ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ MATLAB

ΟΝΟΜΑ ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑΣ: ΠΑΝΟΥΤΣΟΥ ΣΤΕΦΑΝΙΑ
ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΤΟΥΛΙΑΣ ΘΩΜΑΣ

ΠΑΤΡΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η πτυχιακή εργασία έχει ως θέμα τη θεωρία της βελτιστοποίησης με τη χρήση του MATLAB. Η βελτιστοποίηση αποτελεί την μαθηματική εκείνη διαδικασία κατά την οποία αναγνωρίζεται η καλύτερη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ύπαρξη εναλλακτικών προτάσεων για την λύση του προβλήματος οι οποίες συνδέονται με κάποιο κόστος. Η έννοια καλύτερη αλληλεπιδρά με την έννοια του κόστους καθώς η καλύτερη επιλογή προϋποθέτει κάποιο κόστος . Εν αντιθέσει, το κόστος δεν συνεπάγεται χρηματική απόδοση.

Στις παρακάτω σελίδες και συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στο τρόπο που βρίσκεται η βέλτιστη λύση σε μια συνάρτηση με τη βοήθεια μαθηματικών μεθόδων και θεωρημάτων .Γίνεται αναφορά στις βασικές μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στη βελτιστοποίηση δηλαδή στη μεγιστοποίηση και στην ελαχιστοποίηση και συγκεκριμένα στις έννοιες ακρότατα και σαγματικά σημεία και παρατίθενται κριτήρια για την εύρεση αυτών .Επίσης γίνεται αναφορά στην εύρεση των μεγίστων και των ελαχίστων υπό περιορισμούς και αναλύεται η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange.Τέλος γίνεται αναφορά στις κατηγορίες της αριστοποίησης και αναλύονται τόσο η κατηγορία της δεσμευμένης όσο και η κατηγορία τις αριστοποίησης χωρίς περιορισμούς.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στον τρόπο που γίνεται επίλυση προβλήματων με το MATLAB και συγκεκριμένα γίνεται ανάλυση στο τρόπο που τα δεδομένα και τα θεωρήματα του κεφαλαίου ένα εφαρμόζονται στο matlab με τη μορφή εντολών .Δηλαδή γίνεται αναφορά στις εντολές του MATLAB που εφαρμόζονται για την επίλυση προβλημάτων αριστοποίησης και επιλύονται κάποια προβλήματα οικονομικού περιεχομένου με τη βοήθεια του.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Έννοια της αριστοποίησης **(OPTIMIZATION)** και των καταναλωτών, είναι η αρχή της ορθολογικότητας. Κάθε απόφαση που παίρνεται από τον παραγωγό ή από τον καταναλωτή κυριαρχείται από την προσπάθεια επίτευξης του άριστου αποτελέσματος, δηλαδή από το βασικό οικονομικό αξίωμα που διατυπώνεται ως εξής:

α΄. Η επιχείρηση ή ο καταναλωτής προσπαθεί όπως με δεδομένα οικονομικά μέσα επιτύχει το μεγαλύτερο (μέγιστο) δυνατό αποτέλεσμα.

β. Η επιχείρηση ή ο καταναλωτής προσπαθεί όπως με δεδομένο αποτέλεσμα επιτύχει το μικρότερο (ελάχιστο) δυνατό κόστος.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ένα πρόβλημα *μεγιστοποίησης* **(maximization)**, ενώ στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ένα πρόβλημα *ελαχιστοποίησης* **(minimization)**. Άρα, το πρόβλημα επίτευξης του άριστου αποτελέσματος, δηλαδή της αριστοποίησης, είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης κάποιου οικονομικού μεγέθους. Αυτό το οικονομικό μέγεθος μπορεί να είναι είτε το κέρδος, είτε το κόστος της επιχείρησης, είτε η χρησιμότητα του καταναλωτή που αποκομίζει από την κατανάλωση κάποιου προϊόντος.

Επειδή τα μεγέθη αυτά διατυπώνονται με τη μορφή οικονομικών συναρτήσεων, για τον λόγο αυτόν το πρόβλημα της αριστοποίησης μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα μαθηματικό - οικονομικό. Δηλαδή πρέπει να εντοπίσουμε για ποια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής (ή των μεταβλητών στη περίπτωση μιας πολυμεταβλητής οικονομικής συνάρτησης) επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση της οικονομικής συνάρτησης.

Την απάντηση μας δίνει ο μαθηματικός προγραμματισμός που μας παρέχει τις μαθηματικές τεχνικές ή μεθόδους για την εξεύρεση μιας λύσης που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί μία συνάρτηση, με περιορισμούς στις τιμές των μεταβλητών .Οι μαθηματικές μέθοδοι αποτελούν βασικό εργαλείο της οικονομικής δραστηριότητας καθώς και την βάση της οικονομικής θεωρίας .Η μαθηματική μέθοδος που βοηθάει στην επίλυση τέτοιου είδους οικονομικών προβλημάτων είναι η εύρευση των ακρότατων στην συνάρτηση που προκύπτει από την εκάστοτε οικονομική δραστηριότητα. Στη συνέχεια παρατίθεται η ανάλυση αυτών των μεθόδων και οι τρόποι επίλυσης τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

1.1 ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Η εύρεση των μέγιστων και ελάχιστων τιμών μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών, καθώς και των σημείων όπου αυτές προκύπτουν, είναι μία σημαντική εφαρμογή του διαφορικού λογισμού πολλών μεταβλητών. Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε τέτοιου είδους εφαρμογές και θα βρίσκουμε τις απαντήσεις με την μελέτη των μερικών παραγώγων κάποιας κατάλληλης συνάρτησης.

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

Η μελέτη συναρτήσεων μίας μεταβλητής, οι διαφορίσιμες συναρτήσεις ,είναι πολύ χρήσιμες στη μαθηματική περιγραφή **προβλημάτων βελτιστοποίησης**. Επειδή οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι σε κλειστά διαστήματα παίρνουν τόσο την ελάχιστη όσο και τη μέγιστη τιμή τους. Επειδή είναι διαφορίσιμες, γνωρίζουμε ακόμη ότι θα παίρνουν τις τιμές αυτές μονάχα σε συνοριακά σημεία ή σε εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος. Μερικές φορές, συναντάμε συναρτήσεις που δεν είναι διαφορίσιμες σε ένα ή σε περισσότερα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού, τα οποία και έπρεπε να εξετάσουμε χωριστά για την ύπαρξη ακρότατων.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η συνθήκη $f'(c) = 0$ δεν σήμαινε πάντα την ύπαρξη ακρότατου. Σε τέτοια σημεία c, η γραφική παράσταση ενδέχεται να έχει σημείο καμπής αντί για τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο. Δηλαδή η καμπύλη ενδέχεται να ανέρχεται καθώς πλησιάζει το c από τα αριστερά, να οριζοντιώνεται στο c και κατόπιν πάλι να ανέρχεται καθώς αφήνει το c. Ή ακόμη μπορεί να κατέρχεται καθώς πλησιάζει το c, να οριζοντιώνεται στο c, και να συνεχίζει την κάθοδο της απομακρυνόμενη . Με άλλα λόγια, η καμπύλη μπορεί να τέμνει την εφαπτομένη της στο x=c.

Οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά.Οι συνεχείς συναρτήσεις δύο μεταβλητών παίρνουν μέγιστες και ελάχιστες τιμές σε κλειστά, φραγμένα πεδία ορισμού. Μπορούμε να αποκλείσουμε μερικά πιθανά σημεία ύπαρξης ακρότατου, αν διερευνήσουμε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων αυτών. Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών μπορεί να εμφανίζει ακρότατα μονάχα σε συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της ή σε εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου και οι δύο πρώτες μερικές παράγωγοι μηδενίζονται ή όπου μία τουλάχιστον εκ των παραγώγων αυτών δεν υπάρχει.

1.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΡΩΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Για να βρούμε τα τοπικά ακρότατα συνάρτησης μίας μεταβλητής, ερευνούμε για σημεία όπου η γραφική παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη. Στη συνέχεια εξετάζουμε αν καθένα από τα σημεία αυτά είναι σημείο τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου, ή σημείο καμπής. Αν τώρα η συνάρτηση μας f έχει δύο μεταβλητές, ερευνούμε για σημεία όπου η επιφάνεια z= (x, y) έχει οριζόντιο εφαπτόμενο επίπεδο. Κατόπιν εξετάζουμε αν στα σημεία αυτά η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο.

<u>Τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο(ΟΡΙΣΜΟΣ)</u>

Έστω f (x, y) ορισμένη σε περιοχή R που περιέχει το σημείο (α,b).Στην περίπτωση αυτή

1. Η f(α,b) είναι τοπική μέγιστη τιμή της f αν **f(α,b) ≥ f(x,ψ)** για όλα τα σημεία (χ,ψ) του πεδίου ορισμού που ανήκουν σε έναν ανοιχτό δίσκο με κέντρο το (α, b).

2.Η f(α,b) είναι τοπική ελάχιστη τιμή της f αν **f(α,b) ≤ f(x,ψ)** για όλα τα σημεία, (χ,ψ) του πεδίου ορισμού που ανήκουν σε έναν ανοιχτό δίσκο με κέντρο το (α,b).

Σχήμα 1

Τοπικό ελάχιστο (δεν υπάρχει μικρότερη τιμή της f στη γειτονιά του σημείου).

Μιλώντας με ορολογία τοπίου, κάθε κορυφή βουνού είναι ένα τοπικό μέγιστο, ενώ το χαμηλότερο σημείο κάθε κοιλάδας είναι ένα τοπικό ελάχιστο .Όπως ισχύει για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, έτσι και εδώ το «κλειδί» για τον εντοπισμό τοπικών ακρότατων είναι ένα κριτήριο πρώτης παραγώγου.

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Αν η f(x,ψ) εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο (α,b) του πεδίου ορισμού της όπου υπάρχουν οι πρώτες μερικές της παράγωγοι, τότε $f_x(\alpha,b) = 0, f_y(\alpha,b) = 0$.

Απόδειξη Έστω ότι η f έχει **τοπικό μέγιστο** σε ένα εσωτερικό σημείο (α, b) του πεδίου ορισμού της.

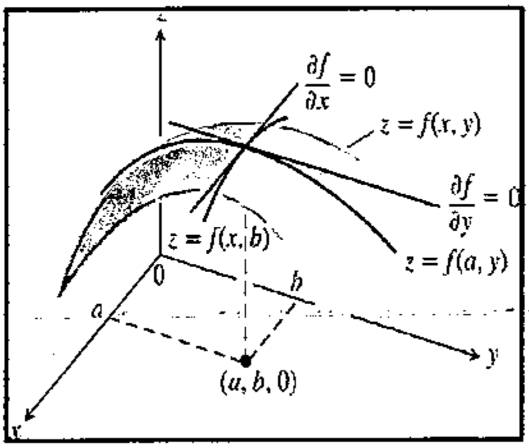
Τότε

1.Το χ =α είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της καμπύλης z=f(x,b) που αποτελεί τομή του επιπέδου y=bμε τηνεπιφάνεια Z =(f, y).

2.Η συνάρτηση z=f(x,b) είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x στο χ = α (η παράγωγος είναι fx (α,b).

3.Η συνάρτηση z=f(x,b) έχει τοπικό μέγιστο στο χ = α

4.Η τιμή της παραγώγου της z=f(x,b) στο $x = a$ είναι συνεπώς μηδέν .Εφόσον η παράγωγος είναι fx (α,b) = 0 συμπεραίνουμε ότι fx (α,b) = 0



Σχήμα 2

Για χ=α ,y=b, προκύπτει τοπικό μέγιστο της f

Αν αντικαταστήσουμε fx (α,b) = 0 και fy(α,b) = 0 στην εξίσωση fx= (α,b)(χ-α)+ fy (α,b) (y-b)-(z- f (α,b)) = 0 του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια Z= f(x,y) στο σημείο (α,b), η εξίσωση παίρνει τη μορφή 0(χ-α)+ 0 (y-b)-z+f(α,b)=0 δηλαδή Z=f(α,b).Δηλαδή αν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο τη επιφάνειας σε τοπικό ακρότατο, το επίπεδο αυτό θα είναι οριζόντιο.

Όπως ισχύει και για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, το Θεώρημα μας λέει ότι τα μόνα σημεία όπου μια συνάρτηση f(χ,y) μπορεί ποτέ να εμφανίζει ακρότατα είναι:

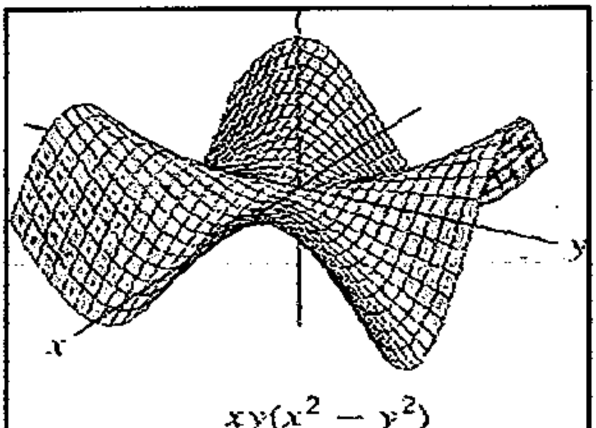
I. Εσωτερικά σημεία όπου fx= fy= 0

II. Εσωτερικά σημεία όπου μία τουλάχιστον των fχ και fy δεν υπάρχει

III. Συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως.

Ορισμός Κρίσιμο σημείο

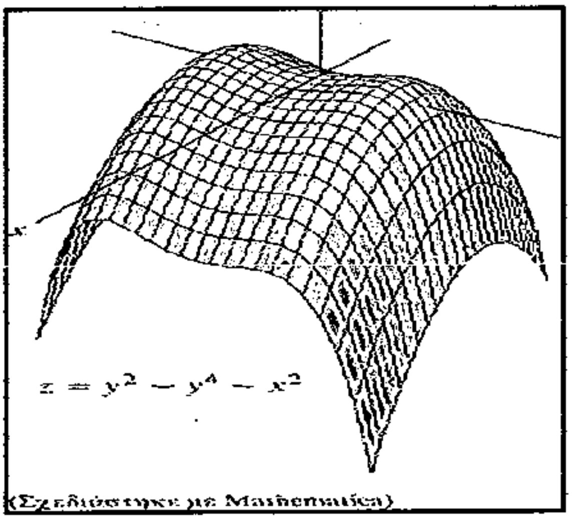
Ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f(χ,y) όπου τόσο η fχ όσο και η fy μηδενίζεται, ή όπου τουλάχιστον μία εκ των fχ και fy δεν υπάρχει καλείται κρίσιμο σημείο της f



$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

Σχήμα 3

Δηλαδή τα μόνα σημεία όπου μια συνάρτηση f(χ, y) μπορεί να εμφανίζει ακρότατα είναι τα κρίσιμα και τα συνοριακά (ακραία) σημεία. Όπως συμβαίνει και για τις διαφορίσιμες συναρτήσεις μίας μεταβλητής, ένα κρίσιμο σημείο δεν είναι απαραίτητα σημείο τοπικού ακρότατου .Μια διαφορίσιμη συνάρτηση μίας μεταβλητής μπορεί να διαθέτει ένα σημείο καμπής. Μια διαφορίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών μπορεί να διαθέτει ένα σαγματικόσημείο.



Σχήμα 4

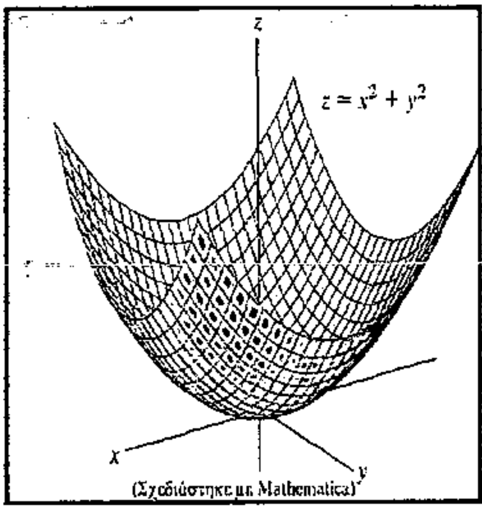
Σαγματικό σημείο (Ορισμός)

Μια διαφορίσιμη συνάρτηση f(χ, ψ) έχει σαγματικό σημείο σε ένα κρίσιμο σημείο (α,b) αν σε κάθε ανοιχτό κυκλικό δίσκο με κέντρο το (α,b) υπάρχουν σημεία (χ, y) του πεδίου ορισμού όπου f(χ, y) >(α,b) και σημεία (χ, ψ) του πεδίου ορισμού όπου f(χ, y)<f(α, b). Το σημείο (α,b,f(α,b)) πάνω στην επιφάνεια z=f(χ,y) καλείται σαγματικό σημείο.

<u>**Παράδειγμα 1**</u> Εύρεση τοπικών ακρότατων

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f(χ, y) = χ2 + y2.

Λύση Πεδίο ορισμού της f είναι όλο το επίπεδο (άρα δεν υπάρχουν συνοριακά σημεία),ενώ οι μερικές παράγωγοι fχ =2χ και fχ = 2y υπάρχουν παντού. Συνεπώς, τοπικά ακρότατα μπορούν να προκύψουν σε σημεία όπου fχ=2χ=0καιfy=2y=0.



Σχήμα5

ΣΧΗΜΑ5 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi, \psi) = \chi^2 + \psi^2$ είναι το παραβολοειδές $Z = \chi^2 + \Psi^2$. Η συνάρτηση έχει μόνο ένα κρίσιμο σημείο, στην αρχή των αξόνων. Πρόκειται για σημείο τοπικού ελαχίστου όπου η συνάρτηση παίρνει εκεί την τιμή 0. (Παράδειγμα 1)

Έτσι, μόνο πιθανό σημείο ύπαρξης ακρότατου είναι η αρχή, όπου η συνάρτηση f μηδενίζεται. Εφόσον η f δεν γίνεται ποτέ αρνητική, βλέπουμε ότι η αρχή όντως αποτελεί σημείο τοπικού ελαχίστου.

Παράδειγμα 2

Εντοπισμός και ταυτοποίηση σαγματικού σημείου

Βρείτε τα τοπικά ακρότατα (αν υπάρχουν) της $f(x,y) = y^2 - \chi$

Λύση Πεδίο ορισμού της f είναι όλο το επίπεδο (συνεπώς δεν υπάρχουν συνοριακά σημεία), ενώ οι μερικές παράγωγοι $f\chi=-2x$ και $fy=2y$ υπάρχουν παντού. Συνεπώς, τοπικά ακρότατα μπορούν να προκύψουν μονάχα στην αρχή (0, 0). Κατά μήκος του θετικού ημιάξονα X ή f παίρνει την τιμή $f(\chi, 0) = -\chi^2 < 0$ από την άλλη, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα ψ η f παίρνει την τιμή $f(0, y) = y^2 > 0$.

Συνεπώς, κάθε ανοιχτός κυκλικός δίσκος του επιπέδου χ y με κέντρο το (0, 0) θα περιέχει σημεία όπου η συνάρτηση είναι θετική και σημεία όπου η συνάρτηση είναι αρνητική. Η συνάρτηση έχει λοιπόν σαγματικό σημείο στην αρχή αντί για τοπικό ακρότατο. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση δεν διαθέτει τοπικά ακρότατα.

Το γεγονός ότι $fx=fy= 0$σε ένα εσωτερικό σημείο (α,b) του R δεν εγγυάται ότι η f θα έχει τοπικό ακρότατο εκεί. Αν ωστόσο η f και οι μερικές της παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης είναι συνεχείς στο **R**, τότε το ακόλουθο θεώρημα μπορεί να διαφωτίσει περισσότερο την κατάσταση.

1.3 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω ότι η f(χ, y) και οι μερικές της παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης είναι παντού συνεχείς σε έναν κυκλικό δίσκο με κέντρο το (α,b) και ότι $f_\chi(\alpha, b) = f_y(\alpha, b) = 0$.

Τότε

1. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο (α,b) αν $fxx < 0$ και

$fxx\, fyy - fxy^2 > 0$ στο (α, b).

2. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (α,b) αν $fxx > 0$ και

$fxx\, fyy - fxy^2 > 0$ στο (α, b).

3. Η f έχει σαγματικό σημείο στο (α, b) αν $fxx\, f\psi\psi - fxy^2 < 0$

στο (α, b).

Δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη φύση του σημείου(α, b) αν: $fxx\, fyy - fxy^2 = 0$ στο (α,b).

Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να βρούμε άλλον τρόπο μελέτης της συμπεριφοράς της f στο (α,b)).

Η έκφραση $fxx\, fyy - fxy^2$ καλείται **διακρίνουσα** της f. **Η** απομνημόνευση της είναι μάλλον ευκολότερη στη μορφή ορίζουσας

$$fxx\, fyy - fxy^2 = \begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fxy & fyy \end{vmatrix}$$

Το θεώρημα λέει ότι αν η διακρίνουσα είναι θετική στο σημείο

(α.b), τότε η επιφάνεια θα καμπυλώνεται κατά τον ίδιο τρόπο σε όλες τις κατευθύνσεις: προς τα κάτω αν **fxx< 0**, οπότε θα υπάρχει τοπικό μέγιστο, και προς τα πάνω αν **fxx > 0**, οπότε θα υπάρχει τοπικό ελάχιστο. Από την άλλη, αν η διακρίνουσα είναι αρνητική στο *(α,* b) τότε η επιφάνεια θα καμπυλώνεται προς τα πάνω σε μερικές κατευθύνσεις και προς τα κάτω σε άλλες, άρα θα έχουμε σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 3 Εύρεση τοπικών ακρότατων

Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x, y) = \chi y - \chi^2 - y^2 - 2\chi - 2y + 4$.

Λύση Η συνάρτηση ορίζεται και είναι διαφορίσιμη για κάθε χ και ψ και το πεδίο ορισμού της δεν έχει συνοριακά σημεία. Η συνάρτηση έχει συνεπώς ακρότατα μόνο σε σημεία όπου οι f_χ και f_y μηδενίζονται ταυτόχρονα. Δηλαδή σε σημεία όπου

$f\chi = y - 2\chi - 2 = 0$ και $fy = \chi - 2y\chi - 2 = 0$ δηλαδή $\chi = y = -2$.

Συνεπώς, το (-2, -2) είναι το μόνο σημείο όπου η f ενδέχεται να έχει ακρότατο. Για να δούμε τι τελικά συμβαίνει, υπολογίζουμε τις
fxx $fxx=-2$, $fyy=-2$, $fxy=1$. Η διακρίνουσα της f στο (α, b) = (-2, -2) είναι $fxx\ fyy - fxy^2 = (-2)(-2)-(1)^2 = 4-1=3$. Το γεγονός ότι $fxx<0$ και $fxx\ fyy - fxy^2 > 0$ σημαίνει ότι η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο (-2, -2). Η τιμή της f στο σημείο αυτό είναι $f(-2, -2) = 8$.

Παράδειγμα 4

Αναζήτηση τοπικών ακρότατων

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f(χ, y) = χ y

Λύση Εφόσον η f είναι διαφορίσιμη παντού θα εμφανίζει ακρότατα μόνο σε σημεία όπου:

fx = y = O και fy = χ = 0.

Με άλλα λόγια, η αρχή των αξόνων είναι το μόνο πιθανό σημείο ύπαρξης ακρότατων της f. Για να δούμε τι όντως συμβαίνει εκεί. υπολογίζουμε τις παραγώγους: $fxx\ fyy - fxy^2 = -1$ είναι αρνητική. Συνεπώς, η συνάρτηση έχει σαγματικό σημείο στο (0,0). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f(x,y) = χ y δεν έχει τοπικά ακρότατα.

1.4ΟΛΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ-ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

Η διαδικασία διερεύνησης για ολικά (ή απόλυτα) ακρότατα συνεχούς συναρτήσεως f(χ, y) σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο R μπορεί να παρουσιαστεί σε τρία βήματα.

Βήμα 1: ***Καταγράφουμε τα εσωτερικά σημεία του*** R όπου η f ενδέχεται να έχει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα και υπολογίζουμε την f στα σημεία αυτά. Πρόκειται για τα σημεία όπου $f_\chi = f_y = O$ ή όπου τουλάχιστον μία εκ των fx και f_yδεν υπάρχει (κρίσιμα σημεία της f).

Βήμα 2: ***Καταγράφουμε τα συνοριακά σημεία*** του β όπου η f έχει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα και υπολογίζουμε την f στα σημεία αυτά.

Βήμα 3: ***Από τα σημεία που καταγράψαμε***, απομονώνουμε εκείνα που αντιστοιχούν στη μεγαλύτερη και στη μικρότερη τιμή της f. Στα σημεία αυτά η f εμφανίζει ολικά ακρότατα στο R. Εφόσον ένα ολικό ακρότατο είναι και τοπικό ακρότατο, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να εντοπίσουμε από τον κατάλογο των σημείων που κάναμε στα βήματα 1 και 2, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

Εύρεση ολικών ακρότατων

Παράδειγμα 5

Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της

$f(\chi,y) = 2+2\chi+2y-x^2-y^2$

στο τριγωνικό χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τις ευθείες $\chi = 0$, $y = 0$, $y = 9-X$

Λύση Εφόσον η f είναι διαφορίσιμη, τα μόνα υποψήφια σημεία είναι εκείνα στο εσωτερικό του τριγώνου όπου $f_x = fy = 0$ καθώς και τα συνοριακά σημεία.

