Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εφαρμογές των Γενικών Μαθηματικών σε Θέματα Οικονομίας

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ: ΒΟΓΔΑΝΟΥ ΑΦΡΟΔΙΤΗ

ΠΑΓΑΝΟΥ ΚΑΣΣΙΑΝΗ

ΡΟΥΣΣΟΥ ΕΛΠΙΔΑ

ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΛΑΠΟΔΗ ΑΛΕΚΑ

ΠΑΤΡΑ 2009

Ευχαριστίες,

σε όλους όσους

μας στήριξαν

και

μας εμψύχωσαν

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά της σύγχρονης οικονομικής θεωρίας είναι η εκτεταμένη χρήση μαθηματικών μεθόδων στην ανάλυση οικονομικών φαινομένων. Τα μαθηματικά είναι μία γλώσσα που βοηθά στην ανάλυση διαφόρων κλάδων της οικονομικής επιστήμης, όπως η μικροοικονομική θεωρία, η μακροοικονομική θεωρία, η θεωρία του διεθνούς εμπορίου, η δημόσια οικονομική. Η εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων στα οικονομικά απαιτεί ακριβή παράθεση των υποθέσεων και συνεπάγεται μία λογική αλληλουχία των διαφόρων βημάτων που οδηγούν στο τελικό συμπέρασμα. Έτσι όμως, επιτυγχάνεται η σαφής παρουσίαση της θεωρίας, τίθενται οι βάσεις για επεκτάσεις και παρέχεται η δυνατότητα για εμπειρικό έλεγχο.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να περιγράψει κατ' αρχήν τις μαθηματικές μεθόδους που εφαρμόζονται στα οικονομικά, ακολουθώντας τη σύγχρονη άποψη της ενοποίησης των διαφόρων προσεγγίσεων και στη συνέχεια να παρουσιάσει τους τρόπους με τους οποίους οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούνται στην ανάλυση οικονομικών φαινομένων, συνδέοντας έτσι τις μεθόδους με την οικονομική πραγματικότητα που προσπαθούν να ερμηνεύσουν. Στα πλαίσια αυτά παρουσιάζονται, στοιχεία από τη θεωρία των συνόλων και την τοπολογία των συνόλων σημείων, από τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμός, από τον γραμμικό και μη-γραμμικό προγραμματισμός, από την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών, καθώς και από την θεωρία του λογισμού των μεταβολών και του άριστου ελέγχου. Οι οικονομικές εφαρμογές περιλαμβάνουν την ανάλυση της συμπεριφοράς του καταναλωτή και της επιχείρησης τόσο με κλασικά όσο και με πιο σύγχρονα μαθηματικά εργαλεία, θεωρία της δημόσιας επιχείρησης, στοιχεία μαθηματικών χρηματοδότησης, εισαγωγή σε γραμμικά υποδείγματα προσδιορισμού

διανομής και τιμών, ανάλυση ευστάθειας οικονομικών υποδειγμάτων, υποδείγματα άριστης ανάπτυξης με περιορισμούς λόγω εξαντλησιμότητας φυσικών πόρων και πολλές άλλες εφαρμογές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα οικονομικά μαθηματικά δεν είναι ένας διακριτός κλάδος των οικονομικών όπως είναι η Δημόσια Οικονομική ή το Διεθνές Εμπόριο. Μάλλον είναι μια προσέγγιση στην οικονομική ανάλυση, στην οποία ο οικονομολόγος χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα στη διατύπωση του προβλήματος και επίσης βασίζεται σε γνωστά μαθηματικά θεωρήματα τα οποία βοηθούν στο συλλογισμό. Όσον αφορά το συγκεκριμένο αντικείμενο της ανάλυσης, αυτό μπορεί να είναι Μικροοικονομική ή Μακροοικονομική θεωρία, Δημόσια Οικονομική, Οικονομική του χώρου ή κάτι άλλο.

Χρησιμοποιώντας τον όρο οικονομικά μαθηματικά, με την ευρύτερη δυνατή έννοια, μπορούμε κάλλιστα να πούμε ότι κάθε βασικό σημερινό βιβλίο οικονομικών εξηγεί με παραδείγματα τα οικονομικά μαθηματικά στο βαθμό που χρησιμοποιούνται συχνά γεωμετρικές μέθοδοι για να παράγουν θεωρητικά αποτελέσματα. Συνήθως όμως, τα οικονομικά μαθηματικά καλούνται να περιγράψουν περιπτώσεις που χρησιμοποιούν μαθηματικές τεχνικές πέραν της απλής γεωμετρίας, όπως άλγεβρα πινάκων, διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, διαφορικές εξισώσεις, εξισώσεις διαφορών κλπ. Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να εισάγει τον αναγνώστη στα πιο βασικά θέματα αυτών των μαθηματικών μεθόδων — αυτών που συναντώνται καθημερινά στην τρέχουσα οικονομική βιβλιογραφία.

Επειδή τα οικονομικά μαθηματικά είναι απλά και μόνο μια προσέγγιση της οικονομικής ανάλυσης, δεν θα πρέπει και όντως δεν διαφέρουν κατά βάση από τη μη μαθηματική προσέγγιση της οικονομικής ανάλυσης. Ο σκοπός τής θεωρητικής ανάλυσης, ανεξάρτητα από την προσέγγιση, είναι πάντα να παράγει ένα σύνολο συμπερασμάτων ή θεωρημάτων από ένα δεδομένο σύνολο υποθέσεων ή αξιωμάτων μέσω μιας συλλογιστικής διαδικασίας. Η κύρια διαφορά μεταξύ «οικονομικών μαθηματικών» και «οικονομικών» έγκειται κυρίως στο γεγονός ότι, στην πρώτη, οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα διατυπώνονται με μαθηματικά σύμβολα αντί για λέξεις και με εξισώσεις αντί για προτάσεις. Επιπλέον, στη θέση της συλλογιστικής των εννοιών, χρησιμοποιούνται μαθηματικά θεωρήματα στη συλλογιστική διαδικασία. Επειδή τα σύμβολα και οι λέξεις είναι πράγματι ισοδύναμες έννοιες, δεν έχει μεγάλη σημασία ποιο από τα δύο επιλέγεται. Αλλά είναι ίσως πέραν κάθε αμφισβήτησης ότι τα σύμβολα είναι πιο εύχρηστα για την εξαγωγή συμπερασμάτων και βέβαια πιο αποτελεσματικά για τη σαφήνεια και την ακρίβεια της διατύπωσης.

Η επιλογή μεταξύ της γραμματικής λογικής και της μαθηματικής λογικής, λοιπόν, είναι ένα ζήτημα μικρής σπουδαιότητας, αλλά τα μαθηματικά έχουν το πλεονέκτημα να αναγκάζουν τους αναλυτές να διατυπώνουν καθαρά τις υποθέσεις τους σε κάθε στάδιο του συλλογισμού. Αυτό συμβαίνει επειδή τα μαθηματικά θεωρήματα διατυπώνονται συνήθως στη μορφή «εάν-τότε», οπότε για να προκύψει το «τότε» μέρος (αποτέλεσμα) του θεωρήματος, πρέπει πρώτα να βεβαιωθούν ότι το μέρος «εάν» (συνθήκη) συμφωνεί με τις συγκεκριμένες υποθέσεις που έχουν υιοθετηθεί.

Παρόλα αυτά, είναι απαραίτητο κάποιος να προχωρήσει πέραν των γεωμετρικών μεθόδων, και αυτό γιατί ενώ η γεωμετρική ανάλυση έχει το πλεονέκτημα ότι είναι οπτική, υποφέρει από τον σοβαρό περιορισμό των διαστάσεων. Στη συνήθη διαγραμματική παρουσίαση των καμπυλών αδιαφορίας, για παράδειγμα, η συνήθης υπόθεση είναι ότι μόνο δυο αγαθά είναι διαθέσιμα στον καταναλωτή. Μια τέτοια απλουστευμένη υπόθεση δεν είναι ηθελημένα υιοθετημένη αλλά μας επιβάλλεται, διότι το έργο της σχεδίασης ενός τρισδιάστατου γραφήματος είναι αρκετά δύσκολο και η κατασκευή ενός τετρασδιάστατου γραφήματος είναι στην ουσία φυσικά αδύνατη. Για να αντιμετωπίσουμε την πιο γενική περίπτωση των 3,4 ή n αγαθών, πρέπει να καταφύγουμε στο πιο ευέλικτο εργαλείο των εξισώσεων.

Αυτός ο λόγος αρκεί ως επαρκές κίνητρο για τη μελέτη των μαθηματικών μεθόδων πέραν της γεωμετρίας.

Εν συντομία, βλέπουμε ότι η μαθηματική προσέγγιση έχει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα: (1) Η «γλώσσα» που χρησιμοποιείται είναι πιο σαφής και ακριβής, (2) έχουμε μια πλειάδα μαθηματικών θεωρημάτων στη διάθεση μας, (3) αναγκάζοντας μας να διατυπώσουμε σαφώς όλες τις υποθέσεις μας ως προϋπόθεση για τη χρησιμοποίηση των μαθηματικών θεωρημάτων, μας προστατεύει από την παγίδα του να υιοθετήσουμε άθελα μας ανεπιθύμητες άρρητες υποθέσεις και (4) μας επιτρέπει να χειριστούμε τη γενική περίπτωση n μεταβλητών.

Έναντι αυτών των πλεονεκτημάτων ακούμε συχνά την κριτική ότι μια θεωρία που παράγεται μαθηματικά είναι αναπόφευκτα μη ρεαλιστική. Όμως, η κριτική αυτή δεν ευσταθεί. Στην πραγματικότητα, το επίθετο «μη ρεαλιστική» δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ούτε στην κριτική της οικονομικής θεωρίας γενικά, είτε η προσέγγιση είναι μαθηματική είτε όχι. Η θεωρία είναι από την ίδια τη φύση της μια αφαίρεση από την πραγματικότητα. Είναι μια επινόηση να ξεχωρίζει μόνον τους πιο ουσιώδεις παράγοντες και τις σχέσεις έτσι ώστε να μπορούμε να μελετήσουμε την ουσία του προβλήματος που έχουμε, ελεύθεροι, από τις τόσες περιπλοκές οι οποίες υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο. Έτσι, η πρόταση «η θεωρία στερείται ρεαλισμού» είναι απλά και μόνο μια κοινοτοπία, η οποία δεν μπορεί να γίνει δεκτή ως έγκυρη κριτική της θεωρίας. Οπότε προκύπτει λογικά ότι είναι σαφέστατα χωρίς νόημα να πούμε ότι μια οποιαδήποτε προσέγγιση στη θεωρία είναι «μη ρεαλιστική». Για παράδειγμα, η θεωρία της επιχείρησης σε καθεστώς αμιγούς ανταγωνισμού είναι μη ρεαλιστική, όπως είναι και η θεωρία της επιχείρησης υπό ατελή ανταγωνισμό, αλλά εάν οι θεωρίες αυτές παρήχθησαν μαθηματικά ή όχι είναι άσχετο και ανούσιο.

Συνοπτικά, θα παρομοιάζαμε τη μαθηματική προσέγγιση με ένα «μεταφορικό μέσον» το οποίο μπορεί να μας μεταφέρει από ένα σύνολο αξιωμάτων (σημείο εκκίνησης) σ' ένα σύνολο συμπερασμάτων (προορισμός) με μια ικανή ταχύτητα.

Ο όρος «οικονομικά μαθηματικά» μερικές φορές συγχέεται με έναν συνδεόμενο όρο, την «οικονομετρία». Όπως το «μετρικό» μέρος του τελευταίου όρου συνεπάγεται, η οικονομετρία ασχολείται κυρίως με τη μέτρηση οικονομικών δεδομένων. Έτσι, έχει σχέση με τη μελέτη εμπειρικών παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους εκτίμησης και ελέγχου των υποθέσεων. Τα οικονομικά μαθηματικά, από την άλλη, αναφέρονται στην εφαρμογή των μαθηματικών στις καθαρά θεωρητικές όψεις της οικονομικής ανάλυσης, επιδεικνύοντας λίγο ή και καθόλου ενδιαφέρον για τέτοια στατιστικά προβλήματα όπως τα λάθη μέτρησης των υπό μελέτη μεταβλητών.

Στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε στα οικονομικά μαθηματικά. Δηλαδή, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην εφαρμογή των μαθηματικών στη συμπερασματική συλλογιστική αντί της επαγωγικής μελέτης και σαν αποτέλεσμα θα ασχοληθούμε πρωταρχικά με θεωρητικό αντί για εμπειρικό υλικό. Αυτό είναι, βέβαια, αποκλειστικά ζήτημα επιλογής του πεδίου της συζήτησης και με κανένα τρόπο δεν συνεπάγεται ότι η οικονομετρία είναι λιγότερο σημαντική.

Πράγματι, εμπειρικές μελέτες και θεωρητικές αναλύσεις είναι συχνά συμπληρωματικές και αμοιβαία ενισχυόμενες. Από τη μια μεριά, οι θεωρίες πρέπει να ελέγχονται από τα εμπειρικά δεδομένα ως προς την εγκυρότητα πριν εφαρμοστούν με βεβαιότητα. Από την άλλη, η στατιστική δουλειά χρειάζεται την οικονομική θεωρία ως οδηγό, για να προσδιορισθεί η πλέον σωστή και καρποφόρα κατεύθυνση της έρευνας. Ένα κλασικό παράδειγμα της συμπληρωματικής φύσης της θεωρητικής και εμπειρικής μελέτης βρίσκεται στη μελέτη της συνολικής συνάρτησης κατανάλωσης. Η θεωρητική δουλεία του Keynes στη συνάρτηση κατανάλωσης οδήγησε στη στατιστική εκτίμηση της ροπής προς κατανάλωση, αλλά τα στατιστικά ευρήματα των Kuznets και Goldsmith, τα οποία αφορούν τη σχετική μακροχρόνια σταθερότητα της ροπής προς κατανάλωση, με τη σειρά τους, οδήγησαν στην εκλέπτυνση της θεωρίας συνολικής συνάρτησης κατανάλωσης από τους Duesenberry, Friedman και άλλους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Για να εφαρμόσουμε τις αναλυτικές μεθόδους σε ότι είναι γνωστό ως στατική ανάλυση, ή ανάλυση ισορροπίας, είναι επιτακτικό να έχουμε πρώτα μια πλήρη κατανόηση του τι σημαίνει «ισορροπία».

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Όπως κάθε οικονομικός όρος, έτσι και η ισορροπία μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους. Σύμφωνα μ' ένα ορισμό, ισορροπία είναι «*ένας αστερισμός επιλεγμένων συσχετιζόμενων μεταβλητών τόσο προσαρμοσμένων μεταξύ τους ώστε καμιά ενυπάρχουσα τάση αλλαγής δεν μπορεί να υπερισχύσει στο υπόδειγμα που τις περιέχει*».

Πρώτον, η λέξη «επιλεγμένων» υπογραμμίζει το γεγονός ότι υπάρχουν πράγματι μεταβλητές οι οποίες, από επιλογή του αναλυτή, δεν έχουν περιληφθεί στο υπόδειγμα. Έτσι η ισορροπία για την οποία συζητούμε, μπορεί να έχει σχέση μόνο με αυτό το ειδικό σύνολο των επιλεγμένων μεταβλητών, και αν το παράδειγμα διευρυνθεί και περιλάβει πρόσθετες μεταβλητές, η κατάσταση ισορροπίας του μικρότερου υποδείγματος παύει πλέον να υπάρχει. Δεύτερον, η λέξη «συσχετιζόμενων» υπαινίσσεται ότι, για να έχουμε ισορροπία, όλες οι μεταβλητές του υποδείγματος πρέπει να βρίσκονται ταυτόχρονα σε κατάσταση αδράνειας. Επιπλέον, η κατάσταση αδράνειας κάθε μεταβλητής θα πρέπει να είναι συμβατή με αυτή κάθε άλλης μεταβλητής, διότι αλλιώς κάποια(ες) μεταβλητή(ές) θα αλλάζουν, και έτσι γίνονται αιτία να αλλάζουν και άλλες σε μια αλυσιδωτή αντίδραση, και τότε δεν θα υπάρχει ισορροπία. Τρίτον, η λέξη «ενυπάρχουσα» συνεπάγεται ότι, ορίζοντας μια ισορροπία, η κατάσταση αδράνειας βασίζεται μόνο στην εξισορρόπηση των εσωτερικών δυνάμεων του υποδείγματος, ενώ οι εξωτερικοί παράγοντες παραμένουν σταθεροί. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι και οι εξωγενείς μεταβλητές εκλαμβάνονται ως σταθερές. Όταν οι εξωτερικοί παράγοντες αλλάξουν, μπορεί να υπάρξει μια νέα ισορροπία ορισμένη με βάση τις καινούργιες τιμές των παραμέτρων, αλλά για να ορίσουμε τη νέα ισορροπία, οι καινούργιες τιμές των παραμέτρων υποτίθεται πάλι ότι παραμένουν αμετάβλητες.

Στην ουσία, η ισορροπία ενός συγκεκριμένου υποδείγματος είναι μια κατάσταση που χαρακτηρίζεται από την απουσία τάσης αλλαγής. Γι' αυτό τον λόγο η ανάλυση ισορροπίας (πιο συγκεκριμένα, η μελέτη του τι είναι η κατάσταση ισορροπίας) αναφέρεται ως στατική. Το γεγονός ότι μια ισορροπία συνεπάγεται τάση μη αλλαγής μπορεί να ωθήσει κάποιον να συμπεράνει ότι η ισορροπία αποτελεί αναγκαία μια επιθυμητή ή ιδεώδη τάξη πραγμάτων, με τη λογική ότι μόνο σε μια ιδεώδη κατάσταση θα υπάρχει απουσία κινήτρου για αλλαγή. Ένα τέτοιο συμπέρασμα δεν είναι επιθυμητό. Ακόμα και αν μια συγκεκριμένη θέση ισορροπίας μπορεί να παριστάνει μια επιθυμητή κατάσταση και κάτι το οποίο επιδιώκουμε — όπως η μεγιστοποίηση του κέρδους, από τη σκοπιά μιας επιχείρησης — μια άλλη κατάσταση ισορροπίας μπορεί να είναι αρκετά ανεπιθύμητη και μάλιστα κάτι που πρέπει να αποφεύγεται, όπως ένα επίπεδο ισορροπίας του εθνικού εισοδήματος με ανεργία. Η μόνη επιθυμητή ερμηνεία είναι ότι ισορροπία είναι μια κατάσταση η οποία, εάν επιτευχθεί, θα έχει την τάση να διαιωνίζεται, μη επιτρέποντας αλλαγές στους εξωτερικούς παράγοντες.

Η επιθυμητή ισορροπία, στην οποία θα αναφερόμαστε σαν επιδιωκόμενη ισορροπία, θα μελετηθεί αργότερα σαν πρόβλημα αριστοποίησης. Σ' αυτό το σημείο, η ανάλυση θα περιοριστεί στη μη επιδιωκόμενη ισορροπία, που προέρχεται όχι από συνειδητή επιδίωξη ενός συγκεκριμένου σκοπού αλλά από μια απρόσωπη διαδικασία αλληλεπίδρασης και προσαρμογής των οικονομικών δυνάμεων. Παραδείγματα αυτού του τύπου είναι η ισορροπία που επιτυγχάνεται σε μια αγορά με δεδομένες συνθήκες προσφοράς και ζήτησης και η ισορροπία του εθνικού εισοδήματος με δεδομένα πρότυπα κατανάλωσης και επενδύσεων.

1.2 ΜΕΡΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΓΟΡΑΣ - ΕΝΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Σε ένα υπόδειγμα στατικής ισορροπίας, ένα γνωστό πρόβλημα είναι αυτό της εύρεσης του συνόλου των τιμών των ενδογενών μεταβλητών, οι οποίες θα ικανοποιούν την συνθήκη ισορροπίας του υποδείγματος. Κι αυτό διότι αν έχουμε βρει αυτές τις τιμές, έχουμε στην ουσία προσδιορίσει την κατάσταση ισορροπίας. Ας το επεξηγήσουμε λοιπόν, μ' ένα υπόδειγμα «μερικής ισορροπίας», δηλαδή, ένα υπόδειγμα προσδιορισμού της τιμής σε μια μεμονωμένη αγορά.

Κατασκευάζοντας ένα υπόδειγμα

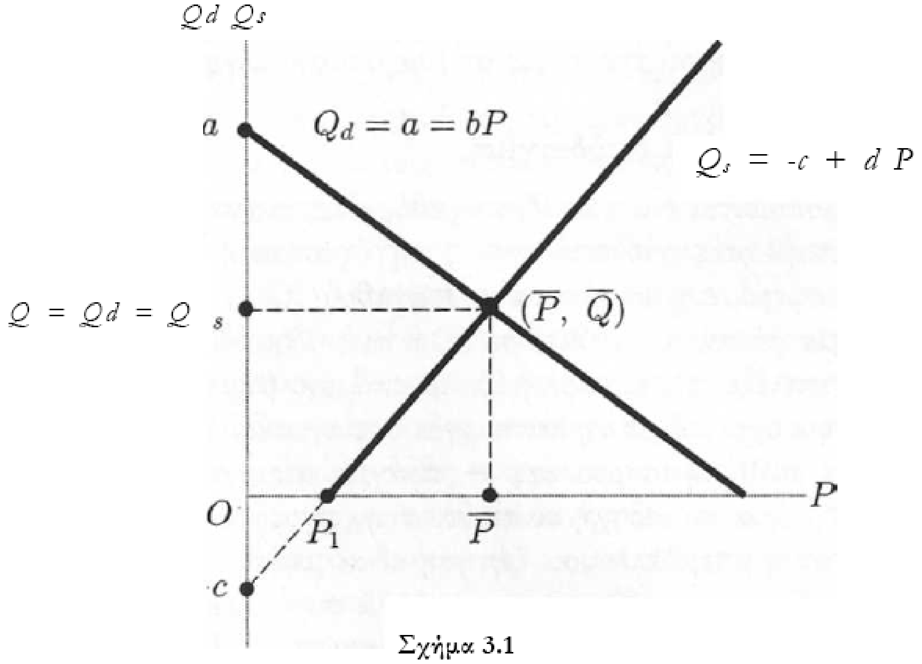
Επειδή χρησιμοποιείται ένα και μόνο αγαθό, είναι αναγκαίο να συμπεριλάβουμε μόνο τρεις μεταβλητές στο υπόδειγμα: τη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού (Q_d), την προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού (Q_s), και την τιμή του (P). Η ποσότητα μετράται, ας πούμε, σε κιλά ανά βδομάδα, και η τιμή σε δολάρια. Έχοντας επιλέξει τις μεταβλητές, το επόμενο βήμα είναι να κάνουμε ορισμένες υποθέσεις σχετικά με τη λειτουργία της αγοράς. Πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε μια συνθήκη ισορροπίας — πράγμα απαραίτητο σ' ένα υπόδειγμα ισορροπίας. Η κύρια παραδοχή είναι ότι στην αγορά επιτυγχάνεται ισορροπία αν και μόνον αν η υπερβάλλουσα ζήτηση είναι μηδέν ($Q_d — Q_s = 0$), δηλαδή, όταν και μόνον όταν η αγορά ισορροπεί. Για να προσδιορίσουμε λοιπόν τις μεταβλητές (Q_d) και (Q_s), υποθέτουμε ότι η Q_d είναι μια φθίνουσα γραμμική συνάρτηση του P. Εξάλλου, η Q_s δεχόμαστε να είναι μια αύξουσα γραμμική συνάρτηση του P, με την προϋπόθεση ότι καμιά ποσότητα δεν προσφέρεται, εκτός αν η τιμή υπερβεί ένα ορισμένο επίπεδο. Τότε, το υπόδειγμα θα περιέχει μια συνθήκη ισορροπίας συν δύο εξισώσεις συμπεριφοράς οι οποίες ρυθμίζουν τη ζήτηση και την προσφορά της αγοράς, αντίστοιχα.

Μεταφρασμένο σε μαθηματικές προτάσεις, το υπόδειγμα (1.1) μπορεί να γραφεί ως:

$$Q_d = Qs$$
$$Q_d = a\text{-}bP \qquad (a,b> 0)$$
$$Q_s = -c + dP \qquad (c, d > 0)$$

Τέσσερις παράμετροι, a, b, c και d, εμφανίζονται στις δύο γραμμικές συναρτήσεις, και όλες ορίζονται θετικές. Όταν πάρουμε τη διαγραμματική παράσταση της συνάρτησης ζήτησης, όπως στο Σχ. 1.1, το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα είναι το α και η κλίση της είναι ίση με —6, δηλ. αρνητική, όπως απαιτείται. Η συνάρτηση προσφοράς έχει επίσης την κατάλληλη κλίση, διότι το d είναι θετικό, αλλά το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα φαίνεται ότι είναι αρνητικό, ήτοι —c. Ο λόγος που ορίσαμε ένα τέτοιο αρνητικό σημείο, είναι ότι, μ' αυτό τον τρόπο, κάνουμε την καμπύλη προσφοράς να τέμνει θετικά τον οριζόντιο άξονα στο P_1, οπότε ικανοποιείται η υπόθεση που κάναμε προηγούμενα, ότι δηλαδή δεν θα υπάρχει προσφορά αν η τιμή δεν είναι θετική και αρκετά υψηλή.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, σε αντίθεση με τη συνήθη πρακτική, η ποσότητα και όχι η τιμή παριστάνεται στον κάθετο άξονα στο Σχ. 1.1. Όμως, αυτό συμφωνεί με τη μαθηματική αντίληψη της τοποθέτησης της εξαρτημένης μεταβλητής στον κάθετο άξονα.



Σχήμα 1

Έχοντας έτσι κατασκευάσει το υπόδειγμα, το επόμενο βήμα είναι να το λύσουμε, δηλαδή, να βρούμε τις τιμές λύσης των τριών ενδογενών μεταβλητών,Q_d, Q_s και P. Οι λύσεις, που συμβολίζονται με Q_d, Q_s και P, είναι εκείνες οι τιμές που ικανοποιούν τις τρεις εξισώσεις στην (1.1) ταυτόχρονα, δηλαδή είναι οι τιμές οι οποίες, όταν αντικατασταθούν στις τρεις εξισώσεις, τις επαληθεύουν. Σ' ένα υπόδειγμα ισορροπίας, αυτές οι τιμές μπορούν να αναφέρονται ως τιμές ισορροπίας αυτών των μεταβλητών. Έτσι, μια λύση ισορροπίας του υποδείγματος μπορεί απλώς να συμβολίζεται με ένα διατεταγμένο ζεύγος (P,Q). Στην περίπτωση που η λύση δεν είναι μοναδική αρκετά διατεταγμένα ζεύγη μπορεί να ικανοποιούν ταυτόχρονα το σύστημα των εξισώσεων, θα υπάρχει δηλαδή ένα σύνολο λύσεων με πιο πολλά από ένα στοιχεία σε αυτό. Όμως αυτή η κατάσταση πολλαπλής ισορροπίας δεν μπορεί να προκύψει σ' ένα γραμμικό υπόδειγμα όπως αυτό.

Λύση με απαλοιφή μεταβλητών

Ένας τρόπος εύρεσης λύσης για ένα σύστημα εξισώσεων είναι με διαδοχική απαλοιφή των μεταβλητών μέσω αντικατάστασης. Στην (1.1), το υπόδειγμα περιέχει τρεις εξισώσεις με τρεις μεταβλητές. Όμως, εξισώνοντας το Q_d με το Q_s από τη συνθήκη ισορροπίας, μπορούμε να θέσουμε $Q = Q_d = Q_s$ και να ξαναγράψουμε το υπόδειγμα ως

$$Q = a - bP$$
$$Q = -c + dP \quad (1.2)$$

οπότε έχουμε αναγάγει το υπόδειγμα σε δύο εξισώσεις με δύο μεταβλητές. Επιπλέον, αντικαθιστώντας την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη στην (1.2), το υπόδειγμα μπορεί ακόμα να συντμηθεί σε μία μόνον, εξίσωση μιας μεταβλητής

$$bP = -c + dP$$

ή, αφαιρώντας το (α + dP) και από τα δύο μέλη της εξίσωσης και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με —1,

$$(b + d)P = a + c \quad (1.3)$$

Μπορούμε να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα από την (1.1) αντικαθιστώντας τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση στην πρώτη.
Επειδή $b+d \neq 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της (1.3) με (b+d). Το αποτέλεσμα είναι η λύση ως προς P:

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} \quad (1.4)$$

Παρατηρούμε ότι το $\overline{P}$ — όπως θα πρέπει να συμβαίνει με όλες τις λύσεις — εκφράζεται ολοκληρωτικά συναρτήσει των παραμέτρων, οι οποίες παριστάνουν τα δεδομένα του υποδείγματος. Έτσι το $\overline{P}$ είναι μια προσδιορισμένη λύση, όπως θα έπρεπε να είναι. Παρατηρούμε ακόμη ότι το $\overline{P}$ είναι θετικό —όπως πρέπει να είναι η τιμή— επειδή και οι τέσσερις παράμετροι είναι θετικές από τον προσδιορισμό του υποδείγματος.

Για να βρούμε την ποσότητα ισορροπίας $\overline{Q}$($\overline{Q}_d$ = $\overline{Q}_s$) η οποία αντιστοιχεί στην τιμή P, απλώς αντικαθιστούμε την (1.4) σε μια από τις εξισώσεις της (3.2), και λύνουμε την τελευταία εξίσωση. Αντικαθιστώντας την (1.4) στη συνάρτηση ζήτησης, για παράδειγμα, παίρνουμε

$$\overline{Q} = \alpha - \frac{b(a+c)}{b+d} = \frac{a(b+d)-b(a+c)}{b+d} = \frac{ad-bc}{b+d} \qquad (1.5)$$

το οποίο είναι πάλι εκφρασμένο συναρτήσει των παραμέτρων μόνο. Επειδή ο παρονομαστής (b + d) είναι θετικός, το ότι το $\overline{Q}$ είναι θετικό απαιτεί ο αριθμητής (ad — bc) να είναι επίσης θετικός. Οπότε, για να έχει οικονομική σημασία, το παρόν υπόδειγμα θα πρέπει να περιέχει τον πρόσθετο περιορισμό ad > bc.

Η σημασία αυτού του περιορισμού μπορεί να γίνει φανερή στο Σχ.1.1. Είναι γνωστό ότι τα $\overline{P}$ και $\overline{Q}$ ενός υποδείγματος αγοράς μπορούν να προσδιοριστούν διαγραμματικά από την τομή των καμπυλών ζήτησης και προσφοράς. $\overline{Q}$ > 0 σημαίνει να απαιτούμε το σημείο τομής να βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα του Σχ.1.1, το οποίο με τη σειρά του απαιτεί οι κλίσεις και τα σημεία τομής των δύο καμπυλών με τον κατακόρυφο άξονα να πληρούν έναν περιορισμό στα σχετικά τους μεγέθη. Σύμφωνα με την (1.5), αυτός ο περιορισμός, είναι ad > bc, δεδομένου ότι τα b και d είναι θετικά.

Παρεμπιπτόντως, η τομή των καμπυλών ζήτησης και προσφοράς στο Σχ. 1.1, δεν είναι μια έννοια διαφορετική από την τομή που φαίνεται στο διάγραμμα του Venn του Σχ. 2.26. Υπάρχει μόνο μια διαφορά: αντί τα σημεία να βρίσκονται μέσα σε δύο κύκλους, στην παρούσα περίπτωση τα σημεία κείνται σε δύο γραμμές. Ας συμβολίσουμε τα σύνολα των σημείων των καμπυλών ζήτησης και προσφοράς με D και S, αντίστοιχα. Τότε, χρησιμοποιώντας το σύμβολο Q (= Q_d = Q_s), τα δύο σύνολα και η τομή τους μπορούν να γραφούν ως

$$D = \{(P,Q) \mid Q = a-bP\}$$

$$S=\{(P,Q) \mid Q = -c + dP)$$

$$\text{και} \quad D \cap S=(\overline{P},\overline{Q})$$

Σε αυτή την περίπτωση, η τομή των δύο συνόλων περιέχει μόνον ένα στοιχείο, το διατεταγμένο ζεύγος $(\overline{P},\overline{Q})$. Η ισορροπία της αγοράς είναι μοναδική.

1.3 ΜΕΡΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ - ΕΝΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι η γραμμική ζήτηση σε ένα υπόδειγμα μεμονωμένης αγοράς αντικαθίσταται με μια δευτεροβάθμια συνάρτηση ζήτησης, ενώ η συνάρτηση προσφοράς παραμένει γραμμική. Τότε, εάν αντί για παραμέτρους χρησιμοποιήσουμε αριθμητικούς συντελεστές, μπορεί να προκύψει το εξής υπόδειγμα:

$$Qd = Qs$$
$$Q_d = 4-P^2 \quad (1.6)$$
$$Q_s = 4P - 1$$

Όπως και πριν, αυτό το σύστημα των τριών εξισώσεων μπορεί να αναχθεί σε μία μόνον εξίσωση με απαλοιφή των μεταβλητών (με αντικατάσταση):

$$4 - P^2 = AP - 1$$

$$P^2 + 4P\text{-}5 = 0 \quad (1.7)$$

Αυτή είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση επειδή η έκφραση στο αριστερό μέρος είναι μια δευτεροβάθμια συνάρτηση της μεταβλητής P. Γενικά, η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και μιας γραμμικής είναι ότι η πρώτη θα μας δώσει δύο λύσεις.

Εδώ παίρνουμε δυο λύσεις,

$$\overline{P}_1 = 1 \quad \text{και} \quad \overline{P}_2 = -5$$

αλλά μόνον η πρώτη είναι από οικονομική άποψη αποδεκτή, διότι αρνητικές τιμές απορρίπτονται.

ΜΙΑ ΑΛΛΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Αν ενδιαφερόμαστε να βρούμε τις P, Q ταυτόχρονα από τη διαγραμματική παράσταση, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα διάγραμμα με το Q στον ένα άξονα και το P στον άλλο, μια κατασκευή παρόμοια με του Σχ.1. Αυτό παριστάνεται στο Σχ.2. Το πρόβλημα μας είναι βέβαια πάλι να βρούμε την τομή των δύο σημειοσυνόλων, δηλαδή,

$$D = \{(P,Q)|Q = 4\text{-}P^2\}$$

$$\text{και} \qquad S = \{\{P,Q)\ |Q = 4P—1\}$$

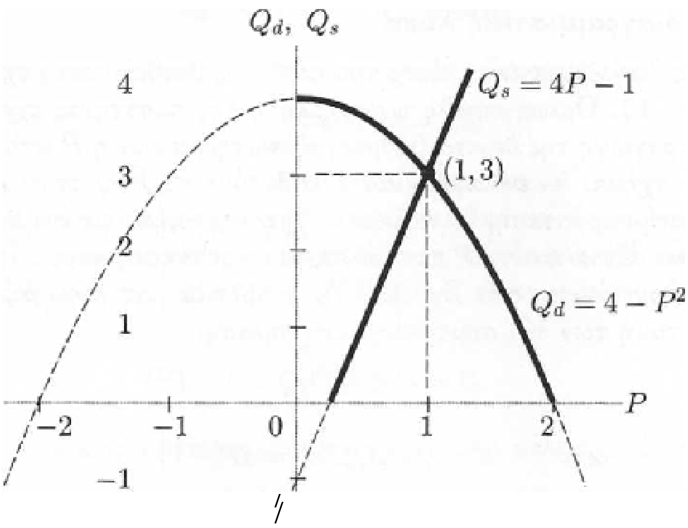
Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στα πεδία ορισμού και τιμών, η τομή των δύο συνόλων θα περιέχει δύο στοιχεία, τα

$$D\cap S = \{(1,3), (-5,-21)\}$$

Το πρώτο βρίσκεται στο τεταρτημόριο I και το δεύτερο (δεν έχει σχεδιαστεί) στο τεταρτημόριο III. Όμως, αν τα πεδία ορισμού και τιμών περιοριστούν στους μη αρνητικούς αριθμούς, μόνο το πρώτο ζεύγος (1,3) είναι δεκτό. Τότε η ισορροπία είναι πάλι μοναδική.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Αν ένα σύστημα εξισώσεων δεν ανάγεται σε μια γραμμική εξίσωση όπως η (1.3), ή σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση όπως η (1.7), αλλά σε μια κυβική (τριτοβάθμιο πολυώνυμο) ή σε μια τεταρτοβάθμια εξίσωση, οι λύσεις θα είναι πιο δύσκολο να βρεθούν. Μια χρήσιμη μέθοδος είναι αυτή της παραγοντοποίησης της συνάρτησης. Για παράδειγμα, η έκφραση $x^3 — x^2 —$ $4x + 4$ μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο τριών παραγόντων $(x — 1)$, $(x + 2)$ και $(x — 2)$. Έτσι, η κυβική εξίσωση $x^3 - x^2 - 4x+ 4 = 0$ μπορεί να γραφεί μετά την παραγοντοποίηση ως $(x -1)(x + 2)(x-2) =0$



Σχήμα 2

Για να είναι το γινόμενο στο αριστερό μέλος μηδέν, θα πρέπει τουλάχιστον ένας από τους τρεις όρους του γινομένου να είναι μηδέν. Θέτοντας λοιπόν κάθε όρο ίσο με το μηδέν, παίρνουμε

$$x-1=0 \quad ή \quad x+2=0 \quad ή \quad x-2=0$$

Αυτές οι τρεις εξισώσεις θα μας δώσουν τις τρεις ρίζες της κυβικής εξίσωσης, δηλαδή,

$$\bar{x}_1 = 1 \qquad \bar{x}_2 = -2 \qquad \text{και} \qquad \bar{x}_3 = 2$$

Βέβαια, το τέχνασμα είναι να ανακαλύψουμε τον κατάλληλο τρόπο παραγοντοποίησης. Ατυχώς, δεν υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας, και έτσι παραμένει ένας τρόπος δοκιμής και λάθους. Όμως, μιλώντας γενικά, για μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n, f(x) = 0, μπορούμε να αναμένουμε το πολύ n ρίζες, οι οποίες μπορεί να βρεθούν ως εξής: Πρώτα, προσπαθούμε να βρούμε μια σταθερά c_1 έτσι ώστε το f(x) να είναι διαιρετό με $(x+c_1)$. Το πηλίκο $f(x)/(x+ c_1)$ θα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n-1 το οποίο καλούμε g(x). Τότε

$$f(x) = (x+ c_1)g(x)$$

Τώρα, προσπαθούμε να βρούμε μια σταθερά c_1 έτσι ώστε το g(x) να είναι διαιρετό με $(x+ c_2)$. Το πηλίκο $g(x)/(x+ c_2)$θα είναι πάλι ένα πολυώνυμο, βαθμού n-2 αυτή τη φορά, έστω h(x). Επειδή $g(x) = (x+ c_2)h(x)$, έπεται ότι

$$F(x) = (x+c_1)g(x) = (x+c_1)\ (x+c_2)h(x)$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, θα είναι δυνατό να ανάγουμε το αρχικό n-οστού βαθμού πολυώνυμο f(x) σε ένα γινόμενο n το πολύ όρων:

$$f(x) = (x+c_1)\ (x+c_2)\ \ldots\ (x+c)\kappa(x)$$

όπου, όταν θέσουμε αυτό το γινόμενο ίσο με μηδέν, θα πάρουμε n το πολύ ρίζες.

1.4 ΓΕΝΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Τα δυο τελευταία τμήματα είχαν να κάνουν με υποδείγματα μιας μεμονωμένης αγοράς, στα οποία τα Q_d και Q_s ενός αγαθού είναι συναρτήσεις μόνον της τιμής του. Στην πραγματικότητα όμως, κανένα εμπόρευμα δεν απολαμβάνει (ή πάσχει) από μια τέτοια ερμητική ύπαρξη. Για κάθε προϊόν, θα υπάρχουν κανονικά πολλά υποκατάστατα του και συμπληρωματικά αγαθά. Έτσι μια πιο ρεαλιστική εικόνα της συνάρτησης ζήτησης ενός προϊόντος θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη την επίδραση όχι μόνον της τιμής του αλλά και των τιμών πολλών, αν όχι όλων, των σχετικών προϊόντων. Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση της προσφοράς. Όμως, κάθε φορά που εμφανίζονται οι τιμές άλλων αγαθών, η δομή του ίδιου του υποδείγματος πρέπει να διευρυνθεί έτσι ώστε να γίνει ικανό να μας δώσει τις τιμές ισορροπίας των τιμών των άλλων προϊόντων. Σαν αποτέλεσμα, η τιμή και η ποσότητα πολλών αγαθών πρέπει να μπαίνουν ενδογενώς και μαζικά στο υπόδειγμα.

Σ' ένα υπόδειγμα μεμονωμένης αγοράς, η συνθήκη ισορροπίας αποτελείται από μία μόνον εξίσωση, $Q_d — Q_s$, ή $E = Q_d — Q_s = 0$, όπου το E είναι η υπερβάλλουσα ζήτηση. Όταν πολλά αλληλοεξαρτώμενα αγαθά εξετάζονται ταυτόχρονα, η ισορροπία θα απαιτεί την απουσία υπερβάλλουσας ζήτησης για κάθε αγαθό που περιέχεται στο υπόδειγμα, διότι αν π.χ. για ένα αγαθό υπάρχει υπερβάλλουσα ζήτηση, η προσαρμογή της τιμής αυτού του αγαθού αναγκαστικά επιδρά στις ζητούμενες και προσφερόμενες ποσότητες των υπολοίπων αγαθών, και αυτό δημιουργεί μεταβολές στις τιμές παντού. Συνεπώς, η συνθήκη ισορροπίας ενός υποδείγματος αγοράς n-αγαθών θα περιέχει η εξισώσεις, μια για κάθε αγαθό, της μορφής

$$Ei = Q_{di} — Q_{si} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (1.8)$$

Εάν υπάρχει λύση, τότε θα υπάρχει ένα σύνολο τιμών $\overline{P}_i$ και αντιστοίχων ποσοτήτων $\overline{Q}_i$ έτσι ώστε και οι n εξισώσεις της συνθήκης ισορροπίας να ικανοποιούνται ταυτόχρονα.

Υπόδειγμα αγοράς δυο προϊόντων

Για να παρουσιάσουμε το πρόβλημα, ας θεωρήσουμε ένα απλό υπόδειγμα στο οποίο μόνο δυο προϊόντα σχετίζονται μεταξύ τους. Για απλούστευση, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης και των δυο προϊόντων είναι γραμμικές. Σε παραμετρική μορφή ένα τέτοιο υπόδειγμα μπορεί να γραφεί:

$$Q_{dl} - Q_{sl} = 0$$
$$Q_{dl} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$
$$Q_{sl} = b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2$$
$$Q_{d2} - Q_{s2} = 0 \qquad (1.9)$$
$$Q_{d2} = \alpha_0\ \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$
$$Q_{s2} = b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2$$

όπου οι συντελεστές a και b αναφέρονται στις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης του πρώτου προϊόντος, και οι α και β του δεύτερου προϊόντος. Δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε τα πρόσημα των συντελεστών, αλλά στην ανάλυση κάποιοι περιορισμοί θα προκύψουν σαν προϋπόθεση οικονομικά λογικών αποτελεσμάτων. Επίσης, σ' ένα ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα, κάποια σχόλια θα γίνουν για τα πρόσημα που θα έχουν οι συντελεστές.

Σαν ένα πρώτο βήμα προς τη λύση αυτού του υποδείγματος, μπορούμε πάλι να καταφύγουμε στην απαλοιφή των μεταβλητών. Αντικαθιστώντας τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση στην πρώτη (για το πρώτο προϊόν) και την πέμπτη και έκτη εξίσωση στην τέταρτη (για το δεύτερο προϊόν), το μοντέλο ανάγεται σε δυο εξισώσεις δυο μεταβλητών:

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)P_1 + (a_2 - b_2)P_2 = 0 \qquad (1.10)$$

$$(\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)P_1 + (\alpha_2 - \beta_2)P_2 = 0$$

Αυτές παριστάνουν την εκδοχή των δύο προϊόντων της (1.8), μετά την αντικατάσταση των συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης στις δυο εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας.

