Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΛΕΝΗ ΝΤΑΗ
ΠΗΧΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΑΛΕΚΑ ΚΑΛΑΠΟΔΗ

ΠΑΤΡΑ 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΕΛΕΙΟΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ- ΜΟΝΟΠΩΛΙΟ- ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΟΛΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για πολλούς αιώνες, η έκφραση βασικών οικονομικών ιδεών απαιτούσε απλά μαθηματικά. Έννοιες όπως ακέραιοι και κλάσματα, μαζί με τη χρήση της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ήταν αρκετές για να επιτρέψουν σε εμπόρους, αγρότες και άλλους φορείς της οικονομίας να συναλλάσσονται στην καθημερινή τους ζωή. Όμως, από το τέλος του δέκατου όγδοου αιώνα, δηλαδή του αιώνα που εδραιώνεται ο καπιταλισμός και μαζί μ' αυτόν αναπτύσσεται η οικονομική θεωρία, δημιουργήθηκε η ανάγκη έκφρασης πολύπλοκων εννοιών με αυστηρό αλλά ταυτόχρονα κατανοητό τρόπο. Έτσι, ενώ οι φυσιοκράτες, οι κλασικοί οικονομολόγοι αλλά και ο Marx διατύπωσαν τις θεωρίες τους χωρίς τη ρητή χρήση μαθηματικών, σήμερα οι θεωρίες αυτές πολλές φορές γίνονται καλύτερα κατανοητές όταν διατυπώνονται με μαθηματικούς όρους. Τα μαθηματικά υποδείγματα, γενικότερα, αναγνωρίζεται ότι επιτρέπουν όχι μόνο την βαθύτερη κατανόηση των οικονομικών φαινομένων αλλά και την περαιτέρω διερεύνηση τους.

Η νεοκλασική σχολή, που αναδύεται στα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα, χρησιμοποιεί την οριακή ανάλυση σύμφωνα με την οποία, σε πολύ γενικές γραμμές, ορθολογικά δρώντες ιδιώτες έχουν ως στόχο τη μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης, που για μεν τους καταναλωτές είναι η συνάρτηση χρησιμότητας για δε τους παραγωγούς η συνάρτηση κέρδους. Η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης επιτυγχάνεται όταν ο ιδιώτης εξισώνει το οριακό του όφελος με την οριακή του θυσία. Η λέξη «οριακό» συνήθως ταυτίζεται με τη μαθηματική έκφραση «απειροελάχιστα μικρή μεταβολή», που μας εισάγει στην έννοια της παραγώγου και στο λογισμό γενικότερα.

Έτσι, τα μαθηματικά σταδιακά εισήχθησαν στην οικονομική ανάλυση για να επιτρέψουν την πληρέστερη και αυστηρότερη έκφραση της οικονομικής θεωρίας. Σήμερα, το οικονομικό σύστημα είναι τόσο πολύπλοκο, που τα τελικά αποτελέσματα μιας θεωρίας ή πολιτικής αναλύονται με τη χρησιμοποίηση μαθηματικών υποδειγμάτων (mathematical models). Η εισαγωγή των μαθηματικών στην οικονομική ανάλυση άλλαξε ραγδαία τον τρόπο που οι οικονομολόγοι αναλύουν τα οικονομικά φαινόμενα. Προοδευτικά, η οικονομική τείνει να μεταβληθεί σε επιστήμη με πολλές ομοιότητες με τις λεγόμενες θετικές επιστήμες. Σημαντικό ρόλο προς αυτή την κατεύθυνση έπαιξαν η στατιστική και η οικονομετρία, επομένως η οικονομική σήμερα, σε μεγάλο βαθμό, θεωρείται επιστήμη που υπόκειται σε εμπειρικό έλεγχο. Στα κοινά χαρακτηριστικά της οικονομικής με τις θετικές επιστήμες συμπεριλαμβάνονται:

- Ποσοτικές και ποιοτικές παρατηρήσεις των φαινομένων.
- Ποσοτική και στατιστική ανάλυση των δεδομένων.
- Κατασκευή θεωρητικών υποδειγμάτων που περιγράφουν τα φαινόμενα και εξηγούν τις σχέσεις μεταξύ τους.
- Χρησιμοποίηση των μαθηματικών υποδειγμάτων για τη συναγωγή συμπερασμάτων.
- Διόρθωση και βελτίωση των υποδειγμάτων για την καλύτερη πρόβλεψη των αποτελεσμάτων.

Οι εμπειρικές επιστήμες βασίζονται στην τριάδα, παρατήρηση-υποδειγματοποίηση-επαλήθευση. Παρατηρήσεις χωρίς θεωρία απλά μόνο περιγράφουν τα φαινόμενα, ενώ θεωρία χωρίς παρατήρηση διατρέχει τον κίνδυνο να χάσει την επαφή της με την πραγματικότητα.

Συχνά, η ποσοτικοποίηση ενός οικονομικού φαινομένου ή μιας οικονομικής θεωρίας απαιτεί την κατασκευή ενός μαθηματικού υποδείγματος, το οποίο παρουσιάζει σε συνοπτική μορφή τη θεωρία.

Ένας από τους πλέον γνωστούς ορισμούς για την οικονομική επιστήμη με τη χρήση των μαθηματικών δόθηκε από τον Thomas Carlyle, ο οποίος στις αρχές του 19ου αιώνα χαρακτήρισε την οικονομική σαν «θλιβερή επιστήμη». Αυτό που είχε κατά νού ο Carlyle ήταν οι αντι-ουτοπικές συνέπειες των οικονομικών μαθηματικών. Πράγματι, οι ουτοπιστές πιστεύουν ότι είναι δυνατόν να υπάρξει μια κοινωνία της αφθονίας δίχως συγκρούσεις, όπου το καλό αποτέλεσμα έρχεται σαν συνέπεια των καλών (ιδανικών) σκοπών (και αντίστροφα). Ένας άλλος ορισμός δόθηκε από τον Άγγλο οικονομολόγο W. Stanley Jevons στα τέλη του 19ου αιώνα, σύμφωνα με τον οποίο οικονομία είναι «οι μηχανισμοί της χρησιμότητας και του ατομικού συμφέροντος». Μπορούμε δηλαδή να σκεφτούμε τα οικονομικά σαν κοινωνική επιστήμη η οποία διερευνά τα αποτελέσματα και τη συμπεριφορά των ανθρώπων που λειτουργούν με σκοπό τη μεγιστοποίηση του ατομικού τους συμφέροντος. Η τελευταία αυτή έκφραση είναι σημαντική στην οικονομική επιστήμη.

Ο βραβευμένος με Nobel Οικονομίας, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Σικάγου, Milton Friedman, συντηρητικός κοινωνικός φιλόσοφος και θεωρητικός οικονομολόγος και στατιστικός, στο βιβλίο του με τίτλο «*Essays in Positive Economics*» (1953) θεωρεί την οικονομική μια θετική επιστήμη (positive economics). Η οικονομική σαν θετική επιστήμη είναι η πειραματική αποδοχή των μαθηματικών γενικεύσεων των οικονομικών φαινομένων, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη των συνεπειών ενδεχόμενων μεταβολών.

Η σύγχρονη οικονομική επιστήμη είναι ταυτόχρονα μαθηματικά *εμπειρική* στη σύλληψή της και μαθηματικά *αυστηρή* στην έκφρασή της. Στη γενική ανάλυση συστημάτων, ορίζουμε ένα σύστημα σαν «ένα σύνολο οικονομικών στοιχείων και σχέσεων μεταξύ των στοιχείων». Ένα στοιχείο του συνόλου που δεν έχει σχέση με κανένα άλλο στοιχείο δεν αποτελεί μέρος του συστήματος. Ένα οικονομικό υπόδειγμα, γραμμένο στη μαθηματική γλώσσα, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα αφηρημένο σύστημα μεταφράζοντας σε μαθηματικές σχέσεις (για παράδειγμα, συναρτησιακές σχέσεις), τις παρατηρούμενες σχέσεις μεταξύ των διαφόρων (συγκεκριμένων) στοιχείων, που αναπαρίστανται από τις μεταβλητές του υποδείγματος.

Ένα οικονομικό υπόδειγμα είναι ένα σύστημα διότι τα στοιχεία που το αποτελούν: κατανάλωση, παραγωγή, τεχνολογία, φυσικοί πόροι, χρηματοοικονομικό σύστημα (που είναι υποσύστημα του οικονομικού συστήματος) κλπ., έχουν μαθηματικές σχέσεις μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αύξηση του διαθεσίμου εισοδήματος οδηγεί σε αύξηση της κατανάλωσης γιατί υπάρχει «σχέση» μεταξύ εισοδήματος και κατανάλωσης. Εάν αφαιρέσουμε τις σχέσεις από τα οικονομικά στοιχεία, τότε δεν υπάρχει σύστημα, αλλά απλά, μια συλλογή από παραγωγές, καταναλώσεις κλπ. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει *οικονομική δομή*. Η οικονομική δομή δεν είναι παρά το σύνολο των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του θεωρούμενου οικονομικού συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι πιο επαναστατικές αλλαγές στην εξέλιξη του λογισμού πραγματοποιήθηκαν το 17ο αιώνα με τη σημαντική συμβολή του Rene Descartes (1596-1650). Στο βιβλίο La *Geometrie,* που δημοσιεύτηκε το 1637, ο Descartes ενοποίησε την άλγεβρα και τη γεωμετρία και συντέλεσε στη δημιουργία του κλάδου των μαθηματικών που σήμερα ονομάζεται αναλυτική γεωμετρία. Αμέσως μετά, διάφοροι μαθηματικοί (βασιζόμενοι στις καινοτομίες του Descartes) ανακάλυψαν ότι ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να μελετηθεί γεωμετρικά, αν χαράξουμε την εφαπτομένη στο σημείο της καμπύλης που μας ενδιαφέρει.

Η γενική μέθοδος εύρεσης του ρυθμού μεταβολής και της εκτίμησης των συσσωρευμένων αποτελεσμάτων απειροελάχιστα μικρών μεταβολών ανακαλύφτηκε από τους Isaac Newton (1642-1727) και Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Ιστορικά είναι πλέον εξακριβωμένο ότι ο Newton ανακάλυψε πρώτος το λογισμό στα 1665-1666, ο δε Leibniz, εργαζόμενος ανεξάρτητα από τον Newton στη Λειψία της Γερμανίας, δέκα χρόνια αργότερα έκανε την ίδια ανακάλυψη. Ο Leibniz δημοσίευσε το έργο του για το λογισμό στα 1684-1686, ο δε Newton —που χαρακτηριζόταν από μια διστακτικότητα σε ό,τι αφορά τις κοινοποιήσεις— δημοσίευσε το δικό του έργο για το λογισμό δέκα περίπου χρόνια αργότερα . Αν και η ανακάλυψη του λογισμού έγινε ανεξάρτητα από τους Newton και Leibniz, παρόλ' αυτά υπήρξε μια διαμάχη ανάμεσα στους μαθηματικούς —για την πατρότητα του λογισμού — που κράτησε δύο περίπου αιώνες. Οι Άγγλοι απέδιδαν την ανακάλυψη του λογισμού αποκλειστικά στον Newton και αγνοούσαν τον Leibniz, οι δε Γερμανοί έκαναν το ακριβώς αντίθετο.

Σήμερα αναγνωρίζεται ότι ο Leibniz και η σχολή του παρήγαγαν έργο ανώτερο απ' αυτό της σχολής του Newton. Ως αποτέλεσμα, ο συμβολισμός και η ορολογία που χρησιμοποιήθηκε από τον Leibniz επιβλήθηκε ακόμη και στην Αγγλία. Π.χ. οι ονομασίες calculus differentialis (διαφορικός λογισμός) calculus integralis ή sumatorius (ολοκληρωτικός ή αθροιστικός λογισμός) προέρχονται από τον Leibniz .

Ο Newton και ο Leibniz ήταν οι πρώτοι που συνέλαβαν την ιδέα ότι η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι ενοποιημένες διαδικασίες, που η μια είναι αντίστροφη της άλλης. Γεωμετρικά, η παραγώγιση ασχολείται με την εύρεση των εφαπτόμενων σε καμπύλες, ενώ η ολοκλήρωση ασχολείται με την εύρεση του εμβαδού των επιφανειών που περικλείονται από τις καμπύλες.

1.2 Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ- ΠΛΕΥΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Η κλίση της εφαπτομένης σ' ένα ορισμένο σημείο p_0 (x_0, y_0) του γραφήματος μιας συνάρτησης f υπολογίζεται από το όριο της παράστασης *Δy/Δx.* Αν αυτό το όριο υπάρχει, τότε ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 και συμβολίζεται συνήθως $f'(x_0)$. Η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί επίσης να παρασταθεί με τις ακόλουθες εκφράσεις: *dy/dx, f'(x), y΄, df(x)/dx, df/dx, Dx.*

Αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο σημείο x_0 στο $(a,\ b)$, τότε λέμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x=x_0$ ορίζεται ως:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\ (x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

Υπάρχει ένας εναλλακτικός και πιο εύχρηστος τύπος της παραγώγου της $f(x)$ στο σημείο x_0. Αν θεωρήσουμε το x να παριστάνει τον αριθμό x_0+Ax, τότε:

x—>x_0 καθώς Δx→0

Επιπλέον, αν λάβουμε υπόψη *ότι* $\Delta x = x - x_0$, τότε ο τύπος της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x=x_0$ επαναδιατυπώνεται ως:

$$f\,'(x)= \lim_{x\to 0} \frac{(x_0+\Delta_x)-f(x_0)}{\Delta_x}$$

Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη δηλαδή μπορούμε να εφαρμόσουμε τους κανόνες παραγώγισης στο σημείο $x=x_0$ αν έχει παράγωγο στο σημείο αυτό. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$, τότε θα πρέπει να είναι και συνεχής στο ίδιο σημείο, ωστόσο δεν ισχύει αναγκαστικά και το αντίστροφο.

Για λόγους κυρίως πληρότητας χρειάζεται να ορίσουμε, όπως ακριβώς με την περίπτωση των ορίων, και τις πλευρικές παραγώγους μιας συνάρτησης. Η δεξιόπλευρη παράγωγος της $f(x)$ στο σημείο $x=x_0$, ορίζεται ως:

$$F_+\,'(x)= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Αν, βέβαια, ένα τέτοιο όριο ορίζεται. Είναι αξιοσημείωτο ότι *το* Δx περιορίζεται σε θετικές τιμές καθώς προσεγγίζει το μηδέν.

Ομοίως, η αριστερόπλευρη παράγωγος της f(χ) στο σημείο$\chi=\chi_0$, ορίζεται ως:

$$F_-\,'(x)= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Αν, βέβαια, ένα τέτοιο όριο υπάρχει. Είναι αξιοσημείωτο ότι στην περίπτωση αυτή το Δx περιορίζεται σε αρνητικές τιμές καθώς προσεγγίζει το μηδέν.

Λέμε ότι η συνάρτηση *f(*x*)* παραγωγίζεται στο σημείο $x=x_0$, αν και μόνο αν οι δυο πλευρικές παράγωγοι ορίζονται και είναι ίσες μεταξύ τους[1]

$$F_+'(x) = F_-'(x)$$

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Όπως παραγωγίζουμε μια συνάρτηση έτσι ακριβώς μπορούμε να παραγωγίσουμε μια παράγωγο. Η συνάρτηση που προκύπτει καλείται δεύτερη παράγωγος. Από τα πιο γνωστά παραδείγματα δεύτερης παραγώγισης είναι η επιτάχυνση η οποία είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο και η δεύτερη παράγωγος της απόστασης ως προς το χρόνο. Αν η πρώτη παράγωγος μετρά την κλίση και το ρυθμό μεταβολής της αρχικής συνάρτησης, η δεύτερη παράγωγος μετρά την κλίση και το ρυθμό μεταβολής της πρώτης παραγώγου. Γενικά, οι παράγωγοι ανώτερης τάξης μετρούν το ρυθμό μεταβολής παραγώγων της αμέσως προηγούμενης τάξης. Οι παράγωγοι δεύτερης τάξης συμβολίζονται ως εξής:

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ y'',\ f''_{(x)},\ f^{(2)}_{(X)},\ D^{(2)}_{(y)}$$

[1] Οικονομικά μαθηματικά, Φράγκος, Χ Κ, Σταμούλη Α.Ε, 1998,σελ 56

Οι πρώτοι τρεις συμβολισμοί είναι οι πιο συνηθισμένοι. Ασφαλώς, δε χρειάζεται κανείς να σταματήσει στη δεύτερη παράγωγο, αλλά μπορεί να συνεχίσει μέχρι τη νιοστή.

$$\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}} \quad y^{(\nu)}, \quad f^{(\nu)}(x)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε εφαρμογές των παραγώγων στην οικονομική επιστήμη. Πιο συγκεκριμένα, με μαθηματικό εργαλείο την παραγώγιση, θα αναφερθούμε στις έννοιες της *ελαστικότητας* (elasticity) μιας συνάρτησης και στο οριακό έσοδο προϊόντος ως εφαρμογές του αλυσωτού κανόνα. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τα μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων, όπως των εσόδων, του κόστους και φυσικά της διαφοράς τους, δηλαδή των κερδών. Κατόπιν, θα αναφερθούμε στη λήψη επενδυτικών αποφάσεων (ανάλυση του Fisher), στον προσδιορισμό του άριστου επιπέδου αποθεμάτων, στη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς και θα τελειώσουμε με το πάντα επίκαιρο υπόδειγμα του Baumol, που αναφέρεται σε μια σειρά ζητημάτων μεταξύ των οποίων και οι ανησυχητικές διαστάσεις που λαμβάνει η αύξηση των μη παραγωγικών (προοδευτικών) τομέων της οικονομίας.

