ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ MARKOV ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ :
ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ
ΑΥΓΕΡΟΠΟΥΛΟΥ ΑΜΑΛΙΑ
ΤΡΑΝΤΣΙΟΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ :
ΚΑΛΑΠΟΔΗ ΑΛΕΚΑ

ΠΑΤΡΑ – ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2007

Περιεχόμενα

Πρόλογος …...…………………………….………………………3

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες ……………………..……………..…………….5

1.1 Στοιχεία από τη θεωρία πιθανοτήτων ……….……………….5

1.2 Εισαγωγή στην ανάλυση Markov …………………………..11

Κεφάλαιο 2

Πίνακες Markov ………………...…………………………...20

2.1 Πιθανότητες μετάβασης …………………………………20

2.2 Πιθανότητες καταστάσεων μελλοντικών περιόδων ……...25

2.3 Καταστάσεις Ισορροπίας ……………………….........31

Κεφάλαιο 3

Συστήματα ουρών αναμονής ………...………………….....45

3.1 Εισαγωγή στη θεωρία αναμονής ………………….……45

3.2 Αλυσίδες Markov και συστήματα αναμονής ……..............58

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές αλυσίδων Markov ……………………...…….72

4.1 Η Διαδικασία γέννησης-θανάτου ……………………..…72

4.2 Τυχαίοι περίπατοι ……………………………….…74

4.3 Αλυσίδα Ehrenfest …………………………………..….82
4.4 Ροή επιτυχιών ……………………………………………84
4.5 Αλυσίδες Markov στη γενετική ………………….…....87
4.6 Μοντέλο κελιού του Polya …………………………………90
4.7 Έλεγχος αποθεμάτων ……………………………...92
4.8 Κλαδωτή αλυσίδα ……………………………………...94

Παράρτημα ………………..…………………………………95
Βιβλιογραφία ………………..…………………………………99

Πρόλογος

Η Μαρκοβιανή Ανάλυση είναι ένας κλάδος της θεωρίας Πιθανοτήτων με πολλές εφαρμογές σε διάφορους τομείς. Εκτός από τις μαθηματικές εφαρμογές της τόσο σε θεωρητικά όσο και σε υπολογιστικά ζητήματα, χρησιμοποιείται στη βιολογία για την παρατήρηση πληθυσμών, στη φυσική για τη μελέτη ραδιενεργών πυρήνων και άλλα. Επίσης, πολλά οικονομικά μοντέλα καταλήγουν σε μαρκοβιανές αλυσίδες, όπως η μελέτη κατανομής μεριδίων αγοράς, οι διαδρομές εμπορικών αντιπροσώπων, ο προσδιορισμός διαδικασιών συντήρησης, ο χρόνος εξυπηρέτησης, η διαχείριση αποθεμάτων και άλλα. Όλα τα φαινόμενα τα οποία εξελίσσονται σε σχέση με το χρόνο και το χώρο με την προϋπόθεση ότι η μελλοντική τους συμπεριφορά εξαρτάται μόνο από την τωρινή τους κατάσταση και όχι από τις καταστάσεις στις οποίες βρέθηκαν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, μπορούν να περιγραφούν και να μελετηθούν με όρους Μαρκοβιανής Ανάλυσης.

Η θεωρία αυτή οφείλεται στον Andrey Markov, ένα σπουδαίο Ρώσο μαθηματικό. Η βασική έννοια είναι η *μαρκοβιανή αλυσίδα,* που ουσιαστικά είναι μια στοχαστική ανέλιξη με συγκεκριμένες ιδιότητες. Η μελέτη αυτών των αλυσίδων γίνεται κυρίως με δύο τρόπους: με χρήση θεωρίας Πιθανοτήτων και μέσω αλγεβρικών πινάκων. Σε κάθε μαρκοβιανή αλυσίδα αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός πίνακας, ο οποίος ονομάζεται *πίνακας μετάβασης*.

Οι πίνακες μετάβασης των μαρκοβιανών αλυσίδων καλούνται και *πίνακες Markov*. Ουσιαστικά, είτε εξετάζουμε ένα οικονομικό μοντέλο μέσω αλυσίδων είτε μέσω τέτοιων πινάκων, καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Επομένως, οι έννοιες πίνακας Markov και μαρκοβιανή αλυσίδα πρακτικά ταυτίζονται.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η περιγραφή κατά τον απλούστερο δυνατό τρόπο των μαρκοβιανών αλυσίδων και η μελέτη οικονομικών εφαρμογών τους. Για την καλύτερη παρουσίαση του θέματος, έχουν διαμορφωθεί τέσσερα κεφάλαια.

Στο πρώτο, δίνονται τα βασικά στοιχεία από τη θεωρία Πιθανοτήτων, το οποία είναι απαραίτητα για τη μελέτη των αλυσίδων Markov. Επίσης, εισάγεται η έννοια της *στοχαστικής ανέλιξης* και παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά της Μαρκοβιανής Ανάλυσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι πίνακες Markov ή πίνακες μετάβασης καθώς και μια σειρά παραδειγμάτων. Εισάγεται επίσης, η έννοια της *κατάστασης ισορροπίας* που εκφράζει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά των υπό εξέταση συστημάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας αναμονής καθώς μερικά συστήματα αναμονής είναι αλυσίδες Markov. Στο τελευταίο κεφάλαιο δίνονται παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών που εμφανίζονται σε διάφορους τομείς και οδηγούν σε αλυσίδες Markov.

Τελειώνοντας, παρατίθεται ως παράρτημα ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα του Andrey Markov.

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε στοιχεία από τη θεωρία πιθανοτήτων τα οποία είναι απαραίτητα για τη μελέτη των αλυσίδων Markov. Θεωρούμε γνωστούς τους βασικούς ορισμούς και δίνουμε τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται στη συνέχεια. Επίσης, εισάγουμε την έννοια της Μαρκοβιανής ιδιότητας και παρουσιάζουμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες. Για το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήσαμε στοιχεία απο τα [3], [4], [5], [6], [8], [12], [14] και [15].

1.1. Στοιχεία από τη θεωρία πιθανοτήτων.

Πολλές φορές θέλουμε να περιγράψουμε φαινόμενα τα οποία εξελίσσονται σε σχέση με το χρόνο ή το χώρο. Η μελέτη αυτών των φαινομένων είναι δυνατόν να γίνει με την βοήθεια της Θεωρίας Πιθανοτήτων και την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων με τη χρήση οικογενειών τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες ικανοποιούν κάθε φορά ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες. Ακολουθεί η έννοια της τυχαίας μεταβλητής, η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατανόηση μαθηματικών μοντέλων καθώς και η έννοια της πιθανότητας.

Η τυχαία μεταβλητή

Εξετάζουμε έναν δειγματικό χώρο Ω που αναφέρεται σε ένα πείραμα και αντιστοιχίζουμε σε κάθε αποτέλεσμα ω_i του δειγματικού χώρου έναν πραγματικό αριθμό $x(\omega_i)$. Ορίζουμε έτσι μια συνάρτηση $x(\omega_i)$ η οποία έχει πεδίο ορισμού τον δειγματικό χώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο (E_x) του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *τυχαία μεταβλητή* ([6]). Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ω_i του δειγματικού χώρου θα πρέπει να αντιστοιχεί μία μόνο τιμή της τυχαίας μεταβλητής. Η τυχαία μεταβλητή μπορεί να είναι είτε ποιοτική (π.χ. χρώμα ματιών, φύλλο), είτε ποσοτική (π.χ. βάρος, ύψος).

Η τυχαία μεταβλητή συμβολίζεται συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα X, Y, Z, ... και οι δυνατές τιμές της με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα: x_1, x_2, x_3, …x_ν, … ή y_1, y_2, y_3, …, y_n, …. Ο συμβολισμός $x_i = x(\omega_i)$ μας δείχνει τον αριθμό που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα ω_i του δειγματικού χώρου. Επιπλέον, η τυχαία μεταβλητή διαχωρίζεται σε ασυνεχή και συνεχή.

Ονομάζουμε *ασυνεχή τυχαία μεταβλητή* μία τυχαία μεταβλητή X η οποία μπορεί να λάβει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος τιμών, αλλά αριθμήσιμο ([6]). Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού η τυχαία μεταβλητή X είναι ασυνεχής και παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών, δηλαδή:

$$x_i: 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Επίσης, στην περίπτωση κατά την οποία ρίχνουμε 2 νομίσματα, η τυχαία μεταβλητή «αριθμός γραμμάτων» θα λάβει τις τιμές:

$$x_i: 0, 1, 2$$

Η τυχαία μεταβλητή που αναφέρεται στον αριθμό «πόσες φορές πρέπει να ριχτεί ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά ο αριθμός 5», είναι ασυνεχής που μπορεί να λάβει άπειρο πλήθος τιμών, αλλά αριθμήσιμο, δηλαδή:

$$x_i: 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Μια τυχαία μεταβλητή Χ ονομάζεται *συνεχής*, αν μπορεί να πάρει όλες τις τιμές στο διάστημα [α, β] όπου α και β πραγματικοί αριθμοί ([6]). Στην περίπτωση της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής η πιθανότητα να πάρει η τυχαία μεταβλητή Χ μια ορισμένη τιμή x_i είναι 0, δηλαδή:

$$P\{X= x_i\}= 0$$

γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τη διαίσθησή μας. Αυτή όμως είναι μία χαρακτηριστική ιδιότητα των συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Για παράδειγμα ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα, το μηνιαίο εισόδημα ενός υπαλλήλου, η ποσότητα βενζίνης που πουλά ένα πρατήριο βενζίνης σε μία μέρα και τα λοιπά, μπορούν να θεωρηθούν συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω ότι κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης ο δειγματικός χώρος παίρνει τις παρακάτω τιμές:

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu\}$$

και ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, …, $\{\omega_\nu\}$ είναι ισοπίθανα, δηλαδή $P\{\omega_i\} = P$ για κάθε $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$. Επειδή το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου είναι ίσο με 1, θα έχουμε σύμφωνα με την προσθετική ιδιότητα:

$$P\{\omega_1\}+ P\{\omega_2\}+P\{\omega_3\}+\ldots+P\{\omega_\nu\}=1$$

ή

$$n \cdot P = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{n}$$

Αν ένα ενδεχόμενο $A= \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu\}$ αποτελείται από μ στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω, ο λόγος $\frac{m}{n}$ λέγεται *πιθανότητα του ενδεχομένου A* και την παριστάνουμε με P{A}, δηλαδή:

$$P\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} = \frac{\text{pl ήqoV stoiceίwn tou A}}{\text{pl ήqoV stoiceίwn tou }\Omega}$$

Το μ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου και το ν τον αριθμό όλων των δυνατών περιπτώσεων ([6]).

Άρα, μπορούμε να καταλήξουμε στον παρακάτω κλασικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει διατυπωθεί από τον Laplace το 1812.

<u>Ορισμός 1</u> ([6]): *Πιθανότητα* να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο A είναι ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου A προς το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων, με τον όρο ότι όλες οι περιπτώσεις είναι ισοπίθανες.

Δηλαδή:

$$P\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{\text{pl ήqoV eunoikώn periptώsewn tou A}}{\text{pl ήqoV stoiceίwn tou }\Omega}$$

Η πιθανότητα P{A} είναι αριθμός που περιέχεται μεταξύ του 0 και του 1, δηλαδή: $0 \le P\{A\} \le 1$ και συγκεκριμένα θα είναι P{A} = 0, όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου A είναι αδύνατη και P{A} = 1, όταν το ενδεχόμενο A είναι βέβαιο.

Βασικές προϋποθέσεις εφαρμογής του κλασικού ορισμού της πιθανότητας είναι:

(α) ο δειγματικός χώρος πρέπει να έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών ενδεχομένων

(β) τα στοιχειώδη ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα

(γ) να γνωρίζουμε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή του λόγου $\frac{m}{n}$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Μια κάλπη περιέχει 8 άσπρα, 4 κόκκινα και 5 πράσινα σφαιρίδια. Εξάγουμε κατά τυχαίο τρόπο ένα σφαιρίδιο. Ποια είναι η πιθανότητα να εξαχθεί άσπρο σφαιρίδιο;

<u>Λύση:</u>

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι όσες και τα άσπρα σφαιρίδια, δηλαδή 8, ενώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι όσα όλα μαζί τα σφαιρίδια, δηλαδή 8 + 4 + 5 = 17. Αν παραστήσουμε με A το ενδεχόμενο να εξαχθεί άσπρο σφαιρίδιο, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας των ισοπίθανων ενδεχομένων θα έχουμε:

$$P\{A\} = \frac{\text{πλήθος ευνοικών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος στοιχείων του}\ \Omega} = \frac{m}{n} = \frac{8}{17} = 0,47$$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Μαθηματικός ορισμός της πιθανότητας)

Η πιθανότητα ορίζεται ως μια πραγματική συνάρτηση P, με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του Ω (δηλαδή το δυναμοσύνολο Π(Ω), που είναι η οικογένεια των ενδεχομένων A και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση P δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη.

Για να εκφράζει πιθανότητα η συνάρτηση P θα πρέπει να πληροί τις παρακάτω ιδιότητες (αξιώματα του Kolmogorov):

(1) Σε κάθε ενδεχόμενο $A \in \Pi(\Omega)$ αντιστοιχεί ο πραγματικός αριθμός $P\{A\}$ που ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου A. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι πάντοτε $P\{A\} \geq 0$.

(2) Η πιθανότητα του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με τη μονάδα, $P(\Omega)=1$. Δηλαδή η πιθανότητα του A περιέχεται μεταξύ του 0 και του 1,

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

(3) Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, η πιθανότητα της ένωσης αυτών είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων τους.

Μπορούμε επομένως να δώσουμε συνοπτικά τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2 ([6]): Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος, ονομάζουμε *πιθανότητα ενός ενδεχομένου* κάθε πραγματική συνάρτηση P που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, $P : \Pi(\Omega) \to \mathbb{R}$ και μόνο αν πληροί τις παρακάτω ιδιότητες (αξιώματα):

(1) $P\{A\} \geq 0, \ \forall A \in \Pi(\Omega)$

(2) $P\{\Omega\}=1$

(3) $P\{A \cup B\}=P\{A\}+P\{B\}, \ \forall A,B \in \Pi(\Omega), \ A \cap B=\varnothing$

Η τριάδα (P, Ω, Π(Ω)) ονομάζεται *χώρος πιθανότητας*.

1.2. Εισαγωγή στην ανάλυση Markov

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (X_t) $t \in T$, οι οποίες ορίζονται συνήθως στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο καλείται *στοχαστική ανέλιξη* (stochastic process) ([4]). Δηλαδή η συνάρτηση X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή, για κάθε $t \in T$.

Ο όρος στοχαστική, προέρχεται από το γεγονός ότι το φαινόμενο που θέλουμε να περιγράψουμε επηρεάζεται σημαντικά από τον παράγοντα τύχη και έτσι δεν μπορούμε να προβλέψουμε την μελλοντική συμπεριφορά του με ακρίβεια. Η μεταβλητή t δεν είναι απαραίτητο να παριστά το χρόνο. Το σύνολο T καλείται *παραμετρικός χώρος* (index set) της ανέλιξης, ενώ εάν υποθέσουμε ότι κάθε μια από τις τυχαίες μεταβλητές X_t παίρνει τιμές μέσα σε ένα σύνολο S τότε καλούμε το S *χώρο καταστάσεων* (state space) της ανέλιξης ([4]).

Ειδικότερα τώρα, έστω ότι έχουμε ένα φαινόμενο (σύστημα) το οποίο ανελίσσεται (εξελίσσεται) σχετικά με το χρόνο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το φαινόμενο κάθε δεδομένη στιγμή μπορεί να βρίσκεται σε μια κατάσταση μέσα από ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων S και προσπαθούμε να το περιγράψουμε με τη βοήθεια μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{X_t/t= 0,1,2\ldots\}$, όπου η τυχαία μεταβλητή X_t περιγράφει το φαινόμενο τη χρονική στιγμή t. Έστω ότι το φαινόμενο (σύστημα) ικανοποιεί την εξής ιδιότητα : δοθείσης της παρούσας κατάστασης του φαινομένου, οι καταστάσεις στις οποίες βρισκόταν το φαινόμενο στο παρελθόν δεν επηρεάζουν τις μελλοντικές καταστάσεις, τότε το φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί από μία *στοχαστική ανέλιξη **Markov***([4]).

Χαρακτηριστικό αυτών των συστημάτων είναι ότι έχουν την ιδιότητα του Markov ή *Μαρκοβιανή Ιδιότητα*, η οποία λέει ότι η μελλοντική εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται από την παρούσα του κατάσταση και δεν εξαρτάται από το παρελθόν του ([4]).

Παράδειγμα 2

Σε μια λίμνη με νούφαρα ένας βάτραχος πηδάει από το ένα νούφαρο στο άλλο. Ας θεωρήσουμε ότι τα νούφαρα είναι 12. Υποθέτουμε ότι ο βάτραχος είναι στο νούφαρο 6 και ότι δεν πηδάει μέσα στο νερό. Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα ο βάτραχος να πηδήσει σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα νούφαρα. Είναι φυσικό και ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι η πιθανότητα αυτή εξαρτάται από το νούφαρο στο οποίο βρίσκεται ο βάτραχος τώρα και όχι από το σε ποια νούφαρα βρισκόταν στο πιο μακρινό παρελθόν. Δηλαδή το σύστημα που περιγράψαμε έχει την Μαρκοβιανή Ιδιότητα. Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής κατάστασης της διαδικασίας, όταν η παρούσα κατάσταση είναι γνωστή, δεν αλλοιώνεται από επιπλέον δεδομένα που αφορούν τη συμπεριφορά της διαδικασίας στο παρελθόν.

Συγκεκριμένα το X είναι η τυχαία μεταβλητή , το φαινόμενο, το βήμα της ανέλιξης, δηλαδή η κατάσταση του συστήματος γενικά. Ενώ το x είναι η συγκεκριμένη θέση του συστήματος. Στο παραπάνω λοιπόν παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι ο βάτραχος στο δεύτερο πήδημά του βρίσκεται στο τέταρτο νούφαρο αυτό θα το συμβολίσουμε ως εξής: $X_2=x_4$.

Χαρακτηριστικά Μαρκοβιανής Ανάλυσης

Η ανάλυση Markov (Μαρκοβιανή Ανάλυση) αποτελεί μια μεθοδολογία εκτίμησης των πιθανοτήτων της μελλοντικής κατάστασης ενός συστήματος. Η εκτίμηση αυτή βασίζεται στον υπολογισμό των πιθανοτήτων που χαρακτηρίζουν την αλλαγή ή μεταπήδηση του συστήματος από μια δεδομένη κατάσταση σε κάποια άλλη μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα. Οι εφαρμογές της Μαρκοβιανής Ανάλυσης καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα οικονομικών και επιχειρησιακών προβλημάτων όπως για παράδειγμα η ανάλυση μεριδίων αγοράς ενός προϊόντος, η εκτίμηση των μη εισπρακτέων οφειλών μιας επιχείρησης, ο προσδιορισμός της πιθανότητας βλάβης ενός μηχανήματος κλπ.

Μία από τις βασικές έννοιες της Μαρκοβιανής Ανάλυσης είναι η *Αρχική Κατάσταση* του υπό μελέτη συστήματος. Έστω ότι το πρόβλημα που μελετάμε αφορά στην εκτίμηση των μεριδίων αγοράς δύο ανταγωνιστών. Αν την παρούσα χρονική στιγμή, δύο ανταγωνιστές κατέχουν το 60% και 40% της αγοράς αντίστοιχα, το γεγονός αυτό ορίζεται ως η αρχική κατάσταση του συστήματος. Σε δύο μήνες η κατάσταση μπορεί να έχει αλλάξει και τα μερίδια αγοράς των ανταγωνιστών να είναι 55% και 45% αντίστοιχα. Σκοπός της Μαρκοβιανής Ανάλυσης είναι η δυναμική μελέτη των αλλαγών του συστήματος και η πρόβλεψη των τελικών μεριδίων αγοράς των δύο ανταγωνιστών.

Με τον όρο *δυναμική* εννοούμε την παρατήρηση των αλλαγών του συστήματος σε διαδοχικές χρονικές στιγμές, όπως δηλαδή το σύστημα εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Η πρόβλεψη μιας *μελλοντικής κατάστασης* (π.χ. τα αντίστοιχα μερίδια αγοράς μετά δύο μήνες) προϋποθέτει τη γνώση των πιθανοτήτων μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη. Στην συγκεκριμένη περίπτωση απαιτείται να εκτιμηθεί η πιθανότητα του γεγονότος ότι κάποιος πελάτης θα αλλάξει την τρέχουσα προτίμησή του που είναι ένα από τα δύο ανταγωνιστικά προϊόντα και θα προτιμήσει το άλλο. Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αυτές οι πιθανότητες εκτιμώνται και απεικονίζονται σ' έναν πίνακα που αποκαλείται "πίνακας μεταβάσεων μεταξύ των καταστάσεων του συστήματος" ή απλώς *πίνακας μετάβασης* ([12]).