Μολονότι αυτό είναι ένα απλό σύστημα μόνο δυο εξισώσεων, περιέχει όμως 12 παραμέτρους, και αυτό καθιστά τον αλγεβρικό χειρισμό του δύσκολο, εκτός αν χρησιμοποιήσουμε κάποιο τέχνασμα. Ως εκ τούτου ας ορίσουμε κάποια σύμβολα χάριν συντομίας

$$c_i \equiv a_i - b_i$$

$$\gamma_i \equiv \alpha_i - \beta_i$$

Τότε η (3.13) γίνεται — μετά τη μεταφορά των c_0 και γ_0 στο δεξιό μέρος του ίσον:

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 = - c_0$$

$$\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 = - \gamma_0$$

που μπορεί να λυθεί με περαιτέρω απαλοιφή των μεταβλητών. Από την πρώτη εξίσωση μπορεί να βρεθεί ότι $P_2 = - (c_0 + c_1 P_1)/c_2$. Αντικαθιστώντας αυτό στη δεύτερη εξίσωση και λύνοντας, παίρνουμε

$$\overline{P_1} = \frac{c_0 g_1 - c_1 g_0}{c_1 g_2 - c_2 g_1} \qquad (1.11)$$

Ας σημειωθεί ότι το $\overline{P_1}$ είναι εκφρασμένο, όπως θα έπρεπε για μια λύση, συναρτήσει των δεδομένων (παραμέτρων) του υποδείγματος. Με μια παρόμοια διαδικασία, η τιμή ισορροπίας του δεύτερου αγαθού είναι

$$\overline{P_2} = \frac{c_0 g_1 - c_1 g_0}{c_1 g_2 - c_2 g_1} \qquad (1.12)$$

Όμως, για να είναι αυτές οι τιμές οικονομικά αποδεκτές, κάποιοι περιορισμοί πρέπει να τεθούν στο υπόδειγμα. Πρώτα, επειδή η διαίρεση με το μηδέν δεν είναι επιτρεπτή, απαιτείται ο κοινός παρονομαστής των (1.11) και

(1.12) να είναι μη μηδενικός, δηλαδή, $c_1\gamma_2 \neq c_2\gamma_1$. Δεύτερον, για εξασφάλιση θετικότητας, ο αριθμητής πρέπει να έχει το ίδιο πρόσημο με τον παρονομαστή.

Αφού βρεθούν οι τιμές ισορροπίας, οι ποσότητες ισορροπίας $\overline{Q_1}$ και $\overline{Q_2}$ μπορούν αμέσως να υπολογιστούν αντικαθιστώντας τις (1.11) και (1.12) στη δεύτερη (ή τρίτη) εξίσωση και στην πέμπτη (ή έκτη) εξίσωση της (1.12). Αυτές οι λύσεις φυσικά θα εκφράζονται συναρτήσει των παραμέτρων.

Περίπτωση n-αγαθών

Η παραπάνω ανάλυση της αγοράς πολλών αγαθών έχει περιοριστεί στην περίπτωση των δύο αγαθών, αλλά θα πρέπει να είναι προφανές ότι ήδη κινούμεθα από την ανάλυση μερικής ισορροπίας προς την κατεύθυνση της γενικής ισορροπίας. Όσο περισσότερα αγαθά υπεισέρχονται στο υπόδειγμα, θα υπάρχουν περισσότερες μεταβλητές και εξισώσεις, και οι εξισώσεις θα γίνουν μεγαλύτερες και δυσκολότερες. Εάν όλα τα αγαθά μιας οικονομίας περιλαμβάνονται σ' ένα περιεκτικό υπόδειγμα αγοράς, το αποτέλεσμα θα είναι ένα υπόδειγμα γενικής ισορροπίας τύπου Walras, στο οποίο η υπερβάλλουσα ζήτηση για κάθε αγαθό θεωρείται ότι είναι συνάρτηση των τιμών όλων των αγαθών της οικονομίας. Μερικές από τις τιμές μπορεί, βέβαια, να έχουν μηδενικούς συντελεστές όταν δεν παίζουν κανένα ρόλο στον προσδιορισμό της υπερβάλλουσας ζήτησης κάποιου αγαθού, δηλαδή, στη συνάρτηση της υπερβάλλουσας ζήτησης των πιάνων η τιμή του ποπ κορν μπορεί κάλλιστα να έχει συντελεστή μηδέν. Όμως, γενικά, με n αγαθά συνολικά, μπορούμε να εκφράσουμε τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης ως ακολούθως (χρησιμοποιώντας τα Q_{di} και Q_{si} ως σύμβολα συναρτήσεων στη θέση των f και g) :

$Q_{di} = Q_{di} (P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$(i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1.13)$

$Q_{si} = Q_{si} (P_1, P_2, \ldots, P_n)$

Αυτές οι δύο εξισώσεις παριστάνουν το σύνολο 2n συναρτήσεων που περιέχονται στο υπόδειγμα. (Αυτές οι συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητα γραμμικές.) Επιπλέον, η συνθήκη ισορροπίας αποτελείται η ίδια από ένα σύνολο n εξισώσεων,

$$Q_{di} - Q_{si} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1.14)$$

Όταν η (1.14) προστεθεί στη (1.13), το υπόδειγμα γίνεται πλήρες. Έτσι θα πρέπει να έχουμε ένα σύνολο 3n εξισώσεων.

Αντικαθιστώντας όμως την (1.13) στην (1.14), το υπόδειγμα ανάγεται σ' ένα σύνολο n εξισώσεων μόνο:

$$Q_{di} (P_1, P_2, \ldots, P_n) - Q_{si} = Q_{si} (P_1, P_2, \ldots, P_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ακόμα, αν θέσουμε $E_i = Q_{di} - Q_{si}$ όπου η E_i είναι αναγκαστικά συνάρτηση όλων των n τιμών, το παραπάνω σύνολο των εξισώσεων μπορεί εναλλακτικά να γραφεί

$$E_i (P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Αν λυθούν ταυτόχρονα, αυτές οι n εξισώσεις θα προσδιορίσουν τις n τιμές ισορροπίας $\overline{P}$ — αν πράγματι υπάρχει λύση. Και τότε τα $\overline{Q_i}$ μπορούν να παραχθούν από τις συναρτήσεις προσφοράς ή ζήτησης.

Λύση ενός γενικού συστήματος εξισώσεων

Εάν ένα υπόδειγμα είναι εφοδιασμένο με αριθμητικούς συντελεστές, οι τιμές ισορροπίας των μεταβλητών θα είναι επίσης αριθμητικές. Σ' ένα πιο γενικό επίπεδο, εάν το υπόδειγμα εκφράζεται συναρτήσει παραμετρικών σταθερών, όπως στην (1.9), οι τιμές ισορροπίας θα περιέχουν παραμέτρους και συνεπώς θα εμφανίζονται ως «τύποι», όπως φαίνεται στα παραδείγματα

(1.11) και (1.12). Εάν όμως, για μεγαλύτερη γενίκευση, ακόμη και οι μορφές των συναρτήσεων αφήνονται απροσδιόριστες σ' ένα υπόδειγμα, όπως στην (1.13), η έκφραση των τιμών λύσης θα είναι εξαιρετικά γενική.

Στα παραμετρικά υποδείγματα έχει αποδειχτεί ότι μια λύση είναι πάντα μια έκφραση των παραμέτρων. Για ένα υπόδειγμα γενικών συναρτήσεων που περιέχει, ας πούμε, ένα σύνολο m παραμέτρων (α_1, α_2, …, α_m) —όπου το m δεν είναι απαραίτητα ίσο με το n — οι τιμές ισορροπίας θα αναμένεται να πάρουν τη γενική αναλυτική μορφή των

$$\overline{P_i} = \overline{P_i}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.15)$$

Αυτή είναι μια συμβολική πρόταση με την έννοια ότι η λύση κάθε μεταβλητής (εδώ, της τιμής) είναι μια συνάρτηση του συνόλου όλων των παραμέτρων του υποδείγματος. Επειδή αυτή είναι μια πολύ γενική πρόταση, στην πραγματικότητα δεν μας δίνει λεπτομερείς πληροφορίες για τις λύσεις. Αλλά στη γενική αναλυτική θεώρηση μερικών προβλημάτων, ακόμα και αυτός ο σχετικά ελλιπής τρόπος έκφρασης μιας λύσης θα αποδειχτεί χρήσιμος.

Είναι σχετικά εύκολο να γράψουμε μια τέτοια λύση. Αλλά υπάρχει ένα ενδιαφέρον σημείο: η έκφραση στην (1.15) μπορεί να δικαιολογηθεί αν και μόνον εάν μια μοναδική λύση πράγματι υπάρχει, διότι τότε και μόνον τότε απεικονίζουμε το διατεταγμένο m-ώνυμο (α_1, α_2, …, α_m) σε μια ορισμένη τιμή για κάθε $\overline{P_i}$. Όμως ακόμη, ατυχώς για μας, δεν υπάρχει προκαθορισμένη αιτία να υποθέσουμε ότι κάθε υπόδειγμα θα έχει αυτόματα μια μοναδική λύση. Θα πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η διαδικασία της «μέτρησης εξισώσεων και αγνώστων» δεν είναι αρκετή σαν κριτήριο. Μερικά πολύ απλά παραδείγματα θα μας έπειθαν ότι ίσος αριθμός εξισώσεων και αγνώστων (ενδογενών μεταβλητών) δεν εγγυάται απαραίτητα την ύπαρξη μοναδικής λύσης.

Ας θεωρήσουμε τα τρία συστήματα εξισώσεων

$$X + Y = 8$$
$$X + Y = 9 \qquad (1.16)$$

$$2X + Y = 12$$
$$4X + 2Y = 24 \qquad (1.17)$$

$$2X + 3Y = 58 \qquad (1.18)$$
$$Y = 18$$
$$X + Y = 20$$

Στην (1.20), παρά το γεγονός ότι οι δύο άγνωστοι συνδέονται μεταξύ τους με δυο ακριβώς εξισώσεις, δεν υπάρχει λύση. Αυτές οι δύο εξισώσεις συμβαίνει να είναι ασύμβατες, διότι αν το άθροισμα των x και y είναι 8, δεν είναι δυνατόν ταυτόχρονα να είναι και 9. Στην (1.17), μια άλλη περίπτωση δύο εξισώσεων με δύο μεταβλητές, οι δύο εξισώσεις είναι συναρτησιακά εξαρτημένες, που σημαίνει ότι η καθεμιά μπορεί να παραχθεί από την άλλη. (Εδώ, η δεύτερη εξίσωση είναι ίση με δυο φορές την πρώτη εξίσωση). Συνεπώς, η δεύτερη εξίσωση είναι πλεονασμός και μπορεί να διαγραφεί από το σύστημα, αφήνοντας στην ουσία μια εξίσωση με δύο αγνώστους. Η λύση τότε θα είναι η εξίσωση Y = 12 — 2X, η οποία δεν μας δίνει ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος (X,Y) αλλά έναν άπειρο αριθμό ζευγών, όπως (0,12), (1,10), (2,8), κ.ο.κ., τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση. Τέλος, η περίπτωση (1.18) περιέχει περισσότερες εξισώσεις παρά μεταβλητές, ωστόσο το διατεταγμένο ζεύγος (2,18) αποτελεί τη μοναδική λύση του συστήματος. Η αιτία είναι ότι, λόγω της ύπαρξης της συναρτησιακής εξάρτησης μεταξύ των εξισώσεων (η πρώτη είναι ίση με τη δεύτερη συν το διπλάσιο της τρίτης), έχουμε στην ουσία μόνο δυο ανεξάρτητες, συμβατές εξισώσεις δυο μεταβλητών.

Αυτά τα απλά παραδείγματα είναι ικανά να μας δείξουν τη σπουδαιότητα της συμβατότητας και της συναρτησιακής ανεξαρτησίας ως προϋποθέσεων της εφαρμογής της διαδικασίας μέτρησης εξισώσεων και αγνώστων. Εν γένει, για να εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία, πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι (1) η ικανοποίηση μιας οποιασδήποτε εξίσωσης στο υπόδειγμα δεν θα αποκλείει την ικανοποίηση μιας άλλης και (2) καμιά εξίσωση δεν είναι πλεονάζουσα. Για παράδειγμα, στην (1.17), οι n συναρτήσεις ζήτησης και οι n προσφοράς μπορούν με ασφάλεια να υποτεθούν ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού καθεμιά από αυτές παράγεται από διαφορετική πηγή — κάθε ζήτηση από τις αποφάσεις μιας ομάδας καταναλωτών, και κάθε προσφορά από τις αποφάσεις μιας ομάδας επιχειρήσεων. Έτσι κάθε συνάρτηση έχει σκοπό να περιγράψει μια όψη της αγοράς, και καμιά δεν είναι πλεονάζουσα. Ίσως να μπορεί να υποτεθεί και αμοιβαία συμβατότητα. Επιπρόσθετα, οι εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας (1.18) είναι επίσης ανεξάρτητες και πιθανώς συμβατές. Έτσι η αναλυτική λύση της (1.19) μπορεί γενικά να θεωρηθεί δικαιολογημένη.

1.5 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΘΝΙΚΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ

Μολονότι η συζήτηση της στατικής ανάλυσης έχει περιοριστεί σε υποδείγματα αγοράς διαφορετικών μορφών —γραμμικά και μη, ενός αγαθού ή περισσοτέρων, ειδικά ή γενικά— έχει, ωστόσο, εφαρμογές και σε άλλες περιοχές των οικονομικών. Σαν ένα απλό παράδειγμα, μπορούμε να αναφέρουμε το γνωστό κεϋνσιανό υπόδειγμα του εθνικού εισοδήματος,

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= \alpha + bY \qquad (\alpha > 0,\ 0 < b < 1) \end{aligned} \qquad (1.20)$$

όπου τα Y και C συμβολίζουν τις ενδογενείς μεταβλητές του εθνικού εισοδήματος και της δαπάνης κατανάλωσης, αντίστοιχα, και I_0, G_0 τις εξωγενείς μεταβλητές της επένδυσης και των δημοσίων δαπανών. Η πρώτη εξίσωση είναι μια συνθήκη ισορροπίας (εθνικό εισόδημα — συνολική δαπάνη). Η δεύτερη, η συνάρτηση κατανάλωσης, είναι συνάρτηση συμπεριφοράς. Οι δυο παράμετροι στη συνάρτηση κατανάλωσης, α και b, παριστάνουν την αυτόνομη δαπάνη κατανάλωσης και την οριακή ροπή προς κατανάλωση, αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι οι δυο αυτές εξισώσεις με δύο ενδογενείς μεταβλητές δεν είναι ούτε συναρτησιακά εξαρτημένες, ούτε ασύμβατες μεταξύ τους. Έτσι θα είμαστε σε θέση να βρούμε τις τιμές ισορροπίας του εισοδήματος και της δαπάνης κατανάλωσης, Y και G, συναρτήσει των παραμέτρων α και b και των εξωγενών μεταβλητών I_0 και G_0.

Αντικατάσταση της δεύτερης εξίσωσης στην πρώτη ανάγει την (1.20) σε μια εξίσωση μιας μεταβλητής, Y:

$$Y = a + bY + I_0 + G_0$$

$$\text{ή} \quad (1 - b)Y = \alpha + I_0 + G_0$$

Έτσι η λύση ως προς Y (το εθνικό εισόδημα ισορροπίας) είναι

$$\overline{Y} = \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b} \qquad (1.21)$$

η οποία, πρέπει να σημειωθεί, εκφράζεται ολοκληρωτικά συναρτήσει των παραμέτρων και των εξωγενών μεταβλητών, τα δεδομένα του υποδείγματος. Θέτοντας την (1.21) στη δεύτερη εξίσωση της (1.20) θα πάρουμε το επίπεδο ισορροπίας της δαπάνης κατανάλωσης:

$$\overline{C} = \alpha + b\overline{Y} = \alpha + \frac{b(a + I_0 + G_0)}{1-b} =$$

$$= \frac{a(1-b) + b(a + I_0 + G_0)}{1-b} = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1-b}$$

το οποίο και πάλι είναι εκφρασμένο ολοκληρωτικά συναρτήσει των δεδομένων του υποδείγματος.

Και οι δυο Y και G έχουν την έκφραση (1 — b) στον παρονομαστή. Έτσι, ο περιορισμός $b \neq 1$ είναι απαραίτητος για να αποφευχθεί η διαίρεση με το μηδέν. Επειδή το b, η οριακή ροπή προς κατανάλωση, έχει υποτεθεί θετικό κλάσμα, αυτός ο περιορισμός ικανοποιείται αυτόματα. Επιπλέον, για να είναι τα Y και C θετικά, οι αριθμητές στις (1.21) και (1.22) πρέπει να είναι θετικοί. Επειδή οι εξωγενείς δαπάνες I_0 και G_0 είναι συνήθως θετικές, όπως είναι και η παράμετρος α (το σημείο τομής της συνάρτησης κατανάλωσης με τον κατακόρυφο άξονα), το πρόσημο των παραστάσεων στον αριθμητή θα είναι και αυτό θετικό.

Σαν επαλήθευση των υπολογισμών μας, μπορούμε να προσθέσουμε τη G της (1.22) στο $(I_0 + G_0)$ και να δούμε αν το άθροισμα είναι ίσο με τη σχέση Y της (1.21). Εάν ναι, οι τιμές των Y και G ικανοποιούν πράγματι τη συνθήκη ισορροπίας, και η λύση είναι έγκυρη.

Αυτό το υπόδειγμα είναι προφανώς υπεραπλουστευμένο, αλλά μπορούν να κατασκευαστούν και άλλα υποδείγματα προσδιορισμού του εθνικού εισοδήματος, διαφορετικών βαθμών πολυπλοκότητας. Όμως, σε κάθε περίπτωση, οι αρχές που περιλαμβάνονται στην κατασκευή και ανάλυση του υποδείγματος είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές που ήδη συζητήθηκαν. Γι' αυτό τον λόγο, δεν θα προχωρήσουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες εδώ.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Το νόημα του όρου δυναμική όπως αυτό χρησιμοποιείται, στην οικονομική ανάλυση, ποικίλλει ανάλογα με τις εποχές και τους οικονομολόγους. Ωστόσο, στη συνήθη σημερινή χρήση, ο όρος αποδίδει ένα συγκεκριμένο τύπο ανάλυσης όπου το αντικείμενο είναι είτε ο προσδιορισμός και η μελέτη της συγκεκριμένης χρονικής εξέλιξης των μεταβλητών είτε η απόφανση εάν, σε ικανό χρόνο, οι μεταβλητές αυτές θα τείνουν να συγκλίνουν σε κάποιο επίπεδο (ισορροπίας). Αυτό το είδος πληροφορίας είναι ενδιαφέρον γιατί συμπληρώνει ένα σοβαρό κενό το οποίο παραμόρφωσε τη μελέτη της στατικής και της συγκριτικής στατικής. Στη μελέτη της δεύτερης από τις δύο, κάνουμε πάντα την αυθαίρετη υπόθεση ότι η διαδικασία των οικονομικών προσαρμογών οδηγεί αναπόφευκτα σε μια ισορροπία. Στη δυναμική ανάλυση, το ερώτημα του «εφικτού» δεν θεωρείται ένα μακρινό ερώτημα, αλλά αντιμετωπίζεται ευθέως.

Το βασικό χαρακτηριστικό της δυναμικής ανάλυσης είναι η χρονολόγηση των μεταβλητών, η οποία εισάγει τη ρητή θεώρηση του χρόνου στο πεδίο έρευνας. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: ο χρόνος μπορεί να δίδεται είτε σαν μια συνεχής (continuous) είτε σαν μια διακριτή (discrete) μεταβλητή. Στην πρώτη περίπτωση, μια μεταβολή της μεταβλητής συμβαίνει σε κάθε σημείο του χρόνου (όπως στο συνεχή ανατοκισμό). Στη δεύτερη περίπτωση, η μεταβλητή υφίσταται μόνο μια μεταβολή κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου (παραδείγματος χάριν, ο τόκος προστίθεται μόνο στο τέλος κάθε εξαμήνου). Μία από αυτές τις έννοιες του χρόνου μπορεί σε μια δεδομένη στιγμή να είναι πιο κατάλληλη από την άλλη.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση του συνεχούς χρόνου, στην οποία οι πιο κατάλληλες μαθηματικές τεχνικές είναι ο ολοκληρωτικός λογισμός και οι διαφορικές εξισώσεις.

2.1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Το πρόβλημα σ' ένα στατικό μοντέλο, μιλώντας γενικά, είναι να ορίσουμε τις τιμές των ενδογενών μεταβλητών οι οποίες ικανοποιούν μια ορισμένη συνθήκη (ή συνθήκες) ισορροπίας. Στο περιβάλλον των μοντέλων αριστοποίησης, το έργο μας είναι να προσδιορίσουμε τις τιμές των μεταβλητών επιλογής που μεγιστοποιούν (ή ελαχιστοποιούν) μια συγκεκριμένη αντικειμενική συνάρτηση, οπότε η συνθήκη πρώτης τάξης παίζει το ρόλο συνθήκης ισορροπίας. Αντιθέτως, σ' ένα δυναμικό μοντέλο, το πρόβλημα είναι μάλλον η περιγραφή της πορείας κάποιας μεταβλητής με βάση ένα γνωστό πρότυπο μεταβολής (ας πούμε ένα δεδομένο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής).

Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός H είναι γνωστό ότι μεταβάλλεται διαχρονικά με ρυθμό

$$\frac{dH}{dt} = t^{-1/2} \qquad (2.1)$$

Προσπαθούμε τότε να ορίσουμε ποια χρονική πορεία (ή πορείες) του πληθυσμού H = H(t) μπορεί να αποδώσει καλύτερα το ρυθμό μεταβολής στη (2.1).

Παραδεχόμαστε ότι, αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση H = H(t) από την αρχή, η παράγωγος dH/dt μπορεί να βρεθεί διαφορίζοντας. Αλλά στο πρόβλημά μας τώρα θα αντιμετωπίσουμε την αντίθετη κατεύθυνση: καλούμαστε να βρούμε την αρχική συνάρτηση από μια δεδομένη παράγωγο συνάρτηση. Παρατηρούμε αρχικα ότι η συνάρτηση $H(t) = 2t^{1/2}$ έχει πράγματι παράγωγο της μορφής (2.1), έτσι ώστε να μπορεί να είναι μια λύση του προβλήματος μας. Υπάρχουν όμως κι άλλες συναρτήσεις, όπως η $H(t) = 2t^{1/2} + 15$ ή $H(t) = 2t^{1/2} + 99$ ή γενικότερα,

$$H(t) = 2t^{1/2} + c \quad (c = \text{μια τυχούσα σταθερά}) \qquad (2.2)$$

οι οποίες έχουν όλες την ίδια παράγωγο (2.1). Δεν μπορούμε να ορίσουμε, λοιπόν, μια και μοναδική χρονική πορεία, εκτός και αν η τιμή της σταθεράς c μπορεί κάπως να καθοριστεί. Για να συμβεί αυτό, πρέπει να εισάγουμε στο μοντέλο πρόσθετες πληροφορίες, συνήθως της μορφής των αρχικών συνθηκών ή οριακών συνθηκών (initial condition ή boundary condition).

Αν είναι γνωστός ο αρχικός πληθυσμός H(0), πρόκειται για την τιμή του H όταν $t = 0$, ας πούμε $H(0) = 100$, τότε η τιμή της σταθεράς c μπορεί να οριστεί. Θέτοντας $t = 0$ στην (2.2), έχουμε

$$H(0) = 2(0)^{1/2} + c = c$$

Αλλά $H(0) = 100$, τότε $c = 100$ και η (2.2) γίνεται

$$H(t) = 2t^{1/2} + 100 \quad (2.2')$$

όπου η σταθερά δεν είναι πια τυχούσα. Γενικά, για κάθε αρχικό πληθυσμό H(0), η χρονική πορεία είναι

$$H(t) = 2t^{1/2} + H(0) \ (2.2'')$$

Έτσι, το μέγεθος του πληθυσμού H σ' ένα σημείο του χρόνου θα είναι, στο παρόν παράδειγμα, το άθροισμα του αρχικού πληθυσμού H(0) και ενός άλλου όρου που περιέχει τη μεταβλητή χρόνου t. Μια τέτοια χρονική πορεία χαρτογραφεί πραγματικά το πλήρες οδοιπορικό της μεταβλητής H στο χρόνο κι έτσι αποτελεί μια λύση για το δυναμικό μας μοντέλο.

Όσο απλό και αν είναι αυτό το παράδειγμα του πληθυσμού, επεξηγεί την πεμπτουσία των προβλημάτων της οικονομικής δυναμικής. Δεδομένου του προτύπου συμπεριφοράς της μεταβλητής στο χρόνο, ψάχνουμε να βρούμε μια συνάρτηση η οποία περιγράφει τη χρονική πορεία της μεταβλητής. Κατά τη διαδικασία, θα συναντήσουμε μια ή περισσότερες τυχούσες σταθερές, αλλά αν έχουμε έναν ικανοποιητικό αριθμό πρόσθετων πληροφοριών με τη μορφή αρχικών συνθηκών, θα μπορέσουμε να ορίσουμε αυτές τις τυχούσες σταθερές.

Στους απλούστερους τύπους των προβλημάτων, όπως αυτό που αναφέραμε παραπάνω, η λύση μπορεί να βρεθεί από τη μέθοδο του ολοκληρωτικού λογισμού, που είναι η διαδικασία αναγωγής μιας δοθείσης παραγώγου συνάρτησης πίσω στην αρχική συνάρτηση. Σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις μπορούμε να καταφύγουμε στις γνωστές τεχνικές ενός συγγενικού κλάδου των μαθηματικών που είναι γνωστός σαν διαφορικές εξισώσεις (differential equations). Εφόσον μια διαφορική εξίσωση είναι ορισμένη σαν μια εξίσωση που περιέχει εκφράσεις διαφορικών ή παραγώγων, η (2.1) ασφαλώς θα είναι μια συνάρτηση αυτής της μορφής. Συνεπώς, ορίζοντας τη λύση της, ήδη στην πραγματικότητα επιλύουμε μια διαφορική εξίσωση.

2.2 ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Έχει αναφερθεί ότι η ολοκλήρωση είναι το αντίστροφο της παραγώγισης. Αν η παραγώγιση μιας δεδομένης αρχικής συνάρτησης F(x) δίνει την παράγωγο f(x), μπορούμε να «ολοκληρώσουμε» την f(x) για να ορίσουμε την F(x), υπό τον όρο ότι διαθέτουμε τις κατάλληλες πληροφορίες για να προσδιορίσουμε την τυχούσα σταθερά η οποία προκύπτει από τη διαδικασία της ολοκλήρωσης. Η συνάρτηση F(x) θα αναφέρεται σαν ένα ολοκλήρωμα (ή αντι-παράγωγος), της συνάρτησης f(x). Αυτοί οι δύο τύποι διαδικασίας μπορεί να παρομοιαστούν με τους δύο τρόπους μελέτης ενός οικογενειακού δέντρου: η ολοκλήρωση συνεπάγεται την εύρεση της καταγωγής της συνάρτησης f(x), ενώ αντιθέτως η παραγώγιση ψάχνει τους απογόνους της συνάρτησης F(x). Αλλά, ας σημειωθεί αυτή η διαφορά: ενώ η (παραγωγίσιμη) αρχική συνάρτηση F(x) παράγει σταθερά ένα μόνον απόγονο, δηλαδή μία μόνο παράγωγο f(x), η παράγωγος συνάρτηση f(x) ανάγεται σ' έναν άπειρο αριθμό γονέων με την ολοκλήρωση, γιατί αν η F(x) είναι το ολοκλήρωμα της f(x), τότε πρέπει να είναι και η F(x) συν μια σταθερά.

Χρειαζόμαστε μια ειδική σημειογραφία για να δηλώσουμε την απαιτούμενη ολοκλήρωση της συνάρτησης f(x) ως προς x. Αυτή που έχει καθιερωθεί είναι η $\int f(x)\,dx$

Το σύμβολο στ' αριστερά, ένα επιμηκυμένο S, καλείται σύμβολο της ολοκλήρωσης. Η f(x) είναι γνωστή σαν η συνάρτηση προς ολοκλήρωση (η συνάρτηση της οποίας ζητάμε το ολοκλήρωμα) και το dx —το ίδιο όπως το dx στο σύμβολο της παραγώγου d/dx— θυμίζει ότι η πράξη εκτελείται ως προς τη μεταβλητή x. Ωστόσο, μπορούμε να πάρουμε το f(x) dx σαν ένα πράγμα και να το ερμηνεύσουμε σαν το διαφορικό της αρχικής συνάρτησης F(x), [δηλαδή dF(x) = f(x)dx]. Τότε, το σύμβολο της ολοκλήρωσης στην αρχή μπορεί να θεωρηθεί σαν μια οδηγία αντιστροφής της διαδικασίας της διαφόρισης που δημιουργεί το διαφορικό. Με τη νέα σημειογραφία μπορούμε να γράψουμε ότι

$$d/dx\, F(x) = f(x) \rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (2.3)$$

όπου η παρουσία του c, μιας τυχούσας σταθεράς της ολοκλήρωσης, υποδεικνύει την πολλαπλή καταγωγή της συνάρτησης προς ολοκλήρωση.

2.3 ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Όλα τα ολοκληρώματα που παραθέσαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι αορίστου είδους: το καθένα είναι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής και έτσι δεν έχουν ορισμένες αριθμητικές τιμές. Τώρα, για ένα δεδομένο αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f(x),

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

αν επιλέξουμε δύο τιμές της x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, έστω α και b (α < b), τις αντικαταστήσουμε διαδοχικά στο δεξί μέλος της ανωτέρω εξίσωσης και πάρουμε τη διαφορά

$$[F(b) + c] - [F(\alpha) + c] = F(b) - F(\alpha)$$

έχουμε μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή, ελεύθερη από τη μεταβλητή x και από τη σταθερά c. Αυτή η τιμή ονομάζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα από το α ως το b της f(x). Το α ονομάζεται το κατώτερο όριο της ολοκλήρωσης και το b το ανώτερο όριο της ολοκλήρωσης.

Για να υποδηλώσουμε τα όρια της ολοκλήρωσης, τροποποιούμε το σύμβολο της ολοκλήρωσης στη μορφή $\int_a^b$. Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος φαίνεται στα ακόλουθα βήματα

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(\alpha)$$

όπου το σύμβολο $\Big|_a^b$ (γράφεται επίσης και σαν $[\ ]_a^b$), είναι μια οδηγία για την αντικατάσταση της x από τα b και α, διαδοχικά, στο αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης ώστε να πάρουμε τα F(b) και F(α) και κατόπιν παίρνουμε τη διαφορά τους, όπως φαίνεται στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης. Σαν πρώτο βήμα λοιπόν, πρέπει να βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα, αν και μπορούμε να παραλείψουμε την σταθερά c, αφού έτσι κι αλλιώς θα φύγει παίρνοντας τη διαφορά.

2.4 ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Τα ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται στην οικονομική ανάλυση με ποικίλους τρόπους. Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε μερικές απλές εφαρμογές και μετά θα δούμε την εφαρμογή στο μοντέλο μεγέθυνσης Domar στην επόμενη ενότητα.

Από μια οριακή συνάρτηση σε μια συνολική συνάρτηση

Δεδομένης μιας συνολικής συνάρτησης (μιας συνάρτησης συνολικού κόστους), η διαδικασία της παραγώγισης μπορεί να δώσει την οριακή συνάρτηση (τη συνάρτηση οριακού κόστους). Επειδή η διαδικασία της ολοκλήρωσης είναι η αντίθετη της παραγώγισης, θα μας επιτρέπει να συνάγουμε τη συνολική συνάρτηση από μια δεδομένη οριακή συνάρτηση.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση συνολικού κόστους C(Q), αν το οριακό κόστος (MC) μιας επιχείρησης είναι η ακόλουθη συνάρτηση του προϊόντος, $C'(Q) = 2e^{0,2Q}$, και αν το σταθερό κόστος είναι $C_F = 90$.

Ολοκληρώνοντας την C'(Q) ως προς Q, βρίσκουμε ότι

$$\int 2e^{0,2Q}dQ = 2(1/0,2)e^{0,2Q} + c = 10\, e^{0,2Q} + c \qquad (2.4)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η συνάρτηση C(Q) που επιθυμούμε, εκτός αν, λόγω της τυχούσας σταθεράς c, η απάντηση φανεί ασαφής. Ευτυχώς, η πληροφορία ότι $C_F = 90$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια αρχική συνθήκη που θα επιτρέψει τον προσδιορισμό της σταθεράς. Όταν το Q = 0, το συνολικό κόστος C θα αποτελείται αποκλειστικά από την C_F. Οπότε, θέτοντας Q = 0 στο αποτέλεσμα της (2.4) θα πάρουμε την τιμή 90 (δηλαδή $10e^0 + c = 90$). Αλλά αυτό θα συνεπάγεται ότι c = 90 -10 = 80. Έτσι, η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι

$$C(Q) = 10e^{0,2Q} + 80$$

Σημειώνουμε ότι, αντίθετα από την περίπτωση (2.2), όπου η τυχούσα σταθερά c έχει την ίδια τιμή με την αρχική τιμή της μεταβλητής H(0), στο παρόν παράδειγμα έτσι έχουμε $c = 80$ αλλά $C(0) = C_F = 90$, οπότε οι δύο παίρνουν διαφορετικές τιμές. Γενικώς, δεν θα υποθέτουμε ότι η τυχούσα σταθερά c θα είναι πάντα ίση με την αρχική τιμή της συνάρτησης συνολικού κόστους.

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση αποταμίευσης S(Y), αν η οριακή ροπή προς αποταμίευση (MPS) είναι η ακόλουθη συνάρτηση του εισοδήματος, $S'(Y) = 0{,}3 - 0{,}1\, Y^{-1/2}$, και αν η συνολική αποταμίευση S είναι μηδενική όταν το εισόδημα Y είναι 81.

Καθώς το MPS είναι η παράγωγος της συνάρτησης S, το πρόβλημα μας οδηγεί να ολοκληρώσουμε την S'(Y):

$$S(Y) = \int (0{,}3 - 0{,}1\, Y^{-1/2})\, dY = 0{,}3\, Y - 0{,}2\, Y^{1/2} + c$$

Η συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς c μπορεί να βρεθεί από το ότι το $S = 0$ όταν $Y = 81$. Ακόμα και αν, με τη στενή έννοια, αυτό δεν είναι αρχική συνθήκη (δεν αφορά το $Y = 0$), η αντικατάσταση αυτής της πληροφορίας στο παραπάνω ολοκλήρωμα θα μας βοηθήσει να ορίσουμε το c. Εφόσον

$$0 = 0{,}3(81) - 0{,}2(9) + c \Rightarrow \quad c = -22{,}5$$

η επιθυμητή συνάρτηση αποταμίευσης είναι

$$S(Y) = 0{,}3Y - 0{,}2\, Y^{1/2} - 22{,}5$$

Η τεχνική που αναπτύξαμε στα παραπάνω δύο παραδείγματα μπορεί να επεκταθεί ευθέως σε άλλα προβλήματα εύρεσης της συνολικής συνάρτησης (όπως το συνολικό έσοδο, τη συνολική κατανάλωση) από τις οριακές συναρτήσεις. Θα επαναλάβουμε επίσης ότι στα προβλήματα αυτής της μορφής η εγκυρότητα του αποτελέσματος (ενός ολοκληρώματος) μπορεί πάντα να ελεγχθεί με παραγώγιση.

Επένδυση και σχηματισμός κεφαλαίου

Ο σχηματισμός κεφαλαίου (capital formation) είναι η διαδικασία επαύξησης ενός δεδομένου αποθέματος κεφαλαίου. Κοιτάζοντας αυτήν τη διαδικασία σαν μια συνεχή διαδικασία μέσα στο χρόνο, μπορούμε να εκφράσουμε το απόθεμα κεφαλαίου σαν μια συνάρτηση του χρόνου, K(t), και να δηλώσουμε το ρυθμό του σχηματισμού του κεφαλαίου με τη χρήση της παραγώγου dK/dt Αλλά ο ρυθμός σχηματισμού κεφαλαίου στο χρόνο t είναι ταυτόσημος με το ρυθμό της ροής της καθαρής επένδυσης (net investment) στο χρόνο t, που συμβολίζεται με I(t). Έτσι, το απόθεμα κεφαλαίου K και η καθαρή επένδυση I συνδέονται μεταξύ τους με τις ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$\frac{dK}{dt} \equiv I(t)$$

$$K(t) = \int I(t)dt = \int \frac{dK}{dt} dt = \int dK$$

Η πρώτη πιο πάνω εξίσωση είναι μια ταυτότητα, μας λέει δε ότι η καθαρή επένδυση και η προσαύξηση του κεφαλαίου είναι δύο έννοιες συνώνυμες. Εφόσον το I(t) είναι η παράγωγος του K(t), είναι λογικό ότι το K(t) είναι το ολοκλήρωμα ή η αντιπαράγωγος του I(t), όπως δείχνει η δεύτερη εξίσωση.

Μερικές φορές η έννοια της ακαθάριστης επένδυσης, (gross investment), χρησιμοποιείται μαζί μ' αυτήν της καθαρής επένδυσης σ' ένα μοντέλο. Συμβολίζοντας την ακαθάριστη επένδυση με I_g και την καθαρή επένδυση με I, μπορούμε να συσχετίσουμε τη μια με την άλλη μέσω της εξίσωσης

$$Ig = I + \delta K$$

όπου το δ αναπαριστά το ρυθμό απαξίωσης του κεφαλαίου και το δ K το ρυθμό της προς αντικατάσταση επένδυσης (replacement investment).

Παράδειγμα 3

Η διαχρονική πορεία του κεφαλαίου K, αν υποθέσουμε ότι η ροή της καθαρής επένδυσης περιγράφεται από την εξίσωση $I(t) = 3t^{1/2}$ και ότι το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου, στο χρόνο t = 0 είναι K(0).

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος εμφανίζεται όταν επιθυμούμε να βρούμε την ποσότητα κεφαλαίου κατά τη διάρκεια κάποιου χρονικού διαστήματος (αντί της διαχρονικής πορείας του K). Εφόσον $\int I(t)\,dt = K(t)$, μπορούμε να γράψουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b I(t)dt = K(t)\Big]_a^b = K(b) - K(\alpha)$ για να δείξουμε τη συνολική συσσώρευση κεφαλαίου κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος [α, β]. Φυσικά, αυτό αναπαριστά ένα εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της I(t). Ωστόσο, ας σημειώσουμε ότι στο γράφημα της συνάρτησης K(t), αυτό το ορισμένο ολοκλήρωμα θα εμφανιστεί σαν μια κάθετη απόσταση — πιο ειδικά, σαν η διαφορά μεταξύ των δύο καθέτων αποστάσεων K(b) και K (α).

Για να δούμε καλύτερα τη διαφορά μεταξύ K(t) και I(t), ας τονίσουμε ότι το κεφάλαιο K είναι ένα απόθεμα, ενώ η επένδυση I είναι μια ροή. Κατ' αναλογία, ενώ το K(t) μας λέει την ποσότητα του K που υπάρχει σε κάθε σημείο του χρόνου, το I(t) μας δίνει πληροφορίες σχετικά με το ρυθμό της (καθαρής) επένδυσης ανά έτος (ή ανά χρονική περίοδο) που επικρατεί σε κάθε σημείο του χρόνου. Έτσι, για να υπολογίσουμε την ποσότητα της καθαρής επένδυσης που αναλάβαμε (συσσώρευση κεφαλαίου), πρέπει πρώτα να καθορίσουμε το μήκος του αντίστοιχου διαστήματος. Αυτό φαίνεται επίσης όταν ξαναγράψουμε την ταυτότητα $dK/dt \equiv I(t)$ σαν $dK \equiv I(t)\,dt$, η οποία δηλώνει ότι το dK, που είναι η προσαύξηση του K, βασίζεται όχι μόνο στο I(t), το ρυθμό της ροής, αλλά και στο dt επίσης, το χρόνο που παρέρχεται. Είναι, λοιπόν, η ανάγκη να καθορίσουμε το χρονικό διάστημα στην έκφραση I(t) dt που φέρνει το ορισμένο ολοκλήρωμα στην εικόνα, και δημιουργεί την αναπαράσταση του σαν εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της I(t) αντί της K(t).

Παράδειγμα 4

Η συνολική καθαρή επένδυση (σχηματισμός κεφαλαίου) κατά τη διάρκεια ενός έτους, από t = 0 έως t=1, αν η καθαρή επένδυση είναι μια σταθερή ροή των I(t) = 1.000 δολαρίων ανά έτος.

Προφανώς, η λύση είναι \$1.000. Αυτή μπορεί να εξαχθεί και με το γνωστό τρόπο ως ακολούθως:

$$\int_0^1 I(t)dt = \int_0^1 1000\, dt = 1000\, t\,\Big]_0^1 = 1000$$

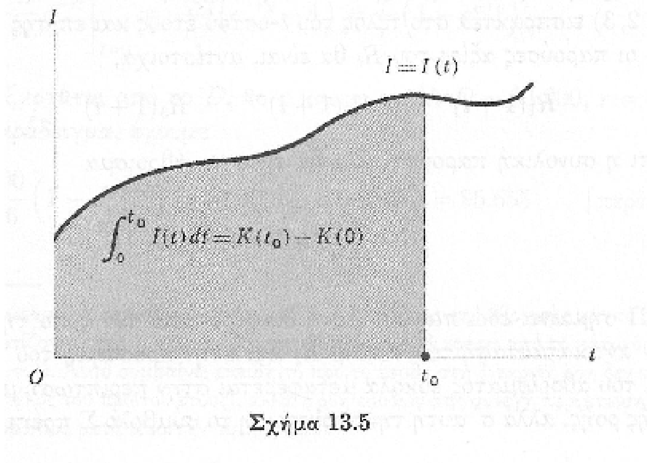
Παράδειγμα 5

Ο σχηματισμός κεφαλαίου κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος [1,4], δηλαδή κατά τη διάρκεια του δεύτερου, τρίτου και τέταρτου έτους, αν $I(t) = 3t^{1/2}$ (χιλιάδες δολαρίων ανά έτος) - μια μη σταθερή ροή .

Η λύση βρίσκεται στον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_1^4 3t^{1/2}dt$$

Με βάση τα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνολική συσσώρευση κεφαλαίου κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος [0, t] για οποιοδήποτε ρυθμό επένδυσης I(t), με το ορισμένο ολοκλήρωμα



Σχήμα 4

$$\int_0^t I(t)dt = K(t) \Big]_0^t = K(t) - K(0)$$

Το **Σχήμα 4** επεξηγεί την περίπτωση όπου το χρονικό διάστημα είναι το [0, t_0]. Αν το δούμε διαφορετικά, η παραπάνω εξίσωση δίνει την ακόλουθη έκφραση για τη διαχρονική πορεία του K(t):

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)dt$$

Η ποσότητα του K σε κάθε χρόνο t είναι το αρχικό κεφάλαιο συν το συνολικό συσσωρευμένο κεφάλαιο που έχει σχηματιστεί έκτοτε.

Παρούσα αξία μιας χρηματικής ροής

Με βάση τα παραπάνω, σχετικά με την προεξόφληση και την παρούσα αξία, περιορισμένη στην περίπτωση μιας μοναδικής μελλοντικής αξίας V, μας οδήγησε στους τύπους προεξόφλησης

$$A = V(l + i)^{-1} \quad \text{[διακριτή περίπτωση]}$$

$$\text{και} \quad A = Ve^{-rt} \quad \text{[συνεχής περίπτωση]}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε μια αδιάκοπη ροή ή απλά μια ροή μελλοντικών αξιών — μια σειρά από έσοδα εισπρακτέα σε διαφορετικούς

χρόνους ή από δαπάνες πληρωτέες σε διαφορετικούς χρόνους. Για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία ολόκληρης της χρηματικής ροής τότε:
Στη διακριτή περίπτωση, αν υποθέσουμε τρία μελλοντικά μεγέθη εσόδων R_t ($t = 1,2,3$) εισπρακτέα στο τέλος του t-οστού έτους και επίσης ένα ετήσιο επιτόκιο i, οι παρούσες αξίες του R_t θα είναι, αντίστοιχα,

$$R_1 (1 + i)^{-1} \qquad R_2 (1 + i)^{-2} \qquad R_3 (1 + i)^{-3}$$

Έπεται ότι η συνολική παρούσα αξία θα είναι το άθροισμα

$$\Pi = \sum_{t=1}^{3} R_t (1 + i)^{-t} \qquad (2.6)$$

(όπου το Π σημαίνει εδώ παρόν). Αυτό διαφέρει από τον τύπο της μιας τιμής μόνο στην αντικατάσταση του V από R_t και στην προσθήκη του συμβόλου Σ.