2.1 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η ελαστικότητα μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή μιας συνάρτησης που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην οικονομική επιστήμη υπάρχουν διάφορα είδη ελαστικότητας. Ενδεικτικά αναφέρουμε την ελαστικότητα ζήτησης, προσφοράς, εισοδήματος, υποκατάστασης κλπ.

2.2 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΖΗΤΗΣΗΣ

Σύμφωνα με το νόμο της ζήτησης όταν η τιμή ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας μεταβληθεί, τότε η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού ή της υπηρεσίας μεταβάλλεται προς την αντίθετη διεύθυνση, με την προϋπόθεση ότι όλες οι άλλες μεταβλητές που επηρεάζουν τη ζήτηση παραμένουν σταθερές. Δηλαδή αν αυξηθεί η τιμή ενός προϊόντος τότε οι καταναλωτές δεν αγοράζουν την ίδια ποσότητα από το αγαθό αυτό, η ζητούμενη ποσότητα λοιπόν θα μειωθεί. Αν και ο νόμος της ζήτησης δεν αφήνει καμιά αμφιβολία όσον αφορά τη σχέση τιμής και ποσότητας, δεν παρέχει όμως επαρκή γνώση για την ακριβή σχέση μεταξύ τιμής και συνολικών εσόδων. Η τελευταία σχέση είναι κρίσιμη για τον καθορισμό της τιμής από τη διεύθυνση μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού γενικότερα. Με άλλα λόγια, αν η τιμή ενός αγαθού αυξηθεί και η ποσότητα που αγοράζεται μειωθεί, το γινόμενο της τιμής επί την ποσότητα (δηλαδή τα συνολικά έσοδα) μπορεί να αυξηθεί, να μειωθεί ή ακόμη να μείνει αμετάβλητο. Η έννοια της ελαστικότητας ζήτησης χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει πώς ακριβώς η μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού επηρεάζει τα συνολικά έσοδα των επιχειρήσεων — ή ισοδύναμα τις δαπάνες των νοικοκυριών για το αγαθό του οποίου η τιμή έχει μεταβληθεί.

Η ελαστικότητα ζήτησης μπορεί να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τύπο:

$$E_D = \frac{D_q}{D_p}$$

Με μαθηματικούς όρους η ελαστικότητα ζήτησης γράφεται:

$$E_D = -\frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = -\frac{\Delta q}{\Delta p}\frac{p}{q}$$

Ο τύπος της ελαστικότητας ζήτησης αφορά ένα συγκεκριμένο τμήμα της καμπύλης ζήτησης. Στην ουσία η καμπύλη ζήτησης απαρτίζεται από όλα τα σημεία που μας δείχνουν τη ζητούμενη ποσότητα στις μεταβολές της τιμής. Αν υποθέσουμε ότι οι μεταβολές στην τιμή είναι απειροελάχιστα μικρές, δηλαδή lim *Δp→O,* τότε εξ ορισμού έχουμε:

$$\lim_{\Delta D \to O} \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Συνεπώς, ο τύπος της ελαστικότητας σημείου μπορεί να ξαναγραφεί ως:

— –

όπου *dq/dp* είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης *q=f(p).*

Οι δυνατές τιμές της ελαστικότητας ζήτησης κυμαίνονται μεταξύ του μηδενός και του άπειρου ($0 \leq n \leq \infty$). Όταν n=0, τότε η ζητούμενη ποσότητα είναι ανεξάρτητη από την τιμή, δηλαδή έχουμε τέλεια ανελαστικότητα ζήτησης. Το αγαθό στην περίπτωση αυτή είναι απόλυτα αναγκαίο, π.χ. η ζήτηση ινσουλίνης από διαβητικούς, η ζήτηση αλκοολούχων ποτών από αλκοολικούς κ.ο.κ. Όταν n=∞, τότε η ζητούμενη ποσότητα επηρεάζεται υπερβολικά από την τιμή. Μια αμελητέα μεταβολή στην τιμή οδηγεί σε μια υπερβολικά μεγάλη μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα. Η ζήτηση του αγαθού, με άλλα λόγια, είναι τέλεια ελαστική. Η περίπτωση αυτή συναντάται σε αγαθά για τα οποία υπάρχουν πολύ στενά (τέλεια) υποκατάστατα. Υποκατάστατα αγαθά είναι το κρέας με τα ψάρια ή ο υπολογιστής γραφείου με το μεταφερόμενο υπολογιστή.

Στην πραγματικότητα, η ελαστικότητα των περισσότερων αγαθών κυμαίνεται γύρω από τη μονάδα. Αν n<1, το αγαθό έχει ανελαστική ζήτηση, που σημαίνει ότι, αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά ένα μικρότερο ποσοστό προς την αντίθετη διεύθυνση. Όταν n>1, το αγαθό έχει ελαστική ζήτηση, που σημαίνει ότι, αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά ένα μεγαλύτερο ποσοστό προς την αντίθετη διεύθυνση. Όταν n=1, το αγαθό έχει μοναδιαία ελαστικότητα ζήτησης, που σημαίνει ότι, αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται επίσης κατά το ίδιο ποσοστό προς την αντίθετη διεύθυνση.

Η σημασία της ελαστικότητας ζήτησης είναι πολύ μεγάλη αφού οι οικονομολόγοι ενδιαφέρονται να μετρήσουν ορισμένες μεταβλητές για να μπορέσουν να κάνουν προβλέψεις και για να εκτιμήσουν με σχετική ακρίβεια τι αποτέλεσμα θα έχει η μεταβολή μιας μεταβλητής επί μιας άλλης.

• Παραδείγματος χάρη, μια επιχείρηση πωλήσεως υπολογιστών θέλει να μάθει πως θα επηρεασθούν οι πωλήσεις της εάν αποφασίσει να αυξήσει την τιμή τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η τιμή ενός αγαθού αυξηθεί κατά 15 % και η ζητούμενη ποσότητα μειωθεί κατά 5 % τότε η ελαστικότητα ζήτησης θα ισούται

$$E_D = -\frac{5\%}{15\%} = -0{,}33\%$$

2.2.1 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΖΗΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΕΣΟΔΑ

Τα συνολικά έσοδα (R) μιας επιχείρησης από τις πωλήσεις ενός αγαθού (ή μιας υπηρεσίας) είναι ίσα με το γινόμενο της τιμής του αγαθού (p) επί την ποσότητα (q) που πουλήθηκε, δηλαδή R=pq. Στην ουσία δηλαδή τα συνολικά έσοδα είναι η ποσότητα που πουλήθηκε σε πολλαπλασιασμό με το σύνολο των μονάδων που πουλήθηκαν.

Όταν η ζήτηση ενός αγαθού είναι ανελαστική και η τιμή του αγαθού αυξηθεί, η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί κατά ένα μικρότερο ποσοστό. Κατά συνέπεια, τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα αυξηθούν. Ομοίως, αν η τιμή του αγαθού μειωθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα θα αυξηθεί κατά ένα μικρότερο ποσοστό, και συνεπώς τα συνολικά έσοδα θα μειωθούν.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η ζήτηση του αγαθού είναι ελαστική, μια αύξηση της τιμής του κατά (ας υποθέσουμε) ένα τοις εκατό οδηγεί σε μείωση της ζητούμενη ποσότητας κατά περισσότερο από ένα τοις εκατό. Συνεπώς, τα συνολικά έσοδα θα είναι λιγότερα μετά την αύξηση της τιμής. Ομοίως, αν η τιμή ελαττωθεί, η ζητούμενη ποσότητα αυξάνεται κατά μεγαλύτερο ποσοστό και οδηγεί σε υψηλότερα έσοδα.

Αν, τέλος, η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού είναι ίση με τη μονάδα, τότε τα συνολικά έσοδα μένουν αμετάβλητα, επειδή μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή —σε οποιαδήποτε διεύθυνση— θα αντισταθμιστεί από μια ισόποση ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα προς την αντίθετη κατεύθυνση[2].

[2] Οικονομικά μαθηματικά- Μαθηματικά πίστεως, Παπαμιχαήλ, Δ. Κ., Σταμούλη Α.Ε.,1993,σελ 125

2.3 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

Η ελαστικότητα της προσφοράς (elasticity of supply) είναι έννοια παρόμοια μ' αυτήν της ζήτησης. Η ελαστικότητα προσφοράς μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η ελαστικότητα προσφοράς έχει θετική τιμή, που σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και στην τιμή είναι πάντα ευθέως ανάλογη λόγω της θετικής κλίσης της καμπύλης προσφοράς. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως και με τη ζήτηση, η ελαστικότητα προσφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$e = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

Η ελαστικότητα προσφοράς χρησιμοποιείται από τους οικονομολόγους για να υπολογίσουν την ευαισθησία της προσφερόμενης ποσότητας σε μια καθορισμένη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η μέτρηση της ελαστικότητας προσφοράς θεωρείται απαραίτητη, ειδικά σε ορισμένους κλάδους, όπου οι παραγωγικοί συντελεστές μεταφέρονται από την παραγωγή ενός προϊόντος στην παραγωγή ενός άλλου εξ αιτίας μιας μεταβολής στην τιμή. Τα πιο συχνά παραδείγματα αναφέρονται στη γεωργία. Π.χ., μια άνοδος της τιμής του σιταριού σε σχέση με την τιμή του καλαμποκιού οδηγεί σε ιδιαίτερα αυξημένη παραγωγή σιταριού. Αν η ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή, λέμε ότι το αγαθό είναι ελαστικό. Αν ισχύει το αντίθετο, το αγαθό είναι ανελαστικό. Τέλος, όταν υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής και της προσφερόμενης ποσότητας, λέμε ότι η ελαστικότητα προσφοράς είναι μοναδιαία.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς του προϊόντος Χ δίνονται από τις εξής σχέσεις:

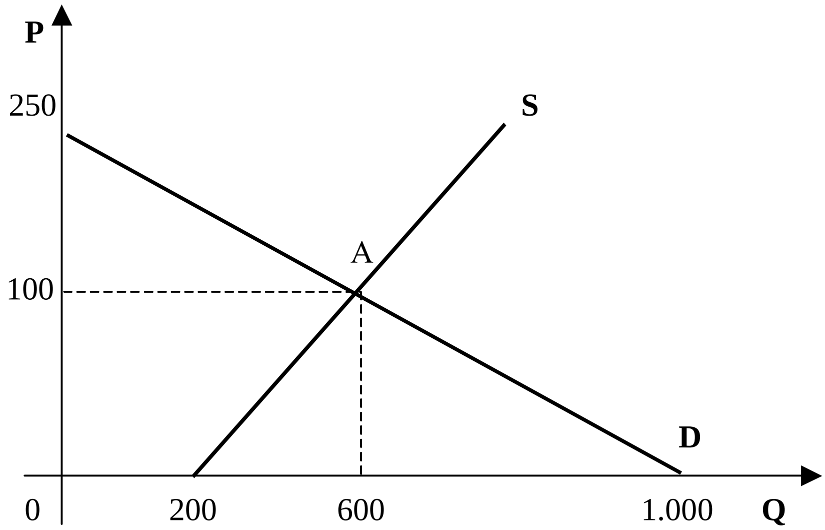
$Q_D = 1.000 – 4P$ (συνάρτηση ζήτησης)

$Q_S = 200 + 4P$ (συνάρτηση προσφοράς)

(α) Να υπολογίσετε την τιμή και την ποσότητα ισορροπίας του προϊόντος Χ. Επιπλέον, παρουσιάστε σε ένα διάγραμμα τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς του προϊόντος, καθώς και το σημείο ισορροπίας.

(β) Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης του προϊόντος Χ ως προς την τιμή του, καθώς και την ελαστικότητα προσφοράς στην τιμή ισορροπίας του προϊόντος. Τι σημαίνουν οι τιμές των ελαστικοτήτων που βρήκατε;

(α) Όταν η αγορά του προϊόντος Χ βρίσκεται σε ισορροπία ισχύει $Q_D = Q_S = Q$. `Ετσι έχουμε: $1.000 – 4P = 200 + 4P \Rightarrow P = 100$ ευρώ και $Q = 600$ μονάδες.



(β) Η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού ως προς την τιμή του δίνεται από την εξής σχέση: $E_D = \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_D}$. Από τη συνάρτηση ζήτησης προκύπτει $\Delta Q_D/\Delta P = -4$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο σημείο ισορροπίας P = 100 και Q_D = 600. Οπότε, η ελαστικότητα ζήτησης του προϊόντος Χ ως προς την τιμή του είναι:

$$E_D = \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_D} = -4(100/600) = -0{,}67.$$

Η τιμή αυτή της ελαστικότητας σημαίνει ότι μία αύξηση της τιμής του προϊόντος Χ κατά 1% θα οδηγήσει σε μία μείωση της ζητούμενης ποσότητάς του κατά 0,67%.

Η ελαστικότητα προσφοράς ενός αγαθού δίνεται από την εξής σχέση: $E_S = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_S}$. Από τη συνάρτηση προσφοράς προκύπτει $\Delta Q_S/\Delta P = 4$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο σημείο ισορροπίας P = 100 και Q_S = 600. Οπότε, η ελαστικότητα προσφοράς του προϊόντος είναι:

$$\mathrm{E}_S = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_S} = 4(100/600) = 0{,}67.$$

Η τιμή αυτή της ελαστικότητας σημαίνει ότι μία αύξηση της τιμής του προϊόντος Χ κατά 1% θα οδηγήσει σε μία αύξηση της προσφερόμενης ποσότητάς του κατά 0,67%.

2.4 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Η συνάρτηση συνολικής παραγωγής *(TP)* στην πιο απλή της μορφή περιλαμβάνει μόνο έναν συντελεστή παραγωγής (οι συντελεστές της παραγωγής είναι οι εισροές που είναι απαραίτητες προκειμένου να παραχθούν τα αγαθά και οι υπηρεσίες. Οι πιο σημαντικοί συντελεστές παραγωγής είναι το κεφάλαιο και η εργασία). Ας υποθέσουμε συντελεστή παραγωγής την εργασία). Έτσι έχουμε

$$TP=f(L)$$

Στη συνάρτηση παραγωγής συνήθως αποδίδονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά (Σχήμα 1).

(1) Παραγωγή μπορεί να υπάρξει μόνο όταν υπάρχει εισροή εργασίας, δηλαδή το **συνολικό προϊόν** (total product), *TP=0,* όταν L=0.

(2) Η πρώτη παράγωγος του συνολικού προϊόντος ως προς την εργασία είναι θετική, ***dTP/dL≥0,*** δηλαδή η μεταβολή που προκαλείται στο συνολικό προϊόν από τη μεταβολή της εργασίας —ή αλλιώς το **οριακό προϊόν της εργασίας** (marginal product of labor)— είναι θετική.

