Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ
ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΕ ΘΕΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΜΑΝΩΛΗ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
ΑΛΕΚΑ ΚΑΛΑΠΟΔΗ

ΠΑΤΡΑ-ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Από το τέλος του δέκατου αιώνα, δηλαδή του αιώνα που εδραιώνεται ο καπιταλισμός και μαζί μ' αυτόν αναπτύσσεται η οικονομική θεωρία, δημιουργήθηκε η ανάγκη έκφρασης πολύπλοκων εννοιών με αυστηρό αλλά ταυτόχρονα κατανοητό τρόπο. Μέσα από θεωρίες που διατυπώθηκαν από τους κλασσικούς οικονομολόγους της τότε εποχής, αναγνωρίζεται ότι τα μαθηματικά υποδείγματα επιτρέπουν όχι μόνο την βαθύτερη κατανόηση των οικονομικών φαινομένων αλλά και την περαιτέρω διερεύνησή τους.

Η οικονομική τείνει να μεταβληθεί σε επιστήμη με πολλές ομοιότητες με τις λεγόμενες θετικές επιστήμες. Σημαντικό ρόλο προς αυτή την κατεύθυνση έπαιξαν η στατιστική και η οικονομετρία, επομένως η οικονομική σήμερα, σε μεγάλο βαθμό, θεωρείται επιστήμη που υπόκειται σε εμπειρικό έλεγχο. Οι εμπειρικές επιστήμες βασίζονται στην τριάδα, παρατήρηση-υποδειγματοποίηση-επαλήθευση.

Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα που βοηθά σημαντικά στην ανάλυση των επιστημών της οικονομίας και διοίκησης μέσα από ένα ενοποιημένο μεθοδολογικό πλαίσιο.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά των σύγχρονων οικονομικών είναι η εκτεταμένη χρήση μαθηματικών μεθόδων στην ανάλυση οικονομικών φαινομένων. Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα που βοηθά σημαντικά στην ανάλυση των επιστημών της οικονομίας και διοίκησης μέσα από ένα ενοποιημένο μεθοδολογικό πλαίσιο.

Η πτυχιακή αυτή εργασία περιέχει μια εκτεταμένη και συστηματική παρουσίαση των μαθηματικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην οικονομική επιστήμη, καθώς και του τρόπου εφαρμογής τους κατά την ανάλυση επιμέρους οικονομικών προβλημάτων. Επίσης, περιέχει τόσο τα κατάλληλα σύγχρονα μαθηματικά εργαλεία, όσο και τη μεθοδολογική προσέγγιση για την εφαρμογή τους στην ανάλυση φαινομένων που μελετώνται στην οικονομία και τη διοίκηση.

Τα Οικονομικά μελετούν την ανθρώπινη συμπεριφορά και ευημερία σαν μια σχέση μεταξύ σπάνιων πόρων (που έχουν και άλλες χρήσεις) και κοινωνικών επιδιώξεων. Η επιστήμη αποτελείται από διάφορες (δυνητικά ασύμβατες) θεωρίες για τα συστήματα παραγωγής και διανομής. Τα θέματα για τα οποία υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα οικονομικά είναι η κατανομή των πόρων, η παραγωγή, η διανομή ή ανταλλαγή, και ο ανταγωνισμός.

Στόχος των οικονομικών μαθηματικών είναι να αποτυπώσουν με αυστηρό τρόπο τους διάφορους θεσμούς που ισχύουν στις καθημερινές οικονομικές πράξεις και οι οποίες σχετίζονται κυρίως με τη διαχείριση χρηματικών ποσών.

Οι τιμές των οικονομικών ή διοικητικών μεταβλητών, όπως το εθνικό εισόδημα, κατανάλωση, παραγωγή, επενδύσεις, επιτόκιο, εξαγωγές, εισαγωγές, κόστος, έσοδα, κέρδη κ.λπ. προσδιορίζονται και διαμορφώνονται στα πλαίσια ενός συνόλου σχέσεων αλληλεξάρτησης. Η αλληλεξάρτηση μεταξύ των οικονομικών ή διοικητικών σχέσεων επιβάλλει την εξέταση και μελέτη τους όχι μεμονωμένα αλλά στα πλαίσια ενός οικονομικού συστήματος (μοντέλου). Οι σχέσεις αυτές αλληλεξάρτησης, ανεξάρτητα αν έχουν ποιοτικό χαρακτήρα (δηλαδή είναι γνωστή η κατεύθυνση συμμεταβολής τους) ή ποσοτικό χαρακτήρα (δηλαδή είναι γνωστά τόσο το μέγεθος όσο και η κατεύθυνση συμμεταβολής τους), μπορούν να τυποποιηθούν και να λάβουν έτσι τη μορφή ενός μαθηματικού μοντέλου.

Με τον τρόπο αυτό ανοίγεται ο δρόμος και δίνεται η δυνατότητα χρησιμοποίησης μαθηματικών μεθόδων (θεωρητικών ή υπολογιστικών) στην αντιμετώπιση οικονομικών και διοικητικών προβλημάτων. Αυτό είναι σημαντικό, αφού ένας τεράστιος πλούτος αποτελεσμάτων της μαθηματικής επιστήμης που χαρακτηρίζονται από ακρίβεια, ευελιξία και απλότητα τίθεται στην υπηρεσία του οικονομολόγου για την πιο αποτελεσματική κατανόηση, μελέτη και επίλυση οικονομικών και διοικητικών προβλημάτων.

Θα πρέπει να κάνουμε σαφές, ότι τα μαθηματικά συμβάλλουν στην επίλυση μόνο του μαθηματικού ή υπολογιστικού μέρους ενός οικονομικού προβλήματος. Αποτελούν έτσι βοηθητικά εργαλεία για την καλύτερη και πιο αποτελεσματική κατανόηση και επίλυση των διαφόρων οικονομικών προβλημάτων και δεν μπορούν μόνα τους να επιλύσουν τα προβλήματα αυτά. Αυτό γιατί αν τα οικονομικά προβλήματα θα μπορούσαν να επιλυθούν με τυφλή εφαρμογή των μαθηματικών τα πράγματα θα ήταν πολύ πιο απλά και η οικονομική επιστήμη θα μπορούσε να αντικατασταθεί από τη μαθηματική.

Στο πρώτο κεφάλαιο της πτυχιακής παρουσιάζεται η ιστορία της οικονομικής επιστήμης. Για πολλούς αιώνες, η έκφραση βασικών οικονομικών ιδεών απαιτούσε απλά μαθηματικά αλλά με την πάροδο του χρόνου το οικονομικό σύστημα γινόταν όλο και πιο πολύπλοκο έως και σήμερα που τελικά τα μαθηματικά σταδιακά λοιπόν εισήχθησαν στην οικονομική ανάλυση για να επιτρέψουν την πληρέστερη και αυστηρότερη έκφραση της οικονομική θεωρίας. Έτσι λοιπόν τα τελικά αποτελέσματα μιας θεωρίας ή πολιτικής αναλύονται με τη χρησιμοποίηση μαθηματικών υποδειγμάτων.

Οι θεωρητικές εξελίξεις που σημειώθηκαν στον τομέα των μαθηματικών μεθόδων κατά τον 19ο και ιδιαίτερα 20ο αιώνα συντέλεσαν στην εκτεταμένη χρήση των μεθόδων αυτών για την ανάλυση και την ερμηνεία φαινομένων από το χώρο της Οικονομικής Επιστήμης και της Διοίκησης Επιχειρήσεων. Από την αρχή του 20ου αιώνα οι μαθηματικές μέθοδοι θεωρούνται, πλέον, αναπόσπαστο κομμάτι της Οικονομικής Επιστήμης και της Διοίκησης Επιχειρήσεων.

Σ’ αυτό το κεφάλαιο αναφέρονται επιγραμματικά τα έργα και οι απόψεις παλιών κλασσικών οικονομολόγων όπως των Marx, Marshall, Lionel Robbins, Milton Friedman, Joanne Gena, Becaria, Canard, Lange, Kroneke, Buquoy, Cournot, John Maynard Keynes που καταλήγουμε έως και σήμερα με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη του πολιτισμού, εγκαταλείποντας την πρωτόγονη μορφή του λεγόμενου αντιπραγματισμού, στην επινόηση τελικά ενός κοινού ανταλλακτικού μέσου όλων των αγαθών, το χρήμα το οποίο είναι το γενικό ανταλλακτικό μέσο και το κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών και υπηρεσιών.

Η βασική μονάδα με την οποία μετριέται το χρήμα είναι η νομισματική μονάδα που ειδικότερα μ' αυτήν αρχικά 12 ορισμένες ευρωπαϊκές χώρες έχουνε σημαντική αλλαγή, λόγω του σπουδαίου γεγονότος που από τις 1/1/2002 εισήλθαν επισήμως σε μια καινούρια εποχή, την εποχή του Ευρώ (Euro).

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται θέματα αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων, θέματα γραμμικής εξάρτησης, ορισμού της έννοιας της μήτρας και σχέσεων και πράξεων μεταξύ μητρών, ορισμού της έννοιας της ορίζουσας, του βαθμού και της αντίστροφης μήτρας.

Το κεφάλαιο αυτό καλύπτει την επίλυση γενικών γραμμικών συστημάτων καθώς και θέματα χαρακτηριστικών τιμών διαγωνοποίησης και ορισμού τετραγωνικών μορφών. Η οικονομική εφαρμογή του κεφαλαίου αυτού περιλαμβάνει την ανάλυση του υποδείγματος εισροών-εκροών.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται αναλυτικά η έννοια της παραγώγου για συναρτήσεις μιας και πολλών μεταβλητών, οι κανόνες παραγώγισης και η μεθοδολογία βελτιστοποίησης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής αλλά και πολλών συγχρόνως. Το κεφάλαιο αυτό καλύπτει επίσης την μεθοδολογία βελτιστοποίησης συναρτήσεων με πολλές ανεξάρτητες αλλά και εξαρτημένες μεταβλητές.

Οι οικονομικές εφαρμογές του πολυμεταβλητού διαφορικού λογισμού περιλαμβάνουν την μεθοδολογία της συγκριτικής στατικής ανάλυσης και παρουσιάζονται οικονομικές εφαρμογές με την μερική ελαστικότητα.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται οι έννοιες του αορίστου, του ορισμένου και του γενικευμένου ολοκληρώματος. Οι οικονομικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων περιλαμβάνουν θέματα ανάλυσης παρούσας αξίας χρηματοροών, οικονομικής έννοιας της απόσβεσης, επιλογής βέλτιστου χρόνου έναρξης επενδυτικής δραστηριότητας καθώς και την ανάλυση των εννοιών του πλεονάσματος του καταναλωτή, του παραγωγού και της μεγιστοποίησης του κοινωνικού πλεονάσματος μέσω της τιμολογιακής πολιτικής.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται οι έννοιες των διαφορικών εξισώσεων πρώτης , δεύτερης και ν-οστής τάξης καθώς επίσης καλύπτονται και οικονομικές εφαρμογές σε θέματα κυρίως του ρυθμού μεταβολής του δείκτη τιμών καταναλωτή αλλά και του πληθυσμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΑΣΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Για πολλούς αιώνες, η έκφραση βασικών οικονομικών ιδεών απαιτούσε απλά μαθηματικά. Έννοιες όπως ακέραιοι και κλάσματα, μαζί με τη χρήση της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ήταν αρκετές για να επιτρέψουν εμπόρους, αγρότες και άλλους φορείς της οικονομίας να συναλλάσσονται στην καθημερινή τους ζωή. Όμως, από το τέλος του δέκατου όγδοου αιώνα, δηλαδή του αιώνα που εδραιώνεται ο καπιταλισμός και μαζί μ' αυτόν αναπτύσσεται η οικονομική θεωρία, δημιουργήθηκε η ανάγκη έκφρασης πολύπλοκων εννοιών με αυστηρό αλλά ταυτόχρονα κατανοητό τρόπο. Έτσι, ενώ οι φυσιοκράτες, οι κλασικοί οικονομολόγοι αλλά και ο Marx διατύπωσαν τις θεωρίες τους χωρίς τη ρητή χρήση μαθηματικών, σήμερα οι θεωρίες αυτές πολλές φορές γίνονται καλύτερα κατανοητές όταν διατυπώνονται με μαθηματικούς όρους. Τα μαθηματικά υποδείγματα, γενικότερα, αναγνωρίζεται ότι επιτρέπουν όχι μόνο την βαθύτερη κατανόηση των οικονομικών φαινομένων αλλά και την περαιτέρω διερεύνησή τους.

Η νεοκλασική σχολή, που αναδύεται στα τέλη του δεκάτου ενάτου αιώνα, χρησιμοποιεί την οριακή ανάλυση σύμφωνα με την οποία, σε πολύ γενικές γραμμές, ορθολογικά δρώντες ιδιώτες έχουν ως στόχο τη μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης, που για μεν τους καταναλωτές είναι η συνάρτηση χρησιμότητας για δε τους παραγωγούς η συνάρτηση κέρδους. Η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης επιτυγχάνεται όταν ο ιδιώτης εξισώνει το οριακό του όφελος με την οριακή του θυσία. Η λέξη «οριακό» συνήθως ταυτίζεται με τη μαθηματική έκφραση «απειροελάχιστα μικρή μεταβολή», που μας εισάγει στην έννοια της παραγώγου και στο λογισμό γενικότερα.

Έτσι, τα μαθηματικά σταδιακά εισήχθησαν στην οικονομική ανάλυση για να επιτρέψουν την πληρέστερη και αυστηρότερη έκφραση της οικονομικής θεωρίας. Σήμερα, το οικονομικό σύστημα είναι τόσο πολύπλοκο, που τα τελικά αποτελέσματα μιας θεωρίας ή πολιτικής αναλύονται με τη χρησιμοποίηση μαθηματικών υποδειγμάτων. Η εισαγωγή των μαθηματικών στην οικονομική ανάλυση άλλαξε ραγδαία τον τρόπο που οι οικονομολόγοι αναλύουν τα οικονομικά φαινόμενα. Προοδευτικά, η οικονομική τείνει να μεταβληθεί σε επιστήμη με πολλές ομοιότητες με τις λεγόμενες θετικές επιστήμες. Σημαντικό ρόλο προς αυτή την κατεύθυνση έπαιξαν η στατιστική και η οικονομετρία, επομένως η οικονομική σήμερα, σε μεγάλο βαθμό, θεωρείται επιστήμη που υπόκειται σε εμπειρικό έλεγχο. Στα κοινά χαρακτηριστικά της οικονομικής με τις θετικές επιστήμες συμπεριλαμβάνονται:

- Ποσοτικές και ποιοτικές παρατηρήσεις των φαινομένων.
- Ποσοτική και στατιστική ανάλυση των δεδομένων.
- Κατασκευή θεωρητικών υποδειγμάτων που περιγράφουν τα φαινόμενα και εξηγούν τις σχέσεις μεταξύ τους.
- Χρησιμοποίηση των μαθηματικών υποδειγμάτων για τη συναγωγή συμπερασμάτων.
- Διόρθωση και βελτίωση των υποδειγμάτων για την καλύτερη πρόβλεψη των αποτελεσμάτων.

Οι εμπειρικές επιστήμες βασίζονται στην τριάδα, παρατήρηση-υποδειγματοποίηση-επαλήθευση. Παρατηρήσεις χωρίς θεωρία απλά μόνο περιγράφουν τα φαινόμενα, ενώ θεωρία χωρίς παρατήρηση διατρέχει τον κίνδυνο να χάσει την επαφή της με την πραγματικότητα.

Συχνά, η ποσοτικοποίηση ενός οικονομικού φαινομένου ή μιας οικονομικής θεωρίας απαιτεί την κατασκευή ενός μαθηματικού υποδείγματος, το οποίο παρουσιάζει σε συνοπτική μορφή τη θεωρία. Υπάρχουν δύο είδη μαθηματικών υποδειγμάτων:

- Το στοχαστικό υπόδειγμα που οι συναγωγές του εκφράζονται σε όρους πιθανοτήτων. Με άλλα λόγια, οι προβλέψεις αυτού του υποδείγματος μπορεί να πραγματοποιηθούν, μπορεί όμως και όχι. Για παράδειγμα, η στατιστική υπηρεσία μιας χώρας σε τακτά χρονικά διαστήματα συλλέγει στοιχεία ανεργίας από ένα σχετικά μικρό δείγμα του πληθυσμού. Οι αναλυτές βασίζονται σ' αυτά τα στοιχεία και κάνουν εκτιμήσεις για το ποσοστό ανεργίας στο σύνολο του πληθυσμού της χώρας. Ο συνηθισμένος τρόπος με τον οποίο γίνονται αυτές οι εκτιμήσεις, είναι: με βάση το δείγμα του πληθυσμού, η στατιστική ανάλυση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι π.χ. με 95% πιθανότητα το πραγματικό ποσοστό ανεργίας στον πληθυσμό να είναι ίδιο με αυτό του δείγματος. Έτσι, η ανάλυση και τα συμπεράσματα εκφράζονται με όρους αβεβαιότητες.
- Το καθοριστικό υπόδειγμα που τα συμπεράσματά του δεν εκφράζονται σε όρους πιθανοτήτων. Π.χ. ένα τέτοιο υπόδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό των τιμών και ποσοτήτων ισορροπίας ενός αγαθού σε μια αγορά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα φαινόμενο μπορεί να ερμηνευθεί με περισσότερα από ένα υποδείγματα. Αυτό συνήθως συμβαίνει στην οικονομική με τις διαφορετικές σχολές οικονομικής σκέψης (νεοκλασική, μετακεϋνσιανή, μαρξιστική κλπ.) Η επιλογή του καλύτερου υποδείγματος είναι μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση. Τα συνήθη κριτήρια που χρησιμοποιούνται είναι:

- Το πόσο καλά ένα υπόδειγμα αντιπροσωπεύει την πραγματικότητα.
- Ο βαθμός απλότητας του υποδείγματος.

Ένα λιτό υπόδειγμα (δηλαδή αυτό που χρησιμοποιεί λιγότερες μεταβλητές) προτιμάται από ένα πολύπλοκο υπόδειγμα, εφόσον όλα τα υπόλοιπα είναι ίδια.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά των σύγχρονων οικονομικών είναι η εκτεταμένη χρήση μαθηματικών μεθόδων στην ανάλυση οικονομικών φαινομένων. Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα που βοηθά σημαντικά στην ανάλυση των επιστημών της οικονομίας και διοίκησης μέσα από ένα ενοποιημένο μεθοδολογικό πλαίσιο.

Ιστορικά, οι μαθηματικές μέθοδοι που εφαρμόστηκαν στα οικονομικά μπορούν να διαιρεθούν σε τρεις αλληλεπικαλυπτόμενες περιόδους(Arrow and Intriligator 1981): την περίοδο της οριακής ανάλυσης η οποία βασίζεται στο λογισμό (1838-1947), την περίοδο της εφαρμογής θεωρίας συνόλων και γραμμικών υποδειγμάτων (1984-1960) και την τρέχουσα περίοδο, που αρχίζει από το 1961,η οποία χαρακτηρίζεται από την ενοποίηση των παραπάνω μεθόδων και την εκτεταμένη χρήση δυναμικών συστημάτων με εισαγωγή εννοιών μη-γραμμικότητας.

Κατά την αρχική περίοδο χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι από τις φυσικές επιστήμες με έμφαση στη μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας του καταναλωτή, του παραγωγού, της δομής της αγοράς και της γενικής ισορροπίας.

Κατά τη μεταπολεμική περίοδο εισάγεται η θεωρία συνόλων, η τοπολογία και τα γραμμικά υποδείγματα. Με τη θεωρία συνόλων επιτυγχάνεται μεγαλύτερη γενίκευση στην ανάλυση των προβλημάτων που είχαν εξετασθεί στην αρχική περίοδο. Κατά την ίδια περίοδο αρχίζει να αναπτύσσεται η θεωρία των παιγνίων.

Η τρέχουσα περίοδος χαρακτηρίζεται από συνδυασμό στοιχείων λογισμού και προχωρημένης δυναμικής ανάλυσης με παράλληλη εισαγωγή των εννοιών της μη-κυρτότητας (non-convexity) και της μη-γραμμικότητας (non-linearity) στην ανάλυση των οικονομικών φαινομένων. Η προσέγγιση αυτή είχε σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη νέων κατευθύνσεων της μαθηματικής οικονομικής τις τελευταίες δεκαετίες καθώς και την ανάπτυξη διεπιστημονικών προσεγγίσεων μέσω των οποίων η οικονομική επιστήμη έρχεται πιο κοντά με τη βιολογία, την οικολογία ή τη φυσική. Σε πολύ γενικές γραμμές οι κατευθύνσεις αυτές περιλαμβάνουν τη θεωρία βέλτιστου ελέγχου (optimal control theory) τη θεωρία παιγνίων (game theory) και την εξελικτική θεωρία (evolutionary theory).

Επειδή οι μαθηματικές μέθοδοι προϋποθέτουν ένα σαφές και καλά ορισμένο μεθοδολογικό πλαίσιο, τα Μαθηματικά είναι μια αποτελεσματική γλώσσα επικοινωνίας που διευκολύνει τη διατύπωση, την κατανόηση και την ερμηνεία θεωριών όχι μόνο στην Οικονομική Επιστήμη και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων αλλά και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους, όπως η Ιατρική, η Βιολογία, οι Κοινωνικές Επιστήμες κλπ. Ειδικότερα, η διατύπωση μιας οποιασδήποτε θεωρίας με μαθηματικούς όρους προϋποθέτει σαφή προσδιορισμό των απαιτούμενων υποθέσεων και των συνεπειών τους, καθώς και του τρόπου με τον οποίο αλληλοεπηρεάζονται τα διάφορα οικονομικά ή άλλα μεγέθη. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η παρουσίαση της θεωρίας χωρίς παρανοήσεις, παρέχεται η δυνατότητα για εμπειρικό έλεγχό της και τίθενται οι θεωρητικές βάσεις για μελλοντικές επεκτάσεις της.

Τα περισσότερα φαινόμενα που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουν από το χώρο της Οικονομικής Επιστήμης και της Διοίκησης Επιχειρήσεων χαρακτηρίζονται από ιδιαίτερα αυξημένη πολυπλοκότητα καθώς αφορούν τη συμπεριφορά ατόμων ή ομάδων, η οποία μπορεί να επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από απρόβλεπτους παράγοντες. Επιπλέον, ο υψηλός βαθμός εξειδίκευσης των σύγχρονων επιχειρήσεων και οργανισμών απαιτεί να λάβουμε υπόψη μια πληθώρα παραγόντων προκειμένου να αναλύσουμε τη στρατηγική τους. Λόγω αυτής της αυξημένης πολυπλοκότητας, όταν ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο οικονομικό φαινόμενο με τη βοήθεια μαθηματικών μεθόδων, είμαστε αναγκασμένοι να σχεδιάσουμε ένα θεωρητικό μαθηματικό υπόδειγμα(μοντέλο),που περιλαμβάνει τους σημαντικότερους παράγοντες και τις κυριότερες σχέσεις μεταξύ των οικονομικών ή άλλων μεγεθών που μας ενδιαφέρουν. Παρά το γεγονός ότι ένα τέτοιο υπόδειγμα είναι κατ’ ανάγκη μια απλούστευση της πραγματικότητας, μπορεί να μας βοηθήσει να εκτιμήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ενδεχόμενες μεταβολές κάποιων οικονομικών μεγεθών προκαλούν αντίστοιχες μεταβολές άλλων μεγεθών. Λαμβάνοντας πάντα υπόψη τις απλουστευτικές υποθέσεις στις οποίες βασίζεται το υπόδειγμα, η ανάλυσή του μπορεί να υποστηρίξει το σχεδιασμό πολιτικής και τη διαμόρφωση στρατηγικής για επιχειρήσεις και οργανισμούς του δημόσιου ή του ιδιωτικού τομέα.

Τα περισσότερα μαθηματικά υποδείγματα που χρησιμοποιούνται στην Οικονομική Επιστήμη και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων αποτελούνται από μία ή περισσότερες εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο μία συγκεκριμένη θεωρία σχετικά με την εξέλιξη κάποιων μεγεθών. Τα μεγέθη των οποίων οι τιμές μπορεί να μεταβάλλονται είναι γνωστά ως μεταβλητές(variables).Χαρακτηριστικά παραδείγματα μεταβλητών που εμφανίζονται σε αρκετά υποδείγματα είναι τα έσοδα ή τα κέρδη μιας επιχείρησης, το εθνικό εισόδημα, ο πληθωρισμός, ο αριθμός των εργαζομένων σε μία επιχείρηση κ.ά.

Με εφαρμογή κατάλληλων μαθηματικών μεθόδων στις εξισώσεις ενός υποδείγματος, μπορούμε να υπολογίσουμε στις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές που θα πάρουν μία ή περισσότερες μεταβλητές. Για παράδειγμα, σε ένα υπόδειγμα που περιγράφει τα έσοδα και τα έξοδα μιας επιχείρησης σε σχέση με την παραγωγή της, μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος της παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά κέρδη της επιχείρησης. Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές προκύπτουν από τις εξισώσεις του υποδείγματος λέγονται ενδογενείς μεταβλητές (endogenous variables).Αντίθετα, οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές καθορίζονται από εξωτερικούς παράγοντες, που δεν περιλαμβάνονται στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, λέγονται εξωγενείς μεταβλητές(exogenous variables).Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ίδια μεταβλητή μπορεί να είναι ενδογενής σε ένα υπόδειγμα και εξωγενής σε κάποιο άλλο. Για παράδειγμα, ο πληθωρισμός μπορεί να είναι ενδογενής μεταβλητή σε ένα μακροοικονομικό υπόδειγμα, που περιγράφει τις σχέσεις μεταξύ των βασικών μεγεθών μιας οικονομίας και εξωγενής μεταβλητή σε ένα μικροοικονομικό υπόδειγμα, που περιγράφει τα έσοδα ή τα έξοδα μιας επιχείρησης.

Εκτός από τις μεταβλητές, σε ένα μαθηματικό υπόδειγμα περιλαμβάνονται συνήθως και μεγέθη των οποίων οι τιμές δεν μεταβάλλονται. Τα μεγέθη αυτά λέγονται σταθερές (constants) του υποδείγματος. Παράδειγμα σταθεράς σε ένα υπόδειγμα είναι ισοτιμία Ευρώ-δραχμής (1 Ευρώ=340,75 δραχμές), με την οποία πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε ποσό που εκφράζεται σε Ευρώ προκειμένου να το μετατρέψουμε σε δραχμές. Πολλές φορές, ιδιαίτερα όταν διατυπώνουμε ένα μαθηματικό υπόδειγμα στη γενική του μορφή, συνηθίζουμε να συμβολίζουμε τις σταθερές του υποδείγματος με κάποιο γενικό σύμβολο. Μπορούμε, έτσι, σε ένα υπόδειγμα να δηλώσουμε ότι αν η ισοτιμία Ευρώ-δραχμής είναι α, τότε η τιμή ενός προϊόντος σε δραχμές είναι $a * P$, όπου P είναι μία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή του προϊόντος σε Ευρώ. Όταν οι σταθερές ενός υποδείγματος εκφράζονται συμβολικά, λέγονται και παραμετρικές σταθερές ή απλώς παράμετροι (parameters). Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσουμε ότι αν και μια παράμετρος μπορεί γενικά να πάρει διάφορες τιμές, η τιμή της για κάθε συγκεκριμένη μορφή του υποδείγματος θεωρείται σταθερή. Με την έννοια αυτή μία παράμετρος διαφέρει ουσιαστικά από μια εξωγενή μεταβλητή. Επειδή, όμως, οι τιμές και των παραμέτρων άλλα και των εξωγενών μεταβλητών θεωρούνται δεδομένες και η μεταξύ τους διάκριση είναι λεπτή, σε αρκετά βιβλία τόσο οι εξωγενείς μεταβλητές όσο και οι παραμετρικές σταθερές αναφέρονται με τον γενικό όρο «παράμετροι του υποδείγματος».

Στα περισσότερα μαθηματικά υποδείγματα οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες περιγράφονται από τις εξισώσεις του υποδείγματος. Στα υποδείγματα που χρησιμοποιούνται στην Οικονομική Επιστήμη και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εξισώσεων, με βάση την ερμηνεία τους: τις εξισώσεις ορισμού, τις εξισώσεις συμπεριφοράς και τις εξισώσεις ισορροπίας.

Μια εξίσωση ορισμού (ή ταυτότητα) ισοδυναμεί με έναν ορισμό ενός μεγέθους με βάση άλλα μεγέθη του υποδείγματος. Το πιο συνηθισμένο παράδειγμα εξίσωσης ορισμού είναι η εξίσωση ορισμού των κερδών μιας επιχείρησης π = TR-TC, όπου π είναι τα κέρδη, TR τα συνολικά έσοδα και TC τα συνολικά κόστη της επιχείρησης.

Μία εξίσωση συμπεριφοράς ενός μαθηματικού υποδείγματος περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται μια μεταβλητή όταν μεταβάλλονται άλλες μεταβλητές του υποδείγματος. Για παράδειγμα, θεωρήστε την εξίσωση $TD = 15 - 0,75 * U$, όπου TD είναι τα έσοδα από την άμεση φορολογία (σε δισεκατομμύρια Ευρώ) και U το επίπεδο ανεργίας, ως ποσοστό του οικονομικά ενεργού πληθυσμού. Η εξίσωση αυτή υποδηλώνει ότι αν εξαλειφθεί εντελώς η ανεργία, τότε τα έσοδα από την άμεση φορολογία θα είναι 15 δις Ευρώ και ότι για κάθε αύξηση της ανεργίας κατά 1% τα έσοδα θα μειώνονται κατά 0,75 δις Ευρώ. Μία διαφορετική εξίσωση είναι η $TD = 20 - 0,60 * U^2$. Η εξίσωση αυτή υποδηλώνει ότι στην περίπτωση της μηδενικής ανεργίας, τα φορολογικά έσοδα θα είναι 20 δις Ευρώ και ότι η μείωση των φορολογικών εσόδων για κάθε μονάδα αύξησης της ανεργίας δεν θα είναι σταθερή, αλλά θα αυξάνεται όσο υψηλότερη είναι η ανεργία. Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι με τις εξισώσεις συμπεριφοράς ενός μαθηματικού υποδείγματος περιγράφονται στην ουσία οι υποθέσεις στις οποίες βασίζεται το συγκεκριμένο μοντέλο και ότι διαφορετικές υποθέσεις έχουν ως αποτέλεσμα διαφορετικές εξισώσεις συμπεριφοράς.

