



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ: ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ &
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: Προσαρμογή Μοντέλων Χρονοσειρών σε Δεδομένα Οικονομικού Περιεχομένου με την Μέθοδο Box-Jenkins, με Στόχο την Προσαρμογή Κατάλληλου Μοντέλου και Χρήση Αυτού για Πρόβλεψη.

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Δρ. Καρυώτη Βασιλική

Φοιτητές: Φουτρή Μαρία

A.M. 354

Φώτης Αναστάσιος

A.M. 324



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΠΙΜΕΤΡΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

ΣΥΜΠΡΟΨΗΦΟΝΤΟΣ ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΥ
ΕΡΕΥΝΗΤΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟΥ ΣΥΝΕΡΓΑΤΗ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΗΤΗ

ΟΝΟΜΑΤΕΡΩΝ: ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ ΚΑΤΑΡΤΙΣΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ

Επιχειρησιακή Κατηγορία: Δε. Καταρτιση Βασική

Φορέας: Φορέας Μετα
Φορέας Αναδοχός

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΣ BOX-JENKINS.....	5
2.1 ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ.....	5
2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ(ACF) ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΗΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ(PACF).....	7
2.3 ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΟΥΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ AR(p) (AUTOREGRESSIVE MODELS).....	10
2.4 ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ ΜΟΝΤΕΛΑ MA(q) (MOVING AVERAGE MODELS).....	15
2.5 ΣΥΝΘΕΤΟ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΟΥΜΕΝΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(p,d,q).....	18
2.6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΑ ΜΙΚΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ARIMA(p,d,q).....	20
2.7 ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΕΠΟΧΙΚΟΤΗΤΑ (SEASONAL TIME SERIES).....	21
2.8 ΕΠΙΛΟΓΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ: Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ BOX ΚΑΙ JENKINS.....	24
2.9 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ.....	25
2.10 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ.....	28
2.11 ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ.....	31
2.12 ΠΡΟΒΛΕΨΗ.....	32

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	34
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	34
3.2.a ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ».....	35
3.3.a ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ».....	37
3.4.a ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΩΝ p ΚΑΙ q ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ».....	44
3.5.a ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(2,2,3) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ».....	45
3.6.a ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(2,2,2) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ».....	47
3.7.a ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(1,2,1) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ».....	52
3.8.a ΠΡΟΒΛΕΨΗ(FORECASTING).....	56
3.9.a ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	57
3.10.b ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ».....	58
3.11.b ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ».....	60
3.12.b ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΩΝ p ΚΑΙ q ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ».....	63
3.13.b ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(1,1,1) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ».....	64
3.14.b ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(1,1,0) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ».....	66
3.15.b ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(1,1,0) ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ».....	69

3.16.b	ΠΡΟΒΛΕΨΗ.....	72
3.17.b	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	73

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΠΟΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ... 74

4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	74
4.2	ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.....	75
4.3	ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΠΟΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ (P,D,Q) _s ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ P,Q.....	79
4.4	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ SARIMA(1,1,1) ₁₂	82
4.5	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ SARIMA(1,1,0) ₁₂	84
4.6	ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΗ ΕΠΟΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ(p,d,q). 86	
4.7	ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ.....	87
4.8	ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΩΝ p ΚΑΙ q.....	89
4.9	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA(1,0,0).....	91
4.10	ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ SARIMA(1,1,0) ₁₂ ×(1,0,0).....	93
4.11	ΠΡΟΒΛΕΨΗ.....	96
4.12	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....98

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....101

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....108

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία έγινε στα πλαίσια της πτυχιακής εργασίας των φοιτητών Φουτρή Μαρίας και Φώτση Αναστασίου, με επιβλέπουσα καθηγήτρια την Δρ. Καρυώτη Βασιλική και με αντικείμενο μελέτης την «Προσαρμογή μοντέλων Χρονοσειρών σε δεδομένα οικονομικού περιεχομένου με την μέθοδο Box-Jenkins, με στόχο την προσαρμογή κατάλληλου μοντέλου και χρήση αυτού για πρόβλεψη».

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε την Δρ. Καρυώτη Βασιλική για την πλήρως εποικοδομητική και υπερπολύτιμη βοήθειά της καθώς και για την καθοδήγηση της καθ' όλη την διάρκεια της πτυχιακής εργασίας.

Η Ανάλυση και Πρόβλεψη χρονοσειρών έχει προοδεύσει αλματωδώς τα τελευταία είκοσι χρόνια, διότι σαν κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών βρίσκει εφαρμογή σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως Οικονομία, Χρηματιστήριο, Ιατρική, Βιολογία καθώς και στην Ηλεκτρονική και Φυσική επιστήμη.

Το εξεταζόμενο θέμα, εξελίσσεται με απώτερο σκοπό την εξειδικευμένη προσέγγιση στην ανάλυση και κατασκευή ενός υποδείγματος πρόβλεψης για την καλύτερη προσαρμογή της χρονοσειράς. Η μεθοδολογία των Box-Jenkins (1976) για την προσέγγιση του υποδείγματος παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα: είναι λογική και στατιστικά ακριβής, αντλεί πληροφορίες από ιστορικά δεδομένα της χρονοσειράς και τέλος επιδρά στην αύξηση της ακρίβειας της πρόβλεψης συγκρατώντας τον αριθμό των παρατηρήσεων σε μικρότερο επίπεδο, συγκριτικά με άλλες μεθόδους που για επιτύχουν την ίδια ακρίβεια χρειάζονται περισσότερες παρατηρήσεις.

Στο κύριο μέρος της εργασίας που ακολουθεί θα ασχοληθούμε τόσο με χρηματοοικονομικές χρονοσειρές, δηλαδή την πορεία συγκεκριμένων μετοχών στο Χρηματιστήριο όσο και με την εξέλιξη των πωλήσεων κάποιου προϊόντος. Για την ανάλυση αυτή θα χρησιμοποιηθούν διάφορα στατιστικά μοντέλα.

Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τα επίπεδα των τιμών των μετοχών Πετρελάκης και Θεμελιοδομική, αλλά και τις πωλήσεις Σαμπάνιας για τακτά χρονικά διαστήματα. Σκοπός της εργασίας, αποτελεί η εξαγωγή μιας ασφαλούς πρόβλεψης με την χρήση των καταλληλότερων υποδειγμάτων.

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν όλες οι μέθοδοι και τα εργαλεία που θα βοηθήσουν στην επιλογή του καλύτερου μοντέλου.

Η εργασία απαιτεί τόσο θεωρητική όσο και πρακτική ανάλυση. Για την πρακτική ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί το στατιστικό πακέτο SPSS, version 13.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάλυση των χρονοσειρών έχει μια μακρόχρονη παράδοση στα εμπειρικά οικονομικά (Nerlove 1979, Spanos 1986). Τα υποδείγματα των χρονοσειρών παρουσιάζουν, εκτός των άλλων, το σημαντικό πλεονέκτημα ότι είναι ικανά να ταυτοποιήσουν σχηματισμούς συμπεριφοράς, οι οποίοι στη συνέχεια μπορούν να εξηγηθούν και να προβλεφθούν μελετώντας απλά την ιστορία της μεταβλητής που παρουσιάζει αυτή τη συμπεριφορά. Για την ανάλυση αυτής της συμπεριφοράς, κρίνεται σκόπιμος ο προσδιορισμός των εννοιών στοχαστικής διαδικασίας και χρονοσειράς.

Στοχαστική διαδικασία (Μπόρα – Σέντα, 1997), είναι ένα στατιστικό φαινόμενο που εξελίσσεται μέσα στο χρόνο σύμφωνα με τους νόμους των πιθανοτήτων.

Χρονοσειρά (time series), είναι μια ακολουθία μεταβαλλόμενων παρατηρήσεων, οι οποίες είναι διατεταγμένες στο χρόνο, δηλαδή είναι η σειρά των τιμών που παίρνει μια μεταβλητή σε διαδοχικές χρονικές στιγμές ή περιόδους. Οι χρονοσειρές μπορούν να παρουσιαστούν και στο καρτεσιανό διάγραμμα (scatter plot), όπου η εξεταζόμενη μεταβλητή μπορεί να τοποθετηθεί στον κάθετο άξονα και ο χρόνος (t) στον οριζόντιο.

Η χρονοσειρά λοιπόν, μπορεί να θεωρηθεί στοχαστική διαδικασία με πεπερασμένο πλήθος παρατηρήσεων.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βήματα που ακολουθούμε κατά την ανάλυση μιας χρονοσειράς:

1. εξασφαλίζουμε ότι η σειρά έχει σταθερή συμπεριφορά (στασιμότητα).
2. εξασφαλίζουμε ότι δεν υπάρχουν εποχικότητες – περιοδικότητες.
3. εξασφαλίζουμε κατάλληλο μοντέλο που να προσαρμόζεται στα δεδομένα.
4. εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους του μοντέλου και τέλος
5. χρησιμοποιούμε το τελικό μοντέλο για προβλέψεις.

Στην μελέτη μας, θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα τα εξής μοντέλα:

- Αυτοπαλινδρομούμενα (autoregressive) τάξης p , που συμβολίζονται με $AR(p)$.
- Κινούμενου μέσου (moving average) τάξης q , που συμβολίζονται με $MA(q)$.
- Μεικτά τάξης (p,q) που συμβολίζονται $ARMA(p,q)$.

Σημείωση :

Αν τα δεδομένα έχουν κάποια περιοδικότητα, η ανάλυση χρονοσειρών απαιτεί περισσότερο σύνθετα μοντέλα. Ένα από αυτά είναι το ολοκληρωμένο μεικτό μοντέλο $SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$. Αν τα δεδομένα δεν έχουν περιοδικότητα τότε χρησιμοποιείται το ολοκληρωμένο μεικτό μοντέλο $ARIMA(p,d,q)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΣ BOX-JENKINS

2.1 ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ

Στα εφαρμοσμένα οικονομικά, μια χρονοσειρά (time series) μπορεί να αναλυθεί σε τρεις βασικές συνιστώσες: την τάση (trend), την κυκλικότητα (cyclical aid) και τις ακανόνιστες μεταβολές (irregular components).

Η τάση μιας χρονοσειράς εμφανίζεται με τη μορφή αλλαγών στο μέσο ή τη διακύμανση της. Ο μέσος ενδέχεται να αυξάνεται ή να μειώνεται ακολουθώντας κάποιο γραμμικό ή μη-γραμμικό σχηματισμό.

Στην κυκλική συνιστώσα διακρίνουμε έναν επαναληπτικό σχηματισμό ή εποχιακές μεταβολές, ενώ η ακανόνιστη είναι εκείνη με τη οποία θα ασχοληθούμε. Στην ουσία οι ακανόνιστες μεταβολές είναι ό,τι απομένει μετά από το «φιλτράρισμα» της σειράς, την αφαίρεση της τάσης και της κυκλικότητας.

Μια ακόμα βασική προϋπόθεση στην ανάλυση των χρονοσειρών αποτελεί η στασιμότητα. Έτσι με τον όρο **στασιμότητα** πρακτικά εννοούμε κάθε σταθερή διαδικασία που έχει ως χαρακτηριστικό ότι ο μέσος, η διακύμανση και η αυτοσυσχέτιση δεν αλλάζουν κατά τη διάρκεια του χρόνου.

Η έννοια της στασιμότητας για μια χρονοσειρά μπορεί να διαχωριστεί σε:

1) Αυστηρώς στάσιμη. Μία χρονοσειρά χαρακτηρίζεται αυστηρώς στάσιμη, όταν η από κοινού κατανομή πιθανότητας των $X_{t_1+a}, X_{t_2+a}, \dots, X_{t_n+a}$ για όλους τους ακέραιους αριθμούς t_1, t_2, \dots, t_n είναι ίδια με την από κοινού κατανομή πιθανότητας των $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$. Με άλλα λόγια «μετατοπίζοντας» τη χρονοσειρά μας κατά a δεν επηρεάζεται η από κοινού κατανομή πιθανότητας, η οποία εξαρτάται μόνο από τα διαστήματα μεταξύ των t_1, t_2, \dots, t_n . Η παραπάνω διαπίστωση ισχύει για κάθε n . Γενικά:

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+a}, X_{t_2+a}, \dots, X_{t_n+a})$$

και ισχύει ότι η μέση τιμή $E(X_t) = \mu$ και η συνδιασπορά $\sigma^2(t) = \sigma^2$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου t .

2) Ασθενώς στάσιμη ή στάσιμη δεύτερης τάξης. Μία χρονοσειρά χαρακτηρίζεται έτσι όταν η μέση τιμή και οι συνδιασπορές είναι ανεξάρτητες του χρόνου t .

2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ (ACF) ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΗΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ (PACF)

Γενικά, είναι δύσκολο να επιτευχθεί ολοκληρωμένη περιγραφή μιας διαδικασίας πρόβλεψης. Όμως με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης μπορούμε να πετύχουμε μια μερική περιγραφή της διαδικασίας ανάπτυξης ενός μοντέλου πρόβλεψης. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης «μετράει» το βαθμό συσχέτισης μεταξύ των γειτονικών παρατηρήσεων της χρονοσειράς. Για να προχωρήσουμε στην ανάλυση των δύο συναρτήσεων ACF και PACF κρίνεται απαραίτητο να αναφερθούν και να αναλυθούν οι παρακάτω έννοιες:

- **Αυτοσυσχέτιση** με υστέρηση k ορίζεται ως εξής:

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 \quad \text{όπου } k=0,1,2,3,\dots \quad (2.2.1)$$

Σημείωση:

1. $\rho(0) = 1$
2. $\rho(k) = \rho(-k)$
3. $-1 \leq \rho(k) \leq 1$

Το διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων λέγεται ACF. Το ACF είναι το βασικό εργαλείο για την αναγνώριση του μοντέλου. Επειδή $\rho_k = \rho_{-k}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων και έτσι παίρνουμε μόνο το θετικό μισό της συνάρτησης. Η γραφική παράσταση $(k, \rho_k), k \geq 0$ λέγεται διάγραμμα αυτοσυσχέτισης (correlogram).

- Δειγματική αυτοσυσχέτιση r_k ονομάζεται η ποσότητα:

$$r_k = c_k / c_0 \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.4)$$

- Δειγματική αυτοδιακύμανση C_k ονομάζεται η ποσότητα:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x}) \quad , \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.3)$$

και η δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$.

Ένα δείγμα αυτοσυσχετίσεων που τείνει στο 0, για $k > 0$ είναι μια διαδικασία που ονομάζεται λευκός θόρυβος. Στο υπόδειγμα του λευκού θορύβου, υποθέτουμε, ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_t είναι ανεξάρτητες και κατανέμονται κανονικά με μέσο μ και διακύμανση σ_x^2 , δηλαδή ο λευκός θόρυβος έχει τις εξής ιδιότητες :

$$E(\alpha_t) = 0$$

$$\text{Var}(\alpha_t) = \sigma_\alpha^2 \quad \text{όπου } \alpha_t = \text{λευκός θόρυβος}$$

Πρακτικά για να είναι στάσιμη μια χρονοσειρά θα πρέπει το διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων να φθίνει αμέσως μετά τις πρώτες k τάξεις, ενώ σε μια χρονοσειρά με έντονη τάση, το διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων θα φθίνει με αργό ρυθμό καθώς θα αυξάνεται η τιμή του k .

Στην περίπτωση ύπαρξης ισχυρής εποχικής συνιστώσας έχουμε ισχυρές αυτοσυσχετίσεις σε συγκεκριμένες υστερήσεις, ανάλογα βέβαια και τα δεδομένα που έχουν παρθεί (π.χ. μηνιαία, τριμηνιαία).

Ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης (PACF) μετράει το βαθμό της σχέσης μεταξύ μιας παρατήρησης X_t και X_{t-k} όταν η επίδραση των άλλων χρονικών υστερήσεων (lags) παραμένει σταθερή. Μελετάμε τις μερικές αυτοσυσχετίσεις όταν δεν γνωρίζουμε την κατάλληλη τάξη της διαδικασίας αυτοπαλινδρόμησης.

2.3 ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΟΥΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ AR(p) (AUTOREGRESSIVE MODELS)

Ένα AR (Autoregressive) μοντέλο είναι μια γραμμική παλινδρόμηση των τρεχόντων τιμών της χρονοσειράς απέναντι σε μια ή περισσότερες προηγούμενες τιμές της χρονοσειράς. Έτσι μπορούν να υπολογιστούν ένας ή περισσότεροι συντελεστές, που περιγράφουν τα συνεχόμενα στοιχεία της χρονοσειράς από τα τρέχοντα και παρελθοντικά στοιχεία.

Το AR (Autoregressive) μοντέλο έχει την παρακάτω μορφή:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t \quad (2.3.1)$$

Σημείωση :

Η τάξη του AR (Autoregressive) μοντέλου συμβολίζεται με την τιμή του γράμματος p .

Επίσης όπου,

X_t = χρονοσειρά

e_t = σφάλματα

όπου e_t τέτοια ώστε $E(e_t) = 0$ και $\text{Var}(e_t) = \sigma_e^2$ και

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ οι « p » άγνωστες παράμετροι του μοντέλου.

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή ολίσθησης προς τα πίσω (backward shift operator), B , με τον παρακάτω τρόπο $BX_t = X_{t-1}$, $B^m X_t = X_{t-m}$, η εξίσωση 2.3.1 μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια του B , με πιο απλή μορφή:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t = e_t \quad (2.3.2)$$

$$\phi(B) X_t = e_t$$

Μία από τις κυριότερες μεθόδους υπολογισμού των παραμέτρων ενός στάσιμου αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου είναι η μέθοδος ροπών ή εξίσωση Yule – Walker (1926-1931) που μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\rho_k = \sum_{k=1}^p \phi_k \rho_{k-1} \quad (2.3.3)$$

ή

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \text{για } k=1, \dots, p \quad (2.3.4)$$

Αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $k=1, 2, p$ και επειδή $\rho_k = \rho_k$ προκύπτουν ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Οι παραπάνω Yule – Walker εξισώσεις δίνουν εκτιμήσεις των παραμέτρων $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ αν όπου ρ_k θέσουμε το δειγματικό r_k .

Παρατήρηση : εξετάζουμε τις ειδικές περιπτώσεις του AR(p) μοντέλου για $p=1$ και $p=2$.

- Στην περίπτωση $p=1$, η AR χρονοσειρά είναι η

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t \quad (2.3.6)$$

Με διαδοχικές αντικαταστάσεις στην (2.3.6) μπορούμε να γράψουμε

$$X_t = \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + e_{t-1}) + e_t = \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + e_{t-2}) + \phi_1 e_{t-1} + e_t$$

Συνεχίζοντας θα παραστήσουμε την X_t σαν σειρά απείρων όρων,

$$X_t = e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \dots \quad (2.3.7)$$

Η (2.3.7) με τη βοήθεια των τελεστών γράφεται :

$$X_t = (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \dots) e_t = \Psi(B) e_t \quad (2.3.8)$$

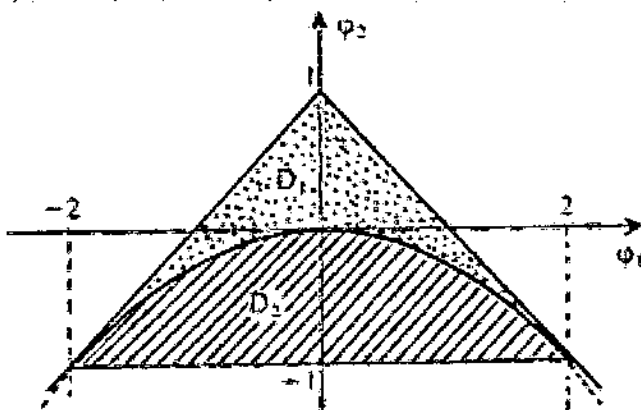
που είναι της μορφής $\Psi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^j B^j$

και για να είναι στάσιμη πρέπει η $\Psi(B)$ να είναι μέσα ή πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή $|\omega| \leq 1$.

- Στην περίπτωση $p=2$, έστω μια AR(2) χρονοσειρά.

Θέλουμε να βρούμε τις συνθήκες στασιμότητας της χρονοσειράς συναρτήσει των παραμέτρων. Για να είναι στάσιμη η σειρά θα πρέπει οι ρίζες της $1 - \phi_1 \omega - \phi_2 \omega^2 = 0$ να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο .

➤ *A' Περίπτωση:* Έχει πραγματικές ρίζες



Οι παράμετροι ϕ_1, ϕ_2 θα ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + 4\phi_2 > 0 & \quad \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 & \quad \phi_1 - \phi_2 < 1 \end{aligned}$$

πράγμα που σημαίνει ότι τα ϕ_1, ϕ_2 πρέπει να ανήκουν στο χωρίο D_1 του παραπάνω σχήματος .

➤ *B' Περίπτωση:* Έχει ίσες ρίζες

Στην περίπτωση αυτή οι παράμετροι πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0 \quad \text{και} \quad -1 < \phi_2 \leq 0$$

Δηλαδή τα ϕ_1, ϕ_2 πρέπει να βρίσκονται πάνω στο τμήμα της παραβολής του παραπάνω σχήματος που είναι μέσα στο τρίγωνο.

➤ Γ' Περίπτωση: Έχει ρίζες μιγαδικές

Συμπεραίνουμε ότι για να είναι στάσιμη μια AR(2) χρονοσειρά, πρέπει τα ϕ_1, ϕ_2 να βρίσκονται σε ολόκληρο το τρίγωνο του σχήματος, δηλαδή να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

Οι τελευταίες αυτές σχέσεις είναι οι συνθήκες στασιμότητας της AR(2) χρονοσειράς συναρτήσει των παραμέτρων του μοντέλου.

2.4 ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ ΜΟΝΤΕΛΑ MA(q) (MOVING AVERAGE MODELS)

Μια διαδικασία κινητού μέσου (Moving Average) μοντέλου είναι μια γραμμική παλινδρόμηση της τρέχουσας τιμής της χρονοσειράς απέναντι στο λευκό θόρυβο ή στα τυχαία σφάλματα μιας ή περισσότερων προηγούμενων τιμών της χρονοσειράς.

Ανεξάρτητα από τη διαδικασία αυτοσυσχέτισης, κάθε στοιχείο της χρονοσειράς μπορεί επίσης να επηρεαστεί από σφάλματα του παρελθόντος ή από σφάλματα (e_t) τα οποία δεν μπορούν να ερμηνευτούν από την διαδικασία αυτοσυσχέτισης. Τα τυχαία σφάλματα υποτίθεται ότι προκύπτουν από την ίδια κατανομή, τυπικά από την κανονική κατανομή.

Το MA (Moving Average) μοντέλο έχει την παρακάτω μορφή:

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (2.4.1)$$

Σημείωση:

Η τάξη του MA μοντέλου συμβολίζεται με την τιμή του γράμματος q.

Όπου,

X_t = χρονοσειρά

e_{t-1} = σφάλματα

$\theta_1, \dots, \theta_q$ = παράμετροι του μοντέλου

όπου e_t τέτοια ώστε $E(e_t) = 0$ και $\text{Var}(e_t) = \sigma_e^2$ και

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ οι «q» άγνωστες παράμετροι του μοντέλου.

Η εξίσωση 2.4.1 γράφεται επίσης και με τη βοήθεια του τελεστή B ως εξής :

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) e_t \quad (2.4.2)$$

$$\theta(\beta) e_t = X_t$$

Το MA(q) μοντέλο δεν χρειάζεται να θέσει περιορισμούς για τα θ_i ώστε να εξασφαλίζεται η στασιμότητα της σειράς, αντίθετα χρειάζονται περιορισμοί για να εξασφαλίζεται αυτό που ονομάζουμε «αντιστρεψιμότητα» της σειράς.

Η MA χρονοσειρά που ορίζεται από την 2.4.1 είναι αντιστρέψιμη, όταν οι ρίζες της $\theta(\omega) = 0$, βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο .

Παρατήρηση :

Εξετάζουμε δύο πολύ εύχρηστα μοντέλα κινούμενου μέσου, τα MA(1) και MA(2) .

- Πρώτης τάξης MA χρονοσειρά :

Η χρονοσειρά είναι η $X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} = (1 - \theta_1 B) e_t$.

Η χρονοσειρά είναι αντιστρέψιμη για $|\theta_1| < 1$ και πάντα στάσιμη.

- Δεύτερης Τάξης ΜΑ χρονοσειρά:

Η σειρά είναι η $X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$ που είναι πάντα στάσιμη και αντιστρέψιμη όταν :

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_1 - \theta_2 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

2.5 ΣΥΝΘΕΤΟ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΟΥΜΕΝΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟ ARMA (p,q)

Πολύ συχνά, οι οικονομικές χρονοσειρές υποδειγματοποιούνται μέσω ενός μικτού υποδείγματος που είναι συνδυασμός μιας αυτοπαλίνδρομης συνιστώσας και μιας άλλης κινητού μέσου. Ένα τέτοιο μικτό υπόδειγμα καλείται ARMA (p, q) και έχει τη μορφή :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (2.5.1)$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή B η εξίσωση απλοποιείται με τις παρακάτω διαδικασίες :

$$\text{Δεδομένου ότι : } B^2 X_t = B(B X_t) = B X_{t-1} = X_{t-2} \quad (2.5.2)$$

Το AR(p) μοντέλο γράφεται :

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t = e_t \quad (2.5.3)$$

όπου, $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$

και το MA(q) μοντέλο γράφεται:

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) e_t \quad (2.5.4)$$

Όπου, $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$

Άρα το ARMA (p, q) γράφεται:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) e_t \quad (2.5.5)$$

$$\phi_p(B) X_t = \theta_q(B) e_t$$

Όπου, $\Phi(\cdot)$ και $\Theta(\cdot)$ είναι πολυώνυμο βαθμού p και q και οι ρίζες τους:
 $\Phi(0) = \Theta(0) = 1$.