(3) Οι ρυθμοί αύξησης του προϊόντος είναι υψηλοί μέχρι ένα ορισμένο επίπεδο απασχόλησης L. Μετά οι αυξήσεις του προϊόντος μειώνονται σταδιακά. Με άλλα λόγια, παρατηρούνται **φθίνουσες αποδόσεις**

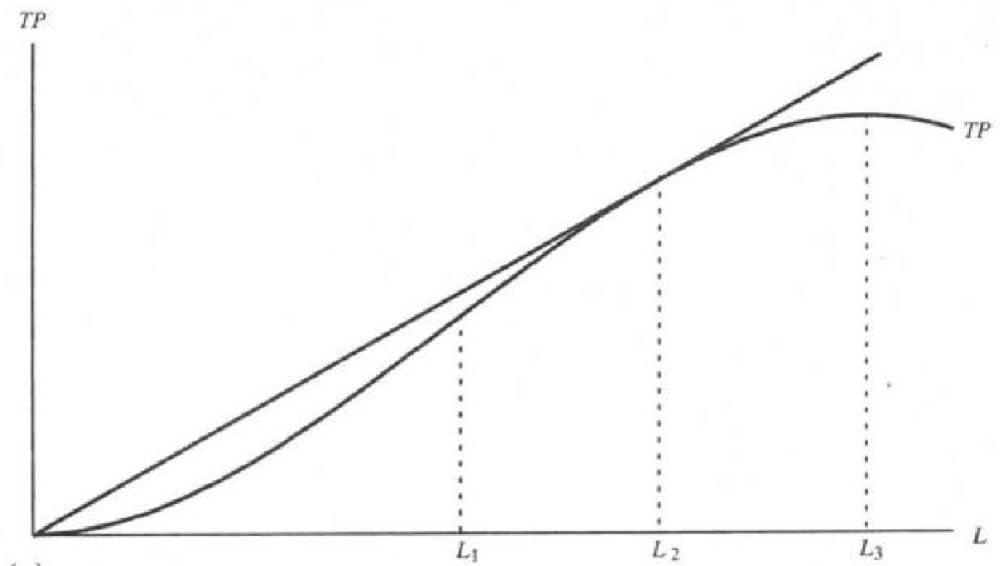
(diminishing returns) του συντελεστή εργασίας. Μαθηματικά η τελευταία πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$f''(L)>0 \text{ για } L<L_1$$

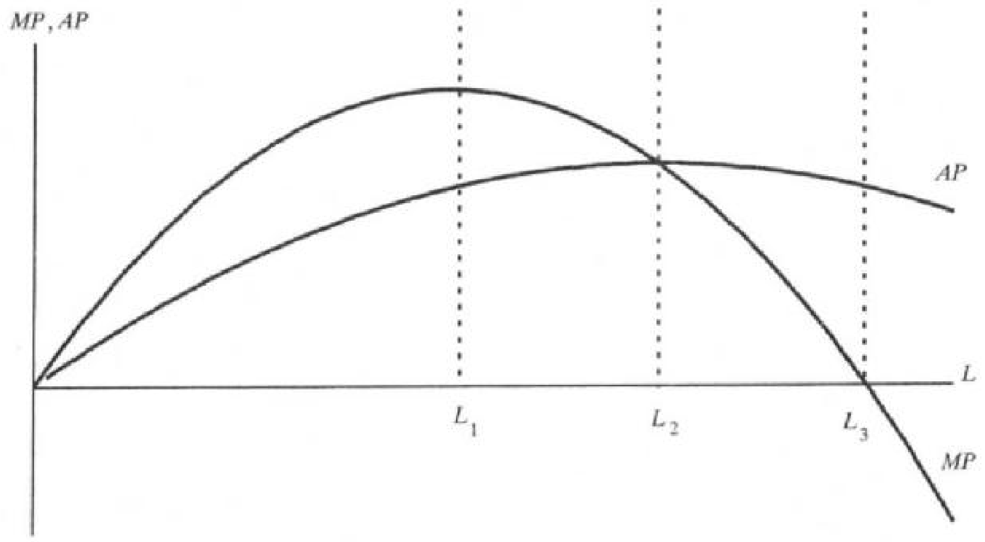
$$f''(L)<0 \text{ για } L>L_1$$

Αν η παραγωγή συνεχίσει μετά το L_2, θα υπάρχει ένα άλλο επίπεδο απασχόλησης L_3 πέραν του οποίου το οριακό προϊόν ***(MP)*** γίνεται αρνητικό και το συνολικό προϊόν θα αρχίσει να μειώνεται. Ασφαλώς, οι επιχειρηματίες θα θέλουν να προσλάβουν προσωπικό μέχρι που να απασχολήσουν, το πολύ, L_3 εργαζομένους. Για απασχόληση μεγαλύτερη ***απο*** L_3 παρατηρούμε ότι η παραγωγή μειώνεται αντί να αυξάνεται. Η μαθηματική διατύπωση αυτής της πρότασης είναι:

$$f'(L)<0 \text{ για } L_1<L_3$$



(α)



(β)

Σχήμα 1

Στο Σχήμα 1α παρουσιάζουμε μια τυπική συνάρτηση συνολικού προϊόντος (TP ή q) με τα τρία διαφορετικά στάδια. Στο Σχήμα 1β παρουσιάζουμε το οριακό προϊόν (MP=d(TP)/dL=dq/dL), που είναι η πρώτη παράγωγος του συνολικού προϊόντος, και το μέσο προϊόν (AP=q/L), δηλαδή το προϊόν ανά μονάδα εργασίας. Το οριακό προϊόν γεωμετρικά είναι η κλίση του συνολικού προϊόντος, ενώ το μέσο προϊόν είναι ίσο με την κλίση της ευθείας γραμμής που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει το συνολικό προϊόν σε ένα ορισμένο επίπεδο απασχόλησης. Στο σημείο που το οριακό προϊόν παρουσιάζει μέγιστο, η καμπύλη συνολικού προϊόντος παρουσιάζει σημείο καμπής (Li). Στο σημείο που η ευθεία γραμμή διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι εφαπτομένη της συνάρτησης συνολικού προϊόντος, το οριακό προϊόν ισούται με το μέσο προϊόν και είναι επίσης το σημείο που το μέσο προϊόν μεγιστοποιείται.

2.5 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ

Ο εντοπισμός και ο χαρακτηρισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης συνολικού προϊόντος συντελεί στην επίτευξη ενός άλλου στόχου, δηλαδή της παραμετρικής ανάλυσης, η οποία αποσκοπεί στον προσδιορισμό των προσήμων των παραμέτρων, τις τιμές που μπορούν να λάβουν καθώς και τις ενδεχόμενες σχέσεις μεταξύ τους. Η παραμετρική ανάλυση βασίζεται στην οικονομική θεωρία σε συνδυασμό με το μαθηματικό λογισμό. Για το σκοπό αυτό ας υποθέσουμε μια συνάρτηση συνολικού προϊόντος της μορφής:

$$TP=q= \alpha L^3+bL^2+cL+d$$

Στην προκειμένη περίπτωση λέμε ότι αν L= 0, τότε θα πρέπει να ισχύει $TP=0$ και άρα $d = 0$. Όσον αφορά το συντελεστή c γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που L=0, τότε $AP=0$ και κατά συνέπεια η τιμή του συντελεστή c=0. Τέλος, για τα πρόσημα των δύο άλλων παραμέτρων, παραγωγίζουμε το συνολικό προϊόν ως προς την εργασία και βρίσκουμε το οριακό προϊόν της εργασίας:

$$MP= dq/dL =3\alpha L^2+2bL + c$$

το οποίο μεγιστοποιείται, όταν η πρώτη παράγωγος ισούται με το μηδέν (αναγκαία συνθήκη). Επομένως,

$$(MP)'=(d^2q)/(dL)^2=6aL+2b=0$$

Κατόπιν, λύνοντας ως προς την εργασία λαμβάνουμε

$$L= (2b) / (6a)$$

Η συνάρτηση του οριακού προϊόντος γι' αυτήν την τιμή βρίσκεται σε ένα ακρότατο. Αυτό για να είναι μέγιστο θα πρέπει η δεύτερη παράγωγος του οριακού προϊόντος να είναι αρνητική (ικανή συνθήκη). Άρα, λοιπόν, έχουμε:

$$(MP)'=6\alpha<0$$

Έτσι, για να έχουμε μέγιστο απαιτείται α<0, πράγμα που σημαίνει ότι για να έχουμε L > 0 αναγκαστικά το b>0. Συνοψίζοντας, η συνάρτηση συνολικής παραγωγής γράφεται:

$$Q=aL^3+bL^2 \text{ με } \alpha<0 \text{ και } b>0$$

2.6 Η ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΚΑΙ ΜΕΣΟΥ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ

Το μέσο προϊόν είναι AP=q(L)/L. Για να βρούμε τη μέγιστη τιμή του μέσου προϊόντος πρέπει η πρώτη παράγωγος του να μηδενισθεί άρα, έχουμε:

$$\frac{\mathbf{d(AP)}}{\mathbf{dL}} = \frac{\mathbf{q'(L)L}}{\mathbf{L^2}} = \frac{\mathbf{q'L}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{qL'}}{\mathbf{L^2}} \ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \ \frac{\mathbf{d(AP)}}{\mathbf{dL}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} = \mathbf{(MP - AP)}$$

Αν d(AP)/dL-*0*, τότε MP=AP και το μέσο προϊόν μεγιστοποιείται.
Αν d(AP)/dL > 0, τότε MP>AP και το οριακό προϊόν βρίσκεται πάνω από το μέσο προϊόν.

Αν d(AP)/dL < 0, τότε MP<AP και το οριακό προϊόν βρίσκεται κάτω από το μέσο προϊόν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-3L^3+270L^2$

(α) Να βρεθούν τα ακρότατα της.

(β) Να βρεθούν τα ακρότατα του μέσου προϊόντος.

ΛΥΣΗ

(α) Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο απαιτούν:

$\frac{dq}{dL} = -9L^2 + 540L = -9L(L - 60) = 0$, όπου $L=0$ και $L=60$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης για την τιμή L=60 δίνουν:

$\frac{d^2q}{dL^2} = -18L + 540 = -18(60) + 540 = -540 < 0$

Άρα το προϊόν μεγιστοποιείται, όταν απασχολούνται 60 εργάτες.

(β) Οι συνθήκες πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση του μέσου προϊόντος απαιτούν:

$$\frac{d(-3L^2+270L)}{dL} = -6L + 270 = 0 \text{ και } L = 45$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{d^2(AP)}{dL^2} = -6$$

Επομένως, το μέσο προϊόν μεγιστοποιείται, όταν απασχολούνται 45 εργάτες.

2.7 ΟΡΙΑΚΟ ΕΣΟΔΟ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής, όταν έχουμε μόνο μία εισροή (εργασία), γράφεται ως q=q(L). Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι R=p(q), ενώ η συνάρτηση ζήτησης είναι p=p(q). Συνεπώς, τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θεωρούνται συνάρτηση του αριθμού των εργαζομένων, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε τα συνολικά έσοδα ως προς τον αριθμό των εργαζομένων. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε:

$$\mathbf{\frac{dR}{dL} = p\frac{dq}{dL} + q\frac{dp}{dL}}$$

Από τον αλυσωτό κανόνα έχουμε:

$$\mathbf{\frac{dp}{dL} = \frac{dp}{dq}\frac{dp}{dL}} \text{ ά}\boldsymbol{\rho\alpha}\ \mathbf{\frac{dR}{dL} = p\frac{dq}{dL} + q\frac{dp}{dq}\frac{dq}{dL}} \text{ ή } \mathbf{\frac{dR}{dL} = \frac{dq}{dL}(p + q)\frac{dp}{dq}}$$

Η παράγωγος των συνολικών εσόδων ως προς την εργασία καλείται οριακό έσοδο προϊόντος (marginal revenue product)[3].

[3] Χρηματο-οικονομικά μαθηματικά, Κούγιας, Γ., ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ,2004, σελ 222

2.8 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΟΣΤΟΥΣ

Στη νεοκλασική θεωρία —στην πιο διαδεδομένη της εκδοχή — οι επιχειρήσεις θεωρούνται ότι παράγουν με στόχο τη μεγιστοποίηση των κερδών τους. Τα κέρδη μιας επιχείρησης υπολογίζονται από τη διαφορά μεταξύ συνολικών εσόδων και συνολικού κόστους.

Η συνάρτηση κόστους προκύπτει από τη συνάρτηση παραγωγής, δηλαδή το συνολικό κόστος εξαρτάται από την παραγόμενη ποσότητα. Υποθέτουμε τη συνάρτηση παραγωγής που χρησιμοποιεί ως μόνη εισροή την εργασία. Επίσης, υποθέτουμε ότι η αμοιβή κάθε μονάδας εργασίας (ώρες, ή αριθμός εργατών) είναι ίση με w. Τότε το συνολικό κόστος γράφεται:

$$C = wL + F$$

όπου C = συνολικό κόστος

V = wL ή μεταβλητό κόστος

F = σταθερό κόστος

Διαιρούμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους με την παραγόμενη ποσότητα και παίρνουμε:

$\frac{C}{q} = \frac{V}{q} + \frac{F}{q}$ ή AC=AVC+AFC

Δηλαδή το μέσο (συνολικό) κόστος (AC=C/q) είναι ίσο με το άθροισμα του μέσου μεταβλητού (AVC=V/q) και του μέσου σταθερού κόστους (AFC=F/q). Παραγωγίζοντας το συνολικό κόστος ως προς το προϊόν παίρνουμε το *οριακό κόστος* (marginal cost):

$$MC = \frac{dC}{dq} = \frac{dC}{dL} = \frac{dL}{dq} = \frac{\frac{dC}{dL}}{\frac{dq}{dL}}$$

όπου MC είναι το οριακό κόστος. Αλλά dC/dL=w από την υπόθεση που κάναμε ότι το μόνο μεταβλητό κόστος της συνάρτησης είναι η εργασία. Επίσης dQ/dL είναι η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας (MP). Συνεπώς, το οριακό κόστος, ο μισθός και η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας συνδέονται με τη σχέση:

$$MC = \frac{w}{MP}$$

Παρατηρούμε την αντίστροφη σχέση μεταξύ της οριακής παραγωγικότητας και του οριακού κόστους, όπως επίσης την ευθέως ανάλογη σχέση ανάμεσα στον ονομαστικό μισθό και στο οριακό κόστος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω η ακόλουθη συνάρτηση συνολικού κόστους:

$C=200+60q-4q^2+0,l\ q^3$

(α) Να υπολογιστεί το οριακό και το μέσο κόστος για q = 10.

(β) Να βρεθεί το μέγεθος παραγωγής που ελαχιστοποιεί το οριακό κόστος,

ΛΥΣΗ

(α) $MC=(TC)'=60-8q+0,3q^2$ για q=10 MC=10

$AC=(200/q) + 60-4q+0,1q^2$ για q=10 AC=50 (β) MC΄=-8+0,6q για MC=0 παίρνουμε q=13,3. Γι' αυτή την τιμή, η συνάρτηση οριακού κόστους ελαχιστοποιείται, επειδή MC''=0,6>0.

2.9 Η ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΣΟΥ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Η ακριβής σχέση ανάμεσα στο μέσο και στο οριακό κόστος μπορεί να αποσαφηνιστεί με τη βοήθεια του λογισμού. Το μέσο κόστος γράφεται *AC=C(q)/q*, όπου *C(q)* η συνάρτηση συνολικού κόστους. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως ακριβώς και με την περίπτωση του μέσου προϊόντος.

Αν d(AC)/dq=0, τότε MC=AC και το μέσο κόστος ελαχιστοποιείται

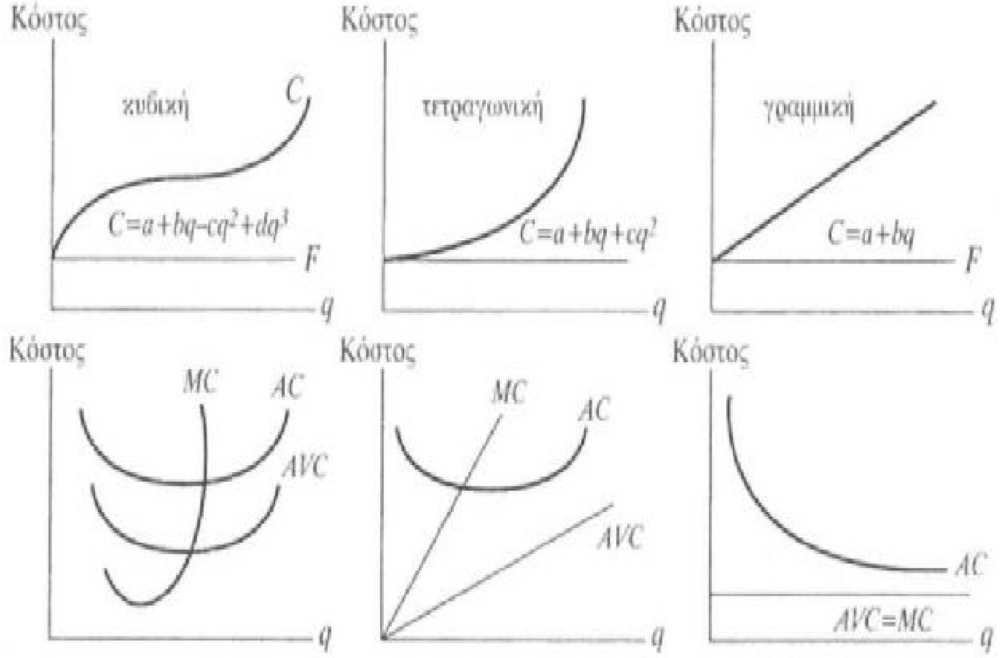
Αν d(AC)/dq>0, τότε MC>AC και το οριακό κόστος βρίσκεται πάνω από το μέσο κόστος.