Η ιδέα του αθροίσματος εύκολα μεταφέρεται στην περίπτωση μιας συνεχούς χρηματικής ροής, αλλά σ' αυτή την περίπτωση το σύμβολο Σ πρέπει να δώσει τη θέση του, φυσικά, στο σύμβολο του ορισμένου ολοκληρώματος. Θεωρούμε μια συνεχή ροή εσόδων με ρυθμό R(t) δολαρίων ανά έτος. Αυτό σημαίνει ότι σε χρόνο $t = t_1$ ο ρυθμός της ροής είναι $R(t_1)$ δολάρια ανά έτος, αλλά σε μια άλλη χρονική στιγμή $t = t_2$ ο ρυθμός θα είναι $R(t_2)$ δολάρια ανά έτος —όπου t θεωρείται μια συνεχής μεταβλητή. Αν στο χρονικό σημείο t επιτρέψουμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt να περάσει, το σύνολο των εσόδων κατά τη διάρκεια του διαστήματος $[t, t + dt]$ μπορεί να γραφεί σαν $R(t)dt$. Όταν αυτό συνεχώς προεξοφλείται με ποσοστό r ανά έτος, η παρούσα αξία του θα είναι $R(t)e^{-rt}dt$. Αν προσπαθήσουμε να βρούμε τη συνολική παρούσα αξία της συνεχούς ροής τριών ετών, η απάντηση μας θα βρίσκεται στο ακόλουθο ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\Pi = \int_0^3 R(t)e^{-rt}dt$$

Η έκφραση αυτή, η συνεχής εκδοχή του αθροίσματος (2.6), διαφέρει από τον τύπο της μιας τιμής μόνο στην αντικατάσταση του V από R_t και στην προσθήκη του συμβόλου του ορισμένου ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 6

Η παρούσα αξία μιας συνεχούς ροής εσόδων διάρκειας y ετών με σταθερό ρυθμό D δολαρίων ανά έτος και προεξόφληση τ ανά έτος.

Σύμφωνα με το (2.6), έχουμε

$$\Pi = \int_0^y De^{-rt}dt = D\int_0^y e^{-rt}dt = D\left[\frac{-1}{r}e^{-rt}\right]_0^y = \frac{D}{r}(1 - e^{-ry}) \qquad (2.7)$$

Έτσι, το Π εξαρτάται από το D, το r και το y. Αν D = \$3.000, r = 0,006 και y=2, για παράδειγμα, έχουμε

$$\Pi = (3000/0{,}06)\,(1 - e^{-0{,}12}) = \$5.655$$

Η τιμή του Π είναι βεβαίως πάντα θετική, επειδή είναι θετικά τα D, r και το $(1 - e^{-ry})$ (ο αριθμός e, υψούμενος σε οποιαδήποτε αρνητική δύναμη, δίνει πάντα μια θετική κλασματική τιμή)

Παρούσα αξία μιας αέναης ροής

Αν μια χρηματική ροή πρόκειται να συνεχιστεί για πάντα —όπως για παράδειγμα ο τόκος από μια διαρκή ομολογία ή το έσοδο από ένα άφθαρτο περιουσιακό στοιχείο όπως είναι η γη— η παρούσα αξία της ροής θα είναι

$$\Pi = \int_0^\infty R(t)e^{-rt}\,dt$$

που είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 8

Η παρούσα αξία μιας αέναης ροής εισοδήματος ενός αέναου εσόδου συνεχούς ροής που κυλάει με ομοιόμορφο ρυθμό D δολαρίων ανά έτος, αν ο συνεχής ρυθμός προεξόφλησης είναι r.

Εφόσον, στον υπολογισμό ενός γενικευμένου ολοκληρώματος, παίρνουμε απλά το όριο ενός γνήσιου ολοκληρώματος, το αποτέλεσμα της (2.7) μπορεί ακόμα να μας βοηθήσει. Ειδικότερα, μπορούμε να γράψουμε

$$\Pi = \int_0^{\infty} D\, e^{-rt}\, dt = \lim_{y \to \infty} \int_0^{y} D\, e^{-rt}\, dt = \lim_{y \to \infty} \frac{D}{r}\,(1 - e^{-ry}) = \frac{D}{r}$$

Σημειώνουμε ότι η παράμετρος y (αριθμός ετών) έχει εξαφανιστεί από την τελική απάντηση. Αυτό είναι έτσι, όπως θα 'πρεπε να είναι, επειδή έχουμε να κάνουμε με μια αέναη ροή.

2.5 ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗΣ ΤΟΥ DOMAR

Στο πρόβλημα αύξησης του πληθυσμού καθώς και στο πρόβλημα σχηματισμού κεφαλαίου, ο κοινός στόχος είναι να περιγράψουμε μια χρονική πορεία με βάση κάποιο δεδομένο δείγμα μεταβολής μιας μεταβλητής. Από την άλλη μεριά, στο κλασικό μοντέλο μεγέθυνσης του καθηγητή Domar, η ιδέα είναι το να ορίσουμε τον τύπο της χρονικής πορείας που πρέπει να επικρατήσει για να ικανοποιείται μια ορισμένη συνθήκη ισορροπίας της οικονομίας.

Η δομή

Οι βασικές προτάσεις του μοντέλου Domar είναι οι ακόλουθες:

1. Κάθε μεταβολή του ρυθμού της επενδυτικής ροής ανά έτος I(t) θα παράγει ένα διπλό αποτέλεσμα: θα επηρεάζει τη συνολική ζήτηση καθώς και την παραγωγική δυναμικότητα της οικονομίας.

2. Η επίδραση στη ζήτηση μιας μεταβολής στο I(t), λειτουργεί διά μέσου της διαδικασίας του πολλαπλασιαστή, που υποτίθεται ότι δρα στιγμιαία. Έτσι μια αύξηση στο I(t) θα αυξάνει το ρυθμό της εισοδηματικής ροής ανά έτος Y(t) κατά ένα πολλαπλάσιο της αύξησης του I(t). Ο πολλαπλασιαστής είναι k = 1/s, όπου s συμβολίζει τη δεδομένη (σταθερά) οριακή ροπή προς αποταμίευση. Από την υπόθεση ότι το I(t) είναι η μόνη (παραμετρική) ροή δαπάνης που επηρεάζει το ρυθμό της εισοδηματικής ροής, μπορούμε να πούμε ότι

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt}\frac{1}{s} \qquad (2.8)$$

3. Η επίδραση της επένδυσης στην παραγωγική δυναμικότητα μετριέται από τη μεταβολή του ρυθμού του δυνητικού προϊόντος που η οικονομία είναι ικανή να παράγει. Υποθέτοντας ένα σταθερό λόγο δυναμικότητας-κεφαλαίου, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{k}{K} \equiv \rho \quad (= \text{μια σταθερά})$$

όπου το κ συμβολίζει τη δυναμικότητα ή τη δυνητική ροή προϊόντος ανά έτος, και το ρ αναπαριστά το δεδομένο λόγο δυναμικότητας-κεφαλαίου. Αυτό συνεπάγεται, φυσικά, ότι με ένα απόθεμα κεφάλαιο K(t) η οικονομία είναι δυνητικά ικανή να παράγει ένα ετήσιο προϊόν, ή εισόδημα, ανερχόμενο στο ύψος των κ ≡ ρK δολαρίων. Σημειώνουμε ότι, από τη σχέση κ ≡ ρK (τη συνάρτηση παραγωγής), συνεπάγεται ότι dκ = ρdK, και

$$\frac{dk}{dt} = \rho\,\frac{dK}{dt} = \rho I \quad (2.9)$$

Στο μοντέλο Domar, η ισορροπία έχει οριστεί σαν μια κατάσταση στην οποία η δυναμικότητα παραγωγής αξιοποιείται πλήρως. Άρα, για να έχουμε ισορροπία, πρέπει η συνολική ζήτηση να είναι ακριβώς ίση με το δυνητικό προϊόν που μπορεί να παραχθεί σ' ένα έτος, δηλαδή Y = κ. Ωστόσο, αν ξεκινήσουμε αρχικώς με μια κατάσταση ισορροπίας, η απαίτηση θα μετατραπεί στην εξισορρόπηση των αντίστοιχων μεταβολών της δυναμικότητας και της συνολικής ζήτησης. Θα έχουμε

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dk}{dt} \qquad (2.10)$$

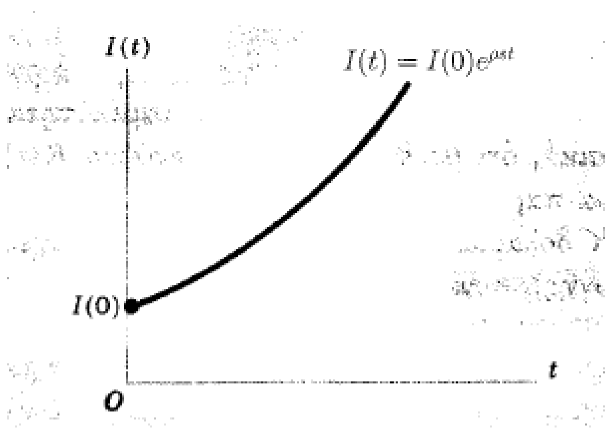
Για να βρούμε ποιο είδος διαχρονικής πορείας της επένδυσης I(t) μπορεί να ικανοποιεί πάντοτε αυτή τη συνθήκη ισορροπίας, αντικαθιστούμε πρώτα τις (2.8) και (2.9) στη συνθήκη ισορροπίας (2.10). Το αποτέλεσμα είναι η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dI}{dt}\frac{1}{s} = \rho I \quad ή \quad \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \rho s \qquad (2.11)$$

Εφόσον η (2.11) δηλώνει ένα καθοριστικό είδος μεταβολής του I, θα μπορέσουμε να βρούμε την επενδυτική πορεία ισορροπίας (ή απαιτούμενη επενδυτική πορεία) από αυτή.

Σ' αυτήν την απλή περίπτωση, η λύση βρίσκεται ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη της δεύτερης εξίσωσης στη (2.11) ως προς t. Το ότι τα δύο μέλη είναι όμοια στην ισορροπία, συνεπάγεται ότι τα ολοκληρώματα των δύο μελών είναι ίσα. Έτσι,

$$\int \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}\, dt = \int \rho s\, dt$$



Σχήμα 5

Από τον κανόνα αντικατάστασης και το λογαριθμικό κανόνα, το αριστερό μέλος δίνει

$$\int \frac{dI}{I} = \ln|I| + c_1 \quad (I \neq 0)$$

ενώ αντιθέτως το δεξί μέλος δίνει (αφού το ρs είναι μια σταθερά)

$$\int \rho s dt = \rho s t + c_2$$

Εξισώνοντας τα δύο αποτελέσματα και συνδυάζοντας τις δύο σταθερές, έχουμε

$$\ln|I| = \rho s t + c \qquad (2.12)$$

Για να πάρουμε το |I| από το ln |I|, εφαρμόζουμε μια πράξη γνωστή σαν αντιλογάριθμος του ln |I|, η οποία κάνει χρήση του γεγονότος ότι $e^{\ln x} = x$. Έτσι, επιτρέποντας σε κάθε μέλος της (2.12) να γίνει εκθέτης της σταθεράς e, παίρνουμε

$$e^{\ln|I|} = e^{(\rho s t + c)}$$

$$\text{ή } |I| = e^{\rho s t} e^{c} = A\, e^{\rho s t} \quad \text{όπου } A = e^{c}$$

Αν θεωρήσουμε την επένδυση θετική, τότε |I| = I και έτσι το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται $I(t) = A\, e^{\rho s t}$ όπου το Α είναι τυχούσα σταθερά. Για ν' απαλλαχθούμε απ' αυτήν την τυχούσα σταθερά, θέτουμε t = 0 στην εξίσωση $I(t) = A\, e^{\rho s t}$ και παίρνουμε $I(0) = Ae^{0} = A$. Αυτό ορίζει τη σταθερά Α και μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη λύση — την απαιτούμενη επενδυτική πορεία — σαν

$$I(t) = I(0)\, e^{\rho s t} \qquad (2.13)$$

όπου το I(0) συμβολίζει την αρχική τιμή της επένδυσης.

Αυτό το αποτέλεσμα έχει μια ανησυχητική οικονομική σημασία. Για να διατηρήσουμε την ισορροπία μεταξύ δυναμικότητας και ζήτησης στο χρόνο, ο ρυθμός της επενδυτικής ροής πρέπει να αυξάνει ακριβώς με τον εκθετικό ρυθμό του ρs, σε μια πορεία σαν αυτή που φαίνεται στο **Σχήμα 5.** Προφανώς, ο απαιτούμενος ρυθμός μεγέθυνσης της επένδυσης θα είναι τόσο μεγαλύτερος, όσο μεγαλύτερος συμβαίνει να είναι ο λόγος δυναμικότητας-κεφαλαίου και η οριακή ροπή για αποταμίευση. Πάντως, κάθε φορά που οι τιμές των ρ και s είναι γνωστές, η απαιτούμενη πορεία μεγέθυνσης της επένδυσης μπορεί να προσδιοριστεί αυστηρά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (ΓΠ) είναι το σημαντικότερο μοντέλο λήψης αποφάσεων στο χώρο της Διοικητικής Επιστήμης και ίσως από τις σπουδαιότερες επιστημονικές ανακαλύψεις του αιώνα μας στην οικονομική επιστήμη. Το αντικείμενο του είναι η κατανομή περιορισμένων πόρων ανάμεσα σε διάφορες "ανταγωνιστικές" δραστηριότητες κατά τον άριστο δυνατό τρόπο. Ως άριστος τρόπος ορίζεται εκείνος ο οποίος βελτιστοποιεί ένα στόχο (μια αντικειμενική συνάρτηση), π.χ. ελαχιστοποιεί το κόστος ή μεγιστοποιεί την απόδοση, κ.λπ.

Τέτοια προβλήματα παρουσιάζονται συχνά όταν πρόκειται να ληφθεί απόφαση οικονομικού προγραμματισμού, δηλ. απόφαση σχετικά με το επίπεδο στο οποίο θα αναπτυχθούν ορισμένες οικονομικές δραστηριότητες οι οποίες "ανταγωνίζονται" μεταξύ τους για τους ίδιους πόρους. Μερικά παραδείγματα είναι η κατανομή του κρατικού προϋπολογισμού μεταξύ δια-φόρων προγραμμάτων, υπουργείων κ.λπ., η κατανομή των πρώτων υλών, του εργατικού δυναμικού και των μηχανών μιας επιχείρησης για την παραγωγή των προϊόντων της ή την εξυπηρέτηση των πελατών της, η κατανομή ενός κεφαλαίου μεταξύ ανταγωνιζομένων επενδυτικών ευκαιριών κ.ά.

Για να αντιληφθούμε καλύτερα τον προγραμματισμό μιας οικονομικής δραστηριότητας, ας εξετάσουμε το πρόβλημα της άριστης επιλογής των προϊόντων και του βέλτιστου προγραμματισμού παραγωγής μιας επιχείρησης, η οποία λειτουργεί σε υψηλό επίπεδο παραγωγικότητας. Στο επίπεδο αυτό, η επιχείρηση μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει εξάντληση της δυναμικότητας της εξαιτίας του περιορισμού των πρώτων υλών της, της δυναμικότητας παραγωγής των μηχανών της (χρόνος λειτουργίας, ποσότητα παραγωγής), της χωρητικότητας των αποθηκών της, του εργατικού δυναμικού της, καθώς και άλλων τεχνολογικών, κοινωνικών ή περιβαλλοντολογικών παραγόντων.

Ένα κύριο χαρακτηριστικό μιας τέτοιας κατάστασης είναι ότι η παραγωγή ενός σχετικά μη κερδοφόρου προϊόντος ή η χρησιμοποίηση μιας διαδικασίας παραγωγής η οποία κάνει "φιλελεύθερη" χρήση των περιορισμένων πόρων απασχολεί χρήσιμη δυναμικότητα η οποία θα ήταν αποδοτικότερη σε πιο οικονομικές διαδικασίες ή στην παραγωγή πιο κερδοφόρων αγαθών.

Εξάλλου, μια απλοϊκή λύση της μορφής "να παραχθεί μόνο το προϊόν το οποίο κάνει την αποδοτικότερη χρήση των διαθέσιμων πόρων ή των μέσων παραγωγής" δεν μπορεί να υπάρξει διότι, ως επί το πλείστον, δεν θα υπάρχει μια διαδικασία ή ένα προϊόν το οποίο να είναι το οικονομικότερο στη χρήση όλων των πόρων της επιχείρησης, ταυτόχρονα. Ως παράδειγμα, ένα προϊόν μπορεί να κάνει την καλύτερη χρήση μιας μηχανής, δηλ. να παράγει το υψηλότερο κέρδος ανά μονάδα χρόνου απασχόλησης της μηχανής, ενώ ένα άλλο μπορεί να απασχολεί το μικρότερο χώρο αποθήκης. Έτσι, η αποκλειστική παραγωγή του πρώτου προϊόντος θα γεμίσει τελείως τις αποθήκες προτού εξαντληθεί ο διαθέσιμος χρόνος λειτουργίας της μηχανής, ενώ η αποκλειστική παραγωγή του δεύτερου θα εξαντλήσει το χρόνο μηχανής έχοντας ακόμη διαθέσιμο χώρο αποθήκης.

Ένα συναφές πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται στο χώρο της παραγωγής είναι ο προσδιορισμός της άριστης σύνθεσης ενός προϊόντος (ή ενός χαρτοφυλακίου) ώστε να ικανοποιηθούν οι προδιαγραφές παραγωγής του (ή αντίστοιχα, οι περιορισμοί ρίσκου, απόδοσης, κ.λπ.) με τον οικονομικότερο δυνατό τρόπο. Χαρακτηριστικό πρόβλημα αυτής της κατηγορίας είναι το "πρόβλημα της δίαιτας" στο οποίο ζητείται να βρεθεί η σύνθεση της δίαιτας η οποία θα ικανοποιεί τη συνταγή του γιατρού (δηλαδή θα ικανοποιεί τους περιορισμούς ως προς βιταμίνες, πρωτεΐνες κ.λπ.) με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Παρόμοια προβλήματα παρουσιάζονται πολύ συχνά στη βιομηχανία, τη χρηματοοικονομική διοίκηση, κ.λπ.

Τα προβλήματα μεταφορών είναι ένας άλλος τομέας όπου παρουσιάζεται ανάγκη προγραμματισμού. Κατά την επιλογή των διαδρομών (και μέσων) μεταφοράς, ειδικά όταν η επιχείρηση διαθέτει πολλούς τόπους παραγωγής και πολλά σημεία διανομής, μπορεί να μειωθεί σημαντικά το κόστος από τον προσεκτικό προγραμματισμό της μεταφοράς των αγαθών. Εάν η επιχείρηση διαθέτει τα δικά της μεταφορικά μέσα, το πρόβλημα είναι να ευρεθούν οι διαδρομές οι οποίες θα ελαχιστοποιούν το κόστος ή το χρόνο. Όταν η επιχείρηση χρησιμοποιεί ξένα μεταφορικά μέσα, τότε ο προγραμματισμός είναι περιπλοκότερος διότι πρέπει να περιλάβει επιλογή προμηθευτών-μεταφορέων και τυχόν ιδιομορφίες της κοστολόγησης διαφόρων μέσων μεταφοράς.

Ένα τρίτο παράδειγμα προγραμματισμού είναι στον τομέα των επενδύσεων. Στα προβλήματα αυτά ο επενδυτής αντιμετωπίζει μια σειρά από εναλλακτικά επενδυτικά προγράμματα το καθένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από διαφορετικές απαιτήσεις για κεφαλαιουχική (ή άλλη) επένδυση, διάρκεια, μέγεθος αποδόσεων, κίνδυνο ή αβεβαιότητα αποδόσεων, κ.λπ. Το πρόγραμμα του επενδυτή πρέπει να καθορίζει τα συγκεκριμένα επενδυτικά προγράμματα τα οποία θα αναλάβει, το χρόνο ανάληψης τους, το ποσό το οποίο θα επενδύσει σε κάθε πρόγραμμα και την εξασφάλιση των οικονομικών μέσων που είναι απαραίτητα για την ολοκλήρωση των προγραμμάτων.

Εκτός από τους τρεις παραπάνω τομείς, υπάρχουν πολλοί άλλοι όπου υπάρχει ανάγκη οικονομικού προγραμματισμού. Για τη λύση των προβλημάτων ο ΓΠ χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο αποτελείται από μεταβλητές απόφασης, μια αντικειμενική συνάρτηση (ή συνάρτηση σκοπού) και ένα σύνολο περιορισμών. Μεταβλητές ενός προβλήματος ΓΠ είναι οι δραστηριότητες τις οποίες μπορούμε να "αναπτύξουμε" (π.χ. γραμμές και ύψος παραγωγής ανά προϊόν, επενδύσεις ανά κατηγορία, κ.λπ.) σε ποσότητες που πρόκειται να προσδιορισθούν με τη λύση του προβλήματος. Αντικειμενική συνάρτηση είναι εκείνη η οποία εκφράζει το αντικείμενο (π.χ. κόστος, κέρδος, πωλήσεις, κ.λπ.) το οποίο επιθυμούμε να βελτιστοποιήσουμε (να ελαχιστοποιήσουμε ή να μεγιστοποιήσουμε, ανάλογα). Οι περιορισμοί είναι ένα σύνολο αλγεβρικών ανισοτήτων ή ισοτήτων οι οποίες εκφράζουν τους περιορισμούς του επιχειρηματικού περιβάλλοντος και της τεχνολογίας μέσα στα οποία κινείται ο μάνατζερ που αποφασίζει, π.χ. περιορισμοί δυναμικότητας, διαθεσιμότητας πρώτων υλών, τεχνολογίας, αγοράς, κ.λπ.

Το μοντέλο αυτό ονομάζεται μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού διότι:

1) η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις ως προς τις άγνωστες μεταβλητές,
2) οι άγνωστες μεταβλητές είναι συνεχείς, δηλαδή μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών, και
3) η λύση του προβλήματος ΓΠ αποτελεί ένα πρόγραμμα δράσης προκειμένου να επιτευχθεί ο επιθυμητός στόχος.

3.2 ΈΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΙΤΟΛΟΓΙΟΥ

Για να διατηρήσει κάποιος την υγεία του, θα πρέπει να καταναλώνει κάποιες ελάχιστες ποσότητες διαφόρων συστατικών. Υποθέτουμε, χάριν απλότητας, ότι χρειάζεται μόνο τρία από αυτά τα συστατικά: ασβέστιο, πρωτεΐνες και βιταμίνη Α. Υποθέτουμε επίσης ότι η διατροφή του ατόμου αποτελείται από δύο είδη τροφών, την Ι και τη ΙΙ, των οποίων το περιεχόμενο σε συστατικά που αναφέραμε καθώς και οι τιμές τους φαίνονται στον **Πίνακα**

1. Στον πίνακα αυτόν έχουμε επίσης καταχωρίσει την ελάχιστη καθημερινή ανάγκη για καθένα από τα τρία συστατικά.

Πίνακας 19.1 Τιμές και περιεχόμενα τροφών

Τιμές	Τροφή Ι (ανά κιλό) 0,60$	Τροφή ΙΙ (ανά κιλό) 1 $	Ελάχιστες καθημερινές ανάγκες
Ασβέστιο (μονάδα*)	10	4	20
Πρωτεΐνη (μονάδα*)	5	5	20
Βιταμίνη Α (μονάδα*)	2	6	12

* Χρησιμοποιήσαμε υποθετικές μονάδες για να επιτρέψουμε τη χρήση ακέραιων αριθμών στο παράδειγμα.

Πίνακας 1

Πρόβλημα: ποιος συνδυασμός των δύο τροφών θα ικανοποιεί το καθημερινό διαιτολόγιο και θα συνεπάγεται το ελάχιστο κόστος;

Αν με x_1 και x_2 συμβολίσουμε τις ποσότητες των δύο τροφών (σαν συνεχείς μεταβλητές) που αγοράζει κάθε μέρα, το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικώς ως εξής:

Περιορισμός $C = 0{,}6\, x_1 + x_2$

υποκείμενος στον ΙΟ $x_1 + 4\, x_2 \geq 20$ [περιορισμό ασβεστίου]

$5\, x_1 + 5\, x_2 \geq 20$ [περιορισμό πρωτεΐνης] (3.1)

$2\, x_1 + 6\, x_2 \geq 12$ [περιορισμό βιταμίνης Α]

και $x_1, x_2 \geq 0$

Η πρώτη εξίσωση στην (3.1), που είναι μια συνάρτηση κόστους, βασισμένη στις πληροφορίες για τις τιμές του **Πίνακα 1**, αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση του γραμμικού προγράμματος και πρόκειται για ελαχιστοποίηση. Οι τρεις ανισότητες που ακολουθούν είναι περιορισμοί που καθίστανται αναγκαίοι από τις καθημερινές ανάγκες και μεταφέρονται από τις τρεις τελευταίες γραμμές του πίνακα, θα σημειώσατε ότι αν και είναι απαγορευμένο να πέσουμε κάτω από τις καθημερινές ανάγκες, η αριστοποίηση (λόγω της ασθενούς ανισότητας ≥) επιτρέπει την υπέρβαση των ελάχιστων ποσών που χρειάζονται: είναι αυτό κυρίως που διακρίνει το γραμμικό προγραμματισμό από τα προβλήματα αριστοποίησης που συζητήσαμε πιο πάνω. Τέλος, με τη βοήθεια των δύο επιπρόσθετων ανισοτήτων, x_1, $x_2 \geq 0$, που ονομάζονται μη αρνητικοί περιορισμοί, θέσαμε μια αξίωση που, εξαιτίας των οριοθετήσεων του λογισμού, απλώς υπονοούνται στην περίπτωση της κλασικής αριστοποίησης, ότι δηλαδή αρνητικές αγορές δεν επιτρέπονται. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι το πρόβλημα μας περιέχει περισσότερους περιορισμούς από μεταβλητές επιλογής. Αυτό είναι κάτι που ποτέ δεν θα συμβεί στα κλασικά προβλήματα αριστοποίησης, αλλά τώρα είναι δυνατό, επειδή οι περιορισμοί έχουν αδυνατίσει, αλλάζοντας από ισότητες σε ανισότητες, και έτσι ικανοποιούνται ευκολότερα.

Με λίγα λόγια, υπάρχουν τρία ουσιαστικά χαρακτηριστικά σ' ένα γραμμικό πρόγραμμα: μια αντικειμενική συνάρτηση, ένα σύνολο περιορισμών και ένα σύνολο μη αρνητικών περιορισμών. Παρατηρούμε ότι η γραμμικότητα κυριαρχεί, επειδή καμία μεταβλητή δεν είναι υψωμένη σε δύναμη μεγαλύτερη του 1 ή πολλαπλασιασμένη με κάποια άλλη μεταβλητή.

Η διαγραμματική λύση

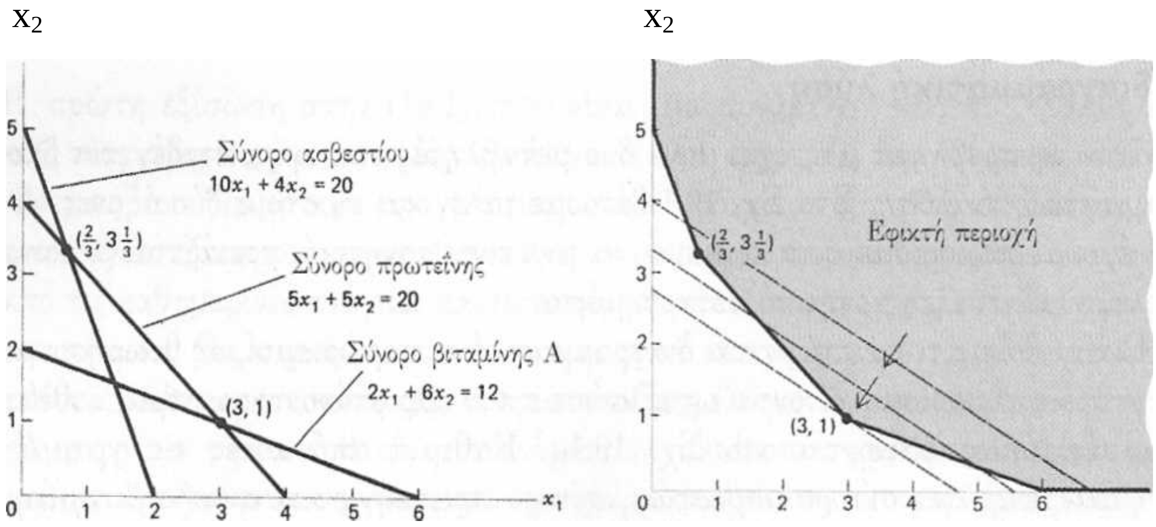
Εφόσον το πρόβλημα μας έχει μόνο δύο μεταβλητές επιλογής, επιδέχεται διαγραμματική ανάλυση. Στο **Σχήμα 6** θέτουμε τα x_1 και x_2 στους δύο άξονες. Αφού έχουμε περιορισμούς τα x_1 και x_2 να μην είναι αρνητικά, χρειάζεται μόνο να δουλέψουμε στο μη αρνητικό τεταρτημόριο.

Για να δούμε τι συνεπάγονται διαγραμματικά οι περιορισμοί, ας θεωρήσουμε ότι οι τρεις περιορισμοί δίνονται ως εξισώσεις που παριστάνονται ως τρεις ευθείες γραμμές, όπως φαίνονται στο **Σχήμα 6(α)**.

Καθεμιά από αυτές τις γραμμές —σημειωμένες σαν σύνορο ασβεστίου, σύνορο πρωτεΐνης και σύνορο βιταμίνης Α, αντίστοιχα— χωρίζει το τεταρτημόριο σε δύο περιοχές που δεν επικαλύπτονται. Εφόσον κάθε περιορισμός είναι του τύπου $\geq$, μόνο τα σημεία (διατεταγμένα ζεύγη) που βρίσκονται στη βορειοανατολική περιοχή ή στη συνοριακή γραμμή μπορούν να ικανοποιούν τον αντίστοιχο ιδιαίτερο περιορισμό. Για να ικανοποιούνται και οι τρεις περιορισμοί ταυτόχρονα, θα πρέπει να δεχθούμε μόνον αυτά τα διατεταγμένα ζεύγη (x_1 , x_2) που δεν βρίσκονται νοτιοανατολικά οποιασδήποτε συνοριακής γραμμής που έχουμε χαράξει. Το σημείο (1, 2), για παράδειγμα, ικανοποιεί τον περιορισμό για τη βιταμίνη Α, αλλά δεν ικανοποιεί τους δύο άλλους. Δεν είναι, λοιπόν, εφικτό για το γραμμικό μας πρόγραμμα. Από την άλλη μεριά, όλα τα σημεία που βρίσκονται στη σκιασμένη περιοχή στο διάγραμμα b ικανοποιούν και τους τρεις περιορισμούς ταυτόχρονα. Για το λόγο αυτό, η περιοχή αυτή καλείται εφικτή περιοχή, και κάθε σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) αυτής της περιοχής είναι γνωστό σαν εφικτή λύση. Θα πρέπει να καταλάβουμε ότι η εφικτή περιοχή περιέχει τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο (έντονο) τεθλασμένο όριο. Ειδικότερα, το σύνολο των σημείων στον οριζόντιο άξονα $\{(x_1, x_2) | x_1 \geq 6, x_2 = 0\}$, καθώς και το σύνολο των σημείων στον κατακόρυφο άξονα $\{(x_1, x_2) | x_1 = 0, x_2 \geq 5\}$, είναι επίσης στην εφικτή περιοχή. Επομένως, η εφικτή περιοχή μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα κλειστό σύνολο (διατεταγμένων ζευγών), μια έννοια που, όπως αυτή του κλειστού διαστήματος, υποδηλώνει ένα σύνολο που περιέχει επίσης όλα τα σημεία που βρίσκονται στο όριό του.

Σημειώστε ότι το τεθλασμένο σύνορο της εφικτής περιοχής αποτελείται από μερικά επιλεγμένα τμήματα των τριών ορίων περιορισμού και τους άξονες. Σημειώστε, επίσης, ότι στην παρούσα περίπτωση (των δύο διαστάσεων), τα σημεία στις κορυφές του συνόρου —θα αναφέρονται ως ακραία σημεία— είναι είτε στην τομή δύο συνοριακών γραμμών [π.χ. το (3,

1) και $(\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$ είτε στην τομή μιας συνοριακής γραμμής και ενός άξονα [π.χ. το (0, 5) και (6, 0)]. Αυτά τα ακραία σημεία θα αποδειχθούν ότι έχουν μεγάλη σημασία στη λύση μας.



(α) **(b)**

Σχήμα 6

Όπως έχει περιγραφεί, το πρόβλημα διαιτολογίου δεν είναι τίποτε άλλο από μια τροποποιημένη εκδοχή του προβλήματος συνδυασμού ελάχιστου κόστους. Η ιδέα των καμπυλών ίσου κόστους είναι ακριβώς η ίδια όπως και προηγουμένως, αλλά η ομαλή καμπύλη ίσης ποσότητας που συναντήσαμε προηγουμένως έχει τώρα αντικατασταθεί από μία εφικτή περιοχή με τεθλασμένο σύνορο. Σαν αποτέλεσμα της θεώρησης αυτής, η ιδέα του σημείου επαφής στο διαφορικό λογισμό πρέπει να εγκαταλειφτεί χάριν του σημείου που καλείται σημείο εφαρμογής. Στο **Σχήμα 6(b)**, το σημείο εφαρμογής είναι ένα ακραίο σημείο πάνω στο σύνορο. Τονίζουμε ότι αυτό δεν είναι απλή σύμπτωση. Όπως θα δούμε πιο κάτω, οι άριστες λύσεις όλων των γραμμικών προγραμμάτων βρίσκονται πάντα στα ακραία σημεία. Εφόσον ένα ακραίο σημείο αναπαριστά πάντα την τομή δύο περιοριστικών συνόρων (ή ενός συνόρου και ενός άξονα), μπορούμε, μετά από την εύρεση της άριστης γωνίας, να βρούμε την ακριβή άριστη λύση $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ λύνοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις των αντιστοίχων δύο τεμνόμενων γραμμών. Στο παρόν παράδειγμα μας, η άριστη γωνία βρίσκεται στην τομή των συνόρων της πρωτεΐνης και της βιταμίνης Λ. Έτσι, λύνοντας τις ακόλουθες δύο εξισώσεις

$$5\,x_1 + 5\,x_2 = 20$$

$$2\,x_1 + 6\,x_2 = 12$$

βρίσκουμε ότι ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) = (3, 1).

Παρατηρούμε ότι ενώ αυτή η λύση πληρεί ακριβώς τις απαιτήσεις για πρωτεΐνη και βιταμίνη Α, εντούτοις υπερπληρεί την απαίτηση για ασβέστιο. Αυτή είναι μια κατάσταση που δεν είναι δυνατόν να εμφανιστεί αν όλοι οι περιορισμοί είναι εκφρασμένοι με τη μορφή εξισώσεων.

Επίδραση από τις αλλαγές τιμών

Ας εξετάσουμε τώρα τι θα συμβεί στην άριστη λύση αν αλλάξουν οι τιμές των τροφών P_1 και P_2. Εφόσον η κλίση των γραμμών ίσου κόστους μετριέται από το πηλίκο — P_1 / P_2 (στο παράδειγμα μας -0,60/1,00 = -0,6), η άμεση επίδραση των αλλαγών τιμών θα συμβεί στις γραμμές ίσου κόστους. Αλλά πολλά ενδεχόμενα μπορεί να εμφανιστούν.

Πρώτον, αν οι δύο τιμές αλλάξουν με την ίδια ακριβώς αναλογία, τότε η κλίση των γραμμών ίσου κόστους θα παραμείνει η ίδια. Στην περίπτωση αυτή, η αρχική άριστη λύση ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) πρέπει να συνεχίσει να επικρατεί, αν και το κόστος C θα αυξηθεί ή θα μειωθεί εξίσου με τα P_1 και P_2.

Δεύτερον, οι δύο τιμές μπορεί να αλλάξουν με διαφορετική αναλογία, αλλά η διαφορά μπορεί να είναι σχετικά ελάχιστη. Σε μια τέτοια περίπτωση, η κλίση των γραμμών ίσου κόστους θα υποστεί μια μικρή αλλαγή, από -0,6 σε -0,4 ή σε -0,8. Όπως μπορούμε να επαληθεύσουμε —χαράσσοντας την οικογένεια γραμμών ίσου κόστους με κλίση -0,8 στο **Σχήμα 6(b)** — μια μεταβολή κλίσης αυτού του μεγέθους θα αφήνει την αρχική άριστη λύση ανεπηρέαστη. Έτσι, αντίθετα από το σημείο της επαφής στο διαφορικό λογισμό, το σημείο εφαρμογής (η άριστη γωνία) μένει ανεπηρέαστο στις μικρές αλλαγές των παραμέτρων των τιμών.

Ας εξετάσουμε τώρα μια άλλη πιθανότητα. Υποθέστε ότι και οι δύο τιμές γίνονται τώρα ίσες, έστω, $P_1 = P_2 = 1$. Τότε οι γραμμές ίσου κόστους που έχουν κλίση -1 είναι παράλληλες στο σύνορο της πρωτεΐνης. Η κατώτερη δυνατή νέα γραμμή ίσου κόστους θα συναντά τότε την εφικτή περιοχή όχι σ' ένα μοναδικό σημείο αλλά κατά μήκος μιας ολόκληρης πλευράς του συνόρου της, με αποτέλεσμα κάθε σημείο στο τμήμα της γραμμής που επεκτείνεται από το (3,1) μέχρι το $(\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$ να είναι εξίσου άριστο. Καθόσον αφορά το «αριστοποιούν άτομο», το φαινόμενο του πολλαπλού αρίστου δεν αποτελεί πρόβλημα, αντίθετα μπορεί να θεωρηθεί επιθυμητό, αφού μπορεί να φέρει πιθανόν κάποια παραλλαγή στο μενού. Αλλά για μας, το φαινόμενο αυτό μοιάζει να ανακαλεί την προηγούμενη πρόταση ότι οι άριστες λύσεις βρίσκονται πάντα στα ακραία σημεία. Ωστόσο, αν σκεφτούμε καλύτερα, θα δούμε ότι είμαστε ακόμα σε ασφαλές έδαφος, γιατί ακόμα και σ' αυτήν την περίπτωση του πολλαπλού άριστου, μια άριστη λύση βρίσκεται σε μια γωνία — ή μάλλον, σε δυο γωνίες! Στην πραγματικότητα, αν συγκεντρώσουμε την προσοχή μας μόνο στα ακραία σημεία, δεν διακινδυνεύουμε να παραλείψουμε κάποια καλύτερη λύση. Θα δούμε ότι αυτή η πορεία συλλογισμού αποτελεί τη βάση γι' αυτό που ονομάζουμε μέθοδο επίλυσης simplex και θα την εισάγουμε πιο κάτω.

3.3 ΈΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Ας περάσουμε τώρα σ' ένα άλλο απλό παράδειγμα, τη φορά αυτή στο πεδίο της παραγωγής.

Οι προϋποθέσεις είναι οι ακόλουθες. Μια εταιρία παράγει δυο σειρές προϊόντων, το Ι και το ΙΙ, με μια εγκατάσταση που αποτελείται από τρεις μονάδες παραγωγής: ανάμιξη και συσκευασία. Τα μηχανήματα σε κάθε μονάδα απασχολούνται 8 ώρες την ημέρα, οπότε θα θεωρήσουμε τις 8 ώρες σαν την ημερήσια ικανότητα κάθε μονάδας. Η διαδικασία παραγωγής μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως: (1) το Προϊόν Ι πρώτα κόβεται και ύστερα συσκευάζεται. Κάθε τόνος από το προϊόν αυτό κόβεται σε 1/2 ώρα και συσκευάζεται στο 1/3 της ώρας. (2) Το Προϊόν ΙΙ πρώτα αναμιγνύεται και ύστερα συσκευάζεται. Κάθε τόνος από το προϊόν αυτό αναμιγνύεται σε 1 ώρα και συσκευάζεται στα 2/3 της ώρας. Τέλος, τα Προϊόντα Ι και ΙΙ μπορούν να πουληθούν στις τιμές των $80 και $60 ανά τόνο, αντίστοιχα, αλλά μετά την αφαίρεση του μεταβλητού κόστους, οι τιμές αυτές φθάνουν στο καθαρό ύψος των $40 και $30 ανά τόνο. Αυτές μπορούν να θεωρηθούν είτε σαν καθαρό έσοδο (καθαρό μεταβλητό κόστος) είτε σαν ακαθάριστο κέρδος (ακαθάριστο από σταθερό κόστος). Χάριν απλότητας, θα τις αναφέρουμε εδώ σαν «κέρδη ανά τόνο».

Πρόβλημα: Ο συνδυασμό προϊόντος που θα πρέπει να επιλέξει η εταιρία με σκοπό να μεγιστοποιήσει το συνολικό (ακαθάριστο) κέρδος.

Πρώτα, πρέπει να τακτοποιήσουμε τη δεδομένη πληροφορία σ' ένα πίνακα, όπως ο **Πίνακας 2**, και να μεταφράσουμε το πρόβλημα στο ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα με δύο συνεχείς μεταβλητές επιλογής, x_1 και x_2 :

Μεγιστοποιείται $\pi = 40x_1 + 30x_2$

με τους περιορισμούς $x_1 \leq 16$ [περιορισμός κοπής]

$x_2 \leq 8$ [περιορισμός ανάμιξης] (3.1)

$x_1 + 2x_2 \leq 24$ [περιορισμός συσκευασίας]

και $x_1, x_2 \geq 0$

Σημειώστε ότι, μολονότι ο περιορισμός κοπής θα πρέπει, σύμφωνα με τον **Πίνακα 2**, να είναι $1/2\ x_1 \leq 8$, έχουμε πολλαπλασιάσει και τα δύο μέλη με το 2 για να απαλλαγούμε από τις κλασματικές εκφράσεις. Ομοίως, έχουμε τροποποιήσει τον περιορισμό συσκευασίας πολλαπλασιάζοντας με 3. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε τώρα είναι αυτό της μεγιστοποίησης. Επίσης, οι περιορισμοί στην περίπτωση αυτή είναι του τύπου $\leq$, γιατί ακόμα και αν δεν μπορούμε να υπερβούμε ποτέ το δυναμικό κάθε μονάδας παραγωγής, μπορούμε παρ' όλα αυτά να αφήσουμε ένα μέρος του ανενεργό. Ωστόσο, οι μη αρνητικοί περιορισμοί εμφανίζονται πάλι με την ίδια μορφή όπως στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Πίνακας 19.2 Κέρδη και ανάγκες επεξεργασίας των προϊόντων

	Ώρες ανά επεξεργασίας τόνο του που απαιτούνται		
	Προϊόντος I	Προϊόντος II	Ημερήσια δυναμικότητα (ώρες)
Κοπή	1 2	0	8
Ανάμιξη	0	1	8
Συσκευασία	1/3	2/3	8
Κέρδος ανά προϊόν	\$40	\$30	

Πίνακας 2

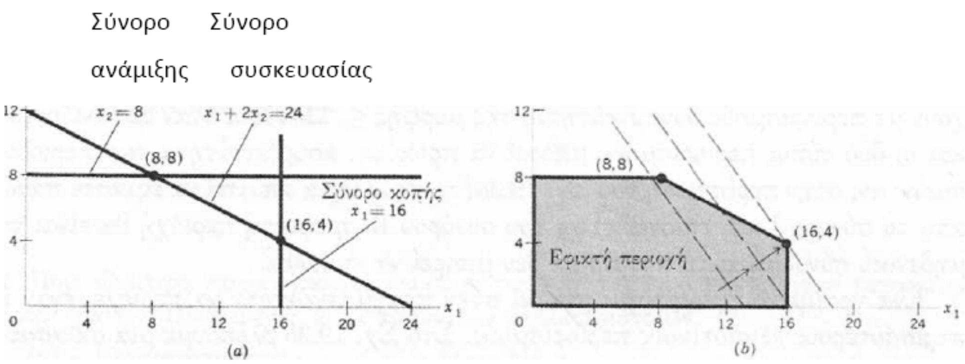
Η διαγραμματική λύση

Το γραμμικό πρόγραμμα στην (3.1) μπορεί επίσης να επιλυθεί διαγραμματικά όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7**. Λόγω των μη αρνητικών περιορισμών, το πρόβλημα περιορίζεται ξανά στο μη αρνητικό τεταρτημόριο στο οποίο μπορούμε να χαράξουμε τρία σύνορα περιορισμού. Ο περιορισμός κοπής (x_1 = 16) και ο περιορισμός ανάμιξης (x_2 = 8) έχουν χαραχθεί στο **Σχήμα 7(α)** σαν μια κατακόρυφη και μια οριζόντια γραμμή, αντίστοιχα, ενώ ο περιορισμός συσκευασίας θα είναι μια επικλινής γραμμή που τέμνει τις άλλες γραμμές στα σημεία (16, 4) και (8,8).