Τέλος, η Τρίτη κατηγορία εξισώσεων, εξισώσεις ισορροπίας, απαντώνται σε υποδείγματα στα οποία υπεισέρχεται η έννοια του σημείου ισορροπίας. Με τον όρο σημείο ή κατάσταση ισορροπίας (equilibrium) εννοούμε μια κατάσταση στην οποία οι μεταβλητές του συγκεκριμένου υποδείγματος που μελετάμε δεν μεταβάλλονται. Οι εξισώσεις ισορροπίας εκφράζουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου το υπόδειγμά μας να είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Η πιο γνωστή εξίσωση ισορροπίας είναι, ίσως, η εξίσωση $Q_D = Q_S$, όπου Q_D και Q_S είναι αντίστοιχα η ζητούμενη και η προσφερόμενη ποσότητα ενός συγκεκριμένου προϊόντος. Η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει προκειμένου η αγορά του συγκεκριμένου προϊόντος να είναι σε ισορροπία. Οι συνθήκες ισορροπίας προσδιορίζουν τις τιμές ισορροπίας των ενδογενών μεταβλητών για τάση φαινομένου. Η μελέτη των μεταβολών των τιμών ισορροπίας όταν μεταβάλλονται οι τιμές των εξωγενών μεταβλητών, η μελέτη δηλαδή των επιπτώσεων στην ισορροπία από τη μεταβολή των εξωγενών συνθηκών που επηρεάζουν το πρόβλημα, αναφέρεται ως συγκριτική στατική (comparative statics) ή συγκριτική δυναμική (comparative dynamics).

Τα «Οικονομικά» είναι η κοινωνική επιστήμη που μελετά την παραγωγή, διανομή και κατανάλωση των αγαθών και υπηρεσιών. Περιγράφει τη διαδικασία σε όρους ανταλλαγής μεταξύ ανταγωνιστικών επιλογών, όπως παρατηρείται μέσω μετρήσιμων ποσοτήτων όπως είναι οι εισροές, οι τιμές και οι εκροές.

Ως εισροές εννοούμε τα αγαθά ή τις υπηρεσίες που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή περαιτέρω αγαθών ή υπηρεσιών. Οι εισροές αναφέρονται και ως συντελεστές παραγωγής και δύνανται να ταξινομηθούν σε τρεις γενικές κατηγορίες: τους φυσικούς πόρους, την εργασία και το κεφάλαιο. Ως εκροές εννοούμε τα παραγόμενα αγαθά ή υπηρεσίες τα οποία είτε καταναλώνονται από τον τελικό χρήστη, είτε επαναχρησιμοποιούνται στην παραγωγική διαδικασία.

Στόχος των οικονομικών μαθηματικών είναι να αποτυπώσουν με αυστηρό τρόπο τους διάφορους θεσμούς που ισχύουν στις καθημερινές οικονομικές πράξεις και οι οποίες σχετίζονται κυρίως με τη διαχείριση χρηματικών ποσών. Παράλληλα, μέσω της περιγραφής αυτής διευκολύνουν τους συναλλασσόμενους να επιλέγουν κατά το δυνατόν επωφελείς οικονομικές πράξεις. Κύρια εφαρμογή των είναι οι υπολογισμοί σε χρηματοπιστωτικά θέματα-δηλαδή θέματα δανεισμού και γενικά διαχείρισης χρήματος. Ειδικά όταν πρόκειται για υπολογισμούς ασφαλειών όπου το στοιχείο της αβεβαιότητας παίζει ιδιαίτερο ρόλο, αναφέρεται κανείς στον κλάδο των ασφαλιστικών μαθηματικών ή αναλογισμού, ενώ όταν τα θέματα της αβεβαιότητας είναι σε δεύτερη μοίρα αναφερόμαστε στον κλάδο των χρηματοπιστωτικών μαθηματικών.

Σε περιπτώσεις που εξετάζει κανείς οικονομικές πράξεις που αφορούν επενδύσεις η αξιολόγηση αρχίζει συγκρίνοντας ουσιαστικά την επένδυση με μία εναλλακτική κατάθεση που θα απέφερε τα ίδια αποτελέσματα. Έτσι τα αποτελέσματα της μαθηματικής περιγραφής των θεμάτων καταθέσεων και δανείων βρίσκουν άμεση εφαρμογή και στην αξιολόγηση επενδύσεων. Στο πρώτο αυτό στάδιο η αξιολόγηση των επενδύσεων γίνεται αγνοώντας την αβεβαιότητα που υπάρχει σε κάθε μελλοντική οικονομική πράξη.

Οι μαθηματικές μέθοδοι ήταν ανέκαθεν σημαντικές στην ανάλυση των αγορών, της παραγωγής και γενικότερα της επιχειρηματικότητας. Η τάση ποσοτικοποίησης που εντάθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα πήρε εκρηκτικές διαστάσεις την δεκαετία του ’70,και συντέλεσε στην αναμόρφωση κλάδων όπως τα χρηματοοικονομικά, τα τραπεζικά και τα ασφαλιστικά θέματα.

Η παράλληλη διεύρυνση της χρήσης των υπολογιστών συνετέλεσε στην εκτεταμένη εφαρμογή των ποσοτικών μεθόδων: η αυξημένη υπολογιστική δύναμη
επέτρεψε την συγκέντρωση στοιχείων καθώς και την υλοποίηση προχωρημένων μεθόδων αξιοποίησής των.

Τα οικονομικά βασίζονται σε αυστηρούς συλλογισμούς περισσότερο από τις υπόλοιπες κοινωνικές επιστήμες. Αυτό είναι τουλάχιστον το επιδιωκόμενο πρότυπο των επαγγελματιών του πεδίου. Η μεθοδολογία έχει επτά αλληλεπιδρόμενα μέρη.

Ορισμένα από αυτά είναι τα εξής:

*Η συγκέντρωση των οικονομικών δεδομένων. Αυτά τα δεδομένα αποτελούνται από μετρήσιμα μεγέθη όπως οι τιμές και οι μεταβολές στις τιμές μετρήσιμων αγαθών. Για παράδειγμα, το κόστος για την πρόσληψη ενός εργάτη για μια βδομάδα, ή το κόστος ενός συγκεκριμένου εμπορεύματος, και πόσο χρησιμοποιείται συνήθως.

*Την κατασκευή μοντέλων για την περιγραφή οικονομικών σχέσεων, όπως για παράδειγμα τη σχέση μεταξύ του επιπέδου των τιμών και της απασχόλησης. Αυτό περιλαμβάνει τις παρατηρήσιμες μορφές της οικονομικής δραστηριότητας: χρήμα, κατανάλωση, προτιμήσεις, αγορές, τιμές πώλησης κ.λπ. Μερικά από τα μοντέλα είναι απλά(λογιστικά-accounting) μοντέλα, ενώ άλλα υπολογίζουν συγκεκριμένες οικονομικές συμπεριφορές, όπως η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας ή του κέρδους. Για παράδειγμα, ένα μοντέλο που δείχνει και τις δύο αυτές πτυχές, είναι η κλασσική μαθηματική διατύπωση του Κεϋνσιανού συστήματος συμπεριλαμβανομένης της συνάρτησης κατανάλωσης και της ταυτότητας του Εθνικού Εισοδήματος.

Τα Οικονομικά Μαθηματικά, με την ευρεία έννοια, έχουν πλούσια παράδοση. Το έτος 1711 η Γαλλίδα οικονομολόγος Joanne Gena χρησιμοποίησε τη μαθηματική μέθοδο για τη λύση ορισμένων νομισματικών προβλημάτων και ειδικότερα προσπάθησε να ανακαλύψει με μαθηματική μέθοδο από πού προέρχεται η αξία του νομίσματος. Αργότερα ο Ιταλός Becaria χρησιμοποίησε την ποσοτική μέθοδο για τη μελέτη των φόρων. Την ίδια περίπου περίοδο ο Γάλλος Canard εφάρμοσε και αυτός τη μαθηματική μέθοδο για την ερμηνεία των οικονομικών εννοιών και οι Lange, Kroneke και Buquoy εισήγαγαν την αλγεβρική εξίσωση στην οικονομική επιστήμη. Ο δε Cournot είναι ο πρώτος που έδειξε πως ο λογισμός των συναρτήσεων (1838) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην οικονομική επιστήμη και ο πρώτος που ασχολήθηκε με την ισορροπία στις διεθνείς συναλλαγές και με τον καθορισμό της τιμής όταν το μονοπώλιο κυριαρχεί στην αγορά.

Γενικά, από την εποχή της «Νεοκλασικής Σχολής» μέχρι σήμερα, δεν υπάρχει οικονομολόγος ερευνητής ο οποίος να μη χρησιμοποιεί την ποσοτική και επομένως την μαθηματική μέθοδο για τη λύση οικονομικών προβλημάτων και την επεξεργασία οικονομικών φαινομένων.

Όπως φαίνεται και από την παραπάνω ανάλυση, επειδή η έκταση των Οικονομικών Μαθηματικών είναι πολύ μεγάλη, τα Οικονομικά Μαθηματικά τα διαιρούμε σε δύο βασικούς κλάδους:

α)Την Οικονομετρία, η οποία διερευνά τους νόμους της οικονομικής θεωρίας, ασχολείται με την μέτρηση των οικονομικών μεγεθών και προϋποθέτει γνώσεις στατιστικής, οικονομικής θεωρίας και μαθηματικής ανάλυσης, και

β)Τα Μαθηματικά των Οικονομικών Συναλλαγών ή Οικονομικών Πράξεων, που αναφέρονται στις οικονομικές πράξεις των εμπορικών, τραπεζικών και ασφαλιστικών συναλλαγών και αποτελούν μαθηματική ανάλυση εφαρμοσμένη στα προβλήματα εκείνα στα οποία υπεισέρχεται ως παράγων το χρήμα, ο τόκος και η έννοια της πιθανότητας.

Τα Μαθηματικά των Οικονομικών Συναλλαγών υποδιαιρούνται στα Μαθηματικά Επιχειρήσεων, ή Μαθηματικά Πίστεως, και στα Ασφαλιστικά Μαθηματικά.

Τα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων εξετάζουν τα οικονομικά προβλήματα που περιέχουν την έννοια του τόκου και του χρήματος.

Τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά εξετάζουν τα διάφορα προβλήματα των ασφαλίσεων, τόσο στο χώρο των ιδιωτικών ασφαλίσεων, όσο και στο χώρο των κοινωνικών ασφαλίσεων, και ασχολούνται με τον προσδιορισμό του ασφάλιστρου στις ασφαλίσεις ζωής, θανάτου, πυρός, αυτοκινήτων και ομαδικών ασφαλίσεων, με τα ασφαλιστικά αποθεματικά, με αναλογιστικές μελέτες των ταμείων κοινωνικής ασφάλισης, με προγράμματα συνταξιοδότησης και με διάφορα άλλα τεχνικά ασφαλιστικά θέματα. Τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά αφορούν προβλήματα ασφαλίσεων στα οποία υπάρχει η έννοια του τόκου, η έννοια της πιθανότητας και η έννοια του χρήματος.

Τα «Μαθηματικά των Επιχειρήσεων» ή τα «Μαθηματικά Πίστεως» διαιρούνται σε δύο μέρη:

α)Στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, διάρκειας μέχρι τριών μηνών και σπάνια μέχρι ενός έτους.

Στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις υπάγονται τα θέματα του απλού τόκου, της προεξόφλησης και των ισοδύναμων γραμματίων ή συναλλαγματικών. Δηλαδή, στην κατηγορία αυτή ανήκουν βασικά τα βραχυπρόθεσμα δάνεια, οι βραχυπρόθεσμες καταθέσεις, οι προεξοφλήσεις συναλλαγματικών και γραμματίων και τα ισοδύναμα γραμμάτια, όπου γίνεται η αντικατάσταση ενός γραμματίου ή μιας συναλλαγματικής με δύο ή περισσότερα γραμμάτια ή συναλλαγματικές.

β)Στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, όταν ο χρόνος διαρκεί περισσότερο από ένα έτος. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αν η διάρκεια είναι μέχρι πέντε έτη, τότε η οικονομική πράξη χαρακτηρίζεται και ως μεσοπρόθεσμη. Τόσο στις μακροπρόθεσμες, όσο και στις μεσοπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, εφαρμόζεται ο ανατοκισμός ή ο σύνθετος τόκος.

Στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις υπάγονται τα θέματα στα σχετικά με τον ανατοκισμό, τις ράντες, τα μακροπρόθεσμα ενιαία δάνεια και τα ομολογιακά δάνεια.

Βασικός παράγοντας στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές θεωρείται το χρήμα, γι’ αυτό είναι απαραίτητο να δοθεί η έννοια και ο ορισμός του χρήματος.

Θεωρείται γνωστό ότι οι άνθρωποι για τις συναλλαγές τους, αφού εγκατέλειψαν την πρωτόγονη μορφή του λεγόμενου αντιπραγματισμού (ανταλλαγή με είδος) και πέρασαν από διάφορα άλλα στάδια, τελικά-με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη του πολιτισμού-επινόησαν ένα κοινό ανταλλακτικό μέσο όλων των αγαθών και το ονόμασαν χρήμα.

Επειδή όμως, σύμφωνα με την Οικονομική Θεωρία, για να θεωρηθεί κάτι σαν χρήμα πρέπει:

1. Να είναι γενικό ανταλλακτικό μέσο όλων των αγαθών και
2. Να είναι κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών, εύκολα προκύπτει ο ακόλουθος πρώτος και πιο απλός ορισμός του χρήματος:

Χρήμα είναι το γενικό ανταλλακτικό μέσο και το κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών και υπηρεσιών.

Αναφορικά με τις μορφές που εμφανίζεται το χρήμα ισχύουν τα εξής:
Ενώ παλαιότερα το χρήμα εμφανίζεται κυρίως με τη μορφή χαρτονομισμάτων τα οποία, επειδή τα διάφορα κράτη είχαν αναθέσει την έκδοσή τους σε Εκδοτικές Τράπεζες, ονομάζονταν Τραπεζογραμμάτια, στη σύγχρονη όμως ανταλλακτική οικονομία το χρήμα εμφανίζεται με διάφορες μορφές όπως: Τα χαρτονομίσματα, τα κέρματα, τα διάφορα είδη καταθέσεων, τα Repos, Τα Τραπεζικά Ομόλογα, τα Έντοκα Γραμμάτια Ελληνικού Δημοσίου (Ε.Γ.Ε.Δ.) και τα Ομόλογα Ελληνικού Δημοσίου (Ο.Ε.Δ.).

Ειδικά τα κοινό μέτρο με το οποίο μετριέται η αξία όλων των αγαθών, ή, πιο απλά, η βασική μονάδα με την οποία μετριέται το χρήμα, ονομάζεται Νομισματική Μονάδα, θα τη συμβολίσουμε σύντομα ν.μ. και, όπως ξέρουμε, κάθε χώρα έχει τη δική της νομισματική μονάδα.

Ειδικότερα όμως με τις νομισματικές μονάδες 12 ορισμένων ευρωπαϊκών χωρών έχουμε σημαντική αλλαγή, εξαιτίας του σπουδαίου γεγονότος ότι οι χώρες αυτές, από 1/1/2002, εισήλθαν επισήμως σε μια καινούρια εποχή, την εποχή του Ευρώ(Euro).

Αν τώρα θεωρήσουμε ένα σύνολο νομισματικών μονάδων ή ακόμα και μία νομισματική μονάδα, τότε έχουμε την έννοια του Χρηματικού Ποσού. Τέλος, επειδή στη συνέχεια θα εμφανίζονται ως βασικά μεγέθη των οικονομικών συναλλαγών, το Κεφάλαιο, ο Τόκος, ο Χρόνος και το Επιτόκιο, γι’ αυτό κρίνεται να τα αποσαφηνίσουμε και από τώρα να προσπαθήσουμε να δώσουμε τον ορισμό αυτών των μεγεθών(εννοιών).

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ</u>: Στα Οικονομικά Μαθηματικά το Κεφάλαιο ορίζεται σαν οικονομικό αγαθό που έχει εκφραστεί σε νομισματικές μονάδες και έχει την ικανότητα να παράγει άλλο αγαθό. Απλούστερα, θα μπορούσαμε να πούμε, ότι το κεφάλαιο λέγεται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο όταν δανειστεί ή αποταμιευθεί έχει παραγωγική ικανότητα.

Για να εξηγήσουμε καλύτερα τον ορισμό αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι ένα ποσό χρημάτων σ’ ένα συρτάρι του σπιτιού μας ή στο χρηματοκιβώτιό μας μπορεί για εμάς τους ίδιους να είναι ένα κεφάλαιο, αλλά για τα Οικονομικά Μαθηματικά αυτό δεν αποτελεί κεφάλαιο αφού δεν είναι παραγωγικό.

Αν όμως, το παραπάνω χρηματικό ποσό, δοθεί σαν δάνειο ή το καταθέσουμε στην τράπεζα, τότε επειδή αυτό μετά πάροδο ορισμένου χρόνου θα γίνει παραγωγικό δηλαδή θα παράγει άλλο χρηματικό ποσό (τον τόκο), λέμε ότι αποτελεί κεφάλαιο και το συμβολίζουμε με το γράμμα C.

ΤΟΚΟΣ: Είναι σε όλους ότι, αν ο Α δώσει με δανεισμό (δανείσει) στον Β ένα κεφάλαιο για ορισμένο χρονικό διάστημα, τότε ο Β υποχρεώνεται (στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος) να επιστρέψει στον Α εκτός από το κεφάλαιο που πήρε και ένα επιπλέον ποσό, δηλαδή μια πρόσθετη αμοιβή, που αποτελεί (κατά κάποιο τρόπο) αποζημίωση του δανειστή για το δικαίωμα της χρησιμοποίησης ή εκμετάλλευσης του κεφαλαίου του από τον οφειλέτη. Έτσι στο αρχικό κεφάλαιο του (δανειστή) Α προστίθεται και ένα επιπλέον ποσό (η πρόσθετη αμοιβή) που λέγεται Τόκος, συμβολίζεται με το γράμμα I και έτσι το (αρχικό) κεφάλαιο αυξάνεται.

Από την έννοια αυτή του τόκου συμπεραίνουμε, ότι κάθε χρηματικό ποσό, άμα διαθέτει με τόκο, αποκτά παραγωγική ικανότητα που έχει σαν αποτέλεσμα την αύξησή του.

Άρα μετά απ’ όλα τα παραπάνω έχουμε τον ακόλουθο ορισμό: Τόκος ενός κεφαλαίου που δίνεται με δανεισμό λέγεται η αποζημίωση για τη χρήση ή την εκμετάλλευση του υπόψη κεφαλαίου ή (με πιο επιστημονικό ορισμό) ο τόκος ορίζεται σαν απόδοση ή αύξηση του παραγωγικού κεφαλαίου για συγκεκριμένη χρονική διάρκεια.

ΧΡΟΝΟΣ: Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο οφειλέτης χρησιμοποιεί το κεφάλαιο του δανειστή λέγεται Χρόνος. Με άλλα λόγια σαν χρόνος ορίζεται η χρονική διάρκεια κατά το οποίο το κεφάλαιο έχει παραγωγική ικανότητα.

Ο χρόνος, που γενικά συμβολίζεται με το γράμμα t, μπορεί να είναι πεπερασμένος ή απαριθμητός δηλαδή να εκφράζεται σε ακέραιο αριθμό ετών, εξαμήνων…….μηνών, ημερών και άρα να παίρνει τιμές από την ακολουθία 0,1,2,3,…..που σημαίνει ότι το κεφάλαιο παράγει τόκο στο τέλος αυτών των (χρονικών) περιόδων ή μπορεί να είναι και χρονικής διάρκειας οσοδήποτε μικρής ή μεγάλης, που σημαίνει ότι το κεφάλαιο παράγει τόκο ανά πάσα χρονική στιγμή. Το χρόνο, όπως είδαμε και πιο πάνω, τον χρησιμοποιούμε με την έννοια της χρονικής διάρκειας κι έτσι, όταν μια χρονική διάρκεια συμβολίζεται με το διάστημα [0,t], το 0 αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που αρχίζει η παραγωγικότητα του κεφαλαίου, ενώ το t στη χρονική στιγμή που σταματάει. Αναφορικά τώρα με τον ειδικότερο συμβολισμό του χρόνου έχει επικρατήσει να συμβολίζεται με το γράμμα η ή το μ ή το ω, αν για μονάδα μέτρησής του λαμβάνεται αντίστοιχα το έτος ή ο μήνας ή η ημέρα.

Ο τόκος βασικά εξαρτάται από το μέγεθος του (τοκιζόμενου) κεφαλαίου και τη διάρκεια της παραγωγικότητάς του, ενώ πολλές φορές επηρεάζεται και από διάφορες άλλες (σημερινές ή μελλοντικές) συνθήκες της αγοράς.

<u>ΕΠΙΤΟΚΙΟ</u>: Όπως είπαμε στον Τόκο, κάθε χρηματικό ποσό (κεφάλαιο) που δανείζεται με τόκο αποκτά παραγωγική ικανότητα. Για τη μέτρηση αυτής της παραγωγικής ικανότητας του κεφαλαίου, παίρνουμε σαν μέτρο τον τόκο που παράγει το κεφάλαιο μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο(π.χ. σε ένα έτος ή σε ένα εξάμηνο κ.λπ.). Έτσι λοιπόν ο συντελεστής με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζεται ο τόκος του κεφαλαίου λέγεται Επιτόκιο και ορίζεται ως ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική μονάδα.

Συνήθως για χρονική μονάδα (περίοδο) παίρνουμε το έτος κι έτσι το επιτόκιο, που συμβολίζεται με το γράμμα I, είναι ο τόκος που παράγει μια νομισματική μονάδα (ευρώ ή όπως αλλιώς θα λέγεται) σε ένα έτος.

Στην καθημερινή όμως πρακτική (τράπεζες κ.λπ.) το επιτόκιο υπολογίζεται ως ο τόκος των 100 νομισματικών μονάδων σε ένα χρόνο, ονομάζεται «επιτόκιο επί τοις εκατό» ή απλούστερα «επιτόκιο στα εκατό» και παριστάνεται με το συμβόλαιο % (δηλαδή είναι ποσοστό). Έτσι π.χ. 12%, 25% κ.λπ., σημαίνει ότι οι 100 ν.μ. σε ένα έτος δίνουν τόκο 12 ν.μ. 25 ν.μ. κ.λπ.

Ακόμα το επιτόκιο, ανάλογα με τη χρονική περίοδο (έτος, εξάμηνο, κ.λπ.) στην οποία αναφέρεται, ονομάζεται ετήσιο, εξαμηνιαίο κ.λπ., επιτόκιο.

ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

Τα είδη των επιτοκίων που θα συναντήσουμε ανήκουν στις εξής κατηγορίες:

1. <u>Νόμιμο επιτόκιο</u>: Ο Νόμος, για να προστατεύσει τους πολίτες που έχουν (οικονομική) ανάγκη και ακόμα να προλάβει την υπερβολική αύξηση των επιτοκίων σε περιπτώσεις οικονομικών κρίσεων, καθορίζει κάθε φορά ένα ανώτατο επιτόκιο, που το λέμε Νόμιμο επιτόκιο. Το νόμιμο αυτό επιτόκιο επίσημα κανείς δεν μπορεί να το υπερβεί στις διάφορες συναλλαγές, γιατί σε αντίθετη περίπτωση κινδυνεύει να χαρακτηριστεί ως τοκογλύφος και να τιμωρηθεί αυστηρά από το Νόμο.
2. <u>Συμβατικό επιτόκιο</u>: Πολλές φορές όμως, ιδίως σε ιδιωτικές συναλλαγές, το ύψος του επιτοκίου καθορίζεται συμβατικά (δηλαδή με συμφωνία) μεταξύ του δανειστή και του οφειλέτη. Αυτό το επιτόκιο το λέμε Συμβατικό επιτόκιο και κανονικά σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το νόμιμο.
3. <u>Προεξοφλητικό επιτόκιο</u>: Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται κάθε φορά από το Διοικητικό Συμβούλιο της Τράπεζας της Ελλάδας και αποτελεί το βασικό επιτόκιο για τις προεξοφλήσεις των συναλλαγματικών και γραμματίων από τις εμπορικές τράπεζες.

Όπως είδαμε, αποφασιστικό ρόλο στη ρύθμιση του ύψους του επιτοκίου παίζουν οι Τράπεζες. Συμφέρον οι τράπεζες έχουν-επειδή στην ουσία η δουλειά τους είναι το εμπόριο των κεφαλαίων-να δανείζονται από το κοινό με πολύ μικρό επιτόκιο και να δανείζουν στο κοινό με όσο το δυνατό μεγαλύτερο επιτόκιο. Προφανώς με τη διαφορά των δύο αυτών επιτοκίων πληρώνει το κοινό τις διάφορες υπηρεσίες που του παρέχουν οι Τράπεζες και αποτελεί ένα αρκετά σημαντικό κέρδος γι’ αυτές. Επειδή όμως υπάρχει μεγάλος συναγωνισμός μεταξύ των Τραπεζών, επέρχεται μια κατάσταση ισορροπίας κι έτσι μειώνονται τα κέρδη τους σ’ ένα μέσο επιτόκιο, που όμως κάθε φορά ανταποκρίνεται στην οικονομική κατάσταση της κάθε χώρας.

Αφού, γενικά το επιτόκιο-και ιδίως το συμβατικό-δεν διατηρείται απολύτως σταθερό, σημαίνει ότι υπάρχουν λόγοι που το αναγκάζουν να μεταβάλλεται. Τέτοιοι λόγοι οφείλονται συνήθως στην αξιοπιστία του δανειζόμενου, στο νόμο της προσφοράς και της ζήτησης και-όπως στο νόμιμο επιτόκιο είπαμε-στην πολιτική και οικονομική κατάσταση της χώρας.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Οι τεχνικές της Γραμμικής Άλγεβρας είναι από τα βασικότερα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση μαθηματικών υποδειγμάτων της Οικονομικής Επιστήμης και της Διοίκησης Επιχειρήσεων. Με την βοήθεια της Γραμμικής Άλγεβρας μπορούμε να παρουσιάσουμε με σχετικά απλό και περιεκτικό τρόπο υποδείγματα που περιλαμβάνουν πολλές γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες περιγράφουν διάφορες πτυχές του οικονομικού συστήματος. Επιπλέον, με τις τεχνικές της Γραμμικής Άλγεβρας μπορούμε να διερευνήσουμε κατά πόσο ένα τέτοιο σύστημα εξισώσεων έχει λύση και, αν υπάρχει λύση, να την προσδιορίσουμε αναλυτικά.

Στην περίπτωση που το υπόδειγμά μας περιλαμβάνει και μη γραμμικές εξισώσεις, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις αυτές με κατάλληλες γραμμικές προσεγγίσεις τους και να μελετήσουμε το υπόδειγμα βασιζόμενοι στη Γραμμική Άλγεβρα. Για τους λόγους αυτούς, η Γραμμική Άλγεβρα έχει πλήθος εφαρμογών τόσο στη στατική όσο και στη συγκριτική-στατική ανάλυση. Επιπλέον, οι τεχνικές της Γραμμικής Άλγεβρας χρησιμοποιούνται ευρύτατα στο χώρο της δυναμικής ανάλυσης καθώς και στη θεωρία βελτιστοποίησης, όπου αναζητούμε ακρότατα συναρτήσεων με πολλές μεταβλητές.

2.1.ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

Οι πρόοδοι αποτελούν μια ειδική κατηγορία των ακολουθιών και είναι τριών ειδών: αριθμητικές, αρμονικές και γεωμετρικές.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

Μια ακολουθία αριθμών αι, α2, ... , αν, αν+1, ... θα λέμε ότι αποτελεί αριθμητική πρόοδο τότε και μόνο τότε αν υπάρχει ένας αριθμός ω, ώστε να ισχύει:

$$αν+1 = αν + ω, \quad \forall\ ν = 1,2, ...$$

Ο αριθμός ω αποκαλείται λόγος ή διαφορά της αριθμητικής προόδου.
Η αριθμητική πρόοδος αποκαλείται και πρόοδος κατά διαφορά, γιατί εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών όρων της είναι σταθερή και ίση με ω.
Παρατηρούμε επίσης ότι αν ω > 0, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα, γιατί αν+1 > αν ενώ αν αν ω < 0, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί αν+1 < αν και τέλος αν ω = 0, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι μια σταθερή ακολουθία.
Ο τύπος για να υπολογίσουμε τον νιοστό όρο αν μιας αριθμητικής προόδου συναρτήσει του πρώτου όρου της α1 της διαφοράς της ω και του ν, είναι ο εξής:

$$α_ν = α_1 + (ν\text{-}1)ω,\ \forall\, ν \in N$$

Αποδεικνύεται ότι για μια αριθμητική πρόοδο αν με διαφορά ω και για τους φυσικούς αριθμούς ν και μ, με μ<ν, ισχύει:

$$α_1\text{+}μ + α_ν\text{-}μ = α_1 + α_ν$$

Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι το άθροισμα δύο όρων μιας αριθμητικής προόδου που απέχουν εξ' ίσου από τους άκρους όρους είναι ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων. Στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι άρτιο σε πλήθος δεν υπάρχει μεσαίος όρος, ενώ στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι περιττό, τότε υπάρχει μεσαίος όρος και το άθροισμα των άκρων όρων είναι ίσο με το διπλάσιο του μεσαίου όρου.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

Μια ακολουθία αριθμών α_1 α_2, ... , α_ν $\alpha_{\nu+1}$, ... θα λέμε ότι αποτελεί γεωμετρική πρόοδο τότε και μόνο τότε αν υπάρχει ένας αριθμός λ, ώστε να ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu \cdot \lambda,\ \forall\, \nu= 1,2, ...$$

Ο αριθμός λ αποκαλείται λόγος της γεωμετρικής προόδου.

Η γεωμετρική πρόοδος αποκαλείται και πρόοδος κατά πηλίκο, γιατί εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της είναι σταθερό και ίσο με λ.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $|l|> 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως γνησίως αύξουσα, γιατί $|a_{\nu+1}|>|a_\nu|$, ενώ αν $|l|<1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως γνησίως φθίνουσα, γιατί $|a_{\nu+1}|<|a_\nu|$, και τέλος αν $|l|=1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι μια απολύτως σταθερή ακολουθία.

