Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΘΕΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ»

ΝΙΚΟΛΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ Α.Μ.: 684

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΠΑΤΡΑ 2012

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η συγγραφή και η ολοκλήρωση της παρούσας πτυχιακής εργασίας στηρίχτηκε τόσο στη προσωπική μου προσπάθεια, όσο και στη πολύτιμη προσφορά βοήθειας και υποστήριξης ορισμένων προσώπων. Θα ήθελα λοιπόν να ευχαριστήσω όλους εκείνους τους ανθρώπους, που συνέβαλαν στην ολοκλήρωση και στη παρουσίαση του παρόντος αποτελέσματος.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα, την εποπτεύοντα καθηγήτρια μου κυρία Βάσιου Γεωργία, καθηγήτρια του τμήματος Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων του ΑΤΕΙ Πάτρας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς μου, οι οποίοι υπήρξαν υποστηρικτές καθ’ όλη τη διάρκεια των προσωπικών μου προσπαθειών στην εκπόνηση της πτυχιακής μου εργασίας.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια των προπτυχιακών σπουδών του τμήματος Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων του Α.Τ.Ε.Ι. Πάτρας.

Σκοπός της εργασίας είναι η παρουσίαση και η ανάλυση των σημαντικότερων εφαρμογών των γενικών μαθηματικών σε θέματα οικονομίας. Στην προσπάθεια μας να ικανοποιήσουμε τις ανάγκες για απλότητα και σαφήνεια, τα ουσιώδη θέματα των οικονομικών εφαρμογών των μαθηματικών τα παρουσιάζουμε με έναν τρόπο εύκολα κατανοητό, δηλαδή με έναν τρόπο που δεν προϋποθέτει αυξημένες γνώσεις μαθηματικών.

Μια σειρά από μαθηματικές αποδείξεις παρουσιάζονται με την πιο απλή και κατανοητή εκδοχή τους, ενώ, άλλες φορές που οι αποδείξεις κρίνονται δυσνόητες ή χωρίς σημασία, παραλείπονται.

Τέλος, θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι τα παραδείγματα που δίνονται είναι όσο το δυνατό πιο αντιπροσωπευτικά και διασαφηνίζουν τη θεωρία που ήδη έχει αναπτυχθεί, καθώς και ότι στα κεφάλαια περιέχεται τόσο η μαθηματική όσο και η οικονομική ανάλυση.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται οι κυριότερες και οι πιο συνηθισμένες εφαρμογές των γενικών μαθηματικών σε θέματα οικονομίας. Γενικότερα αναλύονται οι εφαρμογές της γραμμικής άλγεβρας, των συναρτήσεων και των παραγώγων σε θέματα οικονομίας, με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο ισορροπημένη η ανάλυση μας αναφορικά με την έμφαση στη θεωρία, τις εφαρμογές και τα σχετικά παραδείγματα.

Πρωταρχικά η εργασία μας εμπεριέχει μια μικρή εισαγωγή στην οποία πραγματοποιείται, αναφορικά, ιστορική αναδρομή και εισάγει τον αναγνώστη στο θέμα της συγκεκριμένης εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο, αναλύονται οι κυριότερες οικονομικές εφαρμογές της γραμμικής άλγεβρας. Προσπαθώντας η ανάλυση αυτή να γίνει με σαφή κατανοητό τρόπο, πρωταρχικά γίνεται μια εισαγωγή των βασικότερων εργαλείων της γραμμικής άλγεβρας, που είναι οι ορίζουσες, οι πίνακες και τα γραμμικά συστήματα. Στη συνέχεια, προχωρούμε στην παρουσίαση των οικονομικών εφαρμογών της γραμμικής άλγεβρας. Η πρώτη εφαρμογή που παρουσιάζεται και αναλύεται είναι η ανάλυση εισροών-εκροών, η οποία είναι μια μαθηματική τεχνική, που χρησιμοποιείται κυρίως από επιχειρήσεις, για την μελέτη των σχέσεων μεταξύ κλάδων σε διεθνές, εθνικό ή ακόμη και περιφερειακό επίπεδο.

Σε αυτό το σημείο εισάγεται η έννοια του υποδείγματος εισροών-εκροών Leontief, στο οποίο, όπως θα δούμε, περιέχονται δύο υποκατηγορίες υποδειγμάτων, το κλειστό και το ανοιχτό υπόδειγμα εισροών-εκροών Leontief. Τέλος, αναφέρονται και αναλύονται οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες λειτουργεί ένα υπόδειγμα εισροών-εκροών, καθώς επίσης και ο ρόλος των τεχνολογικών συντελεστών σε ένα τέτοιο υπόδειγμα.

Έπειτα, προχωρούμε στην ανάλυση του υποδείγματος αγοράς. Το υπόδειγμα αγοράς είναι μια ακόμη εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας στην οικονομία. Σε αυτήν την ενότητα περιγράφουμε τον τρόπο εύρεσης σημείου ισορροπίας μεταξύ δύο αγαθών χρησιμοποιώντας την μαθηματική μέθοδο των οριζουσών.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται μία ακόμη εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας, το υπόδειγμα προσδιορισμού του εισοδήματος ισορροπίας. Σε αυτήν την ενότητα αναλύεται ο τρόπος προσδιορισμού σημείου ισορροπίας μεταξύ εθνικού εισοδήματος και κατανάλωσης σε μια οικονομία, με την χρήση των οριζουσών.

Τέλος, παρουσιάζεται και αναλύεται το υπόδειγμα IS-LM. Στην ενότητα αυτή εισάγονται οι έννοιες της αγοράς και προσφοράς του χρήματος, στις οποίες εμπεριέχονται οι έννοιες του δανεισμού, του επιτοκίου και της επένδυσης, που επηρεάζουν την ισορροπία μεταξύ εισοδήματος και κατανάλωσης σε μια οικονομία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μετά από μια μικρή εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης, πραγματευόμαστε τις πιο σημαντικές εφαρμογές των συναρτήσεων. Στην πρώτη ενότητα αναλύεται η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού ή υπηρεσίας, αναφέροντας την περίπτωση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στη συνάρτηση ζήτησης και την περίπτωση ύπαρξης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών σε μια συνάρτηση ζήτησης. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται η συμπεριφορά των καταναλωτών σε μια αγορά.

Στην δεύτερη ενότητα αναφερόμαστε στη συνάρτηση της προσφοράς ενός αγαθού ή υπηρεσίας, όπου παρουσιάζεται η συμπεριφορά των παραγωγών σε μια αγορά. Έπειτα, στην τρίτη ενότητα αναλύεται η ισορροπία στην αγορά, δηλαδή η ισορροπία μεταξύ προσφοράς και ζήτησης, καθώς επίσης εισάγεται και η έννοια της συγκριτικής στατικής ανάλυσης. Στις επόμενες ενότητες, του ίδιου κεφαλαίου αναλύονται η συνάρτηση συνολικών εσόδων, η συνάρτηση συνολικού κόστους και η συνάρτηση παραγωγής, όπου καθορίζεται ο τρόπος που οι επιχειρήσεις, χρησιμοποιώντας ως μαθηματικό εργαλείο της συναρτήσεις, μπορούν να υπολογίσουν και να προσδιορίσουν τα συνολικά τους έσοδα, το συνολικό τους κόστος, καθώς και το πόσο παράγουν, δηλαδή την συνολική τους παραγωγικότητα.

Τέλος, στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο παραθέτονται οι οικονομικές εφαρμογές των παραγώγων. Γενικότερα η παράγωγος αντικατοπτρίζει την μεταβολή μιας τιμής ή την μετατόπιση μιας καμπύλης. Έτσι σε αυτό το κεφάλαιο, έπειτα από μια εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου, αναλύουμε τον τρόπο που μπορεί μια επιχείρηση να προσδιορίσει τις μεταβολές που μπορεί να επέλθουν από μια μεταβολή στη τιμή ή άλλου προσδιοριστικού παράγοντα.

Έτσι, οι επιχειρήσεις μπορούν να προσδιορίσουν την μεταβολή στις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς, με την μέθοδο των ελαστικοτήτων των συναρτήσεων, στα συνολικά τους έσοδα υπολογίζοντας το οριακό έσοδο, στο συνολικό κόστος υπολογίζοντας το οριακό κόστος καθώς επίσης και στη συνολική παραγωγικότητα υπολογίζοντας την οριακή παραγωγικότητα.

Επίσης, στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο οι επιχειρήσεις, χρησιμοποιώντας την παράγωγο και συγκεκριμένα την μέθοδο των ακρότατων, μπορούν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους.

Τέλος, παραθέτονται τα συμπεράσματα μας όσον αφορά την χρησιμότητα των μαθηματικών σε θέματα οικονομίας και το πόσο γενικά έχουν συμβάλει στην εξέλιξη των οικονομικών θεωριών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ερευνώντας το παρελθόν και αναλύοντας ένα προς ένα τα διαδοχικά στάδια από τα οποία πέρασε εξελισσόμενη η Μαθηματική Επιστήμη, από τον παλαιολιθικό άνθρωπο μέχρι σήμερα, διαπιστώνουμε ότι τα Μαθηματικά υπήρξαν μια από τις κύριες δυνάμεις του πολιτισμού. Η εξελικτική τους πορεία αντανακλά τον πολιτισμό, τις προόδους του αλλά και τις οπισθοδρομήσεις, γιατί, έστω και αν έχουν τη φήμη ότι είναι αφηρημένη επιστήμη, δεν εξελίχθηκαν στο κενό. Προόδευσαν σε στενή σχέση με την οικονομική ζωή, τα τεχνολογικά επιτεύγματα και όλες τις άλλες επιστήμες. Οι απαρχές τους, όπως έχουν αναγνωρίσει οι ιστορικοί, βρίσκονται βαθιά ριζωμένες στις ανάγκες των πολιτισμών που τα υιοθέτησαν.

Οι λαοί που ασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά την προελληνική περίοδο ήταν οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι, οι Ινδοί, οι Κινέζοι, οι Φοίνικες, οι Εβραίοι και οι Κρήτες της Μινωικής περιόδου. Λαοί δηλαδή που κατοικούσαν σε περιοχές όπου υπήρχαν μεγάλα ποτάμια ή που ήσαν ικανοί έμποροι. Οι μαθηματικές γνώσεις των λαών αυτών είναι συνδεδεμένες με τη γενικότερη κοινωνική, πολιτικοοικονομική και πολιτιστική ανάπτυξή τους.

Τα μαθηματικά ως επιστήμη είναι η δημιουργία εκείνη των αρχαίων Ελλήνων, η οποία συντελέσθηκε με τη συνεισφορά των εξής παραγόντων, που υπήρξαν στην αρχαία Ελλάδα: την ιδιαιτέρα ανεπτυγμένη φιλοσοφική δραστηριότητα και το ελεύθερο πνεύμα. Βεβαίως, τα δύο παραπάνω θα μπορούσαν να συνοψιστούν στην ύπαρξη του υψηλού πολιτιστικού επιπέδου γενικότερα.

Φυσικά, το ελεύθερο πνεύμα υπήρξε διάχυτο και με βάση αυτό γίνεται δυνατή αφενός η δημιουργία νέων μαθηματικών θεωριών και αφετέρου οδηγεί στην ανάπτυξη μίας «επιστημονικής περιέργειας», δηλαδή αναζητούνται πλέον και τα αίτια για το πώς συμβαίνουν κάποια πράγματα και άρα αιτούνται απόδειξης, βασισμένης πάνω σε κάποια μαθηματική θεωρία-λογική.

Τελικά, εξαρχής της θεμελίωσης των μαθηματικών ως επιστήμης από τους Έλληνες μπορούμε να θεωρήσουμε δεδομένη την αυστηρότητά τους και αδιαμφισβήτητη την αξιοπιστία τους, όσον αφορά στην επίλυση ακόμα και προβλημάτων, τα οποία άπτονται της καθημερινής ζωής. Αυτό φυσικά συμβαίνει όσο η εμπειρία επιβεβαιώνει την ορθότητα των πραγμάτων. Για αυτόν ακριβώς το λόγο, όλες οι επιστήμες αργότερα θεωρείται ότι «ενηλικιώνονται», όταν πλέον έχουν θεμελιωθεί με τη βοήθεια κάποιας μαθηματικής θεωρίας. Η συνέχεια από εκεί και πέρα είναι δυνατόν να θεωρηθεί κοινή για κάθε τέτοια επιστήμη και για τα μαθηματικά. Διότι, περαιτέρω, έχουμε μια διαρκή αλληλεπίδραση των μαθηματικών και των άλλων επιστημών. Ήτοι, η μία συντελεί στην διαρκή εξέλιξη και ανάπτυξη της άλλης.

Έτσι, για παράδειγμα, αρκετές φορές η φυσική και η ανάγκη επίλυσης κάποιου προβλήματός της έχουν συντείνει στην ανάπτυξη-μετεξέλιξη κάποιας υπάρχουσας μαθηματικής θεωρίας. Βέβαια, η αντίστροφη σχέση είναι προφανής , αφού η εξέλιξη των μαθηματικών και η ανάπτυξη θεωριών σε καθαρά αφηρημένο επίπεδο δίνει τη δυνατότητα στις υπόλοιπες επιστήμες για τη δημιουργία και επίλυση νέων μοντέλων για κάποιο πρόβλημα, τα οποία βεβαίως προσεγγίζουν καλύτερα την πραγματική κατάσταση. Τελικά, λοιπόν, δυνάμεθα να μιλάμε πλέον για κάποιου είδους συμμεταβολή-συνεξέλιξη των επιστημών γενικά με βάση τα μαθηματικά.

Ειδικότερα στην οικονομική επιστήμη οι μαθηματικές εφαρμογές πληθαίνουν και παίζουν ολοένα και σημαντικότερο ρόλο. Η οικονομία, μία λέξη που χρησιμοποιούμε συχνά στη καθημερινή μας ζωή, σαν επιστημονικό πεδίο ασχολείται με την βέλτιστη κατανομή πόρων.

Τα **Οικονομικά** είναι η κοινωνική επιστήμη που μελετά την παραγωγή, διανομή και κατανάλωση των αγαθών και υπηρεσιών. Περιγράφει τη διαδικασία σε όρους ανταλλαγής μεταξύ ανταγωνιστικών επιλογών, όπως παρατηρείται μέσω μετρήσιμων ποσοτήτων όπως είναι οι εισροές, οι τιμές και οι εκροές. Ως εισροές εννοούμε τα αγαθά και τις υπηρεσίες που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή περαιτέρω αγαθών ή υπηρεσιών. Οι εισροές αναφέρονται και ως συντελεστές παραγωγής και δύναται να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες: τους φυσικούς πόρους, την εργασία και το κεφαλαίο. Ως εκροές εννοούμε τα παραγόμενα αγαθά ή υπηρεσίες τα οποία είτε καταναλώνονται από τον τελικό χρήστη είτε επαναχρησιμοποιούνται στην παραγωγική διαδικασία. Τα οικονομικά χωρίζονται σε δύο κύριους κλάδους: τη Μικροοικονομική Θεωρία και τη Μακροοικονομική Θεωρία.

Ιστορικά, τα οικονομικά έχουν τη ρίζα τους στην πολιτική οικονομία, της οποίας πρωτοπόροι διανοητές μπορούν να θεωρηθούν οι Άνταμ Σμίθ και Ντέηβιντ Ρικάρντο. Από το 1776 βέβαια που γράφτηκε "Ο Πλούτος των Εθνών" του Άνταμ Σμίθ τα οικονομικά έχουν υποστεί μεγάλη εξέλιξη. Τα μοντέρνα οικονομικά, από το 1950-60 και μετά είναι βασισμένα κυρίως στα μαθηματικά και η μορφή της επιστημονικής αντιπαράθεσης του κλάδου δεν έχει σχεδόν τίποτα κοινό με τις μελέτες των παλιών οικονομολόγων.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα μαθηματικά είναι η βάση της οικονομικής επιστήμης και συντέλεσαν καθοριστικά στη δημιουργία κλάδων της οικονομίας όπως τα χρηματοοικονομικά, τα τραπεζικά και ασφαλιστικά θέματα. Οι μαθηματικές ανακαλύψεις των Markowitz, Sharpe, Black, Scholes, Merton και παλαιότερα του Bellman έπαιξαν σημαντικότατο ρόλο στη δημιουργία των παραπάνω κλάδων αλλά και στη δημιουργία νέων χρηματοοικονομικών προϊόντων, νέων εργαλείων διαχείρισης κινδύνου, καθώς επίσης συντέλεσαν στην αλματώδη αύξηση της αποτελεσματικότητας των παραγωγικών διαδικασιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

1.1 Εισαγωγή

1.1.1 Ορίζουσες

Μία τετραγωνική διάταξη n×n = n^2 (n∈N*) στοιχείων από ένα **σώμα** (field) K, τα οποία έχουμε τοποθετήσει μεταξύ δύο κατακόρυφων γραμμών σε n οριζόντιες **γραμμές** (rows) και n κατακόρυφες **στήλες** (columns) λέγεται **ορίζουσα n τάξεως** (n-order determinant) ή **n-βαθμού** (n-degree).

Τις ορίζουσες τις συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά, αφού τοποθετήσουμε συνήθως σε αυτά δυο δείκτες. Συμφωνούμε ο πρώτος να δηλώνει την τάξη της γραμμής, ο δεύτερος την τάξη της στήλης που ανήκει το στοιχείο και οι δυο μαζί μεταβάλλονται από 1 μέχρι n. Έτσι το στοιχείο α_{ij} μιας ορίζουσας n τάξεως ανήκει στην i τάξεως γραμμή και στη j τάξεως στήλη όπου είναι i=1,…,n και j=1,…,n.

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζουσα δεύτερης τάξης ονομάζουμε μία τοποθέτηση 2×2 στοιχείων α_{ij} i,j=1,2, σε ένα ορθογώνιο που υποδηλώνει τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των στοιχείων της:

$$A=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\times\alpha_{22}-\alpha_{12}\times\alpha_{21}.$$

Η αναλυτική έκφραση του δεύτερου μέλους, μέσω της οποίας υπολογίζεται η ορίζουσα, είναι το **ανάπτυγμα** (expansion) της ορίζουσας.

Αντίστοιχα, ορίζουσα τρίτης τάξης ονομάζουμε μια τοποθέτηση 3×3 στοιχείων α_{ij} i,j=1,2,3 σε ένα ορθογώνιο που υποδηλώνει πράξεις μεταξύ των στοιχείων α_{ij} ανάλογες με αυτές της ορίζουσας δεύτερης τάξης:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας τρίτης τάξης προκύπτει αφού προηγουμένως δοθεί η έννοια της **ελάσσων ή συμπληρωματικής ορίζουσας** (minor or complementary determinant) ενός στοιχείου μιας ορίζουσας.

Ελάσσων ορίζουσα A_{ij} του στοιχείου α_{ij} της ορίζουσας A είναι μια ορίζουσα δεύτερης τάξης που προκύπτει από την A, όταν απαλείψουμε την γραμμή και την στήλη στην οποία ανήκει το στοιχείο α_{ij}. Έτσι, παραδείγματος χάρη, οι ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων α_{11} και α_{32} της ορίζουσας A θα είναι:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \text{ και } A_{32} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}.$$

Γενικότερα ονομάζουμε ορίζουσα n-οστής τάξης, n>3 μια τοποθέτηση n×n στοιχείων, α_{ij}, i,j=1,2,…,n, σε ένα ορθογώνιο που υποδηλώνει πράξεις μεταξύ των στοιχείων α_{ij} ανάλογες με αυτές της ορίζουσας δεύτερης και τρίτης τάξης.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος, για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα μια ορίζουσας τρίτης τάξης και άνω, είναι το **θεώρημα Laplace** ή **ανάπτυγμα κατά Laplace** (Laplace expansion).

Ο **Pierre Simon Laplace** ήταν Γάλλος Μαθηματικός, Αστρονόμος και Φυσικός, και έζησε κατά την περίοδο 1749-1827. Σύμφωνα με τον Laplace, προκειμένου να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας τρίτης τάξης, επιλέγουμε μια γραμμή ή μια στήλη και κατασκευάζουμε τρεις όρους, πολλαπλασιάζοντας καθένα από τα στοιχεία της επί την ελάσσονα του.

Το πρόσημο κάθε όρου είναι θετικό αν το άθροισμα του αριθμού γραμμής και του αριθμού στήλης του αντίστοιχου στοιχείου είναι άρτιος, ενώ είναι αρνητικός αν είναι περιττός. Το άθροισμα των τριών αυτών όρων αποτελεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας.

Αν για την ορίζουσα τρίτης τάξης Α επιλέξουμε την πρώτη γραμμή θα έχουμε ότι:

$$A = \alpha_{11}\times A_{11} - \alpha_{12}\times A_{12} + \alpha_{13}\times A_{13} = \alpha_{11}\times\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} - \alpha_{12}\times\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix} + \alpha_{13}\times\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$$

ενώ αν επιλέξουμε την δεύτερη στήλη θα έχουμε:

$$A = -\alpha_{12}\times A_{12} + \alpha_{22}\times A_{22} - \alpha_{32}\times A_{32} = -\alpha_{12}\times\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix} + \alpha_{22}\times\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix} - \alpha_{32}\times\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{vmatrix}.$$

Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο. Στην πράξη επιλέγουμε την γραμμή ή την στήλη που έχει τα περισσότερα στοιχεία μηδέν, εφόσον βέβαια υπάρχουν. Το θεώρημα Laplace ισχύει και για ορίζουσα με $n>3$.

Παράδειγμα 1.1.1: Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα της ορίζουσας:

$$B=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}.$$

Λύση:

Θεωρούμε την δεύτερη γραμμή. Έτσι έχουμε:

$$B = -3\times\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -12+4+0 = -8.$$

Επειδή η ανάλυση των ιδιοτήτων και των πράξεων μεταξύ οριζουσών θα ήταν κάθε άλλο παρά ουσιώδης θα προχωρήσουμε στην εύρεση της αντίστροφης ορίζουσας.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την ορίζουσα n τάξεως $\Delta=|\alpha_{ij}|$ με i,j=1,2,…,n καθώς επίσης και ότι $\Delta\neq 0$. Σχηματίζουμε την ορίζουσα $\Delta_A=|A_{ij}|$ με i,j=1,2,…,n, δηλαδή πάλι n τάξεως και με στοιχεία τους συντελεστές των αντίστοιχων στοιχείων της αρχικής Δ. Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε τις ορίζουσες Δ και Δ_A πολλαπλασιάζοντας γραμμές επί γραμμές, δηλαδή τα στοιχεία των γραμμών της Δ επί τα αντίστοιχα στοιχεί των γραμμών της Δ_A και εφαρμόζοντας της αντίστοιχες ιδιότητες των οριζουσών θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{vmatrix}$$ δηλαδή:

$$\Delta \times \Delta_A = \Delta^n \Leftrightarrow \Delta_n - \Delta \times \Delta_A = 0 \Leftrightarrow \Delta \times (\Delta^{n-1} - \Delta_A) = 0.$$

Επειδή όμως υποθέσαμε από την αρχή $\Delta\neq 0$ θα είναι $\Delta^{n-1} - \Delta_A = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Delta^{n-1} = \Delta_A \Leftrightarrow \Delta^n \times \Delta^{-1} = \Delta_A \text{ οπότε } \Delta^{-1} = \frac{\Delta_A}{\Delta^n} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}.$$

Έτσι λοιπόν, η αντίστροφη (inverse) ορίζουσα Δ^{-1} μιας δοσμένης ορίζουσας n τάξεως Δ υπάρχει μόνο όταν $\Delta\neq 0$ και δίνεται από τη σχέση $\Delta^{-1} = \frac{\Delta_A}{\Delta^n}$.

Παράδειγμα 1.1.2:

$$\text{Επειδή } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 58 \neq 0 \text{ και } \Delta = \begin{vmatrix} -9 & 10 & -13 \\ 22 & -18 & 6 \\ 1 & -14 & -5 \end{vmatrix}$$

υπάρχει η Δ^{-1} και είναι:

$$\Delta^{-1} = \frac{\Delta_A}{\Delta^3} \times \begin{vmatrix} -9 & 10 & -13 \\ 22 & -18 & 6 \\ 1 & -14 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-9}{58} & \frac{10}{58} & \frac{-13}{58} \\ \frac{22}{58} & \frac{-18}{58} & \frac{6}{58} \\ \frac{1}{58} & \frac{-14}{58} & \frac{-5}{58} \end{vmatrix}.$$

1.1.2 Πίνακες (ή Μήτρες)

Κάθε ορθογώνια ταξινόμηση m×n (m,n∈N*) στοιχείων από ένα σώμα Κ, τα οποία έχουμε τοποθετήσει μεταξύ δύο αγκυλών σε m οριζόντιες γραμμές και n κατακόρυφες στήλες λέγεται **πίνακας** ή **μήτρα** τάξεως m×n (m×n-order matrix) ή **τύπου** (m,n) ή **διαστάσεων** m×n και συμβολίζεται αναλυτικά με έναν από τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Σύντομα ένας πίνακας Α τάξεως m×n συμβολίζεται με $A=[\alpha_{ij}]_{m\times n}$ ή $A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$ ή $A=\|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$ ή $A_{mn}=[\alpha_{ij}]$ όπου πάντοτε το α_{ij} είναι το **γενικό στοιχείο** (general element) του πίνακα, i ο δείκτης των γραμμών ($1 \le i \le m$) και j ο δείκτης των στηλών ($1 \le j \le n$).

Υπάρχουν διάφορες μορφές μητρών, ορισμένες όμως, που συναντούμε τόσο στη θεωρία όσο και στις εφαρμογές, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και έχουν χαρακτηριστικά ονόματα. Εκείνη η μορφή μήτρας, όμως, που μας ενδιαφέρει περισσότερο από τις άλλες είναι η **τετραγωνική μήτρα** (square matrix). Έτσι, μια μήτρα $A=(\alpha_{ij})$ τάξεως $m \times n$ όπου $\alpha_{ij} \in R$ θα λέγεται **τετραγωνική μήτρα τάξεως n×n ή απλούστερα τάξεως n** όταν η μήτρα A, όπου το πλήθος των γραμμών της είναι ίσο με το πλήθος των στηλών της, m=n, και άρα έχει $n \times n = n^2$ στοιχεία. Έτσι η μήτρα $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ είναι τετραγωνική τάξεως n και σύντομα συμβολίζεται $A_n=[\alpha_{ij}]$ ή $A=[\alpha_{ij}]$ όπου i=j=1,2,…,n.

Στη τετραγωνική αυτή μήτρα A ονομάζουμε **πρωτεύουσα** ή **κύρια διαγώνιο** την διαγώνιο που σχηματίζουν τα στοιχεία α_{11} α_{22} α_{33} …α_{nn} και **δευτερεύουσα διαγώνιο** εκείνη που σχηματίζουν τα στοιχεία α_{1n} α_{2n-1} α_{3n-2}…α_{n1}, δηλαδή όπως ακριβώς και στις ορίζουσες n τάξεως.

Προχωρώντας στην Άλγεβρα των πινάκων, στην οποία εμπεριέχονται οι σχέσεις και οι πράξεις μεταξύ των πινάκων, θα ήταν πιο ουσιώδες να κάνουμε μια σύντομη αναφορά στο γινόμενο πινάκων.

Το γινόμενο δύο πινάκων ορίζεται με πολλαπλασιασμό των γραμμών του πρώτου πίνακα επί της στήλες του δεύτερου. Δηλαδή αν $A=[\alpha_{ij}]$ είναι ένας πίνακας τάξεως $m \times n$ και $B=[\beta_{jk}]$ είναι ένας πίνακας τάξεως $n \times p$, τότε ως γινόμενο αυτών ορίζεται ο πίνακας $\Gamma=[\gamma_{ik}]$, που είναι πίνακας τάξεως $m\times p$, συμβολίζεται $A\times B=\Gamma$ και το τυχαίο στοιχείο του γ_{ik} προέρχεται από το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων i γραμμής του A επί τα στοιχεία της k στήλης του B.

$$\gamma_{ik} = \alpha_{i1}\times\beta_{1k}+\alpha_{i2}\times\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{in}\times\beta_{nk} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \times\beta_{jk} \ \forall \ i=1,2,\ldots,m \text{ και } k=1,2,\ldots,p.$$

Παράδειγμα 1.1.3: Αν $A = \begin{bmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 4\ 5\ 6 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 11\ 12 \\ 13\ 14 \\ 15\ 16 \end{bmatrix}$ να βρεθεί ο πίνακας $\Gamma=A\times B$.

