Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΩΝ

Σ. Δ. Ο.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΚΑΙ ΣΤΟΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ

ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΕΣ: ΚΟΥΒΑΡΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ
ΚΟΥΤΣΟΥΝΑΜΕΝΤΟΥ ΜΑΡΘΑ
ΜΠΕΚΑ ΜΑΡΙΑ

ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΣ: Δ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ

ΠΑΤΡΑ
ΕΤΟΣ 2008

Π ε ρ ι ε χ ό μ ε ν α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά συχνά ορίζονται ως η μελέτη ποσοτήτων, των δομών, των μεταβολών και του χώρου. Κατά τη σύγχρονη επίσημη άποψη τα μαθηματικά είναι η έρευνα των αξιωματικά θεμελιωμένων αφηρημένων δομών χρησιμοποιώντας την λογική και τη μαθηματική σημειολογία.

Σήμερα, οι βασικοί κλάδοι των μαθηματικών συνεχίζουν να αναπτύσσονται και να διακλαδίζονται περισσότερο αλλά και πληθαίνουν οι εφαρμογές τους όπως στον τομέα της οικονομίας όπου παίζουν ολοένα και σημαντικότερο ρόλο.

Η οικονομία είναι μια λέξη που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή και μπορεί να σημαίνει πολύ απλά από την εξοικονόμηση χρημάτων μέχρι την οικονομική κατάσταση ενός κράτους.

Σαν επιστημονικό πεδίο η οικονομία ασχολείται με την βέλτιστη κατανομή περιορισμένων πόρων. Τα σύγχρονα οικονομικά χωρίζονται βασικά σε Μικροοικονομικά, Μακροοικονομικά, Οικονομετρία.

Τα οικονομικά είναι η κοινωνική επιστήμη που μελετά την παραγωγή, διανομή και κατανάλωση των αγαθών και υπηρεσιών. Περιγράφει την διαδικασία σε όρους ανταλλαγής μεταξύ ανταγωνιστικών επιλογών, όπως παρατηρείται μέσω μετρήσιμών ποσοτήτων όπως είναι οι εισροές, οι τιμές και οι εκροές. Ως εισροές εννοούμε τα αγαθά και τις υπηρεσίες που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή περαιτέρω αγαθών ή υπηρεσιών. Οι εισροές αναφέρονται και ως συντελεστές παραγωγής και δύναται να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες: τους φυσικούς πόρους, την εργασία και το κεφαλαίο. Ως εκροές εννοούμε τα παραγόμενα αγαθά ή υπηρεσίες τα οποία είτε καταναλώνονται από τον τελικό χρήστη είτε επαναχρησιμοποιούνται στην παραγωγική διαδικασία.

Στην Οικονομία, λοιπόν, τα άτομα και οι ιδιωτικές επιχειρήσεις λαμβάνουν περισσότερες αποφάσεις σχετικά με την παραγωγή και την κατανάλωση. Ένα σύστημα τιμών, αγορών, κερδών, ζημιών, κινήτρων και αντικινήτρων καθορίζει την οικονομία της αγοράς. Έτσι, τα μαθηματικά που είναι η βάση της οικονομικής επιστήμης είναι απαραίτητα για θέματα που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον όπως η κατανομή των πόρων, η παραγωγή, η διανομή ή ανταλλαγή, και ο ανταγωνισμός.

Οι μαθηματικές μέθοδοι ήταν ανέκαθεν σημαντικές στην ανάλυση των αγορών, της παραγωγής και γενικότερα της επιχειρηματικότητας. Η τάση ποσοτικοποίησης που εντάθηκε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα πήρε εκρηκτικές διαστάσεις την δεκαετία του '70, και συντέλεσε στην αναμόρφωση κλάδων όπως τα χρηματοοικονομικά, τα τραπεζικά και ασφαλιστικά θέματα. Κατά πολλούς ήταν οι έντονα μαθηματικοποιημένες ανακαλύψεις των Markowitz, Sharpe, Black, Scholes, Merton και παλαιότερα του Bellman που συντέλεσαν στην εξάπλωση νέων (παραγωγών) χρηματοοικονομικών προϊόντων, των εργαλείων διαχείρισης κινδύνου και αλματώδους αύξηση της αποτελεσματικότητας των παραγωγικών διαδικασιών.

Έτσι, μερικές μαθηματικές μέθοδοι που είναι απαραίτητες και συναντάμε στη μελέτη μιας οικονομίας είναι: η μελέτη του διαφορικού λογισμού, η βελτιστοποίηση συναρτήσεων, η λογική των συναρτήσεων που μελετά την σχέση εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (συνάρτηση ζήτησης, συνάρτηση προσφοράς, ελαστικότητες, συνάρτηση χρησιμότητας κ.λ.π.), στατιστικές τεχνικές για την ανάλυση οικονομικών στοιχείων, για εύρεση ελαττωμάτων / ελαττωματικών προϊόντων, ποιοτικοί έλεγχοι, δειγματοληψία, θεωρία αριστοποίησης που συμβάλει στο τομέα λήψης αποφάσεων και άσκησης πολιτικής, θεωρία παιγνίων όπου επιλέγονται οι καλύτερες στρατηγικές για μια οικονομία.

Στα παρακάτω κεφάλαια, λοιπόν, θα συναντήσουμε εφαρμογές των γενικών μαθηματικών , δηλαδή με έναν τρόπο που δεν προϋποθέτει αυξημένες γνώσεις μαθηματικών και ταυτόχρονα ισορροπημένο αναφορικά με την έμφαση στη θεωρία, τις τεχνικές και τα σχετικά παραδείγματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο έχουμε τις συναρτήσεις, οικονομικές εφαρμογές που είναι σημαντικές, βασικές για την ανάλυση μιας οικονομίας, συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, συνθήκες ισορροπίας, ανάλυση νεκρού σημείου κλπ.

Στο δεύτερο κεφάλαιο έχουμε τις οικονομικές εφαρμογές των παραγώγων ως βασικό εργαλείο στη μελέτη των εσόδων, εξόδων μιας επιχείρησης, μιας οικονομίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο συζητάμε εφαρμογές της μερικής παραγώγου, του ολικού διαφορικού και της ολικής παραγώγου σε προβλήματα οικονομικής ανάλυσης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο η προσοχή μας επικεντρώνεται στην εφαρμογή των μεθόδων αριστοποίησης των πολυμεταβλητών συναρτήσεων που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση.

Στο πέμπτο κεφάλαιο θα αναλύσουμε τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση χρηματοοικονομικών προβλημάτων.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οικονομικές εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στο έβδομο κεφάλαιο θα αναλύσουμε εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος σε οικονομικά προβλήματα.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζουμε παραδείγματα πινάκων σχετικά με την εύρεση επιπέδου παραγωγής, τις συνολικές πωλήσεις και γενικά στοιχεία που βοηθούν την οικονομική πολιτική μιας επιχείρησης.

Και τέλος, στο έννατο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα ειδικό κεφάλαιο με περαιτέρω προβλήματα που αφορούν τον επιχειρηματικό σχεδιασμό όπως παραδείγματα που αφορούν την θεωρία παιγνίων, ουρές αναμονής συστήματος M/M/1 και οικονομετρία που δεν αναφέρονται στις προηγούμενες ενότητες.

1
ΣΥΝΑΡΤΉΣΕΙΣ: ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σ’ αυτό το κεφάλαιο η προσοχή μας επικεντρώνεται σε εφαρμογές των γενικών μαθηματικών σε οικονομικά προβλήματα.

1.1 Οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης

Είναι σχεδόν αδύνατο να μιλήσει κανείς για οικονομικά προβλήματα χωρίς να αναφερθεί στην **προσφορά** και στη **ζήτηση** (supply and demand), οι έννοιες αυτές χρησιμεύουν στον προσδιορισμό της τιμής και της ποσότητας ισορροπίας στην αγορά. Η προσφορά και η ζήτηση ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας θεωρούνται συναρτησιακές σχέσεις μιας σειράς μεταβλητών και, πρωταρχικά της τιμής.

Η **συνάρτηση ζήτησης** (demand function) ενός αγαθού – για μια ορισμένη χρονική περίοδο- εξαρτάται από την τιμή του, αν υποθέσουμε ότι οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες (π.χ., οι προτιμήσεις των καταναλωτών, οι τιμές των σχετιζόμενων αγαθών, το εισόδημα κλπ.) παραμένουν σταθεροί. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε σε γραμμική μορφή την ακόλουθη συνάρτηση

$$Q_d = a - bP \ ,$$

Όπου Q_d είναι η **ζητούμενη ποσότητα** (quantity demanded) του αγαθού, P είναι η τιμή του αγαθού, a είναι μια σταθερά που μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριλαμβάνει την επίδραση των άλλων παραγόντων που παραμένουν αμετάβλητοι, και b είναι η κλίση της συνάρτησης ζήτησης. Η κλίση είναι αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε αύξηση (μείωση) της τιμής υπάρχει μείωση (αύξηση) της ζητούμενης ποσότητας. Η σχέση αυτή ονομάζεται **νόμος της ζήτησης** (law of demand)

Ομοίως, η συνάρτηση προσφοράς (supply function) ενός αγαθού (ή υπηρεσίας) για μια ορισμένη χρονική περίοδο, γράφεται:

$$Q_s = -c - dP \ \ ,b$$

Όπου Q_s είναι η προσφερόμενη ποσότητα (quantity supplied) του αγαθού, η οποία εξαρτάται από την τιμή του και από μια σειρά άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες τους οποίους υποθέτουμε σταθερούς και τους συμβολίζουμε με το γράμμα s. Ο συντελεστής d συμβολίζει την κλίση τη συνάρτησης προσφοράς που είναι θετική, πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε αύξηση (μείωση) της τιμής ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας οι παραγωγοί αυξάνουν (μειώνουν την προσφερόμενη ποσότητα. Αυτή η σχέση ανάμεσα στην τιμή και στη ζητούμενη ποσότητα λέγεται νόμος της προσφοράς (law of supply).

Ισορροπία στην αγορά υπάρχει, όταν η ζητούμενη ποσότητα είναι ίση με τη προσφερόμενη ποσότητα. Συμβολικά, η συνθήκη ισορροπίας γράφεται:

$$Q_d = Q_S$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη ισορροπίας τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης λαμβάνουμε:

$$a - bP = -c - dP$$

και

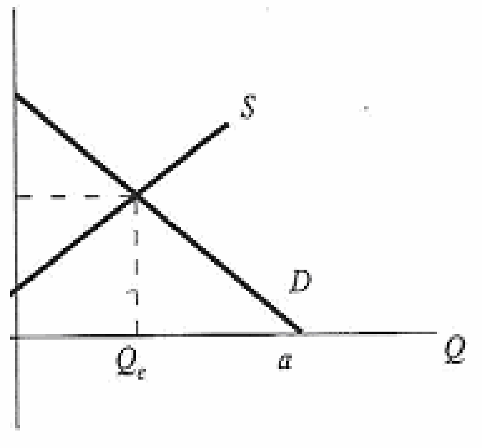
$$P = \frac{a+c}{b+d} = P_e$$

Όπου P_e είναι η τιμή ισορροπίας (equilibrium price). Αν αντικαταστήσουμε την P_e είτε στη συνάρτηση ζήτησης είτε στη συνάρτηση προσφοράς, λαμβάνουμε την ποσότητα ισορροπίας (equilibrium quantity) . Έτσι έχουμε:

$$Q=\frac{ad-bc}{b+d}=Q_e$$

Οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, όπως επίσης και το σημείο ισορροπίας τους μπορούν να απεικονισθούν στο ίδιο διάγραμμα. Είναι σημαντικό εδώ να αναφέρουμε ότι στις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης η τιμή παρουσιάζεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Παρόλ' αυτά, οι οικονομολόγοι συνηθίζουν να θέτουν στον κάθετο άξονα την τιμή και στον οριζόντιο την ποσότητα. Εμείς στη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων ακολουθούμε αυτήν την συνήθεια, έχοντας υπόψη ότι στα μαθηματικά δεν είναι απόλυτα ακριβής.

Το παρακάτω Σχήμα 1 έχει οικονομικό νόημα μόνο στο θετικό τεταρτημόριο. Αρνητικές τιμές δεν έχουν νόημα. Ποιος παραγωγός θα έδινε δωρεάν το προϊόν του (δηλαδή $P=0$), ή, ακόμη χειρότερα, θα πλήρωνε (δηλαδή $P<0$) τους καταναλωτές για να το αγοράσουν; Ομοίως, δεν έχουν οικονομικό νόημα οι αρνητικές ποσότητες.



Σχήμα 1

1.1.1 Συγκριτική στατική ανάλυση

Στη συνάρτηση ζήτησης υποθέσαμε ότι η ζητούμενη ποσότητα εξαρτάται από την τιμή μόνο. Οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες, όπως π.χ. το διαθέσιμο εισόδημα, ο πληθυσμός, η φορολογία, οι προτιμήσεις, οι σχετικές τιμές κλπ. Θεωρήθηκαν σταθερές και συμπεριλήφθηκαν στο σταθερό όρο a. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διαθέσιμο εισόδημα μεταβάλλεται έτσι, ώστε για κάθε τιμή οι καταναλωτές επιθυμούν και ταυτόχρονα μπορούν να αγοράσουν μεγαλύτερη ποσότητα. Ας υποθέσουμε, ότι η μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα για κάθε τιμή ισούται με h.Οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, όπως επίσης και η συνθήκη ισορροπίας γράφονται:

$$Q_d = a - bP + h$$

$$Q_d = -c + dP$$

$$Q_S = Q_d$$

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, καταλήγουμε στην καινούργια τιμή ισορροπίας:

$$P'_e = \frac{a+c}{b+d} + \frac{h}{b+d} = P_e + \Delta P$$

Όπου P'_e είναι η καινούργια τιμή και ΔP είναι η μεταβολή που προκαλείται στην τιμή από μια αύξηση του εισοδήματος:

$$\Delta P = \frac{h}{b+d} \Leftrightarrow \frac{\Delta P}{h} = \frac{1}{b+d}$$

Ο όρος $1/(b+d)$ ονομάζεται **πολλαπλασιαστής συγκριτικής στατικής** (comparative statics multiplier) και εκτιμά την επίδραση της μεταβολής μιας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές επί της τιμής του αγαθού. Με άλλα λόγια, ο όρος αυτός δείχνει πόσο θα μεταβληθεί η τιμή ισορροπίας του αγαθού, αν το διαθέσιμο εισόδημα- ή κάποια άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή – μεταβληθεί κατά μία νομισματική μονάδα.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, υπολογίζουμε την καινούργια ποσότητα ισορροπίας η οποία θα είναι:

$$Q'_e = \frac{cb-da}{b+d} + \frac{dh}{b+d} = Q_e + \Delta Q$$

Αν λύσουμε ως προς τη μεταβολή της ποσότητας ισορροπίας, λαμβάνουμε:

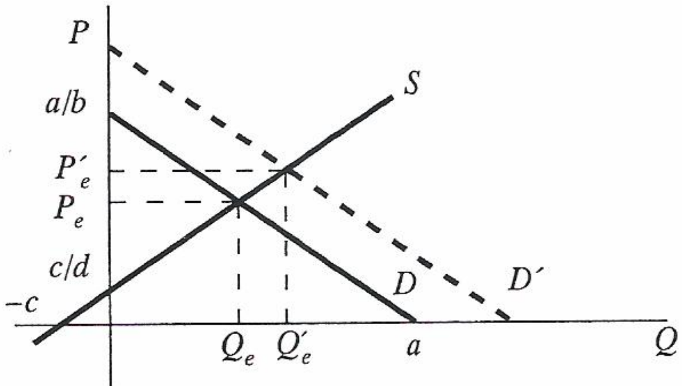
$$\Delta Q = \frac{dh}{b+d} \Leftrightarrow = \frac{\Delta Q}{h} = \frac{d}{b+d}$$

Ο όρος $b/(b+d)$ συμβολίζει έναν καινούργιο πολλαπλασιαστή συγκριτικής στατικής που η σημασία του είναι παραπλήσια μ' αυτήν που εξετάσαμε προηγουμένως, με τη διαφορά ότι τώρα αναφερόμαστε σε μεταβολή στην ποσότητα ισορροπίας. Σημειώνουμε ότι ισχύει:

$$\frac{d}{b+d} < 1$$

που σε οικονομικούς όρους σημαίνει ότι, όταν μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές – που στην αρχή θεωρήσαμε σταθερή- μεταβληθεί κατά μία μονάδα, η ποσότητα ισορροπίας μεταβάλλεται προς την ίδια διεύθυνση αλλά κατά λιγότερο της μονάδας. Το υπόλοιπο της μεταβολής εκδηλώνεται στην τιμή.

Η συζήτηση μας μπορεί να παρασταθεί γραφικά στο Σχήμα 2, του οποίου η διαφορά με το σχήμα 1 βρίσκεται στην παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης κατά την ποσότητα h.



Σχήμα 2

Το είδος της ανάλυσης που ακολουθήσαμε, δεν εξαντλεί το θέμα της ισορροπίας. Η συγκριτική στατική ανάλυση θεωρεί αρχικά την οικονομία σε ένα σημείο ισορροπίας, ώσπου μια διαταραχή την οδηγεί σε ένα άλλο σημείο ισορροπίας. Η ακριβής πορεία από το ένα σημείο στο άλλο, όπως επίσης και ο χρόνος που μεσολαβεί για την επίτευξη της καινούργιας ισορροπίας παραμένουν άγνωστοι. Ένα άλλο σοβαρό ερώτημα που παραμένει αναπάντητο, είναι το κατά πόσο η ισορροπία που επιτυγχάνεται είναι ευσταθής ή όχι. Αυτά τα ζητήματα της δυναμικής οικονομικής ισορροπίας απαιτούν γνώσεις διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών.

1.2. Υποδείγματα προσδιορισμού ισορροπίας

Ας υποθέσουμε μια απλή οικονομία που το συνολικό της ετήσιο προϊόν Y παράγεται από δύο τομείς παραγωγής: Τον **τομέα των καταναλωτικών αγαθών** (consumer goods sector) και τον **τομέα των επενδυτικών αγαθών** (investment goods sector). Η συνθήκη ισορροπίας απαιτεί οι **συνολικές δαπάνες** (total expenditures) στην οικονομία E να είναι ίσες με τις δαπάνες κατανάλωσης C και τις δαπάνες για επενδύσεις I. Αν υποθέσουμε ότι οι δαπάνες για επενδύσεις είναι αυτόνομες, δηλαδή είναι ανεξάρτητες από το εισόδημα, ενώ οι δαπάνες κατανάλωσης εξαρτώνται μόνο από το εισόδημα, δηλαδή οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες των καταναλωτικών δαπανών παραμένουν σταθεροί. Η συνάρτηση κατανάλωσης στη γραμμική της μορφή γράφεται:

$$C = a + bY \quad a > 0 \quad 0 \le b \le 1$$

ενώ η συνάρτηση επενδύσεων θα είναι:

$$I = I_0$$

όπου I_0 είναι οι αυτόνομες επενδύσεις.

Η συνθήκη ισορροπίας στην οικονομία είναι:

$$Y = E$$

Δηλαδή, το συνολικό εισόδημα ή το ετήσιο προϊόν Y είναι ίσο με τη συνολική δαπάνη E. Με απλά λόγια, κάθε δραχμή που ξοδεύεται (καταναλωτικά ή επενδυτικά) από μια ομάδα ανθρώπων μετατρέπεται σε εισόδημα για μια άλλη ομάδα ανθρώπων. Με απλή αντικατάσταση, βρίσκουμε ότι το εισόδημα ισορροπίας Y_e είναι:

$$Y = a + bY + I_0$$

$$Y = a\frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-b}I_0 = Y_e$$

Η έκφραση $1/(1-b) = k$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής αυτόνομων δαπανών και δηλώνει κατά πόσο μεταβάλλεται το εισόδημα, όταν κάποια από τις αυτόνομες μεταβλητές μεταβάλλεται κατά μία χρηματική μονάδα.

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης του εισοδήματος ισορροπίας είναι με την εξίσωση των επενδύσεων με τις αποταμιεύσεις S. Εξ ορισμού έχουμε:

$$Y = C + S$$

$$E = C + I_0$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ισορροπίας καταλήγουμε στην ισότητα μεταξύ αποταμιεύσεων και επενδύσεων:

$$S = I_0$$

Η προσθήκη ενός τρίτου τομέα, π.χ. της κυβέρνησης, μεταβάλει το εισόδημα κατά πολλαπλάσιο τρόπο. Υποθέτοντας ότι το επίπεδο τιμών στην οικονομία είναι σταθερό και οι κυβερνητικές δαπάνες αυτόνομες, δηλαδή ανεξάρτητες του εισοδήματος, η μεταβολή στο εισόδημα ισορροπίας $\Delta\Upsilon$ είναι:

$$\Delta\Upsilon = k\Delta G$$

όπου ΔG συμβολίζει την μεταβολή στις κρατικές δαπάνες. Το καινούργιο εισόδημα ισορροπίας Υ_e –μετά την προσθήκη των κρατικών δαπανών-βρίσκεται είτε προσθέτοντας στο προηγούμενο επίπεδο ισορροπίας του Y τη μεταβολή ΔY:

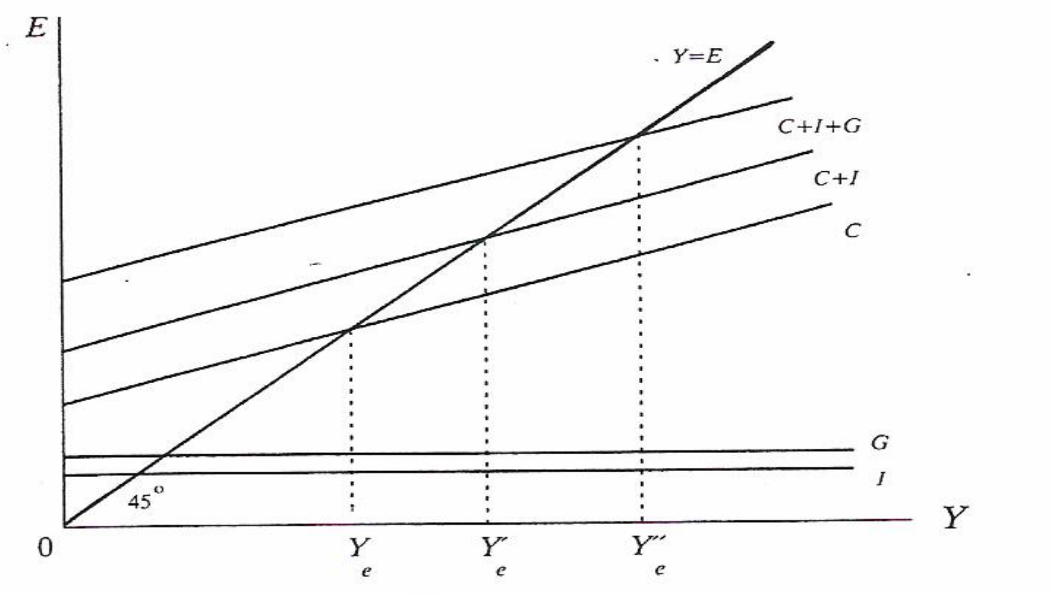
$$Y_e = Y + \Delta Y$$

είτε ξαναλύνοντας το ανώτερο σύστημα εξισώσεων χρησιμοποιώντας για τις συνολικές δαπάνες την ακόλουθη συνθήκη:

$$E = C + I_0 + G$$

ενώ τα υπόλοιπα παραμένουν ίδια. Στο σχήμα 3 παριστάνουμε γραφικά την ισορροπία του εισοδήματος χωρίς τις κρατικές δαπάνες.

Κάθε σημείο της βοηθητικής γραμμής των $45°$ έχει την ιδιότητα να εξισώνει τις συνολικές δαπάνες με το εισόδημα της οικονομίας. Άρα, όπου η γραμμή των συνολικών δαπανών τέμνει την γραμμή των $45°$ έχουμε ισορροπία. Όταν οι συνολικές δαπάνες της οικονομίας είναι μόνο καταναλωτικές, με άλλα λόγια, οι καθαρές επενδύσεις στην οικονομία είναι μηδέν και όλο το παραγόμενο εισόδημα διατίθεται για καταναλωτικούς σκοπούς, το σημείο ισορροπίας είναι Y_e και ονομάζεται **νεκρό σημείο** (break even point). Αυτή η ασυνήθιστη περίπτωση της οικονομίας συναντάται μόνο σε περιόδους απλής αναπαραγωγής, για να χρησιμοποιήσουμε την ορολογία του Marx, ή σε **περιόδους στασιμότητας** (stationary periods) στην κλασική και στη νεοκλασική ορολογία. Στις δύο άλλες περιπτώσεις, όταν δηλαδή έχουμε καθαρές επενδύσεις και όταν προστίθενται οι κρατικές δαπάνες, το καινούργιο σημείο της ισορροπίας της οικονομίας είναι Y'_e και Y''_e αντίστοιχα.



Σχήμα 3

1.2.1. Ισορροπία εισοδήματος με ισοσκελισμένο προϋπολογισμό

Στην ανάλυση της ισορροπίας του εισοδήματος με την προσθήκη των κρατικών δαπανών, διαπιστώσαμε ότι εθνικό εισόδημα αυξάνει κατά τρόπο πολλαπλάσιο της αύξησης των κρατικών δαπανών. Αν το παραπάνω αποτέλεσμα συνέβαινε στην πραγματικότητα, ασφαλώς τα οικονομικά προβλήματα – τα σημαντικότερα τουλάχιστον- θα είχαν λυθεί. Γνωρίζουμε όμως, ότι οι κυβερνήσεις αποφεύγουν να χρηματοδοτούν τις δαπάνες τους με την έκδοση καινούργιου χρήματος, λόγω των μεγάλων πληθωριστικών πιέσεων που αναπτύσσονται. Αν, λοιπόν, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε οικονομικά υποδείγματα αντιπροσωπευτικά της πραγματικότητας, τότε οι κρατικές δαπάνες πρέπει να συμπεριληφθούν στο υπόδειγμά μας με πιο ρεαλιστικό τρόπο.

Ας υποθέσουμε, ότι οι κρατικές δαπάνες χρηματοδοτούνται αποκλειστικά από φόρους T, επομένως $G=T$. Εδώ υποθέτουμε, για μεγαλύτερη ευκολία, ένα είδος άμεσης φορολογίας, σύμφωνα με το οποίο κάθε πολίτης συνεισφέρει ένα ορισμένο ποσό φόρου που είναι το ίδιο για όλους, **εφάπαξ εισφορά** (lump sum tax). Λόγω της εισαγωγής της άμεσης φορολογίας, πρέπει να διακρίνουμε μεταξύ εθνικού εισοδήματος Y (national income) και **διαθέσιμου εισοδήματος** Y_d (disposable income), δηλαδή το εισόδημα μετά την πληρωμή των φόρων.

Η σχέση μεταξύ τους είναι:

$$Y_d = Y - T$$

Η συνάρτηση της κατανάλωσης με τα καινούργια δεδομένα μεταβάλλεται:

$$C = a + b(Y - T)$$

Με άλλα λόγια, η κατανάλωση εξαρτάται – με όλους τους άλλους παράγοντες σταθερούς- από το εισόδημα. Χρησιμοποιώντας τη γνωστή συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\begin{aligned} Y &= a + b(Y - T) + I_0 + G \\ &= a + bY - bT + I_0 + G \\ &= \frac{1}{1-b}a + \frac{1}{1-b}I_0 - \frac{b}{1-b}T + \frac{1}{1-b}G \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η φορολογία ασκεί αρνητική επίδραση στο εισόδημα ισορροπίας, ενώ οι κρατικές δαπάνες- είναι ήδη γνωστό- ασκούν θετική επίδραση. Κάποιος θα περίμενε, ότι η θετική επίδραση των κρατικών δαπανών θα εξουδετέρωνε την αρνητική επίδραση των φόρων, και κατά συνέπεια ο ισοσκελισμένος κρατικός προϋπολογισμός ($T = G$) θα είχε ένα ουδέτερο αποτέλεσμα στο εισόδημα ισορροπίας. Όμως, μια προσεκτικότερη μελέτη της παραπάνω σχέσης δείχνει ότι η επίδραση των κρατικών δαπανών είναι μεγαλύτερη από την επίδραση της φορολογίας. Συγκρίνοντας τους δύο πολλαπλασιαστές, παρατηρούμε:

$$\frac{b}{1-b} < \frac{1}{1-b}$$

Αν τώρα θελήσουμε να υπολογίσουμε την μεταβολή του εισοδήματος ισορροπίας που προκαλείται από τη μεταβολή των κρατικών δαπανών, υποθέτοντας $\Delta T = \Delta G$, επομένως θα έχουμε:

$$\Delta Y = -\frac{b}{1-b}\Delta T + \frac{1}{1-b}\Delta G$$

Μετά από απλοποιήσεις, καταλήγουμε ότι $\Delta Y = \Delta G$. Με άλλα λόγια, ο **πολλαπλασιαστής ισοσκελισμένου προϋπολογισμού** (balanced budget multiplier) είναι ίσος με τη μονάδα.

1.3. Ισορροπία εισοδήματος και επιτοκίου

Η ανάλυση μας μέχρι τώρα βασιζόταν στην απουσία αγοράς χρήματος. Γνωρίζουμε όμως, ότι ο δανεισμός είναι ένας από τους πιο πρόσφορους τρόπους με τους οποίους οι κυβερνήσεις χρηματοδοτούν τις δαπάνες τους. Γνωρίζουμε επίσης, ότι ένα σημαντικό μέρος των δαπανών για ιδιωτικές επενδύσεις προέρχεται από δανεισμό. Επομένως, το επιτόκιο i επηρεάζει τις επενδυτικές αποφάσεις, που με τη σειρά τους επηρεάζουν το εισόδημα και την κατανάλωση. Για να απλοποιήσουμε ακόμη περισσότερο την ανάλυση μας, θα αγνοήσουμε τις κρατικές δαπάνες και τη φορολογία. Ασφαλώς οι μεταβλητές αυτές θα μπορούσαν να είχαν συμπεριληφθεί, αλλά θα δυσκόλευαν χωρίς να υπάρχει λόγος την ανάλυση. Το αρχικό μας υπόδειγμα ξαναγράφεται:

$$C = a + bY$$
$$I = d - ei \quad d > 0, e > 0$$
$$Y = E$$

Έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από τρεις εξισώσεις και τέσσερις αγνώστους (Y, C, I, i), επομένως δεν υπάρχει μοναδική λύση. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις στη συνθήκη ισορροπίας του εισοδήματος και να καταλήξουμε σε μια καινούργια εξίσωση με δύο αγνώστους, το Y και το i. Έτσι έχουμε:

$$Y = a + bY + d - ei$$
$$= \frac{a+d}{1-b} - \frac{ei}{1-b}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εξισώνοντας τις αποταμιεύσεις με τις επενδύσεις. Η παραπάνω εξίσωση δηλώνει τους διάφορους συνδυασμούς ανάμεσα στο εισόδημα και στο επιτόκιο που εξασφαλίζουν ισορροπία στην αγορά προϊόντος. Είναι φυσικό ότι σ' αυτή την περίπτωση οι επενδύσεις θα είναι ίσες με τις αποταμιεύσεις, $I = S$. Αυτή η ισότητα είναι που έκανε τον John Hicks (1939)-τον εμπνευστή της ανάλυσης- να ονομάσει τη συνάρτηση ανάμεσα στο εισόδημα και στο επιτόκιο IS.

Από μόνη της η συνάρτηση IS δεν μπορεί να προσδιορίσει το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και του επιτοκίου. Μας λείπει μια ακόμη εξίσωση που συνδέει ζεύγη εισοδήματος και επιτοκίου έτσι ώστε να καταλήξουμε σε έναν και μοναδικό συνδυασμό ισορροπίας. Η ισορροπία αυτή επιτυγχάνεται αν στην ανάλυσή μας συμπεριλάβουμε την αγορά χρήματος που συνίσταται από τη ζήτηση και την προσφορά του χρήματος. Η συνάρτηση **ζήτησης χρήματος** (demand for money)συμβολίζεται με L (liquidity) και εξαρτάται θετικά από το εισόδημα και αρνητικά από το επιτόκιο. Συμβολικά έχουμε:

$$L = kY - li \quad k > 0, l > 0$$

Η **προσφορά χρήματος** M θεωρείται ότι ελέγχεται από την κεντρική τράπεζα και, κατά συνέπεια, μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη, $M = M_0$.

Ισορροπία στην αγορά χρήματος υπάρχει , όταν:

$$M_0 = L \text{ ή } \quad Y = \frac{M_0}{k} + \frac{l}{k} i$$

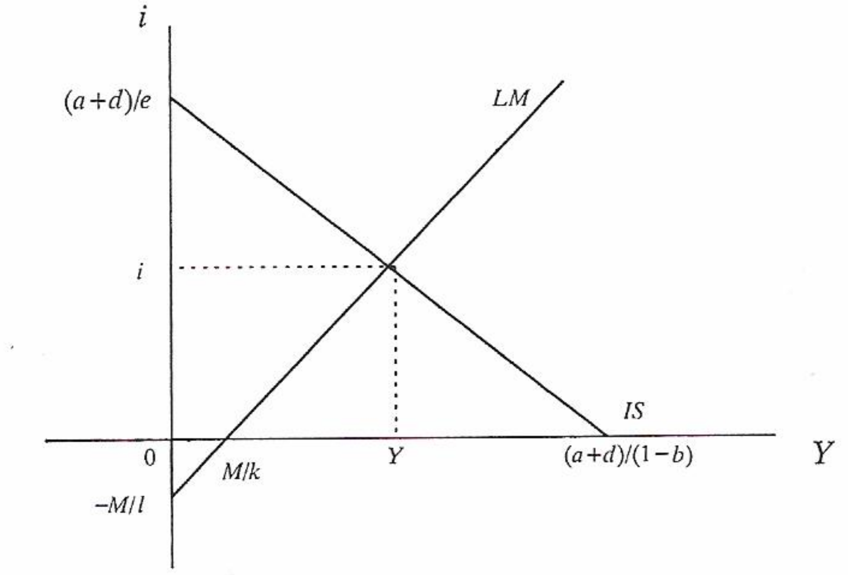
Η εξίσωση αυτή καλείται από τον εμπνευστή της John Hicks LM και παριστάνει τα ζεύγη εισοδήματος και επιτοκίου για τα οποία υπάρχει ισορροπία στην αγορά χρήματος. Λύνοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις IS και LM , καταλήγουμε στο επιτόκιο και στο εισόδημα ισορροπίας. Οι τιμές αυτές είναι:

$$i = \frac{k(a+d) - M_0(1-b)}{ek + l(1-b)}$$

$$Y = \frac{M_0}{k} + \frac{1}{k}[\frac{k(a+d) - M_0(1-b)}{ek + l(1-b)}]$$

Οι συναρτήσεις IS και LM απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 4.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο ισορροπίας του εισοδήματος, μπορούμε να θέσουμε ερωτήματα σχετικά με την κυβερνητική παρέμβαση είτε είναι δημοσιονομική (μεταβολή στη φορολογία και στις κρατικές δαπάνες) είτε είναι νομισματική (μεταβολή στην ποσότητα του χρήματος). Ακόμη, μπορούμε να εμπλουτίσουμε το θεωρητικό υπόδειγμα, συμπεριλαμβάνοντας π.χ. το εξωτερικό υπόδειγμα κ.ο.κ.



Σχήμα 4

1.4. Ανάλυση νεκρού σημείου

Νεκρό σημείο για μια επιχείρηση θεωρείται το σημείο όπου τα **συνολικά έσοδα** (total revenues)εξισώνονται με το **συνολικό κόστος** (total cost).Το συνολικό κόστος αποτελείται από το **σταθερό κόστος** (fixed cost), δηλαδή αυτό που δε μεταβάλλεται όταν η επιχείρηση παράγει περισσότερο ή λιγότερο, π.χ. πληρωμή ενοικίων, τόκων κλπ. Και από το **μεταβλητό κόστος** (variable cost), δηλαδή το κόστος που μεταβάλλεται όταν η επιχείρηση παράγει περισσότερο ή λιγότερο, π.χ. μισθοί, πρώτες ύλες κλπ.

Στην ανάλυση που ακολουθεί, υποθέτουμε ότι τα συνολικά έσοδα και το συνολικό κόστος είναι γραμμικές συναρτήσεις με θετική κλίση. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$C = F + VC$$

όπου C = συνολικό κόστος

F = σταθερό κόστος

VC = μεταβλητό κόστος

Υποθέτουμε ότι για την επιχείρηση η τιμή είναι δεδομένη, π.χ. λόγω ανταγωνιστικότητας οποιαδήποτε αύξησή της θα στρέψει τους πελάτες της επιχείρησης στους ανταγωνιστές της. Όσον αφορά την πτώση της τιμής, υποθέτουμε ότι η επιχείρηση μπορεί να διαθέσει όλη την παραγωγή της στην τρέχουσα τιμή, συνεπώς δεν υπάρχει λόγος για μείωσή της. Επομένως,

$$R = p\,q$$

όπου R = συνολικά έσοδα

p = τιμή

q = παραγωγή

Το νεκρό σημείο προσδιορίζεται όταν τα έσοδα εξισωθούν με τα έξοδα,

$$R = C$$

$$p\,q = F + VC$$

$$p\,q = F + (AVC)q$$

$$q\,(p - AVC) = F$$

όπου AVC είναι το **μέσο μεταβλητό κόστος** (average variable cost), δηλαδή το κόστος ανά μονάδα προϊόντος

$$AVC = (VC)/q$$

Τελικά,

$$q_e = q = \frac{F}{p - AVC}$$

Η διαφορά ανάμεσα στην τιμή και το μέσο μεταβλητό κόστος λέγεται **περιθώριο κέρδους** (profit margin).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι το κόστος παραγωγής μιας επιχείρησης ορίζεται από τη συνάρτηση:

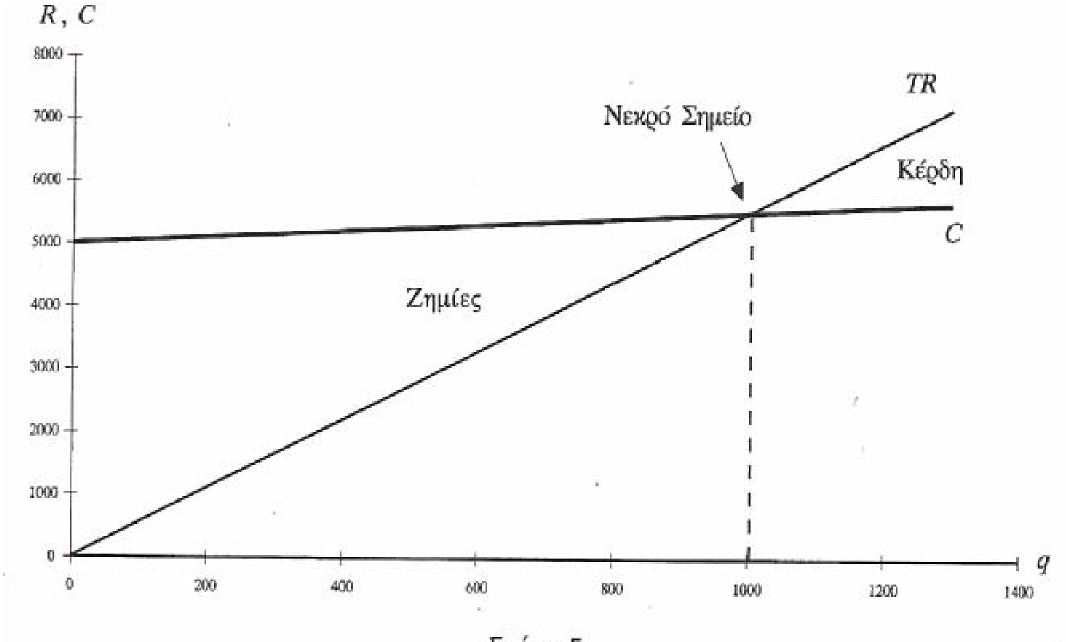
C = 5.000 + 0,5q

Η τιμή είναι δεδομένη για την επιχείρηση και είναι ίση με 5.5 νομισματικές μονάδες. Πόσες μονάδες προϊόντος θα πρέπει να παράγει η επιχείρηση ώστε να βρίσκεται στο νεκρό σημείο; Να παρασταθεί γραφικά το νεκρό σημείο.

ΛΥΣΗ

$$q = \frac{5.000}{5,5 - 0,5} = 1.000$$

Η γραφική παράσταση είναι:



Σχήμα 5

1.5 Η συνάρτηση παραγωγής

Η συνάρτηση παραγωγής (production function) αναφέρεται στη σχέση ανάμεσα στο μέγιστο παραγόμενο προϊόν και στους συντελεστές παραγωγής, δηλαδή κεφάλαιο, εργασία κλπ. Η συνάρτηση παραγωγής με τρεις μεταβλητές γράφεται:

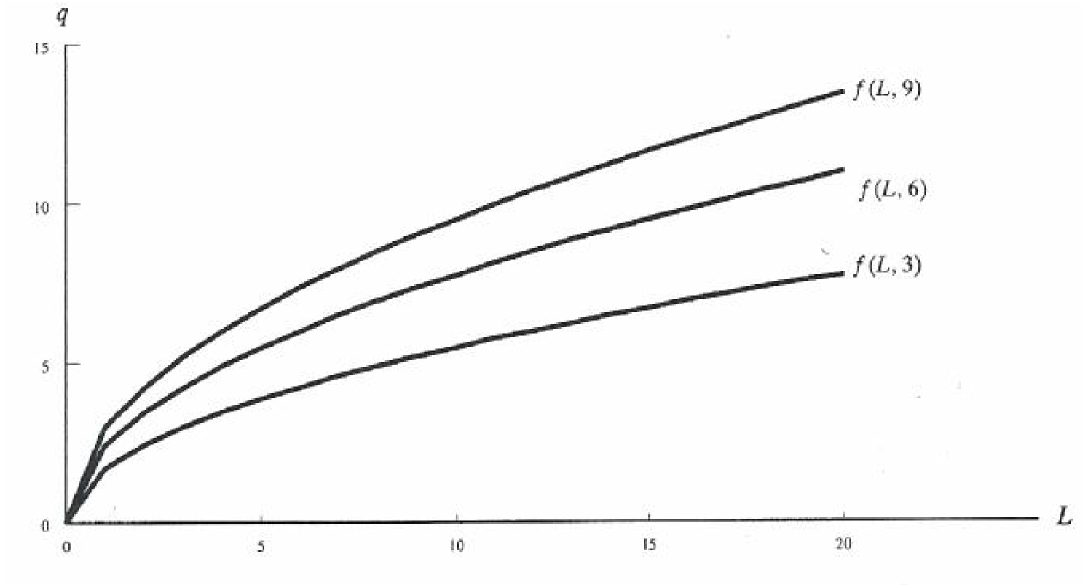
$$q = f(L,K)$$

όπου το παραγόμενο προϊόν q είναι το αποτέλεσμα διάφορων συνδυασμών ανάμεσα στις υπηρεσίες του συντελεστή εργασία L και στις υπηρεσίες του συντελεστή κεφάλαιο K. Η πιο δημοφιλής από τις συναρτήσεις παραγωγής που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι η Cobb-Douglas, η οποία γράφεται:

$$q = AL^{a}K^{b}$$

όπου A, a και b είναι θετικοί αριθμοί, με $a<1$ και $b<1$.

Στο Σχήμα 6 παρουσιάζουμε τρεις καμπύλες προϊόντος που προκύπτουν από τη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas, με $A=1, a=b=1/2$. Οι καμπύλες του διαγράμματος που ακολουθεί προκύπτουν, όταν ο συντελεστής κεφάλαιο παραμένει σταθερός και οι υπηρεσίες του συντελεστή εργασία (υπολογισμένες σε αριθμό εργατών ή ώρες εργασίας) μεταβάλλονται από 0 μέχρι 20. Έτσι, π.χ. η καμπύλη $f(L,3)$ προκύπτει όταν το κεφάλαιο είναι σταθερό και ίσο με 3 (οτιδήποτε αυτός ο αριθμός μπορεί να σημαίνει) και ο συντελεστής εργασίας μεταβάλλεται από 0 μέχρι 20. Οι συναρτήσεις $f(L,6)$ και $f(L,9)$ ερμηνεύονται με ανάλογο τρόπο.