Αν d(AC)/dq<0, τότε MC<AC και το οριακό κόστος βρίσκεται κάτω από το μέσο κόστος.

Δηλαδή, το οριακό κόστος είναι ίσο με το μέσο κόστος στο επίπεδο παραγωγής, όπου το μέσο κόστος έχει ελάχιστο. Στα σημεία αριστερά του επιπέδου παραγωγής, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο μέσο κόστος, το οριακό κόστος είναι μικρότερο του μέσου και στο επίπεδο παραγωγής δεξιά του επιπέδου παραγωγής, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο μέσο κόστος, το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο του μέσου κόστους.

Η σχέση ανάμεσα στο μέσο και οριακό κόστος, στην οποία καταλήξαμε, αποτελεί στην πραγματικότητα ειδική περίπτωση μιας γενικότερης σχέσης που ισχύει για κάθε ζεύγος μέσου και οριακού μεγέθους, όπως οριακό και μέσο έσοδο, οριακή και μέση παραγωγικότητα κ.ο.κ.

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζουμε τρεις συναρτήσεις συνολικού κόστους και τις αντίστοιχες καμπύλες μέσου και οριακού κόστους.



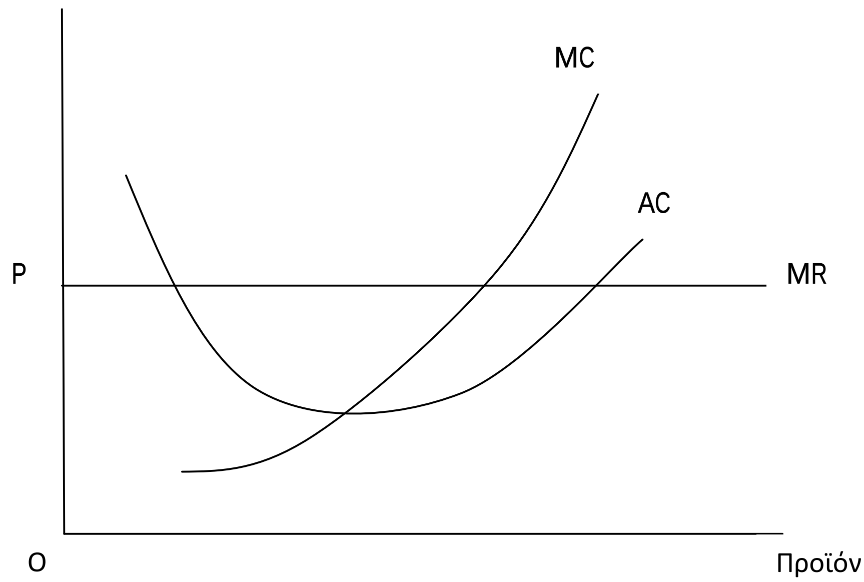
Σχήμα 3

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μια επιχείρηση που λειτουργεί σε έναν πλήρως ανταγωνιστικό κλάδο αντιμετωπίζει τις καμπύλες κόστους και οριακού εσόδου που εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα, όπου MC είναι η καμπύλη οριακού κόστους, AC, η καμπύλη μέσου κόστους και MR η καμπύλη οριακού εσόδου. Η τιμή η οποία επικρατεί στην αγορά είναι P.

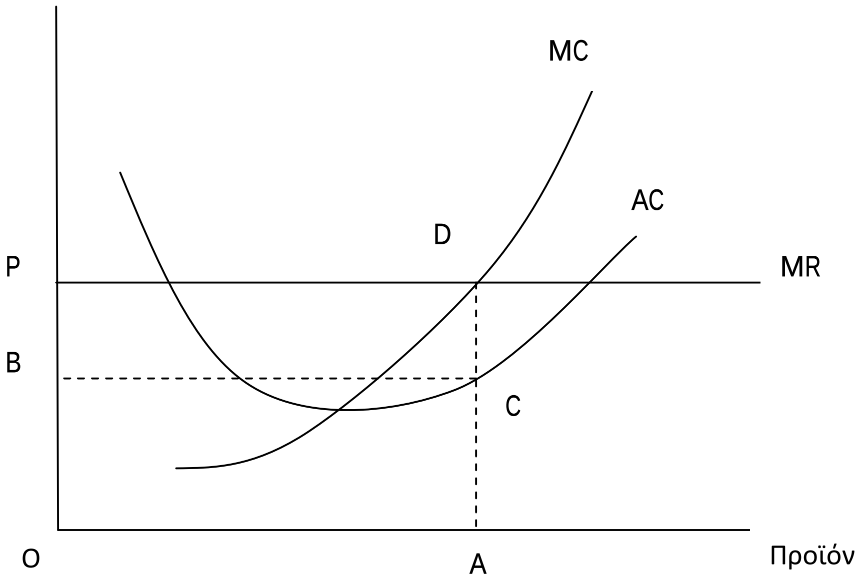
(α) Να δείξετε στο διάγραμμα το επίπεδο του προϊόντος το οποίο μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης και την περιοχή που αντιπροσωπεύουν τα κέρδη που πραγματοποιεί η επιχείρηση σε αυτό το επίπεδο τιμής και παραγόμενου προϊόντος.

(β) Πως νομίζετε ότι θα επηρεαζόταν η επιχείρηση από μία μείωση της αγοραίας ζήτησης για το προϊόν που παράγει αυτός ο κλάδος;



Απάντηση

(α) Στο παρακάτω σχήμα τα κέρδη μεγιστοποιούνται στην ποσότητα προϊόντος ΟΑ, όπου το οριακό κόστος ισούται με το οριακό έσοδο, ισούται με την τιμή (MC=MR=P). Τα κέρδη υπολογίζονται από την διαφορά μεταξύ του μέσου εσόδου και του μέσου κόστους επί την ποσότητα του προϊόντος. Περιοχή PBCD στο σχήμα.



(β) Η μείωση της ζήτησης θα οδηγούσε αρχικά σε μείωση της τιμής του αγαθού, και οι επιχειρήσεις όπως αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα θα έβλεπαν τα κέρδη τους να μειώνονται. Μακροχρόνια, οι επιχειρήσεις θα ήταν σε θέση να προσαρμόσουν τη διάρθρωση των εισροών τους στις νέες συνθήκες, έτσι ώστε η τιμή να αυξηθεί και πάλι.

2.9.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Ο εντοπισμός και ο χαρακτηρισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης συνολικού κόστους συντελεί στην επίτευξη ενός άλλου στόχου. Π.χ. αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους της συνηθισμένης μορφής:

$$C = aq^3 + bq^2 + cq + d$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω συνάρτηση οι παράμετροι της πρέπει να πληρούν ορισμένους περιορισμούς. Πρώτα από όλα, η παράμετρος $d>0$, διότι αναφέρεται στο σταθερό κόστος. Δεύτερο, η συνάρτηση κόστους πρέπει να είναι αύξουσα. Γνωρίζουμε ότι οι κυβικές συναρτήσεις παρουσιάζουν δύο καμπυλότητες, είναι φανερό ότι σε καμιά περίπτωση η συνάρτηση συνολικού κόστους δε θα είναι φθίνουσα. Ο περιορισμός αυτός επιτυγχάνεται μόνο αν τα πρόσημα των συντελεστών είναι αυστηρά καθορισμένα, όπως επίσης και η μεταξύ τους σχέση. Ακολουθώντας διαδικασία παρόμοια μ' αυτήν της συνάρτησης παραγωγής, επιδιώκουμε να εντοπίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης οριακού κόστους. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$MC=C=3aq^2+2bq+c$$

Εδώ έχουμε μια συνάρτηση δευτέρου βαθμού που τη θέλουμε να έχει ελάχιστο αλλά ταυτόχρονα θα πρέπει $MC>0$. Άρα, λοιπόν, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση οριακού κόστους και τη θέτουμε ίση με το μηδέν:

$MC=6aq+2b$ και $q=-b/3a$

Γνωρίζουμε ότι το προϊόν είναι θετικό, άρα είτε το α είτε το b πρέπει να είναι αρνητικό. Από τις συνθήκες δεύτερης τάξης μπορούμε να πούμε ότι το α θα είναι θετικό, πράγματι:

$MC''=6a>0$

Επομένως το $b<0$ για να έχουμε $q>0$. Προκειμένου να βρούμε το πρόσημο του c, όπως επίσης τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων, εκτιμούμε ποιο είναι το ελάχιστο MC αντικαθιστώντας την τιμή του q στο MC. Έτσι έχουμε:

$$MC_{min} = 3a\frac{b^2}{(-3a)} + 2b\frac{b}{(-3a)} + c$$

πράγμα που σημαίνει ότι $b^2<3ac$ για να έχουμε θετικό ελάχιστο MC. Ο περιορισμός αυτός συνεπάγεται ότι $c>0$[4].

[4] Μαθηματικά Οικονομικό- Διοικητικών Επιστημών (Μέρος Β'), Κίντης Α., Yamane T., GUTENBERG, 1993,σελ 186

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΕΛΕΙΟΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ- ΜΟΝΟΠΩΛΙΟ- ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

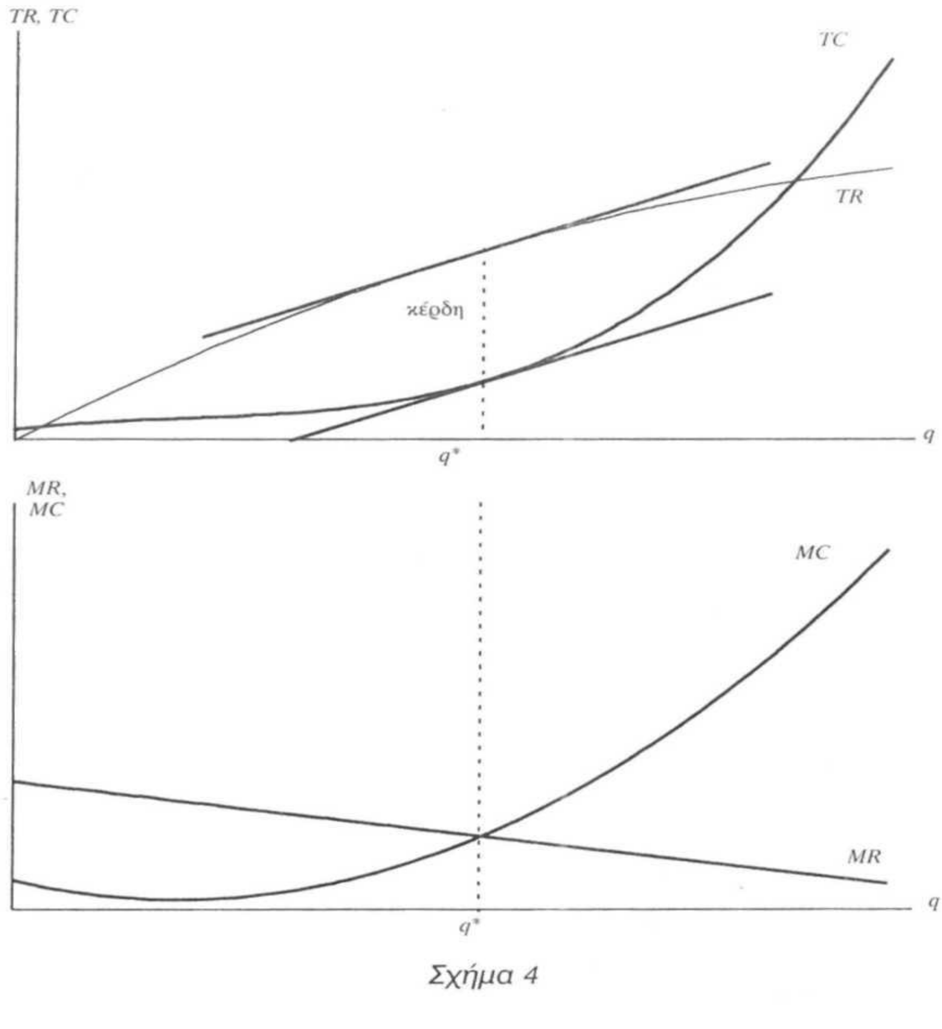
3.1 ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΚΕΡΔΩΝ

Τα κέρδη μιας επιχείρησης, όπως έχουμε σημειώσει, είναι η διαφορά ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και στο συνολικό κόστος. Με μαθηματικά σύμβολα:

$\pi(q)=R(q)-C(q)$

όπου $\pi(q)$ παριστάνει τα συνολικά κέρδη, $R(q)=pq$ τα συνολικά έσοδα,$p=\varphi(q)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης και $C(q)$ το κόστος παραγωγής που υποθέτουμε ότι συμπεριλαμβάνει και το εναλλακτικό κόστος.

Στο Σχήμα 4 παριστάνουμε γραφικά τις δύο εναλλακτικές ερμηνείες της μεγιστοποίησης των κερδών.



Σχήμα 4

Για τη μεγιστοποίηση των κερδών, η αναγκαία συνθήκη απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης των κερδών.

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{dR}{dR} - \frac{dC}{dq} = 0 \text{ επομένως } \frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι τα κέρδη μεγιστοποιούνται στο σημείο που η κλίση της συνάρτησης των συνολικών εσόδων ισούται με την κλίση της συνάρτησης του συνολικού κόστους. Με άλλα λόγια, τα κέρδη της επιχείρησης μεγιστοποιούνται, όταν η επιχείρηση παράγει τόσο προϊόν όσο είναι αρκετό για να εξισώσει το **οριακό έσοδο** (marginal revenue) με το **οριακό κόστος** (marginal cost).

$$\boldsymbol{\frac{dR}{dq} = MR = MC\ \frac{dC}{dq}}$$

Η ικανή συνθήκη για τη μεγιστοποίηση των κερδών απαιτεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης των κερδών να είναι αρνητική, δηλαδή $d^2\pi/dq^2<0$.

3.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ ΤΕΛΕΙΟΥ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι η επιχείρηση μπορεί να επιλέγει την τιμή που αντιστοιχεί στο μέγιστο κέρδος. Στη νεοκλασική θεωρία συχνά γίνεται αναφορά σε ένα υπόδειγμα αγοράς που χαρακτηρίζεται από ένα μεγάλο αριθμό μικρών — σχετικά με το μέγεθος της αγοράς— παραγωγών που πουλούν ένα ομοειδές προϊόν. Αυτό το είδος της αγοράς κυριαρχείται ακόμη από ένα μεγάλο αριθμό μικρών — σχετικά με το μέγεθος της αγοράς — αγοραστών. Οι αγοραστές και οι πωλητές έχουν τέλεια πληροφόρηση για τις τιμές και το κόστος κάθε προϊόντος. Ακόμη υπάρχει τέλεια κινητικότητα στους συντελεστές παραγωγής. Αυτό συνεπάγεται ότι στην περίπτωση που υπάρχουν υπερκανονικά κέρδη σε έναν κλάδο η είσοδος επιχειρήσεων από άλλους κλάδους οδηγεί σε υπερπροσφορά και κατά συνέπεια σε χαμηλότερη τιμή, που συνεπάγεται την επαναφορά της κατάστασης με κανονικά κέρδη. Αν πάλι υπάρχουν ζημίες σε έναν κλάδο, η έξοδος των επιχειρήσεων από τον κλάδο οδηγεί σε ελάττωση της προσφοράς και συνεπώς σε υψηλότερη τιμή, που αναμένεται να επαναφέρει την κατάσταση, στην οποία οι επιχειρήσεις πουλούν σε μια τιμή με την οποία εξασφαλίζουν κανονικά κέρδη. Αξίζει να τονιστεί ότι αυτή η τιμή ισούται με το ελάχιστο μέσο κόστος της επιχείρησης. Είναι σημαντικό να έχουμε υπόψη ότι το κανονικό κέρδος είναι συστατικό στοιχείο του κόστους.

Αυτό το υπόδειγμα, αν και καθόλου αντιπροσωπευτικό της πραγματικότητας, ωστόσο χρησιμοποιείται για να περιγράψει και κατά συνέπεια να προβλέψει τη συμπεριφορά των παραγωγών. Το υπόδειγμα λέγεται *τέλειος ανταγωνισμός* (perfect competition), επειδή πιστεύεται ότι αντιπροσωπεύει το ιδανικό είδος αγοράς. Τα συμπεράσματα αυτού του υποδείγματος χρησιμοποιούνται για να κρίνουν αν και κατά πόσο ο πραγματικός ανταγωνισμός διαφέρει από τον τέλειο. Αν η απόκλιση είναι σημαντική, τότε σύμφωνα με τη καθιερωμένη οικονομική θεωρία υπάρχει αιτιολογία για κρατική παρέμβαση. Το κράτος προσπαθεί να διορθώσει τις ατέλειες της αγοράς και να μετατρέψει την οικονομική ζωή έτσι που να προσεγγίζει τον τέλειο ανταγωνισμό.