Λύση:

$$\Gamma=A\times B=\begin{bmatrix} 1\times11+2\times13+3\times15 & 1\times12+2\times14+3\times16 \\ 4\times11+5\times13+6\times15 & 4\times12+5\times14+6\times16 \\ 0\times11+1\times13+0\times15 & 0\times12+1\times14+0\times16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 82 & 88 \\ 199 & 214 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, κάθε τετραγωνικός πίνακας ομαλός, οπότε $|A|\neq0$, λέμε ότι είναι **αντιστρέψιμος** (invertible). Δηλαδή αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό ένας και μόνο ένας άλλος τετραγωνικός πίνακας της ίδιας τάξεως με τον δεδομένο A και τέτοιος, ώστε το γινόμενο των δύο αυτών πινάκων να είναι ο μοναδιαίος πίνακας της ίδιας τάξεως.

Ο άγνωστος αυτός πίνακας προκύπτει από τον A, συμβολίζεται με A^{-1} και λέγεται **αντίστροφος πίνακας** (inverse matrix) του A. Θα ισχύει δε από τον ορισμό η σχέση:

$$A\times A^{-1} = A^{-1}\times A = I \qquad (1),$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας της ίδιας τάξεως με τον A.

Η εργασία για την εύρεση του πίνακα A^{-1} λέγεται **αντίστροφη** (inversion) του τετραγωνικού πίνακα A και είναι η εξής:

➢ Για κάθε πίνακα A ορίζεται ο πίνακας A* του οποίου κάθε στοιχείο α^*_{ij} ορίζεται από την έκφραση:

$$\alpha^*_{ij} = (-1)^{i+j} \times A_{ji},$$

όπου A_{ji} είναι η υποορίζουσα του στοιχείου α_{ji} της ορίζουσας A του πίνακα A. Ο πίνακας A* ονομάζεται **προσαρτημένος** (adjoint) του A.

➢ Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε τον A επί τον A* βρίσκουμε:

$$A \times A^* = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

και κατά τα γνωστά: $A \times A^* = |A| \times I$ όπου $I = I_n$ (2). Αλλά από την προηγούμενη έκφραση (2), επειδή είναι $|A| \neq 0$, προκύπτει η σχέση $A \times \frac{1}{|A|} \times A^* = I$ και εξαιτίας της (1) έχουμε τελικά την ισότητα: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$.

Παράδειγμα 1.1.4: Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του A.

Λύση:

Η ορίζουσα του πίνακα A είναι:

$$A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

Τα στοιχεία του προσαρτημένου πίνακα A* είναι:

$\alpha^*_{11} = (-1)^{1+1} \times A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$ $\qquad \alpha^*_{12} = (-1)^{1+2} \times A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$

$\alpha^*_{13} = (-1)^{1+3} \times A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$ $\qquad \alpha^*_{21} = (-1)^{2+1} \times A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6,$

$\alpha^*_{22} = (-1)^{2+2} \times A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ $\qquad \alpha^*_{23} = (-1)^{2+3} \times A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$

$\alpha^*_{31} = (-1)^{3+1} \times A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$ $\qquad \alpha^*_{32} = (-1)^{3+2} \times A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$

$\alpha^*_{33} = (-1)^{3+2} \times A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$

Έτσι, ο πίνακας A* έχει τη μορφή: $A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$

$$\text{Άρα: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* = \begin{bmatrix} \frac{-2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}.$$

1.1.3 Γραμμικά συστήματα

Γραμμικό σύστημα (linear system) n εξισώσεων με m αγνώστους x_1, $x_2,\ldots,x_m$ ονομάζεται ένα σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \times x_1 + \alpha_{12} \times x_2 + \ldots + \alpha_{1m} \times x_m = \beta_1 \\ \alpha_{21} \times x_1 + \alpha_{22} \times x_2 + \ldots + \alpha_{2m} \times x_m = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \times x_1 + \alpha_{n2} \times x_2 + \ldots + \alpha_{nm} \times x_m = \beta_n \end{cases}.$$

Λύση του γραμμικού συστήματος είναι κάθε m-άδα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ που επαληθεύει και τις n εξισώσεις του συστήματος.

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να είναι:

- **Αδύνατο** ή **ασυμβίβαστο** (inconsistent) αν δεν έχει λύση.
- **Συμβιβαστό** (consistent) αν έχει μία τουλάχιστον λύση.

Τα συμβιβαστά συστήματα μπορούν να έχουν μοναδική ή άπειρες το πλήθος λύσεις. Αν το σύστημα έχει άπειρες το πλήθος λύσεις τότε ονομάζεται **αόριστο**.

Η διαδικασία εύρεσης όλων των λύσεων ενός συστήματος, εφόσον αυτό είναι συμβιβαστό, ονομάζεται **επίλυση ενός συστήματος**. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος. Εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με συστήματα n=m, δηλαδή με συστήματα ισάριθμων αγνώστων και εξισώσεων. Η πιο σημαντική και η πιο συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης συστημάτων είναι αυτή με την **χρήση οριζουσών**.

Έτσι αν έχουμε το γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους: (Σ_1) $\begin{cases} \alpha_{11}\times x_1+\alpha_{12}\times x_2+\ldots+\alpha_{1n}\times x_n=\beta_1 \\ \alpha_{21}\times x_1+\alpha_{22}\times x_2+\ldots+\alpha_{2n}\times x_n=\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\times x_1+\alpha_{n2}\times x_2+\ldots+\alpha_{nn}\times x_m=\beta_n \end{cases}$, υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, |A|_{x1}=\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_n & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, |A|_{x2}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \beta_n & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, |A|_{xn}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \beta_n \end{vmatrix}$$

και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $|A| \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση που είναι:

$x_1 = \frac{|A|_{x_1}}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A|_{x_2}}{|A|}$, …, $x_n = \frac{|A|_{x_n}}{|A|}$. Η παραπάνω διαδικασία λέγεται και **κανόνας Cramer** (Cramer's rule). Ο **Gabriel Cramer** ήταν Ελβετός Μαθηματικός και έζησε κατά την περίοδο 1704-1752.

- Αν $|A| = 0$ και μια τουλάχιστον από τις ορίζουσες $|A|_{xi}$, $i = 1,2,\ldots,n$ είναι διάφορη από το μηδέν τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $|A| = |A|_{x1} = |A|_{x2} = \ldots = |A|_{xn} = 0$, τότε το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο.

Παράδειγμα 1.1.5: Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 12 \\ 8x - 4y + 5z = 21 \end{cases}$.

Λύση:

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 39$, $|A|_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 12 & 2 & -1 \\ 21 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 117$,

$|A|_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 12 & -1 \\ 8 & 21 & 5 \end{vmatrix} = 78$, $|A|_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 12 \\ 8 & -4 & 21 \end{vmatrix} = 39$. Επειδή $|A| = 39 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση που είναι

$$x = \frac{|A|_x}{|A|} = 3,\ y = \frac{|A|_y}{|A|} = 2,\ z = \frac{|A|_z}{|A|} = 1.$$

1.2 Ανάλυση εισροών-εκροών

Η **ανάλυση εισροών-εκροών** (input-output analysis) είναι μια μαθηματική τεχνική που χρησιμοποιείται στη μελέτη σχέσεων μεταξύ κλάδων σε διεθνές, εθνικό ή ακόμη και περιφερειακό επίπεδο. Το κύριο χαρακτηριστικό των πινάκων εισροών-εκροών είναι ότι το σύνολο των εισροών πρέπει να ισούται με το σύνολο των εκροών.

Ιστορικά, οι πίνακες εισροών-εκροών ανιχνεύονται στα κείμενα των φυσιοκρατών και ειδικότερα στον **Οικονομικό Πίνακα** (Tableau Economique) που μαζί με τα σχήματα αναπαραγωγής του Marx συνετέλεσαν στη δημιουργία των σύγχρονων πινάκων εισροών-εκροών. Σήμερα αναγνωρίζεται ότι ο Wassily Leontief (1906-1999) είναι ο δημιουργός αυτού του κλάδου των οικονομικών.

Ο όρος «ανάλυση εισροών-εκροών» εξηγείται από το γεγονός ότι στην ανάλυση αυτή, η οικονομία χωρίζεται σε $n>1$ τομείς παραγωγής, έτσι ώστε η παραγωγή (εκροή) ενός τομέα χρησιμοποιείται στην παραγωγή άλλων τομέων ως εισροή. Δεν αποκλείεται η χρησιμοποίηση από τον ίδιο τον τομέα της παραγωγής του, για την δική του παραγωγή. Με τον τρόπο αυτό η παραγωγή εξαρτάται από τις ζητούμενες ποσότητες εισροής των άλλων τομέων για την παραγωγή τους.

Δημιουργείται έτσι ένα σύνολο **διατομεακών σχέσεων** (intersectoral relationships), όπου οι εκροές των n τομέων είναι εισροές σε άλλους τομείς και αντίστροφα, και οι οποίες λειτουργούν στα πλαίσια ενός συστήματος συναρτησιακών σχέσεων παραγωγής. Ο Leontief υπέθεσε την πιο απλή μορφή των συναρτήσεων αυτών παραγωγής, που είναι όπως θα δούμε οι ομογενείς γραμμικές συναρτήσεις.

Τα υποδείγματα εισροών-εκροών χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

1. Στα **κλειστά υποδείγματα** (closed models), σύμφωνα με τα οποία ολόκληρη η παραγωγή καταναλώνεται από τους συντελεστές της παραγωγής.
2. Στα **ανοιχτά υποδείγματα** (open models), σύμφωνα με τα οποία ένα μέρος της παραγωγής χρησιμοποιείται από τους παραγωγούς και το υπόλοιπο διατίθεται σε εξωτερικούς παράγοντες.

Παράδειγμα 1.2: Θεωρούμε τα αλληλοεξαρτώμενα είδη **α, β, γ, δ.** και έστω ότι η συμμετοχή του ενός στην παραγωγή του άλλου είναι όπως φαίνεται στον επόμενο Πίνακα 3.2.

Πίνακας 1.2

	Α	β	γ	δ
Α	0,2	0,3	0,3	0
Β	0	0,2	0	0,4
Γ	0,3	0	0,2	0,1
Δ	0	0,4	0	0,1

Αναδιατάσσοντας τα προηγούμενα είδη μπορούμε να έχουμε τον Πίνακα 1.3. Τα είδη **β** και **γ** δε συνεισφέρουν στην παραγωγή των **α** και **γ**.

Πίνακας 1.3

	Β	δ	α	γ
Β	0,2	0,4	0	0
Δ	0,4	0,1	0	0
Α	0,3	0	0,2	0,3
Γ	0	0,1	0,3	0,2

Οι ποσότητες 0,3 και 0,1 που δίνουν τα είδη **α** και **γ** στα **β** και **δ,** αντίστοιχα, μπορούν να θεωρηθούν ζήτηση για τα δυο είδη (**α** και **γ)** και να έχουμε δυο διαφορετικά οικονομικά μοντέλα εκείνα με τα είδη {**α**, **γ**} και {**β**, **δ**} με την προϋπόθεση ότι συγκεκριμένες ποσότητες **α** και **γ** είναι ζήτηση για την παραγωγή των **β** και **δ**.

1.2.1 Υποθέσεις συμπεριφοράς και τεχνολογικοί συντελεστές

Μέχρι τώρα συμπληρώσαμε το σύνολο των διατομεακών σχέσεων της οικονομίας και στη συνέχεια θα εισάγουμε τις υποθέσεις συμπεριφοράς των σχέσεων αυτών. Οι συνθήκες αυτές μας προσδιορίζουν τη δομή του μοντέλου καθώς και τη λειτουργία του.

1. Κάθε τομέας παράγει ένα μόνο ομογενές προϊόν. Με την υπόθεση αυτή δεν αποκλείεται η **από κοινού παραγωγή** (joint production) περισσοτέρων του ενός προϊόντων με τον όρο ότι τα προϊόντα αυτά παράγονται σε σταθερές αναλογίες.

2. Οι εισροές x_{ij} συνδέονται με την ολική εκροή x_j για κάθε τομέα j με μία ομογενή γραμμική συνάρτηση. Υποτίθεται δηλαδή η εξής συνάρτηση παραγωγής:

$$x_{ij} = \alpha_{ij} \times x_j \Leftrightarrow \alpha_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ \forall\, i,j \qquad (3)$$

όπου α_{ij} είναι σταθερές και είναι επομένως ανεξάρτητες του επιπέδου τιμών και παραγωγής. Οι α_{ij} ονομάζονται **τεχνολογικοί συντελεστές** (technological coefficients) ή **συντελεστές εισροών-εκροών** (input-output coefficients) και παριστάνουν την ποσότητα προϊόντος του i τομέα, i=1,…,n, που απαιτείται ως εισροή από τον j τομέα, j=1,…,n, για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος του. Πιο συγκεκριμένα η παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος του j τομέα, j=1,…,n, απαιτεί α_{1j} ποσότητα προϊόντος του πρώτου τομέα, α_{2j} ποσότητα προϊόντος του δεύτερου τομέα, … και α_{nj} ποσότητα προϊόντος του n-οστού τομέα.

Έτσι σύμφωνα με την (3) υποθέτουμε ότι η παραγωγή σε κάθε τομέα γίνεται με **σταθερές οικονομίες κλίμακας** (constant returns to scale). Αυτό σημαίνει ότι μια k μεταβολή της παραγωγής είναι δυνατή μόνο με μια k μεταβολή σε κάθε μια από τις απαιτούμενες εισροές.

Με την (3), όπου θα πρέπει να προσέξουμε ότι κάθε α_{ij} προκύπτει από την διαίρεση του αντίστοιχου x_{ij} με x_j και όχι με x_i, γίνεται έμμεσα και η εξής υπόθεση:

3. Οτιδήποτε χρησιμοποιείται από τον j τομέα, j=1,…,n, παράγεται από τους τομείς παραγωγής μέσα στον χρονικό ορίζοντα εφαρμογής και ότι όλη η παραγωγή του i τομέα, i=1,…,n, χρησιμοποιείται πλήρως. Αυτό σημαίνει ότι κατά την εφαρμογή του μοντέλου εισροών-εκροών σε πραγματικά προβλήματα, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στις περιπτώσεις ύπαρξης ή μη αποθεμάτων.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η κλίμακα μέτρησης των α_{ij} εξαρτάται από την κλίμακα στην οποία x_{ij} και x_j μετρούνται. Έτσι, αν x_{ij} και x_j μετρούνται σε φυσικές μονάδες του προϊόντος j, τότε η κλίμακα μέτρησης των α_{ij} είναι μονάδες του προϊόντος i για μια μονάδα προϊόντος j.

Συχνά όμως x_{ij} και x_j μετρούνται σε νομισματικές μονάδες, οπότε α_{ij} είναι η αξία σε νομισματικές μονάδες του προϊόντος του i τομέα, i=1,…,n, που απαιτείται όχι για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος του j τομέα, αλλά για την παραγωγή προϊόντος αξίας μιας νομισματικής μονάδας του j τομέα, j=1,…,n. Έτσι αν π.χ. έχουμε α_{23}=0,25, τότε για την παραγωγή προϊόντος αξίας μιας νομισματικής μονάδας του τρίτου τομέα, απαιτείται ως εισροή προϊόν αξίας 25 εκατοστά νομισματικής μονάδας του δεύτερου τομέα. Με αντικατάσταση της (3) στην (2) παίρνουμε:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \times x_j+y_i,\ i = 1,\ldots,n \qquad (4)$$

ή αναλυτικά:

$$\begin{array}{l} x_1= \alpha_{11} \times x_1+\alpha_{12} \times x_2+\ldots+\alpha_{1n} \times x_n+y_1 \\ x_2= \alpha_{21} \times x_1+\alpha_{22} \times x_2+\ldots+\alpha_{2n} \times x_n+y_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ x_n= \alpha_{n1} \times x_1+\alpha_{n2} \times x_2+\ldots+\alpha_{nn} \times x_n+y_n \end{array}$$

Το σύστημα (4) γράφεται σε μορφή μητρών και ως:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{y} \qquad (5)$$

όπου $\mathbf{x} = [x_1,\ldots,x_n] \geq \mathbf{0}$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (υπάρχει δηλαδή τουλάχιστον ένα i με $x_i > 0$), είναι το διάνυσμα της ολικής παραγωγής (εκροής), $\mathbf{y} =[y_1,\ldots y_n]\geq\mathbf{0}$ με $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ (υπάρχει δηλαδή τουλάχιστον ένα i με yi > 0), είναι το διάνυσμα της τελικής ζήτησης και

$$\mathbf{A} = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}/x_1 & x_{12}/x_2 & \cdots & x_{1n}/x_n \\ x_{21}/x_1 & x_{22}/x_2 & \cdots & x_{2n}/x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}/x_1 & x_{2n}/x_2 & \cdots & x_{nn}/x_n \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \text{ με } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}.$$

Το σύστημα (4) ή (5) είναι στατικό και επομένως υποθέτει σταθερή τεχνολογία. Δηλαδή πιθανές τεχνολογικές βελτιώσεις ή άλλες μεταβολές που μπορούν να συμβούν στην χρονική διάρκεια εφαρμογής του μοντέλου και που μπορούν να επηρεάσουν τους συντελεστές α_{ij}, δεν λαμβάνονται υπόψη.

Σχετικά με τα στοιχεία α_{ij} της μήτρας Α που ονομάζεται και **μήτρα εισροών-εκροών** (input-output matrix) ή **μήτρα τεχνολογικών συντελεστών** (matrix of technological coefficients) παρατηρούμε τα εξής:

- Κάθε στοιχείο α_{ij} είναι μη αρνητικό, έχουμε δηλαδή $\alpha_{ij} \geq 0,\ \forall\, i,j$ που σημαίνει ότι αρνητικές εισροές αποκλείονται. Αποκλείονται επίσης αρνητικές εκροές που σημαίνει ότι κανένα στοιχείο α_{ij} δεν είναι μεγαλύτερο της μονάδας.
- Το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης πρέπει να είναι μικρότερο της μονάδας. Αυτό γιατί το άθροισμα των στοιχείων της έστω j στήλης, δηλαδή

$$\alpha_{1j} + \alpha_{2j} + \ldots + \alpha_{nj} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}$$

είναι ίσο με το μερικό κόστος εισροής που απαιτείται για να παράγουμε προϊόν του τομέα j αξίας μιας νομισματικής μονάδας. Επομένως αν είχαμε $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} > 1$ αυτό θα σήμαινε ότι η παραγωγή του τομέα αυτού θα δημιουργούσε ζημιές και ως εκ τούτου θα ήταν οικονομικώς επιθυμητή η διακοπή της λειτουργίας του.

Η (5) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{(I\text{-}A)} \times \mathbf{x} = \mathbf{y}. \qquad (6)$$

Η μήτρα **(I-A)** ονομάζεται και **μήτρα Leontief** (Leontief matrix), επειδή ο Leontief ήταν ο πρώτος που την εισήγαγε. Αναλυτικά η (6) γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha_{11}) & -\alpha_{12} & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & (1-\alpha_{22}) & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & (1-\alpha_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Έτσι η μήτρα **(I-A)** έχει θετικά στοιχεία κατά μήκος της κύριας διαγωνίου της και αρνητικά τα εκτός της κύριας διαγωνίου στοιχεία. Με βάση την (6) ή (7) το βασικό πρόβλημα της ανάλυσης εισροών-εκροών, τίθεται ως εξής:

Δίνονται η μήτρα των τεχνολογικών συντελεστών $A \geq 0$ και το διάνυσμα της τελικής ζήτησης $y=[y_1,\ldots,y_n] \geq 0$ με $y \neq 0$ και ζητείται να προσδιοριστεί το διάνυσμα των επιπέδων ολικής εκροής $x=[x_1,\ldots,x_n] \geq 0$. Με άλλα λόγια δίνεται η μήτρα A και ζητείται να προσδιοριστεί το διάνυσμα των επιπέδων τελικής παραγωγής $x \geq 0$ που θα στηρίζει το δεδομένο διάνυσμα τελικής ζήτησης $y \geq 0$.

Προφανώς η (6) είναι ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους. Αποδεικνύεται ότι το σύστημα αυτό, κάτω από κανονικές οικονομικές συνθήκες που εκφράζονται με τις σχέσεις

$$0 \leq \alpha_{ij} < 1, \quad \forall\, i,j \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} < 1, \quad i = 1,\ldots,n,$$

έχει ένα διάνυσμα $x^0 \geq 0$ ως μοναδική λύση. Ισχύει δηλαδή:

$$\mathbf{r(I\text{-}A) = n \Leftrightarrow det(I\text{-}A) \neq 0}.$$

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ακόμη ότι το σύστημα Leontief είναι **στατικό** (static) αφού δεν ενσωματώνει καμιά τεχνολογική εξέλιξη ή άλλους παράγοντες που θα μπορούσαν να μεταβάλουν τους συντελεστές α_{ij}.

Αν η αντίστροφη $\mathbf{(I-A)^{-1}}$ της **I-A** υπάρχει, τότε η (6) μπορεί να λυθεί και η μοναδική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{x = (I-A)^{-1} \times y}. \qquad (8)$$

Αν τώρα θέσουμε $\mathbf{M = (I-A)^{-1} = [m_{ij}]}$ τότε η (8) γράφεται ως

$$\mathbf{x = M \times y} \qquad (9)$$

και αναλυτικά ως

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \times y_i \text{, } i = 1,\ldots,n. \qquad (10)$$

Η μήτρα **M** ονομάζεται και **μήτρα-πολλαπλασιαστής** (matrix-multiplier) και αυτό γιατί μια μεταβολή δy στο διάνυσμα της τελικής ζήτησης y απαιτεί μια μεταβολή στην ολική εκροή ίση με

$$\mathbf{\delta x = M \times \delta y = (I-A)^{-1} \times \delta y}.$$

Με άλλα λόγια η ολική εκροή x_i που απαιτείται για να καλύψει την τελική ζήτηση είναι, σύμφωνα με την (10), γραμμική συνάρτηση της τελικής ζήτησης. Τέλος το m_{ij}, στοιχείο της M, είναι η αξία του προϊόντος του τομέα i που απαιτείται για την παραγωγή τελικού προϊόντος του τομέα j αξίας μιας νομισματικής μονάδας, i=1,…,n, j=1,…,n.

Παράδειγμα 1.2.1: Έστω ότι έχουμε μια οικονομία με τομείς παραγωγής τους Α, Β και Γ και ότι οι διατομεακές συναλλαγές παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα:

Τομείς παραγωγής	**Τομείς χρήσης** **Α**	**Β**	**Γ**	**Τελική ζήτηση**	**Ολική εκροή**
Α	80	100	100	40	320
Β	80	200	60	60	400
Γ	80	100	100	20	300

Ζητείται να προσδιοριστούν τα διανύσματα της ολικής παραγωγή $\mathbf{x}^0$ και $\mathbf{x}^1$ που αντιστοιχούν στα διανύσματα τελικής ζήτησης $\mathbf{y}^0$=(120,40,10) και $\mathbf{y}^1$=(60,60,60) και τα οποία αντικαθιστούν το αρχικό διάνυσμα τελικής ζήτησης $\mathbf{y}$=(40,60,20).

Λύση:

Από τον πίνακα αυτόν κατασκευάζουμε την μήτρα **Α** ως εξής:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80/320 & 100/400 & 100/300 \\ 80/320 & 200/400 & 60/300 \\ 80/320 & 100/400 & 100/300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/5 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

και $\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/3 \\ -1/4 & 1/2 & -1/5 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$.

Αντιστρέφοντας την **I-A** παίρνουμε: $(\mathbf{I\text{-}A})^{-1} = \frac{240}{23} \times \begin{bmatrix} 17/60 & 1/4 & 13/60 \\ 13/60 & 5/12 & 7/30 \\ 3/16 & 1/4 & 5/16 \end{bmatrix}$.

Οπότε παίρνουμε:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I\text{-}A})^{-1} \times \mathbf{y} = \frac{240}{23} \times \begin{bmatrix} 17/60 & 1/4 & 13/60 \\ 13/60 & 5/12 & 7/30 \\ 3/16 & 1/4 & 5/16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 400 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 = (\mathbf{I\text{-}A})^{-1} \times \mathbf{y}^0 = \frac{240}{23} \times \begin{bmatrix} 17/60 & 1/4 & 13/60 \\ 13/60 & 5/12 & 7/30 \\ 3/16 & 1/4 & 5/16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 481.74 \\ 469.57 \\ 371.74 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^1 = (\mathbf{I\text{-}A})^{-1} \times \mathbf{y}^1 = \frac{240}{23} \times \begin{bmatrix} 17/60 & 1/4 & 13/60 \\ 13/60 & 5/12 & 7/30 \\ 3/16 & 1/4 & 5/16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 469.56 \\ 542.61 \\ 469.56 \end{bmatrix}$$

1.2.2 Ανοιχτό υπόδειγμα εισροών-εκροών

Θα υποθέσουμε ότι η οικονομία διαιρείται σε n>1 αλληλοεπηρεαζόμενους τομείς παραγωγής και ότι για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, συνήθως ενός έτους, μας δίνονται οι εξής πληροφορίες:

- x_{ij}, i,j = 1,…,n, η ποσότητα του προϊόντος του τομέα i που απαιτείται ως εισροή για την παραγωγή του προϊόντος του τομέα j. Συγκεκριμένα για να πραγματοποιήσει την παραγωγή του ο τομέας j, j = 1,…,n, χρησιμοποιεί ως εισροές x_{1j} ποσότητα προϊόντος του πρώτου τομέα, x_{2j} ποσότητα προϊόντος του δεύτερου τομέα,…, x_{nj} ποσότητα προϊόντος του n-οστού τομέα. Με τον ίδιο τρόπο από την ποσότητα που παράγει ο τομέας i, i = 1,…,n, διατίθεται ως εκροή x_{i1}

ποσότητα στον πρώτο τομέα, x_{i2} ποσότητα στον δεύτερο τομέα,…, x_{in} ποσότητα στον n-οστό τομέα για να πραγματοποιήσουν την παραγωγή τους.

- Το μέρος y_i της ολικής εκροής x_i του τομέα i που διατίθεται για την κάλυψη της **τελικής ζήτησης** (final demand). Το y_i προσδιορίζεται **εξωγενώς** (exogenously) για τον λόγο αυτό και το μοντέλο (υπόδειγμα) μας είναι ανοικτό και ισούται με το άθροισμα τριών κυρίως μεγεθών, ως εξής:

1. I_i είναι το μέρος του y_i που επενδύεται για τη διατήρηση και επέκταση του παραγωγικού δυναμικού της οικονομίας.
2. C_i είναι το μέρος του y_i που απορροφάται από τα **νοικοκυριά** (households).
3. G_i είναι το μέρος του y_i που διατίθεται για την κάλυψη των αναγκών του δημόσιου τομέα.

Έχουμε έτσι τις ταυτότητες:

$$y_i = C_i + I_i + G_i, i = 1,...,n \text{ και } Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad (1).$$

Προφανώς το y_i μπορεί να περιλάβει εκτός των C_i, I_i και G_i και εξαγωγές X_i, καθώς και οτιδήποτε άλλο μπορεί να θεωρηθεί ως τελική ζήτηση. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι η ανάλυση εισροών-εκροών θεωρεί τα μεγέθη C_i, I_i, G_i και X_i δεδομένα και δεν ασχολείται με τη διαμόρφωση τους, που είναι θέμα των διάφορων μακροοικονομικών μοντέλων. Οι πληροφορίες αυτές μπορούν να παρασταθούν συνοπτικά με τον εξής **πίνακα συναλλαγών** (transactions table):

Τομείς παραγωγής	**Τομείς χρήσης** 1 2 … n	**Τελική ζήτηση**	**Ολική εκροή**
1	x_{11} x_{12} … x_{1n}	y_n	x_1
2	x_{21} x_{22} … x_{2n}	y_n	x_2
:	: : : :	:	:
N	x_{n1} x_{2n} … x_{nn}	y_n	x_n

Η ολική ποσότητα που παράγει ο τομέας i συμβολίζεται με το x_i και ένα μέρος αυτής, που συμβολίζουμε με p_i, απορροφάται από τους τομείς παραγωγής της οικονομίας για την παραγωγή των εκροών τους (προϊόντων τους) και από το μέρος y_i που διατίθεται για την κάλυψη της τελικής ζήτησης. Έτσι αν y_i=0, τότε η παραγωγή του i τομέα διατίθεται αποκλειστικά στους άλλους τομείς παραγωγής ως ενδιάμεσο προϊόν. Προκύπτει έτσι το εξής σύστημα **λογιστικών ταυτοτήτων** (accounting identities)

$$p_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}, \quad i=1,\ldots,n$$

και

$$x_i = p_i + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad , \quad i=1,\ldots,n. \qquad (2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αναφέρονται συχνά και ως **εξισώσεις ισορροπίας** (balance equations).