Ο τύπος για να υπολογίσουμε τον νιοστό όρο αν μιας γεωμετρικής προόδου συναρτήσει του πρώτου όρου της α1, του λόγου της λ και του ν, είναι ο εξής:

$$a_\nu = a_1 \cdot l^{\,\nu-1}, \quad \forall \nu \in N$$

Αποδεικνύεται ότι για μια γεωμετρική πρόοδο αν με λόγο $\lambda \neq 0$ και για τους φυσικούς αριθμούς ν και μ, με μ<ν, ισχύει:

$$a_{1+m} \cdot a_{n-m} = a_1 \cdot a_n$$

Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι το γινόμενο δύο όρων μιας γεωμετρικής προόδου που απέχουν εξ ίσου από τους άκρους όρους είναι ίσο με το γινόμενο των άκρων όρων. Στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου είναι άρτιο σε πλήθος δεν υπάρχει μεσαίος όρος, ενώ στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου είναι περιττό, τότε υπάρχει μεσαίος όρος και το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το τετράγωνο του μεσαίου όρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Ζητείται να βρεθεί η συνολική μελλοντική αξία των πληρωμών για πρόσοδο 1.000 ευρώ που καταβάλλεται μία φορά το χρόνο και για περίοδο 4 χρόνων. Ο σύνθετος τόκος είναι 10% .

Λύση

Είναι σχετικά εύκολο να βρεθεί η συνολική μελλοντική αξία αυτής της σειράς καταβολών. Αυτό που πρέπει να γίνει είναι να προστεθούν οι συντελεστές μελλοντικής αξίας για το σύνολο των ετών που καλύπτουν την πρόσοδο. Έτσι, σύμφωνα με τον πίνακα FV, ο συντελεστή; για 4ετή πρόσοδο με σύνθετο επιτόκιο 10% θα ήταν 1,000 + 1,100 + 1,210 + 1,331, δηλαδή 4,641. Σε 4 χρόνια, οι καταβολές προσόδου για 1.000 ευρώ θα αξίζουν 1000(4,641), ή 4.641 ευρώ.

Παράδειγμα 2

Ζητείται να προσδιοριστεί η μελλοντική αξία που θα έχουν έπειτα από 2 χρόνια 1.000 ευρώ που κατατίθενται σήμερα, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 12% και γίνεται ανατοκισμός κάθε μήνα.

Λύση

Ένας χρόνος έχει 12 μήνες, επομένως, το N (ο αριθμός των χρονικών περιόδων) είναι 24 (2 χρόνια x 12 μήνες), Εφόσον ο τόκος ανατοκίζεται κάθε μήνα, το R (το μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού) είναι 1% (12% διά 12 μήνες). Είναι προφανές ότι η μελλοντική αξία 1 ευρώ έπειτα από 24 περιόδους, με επιτόκιο 1 %, είναι 1,27 ευρώ, Επομένως, η μελλοντική αξία 1.000 ευρώ είναι 1.270 ευρώ (1 ,27 x 1000).

Παράδειγμα 3

Ζητείται να υπολογισθεί το κεφάλαιο C_0 το οποίο θα πρέπει να κατατεθεί σήμερα προς ετήσιο επιτόκιο r= 10%, ώστε να σχηματισθεί κεφάλαιο C_5 = 20.000 ευρώ στο τέλος των 5 ετών.

Λύση

$$C_0 = 20.000 \cdot \frac{\mathbf{K}1\mathbf{K}}{(1+0,10)t} = 20.000 \cdot 0,6209 = 12.418$$, όπου t=5

Παράδειγμα 4

Επιχειρηματίας ιδρύει μια νέα επιχείρηση και καταθέτει σήμερα 100.000 ευρώ. Δεν αποσύρει τα ετήσια κέρδη του και πωλεί την επιχείρηση μετά 10 χρόνια αντί 310.584,8 ευρώ. Πόσο τοις εκατό απέδωσε το κεφάλαιο;

Λύση

$$310.584,8 = 100.000 * (1+r)t$$

$$310.584,8 = 100.000 * (1+r)10$$

$$(1+r)10 = \frac{310.584,8}{100.000}$$

Προκύπτει για 10 χρόνια r=12%.

Παράδειγμα 5

Να γίνει απόσβεση δανείου 10.000 ευρώ σε 4 έτη προς 6% με τη μέθοδο του ενιαίου ποσού.

Για το ποσό αυτό έχουμε: K=10.000 ευρώ, $i = 0,06$, n=4

και $\mathrm{I_m} = K \cdot i = 10.000 \cdot 0,06 = 600$,m=1,2,3,4.

Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου με τη μέθοδο του ενιαίου ποσού είναι:

m	I_{mp}	A_m	R_m	Y_m
1	600	0	600	10.000
2	600	0	600	10.000
3	600	0	600	10.000
4	600	10.000	10.600	0

Παράδειγμα 6

Να γίνει απόσβεση δανείου 10.000 ευρώ σε 4 έτη προς 6% με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Έχουμε: $K = 10.000, n = 4, i = 0,06$.

Οπότε:

$$R_m = R = \frac{K}{\frac{1-U^n}{i}} = \frac{10.000}{\frac{1-U^4}{0,06}} = \frac{10.000}{3,46510561} = 2.885,91$$, όπου m=1,2,3,4.

Επίσης:

$$X_1 = \frac{R}{(1+i)^n} = \frac{2.885,91}{(1+0,06)^4} = 2.285,91 \qquad I_1 = 10.000 \cdot 0,06 = 600$$

και $$Y_1 = 10.000 - 2.285,91 = 7.714,09$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έχουμε

$$X_2 = X_1 \cdot (1+0,06) = 2.285,91 \cdot 1,06 = 2.423,06$$

$$I_2 = 2.285,91 \cdot 0,06 = 462,84$$

και $$Y_2 = 10.000 - (2.285,91 + 2.423,06) = 5.291,03.$$

Επίσης: $$X_3 = X_2 \cdot (1+0,06) = 2.423,06 \cdot 1,06 = 2.568,38$$

$$I_3 = 5.291,03 \cdot 0,06 = 317,46$$

και $$Y_3 = 10.000 - (2.285,91 + 2.423,06 + 2.568,38) = 2.722,65.$$

Τέλος, $$X_4 = X_3 \cdot (1+0,06) = 2.568 \cdot 1,06 = 2.722,48$$

$$I_4 = 2.722,65 \cdot 0,06 = 163,359$$

και $$Y_4 = 2.722,65 - 2.722,48 \cong 0.$$

Οπότε ο πίνακας απόσβεσης του δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου είναι:

m	X_m	I_m	R_m	Ym
1	2.285,91	600	2.885,91	7.741,09
2	2.423,06	462,84	2.885,91	5.291,03
3	2.568,38	371,46	2.885,91	2.722,65
4	2.722,48	163,359	2.885,91	0

Παράδειγμα 7

Δανείζεται κάποιος 50.000 ευρώ από το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 6,5%. Αν το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί σε 20 έτη με ισόποσες εξαμηνιαίες τοκοχρεολυτικές δόσεις, κάθε μια εκ των οποίων να καταβάλλεται στο τέλος του εξαμήνου, να υπολογιστεί το τοκοχρεολύσιο και το ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά από 16 έτη και 6 μήνες. Να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα τρία πρώτα έτη με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.

Έχουμε: K=50.000, n=20 και $\frac{i}{2}$=0,0325, $r = 2 \cdot 16 + 1 = 33$ εξάμηνα.

Αφού οι δόσεις καταβάλλονται εξαμηνιαίως, το ποσό κάθε μιας θα είναι:

$$R = K \cdot \frac{\frac{i}{2}}{1 - \frac{1}{(1+\frac{i}{2})^{2n}}} = 50.000 \cdot \frac{0,0325}{1 - \frac{1}{1,0325^{40}}} = 2.251,40$$

Άρα η τοκοχρεολυτική εξαμηνιαία δόση του δανείου είναι 2.251,40 ευρώ.

Το ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά από 33 εξάμηνα θα είναι:

$$Y_1 = K - K \cdot \frac{\frac{i}{2}}{(1+\frac{i}{2})^{2n} - 1} \cdot \frac{(1+\frac{i}{2})^2 - 1}{\frac{i}{2}} \Rightarrow$$

$$Y_{33} = 50.000 - 50.000 \cdot \frac{0,0325}{(1+0,0325)^{40} - 1} \cdot \frac{(1+0,0325)^{33} - 1}{0,0325} = 13.895,71.$$

Άρα μετά από 16 έτη και 6 μήνες ο δανειζόμενος οφείλει 13.895,71 ευρώ υπόλοιπο του δανείου του.

Για την σύνταξη του πίνακα απόσβεσης του δανείου έχουμε:

I_1=50.000$\cdot$0,0325=1,625. $X_1 = \frac{R}{(1+\frac{i}{2})^{2n}} = \frac{2.251,40}{(1+0,0325)^{40}} = 626,40$

και Y_1= 50.000-626,40=49.373,60

I_2=49.373,60$\cdot$0,0325=1.604,64

X_2=$X_1$$\cdot$(1+0,0325)= 626,40$\cdot$1,0325=646,76

και Y_2=50.000-(626,40+646,76)=48.726,84 I_3=48.726,84 $\cdot$0,0325=1.583,62

X_3=$X_2$$\cdot$(1+0,0325)=646,76$\cdot$1,0325=667,78

και Y_3=50.000-(626,40+646,76+667,78)=48.059,06

I_4=48.059,06$\cdot$0,0325=1.561,92

X_4=$X_3$$\cdot$(1+0,0325)=667,78$\cdot$1,0325=689,48

και Y_4=50.000-(626,40+646,76+667,78+689,48)=47.369,58

$$I_5=47.369,58\cdot 0,0325=1.539,51$$

$$X_5=X_4\cdot(1+0,0325)=689,48\cdot 1,0325=711,89$$

και $$Y_5=50.000-(626,40+646,76+667,78+689,48+711,89)=46.657,69.$$

Τέλος, $I_6=46.657,69\cdot 0,0325=1.516,37$

$$X_6=X_5\cdot(1+0,0325)=711,89\cdot 1,0325=735,03$$

και $$Y_6=46.657,69-735,03=45.922.66.$$

Οπότε ο πίνακας απόσβεσης του δανείου, για τα πρώτα τρία έτη, με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου, είναι:

m	A_m	I_m	R_m	Y_m
1	626,40	1.625,00	2.251,40	49.373,60
2	646,76	1.604,64	2.251,40	48.726,84
3	667,78	1.583,62	2.251,40	48.059,06
4	689,48	1.561,92	2.251,40	47.369,58
5	711,89	1.539,51	2.251,40	46.657,69
6	735,03	1.516,37	2.251,40	45.922,66

Παράδειγμα 8

Η TELESTAR A.E. σύναψε ομολογιακό δάνειο 20.000.000 ευρώ που αποτελείται από 20.000 ομολογίες, κάθε μια εκ των οποίων έχει ονομαστική αξία 1.000 ευρώ. Το δάνειο αυτό θα εξοφληθεί στο άρτιο σε 8 έτη με ετήσιες κληρώσεις ομολογιών και με επιτόκιο 4%. Να υπολογιστεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα πρώτα δύο έτη.

Έχουμε: K=1.000 ευρώ, C=20.000.000 ευρώ, N=20.000, n=8 και i=0,04.

Οπότε:

α) $$R=C\cdot\frac{i}{1-U^n}=20.000.000\cdot\frac{0,04}{1-U^8}=556.926$$

β) $$N_1=N\cdot\frac{i}{(1+i)^n-1}=20.000\frac{0,04}{(1+0,04)^8-1}=2.170$$

$N_2=N_1 \cdot (1+i)=2170 \cdot (1+0,04)=2.257$

Επίσης για τη σύνταξη απόσβεσης του πίνακα του ομολογιακού δανείου υπολογίζουμε τα χρεολύσια X_m, m=1,2, και τους τόκους I_m, m=1,2.

Έχουμε:

$X_1 = N_1 \cdot K = 2.170 \cdot 1.000 = 2.170.000$ και

$$X_2 = N_2 \cdot K = 2.257 \cdot 1.000 = 2.257.000$$

Επίσης:

$$I_1 = R - X_1 = 2.970.562,8 - 2.170.000 = 800.000,9 \quad \text{και}$$

$$I_2 = R - X_2 = 2.970.562,8 - 2.257.000 = 713.556,9 .$$

Συνεπώς ο πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα πρώτα δύο έτη είναι:

m	N_m	X_m	R_m=R	I_m	Αν. Ομολογίες
1	2.170	2.170.000	2.970.556,926	800.000,9	17.830
2	2.257	2.257.000	2.970.556,926	713.556,9	15.573

2.2.ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μία ειδική κατηγορία σχέσεων, είναι οι συναρτήσεις. Με τον όρο συνάρτηση (function) f από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y ορίζουμε μια σχέση μεταξύ του X και του Y έτσι ώστε κάθε στοιχείο του X να σχετίζεται, μέσω της f, με ένα και μόνο ένα στοιχείο του Y. Η f ονομάζεται και μετασχηματισμός ή απεικόνιση του X στο Y και γράφεται $f: X \to Y$. Αν $y \in Y$ είναι το στοιχείο με το οποίο σχετίζεται ένα συγκεκριμένο στοιχείο $x \in X$, τότε γράφουμε y=f(x). Το x αναφέρεται συνήθως ως ανεξάρτητη μεταβλητή (independent variab1e), ενώ το Y ως εξαρτημένη μεταβλητή (dependent variab1e) ή ως εικόνα (image) του x διά της f ή και ως τιμή (va1ne) της f στο x.

Παράδειγμα

Συνάρτηση κατανάλωσης $C = f(Y) = a+b\cdot Y$

Όπου C είναι η κατανάλωση και Y το διαθέσιμο εισόδημα. Ως πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών μπορούμε εδώ να ορίσουμε τα σύνολα των δυνατών τιμών του διαθέσιμου εισοδήματος και κατανάλωσης αντίστοιχα.

Επιπρόσθετα ο οικονομολόγος μπορεί να ορίσει τιμές για τις παραμέτρους π.χ. $a>0$ και $b>0$. Οι περιορισμοί αυτοί στις παραμέτρους είναι ανεξάρτητοι του ορισμού της συνάρτησης. Είναι χρήσιμοι όμως όταν θέλουμε να καθορίσουμε ένα μερικό υποσύνολο η οικογένεια συναρτήσεων συμβατών με την οικονομική θεωρία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι οι συναρτήσεις εσόδων και δαπανών μιας γεωργικής εκμετάλλευσης είναι αντίστοιχα

$$R = 200 \cdot q$$

$$C = 1000 + 90 \cdot q + q^2$$

όπου τα E και C εκφράζονται σε ευρώ και το επίπεδο παραγωγής ή πώλησης q σε τόννους.

Τα νεκρά σημεία παραγωγής προσδιορίζονται τότε από τη σχέση

$$R=C$$

ή από τη σχέση

$$200 \cdot q = 1000 + 90 \cdot q + q^2$$

ή

$$q^2 - 110 \cdot q + 1000 = 0$$

από όπου προκύπτουν

$$q_1=10 \text{ και } q_2=100 \text{ τόννοι}$$

Στα επίπεδα αυτά η εκμετάλλευση παρουσιάζει έσοδα και δαπάνες αντίστοιχα

$$R_1=C_1=2000 \text{ ευρώ}$$

$$R_2=C_2=20000 \text{ ευρώ}$$

Δηλαδή όταν η εκμετάλλευση παράγει και πουλάει ποσότητα προϊόντων ίση με 10 ή 100 τόννων δεν πραγματοποιεί ούτε κέρδη ούτε ζημίας.

Όταν τώρα η εκμετάλλευση παράγει ποσότητα προϊόντων μεταξύ των 10 και 100 τόννων παρουσιάζει κέρδος, η καμπύλη εσόδων βρίσκεται πάνω από τη καμπύλη δαπανών. Αντίθετα όταν παράγει και πουλάει ποσότητα μικρότερη των 10 τόννων ή μεγαλύτερη των 100 τόννων παρουσιάζει ζημιά.

Παράδειγμα 2

Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι ένας παραγωγός θέλει να προμηθεύσει μια αγορά με το προϊόν του σύμφωνα με τη σχέση

$$q_s = 25 \cdot p - 10$$

Και η ζήτηση του προϊόντος αυτού εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$q_d = 200 - 5 \cdot p$$

όπου οι ποσότητες q_s και q_d μετρώνται σε χλγ. και η τιμή πώλησης p σε ευρώ/χλγ.

Η τιμή ισορροπίας προκύπτει από την εξίσωση

$$q_d = q_s \Rightarrow 200 - 5 \cdot p = 25 \cdot p - 10 \Rightarrow 30 \cdot p - 210 = 0$$

Από την τελευταία βρίσκουμε $p = 7$ ευρώ/χλγ.

Η αντίστοιχη ποσότητα ισορροπίας είναι $p = 200 - 5 \cdot 7 = 165$ χλγ.

Δηλαδή με βάση τις συγκεκριμένες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς, θα έχουμε ισορροπία στην αγορά του προϊόντος όταν αυτό προσφέρεται στην τιμή των 7 ευρώ/χλγ. Η ποσότητα ισορροπίας ανέρχεται τότε σε 165 χλγ. Διαφορετικά, αν η τιμή πώλησης είναι μεγαλύτερη από 7 ευρώ/χλγ. θα έχουμε υπερπροσφορά του προϊόντος και η ζήτηση δεν θα μπορεί να καλύψει τη ζήτηση του προϊόντος.

Μια μεταβολή της συνάρτησης ζήτησης ή προσφοράς του προϊόντος λόγω μεταβολής διαφόρων συνθηκών είτε από την πλευρά των καταναλωτών (π.χ. αύξηση του διαθέσιμου εισοδήματός τους) είτε από την πλευρά των παραγωγών (π.χ. μεταβολή στις τιμές λιπασμάτων και πρώτων υλών) θα έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της τιμής και της ποσότητας ισορροπίας.

Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας εκμετάλλευσης με ένα κλάδο παραγωγής δίνεται από τη σχέση

$$C = 100 + 2 \cdot p + 0,1 \cdot q^2$$

το παραγόμενο προϊόν q που εκφράζεται σε τόννους ζητείται στην αγορά σύμφωνα με την συνάρτηση ζήτησης

$$q = 100 - 5 \cdot p$$

όπου p η τιμή πώλησης του προϊόντος σε ευρώ/τον.. Να βρεθούν τα νεκρά σημεία παραγωγής, όταν η συνάρτηση εσόδων της εκμετάλλευσης είναι η

$$R = p \cdot q$$

Οι τρεις παραπάνω σχέσεις μαζί με την ταυτότητα εσόδων-εξόδων αποτελούν το σύστημα εσόδων-δαπανών της συγκεκριμένης εκμετάλλευσης.

Επειδή το κόστος εκφράζεται συναρτήσει του παραγόμενου προϊόντος, βρίσκουμε αρχικά την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης ζήτησης, δηλαδή τη συνάρτηση τιμής πώλησης. Αυτή είναι η

$$p = 20 - 0,2 \cdot q$$

Με βάση αυτήν, η συνάρτηση εσόδων γίνεται

$$R = 20 \cdot q - 0,2q^2$$

Από την ισότητα τώρα

$$R=C$$

παίρνουμε κατά σειρά

$$20 \cdot q - 0,2q^2 = 100 + 2 \cdot q + 0,1q^2 = 0,3q^2 - 18q + 100 = 0$$

$$q_1 = 6,2 \text{ και } \quad q_2 = 53,8 \text{ τόννοι}$$

Δηλαδή η εκμετάλλευση δεν σημειώνει ούτε κέρδη ούτε ζημίες όταν παράγει ποσότητα 6,2 τόννους ή 53,8 τόννους προϊόντος.

Παράδειγμα 4

Ένας παραγωγός προμηθεύει μια αγορά με το προϊόν του σύμφωνα με τη σχέση

$$q_s = 2p^2 - 3p - 40$$

Στην αγορά αυτή το προϊόν του παραγωγού ζητείται σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$q_d = 10 - 4p - p^2 + Y$$

όπου q_s και q_d η προσφερόμενη και η ζητούμενη αντίστοιχα ποσότητα προϊόντος σε χλγ., p η τιμή πώλησης σε ευρώ και Y εξωγενής μεταβλητή που καθορίζει το επιπλέον διαθέσιμο, γι' αυτό το προϊόν, εισόδημα των καταναλωτών σε ευρώ.

Να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας του προϊόντος όταν Y=240 ευρώ και Y=480 ευρώ αντίστοιχα.

Για Y=240 η συνάρτηση ζήτησης γίνεται

$$q_d = 250 - 4 \cdot p - p^2$$

Συνεπώς από τη σχέση ισορροπίας $q_d = q_s$

Βρίσκουμε $250 - 4 \cdot p - p^2 = 2p^2 - 3p - 40 = 3p^2 + p - 290 = 0$

$$P_1 = -10 \quad \text{και } p_2 = 9,67$$

Από τις τιμές αυτές παραδεκτή είναι η $p_2 = 9,67$. Συνεπώς η τιμή ισορροπίας για το συγκεκριμένο προϊόν είναι 9,67 ευρώ./χλγ.

Η αντίστοιχη ποσότητα ισορροπίας είναι τότε

$$q = 250 - 4 \cdot 9,67 - 9,67^2 = 117,81 \text{ευρώ}$$

'Οταν το εισόδημα Y μεταβληθεί από 240 σε 480 δρχ. η συνάρτηση ζήτησης θα πάρει τη μορφή $q_d = 490 - 4 \cdot p - p^2$

και από τη σχέση $q_d=q_s$

θα έχουμε $490-4\cdot p-p^2=2\cdot p^2-3\cdot p-40=3p^2+p-530=0$

p_1=-13,46 και p_2=13,12

Από τις τιμές αυτές είναι παραδεκτή μόνο η p=13,12 ευρώ/χλγ..

Η αντίστοιχη ποσότητα ισορροπίας είναι η $q=490-4\cdot 13{,}12-13{,}12^2=265{,}38$ χλγ.

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι όταν το Υ αυξηθεί από 240 σε 480 ευρώ ή κατά 100%, τότε η τιμή ισορροπίας αυξάνεται από 9,67 σε 13,12 ευρώ/χλγ. ή κατά 35,7% και η ποσότητα ισορροπίας από 117,81 σε 265,38 χλγ. ή κατά 125,3%.

Παράδειγμα 5

Η επιχείρηση (Ε) παράγει τα προϊόντα π_1, π_2, π_3, π_4 των οποίων οι τιμές και οι ποσότητες βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα.

Ζητείται να βρεθεί το συνολικό κέρδος (R) της επιχείρησης, όταν το συνολικό κόστος (C) είναι 100.000 ευρώ.

ΠΡΟΙΟΝΤΑ	ΤΙΜΕΣ (P)	ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ (Q)
π_1	P_1=5 ευρώ	Q_1=1000 τεμ.
π_2	P_2=7 ευρώ	Q_2=2350 τεμ.
π_3	P_3=10,5 ευρώ	Q_3=537 τεμ.
π_4	P_4=27,5 ευρώ	Q_4=5600 τεμ.

Λύση

Τα συνολικά έσοδα (R) της επιχείρησης, από την πώληση των προϊόντων της π_1, π_2, π_3, και π_4, θα είναι:

$$R=P_1\cdot Q_1+P_2\cdot Q_2+P_3\cdot Q_3+P_4\cdot Q_4$$

$$=R_1+R_2+R_3+R_4$$

$$=\sum_{i=1}^{4}R_i=\sum_{i=1}^{4}P_i\cdot Q_i$$

$$= 5\cdot 1000 + 7\cdot 2350 + 10,5\cdot 537 + 27,5\cdot 5600 = 181.088,5$$

Το συνολικό κέρδος της επιχείρησης θα είναι:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{4} R_i - C = 181.088,5 - 100.000 = 81.088,5 .$$

2.3.ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Από την οικονομική θεωρία είναι γνωστό ότι ένα απλό υπόδειγμα προσδιορισμού του Εισοδήματος μιας κλειστής οικονομίας είναι:

$$\begin{aligned} &Y = C + I_0 + G_0 && \\ &C = a + b(Y - T) && (a > 0, 0 < b < 1) \\ &T = d + tY && (d > 0, 0 < t < 1) \end{aligned}$$

όπου Y είναι το Εισόδημα, C η Κατανάλωση, I_0 οι επενδύσεις, G_0 οι κρατικές δαπάνες και T οι φόροι. Το ζητούμενο υπόδειγμα αυτό είναι να προσδιορίσουμε τις τιμές των μεταβλητών Y,C και T με δεδομένες τις επενδύσεις I0, τις κρατικές δαπάνες G_0 καθώς και τις τιμές των παραμέτρων a, b, d και t. Το παραπάνω υπόδειγμα είναι ένα παράδειγμα γραμμικού συστήματος, η επίλυση του οποίου προσδιορίζει τις τιμές των ενδογενών μεταβλητών Y, C και T.

Γενικά, πολλά οικονομικά υποδείγματα ανάγονται στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων, οι οποίες μετά την αναγωγή ομοίων όρων μπορεί να γραφούν στη μορφή:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

όπου α_{ij} και β_i για i=1,…….,k και j=1,…….,ν είναι γνωστές παράμετροι και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ν μεταβλητές των οποίων τις τιμές πρέπει να προσδιορίσουμε. Κάθε τέτοιο σύνολο εξισώσεων λέγεται σύστημα γραμμικών εξισώσεων ή γραμμικό σύστημα.

Το παραπάνω σύστημα γράφεται συνοπτικά:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ για i=1,……k}$$

Στην Οικονομία έχουμε το σύστημα εσόδων και δαπανών.

Το σύστημα αυτό περιλαμβάνει τις δύο συναρτήσεις εσόδων Ε και συνολικών δαπανών ή συνολικού κόστους Κ

$$R=\varphi(q)$$

και

$$C=f(q)$$

και την ταυτότητα (συνθήκη ισορροπίας)

R=C

Αυτό χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη μελέτη των εισροών και εκροών μιας γεωργικής εκμετάλλευσης ή επιχείρησης λόγω της παραγωγής και πώλησης μιας ποσότητας προϊόντος.

Από το σύστημα εσόδων και δαπανών μπορούμε να προσδιορίσουμε το επίπεδο ή τα επίπεδα ισορροπίας της εκμετάλλευσης, ή όπως για το συγκεκριμένο σύστημα ονομάσαμε, τα νεκρά σημεία παραγωγής της εκμετάλλευσης ή επιχείρησης, όπου η εκμετάλλευση ή επιχείρηση δεν πραγματοποιεί ούτε κέρδη ούτε ζημίες. Αυτά προκύπτουν από την ταυτότητα R=C.

Επίσης στην Οικονομία έχουμε το σύστημα ζήτησης και προσφοράς. Το σύστημα αυτό συνίσταται συνήθως με την απλή μορφή

$Q_d=\varphi(p)$

$Q_s=f(p)$

$q_d=q_s$

όπου φ(π) η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος, f(p) η αντίστοιχη συνάρτηση προσφοράς του, P η τιμή πώλησης, με την οποία το προϊόν διατίθεται στην αγορά, και q_d και q_s οι αντίστοιχες στην τιμή αυτή ζητούμενη ποσότητα από τους καταναλωτές και προσφερόμενη ποσότητα προϊόντων από τον παραγωγό ή τους παραγωγούς.

Η τιμή πώλησης ή οι τιμές πώλησης όπου η ζητούμενη ποσότητα προϊόντος είναι ίση με την προσφερόμενη ποσότητα αυτού λέγονται τιμές ισορροπίας γιατί έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ισορροπίας στην αγορά του προϊόντος μεταξύ προσφερόμενης και ζητούμενης ποσότητας αυτού. Η ποσότητα προϊόντος που αντιστοιχεί στην τιμή ισορροπίας λέγεται ποσότητα ισορροπίας.

Η τιμή ή οι τιμές ισορροπίας προκύπτουν από τη σχέση $q_d=q_s$ η δε αντίστοιχη ποσότητα ή ποσότητες ισορροπίας από τη συνάρτηση ζήτησης ή προσφοράς με βάση την τιμή ή τις τιμές ισορροπίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Συνάρτηση ζήτησης και προσφοράς, Ελαστικότητα ζήτησης και προσφοράς, Σημείο ισορροπίας

Μία έρευνα αγοράς έχει δώσει τα ακόλουθα σημεία για τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς.

ΖΗΤΗΣΗ	
Q_d	P
1	1902

ΠΡΟΣΦΟΡΑ	
Q_s	P
1	9
5	145
10	540

5	1550
10	1200

Όπου, Q_d:η ζητούμενη ποσότητα, Q_s:η προσφερόμενη ποσότητα και P:η τιμή ανά μονάδα προϊόντος.

(Α) Προσδιορίστε τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, υποθέτοντας και στις δύο περιπτώσεις ότι P=f(Q), μεγαλύτερη των 20 μονάδων.

(Β) Προσδιορίστε την τιμή και την ποσότητα στο σημείο ισορροπίας.

(Δ) Απεικονίστε τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς και το σημείο ισορροπίας σε διάγραμμα με την βοήθεια του Excel, όπου στον κάθετο άξονα θα απεικονίζεται η τιμή P και στον οριζόντιο η ποσότητα, Q.

Λύση

(Α) Για τη συνάρτηση ζήτησης θα υπάρχουν $a,b,c \in R$ ώστε $P = aQ^2 + bQ + c$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές των P,Q_d στον προηγούμενο τύπο της τιμής, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{ll} 1902 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c & (1) \\ 1550 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c & (2) \\ 1200 = a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c & (3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a + b + c = 1902 & (1) \\ 25a + 5b + c = 1550 & (2) \\ 100a + 10b + c = 1200 & (3) \end{array}\right.$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα και βρίσκουμε τους συντελεστές $a,b,c \in R$.

Έχουμε:

$$\left.\begin{cases} a+b+c=1902 & (1)\\ 25a+5b+c=1550 & (2)\\ 100a+10b+c=1200 & (3)\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (3)-(1) & 75a+5b=-350\\ (2)-(1) & 24a+4b=-352\\ (1) & a+b+c-1902\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 15a+b=-70\\ 6a+b=-88\\ a+b+c=1902\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 15a+b=-70\\ 6a+b=-88\end{matrix}\right\} \Rightarrow 15a-6a+b-b=-70+88 \Rightarrow 9a=18 \Rightarrow a=2 \quad \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} a=2\\ b=-88-12=-100\\ c=1902-2+100=2000\end{cases}$$

$$a+b+c=1902$$

Επομένως η εξίσωση ζήτησης ισούται με $P=2Q_d{}^2-100Q_d+2000, 0\le Q_s\le 20$.

Για τη συνάρτηση προσφοράς θα υπάρχουν $d,e,f\in R$ ώστε $P=dQ^2+eQ+f$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές των P,QS στον προηγούμενο τύπο της τιμής, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\left.\begin{matrix} 9=d\cdot 1^2+e\cdot 1+f & (1)\\ 145=d\cdot 5^2+e\cdot 5+f & (2)\\ 540=d\cdot 10^2+e\cdot 10+f & (3)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} d+e+f=9 & (1)\\ 25d+5e+f=145 & (2)\\ 100d+10e+f=540 & (3)\end{cases}$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα και βρίσκουμε τους συντελεστές $d,e,f\in R$.

Έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} d+e+f=9 & (1)\\ 25d+5e+f=145 & (2)\\ 100d+10e+f=540 & (3)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (3)-(2) & 75d+5e=395\\ (2)-(1) & 24d+4e=136\\ (1) & d+e+f=9\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 15d+e=79\\ 6d+e=34\\ d+e+f=9\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 15d+e=79\\ 6d+e=34\end{matrix}\right\} \Rightarrow 15d-6d+e-e=79-34 \Rightarrow 9d=45 \Rightarrow d=5 \quad \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} d=5\\ e=34-30=4\\ f=9-5-4=0\end{cases}$$

$$d+e+f=9$$

Επομένως η εξίσωση προσφοράς ισούται με $P=5Q_S{}^2+4Q_S, 0\le Q_S\le 20$.

(B) Στην κατάσταση ισορροπίας ισχύει ότι P_d=P_s και Q_d=Q_s.

Έχουμε λοιπόν:

$$P_d=P_s \Leftrightarrow 2Q^2-100Q+2000=5Q^2+4Q \Leftrightarrow 3Q^2+104Q-2000=0$$

$$3Q^2+104Q-2000=0$$

$$Q_{1,2}=\frac{-104\pm\sqrt{104^2-4\cdot3\cdot(-2000)}}{2\cdot3}=\frac{-104\pm\sqrt{34816}}{6}=\frac{-104\pm186,59}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Q_1=\dfrac{82,59}{6}=13,765\\[2ex] Q_2=\dfrac{-290,59}{6}=-48,43<0 \quad aporr\acute{\imath}ptetai\end{cases}$$

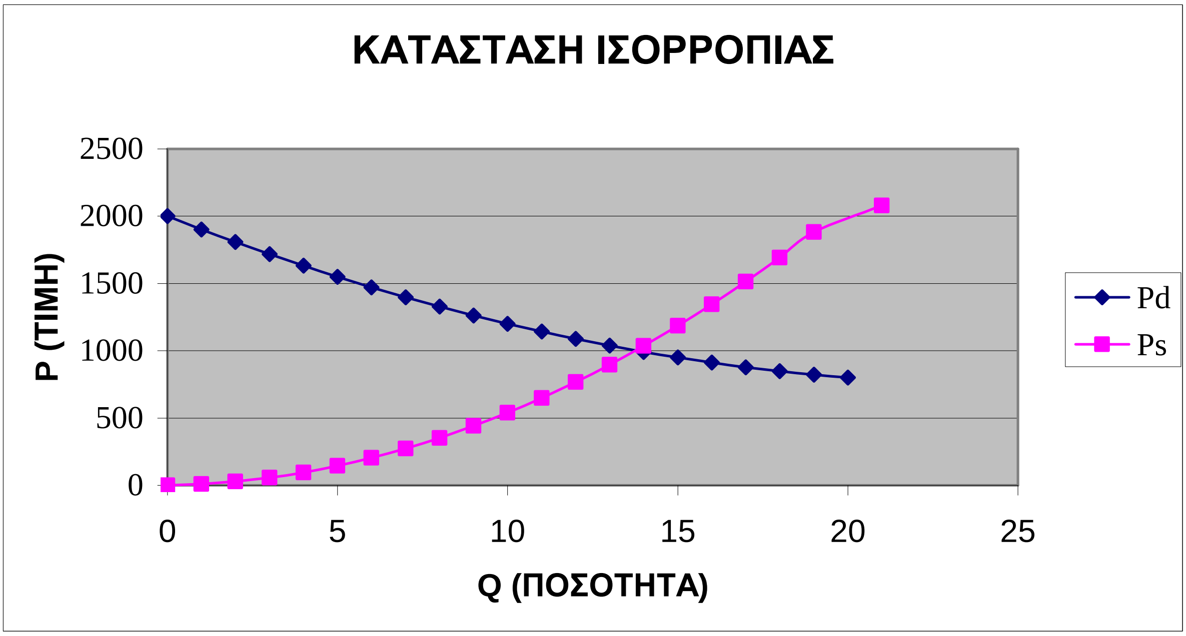
Οπότε η ποσότητα στο σημείο ισορροπίας είναι Q=13,765 μονάδες

Η τιμή ισούται με $P=5\cdot13,765^2+4\cdot13,765=1002,436$ νομισματικές μονάδες.

(Δ) Σύμφωνα με το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων ζήτησης και προσφοράς προκύπτει ο παρακάτω πίνακας τιμών τους καθώς και το διάγραμμα όπου φαίνεται και το σημείο ισορροπίας.

Q	P_d	P_s
0	2000	0
1	1902	9
2	1808	28
3	1718	57
4	1632	96
5	1550	145
6	1472	204
7	1398	273
8	1328	352
9	1262	441
10	1200	540
11	1142	649
12	1088	768
13	1038	897
14	992	1036

15	950	1185
16	912	1344
17	878	1513
18	848	1692
19	822	1881
20	800	2080



Παράδειγμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις αγοραίας ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος:

$Q_D = F(P) = 10 - P$, και

$Q_S = \Phi(P) = -1 + 2 \cdot P$.

Ζητούνται: α) Να γίνουν οι διαγραμματικές παρουσιάσεις των παραπάνω συναρτήσεων.

β) Να βρεθεί η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά του προϊόντος Q και η τιμή ισορροπίας P.

Λύση

α) Οι παραπάνω συναρτήσεις αγοραίας ζήτησης και προσφοράς είναι γραμμικής μορφής, όπως φαίνεται από τη μαθηματική τους έκφραση και οι διαγραμματικές τους παρουσιάσεις είναι ευθείες γραμμές.

Η συνάρτηση αγοραίας ζήτησης είναι γνησίως φθίνουσα κι αυτό γιατί ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή της τιμής, είναι το -1, ενώ η συνάρτηση αγοραίας προσφοράς είναι γνησίως αύξουσα κι αυτό γιατί ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι το +2.

Η ευθεία της αγοραίας ζήτησης κατέρχεται από τα πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά, ενώ η ευθεία της αγοραίας προσφοράς ανέρχεται από τα κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά.

Τα σημεία τομής των ευθειών αγοραίας ζήτησης και προσφοράς με τους άξονες, βρίσκονται ως εξής:

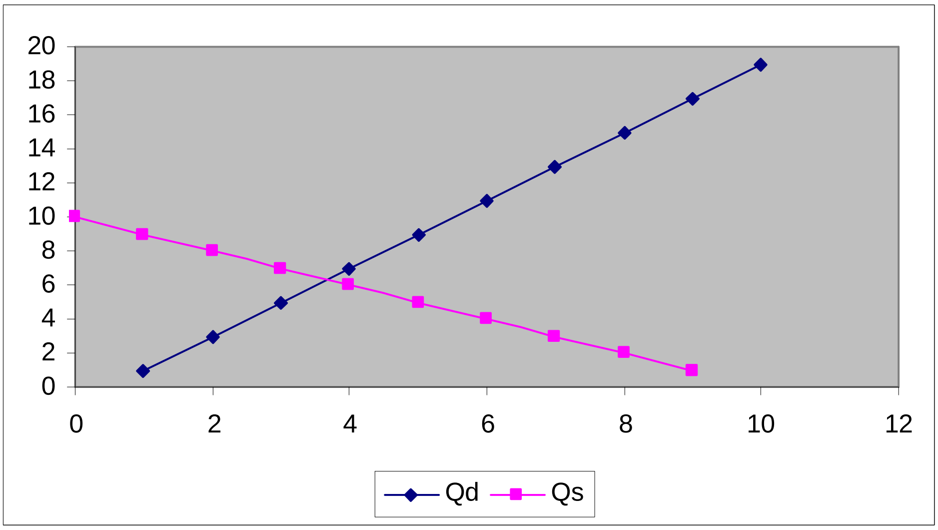
Όταν P=0, $Q_D = F(0) = 10$

Όταν Q_D=0, $10 - P = 0 \quad kai \quad P = 0$

Όταν P=0, $Q_S = \Phi(0) = -1$

Όταν Q_S=0, $-1 + 2 \cdot P = 0 \quad kai \quad P = \frac{1}{2} = 0,5$

Η διαγραμματική παρουσίαση των συναρτήσεων αγοραίας ζήτησης και προσφοράς φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



β) Η τιμή ισορροπίας P και η ποσότητα ισορροπίας Q στην αγορά του προϊόντος, βρίσκονται ως εξής:

$$Q_D = Q_S \Rightarrow 10 - P = -1 + 2 \cdot P \Rightarrow 10 + 1 = 2 \cdot P + P$$

$$\text{και} \quad P = \frac{11}{3} = 3{,}66 \text{ ευρώ.}$$

$$Q = Q_D = Q_S = F(3{,}66) = \Phi(3{,}66) = \frac{19}{3} = 6{,}34 \text{ μονάδες.}$$

2.4.ΠΙΝΑΚΕΣ-ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΗΤΡΑΣ

Ορίζοντας την έννοια της μήτρας, αξιόλογο θα ήταν να αναφερθεί αρχικά ότι έχει σημαντικές εφαρμογές τόσο στα θεωρητικά οικονομικά υποδείγματα, όσο και στην ποσοτική ανάλυση.

Κάθε τέτοια διάταξη $k \cdot \nu$ πραγματικών αριθμών σε k γραμμές και ν στήλες λέγεται μήτρα (matrix) ($k \times \nu$). Κάθε στοιχείο της μήτρας χαρακτηρίζεται πλήρως από τη γραμμή και τη στήλη στην οποία βρίσκεται. Έτσι, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο θεωρητικό ορισμό:

Ορισμός:Αν A_K={1,2,…,k} και A_ν={1,2,…,ν}, τότε κάθε απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου $A_k \times A_\nu$ λέγεται μήτρα (matrix) ή πίνακας (table) ($k \times \nu$).

Μια μήτρα γράφεται ως εξής:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$A=[a_{ij}]$ για i=1,….,k και j=1,….,ν.

Μία μήτρα A=(α1 α2 … αk) με μια μόνο γραμμή λέγεται διάνυσμα γραμμή,

ενώ μία μήτρα $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ με μία στήλη λέγεται διάνυσμα στήλη.

Το διάνυσμα $α_i=(α_{i1},α_{i2},\dots,α_{iν})$ λέγεται i-διάνυσμα γραμμή (row vector) της μήτρας A ενώ το διάνυσμα $α_j=(α_{1j},α_{2j},\dots,α_{kj})$ λέγεται j-διάνυσμα στήλη (column vector) της A.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

Η έννοια της ορίζουσας έχει πολλές εφαρμογές ιδιαίτερα στην επίλυση γραμμικών συστημάτων και για το λόγο αυτό θα την παρουσιάσουμε αναλυτικά. Ας θεωρήσουμε μια μήτρα $A_{(2\times2)}$ π.χ. την $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ο αριθμός $α_{11}\,α_{22} - α_{12}\,α_{21}$ λέγεται ορίζουσα της μήτρας A συμβολίζεται με det(A) ή $|A|$ και παριστάνεται σχηματικά με $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Αν η A είναι (3×3), π.χ. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, με διαγραφή μιας γραμμής και μιας στήλης της A, προκύπτουν 9 υπομήτρες 2×2. Οι ορίζουσες που αντιστοιχούν στις μήτρες αυτές συμβολίζονται με D_{ij} όπου i και j είναι η γραμμή και η στήλη που διαγράφουμε για να πάρουμε την αντίστοιχη μήτρα

2×2. Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα $\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{ij}D_{ij}$ είναι το ίδιο για κάθε i=1,2,3. Το σταθερό αυτό άθροισμα το ονομάζουμε ορίζουσα της μήτρας Α και το συμβολίζουμε det(A) ή $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η ορίζουσα που αντιστοιχεί σε μια μήτρα 4×4 και, γενικότερα, σε μια μήτρα ν×ν.

Πιο συγκεκριμένα, έστω μια μήτρα (ν×ν) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$. Με διαγραφή μιας γραμμής i και μιας στήλης j της Α προκύπτει μια μήτρα (ν-1)×(ν-1) στην οποία αντιστοιχεί μια ορίζουσα (ν-1) τάξης που συμβολίζεται D_{ij}. Έτσι ορίζονται $n \cdot n = n^2$ τέτοιες ορίζουσες (ν-1) τάξης.

Ορισμός: Ονομάζουμε ορίζουσα (determinant) της μήτρας Α και τη συμβολίζουμε με

$$\det(A) \quad ή \quad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

τον αριθμό $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{ij}D_{ij}, i=1,2,...,n$.

Οι ορίζουσες D_{ij}, οι οποίες είναι ορίζουσες τάξης (ν-1) και προκύπτουν αν απαλειφθεί ι i-στη γραμμή και η j-στη στήλη της Α, λέγονται ελάσσονες (minors) ορίζουσες της Α. Γενικότερα, ελάσσων ορίζουσα τάξης κ της $|A|$ λέγεται κάθε ορίζουσα που προκύπτει από την $|A|$ αν διαγράψουμε ν-κ γραμμές και ν-κ στήλες της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Έστω ότι σε μια οικονομία παράγονται μόνο δύο αγαθά, ατσάλι και κάρβουνο. Η μήτρα των τεχνολογικών συντελεστών παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Εισροές	Εκροές	
Αγαθά	Ατσάλι	Κάρβουνο
Εργασία	0,5 χιλ. εργατοώρες	1,5 χιλ. εργατοώρες
Ατσάλι	0,5	0,2
Κάρβουνο	0,3	0,6

(i) Ποια είναι η απαιτούμενη παραγωγή αν προβλέπεται τελική ζήτηση 3 εκατ. τόνοι ατσαλιού και 8 εκατ. τόνοι κάρβουνου;

(ii) Ποια είναι η μεταβολή της παραγωγής αν η τελική ζήτηση αυξηθεί κατά 1 εκατ. τόνους ατσαλιού και κατά 1 εκατ. τόνους κάρβουνου;

(iii) Να βρεθεί η ποσότητα εργασίας για την παραγωγή δεδομένης ποσότητας ατσαλιού και κάρβουνου σε εργατοώρες.

(iv) Να βρεθεί η αμοιβή της εργασίας καθώς επίσης και το ποσοστό κέρδους.

Λύση

(i) Έστω ότι $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$, οπότε $I-A=\begin{pmatrix} 0,5 & -0,2 \\ -0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

και

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 2,85714 & 1,42857 \\ 2,14286 & 3,57143 \end{pmatrix}.$$

Αν προβλέπεται τελική ζήτηση 3 εκατ. τόνοι ατσαλιού και 8 εκατ. τόνοι κάρβουνου, η απαιτούμενη παραγωγή είναι:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,85714 & 1,42857 \\ 2,14286 & 3,57143 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή θα παραχθούν 20 εκατ. τόνοι ατσαλιού και 35 εκατ. τόνοι κάρβουνου.

(ii) Για την μήτρα Α ισχύει $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$.

Οι δυνάμεις της μήτρας Α είναι:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,31 & 0,22 \\ 0,33 & 0,42 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0,221 & 0,194 \\ 0,291 & 0,318 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0,1687 & 0,1606 \\ 0,2409 & 0,2490 \end{pmatrix}$$

Έτσι, μπορούμε για παράδειγμα να προσεγγίσουμε την (I-A)-1 με το άθροισμα I+A+A2+A3+A4. Το άθροισμα αυτό είναι:

$$I + A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 2,1997 & 0,7746 \\ 1,1619 & 2,587 \end{pmatrix}$$

Είναι προφανές ότι η προσέγγιση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής. Για μια ακριβέστερη προσέγγιση πρέπει να υπολογίσουμε περισσότερους όρους του αθροίσματος $I+A+A_2+\ldots+A_k$.

Αν η τελική ζήτηση αυξηθεί κατά 1 εκατ. τόνους ατσαλιού και 1 εκατ. τόνους κάρβουνου, δηλαδή αν $\Delta c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, τότε με βάση τη μήτρα των πολλαπλασιαστών η μεταβολή της παραγωγής είναι:

$$\Delta x = (I - A)^{-1} \Delta c \quad \acute{\eta} \quad \Delta x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,28571 \\ 5,71429 \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια, η παραγωγή ατσαλιού πρέπει να αυξηθεί κατά 4,3 εκατ. τόνους και η παραγωγή κάρβουνου κατά 5,7 εκατ. τόνους.

Οι χαρακτηριστικές ρίζες της μήτρας εισροών-εκροών Α είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} 0,5-l & 0,2 \\ 0,3 & 0,6-l \end{vmatrix} = 0 \quad \acute{\eta} \quad l^2 - 1,1l + 0,24 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες λ1=0,8 και λ2=0,3.

(iii) Αν τώρα υποθέσουμε ότι η εισροή εργασίας για την παραγωγή ενός τόνου ατσαλιού είναι 0,5 χιλιάδες εργατοώρες ενώ για την παραγωγή ενός τόνου κάρβουνου είναι 1,5 χιλιάδες εργατοώρες, τότε έχουμε:

$$a_{01} = 0,5 \quad a_{02} = 1,5 \quad \acute{\eta} \quad a_0' = (0,5 \quad 1,5)$$

Η ποσότητα εργασίας που απαιτείται για την παραγωγή δεδομένης ποσότητας ατσαλιού και κάρβουνου είναι:

$$x_0 = a_0' x = a_0' (I - A)^{-1} c$$

Έτσι, αντικαθιστώντας την (I-A)-1 έχουμε:

$$x_0 = 4,64287c_1 + 6,07143c_2 \text{ (σε χιλιάδες εργατοώρες)}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει την καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων της οικονομίας. Για την προβλεπόμενη ζήτηση του παραδείγματος $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, η απαιτούμενη εισροή εργασίας είναι x_0=62,5 χιλιάδες εργατοώρες.

Για σταθερή ποσότητα εργασίας, αν λύσουμε ως προς c1, έχουμε:

$$c_1 = \frac{\overline{x}_0}{4,64287} - 1,30769c_2$$

Με άλλα λόγια, αύξηση της κατανάλωσης κάρβουνου κατά 1 τόνο προκαλεί μείωση της κατανάλωσης ατσαλιού κατά 1,3 τόνους όταν η εισροή εργασίας είναι σταθερή.

(iv) Για τον προσδιορισμό του συστήματος τιμών χρειάζεται να κάνουμε υποθέσεις για την αμοιβή της εργασίας και το ποσοστό κέρδους. Για παράδειγμα, αν w=1 και π=0, τότε:

$$(I - A')^{-1} = \begin{pmatrix} 2,85714 & 2,14286 \\ 1,42857 & 3,57143 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση $p = (\frac{1}{1+p} I - A')^{-1} w a_0$, έχουμε p_1=4,6 και p_2=6,1.

Επειδή έχουμε θέσει w=1, οι παραπάνω τιμές εκφράζονται σε όρους μισθών, δηλαδή η τιμή του ατσαλιού είναι 4,6 φορές η αμοιβή της εργασίας ανά εργατοώρα και η τιμή του κάρβουνου είναι 6,1 φορές η αμοιβή της εργασίας ανά εργατοώρα.

Παράδειγμα 2

Ένα ναυπηγείο παράγει 3 είδη πλοίων, X_1, X_2 και X_3, κάθ’ ένα από τα οποία περνάει από τρία στάδια κατασκευής, A, B και C. O αριθμός των εργατοημερών που απαιτούνται σε κάθε στάδιο για κάθε τύπο πλοίου παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα μαζί με το αντίστοιχο σύνολο των διαθέσιμων εργατοημερών ανά βδομάδα.

Στάδιο κατασκευής	Τύπος πλοίου			Διαθέσιμες Εργατοημέρες
	X_1	X_2	X_3	
A	4	10	10	162
B	1	7	12	110
C	4	8	8	140

Τί παραγωγή μονάδων πλοίου θα εξαντλούσε το σύνολο των διαθέσιμων εργατοημερών;

Λύση

Για την επίλυση του προβλήματος, τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα εκφράζονται μέσω του ακόλουθου συστήματος εξισώσεων:

$$4 \cdot X_1 + 10 \cdot X_2 + 10 \cdot X_3 = 162$$

$$X_1 + 7 \cdot X_2 + 12 \cdot X_3 = 110$$

$$5 \cdot X_1 + 8 \cdot X_2 + 8 \cdot X_3 = 140$$

Υπό μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 \\ 1 & 7 & 12 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 162 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A\cdot X = B$$

$|A| = 40$, επομένως υπάρχει μια μοναδική λύση στο σύστημα. Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer αυτή υπολογίζεται ως:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 162 & 10 & 10 \\ 110 & 7 & 12 \\ 140 & 8 & 8 \end{vmatrix}}{40} = \frac{520}{40} = 13, \qquad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 162 & 10 \\ 1 & 110 & 12 \\ 4 & 140 & 8 \end{vmatrix}}{40} = \frac{280}{40} = 7$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 & 162 \\ 1 & 7 & 110 \\ 4 & 8 & 140 \end{vmatrix}}{40} = \frac{160}{40} = 4$$

Επομένως, 13 πλοία τύπου X_1, 7 πλοία τύπου X_2 και 4 πλοία τύπου X_3 θα εξαντλήσουν όλες τις διαθέσιμες εργατοημέρες στο ναυπηγείο.

Εναλλακτικά, λύση του συστήματος μπορεί να επιτευχθεί ως

$$X = A^{-1}\cdot B$$

που προϋποθέτει αντιστροφή του A και πολλαπλασιασμό από αριστερά του πίνακα B με τον αντίστροφο του A. Έτσι, υπολογίζεται ο αντίστροφος του A ως:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1,25 \\ 1 & -0,2 & -0,95 \\ -0,5 & 0,2 & 0,45 \end{pmatrix}$$

$$\text{και} \quad X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1,25 \\ 1 & -0,2 & -0,95 \\ -0,5 & 0,2 & 0,45 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 162 \\ 110 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις έννοιες της παραγώγου και του διαφορικού με αναφορά στις σχετικά απλούστερες πραγματικές συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μμεταβλητής. Οι έννοιες αυτές έχουν ιδιαίτερη σημασία γιατί μας βοηθούν να μελετήσουμε πώς μεταβάλλονται οι τιμές των ενδογενών μεταβλητών ενός υποδείγματος όταν μεταβάλλονται οι τιμές των εξωγενών μεταβλητών ή των παραμέτρων του. Επιπλέον, η έννοια της παραγώγου χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό μέγιστου ή ελάχιστου σημείου πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής σε περιπτώσεις που δεν υπάρχουν περιορισμοί, δηλαδή όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, οι έννοιες της παραγώγου και του διαφορικού χρησιμοποιούνται για τη μαθηματική θεμελίωση βασικών οικονομικών εννοιών όπως το οριακό μέγεθος, η ελαστικότητα ή ο πολλαπλασιαστής. Επιπλέον γίνεται μία πρώτη προσέγγιση σε προβλήματα οικονομικής επιλογής που αντιμετωπίζονται με σχετικά απλές τεχνικές βελτιστοποίησης συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής.

Η έννοια της παραγώγου είναι ένα από τα βασικότερα εργαλεία με τα οποία μπορούμε να μελετήσουμε φαινόμενα από το χώρο της Οικονομικής Επιστήμης και της Διοίκησης Επιχειρήσεων και να εκτιμήσουμε την επίδραση που θα έχουν στις ενδογενείς μεταβλητές (π.χ. στο εθνικό εισόδημα) ενδεχόμενες μεταβολές στις τιμές των εξωγενών μεταβλητών (π.χ. στο συντελεστή φορολογίας). Επίσης, με τη βοήθεια της παραγώγου μπορούμε να προσδιορίσουμε ακρότατα σημεία συναρτήσεων οι οποίες περιγράφουν κάποιο οικονομικό φαινόμενο, όπως είναι τα κέρδη μιας επιχείρησης, ή η χρησιμότητα του καταναλωτή.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια σειρά από αντιπροσωπευτικές εφαρμογές της παραγώγου στα Οικονομικά και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Θεωρείστε ότι παράγεται ένα μόνο προϊόν, που συμβολίζεται με y, με τη χρήση ν εισροών x_i(i=1,2,…,ν), οι οποίες παριστάνονται από το διάνυσμα $x=(x_1,\ldots,x_\nu)\in R_\nu$. Επομένως, η δραστηριότητα παραγωγής είναι ένα σημείο $(y,x_1,\ldots,x_\nu)$ του $R_{\nu+1}$. Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι εισροές μπορούν να μεταβάλλονται συνεχώς, τότε το σύνολο των διανυσμάτων που αντιπροσωπεύουν όλους τους δυνατούς εναλλακτικούς συνδυασμούς ποσοτήτων των ν εισροών είναι ο χώρος εισροών (input space) $I=\{x=(x_1,\ldots,x_n): x_i\geq 0, i=1,\ldots,n\}$. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε συνδυασμό εισροών προσδιορίζεται τεχνολογικά η μέγιστη ποσότητα της εκροής που μπορεί να παραχθεί, τότε μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση η οποία σε κάθε σημείο $(x_1,\ldots,x_\nu)$ του χώρου εισροών αντιστοιχεί τη μέγιστη παραγόμενη ποσότητα y. Η συνάρτηση αυτή λέγεται συνάρτηση παραγωγής (production function) και συμβολίζεται με

$$y=f(x_1,\ldots,x_n)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το I. Δηλαδή

$$\text{f:} I\rightarrow\Re, I\subset\Re^n$$

Αν γίνει η απλουστευτική υπόθεση, ότι μόνο μία εισροή μπορεί να μεταβληθεί
στην παραγωγική διαδικασία, τότε η συνάρτηση παραγωγής γράφεται:

$$y=f(x), x\geq 0.$$

Έστω πραγματική συνάρτηση y = f(x) ορισμένη στο διάστημα $(\alpha,\beta)\subset\Re$. Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβληθεί κατά Δx, δηλαδή από x0 σε x0+Δx μέσα στο (α,β) η εξαρτημένη μεταβλητή θα μεταβληθεί κατά Δy=f(x0+Δx)-f(x0). Η μέση μεταβολή του Y (ανά μονάδα μεταβολής του x) στο διάστημα x0 και x0+Δx, προσδιορίζεται από το πηλίκο των διαφορών

$$\frac{f(x_0+\Delta x-f(x_0)}{\Delta x}$$

Αν το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι η y=f(x) είναι παραγωγίσιμη (differentiable) στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$. Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος αριθμός της f στο x0.

Αν το όριο $x=x_0+\Delta x$, το παραπάνω όριο γράφεται ισοδύναμα:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Αν Ι είναι το σύνολο των σημείων του διαστήματος (α,β) στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, τότε ορίζεται μία νέα συνάρτηση στο Ι, η οποία σε κάθε $x\in I$ αντιστοιχεί τον παράγωγο αριθμό της f στο x. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πρώτη παράγωγος (first derivative) ή απλώς παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(x)$.

Αν η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού της, τότε μπορεί να οριστεί η παράγωγος της f', η οποία λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''. Γενικά, για $n\geq 2$, η πρώτη παράγωγος της ν-1 παραγώγου (αν υπάρχει) λέγεται ν-οστή παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f^{(n)}$.

Άλλοι συμβολισμοί της συνάρτησης της πρώτης, δεύτερης, ν-οστής παραγώγου είναι:

$$f'(x),\frac{df(x)}{dx},\frac{dy}{dx},f''(x),\frac{d^2f(x)}{dx^2},\frac{d^2y}{dx^2}\mathbf{K}\ f^{(n)}(x),$$

$$\frac{d^{(n)}f(x)}{dx^n},\frac{d^{(n)}y}{dx^n}$$

Οι αντίστοιχοι συμβολισμοί της πρώτης και δεύτερης κ.ο.κ. παραγώγου στο σημείο x_0 είναι:

$$f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}=\frac{dy}{dx}\Big|x=x_0$$

$$f''(x_0)=\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|x=x_0\ \mathbf{L}$$

$$f^{(n)}=\frac{d^nf(x_0)}{dx_0^n}=\frac{d^ny}{dx_0^n}\Big|x=x_0$$

3.1. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Αν στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ και είναι ίσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Έστω ότι σε μία τελείως ανταγωνιστική αγορά, οι καμπύλες ζήτησης και προσφοράς είναι οι ακόλουθες:

D=4000-2P

S=1000+3P

Η επιχείρηση Α που λειτουργεί στην αγορά αυτή, υπόκειται στις εξής συνθήκες κόστους:

Σταθερό κόστος (FC)=800 ευρώ

Μεταβλητό κόστος (VC)=$49q^2+20q$

Θέλουμε να βρούμε:

1. Την τιμή και την ποσότητα ισορροπίας της αγοράς.
2. Το επίπεδο της παραγωγής της επιχείρησης Α.
3. Την τιμή στην οποία θα πωλεί την παραγωγή μας η επιχείρηση Α.
4. Τα συνολικά οικονομικά αποτελέσματα της επιχείρησης (κέρδη ή ζημίες).

Λύση

1) Η αγορά ισορροπεί όταν D=S=$Q' \Rightarrow 4000-2P=1000+3P \Rightarrow P=1000$ ευρώ.

Η ποσότητα στο σημείο ισορροπίας είναι $Q'=D=4000-2\cdot 1000 \Rightarrow Q'=2000$ μονάδες.

2) Με υπόθεση ότι η επιχείρηση επιδιώκει μεγιστοποίηση των κερδών της (ή την ελαχιστοποίηση των ζημιών της) η συνθήκη που πρέπει να πληρείται είναι η ισότητα του οριακού κόστους με την οριακή πρόσοδο MR=MC. Στην τελείως ανταγωνιστική επιχείρηση όμως ισχύει ότι MR=P=1000.

Το συνολικό κόστος είναι: $TC=VC+FC=49q^2+20q+800$

Αλλά $MC=\dfrac{dTC}{dq}=98q+20$

$MC=MR \Rightarrow 98q+20=1000 \Rightarrow q=10$ μονάδες.

Άρα η επιχείρηση Α είναι διατεθειμένη να παράγει 10 μονάδες προϊόντος γιατί έτσι θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της.

3) Στην τελείως ανταγωνιστική αγορά η κάθε μεμονωμένη επιχείρηση δεν μπορεί να καθορίσει την τιμή. Συνεπώς η επιχείρηση Α θα πουλάει τις 10 μονάδες προϊόντος στην τιμή P=1000 ευρώ.