Για ένα υπόδειγμα ARMA η ικανή και αναγκαία συνθήκη στασιμότητας είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $\Phi(B)$ βρίσκονται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο, ενώ η αναγκαία και ικανή συνθήκη αντιστρεψιμότητας του MA(q), είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $\Theta(B)$ να βρίσκονται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο .

2.6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΑ ΜΙΚΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ARIMA(p,d,q)

Μια επέκταση του ARMA μοντέλου είναι το ARIMA (AutoRegressive Intergrated Moving Average). Για να είναι στάσιμο ένα υπόδειγμα ARMA (p,q) πρέπει οι ρίζες του πολυωνύμου $\Phi(B)$ να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Αν αντίθετα, το πολυώνυμο αυτό έχει μια μοναδιαία ρίζα, δηλαδή μια ρίζα που βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, τότε η διαδικασία είναι ολοκληρώσιμη. Μια ολοκληρώσιμη διαδικασία d τάξης πρέπει να διαφοροποιηθεί d φορές για να καταστεί στάσιμη.

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B) e_t \quad (2.6.1)$$

Όπου, $(1-B)^d X_t = \nabla^d X_t = W_t$

Άρα έχουμε,

$$\phi_p(B) W_t = \theta_q(B) e_t \quad (2.6.2)$$

Όπου e_t σφάλματα, $(1-B)^d = \nabla^d$ ο τελεστής προς τα πίσω διαφορών τάξης d, $\Phi(\cdot)$ και $\Theta(\cdot)$ πολυώνυμα βαθμού p και q με όλες τις ρίζες των εξισώσεων να βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

2.7 ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΕΠΟΧΙΚΟΤΗΤΑ (SEASONAL TIME SERIES)

Μια χρονοσειρά θα λέμε ότι έχει εποχικότητα s (seasonality), αν η σειρά παρουσιάζει ομοιότητα κάθε s διαστήματα ή η ίδια συμπεριφορά επαναλαμβάνεται κάθε s παρατηρήσεις.

Η μελέτη των χρονοσειρών με εποχικότητα εξετάζει συνήθως μηνιαίες ή ετήσιες παρατηρήσεις με $s = 12$.

Παρατηρήσεις που απέχουν μεταξύ τους $s = 12$ χρονικά διαστήματα και έχουν σχέση, σημαίνει ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης υστέρησης $k = 12$ θα έχει μια υψηλή τιμή σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή των γειτονικών αυτοσυσχετίσεων. Ακόμη είναι πιθανό και οι αυτοσυσχετίσεις που αντιστοιχούν σε υστέρηση πολλαπλάσια της $k = 12$ να είναι επίσης σημαντικές.

Σύμφωνα με τους Box – Jenkins (1976) έχει οριστεί ένα γενικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο ARIMA (general multiplicative model ARIMA):

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)W_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)e_t \quad (2.7.1)$$

όπου B ο τελεστής ολίσθησης προς τα πίσω (backward shift operator), ϕ_p , Φ_P , θ_q , Θ_Q τα πολυώνυμα τάξεων p , P , q , Q αντίστοιχα και $W_t = \nabla^d \nabla_s^D X_t$.

Όπου ∇^d ο τελεστής ολίσθησης προς τα πίσω διαφορών τάξης d , ενώ ∇_s^D είναι ο προς τα πίσω τελεστής των εποχικών (εποχικότητας s) διαφορών τάξης D .

Το μοντέλο αυτό συμβολίζεται με:

$$\text{SARIMA}(p,d,q) \times (P,D,Q)_s \quad (2.7.1)$$

Σύμφωνα με τους Μπόρα – Σέντα (1997) για τον προσδιορισμό των σταθερών D, P, Q και d, p, q με την σειρά που αναφέρονται ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- 1) Κάνουμε το γράφημα των αυτοσυσχετίσεων. Θα παρουσιάσουν μία πτώση αργή ή γρήγορη, εκθετική ή κυματοειδή. Αν για κάποια υστέρηση $K = s$, ο αντίστοιχος συντελεστής r_s εμφανίζεται πολύ σημαντικός σε σχέση με τους γειτονικούς του, τότε θεωρούμε ότι το μοντέλο έχει εποχικότητα s . Στην συνέχεια υπολογίζουμε την τιμή του D .
- 2) Στη συνέχεια από το γράφημα των αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων υστέρησης $s, 2s, 3s, \dots$ προσδιορίζουμε τις τιμές των Q και P αντίστοιχα.
- 3) Προσαρμόζουμε το εποχικό μοντέλο $\text{ARIMA}(P,D,Q)_s$ στις παρατηρήσεις μας και εκτιμούμε τα σφάλματα. Θεωρώντας τη σειρά των σφαλμάτων ως χρονική σειρά, αναζητούμε το κατάλληλο $\text{ARIMA}(p,d,q)$ μοντέλο. Στη συνέχεια εκτιμούμε τις παραμέτρους του συγκεκριμένου μοντέλου στο οποίο καταλήξαμε.

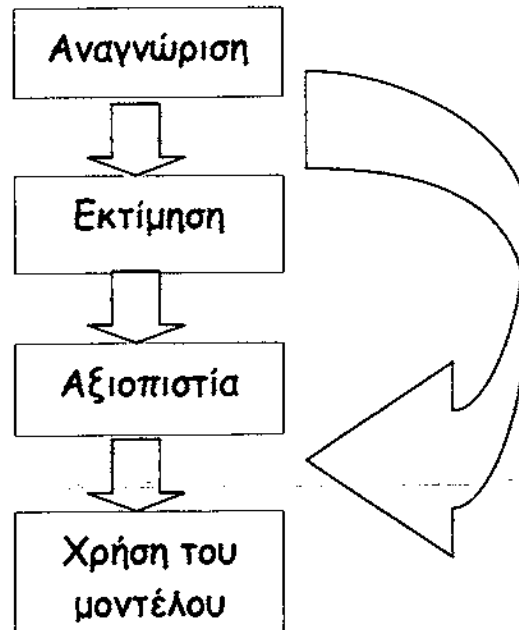
Η ανάλυση χρονοσειρών με εποχικότητα απαιτεί τουλάχιστον $7 \times s$ ή $8 \times s$ παρατηρήσεις και τουλάχιστον 36 αυτοσυσχετίσεις και αυτό γιατί χάνονται $s + d + D$ παρατηρήσεις, με εφαρμογή των τελεστών ∇^d και ∇_s^D .

2.8 ΕΠΙΛΟΓΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ : Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΒΟΧ ΚΑΙ JENKINS

Οι Βοχ και Jenkins (1976) προτείνουν για την επιλογή του υποδείγματος χρονοσειρών τα παρακάτω στάδια :

- i. Επιλογή κατάλληλης τάξης υποδειγμάτων και ταυτοποίηση (identification)
- ii. Εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος (estimation)
- iii. Διαγνωστικός έλεγχος (diagnostic checking)
- iv. Πρόβλεψη και χρήση του μοντέλου (forecasting)

Παρακάτω τα βήματα παρουσιάζονται και σχηματικά :



2.9 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ

Εφόσον έχουμε καταλήξει στην γενική μορφή του ARIMA μοντέλου, η οποία είναι η:

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B) e_t \quad (2.9.1.)$$

Επειδή είναι αρκετά εκτεταμένη, είναι επιθυμητή μια πιο απλή προσέγγισή της ώστε να οριστούν οι τιμές των p , d , q .

Πρωταρχικό στάδιο στην διαδικασία αναγνώρισης αποτελεί ο έλεγχος της στασιμότητας της χρονοσειράς. Στην περίπτωση που η χρονοσειρά παρουσιάζει μεταβλητότητα (μεγάλα ανοίγματα), κρίνεται αναγκαίος ο μετασχηματισμός με χρήση της μεθόδου του λογάριθμου ή της τετραγωνικής ρίζας. Παρόλα αυτά πιο συχνά χρησιμοποιούμε την μέθοδο του λογάριθμου.

Εάν η χρονοσειρά είναι στάσιμη δεν χρειάζεται διαφορίση και το $d = 0$.

Εάν η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη, τότε γίνεται διαφορίση ώστε να επιτευχθεί στασιμότητα. Συνήθως με την πρώτη ή δεύτερη διαφορίση, δηλαδή $d = 1$ ή $d = 2$ έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για να διαπιστωθεί η ύπαρξη ή μη στασιμότητας μπορεί να γίνει έλεγχος του ACF διαγράμματος. Εάν αυτό φθίνει γρήγορα μετά τις πρώτες παρατηρήσεις τότε η χρονοσειρά είναι στάσιμη. Διαφορετικά η διαφορίση είναι αναγκαία.

Η τιμή του q προσδιορίζεται από το διάγραμμα ACF. Συγκεκριμένα, η τιμή του q ισούται με τον αριθμό των υστερήσεων (lags) που βρίσκονται εκτός των ορίων. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η τάξη του MA μοντέλου.

Η τιμή του p που ορίζει και την τάξη του AR μοντέλου προσδιορίζεται από το διάγραμμα PACF. Η διαδικασία είναι αντίστοιχη με την εύρεση της τιμής του q .

Ο παρακάτω Πίνακας 2.9.1 απεικονίζει την συμπεριφορά του ACF και PACF για μερικά βασικά ARIMA μοντέλα.

Υπόδειγμα	Αυτοσυσχέτιση	Μερική αυτοσυσχέτιση
Λευκός Θόρυβος	Όλες μηδέν	Όλες μηδέν
AR(1)	Μηδενίζεται βαθμηδόν	Μηδενίζεται μετά την 1 _η υστέρηση
AR(2)	Μηδενίζεται βαθμηδόν	Μηδενίζεται μετά την 2 _η υστέρηση
MA(1)	Μηδενίζεται μετά την 1 _η υστέρηση	Μηδενίζεται βαθμηδόν
MA(2)	Μηδενίζεται μετά την 2 _η υστέρηση	Μηδενίζεται βαθμηδόν
ARMA(1,1)	Κορυφή στην 1 _η υστέρηση και μετά μηδενίζεται εκθετικά	Κορυφή στην 1 _η υστέρηση και μετά μηδενίζεται εκθετικά
ARMA(1,2)	Κορυφές στις δύο πρώτες υστερήσεις και μετά μηδενίζεται εκθετικά	Κορυφή στην 1 _η υστέρηση και μετά μηδενίζεται εκθετικά
ARMA(2,1)	Κορυφή στην 1 _η υστέρηση και μετά μηδενίζεται εκθετικά	Κορυφές στις δύο πρώτες υστερήσεις και μετά μηδενίζεται εκθετικά
ARMA(2,2)	Κορυφές στις δύο πρώτες υστερήσεις και μετά μηδενίζεται εκθετικά	Κορυφές στις δύο πρώτες υστερήσεις και μετά μηδενίζεται εκθετικά

Πίνακας 2.9.1

2.10 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

Η διαδικασία αναγνώρισης οδηγεί σε έναν τύπο μοντέλου ARMA (p ,q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

$$\text{ή} \quad (2.10.1)$$

$$X_t = \Phi^{-1}(B) \Theta(B) e_t$$

Χρειάζεται επίσης να προσδιοριστούν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων $\phi_1 \dots \phi_p$, $\theta_1 \dots \theta_q$.

Υπάρχουν 2 βασικές διαθέσιμες μέθοδοι για την εκτίμηση αυτών των παραμέτρων:

Η μία είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (Least Squares) και η άλλη είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Method).

Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων, η οποία συμβολίζεται με $\sum e_t^2$. Εφόσον η διαδικασία είναι μη γραμμική συνεπάγεται ότι και η προσέγγιση αυτής, είναι μη γραμμική.

Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Method)

Μια εναλλακτική μέθοδο αποτελεί ο ακριβής υπολογισμός της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Method). Οι τιμές των παραμέτρων που μεγιστοποιούν τη λειτουργία της Μέγιστης Πιθανοφάνειας ή ισοδύναμα την λειτουργία της Λογαριθμικής Πιθανοφάνειας, ονομάζονται Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimates, MLE), σύμφωνα με τους Box-Jenkins (1976).

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση X_t (2.10.1) είναι στάσιμη. Έχοντας n πλήθος παρατηρήσεων X' , όπου $X' = (X_1, \dots, X_n)$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η X_t ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν αναζητούμε με την μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας τις παραμέτρους $\phi' = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ και $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_q)$.

Παρατήρηση:

Το κριτήριο AIC (Akaike Information Criterion) (1973) αποτελεί μια διαφοροποίηση του λόγου Πιθανοφάνειας. Με το κριτήριο αυτό επεκτείνεται η ιδέα του λόγου Πιθανοφάνειας έτσι ώστε να εκτιμούμε τον αριθμό των απαιτούμενων παραμέτρων μιας διαδικασίας ARMA.

Ο Akaike θεωρεί την τάξη του μοντέλου ίση με $t = 1, 2, 3, \dots, m$ και για κάθε περίπτωση, υπολογίζει την ποσότητα:

$$AIC(K) = N \log \hat{\sigma}_e^2 + K$$

όπου:

N : το πλήθος των παρατηρήσεων της χρονοσειράς

$\hat{\sigma}_e^2$: η διασπορά των σφαλμάτων

$K = t + 1$: όπου t οι παράμετροι του μοντέλου συν ένα για τη μέση τιμή.

Τάξη του μοντέλου θεωρείται το t για το οποίο η ποσότητα $AIC(K)$ έχει τη μικρότερη τιμή.

Όταν το μοντέλο είναι ARMA (p,q) , οπότε $K = p + q + 1$, υπολογίζουμε για κάθε συνδυασμό των p και q την ποσότητα AIC . Τελικά το κριτήριο AIC χρησιμοποιείται για την επιλογή του καταλληλότερου μοντέλου.

2.11 ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Εφόσον έχει γίνει η αναγνώριση και η εκτίμηση των παραμέτρων είναι απαραίτητο να εξεταστεί και η επάρκεια του μοντέλου.

Συνήθως χρησιμοποιούνται οι παρακάτω τέσσερις προσεγγίσεις:

1. Ανάλυση Καταλοίπων (σφαλμάτων)
2. Ανάλυση Στασιμότητας
3. Προσαρμογή επιπλέον Μεταβλητών
4. Παράλειψη Παραμέτρων

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος είναι η ανάλυση καταλοίπων. Ο κύριος σκοπός αυτής της ανάλυσης είναι να διαπιστωθεί αν τα κατάλοιπα συμπεριφέρονται ως λευκός θόρυβος. Αυτό σημαίνει ότι τα κατάλοιπα θα πρέπει να ικανοποιούν την στασιμότητα, την ανεξαρτησία και την κανονικότητα.

Η στασιμότητα τελικά ελέγχεται και από το διάγραμμα των καταλοίπων. Επίσης το ACF και το PACF των καταλοίπων θα πρέπει να φθίνει γρήγορα και το δείγμα της αυτοσυσχέτισης να είναι μικρό.

Τέλος το διάγραμμα Q-Q plot θα πρέπει να ακολουθεί την κανονική κατανομή και οι τιμές να πλησιάζουν την διαγώνιο, δηλαδή να είναι συγκεντρωμένες και να «πέφτουν» κοντά στην ευθεία.

2.12 ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε πως μια χρονοσειρά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθεί η μελλοντική συμπεριφορά της.

Για να διασφαλίσουμε τις προβλέψεις της συνάρτησης X_t για χρόνο h (για παράδειγμα μήνες, μέρες, κλπ.), \hat{X}_{t+h} , σε ένα μοντέλο ARIMA, τα στοιχεία της εξίσωσης του αντίστοιχου μοντέλου που αντικαθίστανται είναι:

1. Οι μελλοντικές τιμές του λευκού θορύβου από τις αναμενόμενες τιμές και οι παρελθοντικές τιμές από τα παρατηρούμενα σφάλματα.
2. Η μελλοντική τιμή της X με αυτή της αντίστοιχης πρόβλεψης και
3. Οι παρελθοντικές τιμές της X με αυτές των παρατηρούμενων τιμών.

Σε αυτή την απλή μορφή του AR(1) μοντέλου η πρόβλεψη παρουσιάζεται από τον ακόλουθο τρόπο:

$$h = 1 : \hat{X}_{t+1} = \phi X_t + e_{t+1} \quad (2.12.1)$$

$$\hat{X}_{t+1} = \phi X_t$$

$$\text{όπου } \hat{X}_{t+1} = \frac{E(X_{t+1})}{X_s} \quad s \leq t$$

$$h = 2 : X_{t+2} = \phi X_t + e_{t+2}$$

(2.12.2)

$$\hat{X}_{t+2} = \phi X_{t+1} = X_t$$

$$h = m : X_{t+m} = \phi X_{t+m} + e_{t+m}$$

(2.12.3)

$$\hat{X}_{t+m} = \phi^m X_t$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι οι προβλέψεις του AR(1) μοντέλου ακολουθούν την καμπύλη εκθετικής συνάρτησης.

Τελικά οι προβλέψεις μπορούν να εξασφαλιστούν με:

- I. Τις μεθόδους των χρονοσειρών
- II. Τις μεθόδους παλινδρόμησης
- III. Κριτικές προσεγγίσεις
- IV. Οποιοδήποτε συνδυασμό των παραπάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

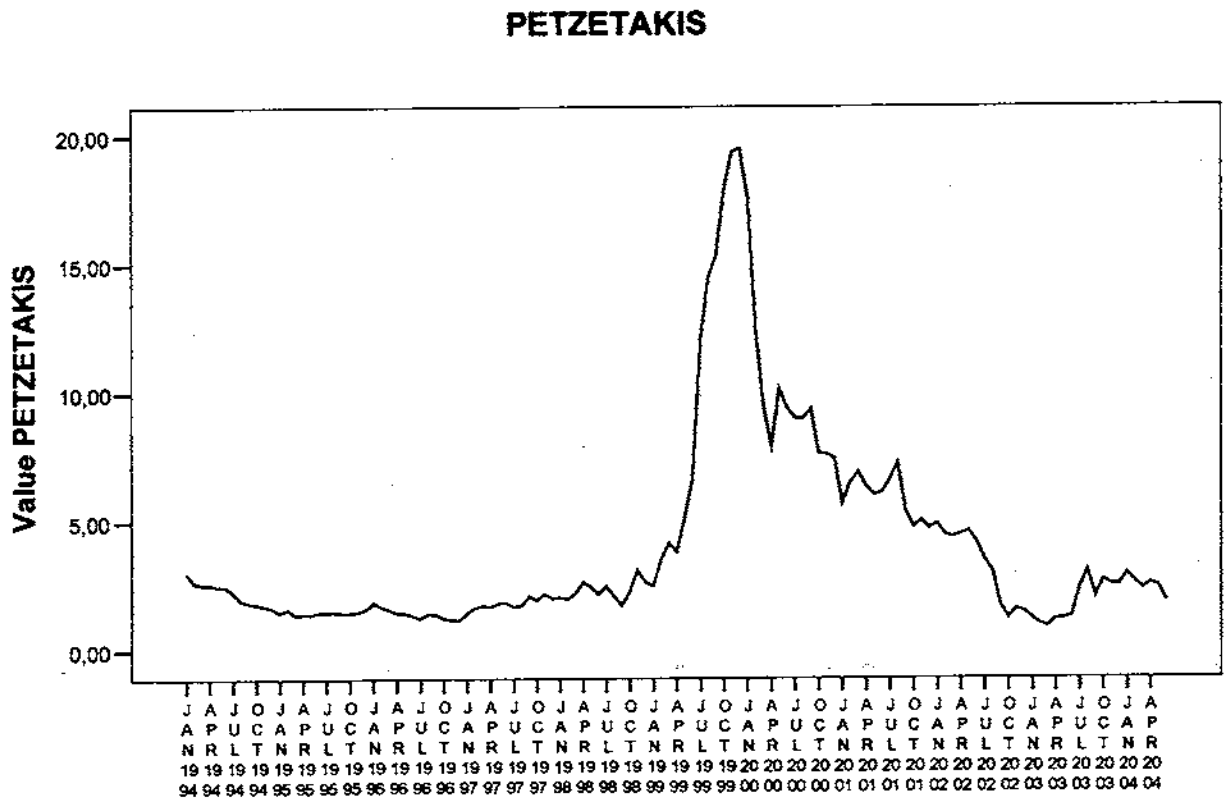
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα βασικότερα εργαλεία για την προσαρμογή μοντέλων έχουν περιγραφεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε αυτό το κεφάλαιο τα εργαλεία αυτά θα εφαρμοστούν στην ανάλυση της μετοχής «Πετρετάκις» και «Θεμελιοδομική». Η μετοχή «Πετρετάκις» συμβολίζεται με Y_i και η μετοχή «Θεμελιοδομική» με Z_i .

Το πρώτο βήμα αποτελεί η μελέτη των δεδομένων.

3.2.a ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ»

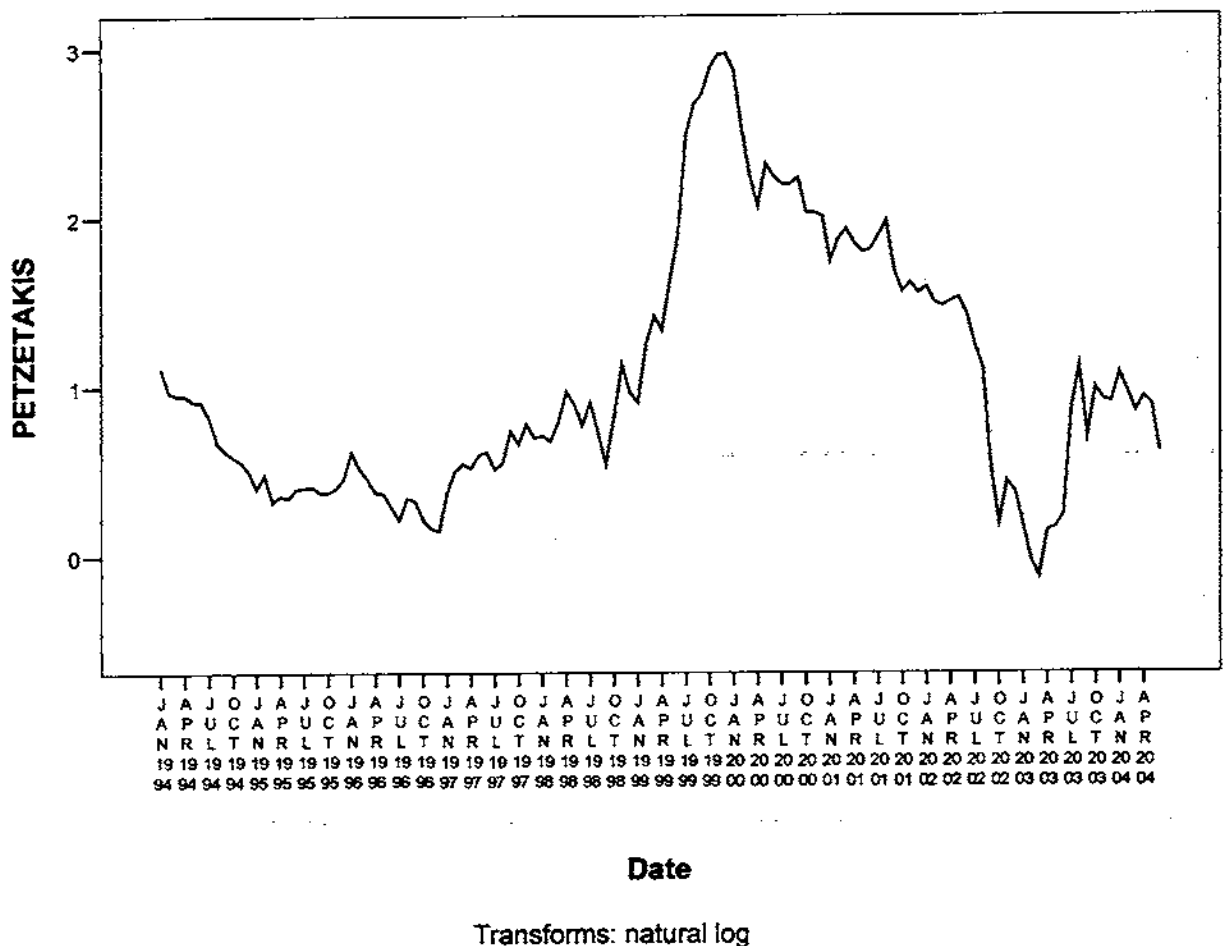
Παρακολουθώντας την πορεία της μετοχής «Πετζετάκις» κατά την περίοδο 1994 έως 2004, παρατηρούμε ότι από το 1994 έως το 1998 η μετοχή ακολουθεί μία σχεδόν «ομαλή» πορεία με μικρές μόνο διακυμάνσεις. Από το 1999 όμως και έως το 2000 παρατηρείται μια υπερβολικά ανοδική πορεία της μετοχής, η οποία σταδιακά εξομαλύνεται έως το 2002, από όπου και συνεχίζει μια «ομαλότερη» πορεία έως το εξετασθέν έτος 2004. Το παρακάτω διάγραμμα 3.2.1 απεικονίζει όλα όσα προαναφέρθηκαν για την πορεία της μετοχής :



Date. Format: "MMM YYYY"

Διάγραμμα 3.2.α.1

Παρατηρώντας την συνολική πλέον πορεία της μετοχής, είναι εμφανές πως το μοντέλο έχει μεγάλη διακύμανση (ανοίγματα) γεγονός το οποίο στη μελέτη μας αντιμετωπίζεται - τουλάχιστον εν μέρει - είτε λογαριθμίζοντας τα δεδομένα, είτε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τετραγωνικής ρίζας. Λογαριθμίζοντας τα δεδομένα προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα 3.2.a.2, από το οποίο διαπιστώνεται ότι το προϋπάρχον τεράστιο άνοιγμα (διακύμανση) έχει διορθωθεί σε μεγάλο βαθμό, ανεξαρτήτως του γεγονότος ότι «μεγάλωσε και η διακύμανση του ομαλοποιημένου κομματιού».