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο διανύσματα ζήτησης, τα d_1 και d_2 , στο ίδιο ανοιχτό μοντέλο Leontief. Προφανώς θα ισχύει $Ax_1=d_1$ και $Ax_2=d_2$, όπου ο A είναι ο πίνακας του συστήματος και τα x_1 και x_2 τα διανύσματα παραγωγής. Είναι πλέον φανερό ότι σε μια διαφορά (μεταβολή) $\Delta d=d_2-d_1$ στα διανύσματα ζήτησης, αντιστοιχεί μια διαφορά (μεταβολή) $\Delta x=x_2-x_1$ των διανυσμάτων παραγωγής. Έτσι έχουμε την σχέση $A\times\Delta x=\Delta d$ και μάλιστα αφού $(\Delta x=0\Leftrightarrow\Delta d=0)\Leftrightarrow(\Delta d\neq0\Leftrightarrow\Delta x\neq0)$, συμπεραίνουμε ότι οποιαδήποτε μεταβολή στο διάνυσμα ζήτησης συνεπάγεται υποχρεωτικά μεταβολή και στο διάνυσμα παραγωγής.

Επιπλέον αφού το μοντέλο είναι εφικτό, ο πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος επομένως θα ισχύει $\Delta x=A^{-1}\times\Delta d$, οπότε $(\Delta d=0\Leftrightarrow\Delta x=0)\Leftrightarrow(\Delta x\neq0\Leftrightarrow\Delta d\neq0)$. Έτσι αποδείχτηκε ότι οποιαδήποτε μεταβολή στο διάνυσμα παραγωγής επιφέρει υποχρεωτικά μεταβολή και στο διάνυσμα ζήτησης. Επίσης, ακόμη και μια από τις συντεταγμένες του διανύσματος ζήτησης μεταβληθεί θετικά ή αρνητικά τότε ολόκληρο το διάνυσμα παραγωγής θα μεταβληθεί προς την ίδια κατεύθυνση.

Παράδειγμα 1.2.2: Να βρεθεί το διάνυσμα μεταβολής της παραγωγής

στο μοντέλο Leontief, όταν $\Delta d=(2,0,0)^T$ και $T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.25 & 0.25\\0.25 & 0.25 & 0.25\\0.25 & 0.25 & 0.5\end{bmatrix}$. (1)

Λύση:

Αφού $\Delta x=(I-T)^{-1}\times\Delta d$, προκύπτει ότι:

$$\Delta x=\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}20 & 12 & 16\\12 & 12 & 12\\16 & 12 & 20\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}40\\24\\32\end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι η μεγάλη μεταβολή συντελείται στην παραγωγή του προϊόντος που υφίσταται τη μεταβολή στη ζήτηση, όμως όλα τα προϊόντα υφίστανται αύξηση για να συνεισφέρουν. Ίσως θα πρέπει να τονιστεί ότι είναι δυνατόν να έχουμε μηδενική μεταβολή σε ένα προϊόν (Δx_j=0) παρόλο που η ζήτηση αυτού του προϊόντος είναι θετική (Δd_j >0), όπως ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση όπου $\Delta d=(-1,1,0)^T$, όπως φαίνεται στην επόμενη σχέση:

$$\Delta x=\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}20 & 12 & 16\\ 12 & 12 & 12\\ 16 & 12 & 20\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}-8\\ 0\\ -4\end{bmatrix},$$

όπου Δx_2=0 παρόλο που Δd_2>0. Τέλος, με $\Delta x=\frac{1}{3}\times(4,12,8)$, T εκείνον της (1) και $\Delta d=(-1,2,0)^T$ παρατηρούμε ότι παρόλο που το $\Delta x\gg 0$, δηλαδή αυξάνουν όλες του οι συντεταγμένες, δε σημαίνει ότι και του Δd θα αυξάνουν οι συντεταγμένες του.

1.2.3 Κλειστό υπόδειγμα εισροών-εκροών

Το **κλειστό υπόδειγμα (μοντέλο) εισροών-εκροών** (closed input-output model), προκύπτει από αντίστοιχο ανοικτό μοντέλο αν ο εξωγενής τομέας παραγωγής του ανοικτού μοντέλου ενσωματωθεί στο σύστημα εισροών-εκροών ως ένας άλλος τομέας παραγωγής. Στην περίπτωση αυτή όλα τα προϊόντα θεωρούνται ως ενδιάμεσα, αφού οτιδήποτε παράγεται, με σκοπό να ικανοποιεί τις παραγωγικές ανάγκες των n+1 τομέων παραγωγής της οικονομίας.

Μαθηματικώς η εξαφάνιση (μηδενοποίηση) της τελικής ζήτησης σημαίνει **b=0** και το σύστημα μας μετατρέπεται σε ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα αν τον καινούργιο τομέα του δώσουμε δείκτη 0, τότε το διάνυσμα $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\ldots x_n)$ της ολικής παραγωγής θα ικανοποιεί το ομογενές σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & I-A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix} = 0.$$

Πιο αναλυτικά το παραπάνω σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{01} & -\alpha_{02} & \cdots & -\alpha_{0n} \\ -\alpha_{10} & (1-\alpha_{11}) & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{20} & -\alpha_{21} & (1-\alpha_{22}) & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\alpha_{n0} & -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & (1-\alpha_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το ομογενές αυτό γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μια μη μηδενική λύση, αν και μόνο αν η ορίζουσα της μήτρας των τεχνολογικών συντελεστών είναι μηδενική. Η υπόθεση αυτή ικανοποιείται πάντα. Αυτό γιατί το άθροισμα κάθε στήλης ισούται με τη μονάδα. Έχουμε δηλαδή:

$$\alpha_{0j} + \alpha_{1j} + \ldots + \alpha_{nj} = 1 \Leftrightarrow \alpha_{0j} = 1 - \alpha_{1j} - \alpha_{2j} - \ldots - \alpha_{nj},\ \forall j$$

που σημαίνει σε κάθε στήλη j το στοιχείο α_{0j} ισούται με το αρνητικό άθροισμα των υπόλοιπων στοιχείων της στήλης j. Επομένως οι n+1 σειρές της μήτρας των τεχνολογικών συντελεστών ενός κλειστού μοντέλου Leontief είναι γραμμικά εξαρτημένες, που σημαίνει **det(I-A)**=0.

1.3 Υπόδειγμα αγοράς

Ας υποθέσουμε μια αγορά με ένα αγαθό για το οποίο γνωρίζουμε τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης και συνεπώς τη συνθήκη ισορροπίας:

$Q_d = \alpha - bP$, $Q_s = -c + dP$, $Q_d = Q_s$.

Οι δύο πρώτες εξισώσεις ξαναγράφονται:

$Q+bP=\alpha$

$Q-dP=-c$

ή σε μητρωική μορφή $\begin{bmatrix}1 & b\\ 1 & -d\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}Q\\ P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ -c\end{bmatrix}$ ή σε συμπαγή μορφή Ax=y.

Υπολογίζουμε την ορίζουσα $|A| = -d-b$. Εφόσον η $|A| \neq 0$, τότε η A έχει αντίστροφη, συνεπώς θα ισχύει $x=A^{-1} \times y$. Στη συνέχεια βρίσκουμε την αντίστροφη της μήτρας των συντελεστών:

$$\text{cof}(A)=\begin{bmatrix}-d & -1\\ -b & 1\end{bmatrix},\ \text{adj}(A)=\begin{bmatrix}-d & -b\\ -1 & 1\end{bmatrix} \text{ και } A^{-1} = \frac{1}{-(b+d)} \times \begin{bmatrix}-d & -b\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{bmatrix}Q\\ P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d/(b+d) & b/(b+d)\\ 1/(b+d) & 1/(-b-d)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\alpha\\ -c\end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix}Q\\ P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[\alpha d/(b+d)]-[bc/(b+d)]\\ [\alpha/(b+d)]+[c/(-b-d)]\end{bmatrix},$$

οπότε η ποσότητα και η τιμή ισορροπίας θα είναι:

$$Q^* = \frac{\alpha d - bc}{b+d} \text{ και } P^* = \frac{\alpha + c}{b+d}.$$

Ομοίως, αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Cramer λαμβάνουμε:

$$Q^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\alpha d - bc}{b+d} \text{ και } P^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ 1 & -c\end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha + c}{b+d}.$$

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, μια αγορά στην οποία ανταλλάσσονται δύο σχετιζόμενα αγαθά για τα οποία γνωρίζουμε τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς που συμβαίνει να είναι γραμμικές. Έτσι για το αγαθό 1 γνωρίζουμε ότι:

$$Q_1^D=\alpha_0+\alpha_1\times P_1+\alpha_2\times P_2 \text{ και } Q_1^S=\beta_0+\beta_1\times P_1+\beta_2\times P_2$$

και η συνθήκη ισορροπίας $Q_1^D=Q_1^S$. Ενώ για το αγαθό 2 γνωρίζουμε ότι:

$$Q_2^D=\gamma_0+\gamma_1\times P_1+\gamma_2\times P_2 \text{ και } Q_2^S=\delta_0+\delta_1\times P_1+\delta_2\times P_2$$

και η συνθήκη ισορροπίας $Q_2^D=Q_2^S$.

Ένας τρόπος επίλυσης είναι να αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις στις αντίστοιχες συνθήκες ισορροπίας:

$$\alpha_0+\alpha_1\times P_1+\alpha_2\times P_2=\beta_0+\beta_1\times P_1+\beta_2\times P_2 \Leftrightarrow (\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)\times P_1+(\alpha_2-\beta_2)\times P_2=0.$$

Ενώ για το δεύτερο αγαθό από το σύστημα εξισώσεων που το περιγράφει, θα έχουμε : $(\gamma_0-\delta_0)+(\gamma_1-\delta_1)\times P_1+(\gamma_2-\delta_2)\times P_2=0.$

Με τις αντικαταστάσεις αυτές καταλήγουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους που μπορούμε να το λύσουμε με τη χρήση μητρών. Για να διευκολύνουμε την παρουσίαση, θέτουμε όπου $\alpha_i-\beta_i=b_i$ και $\gamma_i-\delta_i=c_i$ για $i=0,1,2$. Έτσι έχουμε:

$$b_1\times P_1+b_2\times P_2=b_0 \text{ και } c_1\times P_1+c_2\times P_2=-c_0$$

που σε μητρωική μορφή γράφονται:

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_0 \\ -c_0 \end{bmatrix}.$$

Ακολουθώντας τη μέθοδο Cramer, βρίσκουμε τις ακόλουθες ορίζουσες: $|A|=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=b_1\times c_2-b_2\times c_1$, $|A_1|=\begin{vmatrix} -b_0 & b_2 \\ -c_0 & c_2 \end{vmatrix}=-b_0\times c_2-b_2\times c_0$ και $|A_2|=\begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ c_1 & -c_0 \end{vmatrix}=-b_1\times c_0-b_0\times c_1$.

Επομένως οι τιμές ισορροπίας για τα δύο αγαθά είναι:

$$P_1^*=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-b_0\times c_2+b_2\times c_0}{b_1\times c_2-c_1\times b_2}$$

και

$$P_2^*=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-b_1\times c_0+b_0\times c_1}{b_1\times c_2-c_1\times b_2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές ισορροπίας σε μία από τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος παίρνουμε την ποσότητα ισορροπίας για το αγαθό 1. Ενώ αντικαθιστώντας τις τιμές ισορροπίας στο δεύτερο ζεύγος εξισώσεων λαμβάνουμε την ποσότητα ισορροπίας του αγαθού 2.

Παράδειγμα 1.3: Έστω δύο αγαθά 1 και 2 των οποίων οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης είναι:

Αγαθό 1	Αγαθό 2
$Q_1^D = 82\text{-}3P_1+P_2$	$Q_2^D = 92+2P_1\text{-}4P_2$
$Q_1^S = \text{-}5+15P_1$	$Q_1^S = \text{-}6+32P_2$

Να βρεθούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας.

Λύση:

Για να διευκολύνουμε την παρουσίαση των στοιχείων θέτουμε:

Για το αγαθό 1: α_0=82, α_1=-3, α_2=1 και β_0=-5, β_1=15, β_2=0.

Οπότε έχουμε: $b_0=\alpha_0-\beta_0=87$, $b_1=\alpha_1-\beta_1=-18$ και $b_2=\alpha_2-\beta_2=1$.

Για το αγαθό δύο: γ_0=92, γ_1=2, γ_2=-4 και δ_0=-6, δ_1=0, δ_2=32.

Οπότε έχουμε: $c_0=\gamma_0-\delta_0=98$, $c_1=\gamma_1-\delta_1=2$ και $c_2=\gamma_2-\delta_2=-36$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα Cramer για την επίλυση του υποδείγματος μας έχουμε:

$$P_1^*=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-b_0\times c_2+b_2\times c_0}{b_1\times c_2-c_1\times b_2}=\frac{-87\times(-36)+1\times 98}{-18\times(-36)-2\times 1}=\frac{3230}{646}=5$$

και

$$P_2^*=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-b_1\times c_0+b_0\times c_1}{b_1\times c_2-c_1\times b_2}=\frac{18\times 98+87\times 2}{-18\times(-36)-2\times 1}=\frac{1938}{646}=3$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές ισορροπίας στις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των εκάστοτε προϊόντων βρίσκουμε τις ποσότητες ισορροπίας. Έτσι έχουμε για το αγαθό 1:

$$Q_1^D = 82-3P_1+P_2=82-3\times 5+3=70 \text{ και } Q_1^S = -5+15P_1=-5+15\times 5=70.$$

Άρα η ποσότητα ισορροπίας για το αγαθό 1 είναι: $Q_1^D=Q_1^S=70$.

Για το αγαθό 2 έχουμε:

$$Q_2^D = 92+2P_1-4P_2=92+2\times 5-4\times 3=90 \text{ και } Q_2^S = -6+32P_2=-6+32\times 3=90.$$

Άρα η ποσότητα ισορροπίας για το αγαθό 2 είναι: $Q_2^D=Q_2^S=70$.

1.4 Υπόδειγμα προσδιορισμού εισοδήματος ισορροπίας

Ας υποθέσουμε μια απλή οικονομία που το συνολικό της ετήσιο προϊόν Y παράγεται από δύο τομείς παραγωγής: Τον **τομέα των καταναλωτικών αγαθών** (consumer goods sector) και τον **τομέα των επενδυτικών αγαθών** (investment goods sector). Η συνθήκη ισορροπίας απαιτεί οι **συνολικές δαπάνες** (total expenditures) στην οικονομία E να είναι ίσες με τις δαπάνες κατανάλωσης C και τις δαπάνες για επενδύσεις I. Αν υποθέσουμε ότι οι δαπάνες για επενδύσεις είναι αυτόνομες, δηλαδή είναι ανεξάρτητες από το εισόδημα, ενώ οι δαπάνες κατανάλωσης εξαρτώνται μόνο από το εισόδημα, τότε οι συναρτήσεις που περιγράφουν τη λειτουργία της συγκεκριμένης οικονομίας είναι οι ακόλουθες:

$$Y=C+I, \quad I=I_0, \quad C=\alpha+bY$$

Όπου έχουμε: Y=εθνικό εισόδημα, I=επενδυτικές δαπάνες, I_0=αυτόνομες επενδύσεις, C=καταναλωτικές δαπάνες των ιδιωτών, α = αυτόνομη κατανάλωση και b=οριακή ροπή για κατανάλωση.

Για την εύρεση του επιπέδου ισορροπίας του εθνικού εισοδήματος αυτής της οικονομίας, αντικαθιστούμε τις δύο πρώτες εξισώσεις στη συνθήκη ισορροπίας και λαμβάνουμε:

$$Y-C=I_0, \quad -bY+C=\alpha$$

εκφράζοντας τις παραπάνω σχέσεις σε μητρωική μορφή, οπότε έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα Cramer βρίσκουμε το εισόδημα ισορροπίας Y* και τις δαπάνες κατανάλωσης C*. Άρα έχουμε:

$$Y^*=\frac{\begin{bmatrix} I_0 & -1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}}=\frac{I_0+\alpha}{1-b}, \qquad C^*=\frac{\begin{bmatrix} 1 & I_0 \\ -b & \alpha \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}}=\frac{\alpha+bI_0}{1-b}.$$

Αν αντί του κανόνα του Cramer χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη της μήτρας A, θα έχουμε:

$A^{-1}=\text{adj } A\frac{1}{|A|}$, όπου έχουμε: $A^{-1}=\frac{1}{1-b}\times\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \end{bmatrix}=\left(\frac{1}{1-b}\right)\times\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I_0 \\ \alpha \end{bmatrix}=\left(\frac{1}{1-b}\right)\times\begin{bmatrix} I_0+\alpha \\ bI_0+\alpha \end{bmatrix}$$

που, βέβαια, δίνει την ίδια λύση.

Παράδειγμα 1.4: Ας πάρουμε μια οικονομία η οποία αποτελείται από καταναλωτικό και παραγωγικό τομέα μόνο. Στον τομέα ιδιωτικής κατανάλωσης η συνάρτηση είναι:

$$C=25+0.75Y$$

ενώ στον παραγωγικό τομέα η ζήτηση για επενδύσεις είναι καθορισμένη και σταθερή: $I=20$.

Να βρεθούν το εισόδημα και η κατανάλωση ισορροπίας.

Λύση:

Εφαρμόζοντας τον κανόνα Cramer το εισόδημα και την κατανάλωση ισορροπίας μπορούμε να τα υπολογίσουμε κάνοντας χρήση των εξισώσεων:

$$Y^*=\frac{\begin{bmatrix} I_0 & -1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}}=\frac{I_0+\alpha}{1-b}, \qquad C^*=\frac{\begin{bmatrix} 1 & I_0 \\ -b & \alpha \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}}=\frac{\alpha+bI_0}{1-b}.$$

Έτσι θα έχουμε:

$$Y^*=\frac{25+20}{1-3/4}=4\times 25=180 \qquad C^*=\frac{25+3/4\times 20}{1-3/4}=\frac{40}{1/4}=160.$$

Εφαρμόζοντας την αντίστροφη της μήτρας A θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα: $\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \end{bmatrix}=\left(\frac{1}{1-b}\right)\times\begin{bmatrix} I_0+\alpha \\ bI_0+\alpha \end{bmatrix}=\left(\frac{1}{1-3/4}\right)\times\begin{bmatrix} 20+25 \\ 3/4\times 20+25 \end{bmatrix}=4\times\begin{bmatrix} 45 \\ 40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 180 \\ 160 \end{bmatrix}$.

Πριν τελειώσουμε με το παράδειγμα, ας σημειώσουμε εδώ ότι αν δεν είχαμε δαπάνες επενδύσεων (I=0), το εισόδημα ισορροπίας θα ήταν ίσο με 100, δηλαδή C=Y=4×25=100 και I=0. Αυτό σημαίνει ότι η δαπάνη επενδύσεων, I=20, εξηγεί ή είναι υπεύθυνη για το υπόλοιπο εισόδημα από το συνολικό, δηλαδή 180-100=80.

1.5 Υπόδειγμα IS-LM

Η ανάλυση μας μέχρι τώρα βασιζόταν στην απουσία αγοράς χρήματος. Γνωρίζουμε όμως, ότι ο δανεισμός είναι ένας από τους πιο πρόσφορους τρόπους με τους οποίους οι κυβερνήσεις χρηματοδοτούν τις δαπάνες τους. Γνωρίζουμε επίσης, ότι ένα σημαντικό μέρος των δαπανών για ιδιωτικές επενδύσεις προέρχεται από δανεισμό. Επομένως, το επιτόκιο i επηρεάζει τις επενδυτικές αποφάσεις, που με τη σειρά τους επηρεάζουν το εισόδημα και την κατανάλωση.

Για να απλοποιήσουμε ακόμη περισσότερο την ανάλυση μας, θα αγνοήσουμε τις κρατικές δαπάνες και τη φορολογία. Ασφαλώς οι μεταβλητές αυτές θα μπορούσαν να είχαν συμπεριληφθεί, αλλά θα δυσκόλευαν χωρίς να υπάρχει λόγος, την ανάλυση. Έτσι στην αγορά αγαθών θα έχουμε:

$C=\alpha+bY$, $I=d-ei$ όπου $d > 0$, $e > 0$, και $Y=C+I$.

Έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από τρεις εξισώσεις και τέσσερις αγνώστους (Y,C,I,i), επομένως δεν υπάρχει μοναδική λύση. Έτσι αν αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις στη συνθήκη ισορροπίας του εισοδήματος θα καταλήξουμε σε μια καινούργια εξίσωση με δύο μόνο αγνώστους, το Y και το i.

Οπότε: $Y = \alpha + bY + d - ei = \frac{\alpha+d}{1-b} - \frac{ei}{1-b}$.

Η παραπάνω εξίσωση δηλώνει τους διάφορους τρόπους που εξασφαλίζουν ισορροπία στην αγορά προϊόντος. Είναι φυσικό ότι σε αυτή τη περίπτωση οι επενδύσεις θα είναι ίσες με τις αποταμιεύσεις, I=S. Αυτή η ισότητα είναι που έκανε τον John Hicks (1939) να ονομάσει τη συνάρτηση ανάμεσα στο εισόδημα και το επιτόκιο IS.

Από μόνο της η συνάρτηση IS δεν μπορεί να προσδιορίσει το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και του επιτοκίου. Αυτό επιτυγχάνεται αν στην ανάλυση μας συμπεριλάβουμε την αγορά του χρήματος που συνίσταται από τη ζήτηση και τη προσφορά του χρήματος. Έτσι στην αγορά του χρήματος θα έχουμε:

$M=M_0$

$L=kY-li$ $k > 0, l > 0$

$M=L$

όπου M η **προσφορά του χρήματος** (money supply), η οποία είναι δεδομένη $M=M_0$, λόγω του ότι ελέγχεται από την κεντρική τράπεζα και L η **ζήτηση του χρήματος** (demand for money).

Ισορροπία στην αγορά του χρήματος υπάρχει, όταν:

$$M_0=L \text{ ή } Y=\frac{M_0}{k}+\frac{1}{k}i.$$

Η εξίσωση αυτή καλείται LM και παριστάνει τα ζεύγη εισοδήματος και επιτοκίου για τα οποία υπάρχει ισορροπία στην αγορά του χρήματος.

Αντικαθιστούμε στις δύο συνθήκες ισορροπίας και λαμβάνουμε:

$$Y = \alpha+bY+d-ei \Leftrightarrow Y-bY+ei=\alpha+d$$

$$M_0 = kY-li \Leftrightarrow kY-li=M_0$$

ή $$\begin{bmatrix} 1\text{-}b & e \\ k & \text{-}l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+d \\ M_0 \end{bmatrix}$$

που λύνει για:

$$Y^{*}=\frac{\begin{vmatrix} \alpha+d & e \\ M_0 & \text{-}l \end{vmatrix}}{\text{-}[l\times(1\text{-}b)+ke]}=\frac{l\times(\alpha+d)+eM_0}{l\times(1\text{-}b)+ke}$$

και

$$i^{*}=\frac{\begin{vmatrix} 1\text{-}b & \alpha+d \\ k & M_0 \end{vmatrix}}{\text{-}[l\times(1\text{-}b)+ke]}=\frac{k\times(\alpha+d)\text{-}M_0\times(1\text{-}b)}{l\times(1\text{-}b)+ke}$$

Παράδειγμα 1.5: Έστω το κάτωθι υπόδειγμα IS-LM:

$C=100+0.8Y$ $\quad$ $I=80-0.2i$

$Y=C+I$ $\quad$ $L=15+0.4Y-0.1i$

$M_0=150$ $\quad$ $L=M_0$

Να βρεθούν τα επίπεδα ισορροπίας του εισοδήματος Y και του επιτοκίου i.

Λύση:

Για να βρούμε τα επίπεδα ισορροπίας εισοδήματος Y και επιτοκίου i θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του υποδείγματος:

$$Y^*=\frac{l\times(\alpha+d)+eM_0}{l\times(1-b)+ke}$$

και

$$i^*=\frac{k\times(\alpha+d)-M_0\times(1-b)}{l\times(1-b)+ke}$$

όπου: α=100, d=80, b=0.8, e=0.2, k=0.4 και l=0.1.

Έτσι έχουμε:

$$Y^*=\frac{l\times(\alpha+d)+eM_0}{l\times(1-b)+ke}=\frac{0.1\times(100+80)+0.2\times150}{0.1\times(1-0.8)+0.4\times0.2}=\frac{18+30}{0.02+0.08}=\frac{48}{0.1}=480$$

και

$$i^*=\frac{k\times(\alpha+d)-M_0\times(1-b)}{l\times(1-b)+ke}=\frac{0.4\times(100+80)-150\times(1-0.8)}{0.1\times(1-0.8)+0.4\times0.2}=\frac{72-30}{0.02+0.08}=\frac{42}{0.1}=420$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Η συνάρτηση είναι η πιο βασική έννοια της Μαθηματικής Ανάλυσης και υπήρξε αντικείμενο μελέτης των μεγαλύτερων Μαθηματικών των τελευταίων τεσσάρων αιώνων.

Σαν έννοια εμφανίστηκε, από την εποχή της θεμελιώσεως των Φυσικών Επιστημών, από την ανάγκη να παρακολουθήσουν οι επιστήμονες τις ποσοτικές εκδηλώσεις των φυσικών φαινομένων που μελετούσαν.

Η συνάρτηση αναφέρεται κυρίως σε προβλήματα μαθηματικών, καθώς και εφαρμογών τους, τα οποία αναφέρονται σε μεταβλητές που σχετίζονται μεταξύ τους, δηλαδή η τιμή της μιας μεταβλητής εξαρτάται από τις τιμές της άλλης ή των άλλων μεταβλητών, αν πρόκειται για περισσότερες από δύο.

Με λίγα λόγια η **συνάρτηση** (function) ορίζεται ως ένας κανόνας αντιστοιχίας f που σχετίζει κάθε στοιχείο $x \in X$ (όπου X ένα μη κενό σύνολο) με ένα μοναδικό στοιχείο $y \in Y$ (όπου Y επίσης ένα μη κενό σύνολο).Το στοιχείο y που σχετίζεται με ένα δεδομένο στοιχείο $x \in X$ συμβολίζεται f(x) και γράφεται: $y = f(x)$.

Συχνά μια συνάρτηση συμβολίζεται και ως:

$$f : X \rightarrow Y$$

ή και ορισμένες φορές απλά με το γράμμα f. Το σύνολο X καλείται **πεδίο ορισμού** (domain) της συναρτήσεως f, ενώ το $f(X) \subseteq Y$ που ορίζεται ως:

$f(X)=\{y \in Y \backslash y=f(x)$ για κάποια $x \in X\}$

ονομάζεται **πεδίο τιμών** (range).

Θα συμβολίσουμε το πεδίο ορισμού X, της συνάρτησης $f : X \rightarrow Y$, με $D(f)$ και το πεδίο τιμών με $R(f)$, όπου είναι $R(f) \subseteq Y$. Αν το $R(f)$ είναι υποσύνολο του συνόλου IR των πραγματικών αριθμών τότε η συνάρτηση λέγεται **πραγματική**, ενώ αν $D(f) \subseteq$ IR η συνάρτηση λέγεται **πραγματικής μεταβλητής**.

Το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης, όταν δεν μας δίνεται, είναι δυνατό να προσδιοριστεί σε ειδικές μόνο περιπτώσεις, π.χ. αν $f(x) = ημ\ x$ τότε $R(f) = [-1,1]$ κ.λπ.. Γενικά ο υπολογισμός $R(f)$ ανάγεται στο πρόβλημα:

Για ποιες τιμές του y η εξίσωση f(x) = y με άγνωστο το x έχει λύση στο D(f);

Έτσι, αν π.χ. $y = f(x) = 2x^2-5x+2$, ζητώ τις τιμές της παραμέτρου y, για τις οποίες η εξίσωση $2x^2-5x+2-y = 0$ έχει πραγματικές ρίζες ως προς y. Από τη στοιχειώδη άλγεβρα είναι γνωστό ότι πρέπει: $\Delta = 25-8(2-y) \geq 0 \Rightarrow 9+8y \geq 0$ και κατά συνέπεια $R(f) = [-9/8,+\infty)$.

Τέλος, στην συνάρτηση $y = f(x)$ με $f : A \rightarrow B$ το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $C=\{(x,y) \in A \times B: y=f(x)\} \subseteq A \times B \subseteq R \times R = R^2$, που έχει για στοιχεία διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών, όταν τα παραστήσουμε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy σχηματίζουμε στο επίπεδο των αξόνων αυτών ένα σημειοσύνολο που λέγεται **γραφική** (graphic) ή **γεωμετρική παράσταση** (geometric representation) ή **διάγραμμα** (diagram) ή **γράφημα** (graph) αυτής της συναρτήσεως.

