

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



**«ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ
ΣΕΙΡΕΣ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΧΕΣΕΩΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ, ΕΚΠΟΜΠΩΝ ΡΥΠΩΝ ΚΑΙ Α.Ε.Π. ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ»**

ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ ΑΣΠΑΣΙΑ (Α.Μ.2535)
ΜΠΑΡΤΖΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ (Α.Μ.2451)
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	8
Εισαγωγή	8
1.1 Έννοια Χρονολογικών Σειρών	8
1.2 Στοχαστική Διαδικασία	9
1.3 Διάκριση Χρονολογικών Σειρών	9
1.4 Μέτρα Χρονολογικών Σειρών	10
Γραφική παράσταση	10
Μέσος όρος	11
Διασπορά	12
Τυπική απόκλιση	12
Συνδιακύμανση	13
Συντελεστής Συσχέτισης	13
Κινητός Μέσος Όρος	14
Τάση	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	15
Στοχαστικά Υποδείγματα Χρονολογικών	15
2.1 Στασιμότητα	15
2.2 Αυτοσυνδιακύμανση και Αυτοσυσχέτιση	16
2.3 Μοντέλα Χρονολογικών Σειρών Απλής Μορφής	17
2.4 Μέθοδος της Ανάλυσης (Decomposition)	18
2.5 Ανάλυση Τάσης	19
2.5.1 Μέθοδος Εκθετικής Εξομάλυνσης και Κινητού Μέσου Όρου	19
2.5.2 Μέθοδος των διαφορών	20

2.5.3 Μέθοδος Προσαρμογής-Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων	22
2.6 Ανάλυση Εποχικότητας-Περιοδικότητας	22
<hr/>	
2.7 Τελεστής Υστέρησης	26
<hr/>	
2.8 Υποδείγματα Χρονολογικών Σειρών,AR.....	26
Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα p Τάξεως,AR(p).....	26
<hr/>	
Αυτοπαλίνδρομο Υπόδειγμα Πρώτης Τάξης,AR(1)	28
<hr/>	
Αυτοπαλίνδρομο Υπόδειγμα Δεύτερης Τάξης,AR(2).....	31
2.9 Εξισώσεις Των Yule-Walker Σε Υποδείγματα, Μορφής AR.....	33
<hr/>	
2.10 Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης	35
<hr/>	
2.11 Έλεγχος Σημαντικότητας Συντελεστών Αυτοσυσχέτισης	37
Box-Pierce	38
<hr/>	
Ljung-Box	39
<hr/>	
Έλεγχος Bartlett	39
2.12 Υποδείγματα Κινητού Μέσου,MA.....	40
Υποδείγματα Κινητού Μέσου,MA(q).....	40
<hr/>	
Υπόδειγμα Κινητών Μέσων Πρώτης Τάξης, MA(1).....	41
<hr/>	
Υπόδειγμα Κινητών Μέσων Δεύτερης Τάξης, MA(2)	42
2.13 Αντιστρεψιμότητα.....	43
<hr/>	
2.14 Απλές και Μερικές Αυτοσυσχετίσεις σε Υποδείγματα Μορφής MA(q),	45
<hr/>	
2.15 ΜΙΚΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ	46
Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Κινητών Μέσων,ARMA	46
<hr/>	
Υπόδειγμα ARMA(1,1)	47
2.16 Αυτοσυσχετίσεις ARMA(p,q) Υποδειγμάτων.....	49
<hr/>	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	50
<hr/>	
Μεθοδολογία Box-Jenkins και Προβλέψεις ARIMA Υποδειγμάτων	50
<hr/>	
3.1 ARIMA Υποδείγματα	50
3.1.1 Υπόδειγμα ARIMA(p,d,q)	51

3.2 Ταυτοποίηση ARIMA Υποδειγμάτων.....	52
3.3 Εκτίμηση ARIMA Υποδειγμάτων.....	54
3.4 Διαγνωστικός Έλεγχος	56
3.5 Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων.....	58
3.6 Προβλέψεις.....	59
3.7 Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων.....	60
3.8 Εποχικό Υπόδειγμα	61
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	63
Στασιμότητα, Τάση και έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας.....	63
4.1 Στασιμότητα.....	63
4.2 Τάση και Στασιμότητα.....	64
4.2.1 Στάσιμες Χρονολογικές Σειρές με Λήψη Διαφορών	65
4.2.2 Στάσιμες Χρονολογικές Σειρές με Αφαίρεση Τάσης.....	67
4.3 Έλεγχοι Στασιμότητας.....	69
4.3.1 Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης.....	69
4.3.2 Έλεγχος Durbin-Watson	70
4.3.3 Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας.....	71
4.4 Έλεγχος των Dickey-Fuller.....	72
Υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής έναντι στάσιμης	72
Έλεγχος τυχαίας διαδρομής με σταθερά έναντι στάσιμης	73
Έλεγχος στασιμότητας τυχαίας διαδρομής με σταθερά και τάση	74
4.5 Επαυξημένος Έλεγχος των Dickey-Fuller(ADF)	75
4.6 Έλεγχος των Phillips-Perron.....	77
Υπόδειγμα Α:Αλλαγή σταθεράς	78
Υπόδειγμα Β:Αλλαγή κλίσης.....	78
Υπόδειγμα Γ:Αλλαγή σταθεράς και κλίσης.....	78
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	80

<i>Δυναμικά Πολυμεταβλητά Μοντέλα</i>	80
<i>5.1 Υποδείγματα VAR</i>	80
<i>5.2 Άλλες Μορφές VAR Υποδειγμάτων</i>	81
<i>5.3 Αιτιότητα κατά Granger</i>	82
<i>5.4 Έλεγχος Αιτιότητας κατά Granger</i>	84
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	85
<i>Συνολοκλήρωση και Υποδείγματα Διόρθωσης Σφαλμάτων</i>	85
<i>6.1 Έννοια της Συνολοκλήρωσης</i>	85
<i>6.2 Έλεγχος Ύπαρξης Συνολοκλήρωσης</i>	87
<i>6.3 Μεθοδολογία των Engle-Granger</i>	88
ΒΗΜΑ1	88
ΒΗΜΑ 2	88
<i>6.4 Η Μεθοδολογία του Johansen</i>	89
<i>6.5 Έλεγχος Βαθμού Συνολοκλήρωσης</i>	90
Έλεγχος Ίχνους	91
Έλεγχος Μέγιστης Ιδιοτιμής.....	92
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	93
<i>Μελέτη Περίπτωσης</i>	93
<i>7.1 Εισαγωγή</i>	93
<i>7.2 Εφαρμογή</i>	94
7.2.1 Έλεγχος Μοναδιαίας Ρίζας ,ADF	97
<i>7.3 Συμπέρασμα-Τελικές Παρατηρήσεις</i>	105
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	106
<i>Πίνακας 1</i>	106
<i>Στοιχεία Ενεργειακής Κατανάλωσης-Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος-Εκπομπών Ανθρακα για την Ελλάδα (τα έτη 1970 έως 2010)</i>	106
ΒΙΒΛΙΑ-ΣΥΓΓΡΑΜΑΤΑ	107
ΠΗΓΕΣ	108

*Ευχαριστούμε θερμά τον επιβλέποντα
καθηγητή της πτυχιακής μας εργασίας κ.
Κουνετά Κωνσταντίνο για την ευκαιρία που
μας έδωσε να ασχοληθούμε με ένα
πολύ ενδιαφέρον θέμα καθώς
και για την ουσιαστική καθοδήγηση του πάνω σε αυτό και φιλική του
στάση!*

*Επίσης Ευχαριστούμε θερμά τους
γονείς μας που μας στήριζαν οικονομικά
και ηθικά καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μας!*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή ασχολείται με την ανάλυση των χρονολογικών σειρών ως αντικείμενο κατανόησης του παρελθόντος και πρόβλεψης του μέλλοντος. Στα πρώτα κεφάλαια γίνεται μια εισαγωγή στην έννοια των χρονολογικών σειρών, ποια η χρησιμότητα τους και τι μπορούν αυτές να περιγράψουν, καθώς αναλύονται ορισμένες βασικές έννοιες αυτών, όπως διάφορα μέτρα, η στασιμότητα, και χαρακτηριστικά όπως η τάση, η περιοδικότητα και άλλα. Έπειτα εξετάζονται συγκεκριμένες κατηγορίες χρονολογικών σειρών, όπως είναι οι στάσιμες και μη στάσιμες, καθώς γίνεται και εκτίμηση των παραμέτρων των παραπάνω σειρών με διαφορές μεθόδους καθώς επεκτεινόμαστε επιπλέον στην έννοια της συνολοκλήρωσης. Τέλος γίνεται μια μελέτη για τρεις χρονολογικές σειρές που αφορούν την Ελλάδα από το 1970 έως το 2010, προκειμένου να εντοπιστεί η σχέση αιτιότητας μεταξύ των χρονολογικών σειρών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

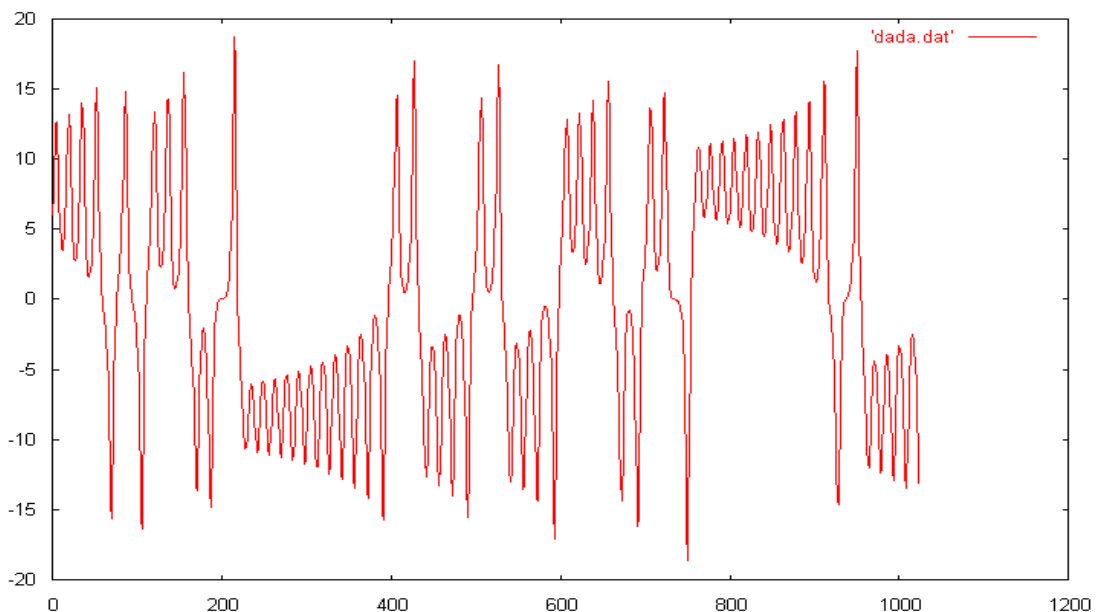
Εισαγωγή

1.1 Έννοια Χρονολογικών Σειρών

Αρχικά πρέπει να διευκρινίσουμε πως η ανάλυση χρονολογικών σειρών δεν χρησιμοποιείται μόνο στην οικονομετρία αλλά και στην ιατρική, την φυσική, την μηχανική και πολλές άλλες επιστήμες.

Κάνουμε ανάλυση χρονολογικών σειρών για να γνωρίσουμε τη φύση του φαινομένου που μελετάμε. Στην ουσία συλλέγουμε τα δεδομένα που έχουμε μέσα στο χρόνο για το μοντέλο μας και φτιάχνουμε ένα χρονοδιάγραμμα για να κατανοήσουμε το παρελθόν και το παρόν και να προβλέψουμε το μέλλον του, ώστε μέσα από τα αποτελέσματα σε μορφή τιμών να βγάλουμε συμπεράσματα θεωρητικά.

Μία μέθοδος πρόβλεψης είναι και οι χρονολογικές σειρές.



Γράφημα 1: Παράδειγμα χρονολογικής σειράς σε γράφημα

Πηγή: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

Όταν αναφερόμαστε στον όρο αυτό εννοούμε μια σειρά από παρατηρήσεις που παίρνονται μέσα σε μια χρονική περίοδο ή στιγμή και συνήθως θεωρείται πως ο χρόνος δειγματοληψίας είναι σταθερός.

Μιλώντας με σύμβολα θα λέγαμε πως χρονολογική σειρά είναι ένα δείγμα y_1, y_2, \dots, y_t παρατηρήσεων που αναφέρονται σε μία μεταβλητή μέσα σε μια t χρονική περίοδο, όπου ο δείκτης t παριστάνει ισαπέχοντα χρονικά σημεία. Εδώ πρέπει να επισυμάνουμε πως η τρέχουσα τιμή μιας Y μεταβλητής εκφράζεται ως συνάρτηση των τιμών της την προηγούμενη χρονική περίοδο Y_{t-1} .

1.2 Στοχαστική Διαδικασία

Η έννοια της στοχαστική διαδικασίας είναι ανάλογη της έννοιας του πληθυσμού. Συνδέεται με μια χρονολογική σειρά άρρηκτα γιατί οι τυχαίες μεταβλητές Y_1, Y_2, \dots, Y_T μιας χρονολογικής σειράς είναι μέρος μιας άπειρης σειράς τυχαίων μεταβλητών. Αυτή η άπειρη σειρά περικλύει τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας και παριστάνεται $\{Y_t\}$. Γενικά μια στοχαστική διαδικασία έχει τη δυνατότητα να περιγραφεί από μια συνάρτηση πιθανότητας $f(y_1, y_2, \dots, y_t)$ η οποία μας είναι άγνωστη.

Εδώ καταλαβαίνουμε το σκοπό και τη χρησιμότητα της ανάλυσης μιας χρονολογικής σειράς η οποία μέσα από τη διατύπωση μοντέλων θα περιγράψει η στοχαστική διαδικασία από την οποία προήλθε η συγκεκριμένη χρονολογική σειρά.

1.3 Διάκριση Χρονολογικών Σειρών

Οι χρονολογικές σειρές, εν συντομία χρονολογικές σειρές, διακρίνονται στις εξής κατηγορίες όσον αφορά τη μορφή τους:

- *Μονομετάβλητες χρονολογικές σειρές* οι οποίες έχουν την μορφή $Y_t = Y(t)$ και συνεπώς αποτελούνται από μια και μόνο μεταβλητή.
- *Πολυμετάβλητες χρονοσειρές*, της μορφής $Y_t = Y(t_1, t_2, \dots, t_n)$ αποτελούμενες από πλήθος μεταβλητών.
- *Πολυδιάστατες και πολυμετάβλητες χρονοσειρές*, τις συναντάμε υπό τη μορφή $Y_t = \{Y_1(t_1, t_2, \dots, t_n), Y_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, Y_n(t_1, t_2, \dots, t_n)\}$
- *Στάσιμες χρονοσειρές*, χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι παραμένουν διαχρονικά γύρω από ένα μέσο σταθερό επίπεδο, (υπάρχει περαιτέρω ανάλυση παρακάτω).

- *Μη στάσιμες χρονοσειρές*, αυτές που τα χαρακτηριστικά τους μεταβάλλονται διαχρονικά. Αξίζει να σημειώσουμε πως είναι δύσκολο να εκτιμηθεί με κάποιο αλγεβρικό υπόδειγμα, (υπάρχει περαιτέρω ανάλυση παρακάτω για το πώς μπορούμε να τις κάνουμε στάσιμες).

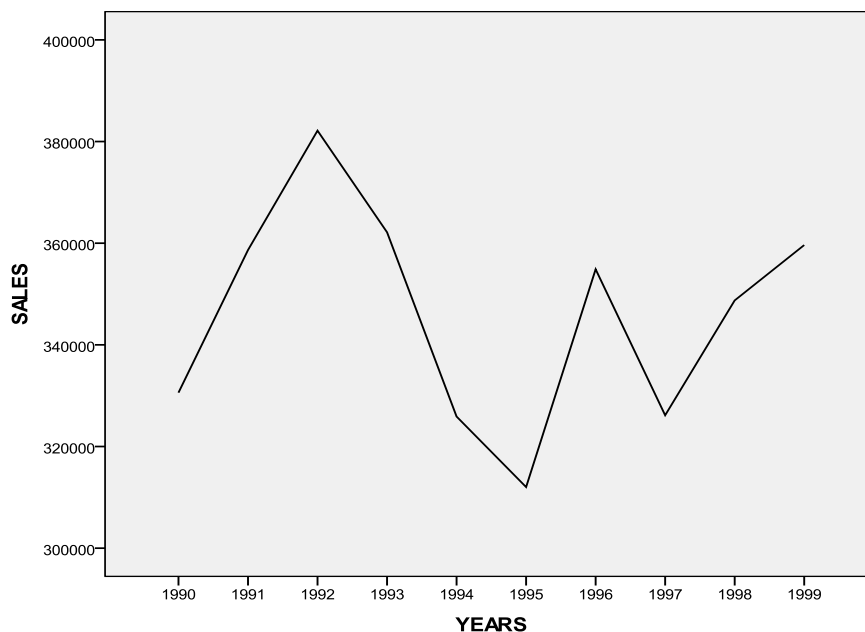
1.4 Μέτρα Χρονολογικών Σειρών

Μέσω μιας χρονολογικής σειράς έχουμε τη δυνατότητα να γνωρίσουμε επιπλέον έννοιες, βασικές για την ανάλυση μιας χρονολογικής σειράς, όπως είναι η γραφική παράσταση, ο μέσος όρος, η διασπορά, η τυπική απόκλιση, η διακύμανση, η συνδιακύμανση, ο συντελεστής συσχέτισης, ο κινητός μέσος όρος, η τάση, η εποχικότητα και άλλες. Τις αναλύουμε κάθε μια χωριστά.

Γραφική παράσταση

Η καμπύλη που δημιουργείται σε ένα σύστημα αξόνων, όπου ο οριζόντιος άξονας είναι ο χρόνος και ο κατακόρυφος η μετρούμενη τιμή που μελετάμε στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα, αποτελεί στο σύνολό της τη λεγόμενη γραφική παράσταση. Μέσω αυτής μπορούν να προκύψουν ορισμένες γρήγορες διαπιστώσεις.

Για παράδειγμα, από μια τυχαία χρονολογική σειρά που αναλύσαμε προέκυψε η παρακάτω γραφική παράσταση.



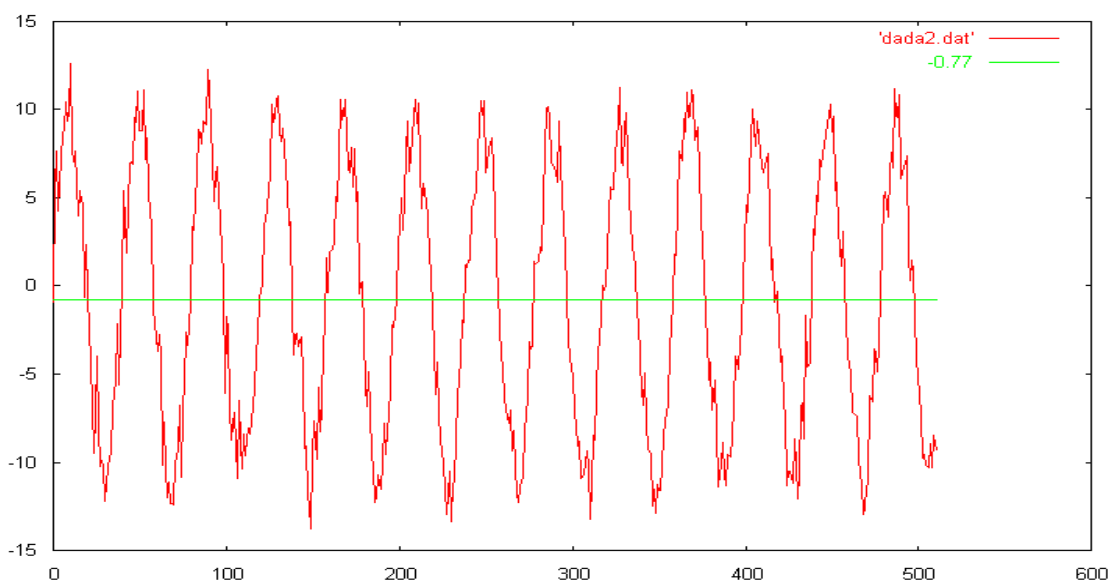
Γράφημα 2: Τυχαία Χρονολογική σειρά

Στον οριζόντιο άξονα υπάρχουν τα έτη (YEARS) και στο κατακόρυφο οι πωλήσεις(SALES) μιας επιχείρησης στο αντίστοιχο έτος. Διακρίνουμε από μια και μόνο γραφική απεικόνιση της χρονολογικής σειράς μας ,μια ανωμαλία στη κατανομή της. Μια γρήγορη διαπίστωση εδώ είναι ότι η συγκεκριμένη χρονολογική σειρά δεν αποτελεί στάσιμη διαδικασία(αναλύεται παρακάτω), δεν παρουσιάζει περιοδικότητα.

Μέσος όρος

Έστω η χρονολογική σειρά $X(t_i)$, $i=1,2,3,\dots,N$, η μέση τιμή όλων των τιμών ,μιας χρονολογικής σειράς είναι ο μέσος όρος μ αυτής της χρονολογικής σειράς και προκύπτει από τον εξής τύπο:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(t_i) \quad (1.1)$$



Γράφημα 3:Μέσος όρος μιας χρονολογικής σειράς(στο σημείο -0.77)

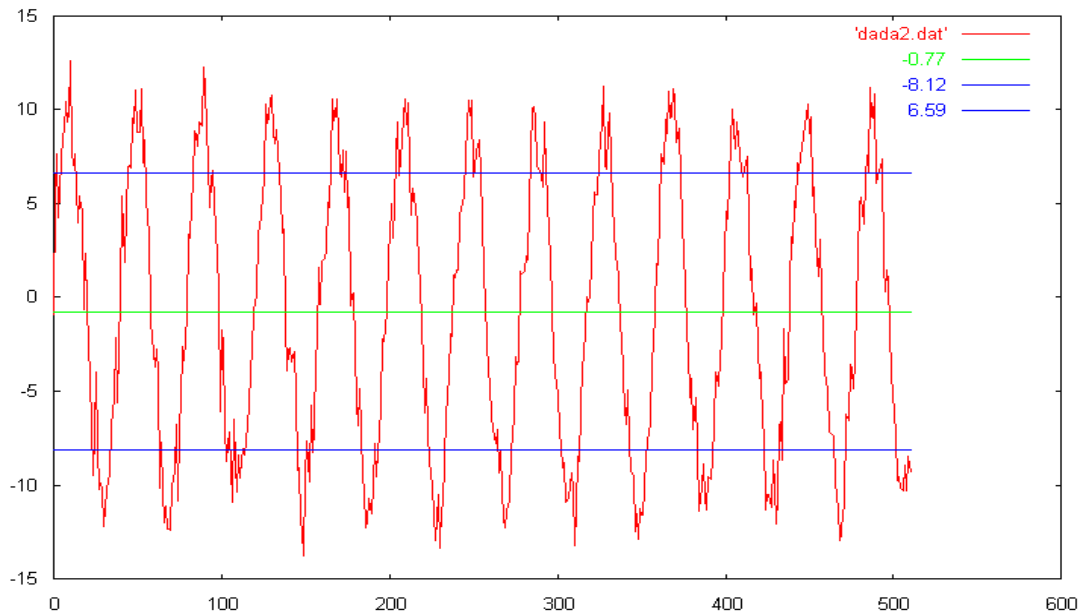
Πηγή: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

Βασικά χαρακτηριστικά του είναι πως υπολογίζεται εύκολα, λαμβάνει υπόψη όλες τις παραμέτρους, επηρεάζεται από ακραίες τιμές και τέλος έχει «προβλέψιμη συμπεριφορά».

Διασπορά

Ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή μιας χρονολογικής σειράς είναι η διασπορά της και έχει τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X(t_i) - \mu)^2}{N-1} \quad (1.2)$$



Γράφημα 4: Διασπορά μιας χρονολογικής σειράς

Η διασπορά απεικονίζεται στα σημεία: -8.12 και 6.59

Πηγή: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

Τυπική απόκλιση

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, που προαναφέραμε, μιας χρονολογικής σειράς αποτελεί τη τυπική απόκλιση και έχει τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X(t_i) - \mu)^2}{N-1}} \quad (1.3)$$

Συνδιακύμανση

Η συνδιακύμανση δίνει τη συμμεταβολή δύο μεταβλητών X και Y όταν αυτές συνδέονται γραμμικά δίνεται τον τύπο:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} \quad (1.4)$$

Σε αυτό το σημείο επιβάλλεται να δώσουμε κάποιες ερμηνείες για την συνδιακύμανση:

- Αν το $\rho_{xy} > 0$, τότε όταν η X αυξάνεται, αυξάνεται και η Y και το αυτό ισχύει και αντίστροφα.
- Αν $\rho_{xy} < 0$, τότε όταν η X αυξάνεται, η Y μειώνεται και αντίστροφα.
- Αν $\rho_{xy} = 0$, τότε δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των X και Y.
- Η συνδιακύμανση εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών.

Συντελεστής Συσχέτισης

Ο συντελεστής συσχέτισης (correlation coefficient) συμβολίζεται με r και αποτελεί έναν αριθμοδείκτη που δείχνει τη σχέση που έχουν μεταξύ τους δυο μεταβλητές X και Y .

$$r_{XY} = \frac{\frac{\sum_i x_i y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_i y_i^2}{n} - \bar{y}^2}} \quad (1.5)$$

Ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος είναι ο συντελεστής συσχέτισης Pearson ο οποίος έχει μέγεθος από -0(αρνητική συσχέτιση) έως +1 (θετική συσχέτιση). Όπως συνεπάγεται στο σημείο +1 βρίσκεται η τέλεια γραμμική συσχέτιση, όσο αυξάνονται δηλαδή οι τιμές της μιας μεταβλητής αυξάνονται και της άλλης και επομένως στο σημείο -1 η τέλεια αρνητική συσχέτιση στην οποία όσο μειώνονται οι τιμές της μίας αυξάνονται της άλλης. Στο σημείο -0,5 υπάρχει μια μέτρια αρνητική συσχέτιση.

Κινητός Μέσος Όρος

Ο κινητός μέσος όρος προέκυψε έπειτα από τη διαπίστωση πως υπάρχει μια τάση που καθιστά αναξιόπιστη τη μέση τιμή, διότι είναι συνάρτηση του χρόνου, που σημαίνει πως αλλάζει με το χρόνο $\mu=\mu(t)$.

Για αυτό το λόγο έπρεπε να κατασκευαστεί ένα μοντέλο για τη τάση το οποίο απαιτούσε τη κατασκευή του κινητού μέσου όρου.

$$\mu(t_i, K) = \frac{\sum_{j=i-K}^{i+K} X(t_j)}{2K+1} \quad (1.6)$$

Τάση

Η τάση είναι στην ουσία η συστηματική κίνηση μιας σειράς προς μια κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει η μακροχρόνια τάση κατά την οποία η τιμή της μεταβλητής αυξάνεται για μεγάλο χρονικό διάστημα ή μειώνεται, το θετικό είναι ότι για αυτόν ακριβώς το λόγο αντιμετωπίζεται εύκολα.

Σε μια χρονολογική σειρά εκτός από τη τάση, συναντάμε την κυκλική κύμανση αυτής, όπου το μοντέλο κινείται απρόβλεπτα, την εποχιακή μεταβολή ή αλλιώς περιοδική όπου το μοντέλο μας είναι αξιόπιστο διότι είναι στάσιμο στο χρόνο και την ακανόνιστη μεταβολή κατά την οποία η κανονικότητα απουσιάζει και τη θέση της παίρνουν αυξομειώσεις άλλοτε μικρές, άλλοτε μεγάλες.

Πρέπει να σημειωθεί πως υπάρχουν αρκετές μέθοδοι (στις οποίες θα επεκταθούμε στη συνέχεια) για να προσδιοριστεί μια τάση σε χρονολογική σειρά, οι βασικότερες είναι:

- Η μέθοδος των δυο μέσων σημείων
- Η μέθοδος των κινητών μέσων
- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (ευθείας και καμπύλης)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστικά Υποδείγματα Χρονολογικών

2.1 Στασιμότητα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η χρονολογική σειρά είναι μια στοχαστική διαδικασία αποτελούμενη από πεπερασμένο πλήθος παρατηρήσεων.

Βασική προϋπόθεση για να αναλύσουμε μια χρονολογική σειρά είναι να είναι στάσιμη στο χρόνο και σε περίπτωση που δεν είναι πρέπει να γίνει στάσιμη.

Στάσιμη λέγεται η χρονολογική σειρά που δε παρουσιάζει μεταβολή στη τιμή του μέσου όρου και της διασποράς της μέσα σε χρόνο t . Με απλά λόγια για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε κάποια πρόβλεψη για την υπό μελέτη χρονολογική σειρά θα πρέπει να μη παρουσιάζει τάση.

Μια στοχαστική διαδικασία καλείται στάσιμη πλήρης/αυστηρώς όταν καμία από τις στατιστικές της ιδιότητες δε μεταβάλλονται από μια μεταβολή στην αρχή μετρήσεως του χρόνου.

Πιο συγκεκριμένα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$\text{➤ } E(Y_t) = \mu_y \quad \text{ανεξάρτητη του } t \text{ (χρόνου)} \quad (2.1\alpha)$$

$$\text{➤ } \text{VAR}(Y_t) = \sigma^2 \quad \text{ανεξάρτητη του } t \quad (2.1\beta)$$

$$\text{➤ } \text{COV}(Y_t, Y_{t+s}) = \text{COV}(Y_{t-m}, Y_{t+s}) = \gamma_s \text{ ανεξάρτητη του } t \quad (2.1\gamma)$$

Δηλαδή ο μέσος (2.1α) και η διακύμανση (2.1β) της χρονολογικής σειράς δε μεταβάλλονται διαχρονικά. Επιπλέον η συνδιακύμανση (2.1γ) μεταξύ δύο οποιονδήποτε τιμών της Y , που απέχουν s περιόδους, είναι συνάρτηση μόνο του s .

2.2 Αυτοσυνδιακύμανση και Αυτοσυσχέτιση

Η αυτοσυνδιακύμανση (Autocovariance) υπολογίζει την συνδιακύμανση δύο παρατηρήσεων της ίδιας χρονολογικής σειράς

$$\gamma_k = \text{cov}(y_t, y_{t+k}) = E[(y_t - E(y_t))][y_{t+k} - E(y_{t+k})] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_k = \text{cov}(y_t, y_{t+k}) = E[y_t - \mu_y][y_{t+k} - \mu_y] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_k = E[(y_t, y_{t+k}) - \mu_y^2] \quad (2.2)$$

Γενικά ισχύει πως ο συντελεστής συσχέτισης είναι ο λόγος της συνδιακύμανσης προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διακυμάνσεων μεταξύ δύο μεταβλητών. Αυτός ο συντελεστής στη πραγματικότητα δίνει μια πλήρη εικόνα για το κατά πόσο ισχυρή ή ασθενής είναι η σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι $-1 \leq \rho \leq 1$ και υπάρχει μέγιστη ισχυρή συσχέτιση εάν $\rho = 1$ ή $\rho = -1$. Επιπλέον:

- Εάν $\rho > 0$ παρουσιάζεται θετική συσχέτιση, όσο πιο κοντά στη μονάδα βρίσκεται ο συντελεστής συσχέτισης ρ τόσο πιο ισχυρή συσχέτιση υπάρχει.
- Εάν $\rho < 0$ υπάρχει αρνητική συσχέτιση και όσο πιο κοντά στο -1 είναι ο συντελεστής συσχέτισης τόσο πιο ισχυρή είναι.
- Στο σημείο $\rho = 0$ δεν εμφανίζεται καμία συσχέτιση μεταξύ των δύο, υπό εξέταση, μεταβλητών.