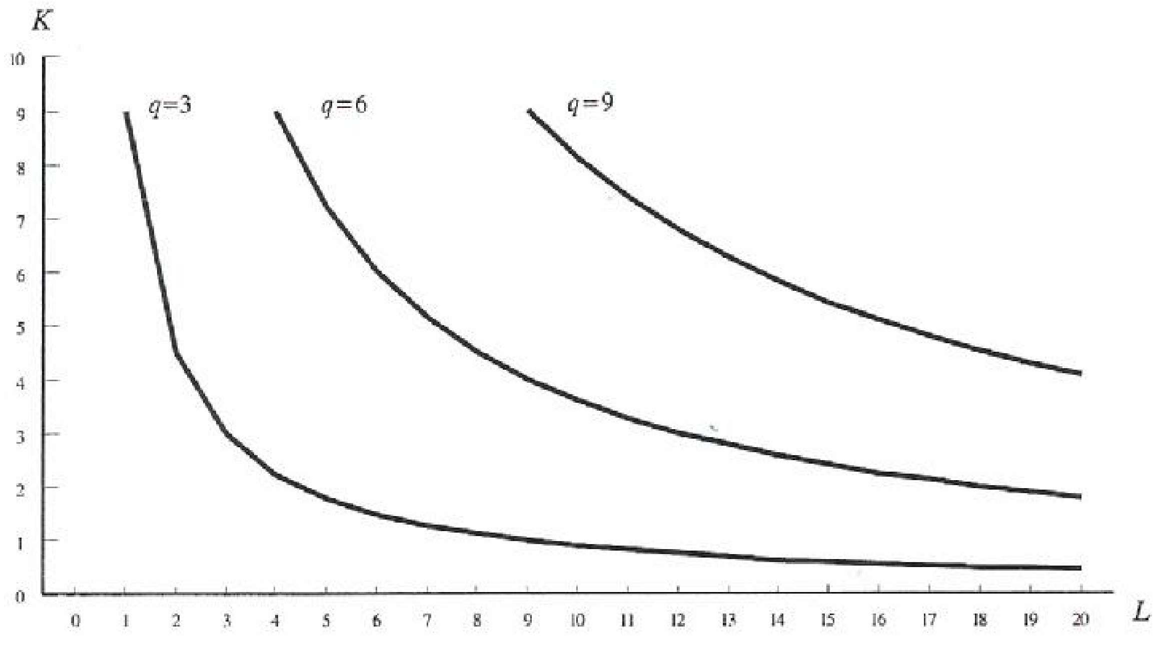
Σχήμα 6

Ένας εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης των μεταβλητών που αποτελούν την συνάρτηση παραγωγής, είναι να θεωρήσουμε το προϊόν δεδομένο και να μεταχειριστούμε το κεφάλαιο και την εργασία ως εξαρτημένες μεταβλητές. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $q = 3$, τότε έχουμε:

$$3 = L^{1/2}K^{1/2}$$
$$K^{1/2} = \frac{3}{L^{1/2}}$$
$$K = 9/L$$

Η γραφική παράσταση αυτής της εξίσωσης είναι **ορθογώνια υπερβολή** (rectangular hyperbola). Στο σχήμα 7 παρουσιάζουμε τρεις καμπύλες για

$q = 3, q = 6,$ και $q = 9$.



Σχήμα 7

Οι καμπύλες αυτές καλούνται **καμπύλες ισοπροϊόντος** (isoquants). Ορισμένες ιδιότητες αυτών των καμπυλών είναι φανερές από την εξίσωση. Π.χ. όσο μετατοπίζονται οι καμπύλες ισοπροϊόντος προς τα δεξιά (βορειοανατολικά του γραφήματος) τόσο οι διάφοροι συνδυασμοί κεφαλαίου και εργασίας δίνουν περισσότερο προϊόν κ.ο.κ. Επίσης, αν ένας συντελεστής παραμένει σταθερός, περισσότερο προϊόν μπορεί να παραχθεί μόνον όταν η ποσότητα του άλλου συντελεστή αυξάνει.

1.6 Ομογενείς Συναρτήσεις

Οι ομογενείς συναρτήσεις έχουν πολλές και ποικίλες εφαρμογές στα οικονομικά. Οι πιο συνηθισμένες αναφορές συναρτήσεων γίνονται στις συναρτήσεις παραγωγής και ζήτησης. Έτσι, για τη γνωστή συνάρτηση παραγωγής:

$$q = AL^a K^b$$
$$= A(l\,L)^a (l\,K)^b$$
$$= l^{a+b} (AL^a K^b)$$

ο βαθμός ομοιογένειας εξαρτάται από το άθροισμα $a+b$. Αν $a+b=1$, τότε η συνάρτηση παραγωγής είναι ομογενής πρώτου βαθμού. Το οικονομικό νόημα αυτού του βαθμού ομογένειας είναι ότι, αν οι συντελεστές παραγωγής αυξηθούν κατά ένα ποσοστό. Η συνάρτηση παραγωγής βαθμού ομοιογένειας ίου με τη μονάδα παρουσιάζει, με άλλα λόγια, **σταθερές αποδόσεις στην κλίμακα παραγωγής** (constant returns to scale). Ανάλογες ερμηνείες μπορούν να δοθούν για $a+b<1$, που σημαίνει ότι, όταν οι συντελεστές παραγωγής αυξάνονται κατά ένα ποσοστό, η παραγωγή αυξάνεται κατά ένα μικρότερο ποσοστό, δηλαδή έχουμε **φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας** (decreasing returns to scale). Τέλος, για $a+b>1$, που σημαίνει ότι, όταν οι συντελεστές παραγωγής αυξάνονται κατά ένα ποσοστό, η παραγωγή αυξάνεται κατά ένα μεγαλύτερο ποσοστό, δηλαδή έχουμε **αύξουσες αποδόσεις κλίμακας** (increasing returns to scale).

Μια άλλη συνηθισμένη εφαρμογή των ομογενών συναρτήσεων είναι στη θεωρία ζήτησης. Γνωρίζουμε ότι η ζήτηση ενός αγαθού $a(Q_a)$ εξαρτάται από την τιμή του (P_a), από τις τιμές των υποκατάστατων αγαθών (P_b) και από το εισόδημα (Y). Μια τέτοια συνάρτηση ζήτησης μπορεί μαθηματικά να εκφραστεί ως εξής:

$$Q_a = f(P_a, P_b, Y)$$

Έστω ότι μετά από έρευνα έχει βρεθεί ότι η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού a είναι η ακόλουθη:

$$Q_a = f(P_a, P_b, Y) = \frac{10Y}{P_a} - \frac{5P_a}{P_b}$$

Ο βαθμός ομοιογένειας της συνάρτησης υπολογίζεται ως εξής:

$$Q_a = 10\left(\frac{l\,Y}{l\,P_a}\right) - 5\left(\frac{l\,P_a}{l\,P_b}\right) = \left(\frac{l}{l}\right)\left[10\left(\frac{Y}{P_a}\right) - 5\left(\frac{P_a}{P_b}\right)\right] = \lambda^0\left[10\left(\frac{Y}{P_a}\right) - 5\left(\frac{P_a}{P_b}\right)\right]$$

Επομένως, η παραπάνω συνάρτηση ζήτησης είναι ομογενής μηδενικού βαθμού-οποιοσδήποτε αριθμός υψωμένος στο μηδέν ισούται με τη μονάδα. Το οικονομικό νόημα του οικονομικού βαθμού ομογένειας της συνάρτησης ζήτησης είναι ότι, αν οι τιμές και το εισόδημα των καταναλωτών αυξάνουν κατά ένα ποσοστό, τότε οι καταναλωτές αγοράζουν τις ίδιες ποσότητες. Με άλλα λόγια, η συμπεριφορά των καταναλωτών δεν επηρεάζεται από τα νομισματικά μεγέθη ή, εναλλακτικά οι καταναλωτές δεν έχουν **αυταπάτη χρήματος** (money illusion).

1.7 Η καμπύλη των παραγωγικών δυνατοτήτων

Η **καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων** (production possibilities curve) ή αλλιώς **καμπύλη μετασχηματισμού** (transformation curve) αναφέρεται στους μέγιστους συνδυασμούς αγαθών που μπορεί να παράγει μια οικονομία, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει πλήρης απασχόληση και ότι οι συντελεστές παραγωγής και η τεχνολογία παραμένουν αμετάβλητοι. Οι καμπύλες παραγωγικών δυνατοτήτων μπορούν να παρασταθούν με τετραγωνικές εξισώσεις της μορφής:

$$y = -ax^2 - bx + c \qquad a, b > 0$$

όπου y και x είναι δύο διαφορετικές κατηγορίες αγαθών, π.χ. επενδυτικά και καταναλωτικά αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων μιας οικονομίας περιγράφεται με την ακόλουθη εξίσωση:

$y = -5x^2 - 2x + 3$

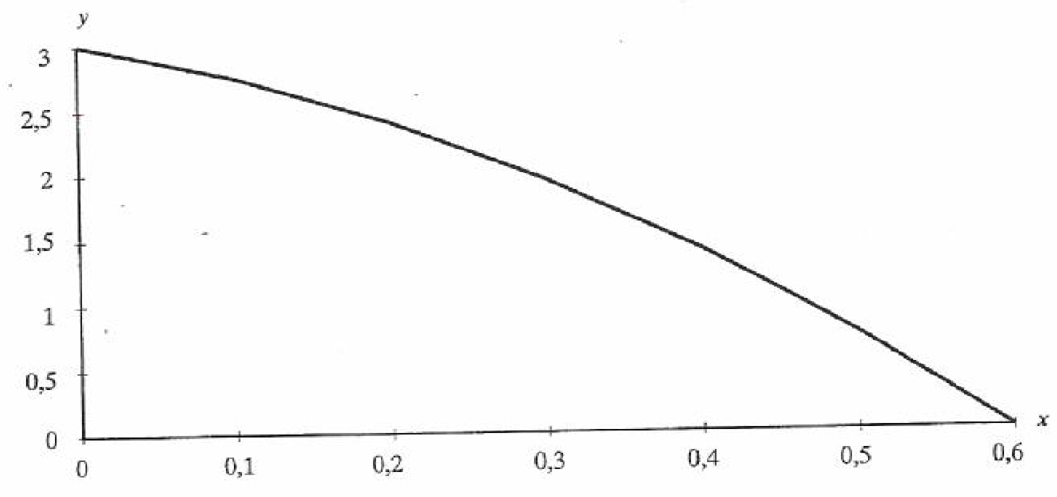
Όταν όλοι οι συντελεστές παραγωγής της οικονομίας διατίθενται στην αποκλειστική παραγωγή επενδυτικών αγαθών ($x = 0$), τότε η μέγιστη δυνατή ποσότητα επενδυτικών αγαθών που μπορεί να παράγει η οικονομία είναι $y = 3$. Ενώ, όταν η οικονομία παράγει μόνο καταναλωτικά αγαθά ($y = 0$), λύνοντας την παραπάνω εξίσωση η μέγιστη δυνατή ποσότητα καταναλωτικών αγαθών που μπορεί να παράγει η οικονομία είναι:

$0 = -5x^2 - 2x + 3$

$x = 3/5$

Η αρνητική τιμή $x = -1$αποκλείεται, επειδή δεν έχει οικονομικό νόημα. Για τιμές $0 \leq x \leq 3/5$παίρνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς παραγωγής καταναλωτικών και επενδυτικών αγαθών της οικονομίας.

Στο σχήμα 8 παρουσιάζουμε το γράφημα της καμπύλης παραγωγικών δυνατοτήτων της οικονομίας:



Σχήμα 8

2

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε εφαρμογές των παραγώγων στην οικονομική επιστήμη. Πιο συγκεκριμένα, με μαθηματικό εργαλείο την παραγώγιση, θα αναφερθούμε στις έννοιες της **ελαστικότητας** (elasticity) μιας συνάρτησης και στο οριακό έσοδο του προϊόντος ως εφαρμογές του αλυσωτού κανόνα. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τα μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων, όπως των εσόδων, του κόστους και φυσικά της διαφοράς τους, δηλαδή των κερδών. Κατόπιν, θα τελειώσουμε με τη λήψη επενδυτικών αποφάσεων (ανάλυση του Fisher), στον προσδιορισμό του άριστου επιπέδου αποθεμάτων, στη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς.

2.1 Ελαστικότητα συνάρτησης

Η ελαστικότητα μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή μιας συνάρτησης που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην οικονομική επιστήμη υπάρχουν διάφορα είδη ελαστικότητας. Ενδεικτικά αναφέρουμε την ελαστικότητα ζήτησης, προσφοράς, εισοδήματος, υποκατάστασης κλπ. Από αυτές, η **ελαστικότητα ζήτησης** (elasticity of demand) είναι αυτή που θα μας απασχολήσει πρώτα.

2.1.1 Ελαστικότητα ζήτησης

Στο νόμο της ζήτησης, όταν η τιμή ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας μεταβληθεί, τότε η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού ή της υπηρεσίας μεταβάλλεται προς την αντίθετη διεύθυνση, με την προϋπόθεση ότι οι άλλες μεταβλητές που επηρεάζουν τη ζήτηση παραμένουν σταθερές. Αν ο νόμος της ζήτησης δεν αφήνει καμιά αμφιβολία όσον αφορά την σχέση τιμής και ποσότητας, δεν παρέχει όμως επαρκή γνώση για την ακριβή σχέση μεταξύ τιμής και συνολικών εσόδων. Η τελευταία σχέση είναι κρίσιμη για τον καθορισμό της τιμής από την διεύθυνση μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού γενικότερα. Με άλλα λόγια, αν η τιμή ενός αγαθού αυξηθεί και η ποσότητα που αγοράζεται μειωθεί, το γινόμενο της τιμής επί την ποσότητα (δηλαδή τα συνολικά έσοδα) μπορεί να αυξηθεί, να μειωθεί ή ακόμη να μείνει αμετάβλητο. Η έννοια της ελαστικότητας ζήτησης χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει πως ακριβώς η μεταβολή στην τιμή ενός αγαθού επηρεάζει τα συνολικά έσοδα των επιχειρήσεων- ή ισοδύναμα τις δαπάνες των νοικοκυριών για το αγαθό του οποίου η τιμή έχει μεταβληθεί.

Η ελαστικότητα ζήτησης μπορεί να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τύπο:

$$h = -\frac{\%\ metabolh\ sth\ zhtoumenh\ posothta}{\%\ metabolh\ sth\ timh}$$

Με μαθηματικούς όρους η ελαστικότητα ζήτησης γράφεται:

$$h = -\frac{\Delta q / q}{\Delta p / p} = -\frac{\Delta q}{\Delta p}\frac{p}{q}$$

Ο τύπος της ελαστικότητας ζήτησης αφορά ένα συγκεκριμένο τμήμα της καμπύλης ζήτησης. Αν υποθέσουμε ότι οι μεταβολές στην τιμή είναι απειροελάχιστα μικρές, δηλαδή $\lim \Delta p \to 0$, τότε εξ ορισμού έχουμε:

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{dq}{dp}$$

Συνεπώς, ο τύπος της ελαστικότητας σημείου μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$h = -\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

όπου dq/dp είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $q = f(p)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι $q = 20 - 4p$:

(α) Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης.

(β) Να υπολογιστεί η ελαστικότητα ζήτησης για $p=4$.

(γ) Να δοθεί οικονομική ερμηνεία στην απάντηση της ερώτησης (β).

(δ) Για ποια τιμή η ελαστικότητα ζήτησης γίνεται μοναδιαία;

ΛΥΣΗ

(α) Η ελαστικότητα ζήτησης είναι:

$$\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}=-(-4)\frac{p}{q}=4\frac{p}{20-4p}=\frac{p}{5-p}$$

(β) Για $p=4$ έχουμε $h=[4/(5-4)]=4$.

(γ) Ελαστικότητα ζήτησης ίση με 4 σημαίνει ότι, όταν η τιμή μεταβάλλεται κατά ένα τοις εκατό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται
κατά τέσσερα τοις εκατό προς την αντίθετη κατεύθυνση. Η ζήτηση του αγαθού, με άλλα λόγια, είναι ελαστική.

(δ) Για $n=1$ έχουμε και $1=p/(5-p)$ και $p=2,5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να εκτιμηθεί η ελαστικότητα ζήτησης της συνάρτησης $q=c/p$, όπου c μια σταθερά και να γενικεύσετε το αποτέλεσμα.

ΛΥΣΗ

$$n=-\frac{dp}{dq}\frac{p}{q}=-(-\frac{c}{p^2})\frac{p}{q}=\frac{c}{p^2}\frac{p}{c/p}=1$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη γενίκευση: Οι συναρτήσεις ορθογώνιας υπερβολής έχουν μοναδιαία ελαστικότητα ζήτησης.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η 1. Οι δυνατές τιμές της ελαστικότητας ζήτησης κυμαίνονται μεταξύ του μηδενός και του απείρου ($0\le n\le\infty$). Όταν $n=0$, τότε η ζητούμενη ποσότητα είναι ανεξάρτητη από την τιμή, δηλαδή έχουμε τέλεια ανελαστικότητα ζήτησης. Το αγαθό στην περίπτωση αυτή είναι απόλυτα αναγκαίο, π.χ. η ζήτηση ινσουλίνης από διαβητικούς, η ζήτηση αλκοολούχων ποτών από αλκοολικούς κ.ο.κ. Όταν $n=\infty$, τότε η ζητούμενη ποσότητα επηρεάζεται υπερβολικά από την τιμή. Μια αμελητέα μεταβολή στην τιμή οδηγεί σε μια υπερβολικά μεγάλη μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα. Η ζήτηση του αγαθού, με άλλα λόγια, είναι τέλεια ελαστική. Η περίπτωση αυτή συναντάται σε αγαθά για τα οποία υπάρχουν πολύ στενά (τέλεια) υποκατάστατα.

Παρατήρηση 2. Στην πραγματικότητα, η ελαστικότητα των περισσότερων αγαθών κυμαίνεται γύρω από τη μονάδα. Αν $n<1$, το αγαθό έχει ανελαστική ζήτηση, που σημαίνει ότι, αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά ένα μικρότερο ποσοστό προς την αντίθετη διεύθυνση. Όταν $n>1$, το αγαθό έχει ελαστική ζήτηση, που σημαίνει ότι, αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά ένα μεγαλύτερο ποσοστό προς την αντίθετη διεύθυνση. Όταν $n=1$, το αγαθό έχει μοναδιαία ελαστικότητα ζήτησης, που σημαίνει ότι, αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα μικρότερο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται επίσης κατά το ίδιο ποσοστό προς ην αντίθετη διεύθυνση.

2.1.2 Ελαστικότητα ζήτησης και συνολικά έσοδα

Η συζήτηση αναπόφευκτα μας οδηγεί στη σχέση μεταξύ της ελαστικότητας ζήτησης και των συνολικών εσόδων. Τα συνολικά έσοδα (R) μιας επιχείρησης από τις πωλήσεις ενός αγαθού (ή μιας υπηρεσίας) είναι ίσα με το γινόμενο της τιμής του αγαθού (p) επί την ποσότητα που πουλήθηκε, δηλαδή $R=pq$.

Όταν η ζήτηση ενός αγαθού είναι ανελαστική και η τιμή του αγαθού αυξηθεί, η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί κατά ένα μικρότερο ποσοστό. Κατά συνέπεια, τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα αυξηθούν. Ομοίως, αν η τιμή του αγαθού μειωθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό, η ζητούμενη ποσότητα θα αυξηθεί κατά ένα μικρότερο ποσοστό, και συνεπώς τα συνολικά έσοδα θα μειωθούν.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η ζήτηση του αγαθού είναι ελαστική, μια αύξηση της τιμής του κατά (ας υποθέσουμε) ένα τοις εκατό οδηγεί σε μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά περισσότερο από ένα τοις εκατό. Συνεπώς, τα συνολικά έσοδα θα είναι λιγότερα μετά την αύξηση της τιμής. Ομοίως, αν η τιμή ελαττωθεί, η ζητούμενη ποσότητα αυξάνεται κατά μεγαλύτερο ποσοστό και οδηγεί σε υψηλότερα έσοδα.

Αν, τέλος, η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού είναι ίση με τη μονάδα, τότε τα συνολικά έσοδα μένουν αμετάβλητα, επειδή μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή- σε οποιαδήποτε διεύθυνση- θα αντισταθμιστεί από μια ισόποση ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα προς την αντίθετη κατεύθυνση. Ο Πίνακας 1 συνοψίζει τη συζήτησή μας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΖΗΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΕΣΟΔΑ

Είδος ελαστικότητας ζήτησης	Ολικά έσοδα, όταν $p\uparrow$ $p\downarrow$
Ανελαστική, $0 \le η \le 1$	$R\uparrow$ $R\downarrow$
Μοναδιαία ελαστική, $h = 1$	Δεν υπάρχει μεταβολή
Ελαστική $1 \le h \le \infty$	$R\uparrow$ $R\downarrow$

2.1.3 Μαθηματική απόδειξη της σχέσης συνολικών εσόδων και ελαστικότητα ζήτησης

Η συζήτηση μας μέχρι τώρα υπήρξε αρκετά διαισθητική. Στη συνέχεια, επαναδιατυπώνουμε μαθηματικά τις παραπάνω σχέσεις αρχίζοντας από τη γνωστή εξίσωση των συνολικών εσόδων:

$$R = pq$$

όπου $q = q(p)$ η συνάρτηση ζήτησης. Παραγωγίζοντας ως προς την τιμή και παίρνουμε:

$$\frac{dR}{dp} = p\frac{dq}{dp} + q$$

Πολλαπλασιάζοντας επί q/q καταλήγουμε:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{q}{q}(p\frac{dq}{dp} + q) = q(\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} + 1) = q(1 - n)$$

Αν $n < 1$, τότε:

$$\frac{dR}{dp} > 0,$$

δηλαδή η πρώτη παράγωγος των συνολικών εσόδων ως προς την τιμή – το **οριακό έσοδο** (marginal revenue)- είναι θετική. Παρομοίως, αν $n > 1$ τότε:

$$\frac{dR}{dp} < 0.$$

Τελικά, αν $n = 1$, τότε η μεταβολή στο οριακό έσοδο είναι μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ας υποθέσουμε την ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης $q = 27 - p^2$

(α) Να βρεθούν οι τιμές για τις οποίες η συνάρτηση ζήτησης είναι ελαστική, ανελαστική και μοναδιαία ελαστική.

(β) Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) για να περιγράψετε τα συνολικά έσοδα ως συνάρτηση τιμής.

(γ) Να βρεθεί η τιμή που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.

ΛΥΣΗ

(α) $dq/dp = -2p$. Πολλαπλασιάζουμε με p/q και έχουμε:

$$n = 2p\frac{p}{q} = \frac{2p^2}{27-p^2}$$

Αν θέσουμε $n=1$έχουμε: $27-p^2 = 2p^2$. Αν τώρα λύσουμε ως προς p, λαμβάνουμε $p=\pm 3$, από αυτές μόνο η θετική έχει οικονομικό νόημα. Άρα λοιπόν, για την τιμή $p=3$η συνάρτηση ζήτησης είναι μοναδιαία ελαστική. Επομένως, για $p>3$η ζήτηση είναι ελαστική και για $p<3$η ζήτηση είναι ανελαστική.

(β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο των συνολικών εσόδων $R = pq$και παρουσιάζοντας τα ως συνάρτηση της τιμής έχουμε:

$$R(p) = p(27-p^2) = 27p - p^3$$
$$dR/dp = 27 - 3p^2 = 3(9-p^2)$$

Συνεπώς για

$p=3$ εχουμε $dR/dp = 0$
$p>3$ εχουμε $dR/dp < 0$
$p<3$ εχουμε $dR/dp > 0$

(γ) Στην τιμή $p=3$, όπου ο όρος dR/dpούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται, έχουμε προσεγγίσει ένα ακρότατο, που στη προκειμένη περίπτωση είναι το μέγιστο της συνάρτησης, πράγμα που διαπιστώνεται από το αρνητικό πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $d^2R/dp^2 = -6p = -18 < 0$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης της ελαστικότητας ζήτησης (ή ελαστικότητας γενικά), είναι με τη χρήση λογαρίθμων:

$$n = -\frac{d(\ln q)}{d(\ln p)}$$

Πράγματι, παίρνοντας τα διαφορικά του αριθμητή και του παρανομαστή και αν $q = f(p)$ καταλήγουμε $n = -\frac{d(\ln q)}{d(\ln p)} = -\frac{(\ln q)' dp}{(\ln p)' dp} = -\frac{(q'/q) dp}{(1-p) dp} = -\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$

2.1.4 Ελαστικότητα προσφοράς

Η **ελαστικότητα της προσφοράς** (elasticity of supply) είναι έννοια παρόμοια μ' αυτήν της ζήτησης. Η ελαστικότητα προσφοράς μετρά την ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η ελαστικότητα προσφοράς έχει θετική τιμή, που σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και στη τιμή είναι πάντα ευθέως ανάλογη λόγω της θετικής κλίσης της καμπύλης προσφοράς. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως και με τη ζήτηση, η ελαστικότητα προσφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: $e = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$

Η ελαστικότητα προσφοράς χρησιμοποιείται από τους οικονομολόγους για να υπολογίσουν την ευαισθησία της προσφερόμενης ποσότητας σε μια καθορισμένη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η μέτρηση της ελαστικότητας προσφοράς θεωρείται απαραίτητη, ειδικά σε ορισμένους κλάδους, όπου οι παραγωγικοί συντελεστές μεταφέρονται από την παραγωγή ενός προϊόντος στην παραγωγή ενός άλλου εξ αιτίας μιας μεταβολής στην τιμή.

Τα πιο συχνά παραδείγματα αναφέρονται στη γεωργία. Π.χ., μια άνοδος της τιμής του σιταριού σε σχέση με την τιμή του καλαμποκιού οδηγεί σε ιδιαίτερα αυξημένη παραγωγή σιταριού. Αν η ποσοστιαία μεταβολή στη προσφερόμενη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή, λέμε ότι το αγαθό είναι ελαστικό. Αν ισχύει το αντίθετο, το αγαθό είναι ανελαστικό.

Τέλος, όταν υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής και της προσφερόμενης ποσότητας, λέμε ότι η ελαστικότητα προσφοράς είναι μοναδιαία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν οι ελαστικότητες προσφοράς των ακόλουθων συναρτήσεων προσφοράς:

(α) $q=5+3p$

(β) $q=3p$

(γ) $q=-10+4p$

(δ) να γενικεύσετε τα αποτελέσματα

ΛΥΣΗ

(α) $e=(dq/dp)(p/q)=3[p/(5+3p)]$.Η καμπύλη προσφοράς είναι ανελαστική για όλες τις τιμές.

(β)$e=3[p/(3p)]=1$. Η καμπύλη προσφοράς έχει μοναδιαία ελαστικότητα για όλες τις τιμές.

(γ)$e=4[p/(-10+4p)]$. Η καμπύλη προσφοράς είναι ελαστική για κάθε $p>2{,}5$.

(δ) Όταν στη συνάρτηση προσφοράς $q=a+bp,$ το $a>0$, η συνάρτηση είναι ανελαστική, αν $a=0$, η ελαστικότητα είναι ίση με τη μονάδα για κάθε τιμή και, αν τέλος, $a<0$, έχουμε ελαστική συνάρτηση προσφοράς για κάθε τιμή $p>a/b$.

2.2 Η συνάρτηση παραγωγής

Η συνάρτηση συνολικής παραγωγής (TP) στην πιο απλή της μορφή περιλαμβάνει μόνο ένα συντελεστή παραγωγής (ας υποθέσουμε εργασία). Έτσι έχουμε:

$$TP=f(L)$$

Στη συνάρτηση παραγωγής συνήθως αποδίδονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά (Σχήμα 1).

(1) Παραγωγή μπορεί να υπάρξει μόνο όταν υπάρχει εισροή εργασίας, δηλαδή το **συνολικό προϊόν** (total product), $TP = 0$, όταν $L = 0$.

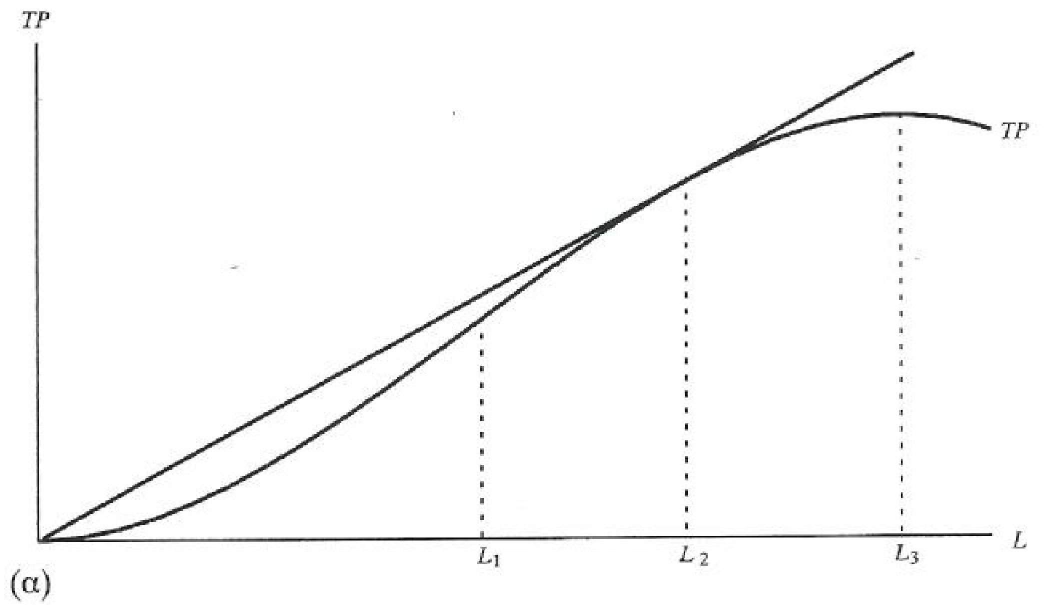
(2) Η πρώτη παραγωγός του συνολικού προϊόντος ως προς την εργασία είναι θετική, $dTP/dL \geq 0$, δηλαδή η μεταβολή που προκαλείται στο συνολικό προϊόν από τη μεταβολή της εργασίας –ή αλλιώς το **οριακό προϊόν της εργασίας** (marginal product of labor)- είναι θετική.

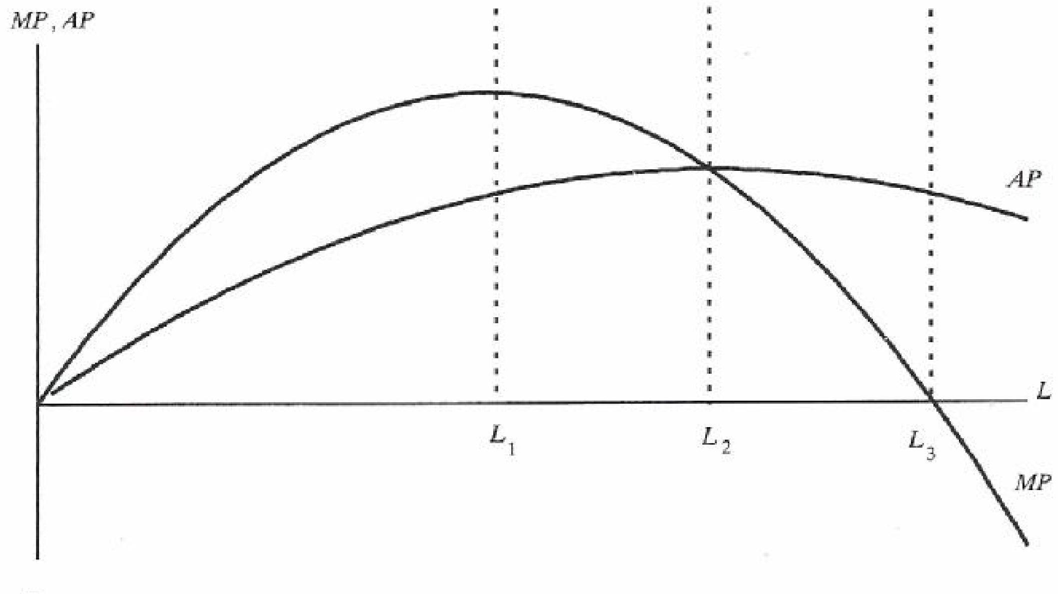
(3) Οι ρυθμοί αύξησης του προϊόντος είναι υψηλοί μέχρι ένα ορισμένο επίπεδο απασχόλησης L. Μετά οι αυξήσεις του προϊόντος μειώνονται σταδιακά. Με άλλα λόγια, παρατηρούνται **φθίνουσες αποδόσεις** (diminishing returns) του συντελεστή εργασίας. Μαθηματικά η τελευταία πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$f''(L) > 0$ για $L < L_1$

$f''(L) < 0$ για $L > L_1$

Αν η παραγωγή συνεχίσει μετά το L_2, θα υπάρχει ένα άλλο επίπεδο απασχόλησης L_3, πέραν του οποίου το οριακό προϊόν (MP) γίνεται αρνητικό και το συνολικό προϊόν θα αρχίσει να μειώνεται. Ασφαλώς, οι επιχειρηματίες θα θέλουν





(β) Σχήμα 1

να προσλάβουν προσωπικό μέχρι που να απασχολήσουν, το πολύ, L_3 εργαζομένους. Για απασχόληση μεγαλύτερη από L_3 παρατηρούμε ότι η παραγωγή μειώνεται αντί να αυξάνεται. Η μαθηματική διατύπωση αυτής της πρότασης είναι:

$f'(L) < 0$ για $L > L_3$

Στο Σχήμα 1^{α} παρουσιάζουμε μια τυπική συνάρτηση συνολικού προϊόντος (TP ή q) με τα τρία διαφορετικά στάδια που αναφέραμε. Στο σχήμα 1β παρουσιάζουμε το οριακό προϊόν $MP = d(TP)/dL = dq/dL)$, που είναι η πρώτη παράγωγος του συνολικού προϊόντος, και το μέσο προϊόν $(AP = q/L)$, δηλαδή το προϊόν ανά μονάδα εργασίας. Το οριακό προϊόν γεωμετρικά είναι η κλίση του συνολικού προϊόντος, ενώ το μέσο προϊόν είναι ίσο με την κλίση της ευθείας γραμμής που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει το συνολικό προϊόν σε ένα ορισμένο επίπεδο απασχόλησης. Στο σημείο που το οριακό προϊόν παρουσιάζει μέγιστο, η καμπύλη συνολικού προϊόντος παρουσιάζει σημείο καμπής (L_1).

Στο σημείο που η ευθεία γραμμή διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι εφαπτομένη της συνάρτησης συνολικού προϊόντος, το οριακό προϊόν ισούται με το μέσο προϊόν και είναι επίσης το σημείο που το μέσο προϊόν μεγιστοποιείται.

2.2.1 Παραμετρική ανάλυση συνάρτησης συνολικού προϊόντος

Ο εντοπισμός και ο χαρακτηρισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης συνολικού προϊόντος συντελεί στην επίτευξη ενός άλλου στόχου, δηλαδή της παραμετρικής ανάλυσης, η οποίας αποσκοπεί στον προσδιορισμό των προσήμων των παραμέτρων, τις τιμές που μπορούν να λάβουν καθώς και τις ενδεχόμενες σχέσεις μεταξύ τους. Η παραμετρική ανάλυση βασίζεται στην οικονομική θεωρία σε συνδυασμό με το μαθηματικό λογισμό. Για το σκοπό αυτό ας υποθέσουμε μια συνάρτηση συνολικού προϊόντος αυτής της μορφής:

$$TP = q = aL^3 + bL^2 + cL + d$$

Στην προκειμένη περίπτωση λέμε ότι αν $L = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $TP = 0$ και άρα $d = 0$. Όσον αφορά το συντελεστή c γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που $L = 0$, τότε $AP = 0$ και κατά συνέπεια η τιμή του συντελεστή $c = 0$. Τέλος, για τα πρόσημα των δύο άλλων παραμέτρων, παραγωγίζουμε το συνολικό προϊόν ως προς την εργασία και βρίσκουμε το οριακό προϊόν της εργασίας:

$$MP = dq / dL = 3aL^2 + 2bL + c$$

το οποίο μεγιστοποιείται, όταν η πρώτη παράγωγος ισούται με το μηδέν (αναγκαία συνθήκη). Επομένως,

$$(MP)' = (d^2q)/(dL^2) = 6aL + 2b = 0$$

Κατόπιν, λύνοντας ως προς την εργασία λαμβάνουμε:

$$L = -(2b)/(6a)$$

Η συνάρτηση του οριακού προϊόντος για αυτήν την τιμή βρίσκεται σε ένα ακρότατο. Αυτό για να είναι μέγιστο θα πρέπει η δεύτερη παράγωγος του οριακού προϊόντος να είναι αρνητική (ικανή συνθήκη). Άρα, λοιπόν, έχουμε:

$$(MP)'' = 6a < 0$$

Έτσι, για να έχουμε μέγιστο απαιτείται $a < 0$, πράγμα που σημαίνει ότι για να έχουμε αναγκαστικά το $L > 0$ αναγκαστικά το $b > 0$. Συνοψίζοντας, η συνάρτηση συνολικής παραγωγής γράφεται:

$$Q = aL^3 + bL^2 \text{ με } a < 0 \text{ και } b > 0.$$

2.3 Η σχέση μεταξύ οριακού και μέσου προϊόντος

Το μέσο προϊόν είναι $AP = q(L)/L$. Για να βρούμε την μέγιστη τιμή του μέσου προϊόντος πρέπει η πρώτη παράγωγος του να μηδενιστεί άρα, έχουμε:

$$\frac{d(AP)}{dL} = \frac{q'(L)L - L'q(L)}{L^2} = \frac{q'(L)}{L} - \frac{q(L)}{L^2} \text{ και } \frac{d(AP)}{dL} = \frac{1}{L}(MP - AP)$$

Αν $d(AP)/dL = 0$, τότε $MP = AP$ και το μέσο προϊόν μεγιστοποιείται.

Αν $d(AP)/dL > 0$, τότε $MP > AP$ και το οριακό προϊόν βρίσκεται πάνω από το μέσο προϊόν.

Αν $d(AP)/dL < 0$, τότε $MP < AP$ και το οριακό προϊόν βρίσκεται κάτω από το μέσο προϊόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση $TP = -3L^3 + 270L^2$

(α) Να βρεθούν τα ακρότατά της.

(β) Να βρεθούν τα ακρότατα του μέσου προϊόντος.

ΛΥΣΗ

(α) Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο απαιτούν:

$$\frac{dq}{dL} = -9L^2 + 540L = -9L(L+60) = 0, \text{ όπου } L = 0 \text{ και } L = 60$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης για την τιμή $L = 60$ δίνουν:

$$\frac{d^2q}{dL^2} = -18L + 540 = -18(60) + 540 = -540 < 0$$

Άρα το προϊόν μεγιστοποιείται, όταν απασχολούνται 60 εργάτες.

(β) Οι συνθήκες δεύτερης τάξης για τη μεγιστοποίηση του μέσου προϊόντος απαιτούν:

$$\frac{d(AP)}{dL} = \frac{d(-3L^2 + 270L)}{dL} = -6L + 270 = 0 \text{ και } L = 45$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{d^2(AP)}{dL^2} = -6$$

Επομένως, το μέσο προϊόν μεγιστοποιείται, όταν απασχολούνται 45 εργάτες.

2.4 Οριακό έσοδο προϊόντος

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής, όταν έχουμε μόνο μια εισροή (εργασία), γράφεται ως $q = q(L)$. Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι $R = pq$, ενώ η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = p(q)$. Συνεπώς, τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θεωρούνται συνάρτηση του αριθμού των εργαζομένων, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε τα συνολικά έσοδα ως προς τον αριθμό των εργαζομένων. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε:

$$\frac{dR}{dL} = p\frac{dq}{dL} + q\frac{dp}{dL}$$

Από τον αλυσωτό κανόνα έχουμε:

$$\frac{dP}{dL} = \frac{dp}{dq}\frac{dq}{dL} \text{ και } \frac{dR}{dL} = p\frac{dq}{dL} + q\frac{dp}{dq}\frac{dq}{dL} \text{ ή } \frac{dR}{dL} = \frac{dq}{dL}\left(p + q\frac{dp}{dq}\right)$$

Η παράγωγος των συνολικών εσόδων ως προς την εργασία καλείται **οριακό έσοδο προϊόντος** (marginal revenue product).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος μιας βιομηχανίας περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$p = \frac{520}{q+3}$$

και η συνάρτηση παραγωγής από:

$$q = \frac{10L^2}{\sqrt{L^2+8}}$$

Να υπολογίσετε το ΟΕΠ για $L = 5$

ΛΥΣΗ

$$\frac{dq}{dL}=\frac{20L\sqrt{L^2+8}-(1/2)(L^2+8)^{-1/2}(2L)(10L^2)}{L^2+8}=\frac{10L(L^2+8)^{-1/2}[2(L^2+8)-L^2]}{L^2+8}$$

$$=\frac{10L(L^2+16)}{(L^2+8)^{3/2}} \quad \text{και} \quad \frac{dp}{dq}=-\frac{520}{(q+3)^2}$$

Αντικαθιστούμε το q με το ίσο του και παίρνουμε:

$$\frac{dR}{dL}=\frac{10L(L^2+16)}{(L^2+8)^{3/2}}[p+q(-\frac{520}{(q+3)^2})]$$

Όταν $L=5$, τότε $q\approx 43{,}5$ και $p\approx 11{,}18$. Επομένως,

$$\frac{dR}{dL}\approx 88{,}5.$$

2.5 Η συνάρτηση κόστους

Στη συζήτηση μας ασχοληθήκαμε με προβλήματα σχετικά με τα έσοδα μιας επιχείρησης και με τη συνάρτηση παραγωγής και τα ακρότατα της, χωρίς να εξετάσουμε το κόστος λειτουργίας μιας επιχείρησης. Στη νεοκλασική θεωρία – στην πιο διαδεδομένη της εκδοχή – οι επιχείρησης θεωρούνται ότι παράγουν με στόχο την μεγιστοποίηση των κερδών τους. Τα κέρδη μιας επιχείρησης υπολογίζονται από τη διαφορά μεταξύ συνολικών εσόδων και συνολικού κόστους.

Η συνάρτηση κόστους προκύπτει από τη συνάρτηση παραγωγής, δηλαδή το συνολικό κόστος εξαρτάται από την παραγόμενη ποσότητα. Υποθέτουμε τη συνάρτηση παραγωγής που χρησιμοποιεί ως μόνη εισροή την εργασία. Επίσης, υποθέτουμε ότι η αμοιβή κάθε μονάδας εργασίας (ώρες, ή αριθμός εργατών) είναι ίση με w. Τότε το συνολικό κόστος γράφεται:

$$C = wL + F$$

όπου $C =$ συνολικό κόστος

$V = wL$ ή μεταβλητό κόστος

$F =$ σταθερό κόστος

Διαιρούμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους με την παραγόμενη ποσότητα και παίρνουμε:

$$\frac{C}{q} = \frac{V}{q} + \frac{F}{q} \quad \text{ή} \quad AC = AVC + AFC$$

Δηλαδή το μέσο (συνολικό) κόστος ($AC = C/q$) είναι ίσο με το άθροισμα του μέσου μεταβλητού ($AVC = V/q$) και του μέσου σταθερού κόστους ($AFC = F/q$). Παραγωγίζοντας το συνολικό κόστος ως προς το προϊόν παίρνουμε το **οριακό κόστος** (marginal cost):

$$MC = \frac{dC}{dq} = \frac{dC}{dL}\frac{dL}{dq} = \frac{dC/dL}{dq/dL}$$

όπου MC είναι το οριακό κόστος. Αλλά $dC/dL = w$ από την υπόθεση που κάναμε ότι το μόνο μεταβλητό κόστος της συνάρτησης είναι η εργασία. Επίσης dQ/dL είναι η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας (MP). Συνεπώς, το οριακό κόστος, ο μισθός και η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας συνδέονται με τη σχέση:

$$MC = \frac{w}{MP}$$

Παρατηρούμε την αντίστροφη σχέση μεταξύ της οριακής παραγωγικότητας και του οριακού κόστους, όπως επίσης την ευθέως ανάλογη σχέση ανάμεσα στον ονομαστικό μισθό και στο οριακό κόστος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η ακόλουθη συνάρτηση συνολικού κόστους :

$$C = 200 + 60q - 4q^2 + 0{,}1q^3$$

(α) Να υπολογιστεί το οριακό και το μέσο κόστος για $q = 10$.

(β) Να βρεθεί το μέγεθος παραγωγής που ελαχιστοποιεί το οριακό κόστος.

(γ) Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις TC, MC, AC.