Βασικές Παραδοχές της Μαρκοβιανής Ανάλυσης

Η Μαρκοβιανή Ανάλυση στηρίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Το σύνολο των πιθανών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το υπό μελέτη σύστημα είναι πεπερασμένο.

Για παράδειγμα, οι επιλογές που έχει ένας καταναλωτής σε ότι αφορά τον τύπο του απορρυπαντικού που χρησιμοποιεί είναι γνωστές και συγκεκριμένες. Σε κάθε δεδομένη στιγμή επιλέγει έναν από τους διαθέσιμους τύπους.

2. Οι πιθανότητες για τη μετάβαση από τη μία κατάσταση σε μία άλλη παραμένουν σταθερές στη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα που αφορά την ανάλυση του συστήματος.

Ας υποθέσουμε, με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, ότι τα αποτελέσματα μίας έρευνας αγοράς έδειξαν ότι στη διάρκεια της προηγούμενης εβδομάδας το 2% των καταναλωτών που χρησιμοποιούσαν τον Α τύπο απορρυπαντικού, άλλαξαν προτίμηση και χρησιμοποιούν τώρα το απορρυπαντικό Β. Αν στόχος της μελέτης είναι η εκτίμηση των μεριδίων αγοράς μετά από 2 μήνες, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα αλλαγής από το Α στο Β προϊόν παραμένει η ίδια για όλη τη διάρκεια της μελέτης.

3. Το σύστημα παραμένει αναλλοίωτο όσον αφορά το μέγεθός του και τη σύνθεσή του στην διάρκεια της ανάλυσης.

Αναφερόμενοι στο ίδιο παράδειγμα, έστω ότι ο καταναλωτής έχει να επιλέξει μεταξύ 5 ανταγωνιστικών προϊόντων. Υποθέτουμε ότι στη διάρκεια της μελέτης δεν θα υπάρξουν νέα προϊόντα, ούτε θα αποσυρθεί κάποιο από τα υπάρχοντα.

Ορισμός 3 ([14]): *Μαρκοβιανή Διαδικασία* είναι κάθε στοχαστική διαδικασία $\{X_t: t \in T\}$ με την ιδιότητα ότι, δεδομένης της τιμής της τυχαίας μεταβλητής X(t) (παρόν), οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(u): u>t\}$ (μέλλον) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τυχαίες μεταβλητές
$\{X(s): s<t\}$ (παρελθόν) και αυτό για κάθε χρονική στιγμή $t \in T$.

Έτσι, οι Μαρκοβιανές Διαδικασίες αποτελούν κατάλληλα στοχαστικά μοντέλα για την περιγραφή και μελέτη στοχαστικών συστημάτων, η μελλοντική εξέλιξη των οποίων εξαρτάται αποκλειστικά από την παρούσα κατάστασή τους κάθε φορά και όχι από την συγκεκριμένη παρελθούσα ιστορία τους.

Οι ανελίξεις - διαδικασίες Markov ταξινομούνται γενικότερα με βάση το χώρο καταστάσεων και το χρόνο και ειδικότερα ανάλογα (i) με το αν το υποσύνολο T είναι αριθμήσιμο (διακριτός χρόνος) ή συνεχές (συνεχής χρόνος) και (ii) με το αν ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός (πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων) ή συνεχής. Επομένως, οι Μαρκοβιανές στοχαστικές ανελίξεις μπορούν να διακριθούν σε τέσσερις βασικές κατηγορίες:

1. Με διακριτό χρόνο και διακριτό χώρο καταστάσεων
2. Με συνεχή χρόνο και διακριτό χώρο καταστάσεων
3. Με διακριτό χρόνο και συνεχή χώρο καταστάσεων
4. Με συνεχή χρόνο και συνεχή χώρο καταστάσεων

Ειδικότερα, όταν οι Μαρκοβιανές Διαδικασίες έχουν διακριτό, δηλαδή πεπερασμένο ή αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων, τότε αναφέρονται ως *Μαρκοβιανές αλυσίδες* ([5]).

Μια *Μαρκοβιανή αλυσίδα*, λοιπόν, είναι μία ακολουθία X_0, X_1,… διακριτών τυχαίων μεταβλητών με την ιδιότητα η δεσμευμένη κατανομή του X_{t+1} δοθέντων των $X_0, X_1, \ldots, X_t$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του X_t και όχι από τις τιμές των $X_0, X_1, \ldots X_{t-1}$.

Πιο αναλυτικά, μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_t: t\in T_0\}$, με διακριτό χώρο καταστάσεων S, λέγεται Αλυσίδα Markov αν και μόνο αν αυτή ικανοποιεί τη σχέση:

$$P\{X_{t+1}=x_{t+1}/ X_0= x_0 , X_1= x_1, \ldots, X_{t-1}= x_{t-1} , X_t=x_t\} =$$
$$=P\{X_{t+1}=x_{t+1}/ X_t=x_t\}$$

για κάθε $t\in T$ και για κάθε $x_0, x_1, \ldots, x_t, x_{t+1} \in S$.

Αν θεωρήσουμε ότι το γεγονός $\{X_t= x_t\}$ παριστάνει το παρόν, το $\{X_{t+1} = x_{t+1}\}$ το μέλλον και το $\{X_0 =x_0, X_1=x_1, \ldots, X_{t-1}=x_{t-1}\}$ το παρελθόν, τότε η ιδιότητα Markov μας αναφέρει ότι το μέλλον δοθέντος του παρόντος και του παρελθόντος εξαρτάται μόνο από το παρόν.

Έστω ότι θεωρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων S είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και τις περισσότερες φορές ένα πεπερασμένο σύνολο, τότε έχουμε μια αλυσίδα Markov με διακριτό χώρο καταστάσεων. Αντιθέτως αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα μη αριθμήσιμο σύνολο, τότε λέμε ότι έχουμε αλυσίδα Markov με συνεχή χώρο καταστάσεων.

Πρέπει να παρατηρήσουμε οτι σε μια αλυσίδα Markov, οι χρονικές στιγμές (δείκτες) δεν είναι ανάγκη να είναι διαδοχικές. Στην περίπτωση αλυσίδας Markov διακριτού-χρόνου, οι χρονικές στιγμές που εμφανίζονται αλλαγές κατάστασης, ορίζεται να είναι οι ακέραιοι 0,1,2,...,n,... Αντίθετα, στην περίπτωση αλυσίδας Markov συνεχούς-χρόνου, οι αλλαγές κατάστασης μπορούν να γίνουν οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Οι αλυσίδες Markov χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κίνησης ενός αντικειμένου μέσα σε κάποιο χώρο. Εξετάζουμε τώρα αλυσίδες Markov διακριτού-χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων, που επιτρέπουν στο αντικείμενο να καταλαμβάνει διακριτές θέσεις (καταστάσεις) και επιτρέπει οι αλλαγές μεταξύ αυτών των θέσεων να γίνονται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα 3

Έστω ένας τουρίστας που ταξιδεύει από πόλη σε πόλη σε μια χώρα. Έστω X_n η πόλη που θα βρεθεί ο τουρίστας το μεσημέρι της μέρας n. Όταν είναι σε κάποια πόλη i, θα φύγει το απόγευμα από την πόλη με το πρώτο auto-stop που θα τον πάρει. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος ταξιδιού μεταξύ δύο οποιονδήποτε πόλεων είναι αμελητέος. Φυσικά είναι πιθανό να μην τον πάρει auto-stop εκείνη την μέρα, οπότε μένει στην πόλη i μέχρι το απόγευμα της επόμενης μέρας. Μια και τα αυτοκίνητα που πηγαίνουν στις διάφορες γειτονικές πόλεις, εμφανίζονται με απρόβλεπτο προορισμό, η θέση του τουρίστα σε κάποια στιγμή στο μέλλον, είναι σίγουρα μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί κάλλιστα να περιγραφεί από μια αλυσίδα Markov διακριτού-χρόνου, αφού η επόμενη πόλη που θα επισκεφθεί ο τουρίστας εξαρτάται μόνο από την πόλη στην οποία είναι τώρα. Δηλαδή η μνήμη της αλυσίδας Markov πηγαίνει πίσω μόνο στην πιο πρόσφατη θέση (κατάσταση) του αντικειμένου. Όταν X_n= j (ο τουρίστας είναι στην πόλη j την μέρα n) τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση E_j την χρονική στιγμή n (ή κατά το n-οστό βήμα).

Για να ξεκινήσει ο τουρίστας την ημέρα 0, αρχίζουμε με κάποια αρχική κατανομή πιθανότητας $P[\ X_0 = j\ ]$.

Η πιθανότητα $P[X_n=j|\ X_{n-1}=i_{n-1}]$ αναφέρεται σαν η πιθανότητα μετάβασης (ενός βήματος) και δίνει την υπό συνθήκη πιθανότητα να γίνει η μετάβαση (αλλαγή) της διαδικασίας από την κατάσταση $E_{i,n-1}$ όπου είναι στο βήμα (n-1), στην κατάσταση E_j κατά το βήμα n.

Οι αλυσίδες Markov, ανάλογα με συγκεκριμένα ειδικά χαρακτηριστικά που μπορεί να εμφανίζονται στο υπό μελέτη σύστημα, διακρίνονται σε:

- *ομογενή αλυσίδα Markov,* είναι αυτή που οι πιθανότητες μετάβασης είναι στάσιμες στο χρόνο. Συνεπώς, δεδομένης της παρούσας κατάστασης, η πιθανότητα διαφόρων καταστάσεων μετά m βήματα, εξαρτάται μόνο από το m και όχι από την παρούσα χρονική στιγμή. Για το παράδειγμα 3 αυτό σημαίνει ότι αν πρόκειται να ταξιδέψουμε από την E_i στην E_j μέσα σε m βήματα, πρέπει να το κάνουμε ‘ταξιδεύοντας’ πρώτα από την E_i σε κάποια

E_k μέσα σε (μ-1) βήματα και μετά από την E_k στην E_j στο επόμενο βήμα.

- *αμείωτη αλυσίδα **Markov**,* είναι αυτή που κάθε κατάστασή της μπορεί να προσπελασθεί από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις. Δηλαδή όταν το Α (το σύνολο όλων των καταστάσεων) είναι κλειστό και δεν περιέχει κανένα κλειστό υποσύνολο τότε έχουμε αμείωτη αλυσίδα Markov. Αντίθετα, αν το Α περιέχει κλειστά υποσύνολα η αλυσίδα λέγεται *μειώσιμη*.

Κεφάλαιο 2

Πίνακες Markov

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα εξετάσουμε τους τρόπους επίλυσης των αλυσίδων Markov με τη βοήθεια των πιθανοτήτων και των πινάκων. Θεωρούμε γνωστά τα βασικά στοιχεία από τη θεωρία πινάκων καθώς και τον τρόπο εκτέλεσης των αλγεβρικών πράξεων. Για το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από τα [1], [2], [6], [8], [12] και [14].

2.1. Πιθανότητες μετάβασης

Η πρόβλεψη μιας μελλοντικής κατάστασης με τη μέθοδο των Αλυσίδων Markov γίνεται με υπολογισμό πιθανοτήτων, οι οποίες χαρακτηρίζουν την αλλαγή ή μεταπήδηση του συστήματος από μία δεδομένη κατάσταση σε κάποια άλλη, μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα. Για τον προσδιορισμό των μελλοντικών πιθανοτήτων είναι απαραίτητο να ορίσουμε τις *πιθανότητες μετάβασης* του συστήματος από μία κατάσταση σε κάποια άλλη, δηλαδή P_{ij} είναι η (υπό συνθήκη) πιθανότητα ότι το σύστημα την επόμενη περίοδο θα βρίσκεται στην κατάσταση j δεδομένου ότι τώρα βρίσκεται στην κατάσταση I ([14]).

Συγκεκριμένα, η δεσμευμένη πιθανότητα P (X_{t+1}=j | X_t=i) λέγεται πιθανότητα μετάβασης (πρώτης τάξης) από την κατάσταση i στην κατάσταση j στο (t+1)- οστό βήμα και συμβολίζεται με p_{ij}(t, t+1). Ο συμβολισμός αυτός δηλώνει το γεγονός ότι γενικά οι πιθανότητες μετάβασης είναι συναρτήσεις όχι μόνο των καταστάσεων i, j αλλά και της χρονικής στιγμής (του βήματος κατά το οποίο γίνεται η μετάβαση). Επομένως, οι πιθανότητες μετάβασης ορίζονται ως εξής:

$$P_{ij}(t) = P\{ X_{t+1}=j \mid X_t=i \} \text{ για } i, j = 1,2,\dots,k \text{ και } t=0,1,2,\dots$$

Όταν οι πιθανότητες αυτές είναι στάσιμες, δηλαδή ανεξάρτητες του βήματος, τότε έχουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = P\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right) \qquad \left(i, j \in S\right)$$

και η $\{X_n\}$ λέγεται *χρονικά ομογενής* ([14]).

Οι πιθανότητες μετάβασης γράφονται συνοπτικά με τη μορφή ενός πίνακα:

$$P = \left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

ο οποίος λέγεται *πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης* (πρώτης τάξης) ([14]). Επειδή η i γραμμή του P είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας (p_{ij}, j$\in S$) της τυχαίας μεταβλητής X_{n+1} δοθέντος ότι X_n =i (συμβολικά ($X_{n+1}|X_n$=i)), ο P είναι ένας τετραγωνικός πίνακας μη αρνητικών στοιχείων όπου το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του είναι ίσο με τη μονάδα (100%), καθότι το σύστημα από μια δεδομένη κατάσταση i είτε μεταπηδά σε μια άλλη κατάσταση j ή παραμένει ως έχει. Τέτοιοι πίνακες καλούνται *στοχαστικοί πίνακες* ή *πίνακες* ***Markov*** ([14]). Εάν στον πίνακα P συμβαίνει και το άθροισμα των πιθανοτήτων κάθε στήλης να είναι ίσο με την μονάδα τότε ο πίνακας καλείται *διπλά στοχαστικός*([14]).

Παράδειγμα 4

Σε μία περιοχή υπάρχουν τρία μόνο σουπερμάρκετ. Επομένως, σε μία δεδομένη στιγμή ένας κάτοικος της περιοχής θα είναι πελάτης σε ένα μόνο από τα τρία σουπερμάρκετ. Έστω ότι υπάρχουν 100.000 άτομα στην περιοχή, από τα οποία τα 40.000 είναι πελάτες του καταστήματος ΑΛΦΑ, το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση 1 και 30.000 καταναλωτές είναι πελάτες του καταστήματος ΒΗΤΑ, το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση 2, ενώ οι υπόλοιποι 30.000 είναι πελάτες του τρίτου καταστήματος ΔΕΛΤΑ που βέβαια αντιστοιχεί στην κατάσταση 3.

Οι πιθανότητες ότι κάποιος τυχαίος κάτοικος της περιοχής είναι πελάτης ενός από τα τρία καταστήματα είναι:

Κατάστημα ΑΛΦΑ: $\Pi_1(1) = 40.000/100.000 = 0.40 = 40\%$

Κατάστημα ΒΗΤΑ: $\Pi_2(1) = 30.000/100.000 = 0.30 = 30\%$

Κατάστημα ΔΕΛΤΑ: $\Pi_3(1) = 30.000/100.000 =0.30 = 30\%$

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι ξεκινούμε τη μελέτη προσδιορισμού των μεριδίων αγοράς αυτή τη στιγμή, θέτοντας δηλαδή $t = 1$, έχουμε

$$\Pi_1= (0.40, 0.30, 0.30)$$

Αφού έχουν πλέον ορισθεί οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος και οι αντίστοιχες πιθανότητες για κάθε κατάσταση στην οποία μπορεί να βρίσκεται το σύστημα στην αρχική περίοδο, το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων μετάβασης από μία οποιαδήποτε κατάσταση σε κάποια άλλη. Είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα μετάβασης, από την ανάλυση ιστορικών στοιχείων που συγκεντρώσαμε σε συνδυασμό με παράλληλη έρευνα αγοράς που πραγματοποιήσαμε. Έστω ότι τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Οι καταστάσεις 1, 2 και 3 στο παράδειγμα που αναλύουμε αντιπροσωπεύουν τα σουπερμάρκετ ΑΛΦΑ, ΒΗΤΑ και ΔΕΛΤΑ. Επομένως η ερμηνεία των πιθανοτήτων στον πίνακα μετάβασης είναι η εξής:

Σειρά 1 του πίνακα P.

0.8 = p_{11} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να παραμείνει πελάτης του ΑΛΦΑ (κατάσταση 1) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ιδίου καταστήματος (κατάσταση 1) την προηγούμενη περίοδο.

0.1 = p_{12} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να γίνει πελάτης του ΒΗΤΑ (κατάσταση 2) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ΑΛΦΑ (κατάσταση 1) την προηγούμενη περίοδο. Μετάβαση από κατάσταση 1 στην κατάσταση 2.

0.1 = p_{13} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να γίνει πελάτης του ΔΕΛΤΑ (κατάσταση 3) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ΑΛΦΑ

(κατάσταση 1) την προηγούμενη περίοδο. Μετάβαση από κατάσταση 1 στην κατάσταση 3.

Σειρά 2 του πίνακα P.

0.1 = p_{21} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να γίνει πελάτης του ΑΛΦΑ (κατάσταση 1) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ΒΗΤΑ (κατάσταση 2) την προηγούμενη περίοδο. Μετάβαση από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 1.

0.7 = p_{22} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να παραμείνει πελάτης του ΒΗΤΑ (κατάσταση 2) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ιδίου καταστήματος (κατάσταση 2) την προηγούμενη περίοδο.

0.2 = p_{23} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να γίνει πελάτης του ΔΕΛΤΑ (κατάσταση 3) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ΒΗΤΑ (κατάσταση 2) την προηγούμενη περίοδο. Μετάβαση από κατάσταση 2 στην κατάσταση 3.

Σειρά 3 του πίνακα P

0.2 = p_{31} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να γίνει πελάτης του ΑΛΦΑ (κατάσταση 1) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ΔΕΛΤΑ (κατάσταση 3) την προηγούμενη περίοδο. Μετάβαση από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 1.

0.2 = p_{32} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να γίνει πελάτης του ΒΗΤΑ (κατάσταση 2) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ΔΕΛΤΑ (κατάσταση 3) την προηγούμενη περίοδο. Μετάβαση από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 2.

0.6 = p_{33} = Η πιθανότητα ένας καταναλωτής να παραμείνει πελάτης του ΔΕΛΤΑ (κατάσταση 3) δεδομένου ότι ήταν πελάτης του ιδίου καταστήματος (κατάσταση 3) την προηγούμενη περίοδο.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων κάθε σειράς είναι ίσο με 1 (100%). Αναλυτικότερα, εάν εξετάσουμε τη δεύτερη σειρά του πίνακα, θα δούμε ότι ένας πελάτης ο οποίος την τρέχουσα περίοδο προτιμά το κατάστημα Β, την επόμενη περίοδο ή θα παραμείνει πάλι πελάτης του ίδιου καταστήματος με πιθανότητα 70%, ή θα προτιμήσει το κατάστημα Α με πιθανότητα 10%, ή τέλος θα προτιμήσει το κατάστημα Δ με πιθανότητα 20%. Σύμφωνα με τις αρχικές παραδοχές της Μαρκοβιανής Ανάλυσης δεν υπάρχουν άλλες εναλλακτικές καταστάσεις. Επομένως το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι 100%.

2.2. Πιθανότητες καταστάσεων μελλοντικών περιόδων

Γνωρίζοντας τις πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος σε κάποια χρονική περίοδο t καθώς επίσης και τον πίνακα μετάβασης, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες για όλες τις καταστάσεις του συστήματος στην επόμενη χρονική περίοδο t+1. Έτσι, αν αναφερθούμε στο παράδειγμα 4 των μεριδίων αγοράς των σούπερ μάρκετ, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες προτίμησης κάθε ενός από τα τρία σούπερ μάρκετ την επόμενη χρονική περίοδο.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του σούπερ μάρκετ ΑΛΦΑ (κατάσταση 1). Το μερίδιο αγοράς του ΑΛΦΑ τη χρονική στιγμή 1 (δηλαδή 1^{ος} μήνας) είναι 40%. Οι πελάτες του ΑΛΦΑ τη χρονική στιγμή 2 (δηλαδή 2^{ος} μήνας) διακρίνονται σε τρεις ομάδες:

i. εκείνους που ήταν πελάτες του ΑΛΦΑ την προηγούμενη περίοδο και παρέμειναν σταθεροί στην επιλογή τους.

ii. εκείνους που την προηγούμενη περίοδο ήταν πελάτες του σούπερ μάρκετ ΒΗΤΑ (κατάσταση 2) και άλλαξαν προτίμηση μεταπηδώντας στο ΑΛΦΑ (κατάσταση 1).

iii. εκείνους που την προηγούμενη περίοδο ήταν πελάτες του σούπερ μάρκετ ΔΕΛΤΑ (κατάσταση 3) και άλλαξαν προτίμηση μεταπηδώντας στο ΑΛΦΑ (κατάσταση 1).