Όσον αφορά τώρα τις χρονολογικές σειρές ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο παρατηρήσεων Y_t, Y_{t+k} που απέχουν μεταξύ τους k χρονικές περιόδους εκφράζει την έννοια της αυτοσυσχέτισης. Υψηλή αυτοσυσχέτιση σημαίνει πως η χρονολογική σειρά είναι στάσιμη.

Ως συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (ACF) καλείται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_s και στο s και δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\rho_s(X) = \frac{\gamma_s(X)}{\gamma_0(X)} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \rho_s \quad (2.3)$$

$$\rho_s = \frac{\sum_{i=1}^{N-s} (X(t_i) - \mu_X)(X(t_{i+s}) - \mu_X)}{\sum_{i=1}^N (X(t_i) - \mu_X)^2} \quad (2.4)$$

Σημείωση: Το s μπορεί να πάρει τις τιμές από το 0 μέχρι το $N-1$. Στην πραγματικότητα υψηλά s δημιουργούν στατιστικό σφάλμα διότι έχουμε λίγους όρους, έτσι λαμβάνουμε υπ' όψη ρ_s μέχρι $N/2$ περίπου το πολύ.

2.3 Μοντέλα Χρονολογικών Σειρών Απλής Μορφής

Μια χρονολογική σειρά στο σύνολό της αποτελείται από επιμέρους απλά μοντέλα που τη καθιστούν σύνθετη. Αυτά τα μοντέλα είναι:

- **ΤΥΧΑΙΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ:** Είναι μια ακολουθία $\{X_n\}$ για την οποία γενικά ισχύει

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \dots P(X_n \leq x_n)$$

$$\text{με } E(X_t) = 0 \text{ για κάθε } t$$

- **ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ-WHITE NOISE:** Μια χρονολογική σειρά καλείται λευκός θόρυβος όταν δεν ακολουθεί συγκεκριμένο πρότυπο (για παράδειγμα η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ ανά μήνα) συμβολίζεται με το “ ε_t ” και χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\gamma_0 = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

$$\gamma_k = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad \text{για } k \neq 0 \quad (2.5)$$

- **ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΑΔΟΜΗ-RANDOM WALK:** Στο υπόδειγμα της τυχαίας διαδρομής κάθε τιμή της χρονολογικής σειράς προκύπτει από την αμέσως προηγούμενη της με τη προσθήκη ενός τυχαίου σφάλματος. Ο τυχαίος περίπατος είναι ουσιαστικά μια μη στάσιμη στοχαστική διαδικασία.

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{Τυχαία διαδρομή με σταθερά } \alpha \quad (2.6)$$

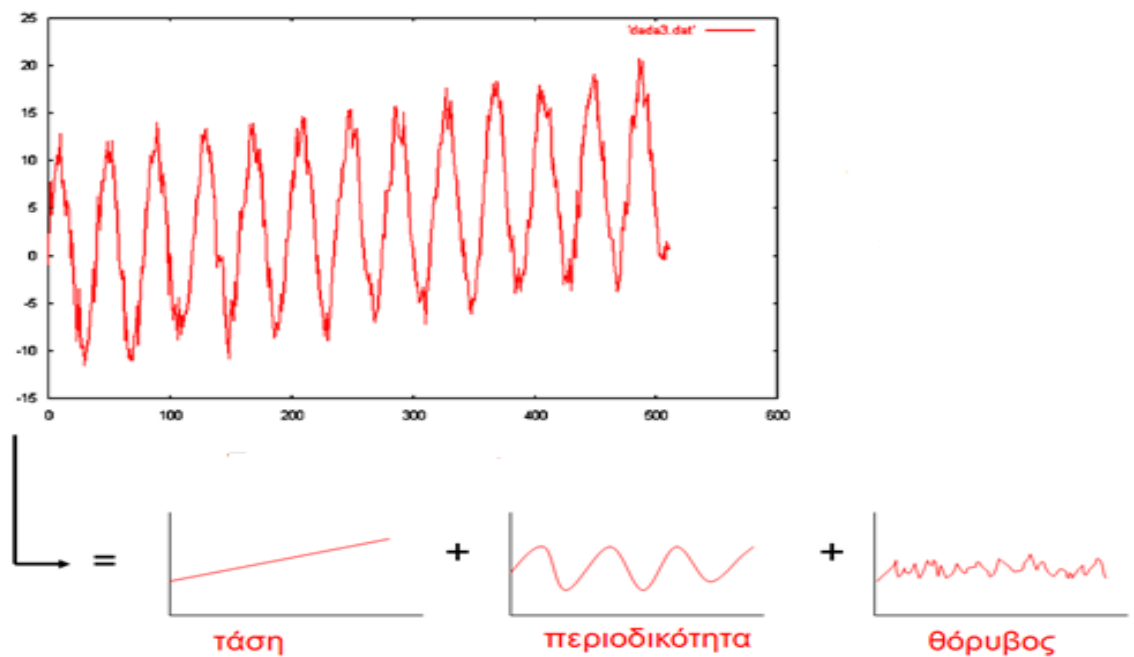
2.4 Μέθοδος της Ανάλυσης (Decomposition)

Βασικός στόχος της μεθόδου της ανάλυσης είναι να απομονωθούν και να διαχωριστούν τα διάφορα (στάσιμα και μη στάσιμα) χαρακτηριστικά μιας χρονολογικής σειράς .

Συνήθως η τάση, η περιοδικότητα ή αλλιώς εποχικότητα και ο θόρυβος μπορούν να συνυπάρξουν σε μια χρονολογική σειρά και να δώσουν τη γενική μορφή

$$X_t = m_t + s_t + e_t + Y_t \quad (2.7)$$

- Όπου m_t η συνιστώσα της τάσης
- Όπου s_t η συνιστώσα της εποχικότητας
- Όπου e_t ο θόρυβος
- Όπου Y_t η στάσιμη συνιστώσα με $E(Y_t) = 0$



Εικόνα 1: Τα τρία Βασικά Χαρακτηριστικά που συνυπάρχουν σε μια χρονολογική σειρά,

Τάση-Περιοδικότητα-Θόρυβος

Πηγή: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

2.5 Ανάλυση Τάσης

Γνωρίζουμε πλέον από την παραπάνω αναφορά στον όρο «τάση» τον ορισμό του. Ήρθε όμως η στιγμή που πρέπει να ταυτοποιηθεί η τάση μέσω 3 βασικών μεθόδων. Την μέθοδο της εκθετικής εξομάλυνσης και κινητού μέσου όρου, των διαφορών και της προσαρμογής.

2.5.1 Μέθοδος Εκθετικής Εξομάλυνσης και Κινητού Μέσου Όρου

Η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης (όπως και η μέθοδος του κινητού μέσου όρου) υπόκειται στη γενική κατηγορία της μεθόδου γραμμικού φιλτραρίσματος. Για την εκθετική εξομάλυνση ισχύει πως από μια χρονολογική σειρά X_t σχηματίζουμε μια χρονολογική σειρά Y_t και έχει τη μορφή:

$$Y(t_i) = X_{t_{(i+r)}} \quad (2.8)$$

από την οποία προκύπτει ξεκάθαρα η τάση $Y(t_i)$ και το υπόλοιπο (residual)

$$R(t_i) = X(t_i) - Y(t_i).$$

Σε αυτό το σημείο εμφανίζεται ο τύπος του κινητού μέσου όρου, που γνωρίσαμε παραπάνω, του οποίου η τάξη $(2K+1)$ παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην εξομάλυνση και λαμβάνει πλέον τη μορφή:

$$Y(t_i) = \frac{1}{2K+1} \sum_{r=-K}^K X(t_{i+r}) \quad (2.9\alpha)$$

Και ορίζεται και ως εξής, για την αντιμετώπιση τυχόν προβλημάτων στα άκρα μιας χρονολογικής σειράς

$$Y(t_i) = \frac{1}{A_i} \sum_{r=\max(-K, 1-i)}^{\min(K, N-i)} X(t_{i+r}) \quad (2.9\beta)$$

Όπου $A_i = \min[K-N-i] - \max[-K, 1-i] + 1$.

Στη γενική της μορφή η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης γράφεται:

$$Y(t_i) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^r X(t_{i-r}) \quad (2.9\gamma)$$

Με $0 < \alpha < 1$

2.5.2 Μέθοδος των διαφορών

Η μέθοδος των διαφορών είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη και είναι αρκετά αποδοτική όταν η τάση είναι στοχαστική. Αρχικά πρέπει να τονίσουμε την έννοια της διαφορίσης γενικά μέσω της οποίας γίνεται η μετατροπή μιας μη στάσιμης χρονολογικής σειράς σε στάσιμη.

Τελεστής διαφορίσης πρώτης τάξης

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} \quad (2.10\alpha)$$

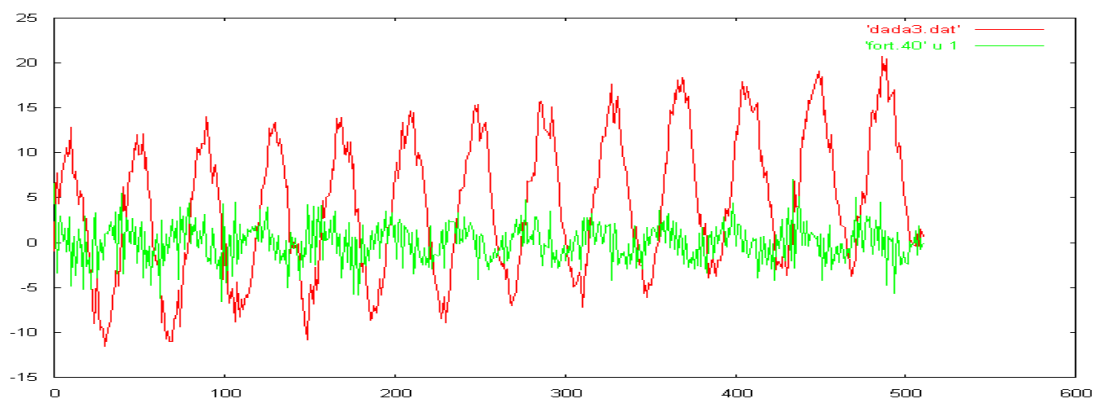
Τελεστής διαφορίσης δεύτερης τάξης

$$\nabla^2 Y_t = (\nabla Y)_t = \nabla Y_t - Y_{t-1} = \dots = Y_{t-2} - Y_{t-1} + Y_{t-2} \quad (2.10\beta)$$

Τελεστής διαφορίσης n-τάξεως

$$\nabla^n Y_t = \nabla(\nabla^{n-1} Y_t) \quad (2.10\gamma)$$

Οι διαφορές αφαιρούν την τάση, φαίνεται όμως η περιοδικότητα να παραμένει και ο θόρυβος να αυξάνεται.



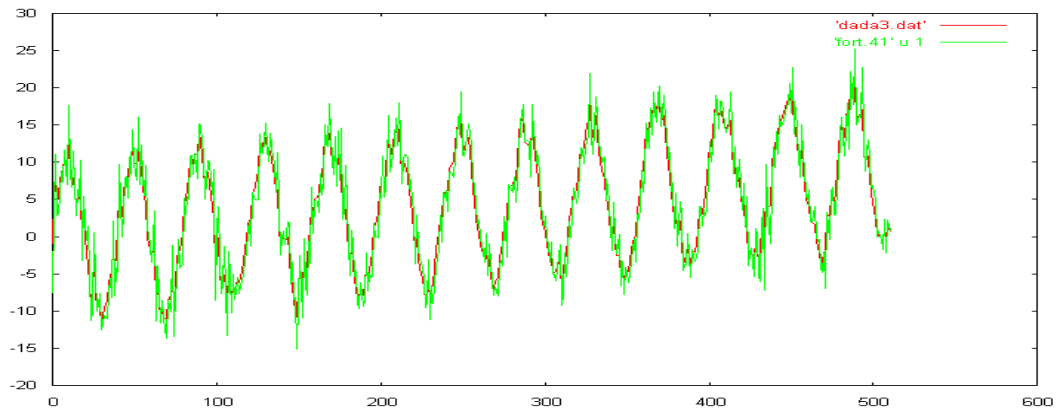
Γράφημα 5: Η χρονολογική Σειρά των Διαφορών

Πηγή: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

Η χρονολογική σειρά με διαφορά πρώτης τάξης

$$X(t_i) = \nabla Y(t_{i+1}) = Y(t_{i+1}) - Y(t_i) \quad (2.11\alpha)$$

Πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο πως η μέθοδος των διαφορών είναι και μεν αποτελεσματική στην απαλοιφή της τάσης αλλά όσον αφορά το υπόλοιπο δεν είναι χρήσιμη διότι παραμένει στα ίδια επίπεδα όπως φαίνεται και στο σχήμα:

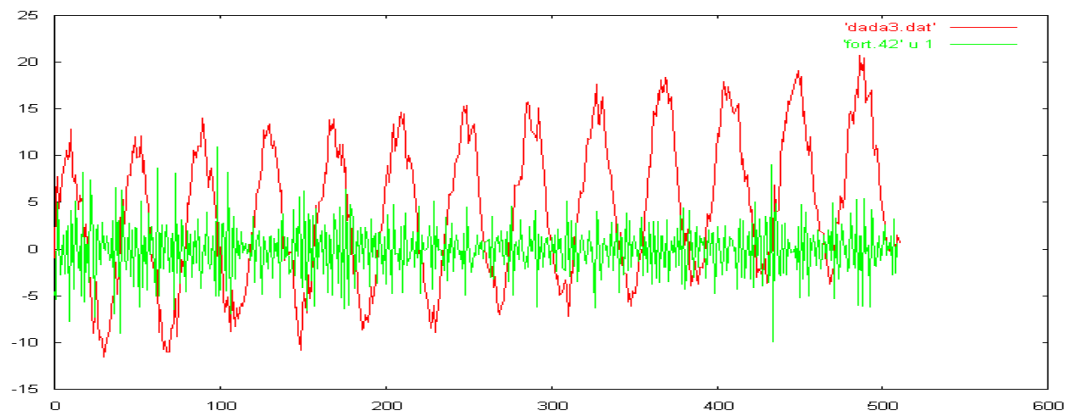


Γράφημα 6: Αρχική Χρονολογική Σειρά και το Υπόλοιπο αυτής

Πηγή: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

Χρονολογική σειρά με διαφορά δεύτερης τάξης

$$X(t_i) = \nabla^2 Y(t_{i+1}) = Y(t_{i+2}) - 2Y(t_{i+1}) + Y(t_i) \quad (2.11\beta)$$



Γράφημα 7: Η αρχική Χρονολογική Σειρά και η Χρονολογική Σειρά των δεύτερων Διαφορών

Πηγή: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

Παρατηρούμε πως παίρνοντας διαφορές δεύτερης τάξης πως η χρονολογική σειρά βελτιώνεται, πλέον έμεινε μόνο ο θόρυβος καθώς η εποχικότητα-περιοδικότητα και η τάση απαλείφθηκαν.

2.5.3 Μέθοδος Προσαρμογής-Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή προσαρμόζει μια συνάρτηση σε παρατηρήσεις ώστε να προχωρήσει σε απαλοιφή της εκτιμώμενης τάσης.

Αρχικά επιλέγουμε μια συνάρτηση, προχωράμε στη προσαρμογή αυτής και τέλος κάνουμε μια εκτίμηση για το κατά πόσο ποιοτική είναι η προσαρμογή που εφαρμόσαμε στη συγκεκριμένη συνάρτηση.

Η πιο γνωστή και βασική μέθοδος προσαρμογής είναι αυτή των ελαχίστων τετραγώνων, μέσω της οποίας ελαχιστοποιούμε την ποσότητα μιας μη γραμμικής συνάρτησης.

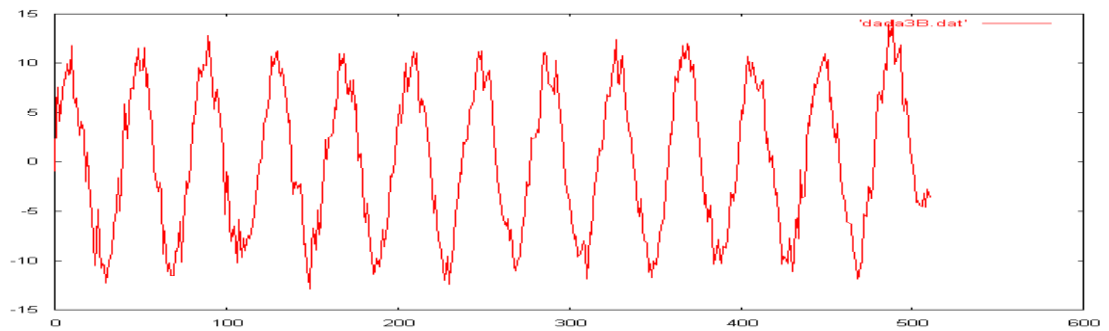
$$\sum_{t=1}^N (X(t_i) - f(t_i))^2 \quad (2.12)$$

2.6 Ανάλυση Εποχικότητας-Περιοδικότητας

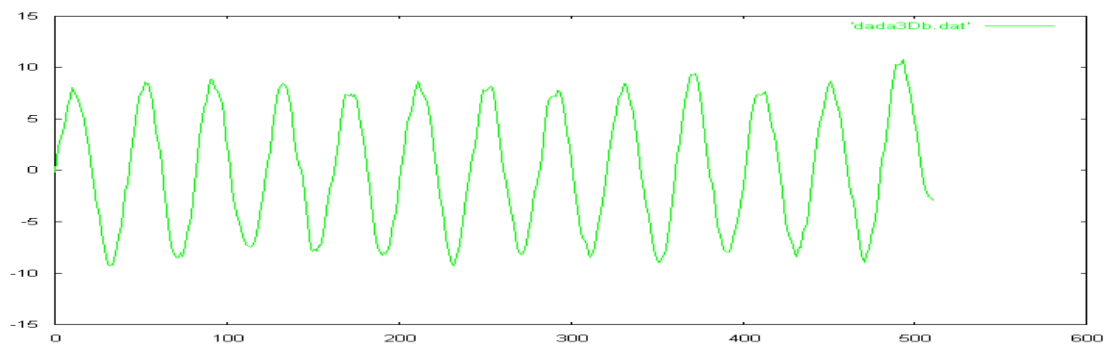
Όταν σε μια χρονολογική σειρά παρατηρείται η ύπαρξη ενός φαινομένου το οποίο επαναλαμβάνεται κατά τη διάρκεια του χρόνου, λέμε πως η συγκεκριμένη χρονολογική σειρά χαρακτηρίζεται από εποχικότητα. Σκοπός είναι να απομονωθεί από το θόρυβο. Οι μέθοδοι είναι οι ίδιοι με αυτές που χρησιμοποιούνται για την τάση και τους οποίους αναλύσαμε παραπάνω.

Η μέτρηση της εποχικότητας γίνεται με τη βοήθεια δεικτών και για την απομόνωση της χρησιμοποιείται η σχέση $Y=T*C$.

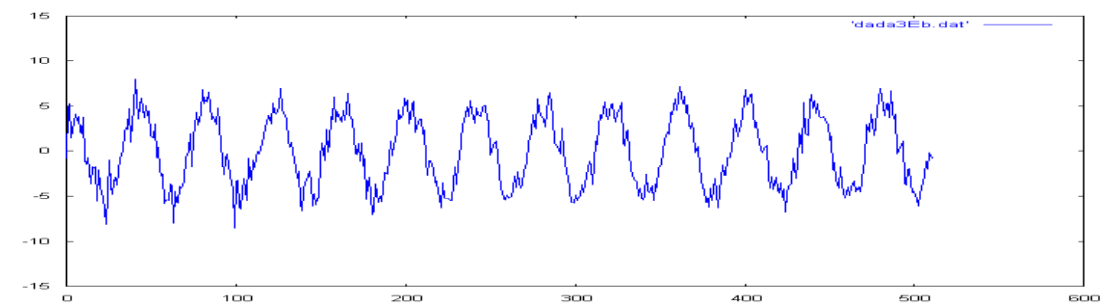
Βασικός σκοπός για τον οποίο μπαίνουμε στη διαδικασία να αναλύσουμε την εποχικότητα μιας χρονολογικής σειράς είναι, όπως και στην ανάλυση της τάσης, να διαχωρίσουμε την εποχικότητα από τον θόρυβο. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της εποχικότητας είναι οι ίδιοι με αυτές που προαναφέραμε για την τάση με τη διαφορά ότι όσον αφορά το κινητό μέσο της μεθόδου γραμμικού φιλτραρίσματος πρέπει να παίρνουμε μικρό παράθυρο K .



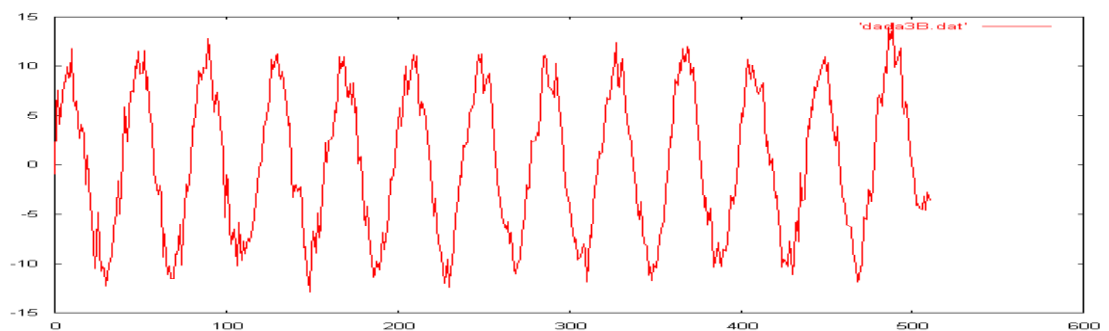
Γράφημα 8:Χρονολογική σειρά χωρίς τα τάση



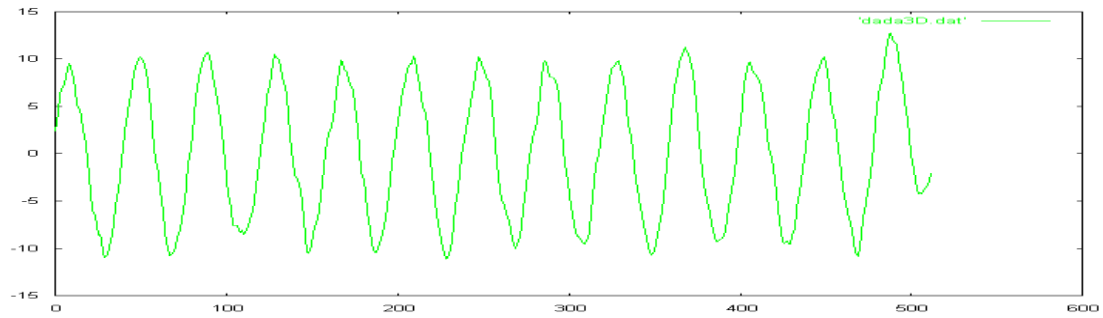
Γράφημα 9:Φιλτραρισμένη χρονολογική σειρά



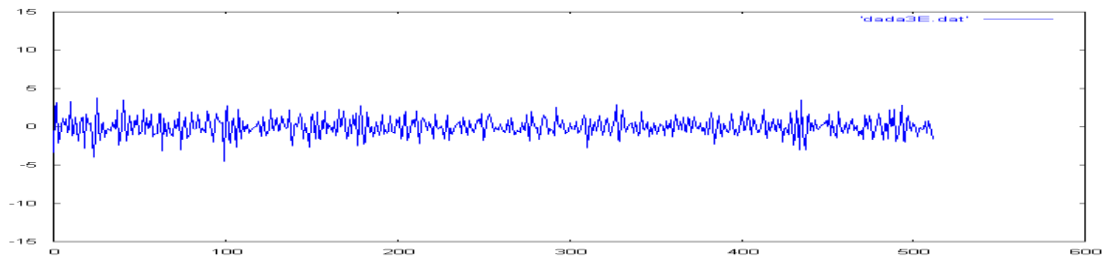
Γράφημα 10:Υπόλοιπο, Εκθετική Εξομάλυνση (exponential smoothing), $\alpha=0.2$



Γράφημα 11:Αρχική Χρονολογική Σειρά Χωρίς Τάση



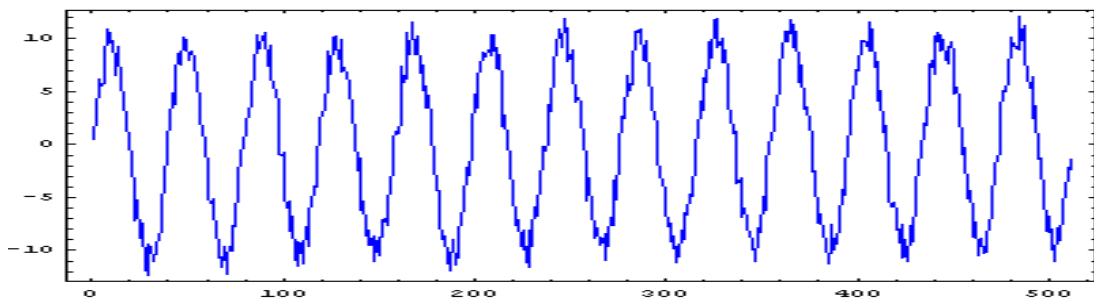
Γράφημα 12:Χρονολογική Σειρά έπειτα από φιλτράρισμα



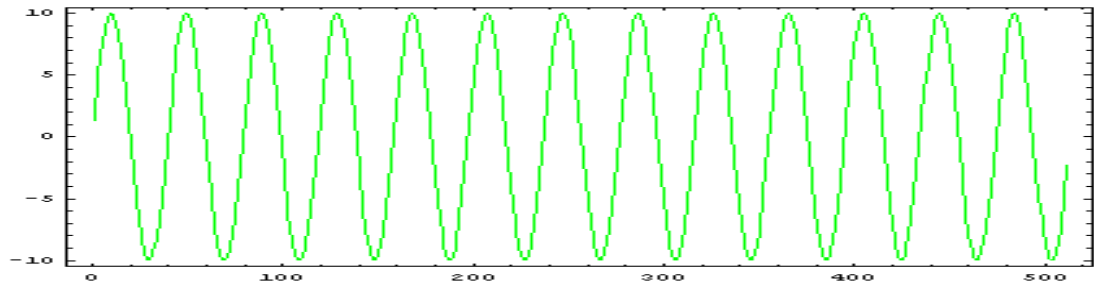
Γράφημα 13:Υπόλοιπο, Κινητός Μέσος Όρος K=2

Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται τη προσαρμογή είναι: $f(t)=A \sin(\omega t+\varphi)$ πρέπει όμως για να πετύχει η προσαρμογή να κάνουμε αυθαίρετα μια αρχική πρόβλεψη, να ορίσουμε δηλαδή στα A_0 και ω_0 τιμές αυθαίρετες αλλά με τοπικό ελάχιστο, μη ξεχνάμε πως στη μέθοδο της προσαρμογής έγκειται αυτή των ελαχίστων τετραγώνων.

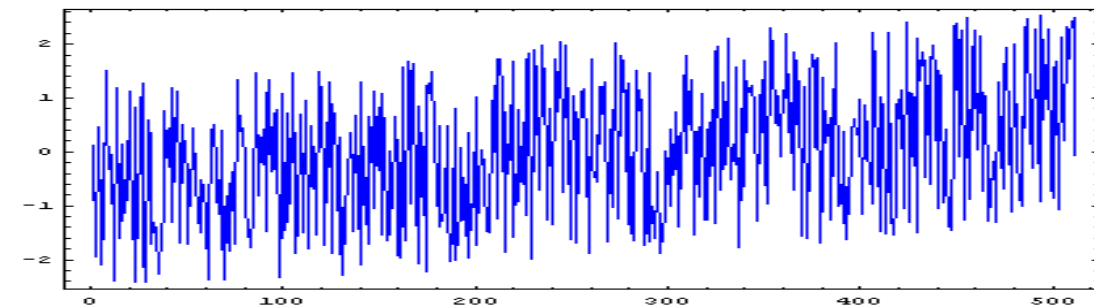
Αν καταλήξουμε σε διαγράμματα της παρακάτω μορφής ,έχοντας τη συγκεκριμένη αρχική χρονολογική σειρά, σημαίνει πως η προσαρμογή πέτυχε.



Γράφημα 14:Αρχική χρονολογική σειρά



Γράφημα 15: Κατά τη προσαρμογή της συγκεκριμένης συνάρτησης $f(t)=A \sin(\omega t+\varphi)$



Γράφημα 16: Υπόλοιπο με μικρή τάση στο περιεχόμενό του

Πηγή Γραφημάτων 8 έως 16: ΚΑΡΒΕΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ, Διπλωματική Εργασία « Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών»

Αξίζει και επιβάλλεται σε αυτό το σημείο να επισημανθεί τι γίνεται όταν η εποχικότητα της υπό μελέτη χρονολογικής σειράς είναι γνωστή. Απάντηση δίνεται μέσω του τελεστή των διαφορών ∇_d με το τύπο:

$$\nabla_d Y_t = Y_t - Y_{t-d} \quad (2.13)$$

Συμπερασματικά η μέθοδος των διαφορών και της εκθετικής εξομάλυνσης δεν έδωσαν τόσο ικανοποιητικά αποτελέσματα όσο η μέθοδος του κινητού μέσου όρου και της προσαρμογής. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως ισχύει για όλες τις χρονολογικές σειρές αλλά σε ότι αφορά τη συγκεκριμένη που επιλέχθηκε για ανάλυση.

2.7 Τελεστής Υστέρησης

Παρακάτω θα αναλύσουμε τα υποδείγματα των χρονολογικών σειρών, πρώτα όμως πρέπει να αναφερθούμε σε ένα επιπλέον εργαλείο που χρησιμοποιείται στην ανάλυση των χρονολογικών σειρών, τον τελεστή υστέρησης (lag operator).

Ο τελεστής υστέρησης συμβολίζεται με το γράμμα L και μετατοπίζει χρονικά προς τα πίσω τη μεταβλητή που πολλαπλασιάζει, δηλαδή

$$Ly_t = y_{t-1}$$

$$L^2 y_t = L(Ly_t) = Ly_{t-2} \text{ γενικά ισχύει}$$

$$L^j y_t = y_{t-j}, j = 0, 1, 2 \dots \quad (2.14)$$

Με βάση αυτά οι πρώτες διαφορές της y_t γράφονται ως εξής

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$$

Παρακάτω υπάρχει ένα παράδειγμα για το τελεστή υστέρησης σε αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα τάξης p , $AR(p)$ και δεύτερης τάξης, $AR(2)$, για να κατανοηθεί καλύτερα ο τρόπος εφαρμογής του.

2.8 Υποδείγματα Χρονολογικών Σειρών, AR

Ως τώρα αναφέρθηκαν δυο στοχαστικές διαδικασίες, αυτή του λευκού θορύβου και αυτή της τυχαίας διαδρομής, μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία και μια μη στάσιμη αντίστοιχα. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα αναλυθούν οι πιο συνηθισμένες στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται κατά την ανάλυση χρονολογικών σειρών. Πρόκειται για την λεγόμενη αυτοπαλίνδρομη διαδικασία.

Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα p Τάξεως, $AR(p)$

Η γενική μορφή ενός υποδείγματος αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος τάξεως p , το οποίο συμβολίζεται ως $AR(p)$, είναι η εξής:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

Πρόκειται για ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης ,όπου η εξαρτημένη μεταβλητή Y_t δεν παλινδρομείται σε ανεξάρτητες μεταβλητές ,αλλά στις προηγούμενες τιμές της ίδιας της μεταβλητής Y_t για αυτόν τον λόγο ονομάζεται αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα(Autoregressive model) τάξεως p . Όπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ είναι σταθερές και ε_t θεωρείται λευκός θόρυβος και μετρά τα τυχαία σφάλματα, είναι στην ουσία μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή με μέσο μηδέν και διακύμανση σταθερή. Το p υποδηλώνει τη τάξη του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος και αναφέρεται στο μήκος της υστερήσεως ενώ τα Y_{t-1}, Y_{t-2} και Y_{t-p} είναι οι τιμές της χρονολογικής σειράς με υστέρηση .

Ένα τέτοιο υπόδειγμα από τη (2.15) μπορεί να εκφραστεί σε όρους του τελεστή υστέρησης ως εξής:

$$(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) y_t = \varepsilon_t$$

Οι συνθήκες στασιμότητας για το συγκεκριμένο υπόδειγμα προσδιορίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης:

$$X^p - \alpha_1 X^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0 \quad (2.16)$$

Θα πρέπει δηλαδή οι ρίζες της να είναι όλες μικρότερες της μονάδας σε απόλυτες τιμές ή με άλλα λόγια να βρίσκονται όλες μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.

Εδώ πρέπει να αναφερθεί πως στη βιβλιογραφία υπάρχει και ένας εναλλακτικός τρόπος για να προσδιοριστούν οι συνθήκες στασιμότητας. Αυτός ο τρόπος βασίζεται στο πολώνυμο

$$1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p = 0 \quad (2.16a)$$

Το οποίο προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.16) το X με $1/L$ και μετά πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη την εξίσωση με L^p .

Στη περίπτωση αυτή η στασιμότητα του AR(p) υποδείγματος εξαρτάται από το αν όλες οι ρίζες του πολωνύμου είναι μεγαλύτερες της μονάδας σε απόλυτες τιμές ή διαφορετικά αν είναι όλες εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Ακολουθεί μια σειρά από τύπους που αφορούν το μέσο, την διακύμανση, την αυτοσυσχέτιση (ACF) και την αυτοσυνδιακύμανση (ACVF) του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος p τάξεως.

Ο μέσος είναι:

$$E(Y)_t = E(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t) = \dots \Leftrightarrow \mu = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p)} \quad (2.17)$$

Η διακύμανση βασίζεται στο τύπο

$$\frac{\sigma^2}{(1 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2 - \dots - \alpha_p \rho_p)} \quad (2.18)$$

Ενώ η αυτοσυνδιακύμανση και αυτοσυσχέτιση στους ακόλουθους τύπους αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-s}) = \alpha_1 \gamma_{s-1} + \alpha_2 \gamma_{s-2} + \dots + \alpha_p \gamma_{s-p} \\ \rho_s &= \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} + \dots + \alpha_p \rho_{s-p}, \quad s > 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Αυτοπαλίνδρομο Υπόδειγμα Πρώτης Τάξης, AR(1)

Το υπόδειγμα αυτής της τάξεως έχει την εξής μορφή

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.20)$$

όπου ε_t καλείται λευκός θόρυβος

Αν η σειρά Y_t είναι στάσιμη, τότε ο μέσος της θα είναι ο ίδιος σε κάθε χρονική στιγμή άρα ισχύει

$$\mu = E(Y_t)$$

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 \mu$$

από τα οποία και προκύπτει ο μέσος μ της Y_t του υποδείγματος AR(1) ως εξής:

$$E(Y)_t = E(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) = \dots = \alpha_0 + \alpha_1 \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1)} \quad (2.21)$$

Για μια χρονολογική σειρά ο μέσος θα πρέπει να είναι πεπερασμένος. Άρα ο μέσος μ θα πρέπει να συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό αφού $|\alpha| < 1$, δίνοντας μας

έτσι μια πρώτη συνθήκη στασιμότητας της χρονολογικής σειράς. Αν αφαιρέσουμε με μ και τα δυο μέλη θα έχω μια νέα μορφή του υποδείγματος AR(1)

$$Y_t - \mu = \alpha_0 - \mu + \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha_1 (Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.22)$$

η οποία χρησιμοποιείται αν η σειρά Y_t έχει μέσο το μηδέν. Σε περίπτωση που ο μέσος της δεν είναι μηδέν αφαιρούμε πρώτα το μέσο από τις τιμές της ή γράφουμε την αρχική του μορφή με τη σταθερά α_0 στο υπόδειγμα.

Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί πως η y_t μπορεί να διασπαστεί σε δυο συνιστώσες, μια στοχαστική που η πορεία της εξαρτάται από τη τιμή που έχει η παράμετρος α_1 και μια μη στοχαστική. Αποδεικνύεται:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_1 [\alpha_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}] + \varepsilon_t \\ &= \alpha_1^2 [\alpha_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}] + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \alpha_1^3 y_{t-3} + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} \\ &= \dots \\ &= \alpha_1^s y_{t-s} + \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_1^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Η πρώτη συνιστώσα $\alpha_1^s y_{t-s}$ της εξίσωσης εξαρτάται από τη τιμή της χρονολογικής σειράς y_t την περίοδο $t-s$, αν λοιπόν $|\alpha_1| < 1$, τότε όσο μεγαλώνει το s μικραίνει η προαναφερθείσα συνιστώσα, ενώ η πορεία της δεύτερης συνιστώσας, δηλαδή του σταθμικού αθροίσματος των υστερήσεων του λευκού θορύβου $\sum_{j=0}^{s-1} \alpha_1^j \varepsilon_{t-j}$, είναι φθίνουσα. Το οποίο μας οδηγεί το συμπέρασμα πως τη στιγμή που το $s \rightarrow \infty$ η χρονολογική σειρά μπορεί να γραφτεί ως

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_{t-j}, \quad t=1,2,\dots,T \quad (2.23\alpha)$$

Με βάση τα παραπάνω για τη y_t ισχύει $E(y_t) = E(\varepsilon_t) + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \dots = 0$ άρα έχει μέσο μηδέν.

Για τη διακύμανση του υποδείγματος AR(1) ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= E(y_t^2) = E(\varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots)^2 \\ &= E(\varepsilon_t^2) + \alpha_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_1^4 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \dots + 2\alpha_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^2(1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^4 + \dots)$$

με σ_{ε}^2 συμβολίζεται η σταθερή διακύμανση των τυχαίων σφαλμάτων.

Όταν το $-1 < \alpha_1 < 1$ σημαίνει ότι η διακύμανση του y_t συγκλίνει σε έναν πεπερασμένο αριθμό. Έτσι από τη (2.24) έχουμε:

$$\gamma_0 = \text{var}(y_t) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \alpha_1^2} \quad (2.25)$$

Άρα για να είναι μια διαδικασία της μορφής AR(1) στάσιμη θα πρέπει να ισχύει $|\alpha_1| < 1$.

Ακολουθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E(y_{t-1}y_t) = E[y_{t-1}(\alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)] \\ &= \alpha_1 E(y_{t-1}^2) + E(y_{t-1}\varepsilon_t) = \alpha_1 \gamma_0 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση και από το ότι για μια στάσιμη χρονολογική σειρά ισχύει:

$$\begin{aligned} E(y_{t-1}^2) &= E(y_t^2) = \text{var}(y_t) = \gamma_0 \\ E(y_{t-1}\varepsilon_t) &= 0 \end{aligned}$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= E(y_{t-2}y_t) = E[y_{t-2}(\alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)] \\ &= \alpha_1 E(y_{t-2}y_{t-1}) = \alpha_1 \gamma_1 = \alpha_1^2 \gamma_0 \end{aligned}$$

Βασιζόμενοι στο γεγονός ότι το y_{t-2} απέχει από το y_{t-1} κατά $(t-1)-(t-2)$ και ότι

$$E(y_{t-j}\varepsilon_t) = 0 \quad (2.25\alpha)$$

για $j \neq 0$ λαμβάνουμε τη γενική συνάρτηση αυτοσυνδιακυμάνσεων

$$\gamma_s = \alpha_1^s \gamma_0 \quad s > 0 \quad (2.26)$$

καθώς επίσης και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ρ_s

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \alpha_1^s \quad (2.26\alpha)$$

Πιο συγκεκριμένα για ένα στάσιμο αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα πρώτης τάξης, AR(1), η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αρχίζει από τη μονάδα, $\rho_0=1$, και φθίνει γεωμετρικά προς το μηδέν καθώς το k μεγαλώνει.

Αυτοπαλίνδρομο Υπόδειγμα Δεύτερης Τάξης, AR(2)

Γενικά για εύρεση μέσου, διακύμανσης και ούτω κάθε εξής ακολουθείται η ίδια διαδικασία με το AR(1), η γενική μορφή του υποδείγματος AR(2) είναι:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.27)$$

Όταν η χρονολογική σειρά y_t έχει μέσο μηδέν η μορφή του υποδείγματος είναι, αφαιρώντας με μ και τα δυο μέλη:

$$Y_t - \mu = \alpha_0 - \mu + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.27\alpha)$$

Ακολουθεί ο μέσος του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος AR(2), για τον οποίο θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ ώστε να είναι πεπερασμένος ο μέσος μ και να αποτελέσει στάσιμη διαδικασία η σειρά y_t .

$$E(Y)_t = E(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t) = \dots \Leftrightarrow \mu = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)} \quad (2.28\alpha)$$

Για τη διακύμανση λαμβάνουμε τον εξής τύπο:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E(y_t^2) = E[y_t(\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)] = \\ &= \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (2.28\beta)$$

Όπου $y_t = Y_t - \mu$ και όπου $\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2)$.

Πιο πριν αναφερθήκαμε στον τελεστή υστέρησης και σε αυτό το σημείο θα γίνει η εφαρμογή του στο αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δεύτερης τάξης

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)y_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow A(L)y_t = \varepsilon_t \quad (2.29)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η λύση αυτής της εξίσωσης εξαρτάται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$X^2 - X\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad (2.29\alpha)$$

Αν θέσουμε έστω λ_1 και λ_2 ως ρίζες της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης που συνδέονται με τις παραμέτρους α ως $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_1$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -\alpha_2$ προκύπτει

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2})}{2} \quad (2.29\beta)$$

Με αυτό το τύπο υπολογίζονται οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, οι οποίες μπορεί να είναι είτε πραγματικές είτε μιγαδικές, εξαρτάται από το αν η διακρίνουσα είναι θετική ή αρνητική αντίστοιχα. Είναι απαραίτητο οι ρίζες αυτές να είναι σε απόλυτες τιμές μικρότερες της μονάδας για ύπαρξη στασιμότητας της χρονολογικής σειράς:

$$|\lambda_1| < 1 \text{ και } |\lambda_2| < 1 \quad (2.29\gamma)$$

Ο τύπος που χρησιμοποιείται για εύρεση διακύμανσης του AR(2) υποδείγματος γράφεται ως εξής:

$$\gamma_0 = \frac{(1 - \alpha_2)}{(1 + \alpha_2)(1 - \alpha_1 - \alpha_2)(1 + \alpha_1 - \alpha_2)} \sigma^2 \quad (2.30)$$

Η αυτοσυνδιακύμανση δίνεται από το τύπο:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= E(y_{t-s} y_t) = E[y_{t-s}(\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)] \gamma_s \\ \Leftrightarrow \text{Cov}(Y_t, Y_{t-s}) &= \alpha_1 \gamma_{s-1} + \alpha_2 \gamma_{s-2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Διαιρώντας με γ_0 την $E(y_{t-s} \varepsilon_t) = 0$ για $s \neq 0$ προκύπτει η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως συνάρτηση των παραμέτρων του AR(2) υποδείγματος:

$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2}, \quad s \neq 0 \quad (2.32)$$

Παρακάτω, σε καινούργια ενότητα, αναλύονται περαιτέρω οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης για τα υποδείγματα μορφής AR(2), οι γνωστές εξισώσεις των Yule-Walker.

Πριν όμως πρέπει συμπερασματικά να επισημανθούν οι συνθήκες στασιμότητας του AR(2) που προκύπτουν από τα ανωτέρω. Μπορούμε, λοιπόν, να κάνουμε λόγο για στάσιμη χρονολογική σειρά του προαναφερόμενου υποδείγματος όταν:

- $|\lambda_1| < 1$ και $|\lambda_2| < 1$,δηλαδή όταν οι ρίζες να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Περιορισμοί στις παραμέτρους α_1 και α_2

- $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$
- $\alpha_2 - \alpha_1 < 1$
- $|\alpha_2| < 1$

2.9 Εξισώσεις Των Yule-Walker Σε Υποδείγματα, Μορφής AR

Έχουν ήδη αναφερθεί οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης για υποδείγματα AR κάθε τάξης χωριστά και σίγουρα έχουν διαπιστωθεί και οι ομοιότητες τους. Σε αυτή την ενότητα θα επικεντρωθούμε στις εξισώσεις των Yule-Walker με αναφορά στις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης παίρνοντας ως παράδειγμα το υπόδειγμα AR(2) και αφού λάβουμε τις δυο πρώτες αυτοσυσχετίσεις του ίδιου, θα εργαστούμε παρόμοια και θα καταλήξουμε στις εξισώσεις των Yule-Walker εφαρμόζοντας την στο αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα p τάξεως.

Όσον αφορά το υπόδειγμα AR(2) και βασιζόμενοι στη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2}$, με $s \neq 0$ και για $s=1,2$ λαμβάνουμε τις δυο πρώτες αυτοσυσχετίσεις ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα:

$$\rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2$$

οπότε αφού λύσουμε ως προς ρ_1 και ρ_2 , οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης θα εκφραστούν σε όρους των αυτοπαλινδρομικών συντελεστών α_1 και α_2 :

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2} \quad (2.32\alpha)$$

Παρόμοια με τα AR(2) υποδείγματα ,εκφράζονται οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης $\rho_s, s=1,2,\dots,p$ ενός AR(p) υποδείγματος σε όρους αυτοπαλινδρομικών συντελεστών $\alpha_i, i=1,2,\dots,p$. Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως εξισώσεις των Yule-Walker και προκύπτουν έπειτα από τη λύση του εξής συστήματος εξισώσεων:

$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} + \dots + \alpha_p \rho_{s-p}, \quad s=1,2,\dots,p \quad (2.33)$$

Άρα οι τιμές που θα λάβουν οι παράμετροι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος καθορίζουν τη μορφή που θα έχει η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός $AR(p)$ υποδείγματος. Οι συνθήκες στασιμότητας του υποδείγματος $AR(2)$ διασφαλίζουν και την πορεία των ρ_s .

Η λύση της εξίσωσης (2.33) εξαρτάται από τις ρίζες της εξίσωσης του πολυωνύμου $A(L)$:

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) \rho_s = A(L) \rho_s = 0$$

Η γενική μορφή των γραμμικών εξισώσεων των Yule-Walker συναντάται και ως

$$\rho_p = P_p \varphi$$

Λύνοντας ως προς φ προκύπτει το σύστημα:

$$\Phi = P_p^{-1} \rho_p \quad (2.34)$$

Όπου

$$\varphi = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}, \quad \rho_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \quad P_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Κατά αυτό τον τρόπο προέκυψαν οι εξισώσεις Yule-Walker του υποδείγματος $AR(2)$ όπου πιο πάνω αναφέρονται ως πρώτες και δεύτερες αυτοσυσχετίσεις και παρόμοια προκύπτει, για παράδειγμα, και το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων για το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα τρίτης τάξης, $AR(3)$:

$$\rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2$$

$$\rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rho_1$$

$$\rho_3 = \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1 + \alpha_3$$

2.10 Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης

Όλες οι αυτοπαλίνδρομες διαδικασίες έχουν συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης οι οποίες φθίνουν καθώς αυξάνει το μήκος της υστέρησης, γεγονός που καθιστά δύσκολο το να καθοριστεί η τάξη του υποδείγματος.

Η συσχέτιση ανάμεσα στην Y_t και στην Y_{t-s} , όταν έχουν αφαιρεθεί οι γραμμικές επιδράσεις των ενδιάμεσων μεταβλητών $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-(s-1)}$ πάνω σε αυτές, ονομάζεται μερική αυτοσυσχέτιση. Η έννοια της μερικής αυτοσυσχέτισης μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα μέσω της παλινδρόμησης.

Έστω ρ_{ss} τάξεως s ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης, δηλαδή αυτός ανάμεσα στην Y_t και Y_{t-s} για $s=1,2,3,\dots,p$, τότε το ρ_{ss} θα είναι ο συντελεστής μερικής παλινδρόμησης της μεταβλητής y_{t-s} στο υπόδειγμα:

$$Y_t = \rho_{1s}Y_{t-1} + \rho_{2s}Y_{t-2} + \rho_{3s}Y_{t-3} + \dots + \rho_{ss}Y_{t-s} + \varepsilon_t$$

όπου ο πρώτος υποδείκτης του p δηλώνει τη χρονική υστέρηση της μεταβλητής (1 για τη y_{t-1}) ενώ ο δεύτερος τη μέγιστη τάξη της παλινδρόμησης (s στη συγκεκριμένη περίπτωση).

Για παράδειγμα αν η παλινδρόμηση της y_t πάνω στις y_{t-1} και y_{t-2} είχε τη μορφή:

$$Y_t = \rho_{12}Y_{t-1} + \rho_{22}Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Θα λέγαμε πως ο συντελεστής της y_{t-2} μετρά το ρ_{22} , δηλαδή τον συντελεστή μερικής αυτοσυσχέτισης δεύτερης τάξεως, αποδεικνύοντας τη συσχέτιση μεταξύ των y_t και y_{t-2} όταν η ενδιάμεση y_{t-1} έχει συμπεριληφθεί στην παλινδρόμηση.

Στην πράξη μπορούμε να εκτιμήσουμε υποδείγματα τέτοιας μορφής, ξεκινώντας έχοντας μια χρονική υστέρηση του y_t και προσθέτοντας από μια υστέρηση κάθε φορά. Μέσω, λοιπόν, εκτιμήσεων των ελαχίστων τετραγώνων των συντελεστών ρ_{ss} σε κάθε τέτοιο υπόδειγμα για $s=1,2,\dots,p$, μας δίνεται η σειρά μερικών αυτοσυσχετίσεων $\hat{\rho}_{11}, \hat{\rho}_{22}, \hat{\rho}_{33}, \dots, \hat{\rho}_{ss}$.

Δεδομένου των παραπάνω προκύπτουν, για παράδειγμα οι τρεις πρώτοι συντελεστές $\hat{\rho}_{11}, \hat{\rho}_{22}$ και $\hat{\rho}_{33}$ από εκτιμήσεις των αντίστοιχων υποδειγμάτων:

$$Y_t = \rho_{11}Y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_t = \rho_{12}Y_{t-1} + \rho_{22}Y_{t-2} + \varepsilon_{2t}$$

$$Y_t = \rho_{13}Y_{t-1} + \rho_{23}Y_{t-2} + \rho_{33}Y_{t-3} + \varepsilon_{3t}$$

Η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης (partial autocorrelation function) αποτελείται από τις τιμές των ρ_{ss} με $s=1,2,\dots$ και συμβολίζεται με τα γράμματα PACF ή PAC. Για τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα, που έχουν αναλυθεί ήδη, ισχύει:

Για AR(1): α) $\rho_{11} = \rho_1 = \alpha_1$

 β) $\rho_{ss} = 0$ για $s > 1$

Για AR(2): γ) $\rho_{11} = \rho_1$

 δ) $\rho_{ss} = 0$ για $s > 2$

Για AR(p): ε) $\rho_{11} = \rho_1$

 στ).....

 ζ) $\rho_{ss} = 0$ για $s > p$

Οι συντελεστές μερικής αυτοσυσχέτισης εκτός από τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα AR(p), μπορούν να εκφραστούν και σε συνάρτηση των αυτοσυσχετίσεων ρ_s χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των Yule-Walker όπως ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Έτσι από το γενικό υπόδειγμα AR(p), που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση του συντελεστή μερικής αυτοσυσχέτισης λαμβάνουμε το σύστημα εξισώσεων των Yule-Walker ως εξής :

$$\rho_s = \varphi_{1p}\rho_{s-1} + \varphi_{2p}\rho_{s-2} + \dots + \varphi_{pp}\rho_{s-p} \quad s=1,2,\dots,p \quad (2.35)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των οριζουσών λαμβάνουμε

$$\varphi_{11} = \rho_1$$

$$\varphi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\varphi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Ομοίως υπολογίζονται και οι υπόλοιποι συντελεστες μερικής αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα σε υπόδειγμα μορφής AR(2) ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ_3 θα είναι:

$$\rho_3 = \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1$$

Επίσης για $s=3$ λαμβάνουμε

$$\rho_3 = \varphi_{13} \rho_2 + \varphi_{23} \rho_1 + \varphi_{33}$$

ή

$$\rho_3 = \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1 + \alpha_3$$

Εν κατακλείδι αν το πραγματικό υπόδειγμα στον πληθυσμό είναι AR p τάξεως, τότε οι συντελεστές μερικής αυτοσυσχέτισης μεγαλύτερης υστέρησης από την τάξη του υποδείγματος μηδενίζονται, δηλαδή:

$$\varphi_{33} = \alpha_3 = 0$$

σε αντίθεση με τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_s οι οποίοι ναι μεν φθίνουν αλλά ποτέ δεν μηδενίζονται για $s > p$.

2.11 Έλεγχος Σημαντικότητας Συντελεστών Αυτοσυσχέτισης

Αρχικά επαναλαμβάνουμε ότι ως συντελεστής αυτοσυσχέτισης ορίζεται ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα σε δυο παρατηρήσεις που απέχουν s χρονικές περιόδους. Ο εκτιμημένος συντελεστής αυτοσυσχέτισης παίρνει τιμές από -1 έως $+1$ και εξετάζουμε μόνο θετικές τιμές του s διότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική.

Οι έλεγχοι που πραγματοποιούνται σε μια τέτοια περίπτωση είναι:

H_0 : η οποία παριστάνει ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των λευκών θορύβων, δηλαδή ότι η χρονολογική σειρά είναι στάσιμη έναντι της

H_1 : όπου δηλώνει το αντίθετο, ότι δεν αποτελεί στάσιμη διαδικασία η υπό εξέταση χρονολογική σειρά.

Στις υποθέσεις αυτές χρησιμοποιείται ο συντελεστής ρ_s ως συντελεστής αυτοσυσχέτισης του πληθυσμού. Οι στατιστικοί έλεγχοι που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο σημαντικότητας των συντελεστών αυτοσυσχέτισης των προαναφερόμενων υποθέσεων όπως επίσης και για τον διαγνωστικό έλεγχο καταλληλότητας ενός υποδείγματος είναι οι δείκτες των κριτηρίων Box-Pierce και Ljung-Box καθώς και ο έλεγχος Bartlett.

Box-Pierce

Το στατιστικό κριτήριο Box και Pierce(1970) όπως και Ljung-Box(1978) χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της υπόθεσης αν ένας αριθμός συντελεστών διαφέρει ή όχι από το μηδέν. Έτσι για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης έχουμε:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$$

Έναντι της εναλλακτικής

$$H_1: \rho_m \neq 0$$

Η γενική μορφή της στατιστικής των Box και Pierce είναι:

$$Q = N \sum_{s=1}^m \hat{\rho}_s^2 \sim \chi^2_m \quad (2.36)$$

Όπου Q συμβολίζεται η στατιστική των Box και Pierce η οποία ακολουθεί την χ^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας α , με N παριστάνεται ο αριθμός των παρατηρήσεων και $\hat{\rho}_s$ η τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

Σε περίπτωση λοιπόν που $Q > \chi^2(\alpha, m)$ τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, ότι δηλαδή η χρονολογική σειρά προέρχεται από μια τυχαία διαδικασία.

Η στατιστική αυτή συναντάται κυρίως σε ότι αφορά μεγάλο αριθμό δειγμάτων, για μικρά δείγματα δεν θεωρείται αξιόπιστη, σε αυτό το σημείο συναντάμε τους Ljung-Box(1978) μεταγενέστερα, οι οποίοι πρότειναν μια βελτιωμένη, αν και παρόμοια, στατιστική την οποία αναλύουμε στην επόμενη υποενότητα.

Ljung-Box

Η στατιστική των Ljung-Box συμβολίζεται με Q^* εμφανίστηκε το 1978 για να ακολουθήσει την ίδια κατανομή X^2 με αυτή της Q , δίνοντας όμως πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ότι η Q , σε οτιδήποτε τουλάχιστον αφορά μικρό πλήθος δειγμάτων.

Ορίζεται ως εξής:

$$Q^* = N(N + 2) \sum_{s=1}^m \left[\frac{\hat{\rho}_s^2}{N-s} \right] \sim \chi^2_m \quad (2.37)$$

Ως προς το τι αναπαριστά κάθε γράμμα ισχύει το ίδιο με τη στατιστική των Box-Pierce και εδώ σε περίπτωση που το $Q^* > X^2(\alpha, m)$ απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση (H_0), ότι η χρονολογική σειρά προέρχεται από μια τυχαία διαδικασία ή δεν αποτελεί στάσιμη διαδικασία ως χρονολογική σειρά.

Έλεγχος Bartlett

Ο έλεγχος Bartlett, γνωστός ως Bartlett-test (1946), βασίζεται στην υπόθεση ότι αν η χρονολογική σειρά αποτελεί στάσιμη διαδικασία, τότε οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης του δείγματος ακολουθούν κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή με μέσο μ ίσο με το μηδέν και με διακύμανση $\frac{1}{N}$. Συνεπώς το διάστημα εμπιστοσύνης στο οποίο περιέχονται οι συντελεστές συσχέτισης είναι το ακόλουθο:

$$-1.96 \sqrt{\frac{1}{N}} \leq \hat{\rho}_s \leq 1.96 \sqrt{\frac{1}{N}}$$

Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε τις εξής υποθέσεις :

$$H_0: \rho_s = 0 \quad (\text{η χρονολογική σειρά είναι στάσιμη})$$

$$H_1: \rho_s \neq 0 \quad (\text{η χρονολογική σειρά δεν είναι στάσιμη})$$

Η υπόθεση H_0 ελέγχεται με την στατιστική:

$$t_s = \frac{\hat{\rho}_s}{\sqrt{\frac{1}{N}}} = \sqrt{N} \hat{\rho}_s$$

Σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$ και για $T>30$ η κρίσιμη τιμή που λαμβάνει το t_α είναι $(- \text{ ή } +)1.96$, κατά συνέπεια η H_0 απορρίπτεται για

$$t_s = \rho_s \sqrt{T} < -1.96 \quad \text{ή} \quad t_s = \rho_s \sqrt{T} > 1.96$$

2.12 Υποδείγματα Κινητού Μέσου, MA

Τα υποδείγματα κινητού μέσου χρησιμεύουν στο να περιγράψουν φαινόμενα ή γεγονότα τα οποία δίνουν ένα άμεσο αποτέλεσμα, ακόμα και αν παύουν να υφίστανται, η επίδρασή τους έχει διάρκεια.

Όπως για παράδειγμα ένας ισχυρός σεισμός, όπου επηρεάζει την κοινωνία όχι μόνο τη στιγμή που πραγματοποιείται αλλά και μετά το πέρασμά του, είτε είναι μέρες είτε μήνες ανάλογα το μέγεθός του.

Υποδείγματα Κινητού Μέσου, MA(q)

Στη γενική του μορφή ένα υπόδειγμα κινητού μέσου τάξης q είναι :

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ή

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.38)$$

Η τάξη αναφέρεται στο μήκος της υστέρησης της μεταβλητής για την οποία θεωρούμε ότι είναι λευκός θόρυβος ε_t , όπου θ είναι οι σταθεροί παράμετροι. Στο υπόδειγμα αυτό η χρονολογική σειρά Y_t εμφανίζεται ως ένας σταθμικός μέσος των τυχαίων σφαλμάτων των q προηγούμενων περιόδων και λέγεται υπόδειγμα κινητών μέσων (moving average) τάξεως q και συμβολίζεται ως MA(q). Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος “κινητός μέσος” δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, διότι οι σταθμίσεις δεν έχουν άθροισμα τη μονάδα.

Λαμβάνοντας υπ' όψη την αναμενόμενη τιμή της παραπάνω εξίσωσης βρίσκουμε ότι ο μέσος της Y_t είναι ίσος με μ , με βάση τις ιδιότητες του λευκού θορύβου,

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = \dots = E(\varepsilon_{t-q}) = 0$$

Η διακύμανση της Y_t από την άλλη υπολογίζεται κατά αυτόν τον τρόπο:

$$\gamma_0 = \text{var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2$$

$$\begin{aligned}
&=E(\varepsilon_t^2)+\theta_1^2E(\varepsilon_{t-1}^2)+\dots+\theta_q^2E(\varepsilon_{t-q}^2)-\dots-2\theta_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})-\dots \\
&=\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\dots+\theta_q^2)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Υποθέτοντας για τον λευκό θόρυβο ότι έχει σταθερή διακύμανση σ_ε^2 και μηδενικές αυτοσυνδιακυμάνσεις. Ενώ χαρακτηριστικό είναι ότι η διακύμανση του Y_t είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και πεπερασμένη.

Επιπλέον προκύπτει ότι οι αυτοσυνδιακυμάνσεις για τα υποδείγματα της μορφής MA(q) δίνονται από την ακόλουθη σχέση

$$\gamma_s = \begin{cases} (-\theta_s + \theta_1\theta_{s+1} + \dots + \theta_{q-s}\theta_q)\sigma_\varepsilon^2 & , \\ 0 & \end{cases} \tag{2.39\alpha}$$

με $s=1,\dots,q$ και αντίστοιχα $s > q$

όπου και σε αυτή τη περίπτωση οι αυτοσυνδιακυμάνσεις είναι πεπερασμένες και ανεξάρτητες του t χρόνου. Επομένως είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε πως κάθε υπόδειγμα μορφής MA τάξης q είναι πάντοτε στάσιμο από τη στιγμή που πληροί τις τρεις συνθήκες στασιμότητας που αναφέρονται στην ενότητα «Στασιμότητα».

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των υποδειγμάτων κινητών μέσων (MA) θα αναφερθούμε στην αντιστρεψιμότητά του (όρος του οποίου θα γίνει επιπλέον ανάλυση σε επόμενη ενότητα). Μια MA διαδικασία λέγεται αντιστρέψιμη όταν δύναται να αντιστραφεί η έκφρασή της, να εκφραστούν δηλαδή τα ε_t σαν συνάρτηση των Y_t, Y_{t-1}, \dots , με απλά λόγια αν μπορεί ένα υπόδειγμα MA να διατυπωθεί ως μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία.

Ακολουθεί ανάλυση του απλού υποδείγματος κινητού μέσου όρου πρώτης τάξης MA(1) και έπειτα ανώτερης τάξης MA(2).