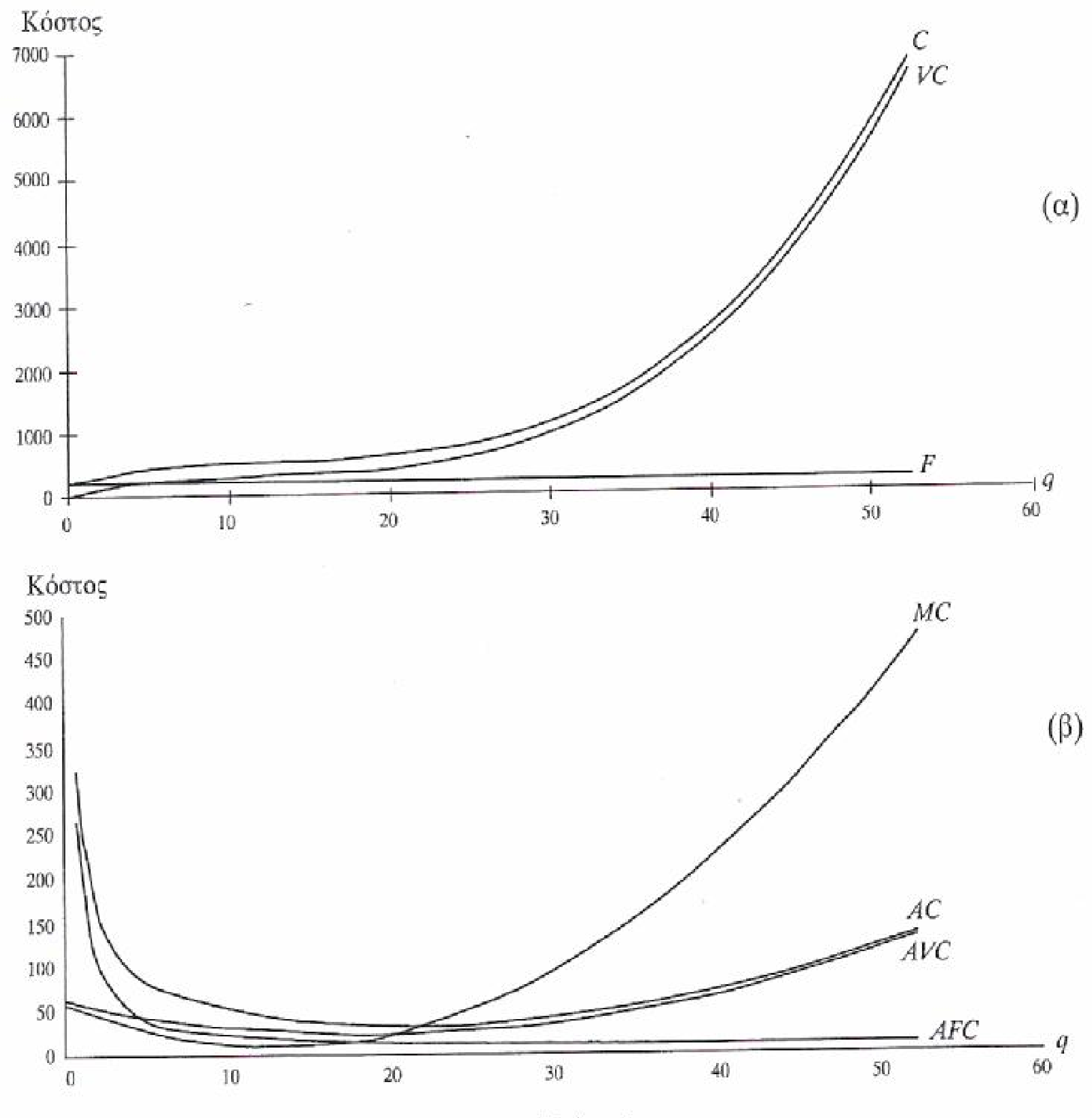
ΛΥΣΗ

(α) $MC = (TC)' = 60 - 8q + 0{,}3q^2$ για $q = 10$ $MC = 10$

$AC = (200/q) + 60 - 4q + 0{,}1q^2$ για $q = 10$ $AC = 50$

(β) $MC = -8 + 0{,}6q$ για $MC' = 0$ παίρνουμε $q = 13{,}3$. Γι' αυτή την τιμή, η συνάρτηση οριακού κόστους ελαχιστοποιείται, επειδή $MC'' = 0{,}6 > 0$.

(γ) Οι διάφορες καμπύλες κόστους παριστάνονται γραφικά στα Σχήματα 2^{α} και 2β.



Σχήμα 2

2.5.1 Η σχέση μεταξύ μέσου και οριακού κόστους

Η ακριβής σχέση ανάμεσα στο μέσο και στο οριακό κόστος μπορεί να αποσαφηνιστεί με τη βοήθεια του λογισμού. Το μέσο κόστος γράφεται $AC = C(q)/q$, όπου $C(q)$ η συνάρτηση συνολικού κόστους. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως ακριβώς και με την περίπτωση του μέσου προϊόντος. Έτσι, λοιπόν, παίρνουμε την πρώτη παράγωγο του μέσου κόστους:

$$\frac{d(AC)}{dq}=\frac{qC(q)'-q'C(q)}{q^2}=\frac{C(q)'}{q}-\frac{C(q)}{q^2} \text{ και } \frac{d(AC)}{dq}=\frac{1}{q}(MC-AC)$$

Αν $d(AC)/dq=0$, τότε $MC=AC$ και το μέσο κόστος ελαχιστοποιείται.

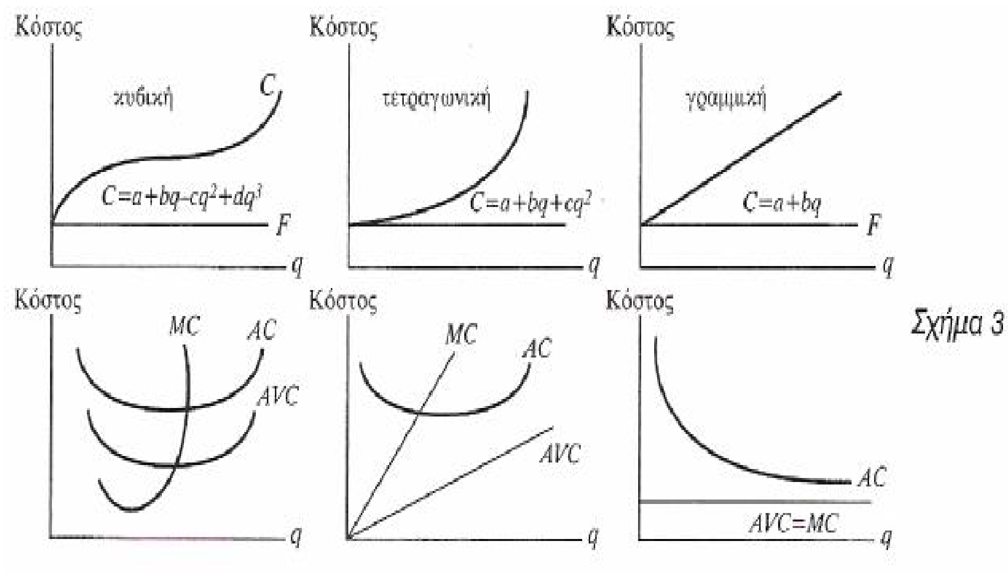
Αν $d(AC)/dq>0$, τότε $MC>AC$ και το οριακό κόστος βρίσκεται πάνω από το μέσο κόστος.

Αν $d(AC)/dq<0$, τότε $MC<AC$ και το οριακό κόστος βρίσκεται κάτω από το μέσο κόστος.

Δηλαδή, το οριακό κόστος είναι ίσο με το μέσο κόστος στο επίπεδο παραγωγής, όπου το μέσο κόστος έχει ελάχιστο. Στα σημεία αριστερά του επιπέδου παραγωγής, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο μέσο κόστος, το οριακό κόστος είναι μικρότερο του μέσου και στο επίπεδο παραγωγής δεξιά του επιπέδου παραγωγής, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο μέσο κόστος, το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο του μέσου κόστους.

Η σχέση ανάμεσα στο μέσο και οριακό κόστος, στην οποία καταλήξαμε, αποτελεί στην πραγματικότητα ειδική περίπτωση μιας γενικότερης σχέσης που ισχύει για κάθε ζεύγος μέσου και οριακού μεγέθους, όπως οριακό και μέσο έσοδο, οριακή και μέση παραγωγικότητα κ.ο.κ.

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζουμε τρεις συναρτήσεις συνολικού κόστους και τις αντίστοιχες καμπύλες μέσου και οριακού κόστους.



2.5.2 Παραμετρική ανάλυση συνάρτησης συνολικού κόστους

Ο εντοπισμός και ο χαρακτηρισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης συνολικού κόστους συντελεί στην επίτευξη ενός άλλου στόχου. Π.χ. αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους της συνηθισμένης μορφής :

$$C = aq^3 + bq^2 + cq + d$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω συνάρτηση οι παράμετροί της πρέπει να πληρούν ορισμένους περιορισμούς. Πρώτα από όλα, η παράμετρος $d > 0$, διότι αναφέρεται στο σταθερό κόστος. Δεύτερο, η συνάρτηση κόστους πρέπει να είναι αύξουσα. Γνωρίζουμε ότι οι κυβικές συναρτήσεις παρουσιάζουν δύο καμπυλότητες, είναι φανερό ότι σε καμία περίπτωση η συνάρτηση συνολικού κόστους δε θα είναι φθίνουσα. Ο περιορισμός αυτός επιτυγχάνεται μόνο αν τα πρόσημα των συντελεστών είναι αυστηρά καθορισμένα, όπως επίσης και η μεταξύ τους σχέση. Ακολουθώντας διαδικασία παρόμοια μ’ αυτήν της συνάρτησης παραγωγής, επιδιώκουμε να εντοπίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης οριακού κόστους. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$MC = C' = 3aq^2 + 2bq + c$$

Εδώ έχουμε μια συνάρτηση δευτέρου βαθμού που τη θέλουμε να έχει ελάχιστο αλλά ταυτόχρονα θα πρέπει $MC > 0$. Άρα, λοιπόν, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση οριακού κόστους και τη θέτουμε ίση με το μηδέν:

$MC' = 6aq + 2b$ και $q = -b/3a$

Γνωρίζουμε ότι το προϊόν είναι θετικό, άρα είτε το α είτε b το πρέπει να είναι αρνητικό. Από τις συνθήκες δεύτερης τάξης μπορούμε να πούμε ότι ότι το α θα είναι θετικό, πράγματι:

$$MC'' = 6a > 0$$

Επομένως το $b < 0$ για να έχουμε $q > 0$. Προκειμένου να βρούμε το πρόσημο του c, όπως επίσης τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων, εκτιμούμε ποιο είναι το ελάχιστο MC αντικαθιστώντας την τιμή του q στο MC. Έτσι έχουμε :

$$MC_{\min} = 3a(-\frac{b}{3a})^2 + 2b(-\frac{b}{3a}) + c = \frac{3ac - b^2}{3a}$$

πράγμα που σημαίνει ότι $b^2 < 3ac$ για να έχουμε θετικό ελάχιστο MC. Ο περιορισμός αυτός συνεπάγεται ότι $c > 0$.

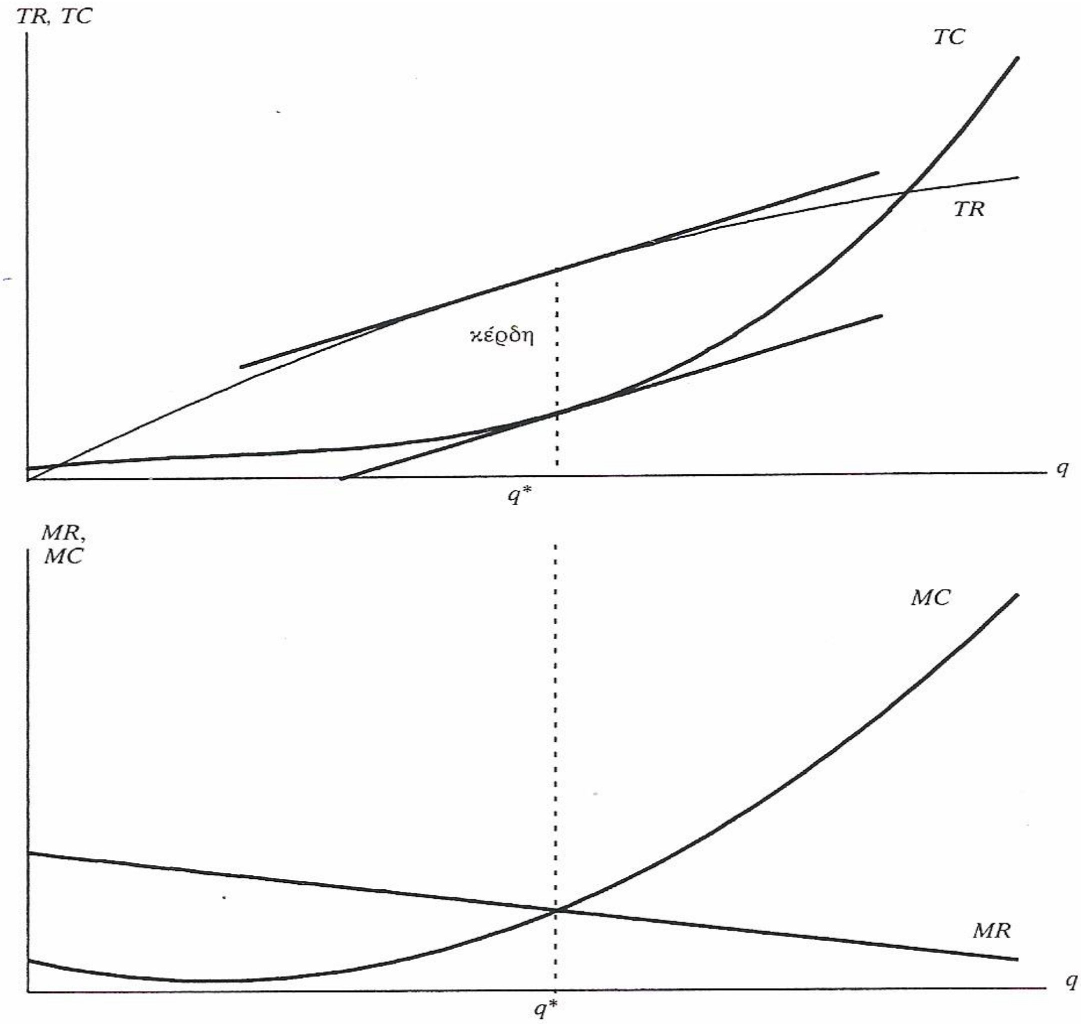
2.6 Μεγιστοποίηση των κερδών

Τα κέρδη μιας επιχείρησης, όπως έχουμε σημειώσει, είναι η διαφορά ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και στο συνολικό κόστος. Με μαθηματικά σύμβολα:

$$p(q) = R(q) - C(q)$$

Όπου, $p(q)$ παριστάνει τα συνολικά κέρδη, $R(q) = pq$ τα συνολικά έσοδα, $p = f(q)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης και $C(q)$ το κόστος παραγωγής που υποθέτουμε ότι συμπεριλαμβάνει και το εναλλακτικό κόστος.

Στο Σχήμα 4 παριστάνουμε γραφικά τις δύο εναλλακτικές ερμηνείες της μεγιστοποίησης των κερδών.



Σχήμα 4

Για τη μεγιστοποίηση των κερδών, η αναγκαία συνθήκη απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης των κερδών.

$$\frac{dp}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} = 0 \text{ επομένως, } \frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι τα κέρδη μεγιστοποιούνται στο σημείο που η κλίση της συνάρτησης των συνολικών εσόδων ισούται με την κλίση της συνάρτησης του συνολικού κόστους. Με άλλα λόγια, τα κέρδη της επιχείρησης μεγιστοποιούνται, όταν η επιχείρηση παράγει τόσο προϊόν όσο είναι αρκετό για να εξισώσει το **οριακό έσοδο** (marginal revenue) με το **οριακό κόστος** (marginal cost).

$$\frac{dR}{dq} = MR = MC = \frac{dC}{dq}$$

Η ικανή συνθήκη για τη μεγιστοποίηση των κερδών απαιτεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης των κερδών να είναι αρνητική, δηλαδή

$$d^2p / dq^2 < 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η ζήτηση ενός αγαθού περιγράφεται από τη συνάρτηση $q = 10 - 0,5p$ και το συνολικό κόστος παραγωγής του από τη συνάρτηση

$TC = 0,5q^2 + 5q + 100$:

(α) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.

(β) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος.

(γ) Να βρεθεί το μέσο σταθερό κόστος που αντιστοιχεί στο επίπεδο παραγωγής (β).

(δ) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.

ΛΥΣΗ

(α) Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι η $p = 20 - 2q$, επομένως για τα συνολικά έσοδα έχουμε:

$$\frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(20q - 2q^2) = 20 - 4q = 0,\ q = 5$$

Η δεύτερη παράγωγος δίνει:

$$\frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(20 - 4q) = -4 < 0$$

άρα οι συνθήκες δεύτερης τάξης για μέγιστο ικανοποιούνται.

(β) Η συνάρτηση μέσου κόστους είναι:

$$AC = \frac{TC}{q} = 0,5q + 5 + \frac{100}{q}$$

Αν θέσουμε την παράγωγο της ίση με το μηδέν:

$$AC' = 0,5 - \frac{100}{q^2} = 0 \qquad q = \pm\sqrt{200}$$

από τις δύο ρίζες φυσικά δεχόμαστε τη θετική, άρα το μέσο κόστος ελαχιστοποιείται για $q \approx 14$ μονάδες. Εξετάζοντας τις συνθήκες δεύτερης τάξης βρίσκουμε:

$$AC'' = 200q^{-3} > 0$$

(γ) Για την εύρεση του σταθερού κόστους θέτουμε στη συνάρτηση κόστους $q = 0$ και παίρνουμε $F = 100$, άρα το μέσο σταθερό κόστος για $q = 14$ είναι:

$$AFC = F / q = 100/14 \approx 7 \text{ ν.μ.}$$

(δ) Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$p(q) = (20q - 2q^2) - (0,5q^2 + 5q + 100)$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο δίνουν:

$$p(q)' = 20 - 4q - (q + 5) = 0 \text{ και } q = 3$$

και οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται:

$$p(q)'' = -5 < 0$$

2.7 Το υπόδειγμα του τέλειου ανταγωνισμού

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι η επιχείρηση μπορεί να επιλέγει την τιμή που αντιστοιχεί στο μέγιστο κέρδος. Στη νεοκλασική θεωρία συχνά γίνεται αναφορά σε ένα υπόδειγμα αγοράς που χαρακτηρίζεται από ένα μεγάλο αριθμό μικρών – σχετικά με το μέγεθος της αγοράς - παραγωγών που πουλούν ένα ομοειδές προϊόν. Αυτό το είδος της αγοράς κυριαρχείται ακόμη από ένα μεγάλο αριθμό μικρών – σχετικά με το μέγεθος της αγοράς – αγοραστών. Οι αγοραστές και οι πωλητές έχουν τέλεια πληροφόρηση για τις τιμές και το κόστος κάθε προϊόντος. Ακόμη υπάρχει τέλεια κινητικότητα στους συντελεστές παραγωγής. Αυτό συνεπάγεται ότι στην περίπτωση που υπάρχουν υπερκανονικά κέρδη σε έναν κλάδο η είσοδος επιχειρήσεων από άλλους κλάδους οδηγεί σε υπερπροσφορά και κατά συνέπεια σε χαμηλότερη τιμή, που συνεπάγεται την επαναφορά της κατάστασης με κανονικά κέρδη. Αν πάλι υπάρχουν ζημίες σε έναν κλάδο, η έξοδος των επιχειρήσεων από τον κλάδο οδηγεί σε ελάττωση της προσφοράς και συνεπώς σε υψηλότερη τιμή, που αναμένεται να επαναφέρει την κατάσταση, στην οποία οι επιχειρήσεις πουλούν σε μια τιμή με την οποία εξασφαλίζουν κανονικά κέρδη. Αξίζει να τονιστεί ότι αυτή η τιμή ισούται με το ελάχιστο μέσο κόστος της επιχείρησης. Είναι σημαντικό να έχουμε υπόψη ότι το κανονικό κέρδος είναι συστατικό στοιχείο του κόστους.

Αυτό το υπόδειγμα, αν και καθόλου αντιπροσωπευτικό της πραγματικότητας, ωστόσο χρησιμοποιείται για να περιγράψει και κατά συνέπεια να προβλέψει τη συμπεριφορά των παραγωγών. Το υπόδειγμα λέγεται **τέλειος ανταγωνισμός** (perfect competition), επειδή πιστεύεται ότι αντιπροσωπεύει το ιδανικό είδος αγοράς. Τα συμπεράσματα αυτού του υποδείγματος χρησιμοποιούνται για να κρίνουν αν και κατά πόσο ο πραγματικός ανταγωνισμός διαφέρει από τον τέλειο. Αν η απόκλιση είναι σημαντική, τότε σύμφωνα με τη καθιερωμένη οικονομική θεωρία υπάρχει αιτιολογία για κρατική παρέμβαση. Το κράτος προσπαθεί να διορθώσει τις ατέλειες της αγοράς και να μετατρέψει την οικονομική ζωή έτσι που να προσεγγίζει τον τέλειο ανταγωνισμό.

Μια από τις λογικές συνεπαγωγές του τέλειου ανταγωνισμού είναι ότι οι παραγωγοί και οι καταναλωτές – λόγω του μεγάλου αριθμού τους και του μικρού μεγέθους τους- μεμονωμένοι είναι εντελώς αδύναμοι να επηρεάσουν τις τιμές. Επομένως, η τιμή γι’ αυτούς είναι κάτι το δεδομένο. Με δεδομένη την τιμή, κάθε παραγωγός αποφασίζει πόση ποσότητα θα παράγει. Ασφαλώς, το κριτήριο του παραγωγού είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους του. Έστω, λοιπόν, ότι τα συνολικά έσοδα είναι $R = pq$ και η συνάρτηση κόστους στην πιο απλή της μορφή είναι η $C = a + f(q)$, όπου το a αντιπροσωπεύει το σταθερό κόστος και $f(q)$ το μεταβλητό κόστος. Η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι:

$$p = R - C = pq - a - f(q)$$

η οποία μεγιστοποιείται, όταν θέσουμε την πρώτη της παράγωγο ίση με το μηδέν:

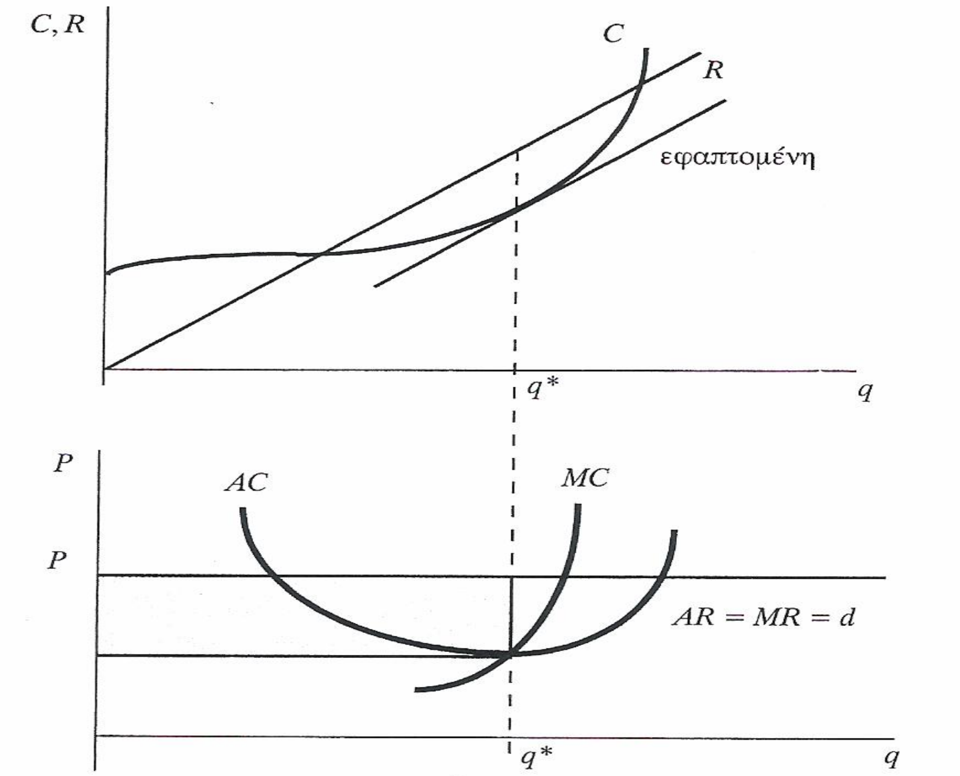
$$p' = p - f'(q) = 0$$

Για $p' = 0$ παίρνουμε την αναγκαία συνθήκη για μέγιστο, $p = f'(q) = MC$.

Με άλλα λόγια το κέρδος της τέλειας ανταγωνιστικής επιχείρησης μεγιστοποιείται, όταν η τιμή πώλησης ισούται με το οριακό κόστος.

Η ικανή συνθήκη για τη μεγιστοποίηση του κέρδους απαιτεί αρνητική τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή $p'' = f''(q) < 0$.

Στο Σχήμα 5 έχουμε τη γραφική παράσταση της μεγιστοποίησης του κέρδους:



Σχήμα 5

Παρατηρούμε ότι, όταν η διαφορά μεταξύ εσόδων και κόστους μεγιστοποιείται, τότε το οριακό κόστος είναι ίσο με την τιμή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι η τιμή μιας τέλειας ανταγωνιστικής αγοράς ισούται με 70 ν.μ. και έστω η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας επιχείρησης που λειτουργεί σ' αυτή την αγορά είναι:

$$C(q) = 2q^3 - 22q^2 + 84q + 20$$

να υπολογιστούν:

(α) η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη αυτής της επιχείρησης

(β) το μέγιστο κέρδος

(γ) τα σημεία καμπής της συνάρτησης κέρδους αυτής της επιχείρησης

ΛΥΣΗ

(α) $\Pi = pq - C(q) = 70q - (2q^3 - 22q^2 + 84q + 20)$

$$= -2q^3 + 22q^2 - 14q - 20$$

$\Pi' = -6q^2 + 44q - 14 = 0$ και $q = 1/3,\ q = 7$

οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$\Pi'' = -12q + 44$$

για $q = 1/3$ λαμβάνουμε $\Pi'' = 40 > 0$, άρα τα κέρδη ελαχιστοποιούνται, ενώ για $q = 7$, λαμβάνουμε $\Pi'' = -44 < 0$, άρα τα κέρδη μεγιστοποιούνται.

(β) $\Pi = -(2)(7)^3 + (22)(7)^2 - (14)(7) - 20 = 274$ ν.μ.

(γ) $\Pi'' = -12q + 44 = 0$ και $q = 3,66$ είναι το σημείο καμπής. Πράγματι, για $q < 3,66$ η $\Pi'' > 0$ και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα της προς τα πάνω, ενώ για $q > 3,66$ η $\Pi'' < 0$ και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα της προς τα κάτω.

2.7.1. Επιβολή φορολογίας στον τέλειο ανταγωνισμό

Τα ερωτήματα που θέτουμε είναι: Πρώτον, πως αλλάζουν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας μετά την επιβολή φορολογίας και δεύτερον, ποιο ποσοστό φορολογίας πρέπει να επιβάλει η κυβέρνηση ούτως ώστε να μεγιστοποιήσει τα φορολογικά της έσοδα. Το είδος της φορολογίας που εξετάζουμε είναι **ανά μονάδα προϊόντος** (excise tax). Έστω η ακόλουθη γραμμική συνάρτηση ζήτησης:

$$q = a - bp$$

η συνάρτηση προσφοράς επίσης είναι γραμμική:

$$q = -c + dp \text{ με } a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$$

η τέλεια ανταγωνιστική αγορά βρίσκεται σε ισορροπία όταν η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση,

$$a - bp = -c + dp$$

και η τιμή ισορροπίας είναι:

$$p_e = \frac{a+c}{b+d}$$

Για να βρούμε την ποσότητα ισορροπίας αντικαθιστούμε είτε στη συνάρτηση ζήτησης είτε στη συνάρτηση προσφοράς και βρίσκουμε:

$$q_e = a - b\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{ad-bc}{b+d}$$

Αν η κυβέρνηση επιβάλει φορολογία t ανά μονάδα προϊόντος που πουλιέται, τότε οι παραγωγοί θα εισπράττουν την τιμή πώλησης μειωμένη κατά το φόρο, δηλαδή $p - t$, επομένως η συνάρτηση προσφοράς γράφεται:

$$q = -c + d(p-t)$$

η τέλεια ανταγωνιστική αγορά βρίσκεται σε ισορροπία, όταν η προσφορά μετά τη φορολογία είναι ίση με τη ζήτηση, δηλαδή:

$$a - bp = -c + d(p-t)$$

και η καινούργια τιμή ισορροπίας είναι:

$$p_e = \frac{a+c}{b+d} + \frac{d}{b+d}t$$

Προκειμένου να βρούμε την ποσότητα ισορροπίας αντικαθιστούμε είτε στη συνάρτηση ζήτησης είτε στη συνάρτηση προσφοράς και βρίσκουμε:

$$q_e = \frac{ad-bc}{b+d} - \frac{bd}{b+d}t$$

Τα συνολικά φορολογικά έσοδα (T) υπολογίζονται από το γινόμενο του φορολογικού συντελεστή (t) επί την παραγόμενη ποσότητα στο σημείο ισορροπίας, δηλαδή:

$$T = tq = t\left(\frac{ad-bc-bdt}{b+d}\right) = \frac{adt-bct-bdt^2}{b+d}$$

Αν τώρα θέλουμε να εκτιμήσουμε τον φορολογικό συντελεστή που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης, δεν έχουμε παρά να μεγιστοποιήσουμε την παραπάνω συνάρτηση ως προς t. Έτσι θα έχουμε

$$\frac{dT}{dt} = \frac{ad-bc-2bdt}{b+d} = 0$$

Λύνουμε ως προς t και λαμβάνουμε:

$$t = \frac{ad-bc}{2bd}$$

Άρα το ποσοστό φορολογίας που πρέπει να επιβάλει η κυβέρνηση είναι $(ad-bc)/(2bd)$. Εδώ χρειάζεται προσοχή, επειδή ακόμη δε γνωρίζουμε αν το ποσοστό φορολογίας που εκτιμήσαμε μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα. Για να απαντήσουμε με βεβαιότητα σ' αυτό το ερώτημα, χρειάζεται να ελέγξουμε τις συνθήκες δεύτερης τάξης, που είναι:

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{2bd}{b+d} < 0,$$ διότι $b > 0$ και $d > 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω μια ανταγωνιστική αγορά με τις ακόλουθες γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς: $q_d = 45 - 4p$ και $q_s = -5 + p$. Υποθέτουμε ότι η κυβέρνηση επιβάλει φορολογία ύψους t ανά μονάδα προσφερόμενου προϊόντος και οι πωλητές συμπεριλαμβάνουν το φόρο αυτό στη συνάρτηση προσφοράς τους. Να υπολογίσετε το ύψος του t που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης καθώς και τα αντίστοιχα έσοδα της κυβέρνησης.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση προσφοράς γράφεται:

$$q_S = -5 + (p - t)$$

την οποία όταν την εξισώνουμε με την συνάρτηση ζήτησης λαμβάνουμε:

$$45 - 4p = -5 + (p - t)$$

που λύνει για:

$$p_e = 10 + t/5$$

η ποσότητα ισορροπίας που αντιστοιχεί σ’ αυτήν την τιμή είναι:

$$q_e = 5 - 4t/5$$

Τα συνολικά φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης θα είναι:

$$T = tq = t(5 - 4t/5) = 5t - (4/5)t^2$$

τα οποία μεγιστοποιούνται αν

$$dT/dt = 5 - 8t/5 = 0 \text{ και } t = 25/8.$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$d^2/dt^2 = -8/5 < 0$$

Άρα πράγματι για $t = 25/8$ μεγιστοποιούνται τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης που είναι:

$$T = tq = 5(25/8) - (4/5)(25/8)^2 = 125/16.$$

2.8 Το υπόδειγμα του καθαρού μονοπωλίου

Μονοπώλιο, όπως η λέξη υποδηλώνει, είναι μια μορφή αγοράς όπου μια επιχείρηση πουλά ένα προϊόν για το οποίο δεν υπάρχουν στενά υποκατάστατα. Σε αντίθεση με την επιχείρηση που λειτουργεί στον τέλειο ανταγωνισμό, ο μονοπωλητής κατέχει δύναμη επιβολής δικής του τιμολογιακής πολιτικής. Αυτό, βέβαια, δε σημαίνει ότι ο μονοπωλητής χρεώνει την υψηλότερη δυνατή τιμή. Στην καθιερωμένη μικροοικονομική θεωρία, ο μονοπωλητής συμπεριφέρεται ορθολογικά και αυτό σημαίνει ότι ο στόχος του είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους. Ας εξετάσουμε τώρα πώς προσδιορίζεται η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στο μονοπώλιο. Θα υποθέσουμε τη συνάρτηση ζήτησης $p = a - bq$ και τη συνάρτηση κόστους $C(q) = gq^2 + dq + e$.

Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$p = aq - bq^2 - (gq^2 + dq + e)$$

Παραγωγίζουμε ως προς την ποσότητα και έχουμε:

$$\frac{dp}{dq} = a - 2bq - (2gq + d) = 0$$

Θέτουμε την πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν και λύνοντας ως προς την ποσότητα έχουμε:

$$q = \frac{a - d}{2(b + g)}$$

Η τιμή που αντιστοιχεί στην ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι:

$$p = a - b\left(\frac{a - d}{2(b + g)}\right)$$

Εδώ κανείς αναρωτιέται αν πράγματι αυτός ο συνδυασμός τιμής και ποσότητας μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί το κέρδος. Το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί με τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης των κερδών που είναι:

$$p'' = -2b - 2g = -2(b + g) < 0$$

Άρα η συνθήκη δεύτερης τάξης ικανοποιείται.

2.8.1 Μονοπώλιο και φορολογία

Ο φόρος, που υποθέτουμε και εδώ, είναι ανά μονάδα προϊόντος. Έτσι, η συνάρτηση ζήτησης παραμένει ίδια, ενώ το κόστος παραγωγής προσαυξάνεται για να συμπεριλάβει τη φορολογία:

$$C = gq^2 + dq + e + tq$$

Η καινούργια συνάρτηση κέρδους είναι:

$$p = aq - bq^2 - (gq^2 + dq + e + tq)$$

Παραγωγίζουμε ως προς την ποσότητα και έχουμε :

$$\frac{dp}{dq} = a - 2bq - (2gq + d + t) = 0$$

Λύνοντας ως προς q παίρνουμε:

$$q = \frac{a-(d+t)}{2(b+g)}$$

που δηλώνει μείωση της παραγόμενης ποσότητας κατά $t/(2(b+g))$. Η καινούργια τιμή ισορροπίας είναι:

$$p = a - b\left[\frac{a-(d+t)}{2(b+g)}\right]$$

και είναι βέβαια μεγαλύτερη από την τιμή πριν τη φορολογία κατά $t/(2(b+g))$.

Αν ο στόχος της κυβέρνησης είναι η μεγιστοποίηση των φορολογικών εσόδων, τότε η κυβέρνηση πρέπει να βρει το κατάλληλο ποσοστό φορολογίας. Πολύ υψηλό ποσοστό φορολογία μπορεί να μειώσει αντί να αυξήσει τα φορολογικά έσοδα (μπορείτε να εξηγήσετε το λόγο;). Έτσι λοιπόν, η συνάρτηση φορολογικών εσόδων της κυβέρνησης είναι $\mathrm{T} = tq$. Αντικαθιστούμε το q με το ίσο του και έχουμε:

$$T = \frac{t\,[a-(d+t)]}{2(b+g)}$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{a-d-2t}{2(b+g)} = 0 \quad \text{και} \quad t = \frac{a-d}{2}$$

Άρα το ποσοστό φορολογίας που πρέπει να θέσει η κυβέρνηση είναι $(a-d)/2$ και οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{2}{2(b+g)} < 0, \text{ διότι } b > 0 \text{ και } g > 0,$$

επομένως, έχουμε μέγιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση ζήτησης ενός μονοπωλητή είναι η $p + 2q = 45$ και η συνάρτηση κόστους είναι η $TC = 2q^2 + 13q$. Αν η κυβέρνηση επιβάλει έναν φόρο t ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος να υπολογίσετε το ύψος του t που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης.

ΛΥΣΗ

Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα είναι:

$$TR = 45q - 2q^2$$

και η καινούργια συνάρτηση κόστους:

$$TC = 2q^2 + 13q + tq.$$

Επομένως, η συνάρτηση κέρδους του μονοπωλητή γράφεται:

$$\Pi = 45q - 4q^2 - 13q - tq$$

Η μεγιστοποίηση των κερδών απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης των κερδών. Άρα έχουμε:

$$\Pi' = 45 - 8q - 13 - t = 0 \text{ και } q = 4 - t/8.$$

Στην προκειμένη περίπτωση τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης θα είναι:

$$T = t(4 - t/8) = 4t - (1/8)t^2$$

Για να μεγιστοποιήσουμε την ανωτέρω συνάρτηση θέτουμε:

$$T' = 4 - 0,25t = 0 \text{ και } t = 16$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$T'' = -0,25 < 0 .$$

2.9 Η λήψη επενδυτικών αποφάσεων

Οι γνώσεις που αποκτήσαμε για τις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις έχουν πολλές χρήσιμες εφαρμογές στη λήψη επενδυτικών αποφάσεων. Ας υποθέσουμε έναν αγρότη ο οποίος φυτεύει δέντρα (λεύκες) σ΄ ένα χωράφι το χρόνο $t = 0$ με σκοπό την ξυλεία. Στη διάρκεια του χρόνου η αξία των δέντρων μεταβάλλεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι για την αξία των δέντρων ισχύει ότι $f'(t) > 0$ και $f''(t) < 0$. Το ερώτημα που τίθεται είναι η εύρεση της καλύτερης χρονικής περιόδου για υλοτόμηση των δέντρων, έτσι ώστε να έχουμε με μεγιστοποίηση της παρούσας αξίας τους.

Αν υποθέσουμε συνεχή ανατοκισμό και σταθερό επιτόκιο (r), η παρούσα αξία των δέντρων δίνεται από την εξίσωση:

$$P = f(t)e^{-rt}$$

Για μέγιστο θέτουμε $dP/dt = 0$, άρα

$$\frac{dP}{dt} = f'(t)e^{-rt} + f(t)(-re^{-rt}) = 0 \quad \text{ή} \quad e^{-rt}\left(f'(t) - f(t)(r)\right) = 0$$

επειδή ο προεξοφλητικός παράγοντας $e^{-rt} \neq 0$, τότε αναγκαστικά

$$f'(t) - f(t)(r) = 0 \text{ και άρα } r = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Ο όρος $f'(t)/f(t)$ δηλώνει το ρυθμό μεγέθυνσής της υπό μελέτη συνάρτησης. Επομένως, η αναγκαία συνθήκη για τη μεγιστοποίηση της αξίας των δέντρων ή, αλλιώς, η καλύτερη περίοδος υλοτόμησής τους είναι εκείνη στην οποία ο ρυθμός αύξησης της παρούσας αξίας ισούται με το επιτόκιο, δηλαδή με το ρυθμό αύξησης των χρημάτων που βρίσκονται κατατεθειμένα σε τοκοφόρο τραπεζικό λογαριασμό. Εναλλακτικά διατυπωμένο, η υλοτόμηση της ξυλείας πρέπει να γίνει το χρονικό διάστημα t κατά το οποίο η αύξηση της αξίας των δέντρων ισούται με τον τόκο $rf(t)$ που κάποιος κερδίζει σ' αυτό το χρονικό διάστημα, όταν επενδύει ένα ποσό $f(t)$ για ένα καθορισμένο επιτόκιο.

Όμως, στο σημείο αυτό δεν είμαστε απόλυτα βέβαιοι για το αν πράγματι μεγιστοποιήσαμε την παρούσα αξία είναι πιθανό να έχουμε πετύχει ακριβώς το αντίθετο απ' αυτό που επιθυμούμε. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να ελέγξουμε για το αν ικανοποιείται η συνθήκη δεύτερης τάξης. Έτσι λοιπόν, έχουμε:

$$\frac{d^2p}{dt^2}=-re^{-rt}\left[f'(t)-rf(t)\right]+\left[f'(t)-rf(t)\right]'e^{-rt}=0+\left[f''(t)-rf'(t)\right]e^{-rt}$$

για ελάχιστο απαιτείται $f''(t)-rf'(t)<0$ που πρέπει να ισχύει από την υπόθεση που κάνουμε για τη συνάρτηση $f(t), f'(t)>0,$ και $f''(t)<0.$

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα υποθέσουμε ότι τα δέντρα μετά την υλοτόμησή τους ξαναφυτεύονται αμέσως, τότε το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι η επιλογή της χρονικής περιόδου έτσι ώστε να έχουμε μεγιστοποίηση της αξίας της γης, που βέβαια θα ισούται με την παρούσα αξία όλων των δέντρων (χρηματορροών) στους χρόνους $t, 2t, 3t, ...$ κ.ο.κ.

Η παρούσα αξία της γης επομένως ισούται:

$$P=f(t)e^{-rt}+f(t)e^{-2rt}+...+f(t)e^{-nrt}$$

Εδώ έχουμε μια γεωμετρική πρόοδο με άπειρους όρους που ο πρώτος όρος της ο e^{-rt} είναι και ο λόγος της γεωμετρικής προόδου. Επομένως, η παρούσα αξία της γης ισούται με

$$P=\frac{f(t)e^{-rt}}{1-e^{-rt}}$$

Η αναγκαία συνθήκη για τη μεγιστοποίηση απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου. Άρα έχουμε:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{(1-e^{-rt})\left[f(t)e^{-rt}\right]'-(1-e^{-rt})'\left[f(t)e^{-rt}\right]}{(1-e^{-rt})^2}=0 \text{ ή}$$

$$\frac{dP}{dt}=\frac{(1-e^{-rt})\left[-re^{-rt}f(t)+f'(t)e^{-rt}\right]-re^{-rt}f(t)e^{-rt}}{(1-e^{-rt})^2}=0$$

Πολλαπλασιάζοντας επί e^{rt} παίρνουμε:

$$f'(t)=rf(t)+r\frac{f(t)e^{-rt}}{1-e^{-rt}}$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η πιο κατάλληλη περίοδος για την υλοτόμηση είναι εκείνη κατά την οποία η αύξηση της αξίας των δέντρων ισούται με το άθροισμα των χρημάτων που χάνονται όσο τα δέντρα δεν κόβονται συν τα ετήσια έξοδα που χάνονται όσο το χωράφι μένει απούλητο. Η παραπάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφεί σε ρυθμούς αύξησης που είναι:

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=r+r\frac{e^{-rt}}{1-e^{-rt}}$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$f''(t)-rf'(t)-r\left(\frac{f(t)e^{-rt}}{1-e^{-rt}}\right)' \quad \text{ή} \quad f''(t)-rf'(t)<0$$

λόγω της υπόθεσης ότι $f''(t)<0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένας οινοπαραγωγός αντιμετωπίζει το πρόβλημα του προσδιορισμού της καλύτερης χρονικής περιόδου για την πώληση του κρασιού του. Αν πουλήσει αμέσως ($t=0$), τότε η αξία ενός βαρελιού με κρασί είναι 35 ν.μ. ενώ στο μέλλον η αξία του μεταβάλλεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $V=35e^{\sqrt{t}}$. Υποθέτοντας ότι το κόστος συντήρησης του κρασιού είναι μηδέν, να βρεθεί ο άριστος χρόνος πώλησης του κρασιού, όταν το επιτόκιο είναι 10% και μένει αμετάβλητο.

ΛΥΣΗ

Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της παρούσας αξίας (P) περιουσιακού στοιχείου. Αντικαθιστώντας στον τύπο της παρούσας αξίας με συνεχή ανατοκισμό τη διαχρονική αξία του κρασιού, παίρνουμε:

$$P(t)=Ve^{-rt}=35e^{\sqrt{t}}e^{-rt}=35e^{\sqrt{t}}e^{-rt}=35e^{\sqrt{t}-rt}$$

Αν λογαριθμήσουμε και τις δυο πλευρές, καταλήγουμε:

$$\ln P(t)=\ln 35+(\sqrt{t}-rt)\ln e=\ln 35+\sqrt{t}-rt$$

Για την εύρεση της χρονικής περιόδου στην οποία η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου μεγιστοποιείται, οι συνθήκες πρώτης τάξης απαιτούν τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου:

$$\frac{d\ln P(t)}{dt}=\frac{dP}{dt}\frac{1}{P}=\frac{1}{2}t^{-1/2}-r \quad \text{ή} \quad \frac{dP}{dt}=P\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}-r\right)=0$$

Επειδή $P\neq 0$ τότε $\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}-r\right)=0$ και $r=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ και $t=\frac{1}{4r^2}$,

αντικαθιστώντας όπου r=0,10 παίρνουμε t=25 χρόνια.

Το επιτόκιο, όπως αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση, θα ισούται με το ρυθμό μεγέθυνσης της αξίας του περιουσιακού στοιχείου. Έτσι, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $V(t)$ ως προς t, λαμβάνουμε:

$$\frac{dV}{dt}=35(e^{\sqrt{t}})'=35e^{\sqrt{t}}\frac{1}{2}t^{-1/2}=V\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{ή} \quad \frac{dV}{dt}\frac{1}{V}=\frac{1}{2\sqrt{t}}=r$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$\frac{d^2P}{dt^2}=P\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}-r\right)'+P'\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}-r\right)$$

επειδή $P'=0$ τότε:

$$P\left(-\frac{1}{4}t^{-3/2}\right)=-\frac{-P}{4\sqrt{t^3}}<0\,.$$

2.10 Το υπόδειγμα αρίστης ποσότητας παραγγελίας

Οι αποφάσεις των επιχειρηματιών για παραγγελίες αγαθών εμπεριέχουν δύο αλληλένδετα είδη κόστους, της αποθήκευσης και της μεταφοράς. Αν η παραγγελία είναι μεγάλη, το κόστος μεταφοράς αναμένεται να είναι χαμηλό (λιγότερα ταξίδια, έγγραφα, τηλεφωνήματα κλπ.). Αντίθετα, το κόστος αποθήκευσης είναι υψηλό- περισσότερα εμπορεύματα χρειάζονται περισσότερο χώρο, περισσότερη εργασία, σχεδιασμό κλπ. Αν η παραγγελία είναι μικρή, το κόστος αποθήκευσης είναι χαμηλό, ενώ το κόστος μεταφοράς είναι πολύ υψηλό. Ο επιχειρηματίας λοιπόν ενδιαφέρεται να προσδιορίσει το μέγεθος της παραγγελίας που του ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Το υπόδειγμα που θα αναπτύξουμε στηρίζεται στις ακόλουθες απλοποιητικές υποθέσεις:

1. Η πώληση (χρήση) του προϊόντος είναι ομοιόμορφη σε όλη τη χρονική περίοδο της ανάλυσης μας.