Η ανάλυση αυτή οδηγεί στους αριθμητικούς υπολογισμούς του παρακάτω πίνακα:

Κατάστημα	Ποσοστό Πελατών σε κάθε κατάστημα τη χρονική στιγμή t=1	Ποσοστό που παρέμεινε ή μεταπήδησε στο ΑΛΦΑ τη χρονική στιγμή t=2	Ποσοστό Πελατών στο ΑΛΦΑ τη χρονική στιγμή t=2
ΑΛΦΑ	40%	80% (p_{11})	(40%).(80%)=32%
ΒΗΤΑ	30%	10% (p_{21})	(30%).(10%)=3%
ΔΕΛΤΑ	30%	20% (p_{31})	(30%).(20%)=6%
Συνολικό ποσοστό ΑΛΦΑ τη χρονική στιγμή 2			41%

Με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαν να γίνουν οι υπολογισμοί των πιθανοτήτων της χρονικής περιόδου 2 και για τα σούπερ μάρκετ ΒΗΤΑ και ΔΕΛΤΑ:

Κατάστημα	Ποσοστό Πελατών σε κάθε κατάστημα τη χρονική στιγμή t=1	Ποσοστό που παρέμεινε ή μεταπήδησε στο ΒΗΤΑ τη χρονική στιγμή t=2	Ποσοστό Πελατών στο ΒΗΤΑ τη χρονική στιγμή t=2
ΑΛΦΑ	40%	10% (p_{12})	(40%).(10%)=4%

ΒΗΤΑ	30%	70% (p_{22})	(30%).(70%)=21%
ΔΕΛΤΑ	30%	20% (p_{32})	(30%).(20%)=6%
Συνολικό ποσοστό ΒΗΤΑ τη χρονική στιγμή 2			31%

Κατάστημα	Ποσοστό Πελατών σε κάθε κατάστημα τη χρονική στιγμή t=1	Ποσοστό που παρέμεινε ή μεταπήδησε στο ΔΕΛΤΑ τη χρονική στιγμή t=2	Ποσοστό Πελατών στο ΔΕΛΤΑ τη χρονική στιγμή t=2
ΑΛΦΑ	40%	10% (p_{13})	(40%).(10%)=4%
ΒΗΤΑ	30%	20% (p_{23})	(30%).(20%)=6%
ΔΕΛΤΑ	30%	60% (p_{33})	(30%).(60%)=18%
Συνολικό ποσοστό ΔΕΛΤΑ τη χρονική στιγμή 2			28%

Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται πιο εύκολα με τη βοήθεια της άλγεβρας πινάκων ως εξής:

Έστω Π(1) το διάνυσμα πιθανοτήτων για τις καταστάσεις του συστήματος τη χρονική περίοδο 1 και Π(2) το αντίστοιχο διάνυσα για την περίοδο 2 που ζητούμε να προσδιορίσουμε, και P ο πίνακας μετάβασης.

Μεταξύ των διανυσμάτων πιθανοτήτων των καταστάσεων στις χρονικές στιγμές 1 και 2 ισχύει η σχέση:

$$\Pi(2)=\Pi(1)\cdot P$$

ή ακόμα γενικότερα

$$\Pi(t+1) = \Pi(t) \cdot P$$

όπου Π(t) το διάνυσμα πιθανοτήτων για τις καταστάσεις του συστήματος τη χρονική περίοδο t και Π(t+ 1) το αντίστοιχο διάνυσμα για την περίοδο t+1.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στο παράδειγμα 4 που μελετάμε έχουμε:

$$\Pi(2) = \Pi(1) \cdot P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} =$$

[(0.4)(0.8)+(0.3)(0.1)+(0.3)(0.2)   (0.4).(0.1)+(0.3)(0.7)+(0.3)(0.2)   (0.4)(0.1)+(0.3)(0.2)+(0.3)(0.6)] =

[0.41   0.31   0.28]

Όπως βλέπουμε, στο διάνυσμα Π(2) τα μερίδια των δύο πρώτων καταστημάτων που αντιπροσωπεύονται από τις καταστάσεις 1 και 2 έχουν αυξηθεί, ενώ αντίθετα το μερίδιο του τρίτου καταστήματος έχει μειωθεί.

Είναι προφανές ότι ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, μπορούμε να καταλήγουμε σε πρόβλεψη για τη συμπεριφορά ενός συστήματος μετά από 2, 3 ή περισσότερες χρονικές περιόδους.

<u>Παράδειγμα 5</u>

Ένας εμπορικός αντιπρόσωπος Α έχει πελάτες σε τρεις πόλεις 1,2,3. Αν μία ημέρα ο Α βρίσκεται στην πόλη 1 τότε την επόμενη είναι εξίσου πιθανό να παραμείνει στην 1 ή να φύγει και τότε επιλέγει τυχαία μία από τις πόλεις 2, 3. Αν όμως μία ημέρα ο Α βρίσκεται στην πόλη 2 ή

3 τότε την επόμενη φεύγει και πηγαίνει στην πόλη 1 με διπλάσια πιθανότητα από ότι στην άλλη πόλη.

Η πορεία του Α μεταξύ των πόλεων 1, 2, 3 μέσα στον χρόνο μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Πράγματι, έστω X_0 η πόλη στην οποία βρίσκεται ο Α αρχικά (την ημέρα 0) και X_n η πόλη στην οποία βρίσκεται ο Α την n-οστή ημέρα ($n \in \mathbb{N}$). Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι διακριτού χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων S={1, 2, 3}. Επιπλέον η $\{X_n\}$ έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα αφού η πόλη στην οποία θα βρεθεί ο Α την επόμενη μέρα

σήμερα και όχι από τη συγκεκριμένη παρελθούσα πορεία του. Άρα η $\{X_n\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και μάλιστα χρονικά ομογενής, αφού οι πιθανότητες μετάβασης δεν εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη ημέρα αλλά μόνο από τις συγκεκριμένες πόλεις. Από τα δεδομένα του παραδείγματος ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

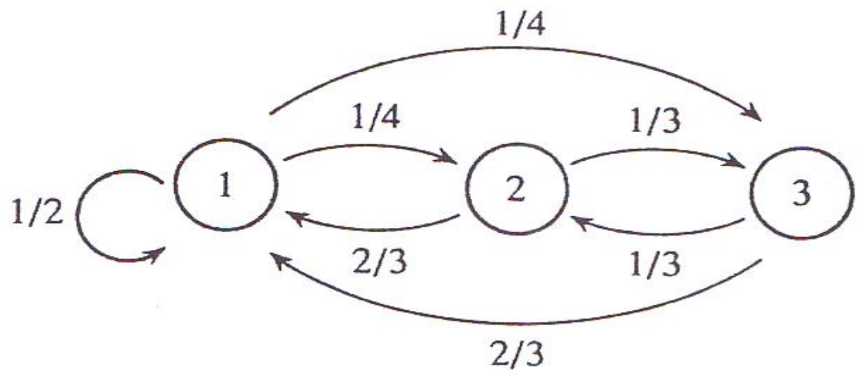
Η πιθανότητα πραγματοποίησης παραδείγματος χάρη της συγκεκριμένης πορείας (1, 2, 1, 1, 3, 2, 3) κατά τις επτά πρώτες ημέρες είναι

$$\begin{aligned} & P\left(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 3, X_5 = 2, X_6 = 3\right) \\ &= p_1^{(0)} p_{12} p_{21} p_{11} p_{13} p_{32} p_{23} \\ &= p_1^{(0)} \frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{432} p_1^{(0)} \end{aligned}$$

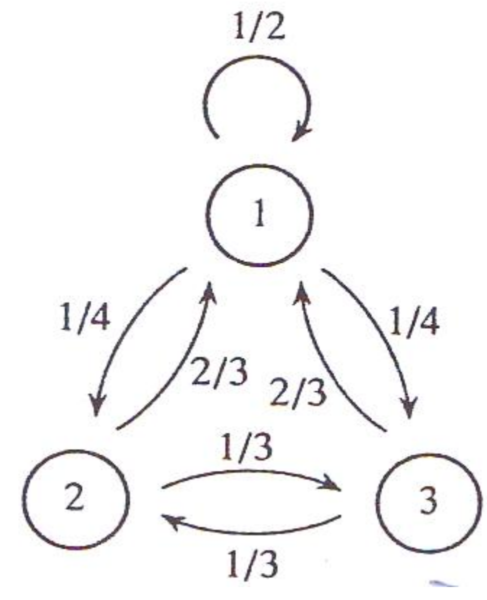
όπου $p_1^{(0)}$ είναι η πιθανότητα ο Α να βρίσκεται τη χρονική στιγμή 0 (δηλαδή στην αρχή της πορείας του) στην πόλη 1.

Επομένως, αν αρχικά ο Α βρίσκεται στην πόλη 1, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/432 αφού τότε $p_1^{(0)}=1$, ενώ αν αρχικά ο Α βρίσκεται στην πόλη 2 ή 3 η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0 αφού τότε $p_1^{(0)}=0$. Επίσης, αν αρχικά ο Α είναι εξίσου πιθανό να βρίσκεται σε οποιαδήποτε πόλη, δηλαδή αν η αρχική κατανομή είναι $p_i^{(0)}=1/3$ (i=1, 2, 3), τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/1296.

Συχνά στη μελέτη της στοχαστικής συμπεριφοράς των Μαρκοβιανών αλυσίδων χρησιμοποιούμε για καλύτερη εποπτεία το λεγόμενο διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης. Αυτό είναι ένα δίκτυο, οι κορυφές του οποίου αντιστοιχούν στις καταστάσεις, ενώ οι δυνατές μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων σημειώνονται με βέλη δίπλα στα οποία αναγράφονται οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης . Π.χ. το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης που αντιστοιχεί στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του παραδείγματος 5 είναι



ή



2.3. Καταστάσεις Ισορροπίας

Αν η εργασία που εκτελέσαμε προηγουμένως στο παράδειγμα 4 για τον προσδιορισμό των πιθανοτήτων της δεύτερης περιόδου επαναληφθεί, είναι δυνατόν να παράγουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες για τις περιόδους 3, 4,... Μπορούμε επομένως να εξετάσουμε ποιες είναι οι μελλοντικές τάσεις για τις πιθανότητες των διαφόρων καταστάσεων και να εκτιμήσουμε ποια θα είναι η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του συστήματος σε σχέση με την κατανομή των μεριδίων της αγοράς στα τρία καταστήματα ΑΛΦΑ, ΒΗΤΑ και ΔΕΛΤΑ. Το ερώτημα βέβαια που τίθεται τώρα είναι αν οι αυξομειωτικές αυτές τάσεις θα συνεχισθούν ή αν θα φτάσουμε σε κάποια κατάσταση ισορροπίας και ποια θα είναι αυτή.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τα αποτελέσματα παρόμοιων υπολογισμών που δείχνουν τις πιθανότητες για τις καταστάσεις του συστήματος από τη χρονική στιγμή t = 1 έως και τη χρονική στιγμή t = 20, με ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων.

Όπως βλέπουμε από τη μελέτη των πιθανοτήτων που περιέχονται στον παρακάτω πίνακα οι μεταβολές που σημειώνονται στα αντίστοιχα μερίδια της αγοράς γίνονται όλο και μικρότερες από περίοδο σε περίοδο. Αν λάβουμε δε υπόψη, μόνο τα πρώτα 4 δεκαδικά ψηφία θα δούμε ότι μετά την περίοδο 8 οι τιμές των πιθανοτήτων πρακτικά δεν αλλάζουν. Άρα μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα φτάνει σε μία κατάσταση ισορροπίας όπου τα τελικά μερίδια της αγοράς θα είναι 42.1% για το ΑΛΦΑ, 31.6% για το ΒΗΤΑ και 26.3% για το ΔΕΛΤΑ κατάστημα.

Πώς όμως μπορεί να είμαστε σίγουροι ότι μία κατάσταση ισορροπίας πράγματι ισχύει και ποιες είναι οι τιμές των πιθανοτήτων όταν το σύστημα φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας;

Χρονική περίοδος	Μερίδιο Αγοράς ΑΛΦΑ	Μερίδιο Αγοράς ΒΗΤΑ	Μερίδιο Αγοράς ΔΕΛΤΑ

1	0.4000000	0.3000000	0.3000000
2	0.4100000	0.3100000	0.2800000
3	0.4150000	0.3140000	0.2710000
4	0.4176000	0.3155000	0.2669000
5	0.4190100	0.3159900	0.2650000
6	0.4198070	0.3160940	0.2640990
7	0.4202748	0.3160663	0.2636589
8	0.4205582	0.3160057	0.2634361
9	0.4207344	0.3159470	0.2633186
10	0.4208459	0.3159000	0.2632540
11	0.4209176	0.3158654	0.2632170
12	0.4209640	0.3158409	0.2631951
13	0.4209943	0.3158240	0.2631816
14	0.4210142	0.3158126	0.2631732
15	0.4210272	0.3158048	0.2631679
16	0.4210358	0.3157997	0.2631644
17	0.4210415	0.3157962	0.2631622
18	0.4210452	0.3157939	0.2631607
19	0.4210477	0.3157924	0.2631597
20	0.4210494	0.3157914	0.2631591

Συνθήκη Κατάστασης Ισορροπίας

Εξ’ ορισμού η απαραίτητη συνθήκη για να έχουμε κατάσταση ισορροπίας είναι να μην μεταβάλλονται οι τιμές των πιθανοτήτων που αντιστοιχούν στις πιθανές καταστάσεις του συστήματος από περίοδο σε περίοδο. Δηλαδή, αν η πιθανότητα για την κατάσταση 1 είναι Π_1, αυτή να παραμείνει η ίδια και την επόμενη χρονική στιγμή, παρόλο ότι θα γίνουν μεταβάσεις από άλλες καταστάσεις στην κατάσταση 1. Θέλουμε επομένως το ουσιαστικό αποτέλεσμα των μεταβάσεων από κατάσταση σε κατάσταση να είναι μηδενικό για όλες τις καταστάσεις. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ως Π το διάνυσμα των πιθανοτήτων που αντιστοιχεί στην κατάσταση ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι και την επόμενη χρονική στιγμή μετά τον υπολογισμό των μεταβάσεων από κατάσταση σε κατάσταση το διάνυσμα πιθανοτήτων θα παραμένει το ίδιο. Το διάνυσμα όμως των πιθανοτήτων μετά την εφαρμογή του πίνακα μετάβασης όπως είδαμε προηγουμένως, δίνεται από τη σχέση $\Pi_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \Pi \cdot P$, όπου P ο πίνακας μετάβασης.

Έτσι θα έχουμε τη συνθήκη:

$$\Pi_{\pi\rho\acute{\iota}\nu} = \Pi_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } \quad \Pi=\Pi\cdot P$$

Αναλυτικότερα η σχέση αυτή γράφεται:

$$[p_1 \, p_2 \mathrm{K} \, p_\nu] = [p_1 p_2 \mathrm{K} \, p_\nu] \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & p_{1\nu} \\ p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & p_{2\nu} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ p_{\nu 1} & p_{\nu 2} & \cdot & \cdot & p_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

όπου π_1, π_2,...,π_ν είναι οι πιθανότητες των καταστάσεων 1, 2,…, ν του συστήματος. Εφόσον αναφερόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας, οι τιμές των πιθανοτήτων π_1, π_2,...,π_ν παραμένουν σταθερές από περίοδο σε περίοδο έστω και αν σημειώνονται μεταβάσεις από κατάσταση σε κατάσταση.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί σαν ένα σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους:

$$\pi_1=p_{11} \,.\, \pi_1 + p_{21} \,.\, \pi_2 + \ldots + p_{\nu 1} \,.\, \pi_\nu$$

$$\pi_2=p_{12} \,.\, \pi_1 + p_{22} \,.\, \pi_2 + \ldots + p_{\nu 2} \,.\pi_\nu$$

$$\vdots$$

$$\pi_\nu=p_{1\nu} \,.\, \pi_1 + p_{2\nu} \,.\, \pi_2 + \ldots + p_{\nu\nu} \,.\, \pi_\nu$$

Αν επίσης λάβουμε υπόψη την εξίσωση

$$\pi_1 +\pi_2 +\ldots +\pi_\nu=1$$

δηλαδή, ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων είναι 100% και απαλείψουμε μία από τις αρχικές ν εξισώσεις (οποιαδήποτε), επειδή είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε η λύση του συστήματος που προκύπτει ορίζει τις πιθανότητες ισορροπίας που αντιστοιχούν στις διάφορες καταστάσεις όταν το σύστημα φτάσει σε συνθήκες ισορροπίας (μακροπρόθεσμα).

Ακολουθούν τώρα μερικά παραδείγματα, που δείχνουν εφαρμογές της διαδικασίας που περιγράψαμε τόσο για πρόβλεψη μιας μελλοντικής κατάστασης όσο και για εύρεση συνθήκης ισορροπίας.

Παράδειγμα 6

Ένα μηχάνημα μπορεί σε μία δεδομένη στιγμή είτε να εργάζεται κανονικά είτε να βρίσκεται εκτός λειτουργίας λόγω βλάβης. Μπορούμε να θεωρήσουμε, δηλαδή, ότι η μία κατάσταση είναι αυτή που αντιπροσωπεύει τη λειτουργία του μηχανήματος, ενώ η δεύτερη κατάσταση τη μη λειτουργία. Αν θεωρήσουμε ότι σε κάποια χρονική στιγμή t = 1 (στην αρχή π.χ. της λειτουργίας του) το συγκεκριμένο μηχάνημα εργάζεται χωρίς πρόβλημα τότε έχουμε:

$$\Pi\,(1) = (1, 0)$$

δηλαδή

$\Pi_1(1) = 1$, 100% πιθανότητα το μηχάνημα να βρίσκεται στην κατάσταση 1 (δηλαδή το μηχάνημα λειτουργεί)

$\Pi_2(1) = 0$, 0% πιθανότητα το μηχάνημα να βρίσκεται στην κατάσταση 2 (να μην λειτουργεί).

Επομένως, εάν:

Κατάσταση 1 : Μηχάνημα σε λειτουργία

Κατάσταση 2 : Μηχάνημα σε συντήρηση λόγω βλάβης

και μας δίνεται ότι ο πίνακας μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

τότε αυτό σημαίνει ότι εφόσον το μηχάνημα βρίσκεται σε λειτουργία (κατάσταση 1) υπάρχει πιθανότητα 80% να βρίσκεται σε λειτουργία και την επόμενη χρονική στιγμή και 20% πιθανότητα να πάθει βλάβη, ενώ αντίθετα αν το μηχάνημα επισκευάζεται υπάρχει πιθανότητα 10% να λειτουργήσει την επόμενη χρονική στιγμή και 90% πιθανότητα να συνεχίσει να μην λειτουργεί.

Το ζητούμενο είναι να προσδιορισθεί η πιθανότητα ανά πάσα χρονική στιγμή το μηχάνημα να βρίσκεται σε λειτουργία η σε συντήρηση, δηλαδή οι πιθανότητες π_1 και π_2 σε κατάσταση ισορροπίας.

Έχουμε λοιπόν: $$\left(p_1 \;\; p_2\right) = \left(p_1 \;\; p_2\right) \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\pi_1 = (0.8)\pi_1 + (0.1)\pi_2$$

$$\pi_2 = (0.2)\pi_1 + (0.9)\pi_2$$

και

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$(0.1)\pi_2=(0.2)\pi_1 \qquad ή \qquad \pi_2=2\pi_1$$

και

$$\pi_1+\pi_2=1$$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει

$$3\pi_1=1 \quad ή \quad \pi_1=1/3=0.333$$

και επομένως

$$\pi_2=2/3=0.667$$

Επομένως, μακροπρόθεσμα, το συγκεκριμένο μηχάνημα κατά μέσο όρο θα παράγει έργο μόνο κατά το 1/3 του χρόνου.

Παράδειγμα 7

Μια επιχείρηση κυκλοφορεί για πρώτη φορά στην αγορά ένα νέο απορρυπαντικό ρούχων Κ. Η έρευνα της αγοράς απέδειξε ότι οι καταναλωτές αγοράζουν κατά μέσο όρο ένα απορρυπαντικό την εβδομάδα. Ακόμη, το 70% όσων αγοράζουν το Κ αναμένεται να το προτιμήσουν και την επόμενη εβδομάδα, ενώ αντίθετα το 20% όσων αγοράζουν κάποιο ανταγωνιστικό προϊόν αναμένεται να προτιμήσουν την επόμενη εβδομάδα το Κ.

Να υπολογιστεί το μερίδιο της αγοράς για το απορρυπαντικό Κ:

Α) Δύο εβδομάδες μετά την κυκλοφορία του.

Β) Μακροπρόθεσμα, όταν σταθεροποιηθούν οι προτιμήσεις των καταναλωτών υποθέτουμε ότι οι συνθήκες της αγοράς παραμένουν αναλλοίωτες.

Λύση:

Το υπό μελέτη σύστημα περιγράφεται από μια αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις:

S_1=ο καταναλωτής αγοράζει το Κ και

S_2=ο καταναλωτής αγοράζει κάποιο ανταγωνιστικό προϊόν.

Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Α) Επειδή το Κ κυκλοφορεί για πρώτη φορά στην αγορά θα είναι Π_0=[0 1] και κατά συνέπεια

$$\Pi_2 = \Pi_1 \cdot P = \Pi_0 \cdot P \cdot P = \Pi_0 P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Κατά συνέπεια το μερίδιο της αγοράς για το Κ μετά από δύο εβδομάδες θα είναι το 30% του συνόλου των καταναλωτών.

Β) Θέτουμε $\Pi = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ το διάνυσμα των πιθανοτήτων που αντιστοιχεί στην κατάσταση ισορροπίας.

Από τη σχέση $[p_1 \quad p_2] = [p_1 \quad p_2] \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} p_1 = 0.7p_1 + 0.2p_2 \\ p_2 = 0.3p_1 + 0.8p_2 \end{Bmatrix} \quad ή \quad \begin{Bmatrix} -0.3p_1 + 0.2p_2 = 0 \\ 0.3p_1 - 0.2p_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Επειδή οι 2 αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμες θεωρούμε τελικά το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} -0.3p_1 + 0.2p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{Bmatrix}$$

και με τον κανόνα του Cramer βρίσκουμε

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0.2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-0.2}{-0.5} = 0.4$$

Κατά συνέπεια το μερίδιο της αγοράς για το Κ μακροπρόθεσμα θα διαμορφωθεί στο 40% του συνόλου των καταναλωτών.

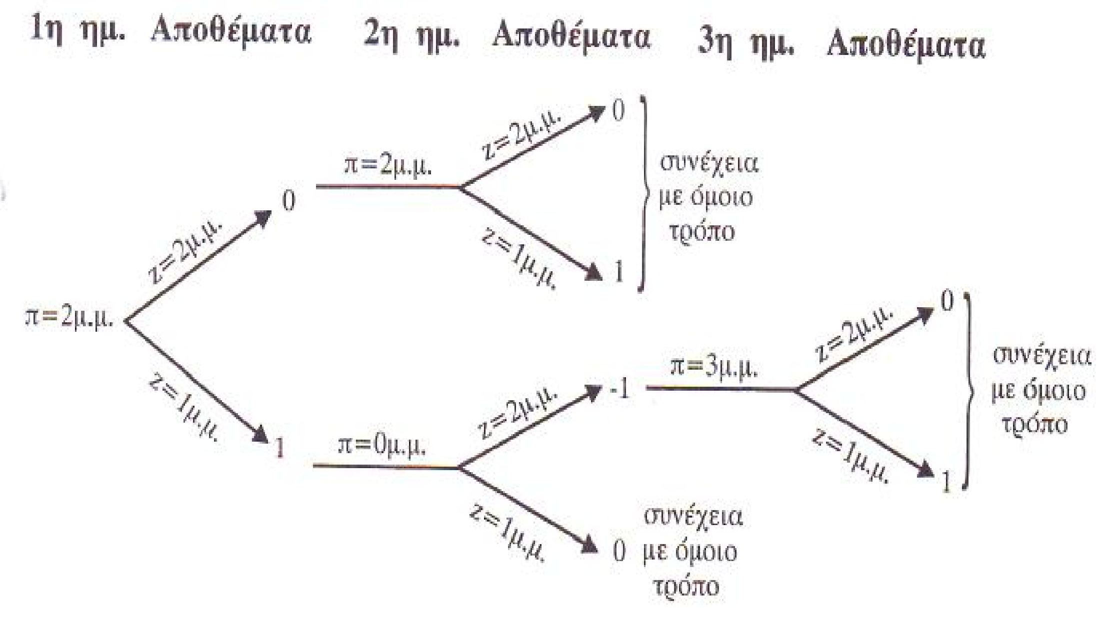
<u>Παράδειγμα 8</u>

Η παραγωγή του προϊόντος Φ σε μια βιομηχανία ρυθμίζεται ανάλογα με τα διαθέσιμα αποθέματα στο τέλος κάθε ημέρας. Έτσι, αν υπάρχουν ανικανοποίητες παραγγελίες, ή εάν τα αποθέματα έχουν μηδενιστεί, η παραγωγή της επόμενης ημέρας καλύπτει το έλλειμμα συν δύο επιπλέον μετρικές μονάδες (μ.μ.) του προϊόντος, ενώ αντίθετα, όταν υπάρχουν αποθέματα, η παραγωγή της επόμενης ημέρας είναι μηδέν. Γνωρίζουμε ακόμα ότι η ημερήσια ζήτηση του Φ είναι 1 μ.μ. με πιθανότητα 60% ή 2 μ.μ. με πιθανότητα 40%.

Να υπολογιστεί, σύμφωνα μ' αυτό το ρυθμό παραγωγής, η πιθανότητα μακροπρόθεσμα να εμφανίζονται ελλείμματα στα αποθέματα του Φ.

<u>Λύση:</u>

Αφού η μέγιστη ημερήσια ζήτηση προϊόντος είναι 2 μ.μ., κατά την πρώτη ημέρα παραγωγής του, η βιομηχανία παρήγαγε 2 μ.μ. Στη συνέχεια, σύμφωνα με τον παραπάνω ρυθμό παραγωγής, η πορεία των αποθεμάτων του προϊόντος δίδεται από το διάγραμμα του σχήματος όπου π= παραγωγή και z=ζήτηση.



Από το διάγραμμα αυτό γίνεται φανερό ότι για τα αποθέματα του Φ στο τέλος κάθε ημέρας είναι δυνατό να συμβούν οι ακόλουθες τρείς καταστάσεις:

S_1=έλλειμμα 1 μ.μ.

S_2=μηδενικό απόθεμα

S_3= απόθεμα 1 μ.μ.

Έτσι το πρόβλημά μας ανάγεται σε περίπτωση μιας αλυσίδας Markov τριών καταστάσεων. Με βάση τις πιθανότητες ημερήσιας ζήτησης του Φ, και τον παραπάνω ρυθμό παραγωγής του προκύπτει ο παρακάτω πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Θέτοντας $\Pi = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]$ το διάνυσμα των πιθανοτήτων που αντιστοιχεί στην κατάσταση ισορροπίας, από τη σχέση Π = ΠP προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} -p_1 + 0.4p_3 = 0 \\ 0.4p_1 - 0.6p_2 + 0.6p_3 = 0 \\ 0.6p_1 + 0.6p_2 - p_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις κατά μέλη βρίσκουμε $-0.6p_1 - 0.6p_2 + p_3 = 0$,δηλαδή η τρίτη εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις δύο πρώτες.

Θεωρούμε λοιπόν τελικά το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} -p_1 + 0.4p_3 = 0 \\ 0.4p_1 - 0.6p_2 + 0.6p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{Bmatrix}$$

Με τον κανόνα Cramer προκύπτει ότι

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & -0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0.4 \\ 0.4 & -0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0.24}{1.6} = 0.15$$

Κατά συνέπεια η πιθανότητα μακροπρόθεσμα να εμφανίζονται ελλείμματα στα αποθέματα του Φ είναι 15%.

Παράδειγμα 9

Σ' ένα αγροτικό συνεταιρισμό εφαρμόζονται οι εξής διαδικασίες για ένα προϊόν:

S_1=συλλογή

S_2= διαλογή

S_3= συσκευασία

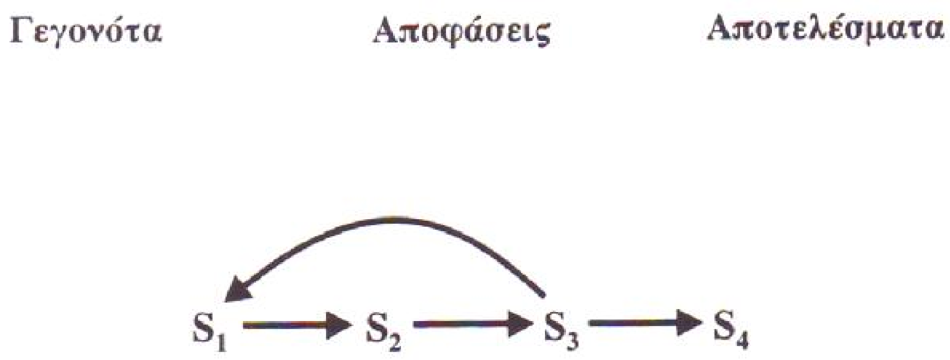
S_4= πώληση.

Αν κατά τη συσκευασία του προϊόντος διαπιστωθεί ότι η ποιότητά του δεν είναι ικανοποιητική, τότε η ποσότητα αυτή του προϊόντος απορρίπτεται και γίνεται συλλογή νέας ποσότητας. Η πιθανότητα να συμβεί αυτή η περίπτωση είναι 20%. Ακόμη έχει υπολογιστεί ότι οι επιμέρους φάσεις ενός κύκλου της συνολικής διαδικασίας διαρκούν αντίστοιχα 10, 4, 3 και 45 ημέρες.

Να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχει ολοκληρωθεί ο συνολικός κύκλος σε 7 φάσεις.

Λύση:

Είναι φανερό ότι το πρόβλημά μας ανάγεται στην περίπτωση μιας αλυσίδας Markov 4 καταστάσεων S_1, S_2, S_3, S_4.



Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι p_{31}=0.2 και κατά συνέπεια p_{34}=0.8.

Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή η διαδικασία αρχίζει πάντοτε από την κατάσταση S_1 θα είναι :

$$\Pi_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Για την $7^η$ φάση της διαδικασίας θα ισχύει:

$$\Pi_6 = \Pi_0 P^6 \text{, όπου } \Pi_6 = \left[p_1^{(6)} \quad p_2^{(6)} \quad p_3^{(6)} \quad p_4^{(6)}\right]$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$P^6 = P^3 \cdot P^3 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0.96 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0.96 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0.96 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και κατά συνέπεια

$$\Pi_6 = [0.04 \quad 0 \quad 0 \quad 0.96]$$

από όπου προκύπτει

$$\Pi_4^{(6)} = 0.96$$

Η πιθανότητα λοιπόν να έχει ολοκληρωθεί ο συνολικός κύκλος σε 7 φάσεις είναι 96%. Παρατηρούμε ακόμη ότι κατά την $7^{η}$ φάση υπάρχει μία μικρή πιθανότητα 4% η διαδικασία να επανέλθει και πάλι στο στάδιο της συλλογής του προϊόντος.

$\sqrt{32} \approx 0.56$.

Κεφάλαιο 3

Συστήματα ουρών αναμονής

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας αναμονής, καθώς μερικά συστήματα αναμονής μπορούν ουσιαστικά να θεωρηθούν αλυσίδες Markov. Για το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από τα [4], [11] και [12].

3.1. Εισαγωγή στη θεωρία αναμονής

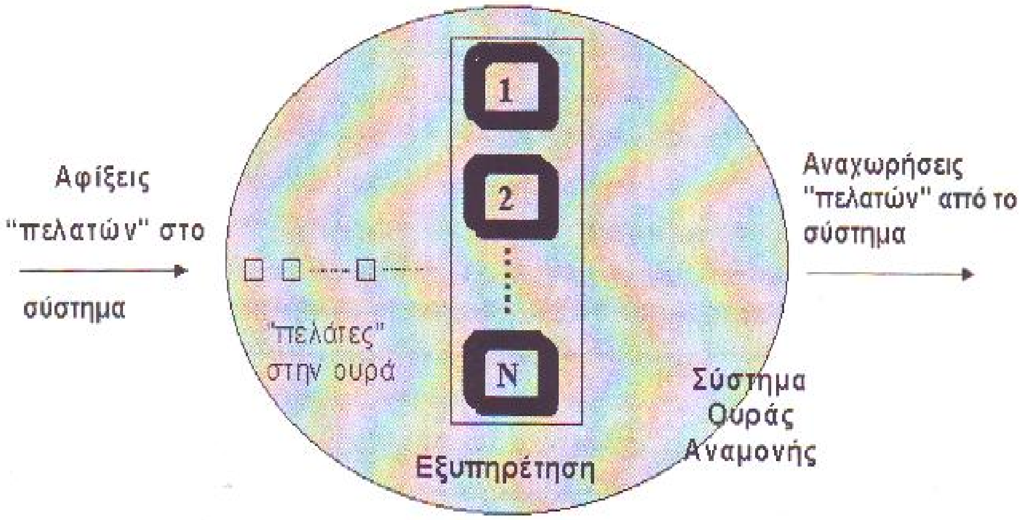
Η μελέτη των ουρών αναμονής είναι ένας από τους πρώτους κλάδους της επιχειρησιακής έρευνας που αναπτύχθηκαν, και έχει ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών σε προβλήματα που συναντάμε καθημερινά. Πολλές από τις καθημερινές μας αποφάσεις επηρεάζονται από τη λειτουργία συστημάτων ουρών αναμονής: επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε ταξί αντί για αστικό λεωφορείο διότι ο χρόνος αναμονής για το δεύτερο θεωρείται υπερβολικός, αλλάζουμε την τράπεζα με την οποία συναλλασσόμαστε διότι μια άλλη έχει ταχύτερη εξυπηρέτηση, για τον ίδιο λόγο μπορεί να προτιμήσουμε ένα υπερκατάστημα από κάποιο άλλο κ.ο.κ. Παραδείγματα Ουρών Αναμονής υπάρχουν όμως και πέραν αυτών που συναντάμε στην καθημερινή μας ζωή. Μερικά παραδείγματα ουρών αναμονής είναι:

- Στα ταμεία των σουπερμάρκετ, τραπεζών, καθώς και σε υπηρεσίες εξυπηρέτησης του κοινού.
- Στις υπηρεσίες πληροφοριών του τηλεφωνικού δικτύου.
- Στις διασταυρώσεις οδικών αρτηριών περιμένοντας να δοθεί το πράσινο φως στην κατεύθυνση που κινούμαστε.
- Σε περιπτώσεις πού υπάρχουν εκκρεμείς εργασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν.
- Στα αεροδρόμια με μεγάλη κίνηση, όπου αεροπλάνα περιμένουν την σειρά τους για χρήση του αεροδιαδρόμου προσγείωσης ή απογείωσης ή των πυλών αποβίβασης επιβατών.
- Στα νοσοκομεία, όπου ασθενείς αναμένουν την εισαγωγή τους για επεμβάσεις ή νοσηλεία.
- Σε μια βιομηχανία, όπου μηχανήματα που έχουν υποστεί βλάβη αναμένουν το συνεργείο επισκευής να τα επισκευάσει και να τα θέσει σε λειτουργία.

Τα συστήματα αναμονής (queueing systems) βρίσκονται πίσω από τα περισσότερα μοντέλα μελέτης της απόδοσης υπολογιστικών συστημάτων, αφού φαινόμενα καθυστερήσεων λόγω της απαίτησης χρήσης περιορισμένων πόρων από πολλούς “πελάτες” (αιτήσεις), μπορούν να εντοπισθούν τόσο σε απλούς υπολογιστές, όσο και σε πολύπλοκα συστήματα, όπως τα δίκτυα υπολογιστών και τα κανάλια μετάδοσης δεδομένων.

Τα παραπάνω παραδείγματα αφορούν οικονομικές δραστηριότητες που εκ πρώτης όψεως δεν φαίνεται να έχουν μεταξύ τους κοινά σημεία. Η μελέτη όμως λειτουργίας και βελτιστοποίησης των ουρών αναμονής έχει κοινά στοιχεία για όλα τα προαναφερθέντα παραδείγματα. Τα συστήματα αναμονής αναφέρονται συχνά και ως συστήματα ουρών. Κάθε σύστημα στο οποίο αφίξεις «πελατών» δημιουργούν απαιτήσεις εξυπηρέτησης από πόρους πεπερασμένης δυνατότητας εξυπηρέτησης, είναι ένα *σύστημα αναμονής*.

Σε κάθε Σύστημα Ουράς Αναμονής διακρίνουμε τέσσερα βασικά χαρακτηριστικά:



Αφίξεις στο Σύστημα

Σε κάθε σύστημα ουράς αναμονής υπάρχουν πελάτες οι οποίοι προσέρχονται για εξυπηρέτηση. Με το γενικό όρο πελάτης εννοούμε τα πρόσωπα, αντικείμενα ή συμβάντα που εισέρχονται στο σύστημα για εξυπηρέτηση. Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι πελάτες διαφόρων συστημάτων ουρών αναμονής:

Σύστημα Ουράς Αναμονής	Πελάτης	Εξυπηρέτηση
Ταμείο Τράπεζας	Πελάτης Τράπεζας	Ταμειακή Τακτοποίηση
Διόδια Εθνικής Οδού	Αυτοκίνητα	Πληρωμή Διοδίων
Δικαστήρια	Υποθέσεις για Εκδίκαση	Δίκη
Νοσοκομείο	Ασθενείς	Επέμβαση και Νοσηλεία
Εργοστάσιο	Μηχανήματα που έχουν υποστεί βλάβη	Επισκευή
Διάδρομος Αεροδρομίου	Αεροπλάνα προσερχόμενα για απογείωση ή προσγείωση	Απογείωση ή Προσγείωση

Οι αφίξεις σε ένα σύστημα ουράς αναμονής χαρακτηρίζονται από τα εξής βασικά χαρακτηριστικά:

- *Μέγεθος του πληθυσμού*: ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι αφίξεις των πελατών θεωρείται είτε άπειρος (πρακτικά πολύ μεγάλου μεγέθους) όπως π.χ. πελάτες τραπεζών, αυτοκίνητα σε σταθμούς διοδίων κ.λπ., ή πεπερασμένος όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των μηχανών ενός εργοστασίου πού αναμένουν επισκευή. Στα πιο πολλά προβλήματα ουρών αναμονής, εκτός αν ειδικά αναφερθούμε σε πεπερασμένο πληθυσμό, θα θεωρούμε ότι ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι “πελάτες” του συστήματος είναι άπειρος ([12]).

- *Κατανομή Αφίξεων*: Οι πελάτες αφικνούνται στο σύστημα είτε σύμφωνα με κάποια γνώση και σταθερή συχνότητα (π.χ. ένας ασθενής κάθε 15 λεπτά) ή αλλιώς όπως στις περισσότερες περιπτώσεις, σε τυχαίους χρόνους. Οι αφίξεις θεωρούνται τυχαίες όταν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και η χρονική στιγμή πραγματοποίησης τους δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς. Στη δεύτερη περίπτωση ο ρυθμός των αφίξεων μετράται με τον μέσο αριθμό αφίξεων ανά μονάδα του χρόνου (π.χ. πελάτες ανά ώρα). Ο μέσος ρυθμός αφίξεων ξεπερνά τη μέγιστη δυνατότητα εξυπηρέτησης, το σύστημα «πέφτει» και ουρές ανεξέλεγκτου μήκους αρχίζουν να σχηματίζονται. Πάντως, ακόμα και στην περίπτωση που η μέση τιμή του ρυθμού αφίξεων είναι μικρότερη από τη μέγιστη δυνατότητα εξυπηρέτησης, θα έχουμε το σχηματισμό ουρών λόγω των στατιστικών διακυμάνσεων και των «ξεσπασμάτων» που μπορεί να έχουν οι αφίξεις ([12]).

Τα παραπάνω φαινόμενα αναμονής τα αντιμετωπίζουμε όλοι μας κατά τη διάρκεια των καθημερινών συναλλαγών μας σε υπηρεσίες, διόδια κ.λ.π., όπου «πελάτες» είμαστε εμείς και πόροι του συστήματος είναι συνήθως οι υπάλληλοι που μας εξυπηρετούν. Σε ένα πληροφοριακό σύστημα φανταστείτε ως «πελάτες» τις αιτήσεις χρήσης μιας CPU από ένα πρόγραμμα, τα πακέτα δεδομένων σε ένα δίκτυο και αντίστοιχα ως πόρους του συστήματος το χρόνο της CPU, το κανάλι μετάδοσης των πακέτων κ.λ.π. Προκειμένου να μελετήσουμε ένα σύστημα αναμονής, θα χρησιμοποιήσουμε μοντέλα αναμονής (queueing models), τα οποία είναι μαθηματικά μοντέλα.

