Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΛΥΨΗΣ-ΖΗΤΗΣΗΣ»

Σπουδάστρια: Σπυριδούλα Κωστοπούλου,

Επιβλέπουσα Ακαδημαϊκός: Μιχοπούλου Μαίρη

Πάτρα, Μάρτιος 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Η χωροθέτηση εγκατάστασης

Ο όρος «εγκατάσταση» (facility) χρησιμοποιείται με την ευρύτερη έννοια. Αναφέρεται σε οντότητες, όπως στάσεις λεωφορείων, σταθμούς τρένων, σχολεία, νοσοκομεία, πυροσβεστικούς σταθμούς, κλπ. Άλλοι, συνώνυμοι όροι είναι «ανάπτυξη» ή «παράταξη» (deployment), «τοποθέτηση» (positioning), και «χωροθέτηση» (siting), (Moujahed *et al.*, 2006).

Η ανάλυση χωροθέτησης εγκαταστάσεων είναι ιδιαίτερα σημαντική εξ αιτίας των ακόλουθων παραγόντων (Παπλά, 2009):

1. Οι αποφάσεις χωροθέτησης λαμβάνονται συχνά σε κάθε επίπεδο ανθρώπινης οργάνωσης (μεμονωμένα άτομα, οικογένειες, εταιρείες, Κυβερνητικές υπηρεσίες και Οργανισμοί, Παγκόσμιοι Οργανισμοί κλπ.).

2. Τέτοιες αποφάσεις συνήθως έχουν στρατηγική σημασία. Κι αυτό επειδή

α. Απαιτούν μεγάλα ποσά κεφαλαίων και

β. Τα οικονομικά τους αποτελέσματα είναι μακροπρόθεσμα.

Στον ιδιωτικό τομέα, οι αποφάσεις χωροθέτησης έχουν σημαντική επίδραση στην ανταγωνιστικότητα στα πλαίσια της αγοράς, ενώ στο δημόσιο τομέα επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα με την οποία παρέχονται συγκεκριμένες υπηρεσίες από το Κράτος.

3. Η χωροθέτηση εγκαταστάσεων έχει συχνά σαν αποτέλεσμα διάφορα οικονομικά φαινόμενα, όπως π.χ. η μόλυνση, η κυκλοφοριακή συμφόρηση και η οικονομική ανάπτυξη.

4. Τα μοντέλα χωροθέτησης συνήθως είναι εξαιρετικά δύσκολο να επιλυθούν. Ακόμα και τα πιο βασικά από αυτά είναι υπολογιστικά δυσεπίλυτα, και τα πιο πολύπλοκα απαιτούν πληροφοριακά συστήματα. Η πολυπλοκότητά τους αυτή, είναι και η κύρια αιτία που αυτά δεν αναπτύχθηκαν ευρέως έως ότου εξελίχθηκαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές.

5. Δεν υπάρχει ένα γενικό μοντέλο χωροθέτησης κατάλληλο για όλες τις υπάρχουσες εφαρμογές. Η δομή των προβλημάτων χωροθέτησης καθορίζεται κάθε φορά από το συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζεται. Κι αυτό γιατί, κάθε φορά, αλλάζουν οι παράμετροι του προβλήματος (στόχοι, περιορισμοί και μεταβλητές).

1.2 Το πρόβλημα χωροθέτησης εγκατάστασης

Τα προβλήματα χωροθέτησης εγκατάστασης έχουν γνωρίσει μια εκρηκτική αύξηση τις τελευταίες δεκαετίες. Όπως αναφέρουν οι Krarup και Pruzan (1983), αυτό δεν είναι καθόλου περίεργο δεδομένου ότι η πολιτική θέσης είναι μια από τις πιο κερδοφόρες περιοχές της Ανάλυσης Εφαρμοσμένων Συστημάτων όπου προσφέρονται άφθονες προκλήσεις, τόσο θεωρητικές, όσο και εφαρμογής (Moujahed *et al.*, 2006).

Το πρόβλημα χωροθέτησης εγκατάστασης καταλαμβάνει ένα πλήθος σεναρίων εφαρμογής. Παραδοσιακά, έχει χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση του προβλήματος της εύρεσης της καλύτερης γεωγραφικής τοποθεσίας για την κατασκευή βιομηχανικών εγκαταστάσεων ή αποθηκών. Ενώ αυτή η κλασσική εφαρμογή μπορεί να λυθεί ικανοποιητικά από ένα συγκεντρωτικό αλγόριθμο, υπάρχουν πολλές εφαρμογές που απαιτούν πιο πολύπλοκους αλγόριθμους (Moscibroda και Wattenhofer, 2005). Στη βιβλιογραφία, το πρόβλημα της χωροθέτησης εγκατάστασης συνίσταται στην χωροθέτηση νέων εγκαταστάσεων, ούτως ώστε να βελτιστοποιούνται κάποιοι αντικειμενικοί παράγοντες. Τέτοιοι παράγοντες είναι π.χ. η απόσταση από τον πελάτη, ο χρόνος και το κόστος ταξιδιού, η ικανοποίηση της απαίτησης κ.ά. (Moujahed *et al.*, 2006).

Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζονται ενδεικτικά οι τομείς εφαρμογής των μοντέλων χωροθέτησης.

Σχήμα 1.1: Τομείς εφαρμογής των μοντέλων χωροθέτησης (Λουκάκης, 2010).

Τα προβλήματα χωροθέτησης, είναι προβλήματα βελτιστοποίησης. Αποσκοπούν δηλαδή στην εύρεση των βέλτιστων λύσεων ή τουλάχιστον λύσεων που δεν επιδέχονται βελτίωσης. Στόχος τους είναι είτε η ελαχιστοποίηση κάποιου κόστους, είτε η μεγιστοποίηση κέρδους ή ποιότητας. Παρ' όλ' αυτά, στην περίπτωση χωροθέτησης εγκαταστάσεων δημοσίου συμφέροντος, υπεισέρχονται και άλλοι παράγοντες, όπως π.χ. κοινωνικοί και πολιτικοί. Στα ευκολότερα από τα προβλήματα αυτά, ο σκοπός παρουσιάζεται ως ένα και μόνο κριτήριο, και στόχος είναι η εύρεση του μέγιστου ή του ελάχιστου κάποιας συνάρτησης. Στα πιο πολύπλοκα, πρέπει να πληρούνται ταυτόχρονα πολλαπλά κριτήρια, και ο πραγματικός σκοπός δεν είναι ευκρινώς ορισμένος (Ποταμιάνος, 2010).

Η πιο συνήθης προσέγγιση επίλυσης των προβλημάτων χωροθέτησης, είναι ο καθορισμός εκείνων των λύσεων για τις οποίες καμία άλλη υπαρκτή λύση να μην ικανοποιεί εξίσου καλά όλα τα κριτήρια αλλά και ταυτόχρονα να μην ικανοποιεί καλύτερα έστω και ένα από αυτά. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία είναι αρκετά δύσκολη και συνήθως οι λύσεις που δίνει δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα καθώς δεν οδηγεί με σαφήνεια προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση (Ποταμιάνος, 2010).

Σ' αυτή την παράγραφο, παρουσιάζονται οι διάφορες παραλλαγές του προβλήματος της χωροθέτησης εγκατάστασης (Moujahed *et al.*, 2006).

Υπάρχουν ουσιαστικά τέσσερις συνιστώσες που απαρτίζουν το πρόβλημα χωροθέτησης (Re Velle and Eiselt, 2005):

1. Ένας χώρος στον οποίο εντοπίζονται οι απαιτήσεις και οι εγκαταστάσεις.

2. Μία μετρική η οποία θα δεικνύει την απόσταση (ή άλλες παραμέτρους, όπως π.χ. ο χρόνος), ανάμεσα στις απαιτήσεις και τις εγκαταστάσεις.

3. Οι απαιτήσεις, οι οποίες θα πρέπει να αποδίδονται στις εγκαταστάσεις/υπηρεσίες και

4. Οι εγκαταστάσεις οι οποίες θα πρέπει να χωροθετηθούν.

Οι βασικές παράμετροι ενός ανταγωνιστικού μοντέλου χωροθέτησης, είναι οι κάτωθι (Ποταμιάνος, 2010):

1. **Ο χώρος:** Γίνεται διάκριση σε μοντέλα με συνεχή και διακριτά δεδομένα. Είναι της μορφής R_d με $d \leq 3$ στις περιπτώσεις γεωγραφικής χωροθέτησης. Ακόμη και τα απλά μοντέλα της μορφής R_2 είναι αρκετά πολύπλοκα να λυθούν. Προβλήματα της μορφής R_d με $d \geq 3$, όπως π.χ. η τοποθέτηση προϊόντων σε πιθανές θέσεις, είναι αρκετά πιο πολύπλοκο να επιλυθούν.
2. **Η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων:** Σε μοντέλα δικτύου, οι αποστάσεις μπορούν να οριστούν κατά βούληση. Σε μοντέλα της μορφής R_2, επιλέγεται μία από τις L_k συναρτήσεις απόστασης. Για παράδειγμα, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων P_i = (x_i, y_i) και P_j = (x_j, y_j), ορίζεται ως $d_{ij}{}^{k} = \left[\left|X_i - X_j\right|^k - \left|Y_i - Y_j\right|^k\right]^{1/k}$
3. **Οι πελάτες:** Σε μοντέλα ανάλυσης πολιτικών δεδομένων, ως «πελάτης» ορίζεται ο ψηφοφόρος. Σε μοντέλα που βρίσκουν εφαρμογή στο χώρο εργασίας, ως «πελάτης» ορίζονται οι διάφορες δραστηριότητες που πρέπει να γίνουν. Ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό των πελατών είναι η κατανομή τους στο χώρο. Οι περισσότεροι μελετητές, θεωρούν ότι οι πελάτες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο χώρο. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει, καθώς πυκνή κατανομή πελατών συγκεντρώνεται γύρω από προϊόντα που παρουσιάζουν παραδοσιακά υψηλό δείκτη προτίμησης. Ένα άλλο κρίσιμο χαρακτηριστικό των πελατών είναι η αγοραστική τους δύναμη. Για παράδειγμα, σε ένα πολιτικό μοντέλο (π.χ. εκλογές), ένας ψηφοφόρος μπορεί να έχει το πολύ μία ψήφο ανεξάρτητα από την κατανομή των υποψηφίων. Σε ένα μοντέλο επιλογής προϊόντων όμως, ένας πελάτης μπορεί να πειστεί να αγοράσει περισσότερα από ένα προϊόντα ή ακόμα και το ίδιο προϊόν πάνω από μία φορά, κάτι που βασίζεται στην αγοραστική του δύναμη.
4. **Οι συναρτήσεις «προσέλκυσης»:** Οι συναρτήσεις αυτές μετρούν πόσο έντονα προσελκύεται ένας πελάτης από μία εγκατάσταση, ένα προϊόν κλπ. καθώς και το «βάρος». Χαρακτηριστικό αυτών των συναρτήσεων είναι οι αποστάσεις μεταξύ πελάτη και εγκατάστασης. Σε γενικές γραμμές ισχύει ότι, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση μεταξύ πελάτη και εγκατάστασης, τόσο μικρότερη είναι η προσέλκυση και, όσο μεγαλύτερο είναι το «βάρος» τόσο μεγαλύτερη η προσέλκυση. Το νόημα του «βάρους» εξαρτάται από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Για παράδειγμα, αν οι εγκαταστάσεις είναι καταστήματα ή εμπορικά κέντρα, βάρος μπορεί να είναι το μέγεθος του καταστήματος ή η ποικιλία των προσφερομένων προϊόντων. Σε μοντέλα που βρίσκουν εφαρμογή στην πολιτική το βάρος μπορεί να χαρακτηρίζει τη δημοσιότητα ενός πολιτικού προσώπου. Το βάρος μπορεί επίσης να αναφέρεται στη συχνότητα επίσκεψης κάποιου πελάτη σε κάποιο κατάστημα ή ακόμη και στη «σπουδαιότητα» του πελάτη. Κατά συνέπεια, το «βάρος» αποτελεί πολύ συχνά κάποιο συντελεστή, ο οποίος έχει ως στόχο να ποσοτικοποιήσει ένα μέγεθος (πχ συχνότητα επίσκεψης) κατ' αναλογία.
5. **Οι εγκαταστάσεις που πρόκειται να χωροθετηθούν:** Ο αριθμός των εγκαταστάσεων προς τοποθέτηση (από κάθε ανταγωνιστή), μπορεί να είναι σταθερός ή να ποικίλλει.

Για παράδειγμα, μια αλυσίδα super market μπορεί να έχει σκοπό να εγκαταστήσει ένα πλήθος καταστημάτων σε ένα νομό, αλλά να μη γνωρίζει πόσα ακριβώς.

6. **Ο σκοπός ή στόχος μιας εγκατάστασης:** Αν και ο αντικειμενικός σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους (ή η ελαχιστοποίηση του κόστους), ορισμένες φορές και άλλοι στόχοι έχουν σημαντική σημασία. Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις μοντέλων επανεγκατάστασης ή εισαγωγής νέων εγκαταστάσεων, σκοπός μπορεί να είναι η προστασία μιας περιοχής από την εγκατάσταση σε αυτή κάποιου ανταγωνιστή. Με τον τρόπο αυτό, γίνεται προσπάθεια ώστε να επιτευχθεί όσο το δυνατόν υψηλότερο κέρδος, δεδομένου όμως ότι η τοποθέτηση κάποιου ανταγωνιστή θα γίνει στο χειρότερο δυνατό σημείο. Αυτή η συμπεριφορά ομοιάζει στο κριτήριο minimax της θεωρίας παιγνίων.
7. **Ο κανόνας της αγοράς:** Πιο συγκεκριμένα, αυτή η παράμετρος σχετίζεται με τη θεώρηση του χώρου εγκατάστασης. Έτσι, ο χώρος εγκατάστασης, μπορεί να θεωρείται αρχικά κενός και όλες οι ανταγωνιστικές μονάδες να εγκαθίστανται ταυτόχρονα ή να υπάρχει μια σειρά. Παρόμοια περίπτωση εμφανίζεται όταν ο αριθμός των μονάδων δεν αλλάζει, υπάρχει όμως η δυνατότητα επανεγκατάστασης. Παράλληλα, οι κανόνες της αγοράς μπορεί να θέτουν κάποιες προϋποθέσεις είτε στην εγκατάσταση μιας νέας μονάδας όπου δραστηριοποιούνται ανταγωνιστές είτε στην έξοδο της από το χώρο αυτό.
8. **Κατά πόσο το μοντέλο είναι «νομοτελειακό» ή «στοχαστικό»:** Σε ένα «νομοτελειακό» μοντέλο, θεωρείται ότι ο πελάτης ενισχύει αποκλειστικά τη μονάδα από την οποία προσελκύεται περισσότερο. Αυτό αποτελεί τη βάση για τον περαιτέρω υπολογισμό του κέρδους και του μεριδίου αγοράς. Στην περίπτωση του «στοχαστικού» μοντέλου, χρησιμοποιείται η προτίμηση του πελάτη σε μια μονάδα ως δείκτης του ποσοστού των αγορών που θα κάνει από τη συγκεκριμένη εγκατάσταση. Λογικά, αυτά τα μοντέλα είναι και πιο πολύπλοκα από τα νομοτελειακά.

Το πρόβλημα του συνόλου κάλυψης, είναι ουσιαστικά ένα πρόβλημα κάλυψης των γραμμών ενός Πίνακα m-γραμμών/n-στηλών, με ένα υποσύνολο των στηλών με το ελάχιστο κόστος (Beasley and Chu, 1996).