Υπόδειγμα Κινητών Μέσων Πρώτης Τάξης, MA(1)

Τα εν λόγω υποδείγματα (MA(1)) τα συναντάμε σε περίπτωση που το $q=1$. Το υπόδειγμα κινητού μέσου πρώτης τάξης MA(1) στη γενική του μορφή δίνεται από την παρακάτω σχέση ή αφού αφαιρεθεί ο μέσος:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad \text{ή} \quad Y_t - \mu = y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{2.40}$$

χρησιμοποιώντας τον τελεστή υστέρησης

$$Y_t = (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t \tag{2.41}$$

Σε μια MA(1) διαδικασία ο μέσος είναι πάντα ίσος με το μηδέν, δηλαδή $E(Y_t)=0$, ενώ η διακύμανση ίση με

$$\gamma_0 = V(Y_t) = (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 \quad (2.42)$$

Επιπροσθέτως δίνονται και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις ως εξής :

$$\gamma_1 = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \text{Cov}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

με $s=1$ ή $s=0$

$$\gamma_s = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \text{Cov}[Y_t(\varepsilon_{t-s} - \theta_1 \varepsilon_{t-s-1})] = 0 \quad \text{για } s > 1 \quad (2.43)$$

Επομένως η θεωρητική συνάρτησης αυτοσυσχέτισης που λαμβάνουμε είναι:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \begin{cases} -\theta_1 \\ 1 + \theta_1^2 \\ 0 \end{cases}, \quad \text{με } s=1 \text{ ή } s=0 \text{ και } s > 1 \text{ αντίστοιχα} \quad (2.44)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για το συγκεκριμένο υπόδειγμα γίνεται μηδέν μετά από μια υστέρηση. Δηλαδή μπορούμε να κάνουμε πρόβλεψη μόνο για μια περίοδο στο μέλλον και μόνο.

Γενικά ,η συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ρ_s στα υποδείγματα κινητών μέσων τάξεως q , MA(q) γίνεται μηδέν μετά από q χρονικές περιόδους ($s > q$) σε αντίθεση με τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα (RA) όπου ναι μεν φθίνει η ρ_s , αλλά ποτέ δεν φτάνει σε μηδενικό στάδιο.

Υπόδειγμα Κινητών Μέσων Δεύτερης Τάξης, MA(2)

Στο σημείο αυτό θα επεκταθούμε στην περίπτωση κατά την οποία το $q=2$, το υπόδειγμα που λαμβάνουμε είναι πλέον αυτό του κινητού μέσου δεύτερης τάξης MA(2) και συναντάται υπό τη μορφή:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad \text{ή} \quad Y_t - \mu = Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad (2.45)$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή υστέρησης

$$Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) \varepsilon_t \quad (2.46)$$

Ο μέσος του εν λόγω υποδείγματος είναι μηδέν, δηλαδή $E(Y_t)=0$ και έχει διακύμανση σταθερή

$$\gamma_0 = V(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2$$

Όπως και στο υπόδειγμα MA(1) έτσι και στο MA(2) οι αυτοσυνδιακυμάνσεις είναι πεπερασμένες και ανεξάρτητες του χρόνου t όπου σε συνδιασμό με το μηδενικό μέσο και τη σταθερή διακύμανση φανερώνουν τη στασιμότητα του υποδείγματος:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\theta_1(1-\theta_2)\sigma^2 \\ \gamma_2 &= -\theta_2 \\ \gamma_s &= 0 \quad \text{για } q > 2\end{aligned} \quad (2.47)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει και η αντίστοιχη θεωρητική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για το MA(2) υπόδειγμα ως εξής:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \\ \rho_2 &= \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \\ \rho_s &= 0\end{aligned} \quad (2.48)$$

Τέλος πρέπει να επισημανθεί πως το υπόδειγμα κινητού μέσου δεύτερης τάξης δεν επηρεάζεται από τιμές του y_t υστέρησης μεγαλύτερης του δυο παρά μόνο δύο περιόδων εφόσον το y_t επηρεάζεται από τις τιμές του y_{t-1} και y_{t-2} .

2.13 Αντιστρεψιμότητα

Ο ορισμός της αντιστρεψιμότητας έγκειται στη δυνατότητα που έχει ένα MA τύπου υπόδειγμα πεπερασμένης τάξης, έστω MA(q), να μετατρέπεται σε ένα AR υπόδειγμα απείρου τάξης, AR(∞). Και αντίστοιχα η δυνατότητα ενός AR(p) υποδείγματος να λάβει τη μορφή ενός MA(∞).

Πιο συγκεκριμένα τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα AR(p) όταν αποτελούν στάσιμη διαδικασία μπορούν πάντα, χωρίς κανέναν επιπλέον περιορισμό, να λάβουν τη μορφή ενός MA(∞). Δεν ισχύει το ίδιο όμως για τα υποδείγματα κινητού μέσου MA(q), διότι ενώ είναι πάντα στάσιμα θα πρέπει να πληρούν ορισμένες προϋποθέσεις

για να είναι αντιστρέψιμο. Δίνεται ένα παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση των προαναφερόμενων.

Ένα MA(1) υπόδειγμα (2.40) γράφεται ως εξής:

$$\varepsilon_t = y_t + \theta \varepsilon_{t-1} = y_t + \theta(y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}) = y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-2}$$

Αφού λύσουμε ως προς y_t δημιουργείται ένα υπόδειγμα AR απείρου τάξεως

$$y_t = -\theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} - \dots - \theta^{j-1} y_{t-j-1} - \theta^j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t = \dots = - \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2.49)$$

Θεωρώντας ότι ο όρος $\theta^j \varepsilon_{t-j}$ συγκλίνει στο μηδέν από τη στιγμή που το $j \rightarrow \infty$.

Επομένως για $-1 < \theta < 1$, το υπόδειγμα MA(1) είναι αντιστρέψιμο.

Από την άλλη τα MA(2) υποδείγματα είναι αντιστρέψιμα, αν οι ρίζες του πολυωνύμου $1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$ κείνται όλες εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Έτσι προκύπτουν και οι κάτωθι περιορισμοί για τις παραμέτρους του θ_1 και θ_2 του εν λόγω υποδείγματος, οι οποίες συμπίπτουν με τις συνθήκες στασιμότητας του υποδείγματος AR(2):

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1 \\ \theta_1 - \theta_2 &< 1 \\ |\theta_2| &< 1 \end{aligned} \quad (2.49\alpha)$$

Όσον αφορά τα υποδείγματα κινητού μέσου q τάξεως οι συνθήκες αντιστρεψιμότητας μπορούν να οριστούν μέσω της αντίστοιχης εξίσωσης του σε μορφή πολυωνύμου

$$y_t = \Theta(L) \varepsilon_t$$

όπου

$$y_t = Y_t - \mu \text{ και } \Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να θεωρηθεί αντιστρέψιμο ένα τέτοιο υπόδειγμα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\Theta(L)$ να είναι όλες μέσα στο μοναδιαίο κύκλο ή οι ρίζες του πολυωνύμου $\Theta(L) = 0$ να είναι όλες εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

2.14 Απλές και Μερικές Αυτοσυσχετίσεις σε Υποδείγματα Μορφής MA(q),

Στην ενότητα αυτή θα επεκταθούμε σε ο,τι αφορά τις αυτοσυσχετίσεις ενός MA υποδείγματος, με βάση φυσικά όσα αναφέρθηκαν για αυτά τα υποδείγματα στις προηγούμενες ενότητες.

Γενικά η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για το υπόδειγμα κινητού μέσου q τάξεως έχει ως εξής:

$$\rho_s = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{q-s} \theta_i \theta_{i+s} - \theta_s}{1 + \sum_{i=1}^2 \theta_i^2} & \text{για } s=1,2,\dots,q \text{ και } s>q \text{ αντίστοιχα} \\ 0 & \end{cases} \quad (2.50)$$

Με αυτό δηλώνεται πως η τάξη ενός υποδείγματος MA ανταποκρίνεται στη μέγιστη τιμή που λαμβάνει το s για το οποίο η αυτοσυσχέτιση ρ_s είναι μη μηδενική.

Σε αυτό το σημείο έπειτα από τις απλές αυτοσυσχετίσεις κάνουν την εμφάνισή τους και οι μερικές αυτοσυσχετίσεις ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή των AR υποδειγμάτων. Έτσι, λοιπόν και για τον υπολογισμό των συντελεστών μερικής αυτοσυσχέτισης των MA υποδειγμάτων χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις των Yule-Walker.

Επομένως για το υπόδειγμα κινητού μέσου όρου πρώτης τάξης, MA(1) ισχύει:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} = \rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ \varphi_{22} &= \frac{(\rho_2 - \rho_1^2)}{1 - \rho_1^2} = -\theta_1^2(1 + \theta_1^2 + \theta_1^4) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Και παρόμοια για τους υπόλοιπους συντελεστές.

Για το υπόδειγμα κινητού μέσου όρου δεύτερης τάξης, MA(2) χρησιμοποιούμε τους ίδιους τύπους των φ_{ss} με αντικατάσταση των αντίστοιχων ρ_s . Δηλαδή ενδεικτικά για το φ_{11} λαμβάνουμε

$$\varphi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} \quad (2.52)$$

Τα ίδια ισχύουν και για τους συντελεστές του MA q τάξεως υποδείγματος.

Οι συντελεστές της μερικής αυτοσυσχέτισης των MA υποδειγμάτων γενικά τείνουν προς το μηδέν αλλά ποτέ δεν μηδενίζονται.

Ισχύει πως μια MA σειρά αντιστρέψιμη μπορεί πάντα να μετατραπεί σε AR και πως η μερική συσχέτιση ανάμεσα σε Y_t και στις υστερήσεις Y_{t-s} μειώνεται καθώς το s μεγαλώνει.

Πιο συγκεκριμένα σε μια MA σειρά τα ρ_s και ϕ_{ss} συμπεριφέρονται αντίθετα από ότι σε μια σειρά AR. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης στην περίπτωση των MA υποδειγμάτων δεύτερης τάξεως φτάνει στο ρ_s και διακόπτεται ενώ η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης φθίνει γεωμετρικά ή/και κυματιστά ανάλογα με τη μορφή, είτε αυτή είναι πραγματική είτε μιγαδική, και το μέγεθος που έχουν οι ρίζες του πολυωνύμου $\Theta(L)$.

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι σε μια MA(q) διαδικασία οι αυτοσυσχετίσεις ρ_s μηδενίζονται για $s > q$ ενώ, αντίθετα οι μερικές αυτοσυσχετίσεις τείνουν προς το μηδέν χωρίς να λαμβάνουν ποτέ τη τιμή μηδέν.

2.15 ΜΙΚΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Κινητών Μέσων, ARMA

Από τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα (AR) και τα υποδείγματα κινητών μέσων (MA), περνάμε σε μια μικτή κατηγορία όπου η συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής Y_t λαμβάνει χαρακτηριστικά από το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα (AR) και από το υπόδειγμα κινητών μέσων όρων ταυτόχρονα.

Έτσι δημιουργήθηκε το αυτοπαλίνδρομο κινητών μέσων υπόδειγμα τάξης p, q αντίστοιχα. Η τάξη αναφέρεται στο μήκος της υστερήσεως της μεταβλητής για την οποία θεωρείται ότι είναι λευκός θόρυβος ενώ ο όρος κινητός μέσος αναφέρεται στο ότι η εξαρτημένη μεταβλητή εμφανίζεται ως σταθμισμένο άθροισμα.

Η γενική μορφή κατά την οποία συναντάται το συγκεκριμένο υπόδειγμα ορίζεται ως:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ή χρησιμοποιώντας τον τελεστή υστέρησης λαμβάνουμε

$$A(L)Y_t = \alpha_0 + \Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.53)$$

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p$$

$$\Theta(L)=1-\theta_1L-\theta_2L^2-\dots-\theta_qL^q$$

Με L συμβολίζεται ο τελεστής υστέρησης που έχει την ιδιότητα $L^j Y_t = Y_{t-j}$ και με p, q , όπως ήδη προαναφέρθηκε, συμβολίζεται ο αριθμός της τάξης των AR και MA υποδειγμάτων αντίστοιχα.

Το πολυώνυμο $A(L)$ είναι αντιστρέψιμο όταν μια διαδικασία ARMA(p, q) είναι στάσιμη, άρα πολλαπλασιάζοντας με $A^{-1}(L)$ λαμβάνουμε μια μορφή MA απείρου τάξεως

$$Y_t = A^{-1}(L)\alpha_0 + A^{-1}(L)\Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.53\alpha)$$

Γενικά ένα υπόδειγμα ARMA(p, q) αποτελεί στάσιμη διαδικασία αν οι ρίζες του πολυωνύμου $A(L)$ βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου και αντιστρέψιμη αν οι ρίζες του $\Theta(L)$ βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Με βάση τα προαναφερόμενα ο μέσος μιας ARMA σειράς θα είναι:

$$E(Y_t) = E[\alpha_0 A^{-1}(L)] + A^{-1}(L)\Theta(L)E(\varepsilon_t) = \alpha_0 A^{-1}(L) \quad (2.53\beta)$$

Άρα για να χαρακτηριστεί στάσιμη μια χρονολογική σειρά μορφής ARMA, αρκεί να πληρούνται οι συνθήκες στασιμότητας του AR μέρους της σειράς. Επιπλέον, κατά τον ίδιο τρόπο για να χαρακτηριστεί αντιστρέψιμο ένα ARMA υπόδειγμα εξαρτάται από το MA μέρος της σειράς. Επομένως, με βάση όσα προαναφέρθηκαν ένα ARMA υπόδειγμα θα είναι στάσιμο αν οι ρίζες του πολυωνύμου $A(L)=0$ είναι όλες μεγαλύτερες της μονάδας σε απόλυτες τιμές και αντιστρέψιμο αν οι ρίζες του πολυωνύμου $\Theta(L)=0$ είναι και αυτές μεγαλύτερες της μονάδας σε απόλυτες τιμές.

Υπόδειγμα ARMA(1,1)

Ας εξετάσουμε πως έχει το υπόδειγμα όταν είναι και το AR και το MA πρώτης τάξης. Είναι πλέον ARMA(1,1) και έχει τη μορφή:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \quad (2.54)$$

ή διαφορετικά με το τελεστή υστέρησης L

$$(1 - \alpha L)Y_t = \alpha_0 + (1 - \theta L)\varepsilon_t \quad (2.54\alpha)$$

Αν ο μέσος του εν λόγω υποδείγματος, ο οποίος είναι ο ίδιος με του AR(1), είναι σταθερός $\mu = E(Y_t)$ για όλα τα t , τότε το υπόδειγμα είναι στάσιμο. Δηλαδή ισχύει:

$$\mu = E(Y) = \alpha_0(1 - \alpha L)^{-1} + (1 - \theta L)E(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha)} \quad (2.55)$$

Οι διακυμάνσεις και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις που λαμβάνουμε για το υπόδειγμα ARMA(1,1) και για $|\alpha| < 1$ και $|\theta| < 1$ έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{(1 + \theta^2 - 2\alpha\theta)}{1 - \alpha^2} \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 &= \alpha\gamma_0 - \theta\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_s &= \alpha\gamma_{s-1}, \quad s > 1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Όπως φαίνεται οι αυτοσυνδιακυμάνσεις γ_k για $s > 1$ είναι ίδιες με τις γ_s του υποδείγματος AR(1).

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης με βάση τα παραπάνω, ισούται με

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha - \frac{\theta\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \\ \rho_s &= \alpha\rho_{s-1} \quad \text{για } s > 1 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Οι αυτοσυσχετίσεις φθίνουν γεωμετρικά μετά τη πρώτη υστέρηση που αντιπροσωπεύει το υπόδειγμα AR(1) εφόσον στο MA(1) υπόδειγμα οι τιμές των $\rho_s = 0$ για $s > 1$.

Επιπλέον για τους συντελεστές μερικής αυτοσυσχέτισης έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \rho_1 \\ \varphi_{22} &= \frac{\rho_1(\alpha - \rho_1)}{(1 - \rho_1^2)} \end{aligned} \quad (2.57\alpha)$$

Αξίζει να σημειωθεί και εδώ πως οι αυτοσυσχετίσεις ρ_s και φ_{ss} φθίνουν καθώς αυξάνουν οι υστερήσεις s .

2.16 Αυτοσυσχετίσεις ARMA(p,q) Υποδειγμάτων

Γενικά όπως στα AR υποδείγματα έτσι και στα μικτά ARMA(p,q) με παρόμοιο τρόπο προκύπτει η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Για τιμές του k μεγαλύτερες από το q, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του υποδείγματος AR(p), δηλαδή

$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} + \dots + \alpha_p \rho_{s-p} \quad s > q \quad (2.58)$$

Επειδή όμως υπάρχει το MA μέρος, οι πρώτοι q συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_k θα εξαρτώνται άμεσα εκτός από τις τιμές που θα έχουν οι παράμετροι α του AR μέρους και από τις τιμές των παραμέτρων θ του MA μέρους.

Σε αυτό το σημείο εμφανίζονται και πάλι οι εξισώσεις των Yule-Walker όπου σύμφωνα με αυτές για να υπολογίσουμε τις τιμές των ρ_s για $s > q$ πρέπει να βασιστούμε στις αρχικές p τιμές των συντελεστών $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p+1}$. Για να προσδιοριστεί, λοιπόν μια τάξη ενός μικτού υποδείγματος προέχει να εξεταστούν οι τιμές των ρ_k . Ισχύουν τα εξής:

- Αν $q-p < 0$, τότε ολόκληρη η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα φθίνει εκθετικά και οι τιμές της θα εξαρτώνται από τις αρχικές της τιμές.
- Αν $q-p > 0$, τότε δεν ακολουθούν το ίδιο σχήμα οι πρώτες $q-p+1$ τιμές του $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{q-p}$.

Παρόμοια συμπεριφορά ακολουθείται και από τη συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης, δηλαδή η ϕ_{kk} φθίνει μονοτονικά ή κυματιστά από τη p υστέρηση στην οποία διακόπτεται η επίδραση του AR μέρους και ακολουθεί στο εφεξής συμπεριφορά σαν μια καθαρά MA διαδικασία.

Τέλος για να επιλέξουμε το καταλληλότερο υπόδειγμα μη στάσιμων χρονολογικών σειρών μορφής ARMA έχει προταθεί μια μεθοδολογία από τους Box and Jenkins (1976) αποτελούμενη από τρία στάδια τα οποία και αναλύονται στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μεθοδολογία Box-Jenkins και Προβλέψεις

ARIMA Υποδειγμάτων

3.1 ARIMA Υποδείγματα

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναλύθηκαν εκτός των άλλων τα πάντα περιστασιμότητας μιας χρονολογικής σειράς και τα υποδείγματα AR, MA και ARMA. Στο εν λόγω κεφάλαιο θα αναλυθεί η μεθοδολογία των Box και Jenkins, για το πώς μια μη στάσιμη χρονολογική σειρά μετατρέπεται σε στάσιμη, καθώς και ένα νέο αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητών μέσων, με ότι επιπλέον συνεπάγεται αυτόν.

Αρχικά ας υπενθυμίσουμε πως υπάρχουν πολλές σειρές μη στάσιμες όπως αυτή της τυχαίας διαδρομής, που έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Οι σειρές που εκφράζουν ποσοστά μεταβολής ή επίπεδο παραγωγής για παράδειγμα είναι και αυτές στις οποίες συναντάμε μια τάση ή εποχικότητα, που σημαίνει σειρές μη στάσιμες. Γενικά αν μια σειρά την οποία αναλύουμε παρουσιάζει γραμμική τάση, τότε για να αφαιρέσουμε τη τάση αυτή παίρνουμε πρώτες διαφορές, οι οποίες συμβολίζονται με $I(1)$.

Οι Box και Jenkins προτείνουν εν ολίγοις να μετατρέπουμε τις σειρές σε στάσιμες παίρνοντας διαφορές όχι μόνο πρώτης τάξης αλλά και δεύτερης ή και μεγαλύτερης, οι οποίες συμβολίζονται με $I(2)$ και $I(d)$ αντίστοιχα. Διότι οι πρώτες διαφορές περιορίζονται στην αφαίρεση μιας γραμμική τάσης ενώ οι δεύτερες διαφορές ή και d τάξεως διαφορές αφαιρούν τάση πολυωνυμικής μορφής.

Δηλαδή για τον τελεστή διαφορών ισχύει

- $\Delta=1-L$ τελεστής διαφορών πρώτης τάξης
- $\Delta^2=(1-L)^2$ τελεστής διαφορών δεύτερης τάξης
-
- $\Delta^d=(1-L)^d$ τελεστής διαφορών d τάξης

Γενικά κάθε στάσιμη χρονολογική σειρά θεωρείται ολοκληρωμένη μηδενικής τάξης, δηλαδή $I(0)$.

Εφόσον εξασφαλίσουμε τη στασιμότητα με τις διαφορές της υπό εξέταση χρονολογικής σειράς, ακολουθούμε τη καθιερωμένη ανάλυση για τη προσαρμογή του κατάλληλου υποδείγματος ARMA(p,q) στη μετασχηματισμένη σειρά.

Αν δηλαδή Y_1, Y_2, \dots, Y_n είναι οι παρατηρήσεις μιας χρονολογικής σειράς μη στάσιμης, παίρνουμε διαφορές πρώτης τάξης και έχουμε:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t \quad (3.1)$$

Αν η μετασχηματισμένη σειρά πλέον είναι στάσιμη, τότε το υπόδειγμα που προσαρμόζουμε σε αυτή ονομάζεται αυτοπαλίνδρομο ολοκληρωμένο υπόδειγμα κινητών μέσων ή Autoregressive Integrated Moving Average και συμβολίζεται ως ARIMA τάξεως (p,1,q). Γενικεύοντας, το υπόδειγμα που προσαρμόζουμε στην αρχική σειρά Y_t συμβολίζεται ως ARIMA(p,d,q) και αναλύεται παρακάτω. Όπου p συμβολίζει τους όρους του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος, q τους όρους του υποδείγματος των κινητών μέσων).

Για παράδειγμα ARIMA (2,1,1) σημαίνει ότι η σειρά καθίσταται στάσιμη με τις πρώτες διαφορές και στην σειρά των πρώτων διαφορών εφαρμόζεται το ARMA (2,1). Η τάξη του ARIMA (p,d,q) προσδιορίζεται με τη μεθοδολογία των Box και Jenkins, όπου και αυτή αναλύεται πιο κάτω.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί πως στη περίπτωση που η χρονολογική σειρά είναι μη στάσιμη ως προς τη διακύμανση, δηλαδή έχει αυξανόμενη διακύμανση, τότε επιβάλλεται πριν τις διαφορές η χρησιμοποίηση λογαριθμικού μετασχηματισμού, οπότε λαμβάνουμε

$$\Delta \ln Y_t = \ln Y_t - \ln Y_{t-1} = (1-L) \ln Y_t \quad (3.2)$$

3.1.1 Υπόδειγμα ARIMA(p,d,q)

Τα ολοκληρωμένα αυτοπαλίνδρομα μοντέλα κινητού μέσου όρου (Autoregressive Integrated-Moving Average) ARIMA(p,d,q) είναι στοχαστικά μαθηματικά μοντέλα με τα οποία προσπαθούμε να περιγράψουμε τη διαχρονική εξέλιξη κάποιου φυσικού μεγέθους. Δεδομένου ότι για την πλειοψηφία των φυσικών μεγεθών είναι αδύνατη η πλήρης γνώση και καταγραφή όλων των παραγόντων που επηρεάζουν την εξέλιξη τους στο χρόνο. Από την άλλη, η εξάρτηση τέτοιων μεγεθών

από μη ντετερμινιστικούς παράγοντες όπως είναι ο καιρός καθιστά δυνατή την περιγραφή της διαχρονικής τους εξέλιξης από ένα στοχαστικό μοντέλο, με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία η τιμή του μεγέθους βρίσκεται σε κάποιο διάστημα.

Η γενική μορφή του υποδείγματος έχει ως εξής:

$$A(L)Y_t = \alpha_0 + \Theta(L)\varepsilon_t \quad (3.3)$$

Τα μοντέλα ARIMA χρησιμοποιούνται ευρύτερα γιατί εφαρμόζονται στη μελέτη πολλών μεγεθών δίνοντας μια κατατοπιστική εικόνα της διαχρονικής τους συμπεριφοράς καθώς και τα κατάλληλα αποτελέσματα για τη πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών του μεγέθους.

Οι Box και Jenkins έχουν ταυτιστεί στο απόλυτο με τα μοντέλα ARIMA, διότι τα έχουν μελετήσει εκτεταμένα και έχουν προτείνει μια σειρά αλγεβρικών μοντέλων πρόβλεψης από τα οποία μπορεί κάποιος να διαλέξει το πιο κατάλληλο για να προχωρήσει σε πρόβλεψη μιας χρονολογικής σειράς.

Πιο συγκεκριμένα αυτά τα μοντέλα είναι μια γενίκευση των μη αιτιωδών υποδειγμάτων πρόβλεψης όπως είναι το υπόδειγμα εκθετικής εξομάλυνσης. Στο να αναπτυχθούν τα υποδείγματα ARMA και ARIMA βοήθησε η διάθεση των κατάλληλων στατιστικών πακέτων μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η διαδικασία κατασκευής τέτοιων υποδειγμάτων εκτίμησης ώστε να φτάσουμε στη πρόβλεψη έχει προταθεί από τους Box and Jenkins (1976) και περιλαμβάνει τρία στάδια:

1. Ταυτοποίηση ή Identification
2. Εκτίμηση ή Estimation
3. Διαγνωστικός έλεγχος ή Diagnostic checking

3.2 Ταυτοποίηση ARIMA Υποδειγμάτων

Η ταυτοποίηση περιλαμβάνει τον καθορισμό των τιμών p, d και q . Αρχικά περιλαμβάνει τον καθορισμό του αριθμού d των διαφορών που χρησιμοποιούμε για να μετατραπεί μια διαδικασία σε στάσιμη εάν αυτή δεν είναι. Έπειτα πρέπει να καθοριστεί η τάξη (p) της αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας και η τάξη (q) της διαδικασίας κινητού μέσου.

Πιο συγκεκριμένα πρώτο βήμα είναι ο έλεγχος της στασιμότητας της σειράς απλά ελέγχοντας τα δεδομένα για την ύπαρξη τάσης, εποχικότητας ή άλλων διακυμάνσεων. Επιπλέον υπολογίζουμε τις αυτοσυσχετίσεις ρ_k για έναν αριθμό υστερήσεως k και τις απεικονίζουμε μέσω ενός διαγράμματος. Αν λοιπόν παρατηρήσουμε στη διαγραμματική απεικόνιση πως οι συσχετίσεις τείνουν προς το μηδέν με αργό ρυθμό, τότε υπάρχει μια πρώτη ένδειξη μη στασιμότητας, όπου συνεπάγεται το μετασχηματισμό της χρονολογικής σειράς σε διαφορές πρώτης τάξης, τουλάχιστον για αρχή.

Για να διαπιστωθεί πως οι πρώτες διαφορές της σειράς είναι στάσιμες είναι αναγκαίο να επαναληφθεί ο έλεγχος αυτοσυσχετίσεων. Υπάρχει περίπτωση να εξακολουθεί η σειρά να είναι μη στάσιμη, τότε εξακολουθούμε να παίρνουμε διαφορές μέχρι να φτάσουμε τη χρονολογική σειρά σε στασιμότητα. Αξίζει να σημειωθεί πως η αλόγιστη χρήση των διαφορών, γνωστό ως φαινόμενο “overdifferencing” μπορεί να επιφέρει λανθασμένα αποτελέσματα γι’ αυτό συνίσταται να αποφεύγεται η χρήση των διαφορών πέρα των απαραίτητων.

Να επαναλάβουμε πως για τον έλεγχο της στασιμότητας μιας χρονολογικής σειράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης καθώς και τα όρια στατιστικής σημαντικότητας αυτών $\rho_k \pm 2/\sqrt{N}$. Αυτή όμως η μέθοδος θεωρείται υποκειμενική και σχετικά ελλιπής για αυτόν ακριβώς τον λόγο έχουν προταθεί πιο αυστηρά κριτήρια ελέγχου στασιμότητας, όπως αυτά των Sargan and Bhargava (1983), έλεγχοι μοναδιαίας ρίζας ή αλλιώς unit root test των Dickey and Fuller (1981) και των Philips and Perron (1988, 1997), τα οποία εξετάζονται αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Αφού καθοριστεί ο κατάλληλος αριθμός διαφορών d για τη στασιμότητα της υπό εξέταση σειράς, ακολουθεί και ένα επιπλέον βήμα αυτό του καθορισμού των τάξεων p και q του ARMA(p, q) υποδείγματος ανάλογα με το αν ταιριάζει στα δεδομένα των διαφορών.

Τη λύση σε αυτό δίνει η εξέταση των διαγραμμάτων των αυτοσυσχετίσεων (ACF) και των μερικών αυτοσυσχετίσεων (PACF). Άρα πρέπει να υπολογίσουμε τα $\hat{\rho}_s$ και τα $\hat{\varphi}_{ss}$ για αριθμό υστερήσεων $s=1, 2, 3, \dots$ και έπειτα να παρουσιάσουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα ACF και PACF.

Στην πράξη είναι σχετικά δύσκολο να καθοριστεί μια μοναδική μορφή υποδείγματος που να προσαρμόζεται στο απόλυτο στα δεδομένα. Έτσι συνήθως

καταλήγουμε σε περισσότερα από ένα υποδείγματα και στη συνέχεια εξετάζουμε αυτό που είναι πιο κοντά στα στοιχεία μας.

Αυτό που προτείνεται από τους Box and Jenkins είναι να ξεκινήσουμε με τα υποδείγματα χαμηλότερης τάξης και να συνεχίζουμε με τα υψηλότερης τάξης μόνο στη περίπτωση που τα πρώτα δεν θεωρηθούν ικανοποιητικά από το στάδιο του διαγνωστικού ελέγχου. Αυτό το υποστηρίζουν από την άποψη πως τα πιο απλά υποδείγματα έχουν μικρότερο αριθμό άγνωστων παραμέτρων και επομένως οι εκτιμήσεις και προβλέψεις για αυτά είναι πιο έμπιστες.

3.3 Εκτίμηση ARIMA Υποδειγμάτων

Η εκτίμηση των παραμέτρων ενός υποδείματος ARMA(p,q) εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την τάξη των p και q. Για αρχή εξετάζουμε τις σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης με τις παραμέτρους των υποδειγμάτων αυτών. Άρα χρησιμοποιώντας τις τιμές των συντελεστών αυτοσυσχέτισης λαμβάνουμε για το AR(1) την εκτίμηση

$$\hat{\alpha} = \hat{\rho}_1 \quad (3.4)$$

Ενώ για το υπόδειγμα MA(1) λαμβάνουμε

$$\hat{\theta} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1} \quad (3.5)$$

Αντίστοιχα για το AR(2) υπόδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \frac{\hat{\rho}_1(1-\hat{\rho}_2)}{1-\hat{\rho}_1^2} \\ \hat{\alpha}_2 &= \hat{\rho}_2 \frac{\hat{\rho}_1^2(1-\hat{\rho}_2)}{1-\hat{\rho}_1^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ενώ για το MA(2) απαιτούνται στην ουσία προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης για τα θ_1 και θ_2 των δυο πρώτων αυτοσυσχετίσεων. Γενικά μια παρόμοια προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί και στα μικτά υποδείγματα ARMA(p,q). Για να φτάσουμε όμως στο να εκτιμήσουμε τα p+q για τις παραμέτρους α_i (i=1,2,3,...,p) και θ_j (j=1,2,3,...,q) πρέπει να υπολογίσουμε τις αυτοσυσχετίσεις $\hat{\rho}_s$ για s=1,2,...,p+q και να αντικαταστήσουμε στη σχέση $\rho_s = \alpha_1\rho_{s-1} + \alpha_2\rho_{s-2} + \dots + \alpha_p\rho_{s-p}$ των πρώτων p+q εξισώσεων που αφορούν τις θεωρητικές αυτοσυσχετίσεις. Κατά αυτό τον τρόπο

προκύπτει ένα σύστημα $p+q$ μη γραμμικών εξισώσεων στις $p+q$ άγνωστες παραμέτρους. Παρόλα αυτά αυτή η μέθοδος εκτίμησης στηρίζεται αποκλειστικά στις πρώτες $p+q$ υστερήσεις αγνοώντας τις γνωστές έως τώρα σε εμάς σχέσεις αυτοσυσχέτισης, πράγμα που τις καθιστά εκτιμήσεις αναξιόπιστες για προβλέψεις.