Στη θεωρία των ουρών αναμονής ο αριθμός των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου μπορεί να προσεγγισθεί από μία γνωστή στατιστική κατανομή, την κατανομή Poisson. Θεωρούμε ότι ο μέσος όρος των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου είναι σταθερός και συμβολίζεται με λ. Επομένως η πιθανότητα για Χ αφίξεις σε μία μονάδα χρόνου δίνεται από τη σχέση:

$$P(X\ afixeiV) = \frac{e^{-l} \cdot l^{x}}{\mathrm{X}!}$$

Χρόνος Εξυπηρέτησης

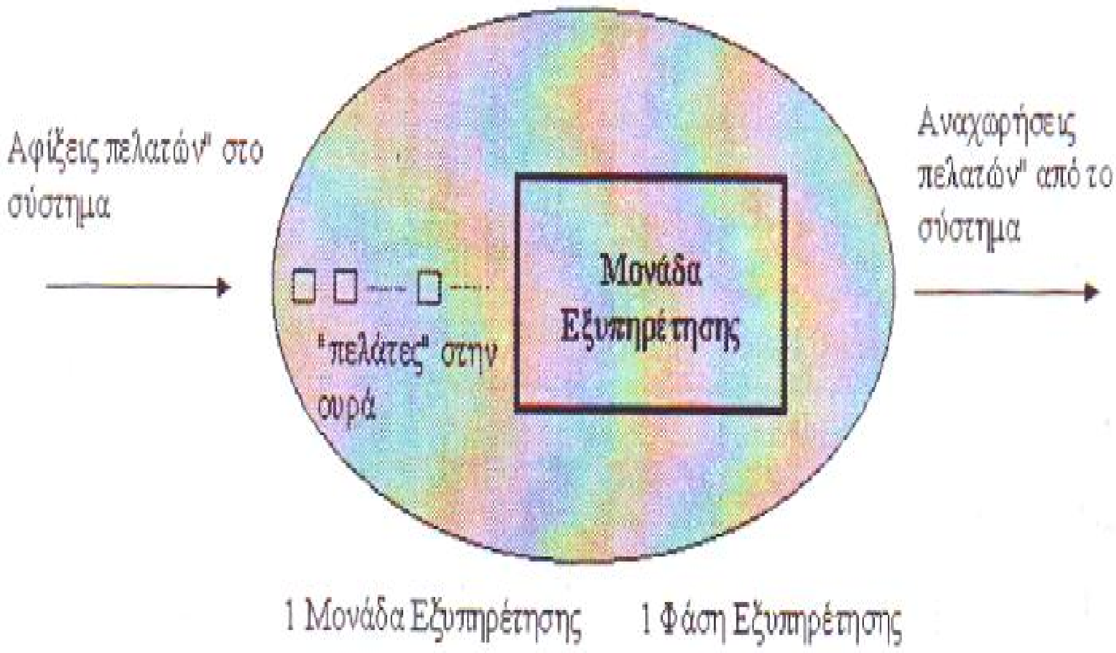
Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση του πελάτη (από τη στιγμή που υπάρχει μονάδα εξυπηρέτησης ελεύθερη) μπορεί να είναι σταθερός (π.χ. σε ένα αυτόματο πλυντήριο αυτοκινήτων), ή αντίθετα, όπως συμβαίνει και στα περισσότερα συστήματα ουρών αναμονής, να παρουσιάζει τυχαίες διακυμάνσεις. Για τις πιο πολλές περιπτώσεις συστημάτων ουράς αναμονής μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, επομένως:

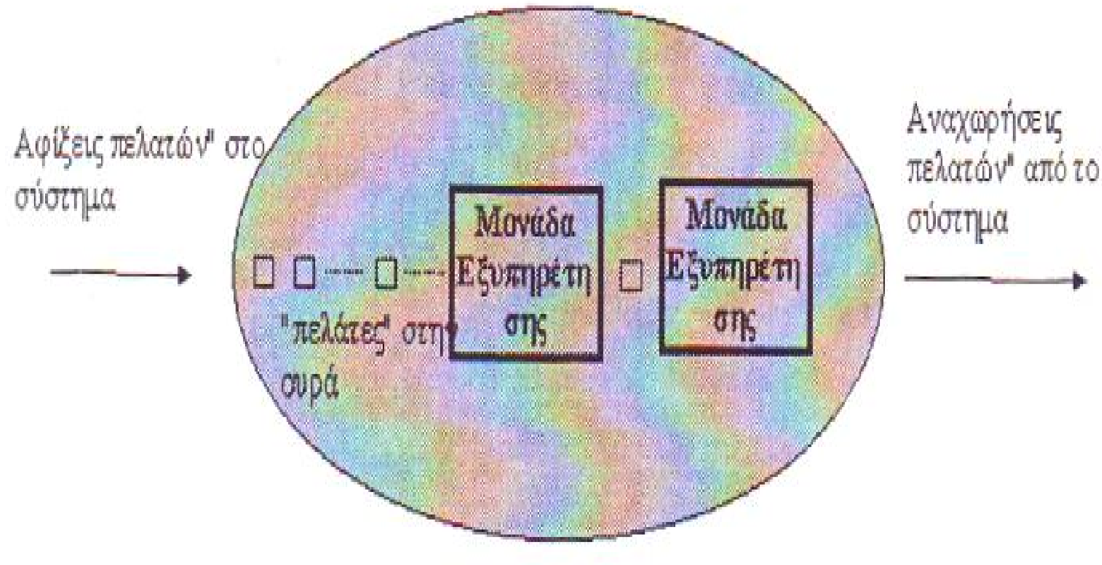
$$\mathrm{P}(\text{Χρόνος Εξυπηρέτησης} > t) = e^{-\mu t}$$

όπου με μ συμβολίζεται ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται, κατά μέσο όρο στην αντίστοιχη μονάδα χρόνου.

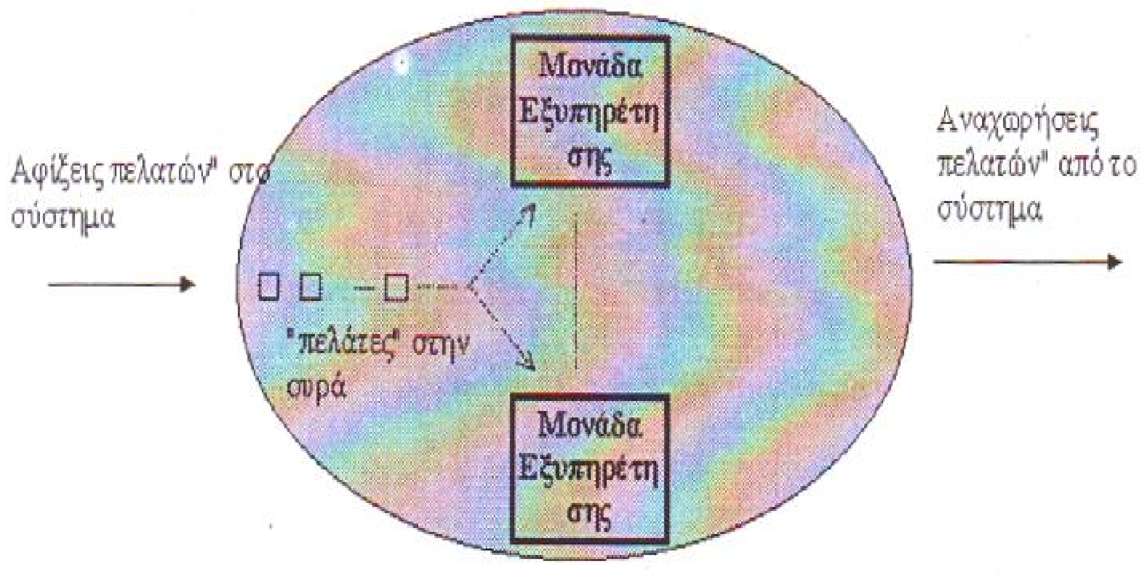
Μονάδες Εξυπηρέτησης

Για τον πελάτη που αναμένει στην ουρά μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία μονάδες εξυπηρέτησης (π.χ. tellers στην τράπεζα, διάδρομοι διοδίων κ.λπ..). Στην περίπτωση αυτή ο πελάτης εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη μονάδα εξυπηρέτησης. Επίσης, άλλες φορές για την πλήρη εξυπηρέτηση του πελάτη απαιτείται η διαδοχική προσέλευσή του σε περισσότερες από μία μονάδα εξυπηρέτησης (π.χ. η διεκπεραίωση κάποιας εργασίας που απαιτεί εγκρίσεις σε πολλά στάδια).

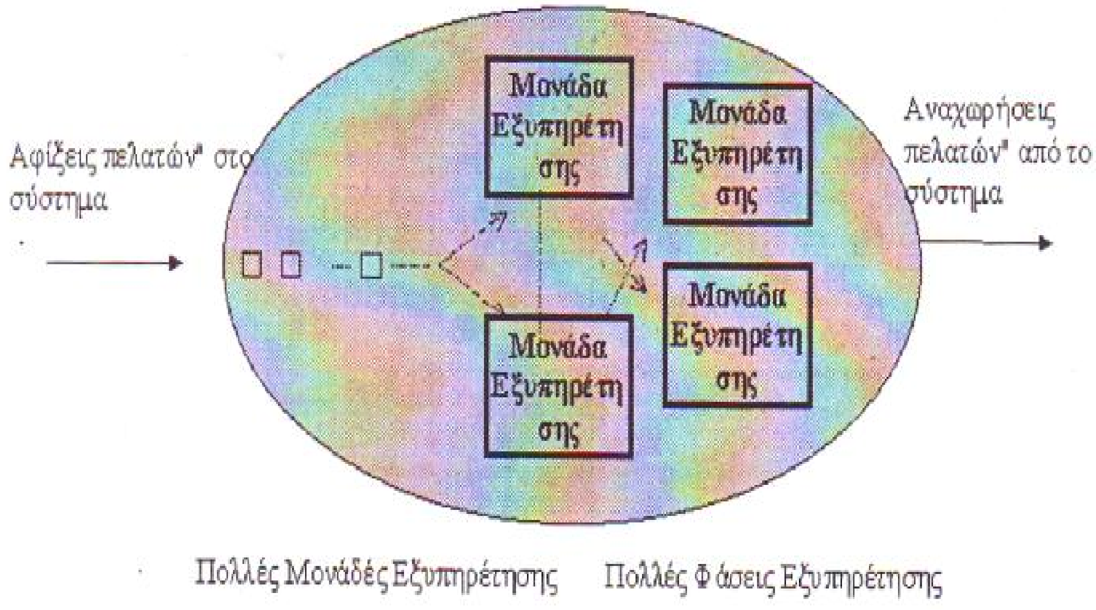




1 Μονάδα Εξυπηρέτησης Πολλές Φάσεις Εξυπηρέτησης



Πολλές Μονάδές Εξυπηρέτησης 1Φάση Εξυπηρέτησης



Λειτουργία της Ουράς Αναμονής

Η ουρά σχηματίζεται από πελάτες που αναμένουν την σειρά τους να εξυπηρετηθούν. Η σειρά με την οποία εξυπηρετούνται οι πελάτες που αναμένουν στην ουρά είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των συστημάτων ουρών αναμονής. Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται είναι κυρίως οι εξής:

- FIFO (First In First Out): Οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη χρονολογική σειρά προσέλευσης.
- LIFO (Last In First Out): Οι πελάτες εξυπηρετούνται αντιστρόφως της σειράς προσέλευσης, δηλαδή, ο πελάτης που έχει φτάσει στην ουρά τελευταίος, εξυπηρετείται πρώτος.

- Τυχαία Επιλογή: Οι πελάτες επιλέγονται τυχαία από τους αναμένοντες στην ουρά.
- Προτεραιότητες: Οι πελάτες χωρίζονται σε κατηγορίες με διαφορετικές προτεραιότητες. Επιλέγονται πρώτα οι πελάτες με την πιο υψηλή προτεραιότητα. Μεταξύ πελατών με την ίδια κλάση προτεραιότητας επιλέγεται αυτός που αναμένει τον περισσότερο χρόνο.

Το πιο συνηθισμένο σύστημα επιλογής πελατών βέβαια είναι το FIFO, και στην ανάλυση των συστημάτων ουρών αναμονής υποθέτουμε ότι η εξυπηρέτηση των πελατών θα γίνεται με βάση τη σειρά προσέλευσης στην ουρά.

Εξετάζοντας τη δομή του συστήματος και τα χαρακτηριστικά των πελατών, πρέπει να γνωρίζουμε ή να υποθέσουμε και μια σειρά άλλες ποσότητες, όπως:

- Αριθμός εξυπηρετητών (servers) στο σύστημα.
- Χωρητικότητα του συστήματος σε πελάτες Κ.
  (Συνήθως υποθέτουμε $K = \infty$).
- Πληθυσμός υποψηφίων πελατών Μ.
  (Συνήθως υποθέτουμε $M = \infty$).
- Κλάσεις πελατών.
  (Συνήθως υποθέτουμε μόνο μία)
- Ομάδες προτεραιότητας πελατών.
  (Συνήθως υποθέτουμε μόνο μία)
- Διαθεσιμότητα εξυπηρετητή.
  (Συνήθως υποθέτουμε 100%)

Οι ποσότητες που ενδιαφέρουν από πλευράς μέτρησης της απόδοσης και της αποτελεσματικότητας του συστήματος, είναι :

- Χρόνος απόκρισης (συνολικός χρόνος στο σύστημα) για έναν πελάτη.
- Χρόνος αναμονής για έναν πελάτη.
- Αριθμός πελατών στο σύστημα.
- Το μήκος μιας περιόδου απασχόλησης (busy period).
- Το μήκος μιας περιόδου αργίας (idle period).

Η οικονομική πλευρά των συστημάτων ουρών αναμονής

Τα περισσότερα από τα προβλήματα των Ουρών Αναμονής έχουν σαν αντικείμενο τον προσδιορισμό του ιδανικού επιπέδου εξυπηρέτησης των πελατών του συστήματος. Για παράδειγμα ο διευθυντής ενός Supermarket θα πρέπει να αποφασίσει για τον αριθμό των ταμείων που θα πρέπει να είναι ανοιχτά στις διάφορες ημέρες και ώρες της εβδομάδος, ώστε ο χρόνος αναμονής των πελατών να είναι σε ανεκτά επίπεδα. Αντίστοιχα, ο υπεύθυνος παραγωγής σε κάποια βιομηχανία θα πρέπει να προσδιορίσει τον αριθμό των συντηρητών που θα είναι διαθέσιμοι να επισκευάζουν τις παρουσιαζόμενες βλάβες των μηχανημάτων ώστε να μη διακόπτεται για μεγάλα διαστήματα η παραγωγή.

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι και στα συστήματα ουρών αναμονής, όπως και στα πιο πολλά προβλήματα της Επιχειρησιακής Έρευνας ο αντικειμενικός σκοπός της μελέτης ενός προβλήματος είναι ο προσδιορισμός του άριστου σημείου ισορροπίας μεταξύ δύο ακραίων καταστάσεων. Το ένα άκρο είναι η άριστη εξυπηρέτηση του πελάτη, μειώνοντας τις αναμονές στο ελάχιστο. Με αυτόν τον τρόπο οι μεν πελάτες θα είναι ευχαριστημένοι, αλλά το κόστος λειτουργίας της μονάδας (ή μονάδων) εξυπηρέτησης με μια τέτοια πολιτική είναι ασφαλώς πολύ υψηλό. Στο άλλο άκρο βέβαια, έχουμε την περίπτωση χαμηλού επιπέδου εξυπηρέτησης, με χαμηλό συνεπώς κόστος λειτουργίας, αλλά μεγαλύτερους χρόνους αναμονής των πελατών οι οποίοι τελικώς συνεπάγονται επίσης αύξηση του κόστους (μηχανήματα που παραμένουν εκτός λειτουργίας, δυσαρεστημένοι πελάτες, ασθενείς που η κατάσταση τους επιδεινώνεται κ.ο.κ.).

Συμβολισμοί

Στη μελέτη ενός συστήματος ουράς αναμονή ενδιαφερόμαστε κυρίως να μετρήσουμε την απόδοση του συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας (steady-state), αγνοώντας δηλαδή τις αρχικές φάσεις λειτουργίας του και αφού το σύστημα βρίσκεται σε λειτουργία για αρκετό χρονικό διάστημα.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον όρο “κατάσταση ισορροπίας” ας θεωρήσουμε την λειτουργία των ταμείων μιας τράπεζας. Με την πρωινή έναρξη της λειτουργίας της τράπεζας συνήθως υπάρχουν πελάτες που αναμένουν να ανοίξουν τα ταμεία, και έτσι δημιουργείται μια σχετικά μεγάλη ουρά (ή αντίθετα). Μετά την εξυπηρέτηση αυτής της αρχικής ομάδας των πελατών η κατάσταση σταθεροποιείται και υπάρχει ο συνηθισμένος ρυθμός προσέλευσης και εξυπηρέτησης πελατών με αποτέλεσμα να υπάρχει μια σταθεροποίηση στο χρόνο αναμονής, χρόνο εξυπηρέτησης κ.ο.κ. Μπορούμε επίσης να σκεφθούμε την κατάσταση ισορροπίας ως εξής: Ποια θα είναι τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από την παρατήρηση του συστήματος για κάποιο μεγάλο χρονικό διάστημα;

Οι παρακάτω συμβολισμοί θα χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος ουράς αναμονής.

N = αριθμός πελατών στο σύστημα

P(N) = πιθανότητα ότι θα υπάρχουν ακριβώς N πελάτες στο σύστημα

λ = μέσος όρος αφίξεων πελατών ανά μονάδα χρόνου

μ = μέσος όρος πελατών που εξυπηρετεί η κάθε μονάδα εξυπηρέτησης του συστήματος

s = αριθμός μονάδων εξυπηρέτησης

L =ο αναμενόμενος (μέσος όρος) πελατών στο σύστημα

L_q = ο αναμενόμενος (μέσος όρος) πελατών που αναμένουν στην ουρά

W = ο αναμενόμενος (μέσος όρος) χρόνος που ο πελάτης θα παραμείνει στο σύστημα (χρόνος αναμονής συν χρόνος εξυπηρέτησης)

W_q = ο αναμενόμενος (μέσος όρος) χρόνος που ο πελάτης θα περιμένει στην ουρά

3.2. Αλυσίδες Markov και συστήματα αναμονής

Τα απλούστερα συστήματα αναμονής, είναι αυτά που έχουν πεπερασμένο πλήθος m εξυπηρετητών, μπορούν να αντιμετωπίσουν πολύ μεγάλο πλήθος K πελατών (το K μπορεί να θεωρηθεί άπειρο) και οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Ένα τέτοιο σύστημα συμβολίζεται M/M/m/K. Τα συστήματα αυτά έχουν χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και χρόνους εξυπηρέτησης εκθετικά κατανεμημένους. Η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική συνεχής κατανομή πιθανότητας που έχει τη σημαντική ιδιότητα της αμνησίας (ο χρόνος ως το επόμενο γεγονός, είναι ανεξάρτητος από το χρόνο που έχει περάσει από το τελευταίο γεγονός), έτσι ώστε τα συστήματα αυτά να έχουν ιδιαίτερα εύκολη αναλυτική λύση και να χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στη μελέτη συστημάτων κάθε τύπου, περιλαμβανομένων των πληροφοριακών.

Πρακτικά, για τα συστήματα M/M/m/K που θα μελετήσουμε, αυτό σημαίνει:

Για τη διαδικασία αφίξεων: Αν από την τελευταία άφιξη στο σύστημα έχει περάσει χρονικό διάστημα έστω t_0, τότε το χρονικό διάστημα μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη είναι ανεξάρτητο από το t_0.

Για τη διαδικασία εξυπηρέτησης: Αν ένας πελάτης έχει εισέλθει και χρησιμοποιεί έναν εξυπηρετητή του συστήματος για χρονικό διάστημα x_0, τότε το χρονικό διάστημα μέχρι την ολοκλήρωση τα της εξυπηρέτησής του είναι ανεξάρτητο του x_0.

Τα συστήματα M/M/m/K εντάσσονται στην κατηγορία των αλυσίδων Markov. Στα συστήματά μας, ως κατάσταση θεωρούμε τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται μέσα στο σύστημα αναμονής (ουρά και εξυπηρετητές) κάθε χρονική στιγμή. Συνεπώς, το σύνολο των πιθανών καταστάσεων σε ένα σύστημα M/M/m/K, είναι το {0, 1, 2, 3,..., K}, αφού στο σύστημα μπορούν να βρίσκονται το πολύ K πελάτες στην ουρά και στους εξυπηρετητές. Αν η ουρά έχει άπειρο μήκος, τότε το σύνολο των πιθανών καταστάσεων είναι το {0, 1, 2, 3,...}. Η ιδιότητα Markov αναφέρεται στην ιδιότητα αμνησίας που διαθέτουν τα συστήματα που θα μελετήσουμε. Επιπλέον, θεωρούμε ότι στα συστήματα M/M/m/K επιτρέπονται μεταβάσεις (αλλαγές κατάστασης) από μια κατάσταση μόνο σε γειτονικές καταστάσεις. Δηλαδή, αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j, τότε στην επόμενη αλλαγή κατάστασης θα βρεθεί σε μια από τις καταστάσεις j -1 ή j+1. Αυτό σημαίνει για τα συστήματα που θα μελετήσουμε, ότι δεν επιτρέπονται πολλαπλές αφίξεις, πολλαπλές αναχωρήσεις, ούτε ταυτόχρονη αναχώρηση με άφιξη. Δηλαδή, επιτρέπεται η (πιθανή) εμφάνιση μόνο ενός γεγονότος κάθε χρονική στιγμή. Η υπόθεση αυτή είναι συμβατή με τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος που λειτουργεί σε συνεχή χρόνο, δηλαδή οι αλλαγές καταστάσεων μπορούν να συμβούν οποτεδήποτε. Τα συστήματά μας έχουν τέτοια λειτουργία.