Εσωτερικά σημεία

Έχουμε $f_\chi = 2 - 2\chi = O$, $f_y = 2 - 2y = 0$,οπότε προκύπτει ως υποψήφιο το σημείο $(\chi, y) = (1, 1)$. Η τιμή της f εκεί είναι $f(1,1)=4$.

Συνοριακά σημεία

Ερευνούμε μία προς μία τις πλευρές του τριγώνου:

1. Ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ = 0

Η συνάρτηση $f(\chi, y) = f(\chi,0) = 2+2\chi-x^2$ μπορεί τώρα να θεωρηθεί ως συνάρτηση του χ ορισμένη στο κλειστό διάστημα $0 \leq x \leq 9$.

Τα ακρότατα της συνάρτησης αυτής μπορεί να προκύψουν στα συνοριακά σημεία

$x = 0$ όπου $f(0,0)=2$

$x = 9$ όπου $f(9,0)=2+18-81=-61$

καθώς και στα εσωτερικά σημεία όπου $f'(\chi, 0) = 2 - 2\chi = 0$. Το όνο εσωτερικό σημείο όπου $f'(x, 0) = 0$ είναι το $x= 1$. όπου $f(x,0) = f(1,0)=32$.

2. Ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ, $\chi = 0$

Η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(\chi,y) = f(0,y) =2+2y-y^2$. Λόγω της συμμετρίας της f στην εναλλαγή των χ και y και λόγω της ανάλυσης που προηγήθηκε, γνωρίζουμε ότι υποψήφια σημεία ολικού ακρότατου είναι τα σημεία όπου $f(0, 0) = 2, f(0, 9)=-61$, $f(0, 1) = 3$

3. Εφόσον έχουμε ήδη ασχοληθεί με τα άκρα του τμήματος ΑΒ το μόνο που μας μένει είναι να εξετάσουμε εσωτερικά σημεία του ΑΒ . Για $y = 9-x$, παίρνουμε

$f(\chi, y) =2+2x +2(9 - x)^2 = -61 + 18x -2x^2$.

Θέτοντας $f'(x, 9 - \chi) = 18 - 4x = 0$, παίρνουμε $x=18/4=9/2$. Για την τιμή αυτή του χ ,$y=9-9/2=9/2$ και $f(x,y)=f(9/2,9/2)=-41/2$

Η επίλυση προβλημάτων ακρότατων υπό συνθήκη απαιτεί συνήθως εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών **Lagrange.**Ωστόσο, μερικές φορές μπορούμε να λύσουμε τέτοια προβλήματα και πιο άμεσα, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6

Εύρεση όγκου υπό συνθήκη

Μια ιδιωτική ταχυδρομική εταιρεία δέχεται μονάχα δέματα συσκευασμένα σε ορθογώνια κουτιά για τα οποία το άθροισμα του μήκους και της περιφέρειας (που ορίζεται ως η περίμετρος μιας εγκάρσιας διατομής) δεν υπερβαίνει τα 108 cm. Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού μέγιστου αποδεκτού όγκου.

Λύση

Έστω χ, y, και z το μήκος, το πλάτος, και το ύψος του ορθογώνιου κουτιού, αντίστοιχα. Η περιφέρεια ισούται με 2y + 2z. Επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε τον όγκο V = χyz του κουτιού ικανοποιώντας ταυτόχρονα τη σχέση χ + 2y + 2z = 108 (που αντιστοιχεί στο κουτί μέγιστου όγκου που δέχεται η εταιρεία). Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε τον όγκο του κουτιού ως συνάρτηση δύο μεταβλητών.

$V(y, z) = (108 - 2y - 2z)\, y\, z$ εφόσον $V = xyz = 108yz - 2y^2 z - 2yz^2$

$\chi = 108 - 2y - 2z$

Θέτοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους ίσες με το μηδέν,

$Vy(y,z) = 108z - 4yz - 2z^2 = (108 - 4y - 2z)z = 0$

$Vz(y,z) = 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0$ παίρνουμε τα κρίσιμα σημεία (0, 0), (0,54), (54.0), και (18, 18). Ο όγκος μηδενίζεται στα σημεία (0, 0), (0, 54), (54, 0), τα οποία συνεπώς δεν μας ενδιαφέρουν. Στο σημείο (18,18), εφαρμόζουμε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου:

$Vyy = -4z, \quad Vzz = -4y, \quad Vyz = 108 - 4y - 4z$

$Vyy\, Vzz - Vyz^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2$

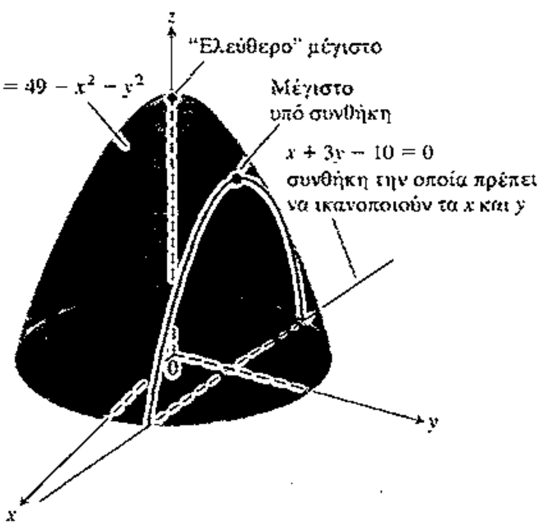
Συνεπώς $Vyy = (18,18) = -4(18) < 0$ και

$[Vyy\, Vzz - Vyz^2]\,(18,18) = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$

πράγμα που σημαίνει ότι το σημείο (18, 18) αντιστοιχεί στον μέγιστο όγκο. Οι ζητούμενες διαστάσεις του κουτιού είναι λοιπόν χ = 108 -2(18) - 2(18) = 36 cm, y = 18 cm, και z = 18 cm. Ο μέγιστος όγκος ισούται με V = (36)(18)(18) = 11.664cm3, δηλ. 0,011664 m3.

1.5 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ Lagrange

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε μια σημαντική μέθοδο εύρεσης ακρότατων συναρτήσεων που υπόκεινται σε κάποια περιοριστική συνθήκη: πρόκειται για τη ***μέθοδο των πολλαπλασιαστών*** **Lagrange.**Ο **Lagrange** ανέπτυξε τη μέθοδο αυτή το 1755 για να λύσει προβλήματα μεγίστων- ελαχίστων στη γεωμετρία. Στις μέρες μας. η μέθοδος βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στα οικονομικά, στις επιστήμες μηχανικού (π. χ. στη σχεδίαση πυραύλων), και στα μαθηματικά.



Μερικές φορές χρειάζεται να βρούμε τα ακρότατα συναρτήσεως της οποίας το πεδίο ορισμού περιορίζεται σε ένα δεδομένο υποσύνολο του επιπέδου, π.χ. σε έναν κυκλικό δίσκο ή σε ένα κλειστό τριγωνικό χωρίο. Όπως όμως είδαμε μια συνάρτηση ενδέχεται να υπόκειται σε περαιτέρω περιορισμούς

ΣΧΗΜΑ7 Η συνάρτηση f(χ, y) = 49-x^2 -y^2 υπόκειται στη συνθήκη g(χ, y) = x+3y-10=0

<u>Μέγιστα και ελάχιστο υπό συνθήκη</u>

<u>Παράδειγμα 6</u> *Εύρεση ελαχίστου υπό συνθήκη*

Βρείτε το σημείο P(χ, y, z) που είναι εγγύτερα στην αρχή και ανήκει στο επίπεδο 2x + y-z-5=0

<u>Λύση</u> Ζητείται να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως

$|OP| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

υπό τη συνθήκη ότι 2x-y-z-5 = 0. Εφόσον η ποσότητα | OP | ελαχιστοποιείται όταν και η συνάρτηση f(x,y,z)= $x^2+y^2+z^2$ ελαχιστοποιείται, θα λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της f(x,y,z) υπό τη συνθήκη ότι 2χ + y - z -5 = 0 (αποφεύγουμε δηλαδή τις τετραγωνικές ρίζες). Αν θεωρήσουμε τα χ και y ως τις ανεξάρτητες μεταβλητές της εξίσωσης αυτής και γράψουμε Z = 2χ + γy- 5,τότε το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε ανάγεται στην εύρεση των σημείων (χ, y) για τα οποία η συνάρτηση:

h(x,y)= f(x,y,2x+y-5)=x^2+y^2 +(2x+y-5) ^{2} ελαχιστοποιείται. Και εφόσον το πεδίο ορισμού της h είναι όλο το επίπεδο χy, το κριτήριο της πρώτης παραγώγου μας λέει ότι τα ελάχιστα, της h (αν υπάρχουν) θα προκύπτουν σε σημεία όπου:

hx = 2χ + 2(2χ + γ - 5)(2) = θ,hy = 2y + 2(2x + >y - 5) = 0. Αυτό σημαίνει ότι 10χ + 4y = 20, 4χ + 4y = 10, οπότε η λύση είναι x=5/3 και y=5/6.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα γεωμετρικό επιχείρημα, σε συνδυασμό με το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου, για να δείξουμε ότι οι τιμές των χ και y που βρήκαμε ελαχιστοποιούν την h. Η συντεταγμένη z του αντίστοιχου σημείου στο επίπεδο z = 2χ + γ - 5 είναι z=2(5/3)+5/6-5=-5/6.

Εγγύτερο σημείο: P=($\frac{5}{3}$, $\frac{5}{6}$, $-\frac{5}{6}$) Η απόσταση από το *P* έως την αρχή είναι 5/√6 ≈ 2,04.

Η επίλυση προβλημάτων ακρότατων υπό συνθήκη με τη μέθοδο της αντικατάστασης δεν είναι πάντα πρόσφορη .Για αυτό υπάρχει εναλλακτική μέθοδο επίλυσης τέτοιων προβλημάτων.

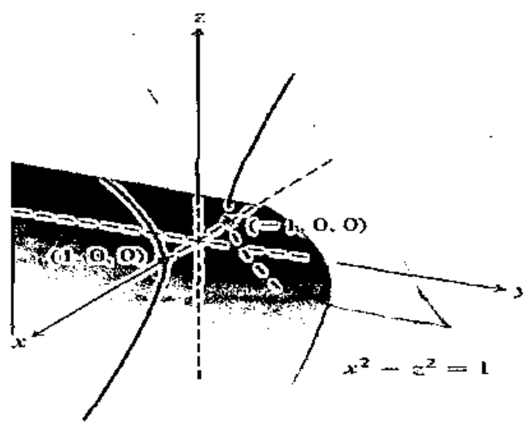
Παράδειγμα 7

Εύρεση ελαχίστου υπό συνθήκη

Βρείτε τα σημεία του υπερβολικού κυλίνδρου $x^2 - z^2 - 1 = 0$ που είναι εγγύτερα στην αρχή.

Λύση1 Ο κύλινδρος φαίνεται στο διπλανό(**σχήμα 8**) .Ζητούμε να βρούμε τα σημεία στον κύλινδρο που απέχουν ελάχιστη απόσταση από την αρχή. Πρόκειται για τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες ελαχιστοποιούν την τιμή της συναρτήσεως:

$f(\chi, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και υπόκεινται στη συνθήκη $\chi^2 - z^2 - 1 = 0$.



Αν θεωρήσουμε τα χ και y ως ανεξάρτητες μεταβλητές στην τελευταία εξίσωση, τότε

$z^2 = x^2 - 1$ οπότε οι τιμές που παίρνει η $f(\chi, y, z) = \chi^2 + y^2 + z^2$ πάνω στον κύλινδρο δίνονται από τη συνάρτηση:

$h(x,y) = \chi^2 + y^2 + (\chi^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$

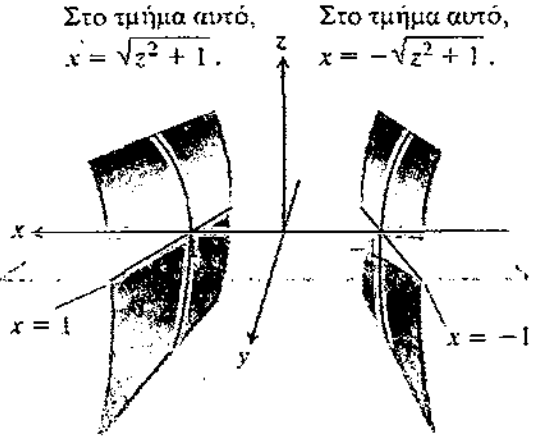
Προκειμένου να βρούμε τα σημεία πάνω στον κύλινδρο των οποίων οι συντεταγμένες ελαχιστοποιούν την f, ερευνούμε για σημεία του επιπέδου xy των οποίων οι συντεταγμένες ελαχιστοποιούν την h. Το μόνο ακρότατο της h προκύπτει όταν $h_\chi = 4x = 0$ και $h_y = 2y = 0$ δηλαδή, στο σημείο (0,0). Ωστόσο, τώρα τίθεται το ερώτημα: Δεν υπάρχουν σημεία πάνω στον κύλινδρο όπου τα χ και v να μηδενίζονται ταυτόχρονα;

Αυτό που συνέβη είναι ότι το κριτήριο της πρώτης παραγώγου εντόπισε (ως όφειλε) ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της h όπου η h εμφανίζει ελάχιστο. Όμως εμείς ζητούμε σημεία πάνω στον κύλινδρο όπου η **h** να ελαχιστοποιείται. Παρ' όλο που το πεδίο ορισμού της **h** είναι όλο το επίπεδο x,y, το σημειοσύνολο απ' όπου μπορούμε να αντλήσουμε τις πρώτες δύο συντεταγμένες των σημείων (χ, y, z) επί του κυλίνδρου περιορίζεται στη «σκιά» του κυλίνδρου στο επίπεδο XY,δεν περιέχει δηλαδή τη λωρίδα μεταξύ των ευθειών x = - 1 και x=1.

Αυτό το πρόβλημα αποφεύγεται αν χειριστούμε τις y και z ως ανεξάρτητες μεταβλητές (αντί για τις χ και y) και εκφράσουμε το x συναρτήσει των y και z ως $x^2=z^2+1$.Με την αντικατάσταση αυτή η $f(\chi, y, z) = \chi^2 + y^2 + z^2$ γίνεται $k(y,z)= z^2+1+ y^2 + z^2 = 1+ y^2 + 2z^2$ οπότε θα ερευνήσουμε τώρα για σημεία όπου η k ελαχιστοποιείται. Το πεδίο ορισμού της k στο επίπεδο yz συμπίπτει τώρα με το σημειοσύνολο απ' όπου αντλούν τιμές οι συνιστώσες y και z των σημείων (χ, y, z) πάνω στον κύλινδρο. Συνεπώς, τα σημεία που ελαχιστοποιούν την k στο επίπεδο θα έχουν τα αντίστοιχα τους σημεία στον κύλινδρο. Οι ελάχιστες τιμές της k θα προκύπτουν για :

$k_y=2y=0$ και $k_z=4z=0$ δηλαδή για $y=z=0$.

Αυτό σημαίνει ότι $y^2= z^2+1=1$, $x=\pm1$



Ο υπερβολικός κύλινδρος $x^2 - z^2 = 1$ δεν περιέχει κανένα (χ,y,z) του οποίου οι συντεταγμένες χ και y να ανήκουν στη ζώνη $-1 < \chi < 1$ του επιπέδου xy.

ΣΧΗΜΑ 9

Τα αντίστοιχα σημεία στον κύλινδρο είναι $(\pm1, 0, 0)$. Από την ανισότητα $k(y,z)= 1+ y^2 + 2z^2\geq 1$ βλέπουμε ότι η k ελαχιστοποιείται στα σημεία $(\pm1,0,0)$. Επίσης βλέπουμε ότι η ελάχιστη απόσταση από την αρχή μέχρι την επιφάνεια του κυλίνδρου ισούται με 1 .

<u>Λύση 2</u> Ένας άλλος τρόπος εύρεσης των πλησιέστερων σημείων του κυλίνδρου στην αρχή των αξόνων, είναι να φανταστούμε μια μικρή σφαίρα με κέντρο στην αρχή, η οποία «φουσκώνει» ομοιόμορφα μέχρι να αγγίξει τον κύλινδρο. Σε κάθε σημείο επαφής, ο κύλινδρος και η σφαίρα έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο και κοινή κάθετη ευθεία.

Συνεπώς, αν η σφαίρα και ο κύλινδρος παριστάνονται από τις ισοσταθμικές επιφάνειες που προκύπτουν εξισώνοντας με το μηδέν τις $f(\chi, y, z) = \chi^2 + y^2 + z^2 -\alpha^2$ και τις $g(\chi, y, z) = \chi^2 + z^2 -1$ τότε οι κλίσεις Δf και Δg θα είναι παράλληλες όταν οι επιφάνειες αγγίζουν η μία την άλλη. Σε κάθε σημείο επαφής, θα περιμένουμε λοιπόν ότι είναι δυνατή η εύρεση μιας βαθμωτής ποσότητας λ τέτοιας ώστε $\Delta f=\lambda\ \Delta g$ δηλαδή $2\chi i+2yi+2zk=\lambda(2xi-2zk)$. Έτσι οι συντεταγμένες χ,y,z κάθε σημείου επαφής οφείλουν να ικανοποιούν τις εξής τρεις εξισώσεις

$2\chi=2\lambda x$,$2y=0$ και $2z=-2\lambda z$ (1)

Για ποιες τιμές του λ θα ανήκει στην επιφάνεια $\chi^2 - z^2 -1=0$ ένα σημείο με συντεταγμένες (χ, y, z) που ικανοποιούν τις Εξισώσεις (1); Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, χρησιμοποιούμε το γνωστό μας γεγονός ότι κανένα σημείο της επιφάνειας δεν θα έχει μηδενική x-συντεταγμένη. Συμπεραίνουμε έτσι ότι θα ισχύει $\chi\neq0$ στην πρώτη από τις Εξισώσεις (1). Συνεπώς, θα ισχύει $2\chi = 2\lambda\chi$ μόνον αν $2 = 2\lambda$ δηλ. $\lambda = 1$.Για $\lambda = 1$, η εξίσωση $2z =-2\lambda z$ γίνεται $2z = - 2z$. Για να ισχύει και η εξίσωση αυτή, το z πρέπει να είναι μηδέν. Ισχύει ακόμη ότι $y = 0$(από την εξίσωση $2y = 0$), οπότε συμπεραίνουμε ότι τα ζητούμενα σημεία θα έχουν συντεταγμένες της μορφής (χ, 0, 0).

Ποια σημεία πάνω στην επιφάνεια $\chi^2-z^2- 1$ έχουν τέτοιες συντεταγμένες; Απάντηση: Τα σημεία (χ, 0, 0} για τα οποία $x^2-(0)^2= 1$, $x^2 =1$ δηλ $\chi= \pm1$.Τα πλησιέστερα στην αρχή σημεία του κυλίνδρου είναι συνεπώς τα $(\pm1,0,0)$.

Στη <u>Λύση 2</u> του Παραδείγματος 7 εφαρμόσαμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών **Lagrange**. Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος αυτή λέει ότι αν οι μεταβλητές μιας συνάρτησης f(χ, y, ζ) ικανοποιούν τη συνθήκη $g(\chi, y, z) = 0$, τα ακρότατα θα ανήκουν στην επιφάνεια $g =0$ και συγκεκριμένα σε σημεία όπου $\Delta f=\lambda\ \Delta g$ για κάποιο βαθμωτό Λ (που καλείται πολλαπλασιαστής **Lagrange**).

1.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ Lagrange

Έστω Α ανοικτό υποσύνολο του R^n και έστω $f: A \to R$ συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i=1,2,...,n$ **και είναι συνεχείς. Έστω για τις συναρτήσεις** $g_k: A \to R, k=1,2,...,m$, **όπου** $m \leq n-1$ **ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι** $i=1,2,...,n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x_1,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1,...,x_n)$

όπου $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση G καλείται συνάρτηση του *Lagrange* ενώ οι πραγματικοί αριθμοί λ_k, $k=1,2,...,m$ πολλαπλασιαστές του *Lagrange*.

Στη συνέχεια θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \frac{\partial G}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} = 0 \\ g_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ g_2(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases}$$

Εάν το σημείο $\bar{\xi} = (\xi_1,\xi_2,...,\xi_\nu) \in$ Α είναι το τοπικό ακρότατο για την συνάρτηση f που ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, k = 1,2,\ldots,m$

Τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ έτσι ώστε το σημείο $\overline{k} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ να είναι λύση του παραπάνω συστήματος.

Έτσι στην πράξη προσπαθούμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα. Εάν η $\overline{k} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ είναι μία λύση του συστήματος, τότε το σημείο $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ενδέχεται να είναι τοπικό ακρότατο της f που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, k = 1,2,\ldots,m$

Τώρα έστω:

$$\Delta_1(\overline{k}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial g_1(\overline{\xi})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(\overline{\xi})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial g_1(\overline{\xi})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m(\overline{\xi})}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 G(\overline{k})}{\partial x_n^2} & \frac{\partial g_1(\overline{\xi})}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m(\overline{\xi})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1(\overline{\xi})}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_1(\overline{\xi})}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(\overline{\xi})}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_m(\overline{\xi})}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

και $\Delta_i(\overline{k}), i = 0,1,2,\ldots,n-m$ η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου α_{11} της ορίζουσας $\Delta_{i-1}(\overline{k})$.

Τότε έχουμε:

Α. Εάν $\Delta_i(\overline{k})<0$, **για κάθε** $i=0,1,2,\ldots,n-m$ **και** m **περιττός, τότε το σημείο** $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ **είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού ελαχίστου.**

Β. Εάν $\Delta_i(\overline{k})>0$, **για κάθε** $i=0,1,2,\ldots,n-m$ **και** m **άρτιος, τότε το σημείο** $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ **είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού ελαχίστου.**

C. Εάν $(-1)^i\Delta_i(\overline{k})>0$, **για κάθε** $i=0,1,2,\ldots,n-m$ **και** n **περιττός, τότε το σημείο** $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ **είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού μεγίστου.**

Η εύρεση τοπικών ακρότατων με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του *Lagrange* είναι αρκετά χρονοβόρα και επίπονη. Για το λόγο αυτό θα παρατεθούν μερικές ειδικές περιπτώσεις που συνήθως χρησιμοποιούνται σε πάρα πολλά προβλήματα και εφαρμογές οι παρακάτω περιπτώσεις αποτελούν απλή εφαρμογή της γενικής θεωρίας που αναφέρθηκε παραπάνω για τους πολλαπλασιαστές *Lagrange*.

1.6.1.ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ Lagrange ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

<u>Περίπτωση 1η :</u> Πολλαπλασιαστές Lagrange με δύο αγνώστους

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του R^2 και $f:A\rightarrow R$ συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, i=1,2$$

και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έστω η συνάρτηση $g:A\to R$ για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}, i=1,2$$

και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Ζητούνται τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης f με τον περιορισμό $g(x_1,x_2)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$$

και λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\lambda\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial G(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}+\lambda\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0. \\ g(x_1,x_2)=0 \end{cases}$$

Έστω $\bar{k}=(\xi_1,\xi_2,\lambda)$ λύση του συστήματος και έστω

$$\Delta_1(\bar{k})=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial g(\bar{\xi})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial g(\bar{\xi})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g(\bar{\xi})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g(\bar{\xi})}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

Τότε έχουμε:

1) Εάν $\Delta_1(\bar{k})<0$, τότε το σημείο $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού ελαχίστου.

2) Εάν $(-1)^{1}\Delta_1(\bar{k})<0$ ή $\Delta_l(\bar{k})>0$, τότε το σημείο $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού μεγίστου.

1.6.2.ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ Lagrange ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Περίπτωση 2: ***Πολλαπλασιαστές Lagrange με τρεις αγνώστους***

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του R^3 και $f:A\to R$ συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i=1,2,3$$

και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Ζητούνται τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης f με τον περιορισμό $g(x_1,x_2,x_3)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $G(x_1,x_2,x_3,\lambda)=f(x_1,x_2,x_3)+\lambda g(x_1,x_2,x_3)$

και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}+\lambda\dfrac{\partial g(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}+\lambda\dfrac{\partial g(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_3}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}+\lambda\dfrac{\partial g(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}=0 \\ g(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases}.$$

Έστω $\bar{k}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\lambda)$ λύση του συστήματος και έστω:

$$\Delta_1\left(\bar{k}\right)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_3^2} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1\left(\bar{k}\right)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 G\left(\bar{k}\right)}{\partial x_3^2} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g\left(\bar{\xi}\right)}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix}.$$

Τότε έχουμε:

A. Εάν $\Delta_i\left(\bar{k}\right)<0,\ i=1,2$, τότε το σημείο (ξ_1,ξ_2,ξ_3) είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού ελαχίστου.