2. Η τιμή αγοράς του προϊόντος παραμένει αμετάβλητη σε όλη την περίοδο της ανάλυσης.

3. Οι παραγγελίες φθάνουν έγκαιρα και δεν υπάρχει φθορά στο προϊόν.

Οι υποθέσεις αυτές συνηγορούν στο ότι δεν υπάρχει λόγος για την επιχείρηση να αποθηκεύει μεγάλες ποσότητες του προϊόντος, για να προφυλαχθεί από την αύξηση της τιμής του προϊόντος, ούτε παραγγέλλει μικρές ποσότητες, επειδή περιμένει πτώση της τιμής ή υπάρχει φθορά κλπ.

Στην ανάλυσή μας χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

$x =$ ο αριθμός μονάδων που περιλαμβάνει η κάθε παραγγελία

$N =$ ο συνολικός αριθμός των μονάδων που παραγγέλλονται στη διάρκεια του έτους

$N / X =$ ο αριθμός των παραγγελιών

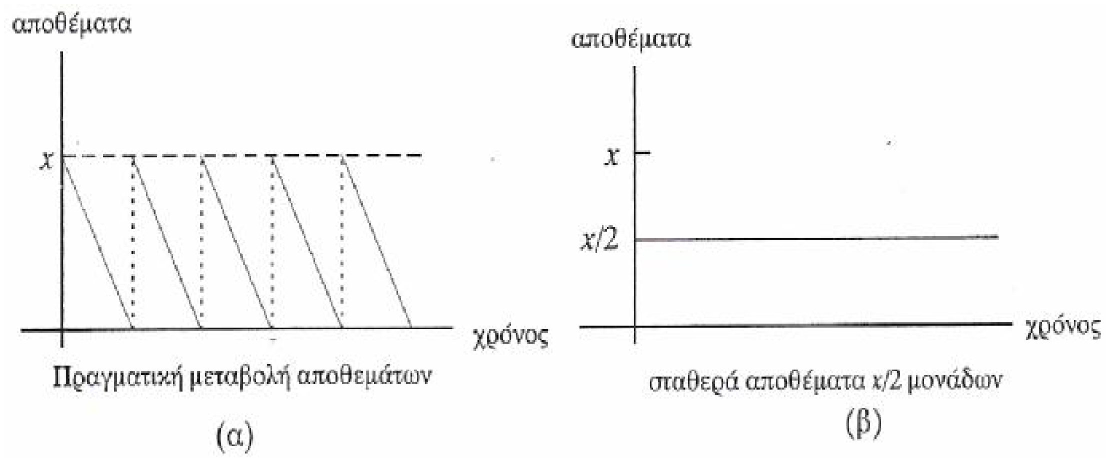
$a =$ η τιμή αγοράς του προϊόντος

$b =$ κόστος παραγγελίας

$k =$ ετήσιο κόστος ανά μονάδα αποθηκευμένου προϊόντος

Υποθέτουμε ότι κάθε παραγγελία φθάνει, όταν τα αποθέματα είναι μηδέν, και η κατανάλωση της γίνεται με ομοιόμορφο (γραμμικό) τρόπο. Έτσι, τα αποθέματα μειώνονται με σταθερό ρυθμό και αναπληρώνονται με την καινούργια παραγγελία.

Η περίπτωση αυτή δείχνεται γραφικά στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6

Το μέγεθος των αποθεμάτων που μένουν στην αποθήκη κάθε χρόνο κατά μέσο όρο είναι $x/2$ (Σχήμα 6β). Αυτός είναι ένας ισχυρισμός που στηρίζεται στη διαίσθηση παρά στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη που απαιτεί ολοκληρωτικό λογισμό. Επομένως, για τις τωρινές ανάγκες μας το δεχόμαστε ως γεγονός. Το συνολικό κόστος αποθήκευσης είναι $kx/2$ και το συνολικό κόστος προμήθειας $(C(x))$ είναι:

$$C(x) = aN + b(N/x) + k(x/2)$$

όπου $aN =$κόστος προϊόντος, $b(N/x) =$ κόστος παραγγελιών και $k(x/2)$ =κόστος αποθήκευσης.

Για την ελαχιστοποίηση του $C(x)$ οι συνθήκες πρώτης τάξης απαιτούν:

$$C(x)' = -\frac{bN}{x^2} + \frac{k}{2} = 0$$

επομένως,

$$-2bN + kx^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 = 2\frac{bN}{k}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2bN}{k}}$$

Απορρίπτουμε βέβαια την αρνητική λύση. Για να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα κατά πόσο αυτό το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο, χρειάζεται να εξετάσουμε τις συνθήκες δεύτερης τάξης, άρα έχουμε:

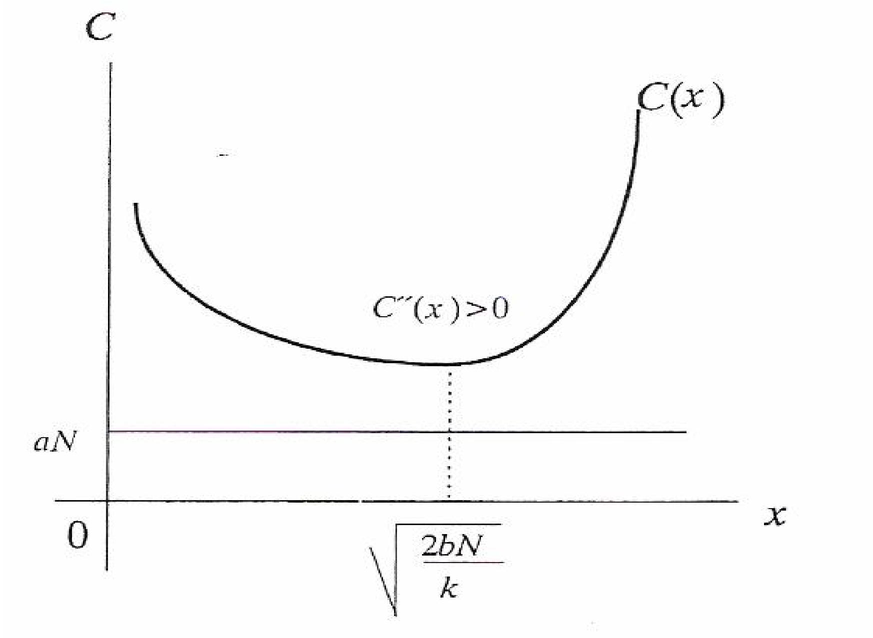
$$C''(x) = \frac{2bN}{x^3} > 0$$

οι οποίες επιβεβαιώνουν ότι πράγματι παραγγέλλοντας

$$x = \sqrt{\frac{2bN}{k}}$$

μονάδες, το επίπεδο των αποθεμάτων βρίσκεται στο άριστο σημείο, εφόσον έχουμε ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους.

Γραφικά η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7

Παρατηρούμε ότι ο άριστος αριθμός μονάδων κατά παραγγελία είναι ανάλογος του $\sqrt{N}$. Με άλλα λόγια, αν το μέγεθος της επιχείρησης τετραπλασιαστεί, χρειάζονται 4 φορές περισσότερα Ν. Τότε μόνο το μέγεθος της άριστης παραγγελίας διπλασιάζεται. Ταυτόχρονα, ο χρόνος μεταξύ των παραγγελιών μειώνεται κατά 50%. Παρατηρούμε επίσης ότι η τιμή αγοράς δεν παίζει ρόλο στους υπολογισμούς μας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών υπολογιστών πουλάει 600 Η/Υ το χρόνο, για τους οποίους έχει μια ομοιόμορφα κατανεμημένη ζήτηση. Το κατάστημα προμηθεύεται τους Η/Υ και χρεώνεται για καθέναν 500 ν.μ. Το κόστος παραγγελίας για την επιχείρηση είναι 150 ν.μ. Πόσους Η/Υ πρέπει να παραγγέλλει ο διευθυντής της επιχείρησης κάθε φορά, έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό του κόστους;

ΛΥΣΗ

Έχουμε τα εξής δεδομένα: $N=600$, $a=500$, $b=150$, $k=50$. Αντικαθιστώντας στον τύπο του συνολικού κόστους έχουμε :

$C(x) = aN + b(N/x) + k(x/2)$ έχουμε

$C(x) = (500)(600) + (150)(600/x) + 50(x/2)$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για ελαχιστοποίηση δίνουν:

$$C(x) = -\frac{9.000}{x^2} + 25 = 0 \quad ή \quad x = \sqrt{360} \approx 19$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$C''(x) = \frac{18.000}{x^3} > 0$$

άρα για $x \approx 19$ έχουμε ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους που στην προκειμένη περίπτωση είναι:

$C(x) = 300.000 + 4736{,}8 + 475 \approx 305.212$ ν.μ.

2.11 Το υπόδειγμα ζήτησης χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς

Κάθε καταναλωτής χρειάζεται ένα μέρος από το εισόδημά του σε μετρητά για να μπορεί να αντεπεξέλθει στις καθημερινές του συναλλακτικές ανάγκες. Κρατώντας όμως χρήματα για τις συναλλακτικές του ανάγκες, ο καταναλωτής θυσιάζει τον τόκο που θα εισέπραττε αν τα κατέθετε σε τοκοφόρο τραπεζικό λογαριασμό ή τα επένδυε σε τίτλους (ομολογίες, μετοχές, αμοιβαία κεφάλαια κλπ.). Αντίθετα, αν ο καταναλωτής τοποθετήσει όλα τα χρήματά του σε καταθέσεις, κερδίζει βέβαιους τόκους, αλλά υφίσταται το μεγάλο κόστος των συχνών αναλήψεων (χάσιμο χρόνου, δυσκαμψία στις αγορές του κλπ.). Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι ο προσδιορισμός της άριστης κατανομής του εισοδήματος σε καταθέσεις και μετρητά.

Ας υποθέσουμε, για τη διευκόλυνση της παρουσίασης, ότι ένας καταναλωτής έχει μηνιαίο εισόδημα 210 νομισματικών μονάδων (ν.μ.) που κατατίθεται από την υπηρεσία του κατευθείαν στον τραπεζικό του λογαριασμό.

Τα μηνιαία έξοδα του καταναλωτή είναι ίσα με το μηνιαίο εισόδημά του. Ο τρόπος ξοδέματος του εισοδήματος είναι ομοιόμορφος, δηλαδή ο καταναλωτής, ξοδεύει κάθε μέρα 7 ν.μ. Το ποσοστό των διαθέσιμων χρημάτων που επιθυμεί ο κάθε καταναλωτής, εξαρτάται από τη στάθμιση δύο παραγόντων: (1) από την άνεση κινήσεων που του προσφέρει το διαθέσιμο χρήμα και (2) από τους τόκους που θυσιάζει για να έχει αυτή την άνεση και ευχέρεια στις κινήσεις του. Στην ανάλυσή μας χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

$Y =$ το μηνιαίο εισόδημα που κατατίθεται σε έναν έντοκο λογαριασμό κατάθεσης .

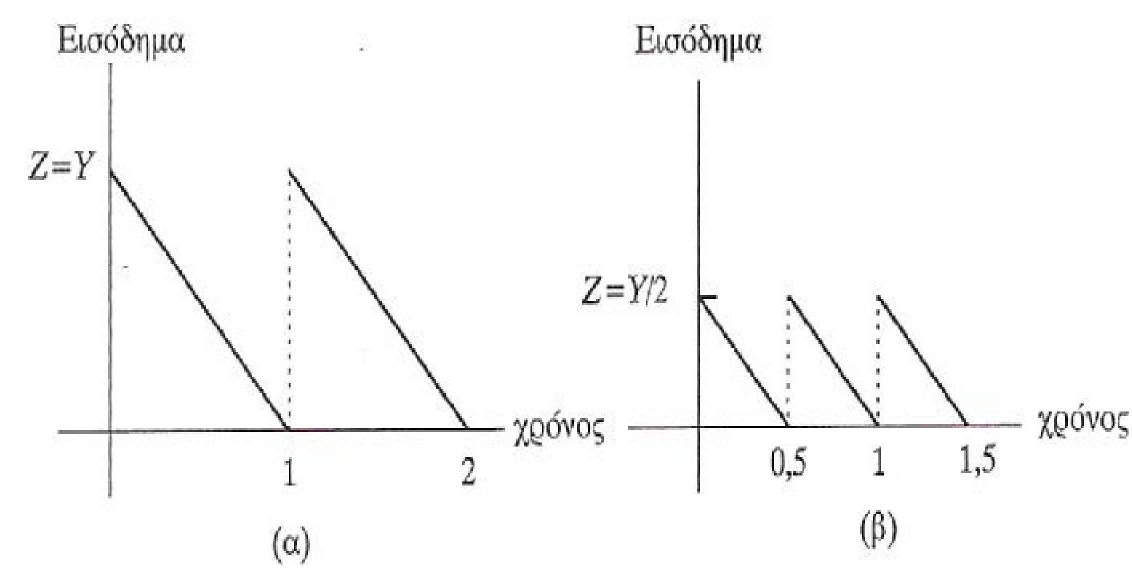
$r =$ το επιτόκιο κατάθεσης.

$a =$ το κόστος μετατροπής μιας κατάθεσης σε διαθέσιμο χρήμα.

$Z =$ το ποσό χρημάτων που αποσύρει ο καταναλωτής.

$n =$ ο αριθμός συναλλαγών (αναλήψεων) $n = Y/Z$.

Στο Σχήμα 8 παρουσιάζουμε δύο τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος. Στον πρώτο (Σχήμα 8α) ο καταναλωτής αποσύρει στην αρχή του μήνα όλο το ποσό που έχει κατατεθεί στο όνομά του και το ξοδεύει ομοιόμορφα μέχρι την τελευταία μέρα του μήνα. Τον επόμενο μήνα ο καταναλωτής αποσύρει πάλι όλο το ποσό και το ξοδεύει με το ίδιο τρόπο κ.ο.κ.



Σχήμα 8

Στο Σχήμα 8β ο καταναλωτής στην αρχή του μήνα αποσύρει τα μισά χρήματα του (έτσι ώστε τα άλλα μισά να κερδίζουν τόκο) και τα ξοδεύει ομοιόμορφα στις επόμενες 15 μέρες. Το πρωί της δέκατης έκτης μέρας ο καταναλωτής αποσύρει το υπόλοιπο ποσό και το ξοδεύει με το γνωστό τρόπο.

Στην περίπτωση ο καταναλωτής θυσιάζει όλο το ποσό του τόκου. Στη δεύτερη περίπτωση τίθεται το ερώτημα ποιο είναι το ποσό του τόκου που θυσιάζεται κατά μέσον όρο. Η απάντηση εξαρτάται από το μέσο ετήσιο διαθέσιμο εισόδημα του καταναλωτή, το οποίο υπολογίζουμε (διαισθητικά) ότι είναι $Y/2$, λόγω της υπόθεσης ότι ο καταναλωτής ξοδεύει τα χρήματά του ομοιόμορφα. Στο Σχήμα 8β ο καταναλωτής κατά μέσον όρο έχει στη διάθεσή του ρευστό ίσο με $Y/4=Z/2$. Επομένως, το κόστος σε χαμένους τόκους ισούται με το γινόμενο του επιτοκίου επί την ποσότητα του χρήματος που έχει στη διάθεσή του ο καταναλωτής στη διάρκεια του μήνα. Δηλαδή:

$$\frac{rZ}{2}=\frac{rY}{2n}$$

Επομένως, το συνολικό κόστος για τον καταναλωτή είναι:

$$C(n)=(a)(n)+(rY)/(2n)$$

όπου $(a)(n)$ = το κόστος συναλλαγών και $(rY)/(2n)$=οι χαμένοι τόκοι.

Είναι φανερό ότι το κόστος των συναλλαγών είναι ευθέως ανάλογο με τον αριθμό των συναλλαγών (αναλήψεων), ενώ το εισόδημα από τόκους συνδέεται αντίστροφα με τον αριθμό των αναλήψεων. Περισσότερες αναλήψεις σημαίνουν λιγότερο εισόδημα από τόκους.

Επομένως, θα πρέπει να υπάρχει ένας αριθμός συναλλαγών (αναλήψεων) που να ελαχιστοποιεί το κόστος ζήτησης χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς. Για την εύρεση αυτού του άριστου αριθμού συναλλαγών παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κόστους ως προς n και τη θέτουμε ίση με το μηδέν. Το n που υπολογίζουμε πρέπει να ελαχιστοποιεί το κόστος, εφόσον οι συνθήκες δεύτερης τάξης ισχύουν. Έτσι έχουμε:

$$C'(n) = a - \frac{rY}{2n^2} = 0$$

Λύνουμε ως προς n και παίρνουμε:

$$n = \sqrt{\frac{rY}{2a}}$$

και φυσικά απορρίπτουμε την αρνητική ρίζα. Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης κόστους δίνει:

$$C''(x) = 1 + \frac{2rY}{3n^2} > 0$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται. Γνωρίζοντας τον άριστο αριθμό των αναλήψεων για την ελαχιστοποίηση του κόστους κατοχής χρήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τα χρήματα που ο καταναλωτής κατά μέσο όρο έχει στη διάθεσή του (M). Άρα έχουμε:

$$M = \frac{Z}{2} = \frac{Y}{2n}$$

Αντικαθιστούμε το n με το ίσο του και μετά από πράξεις καταλήγουμε:

$$M = \sqrt{\frac{aY}{2r}}$$

που αντιπροσωπεύει τη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς. Παρατηρούμε ότι η ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς αυξάνει αναλογικά με το κόστος των συναλλαγών και το εισόδημα, ενώ μειώνεται με το επιτόκιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα που παραθέσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας, υποθέτουμε $r = 20\%, a = 5,25 n.m., \Upsilon = 210 n.m.$. Να βρεθεί ο άριστος αριθμός αναλήψεων και η ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς.

ΛΥΣΗ

Ο άριστος αριθμός αναλήψεων είναι:

$$n = \sqrt{\frac{rY}{2a}} = \sqrt{\frac{(0,20)(210)}{(2)(5,25)}} = 2$$

και η ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς είναι:

$$M = \sqrt{\frac{(5,25)(210)}{(2)(0,20)}} = 52,5 \text{ ν.μ.}$$

<u>3</u>

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό συζητάμε εφαρμογές της μερικής παραγώγισης, του ολικού διαφορικού και της ολικής παραγώγου σε προβλήματα οικονομικής ανάλυσης. Αρχίζουμε με τη ζήτηση ενός αγαθού, η οποία θεωρείται συνάρτηση όχι μόνο της τιμής αλλά των τιμών των σχετιζόμενων αγαθών, το εισόδημα του καταναλωτή κτλ. προκειμένου να αντλήσουμε μια σειρά από οριακές συναρτήσεις που αποτελούν τη βάση για την εξαγωγή διαφόρων ελαστικοτήτων.
Συνεχίζουμε με τη συνάρτηση μικτού κόστους παραγωγής και των συναφών ελαστικοτήτων. Το θεώρημα του Euler και η εφαρμογή του στη θεωρία διανομής του εισοδήματος. Ακόμη συζητάμε τις ισοϋψείς καμπύλες και τις οικονομικές τους εφαρμογές, την έννοια της ελαστικότητας υποκατάστασης και τέλος αναφερόμαστε στα συνηθισμένα μακροοικονομικά υποδείγματα προσδιορισμού του εισοδήματος ισορροπίας.

3.1 Η συνάρτηση ζήτησης

Η ζήτηση ενός αγαθού είναι συνάρτηση της τιμή του, όπως επίσης της τιμής των σχετιζόμενων αγαθών, του διαθέσιμου εισοδήματος κτλ. Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση, ας υποθέσουμε ότι η ζήτηση του αγαθού x, (q_X) εξαρτάται από την τιμή του (p_X), όπως επίσης και από την τιμή του αγαθού y, (p_y). Αν μια τέτοια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα δύο αγαθά, τότε οι συναρτήσεις ζήτησης των αγαθών x και y εξαρτώνται από τις τιμές των δύο αγαθών. Επομένως γράφουμε:

$q_x = f(p_x, p_y)$, η ζήτηση για το αγαθό x

$q_y = g(p_x, p_y)$, η ζήτηση για το αγαθό y

Από τις δύο συναρτήσεις ορίζουμε τέσσερις μερικές παραγώγους:

$\partial q_x / \partial p_x =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό x ως προς την τιμή p_x

$\partial q_x / \partial p_y =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό x ως προς την τιμή p_y

$\partial q_y / \partial p_x =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_x

$\partial q_y / \partial p_y =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_y

Από το «νόμο της ζήτησης» γνωρίζουμε ότι , με δεδομένη την τιμή του αγαθού y, αν η τιμή του αγαθού x αυξάνεται, τότε μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα του x. Επομένως ,ισχύει $\partial q_x / \partial p_x < 0$ και $\partial q_y / \partial p_y < 0$. Για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους ,ωστόσο, δεν μπορούμε να πούμε τίποτε εκ των προτέρων, το πρόσημό τους μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Αν

$\partial q_x / \partial p_y > 0$ και

$\partial q_y / \partial p_x > 0$

Τότε λέμε ότι τα δύο αγαθά είναι **υποκατάστατα** (substitute goods). Στην περίπτωση αυτή μια αύξηση της τιμής του αγαθού y δημιουργεί μια αύξηση της ζήτησης του αγαθού x, υποθέτοντας βέβαια ότι η τιμή του x δε μεταβάλλεται. Ομοίως, μια αύξηση της τιμής του x οδηγεί σε μία αύξηση της ζήτησης του y όταν η τιμή του y είναι δεδομένη.

Αν τώρα λάβουμε αρνητικές μερικές παραγώγους:

$\partial q_x / \partial p_y < 0$ και

$\partial q_y / \partial p_x < 0$

Τότε λέμε ότι τα αγαθά x και y είναι **συμπληρωματικά** (complementary goods).

Στην περίπτωση αυτή μια αύξηση της τιμής του y οδηγεί σε πτώση της ζήτησης του αγαθού x με δεδομένη την τιμή του x. Ομοίως , μια αύξηση της τιμής του αγαθού x οδηγεί σε μια πτώση του αγαθού y,εφόσον η τιμή του κρατείται σταθερή.

Για την καλύτερη εμπέδωση της παραπάνω συζήτησης υποθέτουμε την ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης του αγαθού x που παράγει μια επιχείρηση

$$q_x = f(p_x, p_y, p_w, m) = 10 p_x^{-2} p_y p_w^{-0.5} m^2$$

Όπου q_x = η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού x

p_x = η τιμή του αγαθού x

p_y = η τιμή του υποκατάστατου αγαθού, y

p_w = η τιμή του συμπληρωματικού αγαθού, w

m = το εισόδημα των καταναλωτών

Η επίδραση της τιμής του αγαθού x στη ζήτηση του, υπολογίζεται με τη μερική παράγωγο της ζητούμενης ποσότητας ως προς την τιμή p_x. Έτσι, λοιπόν με σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές έχουμε:

$$\frac{\partial q_x}{\partial p_x} = -20 p_x^{-3} p_y p_w^{-0.5} m^2$$

Ομοίως , για την επιρροή της τιμής του υποκατάστατου αγαθού p_y , έχουμε:

$$\frac{\partial q_x}{\partial p_y} = 10 p_x^{-2} p_w^{-0.5} m^2$$

Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για την επίδραση της τιμής του συμπληρωματικού αγαθού πάνω στη ζήτηση του αγαθού x, τότε:

$$\frac{\partial q_x}{\partial p_w} = -5 p_x^{-2} p_y p_w^{-1.5} m^2$$

Τέλος η επίδραση του εισοδήματος υπολογίζεται από μερική παράγωγο:

$$\frac{\partial q_x}{\partial_m} = 20 p_x^{-2} p_y p_w^{-0.5} m$$

3.2. Συνάρτηση μικτού κόστους

Υποθέτουμε μια επιχείρηση που παράγει τα αγαθά x και y. Το συνολικό κόστος c αυτών των μονάδων είναι συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας των x και y και καλείται **συνάρτηση μικτού κόστους** (joint cost function). Αν γράψουμε μια τέτοια συνάρτηση ως: $c = f(x,y)$ τότε το ∂_c / ∂_x καλείται **μερικό οριακό κόστος ως προς το** x (partial marginal cost with respect to x) και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το x, όταν το y κρατείται σταθερό. Ταυτόχρονα, το ∂_c / ∂_y είναι η μερική οριακή παράγωγος ως προς το y και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το y όταν το x κρατείται σταθερό.

Αν π.χ. βρούμε ότι το $\partial c / \partial y = 30$ αυτό σημαίνει ότι το κόστος παραγωγής μιας επιπλέον μονάδας του x, με δεδομένο το επίπεδο παραγωγής του y,είναι 30 ν.μ. Από εδώ μπορούμε να γενικεύσουμε για την περίπτωση που έχουμε n μεταβλητές, τότε θα υπάρχουν n μερικές οριακές συναρτήσεις κόστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ας υποθέσουμε μια επιχείρηση που παράγει τα αγαθά x και y. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μικτού κόστους αυτών των δύο αγαθών είναι:

$$c = f(x,y) = 6x^2 + 7xy + 10y^2 + 1.000$$

Να προσδιοριστεί το οριακό μερικό κόστος παραγωγής του κάθε αγαθού, όταν $x = 100$ και $y = 50$. Να ερμηνευθούν τα αποτελέσματα.

ΛΥΣΗ

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 12_x + 7_y \ , \quad \frac{\partial_c}{\partial_y} = 20_y + 7_x$$

Επομένως στο σημείο (100,50) θα έχουμε:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x=100, y=50)=12(100)+7(50)=1.550 \text{ ν.μ.}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(x=100, y=50)=20(50)+7(100)=1.700 \text{ ν.μ.}$$

Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας την παραγωγή του αγαθού x από 100 σε 101 μονάδες διατηρώντας την παραγωγή του αγαθού y στις 50 μονάδες, αυξάνεται το συνολικό κόστος κατά 1.550 ν.μ. Όσον αφορά το αγαθό y, αυξάνοντας την παραγωγή του από 50 σε 51 μονάδες, κρατώντας σταθερή την παραγωγή του x στις 100 μονάδες θα οδηγήσει σε αύξηση του κόστους περίπου κατά 1.770 ν.μ.

3.3. Η συνάρτηση παραγωγής

Στη συνηθισμένη μικροοικονομική ανάλυση η παραγωγή ενός προϊόντος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως το κεφάλαιο, η εργασία, το έδαφος κλπ. Η ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής $Q=f(K,L)$ δίνει τη (μέγιστη)συνολική παραγωγή από την απασχόληση δύο μόνο παραγωγικών συντελεστών, του κεφαλαίου και της εργασίας. Η $\partial Q/\partial K$ συμβολίζει την οριακή παραγωγικότητα του παραγόμενου προϊόντος Q ως προς το συντελεστή κεφάλαιο, όταν ο συντελεστής εργασία κρατείται σταθερός. Ομοίως ,με $\partial Q/\partial L$ Συμβολίζουμε την οριακή παραγωγικότητα ως προς τον συντελεστή εργασία, όταν ο συντελεστής κεφάλαιο κρατείται σταθερός.

Έστω τώρα η συνάρτηση παραγωγής Cobb – Douglas $Q=AK^{a}L^{b}$, όπου κατά τα γνωστά $A>0$ και $0<a<1, 0<b<1$. Το πρώτο χαρακτηριστικό της συνάρτησης παραγωγής Cobb – Douglas ,που την έκανε τόσο δημοφιλή στις οικονομικές μελέτες, είναι ότι οι μερικές παράγωγοι ως προς τους παραγωγικούς συντελεστές K και L είναι θετικές . Τις πρώτες παραγώγους τις λέμε οριακά προϊόντα του κεφαλαίου (MP_k) και της εργασίας (MP_L) αντίστοιχα. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = aAK^{a-1}L^b = a\frac{Q}{K} > 0 \text{ και } MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = bAK^a L^{b-1} = b\frac{Q}{L} > 0$$

Οι θετικές οριακές παράγωγοι σημαίνουν ότι το παραγόμενο προϊόν αυξάνεται (ή μειώνεται), όταν κάποιος από τους παραγωγικούς συντελεστές αυξάνεται (ή μειώνεται).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της συνάρτησης παραγωγής είναι ο «νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας» των παραγωγικών συντελεστών. Ο «νόμος» αυτός υποδηλώνει ότι αν η ποσότητα ενός παραγωγικού συντελεστή αυξάνεται, ενώ οι ποσότητες των άλλων συντελεστών παραμένουν σταθερές, τότε το οριακό προϊόν του (αυξανόμενου) συντελεστή προοδευτικά μειώνεται.

Σε όρους μερικών παραγώγων αυτό σημαίνει ότι η δεύτερη μερική παράγωγος κάθε παραγωγικού συντελεστή πρέπει να είναι αρνητική. Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, η μερική παράγωγος του παραγόμενου προϊόντος ως προς την εργασία είναι:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = a(a-1)AK^{a-2}L^b < 0$$

Επειδή, όρος στην παρένθεση είναι αρνητικός $(a-1<0)$, συνεπάγεται ότι η δεύτερη μερική παράγωγος είναι αρνητική και άρα ισχύει ο «νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας».

Ομοίως για το οριακό προ»ιόν της εργασίας έχουμε:

$$\frac{q^2 Q}{\partial L^2} = b(b-1)AK^a L^{b-2} < 0 \text{ επειδή } (b-1) < 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι:

$$Q = F(K,L) = \sqrt{KL}$$

(α) Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις οριακής παραγωγικότητας και να εκτιμηθούν για $K=4$ και $L=100$.

(β) Να ερμηνευθούν οικονομικά τα αποτελέσματα.

(γ) Να διερευνηθεί αν ισχύει ο νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής.

ΛΥΣΗ

(α) $\dfrac{\partial Q}{\partial K}=\dfrac{1}{2}(LK^{-\frac{1}{2}})L=\dfrac{L}{2\sqrt{LK}}$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial L}=\dfrac{1}{2}(LK)^{-\frac{1}{2}}K=\dfrac{K}{2\sqrt{LK}}$

Όταν οι μερικές παράγωγοι εκτιμώνται για την περίπτωση που $L=100$ και $K=4$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{100}{2\sqrt{(100)(4)}}=\frac{100}{80}=1,25 \quad \text{και} \quad \frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{4}{2\sqrt{(100)(4)}}=\frac{1}{20}=0.05$$

(β) Έτσι, αν $K=4$ και $L=100$ και αν το K αυξηθεί στις 5 μονάδες ενώ η εργασία παραμένει σταθερή στις 100 μονάδες, τότε η παραγωγή αυξάνεται περίπου κατά $1,25$ μονάδες. Στην περίπτωση που το L αυξάνει σε 101 ενώ το K παραμένει στις 4 η παραγωγή θα αυξάνεται περίπου κατά 0,05 μονάδες.

(γ) Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι ως προς το K και L δίνουν

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}=-\frac{1}{4}(LK)^{-\frac{3}{2}}L^2<0$$

άρα για τη συνάρτηση παραγωγής Comb – Douglas διαπιστώνεται η φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα των συντελεστών παραγωγής.

3.4 Το ολικό διαφορικό στα οικονομικά

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την επίδραση των μεταβολών των ανεξάρτητων μεταβλητών μεμονωμένα και ανεξάρτητα πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή.

Το εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι: Πώς επηρεάζεται η εξαρτημένη μεταβλητή , όταν ορισμένες ή όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές υπόκεινται σε μεταβολές; Έχοντας υπόψη το παράδειγμα με τη συνάρτηση ζήτησης

$$q_X = p_X(p_X, p_y, p_W, m) = 10 p_X^{-2} p_y p_W^{-0.5} m^2$$

το ερώτημα συγκεκριμενοποιείται ως εξής : Πώς μεταβάλλεται η ζήτηση του αγαθού x , όταν η τιμή p_X , όπως επίσης και οι τιμές των σχετιζόμενων αγαθών p_y και p_W μαζί με το εισόδημα μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Έτσι παίρνουμε τη συνολική μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας που είναι:

$$dq_X = \frac{\partial q_X}{\partial p_X} dp_X + \frac{\partial q_X}{\partial p_y} dp_y + \frac{\partial q_X}{\partial p_W} dp_W + \frac{\partial q_X}{\partial_m} dm$$

Αν αντικαταστήσουμε, έχουμε:

$$\begin{aligned} dq_X &= (-20 p_X^{-3} p_y p_W^{-0.5} m^2) dp_X \\ &+(10 p_X^{-2} p_W^{-0.5} m^2) dp_y \\ &-(5 p_X^{-2} p_y p_W^{-1.5} m^2) dp_W \\ &+(20 p_X^{-2} p_y p_W^{-0.5} m) dm \end{aligned}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε καθεμία από τις μερικές παραγώγους επί το λόγο της ανεξάρτητης μεταβλητής προς τον εαυτό της , δηλαδή την πρώτη μερική παράγωγο επί $p_X / p_X = 1$, τη δεύτερη μερική παράγωγο με p_y / p_y κ.ο.κ, καταλήγουμε ότι καθένας από τους όρους του ολικού διαφορικού μετατρέπεται σ' ένα γινόμενο σταθεράς επί το λόγο του $q_X = 10 p_X^{-2} p_y p_W^{-0.5} m^2$ προς την ανεξάρτητη μεταβλητή που εντοπίζεται και τη μερική παράγωγο.

Άρα έχουμε:

$$dq_x = (-20 p_x^{-2} p_y p_w^{-0.5} m^2) \frac{dp_x}{p_y}$$
$$+(10 p_x^{-2} p_y p_w^{-0.5} m^2) \frac{dp_y}{p_y}$$
$$-(5 p_x^{-2} p_y p_w^{-0.5} m^2) \frac{dp_x}{p_w}$$
$$+(20 p_x^{-2} p_y p_w^{-0.5} m^2) dm$$

Αν πάρουμε τη ζητούμενη ποσότητα:

$$q_x = 10 p_x^{-2} p_y p_w^{-0.5} m^2$$

ως κοινό παράγοντα, καταλήγουμε:

$$dq_x = q_x \left[(-2 p_x^{-1}) dp_x + (p_y^{-1}) dp_y - (0.5 p_w^{-1}) dp_w + (2m^{-1}) dm \right]$$

Αν διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με το q_x , παίρνουμε

$$\frac{dq_x}{q_x} = (-2) \frac{dp_x}{p_x} + (1) \frac{dp_y}{p_y} - (0.5) \frac{dp_w}{p_w} + (2) \frac{dm}{m}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε εκφράσει το ολικό διαφορικό σε ποσοστιαία ολική μεταβολή dq_x / q_x που ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ποσοστιαίων μεταβολών. Οι όροι μέσα στην παρένθεση αναφέρονται στις μερικές ελαστικότητες . Έτσι το (-2) είναι η μερική ελαστικότητα ζήτησης του αγαθού x , το (1) αναφέρεται στη **σταυροειδή ελαστικότητα ζήτησης** (cross elasticity of substitution) του αγαθού x ως προς το υποκατάστατό του, ενώ (-0.5) είναι η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης του αγαθού x ως προς το συμπληρωματικό του . Τέλος το (2) αναφέρεται στην **εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης** (income elasticity of demand). Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι οι ελαστικότητες είναι οι εκθέτες της αρχικής συνάρτησης ζήτησης.

3.5 Ελαστικότητες παραγωγής

Μια από τις οικονομικές εφαρμογές του ολικού διαφορικού μπορούμε να τη συναντήσουμε στη συνάρτηση παραγωγής. Έστω λοιπόν η ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής:

$Q = F(K, L)$

Αν υποθέσουμε ότι οι συντελεστές παραγωγής μεταβάλλονται ταυτόχρονα, τότε τη συνολική μεταβολή του παραγόμενου προϊόντος μπορούμε να την εκτιμήσουμε μέσω του ολικού διαφορικού, έτσι έχουμε:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL$$

Αν διαιρέσουμε με τη συνολική παραγωγή Q λαμβάνουμε τη συνολική ποσοστιαία μεταβολή του παραγόμενου προϊόντος, έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την ποσοστιαία μεταβολή της συνολικής εκροής, δηλαδή dQ/Q, που κατανέμεται στους παραγωγικούς συντελεστές. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας και ταυτόχρονα διαιρώντας κάθε παραγωγικό συντελεστή με τον εαυτό του έχουμε:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} \frac{dK}{K} + \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q} \frac{dL}{L}$$

Επειδή $\partial Q / \partial K = MP_K$ και $\partial Q / \partial L = MP_L$ είναι οι οριακές παραγωγικότητες του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα, ενώ $K/Q = 1/AP_K$ και $L/Q = 1/AP_L$ είναι η μέση παραγωγικότητα του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα. Επομένως η αρχική σχέση γράφεται:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{MP_K}{AP_K} \frac{dK}{K} + \frac{MP_L}{AP_L} \frac{dL}{L}$$

Γνωρίζουμε ότι η ελαστικότητα μιας συνάρτησης μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος της οριακής μεταβολής προς τη μέση μεταβολή. Στην προκειμένη περίπτωση ο λόγος της οριακής παραγωγικότητας ενός συντελεστή προς το μέσο προϊόν μας δίνει την **ελαστικότητα παραγωγής** (output elasticity) του συντελεστή. Πιο συγκεκριμένα, **η ελαστικότητα παραγωγής του κεφαλαίου** (capital's output elasticity) που τη συμβολίζουμε με e_K ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή στην παραγωγή που προξενείται από τη μεταβολή της ποσότητας κεφαλαίου κατά ένα τοις εκατό, όταν οι υπόλοιπη παραγωγικοί συντελεστές παραμένουν σταθεροί. Η **ελαστικότητα παραγωγής του συντελεστή εργασία** (labor's output elasticity) που τη συμβολίζουμε με e_L ορίζεται ανάλογα. Συνεπώς η ποσοστιαία μεταβολή της παραγωγής (dQ/Q) που προξενείται από πολύ μικρές μεταβολές στους παραγωγικούς συντελεστές, ισούται με το **σταθμισμένο άθροισμα** (weighted sum) των ποσοστιαίων μεταβολών της εργασίας και του κεφαλαίου. Τα σταθμά είναι οι ελαστικότητες παραγωγής του κεφαλαίου (e_K) και της εργασίας (e_L) αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε :

$$\frac{dQ}{Q} = e_K \frac{dK}{K} + e_L \frac{dL}{L}$$

Αν ,τώρα, υποθέσουμε ότι η επιχείρηση αυξάνει όλες τις εισροές κατά το ίδιο ποσοστό, δηλαδή:

$$\frac{dK}{K} = \frac{dL}{L} = l$$

και αν διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης με l, λαμβάνουμε:

$$(\frac{dQ}{Q})/\, l = e_K + e_L$$

Η ποσοστιαία μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν, διαιρούμενο με μια ισόποση ποσοστιαία μεταβολή σε όλες τις εισροές, ισούται με το άθροισμα των ελαστικοτήτων εκροής. Είναι γνωστό λοιπόν από τη μικροοικονομική θεωρία, ότι οι αποδόσεις στην κλίμακα παραγωγής ορίζονται ως ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής στο παραγόμενο προϊόν ως προς την ποσοστιαία μεταβολή στις εισροές. Έχουμε δείξει ότι οι αποδόσεις στην κλίμακα μιας συνάρτησης παραγωγής είναι ίσες με το άθροισμα των ελαστικοτήτων εκροής αυτής της συνάρτησης παραγωγής.

3.6 Ο ρυθμός αύξησης της συνάρτησης παραγωγής CES

Έστω η γνωστή από το Κεφάλαιο 1 συνάρτηση παραγωγής CES :

$$Q = f(K(t), L(t)) = A\left[aK^{-r} + (1-a)L^{-r}\right]^{-1/r}$$

την οποία παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{dL}{dt} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{K}}\left[\mathrm{A}(a\mathrm{K}^{-r} + (1-a)L^{-r})^{-1/r}\right]\frac{dK}{dt} + \frac{\partial}{\partial L}\left[\mathrm{A}(a\mathrm{K}^{-r} + (1-a)L^{-r}\right]^{-1/r}\frac{dL}{dt}$$

ή

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{A}{r}\left[a\mathrm{K}^{-r} + (1-a)L^{-r}\right]^{-(1/r)-1}(-ra\mathrm{K}^{-r-1})\frac{dK}{dt}$$

$$-\frac{A}{r}\left[a\mathrm{K}^{-r} + (1-a)L^{-r}\right]^{-(1/r)-1}(-r(1-a)L^{-r-1})\frac{dL}{dt}$$

Αν λάβουμε υπόψη την αρχική συνάρτηση, παίρνουμε:

$$\frac{dQ}{dt} = Q^{r+1}a\mathrm{K}^{-r-1}\frac{dK}{dt} + Q^{r+1}(1-a)L^{-r-1}\frac{dL}{dt}$$

Και

$$\frac{dQ}{dt}\frac{1}{Q} = Q^{r}a\mathrm{K}^{-r}\frac{dK}{dt}\frac{1}{K} + Q^{r}(1-a)L^{-r}\frac{dL}{dt}\frac{1}{L}$$

Και

$$Q = (\frac{Y}{K})^{r}a\mathrm{K} + (\frac{Y}{L})^{r}(1-a)L$$

Όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης παραγωγής Coob – Douglas έτσι και στην CES λαμβάνουμε ότι ο ρυθμός αύξησης του παραγόμενου προϊόντος $\dot{Q}$ ισούται με τους σταθμισμένους ρυθμούς αύξησης του κεφαλαίου $\dot{K}$ και της εργασίας $\dot{L}$ τα σταθμά για μια ακόμη φορά είναι οι μερικές ελαστικότητες παραγωγής.

3.7 το θεώρημα του Euler

Η συζήτηση μας μέχρι τώρα έχει προετοιμάσει το έδαφος για την παρουσίαση ενός θεωρήματος που αποδίδεται στο μεγάλο Ελβετό μαθηματικό Euler. Το θεώρημα αυτό συνδέει το βαθμό ομογένειας n μιας συνάρτησης με τις μερικές παραγώγους της.

Θεώρημα 1. Το θεώρημα του Euler λέει ότι αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού n αν και μόνο αν για κάθε $x \in R^n$, ισχύει :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv nf(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης είναι ταυτοτικά ίσα, δηλαδή η σχέση ισχύει για κάθε $x_i, i = 1, 2, ..., n.$

Αντιστρόφως: Αν για μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ισχύει η ανωτέρω ταυτότητα, τότε η συνάρτηση είναι ομογενής n βαθμού.

Για την απόδειξη του θεωρήματος(1) παίρνουμε τον ορισμό μιας ομογενούς συνάρτησης. Για λόγους εξοικονόμησης χώρου και σαφήνειας εξετάζουμε τη γνωστή μας διμεταβλητή συνάρτηση $z = f(x, y)$ θεωρώντας την περίπτωση των περισσότερων μεταβλητών μια απλή γενίκευση. Έτσι έχουμε:

$$f(lc, ly) = l^n f(x,y)$$

Το θεώρημα του Euler για την περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών γράφεται:

$$xf_x + yf_y = nf(x,y)$$

και αποδεικνύεται παίρνοντας το ολικό διαφορικό της $f(lx, ly) \equiv l^n f(x,y)$ που είναι :

$$\frac{\partial f(lx, ly)}{\partial lx} d\,lx + \frac{\partial f(lx, ly)}{\partial ly} d\,ly \equiv \frac{\partial\left[l^n f(x,y)\right]}{\partial l} dl$$

διαιρούμε με dl και λαμβάνουμε:

$$xf_{lx} + yf_{ly} \equiv nl^{n-1} f(x,y)$$

Αν $l = 1$ τότε αποδεικνύεται ότι :

$$xf_x + yf_y \equiv nf(x,y)$$

Η απόδειξη της γενικής περίπτωσης των n μεταβλητών προκύπτει με παρόμοιο τρόπο.

Για τις ομογενείς συναρτήσεις ισχύει επίσης και ένα δεύτερο θεώρημα του Euler που ουσιαστικά προκύπτει από το πρώτο.

Θεώρημα 2. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και διπλά παραγωγίσιμη με βαθμό ομοιογένειας n, τότε οι μερικές παράγωγοί της είναι ομογενείς βαθμού $n-1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y, w) = x^2 + y^2 + w^2$.Να επαληθεύσετε τα θεωρήματα του Euler.