Μια απλή έκφραση του προβλήματος κάλυψης είναι η εξής:

$$Min\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.1)$$

υποκείμενο σε

$$Min\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1,...,m \qquad (1.2)$$

$$x_j \in (0,1) \qquad j = 1,...,n \qquad (1.3)$$

Η εξίσωση (1.1) είναι η αντικειμενική συνάρτηση της λειτουργίας που καλύπτει το πρόβλημα. Η παράμετρος c_j αναφέρεται στο βάρος ή το κόστος της κάλυψης j στηλών, και x_j είναι η μεταβλητή της απόφασης. Στην εξίσωση (1.2), ο α_{ij} είναι ένας Πίνακας-συντελεστής περιορισμού μεγέθους $m \times n$, του οποίου τα στοιχεία αποτελούνται από 0 ή 1 (Gouwanda and Ponnambalam, 2008). Η εξίσωση (1.2) είναι ουσιαστικά ένας περιορισμός που εξασφαλίζει ότι κάθε γραμμή καλύπτεται από τουλάχιστον μία στήλη, απαιτεί δηλαδή κάθε ζήτηση i να καλύπτεται από ένα τουλάχιστον κέντρο παροχής υπηρεσιών (Παπλά, 2009). Τέλος, η εξίσωση (1.3) είναι ο περιορισμός ολοκλήρωσης, και οι τιμές παρουσιάζονται ως (Gouwanda and Ponnambalam, 2008):

$$x_j = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ j \in S \\ 0, & \delta\iota\alpha\phi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Που σημαίνει ότι το x_j παίρνει την τιμή 1, αν το κέντρο παροχής υπηρεσιών τοποθετηθεί στη θέση j, διαφορετικά παίρνει την τιμή 0.

Αν και εκ πρώτης όψεως φαίνεται απλό, κρίνοντας κανείς από τις αντικειμενικές συναρτήσεις και τους περιορισμούς που τίθενται, το Πρόβλημα Συνόλου Κάλυψης είναι ένα συνδυαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα NP-πλήρες πρόβλημα απόφασης (Beasley, 1987).

1.3 **Η κάλυψη** (**Παπλά**, 2009)

Όπως αναφέρθηκε, σε πολλά από τα προβλήματα χωροθέτησης, η παροχή υπηρεσιών στους πελάτες από τα κέντρα εξυπηρέτησης που πρόκειται να εγκατασταθούν, εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ κέντρου-πελάτη. Η υπηρεσία θεωρείται ικανοποιητική, αν ο πελάτης βρίσκεται μέσα σε μια δεδομένη απόσταση από το κέντρο παροχής της και ανεπαρκής όταν η απόσταση υπερβαίνει μια κρίσιμη τιμή.
Αυτό οδηγεί στην έννοια της *κάλυψης (coverage)*.

Τα προβλήματα κάλυψης χωρίζονται σε δύο κύριες ομάδες. Τα προβλήματα για τα οποία:

α. Η κάλυψη απαιτείται

β. Η κάλυψη βελτιστοποιείται

Δύο τέτοια προβλήματα στα οποία φαίνεται αυτή η διαφορά είναι:

i. Το πρόβλημα Συνόλου Κάλυψης (Locating Set Covering Problem)

ii. Το πρόβλημα Μέγιστης Κάλυψης (Maximal Covering Problem)

Στα επόμενα κεφάλαια, θα αναλυθούν στοιχειωδώς αυτοί οι δύο τύποι προβλημάτων, και θα παρατεθούν παραδείγματα από τη βιβλιογραφία.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΜΟΝΤΕΛΑ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗΣ

2.1 Γενικά

Μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί πάρα πολλά προβλήματα και μοντέλα χωροθέτησης. Συνήθως, ο προσδιορισμός και η ταξινόμησή τους γίνεται μέσω των κριτηρίων που τα αποτελούν, όπως για παράδειγμα το κύριο αντικείμενο, οι μεταβλητές της απόφασης, και οι παράμετροι του συστήματος.

Παρ’ όλ’ αυτά, η μεγάλη ανάπτυξη των προβλημάτων και μοντέλων χωροθέτησης, επέφερε περισσότερα και πιο εξειδικευμένα κριτήρια σύνθεσής τους. Κατά συνέπεια, τα προβλήματα χωροθέτησης μπορούν να ταξινομηθούν με βάση πιο πολύπλοκα ή εξειδικευμένα κριτήρια.

Έτσι, ένα πρόβλημα χωροθέτησης μπορεί να κατανεμηθεί με χωρικά κατανεμημένες προϋποθέσεις. Επιπροσθέτως, η μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος μπορεί να προσδιορίσει και τη μορφή του προβλήματος.

Το μοντέλο χωροθέτησης που προσδιορίζεται κάθε φορά, περιγράφει το πρόβλημα της χωροθέτησης, αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του προβλήματος, περιέχει τις απαραίτητες παραμέτρους και αποδίδει ρεαλιστικές και εφαρμοστέες λύσεις (Λουκάκης, 2010).

Τα προβλήματα χωροθέτησης διακρίνονται με βάση διάφορα κριτήρια, όπως είναι ο τύπος δικτύου, η αντικειμενική συνάρτηση, το αν πρόκειται για χωροθέτηση μιας ή πολλών μονάδων (προβλήματα χωροθετήσεων-κατανομών), το αν η μονάδα είναι κινητή ή όχι, τα σημεία ζήτησης (σε όλο το δίκτυο ή κόμβοι) κ.ά.. Η λύση κάθε προβλήματος χωροθέτησης, επιλέγεται βάσει μιας ή περισσότερων μεταβλητών. Η επιλογή αυτών των μεταβλητών γίνεται από τον λήπτη της απόφασης (decision maker, Λουκάκης, 2010).

Απαιτούμενα εργαλεία για τη χωροθέτηση κέντρων παροχής υπηρεσιών, αποτελούν τα μοντέλα πολυκριτηριακής ανάλυσης. Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούν συνήθως μια αντικειμενική συνάρτηση με ένα συνδυασμό κριτηρίων-παραμέτρων από αυτά που αναφέρονται στα προβλήματα **minisum** και **minimax** (Zografos *et al.*, 1991, Zografos and Samaras, 1989).

Μια πρώτη διάκριση των προβλημάτων χωροθέτησης εγκατάστασης, μπορεί να γίνει με βάση τα χαρακτηριστικά του χώρου «υποδοχής» του προϊόντος ή της υπηρεσίας. Τα προβλήματα αυτά διακρίνονται σε **προβλήματα δικτύου** (network) και σε **προβλήματα επιπέδου** (planar).

Η κατηγορία αυτών των προβλημάτων, χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες: **Συνεχή** και ***Διακριτά***. Το πρόβλημα θεωρείται *συνεχές*, όταν οι εγκαταστάσεις μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο πεδίο ή στο δίκτυο. Στο *διακριτό* πρόβλημα χωροθέτησης, η τοποθέτηση των εγκαταστάσεων μπορεί να γίνει μόνο σε περιορισμένο αριθμό επιλέξιμων σημείων (Moujahed *et al.*, 2006).

Μια άλλη διάκριση των προβλημάτων χωροθέτησης σχετίζεται με τον αριθμό των μονάδων που θα πρέπει να κατανεμηθούν. Αναπτύχθηκαν έτσι τα μοντέλα χωροθετήσεων-κατανομών (location/allocation models). Τα μοντέλα αυτά καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

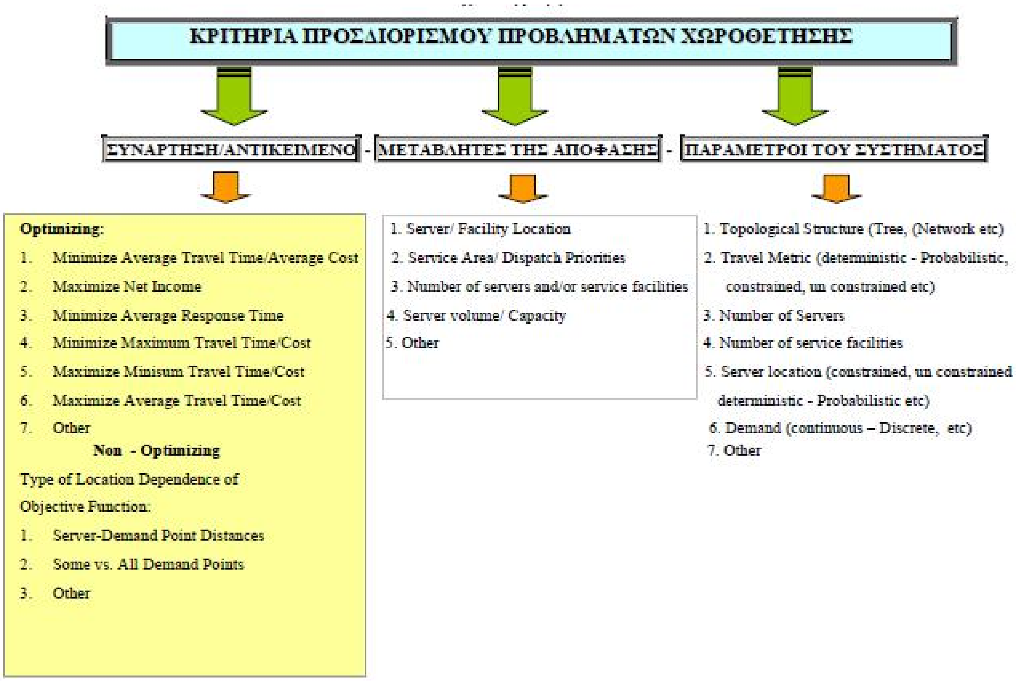
- Ποιος είναι ο βέλτιστος αριθμός κέντρων παροχής υπηρεσιών που πρέπει να χωροθετηθούν;
- Ποια πρέπει να είναι η περιοχή εξυπηρέτησης για κάθε ένα από αυτά τα κέντρα;

Στην κατηγορία αυτή, ανήκουν το μοντέλο ***P***-Διαμέσου (***P***-Median), το μοντέλο ***P***-Διακέντρων (***P***-Centers), και το Μοντέλο Κάλυψης (Covering Model).

Τα μοντέλα αυτά σχετίζονται με αντίστοιχα προβλήματα διακριτού χώρου, αποτελούν δηλαδή ένα δίκτυο σημείων, εκτός των μοντέλων Κάλυψης που αφορούν προβλήματα χωροθέτησης και στο επιπεδο. Τα μοντέλα αυτά διαμορφώνονται μέσα στα πλαίσια της Θεωρίας Γραφημάτων και της Θεωρίας Δικτύων, η οποία οδήγησε στη Θεωρία των Γραφών (Christofides 1975, Love 1998, Κουτσόπουλος 1981).

Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναφερθούμε στην ταξινόμηση των διαφόρων προβλημάτων και μοντέλων χωροθέτησης (Λουκάκης, 2010).

Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια κριτήρια προσδιορισμού Προβλημάτων Χωροθέτησης.



Σχήμα 2.1: Κριτήρια προσδιορισμού Προβλημάτων Χωροθέτησης.

2.2 Συνεχή Προβλήματα Χωροθέτησης

Όταν οι μονάδες μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο επίπεδο ή στο δίκτυο, αναφερόμαστε σε **Συνεχή Προβλήματα Χωροθέτησης**. Στα Συνεχή Προβλήματα, *το σύνολο των υποψήφιων θέσεων για τη χωροθέτηση των μονάδων ορίζεται από τη συνέχεια όλων των σημείων του επιπέδου*. Τα κέντρα παροχής υπηρεσιών δηλαδή, μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο ομογενές επίπεδο.

Η ανάπτυξη αυτών των προβλημάτων έγινε με αργούς ρυθμούς, εξ αιτίας των αναλυτικών δυσκολιών που είχαν οι γεωμετρικοί υπολογισμοί σε ένα συνεχές επίπεδο. Παρ' όλ' αυτά, αν αντικατασταθεί η συνεχής ζήτηση στην εξεταζόμενη περιοχή, με ένα διακεκριμένο σύνολο σημείων, καθένα από τα οποία αναπαριστά μια συγκεκριμένη υποπεριοχή ή τομέα, η κατάσταση βελτιώνεται. Έτσι, είναι ευκολότερο να κατασκευασθεί η αντικειμενική συνάρτηση, όταν αυτή βασίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο από σημεία ζήτησης, παρά σε μια συνεχή συναρτησιακή ζήτηση (Λουκάκης, 2010).

2.2.1 **Το Συνεχές Πρόβλημα P-Διάμεσος**

Το Συνεχές Πρόβλημα ***P***-Διάμεσος είναι ένα από τα πιο βασικά προβλήματα της κατηγορίας Συνεχών Προβλημάτων Χωροθέτησης. Σκοπό του προβλήματος αποτελεί η εύρεση ενός συνόλου από πιθανές θέσεις για έναν συγκεκριμένο αριθμό κέντρων παροχής υπηρεσιών (έστω P), ούτως ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική σταθμική απόσταση από τους πελάτες προς το πλησιέστερο προς αυτούς κέντρο παροχής υπηρεσιών.

2.2.2 **Το Πρόβλημα** Time-Space **P-Διάμεσος**

Τα προβλήματα χωροθέτησης time-space αναφέρονται στον τόπο και στον χρόνο λειτουργίας μίας μονάδας παροχής υπηρεσιών. Τέτοιες μονάδες παρέχουν τις υπηρεσίες τους μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους (ημέρες, εβδομάδες, μήνες ή έτη) ή λειτουργούν περιοδικά.

Το πρόβλημα αυτό διαφέρει από το Συνεχές Πρόβλημα ***P***-Διάμεσος, αλλά αποτελεί ταυτόχρονα και μια προέκτασή του, γι’ αυτό και ονομάζεται Πρόβλημα Time-Space ***P***-Διάμεσος (Λουκάκης, 2010).

2.2.3 **Το Συνεχές Πρόβλημα P-Διακέντρων**

Το Συνεχές Πρόβλημα ***P***-Διακέντρων αναφέρεται στην περίπτωση που, στο Πρόβλημα ***P***-Διακέντρων, απαιτείται η εύρεση ενός συνόλου κέντρων παροχής υπηρεσιών, στα οποία να ελαχιστοποιείται η απόσταση μεταξύ ενός χρήστη και του πλησιέστερου προς αυτόν κέντρου (Λουκάκης, 2010).

2.3 **Διακριτά Προβλήματα Χωροθέτησης**

Όταν οι μονάδες μπορούν να τοποθετηθούν σε συγκεκριμένα και κατάλληλα σημεία στο επίπεδο ή στο δίκτυο, αναφερόμαστε σε **Διακριτά Προβλήματα Χωροθέτησης**. Στα Διακριτά Προβλήματα, *το σύνολο των υποψήφιων θέσεων αποτελείται από ένα ορισμένο σύνολο σημείων στο επίπεδο, αποτελεί δηλαδή ένα δίκτυο σημείων*. Στα προβλήματα αυτά, τα κέντρα παροχής υπηρεσιών μπορούν να τοποθετηθούν είτε σε έναν κόμβο είτε σε έναν σύνδεσμο είτε σε κάποιο δίκτυο. Τα προβληματα αυτά λαμβάνουν σαν είσοδο (μεταβλητή) γνωστές σταθερές ποσότητες, και εξάγουν μια απλή λύση η οποία είναι εφαρμόσιμη σε πραγματικό χρόνο.

Τα περισσότερα προβλήματα χωροθέτησης ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία.

Τα Διακριτά Μοντέλα Χωροθέτησης, διακρίνονται σε περαιτέρω υποκατηγορίες. Ο τρόπος διάκρισης σχετίζεται με τη χωροθέτηση των μονάδων και την επιθυμία των πελατών. Οι υποκατηγορίες αυτές παρατίθενται κατωτέρω (Λουκάκης, 2010).