Επειδή οι περιορισμοί μας είναι του τύπου $\leq$, η εφικτή περιοχή θα αποτελείται στην περίπτωση αυτή από το σύνολο των σημείων που βρίσκονται ταυτόχρονα στις παρακάτω τρεις ειδικές θέσεις: (1) πάνω στο όριο ανάμιξης η κάτω από απ' αυτό, (2) πάνω ή στ' αριστερά του ορίου κοπής και (3) πάνω στο όριο συσκευασίας ή κάτω απ' αυτό. Το σύνολο όλων των σημείων που ικανοποιούν ως προς τη θέση τους τις παραπάνω απαιτήσεις βρίσκεται μέσα στη σκιασμένη περιοχή του **Σχήμα 7(b)**. Εφόσον τα συνοριακά σημεία που βρίσκονται σ' όλες τις πλευρές αυτής της περιοχής είναι εφικτά σημεία, όπως ακριβώς και τα σημεία στο εσωτερικό αυτής της περιοχής, η εφικτή περιοχή είναι ένα κλειστό σύνολο. Στην παρούσα περίπτωση, το σύνολο αυτό λέγεται ότι είναι αυστηρά περιορισμένο, που σημαίνει ότι η σκιασμένη περιοχή μπορεί να «μπει» σ' ένα κουτί με καθορισμένο μέγεθος. (Αντίθετα, η εφικτή περιοχή στο **Σχήμα 6(b)** είναι μόνο περιορισμένη από κάτω.)

Ας εξετάσουμε, τέλος, την αντικειμενική συνάρτηση. Ξαναγράφοντας τη συνάρτηση αυτή με τη μορφή

$$x_2 = \frac{p}{30} - \frac{4}{3}x_1$$

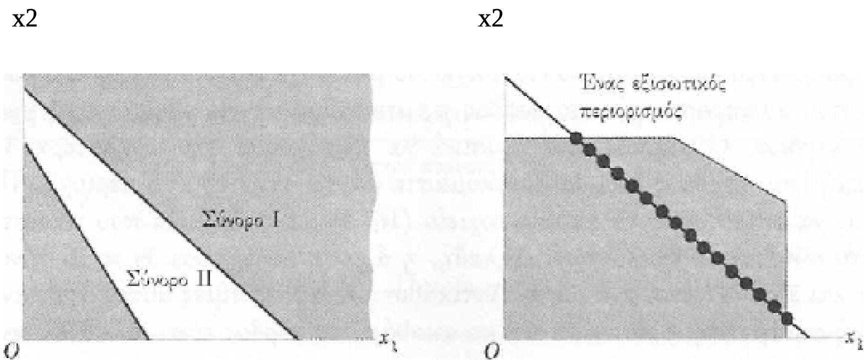


Σχήμα 7

και θεωρώντας το π ως παράμετρο, μπορούμε να παραστήσουμε διαγραμματικά την εξίσωση αυτή σαν μια οικογένεια ευθειών που έχει κοινή κλίση ίση με $-\frac{4}{3}$. Τρεις από αυτές τις καμπύλες φαίνονται στο διάγραμμα b (οι διακεκομμένες γραμμές). Εφόσον καθεμία αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου που αντιπροσωπεύει το κέρδος π, μπορούμε να τις ονομάσουμε γραμμές ίσων κερδών. Ο σκοπός είναι φυσικά να επιτύχουμε την υψηλότερη δυνατή γραμμή ίσου κέρδους ενώ θα βρισκόμαστε πάντα στην εφικτή περιοχή. Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε το ακραίο σημείο (16, 4) ως το σημείο που παριστά τον άριστο συνδυασμό προϊόντων. Δηλαδή, η άριστη λύση είναι $\bar{x}_1$ = 16 τόνοι ανά μέρα και $\bar{x}_2$ = 4 τόνοι ανά μέρα. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην αντικειμενική συνάρτηση, βρίσκουμε ότι το ακαθάριστο κέρδος είναι $\bar{p}$ = \$760 ανά μέρα.

Σημειώστε ότι οι περιορισμοί κοπής και συσκευασίας ικανοποιούνται ακριβώς από τη λύση (16,4), ενώ ο περιορισμός ανάμιξης όχι για να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος, ένα μέρος της μικτής ικανότητας έχει μείνει αχρησιμοποίητο. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα, λοιπόν, θα είναι αδύνατον αν όλοι οι περιορισμοί έχουν τη μορφή εξισώσεων. Σχετικά με τη μορφή των περιορισμών, θα πρέπει να πούμε ότι, αν και οι περιορισμοί των παραπάνω παραδειγμάτων είναι είτε όλοι της μορφής $\leq$, (πρόβλημα μεγιστοποίησης), είτε όλοι της μορφής $\geq$, (πρόβλημα ελαχιστοποίησης), δεν χρειάζεται πάντα να είναι της μορφής αυτής. Μπορεί να επιθυμούμε, για παράδειγμα, να περιορίσουμε τη βιταμίνη Α στο πρόβλημα διατροφής, θέτοντας το διττό περιορισμό «όχι λιγότερη από 12» (για υγεία) και «όχι περισσότερη από 86» (για να αποκλείσουμε τη συσσώρευση), πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να εισάγουμε σ' αυτή την περίπτωση και τους δύο περιορισμούς. Αυτό όμως δεν θα επηρεάσει τη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος, διότι, όπως έχουμε δει στην (3.1), οι μη αρνητικοί περιορισμοί της μορφής $\geq$ μπορεί να συνυπάρχουν με περιορισμούς δυναμικότητας της μορφής $\leq$. Ωστόσο, όταν εμφανίζονται και οι δύο τύποι περιορισμών, μπορεί να προκύψει ασυμβατότητα των περιορισμών αν, στην περίπτωση του **Σχήμα 8(α)**, το πρόβλημα απαιτεί να είμαστε πάνω από το σύνορο Ι και επίσης κάτω του συνόρου ΙΙ, η εφικτή περιοχή θα είναι το μηδενικό σύνολο και το πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί.

Ένα γραμμικό πρόγραμμα μπορεί στην πραγματικότητα να περιέχει έναν ή περισσότερους εξισωτικούς περιορισμούς. Στο **Σχήμα 8(b)** βλέπουμε μια σκιασμένη εφικτή περιοχή όμοια με αυτήν του **Σχήμα 7(b)**, αλλά αν προσθέσουμε έναν εξισωτικό περιορισμό, το σύνολο των εφικτών λύσεων θα



(α) **(b)**

Σχήμα 8

συρρικνωθεί από τη σκιασμένη περιοχή στο τμήμα της διακεκομμένης γραμμής — η τομή της σκιασμένης περιοχής και της νέας γραμμής περιορισμού. Παρ' όλα αυτά, η ίδια η μέθοδος επίλυσης θα εφαρμοστεί.

3.4 ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Στα παραπάνω παραδείγματα διευκρινίσαμε την περίπτωση δύο μεταβλητών επιλογής και τριών περιορισμών. Όταν υπάρχουν n μεταβλητές επιλογής και m περιορισμοί, το γραμμικό πρόγραμμα θα έχει την ίδια γενική μορφή — με μια αντικειμενική συνάρτηση, ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών εκφρασμένων με ανισότητες και ένα σύνολο μη αρνητικών περιορισμών ως βασικά χαρακτηριστικά. Η γενίκευση ενός γραμμικού προγράμματος σε n μεταβλητές μπορεί να εκφραστεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους: είτε με εκτενή τρόπο, είτε χρησιμοποιώντας το συμβολισμό Σ είτε χρησιμοποιώντας το συμβολισμό πινάκων.

Εκτενής τρόπος

Ένα πρόγραμμα μεγιστοποίησης με n μεταβλητές και υποκείμενο σε m περιορισμούς θα έχει την ακόλουθη εκτενή μορφή:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Μεγιστοποιείται} & \pi = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{με τους περιορισμούς} & \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n & \leq r_1 \\
& \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n & \leq r_2 \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
& \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n & \leq r_m \\
\text{και} & x_j \geq 0 \qquad (\ j = 1, 2, \ldots, n\ ) &
\end{array} \qquad (3.2)
$$

Στην (3.2), έχουμε δανειστεί το σύμβολο π από το παράδειγμα παραγωγής για να συμβολίσουμε γενικά το προς μεγιστοποίηση (το αντικείμενο που μεγιστοποιείται), ακόμα και αν σε διαφορετικές περιπτώσεις η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να είναι κάτι διαφορετικό από μια συνάρτηση κέρδους. Οι μεταβλητές επιλογής συμβολίζονται με x_j (με j = 1, 2,...,n), και οι συντελεστές τους στην αντικειμενική συνάρτηση με c_j (με j = 1,2,... ,n), που είναι ένα σύνολο από σταθερές. Από την άλλη μεριά, τα σύμβολα r_i (i = 1,2,...,m) —ένα άλλο σύνολο από σταθερές— αναπαριστούν τους «περιορισμούς» που θέτουμε στο πρόγραμμα. Χάριν ομοιομορφίας, έχουμε γράψει όλους τους m περιορισμούς σαν ανισότητες της μορφής ≤ , αλλά φυσικά αυτό δεν συνεπάγεται περιορισμό της γενικότητας. Ειδικότερα, ας σημειώσουμε ότι, στην περίπτωση που εμφανιστεί ένας περιορισμός με ανισότητα της μορφής ≥, μπορεί πάντα να αντιστραφεί σε μια ανισότητα της μορφής ≤, πολλαπλασιάζοντας απλώς και τα δύο μέλη της με -1.

Τέλος, σημειώνουμε ότι οι μεταβλητές επιλογής στους περιορισμούς σημειώνονται με α_{ij}, όπου ο διπλός δείκτης μάς βοηθά να επισημάνουμε την ακριβή θέση κάθε συντελεστή. Εφόσον υπάρχουν συνολικά m περιορισμοί και n μεταβλητές (όπου m μπορεί να είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το n), οι συντελεστές α_{ij} θα σχηματίζουν έναν ορθογώνιο πίνακα διαστάσεων m x n.

Ανάλογα, το πρόγραμμα ελαχιστοποίησης μπορεί να γραφεί στην κανονική γραφή ως ακολούθως:

Μεγιστοποιείται $\pi = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &\geq r_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n &\geq r_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n &\geq r_m \end{aligned} \tag{3.3}$$

και $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

Και εδώ έχουμε δανειστεί το σύμβολο C από το πρόβλημα διαιτολογίου για να συμβολίσουμε γενικά το προς ελαχιστοποίηση (το αντικείμενο που ελαχιστοποιείται), ακόμα και αν η αντικειμενική συνάρτηση σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορεί να είναι μια συνάρτηση κόστους. Τα c_j στην αντικειμενική συνάρτηση θα αναπαριστούν πάλι ένα σύνολο σταθερών συντελεστών, όπως είναι τα r_i στους περιορισμούς, αλλά το σύμβολο r στην παρούσα περίπτωση σημαίνει αξιώσεις παρά περιορισμούς. Τα σύμβολα για τις μεταβλητές επιλογής και τους συντελεστές στους περιορισμούς παραμένουν τα ίδια. Οι περιορισμοί, ωστόσο, εμφανίζονται τώρα με το σύμβολο της ανισότητας $\geq$.

Ο συμβολισμός Σ

Μεγάλη εξοικονόμηση χώρου μπορεί να επιτευχθεί εκφράζοντας τα γραμμικά προγράμματα (3.2) και (3.3) με το σύμβολο Σ:

Μεγιστοποιείται $\pi = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

με τους περιορισμούς $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j \leq r_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$

και $x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$

και ομοίως,

ελαχιστοποιείται $\pi = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

με τους περιορισμούς $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j \geq r_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$

και $x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$

Δεν θα κάνουμε χρήση αυτού του είδους γραφής παρακάτω διότι, μολονότι συνοπτικές, με το συμβολισμό Σ οι προτάσεις γίνονται άβολες στους μαθηματικούς χειρισμούς.

Συμβολισμός πινάκων

Για να δούμε τώρα πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το συμβολισμό πινάκων, ας ορίσουμε πρώτα τους ακόλουθους τέσσερις πίνακες:

$$c \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} \qquad x \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad r \equiv \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_n \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

Τρεις από αυτούς είναι διανύσματα στήλης — c και x είναι διαστάσεως n x 1, αλλά το r είναι m x 1. Ο πίνακας A είναι διαστάσεως m x n.

Με βάση αυτούς τους ορισμούς, η αντικειμενική συνάρτηση στην (3.2) μπορεί να εκφραστεί από την εξίσωση

$$\underset{}{\Pi} = \underset{(1 \times n)}{c'} \quad \underset{(n \times 1)}{x}$$

όπου, υπενθυμίζουμε, το διανυσματικό γινόμενο c'x είναι 1 x 1 και συνεπώς αναπαριστά ένα βαθμωτό μέγεθος. Ωστόσο, από την άποψη των πι περιορισμών, το προτέρημα του συμβολισμού με πίνακες είναι προφανές, γιατί το σύνολο των περιορισμών στην (3.2) μπορεί να δοθεί από μία μόνον ανισότητα ως ακολούθως:

$$\underset{(m \times n)}{A} \quad \underset{(n \times 1)}{x} \quad \leq \quad \underset{(m \times 1)}{r}$$

Εδώ το σύμβολο της ανισότητας υπονοεί ότι η i γραμμή του πίνακα Ax είναι μικρότερη ή ίση από τη i γραμμή του πίνακα r, για κάθε i. Ομοίως μπορούμε να γράψουμε τους n μη αρνητικούς περιορισμούς με μόνο μία ανισότητα

$$\underset{(nx1)}{x} \quad \geq \quad \underset{(nx1)}{0}$$

Εν συντομία, το γραμμικό πρόγραμμα (3.2) εκφράζεται συνοπτικά με την εξής μορφή:

Μεγιστοποιείται	$\pi = c'x$	
με τους περιορισμούς	$Ax \leq r$	(3.2')
και	$x \geq 0$	

Ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια, το πρόγραμμα ελαχιστοποίησης (3.3) μπορεί να εκφραστεί με την εξής απλή μορφή:

Ελαχιστοποιείται	$C = c'x$	
με τους περιορισμούς	$Ax \geq r$	(3.3')
και	$x \geq 0$	

Προς μια μέθοδο επίλυσης

Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών ($n = 2$), η διαγραμματική μέθοδος επίλυσης μπορεί να μας οδηγήσει σε μια άριστη λύση χωρίς δυσκολία. Αυτό είναι αλήθεια ανεξάρτητα από τον αριθμό των περιορισμών που παρουσιάζονται στο γραμμικό πρόγραμμα, διότι επιπρόσθετοι περιορισμοί μπορούν να αυξήσουν μόνο τα ακραία σημεία, αλλά όχι τη διάσταση του διαγράμματος. Ωστόσο, όταν είναι τρεις οι μεταβλητές επιλογής, η μέθοδος γίνεται δύσχρηστη επειδή χρειάζεται ένα γράφημα τριών διαστάσεων. Και για κάθε περίπτωση ανώτερης τάξης, η μέθοδος αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη. Πρέπει συνεπώς να αναζητήσουμε μια μη διαγραμματική μέθοδο επίλυσης που να μπορεί να εφαρμοστεί για οποιονδήποτε αριθμό μεταβλητών.

Ας δούμε πρώτα πώς η διαδικασία επίλυσης στην περίπτωση των δύο μεταβλητών μπορεί να επεκταθεί λογικά στην περίπτωση των n μεταβλητών. Για την περίπτωση $n = 2$, το κύριο πεδίο της δράσης μας είναι ο χώρος των 2 διαστάσεων (το επίπεδο). Ωστόσο, λόγω των μη αρνητικών περιορισμών και αξιώσεων, έχουμε τη δυνατότητα να στενέψουμε το πεδίο και να εστιάσουμε την προσοχή μας στην εφικτή περιοχή που είναι ένα υποσύνολο του δισδιάστατου χώρου. Τότε, μέσω της αντικειμενικής συνάρτησης, βρίσκουμε τελικά ένα συγκεκριμένο σημείο ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) στο υποσύνολο αυτό ως την άριστη λύση. Για τη γενική περίπτωση των n μεταβλητών, πρέπει να εργαστούμε στο χώρο των n διαστάσεων, στον οποίο κάθε σημείο αναπαριστά ένα διατεταγμένο n-πλαίσιο — (x_1, x_2, …,x_n) ή ένα n-διάνυσμα. Οι μη αρνητικοί περιορισμοί θα μας περιορίζουν τώρα στο μη αρνητικό ανάλογο n διαστάσεων του τεταρτημορίου, και οι περιορισμοί θα σκιαγραφούν μαζί ένα υποσύνολο αυτού σαν την εφικτή περιοχή. Κατόπιν, από την αντικειμενική συνάρτηση μπορούμε να εντοπίσουμε ένα συγκεκριμένο σημείο στην εφικτή περιοχή — ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_n$)— ως την άριστη λύση.

Ωστόσο, όπως είπαμε πιο πάνω, η άριστη λύση βρίσκεται πάντα σ' ένα από τα ακραία σημεία της εφικτής περιοχής. Όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, αυτό συμβαίνει ακόμα και στην περίπτωση των n μεταβλητών. Συνεπώς, αντί να βρούμε ολόκληρη την εφικτή περιοχή, αυτό που χρειαζόμαστε τελικά είναι μια μέθοδος για να προσδιορίσουμε το σύνολο όλων των ακραίων σημείων, και κατόπιν μεταξύ αυτών να επιλέξουμε την άριστη λύση. Αυτό το βολικό αποτέλεσμα είναι βασισμένο στο ότι, ανεξάρτητα από τον αριθμό των μεταβλητών επιλογής, η εφικτή περιοχή σ' ένα γραμμικό πρόγραμμα είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο.

3.5 ΚΥΡΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ένα κυρτό σύνολο είναι ένα σύνολο σημείων με την ιδιότητα ότι αν u και v είναι δύο οποιαδήποτε σημεία του συνόλου, τότε κάθε κυρτός συνδυασμός του u και v είναι επίσης στο σύνολο. Συμβολικά, ένα σύνολο S καλείται κυρτό αν

$$\left.\begin{matrix} u \in S \\ v \in S \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{w} \in \text{Sw} \quad \text{όπου} \quad \text{w} = \theta\text{u} + (1 - \theta)\text{v} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

Συμβαίνει συνήθως κυρτά σύνολα να εμφανίζονται στις περισσότερες εκδοχές ενός γραμμικού προγράμματος.

Πάρτε, για παράδειγμα, την αντικειμενική συνάρτηση. Για κάθε τιμή του π (ή του C), η συνάρτηση παίρνει τις εξής γραμμικές μορφές:

χώρος 2 διαστάσεων $\pi_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ [δίνει μια γραμμή]

χώρος 3 διαστάσεων $\pi_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ [δίνει ένα επίπεδο] (3.5)

χώρος n διαστάσεων $\pi_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ [δίνει ένα υπερεπίπεδο]

Γραμμές και επίπεδα —ειδικές περιπτώσεις του υπερεπιπέδου— είναι εύκολο να δούμε ότι είναι κυρτά σύνολα. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι το υπερεπίπεδο είναι ένας κυρτός χώρος n διαστάσεων.

Έστω ότι το σύνολο των σημείων που ικανοποιεί την (3.5) είναι το H. Τότε κάθε σημείο στο σύνολο H θα είναι στο υπερεπίπεδο που ορίζεται από την εν λόγω εξίσωση. Αν επιλέξουμε δύο σημεία u και v στο σύνολο H, με συντεταγμένες $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ και $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, αντίστοιχα, τότε, εφόσον οι συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση (3.5), πρέπει —αντικαθιστώντας τα x_i με u_i και κάνοντας το ίδιο με τα v_i — να βρούμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\pi_0 = u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n \qquad (3.6)$$
$$\pi_0 = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_nx_n$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό με διανύσματα, η παραπάνω μπορεί να γραφεί, σαν

$$\pi_0 = c'u \quad \text{και} \quad \pi_0 = c'v \qquad (3.6')$$

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο H είναι κυρτό, πρέπει να δείξουμε ότι οποιοσδήποτε κυρτός συνδυασμός, w, των u και v ικανοποιεί την (3.5) έτσι ώστε να ισχύει ότι $\pi_0 = c'w$. Η απόδειξη είναι σχετικά εύκολη. Αφού

$c'w = c'[\theta u + (1 - \theta)v] = c'\theta u + c'(l - \theta)v$ [επιμεριστικός κανόνας]

$= \theta\, c'u + (1 - \theta\, c'v$ [ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό είναι μεταθετικός]

$= \theta\pi_0 + (1 - \theta)\pi_0$ [από την (3.6')]

$= \pi_0$

ο κυρτός συνδυασμός w βρίσκεται στο σύνολο H, για κάθε τιμή του θ στο κλειστό διάστημα [0,1]. Συνεπώς, το σύνολο H είναι πράγματι κυρτό.

Εξετάζοντας τις σχέσεις στον n-διάστατο χώρο στον οποίο βρίσκεται το σύνολο, παρατηρούμε ότι ένα υπερεπιπεδο διαιρεί πάντα το χώρο σε δύο ημιχώρους. Στην περίπτωση του χώρου δύο διαστάσεων, για παράδειγμα, μια ευθεία γραμμή θα διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημιχώρους δύο διαστάσεων, ένα σε κάθε πλευρά της γραμμής — όπως έχουμε δει χαράζοντας τα σύνορα στο **Σχήμα 6** και στο **Σχήμα 7**. Ένας χώρος n διαστάσεων, μπορεί με τον ίδιο τρόπο να διαιρεθεί σε δύο ημιχώρους n διαστάσεων αλλά χρειάζεται γι' αυτό η ύπαρξη ενός υπερεπιπέδου. Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τον ημιχώρο σαν κλειστό ή ανοικτό ανάλογα με το αν ένα διαχωριστικό υπερεπιπεδο θεωρείται ως μέρος του εν λόγω ημιχώρου ή όχι. Για παράδειγμα, αν γράψουμε τις δύο ανισότητες

$$c'x < 9 \quad \text{και} \quad c\,x \geq 9$$

η πρώτη θα ορίσει ένα ανοικτό ημιχώρο στην μια πλευρά του υπερεπιπέδου c'x = 9, ενώ η δεύτερη θα ορίσει έναν κλειστό ημιχώρο που θα περιέχει τα σημεία που βρίσκονται στην άλλη πλευρά του υπερεπιπέδου καθώς και όλα τα σημεία του ίδιου του υπερεπιπέδου.

Έχοντας υπ' όψιν τα παραπάνω, κάθε περιορισμός στην (3.2) και (3.3) ορίζει ένα κλειστό ημιχώρο. Επίσης το ίδιο κάνει και κάθε μη αρνητικός περιορισμός διότι η ανισότητα (ας πούμε) $x_1 \geq 0$ είναι μια ειδική περίπτωση του περιορισμού

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \geq r_1 \qquad (3.7)$$

με $\alpha_{11} = 1$ και όλους τους άλλους συντελεστές (συμπεριλαμβανόμενου και του r_1) ίσους με μηδέν. Τότε κάθε τέτοιος κλειστός ημιχώρος συμβαίνει να είναι επίσης ένα κυρτό σύνολο.

Η εγκυρότητα αυτού του τελευταίου ισχυρισμού είναι εντελώς προφανής στην περίπτωση του χώρου δύο διαστάσεων. Στο **Σχήμα 6**, το σύνολο των σημείων που βρίσκονται είτε δεξιά είτε πάνω σε κάθε σύνορο περιορισμού είναι κυρτό σύνολο, επειδή το τμήμα της ευθείας που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία πρέπει επίσης να ανήκει στο σύνολο. Ας αποδείξουμε τώρα ότι ένας κλειστός ημιχώρος σ' ένα χώρο n διαστάσεων είναι επίσης κυρτός. Θεωρούμε τον κλειστό ημιχώρο που ορίζεται από την ανισότητα (3.7), η οποία εκφράζεται διαφορετικά στη διανυσματική της μορφή σαν

$$\alpha' x \geq r_1 \quad \text{όπου} \quad \alpha' \equiv [\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \ldots\ \alpha_{1n}] \qquad (3.7')$$

Έστω u και v δύο οποιαδήποτε σημεία στον ημιχώρο. Τότε, εφόσον τα u και v ικανοποιούν και τα δύο την (3.7'), έπεται ότι

$$\alpha' u \geq r_1 \text{ και } \alpha' v \geq r_1 \qquad [\text{δες } (3.6')]$$

Για κάθε βαθμωτό μέγεθος $0 \leq \theta \leq 1$, επίσης, συνεπάγεται ότι

$$\theta\alpha' u \geq \theta r_1 \text{ και } (1 - \theta)\,\alpha' u \geq (1 - \theta)\, r_1 \qquad (3.8)$$

Τώρα έστω $w = \theta u + (1 - \theta)v$ ένας κυρτός συνδυασμός των u και v. Αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι το w ικανοποιεί και την (3.7'), τότε ο ζητούμενος ημιχώρος πρέπει να είναι κυρτός. Για το σκοπό αυτό σχηματίζουμε το διανυσματικό γινόμενο

$$\alpha' w = \alpha'[\theta u + (1 - \theta)v] = \theta\alpha' u + (1 - \theta)\alpha' v$$

αλλά, λόγω της (3.8), είναι φανερό ότι

$$\alpha' w \geq \theta r_1 + (1 - \theta)\, r_1 \quad \text{ή} \quad \alpha' w \geq r_1$$

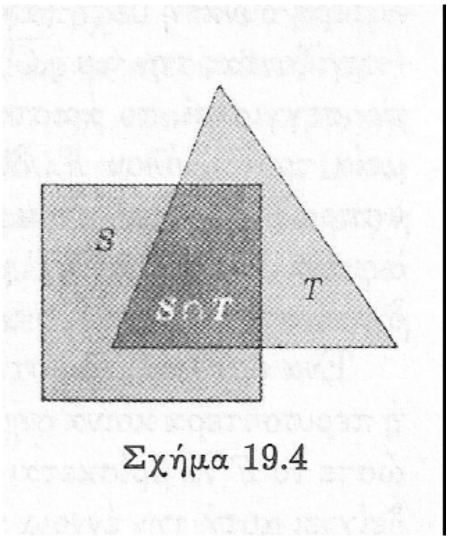
Έτσι ο κυρτός συνδυασμός w, όπως τα u και v, ικανοποιεί επίσης την (3.7'). Αυτό αποδεικνύει ότι ένας κλειστός ημιχώρος του χώρου n διαστάσεων είναι ένα (κλειστό) κυρτό σύνολο.

Συνεχίζοντας το συλλογισμό μας ένα βήμα παραπέρα, μπορούμε να δείξουμε ότι η εφικτή περιοχή, ενός γενικού γραμμικού προγράμματος n μεταβλητών, είναι ένα κυρτό σύνολο. Προκαταρκτικά σημειώστε ότι η εφικτή περιοχή αναπαριστά πάντα την τομή m + n το πλήθος κλειστών κυρτών συνόλων. Γενικά, οποιοδήποτε σημείο στην εφικτή περιοχή πρέπει εξ ορισμού να ικανοποιεί ταυτόχρονα ένα σύστημα m + n γραμμικών (ασθενών) ανισοτήτων — τους m το πλήθος περιορισμούς συν n μη αρνητικούς περιορισμούς. Έτσι πρέπει ταυτόχρονα να είναι μέλος των m + n κλειστών ημιχώρων, με άλλα λόγια πρέπει να είναι ένα σημείο στην τομή αυτών των m + n κλειστών κυρτών συνόλων. Στην περίπτωση αυτή, το ακόλουθο θεώρημα θα αποδεικνύει ότι η εφικτή περιοχή είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο:

Η τομή ενός πεπερασμένου αριθμού από κυρτά σύνολα είναι ένα κυρτό σύνολο και αν καθένα από τα σύνολα αυτά είναι κλειστό, η τομή τους θα είναι επίσης κλειστό σύνολο.

Η ουσία του θεωρήματος αυτού μπορεί να γίνει αντιληπτή από το **Σχήμα 9**, όπου το σύνολο S (ένα συμπαγές τετράγωνο) και το σύνολο T (ένα συμπαγές τρίγωνο) είναι και τα δύο κυρτά. Η τομή τους $S \cap T$, που αναπαριστάται από την περισσότερο «σκιασμένη» περιοχή, είναι επίσης κυρτή. Επιπλέον, αν το S και το T είναι και τα δύο κλειστά, τότε και το σύνολο $S \cap T$ θα είναι επίσης κλειστό, επειδή τα συνοριακά σημεία του συνόλου της τομής, τα οποία είναι απλά ένα υποσύνολο των συνοριακών σημείων των S και T, ανήκουν στο σύνολο της τομής.

Ακραία σημεία και άριστη λύση



Σχήμα 9

Δύο σημαντικά αποτελέσματα που προβάλλουν από τα προηγούμενα είναι: (1) για μια δεδομένη τιμή του π (ή του C), η αντικειμενική συνάρτηση ενός γραμμικού προγράμματος n μεταβλητών ορίζει πάντα ένα υπερεπίπεδο, το οποίο είναι κλειστό και κυρτό, και (2) η εφικτή περιοχή, όντας η τομή των m + n κλειστών ημιχώρων, είναι επίσης ένα κλειστό κυρτό σύνολο — καλέστε το σύνολο αυτό F. Τα δύο αυτά αποτελέσματα μπορούν τώρα να συσχετιστούν μεταξύ τους.

Πριν αρχίσουμε τη διαδικασία για το συσχετισμό αυτό, χρειάζεται πρώτα να διευκρινίσουμε τις έννοιες εσωτερικό, συνοριακό και ακραίο σημείο. Η διάκριση ανάμεσα σε συνοριακά σημεία και εσωτερικά σημεία είναι διαισθητικά προφανής. Αναφερόμενοι στο **Σχήμα 9**, τα σημεία που βρίσκονται στις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου είναι τα συνοριακά σημεία του συνόλου S, και τα σημεία που δεν βρίσκονται στις πλευρές αυτές είναι τα εσωτερικά σημεία. Περισσότερο τυπικά, ένα συνοριακό σημείο b ενός συνόλου S είναι καθορισμένο από την ιδιότητα ότι κάθε περιοχή του b, οσοδήποτε μικρή, πρέπει να περιέχει ένα ή περισσότερα σημεία που δεν ανήκουν στο σύνολο S.

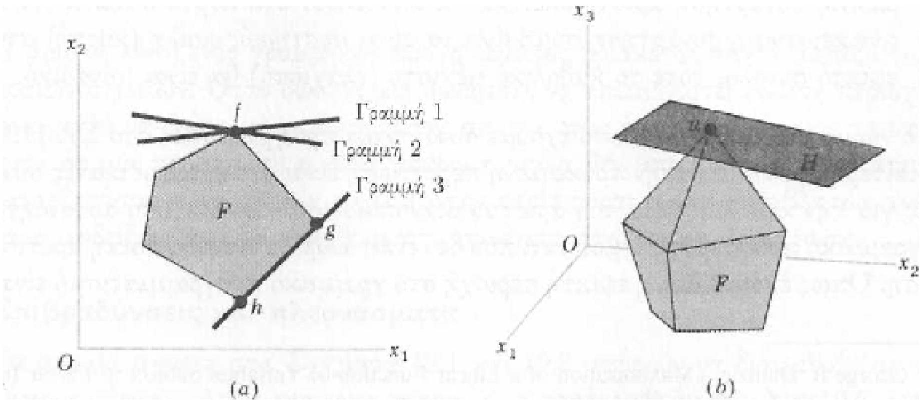
Από την άλλη μεριά, ένα εσωτερικό σημείο i ενός συνόλου S, χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι μια αρκετά μικρή περιοχή του θα περιέχει μόνο σημεία που ανήκουν στο S. Όσον αφορά τα ακραία σημεία, αυτά δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ειδική περίπτωση των συνοριακών σημείων. Ειδικότερα, ένα ακραίο σημείο είναι ένα συνοριακό σημείο το οποίο δεν βρίσκεται σε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει οποιαδήποτε δύο άλλα σημεία του συνόλου. Δηλαδή, ένα ακραίο σημείο δεν μπορεί να προκύψει από έναν κυρτό συνδυασμό δύο άλλων σημείων του συνόλου. Αναφερόμενοι ξανά στο **Σχήμα 9**, οι τέσσερις γωνίες του τετραγώνου είναι ακραία σημεία, ενώ όλα τα άλλα σημεία όχι. Εν συντομία, δεδομένου ενός συνόλου S, το σύνολο όλων των ακραίων σημείων του S είναι ένα υποσύνολο του συνόλου όλων των συνοριακών σημείων, ενώ το σύνολο που αποτελείται απ' όλα τα συνοριακά σημεία και το σύνολο απ' όλα τα εσωτερικά σημεία δεν τέμνονται. Επιχειρώντας την αριστοποίηση, σκοπός μας πάντα είναι να «σπρώξουμε» το υπερεπίπεδο στόχου —μεταβάλλοντας την τιμή του π ή του C— είτε στην υψηλότερη δυνατή θέση (αγγίζοντας την τιμή $\overline{p}$), είτε στη χαμηλότερη δυνατή θέση (αγγίζοντας την τιμή $\overline{C}$), παραμένοντας όμως στο σύνολο F. Όταν η άριστη λύση προσεγγιστεί, το άριστο υπερεπίπεδο $\overline{\mathrm{H}}$ μπορεί να μην περιέχει εσωτερικά σημεία του συνόλου F, διότι σε αντίθετη περίπτωση, πάντα θα μπορούμε να το «σπρώξουμε» πιο πέρα επιτυγχάνοντας καλύτερη θέση. Έτσι, μόνο τα συνοριακά σημεία του συνόλου F μπορούν να εμφανιστούν στην τομή $\overline{\mathrm{H}} \cap \mathrm{F}$. Αυτό μας οδηγεί στην έννοια του υπερεπιπέδου στήριξης.

Ένα υπερεπίπεδο στήριξης (έστω $\overline{\mathrm{H}}$) είναι ένα υπερεπίπεδο το οποίο έχει ένα ή περισσότερα κοινά σημεία με το κυρτό σύνολο (F), αλλά η θέση του είναι τέτοια ώστε το F να βρίσκεται αποκλειστικά σε μια μόνο πλευρά του $\overline{H}$. Το **Σχήμα 10** δείχνει αυτή την έννοια για την περίπτωση του χώρου των δύο και τριών διαστάσεων. Στο διάγραμμα α, οι γραμμές 1, 2 και 3 είναι παραδείγματα υπερεπιπέδου στήριξης (εδώ φυσικά είναι γραμμές). Η γραμμή 1 (ή η γραμμή 2) έχει μόνον ένα σημείο κοινό με το συμπαγές πολύγωνο F, αλλά η γραμμή 3 έχει πολλά. Σε κάθε περίπτωση, ωστόσο, το σύνολο F βρίσκεται αποκλειστικά πάνω σε μια από τις πλευρές του υπερεπιπέδου στήριξης. Συνεπώς, μόνο συνοριακά σημεία του F μπορεί να περιέχονται στις γραμμές αυτές. Σημειώστε ότι κάθε γραμμή στήριξης περιέχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο του συνόλου F , όπως τα f,, g και h. Η περίπτωση των τριών διαστάσεων στο διάγραμμα b είναι παρόμοια, με τη διαφορά ότι οι γραμμές στήριξης είναι τώρα επίπεδα στήριξης. Και πάλι, η τομή των $\overline{H}$ και F (αυτή τη φορά είναι ένα πολύεδρο) μπορεί να περιέχει μόνον ένα από τα συνοριακά σημεία του F, όπως φαίνεται από το διάγραμμα, μόνο το ακραίο σημείο (u) του συνόλου F περιέχεται στην τομή αυτή.

Στη γενική περίπτωση του χώρου n διαστάσεων, η ουσία της συζήτησης σχετικά με το **Σχήμα 10** μπορεί να αναζητηθεί στα ακόλουθα δύο θεωρήματα:

Θεώρημα I Δεδομένου ενός συνοριακού σημείου u ενός κλειστού κυρτού συνόλου, υπάρχει τουλάχιστον ένα υπερεπίπεδο στήριξης στο u.

Θεώρημα II Για ένα κλειστό κυρτό σύνολο φραγμένο από κάτω, υπάρχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο σε κάθε υπερεπίπεδο στήριξης.



Σχήμα 10

Η σχέση αυτών των θεωρημάτων με το γραμμικό προγραμματισμό είναι προφανής. Όταν επιτύχουμε μια άριστη λύση, το υπερεπίπεδο στόχου —που αναπαριστά την άριστη γραμμή ίσου κέρδους ή ίσου κόστους— θα είναι το υπερεπίπεδο στήριξης. Σύμφωνα με το Θεώρημα Ι, κάθε συνοριακό σημείο της εφικτής περιοχής είναι ένα πιθανό υποψήφιο σημείο για την άριστη λύση. Αλλά το Θεώρημα ΙΙ συγκεκριμενοποιεί το πρόβλημα, επιτρέποντας μας να περιορίσουμε την προσοχή μας μόνο στα ακραία σημεία. Γιατί ακόμα και αν υπάρχουν μη ακραία συνοριακά σημεία στο ίδιο υπερεπίπεδο στήριξης, αυτά συνδέονται με την ίδια τιμή του π (ή του C) όπως και τα ακραία σημεία στο υπερεπίπεδο και, συνεπώς, δεν είναι καλύτερα από τα ακραία σημεία και μπορούμε έτσι να τα αγνοήσουμε χωρίς συνέπειες.

Αυτό το απλό αλλά ενδιαφέρον γεγονός χρησιμοποιείται καλύτερα στη μέθοδο simplex για την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος n μεταβλητών, που αναπτύχτηκε από τον George B. Dantzig. Ένα simplex είναι το ανάλογο του τριγώνου στο χώρο η διαστάσεων με γωνίες που αναπαριστούν ακραία σημεία και η μέθοδος simplex παρέχει μια συστηματική διαδικασία με την οποία μπορούμε να κινηθούμε από ένα ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής σ' ένα άλλο, έως ότου φθάσουμε στο άριστο σημείο. Το ότι συνεχώς περιορίζουμε το πεδίο επιλογής στα ακραία σημεία είναι ένα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που διακρίνουν το γραμμικό προγραμματισμό από τα κλασικά προβλήματα αριστοποίησης.

Τοπικό και καθολικό άριστο

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό του γραμμικού προγράμματος που τον διακρίνει από τα κλασικά προβλήματα αριστοποίησης είναι ότι οποιαδήποτε λύση πάρουμε μας δίνει όχι μόνον ένα τοπικό (σχετικό) άριστο, αλλά επίσης ένα καθολικό (απόλυτο) άριστο. Η αιτία γι' αυτό το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό βρίσκεται στο παρακάτω θεώρημα (το θεώρημα της καθολικότητας), που δίνει ικανές —αλλά όχι αναγκαίες— συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα τοπικό άριστο θα μπορεί να είναι και καθολικό άριστο:

Αν ένα εφικτό σύνολο F είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο και αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι μια συνεχής κοίλη (κυρτή) συνάρτηση στο εφικτό σύνολο, τότε (α) κάθε τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) θα είναι επίσης ένα καθολικό μέγιστο (ελάχιστο) και (β) τα σημεία στο F στα οποία η αντικειμενική συνάρτηση αριστοποιείται, θα αποτελούν ένα κυρτό σύνολο. Αν η αντικειμενική συνάρτηση συμβαίνει να είναι αυστηρώς κοίλη (κυρτή) στο εφικτό σύνολο, τότε το καθολικό μέγιστο (ελάχιστο) θα είναι μοναδικό.

Το νόημα του θεωρήματος το έχουμε συναντήσει προηγουμένως στο **Σχήμα 10**. Η ιδιαίτερη σχέση του στην προκείμενη περίπτωση είναι ότι αυτές οι ικανές συνθήκες για την καθολικότητα του άριστου ικανοποιούνται σαν κάτι το αυτονόητο στο γραμμικό προγραμματισμό, κάτι που δεν είναι αλήθεια στην κλασική αριστοποίηση. Όπως έχουμε δει, η εφικτή περιοχή στο γραμμικό προγραμματισμό είναι πάντα ένα κλειστό κυρτό σύνολο. Εξάλλου, η αντικειμενική συνάρτηση, όντας συνεχής και γραμμική στις μεταβλητές επιλογής, μπορεί να θεωρηθεί είτε ως κοίλη είτε ως κυρτή συνάρτηση, ανάλογα αν το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Έτσι οι ικανές συνθήκες που υπάρχουν στο θεώρημα πράγματι ικανοποιούνται και κάθε άριστο θα είναι από τη φύση του ένα καθολικό άριστο, σύμφωνα με το (α) του θεωρήματος.

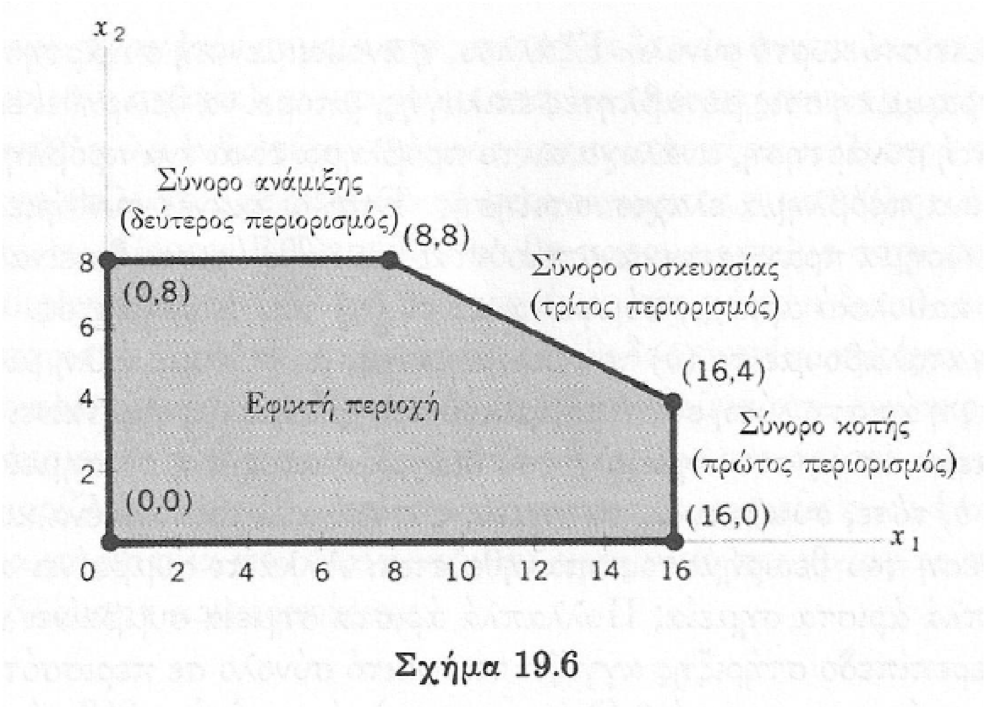
Για να καταλάβουμε το (b) του θεωρήματος, ας ρίξουμε άλλη μια ματιά στο **Σχήμα 10**. Αν η άριστη λύση ενός γραμμικού προγράμματος συμβαίνει σ' ένα μόνο, ακραίο σημείο, όπως στο σημείο f του διαγράμματος α ή το σημείο u του διαγράμματος b, τότε, συμβατικά, το σημείο αυτό είναι καθεαυτό ένα κυρτό σύνολο, και η υπόθεση του θεωρήματος επαληθεύεται. Στις περιπτώσεις που πολλαπλά άριστα σημεία συμβαίνει να υπάρχουν όταν το υπερεπίπεδο στήριξης αγγίζει το εφικτό σύνολο σε περισσότερα από ένα σημεία, όπως όταν η γραμμή 3 (διάγραμμα α) είναι η γραμμή στήριξης, ή όταν το επίπεδο στήριξης $\overline{H}$ (διάγραμμα b) ταυτίζεται με μια από τις επιφάνειες (επίπεδες πλευρές) του πολύεδρου F, το σύνολο όλων των άριστων σημείων θα βρίσκεται ενσωματωμένο είτε στο ευθύγραμμο τμήμα hg, είτε σε κάποια επιφάνεια του πολυέδρου F, ανάλογα με την περίπτωση. Έτσι, το σύνολο είναι και στην περίπτωση αυτή ένα κυρτό σύνολο, όπως άλλωστε μας βεβαιώνει και το θεώρημα. Έχοντας αυτό κατά νου, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι, αν υπάρχει ένα ζεύγος άριστων λύσεων στο γραμμικό πρόγραμμα (δύο λύσεις να είναι ισοδυνάμως άριστες), τότε κάθε κυρτός συνδυασμός ή σταθμικός μέσος όρος των δύο πρέπει επίσης να είναι μια άριστη λύση.