Μια από τις λογικές συνεπαγωγές του τέλειου ανταγωνισμού είναι ότι οι παραγωγοί και οι καταναλωτές —λόγω του μεγάλου αριθμού τους και του μικρού μεγέθους τους — μεμονωμένοι είναι εντελώς αδύναμοι να επηρεάσουν τις τιμές. Επομένως, η τιμή γι' αυτούς είναι κάτι το δεδομένο. Με δεδομένη την τιμή, κάθε παραγωγός αποφασίζει πόση ποσότητα θα παράγει. Ασφαλώς, το κριτήριο του παραγωγού είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους του. Έστω, λοιπόν, ότι τα συνολικά έσοδα είναι $R=pq$ και η συνάρτηση κόστους στην πιο απλή της μορφή είναι η

$$C=a+f(q),$$

όπου το α αντιπροσωπεύει το σταθερό κόστος και $f(q)$ το μεταβλητό κόστος. Η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι:

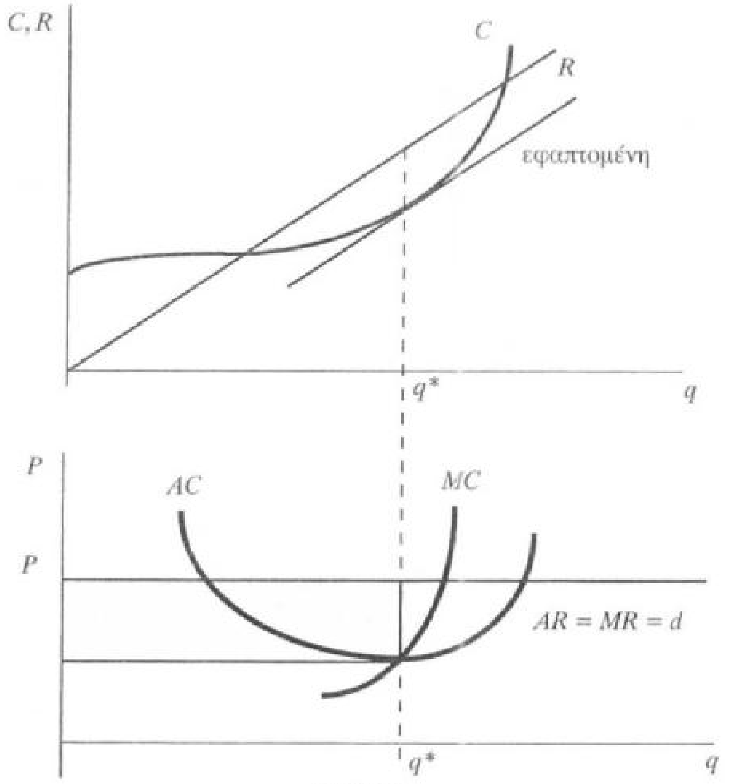
$$\pi=R-C=pq-a-f(q)$$

η οποία μεγιστοποιείται, όταν θέσουμε την πρώτη της παράγωγο ίση με το μηδέν $\pi'=p-f'´(q)=0$

Για $\pi'=0$ παίρνουμε την αναγκαία συνθήκη για μέγιστο,

$p=f\ ´(q)=MC$. Με άλλα λόγια το κέρδος της τέλεια ανταγωνιστικής επιχείρησης μεγιστοποιείται, όταν η τιμή πώλησης ισούται με το οριακό κόστος.

Η ικανή συνθήκη για τη μεγιστοποίηση του κέρδους απαιτεί αρνητική τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή $\pi''=f´''(q)<0$. Στο Σχήμα 5 έχουμε τη γραφική παράσταση της μεγιστοποίησης του κέρδους:



Σχήμα 5

Παρατηρούμε ότι, όταν η διαφορά μεταξύ εσόδων και κόστους μεγιστοποιείται, τότε το οριακό κόστος είναι ίσο με την τιμή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ότι η τιμή μιας τέλεια ανταγωνιστικής αγοράς ισούται με 70 ν.μ. και έστω η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας επιχείρησης που λειτουργεί σ' αυτή την αγορά είναι:

$C(q) = 2q^3 - 22q^2 + 84q + 20$

να υπολογιστούν:

(α) η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη αυτής της επιχείρησης

(β) το μέγιστο κέρδος

(γ) τα σημεία καμπής της συνάρτησης κέρδους αυτής της επιχείρησης

Λύση

(α) $\Pi = pq- C(q) = 70q - (2q^3 - 22q^2 + 84q + 20)$
$= -2q^3 + 22q^2 - 14q-20$

$\Pi=-6q^2+44g-14=0$ και $q=l/3$, $q=7$

οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν: $\Pi''=- 12q+44$

για $q=l/3$ λαμβάνουμε $\Pi''=40>0$, άρα τα κέρδη ελαχιστοποιούνται, ενώ για $q=7$, λαμβάνουμε $\Pi''=- 44<0$, άρα τα κέρδη μεγιστοποιούνται.

(β) $\Pi = -(2)(7)^3 +(22)(7)^2 -(14)(7)-20 = 274$ ν.μ.

(γ) $\Pi''=-12q+44=0$ και $g=3,66$ είναι το σημείο καμπής. Πράγματι, για $q<3,66$ η $\Pi''>0$ και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα της προς τα πάνω, ενώ για $q>3,66$ η $\Pi''<0$ και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα της προς τα κάτω.

3.3 ΕΠΙΒΟΛΗ ΦΟΡΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΟΝ ΤΕΛΕΙΟ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟ

Τα ερωτήματα που θέτουμε είναι: Πρώτον, πώς αλλάζουν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας μετά την επιβολή φορολογίας και δεύτερον, ποιο ποσοστό φορολογίας πρέπει να επιβάλει η κυβέρνηση ούτος ώστε να μεγιστοποιήσει τα φορολογικά της έσοδα. Το είδος της φορολογίας που εξετάζουμε είναι **ανά μονάδα προϊόντος** (excise tax). Έστω η ακόλουθη γραμμική συνάρτηση ζήτησης:

$q=a -bp$

η συνάρτηση προσφοράς επίσης είναι γραμμική: $q=-c+dp$

με $α>0$, $b>0$, $c>$, $d>0$

η τέλεια ανταγωνιστική αγορά βρίσκεται σε ισορροπία όταν η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση,

α-bp=-c+dp και η τιμή ισορροπίας είναι: $p_e = \frac{a+c}{d+b}$

Για να βρούμε την ποσότητα ισορροπίας αντικαθιστούμε είτε στη συνάρτηση ζήτησης είτε στη συνάρτηση προσφοράς και βρίσκουμε:

$$q_e = a - b\frac{a+c}{d+b} = \frac{ad-bc}{b+d}$$

Αν η κυβέρνηση επιβάλει φορολογία / ανά μονάδα προϊόντος που πουλιέται, τότε οι παραγωγοί θα εισπράττουν την τιμή πώλησης μειωμένη κατά το φόρο, δηλαδή p-t, επομένως η συνάρτηση προσφοράς γράφεται: q=-c+d(p-t) η τέλεια ανταγωνιστική αγορά βρίσκεται σε ισορροπία, όταν η προσφορά μετά τη φορολογία είναι ίση με τη ζήτηση, δηλαδή:

a-bp=-c+d(p -t)

και η καινούργια τιμή ισορροπίας είναι:

$p_e = \frac{a+c}{b+d} + \frac{d}{b+dt}$

3.4 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ ΚΑΘΑΡΟΥ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

Μονοπώλιο, όπως η λέξη υποδηλώνει, είναι μια μορφή αγοράς όπου μια επιχείρηση πουλά ένα προϊόν για το οποίο δεν υπάρχουν στενά υποκατάστατα. Σε αντίθεση με την επιχείρηση που λειτουργεί στον τέλειο ανταγωνισμό, ο μονοπωλητής κατέχει δύναμη επιβολής δικής του τιμολογιακής πολιτικής. Αυτό, βέβαια, δε σημαίνει ότι ο μονοπωλητής χρεώνει την υψηλότερη δυνατή τιμή. Στην καθιερωμένη μικροοικονομική θεωρία, ο μονοπωλητής συμπεριφέρεται ορθολογικά και αυτό σημαίνει ότι στόχος του είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πώς προσδιορίζεται η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στο μονοπώλιο. Θα υποθέσουμε τη συνάρτηση ζητησης p= α-βq και τη συνάρτηση κόστους **C**(q)=yq^2+δq+e.

Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$\Pi= \alpha q - \beta q^2 - (yq^2 + \delta q + e)$

Παραγωγίζουμε ως προς την ποσότητα και έχουμε:

$$\frac{d\pi}{dq} = a - 2\beta q - (2\gamma q + \delta) = 0$$

Θέτουμε την πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν και λύνοντας ως προς την ποσότητα έχουμε:

$$q = \frac{\alpha - \delta}{2(\beta + \gamma)}$$

Η τιμή που αντιστοιχεί στην ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι:

Εδώ κανείς αναρωτιέται αν πράγματι αυτός ο συνδυασμός τιμής και ποσότητας μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί το κέρδος. Το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί με τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης των κερδών που είναι:

$$\pi''=-2\beta-2\gamma=-2(\beta+\gamma)<0$$

Άρα η συνθήκη δεύτερης τάξης ικανοποιείται[5].

3.5 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΡΙΣΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Οι αποφάσεις των επιχειρηματιών για παραγγελίες αγαθών εμπεριέχουν δυο αλληλένδετα είδη κόστους, της αποθήκευσης και της μεταφοράς. Αν η παραγγελία είναι μεγάλη, το κόστος μεταφοράς αναμένεται να είναι χαμηλό (λιγότερα ταξίδια, έγγραφα, τηλεφωνήματα κλπ.) Αντίθετα, το κόστος αποθήκευσης είναι υψηλό — περισσότερα εμπορεύματα χρειάζονται περισσότερο χώρο, περισσότερη εργασία, σχεδιασμό κλπ. Αν η παραγγελία είναι μικρή, το κόστος αποθήκευσης είναι χαμηλό, ενώ το κόστος μεταφοράς είναι πολύ υψηλό. Ο επιχειρηματίας λοιπόν ενδιαφέρεται να προσδιορίσει το μέγεθος της παραγγελίας που του ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Το υπόδειγμα που θα αναπτύξουμε στηρίζεται στις ακόλουθες απλοποιητικές υποθέσεις:

1. Η πώληση (χρήση) του προϊόντος είναι ομοιόμορφη σε όλη τη χρονική περίοδο της ανάλυσης μας.
2. Η τιμή αγοράς του προϊόντος παραμένει αμετάβλητη σε όλη την περίοδο της ανάλυσης.

[5] Μαθηματικά οικονομικής ανάλυσης- μέθοδοι και υποδείγματα Τσουλφιδης Λ., GUTENBERG, 1999, σελ 215

3. Οι παραγγελίες φθάνουν έγκαιρα και δεν υπάρχει φθορά στο προϊόν.

Οι υποθέσεις αυτές συνηγορούν στο ότι δεν υπάρχει λόγος για την επιχείρηση να αποθηκεύει μεγάλες ποσότητες του προϊόντος, για να προφυλαχθεί από την αύξηση της τιμής του προϊόντος, ούτε πάλι να παραγγέλλει μικρές ποσότητες, επειδή περιμένει πτώση της τιμής ή υπάρχει φθορά κλπ. Στην ανάλυση μας χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

x = ο αριθμός μονάδων που περιλαμβάνει η κάθε παραγγελία

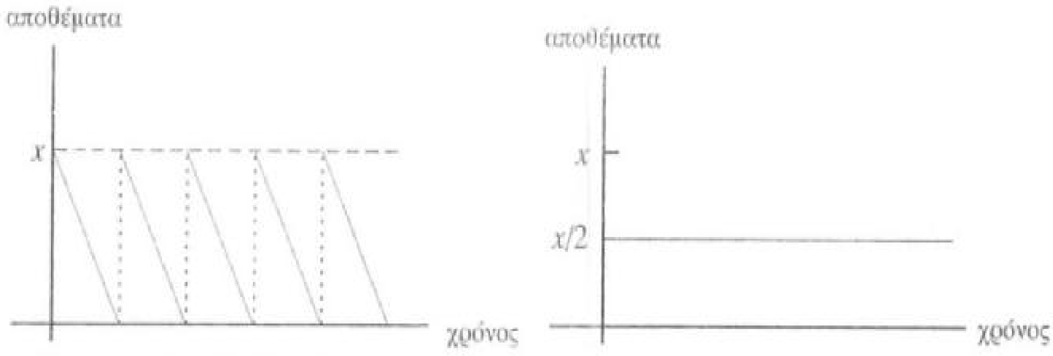
N = ο συνολικός αριθμός των μονάδων που παραγγέλλονται στη διάρκεια του έτους

N/x = ο αριθμός των παραγγελιών

α = η τιμή αγοράς του προϊόντος

b = κόστος παραγγελίας

k - ετήσιο κόστος ανά μονάδα αποθηκευμένου προϊόντος Υποθέτουμε ότι κάθε παραγγελία φθάνει, όταν τα αποθέματα είναι μηδέν, και η κατανάλωση της γίνεται με έναν ομοιόμορφο (γραμμικό) τρόπο. Έτσι, τα αποθέματα μειώνονται με σταθερό ρυθμό και αναπληρώνονται με την καινούργια παραγγελία. Η περίπτωση αυτή δείχνεται γραφικά στο Σχήμα 6.



Πραγματική μεταβολή αποθεμάτων (α)

Σχήμα 6

σταθερά αποθέματα x/2 μονάδων (β)

Το μέγεθος των αποθεμάτων που μένουν στην αποθήκη κάθε χρόνο κατά μέσον όρο είναι x/2 (Σχήμα 6β). Αυτός είναι ένας ισχυρισμός που στηρίζεται στη διαίσθηση παρά στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη που απαιτεί ολοκληρωτικό λογισμό. Επομένως, για τις τωρινές ανάγκες μας το δεχόμαστε ως γεγονός. Το συνολικό κόστος αποθήκευσης είναι kx/2 και το συνολικό κόστος προμήθειας C(x) είναι:

$$C(x)= \alpha N +b(N/x)+k(x/2)$$

Για την ελαχιστοποίηση του C(x) οι συνθήκες πρώτης τάξης απαιτούν:

$$C(x) = - bN/x^2 +k/2 =0$$

επομένως, $-2bN +kx^2 =0$

$$x= \pm\sqrt{\frac{2bN}{k}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών υπολογιστών πουλάει 600 Η/Υ το χρόνο, για τους οποίους έχει μια ομοιόμορφα κατανεμημένη ζήτηση. Το κατάστημα προμηθεύεται τους Η/Υ και χρεώνεται για καθέναν 500 ν.μ. Το κόστος παραγγελίας για την επιχείρηση είναι 150 ν.μ. Το κόστος αποθήκευσης για κάθε Η/Υ είναι 50 ν.μ. Πόσους Η/Υ πρέπει να παραγγέλλει ο διευθυντής της επιχείρησης κάθε φορά, έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό του κόστος;

Λύση

Έχουμε τα εξής δεδομένα:

N=600, α=500, b= 150, k=50. Αντικαθιστώντας στον τύπο του συνολικού κόστους έχουμε:

$$C(x) = \alpha N + b(N/ x) + k(x/2)$$ έχουμε

$$C(x) = (500)(600) + (150)(600/ x) + 50(x / 2)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για ελαχιστοποίηση δίνουν:

$$C'(x) = - \text{———} + 25 = 0 \quad ή \quad x = \overline{} = 19$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$C''(x) = \text{———} > 0$$

Άρα για x=19 έχουμε ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους που στην προκειμένη περίπτωση είναι

$C(x) = 300000+4736{,}8+475 \approx 305212$ ν.μ

3.6 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΖΗΤΗΣΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΣΥΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΥΣ ΣΚΟΠΟΥΣ

Κάθε καταναλωτής χρειάζεται ένα μέρος από το εισόδημα του σε μετρητά για να μπορεί να αντεπεξέλθει στις καθημερινές του συναλλακτικές ανάγκες. Κρατώντας όμως χρήματα για τις συναλλακτικές του ανάγκες, ο καταναλωτής θυσιάζει τον τόκο που θα εισέπραττε αν τα κατέθετε σε τοκοφόρο τραπεζικό λογαριασμό ή τα επένδυε σε τίτλους (ομολογίες, μετοχές, αμοιβαία κεφάλαια κλπ.). Αντίθετα, αν ο καταναλωτής τοποθετήσει όλα τα χρήματα του σε καταθέσεις, κερδίζει βέβαιους τόκους, αλλά υφίσταται το μεγάλο κόστος των συχνών αναλήψεων (χάσιμο χρόνου, δυσκαμψία στις αγορές του κλπ.) Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι ο προσδιορισμός της άριστης κατανομής του εισοδήματος σε καταθέσεις και μετρητά.