ΛΥΣΗ

Έχουμε : $z=(lx)^2+(ly)^2+(lw)^2$. Επομένως η συνάρτηση πολλαπλασιάζεται με l^2, άρα ο βαθμός ομοιογένειας είναι 2. Παίρνουμε τις μερικές παραγώγους της z:

$$f_x=2x,\ f_y=2y,\ f_{w=}2w.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Euler:

$$(2x)x+2y(y)+2w(w)=2x^2+2y^2+2w^2=2z.$$

Αν τώρα πάρουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους , έχουμε $f_{xx}=f_{yy}=f_{ww}=2$, παρατηρούμε ότι ο βαθμός ομογένειας των παραγώγων αυτών είναι μειωμένος κατά ένα σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα του Euler.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $z=f(x,y,w)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{w}$, να επαληθεύσετε το θεώρημα του Euler.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού $-1/2$, διότι αν θέσουμε $x=lx, y=ly$ και $w=lw$ λαμβάνουμε :

$$\frac{1}{\sqrt{(lx)}}+\frac{\sqrt{(ly)}}{lw}=(lx)^{-1/2}+(ly)^{1/2}(lw)^{-1}=l^{-1/2}Z$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Euler και παίρνουμε:

$$x(-\frac{1}{2}x^{-3/2})+y(\frac{1}{2}\frac{y^{-1/2}}{w})+w(-\frac{y^{1/2}}{w^2})=-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}})+y(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{w})-(-\frac{\sqrt{y}}{w})=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{w}\right)=-\frac{1}{2}Z$$

Το θεώρημα του Euler έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της νεοκλασικής οικονομικής θεωρίας, η οποία βασίζεται στη **θεωρία της οριακής**

παραγωγικότητας (marginal productivity theory). Η θεωρία αυτή υποστηρίζει ότι οι παραγωγικοί συντελεστές αμείβονται για τη συνεισφορά τους στην παραγωγή του προϊόντος σύμφωνα με την αξία του οριακού προϊόντος. Η πρόταση αυτή αναλύεται διεξοδικά στα βιβλία μικροοικονομικής, εμείς θα περιοριστούμε σε μια συνοπτική περιγραφή. Στη μικροοικονομική ανάλυση οι παραγωγικοί συντελεστές απασχολούνται μέχρι το σημείο που η συνεισφορά τους στην παραγωγή ισούται με το κόστος απασχόλησης περισσότερων μονάδων καθενός απ' αυτούς τους συντελεστές , δηλαδή με το οριακό τους κόστος . Έστω λοιπόν, ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι η

$$z = f(x, y)$$

Έστω ότι p_i η αμοιβή του παραγόμενου συντελεστή $(i = x, y)$ και p είναι η τιμή του παραγόμενου προϊόντος. Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία της οριακής παραγωγικότητας ισχύει:

$$pf_i = pMP_i = p_i$$

Το πρόβλημα που παρουσιάστηκε ήταν ότι η ανωτέρω σχέση ισχύει για κάθε παραγωγικό συντελεστή μεμονωμένα. Πώς λοιπόν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι τα έσοδα από τις πωλήσεις επαρκούν για την πληρωμή όλων των παραγωγικών συντελεστών σύμφωνα με την παραγωγικότητά τους , χωρίς να έχουμε ούτε πλεόνασμα αλλά ούτε και έλλειμμα; Το θεώρημα του Euler έδωσε απάντηση σ' αυτό το ερώτημα, έτσι λοιπόν έχουμε:

$$pxf_x + pyf_y = p(xf_x + yf_y)$$

Αν ο βαθμός ομογένειας της συνάρτησης παραγωγής είναι ίσος με τη μονάδα, έχουμε δηλαδή σταθερές αποδόσεις στην κλίμακα (δηλαδή, αν διπλασιάζονται οι εισροές διπλασιάζεται και η εκροή κ.ο.κ.) ,τότε θα έχουμε:

$$p_x x + p_y y = pxf_x + pyf_y = p(xf_x + yf_y) = pz$$

Λόγω του θεωρήματος του Euler ισχύει $z = xf_x + yf_y$.

Επειδή το ανωτέρω αποτέλεσμα αντλείται όταν έχουμε συναρτήσεις παραγωγής ομογενείς και πρώτου βαθμού, αρκετοί οικονομολόγοι υποστήριξαν (λαθεμένα)

ότι οι συναρτήσεις παραγωγής πρέπει να είναι ομογενείς και πρώτου βαθμού. Η συνάρτηση παραγωγής Coob – Douglas χρησιμοποιήθηκε για να επαληθεύσει τη νεοκλασική θεωρία της
διανομής που βασίζεται στη θεωρία της οριακής παραγωγικότητας. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$Q = AK^{a}L^{1-a}$$

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = Q$$

$$K(aAK^{a-1}L^{a-1}) + L\left((1-a)AK^{a}L^{-a}\right) = Q$$

$$aAK^{a}L^{1-a} + (1-a)AK^{a}L^{1-a} = Q$$

μετά από κατάλληλες αντικαταστάσεις παίρνουμε:

$$Q = aQ + (1-a)Q$$

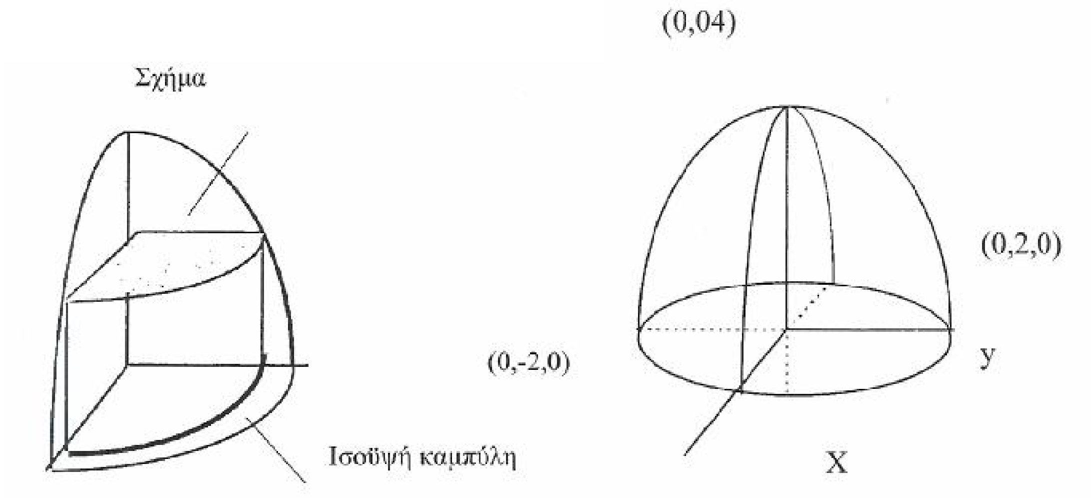
$$pQ = apQ + (1-a)\,pQ$$

Επομένως , αν κάθε παραγωγικός συντελεστής αμείβεται σύμφωνα με την οριακή του παραγωγικότητα, τότε η συνολική παραγωγή κατανέμεται ακριβώς στους παραγωγικούς συντελεστές.

3.8 Ισοϋψείς καμπύλες

Η μέθοδος των **ισοϋψών καμπυλών** (level curves) αποτελεί μια εναλλακτική παρουσίαση διαμεταβλητών συναρτήσεων. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται πολύ συχνά στην οικονομική ανάλυση γι’ αυτό και προχωρούμε σε μια σύντομη παρουσίασή της . Γενικά, αν έχουμε μια συνάρτηση $z = f(x, y)$, το σύνολο των σημείων όπου $z = f(x, y)$, όπου c μια σταθερά στο πεδίο τιμών της f, σχηματίζει μια καμπύλη στο επίπεδο xy που λέγεται ισοϋψείς. Π.χ. η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$



Στην περίπτωση αυτή, η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $xy(z=0)$ είναι ο κύκλος $x^2 = y^2 - 4$. Το πεδίο τιμών της f αποτελείται από όλα τα σημεία για τα οποία ισχύει $z \le 4$. Για $z = c$ η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 + y^2 = 4 - c\,.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει έναν κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων πάνω στο επίπεδο xy και ακτίνα $r = \sqrt{4-c}$. Στην περίπτωσή μας $c < 4$,οι ισοϋψείς καμπύλες είναι ομόκεντροι κύκλοι. Γενικότερα , αν η επιφάνεια $z = f(x,y)$ κόβεται με ένα οριζόντιο επίπεδο $z = c$, Σχήμα 1(α), τότε η τομή του επιπέδου και της επιφάνειας αποτελείται από τα σημεία (x,y,c), όπου $f(x,y) = c$. Αν τώρα αυτά τα σημεία προβάλλονται κάθετα στο επίπεδο xy , τότε σχηματίζονται ισοϋψείς καμπύλες για το συγκεκριμένο c . Η γραφική παράσταση παρουσιάζεται στο Σχήμα 1(α).

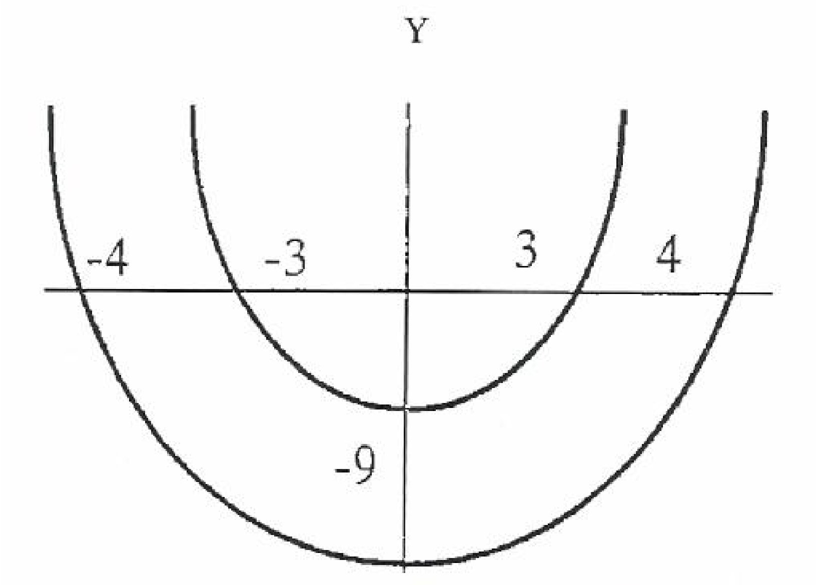
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση $z = f(x,y) = x^2 - y$. Σχεδιάστε τις ισοϋψείς καμπύλες για $f(x,y) = 9$ και $f(x,y) = 16$.

ΛΥΣΗ

Η ισοϋψείς καμπύλη $x^2 - y = 9$ ή $y = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Ενώ η $f(x, y) = 16$ αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) στο επίπεδο xy για τα οποία ισχύει $x^2 - y = 16$ ή $y = x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$.

Η γραφική παράστασή τους απεικονίζεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

3.9. Κλίση ισοϋψούς καμπύλης

Η κλίση της ισοϋψούς καμπύλης $f(x, y) = c$ σ' ένα ορισμένο σημείο βρίσκεται από την παράγωγο dy/dx. Το πρόβλημα όμως βρίσκεται στον υπολογισμό αυτής της παραγώγου, διότι η συνάρτηση $f(x, y) = c$ δε δίνεται με τη ρητή αλλά με την πεπεπλεγμένη της μορφή. Βρίσκουμε το ολικό διαφορικό της εν λόγω συνάρτησης που είναι:

$$f_x dx + f_y dy = dc \ ,$$

Διαιρούμε με dx και λαμβάνουμε:

$$f_x + f_y(dy/dx) = 0 \text{ και}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί η κλίση της ισοϋψούς καμπύλης $f(x,y) = c$ αν $f(x,y) = x^2 y$.

ΛΥΣΗ

$$f_x = 2xy$$

$$f_y = x^2 \quad \text{άρα,}$$

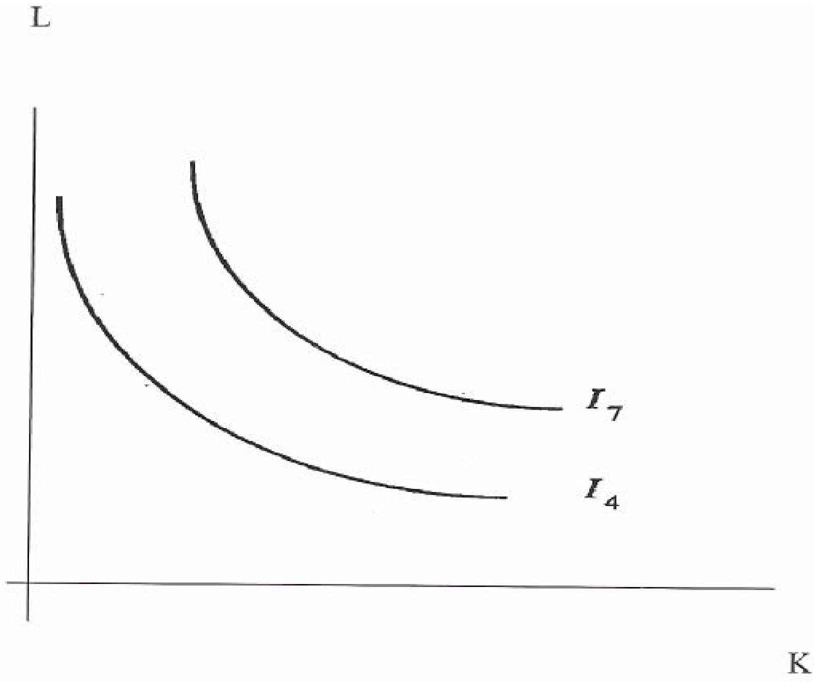
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2} = \frac{2y}{x} = \frac{2c}{x^3}$$

Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν ισοϋψείς καμπύλες προκειμένου να μελετήσουν μεταξύ άλλων δύο θεμελιώδεις συναρτήσεις της μικροοικονομικής: τη συνάρτηση παραγωγής και τη συνάρτηση χρησιμότητας.

Π.χ. Μια από τις απλές συναρτήσεις παραγωγής είναι η $Q = F(K,L) = KL$, όπου Q είναι το παραγόμενο προϊόν, K η ποσότητα κεφαλαίου και L η ποσότητα εργασίας. Όλες οι ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης παραγωγής F καλούνται **καμπύλες ισοπαραγωγής** (isoquants) . Π.χ. η καμπύλη ισοπαραγωγής για $Q = 4$ διέρχεται από όλα τα σημεία (x, y) που δίνουν 4 μονάδες προϊόντος. Προκειμένου ν' απεικονίσουμε τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης έχουμε $K = 4/L$ και αν δώσουμε διάφορες τιμές για την ποσότητα εργασίας, καταλήγουμε στην καμπύλη ισοπαραγωγής I_4, ενώ η καμπύλη ισοπαραγωγής στο Σχήμα 3 βρίσκεται από την εξίσωση

$K = 7/L$ κ.ο.κ.

Ομοίως οι οικονομολόγοι αναφέρονται σε συναρτήσεις χρησιμότητας. Οι ισοϋψείς καμπύλες των συναρτήσεων χρησιμότητας καλούνται **καμπύλες αδιαφορίας** (indifference curves) επειδή ακριβώς ο καταναλωτής είναι αδιάφορος ανάμεσα σ’ ένα συνδυασμό αγαθών (x_1, y_1) και (x_2, y_2) επί της ίδιας ισοϋψούς καμπύλης, διότι αποκομίζει την ίδια χρησιμότητα. Π.χ η συνάρτηση χρησιμότητας θα μπορούσε να είναι η $u = xy$ και η γραφική της απεικόνιση θα ήταν παρόμοια μ’ αυτή του Σχήματος 3, με τη μόνη διαφορά ότι αντί για K και L θα είχαμε τα αγαθά x και y.



Σχήμα 3

3.10 Θεωρία της οριακής χρησιμότητας

Η **θεωρία της οριακή χρησιμότητας** (marginal utility theory) αποτελεί τη βάση της νεοκλασικής θεωρίας ζήτησης. Σύμφωνα μ’ αυτήν τη θεωρία οι καμπύλες ζήτησης έχουν αρνητική κλίση μια ιδιότητα που προκύπτει από δυο βασικές υποθέσεις: πρώτον τη φθίνουσα οριακή χρησιμότητα και δεύτερο την ορθολογική συμπεριφορά του καταναλωτή. Υποθέτουμε ότι σε γενικές γραμμές ο καταναλωτής αναμένεται να καταναλώσει μια σειρά από αγαθά και υπηρεσίες που του αυξάνουν τη **συνολική χρησιμότητα** (total utility). Για τη διευκόλυνση της παρουσίασης υποθέτουμε δύο αγαθά x και y, που ο τυπικός καταναλωτής ξοδεύει όλο του το εισόδημα. Η συνάρτηση συνολικής χρησιμότητας γράφεται:

$$u = u(x, y)$$

όπου u είναι η συνολική χρησιμότητα. Αν και η συνολική χρησιμότητα δεν είναι μετρήσιμη η οριακή χρησιμότητα έχει ένα πολύ συγκεκριμένο νόημα που μπορεί να ποσοτικοποιηθεί. Έτσι η οριακή χρησιμότητα ορίζεται ως η μεταβολή που προξενείται στη συνολική χρησιμότητα από την κατανάλωση μιας επιπλέον μονάδας ενός αγαθού. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την οριακή χρησιμότητα του αγαθού x:

$mu_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ομοίως για το αγαθό y $mu_y = \frac{\partial u}{\partial y}$

Αποδεικνύεται ότι ο καταναλωτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του, όταν εξισώνει το λόγο των **οριακών χρησιμοτήτων** (ratio of marginal utilities) των δύο αγαθών προς τις σχετικές τιμές των αγαθών, δηλαδή όταν:

$$\frac{mu_x}{mu_y} = -\frac{p_x}{p_y}$$

Εφοδιασμένοι με αυτά τα εργαλεία μπορούμε να συζητήσουμε ένα φαινομενικά παράδοξο αποτέλεσμα, δηλαδή αν και δεν μπορούμε να μετρήσουμε τη συνολική χρησιμότητα μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχετική οριακή χρησιμότητα που διαπιστώνεται από την επιθυμία του καταναλωτή να υποκαταστήσει ένα αγαθό με κάποιο άλλο. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε το ολικό διαφορικό της u και έχουμε:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = u_x dx + u_y dy$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τον οριακό **λόγο υποκατάστασης** (marginal rate of substitution) ως τη μέγιστη ποσότητα του αγαθού x που ο καταναλωτής θα ήταν διατεθειμένος να θυσιάσει προκειμένου να αποκτήσει μία επιπλέον μονάδα του αγαθού y. Επειδή η μέγιστη ποσότητα του αγαθού x που ο καταναλωτής θα ήταν διατεθειμένος να θυσιάσει ισούται με την ποσότητα που θα άφηνε τη χρησιμότητα του αμετάβλητη, θέτουμε όπου $du = 0$ και λύνουμε ως προς dy/dx. Άρα έχουμε:

$$0 = u_x dx + u_y dy$$

ή

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = -\frac{mu_x}{mu_y}$$

Τη μέγιστη ποσότητα του αγαθού x που ο καταναλωτής θα ήθελε να θυσιάσει για να αποκτήσει μια ακόμη μονάδα του y ισούται με τον αρνητικό λόγο της οριακής χρησιμότητας του y προς την οριακή χρησιμότητα του x. Αν γνωρίζουμε το μέγιστο ποσό ενός αγαθού που ο καταναλωτής θα θυσίαζε για την απόκτηση μιας ακόμη μονάδας του άλλου αγαθού έχουμε μια πρώτη εκτίμηση της οριακής χρησιμότητας του δεύτερου αγαθού σε σχέση με την οριακή χρησιμότητα του πρώτου αγαθού.

3.11 Ελαστικότητα υποκατάστασης

Η **ελαστικότητα υποκατάστασης** (elasticity of substitution) δύο εισροών ορίζεται ως η ποσοστιαία στο λόγο δύο παραγωγικών συντελεστών και προέρχεται από μια μικρή ποσοστιαία μεταβολή στο λόγο των τιμών των εισροών τους.

$$s = \frac{\%metabolh\ sto\ logo\ twn\ eisrown}{\%metabolh\ stiV\ scetikeV\ timeV\ twn\ eisrown} =$$

$$= \frac{\dfrac{d(K/L)}{K/L}}{\dfrac{d(p_L/p_K)}{p_L/p_K}} = -\frac{d(K/L)}{d(p_L/p_K)}\frac{p_L/p_K}{K/L}$$

Όπου s = η ελαστικότητα υποκατάστασης

K = η ποσότητα κεφαλαίου

L = η ποσότητα εργασίας

p_K = η τιμή του κεφαλαίου

p_L = η τιμή της εργασίας

Η ελαστικότητα υποκατάστασης κυμαίνεται μεταξύ του μηδενός και του απείρου. Το αρνητικό πρόσημο τίθεται έτσι ώστε ο αριθμός που προκύπτει να είναι θετικός. Αν $s = 0$, αυτό σημαίνει ότι οι δύο εισροές είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους, δηλαδή η παραγωγή είναι δυνατή μόνο αν οι δύο συντελεστές συνδυαστούν σύμφωνα με μια αυστηρά καθορισμένη αναλογία. Με άλλα λόγια, ακόμη και αν οι τιμές των εισροών μεταβληθούν σημαντικά η τεχνολογία (δηλαδή ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας) παραμένει αμετάβλητη. Η τεχνολογία αυτού του είδους λέγεται και Leontief και γεωμετρικά παριστάνεται ως μια καμπύλη ισοπαραγωγής με σχήμα (δεξιόστροφης) ορθής γωνίας. Στο άλλο άκρο $s = \infty$ έχουμε την περίπτωση της τέλειας υποκατάστασης μεταξύ των δύο συντελεστών. Δηλαδή, ακόμη και μια απειροελάχιστα μικρή μεταβολή στις τιμές των εισροών οδηγεί σε μια μεταβολή της τεχνολογίας (σε διαφορετικό λόγο κεφαλαίου εργασίας).

Αν $s = 1$, τότε λέμε ότι οι δύο συντελεστές έχουν σταθερή ελαστικότητα υποκατάστασης. Οι συναρτήσεις Coob – Douglas (όπως θα δείξουμε) παρουσιάζουν ελαστικότητα υποκατάστασης ίση με τη μονάδα, ακόμη και αν οι εκθέτες $a+b \neq 1$. Η συνάρτηση ενδέχεται να έχει σταθερή ελαστικότητα υποκατάστασης που να είναι διαφορετική από τη μονάδα, όπως π.χ. συμβαίνει με τις συναρτήσεις παραγωγής **σταθερών ελαστικοτήτων υποκατάστασης** (constant elasticity of substitution), που για συντομία τις λέμε CES και συναντήσαμε στα προηγούμενα τμήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να δειχτεί ότι η συνάρτηση Coob – Douglas $Q = AK^{a}L^{b}$ έχει ελαστικότητα υποκατάστασης ίση με τη μονάδα.

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε την κλίση αυτής της καμπύλης ισοπαραγωγής:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{F_L}{F_K} = \frac{bAK^{a}L^{b-1}}{aAK^{a-1}L^{b}} = \frac{b}{a}\frac{K}{L} = \frac{p_L}{p_K}$$

επειδή τα οριακά προϊόντα των συντελεστών παραγωγής είναι ίσα με την αμοιβή τους.

$$\frac{K}{L} = \frac{a}{b}\frac{p_L}{p_K} \text{ και } \frac{d(K/L)}{d(p_L/p_K)} = \frac{a}{b}$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της ελαστικότητας υποκατάστασης και παίρνουμε:

$$s = \frac{d(K/L)}{d(p_L/p_K)}\frac{p_L/p_K}{K/L} = \frac{a}{b}\frac{p_L/p_K}{(a/b)/(p_L/p_K)} = 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρεθεί η ελαστικότητα υποκατάστασης της συνάρτησης παραγωγής CES.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$Q = A\left[aK^{-r} + (1-a)L^{-r}\right]^{-1/r}$$

$$Q = -\frac{1}{r}A\left[aK^{-r} + (1-a)L^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}-1} - r(1-a)L^{-(1+r)}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{A^{1+r}}{A^{r}}\left[aK^{-r} + (1-a)L^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}-1} - r(1-a)L^{-(1+r)}$$

$$=\frac{1-a}{\mathrm{A}^{r}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+r} \quad \text{Ομοίως} \quad Q_K=\frac{a}{A^{r}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+r}$$

Αν λάβουμε υπόψη:

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{F_L}{F_K}=\frac{\frac{1-a}{A^{r}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+r}}{Q_K=\frac{a}{A^{r}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+r}}=\frac{1-a}{a}\left(\frac{\mathrm{K}}{L}\right)^{1+r}=\frac{p_L}{p_K},$$

λύνουμε ως προς το λόγο κεφαλαίου – εργασίας και λαμβάνουμε:

$$\frac{K}{L}=\left(\frac{a}{1-a}\right)^{1/(1+r)}\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{1/(1+r)}$$

Επίσης:

$$\frac{d(K/L)}{d(p_L/p_K)}=\frac{a/(1-a)}{1+r}\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{\frac{1}{1+r}-1}$$

$$\frac{\frac{d(K/L)}{d(p_L/p_K)}}{\frac{K/L}{p_L/p_K}}=\frac{\frac{a/(1-a)}{1+r}\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{\frac{1}{1+r}-1}}{a/(1-a)\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{\frac{1}{1+r}-1}}=\frac{1}{1+r}$$

Επειδή ρ είναι μια παράμετρος, τότε η ελαστικότητα υποκατάστασης $s=1/(1+r)$ είναι μια σταθερά.

3.12. Υπόδειγμα προσδιορισμού εισοδήματος

Έχουμε ήδη αναφερθεί λεπτομερειακά για τον προσδιορισμό του εθνικού εισοδήματος μιας οικονομίας. Επίσης γνωρίζουμε τους διάφορους πολλαπλασιαστές και πως χρησιμοποιούνται. Στο εδάφιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μερική παραγώγιση για να διατυπώσουμε με ένα συνοπτικό τρόπο μια σειρά από ενδιαφέροντα συμπεράσματα της μακροοικονομικής ανάλυσης. Αρχίζουμε πρώτα με τη συνθήκη ισορροπίας του εισοδήματος μιας οικονομίας που χαρακτηρίζεται από τις εξισώσεις:

(1) $Y = C + I + G + (X - M)$

(2) $C = a + bY$

(3) $I = I_0$

(4) $G = C_0$

(5) $X = X_0$

(6) $M = M_0$

Αντικαθιστούμε τις (2)-(6) στην (1) και παίρνουμε:

(7) $Y = \frac{1}{1-b}(a + I_0 + G_0 + X_0 - M_0)$

Αν παραγωγίσουμε την (7) ως προς μία από τις παραμέτρους (ή μεταβλητές) καταλήγουμε στον πολλαπλασιαστή της παραμέτρου (ή της μεταβλητής). Έτσι έχουμε:

$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1-b}$ που είναι ο πολλαπλασιαστής αυτόνομων επενδύσεων

$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b}$ που είναι ο πολλαπλασιαστής αυτόνομων κρατικών δαπανών κτλ.

Αν οι επενδύσεις εξαρτώνται μερικώς από το εισόδημα, τότε η (3) γράφεται ως

(3΄) $I = I_0 + dY$

όπου d είναι η **οριακή ροπή για επενδύσεις** (marginal propensity to invest). Το καινούργιο εισόδημα ισορροπίας θα είναι:

(8) $Y^* = \frac{1}{1-b-d}(a + I_0 + G_0 + X_0 - M_0)$

$\frac{\partial Y^*}{\partial I_0} = \frac{1}{1-b-d}$ που είναι ο πολλαπλασιαστής αυτόνομων επενδύσεων,

$\frac{\partial Y^*}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b-d}$ που είναι ο πολλαπλασιαστής αυτόνομων κρατικών δαπανών κλπ.

G πολλαπλασιαστής για μια μεταβολή της οριακής ροπής για επενδύσεις βρίσκεται παραγωγίζοντας την (8) ως προς d. Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial c} = \frac{(1-b-d)(.)'(1-b-d)'}{(1-b-d)^2} = \frac{1}{(1-b-d)^2}(.) = \frac{Y^*}{(1-b-d)^2}$$

<u>4</u>

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΜΕ ΙΣΟΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Εφοδιασμένοι με τις τεχνικές αριστοποίησης πολυμεταβλητών συναρτήσεων με ισοτικούς περιορισμούς, που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η προσοχή μας επικεντρώνεται στην εφαρμογή αυτών των μεθόδων στην οικονομική ανάλυση. Όπως είναι φυσικό, θα αναφερθούμε μόνο στις πιο συνηθισμένες οικονομικές εφαρμογές και μάλιστα σ' αυτές που κανείς μπορεί να κατανοήσει έχοντας στοιχειώδεις γνώσεις μικροοικονομικής.

Θα μελετήσουμε αρχικά τη συμπεριφορά του καταναλωτή και θα εξαγάγουμε τις συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall, θα συζητήσουμε επίσης την έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας και το οικονομικό νόημα του Λαγκρανζιανού πολλαπλασιαστή. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στα συνηθισμένα προβλήματα αριστοποίησης που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση. Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να δείξει πως χρησιμοποιείται η μέθοδος των Λαγκρανζιανών πολλαπλασιαστών σε επιλεγμένα προβλήματα μικροοικονομικής ανάλυσης.

4.1 Η απλή θεωρία του καταναλωτή

Η μέθοδος του Lagrange, που χρησιμοποιήθηκε για τον εντοπισμό των ακρότατων μιας συνάρτησης με περιορισμό, χρησιμοποιείται ευρέως στη θεωρία του καταναλωτή. Σύμφωνα μ' αυτή τη θεωρία ο καταναλωτής (ή το νοικοκυριό) αγοράζει μια ποικιλία αγαθών x_i, όπου $i = 1,2,...,n$ με δεδομένες τις τιμές P_i αυτών των αγαθών. Ο καταναλωτής δεν μπορεί να αγοράσει όλα τα αγαθά που επιθυμεί, διότι περιορίζεται από το εισόδημα του. Έτσι λοιπόν ο καταναλωτής θεωρείται ότι επιδιώκει να μεγιστοποιήσει μια συνάρτηση χρησιμότητας $u(x_i)$ υπό τον περιορισμό (υ.π) του εισοδήματος του B. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής ξοδεύει όλο του το εισόδημα στα αγαθά x_i. Έτσι λοιπόν το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\max u(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\text{υ.π.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = B$$

Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε δεδομένες τις τιμές των αγαθών, το εισόδημα, όπως επίσης και τις προτιμήσεις του καταναλωτή, οι οποίες αποτυπώνονται στη συνάρτηση χρησιμότητάς του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση χρησιμότητας $z = f(x, y) = x, y$, όταν $p_x = 1$, $p_y = 4$ και το εισόδημα B του καταναλωτή είναι $B = 80$ ν.μ.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση του Lagrange είναι: $L = xy + l(80 - x - 4y)$ και οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$L_x = y - l = 0$$
$$L_y = x - 4l = 0$$
$$L_l = 80 - x - 4y = 0$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε $y/x = 1/4$ και $x = 4y$. Αντικαθιστούμε στην τελευταία εξίσωση και λαμβάνουμε: $80 - 4y - 4y = 0$ και $y = 10$, $x = 40$ και $l = 10$. Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν την ακόλουθη περιφραγμένη Εσιανή ορίζουσα:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

Άρα έχουμε μέγιστο για τις τιμές $y=10$ και $x=40$, η δε συνολική χρησιμότητα ισούται με $z=(40)(10)=400$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση χρησιμότητας $z=f(x,y)=x^{1/2}y^{1/3}$,όταν $p_x=9$, $p_y=3$ και το εισόδημα B του καταναλωτή είναι $B=150$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση του Lagrange είναι: $L=x^{1/2}y^{1/3}+l(150-x-4y)$.

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$L_x=1/2x^{-1/2}y^{1/3}-9l=0$$

$$L_y=1/3x^{1/2}y^{-2/3}-3l=0$$

$$L_l=150-9x-3y=0$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε $y=2x$. Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση η οποία δίνει $x=10$,επομένως $y=20$ και $l\approx 0,43$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι:

$$|\overline{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 9 & -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/3} & \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^{-1/2}y^{-2/3} \\ 3 & \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^{-1/2}y^{-2/3} & -\frac{2}{3}\frac{1}{3}x^{1/2}y^{1/3} \end{vmatrix}$$

$$=9x^{-1/2}y^{-2/3}+\frac{9}{2}+\frac{9}{4}x^{1/2}y^{1/3}+18x^{1/2}y^{1/3}>0$$

Τα x και y θα είναι πάντα θετικά, άρα η περιφραγμένη Εσιανή ορίζουσα είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Επομένως, είναι αρνητικά ορισμένη και κατά συνέπεια έχουμε μεγιστοποίηση της συνολικής χρησιμότητας.

4.2 Η συνάρτηση ζήτησης του καταναλωτή

Οι άριστες ποσότητες των αγαθών x_i^*, που προκύπτουν από τη λύση του προβλήματος της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του καταναλωτή, υποδηλώνουν τις ποσότητες των αγαθών που προτίθεται ν' αγοράσει ο καταναλωτής. Εδώ υποθέτουμε βέβαια ότι ο καταναλωτής συμπεριφέρεται ορθολογικά, ούτως ώστε να μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του ξοδεύοντας όλο του το εισόδημα. Είναι φανερό ότι οι άριστες ποσότητες των x_i^* εξαρτώνται από τις τιμές των αγαθών p_i και ασφαλώς από τον εισοδηματικό περιορισμό. Επομένως γράφουμε:

$$x_i^* = g_i(p_i, B), i = 1, 2, ..., n$$

Οι g_i είναι συναρτήσεις ζήτησης του καταναλωτή και έχουν καθιερωθεί στην οικονομική θεωρία ως συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall, από τον Άγγλο οικονομολόγο Alfered Marshall (1842-1924). Με άλλα λόγια η συνάρτηση ζήτησης κατά Marshall αναφέρεται στην ποσότητα ενός αγαθού που ο καταναλωτής αγοράζει ως μία συνάρτηση των τιμών και του διαθέσιμου εισοδήματός του. Η συνάρτηση κατά Marshall προκύπτει από τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας υπό τον περιορισμό του εισοδήματος.
Για λόγους απλότητας και σαφήνειας περιορίζουμε την ανάλυσή μας σε δύο αγαθά, x και y, και σε μια συνάρτηση χρησιμότητας $u = u(x, y) = xy$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας ενός καταναλωτή:

$\max u = f(x, y) = x, y$

υ.π. $B = p_x x + p_y y$

Να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης κατά Marshall.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση του Lagrange είναι: $L = xy + l(B - p_X x - p_y y)$ που δίνει τις ακόλουθες συνθήκες πρώτης τάξης:

$$L_X = y - l\,p_X = 0$$
$$L_y = x - l\,p_y = 0$$
$$L_l = B - p_X x - p_y y = 0$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε:

$y / x = p_X / p_y$ και $x = p_y y / p_X, y = p_X x / p_y$.

Αντικαθιστούμε στην τελευταία εξίσωση και λαμβάνουμε:

$$B = p_X x + p_y(p_X x / p_y) = 0$$

οπότε:

$$x^* = \frac{B}{2p_X} \text{ και } y^* = \frac{B}{2p_y}$$

Αυτές είναι οι συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall για x και y που μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του καταναλωτή υπό τον περιορισμό του εισοδήματος. Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & p_X & p_y \\ p_X & 0 & 1 \\ p_y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2p_X p_y > 0$$

Άρα η Εσιανή ορίζουσα είναι αρνητικά ορισμένη, επομένως η συνάρτηση u μεγιστοποιείται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $u = 4x + xy + 3y$, την οποία ο καταναλωτής επιδιώκει να τη μεγιστοποιήσει υπό τον εισοδηματικό περιορισμό $B = p_x x + p_y y$.

(α) Να κατασκευαστεί η συνάρτηση ζήτησης κατά Marshall.

(β) Να εκτιμηθεί η ζήτηση των αγαθών x και y για $p_x = 1$ και $p_y = 2$ και $B = 101$.

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση του Lagrange είναι:

$$L = 4x + xy + 3y + l\,(B - p_x x - p_y y)$$

Και οι συνθήκες πρώτης τάξης

$$L_l = B - p_x x - p_y y = 0$$
$$L_x = y + 4 - l\,p_x = 0$$
$$L_y = x + 3 - l\,p_y = 0$$

Το σύστημα εξισώσεων γράφεται στην ακόλουθη μητρωική μορφή

$$\begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & 0 & 1 \\ -p_y & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Cramer και έχουμε

$$l^* = \frac{\begin{vmatrix} -B & -p_x & -p_y \\ -4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & 0 & 1 \\ -p_y & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3p_x + 4p_y + B}{2p_x p_y}$$

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -B & -p_y \\ -p_x & -4 & 1 \\ -p_y & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & 0 & 1 \\ -p_y & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{p_y B + 3p_x p_y + 4{p_y}^2}{2p_x p_y} = \frac{B + 3p_x + 4p_y}{2p_x}$$

$$y^* = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -p_x & -B \\ -p_x & 0 & -4 \\ -p_y & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & 0 & 1 \\ -p_y & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{p_x B - 4 p_x p_y + 3 p_x^2}{2 p_x p_y} = \frac{B + 3p_x - 4p_y}{2p_y}$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται διότι η

$$|\overline{\mathrm{H}}| = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & 0 & 1 \\ p_y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 p_x p_y > 0$$

επομένως η $|\overline{\mathrm{H}}|$ είναι αρνητικά ορισμένη και κατά συνέπεια η αντικειμενική συνάρτηση u μεγιστοποιείται.

(β) Η ζήτηση του αγαθού x για $p_x = 1$ και $p_y = 2$ θα είναι:

$$x^* = \frac{B + 3p_x + 4p_y}{2p_x} = \frac{101 + 3(1) + 4(2)}{2(1)} = 56$$

ενώ η ζήτηση του αγαθού y θα είναι:

$$y^* = \frac{B + 3p_x - 4p_y}{2p_y} = \frac{101 + 3(1) - 4(2)}{2(2)} = 22,5$$

Τέλος, ο Λαγκρανζιανός πολλαπλασιαστής θα είναι:

$$l^* = 22,4$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας του καταναλωτή

$$\max u = 3x + 2xy + 4y$$

υ.π. $B = p_x x + p_y y$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης κατά Marshall.

(β) Να υπολογιστεί η ζήτηση των αγαθών x και y για $p_x = 3, p_y = 8$ και $B = 120$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση του Lagrange είναι: $L = 3x + 2xy + 4y + l\,(B - p_x x - p_y y)$. Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$L_x = 3 + 2y - l\,p_x = 0$$
$$L_y = 2x + 4 - l\,p_y = 0$$
$$L_l = \mathrm{B} - p_x x - p_y y = 0$$

Το σύστημα των εξισώσεων γράφεται στην ακόλουθη μητρωική μορφή

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -p_x \\ 2 & 0 & -p_y \\ -p_x & -p_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ B \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Cramer και έχουμε

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -p_x \\ -4 & 0 & -p_y \\ -B & -p_y & 0 \end{vmatrix}}{4p_x p_y} = \frac{2p_y - 4p_x p_y + 3p_y^2}{4p_x p_y}$$

$$y^* = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & -p_x \\ 2 & -4 & -p_y \\ -p_x & -B & 0 \end{vmatrix}}{4p_x p_y} = \frac{-3p_x p_y + 2p_x B + 4p_x^2}{4p_x p_y}$$

Οι συνθήκες β΄ τάξης ικανοποιούνται διότι η περιφραγμένη Εσιανή ορίζουσα δίνει:

$$\left|\overline{\mathrm{H}}\right| = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & 0 & 2 \\ p_y & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4p_x p_y > 0$$

Επομένως η $|H|$ είναι αρνητικά ορισμένη και κατά συνέπεια η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται

(β) Η ζήτηση του αγαθού x για $p_x = 3$ και $p_y = 8$ θα είναι:

$$x^* = \frac{2(8)(120) - 4(3)(8) + 3(8)^2}{4(3)(8)} = 21$$

Ενώ η αντίστοιχη ζήτηση για το αγαθό y θα είναι:

$$y^* = \frac{-3(3)(8) + 2(3)120 + 4(8)^2}{4(3)(8)} = 7{,}125$$

Τέλος ο Λαγκρανζιανός πολλαπλασιαστής θα είναι:

$$l^* = 19/3$$

4.3 Η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας

Η χρησιμότητα των άριστων κάθε φορά συνδυασμών των αγαθών x και y γράφεται $u(x^*, y^*)$. Επειδή καθένα απ' αυτά τα αγαθά είναι συνάρτηση των τιμών και του εισοδήματος του καταναλωτή η συνάρτηση χρησιμότητας αποτελεί ταυτόχρονα και τη μέγιστη χρησιμότητα. Αν γράψουμε τις συναρτήσεις ζήτησης του καταναλωτή ως:

$$x^* = x(p_x, p_y, B) \text{ και } y^* = y(p_x, p_y, B)$$

τότε θα έχουμε:

$$u(x^*, y^*) = u\left[x\left(p_x, p_y, B\right), y\left(p_x, p_y, B\right)\right] = F\left(p_x, p_y, B\right)$$

Η συνάρτηση F λέγεται **έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας** (indirect utility function). Η συνάρτηση αυτή καθορίζει τη μέγιστη χρησιμότητα που αποκομίζει ο κάθε καταναλωτής για τις τιμές p_x, p_y και το εισόδημα B. Η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας μας βοηθά στο να συγκρίνουμε εναλλακτικούς συνδυασμούς τιμών των αγαθών και του διαθέσιμου εισοδήματος του καταναλωτή.

Στο παράδειγμα του προηγούμενου τμήματος, όπου είχαμε $u = xy$ και $p_X x + p_y y = B$ η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας θα είναι:

$$F(p_X, p_y, B) = u\left[x(p_X, B), y(p_y, B)\right] = u(B/2p_X, B/2p_y) = (B/2p_X)(B/2p_y) = B^2/4p_X p_y$$

Τη συνάρτηση αυτή μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε σε μια σειρά από συνδυασμούς εισοδημάτων και τιμών. Π.χ. για $p_X = 3, p_y = 4$ και $B = 100$ τότε $u = 208$ μονάδες χρησιμότητας κ.ο.κ.

Από την ανάλυση μέχρι τώρα, είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις ζήτησης του καταναλωτή δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, διότι οι ποσότητες των αγαθών που επιλέγει ο ορθολογικά συμπεριφερόμενος καταναλωτής θα πρέπει να είναι ίσες με το εισόδημά του, δηλαδή θα ισχύει ότι:

$$p_X x^* + p_y y^* = B$$

επειδή, όμως $x^* = x^*(p_X, B)$ και $y^* = y^*(p_y, B)$,τότε συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις ζήτησης θα πρέπει να ικανοποιούν την ταυτότητα:

$$p_X x^*(p_X, B) + p_y y^*(p_y, B) = B$$

Στο παράδειγμά μας πράγματι θα έχουμε:

$$p_X \frac{B}{2p_X} + p_y \frac{B}{2p_y} = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = B$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $u = f(x, y) = x^{1/4} y^{3/4}$ και ο εισοδηματικός περιορισμός $B = p_X x + p_y y$.

(α) Να βρεθούν οι συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall

(β) Να σχηματιστεί η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας.

ΛΥΣΗ

(α) Σχηματίζουμε τη συνάρτηση του Lagrange:

$$L = x^{1/4}y^{3/4} + l\,(B - p_x x - p_y y)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$L_x = (1/4)x^{-3/4}y^{1/4} - l\,p_x$$
$$L_y = (3/4)x^{1/4}y^{-1/4} - l\,p_y$$
$$L_l = B - p_x x - p_y y$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε

$$\frac{(1/4)x^{-3/4}y^{3/4}}{(3/4)x^{1/4}y^{-1/4}} = \frac{p_x}{p_y} \text{ και } y = \left(\frac{3p_x}{p_y}\right)x$$

Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση που δίνει τη συνάρτηση ζήτησης κατά Marshall για το αγαθό x,

$$x^* = \frac{B}{4p_x},$$

ομοίως για το αγαθό y λαμβάνουμε:

$$y^* = \frac{3B}{4p_y}$$

ισχύει βέβαια ότι $B = p_x x + p_y y$, πράγματι

$$p_x \frac{B}{4p_x} + p_y \frac{3B}{4p_y} = B$$

(β) Η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας είναι:

$$F(p_x, p_y, B) = u\left[x(p_x, p_y, B), y(p_x, p_y, B)\right] = u\left[(B/4p_x), (3B/4p_y)\right]$$

ή

$$F(p_x, p_y, B) = \left(\frac{B}{4p_x}\right)^{1/4}\left(\frac{3B}{4p_y}\right)^{3/4} = \frac{B^{1/4}}{(4p_x)^{1/4}}\frac{(3B)^{3/4}}{(4p_x)^{3/4}} = \frac{3^{3/4}B^{3/16}}{4^{3/16}\,{p_x}^{1/4}\,{p_y}^{3/4}}$$

4.4 Το οικονομικό νόημα του πολλαπλασιαστή Lagrange

Από την έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας παίρνουμε το ολικό διαφορικό

$$dF = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Διαιρούμε με το διαφορικό του εισοδήματος dB και παίρνουμε:

$$\frac{dF}{dB} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dB} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dB}$$

Αν λάβουμε υπόψη τις συνθήκες πρώτης τάξης για τον εντοπισμό των ακρότατων θα έχουμε:

$$\frac{dF}{dB} = l\, p_X \frac{dx}{dB} + l\, p_Y \frac{dy}{dB} = l\left[p_X \frac{dx^*}{dB} + p_Y \frac{dy^*}{dB}\right]$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$p_X x^* + p_Y y^* = B$$

Παίρνουμε το διαφορικό του εισοδήματος:

$$p_X dx^* + p_Y dy^* = dB \text{ ή } p_X \frac{dx^*}{dB} + p_Y \frac{dy^*}{dB} = 1$$

Επομένως:

$$\frac{dF}{dB} = l^*$$

Με άλλα λόγια, ο Λαγκρανζιανός πολλαπλασιαστής υποδηλώνει το κατά πόσο μεταβάλλεται η (μέγιστη ή ελάχιστη) τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε μια ενδεχόμενη μεταβολή του σταθερού όρου του περιορισμού (συνήθως λέμε αν μεταβληθεί ο σταθερός όρος του περιορισμού κατά μία μονάδα). Στην περίπτωση του προβλήματος της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του καταναλωτή υπό τον εισοδηματικό περιορισμό, ο πολλαπλασιαστής Lagrange μετράει την **οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος** (marginal utility of income).