2.3.1 **Προβλήματα και Μοντέλα Διαμέσων**

Προβλήματα Διαμέσων (minisum) έχουμε όταν σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση της συνολικής απόστασης των χρηστών-πελατών από το πλησιέστερο προς αυτούς κέντρο παροχής υπηρεσιών.

Το αντίστοιχο Μοντέλο Διαμέσου (Median ή Minisum), αναφέρεται σε προβλήματα όπου η χωροθέτηση ενός κέντρου παροχής υπηρεσιών σε μια κορυφή ενός δεδομένου γραφήματος, θα πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα όλων των συντομότερων αποστάσεων των κορυφών του από αυτή την υπηρεσία. Η βέλτιστη χωροθέτηση του κέντρου παροχής υπηρεσιών ονομάζεται διάμεσος (median) του γραφήματος.

Οι αντίστοιχες ανεπιθύμητες χωροθετήσεις ονομάζονται maxisum.

Εξ αιτίας της φύσης της αντικειμενικής συνάρτησης, αυτή η κατηγορία προβλημάτων ονομάζεται **minisum προβλήματα χωροθέτησης (minisum location problems),** (Λουκάκης, 2010).

2.3.1.1 **Το Μοντέλο** ***P*-Διάμεσος** (*P*-Median)

Το συγκεκριμένο μοντέλο επιλύει το χωροθετικό πρόβλημα συγκεκριμένου αριθμού κέντρων παροχής υπηρεσιών (έστω P) κατά «αόριστο τρόπο». Σκοπός είναι το άθροισμα των συντομότερων αποστάσεων των κορυφών του γραφήματος από τα πλησιέστερα κέντρα παροχής υπηρεσιών, να είναι το ελάχιστο (Goldman 1971, Hakimi 1964). Το μοντέλο αυτό μπορεί να λάβει διάφορες μορφές, θέτοντας διαφορετικούς περιορισμούς όπως για παράδειγμα το μέγιστο κόστος, ο προϋπολογισμός χωρητικότητας κ.ά., καθώς και αντικειμενικές συναρτήσεις (Λουκάκης, 2010).

2.3.1.2 **Το Περιορισμένο Πρόβλημα** ***P*-Διάμεσος**

Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στην ίδια αντικειμενική συνάρτηση με το Πρόβλημα ***P***-Διάμεσος. Η διαφορά του βρίσκεται στο ότι, το περιορισμένο Πρόβλημα ***P***-Διάμεσος εξετάζει κινητά κέντρα παροχής υπηρεσιών, τα οποία μπορεί να μετακινούνται (ταξιδεύουν) ορισμένη απόσταση κάθε ημέρα. Ζητούμενο είναι μια σχετική διάταξη των σημείων της υπηρεσίας (service points), ούτως ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ολική απόσταση των χρηστών από τα κοντινότερα σημεία της υπηρεσίας (Λουκάκης, 2010).

2.3.1.3 **Το** Simple Plant Location Problem (SPLP)

Στην περίπτωση αυτή, εμφανίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση το κόστος ανακατασκευής. Δεδομένου ότι ένας τέτοιος περιορισμός δεν είναι απλός, το πρόβλημα εφαρμόζεται όταν το κόστος είναι σημαντικό και πρέπει να συμπεριληφθεί σαν κόστος προσιτότητας της υπηρεσίας (Λουκάκης, 2010).

2.3.2 **Προβλήματα και Μοντέλα Διακέντρων**

Προβλήματα Διακέντρων (minimax) έχουμε όταν σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόστασης των χρηστών-πελατών από το πλησιέστερο προς αυτούς κέντρο παροχής υπηρεσιών.

Το αντίστοιχο μοντέλο ονομάζεται Μοντέλο Διακέντρων (Centers ή Minimax). Οι αντίστοιχες ανεπιθύμητες χωροθετήσεις ονομάζονται maximin (Λουκάκης, 2010).

2.3.2.1 **Το Μοντέλο** ***P*-Διακέντρων** (*P*-Centers)

Το συγκεκριμένο μοντέλο αναφέρεται σε προβλήματα στα οποία επιδιώκεται η τοποθέτηση ενός συγκεκριμένου αριθμού κέντρων παροχής υπηρεσιών (έστω P), με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η μέγιστη απόσταση ή ο μέγιστος χρόνος ενός οποιουδήποτε σημείου, από το κοντινότερο κέντρο παροχής υπηρεσιών (απόσταση ή χρόνος επικάλυψης). Ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται μέσω της βελτιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης (Owen and Daskin, 1998, Goldman, 1971).

2.3.2.2 **Προβλήματα Διακέντρων Κορυφής**

Τα Προβλήματα Διακέντρων Κορυφής (Vertex Center Problems) τίθενται στην περίπτωση που οι θέσεις των κέντρων παροχής υπηρεσιών μιας υπηρεσίας είναι περιορισμένες στους κόμβους του δικτύου. Ζητείται λοιπόν η χωροθέτηση των κέντρων σε συκεκριμένους κόμβους του δικτύου (Λουκάκης, 2010).

2.3.2.3 Απόλυτα Προβλήματα Διακέντρων

Τα Απόλυτα Προβλήματα Διακέντρων (Absolute Center Problems) τίθενται στην περίπτωση που τα κέντρα παροχής υπηρεσιών μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε μέσα στο δίκτυο (Λουκάκης, 2010).

2.3.3 Κοινά Προβλήματα Διαμέσων-Διακέντρων

Εκτός από τα Προβλήματα Διαμέσων και τα Προβλήματα Διακέντρων, υπάρχουν και κοινές υποκατηγορίες Προβλημάτων Διαμέσων-Διακέντρων. Τέτοια, για παράδειγμα, είναι τα Ανάστροφα Προβλήματα Διαμέσων-Διακέντρων. Στην κατηγορία αυτή προβλημάτων, ζητούμενο δεν είναι η αναζήτηση ενός συνόλου θέσεων που θα ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόσταση (ή τον μέγιστο χρόνο) για έναν δεδομένο αριθμό κέντρων παροχής υπηρεσιών. Αντ' αυτού, ζητείται να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός κέντρων παροχής υπηρεσιών καθώς επίσης και οι θέσεις τους, έτσι ώστε η μέγιστη απόσταση ενός τυχαίου σημείου του δικτύου, από το πλησιέστερο προς αυτό κέντρο παροχής υπηρεσιών, να είναι μικρότερη ή ίση από μία προκαθορισμένη τιμή (**Ανάστροφο Πρόβλημα Διακέντρων**). Αντίστοιχα ορίζεται και το Ανάστροφο Πρόβλημα Διαμέσων.

Τα μοντέλα **Cent Median** και **Medi-Centex** αποτελούν επεκτάσεις των Προβλημάτων Διαμέσων-Διακέντρων. Το μοντέλο Cent Median χρησιμοποιείται για να ελαχιστοποιηθεί ένας γραμμικός κυρτός συνδυασμός των αντικειμενικών συναρτήσεων των minisum/minimax προβλημάτων. Το μοντέλο Medi-Centex χρησιμοποιείται για να ελαχιστοποιηθεί η μέση απόσταση, με τον περιορισμό ότι όλες οι αποστάσεις από τους πελάτες προς τα κέντρα παροχής υπηρεσιών δεν υπερβαίνουν κάποιο προκαθορισμένο όριο (Λουκάκης, 2010).

2.3.4 Προβλήματα και Μοντέλα Κάλυψης (ή επικαλυπτόμενα)

Προβλήματα Κάλυψης ή επικαλυπτόμενα (covering problems) έχουμε όταν οι σκοποί στην λήψη της απόφασης είναι διαφορετικοί από αυτούς στα προβλήματα Διαμέσων ή Διακέντρων. Τέτοιοι σκοποί μπορεί π.χ. να είναι η κάλυψη των πελατών και η ζήτησή τους.

Τα αντίστοιχα Μοντέλα Κάλυψης (Covering Model) αναφέρονται σε προβλήματα όπου η χωροθέτηση ενός κέντρου παροχής υπηρεσιών καλύπτει τις ανάγκες των πελατών, βρίσκεται δηλαδή εντός μιας συγκεκριμένης απόστασης και ενός χρονικού ορίου σε σχέση με τους πελάτες (Λουκάκης, 2010).

Το Μοντέλο Κάλυψης (Covering Model), επιλύει το χωροθετικό πρόβλημα ενός αριθμού κέντρων παροχής υπηρεσιών (έστω P), έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η κάλυψη των πελατών μέσα σε μία συγκεκριμένη απόσταση ή χρόνο μεταφοράς S, Το μοντέλο αυτό ονομάζεται επίσης **Μοντέλο Απόστασης ή Χρόνου** (Λουκάκης, 2010).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά τα δύο κύρια προβλήματα κάλυψης. Το **Πρόβλημα του Συνόλου Κάλυψης** και το **Πρόβλημα Μέγιστης Κάλυψης**.

2.3.4.1 Το Πρόβλημα του Συνόλου Κάλυψης

Γενικά

Όπως αναφέρθηκε και στην Εισαγωγή, το Πρόβλημα του Συνόλου Κάλυψης (Set Covering Location Problem, **SCLP**) είναι ο εντοπισμός του ελάχιστου αριθμού των εγκαταστάσεων που απαιτούνται για την κάλυψη όλων των κόμβων της ζήτησης (Toregas *et al.*, 1971). Στόχος δηλαδή είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους της τοποθέτησης ενός αριθμού κέντρων εξυπηρέτησης από ένα σύνολο υποψηφίων κέντρων, έτσι ώστε κάθε σημείο ζήτησης να καλύπτεται από ένα τουλάχιστον κέντρο παροχής υπηρεσίας, επιτυγχάνοντας έτσι τη μέγιστη δυνατή κάλυψη (Παπλά, 2009).

Το συγκεκριμένο πρόβλημα, καθορίζει τον ελάχιστο αριθμό και τις θέσεις των κέντρων παροχής υπηρεσιών που απαιτούνται για την κάλυψη όλων των απαιτήσεων. Για να το πετύχει αυτό, χρησιμοποιεί μία ορισμένη μέγιστη αποδεκτή απόσταση υπηρεσίας ή έναν μέγιστο αποδεκτό χρόνο S (coverage distance/time). Δηλαδή, για κάθε σημείο ζήτησης να υπάρχει ένα κέντρο παροχής υπηρεσιών εντός ορισμένης απόστασης ή χρόνου t_{ij}, σε απόσταση δηλαδή μικρότερη ή ίση με t_{ij} (Παπλά, 2009).

Μαθηματική τυποποίηση

Στη συνέχεια, περιγράφεται η μαθηματική τυποποίηση του Προβλήματος του Συνόλου Κάλυψης (Παπλά, 2009).

Αρχικά, χρειάζονται οι κάτωθι ορισμοί:

Ορίζουμε τη ζήτηση ως i και την κάλυψη ως j.

Είσοδοι:

a_{ij}: Παίρνει την τιμή 1 αν η υποψήφια θέση j μπορεί να καλύψει την ζήτηση i.

f_j: Είναι το σταθερό κόστος τοποθέτησης ενός κέντρου παροχής υπηρεσιών στον κόμβο j.

Οι μεταβλητές απόφασης (decision variables) είναι οι:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ αν το κέντρο παροχής υπηρεσιών τοποθετηθεί στη θέση j} \\ 0, \text{ σε διαφορετική περίπτωση} \end{cases}$$

Έτσι, βάσει των πιο πάνω συμβολισμών, το πρόβλημα του Συνόλου Κάλυψης τυποποιείται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

MINIMIZE $$\sum_j f_j X_j \qquad (2.1)$$

υπό τους περιορισμούς $$\sum_j a_{ij} X_j \qquad \forall i \qquad (2.2)$$

$$X_j \qquad \forall j \qquad (2.3)$$

Όπως συζητήθηκε και στην Εισαγωγή, η εξίσωση (2.1) είναι η αντικειμενική συνάρτηση και περιγράφει την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους της τοποθέτησης των επιλεγμένων κέντρων παροχής υπηρεσιών. Η εξίσωση (2.2) απαιτεί κάθε ζήτηση i να καλύπτεται από ένα τουλάχιστον κέντρο παροχής υπηρεσιών.

Η τυποποίηση αυτή, δεν κάνει διαχωρισμό ανάμεσα στους βασικούς κόμβους και το μέγεθος της ζήτησης. Κάθε κόμβος πρέπει να επικαλυφθεί με μία ειδική απόσταση ανεξάρτητα από το κόστος, είτε αυτός ο κόμβος περιλαμβάνει έναν απλό πελάτη, είτε ένα μεγάλο τμήμα της ολικής ζήτησης. Αν οι κόμβοι ζήτησης (demand nodes) διαταχθούν έτσι ώστε η επικαλυπτόμενη απόσταση S να είναι μικρή, τότε η περιγραφή της επικάλυψης μπορεί να αναφέρεται σε μεγάλο αριθμό κέντρων παροχής υπηρεσιών. Επιπλέον, αν ο πιο απομακρυσμένος κόμβος (outlying node) έχει μικρή ζήτηση, ο λόγος του κόστους προς το όφελος της κάλυψης που απαιτείται μπορεί να μεγαλώσει πολύ (Παπλά, 2009).

2.3.4.2 **Το Πρόβλημα της Μέγιστης Κάλυψης**

Το Μοντέλο Συνόλου Κάλυψης αποτελεί οριακό σταθμό στην ανάπτυξη των χωροθετικών μοντέλων. Ένα από τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζει το Μοντέλο Συνόλου Κάλυψης είναι ότι, ο αριθμός των κέντρων παροχής υπηρεσιών που απαιτούνται για την κάλυψη όλων των σημείων ζήτησης, ενδεχομένως να υπερβαίνει τον αριθμό των κέντρων που πρακτικά μπορούν να τοποθετηθούν. Αυτό μπορεί να συμβαίνει για οικονομικούς ή άλλους λόγους.

Επιπλέον, το Μοντέλο του Συνόλου Κάλυψης αντιμετωπίζει όλα τα σημεία ζήτησης με πανομοιότυπο τρόπο.

Τα δύο αυτά θέματα οδήγησαν στη θεώρηση του Μοντέλου Μέγιστης Κάλυψης (Maximum Covering Location Model), το οποίο πρότειναν οι Church και Revelle (1974). Το πρόβλημα Μέγιστης Κάλυψης μεγιστοποιεί το ποσό της επικαλυπτόμενης ζήτησης μέσα στην αποδεκτή απόσταση υπηρεσίας (acceptable service distance) S. Αυτό επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση ενός σταθερού αριθμού κέντρων παροχής υπηρεσιών.

Ουσιαστικά, στο Μοντέλο Μέγιστης Κάλυψης, μεγιστοποιείται ο αριθμός των χρηστών που μπορούν να ικανοποιηθούν από την χωροθέτηση P-κέντρων παροχής υπηρεσιών. Χρειάζεται να χωροθετηθούν P-κέντρα παροχής υπηρεσιών σε σημεία ενός δικτύου, έτσι ώστε το μέγιστο μέρος (όχι το σύνολο) του πληθυσμού / χρηστών να βρίσκεται μέσα σ’ ένα ορισμένο χρόνο ή απόσταση από το κέντρο υπηρεσίας (Παπλά, 2009).