B. Εάν $(-1)^i\Delta_i\left(\bar{k}\right)>0$, τότε το σημείο (ξ_1,ξ_2,ξ_3) είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού μεγίστου.

Στο σημείο αυτό παρατίθεται ένα παράδειγμα της χρήσης πολλαπλασιαστών *Lagrange* για την επίλυση προβλημάτων. Προτού εξετάσουμε προσεκτικά τη μέθοδο, κάνουμε την εξής παρατήρηση, την οποία παραθέτουμε υπό μορφή θεωρήματος.

<u>θεώρημα ορθογώνιας κλίσης</u>

Έστω ότι η f(χ, y, ζ)είναι διαφορίσιμη σε περιοχή στο εσωτερικό της οποίας υπάρχει μια λεία καμπύλη

C: r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k

Αν υπάρχει σημείο P0 της C όπου η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο, τότε στο σημείο P0 η Δf είναι ορθογώνια στη C.

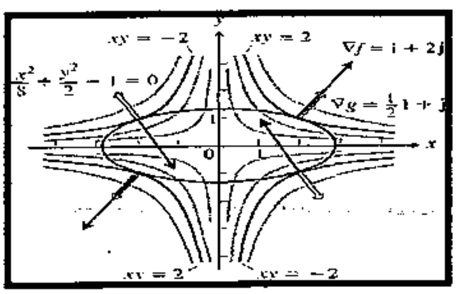
Απόδειξη Θα δείξουμε ότι το Δf είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα της ταχύτητας σώματος που βρίσκεται στο σημείο P0 κινούμενο επί της καμπύλης. Οι τιμές της f στη C δίνονται από τη σύνθετη συνάρτηση ,f(g(t),h(t),k(t)), της οποίας η παράγωγος ως προς t είναι df/dt=df dg/dxdt+dfdh/dydt+dfdk/gzdt=Δf v

Σε τυχόν σημείο P0 όπου η f έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σχετικά με τις υπόλοιπες τιμές που παίρνει επί της καμπύλης, θα είναι df/dt= 0 οπότε Δf v =0

Αν στο Θεώρημα αγνοήσουμε τους όρους που σχετίζονται με τη μεταβλητή z, παίρνουμε ένα αντίστοιχο θεώρημα που ισχύει για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Πόρισμα θεωρήματος

Σε σημεία λείας καμπύλης r(t) = g(t)i +h(t)j όπου μια διαφορίσιμη συνάρτηση f(χ, y) εμφανίζει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα σχετικά με τις τιμές της στο υπόλοιπο της καμπύλης, θα ισχύει Δfv =0 . Το Θεώρημα 12 είναι το κλειδί της μεθόδου των



πολλαπλασιαστών **Lagrange** .

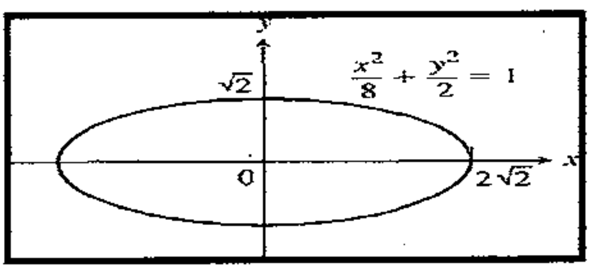
Έστω ότι οι f(χ, y, z) και g(χ, y, z) είναι διαφορίσιμες και ότι το P0 είναι σημείο της λείας επιφάνειας g(χ, y, z) = 0 όπου η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο συγκρινόμενη με τιμές που παίρνει πάνω στην επιφάνεια. Στην περίπτωση αυτή, η f θα εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο P0 συγκρινόμενη με τιμές που παίρνει σε κάθε διαφορίσιμη καμπύλη που διέρχεται από το P0 και ανήκει στην επιφάνεια g (x, y, z) = 0.

Συνεπώς, το Δf θα είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα της ταχύτητας σε κάθε τέτοια διαφορίσιμη καμπύλη που διέρχεται από το P0. Το ίδιο όμως θα ισχύει και για το Δ g , (διότι τοΔ g είναι ορθογώνιο στη λεία ισοσταθμική καμπύλη g = 0. Συνεπώς, στο P0 το Δf θα ισούται με κάποιο βαθμωτό πολλαπλάσιο λ του Δ g. Σημειώστε ότι είναι Δ g $\neq 0$ δεδομένου ότι η επιφάνεια g = 0 θεωρήθηκε λεία.

Παράδειγμα 8

Χρήση της μεθόδου των πολλαπλασιαστών **Lagrange**

Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση f(χ,y)=xy στην έλλειψη $\chi^2 / 8 + y^2/2 = 1$(Σχήμα 10)



Λύση

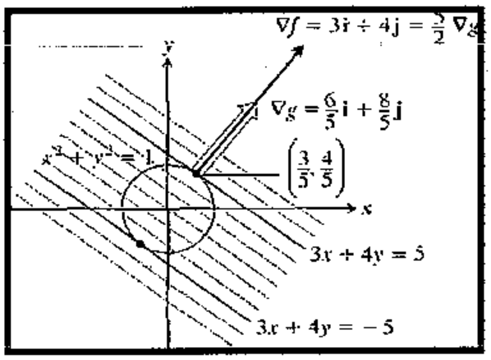
Ζητούμε τα ακρότατα της f(χ, y) = χy υπό τη συνθήκη ότι g(χ,y)= $\chi^2 / 8 + y^2/ 2 - 1 = 0$ Βρίσκουμε πρώτα τις τιμές των *χ*, *y*, και z για τις οποίες ισχύει ότι Δf=λΔg και g(x,y)=0. Η πρώτη εξίσωση δίνει απ' όπου βρίσκουμε ότι yi+xj=λ/4xi+λyj από όπου βρίσκουμε ότι y=λ4/x, x=λy και y=λ(λy)/4= $\lambda^2 y/4$

οπότε y = 0 ή λ = ±2.

Εξετάζουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Αν y = 0τότε χ = y = 0. Όμως το σημείο (0, 0) δεν ανήκει στην έλλειψη. Συνεπώς, y $\neq 0$.

Περίπτωση 2: Αν y $\neq 0$, τότε λ = ±2 και x =± 2y. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση g(χ, y) = O παίρνουμε $(\pm 2y)^2/8+y^2/2=1, 4y^2+4y^2=8$ και y=±1Η συνάρτηση f(x, y) = χy θα εμφανίζει λοιπόν ακρότατα στα τέσσερα σημεία (±2, 1), (±2, -1) της έλλειψης. Οι ακρότατες τιμές είναι χy = 2 και χy = -2.



Η γεωμετρία της λύσης

Οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης f(x,y)=xy είναι οι υπερβολές xy = c(σχήμα 11). Όσο περισσότερο απέχουν από την αρχή οι υπερβολές, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή της f. Ζητούμε τα ακρότατα τηςf(x, y), δεδομένου ότι το σημείο (x, y) ανήκει επίσης στην έλλειψη $\chi^2 + 4y^2 = 8$. Ποιες από τις υπερβολές που τέμνουν την έλλειψη απέχουν μέγιστη απόσταση από την αρχή; Πρόκειται για τις υπερβολές που περνούν «ξυστά» από την έλλειψη, δηλαδή που εφάπτονται με αυτήν. Στα σημεία επαφής, κάθε διάνυσμα κάθετο στην υπερβολή θα είναι και κάθετο στην έλλειψη, οπότε το $\Delta f=yi+x\, j$ θα είναι πολλαπλάσιο ($\lambda = \pm 2$) του $\Delta g=(x/4)i+y\, j$. Στο σημείο (2,1), για παράδειγμα, $\mathbf{\Delta f=2i+2j}$, $\mathbf{\Delta g=1/2i+j}$ **και** $\mathbf{\Delta f=2\Delta g}$. Στο σημείο (-2,1), για παράδειγμα $\mathbf{\Delta f=i-2j}$, $\mathbf{\Delta g=-1/2i+j}$ **και** $\mathbf{\Delta f=-2\Delta g}$

Παράδειγμα 9

Εύρεση ακρότατων συναρτήσεως σε κύκλο

Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως $f(\chi, y) = 3\chi + 4y$ στον κύκλο $\chi^2 + y^2 - 1$

Λύση θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών **Lagrange**

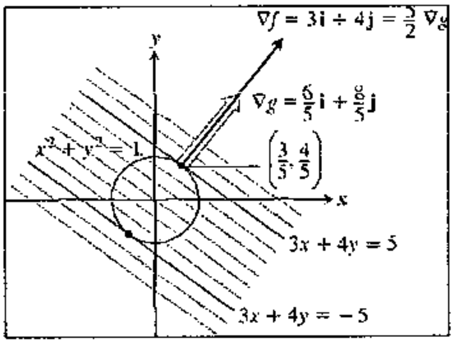
$f(\chi, y) = 3\chi + 4y$, $g(\chi, y) = \chi^2 + y^2 - 1$

και θα ερευνήσουμε για τιμές των x, y, και λ που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$\Delta f=\lambda\Delta g$: $3i + 4j = 2x\lambda i+2y\lambda j$

$f(\chi, y)=0$: $g(\chi, y) = \chi^2 + y^2 - 1=0$

Η πρώτη εξίσωση συνεπάγεται ότι $\lambda \neq 0$ και μας δίνει $x=3/2\lambda, y=2/\lambda$ Οι εξισώσεις αυτές μας λένε, μεταξύ άλλων, ότι τα x και y είναι ομόσημα. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές των χ και y στην εξίσωση $g(\chi,y) = 0$ παίρνουμε $(3/2\lambda)^2+(2/\lambda)^2-1=0$, δηλαδή $9/4\lambda^2+4/\lambda^2=1$, $9+16=4\lambda^2$, $4\lambda^2=25$ και $\lambda=\pm 5/2$. Συνεπώς $x=3/2\lambda=\pm 3/5$ και $y=2/\lambda=\pm 4/5$ και έτσι η $f(\chi, y) = 3x + 4y$ εμφανίζει ακρότατα στα σημεία $(\chi, y) = \pm(3/5,4/5)$. Αν υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης $3x + 4y$ στα σημεία $\pm(3/5, 4/5)$, θα δούμε ότι οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της πάνω στην κυκλική καμπύλη $\chi^2 + y^2 = 1$ θα είναι 3(3/5)+4(4/5)= 25/5=5 και 3(-3/5)+4(-4/5)=-25/5=-5



(σχήμα 12)

Η γεωμετρία της λύσεως

Οι ισοσταθμικές καμπύλες της f(χ, y) = 3χ + 4y είναι οι ευθείες 3χ + 4y = c . Όσο μακρύτερα κείνται οι καμπύλες από την αρχή, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή της f. Ζητούμε τα ακρότατα της f(x, y) δεδομένου ότι το σημείο (χ, y) ανήκει επίσης στον κύκλο $\chi^2 + y^2 = 1$. Ποιες από τις ευθείες που τέμνουν τον κύκλο απέχουν μέγιστη απόσταση από την αρχή; Πρόκειται για τις ευθείες που εφάπτονται του κύκλου .Στα σημεία επαφής, κάθε διάνυσμα κάθετο στην ευθεία είναι και κάθετο στον κύκλο, οπότε η κλίση Δf= 3i + 4j είναι πολλαπλάσιο (λ=±5/2) της κλίσης Δg = 2xi + 2yi. Στο σημείο (3/5,4/5), για παράδειγμα Δf= 3i + 4j, Δg = 6/5 xi + 8/5yj και Δf=5/2Δg

1.6.3ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ Lagrange ΜΕ ΔΥΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

<u>Περίπτωση 3η</u> : Πολλαπλασιαστές συνθήκες Lagrange με δύο

συνθήκες

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του R^3 και $f: A \to R$ συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, i=1,2,3$$

και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έστω οι συναρτήσεις $g_j: A \to R,\ j=1,2$ για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}, i=1,2,3$ και $j=1,2$

και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Ζητούνται τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης με τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,x_3)=0 \\ g_2(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$G(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)=f(x_1,x_2,x_3)+\lambda_1 g_1(x_1,x_2,x_3)+\lambda_2 g_2(x_1,x_2,x_3)$$

και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial g_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}+\lambda_2\dfrac{\partial g_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_3}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}+\lambda_2\dfrac{\partial g_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}=0 \\ g(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases}.$$

Έστω $\overline{k}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\lambda_1,\lambda_2)$ λύση του συστήματος και έστω:

$$\Delta_1(\bar{k})=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial g_1(\bar{\xi})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(\bar{\xi})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial g_1(\bar{\xi})}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2(\bar{\xi})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 G(\bar{k})}{\partial x_3^2} & \frac{\partial g_1(\bar{\xi})}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2(\bar{\xi})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1(\bar{\xi})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\bar{\xi})}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1(\bar{\xi})}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_2(\bar{\xi})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(\bar{\xi})}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2(\bar{\xi})}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Τότε έχουμε:

Α. Εάν $\Delta 1(\bar{k})$ έχει εναλλαγή στο πρόσημο με τη $\Delta_{1+m}(\bar{k})$ τότε το σημείο (ξ_1,ξ_2,ξ_3) είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού μεγίστου.

Β. Εάν $\Delta 1(\bar{k})$ δεν έχει εναλλαγή στο πρόσημο με τη $\Delta_{1+m}(\bar{k})$ τότε το σημείο (ξ_1,ξ_2,ξ_3) είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού ελαχίστου.

Σε πολλά προβλήματα μας ζητούνται τα ακρότατα μιας διαφορίσιμης συναρτήσεως f(χ, y, z) της οποίας οι μεταβλητές υπόκεινται σε δύο συνθήκες. Αν οι συνθήκες αυτές είναι οι

$g_1(x,y,z)=0$ και $g_2(x,y,z) = 0$ και οι g_1, και g_2, είναι

διαφορίσιμες, με την κλίση Δg_1 μη παράλληλη στην κλίση Δg_2, τότε μπορούμε να βρούμε τα υπό συνθήκη μέγιστα και ελάχιστα της f εισάγοντας δύο πολλαπλασιαστές **Lagrange** λ και μ. Με άλλα λόγια, εντοπίζουμε τα σημεία P(χ, y, z) όπου η f παίρνει τα υπό συνθήκη ακρότατα της, με το να βρούμε τις τιμές των χ, y, z, λ, και μ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις

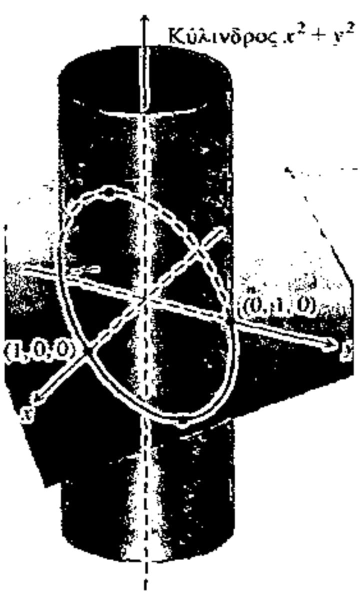
$\Delta f=\lambda\Delta g_1+\mu\Delta g_2$

$g_1\ (\chi,\ y,\ z)=0, \qquad g_2\ (x,y,z)=0 \qquad (2)$

Οι Εξισώσεις (2) έχουν μια ωραία γεωμετρική ερμηνεία. Οι επιφάνειες $g_1=0$ και $g_2=0$ τέμνονται σε μια λεία (συνήθως) καμπύλη, ας την πούμε c. Ζητούμε τα σημεία κατά μήκος της καμπύλης αυτής όπου η f έχει είτε τοπικό μέγιστο είτε τοπικό ελάχιστο, σε σχέση με τις τιμές που παίρνει στο υπόλοιπο τμήμα της καμπύλης. Στα σημεία αυτά το διάνυσμα v/ θα είναι κάθετο στη (7, όπως είδαμε στο Θεώρημα. Αλλά τα διανύσματα Δf και Δg είναι επίσης κάθετα στη c στα εν λόγω σημεία, διότι η c ανήκει στις επιφάνειες $g_1=0$ και $g_2=0$. Κατά συνέπεια, η Δf ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα Δg_1 και Δg_2, δηλαδή $\Delta f=\lambda\Delta g+\mu\Delta g$ για κάποια λ και μ. Εφόσον, τώρα, τα σημεία που ζητούμε ανήκουν και στις δύο επιφάνειες, οι συντεταγμένες τους θα ικανοποιούν τις εξισώσεις $g_1\ (\chi,\ y,\ z)=0, \quad g_2\ (x,y,z)=0$.

Παράδειγμα 10

Εύρεση ακρότατων της απόστασης σε καμπύλη έλλειψης



Ποια σημεία της έλλειψης, που αποτελεί την τομή του επιπέδου και του κυλίνδρου, απέχουν ελάχιστη απόσταση από την αρχή και ποια απέχουν μέγιστη; (Παράδειγμα 10)

(σχήμα 13)

Το επίπεδο $\chi + y + z=1$ τέμνει τον κύλινδρο $\chi^2 + y^2 = 1$ στην καμπύλη έλλειψης . Βρείτε τα σημεία της έλλειψης που απέχουν την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση από την αρχή.

<u>Λύση</u> Ζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(\chi, y) = \chi^2 + y^2 + z^2$(το τετράγωνο της απόστασης του σημείου (x,y,z) από την αρχή) υπό τη συνθήκη ότι

$$g_1(\chi, y, z) = \chi^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$g_2(x,y,z) = x+y+z-1=0 \quad (4)$$

Η πρώτη από τις Εξισώσεις (2) μας δίνει

$$\Delta f = \lambda\, \Delta g_1 + \mu\, \Delta g_2$$

$$2xi+2yj+2zk=\lambda(2xi+2yj)+\mu(i+j+k)$$

$$2xi+2yj+2zk=(\lambda 2xi+\mu)i+(2\lambda y+\mu)j+\mu k$$ δηλαδή

$$2\chi=2\lambda\chi+\mu\ ,2y=2\lambda y+\mu\ ,2z=\mu \quad (5)$$

Οι εξισώσεις (5) δίνουν

$$2\chi=2\lambda\chi+2\zeta \Rightarrow (1-\lambda)x=z, 2y=2\lambda y+2z \Rightarrow (1-\lambda)y=z \quad (6)$$

Οι Εξισώσεις (6) ικανοποιούνται ταυτόχρονα αν είτε $\lambda = 1$ και $z = 0$ είτε $\lambda \neq 1$ και $\chi=y=z/(1-\lambda)$

Αν $z = 0$. τότε η ταυτόχρονη επίλυση των Εξισώσεων (3) και (4) μας δίνει τα δύο σημεία $(1,0, 0)$ και $(0, 1, 0)$. Πρόκειται για ένα εύλογο αποτέλεσμα, όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα .

Αν $\chi = y$, τότε οι Εξισώσεις (3) και (4) δίνουν

$x^2+x^2-1=0 \quad x+x+z-1=0$

$2x^2=1 \qquad z=1-2x$

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z=1\pm\sqrt{2}$ Τα αντίστοιχα σημεία πάνω στην έλλειψη είναι

$P_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2})$ και $P_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$

Στο σημείο αυτό χρειάζεται προσοχή. Παρ' όλο που τόσο το P_1, όσο και το P_2 αποτελούν τοπικά μέγιστα της f στην καμπύλη έλλειψης, το P_2 απέχει από την αρχή περισσότερο απ' ότι το P_1. Τα εγγύτερα στην αρχή σημεία της έλλειψης είναι τα (1,0, 0) και (0, 1,0). Το σημείο της έλλειψης που απέχει μέγιστη απόσταση από την αρχή είναι το P_2.

1.7ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μετά την εισαγωγική ανάλυση των διαφορίσιμων συναρτήσεων και τη χρησιμότητα τους στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης θα κάνουμε μια ανάλυση και εφαρμογή τους στην οικονομική θεωρία.

Όπως αναφέραμε και ποιο πάνω διακρίνουμε δυο περιπτώσεις αριστοποίησης:

α) **Την αδέσμευτη αριστοποίηση** όπου δεν έχουμε καμία δέσμευση (περιορισμό), όσον αφορά στις τιμές των μεταβλητών. Σ' αυτή την περίπτωση περιλαμβάνονται για επίλυση τα εξής προβλήματα:

-Μεγιστοποίηση της Παραγωγής.

-Ελαχιστοποίηση του Κόστους Παραγωγής.

-Μεγιστοποίηση των συνολικών εσόδων της επιχείρησης σε ένα σύστημα ατελή ανταγωνισμού.

-Μεγιστοποίηση του κέρδους της επιχείρησης σε ένα σύστημα τέλειου ανταγωνισμού και σε ένα σύστημα ατελή ανταγωνισμού.

β) **Τη δεσμευμένη αριστοποίηση** όπου έχουμε κάποιες δεσμεύσεις (περιορισμούς), όσον αφορά στις τιμές των μεταβλητών.

Σ' αυτή την περίπτωση περιλαμβάνονται τα εξής προβλήματα:

-Μεγιστοποίηση της παραγωγής δοθέντος του συνολικού κόστους.

-Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους δοθείσης της παραγωγής.

Σε γενικές γραμμές, τα προβλήματα μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες.

α.Προβλήματα χωρίς περιορισμούς (unconstrained problems)

(Στα προβλήματα αυτά πρέπει να βρεθεί το ελάχιστο κάποιας αντικειμενικής συνάρτησης και ταυτόχρονα θα πρέπει να ικανοποιούνται κάποιοι περιορισμοί οι οποίοι θα παρουσιάζονται με τη μορφή εξισώσεων ή ανισώσεων)

β.Προβλήματα με περιορισμούς (constrained problems)

(Στα προβλήματα αυτά θα πρέπει να βρεθεί το ελάχιστο κάποιας αντικειμενικής συνάρτησης και ταυτόχρονα θα πρέπει να ικανοποιούνται κάποιοι περιορισμοί που τίθενται μεταξύ των μεταβλητών).

Ένας ακόμη διαχωρισμός που γίνεται, είναι

α. Προβλήματα με μια μεταβλητή ή μονοδιάστατα προβλήματα και

β. Προβλήματα με δυο μεταβλητές

Επίσης τα **προβλήματα μπορεί να είναι γραμμικά και μη γραμμικά**

Γενικά ένα μη Γραμμικού Πρόβλημα έχει την παρακάτω μορφή:

Έστω $x \in R^n$ για κάποια διάσταση n, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ και έστω $f(x)$ η αντικειμενική συνάρτηση η οποία υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς. Επίσης, συμβολίζουμε με $h_1(x), h_2(x), h_3(x), \ldots, h_m(x)$ τους περιορισμούς που εκφράζονται με εξισώσεις και με $a_{m+1}(x), a_{m+2}(x), a_{m+3}(x), \ldots, a_k(x)$ τους περιορισμούς που εκφράζονται με ανισώσεις για τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Τότε, το γενικό πρόβλημα του μη γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να γραφτεί στη ακόλουθη μορφή:

- $Minimize\ f(x), x \in R^n$

με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι m γραμμικές ή μη γραμμικές εξισώσεις

- $h_1(x) = 0, h_2(x) = 0, \ldots, h_m(x) = 0$

και οι $k-m$ γραμμικές ή μη γραμμικές ανισώσεις

- $a_{m+1}(x) \geq 0, a_{m+2}(x) \geq 0, \ldots, a_k(x) \geq 0$

Το διάνυσμα $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ που ικανοποιεί τις σχέσεις της Γενικής Μορφής Μη Γραμμικού Προβλήματος καλείται βέλτιστο σημείο (optimal point) και η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης δηλαδή το ελάχιστο (ή το μέγιστο) καλείται βέλτιστη τιμή (optimal value) της συνάρτησης. Και τα δύο μαζί αποτελούν μία βέλτιστη λύση (optimal solution).

1.7.1ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΔΕΣΜΕΥΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Τεχνικές αδέσμευτης αριστοποίησης ή αριστοποίησης χωρίς περιορισμούς (Πολυδιάστατα Προβλήματα Χωρίς **Περιορισμούς**)

Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναπτυχθούν οι μέθοδοι με τις οποίες μπορεί να βρεθεί το μέγιστο ή το ελάχιστο μίας αντικειμενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Δηλαδή το πρόβλημα στη γενική του μορφή, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις της Γενικής Μορφής Μη Γραμμικού Προβλήματος, είναι το ακόλουθο:

Οι ιδέες και οι τεχνικές που χρησιμοποιούν οι υπάρχοντες αλγόριθμοι διαφοροποιούνται ως προς το μέγεθος της πληροφορίας που χρειάζονται από τη συνάρτηση $f(x)$ για να λύσουν κάποιο πρόβλημα. Στα μονοδιάστατα προβλήματα, οι αλγόριθμοι εντοπίζουν ένα τοπικό ακρότατο για το οποίο πρέπει να βρεθούν συνθήκες για να είναι κατ'αρχήν ελάχιστο (ή μέγιστο) και αν γίνεται να αποδειχθεί ότι είναι σφαιρικό.