Ο πολλαπλασιαστής, του Lagrange έχει ένα πολύ συγκεκριμένο οικονομικό νόημα. Με δεδομένες τις τιμές των αγαθών x και y το εισόδημα του καταναλωτή αυξάνεται από B σε ΔB. Στην περίπτωση αυτή θα αυξηθεί σύμφωνα:

$$\Delta F \approx dF = \frac{dF}{dB}\Delta B = l^{*}\Delta B$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $z = f(x, y) = x^{1/5}y^{4/5}$ και ο εισοδηματικός περιορισμός $B = p_x x + p_y y$.

(α) Να βρεθούν οι συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall.

(β) Να σχηματίσετε την έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας.

(γ) Να δειχτεί ότι $l^{*} = dF/dB$.

ΛΥΣΗ

(α) Σχηματίζουμε τη συνάρτηση του Lagrange:

$$L = x^{1/5}y^{4/5} + l\,(B - p_x x - p_y y)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$L_x = (1/5)x^{-4/5}y^{4/5} - l\,p_x = 0$$

$$L_y = (4/5)x^{1/5}y^{-1/5} - l\,p_y = 0$$

$$L_l = B - p_x x - p_y y = 0$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$\frac{(1/5)x^{-4/5}y^{4/5}}{(4/5)x^{1/5}y^{-1/5}} = \frac{p_x}{p_y} \text{ και } y = \left(\frac{4p_x}{p_y}\right)x$$

Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση που δίνει τη συνάρτηση ζήτησης κατά Marshall για το αγαθό x,

$$x^* = \frac{B}{5p_x},$$

ομοίως για το αγαθό y λαμβάνουμε:

$$y^* = \frac{4B}{5p_y}$$

Αν αντικαταστήσουμε τα x^* και y^* π.χ. στην πρώτη εξίσωση, τότε λαμβάνουμε την τιμή του l που είναι:

$$l = \frac{1}{5p_x} x^{-4/5} y^{4/5} = \frac{1}{5p_x}\left(\frac{B}{5p_x}\right)^{-4/5}\left(\frac{4B}{5p_y}\right)^{4/5} = \frac{4^{4/5}B^0}{5p_x^{1/5}p_y^{4/5}}$$

(β) Η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας είναι:

$$f(p_x, p_y, B) = u\left[x(p_x, p_y, B), (p_x, p_y, B)\right] = u\left(\frac{B}{5p_x}, \frac{4B}{5p_y}\right) \text{ ή}$$

$$F(p_x, p_y, B) = \left(\frac{B}{5p_x}\right)^{1/5}\left(\frac{4B}{5p_y}\right)^{4/5} = \frac{4^{4/5}B}{5p_x^{1/5}p_y^{4/5}}$$

Παραγωγίζουμε ως προς B και έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial B} = \frac{4^{4/5}}{5p_x^{1/5}p_y^{4/5}} = l^*$$

Αν τώρα έχουμε μια μεταβολή στο εισόδημα με δεδομένες τις τιμές, η καινούργια έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας είναι:

$$F(p_x, p_y, B+\Delta B) = \frac{4^{4/5}(\mathrm{B}+\Delta\mathrm{B})}{5p_x^{1/5}p_y^{4/5}} = \frac{4^{4/5}B}{5p_x^{1/5}p_y^{4/5}} + \frac{4^{4/5}\Delta B}{5p_x^{1/5}p_y^{4/5}} = F(p_x, p_y, B) + l^*\Delta B$$

Στην προκειμένη περίπτωση η προσέγγιση $\Delta F \approx l\Delta B$ είναι ακριβής. Αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση που η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας είναι γραμμική στο B.

4.5 Ελαχιστοποίηση κόστους με δεδομένη την ποσότητα προϊόντος

Όπως και με τη θεωρία του καταναλωτή έτσι και με τη θεωρία της επιχείρησης θα επικεντρωθούμε στις πιο στοιχειώδεις έννοιες δεδομένου ότι η θεωρία της επιχείρησης μπορεί ν' αναπτυχθεί κατά τρόπο διεξοδικό μόνο σε ένα βιβλίο μικροοικονομίας. Στην απλή της εκδοχή και πάντα στα πλαίσια της νεοκλασικής θεωρίας το προϊόν που παράγεται (Q) από μια επιχείρηση ή ακόμη και από όλη την οικονομία μπορεί να περιγραφεί σε όρους μιας συνάρτησης, όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η εργασία (L) και το κεφάλαιο (K). Άρα λοιπόν έχουμε την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής:

$$Q = f(L,K)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τον προσδιορισμό του συνολικού κόστους (C) παραγωγής της ποσότητας Q. Είναι φανερό ότι το συνολικό αυτό κόστος παραγωγής εξαρτάται από το κόστος των απαιτούμενων για την παραγωγή του Q ποσοτήτων εργασίας και κεφαλαίου. Αν υποθέσουμε ότι το κόστος ανά μονάδα εργασίας ισούται με το μισθό (w) και το κόστος ανά μονάδα κεφαλαίου ισούται με το ποσοστό του κέρδους (r), τότε έχουμε:

$$C = wL + rK$$

Προκειμένου η επιχείρηση να παραγάγει μια δεδομένη ποσότητα Q^* προϊόντος θα πρέπει να επιλέξει ένα συνδυασμό των δύο συντελεστών για τους οποίους ισχύει:

$$f(K,L) = Q^*$$

Θεωρητικά υπάρχουν άπειροι τέτοιοι συνδυασμοί που δίνουν ένα καθορισμένο επίπεδο προϊόντος. Οι συνδυασμοί αυτοί βρίσκονται επί της καμπύλης **ισοπροϊόντος** ή **ισοπαραγωγής** (isoquant) $f(K,L)=Q^{*}$. Όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν άπειρες τέτοιες καμπύλες ισοπαραγωγής , απ' αυτές όμως η επιχείρηση πρέπει να επιλέξει την καμπύλη ισοπαραγωγής με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Επομένως αυτό το πρόβλημα αριστοποίησης με εξισωτικό προσδιορισμό διατυπώνεται ως εξής:

$$\min rK + wL$$

υ.π. $f(K,L)=Q^{*}$

Όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι η συνάρτηση κόστους και ο εξισωτικός περιορισμός η συνάρτηση παραγωγής.

Κατασκευάζουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση

$$V = F(K,L,l) = rK + wL + l\,(Q^{*} - f(L,K))$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$V_K = r - l\, f_K$$
$$V_L = w - l\, f_L$$
$$V_l = Q^{*} - f(L,K)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις και λαμβάνουμε:

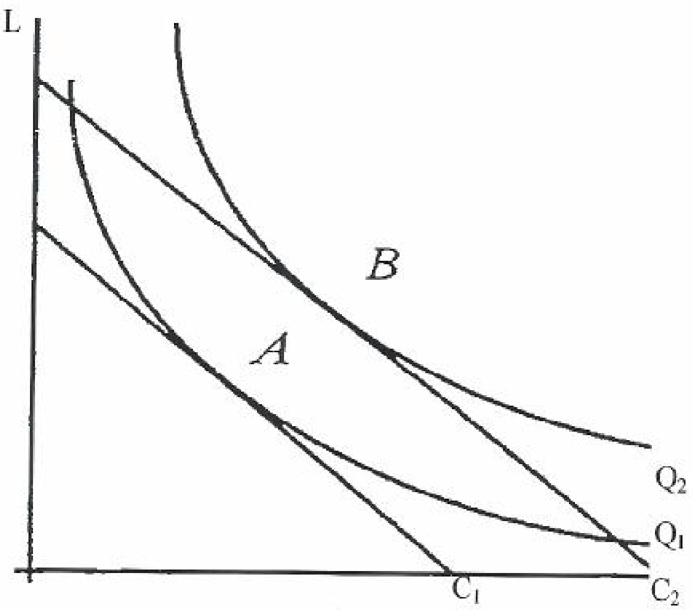
$$\frac{r}{w} = \frac{f_K}{f_L}$$

Συμπεραίνουμε ότι όταν χρησιμοποιούμε το συνδυασμό του ελάχιστου κόστους, ο λόγος των οριακών προϊόντων των εισροών να ισούται με τον αντίστοιχο λόγο των σχετικών τιμών των εισροών.

Γεωμετρικά ο άριστος συνδυασμός συνδυασμός των εισροών δίνεται στο σημείο που η καμπύλη ισοπροϊόντος εφάπτεται της καμπύλης ίσου κόστους. Οι **καμπύλες ίσου κόστους** (isocost lines) αναφέρονται στους διάφορους συνδυασμούς των εισροών που έχουν το ίδιο κόστος.

Οι καμπύλες ισοπαραγωγής στη θεωρία της παραγωγής αντιστοιχούν στις καμπύλες χρησιμότητας, ενώ οι καμπύλες ίσου κόστους αντιστοιχούν στην καμπύλη εισοδηματικού περιορισμού στη θεωρία του καταναλωτή που θίξαμε πιο πάνω. Όσο υψηλότερο είναι το κόστος τόσο προς τα δεξιά μετακινείται η καμπύλη ίσου κόστους. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι καμπύλες ίσου κόστους καλύπτουν ολόκληρο το δεξί θετικό τεταρτημόριο

Σχήμα 1.



Αν το δεδομένο επίπεδο παραγωγής ισούται με την πρώτη καμπύλη ισοπαραγωγής, $Q^{*}=Q_1$, τότε αυτό το επίπεδο παραγωγής μπορεί να επιτευχθεί είτε με κόστος C_1 είτε με C_2. Επομένως η ελαχιστοποίηση του κόστους επιτυγχάνεται στο σημείο A όπου η καμπύλη ισοπαραγωγής εφάπτεται με τη γραμμή ίσου κόστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μιας επιχείρησης που παράγει 500 μονάδες προϊόντος με τη συνάρτηση παραγωγής $Q=15K^{0,8}L^{0,2}$ και οι τιμές των συντελεστών παραγωγής είναι $p_K=30, p_L=10$.

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\min 30K + 10L$$

υ.π. $500 = 15K^{0,8}L^{0,2}$

Σχηματίζουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$V = 30K + 10L + l(500 - 15K^{0,8}L^{0,2})$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$V_K = 30 - 12lK^{-0,2}L^{0,2} = 0$$

$$V_L = 10 - 3lK^{0,8}L^{-0,8} = 0$$

$$V_l = 500 - 15\mathrm{K}^{0,8}L^{0,2} = 0$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις και παίρνουμε: $L = (3/4)K$ ή $K = (4/3)L$. Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση η οποία δίνει:

$$500 - 15K^{0,8}\left(\frac{3}{4}K\right)^{0,2} = 0 \text{ ή } 500 - 15\left(\frac{3}{4}\right)^{0,2} K = 0 \text{ και } K^* \approx 35$$

$$500 - 15\left(\frac{4}{3}L\right)^{0,8} L^{0.2} = 0 \text{ ή } 500 - 15\left(\frac{4}{3}\right)^{0,8} L = 0 \text{ και } L^* \approx 26.$$

Τις τιμές των συντελεστών που εκτιμήσαμε τις αντικαθιστούμε είτε στην πρώτη είτε στη δεύτερη εξίσωση των συνθηκών πρώτης τάξης και λαμβάνουμε

$$l^* \approx 2,65.$$

Το ελάχιστο κόστος είναι:

$$C_{\min} = 30(35) + 10(26) = 1.310 \text{ ν.μ.}$$

Προκειμένου να είμαστε βέβαιοι ότι ελαχιστοποιήσαμε (και δε μεγιστοποιήσαμε) το συνολικό κόστος παραγωγής ελέγχουμε τις συνθήκες δεύτερης τάξης, που είναι:

$$|\overline{\mathrm{H}}| = \begin{vmatrix} 0 & 12K^{-0,2}L^{0,2} & 3K^{0,8}L^{0,2} \\ 12\mathrm{K}^{-0,2}L^{0,2} & 2,4\,l\,K^{-1,2}L^{0,2} & -2,4\,l\,K^{-0,2}L^{-0,8} \\ 3K^{0,8}L^{0,2} & -2,4\,l\,K^{-0,2}L^{-0,8} & 2,4\,l\,K^{0,8}L^{-1,8} \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα αυτή δίνει:

$$(12K^{-0,2}L^{0,2})(-2,4\,l\,K^{-0,2}L^{-0,8})(3K^{0,8}L^{0,2}) + (3K^{0,8}L^{0,2})(12K^{-0,2}L^{0,2})(-2,4\,l\,K^{-0,2}L^{-0,8})$$
$$-(3K^{0,8}L^{0,2})(2,4\,l\,K^{-1,2}L^{0,2})(3K^{0,8}L^{0,2}) - (12K^{-0,2}L^{0,2})(12K^{-0,2}L^{0,2})(2,4\,l\,K^{-0,2}L^{-0,8})$$

Και μετά από πράξεις:

$$-21,6K^{0,4}\,l\,\frac{(16+8L+L^2)}{L^{1,4}}$$

Επειδή οι ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας θα είναι πάντα θετικά μεγέθη, ενώ βρήκαμε ότι $l^* \approx 2,65 > 0$, συνεπάγεται ότι $|\mathrm{H}| < 0$,οπότε έχουμε ελάχιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Το μικτό κόστος παραγωγής μιας επιχείρησης είναι $TC = 35x^2 + 30xy + 45y^2$. Η επιχείρηση αυτή επιδιώκει την ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής υπό τον περιορισμό $x + 2y = 50$.

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$L = 35x^2 + 30xy + 45y^2 + l\,(50x - 2y)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$L_x = 70x + 30y - l = 0$$
$$L_y = 30x + 90y - 2l = 0$$
$$L_l = 50 - x - 2y = 0$$

Σε μητρωική μορφή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 70 & 30 & -1 \\ 30 & 90 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Cramer:

$$x^*=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 30 & -1 \\ 0 & 90 & -2 \\ -50 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 70 & 30 & -1 \\ 30 & 90 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-1.500}{-250}=6 \text{ μονάδες}$$

$$y^*=\frac{\begin{vmatrix} 70 & 0 & -1 \\ 30 & 0 & -2 \\ -1 & -50 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 70 & 30 & -1 \\ 30 & 90 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-5.500}{-250}=22 \text{ μονάδες}$$

Ο πολλαπλασιαστής του Lagrange $l^*=-270.000/-250=1.080$ και η περιφραγμένη Εσιανή ορίζουσα δίνει $-250<0$. Άρα έχουμε ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής.

Παρατήρηση. Η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange είναι παρόμοια μ' αυτή που δώσαμε στη θεωρία του καταναλωτή. Συνοπτικά επαναλαμβάνουμε, αν μας δίνεται μια συνάρτηση $f(x,y)$ και ένας περιορισμός $g(x,y)=c$ το l προσεγγίζει τη μεταβολή στην άριστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκαλείται από μια μικρή μεταβολή στο σταθερό όρο του εξισωτικού περιορισμού.

4.6 Μεγιστοποίηση παραγόμενου προϊόντος υπό τον περιορισμό του κόστους

Εξετάζουμε την περίπτωση ελαχιστοποίησης κόστους με δεδομένο το επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί και ως μεγιστοποίηση του παραγόμενου προϊόντος με τον περιορισμό του κόστους. Υποθέτουμε, όπως και στο προηγούμενο τμήμα, ότι το συνολικό κόστος παραγωγής εξαρτάται από το κόστος των απαιτούμενων ποσοτήτων των συντελεστών εργασίας και κεφαλαίου. Οπότε έχουμε:

$$C = wL + rK$$

Ο συμβολισμός παραμένει ίδιος μ’αυτόν του προηγούμενου τμήματος. Η επιχείρηση με δεδομένου το κόστος παραγωγής C^* θα πρέπει να επιλέξει ένα συνδυασμό των δύο συντελεστών για τους οποίους μεγιστοποιεί το συνολικό προϊόν:

$$f(K,L) = Q$$

Όπως ήδη σημειώσαμε, υπάρχουν θεωρητικά άπειροι τέτοιοι συνδυασμοί κεφαλαίου και εργασίας που δίνουν ένα καθορισμένο επίπεδο κόστους. Οι συνδυασμοί αυτοί βρίσκονται επί της γραμμής ίσου κόστους $C^* = wL + rK$. Όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν άπειρες καμπύλες ίσου κόστους απ’ αυτές όμως η επιχείρηση πρέπει να επιλέξει την καμπύλη που συνδέεται με το μέγιστο προϊόν. Επομένως αυτό το πρόβλημα αριστοποίησης με εξισωτικό περιορισμό διατυπώνεται ως εξής:

$$\max f(K,L)$$

$$\text{υ.π.} \quad rK + wL = C^*$$

Όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι η συνάρτηση παραγωγής και ο εξισωτικός περιορισμός η συνάρτηση κόστους.

Κατασκευάζουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$V = F(K, L, l) = f(L, K) + l(C^* - rK - wL)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$V_K = f_K - rl = 0$$
$$V_L = f_L - wl = 0$$
$$V_l = C^* - rK - wL$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις και λαμβάνουμε:

$$\frac{f_K}{f_L} = \frac{r}{w}$$

Συμπεραίνουμε ότι όταν χρησιμοποιούμε το συνδυασμό του ελάχιστου κόστους, ο λόγος των οριακών προϊόντων των εισροών να ισούται με τον αντίστοιχο λόγο των σχετικών τιμών των εισροών.

Γεωμετρικά, ο άριστος συνδυασμός των εισροών δίνεται στο σημείο που η καμπύλη ισοπροϊόντος εφάπτεται της καμπύλης ίσου κόστους Σχήμα 1. αν π.χ. $C^* = C_2$, τότε η επιχείρηση μ' αυτό το κόστος μπορεί να παράγει διάφορες ποσότητες προϊόντος. Ενδεικτικά να πούμε ότι τόσο το προϊόν που αντιστοιχεί στην καμπύλη ισοπαραγωγής Q_1, όσο και το προϊόν που αντιστοιχεί στην καμπύλη ισοπαραγωγής Q_2 μπορούν να παραχθούν. Η διαφορά συνίσταται ότι η καμπύλη ισοπαραγωγής Q_2 προϊόν μεγαλύτερο από κάθε άλλη καμπύλη ισοπαραγωγής. Επομένως, η μεγιστοποίηση του παραγόμενου προϊόντος επιτυγχάνεται στο σημείο που εφάπτεται η καμπύλη ισοπαραγωγής με τη γραμμή ίσου κόστους στο σημείο B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια επιχείρηση έχει την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής (Q):

$$Q = L^2 + 6LK - 5K^2$$

Όπου L και K είναι οι ποσότητες της εργασίας και του κεφαλαίου αντίστοιχα. Αν οι τιμές τις εργασίας $w=2$ και του κεφαλαίου $r=4$, τότε να βρεθούν οι ποσότητες της εργασίας και κεφαλαίου που μεγιστοποιούν το παραγόμενο προϊόν, με δεδομένο ότι το συνολικό κόστος παραγωγής θα ισούται με 80 ν.μ.

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση του Lagrange

$$V=L^2+6LK-5K^2+l(80-2L-4K)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$V_L=2L+6K-2l=0$$
$$V_K=6L-10K-4l=0$$
$$V_l=80-2L-4K=0$$

Σε μητρωική μορφή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & -10 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L \\ K \\ l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Cramer:

$$L^*=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & -4 \\ -80 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & -10 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{3.520}{104}\approx 34 \text{ μονάδες},$$

$$K^*=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -4 \\ -2 & -80 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & -10 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{320}{104}\approx 3 \text{ μονάδες}.$$

Ο πολλαπλασιαστής του Lagrange $l = 4.480/104 \approx 43,07$ και η περιφραγμένη Εσιανή ορίζουσα δίνει $|\overline{\mathrm{H}}| = 104 > 0$. Άρα έχουμε μεγιστοποίηση του παραγόμενου προϊόντος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Μια επιχείρηση έχει την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής:

$$Q = 15K^{0,8}L^{0,2}$$

Όπου L και K είναι οι ποσότητες της εργασίας και του κεφαλαίου αντίστοιχα. Αν οι τιμές της εργασίας $p_L = 10$ και του κεφαλαίου $p_K = 30$, τότε να βρεθούν οι ποσότητες της εργασίας και του κεφαλαίου που μεγιστοποιούν το παραγόμενο προϊόν με δεδομένο ότι το συνολικό κόστος παραγωγής θα ισούται με 1.310 ν.μ.

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$V = 15K^{0,8}L^{0,2} + l\,(1.310 - 30K + 10L)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$V_K = (15)(0,8)K^{-0,2}L^{0,2} - 30\,l = 0$$
$$V_L = (15)(0,2)K^{0,8}L^{-0,8} - 10\,l = 0$$
$$V_l = 1310 - 30K - 110L = 0$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις και παίρνουμε:

$$L = (3/4)K \text{ ή } K = (4/3)L$$

Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση η οποία δίνει:

$$K^* \approx 35 \text{ και } L^* \approx 26$$

Το μέγιστο παραγόμενο προϊόν είναι:

$$Q_{\max} = 15(35)^{0,8}(26)^{0,2} \approx 495 \text{ ν.μ.}$$

Προκειμένου να είμαστε βέβαιοι ότι μεγιστοποιήσαμε (και όχι ελαχιστοποιήσαμε) το παραγόμενο προϊόν ελέγχουμε τις συνθήκες δεύτερης τάξης, που είναι:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 30 & 10 \\ 30 & -2,4K^{-1,2}L^{0,2} & 2,4K^{0,2}L^{-0,8} \\ 10 & 2,4K^{-0,2}L^{-0,8} & -2,4K^{0,8}L^{-1,8} \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα αυτή δίνει:

$$\frac{240(9K^2 + 6LK + L^2)}{L^{1,8}K^{1,2}} = 60 > 0$$

Επειδή οι ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας θα είναι πάντα θετικά μεγέθη, συνεπάγεται ότι $|\overline{H}| > 0$, οπότε έχουμε μέγιστο. Τέλος ο Λαγκρανζιανός πολλαπλασιαστής $l^* \approx 0,37$. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο πολλαπλασιαστής είναι το αντίστροφο του πολλαπλασιαστή που βρήκαμε στο πρώτο παράδειγμα του προηγουμένου τμήματος

$$l^* = 0,377 \approx 1/2,65 .$$

5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ

Τα μαθηματικά των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων, όπως επίσης και οι γεωμετρικοί πρόοδοι, εκ πρώτης όψεως δε φαίνονται να έχουν άμεση εφαρμογή στην επίλυση οικονομικών και επιχειρησιακών προβλημάτων. Είναι βέβαιο όμως, ότι οι επιχειρηματίες θεωρούν απαραίτητη τη γνώση του ύψους του τόκου που πρέπει να πληρώσουν στο δάνειο που έλαβαν, τους ενδιαφέρει επίσης να γνωρίζουν τη μακροχρόνια απόδοση ενός επενδυτικού σχεδίου, την παρούσα αξία των περιουσιακών τους στοιχείων κλπ. Το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι η ανάλυση των τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση χρηματοοικονομικών προβλημάτων, όπως αυτά που παραθέσαμε. Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στα μαθηματικά των προηγούμενων κεφαλαίων.

Έτσι, λοιπόν, αρχικά θα αναλύσουμε τη μέθοδο υπολογισμού του τόκου που αντιστοιχεί σε μία μόνο πληρωμή. Με άλλα λόγια, θα ασχοληθούμε με τον **απλό τόκο** (simple interest) και στη συνέχεια με τον **ανατοκισμό** (compound interest). Επίσης θα αναλύσουμε το **ενεργό επιτόκιο** (effective interest rate). Θα ασχοληθούμε τέλος με την ανάλυση της **χρηματορροής** (ordinary annuity) και τις έννοιες της **μελλοντικής και παρούσας αξίας χρηματορροής** (future and present value of an annuity).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα αναλύσουμε διεξοδικά δύο μεθόδους, που χρησιμοποιούνται στην αξιολόγηση ενός επενδυτικού έργου ή διαφόρων εναλλακτικών επενδυτικών προγραμμάτων. Τη **μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας** (net present value), η οποία συγκρίνει την παρούσα αξία μελλοντικών αποδόσεων με το αρχικό κόστος.

5.1 Τόκος με μια πληρωμή

Το ποσό που δανείζεται ένας επιχειρηματίας ή ιδιώτης καλείται **κεφάλαιο** (principal), για το οποίο συνάπτεται μια συμφωνία αποπληρωμής του με ένα επιπλέον ποσό τον **τάκο** (interest). Σε αυτό το τμήμα θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους που^ χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του τόκου σε δάνειο που η εξόφληση του απαιτεί μόνο μια πληρωμή. Όταν υπάρχουν πολλαπλές και καθορισμένες πληρωμές, έχουμε χρηματορροές οι οποίες αναλύονται στα επόμενα τμήματα.

5.1.1 Απλός τόκος

Όταν ο υπολογισμός του τόκου ή του κόστους δανεισμού βασίζονται αποκλειστικά στο μέγεθος του δανείου ή αρχικού κεφαλαίου *X0,* τότε έχουμε τη μέθοδο του απλού τόκου. Στην περίπτωση αυτή καθορίζουμε τον τόκο για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, π.χ. ένα έτος. Το επιτόκιο *i* (rate of interest) συνήθως είναι ποσοστό μικρότερο του 100 (π.χ. 7% ή 0,07) και δείχνει ότι για την περίοδο του ενός έτους το κόστος δανεισμού ανέρχεται σ' ένα καθορισμένο ποσοστό της αξίας του X_0. Ένας μεγάλος αριθμός βραχυπρόθεσμων, συνήθως, δανείων, τα οποία συνάπτουν οι επιχειρήσεις, γίνονται μέσω του απλού τόκου. Έτσι, για ένα χρόνο, ο απλός τόκος δίνεται από τον τύπο:

iX_0 = (επιτόκιο)*(αρχικό κεφάλαιο)

Για δύο ή περισσότερα χρόνια, ο απλός τόκος ισούται με τον απλό τόκο για τον ένα χρόνο επί τον αριθμό των ετών (περιόδων) *t,* δηλαδή,

iX_0t = (επιτόκιο)*(αρχικό κεφάλαιο)*(αριθμός περιόδων)

Όταν εξοφλείται ένα δάνειο, τότε πληρώνεται το αρχικό κεφάλαιο μαζί με τον τόκο που του αντιστοιχεί. Το συνολικό ποσό που πρέπει να πληρωθεί λέγεται μελλοντική **αξίαX,** (future value) και υπολογίζεται,

$$Xt = \text{αρχικό κεφάλαιο} + \text{απλός τόκος}$$

$$= X_0 + iX_0 t$$

$$= X_0(l + it)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένας επιχειρηματίας δανείζεται 1.500 ν.μ. για 5 χρόνια και συμφωνεί να πληρώσει ετήσιο επιτόκιο 10%. Να βρεθεί ο απλός τόκος και το συνολικό ποσό που θα πρέπει να πληρώσει ο επιχειρηματίας.

ΛΥΣΗ

Ο απλός τόκος θα είναι (0,10)(1.500)(5)=750 ν.μ.

Το συνολικό ποσό θα είναι 1.500[(1+(0,10)(5)]=2.250 ν.μ.

5.1.2. Ανατοκισμός

Ο απλός τόκος ως μέθοδος καθορισμού του κόστους δανείου, είναι κατάλληλος όταν όλο το δάνειο εξοφλείται μια καθορισμένη ημέρα. Όταν η εξόφληση του δανείου γίνεται σε διαφορετικές ημερομηνίες, τότε η μέθοδος του ανατοκισμού είναι η αρμόζουσα και μ' αυτήν ασχολούμαστε στη συνέχεια.

Ας υποθέσουμε έναν αποταμιευτή που ανοίγει έναν απλό λογαριασμό καταθέσεων με αρχικό κεφάλαιο 100.000 δραχμών και επιτόκιο ι=10%. Να βρεθεί το ποσό των χρημάτων που θα λάβει ο αποταμιευτής σε τρία χρόνια, αν υποθέσουμε σταθερό επιτόκιο και κεφαλαιοποίηση του τόκου.

Αν με X συμβολίζουμε το κεφάλαιο και με $i = 0, 1, 2, 3$ το χρόνο, στο τέλος κάθε χρόνου θα έχουμε:

X_1 = 100.000 + (100.000)(0,10) = 110.000 τον πρώτο χρόνο

X_2 = 110.000 + (110.000) (0,10)= 121.000 το δεύτερο χρόνο

X_3 = 121.000 + (121.000)(0,10) = 133.100 τον τρίτο χρόνο

Είναι φανερό ότι εδώ έχουμε μια γεωμετρική πρόοδο (ΓΠ), με πρώτο όρο α=110.000 και τελευταίο όρο $t = 133.100$. Ο λόγος αυτής της ΓΠ είναι ω=1,10. Η γενίκευση των παραπάνω, με αρχική κατάθεση X_0 και με επιτόκιο i , είναι:

$$X_1 = X_0(1+i)$$

$$X_2 = X_1(1+i)$$

$$= X_0(1+i)(1+i)$$

$$= X_0(1+i)^2$$

$$X_3 = X_2(1+i)$$

$$= X_0(1+i)(1+i)(1+i)$$

$$= X_0(1+i)^3$$

……………………..

$$X_t = X_0(1+i)^t$$

Η τελευταία σχέση, που είναι γνωστή ως **συνάρτηση συσσωρευμένης μεγέθυνσης** (compound growth function), μπορεί να νοηθεί και ως ο νιοστός όρος ΓΠ με:

$a = X_0,\ n = t+1,\ w = (1+i)$ και $t = X_t$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κάποιος δανείζεται 1.700 ν.μ. με επιτόκιο 12% για 7 έτη. Να βρεθεί το ποσό που θα πρέπει να επιστρέψει στο τέλος το έβδομου έτους, όταν ο τόκος είναι απλός και όταν ο τόκος ανατοκίζεται ετησίως.

ΛΥΣΗ

Με απλό τόκο, θα έχουμε: 1.700[1+(0,12)(7)]=3.128

Με ανατοκισμό, θα έχουμε: $1.700(1+0,12)^7$=3.757

5.1.3 Περιοδικός ανατοκισμός

Στο προηγούμενο παράδειγμα υποθέσαμε ότι το αρχικό κεφάλαιο ανατοκίζεται στο τέλος κάθε χρονιάς. Τι θα συνέβαινε αν ο ανατοκισμός γινόταν π.χ. στο τέλος κάθε εξαμήνου; Σ' αυτή την περίπτωση, θα έχουμε για το πρώτο εξάμηνο τόκο ίσο με $X_0(i/2)$ και έτσι στο τέλος του πρώτου εξαμήνου ο αποταμιευτής μπορεί να λάβει:

$$X_{(1/2)} = X_0 + X_0(i/2) = X_0(1+i/2)$$

Στο τέλος του δεύτερου εξαμήνου, δηλαδή στο τέλος του χρόνου, ο αποταμιευτής λαμβάνει:

$$X_{(1)} = X_{(1/2)}(1+\frac{i}{2}) = X_0(1+\frac{i}{2})^2$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το X_1 στο πρόβλημα του ασυνεχούς ανατοκισμού δεν είναι ίσο με το $X_{(1)}$, πράγματι $X_{(1)} > X_1$.

Αν, τώρα, το αρχικό κεφάλαιο ανατοκίζεται *η* φορές το χρόνο, τότε ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφεί στη γενικευμένη του μορφή:

$$X_t = X_0(1+\frac{i}{n})^{nt}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κάποιος δανείζεται 1.600 ν.μ. με επιτόκιο 11% για 3 έτη. Να βρεθεί το ποσό που θα πρέπει να επιστρέψει στο τέλος του τρίτου έτους, όταν ο τόκος είναι απλός και όταν ο τόκος ανατοκίζεται κάθε χρόνο, κάθε εξάμηνο, κάθε τετράμηνο και κάθε τρίμηνο.

ΛΥΣΗ

Απλός τόκος : 1.600[1+(0,11)(3)]=2.128

Ετήσιος ανατοκισμός : $1.600(1+0,11)^3$=2.188,2

Εξαμηνιαίος ανατοκισμός : $1.600(1+0,11/2)^{(2)(3)}$ = 2.206,4

Τετραμηνιαίος ανατοκισμός : $1.600(1+0,11/3)^{(3)(3)}$ = 2.212,4

Τριμηνιαίος ανατοκισμός : $1600(1+0,11/4)^{(4)(3)}$=2.215,6

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κάποιος δανείζεται 1.600 ν.μ. με επιτόκιο 11% για 3 έτη. Να βρεθεί το ποσό που θα πρέπει να επιστρέψει στο τέλος του τρίτου έτους, όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ

$$X_3 = 1.600 e^{(0,11)(3)} = 2.225,4 \text{ ν.μ.}$$

Με το διαρκή ανατοκισμό, όπως άλλωστε αναμενόταν, το ποσό που λαμβάνουμε είναι λίγο μεγαλύτερο από τα άλλα ήδη ανατοκισμού. Αυτό συμβαίνει επειδή η χρονική διάρκεια της κατάθεσης (στο παράδειγμα μας) είναι αρκετά μικρή. Όταν η χρονική διάρκεια της κατάθεσης αυξάνει, η διαφορά - μεταξύ του ασυνεχούς και του συνεχούς ανατοκισμού - μεγαλώνει ραγδαία.

5.2 Παρούσα αξία

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τη μελλοντική αξία μιας κατάθεσης με δεδομένα το επιτόκιο και το χρονικό διάστημα της κατάθεσης. Τώρα θα ασχοληθούμε με το ακριβώς αντίστροφο πρόβλημα. Δηλαδή με την **παρούσα αξία** (present value) ενός μελλοντικού ποσού. Με άλλα λόγια, στην παρούσα αξία (P) ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το ποσόν που πρέπει να κατατεθεί σήμερα, έτσι ώστε, με δεδομένο το επιτόκιο, να δώσει ένα καθορισμένο ποσό στο μέλλον.

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι στην περίπτωση του απλού τόκου, η παρούσα αξία ενός μελλοντικού ποσού υπολογίζεται από τον τύπο της μελλοντικής αξίας ενός ποσού, θα είναι:

$X_t = X_0(1+ti)$ θέτουμε $X_0 = P$ και $X_t = X$ και λαμβάνουμε

$$P = X(1+it)^{-1}$$

Ενώ για την περίπτωση του ανατοκισμού η εύρεσης της μελλοντικής αξίας ενός ποσού έχουμε από τον γνωστό τύπο:

$$X_t = X_0(1+i)^t$$

στον οποίο όπως και παραπάνω θέτουμε $X_0 = P$ και $X_t = X$ και λαμβάνουμε στην περίπτωση που το ποσό αναφέρεται σε μια χρονιά

$$P = X(1+i)^{-t}$$

αν πρόκειται για δύο χρόνια θα έχουμε:

$$X_2 = P(1+i)^2 \Leftrightarrow P = X_2(1+i)^{-2}$$

και γενικά

$$P = X(1+i)^{-t}$$

Για τον πολλαπλό ανατοκισμό, ο τύπος της παρούσας αξίας μετασχηματίζεται σε

$$P = X[1+(i/n)]^{-nt}$$

Ενώ για το συνεχή ανατοκισμό έχουμε:

$$P = Xe^{-it}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υποθέσουμε ένα ομόλογο με διάρκεια ζωής 5 χρόνια, ονομαστικής αξίας 5.000 δραχμών. Αν το επιτόκιο καταθέσεων είναι 9%, να βρεθεί η παρούσα αξία του ομόλογου, όταν:

(α) ο ανατοκισμός είναι ετήσιος

(β) ο ανατοκισμός είναι τετραμηνιαίος

(γ) ο ανατοκισμός είναι συνεχής

ΛΥΣΗ

(α) $P = X(1+i)^{-t} = 5.000/(1+0,09)^5 = 3.249,65$ δρχ.

(β) $P = X[1+(i/n)]^{-nt} = 5.000/(1+(0,09/3)^{(3)(5)} = 3.209,31$ δρχ.

(γ) $P = Xe^{-it} = 5.000\,e^{-(0,09)(5)} = 3.188,14$ δρχ.

5.3 Μέθοδοι ανατοκισμού με πολλαπλές πληρωμές

Πολλές από τις συναλλαγές που λαμβάνουν χώρα, απαιτούν μια ακολουθία ισόποσων πληρωμών που ονομάζονται **χρηματορροές** (annuities). Π.χ. κάποιος αγοράζει από μια ασφαλιστική εταιρεία ασφάλεια ζωής, επομένως καταβάλει σε τακτά χρονικά διαστήματα εισφορές, που στο τέλος κάποιας προσυμφωνημένης χρονικής περιόδου (συνήθως 20 με 25 χρόνια) παίρνει πίσω το σύνολο των καταβολών του επαυξημένες με τόκο. Η συνολική αξία αυτών των εισφορών μαζί με τον τόκο ονομάζεται **μελλοντική αξία χρηματορροής** (future value of annuity). Πολλοί δανείζονται προκειμένου ν' αγοράσουν κάποιο περιουσιακό στοιχείο και επιστρέφουν το ποσό που δανείστηκαν με καθορισμένες πληρωμές. Η αξία του δανείου ονομάζεται **παρούσα αξία χρηματορροής** (present value of an annuity).

5.3.1 Μελλοντική αξία χρηματορροής

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι μια χρηματορροή X καταβάλλεται κάθε χρόνο στην αρχή του χρόνου για t χρόνια με επιτόκιο i. Είναι επόμενο ότι η πρώτη πληρωμή ανατοκίζεται για t-1 χρόνια (δηλαδή για όλη τη χρονική διάρκεια της χρηματορροής). Η μελλοντική αξία (future value) της χρηματορροής αν αρχίσουμε από την τελευταία πληρωμή και τελειώσουμε με την πρώτη, θα είναι:

$$S = X + X(1-i) + X(1+i)^2 + \ldots + X(1+i)^{t-1}$$

όπου S η μελλοντική αξία της χρηματορροής και X το καταβαλόμενο ποσό των χρημάτων. Παρατηρούμε ότι έχουμε μια γεωμετρική πρόοδο, με πρώτο όρο X και λόγο $(1+i)$. Επομένως, το άθροισμα της είναι:

$$S = \frac{X\left[1-(1+i)^t\right]}{1-(1+i)} = X\left[\frac{1-(1+i)^t}{-i}\right] = X\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

$$S=\frac{X\left[1-(1+i)^{t}\right]}{1-(1+i)}=X\left[\frac{1-(1+i)^{t}}{-i}\right]=X\left[\frac{(1+i)^{t}-1}{i}\right]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί η μελλοντική αξία χρηματορροής ύψους 1.000 που κατατίθεται στην αρχή κάθε έτους για 4 έτη, όταν το επιτόκιο είναι 10% και ανατοκίζεται ετησίως.

ΛΥΣΗ

Ας δούμε αναλυτικά κάθε κατάθεση, αρχής γενομένης την 1/1/2000. Έτσι λοιπόν έχουμε:

1/1/2000	κατάθεση
1/1/2001	κερδίζει απλό τόκο
1/1/2002	κερδίζει κεφαλοποιημένο τόκο
1/1/2003	κερδίζει κεφαλοποιημένο τόκο

άρα η πρώτη κατάθεση κερδίζει τόκο για 3 χρόνια. Η δεύτερη κατάθεση, που γίνεται στις 1/1/2001, κερδίζει τόκο για 2 χρόνια. Η τρίτη κατάθεση κερδίζει τόκο για ένα χρόνο και η τελευταία κατάθεση δεν κερδίζει τόκο. Επομένως έχουμε:

πρώτη κατάθεση	$(1.000)(1+0,10)^{3}=1.331$
δεύτερη κατάθεση	$(1.000)(1+0,10)^{2}=1.210$
τρίτη κατάθεση	$(1.000)(1+0,10)^{1}=1.100$
τέταρτη κατάθεση	$(1.000)(1+0,10)^{0}=1.000$

Το συνολικό ποσό θα είναι 4.641 ν.μ.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με τον τύπο της μελλοντικής αξίας χρηματορροής. Άρα έχουμε:

$$S=X\left[\frac{(1+i)^{t}}{i}\right]=1.000\left[\frac{(1+0,10)^{4}-1}{0,10}\right]=4.641\text{ν.μ.}$$

Αν πρόκειται για πολλαπλούς ανατοκισμούς και πολλαπλές καταθέσεις το χρόνο, τότε ο τύπος της μελλοντικής αξίας χρηματορροής γράφεται:

$$S = X\left[\frac{\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}-1}{i}\right]$$

Ενώ αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, τότε:

$$S = \frac{X\left(e^{it}-1\right)}{i}$$

5.3.2 Παρούσα αξία χρηματορροής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στην κατοχή μας κάποιο περιουσιακό στοιχείο (ομόλογα, μετοχές, διαμερίσματα κλπ.). Ας υποθέσουμε ότι το περιουσιακό στοιχείο δίνει ένα σταθερό εισόδημα 100.000 ν.μ. κάθε χρόνο. Η διάρκεια ωφέλιμης ζωής — δηλαδή το χρονικό διάστημα στο οποίο έχουμε **ροή εισοδήματος** (income stream) — του περιουσιακού στοιχείου είναι 4 χρόνια. Αν, τώρα, θέλουμε να βρούμε τη συνολική παρούσα αξία, δηλαδή τις παρούσες αξίες όλης της τετραετίας (A), με δεδομένο επιτόκιο (i=10%), τότε θα έχουμε:

$$P_1 = X(1+i)^{-1} = 100.000(1+0,10)^{-1} = 90.9091$$

$$P_2 = X(1+i)^{-2} = 100.000(1+0,10)^{-2} = 82.6446$$

$$P_3 = X(1+i)^{-3} = 100.000(1+0,10)^{-3} = 75.1315$$

$$P_4 = X(1+i)^{-4} = 100.000(1+0,10)^{-4} = 68.3013$$

Το άθροισμα αυτών των ποσών ισούται με Α =316.9865 ν.μ.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε την παραπάνω διαδικασία σαν μια γεωμετρική πρόοδο και εφαρμόσουμε τον τύπο του αθροίσματος γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a = X(1+i)^{-1}$ και λόγο $w=(1+i)^{-1}$, τότε θα έχουμε:

$$A = \frac{X(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-t}]}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{X[1-(1+i)^{-t}]}{(1+i)[1-(1+i)^{-1}]} = \frac{X[1-(1+i)^{-t}]}{(1+i)-1} = X\left[\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right]$$

αν αντικαταστήσουμε

$$A = X\left[\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right] = 100.000\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-4}}{0{,}10}\right] = 316.9865 \text{ν.μ.}$$

Είναι φανερό ότι, αν η διάρκεια της ωφέλιμης ζωής ενός περιουσιακού στοιχείου είναι άπειρη $(t \to \infty)$ και ο λόγος της ΓΠ που σχηματίζεται είναι μικρότερος της μονάδας, τότε έχουμε σύγκλιση της παρούσας αξίας στο όριο:

$$A = X\left(\frac{1}{i}\right)$$

Η παραπάνω σχέση είναι περισσότερο θεωρητική και συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ του επιτοκίου και της παρούσας αξίας ενός περιουσιακού στοιχείου. Άμεση εφαρμογή αυτού του τύπου γίνεται στα **διηνεκή ομόλογα** (consol bonds), δηλαδή στα ομόλογα που αποδίδουν ετησίως ένα ποσό *X* εσαεί. Στην προκειμένη περίπτωση, λέμε ποιο ποσό θα πρέπει να κατατεθεί σε τραπεζικό λογαριασμό με δεδομένο επιτόκιο, ώστε κάθε χρόνο, για πάντα, να δίνει *X* εισόδημα[1]. Την ίδια μέθοδο ανάλυσης την εφαρμόζουμε και σε άλλα περιουσιακά στοιχεία που αποδίδουν εισόδημα, όπως π.χ. οικόπεδα, σπίτια κλπ. Έτσι μπορούμε να έχουμε μια πρώτη χοντρική προσέγγιση της αξίας τους χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο.

[1] Η Μεγάλη Βρετανία είναι από τις χώρες όπου τα ομόλογα αυτού του είδους παρουσιάζονται με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί η παρούσα αξία ενός περιουσιακού στοιχείου που δίνει στον κάτοχο του 100,000 ν.μ. κάθε χρονιά για τα επόμενα 10 χρόνια, όταν το επιτόκιο είναι 5%.

ΛΥΣΗ

$$A = 100.000[(1-(1+0,05)^{-10}]/0,05 = 772.173 \text{ ν.μ.}$$

5.4 Τα απλά μαθηματικά των επενδυτικών αποφάσεων

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε δύο μεθόδους που εφαρμόζονται για την επιλογή του πλέον κερδοφόρου επενδυτικού σχεδίου. Αν υποθέσουμε ότι οι επιχειρήσεις προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους, τότε τέτοιες αποφάσεις πρέπει να βασίζονται στην σύγκριση κόστους-ωφελιμότητας, που συνδέονται με την υλοποίηση του επενδυτικού έργου. Η πρώτη μέθοδος, της **καθαρής παρούσας αξίας** (net present value), συγκρίνει το κόστος απόκτησης ενός π.χ. μηχανήματος με την παρούσα αξία των μελλοντικών του αποδόσεων. Η δεύτερη μέθοδος, της **οριακής απόδοσης του κεφαλαίου** (internal rate of return) συγκρίνει το κόστος δανεισμού (επιτόκιο) που χρεώνουν οι τράπεζες με την ποσοστιαία απόδοση αυτής της επένδυσης.