3.6 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX: ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΑ ΑΚΡΑΙΑ ΣΗΜΕΙΑ

Η άριστη λύση ενός γραμμικού προγράμματος βρίσκεται πάντα μεταξύ των ακραίων σημείων. Όταν δίνεται μια δυνάμενη να απεικονιστεί εφικτή περιοχή F, είναι απλό να ορίσουμε τα ακραία της σημεία. Ας δούμε όμως πως μπορούμε να ορίσουμε τα σημεία αυτά σε μια περίπτωση n διαστάσεων η οποία δεν μπορεί να απεικονιστεί. Πρώτα πρέπει να επανεξετάσουμε τα ακραία σημεία στην περίπτωση των 2 μεταβλητών για πιθανές ενδείξεις που θα αναχθούν στη συνέχεια στη γενική περίπτωση.

Επιβραδύνσεις και πλεονάσματα

Τα ακραία σημεία στο **Σχήμα 6** και στο **Σχήμα 7** μπορούν να διαιρεθούν σε τρεις κύριους τύπους. Αυτά μπορούν επαρκώς να επεξηγηθούν στο **Σχήμα 11**, που αναπαράγει την εφικτή περιοχή του **Σχήμα 7(b)**.



Σχήμα 11

Ο πρώτος τύπος σημείων αποτελείται από αυτά τα σημεία που βρίσκονται στην τομή των δύο περιοριστικών συνόρων, για παράδειγμα τα σημεία (8,8) και (16,4). Ενώ τα σημεία αυτά ικανοποιούν ακριβώς δύο περιορισμούς, ο τρίτος περιορισμός δεν ικανοποιείται ακριβώς. Το σημείο (16, 4), για παράδειγμα, ικανοποιεί ακριβώς τους περιορισμούς κοπής και συσκευασίας αλλά όχι τον περιορισμό ανάμιξης, επειδή το σημείο βρίσκεται κάτω από τον περιορισμό ανάμιξης. Με την μη ακριβή ικανοποίηση κάποιου περιορισμού, θα γίνεται υποχρησιμοποίηση της δυναμικότητας (ή, στο πρόβλημα διαιτολογίου, μια υπερβολική λήψη κάποιας τροφής πέραν του αναγκαίου ελάχιστου). Στην περίπτωση αυτή θα εμφανιστεί μια επιβράδυνση στη χρησιμοποίηση του δυναμικού (ή ένα πλεόνασμα στη λήψη τροφής).

Τα ακραία σημεία του δεύτερου τύπου, τα σημεία (0, 8) και (16, 0) για παράδειγμα, βρίσκονται εκεί όπου ένα σύνορο περιορισμού τέμνει έναν από τους άξονες. Επειδή τα σημεία αυτά βρίσκονται μόνο σε ένα σύνορο περιορισμού, μπορούν να ικανοποιούν ακριβώς μόνον ένα περιορισμό. Ή, βλέποντας το διαφορετικά, τώρα θα έχουμε χαλαρώσει στους δυο περιορισμούς.

Τέλος, ως τρίτο τύπο ακραίων σημείων, έχουμε το σημείο της αρχής των αξόνων (0, 0), που δεν ικανοποιεί ακριβώς κανέναν περιορισμό. Το ακραίο σημείο (0, 0), ωστόσο, βρίσκεται μόνο σ' ένα πρόγραμμα μεγιστοποίησης, διότι η εφικτή περιοχή ενός προγράμματος ελαχιστοποίησης συνήθως αποκλείει το σημείο της αρχής των αξόνων, όπως μπορούμε να δούμε από το **Σχήμα 6(b)**.

Η κατάληξη είναι ότι στο παρόν παράδειγμα —όπου ο αριθμός των περιορισμών (3) υπερβαίνει τον αριθμό των μεταβλητών επιλογής (2)— κάθε ακραίο σημείο θα συνεπάγεται μια επιβράδυνση σ' έναν τουλάχιστο από τους περιορισμούς. Επιπλέον, όπως είναι προφανές από το **Σχήμα 11**, το μέγεθος της επιβράδυνσης σε κάθε ακραίο σημείο είναι εύκολα υπολογίσιμο. Ωστόσο, όταν καθορίσουμε ποια ακραία σημεία είναι άριστες λύσεις, στην πραγματικότητα αποφασίζουμε όχι μόνο τις τιμές των $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$, αλλά επίσης και τις άριστες τιμές των επιβραδύνσεων. Ας δοκιμάσουμε να δούμε αναλυτικά τις επιβραδύνσεις, συμβολίζοντας την επιβράδυνση του i-οστού περιορισμού με s_i. Το σύμβολο s_i αναπαριστά τις μεταβλητές χαλάρωσης, ενώ στην περίπτωση ελαχιστοποίησης, αυτές θα είναι οι μεταβλητές πλεονάσματος. Και στις δύο περιπτώσεις οι μεταβλητές αυτές θα αναφέρονται σαν ψευδόμεταβλητές.

Ρητές αναφορές στις επιβραδύνσεις ή στα πλεονάσματα μας δίνουν τη δυνατότητα να μετατρέψουμε τους περιορισμούς που εκφράζονται με ανισότητες σε περιορισμούς εκφρασμένους με ισότητες. Κυρίως, θα μας οδηγήσουν σε μια αλγεβρική μέθοδο εύρεσης των ακραίων σημείων μιας εφικτής περιοχής.

Μετασχηματισμός του γραμμικού προγράμματος

Ας ξαναγυρίσουμε στο πρόβλημα παραγωγής της (3.1), του οποίου η εφικτή περιοχή απεικονίζεται στο **Σχήμα 11**. Προσθέτοντας μια μεταβλητή επιβράδυνσης σε κάθε περιορισμό και τροποποιώντας κατάλληλα την αντικειμενική συνάρτηση καθώς και τον περιορισμό μη αρνητικότητας, ξαναγράφουμε το γραμμικό πρόγραμμα στη μορφή

$$
\begin{array}{lll}
\text{Μεγιστοποιείται} & \pi = 40x_1 + 30x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 & \\
\text{με τους περιορισμούς} & x_1 + s_1 = 16 & [\text{κοπής}] \\
 & x_2 + s_2 = 8 & [\text{ανάμιξης}] \\
 & x_1 + 2x_2 + s_3 = 24 & [\text{συσκευασίας}] \\
\text{και} & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & (3.9)
\end{array}
$$

Σημειώνουμε ότι οι τρεις μετασχηματισμένοι περιορισμοί στην (3.9) μπορούν επίσης να εκφραστούν από την ακόλουθη εξίσωση πινάκων:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix}
\qquad (3.10)
$$

Υπάρχουν τώρα συνολικά πέντε μεταβλητές. Οι μεταβλητές επιβράδυνσης s_i, πρέπει να είναι, όπως και οι x_1 και x_2, μη αρνητικές. Όταν s_i

> 0, υπάρχει επιβράδυνση στον i-οστό περιορισμό, και όταν $s_i = 0$ σημαίνει ότι ο ϊ-οστός περιορισμός ικανοποιείται ακριβώς. Αλλά τα s_i δεν μπορούν ποτέ να είναι αρνητικά. Στην αντικειμενική συνάρτηση, οι μεταβλητές s_i έχουν συντελεστές μηδέν, επειδή οι επιβραδύνσεις δεν συμβάλλουν στα κέρδη. Μάλιστα, όλες αυτές μπορούν να απαλειφθούν από την αντικειμενική συνάρτηση. Σημειώνουμε ότι, στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, οι (μη αρνητικές) ψευδομεταβλητές πρέπει να εμφανίζονται στους περιορισμούς ως $- s_{i}$..

Είναι εύκολο να βρούμε τις τιμές των μεταβλητών επιβράδυνσης σε κάθε ακραίο σημείο. Για παράδειγμα, στο σημείο (0,0) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ στους τρεις μετασχηματισμένους περιορισμούς και να βρούμε ότι $s_1 = 16$, $s_2 = 8$ και $s_3 = 24$. Έτσι, το σημείο $(x_1, x_2) = (0, 0)$ στον χώρο παραγωγής δύο διαστάσεων του **Σχήμα 11** μπορεί να απεικονιστεί στο σημείο

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0,0,16,8,24)$$

του χώρου λύσης πέντε διαστάσεων, όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του **Πίνακα 3**. Με την ίδια διαδικασία μπορούμε να επαληθεύσουμε την απεικόνιση των υπολοίπων τεσσάρων ακραίων σημείων του πίνακα.

Πίνακας 3

Χώρος παραγωγής (x_1, x_2)	Χώρος λύσης $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)$
(0,0)	(0,0,16,8,24)
(16,0)	(16,0,0,8,8)
(16.4)	(16,4,0,4,0)
(8,8)	(8,8.8,0,0)
(0,8)	(0,8,16,0,8)

Αυτό που είναι αξιοσημείωτο σχετικά με το αποτέλεσμα του **Πίνακα 3** είναι ότι όλα αυτά τα πέντε σημεία του χώρου λύσης, που αναπαριστούν ακραία σημεία, μοιράζονται την κοινή ιδιότητα ότι ακριβώς τρεις από τις πέντε μεταβλητές παίρνουν μη μηδενικές τιμές. Φυσικά, αυτό δεν είναι απλή σύμπτωση. Άλλωστε το τρία δεν είναι ένας οποιοσδήποτε αριθμός, αλλά ακριβώς ο αριθμός των περιορισμών στο γραμμικό μας πρόγραμμα.

Για να καταλάβουμε αυτό το αποτέλεσμα, θα υπενθυμίσουμε την προηγούμενη συζήτηση που αφορούσε το μέτρημα του αριθμού των εξισώσεων και του αριθμού των μεταβλητών. Κανονικά, υποθέτοντας συνέπεια και ανεξαρτησία, μπορούμε να περιμένουμε ένα σύστημα m εξισώσεων να δώσει μια ορισμένη λύση μόνον όταν υπάρχουν ακριβώς m μεταβλητές σ' αυτό. Στην προκείμενη περίπτωση, υπάρχουν τρεις περιορισμοί στην (3.10), έτσι ώστε $m = 3$. Συνεπώς, όχι περισσότερες από τρεις εκ των πέντε μεταβλητών μπορούν να συμπεριληφθούν στην ορισμένη λύση με μη μηδενική τιμή. Αυτό θα γίνει πιο κατανοητό αν εκφράσουμε τους περιορισμούς με διανυσματικές εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}s_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}s_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}s_3 = \begin{bmatrix}16\\8\\24\end{bmatrix} \qquad (3.10')$$

Αν θέσουμε οποιεσδήποτε δύο από τις πέντε μεταβλητές ίσες με μηδέν, απαλείφοντας έτσι δύο όρους από το αριστερό μέλος της (3.10'), θα καταλήξουμε σ ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις μεταβλητές. Μπορούμε τότε να πάρουμε μία μοναδική λύση αφού εξασφαλίσουμε ότι οι συντελεστές διανύσματα (που διατηρήθηκαν) στο αριστερό μέλος είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Όταν οι τιμές αυτών των λύσεων των τριών μεταβλητών συνδυαστούν με τις αυθαίρετα οριζόμενες μηδενικές τιμές των δύο άλλων μεταβλητών, το αποτέλεσμα θα είναι ένα διατεταγμένο πενταπλάσιο όπως αυτό που φαίνεται στον **Πίνακα 3**.

Βασικές εφικτές λύσεις και ακραία σημεία

Από τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, ωστόσο, μπορούν να προκύψουν δύο πιθανές καταστάσεις. Πρώτον, μπορούμε να έχουμε μια αρνητική λύση. Για παράδειγμα, αν θέσουμε $x_1 = s_3 = 0$, τότε η (3.10') θα δώσει $x_2 = 12$, $s_1 = 16$, και $s_2 = -4$. Επειδή παραβιάζει τους μη μηδενικούς περιορισμούς μια τέτοια λύση δεν είναι εφικτή και απορρίπτεται. Διαγραμματικά, αυτή η ιδιαίτερη μη εφικτή λύση αναπαριστά την τομή του φράγματος συσκευασίας με τον κατακόρυφο άξονα, που βρίσκεται πέρα από την εφικτή περιοχή — στο συμπληρωματικό σύνολο F.

Δεύτερον, όλες οι τιμές των λύσεων μπορεί είναι μη μηδενικές. Στο ενδεχόμενο αυτό, η λύση θα αντιστοιχεί σ' ένα από τα ακραία σημεία της εφικτής περιοχής, και η λύση αυτή θα αποτελεί μία βασική εφικτή λύση (ΒΕΛ), του γραμμικού προγράμματος. Αυτή είναι εφικτή επειδή η λύση είναι στην εφικτή περιοχή: ικανοποιεί τους περιορισμούς καθώς και μη αρνητικές αξιώσεις. Είναι βασική επειδή η ύπαρξη της είναι εξαρτώμενη από την παρουσία των τριών γραμμικώς ανεξάρτητων συντελεστών διανύσματα, τα οποία ορίζουν μια βάση για ένα χώρο τριών διαστάσεων. (Αυτός ο χώρος των τριών διαστάσεων, που αναφέρεται σαν απαιτούμενος χώρος, έχει να κάνει με τους περιορισμούς. Η διάσταση του καθορίζεται φυσικά από τον αριθμό των περιορισμών που έχουμε.) Εν όψει της παραπάνω αντιστοιχίας, η αναζήτηση των ακραίων σημείων ισοδυναμεί με την αναζήτηση των βασικών εφικτών λύσεων των μετασχηματισμένων εξισώσεων των περιορισμών.

Για να το διευκρινίσουμε, ας θέσουμε $x_1 = x_2 = 0$ στην (3.10'). Τότε έχουμε

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}s_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}s_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}s_3 = \begin{bmatrix}16\\8\\24\end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\8\\24\end{bmatrix} \qquad (3.11')$$

Εφόσον ο αριστερός πίνακας είναι ο μοναδιαίος πίνακας που μπορεί να παραλειφθεί χωρίς να επηρεάσει την εξίσωση, η λύση τότε είναι αυτομάτως: $s_1 = 16$, $s_2 = 8$, $s_3 = 24$. Η ύπαρξη αυτής της μοναδικής λύσης εξασφαλίζεται από τη γραμμική ανεξαρτησία των τριών συντελεστών διανύσματα (στήλες), που είναι τα μοναδιαία διανύσματα που καλύπτουν ένα χώρο τριών διαστάσεων (τον απαιτούμενο χώρο). Εφόσον η λύση είναι μη αρνητική, αυτή είναι μια ΒΕΛ. Και εφόσον οι τιμές των λύσεων οδηγούν στο σημείο (0, 0,16, 8, 24) στο χώρο λύσεων, ή το σημείο (0, 0) του **Σχήμα 11**, η ΒΕΛ θα αντιστοιχεί πραγματικά σ' ένα ακραίο σημείο.

Θέτουμε ένα άλλο ζεύγος μεταβλητών στην (3.10') ίσο με το μηδέν, θα καταλήξουμε σ' ένα τελείως διαφορετικό σύστημα εξισώσεων. Αν οι συντελεστές διανύσματα είναι πάλι γραμμικώς ανεξάρτητοι, θα έχουμε μια νέα βάση για τον απαιτούμενο χώρο και μια νέα ΒΕΛ —υπό τον όρο ότι η λύση είναι μη αρνητική— η οποία μπορεί να ορίζει για μας ένα άλλο ακραίο σημείο. Έτσι, το να μετακινηθούμε σ' ένα διαφορετικό οριακό σημείο στην εφικτή περιοχή σημαίνει ουσιαστικά μια αλλαγή βάσης του απαιτούμενου χώρου τριών διαστάσεων. Αυτό είναι μια θεμελιώδης ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συζήτηση που ακολουθεί.

Το σημαντικό σχετικά με την έννοια της ΒΕΛ είναι ότι η μέθοδος καθορισμού της είναι αλγεβρική αντί γεωμετρική, έτσι ώστε επιτρέπει μια άμεση επέκταση στο γενικό γραμμικό πρόγραμμα με m περιορισμούς και n μεταβλητές επιλογής. Σε αυτή την τελευταία περίπτωση, ο απαιτούμενος χώρος θα είναι χώρος m διαστάσεων και ο χώρος λύσης ένας χώρος m + n διαστάσεων. Για να βρούμε μια ΒΕΛ, θα πρέπει να έχουμε τώρα τις n από τις m + n μεταβλητές ίσες με μηδέν στις μετασχηματισμένες εξισώσεις των περιορισμών. Αλλά η διαδικασία κατά τα άλλα δεν είναι διαφορετική από αυτήν της απλούστερης περίπτωσης που είδαμε στην (3.11).

Μέθοδος simplex: πως βρίσκουμε το άριστο ακραίο σημείο

Για να εντοπίσουμε ένα ακραίο σημείο πρέπει να βρούμε μια βασική εφικτή λύση. Στα προγράμματα μικρών διαστάσεων μπορούμε να βρούμε όλες τις ΒΕΛ, να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των μεγιστοποιημένων (ή ελαχιστοποιημένων) συναρτήσεων και τότε να επιλέξουμε μεταξύ αυτών την άριστη λύση. Όταν εμπλέκεται ένας μεγάλος αριθμός μεταβλητών και περιορισμών, η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεπάγεται πολλούς υπολογισμούς. Η ιδέα της μεθόδου simplex είναι να αρχίσουμε με κάποιο αρχικό ακραίο σημείο, να υπολογίσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτηση και ύστερα να δούμε αν η τελευταία μπορεί να βελτιωθεί όταν μετακινηθούμε σ' ένα κοντινό ακραίο σημείο. Σ' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την κίνηση και να δούμε αν είναι δυνατή περαιτέρω βελτίωση από μια επόμενη κίνηση. Όταν τελικά εντοπίσουμε ένα ακραίο σημείο το οποίο δεν δέχεται άλλες βελτιώσεις, αυτό θα είναι η άριστη λύση. Επειδή για τη διαδικασία θα χρειαστεί μόνο ένα υποσύνολο του συνόλου όλων των ακραίων σημείων, αυτή η επαναληπτική διαδικασία κίνησης από μια γωνία της εφικτής περιοχής σε μια άλλη συμβάλλει στην οικονομία των υπολογισμών.

Θα εξηγήσουμε την τεχνική που συνεπάγεται η διαδικασία αυτή, συνεχίζοντας τη συζήτηση για το μετασχηματισμό του γραμμικού προγράμματος της (3.9), που είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Πίνακας Simplex

Από τις (3.11) και (3.11') έχουμε ήδη βρει μια αρχική ΒΕΛ θέτοντας $x_1 = x_2 = 0$. Έχουμε τότε την ακόλουθη πεντάδα στο χώρο λύσης s_1, και έναν αντίστοιχο αριθμό κέρδους, π_1:

$S_1 = (0,0,16,8,24)$ (3.12)

$\pi_1 = 40(0) + 30(0) = 0$

Την ίδια απάντηση μπορεί να πάρουμε σχηματικά από αυτό που καλούμε πίνακα simplex, όπως φαίνεται στον **Πίνακα 4.**

Πίνακας 4 Πίνακας Simplex: Πίνακας Ι

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερά
γραμμή 0	1	-40	-30	0	0	0	0
γραμμή 1	0	**1**	0	1	0	0	16
γραμμή 2	0	0	1	0	1	0	8
γραμμή 3	0	1	2	0	0	1	24

Σ' έναν τέτοιο πίνακα, κρατάμε μια στήλη για κάθε μεταβλητή επιλογής και μια για κάθε μεταβλητή επιβράδυνσης. Επιπλέον έχουμε μια στήλη για το π και μια στήλη για τις σταθερές. Η στήλη για το π μας επιτρέπει να ενσωματώσουμε στον πίνακα πληροφορίες που περιέχονται στην αντικειμενική συνάρτηση (γραμμή 0) καθώς τα δεδομένα για τους τρεις μετασχηματισμένους περιορισμούς (γραμμές 1, 2 και 3). Όλοι οι αριθμοί που βρίσκονται κάτω από κάθε μεταβλητή είναι απλά οι συντελεστές της συγκεκριμένης μεταβλητής στις σχετικές εξισώσεις, ενώ οι αριθμοί στη στήλη των σταθερών είναι ανεξάρτητοι από κάθε μεταβλητή. Η κάθετη γραμμή στο αριστερό μέρος της στήλης των σταθερών είναι εκεί που θα πρέπει να βρίσκεται το σύμβολο της ισότητας στις διάφορες εξισώσεις. Έτσι, η γραμμή 0 μπορεί να διαβαστεί ως $\pi - 40\ x_1 - 30\ x_2 = 0$, που είναι απλά η αντεστραμμένη εκδοχή της αντικειμενικής συνάρτησης. Παρόμοια, η γραμμή 1 λέει ότι $x_1 + s_1 = 16$ (ο πρώτος περιορισμός) κλπ. Είναι επίσης χρήσιμο να σημειώσουμε ότι, αν αγνοήσουμε τη γραμμή 0 και τη στήλη του π, τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι ακριβώς αυτά όπως στην (3.10) κατάλληλα τοποθετημένα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για να βρούμε μια ΒΕΛ πρέπει να βρούμε μια βάση για τον απαιτούμενο χώρο των τριών διαστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι, αγνοώντας τη γραμμή 0 επί του παρόντος, πρέπει να διαλέξουμε από τις τρεις τελευταίες γραμμές τρεις ανεξάρτητες στήλες διανύσματα. Μια προφανής επιλογή είναι οι στήλες που σημειώνονται με αστερίσκο, που μαζί σχηματίζουν έναν πίνακα 3x3. Συνεπώς, μπορούμε να πάρουμε τα s_1, s_2 και s_3 σαν βάση — και να θέσουμε ανάλογα $x_1 = x_2 = 0$. Αν οι στήλες των x_1 και x_2 σβηστούν (νοερά) από τον πίνακα, οι τρεις τελευταίες γραμμές θα αναχθούν ακριβώς στη μορφή της (3.11'), δίνοντας μας $(s_1, s_2, s_3) = (16,8,24)$, που είναι μη αρνητικό και άρα μια ΒΕΛ.

Όταν δεν παράγεται καθόλου προϊόν, το κέρδος είναι μηδενικό, και αυτή η ΒΕΛ δεν είναι προφανώς άριστη. Παρ' όλα αυτά, στα προβλήματα μεγιστοποίησης, είναι πάντα επιθυμητό (αν είναι διαθέσιμο) να αποδεχθούμε σαν αρχική ΒΕΛ μία που περιέχει μόνο μεταβλητές επιβράδυνσης. Οι μεταβλητές επιβράδυνσης έχουν πάντα γραμμικώς ανεξάρτητα μοναδιαία διανύσματα σαν συντελεστές διανύσματα, οπότε αυτές μπορούν αυτομάτως να προσφερθούν σαν μια προκαθορισμένη βάση.

Πράγματι, η πληροφορία που αφορά το κέρδος μπορεί να διαβαστεί αμέσως από τον πίνακα. Γιατί αν θεωρήσουμε τη γραμμή 0 μαζί με τις τρεις τελευταίες γραμμές, ενώ δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν τις στήλες των x_1 και x_2, ο πίνακας μεταφράζεται στο εξής σύστημα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

που δίνει όχι μόνο τις τιμές των μεταβλητών επιβράδυνσης αλλά επίσης και επιπρόσθετες πληροφορίες, όπως ότι $\pi_1 = 0$ (ο δείκτης 1 αναφέρεται εδώ στην αρχική ΒΕΛ). Σαν γενικός κανόνας, όταν ένας μοναδιαίος πίνακας 4x4 παρουσιαστεί, όπως στον **Πίνακα** 4, έτσι ώστε να ορίζεται μια ΒΕΛ, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στη ΒΕΛ μπορεί να βρεθεί απευθείας από τον πίνακα, μαζί με τις τιμές των μεταβλητών που σχηματίζουν τη βάση του απαιτούμενου χώρου. Επιπλέον, μια σύγκριση της (3.13) με τον **Πίνακα** 4 δείχνει ότι το πρώτο στοιχείο της στήλης των σταθερών του πίνακα (μέσα σε τετράγωνο) είναι αυτό που δείχνει το κέρδος, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης δείχνουν τις τιμές των μεταβλητών στη βάση. Με σκοπό να επωφεληθούμε από την πληροφορία κέρδους, από δω και στο εξής θα χρησιμοποιούμε πάντα το μοναδιαίο πίνακα 4x4 παρά τον 3 x 3 — ή πιο γενικά, τον (m + 1) x (m + 1) παρά τον m x n ταυτοτικό πίνακα.

Ένα βήμα άξονας

Ας προσπαθήσουμε τώρα να αυξήσουμε το κέρδος μεταπηδώντας σε μια νέα ΒΕΛ μέσω σχηματισμού μιας νέας βάσης. Η κεντρική ιδέα της διαδικασίας αλλαγής βάσης, γνωστής ως αξονικής, είναι να αντικαταστήσουμε μια στήλη διάνυσμα στη βάση με μια άλλη στήλη διάνυσμα που δεν περιλαμβάνεται στη βάση. Ή, πράγμα που είναι το ίδιο, πρέπει να αποβάλλουμε μια ήδη συμπεριλαμβανόμενη μεταβλητή (s_1,s_2, s_3) χάρη μιας αποκλεισμένης ($x_1 = x_2$).

Ας δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην επιλογή των εξερχόμενων και των εισερχόμενων διανυσμάτων (ή μεταβλητών).

Εφόσον ο σκοπός μας είναι να αυξήσουμε το κέρδος, είναι φυσικό να αναζητήσουμε ενδείξεις στην αντικειμενική συνάρτηση. Όπως στην (3.9), η αντικειμενική συνάρτηση δείχνει ότι το οριακό ποσοστό κέρδους για το x_1 είναι $40 και για το x_2 είναι $30. Είναι λογικό ότι η επιλογή του x_1 σαν εισερχόμενη μεταβλητή υπόσχεται περισσότερα σαν αυξητική του κέρδους. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα, θα πρέπει να επιλεχθεί η μεταβλητή που έχει τη μεγαλύτερη αρνητική απόλυτη τιμή στη γραμμή 0. Εδώ, η κατάλληλη τιμή είναι - 40 και η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_1. Ας ονομάσουμε τη στήλη x_1 στήλη άξονα.

Η στήλη άξονας προορίζεται να αντικαταστήσει μία από τις στήλες των $s_ι$, προκαλώντας όμως δύο προβλήματα. Πρώτον, πρέπει να αποφασίσουμε ποια απ' αυτές τις στήλες πρέπει να φύγει και δεύτερον, πρέπει να φροντίσουμε η στήλη άξονας σαν νέο μέλος της βάσης να είναι γραμμικώς ανεξάρτητη από τα παλιά διανύσματα που διατηρούνται. Όμως ότι και τα δύο προβλήματα μπορεί να επιλυθούν μονομιάς αν μετατρέψουμε τη στήλη άξονα σ' ένα μοναδιαίο διάνυσμα με 1 σε οποιαδήποτε από τις τρεις τελευταίες γραμμές και 0 οπουδήποτε αλλού. Αφήνοντας κατά μέρος τη μηχανική αυτού του μετασχηματισμού, ας εξετάσουμε τις συνέπειες τους. Αν η μετασχηματισθείσα στήλη άξονας έχει το μοναδιαίο της στοιχείο στη γραμμή 1, έτσι ώστε να είναι ακριβώς ίδια με τη στήλη s_1, μπορούμε να ορίσουμε την s_1 σαν την εξερχόμενη μεταβλητή, διότι αυτή η μετακίνηση θα διατηρήσει τη γραμμική ανεξαρτησία στη βάση. Ομοίως, αν το μοναδιαίο στοιχείο είναι στη γραμμή 2, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μετασχηματισθείσα στήλη άξονα στη στήλη s_2 - Με τον τρόπο αυτό, το διπλό πρόβλημα της επιλογής της εξερχόμενης μεταβλητής και της διατήρησης της γραμμικής ανεξαρτησίας μπορεί πάντα να ρυθμιστεί αμέσως.

Μένει να αποφασίσουμε την ακριβή θέση του μοναδιαίου στοιχείου στη στήλη άξονα. Για ευκολία, το στοιχείο της στήλης άξονα που είναι ίσο με 1 θα αναφέρεται ως το στοιχείο άξονας. Αυτό που ενδιαφέρει κατά την επιλογή του στοιχείου άξονα είναι το ότι πρέπει να μένουμε μέσα στις οριοθετημένες ικανότητες και των τριών κλάδων παραγωγής. Αν, για παράδειγμα, αφήσουμε το στοιχείο στη γραμμή 3 να είναι το στοιχείο άξονας, η στήλη x_1 —μετά τη μετατροπή σε μοναδιαίο διάνυσμα— θα ταυτιστεί με τη στήλη s_3- Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή x_1 θα εκτοπίσει τη μεταβλητή s_3 στη δεύτερη ΒΕΛ και, όπως φαίνεται από την (3.13), η τιμή της x_1 θα είναι $x_1 = 24$ (που αντικαθιστά την $s_3 = 4$). Ωστόσο, σύμφωνα με την (3.9), αυτή η εκροή θα παραβιάζει τον περιορισμό κοπής και συνεπώς δεν είναι εφικτή. Με άλλα λόγια, αν το x_1 αντικαταστήσει το s_3, ο νέος πίνακας θα έχει ένα αρνητικό στοιχείο στη στήλη των σταθερών στη γραμμή 1 (περιορισμός κοπής). Η προκύπτουσα λύση είναι τότε ανέφικτη και πρέπει να αποκλειστεί. Από την άλλη μεριά, αν επιλέξουμε το στοιχείο στη γραμμή 1 (μέσα σε κύκλο) σαν το στοιχείο άξονα, τότε το x_1 θα είναι $x_1 = 16$ (που αντικαθιστά το $s_1 = 16$). Εφόσον αυτή η (μικρότερη) εκροή δεν παραβιάζει κανέναν περιορισμό στην (3.9), μπορούμε σίγουρα να δεχθούμε το στοιχείο σε κύκλο (1) σαν στοιχείο άξονα. Σ' αυτή την τελευταία περίπτωση, όλοι οι περιορισμοί στη στήλη των σταθερών θα παραμείνουν μη αρνητικοί στο νέο πίνακα. Σημειώστε ότι δεν πρέπει ν' ανησυχούμε για το στοιχείο 0 στη γραμμή 2, ο συντελεστής μηδέν λέει ότι η μεταβλητή x_1 είναι άσχετη με το δεύτερο περιορισμό, έτσι ώστε η εισαγωγή της μεταβλητής x_1 στη νέα βάση δεν θα συναντήσει κανένα εμπόδιο από αυτόν τον ιδιαίτερο περιορισμό.

Η συζήτηση για τους περιορισμούς που μόλις σκιαγραφήσαμε μπορεί να ολοκληρωθεί αν το στοιχείο άξονας επιλεχθεί ως εξής: (1) διαλέγουμε αυτά τα στοιχεία στη στήλη άξονα —από όλες τις γραμμές εκτός από τη γραμμή 0— που είναι θετικά (2) διαιρούμε καθένα από αυτά τα θετικά στοιχεία με τα αντίστοιχα τους στη στήλη των σταθερών (3) συγκρίνουμε τα πηλίκα που θα προκύψουν, τα μετατοπισμένα πηλίκα, και παίρνουμε τη γραμμή με το μικρότερο πηλίκο ως γραμμή άξονα (4) και τότε επιλέγουμε το στοιχείο στην τομή της στήλης άξονα και της γραμμής άξονα σαν στοιχείο άξονα.

Επιλέγοντας το μικρότερο μετατοπισμένο πηλίκο, μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι η προστιθέμενη εκροή (x_1) θα είναι αρκούντως μικρή ώστε να μένει μέσα στα όρια που θέτουν οι περιορισμοί και καμία από τις μεταβλητές δεν θα παραβιάζει τους μη αρνητικούς περιορισμούς. Στο παράδειγμα μας υπάρχουν μόνο δύο τέτοια πηλίκα για σύγκριση: 16/1 και 24/1. Εφόσον το πρώτο είναι το μικρότερο, η γραμμή 1 θα πρέπει να είναι η γραμμή άξονας, με το στοιχείο μέσα σε κύκλο (1) σαν στοιχείο άξονας.

Η επόμενη δουλειά μας είναι να μετασχηματίσουμε τη στήλη άξονα σ' ένα μοναδιαίο διάνυσμα θέτοντας το στοιχείο άξονα ίσο με 1 και τα άλλα στοιχεία ίσα με 0. Στην προκείμενη περίπτωση, το στοιχείο άξονας είναι πράγματι ίσο με 1, έτσι δεν έχουμε τίποτα να κάνουμε, Ωστόσο γενικά, αν το στοιχείο άξονας είναι ένας αριθμός k, μπορούμε να το κάνουμε ίσο με 1 αν διαιρέσουμε όλα τα στοιχεία της γραμμής άξονα με k, διαιρώντας φυσικά και το στοιχείο της στήλης των σταθερών. (Αυτό σημαίνει τη διαίρεση όλων των όρων μιας εξίσωσης περιορισμού με την ίδια σταθερά.) Η νέα εκδοχή της γραμμής άξονα θα μας χρησιμεύσει τότε σαν εργαλείο για να μετασχηματίσουμε τις υπόλοιπες γραμμές στην επιθυμητή μορφή — με μηδενικά στη στήλη άξονα. Το στοιχείο στη γραμμή 2, ήδη μηδέν, δεν χρειάζεται μετασχηματισμό. Αλλά το στοιχείο - 40 στη γραμμή 0 θα πρέπει να μηδενιστεί προσθέτοντας 40 φορές την (σε νέα εκδοχή) γραμμή άξονα (γραμμή 1) στη γραμμή 0. (Αυτό σημαίνει την πρόσθεση ενός σταθερού πολλαπλασίου μιας εξίσωσης σε μια άλλη εξίσωση, που δεν ενοχλεί την ισότητα.) Ομοίως, για να μετασχηματίσουμε το στοιχείο 1 στη γραμμή 3 σε μηδέν, πρέπει να αφαιρέσουμε τη γραμμή άξονα (γραμμή 1) από τη γραμμή 3. Το αποτέλεσμα φαίνεται στον **Πίνακα 5**, όπου έχουμε ένα νέο πίνακα simplex (Πίνακας II).

Αν σβήσουμε νοητά τις στήλες x_1 και s_2, ο Πίνακας II μπορεί να παραστήσει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 640 \\ 16 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

από το οποίο οι τιμές λύσης των τεσσάρων μεταβλητών βρίσκονται αμέσως γιατί ο αριστερός μοναδιαίος πίνακας μπορεί να φύγει. Η εμφάνιση του μοναδιαίου πίνακα δεν είναι φυσικά συμπτωματική,

Πίνακας 5 Πίνακας Simplex: Πίνακας Π

	π		x_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερά
γραμμή 0	1	0	-30	40	0	0	|640|
γραμμή 1	0	1	0	1	0	0	16
γραμμή 2	0	0	1	0	1	0	8
γραμμή 3	0	0	2	-1	0	1	8

γιατί η διαδικασία μετασχηματισμού που οδήγησε στη λύση της (3.14) είναι ουσιαστικά η διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος εξισώσεων με αντιστροφή πινάκων. Αλλά αντί για τον καθορισμό του αντίστροφου πίνακα, τη φορά αυτή πήγαμε απευθείας στο μοναδιαίο πίνακα $AA^{-1} = I$.

Πράγματι, είναι δυνατό να εξάγουμε τη λύση άμεσα από τη στήλη των σταθερών του Πίνακα ΙΙ χωρίς να γράψουμε την (3.14). Στη στήλη του π, η μονάδα αυτού του μοναδιαίου διανύσματος είναι στη γραμμή 0, έτσι μπορούμε να πάρουμε τη σταθερά στη γραμμή 0 σαν την τιμή λύσης του π στη νέα βάση, και ομοίως για τις μεταβλητές x_1,s_2 και s_3. Από την άλλη μεριά, οι στήλες των x_2 και s_3 που δεν περιέχουν μοναδιαία διανύσματα, αποκλείονται από τη βάση και οι τιμές λύσης τους είναι αυτομάτως μηδέν. Συνεπώς, η δεύτερη βασική εφικτή λύση συνεπάγεται ότι

$$S_2 = (16, 0, 0, 8, 8) \qquad (3.15)$$

$$\pi_2 = 640$$

Όπως φαίνεται σε σύγκριση με το S_1, έχουμε τώρα ένα σημαντικά μεγαλύτερο κέρδος (640 αντί 0). Με όρους του **Πίνακα 3**, έχουμε κινηθεί — επιχειρώντας αυτό το αξονικό βήμα— από το πρώτο οριακό σημείο στο δεύτερο.

Άλλο ένα βήμα άξονας

Στη γραμμή 0 του Πίνακα ΙΙ, υπάρχει το στοιχείο —30 που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x_2. Εφόσον ένα αρνητικό στοιχείο στη γραμμή 0 δείχνει ένα θετικό οριακό ποσοστό κέρδους, περαιτέρω βελτίωση του κέρδους είναι δυνατή αν επιτρέψουμε στο x_2 να αντικαταστήσει μια μεταβλητή μηδενικού ποσοστού κέρδους ή αρνητικού ποσοστού κέρδους στη βάση. Επομένως, αποδεχόμαστε τη στήλη του x_2 σαν την επόμενη στήλη άξονα. Όπως και για τη γραμμή άξονα, εφόσον το μικρότερο μετατοπισμένο πηλίκο είναι

$$\min\left\{\frac{8}{1},\frac{8}{2}\right\} = \min\{8,4\} = 4$$

θα πρέπει να επιλέξουμε τη γραμμή 3. Έτσι το στοιχείο άξονας είναι το 2, που έχουμε βάλει σε κύκλο.

Με σκοπό να μετασχηματίσουμε τα στοιχεία στη στήλη του x_2 σε 0, 0, 0 και 1 (με αυτήν τη σειρά), πρέπει: (1) να προσθέσουμε 15 φορές τη γραμμή 3 (τη γραμμή άξονα) στη γραμμή 0, (2) να αφήσουμε όπως είναι τη γραμμή 1" (3) να αφαιρέσουμε 1/2 φορές τη γραμμή 3 από τη γραμμή 2 και (4) να διαιρέσουμε τη γραμμή 3 με 2. Σας προτρέπουμε να κάνετε τις πράξεις αυτές και να ελέγξετε τα αποτελέσματα σε σχέση με τον **Πίνακα 6**.

Στον Πίνακα III, οι στήλες με μοναδιαίο διάνυσμα βρίσκονται στις στήλες των π,

Πίνακας 6 Πίνακας simplex : Πίνακας III

	π	1	$\mathbf{x_2}$	s_1		s_3	Σταθερά
γραμμή **0**	**1**	**0**	**0**	**25**	**0**	**15**	**|760|**
γραμμή **1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**16**
γραμμή **2**	**0**	**0**	**0**	1/2	**1**	*1/2*	**4**
γραμμή **3**	**0**	**0**	**1**	*1/2*	**0**	*1/2*	**4**

x_1, x_2 και s_2, των οποίων οι τιμές λύσης μπορούν να εξαχθούν αμέσως: π = 760, x_1 = 16, x_2 = 4 (από τη γραμμή 3), και s_2 = 4 (από τη γραμμή 2). Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$S_3 = (16, 4, 0, 4, 0)$$
$$\pi_3 = 760 \qquad (3.16)$$

Τώρα παράγονται, δύο προϊόντα και το κέρδος έχει αυξηθεί σε 760. Μπορούμε ξανά να δούμε από τον **Πίνακα** 3 ότι το δεύτερο βήμα άξονας μας έχει οδηγήσει σ' ένα νέο ακραίο σημείο στην εφικτή περιοχή.

Είμαστε έτοιμοι για ένα ακόμη βήμα άξονα, αλλά εφόσον η γραμμή 0 του Πίνακα ΙΙΙ δεν περιέχει άλλα αρνητικά στοιχεία, κανένας περαιτέρω άξονας δεν αποδεικνύεται επωφελής. Για να το εκτιμήσουμε στην πράξη, ας μετατρέψουμε τη γραμμή 0 στην εξίσωση

$$\pi = 760 - 25s_1 – 15\ s_3$$

Για να μεγιστοποιήσουμε το τ σ' αυτή την εξίσωση, πρέπει να θέσουμε $s_1 = s_3 = 0$. Αλλά η λύση S_3 έκανε ακριβώς αυτό. Έτσι η S_3 πρέπει να είναι άριστη! Με βάση το **Σχήμα 6**, η μέθοδος simplex μάς έχει οδηγήσει συστηματικά από το σημείο αρχής των αξόνων —το αρχικό ακραίο σημείο— στο επόμενο ακραίο σημείο (16,0) και τελικά στο άριστο ακραίο σημείο (16,4). Σημειώστε ότι έχουμε φθάσει στην άριστη λύση χωρίς να συγκρίνουμε όλα, δηλαδή και τα πέντε, τα ακραία σημεία. Επίσης σημειώστε ότι, επιλέγοντας το x_1 σαν τη στήλη άξονα στον Πίνακα Ι (σε συμφωνία με το κριτήριο του οριακού ποσοστού κέρδους), έχουμε κινηθεί προς το άριστο διά μέσου ενός συντομότερου δρόμου. Επιλέγοντας το x_2 σαν στήλη άξονα, θα είχαμε κινηθεί πρώτα προς το σημείο (0, 8) στο **Σχήμα 6** και αυτό θα χρειαζόταν τρία βήματα άξονα για να φθάσουμε στο σημείο (16, 4).

3.7 ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ SIMPLEX

Στο πρόβλημα μεγιστοποίησης που εξετάσαμε παραπάνω, δεν ήταν ανάγκη να ψάξουμε για μια αρχική ΒΕΛ, επειδή μια ήδη έτοιμη είναι το σημείο αρχής των αξόνων. Εφόσον το σημείο αρχής των αξόνων κανονικά βρίσκεται στην εφικτή περιοχή του προβλήματος μεγιστοποίησης, μπορεί συνήθως να χρησιμεύσει σαν μια αρχική ΒΕΛ. Για τα προβλήματα ελαχιστοποίησης, ωστόσο, η εφικτή περιοχή δεν περιλαμβάνει συνήθως το σημείο αρχής των αξόνων, κι έτσι δεν μπορούμε να έχουμε την ευκολία να αρχίσουμε από το σημείο αρχής αξόνων.