4) Το κέρδος της επιχείρησης Α είναι:

$$p = (prósodoV) - (sunolikó \;\; kóstoV) = TR - TC \Rightarrow$$

$$p = pq - 49q^2 - 20q - 800 \Rightarrow p = 1000 \cdot 10 - 49 \cdot 10^2 - 20 \cdot 10 \Rightarrow p = 4100 \text{ ευρώ.}$$

Παράδειγμα 2

Υποθέτουμε πως η κυβέρνηση θεωρεί ότι η ετήσια κατανάλωση καυσίμου ύψους 10 εκ. τόνων είναι πολύ υψηλή και προκαλεί αδικαιολόγητα μεγάλη εκροή συναλλάγματος για την εισαγωγή αργού πετρελαίου. Πόση πρόσθετη φορολόγηση στην κατανάλωση καυσίμων πρέπει να επιβάλλει η κυβέρνηση για να επιτύχει μείωση της κατανάλωσης κατά 25% αν είναι γνωστό ότι:

- Η παρούσα τιμή των καυσίμων που είναι 100.000 ευρώ ανά τόνο.
- Η ελαστικότητα της ζήτησης καυσίμων που είναι -0,62.

Λύση

Η ποσότητα που καταναλώνεται D=10 εκ.τόνοι

Η τιμή που καταβάλλεται είναι P=100.000 ευρώ/τόνο

Η ελαστικότητα του D ως προς το P είναι: $e_{DP} = -0,62$

Σημειώνουμε ότι πως μέσα στην τιμή των 100.000 ευρώ περιλαμβάνεται και ο ήδη υφιστάμενος φόρος κατανάλωσης ανά τόνο που τον συμβολίζουμε με t.

Αφού είναι επιθυμητή η μείωση του D κατά 25% (να κατεβεί από 10 εκ.τόνους σε 7,5 εκ.τόνους) η επιθυμητή ποσοστιαία μεταβολή του D θα είναι: $\frac{dD}{D} = -0,25$.

Υποθέτοντας πως η όποια αύξηση του φόρου t ισοδυναμεί με αύξηση της τιμής P, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dP}{P}$$

Από τον ορισμό της ελαστικότητας της ζήτησης έχουμε ότι: $e_{DP} = \frac{dD/D}{dP/P} = \frac{-0,25}{dP/p} = \frac{-0,25}{dt/t}$

$\frac{dt}{t} = \frac{-0,25}{-0,62} = 0,4032 \ \ ή \ \ 40,32\%$ δηλαδή πρέπει να αυξηθεί η τιμή των καυσίμων (δηλαδή να αυξηθεί και ο ανά μονάδα φόρος τους) κατά 40,32% για να επιτευχθεί η κατά 25% μείωση της κατανάλωσης.

Παράδειγμα 3

Το ποσοστό φορολογίας εισοδήματος είναι σταθερό και ίσο προς t=0,25. Το επίπεδο κατανάλωσης για διαθέσιμο εισόδημα ίσο προς το μηδέν είναι C=50. Η οριακή ροπή προς κατανάλωση (ΔC/ΔYD) είναι σταθερή και ίση προς 0,60. Με βάση αυτά τα δεδομένα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. Ποιο θα είναι το εισόδημα ισορροπίας εάν οι επενδύσεις είναι I=170;

Y	T	YD	C	Μέση ροπή προς κατανάλωση	Οριακή ροπή προς κατανάλωση	S	Μέση ροπή προς αποταμίευση	Οριακή ροπή προς αποταμίευση
0								
100								
200								
300								
400								
500								

Λύση

T=tY

YD=Y-T

C=50+0,60YD

Μέση ροπή προς κατανάλωση=C/YD

Οριακή ροπή προς κατανάλωση =ΔC/ΔYD

Αποταμίευση S=YD-C

Μέση ροπή προς αποταμίευση=S/YD

Οριακή ροπή προς αποταμίευση =ΔS/ΔYD

Άθροισμα μέσων ροπών = 1

Άθροισμα οριακών ροπών =1

Εάν οι επενδύσεις είναι 170, το εισόδημα ισορροπίας θα είναι 400. Στο εισόδημα αυτό, G+170=S+T ή Y = C+I. (Σημείωση: Στην άσκηση αυτή G=0)

Y	T	YD	C	Μέση ροπή προς κατανάλωση	Οριακή ροπή προς κατανάλωση	S	Μέση ροπή προς αποταμίευση	Οριακή ροπή προς αποταμίευση
0	0	0	50	Δεν ορίζεται (50/0)	0.60	-50	Δεν ορίζεται (-50/0)	0.40
100	25	75	95	1.27	0.60	-20	-0.27	0.40
200	50	150	140	0.93	0.60	10	0.07	0.40
300	75	225	185	0.82	0.60	40	0.18	0.40
400	100	300	230	0.77	0.60	70	0.23	0.40
500	125	375	275	0.73	0.60	100	0.27	0.40

Παράδειγμα 4

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιχείρηση, της οποίας καταφέραμε να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση του συνολικού κόστους που είναι,

$$TC = Q^3 - 2Q^2 + 4Q + 40$$

Ζητείται να επαληθευτεί η σχέση του πρώτου παραδείγματος μεταξύ των AC και MC.

Λύση

Σύμφωνα με τη θεωρία και το αντίστοιχο τυπολόγιο η συνάρτηση του μέσου κόστους θα είναι, $AC = \frac{TC}{Q} = Q^2 - 2Q + 4 + \frac{40}{Q}$

και η συνάρτηση του οριακού κόστους θα είναι: $MC = \frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 4Q + 4$

Αν παραγωγίσουμε τη συνάρτηση του μέσου κόστους παίρνουμε ότι,

$$\frac{dAC}{dQ} = 2Q - 2 + \frac{0 \cdot Q - 40Q'}{Q^2} = 2Q - 2\frac{40}{Q^2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση, $\frac{dAC}{dQ} = \frac{1}{Q}(MC - AC)$

των συναρτήσεων MC και AC θα έχουμε,

$$\frac{dAC}{dQ} = \frac{1}{Q}\left(3Q^2 - 4Q + 4 - Q^2 + 2Q - 4 - \frac{40}{Q}\right) = \frac{1}{Q}\left(2Q^2 - 2Q - \frac{40}{Q}\right) = 2Q - 2 - \frac{40}{Q^2}.$$

Παράδειγμα 5

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση παραγωγής της μορφής,

$Q = K \cdot L - 0{,}1 \cdot K^2 - 0{,}1 \cdot L^2$

Ζητείται να βρεθεί η ελαστικότητα υποκατάστασης με K=0 και L=20 μονάδες.

Λύση

Θα έχουμε,

$$s\ \frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{\frac{L}{K}} : \frac{d\left(\frac{dL}{dK}\right)}{\frac{dL}{dK}} = \frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{\frac{L}{K}} : \frac{d\left(\frac{\partial Q/\partial K}{\partial Q/\partial L}\right)}{\frac{\partial Q/\partial K}{\partial Q/\partial L}} = \frac{\partial Q/\partial K}{\partial Q/\partial L} = \frac{L-0.2K}{K-0,2L} = \frac{\frac{L}{K}-0,2}{1-0,2\frac{L}{K}}$$

$$s = \frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{d\left(\frac{\frac{L}{K}-0,2}{1-0,2\frac{L}{K}}\right)} \cdot \frac{\frac{\frac{L}{K}-0,2}{1-0,2\frac{L}{K}}}{\frac{L}{K}} = \frac{1}{\frac{1\left(1-0,2\frac{L}{K}\right)-\left(\frac{L}{K}-0,2\right)(-0,2)}{\left(1-0,2\frac{L}{K}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\frac{L}{K}-0,2}{1-0,2\frac{L}{K}}}{\frac{L}{K}} =$$

$$= \frac{\left(1-0,2\frac{L}{K}\right)^2}{1,02\frac{L}{K}+0,2\frac{L}{K}-0,04} \cdot \frac{\frac{\frac{L}{K}-0,2}{1-0,2\frac{L}{K}}}{\frac{L}{K}} = \frac{1-0,2\frac{L}{K}}{0,96} \cdot \frac{\frac{L}{K}-0,2}{\frac{L}{K}} = \frac{1-0,2\cdot 2}{0,96} \cdot \frac{2-0,2}{10} =$$

$$= \frac{1-0,4}{0,96} \cdot \frac{1,8}{10} = \frac{0,6}{0,96} \cdot \frac{1,8}{10} = \frac{9}{8}.$$

Παράδειγμα 6

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι της μορφής Q=f(p), όπου q η ζητούμενη ποσότητα και p η τιμή. Ζητείται να υπολογιστεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $Q = 10 + 2p$ για p=10 ε) $Q \cdot p = 5$ για p=5

β) $Q = cp^{-1}$ για p=10 ζ) $Q = 210 + 10p^2$ για p=2

γ) $Q = ap^{0,5}$ για p=10 στ) $Q = 8 + 4p^2$ για p=4

δ) $Q = 60 - 10p$ για p=2 η) $Q = 30 + 4p$ για p=5

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον τύπο που υπολογίζει την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή,

$$e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$$

θα έχουμε,

α) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q} \cdot 2 = \frac{10}{30} \cdot 2 = 0,66$

β) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(-c \cdot p^{-2}) = -\frac{p}{Q}(p \cdot Q \cdot p^{-2}) = -1$

γ) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q} a \cdot 0,5 p^{-0,5}$

δ) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(-10) = \frac{2}{60-20}(-10) = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$

ε) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(-5p^{-2}) = \frac{p}{5/p}(-5p^{-2}) = -p^2 p^{-2} = -1$

ζ) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(20p) = \frac{2}{210 + 10 \cdot 2^2}(20 \cdot 2) = 0,32$

στ) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(8p) = \frac{4}{8 + 4 \cdot 4^2}(8 \cdot 4) = 1,78$

η) $e_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(4) = \frac{5}{30 + 4 \cdot 5} \cdot 4 = 20/50 = 0,4$

Παράδειγμα 7

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτησης παραγωγής της μορφής,

$$Q = L^2 + LK$$

όπου L είναι η εισροή εργασία και K είναι η εισροή κεφάλαιο. Αν MP_i και AP_i είναι η οριακή και η μέση παραγωγικότητα ως προς την εισροή I, (όπου i είναι L ή K), να δειχθεί ότι θα ισχύει η παρακάτω σχέση,

$$MP_L \cdot AP_K + MP_K \cdot AP_L = 2AP_L \cdot AP_K$$

Λύση

Χρησιμοποιούμε και πάλι τους τύπους των μερικών ελαστικοτήτων. Θα έχουμε,

$$e_L = \frac{L}{K} \cdot \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial L} \Big/ \frac{Q}{L} = \frac{MP_L}{AP_L} \qquad\qquad e_K = \frac{K}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial Q}{\partial K} \Big/ \frac{Q}{K} = \frac{MP_K}{AP_K}$$

Η σχέση τότε θα γράφεται, $MP_L \cdot AP_K \cdot AP_L = \dfrac{MP_L \cdot AP_K \cdot AP_L}{AP_L} + \dfrac{MP_K \cdot AP_L \cdot AP_K}{AP_L} =$

$$= e_L \cdot AP_L \cdot AP_K + e_K \cdot AP_L \cdot AP_K = \left(e_L + e_K\right) AP_L \cdot AP_K = 2AP_L \cdot AP_K$$

διότι αν μια συνάρτηση είναι 2ου βαθμού τότε πάντα $e_L + e_K = 2$.

Παράδειγμα 8

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση παραγωγή της μορφής,

$$Q = L^2 + LK + K^2$$

Να δειχθεί ότι πάντα θα ισχύει η σχέση $e_L + e_K = 2$.

Δηλαδή ότι το άθροισμα των μερικών ελαστικοτήτων των εισροών κάθε παραγωγικής διαδικασίας, ισούται πάντα με το βαθμό ομογένειας της συνάρτησης παραγωγής.

Λύση

Αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους των μερικών ελαστικοτήτων θα έχουμε,

$$e_L = \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{Q}\left(2L + K\right) \qquad\qquad e_K = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{Q}\left(L + 2K\right)$$

Οπότε τελικά θα έχουμε,

$$e_L + e_K = \frac{L}{Q}\left(2L + K\right) + \frac{K}{Q}\left(L + 2K\right) =$$

$$= \frac{2L^2 + LK + KL + 2K^2}{Q} = \frac{2\left(L^2 + LK + K^2\right)}{Q} = \frac{2Q}{Q} = 2.$$

Παράδειγμα 9

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται από την συνάρτηση Cobb-Douglas: $q = K^{0,25} \cdot L^{0,25}$.

α)Βρείτε τη συνάρτηση ζήτησης του κεφαλαίου και της εργασίας.

β)Βρείτε τη συνάρτηση προσφοράς.

γ)Αν η τιμή του προϊόντος είναι P=10, και οι τιμές των συντελεστών είναι $w = r = 1$, ποια είναι τα κέρδη της επιχείρησης;

Λύση

α)Οι συναρτήσεις ζήτησης των παραγωγικών συντελεστών θα προκύψουν από το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης κερδών της επιχείρησης.

$$\max \ p \cdot q - r \cdot K - w \cdot L$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι

$$\partial p / \partial \mathrm{K} = 0 \Rightarrow 0,25 pK^{-0,75} L^{0,25} - r = 0 \Rightarrow 0,25 pK^{-1} K^{0,25} L^{0,25} = r \Rightarrow 0,25 pqK^{-1} = r \Rightarrow K = 0,25 pq/r$$

$$\partial p / \partial L = 0 \Rightarrow 0,25 pK^{0,25} L^{0,25} L^{-1} - w = 0 \Rightarrow 0,25 pqL^{-1} = w \Rightarrow L = 0,25 pq/w$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν τη ζήτηση των παραγωγικών συντελεστών ως συνάρτησης της άριστης επιλογής προϊόντος.

β)Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στην συνάρτηση παραγωγής θα προκύψει η άριστη επιλογή προϊόντος ή αλλιώς συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης.

$$q = \left(\frac{0,25 pq}{r} \right)^{0,25} \left(\frac{0,25 pq}{w} \right)^{0,25} = \left(\frac{0,625 p^2}{rw} \right)^{0,25} p^{0,5}$$

$$\Rightarrow q = \left[\left(\frac{0,625 p^2}{rw} \right)^{0,25} \right]^{\frac{1}{0,5}} = \left(\frac{0,625 p^2}{rw} \right)^{0,5} = \frac{0,25 p}{\sqrt{rw}}$$

Αντικαθιστώντας πίσω στις συναρτήσεις ζήτησης του κεφαλαίου και της εργασίας προκύπτουν:

$$K(r, w, p) = \frac{0,625 p^2}{r\sqrt{rw}}, L(r, w, p) = \frac{0,625 p^2}{w\sqrt{rw}}$$

γ)Για p=10 και r=w=1 η συνάρτηση προσφοράς δίνει

$$q = \frac{0,25 \cdot 10}{\sqrt{1 \cdot 1}} = 2,5$$

Και η ζήτηση για κάθε έναν παραγωγικό συντελεστή θα είναι αντίστοιχα:

$$K = \frac{0,25 \cdot 2,5 \cdot 10}{1} = 6,25$$

$$L = \frac{0,25 \cdot 2,5 \cdot 10}{1} = 6,25$$

Επομένως τα κέρδη για την επιχείρηση θα είναι:

$$p = pq - wL - rK = 10 \cdot 2,5 - 1 \cdot 6,25 - 1 \cdot 6,25 = 12,5$$

Παράδειγμα 10

Δίνονται τα παρακάτω στοιχεία και 2 αγαθά Α και Β. Για ποιο από τα δύο αγαθά ο καταναλωτής είναι περισσότερο ελαστικός; Να χαρακτηρίσετε τα αγαθά αυτά.

Τιμή αγαθού Α	Ζητούμενη ποσότητα αγαθού Α	Τιμή αγαθού Β	Ζητούμενη ποσότητα αγαθού Β
12	20	6	100
10	40	4	130

Λύση

Για το αγαθό Α η $e_p = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{40-20}{20}}{\frac{10-12}{12}} = ... = -6$

Αφού η $|e_p| = 6 > 1$ συμπεραίνουμε ότι η ζήτηση είναι ελαστική και το αγαθό είναι αγαθό πολυτελείας.

Για το αγαθό Β η $e_p = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{130-100}{100}}{\frac{4-6}{6}} = ... = -0,9$

Αφού η $\left|e_p\right| = 0,9 < 1$ συμπεραίνουμε ότι η ζήτηση είναι ανελαστική και το αγαθό είναι αγαθό 1ης ανάγκης.

Παράδειγμα 11

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση παραγωγής των Cobb-Douglas της μορφής $Q = 10K^{0,3}L^{0,7}$.

Ζητούνται να υπολογιστούν:

α) Οι μέσες ελαστικότητες e_L, e_K.

β) Οι μέσες παραγωγικότητες του κεφαλαίου και της εργασίας όταν είναι L=2 και K=1.

γ) Η οριακή σχέση υποκατάστασης του K με την L.

δ) Η ελαστικότητα υποκατάστασης του K με την L.

Λύση

Θα έχουμε,

i) $$e_L = \frac{L}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{10K^{0,3}L^{0,7}}(10\cdot K^{0,3}\cdot 0,7L^{-0,3}) = \frac{10\cdot 0,7}{10} = 0,7$$

$$e_K = \frac{K}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{10K^{0,3}L^{0,7}}(10\cdot 0,3K^{-0,7}\cdot L^{0,3}) = \frac{10\cdot 0,3}{10} = 0,3$$

ii) $$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{10\cdot K^{0,3}\cdot L^{0,7}}{L} = \frac{10\cdot K^{0,3}}{L^{0,3}} = \frac{10\cdot 1^{0,3}}{2^{0,3}} = \frac{10}{2^{0,3}} = \frac{10}{1,231} = 8,123$$

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{10\cdot K^{0,3}\cdot L^{0,7}}{K} = \frac{10\cdot L^{0,7}}{K^{0,7}} = \frac{10\cdot 2^{0,7}}{1^{0,7}} = 10\cdot 2^{0,7} = 16,245$$

iii) $$MRS_{K,L} = \frac{-dK}{dL} = -\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \frac{-10\cdot K^{0,3}\cdot 0,7\cdot L^{-0,3}}{10\cdot L^{0,7}\cdot 0,3\cdot K^{-0,7}} = -\frac{0,7}{0,3}\cdot\frac{K}{L}$$

iv) $$e_{K,L} = d\left(\frac{K}{L}\right):\left(\frac{K}{L}\right)\Big/ d\frac{(\partial Q/\partial L)}{\partial Q/\partial L} : \frac{(\partial Q/\partial L)}{(\partial Q/\partial K)} =$$

$$=\frac{d\left(\frac{K}{L}\right):\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{-0,7}{0,3}\cdot\frac{K}{L}\right):\left(-\frac{0,7}{0,3}\cdot\frac{K}{L}\right)}=\frac{d\left(\frac{K}{L}\right):\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right):\left(\frac{K}{L}\right)}=1$$

Παράδειγμα 12

Όταν η τιμή ενός αγαθού είναι 200 ευρώ τότε η ζητούμενη ποσότητά του είναι 300 μονάδες. Εάν η τιμή αυξηθεί κατά 25% η συνολική δαπάνη των καταναλωτών για το αγαθό γίνεται 62.500 ευρώ. Ζητούνται:

α)να υπολογιστεί η ελαστικότητα ζήτησης (ως προς την τιμή του αγαθού)

β)εάν η επιχείρηση θέλει να αυξήσει τα έσοδά της ποια τιμολογιακή πολιτική πρέπει να ακολουθήσει;

Λύση

α)Η αύξηση της τιμής κατά 25% μας δίνει την τιμή P_2 όπου $P_2 = P_1 + 0,25 \times P_1 = 250$. Στην τιμή των P_2=250 ευρώ η Συνολική Δαπάνη είναι 62.500 δηλαδή $P_2 \times Q_2 = 62.500 \Leftrightarrow 250 \times Q_2 = 62.500 \Leftrightarrow Q_2 = 250$.

Υπολογίζουμε την ελαστικότητα ζήτησης από τα δεδομένα P_1=200, Q_1=300, P_2=250, Q_2=250

$$e_p = \frac{Q2 - Q1}{P2 - P1} \times \frac{P1}{Q1} = \frac{250 - 300}{250 - 200} \times \frac{200}{300} = -0,6667$$

Q_2=250

β)Επειδή η ελαστικότητα ζήτησης είναι κατ' απόλυτον τιμή μικρότερη από την μονάδα $\left|e_p\right| = 0,6667$ για να αυξήσει τα έσοδά της η επιχείρηση πρέπει να αυξήσει την τιμή του προϊόντος.

Παράδειγμα 13

Δίνεται η καμπύλη ζήτησης $Q = 100 - 2P^2$.

α)Βρείτε ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή.(σημειακή ελαστικότητα) για P_1=4 και P_2=5.

β)Να υπολογιστεί η Συνολική Δαπάνη του καταναλωτή σε κάθε τιμή.

Λύση

Η γενική μορφή συνάρτησης ελαστικότητας ως προς την τιμή $e_p = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \Leftrightarrow e_p = -4P\frac{P}{Q} \Leftrightarrow e_p = -\frac{4P^2}{Q}$ (1)

Για P_1=4 θα έχω $Q_1 = 100 - 2(4)^2 = 68$

Άρα η (1) θα γίνει $e_{p1} = -\frac{4P_1^2}{Q_1} = -\frac{4 \cdot 4^2}{68} = -0,9411$

Η Συνολική Δαπάνη για τον καταναλωτή θα είναι $P_1 \times Q_1 = 4 \times 68 = 272$

Για P_2=5 θα έχω Q_2=100-2(5)2=50

Άρα η (1) θα γίνει $e_{p2} = -\frac{4P_2^2}{Q_2} = -\frac{4 \cdot 5^2}{50} = -2$

Η Συνολική Δαπάνη για τον καταναλωτή θα είναι $P_2 \times Q_2 = 5 \times 50 = 250$.

3.2. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Κατά τη διαμόρφωση μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν φαινόμενα στο χώρο της Οικονομικής Επιστήμης ή της Διοίκησης Επιχειρήσεων, υποθέτουμε συχνά ότι οι παράγοντες του οικονομικού συστήματος (καταναλωτές, επιχειρήσεις, κυβέρνηση κλπ.) επιδιώκουν να επιλέξουν την απόφαση η οποία οδηγεί στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα για ένα δεδομένο επίπεδο διαθέσιμων πόρων μεταξύ ενός συνόλου εναλλακτικών αποφάσεων. Αν οι επιπτώσεις των διαφόρων εναλλακτικών αποφάσεων περιγράφονται από μια συνάρτηση, τότε η αναζήτηση της καλύτερης απόφασης ισοδυναμεί με την εύρεση του μέγιστου ή του ελάχιστου της συνάρτησης αυτής. Έτσι, οι καταναλωτές επιλέγουν τους συνδυασμούς αγαθών και υπηρεσιών που θα καταναλώσουν έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η χρησιμότητά τους, ενώ οι επιχειρήσεις προσδιορίζουν το είδος και την ποσότητα των προϊόντων που θα παράγουν, καθώς και την χρήση των απαιτούμενων παραγωγικών συντελεστών, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος τους ή να ελαχιστοποιείται το κόστος τους.

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f:X \to \Re$ με $X \subseteq \Re$. Αν το πεδίο ορισμού X είναι συμπαγές και η f συνεχής, τότε με βάση το θεώρημα Weierstrass υπάρχουν σημεία (p,q) για τα οποία είναι

f(p)=inf(X) και f(q)=supf(X) (1)

Υπενθυμίζουμε ότι αφού ισχύει

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad gia \quad k\acute{a}qe \quad x \in X , \qquad (2)$$

οι αριθμοί f(p) και f(q) ονομάζονται ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο της f στο X αντίστοιχα. Το σημείο p λέγεται σημείο ολικού ελάχιστου και το σημείο q σημείο ολικού μέγιστου. Αν f(p)<f(x), για κάθε $x \in X$ με $x \neq p$, το ολικό ελάχιστο στο π είναι μοναδικό. Αντίστοιχα, αν f(x)<f(q), για κάθε $x \in X$ με $x \neq q$, το ολικό μέγιστο στο q είναι επίσης μοναδικό. Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

Αν οι σχέσεις (1) και (2) ισχύουν σε περιοχές σημείων του X, τότε κάνουμε λόγο για τοπικά ακρότατα της συνάρτησης, τα οποία ορίζονται ως εξής:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:Έστω μια συνάρτηση $f : X \to \Re \quad me \quad X \subseteq \Re$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $p \in X$ αν υπάρχει περιοχή-ε του p,Nε(p), τέτοια ώστε $f(p) \leq f(x)$ για κάθε $x \in N_e(p) \cap X$. Παρόμοια, λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $q \in X$ αν υπάρχει περιοχή ε του q,N_ε(q) τέτοια ώστε $f(x) \leq f(q)$ για κάθε $x \in N_e(q) \cap X$.

Το σημείο p λέγεται σημείο τοπικού ελάχιστου και το σημείο q σημείο τοπικού μέγιστου. Αν f(p)<f(q) για κάθε $x \in N_e(p) \cap X$, το τοπικό ελάχιστο είναι

μοναδικό ενώ αν f(x)<f(q) για κάθε $x \in N_e(q) \cap X$, το τοπικό μέγιστο είναι μοναδικό.

Είναι φανερό ότι το ολικό μέγιστο (ελάχιστο) είναι οπωσδήποτε και τοπικό μέγιστο (ελάχιστο). Αντίθετα, ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) δεν είναι κατ' ανάγκη και ολικό μέγιστο(ελάχιστο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Υποθέτουμε ότι η σχέση μεταξύ των κερδών (π) και της παραγόμενης ποσότητας (Q) δίνεται από π=1000Q-5Q2. Να υπολογιστεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

Λύση

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κέρδους είναι: $\frac{dp}{dQ} = 1000 - 2 \times 5Q = 1000 - 10Q$. Μία συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο όπου μηδενίζεται η παράγωγός της $\frac{dp}{dQ} = 0 \Leftrightarrow 1000 - 10Q = 0 \Leftrightarrow Q^* = 100$.

Το ότι πρόκειται για μέγιστο και όχι ελάχιστο μπορεί να ελεγχθεί από τη δεύτερη παράγωγο: $\frac{d^2p}{dQ^2} = \frac{d\left(dp/dQ\right)}{dQ} = \frac{d(1000 - 10Q)}{dQ} = -10 < 0$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι πάντα αρνητική και άρα η συνάρτηση θα έχει ολικό μέγιστο στο Q*=100 μονάδες.

Παράδειγμα 2

Ας υποθέσουμε ότι τα συνολικά έσοδα μιας επιχείρησης εξαρτώνται από την ποσότητα που παράγει (q) σύμφωνα με την συνάρτηση: $TR = 70q - q^2$. Τα συνολικά έξοδα επίσης εξαρτώνται από το q: $TC = q^2 + 30q + 100$.

(α) Ποιο επίπεδο προϊόντος θα πρέπει να παράγει η επιχείρηση προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα κέρδη (TR-TC); Ποια είναι τα κέρδη της;

(β) Δείξτε ότι οι συνθήκες δεύτερης τάξης για μέγιστο ικανοποιούνται στο επίπεδο προϊόντος που βρήκαμε στο (α) ερώτημα.

(γ) Η λύση που υπολογίσαμε εδώ υπακούει στον κανόνα ότι «τα οριακά έσοδα θα πρέπει να είναι ίσα με τα οριακά κόστη»; Εξηγείστε.

Λύση

(α) Κέρδη= π =TR-TC=-2q2+40q-100 $\frac{dp}{dq} = 0 \Leftrightarrow -4q + 40 = 0 \Leftrightarrow q^* = 10$

Για ποσότητα q*=10 τα κέρδη της επιχείρησης είναι $p^* = -2(10)^2 + 40(10) - 100 = 100$.

(β) $\frac{d^2p}{dq^2} = -4 < 0$, οπότε τα κέρδη μεγιστοποιούνται.

(γ) $MR = \frac{dTR}{dQ} = 70 - 2q$ και $MC = \frac{dTC}{dQ} = 2q + 30$. Άρα

$70 - 2q = 2q + 30 \Leftrightarrow q^* = 10$ υπακούει στον κανόνα MR=MC.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί σε ποιο επίπεδο παραγωγής μια επιχείρηση έχει το ελάχιστο κόστος, αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση κόστους είναι: $C(Q) = Q^2 - 10Q + 20$ όπου Q η ποσότητα παραγωγής.

Λύση

Γενικά για να έχει μία συνάρτηση ελάχιστο θα πρέπει:

(α) Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης να είναι ίση με το μηδέν.

(β) Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης να είναι μεγαλύτερη από το μηδέν. Έτσι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κόστους είναι $C(Q)' = 0 \Leftrightarrow (Q^2 - 10Q + 20)' = 0 \Leftrightarrow 2Q - 10 = 0 \Leftrightarrow Q = 5$.

Επίσης $C(Q)'' = (2Q - 10)' = 2 > 0$.

Άρα όταν η επιχείρηση παράγει Q=5 μονάδες τότε το κόστος ελαχιστοποιείται.

Παράδειγμα 4

Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι: $TC(Q) = 2Q^2 - 400Q + 10$ όπου Q η ποσότητα παραγωγής.

(α) Να βρεθεί σε ποιο επίπεδο παραγωγής μια επιχείρηση έχει το ελάχιστο συνολικό κόστος.

(β) Υπολογίστε το μέσο συνολικό κόστος (ATC), το μέσο μεταβλητό κόστος (AVC) και το οριακό κόστος (MC) της επιχείρησης αυτής.

Λύση

(α) $TC' = 4Q - 400 = 0 \Rightarrow Q - 100$ και $TC'' = 4 > 0$ ελάχιστο

(β) $ATC = \frac{2Q^2}{Q} - \frac{400Q}{Q} + \frac{10}{Q} = 2Q - 400\frac{10}{Q}$ και $VC = 2Q^2 - 400Q$

$$AVC = \frac{2Q^2}{Q} - \frac{400Q}{Q} = 2Q - 400 \quad \text{και} \quad MC = 4Q - 400$$

Παράδειγμα 5

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μονοπωλιακή επιχείρηση που διαθέτει το προϊόν της σε τρεις διαφορετικές αγορές, παρουσιάζοντας τις παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης:

Αγορά 1: $P_1 = 40 - 2Q_1$

Αγορά 2: $P_2 = 60 - 3Q_2$

Αγορά 3: $P_3 = 100 - 4Q_3$

όπου P_i και Q_i είναι οι τιμές και οι ποσότητες αντίστοιχα του ίδιου του προϊόντος στις τρεις αυτές αγορές. Αν το συνολικό κόστος παραγωγής της εκτιμήθηκε ότι είναι TC=20+30Q όπου Q είναι η συνολική ποσότητα του προϊόντος που παράγεται και πωλείται, ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες του προϊόντος αυτού, που πρέπει να διαθέσει η επιχείρηση αυτή στις τρεις αγορές, ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της.