5.4.1 Ανάλυση κόστους-ωφελιμότητας: Καθαρή παρούσα αξία

Η καθαρή παρούσα αξία (ΚΠΑ) ενός επενδυτικού σχεδίου είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ της παρούσας αξίας των καθαρών εισροών εισοδήματος (Xj),j = 1,2, ..., η, και του αρχικού κόστους (C). Για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας των διαφόρων εισοδηματικών εισροών, χρησιμοποιείται το επιτόκιο της αγοράς (ί) το οποίο, σύμφωνα με τη θεωρία, είναι ίσο με το οριακό κόστος του κεφαλαίου της επιχείρησης.

Αν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο παραμένει σταθερό σε όλη τη χρονική διάρκεια της μελέτης, η ΚΠΑ ενός κεφαλαιουχικού αγαθού είναι ίση:

$$\text{ΚΠΑ} = X_1/(1+i) + X_2\,(1+i)^2 + X_3\,/\,(1+i)^3 + \ldots + X_n\,/\,(1+i)^n - C$$

$$\text{ΚΠΑ} = \Sigma X_j/(1+i)^j - C$$

Οι επιχειρήσεις συχνά έχουν να επιλέξουν μεταξύ εναλλακτικών επενδυτικών σχεδίων. Το επενδυτικό σχέδιο που επιλέγεται είναι αυτό με τη μεγαλύτερη ΚΠΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια επιχείρηση έχει δύο εναλλακτικά επενδυτικά προγράμματα, που και τα δύο ως αρχικό κόστος έχουν C = 95 ν.μ. και διάρκεια ζωής 6 χρόνια. Ο αναλυτής ετοίμασε τον ακόλουθο πίνακα με τις ετήσιες καθαρές αποδόσεις του κάθε προγράμματος.

Έτη	*1*	2	*3*	*4*	5	*6*
Καθαρές αποδόσεις Α	36	31	28	20	11	9
Καθαρές αποδόσεις Β	32	30	28	26	24	19

Αν το i = 12% και παραμένει σταθερό για όλα τα χρόνια, ποιο από τα δύο προγράμματα θα πρέπει να επιλέξει η επιχείρηση;

ΛΥΣΗ

Πρόγραμμα Α

$$\text{ΚΠΑ}=36/(1+0,12)+31/(1+0,12)^2+28/(1+0,12)^3+20/(1+0,12)^4+$$
$$11/(1+0,12)^5+9/(1+0,12)^6-95 \approx 5,29$$

Πρόγραμμα Β

$$\text{ΚΠΑ}=32/(1+0,12)+30/(1+0,12)^2+28/(1+0,12)^3+26/(1+0,12)^4$$

$+24/(1+0,12)^5 + 19/(1+0,12)^6 - 95 \approx 17,18$

Από την τιμή των ΚΠΑ των δύο προγραμμάτων γίνεται φανερό ότι το πρόγραμμα *Β* είναι πιο κερδοφόρο από το πρόγραμμα *Α*, υποθέτοντας, βέβαια, ότι όλοι οι άλλοι παράγοντες είναι σταθεροί και κοινοί και για τα δύο προγράμματα.

5.4.2 Οριακή αποδοτικότητα του κεφαλαίου

Στην ανάλυση των επενδύσεων η έννοια της χρηματορροής αντικαθίσταται από την έννοια των προσδοκώμενων ή, καλύτερα, προβλεπόμενων καθαρών κερδών, η έννοια της παρούσας αξίας της χρηματορροής αντικαθίσταται από την έννοια του κόστους του επενδυτικού αγαθού, ενώ το επιτόκιο που εξισώνει το κόστος του επενδυτικού αγαθού με την προεξοφλημένη αξία της χρηματορροής αντικαθίσταται από την **οριακή αποδοτικότητα του κεφαλαίου** (marginal efficiency of capital). Οι αποφάσεις για επενδύσεις στηρίζονται στηρίζονται σε μια σύγκριση ανάμεσα στο κόστος του κεφαλαιουχικού αγαθού με το (μελλοντικό) εισόδημα που αναμένεται να δημιουργήσει η επένδυση στο μέλλον, αξιολογημένο σήμερα. Η σύγκριση αυτή γίνεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης:

$$C = X_1/(1+r) + X_2/(1+r)^2 + X_3/(1+r)^3 + \ldots + X_n/(1+r)^n + S/(1+i)^n$$

Όπου

$C =$ η τιμή του κεφαλαιουχικού αγαθού

$X_j =$ τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη από την επένδυση

$r =$ το προεξοφλητικό επιτόκιο ή η οριακή αποδοτικότητα του κεφαλαίου (ΟΑΚ)

$S =$ η **υπολειμματική αξία** (scrap value)του κεφαλαιουχικού αγαθού

Είναι φανερό, ότι το να λύσουμε ως προς την ΟΑΚ κάθε άλλο παρά εύκολη υπόθεση είναι, ειδικά αν αναφερόμαστε σε πολλά χρόνια. Ένας εύκολος τρόπος λύσης είναι αυτός της **δοκιμής και λάθους** (trial and error), σύμφωνα με την οποία δίνουμε διαδοχικές τιμές στο r έτσι ώστε τα δύο σκέλη της εξίσωσης να είναι ίσα. Φυσικά το r μπορεί να προσεγγιστεί με την ακρίβεια που επιθυμούμε.

Έχοντας υπολογίσει την ΟΑΚ, μπορούμε να βρούμε αν η επένδυση είναι συμφέρουσα ή όχι. Με άλλα λόγια, αν είναι προτιμότερο για την επιχείρηση να τοποθετήσει τα χρήματά της σε έναν τραπεζικό λογαριασμό προθεσμίας και να λαμβάνει χωρίς κανέναν κίνδυνο το ετήσιο τόκο, ή να τα επενδύσει σε πραγματικό κεφάλαιο (μηχανήματα και εγκαταστάσεις). Για τις αποφάσεις των επιχειρήσεων που επενδύουν τα δικά τους κεφάλαια θα ισχύουν:

- Αν $r > i$, τα προβλεπόμενα καθαρά κέρδη της επένδυσης είναι υψηλότερα από τον τόκο καταθέσεων και επομένως η επένδυση (αν όλοι οι άλλοι παράγοντες είναι σταθεροί) είναι συμφέρουσα.
- Αν $r < i$, η επένδυση αποφέρει καθαρά κέρδη μικρότερα από τον τόκο καταθέσεων και επομένως η επένδυση δεν είναι συμφέρουσα.
- Αν $r = i$, ο επιχειρηματίας είναι αδιάφορος για το αν θα επενδύσει ή θα καταθέσει τα χρήματά του.

Ενώ αν οι επιχειρήσεις δανείζονται τα χρήματα που πρόκειται να επενδύσουν, τότε συγκρίνουν την ΟΑΚ με το επιτόκιο δανεισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι ένα μηχάνημα κοστίζει 100 ν.μ., έχει διάρκεια ζωής 5 χρόνια και υπολειμματική αξία 40 ν.μ. Αν το μηχάνημα τεθεί σε λειτουργία, προβλέπεται ότι θα δημιουργεί ετήσια καθαρά κέρδη ύψους 30 ν.μ. Να υπολογιστεί η οριακή αποδότικότητα της επένδυσης.

ΛΥΣΗ

$$100 = 30/(1+r) + 30/(1+r)^2 + 30/(1+r)^3 + 30/(1+r)^4 + 30/(1+r)^5 + 40/(1+r)^5 = 22{,}29\%$$

6

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

6.1 Το υπόδειγμα του Domar για το δημόσιο χρέος

Όταν οι κρατικές δαπάνες υπερβαίνουν τα φορολογικά και άλλα έσοδα που μπορεί να έχει ένα κράτος, τότε λέμε ότι υπάρχει έλλειμμα στον κρατικό προϋπολογισμό. Το κράτος, στην περίπτωση αυτή, προσφεύγει στο δανεισμό (κυρίως μέσω της έκδοσης κρατικών ομολόγων), έτσι ώστε να συμπληρώσει τα χρήματα που του υπολείπονται. Το έλλειμμα, με άλλα λόγια, μπορεί να θεωρηθεί ροή, όπως π.χ. η κατανάλωση ή το εισόδημα. Η συσσώρευση ελλειμμάτων οδηγεί στο δημόσιο χρέος που θεωρείται απόθεμα, όπως π.χ. το απόθεμα κεφαλαίου. Η κυβέρνηση (όπως και ο καθένας που δανείζεται) πρέπει να πληρώνει τόκους για την «εξυπηρέτηση» του χρέους της.

Οι τόκοι πληρώνονται από τα φορολογικά και άλλα έσοδα της κυβέρνησης, εφόσον επαρκούν. Διαφορετικά, ο επιπρόσθετος δανεισμός γίνεται αναγκαίος. Όσο η κυβέρνηση δανείζεται για να καλύψει τα ελλείμματα τόσο το δημόσιο χρέος αυξάνει σε απόλυτα μεγέθη, και τόσο το μέρος των φορολογικών εσόδων που διατίθεται στην αποπληρωμή των τόκων αυξάνει.

Ο Domar (1948) υποστηρίζει ότι το απόλυτο μέγεθος του δημόσιου χρέους και η απαιτούμενη φορολογία για την πληρωμή των τόκων δεν έχουν και τόσο μεγάλη σημασία, όσο το μέγεθος τους σε σχέση με το εθνικό εισόδημα. Αν το εισόδημα αυξάνεται με υψηλούς ρυθμούς, τότε η υψηλή φορολογία γίνεται αποδεκτή από τους πολίτες πολλές φορές αδιαμαρτύρητα, επειδή και το εισόδημα τους στο μεταξύ έχει αυξηθεί. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στην παρουσίαση του υποδείγματος Domar είναι:

Y = εθνικό εισόδημα

D = δημόσιο χρέος

i = επιτόκιο αποπληρωμής του χρέους

U = Di = τόκοι δημόσιου χρέους

T = Y+U = φορολογήσιμο εθνικό εισόδημα

U/T = ποσοστό φορολογίας

Y' = Y(1 - U/T) καθαρό εισόδημα μετά την πληρωμή των φόρων

A = εθνικό εισόδημα στην αρχή της περιόδου

α = μερίδιο του εθνικού εισοδήματος που δανείζεται η κυβέρνηση

t = χρόνος

O Domar διακρίνει τρεις περιπτώσεις:

1. Το εθνικό εισόδημα είναι στάσιμο, δηλαδή Y = A, τότε

$$D = D_0 + \int_0^t aYdt = D_0 + aAt$$

Συμπεριλαμβάνουμε το μερίδιο του δημόσιου χρέους στο εθνικό εισόδημα και έχουμε:

$$\frac{D}{Y} = \frac{D_0}{A} + at \quad \text{και} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{D}{Y} = \infty$$

Ενώ ο λόγος των τόκων του δημόσιου χρέους ως προς το φορολογήσιμο εισόδημα είναι:

$$\frac{U}{T} = \frac{Di}{Y + D_i} = \frac{1}{(Y / D_i) + 1} \quad \text{και} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{U}{T} = 1$$

Δηλαδή οι τόκοι του δημόσιου χρέους μελλοντικά θα απορροφήσουν ολόκληρο το φορολογήσιμο εισόδημα. Συνεπώς, το καθαρό εισόδημα τείνει προς το μηδέν:

$$\lim_{t \to \infty} Y' = Y(1 - \lim_{t \to \infty} \frac{U}{T}) = 0$$

2. Το εθνικό εισόδημα αυξάνει γραμμικά $Y = a + bt$

$$D = D_0 + a\int_0^t (A+bt)dt = D_0 + at\left(A + \frac{b}{2}t\right)$$

και ο λόγος του δημόσιου χρέους ως προς το εισόδημα

$$\frac{D}{Y} = \frac{D_0 + at(A+b/2)t)}{a+bt}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D}{Y} = \infty \text{ και } \lim_{t\to\infty}\frac{U}{T} = 1$$

Τέλος, το καθαρό εισόδημα γράφεται ως:

$$Y' = Y(1-U/T) = \frac{Y^2}{Y+U} \text{ και } \lim_{t\to\infty} Y' = \frac{2b}{ai}$$

3. Το εθνικό εισόδημα αυξάνει εκθετικά με ετήσιο ρυθμό r

$$Y_t = Y_0 e^{rt} = Ae^{rt}$$

$$D = D_0 + \int_0^t aYdt = D_0 + a\int_0^t Ae^{rt}dt = D_0 + aA\frac{1}{r}e^{rt} - aA = D_0 + aA\frac{1}{r}(e' - 1)$$

Αν τώρα πάρουμε το λόγο του δημόσιου χρέους προς το εθνικό εισόδημα έχουμε:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{D_0}{Y_t} + \frac{aA\frac{1}{r}(e^{rt}-1)}{Y_t} = \frac{D_0}{Ae^{rt}} + \frac{a\frac{1}{r}(e^{rt}-1)}{e^{rt}} = \frac{D_0}{Ae^{rt}} + \frac{a}{r}(1-e^{-rt})$$

Για να μάθουμε τι θα συμβεί στο μέλλον, θέτουμε $t \to \infty$ και παίρνουμε:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D_t}{Y_t} = \lim_{t\to\infty}\frac{D_0}{Ae^{rt}} + \lim_{t\to\infty}\frac{a}{r}(1-e^{-rt}) = 0 + \frac{a}{r} = \frac{a}{r}$$

Επομένως, αν το εισόδημα αυξάνει με ένα σταθερό ετήσιο ρυθμό, τότε το δημόσιο χρέος προσεγγίζει ένα όριο που εξαρτάται από το ρυθμό της σταθερής αύξησης του εθνικού εισοδήματος και από το ποσοστό του εθνικού εισοδήματος που δανείζεται η κυβέρνηση.

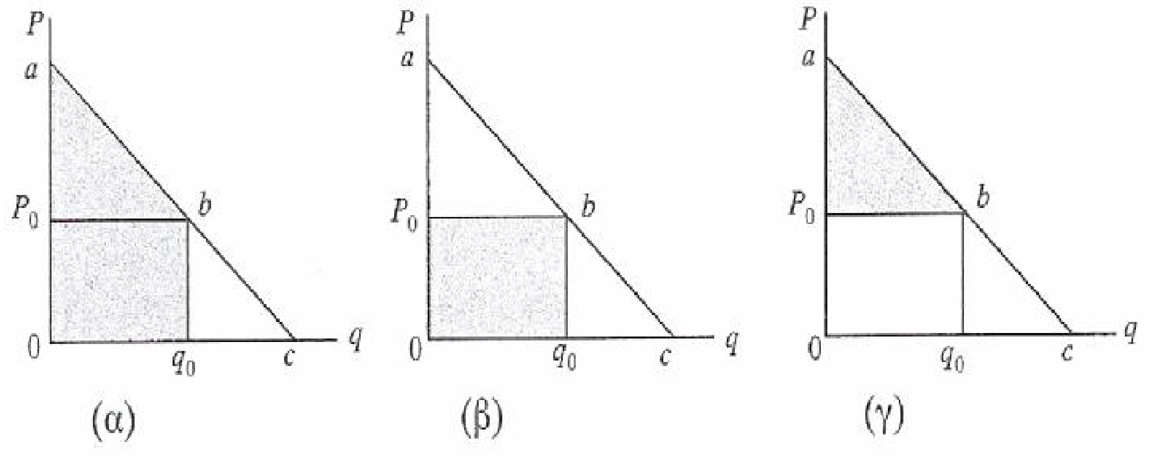
Επίσης, θα έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U}{T}=\frac{i}{(r/a)+i}$$

6.2 Πλεόνασμα του καταναλωτή

Ήδη μας είναι γνωστή η νεοκλασική έννοια της ζήτησης, σύμφωνα με την οποία υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στην τιμή ενός αγαθού (ή μιας υπηρεσίας) και στη ζητούμενη ποσότητα. Ο καταναλωτής -υποθέτοντας όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές — ζητάει μεγαλύτερη ποσότητα για χαμηλότερες τιμές και μικρότερη ποσότητα για υψηλότερες τιμές.

Όταν όμως ο καταναλωτής αγοράζει μια ποσότητας ενός αγαθού, πληρώνει την τιμή που αντιστοιχεί στην ποσότητα q_0. Έτσι, λοιπόν, ενώ ο καταναλωτής θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει υψηλότερες τιμές για ποσότητες μικρότερες του q_0, ωστόσο χρεώνεται την ίδια τιμή για ποσότητες μικρότερες από q_0. Αυτό το υποθετικό πλεονέκτημα που αποκτά ο καταναλωτής στην οικονομική ανάλυση λέγεται **πλεόνασμα τον καταναλωτή** (consumer's surplus). Η συζήτηση μας παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Στο Σχήμα 1(α) παρουσιάζουμε τις συνολικές δαπάνες που οι καταναλωτές θα ήταν διατεθειμένοι να αναλάβουν για την απόκτηση της ποσότητας q_0. Με άλλα λόγια, η περιοχή $oabq_0$ παριστάνει τις συνολικές δαπάνες των καταναλωτών, αν οι παραγωγοί μπορούσαν να χρεώσουν την κάθε μονάδα που παράγουν στην τιμή που ο κάθε καταναλωτής θα μπορούσε και θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει. Στην πραγματικότητα όμως, αυτό που συμβαίνει είναι ότι η τιμή πώλησης του αγαθού είναι η ίδια για όλους τους αγοραστές, επομένως οι συνολικές πληρωμές θα είναι ίσες με op_0bq_0 στο Σχήμα 1(β). Τέλος στο Σχήμα 1(γ) έχουμε τη διαφορά μεταξύ των δαπανών που οι καταναλωτές θα μπορούσαν να είχαν αναλάβει και τις πραγματικές δαπάνες. Η διαφορά αυτή είναι ίση με τη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια που περιγράφεται από το τρίγωνο p_0ab και λέγεται πλεόνασμα του καταναλωτή (ΠΚ).

Η παρουσίαση του θέματος μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού. Έτσι, λοιπόν, μπορούμε να γράψουμε:

$$\text{ΠΚ} = \int_0^{q_0} f(q)dq - \int_0^{q_0} p_0 dq = \int_0^{q_0} f(q)dq - [p_0 q]_0^{q_0} = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Η συνάρτηση ζήτησης για κάποιο αγαθό είναι $p = 8(65 - q^2)$ ν.μ. για κάθε μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή για την τιμητών 320 ν.μ.

ΛΥΣΗ

Η ποσότητα που πωλείται στην τιμή των 320 ν.μ. είναι: $320=520-8q^2$ και $q=5$. Η αρνητική τιμή απορρίπτεται. Επομένως, το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι:

$$\text{ΠΚ} = \int_0^5 (65 - q^2)dq - \int_0^5 p dq = 8\left[65q - \frac{1}{3}q^3\right]_0^5 - [pq]_0^5 \approx 667 \text{ ν.μ.}$$

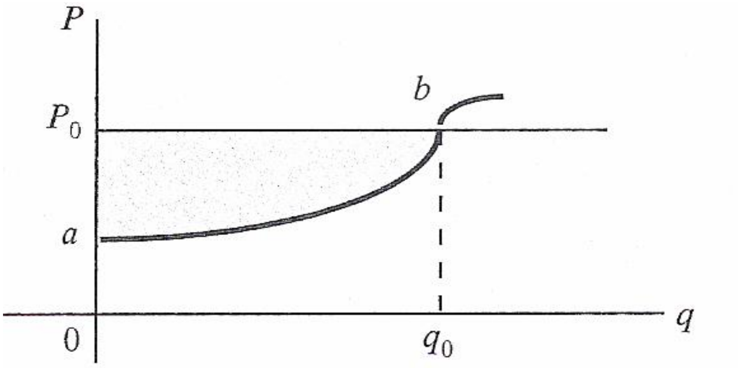
6.3 Πλεόνασμα του παραγωγού

Όπως ο καταναλωτής έτσι και ο παραγωγός έχει ένα πλεόνασμα, που ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της τιμής ισορροπίας και της τιμής στην οποία θα ήταν πρόθυμος να διαθέσει το προϊόν του. Γεωμετρικά το **πλεόνασμα του παραγωγού** (producer's surplus) απεικονίζεται στο Σχήμα 2.

Το πλεόνασμα του παραγωγού (ΠΠ) ισούται με τη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια, δηλαδή aP_0b, και υπολογίζεται ως:

$$\Pi\Pi = pq \int_0^{q_0} S(q)dq$$

όπου $S(q)$ είναι η συνάρτηση προσφοράς.



Σχήμα 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Αν η συνάρτηση προσφοράς είναι $S(q)=q^2+10$ και η τιμή ισορροπίας είναι p=19, να υπολογιστεί το ΠΠ.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε ως προς την ποσότητα ισορροπίας και παίρνουμε $q^2+10=19$ και $q=\pm 3$. Η αρνητική ποσότητα απορρίπτεται. Επομένως, έχουμε:

$$\Pi\Pi = (19)(3) - \int_0^3 (q^2+10)dq = 57 - \left[\frac{q^3}{3} + 10q\right]_0^3 = 57 - (39-0) = 18 \text{ ν.μ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Η συνάρτηση ζήτησης για κάποιο αγαθό είναι $q = a - bp$, η δε συνάρτηση προσφοράς του είναι $q = c + dp$, όπου α, b, c, d είναι θετικές σταθερές $c < a$. Να εκφράσετε αλγεβρικά το πλεόνασμα του παραγωγού.

ΛΥΣΗ

Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας, όπως έχουμε δείξει προηγουμένως, θα είναι:

$p_e = (a-c)/(b+d)$ και $q_e = (cb+ad)/(b+d)$

$$\Pi\Pi = \frac{a-c}{b+d}\frac{cb+ad}{b+d} + \frac{1}{2}(cb+ad)\frac{cb-ad+2cd}{d(b+d)^2} = \frac{1}{2}\frac{(cb+ad)^2}{d(b+d)^2}$$

$$\Pi\Pi = p_e q_e - \int_0^{q_e}\left(\frac{q-c}{d}\right)dq = p_e q_e - \left[\frac{q^2}{2d} - \frac{c}{d}q\right]_0^{q_e} = p_e q_e - \frac{q_e^2}{2d} - \frac{c}{d}q_e - 0 \text{ ή}$$

$$\Pi\Pi = \frac{a-c}{b+d}\frac{cb+ad}{b+d} + \frac{1}{2}(cb+ad)\frac{cb-ad+2cd}{d(b+d)^2} = \frac{1}{2}\frac{(cb+ad)^2}{d(b+d)^2}$$

6.4 Παρούσα αξία χρηματορροής

Μια άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή του ορισμένου ολοκληρώματος είναι ο υπολογισμός της παρούσας αξίας ενός περιουσιακού στοιχείου που δημιουργεί εισόδημα με έναν ορισμένο ρυθμό (επιτόκιο) σε μια καθορισμένη χρονική περίοδο. Όπως γνωρίζουμε, η παρούσα αξία ενός περιουσιακού στοιχείου αναφέρεται στο χρηματικό ποσό που χρειάζεται να κατατεθεί σήμερα σε ένα λογαριασμό, ώστε να δημιουργήσει το ίδιο εισόδημα που δημιουργεί (ή καλύτερα αναμένεται να δημιουργήσει) το περιουσιακό στοιχείο στην ίδια χρονική περίοδο. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι στο Κεφάλαιο 6 αναλύσαμε διεξοδικά την έννοια της παρούσης αξίας περιουσιακού στοιχείου και ο αναγνώστης παραπέμπεται σ' αυτό για περισσότερες λεπτομέρειες. Στο Κεφάλαιο 6, διχοτομήσαμε το χρόνο σε ασυνεχή και συνεχή και οδηγηθήκαμε σε δύο τύπους για την εύρεση της παρούσας αξίας.

$P = F(l+r)^{-t}$ για ασυνεχή χρόνο

$P = Fe^{-it}$ για συνεχή χρόνο

όπου P = παρούσα αξία

F = μελλοντική αξία

i = επιτόκιο

t = χρόνος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πολλές μελλοντικές χρηματορροές σε διαφορετικές μελλοντικές χρονικές περιόδους. Το ερώτημα που τίθεται είναι: Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία πολλών τέτοιων μελλοντικών αξιών; Υποθέτουμε συνεχή χρηματορροή στο χρονικό διάστημα από t=0 μέχρι t=T, όπου t αναφέρεται σε χρόνια και ο τόκος κεφαλαιοποιείται συνεχώς με ρυθμό ίσο με i. Διαμερίζουμε ολόκληρο το χρονικό διάστημα [0, T] σε η ίσα διαστήματα μεγέθους Δt ετών. Υποθέτουμε ακόμη ότι οι πληρωμές που γίνονται σε χρόνο t γίνονται με έναν τρόπο που προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $f(t)$. Παίρνουμε τώρα ένα τυχαίο υποδιάστημα $[t_j, t_{j+1}]$ με αφετηρία το t. Τότε το εισόδημα που αντιστοιχεί σ’ αυτό το υποδιάστημα είναι ίσο με $f(t_j)$ Δt. Π.χ. αν $f(t)$=1.200 και Δt=1 εβδομάδα, τότε το σύνολο των πληρωμών θα είναι (1.200)(1/52); 23 ν.μ. Η παρούσα αξία αυτών των πληρωμών προσεγγιστικά ισούται με $e^{-rt_j}\Delta t$. Παίρνουμε τώρα όλο το κλειστό διάστημα [0,T] και έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n} f(t_j)e^{-rt_j\Delta t} = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

Όμως, όσο το n αυξάνει χωρίς όριο, δηλαδή $n \to \infty$, τόσο το $\Delta t \to \infty$. Άρα έχουμε:

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)e^{-rt_j\Delta t} = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθεί η παρούσα αξία των 270 ν.μ. που καταβάλλονται κάθε χρόνο για 5 χρόνια, όταν το επιτόκιο είναι 12% και ο ανατοκισμός είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστούμε στον τύπο της παρούσας αξίας και παίρνουμε:

$$P = \int_0^5 270 e^{-0,12t} dt = \left[-270 \frac{1}{-0,12} e^{-0,12t} \right]_0^5 = 2.250(1 - e^{-0,6}) = 1.015 \text{ ν.μ.}$$

6.4.1 Παρούσα αξία περιουσιακού στοιχείου για $f \to \infty$

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την παρούσα αξία περιουσιακού στοιχείου για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Γνωρίζουμε όμως ότι μπορεί να μην υπάρχει χρονικός περιορισμός σε ό,τι αφορά το χρονικό διάστημα της χρηματορροής. Όταν η παρούσα αξία ενός περιουσιακού στοιχείου υπολογίζεται για απεριόριστο χρονικό διάστημα, χρησιμοποιούμε τον τύπο του γενικευμένου ολοκληρώματος. Αν π.χ. η χρηματορροή που λαμβάνεται είναι σταθερή και ίση με ποσό F, τότε έχουμε:

$$P = \int_0^\infty A e^{-it} dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^n A e^{-it} dt = \lim_{n \to \infty} \left[-\frac{A}{r} e^{-it} \right]_0^n = \frac{A}{i} = \text{ετήσιο εισόδημα / επιτόκιο.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι ένας οργανισμός αποφασίζει να χρηματοδοτήσει τη βιβλιοθήκη του πανεπιστημίου μας με το ποσό των 28.000 εκατομμύρια € το χρόνο, στο διηνεκές. Υποθέτουμε επίσης ότι το επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με 14%. Πόσα χρήματα θα πρέπει να καταθέσει ο οργανισμός αυτός σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό έτσι ώστε να πραγματοποιήσει το στόχο του, με την προϋπόθεση ότι ο ανατοκισμός είναι συνεχής;

ΛΥΣΗ

$$P=\int_0^\infty 28e^{-0,14t}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^n 28e^{-0,14t}dt=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{28}{-0,14}e^{-0,14t}\right]_0^n=200 \text{ εκατ.€}$$

6.5 Μελλοντική αξία χρηματορροής

Γνωρίζουμε ότι η μελλοντική αξία F κατάθεσης με συνεχή κεφαλαιοποίηση και επιτόκιο ι είναι $F=Pe^{-it}$. Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι οι καταθέσεις γίνονται συνεχώς για ένα χρονικό διάστημα T, η μελλοντική αξία των καταθέσεων υπολογίζεται ως εξής: Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα που είναι ανοιχτός ο λογαριασμός $0\leq t\leq T$ σε n ίσα υποδιαστήματα, το καθένα από τα οποία έχει χρονική διάρκεια Δt (=μήνες, εβδομάδες, μέρες κλπ.). Αν t_j συμβολίζει ένα τυχαίο χρονικό υποδιάστημα, τότε ισχύει:

Ποσό κατάθεσης=(P)(Δt)

Αν τώρα υποθέσουμε ότι όλα τα χρήματα κατατέθηκαν στο χρονικό διάστημα t_j τότε οι καταθέσεις θα μείνουν στο λογαριασμό για το διάστημα $T-t_j$ χρόνια και επομένως η μελλοντική τους αξία που πραγματοποιήθηκε το χρόνο t_j είναι:

$$F_j=Pe^{i(T-t_j)}\Delta t$$

Αν τώρα δεν ενδιαφερόμαστε για τη μελλοντική αξία μιας και μόνο κατάθεσης στο χρόνο t_j, αλλά ενδιαφερόμαστε για τη μελλοντική αξία του αθροίσματος των καταθέσεων που πραγματοποιήθηκαν στη χρονική περίοδο [0,T], την οποία διαιρέσαμε σε π ίσα υποδιαστήματα με μέγεθος Δt το καθένα, τότε έχουμε:

$$F\approx\sum_{j=1}^{n}Pe^{i(T-t_j)}\Delta t$$

Παρατηρούμε ότι η μελλοντική αξία υπολογίζεται προσεγγιστικά και όχι ακριβώς, επειδή κάθε φορά έχουμε καταθέσεις (P)(Δt) χρημάτων· π.χ. αν P=2.920 ν.μ. και Δt=ημέρα, τότε (2.920)(1/365)=8 ν.μ. την ημέρα και όχι συνέχεια και αδιάλειπτα. Η ακρίβεια της προσέγγισης εξαρτάται από το μέγεθος του υποδιαστήματος. Δηλαδή όσο μικρότερο είναι το υποδιάστημα τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $n \to \infty$ επομένως $\Delta t \to 0$, τότε έχουμε:

$$F \approx \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Pe^{i(T-t_j)} \Delta t = \int_0^T Pe^{i(T-t)} dt$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι σε ένα λογαριασμό γίνονται κάθε χρονιά καταθέσεις ύψους 975 ν.μ. Ο ανατοκισμός είναι συνεχής και το ετήσιο επιτόκιο 15%. Ποια θα είναι η μελλοντική αξία της κατάθεσης σε 6 χρόνια από σήμερα;

ΛΥΣΗ

$$F = \int_0^6 975e^{0,15(6-t)} dt = 975\int_0^6 e^{0,9-0,15t} dt = 975e^{0,9} \int_0^6 e^{-0,15} dt \text{ ή}$$

$$F = \left[\frac{975}{-0,15} e^{0,9} e^{-0,15t} \right]_0^8 = 9.487,42 \text{ ν.μ.}$$

7

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Όπως τονίσαμε, η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι δύο αντίστροφες διαδικασίες. Έτσι, αν γνωρίζουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, μπορούμε μέσω της ολοκλήρωσης να υπολογίσουμε την αρχική συνάρτηση. Αυτή η σχέση, που υπάρχει ανάμεσα στην παράγωγο μιας συνάρτησης και στην ολοκλήρωση της, μας βοηθά στη λύση πολλών προβλημάτων που παρουσιάζονται στα οικονομικά. Αν τα οικονομικά φαινόμενα μπορούν να διατυπωθούν με συναρτήσεις, τότε ασφαλώς μπορούμε να βρούμε τους ρυθμούς μεταβολής των συναρτήσεων, οι οποίες ονομάζονται οριακές μεταβολές, για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Όπως επίσης, αν γνωρίζουμε τους ρυθμούς μεταβολής, μπορούμε να καταλήξουμε στην αρχική συνάρτηση.

7.1 Μικροοικονομικές εφαρμογές

Στα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζουμε μια σειρά από χρήσιμες εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος στη λειτουργία των επιχειρήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ας υποθέσουμε ότι σε μια βιομηχανία το οριακό κόστος παραγωγής χ ποσότητας είναι $3x^2$-30x+200 ν.μ. Το συνολικό κόστος παραγωγής 3 μονάδων είναι 800 ν.μ. Ποιο θα είναι το συνολικό κόστος παραγωγής των πρώτων 6 μονάδων;

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι το οριακό κόστος είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης του συνολικού κόστους παραγωγής. Συνεπώς, το συνολικό κόστος παραγωγής είναι η αντιπαράγωγος του οριακού κόστους. Στο παράδειγμα μας έχουμε:

$$C(x)=\int C'(x)dx=\int(3x^2-30x+200)dx = x3 -15x^2 +200x+c$$

Η τιμή της σταθεράς υπολογίζεται ως εξής: γνωρίζουμε ότι, όταν η βιομηχανία παράγει 3 μονάδες, το συνολικό κόστος είναι 800ν.μ. Επομένως, η σταθερά είναι:

$800=3^3 -15(3)^2 + 200(3)+c$ και $c = 308$ ν.μ

Το συνολικό κόστος παραγωγής για $x = 6$ είναι:

$$C(6) = 6^3 -15(6)^2 +200(6)+308 \text{ και } C = 1.184 \text{ ν.μ}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Ο ρυθμός απόσβεσης ενός μηχανήματος είναι 220(t-10) δραχμές το χρόνο. Αν το μηχάνημα αγοραστεί καινούργιο στην τιμή των 120.000 δραχμών, ποια θα είναι η αξία του σε 10 χρόνια;

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση απόσβεσης του μηχανήματος είναι:

$$\int 220(t-10)dt = 110t^2 - 2.200t+c$$

θέτοντας τη συνάρτηση απόσβεσης (για $t = 0$) ίση με την τιμή αγοράς του μηχανήματος, υπολογίζουμε τη σταθερά ποσότητα:

$$120.000 = 110(0)^2 - 2.200(0)+c \text{ και } c = 120.000$$

Επομένως για $t = 10$, έχουμε:

$$110(10)^2- 2.200(10)+120.000=109.000 \text{ ν.μ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Η οριακή πρόσοδος *(MR)* μιας επιχείρησης είναι $MR = 1 - 3x - 4x^2$.

Να υπολογιστούν (α) η συνολική πρόσοδος *R* (β) η συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

(α) $R=\int MRdx=\int(10\text{-}3x\text{-}4x^2)dx=10x\text{-}\ 3/2x^2\ -4/3\ x^2+c$

Αν η επιχείρηση δεν παράγει τίποτε, τότε τα συνολικά της έσοδα θα είναι μηδέν, άρα και η σταθερά c = 0.

(β) Γνωρίζουμε ότι $R = px$, επομένως p = *Rlx.* Άρα, η μέση πρόσοδος *(AR)* και η ζήτηση είναι ταυτόσημες συναρτήσεις. Επομένως,

$$R/x=AR=p=10-(3/2)x-(4/3)x^2.$$

7.2 Η συνάρτηση κατανάλωσης

Οι δαπάνες κατανάλωσης αποτελούν το μεγαλύτερο συστατικό στοιχείο του εθνικού εισοδήματος (65-85%). Το γεγονός αυτό κάνει τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανάλωσης, σε εθνικό ή ακόμη περιφερειακό επίπεδο, ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στο σχεδιασμό αποτελεσματικής οικονομικής πολιτικής. Δύο είναι οι βασικές συνιστώσες της απλής συνάρτησης κατανάλωσης: η οριακή ροπή για κατανάλωση και ο σταθερός όρος. Η οριακή ροπή για κατανάλωση είναι βασική παράμετρος για τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστικών επιδράσεων που ασκούν οι επενδύσεις

7.3 Απόθεμα κεφαλαίου και επενδύσεις

Είναι γνωστό ότι οι μεταβολές στις καθαρές επενδύσεις (οι ακαθάριστες επενδύσεις μείον τις αποσβέσεις) οδηγούν σε μεταβολές στο απόθεμα κεφαλαίου (capital stock) μιας οικονομίας, δηλαδή αυξάνουν τη διαθέσιμη ποσότητα μηχανημάτων, πρώτων υλών, κτιρίων κλπ. Με άλλα λόγια, το απόθεμα κεφαλαίου είναι η συσσώρευση καθαρών επενδύσεων. Αν υποθέσουμε ότι η επένδυση είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου, τότε και οι μεταβολές στο απόθεμα κεφαλαίου θα είναι συνεχείς. Αν λοιπόν εκφράσουμε το απόθεμα κεφαλαίου ως μια συνάρτηση του χρόνου $\boldsymbol{K(t)}$, τότε ο ρυθμός μεταβολής του θα ισούται με την καθαρή επένδυση /(ί). Επομένως, μπορούμε να γράψουμε: $\boldsymbol{dK}$

dK/dt = I(t) και $K(t) = \int I(t)dt = K(t)+c = K(t) + K_0$

όπου c είναι το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου K_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι καθαρές επενδύσεις μιας οικονομίας περιγράφονται από την εξίσωση $I(t) = 90t^{4/5}$. Το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου είναι 100. Να βρεθεί η συνάρτηση του αποθέματος κεφαλαίου, όπως επίσης και το απόθεμα κεφαλαίου στο χρόνο 10;

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση αποθέματος κεφαλαίου είναι:

$K(t) = \int I(t)dt = \int 90t^{4/5}\, dt = 50\, t^{9/5} + 100$

Για t = 10, το απόθεμα κεφαλαίου είναι:

$K(10) = 50(10)t^{9/5} + 100 = 3.255$ ν.μ.

<u>8</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

1. Ο μέσος όρος των ημερήσιων πωλήσεων ενός αυτόματου πωλητή αναψυκτικών με μορφή πίνακα είναι:

κόστος κουτιού σε euro πρωινές πωλήσεις   Απογευματινές πωλήσεις

πρώτη μηχανή $\begin{bmatrix} 11 & 20 & 30 \\ 15 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 15 \\ 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

ονομάζουμε Μ τον πίνακα των πρωινών πωλήσεων και Ν τον πίνακα των απογευματινών. Να βρείτε τον πίνακα $M+N$ και να εξηγήσετε τις πληροφορίες που μας δίνει.

ΛΥΣΗ

Είναι $M=\begin{bmatrix} 11 & 20 & 30 \\ 15 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ και $N=\begin{bmatrix} 8 & 8 & 15 \\ 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

άρα $M+N=\begin{bmatrix} 11 & 20 & 30 \\ 15 & 8 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 8 & 8 & 15 \\ 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 & 28 & 45 \\ 28 & 17 & 16 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας $M+N$ μας πληροφορεί ποιες είναι οι συνολικές ημερήσιες πωλήσεις αναψυκτικών και για τις δύο μηχανές. Επίσης μπορούμε να βρούμε και το συνολικό κόστος σε euro των αναψυκτικών που πουλήθηκαν από τις μηχανές.

Το κόστος για το ά είδος αναψυκτικού είναι $(19+28)100$ για το β΄ είδος είναι $(28+17)80$ και για το γ΄ είδος είναι $(45+16)60$. Το συνολικό κόστους είναι :

$$(19+28)100+(28+17)80+(45+16)60=47*100+45*80+61*60=11{,}960$$

2. Μια βιομηχανία που κατασκευάζει τηλεοράσεις, βίντεο κάμερες έχει δύο εργοστάσια παραγωγής Π_1 και Π_2. Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή δίνεται (σε εκατοντάδες euro) στους παρακάτω πίνακες.

$$\Pi_1 = \begin{array}{cc} \text{Τηλ. Βίντ. Καμ.} & \\ \begin{bmatrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{εργασία} \end{array} \end{array}$$

$$\Pi_2 = \begin{array}{cc} \text{Τηλ. Βίντ. Καμ.} & \\ \begin{bmatrix} 38 & 30 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array} \end{array}$$

Να βρείτε τον πίνακα ½ και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

ΛΥΣΗ

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \begin{array}{c} \text{Τηλ. Βιντ. Καμ.} \\ \begin{bmatrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 38 & 30 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 68 & 58 & 82 \\ 48 & 60 & 74 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array}$$

Οπότε ½(Π_1+Π_2): Τηλ. Βιντ. Καμ.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 68 & 58 & 82 \\ 48 & 60 & 74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 29 & 41 \\ 24 & 30 & 37 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array}$$

Ο τελευταίος πίνακας δίνει το μέσο κόστος κάθε συσκευής και στα δύο εργοστάσια.

3. Μια βιομηχανία έχει τέσσερα εργοστάσια παραγωγής Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, καθένα από τα οποία παράγει δύο προϊόντα E_1 και E_2. Το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής σε μονάδες προϊόντων δίνεται στον επόμενο πίνακα:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \end{array} & \\ A= & \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array} \end{array}$$

α)Να βρείτε το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής αν αυτή αυξηθεί κατά 10%

β) Να βρείτε το σύνολο της παραγωγής ανά προϊόν σε 5 μήνες αν υποτεθεί ότι τα εργοστάσια δούλεψαν 2 μήνες με το προηγούμενο επίπεδο και 3 μήνες με το νέο επίπεδο παραγωγής

(1 μήνας = 30ημέρες)

ΛΥΣΗ

α) Αν η παραγωγή αυξηθεί κατά 10% τότε το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής θα δίνεται από τον πίνακα Α.

$$B=1{,}1A=1{,}1\begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}1*200 & 1{,}1*180 & 1{,}1*140 & 1{,}1*60 \\ 1{,}1*80 & 1{,}1*40 & 1{,}1*120 & 1{,}1*120 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix}$$

β) Αφού το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής για το αρχικό επίπεδο παραγωγής δίνεται από τον πίνακα Α, το μηνιαίο επίπεδο παραγωγής δίνεται από τον πίνακα $30*A$. Για τους δύο πρώτους μήνες το επίπεδο παραγωγής θα δίνεται από τον πίνακα $2.(30.A)$.

Για τους άλλους τρεις μήνες που τα εργοστάσια δούλεψαν με το νέο επίπεδο παραγωγής, το μηνιαίο επίπεδο παραγωγής δίνεται από τον πίνακα 30.B και για τους τρεις μήνες δίνεται από τον πίνακα $3(30.B) = 90 * B$.

Έτσι το σύνολο της παραγωγής ανά προϊόν για τους 5 μήνες θα δίνεται από τον πίνακα

$$60A + 90B =$$

$$60.\begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} + 90\begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60.200 & 60.180 & 60.14 & 60.60 \\ 60.80 & 60.40 & 60.120 & 60.120 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 90.220 & 90.198 & 90.154 & 90.66 \\ 90.88 & 90.44 & 90.132 & 90.132 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 12000 & 10800 & 8400 & 3600 \\ 12720 & 6360 & 19080 & 19080 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 19800 & 17820 & 13860 & 5940 \\ 7920 & 3960 & 11880 & 11880 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 31800 & 28620 & 22080 & 9540 \\ 12720 & 6360 & 19080 & 19080 \end{bmatrix}$$

4. Μια εταιρεία πουλάει υπολογιστές, εκτυπωτές και dvd-rom σε Αθήνα Θεσσαλονίκη , Πάτρα και Ηράκλειο. Οι πωλήσεις τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο παρουσιάζουν την εξής κίνηση:

	Σεπτέμβριος Αθήνα Θεσ/κη Πάτρα Ηράκλειο	Οκτώβριος Αθήνα Θεσ/κη Πάτρα Ηράκλειο
PC υπολογιστές	20 15 10 10	30 21 12 13
Εκτυπωτές	27 13 9 11	25 17 10 10
dvd	120 90 70 70	150 100 80 75

Για τους δύο αυτούς μήνες οι συνολικές πωλήσεις της εταιρείας ήταν οι εξής:

	Αθήνα Θες/κη Πάτρα Ηράκλειο
PC υπολογιστές	(20+30) (15+21) (10+12) (10+13)
Εκτυπωτές	(27+25) (13+170) (9+100) (11+10)
dvd	(120+150) (90+100) (70+80) (70+75)

Να βρεθούν οι συνολικές πωλήσεις για τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο.

ΛΥΣΗ:

Για το Σεπτέμβριο $$A = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 & 10 \\ 27 & 13 & 9 & 11 \\ 120 & 90 & 70 & 70 \end{bmatrix}$$

Για τον Οκτώβριο $$B = \begin{bmatrix} 30 & 21 & 12 & 13 \\ 25 & 17 & 10 & 10 \\ 150 & 100 & 80 & 75 \end{bmatrix}$$

Και για τις συνολικές πωλήσεις

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 20+30 & 15+21 & 10+12 & 10+13 \\ 27+25 & 13+17 & 9+10 & 11+10 \\ 120+150 & 90+100 & 70+80 & 70+75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 36 & 22 & 23 \\ 52 & 30 & 19 & 21 \\ 270 & 190 & 150 & 145 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Γ λέγεται άθροισμα των πινάκων αυτών και συμβολίζεται με Α+Β, δηλαδή Γ=Α+Β.