Στη συνέχεια δίνονται κάποιες ικανές ή αναγκαίες συνθήκες σε μορφή θεωρήματος και οι οποίες αφορούν την ύπαρξη ενός ελαχίστου μίας πολυδιάστατης αντικειμενικής συνάρτησης. Οι συνθήκες αυτές είναι φυσική γενίκευση των αποτελεσμάτων για τις μονοδιάστατες συναρτήσεις. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, όταν ένα σημείο x είναι τοπικό ελάχιστο μίας αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$, τότε κατά μήκος κάθε ευθείας $x(\lambda)=x^{*}+\lambda s$ που διέρχεται από το x, η συνάρτηση έχει μηδενική παράγωγο (slope) και μη αρνητική καμπυλότητα (non-negative curvature) στο x^{*}.

Από τις σχέσεις $\frac{df}{d\lambda}=s^T\nabla f=\nabla^T fs$ και

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2}=\frac{d}{d\lambda}\frac{df}{d\lambda}s^T\nabla\left(\nabla^T fs\right)f=s^T\nabla^2 fs$$,

είναι εύκολο να βγει το συμπέρασμα ότι για κάθε διεύθυνση s θα υπάρχει μηδενική παράγωγος και μη αρνητική καμπυλότητα στοx.

Άρα ισχύει:

$s^T\nabla f\left(x^*\right)=0$ και $s^T\nabla^2 f\left(x^*\right)s\geq 0$.

Αφού οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για κάθε διεύθυνσης, από την πρώτη σχέση προκύπτει:

$$\nabla f\left(x^*\right)=0$$

ενώ η δεύτερη είναι $s^T\nabla^2 f\left(x^*\right)s\geq 0,\ \forall s$.

Δεδομένου ότι οι δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτουν από το γεγονός ότι το είναι βέλτιστο σημείο για τη συνάρτηση $f(x)$, είναι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ενός τοπικού ελαχίστου. Η συνθήκη $\nabla f\left(x^*\right)=0$ ονομάζεται αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης ενώ η συνθήκη $s^T\nabla^2 f\left(x^*\right)s\geq 0,\ \forall s$ ονομάζεται αναγκαία συνθήκη δεύτερης τάξης.

Αναγκαία Συνθήκη Πρώτης Τάξης

Έστω μία συνάρτηση $f:E\subseteq R^n\rightarrow R$ η οποία είναι $f\in C^1$ στο E. Αν ένα σημείο x^* δίνει τοπικό ελάχιστο στο E, τότε μία αναγκαία συνθήκη είναι $\nabla f\left(x^*\right)=0$.

Αναγκαία Συνθήκη Δεύτερης Τάξης

Έστω μία συνάρτηση $f:E\subseteq R^n\rightarrow R$ η οποία είναι $f\in C^2$ στο E. Αν ένα σημείο x^* δίνει τοπικό ελάχιστο στο E, τότε μία αναγκαία συνθήκη είναι ο Πίνακας Hessian να είναι θετικά ορισμένος.

Η τάξη που αναφέρεται στις συνθήκες έχει να κάνει με τις πληροφορίες που χρησιμοποιούνται. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει κλίση (πρώτη παράγωγος), ενώ στη δεύτερη υπάρχει ο Πίνακας Hessian (δεύτερη παράγωγος) που υπάρχει στις αναγκαίες συνθήκες είναι η περίπτωση της μηδενικής καμπυλότητας (ανάλογο του σημείου καμπής). Είναι όμως δυνατόν να προκύψουν ικανές συνθήκες στηριζόμενες στα αντίστοιχα αποτελέσματα που αφορούν μονοδιάστατα προβλήματα αρκεί να μετατραπεί η συνθήκη δεύτερης τάξης. Έτσι προκύπτει:

Ικανές Συνθήκες Δεύτερης Τάξης

Έστω μία συνάρτηση $f: E \subseteq R^n \rightarrow R$ η οποία είναι $f \in C^2$ στο E. Ικανές συνθήκες έτσι ώστε ένα σημείο x^* δίνει τοπικό ελάχιστο στο E, είναι να ισχύει η αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης και ο Πίνακας Hessian να είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή να ισχύει $\nabla f(x^*) = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $s^T \nabla^2 f(x^*) s > 0 \quad \forall s \neq 0$.

Όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή, ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο $E \subseteq R^n$, οι αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης είναι ικανές για να είναι ένα σημείο x^* βέλτιστο, δεδομένου ότι ο Πίνακας Hessian είναι πάντα θετικά ορισμένος. Το ελάχιστο που θα βρεθεί θα είναι ταυτοχρόνως και σφαιρικό ελάχιστο.

Πρόβλημα πρώτο: Μεγιστοποίηση της παραγωγή

α)Η συνάρτηση παραγωγής «ένα προϊόν - ένας συντελεστής παραγωγής» μπορεί να γραφεί:

Q=Φ(L).Για να έχει μέγιστο η συνάρτηση αυτή θα πρέπει να ισχύουν τα εξής: $\frac{dQ}{dL}=$ Φ'(L)=0 (Αναγκαία συνθήκη) δηλαδή η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας πρέπει να είναι ίση με το μηδέν και $\frac{dQ^2}{dL^2}$ =Φ''(L)<0 (Ικανή συνθήκη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι της μορφής Q=F(L)= $-\frac{L^3}{3}$ +2L +12L

Η συνάρτηση αυτή είναι τρίτου βαθμού .Η αναγκαία συνθήκη θέλει την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης ίση με το μηδέν .

$\frac{dQ}{dL}$= Φ'(L) =(- $\frac{L^3}{3}$+2L^2 +12L) '= -L^2 +4L+12= -L +4L+12=0.

Αν λύσουμε την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε ότι L =6 καιL=-2. Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται γατί δεν έχει νόημα στην οικονομική. Για L=6 η συνάρτηση παραγωγής παίρνει την τιμή Q=F(6)=72.Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης που εκφράζει την ικανή συνθήκη είναι πράγματι αρνητική .Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση παραγωγής έχει μέγιστο.

$\frac{dQ}{dL}$ = Φ''(L)=(-L +4L+12) '=-2λ+4<0 όταν L>2

β)Αν η συνάρτηση παραγωγής είναι <<ένα προϊόν-δύο συντελεστές παραγωγής >>δηλαδή διμεταβλητή συνάρτηση όπου ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η εργασία και το κεφαλαίο μπορούμε να γράψουμε Q = F(L, K).

Για να έχει μέγιστο η συνάρτηση θα πρέπει να ισχύουν τα εξής :

$\frac{dQ}{dL}$ =F' (L,K)=0 και

$\frac{dQ}{dL}$ =F'(L,K)=0 (Αναγκαία συνθήκη) δηλαδή οι οριακές παραγωγικότητες της εργασίας και του κεφαλαίου πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν και

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = F''(L,K) < 0$$

$$\frac{d^2Q}{dK^2} = F''(L,K) < 0 \text{ και}$$

$$\frac{d^2Q}{dL^2}\,\frac{d^2Q}{dK^2} > \left(\frac{d^2Q}{dLdK}\right)^2 \text{ (Ικανή συνθήκη)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση παραγωγής με την παρακάτω μαθηματική μορφή : $Q = F(L, K) = 4L+2K-L^2-K^2$.

Η συνάρτηση αυτή είναι δευτέρου βαθμού και έχει τοπικό μέγιστο .Κι αυτό γιατί =F' (L,K)=4-2L=0. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι L=2.Επίσης F'κ(L,K)=2-2κ=0

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι: K = 1. Η ικανή συνθήκη απαιτεί όπως

$$\frac{d^2Q}{dL^2} < 0 \;,\; \frac{d^2Q}{dK^2} < 0 \text{ και}$$

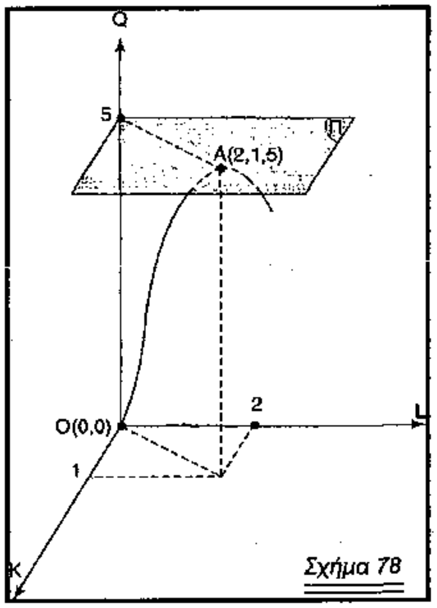
$$\frac{d^2Q}{dL^2}\,\frac{d^2Q}{dK^2} > \frac{d^2Q}{dK^2} \text{ οπότε έχουμε}$$

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = F''(L,K) = -2 < 0$$

$$\frac{d^2Q}{dK^2} = F''(L,K) = -2 < 0$$

$$\frac{d^2Q}{dL\,dK} = \frac{d^2Q}{dK\,dL} = F''(L,K) = F''(L,K) = 0 \text{ και} (-2)(-2) > 0$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο για L= 2 και K=1, που είναι: $Q = F(2, 1) = 4*2+2*1-2^2-1^2 = 5$.



Σχήμα 78

Πρόβλημα δεύτερο: Ελαχιστοποίηση του Κόστους παραγωγής.

Η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι μια μονομεταβλητή συνάρτηση. Εξηρτημένη μεταβλητή είναι το συνολικό κόστος παραγωγής C, ενώ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το παραγόμενο από την επιχείρηση προϊόν Q. Δηλαδή: C = F (Q).

Για να έχει ελάχιστο η παραπάνω συνάρτηση θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$\frac{dC}{dQ} = F'(Q) = 0$, (Αναγκαία συνθήκη)

δηλαδή το οριακό κόστος θα πρέπει να ισούται με το μηδέν, και:

$\frac{d^2C}{dQ^2} = F''(Q) > 0 = (Q^2-2Q+4)' = 2Q-2=0 > O$ (Ικανή συνθήκη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Έστω ότι η συνάρτηση του κόστους παραγωγής είναι της μορφής: $C=F(Q)= Q^2-2Q+4$

Η συνάρτηση αυτή είναι δευτέρου βαθμού και έχει:

$\frac{dC}{dQ} = F'(Q) = (Q^2-2Q+4)' = 2Q-2=0$ (Αναγκαία συνθήκη).

Αν λύσουμε την εξίσωση βρίσκουμε ότι: Q= 1. Για Q = 1 το συνολικό κόστος παραγωγής C είναι:

$Q = F(1) = 1^2 - 2 * 1 + 4 = 3$.

Για να έχει τοπικό ελάχιστο θα πρέπει να ισχύει και η ικανή συνθήκη, που θέλει την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης του συνολικού κόστους παραγωγής μεγαλύτερη του μηδενός. Πράγματι ισχύει ότι:

$$\frac{d^2 \dot{C}}{dQ^2} = F''(Q) = 2 > 0.$$

Άρα, η συνάρτηση του συνολικού κόστους παραγωγής έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (1, 3), όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί.

Πρόβλημα τρίτο: Μεγιστοποίηση των συνολικών εσόδων της επιχείρησης σε ένα σύστημα ατελή ανταγωνισμού.

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε ένα σύστημα ατελή ανταγωνισμού η τιμή του προϊόντος είναι συνάρτηση της ποσότητας του προϊόντος. Δηλαδή ισχύει:

$P = P(Q)$.

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων γίνεται σ' αυτή την περίπτωση:

$P = [P(Q)]\, Q = F(Q)$

Για να έχει μέγιστο η συνάρτηση αυτή, θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\frac{dR}{dQ} = F'(Q) = 0 \text{ (Αναγκαία συνθήκη)}$$

δηλαδή το οριακό έσοδο της επιχείρησης θα πρέπει να ισούται με το μηδέν και

$$\frac{d^2 R}{dQ^2} = F'' < 0 \text{ (Ικανή συνθήκη)}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Μεταξύ της τιμής του προϊόντος P και της ποσότητας Q ισχύει η σχέση:Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων της επιχείρησης είναι:P = P (Q)= (20 - $\frac{Q}{0,2}$)Q

Για να έχει τοπικό μέγιστο η συνάρτηση των συνολικών εσόδων της επιχείρησης, θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$\frac{dR}{dQ}$= F' (Q)=(20Q-5Q^2)=20-10Q=0 (Αναγκαία συνθήκη).

Αν λύσουμε την εξίσωση 20 – 10Q = 0, βρίσκουμε ότι: Q = 2. Για Q = 2, τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα είναι:

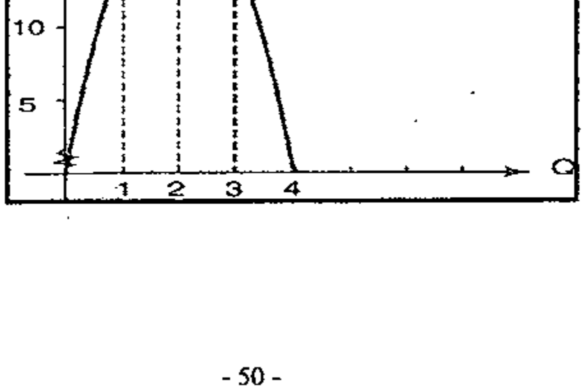
R = F(2) =20*2-5*2^2 = 20.

Η ικανή συνθήκη θέλει τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης των συνολικών εσόδων της επιχείρησης μικρότερη του μηδενός. Πράγματι ισχύει:

$\frac{d^2R}{dQ^2}$=-10<0 (Ικανή συνθήκη).

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα συνολικά της έσοδα σε ένα σύστημα ατελή ανταγωνισμού, για ποσότητα προϊόντος Q = 2 μονάδες.

Για την ποσότητα αυτή τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι τα υψηλότερα (R=20), όπως φαίνεται και από την διαγραμματική παρουσίαση του σχήματος που ακολουθεί.



1.7.2.ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Τεχνικές δεσμευμένης αριστοποίησης ή αριστοποίησης με περιορισμούς.

Πρόβλημα πρώτο: **Μεγιστοποίηση της παραγωγής δοθέντος του συνολικού κόστους.**

Έστω ότι η επιχείρηση παράγει το προϊόν της με δύο συντελεστές παραγωγής την εργασία και το κεφάλαιο. Άρα, μπορούμε να γράψουμε την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής, που ονομάζεται και αντικειμένική συνάρτηση:Q= F(L,K)

Εάν το χρηματικά διαθέσιμα της επιχείρησης είναι δεδομένα, δηλαδή η επιχείρηση δεν έχει τη δυνατότητα να δαπανήσει ποσό μεγαλύτερο του C και το ποσό αυτό διατίθεται για την πληρωμή του συντελεστή εργασία και του συντελεστή κεφάλαιο, μπορούμε να γράψουμε:όπου: W και r είναι οι τιμές των συντελεστών εργασία και κεφάλαιο, δηλαδή ο μισθός και ο τόκος.

Το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης παραγωγής κάτω από τον περιορισμό (δέσμευση) του κόστους παραγωχής.

Σύμφωνα με την μέθοδο που αναπτύχθηκε από τον LAGRANGE μπορούμε να γράψουμε V= F(L,K)+μ(C-w*L-r*K)

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται Λαγκρανζιανή συνάρτηση, ενώ το μ ονομάζεται πολλαπλασιαστής του LAGRANGE.

Η αναγκαία συνθήκη ή η συνθήκη πρώτης τάξης θέλει τις πρώτες μερικές παραγώγους της συνάρτησης ως προς την εργασία L και το κεφάλαιο K ίσες με το μηδέν. Οπότε έχουμε;

$$\frac{dV}{dL}= F'_L (L,K)-\mu*w=0 \ (\ (1)$$

$$\frac{dV}{dL} =F'_K (L,K)-\mu*r=0 \ (2).$$

Η πρώτη μερική παράγωγος της συνάρτησης ως προς τον πολλαπλασιαστή μ πρέπει και αυτή να είναι ίση με το μηδέν.

Οπότε: $\frac{dV}{d\mu}= C-w*L-rK =0$ (3).

Από τις δύο εξισώσεις (1) και (2), έχουμε ότι:

$F_{L}' (L,K)=\mu*W=\frac{F_L'(L,K)}{W}=\mu$ (1), $F'_K (L,K)= \mu*r=\frac{F_K'(L,K)}{r}=\mu$ (1)

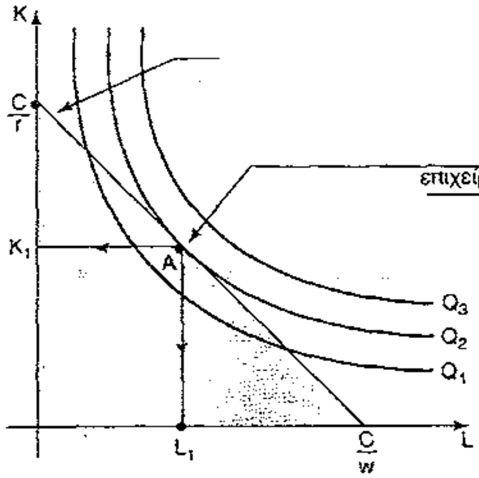
Από την (1') και (2') έχουμε: $\frac{F_L'(L,K)}{F_K'(L,K)}=\frac{w}{r}=\mu$

Η πρώτη συνθήκη μεγιστοποίησης της συνάρτησης παραγωγής με τον περιορισμό του κόστους παραγωγής, απαιτεί όπως ο λόγος των οριακών παραγωγικοτήτων της εργασίας και του κεφαλαίου είναι ίσος με τον λόγο των τιμών των συντελεστών παραγωγής εργασία και κεφάλαιο, και είναι ίσος επίσης με τον πολλαπλασιαστή του LAGRANGE μ.

Η δεύτερη συνθήκη μεγιστοποίησης, ή ικανή συνθήκη, θέλει την ορίζουσα του Hesse να είναι: >0

$$\begin{vmatrix} F''_{LL} & F''_{LK} & -w \\ F''_{L} & F''_{KK} & -r \\ -w & -r & 0 \end{vmatrix}$$

Η διαγραμματική παρουσίαση της μεγιστοποίησης της συνάρτησης παραγωγής με τον περιορισμό του κόστους, δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 81

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Εάν η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής: $Q = F(L, K) = -L^2-K^2 +L +3K +10$, ζητούνται να βρεθούν οι ποσότητες των συντελεστών παραγωγής εργασία και κεφάλαιο για τις οποίες η συνάρτηση μεγιστοποιείται, όταν είναι γνωστό ότι: α) Οι τιμές των συντελεστών παραγωγής εργασία και κεφάλαιο είναι 2 και 3 δραχμές αντίστοιχα. β) Η επιχείρηση είναι διατεθειμένη να δαπανήσει για την παραγωγή του προϊόντος της 12 δραχμές .Η σχέση περιορισμός μπορεί να γραφεί ως εξής:

$C=\Phi(L,K)= 12-(2L+3K) = 0$ ή $12-2L-3K=0$

Η συνάρτηση του LAGRANGE γράφεται σε αυτή την περίπτωση με τη μορφή:

$V = F(L, K) + \mu (12-2L-3K)$ ή

$V= - L^2-K^2+L+3K+3K+10 +\mu(12-2L-3K)$.

Η συνθήκη πρώτης τάξης απαιτεί όπως οι μερικές παράγωγοι ως προς L, K και μ είναι ίσες με μηδέν. Οπότε:

$$\frac{dV}{dL}=-2L+1-2\mu=0 \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dK}=-2K+3-3\mu=0 \quad (2)$$

$$\frac{dV}{d\mu}=12-2L-3K=0 \quad (3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) βρίσκουμε ότι:

L = - 1,5, K= 3 και μ = -1.

Το σημείο (1,5; 3) είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού μεγίστου, γιατί ισχύει η δεύτερη συνθήκη που θέλει την ορίζουσα του Hesse να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Πριν όμως υπολογίσουμε την ορίζουσα του Hesse θα πρέπει να βρούμε τις τιμές των δευτέρων μερικών παραγωγών, και $\frac{d^2V}{dL^2}$, $\frac{d^2V}{dK^2}$ και $\frac{d^2V}{dKdL}$. Έχουμε

$$\frac{d^2V}{dL^2}=-2,\ \frac{d^2V}{dK^2}=-2,\ \frac{d^2V}{dKdL}=0$$

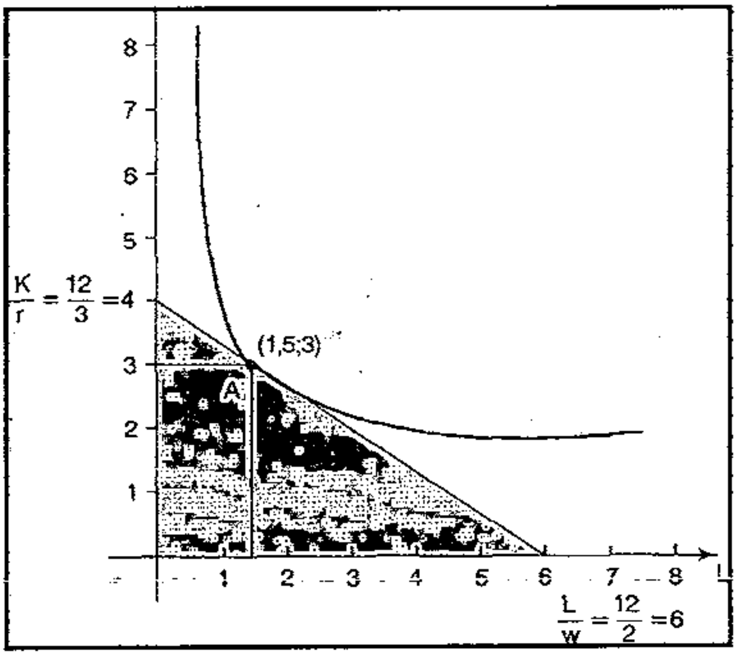
και

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

=26>0

Για ποσότητες εργασίας L=1,5 μονάδες και κεφαλαίου K = 3 μονάδες, η μέγιστη ποσότητα του προϊόντος που μπορεί να παράγειη επιχείρηση είναι:

$Q=-(1,5)^2-(3)^2+1,5+3\cdot 3+10=9,25$ μονάδες προϊόντος



Πρόβλημα δεύτερο: Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους δοθείσης της παραγωγής.

Πολλές φορές αντί της μεγιστοποίησης της παραγωγής ενός προϊόντος με δοσμένο το συνολικό κόστος παραγωγής, ζητείται να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής Ο της επιχείρησης με δοσμένη την παραγωγή της. Δηλαδή, η αντικειμενική συνάρτηση είναι η συνάρτηση του κόστους παραγωγής: $C=\Psi(L,K)=wL+rK$

με τον περιορισμό ότι η παραγωγή θα ανέρχεται σε 00 ποσότητα προϊόντος, δηλαδή με τον περιορισμό $Q^0 = F(L, K)$.

Η συνάρτηση LAGRANGE γράφεται ως εξής στην περίπτωση αυτή $Z=wL+rK+\lambda[Q^0-F(L,K)]$ όπου λ ο πολλαπλασιαστής LAGRANGE.Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έτσι και εδώ η συνθήκη πρώτης τάξης απαιτεί όπως οι μερικοί παράγωγοι της συνάρτησης LAGRANGE ως προς Λ ,Κ και λ είναι ίσες με μηδέν .Οπότε έχουμε

$\frac{dZ}{dL}$=w- $\lambda F'_L$ (L, K)=0 (1)

$\frac{dZ}{dK}$= r- $\lambda F'_K$ (L, K)=0 (2)

$\frac{dZ}{d\lambda}$= Q^0- F (L, K)=0 (3)

Από τις σχέσεις ένα και δύο προκύπτει :

$\lambda F'_L$ (L, K)=w και $\frac{F_L'(L,K)}{w}=\frac{1}{\lambda}$ (1)

$\lambda F'_K$ (L, K)=r και $\frac{F_k'(L,K)}{r}=\frac{1}{\lambda}$ (2)

Από την (1) και (2) έχουμε

$\frac{F_L'(L,K)}{F_K'(L,K)}=\frac{w}{r}=\frac{1}{\lambda}$ όπου $\frac{1}{\lambda}=\mu$

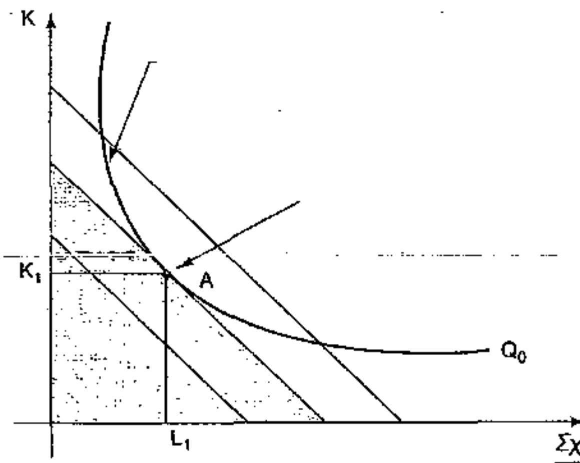
Η δεύτερη συνθήκη ελαχιστοποίησης ή ικανή συνθήκη θέλει την ορίζουσα του Hesse να είναι :

$$\begin{vmatrix} F''_{LL} & F''_{LK} & -w \\ F''_{LK} & F''_{KK} & -r \\ -w & -r & 0 \end{vmatrix}$$

>0 Η τελευταία ορίζουσα είναι ίδια με εκείνη της προηγούμενης περίπτωσης .Αυτό σημαίνει ότι το σημείο επαφής μεταξύ μιας καμπύλης ισοπαραγωγής και της γραμμής ίσου κόστους είναι τόσο

η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους με τον περιορισμό της παραγωγής όσο και η λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης της παραγωγής με τον περιορισμό του κόστους παραγωγής.