Για να το εξηγήσουμε, ας μετασχηματίσουμε το πρόβλημα διαιτολογίου στην εξής μορφή

Ελαχιστοποιείται $C = 0{,}6x_1 + x_2$

υποκείμενο στο
$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

και $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Σημειώστε ότι οι (μη αρνητικές) μεταβλητές s_i, που αναπαριστούν πλεονάσματα (και όχι επιβραδύνσεις), έχουν αφαιρεθεί από το αριστερό μέλος των περιορισμών. Έτσι, οι τελευταίες τρεις στήλες στον πίνακα συντελεστών της (3.17) σχηματίζουν έναν αρνητικό μοναδιαίο πίνακα. Αν δοκιμάσουμε να θέσουμε $x_1 = x_2 = 0$, οι τρεις περιορισμοί θα δώσουν τη λύση (s_1, s_2, s_3) — (— 20, —20, —12), που είναι φανερά μη εφικτή. Άρα, πρέπει να αρχίσουμε την αναζήτηση μιας κατάλληλης αρχικής ΒΕΛ.

Η χρήση τεχνητών μεταβλητών στα προβλήματα ελαχιστοποίησης

Μια μέθοδος που θα απλοποιήσει αυτήν την αναζήτηση είναι να επαυξήσουμε το πρόγραμμα προσθέτοντας μια μη αρνητική τεχνητή μεταβλητή σε κάθε περιορισμό. Για λόγους που θα εξηγήσουμε παρακάτω, οι τεχνητές μεταβλητές, που σημειώνονται με v_i, θα πρέπει να παίρνουν αρκετά μεγάλους συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση — μεγάλους σε σχέση με τους συντελεστές των μεταβλητών επιλογής. Ας θέσουμε αυτούς τους συντελεστές ίσους με 100, τότε το πρόγραμμα στην (3.17) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

Ελαχιστοποιείται $C = 0{,}6x_1 + x_2 + 100(v_1 + v_2 + v_3)$

Υποκείμενο στο
$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & | & -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & | & 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (3.17')$$

και $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, v_1, v_2, v_3 \geq 0$

Εφόσον οι τεχνητές μεταβλητές συνδέονται με τρία γραμμικώς ανεξάρτητα μοναδιαία διανύσματα (που σχηματίζουν ένα μοναδιαίο πίνακα), όμοια με τις μεταβλητές s_i του **Πίνακα 4**, μπορούμε να δεχθούμε τις μεταβλητές v_i στην αρχική βάση χωρίς να διεξάγουμε οποιαδήποτε αναζήτηση.

Αν και αποδεκτές σε μια αρχική ΒΕΛ ώστε να ξεκινήσουμε, αυτές οι μεταβλητές v_i —όντας μαθηματικά τεχνητές— πρέπει να μην εμφανίζονται στην άριστη λύση. Με αυτή την έννοια, δεν είναι ανάγκη να ανησυχούμε αν οι μεταβλητές v_i έχουν μεγάλους συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση, διότι αυτοί οι συντελεστές (στο παράδειγμα μας, 100), αναπαριστούν τις τιμές κάποιων τεχνητά εννοούμενων ειδών διατροφής, ακριβώς όπως το 0,6 είναι η τιμή της τροφής Ι. Οπότε, αν δώσουμε μεγάλες τιμές σ' αυτούς τους συντελεστές, θα κάνουν αυτομάτως τα τεχνητά είδη διατροφής πολύ δαπανηρά ώστε να μην μπορούν να συμπεριλαμβάνονται σ' ένα άριστο διαιτολόγιο. Στην άριστη λύση θα έχουμε τότε $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, κάνοντας το επαυξημένο γραμμικό πρόγραμμα (3.17') ισοδύναμο από πλευράς αριστοποίησης με το πρόβλημα της αρχικής εκδοχής στην (3.17).

Η μέθοδος simplex μπορεί τώρα να εφαρμοστεί, με τον ίδιο τρόπο εκτός από μερικές απλές τροποποιήσεις. Πρώτον, τακτοποιώντας το πρόγραμμα της (3.17') στον Πίνακα Ι του **Πίνακα** 7, βλέπουμε ότι οι στήλες των v_i δεν είναι ακόμη της μορφής των μοναδιαίων διανυσμάτων με 4 στοιχεία. Προσθέτουμε πρώτα το 100 x (γραμμή 1 + γραμμή 2 + γραμμή 3) στη γραμμή 0, με σκοπό να μετατρέψουμε τον Πίνακα Ι στον Πίνακα ΙΙ. Εφόσον ο τελευταίος περιέχει έναν μοναδιαίο πίνακα 4x4, μπορείτε να βρείτε τη λύση $(C, v_1, v_2, v_3) = = (5.200,20,20,12)$.

Μια άλλη τροποποίηση στη μέθοδο αφορά το κριτήριο επιλογής της στήλης άξονα. Για τα προγράμματα ελαχιστοποίησης, θα πρέπει να ψάξουμε για τη στήλη —εκτός από τη στήλη του C και τη σταθερή στήλη— με το μεγαλύτερο θετικό στοιχείο στη γραμμή 0. Τη λογική αυτού του νέου κριτηρίου μπορεί εύκολα να τη δούμε όταν γράψουμε τη γραμμή 0 του Πίνακα Π υπό τη μορφή της εξίσωσης

$$C = 5.200 - (8497/5)\, x_1 - 1499\, x_2 + 100\, (s_1 + s_2 + s_3)$$

Αν πρέπει να επιλέξουμε μία από τις πέντε μεταβλητές για εισερχόμενη μεταβλητή που θα αντικαταστήσει μια τεχνητή μεταβλητή στην αρχική βάση, το x_1 είναι προφανώς το καταλληλότερο όσον αφορά την ελαχιστοποίηση κόστους επειδή έχει αρνητικό συντελεστή με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Με βάση τον Πίνακα ΙΙ, η x_1 είναι η μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στη γραμμή 0 — έχουμε, δηλαδή, το παραπάνω κριτήριο. Αντίστοιχα, η στήλη του x_1 θα πρέπει να επιλεχθεί ως στήλη άξονας.

Πίνακας 19.7 Simplex Πίνακες από Ι έως VI

			Μεταβλητές επιλογής		Μεταβλητές πλεονάσματος			Τεχνητές μεταβλητές			
Πίνακας	Γραμμή	C	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	v_1	v_2	v_3	Σταθερές
I	0	1	$-\frac{6}{10}$	-1	0	0	0	-100	-100	-100	0
	1	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20
	2	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20
	3	0	2	6	0	0	-1	0	0	1	12
II	0	1	$\frac{3.497}{5}$	1.499	-100	-100	-100	0	0	0	$\boxed{5.200}$
	1	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20
	2	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20
	3	0	2	6	0	0	1	0	0	1	12
III	0	1	0	$\frac{20.481}{25}$	$\frac{3.497}{50}$	-100	-100	$-\frac{8.497}{50}$	0	0	$\boxed{\frac{9.006}{5}}$
	1	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	0	0	2
	2	0	0	3	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	10
	3	0	0	$\frac{26}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	-1	$-\frac{1}{5}$	0	1	8
IV	0	1	0	0	$\frac{2.498}{65}$	-100	$\frac{7.481}{130}$	$-\frac{8.998}{65}$	0	$-\frac{20.481}{130}$	$\boxed{\frac{35.154}{65}}$
	1	0	1	0	$-\frac{3}{26}$	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{26}$	0	$-\frac{1}{13}$	$\frac{18}{13}$
	2	0	0	0	$\frac{5}{13}$	-1	$\frac{15}{26}$	$-\frac{5}{13}$	1	$-\frac{15}{26}$	$\frac{71}{13}$
	3	0	0	1	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{5}{26}$	$-\frac{1}{26}$	0	$\frac{5}{26}$	$\frac{20}{13}$
V	0	1	0	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{19}{75}$	0	$-\frac{1.501}{15}$	$-\frac{7.481}{75}$	-100	$\boxed{\frac{56}{15}}$
	1	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{3}$
	2	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{26}{15}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{26}{15}$	-1	$\frac{28}{3}$
	3	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
VI	0	1	0	0	0	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{10}$	-100	$-\frac{2.498}{25}$	$-\frac{999}{10}$	$\boxed{\frac{14}{5}}$
	1	0	1	0	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{4}$	3
	2	0	0	0	1	$-\frac{13}{5}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{13}{5}$	$-\frac{3}{2}$	14
	3	0	0	1	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	1

Πίνακας 7

Η επιλογή της γραμμής άξονα στον Πίνακα ΙΙ ακολουθεί αυστηρά την προηγούμενη διαδικασία. Εδώ, εφόσον το μικρότερο μετατοπισμένο πηλίκο είναι

$$\text{Min}\left\{\frac{20}{10},\frac{20}{5},\frac{12}{2}\right\} = \{2,4,6\} = 2$$

η γραμμή 1 είναι η γραμμή άξονας και το στοιχείο 10 (μέσα σε κύκλο) είναι το στοιχείο άξονας. Μετασχηματίζοντας τη στήλη άξονα σε μοναδιαίο διάνυσμα, καταλέγουμε στον Πίνακα ΙΙΙ που δίνει τη λύση (C, x_1, v_2, v_3) = ((9006/5), 2, 10, 8). Τώρα που το x_1 έχει αντικαταστήσει το v_1 στη βάση, το κόστος του διαιτολογίου έχει ουσιαστικά μειωθεί: από \$5.200 σε μόνο λίγο παραπάνω από \$1.800.

Το επόμενο βήμα δεν είναι παρά η επανάληψη της ίδιας διαδικασίας. Αλλά σημειώστε ότι αυτό θα πάρει δύο ακόμη βήματα άξονα για να διώξουμε τις υπόλοιπες δύο τεχνητές μεταβλητές. Επειδή η εισαγωγή των μεταβλητών v_1 αναπόφευκτα μακραίνουν τη διαδικασία υπολογισμού, θα πρέπει να προσπαθούμε αν μπορούμε να ελαττώσουμε τον αριθμό αυτών των πρόσθετων μεταβλητών. Αυτό μπορεί παραδείγματος χάριν να γίνει αν η πρώτη στήλη του πίνακα συντελεστών περιέχει τα στοιχεία 0, 1 και 0 (και όχι τα 10, 5 και 2), γιατί τότε μπορούμε να παραλείψουμε το v_2 και το x_1 θα πάρει τη θέση του στην αρχική βάση.

Από τον Πίνακα ΙΙ και κάτω, κάθε διαδοχικός πίνακας στον **Πίνακα 7** δείχνει μια ελάττωση του κόστους. Όταν το κόστος ελαττωθεί στο (14/5) = 2,8 στον Πίνακα VI, μπορούμε να πούμε παρατηρώντας τη γραμμή 0 ότι καμία επιπλέον ελάττωση δεν είναι δυνατή επειδή δεν εμφανίζεται πια κανένα θετικό στοιχείο στις στήλες των x_j, s_i και υ_i. Η άριστη λύση μας θα είναι συνεπώς

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = (3, 1, 14, 0, 0)$$

$$\overline{C} = \$2{,}8$$

Μια άλλη εφαρμογή των τεχνητών μεταβλητών

Η χρήση των τεχνητών μεταβλητών δεν είναι αποκλειστική για τα προβλήματα ελαχιστοποίησης. Σε μερικά προβλήματα μεγιστοποίησης, οι μεταβλητές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξίσου αποτελεσματικά.

Όταν, στο πλαίσιο μεγιστοποίησης, ένας από τους περιορισμούς (έστω ο τρίτος) συμβαίνει να εκφράζεται από μια ισότητα, δεν θα είναι αναγκαία μια μεταβλητή s_3. Στην περίπτωση αυτή, μας «κλέβουν» ένα μοναδιαίο διάνυσμα από τον πίνακα simplex, με αποτέλεσμα η λεγόμενη «προκατασκευασμένη αρχική ΒΕΛ», να μην είναι διαθέσιμη. Για να διορθώσουμε την κατάσταση, μπορούμε να εισάγουμε μια τεχνητή μεταβλητή (για τον τρίτο περιορισμό) για να γεμίσει το κενό από την απουσία της μεταβλητής s_3 δημιουργώντας έτσι ένα μοναδιαίο διάνυσμα του σωστού τύπου.

Φυσικά, για να εξασφαλίσουμε ότι η v_3 στην περίπτωση, αυτή θα είναι αποκλεισμένη από την άριστη λύση, θα πρέπει να της δώσουμε ένα αρνητικό συντελεστή (αρνητικό ποσοστό οριακού κέρδους) στην αντικειμενική συνάρτηση. Κατά τα άλλα, θα εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο simplex όπως και προηγουμένως.

Εκφυλισμός

Τα γραμμικά προγράμματα που εξετάσαμε παραπάνω έχουν την κοινή ιδιότητα ότι τα διανύσματα των σταθερών στις m εξισώσεις περιορισμών δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί λιγότερων από m διανυσμάτων συντελεστών. Στην (3.10'), για παράδειγμα, το διάνυσμα στο δεξιό μέλος δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός από λιγότερα των τριών διανυσμάτων του αριστερού μέλους. Σαν αποτέλεσμα έχουμε ότι καθεμιά από τις m μεταβλητές στη βάση πρέπει να παίρνει μια μη μηδενική τιμή. Γι' αυτό κάθε σημείο στο χώρο λύσεων του **Πίνακα 3** έχει ακριβώς τρία μη μηδενικά στοιχεία. Όταν η ιδιότητα αυτή δεν ικανοποιείται, το γραμμικό πρόγραμμα λέγεται εκφυλισμένο.

Η μόνη εκδήλωση εκφυλισμού, όσον αφορά τη μέθοδο simplex, είναι η εμφάνιση «συνδεδεμένων» μετατοπισμένων πηλίκων. Δηλαδή, δύο ή περισσότερα πηλίκα έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι είναι τα μικρότερα, έτσι ώστε δύο ή περισσότερες γραμμές θα είναι δικαιολογημένα υποψήφιες ως γραμμή άξονα. Εφόσον δεν είναι δυνατό να μετατοπίσουμε κάθε φορά περισσότερες από μία μεταβλητές, πρέπει να βρούμε κάποιο κριτήριο για να ξεπεράσουμε το εμπόδιο.

Μια πρακτική, αν και αυθαίρετη, μέθοδος είναι απλά να επιλέξουμε τη γραμμή άξονα κατά τέτοιο τρόπο ώστε, μεταξύ των συνδεδεμένων μεταβλητών, η μία με την αριστερή θέση στον πίνακα simplex είναι αυτή που στην πραγματικότητα θα μετατοπιστεί. Με αυτό το κριτήριο γίνεται δυνατό να συνεχίσουμε με τα υπόλοιπα βήματα άξονες κατά ένα συστηματικό τρόπο. Στις εκφυλισμένες περιπτώσεις, ένα βήμα άξονα ίσως δεν μπορεί καθόλου να βελτιώσει το κέρδος ή να ελαττώσει το κόστος. Μπορεί να χρειαστούν πραγματικά πολλά βήματα άξονες του τύπου μηδενικής βελτίωσης πριν η επαναληπτική διαδικασία καταφέρει να βγει από το αδιέξοδο. Ωστόσο, πέρα από το εμπόδιο αυτό και την πιθανότητα μηδενικής βελτίωσης, η εφαρμογή της μεθόδου simplex στην εκφυλισμένη περίπτωση είναι πάλι η ίδια όπως προηγουμένως.

Η εν λόγω διαδικασία είναι εύκολη, αλλά στα γραμμικά προγράμματα μεγάλων διαστάσεων η διαδικασία υπολογισμού θα είναι αναπόφευκτα μεγάλη και επίπονη. Ευτυχώς, οι νέοι υπολογιστές βοηθούν στους επαναληπτικούς υπολογισμούς που ένα πρόγραμμα συνεπάγεται. Δίνοντας κατάλληλα σε ένα υπολογιστή ένα σύνολο από εντολές (με άλλα λόγια, ένα κατάλληλο πρόγραμμα), μπορούμε να βασιστούμε στη μηχανή για να εκτελέσει τα διαδοχικά βήματα του αλγορίθμου simplex πιστά, ακούραστα και με μια υπεράνθρωπη ταχύτητα. Οι μεγάλες διαστάσεις τότε δεν θέτουν μεγάλο πρόβλημα αλλά υπόκεινται μόνο στην ικανότητα του υπολογιστή.

3.8 ΔΥΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει γραμμικά προγράμματα μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης ως δύο χωριστούς τύπους προβλημάτων. Αλλά, στην πραγματικότητα, σε κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης (για την ελαχιστοποίηση της C), υπάρχει πάντα ένα αντίστοιχο πρόγραμμα μεγιστοποίησης (για τη μεγιστοποίηση μιας νέας μεταβλητής, της C*), με την ιδιότητα $\overline{C^*}=\overline{C}$. Παρόμοια, για κάθε πρόγραμμα μεγιστοποίησης του π, υπάρχει πάντα ένα αντίστοιχο πρόγραμμα ελαχιστοποίησης του π έτσι ώστε $\overline{p^*} = \overline{p}$. Το αρχικό γραμμικό πρόγραμμα αναφέρεται συνήθως ως το πρωτογενές πρόγραμμα (ή απλά πρωτογενές), και το αντίστοιχο του είναι γνωστό ως δυαδικό πρόγραμμα (ή εν συντομία δυαδικό). Λαμβάνοντας αυτό υπ' όψιν, τα προγράμματα ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης μάλιστα, είναι πραγματικά τόσο ξεχωρισμένα όσο φαίνονται να είναι. Μάλιστα, εφόσον οι άριστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων στο πρωτογενές και στο δυαδικό πάντα ταυτίζονται, μπορούμε να επιλέξουμε να εργαστούμε με το ευκολότερο από τα δύο' όπως θα δούμε, είναι πάντα δυνατό να μεταφράσουμε τις τιμές των λύσεων των μεταβλητών του δυαδικού προγράμματος σε μεταβλητές του πρωτογενούς προγράμματος και αντίστροφα.

Το δυαδικό πρόγραμμα

Για μια ξεκάθαρη διάκριση, ας συμβολίσουμε τις μεταβλητές επιλογής ενός πρωτογενούς με x_j (όπως κάναμε) και τις μεταβλητές επιλογής ενός δυαδικού με y_i. Οι δομές του πρωτογενούς και του δυαδικού συνδέονται κατόπιν η μια με την άλλη όπως φαίνεται στα δύο παρακάτω παραδείγματα.

Πρωτογενές

Παράδειγμα 1

Μεγιστοποιείται $\pi = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$ Ελαχιστοποιείται $\pi^* = 12y_1 + 42y_2$

Υποκείμενο στο $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 42 \end{bmatrix}$ Υποκείμενο στο $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Και $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ Και $y_1, y_2 \geq 0$

Παράδειγμα 2

Ελαχιστοποιείται $C = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3$ Μεγιστοποιείται $\pi^* = 2y_1 + 5y_2$

Υποκείμενο στο $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ Υποκείμενο στο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

Και $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ Και $y_1, y_2 \geq 0$

Εν συντομία, οι κανόνες μετατροπής είναι οι εξής:

(1) Αλλάξτε το «μεγιστοποιείται» με «ελαχιστοποιείται», και αντίστροφα. (Δημιουργήστε το προς ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση δυαδικό βάζοντας έναν αστερίσκο σ' αυτό που μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται του πρωτογενούς.)

(2) Το σύμβολο της ανισότητας στους περιορισμούς του πρωτογενούς πρέπει να αντιστραφεί στους περιορισμούς του δυαδικού, αν και το πρόσημο > στους μη αρνητικούς περιορισμούς δεν μεταβάλλεται ποτέ.

(3) Ως πίνακα συντελεστών στους δυαδικούς περιορισμούς θα πάρετε τον ανάστροφο του πίνακα συντελεστών των περιορισμών του πρωτογενούς.

(4) Το διάνυσμα γραμμή των συντελεστών στην πρωτογενή αντικειμενική συνάρτηση είναι, μετά την αναστροφή, το διάνυσμα στήλη των σταθερών στους περιορισμούς του δυαδικού. Ομοίως, η στήλη διάνυσμα των σταθερών στους περιορισμούς του πρωτογενούς γίνεται, μετά την αναστροφή, το διάνυσμα γραμμή των συντελεστών στη δυαδική αντικειμενική συνάρτηση.

Από αυτούς τους κανόνες μετασχηματισμού, θα πρέπει να είναι εύκολο να συνάγουμε ότι το δυαδικό του δυαδικού προγράμματος είναι το ίδιο το πρωτογενές, υπό τον όρο ότι στη θέση του y βάζουμε x και ότι σβήνουμε (αντί να βάζουμε) τον αστερίσκο στην αντικειμενική συνάρτηση.

Γενικεύοντας τα δύο παραπάνω παραδείγματα, μπορούμε να γράψουμε το Πρωτογενές και το δυαδικό πρόγραμμα με το συμβολισμό πινάκων ως εξής :

Πρωτογενές		*Δυαδικό*
Μεγιστοποιείται, $\pi = c'x$		Ελαχιστοποιείται $\pi^* = r'y$
υποκείμενο στο $Ax \leq r$		υποκείμενο στο $A'y \geq c$
και $x \geq 0$		και $y \geq 0$
Ελαχιστοποιείται $C = c'x$		Μεγιστοποιείται $C^* = r'y$
υποκείμενο στο $Ax \geq r$	—»	υποκείμενο στο $A'y \leq c$
και $x \geq 0$		και $y \geq 0$

Σημειώστε ότι αν το πρωτογενές έχει m περιορισμούς και m μεταβλητές επιλογής, έτσι ώστε ο πίνακας A να είναι m x n, το δυαδικό τότε θα έχει n περιορισμούς και m μεταβλητές επιλογής επειδή ο πίνακας A', που είναι ο ανάστροφος του A, είναι n x m. Οι διαστάσεις των άλλων πινάκων που εμφανίζονται στο πρωτογενές πρόγραμμα είναι ως εξής: c' είναι 1 x n, x είναι n x 1, και r είναι mxl. Το διάνυσμα y στο δυαδικό είναι m x 1.

Στο ότι το πρωτογενές και το δυαδικό μπορεί να περιέχουν διαφορετικό αριθμό περιορισμών και μεταβλητών επιλογής οφείλεται ο διαφορετικός βαθμός ευκολίας επίλυσης. Στα δύο παραπάνω παραδείγματα, τα πρωτογενή (με τρεις μεταβλητές) δεν είναι εύκολο να επιλυθούν διαγραμματικά. Αντίθετα, εφόσον τα δυαδικά έχουν δύο μεταβλητές, επιλύονται διαγραμματικά ευκολότερα. Επιπλέον, ακόμα και όταν και τα δύο προγράμματα, το πρωτογενές και το δυαδικό, δεν επιδέχονται διαγραμματική λύση, οπότε πρέπει αναγκαστικά να καταφύγουμε στον αλγόριθμο simplex, πάλι θα θέλουμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε πρόγραμμα έχει λιγότερους περιορισμούς διότι λιγότεροι περιορισμοί συνεπάγονται μικρότερη διάσταση της βάσης και πρόσθεση λιγότερων ψευδομεταβλητών. Τελικά, ακόμα και όταν το πρωτογενές και το δυαδικό έχουν ίδιο (ή σχεδόν ίδιο) αριθμό περιορισμών, θα είναι πιο εύκολο στη λύση αν πάρουμε το πρόγραμμα μεγιστοποίησης, επειδή θα περιέχει συνήθως μια έτοιμη αρχική ΒΕΛ, οπότε δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με τεχνητές μεταβλητές.

Θεωρήματα δυαδικότητας

Μολονότι παρέχει ένα βαθμό ελευθερίας, αυτή η ευχέρεια επιλογής προκαλεί ένα πρόβλημα: Αν αποφασίσουμε να εργαστούμε με το δυαδικό, η λύση θα αποτελείται από τις τιμές των $\overline{y_i}$ (και, έστω, $\overline{C*}$)' αλλά αν το πραγματικό μας ενδιαφέρον είναι οι τιμές λύσης των $\overline{Xj}$ (και $\overline{C}$) του πρωτογενούς, η εξαγωγή της πρωτογενούς λύσης από τη δυαδική και το αντίθετο, βρίσκεται στα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα δυαδικότητας Ι. Οι άριστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων του πρωτογενούς και δυαδικού είναι πάντα ίδιες, υπό τον όρο ότι οι άριστες εφικτές λύσεις πράγματι υπάρχουν, δηλαδή, $\overline{C} = \overline{C*}$ και $\overline{p} = \overline{p*}$

Θεώρημα δυαδικότητας ΙΙ. (α) Αν κάποια μεταβλητή επιλογής στο γραμμικό πρόγραμμα είναι άριστα μη μηδενική, τότε η αντίστοιχη ψευδομεταβλητή στο συζυγές πρόγραμμα πρέπει να είναι άριστα μηδενική. Δηλαδή (χρησιμοποιώντας το σύμβολο s_i για την i-οστή ψευδομεταβλητή του πρωτογενούς, και το σύμβολο t_j για την j-οστή ψευδομεταβλητή του δυαδικού),

$$\overline{y_i} > 0 \Rightarrow \overline{s_i} = 0 \qquad \text{και} \qquad \overline{Xj} > 0 \Rightarrow \overline{tj} = 0$$

(β) Αν κάποια ψευδομεταβλητή στο γραμμικό πρόγραμμα είναι άριστα μη μηδενική, τότε η αντίστοιχη μεταβλητή επιλογής στο συζυγές πρόγραμμα πρέπει να είναι άριστα μηδενική. Δηλαδή,

$$\overline{s_i} > 0 \Rightarrow \overline{y_i} = 0 \qquad \text{και} \qquad \overline{tj} > 0 \Rightarrow \overline{Xj} = 0$$

Σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα, η επιλογή μεταξύ πρωτογενούς και δυαδικού όσον αφορά την άριστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν έχει νόημα. Και λόγω του δεύτερου θεωρήματος, που μιλάει για τη σχέση συμπληρωματικής επιβράδυνσης μεταξύ των μεταβλητών επιλογής ενός προγράμματος και των ψευδομεταβλητών του άλλου, η άριστη λύση που παίρνουμε για ένα δεδομένο γραμμικό πρόγραμμα εξασφαλίζει επαρκείς πληροφορίες για να βρούμε την άριστη λύση του συζυγούς προγράμματος.

Πριν εξηγήσουμε τις εφαρμογές τους, θα είναι ενδιαφέρον να σκιαγραφήσουμε την ορθολογική βάση πίσω από τα δύο θεωρήματα. Ειδικότερα θα θεωρήσουμε ένα πρωτογενές πρόγραμμα του τύπου μεγιστοποίησης, ο συλλογισμός όμως θα είναι ανάλογος και για την εκδοχή της ελαχιστοποίησης. Οι περιορισμοί ενός πρωτογενούς προγράμματος μεγιστοποίησης μπορούν να εκφραστούν από μια ανισότητα πινάκων $Ax \leq r$. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας ένα διάνυσμα μεταβλητών επιβράδυνσης s, μπορούμε να μετατρέψουμε την ανισότητα σε μια εξίσωση πινάκων:

$$Ax + s = r \qquad (s \geq 0) \qquad (3.18)$$

Αν το πρόβλημα περιέχει m πρωτογενείς περιορισμούς και n πρωτογενείς μεταβλητές επιλογής, τότε ο πίνακας A είναι m x n, το x είναι n x 1, και το Ax —όπως και τα s και r — είναι m x 1. Έτσι θα ήταν εφικτό να πολλαπλασιάσουμε από εμπρός κάθε όρο στην (3.18) με ένα διάνυσμα 1 x m. Επειδή το δυαδικό πρόγραμμα πρέπει να έχει m μεταβλητές επιλογής, η διάσταση του διανύσματος y είναι m x 1 και ο ανάστροφος του y', 1 x m. Όταν αυτό το τελευταίο διάνυσμα πολλαπλασιαστεί από εμπρός με την (3.18), παίρνουμε

$$y'Ax + y's = y'r$$
$$= r'y = \pi^* \qquad (3.19)$$

Σημειώστε ότι κάθε όρος της (3.19) είναι 1 x 1 – δηλαδή βαθμωτό. Οι δύο εκφράσεις y'r και r'y δεν είναι μόνο και τα δυο βαθμωτά αλλά έχουν και τα δυο την ίδια τιμή.

Αν πάμε τώρα στο δυαδικό πρόγραμμα, μπορούμε να εκφράσουμε τους περιορισμούς του με την ανισότητα πινάκων $A'y \geq c$. Αλλά χρησιμοποιώντας ένα διάνυσμα μεταβλητών πλεονάσματος —που θα συμβολίσουμε με t— μπορούμε πάλι να μετατρέψουμε την ανισότητα αυτή σε εξίσωση πινάκων:

$$A'y - t = c \qquad (t \geq 0) \qquad (3.20)$$

Εφόσον κάθε όρος στην (3.20) έχει διάσταση n x 1, μπορούμε να τον πολλαπλασιάσουμε από εμπρός με το lxn διάνυσμα x'. Το αποτέλεσμα είναι $x'A'y - x't = x'c$ ή, παίρνοντας τους ανάστροφους κάθε όρου,

$$y'Ax - t'x = c'x$$
$$= \pi \qquad (3.21)$$

Από τις (3.19) και (3.21) έπεται ότι

$\pi^* — \pi = y's + t'x \geq 0$ [από τους μη αρνητικούς περιορισμούς] (3.22)

Συνεπώς, το π* (το δυαδικό προς ελαχιστοποίηση) δεν μπορεί ποτέ να γίνει μικρότερο του π (του πρωτογενούς προς μεγιστοποίηση)" και το π δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί το π*. Ωστόσο, όταν το π* ελαχιστοποιείται και το π μεγιστοποιείται, οι δύο τιμές θα είναι ίσες. Αυτό αποτελεί τη βάση του αποτελέσματος π = π * του Θεωρήματος I.

Στις άριστες λύσεις του πρωτογενούς και του δυαδικού όπου τα π και π* είναι ίσα, η (3.22) συνεπάγεται ότι

$$\overline{y}'\overline{s} + \overline{t}'\overline{x} = 0$$

ή αναλυτικότερα,

$$(\overline{y}_1\overline{s}_1 + \ldots + \overline{y}_m\overline{s}_m) + (\overline{t}_1\overline{x}_1 + \ldots + \overline{t}_m\overline{s}_m) = 0 \qquad (3.23)$$

Για να ικανοποιείται η εξίσωση αυτή, έχοντας υπ' όψιν τους μη αρνητικούς περιορισμούς των μεταβλητών, πρέπει καθένας από τους m + n όρους γινόμενο να είναι ίσος με 0. Αυτό μας οδηγεί ευθέως στο Θεώρημα II. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η απαίτηση να είναι κάθε όρος γινόμενο στην (3.23) ίσος με μηδέν, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο το γεγονός ότι ένας παράγοντας του γινομένου θα είναι θετικός (έστω ο $\overline{y}_i > 0$) ως βάση για να συμπεράνουμε ότι ο άλλος όρος του γινομένου θα είναι μηδέν ($\overline{s}_i = 0$). Η ίδια απαίτηση δεν μας επιτρέπει όμως να χρησιμοποιήσουμε το ότι ένας παράγοντας είναι μηδέν (έστω ο $\overline{t}_j = 0$), για να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι ο άλλος παράγοντας του γινομένου είναι θετικός ($\overline{x}_j > 0$) — γιατί μπορεί να είναι μηδέν και το $\overline{t}_j$ και το $\overline{x}_j$ και ακόμη να ικανοποιείται η απαίτηση $\overline{x}_j\,\overline{t}_j = 0$.

Λύνοντας το πρωτογενές μέσω του δυαδικού

Ας δούμε τώρα την εφαρμογή των θεωρημάτων δυαδικότητας, χρησιμοποιώντας το παραπάνω Παράδειγμα I. Εφόσον το δυαδικό πρόγραμμα στο παράδειγμα αυτό, με μόνο δύο μεταβλητές επιλογής, μπορεί να επιλυθεί διαγραμματικά, ας βρούμε πρώτα τη δυαδική άριστη λύση από το γράφημα και ας καθορίσουμε την πρωτογενή άριστη λύση με τη βοήθεια των δυαδικών θεωρημάτων.

Όπως μπορούμε να επαληθεύσουμε, η διαγραμματική ανάλυση του δυαδικού προγράμματος μας δίνει την ακόλουθη πληροφορία:

$$(\overline{y_1}, \overline{y_2}) = (2, ½)$$

έτσι, από την αντικειμενική συνάρτηση, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι

$$\overline{p*} = 12(2) + 42(1/2) = 45$$

Επιπλέον, όταν οι τιμές των $\overline{y_i}$ αντικατασταθούν στους δυαδικούς περιορισμούς, οι πρώτοι δύο περιορισμοί ανάγονται σε δύο εξισώσεις, ενώ αντιθέτως ο τρίτος περιορισμός ανάγεται σε μια αυστηρή ανισότητα. Έτσι, $\overline{t_1} = \overline{t_2} = 0$, ενώ $\overline{t_3} > 0$. Με βάση αυτήν την πληροφορία σχετικά με το δυαδικό, θα πρέπει να βρούμε την άριστη λύση του πρωτογενούς.

Εφόσον τα $\overline{y_1}$ και $\overline{y_2}$ είναι και τα δυο μη μηδενικά, σύμφωνα με τη σχέση συμπληρωματικής επιβράδυνσης που έχουμε στο Θεώρημα δυαδικότητας ΙΙ, πρέπει να έχουμε $\overline{s_1} = \overline{s_2} = 0$, έτσι ώστε οι πρώτοι δυο (και μόνο οι δυο) περιορισμοί του πρωτογενούς πρέπει να είναι αυστηρές ισότητες για την αριστοποίηση. Επιπλέον, εφόσον $\overline{t_3} > 0$, συνεπάγεται ότι $\overline{x_3} = 0$. Έτσι, ο τομέας των περιορισμών του πρωτογενούς προγράμματος στο Παράδειγμα Ι θα έχει την εξής μορφή στην άριστη λύση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 42 \end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

οπότε έχουμε $\overline{x_1} = 3$ και $\overline{x_2} = 9$. Συνεπώς μπορούμε να εκφράσουμε τις λύσεις των μεταβλητών επιλογής του πρωτογενούς με την εξίσωση

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = (3,9,0) \qquad (3.25)$$

Με αυτό ολοκληρώσαμε τη μετάφραση των $\overline{y_i}$ σε $\overline{x_j}$.

Συμφωνά με το Θεώρημα δυαδικότητας Ι, η τιμή του $\overline{p}$ θα πρέπει να είναι 45. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των $\overline{x_j}$ στην πρωτογενή αντικειμενική συνάρτηση, θα πάρουμε πράγματι: $\overline{p}$ = 3(3) + 4(9) + 0 = 45.

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό και χρήσιμο χαρακτηριστικό που αφορά τη δυαδικότητα των γραμμικών προγραμμάτων είναι ότι, αν το δυαδικό επιλυθεί από ένα αλγόριθμο simplex (και όχι από ένα γράφημα), μπορούμε στην πραγματικότητα να διαβάσουμε αμέσως την πρωτογενή άριστη λύση από τον άριστο (τελικό) πίνακα καθώς και αυτήν του δυαδικού. Έτσι λοιπόν η μετάφραση των $\overline{y_i}$ σε $\overline{x_j}$ γίνεται τώρα αυτόματα.

Ας το διευκρινίσουμε με τη βοήθεια του άριστου πίνακα του δυαδικού προγράμματος του Παραδείγματος Ι, που φαίνεται στον **Πίνακα 8**. Από τα τέσσερα μοναδιαία διανύσματα στον πίνακα αυτό, η δυαδική άριστη λύση μπορεί εύκολα να εξαχθεί

$$(\overline{p^*}, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{t_3}) = (45, 2, ½, 7/2\ )$$

όπου t_3 συμβολίζει την τρίτη δυαδική ψευδομεταβλητή.

Πίνακας 20.1 Δυαδικός άριστος πίνακας

Γραμμή	π^*	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	v_1	v_2	v_3	Σταθερά
0	1	0	0	$\boxed{-3}$	-9	0		Παραλεί-		$\boxed{45}$
1	0	0	0	$-11/2$	$5/2$	1		πονται ως		7/2
2	0	0	1	$1/2$	$-1/2$	0		μη σχετι-		1/2
3	0	1	0	-2	1	0		κά		2

Πίνακα 8

Αυτοί οι τέσσερις αριθμοί είναι φυσικά, τα στοιχεία της στήλης των σταθερών. Ωστόσο, αν κοιτάξουμε στη γραμμή 0 κάτω από τις στήλες των ψευδομεταβλητών και πάρουμε τις απόλυτες τιμές των τριών αριθμών που είναι στο πλαίσιο, δηλαδή τους αριθμούς 3, 9 και 0, θα έχουμε ακριβώς τις τιμές των $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ και $\bar{x}_3$ στην (3.25), τακτοποιημένες με τη σωστή διάταξη.

Ως γενικό κανόνα, μπορούμε πάντα να αντιστοιχήσουμε τις στήλες των t_j του δυαδικού άριστου πίνακα με τις μεταβλητές x_j και να πάρουμε τις απόλυτες τιμές των στοιχείων της κορυφής σαν τις άριστες τιμές των πρωτογενών μεταβλητών επιλογής. Επιπλέον, μπορούμε πάντα να αντιστοιχήσουμε τις στήλες y_j με τις πρωτογενείς ψευδομεταβλητές και να διαβάσουμε τις απόλυτες τιμές των στοιχείων της κορυφής στις στήλες αυτές σαν τιμές των $\bar{s}_i$. Στον **Πίνακα 8**, τα δύο μηδενικά μέσα στη γραμμή 0 δίνουν $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$, που ξέρουμε ότι είναι αληθές. Εφόσον το στοιχείο που βρίσκεται στο τετράγωνο στη στήλη των σταθερών μάς δίνει επίσης την τιμή του $\bar{p}$ βάσει του Θεωρήματος δυαδικότητας Ι, όλες οι σχετικές πληροφορίες που αφορούν την πρωτογενή άριστη λύση μπορεί να συναχθούν διαβάζοντας τη γραμμή 0 του δυαδικού άριστου πίνακα! Κατ' αναλογία, μπορούμε επίσης να πάρουμε την άριστη δυαδική λύση από τη γραμμή 0 ενός πρωτογενούς άριστου πίνακα.

Αυτό το πολύ βολικό αποτέλεσμα συμφωνεί απόλυτα με το πνεύμα του Θεωρήματος δυαδικότητας ΙΙ. Κάθε δυαδική μεταβλητή που παίρνει μια μη μηδενική τιμή στην άριστη λύση —εδώ y_1,y_2 και t_3 — πρέπει να χαρακτηρίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα στήλης στον άριστο πίνακα. Εφόσον η στήλη του π* είναι μοναδιαίο διάνυσμα του τύπου e_1 (με μονάδα το πρώτο στοιχείο), τα μοναδιαία διανύσματα στις στήλες των y_1,y_2 και t_3 πρέπει να έχουν το πρώτο στοιχείο μηδέν. Σύμφωνα με τη μέθοδο που μόλις εκθέσαμε, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \bar{x}_3 = 0$. Αλλά αυτό το συμπέρασμα είναι ακριβώς το Θεώρημα δυαδικότητας ΙΙ. Ομοίως, αντιστρέφοντας την εφαρμογή της μεθόδου, το ότι τα $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$ είναι μη μηδενικά (στον πρωτογενή άριστο πίνακα) θα συνεπάγεται ότι τα $\bar{t}_1$ και $\bar{t}_2$ είναι μηδέν, αυτό θα εμποδίζει τις στήλες των t_1 και t_2 στον **Πίνακα 8**. να είναι μοναδιαία διανύσματα.

3.9 Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΕΝΟΣ ΔΥΑΔΙΚΟΥ

Είναι πλέον φανερό ότι το δυαδικό ενός γραμμικού προγράμματος μπορεί να χρησιμεύσει ως υπολογιστικό υποκατάστατο του πρωτογενούς. Ωστόσο είναι πιο σημαντικό το ότι ένα δυαδικό πρόγραμμα έχει μια ξεχωριστή και σημαντική οικονομική σημασία εντελώς δική του.

Δυαδικό του προγράμματος παραγωγής

Ας ερμηνεύσουμε πρώτα το δυαδικό πρόγραμμα του προβλήματος παραγωγής. Στην απλή περίπτωση δύο προϊόντων με δύο περιορισμούς, το πρωτογενές είναι της μορφής

Μεγιστοποιείται $\pi = c_1x_1 + c_2x_2$

υποκείμενο στους $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$

και $\quad x_1, x_2 \geq 0$

Αντίστοιχα, το δυαδικό πρόγραμμα γράφεται ως

Ελαχιστοποιείται $\pi^* = r_1y_1 + r_2y_2$

υποκείμενο στους $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

και $\quad y_1, y_2 \geq 0$

Πριν ερμηνεύσουμε ακριβώς το δυαδικό, πρέπει να διευκρινίσουμε πρώτα τη γενική φύση των δυαδικών μεταβλητών, καθώς επίσης και τη μονάδα μέτρησης τους. Στο πρωτογενές, το π δηλώνει το συνολικό ακαθάριστο κέρδος σε δολάρια. Έχοντας υπόψη ότι $\overline{p^*} = \overline{p}$, το σύμβολο π* στο δυαδικό θα πρέπει επίσης να είναι σε δολάρια, όπως επίσης πρέπει να είναι και η παράσταση $r_1y_1 + r_2y_2$. Εφόσον το σύμβολο αναφέρεται στη συνολική ποσότητα του i-οστού παραγωγικού πόρου στην πάγια εγκατάσταση της επιχείρησης (που ονομάσαμε σ' ένα προηγούμενο παράδειγμα δυναμικότητα του λοστού τμήματος παραγωγής), το σύμβολο y_i πρέπει προφανώς να είναι εκφρασμένο σε δολάρια ανά μονάδα του i-οστού παραγωγικού πόρου, επειδή μόνον τότε κάθε όρος $r_i y_i$ είναι σε δολάρια. Δηλαδή, το y_i σημαίνει κάποιο είδος αξιολόγησης αυτού του παραγωγικού πόρου.

Ωστόσο, η αξιολόγηση δεν συμπίπτει προφανώς με την αγοραία τιμή, ο παραγωγικός πόρος βρίσκεται ήδη στην κυριότητα της επιχείρησης σαν μέρος της πάγιας εγκατάστασης της και η επιχείρηση δεν τον αγοράζει στην τιμή της αγοράς. Είναι μάλλον μία τιμή που αποδίδεται στον παραγωγικό πόρο. Γι' αυτό η τιμή του αναφέρεται ως λογιστική τιμή ή σκιώδης τιμή του i-οστού παραγωγικού πόρου. Είναι σκόπιμο να θεωρήσουμε το y_i εναλλακτικά ως κόστος ευκαιρίας για τη χρήση του i-οστού πόρου.

Ας εξετάσουμε τα τρία συστατικά του δυαδικού προγράμματος. Πρώτον, αυτό που εννοούμε με τους μη αρνητικούς περιορισμούς $y_i \geq 0$ είναι ότι απαγορεύεται να αποδοθεί σε οποιοδήποτε παραγωγικό πόρο μια τιμή (κόστος ευκαιρίας) μικρότερη από μηδέν. Αυτό είναι βέβαια από οικονομικής πλευράς μια απαίτηση λογική. Στην πραγματικότητα, θα πρέπει πάντα να αποδώσουμε μια θετική τιμή σ' ένα παραγωγικό πόρο, εκτός αν αυτός συμβαίνει να μην αξιοποιείται πλήρως, οπότε ένα μηδενικό κόστος ευκαιρίας προκύπτει από μια παραγωγική χρήση του. Αυτό σημαίνει ότι ένα θετικό κόστος ευκαιρίας για ένα παραγωγικό πόρο ($y_i > 0$) αντιστοιχεί πάντα στην πλήρη χρησιμοποίηση του παραγωγικού πόρου στην άριστη λύση ($s_i = 0$). Σημειώστε ότι από αυτήν τη γραμμή ερμηνείας έχουμε για μια ακόμα φορά οδηγηθεί πίσω στο δεύτερο θεώρημα δυαδικότητας, το οποίο έχει τώρα αποκτήσει μια οικονομική έννοια.