5. Έστω Α ο 2*3 πίνακας που περιγράφει τις τιμές πώλησης τριών ηλεκτρικών ειδών μιας βιομηχανίας σε δύο υποκαταστήματα:

Κουζίνες ψυγεία Τηλεοράσεις

$$A = \begin{bmatrix} 80.000 & 120.000 & 140.000 \\ 75.000 & 110.000 & 120.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} {}^{1}0\Upsilon pokat\acute{a}s thma \\ 20\Upsilon pokat\acute{a}s thma \end{matrix}$$

Κατά την περίοδο των εκπτώσεων, ο βιομήχανος προτίθεται να κάνει έκπτωση 10% στα προϊόντα του. Να βρείτε τις νέες τιμές πώλησης των προϊόντων.

ΛΥΣΗ

Οι νέες τιμές πρέπει να διαμορφωθούν στο 90% των προηγούμενων. Οι νέες τιμές πώλησης θα προκύψουν, αν πολλαπλασιάσουμε τις παλιές τιμές με $0{,}9$.

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0{,}9*80.000 & 0{,}9*120.000 & 0{,}9*140.000 \\ 0{,}9*75.000 & 0{,}9*110.000 & 0{,}9*120.000 \end{bmatrix}$$

ή

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 72.000 & 108.000 & 126.000 \\ 67.500 & 99.000 & 108.000 \end{bmatrix}$$

6. Τα στοιχεία για τις αμοιβές και τον αριθμό των εργατών σε δύο οικοδομικές εταιρίες Α και Β έχουν με μορφή πινάκων ως εξής:

Αριθμός εργατών

Ειδικευμένοι Ανειδίκευτοι Εβδομαδιαίες αποδοχές σε εκ. €

$$\begin{array}{c} B \\ A \end{array} \begin{bmatrix} 60 & 75 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r} \mathit{eidikeuménoi} \\ \mathit{aneidíkeutoi} \end{array} \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού των πινάκων να υπολογίσετε το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρίες.

ΛΥΣΗ:

Το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρίες είναι:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Ειδικ.} & \text{Ανειδ.} & \\ \text{Αν } K = & \begin{bmatrix} 60 & 75 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} & & \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{cc} \text{Αποδοχές} & \\ \Lambda = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{E}idik. \\ \mathrm{A}neid. \end{array} \end{array}$$

Συνολικές αποδοχές

$$\text{Τότε} \qquad K * \Lambda \qquad \begin{bmatrix} 60 & 75 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.50 + 75.40 \\ 30.50 + 60.40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 3900 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

7. Μία βιομηχανία επίπλων κουζίνας έχει δύο εργοστάσια Ε1 και Ε2. Οι πίνακες Μ και Ν δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού σε χρηματικές μονάδες αντιστοίχως.

Κατασκευή Βάψιμο Συσκευασία

Αν

$$M = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1,5 & 1,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Πάγκος} \\ \text{Καρέκλα} \\ \text{τραπέζι} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} E_1 & E2 \end{array} \\ N = & \begin{bmatrix} 500 & 550 \\ 600 & 700 \\ 350 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Κατασκευή} \\ \text{Βάψιμο} \\ \text{Συσκευασία} \end{array}$$

α) Να βρείτε τον πίνακα Μ*Ν και να εξηγήσετε τι εκφράζει β) Ποιο είναι το κόστος εργασίας για τη παραγωγή μιας καρέκλας στο εργοστάσιο E_1 και ενός πάγκου στο εργοστάσιο E_2;

ΛΥΣΗ

Είναι:

$$M*N=\begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1,5 & 1,2 & 0,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 500 & 550 \\ 600 & 700 \\ 350 & 400 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0,6*500+0,6*600+0,2*350 & 0,6*550+0,6*700+0,2*400 \\ 1*500+0,9*600+0,3*350 & 1*550+0,9*700+0,3*400 \\ 1,5*500+1,2*600+0,4*350 & 1,5*550+1,2*700+0,4*400 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix} E_1 & \quad E_2 \end{matrix} & \\ =\begin{bmatrix} 730 & 830 \\ 1145 & 1300 \\ 1610 & 1825 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Κόστος πάγκου} \\ \text{Κόστος καρέκλας} \\ \text{Κόστος τραπεζιού} \end{matrix} \end{array}$$

Ο πίνακας Μ*Ν εκφράζει το συνολικό κόστος παραγωγής για κάθε ένα από τα τρία είδη παραγωγής και στα δύο εργοστάσια.

β) Το κόστος εργασίας για τη παραγωγή μιας καρέκλας στο εργοστάσιο E_1 είναι 1145 χρηματικές μονάδες και το κόστος παραγωγής ενός πάγκου στο εργοστάσιο E_2 είναι 830 χρηματικές μονάδες.

<u>9</u>

ΕΙΔΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ

9.1 Η ουρά συστήματος αναμονής Μ/Μ/1

Το απλούστερο και συγχρόνως το πιο συχνά εμφανιζόμενο στη πράξη σύστημα εξυπηρέτησης είναι το σύστημα ουράς Μ/Μ/1. Εδώ οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ, οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. η δε κοινή τους κατανομή είναι εκθετική με παράμετρο m. Υπάρχει ένα μόνο σημείο εξυπηρέτησης στο σύστημα, δεν υπάρχει κανένας φυσικός περιορισμός στο σχηματισμό της ουράς, οι δε πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά τους με την έννοια ότι όποιος έρχεται πρώτος εξυπηρετείται πρώτος (δηλαδή στην ουσία έχουμε μια ουρά Μ/Μ/1/∞/FIFO).

Πρακτικός μας στόχος κατά την μελέτη ενός συστήματος ουράς είναι συνήθως να βελτιώσουμε το σύστημα, διαφοροποιώντας το κατά έναν κατάλληλο τρόπο. Για παράδειγμα, ο ρυθμός αφίξεων μπορεί να είναι τόσο μεγάλος ώστε να δημιουργούνται τεράστιες ουρές, έχοντας σαν αποτέλεσμα έναν μεγάλο χρόνο αναμονής ανά πελάτη ή ο ρυθμός άφιξης μπορεί να είναι αρκετά μικρός ώστε οι μονάδες εξυπηρέτησης (π.χ. ταμεία) να είναι άχρηστες για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα χρόνου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ας υποθέσουμε οι πελάτες καταφθάνουν στη θυρίδα μιας τράπεζας, για α καταθέσουν χρήματα, με ρυθμό 4 ανά ώρα. Ο μέσος χρόνος που απαιτείται για μια τέτοια κατάθεση είναι 6 λεπτά και είναι εκθετικά κατανεμημένος.

(α) Υπολογίστε το μέσο μήκος της ουράς στη θυρίδα.

(β) Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 5 πελάτες στην ουρά, στην θυρίδα;

(γ) Κατά την διάρκεια μιας διακοπής του υπαλλήλου της θυρίδας για φαγητό ο ρυθμός άφιξης γίνεται 8 ανά ώρα. Πόσος πρέπει να γίνει ο χρόνος εξυπηρέτησης, έτσι ώστε η πιθανότητα να περιμένει κάποιος στην ουρά για περισσότερο από 12 λεπτά, να είναι (το πολύ) 0,01;

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για ένα σύστημα ουράς M/M/1 με:

$$l = 4 \text{ πελάτες / ώρα} \quad \text{και} \quad m = 10 \text{ πελάτες / ώρα}$$

(κάθε πελάτης χρειάζεται 6 λεπτά για την κατάθεση, άρα σε μια ώρα εξυπηρέτησης 10 πελάτες).

Άρα $r = \frac{l}{m} = \frac{4}{10} = 0,4$.

(α) Το μέσο μήκος της ουράς στην θυρίδα είναι ίσο:

$$L_q = \frac{4^2}{10(10-4)} = 0,267 \text{ πελάτες}$$

(β) Η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 5 πελάτες στην ουρά = η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 6 πελάτες στο σύστημα:

$$P\{Q \geq 6\} = p^6 = 0,4^6 = 0,004$$

όπου $Q =$ αριθμός των πελατών στο σύστημα).

(γ) $l = 8$ πελάτες / ώρα και ακόμα 12 λεπτά = 1/5 ώρες.

Η πιθανότητα να περιμένει κάποιος στην ουρά για περισσότερο από 12 λεπτά ή 1/5 ώρες είναι ίση με:

$$P\left\{T_q \geq \frac{1}{5}\right\} = 1 - P\left\{T_q \leq \frac{1}{5}\right\} = 1 - (1 - pe^{\frac{-m(1-r)}{5}}) = pe^{\frac{-m(1-r)}{5}}$$

(όπου T_q ο χρόνος που περιμένει κάποιος στην ουρά), και αυτή η πιθανότητα θα πρέπει να είναι το πολύ 0,01, άρα:

$$pe^{\frac{-m(1-r)}{5}} \leq 0,01 \Rightarrow ...m \geq l - 5\ln\frac{1}{4} = 26$$

Άρα ο χρόνος εξυπηρέτησης πρέπει να είναι $\frac{60}{26}$ λεπτά περίπου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε ένα super-market ο ρυθμός με τον οποίο φτάνουν οι πελάτες είναι 5 κάθε 30 λεπτά. Ο μέσος χρόνος που ξοδεύει κάθε πελάτης στο ταμείο του super-market είναι 4,5 λεπτά και είναι εκθετικά κατανεμημένος. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ταμείο στο super-market.

(α) Πόση ώρα αναμένεται να περιμένει ο πελάτης μέχρι ότου εξυπηρετηθεί από τον / την ταμία;

(β) Ποια η πιθανότητα να περιμένουν τουλάχιστον 6 άτομα στην ουρά του ταμείου του super-market;

(γ) Ποια η πιθανότητα ο / η ταμίας να είναι απασχολημένος /η;

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για ένα σύστημα ουράς M//M/1 με:

$l = 5$πελάτες / 30 λεπτά = 1/6 πελάτες / λεπτό και $\frac{1}{m} = 4,5 = \frac{9}{2}$λεπτά

δηλαδή $m = \frac{2}{9}$πελάτες / λεπτό.

Άρα : $r = \frac{l}{m} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{3}{4}$.

(α) Η ώρα που αναμένεται να περιμένει ο πελάτης μέχρι ότου εξυπηρετηθεί από τον / την ταμία είναι ίση με τον μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{l}{m(m-l)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}(\frac{2}{9}-\frac{1}{6})} = 13,5 \text{ λεπτά.}$$

(β) Η πιθανότητα να περιμένουν τουλάχιστον 6 άτομα στην ουρά του ταμείου του super-market, είναι ίση με το να περιμένουν τουλάχιστον 7 άτομα στο super-market να εξυπηρετηθούν (συμπεριλαμβανομένου και αυτού που εξυπηρετείται)

$$P\{Q \geq 7\} = p^7 = (\frac{3}{4})^7 = 0,133.$$

(γ) Η πιθανότητα ο / η ταμίας να είναι απασχολημένος είναι ίση με την πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης στο super-market (ένας τουλάχιστον πελάτης να θέλει να εξυπηρετηθεί από τον ταμία) = 1- πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο super-market=

$$=1-p_0 = 1-(1-p) = p = \frac{3}{4} = 0,75$$

9.2 Γραμμικός προγραμματισμός

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια μαθηματική μέθοδος για τη λύση προβλημάτων στα οποία προσπαθούμε να βρούμε την άριστη χρησιμοποίηση των περιορισμένων πόρων μιας επιχείρησης, για να επιτύχουμε τη μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους, μέσα στα όρια ορισμένων περιορισμών και δυνατοτήτων της επιχείρησης.

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια ειδική μορφή του μαθηματικού προγραμματισμού. Ο όρος γραμμικός χρησιμοποιείται, γιατί όλες οι μαθηματικές σχέσεις του προβλήματος είναι γραμμικές.

Γραμμική είναι η σχέση κατά την οποία. Αν πολλαπλασιάσουμε π.χ. τον αριθμό των υπαλλήλων (ή των μηχανών) μιας επιχείρησης με έναν αριθμό, η παραγωγή των αγαθών της επιχείρησης θα πολλαπλασιασθεί με τον αριθμό αυτό.

Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση, που είναι το αντικείμενο της *μεγιστοποίησης του κέρδους ή ελαχιστοποίησης του κόστους*. Η συνάρτηση αυτή καλείται *αντικειμενική συνάρτηση*.

Για την αντιμετώπιση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού ακολουθούμε δύο στάδια:

α) κατασκευάζουμε το μαθηματικό μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού για το συγκεκριμένο πρόβλημα

β) λύνουμε το πρόβλημα με μια από τις μεθόδους που θα επιλέξουμε

Διαμόρφωση προβλημάτων σε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια επιχείρηση κατασκευάζει δυο είδη προϊόντων, ξύλινα τραπέζια και ξύλινες ντουλάπες. Κάθε τραπέζι απαιτεί 2 ώρες εργασίας του τμήματος Α και 1 ώρα εργασίας του τμήματος Β. Κάθε ντουλάπα χρειάζεται 3 ώρες εργασίας του τμήματος Α και 4 ώρες του τμήματος Β.

Η δυνατότητα εργασίας κάθε ημέρας είναι 10 ώρες του τμήματος Α και 12 ώρες του τμήματος Β.

Το κέρδος από κάθε τραπέζι είναι 7.000 euro και από κάθε ντουλάπα είναι 10.000.

Ζητείται να βρεθεί πόσα τραπέζια και πόσες ντουλάπες πρέπει να κατασκευάζει κάθε ημέρα η παραπάνω επιχείρηση, για να έχει το μέγιστο κέρδος (να κατασκευασθεί το μαθηματικό μοντέλο).

ΛΥΣΗ

Σκοπός μας είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους της επιχείρησης. Συμβολίζουμε με x_1 τον αριθμό των τραπεζιών και με x_2 των αριθμό τον αριθμό των ντουλαπών.

Το κέρδος από τις πωλήσεις των τραπεζιών είναι $7.000x_1$ και από τις πωλήσεις των ντουλαπών είναι $10.000x_2$. Επομένως, το συνολικό κέρδος θα είναι:

$$z = 7.000x_1 + 10.000x_2$$

Αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση, της οποίας θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος. Στη συνέχεια βρίσκουμε τους περιορισμούς ως εξής:

Για την κατασκευή x_1 τραπεζιών χρειάζονται $2x_1$ ώρες εργασίας και για την κατασκευή x_2 ντουλαπών χρειάζονται $3x_2$ ώρες εργασίας του τμήματος Α. Η δυνατότητα όμως εργασίας κάθε ημέρας τμήματος Α είναι 10 ώρες. Επομένως, η μαθηματική διατύπωση του πρώτου περιορισμού θα είναι:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 10$$

Για την κατασκευή x_1 τραπεζιών απαιτούνται $1x_1$ ώρες εργασίες και την κατασκευή x_2 ντουλαπών απαιτούνται $4x_2$ ώρες εργασίας του τμήματος Β. Η δυνατότητα όμως εργασίας κάθε ημέρας του τμήματος Β είναι 12 ώρες. Έτσι έχουμε τη διατύπωση του δεύτερου περιορισμού:

$$1x_2 + 4x_2 \leq 12$$

Επίσης, θα πρέπει $x_1 \leq 0$ και $x_2 \leq 0$.

Με την ερμηνεία που δώσαμε παραπάνω καταλήγουμε στην εξής διατύπωση του προβλήματος:

$$\max z = 7.000x_1 + 10.000x_2$$

με τους περιορισμούς:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 10$$
$$1x_1 + 4x_2 \leq 12$$

και τον περιορισμό όχι αρνητικές τιμές: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Γραφική ή διαγραμματική μέθοδος λύσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει δύο τύπους καπέλων. Για την κατασκευή του τύπου Α χρειάζονται 15 λεπτά για κόψιμο και 10 λεπτά για ράψιμο. Για την κατασκευή του τύπου Β χρειάζονται 8 λεπτά για κόψιμο και 8 λεπτά για ράψιμο. Ο διαθέσιμος χρόνος είναι 3 ώρες και 20 λεπτά για κόψιμο καπέλου και 4 ώρες για το ράψιμο. Το κέρδος της βιοτεχνίας είναι 0,5 της χρηματικής για κάθε καπέλο τύπου Α και 0,6 της χρηματικής μονάδας για κάθε καπέλο τύπου Β.

Ζητείται: Να κατασκευασθεί το μαθηματικό μοντέλο μεγιστοποίησης του κέρδους και στη συνέχεια με τη γραφική μέθοδο να βρεθεί ο αριθμός των καπέλων που πρέπει να κατασκευασθούν από κάθε τύπο, ώστε η επιχείρηση να μεγιστοποιήσει το κέρδος.

ΛΥΣΗ

1. Κατασκευάζουμε πρώτα το μαθηματικό μοντέλο. Συμβολίζουμε με x_1 τον αριθμό των καπέλων τύπου Α και με x_2 τον αριθμό των καπέλων τύπου Β, που πρέπει να κατασκευασθούν.

Το συνολικό κέρδος από την πώληση αυτών δίνεται από την αντικειμενική συνάρτηση:

$$z = 0.5x_1 + 0.6x_2$$

Η συνάρτηση z στη διαδικασία μεγιστοποίησης της περιορίζεται από συνθήκες που επιβάλλει το πρόβλημα, δηλαδή από περιορισμούς.

Έτσι για το χρόνο που διατίθεται για το κόψιμο των καπέλων υπάρχει ο περιορισμός ότι δεν μπορεί να είναι και για τους δύο τύπους καπέλων μεγαλύτερος από 3 ώρες και 20 λεπτά ή μεγαλύτερους από 200 λεπτά.

Επομένως, έχουμε:

$$5x_1 + 8x_2 \le 200$$

Ο δεύτερος περιορισμός προκύπτει από τον χρόνο που απαιτείται για το ράψιμο των καπέλων Α και Β τύπου και που δεν μπορεί να υπερβεί τις 4 ώρες ή τα 240 λεπτά.

Επομένως έχουμε τον δεύτερο περιορισμό:

$$10x_1 + 8x_2 \le 240$$

Επίσης, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι οι τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές x_1 και x_2 θα πρέπει να είναι όχι αρνητικές. Έτσι, το πρόβλημα να βρεθεί ο αριθμός των καπέλων που πρέπει να κατασκευασθούν από κάθε τύπο, ώστε η βιοτεχνία να μεγιστοποιήσει το κέρδος της, διαμορφώνεται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\max z = 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2$$

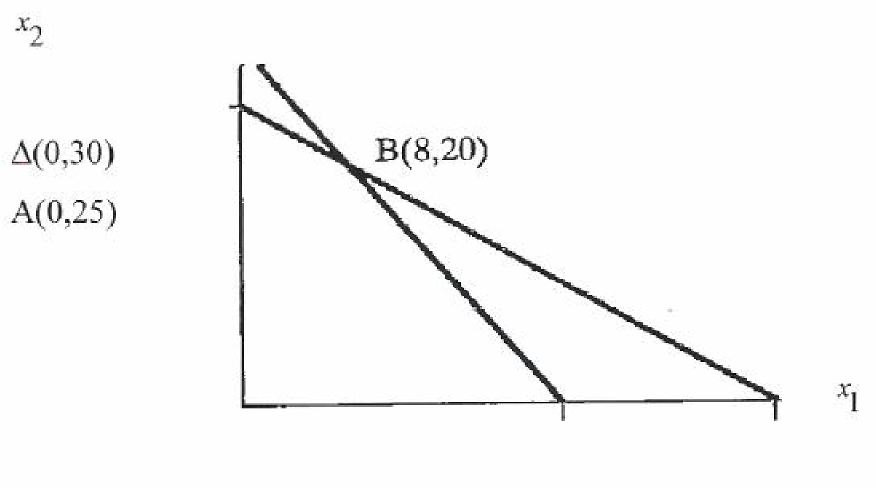
με τους περιορισμούς:

$$5x_1 + 8x_2 \leq 200$$
$$10x_1 + 8x_2 \leq 240$$

και ακόμη:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

2. Ο υπολογισμός του αριθμού των καπέλων που προκύπτει να κατασκευασθούν από κάθε τύπο, για να έχει η επιχείρηση το μέγιστο κέρδος, με τη γραφική μέθοδο έχει ως εξής:



σχήμα 9.1

α) Επιλύουμε γραφικά την ανισότητα:

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 40 \quad 5x_1 + 8x_2 \leq 200$

Για το σκοπό αυτό βρίσκουμε την ευθεία που απεικονίζει τη εξίσωση:

$$5x_1 + 8x_2 = 200$$

Για $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 25$.

Για $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 40$.

Άρα, η ευθεία ορίζεται από τα σημεία Α(0,25) και Ε(40,0) (σχήμα 9.1).

Η ευθεία ΑΕ χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα περιέχει την αρχή των αξόνων Ο(0,0). Τα σημεία της ευθείας ΑΕ ικανοποιούν την εξίσωση $5x_1+8x_2=200$. Θεωρούμε το σημείο (0,0), δηλ. την αρχή των αξόνων. Παρατηρούμε ότι: $5*0+8*0=0<200$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων (0,0) ικανοποιεί την ανισότητα $5x_1+8x_2=200$.

Επομένως, τα σημεία του ημιεπιπέδου που βρίσκονται προς το μέρος της αρχής των αξόνων ικανοποιούν την ανισότητα $5x_1+8x_2<200$, αφού το τυχόν σημείο (0,0) την επαληθεύει.

Επομένως, το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την ανισότητα $5x_1+8x_2\le 200$ περιλαμβάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $5x_1+8x_2=200$, καθώς και τα σημεία της ευθείας αυτής.

β) Επιλύουμε γραφικά την ανισότητα:

$$10x_1+8x_2\le 240$$

Για το σκοπό αυτό βρίσκουμε την ευθεία που απεικονίζει την εξίσωση:

$$10x_1+8x_2=240$$

Για $x_1=0\Rightarrow x_2=30$.

Για $x_2=0\Rightarrow x_1=24$.

Επομένως, η ευθεία ορίζεται από τα σημεία Γ(24,0) και Δ(0,30). Τα σημεία της ευθείας ΓΔ ικανοποιούν την εξίσωση: $10x_1+8x_2=240$. Η ευθεία ΓΔ χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη, ένα από τα οποία περιέχει την αρχή 0(0,0) των αξόνων.

Θεωρώντας το σημείο αυτό παρατηρούμε ότι $10*0+8*0=0<240$. Δηλαδή η αρχή των αξόνων ικανοποιεί την ανισότητα $10x_1+8x_2<240$.

Επομένως, τα σημεία του ημιεπιπέδου που βρίσκονται προς το μέρος της αρχής των αξόνων ικανοποιούν την ανισότητα:

$10x_1 + 8x_2 < 240$.

Άρα, το σύνολο των σημείων τα οποία ικανοποιούν την ανισότητα $10x_1 + 8x_2 < 240$ αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται κάτω από την ευθεία: $10x_1 + 8x_2 = 240$, καθώς και από τα σημεία της ευθείας αυτής.

γ) Βρίσκουμε που τέμνονται οι ευθείες ΑΕ και ΓΔ. Για το σκοπό αυτό λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l|l} 5x_1 + 8x_2 = 200 & -2 \\ 10x_1 + 8x_2 = 240 & 1 \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{r} \Rightarrow -10x_1 - 16x_2 = -400 \\ 10x_2 + 8x_2 = 240 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-8x_2 = -160 \Leftrightarrow 8x_2 = 160 \Leftrightarrow x_2 = 20$$

$$10x_1 + 8x_2 = 240 \Leftrightarrow 10x_1 + 8 * 20 = 240 \Leftrightarrow 10x_1 + 160 = 240 \Leftrightarrow$$

Λύση συστήματος $x_1 = 8$ και $x_2 = 20$.

Άρα, οι ευθείες ΑΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Β(8,20).

δ) Όπως φαίνεται στο σχήμα, το κυρτό κλειστό πολύγωνο ΟΑΒΓ ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος. Μας ενδιαφέρουν όμως μόνο οι λύσεις εκείνες που δίνουν που δίνουν τη μέγιστη τιμή στη συνάρτηση z.

Για κάθε σταθερή τιμή του z η εξίσωση $z = 0,5x_1 + 0,6x_2$ εκφράζει μία ευθεία. Δίνοντας διαφορετικές τιμές στο z παίρνουμε μία οικογένεια παράλληλων ευθειών, γιατί όλες θα έχουν τον ίδιο συντελεστή κατεύθυνσης:

$$-\frac{0,5}{0,6} = -\frac{5}{6}.$$

Επιθυμούμε να βρούμε την ευθεία με τη μεγαλύτερη τιμή της z που να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το πολύγωνο των δυνατών λύσεων.

Έτσι έχουμε:

Για την ευθεία που περνά από την κορυφή Ο(0,0):

$$z = 0,5*0 + 0,6*0 = 0 \text{ χρηματικές μονάδες .}$$

Για την ευθεία που περνά από την κορυφή Α(0,25):

$$z = 0,5*0 + 0,6*25 = 15 \text{ χρηματικές μονάδες.}$$

Για την ευθεία που περνά από την κορυφή Β(8,20):

$$z = 0,5*8 + 0,6*20 = 16 \text{ χρηματικές μονάδες.}$$

Για την ευθεία που περνά από την κορυφή Γ(24,0):

$$z = 0,5*24 + 0,6*0 = 12 \text{ χρηματικές μονάδες.}$$

Επομένως, η βιομηχανία θα πρέπει να κατασκευάσει 8 καπέλα τύπου Α και 20 καπέλα τύπου Β και το μέγιστο κέρδος της είναι 16 χρηματικές μονάδες.

9.3 Οικονομετρία

Στην οικονομετρία, η μαθηματικό-οικονομική και η στατιστική ανάλυση και έρευνα χρησιμοποιούνται συνδυασμένα, με κύριο αντικειμενικό σκοπό την εμπειρική εκτίμηση των σχέσεων αυτών αλλά και την επαλήθευση (έλεγχο) της οικονομικής θεωρίας. Η οικονομετρική ανάλυση χρησιμοποιεί τις συναρτησιακές σχέσεις της οικονομικής και αφού τις μετατρέψει σε μαθηματικές, δηλαδή αφού κατασκευάσει ένα υπόδειγμα (model), προσπαθεί να τις εκτιμήσει εμπειρικά . Γι’ αυτή όμως την εκτίμηση χρησιμοποιεί στατιστικές μεθόδους προσαρμοσμένες στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των οικονομικών φαινόμενων.

Οι συναρτησιακές σχέσεις όμως της οικονομικής θεωρίας είναι σχέσεις ακριβείς (exact) ή προσδιοριστικές (deterministic). Για παράδειγμα, η γνωστή Κεϋνσιανή συνάρτηση καταναλώσεως:

$$C = a + bY$$

Όπου C, δαπάνες καταναλώσεως

Y, διαθέσιμο εισόδημα

Είναι σχέση προσδιοριστική, πράγμα που σημαίνει ότι σε κάθε επίπεδο διαθέσιμου εισοδήματος αντιστοιχεί μόνο ένα επίπεδο καταναλώσεως. Είναι φανερό όμως ότι τέτοια συμπεριφορά δεν ανταποκρίνεται στα πραγματικά δεδομένα. Τα σημεία που προσδιορίζονται από τις ετήσιες παρατηρήσεις για την κατανάλωση και το διαθέσιμο εισόδημα για την ελληνική οικονομία στα τελευταία π.χ. 30 χρόνια δε θα βρίσκονται όλα πάνω σε μία ευθεία γραμμή θα υπάρχουν, με άλλα λόγια, αποκλίσεις ή διαφορές. Οι αποκλίσεις από την προσδιοριστική σχέση της οικονομικής θεωρίας μπορούν να ληφθούν υπόψη με την προσθήκη μίας *τυχαίας μεταβλητής*, οπότε η *προσδιοριστική* σχέση της Μαθηματικής οικονομικής μετατρέπεται σε *στοχαστική*. Στο παράδειγμά μας, η συνάρτηση καταναλώσεως γίνεται:

$$C = a + bY + u$$

όπου u είναι η τυχαία μεταβλητή που επηρεάζει τη συμπεριφορά της καταναλώσεως.

Σκοποί της οικονομετρίας

α) την εμπειρική επαλήθευση ή τον έλεγχο της θεωρίας.

Το πρώτο βήμα για τον οικονομετρικό έλεγχο μιας θεωρίας είναι να εκφράσουμε τη θεωρία μαθηματικά, δηλαδή να διατυπώσουμε το *υπόδειγμα* ή τη *διατηρούμενη υπόθεση*. Αν από την αντιπαράθεση του υποδείγματος με τα πραγματικά δεδομένα προκύψει ότι το υπόδειγμα εξηγεί την πραγματική συμπεριφορά των οικονομικών μονάδων, καταναλωτών ή παραγωγών, αν με άλλα λόγια η θεωρία συμβιβάζεται με τα πραγματικά δεδομένα, η θεωρία επαληθεύεται και γίνεται δεκτή.

β) Την *άσκηση οικονομικής πολιτικής*.

γ) Την *πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών των οικονομικών μεταβλητών*. Οι προβλέψεις είναι απαραίτητες για τον έλεγχο και τη λήψη των αναγκαίων μέτρων από τους φορείς λήψεις αποφάσεων που θα επηρεάσουν τις τιμές των διάφορων οικονομικών μεταβλητών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι Y το ποσοστό σε Kg για το αγαθό A και έστω X η τιμή του κιλού. Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $Y_i = b_0 + b_1 c_1 + e_i$ και η εκτίμηση της είναι

$$\begin{array}{l} \hat{Y} = 538,80 - 31,4c \\ p - value(0,003)\ (0,049) \end{array}$$

α) Να σχολιάσετε τα αποτελέσματά σας, είναι σύμφωνα με την οικονομική θεωρία;

β) Συντάσσοντας κατάλληλους ελέγχους υποθέσεων να εξετάσετε εάν οι εκτιμητές σας είναι στατιστικά σημαντικοί για επίπεδο σημαντικότητας α=5%.

ΛΥΣΗ

α) Ερμηνεία $\hat{b}_0$:

Ceteris paribus, δεδομένου ότι καμία άλλη μεταβλητή δεν επηρεάζει το υπόδειγμά μου η μέγιστη ποσότητα ζήτησης για το αγαθό A θα είναι $538,80\,\text{Kg}$

Το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με την οικονομική θεωρία γιατί το $\hat{b}_0$ είναι ο σταθερός όρος του υποδείγματος και είναι θετικός αριθμός γιατί αναφέρεται σε ζητούμενη ποσότητα.

Ερμηνεία $\hat{b}_1$:

Ceteris paribus, αν αυξηθεί κατά μία μονάδα η τιμή του κιλού τότε θα επιφέρει αρνητική μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Υ κατά 31,4.
Είναι σύμφωνο με την οικονομική θεωρία και επαληθεύεται και από το νόμο της ζήτησης όπου τιμή και ζητούμενη ποσότητα έχουν αντιστρόφως ανάλογη σχέση.

β) έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας εκτιμητών
Αν από τον έλεγχο προκύψει ότι ο εκτιμητής είναι στατιστικά σημαντικός τότε έχει αξία για το υπόδειγμά μου. Εδώ από το P-value που είναι 0,003 και άρα μικρότερο από το α=5% απορρίπτω την H_0 που αντιπροσωπεύει το στατιστικά μη σημαντικό και αποδέχομαι την H_1 που αντιπροσωπεύει το σημαντικά στατιστικό εκτιμητή. Άρα ο εκτιμητής $\hat{b}_0$ επηρεάζει το υπόδειγμά μου.

$$H_0 : \hat{b}_1 = 0 \; vs$$
$$H_1 : \hat{b}_1 \neq 0$$

Αφού 0,049<0,05 απορρίπτω την H_0 και αποδέχομαι την H_1 πράγμα που σημαίνει ότι ο εκτιμητής b_1 είναι στατιστικά σημαντικός και άρα παίζει ρόλο στο υπόδειγμά μου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης προστίθεται και η μεταβλητή της τιμής ενός υποκατάστατου αγαθού. Η συνάρτηση ζήτησης δίνεται ως εξής :

$$\hat{Y} = 558{,}85 - 34{,}183c_1 - 3{,}051c_2$$
$$p-value\,(0{,}896)\quad(0{,}048)\quad(0{,}058)$$

Να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα του υποδείγματος να εξεταστεί αν είναι σύμφωνα με την οικονομική θεωρία.

Να γίνει έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας των εκτιμητών.

ΛΥΣΗ

α) Ερμηνεία $\hat{b}_0$:

Ceteris paribus, δεδομένου ότι καμία άλλη μεταβλητή δεν επηρεάζει το υπόδειγμά μου η μέγιστη ζητούμενη ποσότητα για το αγαθό Α θα είναι 558,85 Kg.

Είναι σύμφωνο με την οικονομική θεωρία γιατί ο $\hat{b}_0$ είναι ο σταθερός όρος και αφού είναι ποσότητα δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

Ερμηνεία $\hat{b}_1$:

Ceteris paribus, μία αύξηση κατά μία μονάδα στην τιμή του αγαθού Α συνεπάγεται μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 34,183 Kg

Είναι σύμφωνο με την οικονομική θεωρία και επαληθεύεται και από το νόμο της ζήτησης.

Ερμηνεία $\hat{b}_2$:

Ceteris paribus, μία αύξηση κατά μία μονάδα στην τιμή του υποκατάστατου αγαθού θα επιφέρει αύξηση κατά 3,051 στην ζητούμενη ποσότητα του αγαθού

α) Μια μεταβολή στην τιμή του υποκατάστατου αγαθού θα επιφέρει αντιστρόφως ανάλογη μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Α, άρα θα έπρεπε να είχαμε θετικό πρόσημο.

β) Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας εκτιμητών

$$\mathrm{H}_0 = 0 \; vs$$
$$\mathrm{H}_1 \neq 0$$

Επειδή το p-value του εκτιμητή b_0 είναι μεγαλύτερο από το επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτω την H_1 και αποδέχομαι την H_0. Δηλαδή ο εκτιμητής δεν έχει αξία για το μοντέλο μου.

$$\mathrm{H}_0 = 0 \; vs$$
$$\mathrm{H}_1 \neq 0$$

Επειδή το p-value του εκτιμητή b_1 είναι μεγαλύτερο από το επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτω την H_1 και αποδέχομαι την H_0. Δηλαδή ο εκτιμητής δεν έχει αξία για το μοντέλο μου.

9.4 Επιχειρησιακά Παίγνια

Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων;

Είναι η μελέτη της συμπεριφοράς των ανθρώπων σε καταστάσεις στις οποίες οι επιλογές μιας ομάδας ανθρώπων επηρεάζουν τις επιλογές μιας άλλης ομάδας ανθρώπων. Μια κατάσταση όπου N > 1 άτομα, επιχειρήσεις, κυβερνήσεις, συνδικάτα κ.τ.λ. (οι αποκαλούμενοι παίκτες) κάνουν κάποιες επιλογές με στόχο ο καθένας την ικανοποίηση του συμφέροντος του και το αποτέλεσμα για τον κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από την δική του επιλογή αλλά και από τις επιλογές των υπολοίπων παικτών (N – 1). *Παίγνιο – Ένας απλός ορισμός*

Η καλύτερη απόφαση εξαρτάται από το τι κάνουν οι άλλοι καθώς και από το τι νομίζουν ότι θα κάνουμε εμείς.

Βασικά στοιχεία θεωρίας παιγνίων:

Ισορροπία του Nash – Μεικτές στρατηγικές – Διάφορα είδη στρατηγικών που έχουν στη διάθεση τους οι παίκτες.

ΚΑΘΑΡΕΣ ΚΑΙ ΜΕΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Ξεκινάμε τώρα να δούμε τα εργαλεία με τα οποία η θεωρία παιγνίων προσπαθεί να λύσει παίγνια. Δηλαδή να προβλέψει πως θα συμπεριφερθούν λογικά σκεπτόμενα άτομα σε καταστάσεις αλληλεπίδρασης στις οποίες το αποτέλεσμα καθορίζεται από το συνδυασμό των δράσεων των ατόμων.

Σε αυτή τη φάση θα καθορίσουμε δύο τύπους στρατηγικής μεταξύ των οποίων μπορεί να παίξει ο κάθε παίκτης. Η απλούστερη μορφή είναι να επιλέξει ξεκάθαρα κάποιον εξαιρετικά συγκεκριμένο τρόπο δράσης (κίνηση)

Π.χ. πυροβολώ τον εχθρό.

Αυτός ο τρόπος δράσης ονομάζεται *καθαρή στρατηγική*. Υπάρχουν όμως στιγμές που μπορεί να μην είμαστε βέβαιοι για το ποια είναι η βέλτιστη καθαρή στρατηγική εξαιτίας της αβεβαιότητας. Η σκιά της μπορεί να μας οδηγήσει στο να διαλέξουμε στην τύχη μεταξύ δύο ή περισσοτέρων καθαρών στρατηγικών.

Στη προκειμένη περίπτωση μιλάμε για μεικτή στρατηγική. Δηλαδή εδώ έχει την έννοια ότι επιλέγω κάνοντας χρήση τις πιθανότητες από ένα σύνολο καθαρών στρατηγικών.

Ορισμός:

Αν ένας παίκτης έχει στη διάθεση του N μεικτές στρατηγικές (S1, S2,…SN) τότε η μεικτή στρατηγική ορίζεται από τις πιθανότητες (p1,p2,…pN) από τις οποίες θα πρέπει να επιλέξει καθεμιά από τις καθαρές στρατηγικές του.

Για να είναι σαφώς καθορισμένη η μεικτή στρατηγική πρέπει καθεμία από τις πιθανότητες να βρίσκεται μεταξύ 0 και 1 και το άθροισμα τους να είναι ίσο με τη μονάδα π.χ. : $1/4+3/4=1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Βρείτε όλες τις ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές και μεικτές στρατηγικές στο παρακάτω 3*3 παίγνιο.

ΛΥΣΗ

Αρχίζουμε με την προσθήκη των συμβόλων (+) και (-) και εξετάζουμε όλα τα κελιά για να βρούμε εκείνα στα οποία υπάρχει σύμπτωση των συμβόλων (+) και (-) στο ίδιο κελί. Στην πρώτη στήλη (C_1), η μεγαλύτερη απόδοση για την R είναι 5 στο κελί (R_1,C_1) –προσθέτουμε το σύμβολο (+) μπροστά από αυτό το 5. Στη δεύτερη στήλη, η μεγαλύτερη απόδοση είναι 0 στο κελί (R_2,C_2) – προσθέτουμε το (+) μπροστά από αυτό το 0. Στην Τρίτη στήλη η μεγαλύτερη απόδοση είναι 10 στο κελί (R_1,C_3) – προσθέτουμε το (+) μπροστά από αυτό το 10. Κάνουμε το ίδιο και με τις σειρές. Από τις αποδόσεις για τον C στη σειρά R_1, το ο στο κελί (R_1,C_1) είναι η μεγαλύτερη – προσθέτουμε το σύμβολο (-) μετά το 0.

Στη σειρά R_2 , η μεγαλύτερη απόδοση με το σύμβολο (-) είναι 5 στο κελί (R_2,C_2). Τέλος στη σειρά R_3 , η μεγαλύτερη απόδοση είναι 6 στο κελί (R_3,C_3) – και προσθέτουμε το (-) μετά το 6. Τώρα που έχουμε σημειώσει με τα σύμβολα (+) και (-) όλες τις βέλτιστες απαντήσεις σε καθεμία καθαρή στρατηγική, εξετάζουμε ένα – ένα όλα τα κελιά και παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο κελιά στα οποία συμπίπτουν τα σύμβολα των βέλτιστων απαντήσεων: Το (R_1,C_1) και (R_2,C_2). Τα κελιά αυτά είναι ισορροπίες Nash καθαρής στρατηγικής του πρώτου από τα δυο παίγνια. Το γεγονός ότι υπάρχουν 2 ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές σημαίνει ότι το παίγνιο είναι απροσδιόριστο (με την έννοια ότι δεν γνωρίζουμε ποια από τις δυο ισορροπίες θα επικρατήσει) και έτσι υπάρχει μία πρόσθετη ξεχωριστή στρατηγική μικτής ισορροπίας (ΙΝΜΣ).

Για να βρούμε την ΙΝΜΣ του συγκεκριμένου παιγνίου εστιάζουμε στην τυχαία επιλογή για κάθε παίκτη μεταξύ των στρατηγικών οι οποίες αρχικά βρίσκαμε να αντιστοιχούν σε κάποια ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές (R_1 και R_2 για την παίκτρια R και C_1 και C_2 για τον παίκτη C). Υποθέτουμε ότι οι στρατηγικές R_3 και C_3 επιλέγονται με μηδενική πιθανότητα. Υπολογίζουμε τώρα τις πιθανότητες των ΙΝΜΣ έναντι των καθαρών στρατηγικών R_1,R_2,C_1,C_2.

Υποθέτουμε ότι p είναι η πιθανότητα με την οποία η παίκτρια R επιλέγει R_1 και $1-p$ επιλέγει C_2. Ακολούθως υπολογίζουμε την ΙΝΜΣ ως το ζεύγος (p,q) που αφήνει την R και τον C αδιάφορους μεταξύ των 2 στρατηγικών Nash.

Λύνουμε τις εξισώσεις:

$$Eu(R_1) = 5q - 1(1-q) = Eu(R_2) = -1q + 0(1-q) \text{ ή } q = \frac{1}{7}$$

$$Eu(C_1) = 0p - 1(1-p) = Eu(C_2) = -5p + 5(1-p) \text{ ή } p = \frac{6}{11}$$

Δηλαδή η R προσπαθεί να επιτύχει την ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής που προτιμά (R_1,C_1) η οποία της δίνει απόδοση 5 με πιθανότητα $\frac{6}{11}$, ενώ ο C αποσκοπεί στην άλλη ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής (που τον ευνοεί, καθώς του αποδίδει 5 μονάδες ωφέλειας), με πιθανότητα $1-(1/7)=\frac{6}{7}$.

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη σύγχρονη εποχή, θέτοντας κατά μέρος τα δεοντολογικά προβλήματα που ενδεχομένως υπάρχουν, τα μαθηματικά έχουν γίνει η γλώσσα της οικονομικής ανάλυσης. Τα μαθηματικά ποσοτικοποιούν τις σχέσεις μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών και τις θέτουν υπο τη μορφή υποδείγματος προκειμένου να αποσαφηνίσουν τις ιδιότητές τους. Στη διαδικασία αυτή τα μαθηματικά επιτρέπουν στους οικονομολόγους να εντοπίζουν και ταυτόχρονα να αντλούν συμπεράσματα που έχουν κρίσιμη σημασία για τη λειτουργία του οικονομικού συστήματος.

Στο σημείο αυτό να τονίσουμε ότι η μαθηματική ανάλυση σε καμιά περίπτωση δεν υποκαθιστά τη θεωρητική οικονομική. Ενισχυτικό αυτής της άποψης είναι το γεγονός ότι μέχρι σήμερα τουλάχιστον δεν υπήρξε ούτε μια σημαντική οικονομική θεωρία που η ανακάλυψή της να οφείλεται στη χρήση μαθηματικών. Ταυτόχρονα, όμως, δεν υπάρχει ούτε μια σημαντική οικονομική θεωρία που να αναπτύχθηκε περαιτέρω χωρίς τη χρήση των μαθηματικών. Η μαθηματικοποίηση των οικονομικών θεωριών βοηθά στη καλύτερη κατανόησή τους και αποτελεί ένα σημαντικό βήμα για την ευρύτερη αποδοχή τους.

Λαμβάνοντας υπόψη μας όλα αυτά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μαθηματική γνώση είναι ανεπαρκής για τη λύση προβλημάτων, όπως ακριβώς και η γνώση της οικονομικής θεωρίας χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο.

Μόνο ο συνδυασμός της γνώσης της μαθηματικής επιστήμης και της οικονομικής θεωρίας μπορεί να οδηγήσει στην περαιτέρω ανάπτυξη της οικονομικής επιστήμης.

Βιβλιογραφία

- Λευτέρης Τσουφλίδης: Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης - μέθοδοι και υποδείγματα,Β΄ έκδοση, Αθήνα, Gutenberg, 1999.
- Τρύφων Ι. Δάρας, Παναγιώτης Θ. Σύψας: Στοχαστικές Ανελίξεις – Θεωρία και εφαρμογές, Εκδόσεις Ζήτη, Σεπτέμμβριος 2003, Θεσσαλονίκη.
- Γεώργιος Κ. Χρήστου: Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 2006.
- Πέτρος Κιόχος: Οικονομική της Διοίκησης, Εκδόσεις Interbooks, 1999.
- Πέτρος Κιόχος, Απόστολος Κιόχος: Σύγχρονα Οικονομικά Μαθηματικά, Εκδόσεις Interbooks, 1999.
- Γιάννης Βαρουφάκης: Θεωρία Παιγνίων, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 2007.
- Ξεπαπαδέας Αναστάσιος, Γιαννίκος Ιωάννης: Μαθηματικές Μεθόδοι στα Οικονομικά, Εκδόσεις Gutenberg, Οκτώβριος 2007.
- Θεοδόσιος Β. Παλάσκας, Γιώργος Η. Οικονομάκης: Ποσοτικές Μεθόδοι Οικονομικής Ανάλυσης, έκδοση έτους 2000.
- Chiang Alpha C: Μαθηματικές Μεθόδοι Οικονομικής Ανάλυσης, εκδόσεις κριτική, 2001.
- Καβουσανός Εμμανουήλ Γ.: Εφαρμογές Μαθηματικού Λογισμού σε Επιχειρησιακά και Οικονομικά Προβλήματα, εκδόσεις Μπένου Γ., 2006.
- www.mathsforyou.gr