Μαθηματική Τυποποίηση

Στη συνέχεια, περιγράφεται η μαθηματική τυποποίηση του Προβλήματος Μέγιστης Κάλυψης (Παπλά, 2009).
Ορίζουμε:
h_i: η ζήτηση / απαίτηση του πελάτη στον κόμβο i
P: ο αριθμός των κέντρων παροχής υπηρεσιών που θα τοποθετηθούν

Οι μεταβλητές απόφασης (decision variables**)** είναι οι εξής:

$$Z_I = \begin{cases} 1, \text{αν ο κόμβος παροχής είναι επικαλυμμένος} \\ 0, \text{σε διαφορετική περίπτωση} \end{cases}$$

Έτσι, βάσει των πιο πάνω συμβολισμών, το πρόβλημα Μέγιστης Κάλυψης τυποποιείται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

MAXIMIZE $$\sum_j h_j Z_j \qquad (2.4)$$

υπό τους περιορισμούς $$Z_i \le \sum_j a_{ij} X_j \qquad \forall i \qquad (2.5)$$

$$\sum_j X_j \le \mathrm{P} \qquad (2.6)$$

$$X_j = 0{,}1 \qquad \forall j \qquad (2.7)$$

$$Z_i = 0{,}1 \qquad \forall i \qquad (2.8)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (2.4), περιγράφει την μεγιστοποίηση του ποσού ζήτησης που καλύπτεται. Ο περιορισμός που τίθεται στην εξίσωση (2.5), καθορίζει ποιοί κόμβοι ζήτησης (demand nodes) καλύπτονται μέσα στην αποδεκτή απόσταση υπηρεσιών. Πιο συγκεκριμένα, κάθε κόμβος i μπορεί να θεωρηθεί επικαλυμμένος (covered) (με $Z_i = 1$), αν υπάρχει κάποιο κέντρο παροχής υπηρεσιών το οποίο να βρίσκεται επί κάποιας τοποθεσίας j που είναι μέσα στα όρια S του κόμβου i. Εάν επί κάποιου τόπου $j \in S$ δεν τοποθετείται κανένα τέτοιο κέντρο παροχής υπηρεσιών, τότε το δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.5) θα είναι μηδέν, και κατά συνέπεια θα είναι και το $Z_i = 0$.

Ο περιορισμός (2.6) καθορίζει το ότι δεν μπορούν να τοποθετηθούν περισσότερα από P κέντρα παροχής υπηρεσιών. Οι περιορισμοί (2.7) και (2.8) είναι οι περιορισμοί για τις μεταβλητές απόφασης (Παπλά, 2009).

Στον Πίνακα 2.1, παρουσιάζονται οι σχέσεις μεταξύ των Προβλημάτων Συνόλου Κάλυψης, Μέγιστης Κάλυψης και *p*-Κέντρου (Daskin and Owen, 1999).

Πίνακας 2.1: Σχέσεις μεταξύ των Προβλημάτων Συνόλου Κάλυψης, Μέγιστης Κάλυψης και ***p***-Κέντρου.

Πρόβλημα	**Αριθμός Εγκαταστάσεων**	**% Κάλυψη Ζήτησης**	**Απόσταση Κάλυψης**
Συνόλου Κάλυψης	Αντικειμενικός Σκοπός (να ελαχιστοποιηθούν)	100%	Εξωγενής
Μέγιστης Κάλυψης	Εξωγενής	Αντικειμενικός Σκοπός (να μεγιστοποιηθεί)	Εξωγενής
p-Κέντρου	Εξωγενής	100%	Αντικειμενικός Σκοπός (να ελαχιστοποιηθεί)

2.4 Άλλοι τρόποι ταξινόμησης Προβλημάτων Χωροθέτησης

Εκτός των ανωτέρω προβλημάτων, υπάρχει μια ιδιαίτερη κατηγορία αιτιοκρατικών ή ντετερμινιστικών προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά αποτελούν συνάρτηση γνωστών παραμέτρων, και η συμπεριφορά τους είναι απόλυτα προβλέψιμη.

Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι το Πρόβλημα ***p*-διασποράς (*p*-dispersion)**, το οποίο σχετίζεται με την τοποθέτηση κέντρων παροχής υπηρεσιών όπου μεγιστοποιείται η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος κέντρων παροχής υπηρεσιών. Ένα άλλο πρόβλημα αυτής της κατηγορίας είναι το **Μη Ικανοποιήσιμο Πρόβλημα (incapacitated fixed charge problem)**.

Μία άλλη σημαντική διάκριση των μοντέλων χωροθέτησης, είναι εκείνη που τα κατηγοριοποιεί σε **περιγραφικά** και **πρότυπα**. Τα περιγραφικά μοντέλα (descriptive models) έχουν ως σκοπό την εξήγηση της χωρικής συμπεριφοράς κυρίως οικονομικών δραστηριοτήτων. Τα πρότυπα μοντέλα (normative models) παρέχουν στους λήπτες της απόφασης κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με αποφάσεις χωροθέτησης (Seppala, 1997).

Εκτός από τις ανωτέρω, υπάρχουν και άλλες κατηγοριοποιήσεις των σκοπών-κριτηρίων της αντικειμενικής συνάρτησης.

Τέτοιες είναι (Λουκάκης, 2010):

- Η κατηγοριοποίηση «push», η οποία θεωρεί ότι, είναι προτιμότερο μία μονάδα να χωροθετείται όσο το δυνατόν πιο μακριά από τους «πελάτες». Προφανώς, αυτή η κατηγοριοποίηση δεν αφορά μονάδες εκτάκτων αναγκών.
- Κατηγοριοποιήσεις που λαμβάνουν υπόψη τις μονάδες και όχι τους «πελάτες».
- Κατηγοριοποιήσεις που αναφέρονται στην «επίτευξη δικαιοσύνης» όσον αφορά την υπηρεσία. Αναφέρονται δηλαδή στη χωρική ισοκατανομή των ωφελειών στους «πελάτες» από ένα κέντρο παροχής υπηρεσιών. Στην περίπτωση αυτή, ο λήπτης της απόφασης πρέπει να συνδυάζει την αποτελεσματικότητα της παρεχόμενης υπηρεσίας με την κοινωνική ισότητα.
- Ιδιωτικού και Δημόσιου Τομέα (Private/Public Sector). Στην περίπτωση μονάδων Ιδιωτικού Τομέα, επιδιώκεται η χωροθέτηση μονάδων με σκοπό τη μεγιστοποίηση μιας συνάρτησης χρηματικής αξίας. Το ενδιαφέρον δηλαδή βρίσκεται στη μεγιστοποίηση του κέρδους. Στην περίπτωση των μονάδων Δημόσιου Τομέα, σκοπός είναι η μεγιστοποίηση της πρόσβασης του πληθυσμού στις μονάδες. Το ενδιαφέρον δηλαδή βρίσκεται στη μεγιστοποίηση του κοινωνικού ωφέλους ή στην ελαχιστοποίηση κάποιας «κοινωνικής ζημίας» (Re Velle and Eiselt, 2005, Swain, 1975).

2.4.1 **Ιεραρχικά Προβλήματα Χωροθέτησης**

Στα Ιεραρχικά Προβλήματα Χωροθέτησης (Hierarchical Location Problems) απαντώνται κυρίως στη χωροθέτηση κέντρων υγείας και νοσοκομείων. Σκοπός αυτών των προβλημάτων είναι η εξυπηρέτηση όσο το δυνατόν περισσότερων «πελατών», με παράλληλη μείωση του κόστους εξυπηρέτησης. Στη συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων υπάρχουν ιεραρχίες στις μονάδες, έτσι ώστε κάθε ιεραρχία σε ένα επίπεδο να παρέχει όλες τις υπηρεσίες μίας μονάδας του επόμενου χαμηλότερου επιπέδου (Λουκάκης, 2010).

2.4.2 **Στοχαστικά Προβλήματα Χωροθέτησης**

Κύριο χαρακτηριστικό τους είναι η ενσωμάτωση πιθανοτήτων στις παραμέτρους που τα αποτελούν. Προκύπτει έτσι μία συνάρτηση παραμέτρων, οι οποίες εμφανίζουν τυχαίες μεταβλητές. Παρ’ όλο που η συμπεριφορά τέτοιων μοντέλων δεν μπορεί να είναι απόλυτα προβλέψιμη, εν τούτοις είναι δυνατόν να υπολογιστεί το πόσο πιθανό είναι να λάβουν χώρα ορισμένες καταστάσεις, με τη χρήση μιας πιθανολογικής κατανομής. Προέκυψαν έτσι τα **Πιθανοθεωρητικά Μοντέλα**, τα οποία περιγράφουν μια συνάρτηση κόστους η οποία περιέχει πιθανότητα. Η συνάρτηση κόστους, η οποία εκφράζει (με πιθανότητα) την αναμενόμενη κάλυψη των κέντρων παροχής υπηρεσιών σε κάθε γειτονιά και για όλους τους κόμβους ζήτησης του δικτύου, μεγιστοποιείται. Τα μοντέλα αυτά λαμβάνουν υπόψη την πιθανότητα τα κέντρα παροχής υπηρεσιών να είναι απασχολημένα, έτσι ώστε να υπολογιστεί ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση των πελατών (Λουκάκης, 2010).

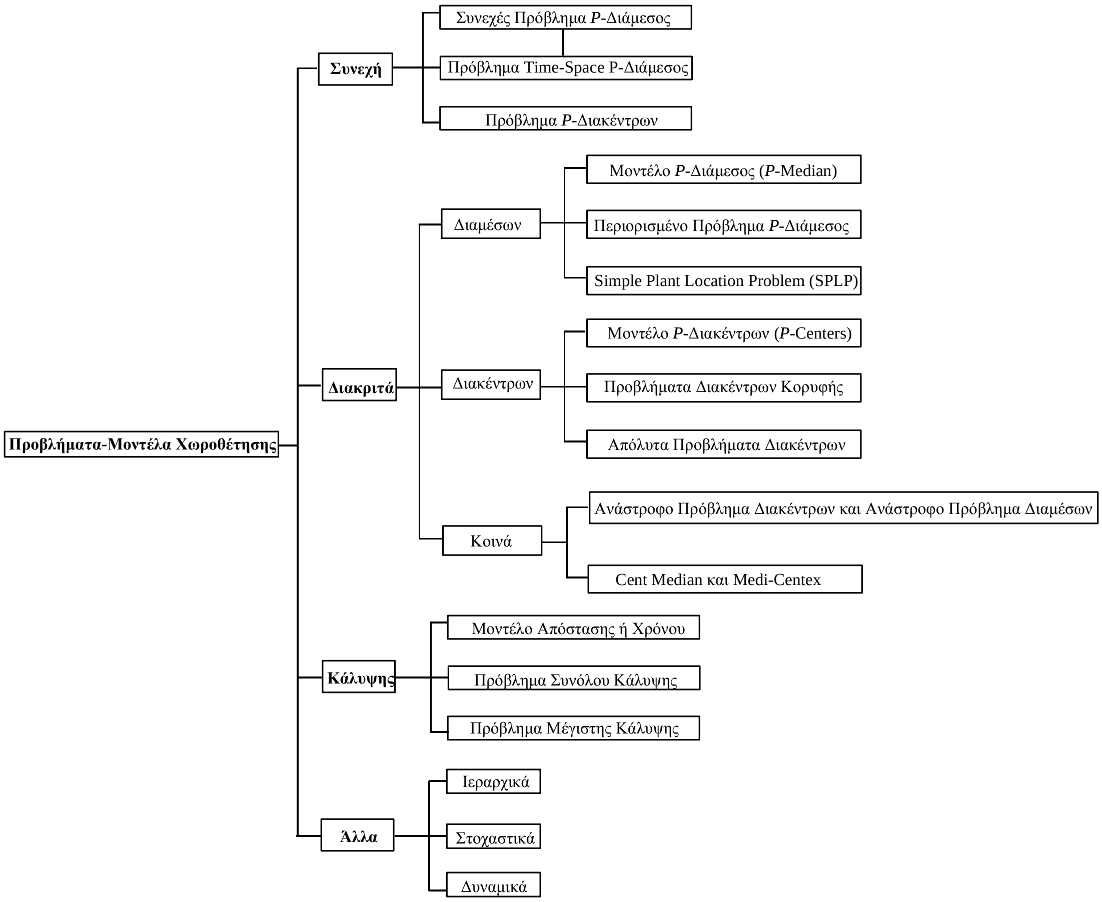
2.4.3 **Δυναμικά Προβλήματα Χωροθέτησης**

Τα ντετερμινιστικά ή αιτιοκρατικά προβλήματα χωροθέτησης δεν περιλαμβάνουν χρονικές διαστάσεις. Παρ’ όλ’ αυτά, στη στρατηγική των προβλημάτων χωροθέτησης απαιτείται να αντιπροσωπεύουν τη μελλοντική αβεβαιότητα. Οι λήπτες της απόφασης θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τις μεταβαλλόμενες με τον χρόνο απαιτήσεις, αλλά και να μελετούν την επέκταση των κέντρων παροχής υπηρεσιών μελλοντικά ή και της επανεγκατάστασής τους.

Η θεώρηση αυτή οδήγησε στα Δυναμικά Προβλήματα/Μοντέλα Χωροθέτησης.

Περαιτέρω, διαχωρίζονται σε **Απλά Δυναμικά Μοντέλα Χωροθέτησης** και **Πολλαπλά Δυναμικά Μοντέλα Χωροθέτησης** (Λουκάκης, 2010).

Στο Σχήμα 2.2, παρουσιάζεται η ανωτέρω κατηγοριοποίηση των Προβλημάτων και Μοντέλων Χωροθέτησης.



Σχήμα 2.2: Συνοπτικό Διάγραμμα ταξινόμησης Προβλημάτων και Μοντέλων Χωροθέτησης.

3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

3.1 Εφαρμογή του Μοντέλου Μέγιστης Ιεραρχικής Κάλυψης στη Χωροθέτηση Τραπεζικών Καταστημάτων

3.1.1 Γενικά

Ως παράδειγμα από τη βιβλιογραφία, επιλέχθηκε η μελέτη του Ποταμιάνου (Διπλωματική Εργασία, 2010). Ο Ποταμιάνος εφάρμοσε το Μοντέλο Μέγιστης Ιεραρχικής Κάλυψης στη χωροθέτηση τραπεζικών καταστημάτων. Το μοντέλο αυτό παρουσιάστηκε από τους Serra, Marianov και ReVelle (1992), και είναι ένα μοντέλο χωροθέτησης εγκαταστάσεων σε μία ιεραρχική δομή, όταν υπάρχει ανταγωνισμός στην περιοχή ενδιαφέροντος. Το συγκεκριμένο μοντέλο επιτρέπει την εγκατάσταση νέων μονάδων ή ακόμα και την επανεγκατάσταση υπαρχόντων.

Η μελέτη του Ποταμιάνου επιλέχθηκε ως παράδειγμα για τους εξής λόγους:

1. Σχετίζεται με το Πρόβλημα Μέγιστης Κάλυψης, το οποίο είναι από τα πλέον διαδεδομένα.
2. Μελετά ένα ιεραρχικό σύστημα.
3. Μελετά τη χωροθέτηση χωρίς και με την ύπαρξη ανταγωνιστή.
4. Αναφέρεται στην επανεγκατάσταση (relocation) με στόχο την ακόμα μεγαλύτερη κάλυψη της ζήτησης.

Σε ένα ιεραρχικό σύστημα, οι μονάδες που παρέχουν υπηρεσίες ή αγαθά, ταξινομούνται ανάλογα με το επίπεδο των προσφερομένων υπηρεσιών. Αυτές οι υπηρεσίες μπορούν να συνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους, μπορεί να είναι αμοιβαία αποκλειόμενες ή μπορεί να περιέχει η μία την άλλη. Στην τελευταία περίπτωση, μία μονάδα υψηλότερου επιπέδου μπορεί να παρέχει υπηρεσίες που επίσης παρέχονται και σε χαμηλότερου επιπέδου μονάδες.