Λύση

Η συνάρτηση του συνολικού κέρδους της επιχείρησης αυτής είναι,

$$TP = TR - TC = p_1Q_1 + p_2Q_2 + p_3Q_3 - TC =$$

$$= (40-2Q_1)Q_1 + (60-3Q_2)Q_2 + (100-4Q_3)Q_3 - 20 - 30(Q_1+Q_2+Q_3) =$$

$$= 40Q_1 - 2Q_1^2 + 60Q_2 - 3Q_2^2 + 100Q_3 - 4Q_3^2 - 20 - 30Q_1 - 30Q_2 - 30Q_3$$

$$= 10Q_1 - 2Q_1^2 + 30Q_2 - 3Q_2^2 + 70Q_3 - 4Q_3^2 - 20$$

Η μεγιστοποίηση της συνάρτησης αυτής ως προς Q_1, Q_2 και Q_3 θα δώσει:

Βήμα 1ο: Συνθήκες πρώτης τάξης.

$$TP_1 = \frac{\partial TP}{\partial Q_1} = 10 - 4Q_1,\ TP_2 = \frac{\partial TP}{\partial Q_2} = 30 - 6Q_2,\ TP_3 = \frac{\partial TP}{\partial Q_3} = 70 - 8Q_3$$

Από το σύστημα,

$$\begin{cases} 10 - 4Q_1 = 0 \\ 30 - 6Q_2 = 0 \\ 70 - 2Q_3 = 0 \end{cases}$$

παίρνουμε τη λύση,

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} Q_1^* = 2,5 \\ Q_2^* = 5 \\ Q_3^* = 8,75 \end{array} \right.$$

Βήμα 2ο: Συνθήκες δεύτερης τάξης.

Σχηματίζουμε την ορίζουσα του Hesse:

$$|H| = \begin{vmatrix} TP_{11} & TP_{12} & TP_{13} \\ TP_{21} & TP_{22} & TP_{23} \\ TP_{31} & TP_{32} & TP_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

Βρίσκουμε τις κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H|$. Θα είναι

$$\Rightarrow |H_1| = |-4| = -4 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 > 0 \qquad |H_3| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -192 < 0$$

Βήμα 3ο: Επειδή οι κύριες ελάσσονες εναλλάσσονται στο πρόσημο, με πρώτη την αρνητική, έπειτα ότι η λύση $Q_1^* = 2,5,\ Q_2^* = 5$ και $Q_3^* = 8,75$, που βρήκαμε θα μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης αυτής.

Παράδειγμα 6

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια παραγωγική διαδικασία, με την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής:

$Q = 2L^2 + 4LK - 4K^2$, όπου, Q= το επίπεδο παραγωγής,

L και K, οι χρησιμοποιούμενες εισροές εργασίας και κεφαλαίου αντίστοιχα. Αν $P_L = 4$ και $P_K = 5$ είναι οι αμοιβές των δύο εισροών αντίστοιχα, ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες των L και K, που μεγιστοποιούν το Q, έτσι ώστε το συνολικό κόστος να ισούται με 80 μονάδες.

Λύση

Το πρόβλημα αυτό γράφεται ως εξής:

$$\left[\begin{array}{l} \max\limits_{(L,K)} Q = 2L^2 + 4LK - 4K^2 \\ \qquad 4L + 5K = 80 \end{array}\right.$$

Βήμα 1ο: Δημιουργούμε τη συνάρτηση του Lagrange.

$\Rightarrow L = 2L^2 + 4LK - 4K^2 + l\left[80 - 4L - 5K\right]$

όπου λ= πολλαπλασιαστής του Lagrange.

Βήμα 2ο: Ορίζουμε τις συνθήκες 1ης τάξης. Πρέπει να ισχύουν οι:

$$\begin{cases} L_l = 80 - 4L - 5K = 0 \\ L_L = 4L + 4K - 4l = 0 \\ L_K = 4L - 8K - 5l = 0 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα,

$$\left.\begin{array}{r} -4L - 5K + 0l = -80 \\ 4L + 4K - 4l = 0 \\ 4L - 8K - 5l = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 4L + 5K0 + l = 80 \\ L + K - l = 0 \\ 4L - 8K - 5l = 0 \end{cases}$$

$$L^* = \frac{\Delta_L}{\Delta}, \qquad K^* = \frac{\Delta_K}{\Delta}, \qquad l^* = \frac{\Delta_l}{\Delta}$$

όπου,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 4(-5-8) - 5(-5+4) = -52 + 5 = -47 \neq 0$$

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} 80 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 80\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = 80(-5-8) = -80 \cdot 13 = -1040$$

$$\Delta_K = \begin{vmatrix} 4 & 80 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 80\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -80(-5+4) = 80$$

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 80 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 80\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 80(-8-4) = 80 \cdot 12 = -960$$

Οπότε

$$L^* = \frac{\Delta_L}{\Delta} = \frac{-1040}{-47} = 22{,}1, \qquad K^* = \frac{\Delta_K}{\Delta} = \frac{80}{-47} = -1{,}7,$$

$$l^* = \frac{\Delta_l}{\Delta} = \frac{-960}{-47} = 20{,}4$$

Επειδή συμβαίνει K*=-1,7<0 σταματάμε την πορεία της λύσης του προβλήματος, μια και από οικονομικής πλευράς δεν έχει νόημα.

Παράδειγμα 7

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια παραγωγική διαδικασία, με την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής:

Q=2LK

όπου, Q= το επίπεδο παραγωγής,

L και K, οι χρησιμοποιούμενες εισροές εργασίας και κεφαλαίου αντίστοιχα. Αν P_L=30 και P_K=10 είναι αμοιβές των δύο εισροών αντίστοιχα, ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες των L και K που μεγιστοποιούν το Q, έτσι ώστε το συνολικό κόστος να ισούται με TC=300 μονάδες.

Λύση

Το πρόβλημα αυτό γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \max\limits_{(L,K)} Q = 2LK \\ 30L + 10K = 300 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1ο: Δημιουργούμε τη συνάρτηση του Lagrange.

$L = 22LK + l\,[300 - 30L - 10K]$, όπου λ= πολλαπλασιαστής του Lagrange.

Βήμα 2ο: Ορίζουμε τις συνθήκες 1ης τάξης. Πρέπει να ισχύουν οι:

$$\begin{cases} L_l = 300 - 30L - 10K = 0 \\ L_L = 2L - 30\,l = 0 \\ L_K = 2L - 10\,l = 0 \end{cases}$$

Θα έχουμε,

$$l = \frac{2K}{30} \qquad\qquad l = \frac{2L}{10} \Rightarrow \frac{2K}{30} = \frac{2L}{10} \Leftrightarrow K = 3L$$

Οπότε, $300 - 30L - 10 \cdot 3L = 0$, $60L = 300$,

$$L^* = 4, \qquad K^* = 3L = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow l = 2 \cdot 15/30 = 1$$

$$L^* = 5, \qquad K^* = 15 \qquad l^* = 1$$

Βήμα 3ο: Ελέγχουμε τις συνθήκες 2ης τάξης.

$$\left|\overline{H}_2\right| = \begin{vmatrix} 0 & P_L & P_K \\ P_L & L_{LL} & L_{LK} \\ P_K & L_{KL} & L_{KK} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 2 \\ 10 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -30\begin{vmatrix} 30 & 2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -30(-20) + 10 \cdot 60 = 600 + 600 = 1200 > 0$$

Επειδή η μοναδική κύρια ελάσσονα είναι θετική έπεται ότι η λύση,

$L^* = 5 \quad K^* = 15$, μεγιστοποιεί τη συνάρτηση.

Παράδειγμα 8

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιχείρηση, που παράγει και πουλά δύο προϊόντα υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού τα Q_1 και Q_2. Αν η συνάρτηση συνολικού κόστους της εκτιμήθηκε ότι είναι, $TC = 10Q_1^2 + 6Q_1Q_2 + Q_2^2$ και $P_1 = 40, P_2 = 12$ οι τιμές πώλησης των προϊόντων αυτών, τότε να βρεθούν τα επίπεδα παραγωγής που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης αυτής.

Λύση

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων της επιχείρησης αυτής θα είναι,

$TR = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 40Q_1 + 12Q_2$

Η συνάρτηση των συνολικών της κερδών,

$$TP = TR - TC = 40Q_1 + 12Q_2 - 20Q_1^2 + 6Q_1Q_2 - Q_2^2$$

και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε αυτή τη συνάρτηση.

Βήμα 1ο: Συνθήκες πρώτης τάξης:

$$TP_1 = \frac{\partial TP}{\partial Q_1} = 40 - 40Q_1 - 6Q_2 \qquad \wedge \qquad TP_2 = \frac{\partial TP}{\partial Q_2} = 12 - 6Q_1 - 2Q_2$$

Από το σύστημα θα έχουμε, $\Rightarrow \begin{cases} 40 - 40Q_1 - 6Q_2 \\ 12 - 6Q_1 - 2Q_2 = 0 \end{cases}$

$$Q_2 = 6 - 3Q_1 \Rightarrow 40 - 40Q_1 - 6(6 - 3Q_1) = 0 \Rightarrow 40 - 40Q_1 - 36 + 18Q_1 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 22Q_1 \qquad Q_2 6 - 3 \cdot 0{,}18 = 5{,}46$$

που οι λύσεις θα είναι: $\Rightarrow Q_1^* = 0{,}18, Q_2^* = 5{,}46$

Βήμα 2ο: Συνθήκες δεύτερης τάξης:

Σχηματίζουμε την ορίζουσα $|H|$,

$$|H| = \begin{vmatrix} TP_{11} & TP_{12} \\ TP_{21} & TP_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & -6 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 80 - 36 = 44 > 0$$

και βρίσκουμε τις κύριες ελάσσονες.

Αυτές θα είναι,

$$|H_1| = |-40| = -40 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -40 & -6 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 44 > 0$$

Βήμα 3ο: Επειδή οι κύριες ελάσσονες εναλλάσσονται στο πρόσημο, με πρώτη την αρνητική η λύση, $Q_1^* = 0{,}18 \quad Q_2^* = 5{,}46$,θα μεγιστοποιεί τη συνάρτηση των κερδών της επιχείρησης αυτής..

Παράδειγμα 9

Έστω η συνάρτηση ζήτησης P=25=2p και η συνάρτηση κόστους $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - \frac{7}{2}q^2 + 15q + 100$, μιας μονοπωλιακής επιχείρησης.

Η συνάρτηση συνολικού εσόδου είναι R(q)=25q-2q2 και οι συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης είναι αντίστοιχα:

$$MR = MC \quad ή \quad 25 - 4q = q^2 - 7q + 15 \quad ή \quad q^2 - 3q - 10 = 0 \text{ και}$$

$$\frac{dMR}{dq} < \frac{dMC}{dq} \quad ή \quad -4<2q-7$$

Η εξίσωση $q^2 - 3q - 10 = 0$ έχει ρίζες q_1=-2<0 και q_2=5. Η πρώτη ρίζα προφανώς απορρίπτεται, οπότε μοναδικό υποψήφιο ακρότατο είναι το σημείο q_2=5.

Για q=5 η συνθήκη δεύτερης τάξης ικανοποιείται. Οπότε στο σημείο αυτό το κέρδος της επιχείρησης μεγιστοποιείται.

Παράδειγμα 10

Έστω τώρα ότι ι επιχείρηση του παραπάνω παραδείγματος λειτουργεί σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού και ότι η τιμή πώλησης του προϊόντος της στην αγορά είναι $\bar{p}=9$ χρηματικές μονάδες. Η συνάρτηση εσόδου είναι τώρα R=9q και η συνθήκη πρώτης τάξης γίνεται q_2-7q+15=9 ή q_2-7q+6=0. Η εξίσωση έχει ρίζες τις q_1=1 και q_2=6. Η συνθήκη δεύτερης τάξης γίνεται 2q-7>0, η οποία ικανοποιείται μόνο στο σημείο q_2=6. Επομένως, στο σημείο αυτό το κέρδος της επιχείρησης είναι μέγιστο.

Παράδειγμα 11

Έχετε Συνάρτηση Χρησιμότητας από δυο αγαθά, το x και y, την U = xy. Οι τιμές τους είναι P_X=4 και P_Y=8, το εισόδημά σας είναι I=40€. Μεγιστοποιείστε την U υπό τους περιορισμούς των δύο τιμών και του εισοδήματός σας.

Λύση

Το πρόβλημα αποτυπώνεται , συμβολικά, ως εξής:

max U = xy St 40 = 4x +8y ή 40-4x-8y=0

Σχηματίζουμε τη Συνάρτηση Lagrange

L = xy + λ(40-4x-8y)

Πρέπει, για μεγιστοποίηση της L, να έχετε

Lx = y-4λ=0 , οπότε y = 4λ

Ly = x-8λ=0 , οπότε x = 8λ

Lλ = 40-4x-8y = 0

Άρα 40-4(8λ)-8(4λ) = 0 και παίρνετε

λ = 0,625 , x = 5 και y = 2,5.

Παράδειγμα 12

Εάν $x(p_x, p_y, I)$ και $y(p_x, p_y, I)$ είναι οι συναρτήσεις ζήτησης ενός καταναλωτή που αντιμετωπίζει ένα εισοδηματικό περιορισμό

$I = p_x x(p_x, p_y, I) + p_y y(p_x, p_y, I)$ να εξηγηθεί γιατί δεν είναι δυνατό και τα δύο αγαθά να είναι κατώτερα.

Λύση

Επειδή ο εισοδηματικός περιορισμός δεχόμαστε ότι μας δεσμεύει μπορούμε να προσδιορίσουμε το ολικό διαφορικό στο σημείο των αρίστων επιλογών και άρα :

$$\frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial I} p_x + \frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial I} p_y = 1$$

Είναι προφανές ότι δεν είναι δυνατό και τα δύο αγαθά να είναι κατώτερα διότι τότε τα εισοδηματικά αποτελέσματα και των δύο θα είναι αρνητικά και άρα θα πρέπει το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών να ισούται με ένα θετικό.

Παράδειγμα 13

Έστω μία οικονομία όπου η κατανάλωση του αγαθού x (κρέας ενός ζώου σε προστασία) είναι απαγορευμένη για μια μεγάλη χρονική περίοδο . Οι προτιμήσεις ενός αντιπροσωπευτικού καταναλωτή αυτής της οικονομίας αποτυπώνονται στην ακόλουθη συνάρτηση χρησιμότητας :

$U(x, y) = 10x^{1/2} + y$.

- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σκέψεις για να αρθεί η απαγόρευση. Αν το εισόδημα του καταναλωτή είναι 100 και οι τιμές των αγαθών είναι ίσες μεταξύ τους και 1 να προσδιορισθεί η άριστη επιλογή για τον καταναλωτή.
- Αν η κυβέρνηση θέλει να συλλέξει έσοδα επιβάλλοντας ένα φόρο στο εισόδημα ώστε η ευημερία του καταναλωτή να είναι ίδια στη πρό με τη μετά την άρση της απαγόρευσης περίοδο, ζητείται να προσδιορισθούν τα έσοδα που θα προκύψουν απο το συγκεκριμένο καταναλωτή.

Λύση

Κατά τη περίοδο που η κατανάλωση του αγαθού x είναι απαγορευμένη ο καταναλωτής δαπανά όλο του το εισόδημα στην αγορά του άλλου αγαθού και αγοράζοντας 100 μονάδες από αυτό απολαμβάνει ευημερία 100. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση δαπανών γιατί υπάρχουν σκέψεις για φορολόγησή του.

.Με τη γνωστή διαδικασία που αριστοποιεί τη δαπάνη υπό το περιορισμό της ευημερίας (συζυγές πρόβλημα) προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις ζήτησης κατά Hicks. Η σχέση

$$L = p_x x + p_y y + l\,(U - 10x^{1/2} - y)$$

προσδιορίζει τις συνθήκες πρώτης τάξης που είναι :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = p_x - l\,0{,}5x^{-1/2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = p_y - l = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = U - y - 10x^{1/2} = 0$$

και άρα οι συναρτήσεις ζήτησης κατά Hicks δίδονται από τις σχέσεις :

$$x = 25p_y^2 / p_x^2$$

$$y = U - 50(p_y / p_x)$$

Η άριστη επιλογή προσδιορίζεται όταν x =25 και y =75 με U = 125 καθώς οι τιμές είναι γνωστές. Η σχέση δαπανών προσδιορίζεται από την συνάρτηση

$$E = p_x x + p_y y = p_y U - 25(p_y^2 / p_x)$$

και για μπορέσει να απολαύσει την ίδια με την πριν από την απαγόρευση ευημερία ο καταναλωτής και καθώς οι τιμές δεν αλλάζουν (ο φόρος είναι στο εισόδημα) , θα πρέπει να δαπανήσει 75 μονάδες. Υπό αυτές τις συνθήκες ο καταναλωτής μπορεί με αυτό το εισόδημα να απολαύσει χρησιμότητα 100. Τα έσοδα λοιπόν της κυβέρνησης οφείλουν να είναι 25.

Παράδειγμα 14

Η συνάρτηση του μέσου κόστους μιας επιχείρησης είναι:

$$AC(Q) = 0,2Q^2 - 12Q + 300 + \frac{500}{Q}.$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτησης του συνολικού κόστους της επιχείρησης. Ποιο είναι το σταθερό και ποιο το μεταβλητό κόστος;

(β) Να βρεθεί η συνάρτησης οριακού κόστους. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

(γ) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης κόστους στο πεδίο ορισμού της. Να βρείτε επίσης τα σημεία καμπής της και τα διαστήματα που αυτή είναι κοίλη ή κυρτή.

(δ) Αν υποτεθεί ότι η εφαπτόμενη μίας καμπύλης στο σημείο της αποτελεί μία γραμμική προσέγγιση της καμπύλης για τιμές κοντά στο σημείο αυτό, να βρεθεί η εξίσωση της γραμμικής προσέγγισης (TCγρ.) της καμπύλης του κόστους στο σημείο καμπής της.

(ε) Να δημιουργηθεί στο EXCELL ο πίνακας τιμών των συναρτήσεων TC, MC και TCγρ., για κατάλληλη περιοχή των τιμών του Q και να γίνουν τα γραφήματα (i) MC ως προς Q, (ii) TC, TCγρ., ως προς Q. Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων.

Λύση

(α) Η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης είναι:

$$TC = AC \cdot Q = (0,2Q^2 - 12Q + 300 + \frac{500}{Q})Q = 0,2Q^3 - 12Q^2 + 300Q + 500$$

Το μεταβλητό κόστος είναι $TVC = 0,2Q^3 - 12Q^2 + 300Q$

και το σταθερό κόστος είναι TFC=500.

(β) Η συνάρτηση του οριακού κόστους της επιχείρησης είναι:

$MC = TC' = 0,6Q^2 - 24Q + 300$.

Για να βρεθεί το ελάχιστο οριακό κόστος θα πάρουμε την παραγωγό MC' και θα εξισώσουμε με το μηδέν.

$$MC' = (0,6Q^2 - 24Q + 300)' = 1,2Q - 24 = 0 \ , \ 1,2Q = 24 \ , \ Q = \frac{24}{1,2} = 20 .$$

Επίσης $MC'' = 1,2 > 0$.

Επομένως το οριακό κόστος γίνεται ελάχιστο για Q=20

Το ελάχιστο οριακό κόστος είναι:

$$MC_{\min} = 0,6 \cdot 20^2 - 24 \cdot 20 + 300 = 240 - 480 + 300 = 60$$

(γ) Για να βρούμε την μονοτονία της συνάρτησης κόστους θα πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της στο πεδίο ορισμού της. Όπως βρήκαμε στο ερώτημα (α) η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κόστους, δηλαδή το οριακό κόστος, είναι μία παραβολή της οποίας η ελάχιστη τιμή είναι θετική. Η καμπύλη δηλαδή δεν τέμνει πουθενά τον άξονα των x και επομένως το οριακό κόστος είναι παντού θετικό. Άρα η συνάρτηση κόστους είναι αύξουσα συνάρτηση.

Εναλλακτικά: Εφ’ όσον η συνάρτηση MC' είναι δευτεροβάθμια εκπαίδευση με διακρίνουσα <0 και συντελεστή του Q2 το 0,6>0 λαμβάνει μόνο θετικές τιμές. Επομένως η συνάρτηση MC είναι γνησίως αύξουσα.

Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η καμπύλη του κόστους είναι κυρτή ή κοίλη, θα πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της, δηλαδή της συνάρτησης MC'.

$$MC' = 1,2Q - 24 < 0 \qquad MC' = 1,2Q - 24 > 0$$

$$1,2Q < 24 \qquad 1,2Q > 24$$

$$Q < 20 \qquad Q > 20$$

Δηλαδή η καμπύλη του κόστους για τιμές του Q<20 είναι κοίλη και για τιμές Q>20 είναι κυρτή. Το σημείο Q=20 αποτελεί σημείο καμπής της καμπύλης του κόστους, εφόσον για το σημείο αυτό η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης του κόστους είναι ίση με το μηδέν, όπως βρήκαμε και στο ερώτημα (β).

(δ) Η παράγωγος μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο εκφράζει την κλίση της εφαπτόμενης καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Επομένως η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο (α,f(α)) μιας συνάρτησης f(x) είναι:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)\,.$$

Στην περίπτωσή μας πρέπει να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης του κόστους στο σημείο (20,TC(20)), καθώς το σημείο αυτό είναι το σημείο καμπής.

Η ζητούμενη εξίσωση είναι :

$$y - TC(20) = TC'(20 \cdot (x - 20)$$

Είναι TC(20)=3300 $TC'(20) = MC(20) = 60$

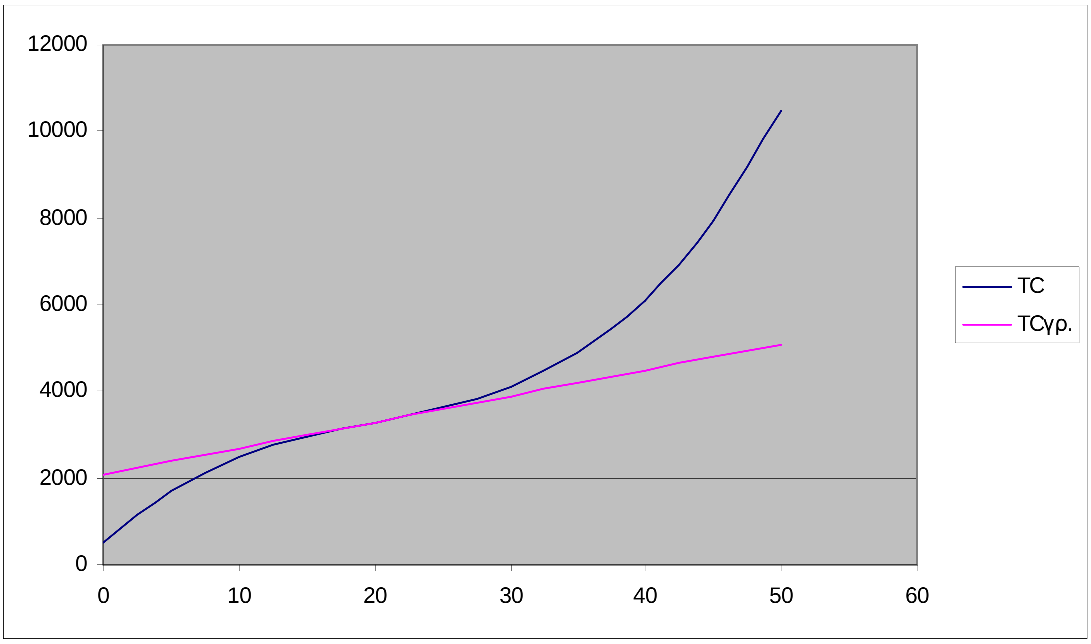
Αντικαθιστώντας τις τιμές, έχουμε:

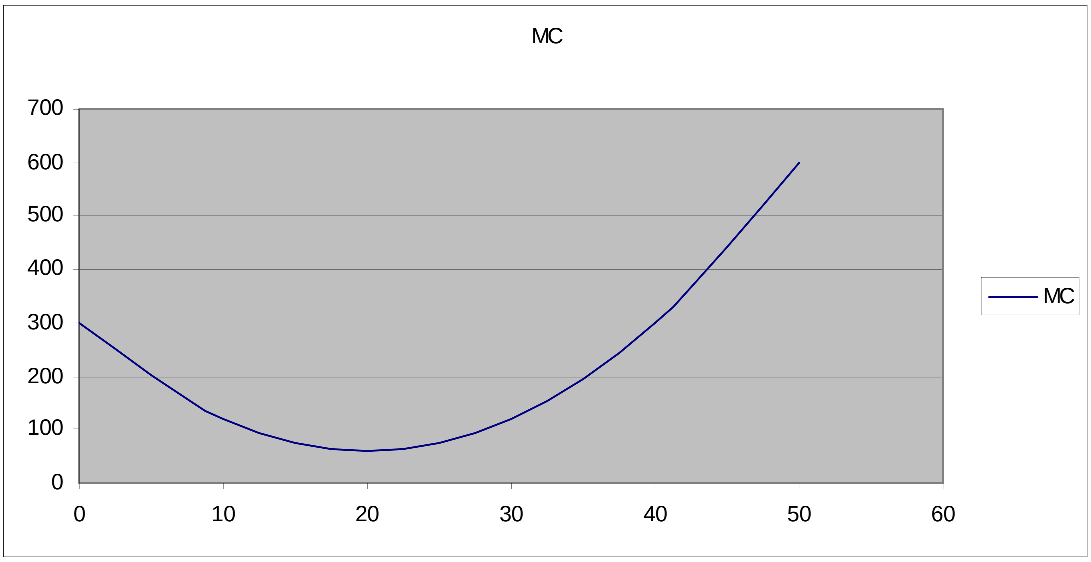
$$y - 3300 = 60 \cdot (x - 20) \Rightarrow y = 2100 + 60Q$$

Επομένως η ζητούμενη γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης κόστους είναι:

$TC_{gr.} = 2100 + 60Q$

(ε) Τα ζητούμενα γραφήματα είναι:





Παρατηρούμε ότι:

Η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης του κόστους είναι ικανοποιητική πράγματι μόνο σε μικρή περιοχή του σημείου καμπής.

Το οριακό κόστος πράγματι είναι μία παραβολή με ελάχιστη τιμή στο σημείο (20,60).

Για τιμές Q<20 η καμπύλη του κόστους είναι κοίλη, ο ρυθμός δηλαδή μεταβολής του κόστους (το οριακό κόστος) είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Για τιμές Q>20 η καμπύλη του κόστους είναι κυρτή, ο ρυθμός δηλαδή μεταβολής του κόστους (το οριακό κόστος) είναι αύξουσα συνάρτηση.

Παράδειγμα 15

Δίνεται η συνάρτηση κέρδους μιας επιχείρησης με τα προϊόντα x και y.

$$z = f(x, y) = x^3 - 4x^2 - xy - y^2$$

Να υπολογιστούν οι ποσότητες των προϊόντων x και y ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης.

Λύση

Έχουμε λοιπόν $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x - y = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - x = 0$.

Υποψήφια σημεία για τοπικό ακρότατο είναι τα σημεία (0,0) και $\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right)$.

Η Hessian μήτρα της συνάρτησης είναι:

$$H(x)=\begin{pmatrix} 6x-8 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Για τα δύο υπό έλεγχο σημεία έχουμε:

(i) σημείο (0,0): $H_1=-8<0, H_2=\begin{vmatrix} -8 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=16-1=15>0$: τοπικό μέγιστο

(ii) σημείο $\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right)$: $H_1=6\left(\frac{5}{2}\right)-8=7>0, H_2=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-14-1=-15<0$:σαγματικό σημείο.

3.3. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ

Δεσμευμένη βελτιστοποίηση ή βελτιστοποίηση υπό συνθήκη είναι η διαδικασία προσδιορισμού βέλτιστων σημείων (τιμών) μιας αντικειμενικής συνάρτησης όταν το πεδίο ορισμού της περιορίζεται σε ένα σύνολο σημείων που ικανοποιούν ένα σύστημα ανισοεξισωτικών περιορισμών.

Είναι γενικά παραδεκτό ότι, κεντρικό πρόβλημα της οικονομικής επιστήμης είναι η βέλτιστη κατανομή των διαθέσιμων πόρων, που προφανώς βρίσκονται σε περιορισμένες ποσότητες, για τη μεγιστοποίηση κάποιας συνάρτησης επιδιωκόμενου αποτελέσματος ή την ελαχιστοποίηση κάποιας συνάρτησης απαιτούμενης θυσίας. Π.χ. μια επιχείρηση επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την παραγωγή της ή να ελαχιστοποιήσει το κόστος της μέσα στα πλαίσια δεδομένης τεχνολογίας και περιορισμένων ποσοτήτων συντελεστών παραγωγής. Οι καταναλωτές επιδιώκοντας να μεγιστοποιήσουν κάποια συνάρτηση χρησιμότητας περιορίζονται από το διαθέσιμο εισόδημά τους κ.λπ.

Θα μπορούσε λοιπόν να πει κανείς ότι η δεσμευμένη βελτιστοποίηση βρίσκεται στο κέντρο και αποτελεί τον πυρήνα της οικονομικής επιστήμης.

Δεσμευμένη Βελτιστοποίηση με εξισωτικούς περιορισμούς

Το πρόβλημα δεσμευμένης βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\max \ \acute{\eta} \ \min \quad z = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad x \in X$$

$$\acute{o}\rho o\upsilon \quad \mathrm{X} = \left\{ x \in R^n : g_i(x) = b_i, i = 1, \ldots, m \right\}$$

Υποθέτουμε ότι m<n και ότι οι συναρτήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης f και των περιορισμών $g_i, i = 1, \ldots, m$, έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, είναι δηλαδή C_2 συναρτήσεις. Το Χ ονομάζεται και σύνολο των εφικτών ή πραγματοποιήσιμων λύσεων ή σύνολο των αποδεκτών λύσεων.