Παράδειγμα 2.1: Να βρεθεί το πεδίου ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{3\sqrt{2}-\sqrt{-x^2+5x+14}}$.

Λύση:

Θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις: $x+1 \geq 0$, $-x^2+5x+14 > 0$ και $3\sqrt{2}-\sqrt{-x^2+5x+14} \neq 0$. Επειδή για την πρώτη πρέπει $x \geq -1$ και για τη δεύτερη $-2 \leq x \leq 7$, τότε οι δύο πρώτες συναληθεύουν για $-1 \leq x \leq 7$. Επειδή για να ικανοποιείται και η τρίτη πρέπει τελικά $x^2-5x+4 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$ και $x \neq 4$ συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της g(x) είναι $D(g) = [-1,1)\cup(1,4)\cup(4,7]$.

Έχοντας, μέχρι τώρα, μια γενική και θεωρητική άποψη για το τι είναι η συνάρτηση θα πρέπει στη συνέχεια η προσοχή μας να επικεντρωθεί στις σημαντικότερες εφαρμογές της συνάρτησης σε οικονομικά προβλήματα, έτσι ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα την χρησιμότητα της.

2.2 Η συνάρτηση ζήτησης

2.2.1 Συνάρτηση ζήτησης με μια ανεξάρτητη μεταβλητή

Είναι σχεδόν αδύνατο να μιλήσει κανείς για οικονομικά προβλήματα χωρίς να αναφερθεί στη ζήτηση. Η ζήτηση ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας συνδέεται με συναρτησιακή σχέση με μια σειρά μεταβλητών από τις οποίες η κυριότερη είναι η τιμή.

Από την **Οικονομική θεωρία** (Economic theory) είναι γνωστό ότι η **ποσότητα** (quantity) q ενός προϊόντος ή αγαθού που οι καταναλωτές επιθυμούν να αγοράσουν σε μια ορισμένη χρονική περίοδο είναι συνάρτηση όχι μόνο της **τιμής** (price) πωλήσεως της μονάδας του, αλλά και άλλων παραγόντων, όπως το εισόδημα, οι προτιμήσεις των καταναλωτών κ.ά.

Αν όμως υποτεθεί ότι η **ζήτηση** (demand) της υπόψη ποσότητας εξαρτάται μόνο από την τιμή του προϊόντος, ενώ οι άλλοι αναφερόμενοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί, τότε έχουμε τη **συνάρτηση ζήτησης** (demand function).Η γραμμική μορφή της συναρτήσεως ζήτησης είναι:

$$Q_d = \alpha - bP$$

όπου Q_d είναι η **ζητούμενη ποσότητα** (quantity demanded) του αγαθού, P είναι η τιμή του αγαθού, α είναι μια σταθερά που μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριλαμβάνει την επίδραση των άλλων παραγόντων που παραμένουν αμετάβλητοι και $-b<0$ είναι η κλίση της συνάρτησης ζήτησης.

Η κλίση είναι αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε αύξηση ή μείωση της τιμής υπάρχει μείωση ή αύξηση αντίστοιχα της ζητούμενης ποσότητας. Η σχέση αυτή ονομάζεται **νόμος της ζήτησης** (law of demand).

Λόγω της σχέσης της τιμής ενός προϊόντος και της ποσότητας αυτού η συνάρτηση ζήτησης είναι συνήθως φθίνουσα και η **καμπύλη ζήτησης** (demand curve), δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης ζήτησης, έχει αρνητική κλίση με αποτέλεσμα σχεδόν πάντοτε να κλίνει προς τα κάτω.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι στην Οικονομία καθιερώθηκε, από τον Marshall, γενικά η τιμή να παριστάνεται στον κατακόρυφο άξονα και η ποσότητα στον οριζόντιο άξονα. Έτσι, πριν δημιουργήσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης της ζήτησης, θα πρέπει πρώτα να λύσουμε τον τύπο της συνάρτησης ως προς την τιμή.

Παράδειγμα 2.2.1: Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι της μορφής:

$Q_d = f(P) = 60 - 10P$ Πεδίο ορισμού: [0, 6].

i. Να μετατρέψετε την συνάρτηση στην μαρσαλλιανή της μορφή.
ii. Να γίνει η διαγραμματική της παρουσίαση.
iii. Να βρεθεί η τιμή του προϊόντος όταν η ζητούμενη ποσότητα είναι 20 μονάδες.
iv. Να βρεθεί η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος όταν η τιμή είναι 2 χρηματικές μονάδες.

Λύση:

i. Για να μετατρέψουμε την συνάρτηση ζήτησης στην μαρσαλλιανή της μορφή θα πρέπει να αντιστρέψουμε τη συνάρτηση $Q_d=60–10P$, δηλαδή στη νέα συνάρτηση ζήτησης εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι η τιμή του προϊόντος, ενώ ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος. Δηλαδή, θα έχουμε:

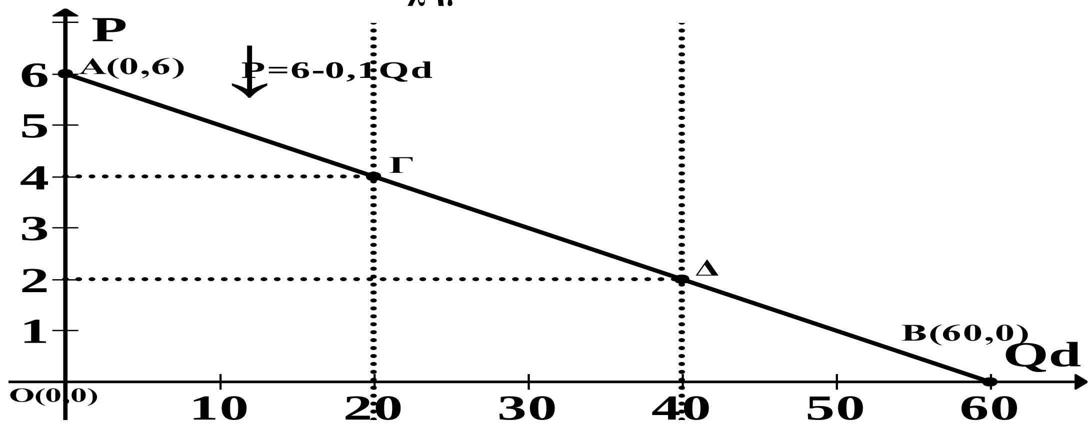
$$Q_d = 60 - 10P \Rightarrow 10P = 60 - Q_d \Rightarrow P = 6 - Q_d/10 = 6 - 0,1Q_d$$

Συνάρτηση $Q_d = 60 - 10P$ Πεδίο ορισμού:[0,6] Πεδίο τιμών:[0,60]

Συνάρτηση $P = 6 - 0,1Q_d$ Πεδίο ορισμού:[0,60] Πεδίο τιμών:[0,6]

ii. Αφού η συνάρτηση είναι γραμμικής μορφής, η διαγραμματική παρουσίαση της με τη μαρσαλλιανή της μορφή θα είναι ευθεία γραμμή που θα κατέρχεται από τα πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά.

Σχήμα 2.2.1



Από τη συνάρτηση P = 6 – 0,1Q_d, βρίσκουμε ότι για Q_d = 0, έχουμε P = 6. Η ευθεία τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο A(0,6).

Για P = 0, έχουμε: Q_d = 6/0,1 = 60. Δηλαδή η ευθεία ζήτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο B(60,0). Αν ενώσουμε τα σημεία A και B, η ευθεία που προκύπτει είναι η ευθεία ζήτησης.

iii. Όταν Q_d = 20 μονάδες, θα έχουμε ότι:
P = 6 – 0.1 * 20 = 4 χρηματικές μονάδες.

iv. Όταν P = 2 χρηματικές μονάδες, θα έχουμε ότι:
Q_d = 60 - 10 * 2 = 40 μονάδες.

2.2.2 Συνάρτηση ζήτησης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές

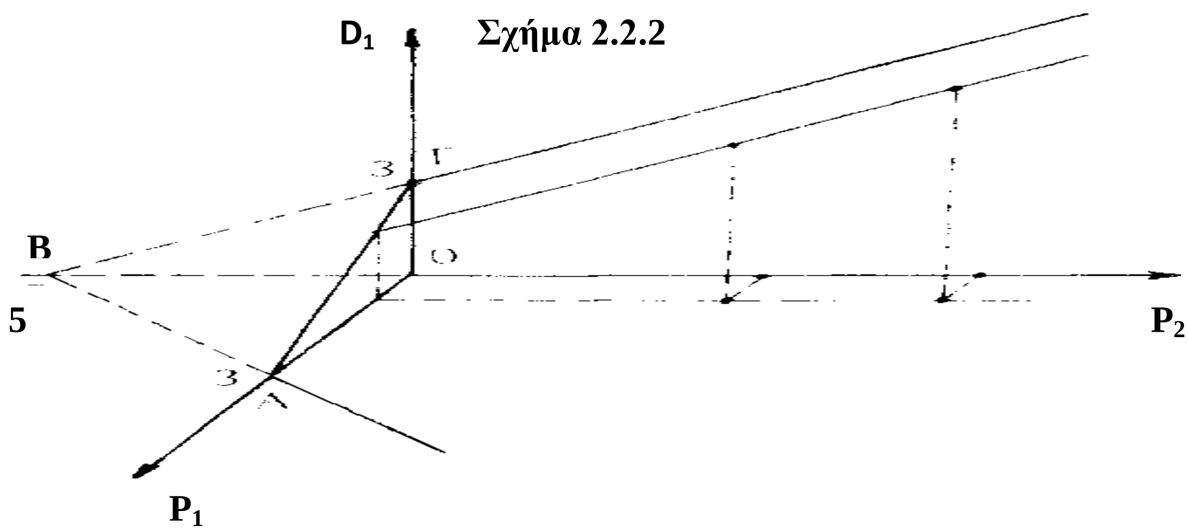
Αν τώρα για ένα ζευγάρι προϊόντων $Π_1$, $Π_2$, με p_1, p_2 συμβολίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των μονάδων τους και με D_1, D_2 τις αντίστοιχες ζητούμενες από τους καταναλωτές ποσότητές τους, τότε οι συναρτήσεις $D_1 = f_1 (p_1,p_2) \mid Δ_1$ και $D_2 = f_2 (p_1,p_2) \mid Δ_2$, όπου $Δ_1$, $Δ_2$ είναι υποσύνολα του καρτεσιανού γινομένου των διαστημάτων μεταβολής των τιμών τους στην αγορά, λέγονται **συναρτήσεις ζήτησης** (demand functions) των προϊόντων αυτών.

Για να αναφερθούμε όμως σε συναρτήσεις ζήτησης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (προϊόντα $Π_1$,$Π_2$) θα πρέπει πρώτα να αναφέρουμε τους ακόλουθους δύο ορισμούς, οι οποίοι καθορίζουν τη σχέση μεταξύ των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών.

1. **Ανταγωνιστικά** (competitive) λέγονται στην Οικονομία δύο προϊόντα όταν η αύξηση της τιμής του ενός συνεπάγεται αύξηση της ζήτησης του άλλου. Π.χ. βούτυρο μαργαρίνη είναι ανταγωνιστικά αφού η αύξηση της τιμής του βουτύρου συνεπάγεται την αύξηση της ζήτησης της μαργαρίνης.
2. **Συμπληρωματικά** (complementary) λέγονται δύο προϊόντα όταν η αύξηση (μείωση) της τιμής του ενός συνεπάγεται μείωση (αύξηση) της ζήτησης του άλλου. Π.χ. βενζίνη αυτοκίνητα είναι συμπληρωματικά αφού η αύξηση (μείωση) της τιμής της βενζίνης συνεπάγεται μείωση (αύξηση) της ζήτησης των αυτοκινήτων.

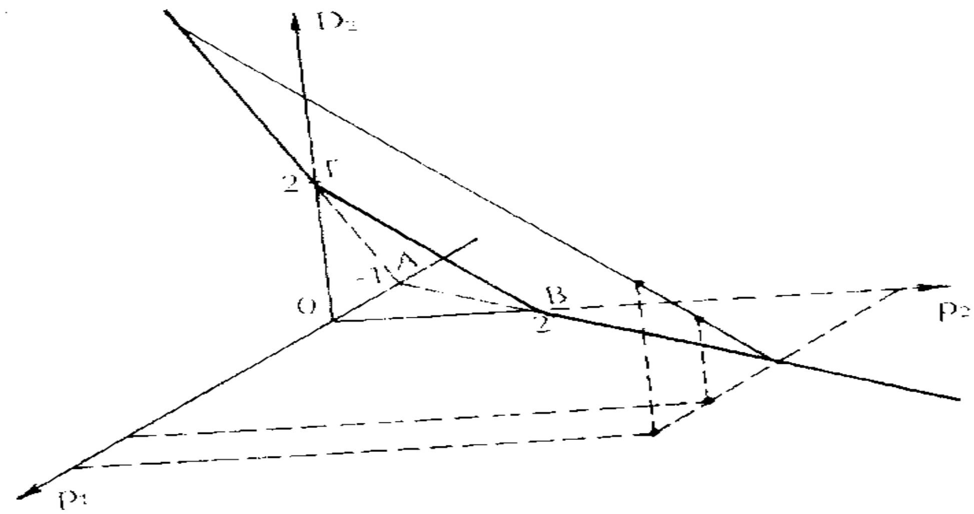
Παράδειγμα 2.2.2: Αν έχουμε τα δύο προϊόντα $Π_1$, $Π_2$ με αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης $D_1 = 3 - p_1 + \frac{3}{5}p_2$, $D_2 = 2 + 2p_1 - p_2$ τότε παρατηρούμε τα εξής:

Σχήμα 2.2.2



- Από τη πρώτη συνάρτηση ζήτησης παίρνουμε ως επιφάνεια ζήτησης για το προϊόν Π_1, το μέρος του επιπέδου που περνάει από τα σημεία Α(3,0,0), Β(0,-5,0) και Γ(0,0,3), στην πρώτη γωνία του τρισορθογώνιου συστήματος Ο p_1 p_2 D_1 (Σχήμα 2.2.2). Εύκολα προκύπτει, από το σχήμα, ότι η αύξηση της τιμής p_2 του προϊόντος Π_2 συνεπάγεται την αύξηση της ζητούμενης ποσότητας D_1 του άλλου προϊόντος Π_1.

Σχήμα 2.2.3

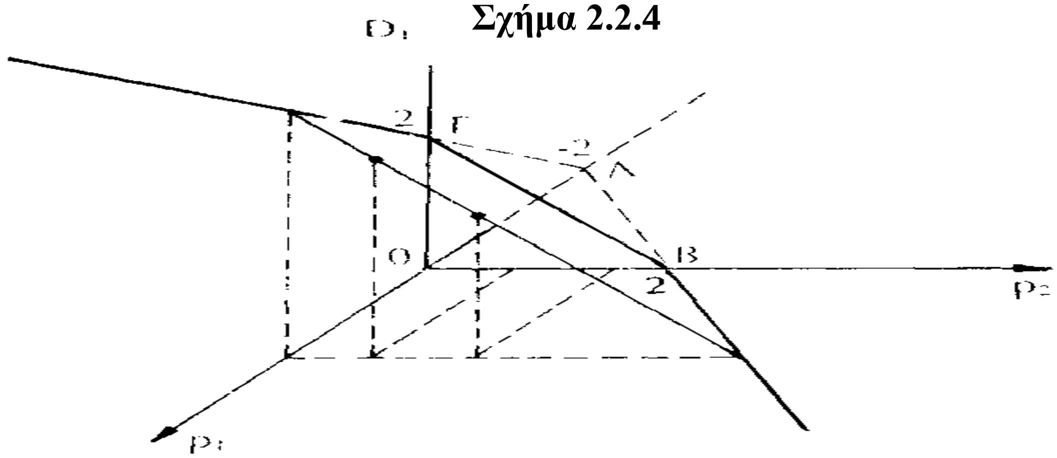


- Από τη δεύτερη συνάρτηση ζήτησης παίρνουμε ως επιφάνεια ζήτησης για το προϊόν Π_2, το μέρος του επιπέδου που περνάει από τα σημεία Α(-1,0,0), Β(0,2,0) και Γ(0,0,2), στην πρώτη γωνία του τρισορθογώνιου συστήματος Ο . p_1 p_2 D_2 (Σχήμα 2.2.3). Εύκολα τώρα προκύπτει από το σχήμα ότι η αύξηση της τιμής p_1 του προϊόντος Π_1 συνεπάγεται την αύξηση της ζητούμενης ποσότητας D_2 του άλλου προϊόντος Π_2.

Έτσι, μετά από τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι τα προϊόντα Π_1 και Π_2 είναι **ανταγωνιστικά**.

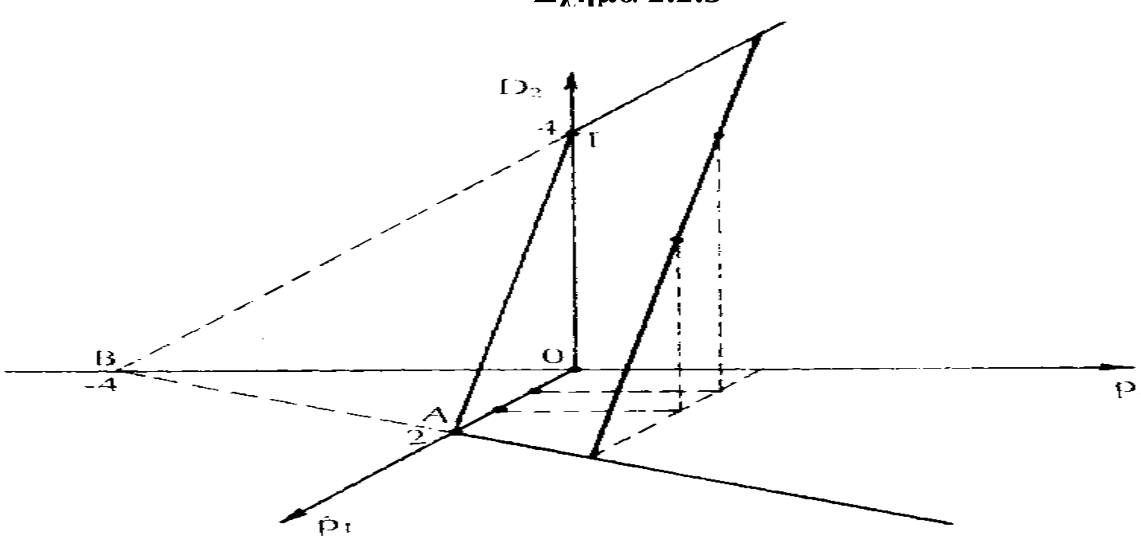
Παράδειγμα 2.1.3: Αν τώρα έχουμε τα δύο προϊόντα $Π_1$, $Π_2$ με αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης $D_1 = 2 + p_1 - p_2$, $D_2 = 4 - 2p_1 + p_2$, τότε παρατηρούμε τα εξής:

Σχήμα 2.2.4



- Επειδή από την πρώτη συνάρτηση ζήτησης, παίρνουμε ως επιφάνεια ζήτησης για το προϊόν $Π_1$, το μέρος του επιπέδου που περνάει από τα σημεία Α(-2,0,0), Β(0,2,0) και Γ(0,0,2), στην πρώτη γωνία του τρισορθογώνιου συστήματος Ο . p_1 p_2 D_1 (Σχήμα 2.2.4), εύκολα προκύπτει από το σχήμα ότι η αύξηση της τιμής p_2 του προϊόντος $Π_2$ συνεπάγεται την μείωση της ζητούμενης ποσότητας D_1 του άλλου προϊόντος $Π_1$.

Σχήμα 2.2.5



- Επειδή από τη δεύτερη συνάρτηση ζήτησης παίρνουμε ως επιφάνεια ζήτησης για το προϊόν $Π_2$ το μέρος του επιπέδου που περνάει από τα σημεία Α(2,0,0), Β(0,-4,0) και Γ(0,0,4), στην πρώτη γωνία του τρισορθογώνιου συστήματος $O\ .\ p_1\ p_2\ D_2$ (Σχήμα 2.2.5), εύκολα προκύπτει από το σχήμα ότι η αύξηση της τιμής p_1 του προϊόντος $Π_1$ συνεπάγεται την μείωση της ζητούμενης ποσότητας D_2 του άλλου προϊόντος $Π_2$.

Έτσι, μετά από τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι τα προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$ είναι **συμπληρωματικά**.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η ζητούμενη ποσότητα q_1 του προϊόντος $Π_1$ είναι μια συνάρτηση της τιμής του p_1,της τιμής p_2 του άλλου προϊόντος $Π_2$ και του διαθέσιμου εισοδήματος y των καταναλωτών, οπότε η συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος $Π_1$ είναι $q_1 = f(p_1,p_2,y)$, τότε οι **συναρτήσεις οριακής ζήτησης** (marginal demand functions) ορίζονται ως εξής:

Οριακή ζήτηση της q_1 ως προς την $p_1 = \partial q_1/\partial p_1$

Οριακή ζήτηση της q_1 ως προς την $p_2 = \partial q_1/\partial p_2$ και

Οριακή ζήτηση της q_1 ως προς το διαθέσιμο εισόδημα $y = \partial q_1/\partial y$.

Αποδεικνύεται ότι σε κανονικές οικονομικές συνθήκες έχουμε ότι:

$\partial q_1/\partial p_1 < 0$, $\partial q_1/\partial y > 0$ και ακόμα

$\partial q_1/\partial p_2 < 0$ αν τα προϊόντα $Π_1$, $Π_2$, είναι συμπληρωματικά.

$\partial q_1/\partial p_2 > 0$ αν τα προϊόντα Π1, $Π_2$, είναι ανταγωνιστικά.

2.3 Η συνάρτηση προσφοράς

Στην προηγούμενη παράγραφο μιλήσαμε για τη ζήτηση των αγαθών που προέρχεται από τους καταναλωτές. Τα αγαθά αυτά προσφέρονται, όπως ήδη γνωρίζουμε στο οικονομικό κύκλωμα, από τις επιχειρήσεις. Έτσι μία πολύ σημαντική έννοια, όπου δεν μπορεί να παραβλέψει κανείς μιλώντας για οικονομικά προβλήματα, είναι η έννοια της προσφοράς.

Είναι γνωστό ότι η ποσότητα q ενός προϊόντος ή αγαθού που οι παραγωγοί ή κάτοχοι επιθυμούν να πουλήσουν σε μια ορισμένη χρονική περίοδο είναι συνάρτηση όχι μόνο της τιμής πώλησης της μονάδας του, αλλά και άλλων παραγόντων που επηρεάζουν το κόστος παραγωγής του, όπως π.χ. η τεχνολογία, οι προσφορές των εισροών που είναι απαραίτητες για την παραγωγή αυτού του προϊόντος καθώς και το κλίμα ή οι καιρικές συνθήκες αν μιλάμε για αγροτικό προϊόν.

Κυρίως, όμως, η **προσφορά** (supply) αναφέρεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη τιμή ενός αγαθού και στις ποσότητες του αγαθού που προσφέρονται σε κάθε τιμή. Έτσι, αν υποτεθεί ότι η προσφορά της υπόψη ποσότητας εξαρτάται μόνο από την τιμή του προϊόντος, ενώ οι άλλοι αναφερόμενοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί, τότε έχουμε τη **συνάρτηση προσφοράς** (supply function) $q_s = f(p) \mid A$ ή πιο απλά $S = f(p) \mid A$, όπου πάλι για το A είναι, όπως και στη συνάρτηση ζήτησης, $A = [p_1, p_2]$.

Αναλυτικότερα, για μια ορισμένη χρονική στιγμή, η συνάρτηση προσφοράς γράφεται:

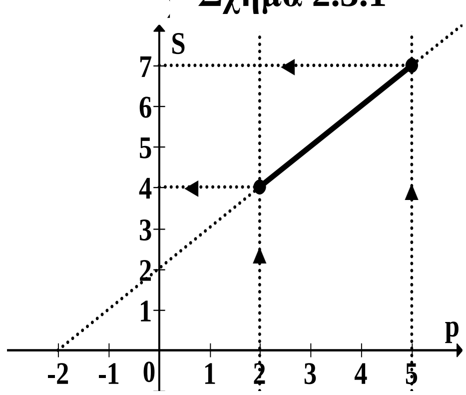
$$Q_s = - c + dP$$

όπου Qs είναι η **προσφερόμενη ποσότητα** (quantity supplied) του αγαθού, η οποία, όπως προείπαμε, εξαρτάται από τη τιμή του και από μια σειρά άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες τους οποίους υποθέτουμε σταθερούς και τους συμβολίζουμε με το γράμμα c. Ο συντελεστής d συμβολίζει την κλίση της συνάρτησης προσφοράς.

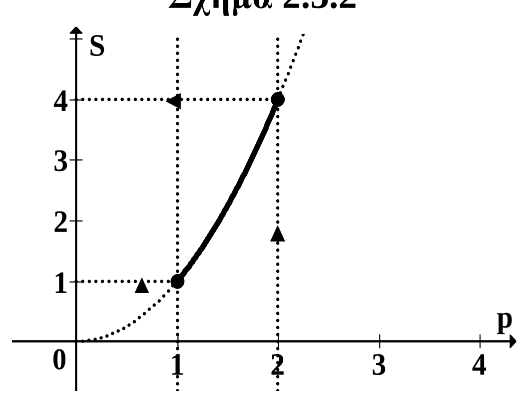
Επειδή γνωρίζουμε ότι όσο χαμηλότερη (υψηλότερη) είναι η τιμή ενός προϊόντος, τόσο μικρότερη (μεγαλύτερη) είναι η ποσότητα που οι παραγωγοί γενικά προσφέρουν να πουλήσουν, η μεν συνάρτηση προσφοράς είναι συνήθως αύξουσα, η δε **καμπύλη προσφοράς** (supply curve) έχει συνήθως θετική κλίση, αλλά σε εξαιρετικές περιπτώσεις μπορεί να έχει και κλίση μηδενική, άπειρη ή και αρνητική. Αυτή η ανάλογη σχέση μεταξύ τιμής και προσφερόμενης ποσότητας ονομάζεται **νόμος της προσφοράς** (law of supply).

Έτσι αν έχουμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 2.3.1) και (Σχήμα 2.3.2) με αντίστοιχες συναρτήσεις προσφοράς $S = 2 + p \mid [2,5]$ και $S = p^2 \mid [1,2]$, τότε θα λάβουμε τις τελικές συναρτήσεις προσφοράς $p= S - 2 \mid [4,7]$ και $p = \sqrt{S} \mid [1,4]$ με γραφικές παραστάσεις αντίστοιχα τις απεικονιζόμενες στα Σχήμα 2.3.3 και Σχήμα 2.3.4.

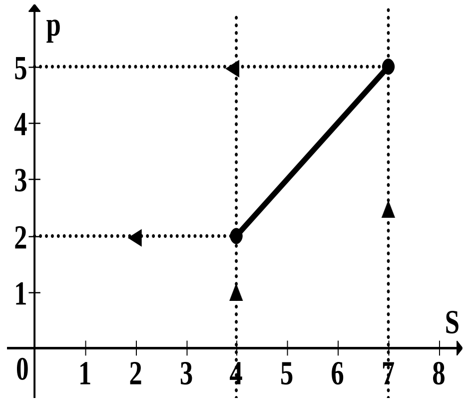
Σχήμα 2.3.1



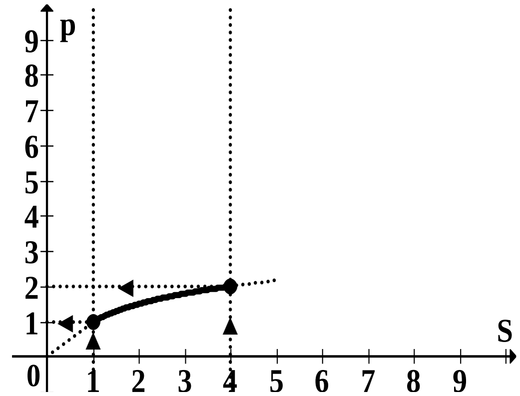
Σχήμα 2.3.2



Σχήμα 2.3.3



Σχήμα 2.3.4



Αν τώρα για ένα ζευγάρι προϊόντων Π_1, Π_2 με p_1, p_2 συμβολίζουμε τις αντίστοιχες τιμές των μονάδων τους και με S_1, S_2 τις αντίστοιχες προσφερόμενες ποσότητες τους, τότε οι συναρτήσεις $S_1 = f(p_1,p_2) \mid \Delta_1$ και $S_2 = f(p_1,p_2) \mid \Delta_2$, όπου Δ_1, Δ_2 είναι υποσύνολα του καρτεσιανού γινομένου των διαστημάτων μεταβολής των τιμών τους στην αγορά, λέγονται **συναρτήσεις προσφοράς** (supply functions) των προϊόντων αυτών.