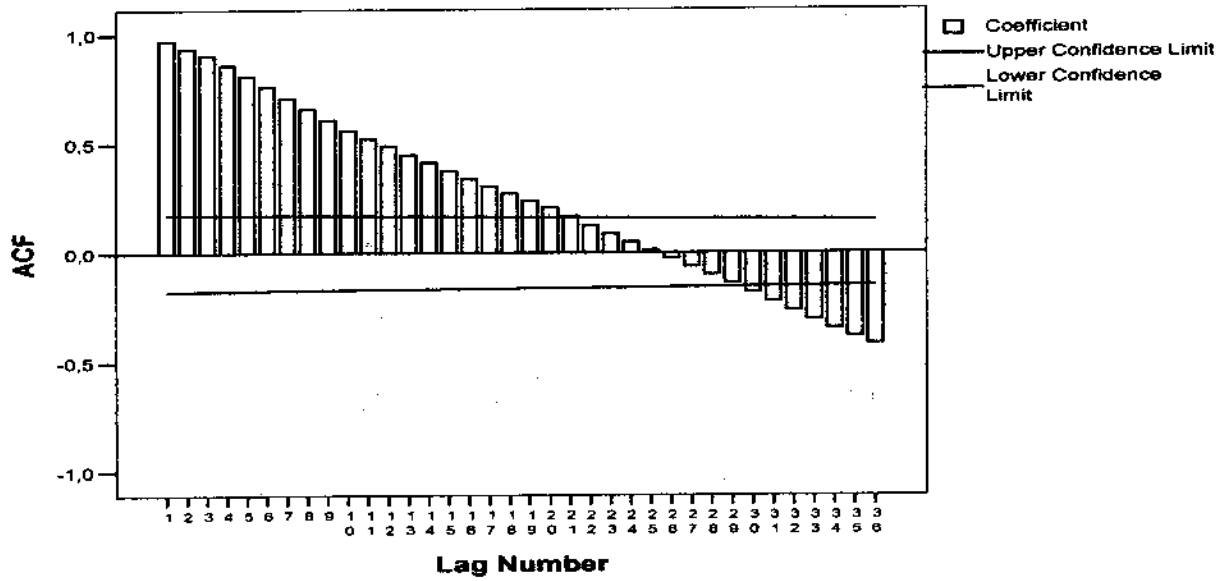
Διάγραμμα 3.2.a.2

3.3.a ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ»

Πλέον έχουμε καταλήξει στο λογαριθμημένο μοντέλο το οποίο πληρεί σε ικανοποιητικότερο βαθμό τις απαιτήσεις μας. Έτσι, το επόμενο βήμα της μελέτης μας είναι ο έλεγχος στασιμότητας. Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, ένα μοντέλο είναι στάσιμο όταν, ο μέσος του είναι ίσος με το 0, η διακύμανση είναι σταθερή, η συνδιασπορά σταθερή και δεν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των καταλοίπων.

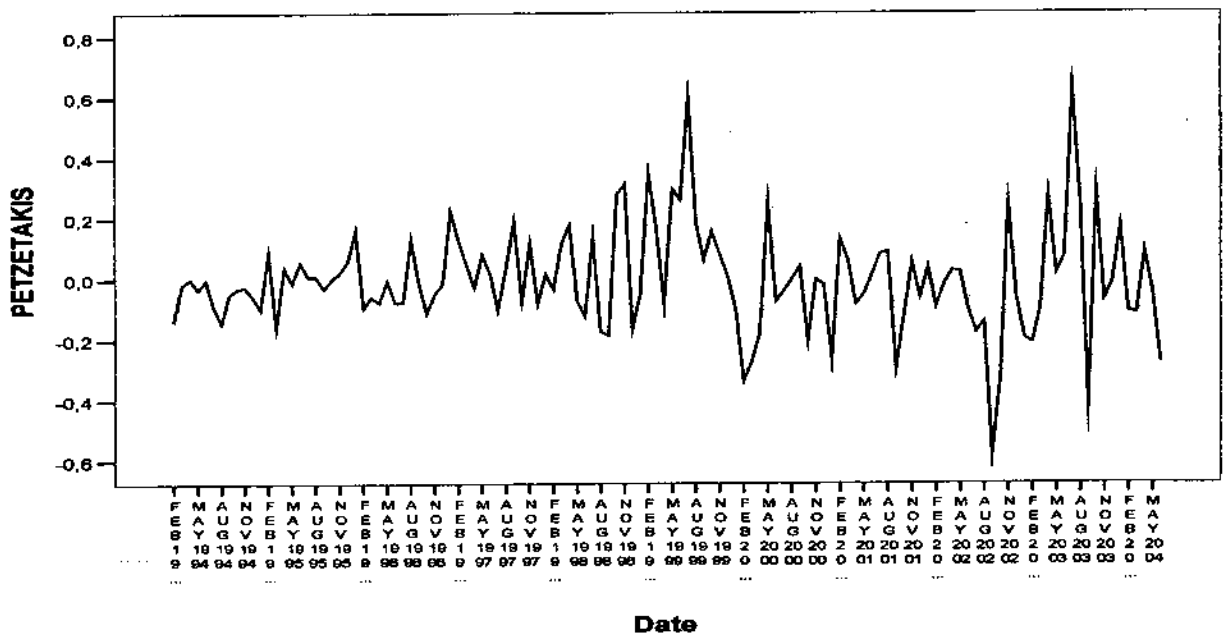
Από την εξέταση του διαγράμματος ACF, διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο δεν είναι στάσιμο, διότι φθίνει αργά, όπως φαίνεται και αναλυτικότερα στο παρακάτω σχήμα 3.3.a.1. Απορρέει, λοιπόν, το συμπέρασμα ότι το μοντέλο χρειάζεται διαφορίση:

PETZETAKIS



Διάγραμμα 3.3.a.1

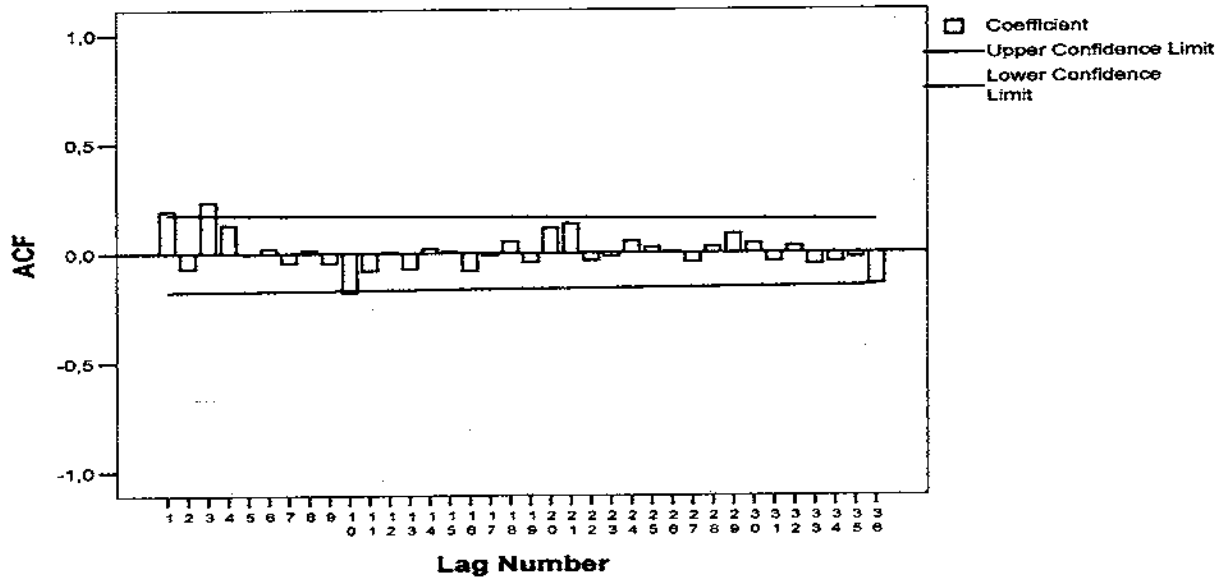
Μετά την πρώτη διαφορίση η μορφή της χρονοσειράς, το ACF και το PACF έχουν την παρακάτω μορφή:



Transforms: natural log, difference(1)

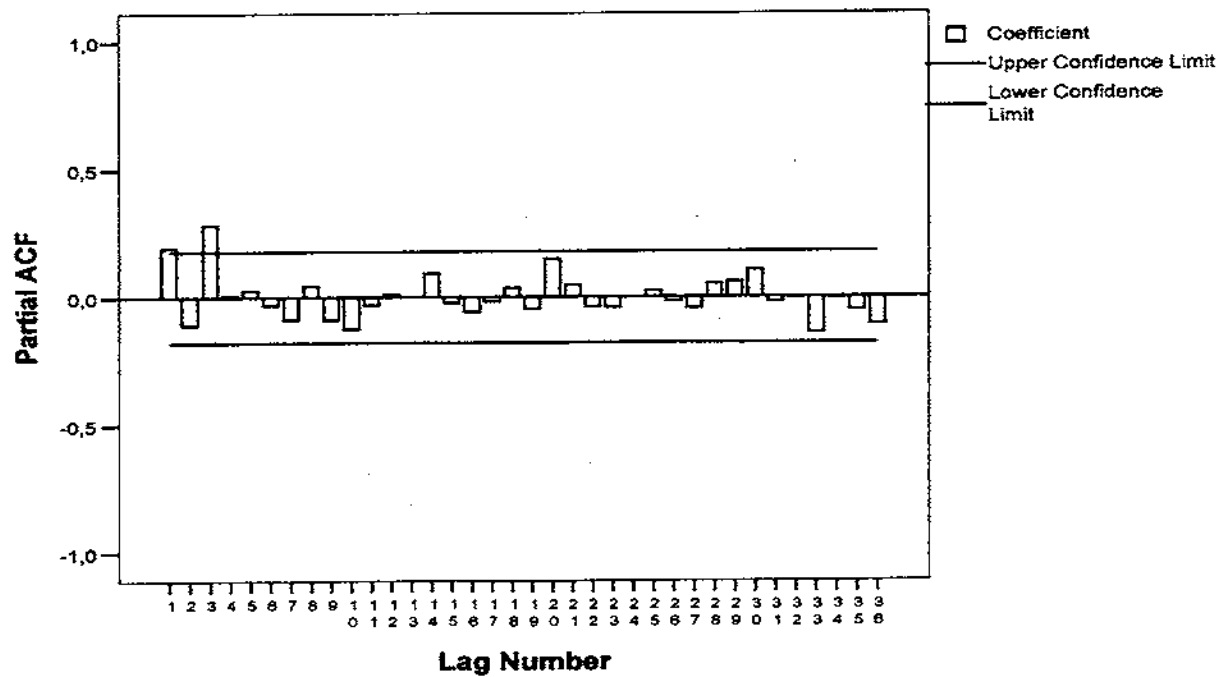
Διάγραμμα 3.3.a.2

Petzetakis



Διάγραμμα 3.3.a.3

Petzetakis

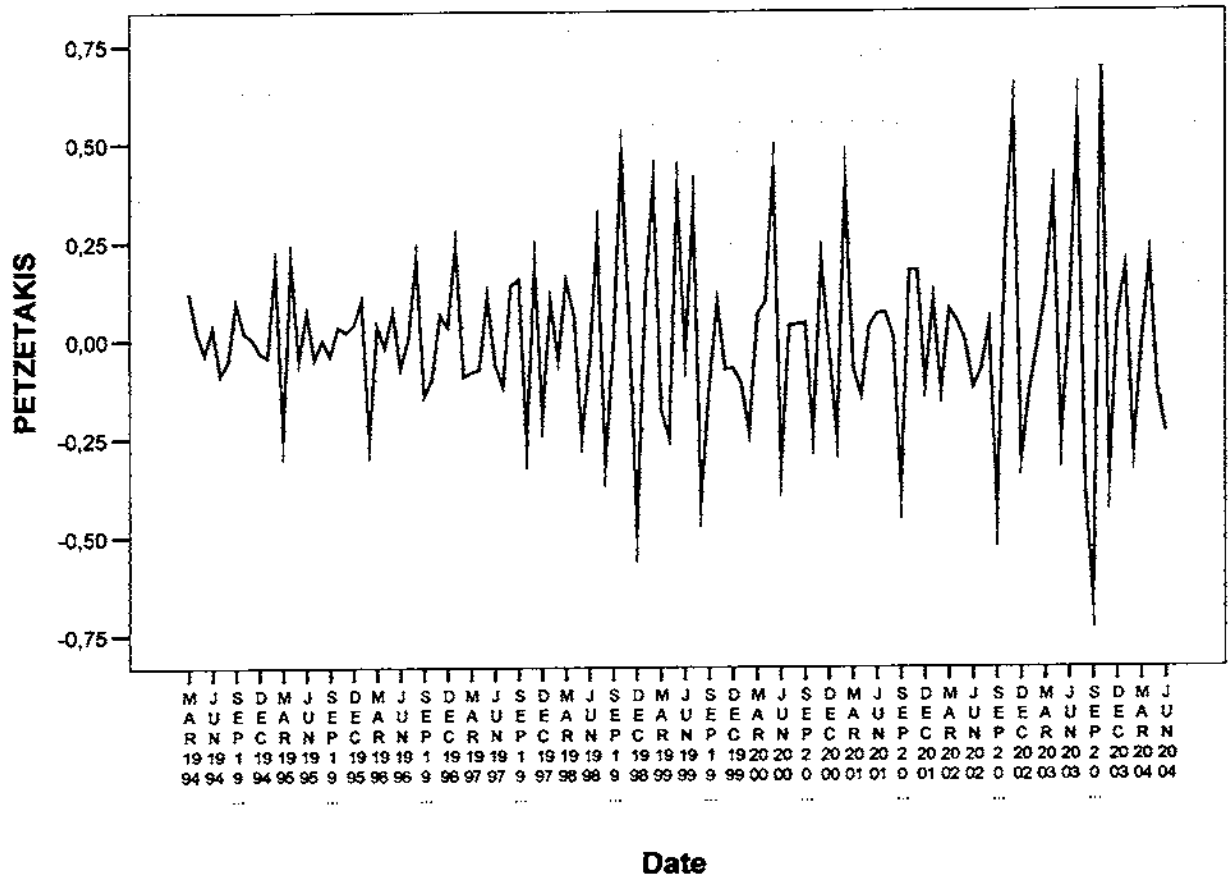


Διάγραμμα 3.3.a.4

Είναι φανερό ότι δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις της στασιμότητας, διότι το ACF δεν φθίνει γρήγορα. Για να επιτύχουμε τελικά στασιμότητα θα προχωρήσουμε σε δεύτερη διαφορίση.

Επίσης από την εξέταση του ACF φαίνεται ξεκάθαρα πως δεν υπάρχει εποχικότητα στο μοντέλο μας, μιας και δεν είναι όλες οι κρίσιμες παρατηρήσεις, δηλαδή οι 12, 24, 36, εκτός των ορίων των διαγραμμάτων. Και αναφερόμαστε στα νούμερα 12, 24, 36 διότι τα δεδομένα μας είναι μηνιαία και σε τέτοιες περιπτώσεις εποχικότητα εμφανίζεται κάθε χρόνο, δηλαδή κάθε 12 μήνες.

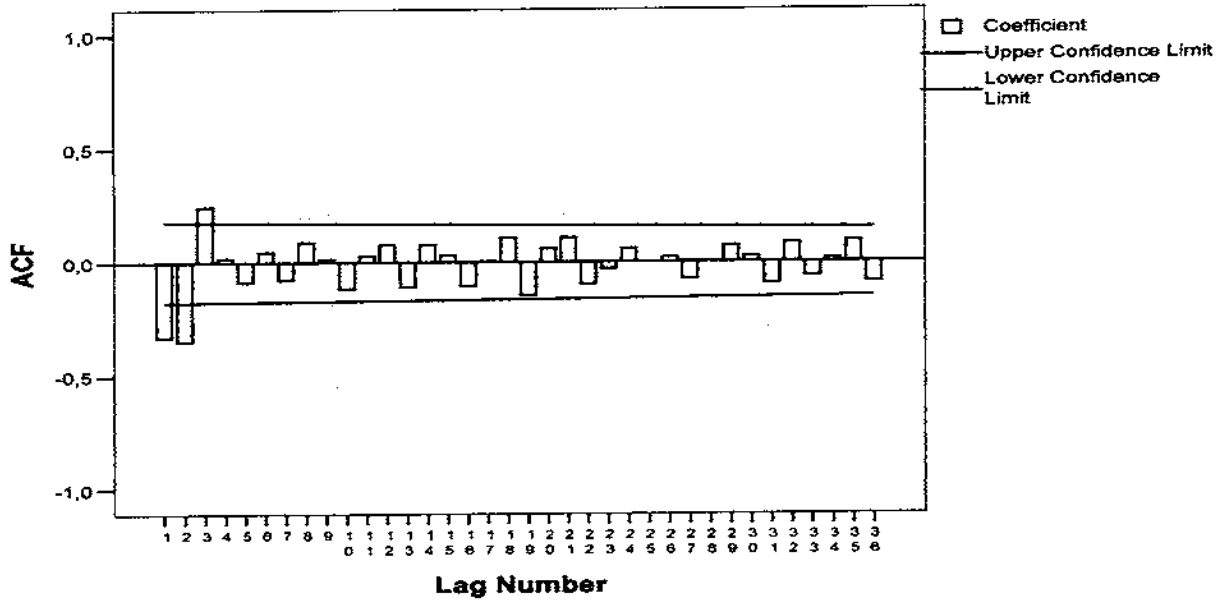
Εφαρμόζοντας την δεύτερη διαφορίση προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα:



Transforms: natural log, difference(2)

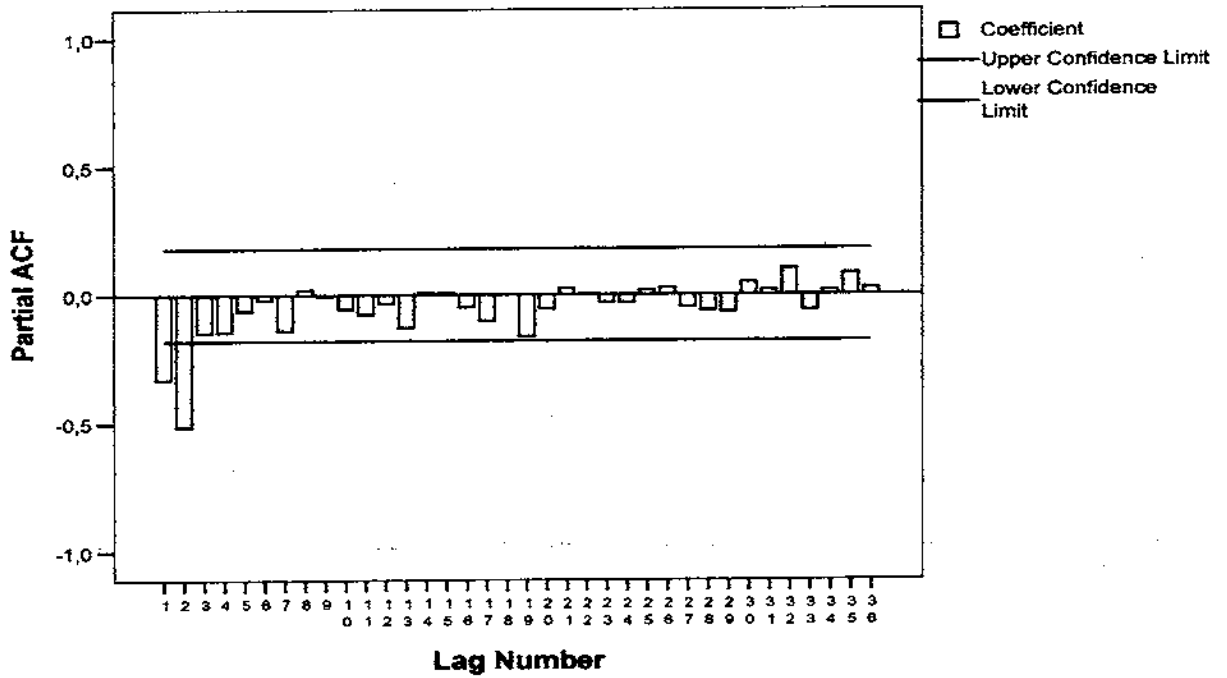
Διάγραμμα 3.3.a.5

PETZETAKIS



Διάγραμμα 3.3.α.6

PETZETAKIS



Διάγραμμα 3.3.α.7

Το συμπέρασμα μετά και την δεύτερη διαφόριση είναι ότι το μοντέλο αποκτά καλύτερη μορφή. Πλέον οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται εντός των ορίων, άρα θα μελετήσουμε το μοντέλο με $d = 2$. Στην συνέχεια θα γίνει ο προσδιορισμός των p και q .

3.4.a ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΩΝ p ΚΑΙ q ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ»

Αφού επιτεύχθηκε στασιμότητα στη χρονοσειρά μας, σειρά έχει ο υπολογισμός των p και q , από τα παραπάνω διαγράμματα ACF και PACF (Διάγραμμα 3.3.a.6 και Διάγραμμα 3.3.a.7) αντίστοιχα. Μέσω της εξέτασης του PACF διαγράμματος, καθορίζεται η τιμή του p , δηλαδή η τάξη του αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου. Διακρίνουμε ότι οι πρώτες δυο παρατηρήσεις είναι εκτός των ορίων, με αποτέλεσμα το $p = 2$.

Για τον καθορισμό της τιμής του q , η οποία είναι η τάξη του κινητού μέσου του μοντέλου, εξετάζεται το διάγραμμα ACF (Διάγραμμα 3.3.a.6). Εκτός ορίων είναι οι πρώτες τρεις παρατηρήσεις. Άρα και το $q = 3$.

Σημείωση: Διευκρινίζουμε ότι η τιμή του p , q εξαρτάται από τον αριθμό των πρώτων υστερήσεων, στα διαγράμματα ACF και PACF, που είναι εκτός των ορίων του διαστήματος εμπιστοσύνης.

Από τα παραπάνω προκύπτει το μοντέλο ARIMA (2,2,3).

3.5.a ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA (2,2,3) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ»

Στο στάδιο της εκτίμησης οι παράμετροι $\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ και η σταθερά έχουν εκτιμηθεί. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	5
Residual df	118
Adjusted Residual Sum of Squares	3,391
Residual Sum of Squares	3,610
Residual Variance	,028
Model Std. Error	,168
Log-Likelihood	47,173
Akaike's Information Criterion (AIC)	-82,345
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-65,424

Πίνακας 3.1

Parameter Estimates

		Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal Lags	AR1	-,976	,395	-2,472	,015
	AR2	-,525	,209	-2,513	,013
	MA1	-,269	,408	-,661	,510
	MA2	,577	,177	3,252	,001
	MA3	,518	,283	1,828	,070
Constant		8,21E-005	,001	,068	,946

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.2: Εκτίμηση του μοντέλου ARIMA(2,2,3).