Ας υποθέσουμε, για τη διευκόλυνση της παρουσίασης, ότι ένας καταναλωτής έχει μηνιαίο εισόδημα 210 νομισματικών μονάδων (ν.μ.) που κατατίθεται από την υπηρεσία του κατευθείαν στον τραπεζικό του λογαριασμό. Τα μηνιαία έξοδα του καταναλωτή είναι ίσα με το μηνιαίο εισόδημα του. Ο τρόπος ξοδέματος του εισοδήματος είναι ομοιόμορφος, δηλαδή ο καταναλωτής, ξοδεύει κάθε μέρα 7ν.μ. Το ποσοστό των διαθέσιμων χρημάτων που επιθυμεί ο κάθε καταναλωτής, εξαρτάται από τη στάθμιση δύο παραγόντων:

(1) από την άνεση κινήσεων που του προσφέρει το διαθέσιμο χρήμα και

(2) από τους τόκους που θυσιάζει για να έχει αυτή την άνεση και ευχέρεια στις κινήσεις του. Στην ανάλυση μας χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

Y =το μηνιαίο εισόδημα που κατατίθεται σε έναν έντοκο λογαριασμό κατάθεσης

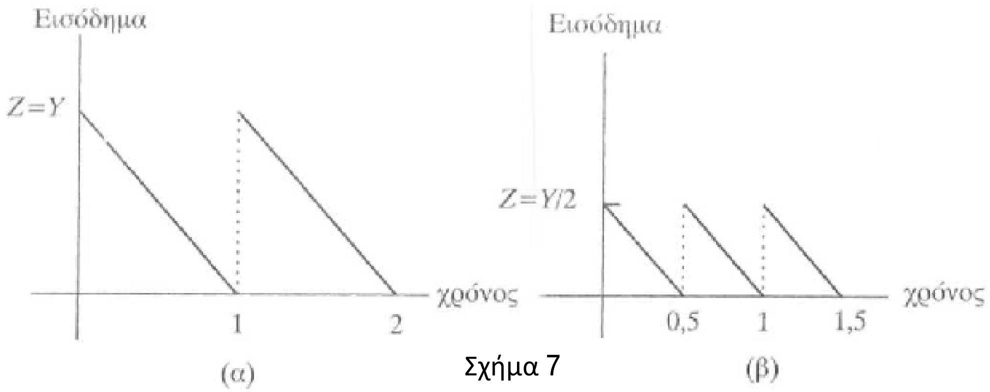
r = το επιτόκιο κατάθεσης.

α = το κόστος μετατροπής μιας κατάθεσης σε διαθέσιμο χρήμα.

Z = το ποσό χρημάτων που αποσύρει ο καταναλωτής.

n = ο αριθμός συναλλαγών (αναλήψεων) n = Y/Z.

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζονται δύο τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος. Στο πρώτο (Σχήμα 7α) ο καταναλωτής αποσύρει στην αρχή του μήνα όλο το ποσό που έχει κατατεθεί στο όνομα του και το ξοδεύει ομοιόμορφα μέχρι την τελευταία μέρα του μήνα. Τον επόμενο μήνα ο καταναλωτής αποσύρει πάλι όλο το ποσό και το ξοδεύει με τον ίδιο τρόπο κ.ο.κ



Σχήμα 7

Στο Σχήμα 7β ο καταναλωτής στην αρχή του μήνα αποσύρει τα μισά χρήματα του (έτσι ώστε τα άλλα μισά να κερδίζουν τόκο) και τα ξοδεύει ομοιόμορφα στις επόμενες 15 μέρες. Το πρωί της δέκατης έκτης μέρας ο καταναλωτής αποσύρει το υπόλοιπο ποσό και το ξοδεύει με το γνωστό τρόπο.

Στην πρώτη περίπτωση ο καταναλωτής θυσιάζει όλο το ποσό του τόκου. Στη δεύτερη περίπτωση τίθεται το ερώτημα ποιο είναι το ποσό του τόκου που θυσιάζεται ετήσια κατά μέσον όρο. Η απάντηση εξαρτάται από το μέσο ετήσιο διαθέσιμο εισόδημα του καταναλωτή, το οποίο υπολογίζουμε (διαισθητικά) ότι είναι Y/2, λόγω της υπόθεσης ότι ο καταναλωτής ξοδεύει τα χρήματα του ομοιόμορφα. Στο Σχήμα 7β ο καταναλωτής κατά μέσον όρο έχει στη διάθεση του ρευστό ίσο με Y/4=Z/2. Επομένως, το κόστος σε χαμένους τόκους ισούται με το γινόμενο του επιτοκίου επί την ποσότητα του χρήματος που έχει στη διάθεση του ο καταναλωτής στη διάρκεια του μήνα. Δηλαδή:

— —

Επομένως, το συνολικό κόστος για τον καταναλωτή είναι:

C(n)=(a)(n)+(rY)/(2n)

Είναι φανερό ότι το κόστος συναλλαγών είναι ευθέως ανάλογο με τον αριθμό των συναλλαγών (αναλήψεων), ενώ το εισόδημα από τόκους συνδέεται αντίστροφα με τον αριθμό των αναλήψεων. Περισσότερες αναλήψεις σημαίνουν λιγότερο εισόδημα από τόκους.

Επομένως, θα πρέπει να υπάρχει ένας αριθμός συναλλαγών (αναλήψεων) που να ελαχιστοποιεί το κόστος ζήτησης χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς. Για την εύρεση αυτού του άριστου αριθμού συναλλαγών παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κόστους ως προς n και τη θέτουμε ίση με το μηδέν. Το n που υπολογίζουμε πρέπει να ελαχιστοποιεί το κόστος, εφόσον οι συνθήκες δεύτερης τάξης ισχύουν. Έτσι έχουμε:

$$C'(n) = \alpha - \frac{rY}{2n^2} = 0$$

Λύνουμε ως προς n και παίρνουμε:

$$N = \sqrt{\frac{rY}{2a}}$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται. Γνωρίζοντας τον άριστο α- ριθμό των αναλήψεων για την ελαχιστοποίηση του κόστους κατοχής χρήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τα χρήματα που ο καταναλωτής κατά μέσο όρο έχει στη διάθεση του (M). Άρα έχουμε:

$$M = \frac{Z}{2} = \frac{Y}{2n}$$

Αντικαθιστούμε το η με το ίσο του και μετά από πράξεις καταλήγουμε:

$$M = \sqrt{\frac{aY}{2r}}$$

που αντιπροσωπεύει τη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς. Παρατηρούμε ότι η ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς αυξάνει αναλογικά με το κόστος των συναλλαγών και το εισόδημα, ενώ μειώνεται με το επιτόκιο.

3.7 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ BAUMOL

Η αύξηση του τομέα παροχής υπηρεσιών σε βάρος των παραγωγικών τομέων της οικονομίας έχει πάρει ανησυχητικές διαστάσεις. Ο William Baumol (1967) ανέπτυξε ένα υπόδειγμα και έθεσε το πρόβλημα με μαθηματικούς όρους. Το υπόδειγμα του, που πάντα παραμένει επίκαιρο, στηρίζεται στις εξής υποθέσεις:

1. Η οικονομία χωρίζεται σε δύο τομείς. Πρώτον, το μη προοδευτικό τομέα (υπηρεσίες: δημόσιες και ιδιωτικές), όπου η παραγωγικότητα της εργασίας παραμένει σταθερή, και δεύτερον, τον προοδευτικό τομέα (βιομηχανία, γεωργία, ορυχεία), όπου η παραγωγικότητα αυξάνεται διαχρονικά.
2. Ο μοναδικός παραγωγικός συντελεστής που συμπεριλαμβάνεται στο υπόδειγμα είναι η εργασία.

3. Ο ονομαστικός μισθός καθορίζεται από την παραγωγικότητα της εργασίας στον προοδευτικό τομέα και είναι ίδιος και στους δύο τομείς.

4. Οι αποδόσεις στην κλίμακα είναι σταθερές και στους δύο τομείς. Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθοι:

$\mathbf{Y_{\iota\iota}}$ = εκροή του τομέα **i**

$\mathbf{W_t}$ = ονομαστικός μισθός

$\mathbf{L_{it}}$ - αριθμός εργαζομένων στον τομέα **i**

***α,* b** και **r** = σταθερές μεγαλύτερες της μονάδας

t = χρόνος

ι = τομέας, ι=1,2

Οι συναρτήσεις του υποδείγματος είναι:

Εκροή του μη προοδευτικού τομέα: $Y_{1t} = \boldsymbol{aL}_{1t}$

Εκροή (προϊόν) του προοδευτικού τομέα: $\mathbf{Y_2\,t = bL_{2t}\,e^{\,rt}}$

Η διαχρονική εξέλιξη του μισθού: $w_t = \mathbf{w_e}^{\mathbf{r\,t}}$

Με αυτές τις παραδοχές ο Baumol οδηγείται σε μια σειρά από ανησυχητικά συμπεράσματα, ορισμένα από τα οποία είναι:

1. Το μέσο κόστος του μη προοδευτικού τομέα αυξάνει απεριόριστα, ενώ το μέσο κόστος του προοδευτικού τομέα παραμένει σταθερό.

2. Οι εκροές του μη προοδευτικού τομέα που χαρακτηρίζονται από ανελαστικότητα ζήτησης και υψηλή εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης τείνουν να ελαττωθούν και μελλοντικά να εξαφανιστούν.

3. Αν ο λόγος των εκροών των δυο τομέων διατηρείται σταθερός, τότε διαρκώς περισσότερη εργασία πρέπει να μεταφέρεται στο μη προοδευτικό τομέα, ενώ η ποσότητα εργασίας στον προοδευτικό τομέα ελαττώνεται και το όριο της προσεγγίζει το μηδέν.

4. Κάθε προσπάθεια επίτευξης ισορροπίας — είτε λόγω της ανελαστικότητας ζήτησης είτε λόγω κρατικής παρέμβασης μέσω επιδοτήσεων— σε συνθήκες ανισόρροπης αύξησης της παραγωγικότητας των δύο τομέων οδηγεί σε μείωση του ρυθμού αύξησης του προϊόντος της οικονομίας[6].

[6]Σύγχρονα οικονομικά μαθηματικά, Κιόχος Π. Κιόχος Α. INTERBOOKS ,1999, σελ 85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΟΛΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

4.1 ΟΛΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

Το διαφορικό μιας συνάρτησης y=f(x) γράφεται:

dy=f΄(x)dx

Όταν έχουμε συναρτήσεις με δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε το διαφορικό τέτοιων συναρτήσεων καλείται ολικό διαφορικό (total differential). Από πρακτική σκοπιά το ολικό διαφορικό δίνει μια γραμμική προσέγγιση μιας μεταβολής στην εξαρτημένη μεταβλητή, που προέρχεται από μια απειροελάχιστα μικρή μεταβολή στις ανεξάρτητες μεταβλητές. Έτσι, λοιπόν, αν θεωρήσουμε τη z=f(x,y) μια συνάρτηση παραγωγής, τότε μια μικρή μεταβολή στους συντελεστές της παραγωγής χ και y οδηγεί σε μια μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν z. Γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι αν η x μεταβληθεί κατά Δx, τότε οδηγεί σε μεταβολή της z κατά (dz/dx)Δx, ενώ ταυτόχρονα η μεταβολή στον άλλο παραγωγικό συντελεστή οδηγεί σε μια μεταβολή του παραγόμενου προϊόντος κατά (dz/dy)Δy. Έτσι, λοιπόν, λέμε ότι η συνολική μεταβολή στο z που προέρχεται από μια μικρή μεταβολή στα x και y είναι:

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\,\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y$$

Αν τα Δx και Δy είναι πολύ μικρά, τότε η παραπάνω σχέση ξαναγράφεται ως:

$dz{=}\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\text{ ή } dz = f(x)dx + f(y)dy$

όπου το dz είναι το ολικό διαφορικό και μετρά το άθροισμα των μεταβολών που προέρχονται από μεταβολές στις μεταβλητές x και y. Με άλλα λόγια, το ολικό διαφορικό dz μας δίνει προσεγγιστικά τη διαφορά μεταξύ των τιμών της συνάρτησης στα σημεία P(x,y) και P'(x+Δx,y+Δy)

Επομένως, για πολύ μικρές μεταβολές *στις* ανεξάρτητες μεταβλητές θα ισχύει, $dz \approx \Delta z$, όπου *το* dz είναι η προσέγγιση της πραγματικής μεταβολής Δz. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε, ότι εδώ υποθέτουμε πως οι μεταβλητές x και y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι η καθεμία απ' αυτές επηρεάζει ξεχωριστά τη z.

4.2 ΟΛΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Τα διαφορικά ανώτερης τάξης μάς χρησιμεύουν για την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση συναρτήσεων. Από τα διαφορικά δεύτερης τάξης μονομεταβλητών συναρτήσεων π.χ. της y=f(x), είχαμε:

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

ενώ το διαφορικό νιοστής τάξης είναι: $d^{(n)}y=f^{(n)}(x)dx^n$

Έστω τώρα η διμεταβλητή συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση z=f(x,y), το διαφορικό πρώτης τάξης μας δίνει τη μεταβολή στη z για δεδομένες τιμές στα dx και dy, που οι μεταβολές αυτές μετρούνται από κάποιο συγκεκριμένο σημείο (x_0, y_0) στο πεδίο τιμών της συνάρτησης z.

Αν τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε το διαφορικό β' τάξης, βρίσκουμε το διαφορικό της dz, δηλαδή $d(dz)=d^2z$. Άρα, λοιπόν, παραγωγίζουμε την dz, αλλά για να την παραγωγίσουμε πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε ποιων μεταβλητών συνάρτηση είναι η dz. Στον τύπο του διαφορικού πρώτης τάξης:

$dz=f_x dx+f_y dy$ τα dx και dy είναι δεδομένες αυθαίρετες μεταβολές *των* μεταβλητών x: και y και στην παραγώγιση πρέπει να θεωρηθούν σταθερές. Επομένως το dz μεταβάλλεται με τις f_x και , f_y των οποίων οι μερικές παράγωγοι είναι συναρτήσεις των χ και y όπως ακριβώς η συνάρτηση z. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής ως προς x ενώ το y είναι σταθερό, με μια ειδική παράγωγο που τη συμβολίζουμε με f_a ή d^2z/dx^2.

4.3 ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Μέχρι τώρα επικεντρώσαμε την προσοχή μας στην περίπτωση που οι μεταβλητές χ και y στη συνάρτηση $z=f(x,y)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η προσοχή μας τώρα στρέφεται στην περίπτωση που οι x και y είναι εξαρτημένες από μια τρίτη μεταβλητή. *Π.χ.* x=g(t) *και* $y=h(t)$. Τέτοιες συναρτήσεις συναντώνται πολύ συχνά στα οικονομικά π.χ. η $z=f(x,y)$παριστάνει μια συνάρτηση παραγωγής όπου οι συντελεστές παραγωγής εργασία και κεφάλαιο μεταβάλλονται στη διάρκεια του χρόνου. Έτσι, αν μας ζητείτε να βρούμε τη μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν διαχρονικά, δηλαδή, dz/dt, *τότε* θα πρέπει να εκτιμήσουμε:

Τη μεταβολή στη z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t η οποία μεταβιβάζεται στη z μέσω της x,

Τη μεταβολή της z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t, η οποία μεταβιβάζεται στη z μέσω της y[7]

[7] Μαθηματικά για οικονομολόγους Οικονομικά μαθηματικά, Αλεξανδρόπουλος, Α., Σύγχρονη Εκδοτικη,2002, σελ 170

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε εφαρμογές της μερικής παραγώγισης, του ολικού διαφορικού και της ολικής παραγώγου σε προβλήματα οικονομικής ανάλυσης. Αρχίζουμε με τη ζήτηση ενός αγαθού, η οποία θεωρείται συνάρτηση όχι μόνο της τιμής αλλά των τιμών των σχετιζόμενων αγαθών, το εισόδημα του καταναλωτή κλπ. προκειμένου να αντλήσουμε μια σειρά από οριακές συναρτήσεις που αποτελούν τη βάση για την εξαγωγή διαφόρων ελαστικοτήτων. Συνεχίζουμε με τη συνάρτηση μικτού κόστους παραγωγής και των συναφών ελαστικοτήτων. Το θεώρημα του Euler και η εφαρμογή του στη θεωρία διανομής του εισοδήματος. Ακόμη συζητάμε τις ισοϋψείς καμπύλες και τις οικονομικές τους εφαρμογές, την έννοια της ελαστικότητας υποκατάστασης και τέλος αναφερόμαστε στα συνηθισμένα μακροοικονομικά υποδείγματα προσδιορισμού του εισοδήματος ισορροπίας.