Καμπύλη ίσου προϊόντος ή ισοπαραγωγής είναι η Q^0 και το άριστο σημείο για την επιχείρηση είναι το Α στο σχήμα που ακολουθεί



Σχήμα 83

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Η επιχείρηση επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει κόστος παραγωγής του προϊόντος της, όταν η τιμή του συντελεστή εργασία είναι 2 δραχμές και η τιμή του συντελεστή κεφάλαιο είναι 3 δραχμές: Εάν η συνάρτηση παραγωγής της επιχείρησης είναι της μορφής:$Q =- L^2-K^2+L+3K+10$

και η επιθυμητή ποσότητα παραγωγής είναι $Q^0 = 9{,}25$ μονάδες, να βρεθεί για ποιες ποσότητες εργασίας L και κεφαλαίου K μπορεί να επιτευχθεί αυτό.

Η αντικειμενική συνάρτηση, την οποία επιθυμεί η επιχείρηση να ελαχιστοποιήσει, είναι η συνάρτηση του κόστους παραγωγής:

$C = 2 * L + 3 * K$ με τον περιορισμό: $Q^0 = P(L, K) = -L^2-K^2+L+3K+10$

Η συνάρτηση του Lagrange γράφεται ως εξής:

$Z=2L+3K-\lambda[9{,}25-(-L^2-K^2+L+3K+10)]$

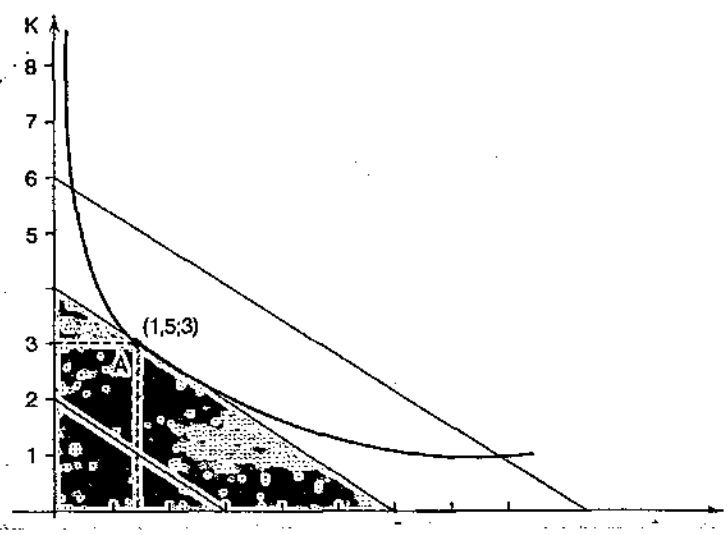
Η συνθήκη πρώτης τάξης, ή η αναγκαία συνθήκη, απαιτεί όπως οι πρώτες μερικές παράγωγοι της Λαγκρανζιανής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές L, K και λ είναι ίσες με το μηδέν. Οπότε έχουμε:

$$\frac{dZ}{dL}=2-\lambda(2L+1)=0$$

$$\frac{dZ}{dL}=3-\lambda(2K+3)=0$$

$$\frac{dZ}{d\lambda}=9{,}25-(-L^2-K^2+L+3K+10)]$$

Από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (1), (2) και (3) βρίσκουμε ότι L=1,5 μονάδες, K=3 μονάδες και λ=-1. Η ορίζουσα του Hesse είναι θετική, ενώ το ελάχιστο κόστος για την επιχείρηση είναι: Q = 2 • (1,5) +3.3 = 12 δραχμές. Η διαγραμματική επίλυση του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι το αρχικό πρόβλημα μεγιστοποίησης της παραγωγής με τον περιορισμό του κόστους συνδέεται στενά με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους με τον περιορισμό της παραγωγής .Το δεύτερο αυτό πρόβλημα καλείται δυϊκό. Δηλαδή το αρχικό και το είναι δυϊκό πρόβλημα είναι δυο όψεις του ίδιου προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$ παρουσιάζει στο σημείο $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ δεσμευμένο τοπικό μέγιστο που ικανοποιεί την εξίσωση $x_1+x_2+x_3-1=0$

ΛΥΣΗ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$G(x_1,x_2,x_3,\lambda)=x_1x_2x_3+\lambda(x_1+x_2+x_3-1)$

και σχηματίζουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_1}=x_2x_3+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_2}=x_1x_3+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial G(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_3}=x_2x_1+\lambda=0 \\ x_1+x_2+x_3-1=0 \end{cases}$$

Επειδή το σημείο $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{9}\right)$ είναι λύση του συστήματος, το σημείο $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ είναι πιθανό δεσμευμένο ακρότατο.

Επίσης, έχουμε:

$$\frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2\partial x_1}=x_3,$$

$$\frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3 \partial x_1} = x_2,$$

$$\frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 G(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3 \partial x_2} = x_1.$$

Έστω $g(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1$. Τότε επιπλέον έχουμε:

$$\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = \frac{\partial g(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = \frac{\partial g(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = 1$$

Συνεπώς:

$$\Delta_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{9}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0,$$

$$\Delta_2\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{9}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} > 0,$$

Οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ δεσμευμένο τοπικό μέγιστο που είναι $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

(Παρακάτω δίνεται η λύση με matlab)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

2.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΝΤΟΛΩΝ ΣΤΟ MATLAB

Το matlab (**MAT**rix **LAB**oratory 6.5) είναι ένα διαδραστικό περιβάλλον για αριθμητικούς υπολογισμούς κυρίως. Μέσω του Symbolic Toolbox μας παρέχει τη δυνατότητα να προβούμε και σε κάποιους συμβολικούς υπολογισμούς .Δουλεύει εκτελώντας τις μαθηματικές εντολές που εισάγουμε στο παράθυρο εντολών command window .

Στην επίλυση προβλημάτων αριστοποίησης βελτιστοποίησης (OPTIMIZATION) με τη χρήση M A T L A B θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω εντολές :

•**syms:** Συντομότερος δρόμος για την κατασκευή των συμβολικών αντικειμένων π.χ:SYMS arg1 arg2... είναι σημείωση για arg1 =sym('arg1")και για arg2 = sym('arg2") ...

•**disp:**Η εντολή εμφανίζει στην οθόνη ένα μήνυμα ή την τιμή μιας μεταβλητής χωρίς να εμφανίζεται το σημείο προτροπής .Δίνεται για να εμφανίσω κάτι ίσο με αυτό που αναφέρω στην εντολή. Επιδεικνύει τη σειρά, χωρίς εκτύπωση του ονόματος σειράς δηλαδή μου εμφανίζει ότι ακριβώς έχω τοποθετήσει μέσα στη παράσταση(' ') ίσο με αυτό που θα του δώσω στην εντολή pretty που ακολουθεί.

•**pretty:** Με την εντολή pretty εμφανίζω- τυπώνω μια συμβολική έκφραση. PRETTY(S) τυπώνει τη συμβολική έκφραση S με ένα σχήμα αυτό μοιάζει με τύπο από το σύνολο των μαθηματικών τύπων.

•**clear:**καθαρίζει την οθόνη-αφαιρεί όλες τις μεταβλητές από το χώρο εργασίας

•**diff:** Χρησιμοποιείται για να παραγωγίσουμε μια συνάρτηση για παράδειγμα *fx=diff(z,'x')* μας βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f ως προς χ.Γενικά η εντολή diff χρησιμοποιείτε όταν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης.

•**subs:** Η εντολή subsχρησιμοποιείται για να αντικαταστήσουμε σε μια συνάρτηση μια μεταβλητή της με κάποια άλλη. Για παράδειγμα *fx_px=subs(fx,x,p(1))* με την εντολή αυτή αντικαθιστώ όπου χ την τιμή p(1).

•**simplify:** Η οποία χρησιμοποιείται όταν θέλω να απλοποιήσω μια παράσταση

•**solve:** Η εντολή solve κάνει συμβολική λύση αλγεβρικών εξισώσεων
π.χ. SOLVE('eqn1','eqn2',...,'eqnN')
SOLVE('eqn1','eqn2',...,'eqnN','var1,var2,...,varN')
Τα eqns είναι συμβολικές εκφράσεις ή σειρές των καθοριζόμενων εξισώσεων. Τα vars είναι συμβολικές μεταβλητές ή σειρές που καθορίζουν τις άγνωστες μεταβλητές. Η solve βρίσκει τους μηδενισμούς των εκφράσεων ή των λύσεων των εξισώσεων. Εάν δεν διευκρινίζεται, οι άγνωστοι στο σύστημα καθορίζονται με την εντολή FINDSYM. Τρεις διαφορετικοί τύποι εξόδων είναι πιθανοί. Για μια εξίσωση και μια έξοδο ένα αποτέλεσμα επιστρέφεται, ενώ για πολλαπλές λύσεις σε μη γραμμική εξίσωση σε συμβολικό διάνυσμα. Για Ν εξισώσεις Ν αριθμοί θα βγουν στην έξοδο, τα αποτελέσματα ταξινομούνται στη λεξικογραφική σειρά και ορίζονται στις εξόδους.

Παραδείγματα

1. Δημιουργία συνάρτησης

$f=x^2+y^2-3x-27y+10$,στη συνέχεια αντικαταστήστε όπου f(x,y) την f

```
%PARADEIGMA1
syms x y;
f=x^3+y^2-3*x-27*y+10;
disp('f(x,y)=');pretty(f);
```

```
f(x,y)=

                    3    2
                   x  + y  - 3 x - 27 y + 10
```

2. Μερικές παράγωγοι

Φτιάξτε τη συνάρτηση $z=(x^2+y^2)^{-2}$ και εμφανίστε f(x,y)=z. Στη συνέχεια φτιάξτε ένα πίνακα p=[1,2] ,βρες τη μερική παράγωγο της z ως προς χ και εμφάνισε τη ως fx .Στη συνέχεια θέστε fx_px την fx αφου αντικαταστήσεις όπου χ=p(1) και εμφάνιστε την fx_py ως(fx,x,2) και στη συνέχεια θέστε fx_py την fx αφου αντικαταστήσετε όπου y=p(2) και εμφάνιστε την fx_py ως(fx,x,2). Στη συνέχεια εμφάνισε fx_p την fx αφού αντικαταστήσεις όπου χ και y τις τιμές P[1,2]. Στη συνέχεια βρείτε τη μερική παράγωγο της z ως προς y και εμφάνιστε τη ως fy και αφου αντικαταστήσετε όπου x και y τις τιμές του πίνακα p να την εμφανίσετε ως fy_p .

```
%PARADEIGMA2


clear;
syms x y z a;
z=(x^3+y^2)^-2;
disp('f(x,y)='); pretty(z);
p=[1 2]
fx=diff(z,'x');
disp('fx='); pretty(fx);

fx_px=subs(fx,x,p(1));
disp('fx(1,y)='); pretty(fx_px);
fx_py=subs(fx,y,p(2));
disp('fx(x,2)='); pretty(fx_py);
fx_p=subs(fx,[x y],p);
disp('fx(p)='); disp(fx_p);
fy=diff(z,'y');
disp('fy='); pretty(fy);
fy_p=subs(fy,[x y],p);
disp('fy(p)='); disp(fy_p);
```

Αποτελέσματα…..

```
f(x,y)=

                         1
                     ---------
                      3   2 2
                     (x  + y )

p =

    1    2

fx=

                           2
                          x
                     -6 ----------
                         3   2 3
                        (x  + y )
fx(1,y)=

                          6
                     - ---------
                              2 3
                        (1 + y )
fx(x,2)=

                          2
                         x
                     -6 ---------
                         3    3
                        (x  + 4)
fx(p)=
  -0.0480

fy=

                          y
                     -4 ----------
                         3   2 3
                        (x  + y )
fy(p)=
  -0.0640
```

3. Κατασκευή ορίζουσας

Φτιάξτε τη συνάρτηση $z=e^{(-2x)}*$ συν(y)και εμφάνιστε τη ως f(x,y). Στη συνέχεια βρείτε τη μερική παράγωγο της z ως προς χ και εμφάνιστε τη ως Dx και της z ως προς y και εμφάνιστε τη ως Dy. Στη συνέχεια βρείτε τη μερική παράγωγο της fx ως προς z 2 φορές και της Dy ως προς z 2 φορές και εμφάνιστε ως fxx και fyy. Στη συνέχεια εμφάνιστε fxy και fyx την παράγωγο της z πρώτα ως προς χ και μετά ως προς y και της z ως προς y και μετά ως προς χ αντίστοιχα .Στην συνέχεια φτιάξτε την ορίζουσα

$$d=\begin{vmatrix} f_{XX} & f_{XY} \\ f_{YX} & f_{YY} \end{vmatrix}$$

και εμφανίστε τη ως D2(x,y)= .Στη συνέχεια βρείτε τη διαφορά fxy-fyx.

```
%PARADEIGMA3
syms x y z a;
z=exp(-2*x)*sin(y);
disp('f(x,y)='); pretty(z);
Dx=diff(z,'x');
Dy=diff(z,'y');
disp('Dx='); pretty(simplify(Dx));
disp('Dy='); pretty(simplify(Dy));
fxx=diff(z,'x',2);
fyy=diff(z,'y',2);
fxy=diff(z,'x','y');
fyx=diff(z,'y','x');
d=[fxx fxy ; fyx fyy];
disp('D2(x,y)='); pretty(d);
a=simplify(fxy-fxy);
disp('fxy-fyx='); pretty(a);
```

Αποτελέσματα...

```
f(x,y)=

                    exp(-2 x) sin(y)
Dx=

                  -2 exp(-2 x) sin(y)
Dy=

                    exp(-2 x) cos(y)
D2(x,y)=

            [4 exp(-2 x) sin(y)     exp(-2 x) cos(y) ]
            [                                        ]
            [-2 exp(-2 x) sin(y)   -exp(-2 x) sin(y)]
fxy-fyx=0
```

2.2. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟ MATLAB –ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

2.2.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

•<u>Εύρεση ακρότατων σε συνάρτηση δυο αγνώστων-γραφική παράσταση</u>

Έστω η συνάρτηση παραγωγής με την παρακάτω μαθηματική μορφή : $Q = F(L, K) = 4L+2K-L^2-K^2$.
Να βρείτε σε ποιο σημείο παρουσιάζει ακρότατα η συνάρτηση το είδος του ακρότατου και στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση. Στις προηγούμενες σελίδες είχε δοθεί η λύση στο πρόβλημα αυτό με τη βοήθεια μαθηματικών μεθόδων στο παράδειγμα μας η λύση θα δοθεί με τη βοήθεια το <u>M A T L A B</u>

```
clear; %καθαρίζει την οθόνη
syms L K l k;  %εισάγει τις μεταβλητές
Q=4*L+2*K-L^2-K^2; %η συνάρτηση που επιθυμώ να μεγιστοποιήσω
DL=diff(Q,'L'); %βρίσκω τη μερική παράγωγο ως προς L
DK=diff(Q,'K'); %βρίσκω τη μερική παράγωγο ως προς K
s=solve(DK,DL); %βρίσκω που μηδενίζεται η συνάρτηση
CriticalPoints=[s.L s.K] %βρίσκω τις λύσεις σε ένα πίνακα
D2=[diff(Q,'L',2)   diff(Q,'L','K'); ...
   diff(Q,'K','L') diff(Q,'K',2)];%φτιάχνω τη ορίζουσα Hesse
d1=D2(1,1);
disp('D2(L,K)='); %εμφανίζω την ορίζουσα D2
pretty(simplify(D2)); %εμφανίζω την ορίζουσα απλοποιημένη
       d2=det(D2);
       disp('|D1(L,K)|=') ; %εμφανίζω στην ορίζουσα D1(L,K)
pretty(D2(1,1));     % την τιμή της D2(1,1)
if length(s) ~= 0%γίνεται έλεγχος αν οι τιμές που μηδενίζουν είναι πραγματικές
   for i=1:length(s.L);
      cpL(i)=double(s.L(i));
      cpK(i)=double(s.K(i));
      if abs(imag(cpL(i)))<=1.0e-020 & abs(imag(cpK(i)))<=1.0e-020%
         cpQ(i)=subs(Q,[L K],[cpL(i) cpK(i)]);%στη Q όπου L K εμφανίζει το cpK
                                              % και το cpL αντίστοιχα
         k1(i)=double(subs(d1,[L K],[cpL(i) cpK(i)]));
         k2(i)=double(subs(d2,[L K],[cpL(i) cpK(i)]));
         if k2(i)<0 % αν δηλαδή K2(i)<0  τότε
            lextr(i)=0; %εμφάνισε lextr(i)=0 δηλαδή σαγματικό σημείο
         elseif k2(i)==0% αν δηλαδή K2(i)=0  τότε
            lextr(i)=0; %εμφάνισε lextr(i)=0 δηλαδή σαγματικό σημείο
         elseif k1(i)>0 & k2(i)>0% αν δηλαδή K2(i)>0 και K1(i)>0 τότε
            lextr(i)=-1; %εμφάνισε lextr(i)=-1 δηλαδή τοπικό ελάχιστο
         elseif k1(i)<0 & k2(i)>0% αν δηλαδή K2(i)>0 και K1(i)<0 τότε
            lextr(i)=1;%εμφάνισε lextr(i)=1 δηλαδή τοπικό μέγιστο
         end;
         else  lextr(i)=2;
```

```
end;
        end;
disp('[|D1(Li,Ki)| |D2(Li,Ki)|]=');%εμφανίζει τις τιμές των D1 D2
                % για τις τιμές K,L που μηδενίζουν τη συνάρτηση
   disp([k1; k2]);
   disp('Local Extremes Status=');%εμφάνισε ως Local Extremes Status τη τιμή που
   disp(lextr);                          % έχει το lextr
     disp('Local Extremes Values=');% εμφάνισε ως Local Extremes Status τη τιμή που
    disp(cpQ);%έχει η cpQ
    else
   disp('*** No Local Extremum ***');
   end;
```

Για να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης φτιάχνουμε τον παρακάτω κώδικα του οποίου οι εντολές και οι συναρτήσεις αναλύονται παρακάτω

```
IL=-6:.1:6;
IK=-6:.1:6;
[l,k]=meshgrid(IL,IK);
Z=subs(Q,{L K},{l k});
axis([-6 6 -6 6 -2 2]);
surf(l,k,Z); shading flat; colormap(hot);alpha(.8);
hold on;
contour(IL,IK,Z,40,'color',[.5 .5 .8]);
if length(s) ~= 0
    for i=1:length(s.L);

 if lextr(i)==1
plot3(cpL(i),cpK(i),cpQ(i),'.','markersize',20,'color',[.2 .8 .2]);
  elseif lextr(i)==-1
 plot3(cpL(i),cpK(i),cpQ(i),'.','markersize',20,'color',[.5 .7 .9]);
 else
 plot3(cpL(i),cpK(i),cpQ(i),'.','markersize',20,'color',[.9 .9 .9]);
 end; end;
end;
```

Αν τρέξουμε τον παραπάνω κώδικα θα μας δώσει τα αποτελέσματα όπως εμφανίζονται παρακάτω:

```
Q =4*L+2*K-L^2-K^2
 CriticalPoints =[ 2, 1]%δηλαδή εδώ δίνονται οι λύσεις για τις οποί
%μηδενίζεται η συνάρτηση και  είναι L=2 και K=1
 D2(L,K)=                    [  -2              2 - 2 K]
                             [                         ]
                             [4 - 2 L          -2      ]
|D2(L,K)|=
                          -4 + 4 L + 8 K - 4 K L
|D1(L,K)|=  -2

[|D1(Li,Ki)| |D2(Li,Ki)|]=
-2  % εδώ εμφανίζονται οι τιμές της D1(L,K)για τις τιμές που
μηδενίζουν τη συνάρτηση και που εμφανίζονται στον
CriticalPoints=[ 2, 1]
 4  % εδώ εμφανίζονται οι τιμές της D2(L,K)για τις  τιμές  που
μηδενίζουν      %τη συνάρτηση και που εμφανίζονται στον
CriticalPoints =[2, 1]δηλαδή στη
%  |D2(Li,Ki)|=-4 + 4 L + 8 K - 4 K L αντικαταστόνται οι τιμές
L και K   με
% τις τιμές L=2 και K=1(-4+4*2+8*1-4*1*2)=-4+16-8=4
Local Extremes Status=  1% δηλαδή παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
 στο σημείο.
 Local Extremes Values= 5
```

Γενικές παρατηρήσεις

Στο πίνακα αυτό επειδή D1(L,K)=-2<0 και D2(L,K)=4>0(περίπτωση β) θα έχουμε τοπικό μέγιστο οπότε και εμφανίζεται ο αριθμός 1.Γενικά όταν εμφανίζεται ο αριθμός 1 στο Local Extremes Status σημαίνει ότι έχουμε τοπικό μέγιστο όταν εμφανίζεται ο αριθμός -1 σημαίνει ότι έχουμε τοπικό ελάχιστο και όταν εμφανίζεται ο αριθμός 0 σημαίνει ότι έχουμε σαγματικό σημείο.

Όπως έχουμε αναφέρει και στα εισαγωγικά αυτής της εργασίας αν

α) D1 $f(x,y,z)>0$

D2 $f(x,y,z)>0$ τότε το σημείο(x,y,z) είναι τοπικό ελάχιστο.

D3 $f(x,y,z)>0$

β) D1 $f(x,y,z)<0$

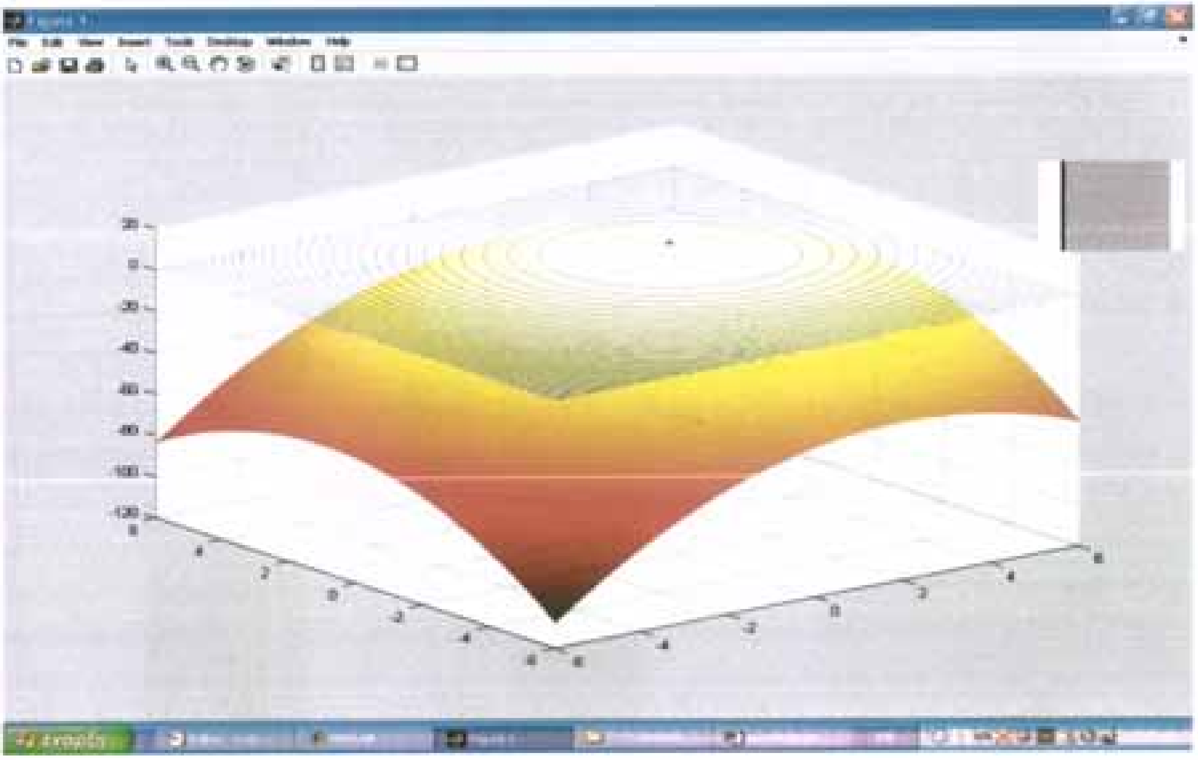
D2 $f(x,y,z)>0$ τότε το σημείο(x,y,z) είναι τοπικό μέγιστο .

D3 $f(x,y,z)>0$

γ) D1 f(x,y,z)>0

D2 f(x,y,z)>0 τότε το σημείο(x,y,z) είναι σαγματικό σημείο

D3 f(x,y,z)<0



Από τη παραπάνω γραφική παράσταση είναι φανερό ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** και είναι συμβολίζεται με την **πράσινη κουκίδα** .Γενικά το μέγιστο θα συμβολίζεται με πράσινες κουκίδες το ελάχιστο με μπλέ και το σαγματικό σημείο με λευκές.