$\hat{\phi}_1 = -0.976$ (0.395)	p.value = 0.015
$\hat{\phi}_2 = -0.525$ (0.209)	p.value = 0.13
$\hat{\theta}_1 = -0.269$ (0.408)	p.value = 0.51
$\hat{\theta}_2 = 0.577$ (0.177)	p.value = 0.001
$\hat{\theta}_3 = 0.518$ (0.283)	p.value = 0.07
$\hat{\alpha} = 8.21E-0.005$ (0.001)	p.value = 0.946

Οι ποσότητες εντός των παρενθέσεων είναι το τυπικό σφάλμα (Std. Error) της εκτίμησης των παραμέτρων. Η εκτίμηση του συντελεστή MA(1) είναι 0.51, ποσότητα μεγαλύτερη από το συντελεστή σημαντικότητας που είναι 0.05. Το γεγονός αυτό δηλώνει ότι οι παράμετροι που δεν πληρούν την παραπάνω προϋπόθεση πρέπει να αφαιρεθούν. Ξεκινάμε αφαιρώντας το συντελεστή με το μεγαλύτερο p.value. Άρα το νέο μοντέλο που θα εξετάσουμε είναι το ARIMA (2,2,2).

3.6.a ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA (2,2,2) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ»

Στο στάδιο αυτό οι παράμετροι που απομένουν έχουν εκτιμηθεί ξανά.

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	4
Residual df	119
Adjusted Residual Sum of Squares	3,460
Residual Sum of Squares	3,588
Residual Variance	,029
Model Std. Error	,169
Log-Likelihood	45,929
Akaike's Information Criterion (AIC)	-81,858
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-67,756

Πίνακας 3.3

Parameter Estimates

		Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal Lags	AR1	-,366	,258	-1,419	,159
	AR2	-,148	,130	-1,139	,257
	MA1	,328	,252	1,297	,197
	MA2	,492	,241	2,045	,043
Constant		,000	,002	,096	,924

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.4: Εκτίμηση του μοντέλου ARIMA(2,2,2).

$\hat{\phi}_1 = -0.366$ (0.258)	p.value = 0.159
$\hat{\phi}_2 = -0.148$ (0.130)	p.value = 0.57
$\hat{\theta}_1 = 0.328$ (0.252)	p.value = 0.197
$\hat{\theta}_2 = 0.492$ (0.241)	p.value = 0.043
$\hat{\alpha} = 0,000$ (0.002)	p.value = 0.924

Οι εκτιμήσεις των συντελεστών συνεχίζουν να μην είναι στατιστικά σημαντικές γιατί τα p.value είναι μεγαλύτερα του 0.05. Στην συνέχεια θα αφαιρέσουμε το συντελεστή του AR(2) και θα μελετήσουμε το ARIMA (1, 2, 2).

Μετά την αφαίρεση του προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	3
Residual df	120
Adjusted Residual Sum of Squares	3,457
Residual Sum of Squares	4,371
Residual Variance	,028
Model Std. Error	,167
Log-Likelihood	46,010
Akaike's Information Criterion (AIC)	-84,020
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-72,739

Πίνακας 3.5

Parameter Estimates

		Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal Lags	AR1	-,406	,217	-1,873	,063
	MA1	,306	,182	1,676	,096
	MA2	,680	,169	4,033	,000
Constant		,000	,001	-,285	,776

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.6: Εκτίμηση του μοντέλου ARIMA(1,2,2).

$$\hat{\phi}_1 = -0.406 (0.217) \quad p.\text{value} = 0.068$$

$$\hat{\theta}_2 = 0.306 (0.182) \quad p.\text{value} = 0.096$$

$$\hat{\theta}_1 = 0.68 (0.169) \quad p.\text{value} = 0.000$$

$$\hat{\alpha} = 0.000 (0.001) \quad p.\text{value} = 0.776$$

Είναι φανερό ότι χρειάζεται να αφαιρεθεί ακόμα ένας συντελεστής, ο MA(1). Άρα θα μελετήσουμε το μοντέλο ARIMA(1, 2, 1).

Στην συνέχεια προκύπτουν τα εξής :

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	2
Residual df	121
Adjusted Residual Sum of Squares	3,618
Residual Sum of Squares	5,552
Residual Variance	,029
Model Std. Error	,170
Log-Likelihood	43,187
Akaike's Information Criterion (AIC)	-80,375
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-71,914

Πίνακας 3.7

Parameter Estimates

		Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal	AR1	,216	,092	2,351	,020
Lags	MA1	,999	,461	2,168	,032
Constant		,000	,001	-,307	,759

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.7: Εκτίμηση του μοντέλου ARIMA(1,2,1) συμπεριλαμβανομένου της σταθεράς.

$\hat{\phi}_1 = 0.216$ (0.092) p.value = 0.02
 $\hat{\theta}_1 = 0.999$ (0.461) p.value = 0.032
 $\hat{\alpha} = 0.000$ (0.001) p.value = 0.752

Πλέον οι συντελεστές είναι στατιστικά σημαντικοί, παρόλα αυτά το p.value της σταθεράς εξακολουθεί να είναι μεγαλύτερο του 0.05. Το μοντέλο ARIMA στο οποίο τελικά καταλήγουμε είναι το ARIMA (1, 2, 1).

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	2
Residual df	122
Adjusted Residual Sum of Squares	3,620
Residual Sum of Squares	5,553
Residual Variance	,029
Model Std. Error	,169
Log-Likelihood	43,136
Akaike's Information Criterion (AIC)	-82,271
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-76,631

Πίνακας 3.8

Parameter Estimates

		Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal Lags	AR1	,211	,092	2,306	,023
	MA1	,999	,465	2,147	,034

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.9: Εκτίμηση μοντέλου ARIMA(1,2,1) μη συμπεριλαμβανομένης της σταθεράς.

$\hat{\phi}_1 = 0.211$ (0.092) p.value = 0.023
 $\hat{\theta}_1 = 0.999$ (0.465) p.value = 0.034

Τελικά η μορφή του μοντέλου ARIMA(1,2,1), μη συμπεριλαμβανομένης της σταθεράς, στο οποίο καταλήξαμε έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \phi_1(B)\nabla^2 Y_t &= \theta_1(B)e_t \\ \text{ή} & \\ (1-\phi_1 B)\nabla^2 Y_t &= (1-\theta_1 B)e_t \end{aligned} \quad (3.6.a.1)$$

Θέτοντας $\nabla^2 Y_t = W_t$, προκύπτει $(1-\phi_1 B)W_t = (1-\theta_1 B)e_t$, και εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε:

$$W_t - \phi_1 B W_t = e_t - \theta_1 e_t \quad (3.6.a.2)$$

Επίσης ισχύει $B W_t = W_{t-1}$. Άρα το μοντέλο διαμορφώνεται ως εξής:

$$W_t - \phi_1 W_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad (3.6.a.3)$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.9 έχουμε:

$$W_t - 0.211W_{t-1} = e_t - 0.999e_{t-1} \quad (3.6.a.4)$$

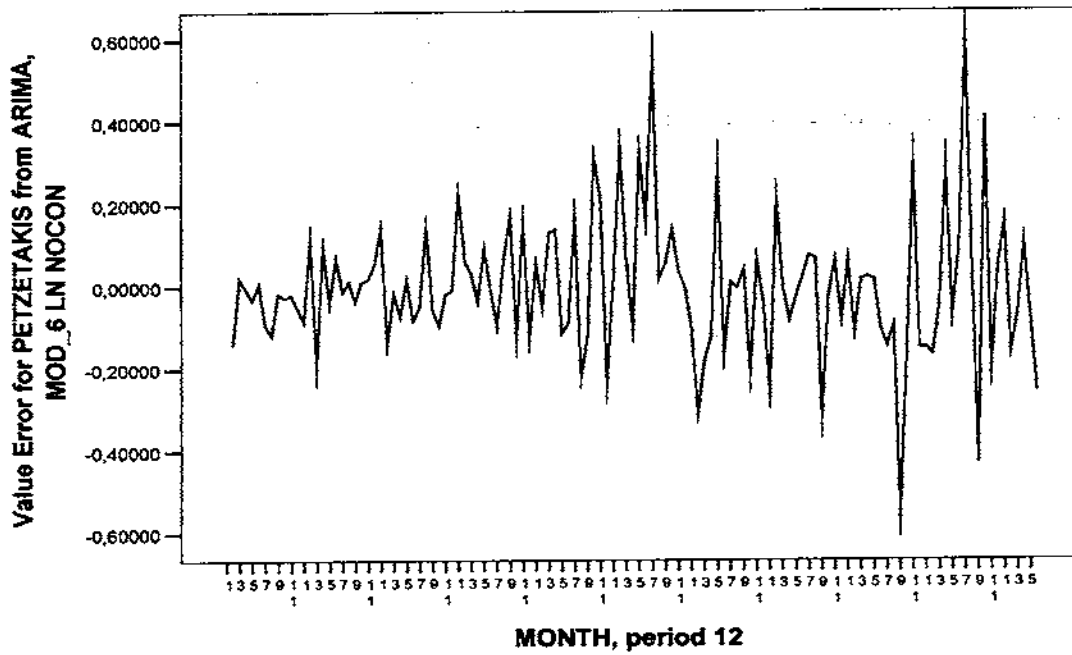
3.7.a ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA (1,2,1) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ»

Στην συνέχεια, καθώς ολοκληρώνουμε την έρευνά μας με την συγκεκριμένη μετοχή, εξετάζουμε τα κατάλοιπα. Ο διαγνωστικός έλεγχος των καταλοίπων και των αυτοσυσχετίσεων τους κρίνεται αναγκαίος για να διαπιστωθεί εάν κάποια παράμετρος πρέπει να αφαιρεθεί από το μοντέλο.

Για να καταλήξουμε στο τελικό μοντέλο, πρέπει τα κατάλοιπά του να έχουν μορφή «λευκού θορύβου», δηλαδή ο μέσος να κινείται γύρω από το 0, η διακύμανση να είναι σταθερή, η συνδιασπορά επίσης σταθερή και τέλος να μην υπάρχει κάποια αλληλεξάρτηση μεταξύ των παρατηρήσεων. Έτσι πρέπει να ανατρέξουμε στα κατάλληλα διαγράμματα, με τα οποία μπορεί να γίνει η διάγνωση.

Το διάγραμμα των καταλοίπων (Διάγραμμα 3.7.a.1) φανερώνει ότι η διαδικασία είναι στάσιμη επειδή υπάρχει μια κίνηση γύρω από τον οριζόντιο άξονα που ορίζει το μηδέν.

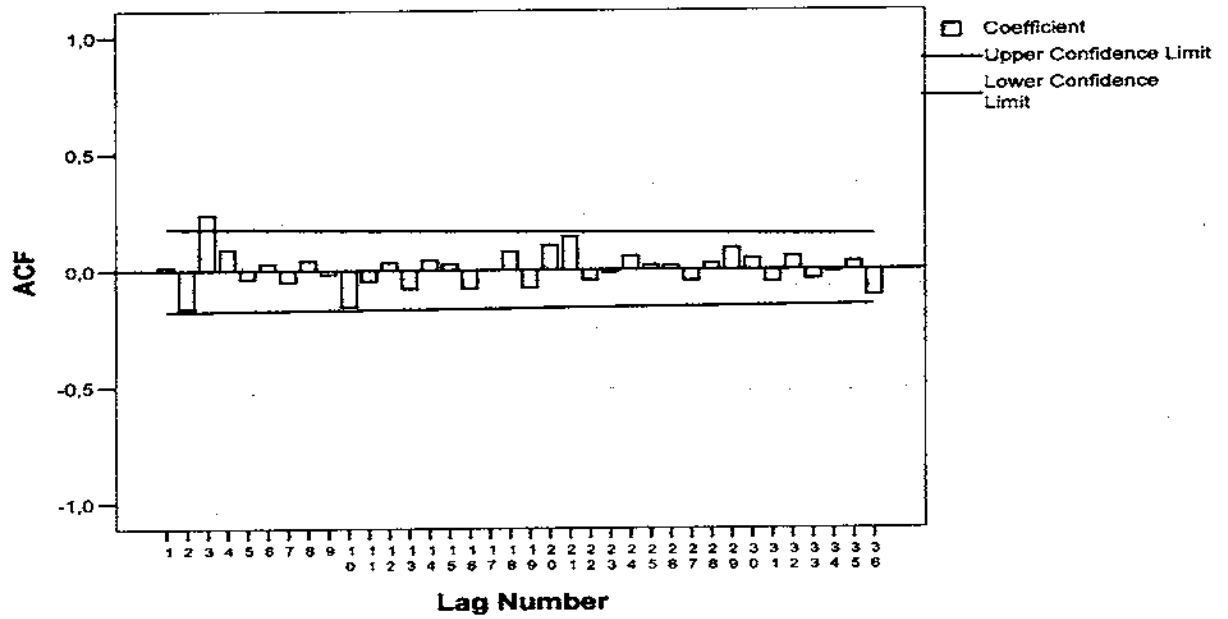
Value of Petzetakis during 1994 - 2004



Διάγραμμα 3.7.a.1

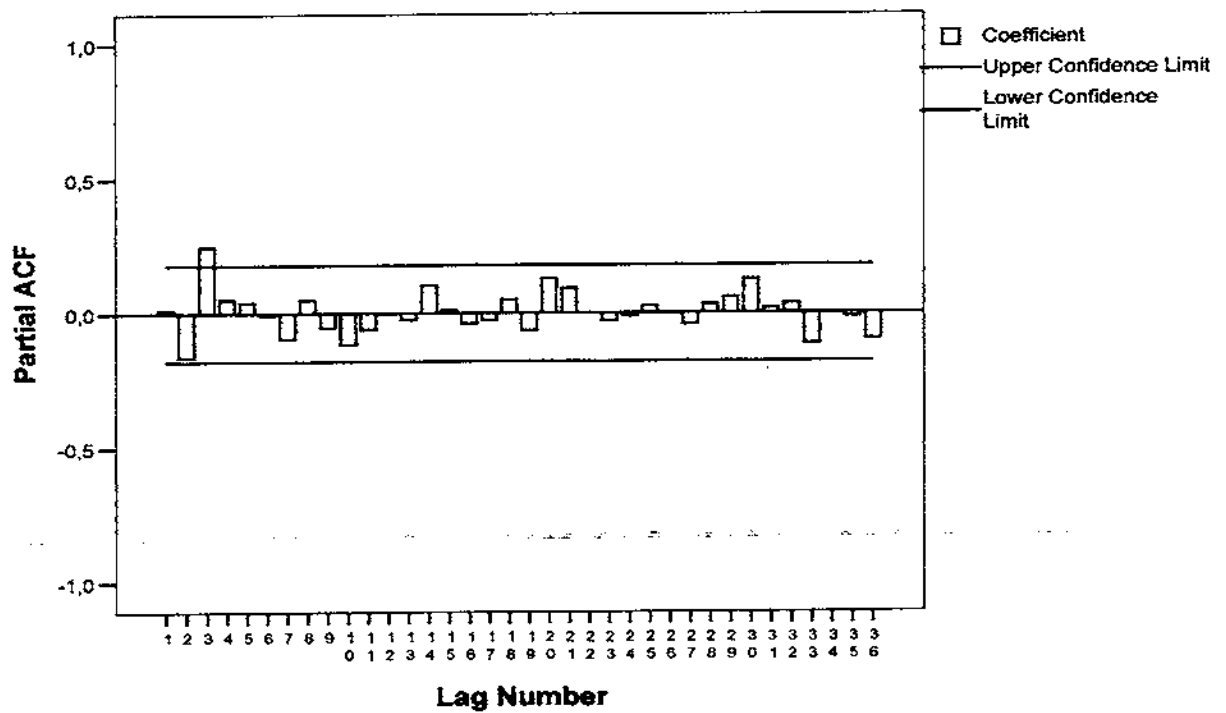
Παρατηρώντας παρακάτω το ACF (Διάγραμμα 3.7.a.2), είναι φανερό οι πρώτες παρατηρήσεις φθίνουν γρήγορα.

Error for PETZETAKIS from ARIMA, MOD_10 LN NOCON



Διάγραμμα 3.7.α.2

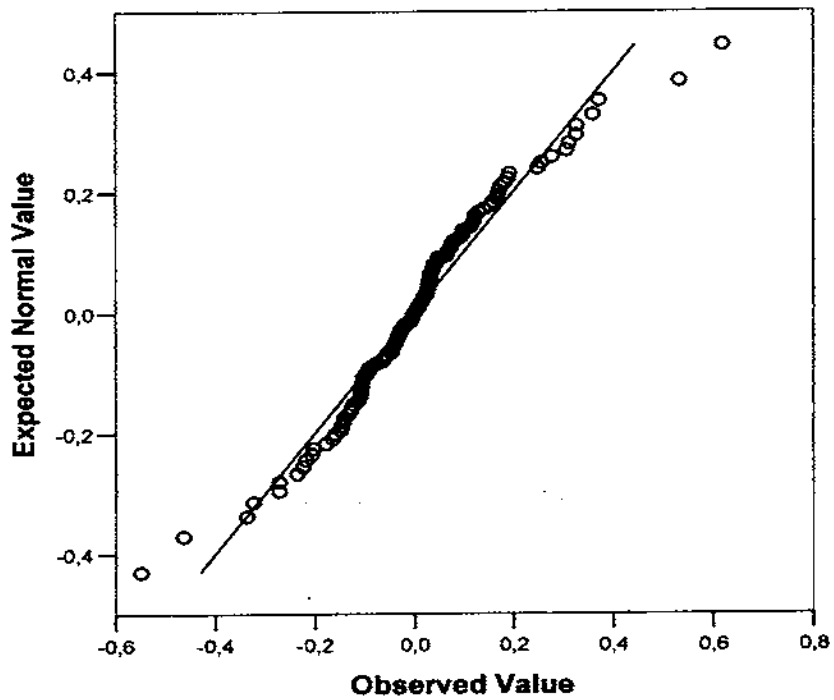
Error for PETZETAKIS from ARIMA, MOD_10 LN NOCON



Διάγραμμα 3.7.α.3

Επιπρόσθετα το διάγραμμα Q-Q Plot (Διάγραμμα 3.7.a.4) επαληθεύει ότι τα κατάλοιπα είναι κανονικά κατανεμημένα και βρίσκονται κοντά στην διαγώνιο.

Normal Q-Q Plot of Error for PETZETAKIS from ARIMA, MOD_10 LN NOCON



Διάγραμμα 3.7.a.4

3.8.a. ΠΡΟΒΛΕΨΗ (FORECASTING)

Από την ανάλυση που προηγήθηκε συμπεραίνουμε ότι το καλύτερο μοντέλο είναι το παρακάτω:

$$W_t - 0.211W_{t-1} = e_t - 0.999e_{t-1} \quad (3.8.a.1)$$

Μπορεί επαρκώς να αντιπροσωπεύσει την χρονοσειρά.

Έχοντας επιλέξει το πλέον κατάλληλο μοντέλο, επόμενο βήμα αποτελεί η πρόβλεψη. Ο ακόλουθος Πίνακας 3.10 περιέχει τις προβλέψεις από τον Ιούλιο του 2004 έως τον Ιούνιο του 2005.

ΠΕΡΙΟΔΟΣ	fit	lcl	ucl
JUL 2004	1,72680	1,23360	2,41719
AUG 2004	1,69719	,99865	2,88435
SEP 2004	1,68443	,85197	3,33032
OCT 2004	1,67522	,74639	3,75993
NOV 2004	1,66679	,66438	4,18162
DEC 2004	1,65855	,59775	4,60190
JAN 2005	1,65038	,54201	5,02531
FEB 2005	1,64226	,49442	5,45499
MAR 2005	1,63418	,45315	5,89329
APR 2005	1,62615	,41696	6,34204
MAY 2005	1,61815	,38490	6,80274
JUN 2005	1,61019	,35630	7,27669

Πίνακας 3.10: Πρόβλεψη για την περίοδο Ιούλιο 2004 έως Ιούνιο 2005.

Μελλοντικά η διαδικασία της πρόβλεψης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα διαγνωστικό εργαλείο για να δείξει την επάρκεια του μοντέλου.

3.9.a ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Καταλήγοντας στο μοντέλο (3.8.a.1) συμπεραίνουμε ότι κάναμε μία αξιόλογη πρόβλεψη διότι πλέον πληρούνται όλες οι απαραίτητες προϋποθέσεις για την πρόβλεψη αυτή.

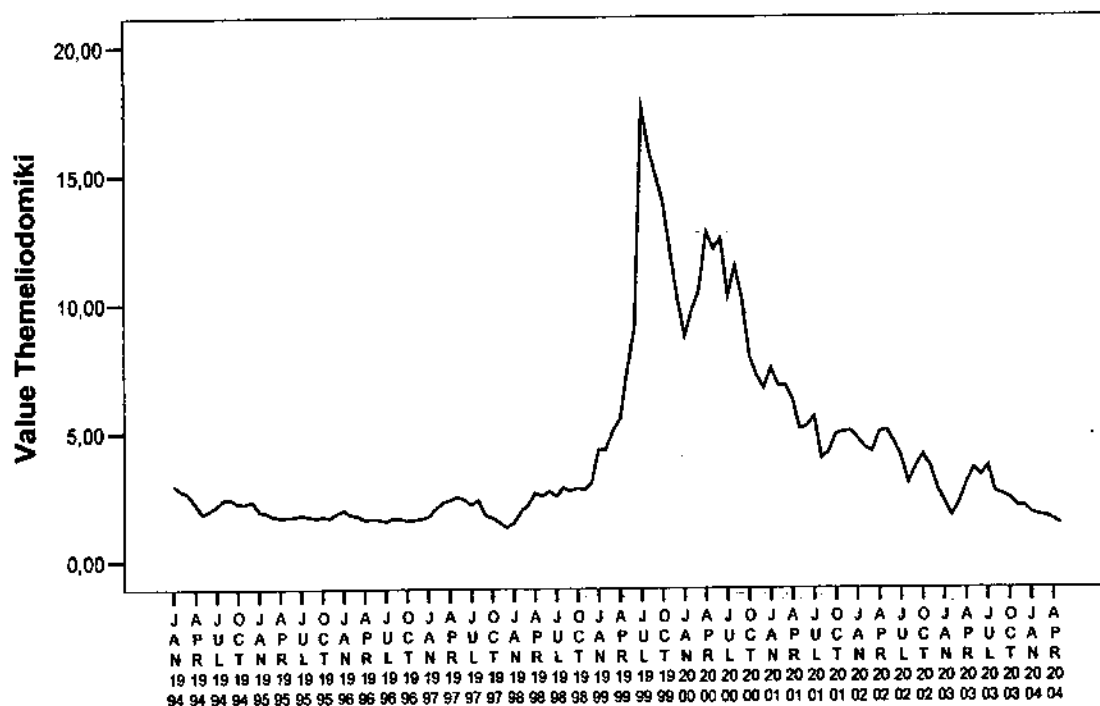
Το μοντέλο το οποίο τελικά προσαρμόσαμε για να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα είναι το ARIMA (1,2,1). Σε αυτό επεξεργαστήκαμε ιστορικές τιμές της μετοχής Πετζετάκις και καταλήξαμε στην πρόβλεψη τιμών για χρονικό διάστημα ενός έτους. Κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου που μελετήσαμε είναι ότι έχει διαφοριστεί δύο φορές, για να καταστεί στάσιμο.

Παρατηρείται ότι οι προβλεπόμενες τιμές είναι ανάλογες των ιστορικών, δηλαδή βαίνουν με μειούμενο ρυθμό. Για τον δυνητικό επενδυτή αυτό σημαίνει ότι η επένδυση στην μετοχή κρίνεται επισφαλής.