Στον τραπεζικό τομέα, που είναι και ο τομέας του παραδείγματος, μπορούν να αναγνωριστούν τρία επίπεδα μονάδων εξυπηρέτησης:

1. Οι αυτόματες ταμειολογιστικές μηχανές (ATM): Παρέχουν βασικού τύπου υπηρεσίες όπως αναλήψεις καταθέσεις κλπ.
2. Τα τοπικά καταστήματα των τραπεζών (retail): Σε αυτά παρέχονται όλες οι υπηρεσίες που παρέχουν τα ATM, αλλά και ακόμα πιο εξειδικευμένες.
3. Τα περιφερειακά καταστήματα (full banking), όπου παρέχονται όλες οι δυνατές τραπεζικές εργασίες.

3.1.2 **Περιγραφή του Μοντέλου**

Θεωρούνται δύο εταιρείες τραπεζικών καταστημάτων, η A που προσπαθεί να βελτιώσει την υπάρχουσα θέση της αλλά και να τοποθετήσει και νέες μονάδες, και η C, η ανταγωνίστρια που οι μονάδες της είναι ήδη εγκατεστημένες.

Ένας κόμβος θεωρείται πλήρως κατειλημμένος από τύπου A–μονάδα, αν υπάρχει τέτοια μονάδα πιο κοντά στον κόμβο από ότι μια ανταγωνίστρια μονάδα. Επιπλέον, ένας κόμβος θα θεωρείται μερικώς κατειλημμένος, αν υπάρχει μονάδα που ανήκει στην A εταιρεία, στην ίδια απόσταση από τον κόμβο με την αντίστοιχη απόσταση της μονάδας της C εταιρείας. Το πρόβλημα είναι ακέραιου προγραμματισμού και έχει ως εξής:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} \tfrac{1}{2} a_i z_i \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad y_i \leqslant \sum_{j \in N_i} x_j \quad \forall i \in I, \qquad (2)$$

$$z_i \leqslant \sum_{k \in O_i} x_k \quad \forall i \in I, \qquad (3)$$

$$z_i + y_i \leqslant 1 \quad \forall i \in I, \qquad (4)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = r + p, \qquad (5)$$

$$\sum_{j \in J_A} x_j = p - s, \qquad (6)$$

$$y_i,\ z_i,\ x_j = 0,\ 1, \quad \forall i \in I,\ j \in J \qquad (7)$$

όπου:
I = το σύνολο όλων των κόμβων ζήτησης
J = το σύνολο όλων των επιλέξιμων τοποθεσιών συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που ήδη είναι κατειλημμένες
J_A = το σύνολο των σημείων που ήδη είναι κατειλημμένα από την εταιρεία A
S_i = η απόσταση του κόμβου i από την πλησιέστερη μονάδα μιας ανταγωνίστριας εταιρείας, είτε της A είτε της C
d_{ij} = η μικρότερη απόσταση μεταξύ του κόμβου i και της τοποθεσίας j
$N_i = \{j \in J \mid d_{ij} < S_i\}$ = το σύνολο των διαθέσιμων τοποθεσιών που είναι αυστηρά πιο κοντά στον κόμβο i από ότι ο πλησιέστερος ήδη εγκατεστημένος ανταγωνιστής
$Oi = \{j \in J \mid d_{ij} = S_i\}$ = το σύνολο των τοποθεσιών που βρίσκονται ακριβώς σε απόσταση S_i από τον κόμβο i
Y_i = 1, 0: 1 αν ο κόμβος επίλυσης i είναι πλήρως κατειλημμένος, δηλαδή, στον κόμβο i βρίσκεται μια μονάδα τύπου A πιο κοντά από ότι η απόσταση S_i (ή πιο κοντά από ότι μια μονάδα της εταιρείας C)
x_j = 1, 0: 1 αν μια μονάδα της εταιρείας A είναι τοποθετημένη στο j
a_i = ο πληθυσμός στον κόμβο i
p = ο αριθμός των μονάδων τύπου A που είναι ήδη εγκατεστημένες
r = ο αριθμός των νέων μονάδων τύπου A προς εγκατάσταση
s = ο αριθμός των μονάδων τύπου A προς επανεγκατάσταση

Η πρώτη ομάδα περιορισμών επιτρέπει στον κόμβο i να καταληφθεί πλήρως από μια μονάδα τύπου A ($Y_i = 1$), στην περίπτωση που η μονάδα είναι τοποθετημένη πιο κοντά στον κόμβο απ' ότι ο πλησιέστερος ανταγωνιστής ($x_j = 1$, $j \in N_i$).

Η δεύτερη ομάδα περιορισμών επιτρέπει στον κόμβο i να καταληφθεί μερικώς ($z_i = 1$), στην περίπτωση που υπάρχει μονάδα της εταιρείας A η οποία να βρίσκεται στην ίδια απόσταση με την πλησιέστερη μονάδα της εταιρείας C ($x_k = 1$, $k \in O_i$).

Η τρίτη ομάδα περιορισμών δεν επιτρέπει στον κόμβο i να είναι ταυτόχρονα και πλήρως και μερικώς κατειλημμένος. Όταν οι συνθήκες επιτρέπουν σε έναν κόμβο να είναι ταυτόχρονα και μερικώς και πλήρως κατειλημμένος, θα προτιμάται η πλήρης κατάληψή του.

Ο περιορισμός (5) ορίζει το σύνολο των μονάδων που θα τοποθετηθούν συμπεριλαμβανομένων και των παλαιών. Ο περιορισμός (6) ορίζει τον αριθμό των μονάδων που δεν μπορούν να επανεγκατασταθούν.

Η αντικειμενική συνάρτηση σε αυτό το μοντέλο, λαμβάνει υπόψη την επιλογή μονάδας του συνολικού πληθυσμού, μετά από την εγκατάσταση ή τη μετακίνηση μιας μονάδας. Επιπλέον, οι μονάδες οποιουδήποτε επιπέδου, προσφέρουν τουλάχιστον τις υπηρεσίες του κατώτερου επιπέδου. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο Ποταμιάνος θεωρεί m ιεραρχικά επίπεδα.

Για κάθε επίπεδο k υπάρχει ένας σκοπός: Η μεγιστοποίηση του πληθυσμού που καταλαμβάνεται για υπηρεσίες επιπέδου -k παρουσία των ανταγωνιστών.

Ως βάρος λk θεωρεί την επιλογή της πληθυσμιακής ομάδας για την k επιπέδου μονάδα, βάρος το οποίο είναι και ανάλογο της κερδοφορίας ανά μονάδα πληθυσμού.

3.1.3 **Ανταγωνιστική Χωροθέτηση των Μονάδων Ιεραρχικών Επιπέδων**

Σε ένα ανταγωνιστικό σύστημα, η κατάληψη κάποιου κόμβου ζήτησης επιτυγχάνεται με την εγκατάσταση μιας μονάδας πιο κοντά σε αυτόν από τη μονάδα του ανταγωνιστή.

Παρ’ όλ’ αυτά, οι μονάδες υψηλού ιεραρχικού επιπέδου, οι οποίες προσφέρουν μια μεγαλύτερη ποικιλία υπηρεσιών ή αγαθών, μπορεί να ασκούν μεγαλύτερη επιρροή σε σχέση με τις μικρότερου επιπέδου μονάδες. Αυτό σημαίνει ότι, αν μια μονάδα υψηλού επιπέδου της εταιρείας A είναι εγκατεστημένη πιο μακριά από τον κόμβο i σε σχέση με μια μονάδα χαμηλότερου επιπέδου της εταιρείας C, είναι πιθανό η μονάδα της εταιρείας A να εξυπηρετεί τη ζήτηση του κόμβου i ακόμα και για τις υπηρεσίες ή αγαθά επιπέδου της μονάδας της εταιρείας C.

Ως T_k ορίζεται η επιπλέον απόσταση που είναι διατεθειμένος ο πελάτης να διανύσει μέχρι μια μονάδα υψηλότερου επιπέδου για υπηρεσίες και αγαθά επιπέδου k. Η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη από την απόσταση που θα διένυε για να φτάσει σε μια μονάδα η οποία προσφέρει μέχρι k επιπέδου υπηρεσίες ή αγαθά, προκειμένου να τα αποκτήσει.

Επίσης θεωρείται κόμβος ζήτησης i και η μονάδα της εταιρείας C επιπέδου -k που βρίσκεται σε απόσταση dc. Μια μονάδα υψηλότερου επιπέδου της εταιρείας A σε απόσταση $d_C + T_k$ από τον κόμβο i θα ικανοποιήσει τη ζήτηση για επιπέδου-k υπηρεσίες ή αγαθά. Αντίθετα, μια επιπέδου-k μονάδα της εταιρείας A, η οποία θα είναι τοποθετημένη σε απόσταση d_A από έναν κόμβο ζήτησης i, δε θα ικανοποιήσει τη ζήτηση για τον κόμβο αυτό, στην περίπτωση που υπάρχει μια υψηλότερου επιπέδου μονάδα της εταιρείας C τοποθετημένη σε απόσταση $d_A + T_k$.

Η έννοια της ακριβούς απόστασης που είναι διατεθειμένος να διανύσει ένας πελάτης προς μια μονάδα υψηλότερου επιπέδου αποτελεί απλούστευση. Ένας πελάτης θα μπορούσε να διανύσει απόσταση T_k και κάποιος άλλος ίσως ακόμη μεγαλύτερη.

Ως S_{ik} ορίζεται η απόσταση μέσα στην οποία η εταιρεία A πρέπει να εγκαταστήσει μια μονάδα επιπέδου-k, προκειμένου να καλύψει τη ζήτηση του κόμβου i για επιπέδου-k υπηρεσίες ή αγαθά. Η απόσταση S_{ik} θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τα εξής:

- Τις θέσεις των ανταγωνιστριών μονάδων.
- Την επιρροή που ασκούν υψηλότερου επιπέδου μονάδες της εταιρείας C.

Αν d_k είναι η απόσταση του κόμβου i μέχρι την πλησιέστερη μονάδα της εταιρείας C επιπέδου-k και d_h είναι η απόσταση μέχρι την υψηλότερου επιπέδου μονάδα της εταιρείας C, τότε:

$$S_{ik} = \min(d_k,\ d_h - T_k).$$

Ο κόμβος i μπορεί να εξυπηρετηθεί για επιπέδου-k υπηρεσίες ή αγαθά, με την εγκατάσταση μιας επιπέδου-k μονάδας της εταιρείας Α μέσα σε απόσταση S_{ik} από αυτόν. Εναλλακτικά, μιας και οι υψηλότερου επιπέδου μονάδες της εταιρείας Α ασκούν και μεγαλύτερη επιρροή, ο κόμβος i μπορεί επίσης να εξυπηρετηθεί με την εγκατάσταση μιας μονάδας της εταιρείας Α επιπέδου υψηλότερου από k εντός απόστασης S_{ik} + T_k από τον κόμβο i.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα συστήματος δύο-επιπέδων, με το επίπεδο 2 να είναι το υψηλότερο.

Η κάλυψη της ζήτησης του κόμβου i από την εταιρεία Α για επιπέδου-1 υπηρεσίες ή αγαθά, απαιτεί την εξέταση τριών περιπτώσεων:

1. Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 1 βρίσκεται σε απόσταση d_1. Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 2 βρίσκεται σε απόσταση d_2 όπου $d_2 - T_1 > d_1$: $S_{i1} = d_1$. Ο κόμβος ζήτησης i καταλαμβάνεται από την εταιρεία Α σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ή ταυτόχρονα και στις δύο:
   a. Όταν υπάρχει μονάδα της εταιρείας Α επιπέδου-1 πλησιέστερα από την απόσταση S_{i1}.
   b. Όταν υπάρχει μονάδα της εταιρείας Α επιπέδου-2 πλησιέστερα από την απόσταση $S_{i1} + T_1$.

2. Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 1 βρίσκεται σε απόσταση d_1, και ταυτόχρονα υπάρχει επιπέδου 2 ανταγωνιστής σε απόσταση d_2 όπου $d_2 - T_1 < d_1$. Τότε ισχύει $S_{i1} = d_2 - T_1$. Ο κόμβος ζήτησης i καταλαμβάνεται από την εταιρεία Α σε επίπεδο 1 σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ή ταυτόχρονα και στις δύο:
   a. Όταν υπάρχει μονάδα της εταιρείας Α επιπέδου 1 πλησιέστερα από την απόσταση S_{i1}.
   b. Όταν υπάρχει μονάδα της εταιρείας Α επιπέδου 2 πλησιέστερα από την απόσταση $S_{i1} + T_1$ (που ισούται με d_2).

3. Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 2 βρίσκεται σε απόσταση d_2. Τότε ισχύει: $S_{i1} = d_2 - T_1$. Ο κόμβος ζήτησης i καταλαμβάνεται από την εταιρεία Α σε επίπεδο 1 σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ή ταυτόχρονα και στις δύο:
   a. Όταν υπάρχει μονάδα της εταιρείας Α επιπέδου 1 πλησιέστερα από την απόσταση S_{i1}.
   b. Όταν υπάρχει μονάδα της εταιρείας Α επιπέδου 2 πλησιέστερα από την απόσταση $S_{i1} + T_1$ (που ισούται με d_2).

Για επιπέδου-2 υπηρεσίες ή αγαθά, η εταιρεία Α θα εξυπηρετήσει τον κόμβο i (για επιπέδου 2 ζήτηση), μόνο αν υπάρχει επιπέδου-2 μονάδα της πλησιέστερα από μια επιπέδου-2 μονάδα της ανταγωνίστριας εταιρείας. Αν οι συνθήκες ισχύουν εξίσου και για τις δύο εταιρείες, τότε οι κόμβοι ζήτησης θα είναι μερικώς κατειλημμένοι.

Αν το πρόβλημα είχε τριών επιπέδων μονάδες θα διαμορφωνόταν ως εξής:

$$\max \quad Z = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \left(\sum_{i \in I} a_i y_i^k + \sum_{i \in I} \tfrac{1}{2} a_i z_i^k \right) \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad y_i^1 \leqslant \sum_{j \in N_i^1} x_j^1 + \sum_{j \in N_i^2} \left(x_j^2 + x_j^3 \right) \quad \forall i \in I, \tag{9}$$

$$z_i^1 \leqslant \sum_{j \in O_i^1} x_j^1 + \sum_{j \in O_i^2} \left(x_j^2 + x_j^3 \right) \quad \forall i \in I, \tag{10}$$

$$y_i^2 \leqslant \sum_{j \in P_i^2} x_j^2 + \sum_{j \in P_i^3} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{11}$$

$$z_i^2 \leqslant \sum_{j \in Q_i^2} x_j^2 + \sum_{j \in Q_i^3} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{12}$$

$$y_i^3 \leqslant \sum_{j \in R_i} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{13}$$

$$z_i^3 \leqslant \sum_{j \in W_i} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{14}$$

$$z_i^k + y_i^k \leqslant 1 \quad \forall i \in I, \ k = 1, 2, 3, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in J} x_j^k = r^k + p^k, \ k = 1, 2, 3, \tag{16}$$

$$\sum_{j \in J_A^k} x_j^k = p^k - s^k, \ k = 1, 2, 3, \tag{17}$$

$$y_i^k, \ z_i^k, \ x_j^k = 0, 1,$$

$$\forall i \in I, \ j \in J, \ k \in K. \tag{18}$$

Από τα επίπεδα ιεραρχίας που αναφέρονται, το 1 είναι το χαμηλότερο και το 3 το υψηλότερο.

Δεδομένου ότι ένας κόμβος ζήτησης i επιπέδου-1 μπορεί να εξυπηρετηθεί και από επιπέδου-2 ή επιπέδου-3 μονάδες, ορίζονται δυο σύνολα τοποθεσιών ως πιθανές για την εξυπηρέτηση του κόμβου i.

Το σύνολο N_i^1 είναι οι πιθανές μονάδες επιπέδου-1, οι οποίες βρίσκονται πλησιέστερα στον κόμβο από την απόσταση S_{i1}. Έτσι, αν οι επιπέδου-1 μονάδες είναι εγκατεστημένες σε τοποθεσίες που ανήκουν στο σύνολο N_i^1, ο κόμβος i εξυπηρετείται από την εταιρεία A για επιπέδου-1 υπηρεσίες ή αγαθά.