Για τη κατασκευή της παραπάνω γραφικής παράστασης έγινε χρήση των εξής συναρτήσεων:

1) συνάρτηση plot3 είναι η συνάρτηση με την οποία ζωγραφίζουμε καμπύλες στο χώρο **.**Όποιος γνωρίζει τη χρήση της συνάρτησης **plot3** στο επίπεδο δεν έχει καμία δυσκολία να κατανοήσει τη χρήση της συνάρτησης plot3. Η μόνη διαφορά βρίσκεται στο γεγονός ότι τώρα χρησιμοποιείται ένα τρίτο διάνυσμα για να περιγραφεί η τρίτη συνιστώσα των σημείων.Οι άξονες ζωγραφίζονται έτσι ώστε να υπάρχει καλή οπτική εικόνα για την παράσταση. Ο άξονας των z είναι προφανώς ο κάθετος άξονας . Αν δεν είναι κατανοητό ποιος είναι ο άξονας ς και ποιος ο άξονας y μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εντολές xlabel, ylabel για να τους δούμε. Φυσικά, στις τρεις διαστάσεις υπάρχει και η συνάρτηση z label.

2)συνάρτηση mesh (παραλλαγές της) η οποία δίνει τη δυνατότητα εμφάνισης επιφανειών στον τρισδιάστατο χώρο.Οι επιφάνειες μπορούν να φωτιστούν, να σκιαστούν και να εμπλουτιστούν με χρώματα για να τονιστούν ορισμένες ιδιότητες τους . Για να καταλάβουμε όμως καλύτερα θα δούμε τη χρήση της με ένα παράδειγμα

Εστω ότι θέλουμε να κάνουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης Z=f(x,y) η οποία ως γνωστόν παριστάνει μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Για να κάνουμε τη γραφική της παράσταση κατασκευάζουμε πρώτα πολλά σημεία (χi, yi) στο επίπεδο χ,y και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα σημεία Zi=f(Xi,Yi).

Το MATLAB διευκολύνει την κατασκευή των σημείων (χi, yi,) με τη **συνάρτηση meshgrid**. Η συνάρτηση meshgrid παίρνει δύο μεταβλητές εισόδου, τα διανύσματα χ και γ και υπολογίζει δυο μεταβλητές εξόδου τις μήτρες X και Y. Ας δούμε πρώτα τις μήτρες X και Y. Θέτοντας

X=[1 -1 2 -3 4 7];

Y=[0 2 1 5];

και πληκτρολογώντας την εντολή [X,Y]=meshgrid(x,y)το MATIAB υπολογίζει τις μήτρες

X=

1	-1	2	-3	4	7
1	-1	2	-3	4	7
1	-1	2	-3	4	7
1	-1	2	-3	4	7

Y=

0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5

Ετσι κατασκευάζονται length(x)*length(y)=6*4=24 σημεία στο επίπεδο.Το στοιχείο X(i,j) είναι η τετμημένη του σημείου(xi,yi) και το στοιχείο Y(i,j) είναι η τετμημένη του ίδιου σημείου .Χρησιμοποιώντας τις μήτρες X και Y τα σημεία της επιφάνειας δίνονται με τη μήτρα Z, ίσων διαστάσεων με της X και Y οι οποίες δίνονται με το τύπο Z=f(X,Y).
Οι συναρτήσεις τύπου mesh αναπαριστούν τις επιφάνειες χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα. Τα τμήματα ανάμεσα στις γραμμές του πλέγματος ονομάζονται(*μπαλώματα ή κομματάκια)*.

3)Η συνάρτηση surf είναι όμοια με τη συνάρτηση mesh εκτός από το ότι τα μπαλώματα χρωματίζονται. Όμως, οι παραλλαγές της συνάρτησης surf είναι πολύ ισχυρές συναρτήσεις, αφού μπορούν να εμπλουτίσουν τις επιφάνειες με σκιάσεις, ανακλάσεις και διαχύσεις του φωτός, το οποίο μπορεί να προέρχεται από επιλεγμένες κατευθύνσεις.

4)η συνάρτηση shading η οποία χρησιμοποιείτε για τη σκίαση και στην οποία υπάρχουν τρις επιλογές ,η επίπεδη(flat),η παρεμβολική (interpolated) και η σκίαση όψεων(faceted).Στην επίπεδη σκίαση κάθε μπάλωμα του πλέγματος έχει σταθερό χρώμα ενώ οι γραμμές του πλέγματος δε φαίνονται

5) η συνάρτηση pcolor η οποία εμφανίζει πληροφορίες σχετικά με τις ισοβαρείς καμπύλες και παράγει πληροφορίες χρησιμοποιώντας χρώματα.

6) η συνάρτηση contour η οποία παράγει πληροφορίες σχετικά με τις ισοβαρείς καμπύλες και συγκεκριμένα τις ζωγραφίζει έτσι ώστε οι ισοσταθμικές καμπύλες να έχουν διαφορετικά χρώματα και το πλήθος τους να υπολογίζεται αυτόματα.

7) η συνάρτηση colormap(hot).Γενικά το MATLAB από τη στιγμή που θα ανοίξει υπολογίζει ένα αριθμό από χρωματικές μήτρες και ορίζει μια από αυτές σαν τρέχουσα .Οι χρωματικές μήτρες είναι συνηθισμένες μήτρες με τρεις στήλες .Κάθε γραμμή περιέχει κάποιο rgb τύπο ενός χρώματος .Έτσι όλα τα στοιχεία των χρωματικών μητρών είναι αριθμοί μεταξύ του 0 και του 1συμπεριλαμβανομένων.Οι χρωματικές μήτρες είναι συναρτήσεις οι οποίες περιέχονται στην κατηγορία graph3d.Εξ ορισμού κατασκευάζουν μήτρες με 64 γραμμές .Ο αριθμός των

γραμμών όμως μπορεί να προσδιοριστεί από το χρήστη αφού μπορεί να εισαχθεί σα μεταβλητή εισόδου .Οι χρωματικές μήτρες του MATLAB είναιgray, hot, home, copper, symmer, cool, winter κ.τ.λ.
Η τρέχουσα χρωματική μήτρα μπορεί να αλλάξει με την εντολή **colormap.**Η εξ ορισμού χρωματική μήτρα επανέρχεται με την εντολή colormap('default').Αν αλλάξουμε τη χρωματική μήτρα αλλάζει και ο χρωματισμός της επιφάνειας.

•Εύρεση ακρότατων σε συνάρτηση δυο αγνώστων όταν δίνεται η ζήτηση συνάρτηση της τιμής και αναζητάμε το βέλτιστό επίπεδο παραγωγής

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιχείρηση που παράγει δυο προϊόντα Q1, Q2 με συνθήκες μονοπωλιακού ανταγωνισμού .Αν οι συναρτήσεις ζήτησης εκτιμήθηκε ότι είναι :
Q1=50-3P1+2P2 και Q2=20+P1P2 όπου P1 P2 είναι οι τιμές των δυο αυτών προϊόντων αντίστοιχα και αν η συνάρτηση συνολικούκόστους εκτιμήθηκε ότι είναι TC=5Q1^2+Q1Q2+3Q2 τότε να βρεθούν τα επίπεδα παραγωγής που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης αυτής .

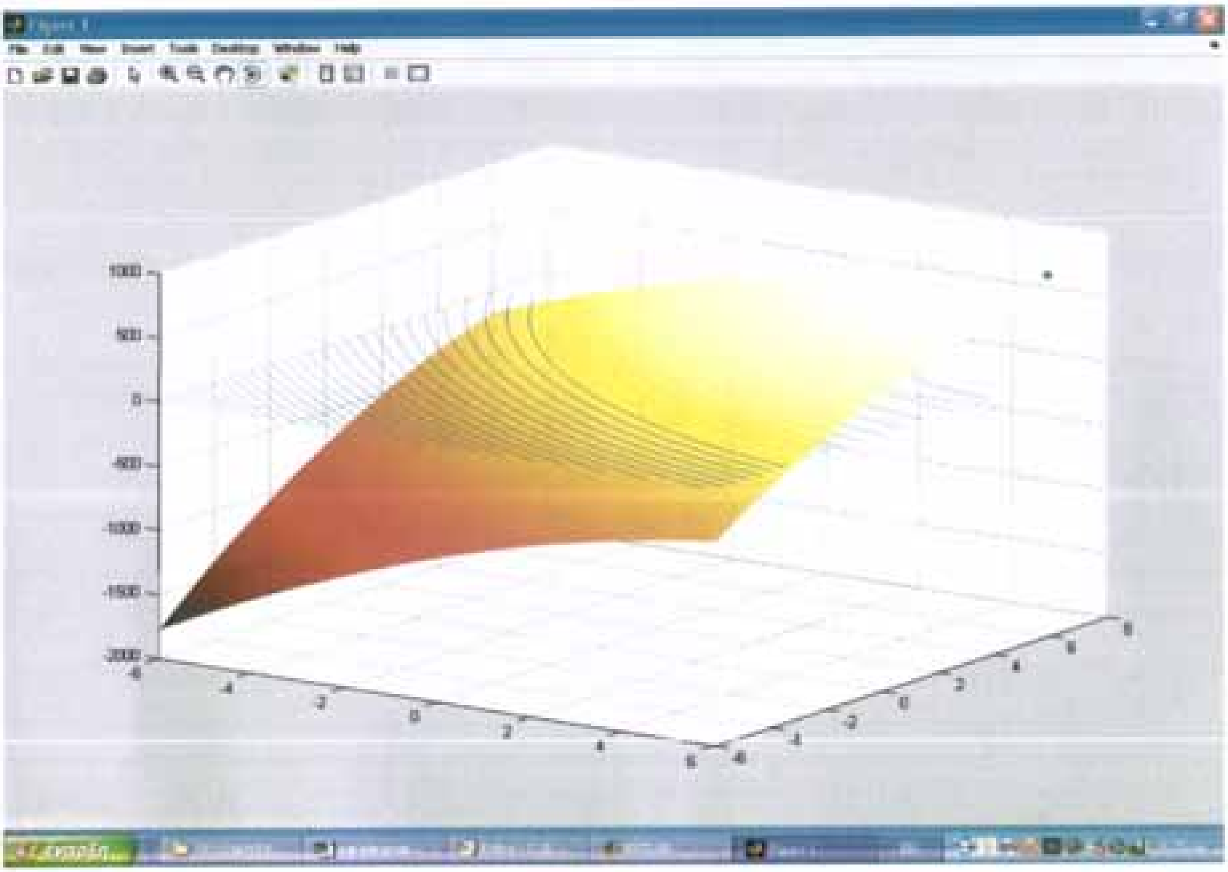
```
clear
syms p1 p2 q1 q2;

s=solve(q1-50+3*p1-2*p2, q2-20-p1+p2, p1, p2);
criticalpoints=[s.p1 s.p2]

pretty(simplify(criticalpoints));
disp('p1=');pretty(s.p1);
disp('p2=');pretty(s.p2);
syms q1 q2;

tc=5*q1^2+q1*q2+3*q2^2;disp('tc=');pretty(tc);
tr=p1*q1+p2*q2;disp ('TR=');pretty(tr);
tr1=subs(tr,p1,s.p1);disp('tr1=');pretty(tr1)
tr2=subs(tr1,p2,s.p2);disp ('tr2=');pretty(simplify(tr2));
tp=tr2-tc;disp('tp=');pretty(simplify(tp));

Dq1=diff(tp,'q1');
Dq2=diff(tp,'q2');
```

```
syms q1 q2;
tc=5*q1^2+q1*q2+3*q2^2;disp('tc=');pretty(tc);
tr=p1*q1+p2*q2;disp ('TR=');pretty(tr);
tr1=subs(tr,p1,s.p1);disp('tr1=');pretty(tr1);
tr2=subs(tr1,p2,s.p2);disp ('tr2=');pretty(simplify(tr2));
tp=tr2-tc;disp('tp=');pretty(simplify(tp));
Dq1=diff(tp,'q1');
Dq2=diff(tp,'q2');
s=solve(Dq1,Dq2);
CriticalPoints=[s.q1 s.q2]
D2=[diff(tp,'q1',2)  diff(tp,q1','q2'); ...
 diff(tp,'q2','q1') diff(tp,'q1',2)];
d1=D2(1,1);
disp('D2(q1,q2)=');
pretty(simplify(D2));
d2=det(D2);
disp('|D1(q1,q2)|=');
pretty(d1);
if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.q1);
      cpq1(i)=double(s.q1(i));
      cpq2(i)=double(s.q2(i));
      if abs(imag(cpq1(i)))<=1.0e-020 & abs(imag(cpq2(i)))<=1.0e-020
         cptp(i)=subs(tp,[q1 q2],[cpq1(i) cpq2(i)]);
         k1(i)=double(subs(d1,[q1 q2],[cpq1(i) cpq2(i)]));
         k2(i)=double(subs(d2,[q1 q2],[cpq1(i) cpq2(i)]));
         if k2(i)<0
            lextr(i)=0;
         elseif k2(i)==0
            lextr(i)=0;
         elseif k1(i)>0 & k2(i)>0
            lextr(i)=-1;
         elseif k1(i)<0 & k2(i)>0
            lextr(i)=1;
         end;
      else
         lextr(i)=2;
      end;
   end;
   disp('[|D1(q1i,q2i)| |D2(q1i,q2i)|]=');
   disp([k1; k2]);
   disp('Local Extremes Status=');
   disp(lextr);
    disp('Local Extremes Values=');
   disp(cptp);
else
   disp('*** No Local Extremum ***');
end;
```

Αποτελέσματα......

```
  criticalpoints =[  -2*q2+90-q1, -q1+110-3*q2]


                     [-2 q2 + 90 - q1    -q1 + 110 - 3 q2]
p1=

                              -2 q2 + 90 - q1
p2=

                              -q1 + 110 - 3 q2
tc=

                                 2              2
                           5 q1   + q1 q2 + 3 q2
TR= p1 q1 + p2 q2
tr1=    (-2 q2 + 90 - q1) q1 + p2 q2
 tr2=
                         2           2
             -3 q1 q2 + 90 q1 - q1  + 110 q2 - 3 q2
tp=

                          2            2
            -4 q1 q2 + 90 q1 - 6 q1  + 110 q2 - 6 q2
```

```
CriticalPoints =[    5, 15/2] %οι τιμές που μηδενίζουν τη συνάρτηση

D2(q1,q2)=

            [     -12                    -4 q1 - 12 q2 + 110]
            [                                              ]
            [-12 q1 - 4 q2 + 90                 -12        ]

|D1(q1,q2)|=  -12
[|D1(q1i,q2i)| |D2(q1i,q2i)|]=
 -12% εδώ εμφανίζονται οι τιμές της D1(L,K)για
τις τιμές που μηδενίζουν τη συνάρτηση και που εμφανίζονται στον
CriticalPoints=[ 5, 5/2]
 144% εδώ εμφανίζονται οι τιμές της D2(L,K)για τις  τιμές  που
μηδενίζουν τη συνάρτηση και που εμφανίζονται στον
CriticalPoints =[5, 15/2]δηλαδή στη  |D2(Li,Ki)| αντικαταστόνται
 οι τιμές    q1 και q2   με τις τιμές q1=5 και q2=5/2
Local Extremes Status=%δηλαδή η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
   1
Local Extremes Values=%δείχνει ποια είναι η τιμή της συνάρτησης για αυτές τις
  637.5000                       % τιμές
```



Είναι φανερό ότι παρουσιάζει μέγιστο

- **<u>Εύρεση ακρότατων σε συνάρτηση δυο αγνώστων</u>**

Έστω η συνάρτηση f=x^2+y^3-8*x-2*y να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης και το είδος αυτών και να γίνει γραφική παράσταση στην οποία να είναι ορατά.

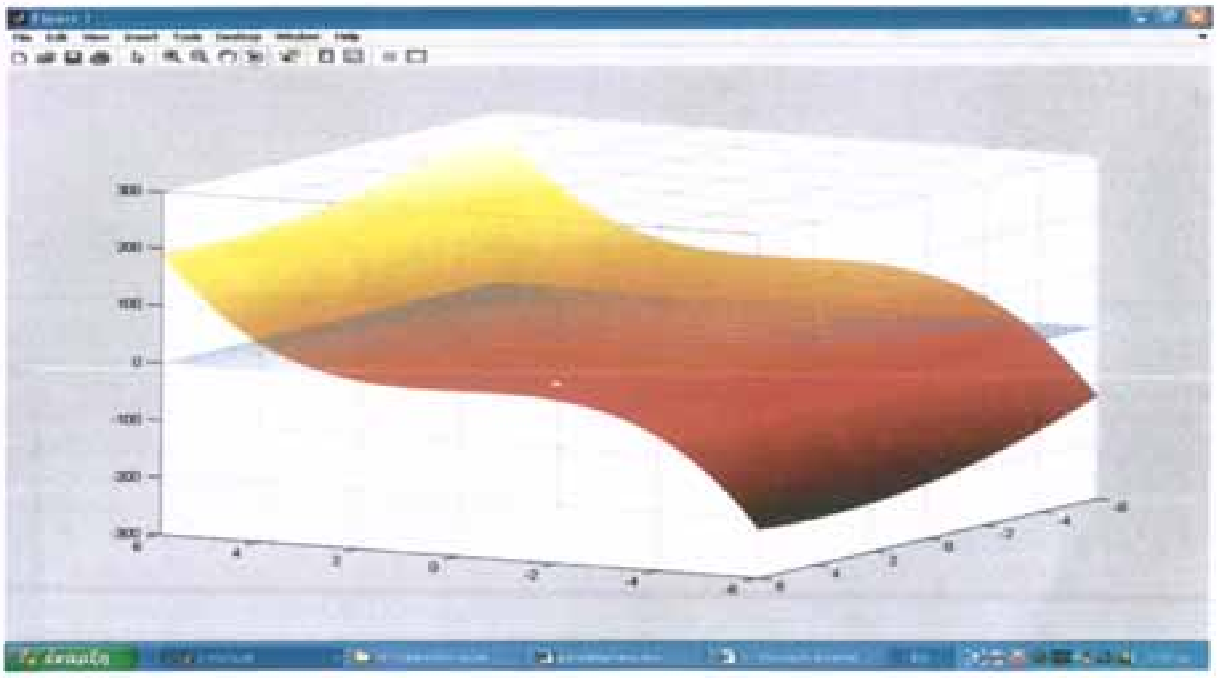
```
clear; %καθαρίζει την οθόνη
syms x y; %εισάγει τις μεταβλητές
f=x^2+y^3-8*x-2*y; %η συνάρτηση που επιθυμώ να
μεγιστοποιήσω
Dfx=diff(f,'x'); %βρίσκω τη μερική παράγωγο ως προς f
Dfy=diff(f,'y'); %βρίσκω τη μερική παράγωγο ως προς y
s=solve(Dfx,Dfy); %βρίσκω που μηδενίζεται η συνάρτηση
CriticalPoints=[s.x s.y] %%βρίσκω τις λύσεις σε ένα πίνακα
D2=[diff(Dfx,'x') diff(Dfx,'y'); ...
diff(Dfy,'x') diff(Dfy,'y')];%φτιάχνω τη ορίζουσα Hesse
disp('D2(x,y)='); %εμφανίζω την ορίζουσα D2
pretty(simplify(D2)); %εμφανίζω την ορίζουσα απλοποιημένη
```

```
d1=D2(1,1); %εμφανίζω στην ορίζουσα d1 την τιμή της D2(1,1)
d2=det(D2); %εμφανίζω την τιμή της d2
disp('|D2(x,y)|=');
pretty(simplify(d2)); %εμφανίζω την ορίζουσα D2 ως d2
disp('|D1(x,y)|='); %εμφανίζω την ορίζουσα D1 ως d1
pretty(d1);%κάνω έλεγχο για ακρότατα και για το είδος αυτών
if length(s) ~= 0
for i=1:length(s.x);%για i μέχρι το μήκος θέτω sxi,syi
cpx(i)=double(s.x(i));
cpy(i)=double(s.y(i));%αν δεν έχω μιγαδικές λύσεις βρίσκω τα
%k1(i) και k2(i);όπως ορίζονται παρακάτω
if abs(imag (cpx(i)))<=1.0e-020&abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-020
cpf(i)=subs(f,[x y],[cpx(i) cpy(i)]);
k1(i)=double(subs(d1,[x y],[cpx(i) cpy(i)]));
k2(i)=double(subs(d2,[x y],[cpx(i) cpy(i)]));

if k2(i)<0% αν δηλαδή K2(i)<0 τότε
lextr(i)=0; %εμφάνισε lextr(i)=0 δηλαδή σαγματικό σημείο
elseif k2(i)==0% αν δηλαδή K2(i)=0 τότε δηλαδή σαγματικό σημείο
lextr(i)=0; %εμφάνισε lextr(i)=0 δηλαδή σαγματικό σημείο
elseif k1(i)>0 & k2(i)>0% αν δηλαδή K2(i)>0 , k1(i)>0 τότε
lextr(i)=-1; %εμφάνισε lextr(i)=-1 δηλαδή τοπικό ελάχιστο
elseif k1(i)<0 & k2(i)>0% αν δηλαδή K2(i)>0,k1(i)<0 τότε
lextr(i)=1; %εμφάνισε lextr(i)=-1 δηλαδή τοπικό ελάχιστο
end;
else
```

Για τη κατασκευή της γραφικής παράστασης θα έχουμε...

```
lx=-6:.1:6;
ly=-6:.1:6;
[X,Y]=meshgrid(lx,ly);
Z=subs(f,{x y},{X Y});
axis([-6 6 -6 6 -2 2]);
surf(X,Y,Z); shading flat; colormap(hot);alpha(.8);
hold on;
contour(lx,ly,Z,40,'color',[.5 .5 .8]);
if length(s) ~= 0
    for i=1:length(s.x);
        if lextr(i)==1
        plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.2 .8 .2]);
        elseif lextr(i)==-1
       plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.5 .7 .9]);
        else
        plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.9 .9 .9]);
        end;end;end;
```

```
CriticalPoints =

[4,  1/3*6^(1/2)]%δίνονται οι τιμές που μηδενίζουν τη
[4, -1/3*6^(1/2)]% συνάρτηση

D2(x,y)=

                              [2     0 ]
                              [        ]
                              [0    6 y]
|D2(x,y)|=

                                12 y
|D1(x,y)|=
    2
[|D1(xi,yi)| |D2(xi,yi)|]= % εδώ εμφανίζονται οι τιμές της
D1(L,K)για
τις τιμές που μηδενίζουν τη συνάρτηση και που εμφανίζονται στον
CriticalPoints=[ 4, 1/3*6^(1/2)], [ 4, -1/3*6^(1/2)]και οι τιμές
%τηςD2(L,K)
  2.0000    2.0000
  9.7980   -9.7980
Local  Extremes  Status  %παρουσιάζει  ελάχιστο  και  σαγματικό
σημείο
   -1     0
Local Extremes Values=%εδώ εμφανίζεται η cpfδηλαδή η f για τις
τιμές
  -17.0887  -14.9113      %που μηδενίζουν τη συνάρτηση
```



Είναι φανερό ότι παρουσιάζει ελάχιστο που συμβολίζεται με μπλέ και σαγματικό σημείο που συμβολίζεται με λευκή κουκίδα.