Στη περίπτωση που έχουμε μόνο αυτοπαλίνδρομο $AR(p)$ μέρος, η εκτίμηση είναι εύκολη αφού μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων(LS), η οποία δίνει συνεπείς εκτιμήσεις για τις παραμέτρους $\alpha_i (i=1,2,\dots,p)$ του $AR(p)$ υποδείγματος.

Όσον αφορά τα MA και $ARMA$ υποδείγματα δεν μπορούν να εκτιμηθούν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων από τη στιγμή που εξαρτώνται από τις τιμές των τυχαίων σφαλμάτων $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$, που αποτελούν μη παρατηρήσιμες μεταβλητές. Οι Box and Jenkins προτείνουν μια μέθοδο όπου οι παράμετροι ελαχιστοποιούν το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων

$$\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu - \theta \varepsilon_{t-1})^2 \quad (3.7)$$

Για να ελαχιστοποιηθεί αυτή η συνάρτηση πρέπει να προηγηθεί μια μη γραμμική τεχνική βελτιστοποίησης. Συνήθως ως αρχικές τιμές χρησιμοποιούμε το δειγματικό μέσο μ και για το θ την τιμή του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 , ενώ ως αρχική τιμή θεωρούμε το μηδέν. Κατά αυτό τον τρόπο έχουμε μια αρχική προσέγγιση της σειράς σφαλμάτων

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_1 &= Y_1 - \mu & \mu &= \bar{y}, \varepsilon_0 = 0 \\ \hat{\varepsilon}_2 &= Y_2 - \mu + \theta \hat{\varepsilon}_1 & \theta &= \hat{\rho}_1 \\ & \dots & & \\ \hat{\varepsilon}_T &= Y_T - \mu + \theta \hat{\varepsilon}_{T-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Από τα οποία εύκολα πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των τετραγώνων $S_1 = \sum \hat{\varepsilon}_t^2$.

Δίνοντας νέες τιμές στα μ και θ καθώς και επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα λαμβάνουμε ένα νέο τετραγωνικό άθροισμα S μέχρι να φτάσουμε στο μικρότερο όπου και συναντάμε την τελική εκτίμηση για το μοντέλο μας.

Πρόκειται φυσικά για μια χρονοβόρα διαδικασία, που σήμερα έγινε πιο απλή μέσω της χρήσης διάφορων στατιστικών πακέτων. Τέλος ας σημειωθεί πως ακόμα και για τα ARMA(p,q)υποδείγματα χρησιμοποιούνται οι ίδιες τεχνικές.

3.4 Διαγνωστικός Έλεγχος

Το στάδιο που ακολουθεί μετά την εκτίμηση του υποδείγματος που ταυτοποιήσαμε είναι να ελέγξουμε το κατά πόσο το συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι ικανοποιητικό, δηλαδή το πόσο καλά προσαρμόζεται στα δεδομένα.

Το να ελέγξουμε τη καταλληλότητα ενός ARIMA υποδείγματος απαιτεί να ελέγξουμε κατά πόσο τα κατάλοιπα, που έχουν ήδη εκτιμηθεί, δε συσχετίζονται μεταξύ τους. Τα εκτιμημένα κατάλοιπα με βάση τις αληθινές τιμές των παραμέτρων είναι στην ουσία ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές διότι πλησιάζουν τα αληθινά τυχαία κατάλοιπα του λευκού θορύβου, αν φυσικά το υπόδειγμα είναι ορθό και συνεπώς το μέγεθος του δείγματος του αυξημένο. Το κατά πόσο τυχαία είναι όμως τα κατάλοιπα αυτά θα το καταλάβουμε από τους συντελεστές συσχέτισης $\hat{\rho}_s$ των καταλοίπων και αφού εξετάσουμε το διάγραμμα αυτοσυσχέτισης. Στην πράξη δεν δύναται να γνωρίζουμε ούτε το αληθινό υπόδειγμα ούτε τις τιμές των παραμέτρων πράγμα ου καθιστά πιο δύσκολη τη χρησιμοποίηση των εκτιμημένων $\hat{\rho}_s$ στη θέση των πραγματικών ρ_k για τον έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας.

Γνωρίζουμε όμως πως για να είναι ένα υπόδειγμα επαρκές θα πρέπει οι αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων να μη διαφέρουν από το μηδέν ή έστω στο διάγραμμα αυτοσυσχέτισης τα $\hat{\rho}_s(\hat{\epsilon})$ να κείνται μέσα στα όρια του επιλεγμένου επίπεδου σημαντικότητας είτε είναι $\alpha=1\%$ είτε $\alpha=5\%$. Εδώ εμφανίζεται ο Durbin (1970) ο οποίος επισημαίνει πως η χρήση του τυπικού σφάλματος $\frac{1}{\sqrt{N}}$ στον έλεγχο $\hat{\rho}_s(\hat{\epsilon})$ μπορεί να μας οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα διότι υπάρχει περίπτωση να υποεκτιμήσει τη στατιστική σημαντικότητα όσον αφορά το μηδέν.

Από την άλλη όμως οι Box and Pierce έδειξαν πως αυτό ενδέχεται να συμβεί μόνο για τις αυτοσυσχετίσεις μικρής υστέρησης, δηλαδή μέχρι τους πρώτους πέντε συντελεστές το πολύ ανάλογα με το υπόδειγμα και για αυτόν τον λόγο το προαναφερόμενο τυπικό σφάλμα $\frac{1}{\sqrt{N}}$ θα πρέπει να το λαμβάνουμε ως ένα ανώτατο όριο.

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας τις πρώτες s αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων $\hat{\rho}_j(\hat{\epsilon}), j=1,2,\dots,s$, από ένα υπόδειγμα που εκτιμήσαμε της μορφής ARIMA(p,d,q).

Οι Box and Pierce προτείνουν το εξής κριτήριο

$$Q^{BP} = n \sum_{j=1}^k \hat{\rho}_j^2(\hat{\epsilon}) \quad (3.9)$$

Με $n=N-d$, ο αριθμός των διαθέσιμων παρατηρήσεων μετά τις διαφορές d τάξεως.

Το κριτήριο Q ακολουθεί την κατανομή

$$\chi^2_{\nu} \text{ με βαθμούς ελευθερίας } \nu=k-p-q$$

με k =αριθμός υστερήσεων

p =τάξη του AR

q =τάξη του MA

Ας σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως μια μεγάλη τιμή του Q οδηγεί σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης που αφορά τη συσχέτιση των καταλοίπων άρα και σε απόρριψη της καταλληλότητας του εκάστοτε υποδείγματος.

Το 1978 οι Ljung and Box επιχείρησαν μια τροποποίηση του κριτηρίου Q που προαναφέρθηκε, βασισμένη σε μια ακριβέστερη εκτίμηση της διακύμανσης των $\hat{\rho}_k$, που αντιστοιχεί όχι σε $1/n$ αλλά σε $(n-k)/n^2$. Στη πράξη σήμερα χρησιμοποιείται αυτή η τροποποιημένη μορφή του κριτηρίου με καλύτερη εφαρμογή στα δεδομένα και έχει ως εξής:

$$Q^{LB} = n(n+2) \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2(\hat{\epsilon})}{n-j} \quad (3.10)$$

ακολουθώντας κατανομή χ^2 με $k-p-q$ βαθμούς ελευθερίας.

3.5 Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων

Για την επιλογή του κατάλληλου υποδείγματος, αναφέραμε ήδη δυο ελέγχους που βοηθούν στην ορθή επιλογή, τον έλεγχο των καταλοίπων και τον έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων. Συνίσταται όμως και ένας επιπλέον έλεγχος αυτός της σταθερότητας των παραμέτρων, ο οποίος πραγματοποιείται διαχωρίζοντας το δείγμα σε υποπεριόδους και ελέγχοντας κατά πόσο οι εκτιμήσεις παραμένουν ή όχι σταθερές μεταξύ των περιόδων. Είναι γνωστό ως κριτήριο του λόγου πιθανοφανειών ή likelihood ratio test, και εφαρμόζεται κυρίως σε ότι αφορά τα υποδείγματα μορφής ARIMA.

Γενικά υπάρχουν διάφορα κριτήρια επιλογής υποδειγμάτων, όμως δυο είναι τα πιο διαδεδομένα, το κριτήριο πληροφοριών του Akaike(1974) ή αλλιώς Akaike Information Criterion και συμβολίζεται με AIC και το κριτήριο του Schwartz(1978) και συμβολίζεται με SBC από τα αρχικά Schwartz Bayesian Criterion. Τα κριτήρια αυτά ορίζονται, αντίστοιχα, ως εξής:

$$AIC = \ln(s^2) + 2n/T$$

$$SBC = \ln(s^2) + n \ln(T) \quad (3.11)$$

Όπου s^2 η εκτίμηση της διακύμανσης των καταλοίπων, n ο αριθμός εκτιμώμενων παραμέτρων υποδείγματος ($p+q+1$) και T ο αριθμός παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται στην παλινδρόμηση.

Η επιλογή ενός υποδείγματος, βασίζεται στη μικρότερη τιμή των κριτηρίων. Δηλαδή όταν έχουμε έναν αριθμό υποδείγματος με διαφορετικό εκτιμώμενο αριθμό παραμέτρων θα επιλέξουμε εκείνο που έχει τη μικρότερη τιμή AIC ή SBC.

Από τα δύο αυτά κριτήρια καλύτερο θεωρείται το SBC, διότι το οριακό κόστος έπειτα από προσθήκη μιας μεταβλητής είναι μεγαλύτερο στο SBC παρά στο AIC. Αυτός είναι ο λόγος που το κριτήριο SBC μας οδηγεί πάντα στο να επιλέξουμε ένα υπόδειγμα του οποίου ο αριθμός των παραμέτρων είναι μικρότερος από αυτόν που επιλέχθηκε με το AIC κριτήριο. Αν όμως γίνεται σύγκριση μεταξύ υποδειγμάτων με ίδιο αριθμό παραμέτρων, οδηγούν στην επιλογή του υποδείγματος με το μεγαλύτερο R^2 .

3.6 Προβλέψεις

Μετά την εκτίμηση, τον έλεγχο και την επιλογή του κατάλληλου υποδείγματος μορφής $AR(p), MA(q)$ ή $ARMA(p,q)$ είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε σε μια πρόβλεψη της συμπεριφοράς των μελλοντικών τιμών μιας χρονολογικής σειράς. Για να κατανοηθεί καλύτερα η διαδικασία της πρόβλεψης θα μιλήσουμε με σύμβολα. Έστω, λοιπόν ότι Y_1, Y_2, \dots, Y_t τα δεδομένα μιας χρονολογικής σειράς, στην οποία έχει προσαρμοστεί ένα υπόδειγμα μορφής $ARMA(p,q)$.

Την περίοδο $t+1$, δηλαδή την αμέσως επόμενη περίοδο, η πρόβλεψη θα είναι η «υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή» αυτής της σειράς, με βάση όλες τις προηγούμενες τιμές της, ουσιαστικά προβλέπεται και η πιθανότερη τιμή του μέλλοντος. Η πρόβλεψη η οποία γίνεται την περίοδο που διανύουμε t , για την επόμενη $t+1$ περίοδο μιας χρονολογικής σειράς συμβολίζεται με \hat{Y}_{t+1} και εκφράζεται

$$\hat{Y}_{t+1} = E_t(Y_{t+1}) \quad (3.12)$$

στο εξής όμως η πρόβλεψη θα συμβολίζεται για h περιόδους ($h=1,2,\dots$, περίοδοι στο μέλλον). Το σφάλμα μιας πρόβλεψης συμβολίζεται με \hat{e}_{t+h} και ισχύει

$$\hat{e}_{t+h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h} \quad (3.13)$$

Ο συγκεκριμένος ορισμός της πρόβλεψης αποτελεί την πρόβλεψη που έχει το μικρότερο μέσο σφάλμα τετραγώνου, συμβολίζεται με MSE από τα αρχικά Mean Squared Error και χρησιμοποιείται ως κριτήριο αξιολόγησης των προβλέψεων.

Το αμέσως επόμενο βήμα στη μεθοδολογία των προβλέψεων είναι το κατά πόσο αξιόπιστες είναι. Σε αυτό το σημείο μεγάλη χρησιμότητα έχουν τα λεγόμενα διαστήματα εμπιστοσύνης αλλά και άλλα μέτρα που φανερώνουν την αξιοπιστία μιας πρόβλεψης, και ακολουθούν σε ξεχωριστή ενότητα.

Ένα $(1-\alpha)\%$ διάστημα πρόβλεψης συναντάται υπό τη μορφή

$$\hat{Y}_{t+h} \pm z_c \quad (3.14)$$

όπου z_c είναι η πάνω $\alpha/2$ τιμή για την κανονική κατανομή $N(0,1)$.

3.7 Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων

Η σύγκριση μεταξύ των προβλέψεων που πραγματοποιούμε και των πραγματικών δεδομένων της υπό εξέταση χρονολογικής σειράς είναι ένας τρόπος να αξιολογήσουμε την προβλεπτική ικανότητα του επιλεγμένου υποδείγματος.

Γενικά στην αξιολόγηση προβλέψεων βοηθούν κάποια στατιστικά μέτρα τα οποία βασίζονται στο μέγεθος του σφάλματος πρόβλεψης που πραγματοποιούμε. Για την ακρίβεια των εκ των υστέρων προβλέψεων ή αλλιώς *ex-post*, δηλαδή για τις προβλέψεις που γίνονται μέσα στη περίοδο που έχουν ήδη πραγματοποιηθεί οι τιμές που θέλουμε να προβλέψουμε, χρησιμοποιούνται τα εξής μέτρα:

Μέσο Σφάλμα τετραγώνου-Mean Squared Error

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2$$

Τετραγωνική Ρίζα-Root Mean Squared Error

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{N}}$$

Μέσο Απόλυτο Σφάλμα-Mean Absolute Error

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |e_t|$$

Μέσο Απόλυτο Ποσοστιαίο Σφάλμα-Mean Absolute Percentage Error

$$\text{MAPE} = \frac{100}{N} \sum \left| \frac{F_t - A_t}{A_t} \right|$$

Τα μεγέθη MAE και MAPE υπολογίζουν μόνο τα απόλυτα σφάλματα σε αντίθεση με το μέσο τετραγωνικό σφάλμα MSE και τη τετραγωνική ρίζα RMSE που δίνουν σημασία στα μεγάλα σφάλματα που μπορούν να τετραγωνιστούν. Αν οι τιμές των μεγεθών αυτών είναι μικρές τόσο καλύτερη θεωρείται η προβλεπτική ικανότητα του εν λόγω υποδείγματος. Έχουν όμως ένα αρνητικό στοιχείο, ότι επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τις μονάδες μέτρησης των εκάστοτε μεταβλητών

πράγμα που μας αναγκάζει να είμαστε πιο προσεκτικοί κατά τη σύγκριση υποδειγμάτων για να έχουμε μεταβλητές εκφραζόμενες στις ίδιες μονάδες.

Υπάρχει και ένα επιπλέον μέγεθος ανεξάρτητο των μονάδων μέτρησης, το οποίο προτάθηκε από τον Theil. Ονομάζεται συντελεστής ανισότητας του Theil (Theil Inequality coefficient), συμβολίζεται με το γράμμα U και χρησιμοποιείται μέσω του τύπου

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum (F_t - A_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum (A_t)^2}} = \frac{\text{RMSE}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum (A_t)^2}}$$

Επιπλέον ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- Αν ο συντελεστής Theil=0 τότε οι προβλεπόμενες τιμές συμπίπτουν στο απόλυτο με τις πραγματικές. Γενικά όσο πιο κοντά είναι στο μηδέν τότε καλύτερες είναι και οι προβλέψεις
- Αν ο Theil>1 οι προβλέψεις είναι πολύ κακές
- Τέλος όταν ο Theil=1 οι προβλέψεις είναι μηδενικές.

Η προηγηθείσα σχέση μπορεί να αναλυθεί σε τρεις συνιστώσες:

- UM αντιπροσωπεύοντας το ποσοστό μεροληψίας
- UV αντιπροσωπεύοντας το ποσοστό διακύμανσης
- UC αντιπροσωπεύοντας το ποσοστό συνδιακύμανσης

Με γενική μορφή $UM+UV+UC=1$

Μια καλή πρόβλεψη έχει μικρό ποσοστό μεροληψίας και διακύμανσης ενώ μεγάλο ποσοστό συνδιακύμανσης.

3.8 Εποχικό Υπόδειγμα

Όπως συμβαίνει στη φύση, να αποτελείται από τέσσερις διαφορετικές εποχές, έτσι και στην οικονομία παρουσιάζονται χρονολογικές σειρές που αποτελούνται από εποχικές διακυμάνσεις.

Επομένως το φαινόμενο της εποχικότητας (seasonality) έχει να κάνει με μια κανονική περιοδική κύμανση μέσα στη διάρκεια του έτους. Γεγονός που οδηγεί σε

υψηλή συσχέτιση τις τιμές των σειρών που αντιστοιχούν στην ίδια εποχή σε διαδοχικά έτη.

Ως πρώτο βήμα σε μια περίπτωση εποχικού μοντέλου, θεωρείται η απαλοιφή της περιοδικότητας, την οποία οι Box and Jenkins πραγματοποιούν παίρνοντας διαφορές υστέρησης s ως εξής

$$Y_t = \nabla_s X_t = (1 - B^s)X_t = X_t - X_{t-s} \quad (3.15)$$

Επόμενο βήμα είναι να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο μικτής μορφής στα καινούργια δεδομένα. Η διαδικασία X_t ονομάζεται SARIMA(p,d,q)×(P,D,Q)_s διαδικασία εποχικότητας στην περίπτωση που αποτελείται από διαδικασία μορφής ARMA(p+sP,q+Sq).

Για την προσαρμογή ενός SARIMA μοντέλου, ενός δηλαδή μοντέλου με περιοδικότητα/εποχικότητα πραγματοποιούνται τρία βήματα:

1. Σχεδιασμός της εκάστοτε χρονολογικής σειράς σε γράφημα, καθώς και των αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων αυτής.
Αν εξετάζοντας τη γραφική απεικόνιση παρατηρηθεί επανάληψη ανά s αυτοσυσχετίσεις, τότε επιλέγεται το μοντέλο ARIMA(P,D,Q)_s από το γράφημα των αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων όπου παρουσιάζεται εποχικότητα.
2. Προσαρμόζεται ένα ARIMA(p,d,q)υπόδειγμα στα σφάλματα, τα οποία είναι αποτέλεσμα του ανωτέρω μοντέλου, και το γινόμενο αυτών των δυο έχει ως αποτέλεσμα το γενικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο.
3. Τέλος, ελέγχεται το μοντέλο ως προς την καταλληλότητα και σε περίπτωση υπαρκτής περισσότερων του ενός μοντέλου, επιλέγεται το καλύτερο με τους τρόπους που ήδη έχουν αναφερθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στασιμότητα, Τάση και έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας

4.1 Στασιμότητα

Όταν τα χαρακτηριστικά μιας χρονολογικής σειράς δεν μεταβάλλονται μέσα στο χρόνο τότε η σειρά αυτή χαρακτηρίζεται στάσιμη. Εννοείται πως για να τη χαρακτηρίσουμε έτσι θα πρέπει ο μέσος, οι διακυμάνσεις και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις της να κυμαίνονται γύρω από ένα σταθερό επίπεδο τιμών, ανεξαρτήτως χρονικής περιόδου.

Πολλές είναι οι περιπτώσεις σειρών που δεν παραμένουν στο αρχικό επίπεδο τιμών τους αλλά μεταβάλλονται, είτε μεγεθύνονται είτε μειώνονται μακροχρόνια. Σε μια τέτοια περίπτωση για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε σε μια περαιτέρω ανάλυση μιας χρονολογικής σειράς μη στάσιμης θα πρέπει να τη μετατρέψουμε σε στάσιμη.

Έχουμε ήδη αναφέρει ένα βασικό τρόπο που μετατρέπουμε μια μη στάσιμη χρονολογική σειρά σε στάσιμη, παίρνοντας διαφορές. Κατά αυτό τον τρόπο ολοκληρώνεται μια χρονολογική σειρά και αν μετατραπεί σε στάσιμη έπειτα από την εφαρμογή πρώτων διαφορών λέγεται ολοκληρωμένη πρώτης τάξης και συμβολίζεται ως $I(1)$, όπως είναι η περίπτωση του τυχαίου περιπάτου, μετατραπεί σε στάσιμη έπειτα από διαφορές d τάξεως λέγεται ολοκληρωμένη d τάξεως, δηλαδή $I(d)$. Οι έννοιες στασιμότητα και ολοκλήρωση συνδέονται στο ότι μια μη στάσιμη σειρά θεωρείται το ολοκλήρωμα μιας στάσιμης.

Υπάρχει όμως και μια ολοκληρωμένη διαδικασία μηδενικής τάξεως $I(0)$, αυτή του λευκού θορύβου, που δεν παρουσιάζει καμία συστηματική κίνηση παρά μόνο σταθερές αυξομειώσεις γύρω από μια συγκεκριμένη μέση τιμή. Αξίζει να σημειωθεί πως μια $I(0)$ μεταβλητή είναι στάσιμη αλλά όχι απαραίτητως τυχαία, ενώ μια τυχαία μεταβλητή είναι πάντα $I(0)$.

Με τον έλεγχο της στασιμότητας εξετάζουμε αν η Y_t μεταβλητή είναι στάσιμη στα επίπεδα τιμών της, αν δεν είναι σχηματίζουμε τις πρώτες διαφορές ΔY_t και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να γίνει στάσιμη, έστω μέχρι d διαφορές,

οπότε μιλάμε για μια ολοκληρωμένη I(d) σειρά. Η συγκεκριμένη διαδικασία στη βιβλιογραφία συναντάται ως «στασιμότητα διαφορών».

Η διαδικασία αυτή των διαφορών δεν είναι ο μόνος τρόπος για την επίτευξη της στασιμότητας υπάρχει και ένας επιπλέον τρόπος, η αφαίρεση της τάσης από τα στοιχεία μιας υπό εξέταση χρονολογικής σειράς. Για να φτάσουμε στο στάδιο αφαίρεσης της τάσης πρέπει καταρχάς να γίνει μια πρώτη εκτίμησης της τάσης που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα του κατάλληλου υποδείγματος, για παράδειγμα γραμμική τάση, δευτεροβάθμια και ούτω καθεξής. Θεωρητικά επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε τις αποκλίσεις που έχει η εν λόγω σειρά από τα κατάλοιπα της παλινδρόμησης. Όλη αυτή η διαδικασία είναι διαδεδομένη ως στασιμότητα τάσης ή διαφορετικά trend stationarity.

Έχοντας πλέον στη διάθεση μας δυο τρόπους επίτευξης στασιμότητας γεννιέται το ερώτημα ποιον από τους δυο πρέπει να ακολουθήσει ένας ερευνητής για να φτάσει σε μια στάσιμη, ως προς το μέσο, σειρά.

Η στασιμότητα των διαφορών παρουσιάζει τη τάση που κάνει τη σειρά μη στάσιμη¹ ως μια στοχαστικής μορφής, ενώ αντίθετα η διαδικασία αφαίρεσης της τάσης υποδηλώνει ότι πρόκειται για μια τάση μη στοχαστική αλλά προσδιορισμένη. Η πρώτη συνεπάγεται ουσιαστικά πως μια οποιαδήποτε αυξομείωση στις τιμές μιας χρονολογικής σειράς θα έχει μόνιμες επιπτώσεις μακροχρόνια για αυτήν, ενώ από την άλλη η δεύτερη μορφή τάσης συνεπάγεται μόνο παροδικές επιπτώσεις. Σε αυτό το σημείο έγκειται η βασική τους διαφορά.

4.2 Τάση και Στασιμότητα

Έπειτα από μια αρκετά κατατοπιστική ανάλυση των όρων της τάσης και της στασιμότητας και σύμφωνα με τους Nelson και Plosser (1982), διακρίνουμε τις μη στάσιμες χρονολογικές σειρές στις εξής κατηγορίες:

1. Στάσιμες έπειτα από λήψη διαφορών(difference stationary)
2. Στάσιμες έπειτα από αφαίρεση της τάσης(trend stationary)

Υπενθυμίζουμε πως στη πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε σε μια τάση στοχαστικής μορφής ενώ στη δεύτερη σε μη στοχαστικής ή αλλιώς σε μια τάση προσδιορισμένης μορφής.

¹ Αναφερόμαστε πάντα σε μη στασιμότητα ως προς το μέσο. Για την στασιμότητα ως προς τη διακύμανση συνίσταται ένας μετασχηματισμός ήδη υπάρχων δεδομένων σε λογαριθμικές τιμές.

Για την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς μιας χρονολογικής σειράς προχωράμε σε μια διάσπαση της σε επιμέρους συνιστώσες. Έστω ότι έχουμε μια χρονολογική σειρά y_t η οποία μπορεί να διασπαστεί σε μια τ_t μη στάσιμη συνιστώσα και σε μια ε_t στάσιμη. Άρα λαμβάνουμε:

$$y_t = \tau_t + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

Τη μη στάσιμη συνιστώσα την αποκαλούμε συνιστώσα της τάσης και την στάσιμη το κατάλοιπο που ενσωματώνει όλες τις διαταραχές της σειράς που αναπτύσσονται γύρω από μια μακροχρόνια τάση.

Η συνιστώσα τ_t μπορεί να είναι ένα πολυωνυμικό ή γραμμικό υπόδειγμα τάσης, που κατατάσσει τη σειρά στην κατηγορία A των στάσιμων κατόπιν αφαίρεσης της τάσης ή μπορεί να είναι στοχαστική και να κατατάσσει την εκάστοτε χρονολογική σειρά στην B κατηγορία των στάσιμων κατόπιν λήψης διαφορών. Εξετάζεται κάθε περίπτωση παρακάτω χωριστά.

Τέλος πρέπει να σημειωθεί πως οι τιμές μιας χρονολογικής σειράς που παρουσιάζουν εποχικότητα μέσα στο έτος περιλαμβάνουν μια επιπλέον συνιστώσα αυτή της εποχικότητας ή η εποχικότητα μπορεί να αφαιρεθεί και μέσω άλλων μεθόδων όπως μέσω ψευδομεταβλητών εποχικότητας για παράδειγμα ώστε να μπορέσουμε να προχωρήσουμε σε ανάλυση με εποχικά διορθωμένες τιμές.

4.2.1 Στάσιμες Χρονολογικές Σειρές με Λήψη Διαφορών

Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται χρονολογικές σειρές που οι διαφορές τους, οποιασδήποτε τάξης, να αποτελούν στάσιμες και αντιστρέψιμες σειρές μορφής ARMA.

Επομένως ισχύει

$$y_t - y_{t-1} = \beta_0 + u_t \quad (4.2)$$

και

$$A(L)u_t = B(L)e_t \quad (4.2\alpha)$$

όπου e_t λευκός θόρυβος².

Προσαρμόζοντας ανεξάρτητα κατάλοιπα στην πρώτη εξίσωση, δηλαδή $u_t = e_t$, λαμβάνουμε το υπόδειγμα της τυχαίας διαδρομής με σταθερά γνωστό ως random walk with drift:

$$y_t = \beta_0 + y_{t-1} + e_t \quad (4.3)$$

Το υπόδειγμα αυτό γίνεται στάσιμο με τις πρώτες διαφορές, $I(1)$ και έχει λύση την παρακάτω εξίσωση της y_t της οποίας η πορεία εξαρτάται από το άθροισμα δυο μη στάσιμων συνιστώσεων. Τη $y_0 + \beta_0 t$ και τη συνιστώσα των σφαλμάτων $\sum_{j=1}^t e_j$.

$$y_t = y_0 + \beta_0 t + \sum_{j=1}^t e_j \quad (4.3\alpha)$$

Στην περίπτωση που η τυχαία διαδρομή είναι χωρίς σταθερά, τότε η αντίστοιχη σχέση δεν περιέχει τον όρο $\beta_0 t$, άρα η σειρά χαρακτηρίζεται από σταθερό μέσο και μη σταθερή διακύμανση καταλοίπων.

Έστω η περίοδος $t+k$, έχουμε

$$y_{t+k} = y_0 + \beta_0(t+k) + \sum_{j=1}^{t+k} e_j \quad (4.4)$$

Για να κάνουμε μια πρόβλεψη της πορείας της σειράς για την περίοδο $t+k$ λαμβάνουμε την «υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή» και έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+k} &= E_t \left(y_0 + \beta_0(t+k) + \sum_{j=1}^{t+k} e_j \right) \\ &= y_0 + \beta_0 t + E_t \left(\sum_{j=1}^{t+k} e_j \right) + \beta_0 k \\ &= y_t + \beta_0 k \quad \text{είναι} \end{aligned}$$

² Είναι ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή με μηδενικό μέσο και σταθερή διακύμανση. Έχει αναλυθεί ήδη σε ένα από τα αρχικά κεφάλαια.

$$E_t \left(\sum_{j=t+1}^{t+k} e_j \right) = 0 \quad (4.5)$$

Η διακύμανση των σφαλμάτων πρόβλεψης στο υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής με σταθερά επηρεάζεται από τον χρονικό ορίζοντα k . Δηλαδή όσο πιο μακροχρόνια είναι η πρόβλεψη τόσο πιο συχνό είναι το φαινόμενο εμφάνισης σφαλμάτων της πρόβλεψης.

Τέλος δίνονται τα σφάλματα πρόβλεψης και η διακύμανση τους:

$$y_{t+k} - \hat{y}_{t+k} = \sum_{j=t+1}^{t+k} e_j \quad (4.6)$$

$$\text{var}(y_{t+k} - \hat{y}_{t+k}) = k\sigma_e^2 \quad \text{με} \quad \sigma_e^2 = \text{var}(e_j)$$

4.2.2 Στάσιμες Χρονολογικές Σειρές με Αφαίρεση Τάσης

Στην περίπτωση που μετατρέψουμε μια μη στάσιμη χρονολογική σειρά σε στάσιμη χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αφαίρεσης της τάσης και αφού διασπαστεί σε δυο συνιστώσες, όπως και πιο πάνω, η μη στάσιμη συνιστώσα τ_t θα πάρει τη μορφή μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f του χρόνου t , ενώ ο όρος u_t θα χαρακτηρίζεται από μηδενικό μέσο. Άρα λαμβάνουμε τη γενική μορφή ενός πολυωνύμου k τάξεως

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_k t^k + u_t \quad (4.7)$$

Με $\beta_j, j=0,1,\dots,k$ συμβολίζονται οι σταθεροί συντελεστές της μεταβλητής του χρόνου ενώ με u_t οι τυχαίες αποκλίσεις που ακολουθούν μια στάσιμη και αντιστρέψιμη ARMA(p,q) διαδικασία, χρησιμοποιώντας τον τελεστή υστέρησης L

$$A(L)u_t = B(L)\varepsilon_t$$

Κατά αυτό τον τρόπο λαμβάνουμε

$$E(y_t) = \sum_{j=0}^k \beta_j t^j$$

Αυτό το υπόδειγμα τάσης είναι μη στοχαστικής μορφής από τη στιγμή οι β συντελεστές παραμένουν διαχρονικά αμετάβλητοι.

Αν $k=1$ και $u_t = e_t$ προκύπτει μια πιο απλή μορφή, αυτή του γραμμικού υποδείγματος τάσης

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t \quad (4.8)$$

η αφαίρεση της τάσης γίνεται εν ολίγοις με την καθιερωμένη πλέον μέθοδο των

Η μεταβολή των τιμών της σειράς διαχρονικά συμβολίζονται με τη σταθερά β_1 . Στο να επιλέξουμε το καλύτερο υπόδειγμα τάσης μας βοηθούν οι έλεγχοι στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων της τάσης καθώς και η τυχαιότητα των καταλοίπων.