Το δεύτερο σύνολο, N_i^2, είναι το σύνολο των πιθανών μονάδων επιπέδου-2 ή επιπέδου-3, που βρίσκονται πλησιέστερα στον κόμβο i από την απόσταση $S_{i1} + T_1$. Δηλαδή, αν οι επιπέδου-2 ή επιπέδου-3 μονάδες είναι εγκατεστημένες σε τοποθεσίες που ανήκουν στο σύνολο N_i^2, ο κόμβος i εξυπηρετείται, για επιπέδου-1 ζήτηση, από υψηλότερου επιπέδου μονάδες, εξ αιτίας της μεγαλύτερης επιρροής που ασκούν αυτές οι μονάδες.

Παρόμοια, ορίζονται δύο σύνολα O_i^1 και O_i^2 για την περίπτωση της μερικής κάλυψης. Το σύνολο O_i^1 είναι οι πιθανές μονάδες επιπέδου-1 που βρίσκονται ακριβώς σε απόσταση S_{i1}, και το σύνολο O_i^2 είναι το σύνολο των πιθανών μονάδων επιπέδου-2 και επιπέδου-3 που βρίσκονται σε απόσταση $S_{i1} + T_1$.

Παράλληλα, σε όρους εξυπηρέτησης, σε επίπεδο-2 ορίζεται το σύνολο P_i^2, το οποίο περιέχει τις τοποθεσίες j που βρίσκονται πιο κοντά στο i σε σχέση με την απόσταση S_{i2}. Ορίζεται επίσης το σύνολο P_i^3 με τις πιθανές μονάδες επιπέδου-3, πλησιέστερα στον κόμβο i σε σχέση με την απόσταση $S_{i2} + T_2$.

Επιπλέον, το σύνολο Q_i^2 περιέχει εκείνες τις τοποθεσίες j που βρίσκονται ακριβώς στην ίδια απόσταση από τον κόμβο i όσο και η απόσταση S_{i2}, και το σύνολο Q_i^3 είναι το σύνολο των πιθανών επιπέδου-3 μονάδων ακριβώς στην απόσταση $S_{i2} + T_2$ από τον κόμβο i.

Τα σύνολα R_i περιέχουν εκείνες τις τοποθεσίες j οι οποίες βρίσκονται πλησιέστερα στο i απ' ότι ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου-3. Τα σύνολα W_i περιέχουν εκείνες τις τοποθεσίες που απέχουν ίση απόσταση από το i όσο και η απόσταση του πλησιέστερου επιπέδου-3 ανταγωνιστή.

Η σχέση (8) μεγιστοποιεί τον αριθμό των κόμβων που καταλαμβάνονται σε κάθε επίπεδο, με τη στάθμιση της κερδοφορίας λk από την κάλυψη του συγκεκριμένου επιπέδου, και τη στάθμιση του πληθυσμού του συγκεκριμένου κόμβου. Στην περίπτωση που ο κόμβος είναι μόνο μερικώς κατειλημμένος, ο πληθυσμός διαιρείται δια του 2.

Το σύνολο των περιορισμών (9) δείχνει την κάλυψη σε επίπεδο 1: Ο κόμβος i θα είναι κατειλημμένος σε επίπεδο-1 (Y_{i1} = 1) αν ένα ή περισσότερα $x_j^1 = 1$, j Є N_i^1, ή ένα ή περισσότερα $x_j^I = 1$, j Є N_i^2, όπου το I είναι είτε 2 είτε 3, που σημαίνει επίπεδο υψηλότερο από το 1.

Οι εξισώσεις (10) ορίζουν ότι ένας κόμβος i είναι μερικώς κατειλημμένος σε επίπεδο-1 ($zi^1 = 1$) αν υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_j^1 = 1$, j Є O_i^1, ή τουλάχιστον ένα $x_j^I = 1$, j Є Oi^2 όπου I = 2 ή 3.

Οι εξισώσεις (11) και (12) ορίζουν την κάλυψη σε επίπεδο-2, με τον ίδιο τρόπο που οι (9) και (10) ορίζουν για επίπεδο-1, και οι (13) και (14) ορίζουν τις συνθήκες για την κάλυψη σε επίπεδο-3.

Ο περιορισμός (15) εξαναγκάζει έναν κόμβο i να είναι είτε πλήρως κατειλημμένος από την εταιρεία Α για κάθε επίπεδο ($y_i^k = 1$), είτε μερικώς κατειλημμένος για το ίδιο επίπεδο ($z_i^k = 1$). Η σχέση (16) περιορίζει τον αριθμό των μονάδων της εταιρείας Α που εγκαθίστανται σε κάθε ιεραρχικό επίπεδο.

Τέλος, η σχέση (17) εξαναγκάζει έναν συγκεκριμένο αριθμό μονάδων να παραμείνουν στην τοποθεσία τους, καθώς το J_A^k είναι το υπάρχον σετ τοποθεσιών μονάδων επιπέδου-k της εταιρείας Α.

Όλες οι μεταβλητές του προβλήματος παίρνουν δυαδικές τιμές, δηλαδή είτε την τιμή 0 είτε την τιμή 1. Παρ' όλ' αυτά, αποδεικνύεται ότι, αν χρησιμοποιηθεί μια γραμμική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος, κάποιες από τις μεταβλητές δε χρειάζεται να δηλωθούν ακέραιες, καθώς θα πάρουν ακέραια τιμή από τη διαδικασία επίλυσης.

Το μοντέλο μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να έχει ως σκοπό τη μεγιστοποίηση του πληθυσμού που καλύπτεται από όλα τα επίπεδα m ταυτόχρονα. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή δύο νέων μεταβλητών των u_i και w_i που παίρνουν τιμές 0 ή 1. Η τιμή της u_i θα είναι 1 αν ο κόμβος i είναι πλήρως κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα από την εταιρεία Α και η τιμή της w_i θα είναι 1 αν ο κόμβος i είναι τουλάχιστον μερικώς κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα από την εταιρεία Α. Οι κόμβοι που είναι μερικώς κατειλημμένοι σε κάποια επίπεδα και πλήρως κατειλημμένοι σε άλλα, θεωρούνται γενικά μερικώς κατειλημμένοι.

Επιπλέον, θα πρέπει να προστεθούν και οι ακόλουθοι περιορισμοί:

$$u_i \leqslant y_i^k \quad \forall i \in I, \; k = 1, 2, 3, \tag{19}$$

$$w_i \leqslant z_i^k + y_i^k \quad \forall i \in I, \; k = 1, 2, 3, \tag{20}$$

and replacing constraint (15) by

$$u_i + w_i \leqslant 1 \quad \forall i \in I. \tag{21}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, η αντικειμενική γίνεται:

$$\max \quad Z = \sum_{i \in I} \left(a_i u_i + \tfrac{1}{2} a_i w_i \right). \tag{22}$$

Ο περιορισμός (19), αναγκάζει τη μεταβλητή συνολικής κάλυψης u να είναι μηδέν, εκτός αν ο κόμβος i είναι κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα. Κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν οι μεταβλητές y_i^k είναι 1 για κάθε k. Ο περιορισμός (20) αναγκάζει τη μεταβλητή μερικής κάλυψης να είναι μηδέν, εκτός αν ο κόμβος i είναι τουλάχιστον μερικώς κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα. Ο περιορισμός (21) δεν επιτρέπει στους κόμβους να είναι ταυτόχρονα και μερικώς και πλήρως κατειλημμένοι.

Ένα μειονέκτημα των παραπάνω είναι ότι, αν από τη λύση προκύπτει ότι ένας κόμβος i είναι κατειλημμένος σε ένα επίπεδο από την ανταγωνίστρια εταιρεία, η κάλυψή του σε άλλα επίπεδα δε βελτιώνει την αντικειμενική. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το μοντέλο να μην επιχειρεί την κάλυψή του σε άλλα επίπεδα.

Το κόστος εγκατάστασης νέων μονάδων, το οποίο πιθανόν να βαίνει αυξανόμενο όσο αυξάνεται και το επίπεδο των μονάδων, μπορεί να περιγραφεί σε μια ξεχωριστή αντικειμενική:

$$\min \quad Z_2 = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_j^k x_j^k \tag{23}$$

όπου c^k_j είναι το κόστος εγκατάστασης μιας μονάδας επιπέδου k στην τοποθεσία j.

3.1.4 Επίλυση

Σύμφωνα με τον Ποταμιάνο, τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι πραγματικά δεδομένα, ελήφθησαν από μεγάλη ελληνική τράπεζα και αφορούν στη χωροθέτηση καταστημάτων στο Νομό Αττικής.

Οι αποστάσεις των τραπεζικών καταστημάτων από τα σημεία ζήτησης, είναι σε μέτρα.

Αρχικά θεωρείται ότι ένας κόμβος ζήτησης μπορεί να εξυπηρετηθεί από ένα κατάστημα, όταν αυτό απέχει λιγότερο από ένα χιλιόμετρο από τον κόμβο. Έτσι, οι αποστάσεις που αναφέρονται στον Πίνακα 1 του Παραρτήματος, συγκρίνονται με την τιμή 1000m και προκύπτει ο Πίνακας 2 του Παραρτήματος. Η τιμή 1 αναφέρεται στη δυνατότητα εξυπηρέτησης του κόμβου ζήτησης από κάθε σημείο προσφοράς, ενώ η τιμή 0 υποδηλώνει ότι η απόσταση είναι μεγαλύτερη από αυτή που έχει οριστεί ως εφικτή για την κάλυψη του κόμβου ζήτησης από το αντίστοιχο σημείο προσφοράς.

Οι εξισώσεις που εκφράζουν το πρόβλημα είναι αυτές που έχουν ήδη αναφερθεί:

$$\text{I. Maximize} \quad z = \sum_{i \in I} a_i y_i$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j \in N_i} x_j \geq y_i \quad \text{for all } i \in I$$

$$\sum_{j \in J} x_j = P$$

$$x_j = (0, 1) \quad \text{for all } j \in J$$

$$y_i = (0, 1) \quad \text{for all } i \in I$$

Όπου:
I: το σύνολο των κόμβων ζήτησης
J: το σύνολο των σημείων προσφοράς (τραπεζικά καταστήματα)
S: Η απόσταση η οποία ορίζει ένα σημείο ζήτησης ως μη καλυπτόμενο
D_{ij}: η πλησιέστερη απόσταση του κόμβου i από το σημείο j
x_j = 1 αν ένα κατάστημα εγκαθίσταται στο σημείο j και 0 διαφορετικά
p = ο αριθμός των καταστημάτων προς χωροθέτηση
a_i:ο πληθυσμός που εξυπηρετείται στον κόμβο ζήτησης j
N_i: το σύνολο των τοποθεσιών που είναι δυνατό λόγω απόστασης να καλύψουν τα σημεία ζήτησης.

Στη συνέχεια, ο Ποταμιάνος επιλύει το πρόβλημα με τη βοήθεια του προγράμματος Microsoft Excel, και συγκεκριμένα με τη χρήση του εργαλείου επίλυσης (solver). Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή η βέλτιστη δυνατή κάλυψη των σημείων ζήτησης, δεδομένου ενός συγκεκριμένου αριθμού τραπεζικών καταστημάτων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, τα καταστήματα είναι 20.

Η εγκατάσταση ή μη τραπεζικού καταστήματος σε κάποιο εν δυνάμει σημείο προσφοράς, καθώς και η κάλυψη ή μη κάθε κόμβου ζήτησης, θεωρούνται ως δυαδικές μεταβλητές. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται στον Πίνακα 3 του Παραρτήματος:

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 3, δείχνουν ότι καλύπτονται όλα τα σημεία ζήτησης (αφού όλα τα y_i είναι 1). Επίσης, τοποθετούνται συνολικά 6 τραπεζικά καταστήματα.

Επόμενο βήμα, είναι η επίλυση του προβλήματος του μοντέλου της ανταγωνιστικής χωροθέτησης.

Θεωρούμε ότι η εταιρία C (τράπεζα C), η οποία αναφέρθηκε στην περιγραφή του μοντέλου, εφαρμόζει το συγκεκριμένο σύστημα για την καλύτερη χωροθέτηση των καταστημάτων της. Επίσης και η τράπεζα Α, δεδομένων των θέσεων των καταστημάτων της C, εφαρμόζει το μοντέλο ανταγωνιστικής χωροθέτησης.

Η μαθηματική περιγραφή του μοντέλου είναι:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} \tfrac{1}{2} a_i z_i \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad y_i \leqslant \sum_{j \in N_i} x_j \quad \forall i \in I, \tag{2}$$

$$z_i \leqslant \sum_{k \in O_i} x_k \quad \forall i \in I, \tag{3}$$

$$z_i + y_i \leqslant 1 \quad \forall i \in I, \tag{4}$$

$$\sum_{j \in J} x_j = r + p, \tag{5}$$

$$\sum_{j \in J_A} x_j = p - s, \tag{6}$$

$$y_i,\ z_i,\ x_j = 0, 1, \quad \forall i \in I,\ j \in J \tag{7}$$

Αρχικά, ο μέγιστος αριθμός τραπεζικών καταστημάτων που μπορεί να εγκαταστήσει η τράπεζα A (καθώς τόσα έχει εγκαταστήσει η C), ορίζεται στο 6. Στη συνέχεια, με το εργαλείο επίλυσης του Excel γίνεται μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, θεωρώντας έναν κόμβο πλήρως κατειλημμένο από την τράπεζα A ($Y_i = 1$), στην περίπτωση που υπάρχει κατάστημά της πιο κοντά στον κόμβο από ότι της C. Επιπροσθέτως, ένας κόμβος θεωρείται μερικώς κατειλημμένος ($z_i = 1$), αν υπάρχει κατάστημα της A στην ίδια απόσταση από τον κόμβο με την αντίστοιχη απόσταση καταστήματος της C από τον ίδιο κόμβο.

Στη συνέχεια εισάγεται κατάλληλος περιορισμός, έτσι ώστε να μην επιτρέπεται σε έναν κόμβο i να είναι ταυτόχρονα και πλήρως και μερικώς κατειλημμένος, και διατηρούνται οι δυαδικές μεταβλητές του προηγούμενου προβλήματος με την προσθήκη της z_i. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 4 του Παραρτήματος.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι, για να μεγιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση, από τα 6 καταστήματα τα οποία είναι διαθέσιμα, τα 5 τοποθετούνται σε σημεία που ήδη δραστηριοποιούνται καταστήματα της τράπεζας C. Υποθέτοντας ότι διατηρούνται τα 3 από τα 6 καταστήματα σταθερά, και επιτρέποντας στα υπόλοιπα 3 να επανεγκατασταθούν, και αν ταυτόχρονα αυξηθούν κατά 2 τα συνολικά καταστήματα της τράπεζας A, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5 του Παραρτήματος.

Παρατηρούμε ότι, για να μεγιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση από τα 8 συνολικά καταστήματα της τράπεζας A (νέα και υπάρχοντα), τα τρία τοποθετούνται σε κοινά σημεία με την τράπεζα C, και τα 5 σε διαφορετικά, μεγιστοποιώντας έτσι την κάλυψη της συνολικής ζήτησης.