2.4 Ισορροπία στην αγορά

Θεωρείται γνωστό ότι με τον όρο γενικά **αγορά** (market) εννοούμε ένα μέρος όπου οι **αγοραστές** (buyers) και οι **πωλητές** (sellers) αγοράζουν και πωλούν αγαθά, υπηρεσίες και παραγωγικούς πόρους.

Η **ισορροπία** (equilibrium) αναφέρεται σε μια κατάσταση της αγοράς που, αν πραγματοποιηθεί, τείνει να διατηρηθεί. Είναι, με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα της αντισταθμίσεως των δυνάμεων της αγοράς και, στην Οικονομία, αυτό συμβαίνει όταν η ποσότητα ενός προϊόντος που ζητιέται στην αγορά μια ορισμένη χρονική περίοδο είναι ίση με τη ποσότητα του ίδιου προϊόντος που προσφέρεται στην αγορά την ίδια χρονική περίοδο.

Γεωμετρικά η ισορροπία στην αγορά πραγματοποιείται στην τομή της καμπύλης ζήτησης και της καμπύλης προσφοράς για το υπόψη προϊόν. Έτσι, αν $D = f(p) \mid A_1$ και $S = g(p) \mid A_2$ είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς του ίδιου προϊόντος, τότε η εξίσωση «**ζήτηση = προσφορά**», δηλαδή η D=S ή καλύτερα η f(p)=g(p), λέγεται **εξίσωση ισορροπίας** (equilibrium equation) της αγοράς.

Αναλυτικότερα, αντικαθιστώντας στη συνθήκη ισορροπίας, $Q_d=Q_s$, τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης λαμβάνουμε:

$$\alpha - bP = - c + dP$$

και

$$P = \frac{\alpha + c}{b + d} = P_e$$

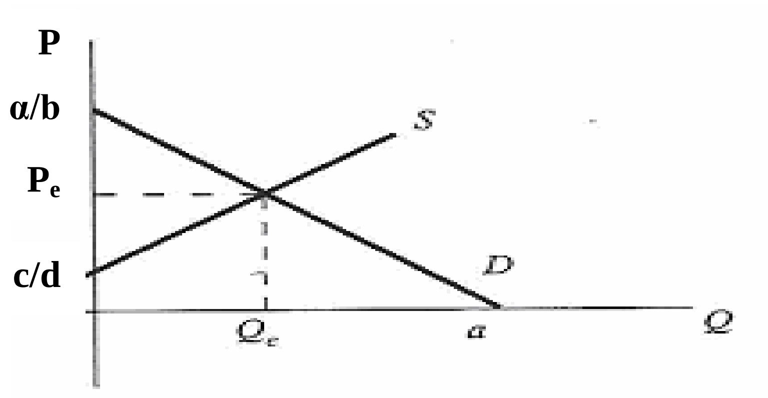
όπου P_e είναι η **τιμή ισορροπίας** (equilibrium price). Αν αντικαταστήσουμε την P_e είτε στη συνάρτηση ζήτησης είτε στη συνάρτηση προσφοράς, λαμβάνουμε την **ποσότητα ισορροπίας** (equilibrium quantity) Q_e. Έτσι έχουμε:

$$Q = \frac{\alpha d - bc}{b + d} = Q_e$$

Αν τώρα η εξίσωση της ισορροπίας της αγοράς έχει ρίζα P_e, όπου $P_e \in A = A_1 \cap A_2$, τότε από κάθε τέτοια ρίζα ορίζεται ένα σημείο $K(P_e, Q_e)$ με $Q_e = f(P_e) = g(P_e)$ που λέγεται **σημείο ισορροπίας** (equilibrium point) στην αγορά του υπόψη προϊόντος.

Οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, όπως επίσης και το σημείο ισορροπίας τους, μπορούν να απεικονισθούν στο ίδιο διάγραμμα. Είναι σημαντικό εδώ να αναφέρουμε ότι στις προσφοράς και ζήτησης η τιμή παρουσιάζεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Παρόλα αυτά, οι οικονομολόγοι συνηθίζουν να θέτουν στον κάθετο άξονα την τιμή και στον οριζόντιο την ποσότητα. Εμείς στη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων ακολουθούμε αυτήν τη συνήθεια, έχοντας υπόψη ότι στα μαθηματικά δεν είναι απόλυτα ακριβής.

Σχήμα 2.4



Παράδειγμα 2.4: Αν υποθέσουμε ότι έχουμε τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος ή αγαθού $Q_D = 6 - P$ και $Q_S = \frac{P}{2}$, αντίστοιχα, τότε να βρεθούν η εξίσωση ισορροπίας και το σημείο ισορροπίας.

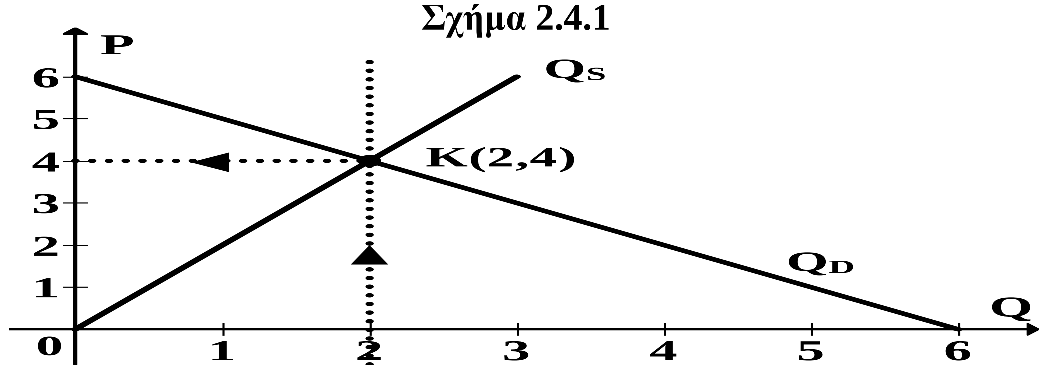
Λύση:

Η εξίσωση ισορροπίας θα είναι:

$$Q_D = Q_S \Rightarrow 6 - P = \frac{P}{2}$$

από την οποία βρίσκουμε σημείο ισορροπίας το Κ(2,4) με ποσότητα ισορροπίας $Q_0 = 2$ και τιμή ισορροπίας $P_0 = 4$.

Σχήμα 2.4.1



2.4.1 Συγκριτική στατική ανάλυση

Στη συνάρτηση ζήτησης υποθέσαμε ότι η ζητούμενη ποσότητα εξαρτάται από την τιμή μόνο. Οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες, όπως π.χ. το διαθέσιμο εισόδημα, ο πληθυσμός, η φορολογία, οι προτιμήσεις, οι σχετικές τιμές κλπ. θεωρήθηκαν σταθερές και συμπεριλήφθηκαν στο σταθερό όρο α.. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διαθέσιμο εισόδημα μεταβάλλεται έτσι, ώστε για κάθε τιμή οι καταναλωτές επιθυμούν και ταυτόχρονα μπορούν να αγοράσουν μεγαλύτερη ποσότητα. Ας υποθέσουμε, ότι η μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα για κάθε τιμή ισούται με h. Οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, όπως επίσης και η συνθήκη ισορροπίας γράφονται:

$Q_d = α - bP + h$

$Q_d = -c + dP$

$Q_s = Q_d$

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, καταλήγουμε στην καινούργια τιμή ισορροπίας:

$$P'_e = \frac{\alpha + c}{b + d} + \frac{h}{b + d} = P_e + \Delta P$$

όπου P'_e είναι η καινούργια τιμή και ΔP είναι η μεταβολή που προκαλείται στην τιμή από μια αύξηση του εισοδήματος:

$$\Delta P = \frac{h}{b + d} \Rightarrow \frac{\Delta P}{h} = \frac{1}{b + d}$$

Ο όρος 1/(b + d) ονομάζεται **πολλαπλασιαστής συγκριτικής στατικής** (comparative statics multiplier) και εκτιμά την επίδραση της μεταβολής μιας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές επί της τιμής του αγαθού. Με άλλα λόγια, ο όρος αυτός δείχνει πόσο θα μεταβληθεί η τιμή ισορροπίας του αγαθού, αν το διαθέσιμο εισόδημα ή κάποια άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή, μεταβληθεί κατά μία νομισματική μονάδα.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, υπολογίζουμε την καινούργια ποσότητα ισορροπίας η οποία θα είναι:

$$Q'_e = \frac{cb - d\alpha}{b + d} + \frac{dh}{b + d} = Q_e + \Delta Q$$

Αν λύσουμε ως προς τη μεταβολή της ποσότητας ισορροπίας, λαμβάνουμε:

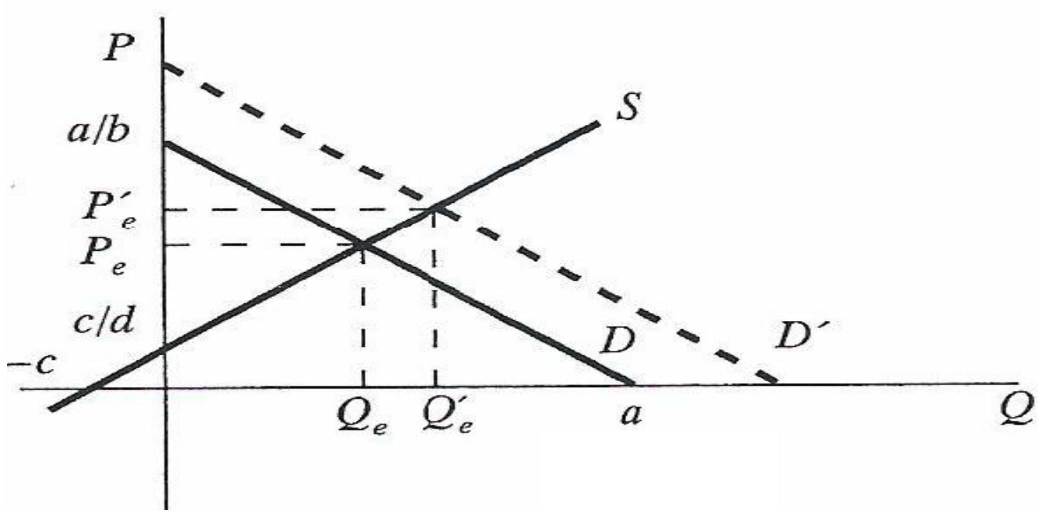
$$\Delta Q = \frac{dh}{b + d} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{h} = \frac{d}{b + d}$$

Ο όρος d/(b + d) συμβολίζει έναν καινούργιο πολλαπλασιαστή συγκριτικής στατικής που η σημασία του είναι παραπλήσια με αυτήν που εξετάσαμε προηγουμένως, με τη διαφορά ότι τώρα αναφερόμαστε σε μεταβολή στην ποσότητα ισορροπίας. Σημειώνουμε ότι ισχύει: $\frac{d}{b + d} < 1$

που σε οικονομικούς όρους σημαίνει ότι, όταν μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, που στην αρχή θεωρήσαμε σταθερή, μεταβληθεί κατά μία μονάδα, η ποσότητα ισορροπίας μεταβάλλεται προς την ίδια διεύθυνση αλλά κατά λιγότερο της μονάδας. Το υπόλοιπο της μεταβολής εκδηλώνεται στην τιμή.

Τα πιο πάνω μπορούν να παρασταθούν γραφικά στο Σχήμα 2.4.2, του οποίου η διαφορά με το σχήμα 2.4 βρίσκεται στην παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης κατά την ποσότητα h.

Σχήμα 2.4.2



Το είδος της ανάλυσης που ακολουθήσαμε, δεν εξαντλεί το θέμα της ισορροπίας. Η συγκριτική στατική ανάλυση θεωρεί αρχικά την οικονομία σε ένα σημείο ισορροπίας, ώσπου μια διαταραχή την οδηγεί σε ένα άλλο σημείο ισορροπίας. Η ακριβής πορεία από το ένα σημείο στο άλλο, όπως επίσης και ο χρόνος που μεσολαβεί για την επίτευξη της καινούργιας ισορροπίας παραμένουν άγνωστοι. Ένα άλλο σοβαρό ερώτημα που παραμένει αναπάντητο, είναι το κατά πόσο η ισορροπία που επιτυγχάνεται είναι ευσταθής ή όχι. Αυτά τα ζητήματα της δυναμικής οικονομικής ισορροπίας απαιτούν γνώσεις διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών.

2.5 Συνάρτηση συνολικών εσόδων

2.5.1 Συνάρτηση συνολικών εσόδων με μία ανεξάρτητη μεταβλητή

Αν με R συμβολίσουμε το χρηματικό ποσό που θα εισπράξουμε από την πώληση ενός προϊόντος ή αγαθού, τότε αυτό το ποσό λέγεται **συνολικό έσοδο** (total revenue) και, όπως εύκολα καταλαβαίνουμε, θα εξαρτάται και από την τιμή πωλήσεως p της μονάδας του υπόψη προϊόντος και από την ποσότητα q που θα πωληθεί.

Γενικά, στη συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση συνολικών εσόδων R και της ποσότητας του πωλούμενου προϊόντος q, ξεχωρίζουμε δύο καταστάσεις:

1. Την κατάσταση όπου μια επιχείρηση λειτουργεί κάτω από συνθήκες **πλήρους ανταγωνισμού** (perfect competition), δηλαδή τις συνθήκες όπου η ποσότητα του προσφερόμενου στην αγορά προϊόντος δεν μπορεί να επηρεάσει την **αγοραία τιμή** (market price) αυτού, καθώς επίσης και τις συνθήκες όπου οι τιμές των χρησιμοποιούμενων συντελεστών παραγωγής δεν μεταβάλλονται.

Στον πλήρη ανταγωνισμό η τιμή του προϊόντος p είναι σταθερή και τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι συνάρτηση της ποσότητας q. Άρα: $R = p_0 * q = f(q)$.

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων είναι γραμμικής μορφής χωρίς σταθερό όρο και η διαγραμματική τους παρουσίαση είναι ευθεία γραμμή που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων.

2. Την κατάσταση όπου στην αγορά επικρατεί **ατελής ανταγωνισμός** (imperfect competition) για το συγκεκριμένο προϊόν, δηλαδή η μεταβαλλόμενη τιμή ανά μονάδα προσφερόμενου προϊόντος από την επιχείρηση αντανακλά στη ζήτηση του από τους καταναλωτές και κατά ακολουθία στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης.

Σε αυτή τη περίπτωση η τιμή του προϊόντος είναι συνάρτηση της ποσότητας του προϊόντος p = p(q). Οπότε η συνάρτηση των συνολικών εσόδων είναι της μορφής: R = [p(q)] * q = g(q).

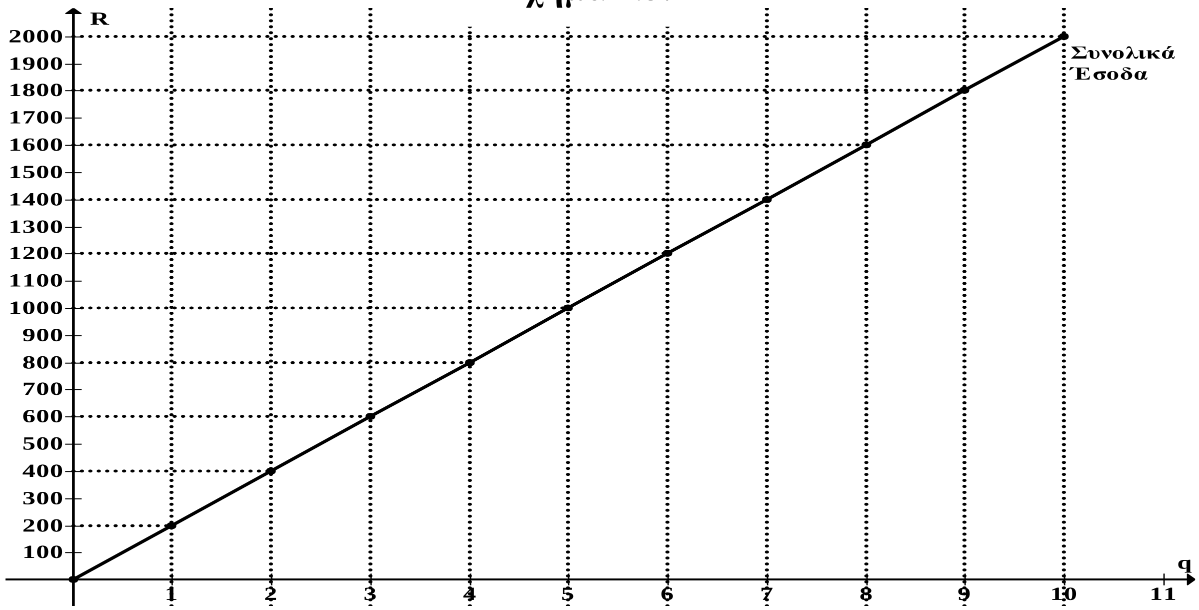
Η διαγραμματική παρουσίαση της παραπάνω συνάρτησης είναι καμπύλη που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων, αφού για q = 0 έχουμε R = 0. Η μορφή της καμπύλης των συνολικών εσόδων εξαρτάται από τη μαθηματική μορφή της συνάρτησης που συνδέει την τιμή του προϊόντος με την ποσότητα.

Παράδειγμα 2.5.1: Έστω ότι αναφερόμαστε σε ένα σύστημα τέλειου ανταγωνισμού όπου η τιμή του προϊόντος είναι σταθερή και ίση με p_0=200 χρηματικές μονάδες. Αν η δυνατότητα της επιχείρησης είναι να παράγει από 0 έως και 10 μονάδες προϊόντος, να βρεθούν τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης και να γίνει η διαγραμματική παρουσίαση τους.

Λύση:

Μονάδες Προϊόντος (q)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Τιμή p_0=200	**200**	**200**	**200**	**200**	**200**	**200**	**200**	**200**	**200**	**200**	**200**
Συνολικά έσοδα (R)	**0**	**200**	**400**	**600**	**800**	**1000**	**1200**	**1300**	**1400**	**1500**	**1600**

Σχήμα 2.5.1

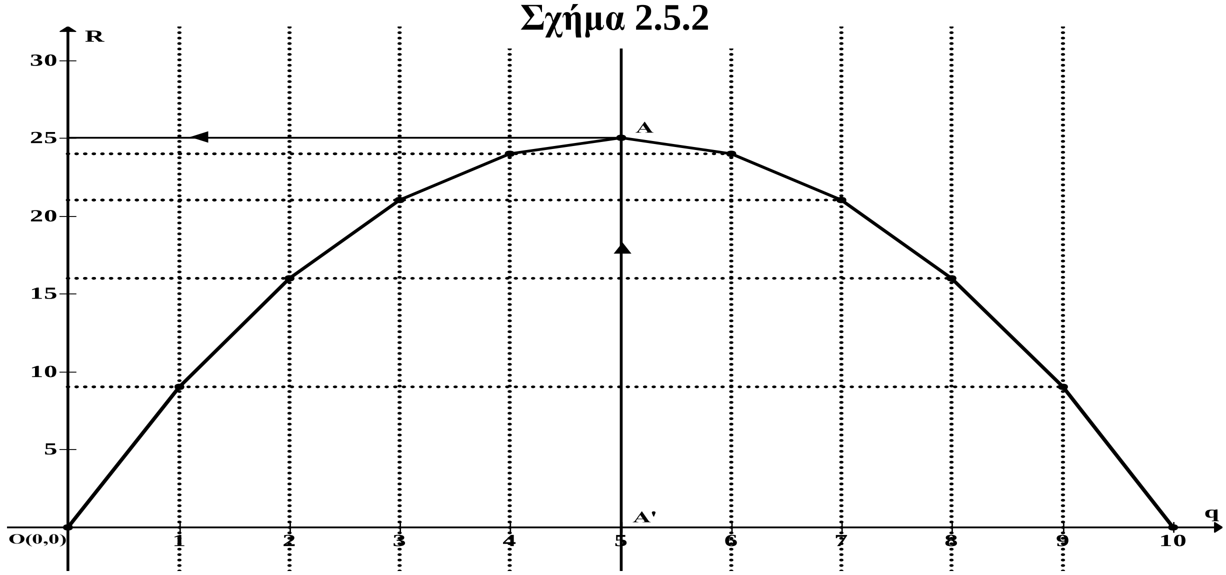


Παράδειγμα 2.5.2: Έστω ότι σε ένα σύστημα ατελή ανταγωνισμού, η σχέση που συνδέει την τιμή με τη ποσότητα του προϊόντος, είναι: p=f(q)=10-q. Να βρεθεί η συνάρτηση των συνολικών εσόδων και να γίνει η διαγραμματική της παρουσίαση.

Λύση:

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων, σε ένα σύστημα ατελή ανταγωνισμού, είναι: $R = p * q = (10 - q) * q = 10 * q - q^2$.

Σχήμα 2.5.2



Όπως φαίνεται από το σχήμα η καμπύλη των συνολικών εσόδων είναι συμμετρική, με άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΑ’.

2.5.2 Συνάρτηση συνολικών εσόδων με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές

Αν τώρα για ένα ζευγάρι προϊόντων $Π_1$, $Π_2$, με p_1, p_2 συμβολίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των μονάδων τους και με q_1, q_2 τις αντίστοιχες για πώληση ποσότητες τους, τότε τα συνολικά έσοδα θα είναι: $R = p_1 * q_1 + p_2 * q_2$ (1).

Στη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι:

1. Αν η τιμή των προϊόντων είναι σταθερή για κάθε ποσότητα τους, δηλαδή $p_1 = p_{0,1} * q_{0,1} = p_{0,2}$, τότε προκύπτει από την (1) η γραμμική συνάρτηση συνολικών εσόδων.

$R = p_{0,1} * q_1 + p_{0,2} * q_2 \mid A$ (2)

Όπου Α είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου των διαστημάτων μεταβολής των ποσοτήτων για πώληση από τα προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$.

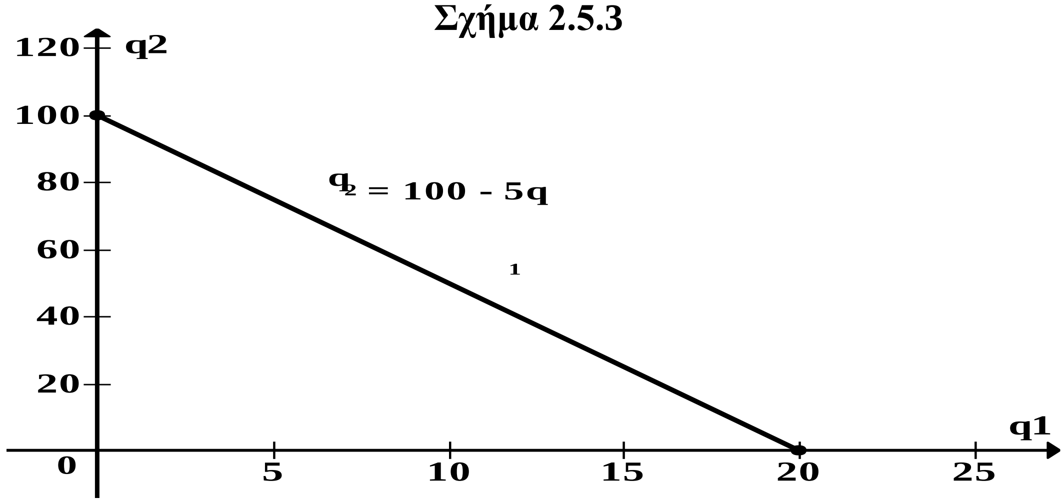
Ειδικότερα, σε μια επιχείρηση που λειτουργεί κάτω από συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού και που παράγει δύο προϊόντα $Π_1$, $Π_2$, η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση παραγωγής μεταξύ των προϊόντων αυτών για την πραγματοποίηση σταθερών εσόδων τη λέμε **συνάρτηση ισοεσόδων** (isorevenue function). Αυτή αναφέρεται σε οποιοδήποτε συνδυασμό παραγόμενων ποσοτήτων των προϊόντων $Π_1$ και $Π_2$ προκειμένου να επιτευχθούν ορισμένα έσοδα R. Έτσι για R=σταθερό προκύπτει από την (2) η συνάρτηση ισοεσόδων $q_2 = R/p_{0,2} - p_{0,1}/p_{0,2} * q_1$.

Παράδειγμα 2.5.3: Τα έσοδα μιας γεωργικής επιχείρησης είναι 500 χρηματικές μονάδες. Η τιμή ανά μονάδα του προϊόντος Π_1 είναι $p_{0,1}$ = 25 χρηματικές μονάδες και του Π_2 είναι $p_{0,2}$ = 5 χρηματικές μονάδες. Να βρεθεί η συνάρτηση ισοεσόδων.

Λύση:

$$q_2 = 500/5 - 25/5 * q_1 \Rightarrow q_2 = 100 - 5q_1$$

Σχήμα 2.5.3



2. Αν όμως οι τιμές των παραπάνω προϊόντων είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων τους, δηλαδή $p_1 = p_1(q_1)$, $p_2 = p_2(q_2)$, τότε προκύπτει από την συνάρτηση $R = p_{0,1}q_{01} + p_{0,2}q_{0,2} \mid A$, η συνάρτηση συνολικών εσόδων $R = p_1(q_1)q_1 + p_2(q_2)q_2 \mid A$ (3), δηλαδή της μορφής $R = f(q_1 q_2) \mid A$.

Ειδικότερα, σε μια επιχείρηση που λειτουργεί κάτω από συνθήκες **μονοπωλιακού ανταγωνισμού** (monopolistic competition), η τιμή του κάθε προϊόντος θα είναι συνάρτηση της ζητούμενης ποσότητας του από τους καταναλωτές. Έτσι για R=σταθερό προκύπτει από την (3) η συνάρτηση ισοεσόδων $q_2 = \frac{R}{p_2(q_2)} - \frac{p_1(q_1)}{p_2(q_2)}\, q_1$.

Παράδειγμα 2.5.4: Οι συναρτήσεις ζήτησης των δύο προϊόντων Π_1, Π_2 που παράγει μια επιχείρηση είναι αντίστοιχα $q_1=10-2p_1$, $q_2=6-3p_2$ και τα έσοδα που πετυχαίνει η επιχείρηση είναι R=160 χρηματικές μονάδες. Να βρεθεί η συνάρτηση ισοεσόδων.

Λύση:

Επειδή $p_1=5-q_1/2$, $p_2=2-q_2/3$, η συνάρτηση ισοεσόδων θα είναι

$q_2=\dfrac{160}{2-\frac{q_2}{3}}-\dfrac{5-\frac{q_1}{2}}{2-\frac{q_2}{3}}q_1$ από την οποία παίρνουμε τελικά μετά τις πράξεις την $3q_{2,1}+2q_{2,2}-30q_1-12q_2+960=0$.

2.6 Συνάρτηση συνολικού κόστους

Αν με C συμβολίσουμε τη χρηματική δαπάνη που απαιτείται για την απόκτηση ή παραγωγή ενός προϊόντος ή αγαθού, τότε η δαπάνη αυτή λέγεται **συνολικό κόστος** (total cost). Με σταθερές συνθήκες παραγωγής, το συνολικό κόστος θα εξαρτάται και από την ποσότητα των μονάδων που παράγονται και από την τιμή κόστους p της κάθε μονάδας που θα παραχθεί. Έτσι θα έχουμε τη **συνάρτηση συνολικού κόστους** (total cost function) TC = f(p,q) ή πιο απλά **συνάρτηση κόστους** (cost function) C = f(p,q).

Επειδή όμως σε ένα σύστημα τέλειου ανταγωνισμού οι τιμές των προϊόντων και των συντελεστών παραγωγής είναι δεδομένες, για το λόγο αυτό το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος είναι συνάρτηση μόνο της παραγόμενης ποσότητας Q.

Οπότε, ως συνάρτηση του κόστους παραγωγής μιας επιχείρησης, ορίζουμε την μαθηματικό-οικονομική σχέση που συνδέει το κόστος παραγωγής C, με το παραγόμενο από την επιχείρηση προϊόν Q. Δηλαδή: $C = f(Q)$.

Γενικότερα, το συνολικό κόστος είναι το χρηματικό ποσό που δαπανά η επιχείρηση για την χρησιμοποίηση των σταθερών συντελεστών παραγωγής (π.χ. κτιριακές εγκαταστάσεις) συν το χρηματικό ποσό που δαπανά η επιχείρηση για την χρησιμοποίηση των μεταβλητών συντελεστών παραγωγής) π.χ. αριθμός εργαζομένων που απασχολούνται στην επιχείρηση). Δηλαδή:

(Συνολικό κόστος) = (σταθερό κόστος) + (μεταβλητό κόστος).