Η επίλυση του γενικού συστήματος M/M/m/K απαιτεί τον προσδιορισμό του $P_k(t)$ = Πιθανότητα να υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή t για $0 \leq k \leq K$, $t \geq 0$

Θεωρώντας ότι το σύστημά μας είναι σταθερό, δηλαδή ότι δεν επιτρέπεται να δημιουργούνται ουρές ανεξέλεγκτου μήκους, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παραπάνω κατανομή πιθανότητας συγκλίνει σε μια κατανομή μόνιμης κατάστασης p_k .

Ουσιαστικά η ύπαρξη κατανομής μόνιμης κατάστασης υποδηλώνει ότι το σύστημα έρχεται σε μια στατιστική ισορροπία μετά από κάποιο αρχικό χρονικό διάστημα που χαρακτηρίζεται ως μεταβατική περίοδος. Δηλαδή, στη μόνιμη κατάσταση δεν έχει νόημα να ζητάμε την «πιθανότητα να είναι k πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή t», αλλά αρκεί να γνωρίζουμε το p_k , δηλαδή την «πιθανότητα να είναι k πελάτες στο σύστημα κάποια χρονική στιγμή», αφού μετά από ένα μεγάλο διάστημα, για κάθε χρονική στιγμή t η απάντηση θα είναι ίδια.

Μία Μονάδα Εξυπηρέτησης

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του απλούστερου συστήματος ουρών αναμονής. Κατ' αρχήν θα μελετήσουμε τον υπολογισμό των μεγεθών που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Ακολούθως θα εξετάσουμε το σύστημα από την οικονομική του πλευρά ώστε να εξάγουμε αποφάσεις οι οποίες καθορίζουν το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης με ελαχιστοποίηση του αντίστοιχου κόστους.

Το βασικό μοντέλο με μία μονάδα εξυπηρέτησης και μία φάση εξυπηρέτησης που θα αναπτύξουμε αναλυτικά διέπεται από τις εξής παραδοχές:

i. Οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη σειρά προσέλευσης (FIFO).

ii. Όλοι οι πελάτες μένουν στο σύστημα έως ότου εξυπηρετηθούν ανεξάρτητα με το μέγεθος της ουράς.

iii. Οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson

iv. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή

v. Υπάρχει μόνο μία μονάδα εξυπηρέτησης πελατών

vi. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών είναι μεγαλύτερος του αντίστοιχου ρυθμού αφίξεων.

Όταν οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται, μπορούμε να αναπτύξουμε μία σειρά από μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Η μαθηματική απόδειξη αυτών των σχέσεων βασίζεται στη θεωρία πιθανοτήτων και δεν παρουσιάζεται εδώ.

Θεωρούμε:

λ = μέσος όρος αφίξεων ανά μονάδα χρόνου (π.χ. ώρα)

μ = μέσος όρος πελατών που εξυπηρετούνται ανά μονάδα χρόνου

Όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας έχουμε τα εξής αποτελέσματα σε ό,τι αφορά τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος:

- ο αναμενόμενος μέσος χρόνος παραμονής (αναμονής και εξυπηρέτησης) στο σύστημα για κάθε πελάτη:

$$W = \frac{1}{m - l}$$

- Ο μέσος όρος των πελατών στο σύστημα (αναμένοντες και εξυπηρετούμενοι):

$$L = l \cdot W \quad \text{ή} \quad L = \frac{l}{m - l}$$

- Ο μέσος όρος των πελατών που περιμένουν στην ουρά αναμονής:

$$L_q = l \cdot W_q \quad \text{ή} \quad L_q = \frac{l^2}{m \cdot (m - l)}$$

- Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά για κάθε πελάτη:

$$W_q = W - (1/m) \quad \text{ή} \quad W_q = \frac{l}{m \cdot (m - l)}$$

- Ο συντελεστής αξιοποίησης του συστήματος (ή συντελεστής έντασης κυκλοφορίας) που μετρά την πιθανότητα η μονάδα εξυπηρέτησης να βρίσκεται σε χρήση:

$$r = \frac{l}{m}$$

- Το ποσοστό χρόνου που η μονάδα εξυπηρέτησης δεν απασχολείται (ή η πιθανότητα να μην υπάρχει πελάτης στο σύστημα)

$$1 - r \quad \text{ή} \quad P(0) = 1 - \left(\frac{l}{m} \right)$$

- Η πιθανότητα να υπάρχουν πάνω από Κ πελάτες στο σύστημα

$$P(N > K) = \left(\frac{l}{m} \right)^{K+1}$$

<u>Παράδειγμα 10</u>

Η εταιρεία EXPRESS AUTO προσφέρει γρήγορο έλεγχο (check-up) αυτοκινήτων χωρίς προηγούμενο ραντεβού σε προσιτές τιμές. Έχει υπολογισθεί ότι ο ρυθμός άφιξης πελατών είναι κατά μέσο όρο 2 αυτοκίνητα την ώρα, ενώ η δυνατότητα εξυπηρέτησης τους από τον ένα μηχανικό που υπάρχει είναι 3 πελάτες την ώρα.

Η EXPRESS AUTO ενδιαφέρεται για την αγορά ενός νέου μοντέλου ηλεκτρονικού ελέγχου αυτοκινήτων. Με τη χρήση του ηλεκτρονικού ελέγχου, ο χρόνος ελέγχου για κάθε αυτοκίνητο μειώνεται σε 15 λεπτά ανά αυτοκίνητο κατά μέσο όρο.

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος χωρίς τη χρήση του ηλεκτρονικού ελέγχου είναι:

Αφίξεις: λ = 2 αυτοκίνητα ανά ώρα

Εξυπηρέτηση: μ = 3 αυτοκίνητα ανά ώρα

- Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής (αναμονής και εξυπηρέτησης) στο συνεργείο για κάθε αυτοκίνητο:

$$W = \frac{1}{m-l} \quad \text{ή} \quad W = \frac{1}{3-2} = 1\, wra$$

- Ο μέσος όρος αυτοκινήτων στο συνεργείο:

$$L=\lambda \cdot W \quad \text{ή} \quad L=2 \cdot 1=2 \quad \text{αυτοκίνητα}$$

- Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά για κάθε αυτοκίνητο:

$$W_q = W - (1/\mu) \quad \text{ή} \quad W_q = 1 - (1/3) = 2/3 \text{ ώρες} = 40 \text{ λεπτά}$$

- Ο μέσος όρος αυτοκινήτων που περιμένουν στην ουρά :

$$L_q = \lambda \cdot W_q \quad \text{ή} \quad L_q = 2(2/3) = 1.33 \text{ αυτοκίνητα}$$

- Ποσοστό χρόνου που απασχολείται το συνεργείο :

$$\rho = \lambda/\mu \quad \text{ή} \quad \rho= 2/3 = 66.7\%$$

- Ποσοστό χρόνου που η μονάδα εξυπηρέτησης δεν απασχολείται :

$$1-\rho \quad \text{ή} \quad 33.3\%$$

Με την εισαγωγή του ηλεκτρονικού ελέγχου, ο χρόνος ελέγχου περιορίζεται σε 15 λεπτά ανά αυτοκίνητο επομένως η δυνατότητα εξυπηρέτησης ανέρχεται σε 4 αυτοκίνητα, ανά ώρα. Ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών λειτουργίας του συστήματος με το νέο μηχάνημα έχει ως εξής:

Αφίξεις: $\lambda = 2$ αυτοκίνητα ανά ώρα

Εξυπηρέτηση: $\mu = 4$ αυτοκίνητα ανά ώρα

- Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής (αναμονής και εξυπηρέτησης) στο συνεργείο για κάθε αυτοκίνητο:

$$W=\frac{1}{\mu-\lambda} \quad ή \quad W=\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2} wra = 30\ lepta$$

- Ο μέσος όρος αυτοκινήτων στο συνεργείο:

$$L = \lambda \cdot W \quad ή \quad L = 2 \cdot (1/2) = 1 \text{ αυτοκίνητο}$$

- Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά για κάθε αυτοκίνητο:

$$W_q = W - (1/\mu) \quad ή \quad W_q = (1/2) - (1/4) = 1/4 = 15 \text{ λεπτά}$$

- Ο μέσος όρος αυτοκινήτων που περιμένουν στην ουρά:

$$Lq = \lambda \cdot Wq \quad ή \quad Lq = 2 \cdot (1/4) = 0.5 \text{ αυτοκίνητα}$$

- Ποσοστό χρόνου που απασχολείται το συνεργείο:

$$\rho = \lambda / \mu \quad ή \quad \rho = 2/4 = 50\%$$

- Το ποσοστό χρόνου που η μονάδα εξυπηρέτησης δεν απασχολείται:

$$1-\rho \quad \text{ή} \quad 50\%$$

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τη σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο καταστάσεων λειτουργίας του συνεργείου. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μία μικρή σχετικά βελτίωση στο χρόνο εξυπηρέτησης κάθε αυτοκινήτου (κατά 5 λεπτά) οδήγησε σε ραγδαία βελτίωση του χρόνου αναμονής των αυτοκινήτων (από 40 λεπτά σε 15 λεπτά) καθώς και στο συνολικό χρόνο παραμονής των αυτοκινήτων στο σύστημα.

Σύγκριση αποτελεσμάτων		
	Χωρίς ηλεκτρονικό έλεγχο	Με ηλεκτρονικό έλεγχο
Χρόνος αναμονής	40 λεπτά	15 λεπτά
Αυτοκίνητα σε αναμονή	1.33 αυτοκίνητα	0.5 αυτοκίνητα
Συνολικός χρόνος στο συνεργείο	1ώρα	30 λεπτά
Ποσοστό απασχόλησης συνεργείου	67%	50%

Πολλαπλές Μονάδες Εξυπηρέτησης

Το επόμενο μοντέλο που θα εξετάσουμε είναι η περίπτωση που οι αναμένοντες πελάτες εξυπηρετούνται από περισσότερες από μία μονάδα εξυπηρέτησης. Υποθέτουμε δηλαδή, ότι οι πελάτες που αφικνούνται στο σύστημα αναμένουν σε μία κοινή για όλους ουρά και εξυπηρετούνται από την πρώτη διαθέσιμη μονάδα εξυπηρέτησης . Κλασικό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι η ουρά αναμονής στις τράπεζες, όπου ο πρώτος στην ουρά πελάτης εξυπηρετείται από τον πρώτο ταμία που είναι ελεύθερος.

Υποθέτουμε ότι οι υπόλοιπες παραδοχές που έχουμε θέσει στην προηγούμενη ενότητα συνεχίζουν να ισχύουν. Συγκεκριμένα οι αφίξεις πελατών ακολουθούν κατανομή Poisson και ο χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε μονάδα ακολουθεί εκθετική κατανομή.

Έστω ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης για κάθε πελάτη είναι $1/\mu$ και έστω επίσης ότι στο σύστημα υπάρχουν s μονάδες εξυπηρέτησης. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης σε κάθε μία μονάδα χωριστά είναι μ πελάτες στη μονάδα του χρόνου. Επομένως ο συνολικός ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών στο σύστημα το οποίο έχει s μονάδες εξυπηρέτησης είναι $s \cdot \mu$. Η συνθήκη για να βρίσκεται ένα τέτοιο σύστημα με πολλές μονάδες εξυπηρέτησης σε κατάσταση ισορροπίας παραμένει η ίδια όπως και στο βασικό μοντέλο. Ο συνολικός ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών πρέπει να υπερβαίνει τον αριθμό αφίξεων, δηλαδή : $s \cdot \mu > \lambda$

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη είναι:

λ = μέσος όρος αφίξεων πελατών ανά μονάδα χρόνου (π.χ. ώρα)

μ = μέσος όρος πελατών που είναι δυνατόν να εξυπηρετηθούν σε κάθε μονάδα εξυπηρέτησης ανά μονάδα χρόνου

s = αριθμός μονάδων εξυπηρέτησης

Όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

1. Το ποσοστό χρόνου που η μονάδα εξυπηρέτησης δεν απασχολείται (ή ισοδύναμα η πιθανότητα να μην υπάρχει κανείς πελάτης στο σύστημα).

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left(\frac{1}{n!} \right) \cdot \left(\frac{l}{m} \right)^n + \left(\frac{1}{s!} \right) \cdot \left(\frac{l}{m} \right)^s \cdot \left(\frac{s \cdot m}{s \cdot m - l} \right)}$$

2. Ο συντελεστής αξιοποίησηςτου συστήματος (ή συντελεστής έντασης κυκλοφορίας)

$$r = \frac{l}{s \cdot m}$$

3. Ο μέσος όρος πελατών που αναμένουν στην ουρά.

$$L_q = \frac{P_0 \cdot (l/m)^s \cdot r}{s! \cdot (1-r)^2}$$

4. Ο μέσος όρος όλων των πελατών στο σύστημα (αναμένοντες και εξυπηρετούμενοι):

$$L = L_q + \frac{l}{m}$$

5. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{L_q}{l}$$

6. Ο μέσος χρόνος παραμονής (αναμονής και εξυπηρέτησης) στο σύστημα για κάθε πελάτη:

$$W = W_q + \frac{1}{m}$$

Παράδειγμα 11

Ας θεωρήσουμε ξανά την περίπτωση της εταιρείας AUTO EXPRESS που περιγράψαμε στο παράδειγμα 10. Μία δεύτερη εναλλακτική λύση που η εταιρεία επιθυμεί να εξετάσει είναι η προσθήκη ενός δεύτερου συνεργείου ελέγχου αυτοκινήτων, αντί της αγοράς των ηλεκτρονικών μηχανημάτων ελέγχου. Η εταιρεία θέλει να συγκρίνει τα αποτελέσματα που θα προκύψουν με τις δύο εναλλακτικές μεθόδους ώστε να αποφασίσει τι θα πράξει.

Με τη χρήση δεύτερου συνεργείου οι παράμετροι του συστήματος ουράς αναμονής είναι:

λ = 2 αυτοκίνητα ανά ώρα

μ = 3 αυτοκίνητα ανά ώρα

s = 2 μονάδες εξυπηρέτησης

Η εφαρμογή των μαθηματικών τύπων που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος δίνει τα εξής αποτελέσματα:

- Πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα αυτοκίνητο στο σύστημα:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{0!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{1}{1!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3-2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{4}} = \frac{1}{2}$$

- Συντελεστής αξιοποίησης του συστήματος:

ρ = λ / s· μ = 2 / (2· 3) = 1 / 3 = 0,33

- Αριθμός αυτοκινήτων που αναμένουν στην ουρά κατά μέσο όρο.

$$L_q = \frac{P_0 \cdot (l/m)^s \cdot r}{s! \cdot (1-r)^2} = \frac{(1/2)\cdot(2/3)^2\cdot(1/3)}{2!\cdot(1-1/3)^2} = 0.083 \ autokinhta$$

- Μέσος όρος αυτοκινήτων που βρίσκονται στο σύστημα:

$$L = L_q + (\lambda / \mu) = 0.063 + (273) = 0.75 \text{ αυτοκίνητα}$$

- Χρόνος αναμονής στην ουρά κατά μέσο όρο για κάθε αυτοκίνητο:

$$W_q = L_q / \lambda = 0{,}083 / 2 = 0{,}0415 \text{ ώρες} = 2{,}5 \text{ λεπτά}$$

- Συνολικός Χρόνος Παραμονής στο σύστημα για κάθε αυτοκίνητο κατά μέσο όρο:

$$W = W_q + 1 / \mu = 0{,}0415 + 1 / 3 = 0{,}3748 \text{ ώρες} = 22{,}5 \text{ λεπτά}$$

Τα συγκριτικά αποτελέσματα της ήδη υπάρχουσας κατάστασης με τις δύο εναλλακτικές λύσεις: α) την προμήθεια συσκευής ηλεκτρονικού ελέγχου και β) την προσθήκη δεύτερου συνεργείου δίνονται στον πίνακα:

Όπως διαπιστώνουμε από τον παρακάτω πίνακα η προσθήκη ενός δεύτερου συνεργείου έχει δραματικές επιπτώσεις στη βελτίωση του χρόνου αναμονής των πελατών.

Σύγκριση Αποτελεσμάτων			
	Χωρίς Ηλεκτρονικό έλεγχο 1συνεργείο	Με Ηλεκτρονικό έλεγχο 1 συνεργείο	Χωρίς Ηλεκτρονικό έλεγχο 2συνεργεία
Χρόνος αναμονής	40 λεπτά	15 λεπτά	2.5 λεπτά
Αυτοκίνητα σε αναμονή	1.33 αυτοκίνητα	0.5 αυτοκίνητο	0.083 αυτοκίνητα
Συνολικός χρόνος στο συνεργείο	1 ώρα	30 λεπτά	22.5 λεπτά
Ποσοστό απασχόλησης συνεργείου	67%	50%	33%
Ποσοστό νεκρού χρόνου του συνεργείου	33%	50%	50%

Απλοϊκά σκεπτόμενοι ίσως να υποθέταμε ότι η προσθήκη δεύτερης μονάδας εξυπηρέτησης μειώνει το χρόνο αναμονής στο μισό. Η μείωση όμως είναι πολύ μεγαλύτερη. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι αφίξεις στο σύστημα συμβαίνουν σε τυχαίους χρόνους.

Για παράδειγμα, αν υπήρχε μόνο ένα συνεργείο και δύο πελάτες φτάσουν με διαφορά ενός ή δύο λεπτών, ο δεύτερος πελάτης θα πρέπει να περιμένει στην ουρά έως ότου εξυπηρετηθεί ο πρώτος πελάτης. Το πιθανό γεγονός ότι το συνεργείο μπορεί να ήταν χωρίς κανένα πελάτη για

25-30 λεπτά πριν την άφιξη των πελατών, δεν αλλάζει σε τίποτα το χρόνο αναμονής των πελατών που προσήλθαν με μικρή διαφορά χρόνου άφιξης.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές των αλυσίδων Markov

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών που εμφανίζονται σε διάφορους τομείς και οδηγούν σε αλυσίδες Markov. Για το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από τα [4], [7], [9], [10] και [13].

4.1. Η διαδικασία γέννησης- θανάτου.

Η διαδικασία γέννησης- θανάτου αποτελεί την απλή τροποποίηση της διαδικασίας Poisson όπου από κάθε κατάσταση η μετάβαση είναι δυνατή όχι μόνο στην επόμενη αλλά και στην προηγούμενη κατάσταση. Η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκε αρχικά ως στοχαστικό μοντέλο για την περιγραφή βιολογικών πληθυσμών, οι οποίοι αυξομειώνονται λόγω γεννήσεων και θανάτων.

Μια αλυσίδα Markov καλείται αλυσίδα γέννησης-θανάτου γιατί μια μετάβαση από την κατάσταση x στην x+1 αντιστοιχεί σε μια «γέννηση» ενώ μια μετάβαση από την κατάσταση x στην x-1 αντιστοιχεί σε έναν «θάνατο».

Η διαδικασία γέννησης-θανάτου είναι κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο για την περιγραφή και μελέτη βιολογικών πληθυσμών, καθώς αυτοί ελίσσονται μέσα στο χρόνο με αυξομειώσεις λόγω γεννήσεων και θανάτων. Φυσικά σε τέτοια στοχαστικά συστήματα είναι $\lambda_0=0$ (εκτός αν ο πληθυσμός συντηρείται και με κάποιου είδους μετανάστευση από άλλους πληθυσμούς) και τότε παρουσιάζει ενδιαφέρον, μεταξύ άλλων, η εύρεση της πιθανότητας εξάλειψης του πληθυσμού ως συνάρτησης του χρόνου.

Η διαδικασία γέννησης-θανάτου χρησιμοποιείται επίσης ως στοχαστικό μοντέλο και σε άλλα στοχαστικά συστήματα, όπως π.χ. στα συστήματα εξυπηρέτησης, αφού ο αριθμός πελατών σ’ αυτά επίσης αυξομειώνεται λόγω αφίξεων και αναχωρήσεων. Σε ένα τέτοιο σύστημα είναι $\lambda_o > 0$, αφού ο ρυθμός αυτός αναφέρεται σε αφίξεις πελατών που βρίσκουν το σύστημα κενό. Από την άλλη μεριά, αν το σύστημα έχει πεπερασμένη χωρητικότητα $s(s\in$ ¥ $)$, τότε τροποποιούμε τη διαδικασία υποθέτοντας ότι $\lambda_s = 0$, αφού ο ρυθμός αυτός αναφέρεται σε αφίξεις πελατών που βρίσκουν το σύστημα πλήρες και επομένως αναχωρούν αμέσως, χωρίς να μεταβάλλουν τον αριθμό των παρόντων σ’ αυτό πελατών. Σ’ αυτήν την περίπτωση, η διαδικασία έχει πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $s = \{0,1,2,\ldots, n\}$ και αναφέρεται ως πεπερασμένη διαδικασία γέννησης- θανάτου.