2.2.2ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- **Εύρεση βέλτιστου κέρδους μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών όταν δίνεται το συνολικό κόστος και η ζήτηση**

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μονοπωλιακή επιχείρηση που διαθέτει το προϊόν της σε τρεις διαφορετικές αγορές παρουσιάζοντας τις παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης :

Αγορά 1: P1=40-2q1

Αγορά 2: P2=60-3q2

Αγορά 3: P3=100-4q3

όπου Pi και qi είναι οι τιμές και οι ποσότητες αντίστοιχα του ίδιου προϊόντος στις τρεις αυτές αγορές .Αν το συνολικό κόστος παραγωγής που εκτιμήθηκε είναι tc=20+30q όπου q είναι η συνολική ποσότητα του προϊόντος που παράγεται και πωλείται ,ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες του προϊόντος αυτού,που πρέπει να διαθέσει η επιχείρηση αυτή στις τρεις αγορές ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της.

```
%-ASKHSH ME 3 TRIS AGNWSTOUS----------------------
clear;

syms q q1 q2 q3;
%------synarthseis zhthshs------------------------
p1=40-2*q1;
p2=60-3*q2;
p3=100-4*q3;

%-----synarthseis synolikou kostous - kerdous------
tc=20+30*(q1+q2+q3);     pretty(tc);
tp=p1*q1+p2*q2+p3*q3-tc; pretty(tp);

 pretty(simplify(tp));

%------merikes paragogoi------
```

```
dtp1= diff(tp,'q1'); pretty(dtp1);
dtp2= diff(tp,'q2'); pretty(dtp2);
dtp3= diff(tp,'q3'); pretty(dtp3);

%-----eyresh lyseon poy mhdenizoyn th synarthsh ------
s=solve(dtp1,dtp2,dtp3);
Criticalpoints=[s.q1 s.q2 s.q3]
pretty(criticalpoints);

%---------------orizouses Hesse-------------------
D3=[diff(tp,'q1',2) diff(tp,'q1','q2') diff(tp,'q1','q3');...
diff(tp,'q2','q1') diff(tp,'q2',2) diff(tp,'q2','q3');...
diff(tp,'q3','q1') diff(tp,'q3','q2') diff(tp,'q3',2)];
D2=[diff(tp,'q1',2) diff(tp,'q1','q2') ;...
diff(tp,'q2','q1') diff(tp,'q2',2)];
disp('D2(q1,q2)=');
pretty(simplify(D2));
disp('D3(q1,q2,q3)=');
pretty(simplify(D3));
pretty(simplify(D2));
d2=det(D2);
d3=det(D3);
disp('|D1(q1,q2)|=');
pretty(D2(1,1));

%----------θέτει για να κάνει έλεγχο-----------------
len=length(s.q1); for i=1:len
cpq1(i)=double(s.q1(i));
cpq2(i) =double(s.q2(i));
cpq3(i)=double(s.q3(i));
cpz(i)=subs(tp,[q1 q2 q3],[cpq1(i) cpq2(i) cpq3]);

%-------- elegxos an oi orizoyses einai tetikes oi arnhtikes gia
bretei to eidos akrotatoy-------------------------------
k1(i)=double(subs(D2(1,1),[q1 q2],[cpq1(i) cpq2(i)]));
k2(i)=double(subs(d2,[q1 q2],[cpq1(i) cpq2(i)]));
k3(i)=double(subs(d3,[q1 q2 q3],[cpq1 cpq2 cpq3]));
if k2(i)<0
lextr(i)=0;
elseif k2(i)==0
lextr(i)=NaN;
elseif k1(i)>0 & k2(i)>0 & k3(i)>0
lextr(i)=-1;
elseif k1(i)<0 & k2(i)>0 & k3(i)<0
lextr(i)=+1;
end;
end;
%--------------εμφανίζει τα τελικά αποτελέσματα-----------
disp('[|D1(q1i,q2i)| |D2(q1i,q2i)| |D3(q1i,q2i,q3i]=');
disp([k1; k2; k3]);
disp('Local Extremes Status=');
disp(lextr);
```

Αποτελέσματα.....

```
                20 + 30 q1 + 30 q2 + 30 q3

  (40 - 2 q1) q1 + (60 - 3 q2) q2 + (100 - 4 q3) q3 - 20 - 30 q1 - 30 q2

        - 30 q3

                      2              2              2
          10 q1 - 2 q1  + 30 q2 - 3 q2  + 70 q3 - 4 q3  - 20

                          -4 q1 + 10

                          -6 q2 + 30

                          -8 q3 + 70

criticalpoints =%μηδενίζεται για τις τιμές που δίνει ο πίνακας q1=5/2, q2=5,q3=35/4
[  5/2,    5, 35/4]


                      [5/2    5    35/4]
D2(q1,q2)=

                    [    -4        -6 q2 + 30]
                    [                        ]
                    [-4 q1 + 10        -6    ]
D3(q1,q2,q3)=

                [    -4        -6 q2 + 30    -8 q3 + 70]
                [                                      ]
                [-4 q1 + 10        -6        -8 q3 + 70]
                [                                      ]
                [-4 q1 + 10    -6 q2 + 30        -8    ]

                    [    -4        -6 q2 + 30]
                    [                        ]
                    [-4 q1 + 10        -6    ]

|D1(q1,q2)|=
                          -4

|D1(q1i,q2i)| |D2(q1i,q2i)| |D3(q1i,q2i,q3i]=
   -4
   24
  -192

Local Extremes Status=%είναι φανερό ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
    1
```

• Εύρεση βέλτιστου κέρδους όταν δίνεται η ζήτηση

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιχείρηση που παράγει τρία προϊόντα τα οποία σε μια αγορά που προσφέρονται εκτιμήθηκε ότι έχουν τις παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης

$$\begin{Bmatrix} P1 = 10 - 2Q1 + 4Q2 \\ P2 = 40 - 2Q2 + 6Q3 \\ P3 = 15 - 3Q3 + 4Q1 \end{Bmatrix}$$

όπου Pi και Qi(i=1,2,3)είναι οι τιμές και οι ποσότητές των τριών αυτών προιόντων αντίστοιχα.Αν υποθέσουμε επίσης ότι καταφέραμε και εκτιμήσαμε τη συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης αυτής ότι είναι :

$TC=Q1^2+Q2^2+Q3^2+4Q1Q2+6Q2Q3+4Q1Q3$

ζητείται να βρεθούν οι ποσότητές από τα προϊόντα αυτά που πρέπει να παράγει η επιχείρηση αυτή ώστε να μεγιστοποιεί τα κέρδη της.

```
clear;
Sims Q1 Q2 Q3;
P1=10-2*Q1+4*Q2;Pretty(P1);
P2=40-Q2+6*Q3;pretty(P2);
P3=15-3*Q3+4*Q1;pretty(P3);
tc=Q1^2+Q2^2+Q3^2+4*Q1*Q2+6*Q2*Q3+4*Q1*Q3;pretty(tc);
%SYNARTHSH TOY SYNOLIKOY KOSTOYS
TR=P1*Q1+P2*Q2+P3*Q3;PRETTY(simplify(TR));
%SYNARTHSH SYNOLIKON ESODON THS EPIXEIRHSHS
TP=TR-tc;pretty(simplify(TP));
%SYNARTHSH SYNOLIKON KERDON THS EPIXEIRHSHS
dtP1= diff(TP,'Q1'); pretty(dtP1);
dtP2= diff(TP,'Q2'); pretty(dtP2);
dtP3= diff(TP,'Q3'); pretty(dtP3);
s=solve(dtP1,dtP2,dtP3);
criticalpoints=[s.Q1 s.Q2 s.Q3]
  pretty(criticalpoints);
D3=[diff(TP,'Q1',2) diff(TP,'Q1','Q2') diff(TP,'Q1','Q3');...
    diff(TP,'Q2','Q1') diff(TP,'Q2',2) diff(TP,'Q2','Q3');...
    diff(TP,'Q3','Q1') diff(TP,'Q3','Q2') diff(TP,'Q3',2)];
D2=[diff(TP,'Q1',2) diff(TP,'Q1','Q2') ;...
    diff(TP,'Q2','Q1') diff(TP,'Q2',2)];
disp('D2(Q1,Q2)=');
  pretty(simplify(D2));
disp('D3(Q1,Q2,Q3)='); pretty(simplify(D3));pretty(simplify(D2));
d2=det(D2);
d3=det(D3);
```

```
disp('|D1(Q1,Q2)|=');pretty(D2(1,1));
len=length(s.Q1);
for i=1:len
cpQ1(i)=double(s.Q1(i));
cpQ2(i)=double(s.Q2(i));
cpQ3(i)=double(s.Q3(i));
cpz(i)=subs(TP,[Q1 Q2 Q3],[cpQ1(i) cpQ2(i) cpQ3]);

k1(i)=double(subs(D2(1,1),[Q1 Q2],[cpQ1(i) cpQ2(i)]));
k2(i)=double(subs(d2,[Q1 Q2],[cpQ1(i) cpQ2(i)]));
k3(i)=double(subs(d3,[Q1 Q2 Q3],[cpQ1 cpQ2 cpQ3]));
if k2(i)<0
lextr(i)=0;
elseif k2(i)==0
lextr(i)=NaN;
elseif k1(i)>0 & k2(i)>0 & k3(i)>0
lextr(i)=-1;
elseif k1(i)<0 & k2(i)>0 & k3(i)<0
lextr(i)=+1;
end;end;
disp('[|D1(Q1i,Q2i)| |D2(Q1i,Q2i)| |D3(Q1i,Q2i,Q3i]=');
disp([k1; k2; k3]);
disp('Local Extremes Status=');
disp(lextr);
```

Αποτελέσματα

```
D2(Q1,Q2)=  [   -6        -4 Q2 + 40]
            [                       ]
            [-6 Q1 + 10       -4    ]
D3(Q1,Q2,Q3)=

            [   -6        -4 Q2 + 40   -8 Q3 + 15]
            [                                    ]
            [-6 Q1 + 10       -4       -8 Q3 + 15]
            [                                    ]
            [-6 Q1 + 10   -4 Q2 + 40       -8    ]

               [   -6        -4 Q2 + 40]
               [                       ]
               [-6 Q1 + 10       -4    ]

|D1(Q1,Q2)|= -6
[|D1(Q1i,Q2i)| |D2(Q1i,Q2i)| |D3(Q1i,Q2i,Q3i]=
   -6
   24
 -192
Local Extremes Status= %σημαίνει ότι έχουμε τοπικό μέγιστο αφόσον το αποτέλεσμα είναι μονάδα για   Q3=15/8 Q1=5/3   Q2=10
```

```
10 - 2 Q1 + 4 Q2

                    40 - Q2 + 6 Q3

                    15 - 3 Q3 + 4 Q1

               2      2      2
            Q1  + Q2  + Q3  + 4 Q1 Q2 + 6 Q2 Q3 + 4 Q1 Q3

             2                2                2
  10 Q1 - 2 Q1  + 4 Q1 Q2 + 40 Q2 - Q2  + 6 Q2 Q3 + 15 Q3 - 3 Q3  + 4 Q1 Q3

                    2           2           2
           10 Q1 - 3 Q1  + 40 Q2 - 2 Q2  + 15 Q3 - 4 Q3

                     -6 Q1 + 10

                     -4 Q2 + 40

                     -8 Q3 + 15
```

- **Εύρεση ακρότατου σε συνάρτηση τριών αγνώστων**

Έστω η συνάρτηση f=x^2+y^2+z^2-2*x-2*y-z+2 να βρείτε που η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και στη συνέχεια να βρεθεί το είδος του ακρότατου αυτού.

```
clear;
syms x y z;
f=x^2+y^2+z^2-2*x-2*y-z+2;
% f=x^2+y^2+z^2-2*x-2*y-z+2; --- No real solutions ---
Dfx=diff(f,'x');
Dfy=diff(f,'y');
Dfz=diff(f,'z');
s=solve(Dfx,Dfy,Dfz);
D3=[diff(Dfx,'x') diff(Dfx,'y') diff(Dfx,'z') ; ...
      diff(Dfy,'x') diff(Dfy,'y')  diff(Dfy,'z') ; ...
      diff(Dfz,'x') diff(Dfz,'y')  diff(Dfz,'z')];
D2=[diff(Dfx,'x') diff(Dfx,'y'); ...
      diff(Dfy,'x') diff(Dfy,'y')];
```

```
disp('D3(x,y)=');
pretty(simplify(D3));
d1=D2(1,1);
d2=det(D2);
d3=det(D3);
disp('|D3(x,y)|=');
pretty(simplify(d3));
disp('|D2(x,y)|=');
pretty(simplify(d2));
disp('|D1(x,y)|=');
pretty(d1);
if length(s) ~= 0
for i=1:length(s.x);
cpx(i)=double(s.x(i));
cpy(i)=double(s.y(i));
cpz(i)=double(s.z(i));
if abs(imag(cpx(i)))<=1.0e-020 &abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-020&
abs(imag(cpz(i)))<=1.0e-020
cpf(i)=subs(f,[x y z],[cpx(i) cpy(i) cpz(i)]);
k1(i)=double(subs(d1,[x y z],[cpx(i) cpy(i) cpz(i)]));
k2(i)=double(subs(d2,[x y z],[cpx(i) cpy(i) cpz(i)]));
k3(i)=double(subs(d3,[x y z],[cpx(i) cpy(i) cpz(i)]));
If k2(i)<0
lextr(i)=0;
elseif k2(i)==0
lextr(i)=0;
elseif k1(i)>0 & k2(i)>0 & k3(i)>0
lextr(i)=-1;
elseif k1(i)<0 & k2(i)>0 & k3(i)<0
lextr(i)=1;
end;
else
lextr(i)=2;
end;
end;
disp('|D1(xi,yi,zi)|, |D2(xi,yi,zi)|, |D3(xi,yi,zi)|]=');
disp([k1; k2; k3]);
disp('Local Extremes Status=');
disp(lextr);
disp('Local Extremes Values=');
disp(cpf);
else
disp('*** No Local Extremum ***');
end;
```

Αποτελέσματα…… . .

```
D3(x,y)=

                    [2   0   0]
                    [         ]
                    [0   2   0]
                    [         ]
                    [0   0   2]
|D3(x,y)|=

                        8
|D2(x,y)|=

                        4
|D1(x,y)|=

                        2
|D1(xi,yi,zi)|, |D2(xi,yi,zi)|, |D3(xi,yi,zi)|]=
     2
     4
     8

Local Extremes Status=
    -1

Local Extremes Values=
   -0.2500
```

2.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟ MATLAB – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

2.3.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

• Εύρεση βέλτιστου επιπέδου παραγωγής μιας συνάρτησης δυο μεταβλητών με δεδομένες τις εισροές παραγωγικών συντελεστών

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια παραγωγική διαδικασία με την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής Q=2*Q1^2+4*Q1*Q2-4*Q2^2 όπου Q το επίπεδο παραγωγής και L,K οι χρησιμοποιούμενες εισροές εργασίας και κεφαλαίου αντίστοιχα .Αν PL=4 και PK=5 είναι οι αμοιβές των δύο εισροών αντίστοιχα ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες L , K που μεγιστοποιούν το Q έτσι ώστε το συνολικό κόστος να ισούται με 80 μονάδες.

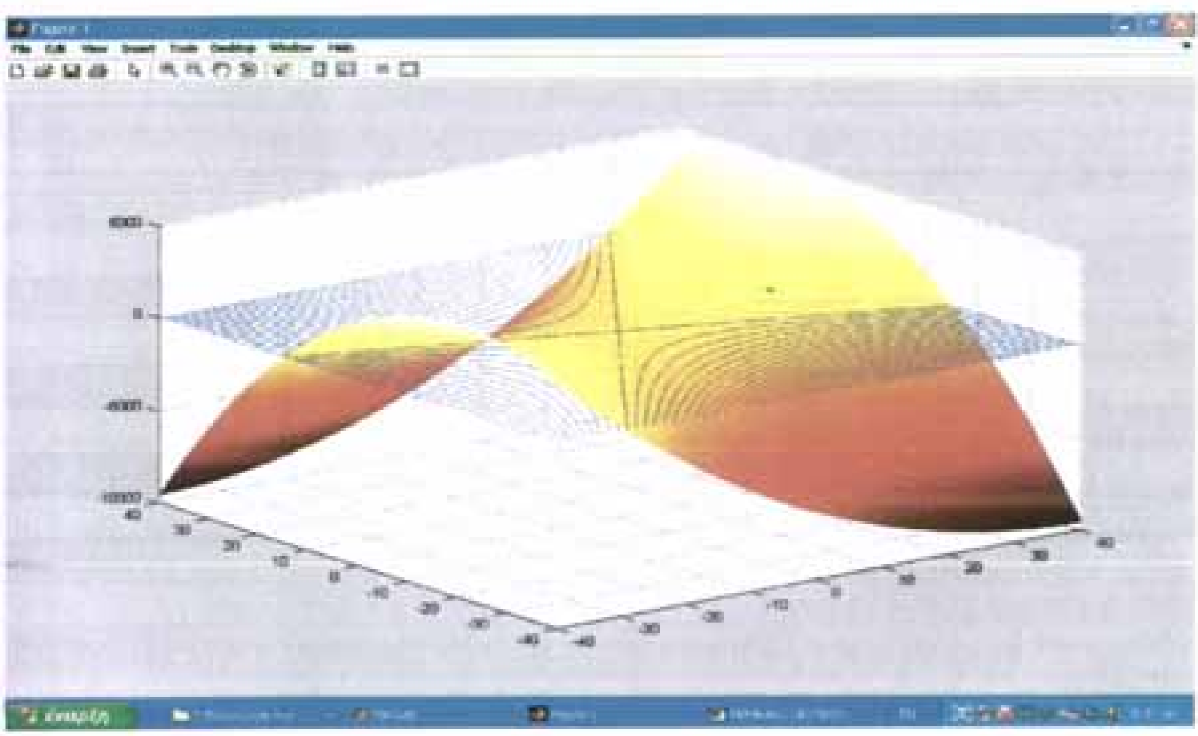
```
clear;
syms l L K;

Q=2*L^2+4*L*K-4*K^2;
g=80-4*L-5*K;
G=Q+l*g;
DGx=diff(G,'K');
DGy=diff(G,'L');
s=solve(DGx,DGy,g);
CriticalPoints=[s.K    s.L    s.l];pretty(CriticalPoints);%βρίσκω τις λύσεις που
ουν τη συνάρτηση
--------------------------%φτιάχνω την ορίζουσα D3------------------------
D3=[diff(G,'K',2)  diff(G,'K','L') diff(g,'K') ; ...
   diff(G,'L','K') diff(G,'L',2)  diff(g,'L') ; ...
   diff(g,'L')   diff(g,'K')   0       ];
disp('D3(L,K,l)=');
pretty(simplify(D3));
d3=det(D3);
disp('|D3(L,K,l)|=');
pretty(simplify(d3));
--------------κάνω έλεγχο στις πραγματικές λύσεις και στην ορίζουσα και ανάλογα με το
ετικές οι αρνητικές βγάζω συμπέρασμα για τα ακρότατα-------------
if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.l);
   cpL(i)=double(s.L(i));
   cpK(i)=double(s.K(i));
   cpl(i)=double(s.l(i));
   if abs(imag(cpL(i)))<=1.0e-020 & abs(imag(cpK(i)))<=1.0e-020
      cpG(i)=subs(G,[K L],[cpK(i) cpL(i)]);
      k(i)=double(subs(d3,[K L l],[cpK(i) cpL(i) cpl(i)]));
      if k(i)<0
```

```
cond_extr(i)=-1;
      elseif k(i)==0
cond_extr(i)=0;
      elseif k(i)>0
       cond_extr(i)=1;
      end;
   else
      cond_extr(i)=2;
   end;
   end;
   cpz(i)=subs(Q,[K L],[cpK(i) cpL(i)]);
   k(i)=double(subs(d3,[K L l],[cpK(i) cpL(i) cpl(i)]))
   if isreal(cpK(i)) & isreal(cpL(i)) & isreal(cpl(i))
    if k(i)<0
       cond_extr(i)=-1;
    elseif k(i)==0
       cond_extr(i)=0;
    elseif k(i)>0
       cond_extr(i)=1;
    end;
  else
  cond_extr(i)=2;
  end;end;
disp('|D3(Ki,Li,li)|=');
disp(k);
disp('Conditional Extremum Status=');
disp(cond_extr);
disp('Conditional Extremum Values=');
disp(cpQ);
```

Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης θα έχουμε.....

```
IL=-6:.1:6 ;
IK=-6:.1:6;
[X,Y]=meshgrid(IL,IK);
Z=subs(Q,{L K},{X Y});
axis([-6 6 -6 6 -2 2]);
surf(X,Y,Z); shading flat; colormap(hot);alpha(.9);
hold on;
contour(IL,IK, Z,40,'color',[.5 .5 .8]);
if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.L);
      if cond_extr(i)~=2
         if cond_extr(i)==1
            plot3(cpL(i),cpK(i),cpQ(i),'.','markersize',20,'color',[.2 .8 .2]);
         elseif cond_extr(i)==-1
            plot3(cpL(i),cpK(i),cpQ(i),'.','markersize',20,'color',[.5 .7 .9]);
         elseif cond_extr(i)==0
            plot3(cpL(i),cpK(i),cpQ(i),'.','markersize',20,'color',[.9 .9 .9]);
         end;
   end; end;end;
```

```
                         [-80     1040     960]
                         [---     ----     ---]
                         [47       47      47 ]
D3(L,K,l)=

              [      -8             4 L + 4 K - 4 l     -5]
              [                                           ]
              [4 L - 8 K - 5 l             4            -4]
              [                                           ]
              [      -4                   -5             0]
|D3(L,K,l)|=

                     80 + 164 L - 136 K - 189 l
k =

    80

|D3(Ki,Li,li)|=
    80

Conditional Extremum Status=παρουσιαζει τοπικο μεγιστο
     1
```



Είναι φανερό ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο .

- **Εύρεση βέλτιστου επιπέδου παραγωγής μιας συνάρτησης δυο μεταβλητών με δεδομένο το συνολικό κόστος**

Έστω η συνάρτηση παραγωγής Q=2 LK όπου Q το επίπεδο παραγωγής και LKοι χρησιμοποιούμενες εισροές κεφαλαίου και εργασίας .Αν PK=10 και PL=30 είναι οι αμοιβές των δύο εισροών ζητείται να βρεθούν ο ποσότητες L K που μεγιστοποιούν το Q ώστε το συνολικό κόστος να ισούται με TC=300.

```
clear;
syms x y l;
f=2*x*y;
g=300-30*x-30*y;
G=f+l*g;
DGx=diff(G,'x');
DGy=diff(G,'y');
s=solve(DGx,DGy,g);
D3=[diff(DGx,'x') diff(DGx,'y') diff(g,'x') ; ...
        diff(DGy,'x') diff(DGy,'y') diff(g,'y') ; ...
        diff(g,'x')       diff(g,'y')     0        ];
disp('D3(x,y,l)=');
pretty(simplify(D3));
d3=det(D3);
disp('|D3(x,y,l)|=');
pretty(simplify(d3));
if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.x);
   cpx(i)=double(s.x(i));
   cpy(i)=double(s.y(i));
   cpl(i)=double(s.l(i));
   if abs(imag(cpx(i)))<=1.0e-020 & abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-020
      cpf(i)=subs(f,[x y],[cpx(i) cpy(i)]);
      k(i)=double(subs(d3,[x y l],[cpx(i) cpy(i) cpl(i)]));
      if k(i)<0
         cond_extr(i)=-1;
      elseif k(i)==0
         cond_extr(i)=0;
      elseif k(i)>0
       cond_extr(i)=1;
      end;
   else
      cond_extr(i)=2;
   end;
   end;
```

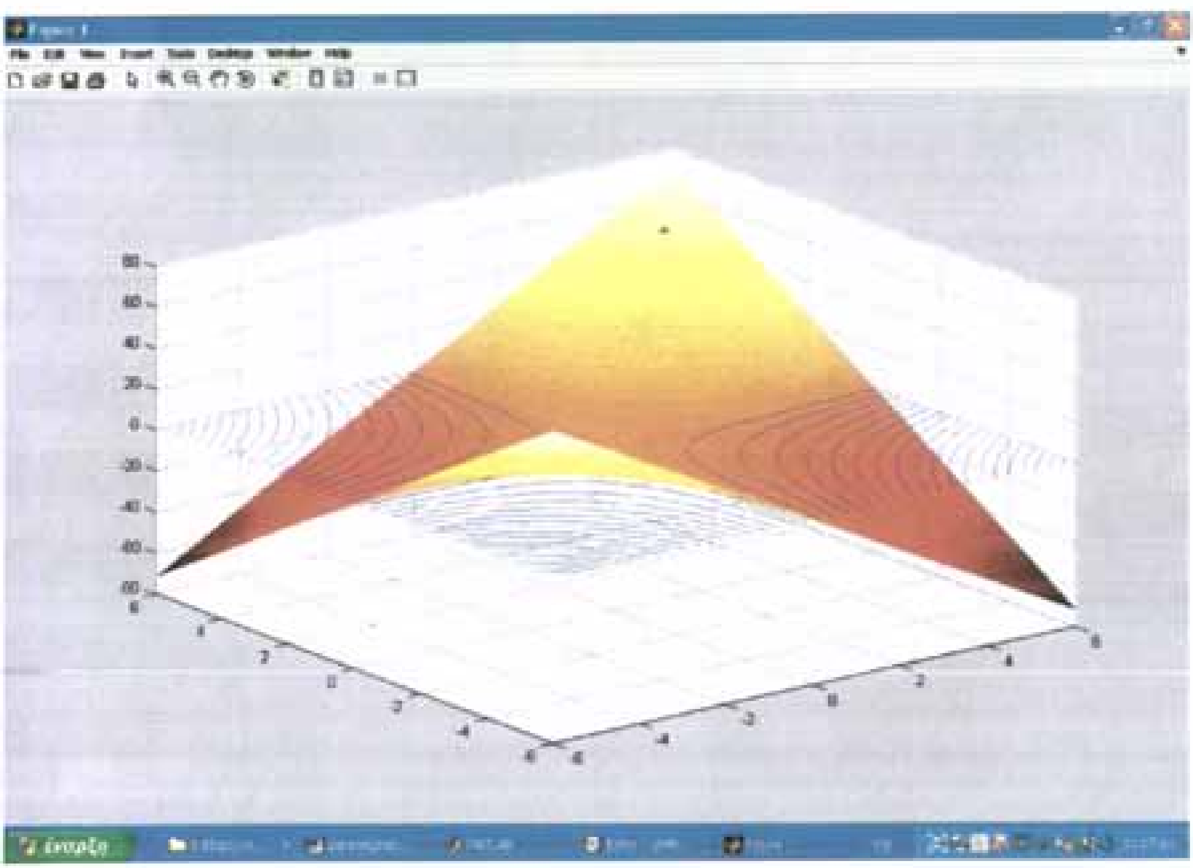
```
    disp('|D3(xi,yi,li)|=');
    disp(k);
    disp('Conditional Extremum Status=');
    disp(cond_extr);
    disp('Conditional Extremum Values=');
    disp(cpf);
else
      disp('*** No Conditional Extremum ***');
end;
```

Για τη κατασκευή της γραφικής παράστασης θα έχουμε

```
lx=-6:.1:6;
ly=-6:.1:6;
[X,Y]=meshgrid(lx,ly);
Z=subs(f,{x y},{X Y});
axis([-6 6 -6 6 -2 2]);
surf(X,Y,Z); shading flat; colormap(hot);alpha(.9);
hold on;
contour(lx,ly,Z,40,'color',[.5 .5 .8]);
if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.x);
      if cond_extr(i)~=2
         if cond_extr(i)==1

            plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.2 .8 .2]);
         elseif cond_extr(i)==-1
            plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.5 .7 .9]);
         elseif cond_extr(i)==0
            plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.9 .9 .9]);
         end;

      end;

   end;
end;

hold off;
```

Αποτελέσματα ....

```
D3(x,y,l)=

                 [ 0     2   -30]
                 [              ]
                 [ 2     0   -30]
                 [              ]
                 [-30   -30     0]
|D3(x,y,l)|=

                        3600
|D3(xi,yi,li)|=
      3600

Conditional Extremum Status= %είναι φανερό ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
    1
Conditional Extremum Values=
   50
```



•Εύρεση βέλτιστου επιπέδου ωφέλείας καταναλωτή δεδομένου του εισοδήματος του και των τιμών δυο προϊόντων τα οποία επιθυμεί να καταναλώσει.