Όταν όμως δεν παράγεται προϊόν, δηλαδή όταν $q = 0$, τότε η αντίστοιχη τιμή του κόστους $f(0) = C_0$ αντιπροσωπεύει το **σταθερό κόστος** (fixed cost) της παραγωγής. Στην πραγματικότητα όμως η συνάρτηση κόστους είναι η $C = f(g(z)) = φ(z)$, όπου η σύνθετη συνάρτηση $φ(z)$ εκφράζει το συνολικό κόστος C ως συνάρτηση της χρησιμοποιούμενης ποσότητας z ενός συντελεστή παραγωγής μέσω της συνάρτησης παραγωγής $q = f(z)$, η οποία θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Με τη σύνθετη συνάρτηση $C = f(g(z)) = φ(z)$ εκφράζεται η έμμεση εξάρτηση του κόστους από την ποσότητα του χρησιμοποιούμενου συντελεστή παραγωγής, ενώ από τη συνάρτηση $C = f(q)$ εκφράζεται η άμεση εξάρτηση του από την ποσότητα της παραγόμενης ποσότητας.

Τέλος αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ζευγάρι προϊόντων $Π_1,Π_2$ και με C συμβολίσουμε το άθροισμα των συνολικών δαπανών που απαιτούνται για την παραγωγή q_1, q_2 ποσοτήτων αντίστοιχα από τα υπόψη προϊόντα, τότε η συνάρτηση συνολικού κόστους των προϊόντων αυτών θα είναι $C =f(q_1,q_2) \mid A$, όπου A είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου των διαστημάτων μεταβολής των ποσοτήτων παραγωγής των προϊόντων $Π_1$ και $Π_2$.

Παράδειγμα 2.6.1: Δίδεται ότι η συνάρτηση του συνολικού κόστους μιας επιχείρησης είναι της μορφής:

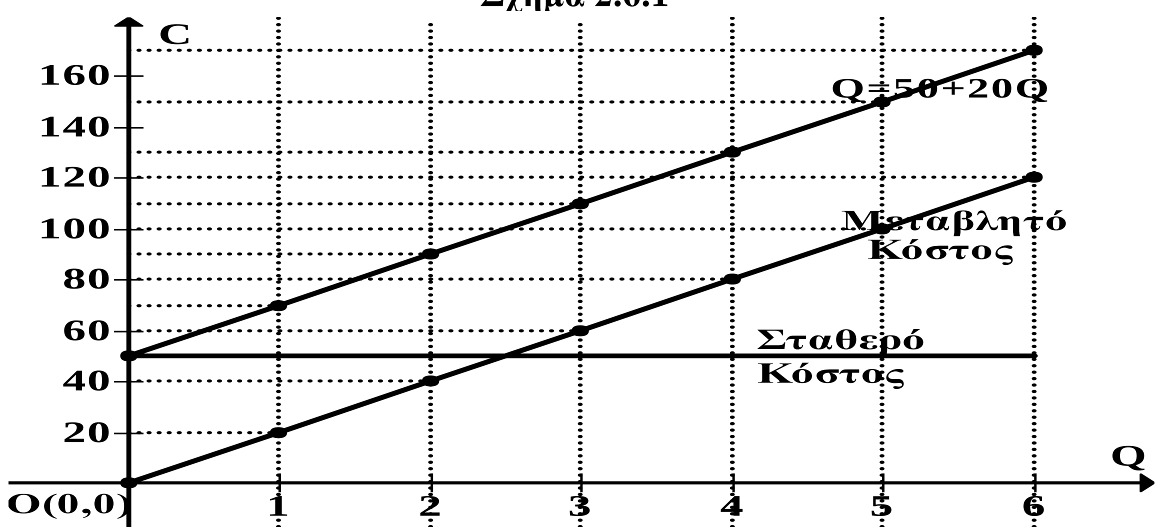
C = f (Q) = 50 + 20Q.

Να βρεθούν το σταθερό και το μεταβλητό κόστος και να γίνουν οι διαγραμματικές τους παρουσιάσεις αν υποθέσουμε ότι η παραγωγική δυνατότητα της επιχείρησης είναι μέχρι και 6 μονάδες.

Λύση:

Από τη μορφή της συνάρτησης κόστους, συμπεραίνουμε ότι το σταθερό κόστος της επιχείρησης είναι 50 χρηματικές μονάδες. Το ποσό αυτό δεν επηρεάζεται από τις αυξομειώσεις της παραγωγής της επιχείρησης. Το μεταβλητό κόστος εξαρτάται από το επίπεδο παραγωγής και εκφράζεται στη συνάρτηση του συνολικού κόστους από την έκφραση 20*Q.

Σχήμα 2.6.1



2.7 Συνάρτηση παραγωγής

2.7.1 Συνάρτηση παραγωγής με ένα μεταβλητό συντελεστή

Η **συνάρτηση παραγωγής** (production function) αναφέρεται στη σχέση ανάμεσα στο μέγιστο παραγόμενο προϊόν και στους συντελεστές της παραγωγής, όπως κεφάλαιο, εργασία, έδαφος, κ.α. Η συνάρτηση παραγωγής με τρείς μεταβλητές γράφεται:

$$q = f(L, K)$$

όπου το παραγόμενο προϊόν q είναι το αποτέλεσμα διάφορων συνδυασμών ανάμεσα στις υπηρεσίες του συντελεστή εργασία L και στις υπηρεσίες του συντελεστή κεφάλαιο K.

Αν για την παραγωγή ενός προϊόντος χρησιμοποιηθεί μόνο μια **εισροή** (input) από το πλήθος των εναλλακτικών εισροών (συντελεστών παραγωγής), ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές παραγωγής παραμένουν σταθεροί, τότε λέμε ότι αναφερόμαστε σε **βραχυχρόνιες συναρτήσεις παραγωγής** (short-term production functions). Σε αυτή την περίπτωση μια συνάρτηση παραγωγής έχει την μορφή $q = f(z)$ και εκφράζει, όπως προείπαμε, μια παραγωγική δραστηριότητα με την οποία z μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής μετασχηματίζονται σε q μονάδες ενός προϊόντος.

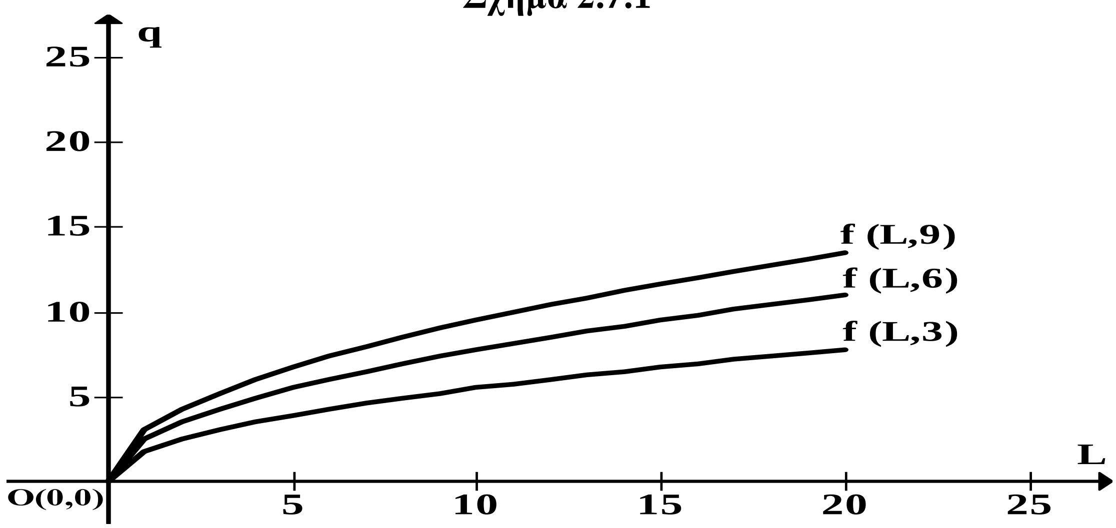
Η πιο δημοφιλής από τις συναρτήσεις παραγωγής που έχουν χρησιμοποιηθεί, είναι η Cobb-Douglas, η οποία γράφεται:

$$q = AL^{\alpha} * K^{b}$$

όπου A, α, και b είναι θετικοί αριθμοί, με $\alpha < 1$ και $b < 1$.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζουμε τρεις καμπύλες προϊόντος που προκύπτουν από τη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas, με $A = 1$, α = b = 1/2. Οι καμπύλες του διαγράμματος που ακολουθεί προκύπτουν, όταν ο συντελεστής κεφάλαιο παραμένει σταθερός και οι υπηρεσίες του συντελεστή εργασία, υπολογισμένες σε αριθμό εργατών ή ώρες εργασίας, μεταβάλλονται από 0 μέχρι 20. Έτσι π.χ. η καμπύλη f(L,3) προκύπτει όταν το κεφάλαιο είναι σταθερό και ίσο με 3 και ο συντελεστής εργασίας μεταβάλλεται από 0 μέχρι 20. Οι συναρτήσεις f(L,6) και f(L,9) ερμηνεύονται με ανάλογο τρόπο.

Σχήμα 2.7.1



2.7.2 Συνάρτηση παραγωγής με δύο μεταβλητούς συντελεστές

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε την συνάρτηση παραγωγής με έναν μεταβαλλόμενο συντελεστή, όπου η συνάρτηση της παραγωγής ήταν της μορφής $q = f(z)$. Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται η συνάρτηση παραγωγής με δύο μεταβαλλόμενους συντελεστές.

Έτσι γενικά, αν για την παραγωγή ενός προϊόντος x, y είναι οι ποσότητες των χρησιμοποιούμενων δύο συντελεστών παραγωγής L εργασία και K κεφαλαίου αντίστοιχα και q η αντίστοιχη παραγόμενη ποσότητα του υπόψη προϊόντος, τότε η συνάρτηση παραγωγής του προϊόντος αυτού θα είναι της μορφής $q = f(x, y) \mid A$, όπου A είναι το υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου των διαστημάτων μεταβολής των ποσοτήτων των συντελεστών L και K.

Στην περίπτωση αυτή, όπου για τη παραγωγή ενός προϊόντος από μια επιχείρηση μεταβάλλονται δύο ή περισσότεροι συντελεστές παραγωγής που διαθέτει η υπόψη επιχείρηση, λέμε ότι αναφερόμαστε σε **μακροχρόνιες συναρτήσεις παραγωγής** (long-term production functions).

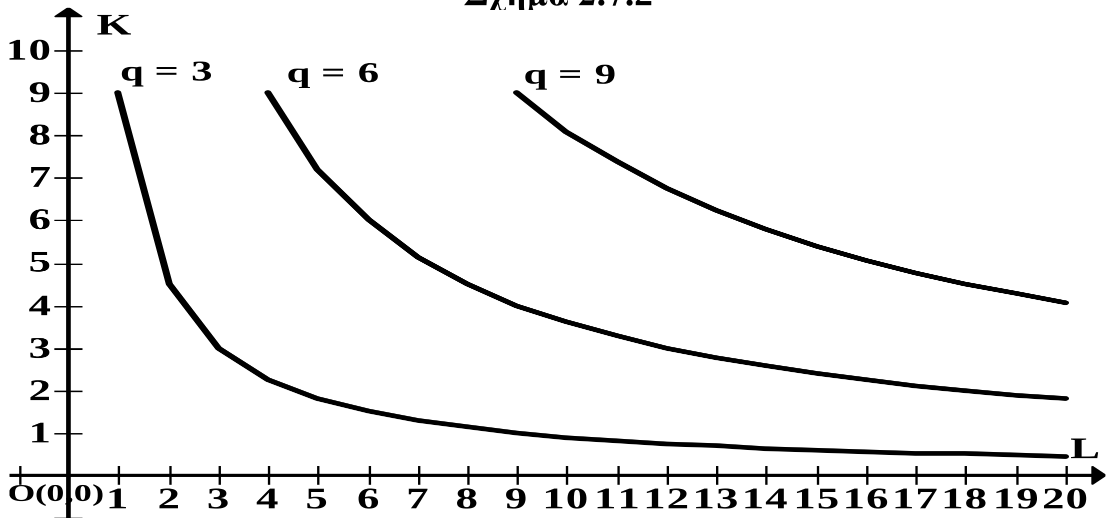
Χρησιμοποιώντας την καμπύλη Cobb-Douglas, θεωρώντας το προϊόν δεδομένο ενώ το κεφάλαιο και την εργασία ως αλληλοεξαρτημένες μεταβλητές, θα έχουμε έναν εναλλακτικό τρόπο παρουσίασης των μεταβλητών αυτών που αποτελούν τη συνάρτηση παραγωγής.

Έτσι, στο παράδειγμα της ενότητας 2.7.1, αν υποθέσουμε ότι q =3, τότε θα έχουμε:

$$3 = L^{1/2} * K^{1/2} \Rightarrow K^{1/2} = \frac{3}{L^{1/2}} \Rightarrow K = 9/L$$

Η γραφική παράσταση αυτής της εξίσωσης είναι **ορθογώνια υπερβολή** (rect - angular hyperbola). Στο σχήμα 2.7.2 παρουσιάζουμε τρείς τέτοιες καμπύλες για q = 3, q = 6, και q = 9.

Σχήμα 2.7.2



Οι καμπύλες αυτές στην Οικονομία καλούνται καμπύλες ίσου προϊόντος (equal product curves or isoquants) επειδή στα σημεία τους αντιστοιχεί ίση παραγωγή προϊόντος.

Με απλά λόγια η αντίστοιχη συνάρτηση ισοπαραγωγής συνδέει τους δύο συντελεστές παραγωγής για την παραγωγή σταθερής ποσότητας προϊόντος και δίνει τους διάφορους συνδυασμούς ποσοτήτων όλων των συντελεστών παραγωγής με τους οποίους μια επιχείρηση μπορεί να παράγει ορισμένη ποσότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Μία βασική έννοια των Ανωτέρων Μαθηματικών είναι η έννοια της παραγώγου. Οι παράγωγοι εμφανίστηκαν με κάποια ασάφεια και όχι μαθηματική αυστηρότητα κατά την αρχή και το μέσο του 17^{ου} αιώνα και υπήρξαν δημιούργημα των Γερμανών Μαθηματικών και φιλοσόφων Newton και Leibniz, που οδηγήθηκαν σε αυτές, ο μεν πρώτος από προβλήματα κινηματικής (ταχύτητα, επιτάχυνση), ο δε δεύτερος από προβλήματα γεωμετρίας (εφαπτόμενη καμπύλης).

Αν πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) \mid \Delta = [\alpha, \beta] \subseteq R$ και ένα σημείο $\xi \epsilon \Delta' = (\alpha, \beta)$ τότε μπορούμε να σχηματίσουμε μια νέα συνάρτηση με τύπο $K_\xi(x) = \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \mid \Delta - \{\xi\}$ που λέγεται **κλίση** (slope) ή **πηλίκο αυξήσεων** (quotient increments) (ή **διαφορών**) της f(x) στο σημείο ξ.

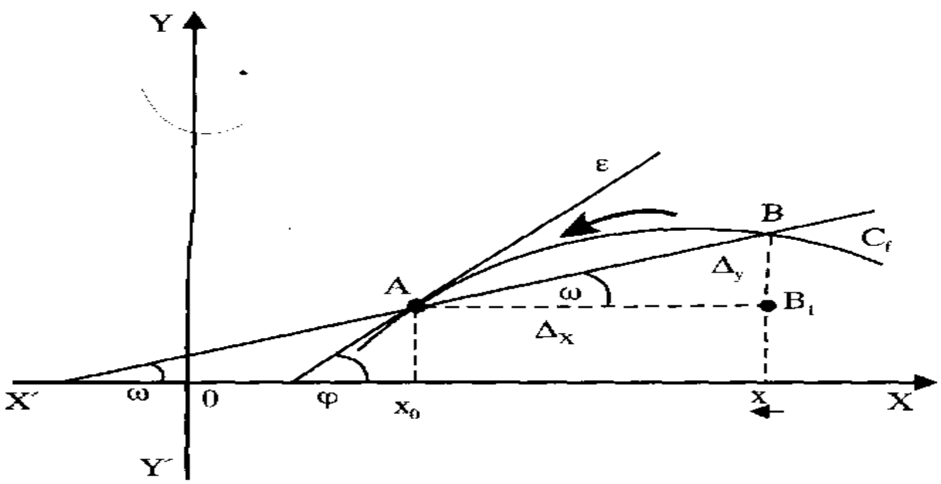
Αν τώρα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$, δηλαδή το όριο $\lim\limits_{x \to \xi} K_\xi(x)$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός ή το $\pm\infty$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f(x) έχει παράγωγο ή παραγωγίζεται στο ξ. Την οριακή αυτή τιμή ονομάζουμε **παράγωγο** (derivative) ή καλύτερα **πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f(x)** (first derivative of the function f(x)) **στη θέση ξ** και τη συμβολίζουμε συνήθως με $f'(\xi)$ ή $f'(x) \mid x = \xi$ ή ακόμα και $\dfrac{df(\xi)}{dx}$ ή $\dfrac{df(x)}{dx} \mid x = \xi$.

Μια επιπλέον βοήθεια στο να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια τις παραγώγου είναι η γεωμετρική της ερμηνεία. Γενικότερα μπορούμε να πούμε ότι η παράγωγος f '(x) μιας συνάρτησης y = f(x) σε ένα σημείο x_0 є D(f) ορίζεται από τη σχέση:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

όταν βέβαια το όριο αυτό υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός.

Σχήμα 3.1



Στο σχήμα 3.1 A είναι το σημείο με συντεταγμένες (x_0, f(x_0)) και B(x, f(x)) είναι ένα άλλο τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης C_f της y = f(x). Ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ παριστά την κλίση της C_f μεταξύ των A και B, είναι δηλαδή $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = εφω.

Όμως, όταν x → x_0, τότε και B → A, οπότε η χορδή AB τείνει να συμπέσει με την εφαπτομένη ε της C_f στο A.

Άρα $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{A \to B} \text{εφω} = \text{εφ φ}$.

Κατά συνέπεια, αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε υπάρχει η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ και μάλιστα η $f'(x_0)$ ισούται με την κλίση της ε.

Παράδειγμα 3.1: Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^3 + 2$ στο σημείο $x_0= 5$, καθώς και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο ίδιο σημείο.

Λύση:

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου είναι:

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{x^3 + 2 - (5^3 + 2)}{x - 5} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5x) * (x^2 + 5x + 25)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} (x^2 + 5x + 25) = 75$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 5$ θα έχει εξίσωση της μορφής $y=g(x) = αx + β$ με $α = f'(5) = 75$, δηλαδή $y = g(x) = 75x + β$.

Κατά συνέπεια $g(5) = f(5) = 5^3 + 2 = 75 * 5 + β \Rightarrow 127 = 375 + β \Rightarrow β = -248$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 75x – 248$.

Όταν μια συνάρτηση έχει περισσότερες από μια μεταβλητές, τότε υπάρχουν δυο ειδών παραγωγίσεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε, την **ολική παραγώγιση** (total derivative) και τη **μερική παραγώγιση** (partial derivative). Η ολική παραγώγιση επιτρέπει την ταυτόχρονη μεταβολή όλων των μεταβλητών, ενώ η μερική παραγώγιση επιτρέπει τη μεταβολή μιας μόνο μεταβλητής κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές. Με αυτή την έννοια, η μερική παραγώγιση αποτελεί επέκταση του λογισμού σε πολυμεταβλητές συναρτήσεις. Έτσι θα ασχοληθούμε με τη μερική παραγώγιση εξετάζοντας την περίπτωση δυο μόνο μεταβλητών υποθέτοντας ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η εξέταση περισσότερων μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της περίπτωσης των δύο μεταβλητών.

Έτσι, αν στη συνάρτηση z=f(x, y) κρατήσουμε σταθερή τη μια από τις δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, έστω την y, ενώ η x μεταβάλλεται, τότε η z γίνεται συνάρτηση τελικά μόνο του x και μπορούμε να την παραγωγίσουμε σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες. Η παράγωγος που προκύπτει ονομάζεται **μερική παράγωγος της συναρτήσεως z=f(x, y) ως προς x** και συμβολίζεται $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Έτσι έχουμε: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$. Εκτός από το $\frac{\partial z}{\partial x}$ η παράγωγος αυτή συμβολίζεται και f_x (x, y) ή Z_x ή $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε και συμβολίζουμε τη μερική παράγωγο της z=f(x, y) ως προς y:

$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ ή f_y (x, y) ή Z_y ή $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Παράδειγμα 3.2: Να υπολογιστούν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης:

$$z = f(x, y) = 4xy+3x+7y^{-1}$$

και να εκτιμηθούν στο σημείο (x_0, y_0)=(1, 2).

Λύση:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 4y+3 \text{ και } f_x(1, 2) = 4(2)+3 = 11$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 4x\text{-}7y^{-2} \text{ και } f_y(1, 2) = 4(1)\text{-}7(2)^{-2} = 2{,}25$$

Στη συνέχεια αναφέρονται οι σημαντικότερες εφαρμογές της παραγώγου σε οικονομικά θέματα, όπου η παρουσίαση και η ανάλυση των εφαρμογών αυτών είναι απαραίτητη για την βέλτιστη αντίληψη της σημαντικότητας της παραγώγου σε οικονομικά προβλήματα.

3.2 Ελαστικότητα συναρτήσεων

Η ελαστικότητα μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή μιας συνάρτησης που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην οικονομική επιστήμη υπάρχουν διάφορα είδη ελαστικότητας. Ενδεικτικά αναφέρουμε την ελαστικότητα ζήτησης, προσφοράς, εισοδήματος, υποκατάστασης κλπ, από τις οποίες, οι περισσότερες θα αναλυθούν σε επόμενες ενότητες.

Αναλυτικότερα, αν υποθέσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση $y = f(x) \mid A$ τότε, όπως προείπαμε, η $f'(x) \mid A$ εκφράζει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της $y = f(x)$ σε μονάδες που μετριέται η x. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε αλλαγή στις μονάδες μέτρησης των x ή y μεταβάλλεται και η $f'(x)$.

Ένα ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f(x) που είναι ανεξάρτητος των μονάδων μετρήσεως των x ή y είναι η **ελαστικότητα** (elasticity) που συμβολίζεται με $\frac{Ey}{Ex} = \frac{Ef(x)}{Ex}$ ή ε_y ή n_y ή (σπάνια) f^{ε}.

Η ελαστικότητα, που είναι από τα πιο βασικά εργαλεία μελέτης των οικονομικών συναρτήσεων, ορίζεται ως **ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της**

εξαρτημένης μεταβλητής ως προς την ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Κατ' επέκταση προς την ελαστικότητα συναρτήσεως με μια πραγματική μεταβλητή, ορίζεται και η **μερική ελαστικότητα** (partial elasticity) συνάρτησης με δύο ή και περισσότερες πραγματικές μεταβλητές.

Έτσι, αν Z + f(x, y) | $A \subseteq R^2$ είναι παραγωγίσιμη στο A συνάρτηση, τότε **μερική ελαστικότητα αυτής ως προς x (αντίστοιχα ως προς y)** στο σημείο (x, y) є A με f(x, y) $\neq 0$, λέγεται το γινόμενο

$$\frac{x}{f(x,y)} * \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ (αντίστοιχα: } \frac{y}{f(x,y)} * \frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$$

και συμβολίζουμε

$$\frac{Ez}{Ex} = \frac{Ef}{Ex} = \frac{x}{f} * \frac{\partial f}{\partial x} \text{ (αντίστοιχα: } \frac{Ez}{Ey} = \frac{Ef}{Ey} = \frac{y}{f} * \frac{\partial f}{\partial y}).$$

Από τον παραπάνω ορισμό και με την υπόθεση ότι x, y, f(x, y)>0 προκύπτουν, κατά τα γνωστά, οι έμμεσοι αριθμοί

$$\frac{Ez}{Ex} = \frac{Ef}{Ex} = \frac{x}{f} * \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{f} * \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{\partial (\ln f)}{\partial x}}{\frac{\partial (\ln x)}{\partial x}} = \frac{\partial (\ln f)}{\partial (\ln x)}$$

$$\frac{Ez}{Ey} = \frac{Ef}{Ey} = \frac{y}{f} * \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{f} * \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{\partial (\ln f)}{\partial y}}{\frac{\partial (\ln y)}{\partial y}} = \frac{\partial (\ln f)}{\partial (\ln y)}$$

με αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία σε σύστημα τρισορθογώνιων λογαριθμικών αξόνων lnx, lny, lnf.

Παράδειγμα 3.2.1: Να βρεθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης f(x)=3x-2 | R, καθώς και η τιμή της για x=2.

Λύση:

Για την παραπάνω συνάρτηση έχουμε ελαστικότητα:

$$\frac{Ef(x)}{Ex} = \frac{x}{3x-2} * (3x-2)' = \frac{x}{3x-2} * 3 = \frac{3x}{3x-2}$$

και για x=2 έχουμε τιμή ελαστικότητας:

$$\frac{Ef(3)}{Ex} = \frac{3*3}{3*3-2} = \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = 1.5$$

που σημαίνει ότι όταν η μεταβλητή x αυξάνει (αντίστοιχα μειώνεται) κατά 1% τότε η συνάρτηση f(x) αυξάνει(αντίστοιχα μειώνεται) κατά 1.5%.

Παράδειγμα 3.2.2: Αν έχουμε τη συνάρτηση f(x,y)=x^2-y | R^2 να βρεθούν οι ελαστικότητες για κάθε μεταβλητή καθώς και οι μερικές ελαστικότητες στο σημείο (2, 1).

Λύση:

Για τη συνάρτηση f(x, y) έχουμε ελαστικότητες:

$$\frac{Ef}{Ex} = \frac{x}{x^2-y} * 2x = \frac{2x^2}{x^2-y} \text{ και } \frac{Ef}{Ey} = \frac{y}{x^2-y} * (-1) = \frac{-y}{x^2-y}.$$

Μερικές ελαστικότητες στο σημείο (2, 1) έχουμε:

$$\frac{Ef}{Ex}(2,1) = \frac{2*4}{4-1} = \frac{8}{3} = 2.7 \text{ και } \frac{Ef}{Ey}(2,1) = \frac{1}{4-1} = -\frac{1}{3} = -0.3.$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν αντίστοιχα οι εξής ερμηνείες:

Όταν η μεταβλητή x (αντίστοιχα y) αυξάνει κατά 1%, ενώ η μεταβλητή y (αντίστοιχα x) παραμένει σταθερή, τότε η συνάρτηση f αυξάνει (αντίστοιχα μειώνεται) κατά 2.7% (αντίστοιχα κατά 0.3%).

3.2.1 Ελαστικότητα ζήτησης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μάθαμε για το νόμο της ζήτησης σύμφωνα με τον οποίο, όταν η τιμή ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας μεταβληθεί, τότε η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού ή της υπηρεσίας μεταβάλλεται προς την αντίθετη διεύθυνση, με την προϋπόθεση ότι όλες οι άλλες μεταβλητές που επηρεάζουν τη ζήτηση παραμένουν σταθερές.

Αν και ο νόμος της ζήτησης δεν αφήνει καμία αμφιβολία όσον αφορά τη σχέση τιμής και ποσότητας, δεν παρέχει όμως επαρκή γνώση για την ακριβή σχέση μεταξύ τιμής και συνολικών εσόδων. Η τελευταία σχέση είναι κρίσιμη για το καθορισμό της τιμής από τη διεύθυνση μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού γενικότερα. Με άλλα λόγια, αν η τιμή ενός αγαθού αυξηθεί και η ποσότητα που αγοράζεται μειωθεί, το γινόμενο της τιμής επί την ποσότητα, δηλαδή τα συνολικά έσοδα, μπορεί να αυξηθεί, να μειωθεί ή ακόμη να μείνει αμετάβλητο.

Η έννοια της **ελαστικότητας ζήτησης** (elasticity of demand) χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει πως ακριβώς η μεταβολή στη τιμή ενός αγαθού επηρεάζει τα συνολικά έσοδα των επιχειρήσεων, καθώς επίσης και τις δαπάνες των νοικοκυριών για το αγαθό του οποίου η τιμή έχει μεταβληθεί.