Θεωρώντας κάθε άφιξη ως γέννηση και κάθε αναχώρηση ως θάνατο στον πληθυσμό των παρόντων κάθε φορά πελατών στο σύστημα, είναι φανερό ότι από κάθε κατάσταση, άμεση μετάβαση είναι δυνατή μόνο στις γειτονικές καταστάσεις. Αν επιπλέον ο αριθμός πελατών στο σύστημα, ως συνάρτηση του χρόνου, έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, τότε περιγράφεται με μια διαδικασία γέννησης-θανάτου και αναφέρεται ως *απλή Μαρκοβιανή ουρά.*

4.2. Τυχαίοι περίπατοι

Οι τυχαίοι περίπατοι (random walks) αποτελούν ένα από τα ισχυρότερα αναλυτικά εργαλεία της πιθανοτικής μεθόδου. Το έντονο και διαρκώς αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζεται τα τελευταία χρόνια για τη μελέτη τυχαίων περιπάτων οφείλεται στη δυνατότητά τους να αποδεικνύουν με σύντομο και απλό τρόπο ορισμένα από τα βαθύτερα χαρακτηριστικά των στοχαστικών φαινομένων.

Ανάλογα με τη δομή στην οποία διεξάγεται ο τυχαίος περίπατος διακρίνουμε διαφορετικά είδη τυχαίων περιπάτων με ιδιαίτερη σημασία για την πιθανοτική μέθοδο.

Έστω $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με κοινή πυκνότητα πιθανότητας f και έστω ότι οι εν λόγω τυχαίες μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές. Έστω ακόμα X_0 μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει και αυτή ακέραιες τιμές και ανεξάρτητη των ξ_i ορίζουμε σαν:

$$X_n=X_0+\sum_{i=1}^{n} x i$$

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων S=Ά και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος p(x,y)= f(y-x).

Ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος εδώ θεωρείται ότι είναι άπειρης διάστασης. Μια τέτοια ανέλιξη καλείται *γενικευμένος τυχαίος περίπατος* ([4]).

Στην ειδική περίπτωση που:

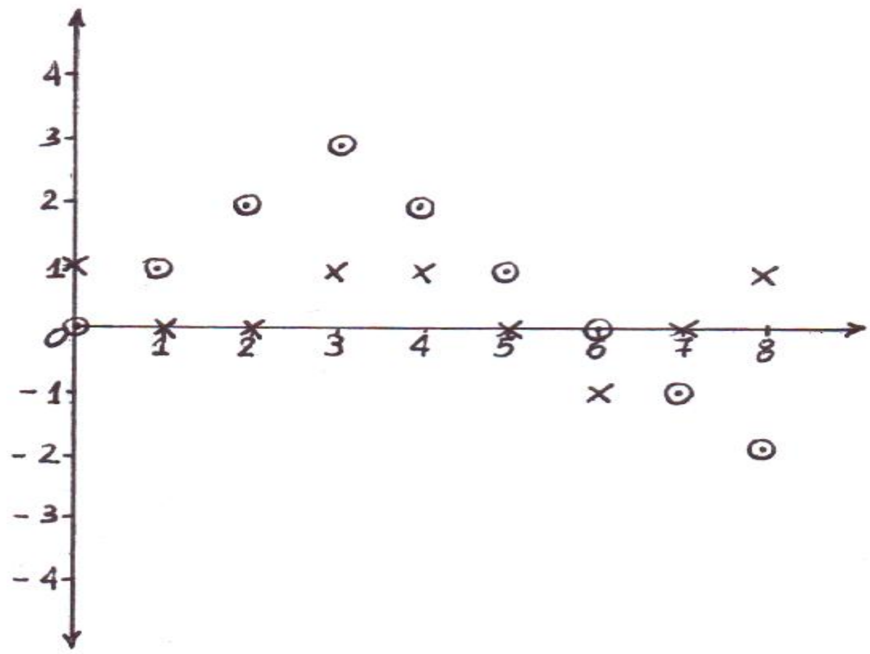
$$f(1)=p,\ f(-1)=q,\ f(0)=r,\ 0\leq p, q, r\leq 1,\ \ p+q+r=1$$

λέμε ότι έχουμε έναν απλό τυχαίο περίπατο, οι δε πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος γίνονται:

$$p(x,y)=\begin{cases} p & y=x+1 \\ q & y=x-1 \\ r & y=x \\ 0 & a\,l\,l\,o\,u \end{cases}$$

Μια πιθανή ερμηνεία της παραπάνω ανέλιξης είναι και η ακόλουθη:

Ας υποθέσουμε, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, ότι ένα σωματίδιο κινείται ως προς άξονες χ, ψ και ότι βρίσκεται αρχικά σε ένα σημείο x_o του άξονα χ. Κατά τη χρονική στιγμή n=1 το σωματίδιο εκτελεί ένα βήμα ή άλμα Z_1, όπου Z_1 είναι μία τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή δίνεται.



Στη χρονική στιγμή n=2 το σωματίδιο εκτελεί ένα βήμα Z_2, όπου Z_2 είναι ανεξάρτητο από το Z_1 και με την ίδια κατανομή. Έτσι το σωματίδιο κινείται κατά μήκος μιας ευθείας και μετά ένα βήμα είναι στη θέση X_0+Z_1 μετά δύο βήματα είναι στη θέση $X_0+ Z_1+Z_2$ και γενικά μετά n βήματα, δηλαδή τη χρονική στιγμή n η θέση του σωματιδίου δίνεται από

$$X_n = X_0+Z_1+Z_2+\ldots+Z_n$$

όπου (Z_i) είναι μία ακολουθία ανά δύο ανεξάρτητων και με την ίδια κατανομή τυχαίων μεταβλητών. Λέμε τότε ότι το σωματίδιο εκτελεί ένα *τυχαίο περίπατο.*

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία τα βήματα Z_i λαμβάνουν μόνο τις τιμές 1,0,-1 με την κατανομή

$$P\{Z_i=1\}= p, \quad P\{Z_i=0\}=1-p-q, \quad P\{Z_i=-1\}=q$$

θα καλούμε τη διαδικασία *απλό τυχαίο περίπατο.*

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε, ο τυχαίος περίπατος είναι μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο διακριτό. Ο χώρος των καταστάσεων θα είναι συνεχής αν τα βήματα Z_i είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και διακριτός αν τα βήματα Z_i είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές όπως στον απλό τυχαίο περίπατο. Ο τυχαίος περίπατος είναι μία κλάση στοχαστικών διαδικασιών με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αν και είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η μελέτη του γίνεται κυρίως ανεξάρτητα από τις Μαρκοβιανές. Η προέλευσή του πηγάζει από το εξής πρόβλημα καταστροφής:

Θεωρούμε έναν παίκτη που κερδίζει ή χάνει σε ένα παιχνίδι μία μονάδα χρήματος με πιθανότητες p και q αντίστοιχα. Το αν θα κερδίσει σε ένα παιχνίδι είναι ανεξάρτητο από το αν έχασε ή κέρδισε το προηγούμενο. Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό του κεφάλαιο είναι β και ότι παίζει με ένα αντίπαλο με αρχικό κεφάλαιο α-β. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι που ο παίκτης ή θα αποκτήσει κεφάλαιο 0 ή κεφάλαιο α, δηλαδή μέχρι που ο ένας από τους δύο παίκτες θα καταστραφεί.

Εύλογα ερωτήματα είναι η πιθανότητα καταστροφής του κάθε παίκτη και η κατανομή του χρόνου διάρκειας του παιχνιδιού. Διάφορες όμως εφαρμογές στη φυσική και μερικές φυσικές αναλογίες καθιέρωσαν στο χώρο του τυχαίου περίπατου μία διαφορετική παρουσίαση των προβλημάτων. Έτσι ο τυχαίος περίπατος συνήθως παρουσιάζεται σαν η τυχαία κίνηση ενός σωματιδίου μέσα στο χώρο και είναι πράγματι θαυμαστό, το πόσο απλοποιεί την παρουσίαση των πολύπλοκων προβλημάτων ο τρόπος αυτός.

Εάν το σωματίδιο συνεχίζει να κινείται απεριόριστα ο τυχαίος περίπατος ονομάζεται ελεύθερος. Σημαντική όμως είναι η μελέτη του τυχαίου περίπατου, όταν τον περιορίζουμε κατά κάποιο τρόπο με την παρουσία φραγμάτων. Σαν παράδειγμα στο κλασσικό πρόβλημα καταστροφής ο τυχαίος περίπατος σταματάει όταν η κατάσταση του συστήματος γίνει το 0 ή το α, αφού το κεφάλαιο ενός από τους δύο παίκτες μηδενίζεται. Λέμε τότε ότι ο τυχαίος περίπατος γίνεται με την παρουσία δύο φραγμάτων απορρόφησης ενός στο 0 και ενός στο α. Ένα άλλο είδος φραγμάτων είναι τα ελαστικά φράγματα (δεξιό ελαστικό φράγμα, αριστερό ελαστικό φράγμα) καθώς επίσης και τα φράγματα ανάκλασης (δεξιό ανακλαστικό φράγμα και αριστερό ανακλαστικό φράγμα), όπου όταν βρεθεί το σωματίδιο, είναι δυνατό να συμβούν δύο ενδεχόμενα, με τις αντίστοιχες πιθανότητες γνωστές. Το πρώτο είναι το σωματίδιο να παραμείνει την επόμενη χρονική στιγμή στο φράγμα και το δεύτερο να ανακλαστεί σε μία εσωτερική κατάσταση.

Ο πίνακας μετάβασης στην περίπτωση του απλού τυχαίου περίπατου με την παρουσία δύο φραγμάτων ενός στο 0 και του άλλου στο α αντίστοιχα είναι :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a-1 \\ a \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & a-2 & a-1 & a \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-p-q & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & q & 1-p-q & p \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Στην περίπτωση που έχουμε έναν απλό τυχαίο περίπατο με ένα φράγμα ανάκλασης στο 0 τότε όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο 0 παραμένει εκεί με πιθανότητα 1-p ή πηγαίνει στο 1 με πιθανότητα p. Ο χώρος των καταστάσεων της Μαρκοβιανής αυτής αλυσίδας είναι {0, 1, 2,...} είναι δηλαδή μη-πεπερασμένη. Ο πίνακας μετάβασης P είναι:

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
q & 1-p-q & p & 0 & 0 & \cdots \\
0 & q & 1-p-q & p & 0 & \cdots \\
0 & 0 & q & 1-p-q & p & \cdots \\
0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ορισμένες βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν τον ελεύθερο τυχαίο περίπατο όπως η πιθανότητα επιστροφής στο σημείο εκκίνησης μέσα σε ορισμένο χρονικό διάστημα, η κατανομή του αριθμού των περασμάτων από τον θετικό στον αρνητικό ημιάξονα της ευθείας των πραγματικών αριθμών κτλ. αποδεικνύουν με εξαιρετικά απλό τρόπο ορισμένα βαθιά χαρακτηριστικά των φαινομένων διακύμανσης σε τυχαία πειράματα (change fluctuation phenomena) που έρχονται σε ευθεία αντίθεση με την κοινή λογική και προσφέρουν τη δυνατότητα μιας πληρέστερης κατανόησης των τυχαίων αυτών φαινομένων.

<u>Παράδειγμα 12</u>

Υποθέτουμε ότι ένα σύστημα εκπαίδευσης αποτελείται από d στάδια το καθένα από τα οποία διαρκεί από μια χρονική μονάδα. Στο τέλος κάθε σταδίου η προαγωγή ενός φοιτητή αποφασίζεται με εξετάσεις. Έτσι στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ένας φοιτητής:

1) περνάει τις εξετάσεις του και προάγεται στο επόμενο στάδιο,

2) αποτυγχάνει στις εξετάσεις και επαναλαμβάνει το ίδιο στάδιο

3) εγκαταλείπει πριν από τις εξετάσεις και φεύγει από το σύστημα.

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις η πρόοδος ενός φοιτητή μπορεί να περιγραφεί σαν μια Μαρκοβιανή διαδικασία με καταστάσεις 1, 2, .., d, d+1 όπου d+1 είναι η κατάσταση που εκφράζει την έξοδο από το σύστημα. Καλούμε p_i την πιθανότητα επιτυχίας στις εξετάσεις του σταδίου i, q_i την πιθανότητα αποτυχίας και w_i την πιθανότητα εγκατάλειψης του συστήματος. Ο πίνακα μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ d-1 \\ d \\ d+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & d-1 & d & d+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q_1 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & q_2 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & q_3 & \cdots & 0 & 0 & w_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{d-1} & p_{d-1} & w_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_d & p_d + w_d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>Παράδειγμα 13</u>

Υπάρχουν αρκετά αθλήματα στα οποία οι αγωνιζόμενοι δίνουν μεταξύ τους αρκετά παιχνίδια μέχρι να αναδειχθεί νικητής. Ένας παίκτης κερδίζει ένα παιχνίδι όταν φθάσει κάποιους πόντους δεδομένου όμως ότι ο αντίπαλος του έχει δύο λιγότερους. Τέτοια παραδείγματα παιχνιδιών είναι το τένις και το βόλεϊ. Αυτά όπως και όλα τα συναφή παιχνίδια μπορούν να μοντελοποιηθούν με τον ίδιο τρόπο από μαθηματική άποψη. Ας δούμε λοιπόν το τένις και για όλα τ' άλλα η μεθοδολογία είναι παρόμοια.

Στο τένις οι παίκτες ξεκινούν παίζοντας ένα παιχνίδι όπου σερβίρει ο παίκτης Α ή ο παίκτης Β. Το παιχνίδι κερδίζει ο παίκτης που θα φτάσει πρώτος τους 45 πόντους. Το σκορ σε κάθε παιχνίδι συμβατικά εξελίσσεται σε 15, σε 30, σε 40 και τέλος σε παιχνίδι. Όμως, πιο απλά θα μπορούσε να παρασταθεί από τους ακέραιους αριθμούς 0 έως 4. Αν το σκορ έλθει σε ισοπαλία 40-40 το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι ένας από δύο παίκτες να κερδίσει δύο συνεχόμενους πόντους.

Οι δυο παίκτες παίζουν τόσα παιχνίδια όσα χρειάζεται για να φθάσει ένα από τους δυο τα 6. Αν το σκορ γίνει 5-5 τότε κερδίζει αυτός που θα πάρει τα επόμενα δύο παιχνίδια. Αν το σκορ φθάσει στο 6-6 τότε το παιχνίδι μπαίνει στη διαδικασία του σπασίματος της ισοπαλίας. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στο ποιος από τούς δύο παίκτες θα κερδίσει το «σετ». Το συνολικό παιχνίδι κερδίζει αυτός που θα φθάσει πρώτος στα τρία «σετ».

Υποθέτουμε ότι ο παίκτης A έχει όταν σερβίρει ο ίδιος πιθανότητα p_A να κερδίσει το παιχνίδι και q_A να το χάσει ($p_A+q_A=1$). Επίσης υποθέτουμε ότι όταν σερβίρει ο B έχει πιθανότητα p_B να κερδίσει το παιχνίδι και πιθανότητα q_B να το χάσει ($p_B+q_B=1$). Στις περισσότερες περιπτώσεις $p_B>q_A$ και $p_A>q_B$.

Υποθέτουμε ότι το να κερδίσει ή να χάσει ένα παιχνίδι ένας παίκτης δεν εξαρτάται από τα προηγούμενα παιχνίδια και επομένως ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα και έτσι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το «σετ» σαν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με 41 καταστάσεις.

4.3 Αλυσίδα Ehrenfest

Στο φαινόμενο αυτό το πρότυπο δίνει πάλι αλυσίδα Markov με καταστάσεις τους ακέραιους 0,1,...,d. Ένα φυσικό ανάλογο στη στατιστική μηχανική είναι το ακόλουθο. Έστω ότι έχουμε δύο δοχεία, τα οποία ονομάζουμε A και B, και d σφαίρες οι οποίες φέρουν τους αριθμούς 1,2,..., d. Αρχικά, μερικές από αυτές είναι στο δοχείο A και οι υπόλοιπες στο δοχείο B. Διαλέγουμε τυχαία έναν αριθμό από τους 1,2,..., d και η σφαίρα που φέρει τον εν λόγω ακέραιο, αφαιρείται από το δοχείο που βρίσκεται και τοποθετείται στο άλλο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται απεριόριστα, και οι επιλογές από επανάληψη σε επανάληψη θεωρούνται ανεξάρτητες.

Έστω ότι με X_n παριστάνουμε τον αριθμό των σφαιρών στο δοχείο Α μετά την n-οστη επανάληψη. Τότε η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων S = {0, 1,2,..., d). Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος της αλυσίδας υπολογίζονται εύκολα, ως εξής: αν υπάρχουν x σφαίρες στο δοχείο Α την χρονική στιγμή n, την χρονική στιγμή (n+1) θα υπάρχουν x-1 εάν επιλέξουμε μια από τις σφαίρες του δοχείου Α, με πιθανότητα x/d , και την τοποθετήσουμε στο δοχείο Β, δηλαδή p(x,x -1) = x/d. Όμοια αν την χρονική στιγμή (n+1) θέλουμε να υπάρχουν x +1 σφαίρες στο δοχείο Α πρέπει να επιλέξουμε μια από τις d-x σφαίρες από το Β, με πιθανότητα (d-x)/d = (1-x)/d , και να την μεταφέρουμε στο Α, δηλαδή:

$$p(x,y)=\begin{cases} x/d & y=x-1 \\ 1-x/d & y=x+1 \\ 0 & allou \end{cases}$$

Η παραπάνω αλυσίδα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μαθηματικό μοντέλο, για την περιγραφή της ανταλλαγής θερμότητας ή της ανταλλαγής μορίων αερίων μεταξύ δύο απομονωμένων σωμάτων.

4.4 Ροή επιτυχιών

Για να μιλήσουμε για την εφαρμογή αυτή πρέπει να παρουσιάσουμε σύντομα τις δοκιμές Bernoulli, των οποίων η ονομασία οφείλεται στον Σουηδό μαθηματικό J.Bernoulli (1654- 1705), που οδηγούν στον ορισμό της απλούστερης ίσως διακριτής τυχαίας μεταβλητής. Με τον όρο δοκιμή Bernoulli αναφερόμαστε σε ένα πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα. Το ένα από τα δύο αποτελέσματα θα ονομάζεται επιτυχία (συμβολικά: ε) ενώ το άλλο αποτυχία (συμβολικά: α).

Το πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος αποτελεί την κλασικότερη περίπτωση μιας δοκιμής Bernoulli. Αν εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι η ένδειξη "κεφαλή", θα βαπτίσουμε ως επιτυχία ε το αποτέλεσμα αυτό και θα ορίσουμε ως αποτυχία α την ένδειξη "γράμματα". Αντίστοιχα το τυχαίο πείραμα της γέννησης ενός παιδιού αποτελεί επίσης δοκιμή Bernoulli με δύο δυνατά αποτελέσματα: αγόρι ή κορίτσι. Τέλος, η εξέταση κατά πόσο ένα αντικείμενο μιας γραμμής παραγωγής είναι ελαττωματικό ή όχι είναι δοκιμή Bernoulli. Αν μας ενδιαφέρει να διατυπώσουμε πιθανοθεωρητικά συμπεράσματα για τα ελαττωματικά αντικείμενα που παράγονται, φαίνεται λογικό να ορίσουμε ως επιτυχία ε την εμφάνιση ελαττωματικού αντικειμένου και αποτυχία την εμφάνιση μη ελαττωματικού.

Αξίζει να αναφερθεί ότι, σε πολλές περιπτώσεις, μπορεί να έχουμε πειράματα με περισσότερα από δύο δυνατά αποτελέσματα και να φτάνουμε σε δοκιμές Bernoulli με κατάλληλη ομαδοποίηση των αποτελεσμάτων τους. Έτσι, κατά τη ρίψη ενός ζαριού μια φορά αν μας ενδιαφέρει το αποτέλεσμα 6, μπορούμε να δημιουργήσουμε δοκιμές Bernoulli αν ορίσουμε ως επιτυχία ε την εμφάνιση της ένδειξης 6 και ως αποτυχία την εμφάνιση οποιασδήποτε από τις άλλες πέντε ενδείξεις 1, 2, 3, 4, 5. Αν πάλι μας ενδιαφέρει η εμφάνιση άρτιου αποτελέσματος θα ορίσουμε ως επιτυχία την εμφάνιση μιας εκ των ενδείξεων 2, 4, 6 και ως αποτυχία την εμφάνιση των 1, 3, 5.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως ο δειγματικός χώρος του πειράματος που παράγει μια δοκιμή Bernoulli μπορεί να παρασταθεί ως

$$\Omega = \{\varepsilon, \alpha\}$$

Αν συμβολίσουμε με p, q τις πιθανότητες εμφάνισης των στοιχειωδών ενδεχομένων {ε}, {α} αντίστοιχα, είναι φανερό ότι θα έχουμε

$$p+q=1, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1$$

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q = 1-p). Η κατανομή της δίτιμης (μηδέν-ένα) τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν (ανεξαρτήτων) δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας q = 1 - p σε ολες τις δοκιμές. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p και συμβολίζεται με b(ν, p). Από τον ορισμό αυτό είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι το $R_X=\{0, 1,\ldots,\nu\}$.