Δεσμευμένη Βελτιστοποίηση με περιορισμούς ανισοεξισώσεις

Το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης $f(x_1, \ldots, x_n)$, n μεταβλητών, υποκειμενικής σε ένα σύνολο $m \geq 1$ ανισοτικών περιορισμών $g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_i$ και σε ένα σύνολο n περιορισμών μη αρνητικότητας $x_1 \geq, \ldots, x_n \geq 0$. Το γενικό αυτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, που έχει καθιερωθεί διεθνώς να ονομάζεται μαθηματικός προγραμματισμός, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθεί ένα σημείο $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ τέτοιο ώστε

$$f(x^*) = \max f(x_1, \ldots, x_n)$$

όπου x υπόκειται στους περιορισμούς:
$$\begin{matrix} g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m \end{matrix}$$

και $\quad x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

ή ως $\quad f(x^*) = \max f(x)$

υπό τους περιορισμούς: $\quad g_i(x) \leq b_i, i = 1, \ldots, m$

και $\quad x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n$

ή ως $\quad f(x^*) = \max f(x), x \in X \equiv \{x \in R^n : g(x) \le b, x \ge 0\}$

όπου $g(x) = [g_1(x), ..., g_m(x)]$ η διανυσματική συνάρτηση των περιορισμών, $b = [b_1, ..., b_m]$ το διάνυσμα των σταθερών και $x = [x_1, ..., x_n]$ το διάνυσμα των μεταβλητών επιλογής.

Το Χ ονομάζεται σύνολο εφικτών λύσεων ή αποδεκτών λύσεων. Θα υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f, $g_1, ..., g_m$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες σε ένα ανοιχτό σύνολο $D \subset R^n$, οπότε έχουμε $X \subset D$.

Με τον ίδιο τρόπο το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Να βρεθεί ένα σημείο $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ τέτοιο ώστε

$f(x^*) = \min f(x)$

υπό τους περιορισμούς: $\quad g_i(x) \ge b_i, \quad i = 1, ..., m$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, ..., n$$

ή ως $\quad f(x^*) = \min f(x), x \in X \equiv \{x \in R^n : g(x) \ge b, x \ge 0\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Έστω μια επιχείρηση έχει συνάρτηση ολικών κερδών

$$p = p(x, y) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy$$

όπου x και y είναι οι πωλούμενες ποσότητες των προϊόντων X και Y αντίστοιχα. Για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος X απαιτούνται 2 μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής και για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος Y απαιτούνται 5 μονάδες του συντελεστή αυτού, που διατίθεται σε 40 μονάδες.

Ζητείται να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή αγοράς που μπορεί να δεχτεί η επιχείρηση για την απόκτηση των πρόσθετων 2,4,6,8 και 10 μονάδων του συντελεστή αυτού.

Λύση

Προφανώς η απάντηση στο ερώτημα αυτό εξαρτάται από το πόσο θα αυξηθεί το μέγιστο κέρδος αν η διαθέσιμη ποσότητα του συντελεστή αυξηθεί από 40 σε 42,44,46,48 και 50 μονάδες αντίστοιχα. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα επιλύσουμε αρχικά το πρόβλημα βελτιστοποίησης.
$\max \quad p = p(x,y) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy$

υπό τον περιορισμό: $2x + 5y = 40$

(1)

Το πρόβλημα αυτό έχει συνάρτηση Lagrange $L(x,y,l) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy - l[2x + 5y - 40]$

και συνθήκες πρώτης τάξης
$$\begin{aligned} L_x &= 8x + 20y - 2l = 0 \\ L_y &= 20x - 10y - 5l = 0 \\ L_l &= 40 - 2x - 5y = 0 \end{aligned}$$

(2).

Από την επίλυση του (2) παίρνουμε: $x^* = 15/2, y^* = 5$ και $l^* = 20$. Για τον έλεγχο των ικανών συνθηκών η περιφραγμένη μήτρα Hesse στο σημείο (x*,y*,λ*)=(15/2 ,5,20) είναι:

$$|\hat{H}| = \begin{vmatrix} -8 & 20 & -2 \\ 20 & -10 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 640 > 0$$

Έτσι $x^* = 15/2, y^* = 5$ και $l^* = 20$ μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (1) με μέγιστο κέρδος:

$$p(15/2, 5) = -4\left(\tfrac{15}{2}\right)^2 - 5(5)^2 + 20(5)\left(\frac{15}{2}\right) = 400$$

Τιμές του B	Βέλτιστες Λύσεις	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	Μέγιστη τιμή απόκτησης των πρόσθετων μονάδων
42	$x^* = 63/8, y^* = 21/4$	441	$441 - 400 = 41$
44	$x^* = 33/4, y^* = 11/2$	484	$484 - 400 = 84$
46	$x^* = 69/8, y^* = 23/4$	529	$529 - 400 = 129$
48	$x^* = 9, y^* = 6$	576	$576 - 400 = 176$
50	$x^* = 75/8, y^* = 25/4$	625	$325 - 400 = 225$

Για να προσδιορίσουμε τώρα ποια θα πρέπει να είναι η μέγιστη τιμή απόκτησης των πρόσθετων 2,4,6,8 και 10 μονάδων συντελεστή θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα (1) με δεξιό σκέλος b του περιορισμού 2x+5y=b ίσο προς 42,44,46,48 και 50 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα της επίλυσης των προβλημάτων αυτών καθώς και η μέγιστη τιμή αγοράς των πρόσθετων μονάδων του συντελεστή παρουσιάζονται στον παραπάνω πίνακα.

Έτσι π.χ. η μέγιστη τιμή που θα πρέπει να αποκτηθούν οι πρώτες δύο πρόσθετες μονάδες του συντελεστή παραγωγής θα πρέπει να είναι το πολύ 41 νομισματικές μονάδες και που είναι ίση προς την αύξηση των μέγιστων κερδών που συνεπάγεται η χρησιμοποίηση αυτών μονάδων του συντελεστή.

Παράδειγμα 2

Έστω το πρόβλημα δεσμευμένης βελτιστοποίησης μεγιστοποίησης της χρησιμότητας

$\max U(x_1, x_2; a) = Ax_1^a x_2^b$

(1)

υπό τον περιορισμό $g(x_1, x_2; a) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$

(2)

όπου $a=(a\,,b\,,p_1,p_2,A,I)$.

Γνωρίζουμε ότι υπό κανονικές συνθήκες ο εισοδηματικός περιορισμός (2) είναι ενεργός, δηλαδή ικανοποιείται ως εξίσωση στη βέλτιστη λύση. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις βέλτιστης επιλογής του καταναλωτή ως

$$x_1^*=x_1^*(a)=\frac{I}{p_1}\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

(3)

$$x_2^*=x_2^*(a)=\frac{I}{p_2}\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

Με αντικατάσταση των (3) στη συνάρτηση χρησιμότητας (1) παίρνουμε τη συνάρτηση μέγιστης χρησιμότητας του καταναλωτή ως

$$V(a\,,b\,,p_1,p_2,A,I)=A\left[\frac{I}{p_1}\left(\frac{a}{a+b}\right)\right]^a\left[\frac{I}{p_2}\left(\frac{b}{b+a}\right)\right]^b$$

(4)

$$=\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{I}}{a+b}\right)^{a+b}\left(\frac{a}{p_1}\right)^a\left(\frac{b}{p_2}\right)^b$$

Η συνάρτηση (1) είναι η άμεση συνάρτηση χρησιμότητας γιατί οι ανεξάρτητες μεταβλητές της είναι οι μεταβλητές επιλογής του καταναλωτή x1 και x2. Η συνάρτηση μέγιστης χρησιμότητας (4) είναι η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας γιατί οι ανεξάρτητες μεταβλητές της είναι οι παράμετροι των οποίων οι τιμές προσδιορίζουν το περιβάλλον όπου δραστηριοποιείται ο καταναλωτής. Επειδή οι υπό έλεγχο μεταβλητές της μέγιστης συνάρτησης χρησιμότητας είναι οι παράμετροι, η συνάρτηση μέγιστης χρησιμότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή χρήσιμων αποτελεσμάτων συγκριτικής στατικής ανάλυσης.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Κατά τη μελέτη διαφόρων φαινομένων από το χώρο της Οικονομικής Επιστήμης ή της Διοίκησης Επιχειρήσεων, πολλές φορές αντιμετωπίζουμε το αντίστροφο πρόβλημα: αν γνωρίζουμε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται ένα μέγεθος, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την εξέλιξή του μέσα στο χρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την έννοια του ολοκληρώματος, η οποία είναι απαραίτητη για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς των ενδογενών μεταβλητών ενός υποδείγματος. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε πως εξειδικεύεται η έννοια αυτή στην περίπτωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής, πολυμεταβλητών συναρτήσεων ή διανυσματικών συναρτήσεων (απλό, πολλαπλό και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αντίστοιχα).

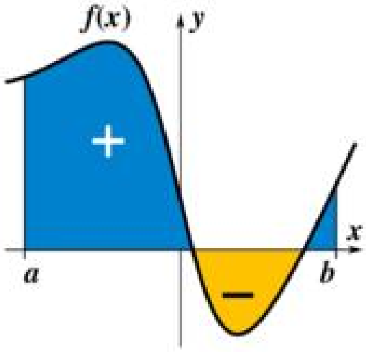
Σε πολλά υποδείγματα από το χώρο της Οικονομικής Επιστήμης και της Διοίκησης Επιχειρήσεων, υπάρχουν θεμελιώδη μεγέθη, όπως οι επενδύσεις, τα οποία εκφράζουν ρυθμούς μεταβολής άλλων μεγεθών. Με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές συναρτήσεις από τις οποίες προέκυψαν τα μεγέθη αυτά. Οι οικονομικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων περιλαμβάνουν τον ορισμό της καθαρής παρούσας αξίας ενός περιουσιακού στοιχείου, τη μαθηματική ανάλυση της έννοιας της απόσβεσης και τη μεθοδολογία προσδιορισμού του άριστου χρόνου έναρξης μιας επενδυτικής δραστηριότητας. Τέλος, με τη βοήθεια της έννοιας του ολοκληρώματος θα επιχειρήσουμε μία πρώτη προσέγγιση στη διαμόρφωση τιμολογιακής πολιτικής μέσω μεγιστοποίησης του κοινωνικού πλεονάσματος.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Η ολοκλήρωση είναι στοιχειώδης έννοια των προχωρημένων μαθηματικών, ειδικά στα πεδία του απειροστικού λογισμού και της μαθηματικής ανάλυσης.

Δεδομένης μιας συνάρτησης f(x), μιας πραγματικής μεταβλητής x και ένα διάστημα [a, b] της γραμμής των πραγματικών αριθμών, το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



αντιστοιχεί στο εμβαδό της περιοχής του επιπέδου xy που περικλείεται από το γράφημα της f, τον άξονα x και τις κάθετες γραμμές x=a και x=b, μείον την επιφάνεια που βρίσκεται κάτω από τον άξονα x.

Ο όρος "ολοκλήρωμα" μπορεί επίσης να αναφέρεται στην έννοια της αντιπαραγώγου ή παράγουσας συνάρτησης, η οποία είναι μια συνάρτηση F της οποίας η παράγωγος είναι η αρχική f. Σ' αυτήν την περίπτωση λέγεται και αόριστο ολοκλήρωμα.

Μερικοί συγγραφείς θεωρούν διαφορετική την έννοια της αντιπαραγώγου από το αόριστο ολοκλήρωμα. Η διαφορά είναι ότι αντιπαράγωγος είναι κάθε συνάρτηση της οποίας η παράγωγος δίνει την f, ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι μια οικογένεια συναρτήσεων που διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια σταθερά, κάθε μια από τις οποίες είναι αντιπαράγωγος της f[1].

4.1. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Αν η συνάρτηση f(x) έχει παράγουσες, το σύνολο των παραγουσών της λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι το αόριστο ολοκλήρωμα είναι μια οικογένεια συναρτήσεων, οι οποίες περιγράφονται από τη σχέση $\int f(x)dx = F(x) + c$, όπου c είναι μια τυχαία σταθερά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Μία βιομηχανία παράγει ένα προϊόν Α. Είναι γνωστό ότι το οριακό κόστος της βιομηχανίας δίνεται από τη σχέση f(Q)=10Q+200 όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα και ότι το σταθερό κόστος είναι 100 χρηματικές μονάδες (χ.μ.). Επίσης είναι γνωστό ότι το οριακό έσοδο της βιομηχανίας είναι g(Q)=1400-20Q. Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους καθώς και τη συνάρτηση ζήτησης της βιομηχανίας.

Προφανώς η συνάρτηση κόστους είναι

$C(Q) = \int f(Q)dQ = \int (10Q + 200)dQ$ ή $C(Q) = 5Q^2 + 200Q + c$, όπου c σταθερά. Το σταθερό κόστος είναι $C(0) = c = 100c.m.$, οπότε

$$C(Q) = 5Q^2 + 200Q + 100.$$

Παρόμοια, η συνάρτηση συνολικού εσόδου είναι

$R(Q) = \int g(Q)dQ = \int (1400 - 20Q)dQ$ ή $R(Q) = 1400Q - 10Q^2 + c$, όπου c σταθερά. Αν η βιομηχανία δεν παράγει τίποτα, τότε προφανώς τα έσοδά της είναι μηδέν, δηλαδή R(0)=c=0 και $R(Q) = 1400Q - 10Q^2$.

Αν P είναι η τιμή πώλησης του προϊόντος, τότε ισχύει $R(Q) = P(Q) \cdot Q$ και η συνάρτηση ζήτησης είναι $P = \frac{R(Q)}{Q} = 1400 - 10Q$ ή $Q = 140 - 0,1P$. Έτσι, η ελαστικότητα ζήτησης είναι $h = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -0,1 \cdot \frac{P}{140 - 0,1P}$.

Παράδειγμα 2

Η οριακή ροπή προς κατανάλωση σε μία οικονομία δίνεται από τη συνάρτηση $MPC = \frac{dC}{dY_d} = g(Y_d) = 0,6 + \frac{0,2}{\sqrt{Y_d}}$, όπου Y_d είναι το διαθέσιμο εισόδημα. Αν η κατανάλωση είναι 80 χρηματικές μονάδες (χ.μ.) όταν το διαθέσιμο εισόδημα είναι 100 χ.μ., να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κατανάλωσης.

Έστω $C = f(Y_d)$ η συνάρτηση κατανάλωσης. Προφανώς είναι

$C = \int g(Y_d)dY_d = \int\left(0,6 + \frac{0,2}{\sqrt{Y_d}}\right)dY_d = 0,6Y_d + 0,2\int Y_d^{-1/2}dY_d = 0,6Y_d + 0,4\sqrt{Y_d} + c$, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Επειδή C(100)=80, είναι

$0,6 \cdot 100 + 0,4 \cdot \sqrt{100} + c = 80 \;\; \acute{\eta} \;\; c = 16$. Άρα η συνάρτηση κατανάλωσης της οικονομίας είναι $C = 0,6Y_d + 0,4\sqrt{Y_d} + 16$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να προσδιοριστεί η συνάρτηση αποταμίευσης από την οριακή ροπή για αποταμίευση (marginal propensity to save, MPS).

Παράδειγμα 3

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιχείρηση, της οποίας το σταθερό κόστος FC=60 μονάδες και το οριακό κόστος είναι, $MC = 7e^{0,65}Q$ όπου, Q= η ποσότητα του προϊόντος. Ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης αυτής.

Λύση

Από τη σχέση του οριακού κόστους θα έχουμε,

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 7 \cdot e^{0,65}Q \Leftrightarrow 7 \cdot e^{0,65}Q \cdot dQ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow TC = \int 7 \cdot e^{0,65}Q \cdot dQ = 7\int e^{0,65}Q \cdot dQ = \frac{7}{0,65}\int e^{0,65}Q \cdot d(0,65Q) = \frac{7}{0,65}e^{0,65}Q + c$$

Αν τώρα θέσουμε Q=0 θα έχουμε το FC, που είναι 60 μονάδες. Οπότε θα έχουμε,

$$TC(Q=0)=FC=\frac{7}{0,65}\cdot e^{0,65\cdot 0}+c=60 \Leftrightarrow c=60-\frac{7}{0,65}=49,23$$

Άρα $TC=10,76\cdot e^{0,65}Q+49,23$.

Παράδειγμα 4

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια παραγωγική διαδικασία, της οποίας το οριακό κόστος δίνεται από τη σχέση,

$$dC/dQ=Q^2+8Q+2$$

και το σταθερό κόστος παραγωγής είναι 3500 μονάδες. Ζητείται να προσδιοριστεί το συνολικό κόστος αυτής της παραγωγικής διαδικασίας, για ύψος παραγωγής 10 μονάδων.

Λύση

Από τη συνάρτηση του οριακού κόστους θα έχουμε,

$$dC=(Q^2+8Q+2)dQ$$

που με ολοκλήρωση προκύπτει,

$$C=\int(Q^2+8Q+2)dQ=\int Q^2dQ+\int 8QdQ+2\int dQ=\frac{Q^3}{3}+\frac{8Q^2}{2}+2Q+C$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{3}Q^3+4Q^2+2Q+3500$$

Αν τώρα θέσουμε Q=20, έχουμε το ζητούμενο του προβλήματος, δηλαδή,

$C=\frac{1}{3}20^3+4\cdot 20^2+2\cdot 20+3500=\frac{160000}{3}+400\cdot 4+40+3500=5193,3$ μονάδες.

Παράδειγμα 5

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια οικονομία της οποίας γνωρίζουμε την οριακή ροπή προς κατανάλωση ότι είναι mpc=100-0,2$\cdot$Y, όπου Y= το εισόδημα. Αν συμβαίνει η συνολική κατανάλωση να είναι 50 μονάδες όταν Y=0, ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση της συνολικής κατανάλωσης της οικονομίας αυτής.

Λύση

Από τη συνάρτηση της οριακής κατανάλωσης θα έχουμε,

$$MPC = \frac{dC}{dY} = 100 - 0,2Y \Leftrightarrow dC = (100 - 0,2Y)dY \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \int (100 - 0,2Y)dY = \int 100dY - \int 0,2dY =$$

$$= 100\int dY - 0,2\int YdY = 100 - 0,2\frac{Y^2}{2} + C'$$

$$= 100 - 0,1Y^2 + C'$$

Για τον υπολογισμό της σταθερής θα έχουμε με Y=0, C=50,

$$50 = 100 - 0,1 \cdot 0 + C' \Leftrightarrow C' = 50.$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση της συνολικής κατανάλωσης θα είναι,

$$C = 100 \cdot Y - 0,1Y^2 + 50 = 50 + 100Y - 0,1 \cdot Y^2$$

Παράδειγμα 6

Υποθέτουμε ότι σε μια οικονομία εκτιμήθηκε από μια έρευνα ότι η $MPC = 105 - 0,4 \cdot Y$, όπου Y είναι το εισόδημα. Αν θεωρήσουμε ότι για Y=0 η συνολική κατανάλωση ανέρχεται στο ύψος των 15 μονάδων, προσδιορίστε τη συνάρτηση της συνολικής κατανάλωσης.

Λύση

Γνωρίζουμε από τη μακροοικονομία ότι,

$$MPC = \frac{dC}{dY} \Rightarrow \frac{dC}{dY} = 105 - 0,4Y$$

Οπότε με ολοκλήρωση θα έχουμε,

$$C = \int (105 - 0,4Y)dY + C' \Leftrightarrow C = 105 - 0,4Y\int dY - C' \Leftrightarrow C = 105Y - 0,4\frac{Y^2}{2} + C'$$

$$\Leftrightarrow C = 105Y - 0,2Y^2 + C'$$

Με Y=0 και C=15 προσδιορίζουμε τη σταθερά ότι είναι $C' = 15$ οπότε η ζητούμενη συνάρτηση κατανάλωσης θα είναι

$$C = 15 + 105Y - 0,2Y^2.$$

Παράδειγμα 7

Αν η οριακή ροπή προς αποταμίευση είναι 0,2 και η κατανάλωση που αντιστοιχεί σε εισόδημα μηδέν είναι 15 δις. ευρώ, τότε η συνάρτηση της ολικής κατανάλωσης είναι:

$$\frac{dC}{dY} = g'(Y) = 1 - \frac{dS}{dY} = 1 - 0,2 = 0,8 \qquad \text{και} \qquad C = \int g'(Y)dY = 0,8Y + A$$

Επειδή όταν Y=0, C=15, έχουμε A=15 και C=0,8Y+15.

Παράδειγμα 8

Αν η συνάρτηση της οριακής ροπής προς κατανάλωση είναι

$$\frac{dC}{dY} = g'(Y) = 0,2 + \frac{0,4}{\sqrt{2Y}}$$

και η κατανάλωση είναι 11 δις. ευρώ όταν το εισόδημα είναι μηδέν τότε η συνάρτηση ολικής κατανάλωσης προσδιορίζεται ως εξής:

$$C = \int \left(0,2 + \frac{0,4}{\sqrt{2Y}}\right) dY = 0,2Y + \frac{0,4}{\sqrt{2}}\sqrt{y} + A$$

Επειδή C=25 όταν Y=0 έχουμε A=25 και $C = 0,2Y + \frac{0,4}{\sqrt{2}}\sqrt{y} + 25$.

4.2. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN)

Η συνάρτηση f λέγεται ολοκλήρωση κατά Riemann ως προς x στο διάστημα [α,β] αν υπάρχει το όριο του αθροίσματος Riemann της f για $n \to +\infty$. Όταν το όριο αυτό υπάρχει, είναι ανεξάρτητο του διαμερισμού P, ονομάζεται ολοκλήρωμα Riemann και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$ ή $\int_a^b fdx$, δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \tag{2}$$

Η συνάρτηση f λέγεται συνάρτηση υπό ολοκλήρωση και τα α και β λέγονται αντίστοιχα κάτω και άνω όριο ολοκλήρωσης.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι αριθμός, ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε το άθροισμα Riemann πλησιάζει την τιμή A που είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της f(x) και τις ευθείες x=α και x=β. Όσο περισσότερα είναι τα υποδιαστήματα στα οποία χωρίζουμε το διάστημα [α,β], τόσο το άθροισμα Riemann θα πλησιάζει την τιμή A. Αν μάλιστα χωρίσουμε το [α,β] σε άπειρο αριθμό υποδιαστημάτων, τότε το άθροισμα Riemann, που παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών των αντίστοιχων ορθογωνίων, θα τείνει στην τιμή A.

Δηλαδή: $A = \int_a^b f(x)dx$.

Αν η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές στο διάστημα [α,β], δηλαδή αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε το ολοκλήρωμα Riemann θα είναι αρνητικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή είναι: $A = -\int_a^b f(x)dx$.

Γενικά, αν f είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, η οποία είναι φραγμένη στο [α,β], τότε: $A = \int_a^b |f(x)|dx$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Έστω ότι η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι $MC(Q) = 5Q + 1$. Να βρείτε το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή P=8, στην τιμή P=17 και το πλεόνασμα του παραγωγού καθώς η τιμή αυξάνεται από P=8 σε P=17.

Λύση

Από τη συνθήκη μεγιστοποίησης του κέρδους $P = MC(Q)$, προκύπτει ότι στην τιμή P_1=15 αντιστοιχεί ποσότητα Q_1=6, ενώ στην τιμή P_2=29, αντιστοιχεί ποσότητα Q_2=7. Έτσι το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή P_1=15 είναι:

$$PS_1 = 15 \cdot 6 - \int_0^6 (5Q+1)dQ = 90 - \left[\frac{5}{2}Q^2 + Q\right]_0^6 = 90 - 6 = 84$$

Παρόμοια, το πλεόνασμα που αντιστοιχεί στην τιμή P_2=29 είναι:

$$PS_2 = 29 \cdot 7 - \int_0^7 (5Q+1)dQ = 203 - \left[\frac{5}{2}Q^2 + Q\right]_0^7 = 122,5 - 7 = 115,5$$

Τέλος, το πλεόνασμα καθώς η τιμή αυξάνεται από P=15 σε P=29, δηλαδή καθώς η ποσότητα αυξάνεται από Q=6 σε Q=7, είναι:

$$PS = PS_2 - PS_1 = 115,5 - 84 = 31,5 .$$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι η συνάρτηση καθαρών επενδύσεων της οικονομίας είναι $I(t) = 5t^{2/3}$ και ότι το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου είναι 5 χρηματικές μονάδες (χ.μ.). Να βρείτε το απόθεμα κεφαλαίου το χρόνο t=4 καθώς και τις καθαρές επενδύσεις που έγιναν στην οικονομία στο διάστημα από t=3 έως t=5.

Λύση

Το απόθεμα κεφαλαίου είναι $K(t)\int I(t)dt = \int 5t^{2/3}dt = 3t^{5/3} + c$. Επειδή K(0)=5 και c=5, οπότε $K(t) = 3t^{5/3} + 5$. Έτσι, το απόθεμα κεφαλαίου το χρόνο t=4 είναι $K(4) = 3 \cdot 4^{5/3} + 5 = 35,238$ χ.μ.

Οι καθαρές επενδύσεις στο διάστημα από t=3 έως t=5 δίνονται από το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_3^5 I(t)dt = \int_3^5 5t^{2/3}\, dt = 3t^{5/3}\Big|_3^5 = (43,86 - 18,72) = 25,14$ χ.μ.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν υπολογίσουμε την καθαρή μεταβολή του αποθέματος κεφαλαίου από t=3 έως t=5 ως εξής: $K(5) - K(3) = (3 \cdot 5^{5/3} + 5) - (3 \cdot 3^{5/3} + 5) = 25,14$ χ.μ.

Παράδειγμα 3

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιχείρηση της οποίας η συνολική της MR είναι

$$\frac{dR}{dQ} = 750 \Big/ \sqrt{625Q}$$

όπου R είναι τα συνολικά της έσοδα και Q είναι η ποσότητα παραγωγής. Ζητείται να προσδιοριστεί η μεταβολή των εσόδων της επιχείρησης αυτής, όταν η παραγωγή αυξηθεί από 200 σε 400 μονάδες.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχετική θεωρία του ολοκληρωτικού λογισμού. Θα έχουμε από τη συνάρτηση των οριακών εσόδων

$$dR = \frac{750}{\sqrt{625Q}} dQ$$

που με ολοκλήρωση θα γράφεται,

$$\int dR = \int \frac{750}{\sqrt{625Q}} dQ \qquad\qquad R = \int \frac{750}{\sqrt{625Q}} dQ$$

Υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα. Θα έχουμε,

$$R = \int_{200}^{400} \frac{750}{\sqrt{625Q}} dQ = 30 \int_{200}^{400} \frac{dQ}{\sqrt{Q}} = 30 \int_{200}^{400} Q^{-1/2} dQ =$$

$$= 30 \frac{Q^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{200}^{400} = 30(400^{1/2} - 200^{1/2}) = 30(20 - 14,14) = 5,86\,.$$

Παράδειγμα 4

Οι συνολικές δαπάνες μιας επιχείρησης για τα επόμενα 5 χρόνια εκτιμήθηκαν ότι θα είναι,

$$TC = \int_0^5 e^{0,05t} dt$$

Ζητείται να εκτιμηθούν οι δαπάνες αυτές.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχετική θεωρία του ολοκληρωτικού λογισμού. Αρκεί να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$TC = \int_0^5 5000 e^{0,05t} dt = 5000 \int_0^5 e^{0,05t} \frac{1}{0,05} d(0,05t) = \frac{5000}{0,05} \int_0^5 e^{0,05t} d(0,05t) =$$

$$= 100.000 \cdot e^{0,05t} \Big|_0^5 = 100.000(e^{0,05 \cdot 5} - e^{0,05 \cdot 0}) = 100.000(e^{0,25} - 1) =$$

$$= 100.000(1,284 - 1) = 28.400$$

Άρα θα είναι 28400 μονάδες.

Παράδειγμα 5

Υποθέτουμε ότι έχουμε εκτιμήσει τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος που είναι,

$$P = 900 - Q^2 \qquad \text{και} \qquad P = 100 + Q^2$$

Ζητείται να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή και το πλεόνασμα του παραγωγού, όταν η αγορά ισορροπεί.

Λύση

Λύνουμε αρχικά το παρακάτω σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} P &= 900 - Q^2 \\ P &= 100 + Q^2 \end{aligned}\right]$$

$$900 - Q^2 = 100 + Q^2 \Leftrightarrow 800 = 2Q^2 \Leftrightarrow 400 = Q^2 \Leftrightarrow Q = \pm 20$$

Δεκτή λύση θα είναι η $Q_D = 20$.

Τότε $P = 900 \cdot 20^2 = 500$ δηλαδή, $P_0 = 500$

Σύμφωνα με προηγούμενους τύπους θα έχουμε,

$$CS = \int_0^{Q_0} \left[f_{(Q)} - r_0 \right] dQ = \int_0^{20} \left[900 - Q^2 - 500 \right] dQ = 400Q\Big|_0^{20} - \frac{1}{3}Q^3\Big|_0^{20} =$$

$$= 400 \cdot 20 - \frac{1}{3}20^2 = 8000 - 2666 = 5334$$

$$PS = \int_0^{Q_0} [P_0 - j\,(Q)] dQ = \int_0^{20} \left[500 - 100 - Q^2 \right] dQ = 400Q\Big|_0^{20} - \frac{1}{3}Q^3\Big|_0^{20} =$$

$$= 400 \cdot 20 - \frac{1}{3}20^3 = 5334.$$

Παράδειγμα 6

Υποθέτουμε ότι το κόστος επέκτασης των παγίων εγκαταστάσεων μιας βιομηχανικής μονάδας σήμερα, είναι C=1000 μονάδες. Επίσης υποθέτουμε ότι η ετήσια συνεχής ροή εισοδήματος από τις εργασίες αυτής της βιομηχανικής μονάδας είναι, f(x)=200t μονάδες, όπου t είναι ο χρόνος. Αν εκτιμηθεί ότι η οικονομική ζωή της βιομηχανικής αυτής μονάδας είναι 8 χρόνια και ότι το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι r=15% το χρόνο, να ελεγχθεί, αν συμφέρει η επέκταση των παγίων εγκαταστάσεων της βιομηχανικής αυτής μονάδας.

Λύση

Θα έχουμε,

$$A = \int_0^T f(t) e^{-rt} dt = \int_0^8 200t \cdot e^{-0,15t} dt = \frac{200}{-0,15} \int_0^8 t \cdot d(e^{-0,15t}) =$$

$$= \frac{200}{-0,15} \left\{ t \cdot e^{-0,15t} \right\}\Big|_0^8 + \frac{200}{-0,15} \int_0^8 e^{-0,15t} dt =$$

$$= -\frac{200}{0,15} \left[8 \cdot e^{-0,15t8} - 8 \right] + \frac{200}{0,15(-0,15)} \int_0^8 e^{-0,15t} d(-0,15t) =$$

$$= -\frac{1600}{0,15}(e^{-12}-1) - \frac{200}{0,0225}\left[e^{-0,15t}\right] =$$

$$= -\frac{1600}{0,15}(e^{-12}-1) - \frac{200}{0,0225}\left[e^{-0,15}-1\right] = -\frac{1600}{0,15}(-0,6987) - \frac{200}{0,0225}(-0,6987) =$$

$$= 745,8 + 6210,6 = 13663,4$$

Διαπιστώσαμε ότι η παρούσα αξία της συνεχούς ροής εισοδήματος είναι 13663,4>1000=C. Άρα συμφέρει η επέκταση αυτή.