Η ελαστικότητα ζήτησης παριστάνεται γενικά με ε_D και περιλαμβάνει τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

1. **Την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή** (price elasticity of demand), που παριστάνεται με $\varepsilon_{D(p)}$, και συνήθως έχει αρνητική τιμή, αφού για τα περισσότερα αγαθά η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται με την αύξηση της τιμής και αντίστροφα. Βάζοντας όμως μπροστά στον τύπο που μας δίνει την $\varepsilon_{D(p)}$ ένα αρνητικό πρόσημο επιδιώκουμε να αποφύγουμε την χρήση αρνητικών αριθμών και καταλήγουμε γενικά στην ακόλουθη πρόταση-ορισμό:

Σε όλες τι περιπτώσεις ελαστικότητας ζήτησης ε_D η ζήτηση λέγεται ελαστική αν $\varepsilon_D>1$, ανελαστική αν $\varepsilon_D<1$ και μοναδιαίας ελαστικότητας αν $\varepsilon_D=1$.

Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς τη τιμή μπορεί να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τύπο:

$$\varepsilon_{D(p)} = \frac{\%\ \text{μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα}}{\%\ \text{μεταβολή στη τιμή}}.$$

Με μαθηματικούς όρους ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$\varepsilon_{D(p)} = -\frac{\Delta q / q}{\Delta p / p} = \frac{\Delta q * p}{\Delta p * q}$$

Ο τύπος της ελαστικότητας ζήτησης αφορά ένα συγκεκριμένο τμήμα της καμπύλης ζήτησης. Αν υποθέσουμε ότι οι μεταβολές στην τιμή είναι απειροελάχιστα μικρές, δηλαδή lim $\Delta p \to 0$, τότε εξ ορισμού έχουμε:

$$\lim_{\Delta p \to 0} = -\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{dq}{dp}.$$

Συνεπώς, ο τύπος της ελαστικότητας σημείου μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\varepsilon_{D(p)} = \frac{dq * p}{dp * q}$$

όπου dq/dp είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης q = f(p).

Επίσης, μια καμπύλη ζήτησης που είναι ευθεία γραμμή και τέμνει και τους δύο άξονες, δηλαδή τους θετικούς ημιάξονες, είναι ελαστική πάνω από το μέσο της, έχει μοναδιαία ελαστικότητα στο μέσο της και είναι ανελαστική κάτω από το μέσο της.

Για καμπύλες ζήτησης όμως που δεν είναι ευθείς, τέτοιες γενικές ιδιότητες δεν υπάρχουν και μόνο στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη ζήτησης έχει τη μορφή ορθογώνιας υπερβολής έχουμε $\varepsilon_D=1$ σε κάθε σημείο της.

Ανεξάρτητα πάντως από το σχήμα της καμπύλης ζήτησης, καθώς η τιμή του αγαθού πέφτει, η συνολική δαπάνη των καταναλωτών για το αγαθό αυξάνεται και τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης μειώνονται όταν $\varepsilon_D>1$, παραμένουν σταθερά όταν $\varepsilon_D=1$ και όταν $\varepsilon_D<1$ η συνολική δαπάνη των καταναλωτών για το αγαθό μειώνεται, ενώ τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης συνεχίζουν να μειώνονται.

Παράδειγμα 3.2.3: Έστω η συνάρτηση ζήτησης με μαθηματικό τύπο:

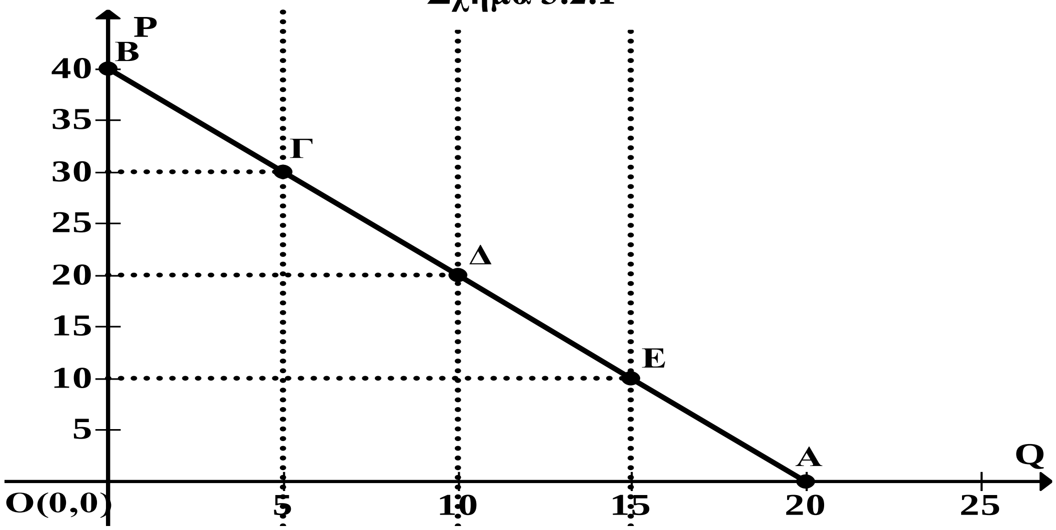
$Q = f(P) = 20 – 0,5P \mid [0,40]$.

Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στα διάφορα σημεία της ευθείας της ζήτησης.

Λύση:

Η συνάρτηση ζήτησης έχει μαθηματικό τύπο που είναι γραμμικής μορφής. Η διαγραμματική παρουσίαση της συνάρτησης θα είναι ευθεία γραμμή που θα τέμνει τους άξονες συντεταγμένων στα σημεία Α (0,20) και Β (40,0).

Σχήμα 3.2.1



Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή δίνεται από τον παρακάτω αλγεβρικό τύπο:

$$|\varepsilon_{D(p)}| = \frac{P}{Q} * \frac{dQ}{dP}.$$

Η έκφραση $\left(\frac{dQ}{dP}\right)$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης ζήτησης, που είναι σε αυτή την περίπτωση: $\frac{dQ}{dP}$ = f'(P) =(20-0,5P)' = -0,5.

Οι ελαστικότητες ζήτησης ως προς την τιμή στα σημεία Β, Γ, Δ, Ε και Α της ευθείας ζήτησης είναι:

- Στο σημείο Β, έχουμε P = 40 και Q =0. Άρα:

$$\varepsilon_{D(p)} = \frac{P}{Q} * \frac{dQ}{dP} = \frac{P}{Q} * (-0,5) \rightarrow -\infty.$$

- Στο σημείο Γ έχουμε P = 30 και Q = 5. Άρα:

$$\varepsilon_{D(p)} = \frac{P}{Q} * \frac{dQ}{dP} = \frac{30}{5} * (-0,5) = -3$$

- Στο σημείο Δ έχουμε P = 20 και Q = 10. Άρα:

$$\varepsilon_{D(p)} = \frac{P}{Q} * \frac{dQ}{dP} = \frac{20}{10} * (-0{,}5) = -1$$

- Στο σημείο Ε έχουμε P = 10 και Q = 15. Άρα:

$$\varepsilon_{D(p)} = \frac{P}{Q} * \frac{dQ}{dP} = \frac{10}{15} * (-0{,}5) = -0{,}33$$

- Στο σημείο Α, τέλος, έχουμε P = 0 και Q = 20. Άρα:

$$\varepsilon_{D(p)} = \frac{P}{Q} * \frac{dQ}{dP} = \frac{0}{20} * (-0{,}5) = 0.$$

2. **Την ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα του καταναλωτή ή εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης** (income elasticity of demand) που γενικά παριστάνεται με $\varepsilon_{D(y)}$. Ως ελαστικότητα ζήτησης προς το εισόδημα ή εισοδηματική ελαστικότητα ορίζουμε την ποσοστιαία μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας που προέρχεται από μια ποσοστιαία μεταβολή του εισοδήματος των καταναλωτών, όταν οι άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τη ζητούμενη ποσότητα παραμένουν σταθεροί.

Δηλαδή, η εισοδηματική ελαστικότητα εκφράζεται από το παρακάτω κλάσμα:

$$\varepsilon_{D(y)} = \frac{\%\ \text{μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα}}{\%\ \text{μεταβολή στο εισόδημα}} = \frac{\Delta q / q}{\Delta y / y}.$$

Εάν η συνάρτηση ζήτησης είναι της μορφής Q=f(y), τότε η ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα των καταναλωτών δίνεται από τον παρακάτω αλγεβρικό τύπο:

$$\varepsilon_{D(y)} = \frac{y}{q} * \frac{dq}{dy} = \frac{dq}{q} * \frac{y}{dy} = \frac{dq / q}{dy / y}.$$

Στην περίπτωση της εισοδηματικής ελαστικότητας ζήτησης αν $\varepsilon_{D(y)}<0$ το αγαθό είναι **κατώτερο** (inferior) ή **υποδεέστερο**, ενώ αν $\varepsilon_{D(y)}>0$ το αγαθό είναι **κανονικό** (normal). Ειδικότερα ένα κανονικό αγαθό θεωρείται αγαθό **πολυτελείας** (luxury) αν $\varepsilon_{D(y)}>1$ ή αγαθό **πρώτης ανάγκης** (necessity) αν $0<\varepsilon_{D(y)}<1$. Ενδέχεται όμως, ανάλογα με το **επίπεδο εισοδήματος** (level of income) του καταναλωτή, η ελαστικότητα $\varepsilon_{D(y)}$ για το ίδιο αγαθό να έχει διάφορες τιμές. Έτσι, ένα αγαθό μπορεί να είναι αγαθό πολυτελείας σε χαμηλά επίπεδα εισοδήματος, αγαθό πρώτης ανάγκης σε ενδιάμεσα επίπεδα εισοδήματος και κατώτερο σε υψηλά επίπεδα εισοδήματος.

Παράδειγμα 3.2.4: Έστω ότι το εισόδημα του καταναλωτή Χ αυξάνεται από 158.000 σε 162.000 χρηματικές μονάδες, ενώ η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος Α αυξήθηκε από 100 κιλά σε 120 κιλά. Να βρεθεί η εισοδηματική ελαστικότητα και να χαρακτηριστεί το προϊόν Α.

Λύση:

Έστω ότι με Y_1 συμβολίζουμε το εισόδημα των 158.000 χρηματικών μονάδων και με Y_2 το εισόδημα των 162.000 χρηματικών μονάδων. Η μεταβολή που επήλθε στο εισόδημα του καταναλωτή Χ είναι:

$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = 162.000 - 158.000 = 4.000$ χρηματικές μονάδες.

Έστω ότι με q_1 συμβολίζουμε τη ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος Α των 100 κιλών, ενώ με q_2 συμβολίζουμε την ζητούμενη ποσότητα του ίδιου προϊόντος των 120 κιλών. Η μεταβολή που επήλθε στη ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος εξαιτίας της μεταβολής του εισοδήματος του καταναλωτή είναι:

$\Delta q = q_2 - q_1 = 120 - 100 = 20$ κιλά.

Αν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω στον αλγεβρικό τύπο της ελαστικότητας, θα έχουμε:

$$\varepsilon_{D(y)} = \frac{Y}{q} * \frac{\Delta q}{\Delta Y} = \frac{158.000}{100} * \frac{20}{4000} = 7{,}9.$$

Η εισοδηματική ελαστικότητα ισούται με 7,9, ενώ το προϊόν Α χαρακτηρίζεται ως ανώτερο προϊόν, αλλά πολυτελείας.

3. **Την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή άλλου αγαθού ή την σταυροειδή ελαστικότητα** (cross elasticity of demand) που την παριστάνουμε με $\varepsilon_{D(cr)}$.

Η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης είναι μικρότερης σημασίας από ότι οι δύο προηγούμενες ελαστικότητες. Η συγκεκριμένη ελαστικότητα μετράει το βαθμό ευαισθησίας των μεταβολών της ζητούμενης ποσότητας του προϊόντος ως προς τις μεταβολές των τιμών άλλων προϊόντων.

Δηλαδή, η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης του προϊόντος Α, σε σχέση με τις μεταβολές της τιμής του προϊόντος Β, δίνεται από τον παρακάτω αλγεβρικό τύπο:

$$E_{A/B} = \frac{\%\ \text{μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας του A}}{\%\ \text{μεταβολή της τιμής του προιόντος B}} = \frac{(\Delta Q_A / Q_A)}{(\Delta P_B / P_B)}.$$

Έτσι αν έχουμε την πολυμεταβλητή συνάρτηση ζήτησης, $Q_A = F(P_A, P_B, P_\Gamma, P_\Delta, \ldots)$, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$E_{A/B} = \frac{P_B}{Q_A} * \frac{\partial Q_A}{\partial P_B} = \frac{\partial Q_A}{Q_A} * \frac{P_B}{\partial P_B} = \frac{\dfrac{\partial Q_A}{Q_A}}{\dfrac{\partial P_B}{P_B}} = \left(\frac{\partial Q_A}{Q_A}\right) / \left(\frac{\partial P_B}{P_B}\right),$$

όπου $\frac{\partial Q_A}{\partial P_B}$ είναι η πρώτη μερική παράγωγος της πολυμεταβλητής συνάρτησης ζήτησης.

Επειδή η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού Χ εκφράζει τη σχέση μεταξύ της ζητούμενης ποσότητας αυτού και της τιμής άλλου αγαθού Υ, για αυτό, αν $\varepsilon_{D(cr)}>0$ ή πιο απλά $E_{X/Y}$, τα αγαθά Χ και Υ είναι **ανταγωνιστικά** ή **υποκατάστατα** (substitutes) το ένα του άλλου, και πιο συγκεκριμένα το αγαθό Υ είναι υποκατάστατο του αγαθού Χ. Αν $E_{X/Y}<0$ τα αγαθά είναι **συμπληρωματικά** και τέλος αν $E_{X/Y}=0$ τα δύο αγαθά είναι **ανεξάρτητα** (independent) ή **ουδέτερα**.

Θεωρούμε απαραίτητο να συμπληρώσουμε ότι μερικά αγαθά μπορεί να είναι υποκατάστατα σε μια περιοχή των τιμών και συμπληρωματικά σε άλλη περιοχή.

Παράδειγμα 3.1.5: Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη συσχέτιση μεταξύ τιμών και ποσοτήτων τριών αγαθών: του τσαγιού, της ζάχαρης και του καφέ. Να υπολογιστούν οι σταυροειδής ελαστικότητες ζήτησης.

Τσάι		Ζάχαρη		Καφές	
P_1	Q_1	P_2	Q_2	P_3	Q_3
150	125	30	500	1000	300
150	100	30	550	800	450
150	85	30	600	700	500
150	75	30	630	600	580

Λύση:

Για να υπολογίσουμε τις σταυροειδής ελαστικότητες ζήτησης θα πρέπει να διαμορφώσουμε έναν άλλο πίνακα, που να δίνει τις μεταβολές των τιμών και των ποσοτήτων.

Τσάι				Ζάχαρη				Καφές			
P_1	ΔP_1	Q_1	ΔQ_1	P_2	ΔP_2	Q_2	ΔQ_2	P_3	ΔP_3	Q_3	ΔQ_3
150	-	125	-	30	-	500	-	1000	-	300	-
150	0	100	-25	30	0	550	+50	800	-200	450	+150
150	0	85	-15	30	0	600	+50	700	-100	500	+ 50
150	0	75	-10	30	0	630	+30	600	-100	580	+ 80

Η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης της ζάχαρης ως προς την τιμή του καφέ, δίνεται από τον τύπο που ακολουθεί:

$$E_{Z/K} = \frac{P_3}{Q_2} * \frac{\Delta Q_2}{\Delta P_3} = \frac{1000}{500} * \frac{50}{-200} = -0,5.$$

Από το αρνητικό πρόσημο της σταυροειδούς ελαστικότητας, φαίνεται ότι τα δύο αγαθά, ζάχαρη-καφές, είναι συμπληρωματικά αγαθά. Η μείωση της τιμής του καφέ από 1000 χρηματικές μονάδες σε 800 θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ζητούμενης ποσότητας του καφέ από 300 μονάδες σε 450 και αύξηση της ζητούμενης ποσότητας της ζάχαρης από 500 μονάδες σε 550.

Η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης τσαγιού ως προς την τιμή του καφέ, δίνεται από τον τύπο:

$$E_{T/K} = \frac{P_3}{Q_1} * \frac{\Delta Q_1}{\Delta P_3} = \frac{1000}{125} * \frac{-25}{-200} = 1.$$

Από το θετικό πρόσημο της σταυροειδούς ελαστικότητας, φαίνεται ότι τα δύο αγαθά, τσάι-καφές, είναι υποκατάστατα αγαθά. Η μείωση της τιμής του καφέ από 1000 χρηματικές μονάδες σε 800 θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ζητούμενης ποσότητας του καφέ από 300 μονάδες σε 450 και μείωση της ζητούμενης ποσότητας τσαγιού από 125 μονάδες σε 100.

Υποτίθεται φυσικά ότι οι τιμές του τσαγιού και της ζάχαρης παραμένουν σταθερές, όπως σταθεροί είναι και οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες.

3.2.2 Το ολικό διαφορικό στα οικονομικά

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την επίδραση των μεταβολών των ανεξάρτητων μεταβλητών μεμονωμένα και ανεξάρτητα πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή. Το εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι: Πώς επηρεάζεται η εξαρτημένη μεταβλητή, όταν ορισμένες ή όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές υπόκεινται σε μεταβολές; Έχοντας υπόψη το παράδειγμα με τη συνάρτηση ζήτησης:

$$q_x = p_x\left(p_x, p_y, p_w, m\right) = 10p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2$$

το ερώτημα συγκεκριμενοποιείται ως εξής: Πώς μεταβάλλεται η ζήτηση του αγαθού x, όταν η τιμή p_x, όπως επίσης και οι τιμές των σχετιζόμενων αγαθών p_y και p_w μαζί με το εισόδημα μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Έτσι παίρνουμε τη συνολική μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας που είναι:

$$dq_x = \frac{\partial q_x}{\partial p_x} * dp_x + \frac{\partial q_y}{\partial p_y} * dp_y + \frac{\partial q_w}{\partial p_w} * dp_w + \frac{\partial q_x}{\partial m} * dm$$

Αν αντικαταστήσουμε, έχουμε:

$$dq_x = \left(-20p_x^{-3} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2\right) * dp_x + \left(10p_x^{-2} * p_w^{-0.5} * m^2\right) dp_y$$

$$-\left(5p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2\right) * dp_w + \left(20p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m\right) * dm.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε καθεμία από τις μερικές παραγώγους επί το λόγο της ανεξάρτητης μεταβλητής προς τον εαυτό της, δηλαδή την πρώτη μερική παράγωγο επί $p_x/p_x=1$, τη δεύτερη μερική παράγωγο με p_y/p_y κ.ο.κ., καταλήγουμε ότι καθένας από τους όρους του ολικού διαφορικού μετατρέπεται σε ένα γινόμενο σταθεράς επί το λόγο του $q_x = 10p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} m^2$ προς την ανεξάρτητη μεταβλητή που εντοπίζεται και τη μερική παράγωγο. Άρα έχουμε:

$$dq_x = \left(-20p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2\right) * \frac{dp_x}{p_y} + \left(10p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2\right) * \frac{dp_y}{p_y} -$$

$$-\left(5p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2\right) * \frac{dp_w}{p_w} + \left(20p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2\right) * dm$$

Αν πάρουμε τη ζητούμενη ποσότητα: $q_x = 10p_x^{-2} * p_y * p_w^{-0.5} * m^2$ ως κοινό παράγοντα, καταλήγουμε:

$$dq_x = q_x * \left[\left(-2p_x^{-1}\right) * dp_x + \left(p_y^{-1}\right) * dp_y - \left(0.5p_w^{-1}\right) * dp_w + \left(2m^{-1}\right) * dm\right]$$

Αν διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με το q_x, παίρνουμε:

$$\frac{dq_x}{q_x} = (-2) * \frac{dp_x}{p_x} + (1) * \frac{dp_y}{p_y} - (0.5) * \frac{dp_w}{p_w} + (2) * \frac{dm}{m}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε εκφράσει το ολικό διαφορικό σε ποσοστιαία ολική μεταβολή dq_x/q_x που ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ποσοστιαίων μεταβολών. Οι όροι μέσα στην παρένθεση αναφέρονται στις μερικές ελαστικότητες. Έτσι το (-2) είναι η μερική ελαστικότητα ζήτησης του αγαθού x, το (1) αναφέρεται στη σταυροειδή ελαστικότητα ζήτησης του αγαθού x ως προς το υποκατάστατό του, ενώ το (-0.5) είναι η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης του αγαθού x ως προς το συμπληρωματικό του. Τέλος το (2) αναφέρεται στην εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι οι ελαστικότητες είναι οι εκθέτες της αρχικής συνάρτησης ζήτησης.

3.2.3 Ελαστικότητα προσφοράς

Η **ελαστικότητα προσφοράς** (elasticity of supply) είναι έννοια παρόμοια με αυτήν της ζήτησης. Η ελαστικότητα προσφοράς μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η ελαστικότητα προσφοράς έχει θετική τιμή, που σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και στη τιμή είναι πάντα ευθέως ανάλογη λόγω της θετικής κλίσης της καμπύλης προσφοράς. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως και με τη ζήτηση, η ελαστικότητα προσφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

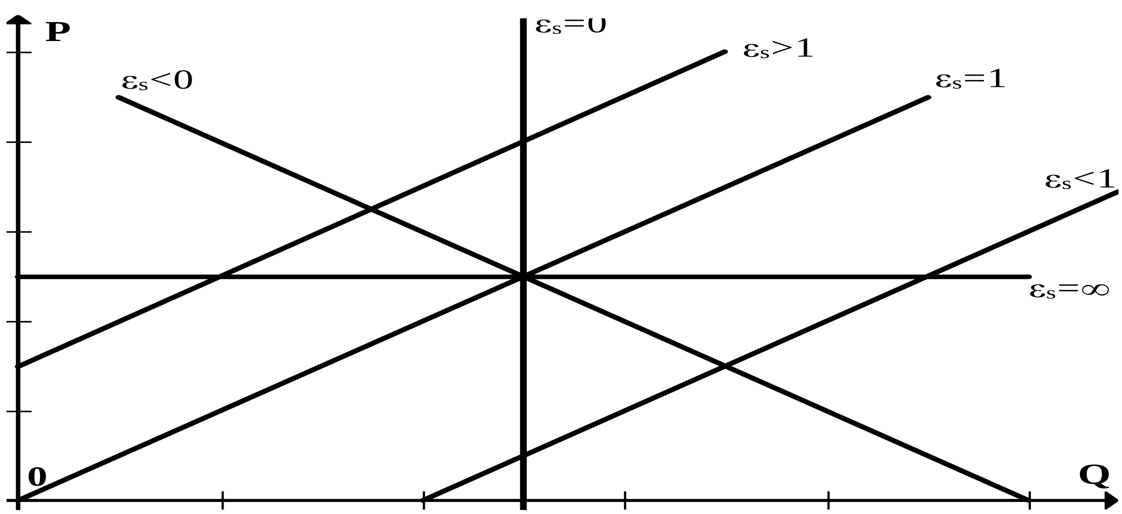
$$\varepsilon_s = \frac{dq}{dp} * \frac{p}{q}.$$

Η ελαστικότητα προσφοράς χρησιμοποιείται από τους οικονομολόγους για να υπολογίσουν την ευαισθησία της προσφερόμενης ποσότητας σε μια καθορισμένη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η μέτρηση της ελαστικότητας προσφοράς θεωρείται απαραίτητη, ειδικά σε ορισμένους κλάδους, όπου οι παραγωγικοί συντελεστές μεταφέρονται από την παραγωγή ενός προϊόντος στην παραγωγή ενός άλλου εξαιτίας μιας μεταβολής στην τιμή.

Επειδή η ελαστικότητα προσφοράς (ε_s) ορίζεται όπως ακριβώς και η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή ($\varepsilon_{D(p)}$), για αυτό η προσφορά θα λέγεται ελαστική αν $\varepsilon_s>1$, ανελαστική αν $\varepsilon_s<1$ και μοναδιαίας ελαστικότητας αν $\varepsilon_s=1$. Ειδικότερα αν η καμπύλη προσφοράς είναι μια ευθεία γραμμή με θετική κλίση τότε κατά μήκος αυτής της γραμμής είναι $\varepsilon_s>1$ αν η γραμμή αυτή τέμνει τον άξονα των τιμών, $\varepsilon_s<1$ αν τέμνει τον άξονα των ποσοτήτων και $\varepsilon_s=1$ αν περνάει από την αρχή των αξόνων.

Στην περίπτωση του σχήματος 3.2.2, όπου στο ίδιο σύστημα αξόνων έχουν σχεδιαστεί μια ευθεία καμπύλη προσφοράς που είναι ελαστική, μια που είναι ανελαστική, μια με μοναδιαία ελαστικότητα, μια με αρνητική ελαστικότητα, μια με μηδενική ελαστικότητα και μια με άπειρη ελαστικότητα. Στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη προσφοράς είναι ορθογώνια υπερβολή, τότε βρίσκουμε $\varepsilon_s=-1$.

Σχήμα 3.2.2



Παράδειγμα 3.2.6: Να βρεθούν οι ελαστικότητες προσφοράς των ακόλουθων συναρτήσεων προσφοράς:

- q=5+3p
- q= 3p
- q=-10+4p

Τέλος να γενικεύσετε τα αποτελέσματα.

Λύση:

- $\varepsilon_s = \frac{dq}{dp} * \frac{p}{q}$ =3[(p/(5+3p)]. Η καμπύλη προσφοράς είναι ανελαστική για όλες τις τιμές.
- $\varepsilon_s = \frac{dq}{dp} * \frac{p}{q}$ =3[(p/(3p)]=1. Η καμπύλη προσφοράς έχει μοναδιαία ελαστικότητα για όλες τις τιμές.
- $\varepsilon_s = \frac{dq}{dp} * \frac{p}{q}$ =4[p/(-10+4p)]. Η καμπύλη προσφοράς είναι ελαστική για κάθε p>2,5.

Όταν στη συνάρτηση προσφοράς q=α+bp, το α>0, η συνάρτηση είναι ανελαστική, αν α=0, η ελαστικότητα είναι ίση με τη μονάδα για κάθε τιμή και, αν τέλος, α<0, έχουμε ελαστική συνάρτηση προσφοράς για κάθε τιμή p>α/b.

3.3 Οριακό έσοδο επιχείρησης

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής, όταν έχουμε μόνο μια εισροή (εργασία), γράφεται ως q=q*(L). Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι R=p*q, ενώ η συνάρτηση ζήτησης είναι p=p*q. Συνεπώς, τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θεωρούνται συνάρτηση του αριθμού των εργαζομένων, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε τα συνολικά έσοδα ως προς τον αριθμό των εργαζομένων. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε:

$$\frac{dR}{dL} = p * \frac{dq}{dL} + q * \frac{dp}{dL}.$$

Από τον αλυσωτό κανόνα έχουμε:

$$\frac{dp}{dL} = \frac{dp}{dq} * \frac{dq}{dL} \text{ άρα } \frac{dR}{dL} = p * \frac{dq}{dL} + q * \frac{dp}{dq} * \frac{dq}{dL} \text{ ή } \frac{dR}{dL} = \frac{dq}{dL} * \left(p + q * \frac{dp}{dq} \right).$$

Η παράγωγος των συνολικών εσόδων ως προς την εργασία καλείται **οριακό έσοδο προϊόντος** (marginal revenue product) και εκφράζει τη μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό έσοδο της επιχείρησης από μια μεταβολή της εργασίας.

Επιπλέον, αν παραγωγίζαμε την συνάρτηση συνολικών εσόδων ως προς την πωλούμενη ποσότητα θα είχαμε οριακό έσοδο = $\frac{dR}{dq}$, όπου θα είχαμε την μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό έσοδο της επιχείρησης από μια μεταβολή της πωλούμενης ποσότητας. Τέλος, αν παραγωγίζαμε την συνάρτηση συνολικών εσόδων ως προς την τιμή, θα είχαμε οριακό έσοδο = $\frac{dR}{dp}$, όπου θα είχαμε την μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό έσοδο της επιχείρησης από μια μεταβολή της τιμής.

Για να εξετάσουμε την μεταβολή του οριακού εσόδου, που επέρχεται από μια μεταβολή της τιμής, θα πρέπει να εξετάσουμε πρώτα τη σχέση μεταξύ συνολικών εσόδων και ελαστικότητας ζήτησης.