Σε τέτοιου είδους υποδείγματα ελαχίστων τετραγώνων και λαμβάνοντας τις εκτιμήσεις των καταλοίπων

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t - \dots - \hat{\beta}_k t^k \quad (4.9)$$

Έτσι λοιπόν η σειρά των καταλοίπων θα είναι στάσιμη και πιθανών της μορφής ARMA των υποδειγμάτων Box and Jenkins.

Ολοκληρώνοντας διαπιστώνουμε πως και το υπόδειγμα τάσης και το υπόδειγμα διαφορών περιέχουν τη συνιστώσα της τάσης που στη δεύτερη περίπτωση δεν φαίνεται ξεκάθαρα λόγω της μη στασιμότητας τους υποδείγματος της τυχαίας διαδρομής με σταθερά. Ακολουθεί όμως ένας συγκριτικός πίνακας των διαφορών μεταξύ των δυο αυτών υποδειγμάτων που μας δίνει μια καλύτερη και πιο συνοπτική εικόνα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΑΣΗΣ (Α)	ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ (Β)
$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t$	$y_t = y_0 + \beta_0 t + \sum_{j=1}^t e_j$
Ο σταθερός όρος του β είναι μια σταθερά παράμετρος.	Ο σταθερός όρος του αντιπροσωπεύει την αρχική τιμή της χρονολογικής σειράς.
Τα κατάλοιπα, δηλαδή οι αποκλίσεις της σειράς από τη γραμμική τάση, είναι στάσιμα στο συγκεκριμένο υπόδειγμα.	Τα κατάλοιπα εδώ είναι άθροισμα στάσιμων τυχαίων μεταβλητών με διακύμανση που τείνει στο άπειρο και τα καθιστά μη στάσιμα.
Η διακύμανση των σφαλμάτων πρόβλεψης είναι πεπερασμένη.	Ενώ στο υπόδειγμα Β αυξάνει γραμμικά με το μέγεθος του χρονικού ορίζοντα των προβλέψεων.
Μια πιθανή μεταβολή του διαταρακτικού όρου επηρεάζει παροδικά τις τιμές της σειράς.	Η σειρά αυτή έχει μόνιμες επιπτώσεις από μια ανάλογη μεταβολή.
Η αφαίρεση της τάσης πραγματοποιείται μέσω των αποκλίσεων των τιμών της χρονολογικής σειράς από την εκτίμηση της τάσης.	Ενώ για τα υποδείγματα της Β κατηγορίας λαμβάνοντας τις διαφορές των τιμών.

Πίνακας 1: Διαφορές ανάμεσα στα υποδείγματα Τάσης-Διαφορών

4.3 Έλεγχοι Στασιμότητας

4.3.1 Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

Αφού υπενθυμίσουμε εν συντομία πως μια στοχαστική διαδικασία είναι στάσιμη όταν οι ιδιότητές της, δηλαδή ο μέσος, η διακύμανση και η αυτοσυνδιακύμανση της, δεν μεταβάλλονται με τις αλλαγές χρονικών περιόδων t , θα αναλύσουμε μια-μια χωριστά τις δυο βασικές μεθόδους επίτευξης στασιμότητας χρονολογικών σειρών. Τους ελέγχους στασιμότητας τους χωρίζουμε στη κατηγορία της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και στη κατηγορία των μοναδιαίων ριζών.

Σε ότι αφορά τη πρώτη μέθοδο θεωρείται αρκετά ανακριβής σε σχέση με τις υπόλοιπες αφού πρώτο βήμα σε αυτή θεωρείται η οπτική επαφή με την υπό εξέταση χρονολογική σειρά. Δηλαδή αρχικά μπορούμε μέσω από τη γραφική απεικόνιση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (correlogram) να εξετάσουμε πως κυμαίνονται οι τιμές της και αναλόγως να κρίνουμε.

Αν ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ενώ ξεκινά από υψηλές τιμές φθίνει αργά, τότε η αντίστοιχη μεταβλητή δεν θεωρείται στάσιμη και μέσω πρώτων, δεύτερων ή d διαφορών τη μετατρέπουμε σε στάσιμη. Αν όμως οι αυτοσυσχετίσεις αυτές φθίνουν γρήγορα προς το μηδέν και παραμένουν κοντά στο μηδέν καθιστούν τη σειρά στάσιμη.

4.3.2 Έλεγχος Durbin-Watson

Ο έλεγχος Durbin-Watson χρησιμοποιείται για την ανίχνευση ύπαρξης αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων στην εξίσωση παλινδρόμησης της εξεταζόμενης σειράς. Την αρχή έκαναν οι Durbin και Watson(1950-1951), από τους οποίους πήρε το όνομά του ο συγκεκριμένος έλεγχος και αργότερα αναπτύχθηκε από τους Sargan και Bhargava(1983). Έστω

$$Y_t = \alpha + u_t \quad (4.11)$$

με u_t εδώ συμβολίζεται η τυχαία διαδρομή $u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t$ και με ε_t ο λευκός θόρυβος. Λαμβάνοντας τις πρώτες διαφορές η διαδικασία μετατρέπεται σε στάσιμη

$$\Delta Y_t = \Delta u_t = \varepsilon_t$$

Η στατιστική Durbin-Watson δίνεται ως εξής:

$$\frac{\sum(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum \hat{u}_t^2} \quad (4.11\alpha)$$

με \hat{u}_t συμβολίζονται τα εκτιμώμενα κατάλοιπα της εξίσωσης. Επιπλέον ο αριθμητής αντιπροσωπεύει το άθροισμα των τετραγώνων των στάσιμων μεταβολών $|(0)^3$ των καταλοίπων u . Ενώ ο παρανομαστής το άθροισμα των τετραγώνων των μη στάσιμων u . Άρα ο λόγος αυτός θα τείνει στο μηδέν και σε περίπτωση που υποθέταμε

³ Στάσιμες γιατί είναι λευκός θόρυβος.

ότι η Y είναι ολοκληρωμένη πρώτης τάξης $I(1)$ θα ίσχυε μόνο αν οι τιμές της εξίσωσης Durbin and Watson βρίσκονταν κοντά στο μηδέν. Αν η τιμή αυτής της εξίσωσης υπερβαίνει την κριτική τιμή των πινάκων που έχουν δοθεί από τους Sargan και Bhargava τότε η μεταβλητή Y θεωρείται ότι είναι στάσιμη.

4.3.3 Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας

Ένας άλλος τρόπος για τον έλεγχο στασιμότητας στην ανάλυση χρονολογικών σειρών είναι ο έλεγχος μοναδιαίας ρίζας ή αλλιώς unit root test, που δίνει αποτελέσματα για τη μη στασιμότητα μιας χρονολογικής σειράς. Εφαρμόστηκε για πρώτη φορά σε υποδείγματα μορφής $AR(1)$.

Γενικά με τον όρο μοναδιαία ρίζα, εννοούμε ότι κάποια ρίζα του πολυωνύμου

$$f(x) = 1 - \rho_1 x - \rho_2 x^2 - \rho_3 x^3 - \dots - \rho_n x^n = 0 \quad (4.12)$$

βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Στην περίπτωση που μια χρονολογική σειρά, λοιπόν, είναι της μορφής $AR(1)$

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

αποτελεί στάσιμη διαδικασία μόνο αν ο συντελεστής παλινδρόμησης είναι σε απόλυτες τιμές μικρότερος της μονάδας, δηλαδή αν ισχύει $|\alpha| < 1$. Διαφορετικά αν $\alpha = 1$, αν δηλαδή ο συντελεστής παλινδρόμησης βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, λέμε ότι χρονολογική σειρά έχει μοναδιαία ρίζα συνεπώς χαρακτηρίζεται μη στάσιμη.

Υπάρχει και το ενδεχόμενο ο συντελεστής παλινδρόμησης σε απόλυτες τιμές να είναι μεγαλύτερος της μονάδας, δηλαδή $|\alpha| > 1$, τότε η σειρά αυτή δεν έχει καν οικονομική έννοια.

Κατά αυτό τον τρόπο προέκυψαν οι εξής δυο υποθέσεις:
 $H_0: \alpha = 1$, η διαδικασία Y_t είναι μη στάσιμη (διότι έχει μοναδιαία ρίζα) και
 $H_a: |\alpha| < 1$, η διαδικασία Y_t είναι στάσιμη (διότι δεν έχει μοναδιαία ρίζα)

Μια αποδοχή της H_0 θα σήμαινε πως πρόκειται για μια μη στάσιμη διαδικασία, αυτή της τυχαίας διαδρομής.

Υπάρχει ένα πλήθος άρθρων που έχουν ασχοληθεί με την θεωρία και την εφαρμογή των ελέγχων της μοναδιαίας ρίζας, δυο όμως είναι οι πιο διαδεδομένοι: Ο

έλεγχος των Dickey-Fuller και ο έλεγχος των Phillips-Perron. Σημειώνεται πως ο πρώτος εκτός από τον απλό Dickey-Fuller έλεγχο, που συμβολίζεται με DF, περιλαμβάνει και τον επαυξημένο αυτού ο οποίος συμβολίζεται με ADF.

4.4 Έλεγχος των Dickey-Fuller

Όπως ήδη αναφέραμε οι έλεγχοι της μοναδιαίας ρίζας εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά σε αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα πρώτης τάξης (AR(1)) όμως στη συνέχεια γενικεύτηκαν σε υποδείγματα μορφής ARIMA.

Πιο συγκεκριμένα ο έλεγχος Dickey-Fuller εξετάζει τη συνθήκη κατά την οποία μια διαδικασία έχει μοναδιαία ρίζα και το κατά πόσο οι διαφορές βοηθούν στο να απομακρυνθεί η ρίζα αυτή. Κατά αυτό τον τρόπο χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές εξισώσεις μορφής AR(1) για τη διεξαγωγή των ελέγχων μοναδιαίας ρίζας, με ε_t λευκό θόρυβο.

1. $y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ (ο μέσος $\mu = 0$)
2. $y_t = \delta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ (ο μέσος $\mu \neq 0$)
3. $y_t = \delta + \gamma t + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ (ο μέσος $\mu \neq 0$ και υπάρχει χρονική τάση t)

Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει τι τιμές λαμβάνει η παράμετρος α που πολλαπλασιάζει την υστέρηση Y_t . Στην περίπτωση που $\alpha = 1$ τότε και τα τρία υποδείγματα γίνονται μη στάσιμα:

1. Υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής χωρίς σταθερά.
2. Υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής με σταθερά.
3. Υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής με σταθερά και τάση.

Υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής έναντι στάσιμης

Στη περίπτωση αυτή ελέγχουμε αν η τιμή του α ισούται με μονάδα ή είναι μικρότερη της μονάδας.

Δηλαδή :

$$H_0: \alpha = 1 \quad (\text{υπάρχει μοναδιαία ρίζα})$$

ή

$$H_a: \alpha < 1 \quad (\text{δεν υπάρχει μοναδιαία ρίζα})$$

Εν ολίγοις μια αποδοχή της H_0 θα σήμαινε πως η συγκεκριμένη σειρά Y_t ακολουθεί τη διαδικασία της τυχαίας διαδρομής. Το υπό εξέταση υπόδειγμα μέσω αντικαταστάσεων μεταβάλλεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \\
 &= (y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
 &\quad \vdots \\
 &= \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + \dots + \varepsilon_1 \\
 &= \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Σε περίπτωση μη στασιμότητας του υποδείγματος αυτού, απαιτείται ο εξής μετασχηματισμός:

$$\Delta y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{με } \beta = \alpha - 1 \quad (4.14)$$

Κατά τον οποίο μπορούμε πλέον εφαρμόσουμε τη μέθοδο εκτίμησης των ελαχίστων τετραγώνων και ο έλεγχος γράφεται ως εξής:

$$H_0: \alpha = 1 \quad \text{ή} \quad H_0: \beta = 0$$

Αν το β είναι ίσο με μηδέν η μεταβλητή y θεωρείται τυχαία διαδρομή, ($\Delta y_t = \varepsilon_t$), αν όμως είναι μικρότερο από το μηδέν τότε η μεταβλητή y είναι ολοκληρωμένη $I(0)$ άρα αποτελεί στάσιμη διαδικασία.

Στην πρώτη λοιπόν επιβάλλεται να γίνει έλεγχος στις διαφορές δεύτερης τάξης της μεταβλητής $\Delta^2 Y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$ για να εξεταστεί η στασιμότητα της Δy_t .

Έλεγχος τυχαίας διαδρομής με σταθερά έναντι στάσιμης

Η περίπτωση αυτή εξετάζεται κατά τον ίδιο τρόπο με την προηγούμενη μέσω της εξίσωσης

$$\Delta y_t = \delta + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.15)$$

Επαναλαμβάνεται η ίδια υπόθεση $H_0: \beta = 0$ η οποία απορρίπτεται όταν η τιμή της t στατιστικής είναι μεγαλύτερη από τις κριτικές τιμές για τους ελέγχους ύπαρξης

μοναδιαίας ρίζας που δίνονται από τον Fuller. Η απόρριψη αυτής της υπόθεσης δηλώνει πως η y_t παραμένει στάσιμη γύρω από ένα σταθερό μέσο $\mu = \delta(1-\alpha)$ χωρίς να παρουσιάζει τάση. Σε περίπτωση αποδοχής της συγκεκριμένης υπόθεσης η μεταβλητή χαρακτηρίζεται τυχαία διαδρομή με σταθερά:

$$\Delta y_t = \delta + \varepsilon_t \quad \text{αλλιώς} \quad \Delta y_t = \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Έλεγχος στασιμότητας τυχαίας διαδρομής με σταθερά και τάση

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση που έχει ήδη δοθεί πιο πάνω για τη συγκεκριμένη περίπτωση τη μετασχηματίζουμε κατά τα γνωστά:

$$\Delta y_t = \delta + \gamma t + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.16)$$

Επισημαίνουμε πως η μόνη διαφορά με τις προηγούμενες δυο είναι ότι σε αυτή υπάρχει η μεταβλητή της τάσης t η οποία επιτρέπει τον έλεγχο της υπόθεσης περί ύπαρξης περί μοναδιαίας ρίζας στην y_t .

Αν μια χρονολογική σειρά παρουσιάζει τάση, είτε στοχαστική είτε όχι, τότε οι έλεγχοι των δυο προηγούμενων περιπτώσεων είναι ακατάλληλοι, και η υπόθεση για τη συγκεκριμένη εξίσωση/περίπτωση δίνεται:

$$H_0: \beta = \gamma = 0$$

$$H_a: \beta < 0 \text{ και } \gamma \neq 0 \quad (4.17)$$

Με μια αποδοχή της H_0 έχουμε το υπόδειγμα της τυχαίας διαδρομής που συνεπάγει την στασιμότητα μέσω λήψης διαφορών:

$$\Delta y_t = \delta + \varepsilon_t$$

Ενώ σε περίπτωση απόρριψης της H_0 και με αφαίρεση της τάσης από τη y_t έχουμε ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα της μορφής AR(1) το οποίο αποτελεί στάσιμη διαδικασία:

$$y_t = \delta + \gamma t + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.17a)$$

Για τον έλεγχο της H_0 χρησιμοποιούμε το στατιστικό F με τις κριτικές τιμές Φ από τους Dickey-Fuller. Σημειώνεται πως το F κάνει μια σύγκριση ανάμεσα στο άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων της παραπάνω εξίσωσης,

$$F = \frac{(T-K)(SSR^R - SSR^{UR})}{qSSR^{UR}} \quad (4.18)$$

Με T συμβολίζουμε τον αριθμό των παρατηρήσεων, με K τον αριθμό των εκτιμώμενων παραμέτρων της συγκεκριμένης εξίσωσης και με q τον αριθμό των περιορισμών υπό την μηδενική υπόθεση.

Το να πετύχουμε σωστή εξειδίκευση του υποδείγματος τάσης μέσω των εφαρμογών ελέγχου μοναδιαίας ρίζας θεωρείται κάτι σημαντικό και έτσι οι Dickey-Fuller παρέχουν επιπλέον κριτήρια για τον έλεγχο από κοινού υποθέσεων των προηγηθέντων εξισώσεων (της δεύτερης και τρίτης περίπτωσης). Το κριτήριο F και οι κριτικές τιμές Φ_1 των Dickey-Fuller βοηθούν στη διεκπεραίωση του ελέγχου της από κοινού υπόθεσης $H_0: \beta = \delta = 0$, οι τιμές Φ_2 ολοκληρώνουν τον έλεγχο $H_0: \beta = \gamma = \delta = 0$ ενώ για τον έλεγχο $H_0: \beta = \delta = \gamma = 0$ χρησιμοποιούνται οι κριτικές τιμές Φ_3 . Απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης λαμβάνουμε όταν οι τιμές F είναι μεγαλύτερες συγκριτικά με τις Φ του ανάλογου πίνακα.

4.5 Επαυξημένος Έλεγχος των Dickey-Fuller (ADF)

Τα κατάλοιπα της ελεγχόμενης εξίσωσης θεωρούνται από τους Dickey-Fuller λευκός θόρυβος, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων ε_t η οποία επέρχεται με τον έλεγχο της μοναδιαίας ρίζας σε αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα πρώτης τάξης, AR(1). Στην περίπτωση αυτή επιβάλλεται να θεωρήσουμε ένα αυτοπαλίνδρομο AR υπόδειγμα μέγιστης τάξης p ώστε να μην υπάρξει αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων.

Έστω το υπόδειγμα AR(p)

$$y_t = \delta_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_{p-1} y_{t-p+1} + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (4.19)$$

Η αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων διορθώνεται με το μετασχηματισμό της εξίσωσης $y_t = \delta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ συμπληρώνοντας στο δεξί μέλος υστερήσεις της εξαρτημένης Δy_{t-j} μεταβλητής.

$$\Delta y_t = \delta_0 + \beta y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \delta_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \delta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (4.19a)$$

$$\text{με } \beta = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p) - 1$$

Κατά αυτό τον τρόπο προκύπτει και ο έλεγχος της μοναδιαίας ρίζας θέτοντας $\beta=0$, άρα η εξίσωση έχει μοναδιαία ρίζα από τη στιγμή που εκφράζεται καθαρά σε διαφορές πρώτης τάξης. Έχουμε τον έλεγχο

$$H_0: \beta = 0 \text{ και } H_a: \beta < 0$$

Ο οποίος δε διαφέρει από τον απλό έλεγχο Dickey-Fuller, με την έννοια πως και εδώ η υπόθεση ελέγχεται με τις κριτικές τιμές αυτών με τη διαφορά ότι η εξίσωση παλινδρόμησης έχει επαυξηθεί με Δy_t υστερήσεις, έτσι προέκυψε και η ονομασία επαυξημένου έλεγχος, (Augmented Dickey-Fuller, ADF).

Θεωρείται απαραίτητο οι υστερήσεις Δy_{t-j} να μην δημιουργούν αυτοσυσχετιζόμενα κατάλοιπα. Το στατιστικό κριτήριο Langrange Multiplier (LM) ή αλλιώς ο έλεγχος Breusch-Godfrey, βοηθά στον προσδιορισμό του απαραίτητου αριθμού υστερήσεων. Επιπλέον σημειώνεται πως πολλοί ερευνητές χρησιμοποιούν κάποιο κριτήριο από τα παρακάτω, για την διαδικασία επιλογής του υποδείγματος ή κάνουν υποθέσεις για τον απαραίτητο αριθμό χρονικών υστερήσεων.

- Κριτήριο Akaike (AIC, 1973)

Στο κριτήριο αυτό ως αριθμό χρονικών υστερήσεων p διαλέγουμε αυτόν που ελαχιστοποιεί την ακόλουθη συνάρτηση:

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2}{n}k \quad (4.20)$$

Όπου k είναι ο αριθμός συντελεστή παλινδρόμησης και n το μέγεθος του δείγματος.

Γράφεται και
$$AIC = \ln\left(\frac{RSS}{n-k}\right) + \frac{2}{n}k \quad (4.20a)$$

Όπου RSS το άθροισμα τετραγώνων καταλοίπων.

- Κριτήριο Schwartz (SCH, 1978)

Και στο κριτήριο αυτό ζητάμε το ελάχιστη τιμή της ανάλογης συνάρτησης. Δηλαδή και εδώ ως αριθμό χρονικών υστερήσεων p διαλέγουμε αυτόν που ελαχιστοποιεί την ακόλουθη συνάρτηση:

$$SBC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{n} \ln n \quad (4.21)$$

ή αλλιώς
$$SBC = \ln\left(\frac{RSS}{n-k}\right) + \frac{k}{n} \ln n \quad (4.21\alpha)$$

- Κριτήριο Hannon and Quinn(1979)

Ως αριθμό χρονικών υστερήσεων p και για το συγκεκριμένο κριτήριο διαλέγουμε αυτόν που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση:

$$HQC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{n} (\ln(\ln n)) \quad (4.22)$$

ή αλλιώς
$$HQC = \ln\left(\frac{RSS}{n-k}\right) + \left(\frac{2 \ln \ln n}{n}\right)k \quad (4.22\alpha)$$

- Κριτήριο Συντελεστή Διορθωμένου Πολλαπλού προσδιορισμού

Σε αυτό το κριτήριο μια μεγάλη τιμή του συντελεστή πιο κάτω, μας δίνει τον κατάλληλο αριθμό χρονικών υστερήσεων

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k} (1 - R^2) \quad (4.23)$$

Όπου R ο συντελεστής προσδιορισμού.

4.6 Έλεγχος των Phillips-Perron

Για το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων οι Dickey-Fuller πρότειναν, όπως είδαμε, την επαύξηση της εξίσωσης με επιπλέον όρους χρονικών υστερήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής. Έτσι με σκοπό να ελέγξουν την ύπαρξη μη στασιμότητας περαιτέρω σε χρονολογικές σειρές, οι Phillips-Perron ανέπτυξαν το 1988 μια νέα μεθοδολογία.

Το στατιστικό των Phillips-Perron εκτός από το ότι λαμβάνει υπ' όψιν τις αυτοσυσχετίσεις υψηλών τιμών ακολουθεί την ίδια ασυμπτωτική κατανομή με αυτό των Dickey-Fuller, που σημαίνει πως ισχύουν και για τους δυο ελέγχους οι η

εκτιμημένη εξίσωση μπορεί να περιλαμβάνει μόνο σταθερά ή σταθερά σε συνδιασμό με χρονική τάση και για τους δυο ελέγχους.

Πιο συγκεκριμένα ο Perron έδειξε πως αν μια σειρά αποτελεί στάσιμη διαδικασία, όσον αφορά τη τάση της διαχρονικά, αλλά σε κάποια στιγμή υποστεί μια μεταβολή και θεωρητικά πάψει να είναι στάσιμη, ο επαυξημένος έλεγχος ADF θα λάβει υπ' όψιν τη μεταβολή αυτή ως μια μόνιμη συνέπεια της στοχαστικής τάσης. Εν ολίγοις θα αποδεχθεί την μηδενική υπόθεση που αφορά τη στασιμότητα της χρονολογικής σειράς με τη λήψη διαφορών πρώτης τάξης. Ενώ ο Perron τροποποίησε τους ελέγχους των μοναδιαίων ριζών με σκοπό να μεταβάλλουν είτε τη σταθερά του υποδείγματος είτε τη κλίση είτε και τα δυο, εισάγοντας ψευδομεταβλητές. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα ο Perron χρησιμοποιώντας τρία εναλλακτικά υποδείγματα διατύπωσε τους τρεις ακόλουθους ελέγχους:

Υπόδειγμα Α:Αλλαγή σταθεράς

$$H_0: y_t = \mu_1 + \delta D\{TB\}_t + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.24\alpha)$$

$$H_a: y_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + \varepsilon_t \quad (4.24\beta)$$

Στο υπόδειγμα αυτό η μηδενική υπόθεση αφορά υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής με σταθερά που υπέστη μόνιμη μεταβολή τη χρονική περίοδο TB+1 ενώ η H_a δηλώνει μια στάσιμη σειρά ως προς την τάση της με μια αλλαγή στη παράμετρο της σταθεράς την TB περίοδο από μ_1 σε μ_2 ⁴.

Υπόδειγμα Β:Αλλαγή κλίσης

$$H_0: y_t = \mu_1 + y_{t-1} + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + \varepsilon_t \quad (4.25\alpha)$$

$$H_a: y_t = \mu_1 + \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1)DT^*_t + \varepsilon_t \quad (4.25\beta)$$

Το συγκεκριμένο υπόδειγμα περιγράφονται οι αντίστοιχες υποθέσεις με αλλαγή για τη μηδενική υπόθεση της σταθεράς από μ_1 και μ_2 μετά τη χρονική στιγμή TB και για την H_a αλλαγή της κλίσης της τάσης από β_1 σε β_2 μετά το σημείο TB.

Υπόδειγμα Γ:Αλλαγή σταθεράς και κλίσης

$$H_0: y_t = \mu_1 + y_{t-1} + dD\{TB\}_t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + \varepsilon_t \quad (4.26\alpha)$$

$$H_1: y_t = \mu_1 + \beta_1 t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + (\beta_2 - \beta_1)DT_t + \varepsilon_t \quad (4.26\beta)$$

⁴ Η διαφορά $\mu_2 - \mu_1$ αντιπροσωπεύει το μέγεθος μεταβολής της σταθεράς ανάμεσα στις δυο περιόδους.

Τέλος το υπόδειγμα Γ είναι συνδυασμός των δυο πρώτων υποδειγμάτων, δηλαδή η H_0 είναι μια τυχαία διαδρομή με αλλαγή στη σταθερά και τη κλίση της στοχαστικής τάσης, ενώ η H_a δηλώνει μια στάσιμη σειρά που αλλάζει μέσο επίπεδο και κλίση την περίοδο TB.

όπου TB μια τυχαία χρονική στιγμή, $D\{TB\}_t$, DU_t , DT , DT^*_t συμβολίζουν ψευδομεταβλητές και ορίζονται ως

$$D\{TB\}_t = \begin{cases} 1 & \text{εάν } t = TB + 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad DU_t = \begin{cases} \text{εάν } t > TB \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$DT_t = \begin{cases} t & \text{εάν } t > TB \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad DT^*_t = \begin{cases} t - TB & \text{εάν } t > TB \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και πολυώνυμα τάξης p και q αντίστοιχα του τελεστή υστέρησης $A(L)\varepsilon_t = B(L)u_t$.

Σε κάθε μια περίπτωση από τα παραπάνω υποδείγματα απαιτείται η κατάλληλη εξίσωση παλινδρόμησης προκειμένου να εφαρμοστεί ο έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας του επαυξημένου DF.

Για το υπόδειγμα A η εξίσωση είναι:

$$y_t = \mu + \theta DU_t + \beta t + \delta D(TB)_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.27)$$

Ενώ για το Γ υπόδειγμα δίνεται:

$$y_t = \mu + \theta DU_t + \beta t + \gamma DT_t + \delta D(TB)_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.28)$$

Στη περίπτωση του B υποδείματος αρχικά αφαιρούμε τη τάση λαμβάνοντας τα κατάλοιπα από την παλινδρόμηση :

$$\hat{y}_t = \mu + \beta t + \gamma DT_t^* + \hat{y}_t \quad (4.29)$$

Και στη συνέχεια πραγματοποιείται έλεγχος της υπόθεσης $\alpha=1$ με την t-στατιστική στην παλινδρόμηση:

$$\hat{y}_t = \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.29\alpha)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Δυναμικά Πολυμεταβλητά Μοντέλα

5.1 Υποδείγματα VAR

Στο κεφάλαιο αυτό θα γνωρίσουμε μια νέα μορφή δυναμικών υποδειγμάτων μιας ομάδας χρονολογικών σειρών, που είναι διαδεδομένα ως διανύσματα αυτοπαλινδρομήσεων ή Vector Autoregressions, στα οποία εν συντομία θα αναφερόμαστε ως VAR υποδείγματα.

Πρόκειται ουσιαστικά για μια επέκταση των αυτοπαλινδρομων υποδειγμάτων AR(p) και έχουν αποδεχθεί πολύ αποτελεσματικά για την πρόβλεψη συστημάτων αλληλοσυσχετιζόμενων μεταβλητών αλλά και πιο εύχρηστα.

Η μεθοδολογία των VAR υποδειγμάτων εφαρμόστηκε για πρώτη φορά το 1980 από τον Sims και οι πιο σημαντικές εφαρμογές τους είναι:

- Η χρήση τους στους ελέγχους αιτιότητας.
- Η διάσπαση της διακύμανσης τους και
- Ο υπολογισμός συναρτήσεων των μεταβλητών του VAR ύστερα από κάποια πιθανή μεταβολή σε οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος.

Το συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι ένα σύστημα εξισώσεων του οποίου οι μεταβλητές είναι ενδογενείς και ο αριθμός των υστερήσεων προσδιορίζεται από το ίδιο το σύστημα. Ένα υπόδειγμα VAR μπορεί να γραφτεί ως

$$Y_t = \delta + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + e_t \quad (5.1)$$

Όπου Y_t είναι το διάνυσμα των ενδογενών μεταβλητών, δ το διάνυσμα των σταθερών όρων, $A_i (i=1,2)$ οι μήτρες των συντελεστών των ενδογενών μεταβλητών χρονικής υστέρησης και e_t το διάνυσμα των καταλοίπων. Αντί για μια μεταβλητή Y θα μπορούσαμε να έχουμε περισσότερες, για παράδειγμα k διαφορετικές μεταβλητές εξού και ο χαρακτηρισμός διανυσματική αυτοπαλινδρομήση. Κατά αυτά τα λεγόμενα το σύστημα που ακολουθεί ονομάζεται υπόδειγμα αυτοπαλινδρομων διανυσμάτων συγκεκριμένα πρώτης τάξεως ή αλλιώς VAR(1) για $k=1$ και $p=1$.

$$Y_{1t} = \delta_1 + A_{11}Y_{1,t-1} + A_{12}Y_{2,t-1} + e_{1t} \quad (5.2\alpha)$$

$$Y_{2t} = \delta_2 + A_{21}Y_{1,t-1} + A_{22}Y_{2,t-1} + e_{2t} \quad (5.2\beta)$$

Για τη σωστή εκτίμηση ενός VAR υποδείγματος θα πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες βασικές υποθέσεις:

- Το διάνυσμα των καταλοίπων έχει μέσο μηδέν και το κατάλοιπο κάθε εξίσωσης έχει σταθερή διακύμανση χωρίς να αυτοσυσχετίζονται οι τιμές του, με μοναδική δυνατότητα να μπορεί το ίδιο το κατάλοιπο να συσχετιστεί με το κατάλοιπο άλλης εξίσωσης (Δημέλη 2001).
- Το συγκεκριμένο υπόδειγμα μορφής VAR είναι στάσιμο πληρώντας όλες τις συνθήκες στασιμότητας συμπεριλαμβανομένης της απουσίας τάσης, εποχικότητας καθώς και μεταβολής στη διακύμανση.

Απαραίτητη προϋπόθεση για να προχωρήσουμε σε εκτίμηση των VAR υποδειγμάτων είναι να γνωρίζουμε τον αριθμό των χρονικών υστερήσεων, με λίγα λόγια πρέπει να γνωρίζουμε την τάξη του εν λόγω υποδείγματος η οποία συνήθως είναι άγνωστη. Αν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες τότε η εκτίμηση μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων των εξισώσεων του συστήματος VAR δίνει συνεπής και αποτελεσματικούς εκτιμητές παραμέτρων, ωστόσο παρουσιάζεται δυσκολία σε ότι αφορά την ερμηνεία τους. Γι' αυτό το λόγο, τα VAR συστήματα μετατρέπονται συνήθως σε μορφή κινητών μέσων για να μπορέσουν να υπολογιστούν οι επιδράσεις από μια τυχαία μεταβολή των σφαλμάτων των τιμών των ενδογενών μεταβλητών. Οι μεταβολές αυτές υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις αιφνίδιων αντιδράσεων ώστε να μπορούμε να καταγράψουμε τις συνέπειες από μια απότομη μεταβολή.