3.10.b ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ»

Εξετάζοντας την πορεία της μετοχής «Θεμελιοδομική» κατά την περίοδο 1994 έως 2004, παρατηρούμε ότι ακολουθεί σχεδόν την ίδια πορεία με αυτή της μετοχής «Πετζετάκις». Από το 1994 έως 1998 η πορεία είναι ομαλή, από το 1999 και έως το 2000 παρατηρείται μεγάλη ανοδική πορεία, η οποία σταδιακά έως το 2003 διορθώνεται και συνεχίζει μια «ομαλότερη» πορεία έως το έτος 2004. Τα παραπάνω γίνονται φανερά στο διάγραμμα 3.9.b.1:

Value of Themeliodomiki during 1994 - 2004

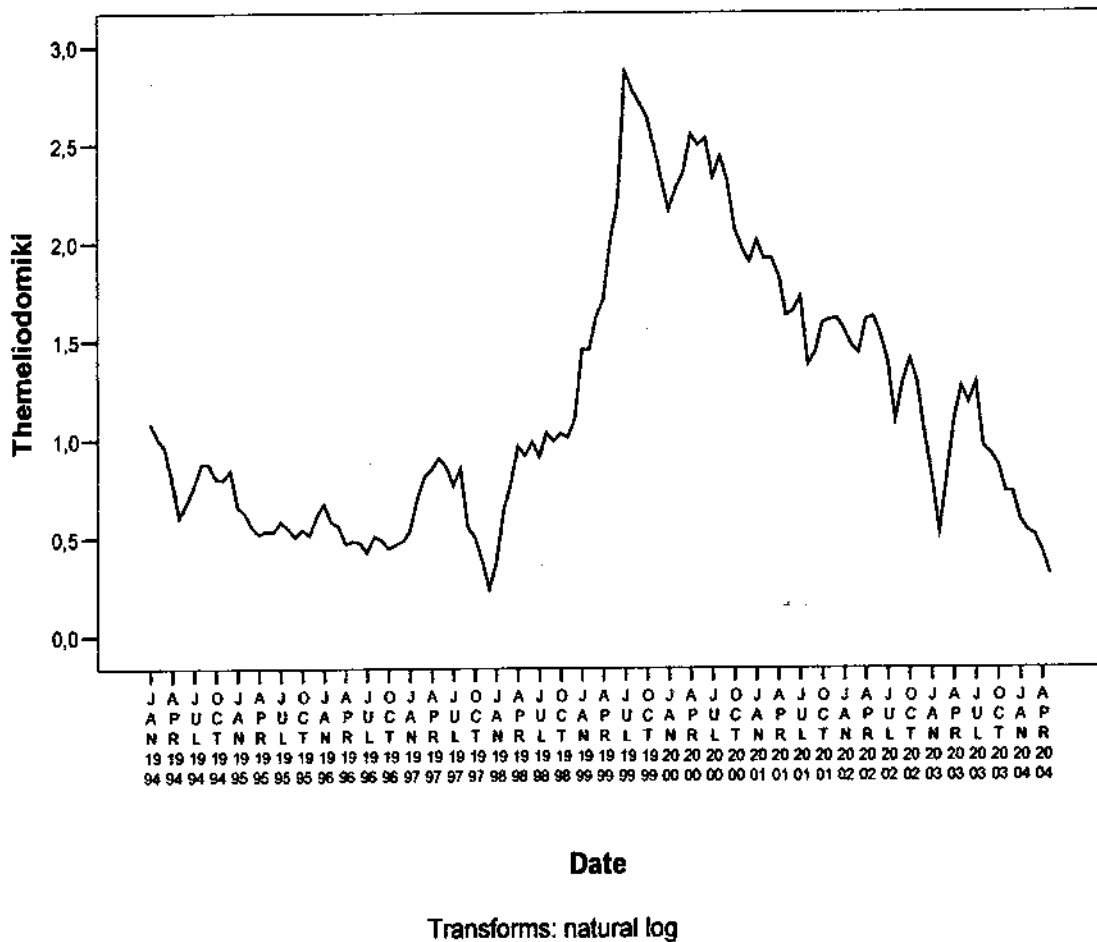


Date. Format: "MMM YYYY"

Διάγραμμα 3.10.b.1

Εξετάζοντας το διάγραμμα 3.10.b.1 το μοντέλο εμφανίζει μεγάλη διακύμανση (ανοίγματα), γεγονός που όπως έχει προαναφερθεί διορθώνεται με την μέθοδο του λογάριθμου.

Λογαριθμίζοντας τα δεδομένα προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα 3.10.b.2, το οποίο βελτιώνει κάπως τα ανοίγματα.

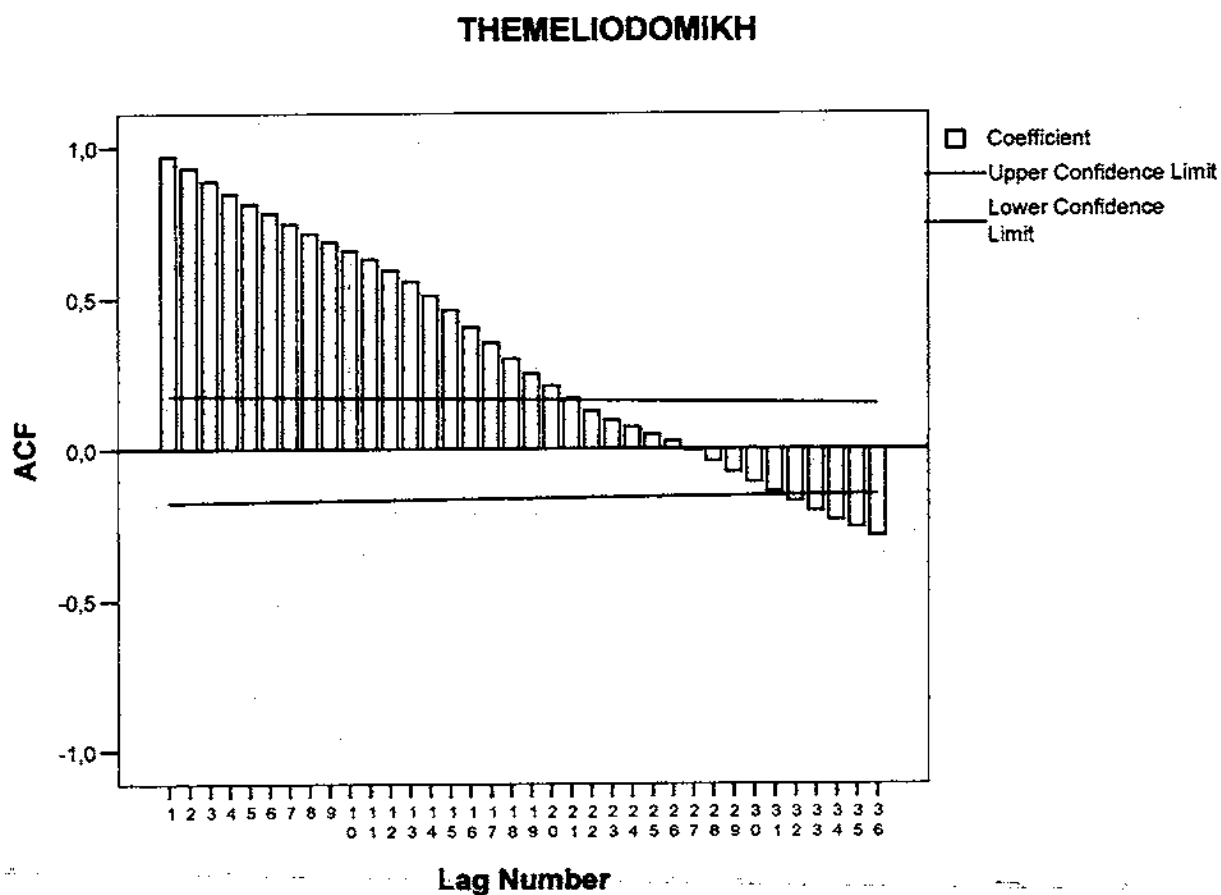


Διάγραμμα 3.10.b.2

3.11.β ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ»

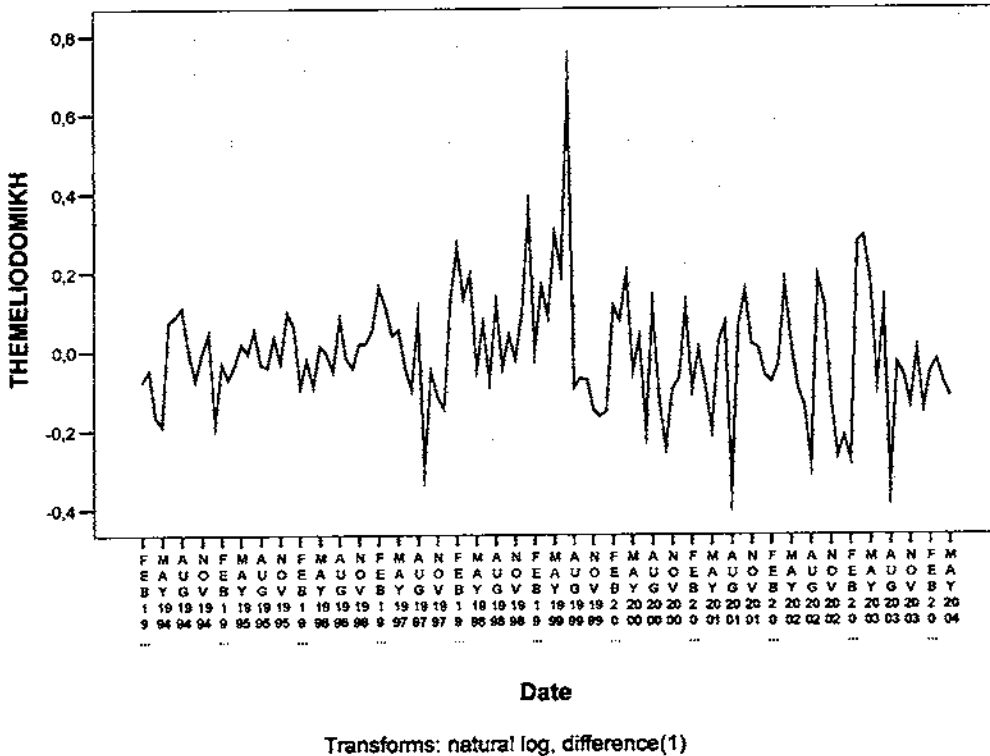
Επόμενο βήμα αποτελεί ο έλεγχος της στασιμότητας. Έχουμε καταλήξει στο λογαριθμημένο μοντέλο.

Εξετάζοντας το διαγράμμα ACF βλέπουμε ότι το μοντέλο δεν είναι στάσιμο γιατί φθίνει αργά.



Διάγραμμα 3.11.β.1

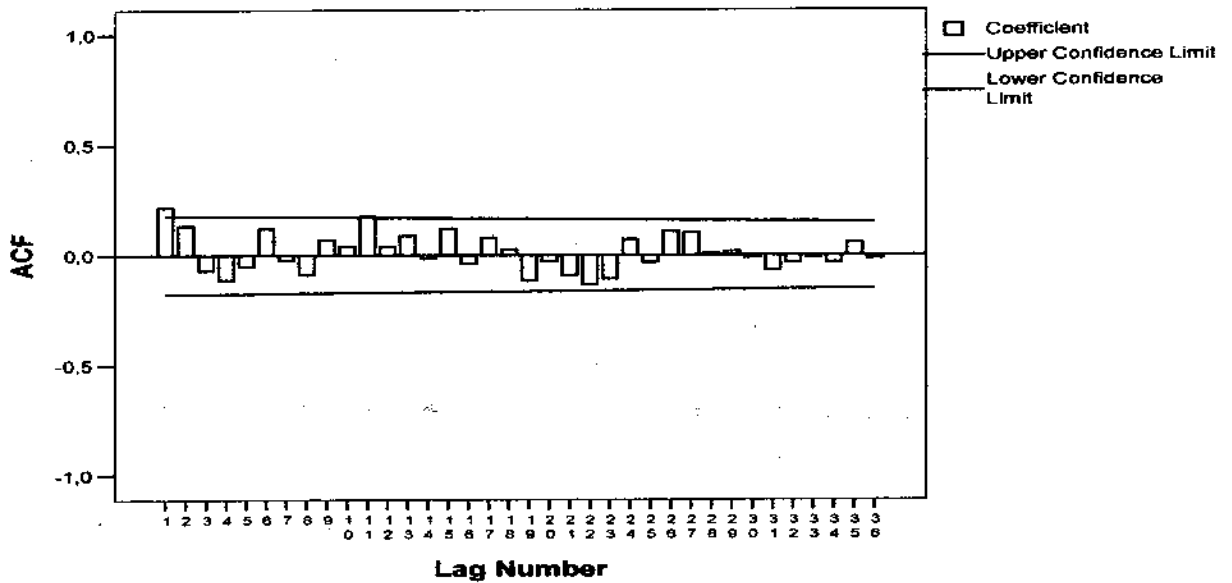
Μετά την πρώτη διαφορίση παρατηρούμε ότι το μοντέλο γίνεται στάσιμο γιατί οι πρώτες παρατηρήσεις φθίνουν γρήγορα.



Διάγραμμα 3.11.b.2

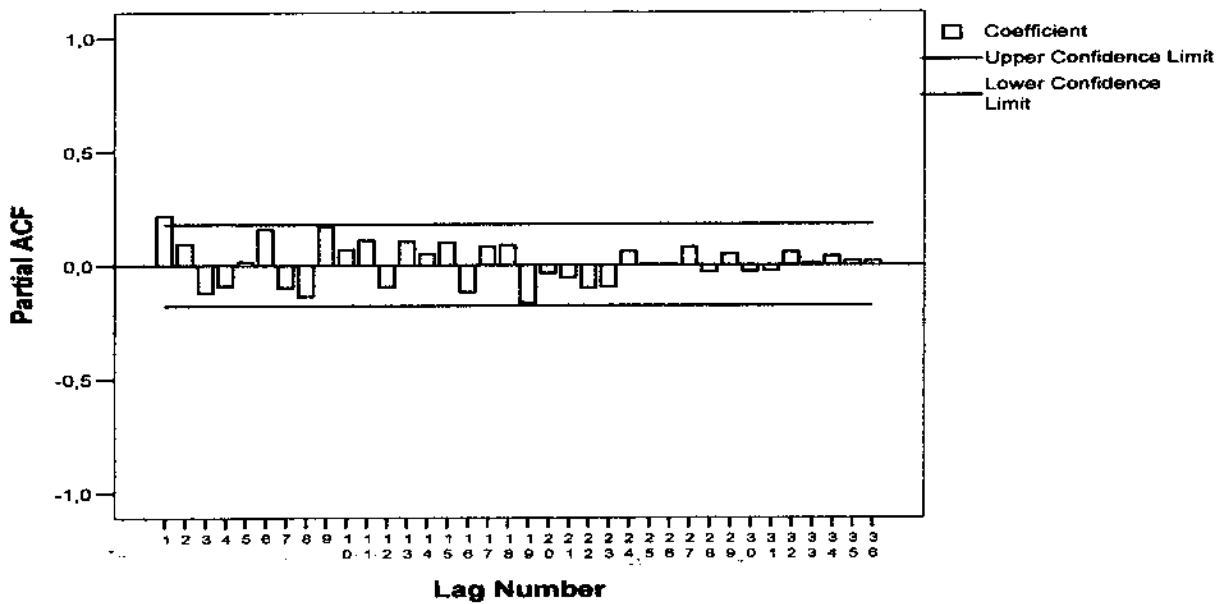
Μία ακόμη ένδειξη ότι το μοντέλο είναι στάσιμο αποτελεί η πορεία του ACF διαγράμματος (Διάγραμμα 3.11.b.3). Οι παρατηρήσεις φθίνουν γρήγορα και κινούνται κοντά στο μέσο.

THEMELIODOMIKH



Διάγραμμα 3.11.b.3

Themellodomiki



Διάγραμμα 3.11.b.4

Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι δεν παρατηρείται εποχικότητα. Στην συνέχεια θα προσδιοριστούν τα p, q .

3.12.b ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΩΝ p ΚΑΙ q ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ»

Αφού επιτεύχθηκε στασιμότητα στη χρονοσειρά μας, σειρά έχει ο υπολογισμός των p , q από τα παραπάνω διαγράμματα ACF και PACF αντίστοιχα. Εξετάζοντας το ACF (Διάγραμμα 3.11.b.3), παρατηρούμε πως η πρώτη παρατήρηση είναι εκτός ορίων, με αποτέλεσμα το q να ισούται με 1 ($q=1$). Ομοίως στο διάγραμμα PACF, εκτός ορίων είναι και πάλι η πρώτη παρατήρηση. Άρα και το p ισούται με 1 ($p = 1$).

Τελικά το μοντέλο που θα εξεταστεί θα έχει την μορφή ARIMA (1,1,1).

3.13.b ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA (1,1,1) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ»

Το μοντέλο που έχει προκύψει έχει την παρακάτω μορφή:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)Z_t = (1 - \theta_1 B)e_t \quad (3.13.b.1)$$

Οι παράμετροι ϕ_1 , θ_1 και η σταθερά έχουν εκτιμηθεί. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	2
Residual df	121
Adjusted Residual Sum of Squares	2,473
Residual Sum of Squares	2,493
Residual Variance	,020
Model Std. Error	,143
Log-Likelihood	66,762
Akaike's Information Criterion (AIC)	-127,524
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-119,063

Πίνακας 3.11

Parameter Estimates

	Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal Lags				
AR1	,387	,367	1,054	,294
MA1	,174	,392	,443	,659
Constant	-,007	,017	-,398	,692

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.12: Εκτίμηση μοντέλου ARIMA(1,1,1).

$\hat{\phi}_1 = 0.387$ (0.367)	p.value = 0.294
$\hat{\theta}_1 = 0.174$ (0.392)	p.value = 0.659
$\hat{\alpha} = -0.007$ (0.017)	p.value = 0.692

Παρατηρώντας τις εκτιμήσεις των σφαλμάτων βλέπουμε ότι και το AR και το MA αλλά και η σταθερά δεν είναι στατιστικά σημαντικά. Στην περίπτωση αυτή ξεκινάμε αφαιρώντας τη μεταβλητή με το μεγαλύτερο p.value, δηλαδή το MA.

Έτσι το νέο μοντέλο που θα εξετάσουμε, θα είναι το ARIMA (1,1,0).

3.14.b ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA (1,1,0) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ»

Στην φάση αυτή έχουν εκτιμηθεί ξανά το ϕ_1 και η σταθερά.

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	1
Residual df	122
Adjusted Residual Sum of Squares	2,482
Residual Sum of Squares	2,482
Residual Variance	,020
Model Std. Error	,143
Log-Likelihood	66,541
Akaike's Information Criterion (AIC)	-129,082
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-123,441

Πίνακας 3.13

Parameter Estimates

	Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal AR1 Lags	,217	,089	2,456	,015
Constant	-,007	,016	-,409	,683

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.14: Εκτίμηση μοντέλου ARIMA(1,1,0)

$$\hat{\phi}_1 = 0.217 (0.089) \quad p.\text{value} = 0.015$$

$$\hat{\alpha} = -0.007 (0.016) \quad p.\text{value} = 0.683$$

Το $\hat{\phi}_1$ είναι πλέον στατιστικά σημαντικό, εφόσον το 0.015 είναι μικρότερο από 0.05. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την σταθερά, η οποία εξακολουθεί να είναι στατιστικά μη σημαντική. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, στην συνέχεια θα αφαιρέσουμε την σταθερά.

Μετά την αφαίρεση της προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Residual Diagnostics

Number of Residuals	124
Number of Parameters	1
Residual df	123
Adjusted Residual Sum of Squares	2,485
Residual Sum of Squares	2,485
Residual Variance	,020
Model Std. Error	,142
Log-Likelihood	66,462
Akaike's Information Criterion (AIC)	-130,924
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	-128,104

Πίνακας 3.15

Parameter Estimates

	Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal AR1 Lags	,219	,088	2,479	,015

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 3.16: Εκτίμηση μοντέλου ARIMA(1,1,0)

μη συμπεριλαμβανομένης της σταθεράς.

$$\hat{\phi}_1 = 0.219 (0.088) \quad \text{p.value} = 0.015$$

Το μοντέλο το οποίο προέκυψε και αποτελεί την καλύτερη και πιο αξιόπιστη επιλογή είναι το ARIMA(1,1,0) μη συμπεριλαμβανομένης της σταθεράς. Η μορφή του είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} (1 - \phi B) \nabla Z_t &= e_t \\ \text{ή} & \\ (1 - \phi B)(1 - B)Z_t &= e_t \end{aligned} \quad (3.14.b.1)$$

Θέτοντας $\nabla Z_t = A_t$ εξάγεται το εξής $(1 - \phi B)A_t = e_t$ και εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα προκύπτει:

$$A_t - \phi B A_t = e_t \quad (3.14.b.2)$$

Ακόμα ισχύει $B A_t = A_{t-1}$. Άρα:

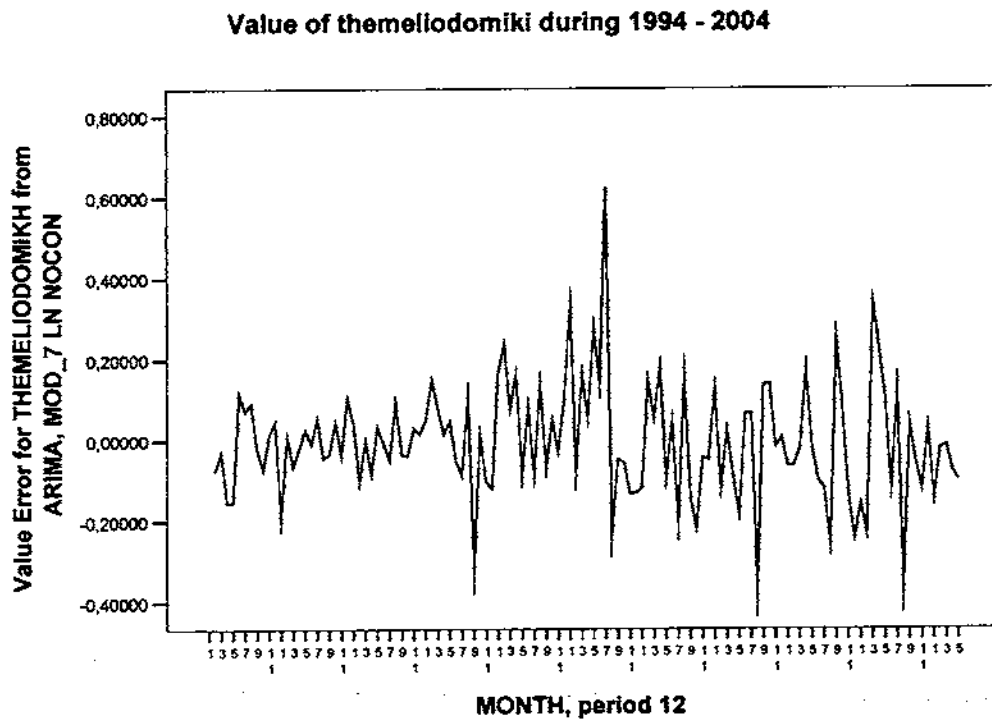
$$A_t - \phi A_{t-1} = e_t \quad (3.14.b.3)$$

Τελικά από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.16 έχουμε:

$$A_t - 0.219 A_{t-1} = e_t \quad (3.14.b.4)$$

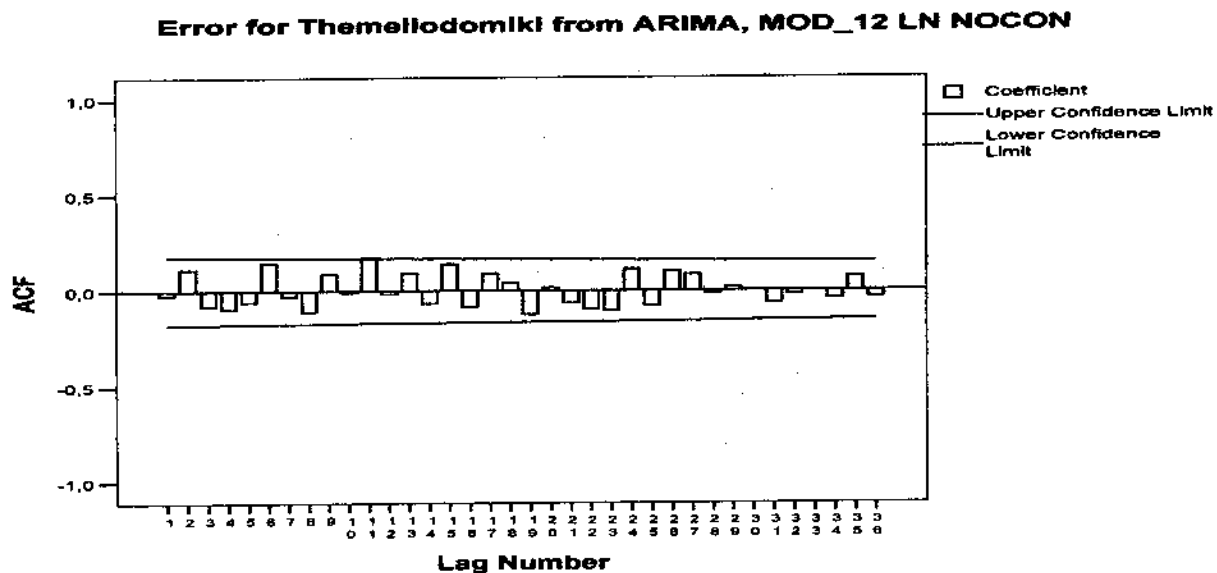
3.15.b ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA (1,1,0) ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ «ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ»

Τελειώνοντας την ανάλυση της μετοχής απομένει να εξεταστούν τα κατάλοιπα. Για να οριστεί με επάρκεια το τελικό μοντέλο, πρέπει τα κατάλοιπά του να είναι «λευκός θόρυβος». Μελετώντας το διάγραμμα των καταλοίπων (Διάγραμμα 3.15.b.1) βλέπουμε ότι η διαδικασία είναι στάσιμη επειδή υπάρχει μια κίνηση γύρω από το τον οριζόντιο άξονα που ορίζει το μηδέν.