5.1 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Η ζήτηση ενός αγαθού είναι συνάρτηση της τιμής του, όπως επίσης της τιμής των σχετιζόμενων αγαθών, του διαθέσιμου εισοδήματος κλπ. Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση, ας υποθέσουμε ότι η ζήτηση του αγαθού x, (q_x) εξαρτάται από την τιμή του (p_χ), όπως επίσης και από την τιμή του αγαθού, *(p).* Αν μια τέτοια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα δύο αγαθά, τότε οι συναρτήσεις ζήτησης των αγαθών x *και y* εξαρτώνται από τις τιμές των δύο αγαθών. Επομένως γράφουμε:

$q_x = f(P_x, P_y)$ η ζήτηση για το αγαθό x

$q_Y = g(p_x, p_y)$, η ζήτηση για το αγαθό y

Από τις δύο συναρτήσεις ορίζουμε τέσσερις μερικές παραγώγους:

$\partial q_x / \partial p_x$ = η οριακή ζήτηση για το αγαθό *χ* ως προς την τιμή p_x

$\partial q_\chi / \partial p_Y$ = η οριακή ζήτηση για το αγαθό x ως προς την τιμή p_y

$\partial q_Y / \partial p_\chi$ = η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_x

$\partial q_y / \partial p_y$, = η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_y.

Από το «νόμο της ζήτησης» γνωρίζουμε ότι, με δεδομένη την τιμή του αγαθού *y*, αν η τιμή του αγαθού χ αυξάνεται, τότε μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα του. Επομένως, ισχύει $\partial q_x / \partial q_y < 0$ και $\partial q_Y / \partial q_x < 0$. Για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους, ωστόσο, δεν μπορούμε να πούμε τίποτε εκ των προτέρων, το πρόσημο τους μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Αν

$\partial q_x / \partial q_Y > 0$ και

$\partial q_Y / \partial q_x > 0$

τότε λέμε ότι τα δύο αγαθά είναι ***υποκατάστατα*** (substitute goods). Στην περίπτωση αυτή μια αύξηση της τιμής του αγαθού δημιουργεί μια αύξηση της ζήτησης του αγαθού x, υποθέτοντας βέβαια ότι η τιμή του x δε μεταβάλλεται. Ομοίως, μια αύξηση της τιμής του x οδηγεί σε μια αύξηση της ζήτησης του *y όταν* η τιμή του*y* είναι δεδομένη.

Αν τώρα λάβουμε αρνητικές μερικές παραγώγους:

$\partial q_x / \partial q_Y < 0$ και

$\partial q_Y / \partial q_x < 0$

τότε λέμε ότι τα αγαθά x *και y* είναι ***συμπληρωματικά*** (complementary goods). Στην περίπτωση αυτή μια αύξηση της τιμής του *y* οδηγεί σε πτώση της ζήτησης του αγαθού x με δεδομένη την τιμή του x. Ομοίως, μια αύξηση της τιμής του αγαθού x οδηγεί σε μια πτώση της ζήτησης του αγαθού y, εφόσον η τιμή του κρατείται σταθερή.

Για την καλύτερη εμπέδωση της παραπάνω συζήτησης υποθέτουμε την ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης του αγαθού x που παράγει μια επιχείρησης

$$q_x = f(P_x > Py > P_w, m) = 10P_X^{-2} P_y P_W$$

Όπου q_x = η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού x

P_x = η τιμή του αγαθού x

P_Y = η τιμή του υποκατάστατου αγαθού, *y*

P_W = η τιμή του συμπληρωματικού αγαθού, *w*

m = το εισόδημα των καταναλωτών

Η επίδραση της τιμής του αγαθού x στη ζήτηση του, υπολογίζεται με τη μερική παράγωγο της ζητούμενης ποσότητας ως προς την τιμή P_x.

5.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΙΚΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Υποθέτουμε μια επιχείρηση που παράγει τα αγαθά x και y. Το συνολικό κόστος c αυτών των μονάδων είναι συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας των x και y καλείται συνάρτηση μικτού κόστους (joint cost function). Αν γράψουμε μια τέτοια συνάρτηση ως:

$$c=f(x,y)$$

τότε το dc/dx καλείται μερικό οριακό κόστος ως προς το x (partial marginal cost with respect to x) και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το x, όταν το y κρατείται σταθερό. Ταυτόχρονα, το dc/dy είναι η μερική οριακή παράγωγος ως προς το y και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το y όταν το x κρατείται σταθερό.

Αν π.χ. βρούμε ότι το dc/dy=30 αυτό σημαίνει ότι το κόστος παραγωγής μιας επιπλέον μονάδας του x, με δεδομένο το επίπεδο παραγωγής του , είναι 30 ν.μ. Από εδώ μπορούμε να γενικεύσουμε για την περίπτωση που έχουμε n μεταβλητές, τότε θα υπάρχουν n μερικές οριακές συναρτήσεις κόστους.

5.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Στη συνηθισμένη μικροοικονομική ανάλυση η παραγωγή ενός προϊόντος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως το κεφάλαιο, η εργασία, το έδαφος κλπ. Η ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής Q=f(K, L) δίνει τη (μέγιστη) συνολική παραγωγή από την απασχόληση δύο μόνο παραγωγικών συντελεστών, του κεφαλαίου και της εργασίας. Η dQ/dK συμβολίζει την οριακή παραγωγικότητα του παραγόμενου προϊόντος Q ως προς το συντελεστή κεφάλαιο, όταν ο συντελεστής εργασία κρατείται σταθερός. Ομοίως, με dQ/dL συμβολίζουμε την οριακή παραγωγικότητα ως προς το συντελεστή εργασία, όταν ο συντελεστής κεφάλαιο κρατείται σταθερός.

Έστω τώρα η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas $Q = AK^{\alpha}L^{b}$, όπου κατά τα γνωστά A>0 και $0<\alpha < 1, 0<b< 1$. Το πρώτο χαρακτηριστικό της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas, που την έκανε τόσο δημοφιλή στις οικονομικές μελέτες, είναι ότι οι μερικές παράγωγοι ως προς τους παραγωγικούς συντελεστές K και L είναι θετικές. Τις πρώτες παραγώγους τις λέμε οριακά προϊόντα του κεφαλαίου (MP_K) και της εργασίας (MP_L) αντίστοιχα. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$MP_K= \frac{dQ}{dK} = aAK^{a-1}L^{b} = a\frac{Q}{K} \geq 0 \; και \; MP_L = \frac{dQ}{dL} = b\,AK^{A}L^{b-1} = b\frac{Q}{L} > 0$$

Οι θετικές οριακές παράγωγοι σημαίνουν ότι το παραγόμενο προϊόν αυξάνεται (ή μειώνεται), όταν κάποιος από τους παραγωγικούς συντελεστές αυξάνεται (ή μειώνεται).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της συνάρτησης παραγωγής είναι ο «νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας» των παραγωγικών συντελεστών. Ο «νόμος» αυτός υποδηλώνει ότι αν η ποσότητα ενός παραγωγικού συντελεστή αυξάνεται, ενώ οι ποσότητες των άλλων συντελεστών παραμένουν σταθερές, τότε το οριακό προϊόν του (αυξανόμενου) συντελεστή προοδευτικά μειώνεται. Σε όρους μερικών παραγώγων αυτό σημαίνει ότι η δεύτερη μερική παράγωγος κάθε παραγωγικού συντελεστή πρέπει να είναι αρνητική.

Επειδή, όρος στην παρένθεση είναι αρνητικός ($α-1<0$), συνεπάγεται ότι η δεύτερη μερική παράγωγος είναι αρνητική και άρα ισχύει ο «νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας».

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης για ένα συγκεκριμένο αγαθό δείχνει την μέγιστη ποσότητα του αγαθού που μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας τους εναλλακτικούς συνδυασμούς κεφαλαίου (K) και εργασίας (L).

5.4 ΤΟ ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την επίδραση των μεταβολών των ανεξάρτητων μεταβλητών μεμονωμένα και ανεξάρτητα πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή. Το εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι: Πώς επηρεάζεται η εξαρτημένη μεταβλητή, όταν ορισμένες ή όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές υπόκεινται σε μεταβολές; Έχοντας υπόψη το παράδειγμα με τη συνάρτηση ζήτησης

$q_x=p_x(p_x, p_y, p_w, m) = 10\, p_x{}^{2}\, p_y\, p_w{}^{-0.5}\, m^2$

το ερώτημα συγκεκριμενοποιείται ως εξής: Πώς μεταβάλλεται η ζήτηση του αγαθού χ, όταν η τιμή p_χ, όπως επίσης και οι τιμές των σχετιζόμενων αγαθών p_y και p_w μαζί με το εισόδημα μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Έτσι παίρνουμε τη συνολική μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας που είναι:

$$dq_{x=}\frac{dp_y}{dp_x}dp_x+\frac{dp_x}{dq_y}dp_y+\frac{dq_x}{dp_w}dp_w+\frac{dp_x}{dm}dm$$

Αν αντικαταστήσουμε, έχουμε:

$dq_x=(-20p_x{}^{-3}\, p_y\, p_w{}^{-0.5}m^2)dp_x+(10p_x{}^{-2}p_w{}^{-0.5}\, m^2)dp_y$

$-(5p_x{}^{-2}\, p_y\, p_w{}^{-1.5}\, m^2\,)dp^w+20p_x{}^{-2}p_yp_w{}^{-0.5}\, m)dm$

Αν πολλαπλασιάσουμε καθεμιά από τις μερικές παραγώγους επί το λόγο της ανεξάρτητης μεταβλητής προς τον εαυτό της, δηλαδή την πρώτη μερική παράγωγο επί $p_\chi/p_\chi = 1$, τη δεύτερη μερική παράγωγο με

p_Y/p_γ κ.ο.κ., καταλήγουμε ότι καθένας από τους όρους του ολικού διαφορικού μετατρέπεται σ' ένα γινόμενο σταθεράς επί το λόγο του $q_x = 10p_x^{-2}\rho_y\, p_w^{-0.5}\, m^2$ προς την ανεξάρτητη μεταβλητή που εντοπίζεται και τη μερική παράγωγο.

5.5 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Μια από τις οικονομικές εφαρμογές του ολικού διαφορικού μπορούμε να τη συναντήσουμε στη συνάρτηση παραγωγής. Έστω λοιπόν η ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής:

$Q=F(K,L)$

Αν υποθέσουμε ότι οι συντελεστές παραγωγής μεταβάλλονται ταυτόχρονα, τότε τη συνολική μεταβολή του παραγόμενου προϊόντος μπορούμε να την εκτιμήσουμε μέσω του ολικού διαφορικού, έτσι έχουμε:

Αν διαιρέσουμε με τη συνολική παραγωγή Q λαμβάνουμε τη συνολική ποσοστιαία μεταβολή του παραγόμενου προϊόντος, έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την ποσοστιαία μεταβολή της συνολικής εκροής, δηλαδή ***dQ/Q,*** που κατανέμεται στους παραγωγικούς συντελεστές. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας και ταυτόχρονα διαιρώντας κάθε παραγωγικό συντελεστή με τον εαυτό του έχουμε:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dQ}{dK}\frac{K}{Q}\frac{dK}{K} + \frac{dQ}{dL}\frac{L}{Q}\frac{dL}{L}$$

επειδή $dQ/dK = MP_K$ και $dQ/dL = MP_L$ είναι οι οριακές παραγωγικότητες του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα, *ενώ*

K/Q = 1/AP$_K$ *και L/Q=1/AP*$_L$ είναι η μέση παραγωγικότητα του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα. Επομένως η αρχική σχέση γράφεται:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{MP_K\,dK}{AP_K K} + \frac{MP_L}{AP_L}\frac{dL}{L}$$

Γνωρίζουμε ότι η ελαστικότητα μιας συνάρτησης μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος της οριακής μεταβολής προς τη μέση μεταβολή. Στην προκειμένη περίπτωση ο λόγος της οριακής παραγωγικότητας ενός συντελεστή προς το μέσο προϊόν μας δίνει την ελαστικότητα παραγωγής (output elasticity) του συντελεστή. Πιο συγκεκριμένα, η ελαστικότητα παραγωγής του κεφαλαίου (Capital's output elasticity) που τη συμβολίζουμε με E_K ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή στην παραγωγή που προξενείτε από τη μεταβολή της ποσότητας του κεφαλαίου κατά ένα τοις εκατό, όταν οι υπόλοιποι παραγωγικοί συντελεστές παραμένουν σταθεροί. Η ελαστικότητα παραγωγής του συντελεστή εργασία (Labor's output elasticity) που τη συμβολίζουμε *με* E_L ορίζεται ανάλογα. Συνεπώς η ποσοστιαία μεταβολή της παραγωγής ***(dQ/Q)*** που προξενείτε από πολύ μικρές μεταβολές στους παραγωγικούς συντελεστές, ισούται με το σταθμισμένο άθροισμα (weighted sum) των ποσοστιαίων μεταβολών της εργασίας και του κεφαλαίου. Τα σταθμά είναι οι ελαστικότητες παραγωγής του κεφαλαίου (E_K) και της εργασίας (E_L) αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dQ}{Q} = E^K\frac{dK}{K} + E^L\frac{dL}{L}$$

Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι η επιχείρηση αυξάνει όλες τις εισροές κατά το ίδιο ποσοστό, δηλαδή

$$\frac{dK}{K} = \frac{dL}{L} = \lambda$$

$$\frac{\frac{dQ}{Q}}{\lambda} = E^k + E^L$$

Η ποσοστιαία μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν, διαιρούμενο με μια ισόποση ποσοστιαία μεταβολή σε όλες τις εισροές, ισούται με το άθροισμα των ελαστικοτήτων εκροής. Είναι γνωστό από τη μικροοικονομική θεωρία, ότι οι αποδόσεις στην κλίμακα παραγωγής ορίζονται ως ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής στο παραγόμενο προϊόν ως προς την ποσοστιαία μεταβολή στις εισροές. Έχουμε δείξει ότι οι αποδόσεις στην κλίμακα μιας συνάρτησης παραγωγής είναι ίσες με το άθροισμα των ελαστικοτήτων εκροής αυτής της συνάρτησης παραγωγής.

5.6 ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Η θεωρία της οριακής χρησιμότητας (marginal utility theory) αποτελεί τη βάση της νεοκλασικής θεωρίας ζήτησης. Σύμφωνα μ' αυτήν τη θεωρία οι καμπύλες ζήτησης έχουν αρνητική κλίση μια ιδιότητα που προκύπτει από δυο βασικές υποθέσεις: πρώτον τη φθίνουσα οριακή χρησιμότητα και δεύτερο την ορθολογική συμπεριφορά του καταναλωτή. Υποθέτουμε ότι σε γενικές γραμμές ο καταναλωτής αναμένεται να καταναλώσει μια σειρά από αγαθά και υπηρεσίες που του αυξάνουν τη συνολική χρησιμότητα (total utility). Για τη διευκόλυνση της παρουσίασης υποθέτουμε δύο αγαθά x και y, που ο τυπικός καταναλωτής ξοδεύει όλο του το εισόδημα. Η συνάρτηση συνολικής χρησιμότητας γράφεται:

u=u(x, y)

όπου u είναι η συνολική χρησιμότητα. Αν και η συνολική χρησιμότητα δεν είναι μετρήσιμη η οριακή χρησιμότητα έχει ένα πολύ συγκεκριμένο νόημα που μπορεί να ποσοτικοποιηθεί. Έτσι η οριακή χρησιμότητα ορίζεται ως η μεταβολή που προξενείτε στη συνολική χρησιμότητα από την κατανάλωση μιας επιπλέον μονάδας ενός αγαθού. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την οριακή χρησιμότητα του αγαθού x:

$mu_x = \frac{du}{dx}$ ομοίως για το αγαθό $mu_y \frac{du}{dy}$

Αποδεικνύεται ότι ο καταναλωτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα του, όταν εξισώνει το *λόγο των οριακών χρησιμοτήτων* (ratio of marginal utilities) των δύο αγαθών προς τις σχετικές τιμές των αγαθών, δηλαδή όταν:

$$\frac{\mathrm{mu_x}}{\mathrm{mu_y}} = -\frac{\mathrm{p_x}}{\mathrm{p_y}}$$

Εφοδιασμένοι με αυτά τα εργαλεία μπορούμε να συζητήσουμε ένα φαινομενικά παράδοξο αποτέλεσμα, δηλαδή αν και δεν μπορούμε να μετρήσουμε τη συνολική χρησιμότητα μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχετική οριακή χρησιμότητα που διαπιστώνεται από την επιθυμία του καταναλωτή να υποκαταστήσει ένα αγαθό με κάποιο άλλο. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε το ολικό διαφορικό της u και έχουμε:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = u_x d_x + u_y d_y$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τον *οριακό λόγο υποκατάστασης* (marginal rate of substitution) ως τη μέγιστη ποσότητα του αγαθού x που ο καταναλωτής θα ήθελε να θυσιάσει προκειμένου να αποκτήσει μία επιπλέον μονάδα του αγαθού y. Επειδή η μέγιστη ποσότητα του αγαθού x που ο καταναλωτής θα ήταν διατεθειμένος να θυσιάσει ισούται με την ποσότητα που θα άφηνε τη χρησιμότητα του αμετάβλητη, θέτουμε όπου du=0 και λύνουμε ως προς dy/dx. Άρα έχουμε:

$0=u_x dx+u_y dy$

Τη μέγιστη ποσότητα του αγαθού x που ο καταναλωτής θα ήθελε να θυσιάσει για να αποκτήσει μια ακόμη μονάδα του y ισούται με τον αρνητικό λόγο της οριακής χρησιμότητας τον y προς την οριακή χρησιμότητα του y. Αν γνωρίζουμε το μέγιστο ποσό ενός αγαθού που ο καταναλωτής θα θυσίαζε για την απόκτηση μιας ακόμη μονάδας του άλλου αγαθού έχουμε μια πρώτη εκτίμηση της οριακής χρησιμότητας του δεύτερου αγαθού σε σχέση με την οριακή χρησιμότητα του πρώτου αγαθού[8].