3.1.5 Μέθοδος Χωροθέτησης Ανταγωνιστικών Τραπεζικών Καταστημάτων ανά Ιεραρχικό Επίπεδο Υπηρεσιών

Όπως αναφέρθηκε στην περιγραφή του μοντέλου, γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχουν τρία ιεραρχικά επίπεδα τραπεζικών καταστημάτων, ανάλογα με τις παρεχόμενες υπηρεσίες. Αναφέρθηκε επίσης ότι, τα υψηλότερου ιεραρχικού επιπέδου καταστήματα ασκούν μεγαλύτερη επιρροή σε σχέση με τις μικρότερου επιπέδου καταστήματα. Έτσι, είναι δυνατόν ένα κατάστημα υψηλού επιπέδου της τράπεζας A, εγκατεστημένο πιο μακριά από τον κόμβο i σε σχέση με ένα κατάστημα χαμηλότερου επιπέδου της τράπεζας C, είναι πιθανό να εξυπηρετεί τη ζήτηση του κόμβου i ακόμα και για τις υπηρεσίες της τράπεζας C. Η μαθηματική περιγραφή του μοντέλου συνοπτικά είναι:

$$\max \quad Z=\sum_{k=1}^{3} \lambda_k\left(\sum_{i \in I} a_i y_i^k+\sum_{i \in I} \tfrac{1}{2} a_i z_i^k\right) \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad y_i^1 \leqslant \sum_{j \in N_i^1} x_j^1+\sum_{j \in N_i^2}\left(x_j^2+x_j^3\right) \quad \forall i \in I, \tag{9}$$

$$z_i^1 \leqslant \sum_{j \in O_i^1} x_j^1+\sum_{j \in O_i^2}\left(x_j^2+x_j^3\right) \quad \forall i \in I, \tag{10}$$

$$y_i^2 \leqslant \sum_{j \in P_i^2} x_j^2+\sum_{j \in P_i^3} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{11}$$

$$z_i^2 \leqslant \sum_{j \in Q_i^2} x_j^2+\sum_{j \in Q_i^3} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{12}$$

$$y_i^3 \leqslant \sum_{j \in R_i} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{13}$$

$$z_i^3 \leqslant \sum_{j \in W_i} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{14}$$

$$z_i^k+y_i^k \leqslant 1 \quad \forall i \in I,\ k=1,2,3, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in J} x_j^k=r^k+p^k,\ k=1,2,3, \tag{16}$$

$$\sum_{j \in J_A^k} x_j^k=p^k-s^k,\ k=1,2,3, \tag{17}$$

$$y_i^k,\ z_i^k,\ x_j^k=0,1,$$

$$\forall i \in I,\ j \in J,\ k \in K. \tag{18}$$

Όπως αναφέρθηκε, από τα επίπεδα ιεραρχίας, το 1 είναι το χαμηλότερο και το 3 το υψηλότερο. Θεωρείται ότι, τα τραπεζικά καταστήματα επιπέδου 1 μπορούν να προτιμηθούν από πελάτες σε απόσταση μέχρι και 1000 μέτρα, τα καταστήματα επιπέδου 2 μπορούν να προτιμηθούν από πελάτες σε απόσταση μέχρι και 1200 μέτρα και, τέλος, τα καταστήματα επιπέδου 3 από πελάτες σε απόσταση μέχρι και 1300 μέτρα.

Αρχικά λύνεται το πρόβλημα της χωροθέτησης των καταστημάτων ιεραρχικών επιπέδων, με δεδομένο ότι μπορούν να εγκατασταθούν μέχρι και 6. Η διάκριση των κόμβων σε μερικώς και πλήρως κατειλημμένους, γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι περιορισμοί είναι οι ίδιοι μόνο που τροποποιούνται ώστε να καλύπτουν τα καταστήματα και των τριών επιπέδων. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών παρουσιάζονται στον Πίνακα 6 του Παραρτήματος.

Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι μπορούν να χωροθετηθούν 3 καταστήματα. Στη συνέχεια, αν διατηρηθούν τα 2 τραπεζικά καταστήματα επιπέδου-1 και επιπέδου-2, και δοθεί η δυνατότητα εγκατάστασης ενός ακόμη καταστήματος (δηλαδή 4 συνολικά) οποιουδήποτε επιπέδου, προκύπτουν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 7 του Παραρτήματος.

Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι, καλύπτεται όλη η ζήτηση και η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνεται (45). Επιπλέον, χωροθετούνται 2 νέα καταστήματα, επιπέδου-1 και επιπέδου-2.

4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κουτσόπουλος Κ., Οι Γεωγραφικές Μέθοδοι των Χωροθετήσεων-Κατανομών σε Περιφερειακή Ανάπτυξη, Τεχνικά χρονικά, **1**, 25-48, 1981.
2. Λουκάκης Ιωάννης, «Το Πρόβλημα Χωροθέτησης των Μονάδων Πυρόσβεσης – Διάσωσης: Θεωρία και Μεθοδολογία της Έρευνας»», Διπλωματική Εργασία, Κατεύθυνση «Διαχείριση Φυσικών και Ανθρωπογενών Καταστροφών», Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Εφαρμοσμένη Γεωγραφία και Διαχείριση του Χώρου», Τμήμα Γεωγραφίας, Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο, 2010.
3. Παπλά Νεκταρία – Κονδύλω, Πολυκριτηριακή Ανάλυση και Χωροθέτηση Τραπεζικών Καταστημάτων, Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα ΜΒΑ «Νέες Αρχές Διοίκησης Επιχειρήσεων», Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων, Πάτρα 2009.
4. Ποταμιάνος Βαγγέλης, Μοντέλα Ανταγωνιστικής Χωροθέτησης: Εφαρμογή Μέγιστης Ιεραρχικής Κάλυψης Σε Τραπεζικά Καταστήματα, Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα ΜΒΑ «Νέες Αρχές Διοίκησης Επιχειρήσεων», Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων, Πάτρα 2010.
5. Beasley J. E., “An algorithm for set covering problem”, *European Journal of Operational Research*, **31**, 85-93, 1987.
6. Beasley J. E. and Chu P.C., “A genetic algorithm for the set covering problem”, *European Journal of Operational Research*, **94**, 392-404, 1996.
7. Bozkaya B., Zhang J., and Erkut E., Facility Location: Application and theory, chapter 6 An Efficient Genetic Algorithm for the p-median Problem, pages 179–205, Springer-Verlag, 2002.
8. Christofides N., Graph Theory an Algorithm Approach, Academic Press, 1975 (βλ. 2).
9. Church R. L. and ReVelle C. S., The maximal covering location problem, *Papers of the Regional Science Association*, 32:101–118, 1974.
10. Daskin M. S. and Owen S. H., *Two New Location Covering Problems: The Partial P-Center Problem and the Partial Set Covering Problem, Geographical Analysis,* **31**, 3, 217-235, 1999.
11. Dee N., Liebman J., Optimal Location of Public Facilities, *Naval Research Logistics Quarterly*, **19**, 753-759, 1972.
12. Goldman A. L., Optimal Center Location in Simple Network, *Transportation Scienmce*, **5**, 212-221, 1971 (βλ. 2).
13. Gouwanda D., and Ponnambalam S. G., Evolutionary Search Techniques to Solve Set Covering Problems, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **39**, 2008.
14. Hakimi S. L., Optimum Locations of Switching Centers And The Absolute Centers And Medians Of A Graph, *European Journal of Operations Research*, 12(3):450–459, 1964 (βλ. 2).
15. Hakimi S., Optimum distribution of switching centers in a communications network and some related graph theoretic problems, *European Journal of Operations Research*, 13:462–475, 1965.
16. Krarup J. and Pruzan P. M., The simple plant location problem: Survey and synthesis, *European Journal of Operations Research*, 12:36–81, 1983.
17. Lawrence V. S., Facility Location Under Uncertainty: A Review, *IIE Transactions*, 38(7), 537-554, 2006.
18. Love R., Morris J., Wesolowsky G., Facilities Locations models and Methods, North Holland, 1998 (βλ. 2).

19. Moscibroda T., Wattenhofer R., Facility Location: Distributed Approximation, *PODC'05 (Proceedings of the twenty-fourth annual ACM symposium on Principles of distributed computing),* Las Vegas, Nevada, 2005.
20. Moujahed S., Simonin O., Koukam A., Ghédira K., A Reactive agent Based Approach to Facility Location: Application to Transport, *AAMAS'06*, May 8–12, 2006.
21. Owen S. H., Daskin M. S., Strategic Facility Location: A review, *European Journal of Operations Research III*, 423-447, 1998 (βλ. 2).
22. Re Velle C., Eiselt H. A., Location Analysis: A Synthesis and Survey, *European Journal of Operational Research*, 165, 1-19, 2005 (βλ. 2).
23. Seppala U., An Evolutionary Model for Spatial Location of Economic Facilities, Interim Report IR-97-003, *International Institute for Applied Analysis*, 1997 (βλ. 2).
24. Serra D., Marianov V. and ReVelle C., The Maximum-Capture Hierarchical Location Problem, *European Journal of Operational Research*, **62**, 363-371, 1992.
25. Swain R., A Parametric Decomposition Approach for the Solution of Uncapacitated Location Problems, *Management Science*, **21**, 189-198, 1975 (βλ. 2).
26. Toregas C., Swain R., ReVelle C. S., and Bergman L., The location of emergency service facilities, *European Journal of Operations Research*, 19:1363–1373, 1971.
27. Zografos K.G., Cromley R., Levinson H.S., Multiobjective Hierarchical Model For Locating Public Facilities on Transoprtation Network: A Goal 140 Programming Approach, *Journal of Advanced Transportation*, **25**, 3, 329-355, 1991 (βλ. 2).
28. Zografos K.G., Samaras S., Combined Location-Routing Model For Hazardous Waste Transportation and Disposal, *Transportation Research Record*, 1245, 52-59, 1989 (βλ. 2).

5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 1: Αποστάσεις.

UID	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	337	828	1341	1834	2332	2827	3334
1	337	0	494	1006	1498	1997	2491	2999
2	828	494	0	513	1005	1504	1998	2505
3	1341	1006	513	0	493	991	1486	1993
4	1834	1498	1005	493	0	499	993	1501
5	2332	1997	1504	991	499	0	495	1003
6	2827	2491	1998	1486	993	495	0	508
7	3334	2999	2505	1993	1501	1003	508	0
8	3831	3496	3003	2490	1998	1500	1005	498
9	4316	3981	3488	2976	2484	1986	1491	983
10	4619	4285	3791	3279	2788	2291	1796	1289
11	274	484	913	1412	1899	2392	2882	3384
12	444	353	613	1086	1564	2052	2539	3039
13	878	605	352	644	1092	1568	2049	2545
14	1358	1052	609	388	660	1098	1565	2055
15	1849	1532	1057	622	425	672	1095	1571
16	2344	2022	1538	1059	652	445	672	1100
17	2841	2516	2028	1536	1081	666	450	674
18	3338	3012	2522	2023	1554	1091	674	445
19	3836	3509	3018	2516	2039	1561	1098	665
20	4335	4007	3515	3011	2530	2045	1568	1089
21	4769	4441	3950	3445	2964	2477	1995	1506
22	834	994	1304	1738	2189	2654	3122	3607
23	866	853	989	1348	1767	2215	2673	3151
24	1151	984	852	1026	1366	1776	2213	2679
25	1549	1308	986	888	1054	1378	1774	2218
26	1993	1718	1311	1012	925	1070	1378	1778
27	2459	2166	1722	1327	1049	945	1073	1381
28	2936	2633	2171	1731	1358	1067	950	1072
29	3420	3110	2638	2175	1758	1373	1075	945
30	3908	3594	3116	2640	2198	1769	1381	1066
31	4370	4052	3570	3085	2630	2178	1746	1341
32	4716	4393	3905	3409	2938	2463	1999	1537
33	1137	1247	1474	1849	2262	2700	3147	3615
34	1306	1309	1393	1670	2026	2426	2847	3296
35	1509	1403	1311	1441	1709	2054	2443	2870
36	1793	1607	1365	1316	1452	1713	2051	2449
37	2143	1902	1549	1320	1270	1390	1645	1995
38	2615	2348	1942	1604	1388	1310	1402	1643
39	3120	2842	2416	2033	1731	1512	1427	1502
40	3570	3283	2840	2423	2065	1755	1535	1445
41	4021	3724	3268	2826	2430	2058	1742	1508
42	4342	4037	3568	3105	2679	2264	1883	1551
43	3399	3135	2727	2366	2081	1866	1756	1773
44	3734	3465	3045	2663	2345	2077	1892	1815
45	4041	3761	3326	2918	2563	2243	1985	1815

Πίνακας 1 (Συνέχεια).

8	9	10	11	12	13	14	15	16
3831	4316	4619	274	444	878	1358	1849	2344
3496	3981	4285	484	353	605	1052	1532	2022
3003	3488	3791	913	613	352	609	1057	1538
2490	2976	3279	1412	1086	644	388	622	1059
1998	2484	2788	1899	1564	1092	660	425	652
1500	1986	2291	2392	2052	1568	1098	672	445
1005	1491	1796	2882	2539	2049	1565	1095	672
498	983	1289	3384	3039	2545	2055	1571	1100
0	488	797	3882	3536	3042	2549	2061	1579
488	0	310	4361	4014	3518	3022	2529	2038
797	310	0	4660	4311	3813	3316	2820	2326
3882	4361	4660	0	354	853	1353	1853	2353
3536	4014	4311	354	0	500	1000	1500	2000
3042	3518	3813	853	500	0	500	1000	1500
2549	3022	3316	1353	1000	500	0	500	1000
2061	2529	2820	1853	1500	1000	500	0	500
1579	2038	2326	2353	2000	1500	1000	500	0
1114	1554	1834	2853	2500	2000	1500	1000	500
698	1085	1350	3353	3000	2500	2000	1500	1000
485	661	882	3853	3500	3000	2500	2000	1500
695	445	484	4353	4000	3500	3000	2500	2000
1067	656	446	4786	4433	3933	3433	2933	2433
4097	4562	4848	561	699	1099	1558	2036	2523
3639	4100	4384	637	500	707	1118	1581	2062
3160	3615	3895	1004	707	500	707	1118	1581
2690	3135	3410	1453	1118	707	500	707	1118
2232	2663	2930	1927	1581	1118	707	500	707
1797	2202	2458	2412	2062	1581	1118	707	500
1406	1764	2000	2901	2550	2062	1581	1118	707
1106	1368	1567	3394	3041	2550	2062	1581	1118
985	1064	1189	3889	3536	3041	2550	2062	1581
1077	928	925	4357	4003	3508	3013	2521	2032
1153	822	680	4718	4364	3866	3367	2869	2373
4095	4547	4825	864	914	1208	1607	2052	2517
3766	4206	4476	1056	957	1068	1367	1759	2196
3329	3758	4021	1309	1083	959	1080	1383	1777
2892	3308	3565	1641	1349	1044	928	1064	1380
2416	2817	3066	2036	1709	1299	975	846	990
2009	2369	2599	2532	2194	1745	1334	1008	866
1760	2043	2235	3045	2704	2245	1808	1413	1107
1568	1751	1895	3507	3162	2693	2236	1803	1414
1470	1517	1592	3969	3621	3143	2673	2216	1782
1380	1299	1306	4306	3955	3468	2985	2510	2046
1965	2182	2335	3306	2973	2532	2118	1750	1462
1918	2060	2172	3647	3311	2863	2436	2042	1705
1823	1882	1950	3965	3625	3165	2720	2297	1912

Πίνακας 1 (Συνέχεια).