Παράδειγμα 7

Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = D(q) = 200 - 6q - 4q^2$ να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή όταν (i) q0=4 και (ii) p0=70.

Λύση

(i) $p_0 = D(q_0) = 200 - 6(4) - 4(4)^2 = 112$

$$CS = \int_0^4 (200 - 6q - 4q^2)dq - (4)(112)$$

$$= 200q - \frac{6}{2}q^2 - \frac{4}{3}q^3 \Big|_0^2 - 448 = 800 - 581,3 = 218,7$$

(ii) $70 = 200 - 6q_0 - 4q_0^2 \Leftrightarrow q_0 = 5,75$ και $CS = \int_0^{5,75} \left(200 - 6q - 4q^2\right) dq - (5,75)(70)$

$$= 200q - \frac{6}{2}q^2 - \frac{4}{3}q^3 \Big|_0^{5,75} - 402,5 = 1150 - 352,92 = 797,08 .$$

Παράδειγμα 8

Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = D(q) = \sqrt{16 - 2q}$ να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή με τις δύο μεθόδους όταν q0=3.

Λύση

Έχουμε: $p = D(q) = \sqrt{16 - 2q} \Leftrightarrow q = D(p) = 8 - \frac{1}{2}p^2$, και $p_0 = D(3) = \sqrt{10}$.

Από τα δεδομένα αυτά παίρνουμε:

$$CS = \int_0^3 \sqrt{16-2q}\,dq - 3\sqrt{10} = \int_{\sqrt{10}}^{4} \left(8 - \frac{1}{2}p^2\right)dp$$

Αν υπολογίσουμε την CS με βάση τη συνάρτηση p=D(q) παίρνουμε:

$$CS = \int_0^3 \sqrt{16-2q}\,dq - 3\sqrt{10} = -\frac{1}{3}(16-2q)^{3/2}\Big|_0^3 - 3\sqrt{10}$$

$$= -\frac{10}{3}\sqrt{10} - \left(-\frac{1}{3}16^{3/2}\right) - 3\sqrt{10} = \frac{64}{3} - \frac{19}{3}\sqrt{10}$$

Αν υπολογίσουμε την CS με βάση τη συνάρτηση q=Q(p) παίρνουμε:

$$CS = \int_{\sqrt{10}}^{4} \left(8 - \frac{1}{2}p^2\right)dp = 8p - \frac{1}{6}p^3\Big|_{\sqrt{10}}^{4} = 8(4) - \frac{1}{6}(4)^3 - \left[8\sqrt{10} - \frac{1}{6}(\sqrt{10})^3\right]$$

$$= \frac{64}{3} - \left[8\sqrt{10} - \frac{10}{6}\sqrt{10}\right] = \frac{64}{3} - \frac{19}{3}\sqrt{10}$$

Όπως περιμέναμε το PS είναι και με τις δύο μεθόδους ίδιο.

Παράδειγμα 9

Αν η συνάρτηση προσφοράς είναι

$$p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9,$$

και η τιμή p_1=49 να υπολογιστεί το πλεόνασμα του παραγωγού με τους δύο τρόπους.

Λύση

Έχουμε: $p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9 \Leftrightarrow q = G(p) = \frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{3}{2}$,

και $q_1 = G(49) = \frac{1}{2}\sqrt{49} - \frac{3}{2} = 2$.

Από τα δεδομένα αυτά το PS υπολογίζεται ως:

$$PS = \int_0^{49} \left(\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{3}{2}\right)dp = (2)(49) - \int_0^2 \left(4q^2 + 12q + 9\right)dq$$

Αν υπολογίσουμε το PS με βάση τη συνάρτηση q=G(p) παίρνουμε:

$$PS=\int_0^{49}\left(\frac{1}{2}\sqrt{p}-\frac{3}{2}\right)dp=\frac{1}{3}\sqrt[3]{p^2}-\frac{3}{2}p\Big|_9^{49}=\frac{1}{3}p\sqrt{p}-\frac{3}{2}p\Big|_9^{49}$$

$$=p\left(\frac{1}{3}\sqrt{p}-\frac{3}{2}\right)\Big|_9^{49}=49\left(\frac{1}{3}\sqrt{49}-\frac{3}{2}\right)-9\left(\frac{1}{3}\sqrt{9}-\frac{3}{2}\right)=40\frac{5}{6}-9\left(-\frac{1}{2}\right)=45\frac{1}{3}$$

Αν υπολογίσουμε το PS με βάση τη συνάρτηση p=S(q) παίρνουμε:

$$PS=(2)(49)-\int_0^{2}\left(4q^2+12q+9\right)dq=(2)(49)=\left(\frac{4}{3}q^3+6q^2+9q\right)\Big|_0^{2}$$

$$=(2)(49)-\left[\frac{4}{3}(2)^3+6(2)^2+9(2)-\frac{4}{3}(0)^3-6(0)^2-9(0)\right]=98-\frac{158}{3}=45\frac{1}{3}$$

Όπως περιμέναμε το PS είναι και με τις δύο μεθόδους ίδιο και ίσο με $45\frac{1}{3}$.

4.4 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Βασικό πρόβλημα της μελέτης συστημάτων είναι ο προσδιορισμός των συναρτησιακών σχέσεων που συνδέουν τα διάφορα μέρη τους. Πολλές φορές ο άμεσος προσδιορισμός των συναρτησιακών αυτών σχέσεων είναι από τα πράγματα όχι μόνο χρονοβόρος και επίπονος αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις και αδύνατος. Αντίθετα αυτό που έχουμε εύκολα και άμεσο διαθέσιμο στις περιπτώσεις αυτές είναι σχέσεις μεταξύ ορισμένων μεταβλητών και ρυθμών μεταβολής άλλων ή και των ίδιων μεταβλητών. Στις περιπτώσεις αυτές έχουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού συναρτήσεων ενός συστήματος από πληροφορίες που αναφέρονται στους ρυθμούς μεταβολής τους.

Για παράδειγμα από τον ρυθμό μεταβολής του δείκτη τιμών καταναλωτή, που είναι συνήθως ανάλογος της τιμής του, μπορεί να παραχθεί ο δείκτης τιμών καταναλωτή ως συνάρτηση του χρόνου. Ακόμη από το ρυθμό μεταβολής ενός πληθυσμού, που για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα μπορεί να υποτεθεί ότι είναι ανάλογος του μεγέθους του πληθυσμού αυτού, μπορεί να παραχθεί η συνάρτηση εξέλιξης του πληθυσμού ως προς το χρόνο.

Η γενική θεωρία προσδιορισμού μιας συνάρτησης, από πληροφορίες που αναφέρονται σε ρυθμούς μεταβολής της, μπορεί να λάβει μια από τις εξής δύο μαθηματικές μορφές:

Όταν οι ρυθμοί μεταβολής θεωρούνται ότι συμβαίνουν συνεχώς ή ταυτοχρόνως τότε εκφράζονται ως παράγωγοι και οι εξισώσεις που τις περιλαμβάνουν διαφορικές εξισώσεις.

Όταν οι ρυθμοί μεταβολής εμφανίζονται διακριτώς ή ασυνεχώς σε ορισμένα σημεία του χρόνου ή ως μέσοι ρυθμοί μεταβολής σε μια χρονική περίοδο τότε οι ρυθμοί μεταβολής εκφράζονται ως διαφορές στις τιμές των μεταβλητών σε διάφορα χρονικά σημεία και οι εξισώσεις που τις περιλαμβάνουν ονομάζεται εξισώσεις διαφορών.

Θυμίζουμε ένα οικονομικό μοντέλο μπορεί να οριστεί ως ένα σύνολο σχέσεων που εκφράζονται συνήθως με ένα σύστημα εξισώσεων μεταξύ ενός συνόλου οικονομικών μεταβλητών.

Οι μεταβλητές ενός οικονομικού μοντέλου ταξινομούνται ως ενδογενείς και εξωγενείς. Ενδογενείς μεταβλητές είναι αυτές οι τιμές οι οποίες γεννώνται από μέσα και πρέπει να ερμηνευτούν ή να παραβλεφθούν. Εξωγενείς μεταβλητές είναι αυτές οι οποίες προσδιορίζονται ή γεννώνται έξω από το σύστημα και θεωρούνται ελεγχόμενες και γνωστές. Γενικά οι ενδογενείς μεταβλητές προσδιορίζονται από το μοντέλο ενώ οι εξωγενείς μεταβλητές ελέγχονται έξω από το μοντέλο.

Στη δυναμική ανάλυση όλες οι ενδογενείς μεταβλητές εξαρτώνται από το χρόνο και η εξάρτηση αυτή μπορεί να λάβει μια από τις εξής δύο μορφές. Όταν οι μεταβλητές αλλάζουν τιμή σε κάθε χρονική στιγμή οπότε ο χρόνος υποτίθεται ότι είναι συνεχής μεταβλητή και οι παρατηρήσεις λαμβάνονται σε ορισμένα σημεία του χρόνου. Στις περιπτώσεις αυτές τα βασικά εργαλεία είναι ολοκληρωτικός λογισμός και πιο γενικά διαφορικές εξισώσεις. Όταν οι μεταβλητές παίρνουν τιμές που παραμένουν σταθερές σε μια χρονική περίοδο και μεταβάλλονται μόνο από περίοδο σε περίοδο, οπότε ο χρόνος υποτίθεται ότι είναι διακριτή μεταβλητή. Στις περιπτώσεις αυτές τα βασικά εργαλεία είναι οι εξισώσεις διαφορών.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Διαφορική εξίσωση ν τάξης είναι μια σχέση της μορφής, $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, δηλαδή μια σχέση που συνδέει μια ανεξάρτητη μεταβλητή χ, μια άγνωστη συνάρτηση y και τις παραγώγους της $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$ μέχρι ν τάξης. Για να είναι η διαφορική εξίσωση ν τάξης, θα πρέπει οπωσδήποτε να υπάρχει η παράγωγος ν τάξης, ενώ μερικές παράγωγοι κατώτερης τάξης μπορεί να λείπουν.

Λύση ή ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης ν τάξης, είναι μια συνάρτηση y=f(x), που την πληρεί εκ ταυτότητος. Το ολοκλήρωμα αυτό θα εξαρτάται από ν αυθαίρετες τιμές $a, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, δηλαδή θα έχουμε μια λύση της μορφής $y = f(x, a, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$, που περιέχει ν αυθαίρετες παραμέτρους.

Αν η λύση ή το ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης ν τάξης περιέχει τόσες παραμέτρους, όση είναι και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης, τότε θα λέγεται γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης.

Αν στις παραμέτρους αυτές $a, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, δώσουμε αυθαίρετες τιμές τότε προκύπτει μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης, ή όπως λέμε, προκύπτει μια ολοκληρωτική καμπύλη.

Με άλλα λόγια η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης ν τάξης, θα αποτελείται από μια οικογένεια καμπυλών, που θα εξαρτάται από ν παραμέτρους και αντίστροφα μια οικογένεια ν καμπυλών ν, που εξαρτάται από ν παραμέτρους, θα είναι η οικογένεια των ολοκληρωτικών καμπυλών μιας διαφορικής εξίσωσης ν τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Παράδειγμα 1

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιχείρηση, της οποίας γενικά οι συναρτήσεις μέσων εσόδων και συνολικού κόστους είναι $AR = f(Q)$ και $TC = g(Q)$. Ζητείται να βρεθούν:

α) Η σχέση που υπάρχει μεταξύ της συνάρτησης μέσων εσόδων και οριακών εσόδων και

β) Η σχέση που υπάρχει μεταξύ της συνάρτησης μέσου κόστους και οριακού κόστους.

Λύση

α) Χρησιμοποιούμε τη βασική σχέση $AR = TR/Q$, από την οποία βρίσκουμε τη συνάρτηση των TR, που θα είναι,

$$TR = AR \cdot Q = f(Q)Q$$

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση αυτή ως προς Q, θα έχουμε,

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = \frac{d}{dq}(f(Q) \cdot Q) = f(Q)\frac{dQ}{dQ} + Q\frac{df(Q)}{dQ} =$$

$$= f(Q) + Q \cdot f'(Q) = AR + Q \cdot f'(Q)$$

Η τελευταία γράφεται MR-AR=Q-f(Q), που θα είναι και η ζητούμενη σχέση.

β) Από τη συνάρτηση του συνολικού κόστους TC=g(Q) βρίσκουμε τη συνάρτηση του AC που είναι, $AC = TC/Q = g(Q)/Q$ και τη συνάρτηση του οριακού κόστους,

$$MC = dTC/dQ = g'(Q)$$

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση του μέσου κόστους ως προς Q,

θα έχουμε,

$$\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{g'(Q) \cdot Q - g(Q) \cdot Q'}{Q^2} = \frac{1}{Q}(MC - AC)$$

που προκύπτει,

$$MC - AC = Q\frac{dAC}{dQ}$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

Από τη λύση του προβλήματος αυτού προκύπτουν τα εξής βασικά:

1) Από την πρώτη περίπτωση, ότι τα οριακά και τα μέσα έσοδα διαφέρουν πάντα κατά την ποσότητα $q \cdot f(Q)$.
2) Από την δεύτερη περίπτωση, ότι με Q>0 τότε $dAC/dQ = 0$ ή $dAC/dQ > 0$ ή $dAC/dQ < 0$ ανάλογα αν MC=AC ή MC>AC ή MC<AC αντίστοιχα.

Δηλαδή με άλλα λόγια ότι, η κλίση της συνάρτησης του μέσου κόστους σε ένα οριακό σημείο του γραφήματός της είναι θετική, μηδέν ή αρνητική, αν και μόνο αν, το οριακό κόστος είναι >= ή < του μέσου κόστους.

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος:

$$Q_D = 8 - 2 \cdot P$$

$$Q_S = -2 + 2 \cdot P$$

όπου, Q είναι η ζητούμενη και προσφερόμενη ποσότητα του προϊόντος, P είναι η τιμή του προϊόντος και P* είναι αναμενόμενη τιμή που ακολουθεί τη σχέση,

$$P^* = P + c\frac{dP}{dt}$$

Ζητείται να προσδιοριστεί η τιμή ισορροπίας και να μελετηθεί η σταθερότητά της αν c=0,10. Αν υποτεθεί επίσης ότι P(0)=8, να υπολογιστεί η τιμή του P(t) για t=2.

Λύση

Από τις σχέσεις του προβλήματος αυτού προκύπτουν:

$$Q_S = -2 + 2\left(P + c\frac{dp}{dt}\right) = -2 + 2P + 2c\frac{dp}{dt}$$

και

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow 8 - 2p = -2 + 2P + 2c\frac{dP}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2c\frac{dP}{dt} + 4P - 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} + \frac{2}{c}P - \frac{5}{c} = 0\,.$$

Η τελευταία είναι μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, η λύση της οποίας θα είναι,

$$p = e^{-\int \frac{2}{c}dt}\left[c' - \int \frac{(-5)\cdot e^{\int \frac{2}{c}dt}}{c}dt\right] \Rightarrow P = e^{-\frac{2t}{c}}\left[c' + \frac{5}{c}\int e^{\frac{2t}{c}}dt\right]$$

Θέτουμε, c=0,10

$$P = e^{-20t}\left[c' + 50\int e^{20t}dt\right] = e^{-20t}\cdot\left(\frac{50}{20}e^{20t} + c'\right)$$

Επειδή για $t = 0 \Rightarrow P = 8$ θα έχουμε $\Rightarrow c' = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι, $\Rightarrow P = e^{-20t}\cdot\left(\frac{5}{2}e^{20t} + \frac{11}{2}\right)$

Η τιμή ισορροπίας προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση, αν θέσουμε όπου $dP/dt = 0$, οπότε τότε θα έχουμε,

$\bar{P} = 2{,}5$. Επίσης με t=2 η P(t) θα είναι,

$$P(t=2) = e^{-20\cdot 2}\left(\frac{5}{2}e^{20\cdot 2} + \frac{11}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{11}{2}e^{-40} = 4{,}84\,.$$

Παράδειγμα 3

Σε μια έρευνα αγοράς εκτιμήσαμε τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ότι είναι:

$$(D): Q_D = 60 - 2\cdot p$$

$$(S): Q_S = -20 + 4\cdot p$$

όπου, Q_D και Q_S είναι η ζητούμενη και προσφερόμενη ποσότητα του προϊόντος αυτού και P είναι η τιμή. Αν υποθέσουμε τώρα ότι η διαχρονική μεταβολή της τιμής δίνεται από τη σχέση,

$$dP/dt = 0,2 \cdot t \cdot \left(Q_D - Q_S\right)$$

και είναι γνωστό ότι P(t=0)=10, να βρεθεί η διαχρονική μεταβολή της τιμής P(t).

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχετική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

Η τρίτη σχέση λόγω των δύο πρώτων γράφεται,

$$\frac{dP}{dt} = 0,2t(60 - 2p + 20 - 4p) = 0,2t(80 - 6p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dt} + 3pt - 16t = 0$$

Η τελευταία είναι μια ΔΕ γραμμική, 1ης τάξης, που η λύση της θα δίνεται από τον τύπο,

$$P = e^{-\int a dt}\left[c - \int b\, e^{\int a dt} dt\right] = e^{-\int 3t dt}\left[c - \int 16te^{\int 3t dt} dt\right] = e^{-3/2t2}\left[c + 16\int t \cdot e^{3/2t2} dt\right]$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int t \cdot e^{3/2} dt = \frac{1}{3}\int e^{1,5t2} d(1,5t^2) = \frac{1}{3}e^{1,5t2}$

Οπότε,

$$P = e^{-1,5t2}\left[c + 16/3 e^{1,5t2}\right] = ce^{-1,5t2} + 16/3 \Rightarrow P(t=0) = 10 \Rightarrow c = 10 - \frac{16}{3} = \frac{14}{3}$$

Άρα, η τελικά λύση της ΔΕ, που αποτελεί και τη ζητούμενη διαχρονική πορεία της τιμής του προβλήματος αυτού, θα είναι,

$$p = 14/3 e^{1,5t^2} + 16/3$$

Παράδειγμα 4

Υποθέτουμε ότι σε μια οικονομία ισχύουν

$$\begin{array}{r} \Pi a r a g w g \acute{\eta} \\ \text{E}r g a s\, \acute{\iota} a \\ \text{E}pend \acute{\upsilon} sei V \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Y} = 3\mathrm{K}^{0,5} \cdot L^{0,5} \\ L = 4e^{o,001t} \\ dK/dt = 0,4 \cdot Y \end{array} \right.$$

όπου Y είναι το τελικό προϊόν, K το κεφάλαιο, L η εργασία και t ο χρόνος. Ζητείται να βρεθεί η διαχρονική πορεία του λόγου $kej\,a\,l\,a\acute{\imath}ou/erga\,s\,\acute{\imath}a = K/L$, αν σαν αρχικές συνθήκες θεωρήσουμε $u(0) = 200000$, όπου $u = K/L$.

Λύση

Δημιουργούμε αρχικά το λόγο $u = \frac{K}{L} = \frac{K}{4 \cdot e^{0,001t}}$, και διαφορίζουμε ως προς t. Θα έχουμε,

$$\frac{dK}{dt} = 4 \cdot 0,01 \cdot e^{0,01t} \cdot u + 4 \cdot e^{0,01t} \frac{du}{dt}$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή στην πρώτη θα έχουμε,

$$Y = 3 \cdot L \left(\frac{K}{L} \right)^{0,5} = 3 \cdot 4 \cdot e^{0,01t} \left[\frac{K}{\left(4 \cdot e^{0,01t}\right)} \right]^{0,5} = \frac{1}{0,4} = \frac{dK}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = 3 \cdot 4 \cdot e^{0,01t} \cdot 0,4 \cdot u^{0,5} = 4,8 \cdot e^{0,01t} \cdot u^{0,05}$$

Άρα θα έχουμε,

$$4,8 \cdot e^{0,01t} \cdot u^{0,5} = 0,04 \cdot e^{0,01t} \cdot u + 4 \cdot e^{0,01t} \frac{du}{dt} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} + 0,01u - 1,2u^{0,5} = 0$$

Θέτουμε $u^{0,5} = z \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{0,5} \frac{dz}{dt} z \Rightarrow u = z^2$

οπότε θα έχουμε,

$$z = \frac{1}{0,5} \frac{dz}{dt} + 0,01 \cdot z^2 - 1,2z = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} + 0,005z - 0,6 = 0$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης.

Η λύση της θα είναι,

$$z = e^{-\int 0,005t} \left[c + \int 0,6 e^{\int 0,005dt} dt \right] = e^{-0,005t} \left[c + 0,6 \int e^{0,005t} dt \right] =$$

$$= e^{-0,005t} \left[c + \frac{0,6}{0,005} e^{0,005t} \right] = c \cdot e^{-0,005t} \frac{6}{0,05} = c \cdot e^{-0,005t} + 120$$

Με τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε c=19880, οπότε η διαχρονική πορεία του λόγου u θα είναι,

$$u = \left\{19880 e^{-0,005t} + 120\right\}^2 .$$

Παράδειγμα 5

Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος ότι είναι:

$$(D): Q_D = 60 - 2 \cdot p$$

$$(S): Q_S = -10 + 5 \cdot p$$

όπου, Q_D και Q_S είναι η ζητούμενη και προσφερόμενη ποσότητα του προϊόντος και P είναι η αντίστοιχη τιμή. Αν υποθέσουμε τώρα ότι η διαχρονική μεταβολή της τιμής δίνεται από τη σχέση,

$$dP/dt = 1/7 \cdot \left(Q_D - Q_S\right)$$

και επιπλέον ότι t=0 P=20, να βρεθεί η πορεία της τιμής και να ελεγχθεί, αν η διαχρονική αυτή πορεία συγκλίνει ή αποκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας, με την πάροδο του χρόνου.

Λύση

Από τις τρεις σχέσεις προκύπτει,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{7}(60 - 2p + 10 - 5p) = \frac{1}{7}(70 - 7p) = 10 - p \iff \frac{dP}{dt} + p - 10 = 0$$

Η τελευταία είναι μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, η λύση της οποίας θα είναι:

$$P = e^{\int dt}\left[e - \int(-10)e^{\int dt}dt\right] \Rightarrow P = e^{-t}\left[c + \int 10e^t dt\right] = e^{-t}\left[c + 10 \cdot e^t\right] = c \cdot e^{-t} + 10$$

$$\Rightarrow P = c \cdot e^{-t} + 10$$

Με $t = 0 \Rightarrow P = 20$ άρα $20 = c + 10 \Rightarrow c = 10$

Δηλαδή,

$$P = 10\left(e^{-t} + 1\right).$$

Η τελευταία αποτελεί και τη ζητούμενη διαχρονική πορεία της τιμής, που ζητείται από το πρόβλημα.

Επειδή με $t \to \infty$ $e^t \to 0$ τότε P=10 που σημαίνει ότι η τιμή τείνει στο επίπεδο ισορροπίας P=10, που προκύπτει και από τη διαφορική εξίσωση, αν θέσουμε $dP/dt = 0$, οπότε τότε θα έχουμε $P - 10 = 0 \Rightarrow P = 10$.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η μαθηματική ανάλυση χρησιμοποιείται ως μεθοδολογικό εργαλείο στα πλαίσια της οικονομικής ανάλυσης. Έτσι όλες οι νέες θεωρίες, αλλά και η μεταγραφή των παλιών, χρησιμοποιούν μαθηματικούς συμβολισμούς στην προσπάθειά τους να γενικεύσουν τα συμπεράσματά τους σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη εμπειρική εξήγηση της πραγματικότητας.

Η περιπλάνησή μας στην εφαρμογή των γενικών μαθηματικών σε θέματα οικονομίας θα ήταν άσκοπη εάν στο τέλος της μέναμε μόνο στις τεχνικές και τα διαγράμματα. Στα πέντε κεφάλαια της εργασίας αυτής εξετάσαμε τα θεωρητικά αποτελέσματα αλλά και τα αποτελέσματα των οικονομικών εφαρμογών, τα οποία δεν θα επαναλάβουμε εδώ τα συμπεράσματα του κάθε κεφαλαίου καθώς αναφέρονται αναλυτικά στο κάθε ένα ξεχωριστά.

Η συμβολή των μαθηματικών στην ανάπτυξη της Οικονομικής Επιστήμης είναι δεδομένη και η υποστήριξη της άποψης έχει πολλαπλή τεκμηρίωση.

Οι κομψές, λιτές και ακριβείς μαθηματικές σχέσεις ντύθηκαν με οικονομικές έννοιες που έχουν υπόσταση ποιοτική ή ποσοτική περιορίζοντας ταυτόχρονα τα μεγέθη σε συμβατά επίπεδα.

Ευκίνητη και διεισδυτική η μαθηματική σκέψη λειτουργώντας, όχι αφαιρετικά, αλλά με προσεγμένη αντιστοίχιση των εννοιών κατάφερε εκπληκτικά αποτελέσματα. Χωρίς να γίνεται καταστρατήγηση των αναλλοίωτων μαθηματικών αρχών ο ρεαλισμός της Οικονομικής Επιστήμης απέκτησε σοβαρό εργαλείο, του οποίου η έλλογη χρήση θα την βοηθήσει να αποκαλύψει ανερμήνευτες σχέσεις και φαινόμενα με πολυμεταβλητά μεγέθη.

Η λακωνική και σαφής διατύπωση οικονομικών συμπερασμάτων και λύσεων, όπως «Το οριακό κόστος διέρχεται από το ελάχιστο του μέσου κόστους» θα ήταν αρκετά δύσκολο και επίπονο να αποδειχθεί με την συνήθη διαλεκτική.

Υπάρχουν βέβαια προβλήματα από τις λεγόμενες κοινωνικές επιστήμες, όπως κοινωνικά προϊόντα, σημαντικότητα ανθρωπίνων σχέσεων κ.λπ. όπου τα μαθηματικά αδυνατούν ακόμα να βρουν δίοδο εμπλοκής τους. Έτσι άλλωστε επιβεβαιώνεται ο κανόνας ότι δεν μαθηματικοποιούνται όλες οι οικονομικές έννοιες.

Τέλος θα ήταν εύλογο να αναφερθεί το χαρακτηριστικό τετράστιχο του T.S. Eliot:

We shall not cease from exploration
And at the end of all our exploring
We will return to where we started
And know the place for the first time

(Την εξερεύνηση δεν θα την σταματήσουμε
Κι όταν δεν θα εξερευνούμε πλέον
Θα έχουμε επιστρέψει στην αφετηρία
Και θα την γνωρίσουμε για πρώτη φορά.)

Βιβλιογραφία

Α. Βιβλία Ελλήνων Συγγραφέων

Αλεξανδρής, Ν., *Οικονομικά Μαθηματικά*, εκδ. Σταμούλης, (1989).

Αλεξανδρόπουλος, Α., Παλιάτσος, Α., Σάσσαλος, Σ.,*Μαθηματικά για Οικονομολόγους*,Σύγχρονη Εκδοτική, (2004).

Καραπιστόλη, Δ., *Οικονομικά Μαθηματικά,* Μακεδονικές Εκδόσεις, (2004).

Κιόχος, Π.,Κιόχος, Α.,*Οικονομικά Μαθηματικά,* Εκδοτικός Οίκος «INTERBOOKS», (2004).

Κορκοτσίδης, Α., Σ., *Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης*,Εκδόσεις Παπαζήση, (1994).

Κούγιας, Γ., Γεωργίου, Δ., *Χρηματο-Οικονομικά Μαθηματικά,* Αθήνα, (2004).

Λουκάκης, Μ., *Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών,* Θεσσαλονίκη, (1997).

Μαγείρου, Ε., Φ., *Οικονομικά Μαθηματικά και Αξιολόγηση Επενδύσεων,* GUTENBERG, (1993).

Μάνος, Β., Δ., *Θέματα Οικονομικών Μαθηματικών και Επιχειρησιακής Έρευνας με εφαρμογές στην Αγροτική Οικονομία*, Ζήτη, (1991).

Μαρνέρος, Ν., *ΑΝΑΛΥΣΗ, Με εφαρμογές στην Οικονομία,* GUTENBERG, (1998).

Μουρδουκούτας, Π., *Βασικές Αρχές Μακροοικονομικής,* Εκδόσεις Κλειδάριθμος, (2001).

Ξεπαπαδέας, Α., Π. & Γιαννίκος, Ι., Χ., *Μαθηματικές μέθοδοι στα Οικονομικά:Θεωρία και εφαρμογές,* GUTENBERG, (2007).

Πέκος, Δ., Γ., *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομικές Επιστήμες,* Θεσσαλονίκη, (2003).

Πουρναράκης, Ε., *Μακροοικονομία, Θεωρία και Πολιτική,* Εκδοτικές Επιχειρήσεις «ΤΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ» Κ. & Π. ΣΜΠΙΛΙΑΣ Α.Ε.Β.Ε., (2004).

Σολδάτος, Γ., Θ., *Θεωρία Μακροοικονομικής Ι,* Εκδόσεις Μπένου, (2001).

Τσουλφίδης, Λ., *Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Μέθοδοι και Υποδείγματα,* GUTENBERG, (1999).

Β. Βιβλία Ξένων Συγγραφέων

Ken Ferguson, Μετάφραση: Σακκά Ανδριάννα, Επιστημονική Επιμέλεια: Θέμις Μίνογλου, *Βασικές Αρχές Οικονομικής Θεωρίας,* Εκδόσεις Κριτική, (2004).

Rager A. Arnold, *Εισαγωγή στην Οικονομική,* ΕΠΙΚΕΝΤΡΟ, (2001).

Ralph T. Byrns, Gerald W. Stone, Gabriel A. Manolatos, Μετάφραση: Σαρρής Νίκος, Πρώτη Ελληνική Έκδοση, *ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ Μικροοικονομική ΘΕΩΡΙΑ & ΠΡΑΞΗ*, Εκδοτικός ΟΜΙΛΟΣ ΙΩΝ, Εκδόσεις ΕΛΛΗΝ, (2004).

Walter Nicholson, Μετάφραση: Γιώργος Κορρές, Θανάσης Ταγκαλάκης, Χρήστος Γκενάκος, Επιστημονική Επιμέλεια: Θέμις Μίνογλου, Έβδομη Αγγλική Έκδοση, *Μικροοικονομική Θεωρία, Βασικές Αρχές και Προεκτάσεις*, Εκδόσεις ΚΡΙΤΙΚΗ, (2004).

Γ. Ηλεκτρονικές Πηγές

http://www.oktonia.com

http://www.eap.gr

http://www.logistics.tuc.gr

http://d.zahariad.googlepages.com

http://www.econ.uoa.gr

http://www.el.wikipedia.org.gr

http://www.uowm.gr