[8] Οικονομικά Μαθηματικά και Αξιολόγηση Επενδύσεων , Μαγείρου Φ. Ε., Γ. Δαρδανος & Κ. Δαρδανος ΟΕ/ GUTENBERG, 1993

5.7 ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ ΚΑΙ ΣΠΑΝΙΑ ΑΓΑΘΑ – ΚΑΜΠΥΛΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΩΝ

Όταν παίρνουμε την απόφαση να επιλέξουμε το αγαθό Α έναντι του Β αυτό σημαίνει ότι το κόστος της επιλογής του Α ισούται με Β, δηλαδή με τη μη δυνατότητα ικανοποίησης από την κατανάλωση του αγαθού Β. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε την επιλογή του Α σαν τη θυσία που συνεπάγεται η μη επιλογή του Β. Η επιλογή του Α θα έχει λογική μόνον εάν τα αναμενόμενα οφέλη από την κατανάλωση του Α είναι υψηλότερα του κόστους απόκτησης του Β. Έτσι, λοιπόν, όταν υπάρχουν σπανιότητα και επιλογή, υπάρχει και *κόστος*. Το συνολικό κόστος που αναλαμβάνουμε από τη λήψη της απόφασης για την επιλογή του Α περιλαμβάνει τη θυσία που κάνουμε από τη μη απόφαση μιας εναλλακτικής επιλογής. Η καλύτερη εναλλακτική, την οποία θυσιάζουμε- δεν επιλέγουμε δηλαδή- ονομάζεται *κόστος ευκαιρίας* (opportunity cost).

Το κόστος ευκαιρίας το συναντάμε σε κάθε απόφαση είτε ατομική είτε επιχειρηματική είτε χρηματοοικονομική είτε, τέλος, στις αποφάσεις της κοινωνίας και εκφράζει την απώλεια της επόμενης καλύτερης επιλογής. Το κόστος ευκαιρίας μας δίνει ένα σαφή τρόπο για να προσδιορίσουμε τη σπανιότητα των αγαθών. Εάν ένα αγαθό βρίσκεται σε επαρκή προσφορά, έτσι ώστε να μπορούμε να αποκτήσουμε οποιαδήποτε ποσότητα επιθυμούμε, τότε το κόστος ευκαιρίας είναι μηδέν. Για παράδειγμα, εάν πάρουμε ένα κουβά άμμο από την έρημο της Σαχάρα, κανένας δεν τη στερείται, αφού υπάρχει πολύ άμμος. Τα αγαθά που έχουν μηδενικό κόστος ευκαιρίας ονομάζονται *ελεύθερα αγαθά*. Τα σπάνια αγαθά έχουν θετικό κόστος ευκαιρίας. Αυτό σημαίνει ότι για να αποκτήσουμε μια επιπλέον μονάδα του σπάνιου αγαθού πρέπει να θυσιάσουμε μια εναλλακτική επιλογή. Έτσι, κάθε επιλογή για την κατανομή των σπάνιων αγαθών συνεπάγεται κόστος ευκαιρίας

5.8 ΚΑΜΠΥΛΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΟ ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ

Η σπανιότητα των αγαθών σημαίνει, λοιπόν, ότι οι οικονομικές μονάδες κάνουν επιλογές μεταξύ των διαφόρων εναλλακτικών. Αυτές οι επιλογές μπορούν να παρασταθούν από την *καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων*. Έστω για παράδειγμα ότι μια επιχείρηση παράγει δυο αγαθά κάτω από τις υποθέσεις:

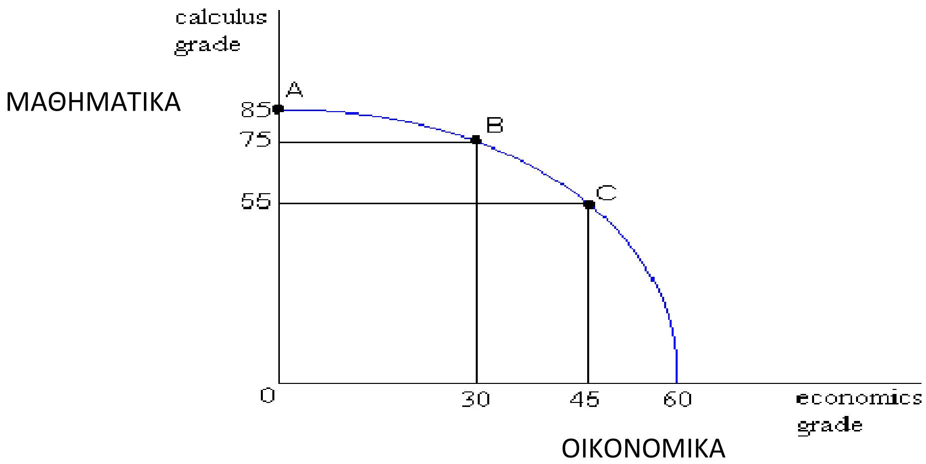
- Η ποσότητα και η ποιότητα των διαθέσιμων πόρων (π.χ. των συντελεστών παραγωγής) είναι σταθερή.
- Η τεχνολογία είναι σταθερή.
- Οι διαθέσιμοι πόροι απασχολούνται πλήρως (δηλαδή, δεν υποαπασχολούνται ούτε είναι άνεργοι, άρα χρησιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι).

Ανεκμετάλλευτη γη, ανενεργές βιομηχανίες, εργάτες που δεν βρίσκουν δουλειά είναι παραδείγματα άνεργων πόρων της κοινωνίας. Υποαπασχόληση των πόρων έχουμε όταν αυτοί δεν χρησιμοποιούνται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Για παράδειγμα, υποαπασχόληση πόρων σε μια κοινωνία έχουμε, όταν οι πτυχιούχοι επιστήμονες απασχολούνται σαν σερβιτόροι, εργάτες ή οδηγοί ταξί, ενώ οι απόφοιτοι λυκείου εργάζονται σαν δικηγόροι, χρηματοοικονομικοί σύμβουλοι ή γιατροί. Εάν ισχύει η 3η υπόθεση, έχουμε *αποτελεσματική παραγωγή* (efficient production.

5.9 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Παρατηρείστε ότι, σε κάθε επιπλέον ώρα μελέτης Μαθηματικών ή Οικονομικής, μικρή μόνο βελτίωση επιτυγχάνεται στη βαθμολογία. Ο λόγος που παρατηρείται αυτό είναι ότι, ο φοιτητής την πρώτη ώρα μελέτης θα την ξοδέψει στη μελέτη των ποιο σημαντικών θεμάτων. Κάθε επιπλέον ώρα μελέτης ξοδεύεται στη μελέτη του επόμενου σημαντικού θέματος από την εξεταστέα ύλη κ.ο.κ. Αυτό είναι ένα απλό παράδειγμα του *Νόμου της φθίνουσας απόδοσης* (law of diminishing returns), σύμφωνα με τον οποίο: η απόδοση θα αυξάνεται σταδιακά με ολοένα μικρότερο ρυθμό όσο προστίθενται επιπλέον μονάδες εισροής (χρόνος, στην περίπτωση του παραδείγματός μας) στην παραγωγική διαδικασία στην οποία οι άλλες εισροές είναι δεδομένες (σταθερές).

Τα σημεία του παραπάνω πίνακα μπορούν να παρασταθούν διαγραμματικά από την *καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων* (production possibilities curve , PPC), όπως αυτή του επόμενου διαγράμματος. Κάθε σημείο επί της καμπύλης παριστάνει τον καλύτερο βαθμό που μπορεί να πάρει ο φοιτητής χρησιμοποιώντας τις δεδομένες διαθέσιμες πηγές μελέτης και τη διαθέσιμη τεχνολογία για κάθε εναλλακτικό συνδυασμό ωρών μελέτης σε κάθε μάθημα.



καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων

5.10 ΑΝΑΛΥΣΗ ΟΡΙΑΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ

Η καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων είναι *κοίλη* (concave). Πράγματι, μεγάλη βελτίωση στη βαθμολογία των οικονομικών μπορεί να επιτευχθεί θυσιάζοντας λίγες μόνο μονάδες από τη βαθμολογία των Μαθηματικών. Η κίνηση από το σημείο A στο σημείο B συνεπάγεται αύξηση 30 μονάδων στα Οικονομικά και μόνον 10 μονάδες απώλεια στα Μαθηματικά. Έτσι, ορίζεται το *οριακό κόστος ευκαιρίας* (marginal opportunity cost): είναι το μέγεθος που πρέπει να θυσιάσουμε σε μονάδες του αγαθού X για να παράγουμε μια επιπλέον μονάδα του αγαθού Y.

Στο παράδειγμά μας το οριακό κόστος ευκαιρίας μιας επιπλέον μονάδας στα Οικονομικά ισούται με 1/3 του βαθμού στα Μαθηματικά, αφού το κόστος ευκαιρίας των 30 μονάδων στα Οικονομικά είναι 10 μονάδες μείωση του βαθμού στα Μαθηματικά.

5.11 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΑΥΞΑΝΟΜΕΝΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Ας δούμε τώρα τί συμβαίνει με μια επιπλέον ώρα μελέτης Οικονομικής Θεωρίας, δηλαδή από το σημείο B στο σημείο C του διαγράμματος. Σύμφωνα με το διάγραμμα, η μεταφορά μιας επιπλέον ώρας από τη μελέτη των Μαθηματικών στη μελέτη των Οικονομικών, έχει σαν αποτέλεσμα μικρότερη αύξηση της βαθμολογίας στα Οικονομικά. (από 30 σε 45) και μεγαλύτερη μείωση στη βαθμολογία των Μαθηματικών (από 75 σε 55). Στην περίπτωση αυτή, το οριακό κόστος ευκαιρίας μιας μονάδας στο βαθμό των Οικονομικών αυξήθηκε στα 4/3 της μονάδας των Μαθηματικών. Η αύξηση του οριακού κόστους ευκαιρίας των βαθμών στο μάθημα των Οικονομικών με την επιπλέον ώρα μελέτης, αποτελεί ένα παράδειγμα του Νόμου του αυξανόμενου κόστους. Σύμφωνα με το Νόμο αυτό το οριακό κόστος ευκαιρίας μιας δραστηριότητας αυξάνεται όσο το επίπεδο της δραστηριότητας αυξάνεται. Γενικά, θα λέμε ότι ο Νόμος τους αυξανόμενου κόστους θέτει ότι, το κόστος ανά μονάδα προϊόντος αυξάνει κατά μέσο όρο όσο αυξάνει ο όγκος παραγωγής.

Ένας λόγος που έχουμε αυξανόμενο κόστος είναι οι φθίνουσες αποδόσεις. Κάθε επιπλέον ώρα που αφιερώνεται στη μελέτη των Οικονομικών έχει σαν αποτέλεσμα μια μικρή μόνο αύξησης του βαθμού των Οικονομικών και μια μεγάλη μείωση στα Μαθηματικά, λόγω, ακριβώς, της φθίνουσας απόδοσης του δαπανώμενου χρόνου σε οποιοδήποτε μάθημα. Ένας δεύτερος λόγος που ισχύει ο Νόμος του αυξανόμενου κόστους είναι ότι οι διαθέσιμοι πόροι εξειδικεύονται. Δηλαδή, μερικοί από τους διαθέσιμους πόρους είναι καλύτεροι για ορισμένες παραγωγικές δραστηριότητες, από ότι είναι άλλοι[9].

[9] Σύγχρονα οικονομικά μαθηματικά, Κιόχος Π.Κιόχος Α. INTERBOOKS ,1999

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στη σύγχρονη εποχή, θέτοντας κατά μέρος τα δεοντολογικά προβλήματα που ενδεχομένως υπάρχουν, τα μαθηματικά έχουν γίνει η γλώσσα της οικονομικής ανάλυσης. Τα μαθηματικά ποσοτικοποιούν τις σχέσεις μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών και τις θέτουν υπό μορφή υποδείγματος προκειμένου να αποσαφηνίσουν τις ιδιότητες τους. Στη διαδικασία αυτή τα μαθηματικά επιτρέπουν στους οικονομολόγους να εντοπίζουν και ταυτόχρονα να αντλούν συμπεράσματα που έχουν κρίσιμη σημασία για τη λειτουργία του οικονομικού συστήματος. Όποιος θέλει να παρακολουθήσει την επιχειρηματολογία των διαφόρων σύγχρονων σχολών οικονομικής σκέψης (νεοκλασικής, μετακεϋνσιανής, μονεταριστικής, μαρξιστικής κλπ.) σε επίπεδο πέρα από το εισαγωγικό, πρέπει να έχει καλή γνώση της μαθηματικής ανάλυσης.

Η μαθηματική ανάλυση σε καμιά περίπτωση δεν υποκαθιστά τη θεωρητική οικονομική. Ενισχυτικό αυτής της άποψης είναι το γεγονός ότι μέχρι σήμερα τουλάχιστον δεν υπήρξε ούτε μία σημαντική οικονομική θεωρία που η ανακάλυψη της να οφείλεται στη χρήση των μαθηματικών. Ταυτόχρονα, όμως, δεν υπάρχει ούτε μία σημαντική οικονομική θεωρία που να αναπτύχθηκε περαιτέρω χωρίς τη χρήση των μαθηματικών. Η μαθηματικοποίηση των οικονομικών θεωριών βοηθά στην καλύτερη κατανόηση τους και αποτελεί ένα σημαντικό βήμα για την ευρύτερη αποδοχή τους. Λαμβάνοντας υπόψη μας όλα αυτά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μαθηματική γνώση είναι ανεπαρκής για τη λύση προβλημάτων, όπως ακριβώς και η γνώση της οικονομικής θεωρίας χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο. Μόνο ο συνδυασμός της γνώσης της μαθηματικής επιστήμης και της οικονομικής θεωρίας μπορεί να οδηγήσει στην περαιτέρω ανάπτυξη της οικονομικής επιστήμης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Οικονομικά μαθηματικά, Φράγκος, Χ Κ, Σταμούλη Α.Ε, 1998

Μαθηματικά για οικονομολόγους Οικονομικά μαθηματικά, Αλεξανδρόπουλος, Α., Σύγχρονη Εκδοτικη,2002

Χρηματο-οικονομικά μαθηματικά, Κούγιας, Γ., ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ,2004

Οικονομικά μαθηματικά- Μαθηματικά πίστεως, Παπαμιχαήλ, Δ. Κ., Σταμούλη Α.Ε.,1993

Μαθηματικά Οικονομικό- Διοικητικών Επιστημών (Μέρος Β'), Κίντης Α., Yamane T., GUTENBERG, 1993

Μαθηματικά οικονομικής ανάλυσης- μέθοδοι και υποδείγματα Τσουλφιδης Λ., GUTENBERG, 1999

Οικονομικά Μαθηματικά και Αξιολόγηση Επενδύσεων , Μαγείρου Φ. Ε., Γ. Δαρδανος & Κ. Δαρδανος ΟΕ/ GUTENBERG, 1993

Σύγχρονα οικονομικά μαθηματικά, Κιόχος Π. Κιόχος Α. INTERBOOKS ,1999