17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
2841	3338	3836	4335	4769	834	866	1151	1549
2516	3012	3509	4007	4441	994	853	984	1308
2028	2522	3018	3515	3950	1304	989	852	986
1536	2023	2516	3011	3445	1738	1348	1026	888
1081	1554	2039	2530	2964	2189	1767	1366	1054
666	1091	1561	2045	2477	2654	2215	1776	1378
450	674	1098	1568	1995	3122	2673	2213	1774
674	445	665	1089	1506	3607	3151	2679	2218
1114	698	485	695	1067	4097	3639	3160	2690
1554	1085	661	445	656	4562	4100	3615	3135
1834	1350	882	484	446	4848	4384	3895	3410
2853	3353	3853	4353	4786	561	637	1004	1453
2500	3000	3500	4000	4433	699	500	707	1118
2000	2500	3000	3500	3933	1099	707	500	707
1500	2000	2500	3000	3433	1558	1118	707	500
1000	1500	2000	2500	2933	2036	1581	1118	707
500	1000	1500	2000	2433	2523	2062	1581	1118
0	500	1000	1500	1933	3014	2550	2062	1581
500	0	500	1000	1433	3508	3041	2550	2062
1000	500	0	500	934	4003	3536	3041	2550
1500	1000	500	0	435	4499	4031	3536	3041
1933	1433	934	435	0	4926	4457	3960	3464
3014	3508	4003	4499	4926	0	470	970	1470
2550	3041	3536	4031	4457	470	0	500	1000
2062	2550	3041	3536	3960	970	500	0	500
1581	2062	2550	3041	3464	1470	1000	500	0
1118	1581	2062	2550	2969	1970	1500	1000	500
707	1118	1581	2062	2476	2470	2000	1500	1000
500	707	1118	1581	1987	2970	2500	2000	1500
707	500	707	1118	1505	3470	3000	2500	2000
1118	707	500	707	1041	3970	3500	3000	2500
1551	1087	677	484	639	4444	3974	3474	2974
1877	1386	903	459	265	4829	4359	3860	3361
2993	3476	3963	4453	4873	329	501	936	1415
2655	3126	3606	4090	4504	659	457	660	1078
2215	2674	3146	3626	4036	1068	682	459	676
1782	2224	2686	3160	3567	1505	1068	642	429
1321	1734	2185	2653	3056	1982	1525	1044	596
992	1311	1718	2165	2555	2509	2048	1559	1079
977	1088	1383	1772	2129	3025	2566	2076	1594
1118	1000	1118	1414	1726	3503	3041	2550	2062
1393	1098	986	1112	1340	3981	3518	3024	2531
1605	1209	922	859	990	4345	3878	3381	2884
1309	1337	1537	1854	2162	3239	2791	2316	1855
1463	1370	1454	1688	1945	3587	3138	2661	2194
1592	1384	1339	1474	1674	3926	3472	2989	2513

Πίνακας 1 (Συνέχεια).

26	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**
1993	2459	2936	3420	3908	4370	4716	1137	1306
1718	2166	2633	3110	3594	4052	4393	1247	1309
1311	1722	2171	2638	3116	3570	3905	1474	1393
1012	1327	1731	2175	2640	3085	3409	1849	1670
925	1049	1358	1758	2198	2630	2938	2262	2026
1070	945	1067	1373	1769	2178	2463	2700	2426
1378	1073	950	1075	1381	1746	1999	3147	2847
1778	1381	1072	945	1066	1341	1537	3615	3296
2232	1797	1406	1106	985	1077	1153	4095	3766
2663	2202	1764	1368	1064	928	822	4547	4206
2930	2458	2000	1567	1189	925	680	4825	4476
1927	2412	2901	3394	3889	4357	4718	864	1056
1581	2062	2550	3041	3536	4003	4364	914	957
1118	1581	2062	2550	3041	3508	3866	1208	1068
707	1118	1581	2062	2550	3013	3367	1607	1367
500	707	1118	1581	2062	2521	2869	2052	1759
707	500	707	1118	1581	2032	2373	2517	2196
1118	707	500	707	1118	1551	1877	2993	2655
1581	1118	707	500	707	1087	1386	3476	3126
2062	1581	1118	707	500	677	903	3963	3606
2550	2062	1581	1118	707	484	459	4453	4090
2969	2476	1987	1505	1041	639	265	4873	4504
1970	2470	2970	3470	3970	4444	4829	329	659
1500	2000	2500	3000	3500	3974	4359	501	457
1000	1500	2000	2500	3000	3474	3860	936	660
500	1000	1500	2000	2500	2974	3361	1415	1078
0	500	1000	1500	2000	2474	2862	1904	1546
500	0	500	1000	1500	1974	2364	2398	2029
1000	500	0	500	1000	1474	1866	2894	2518
1500	1000	500	0	500	974	1370	3391	3011
2000	1500	1000	500	0	474	879	3889	3506
2474	1974	1474	974	474	0	426	4363	3979
2862	2364	1866	1370	879	426	0	4760	4382
1904	2398	2894	3391	3889	4363	4760	0	417
1546	2029	2518	3011	3506	3979	4382	417	0
1097	1565	2049	2538	3031	3503	3908	887	480
674	1107	1580	2066	2557	3028	3435	1357	956
346	620	1072	1553	2044	2515	2922	1860	1466
632	366	607	1050	1529	1995	2408	2391	1994
1127	706	477	675	1089	1534	1957	2899	2498
1581	1118	707	500	707	1103	1528	3379	2977
2043	1562	1098	686	486	701	1113	3862	3461
2388	1895	1406	930	502	381	742	4237	3841
1420	1044	816	861	1147	1533	1957	3085	2673
1747	1336	1011	870	996	1307	1720	3431	3020
2048	1604	1205	912	843	1042	1432	3779	3369

Πίνακας 1 (Συνέχεια).

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1509	1793	2143	2615	3120	3570	4021	4342	3399	3734	4041
1403	1607	1902	2348	2842	3283	3724	4037	3135	3465	3761
1311	1365	1549	1942	2416	2840	3268	3568	2727	3045	3326
1441	1316	1320	1604	2033	2423	2826	3105	2366	2663	2918
1709	1452	1270	1388	1731	2065	2430	2679	2081	2345	2563
2054	1713	1390	1310	1512	1755	2058	2264	1866	2077	2243
2443	2051	1645	1402	1427	1535	1742	1883	1756	1892	1985
2870	2449	1995	1643	1502	1445	1508	1551	1773	1815	1815
3329	2892	2416	2009	1760	1568	1470	1380	1965	1918	1823
3758	3308	2817	2369	2043	1751	1517	1299	2182	2060	1882
4021	3565	3066	2599	2235	1895	1592	1306	2335	2172	1950
1309	1641	2036	2532	3045	3507	3969	4306	3306	3647	3965
1083	1349	1709	2194	2704	3162	3621	3955	2973	3311	3625
959	1044	1299	1745	2245	2693	3143	3468	2532	2863	3165
1080	928	975	1334	1808	2236	2673	2985	2118	2436	2720
1383	1064	846	1008	1413	1803	2216	2510	1750	2042	2297
1777	1380	990	866	1107	1414	1782	2046	1462	1705	1912
2215	1782	1321	992	977	1118	1393	1605	1309	1463	1592
2674	2224	1734	1311	1088	1000	1098	1209	1337	1370	1384
3146	2686	2185	1718	1383	1118	986	922	1537	1454	1339
3626	3160	2653	2165	1772	1414	1112	859	1854	1688	1474
4036	3567	3056	2555	2129	1726	1340	990	2162	1945	1674
1068	1505	1982	2509	3025	3503	3981	4345	3239	3587	3926
682	1068	1525	2048	2566	3041	3518	3878	2791	3138	3472
459	642	1044	1559	2076	2550	3024	3381	2316	2661	2989
676	429	596	1079	1594	2062	2531	2884	1855	2194	2513
1097	674	346	632	1127	1581	2043	2388	1420	1747	2048
1565	1107	620	366	706	1118	1562	1895	1044	1336	1604
2049	1580	1072	607	477	707	1098	1406	816	1011	1205
2538	2066	1553	1050	675	500	686	930	861	870	912
3031	2557	2044	1529	1089	707	486	502	1147	996	843
3503	3028	2515	1995	1534	1103	701	381	1533	1307	1042
3908	3435	2922	2408	1957	1528	1113	742	1957	1720	1432
887	1357	1860	2391	2899	3379	3862	4237	3085	3431	3779
480	956	1466	1994	2498	2977	3461	3841	2673	3020	3369
0	476	988	1515	2018	2497	2981	3361	2197	2544	2892
476	0	513	1038	1543	2022	2506	2885	1735	2083	2426
988	513	0	530	1044	1522	2004	2377	1272	1616	1947
1515	1038	530	0	517	994	1474	1847	788	1119	1434
2018	1543	1044	517	0	479	963	1348	356	631	922
2497	2022	1522	994	479	0	485	876	440	370	499
2981	2506	2004	1474	963	485	0	402	868	607	366
3361	2885	2377	1847	1348	876	402	0	1270	996	691
2197	1735	1272	788	356	440	868	1270	0	347	697
2544	2083	1616	1119	631	370	607	996	347	0	358
2892	2426	1947	1434	922	499	366	691	697	358	0

Πίνακας 2: Αποστάσεις συγκρινόμενες με την τιμή 1000m.								
UID	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	1	1	1	0
6	0	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	0	0	0	0	0
12	1	1	1	0	0	0	0	0
13	1	1	1	1	0	0	0	0
14	0	0	1	1	1	0	0	0
15	0	0	0	1	1	1	0	0
16	0	0	0	0	1	1	1	0
17	0	0	0	0	0	1	1	1
18	0	0	0	0	0	0	1	1
19	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	1	0	0	0	0	0	0
23	1	1	1	0	0	0	0	0
24	0	1	1	0	0	0	0	0
25	0	0	1	1	0	0	0	0
26	0	0	0	0	1	0	0	0
27	0	0	0	0	0	1	0	0
28	0	0	0	0	0	0	1	0
29	0	0	0	0	0	0	0	1
30	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 2 (Συνέχεια).

8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 2 (Συνέχεια).								
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 2 (Συνέχεια).

26	27	28	29	30	31	32	33	34
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0

Πίνακας 2 (Συνέχεια).

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 3: Αποτελέσματα επίλυσης.

POINTS	**Facilities**	**Y_i**	
0	0	1	
1	0	1	
2	0	1	
3	0	1	
4	0	1	
5	0	1	
6	0	1	
7	0	1	
8	0	1	
9	1	1	
10	0	1	
11	0	1	
12	1	1	
13	1	1	
14	1	1	
15	0	1	
16	0	1	
17	1	1	
18	0	1	
19	0	1	
20	0	1	
21	0	1	
22	0	1	
23	0	1	
24	0	1	
25	0	1	
26	0	1	
27	0	1	
28	0	1	
29	1	1	
30	0	1	
31	0	1	
32	0	1	
33	0	1	
34	0	1	
35	0	1	
36	0	1	
37	0	1	
38	0	1	
39	0	1	
40	0	1	
41	0	1	
42	0	1	
43	0	1	
44	0	1	
45	0	1	
Total Nr Servers	**6**	**Points Covered**	**46**
Available servers	**20**		

Πίνακας 4: Αποτελέσματα μεγιστοποίησης αντικειμενικής συνάρτησης.					
POINTS	**Facilities C**	**YiC**	**Facilities A**	**YiA**	**ZiA**
0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0
7	0	1	0	1	0
8	0	1	0	1	0
9	1	1	0	1	0
10	0	1	0	1	0
11	0	1	0	1	0
12	1	1	1	0	1
13	1	1	1	0	1
14	1	1	1	0	1
15	0	1	0	1	0
16	0	1	0	1	0
17	1	1	1	0	1
18	0	1	0	1	0
19	0	1	1	1	0
20	0	1	0	1	0
21	0	1	0	1	0
22	0	1	0	1	0
23	0	1	0	1	0
24	0	1	0	1	0
25	0	1	0	1	0
26	0	1	0	1	0
27	0	1	0	1	0
28	0	1	0	1	0
29	1	1	1	0	1
30	0	1	0	1	0
31	0	1	0	1	0
32	0	1	0	1	0
33	0	1	0	1	0
34	0	1	0	1	0
35	0	1	0	1	0
36	0	1	0	1	0
37	0	1	0	1	0
38	0	1	0	1	0
39	0	1	0	1	0
40	0	1	0	1	0
41	0	1	0	1	0
42	0	1	0	1	0
43	0	1	0	1	0
44	0	1	0	1	0
45	0	1	0	1	0
Nr Servers	6	46	6	41	5
				Points Covered	
Available servres	20	6			

Πίνακας 5: Αποτελέσματα **Πίνακα 3.4**, έπειτα από τροποποίηση.

POINTS	Facilities C	YiC	Facilities A	YiA	ZiA	New Facilities A	New YiA	New ZiA
0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1	1	0
7	0	1	0	1	0	0	1	0
8	0	1	0	1	0	0	1	0
9	1	1	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	0	1	0
11	0	1	0	1	0	0	1	0
12	1	1	1	0	1	1	0	1
13	1	1	1	0	1	1	0	1
14	1	1	1	0	1	0	1	0
15	0	1	0	1	0	0	1	0
16	0	1	0	1	0	0	1	0
17	1	1	1	0	1	1	0	1
18	0	1	0	1	0	0	1	0
19	0	1	1	1	0	1	1	0
20	0	1	0	1	0	0	1	0
21	0	1	0	1	0	0	1	0
22	0	1	0	1	0	0	1	0
23	0	1	0	1	0	0	1	0
24	0	1	0	1	0	0	1	0
25	0	1	0	1	0	1	1	0
26	0	1	0	1	0	0	1	0
27	0	1	0	1	0	0	1	0
28	0	1	0	1	0	0	1	0
29	1	1	1	0	1	0	1	0
30	0	1	0	1	0	0	1	0
31	0	1	0	1	0	0	1	0
32	0	1	0	1	0	0	1	0
33	0	1	0	1	0	0	1	0
34	0	1	0	1	0	0	1	0
35	0	1	0	1	0	0	1	0
36	0	1	0	1	0	0	1	0
37	0	1	0	1	0	0	1	0
38	0	1	0	1	0	0	1	0
39	0	1	0	1	0	0	1	0
40	0	1	0	1	0	0	1	0
41	0	1	0	1	0	1	1	0
42	0	1	0	1	0	0	1	0
43	0	1	0	1	0	0	1	0
44	0	1	0	1	0	0	1	0
45	0	1	0	1	0	0	1	0
Nr Servers	6	46	6	41	5	8	43	3
				Points Covered			**Points Covered**	
Available servers	20	6				8		

Πίνακας 6: Αποτελέσματα Ιεραρχικής Χωροθέτησης τραπεζικών καταστημάτων.

POINTS	Facilities A 1	YIA1	ZI1	YIA1+ZI1	Facilities A 2	YIA2	ZI2	YIA2+ZI2	Facilities A 3	YIA3	ZI3	YIA3+ZI3	YIA+ZI
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
10	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
12	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
14	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
15	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
17	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
18	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
19	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
22	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
23	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
24	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
25	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
26	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
27	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
28	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
29	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
30	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
31	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
32	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
33	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
35	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
36	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
37	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
38	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
39	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
40	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
41	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
42	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
43	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
44	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
45	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
	1	26	1		1	14	1		1	3	1		46
	Nr Servers		26,5		Nr Servers		14,5		Nr Servers		3,5	44,5	Total Points
		Points Covered				Points Covered				Points Covered		Total	Covered

Πίνακας 7: Αποτελέσματα Ιεραρχικής Χωροθέτησης για 4 τραπεζικά καταστήματα.

POINTS	Facilities A 1	YIA1	ZI1	YIA1+ZI1	Facilities A 2	YIA2	ZI2	YIA2+ZI2	Facilities A 3	YIA3	ZI3	YIA3+ZI3	YIA+ZI
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
8	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
11	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
12	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
17	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
18	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
19	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
20	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
22	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
23	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
24	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
25	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
26	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
27	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
28	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
29	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
30	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
31	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
32	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
33	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
34	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
35	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
36	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
37	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
38	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
39	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
40	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
41	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
42	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
43	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
44	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
45	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
	2	26	1		2	18	1		0	0	0		46
	Nr Servers		26,5		Nr Servers		18,5		Nr Servers		0	45	Total Points
		Points Covered				Points Covered				Points Covered		Total	Covered