Ξαναγυρνώντας στους περιορισμούς του δυαδικού, ας εξετάσουμε ειδικότερα τον πρώτο περιορισμό:

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 \geq c_1 \qquad (3.26)$$

Εφόσον οι συντελεστές συμβολίζουν την ποσότητα του i-οστού παραγωγικού πόρου που χρησιμοποιείται στην παραγωγή μιας μονάδας του j-οστού προϊόντος, το αριστερό μέλος της (3.26) παριστά το συνολικό κόστος ευκαιρίας της παραγωγής μιας μονάδας του πρώτου προϊόντος (j = 1). Ο όρος c_1 του δεξιού μέλους συμβολίζει το ανά μονάδα ακαθάριστο κέρδος του πρώτου προϊόντος. Έτσι, αυτό που ο περιορισμός απαιτεί είναι το κόστος ευκαιρίας της παραγωγής να υπολογίζεται σ' ένα επίπεδο τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο το ακαθάριστο κέρδος από το προϊόν.

Τώρα, με μια πρώτη ματιά θα δούμε ότι αν το κόστος ευκαιρίας της παραγωγής υπερβαίνει πράγματι το κέρδος, τότε η κατανομή των παραγωγικών πόρων δεν πρέπει να είναι άριστη απλά, παραλείποντας το πρώτο προϊόν, απελευθερώνονται πόροι που μπορούν αμέσως να χρησιμοποιηθούν αποδοτικότερα σε άλλες χρήσεις. Από πλευράς μαθηματικών, αν ικανοποιείται στην άριστη λύση η περίπτωση > του πρόσημου ≥ της (3.26), τότε το πρώτο προϊόν δεν θα πρέπει να παράγεται ($\overline{x_1}$ = 0). Από την άλλη μεριά, αν το πρώτο προϊόν παράγεται, δηλαδή αν $\overline{x_1} \neq 0$, τότε το κόστος ευκαιρίας της παραγωγής πρέπει να είναι ακριβώς ίσο με το ακαθόριστο κέρδος και πρέπει να ικανοποιείται στην άριστη λύση το = του ≥. Με λίγα λόγια, $\overline{t_1} > 0 \Rightarrow \overline{x_1} = 0 \Rightarrow \overline{x_1} > 0 \Rightarrow \overline{t_1} = 0$. Ωστόσο αυτό είναι απλά μια επαναδιατύπωση του Θεωρήματος δυαδικότητας ΙΙ. Ο δεύτερος περιορισμός μπορεί, φυσικά, να δώσει μια ανάλογη ερμηνεία.

Τέλος, ας κοιτάξουμε τη δυαδική αντικειμενική συνάρτηση. Υπενθυμίζουμε ότι τα r_1 και r_2 είναι οι συνολικές ποσότητες των διαθεσίμων παραγωγικών πόρων στην πάγια εγκατάσταση της επιχείρησης, οπότε η παράσταση

$$\pi^* = r_1y_1 + r_2y_2$$

δηλώνει προφανώς τη συνολική αξία που αποδίδεται σ' αυτούς τους παραγωγικούς πόρους. Η ιδέα του δυαδικού προγράμματος είναι να ελαχιστοποιεί αυτό το σύνολο ικανοποιώντας τους παραπάνω περιορισμούς. Έτσι, η αντιστοιχία μεταξύ του πρωτογενούς και του δυαδικού δείχνει ότι η μεγιστοποίηση του κέρδους στα άριστα επίπεδα εκροής είναι ισοδύναμη προς την ελαχιστοποίηση της συνολικής απόδοσης ή του κόστους ευκαιρίας των παραγωγικών πόρων στην εγκατάσταση. Όλα αυτά, υπό τον όρο ότι το κόστος ευκαιρίας της παραγωγής του κάθε προϊόντος δεν πρέπει να είναι χαμηλότερα από το ακαθάριστο κέρδος από αυτό το προϊόν. Με το $\overline{p} = \overline{p*}$ εννοούμε ότι, στην άριστη λύση, το συνολικό ακαθάριστο κέρδος πρέπει να αποδοθεί ή να διατεθεί στο σύνολο των παραγωγικών πόρων στην εγκατάσταση διά μέσου των σκιωδών τιμών. Αυτό συμπληρώνει την οικονομική ερμηνεία του δυαδικού.

Χάριν απλότητας, έχουμε φτιάξει το πρόβλημα παραγωγής ως ένα απλό πρόβλημα δύο προϊόντων με δύο παραγωγικούς πόρους. Αλλά εφόσον ο συλλογισμός που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη συζήτηση δεν εξαρτάται από την υπόθεση ότι m = n = 2, η ερμηνεία που βασίζεται στο κόστος ευκαιρίας του δυαδικού μπορεί να γενικευθεί σε μια δομή m-παραγωγικών πόρων και η-προϊόντων.

Δυαδικό του προβλήματος διαιτολογίου

Με ανάλογο συλλογισμό, μπορούμε να δώσουμε μια ερμηνεία βασισμένη στην αποδιδόμενη αξία στις μεταβλητές επιλογής του δυαδικού προβλήματος διαιτολογίου.

Το γενικό πρόβλημα διαιτολογίου, με συμβολισμό πινάκων, είναι:

Ελαχιστοποιείται $C = c'x$

υποκείμενο στους $Ax \geq r$

και $x > 0$

όπου C είναι το συνολικό κόστος διατροφής, c' το διάνυσμα γραμμή των τιμών των τροφών, x το διάνυσμα στήλη των ποσοτήτων των τροφών, A ο πίνακας των συντελεστών α_{ij} (η ποσότητα του ϊ-οστού συστατικού στην j-οστή τροφή) και τ το διάνυσμα στήλη των ελαχίστων αναγκών διατροφής. Ανάλογα, το δυαδικό του μπορεί να γραφεί ως

Μεγιστοποιείται $C^* = r'y$

υποκείμενο στους $A'y \leq c$

και $y \geq 0$

όπου y είναι το διάνυσμα στήλη των δυαδικών μεταβλητών επιλογής.

Επειδή το C είναι σε νομισματικές μονάδες δολαρίων, το δυαδικό αντίστοιχο του C* πρέπει επίσης να είναι σε δολάρια. Αλλά τα στοιχεία του διανύσματος ν' είναι στις φυσικές μονάδες των αντιστοίχων συστατικών, οπότε τα στοιχεία του διανύσματος y θα είναι σε δολάρια ανά μονάδα του αντίστοιχου συστατικού. Με άλλα λόγια, οι δυαδικές μεταβλητές επιλογής είναι ένα είδος αξιολόγησης επίσης' αυτή τη φορά συμβολίζουν την αποδιδόμενη αξία των διαφόρων συστατικών. Σαν τέτοιες, δεν μπορούν ποτέ να είναι αρνητικές.

Με αυτήν τη λογική, κάθε περιορισμός του δυαδικού προγράμματος μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε να δείχνει ότι η συνολική αξία που αποδίδεται στα συστατικά που περιέχονται σε μια μονάδα της κάθε τροφής, δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την τιμή της τροφής αυτής. Συγκεκριμένα, η κοινή λογική δεν μας επιτρέπει να αγοράσουμε την j-οστή τροφή αν η τιμή της υπερβαίνει την αποδιδόμενη θρεπτική της αξία, διότι έτσι δεν θα εισπράττουμε την αξία των χρημάτων μας. Επομένως, στην άριστη λύση, θα αγοράσουμε μόνον αυτές τις τροφές για τις οποίες οι αποδιδόμενες αξίες του θρεπτικού τους περιεχόμενου είναι ακριβώς ίσες με τις αντίστοιχες τιμές. Αυτό, φυσικά, είναι μια περίπτωση του Θεωρήματος δυαδικότητας II.

Σαν αντικειμενική συνάρτηση του δυαδικού προγράμματος, αναζητούμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνολική αξία του ελάχιστου απαιτούμενου θρεπτικού περιεχόμενου με τους παραπάνω περιορισμούς. Όταν αυτό το μέγιστο επιτευχθεί, θα έχουμε επίσης πετύχει στην πράξη την ελαχιστοποίηση του κόστους του διαιτολογίου μας, ενώ θα ικανοποιούμε όλες τις απαιτούμενες ελάχιστες ποσότητες θρεπτικών συστατικών.

Δυαδικές μεταβλητές επιλογής και πολλαπλασιαστής Lagrange

Οι δυαδικές μεταβλητές επιλογής, yi, αναπαριστούν, όπως έχουμε δει, τις σκιώδεις τιμές ή τις αποδιδόμενες αξίες. Μπορούμε να αποδείξουμε όμως ότι, στην άριστη λύση, οι μεταβλητές αυτές παίζουν τον ίδιο ρόλο στο γραμμικό προγραμματισμό όπως ο πολλαπλασιαστής Lagrange στα κλασικά προβλήματα αριστοποίησης. Δηλαδή, οι δυαδικές μεταβλητές επιλογής δίνουν το μέτρο ευαισθησίας της άριστης τιμής της πρωτογενούς αντικειμενικής συνάρτησης στις αλλαγές στις σταθερές των πρωτογενών περιορισμών.

Για την απόδειξη αυτή, ας θεωρήσουμε ξανά το πρόβλημα παράγωγης και το δυαδικό του. Στην άριστη λύση, οι μεταβλητές y_i παίρνουν τις τιμές $\overline{y_i}$ και η δυαδική αντικειμενική συνάρτηση γίνεται

$$\overline{p*} = r_1\overline{y_1} + r_2\overline{y_2}.$$

Εφόσον $\overline{p} = \overline{p*}$, ωστόσο, μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{p} = r_1\overline{y_1} + r_2\overline{y_2}.$$

Έτσι, παραγωγίζοντας το $\overline{p}$ ως προς r_1 και r_2, έχουμε

$$\overline{y_1} = \frac{q\overline{p}}{qr_1} \quad \text{και} \quad \overline{y_2} = \frac{q\overline{p}}{qr_2}$$

το οποίο δείχνει ότι η $\overline{y_i}$ (η άριστη τιμή της i-οστής δυαδικής μεταβλητής επιλογής) είναι ένα μέτρο ευαισθησίας του $\overline{p}$ (η αριστοποιημένη τιμή της πρωτογενούς αντικειμενικής συνάρτησης) στις απειροστές μεταβολές του r_1 (της παραμετρικής σταθεράς στον ί-οστό πρωτογενή περιορισμό). Ειδικότερα, οι $\overline{y_i}$ μας λένε πώς μια ελάχιστη χαλάρωση του ί-οστού περιορισμού δυναμικότητας (αύξηση του ποσού του i-οστού παραγωγικού πόρου) θα αλλάξει το συνολικό ακαθάριστο κέρδος στην άριστη λύση. Εφόσον στο κλασικό πρόβλημα μεγιστοποίησης η z = f(x, y) που υπόκειται στο g(x, y) = c, που δίνει τη συνάρτηση του Lagrange Z = f(x,y) + X[c — g(x,y)], η άριστη τιμή του πολλαπλασιαστή του Lagrange έχει την έννοια του

$$\overline{l} = \frac{d\overline{Z}}{dc}$$

είναι φανερό ότι οι δυαδικές μεταβλητές επιλογής και οι πολλαπλασιαστές Lagrange παίζουν τον ίδιο ρόλο, ακόμα και αν τα πλαίσια είναι διαφορετικά στην κάθε περίπτωση.

Η ερμηνεία του y- μέσω του πολλαπλασιαστή Lagrange είναι φυσικά απόλυτα συνεπής με την παραπάνω ερμηνεία του y_l ως αποδιδόμενη αξία του ί-οστού παραγωγικού πόρου. Όταν ο i-οστός περιορισμός χαλαρώσει, ο i-οστός παραγωγικός πόρος διατίθεται σε μεγαλύτερη ποσότητα και το αποτέλεσμα αυτού στο συνολικό κέρδος (ερμηνεία μέσω του πολλαπλασιαστή Lagrange) θα εξαρτάται άμεσα από το μέγεθος της αποδιδόμενης αξίας του ί-οστού παραγωγικού πόρου (η προηγούμενη ερμηνεία). Αυτό συμβαίνει επειδή, στην άριστη λύση, το συνολικό ακαθάριστο κέρδος και η συνολική αποδιδόμενη αξία των παραγωγικών πόρων της επιχείρησης πρέπει να είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή ολόκληρο το συνολικό ακαθάριστο κέρδος θα μοιράζεται μεταξύ των παραγωγικών πόρων στην πάγια εγκατάσταση της επιχείρησης σαν αμοιβή για το ρόλο αυτών των παραγωγικών πόρων στη διαδικασία παραγωγής.

3.10 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ: ΜΙΚΡΟ-ΕΠΙΠΕΔΟ

Σ αυτά που είδαμε μέχρι τώρα, ο τομέας των περιορισμών ενός γραμμικού προγράμματος διαβάζεται γενικώς οριζοντίως δηλαδή περιορισμός εκφρασμένος με ανισότητα εξετάζεται σαν μια ολότητα που δημιουργεί ένα όριο (ή υπερεπίπεδο), που με τη σειρά του δημιουργεί δύο ημιχώρους. Ωστόσο, σε μια περίπτωση, σχετικά με το ζήτημα της βασικής εφικτής λύσης, παρεκκλίναμε από την παραπάνω πρακτική και διαβάσαμε τους συντελεστές στους περιορισμούς κάθετα σαν διανύσματα στήλες. Μια τέτοια κάθετη ματιά εξασφαλίζει έναν εναλλακτικό τρόπο να δούμε ένα γραμμικό πρόγραμμα.

Έννοια της δραστηριότητας

Φανταστείτε μια επιχείρηση που χρησιμοποιεί δύο παραγωγικούς πόρους (K και L) για να παράγει δύο αγαθά (x_1 και x_2). Αν οι διαθέσιμοι παραγωγικοί πόροι περιορίζονται σε K_0 και L_0, οι περιορισμοί της επιχείρησης μπορούν να γραφούν σε μια μόνο διανυσματική εξίσωση ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s_2 = \begin{bmatrix} K_0 \\ L_0 \end{bmatrix} \qquad (3.27)$$

Διαβάζοντας κάθετα, δηλαδή παίρνοντας κάθε μεταβλητή (με το δικό της διάνυσμα συντελεστών) μόνη της, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αναπαριστούν μια ξεχωριστή δραστηριότητα της επιχείρησης. Η πρώτη δραστηριότητα, για παράδειγμα, είναι η παραγωγή του πρώτου προϊόντος, οπότε το πρόβλημα προσδιορισμού της λύσης $\overline{x_1}$ είναι στην πραγματικότητα αυτό του προσδιορισμού του άριστου επιπέδου της πρώτης δραστηριότητας. Ομοίως, η παραγωγή του δεύτερου προϊόντος είναι η δεύτερη δραστηριότητα της επιχείρησης. Μπορούμε ακόμα να θεωρήσουμε ότι κάθε μεταβλητή επιβράδυνσης συνδέεται με μια χωριστή δραστηριότητα —αυτή τού «να μένει κάποιος παραγωγικός πόρος ανεκμετάλλευτος»— αν και αυτό είναι από τη φύση του περισσότερο μια αδράνεια παρά μια δραστηριότητα.

Η επιδίωξη κάθε δραστηριότητας θα έχει σαφή επίπτωση στους παραγωγικούς πόρους της επιχείρησης. Όπως φαίνεται από το πρώτο διάνυσμα της (3.27), κάθε μονάδα της πρώτης δραστηριότητας θα καταναλώνει α_{11} μονάδες του κεφαλαίου και α_{21} μονάδες εργασίας. Ανάλογα, το δεύτερο διάνυσμα αποκαλύπτει ότι κάθε μονάδα της δεύτερης δραστηριότητας θα χρησιμοποιεί α_{12} μονάδες κεφαλαίου και α_{22} μονάδες εργασίας. Αυτά τα διανύσματα, που θα τα ονομάζουμε διανύσματα δραστηριότητας, είναι συνεπώς οι δείκτες των απαιτήσεων σε εισροές για αύξηση κατά μία μονάδα του επιπέδου δραστηριότητας που συζητάμε. Σημειώστε ότι, εφόσον οι μεταβλητές επιβράδυνσης συνδέονται αποκλειστικά η καθεμιά με ένα συγκεκριμένο παραγωγικό πόρο, τα διανύσματα δραστηριότητα τους είναι αντίστοιχα τα μοναδιαία διανύσματα

$$e_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad e_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αν συμβολίσουμε τα πρώτα διανύσματα δραστηριότητας με A_1 και A_2 και γράψουμε τα διανύσματα παραγωγικών πόρων στο δεξί μέλος της (3.27) ως r, η διανυσματική εξίσωση (3.27) μπορεί να γραφεί πιο απλά ως

$$A_1x_1 + A_2x_2 + e_1s_1 + e_2s_2 = r \qquad (3.27')$$

Αυτή η εξίσωση, που λέει ότι οι δραστηριότητες παραγωγής και οι δραστηριότητες επιβράδυνσης της επιχείρησης πρέπει μαζί να εξαντλούν ακριβώς τους συνολικούς διαθέσιμους παραγωγικούς πόρους, είναι ο περιορισμός στο γραμμικό πρόγραμμα παραγωγής της επιχείρησης. Η ιδέα του προγράμματος είναι τότε να επιλέξουμε τα μη αρνητικά επίπεδα αυτών των τεσσάρων δραστηριοτήτων έτσι ώστε κάποια αντικειμενική συνάρτηση να μεγιστοποιηθεί, υποκείμενη στον περιορισμό εξάντλησης των παραγωγικών πόρων (3.27'). Όταν το πρόβλημα εξεταστεί με αυτήν την οπτική γωνία, γίνεται ένα πρόβλημα ανάλυσης δραστηριότητας.

Όπως το ορίσαμε παραπάνω, ένα διάνυσμα δραστηριότητας δείχνει μόνο τις απαιτήσεις εισροών της δραστηριότητας που συζητάμε. Αλλά είναι δυνατό να συμπεριληφθεί επίσης στο διάνυσμα η εικόνα των εκροών. Για παράδειγμα, στη θέση του διανύσματος $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ μπορούμε – χρησιμοποιώντας το πρόσημο +, για τις εκροές και το πρόσημο πλην, - , για τις εισροές – να περιγράψουμε την πρώτη δραστηριότητα με το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ -a_{11} \\ -a_{21} \end{bmatrix}$, όπου το στοιχείο στην πρώτη γραμμή συμβολίζει μια μονάδα του επιπέδου της εκροής και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι οι εισροές που χρειάζονται. Ωστόσο, για το σκοπό μας εδώ είναι πιο βολικό να χρησιμοποιήσουμε την εκδοχή ενός τέτοιου διανύσματος που δείχνει την απαίτηση εισροής.

Σταθερές αποδόσεις κλίμακας και σταθεροί λόγοι εισροών

Βλέποντας το πρόγραμμα παραγωγής ως ανάλυση δραστηριότητας, θα έρθουμε αντιμέτωποι με δύο υποθέσεις που υπονοούνται στο γραμμικό πρόγραμμα σε σχέση με τη συνάρτηση παραγωγής. Η μια υπόθεση είναι αυτή των σταθερών αποδόσεων κλίμακας (ΣΑΚ) και η άλλη αυτή των σταθερών λόγων των εισροών.

Η υπόθεση ΣΑΚ εκφράζεται στο γεγονός ότι τα στοιχεία στα διανύσματα δραστηριότητας A_1 και A_2 είναι όλα σταθερά. Εξαιτίας αυτής της σταθερότητας, αν $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ μονάδες του $\begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix}$ απαιτούνται για να παράγουν μια μονάδα του x_1, τότε για να παραχθούν k μονάδες του x_1 θα απαιτούνται k ακριβώς φορές τόσο από κάθε παραγωγικό πόρο. Το ίδιο είναι αλήθεια για το δεύτερο προϊόν βασικά, η υπόθεση ΣΑΚ εφαρμόζεται και στις δραστηριότητες επιβράδυνσης.

Η υπόθεση των σταθερών λόγων των εισροών φαίνεται στο ότι κάθε προϊόν παράγεται μόνον από μια δραστηριότητα, για την οποία ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας είναι αυστηρά καθορισμένος από το δεδομένο διάνυσμα δραστηριότητας, όπως φαίνεται στην (3.27). Αυτό σημαίνει ότι η αντικατάσταση που γίνεται μεταξύ εργασίας και κεφαλαίου αποκλείεται εντελώς στο παράδειγμα μας. Αλλά, φυσικά, ο γραμμικός προγραμματισμός δεν είναι στην πραγματικότητα τόσο άκαμπτος. Στην περίπτωση που η εργασία και το κεφάλαιο μπορούν πράγματι να συνδυαστούν σε (έστω) τρεις διαφορετικούς λόγους για την παραγωγή του x_1, μπορούμε εύκολα να το περιλάβουμε στο πρόγραμμα, καταγράφοντας για το εν λόγω προϊόν τρεις διαφορετικές δραστηριότητες αντί για μία, ως εξής:

$$(A_1x_1 + A_1^*x_1^* + A_1^{**}x_1^{**}) + A_2x_2 + e_1s_1 + e_2s_2 = r \qquad (3.28)$$

όπου $A_1 \neq A_1^* \neq A_1^{**}$ είναι τρία διαφορετικά διανύσματα δραστηριότητας που το καθένα περιγράφει ένα διαφορετικό λόγο κεφαλαίου-εργασίας κάτω από διαφορετικές διαδικασίες. Τα x_1 ,x_1^* και x_1^{**} αντίστοιχα, αναπαριστούν τις ποσότητες του πρώτου προϊόντος που παράγεται, αντίστοιχα, με τις τρεις διαδικασίες.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να χαλαρώσουμε την υπόθεση των σταθερών λόγων. Παρ' όλα αυτά, η υπόθεση ΣΑΚ διατηρείται πάντα.

Ακριβώς τρεις διαδικασίες παρουσιάζονται στην (3.28) για το προϊόν, αλλά εφόσον αυτές οι διαδικασίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα σε συνδυασμό, το πρώτο προϊόν μπορεί στην πραγματικότητα να παραχθεί με περισσοτέρους από τρεις τρόπους. Για παράδειγμα, αν η επιχείρηση επιθυμεί να παράγει ένα σύνολο 12 μονάδων αυτού του προϊόντος, αυτό μπορεί να είναι είτε με $x_1 = 3$, $x_1^* = 5$ και $x_1^{**} = 4$ είτε, διαφορετικά, μπορεί να επιλέξει το συνδυασμό (2,9,1) είτε (6,0,6) είτε (3,5, 4,5, 4) κλπ. Εφόσον καθένας από αυτούς τους πιθανούς συνδυασμούς συνεπάγεται ένα διαφορετικό λόγο κεφαλαίου-εργασίας για την παραγωγή της συνολικής εκροής και μπορεί, στην πράξη, να θεωρηθεί ένας ξεχωριστός τρόπος παραγωγής, φαίνεται ότι αν εισάγουμε την πολλαπλή διαδικασία παραγωγής στο γραμμικό πρόγραμμα, ο περιορισμός των σταθερών λόγων εισροών θα εξαφανιστεί σε μεγάλο βαθμό.

Αλλά η υπονοούμενη συνάρτηση παραγωγής στα πλαίσια του γραμμικού προγράμματος δεν θα είναι εντελώς η ίδια όπως αυτή που αντιμετωπίσαμε στην κλασική θεωρία παραγωγής.

Συναρτήσεις παραγωγής: Σύγκριση κλασικής ανάλυσης και γραμμικού προγραμματισμού

Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης που χρησιμοποιεί δύο παραγωγικούς πόρους, K και L, για να παράγει ένα μόνο εμπόρευμα. Για να διευκολύνουμε τη σύγκριση με προηγούμενες συζητήσεις των συναρτήσεων παραγωγής, ας επαναφέρουμε το σύμβολο Q για την παραγόμενη ποσότητα εκροής. Στην κλασική ανάλυση, η συνάρτηση παραγωγής

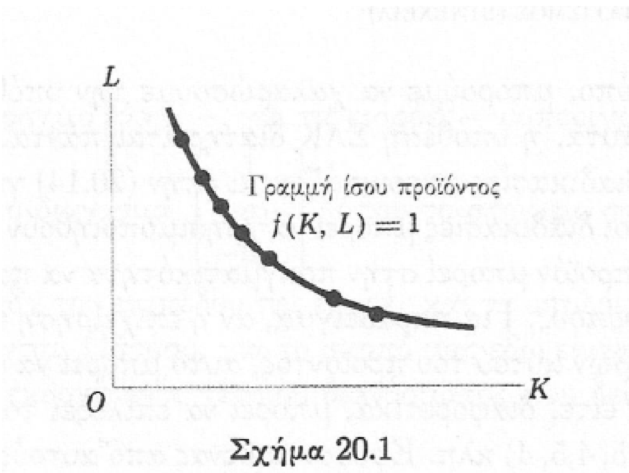
$$Q = f(K,L)$$

υποτίθεται ότι είναι παντού συνεχής και διαφορίσιμη. Για ένα συγκεκριμένο επίπεδο εκροής, έστω Q = 1, η συνάρτηση f θα δημιουργεί μια γραμμή ίσου προϊόντος

$$1 = f(K,L)$$

που παριστάνεται διαγραμματικά σαν μια ομαλή καμπύλη, όπως στο **Σχήμα 12.**Αυτή η γραμμή ίσου προϊόντος υπονοεί συνεχή υποκατάσταση μεταξύ εργασίας και κεφαλαίου. Καθώς συνεχίζουμε την υποκατάσταση, ο ρυθμός υποκατάστασης θα μεταβάλλεται κατά τρόπο συνεχή. Το ίδιο είναι αληθές για τις γραμμές ίσου προϊόντος που ανήκουν σε όλα τα άλλα πιθανά επίπεδα εκροής. Αλλά η κλασική συνάρτηση παραγωγής μπορεί ή όχι να χαρακτηρίζεται από τη ΣΑΚ.

Στο γραμμικό προγραμματισμό ή στην ανάλυση δραστηριότητας, οι γραμμές ίσου προϊόντος έχουν διαφορετική εμφάνιση. Πρώτα, ας θεωρήσουμε την περίπτωση μιας μόνο διαδικασίας, υποθέτοντας ένα σταθερό διάνυσμα δραστηριότητας $A_1 \equiv \begin{bmatrix} K_1 \\ L_1 \end{bmatrix}$ για το πρώτο προϊόν, που εδώ θεωρείται ως το μόνο προϊόν.

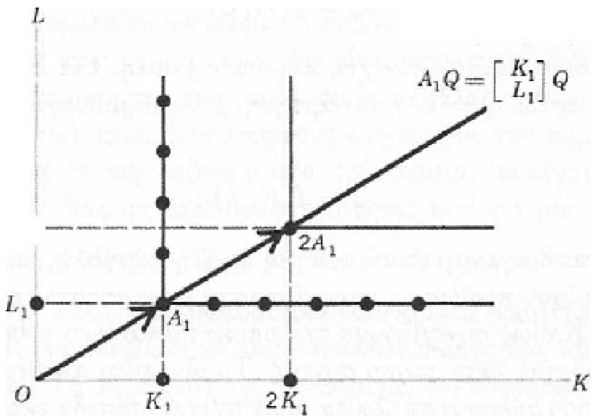


Σχήμα 12

Εφόσον η εκροή Q = 1 μπορεί μόνο να παραχθεί με K_1 μονάδες κεφαλαίου και L_1 μονάδες εργασίας, η γραμμή ίσου προϊόντος για την εκροή αυτή είναι μια εξίσωση της μορφής

$$1 = g(K_1,L_1)$$

Αυτό θα αναπαριστάται διαγραμματικά ως ένα μόνο σημείο A_1 στο επίπεδο των KL του Σχήματος 20.2, επειδή τα K_1 και L_1 είναι δύο σταθερές, έτσι ώστε η g (K_1, L_1) να αναφέρεται μόνο στην τιμή της συνάρτησης παραγωγής



Σχήμα 13

στο συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου. Το σημείο A_1 δεν είναι φυσικά τίποτε άλλο παρά η διαγραμματική αναπαράσταση του διανύσματος δραστηριότητας που ορίσαμε παραπάνω. Χάρη στην υπόθεση ΣΑΚ του γραμμικού προγραμματισμού, είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι η γραμμή ίσου προϊόντος για Q = 2, επίσης ένα μόνο σημείο, θα είναι στο $2A_1 \equiv 2\begin{bmatrix} K_1 \\ L_1 \end{bmatrix}$.

Επιπλέον, εφόσον τα σημεία της γραμμής ίσου προϊόντος είναι μη αρνητικά πολλαπλάσια του διανύσματος δραστηριότητας Αχ, πρέπει να βρίσκονται όλα πάνω στη γραμμική ακτίνα δραστηριότητας που φαίνεται στο **Σχήμα 13**.

Το να χρησιμοποιούμε τη λέξη γραμμή ίσον προϊόντος —έναν όρο που αντιστοιχεί σε μια καμπύλη— για να αναφερθούμε σ' ένα μόνο σημείο μπορεί να φαίνεται παράξενο. Πράγματι, είναι δυνατόν να ξαναερμηνεύσουμε τα σημεία γραμμής ίσου προϊόντος του **Σχήματος 13** σαν καμπύλες. Λόγω των σταθερών λόγων των εισροών, γνωρίζουμε ότι, αν το κεφάλαιο παραμένει στο K_1 ενώ η εργασία αυξάνει πέραν του L_1, η εκροή θα παραμένει στο Q = 1, επειδή η περίσσεια εργασίας δεν αποδίδει αν δεν υπάρχει ταυτόχρονη αύξηση στο κεφάλαιο. Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για το πλεονάζον κεφάλαιο. Αυτό το γεγονός, που μπορεί να εκφραστεί από τις εξισώσεις

$$1 = g(K_1, L_1 + \delta) \qquad \text{και} \qquad 1 = g(K_1 + \delta, L_1) \quad (\delta > 0)$$

σημαίνει διαγραμματικά ότι κάθε σημείο που βρίσκεται κατευθείαν προς βορρά ή κατευθείαν προς ανατολάς του A_1 πρέπει επίσης να αποδίδει εκροή $Q = 1$. Σαν αποτέλεσμα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραμμή ίσου προϊόντος για $Q = 1$ εναλλακτικά σαν μια γραμμή με σχήμα L με κορυφή το A_1. Για τον ίδιο λόγο, η γραμμή ίσου προϊόντος για $Q = 2$ μπορεί να απεικονίζεται σαν ένα άλλο L με κορυφή το 2 A_1 της ακτίνας. Ωστόσο, θα πρέπει να είναι προφανές ότι, μια κορυφή —που απαιτεί λιγότερο από τον ένα παραγωγικό πόρο και όχι περισσότερο από τον άλλο παραγωγικό πόρο από κάθε άλλο σημείο— πρέπει να είναι ο πιο αποτελεσματικός συνδυασμός εισροών σε μια γραμμή ίσου προϊόντος. Έτσι όλα τα άλλα σημεία, που λέμε ότι κυριαρχούνται από το σημείο κορυφή, δεν χρειάζεται να εξεταστούν.

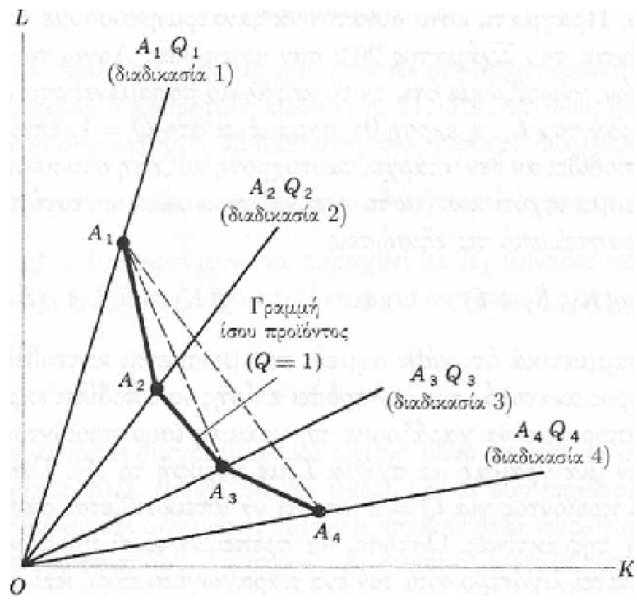
Για το λόγο αυτό, μια επιχείρηση μιας μόνο διαδικασίας πρέπει να λειτουργεί σε μια ακτίνα δραστηριότητας

$$A_1 Q = \begin{bmatrix} K_1 \\ L_1 \end{bmatrix} Q \qquad (Q \geq 0)$$

όπου Q, το επίπεδο εκροής, μπορεί να ερμηνευθεί εναλλακτικά ως το επίπεδο στο οποίο πρέπει να λειτουργεί αυτή η δραστηριότητα. Όταν θεωρήσουμε μια πολλαπλή διαδικασία παραγωγής του ίδιου προϊόντος, ωστόσο, θα εμφανίζεται ένας αριθμός από ακτίνες δραστηριότητας. Με (έστω) τέσσερα διανύσματα δραστηριότητας

$$A_1 \equiv \begin{bmatrix} K_1 \\ L_1 \end{bmatrix} \quad A_2 \equiv \begin{bmatrix} K_2 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad A_3 \equiv \begin{bmatrix} K_3 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad A_4 \equiv \begin{bmatrix} K_4 \\ L_4 \end{bmatrix} \qquad (3.29)$$

που το καθένα δείχνει έναν ξεχωριστό λόγο εισροών ικανό να αποφέρει μια μονάδα εκροής, μπορούμε να χαράξουμε τέσσερις ακτίνες δραστηριότητας όπως φαίνεται στο **Σχήμα 14**. Αυτές οι ακτίνες ονομάζονται A_j Q_j (j = 1,..., 4), όπου Q_j αναπαριστά την ποσότητα του προϊόντος που παράγεται με την j-οστή διαδικασία.



Σχήμα 14

Για να ορίσουμε τη γραμμή ίσου προϊόντος για Q(= /^Qj) = 1 σ' αυτήν την περίπτωση πολλαπλής διαδικασίας παραγωγής πρέπει πρώτα απ' όλα, τα τέσσερα σημεία A_1 , …, A4 - που το καθένα σημαίνει την αποκλειστική χρήση μιας «καθαρής» διαδικασίας στο επίπεδο της μονάδας - θα πρέπει να περιέχονται εξ ορισμού από την εν λόγω γραμμή ίσου προϊόντος. Αλλά υποθέτοντας ότι το προϊόν είναι διαιρετό, είναι επίσης δυνατόν να λειτουργήσουμε τις διαδικασίες με διάφορους συνδυασμούς, όπως

$$\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 \qquad \frac{1}{3}A_2 + \frac{2}{3}A_3 \qquad \frac{1}{5}A_3 + \frac{4}{5}A_4$$

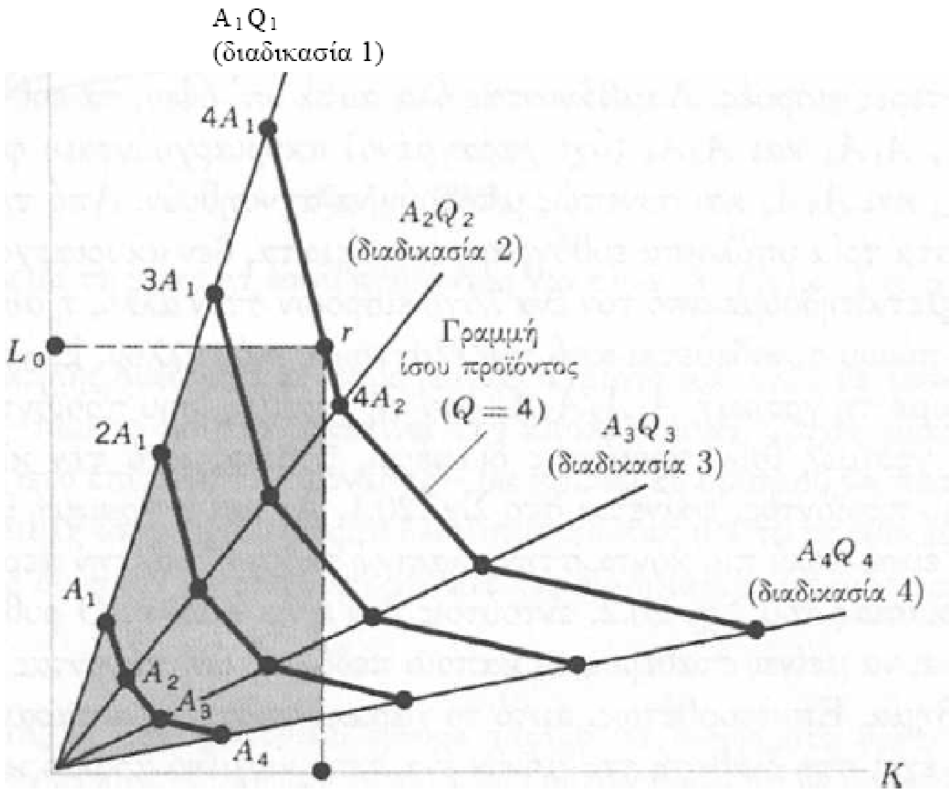
διότι αφού οι αριθμητικοί συντελεστές Q_j στο συνδυασμό δίνουν άθροισμα ίσο με 1, μπορούμε να πάρουμε την εκροή του $Q = 1$. Μαθηματικώς, αυτό σημαίνει ότι, για να παράγουμε μια μονάδα εκροής, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνον κυρτούς συνδυασμούς των καθαρών διανυσμάτων δραστηριότητας. Διαγραμματικά αυτό σημαίνει ότι οι λόγοι των εισροών που χαρακτηρίζουν τις συνδυασμένες διαδικασίες πρέπει να βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα διανύσματα δραστηριότητας A_1, …, A_4

Σε σχέση με αυτό, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, ενώ κάθε ζεύγος διανυσμάτων δραστηριότητας στο **Σχήμα 14** μπορεί θεωρητικά να είναι κυρτός συνδυασμός, χρειαζόμαστε μόνο τους κυρτούς συνδυασμούς των γειτονικών διανυσμάτων (όπως τους A_1A_2 και A_2A_3), επειδή οι συνδυασμοί των μη γειτονικών διανυσμάτων μπορούν να απορριφθούν ως αναποτελεσματικοί. Πάρτε το διακεκομμένο ευθύγραμμο τμήμα A_1A_3, για παράδειγμα. Επειδή βρίσκεται βορειοανατολικά του A_1A_2 και του A_2A_3, όλα τα σημεία του —εκτός μόνο των σημείων A_1 και A_3 — συνεπάγονται μεγαλύτερες απαιτήσεις εισροών και για το κεφάλαιο και για την εργασία, απ' ότι τα σημεία των A_1 A_2 και A_2A_3 και όμως η εκροή που παίρνουμε είναι ίση με αυτήν του $Q = 1$. Ο κυρτός συνδυασμός των A_1 και A_4 (το πιο απομακρυσμένο ζεύγος σημείων) τα πάει ακόμα χειρότερα, αφού το διακεκομμένο ευθύγραμμο τμήμα A_1A_4 βρίσκεται ακόμα μακρύτερα, άρα συνεπάγεται ακόμα περισσότερες εισροές. Λαμβάνοντας όλα αυτά υπ' όψιν, τα ευθύγραμμα τμήματα A_1A_3, A_1A_4 και A_2A_4 (όχι χαραγμένο) «κυριαρχούνται» φανερά από τα ΑιΑ$_2$, A_2A_3 και A_3A_4 και συνεπώς μπορούν να αγνοηθούν. Από την άλλη μεριά, τα σημεία στα τρία υπόλοιπα ευθύγραμμα τμήματα, δεν «κυριαρχούν» το ένα το άλλο' όταν μεταπηδούμε από τον ένα λόγο εισροών στον άλλο, η αύξηση ενός παραγωγικού πόρου συνοδεύεται από την ελάττωση ενός άλλου. Συνεπώς, μπορούμε να πάρουμε τη γραμμή $A_1A_2A_3A_4$ σαν τη γραμμή ίσου προϊόντος για $Q = 1$.

Αυτή η γραμμή ίσου προϊόντος διαφέρει, βέβαια, από την κλασική ομαλή γραμμή ίσου προϊόντος, φαίνεται στο **Σχήμα 12**. Αν και η γραμμή ίσου προϊόντος $A_1A_2A_3A_4$ είναι πολύ πιο κοντά στην κλασική εκδοχή από την περίπτωση μοναδικής διαδικασίας του **Σχήμα 13**, εντούτοις δεν είναι ομαλή. Ο ρυθμός υποκατάστασης τείνει να μείνει σταθερός σε κάποιο πεδίο τιμών, κάνοντας ύστερα ένα απότομο πήδημα. Επιπροσθέτως, αυτό το χαρακτηριστικό θα παραμένει εφόσον η επιχείρηση έχει στη διάθεση της μόνον ένα πεπερασμένο αριθμό καθαρών διαδικασιών, γιατί ενώ κάθε πεπερασμένη αύξηση του αριθμού των διαδικασιών αυξάνει μόνον τον αριθμό των ευθύγραμμων τμημάτων πάνω στη γραμμή ίσου προϊόντος, δεν μπορεί εντούτοις να εξαφανίσει τα απότομα σημεία. Άρα, έχοντας αυτά υπ' όψιν, η ομαλή γραμμή ίσου προϊόντος της κλασικής θεωρίας πρέπει προφανώς να βασίζεται στην υπόθεση ότι η επιχείρηση έχει στη διάθεση της έναν άπειρο αριθμό καθαρών διαδικασιών παραγωγής.

Οι γραμμές ίσου προϊόντος των άλλων επιπέδων εκροής μπορούν να κατασκευαστούν με τρόπο ανάλογο. Για Q = 2, για παράδειγμα, μπορούμε απλά να επεκτείνουμε κάθε διάνυσμα Aj σε 2Aj (διπλασιάζοντας την τετμημένη και την τεταγμένη του σημείου) και να ενώσουμε τα διαδοχικά ζεύγη των διανυσμάτων που θα προκύψουν. Λόγω της υπόθεσης ΣΑΚ στο γραμμικό προγραμματισμό, όλα τα σημεία σ' αυτήν τη νέα τεθλασμένη γραμμή ίσου προϊόντος θα συνδέονται με μια εκροή Q = 2. Τέσσερις τέτοιες γραμμές ίσου κόστους έχουν χαραχτεί το **Σχήμα 15**. Αλλά, εδώ έχουμε μια άλλη διαφορά από την κλασική προσέγγιση. Γιατί μολονότι η υπόθεση ΣΑΚ μπορεί να ενσωματώνεται στις κλασικές γραμμές ίσου προϊόντος (με ίσες αποστάσεις), αυτό δεν είναι υποχρεωτικό, αντίθετα, η υπόθεση ΣΑΚ θεωρείται πάντα δεδομένη στο γραμμικό προγραμματισμό.

Ας σημειωθεί ότι, ενώ είναι θεμιτό να προσθέτουμε τα σημεία που βρίσκονται κατευθείαν προς βορρά του A_1 και κατευθείαν ανατολικά του A_4, στην πρώτη γραμμή ίσου προϊόντος (Q = 1) και ομοίως για τις άλλες γραμμές ίσου προϊόντος, έχουμε αποφύγει να το κάνουμε απλώς γιατί τέτοια σημεία θα κυριαρχούνταν. Σαν αποτέλεσμα, όλες οι γραμμές ίσου προϊόντος θα βρίσκονται μέσα στο



Σχήμα 20.4

Σχήμα 15

εσωτερικό του κώνου που σχηματίζεται μεταξύ των δύο ακραίων ακτινών δραστηριότητας, A_1Q_1 και A_4Q_4. Μια τέτοια περιοχή, που αποτελεί ένα κυρτό σύνολο σημείων και που καλείται κυρτός κώνος, αναπαριστά το σύνολο όλων των μη αρνητικών γραμμικών συνδυασμών των δύο διανυσμάτων εδώ (A_1 και A_4). Δηλαδή, αν πάρουμε όλα τα δυνατά μη αρνητικά πολλαπλάσια των δύο διανυσμάτων και σχηματίσουμε όλα τα δυνατά αθροίσματα με τη μέθοδο παραλληλόγραμμου, τα διανύσματα αθροίσματα θα γεμίσουν το εσωτερικό του κώνου.