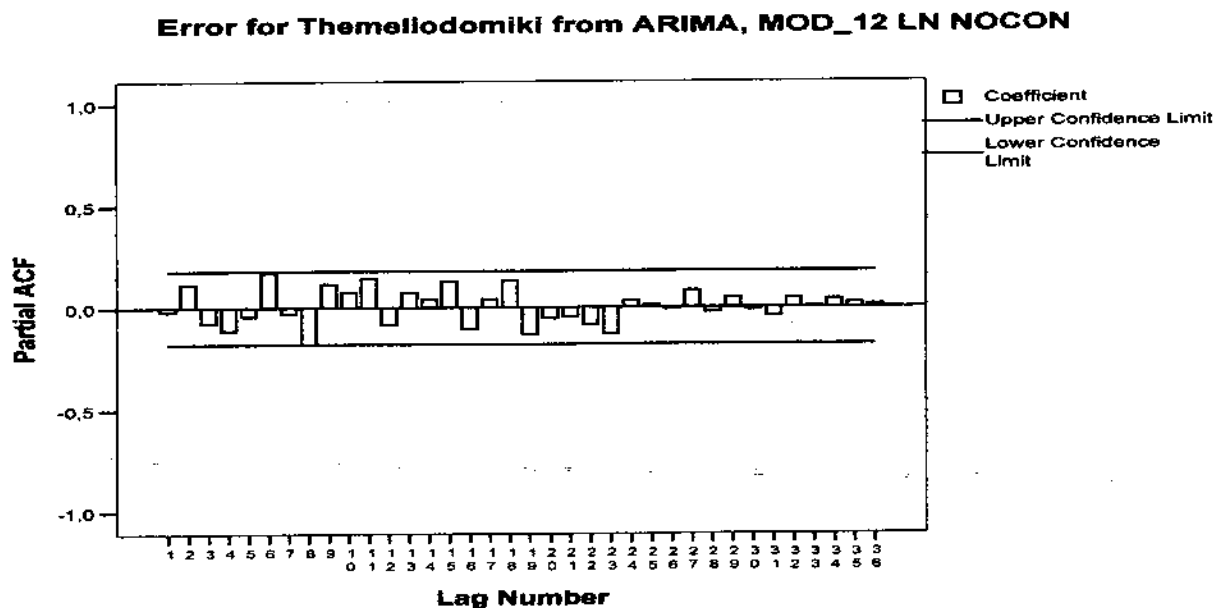


Διάγραμμα 3.15.b.1

Παρακολουθώντας την πορεία των καταλοίπων στα διαγράμματα που ακολουθούν, είναι φανερό ότι οι πρώτες παρατηρήσεις του ACF φθίνουν γρήγορα.



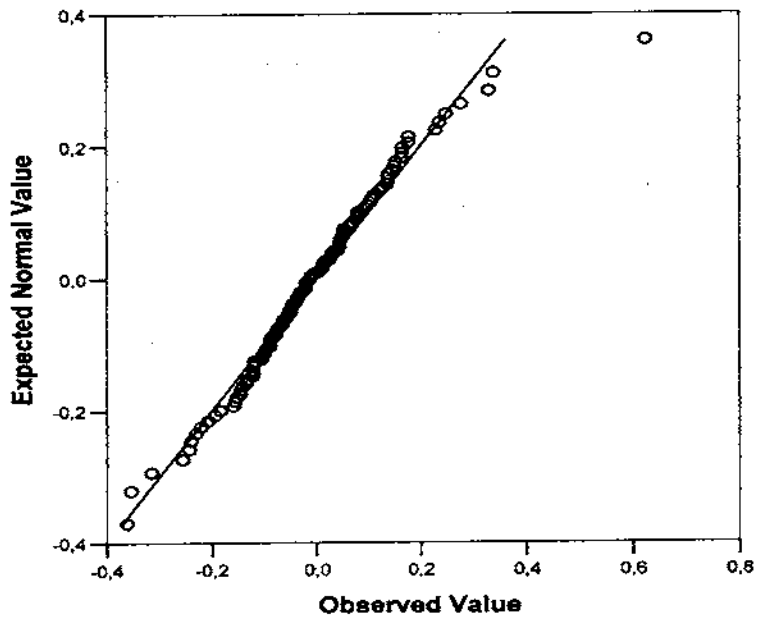
Διάγραμμα 3.15.b.2



Διάγραμμα 3.15.b.3

Τέλος το διάγραμμα Q-Q Plot επαληθεύει ότι τα κατάλοιπα είναι κανονικά κατανεμημένα και βρίσκονται κοντά στην διαγώνιο.

Normal Q-Q Plot of Error for Themeliodomiki from ARIMA, MOD_12 LN NOCON



Διάγραμμα 3.15.b.4

3.16.b ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Έχοντας προβεί στην παραπάνω ανάλυση, καταλήγουμε ότι το καλύτερο μοντέλο είναι αυτό που ακολουθεί:

$$A_t - 0.219A_{t-1} = e_t \quad (3.16.b.1)$$

Επόμενο βήμα αποτελεί η πρόβλεψη. Ο παρακάτω Πίνακας 3.14 περιέχει τις προβλέψεις από τον Ιούνιο του 2004 έως τον Μάιο του 2005.

ΠΕΡΙΟΔΟΣ	fit	lcl	ucl
JUN 2004	1,32543	1,00042	1,75603
JUL 2004	1,31799	0,8459	2,05356
AUG 2004	1,31637	0,74531	2,32499
SEP 2004	1,31602	0,67157	2,5789
OCT 2004	1,31594	0,61362	2,82213
NOV 2004	1,31592	0,56606	3,05915
DEC 2004	1,31592	0,52589	3,29281
JAN 2005	1,31592	0,49125	3,52494
FEB 2005	1,31592	0,46093	3,75682
MAR 2005	1,31592	0,43407	3,98936
APR 2005	1,31592	0,41003	4,22322
MAY 2005	1,31592	0,38835	4,45893

**Πίνακας 3.14: Πρόβλεψη για την περίοδο
Ιούνιο 2004 έως Μάιο 2005**

Σύμφωνα με την πρόβλεψη η μετοχή «Θεμελιοδομική» αναμένεται να κινηθεί μέσα στον επόμενο χρόνο σε επίπεδα της τάξης των 1,31 μονάδων. Μετά τον Νοέμβριο του 2004 η μετοχή δείχνει σημάδια σταθερότητας.

3.17.b ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπερασματικά αξίζει να αναφερθεί ότι με την επιλογή του μοντέλου ARIMA (1,1,0) που περιγράφεται από την εξίσωση $A_t - 0.219A_{t-1} = e_t$, επιτυγχάνεται η προσαρμογή του καταλληλότερου μοντέλου. Συγκεκριμένα, το μοντέλο έχει την μορφή AR(1), δηλαδή είναι πρώτης τάξης, επίσης έχει διαφοριστεί μία φορά ώστε η χρονοσειρά να γίνει στάσιμη.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές που έχουν προβλεφθεί στον Πίνακα 3.14 μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η περίοδος Ιούλιος 2004 έως Οκτώβριο 2004 είναι για τον επενδυτή ένα διάστημα κατά το οποίο υπάρχει πιθανότητα να μειωθούν τα κέρδη των επενδύσεων του ενώ το υπόλοιπο διάστημα, από τον Νοέμβριο 2004 έως τον Μάιο του 2005, οι αποδόσεις των κερδών του αναμένεται να κυμαίνονται σε σταθερά επίπεδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΠΟΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μετά την αναφορά στην προσαρμογή των απλών μοντέλων, ακολουθεί η ανάλυση του εποχικού μοντέλου.

Το μοντέλο μας είναι σύνθετο κι έχει τη μορφή SARIMA $(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$. Η γενική μορφή του μοντέλου, όπως έχει αναφερθεί ξανά, παρουσιάζεται με την παρακάτω μορφή:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)W_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)e_t \quad (4.1.1)$$

Επιπρόσθετα ισχύει $W_t = \nabla^d \nabla_s^D X_t$. Άρα έχει την δυνατότητα να διαμορφωθεί και ως εξής:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)e_t \quad (4.1.2)$$

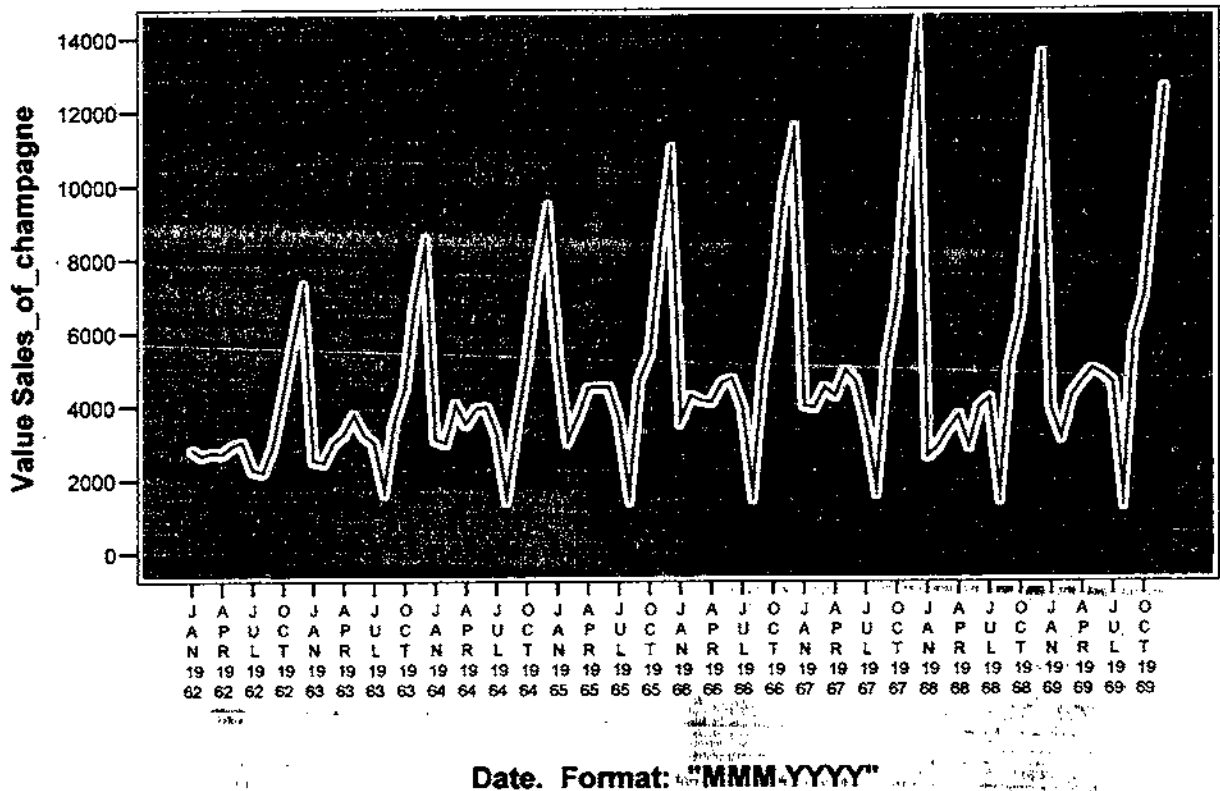
Τα δεδομένα που θα εξεταστούν αφορούν πωλήσεις Σαμπάνιας σε χιλιάδες μπουκάλια κατά την περίοδο 1962 – 1968.

Σημείωση: Τα δεδομένα που εξετάζονται είναι μηνιαία.

4.2 ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

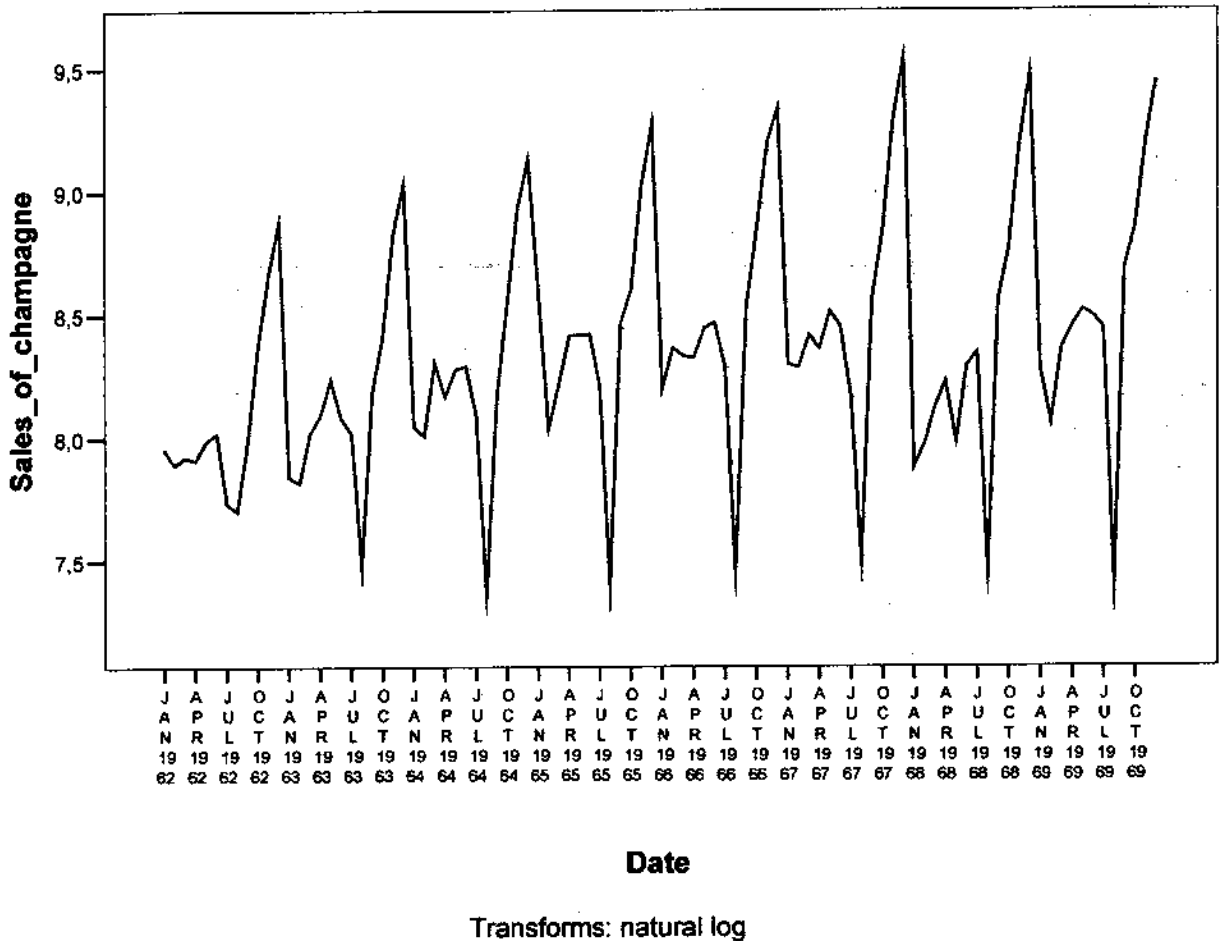
Παρακολουθώντας την πορεία των πωλήσεων της Σαμπάνιας (Sales of Champagne in 1000's bottles) παρατηρείται μια επανάληψη της συμπεριφοράς της χρονοσειράς κάθε 12 παρατηρήσεις, δηλαδή κάθε 12 μήνες. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά παρουσιάζει εποχικότητα. Τα συμπεράσματα της παραπάνω ανάλυσης φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα 4.2.1:

Sales of Champagne in 1000's bottles



Διάγραμμα 4.2.1

Λογαριθμίζοντας το διάγραμμα 4.2.1, όπως φαίνεται παρακάτω στο διάγραμμα 4.2.2 βλέπουμε πως η αρχική διακύμανση δεν περιορίζεται.



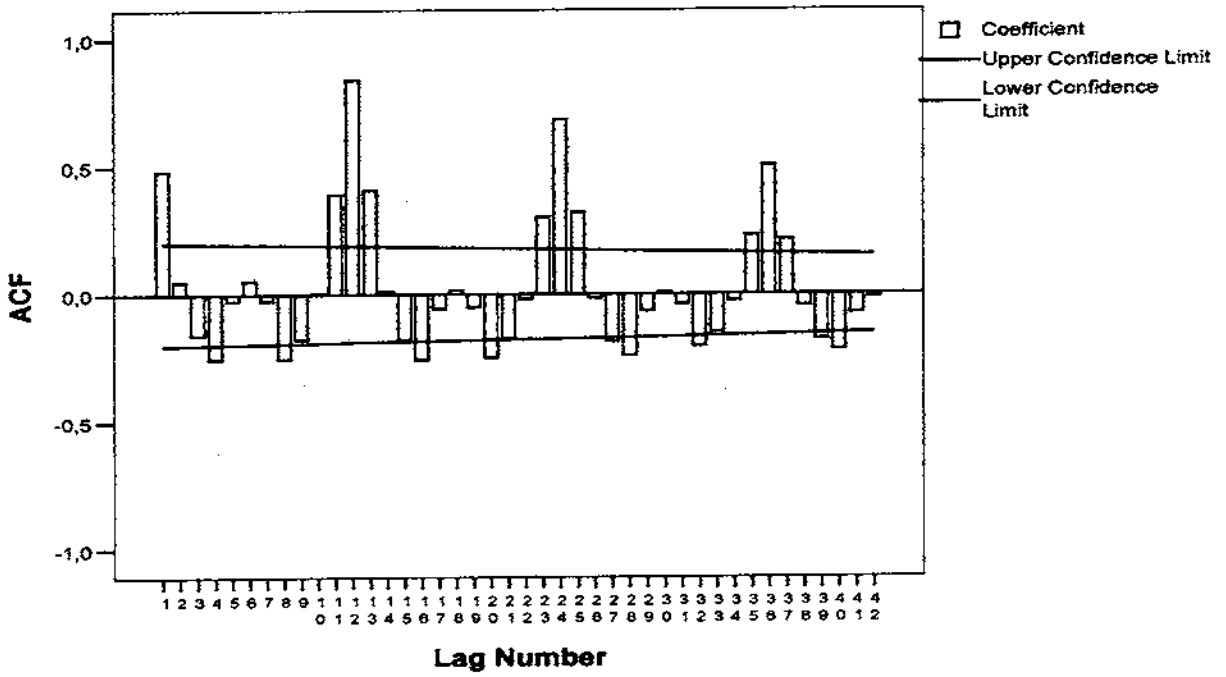
Διάγραμμα 4.2.2

Εφόσον παρατηρείται αυτό το φαινόμενο θα προχωρήσουμε στην ανάλυση χωρίς να το λάβουμε υπ'όψιν.

Παρατηρώντας το διάγραμμα 4.2.1 διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια επανάληψη ανά τακτά χρονικά διαστήματα και πιθανότατα ανά 12 μήνες. Η περιοδικότητα που εμφανίζεται θα φανεί καλύτερα από το ACF διάγραμμα.

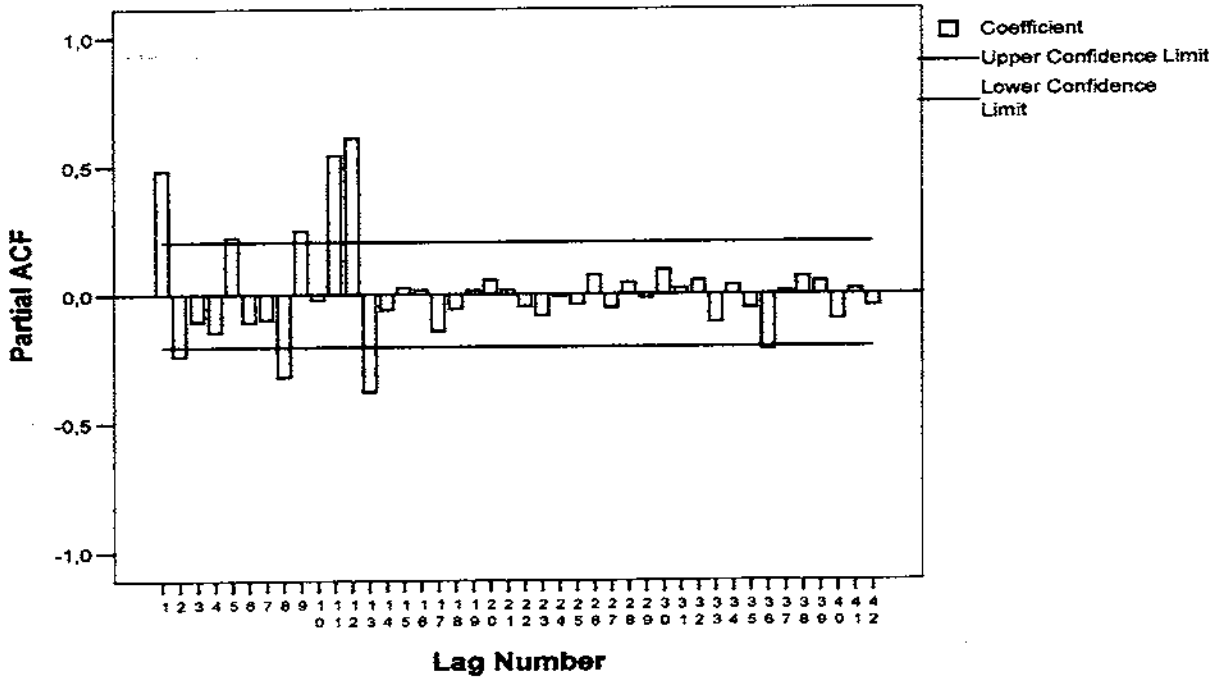
Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα ACF και PACF.

Sales_of_bottles



Διάγραμμα 4.2.3

Sales_of_bottles



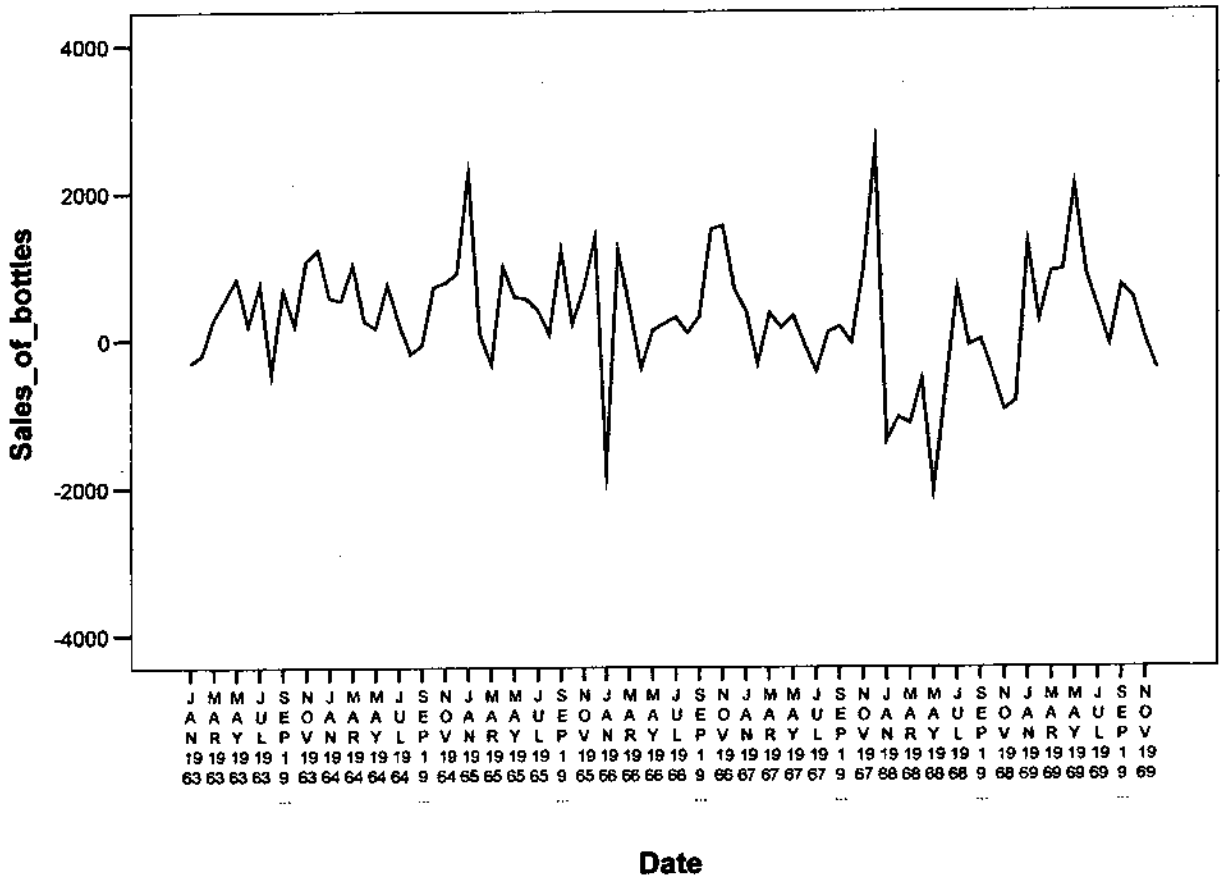
Διάγραμμα 4.2.4

Στο διάγραμμα 4.2.4 (ACF) επιβεβαιώνεται η ένδειξη εποχικότητας που παρατηρήσαμε στο αρχικό γράφημα. Αυτό γίνεται σαφές αν εξετάσουμε τις κρίσιμες παρατηρήσεις 12, 24, 36.

Η προσαρμογή του μοντέλου αρχίζει από την ανάλυση του εποχικού μέρους, δηλαδή του SARIMA (P,D,Q)_s.