5.2 Άλλες Μορφές VAR Υποδειγμάτων

Έχουμε το υπόδειγμα

$$Y_t = \delta + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + e_t$$

Αφαιρούμε κατά μέλη το Y_{t-1} και λαμβάνουμε:

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta - (A_1 - I)Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + e_t \quad (5.3)$$

Συνεχίζουμε το μετασχηματισμό της αρχική εξίσωσης για να καταλήξουμε σε μια ισοδύναμη εξίσωση όπου τη θέση των αρχικών τιμών έχουν καταλάβει οι διαφορές τους πρώτης τάξης και μια μόνο υστέρηση του αρχικού διανύσματος στο δεξί μέλος. Άρα στη συνέχεια αφού προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τον όρο $A_2 Y_{t-1}$ έχουμε:

$$\Delta Y_t = \delta + \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + e_t \quad (5.4)$$

Όπου $\Pi = -(I - A_1 - A_2)$ και $\Gamma_1 = -A_2$. Αναμφίβολα βέβαια η σχέση αυτή θα μπορούσε να γραφτεί και σε όρους της δεύτερης υστέρησης του Y_t αντί της πρώτης:

$$\Delta Y_t = \delta + \Pi Y_{t-2} + (A_1 - I) \Delta Y_{t-1} \quad (5.5)$$

Γενικά ένα VAR(P) υποδείγμα μπορεί να λάβει τη μορφή

$$\Delta Y_t = \delta + \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + e_t \quad (5.6)$$

Όπου Π και $\Gamma_i, i=1,2,\dots,p-1$ είναι οι συναρτήσεις των αρχικών τιμών A :

$$\Pi = A_1 + \dots + A_p - I$$

$$\Gamma_i = - \sum_{j=i+1}^p A_j$$

Το σύστημα των εξισώσεων αυτών εξαρτάται από τις τιμές που λαμβάνει το λ , επιπλέον οι ρίζες λ των εξισώσεων καθορίζουν και το βαθμό της μήτρας Π .

$$|\lambda^p I - \lambda^{p-1} A_1 - \dots - \lambda A_{p-1} - A_p| = 0 \quad (5.7)$$

5.3 Αιτιότητα κατά Granger

Κατά την εξειδίκευση ενός υποδείγματος, χρειάζεται πολλές φορές ο προσδιορισμός του κατά πόσο μια μεταβλητή αιτιάζει κάποια άλλη ή αιτιάζεται από μια άλλη. Σε επιστημονικούς κλάδους η σχέση αυτή αιτίου και αιτιατού μπορεί να προσδιοριστεί στην οικονομική επιστήμη όμως η σχέση αυτή είναι αδύνατο να καθοριστεί λόγω έλλειψης δεδομένων. Γι' αυτόν το λόγο συχνά θεωρούμε εκ των προτέρων δεδομένη μια συγκεκριμένη σχέση αιτίου και αιτιατού για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε την ανάλυση ενός υποδείγματος.

Αξιοματικά, είναι δεχτό ότι το παρελθόν και το παρόν προκαλούν το μέλλον, αλλά το αντίστροφο δεν είναι δυνατόν να συμβεί. Στη περίπτωση των δυο μεταβλητών, ενεργειακής κατανάλωσης και Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος, που είναι και το εν μέρει αντικείμενο έρευνας της συγκεκριμένης εργασίας, το πρώτο που πρέπει να σχολιαστεί και απαντηθεί είναι το αν υπάρχει σχέση αιτιότητας μεταξύ τους. Η ανάλυση της παλινδρόμησης είναι μια μέθοδος που σε αυτή τη περίπτωση δεν μπορεί να αποδείξει ότι υπάρχει τέτοιου είδους σχέση ανάμεσα στις προαναφερθέντες μεταβλητές.

Οι δυσκολίες αυτές ως προς τη σχέση αιτιότητας δυο οικονομικών μεταβλητών οδήγησαν τον Granger το έτος 1969, να αναπτύξει μια νέα οικονομική έννοια γνωστή ως “αιτιότητα κατά Granger” (Granger causality). Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι μια μεταβλητή Y_t αιτιάζει κατά Granger μια άλλη X_t , αν η πρόβλεψη της μεταβλητής Y_t για μια περίοδο στο μέλλον, έστω \bar{Y}_t , έχει μικρότερο μέσο σφάλμα τετραγώνου (Mean Squar Error, MSE). Αυτό μαθηματικά εκφράζεται ως

$$MSE\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{U}}\right) < MSE\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{U} - \bar{X}}\right) \quad (5.8)$$

όπου με \bar{U} παριστάνεται όλη η προηγούμενη πληροφόρηση για τη πρόβλεψη \bar{Y} της Y_t και με \bar{X} η προηγούμενη πληροφόρηση που αφορά τη μεταβλητή X_t .

Σημειώνεται πως στο άρθρο του ο Granger το 1988, δήλωσε πως στην ουσία αυτό που μας ενδιαφέρει είναι κατά πόσο το διάνυσμα της οικονομικής χρονολογικής σειράς y_t “αιτιάζει” ένα άλλο διάνυσμα x_t , ενώ ταυτόχρονα υπάρχει και ένα επιπλέον διάνυσμα w_t , που αποτυπώνει το ερώτημα περί αιτιότητας:

$$J_t: x_{t-j}, y_{t-j}, w_{t-j} \quad \text{με } j \geq 0 \quad \{\text{χρησιμοποιεί όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες.}\}$$

Και

$$J'_t: x_{t-j}, w_{t-j} \quad \text{με } j \geq 0 \quad \{\text{Εξαιρεί τις πληροφορίες σχετικά με το παρελθόν και το παρόν του } y_t\}$$

Τέλος, υπάρχουν δυο βασικοί ορισμοί περί αιτιότητας και μη αιτιότητας. Ο πρώτος θεωρεί ότι η αιτία λαμβάνει χώρα πριν το αποτέλεσμα και ο δεύτερος ότι οι αιτιώδεις χρονολογικές σειρές περιέχουν πληροφορίες για τις χρονολογικές σειρές που αιτιάζονται.

5.4 Έλεγχος Αιτιότητας κατά Granger

Στο παρελθόν ο έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας μεταξύ δυο μεταβλητών γινόταν μέσω της μεθόδου των Box-Jenkins η οποία όμως οδηγούσε σε λανθασμένα αποτελέσματα. Ο έλεγχος αυτός ξεκινούσε με τον προσδιορισμό του ARMA μοντέλου για κάθε μια σειρά και στη συνέχεια γινόταν ο έλεγχος για την ανεξαρτησία των καταλοίπων.

Εξαιτίας της αδυναμίας αυτής της μεθόδου έγινε πιο διαδεδομένος ο έλεγχος αιτιότητας κατά Granger. Στον ορισμό του, που παραστήθηκε και μαθηματικά πιο πάνω, το U περιέχει όλη την υπάρχουσα πληροφόρηση γεγονός που ανάγκασε τον Granger να προτείνει την αντικατάσταση του U με το σύνολο όλης της σχετικής πληροφόρησης για δυο μεταβλητές για παράδειγμα X και Y .

Έστω οι δυο χρονολογικές σειρές:

$$Y_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^k b_i X_{t-i} + U_t$$

$$X_t = \sum_{i=1}^k c_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^k d_i X_{t-i} + e_t$$

Με k το μήκος της υστερήσεως.

Ο έλεγχος περί αιτιότητας μεταξύ δυο μεταβλητών πραγματοποιείται με το στατιστικό F από το τύπο:

$$F = \frac{(SSE^R - SSE^U)/k}{SSE^U/f} \quad (5.9)$$

Η παράμετρος f ισούται με τους βαθμούς ελευθερίας ενώ όπου SSE^R το άθροισμα των τετραγώνων καταλοίπων στην παλινδρόμηση με περιορισμό, όταν δηλαδή δεν περιλαμβάνονται οι όροι $k X_{t-i}$ ή Y_{t-i} .

Συνίσταται προσοχή ως προς τα συμπεράσματα που θα προκύψουν διότι επηρεάζονται από τον αριθμό των υστερήσεων που έχουν επιλεγεί καθώς και από τη συχνότητα των χρησιμοποιούμενων στοιχείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συνολοκλήρωση και Υποδείγματα Διόρθωσης Σφαλμάτων

6.1 Έννοια της Συνολοκλήρωσης

Πολλές φορές η συσχέτιση μεταξύ δυο μεταβλητών μπορεί να μην ευθύνεται στη σχέση αιτίου και αιτιατού αλλά στην ύπαρξη κάποιου φαινομένου, να υπάρχει δηλαδή μια φαινομενική συσχέτιση. Κλασικό παράδειγμα η συσχέτιση κατανάλωσης και βροχόπτωσης κατά την οποία αρχικά διαπιστώνεται μια φαινομενική συσχέτιση μεταξύ τους αλλά η απουσία της στασιμότητας από αυτές θα τις οδηγήσει στη μακροχρόνια απόκλισή τους.

Συνήθως υπάρχουν αποκλίσεις οι οποίες όταν είναι στάσιμες ισορροπούν την κατάσταση μεταξύ δυο μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα όταν οι μεταβλητές έχουν μακροχρόνια σχέση ισορροπίας μεταξύ τους τότε λέμε πως είναι συνολοκληρωμένες.

Η έννοια της συνολοκλήρωσης αρχικά αναπτύχθηκε από τον Engle και Granger(1987). Κατά τους οποίους αν δυο χρονολογικές σειρές είναι ολοκληρωμένες d τάξεως, $I(d)$ σύμφωνα με το συμβολισμό σε προηγούμενο κεφάλαιο, και υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ τους που να παρέχει μια ολοκληρωμένη σειρά χαμηλότερης της αρχικής τάξης, έστω $I(d-b)$ για $b > 0$ (Δημέλη 2002), τότε σύμφωνα με τους Engle και Granger οι σειρές είναι συνολοκληρωμένες ή αλλιώς cointegrated, τάξης $(d-b)$ και συμβολίζεται με $C| (d-b)$.

Αν δυο μεταβλητές X_t και Y_t είναι ολοκληρωμένες πρώτης τάξης $I(1)$ τότε και ο γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών θα είναι επίσης $I(1)$. Επιπλέον η διακύμανση της σειράς με υψηλότερη τάξη θα υπερισχύει αυτής της χαμηλότερης τάξης. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο γραμμικός συνδυασμός δυο μεταβλητών $I(1)$ καταλήγει σε μια μεταβλητή η οποία είναι ολοκληρωμένη $I(0)$ άρα οι σειρές είναι ολοκληρωμένες τάξης $C|(1,1)$. Έστω X_t και Y_t είναι $I(1)$ και παλινδρομώντας την Y_t στην X_t ή και το αντίθετο, τα κατάλοιπα της εξίσωσης έστω u_t :

$$u_t = Y_t - \lambda X_t = [1 - \lambda] \begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Είναι $I(0)$ τότε οι μεταβλητές X και Y είναι συνολοκληρωμένες με σταθερά το λ ή διαφορετικά λέμε πως αποτελεί το διάνυσμα της συνολοκλήρωσης $[1, -\lambda]$.

Αναφορικά με τον ορισμό της συνολοκλήρωσης και του διανύσματος συνολοκλήρωσης ισχύουν τα εξής:

- Το διάνυσμα είναι μοναδικό μόνο στη περίπτωση που ο ένας εκ των δυο συντελεστών είναι μονάδα, έχει γίνει δηλαδή κανονικοποίηση του διανύσματος. Για να κατανοηθεί καλύτερα θέτουμε μια νέα παράμετρο π για την οποία προκύπτει η σχέση:

$$u_t = Y_t - \pi X_t$$

Έπειτα από αντικατάσταση του π λαμβάνουμε:

$$u_t = Y_t - \lambda X_t - \delta X_t \quad (6.2)$$

Με $Y_t - \lambda X_t$ να είναι $I(0)$ και δX_t $I(1)$, οπότε το u_t είναι $I(1)$ εκτός αν το δ είναι μηδέν.

- Η συνολοκλήρωση στις αρχικές τιμές των μεταβλητών συνεπάγεται και την συνολοκλήρωση των λογαριθμικών τους τιμών χωρίς να ισχύει το αντίθετο.
- Οι μεταβλητές X και Y δεν απέχουν πολύ από τη στιγμή που το u είναι στάσιμο. Άρα μπορούμε όσον αφορά την εξίσωση αυτή να κάνουμε λόγο για μακροχρόνια σχέση ισορροπίας.
- Η παρουσία της σταθεράς στην συνολοκλήρωση της εξίσωσης παλινδρόμησης είναι, θα λέγαμε ,απαραίτητη καθώς οποιαδήποτε σταθερά είναι $I(0)$ και η χρησιμοποίηση της κάνει το μέσο όρο του u μηδέν.

Συνεχίζοντας ο Granger(1983) και οι Engle και Granger (1987) απέδειξαν πως οι μεταβλητές X και Y όταν ολοκληρωμένες πρώτης τάξης και συνολοκληρωμένες, υπάρχει ένα υπόδειγμα διόρθωσης σφαλμάτων με τη μορφή:

$$\Delta Y_t = -p_1 u_{t-1} + \text{υστερήσεις}(\Delta Y, \Delta X) + \varepsilon_{1t} \quad (6.3)$$

$$\Delta X_t = -p_2 u_{t-1} + \text{υστερήσεις}(\Delta Y, \Delta X) + \varepsilon_{2t} \quad (6.4)$$

όταν $|p_1| + |p_2| = 0$

Το u_{t-1} αναπαριστά το λάθος υστέρησης μιας περιόδου από τη παλινδρόμηση συνολοκλήρωσης και ε_{it} , $i=1,2$ αναπαριστούν τα κατάλοιπα των εξισώσεων διόρθωσης σφαλμάτων. Αξίζει να σημειωθεί πως ο αριθμός υστερήσεων των ανωτέρω εξισώσεων για τις μεταβλητές $\Delta Y, \Delta X$ δεν είναι καθορισμένος διότι αν για παράδειγμα το ΔY_t είναι $I(0)$ τότε και τα ΔY_{t-i} και ΔY_{t-j} είναι $I(0)$.

Τέλος το γεγονός ότι η συνολοκλήρωση συνεπάγεται την ύπαρξη ενός υποδείγματος διόρθωσης σφαλμάτων και το αντίστροφο αποτελεί το Αντιπροσωπευτικό Θεώρημα του Granger (Granger Representation Theorem).

6.2 Έλεγχος Ύπαρξης Συνολοκλήρωσης

Έχοντας ως οδηγό την προηγούμενη ενότητα περί έννοιας συνολοκλήρωσης θα γνωρίσουμε τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουμε για τον έλεγχο ύπαρξης συνολοκλήρωσης ανάμεσα σε δυο μεταβλητές.

Οπότε πρώτο βήμα είναι να ελέγξουμε το βαθμό ολοκληρωσιμότητας των υπό εξέταση χρονολογικών σειρών. Υπάρχουν όμως και δυο βασικές κατηγορίες μεθόδων που μπορούν να ακολουθηθούν προκειμένου να πραγματοποιήσουμε έλεγχο για το αν δυο ή περισσότερες χρονολογικές σειρές συνολοκληρώνονται.

- Μέθοδος της μιας εξίσωσης ή αλλιώς μέθοδος ελέγχου συνολοκλήρωσης βάσει καταλοίπων. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει τους ελέγχους που πρότειναν οι Engle και Granger ως εφαρμογή του αντιπροσωπευτικού θεωρήματος, που βασίζεται στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, και μέσω αυτής ελέγχουμε μια εξίσωση κάθε φορά για το αν υπάρχει έστω ένα διάλυμα συνολοκλήρωσης ανάμεσα σε δυο ή περισσότερες μεταβλητές.
- Η μέθοδος συστήματος εξισώσεων η οποία περιλαμβάνει τους ελέγχους που στηρίζονται στη μέθοδο των VAR υποδειγμάτων. Αξίζει να σημειώσουμε πως μέσω αυτής προσδιορίζουμε το μέγιστο αριθμό των σχέσεων συνολοκλήρωσης των μεταβλητών.

Η πιο διαδεδομένη μέθοδος από την δεύτερη κατηγορία είναι αυτή του Johansen(1988)η οποία βελτιώθηκε κατά πολύ και επεκτάθηκε το 1991 από τον ίδιο και ύστερα σε συνεργασία με τον Juselius.Στις επόμενες ενότητες γίνεται περιληπτική περιγραφή καθεμιάς από τις προαναφερόμενες μεθοδολογίες ελέγχου της συνολοκλήρωσης .

6.3 Μεθοδολογία των Engle-Granger

Η μέθοδος των Engle-Granger(1987)είναι ουσιαστικά μια μέθοδος συνολοκλήρωσης βάσει των καταλοίπων. Ο έλεγχος Engle-Granger αποτελείται από δυο βασικά βήματα:

ΒΗΜΑ1

Πρέπει για αρχή να βρούμε τη τάξη ολοκλήρωσης των δυο υπό εξέταση μεταβλητών. Σε περίπτωση που και οι δυο μεταβλητές έχουν την ίδια τάξη συνεχίζουμε τη διαδικασία της συνολοκλήρωσης, που σημαίνει μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων εκτιμούμε την εξίσωση συνολοκλήρωσης για τη μακροχρόνια σχέση ισορροπίας με u_t κατάλοιπα

$$Y_t = \lambda_0 + \lambda X_t + u_t \quad (6.5)$$

Σε περίπτωση που οι δυο μεταβλητές έχουν διαφορετική τάξη συνεπάγεται πως δεν υπάρχει συνολοκλήρωση μεταξύ τους.

Μια τροποποίηση της εξίσωσης αυτής μας οδηγεί στην εξίσωση παλινδρόμησης της συνολοκλήρωσης και γενικεύεται ως:

$$Y_t = \lambda_0 + \lambda X_t + \gamma T + u_t \quad (6.6)$$

Με τα εκτιμώμενα σφάλματα

$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}X_t - \hat{\gamma}T \quad (6.7)$$

ΒΗΜΑ 2

Ως επόμενο και τελευταίο βήμα εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία των μοναδιαίων ριζών περί στασιμότητας των καταλοίπων εφαρμόζοντας των έλεγχο Dickey-Fuller για παράδειγμα ως:

$$\Delta \hat{u}_t = \beta \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.8)$$

Όπου \hat{u}_t είναι η εκτίμηση των καταλοίπων της αντίστοιχης εξίσωσης συνολοκλήρωσης και έχουμε τις εξής υποθέσεις:

$H_0: \beta=0$ όταν δεν υπάρχει στασιμότητα στα κατάλοιπα \hat{u}_t , δηλαδή δεν υπάρχει συνολοκλήρωση μεταξύ των μεταβλητών και

$H_\alpha: \beta < 0$ όταν υπάρχει στασιμότητα στα κατάλοιπα \hat{u}_t , δηλαδή υπάρχει συνολοκλήρωση μεταξύ των μεταβλητών.

6.4 Η Μεθοδολογία του Johansen

Έστω ότι έχουμε ένα διάνυσμα Y_t $n \times 1$ μη στάσιμων μεταβλητών πρώτης τάξης ολοκληρωμένων μεταβλητών, το οποίο εκφράζεται ως ένα αυτοπαλίνδρομο διανυσματικό υπόδειγμα VAR p τάξης

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + \dots + A_n Y_{t-n} + B X_t + u_t \quad (6.9)$$

όπου $A_1 \dots A_n$ είναι οι μήτρες των παραμέτρων τάξη $n \times n$ η καθεμία και όπου u_t το διάνυσμα των καταλοίπων που πληροί τις υποθέσεις ενός VAR υποδείματος⁵.

Ένα VAR υπόδειγμα μπορεί να γραφεί και σε μορφή διόρθωσης σφαλμάτων ως εξής:

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + B X_t + u_t \quad (6.10)$$

Όπου

$$\Pi = \sum_{i=1}^p A_i - 1 \quad \text{και} \quad \Gamma_i = - \sum_{j=i+1}^p A_j \quad (6.11)$$

Η μήτρα $\Pi_{p \times p}$ των παραμέτρων που πολλαπλασιάζει το διάνυσμα της υστέρησης Y_{t-1} των ενδογενών μεταβλητών, λέγεται αλλιώς μήτρα ισορροπίας και ο βαθμός της μήτρας αυτής προσδιορίζει και την ύπαρξη συνολοκλήρωσης μεταξύ μεταβλητών του διανύσματος Y_t . Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις που μπορούμε να διακρίνουμε σε σχέση με το βαθμό της μήτρας Π .

- $r(\Pi) = 0$ (μηδενικός βαθμός)

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει κάθε στοιχείο της Π να είναι μηδέν, άρα το διανυσματικό υπόδειγμα διόρθωσης σφαλμάτων (VEC) γίνεται ένα υπόδειγμα διανυσματικών αυτοπαλινδρομήσεων (υπόδειγμα VAR) στις πρώτες διαφορές ΔY_t , όπου οι μεταβλητές του είναι στάσιμες ολοκληρωμένης μηδενικής τάξης αφού οι

⁵ Σοφία Δημέλη «Σύγχρονες Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονολογικών Σειρών» κεφάλαιο 6.7

μεταβλητές του Y_t είναι ολοκληρωμένες πρώτης τάξης. Στην περίπτωση αυτή οι μεταβλητές δεν συνολοκληρώνονται.

- $r(\Pi)=p$ (πλήρης βαθμός)

Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν το διάνυσμα των μεταβλητών Y_t είναι στάσιμο, άρα το διανυσματικό υπόδειγμα διόρθωσης λαθών (VEC) δεν έχει νόημα.

- $r(\Pi)<p$ (μειωμένος βαθμός)

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες της Π δεν είναι όλες γραμμικά ανεξάρτητες, αυτό σημαίνει ότι πως επιτρέπεται η δυνατότητα σχέσεων συνολοκλήρωσης μεταξύ των μεταβλητών του διανύσματος Y_t . Επομένως στην περίπτωση που η μήτρα Π έχει βαθμό μικρότερο από τη τάξη p που ταυτίζεται με τον αριθμό των ενδογενών μεταβλητών τότε συνολοκληρώνονται. Στην περίπτωση αυτή το ορθό προς εκτίμηση υπόδειγμα είναι το υπόδειγμα διόρθωσης σφαλμάτων και όχι το υπόδειγμα διανυσματικών αυτοπαλινδρομήσεων, διότι η παράλειψη του όρου (Πy_{t-1}) θα οδηγούσε σε σοβαρά σφάλματα εξειδίκευσης από της στιγμή που οι μεταβλητές συνολοκληρώνονται.

Ο αριθμός σχέσεων συνολοκλήρωσης προσδιορίζεται από τον ίδιο το βαθμό της μήτρας Π . Κατά αυτό τον τρόπο αν έχουμε p μεταβλητές και κάθε μια είναι ολοκληρωμένη πρώτης τάξεως $I(1)$ τότε μπορούμε να έχουμε το πολύ $p-1$ γραμμικά ανεξάρτητες σχέσεις συνολοκλήρωσης.

6.5 Έλεγχος Βαθμού Συνολοκλήρωσης

Πολλές είναι οι φορές που υπάρχει πληθώρα σχέσεων συνολοκλήρωσης και όχι μόνο μια των οποίων ο αριθμός ονομάζεται βαθμός συνολοκλήρωσης. Η μεθοδολογία Johansen, που ήδη περιγράψαμε προηγουμένως, βασίζεται στη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας και οδηγεί σε δυο τύπους ελέγχου του αριθμού των διανυσμάτων συνολοκλήρωσης μεταξύ των p μεταβλητών του διανύσματος Y_t ή του βαθμού συνολοκλήρωσης έστω h . Ήδη είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, πως ο βαθμός της μήτρας Π είναι μικρότερος από τον αριθμό των μεταβλητών $h < p$ τότε οι μεταβλητές συνολοκληρώνονται και ο h αριθμός αντιπροσωπεύει τον αριθμό των διανυσμάτων συνολοκλήρωσης. Σε αυτό το σημείο σημειώνεται πως ο βαθμός μιας μήτρας που ορίζεται ως ο βαθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών της μήτρας Π ισούται με τον αριθμό των μηδενικών ριζών της μήτρας Π .

Για τον έλεγχο της συνολοκλήρωσης υπάρχουν h διανύσματα συνολοκλήρωσης, τότε μόνο h γραμμικοί συνδιασμοί των μεταβλητών είναι στάσιμοι ολοκληρωμένοι μηδενικής τάξης $I(0)$, ενώ οι υπόλοιποι είναι μη στάσιμοι.

Η μηδενική υπόθεση ότι έχουμε h το πολύ διανύσματα συνολοκλήρωσης μπορεί να διατυπωθεί με την υπόθεση:

$$H_0: \lambda_i = 0, i=h+1, \dots, p$$

Όπου το h δηλώνει ότι οι πρώτες $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ ιδιοτιμές είναι μηδενικές (βαθμός συνολοκλήρωσης). Ο έλεγχος αυτός γίνεται συγκρίνοντας τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφαιών τη στιγμή που επιβάλλουμε τον προαναφερθέντα περιορισμό για τις τιμές του h με την αντίστοιχη άνευ περιορισμού. Αυτό είναι γνωστό ως κριτήριο του λόγου των πιθανοφαιών και ακολουθεί τη X^2 κατανομή.

Για την υπόθεση H_a διακρίνουμε δυο τύπους ελέγχου:

- Έλεγχος Ίχνους ή αλλιώς trace test
- Έλεγχος μέγιστης ιδιοτιμής ή αλλιώς λ -max test

Έλεγχος Ίχνους

Ο έλεγχος ίχνους ελέγχει την μηδενική υπόθεση ότι υπάρχουν το πολύ h διανύσματα, διατυπώνοντας τις εξής υποθέσεις :

H_0 : Υπάρχουν h διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h=0$)

Έναντι της εναλλακτικής

H_a : Υπάρχουν $h+1$ διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h \geq 1$)

ή

H_0 : Υπάρχουν το πολύ h διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h \leq 1$)

Έναντι της εναλλακτικής

H_a : Υπάρχουν $h+1$ διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h \geq 2$)

ή

H_0 : Υπάρχουν το πολύ h διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h \leq p-1$)

Έναντι της εναλλακτικής

H_a : Υπάρχουν $h+1$ διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h= p$)

Ο έλεγχος του ίχνους γίνεται χρησιμοποιώντας το στατιστικό:

$$\lambda_{\text{trace}} = -T \sum_{i=n+1}^p \log(1 - \hat{\lambda}_i)$$

για $h=0,1,2,\dots,p-1$. Η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι το $h=p$, συνεπώς οι σειρές είναι στάσιμες. Η αποδοχή της H_0 για $h=0$ υποδηλώνει τη διακοπή της διαδικασίας.

Έλεγχος Μέγιστης Ιδιοτιμής

Όσον αφορά τον δεύτερο έλεγχο της μέγιστης ιδιοτιμής, ελέγχει την υπόθεση H_0 ότι υπάρχουν h διανύσματα συνολοκλήρωσης ως προς την εναλλακτική υπόθεση H_a ότι υπάρχουν $h+1$ διανύσματα χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις:

H_0 : Υπάρχουν h διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h=0$)

Έναντι της εναλλακτικής

H_a : Υπάρχουν το πολύ $h+1$ διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h=1$)

ή

H_0 : Υπάρχουν το πολύ h διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h \leq 1$)

Έναντι της εναλλακτικής

H_a : Υπάρχουν $h+1$ διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h= p$)

ή

H_0 : Υπάρχουν το πολύ h διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h \leq p-1$)

Έναντι της εναλλακτικής

H_a : Υπάρχουν $h+1$ διανύσματα συνολοκλήρωσης ($h= p$)

Για τον έλεγχο μέγιστης ιδιοτιμής χρησιμοποιούμε το στατιστικό:

$$\lambda_{\text{max}} = -T \log(1 - \hat{\lambda}_{h+1})$$

με $h=0,1,\dots,p-1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μελέτη Περίπτωσης

7.1 Εισαγωγή

Το κεντρικό θέμα στην ανάλυση που ακολουθεί είναι κατά πόσο η κατανάλωση ενέργειας και οι εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα συμβάλουν ή όχι στην οικονομική ανάπτυξη και συγκεκριμένα όσον αφορά την Ελλάδα τα τελευταία 40 έτη.

Σε ότι αφορά τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για να ανακαλύψουμε την αιτιώδη σχέση, μεταξύ της ενεργειακής κατανάλωσης, του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος και του διοξειδίου του άνθρακα, επικαλούμαστε την αιτιότητα κατά Granger, για την οποία έχει γίνει εκτενέστερη ανάλυση στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας. Προκειμένου, λοιπόν να εφαρμόσουμε την αιτιότητα κατά Granger θα πρέπει η υπό εξέταση χρονολογική σειρά να αποτελεί στάσιμη δοκιμασία. Για το λόγο αυτό στο κεφάλαιο αυτό διεξάγονται δοκιμές μοναδιαίων ριζών. Αξίζει να σημειωθεί πως συνήθως οι χρονολογικές σειρές για τις οποίες πραγματοποιούμε το τεστ αιτιότητας προτύπου Granger, είναι στάσιμες συνήθως έπειτα από λήψη των πρώτων διαφορών.

Με τη πρόοδο των χρονολογικών σειρών της οικονομετρίας η έννοια της αιτιότητας κατά Granger έχει επεκταθεί και έχει συμπεριλάβει το ενδεχόμενο δυο χρονολογικές σειρές ότι μπορούν να μοιράζονται μια μακροπρόθεσμη στοχαστική τάση. Συγκεκριμένα αν οι χρονολογικές σειρές X και Y είναι μη στάσιμες σε επίπεδο που απαιτούνται πρώτες διαφορές για να γίνουν στάσιμες και λέμε πως το X αιτιάζει το Y εάν οι εκτιμώμενοι συντελεστές για τη χρονική υστέρηση της τιμής του σφάλματος από την εκάστοτε συνολοκληρωμένη εξίσωση παλινδρόμησης είναι στατιστικά σημαντικοί. Κατά τα τελευταία χρόνια υπάρχουν πολλές μελέτες που συμβάλουν στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ κατανάλωσης ενέργειας και οικονομικής ανάπτυξης κατά την διάρκεια των ερευνών αυτών υιοθετήθηκε ένα μεθοδολογικό πλαίσιο πάνω στο οποίο βασιστήκαμε για το ακόλουθο μεθοδολογικό πλαίσιο.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε κατά πόσο αιτιάζει:

- οι εκπομπές ρύπων την ενεργειακή κατανάλωση ή η ενεργειακή κατανάλωση τις εκπομπές ρύπων.

- το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν τις εκπομπές ρύπων ή οι ρύποι τις τιμές του Ακαθάριστου Εγχώριου προϊόντος

7.2 Εφαρμογή

Χρησιμοποιώντας στοιχεία για την Ελλάδα από το 1970 έως το 2010 προκύπτουν τα ακόλουθα:

- **Τεστ μοναδιαίας ρίζας:** Στην συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης *adf-test* (Augmented Dickey-Fuller test) για την εξέταση συνέχειας της κάθε μίας χρονολογικής σειράς και αν είναι συνεχής στις ίδιες διαφορές, αν όχι προχωράμε στο τεστ αιτιότητας κατά Granger αν ναι εξετάζουμε την ύπαρξη συνολοκλήρωσης.
- **Τεστ αιτιότητας Granger:** Για να εξετάσουμε την σχέση αιτιότητας που έχουν μεταξύ τους ενεργειακή κτανάλωση, εκπομπές άνθρακα και Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν.
- **Συνολοκλήρωση Johansen:** Για να εξετάσουμε την ύπαρξη συνολοκλήρωσης ,αν υπάρχει τότε κάνουμε τεστ αιτιότητας Granger.