Διατυπώνοντας μαθηματικά την παραπάνω σχέση, αρχίζοντας από την εξίσωση των συνολικών εσόδων: R=p*q, όπου q=q*p η συνάρτηση ζήτησης, και παραγωγίζοντας ως προς την τιμή, παίρνουμε:

$$\frac{dR}{dp} = p * \frac{dq}{dp} + q .$$

Πολλαπλασιάζοντας επί q/q καταλήγουμε:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{q}{q} * \left(p * \frac{dq}{dp} + q \right) = q * \left(\frac{p}{q} * \frac{dq}{dp} + 1 \right) = q\left(1 - E_D\right).$$

Αν $E_D < 1$, τότε: $\frac{dR}{dp} > 0$, δηλαδή η μεταβολή στο οριακό έσοδο είναι θετική. Παρομοίως, αν $E_D > 1$, τότε: $\frac{dR}{dp} < 0$, δηλαδή η μεταβολή στο οριακό έσοδο είναι αρνητική. Τέλος, αν $E_D = 1$, τότε: $\frac{dR}{dp} = 0$, δηλαδή η μεταβολή στο οριακό έσοδο είναι μηδέν.

Παράδειγμα 3.3.1: Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος μιας βιομηχανίας περιγράφεται από τη συνάρτηση: $p = \frac{520}{q+3}$ και η συνάρτηση παραγωγής από: $q = \frac{10L^2}{\sqrt{L^2+8}}$. Να υπολογίσετε το οριακό έσοδο προϊόντος για L=5.

Λύση:

$$\frac{dq}{dL}=\frac{20L\sqrt{L^2+8}-(1/2)*\left(L^2+8\right)^{-1/2}*(2L)*\left(10L^2\right)}{L^2+8}=$$

$$=\frac{10L*\left(L^2+8\right)^{-1/2}*\left[2\left(L^2+8\right)-L^2\right]}{L^2+8}=\frac{10L*\left(L^2+16\right)}{\left(L^2+8\right)^{3/2}}$$

και $\frac{dp}{dq}=-\frac{520}{(q+3)^2}$. Αντικαθιστούμε το q με το ίσο του και παίρνουμε:

$$\frac{dR}{dL}=\frac{10L*\left(L^2+16\right)}{\left(L^2+8\right)^{3/2}}*\left[p+q*\left(-\frac{520}{(q+3)^2}\right)\right].$$

Όταν L=5, τότε q ≈ 43,5 και p ≈ 11,18. Επομένως, $\frac{dR}{dL}\approx 88{,}5$.

Παράδειγμα 3.3.2: Ας υποθέσουμε την ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης $q=27-p^2$.

1. Να βρεθούν οι τιμές για τις οποίες η συνάρτηση ζήτησης είναι ελαστική, ανελαστική και μοναδιαία ελαστική.
2. Χρησιμοποιήστε την απάντηση σας στο ερώτημα 1 για να περιγράψετε τα συνολικά έσοδα ως συνάρτηση της τιμής.
3. Να βρεθεί η τιμή που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.

Λύση:

1. dq/dp=-2p. Πολλαπλασιάζουμε με p/q και έχουμε:

$$E_D=2p*\frac{p}{q}=\frac{2p^2}{27-p^2}.$$

Αν θέσουμε E_D=1 έχουμε: $27-p^2=2p^2$. Αν τώρα λύσουμε ως προς p, λαμβάνουμε p=±3, από αυτές μόνο η θετική έχει οικονομικό νόημα. Άρα λοιπόν, για την τιμή p=3 η συνάρτηση ζήτησης είναι μοναδιαία ελαστική. Επομένως, για p>3 η ζήτηση είναι ελαστική και για p<3 η ζήτηση είναι ανελαστική.

2. Χρησιμοποιώντας τον τύπο των συνολικών εσόδων R=p*q και παρουσιάζοντάς τα ως συνάρτηση της τιμής έχουμε:

$$R(p)=p(27-p^2)=27p-p^3$$

$$dR/dp=27-3p^2=3(9-p^2)$$

Συνεπώς για p=3 έχουμε dR/dp=0, για p>3 έχουμε dR/dp<0 και για p<3 έχουμε dR/dp>0.

3. Στην τιμή p=3, όπου ο όρος dR/dp ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται, έχουμε προσεγγίσει ένα ακρότατο, που στη προκειμένη περίπτωση είναι το μέγιστο της συνάρτησης, πράγμα που διαπιστώνεται από το αρνητικό πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $d^2R/dp^2 =-6p=-18<0$.

3.4 Οριακό κόστος επιχείρησης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μιλήσαμε για την συνάρτηση συνολικού κόστους, η οποία είναι της μορφής C = f(Q).

Χρησιμοποιώντας την οριακή διαδικασία στη συνάρτηση συνολικού κόστους μπορούμε να ορίσουμε τη **συνάρτηση οριακού κόστους** (marginal cost function). Έτσι λοιπόν ως **οριακό κόστος** (marginal cost) ενός προϊόντος ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης συνολικού κόστους ως προς την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

Οπότε θα έχουμε $MC = \frac{dC(q)}{dq} = C'(q)$ και, κατά τα γνωστά από τη παραγώγιση, το οριακό αυτό κόστος εκφράζει τη δαπάνη που απαιτείται για την απόκτηση ή παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας του υπόψη προϊόντος, όπως ενδεικτικά φαίνεται αν λάβουμε C=p*q (με p να είναι σταθερό) οπότε $MC = \frac{dC(q)}{dq} = C'(q) = (p*q)' = p$.

Μέχρι τώρα μιλήσαμε για την συνάρτηση οριακού κόστους παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του συνολικού κόστους ως προς την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

Από τα παραπάνω μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το συνολικό κόστος εξαρτάται από την παραγόμενη ποσότητα, καθώς επίσης και ότι η συνάρτηση κόστους προκύπτει από τη συνάρτηση παραγωγής. Έτσι αν υποθέσουμε συνάρτηση παραγωγής που χρησιμοποιεί ως μόνη εισροή την εργασία και ότι η αμοιβή κάθε μονάδας εργασίας είναι ίση με w, τότε το συνολικό κόστος γράφεται C=wL+F, όπου το F είναι το σταθερό κόστος.

Σε αυτή την περίπτωση, παραγωγίζοντας το συνολικό κόστος ως προς το προϊόν, παίρνουμε οριακό κόστος:

$$MC = \frac{dC}{dq} = \frac{dC}{dL} * \frac{dL}{dq} = \frac{dC/dL}{dq/dL}$$

όπου $dC/dL = w$ από την υπόθεση που κάναμε ότι το μόνο μεταβλητό κόστος της συνάρτησης είναι η εργασία. Επίσης dq/dL είναι η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας (MP), η οποία θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα. Συνεπώς, το οριακό κόστος, ο μισθός και η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας συνδέονται με τη σχέση:

$$MC = \frac{w}{MP}.$$

Παρατηρούμε την αντίστροφη σχέση μεταξύ της οριακής παραγωγικότητας και του οριακού κόστους, όπως επίσης την ευθέως ανάλογη σχέση ανάμεσα στον ονομαστικό μισθό και στο οριακό κόστος.

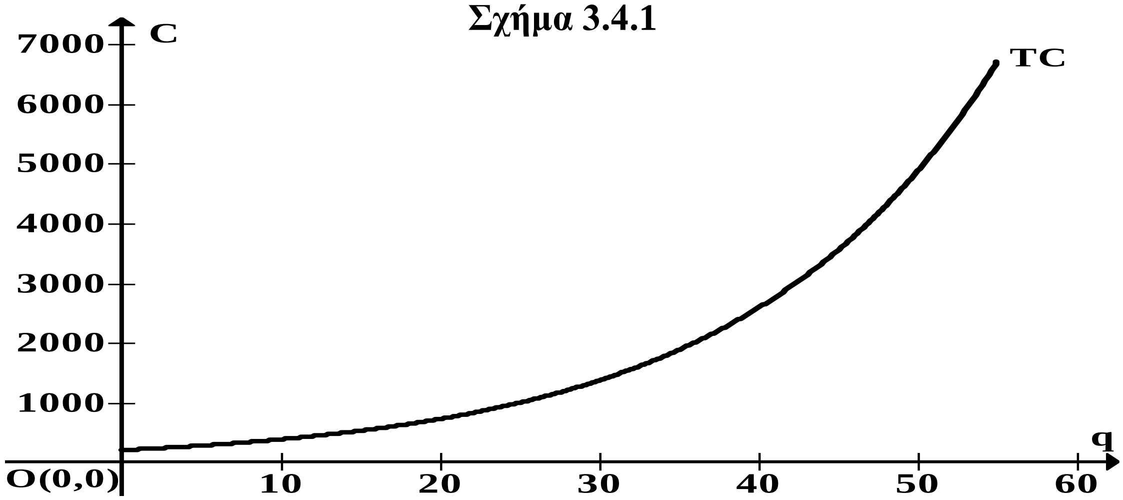
Παράδειγμα 3.4.1: Έστω η ακόλουθη συνάρτηση συνολικού κόστους: $C=200+60q-4q^2+0{,}1q^3$.

1. Να υπολογιστεί το οριακό κόστος για q=10.
2. Να βρεθεί το μέγεθος παραγωγής που ελαχιστοποιεί το οριακό κόστος.
3. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις TC και MC.

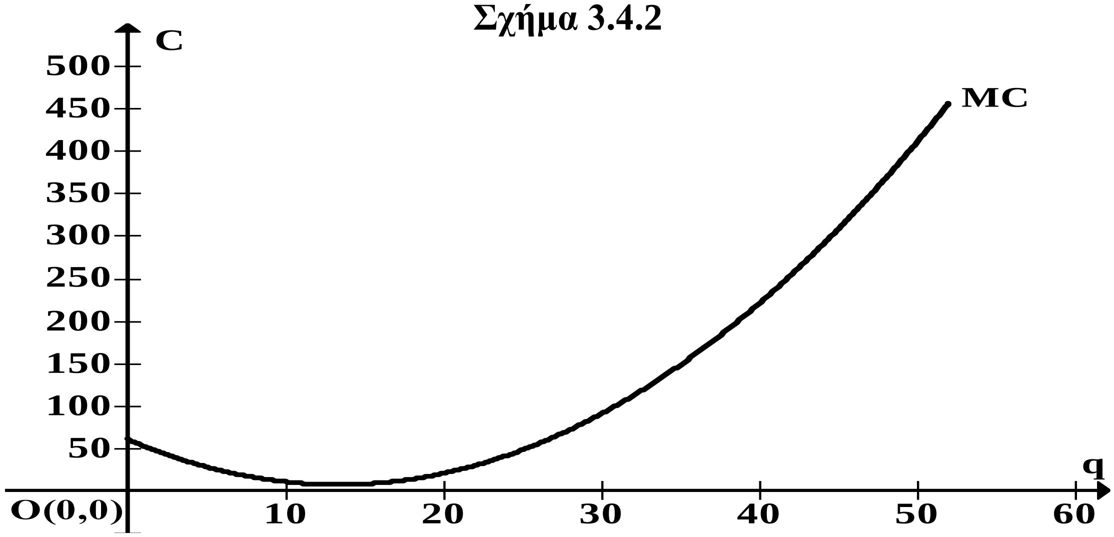
Λύση:

1. $MC= (TC)'=60-8q+0{,}3q^2$ για q=10 έχουμε MC=10.
2. MC'=-8+0,6q για MC'=0 παίρνουμε q=13,3. Για αυτή την τιμή, η συνάρτηση οριακού κόστους ελαχιστοποιείται, επειδή MC''=0,6>0.
3. Οι διάφορες καμπύλες κόστους παριστάνονται γραφικά στα Σχήματα 3.3.1 και 3.3.2.

Σχήμα 3.4.1



Σχήμα 3.4.2



3.5 Μεγιστοποίηση των κερδών

Η μεγιστοποίηση των κερδών είναι από τα βασικότερα προβλήματα κάθε οικονομικής δραστηριότητας και για να το αντιμετωπίσουμε γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι το συνολικό κόστος TC και τα συνολικά έσοδα TR είναι συναρτήσεις μόνο της παραγόμενης και διατιθεμένης (στην αγορά) ποσότητας q, οπότε είναι TC=C(q) και TR=R(q).

Η διαφορά τότε μεταξύ των συναρτήσεων R(q) και C(q) ορίζει τη **συνάρτηση συνολικών κερδών**(total profit function) $TP_r = P(q)$. Έτσι έχουμε:

$TP_r = P(q) = TR - TC = R(q) - C(q)$.

Πολλές οικονομικές αναλύσεις συνδέονται από την υπόθεση ότι κάθε επιχείρηση επιδιώκει τη μεγιστοποίηση των συνολικών της κερδών. Γενικά όμως ο προσδιορισμός της ποσότητας, έστω q=q*, που μεγιστοποιεί την P(q) είναι βασικό πρόβλημα οικονομικής επιλογής. Για τον προσδιορισμό της q* έχουμε:

$$\frac{d(TP_r)}{dq} = P'(q) = R'(q) - C'(q) = 0 \Leftrightarrow R'(q) = C'(q)\,.$$

Έτσι η αναγκαία συνθήκη για μεγιστοποίηση της συνάρτησης συνολικών κερδών TP απαιτεί την εξίσωση της συναρτήσεως των οριακών εσόδων MR=R'(q) με τη συνάρτηση του οριακού κόστους MC=C'(q).

Οι ικανές τώρα συνθήκες για μέγιστο της TP_r απαιτούν η δεύτερη παράγωγος της TP_r = R(q) - C(q) να είναι αρνητική στα σημεία q* που ικανοποιούν την

R'(q*) - C'(q*) = 0 ⇔ R'(q*) = C'(q*). Έχουμε δηλαδή:

$$\frac{d^2(TP_r)}{dq^2} = P''(q^*) = R''(q^*) - C''(q^*) < 0 \Leftrightarrow R''(q^*) < C''(q^*)\,.$$

Τότε λοιπόν προκύπτει ότι η P(q) γίνεται μέγιστη στα σημεία q* που είναι $C'(q) = R'(q)$ και που η συνάρτηση οριακού κόστους αυξάνει γρηγορότερα από τη συνάρτηση οριακών εσόδων, δηλαδή $C''(q^*) > R''(q^*)$.

Οι ποσότητες q_i που ικανοποιούν την $R(q_i) = C(q_i)$, οι οποίες είναι ρίζες της εξίσωσης P(q)=0, ονομάζονται **νεκρά σημεία** (break even points) και σε αυτά η επιχείρηση δεν έχει ούτε κέρδη ούτε ζημίες. Τα διαστήματα Δ_i και Δ_j του πεδίου ορισμού της P(q)=R(q)-C(q) για τα οποία είναι $R(q) > C(q)\,\forall\, q \in D_i$ και $R(q) < C(q)\,\forall\, q \in D_j$ ονομάζονται **κερδοφόρες και ζημιοφόρες περιοχές** της P(q) αντίστοιχα.

Από τη φύση τους τα νεκρά σημεία είναι προφανές ότι έχουν ιδιαίτερη σημασία στο προγραμματισμό δράσεως των επιχειρήσεων και αποτελούν ειδική περιοχή έρευνας στην οικονομική των επιχειρήσεων.

Παράδειγμα 3.5.1: Αν η ζήτηση ενός αγαθού περιγράφεται από τη συνάρτηση q=10-0,5p και το συνολικό κόστος παραγωγής του από τη συνάρτηση TC=0,5q^2+5q+100:

1. Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.
2. Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Λύση:

1. Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι η p=20-2q, επομένως για τα συνολικά έσοδα έχουμε: $\frac{dR}{dq}=\frac{d}{dq}\left(20q-2q^2\right)=20-4q=0$, q = 5.

Η δεύτερη παράγωγος δίνει: $\frac{dR}{dq}=\frac{d}{dq}\left(20-4q\right)=-4<0$. Άρα οι συνθήκες δεύτερης τάξης για μέγιστο ικανοποιούνται.

2. Η συνάρτηση κέρδους είναι:

   $P(q) = (20q - 2q^2) - (0,5q^2 + 5q + 100)$.

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο δίνουν:

   $P'(q) = 20 - 4q - (q + 5)$ και q = 3.

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται: $P''(q) = -5 < 0$.

3.6 Οριακή παραγωγικότητα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μιλώντας για την παραγωγικότητα, αναλύσαμε τη συνάρτηση του συνολικού προϊόντος, q = f(z). Η πρώτη παράγωγος του συνολικού προϊόντος ως προς την εργασία, η κάποιο άλλον συντελεστή παραγωγής, εκφράζει τη συνάρτηση **οριακού προϊόντος** (marginal product) ή καλύτερα **οριακής παραγωγικότητας** (marginal productivity).

Οριακό προϊόν ή οριακή παραγωγικότητα ορίζεται η μεταβολή στο αποτέλεσμα της παραγωγής, που επέρχεται από μια αλλαγή ενός συντελεστή παραγωγής, όταν οι άλλοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί. Έτσι λοιπόν το οριακό προϊόν, με μαθηματικά σύμβολα εκφράζεται με τον τύπο $MP=f'(z)=\frac{dq}{dz}$.

Εάν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση συνολικής παραγωγής περιλαμβάνει μόνο έναν συντελεστή παραγωγής, την εργασία, τότε οι ρυθμοί αύξησης του προϊόντος είναι υψηλοί μέχρι ένα ορισμένο επίπεδο απασχόλησης L. Μετά οι αυξήσεις του προϊόντος μειώνονται σταδιακά. Με άλλα λόγια, παρατηρούνται **φθίνουσες αποδόσεις** (diminishing returns) του συντελεστή εργασίας.

Έτσι, από τα παραπάνω, προκύπτει **ο νόμος του φθίνοντος οριακού προϊόντος** (law of diminishing marginal product). Σύμφωνα με το νόμο αυτό, κατά την παραγωγή ενός προϊόντος η επιπλέον αύξηση ενός συντελεστή παραγωγής ανά μονάδα συντελεστή συμβάλει λιγότερο στη παραγωγή του συνολικού προϊόντος και μάλιστα, από ένα σημείο και μετά η παραγόμενη ποσότητα του υπόψη προϊόντος ελαττώνεται. Το σημείο αυτό είναι το σημείο όπου το οριακό προϊόν γίνεται αρνητικό, MP<0.

Παράδειγμα 3.6.1: Έστω συνάρτηση παραγωγής: $q=-\frac{z^3}{3}+2z^2+12z$.

- Να βρεθεί η συνάρτηση οριακής παραγωγικότητας.
- Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων παραγωγής και οριακής παραγωγής. Να αναλύσετε τις γραφικές απεικονίσεις των συναρτήσεων.

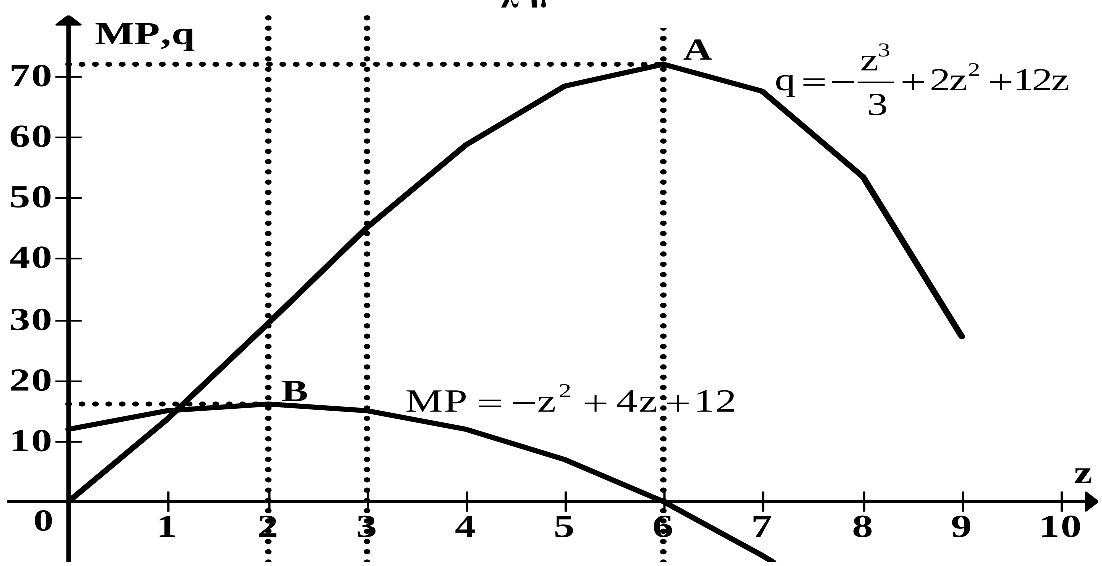
Λύση:

➢ Η συνάρτηση οριακής παραγωγικότητας θα είναι:

$$MP = q' \Leftrightarrow MP = \left(-\frac{z^3}{3} + 2z^2 + 12z\right)' = -z^2 + 4z + 12\,.$$

➢ Οι συναρτήσεις απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 3.6.1:

Σχήμα 3.6.1



Αρχικά, από το Σχήμα 3.6.1 μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες γενικές διαπιστώσεις:

1. Το MP μεταξύ δύο σημείων της καμπύλης q είναι ίσο με την κλίση της καμπύλης q μεταξύ των δύο αυτών σημείων.
2. Το MP επίσης αυξάνεται αρχικά, φθάνει ένα μέγιστο και μετά πέφτει.
3. Το MP μηδενίζεται όταν το q είναι μέγιστο και είναι αρνητικό όταν το q πέφτει.

Έτσι, στο παράδειγμα μας, όπως εύκολα διαπιστώνεται, με τη χρησιμοποίηση 6 μονάδων του συντελεστή παραγωγής z, το q γίνεται μέγιστο και το MP μηδενίζεται.

Αλλά τα σημεία ακρότατων των παραπάνω καμπυλών προϊόντος επαληθεύονται και με τη χρήση των παραπάνω γενικών συνθηκών. Έτσι το συνολικό προϊόν (q) παίρνει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου:

$$\frac{dq}{dz} = 0 \Leftrightarrow -z^2 + 4z + 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6.$$

Επειδή για z=6 είναι: $\frac{d^2q}{d^2z} = -2z + 4 = -2*6 + 4 = -8 < 0$ και $q(z=6) = -\frac{6^3}{3} + 2*6^2 + 12*6 = 72$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο A(6,72) είναι μέγιστο του συνολικού προϊόντος (q) και μάλιστα στη θέση αυτή έχουμε MP=0, αφού όντως είναι: $MP(z=6) = -6^2 + 4*6 + 12 = 0$.

Η καμπύλη του οριακού προϊόντος έχει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου: $\frac{dMP}{dz} = 0 \Leftrightarrow -2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2$. Επειδή όμως για z =2 είναι: $\frac{d^2MP}{d^2z} = -2 < 0 \ \forall z$ και $MP(z=2) = -2^2 + 4*2 + 12 = 16$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο B(2,16) είναι το μέγιστο του οριακού προϊόντος.

Τέλος, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται δύο συντελεστές παραγωγής και η συνάρτηση παραγωγής q=f(x,y) | A είναι παραγωγίσιμη ως προς τις ποσότητες x,y των χρησιμοποιούμενων συντελεστών παραγωγής L,K αντίστοιχα, τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial q}{\partial x}$, αντίστοιχα $\frac{\partial q}{\partial y}$, λέγεται οριακή παραγωγικότητα του συντελεστή L, αντίστοιχα K, στο σημείο (x, y) ЄA.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι μαθηματικές μέθοδοι και τεχνικές αποτελούν αναγκαία εργαλεία για τη θεωρητική και εμπειρική έρευνα σε όλα σχεδόν τα πεδία της επιστήμης και ταυτόχρονα την ατμομηχανή της εξέλιξής τους. Οι διασυνδέσεις των μαθηματικών με τους άλλους τομείς της επιστήμης οδηγούν στον αμοιβαίο εμπλουτισμό του περιεχομένου τους. Ειδικότερα η προϊούσα συμβολή των μαθηματικών επιστημών στη διαχρονική εξέλιξη των οικονομικών επιστημών είναι σήμερα πραγματικότητα καθολικά παραδεκτή. Οι μεθοδολογίες και οι τεχνικές των μαθηματικών επιστημών αποτελούν εκ των κυριοτέρων εργαλεία ανάλυσης των οικονομικών φαινομένων και επίλυσης των οικονομικών προβλημάτων που με την σειρά τους πυροδοτούν την πρόοδο των μαθηματικών επιστημών.

Οι επιστήμονες εξάλλου για να αποφεύγουν την πολυσημαντοσύνη των εκφράσεών τους, προσπαθούν να εκφράσουν τις θεωρίες τους με τέτοια μορφή, ώστε να μπορούν να ελέγχονται, δηλαδή να είναι δυνατό να αναιρούνται ή να επαληθεύονται από την εμπειρία. Αυτό διότι κάθε οικονομική θεωρία αξιολογείται από την επαλήθευσή της, με βάση την οικονομική πραγματικότητα και ως εκ τούτου μαθηματικά υποδείγματα που δεν αποτυπώνουν την πραγματικότητα πρέπει να απορρίπτονται. Κάτω από τις συνθήκες αυτές η χρήση μαθηματικών υποδειγμάτων γίνεται όλο και περισσότερο επιτακτική ανάγκη, ενώ τα μαθηματικά δείχνουν προς όλες τις κατευθύνσεις τη μεγάλη χρησιμότητά τους.

Στη σύγχρονη εποχή, θέτοντας κατά μέρος τα δεοντολογικά προβλήματα που ενδεχομένως υπάρχουν, τα μαθηματικά έχουν γίνει η γλώσσα της οικονομικής ανάλυσης. Τα μαθηματικά ποσοτικοποιούν τις σχέσεις μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών και τις θέτουν υπό τη μορφή υποδείγματος προκειμένου να αποσαφηνίσουν τις ιδιότητές τους.

Στη διαδικασία αυτή, τα μαθηματικά επιτρέπουν στους οικονομολόγους να εντοπίζουν και ταυτόχρονα να αντλούν συμπεράσματα που έχουν κρίσιμη σημασία για τη λειτουργία του οικονομικού συστήματος. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι τα μαθηματικά προσφέρουν σημαντικά επιστημονικά εργαλεία, τα οποία αναμφισβήτητα βοηθούν στη λήψη καλύτερων οικονομικών και διοικητικών αποφάσεων.

Στο σημείο αυτό να τονίσουμε ότι η μαθηματική ανάλυση σε καμιά περίπτωση δεν υποκαθιστά τη θεωρητική οικονομική. Ενισχυτικό αυτής της άποψης είναι το γεγονός ότι μέχρι σήμερα τουλάχιστον δεν υπήρξε ούτε μια σημαντική οικονομική θεωρία που η ανακάλυψή της να οφείλεται στη χρήση μαθηματικών. Ταυτόχρονα, όμως, δεν υπάρχει ούτε μια σημαντική οικονομική θεωρία που να αναπτύχθηκε περαιτέρω χωρίς τη χρήση των μαθηματικών. Η μαθηματικοποίηση των οικονομικών θεωριών βοηθά στη καλύτερη κατανόησή τους και αποτελεί ένα σημαντικό βήμα για την ευρύτερη αποδοχή τους.

Λαμβάνοντας υπόψη μας όλα αυτά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μαθηματική γνώση είναι ανεπαρκής για τη λύση προβλημάτων, όπως ακριβώς και η γνώση της οικονομικής θεωρίας χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο.

Μόνο ο συνδυασμός της γνώσης της μαθηματικής επιστήμης και της οικονομικής θεωρίας μπορεί να οδηγήσει στην περαιτέρω ανάπτυξη της οικονομικής επιστήμης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Λευτέρης Τσουφλίδης «Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, μέθοδοι και υποδείγματα», Β΄ έκδοση, Αθήνα, Gutenberg, 1999.

Σπύρος Κ. Σάσσαλος, «Γενικά Μαθηματικά, με εφαρμοσμένα παραδείγματα για τους σπουδαστές των σχολών Διοίκησης και Οικονομίας», Δεύτερη έκδοση, Μακεδονικές Εκδόσεις, 2004.

Μιχάλης Γρ. Βόσκογλου, «Μαθηματικά για τον τομέα Διοίκησης και Οικονομίας», τρίτη έκδοση, Μακεδονικές Εκδόσεις, 1999.

Δρ. Κωνσταντίνος Δ. Τραχανάς, «Οικονομική της Διοίκησης, ποσοτικές μέθοδοι επιχειρησιακής λήψης αποφάσεων», Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Αθήνα-Πειραιάς 1994.

Μανώλης Λουκάκης, «Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών», Τόμος Β', Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη 1997.

Χαράλαμπος Γ. Ζαγούρας, Δημήτριος Ν. Γεωργίου, «Γενικά Μαθηματικά 1», Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, 6η έκδοση, Αθήνα 2008.

Ευθύμιος Δ. Πουρναράκης, «Εισαγωγή στην Οικονομική», Τόμος Ι: Μακροοικονομία, Β'΄Έκδοση, Αθήνα 2004.

ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

www.el.wikipedia.org

www.pi-schools.gr

www.galaxy.hua.gr

www.math.uoa.gr

www.digilib.lib.unipi.gr

www.mtzoumas.mysch.gr