4.3 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΠΟΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ (P,D,Q), ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ P, Q

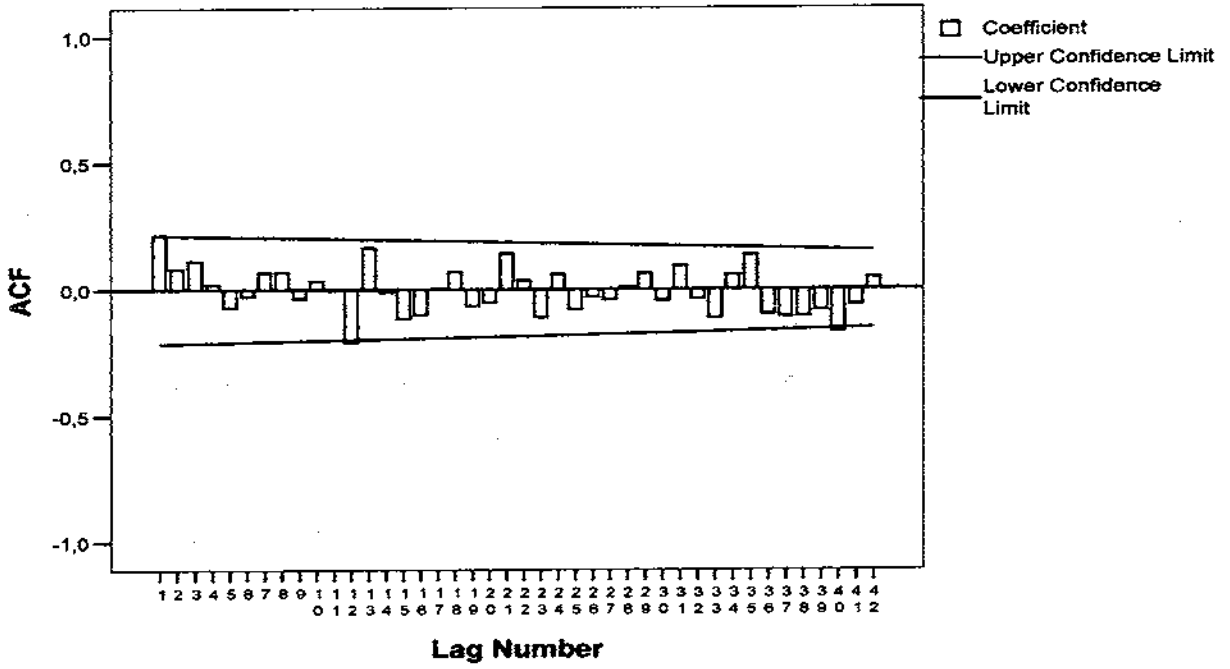
Πρώτο βήμα σε αυτή την διαδικασία αποτελεί η εποχική διαφορίση (seasonal difference) επειδή οι αυτοσυσχετίσεις στις κρίσιμες παρατηρήσεις 12, 24, 36 είναι υψηλές .



Transforms: seasonal difference(1, period 12)

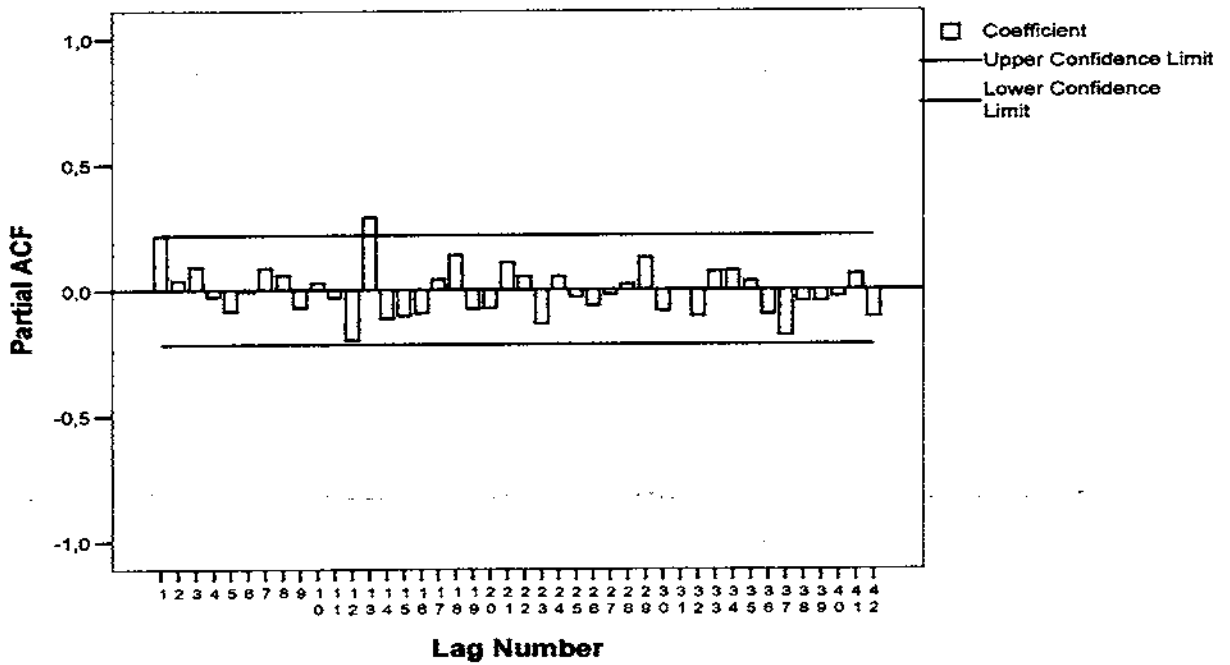
Διάγραμμα 4.3.1

Sales_of_bottles



Διάγραμμα 4.3.2

Sales_of_bottles



Διάγραμμα 4.3.3

Από την παρατήρηση του γραφήματος 4.3.1 και του διαγράμματος 4.3.2 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η στασιμότητα στο εποχικό μοντέλο έχει επιτευχθεί. Στην συνέχεια θα προβούμε στον προσδιορισμό του κατάλληλου SARIMA μοντέλου.

Από τα δύο παραπάνω διαγράμματα (4.3.2 και 4.3.3) ACF και PACF διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο που θα εξετάσουμε αρχικά είναι το SARIMA (1,1,1)₁₂.

4.4 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ SARIMA (1,1,1)₁₂

Στο στάδιο αυτό θα εκτιμηθούν οι παράμετροι του εποχικού μέρους Φ_1 , Θ_1 και η σταθερά. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω:

Residual Diagnostics

Number of Residuals	84
Number of Parameters	2
Residual df	81
Adjusted Residual Sum of Squares	49485104,085
Residual Sum of Squares	53147755,005
Residual Variance	603746,393
Model Std. Error	777,011
Log-Likelihood	-677,231
Akaike's Information Criterion (AIC)	1360,461
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	1367,754

Πίνακας 4.1

Parameter Estimates

		Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Seasonal Lags	Seasonal AR1	-,687	,500	-1,373	,174
	Seasonal MA1	-,502	,560	-,896	,373
Constant		294,758	76,299	3,863	,000

Mélar'd's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 4.2: Εκτίμηση μοντέλου SARIMA(1,1,1)₁₂

$\hat{\Phi}_1 = -0.687$ (0.500)	p.value = 0.174
$\hat{\Theta}_1 = -0.502$ (0.560)	p.value = 0.373
$\hat{\alpha} = 294,758$ (76.299)	p.value = 0.0

Το p.value του MA1 είναι 0.373, δηλαδή μεγαλύτερο από το 0.05. Συνεπώς η εκτίμηση του Θ_1 δεν είναι στατιστικά σημαντική. Το ίδιο παρατηρείται και με το p.value AR1, γιατί ισούται με 0.174. Αντίθετα η σταθερά είναι στατιστικά σημαντική, αφού έχει p.value = 0.

Στην περίπτωση αυτή ξεκινάμε αφαιρώντας τον συντελεστή με το μεγαλύτερο p.value, δηλαδή το MA. Το νέο μοντέλο που θα εξεταστεί θα είναι το SARIMA (1,1,0)₁₂.

4.5 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ SARIMA (1,1,0)₁₂

Στο στάδιο αυτό έχουν εκτιμηθεί ξανά το Φ_1 και η σταθερά:

Residual Diagnostics

Number of Residuals	84
Number of Parameters	1
Residual df	82
Adjusted Residual Sum of Squares	49763802,606
Residual Sum of Squares	52724046,478
Residual Variance	602597,220
Model Std. Error	776,271
Log-Likelihood	-677,460
Akaike's Information Criterion (AIC)	1358,920
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	1363,782

Πίνακας 4.3

Parameter Estimates

	Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Seasonal Lags Seasonal AR1	-,220	,114	-1,925	,058
Constant	299,438	71,295	4,200	,000

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 4.4: Εκτίμηση μοντέλου SARIMA(1,1,0)₁₂ συμπεριλαμβανομένης της σταθεράς.

$$\hat{\Phi}_1 = -0.220 (0.114) \quad p.\text{value} = 0.058$$

$$\hat{\alpha} = 299.438 (71.295) \quad p.\text{value} = 0.0$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι εμφανές ότι το p.value της σταθεράς είναι μικρότερο από το 0.05, δηλαδή θα συμπεριληφθεί στο μοντέλο. Το p.value της Φ_1 είναι οριακά μεγαλύτερο από το 0.05 γεγονός που δεν θα επηρεάσει ιδιαίτερα την προσαρμογή του μοντέλου μας, οπότε διατηρούμε την ύπαρξη του.

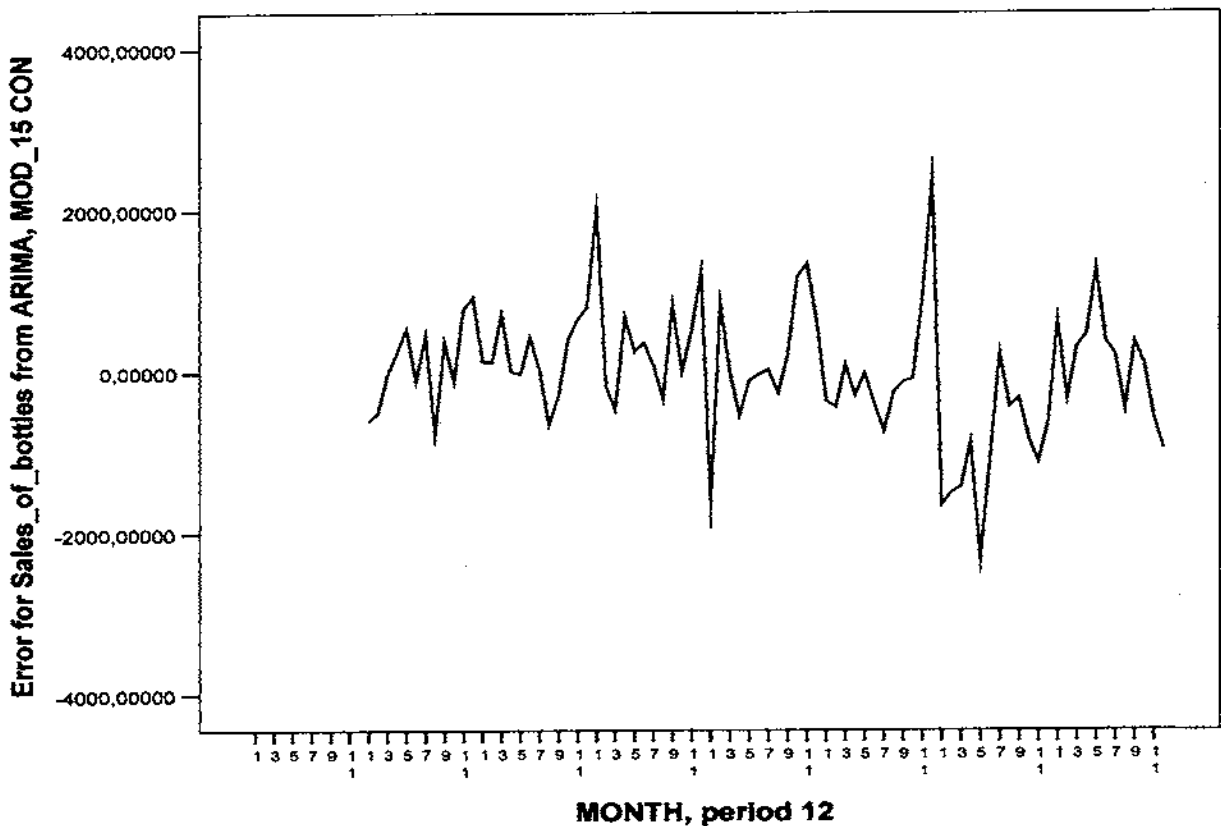
Άρα το μοντέλο που καταλήξαμε είναι το $SARIMA(1,1,0)_{12}$.

Στη συνέχεια θα προβούμε στον υπολογισμό του μη εποχικού μοντέλου.

4.6 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΗ ΕΠΟΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ (p,d,q)

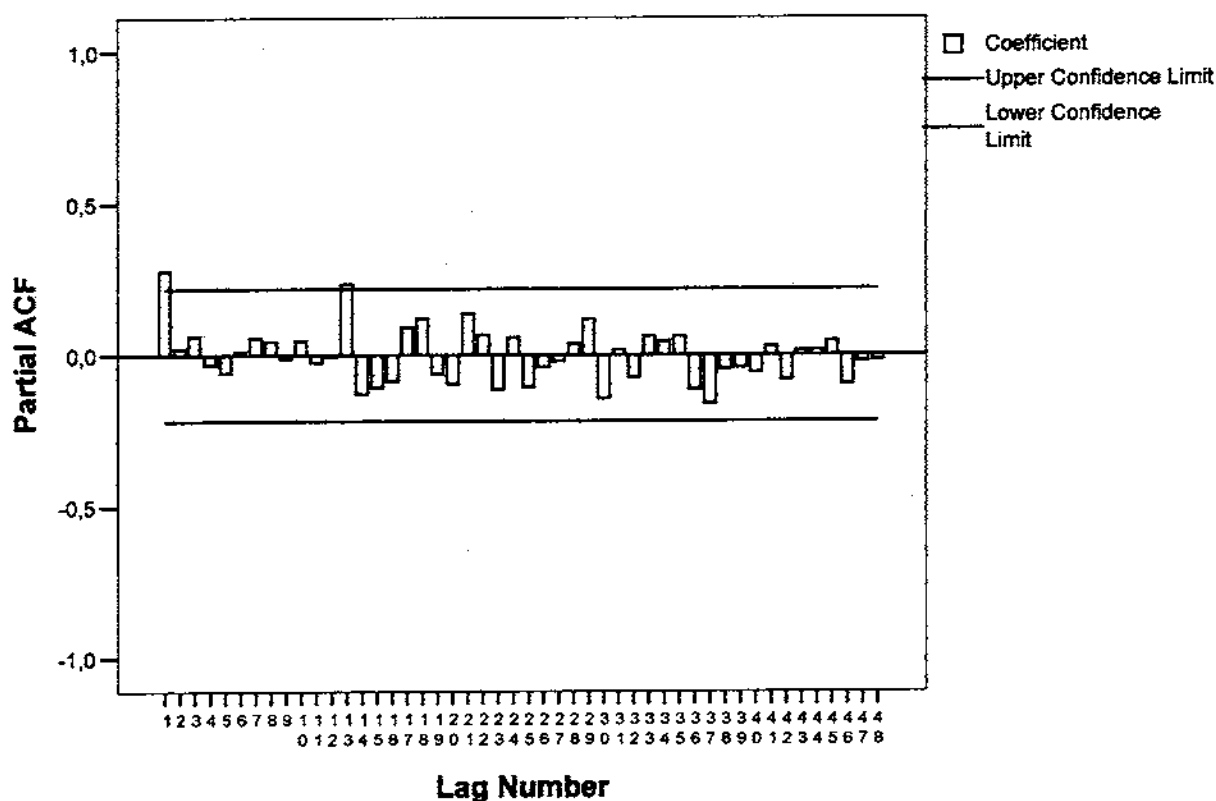
Η διαδικασία υπολογισμού του μη εποχικού μοντέλου, γίνεται μέσω της εξέτασης των καταλοίπων του εποχικού μοντέλου ως νέας χρονοσειράς.

Η πορεία των καταλοίπων ως χρονοσειρά που ερμηνεύει το μη εποχικό μοντέλο παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα 4.6.1:



Διάγραμμα 4.6.1

Error for Sales_of_bottles from ARIMA, MOD_15 CON



Διάγραμμα 4.7.2

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτει ότι το μοντέλο δεν χρειάζεται διαφορίση γιατί μετά τις πρώτες παρατηρήσεις το διάγραμμα «φθινεί» γρήγορα.

Προχωρούμε στην εξέταση του μη εποχικού μοντέλου ARIMA (1,0,1).

4.8 ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΩΝ p ΚΑΙ q

Πλέον είναι η στιγμή να αναγνωριστούν τα ϕ_1 , θ_1 και η σταθερά.

Residual Diagnostics

Number of Residuals	84
Number of Parameters	3
Residual df	80
Adjusted Residual Sum of Squares	45329736,254
Residual Sum of Squares	50260240,709
Residual Variance	557543,921
Model Std. Error	746,689
Log-Likelihood	-673,557
Akaike's Information Criterion (AIC)	1355,113
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	1364,836

Πίνακας 4.5

Parameter Estimates

		Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal	AR1	,393	,330	1,191	,237
Lags	MA1	,088	,355	,248	,805
Seasonal Lags	Seasonal AR1	-,315	,112	-2,811	,006
Constant		287,446	95,766	3,002	,004

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 4.6: Εκτίμηση μοντέλου SARIMA(1,0,1) x (1,1,0)₁₂

$\hat{\phi}_1 = 0.393$ (0.330)	p.value = 0.237
$\hat{\theta}_1 = 0.088$ (0.355)	p.value = 0.805
$\hat{\Phi}_1 = -0.315$ (0.112)	p.value = 0.006
$\hat{\alpha} = 287.446$ (95.766)	p.value = 0.004

Αναλύοντας τα παραπάνω αποτελέσματα διαπιστώνουμε ότι οι συντελεστές ϕ_1 και θ_1 δεν είναι στατιστικά σημαντικοί, γιατί τα p.value τους είναι μεγαλύτερα από 0.05. Έτσι θα αφαιρέσουμε την θ_1 και θα μελετήσουμε το μοντέλο (1,0,0).

4.9 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ARIMA (1,0,0)

Στο σημείο αυτό έχουν εκτιμηθεί ξανά η ϕ_1 .

Residual Diagnostics

Number of Residuals	84
Number of Parameters	2
Residual df	81
Adjusted Residual Sum of Squares	45353890,587
Residual Sum of Squares	50392506,024
Residual Variance	550794,975
Model Std. Error	742,156
Log-Likelihood	-673,565
Akaike's Information Criterion (AIC)	1353,130
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	1360,423

Πίνακας 4.7

Parameter Estimates

	Estimates	Std Error	t	Approx Sig
Non-Seasonal Lags AR1	,315	,106	2,964	,004
Seasonal Lags Seasonal AR1	-,318	,111	-2,861	,005
Constant	288,423	92,374	3,122	,002

Melard's algorithm was used for estimation.

Πίνακας 4.8: Εκτίμηση μοντέλου SARIMA(1,0,0) x (1,1,0)₁₂

$$\hat{\phi}_1 = 0.315 \quad (0.106) \quad \text{p.value} = 0.004$$

$$\hat{\Phi}_1 = -0.318 \quad (0.111) \quad \text{p.value} = 0.005$$

$$\hat{\alpha} = 288.423 \quad (92.374) \quad \text{p.value} = 0.002$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα διαπιστώνουμε όλες οι παράμετροι είναι πλέον στατιστικά σημαντικές. Επομένως θα καταλήξουμε στο μοντέλο SARIMA (1,0,0) x (1,1,0)₁₂.

Τελικά το πιο αξιόπιστο μοντέλο στο οποίο καταλήγουμε είναι το SARIMA (1,1,0)₁₂ x (1,0,0). Η μορφή του είναι η παρακάτω:

$$\Phi_1 B^{12} \phi_1 B \nabla_{12} \Omega_t = e_t + \alpha$$

$$\text{ή} \tag{4.9.1}$$

$$(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \phi_1 B)(\Omega_t - \Omega_{t-12}) = e_t + \alpha$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (4.9.1) μπορούν να απλοποιηθούν αν θέσουμε $\nabla_{12} \Omega_t = V_t$. Η εξίσωση πλέον έχει την μορφή:

$$(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \phi_1 B)V_t = e_t + \alpha \tag{4.9.2}$$

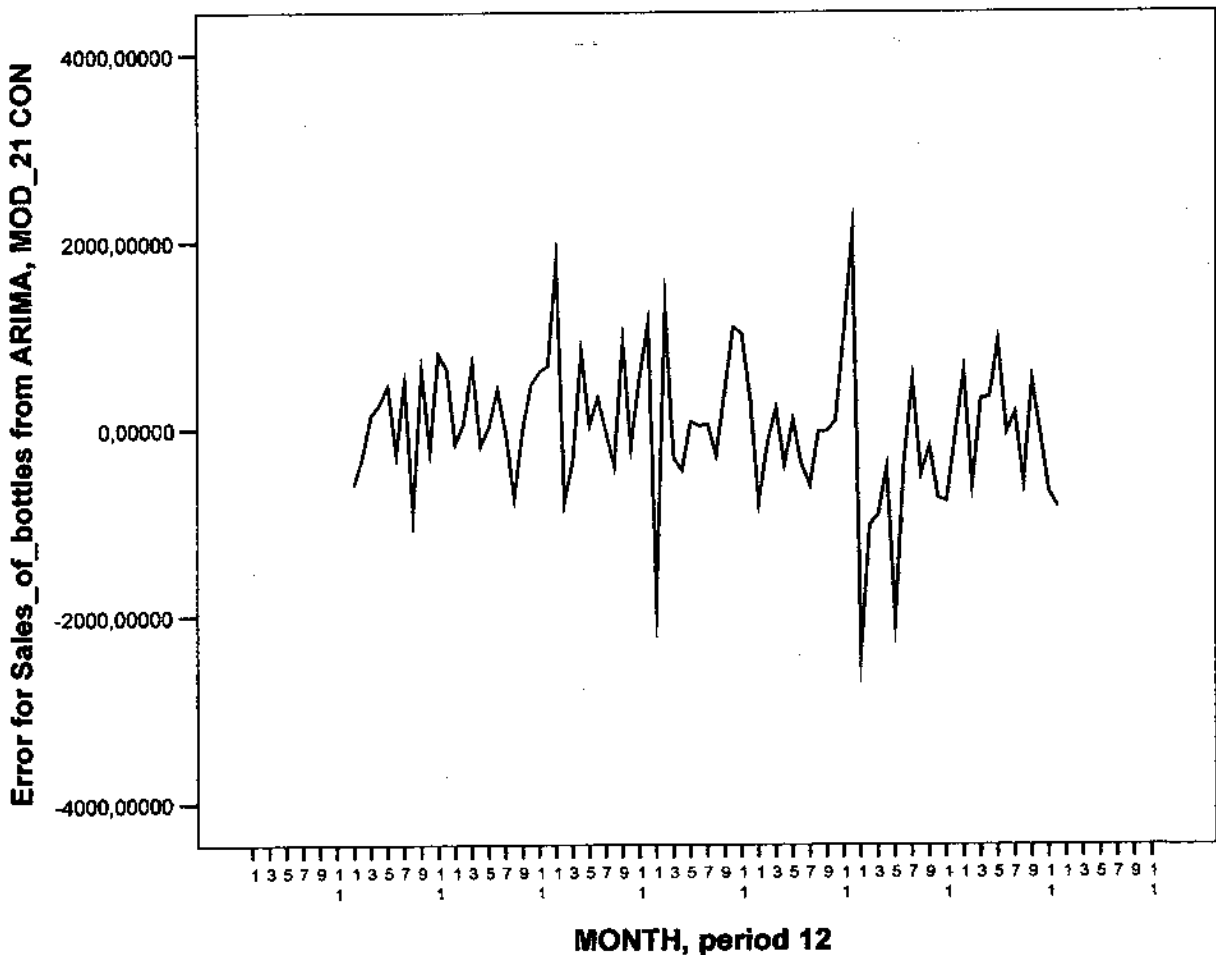
Τελικά αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.10 έχουμε:

$$(1 + 0.318B^{12})(1 - 0.315B)V_t = e_t + 288.423 \tag{4.9.3}$$

4.10 ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

SARIMA (1,1,0)₁₂ × (1,0,0)

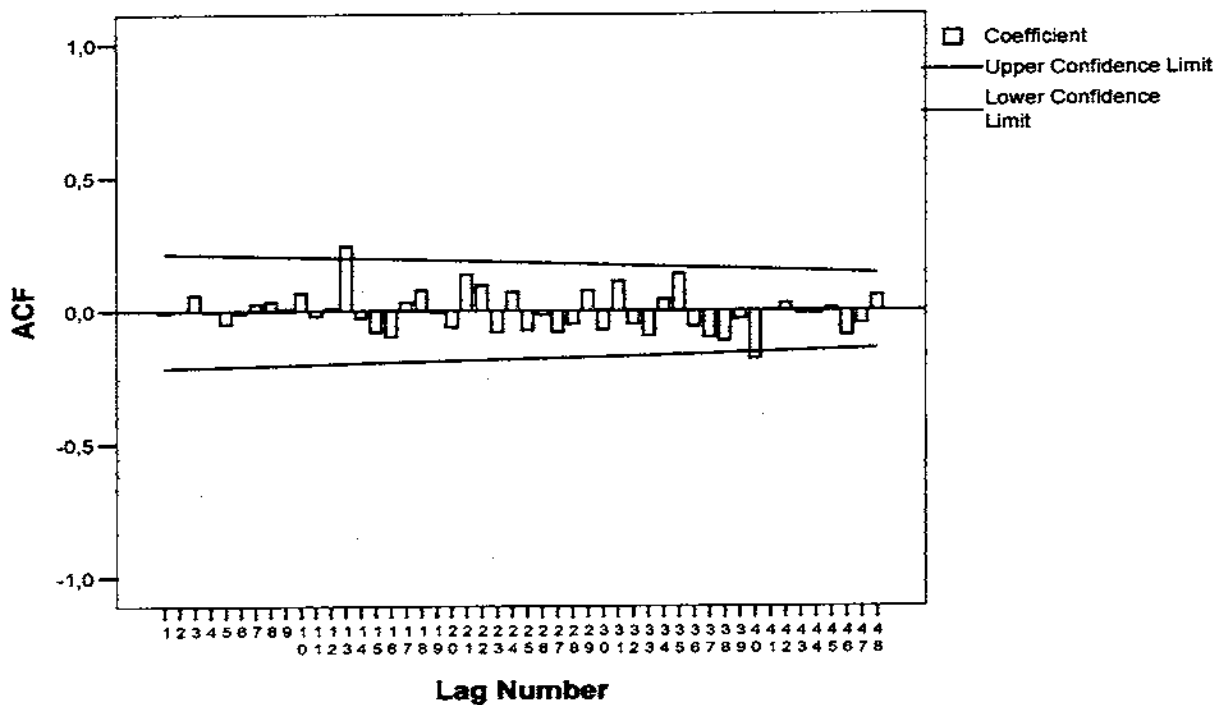
Τελικό στάδιο αποτελεί, όπως έχει αναφερθεί ξανά, ο έλεγχος των καταλοίπων. Παρακάτω παρατίθενται τα σχετικά διαγράμματα που διαπιστώνουν την καταλληλότητα του μοντέλου.