Σε μία ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας (Ε) p και αποτυχίας (Α) 1-p = q, έστω

$X_\nu=0$ αν η ν-οστή δοκιμή δώσει αποτυχία ($X_0 \equiv 0$),

$X_\nu=k$ αν η τελευταία αποτυχία συνέβηκε στην ν-k δοκιμή,

όπου k=1,…,ν και ν=0,1,…. Η τιμή (κατάσταση) k δείχνει, με άλλα λόγια, το μήκος μιας αδιάκοπης ακολουθίας από k επιτυχίες. Μία τέτοια ακολουθία με k Ε των οποίων προηγείται και έπεται ένα Α λέγεται ροή μήκους k (π.χ. στην ΑΑΕΕΕΑ έχουμε μία ροή επιτυχιών μήκους 3). Έτσι $X_\nu=k$ σημαίνει ότι η ν-οστή δοκιμή συμπληρώνει ροή μήκους k.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η $\{X_\nu, \nu\geq 0\}$ είναι αλυσίδα Markov με πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \mathrm{L} \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \mathrm{L} \\ . & . & . & . & . & \mathrm{L} \\ . & . & . & . & . & \mathrm{L} \end{bmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι η μετάβαση στην κατάσταση 0 είναι δυνατή από όλες τις άλλες καταστάσεις, ενώ στην k+1 είναι δυνατό να φτάσουμε μόνο από την k (k=0,1,…). Επίσης ότι δεν απαιτείται ανεξαρτησία των δοκιμών στον πιο πάνω ορισμό της $\{X_\nu\}$ κι ούτε είναι ανάγκη η πιθανότητα Ε να παραμένει η ίδια σε όλες τις δοκιμές.

4.5 Αλυσίδες Markov στη γενετική

Ένα πρότυπο, που στηρίζεται στους νόμους της γενετικής του Mendel , αφορά τις διακυμάνσεις στη συχνότητα των γονιδίων υπό την επίδραση της μεταλλαγής (mutation). Στην απλούστερη περίπτωση όπου αγνοούμε την μεταλλαγή, τα γονίδια εμφανίζονται κατά ζεύγη και κάθε γονίδιο είναι τύπου Α ή α. Αν σ' ένα οργανισμό είναι και τα δύο γονίδια του τύπου Α, τότε έχουμε οργανισμό με γονότυπο ΑΑ. Όμοια ορίζουμε τούς γονότυπους αα και Αα. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι τα κύτταρα αναπαραγωγής, τα λεγόμενα γαμέτες, έχουν ένα μόνο γονίδιο έτσι ώστε οι γονότυποι ΑΑ να έχουν το Α, οι αα το α, και οι Αα το γονίδιο Α ή α με την ίδια πιθανότητα. Ένα παιδί κληρονομεί από τους γονείς του δύο γονίδια, ένα από τον καθένα, σύμφωνα με την κατανομή Bernoulli με την εξής έννοια: Τα γονίδια ενός παιδιού εκλέγονται τυχαία και με επανάθεση από τον πληθυσμό (σύνολο) όλων των γονιδίων των γονέων, έτσι έχουμε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.

Ας θεωρήσουμε τώρα γεννήτορα πληθυσμό με Ν στοιχεία (ζεύγη) σε κάθε γενεά, ώστε από άποψη γονιδίων να αποτελείται συνολικά από 2Ν γονίδια των τύπων α και Α. Η γονοτυπική δομή τής επόμενης γενεάς (πάλι με 2Ν γονίδια συνολικά των τύπων α και Α) εξαρτάται από τον αριθμό των α γονιδίων της πατρικής γενεάς. Αν αυτή έχει i γονίδια α και 2Ν-i γονίδια Α, τότε η πιθανότητα μεταβιβάσεως α γονιδίου στην επόμενη γενεά είναι

$$p_i = i/2N,$$

και Α γονιδίου

$$q_i = 1 - i/2N$$

Οι μεταβιβάσεις γονιδίων στα παιδιά θεωρούνται ανεξάρτητες δοκιμές. Αν X_ν παριστά τον αριθμό των α γονιδίων στη ν-οστή γενεά, τότε ή $\{X_v\}$ είναι αλυσίδα Markov με καταστάσεις τις 0,1,2,..2N. Ο πίνακας μεταβάσεώς της δίνεται από την

$$p_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] = \binom{2N}{j} p_i^j q_i^{2N-j} \qquad (1)$$

Οι καταστάσεις 0 και 2N είναι απορροφητικές, αφού αν το X_v, γίνει 0 ή 2N παραμένει στην ίδια τιμή για πάντα. Έτσι αν X_v=0 όλα τα άτομα έχουν τον γονότυπο ΑΑ και δεν μπορεί πια να γεννηθεί άτομο με το γονίδια α. Ενδιαφέρον είναι να εξετάσουμε την πιθανότητα να φτάσει ο πληθυσμός σε κατάσταση ομοζυγωτίας (fixation), δηλαδή X_v=0 ή 2N, όταν αρχικά υπάρχουν i γονίδια α, δηλαδή X_0=i.

Ας εξετάσουμε τώρα το πιο ρεαλιστικό μοντέλο, πού λαμβάνει υπόψη τη μεταλλαγή. Εδώ υποτίθεται ότι, προτού σχηματιστεί η νέα γενεά, κάθε γονίδιο υπόκειται σε μεταλλαγή, δηλαδή μπορεί να μεταπηδήσει στον άλλο τύπο. Έτσι η μεταλλαγή α$\rightarrow$ Α έχει πιθανότητα $α_1$ και η Α$\rightarrow$ α συμβαίνει με πιθανότητα $α_2$. Όπως και πριν, η επόμενη γενεά καθορίζεται γονοτυπικά από την κατανομή Bernoulli με τροποποιημένες πιθανότητες p_i και q_i:

$$p_i = \tfrac{i}{2N}(1-a_1) + \left(1-\tfrac{i}{2N}\right)a_2$$

$$q_1 = \tfrac{i}{2N}a_1 + \left(1-\tfrac{i}{2N}\right)(1-a_2) \qquad (2)$$

Αυτές προκύπτουν από το ότι μετά την επίδραση της μεταλλαγής ο μέσος αριθμός α γονιδίων είναι i(1-$α_1$)+(2N-i)$α_2$. Βέβαια, η αντίστοιχη αλυσίδα Markov έχει πίνακα μετάβασης με p_{ij} όπως στην (1), αλλά με τιμές των p_i και q_i που δίνει η (2).

4.6 Μοντέλο κελιού του Pólya

Ο Pólya εισηγήθηκε το μοντέλο του σαν ένα διακριτό σχήμα για την εξάπλωση μιας επιδημίας. Θεωρούμε έναν πληθυσμό αρχικά με i προσβεβλημένους από την επιδημία και s επιδεκτικούς στην επιδημία. Ένα προσβεβλημένο άτομο προσθέτει, με μόλυνση, α ακόμα άτομα στον κατάλογο των προσβεβλημένων. Για μαθηματική ευκολία, επιβάλλουμε ένα είδος συμμετρίας, με το να υποθέσουμε ότι κάθε επιδεκτικός μεγαλώνει την πιθανότητα α επιδεκτικών.

Έστω μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$ όπου:

X_n = ο αριθμός των προσβεβλημένων στον χρόνο n

Τότε η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov (χρονικά μη-ομογενής).

Το παραπάνω σχήμα μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια ενός μοντέλου κελιού, με τον ακόλουθο τρόπο: ας θεωρήσουμε ένα κελί που περιέχει r κόκκινα και g πράσινα σφαιρίδια. Ανασύρουμε ένα σφαιρίδιο από το κελί και σημειώνουμε το χρώμα του. Επιστρέφουμε το σφαιρίδιο στο κελί και επιπρόσθετα βάζουμε άλλα α σφαιρίδια του ίδιου χρώματος, συνεχίζοντας την διαδικασία επ' αόριστον. Έστω:

X_n= ο αριθμός των κόκκινων σφαιριδίων

κατά το τέλος του ποστού πειράματος

Αν X_n= x, $x\in S$ $(x\geq r)$, τότε ανεξάρτητα από το πως φτάσαμε στην κατάσταση x, το σύστημα θα περιέλθει στην κατάσταση x+α ή την x στον χρόνο (n+1) και οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι ίσες με:

$$P\{X_{n+1}=y \mid X_0=x_0,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=x\}=\begin{cases} x/(r+g+na) & y=x+a \\ 1-x/(r+g+na) & y=x \\ 0 & a\,l\,l\,o\,u \end{cases}$$

βλέπουμε δηλαδή ότι έχουμε εξάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης από τον χρόνο και την παρούσα κατάσταση.

4.7 Έλεγχος αποθεμάτων

Ας υποθέσουμε ότι, για τη διατήρηση ενός προϊόντος σε ικανοποιητικά επίπεδα αποθέματος, ακολουθείται η εξής αποθεματική τακτική: Αν στο τέλος τής ν-οστής περιόδου (π.χ ημέρας, μηνός, έτους κ.λ.π) το απόθεμα είναι $X_ν$ παραγγέλλεται (για αποθήκευση) ποσότητα $A-X_ν$, ώστε το απόθεμα να γίνει A αλλιώς δε γίνεται καμιά παραγγελία. Έστω $ζ_ν$ η ζήτηση του προϊόντος στη διάρκεια τής ν-οστής περιόδου. Τα αποθέματα στις αρχές δύο διαδοχικών περιόδων συνδέονται με τη σχέση

$$X_{n+1} = \begin{cases} \mathrm{X}_n - z_{n+1} & gia \;\; a < \mathrm{X}_n \leq \mathrm{A}, \\ \mathrm{A} - z_{n+1} & gia \qquad \mathrm{X}_n \leq a \end{cases}$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι το απόθεμα του προϊόντος μετράται σε ακέραιες μονάδες (διακριτή ποσότητα με τιμές 0,1,2,…) τότε ο χώρος καταστάσεων του συστήματος (τιμών τής $X_ν$) είναι το σύνολο

$$\{A, A-1, \ldots, 1, 0, -1, -2, \ldots\}$$

Μία αρνητική τιμή σημαίνει ζήτηση που δεν καλύπτεται από το απόθεμα, αλλά ικανοποιείται μετά την επανατροφοδότηση του αποθέματος (οι παραγγελίες εκτελούνται αμέσως). Αν τέλος υποθέσουμε ότι οι ζητήσεις $ζ_1, ζ_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες μη αρνητικές (ακέραιες) τυχαίες μεταβλητές, τότε η ακολουθία των αποθεμάτων $\{X_ν,\ ν \geq 0\}$ ορίζει αλυσίδα Markov, της οποίας ο πίνακας μεταβάσεως προσδιορίζεται σύμφωνα με την παραπάνω σχέση

Σημειώνουμε ότι, αν το απόθεμα $X_ν$ είναι συνεχής μεταβλητή, τότε η $\{X_ν\}$ ορίζει ανέλιξη Markov (σε διακριτό χρόνο ν=0,1,…). Επίσης, αντί των σημείων 1,2,…, μπορούν να ληφθούν σαν σημεία (χρονικά) ελέγχου του αποθέματος οι στιγμές $t_1 < t_2 < \ldots < t_ν < \ldots$,οπότε η $ζ_ν$ αναφέρεται στη χρονική περίοδο $(t_{ν-1}, t_ν)$.

4.8 Κλαδωτή αλυσίδα (Branching process)

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα: αν ένα άτομο μιας δοσμένης οικογένειας έχει πιθανότητα p(k) να αποκτήσει k ($k \geq 0$) αρσενικούς απογόνους, ποιά η πιθανότητα το όνομα της οικογένειας τελικά να εξαφανιστεί;

Έστω λοιπόν μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n \geq 0}$ όπου:

$X_0 = 1$ (αρχική γενιά, ένα άτομο)

X_n =μέγεθος της ποστης γενιάς απογόνων (αρσενικών),

τότε το όνομα της οικογένειας εξαφανίζεται αν

$$X_k > 0,\ 0 \leq k \leq n-1 \text{ και } X_n = 0$$

Η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ σχηματίζεται ως εξής: αν σε κάποιο δοσμένο χρόνο n ο αριθμός των αρσενικών είναι i δηλαδή $X_n = i$, τότε κάθε ένας από αυτούς ανεξάρτητα παράγει απογόνους με την ίδια πιθανότητα p(k), έτσι ώστε θα έχουμε $J_1+J_2+\ldots=J_i$ αρσενικούς στην (n+1)οστή γενιά, όπου $J_1,J_2,\ldots,J_i$ ανεξάρτητες, ταυτοτικά κατανεμημένες (J_m= ο αριθμός των αρσενικών απογόνων που παράγει ο $m^{\text{οστός}}$ αρσενικός απόγονος, της n-οστης γενιάς) τυχαίες μεταβλητές με κατανομή:

$$P\{J_m=k\}=p(k),\ m,\ k \geq 0$$

Άρα οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, δίνονται από:

$p(x,y)=P\{X_n+1=y|X_n=x\}=P\{J_1+J_2+\ldots+J_x=y\}$ $x \geq 1$, $y \geq 0$ και $p(0,0)=1$.

Παράρτημα

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Andrey Andreyevich Markov

Γεννήθηκε	14 Ιουνίου του 1856 στο Ryazan της Ρωσίας
Πέθανε	20 Ιουλίου του 1922 στο Petrograd της Ρωσίας
Κατοικία	Ρωσία
Εθνικότητα	Ρωσική
Επιστήμη	Μαθηματικά
Ίδρυμα	St Petersburg University
Σπουδές	St Petersburg University
Ακαδημαϊκός σύμβουλος	Pafnuty Chebyshev
Αξιόλογοι μαθητές	Abram Besicovitch Georgy Voronoy
Γνωστός για	Μαρκοβιανές αλυσίδες

Andrey (Andrei) Andreyevich Markov. (Ρωσία 14 Ιουνίου 1856–20 Ιουλίου 1922) Ρώσος μαθηματικός. Είναι γνωστός για τη θεωρία στοχαστικής προόδου. Η έρευνά του αργότερα έγινε γνωστή ως Μαρκοβιανές αλυσίδες. Ο γιος του Andrey Andreevich Markov (1903-1979), ήταν επίσης ένας αξιόλογος μαθηματικός.

Ο Andrey Andreyevich Markov γεννήθηκε στο Ryazan. Γιος του γραμματέα της δημόσιας διοίκησης του δάσους του Ryazan, Andrey Grigorevich Markov, και της πρώτης του γυναίκας Nadezhda Petrovna Markova. Στις αρχές του 1860 ο πατέρας του μετακόμισε στο St Petersburg για να γίνει διαχειριστής των περιουσιακών στοιχείων της πριγκίπισσας Ekaterina Aleksandrovna Valvatyeva.

Το 1866 η σχολική ζωή του Markov ξεκίνησε με την είσοδό του στο σχολείο Saint Petersburg. Κατά τη διάρκεια της σχολικής ζωής είχε ιδιαίτερη έφεση στα ανώτατα μαθηματικά. Στα δεκαεφτά του ενημέρωσε τους Bunyakovsky, Korkin και Yegor Zolotarev σχετικά με μια νέα μέθοδο επίλυσης των συνηθισμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και προσκλήθηκε στις ονομαστές Korkin Saturdays, όπου συναντιόντουσαν συχνά οι μαθητές του Korkin. Το 1874 τελείωσε το σχολείο και ξεκίνησε τις σπουδές του στη ψυχο-μαθηματική ικανότητα στο πανεπιστήμιο St Petersburg .

Μεταξύ των δασκάλων του ήταν οι: Yulian Sokhotski (διαφορικός λογισμός, ανώτερη άλγεβρα), Konstantin Posse (αναλυτική γεωμετρία), Yegor Zolotarev (ολοκληρωτικός λογισμός), Pafnuty Chebyshev (θεωρία αριθμών, θεωρία πιθανοτήτων), Aleksandr Korkin (συνήθεις και μερικές διαφορικές εξισώσεις), Okatov (μηχανική), Somov (μηχανική) και Budaev (περιγραφική και ανώτερη γεωμετρία).

Το 1877 βραβεύτηκε με χρυσό μετάλλιο για την εξαιρετική λύση στο πρόβλημα “Σχετικά με την Ολοκλήρωση των Διαφορικών Εξισώσεων με τα Συνεχή Κλάσματα με την εφαρμογή της εξίσωσης $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=n(1+y^2),$”. Τον επόμενο χρόνο πέρασε τις εξετάσεις και παρέμεινε στο πανεπιστήμιο ως λέκτορας. Τον Απρίλιο του 1880 ο Markov υπερασπίστηκε την θεωρία του στο master με θέμα “About Binary Quadratic Forms with Positive Determinan”, την οποία ενθάρρυναν οι Aleksandr Korkin και Yegor Zolotarev.

Πέντε χρόνια αργότερα, τον Ιανουάριο του 1885, πραγματοποίησε το διδακτορικό του με θέμα “About Some Applications of Algebraic Continuous Fractions”.

Το παιδαγωγικό του έργο ξεκίνησε μετά το master του, το φθινόπωρο του 1880. Έκανε διαλέξεις στο διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Αργότερα έκανε διαλέξεις εναλλάξ στην εισαγωγή στην ανάλυση, θεωρία πιθανοτήτων (επακόλουθος του Chebyshev, ο οποίος έφυγε από το πανεπιστήμιο το 1882) και την ανάλυση των ακολουθιών. Από το 1895 μέχρι το 1905 έδινε και διαλέξεις διαφορικής ανάλυσης. Ένα χρόνο μετά το διδακτορικό του διορίστηκε έκτακτος καθηγητής (1886) και την ίδια χρονιά εκλέχθηκε αναπληρωτής στη Ακαδημία των Επιστημών. Το 1890, μετά το θάνατο του Viktor Bunyakovsky, ο Markov έγινε έκτακτο μέλος της ακαδημίας. Η προώθηση του σε μόνιμο καθηγητή του St Petersburg University ακολούθησε το φθινόπωρο του 1894.

Τελικά το 1896, εκλέχθηκε μόνιμο μέλος της ακαδημίας και διάδοχος του Chebyshev. Το 1905 κρίθηκε άξιος αμοιβής και του δόθηκε το δικαίωμα συνταξιοδότησης το οποίο αμέσως χρησιμοποίησε, συνεχίζοντας παράλληλα να δίνει διαλέξεις σχετικά με τον διαφορικό λογισμό.

Εξαιτίας της εξέγερσης των φοιτητών το 1908, δόθηκε διαταγή στους καθηγητές και τους λέκτορες του πανεπιστημίου Saint Petersburg να παρακολουθούν τους φοιτητές. Ο Markov αρχικά αρνήθηκε και εξήγησε γραπτά την άρνηση του και για τον λόγο αυτό του αφαιρέθηκε το δικαίωμα να διδάσκει στο πανεπιστήμιο Saint Petersburg από όπου τελικά αποφάσισε να αποσυρθεί.

Το 1913 το συμβούλιο του Saint Petersburg εξέλεξε εννέα επιστήμονες, τιμητικά μέλη του πανεπιστημίου, μεταξύ των οποίων και ο Markov, του οποίου όμως η εκλογή δεν επιβεβαιώθηκε από τον Υπουργό Εκπαίδευσης. Η έγκριση δόθηκε τέσσερα χρόνια αργότερα, μετά την επανάσταση του 1917. Ο Markov συνέχισε τις διαλέξεις του για την θεωρία πιθανοτήτων και την διαφορική ανάλυση μέχρι το θάνατό του το 1922.

Βιβλιογραφία

1. Βασιλείου Π. Γ., Βασιλείου Χ. Γ., Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες, τόμος ΙΙ, εκδόσεις Ζήτη, 1990.

2. Βασιλείου Π. Γ., Βασιλείου Χ. Γ., Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες, τόμος ΙΙΙ, εκδόσεις Ζήτη, 1996.

3. Βόσκογλου Γ. Μ., Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, εκδόσεις Μακεδονικές, 2002.

4. Δάρας Ι.Τ., Σύψας Π., Στοχαστικές Ανελίξεις, εκδόσεις Ζήτη, 2003.

5. Κάκουλλος Ν. Θ. , Στοχαστικές Ανελίξεις, 1990.

6. Κιόχος Π. Α. , Στατιστική, εκδόσεις Interbooks, 1993.

7. Κούτρας Μ. Β., Εισαγωγή στις Πιθανότητες μέρος Ι, εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2002.

8. Κούτρας Μ. Β., Εισαγωγή στις Πιθανότητες, μέρος ΙΙ, εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2004.

9. Νικολετσέας Σ., Σπυράκης Π., Στοιχεία της Πιθανοτικής Μεθόδου, εκδόσεις Cutenberg.
10. Παπούλης Α., Πιθανότητες Τυχαίες Μεταβλητές και Στοχαστικές Διαδικασίες, εκδόσεις Τζιόλα Α. , 1998.
11. Ρούσσας Γ. Γ. , Θεωρία Πιθανοτήτων, εκδόσεις Ζήτη, 1992.
12. Υψηλάντης Γ. Π., Επιχειρησιακή Έρευνα, εκδόσεις «Έλλην», 2002.
13. Φακίνος Δ., Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα, 1992.
14. Φακίνος Δ., Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα, 1994.
15. Wentzel E., Ovcharon L., Θεωρία Πιθανοτήτων, εκδόσεις Fountas.