Αριστοποίηση

Ας διατυπώσουμε τώρα ένα απλό γραμμικό πρόγραμμα ερμηνεύοντας τους περιορισμούς ως δραστηριότητες. Υποθέτουμε ότι η επιχείρηση πολλαπλής διαδικασίας ενός μόνο προϊόντος, που απεικονίζεται στο **Σχήμα 15**, αναζητεί να μεγιστοποιήσει την εκροή Q μέσα στα όρια των διαθέσιμων παραγωγικών πόρων K_0 και L_0. Τότε το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα θα είναι

Μεγιστοποιείται $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

υποκείμενο στους $A_1Q_1 + A_2Q_2 + A_3Q_3 + A_4Q_4 \leq r$ (3.30)

και $Q_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, 4)$

όπου όλα τα σύμβολα Q είναι βαθμωτά, τα σύμβολα A_j συμβολίζουν τα διανύσματα δραστηριότητας που ορίζονται στην (3.29) και $r \equiv \begin{bmatrix} K_0 \\ L_0 \end{bmatrix}$ δίνει τους διαθέσιμους παραγωγικούς πόρους. Για το σκοπό μας, θα παραλείψουμε δραστηριότητες επιβράδυνσης.

Μπορούμε να λύσουμε αυτό το πρόγραμμα διαγραμματικά παρά το ότι υπάρχουν τέσσερις μεταβλητές επιλογής. Εφόσον διαβάζουμε τους περιορισμούς κάθετα και εφόσον κάθε διάνυσμα δραστηριότητας είναι ένα διάνυσμα δύο διαστάσεων, μπορούμε να χαράξουμε κάθε όρο AjQj των περιορισμών ως μια ακτίνα δραστηριότητας στο επίπεδο αξόνων KL (το χώρο εισροών) του **Σχήματος 15**. Βάζοντας τους παραγωγικούς πόρους αντί των μεταβλητών επιλογής στους άξονες, το πρόβλημα τεσσάρων διαστάσεων ανάγεται σ' ένα πρόβλημα δύο διαστάσεων.

Επειδή οι γραμμές ίσου προϊόντος —που περικλείουν τους οικονομικώς αποτελεσματικούς συνδυασμούς εισροών— περιορίζονται στον κυρτό κώνο που ορίζεται από τις δύο πιο απόμακρες ακτίνες δραστηριότητας, η επιχείρηση δεν χρειάζεται να κοιτάξει πέραν του κώνου για τις άριστες λύσεις. Αν χαράξουμε τα K_0 και L_0 στο διάγραμμα, η ορθογώνια περιοχή OK_0 R L_0 θα ορίζει το σύνολο όλων των εφικτών συνδυασμών εισροών που προσφέρονται στην επιχείρηση. Σβήνοντας από το ορθογώνιο ότι βρίσκεται έξω από τον κώνο, βρίσκουμε τελικά τη σκιασμένη περιοχή (την τομή του ορθογωνίου και του κώνου) να είναι το τελικό πεδίο επιλογής.

Φυσικά, το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί επίσης με την κανονική μέθοδο simplex, ή μπορούμε να διατυπώσουμε πρώτα το δυαδικό του γραμμικού προγράμματος, να το λύσουμε, και στη συνέχεια να πάρουμε τη λύση του πρωτογενούς. Η άριστη λύση θα είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Ειδικότερα, εφόσον υπάρχουν δύο περιορισμοί, γνωρίζουμε ότι όχι πάνω από δύο μεταβλητές επιλογής Q_j χρειάζεται να είναι μη μηδενικές στην άριστη λύση. Αυτό είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που έχουμε πάρει από την ανάλυση δραστηριότητας του προβλήματος.

3.11 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ: ΜΑΚΡΟ-ΕΠΙΠΕΔΟ

Στο επίπεδο της επιχείρησης, κάθε δραστηριότητα συνδέεται με μια ξεχωριστή διαδικασία παραγωγής. Σε εθνικό επίπεδο, μπορούμε αντ' αυτού να θεωρήσουμε ότι κάθε δραστηριότητα αντιπροσωπεύει έναν κλάδο. Συνεπώς, το επίπεδο στο οποίο μια δραστηριότητα λειτουργεί θα καθορίσει τώρα επιπλέον το επίπεδο εκροής του (μοναδικού) προϊόντος μιας ολόκληρης βιομηχανίας. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι κάθε κλάδος χαρακτηρίζεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας και από σταθερούς λόγους εισροών, η σχέση εισροής-εκροής κάθε κλάδου μπορεί να συνοψιστεί από μια μοναδική ακτίνα δραστηριότητας, στην οποία ένα σημείο που απέχει διπλάσια από το σημείο αρχής των αξόνων απ ότι ένα άλλο σημείο θα σημαίνει πάντα διπλάσια εκροή.

Εφόσον η ΣΑΚ και οι σταθεροί λόγοι των εισροών είναι καθιερωμένες υποθέσεις στα μοντέλα εισροών-εκροών, φαίνεται ότι μπορούμε να ερμηνεύσουμε την ανάλυση εισροών-εκροών σε όρους ανάλυσης δραστηριότητας ή γραμμικού προγραμματισμού, και όντως έτσι είναι.

Ανάλυση εισροών-εκροών και γραμμικός προγραμματισμός

Οι ανάγκες εισροών για τη λειτουργία κάθε δραστηριότητας (κλάδου) είναι δύο ειδών: μια πρωτογενής εισροή, που δεν είναι η εκροή κανενός κλάδου και ενδιάμεσες εισροές, που είναι αυτές οι ίδιες εκροές άλλων κλάδων. Αν υποθέσουμε ένα σύνολο n κλάδων, που καθένας παράγει ένα ξεχωριστό εμπόρευμα, και αν χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα για τους συντελεστές εισροών, μπορούμε να βρούμε ενδιαφέροντες τους ακόλουθους τρεις τύπους των διανυσμάτων:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -a_{0j} \\ -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ -a_{nj} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -a_{0j} \\ -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ -a_{nj} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ -a_{nj} \end{bmatrix} \qquad (3.31)$$

Το πρώτο από αυτά δίνει μια πλήρη περιγραφή της σχέσης εισροής-εκροής της j-οστής δραστηριότητας (κλάδου): το πρώτο στοιχείο (1) δείχνει μια μονάδα εκροής του j-οστου εμπορεύματος, το δεύτερο στοιχείο δείχνει την ανάγκη πρωτογενούς εισροής για τη δραστηριότητα αυτή, και τα υπόλοιπα στοιχεία απεικονίζουν την ανάγκη ενδιάμεσης εισροής. Το δεύτερο διάνυσμα, όπου το στοιχείο μονάδα έχει σβηστεί και τα πρόσημα όλων των a_{ij} έχουν αντιστραφεί, αφορά την περιγραφή από πλευράς εισροών μόνον του κλάδου. Το τρίτο διάνυσμα στενεύει ακόμη περισσότερο την προοπτική αφού περιέχει μόνο τις ενδιάμεσες εισροές. Ο όρος διάνυσμα δραστηριότητας δίνεται συχνά στην πρώτη εκδοχή της (3.31). Αλλά όπως και στην προηγούμενη ενότητα, θα φυλάξουμε αυτό το όνομα για μια τροποποιημένη εκδοχή, που θα εισαχθεί αργότερα.

Επί του παρόντος, ας θεωρήσουμε το τρίτο διάνυσμα στην (3.31). Επειδή στην οικονομία υπάρχουν π κλάδοι, μπορούμε να γράψουμε n τέτοια διανύσματα. Όταν τα βάζουμε μαζί, θα σχηματίσουν το γνωστό n x n πίνακα:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Απ' αυτόν τον πίνακα και επίσης ένα διάνυσμα εκροής και ένα διάνυσμα τελικής ζήτησης σαν τα ακόλουθα:

$$\text{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

το έργο μας είναι, σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση περί του ανοικτού μοντέλου εισροών-εκροών, να βρούμε ένα διάνυσμα x έτσι ώστε

$$(\text{I} - \text{A})\text{x} = \text{d} \qquad (3.32)$$

Η λύση, υποθέτοντας ότι (I - A) δεν είναι ιδιάζον, είναι απλά

$$\bar{x} = (\text{I} - \text{A})^{-1}\, \text{d} \qquad (3.33)$$

Δεν υπάρχει κανένας προφανής υπαινιγμός για αριστοποίηση του τύπου γραμμικού προγράμματος σε μια τέτοια διατύπωση του προβλήματος επειδή δεν υπάρχει αντικειμενική συνάρτηση και επειδή η εξίσωση (3.32) δεν περιέχει καθόλου ανισότητες, αν και είναι το ανάλογο των περιορισμών στο επίπεδο εκροής κάθε κλάδου (κάθε κλάδος θα πρέπει να παράγει αρκετό προϊόν ώστε να ικανοποιείται η συνολική ζήτηση).

Ωστόσο, το ίδιο πρόβλημα εισροών-εκροών μπορεί να κοιταχθεί από μια διαφορετική γωνία. Πρώτα απ' όλα, είναι εύκολο να δούμε ότι η εγγύηση για την ικανοποίηση της συνολικής ζήτησης είναι μόνον ότι η εκροή κάθε κλάδου δεν πρέπει να είναι λιγότερη (αλλά ίση με) τη συνολική ζήτηση. Συνεπώς, δεν στερείται νοήματος η αλλαγή της (3.32) στην ανισότητα

$$(I - A)x \geq d$$

Ωστόσο, για να φυλαχθούμε από αδικαιολόγητες υπερβολές —δηλαδή να εμποδίσουμε το > του πρόσημου ≥ να γίνει «απείθαρχο»— θα πρέπει επίσης να θέσουμε κάποιο είδος απαίτησης ελαχιστοποίησης σ' αυτήν την ανισότητα. Θεωρώντας, για παράδειγμα, την εργασία σαν μόνη πρωτογενή εισροή, μπορούμε να επιδιώξουμε την ελαχιστοποίηση της συνολικής εισροής εργασίας που απαιτείται για να παραχθεί η παραπάνω εκροή. Μπορούμε έτσι να προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{oj} x_j = [\alpha_{01} \;\; \alpha_{02} \;\; \ldots \;\; \alpha_{0n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = A_0' x$$

όπου το L συμβολίζει τη συνολική απαιτούμενη εργασία και A'_0 συμβολίζει το διάνυσμα γραμμή των συντελεστών εισροής εργασίας. Επιπρόσθετα, εφόσον τα επίπεδα εκροής x_j δεν μπορούν ποτέ να είναι αρνητικά, είναι εύλογο να θέσουμε τον περιορισμό $x \geq 0$. Σ' αυτό το πλαίσιο, το μοντέλο εισροών-εκροών (3.32) μπορεί να αναδιατυπωθεί στην ισοδύναμη μαθηματική μορφή

Ελαχιστοποιείται $L = A_0'x$

υποκείμενο στους $(I - A)x \geq d$ (3.34)

και $x \geq 0$

το οποίο, θα το αναγνωρίσετε, είναι απλά ένα σύνηθες γραμμικό πρόγραμμα.

Η λύση

Αυτό το γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να επιλυθεί από την μια ή την άλλη από τις δύο προσεγγίσεις. Μία είναι να διαβάσουμε τους n περιορισμούς οριζοντίως και η άλλη είναι να τους διαβάσουμε καθέτως.

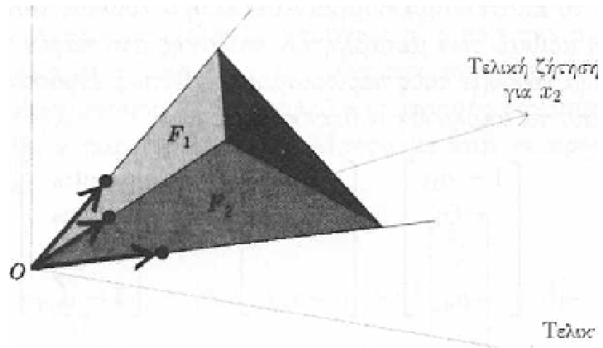
Όταν διαβάζουμε οριζοντίως, οι n περιορισμοί δημιουργούν n κλειστούς ημιχώρους που, μαζί με τους μη αρνητικούς περιορισμούς, θα ορίσουν μια εφικτή περιοχή (ένα κυρτό σύνολο) στο μη αρνητικό τεταρτημόριο. Η αντικειμενική συνάρτηση, από την άλλη μεριά, θα παράγει μια οικογένεια υπερεπιπέδων ίσης εργασίας. Για να βρούμε την άριστη λύση πρέπει να επιλέξουμε ένα σημείο στην εφικτή περιοχή που να βρίσκεται στο υπερεπίπεδο ίσης εργασίας με την ελάχιστη τιμή του L. Ωστόσο, αυτό το σημείο ($\bar{x}$) θα καταλήξει αναγκαστικά να είναι αυτό που δίνεται από την (3.33), γιατί αν η εργασία είναι μια απαραίτητη εισροή για κάθε παραγόμενο εμπόρευμα, τότε το διάνυσμα εκροής με την ελάχιστη απαιτούμενη εργασία πρέπει αναγκαστικά να είναι αυτό που δεν περιέχει εκροή περισσότερη από τη συνολική ζήτηση. Δηλαδή, το άριστο διάνυσμα εκροής είναι αναγκαστικά $\bar{x} = (I - A)^{-1}d$, που είναι η λύση του συνήθους μοντέλου εισροών-εκροών. Σημειώστε ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται ακριβώς. Αυτό το αποτέλεσμα συμβαίνει επειδή ο αριθμός των περιορισμών ταυτίζεται με τον αριθμό των μεταβλητών επιλογής στο παρόν πρόβλημα.

Τώρα, ας διαβάσουμε τους περιορισμούς καθέτως. Εφόσον ο πίνακας (I - A) αποτελείται από τα ακόλουθα n διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} \\ -a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ -a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{12} \\ 1-a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ -a_{n2} \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} -a_{1n} \\ -a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ 1-a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.34)$$

μπορούμε να τα χαράξουμε ως διανύσματα δραστηριότητας σ' ένα χώρο n διαστάσεων. Ειδικότερα, θα πρέπει να χαραχθούν τα διανύσματα αυτά στο χώρο τελικής ζήτησης (με τον j-οστό άξονα να συμβολίζει την τελική ζήτηση για x_j) —ακριβώς όπως τα διανύσματα δραστηριότητας στην (3.34) πρέπει να χαραχτούν στο χώρο εισροών (KL χώρος). Αυτά τα διανύσματα είναι τότε γραμμικώς συνδυασμένα μέσω ενός συνόλου μη αρνητικών συντελεστών x_1, …, x_n και το σύνολο όλων αυτών των μη αρνητικών συνδυασμών θα πάρει τη μορφή ενός κυρτού πολυεδρικού κώνου —το ανάλογο n διαστάσεων του κυρτού κώνου που συναντήσαμε στο **Σχήμα 15**. Μια εικόνα που επεξηγεί έναν τέτοιο κώνο δίνεται στο **Σχήμα 16**για την περίπτωση n = 3. Αν τα τρία βέλη εντοπίζουν τρία διανύσματα, τότε το σύνολο όλων των μη αρνητικών συνδυασμών των δύο εκ των τριών διανυσμάτων (με παραλληλόγραμμο) υα δημιουργεί μια επίπεδη επιφάνεια όπως η F_1 ή η F_2, η οποία υποτίθεται ότι εκτείνεται προς τα έξω (μακριά από την αρχή των αξόνων) σχηματίζοντας ένα κυρτό κώνο δύο διαστάσεων όμοιο με αυτόν στο **Σχήμα 15**. Αν, επιπλέον, σχηματίσουμε όλους τους δυνατούς μη αρνητικούς συνδυασμούς των σημείων πάνω στο F_1 και F_2, μπορούμε επίσης να συμπληρώσουμε το χώρο τον περιφραγμένο από τα επίπεδα F_1, F_2 και F_3 (που κρύβεται πίσω). Έτσι το σύνολο των μη αρνητικών συνδυασμών των τριών διανυσμάτων θα είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται είτε στο σύνορο είτε στο εσωτερικό του στερεού σχήματος που μοιάζει με πυραμίδα στο **Σχήμα 16**, το οποίο, όπως και τα F_1 και F_2, υποτίθεται ότι εκτείνεται προς τα έξω. Αυτό το στερεό σχηματίζει έναν πολυεδρικό κώνο —ένα κυρτό σύνολο— και τα επίπεδα που αναπαριστούν τα F_1, F_2 και F_3 (ή οι επεκτεινόμενες εκδοχές τους) καλούνται πλευρές ή όψεις του κώνου.

Τελική ζήτηση για X_3



Σχήμα 16

Ενώ ο επεξηγηματικός κυρτός πολυεδρικός κώνος στο **Σχήμα 16** βρίσκεται ολόκληρος στο μη αρνητικό τεταρτημόριο, αυτό δεν συμβαίνει στο γραμμικό πρόγραμμα εισροών-εκροών. Στο μοντέλο τριών κλάδων, οι περιορισμοί θα έχουν την εξής μορφή

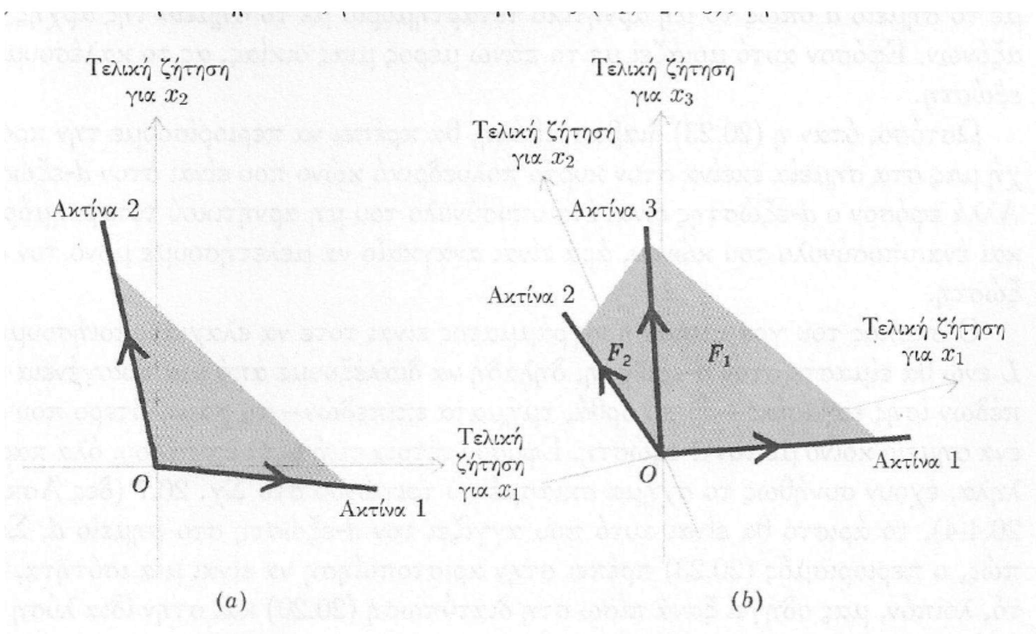
$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} \\ -a_{21} \\ -a_{31} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -a_{12} \\ 1-a_{22} \\ -a_{32} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \\ 1-a_{33} \end{bmatrix} x_3 \geq \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

και επειδή όλοι οι συντελεστές $\alpha_i j$ είναι είτε θετικά κλάσματα ή μηδέν, τα στοιχεία στα τρία διανύσματα δραστηριότητας θα έχουν τα εξής πρόσημα (στη μη μηδενική περίπτωση):

Διάνυσμα 1	Διάνυσμα 2	Διάνυσμα 3
$\begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \\ + \\ - \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix}$

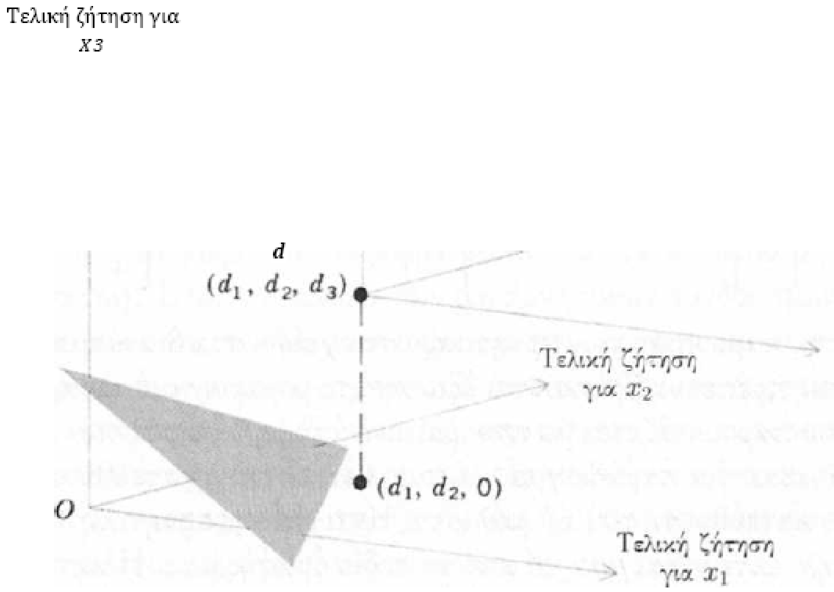
Ως συνέπεια της παρουσίας των αρνητικών στοιχείων στα διανύσματα, οι ακτίνες δραστηριότητας πρέπει να βρίσκονται έξω από το μη αρνητικό τεταρτημόριο. Στο **Σχήμα 17(α)**, όπου παρουσιάζεται με πανοραμική άποψη ο χώρος των 3 διαστάσεων, η ακτίνα 1 φαίνεται, για παράδειγμα, να είναι θετική στην κατεύθυνση του x_1 αλλά αρνητική στην κατεύθυνση του x_2 μάλιστα, είναι επίσης αρνητική στην κατεύθυνση του x_3 — δηλ. εκτείνεται μακριά από το πεδίο όρασης μας. Η ακτίνα 2 ερμηνεύεται ομοίως. Όταν απεικονίζονται στο χώρο των 3 διαστάσεων στο **Σχήμα 17(b)**, οι ακτίνες αυτές πρέπει να δημιουργούν ένα κυρτό πολυεδρικό κώνο που «καλύπτει» το μη αρνητικό τεταρτημόριο. Είναι ενδιαφέρον ότι το μη αρνητικό τεταρτημόριο είναι τώρα ένα υποσύνολο του κυρτού πολυεδρικού κώνου, που είναι ακριβώς το αντίθετο της κατάστασης του **Σχήμα 16**.

Έχουμε τώρα ερμηνεύσει τους μη αρνητικούς συνδυασμούς των τριών διανυσμάτων στο αριστερό μέλος της (3.34) ω τα αντίστοιχα των σημείων σ' ένα κυρτό πολυεδρικό κώνο. Πώς θα ερμηνεύσουμε το υπόλοιπο της ανισότητας ≥ d; Το διάνυσμα σημείο d, με συντεταγμένες (d_1, d_2, d_3), βρίσκεται πάνω από



Σχήμα 20.6

Σχήμα 17



Σχήμα 20.7

Σχήμα 18

το σημείο (d_1, d_2, 0) στο επίπεδο βάσης του **Σχήμα 18**. Αυτό που η έκφραση ≥ d ορίζει είναι ένα υποσύνολο του χώρου τελικής ζήτησης, ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη ότι η ζήτηση που συναντάμε για το j-οστό εμπόρευμα δεν είναι μικρότερη από την καθορισμένη ποσότητα dj (j = 1, 2,3). Αν πάρουμε το σημείο d ως νέο σημείο αρχής αξόνων και χαράξουμε τρεις νέους άξονες παράλληλους στους τρεις αρχικούς (βλ. βέλη), τότε το εν λόγω υποσύνολο θα φέρει την ίδια σχέση με το σημείο d όπως το μη αρνητικό τεταρτημόριο με το σημείο της αρχής των αξόνων. Εφόσον αυτό μοιάζει με το πάνω μέρος μιας οικίας, ας το καλέσουμε d-εξώστη.

Ωστόσο, όταν η (3.34) διαβαστεί όλη, θα πρέπει να περιορίσουμε την προσοχή μας στα σημεία εκείνα στον κυρτό πολυεδρικό κώνο που είναι στον d-εξώστη. Αλλά εφόσον ο d-εξώστης είναι ένα υποσύνολο του μη αρνητικού τεταρτημορίου, και ένα υποσύνολο του κώνου, άρα είναι αναγκαίο να μελετήσουμε μόνο τον d-εξώστη.

Ο σκοπός του γραμμικού προγράμματος είναι τότε να ελαχιστοποιήσουμε το L ενώ θα είμαστε στον d-εξώστη, δηλαδή να διαλέξουμε από μια οικογένεια επιπέδων ίσης εργασίας —ή πιο ορθά, τμήματα επίπεδων— το χαμηλότερο που έχει ένα σημείο κοινό με τον d-εξώστη. Εφόσον τέτοια τμήματα επιπέδου, όλα παράλληλα, έχουν συνήθως το σχήμα σκιασμένου τριγώνου στο **Σχήμα 18**, το άριστο θα είναι αυτό που αγγίζει τον d-εξώστη στο σημείο d. Συνεπώς, ο περιορισμός (3.34) πρέπει στην αριστοποίηση να είναι μια ισότητα. Αυτό, λοιπόν, μας οδηγεί ξανά πίσω στη διατύπωση (3.32) και στην ίδια λύση που βρήκαμε νωρίτερα στην (3.33).

3.12 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Όπως διαπιστώσαμε ο γραμμικός προγραμματισμός, είναι στην πραγματικότητα μια βελτίωση του κλασικού πλαισίου αριστοποίησης, εφόσον οι περιορισμοί στο πρόβλημα μπορεί τώρα να είναι ανισότητες, και συνεπώς μπορούμε να εισάγουμε στο πρόβλημα μη αρνητικούς περιορισμούς. Ωστόσο, η αναγκαιότητα διατήρησης της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών σε γραμμική μορφή μπορεί να είναι ένα σημαντικό μειονέκτημα. Μια ακόμα βελτίωση θα είναι ένα πλαίσιο αριστοποίησης να χειρίζεται μη γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις καθώς και περιορισμούς εκφρασμένους σε μη γραμμικές ανισότητες. Ένα τέτοιο πλαίσιο βρίσκεται στο μη γραμμικό προγραμματισμό.

Η φύση του μη γραμμικού προγραμματισμού

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης ενός μη γραμμικού προγράμματος έχει γενικώς την ακόλουθη μορφή:

Μεγιστοποιείται $\pi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

υποκείμενο στους $g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le r_1$ (3.35)

$g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le r_2$

……………………….

$g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le r_m$

και $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,..., n)$

Συμβολίζοντας το n-πλαίσιο των μεταβλητών επιλογής με το σύμβολο x, μπορούμε να γράψουμε την (3.35) πιο περιληπτικά ως

Μεγιστοποιείται $\pi = f(x)$

υποκείμενο στους $g^i(x) \le r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ (3.35')

και $x \ge 0$

Ομοίως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να γραφεί με την μορφή

Μεγιστοποιείται $C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

υποκείμενο στους $g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge r_1$ (3.36)

$g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge r_2$

……………………….

$g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge r_m$

και $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,..., n)$

ή, πιο περιληπτικά,

Μεγιστοποιείται $C = f(x)$

υποκείμενο στους $g'(x) \ge r_i \quad (i = 1,2,... ,m)$ (3.36')

και $x \ge 0$

Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι ένα μη γραμμικό πρόγραμμα, όπως κι ένα γραμμικό, περιέχει τρία συστατικά — μια αντικειμενική συνάρτηση, ένα σύνολο από m περιορισμούς και ένα σύνολο από μη αρνητικούς περιορισμούς για τις n μεταβλητές. Όπως στο γραμμικό προγραμματισμό, το m μπορεί να είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο του n. Όλες οι συναρτήσεις στο πρόβλημα, f(x) και g^i (x), είναι διαφορίσιμες. Σημειώστε επίσης, ότι για να είμαστε σύμφωνοι με όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω σχετικά με το γραμμικό προγραμματισμό, δεχόμαστε μόνον τον τύπο ανισότητας $\leq$ στους περιορισμούς στο πρόβλημα μεγιστοποίησης και τον τύπο $\geq$ στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Στην περίπτωση που έχουμε αντίθετο τύπο ανισότητας, μπορούμε εύκολα να τον αντιστρέψουμε πολλαπλασιάζοντας με - 1.

Οι τύποι στην (3.35) και (3.36) είναι προφανώς τα πιο γενικά προβλήματα αριστοποίησης που συναντήσαμε μέχρις εδώ σ' αυτό τον τόμο. Ως τέτοια, περιλαμβάνουν όλα τα παραπάνω προβλήματα αριστοποίησης σαν ειδικές περιπτώσεις. Αν πάρουμε την αντικειμενική συνάρτηση μόνον, έχουμε το πρόβλημα ελεύθερου ακρότατου. Και, τέλος, προσθέτοντας στην αντικειμενική συνάρτηση τους περιορισμούς στην εκδοχή της ισότητας και με m < n, παίρνουμε τελικά το κλασικό πρόβλημα αριστοποίησης με περιορισμούς.

Μη γραμμικότητες στα οικονομικά

Μη γραμμικότητες μπορούν να παρουσιαστούν με πολλούς τρόπους. Στο πρόβλημα παραγωγής στο γραμμικό προγραμματισμό, το ανά μονάδα ακαθάριστο κέρδος κάθε προϊόντος έχει υποτεθεί μια σταθερά. Αλλά μπορεί επίσης να είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του επιπέδου παραγωγής, είτε επειδή μια μεγάλη παραγωγή τείνει να πιέσει την τιμή αγοράς (μέσο έσοδο) είτε επειδή αύξηση της παραγωγής τείνει να αυξήσει το μέσο μεταβλητό κόστος του προϊόντος. Αν συμβεί αυτό, η γραμμική αντικειμενική συνάρτηση

$\pi = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ πρέπει να αντικατασταθεί από μια μη γραμμική εκδοχή, όπως η $\pi = c1(x_1)x1 + \ldots + c_n(x_n)x_n$ όπου $c_j(x_j)$ συμβολίζει μια φθίνουσα συνάρτηση της μεταβλητής x_j.

Ομοίως, στον τομέα των περιορισμών, μπορεί να συμβεί η ανάγκη εισροής για τον ί παραγωγικό πόρο στην παραγωγή του ί προϊόντος να φθίνει με το επίπεδο παράγωγης του j προϊόντος. Για παράδειγμα, οι τελευταίες μονάδες παραγωγής μπορούν να επεξεργάζονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από τις προηγούμενες, με αποτέλεσμα να καταναλίσκεται λιγότερος χρόνος μηχανής για κάθε διαδοχική μονάδα εκροής. Αυτό φυσικά θα υποσκάπτει τη σταθερότητα των συντελεστών α_{ij} όπως έχουμε υποθέσει στο γραμμικό προγραμματισμό. Μπορεί όμως να συμβεί οι συντελεστές α_{ij} να εξαρτώνται από το επίπεδο εκροής όχι μόνον του προϊόντος j αλλά και ενός άλλου προϊόντος k. Τότε θα εμφανιστεί στον τομέα των περιορισμών ένας όρος που θα είναι το γινόμενο των μεταβλητών x_j και x_k και έτσι η γραμμικότητα πάλι χάνεται.

Κάθε φορά που τα παραπάνω οικονομικά γεγονότα περιγράφουν αυτό το πρόβλημα, μια μη γραμμική διατύπωση θα είναι καταλληλότερη από μια γραμμική. Ατυχώς, πολλά βολικά χαρακτηριστικά του γραμμικού προγραμματισμού δεν θα υπάρχουν. Αυτό μπορεί να επεξηγηθεί από κάποια απλά μη γραμμικά προγράμματα που μπορούν να λυθούν διαγραμματικά.

Διαγραμματική λύση

Θα παρουσιάσουμε εδώ τρία συγκεκριμένα παραδείγματα, που καθένα θα φωτίσει κάποια χαρακτηριστικά που κάνουν το μη γραμμικό προγραμματισμό να διαφέρει από τον γραμμικό.

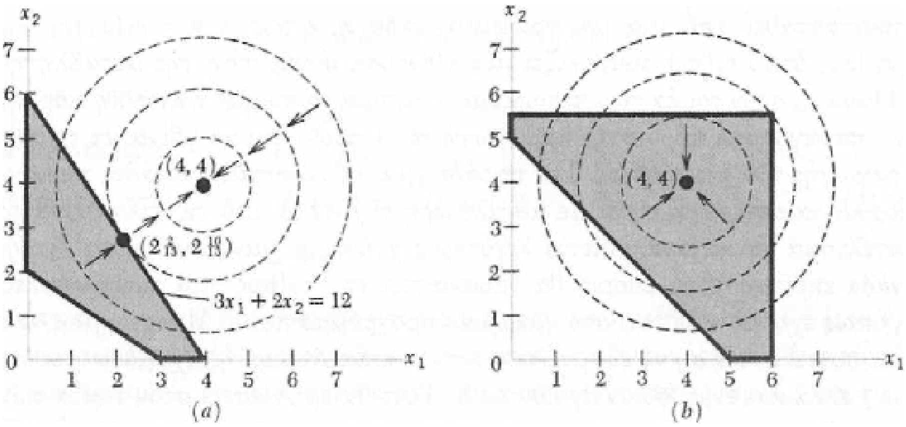
Παράδειγμα 1

Μεγιστοποιείται $C = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$

υποκείμενο στους $2x_1 + 3x_2 \geq 6$

$$3x_1 - 2x_2 \geq -12$$

και $$x_1, x_2 \geq 0$$



Σχήμα 19

Επειδή οι περιορισμοί αυτού του προβλήματος είναι γραμμικοί, το σχήμα της εφικτής περιοχής δεν διαφέρει ριζικά από αυτό ενός γραμμικού προγράμματος. Στο **Σχήμα 19(α)** φαίνεται η εφικτή περιοχή ως η σκιασμένη περιοχή που το μεν νοτιοδυτικό της σύνορο βγαίνει από τον πρώτο περιορισμό το δε βορειοανατολικό από το δεύτερο περιορισμό. Εφόσον η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη γραμμική, δεν παράγει μια οικογένεια παράλληλων γραμμών ίσης αξίας. Αντί γι' αυτό, παίρνουμε μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων, με κέντρο το σημείο (4,4) και κάθε διαδοχικά μικρότερης ακτίνας κύκλο να αντιστοιχεί σε μια μικρότερη τιμή του C. Στο πρόβλημα των ελεύθερων ορίων, θα έπρεπε φυσικά να επιλέξουμε το σημείο $(x_1, x_2) = (4,4)$ που δίνει την ελάχιστη τιμή C = 0. Επειδή όμως είμαστε περιορισμένοι στη σκιασμένη περιοχή, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να επιλέξουμε το σημείο $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (2(2/13), 2(10/13))$ όπου το βορειοανατολικό σύνορο εφάπτεται σ' έναν από τους κύκλους. Η ελαχιστοποιημένη τιμή του C είναι τότε $\overline{C} = (2(2/13) - 4)^2 + (2(10/13) - 4)^2 = 4(12/13)$.

Η ακριβής τιμή των $\overline{x_1}$ και $\overline{x_2}$, που αναφέραμε παραπάνω, ενώ βασίζεται στη γεωμετρική ιδιότητα της εφαπτομένης, βρίσκεται αλγεβρικά. Πρώτον, εφόσον το σημείο επαφής στο **Σχήμα 19(α)**βρίσκεται στο βορειοανατολικό σύνορο, ικανοποιεί προφανώς την εξίσωση

$$3x_1 + 2x_2 = 12 \qquad \text{[από το δεύτερο περιορισμό]}$$

Ύστερα, ο κύκλος που εφάπτεται σ' αυτό το σύνορο σ' αυτό το σημείο πρέπει να έχει το ίδια κλίση μ' αυτό το σύνορο, που είναι —3/2. Εφόσον η κλίση της συνάρτησης του κύκλου είναι [χρησιμοποιώντας τον κανόνα πεπλεγμένης συνάρτησης στην εξίσωση $F(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - C$] :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_2} = -\frac{2(x_1 - 4)}{2(x_2 - 4)} = -\frac{x_1 - 4}{x_2 - 4}$$

έπεται ότι, θέτοντας την ίση με - 3/2, μπορούμε να σχηματίσουμε μια άλλη εξίσωση

$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

Λύνοντας ταυτόχρονα το παραπάνω ζεύγος των γραμμικών εξισώσεων παίρνουμε τις άριστες τιμές ($\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$) = (2(2/13), 2(10/13)).

Σημειώνουμε ότι, εδώ, η άριστη λύση δεν βρίσκεται σ' ένα ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής, όπως θα περιμέναμε στο γραμμικό προγραμματισμό. Συνεπώς, μόνον ένας περιορισμός ικανοποιείται ακριβώς, αντί για δύο. Σημειώνουμε επίσης ότι ενώ πηγαίνοντας προς τη βορειοανατολική κατεύθυνση του σημείου (4,4) αρχικά το C θα ελαττώνεται, μένοντας στην ίδια πορεία πέρα του σημείου αυτού θα οδηγηθούμε σε μεγαλύτερες τιμές του C. Έτσι δεν υπάρχει πια δικαιολογία, όπως στο γραμμικό προγραμματισμό, να πιέσουμε την καμπύλη ίσων αξιών όσο πιο μακριά μπορούμε προς μια και μόνη συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Παράδειγμα 2

Ελαχιστοποιείται $C = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$

υποκείμενο στους $x_1 + x_2 \geq 5$

$-x_1 \geq -6$

$-x_2 \geq -11$

και $x_1, x_2 \geq 0$

Το παρόν πρόβλημα διαφέρει από το προηγούμενο μόνο στον τομέα των περιορισμών του. Επειδή έχουμε γραμμικότητα στους περιορισμούς, η εφικτή περιοχή είναι ξανά ένα στερεό πολύγωνο, αλλά η γεωγραφική του θέση σε σχέση με τους κύκλους ίσης αξίας καταλήγει τώρα σ' ένα εντελώς νέο αποτέλεσμα. Όπως φαίνεται στο **Σχήμα 19(b)**, το σημείο λύση ελεύθερου ελάχιστου (4,4) περιέχεται τώρα στο εσωτερικό του εφικτού συνόλου. Έτσι, η υπό περιορισμούς άριστη λύση βρίσκεται επίσης σ' αυτό το σημείο, με $\overline{C} = 0$. Στο παράδειγμα αυτό, λοιπόν, η άριστη λύση δεν βρίσκεται ούτε καν στο σύνορο της εφικτής περιοχής και συνεπώς, κανένας από τους περιορισμούς δεν ικανοποιείται ακριβώς στην άριστη λύση. Σε αντίθεση με το γραμμικό προγραμματισμό, δεν είναι πια δυνατόν τώρα να περιορίσουμε την επιλογή μας στο σύνολο των ακραίων σημείων της εφικτής περιοχής.

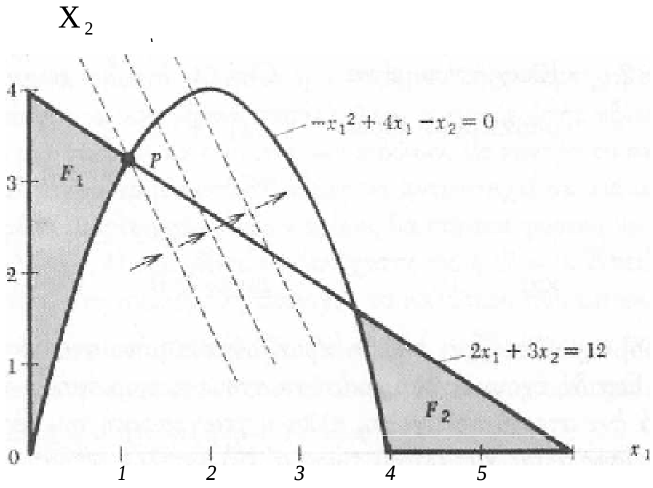
Παράδειγμα 3

Μεγιστοποιείται $\pi = 2x_1 + x_2$

υποκείμενο στους $-x_1^2 + 4x_1 - x_2 \leq 0$

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

και $x_1, x_2 \geq 0$



Σχήμα 20

Στο παράδειγμα αυτό, η μη γραμμικότητα μπαίνει μέσα από τον πρώτο περιορισμό. Γράφοντας το αυτό το τελευταίο στη μορφή $x_2 \geq - x_1^2 + 4x_1$, όπου η παράσταση στο δεξιό μέλος είναι μια δευτεροβάθμια συνάρτηση του x_1, βλέπουμε ότι ο περιορισμός αυτός μάς αναγκάζει να πάρουμε μόνον τα σημεία που βρίσκονται στην παραβολή ή πάνω απ' αυτήν στο **Σχήμα 20**. Ο δεύτερος περιορισμός, από την άλλη μεριά, μας λέει ότι πρέπει να μείνουμε είτε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με αρνητική κλίση, είτε κάτω απ' αυτήν. Γενικά, λοιπόν, η εφικτή περιοχή αποτελείται από δύο ξεχωριστά τμήματα, το F_1 και F_2. Έτσι, στην περίπτωση αυτή η εφικτή περιοχή δεν είναι καν ένα κυρτό σύνολο! Από τη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, παίρνουμε μια οικογένεια γραμμικών καμπυλών ίσης αξίας. Αν θεωρήσουμε την F_1, το σημείο P βρίσκεται στη μεγαλύτερη τιμή του π, εφόσον όμως και το F_2 είναι εφικτό, το σημείο P χαρακτηρίζεται πλέον σαν τοπικό άριστο, όχι καθολικό. Στην πράξη, κάθε σημείο στην F_2 είναι καλύτερη επιλογή από το σημείο P. Αυτό μάς βοηθάει να διευκρινίσουμε ότι, όταν η εφικτή περιοχή δεν είναι κυρτό σύνολο, οι ικανές συνθήκες του θεωρήματος καθολικότητας δεν ικανοποιείται, και ένα τοπικό άριστο δεν είναι συνεπώς αναγκαστικά ένα καθολικό άριστο.

Ανακεφαλαιώνοντας, το μη γραμμικό πρόγραμμα διαφέρει από ένα γραμμικό τουλάχιστον στα ακόλουθα πέντε σημεία, μερικά από τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους: (1) Το πεδίο επιλογής εκτείνεται σε ολόκληρη την εφικτή περιοχή, όχι απλά στο σύνολο των ακραίων της σημείων, (2) ο αριθμός των περιορισμών που ικανοποιούνται ακριβώς (και των μη αρνητικών περιορισμών) μπορεί να μην είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών επιλογής, (3) η προσκόλληση σε μια ενιαία κατεύθυνση κίνησης μπορεί να μην οδηγήσει σε συνεχώς αύξουσες (ή φθίνουσες) τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, (4) η εφικτή περιοχή μπορεί να μην είναι κυρτό σύνολο, και (5) ένα τοπικό άριστο μπορεί να μην είναι ένα καθολικό άριστο. Σαν αποτέλεσμα αυτών των διαφορών, οι μέθοδοι λύσης που είναι κατάλληλες για ένα γραμμικό πρόγραμμα παύουν να εφαρμόζονται σ' ένα μη γραμμικό πρόγραμμα και χρειάζονται νέες μέθοδοι. Στο κεφάλαιο αυτό, η προσοχή μας θα συγκεντρωθεί όχι στους αλγορίθμους επίλυσης (που είναι περίπλοκοι και εξειδικευμένοι), αλλά σε κάποια αναλυτικά αποτελέσματα (αναγκαίες και ικανές συνθήκες) που δίνουν ποιοτικούς χαρακτηρισμούς της άριστης λύσης παρά την ποσοτική λύση την ίδια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ξεπαπαδέας Α., Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά, εκδόσεις Σμπίλιας, Αθήνα 1997
2. Πραστάκος Γ., Λήψη Επιχειρησιακών Αποφάσεων στην Κοινωνία της Πληροφορίας, εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα 2006
3. Chiang C. A., Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικής Ανάλυσης, εκδόσεις Κριτική, 2001
4. Καβουσάνος Ε., Μαθηματικός Λογισμός για Επιχειρήσεις και Οικονομία, εκδόσεις Μπένου, 2006
5. Βόσκογλου Μ., Μαθηματικά για τον Τομές Διοίκησης και Οικονομίας, εκδόσεις Μακεδονικές, 1996
6. Παναγιωτόπουλος Α., Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών, εκδόσεις Σταμούλη, 1995
7. Πέκος Γ., Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομικές Επιστήμες, εκδόσεις Μάρκου, 2000
8. Φράγκος Α., Χουβαρδάς Β., Μαθηματικά για Οικονομολόγους, εκδόσεις Σταμούλη, 1993
9. Logan D. J., Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2003