Όλα τα στοιχεία που καλύπτουν την περίοδο 1970-2010(ενεργειακή κατανάλωση, εκπομπές ρύπων και Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν)χρησιμοποιήθηκαν σε φυσικούς λογαρίθμους και βρίσκονται στο Παράρτημα στο τέλος εργασίας.

Το υπολογιστικό στατιστικό πρόγραμμα που θα μας βοηθήσει στην μελέτη μας είναι το STATA 12.0 .

Υπολογίζουμε από τα δεδομένα μας τον μέσο, την διακύμανση την μέγιστη αλλά και την ελάχιστη τιμή:

Variable	Obs	mean	Std. dev.	Min	max
Energy consumption	41	20904,1	6668,07	8690,11	30418,59
Gdp	41	190652,1	611481,57	16807,64	309745,9
Co2 emissions	41	63427,09	22174,61	21447,25	96447,74
Energy consumption-log	41	9,89	0,34	9,06	10,32
Gdp-log	41	12,08	0,46	9,72	12,64
Co2 emissions-log	41	10,98	0,402	9,97	11,47
Year	41	1990	11,97	1970	2010

Πίνακας 2:Μέτρα, Διακύμανση, Μέγιστη-Ελάχιστη Τιμή

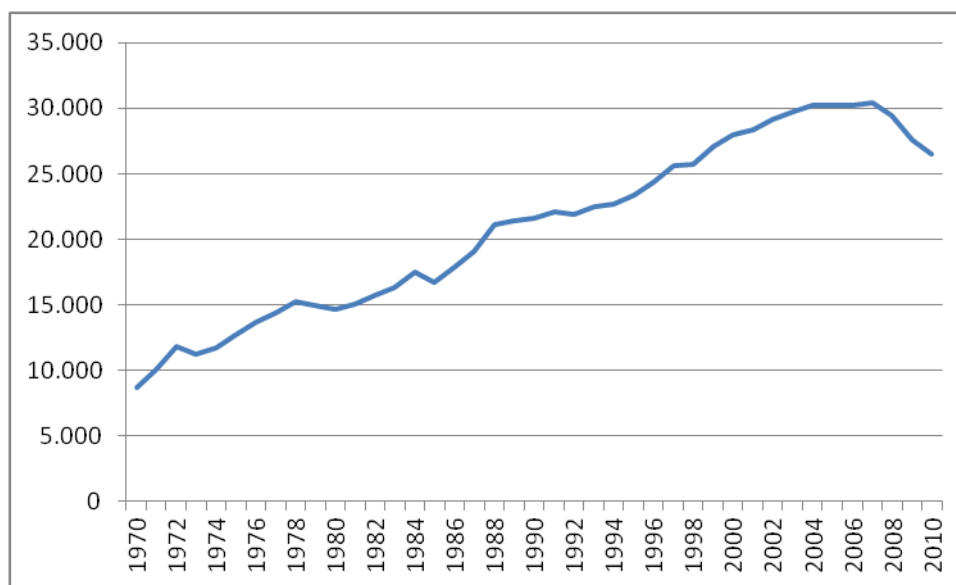
Από τις 41 σε αριθμό παρατηρήσεις μας για κάθε μια χρονολογικής σειρά προκύπτουν:

Η μέση τιμή της ενεργειακής κατανάλωσης(mean-energy cons) είναι 20904.1 του Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (mean-GDP) φτάνει 190652.1 και του διοξειδίου του άνθρακα (mean-CO2Emission) αγγίζει το 63427.09.Σε αυτές τις τιμές φαίνεται πως κυμαίνονταν κατά κύριο λόγο οι τιμές των προαναφερθέντων για την Ελλάδα από το 1970 έως το 2010.

Η διακύμανση των τιμών της ενεργειακής κατανάλωσης(St.Dev.-EnergyCons) ανέρχεται στο 6668.073 του Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (St.Dev.-CO2Emissions) στο 61481.57 και αυτή των εκπομπών ρύπων (St.Dev.-GDP) στο 22174.61.

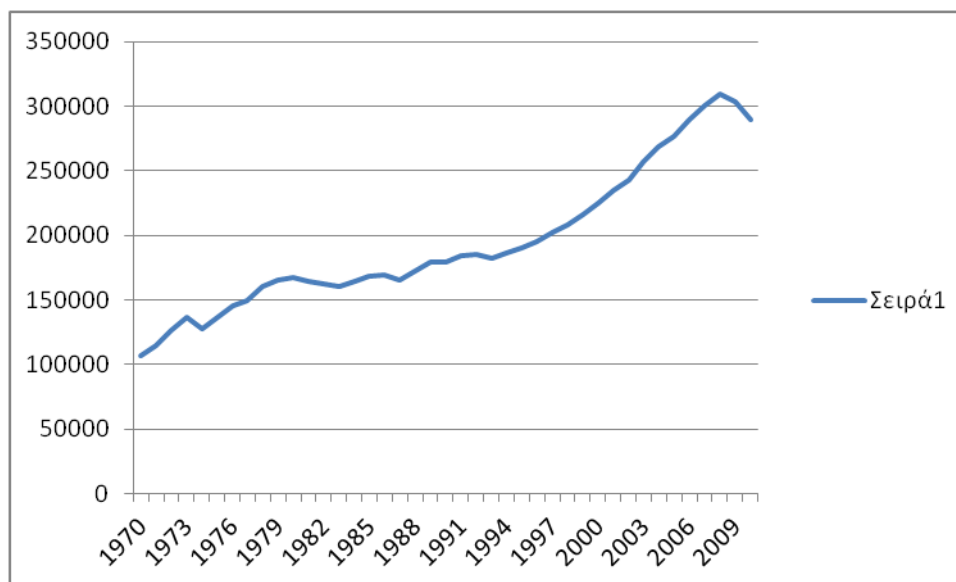
Επίσης στο πίνακα φαίνεται ως ελάχιστη τιμή ενεργειακής κατανάλωσης(min-EnergyCons) το 8690.111 και μέγιστη το 30418.59,του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (min- CO2Emissions) ως ελάχιστη τιμή το 16807.64 και μέγιστη το 309745.9 και τέλος των εκπομπών άνθρακα(min- GDP) η 21447.25 ως ελάχιστη τιμή και 96447.74 ως μέγιστη.

Ακολουθεί μια διαγραμματική απεικόνιση των τιμών για κάθε εξεταζόμενη χρονολογική σειρά ως προς τα έτη:



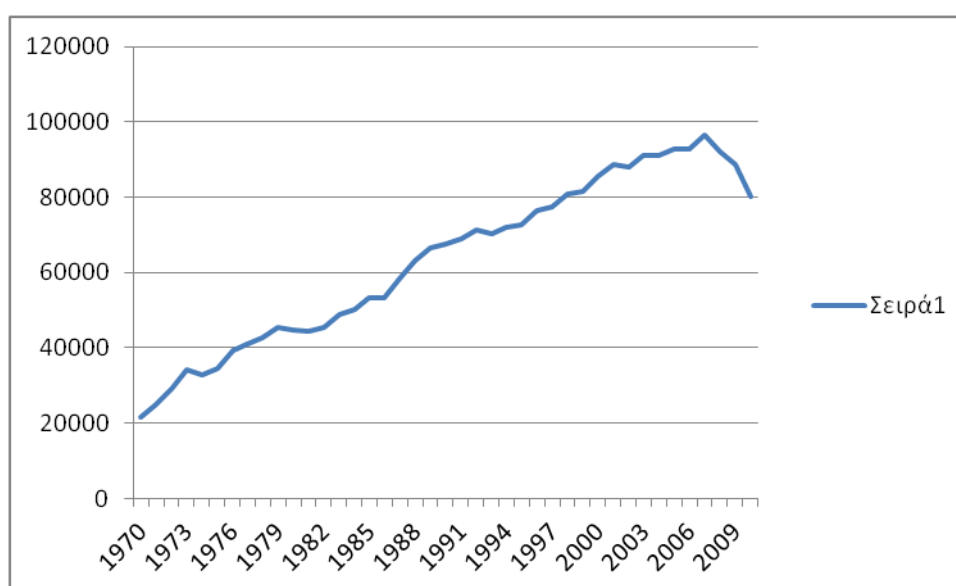
Γράφημα 17:Ενεργειακή Κατανάλωση

Στο διάγραμμα παρατηρούμε ότι από το 1970 η ενεργειακή κατανάλωση ξεκινά μια ανοδική πορεία λαμβάνοντας τιμή γύρω στις 10.000 και ως το 2004 παρατηρούνται αυξομειώσεις. Τα έτη 2004 έως 2008 παρατηρείται στασιμότητα στο 30.000, που τη διαδέχεται μία απότομη πτώση το 2010.



Γράφημα 18: Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν για την Ελλάδα

Το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (Α.Ε.Π) φαίνεται να κυμαίνεται σε ανοδικούς ρυθμούς ήδη για τουλάχιστον 38 χρόνια από το 1970. Τα δυο τελευταία έτη του 2010 παρουσιάζεται μια πτώση πρωτοφανή για τα δεδομένα των προηγούμενων ετών.



Γράφημα 19: Εκπομπές Άνθρακα

Το διοξείδιο του άνθρακα δε θα λέγαμε πως διαφέρει από την κατανάλωση ενέργειας ή το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν από τη στιγμή που σε αυτό το σημείο διακρίνεται μια συνεχόμενη αυξομείωση των τιμών του ανά έτη έως το τέλος του 2007 που συναντάται ξεκάθαρα πλέον η πτώση.

Αφού πήραμε μια ιδέα για το πώς κυμαίνονται οι τιμές των υπό εξέταση χρονολογικών σειρών ανά έτη, προχωράμε στο επόμενο βήμα που είναι ο έλεγχος του κατά πόσο οι υπό εξέταση χρονολογικές σειρές είναι στάσιμες.

7.2.1 Έλεγχος Μοναδιαίας Ρίζας ,ADF

Το πρώτο στάδιο που περνάμε για την ανάλυση των χρονολογικών μας σειρών όπως αναφέραμε και πιο πάνω είναι ένας έλεγχος μοναδιαίας ρίζας για να εξετάσουμε αν υπάρχει στασιμότητα στις χρονολογικές μας σειρές.

Ξεκινάμε λοιπόν με τον έλεγχο Dickey Fuller και τον έλεγχο στασιμότητας της Ενεργειακής Κατανάλωσης:

	Test statistic	1% critical value	5% critical value	10% critical value
Z(t)	-3,84	-3.64	-2,958	-2,612
p-value=0,0024				

Πίνακας 3:Ενεργειακή Κατανάλωση

Για να ελέγξουμε την στασιμότητα της ενεργειακής κατανάλωσης θα πρέπει να κάνουμε έναν έλεγχο όπου H_0 : ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας ,άρα η χρονολογική σειρά είναι στάσιμη έναντι της H_1 :μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας άρα δεν παρουσιάζεται στασιμότητα.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

H_0 : p value $> \alpha = 0.05$ (ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας ,άρα στάσιμη χρονολογική σειρά)

Vs

H_1 : p value $< \alpha = 0.05$ (μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, μη στάσιμη)

Η τιμή που λαμβάνουμε για την ενεργειακή κατανάλωση αγγίζει το $0.0024 < 0,05$ άρα απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση περί ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05. Συνεπώς πρόκειται για μια χρονολογική σειρά μη στάσιμη.

Άρα θα συνεχίσουμε κάνοντας πάλι τον ίδιο έλεγχο προκειμένου να κάνουμε τη χρονολογική σειρά στάσιμη. Άρα αυτή τη φορά θα λάβουμε διαφορές πρώτης τάξης και θα κάνουμε τον εξής έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

	Test statistic	1% critical value	5% critical value	10% critical value	
Z(t)	-2.434	-3,655	-2,961	2,613	
p-value=0,1324					
Energy Consumption-log	Coef.	Std.Err.	T	P>t	[95% Conf.Intervall]
Energy Consumption-log					
L1	-0,052	0,021	-2,43	0,02	-0,96 -0,008
LD	0,114	0,151	0,75	0,455	-0,19 0,422
Cons	0,543	0,216	2,51	0,017	0,104 0,98

Πίνακας 4:Λήψη Διαφορών Πρώτης Τάξης για Ενεργειακή Κατανάλωση

$H_0: p \text{ value} > \alpha = 0.05$ (ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας ,άρα στάσιμη χρονολογική σειρά)

V_s

$H_1: p \text{ value} < \alpha = 0.05$ (μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, μη στάσιμη χρονολογική σειρά)

Η νέα τιμή που λαμβάνουμε για την κατανάλωση ενέργειας έπειτα από τη λήψη διαφορών πρώτης τάξης είναι $0,1324 > 0.05$ σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 καταλήγουμε σε αποδοχή της H_0 περί ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας και συνεπώς πλέον κάνουμε λόγο για μια στάσιμη χρονολογική σειρά.

Κατά αυτό τον τρόπο συνεχίζουμε με τον έλεγχο Dickey Fuller για τον έλεγχο στασιμότητας των Εκπομπών Άνθρακα:

	Test statistic	1% critical value	5% critical value	10% critical value
Z(t)	-5,08	-3,64	-2,95	-2,61
p-value=0,00				

Πίνακας 5:Εκπομπές Άνθρακα

Εξετάζουμε τον έλεγχο που εξετάσαμε και πιο πάνω για την Ενεργειακή Κατανάλωση, δηλαδή:

$H_0: p \text{ value} > \alpha = 0.05$ (ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, άρα στάσιμη)

V_s

$H_1: p \text{ value} < \alpha = 0.05$ (μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, μη στάσιμη)

Η τιμή 0.0000 που λαμβάνουμε είναι μικρότερη από το 0.05 επίπεδο σημαντικότητας, $0.0000 < 0.005$, άρα απορρίπτουμε την H_0 και κάνουμε τον ίδιο έλεγχο αφού λάβουμε διαφορές πρώτης τάξης:

	Test statistic	1% critical value	5% critical value	10% critical value	
Z(t)	-3,07	-3,65	-2,96	-2,61	
p-value=0,02					
CO2 Emissions-log	Coef.	Std.Err.	T	P>t	[95% Conf.Intervall]
CO2 Emissions-log					
L1	-0,06	0,02	-3,07	0,004	-0,10 -0,02
LD	0,12	0,16	0,78	0,43	-0,20 0,46
Cons	0,75	0,24	3,13	0,003	-0,26 1,24

Πίνακας 6: Λήψη Διαφορών Πρώτης Τάξης για Εκπομπές Ρύπων

$H_0: p \text{ value} > \alpha = 0.05$ (ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, άρα στάσιμη)

V_s

$H_1: p \text{ value} < \alpha = 0.05$ (μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, μη στάσιμη)

Εξακολουθεί η τιμή που προκύπτει να μην ικανοποιεί τη μηδενική υπόθεση αφού και πάλι $0,02 < 0.05$ άρα πάμε σε διαφορές δεύτερης τάξης:

	Test statistic	1% critical value	5% critical value	10% critical value	
Z(t)	-2,45	-3,66	-2,96	-2,61	
p-value=0,12					
CO2 Emissions-log	Coef.	Std.Err.	t	P>t	[95% Conf.Intervall]
CO2 Emissions-log					
L1	-0,06	0,02	-2,46	0,019	-0,11 -0,01
LD	0,76	0,17	0,44	0,661	-0,27 0,42
L2D	0,02	0,16	0,02	0,98	-0,34 0,34
_cons	0,69	0,27	2,50	0,017	0,12 1,25

Πίνακας 7:Λήψη Διαφορών Δεύτερης Τάξης για Εκπομπές Ρύπων

$H_0: p \text{ value} > \alpha = 0.05$ (ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, άρα στάσιμη χρονολογική σειρά)

Vs

$H_1: p \text{ value} < \alpha = 0.05$ (μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, μη στάσιμη)

Το $0.12 > 0.05$ είναι η τιμή στην οποία καταλήγουμε και έχουμε αποδοχή της H_0 άρα έχουμε στασιμότητα της χρονολογικής σειράς των εκπομπών ρύπων έπειτα από τη λήψη διαφορών δεύτερης τάξης σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05

Ο τελευταίος Dickey-Fuller έλεγχος που θα κάνουμε είναι αυτός που αφορά τη τελευταία μας χρονολογική σειρά, το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν:

	Test statistic	1% critical value	5% critical value	10% critical value
Z(t)	-4,168	-3,648	-2,958	-2,612
p-value=0,0007				

Πίνακας 8:Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν(Α.Ε.Π)

$H_0: p \text{ value} > \alpha = 0.05$ (ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, άρα στάσιμη)

Vs

$H_1: p \text{ value} < \alpha = 0.05$ (μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, μη στάσιμη)

Στα αποτελέσματα μας φαίνεται πως λαμβάνουμε για ακόμη μια φορά μη ικανοποιητική τιμή, το $0.0007 < 0.05$ άρα αποδοχή της H_1 και απόρριψη της H_0 για

ακόμη μια φορά. Άρα κάνοντας λόγο για μια μη στάσιμη χρονολογική σειρά, οδηγούμαστε σε διαφορές πρώτης τάξης:

	Test statistic	1% critical value	5% critical value	10% critical value	
Z(t)	-2,55	-3,65	-2,96	-2,61	
p-value=0,10					
GDP-log	Coef.	Std.Err.	t	P>t	[95% Conf.Intervall]
GDP-log					
L1	-0,46	0,18	-2,55	0,01	-0,83 -0,095
LD	-0,27	0,16	-1,67	0,10	-0,59 0,05
Cons	5,66	2,20	2,57	0,01	1,18 10,15

Πίνακας 9:Λήψη Διαφορών Πρώτης Τάξης για ΑΕΠ

$H_0: p \text{ value} > \alpha = 0.05$ (ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, άρα στάσιμη)

V_s

$H_1: p \text{ value} < \alpha = 0.05$ (μη ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, μη στάσιμη)

Η τιμή που λαμβάνουμε για το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν $0,10 > 0.05$ μας οδηγεί σε αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης περί στάσιμης χρονολογικής σειράς και ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας.

Συνοψίζοντας η Ενεργειακή Κατανάλωση έγινε στάσιμη με διαφορές πρώτης τάξης, οι Εκπομπές Άνθρακα με διαφορές δεύτερης τάξης και το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν με διαφορές πρώτης τάξης. Αυτή η στασιμότητα με διαφορετικές διαφορές μεταξύ των υπό εξέταση χρονολογικών σειρών μας επιτρέπει να εξετάσουμε την σχέση αιτιότητας που έχουν:

- Ενεργειακή κατανάλωση-εκπομπές άνθρακα.
- Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν-εκπομπές άνθρακα.

Για να εξετάσουμε τη σχέση αιτιότητας μεταξύ εξετάσουμε την αιτιότητα κατά Granger.

	Coef.	Std.Err.	t	P>t	[95% Conf.Interval]	
Energy Consumption						
Energy Consumption						
L1	0,90	0,17	5,22	0,000	0,55	1,25
L2	-0,49	0,24	-1,99	0,05	-0,99	0,01
CO2Emissions-log						
L1	0,57	0,27	2,10	0,043	0,01	1,12
L2	-0,07	0,16	-0,44	0,66	-0,39	0,25
Cons	0,34	0,24	1,45	0,156	-1,39	0,83
CO2Emissions-log						
Energy Consumption						
L1	0,89	0,09	9,26	0,000	0,69	1,09
L2	-0,83	0,13	-5,99	0,000	-1,11	-0,54
CO2Emissions						
L1	0,81	0,15	5,35	0,000	0,50	1,12
L2	0,09	0,08	1,08	0,287	-0,08	0,28
Cons	0,34	0,13	2,54	0,01	0,06	0,61

Πίνακας 10: Δεδομένα για Ενεργειακή Κατανάλωση-Εκπομπέ Ρύπων

Equation	Exclude d	F	Df	df_r	Prob> F
Energy Consumption-log	CO2 Emissions-log	2,44	2	34	0,10
Energy Consumption-log	ALL	2,44	2	34	0,10
CO2Emissions-log	Energy Consumption	49,20	2	34	0,00
CO2Emissions-log	ALL	49,20	2	34	0,00

Πίνακας 11: Granger Αιτιότητα Ενεργειακής Κατανάλωσης-Εκπομπές Ρύπων

1^ο ερώτημα: Μπορούν οι εκπομπές ρύπων να είναι η αιτία αύξησης ή μείωσης των τιμών της ενεργειακή κατανάλωσης;

Για την απάντηση αυτού του ερωτήματος θα κάνουμε τον εξής έλεγχο:

H_0 : prob.> $\alpha=0,05$ (οι εκπομπές άνθρακα δεν αιτιάζουν την ενεργειακή κατανάλωση)

V_s

H_1 : prob.< $\alpha=0,05$ (οι εκπομπές άνθρακα αιτιάζουν την ενεργειακή κατανάλωση)

Prob=0.10> $\alpha=0,05$

Άρα έχουμε αποδοχή της H_0 , δηλαδή οι εκπομπές άνθρακα στην Ελλάδα αιτιάζει την ενεργειακή κατανάλωση.

2^ο ερώτημα: Μπορεί η ενεργειακή κατανάλωση να είναι αιτία για το πώς κυμαίνονται οι τιμές των εκπομπών ρύπων;

Ελέγχουμε:

H_0 : $\text{prob.} > \alpha = 0,05$ (η ενεργειακή κατανάλωση δεν αιτιάζει τις εκπομπές άνθρακα)

V_s

H_1 : $\text{prob.} < \alpha = 0,05$ (η ενεργειακή κατανάλωση αιτιάζει τις εκπομπές άνθρακα)

$\text{Prob} = 0,000 < \alpha = 0.05$

Άρα έχουμε αποδοχή της H_1 δηλαδή οι τιμές της ενεργειακής κατανάλωσης επηρεάζουν τις τιμές των εκπομπών ρύπων, εν ολίγοις η ενεργειακή κατανάλωση αιτιάζει τις τιμές των εκπομπών άνθρακα.

	Coef.	Std.Err.	t	P>t	[95% Conf.Interval]	
CO2Emissions-log						
CO2Emissions-log						
L1	1,11	0,17	6,39	0,000	0,75	1,46
L2	-0,15	0,16	-1,98	0,33	-0,48	0,16
GDP-log						
L1	0,009	0,01	0,58	0,56	-0,02	0,04
L2	-0,03	0,17	-2,00	0,05	-0,06	0,0006
cons	0,83	0,25	3,25	0,003	0,,31	1,35
GDP-log						
CO2Emissions-log						
L1	1,12	1,74	0,65	0,52	-2,41	4,66
L2	-0,48	1,61	-0,30	0,767	-3,75	2,79
GDP-log						
L1	0,066	0,170	0,39	0,69	-0,28	0,413
L2	0,06	0,172	0,35	0,72	-0,29	0,410
cons	3,46	2,57	1,34	0,18	-1,77	8,70

Πίνακας 12: Δεδομένα για Α.Ε.Π-Εκπομπές Ρύπων

Equation	Excluded	F	df	Df_r	Prob>F
CO2Emis sions-log	GDP-log	2,09	2	34	0,13
CO2Emis sion-log	ALL	2,44	2	34	0,13
GDP-log	CO2Emissions- log	49,20	2	34	0,04
GDP-log	ALL	49,20	2	34	0,04

Πίνακας 13: Granger Αιτιότητα Α.Ε.Π-Εκπομπές Ρύπων

3^ο ερώτημα: Μπορεί μια αύξηση των τιμών του Α.Ε.Π. να προκαλέσει μια αύξηση στις τιμές των εκπομπών άνθρακα ή αντίστοιχα μια μείωση του πρώτου να επιφέρει μείωση και στις τιμές του δεύτερου; Υπάρχει δηλαδή σχέση αιτιότητας;

Ελέγχουμε:

$H_0: \text{prob.} > \alpha = 0,05$ (το Α.Ε.Π. δεν αιτιάζει τις εκπομπές άνθρακα)

Vs

$H_1: \text{prob.} < \alpha = 0,05$ (το Α.Ε.Π. αιτιάζει τις εκπομπές άνθρακα)

$\text{Prob} = 0,13 > \alpha = 0,05$

Άρα έχουμε αποδοχή της H_0 δηλαδή σε επίπεδο σημαντικότητα 5% το Α.Ε.Π. δεν αιτιάζει τις εκπομπές άνθρακα.

4^ο ερώτημα: Μπορούν οι εκπομπές άνθρακα να έχουν σχέση αιτιότητας με το Α.Ε.Π.;

Ελέγχουμε:

$H_0: \text{prob.} > \alpha = 0,05$ (οι εκπομπές άνθρακα δεν αιτιάζουν το Α.Ε.Π.)

Vs

$H_1: \text{prob.} < \alpha = 0,05$ (οι εκπομπές άνθρακα αιτιάζουν το Α.Ε.Π.)

$\text{Prob} = 0,04 < \alpha = 0,05$

Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% έχουμε αποδοχή της H_1 δηλαδή οι εκπομπές άνθρακα αιτιάζουν το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν.

7.3 Συμπέρασμα-Τελικές Παρατηρήσεις

Η κατανόηση των επιπτώσεων της κατανάλωσης ενέργειας και των εκπομπών ρύπων στην οικονομική ανάπτυξη της Ελλάδας στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί σημαντικό παράγοντα στη διαμόρφωση των πολιτικών ενέργειας και του περιβάλλοντος.

Από τα δεδομένα μας προέκυψε πως η μια αύξηση ή μείωση των τιμών της ενεργειακής κατανάλωσης μπορεί να προκαλέσει μια αντίστοιχη αύξηση ή μείωση στις τιμές του διοξειδίου του άνθρακα ο οποίος με τη σειρά του είναι η αιτία αυξομειώσεων της οικονομικής ανάπτυξης, του Α.Ε.Π της Ελλάδας. Άρα εν κατακλείδι η κατανάλωση ενέργειας έμμεσα αιτιάζει τη διαβάθμιση των τιμών του Α.Ε.Π. Μια ανεξέλεκτη κατανάλωση ενέργειας για παράδειγμα θα έχει ως αποτέλεσμα την οικονομική συρρίκνωση της χώρας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 1

Στοιχεία Ενεργειακής Κατανάλωσης-Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος-Εκπομπών
Ανθρακα για την Ελλάδα (τα έτη 1970 έως 2010)

Έτος	Ενεργειακή Κατανάλωση	Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν	Εκπομπές Ανθρακα
1970	8690,111	106492,76	21447,246
1971	10086,695	114843,023	25153,879
1972	11811,073	126511,27	29110,304
1973	11259,425	136749,092	34043,41
1974	11744,259	127944,836	32922,114
1975	12735,699	136090,753	34574,366
1976	13679,27	145415,629	39392,595
1977	14384,87	149692,355	40844,513
1978	15257,409	160540,241	42821,481
1979	14982,347	165809,436	45288,682
1980	14645,39	166932,184	44800,583
1981	15049,2	164338,505	44525,167
1982	15745,584	162477,068	45286,668
1983	16355,995	160724,582	48855,83
1984	17551,457	163956,099	50267,856
1985	16683,313	168070,638	53168,591
1986	17919,118	168940,598	53264,83
1987	19099,406	165124,478	58346,514
1988	21118,472	172204,851	63169,269
1989	21440,556	178748,565	66551,861
1990	21616,504	178748,565	67690,857
1991	22149,332	184289,892	68798,429
1992	21869,979	185579,787	71187,578
1993	22479,276	182610,647	70472,885
1994	22678,384	186262,76	71890,463
1995	23404,115	190173,779	72859,491
1996	24330,454	194658,82	76435,974
1997	25619,799	201739,853	77436,943
1998	25721,35	208525,609	81002,794
1999	27086,27	215655,911	81441,994
2000	28003,794	225311,776	85706,806
2001	28320,709	234768,584	88848,807
2002	29140,799	242843,079	88171,367
2003	29707,102	256398,059	91010,247
2004	30247,521	269002,893	90984,909
2005	30222,724	276799,801	92691,163
2006	30216,691	289247,077	92795,495
2007	30418,592	300921,276	96447,746
2008	29435,835	309745,868	91949,175
2009	27615,41	303411,565	88717,368
2010	26543,995	289651,85	80134,519

ΒΙΒΛΙΑ-ΣΥΓΓΡΑΜΑΤΑ

1. «ΣΥΓΧΡΟΝΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ»
Εκδόσεις Κριτική ΑΕ 2002,ΣΟΦΙΑ ΔΗΜΕΛΗ.
2. «Τεχνικές Οικονομετρίας και ανάλυση χρονολογικών σειρών» Σίμων
Θεόδωρος.
3. «ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ»ΘΑΛΛΑΣΣΙΝΟΥ.
4. Γεωργίου Κ. Χρήστου, (2007) «Εισαγωγή στην Οικονομετρία» Β΄ Τόμος,
Γ΄Εκδοση, Αθηνά, Gutenberg.
5. Δημοσιεύματα αγγλικής εφημερίδας Ecological Economics για έρευνες
σχετικά με τη μελέτη περίπτωσης που εξετάσαμε από καταξιωμένους
οικονομολόγους ποιο αναλυτικά:
 - «Energy consumption, carbon emissions, and economic growth in
China» από τους Xing-Ping Zhang και Xiao-Mei Cheng,
 - Έρευνα :»Survey of the international evidence on the causal
relationship between energy consumption and growth» του James E.
Payne
 - «Non-parametric frontier approach to modelling the relationships
among population, GDP, energy consumption and CO2
emissions.»Ανάλυση των Sebastián Lozano και Ester Gutiérrez.
 - «Is the energy-led growth hypothesis valid? New evidence from a
sample of 85 countries»,άρθρο του Νικόλαου Απέργη και του, Chor
Foon Tang από το “Energy Economics”.
 - “Economic growth and greenhouse gas emissions” των Alberto
Ansuategi και Marta Escapa
 - «Economic growth and emissions: reconsidering the empirical basis of
environmental Kuznets curves» των S.M. de Bruyn , J.C.J.M. van den
Bergh και J.B. Opschoor
 - «Energy consumption and real GDP in G7 countries» των Paresh
Kumar Narayan και Russell Smyth.

- «Is there a turning point in the relationship between income and energy use and/or carbon emissions?» των Amy K. RichmondT, Robert K. Kaufmann
 - «Economic growth, energy demand and carbon dioxide emissions in India: 1990–2020» των N.S. MURTHY, M. PANDA και J. PARIKH
 - «Energy consumption and economic growth: Parametric and non-parametric causality testing for the case of Greece» του Θεολόγου Δεργιάδη, Γεώργιου Μαρτινόπουλου και Λευτέρη Τσουλφίδη.
 - «A multivariate causality test of carbon dioxide emissions, energy consumption and economic growth in China» του Ching-Chih Chang
6. «An econometric study of carbon dioxide (CO₂) emissions, energy consumption, and economic growth of Pakistan» έρευνα των Matloub Hussain, Muhammad Irfan Javaid και Paul R. Drake.

ΠΗΓΕΣ

1. www.aueb.gr/users/koundouri/resees/uploads/ECLEC4.ppt
2. nemertes.lis.upatras.gr/.../Καρβελις%20Χαραλαμπος%20AM.%20109%.
3. digilib.lib.unipi.gr/dspace/bitstream/unipi/773/1/paltoglou_eudoksia.pdf
4. dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/13409/2/
5. www.emeraldinsight.com/0144-3585.htm
6. www.elsevier.com/locate/apenergy