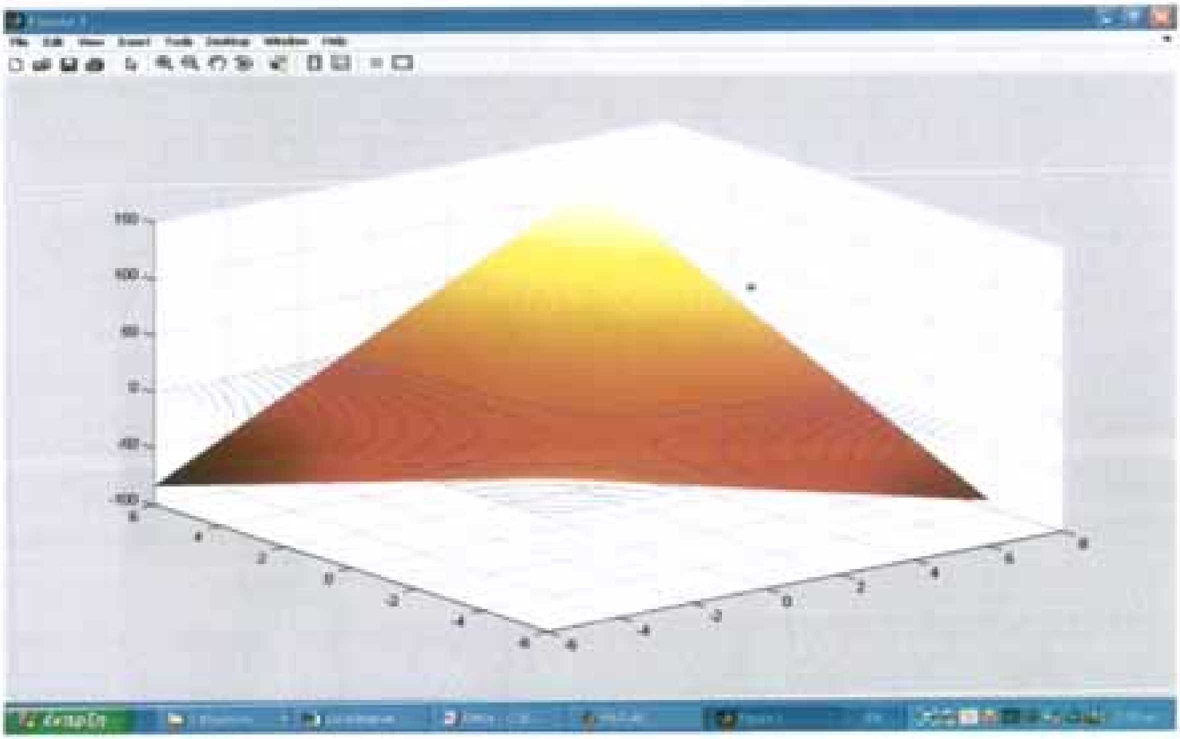
Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα καταναλωτή που έχει στη διάθεση του 100 ευρώ τα οποία σκοπεύει να καταναλώσει αγοράζοντας ποσότητες από δύο προϊόντα χ και ψ των οποίων οι τιμές είναι αντίστοιχα Pχ=10 και Pψ =20 ώστε να μεγιστοποιήσει την ωφέλεια του που εκτιμήθηκε ότι ερμηνεύεται από τη συνάρτησης f=4X+2Y+2XY

```
syms x y l;
f=4*x+2*y+2*x*y;
g=100-10*x-20*y;
G=f+l*g;
DGx=diff(G,'x');
DGy=diff(G,'y');
s=solve(DGx,DGy,g);
D3=[diff(DGx,'x') diff(DGx,'y') diff(g,'x') ; ...
diff(DGy,'x') diff(DGy,'y') diff(g,'y') ; ...
diff(g,'x')      diff(g,'y')     0        ];
disp('D3(x,y,l)=');
pretty(simplify(D3));
d3=det(D3);
disp('|D3(x,y,l)|=');
pretty(simplify(d3));
if length(s) ~= 0
for i=1:length(s.x);
cpx(i)=double(s.x(i));
cpy(i)=double(s.y(i));
cpl(i)=double(s.l(i));
if abs(imag(cpx(i)))<=1.0e-020 & abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-020
cpf(i)=subs(f,[x y],[cpx(i) cpy(i)]);
k(i)=double(subs(d3,[x y l],[cpx(i) cpy(i) cpl(i)]));
if k(i)<0
cond_extr(i)=-1;
elseif k(i)==0
cond_extr(i)=0;
elseif k(i)>0
cond_extr(i)=1;
end;else
cond_extr(i)=2;
end;end;
disp('|D3(xi,yi,li)|='); disp(k);
disp('Conditional Extremum Status=');
disp(cond_extr);
disp('Conditional Extremum Values=');
disp(cpf);else
disp('*** No Conditional Extremum ***');end;
```

```
lx=-6:.1:6;
ly=-6:.1:6;
[X,Y]=meshgrid(lx,ly);
Z=subs(f,{x y},{X Y});
axis([-6 6 -6 6 -2 2]);
surf(X,Y,Z); shading flat; colormap(hot);alpha(.9);
hold on;
contour(lx,ly,Z,40,'color',[.5 .5 .8]);

if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.x);
      if cond_extr(i)~=2
         if cond_extr(i)==1
            plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.2 .8 .2]);
         elseif cond_extr(i)==-1
            plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.5 .7 .9]);
         elseif cond_extr(i)==0
            plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.9 .9 .9]);
         end;


      end;
   end;
end;

hold off;
```

Αποτελέσματα……

```
D3(x,y,l)=

                    [ 0     2   -10]
                    [              ]
                    [ 2     0   -20]
                    [              ]
                    [-10   -20    0]
|D3(x,y,l)|=

                         800
|D3(xi,yi,li)|=
   800
Conditional Extremum Status=
     1
Conditional Extremum Values=%είναι φανερό ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
   52.2500
```



- **Εύρεση βέλτιστου επιπέδου ωφέλείας καταναλωτή όταν δίνεται η συνάρτηση ωφέλειας οι τιμές δυο προϊόντων τα οποία επιθυμεί να καταναλώσει.**

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα καταναλωτή που έχει στη διάθεση του 5000 ευρώ τα οποία σκοπεύει να καταναλώσει αγοράζοντας ποσότητες από δύο προϊόντα χ και ψ των οποίων οι τιμές είναι αντίστοιχα Pχ=10 και Pψ =40 ώστε να μεγιστοποιήσει την ωφέλεια του που εκτιμήθηκε ότι ερμηνεύεται από τη συνάρτηση g=5000-10*x-40*y

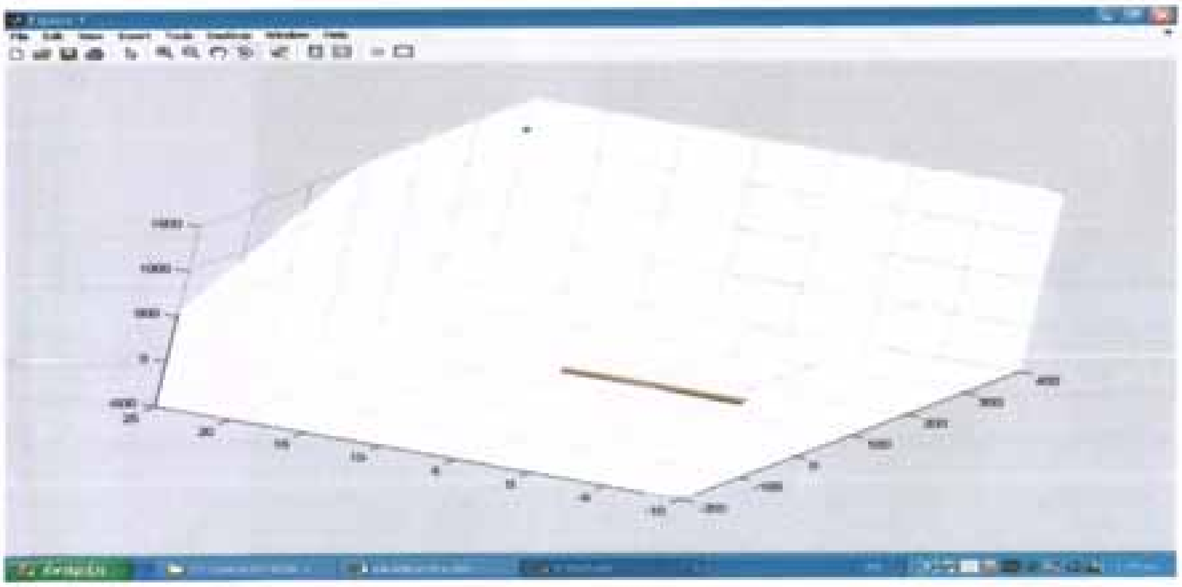
```
clear;
syms x y l;
f=5*(x^0.8)*(y^0.2);
g=5000-10*x-40*y;
G=f+l*g;
DGx=diff(G,'x');
DGy=diff(G,'y');
s=solve(DGx,DGy,g);criticalpoints=[s.xs.y]; pretty(criticalpoints);
D3=[diff(DGx,'x') diff(DGx,'y') diff(g,'x') ; ...
        diff(DGy,'x') diff(DGy,'y') diff(g,'y') ; ...
        diff(g,'x')       diff(g,'y')     0         ];
disp('D3(x,y,l)=');
```

```
pretty(simplify(D3));
d3=det(D3);
disp('|D3(x,y,l)|=');
pretty(simplify(d3));
if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.x);
   cpx(i)=double(s.x(i));
   cpy(i)=double(s.y(i));
   cpl(i)=double(s.l(i));     if     abs(imag(cpx(i)))<=1.0e-020      &
abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-020
       cpf(i)=subs(f,[x y],[cpx(i) cpy(i)]);
       k(i)=double(subs(d3,[x y l],[cpx(i) cpy(i) cpl(i)]));
       if k(i)<0
          cond_extr(i)=-1;
       elseif k(i)==0
          cond_extr(i)=0;
       elseif k(i)>0
         cond_extr(i)=1;
       end;
   else
       cond_extr(i)=2;
   end;
   end;
   disp('|D3(xi,yi,li)|=');
   disp(k);
   disp('Conditional Extremum Status=');
   disp(cond_extr);
   disp('Conditional Extremum Values=');
   disp(cpf);
else
       disp('*** No Conditional Extremum ***');
end;
```

Για τη κατασκευή γραφικής παράστασης θα έχουμε ....

```
lx=-6:.1:6;
ly=-6:.1:6;
[X,Y]=meshgrid(lx,ly);
Z=subs(f,{x y},{X Y});
axis([-6  6  -6  6  -2  2]);
surf(X,Y,Z); shading flat; colormap(hot);alpha(.9);
hold on;
contour(lx,ly,Z,40,'color',[.5 .5 .8]);
if length(s) ~= 0
    for i=1:length(s.x);
        if cond_extr(i)~=2
        if cond_extr(i)==1
    plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.2 .8 .2]);
    elseif cond_extr(i)==-1
    plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.5 .7 .9]);
            elseif cond_extr(i)==0
    plot3(cpx(i),cpy(i),cpf(i),'.','markersize',20,'color',[.9 .9 .9]);
            end;
        end;
```

```
 [400    25]
D3(x,y,l)=

                    [          1/5                              ]
                    [           y                1              ]
                    [ - 4/5 ----         4/5 ---------       -10]
                    [          6/5           1/5  4/5           ]
                    [           x             x    y            ]
                    [                                           ]
                    [                             4/5           ]
                    [           1                  x            ]
                    [4/5 ---------       - 4/5 ----          -40]
                    [     1/5  4/5             9/5              ]
                    [      x    y               y               ]
                    [                                           ]
                    [     -10                -40               0]
|D3(x,y,l)|=

                              2            2
                          16 y  + 8 x y + x
                       80 -----------------
                              6/5  9/5
                             x    y
|D3(xi,yi,li)|=
   45.9479

Conditional Extremum Status=
     1

Conditional Extremum Values=
  1.1487e+003
```



2.3.2ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- **Εύρεση μέγιστου σε συνάρτηση τριών μεταβλητών**

Να αποδειχθεί ότι η f(x1,x2,x3)=x1*x2*x3παρουσιάζει τοπικό μέγιστο που ικανοποιεί την εξίσωση: X1+X2+X3-1=0

```
clear;
syms x y z l;

f=x*y*z;
g=x+y+z-1;

G=f+l*g;
DGx=diff(G,'x');
DGy=diff(G,'y');
DGz=diff(G,'z');
s=solve(DGx,DGy,DGz,g);
CriticalPoints=[s.x s.y s.z];pretty(CriticalPoints);

D4=[diff(DGx,'x')  diff(DGx,'y') diff(DGx,'z')  diff(g,'x') ; ...
    diff(DGy,'x')  diff(DGy,'y') diff(DGy,'z')  diff(g,'y') ; ...
    diff(DGz,'x')  diff(DGz,'y') diff(DGz,'z')  diff(g,'y') ; ...
    diff(g,'x')      diff(g,'y')  diff(g,'z')    0          ];

disp('D4(x,y,z,l)=');
pretty(simplify(D4));
d4=det(D4);
disp('|D4(x,y,z,l)|=');
pretty(simplify(d4));

if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.x);
   cpx(i)=double(s.x(i));
   cpy(i)=double(s.y(i));
   cpz(i)=double(s.z(i));
   cpl(i)=double(s.l(i));
   if abs(imag(cpx(i)))<=1.0e-020  &  abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-
020& abs(imag(cpz(i)))<=1.0e-020
cpf(i)=subs(f,[x y z],[cpx(i) cpy(i) cpz(i)]);
      k(i)=double(subs(d4,[x   y   z   l],[cpx(i)   cpy(i)   cpz(i)
cpl(i)]));
      if k(i)<0
         cond_extr(i)=-1;
      elseif k(i)==0
         cond_extr(i)=0;
      elseif k(i)>0
```

```
        cond_extr(i)=1;
      end;
   else
      cond_extr(i)=2;
   end;
   end;
   disp('|D4(xi,yi,zi,li)|=');
   disp(k);
   disp('Conditional Extremum Status=');
   disp(cond_extr);
   disp('Conditional Extremum Values=');
   disp(cpf);
else
      disp('*** No Conditional Extremum ***');
end;
```

Αποτελέσματα...

```
                         [ 1      0      0 ]
                         [                 ]
                         [ 0      0      1 ]
                         [                 ]
                         [ 0      1      0 ]
                         [                 ]
                         [1/3    1/3    1/3]
D4(x,y,z,l)=

                         [0    z    y    1]
                         [                ]
                         [z    0    x    1]
                         [                ]
                         [y    x    0    1]
                         [                ]
                         [1    1    1    0]
|D4(x,y,z,l)|=

                2              2           2
               z  - 2 x z - 2 y z + y  - 2 x y + x
|D4(xi,yi,zi,li)|= 1.0000    1.0000    1.0000   -0.3333
Conditional Extremum Status=
    1     1     1    -1

Conditional Extremum Values=
      0         0         0    0.0370
```

- **Εύρεση μέγιστου σε συνάρτηση τριών μεταβλητών**

Η περιεκτικότητα μιας μάρκας σιγαρέτων ακολουθεί τη συνάρτηση f=x^2+x*y+3*y*z+2*z^2 όπου χ,y,z είναι οι ποσότητες από τα τρία είδη καπνών που χρησιμοποιούνται για τη παρασκευής των συγκεκριμένων αυτών σιγαρέττων.Εστω ότι οι τιμές των ειδών αυτών ανα μονάδα βάρους είναι px=1, py=2 και pz=3 αντίστοιχα ο δε εργοστασιάρχης διαθέτει 20 για την αγορά των ποικιλιών αυτών των καπνών ανα χρονική περίοδο παραγωγής (χ+2y+3z=20).

```
clear;
syms x y z l;
f=x^2+x*y+3*y*z+2*z^2;
g=20-x-2*y-3*z;
G=f+l*g;
DGx=diff(G,'x');
DGy=diff(G,'y');
DGz=diff(G,'z');
s=solve(DGx,DGy,DGz,g);
D4=[diff(DGx,'x')  diff(DGx,'y') diff(DGx,'z')  diff(g,'x') ; ...
     diff(DGy,'x')  diff(DGy,'y') diff(DGy,'z')  diff(g,'y') ; ...
     diff(DGz,'x')  diff(DGz,'y') diff(DGz,'z')  diff(g,'y') ; ...
       diff(g,'x')       diff(g,'y')  diff(g,'z')     0        ];
disp('D4(x,y,z,l)=');
pretty(simplify(D4));
d4=det(D4);
disp('|D4(x,y,z,l)|=');
pretty(simplify(d4));
if length(s) ~= 0
   for i=1:length(s.x);
   cpx(i)=double(s.x(i));
   cpy(i)=double(s.y(i));
   cpz(i)=double(s.z(i));
   cpl(i)=double (s.l(i));
   if              abs(imag(cpx(i)))<=1.0e-020              &
abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-020& abs(imag(cpz(i)))<=1.0e-020
      cpf(i)=subs(f,[x y z],[cpx(i) cpy(i) cpz(i)]);
      k(i)=double(subs(d4,[x  y  z  l],[cpx(i)  cpy(i)  cpz(i)
cpl(i)]));
      if k(i)<0
         cond_extr(i)=-1;
      elseif k(i)==0
         cond_extr(i)=0;
      elseif k(i)>0
        cond_extr(i)=1;
      end;
   else
      cond_extr(i)=2;
   end;
   end;
```

```
disp('|D4(xi,yi,li)|=');
   disp(k);
   disp('Conditional Extremum Status=');
   disp(cond_extr);
   disp('Conditional Extremum Values=');
   disp(cpf);
else
      disp('*** No Conditional Extremum ***');
end;
```

Αποτελέσματα .....

```
D4(x,y,z,l)=

                    [ 2    1    0   -1]
                    [                 ]
                    [ 1    0    3   -2]
                    [                 ]
                    [ 0    3    4   -2]
                    [                 ]
                    [-1   -2   -3    0]
|D4(x,y,z,l)|=

                          44
|D4(xi,yi,li)|=
   44

Conditional Extremum Status
    1

Conditional Extremum Values=
   78.5714
```

2.3.3.ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΡΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Η περιεκτικότητα μιας μάρκας σιγαρέτων ακολουθεί τη συνάρτηση f=x^2+x*y+3*y*z+2*z^2 όπου χ,y,z είναι οι ποσότητες από τα τρία είδη καπνών που χρησιμοποιούνται για τη παρασκευής των συγκεκριμένων αυτών σιγαρέττων.Εστω ότι οι τιμές των ειδών αυτών ανα μονάδα βάρους είναι px=1, py=2 και pz=3 αντίστοιχα ο δε εργοστασιάρχης διαθέτει 20 για την αγορά των ποικιλιών αυτών των καπνών ανα χρονική περίοδο παραγωγής (χ+2y+3z=20).Έστω επίσης ότι απαιτούνται 10 μονάδες βάρους από τα είδη χ και z.Να βρεθεί το άριστο επίπεδο από τις ποσότητες χ,y,z που πρέπει να χρησιμοποιήθει προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα της νικοτίνης .

```
clear;
syms x y z l m;
f=x^2+x*y+3*y*z+2*z^2;
g=20-x-2*y-3*z;
h=10-x-z;
G=f+l*g+m*h;
DGx=diff(G,'x');
DGy=diff(G,'y');
DGz=diff(G,'z');
DGm=diff(G,'m');
DGl=diff(G,'l');
s=solve(DGx,DGy,DGz,g,h);
criticalpoints=[s.x s.y s.z s.m s.l];pretty(simplify(criticalpoints));
---------------%βρίσκω τις ορίζουσες--------------------------
D5=[diff(DGx,'x') diff(DGx,'y') diff(DGx,'z') diff(g,'x')
diff(h,'x');...
diff(DGy,'x') diff(DGy,'y') diff(DGy,'z') diff(g,'y') diff(h,'y');...
diff(DGz,'x') diff(DGz,'y') diff(DGz,'z') diff(g,'y') diff(h,'z');
...
diff(g,'x')     diff(g,'y')     diff(g,'z')      0          0 ; ...
diff(h,'x')     diff(h,'y')     diff(h,'z')      0          0 ];
disp('D5(x,y,z,l,m)=');
pretty(simplify(D5));
d5=det(D5);
disp('|D5(x,y,z,l,m)|=');
pretty(simplify(d5));
D4=[diff(DGx,'x') diff(DGx,'y') diff(DGx,'z') diff(g,'x') ; ...

diff(DGy,'x') diff(DGy,'y') diff(DGy,'z') diff(g,'y') ; ...

 diff(DGz,'x') diff(DGz,'y') diff(DGz,'z') diff(g,'y') ; ...
```

```
disp('D4(x,y,z,l)=');
pretty(simplify(D4));
d4=det(D4);
disp('|D4(x,y,z,l)|=');
pretty(simplify(d4));


if length(s) ~= 0
for i=1:length(s.x);
cpx(i)=double(s.x(i));
cpy(i)=double(s.y(i));
cpz(i)=double(s.z(i));
cpl(i)=double(s.l(i));
cpm(i)=double(s.m(i));
-------%ελέγχω τα πρόσημο της D3,D4 και αν είναι ίδια έχω
ελάχιστο αλλιώς μέγιστο---------
abs(imag(cpy(i)))<=1.0e-020& abs(imag(cpz(i)))<=1.0e-020
cpf(i)=subs(f,[x y z],[cpx(i) cpy(i) cpz(i)]);
k1(i)=double(subs(d5,[x y z l m ],[cpx(i) cpy(i) cpz(i) cpl(i)
cpm(i) ]));
k2(i)=double(subs(d4,[x y z l m ],[cpx(i) cpy(i) cpz(i) cpl(i)
cpm(i) ]));
if k1(i)>0 & k2(i)>0
cond_extr(i)=-1;
elseif k(i)<0& k2(i)<0
cond_extr(i)=-1;
elseif k(i)>0& k2(i)<0
cond_extr(i)=1;
elseif k(i)<0& k2(i)>0
cond_extr(i)=1;
end;
else
cond_extr(i)=2;    if abs(imag(cpx(i)))<=1.0e-020 &
end;
end;
end;
disp('|D5(xi,yi, zi,li,mi)|=');
disp(k1);
disp('|D4(xi,yi,zi,li,mi)|=');
disp(k2);
disp('Conditional Extremum Status=');
disp(cond_extr);
```

Αποτελέσματα....

```
  [0    -5    10    -20    15]
 D5(x,y,z,l,m)=

                         [ 2    1    0   -1   -1]
                         [                       ]
                         [ 1    0    3   -2    0]
                         [                       ]
                         [ 0    3    4   -2   -1]
                         [                       ]
                         [-1   -2   -3    0    0]
                         [                       ]
                         [-1    0   -1    0    0]
|D5(x,y,z,l,m)|=

                                   12
D4(x,y,z,l)=

                           [ 2    1    0   -1]
                           [                 ]
                           [ 1    0    3   -2]
                           [                 ]
                           [ 0    3    4   -2]
                           [                 ]
                           [-1   -2   -3    0]
|D4(x,y,z,l)|=

                                   44
|D5(xi,yi,zi,li,mi)|=
    12

|D4(xi,yi,zi,li,mi)|=
    44

Conditional Extremum Status=%συνεπώς παρουσιάζει
                                    τοπικό ελάχιστο
             -1
```