζεται να τις εξετάσει καν. Προφανώς κάθε παίκτης θα αποφασίσει με τέτοιον τρόπο, ώστε να μεγιστοποιήσει (κατά την εκτίμησή του) την πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι.

Για παράδειγμα, έστω ότι εμείς κερδίζουμε μέχρι στιγμής 10.000€ και ο μοναδικός μας αντίπαλος 7.500€. Εάν στοιχηματίσουμε 5.001€ εξασφαλίζουμε ότι, στην περίπτωση που απαντήσουμε σωστά, θα είμαστε σίγουρα οι νικητές, ανεξαρτήτως τι θα απαντήσει ο αντίπαλος.

Ωστόσο, το ίδιο στοίχημα μας οδηγεί στο να χάσουμε, εάν ο αντίπαλος στοιχηματίσει λιγότερα από 2.500€ (ακόμη και αν απαντήσει λάθος). Θα μπορούσαμε να μην στοιχηματίσουμε τίποτα, οπότε σε αυτή την περίπτωση εξασφαλίζουμε ότι θα κερδίσουμε στην περίπτωση που ο αντίπαλος στοιχηματίσει λιγότερα από 2.500€, ακόμη και αν απαντήσει σωστά.

Φυσικά πάντα υπάρχει το ενδεχόμενο και για τους δύο παίκτες να στοιχηματίσουν όλα τα κέρδη τους, ελπίζοντας ταυτόχρονα να τα διπλασιάσουν και να κερδίσουν το παιχνίδι. Οι παραπάνω είναι μερικές από τις κινήσεις που έχουν ιδιαίτερη στρατηγική σκοπιμότητα στο συγκεκριμένο παιχνίδι.

Το τι θα πράξει ο κάθε παίκτης εξαρτάται από τη γνώση που έχει για τις δυνατότητες του και τις δυνατότητες του αντιπάλου. Με άλλα λόγια, κάθε παίκτης προσπαθεί να μαντέψει την απόφαση και τις δυνατότητες του αντιπάλου του και, λαμβάνοντας υπόψη και τις δικές του ικανότητες, αποφασίζει τη δική του βέλτιστη κίνηση (ορθολογικότητα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ

ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΣΟΛΔΑΤΟΣ

STRATEGIES AND GAMES "THEORY AND PRACTICE"

PRAJIT K. DUTTA MIT PRESS 1999

ECONOMIC AND GAME THEORY

DAVID K. LEVINE

GAME THEORETIC ASPECT IN COMPUTING

R. AUMANN KAI S. HART

HANDBOOK OF GAME THEORY, ELSEVIER SCIENCE

ΕΓΚΥΚΛΟΠΕΔΙΑ BRITANICA

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ VIRGINIA

ΠΗΓΕΣ ΣΤΟ INTERNET

HTTP://WWW.DKLEVINE.COM

HTTP:/ /NEWSCHOOL.EDU

HTTPV/WWW.CEPA.NEWSCHOOL.EDU

HHTP://WWW.PHYSICS4U