Διάγραμμα 4.10.1

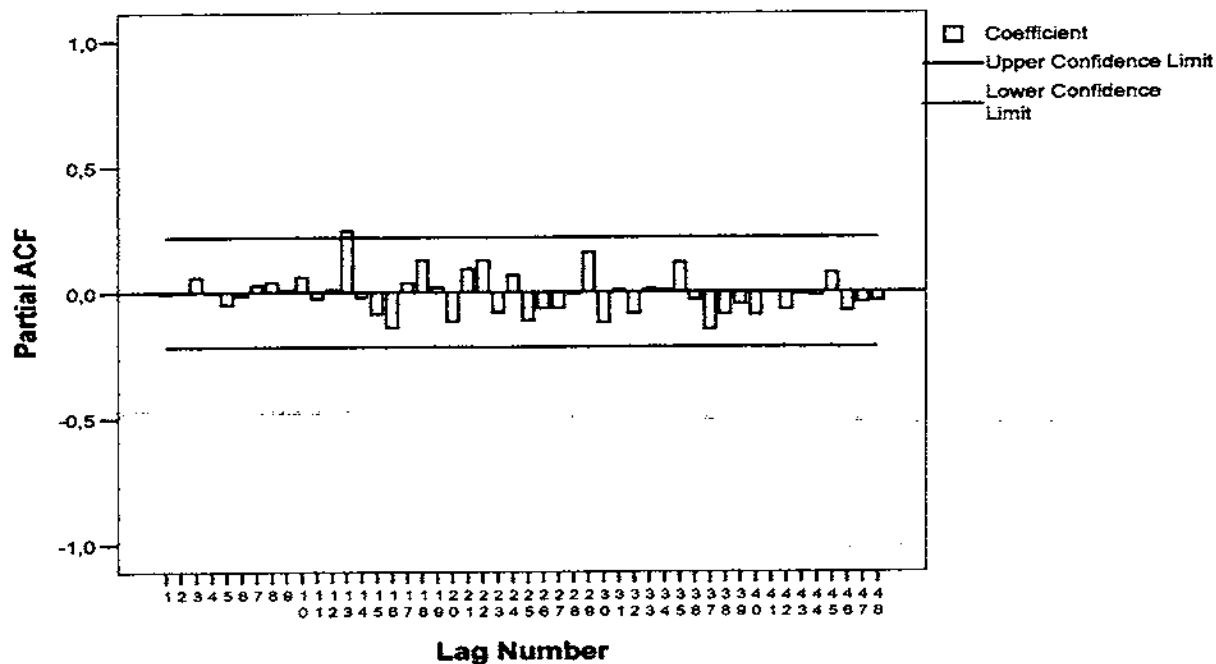
Τα διαγράμματα που ακολουθούν παρακάτω φανερώνουν την επάρκεια του μοντέλου γιατί βασικά φθίνουν με γρήγορο ρυθμό μετά τις πρώτες παρατηρήσεις.

Error for Sales_of_bottles from ARIMA, MOD_21 CON



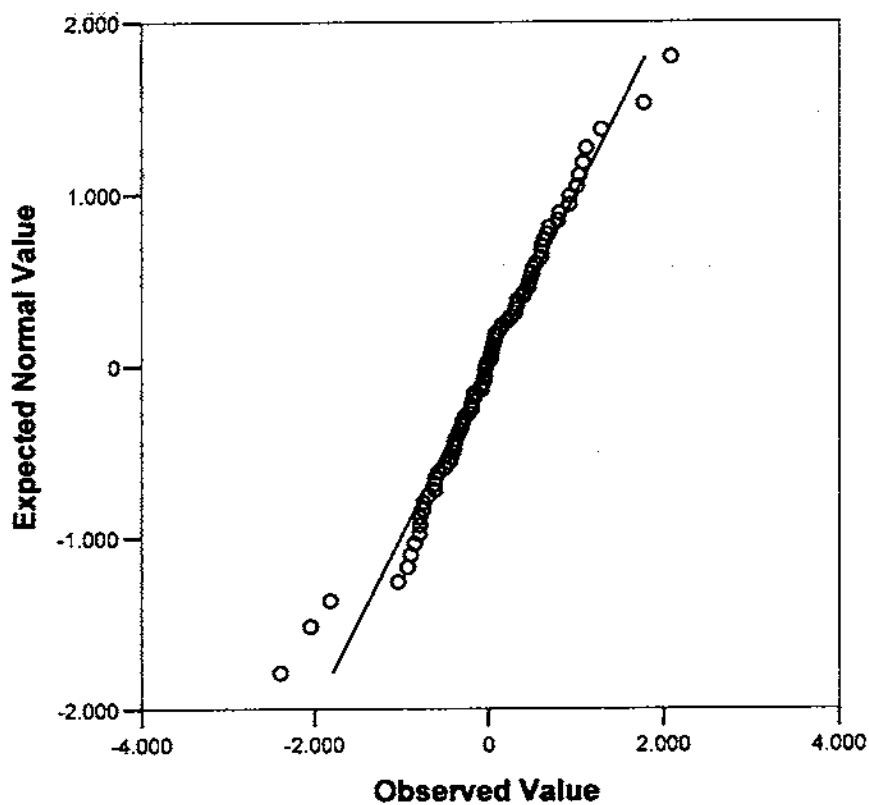
Διάγραμμα 4.10.2

Error for Sales_of_bottles from ARIMA, MOD_21 CON



Διάγραμμα 4.10.3

Normal Q-Q Plot of Error for Sales_of_bottles from ARIMA, MOD_21 CON



Διάγραμμα 4.10.4

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα κατάλοιπα ακολουθούν την κανονική κατανομή και δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση μεταξύ αυτών. Επίσης, ο μέσος τους κινείται γύρω από το μηδέν, άρα παρατηρείται λευκός θόρυβος.

4.11 ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Έχοντας καταλήξει στο κατάλληλο μοντέλο το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω με την εξίσωση:

$$(1+0.318B^{12})(1-0.315B)V_t = e_t + 288.423 \quad (4.11.1)$$

Το επόμενο βήμα είναι η πρόβλεψη των πωλήσεων για τον επόμενο χρόνο (Ιανουάριος 1970 έως Δεκέμβριο 1970):

ΠΕΡΙΟΔΟΣ	fit	lcl	ucl
JAN 1970	3571,41418	2085,45618	5057,37218
FEB 1970	3354,30152	1790,99633	4917,60671
MAR 1970	4342,26827	2769,78064	5914,75592
APR 1970	4748,38172	3174,44315	6322,32029
MAY 1970	4725,05715	3150,80363	6299,31067
JUN 1970	4970,92213	3396,58353	6545,26074
JUL 1970	4880,57206	3306,20807	6454,93604
AUG 1970	2064,04948	489,67764	3638,42131
SEP 1970	6099,10611	4524,73182	7673,48041
OCT 1970	7184,08855	5609,71349	8758,46362
NOV 1970	10228,19045	8653,81515	11802,56576
DEC 1970	13179,03466	11604,65928	14753,41004

Πίνακας 4.14

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα, τα οποία αφορούν πωλήσεις μπουκαλιών σαμπάνιας, παρατηρούμε ότι υπάρχει έντονη αυξομείωση των πωλήσεων κατά τη διάρκεια του διαστήματος που εξετάζουμε.

4.12 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κατά την εξέταση των πωλήσεων μπουκαλιών σαμπάνιας, στην προηγούμενη ενότητα, για την περίοδο Ιανουάριος 1962 έως Δεκέμβριος 1969 καταλήξαμε στο εποχικό μοντέλο SARIMA $(1,1,0)_{12} \times (1,0,0)$ που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$(1 + 0.318B^{12})(1 - 0.315B)V_t = e_t + 288.423$$

Συμπερασματικά, το παραπάνω μοντέλο αποτελείται από εποχικό και μη εποχικό μέρος. Το εποχικό μέρος είναι το $(1,1,0)_{12}$ του οποίου η εποχικότητα παρατηρείται κάθε 12 μήνες. Επίσης, είναι μοντέλο πρώτης τάξης και έχει διαφοριστεί μία φορά για τη απόκτηση στασιμότητας. Το μη εποχικό είναι αντίστοιχα το $(1,0,0)$, το οποίο δεν έχει διαφοριστεί, επειδή παρατηρήθηκε ότι το διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων του έφθινε γρήγορα, γεγονός που σημαίνει ότι το μοντέλο πληρεί την προϋπόθεση της στασιμότητας. Τελικά βλέπουμε ότι στις παρατηρήσεις του δείγματος μας, παρατηρούνται έντονες αυξομειώσεις με εποχικότητα που επαναλαμβάνεται ανά 12 μήνες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην μελέτη που προηγήθηκε εξετάσαμε μοντέλα χρονοσειρών οικονομικού περιεχομένου. Στην συνέχεια έγινε κατάλληλη προσαρμογή αυτών με τη βοήθεια του προγράμματος SPSS με στόχο την πρόβλεψη της πορείας των χρονοσειρών για το επόμενο έτος.

Συγκεκριμένα τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε είναι τα ακόλουθα:

- I. Προσαρμόσαμε ένα ARIMA (1,2,1) μοντέλο για την μετοχή Πετρελάκης. Η εξίσωση του μοντέλου είναι η:

$$W_t - 0.211W_{t-1} = e_t - 0.999e_{t-1} .$$

- II. Προσδιορίσαμε για την μετοχή Θεμελιοδομική ένα ARIMA (1,1,0) μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$A_t - 0.219A_{t-1} = e_t .$$

- III. Μελετήσαμε τις πωλήσεις Σαμπάνιας και καταλήξαμε σε ένα μεικτό SARIMA (1,1,0)₁₂ x (1,0,0) με εξίσωση:

$$(1 + 0.318B^{12})(1 - 0.315B)V_t = e_t + 288.423 .$$

Στην εργασία μας έγινε προσπάθεια ώστε να απλοποιηθούν τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν, γεγονός που επιτρέπει να επιτευχθούν προβλέψεις

μεγαλύτερης ακρίβειας. Τα μοντέλα που προκύπτουν από τις διαδικασίες που ακολουθήθηκαν ονομάζονται “φειδωλά υποδείγματα πρόβλεψης”.

Τα διαγράμματα αυτοσυσχετίσεων (ACF) και μερικών αυτοσυσχετίσεων (PACF) αποτελούν τις θεμελιώδεις βάσεις των μοντέλων. Επιμέρους στόχο μας αποτέλεσε η επίτευξη στασιμότητας των χρονοσειρών μέσω της διαδικασίας της διαφορίσης. Επίσης, βοηθητικό εργαλείο για την εξομάλυνση της μεταβλητότητας αποτελεί ο λογάριθμος, του οποίου η χρήση άλλοτε κρίθηκε απαραίτητη ενώ σε άλλες περιπτώσεις δεν θεωρήθηκε σκόπιμη η εφαρμογή του. Συγκεκριμένα, η μέθοδος της λογαρίθμησης χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς στην ανάλυση των δύο μετοχών ενώ δεν εφαρμόστηκε στη μελέτη των πωλήσεων μπουκαλιών σαμπάνιας.

Σημαντικό σημείο στην μελέτη μας αποτελεί ο έλεγχος της καταλληλότητας των υποδειγμάτων, διαδικασία που ουσιαστικά αποτελεί τον διαγνωστικό έλεγχο των καταλοίπων, με σκοπό να προσδιοριστεί αν αυτά είναι λευκός θόρυβος. Στις τρεις επιμέρους περιπτώσεις που εξετάσαμε, τελικά αποδείχτηκε ότι τα κατάλοιπα ακολουθούν την κανονική κατανομή, με το μέσο να κινείται γύρω από το μηδέν και με σταθερή διακύμανση, στοιχεία που χαρακτηρίζουν τα κατάλοιπα ως λευκό θόρυβο.

Μετά την ταυτοποίηση και αξιοποίηση της ισχύος των υποδειγμάτων, έγιναν προβλέψεις που αφορούν το χρονικό διάστημα των επόμενων 12 μηνών. Στην μετοχή Πετζετάκις οι προβλεπόμενες τιμές βαίνουν με ρυθμό μειούμενο, ενώ στην μετοχή της Θεμελιοδομικής η μείωση των προβλεπόμενων τιμών διαρκεί μόνο μέχρι το μήνα Οκτώβριο του 2004, καθώς για το υπόλοιπο διάστημα διατηρούνται σχεδόν σταθερά τα επίπεδα των τιμών της. Η σύγκριση της μελλοντικής πορείας των δύο αυτών

μετοχών παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς βλέπουμε ότι οι πορείες τους δεν είναι κοινές, παρότι στο διάγραμμα των ιστορικών τους τιμών εμφανίζουν σχεδόν ταυτόσημες πορείες.

Όσον αφορά το κομμάτι της εργασίας στο οποίο εξετάζεται η εποχικότητα, είδαμε ότι οι πωλήσεις μπουκαλιών σαμπάνιας εμφανίζουν εποχικότητα ανά 12 μήνες, αφού οι τιμές που προβλέπονται για το έτος 1970 είναι ανάλογες των ιστορικών τιμών, δηλαδή για χρονικό διάστημα από το 1962 έως το 1969.

Συμπερασματικά, αναφέρουμε ότι το αντικείμενο που ασχολείται με την μελέτη των χρονοσειρών και την επίτευξη προβλέψεων με την χρήση ιστορικών δεδομένων είναι αρκετά δύσκολο και ενέχει πολλούς κινδύνους. Οι δυσκολίες όμως αυτές εξομαλύνονται με την χρήση των εργαλείων της επιστήμης της στατιστικής, τόσο σε θεωρητική προσέγγιση όσο και σε πρακτική, καθώς υπάρχουν προς χρήση και διευκόλυνση του ερευνητή στατιστικά προγράμματα που οδηγούν σε ακριβείς και ασφαλείς προβλέψεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΕΡΙΟΔΟΣ	ΠΕΤΖΕΤΑΚΙΣ	ΘΕΜΕΛΙΟΔΟΜΙΚΗ
JAN 1994	3,04	2,96
FEB 1994	2,64	2,74
MAR 1994	2,59	2,61
APR 1994	2,59	2,21
MAY 1994	2,50	1,83
JUN 1994	2,49	1,97
JUL 1994	2,27	2,15
AUG 1994	1,96	2,40
SEP 1994	1,86	2,40
OCT 1994	1,80	2,23
NOV 1994	1,75	2,22
DEC 1994	1,65	2,32
JAN 1995	1,49	1,93
FEB 1995	1,62	1,87
MAR 1995	1,38	1,74
APR 1995	1,43	1,68
MAY 1995	1,41	1,71
JUN 1995	1,49	1,70
JUL 1995	1,50	1,79
AUG 1995	1,51	1,73
SEP 1995	1,46	1,66
OCT 1995	1,46	1,72
NOV 1995	1,49	1,67
DEC 1995	1,58	1,84
JAN 1996	1,85	1,96
FEB 1996	1,68	1,79
MAR 1996	1,58	1,75
APR 1996	1,46	1,60
MAY 1996	1,45	1,62
JUN 1996	1,34	1,61
JUL 1996	1,24	1,53
AUG 1996	1,41	1,66
SEP 1996	1,39	1,63
OCT 1996	1,24	1,56
NOV 1996	1,18	1,59
DEC 1996	1,16	1,62
JAN 1997	1,45	1,71
FEB 1997	1,65	2,01
MAR 1997	1,73	2,25
APR 1997	1,68	2,34
MAY 1997	1,82	2,47
JUN 1997	1,85	2,37
JUL 1997	1,67	2,15
AUG 1997	1,73	2,34
SEP 1997	2,09	1,74
OCT 1997	1,94	1,65
NOV 1997	2,18	1,47

DEC 1997	2,01	1,27
JAN 1998	2,04	1,45
FEB 1998	1,97	1,89
MAR 1998	2,21	2,16
APR 1998	2,64	2,62
MAY 1998	2,45	2,50
JUN 1998	2,16	2,68
JUL 1998	2,48	2,49
AUG 1998	2,08	2,81
SEP 1998	1,72	2,69
OCT 1998	2,27	2,80
NOV 1998	3,10	2,74
DEC 1998	2,62	3,01
JAN 1999	2,48	4,27
FEB 1999	3,50	4,27
MAR 1999	4,13	5,03
APR 1999	3,80	5,49
MAY 1999	5,11	7,38
JUN 1999	6,62	9,02
JUL 1999	12,03	17,58
AUG 1999	14,44	16,01
SEP 1999	15,34	14,94
OCT 1999	17,90	13,90
NOV 1999	19,37	11,97
DEC 1999	19,49	10,15
JAN 2000	17,55	8,69
FEB 2000	12,49	9,72
MAR 2000	9,48	10,50
APR 2000	7,91	12,75
MAY 2000	10,14	12,09
JUN 2000	9,39	12,50
JUL 2000	9,01	10,24
AUG 2000	8,99	11,41
SEP 2000	9,35	10,11
OCT 2000	7,62	7,90
NOV 2000	7,60	7,16
DEC 2000	7,45	6,67
JAN 2001	5,70	7,46
FEB 2001	6,50	6,77
MAR 2001	6,90	6,79
APR 2001	6,34	6,22
MAY 2001	6,02	5,08
JUN 2001	6,10	5,19
JUL 2001	6,62	5,57
AUG 2001	7,24	3,94
SEP 2001	5,38	4,19
OCT 2001	4,76	4,88
NOV 2001	5,02	4,96

DEC 2001	4,72	5,00
JAN 2002	4,90	4,70
FEB 2002	4,46	4,35
MAR 2002	4,38	4,19
APR 2002	4,50	4,96
MAY 2002	4,60	5,04
JUN 2002	4,16	4,58
JUL 2002	3,48	3,98
AUG 2002	3,02	2,99
SEP 2002	1,69	3,60
OCT 2002	1,21	4,06
NOV 2002	1,55	3,62
DEC 2002	1,46	2,77
JAN 2003	1,20	2,23
FEB 2003	,97	1,69
MAR 2003	,88	2,23
APR 2003	1,16	2,98
MAY 2003	1,18	3,54
JUN 2003	1,27	3,26
JUL 2003	2,38	3,62
AUG 2003	3,06	2,60
SEP 2003	2,03	2,52
OCT 2003	2,69	2,37
NOV 2003	2,51	2,07
DEC 2003	2,48	2,07
JAN 2004	2,94	1,79
FEB 2004	2,63	1,70
MAR 2004	2,34	1,66
APR 2004	2,55	1,53
MAY 2004	2,44	1,36
JUN 2004	1,84	

ΠΕΡΙΟΔΟΣ	ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΣΑΜΠΑΝΙΑΣ
JAN 1962	2851
FEB 1962	2672
MAR 1962	2755
APR 1962	2721
MAY 1962	2946
JUN 1962	3036
JUL 1962	2282
AUG 1962	2212
SEP 1962	2922
OCT 1962	4301
NOV 1962	5764
DEC 1962	7132
JAN 1963	2541
FEB 1963	2475
MAR 1963	3031
APR 1963	3266
MAY 1963	3776
JUN 1963	3230
JUL 1963	3028
AUG 1963	1759
SEP 1963	3595
OCT 1963	4494
NOV 1963	6838
DEC 1963	8357
JAN 1964	3113
FEB 1964	3006
MAR 1964	4047
APR 1964	3523
MAY 1964	3937
JUN 1964	3986
JUL 1964	3260
AUG 1964	1573
SEP 1964	3528
OCT 1964	5211
NOV 1964	7614
DEC 1964	9254
JAN 1965	5375
FEB 1965	3088
MAR 1965	3718
APR 1965	4514
MAY 1965	4520
JUN 1965	4539
JUL 1965	3663
AUG 1965	1643
SEP 1965	4739
OCT 1965	5428

NOV 1965	8314
DEC 1965	10651
JAN 1966	3633
FEB 1966	4292
MAR 1966	4154
APR 1966	4121
MAY 1966	4647
JUN 1966	4753
JUL 1966	3965
AUG 1966	1728
SEP 1966	5048
OCT 1966	6922
NOV 1966	9858
DEC 1966	11331
JAN 1967	4016
FEB 1967	3957
MAR 1967	4510
APR 1967	4276
MAY 1967	4968
JUN 1967	4677
JUL 1967	3523
AUG 1967	1821
SEP 1967	5222
OCT 1967	6873
NOV 1967	10803
DEC 1967	13916
JAN 1968	2639
FEB 1968	2899
MAR 1968	3370
APR 1968	3740
MAY 1968	2927
JUN 1968	3986
JUL 1968	4217
AUG 1968	1738
SEP 1968	5221
OCT 1968	6424
NOV 1968	9842
DEC 1968	13076
JAN 1969	3934
FEB 1969	3162
MAR 1969	4286
APR 1969	4676
MAY 1969	5010
JUN 1969	4874
JUL 1969	4633
AUG 1969	1659
SEP 1969	5951
OCT 1969	6981

NOV 1969	9851
DEC 1969	12670

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

Αγαπητός Γ. (2004). «Εγχειρίδιο των Βασικών Οικονομικών Εννοιών». Γ.Αγαπητός.

Κίντης Α. Α. (2002). «Σύγχρονη Στατιστική Ανάλυση, Συμβολή στην Επιστημονική Έρευνα και στη Λήψη των Αποφάσεων» (Τόμος Α'). Gutenberg.

Μπόρα Ε. - Σέντα, Χ. Μουσιάδης. (1997). «Εφαρμοσμένη Στατιστική». Ζήτη.

Χαλκιάς Γ. Ι. (2002). «Στατιστική, Μέθοδοι ανάλυσης για Επιχειρηματικές αποφάσεις» . Rosili.

Ξένη Βιβλιογραφία

Box G.E.P. and Jenkins G.M. (1976). «Time Series Analysis, Forecasting and Control». Oakland, California, Holden day.

Chatfield C. (1980). «The Analysis of Time Series: An Introduction». Chapman and Hall.

Diggle, P.J. (1990). «Time Series. A Biostatistical Introduction». Clarendon Press, Oxford.

Douglas C. Montgomery, Lynwood A. Johnson and John S.Gardiner.
(1990) «Forecasting & Time Series Analysis». McGraw-Hill, Inc .

Durbin J. and Watson G.S. (1950, 1951, 1971). «Testing for serial correlation in least – squares regression». Biometrika.

Jeffrey J. (2000). «Μέθοδοι Προβλέψεων, Για Οικονομικές - Επιχειρηματικές Αποφάσεις» . Gutenberg.

Vandaele W . (1983). «Applied Time Series and Box-Jenkins Moodels». Academic Press.

